УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ
МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ

Маја Евтимов

РИМАНОВА ТЕОРЕМА И ЊЕНЕ ГЕНЕРАЛИЗАЦИЈЕ

мастер рад

Београд, 2023.

Ментор:

др Марек Светлик, доцент
Универзитет у Београду, Математички факултет

Чланови комисије:

др Миљан Кнежевић, доцент
Универзитет у Београду, Математички факултет

др Владимир Божин, доцент
Универзитет у Београду, Математички факултет

Датум одбране: ____________________

Захваљујем се ментору професору Мареку Светлику на искреним сугестијама и саветима приликом израде овог рада.

Садржај

Глава 1

Увод

Риманова теорема је једна од најзначајнијих теорема 19. века. Чињеница да се сваки просто повезан домен (различит од саме комплексне равни) у комплексној равни може конформно пресликати на отворени јединични диск је од великог значаја.Чувени математичар Бернхард Риман[1] је први који ју је објавио 1851. године у својој дисертацији у Гетингену и покушао је да је докаже, међутим у томе није успео, његов доказ је наишао на бројне замерке. Без обзира на то, у њему су се налазиле важне идеје које ће касније бити главне смернице за будуће доказе ове теореме. Претпостављао је да одређени екстремални проблем мора имати решење, што не мора увек бити случај, и у томе је главна мана његовог доказа. Први валидан доказ је дао амерички математичар Озгуд[2] 1900. године. Озгуд је користио оригиналне Риманове идеје, али је овај доказ ипак много тежи од данашњих модерних доказа ове теореме, јер није имао на располагању Перонов[3] метод за решавање Дирихлеовог[4] проблема. Користио је део-по-део линеарне апроксимације унутрашњости домена и Дирихлеов проблем за такав специјални домен који је Шварц[5] већ решио. Кебе[6] и Каратеодори[7] су око 1910. године објавили доказ ове теореме који конструише тражено пресликавање као граничну вредност неког низа пресликавања. Каратеодори је дао први доказ ове теореме који се ослањао на

[1]Bernhard Riemann (1826 - 1866) - немачки математичар
[2]William Fogg Osgood (1864 - 1943) - амерички математичар
[3]Oskar Perron (1880 - 1975) - немачки математичар
[4]Johhan Dirichlet (1805 - 1859) - немачки математичар
[5]Hermann Schwarz (1843 - 1921) - немачки математичар
[6]Paul Koebe (1882 - 1945) - немачки математичар
[7]Constantin Carathéodory (1873 - 1950) - грчки математичар

теорију функција, притом је користио Монтелову[8] теорему. Иако је Озгудов доказ први валидан доказ ове теореме, он није добио ниједно признање за своје достигнуће, много више пажње је привукао Кебеов доказ, иако се појавио неколико година након Озгудовог. Временом су многи други математичари давали своје верзије доказа, користећи разне методе. На пример, Хилберт[9] је користио варијациони рачун. Први модеран доказ дали су Рис[10] и Фејер[11]. За разлику од Каратеодоријевог, овај доказ говори само о постојању жељеног пресликавања, али не и како оно изгледа. Користили су Монтелову теорију о нормалним фамилијама функција. Стандардни доказ који се данас најчешће користи је управо доказ Фриса и Фејера из 1923. године. Наравно, постоје и новији докази који се заснивају на неким новим појмовима и новим теоријама, нпр. конструктивни доказ који користи геодезијски алгоритам [5]. Идеја је да се, користећи овај алгоритам, конструишу конформна пресликавања из растућег низа домена на јединични диск, а потом да се докаже да тај низ конвергира ка конформном пресликавању уније тих домена у јединични диск.

Постоји више генерализација ове теореме. Поред просто повезаних домена, можемо посматрати и вишеструко повезане домене (домене у комплексној равни чији се комплемент састоји од више компоненти повезаности). На пример, за двоструко повезане домене, чије компоненте повезаности чине барем две тачке, важи да су конформно еквивалентни прстену. То је један специјални случај једне општије теореме о вишеструко повезаним доменима. Поред ове теореме постоји и генерализација на просто повезаним Римановим површима, то је Теорема униформизације. Теорема униформизације нам омогућава да читаву једну класу површи класификујемо. Наиме, она нам каже да просто повезана Риманова површ може бити конформно еквивалентна отвореном јединичном диску у комплексној равни, самој комплексној равни или Римановој сфери. Дакле, читаву једну теорију смо свели само на ова три појма, а који су нам добро познати и са којима је много лакши рад. Теорему униформизације су први доказали, независно један од другог, Кебе и Поенкаре[12] 1907. године.

[8]Paul Montel (1876 - 1975) - француски математичар

[9]David Hilbert (1862 - 1943) - немачки математичар

[10]Frigyes Riesz (1880 - 1956) - мађарски математичар

[11]Lipót Fejér (1880 - 1959) - мађарски математичар

[12]Henri Poincaré (1854 - 1912) - француски математичар и теоријски физичар

Да бисмо могли да формулишемо и потом докажемо, како Риманову теорему, тако и поменуте њене генерализације, најпре ћемо се у овом уводном поглављу подсетити неких најзначајних појмова и теорема комплексне анализе и теорије хармонијских функција, а које ће нам свакако бити од великог значаја касније. Риманова почетна замисао за доказ Риманове теореме се заснивала на решавању Дирихлеовог проблема (иако у његово време он није био решен) и касније је успешно дат доказ заснован на његовим идејама. У другом поглављу ћемо дати стандардни доказ Риманове теореме уз помоћ нормалних фамилија који се најчешће виђа, а потом још један доказ ове теореме који се ослања на решавање Дирихлеовог проблема. У трећем поглављу прелазимо на њене генерализације, на већ поменуте вишеструко повезане домене. У четвртом поглављу ћемо се кратко осврнути на основне појмове везане за Риманове површи, да бисмо након тога дошли до Теореме униформизације. На самом крају ћемо споменути и неке примене Риманове теореме.

Аналитичке функције

Дефиниција 1.0.1. *Нека је $f : D \to \mathbb{C}$, где је D домен*[13] *у $\mathbb{C}$, и $z_0 \in D$. Ако постоји коначна гранична вредност*

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \tag{1.1}$$

кажемо да f има (комплексни) извод у z_0 и граничну вредност (1.1) означавамо са $f'(z_0)$. Ако извод функције f постоји у свакој тачки $z_0 \in D$ кажемо да је функција f аналитичка на D, док је f аналитичка у тачки z_0 ако је аналитичка на околини тачке z_0.

Следећа теорема нам даје критеријум када је функција аналитичка.

Теорема 1.0.1. *Нека је D домен у $\mathbb{C}$ и $f : D \to \mathbb{C}$ аналитичка на D дата са $f = u + iv$, где су $u = \mathrm{Re}f$ и $v = \mathrm{Im}v$. Тада важи $f' = f_x = -if_y$, где су $f_x = u_x + iv_x$ и $f_y = u_y + iv_y$, односно важе Коши-Риманови услови $u_x = v_y$, $u_y = -v_x$ у домену D. Додатно, ако је $f = u + iv$, где су $u, v : D \to \mathbb{R}$ непрекидно-диференцијабилне функције на D и важе Коши-Риманови услови у D, онда је f аналитичка на D.*

1.1 Просто повезани домени

Непрекидну функцију $\gamma : [0, 1] \to D$ називамо кривом у домену $D \subset \mathbb{C}$. Крива је проста ако за свако $t_1, t_2 \in [0, 1]$, где је $t_1 \neq t_2$ важи $\gamma(t_1) \neq \gamma(t_2)$, тј. ако нема самопресецања. Ако је $\gamma(0) = \gamma(1)$ онда је крива затворена. Кажемо да је крива γ глатка крива уколико је функција $\gamma : [0, 1] \to D$ глатка, а део-по-део глатка крива ако постоји подела $0 < t_1 < \cdots < t_n < 1$ сегмента $[0, 1]$ таква да је непрекидно пресликавање γ непрекидно диференцијабилно на сегментима $[0, t_1], [t_1, t_2], ..., [t_n, 1]$.

Дефиниција 1.1.1. *Нека су дате две криве $\gamma_1, \gamma_2 : [0, 1] \to D$, где је $D \subset \mathbb{C}$ домен, такве да је $\gamma_1(0) = \gamma_2(0) = z_0$ и $\gamma_1(1) = \gamma_2(1) = z_1$. Кажемо да су криве γ_1 и γ_2 хомотопне са фиксираним крајњим тачкама у D ако постоји непрекидна функција $H : [0, 1] \times [0, 1] \to D$ таква да је*

1. *$H(0, t) = \gamma_1(t)$ за свако $t \in [0, 1]$,*

[13] Домен је непразан, отворен и повезан скуп у $\mathbb{C}$.

2. $H(1,t) = \gamma_2(t)$ *за свако* $t \in [0,1]$*,*

3. $H(s,0) = z_0$ *за свако* $s \in [0,1]$ *и*

4. $H(s,1) = z_1$ *за свако* $s \in [0,1]$*.*

Дефиниција 1.1.2. *Нека су дате две затворене криве* $\gamma_1, \gamma_2 : [0,1] \to D$*, где је* $D \subset \mathbb{C}$ *домен. Кажемо да су криве* γ_1 *и* γ_2 *хомотопне као затворене криве у* D *ако постоји непрекидна функција* $H : [0,1] \times [0,1] \to D$ *таква да је*

1. $H(0,t) = \gamma_1(t)$ *за свако* $t \in [0,1]$*,*

2. $H(1,t) = \gamma_2(t)$ *за свако* $t \in [0,1]$ *и*

3. $H(s,0) = H(s,1)$ *за свако* $s \in [0,1]$*.*

Дефиниција 1.1.3. *Домен* $D \subset \mathbb{C}$ *је просто повезан ако је свака затворена крива* γ *у* D *хомотопна као затворена крива некој константној кривој у* D*, односно тачки у* D*.*

Теорема 1.1.1 (Гринова[14] теорема)**.** *Нека је* γ *део-по-део глатка, проста затворена крива која ограничава домен* D *у* $\mathbb{C}$*. Нека је* $U \subset \mathbb{C}$ *отворен скуп такав да је* $D \subset U$ *и функције* $P : U \to \mathbb{R}$ *и* $Q : U \to \mathbb{R}$ *имају непрекидне парцијалне изводе првог реда. Тада је*

$$\int_\gamma (Pdy - Qdx) = \iint_D \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \right) dxdy,$$

при чему је γ *позитивно оријентисана.*

Теорема 1.1.2 (Кошијева[15] теорема)**.** *Нека је* D *просто повезан домен у* $\mathbb{C}$ *и* $f : D \to \mathbb{C}$ *аналитичка функција на* D*. Тада је*

$$\int_\gamma f(z)dz = 0 \tag{1.2}$$

за сваку просту затворену део-по-део глатку криву γ *у* D*.*

Поред ове верзије Кошијеве теореме постоји и њена општија верзија.

[14] George Green (1793 - 1841) - британски математичар и физичар

[15] Augustin-Louis Cauchy (1789 - 1857) - француски математичар, физичар и инжењер

Теорема 1.1.3. *Нека је $D \subset \mathbb{C}$ ограничен домен чија се граница састоји од коначно много простих затворених део-по-део глатких кривих и $f : D \to \mathbb{C}$ аналитичка функција на D, која се проширује до непрекидне функције на $\overline{D}$. Тада је*

$$\int_{\partial D} f(z)dz = 0,$$

при чему је граница ∂D позитивно оријентисана.

Доказ Кошијеве теореме 1.1.2. Најпре ћемо доказати теорему у специјалном случају када је f' непрекидна функција. Нека је $\mathrm{Re} f = u$, $\mathrm{Im} f = v$, $\gamma : [0,1] \to D$ проста затворена део-по-део глатка крива таква да је $\gamma(t) = \alpha(t) + i\beta(t)$ и $U = \mathrm{int}\gamma$. Тада важи

$$\begin{aligned}
\int_\gamma f(z)dz &= \int_0^1 f(\gamma(t))\gamma'(t)dt = \int_0^1 \Big[u(\gamma(t)) + iv(\gamma(t))\Big](\alpha'(t) + i\beta'(t))dt \\
&= \int_0^1 \Big[u(\gamma(t))\alpha'(t) - v(\gamma(t))\beta'(t)\Big]dt + i\int_0^1 \Big[v(\gamma(t))\alpha'(t) + u(\gamma(t))\beta'(t)\Big]dt \\
&= \int_\gamma (udx - vdy) + i\int_\gamma (vdx + udy) \\
&= \int_\gamma [-(vdy - udx)] + i\int_\gamma [udy - (-vdx)] \\
&= \iint_U (-v_x - u_y)dxdy + i\iint_U (u_x - v_y)dxdy \qquad (1.3) \\
&= 0. \qquad (1.4)
\end{aligned}$$

У (1.3) смо искористили Гринову теорему 1.1.1, уз додатну претпоставку да је f' непрекидна функција, док смо у (1.4) искористили Коши-Риманове услове. Тиме смо доказали да (1.2) важи под додатном претпоставком да је f' непрекидна функција.

Сада желимо да се ослободимо ове претпоставке. Претпоставимо да је $\gamma = \partial\Delta$, где је Δ троугао у $\mathbb{C}$. Докажимо да је $\int_{\partial\Delta} f(z)dz = 0$. Поделимо троугао Δ на четири троугла Δ_j, $j = 1,2,3,4$, спајањем средишта његових страница. Тада је

$$\int_{\partial\Delta} f(z)dz = \sum_{j=1}^{4} \int_{\partial\Delta_j} f(z)dz.$$

Означимо $I = \int_{\partial\Delta} f(z)dz$ и $I_j = \int_{\partial\Delta_j} f(z)dz$. Тада је $|I| \leq \sum_{j=1}^{4} |I_j|$. Нека је Δ^1 троугао такав да је $|I^1| = \max\limits_{1\leq j\leq 4} |I_j|$ и $|I^1| \geq \frac{|I|}{4}$, где је $I^1 = \int_{\partial\Delta^1} f(z)dz$. Сада ћемо поновити поступак, поделићемо троугао Δ^1 на троуглове Δ_j^1, $j = 1, 2, 3, 4$ и изабраћемо троугао Δ^2 такав да је $|I^2| \geq \frac{|I^1|}{4} \geq \frac{|I|}{4^2}$, где је $I^2 = \int_{\partial\Delta^2} f(z)dz$. Настављањем овог поступка, добијамо низ троуглова $\Delta = \Delta^0 \supset \Delta^1 \supset \Delta^2 \supset \cdots$ и интеграла I^n тако да важи $|I^n| \geq \frac{|I^{n-1}|}{4} \geq \cdots \geq \frac{|I|}{4^n}$, за свако $n \in \mathbb{N}$.
Приметимо да је дужина $\ell(\partial\Delta^n)$ дата са

$$\ell(\partial\Delta^n) = \frac{1}{2}\ell(\partial\Delta^{n-1}) = \cdots = \frac{1}{2^n}\ell(\partial\Delta^0), \tag{1.5}$$

па је $\lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{diam}\Delta^n = 0$. Из Канторове теореме 1.1.4 следи да је $\bigcap\limits_{n=0}^{\infty} \Delta^n = \{z_0\}$.
Како је f аналитичка у z_0,

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + \mathcal{O}(z)(z - z_0),$$

при чему је $\lim\limits_{z\to z_0} \mathcal{O}(z) = 0$. Доказали смо да теорема важи под претпоставком да подинтегрална функција има непрекидне изводе првог реда, па је $\int_{\partial\Delta^n} 1\, dz = 0$ и $\int_{\partial\Delta^n}(z - z_0)dz = 0$. Одатле следи да је

$$\int_{\partial\Delta^n} f(z)dz = \int_{\partial\Delta^n} \mathcal{O}(z)(z - z_0)dz.$$

Како је $\lim\limits_{z\to z_0} \mathcal{O}(z) = 0$, за свако $\varepsilon > 0$ постоји $\delta > 0$ такво да је $|\mathcal{O}(z)| < \frac{2}{\ell^2(\partial\Delta)}\varepsilon$, док је $|z - z_0| < \delta$.
Нека је $n \in \mathbb{N}$ такво да $\partial\Delta^n$ припада околини $|z - z_0| < \delta$. За свако $z \in \partial\Delta^n$ је $|z - z_0| < \frac{1}{2}\ell(\partial\Delta^n)$, односно из (1.5) следи да је $|z - z_0| < \frac{1}{2^{n+1}}\ell(\partial\Delta)$, за свако $z \in \partial\Delta^n$. Тада важи

$$\begin{aligned}\left|\int_{\partial\Delta} f(z)dz\right| &\leq 4^n\left|\int_{\partial\Delta^n} f(z)dz\right| = 4^n\left|\int_{\partial\Delta^n} \mathcal{O}(z)(z - z_0)dz\right| \\ &\leq 4^n \int_{\partial\Delta^n} |\mathcal{O}(z)||z - z_0||dz| < 4^n \frac{2\varepsilon}{\ell^2(\partial\Delta)} \frac{\ell(\partial\Delta)}{2^{n+1}}\ell(\partial\Delta^n) \\ &= 2^n \frac{\varepsilon}{\ell(\partial\Delta)} \frac{\ell(\partial\Delta)}{2^n} = \varepsilon.\end{aligned}$$

Дакле, $\int_{\partial\Delta} f(z)dz = 0$.

Сада претпоставимо да је крива γ полигонална линија полигона C. Тада такође важи $\int_{\partial C} f(z)dz = 0$. Заиста, полигон C можемо поделити на коначан број троуглова и применом претходног добијамо

$$\int_{\partial C} f(z)dz = \sum_{j=1}^{n} \int_{\partial \Delta_j} f(z)dz = 0.$$

Коначно, вратимо се претпоставци теореме, нека је γ проста затворена део-по--део глатка крива. Ту криву можемо апроксимирати полигоналном линијом ∂C_n. Тада је разлика интеграла $\int_\gamma f(z)dz$ и $\int_{\partial C_n} f(z)dz$ мала када $n \to \infty$. Дакле, $\int_\gamma f(z)dz = 0$, што је и требало доказати. □

У доказу претходне теореме смо искористили следећу теорему.

Теорема 1.1.4 (Канторова[16] теорема)**.** *Нека је X комплетан[17] метрички простор и $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ низ непразних затворених подскупова у X такав да важи*

1. *$S_n \supset S_{n+1}$, за свако $n \in \mathbb{N}$ и*
2. *$\lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{diam} S_n = 0$.*

Тада се $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} S_n$ састоји од само једне тачке.

Теорема 1.1.5. *Нека је $f : D \to \mathbb{C}$ аналитичка функција на просто повезаном домену $D \subset \mathbb{C}$ и криве $\gamma_1, \gamma_2 \in D$ просте део-по-део глатке са истим почетним и крајњим тачкама. Тада је*

$$\int_{\gamma_1} f(z)dz = \int_{\gamma_2} f(z)dz. \tag{1.6}$$

Доказ. Посматрајмо криву $\gamma = \gamma_2 - \gamma_1$. Тада из Кошијеве теореме 1.1.2 добијамо

$$\int_\gamma f(z)dz = 0.$$

Како је

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_{\gamma_2} f(z)dz - \int_{\gamma_1} f(z)dz,$$

онда је

$$\int_{\gamma_2} f(z)dz - \int_{\gamma_1} f(z)dz = 0,$$

па важи (1.6). □

[16]Georg Cantor (1845 - 1918) - немачки математичар

[17]За метрички простор кажемо да је комплетан ако у њему сваки Кошијев низ конвергира.

Дефиниција 1.1.4. *Нека је $f : D \to \mathbb{C}$ непрекидна функција на домену D у $\mathbb{C}$. Примитивна функција функције f је аналитичка функција $F : D \to \mathbb{C}$ таква да је $F'(z) = f(z)$ за свако $z \in D$.*

Теорема 1.1.6. *Нека је D просто повезан домен у $\mathbb{C}$ и $f : D \to \mathbb{C}$ аналитичка функција на D. Тада постоји примитивна функција функције f у D.*

Доказ. Нека је $a \in D$ фиксирана тачка у D. Дефинишимо функцију $F : D \to \mathbb{C}$ са

$$F(z) = \int_\gamma f(\zeta)d\zeta,$$

где је γ крива у D која спаја тачке a и $z \in D$, односно таква да је $\gamma(0) = a$ и $\gamma(1) = z$. Функција F је добро дефинисана, јер према Теореми 1.1.5 интеграл не зависи од избора криве.

Доказаћемо да је F примитивна функција функције f на D. Треба проверити да $F'(z)$ постоји у свакој тачки $z \in D$ и да је $F'(z) = f(z)$ за свако $z \in D$. Нека је $z_0 \in D$. Функција f је непрекидна у z_0 и D је отворен, па за свако $\varepsilon > 0$ постоји $\delta > 0$ такво да је $B(z_0, \delta) \subset D$ и за свако $z \in D$ такво да је $|z - z_0| < \delta$ важи $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$. Нека је γ крива која спаја тачку a са тачком z_0 и за произвољно $z \in B(z_0, \delta)$, нека је $\gamma_z = \gamma + [z_0, z]$, односно γ_z је крива добијена спајањем криве γ и дужи са крајњим тачакама z_0 и z. Како је

$$\frac{F(z) - F(z_0)}{z - z_0} = \frac{1}{z - z_0}\left(\int_{\gamma_z} f(\zeta)d\zeta - \int_\gamma f(\zeta)d\zeta\right) = \frac{1}{z - z_0}\int_{[z,z_0]} f(\zeta)d\zeta$$

онда је

$$\begin{aligned}
\left|\frac{F(z) - F(z_0)}{z - z_0} - f(z_0)\right| &= \left|\frac{1}{z - z_0}\int_{[z,z_0]}(f(\zeta) - f(z_0))d\zeta\right| \\
&\leq \frac{1}{|z - z_0|}\int_{[z,z_0]}|f(\zeta) - f(z_0)||d\zeta| \\
&\leq \frac{1}{|z - z_0|}\max_{\zeta\in[z,z_0]}|f(\zeta) - f(z_0)|\int_{[z,z_0]}|d\zeta| \\
&= \frac{1}{|z - z_0|}\cdot|f(z) - f(z_0)|\cdot|z - z_0| \\
&= |f(z) - f(z_0)| \\
&< \varepsilon.
\end{aligned}$$

Одатле добијамо да је $\lim\limits_{z\to z_0}\dfrac{F(z)-F(z_0)}{z-z_0}=f(z_0)$, односно $F'(z)$ постоји за свако $z\in D$, па је F аналитичка на D и $F'(z)=f(z)$ за свако $z\in D$. Дакле, F је заиста примитивна функција од f у D. $\square$

Теорема 1.1.7. *Нека је D просто повезан домен у $\mathbb{C}$ и $f:D\to\mathbb{C}$ аналитичка функција на D таква да је $f(z)\neq 0$ за свако $z\in D$. Тада постоји аналитичка функција $g(z)$ таква да је $f(z)=e^{g(z)}$.*

Доказ. Функција $\frac{f'}{f}$ је аналитичка на D, јер је $f(z)\neq 0$, за свако $z\in D$. Према претходној Теореми 1.1.6 постоји примитивна функција φ функције $\frac{f'}{f}$ на D. С обзиром да је

$$\begin{aligned}(fe^{-\varphi})'(z)&=f'(z)e^{-\varphi(z)}-f(z)e^{-\varphi(z)}\varphi'(z)\\&=f'(z)e^{-\varphi(z)}-f(z)e^{-\varphi(z)}\frac{f'(z)}{f(z)}\\&=0,\end{aligned}$$

постоји $c\in\mathbb{C}\backslash\{0\}$ такво да је $f(z)e^{-\varphi(z)}=c$, за свако $z\in D$, односно постоји $c_0\in\mathbb{C}$ такво да је

$$f(z)=c\,e^{\varphi(z)}=e^{c_0}e^{\varphi(z)}=e^{c_0+\varphi(z)},$$

за свако $z\in D$.

Закључујемо да постоји аналитичка функција $g(z)$ на D таква да је $f(z)=e^{g(z)}$, за свако $z\in D$, односно, $g(z)=c_0+\varphi(z)$, при чему је φ примитивна функција функције $\frac{f'}{f}$.

$\square$

Функцију g добијену у претходној теореми називамо аналитичком граном логаритма функције f у D и пишемо $g(z)=\log f(z)$.

Последица 1.1.1. *Нека је D просто повезан домен у $\mathbb{C}$ и $f:D\to\mathbb{C}$ аналитичка функција на D таква да је $f(z)\neq 0$ за свако $z\in D$. Тада постоји аналитичка функција $g(z)$ таква да је $f(z)=g(z)^2$.*

Доказ. Применом претходне Теореме 1.1.7 на функцију $f(z)$ добијамо аналитичку функцију $h(z)$ на D такву да је $f(z)=e^{h(z)}$. Дефинишимо функцију $g(z)$ на D са

$$g(z)=e^{\frac{h(z)}{2}}.$$

Она је очигледно аналитичка на D и важи

$$g^2(z) = \left(e^{\frac{h(z)}{2}}\right)^2 = e^{h(z)} = f(z),$$

па је $g(z)$ тражена функција. $\square$

Функција g добијена у претходној последици је аналитичка грана корене функције и означавамо је са $g(z) = \sqrt{f(z)}$.

Следећи појам нам омогућава да дођемо до критеријума када се аналитичка функција у околини неке тачке домена може проширити до аналитичке функције на читавом домену.

Дефиниција 1.1.5. *Нека је $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$ крива и $f_0 : D \to \mathbb{C}$, где је $D \subset \mathbb{C}$, аналитичка функција у околини тачке $\gamma(0)$. Тада је аналитичко продужење дуж криве γ коначан низ функција $f_1, ..., f_n$ таквих да је f_j дефинисана и аналитичка у околини $\gamma([t_j, t_{j+1}])$, $j = 0, ..., n$ и $f_j = f_{j+1}$ у околини $\gamma(t_{j+1})$, $j = 0, ..., n-1$, при чему је $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_{n+1} = 1$ подела сегмента $[0,1]$.*

Теорема 1.1.8 (Теорема монодромије)**.** *Нека је $D \subset \mathbb{C}$ просто повезан домен у $\mathbb{C}$, $z_0 \in D$ и $f_0 : D \to \mathbb{C}$ аналитичка у околини тачке z_0. Ако се f_0 може аналитички продужити дуж сваке криве са почетком у z_0, онда постоји аналитичка функција $f : D \to \mathbb{C}$ на D таква да је $f = f_0$ у околини тачке z_0.*

Кошијева интегрална формула и њене последице

Теорема 1.1.9 (Кошијева интегрална формула)**.** *Нека је γ проста затворена део-по-део глатка и позитивно оријентисана крива. Ако је $f : D \to \mathbb{C}$ аналитичка на просто повезаном домену $D \subset \mathbb{C}$ који садржи γ и тачку $z_0 \in \mathrm{int}\gamma$, онда је*

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{z - z_0} dz. \tag{1.7}$$

Доказ. Функција $\dfrac{f(z)}{z-z_0}$ је аналитичка на $D \backslash \{z_0\}$, па је према Кошијевој теореми 1.1.2

$$\int_\gamma \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \int_{\gamma_r} \frac{f(z)}{z - z_0} dz,$$

где је $\gamma_r = \partial B(z_0, r)$, за неко $r > 0$. Даље важи

$$\begin{aligned}\int_{\gamma_r} \frac{f(z)}{z-z_0}dz &= \int_{\gamma_r} \frac{f(z_0)}{z-z_0}dz + \int_{\gamma_r} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}dz \\ &= 2\pi i f(z_0) + \int_{\gamma_r} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}dz.\end{aligned}$$

Узимајући лимес када $r \to 0^+$ добијамо

$$\int_{\gamma} \frac{f(z)}{z-z_0}dz = 2\pi i f(z_0) + \lim_{r\to 0^+} \int_{\gamma_r} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}dz. \tag{1.8}$$

Означимо $M_r = \max\limits_{z\in\gamma_r} |f(z) - f(z_0)|$. Тада је

$$\left|\int_{\gamma_r} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}dz\right| \le \int_{\gamma_r} \left|\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\right||dz| \le \frac{M_r}{r}2\pi r = 2\pi M_r.$$

Како је $\lim\limits_{r\to 0^+} M_r = 0$, имамо да је

$$\lim_{r\to 0^+} \int_{\gamma_r} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}dz = 0,$$

тј. из (1.8) следи

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} \frac{f(z)}{z-z_0}dz.$$

□

Теорема 1.1.10. *Нека је $f : D \to \mathbb{C}$ аналитичка на просто повезаном домену $D \subset \mathbb{C}$. Тада је*

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i}\int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz, \tag{1.9}$$

за свако $n \in \mathbb{N}_0$, при чему је γ проста затворена део-по-део глатка и позитивно оријентисана крива у D и $z_0 \in \mathrm{int}\gamma$.

Доказ. Означимо $F_n(z_0) = \int_\gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)^n}dz$ и докажимо да је $f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i}F_{n+1}(z_0)$. Доказаћемо индукцијом.

Покажимо да је $F_1'(z_0) = F_2(z_0)$. Нека је $z \in D$ такво да је $|z - z_0| < \frac{\delta}{2}$. Тада је $|\zeta - z| > \frac{\delta}{2}$ за свако $\zeta \in \gamma$, па је

$$\begin{aligned}|F_1(z) - F_1(z_0)| &= \left|\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta - \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0}d\zeta\right| \\ &= \left|(z-z_0)\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)(\zeta-z_0)}d\zeta\right| \\ &< |z-z_0|\frac{2}{\delta^2}\int_\gamma |f(\zeta)||d\zeta|,\end{aligned}$$

односно F_1 је непрекидна функција у z_0. Одатле следи

$$F_1'(z_0) = \lim_{z\to z_0}\frac{F_1(z)-F_1(z_0)}{z-z_0} = \lim_{z\to z_0}\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)(\zeta-z_0)}d\zeta$$
$$= \int_\gamma \lim_{z\to z_0}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)(\zeta-z_0)}d\zeta = \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^2}d\zeta.$$

Дакле, $F_1'(z_0)=F_2(z_0)$ и $f'(z_0)=\frac{1}{2\pi i}F_1'(z_0)=\frac{1}{2\pi i}F_2(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)^2}dz$.

Претпоставимо да важи индукцијска хипотеза $F_{n-1}'(z_0)=(n-1)F_n(z_0)$ и докажимо $F_n'(z_0)=nF_{n+1}(z_0)$.

$$F_n(z)-F_n(z_0) = \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^n}d\zeta - \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^n}d\zeta$$
$$= \int_\gamma \frac{\frac{f(\zeta)}{\zeta-z_0}}{(\zeta-z)^{n-1}}d\zeta - \int_\gamma \frac{\frac{f(\zeta)}{\zeta-z_0}}{(\zeta-z_0)^{n-1}}d\zeta$$
$$+ (z-z_0)\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^n(\zeta-z_0)}d\zeta$$

Означимо $G_{n-1}(z)=\int_\gamma \frac{\frac{f(\zeta)}{\zeta-z_0}}{(\zeta-z)^{n-1}}d\zeta$ и $G_{n-1}(z_0)=\int_\gamma \frac{\frac{f(\zeta)}{\zeta-z_0}}{(\zeta-z_0)^{n-1}}d\zeta$. Дељењем са $z-z_0$ и узимањем лимеса када $z\to z_0$ добијамо

$$\lim_{z\to z_0}\frac{F_n(z)-F_n(z_0)}{z-z_0} = \lim_{z\to z_0}\frac{G_{n-1}(z)-G_{n-1}(z_0)}{z-z_0} + \lim_{z\to z_0}\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^n(\zeta-z_0)}d\zeta$$
$$= G_{n-1}'(z_0) + \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}d\zeta$$
$$= G_{n-1}'(z_0) + F_{n+1}(z_0).$$

Применом индукцијске хипотезе на G_{n-1} (уместо функције f имамо функцију $\frac{f(\zeta)}{\zeta-z_0}$) добијамо да је $G_{n-1}'(z_0)=(n-1)G_n(z_0)$, односно

$$F_n'(z_0) = (n-1)G_n(z_0)+F_{n+1}(z_0) = (n-1)\int_\gamma \frac{\frac{f(\zeta)}{\zeta-z_0}}{(\zeta-z_0)^n}d\zeta + F_{n+1}(z_0)$$
$$= (n-1)\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}d\zeta + F_{n+1}(z_0) = (n-1)F_{n+1}(z_0)+F_{n+1}(z_0)$$
$$= nF_{n+1}(z_0).$$

Дакле,

$$f^{(n)}(z_0) = (f^{(n-1)})'(z_0) = \frac{(n-1)!}{2\pi i}F_n'(z_0) = \frac{(n-1)!}{2\pi i}nF_{n+1}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz.$$

□

Теорема 1.1.11 (Кошијеве неједнакости)**.** *Нека је f аналитичка функција на околини $B(z_0, r)$ у $\mathbb{C}$ за неко $r > 0$. Ако је $|f(z)| \le M$ за свако $z \in \partial B(z_0, r)$, онда је*

$$\left|f^{(m)}(z_0)\right| \le \frac{m!}{r^m} M, \quad m \in \mathbb{N}_0. \tag{1.10}$$

Доказ. Применом Теореме 1.1.10 добијамо

$$\begin{aligned} f^{(m)}(z_0) = \frac{m!}{2\pi i} \int_{\partial B(z_0,r)} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{m+1}} dz &= \frac{m!}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + re^{i\theta})}{r^{m+1} e^{i(m+1)\theta}} (ire^{i\theta}) d\theta \\ &= \frac{m!}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + re^{i\theta})}{r^m e^{im\theta}} d\theta \end{aligned}$$

Тада је

$$\left|f^{(m)}(z_0)\right| \le \frac{m!}{2\pi r^m} \int_0^{2\pi} |f(z_0 + re^{i\theta})| d\theta \le \frac{m!}{2\pi r^m} 2\pi M = \frac{m!}{r^m} M.$$

□

Теорема 1.1.12 (Лиувилова[18] теорема)**.** *Нека је f аналитичка функција на $\mathbb{C}$.[19] Ако је f ограничена на $\mathbb{C}$, онда је f константна.*

Доказ. Нека је f ограничена са $M \ge 0$, односно $|f(z)| \le M$, за свако $z \in \mathbb{C}$. Применимо Кошијеве неједнакости 1.1.11 на диск $B(z_0, r)$, где је $r > 0$. Тада добијамо

$$\left|f^{(m)}(z_0)\right| \le \frac{m!}{r^m} M, \quad m \in \mathbb{N}_0.$$

Специјално, за $m = 1$ важи

$$|f'(z_0)| \le \frac{M}{r}.$$

Ако $r \to +\infty$, онда је $|f'(z_0)| = 0$, па је $f'(z_0) = 0$. Ово важи за било које $z_0 \in \mathbb{C}$, па је $f' \equiv 0$, односно f је константна функција. □

1.2 Теорема о резидумима и Принцип аргумента

Нека је $z_0 \in \mathbb{C}$ и $0 \le r_1 < r_2 \le \infty$. Прстен $A(z_0, r_1, r_2)$ у $\mathbb{C}$ са центром у тачки z_0 и полупречницима r_1 и r_2 је дат са $A(z_0, r_1, r_2) = \{z \in \mathbb{C} \,:\, r_1 < |z - z_0| < r_2\}$.

[18] Joseph Liouville (1809 - 1882) - француски математичар

[19] Такве функције називамо **целим**. Полиноми, e^z, $\cos z$, $\sin z$, $\cosh z$, $\sinh z$ су примери таквих функција.

Теорема 1.2.1 (Лоранов[20] развој). *Нека је $f : A(z_0, r_1, r_2) \to \mathbb{C}$ аналитичка функција на прстену $A(z_0, r_1, r_2) \subset \mathbb{C}$. Тада важи*

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \tag{1.11}$$

за свако $z \in A(z_0, r_1, r_2)$, где је

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_\rho} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz,$$

за свако $n \in \mathbb{Z}$, при чему је γ_ρ позитивно оријентисана кружница са центром у z_0 полупречника $\rho \in (r_1, r_2)$.

Нека је f аналитичка функција на $B(z_0, r) \backslash \{z_0\}$. Тада за тачку z_0 кажемо да је **изоловани сингуларитет**. Пробушени диск се може видети као прстен $A(z_0, 0, r)$, те функција f има Лоранов развој

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n,$$

за све $z \in A(z_0, 0, r)$, где су a_n, $n \in \mathbb{Z}$ одговарајући коефицијенти. Кажемо да је изоловани сингуларитет z_0 функције f **отклоњив** ако је $a_n = 0$ за све $n < 0$. Тада је f аналитичка на $B(z_0, r)$ и $f(z_0) = a_0$.
Коефицијент a_{-1} називамо **резидумом** функције f у тачки z_0 и означавамо са $\mathrm{Res}(f; z_0)$.

Теорема 1.2.2 (Кошијева теорема о резидумима). *Нека је $D \subset \mathbb{C}$ домен, γ позитивно оријентисана проста затворена део-по-део глатка крива у D, тачке $z_1, ..., z_n \in \mathrm{int}\gamma$ и $f : D \backslash \{z_1, ..., z_n\} \to \mathbb{C}$ аналитичка функција. Тада је*

$$\int_\gamma f(z) dz = 2\pi i \sum_{j=1}^{n} \mathrm{Res}(f; z_j). \tag{1.12}$$

Доказ. Нека су $\partial B(z_j, r_j)$, $j = 1, ..., n$, међусобно дисјунктни позитивно оријентисани кругови са центром у z_j, $j = 1, ..., n$, који припадају $\mathrm{int}\gamma$. Тада је

$$\int_\gamma f(z) dz = \sum_{j=1}^{n} \int_{\partial B(z_j, r_j)} f(z) dz.$$

[20]Pierre Alphonse Laurent (1813 - 1854) - француски математичар, инжењер и војни официр

Пробушене дискове $B(z_j, r_j)\backslash\{z_j\}$ видимо као прстене $A(z_j, 0, r_j)$, па како је f на њима аналитичка, према Теореми 1.2.1 има Лоранов развој

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k (z - z_j)^k,$$

за свако $z \in A(z_j, 0, r_j)$. Одатле имамо да је

$$\int_{\gamma_j} f(z)dz = \int_{\gamma_j} \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k (z-z_j)^k dz = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \int_{\gamma_j} (z-z_j)^k dz = 2\pi i a_{-1} = 2\pi i \operatorname{Res}(f; z_j),$$

при чему су γ_j, $j = 1, ..., n$, позитивно оријентисани кругови са центром у z_j, $j = 1, ..., n$, полупречника мањег од r_j. Тада је

$$\int_{\gamma} f(z)dz = 2\pi i \sum_{j=1}^{n} \operatorname{Res}(f; z_j).$$

$\square$

Дефиниција 1.2.1. *За функцију $f : D \to \mathbb{C}$ која је аналитичка на D, осим у половима на D, кажемо да је* <u>*мероморфна*</u> *на D.*

Теорема 1.2.3 (Принцип аргумента)**.** *Нека је $f(z)$ мероморфна функција на домену $D \subset \mathbb{C}$ са нулама a_j, $1 \leq j \leq m_1$ и половима b_k, $1 \leq k \leq m_2$ који не припадају простој затвореној део-по-део глаткој кривој γ која је позитивно оријентисана на D. Тада важи*

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = N_f - P_f, \tag{1.13}$$

где је N_f (P_f) број нула (полова), рачунајући мултиплицитет, функције f који припадају $\operatorname{int}\gamma$*.*

Доказ. Нека је $r > 0$ довољно мало тако да су $B(a_j, r)$ и $B(b_k, r)$ садржане у D. Означимо са $D' = D\backslash\left(\bigcup_{j=1}^{m_1} B(a_j, r) \cup \bigcup_{k=1}^{m_2} B(b_k, r)\right)$. Функција $\frac{f'(z)}{f(z)}$ је аналитичка на D'. Применом Теореме 1.1.3 добијамо да је $\int_{\partial D'} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = 0$, а што је еквивалентно са

$$\int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \sum_{j=1}^{m_1} \int_{\partial B(a_j, r)} \frac{f'(z)}{f(z)} dz + \sum_{k=1}^{m_2} \int_{\partial B(b_k, r)} \frac{f'(z)}{f(z)} dz. \tag{1.14}$$

За фиксирано $1 \leq j \leq m_1$ израчунајмо $\int_{\partial B(a_j,r)} \frac{f'(z)}{f(z)} dz$. Нека је a_j нула реда p_j. Тада је

$$f(z) = (z - a_j)^{p_j} g(z), \tag{1.15}$$

при чему је $g(a_j) \neq 0$. Диференцирањем обе стране једначине (1.15) добијамо

$$f'(z) = p_j (z - a_j)^{p_j - 1} g(z) + (z - a_j)^{p_j} g'(z). \tag{1.16}$$

Дељењем једначине (1.16) једначином (1.15) добијамо

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{p_j}{z - a_j} + \frac{g'(z)}{g(z)}. \tag{1.17}$$

Применом Кошијеве теореме о резидумима 1.2.2 на функцију $\frac{f'(z)}{f(z)}$ долазимо до

$$\int_{\partial B(a_j,r)} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = 2\pi i p_j.$$

Сада ћемо фиксирати пол $1 \leq b_k \leq m_2$ и израчунати $\int_{\partial B(b_k,r)} \frac{f'(z)}{f(z)} dz$. Нека је b_k пол реда q_k. Тада је

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z - b_k)^{q_k}}, \tag{1.18}$$

при чему је g аналитичка на $B(b_k, r)$ и различита од нуле. Диференцирањем обе стране једначине (1.18) добијамо

$$f'(z) = -q_k \frac{g(z)}{(z - b_k)^{q_k + 1}} + \frac{g'(z)}{(z - b_k)^{q_k}}. \tag{1.19}$$

Дељењем једначине (1.19) једначином (1.18) добијамо

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = -\frac{q_k}{z - b_k} + \frac{g'(z)}{g(z)}. \tag{1.20}$$

Применом Кошијеве теореме о резидумима 1.2.2 на функцију $\frac{f'(z)}{f(z)}$ долазимо до

$$\int_{\partial B(b_k,r)} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = 2\pi i(-q_k).$$

Једначина (1.14) сада постаје

$$\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \sum_{j=1}^{m_1} (2\pi i p_j) + \sum_{k=1}^{m_2} (2\pi i(-q_k)) = 2\pi i \left(\sum_{j=1}^{m_1} p_j - \sum_{k=1}^{m_2} q_k \right) = 2\pi i (N_f - P_f).$$

□

1.3 Нормалне фамилије

Дефиниција 1.3.1. *Нека је $D \subset \mathbb{C}$ домен. Низ комплексно-вредносних функција $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ на D униформно конвергира на компактима у D ка функцији f ако за сваки компакт $K \subset D$ и свако $\varepsilon > 0$ постоји $n_0 \in \mathbb{N}$ такво да за свако $z \in K$ и свако $n \geq n_0$ важи $|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon$.*

Дефиниција 1.3.2. *Нека је $\mathcal{F}$ фамилија комплексно-вредносних функција на домену $D \subset \mathbb{C}$. Кажемо да је фамилија $\mathcal{F}$ еквинепрекидна ако за свако $\varepsilon > 0$ постоји $\delta > 0$ такво да за свако $f \in \mathcal{F}$ и све $z, w \in D$ такве да је $|z - w| < \delta$ важи $|f(z) - f(w)| < \varepsilon$.*

Дефиниција 1.3.3. *Нека је $\mathcal{F}$ фамилија комплексно-вредносних функција на домену $D \subset \mathbb{C}$. Кажемо да је фамилија $\mathcal{F}$ нормална ако сваки низ $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ у $\mathcal{F}$ има подниз који униформно конвергира на сваком компактном скупу у D.*

Теорема 1.3.1 (Арцела[21]-Асколи[22] теорема)**.** *Фамилија $\mathcal{F}$ непрекидних функција је нормална у D ако и само ако важи:*

1. *фамилија $\mathcal{F}$ је еквинепрекидна на сваком компактном скупу у D и*
2. *за сваку тачку $z \in D$ скуп $\{f(z) : f \in \mathcal{F}\}$ је ограничен у $\mathbb{C}$.*

Доказ. Нека је $\mathcal{F}$ нормална фамилија. Докажимо да је еквинепрекидна на сваком компакту у D. Претпоставимо супротно да то не важи. Тада постоји неки компакт K на коме фамилија $\mathcal{F}$ није еквинепрекидна. Дакле, постоји $\varepsilon > 0$, низови тачака $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ и $\{\zeta_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ у K и низ функција $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{F}$ такви да је $|z_n - \zeta_n| < \frac{1}{n}$ и $|f_n(z_n) - f_n(\zeta_n)| \geq \varepsilon$. Како је $\mathcal{F}$ нормална фамилија, постоји подниз $\{f_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ који униформно конвергира на компактима ка функцији f_0. Нека су $\{z_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ и $\{\zeta_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ поднизови низова $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ и $\{\zeta_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ који конвергирају z_0, односно ζ_0. Међутим, $|z_{n_k} - \zeta_{n_k}| < \frac{1}{n_k} \to 0$, кад $k \to \infty$, па је $z_0 = \zeta_0$. Функција f_0 је непрекидна, па је

$$\varepsilon \leq \limsup_{k\to\infty} |f_{n_k}(z_{n_k}) - f_{n_k}(\zeta_{n_k})| = |f_0(z_0) - f_0(\zeta_0)| = 0,$$

што је контрадикција.

Докажимо сада да важи 2. ако је $\mathcal{F}$ нормална фамилија. Претпоставимо супротно да постоји неко $z_0 \in D$ такво да је скуп $\{f(z_0) : f \in \mathcal{F}\}$ неограничен. У

[21] Cesare Arzelà (1847 - 1912) - италијански математичар

[22] Giulio Ascoli (1843 - 1896) - јеврејски и италијански математичар

том случају постоји низ функција $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{F}$ такав да је $|f_n(z_0)| > n$ за свако $n \in \mathbb{N}$. Фамилија $\mathcal{F}$ је нормална, па за низ $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ постоји подниз $\{f_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ који униформно конвергира на компактима. За свако $n \in \mathbb{N}$ важи $|f_n(z_0)| > n$, па тај подниз не конвергира на компакту $\{z_0\}$, што је контрадикција.

Докажимо обрнут смер да је фамилија $\mathcal{F}$ нормална, под претпоставком да важе 1. и 2. Нека је $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ низ у $\mathcal{F}$ и $\{p_n : n \in \mathbb{N}\}$ пребројив густ скуп у D. Из својства 2. следи да је скуп $\{|f_n(p_1)| : n \in \mathbb{N}\}$ ограничен, па постоји подниз $\{f_{n_{1,k}}(p_1)\}_{k\in\mathbb{N}}$ који конвергира ка $f_0(p_1)$. Слично за p_2, скуп $\{|f_n(p_2)| : n \in \mathbb{N}\}$ је ограничен, па постоји подниз $\{f_{n_{2,k}}(p_1)\}_{k\in\mathbb{N}}$ који конвергира ка $f_0(p_2)$ и садржан је у првом поднизу. На тај начин добијамо низ поднизова

$$\begin{array}{ccccccccc}
n_{1,1} & < & n_{1,2} & < & \dots & < & n_{1,k} & < & \dots \\
n_{2,1} & < & n_{2,2} & < & \dots & < & n_{2,k} & < & \dots \\
\vdots & & \vdots & & \dots & & \vdots & & \\
n_{j,1} & < & n_{j,2} & < & \dots & < & n_{j,k} & < & \dots \\
\vdots & & \vdots & & \dots & & \vdots & &
\end{array}$$

такав да подниз $\{f_{n_{j,k}}(p_j)\}_{k\in\mathbb{N}}$ конвергира ка $f_0(p_j)$ кад $k \to \infty$ и сваки је садржан у претходном. Одавде следи да је за фиксирано j дијагонални низ $\{n_{l,l}\}_{l\in\mathbb{N}}$ подскуп низа $\{n_{j,k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ за $l \geq j$, па низ функција $\{F_l = f_{n_{l,l}}\}_{l\in\mathbb{N}}$ има граничну вредност

$$\lim_{l\to\infty} F_l(p_j) = f_0(p_j), \tag{1.21}$$

за свако j.

Докажимо да подниз $\{F_l\}_{l\in\mathbb{N}}$ униформно конвергира на компактима у D. Због еквинепрекидности фамилије $\mathcal{F}$ на K, за свако $\varepsilon > 0$ постоји $\delta > 0$ такво да ако је $|z - w| < \delta$ онда је

$$|F_l(z) - F_l(w)| < \varepsilon. \tag{1.22}$$

Нека је $K \subset \bigcup\limits_{z\in K} B(z, \delta)$. Како је K компактан, постоји коначан скуп $\{z_1, ..., z_N\}$ такав да је $K \subset \bigcup\limits_{j=1}^{N} B(z_j, \delta)$. Скуп $\{p_n : n \in \mathbb{N}\}$ је густ у D, па за свако $1 \leq j \leq N$, постоји тачка $p_j \in B(z_j, \delta)$.

Из (1.21) следи да је $\lim_{l\to\infty} F_l(p_j) = f_0(p_j)$, па како је сваки конвергентан низ Кошијев, постоји $l_0 \in \mathbb{N}$ такво да за свако $l, m \geq l_0$,

$$|F_l(p_j) - F_m(p_j)| < \varepsilon, \quad j = 1, ..., N. \tag{1.23}$$

Нека је $z \in K$ и $\varepsilon > 0$ произвољно. Тада $z \in B(p_j, \delta)$ за неко $j = 1, ..., N$. Применом (1.22) и (1.23) добијамо

$$\begin{aligned} |F_l(z) - F_m(z)| &\leq |F_l(z) - F_l(p_j)| + |F_l(p_j) - F_m(p_j)| + |F_m(p_j) - F_m(z)| \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon, \end{aligned}$$

за свако $l, m \geq l_0$. Показали смо да је низ $\{F_l\}_{l\in\mathbb{N}}$ Кошијев у K. Како је $\mathbb{C}$ комплетан простор низ $\{F_l\}_{l\in\mathbb{N}}$ конвергира у K. Скуп K је произвољан компактан у D, па низ $\{F_l\}_{l\in\mathbb{N}}$ униформно конвергира на компактима у D. Дакле, низ $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ има подниз $\{F_l\}_{l\in\mathbb{N}}$ који униформно конвергира на компактима, па је $\mathcal{F}$ нормална фамилија.

$\square$

Теорема 1.3.2 (Монтелова теорема)**.** *Ако је фамилија $\mathcal{F}$ аналитичких функција на домену $D \subset \mathbb{C}$ униформно ограничена на сваком компактном скупу у D, онда је она нормална.*

Доказ. Према Теореми Арцела - Асколи 1.3.1 довољно је доказати еквинепрекидност фамилије $\mathcal{F}$ на D. Нека је $z_0 \in D$ и $\varepsilon > 0$. Изаберимо $r > 0$ довољно мало тако да је затворени диск $\overline{B(z_0, r)}$ садржан у D. Нека су $z_1, z_2 \in B(z_0, r)$. $\overline{B(z_0, 2r)}$ је компактан скуп у D, па из униформне ограничености фамилије $\mathcal{F}$ на сваком компакту у D, следи да постоји $M > 0$ такво да је $|f(z)| \leq M$ за свако $z \in \overline{B(z_0, 2r)}$ и свако $f \in \mathcal{F}$.
Тада, применом Кошијеве интегралне формуле 1.1.9 добијамо

$$f(z_1) - f(z_2) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B(z_0, 2r)} f(\zeta) \left(\frac{1}{\zeta - z_1} - \frac{1}{\zeta - z_2} \right) d\zeta.$$

$\zeta \in \partial B(z_0, 2r)$ и $z_1, z_2 \in B(z_0, r)$, па је $|\zeta - z_1| > r$ и $|\zeta - z_2| > r$. Одатле важи

$$\left| \frac{1}{\zeta - z_1} - \frac{1}{\zeta - z_2} \right| = \frac{|z_1 - z_2|}{|\zeta - z_1||\zeta - z_2|} < \frac{|z_1 - z_2|}{r^2},$$

и имамо да је

$$\begin{aligned}|f(z_1)-f(z_2)| &\leq \frac{1}{|2\pi i|}\int_{\partial B(z_0,2r)}|f(\zeta)|\left|\frac{1}{\zeta-z_1}-\frac{1}{\zeta-z_2}\right||d\zeta|\\ &< \frac{1}{2\pi}\frac{4\pi r}{r^2}M|z_1-z_2|\\ &= \frac{2M}{r}|z_1-z_2|.\end{aligned}$$

Ако изаберемо да је $\delta = \min\{r, \frac{r\varepsilon}{4M}\}$ и $z_1, z_2 \in B(z_0,\delta)$, следи да је $|z_1-z_2| < 2\delta < \frac{2r\varepsilon}{4M} = \frac{r\varepsilon}{2M}$, па је

$$|f(z_1)-f(z_2)| < \frac{2M}{r}|z_1-z_2| < \frac{2M}{r}\frac{r\varepsilon}{2M} = \varepsilon,$$

што је и требало доказати. □

Теорема 1.3.3 (Хурвицова[23] теорема)**.** *Нека је $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ низ аналитичких функција на D таквих да је $f_n(z) \neq 0$ на домену $D \subset \mathbb{C}$ и које униформно конвергирају ка f на сваком компактном скупу у D. Тада је функција f таква да је $f \equiv 0$ на D или је $f(z) \neq 0$ за свако $z \in D$.*

Доказ. Ако је f идентички нула, доказ је готов. Претпоставимо да f није идентички нула. Тада су нуле функције f изоловане, па за свако $z_0 \in D$ постоји $\varepsilon > 0$ такво да је $f(z) \neq 0$ за свако z из $\{z \in D : 0 < |z-z_0| \leq \varepsilon\}$. $C = \{z \in D : |z-z_0| = \varepsilon\}$ је компактан скуп, па f_n униформно конвергирају ка f на C, а одатле и f_n' униформно конвергирају ка f' на C. Важи

$$\frac{1}{2\pi i}\lim_{n\to\infty}\int_C \frac{f_n'(z)}{f_n(z)}dz = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f'(z)}{f(z)}dz.$$

Функције $\frac{f_n'(z)}{f_n(z)}$ су аналитичке на D за свако $n \in \mathbb{N}$, јер је $f_n(z) \neq 0$ на D, па применом Теореме 1.1.3 добијамо да је $\int_C \frac{f_n'(z)}{f_n(z)}dz = 0$. Дакле, тада је

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f'(z)}{f(z)}dz = 0,$$

па према Принципу аргумента 1.2.3, функција f нема нула на D, што је и требало доказати. □

Последица 1.3.1. *Нека је $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ низ унивалентних[24] функција на домену $D \subset \mathbb{C}$ које униформно конвергирају ка f на сваком компактном скупу у D. Тада је функција f константна или унивалентна.*

[23] Adolf Hurwitz (1859 - 1919) - немачки математичар

[24] Унивалентне функције су аналитичке и ˝1-1˝.

Доказ. Нека је $z_0 \in D$. Посматрајмо функцију $g(z) = f(z) - f(z_0)$. Функције $g_n(z) = f_n(z) - f_n(z_0)$ униформно конвергирају на сваком компактном скупу у D и $g_n(z) \neq 0$ за свако $z \in D \backslash \{z_0\}$, па применом Хурвицове теореме 1.3.3 добијамо да је $g \equiv 0$ на $D \backslash \{z_0\}$, или је $g(z) \neq 0$ за свако $z \in D \backslash \{z_0\}$. Ако је $g \equiv 0$, онда је $f \equiv f(z_0)$ на $D \backslash \{z_0\}$, па је f константна на D. У другом случају је $g(z) \neq 0$ за свако $z \in D \backslash \{z_0\}$, па је $f(z) \neq f(z_0)$ за свако $z \in D$, при чему је $z \neq z_0$, па је f унивалентна функција. □

1.4 Принцип максимума модула

Теорема 1.4.1 (Принцип максимума модула)**.** *Нека је $f : D \to \mathbb{C}$ аналитичка функција на домену $D \subset \mathbb{C}$. Ако $|f|$ достиже максимум у некој тачки у D, онда је f константна.*

Последица 1.4.1. *Нека је $D \subset \mathbb{C}$ ограничен домен и $f : \overline{D} \to \mathbb{C}$ аналитичка функција на домену D и непрекидна на $\overline{D}$. Тада важи*

$$\max_{z \in \overline{D}} |f(z)| = \max_{z \in \partial D} |f(z)|.$$

Доказ. Функција $|f|$ је непрекидна на $\overline{D}$. Како је $\overline{D}$ компактан скуп, онда постоји тачка $z_0 \in \overline{D}$ таква да $|f|$ достиже свој максимум у тој тачки. Ако $z_0 \in \partial D$, онда је

$$\max_{z \in \overline{D}} |f(z)| = \max_{z \in \partial D} |f(z)|,$$

а ако $z_0 \in D$, онда је према претходној теореми f константна функција и опет важи претходно. □

Последица 1.4.2. *Нека је $f : D \to \mathbb{C}$ аналитичка функција на ограниченом домену $D \subset \mathbb{C}$. Ако је $\limsup\limits_{D \ni z \to \zeta} |f(z)| \leq c$ за свако $\zeta \in \partial D$, онда је $|f(z)| \leq c$ за свако $z \in D$.*

Доказ. Нека је $\delta > 0$ и $A = \{z \in D : |f(z)| > c + \delta\}$. Доказаћемо да је $A = \emptyset$. Скуп A је отворен скуп, јер је инверзна слика отвореног скупа при непрекидном пресликавању $|f|$. Како је $\limsup\limits_{D \ni z \to \zeta} |f(z)| \leq c$ за свако $\zeta \in \partial D$, онда постоји диск $B(\zeta, r)$ такав да је $|f(z)| < c + \delta$ за свако $z \in D \cap B(\zeta, r)$. Одавде следи да је $\overline{A} \subset D$, па је A ограничен скуп. Самим тим, $\overline{A}$ је компактан. Применом Последице 1.4.1 на функцију f и домен A добијамо

$$\max_{z \in \overline{A}} |f(z)| = \max_{z \in \partial A} |f(z)|.$$

Како је $\overline{A}$ садржан у $\{z \in \mathbb{C} : |f(z)| \geq c + \delta\}$, важи $|f(z)| \geq c + \delta$, за свако $z \in \overline{A}$. За свако $z \in D \backslash \overline{A}$ важи $|f(z)| \leq c + \delta$, па због непрекидности функције f следи $|f(z)| = c + \delta$ за свако $z \in \partial A$. Дакле, $\max\limits_{z \in \overline{A}} |f(z)| = c + \delta$, тј. $A = \emptyset$ или је f константна. Због дефиниције скупа A, ако је f константна онда је $A = \emptyset$. Дакле, $A = \emptyset$, па је $|f(z)| \leq c$ за свако $z \in D$. □

1.5 Аутоморфизми јединичног диска

За карактеризацију аутоморфизама јединичног диска биће нам потребна Шварцова лема.

Теорема 1.5.1 (Шварцова лема)**.** *Нека је $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ аналитичка функција на $\mathbb{D}$ таква да је $f(0) = 0$. Тада је*

1. $|f(z)| \leq |z|$, *за свако* $z \in \mathbb{D}$ *и*
2. $|f'(0)| \leq 1$.

Додатно, ако постоји $\theta \in \mathbb{R}$ такво да је $f(z) = e^{i\theta} z$ онда у 1. и 2. важе једнакости. С друге стране, ако у 1. важи једнакост за неко $z \in \mathbb{D} \backslash \{0\}$, или ако у 2. важи једнакост, онда постоји $\theta \in \mathbb{R}$ такво да је $f(z) = e^{i\theta} z$.

Доказ. Дефинишимо функцију g са

$$g(z) = \begin{cases} \frac{f(z)}{z}, & z \neq 0 \\ f'(0), & z = 0. \end{cases}$$

Функција g је аналитичка на $\mathbb{D} \backslash \{0\}$, али како је

$$\lim_{z \to 0} g(z) = \lim_{z \to 0} \frac{f(z)}{z} = \lim_{z \to 0} \frac{f(z) - f(0)}{z - 0} = f'(0),$$

g је аналитичка на $\mathbb{D}$.

Нека је $0 < r < 1$ и $D_r = \{z \in \mathbb{C} : |z| < r\}$. Функција g је аналитичка на D_r и непрекидна на $\overline{D_r}$, те према Последици 1.4.1 важи

$$\max_{z \in \overline{D_r}} |g(z)| = \max_{z \in \partial D_r} |g(z)| = \max_{z \in \partial D_r} \left| \frac{f(z)}{z} \right| \leq \frac{1}{r}. \tag{1.24}$$

Нека је $z \in \mathbb{D}$ произвољно. Тада постоји $0 < r < 1$ такво да је $z \in D_r$. Из (1.24) следи да је $|g(z)| \le \frac{1}{r}$, па је

$$|g(z)| = \lim_{r \to 1^-} |g(z)| \le \lim_{r \to 1^-} \frac{1}{r} = 1.$$

Дакле, за произвољно $z \in \mathbb{D}$ важи $|g(z)| \le 1$. Специјално, ако је $z \ne 0$, онда је $|g(z)| = \left|\frac{f(z)}{z}\right| \le 1$, односно $|f(z)| \le |z|$. Како је $f(0) = 0$, следи да за свако $z \in \mathbb{D}$ важи $|f(z)| \le |z|$. Ако је $z = 0$, онда је $|g(z)| = |f'(0)| \le 1$. Дакле, важе 1. и 2.

Ако за неко $z \in \mathbb{D} \backslash \{0\}$ важи $|f(z)| = |z|$, онда је $|g(z)| = 1$. Међутим, тада постоји $0 < r < 1$ такво да је $z \in D_r$, па је

$$\max_{z \in \overline{D_r}} |g(z)| \le 1.$$

Како је $|g(z)| = 1$ следи да је g константна функција, тј. постоји $\theta \in \mathbb{R}$ такво да за свако $z \in \mathbb{D}$ важи $g(z) = e^{i\theta}$, односно $f(z) = e^{i\theta} z$.

Ако је $|f'(0)| = 1$, онда је $|g(0)| = 1$, па слично као у претходном случају следи да постоји $\theta \in \mathbb{R}$ такво да за свако $z \in \mathbb{D}$ важи $g(z) = e^{i\theta}$, односно $f(z) = e^{i\theta} z$. $\square$

Нека су $D_1, D_2 \subset \mathbb{C}$ домени. За пресликавање $f : D_1 \to D_2$ кажемо да <u>конформно</u> пресликава домен D_1 на домен D_2 (односно, да је <u>конформни изоморфизам</u> домена D_1 на домен D_2) ако је f бијекција и аналитичка функција на домену D_1. Притом је и $f^{-1} : D_2 \to D_1$ аналитичка функција на домену D_2 и конформни изоморфизам домена D_2 на домен D_1. Специјално, ако је $D_1 = D_2 = D$ конформни изоморфизам домена D на D је <u>конформни аутоморфизам</u> домена D. Скуп свих конформних изоморфизама домена D_1 на домен D_2 обележавамо са $Isom(D_1, D_2)$, док скуп свих конформних аутоморфизама домена D обележавамо са $Aut(D)$.

Теорема 1.5.2. *Нека је $\varphi_\alpha : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$, $\alpha \in \mathbb{D}$, функција дефинисана са*

$$\varphi_\alpha(z) = \frac{z - \alpha}{1 - \overline{\alpha} z}. \tag{1.25}$$

Тада

1. *ако је $\alpha \ne 0$, онда је φ_α аналитичка функција на $\mathbb{C} \backslash \left\{-\frac{1}{\overline{\alpha}}\right\}$, а ако је $\alpha = 0$, онда је φ_α аналитичка на $\mathbb{C}$;*

2. $\varphi_\alpha^{-1} = \varphi_{-\alpha}$*;*

3. $\varphi(\partial\mathbb{D}) = \partial\mathbb{D}$*;*

4. $\varphi_\alpha \in Aut(\mathbb{D})$*.*

Доказ.

1. Јасно је из дефиниције функције φ_α.

2. Докажимо да је $\varphi_\alpha^{-1} = \varphi_{-\alpha}$. Како је

$$
\begin{aligned}
(\varphi_\alpha \circ \varphi_{-\alpha})(z) = \varphi_\alpha\Big(\frac{z+\alpha}{1+\overline{\alpha}z}\Big) &= \frac{\frac{z+\alpha}{1+\overline{\alpha}z} - \alpha}{1 - \overline{\alpha}\frac{z+\alpha}{1+\overline{\alpha}z}} = \frac{z+\alpha-\alpha-\alpha\overline{\alpha}z}{1+\overline{\alpha}z-\overline{\alpha}z-\overline{\alpha}\alpha} \\
&= \frac{z(1-|\alpha|^2)}{1-|\alpha|^2} = z
\end{aligned}
$$

и

$$
\begin{aligned}
(\varphi_{-\alpha} \circ \varphi_\alpha)(z) = \varphi_{-\alpha}\Big(\frac{z-\alpha}{1-\overline{\alpha}z}\Big) &= \frac{\frac{z-\alpha}{1-\overline{\alpha}z} + \alpha}{1 + \overline{\alpha}\frac{z-\alpha}{1-\overline{\alpha}z}} = \frac{z-\alpha+\alpha-\alpha\overline{\alpha}z}{1-\overline{\alpha}z+\overline{\alpha}z-\overline{\alpha}\alpha} \\
&= \frac{z(1-|\alpha|^2)}{1-|\alpha|^2} = z,
\end{aligned}
$$

добијамо да је $\varphi_\alpha^{-1} = \varphi_{-\alpha}$.

3. Докажимо да је $\varphi_\alpha(\partial\mathbb{D}) = \partial\mathbb{D}$. Нека је $\zeta \in \partial D$. Тада постоји $\theta \in \mathbb{R}$ такво да је $\zeta = e^{i\theta}$ и важи

$$
|\varphi_\alpha(\zeta)| = |\varphi_\alpha(e^{i\theta})| = \left|\frac{e^{i\theta}-\alpha}{1-\overline{\alpha}e^{i\theta}}\right| = \left|e^{i\theta}\right| \cdot \left|\frac{1-\alpha e^{-i\theta}}{1-\overline{\alpha}e^{i\theta}}\right| = \left|\frac{1-\alpha e^{-i\theta}}{\overline{1-\alpha e^{-i\theta}}}\right| = 1,
$$

па је $\varphi_\alpha(\partial\mathbb{D}) = \partial\mathbb{D}$.

4. Докажимо да је $\varphi_\alpha \in Aut(\mathbb{D})$. Како је φ_α аналитичка на $\mathbb{D}$ и φ_α инјективно на $\overline{\mathbb{C}}$, довољно је још доказати да је $\varphi_\alpha(\mathbb{D}) = \mathbb{D}$. φ_α је аналитичка на $\mathbb{D}$, непрекидна на $\overline{\mathbb{D}}$. Применом Последице 1.4.1 добијамо да је $\max\limits_{z\in\overline{\mathbb{D}}} |\varphi_\alpha(z)| = \max\limits_{z\in\partial\mathbb{D}} |\varphi_\alpha(z)| = 1$, па је $\varphi_\alpha(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$. Слично добијамо да је $\varphi_\alpha^{-1}(\mathbb{D}) = \varphi_{-\alpha}(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$. Одатле је $\varphi_\alpha(\varphi_\alpha^{-1}(\mathbb{D})) \subset \varphi_\alpha(\mathbb{D})$, односно $\mathbb{D} \subset \varphi_\alpha(\mathbb{D})$. Дакле, $\varphi_\alpha(\mathbb{D}) = \mathbb{D}$. Закључујемо да $\varphi_\alpha \in Aut(\mathbb{D})$.

$\square$

Теорема 1.5.3. *Функција $f \in Aut(\mathbb{D})$ ако и само ако постоје $\theta \in \mathbb{R}$ и $\alpha \in \mathbb{D}$ такви да је*

$$f(z) = e^{i\theta}\varphi_{-\alpha}(z),$$

за свако $z \in \mathbb{D}$.

Доказ. Функција $f(z) = e^{i\theta}\varphi_{-\alpha}(z)$ припада $Aut(\mathbb{D})$. Докажимо други смер. Нека је $f \in Aut(\mathbb{D})$ и $f(0) = \beta$. Дефинишимо $g : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ са $g = \varphi_\beta \circ f$. Како $f \in Aut(\mathbb{D})$ и $\varphi_\beta \in Aut(\mathbb{D})$ онда и $g \in Aut(\mathbb{D})$. Важи $g(0) = \varphi_\beta(f(0)) = \varphi_\beta(\beta) = 0$, па на g можемо применити Шварцову лему 1.5.1. Тиме добијамо да за свако $z \in \mathbb{D}$ важи

$$|g(z)| \leq |z|. \tag{1.26}$$

С друге стране, како је $g^{-1}(0) = (f^{-1} \circ \varphi_{-\beta})(0) = f^{-1}(\beta) = 0$, и на g^{-1} можемо применити Шварцову лему 1.5.1. За свако $z \in \mathbb{D}$ важи $g(z) \in \mathbb{D}$ и $|g^{-1}(g(z))| \leq |g(z)|$, тј.

$$|z| \leq |g(z)|. \tag{1.27}$$

Из (1.26) и (1.27) следи да за свако $z \in \mathbb{D}$ важи $|g(z)| = |z|$. Дакле, У Шварцовој леми 1.5.1 важи једнакост, па је $g(z) = e^{i\theta}z$, за неко $\theta \in \mathbb{R}$, односно $(\varphi_\beta \circ f)(z) = e^{i\theta}z$. Следи да је

$$f(z) = \varphi_{-\beta}(e^{i\theta}z) = \frac{e^{i\theta}z + \beta}{1 + \overline{\beta}e^{i\theta}z} = e^{i\theta}\frac{z + \beta e^{-i\theta}}{1 + \overline{\beta}e^{i\theta}z} = e^{i\theta}\frac{z + \alpha}{1 + \overline{\alpha}z},$$

при чему је $\alpha = \beta e^{-i\theta}$. $\square$

1.6 Хармонијске функције

Дефиниција 1.6.1. *Нека је $D \subset \mathbb{R}^n$ отворен скуп. За функцију $u : D \to \mathbb{R}$ која припада $C^2(D;\mathbb{R})$*[25] *кажемо да је* <u>*хармонијска*</u> *на D ако важи*

$$(\Delta u)(x) = u_{x_1x_1}(x) + \cdots + u_{x_nx_n}(x) = 0, \tag{1.28}$$

за свако $x \in D$.

Једначину (1.28) називамо <u>Лапласовом једначином на D</u>, док за Δu кажемо да је <u>Лапласијан</u> функције u.

[25] $C^2(D;\mathbb{R})$ је скуп свих реално-вредносних два пута непрекидно диференцијабилних функција на D.

Напомена. Комплексно-вредносна функција је хармонијска ако су њени реални и имагинарни део хармонијске функције.

Теорема 1.6.1. *Ако је $u : D \to \mathbb{C}$ хармонијска функција на просто повезаном домену D у $\mathbb{C}$, онда је функција и реални део аналитичке функције на D.*

Доказ. Дефинишимо функцију f са

$$f = u_x - iu_y.$$

Како је $u_{xx} = -u_{yy}$ (јер је u хармонијска на D) и $u_{xy} = -(-u_{yx})$, важе Коши-Риманови услови, па је функција f аналитичка. Домен D је просто повезан, па из Теореме 1.1.6 имамо да постоји примитивна функција аналитичке функције f. Означимо је са F. Важи

$$F(z) = \int_\gamma f(\zeta)d\zeta + u(z_0), \tag{1.29}$$

где је γ крива која повезује тачке z_0 и z у D. Према Теореми 1.1.5 интеграл не зависи од избора такве криве.

Покажимо да је F тражена функција, тј. да је $\mathrm{Re}(F) = u$. Диференцирањем (1.29) добијамо

$$F'(z) = f(z) = u_x(z) - iu_y(z). \tag{1.30}$$

Нека су $\mathrm{Re}(F) = U$ и $\mathrm{Im}(F) = V$. Из (1.30) имамо

$$U_x + iV_x = u_x - iu_y. \tag{1.31}$$

Функција F је аналитичка, па важе Коши-Риманови услови. Одатле добијамо

$$U_x - iU_y = u_x - iu_y.$$

Дакле, $U_x = u_x$ и $U_y = u_y$. Како је $F(z_0) = u(z_0)$, закључујемо да је $U \equiv u$, односно $\mathrm{Re}(F) = u$. □

Теорема 1.6.2. *Нека је $u : \overline{B(0,1)} \to \mathbb{R}$ хармонијска функција на $\overline{B(0,1)} \subset \mathbb{R}^n$ (односно хармонијска на неком отвореном скупу U таквом да $\overline{B(0,1)} \subset U$). Тада је*

$$u(x) = \frac{1}{nw_n} \int_{\partial B(0,1)} P(x,y)u(y)d\sigma(y), \tag{1.32}$$

за свако $x \in \overline{B(0,1)}$, при чему је $P(x,y) = \frac{1-|x|^2}{|y-x|^n}$ Пуасоново језгро за јединичну лопту $B(0,1)$ и $w_n = V(B(0,1))$ запремина $B(0,1)$ у $\mathbb{R}^n$.

Напомена. За свако $x \in B(0,1)$ и сваки мулти-индекс $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$, где су $\alpha_i \in \mathbb{N}_0$, $i = 1, ..., n$, важи $D^\alpha u(x) = \frac{1}{nw_n} \int_{\partial B(0,1)} D^\alpha P(x,y) u(y) d\sigma(y)$, при чему је $u : \overline{B(0,1)} \to \mathbb{R}$ хармонијска на $\overline{B(0,1)}$.

Теорема 1.6.3 (Кошијеве неједнакости)**.** *Нека је $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$, где су $\alpha_i \in \mathbb{N}_0$, $i = 1, ..., n$ и $u : B(a,r) \to \mathbb{R}$ хармонијска функција ограничена са $M > 0$ на $B(a,r) \subset \mathbb{R}^n$. Тада постоји позитивна константа C_α таква да је*

$$|D^\alpha u(a)| \leq \frac{C_\alpha M}{r^{|\alpha|}}. \tag{1.33}$$

Доказ. Нека је $u : \overline{B(0,1)} \to \mathbb{R}$ хармонијска и ограничена са M на $\overline{B(0,1)}$. Тада је

$$\begin{aligned} |D^\alpha u(0)| &= \frac{1}{nw_n} \Big| \int_{\partial B(0,1)} D^\alpha P(0,y) u(y) d\sigma(y) \Big| \\ &\leq \frac{M}{nw_n} \int_{\partial B(0,1)} |D^\alpha P(0,y)| d\sigma(y) = C_\alpha M, \end{aligned}$$

где је $C_\alpha = \frac{1}{nw_n} \int_{\partial B(0,1)} |D^\alpha P(0,y)| d\sigma(y)$. Дакле, показали смо да (1.33) важи на $\overline{B(0,1)}$.

Претпоставимо сада да је u хармонијска и ограничена са M на $\overline{B(a,r)}$. Дефинишимо функцију $v : \overline{B(0,1)} \to \mathbb{R}$ са $v(x) = u(rx + a)$. Функција v је хармонијска као композиција таквих и ограничена са M на $\overline{B(0,1)}$. Дакле, за функцију v постоји константа C_α таква да је $|D^\alpha v(0)| \leq C_\alpha M$. Како је $|D^\alpha v(0)| = r^{|\alpha|} |D^\alpha u(a)| \leq C_\alpha M$, имамо да је $|D^\alpha u(a)| \leq \frac{C_\alpha M}{r^{|\alpha|}}$. Закључујемо да (1.33) важи и за сваку хармонијску и ограничену функцију на $\overline{B(a,r)}$.

Нека је u хармонијска и ограничена са M на $B(a,r)$. Из претходног следи да за свако $0 < \varepsilon < r$ постоји C_α такво да је

$$|D^\alpha u(a)| \leq \frac{C_\alpha M}{(r - \varepsilon)^{|\alpha|}}.$$

Узимајући лимес када $\varepsilon \to 0^+$ добијамо

$$|D^\alpha u(a)| \leq \frac{C_\alpha M}{r^{|\alpha|}}.$$

□

Теорема 1.6.4. *Ако је низ $\{u_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ хармонијских функција на $D \subset \mathbb{R}^n$ униформно ограничен на сваком компактном скупу у D, онда постоји подниз који униформно конвергира на сваком компактном скупу у D.*

Доказ. Нека је $K \subset D$ компактан скуп у D и $r = \frac{d(K,\partial D)}{3}$. Скуп $K_{2r} = \{x \in \mathbb{R}^n : d(x, K) \leq 2r\}$ је компактан, па је низ $\{u_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ униформно ограничен са $M > 0$ на K_{2r}. Нека су $a, x \in K$ такви да је $|x - a| < r$. Тада $x \in B(a, r)$ и $|u_j| \leq M$ на $B(a, 2r) \subset K_{2r}$ за свако $j \in \mathbb{N}$, па је

$$|u_j(x) - u_j(a)| \leq \sup_{B(a,r)} |\nabla u||x - a| \leq \frac{CM}{r}|x - a|$$

за свако $j \in \mathbb{N}$. Друга неједнакост следи из Кошијевих неједнакости 1.6.3. Дакле, низ $\{u_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ је еквинепрекидан на K.

Нека је $\{K_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ низ компактних подскупова у D, који покривају D и за које важи $K_j \subset K_{j+1}$, за свако $j \in \mathbb{N}$. Низ $\{u_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ је еквинепрекидан на компактима, специјално на K_1, па према Теореми Арцела-Асколи 1.3.1, постоји подниз овог низа који униформно конвергира на K_1. Поновимо поступак са овим поднизом на K_2, добијамо подниз који униформно конвергира на K_2. Настављамо даље поступак. На крају за тражени подниз узмемо дијагонални, он конвергира на K_j, за свако $j \in \mathbb{N}$, па и на било ком произвољном компакту у D. □

Теорема 1.6.5 (Харнакове[26] неједнакости)**.** *Нека је $D \subset \mathbb{R}^n$ повезан и K компактан скуп у D. Тада постоји константа $C \in (1, \infty)$ таква да је*

$$\frac{1}{C} \leq \frac{u(y)}{u(x)} \leq C, \tag{1.34}$$

за свако $x, y \in K$ и сваку позитивну хармонијску функцију u на D.

Теорема 1.6.6 (Харнаков принцип)**.** *Нека је $D \subset \mathbb{R}^n$ повезан скуп и $\{u_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ низ хармонијских функција на D такав да је за свако $x \in D$ низ $\{u_j(x)\}_{j\in\mathbb{N}}$ неопадајући. Тада $\{u_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ униформно конвергира на компактима у D ка хармонијској функцији на D или је $\lim\limits_{j\to\infty} u_j(x) = \infty$ за свако $x \in D$.*

Доказ. Ако u_j заменимо са $u_j - u_1 + 1$, можемо претпоставити да је свака функција u_j позитивна на D. Нека је $u(x) = \lim\limits_{j\to\infty} u_j(x)$ за свако $x \in D$. Претпоставимо да је $u(x) < +\infty$ за свако $x \in D$. Како је сваки конвергентан низ уједно и Кошијев, важи да за свако $x \in D$ и свако $\varepsilon > 0$ постоји $j_0 \in \mathbb{N}$такво да је

$$|u_j(x) - u_k(x)| < \varepsilon,$$

[26]Axel Harnack (1851 - 1888) - балтички и немачки математичар

за све $j, k > j_0$.

Нека је K компактан скуп у D и $x \in K$ произвољна тачка. Применом Харнакове неједнакости (1.34) добијамо да постоји константа $C \in (1, \infty)$ таква да је

$$|u_j(y) - u_k(y)| \leq |C(u_j(x) - u_k(x))| < C\varepsilon,$$

за свако $y \in K$ и свако $j, k > j_0$. Дакле, низ $\{u_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ је униформно Кошијев на K[27], па униформно конвергира ка u на K. Докажимо да је u хармонијска на D. Нека је $\overline{B(a,r)} \subset D$. Довољно је доказати да је u хармонијска на $B(a, r)$. Без умањења оптшости, претпоставимо да је $B(a, r)$ заправо $B(0, 1)$. Из (1.32)

$$u_j(x) = \frac{1}{nw_n} \int_{\partial B(0,1)} P(x, y) u_j(y) d\sigma(y)$$

за свако $x \in B(0, 1)$ и свако $j \in \mathbb{N}$. Узимањем лимеса добијамо да је

$$u(x) = \frac{1}{nw_n} \int_{\partial B(0,1)} P(x, y) u(y) d\sigma(y)$$

за свако $x \in B(0, 1)$. Одатле закључујемо да је u хармонијска на $B(0, 1)$.

Претпоставимо сада да је $u(x) = \infty$ за неко $x \in D$ и нека је $y \in D$ произвољно. Применимо Харнакову неједнакост (1.34) на компактан скуп $K = \{x, y\}$. Добијамо да постоји константа $C \in (1, \infty)$ таква да је $u_j(x) \leq C u_j(y)$ за свако $j \in \mathbb{N}$. Међутим, како је $\lim_{j \to \infty} u_j(x) = \infty$, имамо да је $\lim_{j \to \infty} u_j(y) = \infty$, па је одатле $u(y) = \infty$. Како је $y \in D$ било произвољно, $u \equiv \infty$ на D. $\square$

[27] Низ $\{u_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ функција на повезаном скупу $D \subset \mathbb{R}^n$ је **униформно Кошијев на компакту** $K \subset D$ ако за свако $\varepsilon > 0$ постоји $j_0 \in \mathbb{N}$ такво да за свако $y \in K$важи $|u_j(y) - u_k(y)| < \varepsilon$, кад год је $j, k > j_0$.

Глава 2

Риманова теорема

2.1 Доказ Риманове теореме коришћењем нормалних фамилија

Теорема 2.1.1 (Риманова теорема)**.** *Ако је D просто повезан домен у комплексној равни, при чему је $D \neq \mathbb{C}$, онда је D конформно еквивалентан са отвореним јединичним диском $\mathbb{D}$.*

Пресликавање чије нам постојање утврђује Риманова теорема називамо **Римановим пресликавањем**. Након доказа ћемо проверити да је то пресликавање јединствено.

Напомена. Комплексна раван $\mathbb{C}$ се не може конформно пресликати на $\mathbb{D}$. Уколико би постојало конформно пресликавање из $\mathbb{C}$ у $\mathbb{D}$, оно би било аналитичко на $\mathbb{C}$ и ограничено, па би применом Лиувилове теореме 1.1.12 било константно, што је контрадикција.

Доказ. Нека је D просто повезан домен и $D \neq \mathbb{C}$. Нека је $z_0 \in D$ и фамилија $\mathcal{F} = \{f$ је унивалентна $: |f(z)| \leq 1$, за свако $z \in D$ и $f(z_0) = 0\}$.

Докажимо да је фамилија $\mathcal{F}$ непразна. Домен D је различит од $\mathbb{C}$, па постоји $a \notin D$. Како је D просто повезан домен, постоји аналитичка грана $g(z)$ од $\sqrt{z-a}$ у D.

Проверићемо да је $g(z)$ "1-1" функција. Претпоставимо да је $g(z_1) = g(z_2)$

за различите $z_1, z_2 \in D$. Тада је $g(z_1)^2 = g(z_2)^2$, односно $z_1 - a = z_2 - a$, тј. $z_1 = z_2$, што је контрадикција. Дакле, $g(z)$ је ˝1-1˝.

Сада ћемо доказати да ако $w_0 \in g(D)$, онда $-w_0 \notin g(D)$. Ако $w_0 \in g(D)$, онда постоји неко $z_0 \in D$ такво да је $w_0 = g(z_0)$. Претпоставимо да и $-w_0 \in g(D)$. Тада постоји неко $z_1 \in D$ такво да је $-w_0 = g(z_1)$. Даље следи $g(z_0)^2 = w_0^2 = g(z_1)^2$, тј. $z_0 - a = z_1 - a$, односно $z_0 = z_1$, што није могуће.

Докажимо да ако је $B(g(z_0), \varepsilon) \subset g(D)$, онда $B(-g(z_0), \varepsilon) \cap g(D) = \emptyset$. Претпоставимо да је $B(g(z_0), \varepsilon) \subset g(D)$ и да постоји w_0 које припада $B(-g(z_0), \varepsilon) \cap g(D)$. Тада је $|w_0 + g(z_0)| < \varepsilon$ и постоји $z_0 \in D$ такво да је $g(z_0) = w_0$. Важи да је

$$|-w_0 - g(z_0)| = |w_0 + g(z_0)| < \varepsilon,$$

па $-w_0 \in B(g(z_0), \varepsilon)$. Међутим, овај диск је садржан у $g(D)$, па $-w_0 \in g(D)$. Из претходно доказаног следи да $w_0 \notin g(D)$, што је контрадикција. Дакле, ако је $B(g(z_0), \varepsilon) \subset g(D)$, онда је $B(-g(z_0), \varepsilon) \cap g(D) = \emptyset$, тј. за свако $z \in D$ такво да је $|g(z) - g(z_0)| < \varepsilon$ важи $|g(z) + g(z_0)| \geq \varepsilon$. Одавде добијамо да је $2|g(z_0)| \geq \varepsilon$.

Дефинишимо функцију

$$f_0(z) = \frac{\varepsilon}{4} \frac{|g'(z_0)|}{|g(z_0)|^2} \cdot \frac{g(z_0)}{g'(z_0)} \cdot \frac{g(z) - g(z_0)}{g(z) + g(z_0)}$$

и покажимо да припада $\mathcal{F}$.

Функција g је ˝1-1˝, па је и f_0 таква. Заиста, нека су $z_1, z_2 \in D$ две различите тачке у D такве да је $f_0(z_1) = f_0(z_2)$. Одавде се лако добија да је $z_1 = z_2$. Показали смо да ако $w_0 \in g(D)$, онда $-w_0 \notin g(D)$. Како $g(z_0) \in g(D)$, онда $-g(z_0) \notin g(D)$, па је $g(z) \neq -g(z_0)$ за свако $z \in D$. Дакле, f_0 је аналитичка на D. Видели смо да је и инјективна, па закључујемо да је унивалентна. Важи

$$\begin{aligned}
\left|\frac{g(z) - g(z_0)}{g(z) + g(z_0)}\right| &= |g(z_0)| \cdot \left|\frac{1}{g(z_0)} - \frac{2}{g(z) + g(z_0)}\right| \leq |g(z_0)| \left(\left|\frac{1}{g(z_0)}\right| + \left|\frac{2}{g(z) + g(z_0)}\right|\right) \\
&\leq |g(z_0)| \left(\frac{2}{\varepsilon} + \frac{2}{\varepsilon}\right) \\
&= \frac{4|g(z_0)|}{\varepsilon}
\end{aligned}$$

па је

$$|f_0(z)| \leq \frac{\varepsilon}{4}\frac{|g'(z_0)|}{|g(z_0)|^2} \cdot \frac{|g(z_0)|}{|g'(z_0)|} \cdot \frac{4|g(z_0)|}{\varepsilon} = \frac{|g'(z_0)|}{|g(z_0)|} \cdot \frac{|g(z_0)|}{|g'(z_0)|} = 1.$$

Дакле, $|f_0(z)| < 1$ за свако $z \in D$. Можемо закључити да $f_0 \in \mathcal{F}$, те је фамилија $\mathcal{F}$ непразна.

Нека је

$$A = \sup_{f \in \mathcal{F}} f'(z_0) > 0$$

(приметимо да A не мора бити коначно) и нека је $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ низ функција у $\mathcal{F}$ таквих да $f'_n(z_0) \to A$. Фамилија $\mathcal{F}$ је нормална, па применом Монтелове теореме 1.3.2 добијамо да је фамилија $\mathcal{F}$ нормална, па низ $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ има подниз који унифомно конвергира на компактима у D ка некој аналитичкој функцији φ. Важи, $|\varphi(z)| \leq 1$ за свако $z \in D$, $\varphi(z_0) = 0$ и $\varphi'(z_0) = A$. Одавде следи да је A коначно.

Докажимо да је φ унивалентна функција. Функције f_n су унивалентне, па према Последици Хурвицове теореме 1.3.1, φ је константна или унивалентна функција. Како је $\varphi'(z_0) \neq 0$, φ није константна, па је φ унивалентна.

Треба још доказати да је $\varphi(D) = \mathbb{D}$. Претпоставимо супротно да постоји неко $\omega_0 \in \mathbb{D}$ такво да је $\varphi(z) \neq \omega_0$ за свако $z \in D$. Функција $\varphi_{w_0} : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ дефинисана са

$$\varphi_{w_0}(z) = \frac{z - \omega_0}{1 - \overline{w_0}z}$$

је конформни аутоморфизам јединичног диска $\mathbb{D}$. Посматрајмо композицију $(\varphi_{w_0} \circ \varphi)(z) = \frac{\varphi(z)-\omega_0}{1-\overline{\omega_0}\varphi(z)}$. D је просто повезан домен и $\varphi(z) - \omega_0 \neq 0$ за свако $z \in D$, односно $(\varphi_{w_0} \circ \varphi)(z) \neq 0$ за свако $z \in D$, па према Последици 1.1.1 постоји њена аналитичка грана ψ на D дата са

$$\psi(z) = \sqrt{\frac{\varphi(z) - \omega_0}{1 - \overline{\omega_0}\varphi(z)}}.$$

Тада је

$$\psi'(z) = \frac{\varphi'(z)(1 - \overline{\omega_0}\varphi(z)) - (\varphi(z) - \omega_0)(-\overline{\omega_0}\varphi'(z))}{2\psi(z)(1 - \overline{\omega_0}\varphi(z))^2},$$

па је

$$|\psi'(z_0)| = \frac{|\varphi'(z_0)|(1 - |\omega_0|^2)}{2|\psi(z_0)||1 - \overline{\omega_0}\varphi(z_0)|^2}. \tag{2.1}$$

Знамо да је $|\varphi'(z_0)| = A$, јер је $\varphi'(z_0) = A > 0$, $|\psi(z_0)| = \sqrt{|\omega_0|}$ и $\varphi(z_0) = 0$, те једначина (2.1) постаје
$$|\psi'(z_0)| = \frac{A(1 - |\omega_0|^2)}{2\sqrt{|\omega_0|}}.$$

Дефинишимо функцију $\eta : D \to \mathbb{D}$ са
$$\eta(z) = \frac{|\psi'(z_0)|}{\psi'(z_0)} \cdot (\varphi_{\psi(z_0)} \circ \psi)(z) = \frac{|\psi'(z_0)|}{\psi'(z_0)} \cdot \frac{\psi(z) - \psi(z_0)}{1 - \overline{\psi(z_0)}\psi(z)},$$
при чему је $\varphi_{\psi(z_0)} : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ конформни аутоморфизам јединичног диска $\mathbb{D}$. За η важи
$$\eta'(z) = \frac{|\psi'(z_0)|}{\psi'(z_0)} \cdot \frac{\psi'(z)(1 - \overline{\psi(z_0)}\psi(z)) - (\psi(z) - \psi(z_0))(-\overline{\psi(z_0)}\psi'(z))}{(1 - \overline{\psi(z_0)}\psi(z))^2},$$
односно
$$\begin{aligned}\eta'(z_0) &= \frac{|\psi'(z_0)|}{\psi'(z_0)} \cdot \frac{\psi'(z_0)(1 - |\psi(z_0)|^2)}{(1 - |\psi(z_0)|^2)^2} = \frac{|\psi'(z_0)|}{1 - |\psi(z_0)|^2} \\ &= \frac{A(1 - |\omega_0|^2)}{2\sqrt{|w_0|}(1 - (\sqrt{|\omega_0|})^2)} = \frac{A(1 - |\omega_0|)(1 + |\omega_0|)}{2\sqrt{|\omega_0|}(1 - |\omega_0|)} \\ &= \frac{A(1 + |\omega_0|)}{2\sqrt{|\omega_0|}} > A = \varphi'(z_0) \qquad (2.2)\end{aligned}$$
што је контрадикција са максималношћу функције φ (неједнакост (2.2) важи јер је $|\omega_0| < 1$). Дакле, $\varphi(D) = \mathbb{D}$.

$\square$

Приметимо да је ово пресликавање јединствено. Нека су $\varphi_1 : D \to \mathbb{D}$ и $\varphi_2 : D \to \mathbb{D}$ два таква пресликавања, односно φ_1 и φ_2 су ˝1-1˝, ˝на˝ и аналитичка на D. Тада је $f = \varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}$ такво да је $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$, $f(0) = \varphi_2(\varphi_1^{-1}(0)) = \varphi_2(z_0) = 0$,
$$f'(0) = \varphi_2'(\varphi_1^{-1}(0)) \cdot (\varphi_1^{-1})'(0) = \frac{\varphi_2'(z_0)}{\varphi_1'(\varphi_1(0))} = \frac{\varphi_2'(z_0)}{\varphi_1'(z_0)} = \frac{A}{A} = 1$$
и f^{-1} задовољава иста ова својства. Применом Шварцове леме 1.5.1 добијамо да је $|f(z)| \leq |z|$ за свако $z \in \mathbb{D}$ и за $f(z) \in \mathbb{D}$ је $|f^{-1}(f(z))| \leq |f(z)|$, односно $|z| \leq |f(z)|$, за свако $z \in \mathbb{D}$, па је $|z| = |f(z)|$, за свако $z \in \mathbb{D}$. Дакле, у Шварцовој леми 1.5.1 важи једнакост, па постоји $\theta \in \mathbb{R}$ такво да је $f(z) = e^{i\theta}z$. Тада је $f'(0) = e^{i\theta}$. Како је $f'(0) = 1$, онда је $\theta = 0$. Дакле, $f(z) = z$ за свако $z \in \mathbb{D}$, односно $\varphi_1 \equiv \varphi_2$ на D.

2.2 Доказ Риманове теореме решавањем Дирихлеовог проблема

Субхармонијске функције

Дефиниција 2.2.1. *Нека је D домен у $\mathbb{C}$ и $u : D \to [-\infty, \infty)$ непрекидна функција. $u(z)$ је* <u>*субхармонијска функција*</u> *на D ако за свако $z \in D$, постоји $\varepsilon > 0$ такво да важи*

$$u(z) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(z + re^{i\theta}) d\theta, \tag{2.3}$$

за свако $0 < r < \varepsilon$.

Својство (2.3) називамо **својством средње вредности за субхармонијске функције**. Приметимо да је оно врло слично својству средње вредности за хармонијске функције. Разлика је само у томе што тамо важи једнакост, а овде неједнакост. Одатле следи да је свака хармонијска функција и субхармонијска.
Такође, субхармонијске функције могу да узму вредност $-\infty$, док хармонијске не могу.

Пример 2.2.1. *Ако је $f(z)$ аналитичка функција, онда је $\log |f(z)|$ субхармонијска.*

Теорема 2.2.1 (Принцип максимума за субхармонијске функције)**.** *Нека је $u : D \to [-\infty, \infty)$ субхармонијска функција на домену $D \subset \mathbb{C}$. Ако $u(z)$ достиже максимум у некој тачки у D, онда је $u(z)$ константна.*

Доказ. Означимо $M = \max\limits_{z \in D} u(z)$. Нека је $A = \{z \in D \,:\, u(z) = M\}$. Доказаћемо да је $A = D$. Како је A повезан, довољно је доказати да је A непразан, отворен и затворен. Према претпоставци теореме u достиже максимум у некој тачки у D, па је A непразан. Функција u је непрекидна па је A затворен.
Треба још доказати да је A отворен. Нека је $z_0 \in A$. Функција u је субхармонијска на D па постоји $\varepsilon > 0$ такво да је

$$u(z_0) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(z_0 + re^{i\theta}) d\theta, \quad 0 < r < \varepsilon,$$

односно

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (u(z_0) - u(z_0 + re^{i\theta})) d\theta = u(z_0) - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(z_0 + re^{i\theta}) d\theta \leq 0. \tag{2.4}$$

Тачка $z_0 \in A$, па је $u(z_0) \geq u(z_0 + re^{i\theta})$, односно подинтегрална функција у првом интегралу је ненегативна. Она је и непрекидна, па неједнакост (2.4) важи само ако је $u(z_0) - u(z_0 + re^{i\theta}) \leq 0$. Дакле, $u(z_0) \leq u(z_0 + re^{i\theta})$ и $u(z_0) \geq u(z_0 + re^{i\theta})$, па је $u(z_0 + re^{i\theta}) = u(z_0) = M$, за свако $0 \leq \theta \leq 2\pi$ и $0 < r < \varepsilon$, односно A садржи диск са центром у $z_0 \in A$, па је отворен. Закључујемо да је $A = D$, тј. u је константна функција на D, што је и требало доказати. □

Последица 2.2.1. *Нека је $D \subset \mathbb{C}$ ограничен домен и $u : D \to [-\infty, \infty)$ субхармонијска функција на D. Ако је $\limsup\limits_{D \ni z \to \zeta} u(z) \leq 0$ за свако $\zeta \in \partial D$, онда је $u(z) \leq 0$ за свако $z \in D$.*

Доказ. Како је $\limsup\limits_{D \ni z \to \zeta} u(z) \leq 0$ за свако $\zeta \in \partial D$, субхармонијска функција $w(z) = \max(u(z), 0)$ тежи 0 кад $z \to \zeta \in \partial D$. Ако дефинишемо $w(z) = 0$ на ∂D, онда је $w(z)$ непрекидна на компактном скупу $D \cup \partial D$, па достиже максимум у некој тачки z_0. Означимо тај максимум са M. Претпоставимо да је $M > 0$. Одатле имамо да $z_0 \in D$. Како w достиже максимум у $z_0 \in D$, применом Принципа максимума за субхармонијске функције 2.2.1 закључујемо да је w константна функција, односно $w \equiv M$. Међутим, $w \equiv 0$ на ∂D, што је контрадикција. Дакле, $M = 0$. Одавде следи да је $u(z) \leq 0$ за свако $z \in D$, што је и требало доказати. □

Доказ Риманове теореме

Риманову теорему можемо доказати решавањем Дирихлеовог проблема за Лапласову једначину. Дирихлеов проблем за Лапласову једначину на ограниченом домену D у $\mathbb{C}$ са непрекидном функцијом $h : \partial D \to \mathbb{R}$ се односи на одређивање хармонијске функције $u : D \to \mathbb{R}$ такве да је

$$\lim_{D \ni z \to \zeta} u(z) = h(\zeta),$$

за свако $\zeta \in \partial D$. Ову функцију можемо наћи **Пероновим методом**, који је развио немачки математичар Оскар Перон 1923. године.

Дефиниција 2.2.2. *Нека је $h : \partial D \to \mathbb{R}$ непрекидна функција на ∂D, где је D ограничен домен у $\mathbb{C}$. Перонова фамилија која одговара функцији h, означимо је са $\mathcal{F}_h$, је фамилија субхармонијских функција $u : D \to [-\infty, \infty)$ таквих да је*

$$\limsup_{D \ni z \to \zeta} u(z) \leq h(\zeta),$$

за свако $\zeta \in \partial D$. Пероново решење Дирихлеовог проблема за Лапласову једначину на домену D које одговара функцији h на граници је

$$\tilde{h}(z) = \sup_{u \in \mathcal{F}_h} u(z),$$

за свако $z \in D$.

Испоставиће се да је Пероново решење заправо тражена хармонијска функција, односно решење одговарајућег Дирихлеовог проблема. Прво ћемо доказати да је $\tilde{h}$ хармонијска функција на D.

Теорема 2.2.2. *Пероново решење $\tilde{h}$ је хармонијска функција на D.*

Доказ. Нека је D_0 диск такав да је $\overline{D_0} \subset D$ и $\{z_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ низ тачака у D_0 који је густ у D_0, тј. такав да је $\overline{\{z_j : j \in \mathbb{N}\}} = D_0$. Како је $\tilde{h}(z) = \sup_{u \in \mathcal{F}_h} u(z)$, за свако $j \in \mathbb{N}$ постоји низ функција $\{u_{jk}\}_{k \in \mathbb{N}}$ у $\mathcal{F}_h$ такав да је $\lim_{k \to \infty} u_{jk}(z_j) = \tilde{h}(z_j)$.
Дефинишимо функцију v_m са

$$v_m(z) = \max_{1 \leq j,k \leq m} u_{jk}(z).$$

Тада $v_m \in \mathcal{F}_h$ и низ функција $\{v_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ је неопадајући низ. За овај низ такође важи да је $\lim_{m \to \infty} v_m(z_j) = \tilde{h}(z_j)$ за свако $j \in \mathbb{N}$.
Дефинишимо функцију w_m такву да је $w_m \equiv v_m$ на $D \backslash D_0$ и w_m је хармонијско проширење функције $v_m|_{\partial D_0}$ на D_0. Докажимо да је функција w_m субхармонијска на D. Проверићемо да важи (2.3) и да је w_m непрекидна на D. Функција w_m је хармонијско проширење функције $v_m|_{\partial D_0}$ на D_0, па је хармонијска на D_0. Како је $\limsup_{D \ni z \to \zeta}(v_m(z) - w_m(z)) \leq 0$, за свако $\zeta \in \partial D_0$, према Последици 2.2.1, $v_m(z) - w_m(z) \leq 0$, односно, $v_m(z) \leq w_m(z)$ на D_0. Следи да је w_m непрекидна на D и $v_m(z) \leq w_m(z)$ на D_0.
За w_m важи (2.3) на $D \backslash D_0$, јер је v_m субхармонијска и $w_m \equiv v_m$ на $D \backslash D_0$. На D_0 је w_m хармонијска, па (2.3) свакако важи. Дакле, (2.3) важи на D и w_m је непрекидна на D, па је субхармонијска на D.
Тада $w_m \in \mathcal{F}_h$ и $\{w_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ је неопадајући низ. Како је $v_m(z_j) \leq w_m(z_j) \leq \tilde{h}(z_j)$, онда је $\lim_{m \to \infty} w_m(z_j) = \tilde{h}(z_j)$ за свако $j \in \mathbb{N}$. Функције w_m су хармонијске на D_0. Применом Харнаковог принципа 1.6.6 добијамо да низ $\{w_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ униформно конвергира на компактима у D_0 ка хармонијској функцији w. За w важи да је $w(z_j) = \tilde{h}(z_j)$ за свако $j \in \mathbb{N}$.
Нека је $z_0 \in D_0$, где је $z_0 \neq z_j$, за свако $j \in \mathbb{N}$. Ако поновимо исти поступак

за низ $\{z_j\}_{j\in\mathbb{N}_0}$ (оригиналном низу смо додали z_0), онда добијамо хармонијску функцију w_0 на D_0 такву да је $w_0(z_j) = \tilde{h}(z_j)$ за свако $j \in \mathbb{N}_0$. Како је $\overline{\{z_j : j \in \mathbb{N}\}} = D_0$ и $w(z_j) = w_0(z_j)$ за свако $j \in \mathbb{N}$, онда је $w(z) = w_0(z)$ за свако $z \in D_0$. Дакле, $w(z) = \tilde{h}(z)$ за свако $z \in D_0$, па је $\tilde{h}$ хармонијска на D_0, самим тим и на D. $\square$

Дефиниција 2.2.3. *Тачка $\zeta_0 \in \partial D$, где је $D \subset \mathbb{C}$ ограничен домен, је регуларна тачка границе ∂D ако је*

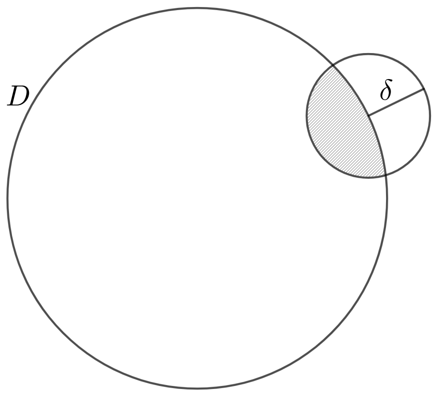
$$\lim_{D\ni z\to\zeta_0} \tilde{h}(z) = h(\zeta_0),$$

при чему је h непрекидна функција на ∂D.

Дефиниција 2.2.4. *Субхармонијска баријера у $\zeta_0 \in \partial D$ је субхармонијска функција w дефинисана на $D \cap B(\zeta_0, \delta)$ за неко $\delta > 0$, таква да је*

1. *$w(z) < 0$ за свако $z \in D \cap B(\zeta_0, \delta)$,*
2. *$\lim\limits_{D\ni z\to\zeta_0} w(z) = 0$,*
3. *$\limsup\limits_{D\ni z\to\zeta} w(z) < 0$, за свако $\zeta \in \partial D$ такво да је $0 < |\zeta_0 - \zeta| < \delta$.*

На следећој слици је дат пример домена дефинисаности субхармонијске баријере.



Приметимо да се w може проширити на читаво D и тада 3. важи за свако $\zeta \in \partial D \backslash \{\zeta_0\}$. Из 1. и 3. следи да ако је $\varepsilon > 0$ довољно мало, онда је $w(z) \leq -2\varepsilon$ за свако $z \in D \cap \partial B\left(\zeta_0, \frac{\delta}{2}\right)$. Нека је

$$u(z) = \begin{cases} \max\{w(z), -\varepsilon\}, & z \in D \cap B\left(\zeta_0, \frac{\delta}{2}\right) \\ -\varepsilon, & z \notin D \cap B\left(\zeta_0, \frac{\delta}{2}\right). \end{cases}$$

Тада је u субхармонијска баријера у ζ_0 која је дефинисана на читавом D.

Теорема 2.2.3. *Нека је D ограничен домен у $\mathbb{C}$ и $\zeta_0 \in \partial D$. Тада је ζ_0 регуларна тачка ако постоји субхармонијска баријера у ζ_0.*

Доказ. Нека је $h : \partial D \to \mathbb{R}$ непрекидна функција на ∂D. Претпоставимо да за $\zeta_0 \in \partial D$ постоји субхармонијска баријера и докажимо да је тада ζ_0 регуларна тачка. Треба доказати да је $\lim\limits_{D \ni z \to \zeta_0} \tilde{h}(z) = h(\zeta_0)$. Без умањења општости претпоставимо да је $h(\zeta_0) = 0$ и $|h(\zeta)| \leq 1$ за свако $\zeta \in \partial D$. Функција h је непрекидна у ζ_0, па за свако $\varepsilon > 0$, постоји $\delta > 0$ такво да је

$$|h(\zeta)| = |h(\zeta) - h(\zeta_0)| < \varepsilon, \tag{2.5}$$

кад год је $|\zeta - \zeta_0| < \delta$.

Нека је w субхармонијска баријера у ζ_0. Можемо претпоставити да је дефинисана на читавом D. Изаберимо $\rho > 0$ такво да је $w(z) \leq -\rho$ за $|z| \geq \delta$. Дефинишимо функцију $u(z) = \frac{w(z)}{\rho} - \varepsilon$ на D. Она је субхармонијска на D, $u(z) \leq -\varepsilon$ на D, јер је $w(z) < 0$ на D и

$$\limsup_{D \ni z \to \zeta} u(z) = \limsup_{D \ni z \to \zeta} \Big(\frac{w(z)}{\rho} - \varepsilon \Big) \leq -1,$$

за свако $\zeta \in \partial D$такво да је $|\zeta| \geq \delta$. Одатле имамо да је $\limsup\limits_{D \ni z \to \zeta} u(z) \leq h(\zeta)$, за свако $\zeta \in \partial D$, па је $u \in \mathcal{F}_h$. Следи да је $u(z) \leq \tilde{h}(z)$.

Како је $\lim\limits_{D \ni z \to \zeta_0} u(z) = -\varepsilon$, важи $\tilde{h}(z) \geq -2\varepsilon$, за z близу ζ_0. Слично се добија, применом на $-h$, да је $\widetilde{(-h)}(z) \geq -2\varepsilon$ за z близу ζ_0.

Из $\tilde{h}(z) + \widetilde{(-h)}(z) \leq 0$ следи $\tilde{h}(z) \leq -\widetilde{(-h)}(z) \leq -(-2\varepsilon) = 2\varepsilon$ за z близу ζ_0. Дакле, $\tilde{h}(z) \geq -2\varepsilon$ и $\tilde{h}(z) \leq 2\varepsilon$, па је $|\tilde{h}(z)| \leq 2\varepsilon$ за z близу ζ_0. Пошто ово важи за свако $\varepsilon > 0$, $\lim\limits_{D \ni z \to \zeta_0} |\tilde{h}(z)| = 0$, па је и

$$\lim_{D \ni z \to \zeta_0} \tilde{h}(z) = 0 = h(\zeta_0).$$

□

Следећа последица показује да је Пероново решење $\tilde{h}$ решење Дирихлеовог проблема за Лапласову једначину на ограниченом домену D чија се граница састоји од коначног броја део-по-део глатких затворених кривих са непрекидном функцијом $h : \partial D \to \mathbb{R}$ на граници ∂D.

Последица 2.2.2. *Нека је D ограничен домен чија се граница састоји од коначног броја део-по-део глатких затворених кривих. Ако је $h : \partial D \to \mathbb{R}$ непрекидна функција на ∂D, онда је $\tilde{h}$ хармонијска функција на D и важи*

$$\lim_{D \ni z \to \zeta} \tilde{h}(z) = h(\zeta), \quad \zeta \in \partial D. \tag{2.6}$$

Доказ. Из Теореме 2.2.2 следи да је $\tilde{h}$ хармонијска функција на D. Покажимо да свака тачка са границе ∂D има субхармонијску баријеру. Свака тачка ζ_0 са ∂D је крајња тачка линијског сегмента I садржаног у $\mathbb{C} \backslash D$, у правцу спољашње нормале на D у тој тачки. Комплемент $\overline{\mathbb{C}} \backslash I$ можемо пресликати конформним пресликавањем φ на отворени јединични диск $\mathbb{D}$ тако да је $\varphi(\zeta_0) = 1$. Тада је $w(z) = \mathrm{Re}(\varphi(z)) - 1$ субхармонијска баријера у ζ_0. Из претходне Теореме 2.2.3 следи да је свака тачка са границе ∂D регуларна тачка границе ∂D, тј. важи (2.6). $\square$

Подскуп E проширене комплексне равни $\overline{\mathbb{C}}$ је **континуум** ако је компактан, повезан и има више од једне тачке. Ако је E континуум онда је $\overline{\mathbb{C}} \backslash E$ просто повезан. Обрнуто, ако је E компактан такав да је $\overline{\mathbb{C}} \backslash E$ просто повезан и E има више од једне тачке, онда је E континуум. Следећи критеријум нам омогућава да решимо Дирихлеов проблем за Лапласову једначину на било ком ограниченом просто повезаном домену.

Лема 2.2.1. *Нека је D домен у $\mathbb{C}$ и $\zeta_0 \in \partial D$. Ако $\zeta_0 \in E$, где је E неки континуум у $\mathbb{C} \backslash D$, онда је ζ_0 регуларна тачка од ∂D.*

Доказ. На основу Теореме 2.2.3 довољно је наћи субхармонијску баријеру у ζ_0. Нека је $\zeta_1 \in E$, при чему је $\zeta_1 \neq \zeta_0$. E је континуум, па је $\overline{\mathbb{C}} \backslash E$ просто повезан. Функција

$$F(z) = \frac{z - \zeta_0}{z - \zeta_1}$$

је добро дефинисана и аналитичка на $\mathbb{C} \backslash E$, јер је $\zeta_1 \in E$. Притом је $F(z) \neq 0$ за свако $z \in \mathbb{C} \backslash E$, јер $\zeta_0 \in E$. $\mathbb{C} \backslash E$ је просто повезан и $F(z) \neq 0$ на $\mathbb{C} \backslash E$, па применом Теореме 1.1.7 добијамо да постоји аналитичка грана функције $\log \frac{z-\zeta_0}{z-\zeta_1}$. Нека је то функција f. Тада је $h(z) = Re\left(\frac{1}{f(z)}\right)$ субхармонијска баријера у ζ_0, дефинисана на $D \cap D_0$, где је $D_0 = \left\{ z \in D \, : \, \left| \frac{z-\zeta_0}{z-\zeta_1} \right| < \frac{1}{2} \right\}$.

$\square$

Последица 2.2.3. *Ако $\overline{\mathbb{C}} \backslash D$ садржи коначно много континума, онда је свака тачка на ∂D регуларна гранична тачка.*

Доказ. Нека је $\zeta_0 \in \partial D$. $\partial D \in \overline{\mathbb{C}} \backslash D$, па постоји неки континуум E такав да $\zeta_0 \in E$. Применом претходне Леме 2.2.1 добијамо да је ζ_0 регуларна тачка границе ∂D. ζ_0 је била произвољна тачка границе ∂D, па је свака тачка са границе ∂D регуларна. $\square$

Следећа последица показује да је Пероново решење $\tilde{h}$ решење Дирихлеовог проблема за Лапласову једначину на ограниченом просто повезаном домену D таквом да је $D \neq \mathbb{C}$ са непрекидном функцијом $h : \partial D \to \mathbb{R}$ на граници ∂D.

Последица 2.2.4. *Нека је D ограничен просто повезан домен у $\mathbb{C}$ такав да је $D \neq \mathbb{C}$. Ако је $h : \partial D \to \mathbb{R}$ непрекидна функција на ∂D, онда је $\tilde{h}$ хармонијска функција на D и важи*

$$\lim_{D \ni z \to \zeta} \tilde{h}(z) = h(\zeta), \quad \zeta \in \partial D. \tag{2.7}$$

Доказ. Из Теореме 2.2.2 следи да је $\tilde{h}$ хармонијска функција на D, а (2.7) следи из Последице 2.2.3. $\square$

Доказ Риманове теореме 2.1.1. Нека је $D \subset \mathbb{C}$ просто повезан домен такав да је $D \neq \mathbb{C}$. Домен D ћемо конформно пресликати на ограничен домен. Нека су $\zeta_0, \zeta_1 \in \partial D$. Функција

$$F(z) = \frac{z - \zeta_0}{z - \zeta_1}$$

је добро дефинисана и аналитичка у D, јер је $\zeta_1 \in \partial D$, па је $z \neq \zeta_1$ за свако $z \in D$. Тачка $\zeta_0 \in \partial D$, па је $F(z) \neq 0$ за свако $z \in D$. Како је D просто повезан домен и $F(z) \neq 0$ на D, применом Теореме 1.1.7 добијамо да постоји аналитичка грана функције $\log \frac{z-\zeta_0}{z-\zeta_1}$. Нека је то функција f. Ако је $w_0 = f(z_0)$ за неко $z_0 \in D$, онда слика $f(D)$ покрива диск D_0 са центром у w_0. С обзиром да је $f(z) \neq w_0 + 2\pi i$, за свако $w_0 \in D_0$, функција $\frac{1}{f(z)-w_0-2\pi i}$ је добро дефинисана и конформно пресликава D на ограничен домен.

Неограничен случај смо свели на ограничен, па можемо претпоставити да је D ограничен домен и да $0 \in D$. Из Последице 2.2.4 следи да Дирихлеов проблем за Лапласову једначину на домену D са непрекидном функцијом $\log|\zeta|$ на ∂D има решење. Нека је то функција u. Она је хармонијска на D и $\lim\limits_{D \ni z \to \zeta} u(z) = \log|\zeta|$, за свако $\zeta \in \partial D$. Како је D просто повезан, из Теореме 1.6.1 функција u је реални део неке аналитичке функције g на D. Дефинишимо

$$\varphi(z) = ze^{-g(z)},$$

где $z \in D$. Функција φ је аналитичка на D, $\varphi(z) = 0$ само ако је $z = 0$ и

$$|\varphi(z)| = |z|e^{\mathrm{Re}(-g(z))} = |z|e^{-u(z)} \to |\zeta|e^{-\log|\zeta|} = |\zeta|e^{\log|\zeta|^{-1}} = |\zeta||\zeta|^{-1} = 1,$$

када $z \to \zeta \in \partial D$. Према Последици 1.4.2, $|\varphi(z)| < 1$ за свако $z \in D$, па је $\varphi(D) \subset \mathbb{D}$.

Докажимо да је $\varphi(D) = \mathbb{D}$. Нека је $w_0 \in \mathbb{D}$ произвољно. Посматрајмо домен $\{z \in D : |\varphi(z)| < 1 - \varepsilon\}$, где $|w_0| < 1 - \varepsilon$. Применом Принципа аргумента 1.2.3 на дати домен добијамо да функција $\varphi(z) - w_0$ има тачно једну нулу на D. Дакле, постоји неко $z_0 \in D$такво да је $\varphi(z_0) = w_0$, тј. $\varphi(D) = \mathbb{D}$. Закључујемо да φ конформно пресликава D на отворени јединични диск $\mathbb{D}$. $\square$

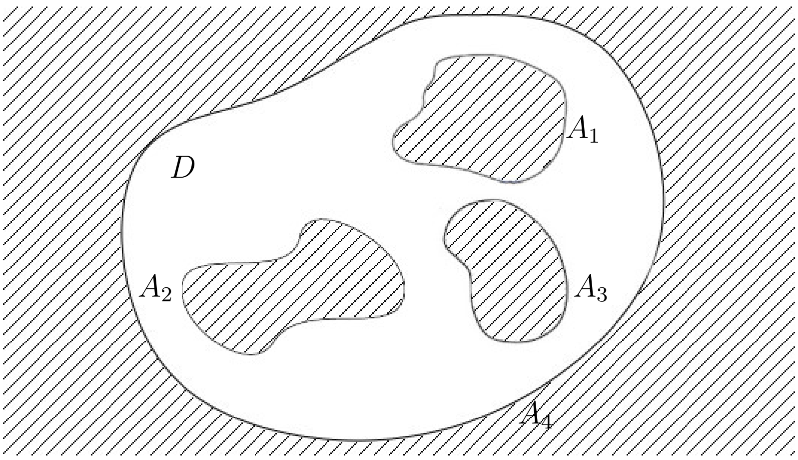
Глава 3

Униформизација вишеструко повезаних домена

3.1 Вишеструко повезани домени

Дефиниција 3.1.1. *Домен $D \subset \mathbb{C}$ је коначно повезан ако његов комплемент $\overline{\mathbb{C}} \backslash D$ има коначно много компоненти повезаности, док је D k-повезан ако његов комплемент $\overline{\mathbb{C}} \backslash D$ има k компоненти повезаности.*

На слици 3.1 је дат пример 4-повезаног домена, односно вишеструко повезаног домена са 4 компоненте повезаности од којих је A_4 неограничена (компоненте су на слици шрафиране, док је домен D оно што је преостало).



Слика 3.1: Пример вишеструко повезаног домена

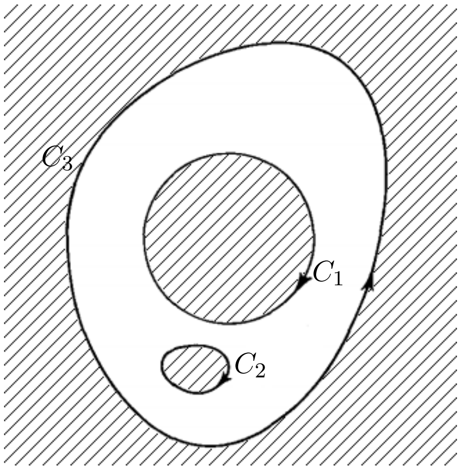
Вишеструко повезан домен D ћемо пресликати на домен чије су све границе глатке криве, тај домен ћемо звати **канонским доменом**.

Нека је D k-повезан домен у $\mathbb{C}$, при чему је $k \geq 2$. Означимо компоненте повезаности комплемента од D са A_1, $A_2, ..., A_k$. Претпоставимо да је A_k неограничен и да свака компонента повезаности има барем две тачке. Границе компоненти означимо редом са $C_1, ..., C_k$. Границу неограничене компоненте A_k називамо спољашњом, а границе ограничених компоненти унутрашњим.

Домен $D' = \mathbb{C} \backslash A_k$ је просто повезан, те се према Римановој теореми 2.1.1 може пресликати на јединични диск, док се D тада пресликава на нови k-повезан домен. Компоненте повезаности и границе ћемо означавати на исти начин. Нови $A_1, ..., A_{k-1}$ су ограничене, повезане компоненте комплемента тог домена, док је $A_k = \{\zeta \in \mathbb{C} : |\zeta| \geq 1\}$. Спољашња граница новог k-повезаног домена C_k је јединични круг са позитивном оријентацијом.

Домен A_1^c у $\overline{\mathbb{C}}$ је просто повезан и пресликавамо га на комплемент јединичног диска у $\overline{\mathbb{C}}$, при чему ∞ иде у ∞. Слично као малопре, опет добијамо k-повезан домен и задржавамо исте ознаке компоненти комплемента и њихових граница. Спољашња граница C_k на новом домену је глатка затворена крива са позитивном оријентацијом, док је унутрашња граница C_1 јединични круг са негативном оријентацијом. Наш домен у овом тренутку има две глатке границе, то су C_1 и C_k.

Понављањем овог поступка још $k-2$ пута све границе ће бити глатке затворене криве. Добићемо домен са спољашњом границом C_k и $k-1$ унутрашњом границом $C_1, ..., C_{k-1}$. Све ове границе су глатке затворене криве и претпостављамо да су унутрашње границе негативне оријентације, а спољашња граница позитивне оријентације. Почетни домен D је конформно еквивалентан са овим доменом.



Слика 3.2: Канонски домен

3.2 Периоди диференцијала

Дефиниција 3.2.1. *Нека је $\gamma : [0,1] \to D$ йросша зашворена део-йо-део глашка крива у домену $D \subset \mathbb{C}$ и $a \notin \gamma$. Индекс криве*[1] *γ у односу на шачку a је* $\mathrm{Ind}_\gamma(a) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{dz}{z-a}$.

Дефиниција 3.2.2. *Нека је $D \subset \mathbb{C}$ домен и γ йросша зашворена део-йо-део глашка крива у D. Кажемо да је крива γ хомологна нули у D ако је* $\mathrm{Ind}_\gamma(a) = 0$, *за сваку шачку $a \in D^c$.*

Приметимо да је домен D просто повезан ако су све просте затворене део-по-део глатке криве хомологне нули у D.

Нека је D k-повезан домен. Означимо компоненте повезаности овог домена са $A_1, A_2, ..., A_k$ и претпоставимо да компонента A_k садржи ∞. Тада постоје просте затворене део-по-део глатке криве γ_j, $j = 1, ..., k-1$ такве да је $\mathrm{Ind}_{\gamma_j}(a) = 1$ за све $a \in A_j$ и $\mathrm{Ind}_{\gamma_j}(a) = 0$ за све $a \in D^c \backslash A_j$.

Нека је γ затворена крива у D. Ако $a \in A_j$, пошто је A_j повезан, $\mathrm{Ind}_\gamma(a)$ не зависи од избора $a \in A_j$. Означимо са $c_j = \mathrm{Ind}_\gamma(a)$, где је $a \in A_j$. Тада је $\mathrm{Ind}_{\gamma - c_1\gamma_1 - c_2\gamma_2 - \cdots - c_{k-1}\gamma_{k-1}}(a) = 0$, за све $a \in D^c$, па је проста затворена део-по-део

[1] Индекс криве γ у односу на тачку a заправо показује колико пута крива γ обилази око тачке a. Притом је позитиван ако обилази у позитивном смеру, а негативан ако обилази у негативном смеру.

глатка крива $\gamma - c_1\gamma_1 - c_2\gamma_2 - \cdots - c_{k-1}\gamma_{k-1}$ хомологна нули у D и коефицијенти у овој линеарној комбинацији су једнозначно одређени. Овде не посматрамо криву γ_k, јер је она граница компоненте која садржи ∞. Криве $\gamma_1, ..., \gamma_{k-1}$ чине базу хомологије на D и важи следећа теорема.

Теорема 3.2.1. *Ако је $f : D \to \mathbb{C}$ аналитичка функција на D, где је D k-повезан домен у $\mathbb{C}$, и γ проста затворена део-по-део глатка крива у D, онда важи*

$$\int_\gamma f(z)dz = c_1 \int_{\gamma_1} f(z)dz + c_2 \int_{\gamma_2} f(z)dz + \cdots + c_{k-1} \int_{\gamma_{k-1}} f(z)dz.$$

$P_j = \int_{\gamma_j} f(z)dz$, $j = 1, ..., k-1$ су периоди диференцијала fdz.

Нека је $u : D \to \mathbb{R}$ хармонијска функција на домену $D \subset \mathbb{C}$. Тада је функција

$$f(z) = u_x(z) - iu_y(z)$$

аналитичка функција на D и

$$f(z)dz = (u_x - iu_y)(dx + idy) = (u_x dx + u_y dy) + i(-u_y dx + u_x dy).$$

Знамо да је $du = u_x dx + u_y dy$, а ако функција u има конјуговану хармонијску функцију v на D, онда је

$$dv = v_x dx + v_y dy = -u_y dx + u_x dy.$$

Међутим, функција v не мора да постоји, па можемо увести ознаку

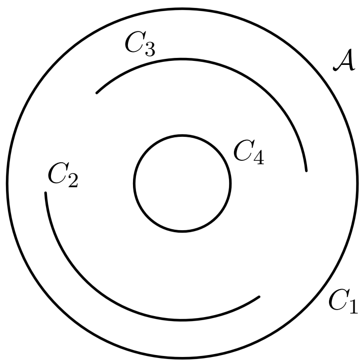
$$^*du = -u_y dx + u_x dy.$$

$^*du$ је конјуговани диференцијал диференцијала du.

Одавде добијамо да су периоди диференцијала fdz дати са $P_j = \int_{\gamma_j} f(z)dz = \int_{\gamma_j} du + i \int_{\gamma_j} {}^*du$, $j = 1, ..., k-1$.

3.3 Униформизација вишеструко повезаних домена

Теорема 3.3.1. *Нека је D k-повезан домен, $k \geq 2$, при чему свака компонента повезаности има барем две тачке. Тада постоји конформно пресликавање $\varphi : D \to \mathcal{A}$, где је $\mathcal{A}$ прстен $A = \{\zeta \in \mathbb{C} \,|\, c < |\zeta| < C\}$ са $k-2$ избачена концентрична лука који леже на круговима $|\zeta| = c_2,\ldots,|\zeta| = c_{k-1}$ (на слици 3.3 је дат пример таквог прстена).*



Слика 3.3: Прстен $\mathcal{A}$ са два избачена концентрична лука

Доказ. Као раније, означимо компоненте повезаности са A_j, а границе тих компоненти са C_j, $j = 1,\ldots,k$. Посматрајмо индексе ових граница. $\mathrm{Ind}_{C_j}(a) = -1$, кад $a \in A_j$, $j = 1,\ldots,k-1$, док је $\mathrm{Ind}_{C_j}(a) = 0$, кад $a \notin A_j$, $j = 1,\ldots,k-1$. $\mathrm{Ind}_{C_k}(a) = 0$, кад $a \in A_k$, док је $\mathrm{Ind}_{C_k}(a) = 1$, кад $a \notin A_k$. Одатле следи да $C_1 + C_2 + \cdots + C_k$ ограничава домен D, па можемо посматрати одговарајуће Дирихлеове проблеме. За свако $1 \leq j \leq k$ посматрајмо Дирихлеов проблем за Лапласову једначину на домену D такав да је тражена функција идентички 1 на C_j а идентички нула на осталим границама. За овај Дирихлеов проблем постоји решење. Нека је то функција ω_j. Важи да је $0 < \omega_j(z) < 1$ за свако $z \in D$ и $\omega_1(z)+\cdots+\omega_k(z) = 1$ за свако $z \in D$. Функција ω_j се може аналитички продужити на ∂D, те можемо сматрати да је ω_j хармонијска на $\overline{D}$ за свако $1 \leq j \leq k$.

Границе $C_1,\ldots,C_k$ формирају базу хомологије за затворене криве у D. За свако $j = 1,\ldots,k$, периоди конјугованог диференцијала ${}^*d\omega_j$ на C_l, $l = 1,\ldots,k$ дати су са $\alpha_{jl} = \int_{C_l} {}^*d\omega_j$.

Доказаћемо да линеарна комбинација $\lambda_1\omega_1(z) + \cdots + \lambda_{k-1}\omega_{k-1}(z)$ са константним коефицијентима λ_j може имати хармонијски конјугат једино уколико су сви λ_j нула. Претпоставимо да је овај израз реални део аналитичке функције f на D. Функција f се може аналитички продужити на $\overline{D}$. Тада је $\mathrm{Re}(f(z)) = \lambda_j$ на граници C_j, $1 \leq j \leq k-1$ и $\mathrm{Re}(f(z)) = 0$ на граници C_k. Дакле, свака граница се пресликавањем f пресликава на вертикални линијски сегмент. Нека је w_0 такво да не припада ни једном од ових сегмената. Тада хармонијска функција $\arg(f(z) - w_0)$ има аналитичку грану на свакој граници C_j, $j = 1, ..., k-1$. Принцип аргумента 1.2.3 нам онда даје да је $f(z) \neq w_0$ за свако $z \in D$. Функција f је аналитичка функција, па је $f(D)$ отворен скуп, а то је могуће само ако је f константна функција. Дакле, реални део од f је идентички 0, па су сви λ_j, $j = 1, ..., k-1$ нула.

Посматрајмо хомогени систем линеарних једначина

$$\begin{aligned}
\lambda_1\alpha_{11} + \lambda_2\alpha_{21} + \cdots + \lambda_{k-1}\alpha_{k-1,1} &= 0,\\
\lambda_1\alpha_{12} + \lambda_2\alpha_{22} + \cdots + \lambda_{k-1}\alpha_{k-1,2} &= 0,\\
&\cdots\\
\lambda_1\alpha_{1,k-1} + \lambda_2\alpha_{2,k-1} + \cdots + \lambda_{k-1}\alpha_{k-1,k-1} &= 0.
\end{aligned}$$

На основу претходног овај систем има само тривијално решење $\lambda_1 = \cdots = \lambda_{k-1} = 0$. Под овим условима $\lambda_1\omega_1 + \cdots + \lambda_{k-1}\omega_{k-1}$ има хармонијски конјугат. Дакле, било који нехомогени систем линеарних једначина са овим истим коефицијентима мора имати јединствено решење. Специјално, можемо решити систем:

$$\begin{aligned}
\lambda_1\alpha_{11} + \lambda_2\alpha_{21} + \cdots + \lambda_{k-1}\alpha_{k-1,1} &= 2\pi,\\
\lambda_1\alpha_{12} + \lambda_2\alpha_{22} + \cdots + \lambda_{k-1}\alpha_{k-1,2} &= 0,\\
&\cdots\\
\lambda_1\alpha_{1,k-1} + \lambda_2\alpha_{2,k-1} + \cdots + \lambda_{k-1}\alpha_{k-1,k-1} &= 0.
\end{aligned}$$

Сабирањем прве $k-1$ једначине

$$\lambda_1(\alpha_{11}+\cdots+\alpha_{1,k-1})+\cdots+\lambda_{k-1}(\alpha_{k-1,1}+\cdots+\alpha_{k-1,k-1})=2\pi \tag{3.1}$$

и коришћењем чињенице да је $\alpha_{j1}+\cdots+\alpha_{jk}=0$ за свако $j=1,...,k-1$ добијамо једначину $-\lambda_1\alpha_{1k}-\cdots-\lambda_{k-1}\alpha_{k-1,k}=2\pi$, односно, $\lambda_1\alpha_{1k}+\cdots+\lambda_{k-1}\alpha_{k-1,k}=-2\pi$. Додавањем ове једначине на претходни систем добијамо систем који има јединствено решење.

Решење тог система нам даје аналитичку функцију f са периодима 2π на C_1, -2π на C_k, односно 0 на осталим границама. Такође, Ref је једнак λ_j на C_j, $1\leq j\leq k$, где је $\lambda_k=0$. Одавде добијамо да је функција $\varphi(z)=e^{f(z)}$ аналитичка.

Доказаћемо да је φ тражено конформно пресликавање, при чему су $c=1$, $C=e^{\lambda_1}$ и $c_j=e^{\lambda_j}$, $j=2,...,k-1$. Како је φ аналитичка и $\varphi(D)\subset\mathcal{A}$, треба још доказати да је φ ˝1-1˝ и ˝на˝. Кривама C_1 и C_k одговарају спољашња и унутрашња граница прстена, редом, док осталим границама $C_2,...,C_{k-1}$ одговарају избачени лукови из прстена.

Нека је $\zeta_0\in\mathbb{C}$ такво да $\zeta_0\notin\partial\mathcal{A}$. Тада је $\varphi(z)-\zeta_0\neq 0$ за свако $z\in C_l$, $l=1,...,k$, па је функција $\frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)-\zeta_0}$ аналитичка на C_l, $l=1,...,k$. Према Принципу аргумента 1.2.3 број нула функције $\varphi(z)-\zeta_0$ је дат са

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\mathcal{A}}\frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)-\zeta_0}dz=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_1}\frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)-\zeta_0}dz+\cdots+\frac{1}{2\pi i}\int_{C_k}\frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)-\zeta_0}dz. \tag{3.2}$$

Ако је $\zeta_0=0$, онда су интеграли редом једнаки 1, 0,...,0, -1. У том случају нема нула. Интеграл по кривој C_1 је 1 уколико је $|\zeta_0|<e^{\lambda_1}$, а нула је за $|\zeta_0|>e^{\lambda_1}$. Слично, последњи интеграл је -1 за $|\zeta_0|<1$, а нула ако је $|\zeta_0|>1$. Интеграли по C_j, $2\leq j\leq k-1$, су нула за $|\zeta_0|\neq e^{\lambda_j}$, односно када ζ_0 не припада луковима.
Дакле, ако $\zeta_0\in\mathcal{A}$, онда је сума (3.2) $0+(0+\cdots+0)+1=1$, односно број корена једначине $\varphi(z)=\zeta_0$ је 1. Како је $\zeta_0\in\mathcal{A}$ произвољно, φ је ˝1-1˝ и ˝на˝. $\square$

Глава 4

Теорема униформизације

Риманова теорема нам је говорила о конформној еквиваленцији просто повезаног домена (различитог од $\mathbb{C}$) у комплексној равни, њено уопштење из претходне главе о конформној еквиваленцији вишеструко повезаног домена (чије компоненте повезаности имају барем две тачке), док ће теорема униформизације дати одговор на питање чему су конформно еквивалентне просто повезане Риманове површи. За почетак ћемо се најпре упознати са Римановим површима и видети нека њихова основна својства.

4.1 Риманове површи

Риманове површи је први увео Риман у својој већ раније поменутој тези из 1851. године. Имају важну улогу у комплексној анализи при раду са функцијама више промењљивих.

Дефиниција 4.1.1. *<u>Риманова површ</u>[1] је повезан Хауздорфов простор R са фамилијом подскупова U_α и функцијама $z_\alpha : U_\alpha \to \mathbb{C}$ таквим да важе следећа својства:*

1. *$\{U_\alpha\}$ формирају отворени покривач од R, тј. $R = \bigcup\limits_{\alpha} U_\alpha$.*
2. *$z_\alpha : U_\alpha \to \mathbb{C}$ је хомеоморфизам U_α и $z_\alpha(U_\alpha)$.*
3. *Ако је $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, онда је функција $z_\beta \circ z_\alpha^{-1}$ аналитичка функција на $z_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$.*

[1]Риманова површ је заправо једнодимензиона комплексна многострукост. Такође, неформално можемо рећи да Риманова површ локално изгледа као комплексна раван.

Систем $\{U_\alpha, z_\alpha\}$ дефинише **конформну структуру** на R. U_α је **координатна околина**, а z_α **координатно пресликавање**. Уколико је U_α координатна околина тачке p таква да је $z_\alpha(p) = 0$, онда такву координатну околину називамо **центрираном у** p. Ако је D_0 диск у $z_\alpha(U_\alpha)$ онда је $z_\alpha^{-1}(D_0)$ **координатни диск** у R. Функцију $z_\beta \circ z_\alpha^{-1}$ називамо **функцијом преласка**.

Приметимо да за сваку тачку $q \in R$ и сваку координатну околину U_α (са координатним пресликавањем z_α) такву да $q \in U_\alpha$ постоји координатни диск W са координатним пресликавањем z такав да $q \in W$ и $z(q) = 0$. Такав координатни диск називамо **центрираним у** q. Заиста, с обзиром да је $z_\alpha(U_\alpha)$ отворен скуп у $\mathbb{C}$, постоји диск $D_0 = B(z_\alpha(q), r) \subset z_\alpha(U_\alpha)$. Тада је $W = z_\alpha^{-1}(D_0) \subset U_\alpha$ координатни диск. Транслирањем и рескалирањем добијамо пресликавање $z : W \to \mathbb{D}$ дато са $z(p) = (z_\alpha(p) - z_\alpha(q))r^{-1}$.

Многи локални концепти комплексне анализе се могу пренети на Риманову површ. Било који појам или теорема о доменима у комплексној равни чији се доказ заснива на локалним понашањима функција такође важе за Риманове површи. Заправо, да би нешто из равни важило и на Римановој површи мора бити инваријантно у односу на функцију преласка $z_\beta \circ z_\alpha^{-1}$. На пример, појмови аналитичке, мероморфне функције...

Скуп $V \subset R$ је отворен на Римановој површи R ако је $z(V \cap U)$ отворен скуп у $\mathbb{C}$ за сваку координатну околину U на R са координатним пресликавањем z.

Дефиниција 4.1.2. *Нека је V отворен скуп на Римановој површи R. За функцију $f : V \to \mathbb{C}$, кажемо да је <u>аналитичка</u> ако је $f \circ z^{-1}$ аналитичка на $z(V \cap U)$, за сваку координатну околину U на R са координатним пресликавањем z. Слично, функција $f : V \to \overline{C}$ је <u>мероморфна</u> ако је $f \circ z^{-1}$ мероморфна на $z(V \cap U)$, за сваку координатну околину U на R са координатним пресликавањем z.*

Дефиниција 4.1.3. *Функција $f : R \to S$, где су R и S Риманове површи, је <u>аналитичка у тачки $p \in R$</u> (<u>мероморфна у тачки $p \in R$</u>) ако постоји координатна околина (U_1, z_1) на R таква да $p \in U_1$ и координатна околина (U_2, z_2) на S таква да $f(p) \in U_2$ и важи да је $z_2 \circ f \circ z_1^{-1}$ аналитичка (мероморфна) у $z_1(p)$. Функцију f тада назовемо <u>аналитичким пресликавањем.</u>*

Ако домен у комплексној равни посматрамо као Риманову површ, онда се појмови аналитичке и мероморфне функције своде на уобичајене дефиниције.

Дефиниција 4.1.4. *Кажемо да су две Риманове површи R и S конформно еквивалентне ако постоји аналитичко пресликавање $f : R \to S$ које је "1-1" и "на". Тада је и инверзно пресликавање $f^{-1} : S \to R$ такође аналитичко.*

Дефиниција 4.1.5. *Нека је R Риманова површ. Функција $u : R \to \mathbb{R}$ је хармонијска на R ако за сваку тачку $p \in R$ постоји координатна околина са координатним пресликавањем (U, z) таква да $p \in U$ и да је $u \circ z^{-1}$ хармонијска функција на $z(U)$.*

Приметимо да ова дефиниција не зависи од избора координатне околине. Заиста, нека су (U_1, z_1) и (U_2, z_2) две координатне околине на R које садрже тачку $p \in R$. Претпоставимо да је $u \circ z_1^{-1}$ хармонијска функција. Тада је $u \circ z_2^{-1} = (u \circ z_1^{-1}) \circ (z_1 \circ z_2^{-1})$ композиција хармонијске и аналитичке функције, па је хармонијска.

Дефиниција 4.1.6. *Непрекидна функција $u : R \to [-\infty, \infty)$ је субхармонијска на R ако за сваку тачку $p \in R$ постоји координатна околина са координатним пресликавањем (U, z) таква да $p \in U$ и да је $u \circ z^{-1}$ субхармонијска функција на $z(U)$, док је $u : V \to [-\infty, \infty)$ субхармонијска на V, где је V отворен скуп у R, ако за сваку тачку $p \in V$ постоји координатна околина са координатним пресликавањем (U, z) таква да $p \in U$ и да је $u \circ z^{-1}$ субхармонијска функција на $z(U \cap V)$.*

Теорема 4.1.1 (Принцип максимума за субхармонијске функције на Римановој површи)**.** *Нека је $u : R \to [-\infty, \infty)$ субхармонијска функција на Римановој површи R. Ако $u(p)$ достиже максимум у некој тачки на R, онда је $u(p)$ константна на R.*

Доказ. Означимо $M = \max_{p \in R} u(p)$. Нека је $A = \{p \in R : u(p) = M\}$. Нека је $p \in A$ произвољна тачка у A. Тада постоји координатни диск (U, z) који садржи p такав да је $u \circ z^{-1}$ субхармонијска на $\mathbb{D}$. Означимо $z(p) = w$. С обзиром да је $u(p) = M$, имамо да је $u(z^{-1}(w)) = u(p) = M$, тј. субхармонијска функција $u \circ z^{-1}$ достиже свој максимум у тачки $w \in \mathbb{D}$. Применом Принципа максимума за субхармонијске функције 2.2.1 добијамо да је $u \circ z^{-1}$ константна функција на $\mathbb{D}$. Како је z бијекција, онда је и u константна на U, тј. $u \equiv M$ на

U. Дакле, $U \subset A$, па је A отворен. Скуп A је и затворен, јер је $A = u^{-1}(\{M\})$ и u је непрекидна функција. Како је R повезан скуп, онда је $A = R$ или је A празан. По претпоставци је A непразан, па закључујемо да је $A = R$, односно u је константна функција на R. □

Слично се добија да важи и следећа теорема.

Теорема 4.1.2. *Нека је $u : V \to [-\infty, \infty)$ субхармонијска функција на отвореном скупу $V \subset R$, где је R Риманова површ. Ако $u(p)$ достиже максимум у некој тачки у V, онда је $u(p)$ константна.*

Последица 4.1.1. *Нека је $u : V \to [-\infty, \infty)$ субхармонијска функција на V, где је $V \subset R$ отворен скуп на Римановој површи R такав да је $V \cup \partial V$ компактан. Ако је $\limsup\limits_{V \ni p \to q} u(p) \leq c$ за свако $q \in \partial V$, онда је $u(p) \leq c$ за свако $p \in V$.*

Доказ. Како је $\limsup\limits_{V \ni p \to q} u(p) \leq c$ за свако $q \in \partial V$, субхармонијска функција $v(p) = \max(u(p), c)$ тежи c кад $p \to q \in \partial V$. Ако дефинишемо $v(p) = c$ на ∂V, онда је $v(p)$ непрекидна на компактном скупу $V \cup \partial V$, па достиже максимум у некој тачки p_0. Означимо тај максимум са M. Претпоставимо да је $M > c$. Одатле имамо да $p_0 \in V$, односно v достиже максимум у V. Применом Теореме 4.1.2 закључујемо да је v константна функција на V, односно $v \equiv M$. Међутим, $v \equiv c$ на ∂V, што је контрадикција. Дакле, $M = c$. Одавде следи да је $u(p) \leq c$ за свако $p \in V$, што је и требало доказати. □

Последица 4.1.2. *Нека је $u : R \to [-\infty, \infty)$ субхармонијска функција на Римановој површи R. Ако је $u(p) \leq c$ за свако $p \in R \backslash K$, где је K компактан скуп у R, онда је $u(p) \leq c$ за свако $p \in R$.*

Доказ. Непрекидне функције на компакту достижу максимум, па постоји неко $p_0 \in K$такво да је $u(p_0) = M$, где је $M = \max\limits_{p \in K} u(p)$. Дакле, u је субхармонијска функција која достиже максимум у тачки из R, па применом Принципа максимума за субхармонијске функције на Римановој површи 4.1.1, добијамо да је u константна функција на R, тј. $u \equiv M$. Како је $u(p) \leq c$ на $R \backslash K$ и $u \equiv M$, следи да је $M = c$. Дакле, $u(p) \leq c$ на $R \backslash K$ и $u \equiv c$ на K, па је $u(p) \leq c$ за свако $p \in R$. □

Теорема 4.1.3 (Харнакове неједнакости за Риманове површи). *Нека је R Риманова површ и $u : R \to \mathbb{R}$ позитивна хармонијска функција. Тада за сваки компакт $K \subset R$ постоји константа $C \in (1, +\infty)$ таква да је*

$$\frac{1}{C} \leq \frac{u(p)}{u(q)} \leq C, \tag{4.1}$$

за сваке две тачке $p, q \in K$.

Доказ. K је компактан па га можемо покрити са коначно много затворених подскупова координатних дискова. Нека су $p, q \in K$. Претпоставимо да p и q припадају затвореном подскупу истог координатног диска U, са координатним пресликавањем z и нека је $z(p) = x$ и $z(q) = y$. Применом Харнакових неједнакости 1.6.5 добијамо да постоји константа C таква да је

$$\frac{1}{C} \leq \frac{(u \circ z^{-1})(x)}{(u \circ z^{-1})(y)} \leq C,$$

односно

$$\frac{1}{C} \leq \frac{u(p)}{u(q)} \leq C.$$

Претпоставимо сада да p и q припадају различитим коодинатним дисковима. Тада можемо наћи коначан низ затворених подскупова координатних дискова $\{U_j\}_{j=1}^{m}$ таквих да је $U_j \cap U_{j+1} \neq \emptyset$, за свако $j = 1, ..., m-1$. Посматрајмо тачке $p, p_1 \in U_1$, при чему $p_1 \in U_1 \cap U_2$. Применом претходно доказаног добијамо да постоји константа C_1 таква да је

$$\frac{1}{C_1} \leq \frac{u(p)}{u(p_1)} \leq C_1.$$

Применом исте неједнакости, али сада на тачке p_1 и p_2, при чему $p_2 \in U_2 \cap U_3$ добијамо да постоји константа C_2 таква да је

$$\frac{1}{C_2} \leq \frac{u(p_1)}{u(p_2)} \leq C_2.$$

Настављањем поступка, у последњем кораку, за тачке $p_{m-1} \in U_{m-1} \cap U_m$ и $q \in U_m$ постоји константа C_{m-1} таква да је

$$\frac{1}{C_{m-1}} \leq \frac{u(p_{m-1})}{u(q)} \leq C_{m-1}.$$

Закључујемо да важи

$$\frac{1}{C_1 C_2 \cdots C_{m-1}} \leq \frac{u(p)}{u(q)} \leq C_1 C_2 \cdots C_{m-1}.$$

Дакле, за $C = C_1 C_2 \cdots C_{m-1}$ важи (4.1).

□

4.2 Дирихлеов проблем на Римановој површи

Дефиниција 4.2.1. *Нека је $V \subset R$ отворен подскуп на Римановој површи R. Непразна фамилија $\mathcal{F}$ субхармонијских функција на V је Перонова фамилија субхармонијских функција ако важи:*

1. *Ако $u, v \in \mathcal{F}$, онда $\max(u, v) \in \mathcal{F}$.*

2. *Ако је $u \in \mathcal{F}$ и D_0 координатни диск у V такав да је функција u коначна на ∂D_0, онда функција v таква да је $v \equiv u$ на $V \backslash D_0$ и хармонијско проширење од $u|_{\partial D_0}$ на D_0 припада $\mathcal{F}$.*

Пошто су сви појмови који се јављају у 2.2 локални онда се Последица 2.2.2 преноси на Риманове површи, па важи следећа теорема.

Теорема 4.2.1. *Нека је V домен на Римановој површи R такав да је $V \cup \partial V$ компактан скуп, ∂V се састоји од коначног броја простих затворених део-по--део глатких кривих и нека је $h : \partial V \to \mathbb{R}$ непрекидна функција на ∂V. Тада је функција $\tilde{h} : V \to \mathbb{R}$ дата са $\tilde{h}(p) = \sup\limits_{u \in \mathcal{F}} u(p)$, за свако $p \in V$, хармонијска на V и важи*

$$\lim_{V \ni p \to q} \tilde{h}(p) = h(q),$$

за свако $q \in \partial V$.

Претходна теорема нам даје егзистенцију решења Дирихлеовог проблема за Лапласову једначину на Римановој површи R са непрекидном функцијом $h : \partial V \to \mathbb{R}$ који се односи на одређивање хармонијске функције $u : V \to \mathbb{R}$, при чему је V домен на R такав да је $V \cup \partial V$ компактан скуп на R, ∂V се састоји од коначног броја простих затворених део-по-део глатких кривих и важи

$$\lim_{V \ni p \to q} u(p) = h(q),$$

за свако $q \in \partial V$.

4.3 Гринова функција на Римановој површи

Посматрајмо Риманову површ R. Нека је $q \in R$ произвољна фиксирана тачка и (U, z) центрирани координатни диск у q. Нека је дата фамилија $\mathcal{F}_q$ свих субхармонијских функција $u(p)$ на $R \backslash \{q\}$ таквих да је $u(p) = 0$ за свако $p \in R \backslash K$, где је K компактан скуп у R, и $u(p) + \log|z(p)|$ субхармонијска функција на координатном диску који садржи q. Ова фамилија је Перонова фамилија субхармонијских функција на $R \backslash \{q\}$.

Напомена. Фамилија $\mathcal{F}_q$ је непразна, јер константна функција $u \equiv 0$ припада $\mathcal{F}_q$. Заиста, функција $u(p) + \log|z(p)| = \log|z(p)|$ је субхармонијска на координатном диску који садржи q и $u(p) = 0$ за свако $p \in R \backslash K$, где је K компактан скуп у R, па $u \in \mathcal{F}_q$.

Дефиниција 4.3.1. *Нека је $\mathcal{F}_q$ Перонова фамилија субхармонијских функција на $R \backslash \{q\}$. Ако је $\sup\limits_{u \in \mathcal{F}_q} u(p) < +\infty$ за свако $p \in R \backslash \{q\}$, онда Гринова функција на R са полом у тачки q постоји и дата је са*

$$g(p, q) = \sup_{u \in \mathcal{F}_q} u(p),$$

за свако $p \in R \backslash \{q\}$.

Став 4.3.1. *Нека је $g(p, q)$ Гринова функција са полом у q на Римановој површи R и (U, z) координатни диск такав да $q \in U$ и $z(q) = 0$. Тада је $g(p, q)$ хармонијска и строго позитивна за свако $p \in R \backslash \{q\}$ и функција $g(p, q) + \log|z(p)|$ је хармонијска у q. Ако постоји још нека позитивна хармонијска функција $h(p)$ на $R \backslash \{q\}$ таква да је $h(p) + \log|z(p)|$ хармонијска у q, онда је $h(p) \geq g(p, q)$ за свако $p \in R \backslash \{q\}$.*

Доказ. Функција $g(p, q)$ је хармонијска и $g(p, q) \geq 0$ за свако $p \in R \backslash \{q\}$, јер је горње ограничење Перонове фамилије. Докажимо да је $g(p, q) > 0$ за свако $p \in R \backslash \{q\}$. Нека је r довољно мало такво да је $B_r = \{p \in R : |z(p)| \leq r\} \subset U$. Функција

$$\begin{cases} -\log|z(p)| + \log r, & p \in B_r \\ 0, & p \notin B_r \end{cases}$$

припада $\mathcal{F}_q$, па је

$$g(p, q) = \sup_{u \in \mathcal{F}_q} u(p) \geq -\log|z(p)| + \log r, \tag{4.2}$$

за свако $p \in B_r \backslash \{q\}$ и $g(p, q) \to +\infty$ кад $p \to q$. Али Гринова функција $g(p, q)$ постиже минимум једино ако је константа, те је $g(p, q) > 0$ на $R \backslash \{q\}$.

Нека је $M = \max_{p \in \partial B_r} g(p, q)$ и $u \in \mathcal{F}_q$. Тада је $u(p) \leq M$ за свако $p \in \partial B_r$, те је

$$u(p) + \log |z(p)| \leq M + \log r, \quad p \in \partial B_r. \tag{4.3}$$

Функција $u(p) + \log |z(p)|$ је субхармонијска на B_r, па (4.3) важи за свако $p \in B_r$, према Последици 4.1.1. Узимајући супремум по свим $u \in \mathcal{F}_q$, добијамо

$$g(p, q) + \log |z(p)| \leq M + \log r, \quad p \in B_r. \tag{4.4}$$

Дакле, из (4.2) и (4.4) ова функција је ограничена хармонијска функција на $B_r \backslash \{q\}$, па како су изоловани сингуларитети ограничених хармонијских функција отклоњиви закључујемо да је ова функција хармонијска у тачки q.

Нека је $h(p)$ позитивна хармонијска функција на $R \backslash \{q\}$ таква да је $h(p) + \log |z(p)|$ хармонијска у q и $u \in \mathcal{F}_q$. Тада је $u(p) - h(p)$ субхармонијска на R, а $u(p) - h(p) = -h(p) < 0$ на $R \backslash K$, где је $K \subset R$ компактан у R, јер је $u(p) = 0$ на $R \backslash K$ и $h(p)$ позитивна на $R \backslash \{q\}$. Према Последици 4.1.2, $u(p) - h(p) < 0$ на R. Узимањем супремума по сваком $u \in \mathcal{F}_q$, добијамо да је $g(p, q) \leq h(p)$, за свако $p \in R \backslash \{q\}$. □

Показаћемо да ако постоји Гринова функција у тачки $q \in R$, онда она постоји за свако $q \in R$. У доказу ћемо користити помоћну хармонијску функцију.

Фиксирајмо $q \in R$ и нека је (U, z) центрирани координатни диск у q. Нека је $r > 0$ довољно мало тако да је $B_r = \{p \in R : |z(p)| \leq r\} \subset U$. Нека је $\mathcal{F}$ фамилија субхармонијских функција u на $R \backslash B_r$ таквих да је $u \leq 1$ за свако $p \in R \backslash B_r$ и $u \equiv 0$ на $R \backslash K$, где је K компактан скуп у R. Пошто је $\mathcal{F}$ Перонова фамилија, функција

$$\omega(p) = \sup_{u \in \mathcal{F}} u(p)$$

је хармонијска функција за свако $p \in R \backslash B_r$, и притом важи $0 \leq \omega \leq 1$. Ову функцију можемо видети као Пероново решење Дирихлеовог проблема за Лапласову једначину на $R \backslash B_r$ са граничном вредношћу 1 на ∂B_r и 0 у ∞. У свакој тачки $p \in \partial B_r$ постоји субхармонијска баријера, па је $\lim_{p \to \zeta} w(p) = 1$, за свако $\zeta \in \partial B_r$. Постоје два случаја: $0 < w(p) < 1$ за свако $p \in R \backslash B_r$ и $w \equiv 1$ на $R \backslash B_r$.

Лема 4.3.1. *Ако Гринова функција $g(p,q)$ постоји за неку тачку $q \in B_r \backslash \partial B_r$, онда је $0 < \omega < 1$ на $R \backslash B_r$. Обрнуто, ако је $0 < \omega < 1$ на $R \backslash B_r$, онда $g(p,q)$ постоји за свако $q \in B_r \backslash \partial B_r$.*

Доказ. Претпоставимо да Гринова функција $g(p,q)$ постоји за тачку $q \in B_r \backslash \partial B_r$. Нека је $c > 0$ такво да је $g(p,q) \geq c$ за свако $p \in \partial B_r$. Одатле је $u(p) \leq \frac{g(p,q)}{c}$ на ∂B_r, где је $u \in \mathcal{F}$. Према Последици 4.1.1, $u(p) \leq \frac{g(p,q)}{c}$ за свако $p \in R \backslash B_r$. Узимањем супремума по $u \in \mathcal{F}$ добијамо да је $w(p) \leq \frac{g(p,q)}{c}$, за свако $p \in R \backslash B_r$. Докажимо да је $\inf\limits_{p \in R \backslash \{q\}} g(p,q) = 0$. Заиста, ако је $\inf\limits_{p \in R \backslash \{q\}} g(p,q) = a$, $a > 0$, онда је $g(p,q) - a$ позитивна хармонијска функција на $R \backslash \{q\}$ за коју важи да је $g(p,q) - a + \log |z(p)|$ хармонијска у q, што је контрадикција, јер је $g(p,q)$ најмања таква функција, према претходном Ставу 4.3.1. Дакле, $\inf\limits_{p \in R \backslash \{q\}} g(p,q) = 0$, па је $\inf\limits_{p \in R \backslash B_r} w(p) = 0$. Како је $w \equiv 1$ на $R \backslash B_r$ или је $0 < w(p) < 1$ на $R \backslash B_r$ и $\inf\limits_{p \in R \backslash B_r} w(p) = 0$ имамо да је $0 < w(p) < 1$, за свако $p \in R \backslash B_r$.

Обрнуто, претпоставимо да је $0 < \omega < 1$ на $R \backslash B_r$. Нека је $s > r$ такво да је $B_s = \{p \in R : |z(p)| \leq s\} \subset U$. Притом је $B_r \subset B_s$. Тада је $u(p) + \log |z(p) - z(q)|$ субхармонијска на B_s, за свако $u \in \mathcal{F}_q$. Изаберимо $\lambda < 1$ такво да је $\omega(p) \leq \lambda$ за свако $p \in \partial B_s$ и $C > 0$ такво да је $|\log |z(p) - z(q)|| \leq C$ за $p \in \partial B_r \cup \partial B_s$. Нека је $u \in \mathcal{F}_q$ и $M = \max\limits_{p \in \partial B_s} u(p)$.

Како је $u(p) + \log |z(p) - z(q)|$ субхармонијска на B_s и

$$|u(p) + \log |z(p) - z(q)|| \leq |u(p)| + |\log |z(p) - z(q)|| \leq M + C$$

на ∂B_s, важи да је

$$u(p) + \log |z(p) - z(q)| \leq M + C, \tag{4.5}$$

за свако $p \in B_s$, према Последици 4.1.1.
Специјално,

$$u(p) \leq M + 2C,$$

за свако $p \in \partial B_r$. Како је $w(p) = 1$ на ∂B_r, онда је

$$u(p) \leq (M + 2C)\omega(p), \quad p \in \partial B_r,$$

а према Последици 4.1.1 и за свако $p \in R \backslash B_r$. Узимањем максимума по свим $p \in \partial B_s$, добијамо

$$\max_{p \in \partial B_s} u(p) \leq (M + 2C) \max_{p \in \partial B_s} w(p),$$

односно,

$$M \leq (M + 2C)\lambda.$$

Решавањем ове неједначине по M добијамо $M \leq 2C\frac{\lambda}{1-\lambda}$, тј.

$$\max_{p\in\partial B_s} u(p) \leq 2C\frac{\lambda}{1-\lambda}.$$

Показали смо да за свако $u \in \mathcal{F}_q$ важи да је

$$u(p) \leq 2C\frac{\lambda}{1-\lambda},$$

за свако $p \in \partial B_s$, а применом Последице 4.1.1 добијамо да је $u(p) \leq 2C\frac{\lambda}{1-\lambda}$, за свако $p \in B_s$. Узимајући супремум по свим $u \in \mathcal{F}_q$ добијамо да тражена Гринова функција са полом у q постоји. □

Теорема 4.3.1. *Ако Гринова функција са полом у q постоји за неко $q \in R$, онда она постоји за свако $q \in R$.*

Доказ. Нека је $A = \{q \in R :$ Гринова функција $g(p,q)$ са полом у q постоји$\}$. Лема 4.3.1 нам показује да је скуп A отворен. Докажимо да је A затворен, односно A^c отворен. Нека је $q_0 \in A^c$. Тада Гринова функција $g(p,q_0)$ са полом у q_0 не постоји. Са (U,z) означимо центрирани координатни диск у q_0. Дефинишимо $B_r = \{p \in R : |z(p)| \leq r\} \subset U$. Ако је $0 < w(p) < 1$ за свако $p \in R\backslash B_r$, онда $g(p,q)$ постоји за свако $q \in B_r\backslash\partial B_r$, према Леми 4.3.1. Специјално, постоји $g(p,q_0)$, што је контрадикција. Дакле, $w \equiv 1$ на $R\backslash B_r$. Ако постоји Гринова функција $g(p,q)$ са полом у $q \in B_r\backslash\partial B_r$, онда је $0 < w(p) < 1$, за свако $p \in R\backslash B_r$, исто према Леми 4.3.1. То је контрадикција, па Гринова функција са полом у $q \in B_r\backslash\partial B_r$ не постоји, па је скуп A^c отворен. Како је Риманова површ R повезан скуп, онда је $A = R$ или је $A = \emptyset$. По претпоставци је A непразан, па је $A = R$, тј. Гринова функција $g(p,q)$ са полом у q постоји за свако $q \in R$. □

4.4 Биполарна Гринова функција

С обзиром да Риманова површ не мора имати Гринову функцију, доказаћемо да свака Риманова површ мора имати биполарну Гринову функцију.

Дефиниција 4.4.1. *Нека су $q_1, q_2 \in R$ две различите тачке Риманове површи R, U_1 и U_2 дисјунктни центрирани координатни дискови у q_1 и q_2, редом. Биполарна Гринова функција са половима у q_1 и q_2 је хармонијска функција $G(p, q_1, q_2)$ на $R\backslash\{q_1, q_2\}$ таква да важи*

1. *$G(p, q_1, q_2) + \log|z_1(p)|$ је хармонијска у q_1,*
2. *$G(p, q_1, q_2) - \log|z_2(p)|$ је хармонијска у q_2 и*
3. *$G(p, q_1, q_2)$ је ограничена на $R\backslash(U_1 \cup U_2)$.*

Пример 4.4.1. *Биполарна Гринова функција за Риманову сферу $\overline{\mathbb{C}}$ са половима у $q_1 = 0$ и $q_2 = \infty$ је $G(z, 0, \infty) = -\log|z|$. Ова биполарна функција је једнозначно одређена до на константу, јер је свака ограничена хармонијска функција на Римановој сфери константна.*

Напомена. Ако је R Риманова површ за коју постоји Гринова функција $g(p, q)$, онда је $G(p, q_1, q_2) = g(p, q_1) - g(p, q_2)$ биполарна Гринова функција на R.

Сада ћемо показати да на свакој Римановој површи постоји биполарна Гринова функција.

Теорема 4.4.1. *За сваке две различите тачке q_1 и q_2 Риманове површи R постоји биполарна Гринова функција $G(p, q_1, q_2)$ са половима у q_1 и q_2.*

Пре доказа теореме ћемо показати једно помоћно тврђење.

Лема 4.4.1. *Нека је S ограничена Риманова површ и $q_1, q_2 \in S$ две различите тачке Риманове површи S. Нека су $B_j = \{|z_j(p)| \leq r\}$ дисјунктни затворени координатни дискови такви да је $z_j(q_j) = 0$, за $j = 1, 2$. Тада постоји константа $C > 0$ таква да је*

$$|g_R(p, q_1) - g_R(p, q_2)| \leq C, \tag{4.6}$$

за свако $p \in R\backslash(B_1 \cup B_2)$, где је R Риманова површ таква да садржи $S \cup \partial S$ и за коју Гринова функција $g_R(p, q)$ постоји.

Доказ Леме 4.4.1. Довољно је доказати за ограничене Риманове површи R које садрже $S \cup \partial S$. Нека је $\rho > 0$ такво да је $\rho < r$. Нека су $A_j = \{|z_j(p)| \leq \rho\}$ и $M_j = \max\limits_{\partial A_j} g_R(p, q_j)$ за $j = 1, 2$. За свако $p \in \partial B_j$ важи

$$g_R(p, q_j) + \log|z_j(p)| \leq \max_{q \in \partial B_j} g_R(q, q_j) + \log r, \tag{4.7}$$

и $g_R(p, q_j) + \log|z_j(p)|$ је хармонијска на B_j. Применом Последице 4.1.1 имамо да неједнакост (4.7) важи за свако $p \in B_j$. Узимајући супремум по свим $p \in A_j$, имамо

$$\sup_{p \in A_j} g_R(p, q_j) + \sup_{p \in A_j} \log|z_j(p)| \leq \max_{q \in \partial B_j} g_R(q, q_j) + \log r,$$

односно

$$M_j + \log\rho \leq \max_{q \in \partial B_j} g_R(q, q_j) + \log r.$$

Одавде следи да постоји $p_j \in \partial B_j$ такво да је $M_j + \log\rho \leq g_R(p_j, q_j) + \log r$, тј.

$$M_j - g_R(p_j, q_j) \leq \log\left(\frac{r}{\rho}\right).$$

Даље, $M_j - g_R(p, q_j)$ је позитивна хармонијска функција на $S \backslash (A_1 \cup A_2)$, па применом Харнакових неједнакости за Риманове површи 4.1.3 на Риманову површ $S \backslash (A_1 \cup A_2)$ и компактан скуп $\partial B_1 \cup \partial B_2$, добијамо константу C_0, која не зависи од R, такву да је

$$M_j - g_R(p, q_j) \leq C_0,$$

за свако $p \in \partial B_1 \cup \partial B_2$. Дакле,

$$M_j - C_0 \leq g_R(p, q_j) \leq M_j, \quad p \in \partial B_1 \cup \partial B_2. \tag{4.8}$$

С обзиром да је $g_R(p, q_1)$ хармонијска за $p \in B_2$ и важи (4.8) на ∂B_2, то (4.8) важи и за свако $p \in B_2$.

Специјално, за $p = q_2$,

$$M_1 - C_0 \leq g_R(q_2, q_1) \leq M_1.$$

Слично,

$$M_2 - C_0 \leq g_R(q_1, q_2) \leq M_2.$$

Приметимо да пошто је $g_R(q_2, q_1) = g_R(q_1, q_2)$, имамо да је $|M_1 - M_2| \leq C_0$.
Из (4.8) следи

$$g_R(p, q_1) - g_R(p, q_2) \leq M_1 + (C_0 - M_2)$$

и

$$g_R(p,q_2) - g_R(p,q_1) = -(g_R(p,q_1) - g_R(p,q_2)) \geq -(M_1 + (C_0 - M_2)),$$

те је

$$|g_R(p,q_1) - g_R(p,q_2)| \leq |C_0 + M_1 - M_2| \leq C_0 + |M_1 - M_2| \leq 2C_0, \tag{4.9}$$

за свако $p \in \partial B_1 \cup \partial B_2$. Како се Гринова функција анулира на ∂R, претходна неједнакост (4.9) важи за свако $R \backslash (B_1 \cup B_2)$, према Последици 4.1.1. □

Доказ Теореме 4.4.1. Нека су $q_1, q_2 \in R$ две различите тачке на Римановој површи R и $p \in R \backslash \{q_1, q_2\}$. Посматрајмо Риманову површ $R_n = R \backslash U_n$, где је U_n координатни диск са координатним пресликавањем z_n такав да је $z_n(U_n) = B\left(0, \frac{1}{n}\right)$ и $z_n(p) = 0$. За свако R_n постоји Гринова функција. Нека је

$$G_n(p,q_1,q_2) = g_n(p,q_1) - g_n(p,q_2),$$

при чему је g_n Гринова функција на Римановој површи R_n. G_n је биполарна Гринова функција на R_n са половима у q_1 и q_2.

Нека су (U_1, z_1) и (U_2, z_2) дисјунктни координатни дискови центрирани редом у q_1 и q_2 (због транслирања и рескалирања можемо претпоставити да је $z_j(U_j) = \mathbb{D}$, за $j = 1, 2$) и B_1 и B_2 затворени координатни дискови такви да је $B_j \subset U_j$, за $j = 1, 2$, такође центрирани у q_1 и q_2, редом. Из (4.6) следи да постоји $C > 0$ такво да је

$$|G_n(p,q_1,q_2)| = |g_n(p,q_1) - g_n(p,q_2)| \leq C,$$

за свако $p \in R \backslash (B_1 \cup B_2)$ и свако $n \in \mathbb{N}$, специјално за свако $p \in R \backslash (U_1 \cup U_2)$ и свако $n \in \mathbb{N}$. Дакле, низ $\{G_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ је униформно ограничен. Функције G_n су хармонијске за свако $n \in \mathbb{N}$, па према Теореми 1.6.4 постоји подниз $\{G_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ који конвергира ка хармонијској функцији $G(p,q_1,q_2)$ на $R \backslash (U_1 \cup U_2)$.

Функција $g_{n_k}(p,q_1) + \log|z_1(p)| - g_{n_k}(p,q_2) = G_{n_k}(p,q_1,q_2) + \log|z_1(p)|$ је хармонијска на U_1 и важи

$$|G_{n_k}(p,q_1,q_2) + \log|z_1(p)|| = |g_{n_k}(p,q_1) - g_{n_k}(p,q_2)| \leq C,$$

за свако $p \in \partial U_1$, а према Последици 4.1.1 и за свако $p \in U_1$. Одатле имамо конвергенцију ка хармонијској функцији $G(p,q_1,q_2) + \log|z_1(p)|$ на U_1. Слично се доказује да имамо конвергенцију ка хармонијској функцији $G(p,q_1,q_2) - \log|z_2(p)|$ на U_2, па закључујемо да је $G(p,q_1,q_2)$ биполарна Гринова функција на R.

□

4.5 Доказ Теореме униформизације

Теорема 4.5.1 (Теорема униформизације)**.** *Свака просто повезана Риманова површ је конформно еквивалентна отвореном јединичном диску* $\mathbb{D}$*, комплексној равни* $\mathbb{C}$ *или Римановој сфери* $\overline{\mathbb{C}}$*.*

Поделићемо доказ на два дела, када на R постоји Гринова функција и када не постоји. У другом случају користимо биполарну Гринову функцију. Пре него што пређемо на доказ прво ћемо навести две леме.

Лема 4.5.1. *Нека је* R *просто повезана Риманова површ за коју Гринова функција* $g(p, q_0)$ *са полом у* q_0 *постоји. Тада постоји аналитичка функција* $\varphi : R \to \mathbb{C}$ *таква да је*

$$|\varphi(p)| = e^{-g(p,q_0)}.$$

Доказ. Нека је (U_α, z_α) координатни диск на R. Претпоставимо да $q_0 \notin U_\alpha$. Тада је функција $g(p) := g(p, q_0)$ хармонијска на U_α, па је $g \circ z_\alpha^{-1}$ хармонијска на $\mathbb{D}$. Према Теореми 1.6.1 постоји аналитичка функција $G_\alpha : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ таква да је $g \circ z_\alpha^{-1} = \mathrm{Re}(G_\alpha)$. Дефинишимо аналитичку функцију $H_\alpha : U_\alpha \to \mathbb{C}$ са

$$H_\alpha = G_\alpha \circ z_\alpha.$$

Тада је $\mathrm{Re}(H_\alpha) = \mathrm{Re}(G_\alpha \circ z_\alpha) = \mathrm{Re}(G_\alpha) \circ z_\alpha = g \circ z_\alpha^{-1} \circ z_\alpha = g$. Дефинишимо функцију $\varphi_\alpha : U_\alpha \to \mathbb{C}$ са $\varphi_\alpha(p) = e^{-H_\alpha(p)}$. За њу важи

$$|\varphi_\alpha(p)| = \left|e^{-H_\alpha(p)}\right| = e^{-\mathrm{Re}(H_\alpha(p))} = e^{-g(p,q_0)}.$$

Можемо приметити да је имагинарни део $\mathrm{Im}(H_\alpha)$ јединствен до на реалну адитивну константу, па је φ_α јединствено до на множење са $e^{i\theta}$ за неко $\theta \in \mathbb{R}$.

Сада изаберимо координатни диск (U_α, z_α) такав да $q_0 \in U_\alpha$. Тада је функција

$$f(p) = g(p, q_0) + \log|z_\alpha(p) - z_\alpha(q_0)|$$

хармонијска на U_α. Слично као малопре, постоји аналитичка функција $H_\alpha : U_\alpha \to \mathbb{C}$ таква да је $\mathrm{Re}(H_\alpha(p)) = f(p)$. Дефинишимо функцију $\varphi_\alpha : U_\alpha \to \mathbb{C}$ са

$$\varphi_\alpha(p) = (z_\alpha(p) - z_\alpha(q_0))e^{-H_\alpha(p)}.$$

Тада је

$$\begin{aligned}|\varphi_\alpha(p)| &= |z_\alpha(p) - z_\alpha(q_0)|\left|e^{-H_\alpha(p)}\right| = |z_\alpha(p) - z_\alpha(q_0)|e^{-\mathrm{Re}(H_\alpha(p))} \\ &= |z_\alpha(p) - z_\alpha(q_0)|e^{-f(p)} = |z_\alpha(p) - z_\alpha(q_0)|e^{-g(p,q_0)-\log|z_\alpha(p)-z_\alpha(q_0)|} \\ &= |z_\alpha(p) - z_\alpha(q_0)|e^{-g(p,q_0)}|z_\alpha(p) - z_\alpha(q_0)|^{-1} \\ &= e^{-g(p,q_0)}.\end{aligned}$$

Закључујемо да постоји фамилија функција $\{\varphi_\alpha\}$ јединствена до на множење са $e^{i\theta}$ за неко $\theta \in \mathbb{R}$ таква да је $|\varphi_\alpha(p)| = e^{-g(p,q_0)}$. Следи да ако је $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, онда је $|\varphi_\alpha| = |\varphi_\beta|$ на $U_\alpha \cap U_\beta$. Одатле је $\frac{\varphi_\alpha}{\varphi_\beta} = e^{i\theta}$, за неко $\theta \in \mathbb{R}$, на $U_\alpha \cap U_\beta$.
Стога је $\varphi_\alpha = e^{i\theta}\varphi_\beta$ аналитичко продужење функције φ_α са $U_\alpha \cap U_\beta$ на U_β. Следи да се φ_α може аналитички продужити дуж сваке криве у R која почиње у U_α. Према аналогној верзији Теореме монодромије 1.1.8 за Риманове површи, φ_α се може аналитички продужити на читавом R и према конструкцији $|\varphi_\alpha(p)| = e^{-g(p,q_0)}$. □

Лема 4.5.2. *Ако на Римановој површи R постоји неконстантна ограничена функција $h : R \to \mathbb{C}$, онда постоји и Гринова функција.*

Доказ. Нека је $q \in R$ произвољна тачка у R и претпоставимо да на R постоји неконстантна ограничена функција $h : R \to \mathbb{C}$. Нека је функција h ограничена са M, односно важи $|h(z)| < M$ за свако $z \in R$. Дефинишимо функцију f на R са

$$f(p) = \frac{h(p) - h(q)}{2M}.$$

Функција f је аналитичка на R, $f(q) = 0$ и

$$|f(p)| = \frac{|h(p) - h(q)|}{2M} \leq \frac{|h(p)| + |h(q)|}{2M} < \frac{2M}{2M} = 1.$$

Нека је $u \in \mathcal{F}_q$. Тада је $u(p) + \log|f(p)|$ субхармонијска функција на R и $u(p) + \log|f(p)| < 0$ ван неког компактног скупа у R. Према Последици 4.1.2, $u(p) + \log|f(p)| < 0$ на R. Следи да је $u(p) < -\log|f(p)|$. Ово важи за свако $u \in \mathcal{F}_q$, па је супремум коначан, односно Гринова функција постоји. □

Доказ Теореме униформизације 4.5.1.
Први случај: Претпоставимо да за просто повезану Риманову површ R постоји Гринова функција. Нека је $q_0 \in R$ произвољна тачка Риманове површи R и $g(p, q_0)$ одговарајућа Гринова функција са полом у q_0.

Према Леми 4.5.1 имамо да постоји аналитичка функција $\varphi : R \to \mathbb{C}$ таква да је

$$|\varphi(p)| = e^{-g(p,q_0)}.$$

Притом важи $|\varphi(p)| < 1$, за свако $p \in R$, јер је $g(p, q_0) > 0$. Доказаћемо да је φ ˝1-1˝. Фиксирајмо $q_1 \in R, q_1 \neq q_0$ и дефинишимо $\psi = \varphi_{\varphi(q_1)} \circ \varphi$, тј.

$$\psi(p) = \frac{\varphi(p) - \varphi(q_1)}{1 - \overline{\varphi(q_1)}\varphi(p)}, \quad p \in R.$$

ψ је добро дефинисана и аналитичка на R, јер је $|\varphi(p)| < 1$, за свако $p \in R$. Важи да је $\psi(q_1) = 0$.

Нека је $u \in \mathcal{F}_{q_1}$. Тада је $u(p) + \log |\psi(p)|$ субхармонијска на R (субхармонијска је и у q_1, јер је $\psi(q_1) = 0$) и $u(p) + \log |\psi(p)| < 0$ ван неког компактног скупа у R, па према Последици 4.1.2 важи да је $u(p) + \log |\psi(p)| < 0$ на R. Узимањем супремума по свим $u \in \mathcal{F}_{q_1}$, добијамо

$$g(p, q_1) + \log |\psi(p)| \leq 0, \quad p \in R. \tag{4.10}$$

Специјално за $p = q_0$,

$$g(q_0, q_1) + \log |\psi(q_0)| \leq 0. \tag{4.11}$$

Како је $\psi(q_0) = \frac{\varphi(q_0)-\varphi(q_1)}{1-\overline{\varphi(q_1)}\varphi(q_0)} = -\varphi(q_1)$ (јер је $\varphi(q_0) = 0$), добија се

$$\begin{aligned} g(q_0, q_1) + \log |\psi(q_0)| &= g(q_0, q_1) + \log |-\varphi(q_1)| = g(q_0, q_1) + \log |\varphi(q_1)| \\ &= g(q_0, q_1) - g(q_1, q_0), \end{aligned}$$

односно, због (4.11) $g(q_0, q_1) - g(q_1, q_0) \leq 0$. Можемо поновити читав поступак, ако уместо q_0 пишемо q_1 и обрнуто. Одатле се добија $g(q_1, q_0) - g(q_0, q_1) \leq 0$, тј. $g(q_0, q_1) - g(q_1, q_0) \geq 0$, па је $g(q_0, q_1) - g(q_1, q_0) = 0$, односно $g(q_0, q_1) = g(q_1, q_0)$ (показали смо симетрију функције g). Одатле следи да је $g(q_0, q_1) + \log |\psi(q_0)| = 0$. Због (4.10), према Принципу максимума за субхармонијске функције на Римановој површи 4.1.1, $g(p, q_1) + \log |\psi(p)| = 0$, за свако $p \in R$, па је $\log |\psi(p)| = -g(p, q_1)$ за свако $p \in R$, односно $|\psi(p)| = e^{-g(p,q_1)}$, па ψ нема нула на $R \backslash \{q_1\}$. Следи да је $\varphi(p) = \varphi(q_1)$ само ако је $p = q_1$. Како је q_1 било произвољно, φ је ˝1-1˝. Дакле, $\varphi : D \to \varphi(R)$, где је $\varphi(R) \subset \mathbb{D}$, је конформно пресликавање. $\varphi(R)$ је просто повезан домен, јер је слика просто повезаног скупа при конформном пресликавању. Применом Риманове теореме 2.1.1, $\varphi(R)$ је конформно еквивалентно отвореном јединичном диску, одатле и R.

Други случај: Претпоставимо да Гринова функција на R не постоји. Нека су $q_1, q_2 \in R$, две произвољне тачке на Римановој површи R и $G(p, q_1, q_2)$ одговарајућа биполарна Гринова функција на R са половима у q_1 и q_2. Слично као у Леми 4.5.1 имамо да постоји мероморфна функција $\varphi : R \to \overline{\mathbb{C}}$ таква да је

$$|\varphi(p)| = e^{-G(p,q_1,q_2)},$$

за свако $p \in R$. Функција φ има пол само у q_2 и важи $\varphi(p) = 0$ само за $p = q_1$. Одатле имамо да је φ ограничена на $R\backslash(B_1 \cup B_2)$, где су B_1 и B_2 координатни дискови који садрже q_1 и q_2, редом.

Доказаћемо да је φ ˝1-1˝. Нека је $q_0 \in R$, $q_0 \neq q_1, q_2$. Посматрајмо биполарну Гринову функцију $G(p, q_0, q_2)$ са половима у q_0 и q_2, и нека је φ_0 мероморфна функција таква да је

$$|\varphi_0(p)| = e^{-G(p,q_0,q_2)}, \quad p \in R.$$

Слично као φ, функција φ_0 има пол само у q_2 и важи $\varphi_0(p) = 0$ само за $p = q_0$, те је ограничена на $R\backslash(B_1' \cup B_2')$, где су B_1' и B_2' координатни дискови који садрже q_0 и q_2, редом.

Нека је

$$\psi(p) = \frac{\varphi(p) - \varphi(q_0)}{\varphi_0(p)}.$$

Функција ψ је добро дефинисана и аналитичка на $R\backslash\{q_0\}$, јер је $\varphi_0(q_0) = 0$. С обзиром да Гринова функција не постоји и да је ψ ограничена функција на R, јер се пол у q_2 поништава, Лема 4.5.2 нам даје да је ψ константна функција, $\psi \equiv c$. $\psi(q_1) = \frac{\varphi(q_1)-\varphi(q_0)}{\varphi_0(q_1)} = \frac{-\varphi(q_0)}{\varphi_0(q_1)} \neq 0$, па је $c \neq 0$, тј. $\psi(p) = c \neq 0$ за свако $p \in R\backslash\{q_0\}$. Одатле имамо да је $\varphi(p) = \varphi(q_0)$ само ако је $p = q_0$. Дакле, φ је ˝1-1˝.

Како је q_0 било произвољно, $\varphi : R \to \varphi(R) \subset \overline{\mathbb{C}}$ конформно пресликава R на просто повезан домен $\varphi(R)$ на Римановој сфери $\overline{\mathbb{C}}$. Ако $\overline{\mathbb{C}}\backslash\varphi(R)$ има више од једне тачке, онда према Римановој теореми 2.1.1 $\varphi(R)$ се може конформно пресликати на јединични диск, те Гринове функције за $\varphi(R)$, па одатле и за R постоје, што је контрадикција. Закључујемо да $\overline{\mathbb{C}}\backslash\varphi(R)$ има највише једну тачку. Одатле, $\varphi(R) = \overline{\mathbb{C}}$ или је $\varphi(R)$ сфера без једне тачке, што је конформно еквивалентно са $\mathbb{C}$. □

Глава 5

Закључак

Риманова теорема је нашла своју примену у многим областима. Ако имамо неки појам или тврђење који важи на отвореном јединичном диску у комплексној равни, знамо да нам Риманова теорема омогућава да исто то пренесемо и на било који просто повезан домен у комплексној равни (различит од саме комплексне равни). Приметили смо да се Риманова теорема користи приликом доказивања Теореме униформизације. Можемо видети како изгледа њена примена у хиперболичкој геометрији. Нека су $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ две произвољне тачке у комплексној равни $\mathbb{C}$. Хиперболичко растојање на јединичном диску $\mathbb{D}$ у комплексној равни $\mathbb{C}$ дефинишемо са

$$d_{\mathbb{D}}(z_1, z_2) = \inf_{\gamma} \ell_{\mathbb{D}}(\gamma),$$

где инфимум узимамо по свим глатким кривама $\gamma : [0,1] \to \mathbb{D}$ таквим да је $\gamma(0) = z_1$ и $\gamma(1) = z_2$, а $\ell_{\mathbb{D}}(\gamma)$ је хиперболичка дужина глатке криве γ дата са $\int_\gamma \rho_{\mathbb{D}}(z)|dz|$, при чему је $\rho_{\mathbb{D}} : \mathbb{D} \to (0, +\infty)$ хиперболичка густина на $\mathbb{D}$ дата са $\rho_{\mathbb{D}}(z) = \frac{2}{1-|z|^2}$. Желимо да дефинишемо хиперболичко растојање на произвољном просто повезаном домену D у комплексној равни $\mathbb{C}$, где је $D \neq \mathbb{C}$. То нам омогућава Риманова теорема. Означимо са $\varphi : D \to \mathbb{D}$ Риманово пресликавање. Тада је хиперболичка густина на D дата са $\rho_D(z) = \rho_{\mathbb{D}}(\varphi(z))|\varphi'(z)|$. Знајући хиперболичку густину на D, слично као на $\mathbb{D}$, можемо добити хиперболичку дужину ℓ_D глатке криве на D, а потом и хиперболичко растојање d_D на D.

На крају, можемо погледати како се може утврдити постојање јединственог решења једног Дирихлеовог проблема коришћењем Риманове теореме, иако смо видели како се до ње може доћи решавањем Дирихлеовог проблема. Испоставља се да можемо доказати егзистенцију решења Дирихлеовог проблема за Лапласову једначину на Жордановој области[1] користећи Риманову теорему. Тачније, у доказу егзистенције решења поменутог Дирихлеовог проблема нам је потребна Каратеодоријева теорема, а за њу нам је потребна Риманова. Дакле, уколико је D Жорданова област у $\mathbb{C}$ и $h : \partial D \to \mathbb{R}$ непрекидна функција на ∂D, Дирихлеов проблем за Лапласову једначину на Жордановој области се односи на одређивање функције $u : \overline{D} \to \mathbb{R}$ такве да је

1. $u \in C^2(D;\mathbb{R}) \cap C(\overline{D};\mathbb{R})$,
2. $\Delta u(z) = 0$, за свако $z \in D$ и
3. $u(z) = h(z)$, за свако $z \in \partial D$.

Теорема 5.0.1 (Каратеодоријева теорема)**.** *Нека је $D \subset \mathbb{C}$ Жорданова област и $\varphi : D \to \mathbb{D}$ Риманово пресликавање. Тада постоји функција $F : \overline{D} \to \overline{\mathbb{D}}$ таква да је F бијекција, F и F^{-1} непрекидне функције и важи $F(z) = \varphi(z)$, за свако $z \in D$.*

Уколико је $F : \overline{D} \to \overline{\mathbb{D}}$ пресликавање која нам обезбеђује Каратеодоријева теорема, онда можемо дефинисати функцију $H : \partial\mathbb{D} \to \mathbb{R}$ са $H = h \circ F^{-1}$, која је непрекидна на $\partial\mathbb{D}$. Тада постоји јединствена функција $U : \overline{\mathbb{D}} \to \mathbb{R}$ таква да $U \in C^2(\mathbb{D};\mathbb{R}) \cap C(\overline{\mathbb{D}};\mathbb{R})$, $\Delta U(z) = 0$ на $\mathbb{D}$ и $U(z) = H(z)$ на $\partial\mathbb{D}$. Функција $u : \overline{D} \to \mathbb{R}$ дата са $u = U \circ F$ је тражена функција која је решење нашег Дирихлеовог проблема.

[1] Жорданова област је просто повезан домен у комплексној равни хомеоморфан граници јединичног диска.

Литература

[1] L. Ahlfors, *Complex Analysis, An Introduction to the Theory of Analytic Functions of One Complex Variable*, McGraw-Hill, 1979.

[2] T. Gamelin, *Complex Analysis*, Springer-Verlag, 2001.

[3] R. E. Greene, K. Kim, "The Riemann mapping theorem from Riemann's viewpoint," *Complex Analysis and its Synergies*, Springer International Publishing AG, 2017.

[4] S. Krantz, *Geometric Function Theory*, Birkhäuser Boston, 2006.

[5] D. Marshall, *Complex Analysis*, Cambridge university press, 2019.

[6] A. F. Beardon, D. Minda, "The hyperbolic metric and geometric function theory," *Proceedings of the International Workshop on Quasiconformal Mappings and their Applications*, 2006.

[7] R. Agarwal, K. Perera, S. Pinelas, *An Introduction to Complex Analysis*, Springer-Verlag, 2011.

[8] S. Axler, P. Bourdon, W. Ramey, *Harmonic Function Theory*, Springer-Verlag, 2001.

[9] J. L. Walsh, "History of the Riemann mapping theorem," *The American Mathematical Monthly*, Mathematical Association of America, 1973.

Биографија аутора

Маја Евтимов је рођена у Сурдулици, 24. маја 1999. године. Основну школу "Бранко Радичевић" и природно-математички смер Гимназије "Јован Скерлић" је завршила у Владичином Хану као носилац Вукове дипломе и ђак генерације. Основне студије Математичког факултета Универзитета у Београду је уписала 2018. године. На студијском програму Математика, модул Теоријска математика и примене је дипломирала 2022. године. Исте године је уписала мастер студије на истом студијском програму и модулу.