Универзитет у Београду
Математички факултет

Мастер рад

Интегралне средине субхармонијских функција

студент:
Александра Андрић

Београд, 2023.

МЕНТОР

• др Бобан Карапетровић, доцент,
Математички факултет, Универзитет у Београду

ОСТАЛИ ЧЛАНОВИ КОМИСИЈЕ

• проф. др Милош Арсеновић, редовни професор,
Математички факултет, Универзитет у Београду

• др Петар Мелентијевић, доцент,
Математички факултет, Универзитет у Београду

Садржај

Глава 1

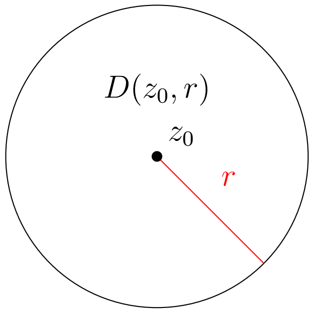
Увод

Овај рад посвећен је испитивању основних особина субхармонијских функција у комплексној равни неопходних за дефинисање и разматрање различитих типова њихових интегралних средина. Интегралне средине субхармонијских функција имају велику примену у теорији Хардијевих простора на јединичном диску у комплексној равни.

На самом почетку дате су неке основне (подразумеване) ознаке и појмови. Дефиниције и теореме које се користе при доказима наведене су на почетку рада. Како би разјаснили у потпуности сва тврђења било је непоходно користити и појмове теорије мере као и тополошких простора из [3] односно [6]. Често ћемо се позивати на теореме које се односе на холоморфне функције и трудићемо се да дамо све њихове потребне особине. Већина тврђења која важе за холоморфне функције преносе се и на хармонијске. Овде ћемо дефинисати најпре неколико важних теорема за хармонијске функције које се могу посматрати упоредо са холоморфним. Детаљнија анализа ових функција може се пронаћи у [1, 2] где је покривено много више од потреба овог рада. Потом уводимо субхармонијске функције и њихова својства. На овом месту ћемо се задржати јер интегралне средине које касније наводимо посматрамо управо за такве функције. Када дефинишемо све што нам је потребно прелазимо на централну тему овог рада - интегралне средине субхармонијских функција. Показаћемо њихове међусобне везе и својства а опширнија анализа ових средина се може наћи у [7]. На самом крају дата је примена интегралних средина субхармонијских функција у теорији Хардијевих простора. Ова тема је у потпуности разматрана у [4, 5].

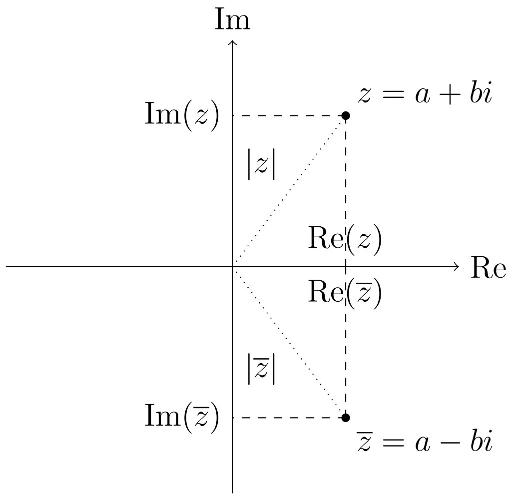
1.1 Уводне ознаке

На овом месту наводимо основне ознаке и појмове које ћемо у наставку користити као познате.



Слика 1.1: Диск са центром z_0 полупречника r

- $\mathbb{C}$ - комплексна раван;
- $D(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| < r\}$ - отворен диск са центром у z_0 полупречника r;
- $\mathbb{D} = D(0, 1)$ - јединични диск;
- Скуп $V \subset \mathbb{C}$ је **отворен** ако важи $(\forall z \in V)(\exists r > 0)$ тако да је $D(z, r) \subset V$;
- Скуп $V \subset \mathbb{C}$ је **околина** тачке $z \in \mathbb{C}$ ако је V отворен и $z \in V$;
- Скуп $V \subset \mathbb{C}$ је **област** ако је непразан, повезан и отворен;
- $z = x + iy \in \mathbb{C}$; $x, y \in \mathbb{R}$; $\mathrm{Re}(z) = x$, $\mathrm{Im}(z) = y$; $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\overline{z} = x - iy$;
- $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $\frac{\partial f}{\partial x} = f_x$, $\frac{\partial f}{\partial y} = f_y$ - парцијални изводи функције f;
- $C(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{C} \mid f$ непрекидна у $\mathbb{C}\}$;
- $C^1(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{C} \mid f_x, f_y \in C(\Omega)\}$;
- $C^2(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{C} \mid f_x, f_y \in C^1(\Omega)\}$.



Слика 1.2: Геометријски приказ комплексног броја

1.2 Основна тврђења

Наредне теореме, леме и дефиниције ћемо користити у доказима. Ради лакшег разумевања рада наводимо их сада.

Теорема 1.2.1 ***(теорема о егзистенцији примитивне функције)***
Нека је Ω просто-повезана област и $f \in H(\Omega)$. Тада постоји $F \in H(\Omega)$ таква да је $F' = f$.

Теорема 1.2.2 ***(Лиувилова теорема за холоморфне функције)***
Нека је f цела и ограничена функција тада је f константна функција.

Теорема 1.2.3 ***(теорема јединости за холоморфне функције)***
Нека је Ω област и $\{z_n\}_{n=1}^{+\infty}$ низ различитих тачака из области Ω који конвергира у Ω. Ако су $f, g \in H(\Omega)$ и $f(z_n) = g(z_n)$ за све $n \in \mathbb{N}$, онда је $f \equiv g$ у Ω.

Теорема 1.2.4 ***(принцип максимума за холоморфне функције)***
Нека је Ω област, $f \in H(\Omega)$ при чему функција $|f|$ достиже максимум у Ω. Тада је f константна функција.

Теорема 1.2.5 ***(Кошијева интегрална формула)***
Нека је Ω област, функција $f \in H(\Omega)$ и $\overline{D}(z_0, r) \subset \Omega$. Тада важи:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\alpha} \frac{f(z)}{z - z_0} dz,$$

где је α позитивно оријентисана кружница са центром у z_0 полупречника $r > 0$.

Дефиниција 1.2.6 *Нека је X тополошки простор. Функција $f : X \to [-\infty, +\infty)$ је **полунепрекидна одозго** ако је скуп $\{x \in X : f(x) < \alpha\}$ отворен у X, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ тј.*

$$\limsup_{y \to x} f(y) \leq f(x), x \in X.$$

Дефиниција 1.2.7 *Нека је $-\infty \leq a < b \leq +\infty$. Функција $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ је **конвексна** ако за било које $t_1, t_2 \in (a, b)$ важи:*

$$f((1-\lambda)t_1 + \lambda t_2) \leq (1-\lambda)f(t_1) + \lambda f(t_2).$$

Дефиниција 1.2.8 *Нека је X непразан скуп и $\mathcal{P}(X)$ његов партитивни скуп. Фамилија $\tau \subset \mathcal{P}(X)$ је **топологија** на X ако важи:*

- $\emptyset, X \in \tau$;
- $U_n \subseteq \tau \Rightarrow \bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} U_n \in \tau$;
- $U, V \in \tau \Rightarrow U \cap V \in \tau$.

*Уређен пар (X, τ) називамо **тополошки простор.***

Дефиниција 1.2.9 *Нека је (X, m, μ) простор са мером и нека је $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ кажемо да је функција f мерљива ако важи било који од следећа четири услова:*

1. $(\forall c \in \mathbb{R})$, $\{x \in X \big| f(x) < c\}$, *односно скуп* $f^{-1}([-\infty, c))$ *је мерљив* $(\forall c \in \mathbb{R})$;
2. $(\forall c \in \mathbb{R})$, $\{x \in X \big| f(x) \leq c\}$, *односно скуп* $f^{-1}([-\infty, c])$ *је мерљив* $(\forall c \in \mathbb{R})$;
3. $(\forall c \in \mathbb{R})$, $\{x \in X \big| f(x) > c\}$, *односно скуп* $f^{-1}((c, +\infty])$ *је мерљив* $(\forall c \in \mathbb{R})$;
4. $(\forall c \in \mathbb{R})$, $\{x \in X \big| f(x) \geq c\}$, *односно скуп* $f^{-1}([-\infty, c])$ *је мерљив* $(\forall c \in \mathbb{R})$.

Разјаснимо појам простор са мером. Уређена тројка (X, m, μ) , где је X непразан скуп, m сигма алгебра[1], μ мера[2] представља простор са мером.

[1]Фамилија $m \subseteq \mathcal{P}(X)$ је **сигма алгебра** ако важи: $\emptyset \in m, A \in m \Rightarrow A^c \in m, A_j \in m; j \in \mathbb{N} \Rightarrow \bigcup\limits_{j=1}^{+\infty} A_j \in m$.

[2]Неформално, **мера** је функција за коју важе два услова: Мера од празног скупа треба да буде нула и мера од уније дисјунктних скупова је сума појединачних мера.

1.3 Својства холоморфних функција

Дефиниција 1.3.1 *Нека је $\Omega \subset \mathbb{C}$ област и $f : \Omega \to \mathbb{C}$ дата функција. Ако је $f \in C^1(\Omega)$ дефинишемо:*

$$f_z = \frac{1}{2}(f_x - if_y),$$

$$f_{\overline{z}} = \frac{1}{2}(f_x + if_y).$$

Дефиниција 1.3.2 *Функција f је* ***холоморфна*** *у тачки z ако је диференцијабилна у некој њеној околини.*
Скуп холоморфних функција означавамо са:

$$H(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{C} \mid f \ \text{холоморфна у } \Omega\}.$$

Ако је $f \in C^2(\Omega)$ можемо дефинисати Лапласијан функције f са:

$$\Delta f = f_{xx} + f_{yy}.$$

Дефиниција 1.3.3 *Функција f је цела ако је холоморфна у $\mathbb{C}$.*

Дефиниција 1.3.4 *Функција f је диференцијабилна у тачки z ако постоји наредни лимес:*

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h},$$

записујемо као $f'(z) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(z+h)-f(z)}{h}$.

Приметимо да важи: Ако је V отворен скуп, f је диференцијабилна у V ако и само ако је f холоморфна у V.
Иако није идеја да се холоморфне функције детаљно обрађују у овом раду навешћемо нека битна својства јер холоморфност често срећемо у вези са хармонијским, а самим тим и субхармонијским функцијама.
Важи следеће:

1. Нека је Ω област и $f = u + iv$, $f \in H(\Omega)$ тада важи $f' = f_x = -if_y$ у Ω тј. важе Коши-Риманови услови $u_x = v_y$ и $u_y = -v_x$.

2. Нека је Ω област, $f \in H(\Omega)$ тада важи $f_{\overline{z}} = 0$ и $f_z = f'_z$.

3. Нека је Ω област и $f = u + iv$, $f \in H(\Omega)$ при чему су $u, v \in C^1(\Omega)$ и важе Коши-Риманови услови у Ω тада је $f \in H(\Omega)$.

4. Нека је Ω област, $f \in C^1(\Omega)$ и $f_{\overline{z}} = 0$. Тада је $f \in H(\Omega)$.

Теорема 1.3.5 *Нека је Ω област и $f : \Omega \to \mathbb{C}$ дата функција. Тада важи:*

1. *$f \in H(\Omega)$ акко $f \in C^1(\Omega)$ и $f_{\overline{z}} = 0$.*
2. *Ако је $f \in C^2(\Omega)$ онда је $\Delta f = 4 f_{z\overline{z}}$.*
3. *Ако је $f \in C^1(\Omega)$ тада важи $\overline{(f_{\overline{z}})} = \overline{f}_z$ и $\overline{(f_z)} = \overline{f}_{\overline{z}}$.*
4. *Ако је $f \in H(\Omega)$ онда је $f' = (2\,\mathrm{Re}(f))_z$.*

Доказ.

1. Ако важи десна страна лако закључујемо да је функција холоморфна на основу претходно наведених својстава (својство 4.). Ако је функција f холоморфна у Ω онда је $f \in C^1(\Omega)$, а на основу претходних својстава (својство 2.) задовољено је и $f_{\overline{z}} = 0$.

2. Користећи дефиницију 1.3.1 можемо записати следеће:
$$\begin{aligned} 4f_{z\overline{z}} &= 4(f_z)_{\overline{z}} = 4\left(\frac{1}{2}(f_x - i f_y)\right)_{\overline{z}} \\ &= 2(f_x - i f_y)_{\overline{z}} \\ &= (f_x - i f_y)_x + i(f_x - i f_y)_y \\ &= f_{xx} - i f_{yx} + i f_{xy} + f_{yy} \\ &\Rightarrow 4 f_{z\overline{z}} = f_{xx} + f_{yy} = \Delta f. \end{aligned}$$

3. Праволинијским закључивањем добијамо:
$$\begin{aligned} \overline{(f_{\overline{z}})} &= \frac{1}{2}\overline{(f_x + i f_y)} = \frac{1}{2}(\overline{f_x} - i\overline{f_y}) = \overline{f}_z, \\ \overline{(f_z)} &= \frac{1}{2}\overline{(f_x - i f_y)} = \frac{1}{2}(\overline{f_x} + i\overline{f_y}) = \overline{f}_{\overline{z}}. \end{aligned}$$

4. Ако једнакост развијамо са десне стране користећи да за холоморфну функцију важи $f_{\overline{z}} = 0$ и $f' = f_z$ следи:
$$(2\,\mathrm{Re}(f))_z = (f + \overline{f})_z = f_z + \overline{f}_z = f' + \overline{f_{\overline{z}}} = f'.$$

$\blacksquare$

Глава 2

Хармонијске функције

2.1 Дефиниција и основна својства

Дефиниција 2.1.1 *За функцију f кажемо да је* ***хармонијска*** *ако је $f \in C^2(\Omega)$ и $\Delta f = 0$.*

Скуп свих хармонијских функција означавамо:

$$h(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{C} \mid f \text{ хармонијска}\}.$$

Скуп свих хармонијских реално-вредносних функција означавамо:

$$h_{\mathbb{R}}(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{R} \mid f \text{ хармонијска}\}.$$

Важи следеће:

- $h_{\mathbb{R}}(\Omega) \subset h(\Omega)$ јер је $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$;
- $f \in h(\Omega)$ акко $\mathrm{Re}(f), \mathrm{Im}(f) \in h_{\mathbb{R}}(\Omega)$.

Теорема 2.1.2 *Нека је Ω област. Тада важи:*

1. *Ако је $f \in H(\Omega)$ онда је $f \in h(\Omega)$;*
2. *Ако је $f \in h(\Omega)$ тада важи $f_z \in H(\Omega)$;*
3. *Ако је Ω просто-повезана област и $f \in h_{\mathbb{R}}(\Omega)$ тада постоји $g \in H(\Omega)$ тако да $\mathrm{Re}(g) = f$;*
4. *Ако је Ω просто-повезана област и $h \in h(\Omega)$ тада постоје функције $f, g \in H(\Omega)$ тако да $h = f + \overline{g}$.*

Доказ.

1. Из $f \in H(\Omega)$ важи да је $f \in C^2(\Omega)$. Израз $\Delta f = 4f_{z\overline{z}} = 4(f_{\overline{z}})_z = 0$. Закључујемо да су испуњена оба услова да функција f буде хармонијска.

2. $f \in h(\Omega)$ онда је $f \in C^2(\Omega)$ па и $f_z \in C^1(\Omega)$. Такође важи:

$$(f_z)_{\overline{z}} = f_{z\overline{z}} = \frac{1}{4}\Delta f = 0.$$

3. $f \in h_{\mathbb{R}}(\Omega) \subset h(\Omega)$ па је $f_z \in H(\Omega)$. На основу теореме о егзистенцији примитивне функције постоји функција $h \in H(\Omega)$ таква да је $h^{'} = f_z$.
Посматрајмо $2\operatorname{Re}(h) - f \in C^1(\Omega)$. Најпре доказујемо да је

$$(2\operatorname{Re}(h) - f)_{\overline{z}} = 0.$$

Користићемо својства теореме 1.3.5:

$$\begin{aligned} (2\operatorname{Re}(h) - f)_{\overline{z}} &= (\overline{\overline{(2\operatorname{Re}(h) - f)}_z}) \\ &= (\overline{(2\operatorname{Re}(h) - f)_z}), \end{aligned}$$

јер је $2\operatorname{Re}(h) - f$ реално-вредносна функција. Даље је

$$\begin{aligned} &= (\overline{2\operatorname{Re}(h))_z - f_z} \\ &= \overline{h' - f_z} \\ &= 0, \end{aligned}$$

јер је $h^{'} = f_z$ онда је $(2\operatorname{Re}(h) - f)$ холоморфна па је

$$\begin{aligned} (2\operatorname{Re}(h) - f)^{'} &= (2\operatorname{Re}(h) - f)_z \\ &= (2\operatorname{Re}(h))_z - f_z \\ &= h' - f_z \\ &= 0 \end{aligned}$$

тј. $2\operatorname{Re}(h) - f = c = const \in \mathbb{R}$. Означимо (намештамо погодну функцију како бисмо дошли до закључка) $g = 2h - c \in H(\Omega), \operatorname{Re}(g) = 2\operatorname{Re}(h) - c = f$.

4. Функција $h \in h(\Omega)$ тада је $h_z \in H(\Omega)$, па постоји функција f таква да је $f' = h_z$. Означимо $g = \overline{h} - \overline{f}$. Треба показати да су функције f и g холоморфне и да важи $h = f + \overline{g}$.
   Функција f је холоморфна. Покажимо исто за g. Функција $g \in C^1(\Omega)$ јер $f, h \in C^1(\Omega)$,

$$g_{\overline{z}} = (\overline{h} - \overline{f})_{\overline{z}} = \overline{(h-f)}_{\overline{z}} = \overline{(h-f)_z} = \overline{h_z - f'} = 0,$$

   па је $g \in H(\Omega)$.

$$\begin{aligned} f + \overline{g} &= f + (h - f) \\ &\Rightarrow h = f + \overline{g}. \end{aligned}$$

■

Напомена: Наредне теореме важе за хармонијске функције али истоимене постоје и у области холоморфних функција.

2.2 Својство средње вредности

Теорема 2.2.1 *Нека је Ω област, $h \in h(\Omega)$ и $\overline{D}(z_0, r) \subset \Omega$. Тада важи:*

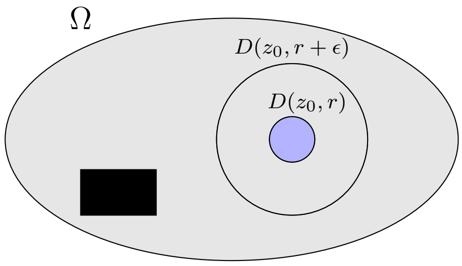
$$h(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h(z_0 + re^{i\theta}) \mathrm{d}\theta.$$

Доказ.
Нека је Ω произвољна област (не мора бити просто-повезана), $\overline{D}(z_0, r)$ је затворен у Ω. Да бисмо применили претходну теорему морамо проширити диск јер нам треба просто-повезана област (а то не важи за затворен диск). Проширујемо га тако да не изађемо из Ω. Нека је $d = d(\overline{D}(z_0, r), \Omega^c) > 0$. Одаберимо $0 < \epsilon < d$. Област $D(z_0, r + \epsilon) \subset \Omega$ ће бити просто-повезана. Применом теореме 2.1.2 следи да постоје функције $f, g \in H(D(z_0, r + \epsilon))$ тако да важи $h = f + \overline{g}$.

$$h(z_0) = f(z_0) + \overline{g(z_0)}, \tag{2.1}$$

из Кошијеве интегралне формуле добијамо:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial D(z_0, r)} \frac{f(z)}{z - z_0} \mathrm{d}z,$$



Слика 2.1: Прављење просто-повезане области

одакле је

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + re^{i\theta})}{z_0 + re^{i\theta} - z_0} rie^{i\theta}\mathrm{d}\theta = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta})\mathrm{d}\theta,$$

аналогно добијамо да за функцију g важи:

$$g(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_0^{2\pi} \frac{g(z_0 + re^{i\theta})}{z_0 + re^{i\theta} - z_0} rie^{i\theta}\mathrm{d}\theta = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} g(z_0 + re^{i\theta})\mathrm{d}\theta.$$

Уврстимо у (2.1) и добијемо:

$$\begin{aligned} h(z_0) &= f(z_0) + \overline{g(z_0)} \\ &= \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta})\mathrm{d}\theta + \overline{\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} g(z_0 + re^{i\theta})\mathrm{d}\theta} \\ &= \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta})\mathrm{d}\theta + \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \overline{g(z_0 + re^{i\theta})}\mathrm{d}\theta \\ &= \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \left(f(z_0 + re^{i\theta}) + \overline{g(z_0 + re^{i\theta})}\right)\mathrm{d}\theta \\ &= \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} h(z_0 + re^{i\theta})\mathrm{d}\theta, \end{aligned}$$

што је и требало доказати. ∎

2.3 Лиувилова теорема

Теорема 2.3.1 *Нека је* $f \in h(\mathbb{C})$, *ограничена функција. Тада је* f *константна функција.*

Доказ.
Нека је $f = u + iv \in h(\mathbb{C})$ онда су $u, v \in h_{\mathbb{R}}(\mathbb{C})$, f је ограничена функција па су u, v су ограничене функције. $\mathbb{C}$ је просто-повезана област. Закључујемо да постоји $h \in H(\mathbb{C})$ тако да је $u = \mathrm{Re}(h)$ (теорема 2.1.2).
Даље означимо $g = e^h$, функција h је холоморфна а исто важи и за e^x па је и функција g је холоморфна.
$|g| = |e^h| = e^{\mathrm{Re}(h)} = e^u$ ограничена функција јер је u ограничена функција. На основу Лиувилове теореме за холоморфне функције закључујемо да је g константна.

$$g = const$$

$$g = e^h = const \Big/ '$$

$$g' = e^h h' = 0 \Rightarrow h' = 0$$

у $\mathbb{C}$ тј.

$$h = const \Rightarrow \mathrm{Re}(h) = u = const.$$

Аналогним закључивањем добијамо и да је $v = const$ па је $f = u + iv = const$. ■

2.4 Теорема јединости

Теорема 2.4.1 *Нека је* Ω *област* $f_1, f_2 \in h(\Omega)$ *и* $V \subset \Omega$ *непразан и отворен скуп при чему важи:* $f_1 = f_2$ *у* V. *Тада је* $f_1 = f_2$ *у* Ω.

Доказ.
Означимо $f = f_1 - f_2 \in h(\Omega)$. Треба да докажемо да је $f = 0$.
$f = u + iv = 0$ у V па је $u = v = 0$ у V, $f \in h(\Omega)$ онда су $u, v \in h_{\mathbb{R}}(\Omega)$ па ће важити $u_z \in H(\Omega)$ (све што будемо у наставку извели за функцију u аналогно ће важити и за функцију v).
Функција $u_z = 0$ у V (јер је $u = 0$ у V), на основу теореме јединости за холоморфне функције закључујемо $u_z = 0$ у Ω.

$u_z = \frac{1}{2}(u_x - iu_y) = 0$ онда је $u_x, u_y = 0$ у Ω, па је $u = const$ у Ω и знамо да је $u = 0$ у V, онда важи $u = 0$ у Ω.

Аналогно добијамо за v, $v = 0$ у Ω. Коначно $f = u + iv = 0$ у Ω закључујемо $f_1 = f_2$ у Ω. ■

2.5 Принцип максимума

Теорема 2.5.1 *Нека је Ω област, $h \in h(\Omega)$ при чему функција $|h|$ достиже максимум у Ω. Тада је h константна функција.*

Доказ.
Нека $|h|$ достиже максимум у $z_0 \in \Omega$. Вредност $h(z_0) = M, |h| \leq M$ у Ω, запишимо $h(z_0) = Me^{i\theta_0}$. Означимо са $\lambda = e^{-i\theta_0}, |\lambda| = 1, \lambda h(z_0) = M$.
Нека је $u = \operatorname{Re}(\lambda h)$ онда је $u \in h_{\mathbb{R}}(\Omega)$.

$$\begin{aligned} u(z_0) &= \operatorname{Re}(\lambda h(z_0)) = \operatorname{Re}(M) = M, \\ \\ |u| &= |\operatorname{Re}(\lambda h)| \leq |\lambda h| = |h| \leq M \end{aligned}$$

у Ω тј. u достиже максимум у z_0 из Ω.
Постоји $r > 0$, $D(z_0, r) \subset \Omega$. На основу теореме 2.1.2 постоји $f \in H(D(z_0, r))$ тако да је $\operatorname{Re}(f) = u$. Означимо са $g = e^f \in H(D(z_0, r))$, $|g| = e^{\operatorname{Re}(f)} = e^u$.
Можемо закључити да функција $|g|$ достиже максимум у $D(z_0, r)$ у тачки z_0 (јер функција u достиже максимум у тој тачки), g је холоморфна функција. Применићемо принцип максимума за холоморфне функције па је g константна у диску $D(z_0, r)$.
Самим тим је и функција $g = e^f$ константна у диску $D(z_0, r)$.

$$g = e^f = const \;\Big/\; {}'$$
$$g' = e^f f' = 0 \text{ па је } f' = 0$$

следи да је $f = const$ у диску $D(z_0, r)$. Пошто је $u = \operatorname{Re}(f)$ онда је и $u = const$ у Ω. Како је $u(z_0) = M$ онда је $u = M$ на целој области Ω.

$$\begin{aligned} u &= \operatorname{Re}(\lambda h) = M \\ \\ M &= \operatorname{Re}(\lambda h) \leq |\lambda h| = |h| \leq M \end{aligned}$$

па можемо закључити:

$$\operatorname{Re}(\lambda h) = |\lambda h| \text{ тј. } \operatorname{Im}(\lambda h) = 0 \Rightarrow \lambda h = \operatorname{Re}(\lambda h) = M \text{ у } \Omega.$$

Па је и $\lambda h = const$ у $\Omega \Rightarrow h = const$ у Ω. ■

Глава 3

Пуасонов интеграл и Пуасонова интегрална формула

3.1 Пуасоново језгро и Пуасонов интеграл

Дефиниција 3.1.1 ***Пуасоново језгро*** *је пресликавање* $P : \mathbb{D} \times \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ *(*$\mathbb{T} = \partial\mathbb{D}$*) дефинисано са:*

$$P(z,a) = \operatorname{Re} \frac{a+z}{a-z}, z \in \mathbb{D}, a \in \mathbb{T}.$$

Дефиниција 3.1.2 ***Пуасонов интеграл*** *дате непрекидне функције* $\phi : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ *јесте пресликавање* $P_\phi : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ *дефинисано са:*

$$P_\phi(z) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} P(z, e^{i\theta})\phi(e^{i\theta})d\theta.$$

Лема 3.1.3 *Показаћемо да важи следеће:*

1. $P(z,a) > 0$;
2. $\frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} P(z, e^{i\theta})d\theta = 1$;
3. $\sup\limits_{|a-b|\geq\delta} P(z,a) \to 0$, *кад* $z \to b, b \in \mathbb{T}, 0 < \delta < 2$.

Доказ.

1.

$$\begin{aligned} P(z,a) &= \operatorname{Re}\frac{a+z}{a-z} = \operatorname{Re}\frac{a+z}{a-z}\frac{\overline{a}-\overline{z}}{\overline{a}-\overline{z}} \\ &= \operatorname{Re}\frac{(a+z)(\overline{a}-\overline{z})}{|a-z|^2} = \operatorname{Re}\frac{|a|^2-|z|^2+\overline{a}z-a\overline{z}}{|a-z|^2} \\ &= \operatorname{Re}\frac{1-|z|^2+2i\operatorname{Im}(\overline{a}z)}{|a-z|^2} = \frac{1-|z|^2}{|a-z|^2} > 0, \end{aligned}$$

јер важи $|z| < 1 \Rightarrow 1-|z|^2 > 0$.

2.

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} P(z,e^{i\theta})d\theta &= \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\operatorname{Re}\frac{e^{i\theta}+z}{e^{i\theta}-z}d\theta \\ &= \operatorname{Re}\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\frac{e^{i\theta}+z}{e^{i\theta}-z}d\theta \\ &= \operatorname{Re}\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\frac{e^{i\theta}+z}{e^{i\theta}-z}\frac{1}{ie^{i\theta}}ie^{i\theta}d\theta. \end{aligned}$$

Уведимо смену $a = e^{i\theta}$, $da = ie^{i\theta}d\theta$, $a \in \mathbb{T}$. Добијамо

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mathbb{T}}\frac{a+z}{a-z}\frac{1}{a}da &= \operatorname{Re}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mathbb{T}}\frac{2a-(a-z)}{a-z}\frac{1}{a}da \\ &= \operatorname{Re}\left(\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mathbb{T}}\frac{2}{a-z}da - \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mathbb{T}}\frac{1}{a}da\right) \\ &= \operatorname{Re}(2-1) = 1, \end{aligned}$$

јер је на основу Кошијеве интегралне формуле

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mathbb{T}}\frac{2}{a-z}da = 2 \text{ и } \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mathbb{T}}\frac{1}{a}da = 1.$$

3. Претпоставимо да је $|z-b|<\delta$,

$$\sup_{|a-b|\geq\delta} P(z,a) = \sup_{|a-b|\geq\delta} \frac{1-|z|^2}{|a-z|^2} \leq \frac{1-|z|^2}{(\delta-|z-b|)^2} \to 0,$$

јер важи:

$$\begin{aligned} |a-z| &= |a-b-(z-b)| \\ &\geq |a-b|-|z-b| \\ &\geq \delta-|z-b| \\ &\Rightarrow |a-z|^2 \geq (\delta-|z-b|^2). \end{aligned}$$

■

Лема 3.1.4 *Нека је Ω ограничена област, $h \in C(\overline{\Omega})$ и $h \in h(\Omega)$. Тада важи:*

$$\max_{\overline{\Omega}} |h| = \max_{\partial\Omega} |h|.$$

Доказ.
Функција $|h|$ је непрекидна па достиже максимум на компактима $\overline{\Omega}$ и $\partial\Omega$.

1. Ако је $h = const$ тривијално следи;
2. Ако h није константна функција онда $|h|$ на основу принципа максимума не достиже максимум у Ω па је:

$$\max_{\overline{\Omega}} |h| = \max_{\partial\Omega} |h|.$$

■

3.2 Дирихлеов проблем

Дефиниција 3.2.1 *Одређивање хармонијске функције $h:\mathbb{D}\to\mathbb{C}$ која испуњава услов $\lim_{z\to b} h(z) = \phi(b), b \in \mathbb{T}$, за дату непрекидну функцију $\phi:\mathbb{T}\to\mathbb{C}$ представља **Дирихлеов проблем**.*

Теорема 3.2.2 *Пуасонов интеграл P_ϕ представља јединствено решење Дирихлеовог проблема за дату непрекидну функцију $\phi : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$.*

Доказ.
У претходној дефиницији видимо да функција мора бити хармонијска да би била решење Дирихлеовог проблема, па најпре то покажимо. Нека је $\phi = u + iv$.

$$\begin{aligned} P\phi(z) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P(z, e^{i\theta})\phi(e^{i\theta})d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \operatorname{Re}\frac{e^{i\theta}+z}{e^{i\theta}-z}(u(e^{i\theta}) + iv(e^{i\theta}))d\theta \\ &= \operatorname{Re}\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{e^{i\theta}+z}{e^{i\theta}-z}u(e^{i\theta})d\theta\right) + i\operatorname{Re}\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{e^{i\theta}+z}{e^{i\theta}-z}v(e^{i\theta})d\theta\right). \end{aligned}$$

Функције

$$\frac{e^{i\theta}+z}{e^{i\theta}-z}u(e^{i\theta}) \text{ и } \frac{e^{i\theta}+z}{e^{i\theta}-z}v(e^{i\theta})$$

су холоморфне по z, а свака холоморфна функција је хармонијска (теорема 2.1.2). Збир две хармонијске функције је хармонијска функција.
Сада покажимо да важи: $\lim\limits_{z\to b} P_\phi(z) = \phi(b)$.
Узмимо произвољне $b \in \mathbb{T}, \epsilon > 0$. Из непрекидности следи

$$\exists\delta \in (0, 2) : |a - b| < \delta \Rightarrow |\phi(a) - \phi(b)| < \epsilon.$$

На основу леме 3.1.3:

$$\exists\delta_1 > 0 : |z - b| < \delta_1 \Rightarrow \sup_{|a-b|\geq\delta} P(z, a) < \epsilon.$$

Нека је $|z - b| < \delta_1$. Посматрајмо израз:

$$|P_\phi(z) - \phi(b)| = \left|\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P(z, e^{i\theta})\phi(e^{i\theta})d\theta - \phi(b)\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P(z, e^{i\theta})d\theta\right|,$$

јер је

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P(z,e^{i\theta})d\theta = 1.$$

Даље је:

$$\begin{aligned}
|P_\phi(z)-\phi(b)| &= \left|\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P(z,e^{i\theta})(\phi(e^{i\theta})-\phi(b))d\theta\right| \\
&\leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P(z,e^{i\theta})|\phi(e^{i\theta})-\phi(b)|d\theta \\
&= A+B,
\end{aligned}$$

где је

$$A = \frac{1}{2\pi}\int_{|e^{i\theta}-b|<\delta} P(z,e^{i\theta})|\phi(e^{i\theta})-\phi(b)|d\theta,$$

и

$$B = \frac{1}{2\pi}\int_{|e^{i\theta}-b|\geq\delta} P(z,e^{i\theta})|\phi(e^{i\theta})-\phi(b)|d\theta.$$

Направимо процену за израз А:

$$A \leq \epsilon\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P(z,e^{i\theta})\mathrm{d}\theta\right) = \epsilon$$

Направимо процену за израз B:

$$\begin{aligned}
B &\leq \epsilon\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P(z,e^{i\theta})|\phi(e^{i\theta})-\phi(b)|d\theta\right) \\
&\leq \epsilon\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |\phi(e^{i\theta})|d\theta + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |\phi(b)|d\theta\right).
\end{aligned}$$

Па је

$$A+B < \epsilon\left(1+\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |\phi(e^{i\theta})|d\theta + |\phi(b)|\right) = \epsilon_1.$$

Где је ϵ_1 произвољно мало. Па закључујемо: $\lim\limits_{z\to b} P_\phi(z) = \phi(b)$.
Остало је још да покажемо јединственост. Претпоставићемо да постоје две функције које су решења Дирихлеовог проблема. Нека важи:

$$\lim_{z\to b} h_1(z) = \lim_{z\to b} h_2(z) = \phi(b), b \in \mathbb{T}$$

Нека је $h = h_1 - h_2$, за функцију h ће важити да је непрекидна на $\overline{\mathbb{D}}$ и хармонијска на $\mathbb{D}$ па на основу принципа максимума је:

$$\max_{\overline{\mathbb{D}}} |h| = \max_{\mathbb{T}} |h| = 0,$$

јер су на рубу функције h_1 и h_2 једнаке . Закључујемо да је $h = 0$ тј. $h_1 = h_2$.

■

3.3 Пуасонова интегрална формула

У претходној глави смо дефинисали својство средње вредности. Сада дајемо уопштење те формуле.

Теорема 3.3.1 *Нека је Ω област, $h \in h(\Omega)$ и $\overline{D}(z_0, r) \subset \Omega$. Тада важи:*

$$h(z_0 + \rho e^{it}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{r^2 - \rho^2}{r^2 + \rho^2 - 2r\rho\cos(\theta - t)} h(z_0 + re^{i\theta}) d\theta,$$

где је $\rho \in [0, r), t \in [0, 2\pi]$.

Приметимо да за $\rho = 0$ добијамо својство средње вредности.
Доказ.
Узмимо произвољне $\rho \in [0, r)$ и $t \in [0, 2\pi]$. Нека је $D = D(z_0, r)$, $\psi = h\big|_{\partial D}$. $P_D\psi$ и h су решења Дирихлеовог проблема у D за функцију ψ. Пошто је решење Дирихлеовог проблема јединствено следи да је $P_D\psi = h$.

$$\begin{aligned} h(z_0 + \rho e^{it}) &= P_D\psi(z_0 + \rho e^{it}) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{r^2 - \rho^2}{r^2 + \rho^2 - 2r\rho\cos(\theta - t)} \psi(z_0 + re^{i\theta}) d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{r^2 - \rho^2}{r^2 + \rho^2 - 2r\rho\cos(\theta - t)} h(z_0 + re^{i\theta}) d\theta. \end{aligned}$$

$\blacksquare$

Оправдајмо претходне једнакости:

Дефиниција 3.3.2 *Нека је* $D = D(z_0, r), z_0 \in \mathbb{C}, r > 0, \psi : \partial D \to \mathbb{C}$ *непрекидна функција и* $P_D\psi : D \to \mathbb{C}$ *пресликавање дато као:*

$$P_D\psi(w) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} P\left(\frac{w - z_0}{r}, e^{i\theta}\right)\psi(z_0 + re^{i\theta})d\theta.$$

Израчунајмо:

$$P_D\psi(z_0 + \rho e^{it}) \;=\; \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} P\left(\frac{\rho}{r}e^{it}, e^{i\theta}\right)\psi(z_0 + re^{i\theta})d\theta$$

$$\begin{aligned} P\left(\frac{\rho}{r}e^{it}, e^{i\theta}\right) &= \frac{1 - \left|\frac{\rho}{r}e^{it}\right|^2}{\left|e^{i\theta} - \frac{\rho}{r}e^{it}\right|^2} \\ &= \frac{r^2 - \rho^2}{\left|re^{i\theta} - \rho e^{it}\right|^2} \\ &= \frac{r^2 - \rho^2}{r^2 + \rho^2 - 2\operatorname{Re}(r\rho e^{i(\theta - t)})} \\ &= \frac{r^2 - \rho^2}{r^2 + \rho^2 - 2r\rho\cos(\theta - t)}. \end{aligned}$$

Теорема 3.3.3 *Нека је* Ω *област и* $h \in C(\Omega)$ *при чему важи* $(\forall z_0 \in \Omega)(\exists r > 0) : D(z_0, r) \subset \Omega$ *и* $h(z_0) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} h(z_0 + \rho e^{i\theta})d\theta$, $0 \le \rho < r$. *Тада је* $h \in h(\Omega)$.

Доказ.
Нека је D произвољан диск, $\overline{D} \subset \Omega$. Означимо са $\phi = h|_{\partial D}$. Дефинишимо функцију f:

$$f(z) = \begin{cases} h - P_D(\phi), & \text{ако } z \in D \\ 0, & \text{ако } \ z \in \partial D \end{cases}$$

Ако бисмо доказали да је $h = P_D(\phi)$ на D доказ би био завршен јер је $P_D\phi$ хармонијска функција.

Функција f је непрекидна на $\overline{D}$ јер су такве h и $P_D\phi$. Нека је $\max\limits_{\overline{D}}|f| = M$. Сада ћемо све елементе скупа D разврстати у два скупа тако да у једном буду сви они у којима (апсолутна вредност функције) функција f достиже максимум а остатак у другом.

$$\begin{aligned} A &= \{z \in D : |f(z)| < M\}, \\ B &= \{z \in D : |f(z)| = M\}. \end{aligned}$$

Анализирајмо оба скупа. Узмимо најпре произвољно $z \in A$ и због саме дефиниције скупа А можемо увести ϵ тако да $0 < \epsilon < M - |f(z)|$.

$$\exists \delta > 0 : D(z, \delta) \subset D, \omega \in D(z, \delta) \Rightarrow |f(\omega) - f(z)| < \epsilon$$

$$\begin{aligned} f(\omega) &= f(\omega) - f(z) + f(z) \\ &\Rightarrow |f(\omega)| \leq |f(\omega) - f(z)| + |f(z)| < \epsilon + f(z) < M. \end{aligned}$$

Закључујемо да $\omega \in A, D(z, \delta) \subset A$ тј. А је отворен скуп.
Сада размотримо скуп B. Узмимо произвољно $z \in D$. На основу дефиниције скупа B следи: $z \in D, |f(z)| = M$.
Из саме формулације је:

$$h(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h(z + \rho e^{i\theta}) d\theta, 0 \leq \rho < r.$$

Пуасонов интеграл $P_D\phi$ је хармонијска функција на D (теорема 3.2.2). Па можемо применити својство средње вредности.

$$\begin{aligned} P_D\phi(z) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P_D\phi(z + \rho e^{i\theta}) d\theta, \\ f(z) &= h(z) - P_D\phi(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (h(z + \rho e^{i\theta}) - P_D\phi(z + \rho e^{i\theta})) d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z + \rho e^{i\theta}) d\theta. \end{aligned}$$

$$M = |f(z)| \leq \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} |f(z+\rho e^{i\theta})| d\theta \leq M, 0 \leq \rho < r$$

онда је:

$$\begin{aligned}
M &= \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} |f(z+\rho e^{i\theta})| d\theta \\
0 &= \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} (M - |f(z+\rho e^{i\theta})|) d\theta \\
0 &\leq M - |f(z+\rho e^{i\theta})| \\
&\Rightarrow M = |f(z+\rho e^{i\theta})|, \theta \in [0, 2\pi], 0 \leq \rho < r
\end{aligned}$$

тј. $|f| = M$ на $D(z,r) \Rightarrow D(z,r) \subset B$ онда је B отворен.
Важи да је $D = A \cup B$. Пошто је ово унија дисјунктних отворених скупова а скуп D повезан онда је $A = D$ или $B = D$.

1. Ако је $A = D$, f ће (на основу принципа максимума) достићи максимум на рубу (∂D) а на основу дефиниције функције f то је 0 па је $M = 0$.

2. Ако је $B = D$, $|f| = M$ на D а пошто је $|f|$ непрекидна на $\overline{D}$ онда је $|f| = M$ на ∂D. На основу дефиниције је $f = 0$ на ∂D па је $M = 0$.

Овим смо доказали да је на целом D функција f једнака нули тј. $h - P_D\phi = 0$ па је $h = P_D\phi$ на D. Како је $P_D\phi$ хармонијска на D онда је и h хармонијска на D. D смо узели као произвољан из Ω па можемо закључити да је функција h хармонијска на области Ω. ■

Глава 4

Субхармонијске функције

4.1 Дефиниција и основна својства

Дефиниција 4.1.1 *Непрекидна функција* $u : \Omega \to [-\infty, +\infty)$ *је* ***субхармонијска*** *ако важи:*

$$(\forall z_0 \in \Omega)(\exists r > 0) : D(z_0, r) \subset \Omega, u(z_0) \leq \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} u(z_0 + \rho e^{i\theta})d\theta, 0 \leq \rho < r. \tag{4.1}$$

Примедба. С обзиром да за хармонијске функције важи својство средње вредности, свака реално-вредносна хармонијска функција биће субхармонијска.
Примедба. Из дефиниције видимо да субхармонијске функције могу да узму вредност $-\infty$ али не и вредност $+\infty$. Неједнакост (4.1) је тривијално задовољена у оним тачкама z_0 за које је $u(z_0) = -\infty$. Ако је $u(z_0) > -\infty$ и имајући у виду да је u непрекидна тада је u ограничена одоздо у некој околини тачке z_0 па је интеграл у (4.1) дефинисан за довољно мало r.
Примедба. Тиме што дозвољавамо да субхармонијска функција узме вредност $-\infty$ (видети претходну примедбу) лако добијамо тврђење да је функција $log|f|$ је субхармонијска ако је f аналитичка, без обзира да ли f има или нема нула у области (теорема 4.1.3 својство 5.).

Лема 4.1.2 *Нека је* D *диск у* $\mathbb{C}$, $f \in H(D)$ *и* $f \neq 0$ *у* D. *Тада постоји функција* $g \in H(D)$ *таква да је* $e^g = f$ *у* D.

Доказ.
Одаберимо $z_0 \in D \Rightarrow f(z_0) \neq 0$ јер је функција $f \neq 0$ у целом D.

Записаћемо у поларној форми:

$$f(z_0) = |f(z_0)|e^{i\arg(z_0)},$$

приметимо да је

$$g(z) = \int\limits_{[z_0,z]} \frac{f'(s)}{f(s)}ds + \log|f(z_0)| + i\arg f(z_0), z \in D.$$

Функција g је холоморфна јер је f холоморфна. Вредност функције g у z_0 је $g(z_0) = \log|f(z_0)| + i\arg f(z_0)$. Важи и $g' = \frac{f'}{f}$.
Уведимо функцију $h = fe^{-g}$. Циљ је показати да је функција $h \equiv 1$ и тиме би теорема била доказана.
Функција h је холоморфна у D јер су такве f и g.

$$h' = (fe^{-g})' = f'e^{-g} - fe^{-g}g' = f'e^{-g} - fe^{-g}\frac{f'}{f} = 0,$$

следи да је $h = const.$ Идеално би било када бисмо за неко $z \in D$ доказали да је функција $h = 1$.
Рачунамо вредност функције h у z_0,

$$h(z_0) = f(z_0)e^{-g(z_0)} = 1 \Rightarrow h \equiv 1 \Rightarrow f = e^g.$$

■

Теорема 4.1.3 *Претпоставимо да су све функције дефинисане на области Ω. Тада важе следећа својства:*

1. *Ако су f_1 и f_2 субхармонијске функције и $a_1, a_2 \geq 0$ онда је $a_1f_1 + a_2f_2$ субхармонијска.*
2. *Ако су f и $-f$ субхармонијске функције онда је f хармонијска.*
3. *Ако је f хармонијска функција онда је $|f|$ субхармонијска.*
4. *Ако су f_1, f_2 субхармонијске функције онда је $f = \max\{f_1, f_2\}$ субхармонијска.*
5. *Ако је f холоморфна функција онда је $\log|f|$ хармонијска у $\Omega\setminus\{f = 0\}$, а $\log|f|$ субхармонијска.*

Доказ.

1. $a_1f_1 + a_2f_2$ је непрекидна функција јер су f_1 и f_2 непрекидне.
   $(\forall z_0 \in \Omega)(\exists r_1 > 0) : D(z_0, r_1) \subset \Omega$ и $f_1(z_0) \leq \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f_1(z_0 + \rho e^{i\theta})d\theta$, $0 \leq \rho < r_1$,

   $(\forall z_0 \in \Omega)(\exists r_2 > 0) : D(z_0, r_2) \subset \Omega$ и $f_2(z_0) \leq \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f_2(z_0 + \rho e^{i\theta})d\theta$, $0 \leq \rho < r_2$.
   Узмимо $r = \min\{r_1, r_2\}$ овим ће и за функцију $a_1f_1 + a_2f_2$ бити задовољена неједнакост (4.1).

2. Узмимо $z_0 \in \Omega$ произвољну. Услов (4.1) ће истовремено важити и за f и за $-f$ тј. $(\forall z_0 \in \Omega)(\exists r > 0) : D(z_0, r) \subset \Omega$

$$f(z_0) \leq \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(z_0 + \rho e^{i\theta})d\theta, 0 \leq \rho < r,$$

$$-f(z_0) \leq \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} -f(z_0 + \rho e^{i\theta})d\theta, 0 \leq \rho < r.$$

   Множењем обе стране неједнакости са -1 добијамо:

$$f(z_0) \geq \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(z_0 + \rho e^{i\theta})d\theta, 0 \leq \rho < r$$

   па је

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(z_0 + \rho e^{i\theta})d\theta, 0 \leq \rho < r,$$

   f је и непрекидна функција јер је субхармонијска па на основу теореме 3.3.3 закључујемо да је f хармонијска функција.

3. Нека је $z_0 \in \Omega$ произвољна. Постоји $r > 0, D(z_0, r) \subset \Omega$. Пошто је f хармонијска функција можемо записати следеће:

$$|f(z_0)| = |\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(z_0) + \rho e^{i\theta}d\theta| \leq \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} |f(z_0) + \rho e^{i\theta}|d\theta, 0 \leq \rho < r.$$

   Такође важи и да је f непрекидна јер је хармонијска па самим тим је и $|f|$ непрекидна. Закључујемо да је функција $|f|$ субхармонијска.

4. Функције f_1 и f_2 су непрекидне па је и

$$f = \max\{f_1, f_2\} = \frac{f_1 + f_2 + |f_1 - f_2|}{2}$$

непрекидна као композиција таквих.
Нека је $z_0 \in \Omega$ произвољно одабрано $f(z_0) = f_j(z_0)$ за неко $j \in \{1, 2\}$.

$$(\exists r > 0) : f_j(z_0) \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f_j(z_0 + \rho e^{i\theta})d\theta, 0 \leq \rho < r$$

$$f(z_0) = f_j(z_0) \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f_j(z_0 + \rho e^{i\theta})d\theta \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z_0 + \rho e^{i\theta})d\theta,$$

за све $0 \leq \rho < r$ па је f субхармонијска.

5. Како је f холоморфна функција закључујемо да је она и непрекидна. Приметимо да је

$$\{f = 0\} = \{z \in \Omega : f(z) = 0\} = f^{-1}(0)$$

затворен скуп (јер инверзна слика непрекидне функције затвореног/отвореног скупа је затворен/отворен скуп) па је $\Omega \setminus \{f = 0\}$ отворен.
Нека је D произвољно одабран диск тако да важи $D \subset \Omega \setminus \{f = 0\}$.
На основу леме 4.1.2 следи да постоји функција $g \in H(D)$ таква да важи $f = e^g$.

$$\log|f| = \log|e^g| = \log e^{Re(g)} = Re(g),$$

а функција $\log|f|$ је хармонијска као реалан део холоморфне функције па је $\log|f|$ хармонијска у D.
Добили смо да је $\log|f|$ хармонијска и реално-вредносна у $\Omega \setminus \{f = 0\}$ па је $\log|f|$ субхармонијска у $\Omega \setminus \{f = 0\}$.
У тачкама скупа $\{f = 0\}$ важи $\log|f| = -\infty$ онда је $\log|f|$ субхармонијска.

■

4.2 Принцип максимума

Теорема 4.2.1 *Нека субхармонијска функција f достиже максимум у области Ω. Тада је f константна функција.*

Доказ.
Нека f достиже максимум у некој тачки $z_0 \in \Omega$. Означимо

$$E = \{z \in \Omega : f(z) = f(z_0)\}$$

Скуп E је непразан ($z_0 \in E$). E је затворен: f је непрекидна функција и $E = f^{-1}(f(z_0))$ инверзна слика једночланог скупа који је затворен.
Скуп E је отворен: $z \in E$ произвољно, f субхармонијска (дефиниција 4.1.1) онда је $(\forall z_0 \in \Omega)(\exists r > 0) : D(z_0, r) \subset \Omega$,

$$f(z) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z + \rho e^{i\theta}) d\theta, 0 \leq \rho < r$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (f(z) - f(z + \rho e^{i\theta})) d\theta \leq 0,$$

функција $f(z) - f(z + \rho e^{i\theta}) \geq 0$ непрекидна $\Rightarrow f(z) = f(z + \rho e^{i\theta})$, за $0 \leq \rho < r$, $\theta \in [0, 2\pi]$.
$z + \rho e^{i\theta} \in E$ за све $0 \leq \rho < r$, $\theta \in [0, 2\pi] \Rightarrow D(z, r) \subset E$.
Закључујемо да је E непразан, затворен и отворен у области (Ω повезана област) Ω па је $E = \Omega$ и важи да је $f = const$. ■

Последица 4.2.2 *Нека је Ω ограничена област и f субхармонијска функција у Ω, која је непрекидна у $\overline{\Omega}$. Тада важи:*

$$\max_{\overline{\Omega}} f = \max_{\partial\Omega} f.$$

Доказ.
Непрекидна функција f на компактима $\max\limits_{\overline{\Omega}}$ и $\max\limits_{\partial\Omega}$ достиже максимум.

- Ако је f =const тривијално важи тражена једнакост.
- Ако је f $\neq$const онда f не достиже максимум у Ω па је $\max\limits_{\overline{\Omega}} f = \max\limits_{\partial\Omega} f$.

■

4.3 Теорема о три кружнице

Теорема 4.3.1 *Нека је* $A = \{z : a < |z| < b\}$ *за неке* $0 < a < b$ *и* $f : \overline{A} \to \mathbb{C}$ *непрекидна функција која је холоморфна у* A*, при чему постоје константе* $0 < m_a, m_b < +\infty$ *такве да важи* $|f(z)| \leq m_a$ *за све* $|z| = a$ *и* $|f(z)| \leq m_b$ *за све* $|z| = b$*. Тада је :*

$$|f(z)| \ \leq \ m_a^{\frac{\log b - \log |z|}{\log b - \log a}} m_b^{\frac{\log |z| - \log a}{\log b - \log a}}.$$

Доказ.
Означимо са $c(z) = \frac{\log|z| - \log a}{\log b - \log a}$ хармонијска функција у А јер је $\log|z|$ таква. Како размишљати? Видимо да у крајњем изразу треба да добијемо облик $m_a^{1-c} m_b^c$. Ако бисмо логаритмовали и посматрали случајеве када је $|z| = a, |z| = b$ (јер нам је дата процена за функцију f у тим случајевима) добили бисмо:

$$-(c \log m_b + (1-c) \log m_a)\Big|_{|z|=a} \ = \ -\log m_a,$$

$$-(c \log m_b + (1-c) \log m_a)\Big|_{|z|=b} \ = \ -\log m_b.$$

Нека је $u = \log|f| - (c \log m_b + (1-c) \log m_a)$. Функција $\log|f|$ је субхармонијска у А. Функција $(c \log m_b + (1-c) \log m_a)$ је хармонијска и реално-вредносна у А (самим тим је и субхармонијска у А). Закључујемо да је u субхармонијска у А као збир таквих, а важи и да је u непрекидна у $\overline{A}$ (јер је f таква).
Онда је $\max\limits_{\overline{A}} u = \max\limits_{\partial A} u \leq 0$ јер:
Ако $z \in \partial A$ онда постоје две могућности:

- Ако је $|z| = a$ важи $u(z) = \log|f(z)| - \log m_a \leq 0$, јер је $|f(z)| \leq m_a$;
- Ако је $|z| = b$ важи $u(z) = \log|f(z)| - \log m_b \leq 0$, јер је $|f(z)| \leq m_b$.

Дакле за све $z \in A$ ће важити $u(z) \leq 0$, одакле налазимо

$$\log|f(z)| \leq c(z) \log m_b + (1 - c(z)) \log m_a = \log(m_a^{1-c(z)} m_b^{c(z)})$$

тј. важи:

$$|f(z)| \leq m_a^{1-c(z)} m_b^{c(z)} = m_a^{\frac{\log b - \log |z|}{\log b - \log a}} m_b^{\frac{\log |z| - \log a}{\log b - \log a}}.$$

∎

Глава 5

Интегралне средине

Дошли смо до поглавља које представља кључну тачку овог рада. Интегралне средине субхармонијских функција имају велику примену у теорији Хардијевих простора на јединичном диску у комплексној равни. Како бисмо дефинисали интегралне средине а потом и Хардијев простор најпре ћемо навести теореме које су нам неопходне.

5.1 Основне теореме

Теорема 5.1.1 *Нека је* $f : \Omega \to [-\infty, +\infty)$ *субхармонијска функција и* $\phi : [-\infty, +\infty) \to \mathbb{R}$ *растућа и конвексна функција. Тада је* $\phi \circ f$ *субхармонијска.*

Доказ.
Функција $\phi \circ f$ је непрекидна као композиција непрекидних. Нека је $z_0 \in \Omega$ произвољно одабрана. Пошто је f субхармонијска функција (4.1) $(\exists r > 0) D(z_0, r) \subset \Omega,\ f(z_0) \leq \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} f(z_0 + \rho e^{i\theta}) d\theta$. Проверимо да ли овај услов важи и за функцију $\phi \circ f$.

$$\phi(f(z_0)) \leq \phi\left(\int\limits_0^{2\pi} f(z_0 + \rho e^{i\theta}) \frac{d\theta}{2\pi}\right),$$

јер је ϕ растућа функција. Приметимо да је $\int\limits_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2\pi} = 1$ и ϕ је конвексна функција па можемо применити Јенсенову неједнакост.

$$\phi\left(\int\limits_0^{2\pi} f(z_0 + \rho e^{i\theta}) \frac{d\theta}{2\pi}\right) \leq \int\limits_0^{2\pi} \phi(f(z_0 + \rho e^{i\theta})) \frac{d\theta}{2\pi}, (0 \leq \rho < r),$$

па је $\phi \circ f$ субхармонијска функција. ■

Напомена: За претходне неједнакости коришћена су следећа позната својства конвексних функција:

1. Свака конвексна функција је непрекидна;

2. Јенсенова неједнакост: Нека је (X, m, μ) простор са мером, $\mu(X) = 1$, $f : X \to \mathbb{R}$ мерљива функција, $\phi : A \to \mathbb{R}$ конвексна функција где је $f(X) \subseteq A$ тада је: $\phi(\int\limits_X f d\mu) \leq \int\limits_X (\phi \circ f) d\mu$.

Последица 5.1.2 *Нека је f холоморфна функција у Ω и $0 < p < +\infty$. Тада је $|f|^p$ субхармонијска функција у Ω.*

Доказ.
Пошто је f холоморфна Ω следи да је $\log|f|$ субхармонијска у Ω па је и $p \log|f|$ субхармонијска у Ω.
Експоненцијална функција је растућа и конвексна на $[-\infty, \infty)$ па је $e^{p \log|f|} = |f|^p$ субхармонијска у Ω. ■

Теорема 5.1.3 *Нека је f субхармонијска функција у области Ω и $D(z_0, r) \subset \Omega$. Тада важи:*

$$f(z_0) \leq \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} f(z_0 + \rho e^{i\theta}) d\theta,$$

за све $0 \leq \rho < r$.

Доказ.
Нека је $0 \leq \rho < r$ произвољно одабрана. Означимо са $D = D(z_0, \rho)$. Важи да је $\overline{D} \subset D(z_0, r) \subset \Omega$.
Доказаћемо теорему користећи Пуасонов интеграл функције $\phi = f|_{\partial D}$.
Функција $P_D\phi$ је хармонијска у D и непрекидна у $\overline{D}$. Тада је и функција $-P_D\phi$ хармонијска у D, а пошто је реално-вредносна закључујемо да је субхармонијска.
Посматрајмо функцију $g = f - P_D\phi$. Она је субхармонијска у D и непрекидна у $\overline{D}$ јер је разлика таквих.
На ∂D ће важити

$$\begin{aligned} g\big|_{\partial D} &= (f - P_D\phi)\big|_{\partial D} \\ &= f\big|_{\partial D} - (P_D\phi)\big|_{\partial D} \end{aligned}$$

$$= \phi - \phi$$

$$= 0.$$

Потребна нам је процена за функцију f тј. желимо да покажемо да је задовољена тражена неједнакост. Искористићемо принцип максимума.

$$\max_{\overline{D}}(f - P_D\phi) = \max_{\partial D}(f - P_D\phi) = 0.$$

На основу претходног је $f - P_D\phi \leq 0$ тј. $f \leq P_D\phi$ у D.

$$f(z_0) \leq P_D\phi(z_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\phi(z_0 + \rho e^{i\theta})d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z_0 + \rho e^{i\theta})d\theta.$$

■

Теорема 5.1.4 *Нека је u субхармонијска функција у диску $\mathbb{D}$ и $v(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(ze^{i\theta})d\theta, z \in D$. Тада је функција v субхармонијска у $\mathbb{D}$.*

Доказ.
Нека је $z_0 \in \mathbb{D}$ произвољно. $(\exists r > 0)$, $D(z_0, r) \subset \mathbb{D}$, $0 \leq \rho < r$. Покажимо да функција v задовољава услове да буде субхармонијска. Рачунамо:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} v(z_0 + \rho e^{it})dt &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(z_0 + \rho e^{it})e^{i\theta}d\theta dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(z_0e^{i\theta} + \rho e^{i(t+\theta)})dtd\theta.
\end{aligned}$$

Означимо са $A = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(z_0e^{i\theta} + \rho e^{i(t+\theta)})dt$, уведемо смену $s = t + \theta$.
$A = \frac{1}{2\pi}\int_\theta^{2\pi} u(z_0e^{i\theta} + \rho e^{is})ds + \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi}^{\theta} u(z_0e^{i\theta} + \rho e^{is})ds$, а смену $\phi = s - 2\pi$ примењујемо на други сабирак:

$$A = \frac{1}{2\pi}\int_\theta^{2\pi} u(z_0e^{i\theta} + \rho e^{is})ds + \frac{1}{2\pi}\int_0^{\theta} u(z_0e^{i\theta} + \rho e^{i\phi})d\phi$$

$$= \quad \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(z_0e^{i\theta}+\rho e^{it})dtd\theta.$$

На основу претходне теореме (теорема 5.1.3) је $A \geq u(z_0e^{i\theta})$ јер је $D(z_0e^{i\theta}) \subset \mathbb{D}$ па добијамо следећу неједнакост:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} v(z_0+\rho e^{it})dt \quad \geq \quad \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(z_0e^{i\theta})d\theta = v(z_0),$$

тј. добили смо да важи:

$$v(z_0) \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} v(z_0+\rho e^{it})dt.$$

Функција v је непрекидна јер је u таква. Показаћемо непрекидност и по дефиницији.

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0} v(z_0+h) \quad &= \quad \lim_{h\to 0}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u((z_0+h)e^{i\theta})d\theta \\ \\ &= \quad \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\lim_{h\to 0} u(z_0e^{i\theta}+he^{i\theta})d\theta,\end{aligned}$$

за последњу једнакост смо искористили да је u непрекидна на компакту одакле следи да је u равномерно непрекидна на компакту тј. дозвољена је замена интеграла и лимеса.

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\lim_{h\to 0} u(z_0e^{i\theta}+he^{i\theta})d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(z_0e^{i\theta})d\theta = v(z_0).$$

■

Последица 5.1.5 *Нека је f субхармонијска функција у диску $\mathbb{D}$. Тада је $r \to \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(re^{i\theta})d\theta$ растућа на $(0,1)$.*

Доказ.

На основу претходне теореме знамо да је $g(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(ze^{i\theta})d\theta$

субхармонијска функција у $\mathbb{D}$. Комплексан број z можемо записати у поларном облику $z = |z|e^{i \arg z}$ па је

$$g(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(|z|e^{i(\theta + \arg z)}) d\theta,$$

уведимо смену $t = \theta + \arg z$ и добијамо следеће:

$$g(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{\arg z}^{2\pi} f(|z|e^{it}) dt + \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi}^{2\pi + \arg z} f(|z|e^{it}) dt,$$

на други сабирак уведимо смену $s = t - 2\pi$ па добијамо:

$$\begin{aligned} g(z) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\arg z}^{2\pi} f(|z|e^{it}) dt + \frac{1}{2\pi} \int_0^{\arg z} f(|z|e^{is}) ds \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(|z|e^{it}) dt. \end{aligned}$$

Почетну функцију смо свели на облик који је погодан за закључивање о монотоности.
За $0 < r < 1$ и $z \in \partial D(0, r)$ важи: $g(z) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} f(re^{i\theta}) d\theta$.
Пошто ће g на свакој тачки са руба узети исту вредност можемо закључити да је:

$$\max_{\partial D(0,r)} g(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(re^{i\theta}) d\theta, z \in \partial D(0, r).$$

Да бисмо показали да је функција g растућа узмимо произвољно R тако да $0 < r \leq R < 1$. Треба да покажемо да је $g(r) \leq g(R)$. Важиће следеће:

$$\max_{\partial D(0,r)} g = \max_{\overline{D}(0,r)} g \leq \max_{\overline{D}(0,R)} g = \max_{\partial D(0,R)} g = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\mathrm{Re}^{i\theta}) d\theta.$$

Објаснимо претходне једнакости и неједнакости:

- Једнакости следе на основу принципа максимума;
- Неједнакост следи из чињенце да је $\overline{D}(0, r) \subset \overline{D}(0, R)$ јер је $r \leq R$.

■

5.2 Интегралне средине

Нека је f холоморфна функција у диску $D(z_0, r)$ и $0 < p < +\infty$. Тада за $0 < r < 1$ дефинишемо интегралну средину реда p као:

$$M_p(r, f) = \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^p d\theta \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Користећи претходно наведене теореме можемо закључити:
Ако је f холоморфна онда је $|f|^p$ субхармонијска функција у D па важи $r \to \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^p d\theta$ растућа.

Дефиниција 5.2.1 *Нека је f субхармонијска функција на диску $D(0, \rho)$ тако да $f \not\equiv -\infty$. За $0 \le r \le \rho$ дефинишемо:*

$$M_f(r) := \sup_{|z|=r} f(z) \tag{5.1}$$

$$C_f(r) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(re^{it}) dt \tag{5.2}$$

$$B_f(r) := \frac{1}{\pi r^2} \int_{D(0,r)} f dA \tag{5.3}$$

Претходне три једнакости представљају интегралне средине функције f. Важи и следећа веза:

$$B_f(r) = \frac{2}{r^2} \int_0^r C_f(s) s ds, \tag{5.4}$$

уврстимо C_f и добијемо израз облика:

$$B_f(r) = \frac{2}{r^2} \int_0^r \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(se^{it}) dt \right) s ds = \frac{2}{r^2} \frac{1}{2\pi} \int_0^r \int_0^{2\pi} f(se^{it}) s dt ds,$$

уведимо смену $s = rz$:

$$B_f(r) = \frac{1}{\pi} \int_0^1 \int_0^{2\pi} z f(rze^{it}) dt dz.$$

Пре него што наведемо основна својства интегралних средина доказаћемо неколико теорема које су за то неопходне.

Напомена. На овом месту ћемо навести једну битну напомену јер у наредним доказима а и уопште у раду може доћи до забуне. За наше потребе користили смо модификовану дефиницију субхармонијске функције зато овде наводимо оригиналну :
*Дефиниција**. Нека је U отворен скуп, $U \subset \mathbb{C}$. Функцију $f : U \to [-\infty, +\infty)$ називамо субхармонијском ако је полунепрекидна одозго и ако задовољава неједнакост:

$$(\forall z_0 \in U)(\exists r > 0) : D(z_0, r) \subset U, f(z_0) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + \rho e^{i\theta}) d\theta, 0 \leq \rho < r. \tag{5.5}$$

У наставку ћемо остати при нашој дефиницији.

Теорема 5.2.2 *Нека је T компактан тополошки простор, U отворен подскуп од $\mathbb{C}$ и нека је $v : U \times T \to [-\infty, +\infty)$ функција таква да је:*

- *v непрекидна на $U \times T$;*
- *$z \to v(z,t)$ је субхармонијска на U, $\forall t \in T$.*

Тада је $u(z) := \sup_{t \in T} v(z,t)$ субхармонијска на U.

Доказ.
Узмимо произвољно $z \in \mathbb{C}$. Најпре докажимо да је функција u непрекидна.
Испитајмо да ли је задовољена једнакост: $\lim_{h \to 0} u(z+h) = u(z)$.

$$\lim_{h \to 0} u(z+h) = \lim_{h \to 0} \sup_{t \in T} v(z+h, t) = \sup_{t \in T} \lim_{h \to 0} v(z+h, t) = \sup_{t \in T} v(z,t) = u(z).$$

Оправдајмо претходни ред: Пошто lim и sup не посматрамо у односу на исте променљиве слободно можемо проћи лимесом кроз супремум.
Нека је $\overline{D}(z, \rho) \subset U$, тада је за свако $t \in T$:

$$\begin{aligned} v(z,t) &\leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} v(z + \rho e^{i\theta}, t) d\theta \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(z + \rho e^{i\theta}, t) d\theta \Big/ \sup_{t \in T} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad u(z) \leq \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} u(z+\rho e^{i\theta}) d\theta.$$

Дакле, задовољени су сви услови да функција u буде субхармонијска. ■

Теорема 5.2.3 *Нека је* (Ω, μ) *метрички простор,* $\mu(\Omega) < +\infty$, U *отворен подскуп од* $\mathbb{C}$ *и* $v : U \times \Omega \to [-\infty, +\infty)$ *функција таква да:*

- v *је мерљива на* $U \times \Omega$*;*
- $z \to v(z, \omega)$ *је субхармонијска на* $U, \forall \omega \in \Omega$*;*
- $z \to \sup\limits_{\omega \in \Omega} v(z, \omega)$ *је локално ограничена на* U*.*

Тада је $u(z) := \int\limits_\Omega v(z, \omega) d\mu(\omega)$ *субхармонијска на* U*.*

Доказ.
Довољно је доказати да је функција u субхармонијска на сваком релативно компактном подскупу D скупа U. Узмимо произвољан D. Тада због ограничености функције $\sup\limits_{\omega} v(z, \omega)$ на скупу U закључујемо да је она ограничена одозго.
Најпре докажимо непрекидност.

$$\begin{aligned}
\lim_{h \to 0} u(z+h) &= \lim_{h \to 0} \int\limits_\Omega v(z+h, \omega) d\mu(\omega) \\
&= \int\limits_\Omega \lim_{h \to 0} v(z+h, \omega) d\mu(\omega) \\
&= \int\limits_\Omega v(z, \omega) d\mu(\omega) \\
&= u(z).
\end{aligned}$$

Оправдајмо претходне једнакости: Искористили смо да је v непрекидна на компакту одакле следи да је v равномерно непрекидна на компакту тј. дозвољена је замена интеграла и лимеса.

Докажимо сада да функција задовољава неједнакост (4.1). Нека је $\lim\limits_{n\to\infty} u(\omega_n) = k$. Користићемо Фубинијеву теорему. Нека је $\overline{D}(k,\rho) \subset D$:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} u(k+\rho e^{i\theta})d\theta &= \int\limits_\Omega \left(\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} u(k+\rho e^{i\theta})d\theta\right) d\mu(w) \\
&\geq \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} v(k,w)d\mu(w) \\
&= u(k).
\end{aligned}$$

Овим су задовољена оба услова да функција буде субхармонијска. ■

Теорема 5.2.4 *Нека $f : D(0,\rho) \to [-\infty,+\infty)$ функција која је ротационо инваријантна ($f(z) = f(|z|)$) и претпоставимо да је $f \not\equiv -\infty$. Тада је субхармонијска на $D(0,\rho)$ ако и само ако је $f(r)$ растућа и конвексна функција по* $\log r$ $(0 < r < \rho)$ *при чему* $\lim\limits_{r\to 0} v(r) = v(0)$.

Доказ.

1. Први смер (докажимо да је функција субхармонијска)
   Искористићемо теорему (5.1.1). Означимо са $\phi(t) = f(e^t)$. Пошто је f растућа конвексна функција и експоненцијална функција такође онда ће и ϕ бити таква.
   Означимо са $g(z) = \log|z|$. Идеално би било када бисмо показали да је g субхармонијска функција јер бисмо могли закључити да је и $\phi \circ g$ субхармонијска што је крај доказа. Размотримо функцију g. Она је непрекидна на диску $D(0,\rho)$. Покажимо да неједнакост (4.1) важи на $D(0,\rho)$.

$$(\forall z_0 \in D(0,\rho))(\exists r > 0) : D(z_0,r) \subset D(0,\rho),$$

$$\begin{aligned}
g(z_0) &\leq \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} g(z_0+\rho e^{i\theta})d\theta, 0 \leq \rho < r \\
g(z_0) &= \log|z_0|
\end{aligned}$$

$$g(z_0 + \rho e^{i\theta}) \quad = \quad \log |z_0 + \rho e^{i\theta}|$$

уврстимо:

$$\log |z_0| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |z_0 + \rho e^{i\theta}| d\theta.$$

Претходни ред ћемо записати вештачки као:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |z_0| d\theta \quad &\leq \quad \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |z_0 + \rho e^{i\theta}| d\theta \\ &\Leftrightarrow \quad \log |z_0| \leq \log |z_0 + \rho e^{i\theta}|.\end{aligned}$$

Пошто је $|z_0| \leq |z_0 + \rho e^{i\theta}|$ можемо видети да је ова неједнакост испуњена тако што ћемо искористити чињеницу да је функција $\log x$ растућа (основа e је већа од 1). Закључујемо да је функција g субхармонијска. На основу теореме 5.1.1 је и функција $\phi \circ g$ субхармонијска.

2. Други смер (ако је функција субхармонијска на $D(0, \rho)$ докажимо другу страну еквиваленције).

   Узмимо $r_1, r_2 \in [0, \rho)$ тако да $r_1 < r_2$. Најпре доказујемо да је функција растућа. Искористићемо принцип максимума.

   $$\max_{\overline{D}(0,r_2)} v = \max_{\partial D(0,r_2)} v = v(r_2),$$

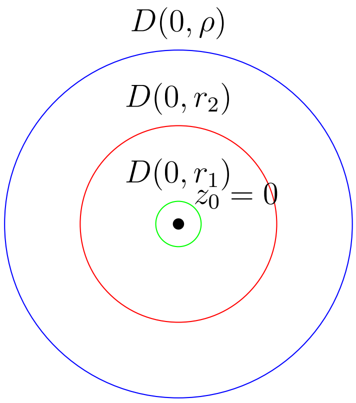
   $$v(r_1) \leq \max_{\partial D(0,r_2)} v = v(r_2)$$

   па је функција v растућа на $D(0, \rho)$.

   Пошто је претпоставка да је функција субхармонијска онда је она и непрекидна а самим тим непрекидна и у нули па важи:

   $$\lim_{r \to 0} v(r) = v(0).$$

   Докажимо сада да је конвексна.
   Нека су $r_1, r_2 \in (0, \rho)$ тако да $r_1 < r_2$. Изаберимо константе α, β које задовољавају $v(r_1) = \alpha + \beta \log r_1, v(r_2) = \alpha + \beta \log r_2$. Узмимо



Слика 5.1: Произвољни дискови полупречника $r_1 < r_2 < \rho$

$r \in (r_1, r_2)$ тако да важи: $v(r) \leq \alpha + \beta \log r$. За неко $0 \leq \lambda \leq 1$ и $\log r = (1-\lambda)\log r_1 + \lambda \log r_2$ важи:

$$\begin{aligned} v(r) &\leq \alpha + \beta \log r \\ &= (1-\lambda)(\alpha + \beta \log r_1) + \lambda(\alpha + \beta \log r_2) \\ &= (1-\lambda)v(r_1) + \lambda v(r_2). \end{aligned}$$

■

Теорема 5.2.5 *Користимо интегралне средине из дефиниције 5.2.1. Важи следеће:*

1. $M_f(r)$, $C_f(r)$ *и* $B_f(r)$ *су растуће конвексне функције по* $\log r$*;*
2. $M_f(r) \geq C_f(r) \geq B_f(r) \geq f(0), (0 < r < \rho)$*;*
3. $\lim\limits_{r\to 0} M_f(r) = \lim\limits_{r\to 0} C_f(r) = \lim\limits_{r\to 0} B_f(r) = f(0)$.

Доказ.

1. На основу теореме 5.2.2 је функција $M_f(r)$ субхармонијска, а применом теореме 5.2.3 су функције $C_f(r)$ и $B_f(r)$ субхармонијске. Одмах можемо закључити (теорема 5.2.4) да су оне растуће и конвексне функције по $\log r$.

2. Најпре докажимо да важи: $\sup\limits_{|z|=r} f(z) \geq \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(re^{it})dt$. Нека је супремум функције f за $|z| = r$ неко $M = f(re^{i\theta_0})$. Тривијално важи да је $M \geq \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(re^{it})dt$, чиме смо показали прву неједнакост.
Докажимо сада да важи:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(re^{it})dt &\geq \frac{2}{r^2}\int\limits_0^{r} C_f(s)sds \\ &= \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{1}\int\limits_0^{2\pi} zf(rze^{it})dtdz \\ &\geq f(0). \end{aligned}$$

Искористићемо чињеницу да је C_f растућа, конвексна функција. Тада важи:

$$C_f(r) \geq C_f(s), r \geq s.$$

Ако обе стране неједнакости помножимо са $\frac{2s}{r^2}$ и интегралимо у границама $s = 0$ до $s = r$ добијамо:
Лева страна:

$$L = \int\limits_0^{r} \frac{2s}{r^2} C_f(r)ds = \frac{2s^2}{2}\frac{C_f(r)}{r^2}\bigg|_0^r = C_f(r).$$

Десна страна:

$$D = \int\limits_0^{r} \frac{2s}{r^2} C_f(r)ds = \frac{2}{r^2}\int\limits_0^{r} sC_f(s)ds = B_f(r).$$

Овим смо показали да $C_f(r) \geq B_f(r)$, сада докажимо да важи $B_f(r) \geq f(0)$.
Можемо видети следеће:

$$C_f(s) \geq C_f(0) = f(0), s \geq 0.$$

Коначно:

$$M_f(r) \geq C_f(r) \geq B_f(r) \geq f(0), (0 < r < \rho).$$

3. С обзиром да смо доказали неједнакости $M_f(r) \geq C_f(r) \geq B_f(r) \geq f(0), (0 < r < \rho)$ сада је довољно показати да $\limsup\limits_{r\to 0} M_f(r) \leq f(0)$. Функција M_f је субхармонијска што значи да је непрекидна па самим тим и полунепрекидна одозго. Тада знамо да је:

$$\limsup_{r\to 0} M_f(r) \leq M_f(0) \Rightarrow \limsup_{r\to 0} M_f(r) \leq f(0).$$

■

5.3 Хардијеви простори

Дефиниција 5.3.1 *Простор за који важи:*

$$H^p = \{f \in H(D) : ||f||_{H^p} = \sup_{0<r<1} M_p(r,f) < +\infty\}$$

*назива се **Хардијев простор** H^p.*

За $0 < p < +\infty$ је:

$$M_p(r,f) = \left(\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^p d\theta\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Ако је $p = +\infty$ тада важи:

$$||f||_{H^\infty} = \sup_{|z|<1} |f(z)|.$$

Пошто је $M_p(r,f)$ растућа функција важи:

$$||f||_{H^p} = \lim_{r\to 1^-} M_p(r,f).$$

За $0 < p \leq q < +\infty$ је $H^q \subset H^p$, то можемо показати користећи Хелдерову неједнакост[1]

$$\left(\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^p d\theta\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^{p\frac{q}{p}} d\theta\right)^{\frac{1}{p}\frac{p}{q}} \left(\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} d\theta\right)^{\frac{1}{p}\frac{q-p}{q}}$$

[1]Нека је (X, m, μ) простор са мером, f, g мерљиве функције и $p, q > 1$ спрегнути коефицијенти. Тада је

$$\left|\int\limits_X |fg| d\mu\right| \leq \left(\int\limits_X |f|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int\limits_X |g|^q d\mu\right)^{\frac{1}{q}}.$$

$$= \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^q d\theta \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Уведимо следеће ознаке:

- $\fint_S f d\mu = \frac{1}{\mu(S)} \int_S f d\mu$, где је $d\mu$ коначна позитивна мера над сигма алгебром подскупова скупа S.
  Пример: $\fint_{\mathbb{T}} f(\zeta)|d\zeta| = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} f(\zeta)|d\zeta| = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} f dl.$

- Свака Мебијусова трансформација ϕ из јединичног диска на јединични диск може се представити као $\phi(z) = b\sigma_a(z)$, где је $|b| = 1$ и
  $$\sigma_a(z) = \frac{a-z}{1-\overline{a}z}, |a| < 1, |z| \leq 1.$$
  Ова пресликавања формирају групу у односу на композицију пресликавања.
  Својства Мебијусових пресликавања:

  1. $\sigma_a = \sigma_a^{-1}$;
  2. $\sigma_a^{'}(z) := (\sigma_a)^{'}(z) = \frac{1-|a|^2}{(1-\overline{a}z)^2}, |a| < 1, |z| \leq 1$;
  3. $1 - \sigma_a(z)\overline{\sigma_a(w)} = \frac{(1-|a|^2)(1-z\overline{w})}{(1-z\overline{a})(1-a\overline{w})}$, специјално:
     $$1 - |\sigma_a(z)|^2 = \frac{(1-|a|^2)(1-|z|^2)}{|1-\overline{a}z|^2} = |\sigma_a^{'}(z)|(1-|z|^2).$$
  4. Функција $d_h(a, z) = |\sigma_a(z)|, (a, z \in \mathbb{D})$ је метрика на $\mathbb{D}$ и назива се псеудохиперболичка метрика, за њу важи:
     $$d_h(\sigma(w), \sigma(z)) = d_h(w, z),$$
     за свако σ из групе Мебијусових пресликавања.
  5. Мера $d_\tau(z) = (1-|z|^2)^{-2}$ је Мебијусова инваријанта што значи:
     $$\int_{\mathbb{D}} h \circ \sigma_a d\tau = \int_{\mathbb{D}} h d\tau,$$
     где је $h \geq 0$ мерљива функција на $\mathbb{D}$.

Лема 5.3.2 *Нека* $f \in H^p$ *за свако* $0 < p \leq +\infty$ *онда*

$$|f(z)| \leq (1-|z|^2)^{-\frac{1}{p}}||f||_p$$

и

$$\lim_{r\to 1^-} M_\infty(r,f)(1-r^2)^{\frac{1}{p}} = 0.$$

Доказ.
Претпоставићемо да је $f \in H(\overline{\mathbb{D}})$. Онда је $||f||_p^p = \fint |f|^p dl$. Заменом $\zeta = \sigma_z(\xi)$ добијамо:

$$\begin{aligned} ||f||_p^p &= \fint_{\mathbb{T}} |f(\sigma_z(\xi))|^p |\sigma_z^{'}(\xi)||d\xi| \\ &= \fint_{\mathbb{T}} |f(\sigma_z(\xi))(\sigma_z^{'})(\xi)^{\frac{1}{p}}|^p |d\xi|. \end{aligned}$$

Функција $g(w) = |f(\sigma_z(w))(\sigma_z^{'})(w)^{\frac{1}{p}}|^p$ је холоморфна па важи да је функција $M_p(r,g)$ растућа на [0,1)(на основу последице 5.1.5):

$$\begin{aligned} ||f||_p^p &\geq |f(\sigma_z(0))(\sigma_z)^{'}(0)^{\frac{1}{p}}|^p \\ &= (1-|z|^2)|f|^p. \end{aligned}$$

Једнакост

$$\lim_{r\to 1^-} M_\infty(r,f)(1-r^2)^{\frac{1}{p}} = \lim_{r\to 1^-} \sup_{\theta\in[0,2\pi]} |f(re^{i\theta})|(1-r^2)^{\frac{1}{p}} = 0$$

тривијално важи. ■

Последица 5.3.3 *Нека* $f \in H^p$ *онда:*

$$M_q(r,f) \leq (1-r^2)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}||f||_p, q > p. \tag{5.6}$$

Доказ.
Можемо записати $M_q^q(r,f)$ као:

$$M_q^q(r,f) = \fint_{-\pi}^{\pi} |f(re^{i\theta})|^{q-p}|f(re^{i\theta})|^p d\theta$$

$$\leq \quad (\sup_{\theta} |f(re^{i\theta})|)^{q-p} M_p^p(r, f).$$

Уколико узмемо $q = 1, p < q$, и за r узимамо вредност која је блиска јединици $r = 1 - \frac{1}{n+1}$ онда неједнакост (5.6) постаје:

$$M_1(r, f) \leq (1 - r^2)^{1-\frac{1}{p}} ||f||_p.$$

Наставимо са проценом уз дате услове и лему 5.3.2:

$$\begin{aligned} M_1(r, f) &\leq (\sup_{\theta} |f(re^{i\theta})|)^{1-p} M_p^p(r, f) \\ &\leq ((1 - r^2)^{1-\frac{1}{p}}) ||f||_p, \end{aligned}$$

јер је $p < 1$ па $M_p^p(r, f) \leq ||f||_p = \sup_{r<1} M_p(r, f)$. ■

Закључак

Рад који је управо презентован припада веома популарном делу комплексне анализе. Субхармонијске функције имају јако корисна својства и велику примену.
Овде је акценат био на интегралним срединама субхармонијских функција. Као њихову битну примену навели смо место које оне заузимају у теорији Хардијевих простора. Лепеза примене је далеко шира, као пример можемо навести утицај који оне имају у физици, теорији потенцијала али и у многим другим областима математичке анализе.

Желела бих да се захвалим члановима комисије на свим сугестијама и времену које су издвојили. Највећу захвалност упућујем свом професору и ментору Бобану Карапетровићу на предлогу теме и великој помоћи и разумевању у току израде. Желела бих да се захвалим и професорима са Филолошког факултета (посебно професору Милошу Утвићу и професорки Милици Иконић Нешић) који су имали максималну толеранцију за моје обавезе на мастер студијама а и за сам мастер рад.

Литература

[1] Бобан Карапетровић, *Белешке са предавања курс: Хармонијска анализа 1*, 2022/23.

[2] Бобан Карапетровић, *Белешке са предавања курс: Увод у комплексну анализу*, 2020/21.

[3] Драгољуб Кечкић, *Теорија мере и интеграције*, Универзитет у Београду - Математички факултет, 2019.

[4] Петар Мелентијевић, *Дуалност Хардијевог простора* H^1, мастер рад, 2014.

[5] Мирослав Павловић, *Function Classes on the Unit Disc*, The Deutsche Nationalbibliothek, 2019.

[6] Бранислав Првуловић, *Очигледна топологија*, Универзитет у Београду - Математички факултет, 2022.

[7] Thomas Ransford, *Potential Theory in the Complex Plane*, Cambridge University Press, 2008.