

Универзитет у Београду
Математички факултет



Милица Влајчић Гашић

Математички аспекти игре на срећу *рулеџи*

мастер рад

Београд, 2023.

University of Belgrade
Faculty of Mathematics



Milica Vlajcic Gasic

Mathematical aspects of the game of chance *roulette*

master thesis

Belgrade, 2023.

Ментор:

др Јелена Јоцковић, доцент
Универзитет у Београду, Математички факултет

Чланови комисије:

др Павле Младеновић, редовни професор
Универзитет у Београду, Математички факултет

др Марко Обрадовић, доцент
Универзитет у Београду, Математички факултет

*Хвала Владимиру Гашићу, Јелени Марковић Воронов, Љубици Долашевић Чурђузу и Петру
што су били уз мене када сам хтела да одустанем. ♥*

*Захваљујем се и професорки Јелени Јоцковић на конструктивним критикама
и томе што је прихватила да буде ментор овог мајстер рада.*

Наслов мастер рада: Математички аспекти игре на срећу *рулет*

Значај теме и области:

Познато је да област вероватноће води порекло од игара на срећу, односно од решавања практичних проблема као што је расподела добитка када се партија заврши пре времена. Многи важни резултати теорије вероватноће и, специјално, теорије случајних процеса се могу директно показати на проблемима анализирања различитих стратегија у играма на срећу.

Тема је значајна јер представља увид у могућности и примене случајних процеса, вероватноће, статистике, посебно теорије мартингала и теорије ланаца Маркова.

Специфични циљ рада:

Овај рад бавиће се анализом различитих стратегија играња у игри на срећу која се зове "Рулет". За поређење разних статистика које се тичу могућег добитка и ризика од губитка примениће се методе теорије случајних процеса.

У раду ће бити изведено неколико статистика за сваку стратегију коришћењем теорије мартингала и ланаца Маркова. Неки од резултата који ће бити изведени су:

- очекивање и дисперзија крајњег добитка
- очекивање и дисперзија максималног добитка
- број пута када је играч на нули
- последњи пут када је играч на нули пре него што крене да губи

Ове статистике нам омогућавају да поредимо губитак и ризик различитих стратегија. Неки од резултата ће бити проверени коришћењем Монте Карло методе.

Остале битне информације:

Основна литература:

"How to gamble If You Must: Inequalities for Stochastic Processes", Lester E. Dubins, Leonard J. Savage, McGraw-Hill Book Company, Inc., New York, 1965.

Кључне речи: статистика, вероватноћа, игре на срећу, рулет

Садржај

1	Увод	5
1.1	Кратка историја области вероватноће и веза са играма на срећу	5
1.2	Особине и правила игре на срећу <i>Рулет</i>	7
2	Основе теорије случајних процеса	12
2.1	Случајни процеси	12
2.2	Ланци Маркова у дискретном времену	14
2.3	Мартингали у дискретном времену	16
2.4	Случајно лутање	18
2.5	Примери	20
3	Црвено-црна стратегија	23
3.1	Максимум	24
3.1.1	Ланци Маркова	26
3.2	Време последњег излаза	29
3.3	Број посета нули	32
3.4	Монте Карло симулација	34
3.4.1	Максимум	34
3.4.2	Време последњег излаза	35
3.4.3	Број посета нули	36
4	Стратегија једног броја	38
4.1	Максимум	38
4.2	Време последњег излаза	44
4.3	Број посета нули	47
4.4	Монте Карло симулације	49
4.4.1	Максимум	49
4.4.2	Време последњег излаза	51
4.4.3	Број посета нули	52
5	Закључак	53
6	Литература	54
7	Биографија	55
8	Додатак	56

1 Увод

1.1 Кратка историја области вероватноће и веза са играма на срећу

Као што је познато, концепт вероватноће је настао из проблема везаних за коцкање. Ђеорламо Кардано, италијански лекар и математичар 16. века, је написао кратак приручник за коцкаре "Liber de Ludo Aleae" (Игре на срећу) који је садржао прву математичку обраду вероватноће. У овом делу бавио се појмом математичке вероватноће, сабирањем вероватноћа, табелама учесталости за бацање коцкица, успесима у n независних покушаја, као и претечом закона великих бројева. Међутим, Карданов приручник није добио довољно пажње да би заиста допринео развоју теорије вероватноће.

Током 16. и 17. века је много пажње посвећено играма на срећу. Италијански племић је предложио Галилеу Галилеју, италијанском астроному и физичару, да реши проблем бацања коцкица. Решење овог проблема је први забележени резултат у историји математичке теорије вероватноће. Деценију после Галилејеве смрти, француски племић и стручњак за коцкање, Chevalier de Mere (право име - Антоан Гомбро) је предложио нека питања везана за игре на срећу Блезу Паскалу, француском математичару, о чему је наведени математичар почео кореспонденцију са другим француским математичарем, Пјером де Фермаом. Од 1654. године, преписка између двојице Француза је обрађивала проблеме фер игара на срећу. Посебну пажњу су посветили праведној расподели добитка, поготово у случају када је партија морала раније да се заврши. Њихова преписка је увела концепте вероватноће, средње (или очекиване) вредности, условну вероватноћу, па се самим тим може сматрати првим делом класичне теорије вероватноће.

Стимулисан значајним напретком Паскала и Фермаа, Кристијан Хајгенс, 17. вековни холандски математички физичар и астроном, се активно укључио у изучавање вероватноће, те је објавио прво дело које обрађује теорију вероватноће "De Rationiis in Ludo Aleae" (О резонувању у играма на срећу) 1657. године. Ово дело је садржало логичну обраду теорије вероватноће и многе важне резултате, укључујући проблеме везане за бацање коцкица, шансе за побеђивање у играма, проблеме у играма које укључују три или четири играча, итд. У наведеном делу, Хајгенс је увео дефиницију вероватноће као догађаја који је дељење свих повољних случајева са свим могућим случајевима. Такође је поново увео концепт математичког очекивања (или средњу вредност) и елаборисао је Карданову идеју о очекиваној вредности (или средњој вредности) случајних величина. Тада, па чак и данас, постојало је неслагање између различитих дисциплина поводом значења и значаја термина шанса, вероватноћа, веродостојност и неизвесност. Међутим, Хајгенсово дело је дало највећи подстрек даљем развоју теорије вероватноће и остало је најбоља књига о теорији вероватноће до издавања књиге Јакоба Бернулија, које се звало "Ars Conjectandi" (Умеће предвиђања) 1713. године. Стога, Хајгенс се може сматрати оцем теорије вероватноће. Поред низа битних идеја и резултата у његовој монументалној књизи, Бернули је формулисао фундаментални принцип вероватноће који се назива Бернулијева теорема или закон о великим бројевима, име које је дао француски математичар Симеон Пуасон.

Још пре објављивања Бернулијевог дела 1713. године, Абрахам Де Моавр, француски математичар, је објавио своје дело названо "The Doctrine of Chances" (Наука о шансама) у којој је успоставио значај закона о великим бројевима, његово рачунање и Централну граничну теорему, најважнију теорему у целој теорији вероватноће.

На основу Бернулијевог закона великих бројева, Пуасон је извео Пуасонову расподелу вероватноћа из Бернулијеве биномне дистрибуције за велики број покушаја ($n \rightarrow \infty$). Очигледно

је да су Бернулијеви доприноси остварили велики утицај на Де Моавров рад на закону великих бројева и на Централне граничне теореме које су биле прошириване током година од стране великих математичара у њену тренутну, прецизну форму. Бернулијев закон великих бројева имао је огроман и трајни утицај на развој теорије вероватноће наредних 300 година.

Лапласово ремек дело насловљено "Theorie Analytique des Probabilites" (Аналитичка теорија вероватноће) је објављено 1812. године. Састојало се од свих његових открића и других резултата који су били познати у вероватноћи и примени на математичке и друштвене науке, укључујући животно осигурање, смртност, таблице смртности, које су биле основа за статистику осигурања. Он је био први који је успео да направи велике помаке у развијању теорије вероватноће као засебне области, уместо да је само заснована на теорији игара на срећу. Треба поменути и Колмогорова, који је аксиоматски засновао теорију вероватноће (на начин како је то урадио Еуклид са геометријом), повезао је са теоријом мере и довео у облик у коме се она данас изучава.

Детаљније о историји области вероватноће можете прочитати из литературе [9], која је и коришћена за писање овог потпоглавља.

Неке области вероватноће и случајних процеса (ланци Маркова и мартингали) се и данас једноставно и природно интерпретирају кроз проблеме везане за игре на срећу. Математички проблеми који потичу из игара на срећу се и данас појављују у математичкој литератури (можете погледати [10] из литературе).

1.2 Особине и правила игре на срећу *Рулети*

Рулети је игра на срећу која се игра у казинима још од 18. века. Веома је популарно његово појављивање у филмској индустрији и књижевним делима јер се одређеним приступима играча, типа, 'стављам све (цео улог) на број седам', у само једној руци може стећи читаво богатство или се могу изгубити сва уложена материјална добра.

Када играч уђе у казино, он количину новца са којом жели да игра (да се клади) мења за вредносне жетоне. Жетони се разликују по боји зависно од апоена. Сваки казино има свој заштитни дизајн чипова, односно жетона. Затим домаћин казина распореди госта за један од столова за рулет, зависно од тога да ли игра на мале или велике улоге. За сваким столом налази се крупје, односно запослени који води игру.



Слика 1: Сто за рулет
Извор: <https://www.freepik.com>

Сто за рулет састоји се од точка и табле за играње.

Дно точка издељено је на 37 исечака нумерисаних бројевима од 0 до 36, где је половина исечака офарбана у црвено, половина у црно, а исечак на коме је цифра 0 је зелене боје.

Табла за играње се састоји од поља, која представљају визуелне опције за клађење, односно играње игре. Играч може да стави број жетона који жели да уложи на било који од бројева од 0 до 36 понаособ. Када крупје заврти лоптицу на точку, чека се да се њено кретање само од себе заустави. Број који је исписан на исечку на дну точка на коме се лоптица зауставила јесте

број који добија у тој руци. Рука се односи на циклус делатности, које обавља крупје, који се састоји од најаве да се положе опкладе (жетони на поља) од стране свих учесника у игри, најаве да су закључени улози, пуштања лоптице да се врти по точку, саопштавања резултата, односно чињенице на ком се исечку лоптица зауставила и раскусуравања са играчима. Онај играч који је жетоне ставио на поље са истом нумерацијом коју је имао исечак на којем се лоптица зауставила добија 35 пута више жетона него што је уложио, а онај који је положио опкладу на било које друго поље губи све жетоне.

Данас постоје две основне врсте рулета - Европски и Амерички. Оба имају исти број црвених поља (18) и исти број црних поља (18). Ове две врсте рулета разликују се по броју нула и то уједно јесу и једина поља која нити су црвена, нити су црна. Европски рулет има једну нулу, а Амерички нулу и дуплу нулу (односно две нуле). Овај рад ће се односити на Европски тип рулета.

Поред опкладе на један број, постоји још врста опкладе са мањим могућим добитком. Уколико играч положи жетоне на линију која дели два поља, он се клади на оба захваћена поља. Жетони такође могу да се поставе између 4 поља, на почетак реда, почетак колоне или једно од специјалних поља. Специјална поља на себи имају исписан тип опкладе који носе. У питању су клађења на сва црвена поља, на сва црна поља, на парне бројеве, на непарне бројеве, на прву половину бројева, на другу половину бројева, на прву трећину бројева, на другу трећину бројева и на трећу трећину бројева. На што се већи број поља играч клади, мањи је могући добитак, а уколико ниједан од бројева на које се опкладио не буде извучен, губи све што је уложио.

Овај циклус може се понављати бесконачно пута (у теорији), јер казини раде нонстоп. У стварном животу, наше време играња ограничено је само физичком издржљивошћу која нам је потребна да бисмо наставили да играмо и тиме да ли још увек имамо новца (жетони се могу докупити).

У овом раду се бавимо традиционалним рулетом који се игра искључиво уживо, а у последње време је све популарнији и електрични рулет који се игра на слот машини (РС-ју или телефону) без крупјеа, док се гледа снимак точка који се уживо врти у неком казину. Садржај овог потпоглавља до овог момента писан је из личног искуства ауторке.

Надаље ћемо се бавити искључиво математичким аспектима ове игре на срећу.

Основна идеја за овај рад потиче из књиге [3].

Очигледно је да рулет није фер игра. То значи да играч већ унапред зна да ће изгубити све уколико настави предуго да игра. Међутим, неке стратегије су се показале као боље уколико се ослањамо на статистику и вероватноћу. За потребе овог рада разматраћемо само опкладе са улогом од један динар.

Сада се поставља питање да ли и како је најбоље да изделимо наш улог. То је директан начин да покажемо да на што се више бројева будемо кладили, мања је дисперзија добитка/губитка у тој руци.

Претпоставимо да смо разделили наш улог од 1 динар на k поља. X_k ће бити случајна величина која представља наш профит/губитак у једној руци и дефинисаћемо је са:

$$X_k = \begin{cases} \frac{36-k}{k}, & \text{са вероватноћом } \frac{k}{37}; \\ -1, & \text{са вероватноћом } \frac{37-k}{37} \end{cases}$$

или другачије записано:

$$X_1 = \begin{pmatrix} -1 & 35 \\ \frac{36}{37} & \frac{1}{37} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
X_2 &= \begin{pmatrix} -1 & 17 \\ \frac{35}{37} & \frac{2}{37} \end{pmatrix} \\
X_3 &= \begin{pmatrix} -1 & 11 \\ \frac{34}{37} & \frac{3}{37} \end{pmatrix} \\
X_4 &= \begin{pmatrix} -1 & 8 \\ \frac{33}{37} & \frac{4}{37} \end{pmatrix} \\
X_5 &= \begin{pmatrix} -1 & \frac{31}{5} \\ \frac{32}{37} & \frac{5}{37} \end{pmatrix} \\
X_6 &= \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ \frac{31}{37} & \frac{6}{37} \end{pmatrix} \\
&\dots \\
X_{35} &= \begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{35} \\ \frac{2}{37} & \frac{35}{37} \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

X_k има вредност $\frac{36-k}{k}$ (играч добија $\frac{36-k}{k}$ динара уколико је извучен неки од k бројева на које се кладио) са вероватноћом $\frac{k}{37}$, а вредност -1 (играч губи динар који је уложио уколико је извучен неки од $37 - k$ бројева на које се није опкладио) са вероватноћом $\frac{37-k}{37}$.

Стратегија	Однос	Вероватноћа добитка
један број	35 напрема 1	2.7 %
комбинација 2 броја	17 напрема 1	5.4 %
комбинација 3 броја	11 напрема 1	8.1 %
комбинација 4 броја	8 напрема 1	10.8 %
комбинација 5 бројева	6 напрема 1	13.5 %
комбинација 6 бројева	5 напрема 1	16.2 %
колона	2 напрема 1	32.4 %
туце	2 напрема 1	32.4 %
пар/непар	1 напрема 1	48.6 %
црвено/црно	1 напрема 1	48.6 %
мало/велико	1 напрема 1	48.6 %

Стратегије играња - Табела 1

Однос опкладе одређује кладионица (цео део од $\frac{36-k}{k}$ напрема (1) и сада се јасно види да рулет није фер игра јер има 37 бројева на точку (и табли), а однос добитка није 36 : 1, већ 35 : 1.

Онда је дисперзија за X_k :

$$\begin{aligned} D(X_k) &= E(X_k^2) - (EX_k)^2 = \\ &= \left(\frac{36-k}{k}\right)^2 \cdot \frac{k}{37} + (-1)^2 \cdot \frac{37-k}{37} - \left(\left(\frac{36-k}{k}\right) \cdot \frac{k}{37} + (-1) \cdot \frac{37-k}{37}\right)^2 \\ &= \frac{1296(37-k)}{1369k}. \end{aligned} \quad (1)$$

Ако се кладино на само један број, то значи да је $k = 1$ и онда је дисперзија једнака приближно 34.8. Очигледно, уколико бисмо се опкладили на све бројеве, било би $k = 37$ и онда би дисперзија била једнака нули. То значи да нема одступања јер смо се опкладили на све могуће опције за клађење, па засигурно и постоји добитак. У казинима, наравно, није могуће опкладити се на све бројеве, јер такав потез у игри нема смисла.



Слика 2: Лоптица се зауставља на броју 25

Извор: <https://www.gaming.net/how-to-play-roulette-for-beginners/>

За разлику од игара вештине, где играчи могу директно утицати на исход путем својих одлука и акција, игре на срећу укључују значајан елемент случајности или неизвесности. У таквим играма, стратегије имају за циљ оптимизацију процеса доношења одлука и акција играча унутар ограничења шансе како би се повећала вероватноћа повољних исхода или смањили потенцијални губици.

У контексту игара на срећу, термин "стратегија" се односи на планирану путању акције или приступ који играчи усвајају како би максимизирали своје шансе за победу или постизање жељеног исхода у игри која укључује елементе шансе или среће. Стратегије се обично развијају на основу комбинације статистичких вероватноћа, анализе динамике игре и разумевања правила и механизма игре.

Ефикасне стратегије у играма на срећу често укључују равнотежу између ризика и награде. Могу укључивати технике попут управљања протоком новца (eng. bankroll), разумевања и искоришћавања вероватноћа, препознавања образаца или трендова, доношења информисаних опклада или улога и прилагођавања променљивим околностима током игре.

Важно је напоменути да иако стратегије могу побољшати изгледе играча или очекивану вредност на дуже стазе, не гарантују успех у сваком појединачном случају, јер срећа и даље игра значајну улогу у одређивању исхода сваке специфичне игре или догађаја.

Сада ћемо формално дефинисати појам стратегије:

Дефиниција 1.1 *Систем подела који бира сваки пошез из скупа свих могућих пошеза на преходно формулисаним инстанцама се назива стратегија.*

Више о стратегији можете прочитати у литератури [6]. За боље разумевање појма стратегије у комплексним ситуацијама током учествовања у играма на срећу, погледати литературу [16].

Главни циљ овог рада је да упореди две стратегије - црвено-црну стратегију (кладимо се да ће лоптица пасти на било које црно или на било које црвено поље; дисперзија је приближно 0.99) и стратегију једног броја (кладимо се да ће лоптица пасти на тачно један број на који смо ставили цео улог). Са једне стране, клађење црвено-црном стратегијом представља конзервативнију стратегију - улог је издељен, дисперзија је мала, али је такође и добитак мали (1 напрема 1). Са друге стране, клађење стратегијом једног броја представља ризикантнију стратегију - улог уопште није расподељен, али је добитак много већи (35 напрема 1).

Три статистике кумулативног профита/губитка ће се проучавати у сваком поглављу, а то су максимум, време последњег излаза и број посета нули. Поређење ових статистика даће нам детаљнији увид у две стратегије које обрађујемо и тако ћемо доћи до одговора на питање да ли је добро разделити улог или не.

За одређивање и поређење ових статистика користићемо резултате из области теорије случајних процеса, конкретно, теорије мартингала и теорије ланаца Маркова.

Теоријски резултати биће подржани Монте Карло симулацијом на крају сваког поглавља.

Литература коришћена у овом поглављу: [6], [9], [10], [16]

2 Основе теорије случајних процеса

Да бисмо успешно упоредили различите стратегије везане за игру рулет, користићемо познате резултате из области теорије случајних процеса, односно, у конкретном случају, резултате који се односе на случајне низове, мартингале и ланце Маркова. У овом поглављу дат је увод у те области и наведени су резултати који ће се даље користити.

2.1 Случајни процеси

Дефиниција 2.1 (Случајни низ) *Случајни низ је фамилија случајних величина $(X(t) : t \in T)$, где је t параметар који пролази елементе скупа T . Генерално, t називамо временским параметром (или, једноставније, временом) и $T \subseteq \mathbb{R}$. Свако $X(t)$ узима вредности из неког скупа $S \subseteq \mathbb{R}$ који се назива простор стања; самим тим је $X(t)$ стање процеса у тренутку t .*

Теорема 1 (Слаби закон великих бројева) *Нека је $S_n = \sum_{r=1}^n X_r$, где су X_r независне и једнако расподеле случајне величине. Ако $EX_r = \mu < \infty$, онда за $\epsilon > 0$, када $n \rightarrow \infty$,*

$$P\left(\left|\frac{S_n}{n} - \mu\right| > \epsilon\right) \rightarrow 0.$$

Доказ (књига [13], 61. страна): Доказ је уз додатну претпоставку $D(X_r) < \infty$. На основу Чебишевљево неједнакости (књига [14], 20. страна):

$$P\left(\left|\frac{S_n}{n} - \mu\right| > \epsilon\right) \leq E\left(\frac{S_n}{n} - \mu\right)^2 / \epsilon^2 = D(X_1)/(n\epsilon^2) \rightarrow 0, \text{ за } n \rightarrow \infty. \quad \square$$

Теорема 2 (Јаки закон великих бројева) *Када $n \rightarrow \infty$,*

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow{\text{c.c.}} \mu$$

за неку коначну константу μ , ако и само ако $E|X_r| < \infty$, та је, последично, $\mu = EX_1$.

Доказ (књига [13], 61. страна): Претпоставити да X_r има коначну функцију генерисања момента $M(t)$ у $[-a, a]$, за неке $a > 0$. Нека $Y_r = X_r - \mu - \epsilon$, $\epsilon > 0$, где је $\mu = EX_1$. Пошто је $EY_r < 0$, следи да функција генерисања момента $M_Y(t) = E(\exp((X_r - \mu - \epsilon)t))$ опада у $t = 0$ (почетни тренутак). Пошто постоји у $[-a, a]$, онда постоји вредност v , тако да $0 < v < a$, тако да $M_Y(v) < b < 1$. Дакле, може се написати:

$$P\left(\frac{S_n - n\mu}{n} > \epsilon\right) = P(\exp(v(S_n - n\mu - n\epsilon)) > 1) \leq E(\exp(v(S_n - n\mu - n\epsilon)))$$

по дефиницији случајног процеса $= M_Y(v)^n < b^n$.

Слично, постоји нека константа c , $0 < c < 1$ тако да

$$P((S_n - n\mu)/n < -\epsilon) < c^n.$$

Дакле

$$\sum_n P(|S_n - n\mu|/n > \epsilon) < \sum_n (b^n + c^n) < \infty.$$

И по леми 6 (књига [13], поглавље 2, сумациона лема (6)), имамо $S_n/\mu \xrightarrow{c.c.} \mu$, за $n \rightarrow \infty$. $\square$

Дефиниција 2.2 (Литераџура [2]) Нека је $X_1, \dots, X_n$ случајни узорак било које расподеле.

Дефинишемо:

- а) Узорачка средња вредност $\overline{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{r=1}^n X_r$,
- б) Узорачка дисперзија $\sigma^2 = E(X - \mu)^2$, где је $\overline{X}_n = \mu$,
- в) Узорачка стандардна девијација $\sigma = \sqrt{\sigma^2}$.

Теорема 3 (Централна гранична теорема) Ако $EX_r = \mu$ и $0 < D(X_r) = \sigma^2 < \infty$, онда, кад $n \rightarrow \infty$,

$$P\left(\frac{S_n - n\mu}{(n\sigma^2)^{1/2}} \leq x\right) \rightarrow \Phi(x),$$

где је $\Phi(x)$ стандардна нормална расподела. Доказ се налази у књизи [13], 60. страна.

Теорема 4 (Слутскијева теорема) Ако је $X_n \rightarrow X$ у расподели и $Y_n \rightarrow a$ (где је a константа) у вероватноћи, онда

$$\begin{aligned} Y_n X_n &\rightarrow aX \text{ у расподели} \\ X_n + Y_n &\rightarrow X + a \text{ у расподели} \end{aligned}$$

Доказ се налази у књизи [1], 239. страна. $\square$

Теорема 5 Нека је $X_1, \dots, X_n$ случајни узорак било које расподеле са очекиваном вредношћу μ и са коначном стандардном девијацијом σ^2 . Онда

$$\sqrt{n} \frac{\overline{X}_n - \mu}{S_n} \rightarrow N(0, 1), \text{ у расподели.}$$

Доказ. Из централне граничне теореме (ЦГТ) знамо да

$$\sqrt{n} \frac{\overline{X}_n - \mu}{S_n} \rightarrow N(0, 1), \text{ у расподели.}$$

Такође знамо да $S_n^2 \rightarrow \sigma^2$, у вероватноћи. Дакле,

$$\frac{S_n}{\sigma} \rightarrow 1, \text{ у вероватноћи.}$$

Користећи теорему 4

$$\sqrt{n} \frac{\overline{X}_n - \mu}{S_n} = \frac{\sigma}{S_n} \sqrt{n} \frac{\overline{X}_n - \mu}{S_n} \rightarrow N(0, 1), \text{ у расподели. } \square$$

2.2 Ланци Маркова у дискретном времену

Претпоставимо да разматрамо физички систем који у дискретним тренуцима времена, које ћемо означити са $0, 1, 2, \dots$, прелази из једног стања у друго. Претпоставимо такође да је скуп стања, који се назива *фазни простор* или *простор стања*, пребројив и нека су његови елементи нумерисани целим бројевима, тј. елементима скупа $\mathbb{Z}$. Нека је X_t стање система у тренутку t , које настају као резултат случајних промена стања $X_0 \rightarrow X_1 \rightarrow \dots \rightarrow X_t \rightarrow \dots$ и нека је

$$p_{ij} = P(X_{t+1} = j \mid X_t = i).$$

Вероватноћа p_{ij} дата претходном формулом назива се *вероватноћа преласка* система из стања i у стање j и за њу претпостављамо да не зависи од тренутка t , као ни од низа стања у којима се систем налазио до тренутка $t - 1$ закључно. Другим речима, претпостављамо да важи

$$\begin{aligned} p_{ij} &= P(X_{t+1} = j \mid X_t = i) \\ &= P(X_{t+1} = j \mid X_0 = i_0, \dots, X_{t-1} = i_{t-1}, X_t = i). \end{aligned}$$

Наведена једнакост се назива *Марковљево својство*. Претходно описана шема зове се *хомоген Марковљев ланац*. У даљем излагању ћемо, као што је уобичајено, скуп ненегативних целих бројева означавати са $\mathbb{N}_0$, а скуп целих бројева са $\mathbb{Z}$. Формална дефиниција Марковљевог ланца гласи:

Дефиниција 2.3 *Случајни низ $\{X_t, t \in \mathbb{N}_0\}$ зове се хомоген Марковљев ланац са простором стања $\mathbb{Z}$, ако за свако $t \in \mathbb{N}_0$ и све $i, j, i_0, \dots, i_{t-1} \in \mathbb{Z}$ важи Марковљево својство. Број p_{ij} зове се вероватноћа преласка из стања i у стање j , а матрица $\mathbf{P} = [p_{ij}]_{|\mathbb{Z}| \times |\mathbb{Z}|}$ зове се матрица вероватноћа преласка.*

Ако вероватноћа преласка система из стања i у стање j зависи од тренутка t , онда се одговарајућа вероватносна шема зове *нехомоген Марковљев ланац*. Ми ћемо овде у даљем разматрати само хомогене Марковљеве ланце и звати их кратко Марковљеви ланци.

Нека је дат Марковљев ланац $\{X_t, t \in \mathbb{N}_0\}$. Очигледно је да је матрица вероватноћа преласка $\mathbf{P} = [p_{ij}]_{|\mathbb{Z}| \times |\mathbb{Z}|}$ *стохастичка*, тј. да има својства:

$$\begin{aligned} p_{ij} &\geq 0 \text{ за све } i, j \in \mathbb{Z}, \\ \sum_j p_{ij} &= 1 \text{ за свако } i \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Уведимо још ознаке за вероватноће почетних стања, тј. за вероватноће догађаја да се систем у почетном тренутку налази у неком од стања:

$$p_i^{(0)} = P(X_0 = i), i \in \mathbb{Z}.$$

И за ове вероватноће очигледно важи једнакост $\sum_i p_i^{(0)} = 1$.

Напомена. Скуп стања код једноставнијих Марковљевих ланаца може бити коначан, на пример $\{1, 2, \dots, m\}$. Матрица вероватноћа преласка $\mathbf{P} = [p_{ij}]_{m \times m}$ у овом случају је матрица димензије $m \times m$.

Теорија о ланцима Маркова ослања се на литературу [12], страна 307.

Теорема 6 (Чепмен-Колмогоров једначине) *За све i и k у S и за било које позитивно m и n*

$$p_{ik}^{(m+n)} = \sum_{j \in S} p_{ij}^{(m)} p_{jk}^{(n)}.$$

Доказ (књига [13], 116. страна): Ове једначине проистичу из једне једноставне и природне идеје: условљавамо се на стању ланца после m корака:

$$\begin{aligned} p_{ik}^{(m+n)} &= P(X_{m+n} = k \mid X_0 = i) \\ &= \sum_j P(X_{m+n} = k, X_m = j \mid X_0 = i) \\ &= \sum_j P(X_{m+n} = k \mid X_m = j, X_0 = i) P(X_m = j \mid X_0 = i) \end{aligned}$$

на основу условне вероватноће

$$= \sum_j P(X_{m+n} = k \mid X_m = j) P(X_m = j \mid X_0 = i)$$

по Марковљевом својству

$$= \sum_j p_{ij}^{(m)} p_{jk}^{(n)}.$$

Из тога проистиче да, ако је $P(X_0 = j) = \alpha_j$, онда:

$$P(X_n = k) = \sum_j \alpha_j p_{jk}^{(n)}.$$

□

2.3 Мартингали у дискретном времену

Случајни процеси се карактеришу на основу зависног односа између његових случајних величина. Мартингали се посматрају као класа процеса који су апстрактни модели фер игара. Дефиниција фер игара јесте да очекиван добитак после сваког клађења је једнак добитку и у претходном кораку.

Дефиниција 2.4 (Мартингал) (лиџераџура [15], 87. страна) Низ $(M_n; n \geq 0)$ је мартингал ако, за све n ,

a) $E(M) < \infty$

б) $E(M_{n+1} \mid M_0, \dots, M_n) = M_n$ с.с.

Мартингал се може и мало општије дефинисати на следећи начин:

Дефиниција 2.5 (лиџераџура [13], 64. страна) Нека је Y_n случајни низ. Ако важи услов

a) из Деф. 2.4. и услов:

в) $E(X_{n+1} \mid Y_0, \dots, Y_n) = X_n$.

онда кажемо да је низ X_n мартингал у односу на помоћни низ Y_n .

Други услов б) тврди (у контексту игара) да очекивано богатство је исто после n -тог клађења као и пре. Услов б) се може преформулисати на следећи начин:

$$E(M_{n+1} - M_n \mid M_0, \dots, M_n) = 0,$$

што каже да очекивани добици на следећем клађењу имају просечну вредност 0, сходно резултатима ранијих клађења. Ако се игра у стварном казину, свакако да ова претпоставка није тачна; б) треба заменити са:

г) $E(M_{n+1} \mid M_0, \dots, M_n) \leq M_n$.

Потом $M_n; n \geq 0$ се назива *супермартингал*. За богаћење казина X_n , природно, б) се замењује се са:

д) $E(X_{n+1} \mid X_0, \dots, X_n) \geq X_n$.

У овом случају, $(X_n; n \geq 0)$ се назива *субмартингал*.

Потребно је још објаснити време заустављања, концепт који се природно појављује када се разматрају мартингали. У контексту коцкања, могућа времена заустављања су:

- нема више новца
- казину нестане новца
- треба да одете како бисте стигли на лет којим идете назад кући.

Време заустављања може бити само временски тренутак који можемо да одредимо на основу претходних догађаја:

Дефиниција 2.6 (Време заустављања) Ако је $(X_n; n \geq 0)$ случајни процес, онда ненегативна целобројна случајна величина T је време заустављања за X ако догађај $T = n$ зависи од $(X_0, \dots, X_n)$, и не зависи од $(X_{n+k}; k \geq 1)$. Ово групажије се може рећи да је индикатор догађаја да је $T = n$, $I(T = n)$ функција од само $X_0, \dots, X_n$.

Теорема 7 (Конвергенција мартингала) Нека $(Y_n; n \geq 0)$ буде мартингал такав да $EY_n^2 \leq K < \infty$ за неку реалну константу K . Онда Y_n конвертира скоро сигурно када $n \rightarrow \infty$.

Доказ: (књига [13], 70. страна):

За $r > i$, итеративно закључујемо

$$E(Y_r | Y_0, \dots, Y_i) = E(E(Y_r | Y_{r-1}, \dots, Y_0) | Y_0, \dots, Y_i) = E(Y_{r-1} | Y_0, \dots, Y_i) = Y_i.$$

Стога,

$$E(Y_r Y_i) = E(E(Y_r Y_i | Y_0, \dots, Y_i)) = EY_i^2.$$

Дакле, за $i \leq j \leq k$,

$$E((Y_k - Y_j)Y_i) = E(Y_k Y_i) - E(Y_j Y_i) = 0.$$

Из претходна два израза следи

$$0 \leq E(Y_k - Y_j)^2 = EY_k^2 - EY_j^2.$$

Стога, $(EY_n^2; n \geq 1)$ је ограничен, непадајући, конвергентан низ. Дакле, имамо

$$E(Y_k - Y_j)^2 \rightarrow 0,$$

када $j, k \rightarrow \infty$, из претходног израза. Из овога се може извести постојање случајне величине Y тако да $Y_k \xrightarrow{c.c.} Y$, када $k \rightarrow \infty$. Такође се може показати да $Y_n \xrightarrow{c.c.} Y$. $\square$

Као последицу, имамо битан резултат:

Ако је $(X_n; n \geq 0)$ мартингал, онда има ортогоналне прираштаје у смислу да за $i \leq j \leq k \leq m$:

$$E(X_m - X_k)(X_j - X_i) = 0.$$

Претходна теорема може да се објасни на следећи начин: Када је у питању фер игра очекивано богатство играча је константно током времена, али његов квадрат расте.

Дефиниција 2.7 (Филтрација) (лиџераџура [7], страна 347) Нека је X случајна величина на $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ тако да важи $E(X^2) < \infty$ и нека је $\{\mathcal{G}_n : n \geq 1\}$ низ σ -поља садржаних у $\mathcal{F}$ тако да задовољавају $\mathcal{G}_n \subseteq \mathcal{G}_{n+1}$ за свако n . Низ $\{\mathcal{G}_n\}$ се назива филтрацијом.

Теорема 8 (Теорема о опционом узорковању) Нека је $X = \{X(n), n \in \mathbb{N}\}$ мартингал у дискретном времену и τ време заустављања које може да има вредности из $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$, где се оба базирају на филтрацији $(\mathcal{F}_n)_n \in \mathbb{N}$.

Претпоставимо да важи једно од наредна три услова:

- а) Време заустављања τ је скоро сигурно ограничено.
- б) $E(\tau) < \infty$ и постоји константа c таква да $E(|X(n+1) - X(n)| | \mathcal{F}_n) \leq c$ скоро сигурно за све $n \in \mathbb{N}$.

- в) Постоји константа c таква да $|X_{\min\{n, \tau\}}| \leq c$ скоро сигурно за свако $n \in \mathbb{N}$.

Онда је $X(n)$ скоро сигурно добро дефинисана случајна величина и $E(X(\tau)) = E(X(1))$.

Доказ: Видети књигу [7], страна 491.

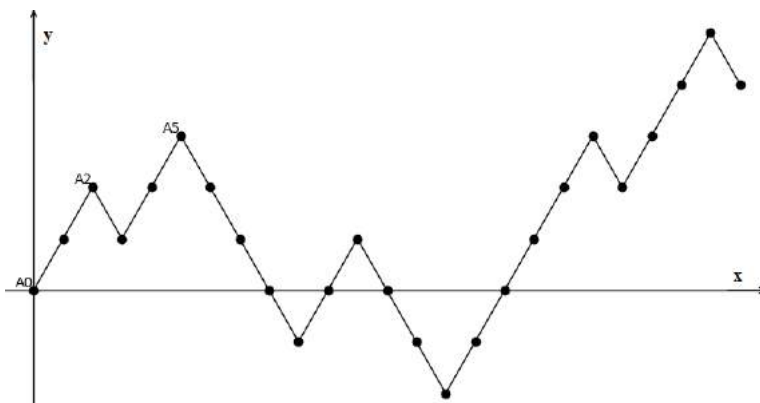
2.4 Случајно лутање

Један важан математички модел, који се често наводи у контексту теорије ланаца Маркова и у контексту теорије мартингала је случајно лутање. Овде ћемо навести најједноставнији пример случајног лутања (симетрично случајно лутање по правој) и извести неке његове особине.

Особине случајног лутања (детаљније у литератури [5], [11]) ћемо користити и у остатку рада. А за елаборисање теорије случајног лутања коришћена је литература [11].

Симетрично случајно лутање на правој

Нека је у равни дат правоугли координатни систем xOy и нека је Ox временска оса. Претпоставимо да се у почетном (нултом) тренутку покретна честица налази у координатном почетку и да се она креће по y -оси на тај начин што у јединици времена направи корак величине $+1$ са вероватноћом $1/2$, односно корак величине -1 са вероватноћом $1/2$ (независно од осталих корака). Овако кретање зове се симетрично случајно лутање на правој. Трајекторија кретања честице је изломљена линија $A_0A_1A_2A_3\dots$, где је апсциса тачке A_k једнака k , а ордината тачке A_k једнака s_k , при чему је $s_0 = 0$ и за свако $k \in \{1, 2, 3, \dots\}$ важи $s_k - s_{k-1} = \epsilon_k \in \{-1, 1\}$. Трајекторија $A_0A_1A_2A_3\dots$ је бесконачна, а за трајекторију $A_0A_1A_2\dots A_n$ кажемо да има дужину n . Једна трајекторија кретања дата је на слици.



Слика 3.

Код за претходну слику је дат у додатку под ставком 1)

Означимо са Ω_n скуп свих трајекторија дужине n . Број елемената скупа Ω_n једнак је броју n -варијација елемената -1 и 1 , тј. 2^n , а вероватноћа сваке трајекторије из Ω_n једнака је 2^{-n} . Тиме је за сваки природан број n дефинисан простор исхода и одређене су вероватноће тих исхода, тј. дефинисан је простор вероватноћа. При томе, вероватноћа трајекторије из Ω_n зависи од n . У вези са тим приметимо следеће:

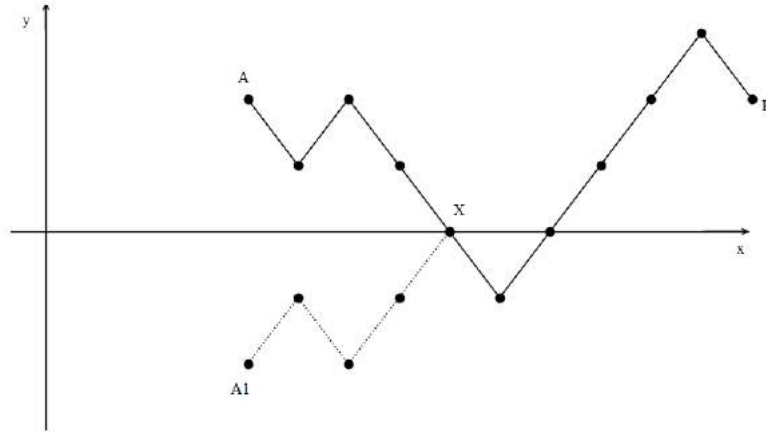
Нека је $k < n$. Вероватноћа сваке конкретне трајекторије $A_0A_1\dots A_k$ из скупа Ω_k једнака је 2^{-k} . С друге стране, ако је $S \subset \Omega_n$ скуп свих трајекторија из Ω_n чији је почетни део једнак трајекторији $A_0A_1\dots A_k$, онда скуп S садржи 2^{n-k} трајекторија (јер сваки корак после k -тог честица може направити на два начина), па следи да је вероватноћа догађаја S једнака $2^{n-k}2^{-n} = 2^{-k}$. Према томе, вероватноће дефинисане на просторима исхода $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3, \dots$ усаглашене су у наведеном смислу. Ту усаглашеност можемо слободније интерпретирати на следећи начин: Вероватноћа почетног дела трајекторије не зависи од дужине трајекторије.

Принцип симетрије

Одређивање вероватноћа догађаја који су у вези са случајним лутањем је комбинаторни задатак, јер се своди на пребројавање броја трајекторија за које важе одређени услови. При томе се често користи принцип симетрије:

Теорема 9 Нека су $A(a_1, a_2)$ и $B(b_1, b_2)$ тачке са целим координатама за које важи $b_1 > a_1 \geq 0, a_2 \geq 0, b_2 \geq 0$ и нека је $A_1(a_1, -a_2)$ тачка симетрична са тачком A у односу на x -осу. Тада важи твђење: Број трајекторија са почетком A и крајем B које имају заједничких тачака са x -осом, једнак је броју свих трајекторија са почетком A_1 и крајем B .

Доказ. Нека је S_1 скуп трајекторија са почетком A и крајем B и које секу x -осу, а S_2 скуп свих трајекторија са почетком A_1 и крајем B . Нека је t произвољна трајекторија из S_1 и нека је X она од пресечних тачка трајекторија t и x -осе која има најмању апсцису, слика.



Слика 4.

Код за претходни график је наведен у додатку под ставком 2)

Нека је t_1 део трајекторије t са почетком A и крајем X , t_2 део трајекторије t са почетком X и крајем B и t'_1 трајекторија симетрична са t_1 у односу на x -осу. Трајекторији $t \in S_1$ придружимо трајекторију $t'_1 \cup t_2 \in S_2$. Ово придруживање је бијекција, тј. важи $|S_1| = |S_2|$. $\square$

2.5 Примери

Примери мартингала се појављују у разним областима математике, а посебно значајну улогу имају у финансијској математици [4]. Неки од примера се тичу и случајног лутања.

1. Пример: Линеарни мартингал.

Нека су ξ_n независне, једнако расподељене случајне величине и нека је $S_n = \xi_1 + \dots + \xi_n$. Ако је $\xi = 0$, онда је $S_n, n \geq 0$, мартингал у односу на $\mathcal{F}_n$.

Да би се ово доказало, приметимо да је $S_n \in \mathcal{F}_n, E(S_n) < \infty$ и да је ξ_{n+1} независно од $\mathcal{F}_n$, стога користећи линеарност условног очекивања (књига [4], 216. страна, формула 4.1.1.) и Хелдере неједнакости (књига [4], 216. страна, формула 4.1.4.),

$$E(S_{n+1} | \mathcal{F}_n) = E(S_n | \mathcal{F}_n) + E(\xi_{n+1} | \mathcal{F}_n) = S_n + E\xi_{n+1} = S_n.$$

Ако $\mu \leq 0$ онда сад завршено рачунање показује да $E(\xi_{n+1} | \mathcal{F}_n) \leq \xi_n$, једноставније речено, ξ_n је супермартингал. У овом случају, ξ_n одговара клађењу на игру која није фер, у смислу да је неповољна за играча. Име потиче од чињенице да ако је функција f суперхармонијска (f има непрекидне изводе реда другог реда и $\partial^2 f / \partial x_1^2 + \dots + \partial^2 f / \partial x_d^2 \leq 0$), онда

$$f(x) \geq \frac{1}{|B(x, r)|} \int_{B(x, r)} f(y) dy$$

где је $B(x, r) = \{y : |x - y| \leq r\}$ је лопта полупречника r и $|B(x, r)|$ је запремина лопте.

Ако $\mu \leq 0$ онда је S_n субмартингал. Примењујући први резултат на $\xi' = \xi_i - \mu$ видимо да је $S_n - n\mu$ мартингал.

2. Пример: Квадратни мартингал.

Претпоставимо да је $\mu = E\xi_i = 0$, да је $\sigma^2 = D(\xi_i) < \infty$ и да је S_n дефинисано као у примеру 1. У овом случају $S_n^2 - n\sigma^2$ је мартингал.

Пошто је $(S_n + \xi_{n+1})^2 = S_n^2 + 2S_n\xi_{n+1} + \xi_{n+1}^2$ и ξ_{n+1} независно од $\mathcal{F}_n$, имамо

$$\begin{aligned} E(S_{n+1}^2 - (n+1)\sigma^2 | \mathcal{F}_n) &= S_n^2 + 2S_n E(\xi_{n+1} | \mathcal{F}_n) + E(\xi_{n+1}^2 | \mathcal{F}_n) - (n+1)\sigma^2 \\ &= S_n^2 + 0 + \sigma^2 - (n+1)\sigma^2 = S_n^2 - n\sigma^2. \end{aligned}$$

3. Пример: Експоненцијални мартингал

Нека су $Y_1, Y_2, \dots$ ненегативне, независне, једнако расподељене случајне величине са $EY_m = 1$ и $Y = \exp(\theta)$. Ако је $\mathcal{F}_n = \sigma(Y_1, \dots, Y_n)$ онда $M_n = \prod_{i \leq n} Y_i$ дефинише мартингал. Да би се ово доказало, приметити да

$$E(M_{n+1} | \mathcal{F}_n) = M_n E(Y_{n+1} | \mathcal{F}_n) = Y_n.$$

Претпоставимо сада да $Y_i = \exp(\theta \xi_i)$ и да $\phi(\theta) = E(\exp(\theta \xi_i)) < \infty$. $Y_i = \exp(\theta \xi_i)/\phi(\theta)$ има средњу вредност 1, стога $EY_i = 1$ и

$$M_n = \prod_{i=1}^n Y_i = \exp(\theta S_n)/\phi(\theta)^n \text{ је мартингал.}$$

4. Пример: Гранајући процеси.

Нека је S , што представља кораке мапирања, $S = 0, 1, 2, \dots$ и

$$p(i, j) = P\left(\sum_{m=1}^i \xi_m = j\right),$$

где су $\xi_1, \xi_2, \dots$ независне, идентично расподељене, ненегативне, целобројне случајне величине. Речима, свака од јединки које постоје у тренутку n (или у генерацији n) доводи до настанка независног и једнако расподељеног потомства.

5. Пример: Еренфестов ланац

Нека је S дефинисано као у примеру 5, $S = 0, 1, \dots, r$ и

$$p(k, k+1) = (r-k)/r,$$

$$p(k, k-1) = k/r,$$

а у супротном, $p(i, j) = 0$.

Речима, има укупно r лоптица у две вазе; k у првој и $r-k$ у другој. Насумично изаберемо једну од r лоптица и померимо је у другу вазу. Еренфест је користио овај модел са дељењем молекула ваздуха између две коморе (једнаке величине и облика), које су повезане једном малом рупом.

6. Пример

Нека је $(X_n, n \geq 0)$ скуп независних случајних величина са коначним редним средњим вредностима $E(\mu_n; n \geq 0)$.

Нека $S_n = \sum_{r=0}^n (X_r - \mu_r)$. Тада је S_n мартингал. Видимо ово јер

$$E|S_n| \leq E \sum_r |X_r - \mu_r| < \infty \text{ и } E(X_r - \mu_r) = 0.$$

7. Пример

Претпоставимо да ненегативни мартингал X_n је низ вредности коцкаровог богатства играјући само фер игре, где су улози увек мањи од постојећег богатства X_n . Без губитка

генерализације, нека $X_0 = 1$. Нека је $U = \max_{n \geq 0} X_n$. Онда максимална неједнакост $P(U \geq x) \leq EX_0/x$ показује да вероватноћа да ово богатство икад достигне ниво $x \geq 1$ је мање од x^{-1} . На пример, имамо да без обзира на то које се фер игре играју, какви год да су улози, вероватноћа да ће се икад удвостручити новац је мање од $\frac{1}{2}$.

8. Пример

Нека $(S_n; n \geq 0)$ буде једно једноставно симетрично случајно лутање, тако да $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ (X_i су независне случајне величине, свака узима $+1, -1$ са вероватноћом 0.5). Онда је $M_n = S_n^2 - n$ је мартингал.

Проверимо да ли је:

$$E|M_n| \leq ES_n^2 + n = \frac{n}{4} + n < \infty.$$

Такође, користећи независност корака X_n ,

$$\begin{aligned} E(M_{n+1} \mid M_0, \dots, M_n) &= E(S_{n+1}^2 - n - 1 \mid S_0^2, \dots, S_n^2) \\ &= E(S_n^2 + 2X_{n+1}S_n + X_{n+1}^2 - n - 1 \mid S_0^2, \dots, S_n^2) \\ &= S_n^2 - n = M_n \end{aligned}$$

Због коришћења стране литературе, многи страни математички термини су превођени помоћу књиге из литературе број [8].

Литература коришћена у овом поглављу: [1], [4], [5], [7], [8], [11], [13], [14], [15]

3 Црвено-црна стратегија

Сад прелазимо на конкретан задатак овог рада, тј. примену математичких техника уведених у Поглављу 2 на упоређивање стратегија у игри рулет.

У Европском типу рулета, којим се овај рад и бави, постоји 18 црних, 18 црвених и једно неутрално поље на коме је нула. Када играмо на боју, односно користимо црвено-црну стратегију, ми се заправо кладимо на 18 бројева, а не кладимо се на 19 бројева. Вероватноћа добитка је $\frac{18}{37}$, а вероватноћа губитка је $\frac{19}{37}$. Ова стратегија еквивалентна је пар/непар стратегији и велики/мали бројеви стратегији.

Црвено-црна стратегија опкладе води нас дискретном случајном процесу $Y = \{Y(n), n \in \mathbb{N}\}$, где n представља време и $Y(n)$ је резултујући профит/губитак у тренутку n . За потребе овог рада, размотрићемо само једноставне опкладе од један динар које ће бити уложене на 'црвено' или 'црно'. Однос опкладе је 1 напрема 1, тако да ако се кладимо на 'црвено' и лоптица падне на 'црвено', ми добијамо још један динар, а уколико падне на 'црно', губимо динар који смо уложили. Еквивалентно је и ако играмо на 'црно'. Као резултат, добићемо низ независних и једнако расподељених случајних величина, $\{Y(1), Y(2), Y(3), \dots\}$. Случајна величина $Y(n)$ има следећу расподелу:

$$Y(n) = \begin{cases} +1, & \text{са вероватноћом } 1 - p = \frac{18}{37} \\ -1, & \text{са вероватноћом } p = \frac{19}{37} \end{cases} \quad (2)$$

Мало је необично да се са p обележава вероватноћа губитка. Ова одлука донешена је због каснијег коришћења ланаца Маркова јер је згодније проучавати процес губитка у смеру ка $+\infty$. Очекивана вредност од $Y(n)$ је:

$$E(Y(n)) = 1 \cdot \frac{18}{37} + (-1) \cdot \frac{19}{37} = -\frac{1}{37}. \quad (3)$$

Размотримо другу случајну величину, кумулативни профит/губитак који ћемо означити са $S(n)$ и дефинисати са

$$S(n) = \sum_{i=1}^n Y(i). \quad (4)$$

Ова величина представља збирну вредност новца који смо добили или изгубили за време n . $S(n)$ такође може да се представи и као једнодимензионо случајно лутање по правој. С обзиром да је очекивана вредност од $Y(n)$ мања од 0, $S(n)$ је несиметрично случајно лутање код кога је очекивана вредност корака негативна, што ћемо краће звати случајно лутање са негативним током. Претпоставимо да је S у моменту $n = 0$ једнако нули. Јасно је да

$$S(n) = S(n-1) + Y(n), \forall n \in \mathbb{N}. \quad (5)$$

$E(|Y(1)|) = 1 \cdot \frac{18}{37} + 1 \cdot \frac{19}{37} = 1$, што је коначно (услов теореме 2).

$$S(n) = \sum_{i=1}^n Y(i) = n \cdot \frac{\sum_{i=1}^n Y(i)}{n} = n \cdot \overline{Y(n)}$$

Из теореме 2 добијамо да $S(n) = n \cdot \overline{Y(n)}$ конвергира ка $-\infty$, скоро сигурно када $n \rightarrow \infty$ (јер $Y(n)$ по теорему 2 тежи $E(Y(1))$ скоро сигурно, а израчунали смо да је $E(Y(1)) = -\frac{1}{37}$ односно негативан број).

Сад смо потврдили да ће наша игра кад тад имати негативан исход. Прецизно, то значи да ће време последњег излаза τ (за ненегативне вредности n) дефинисано са

$$\tau = \max_n \{n : S(n) = 0\}$$

бити коначно, тј. $P(\tau < \infty) = 1$. Ово је логично јер смо добили да $S(n)$ тежи $-\infty$ скоро сигурно, па τ које смо дефинисали као време последњег проласка кроз нулу мора бити коначно (играч мора једном у неком коначном тренутку последњи пут да буде на нули, да би му гранична вредност збирног добитка, кад n тежи ∞ била $-\infty$).

3.1 Максимум

Прва статистика кумулативног профита/губитка којом ћемо се бавити јесте максимум и оно има вредност максималног салда који је постигнут до тренутка n . Означимо са M случајну величину коју називамо максимум и дефинисаћемо је са

$$M = \max_n S(n), n \in \mathbb{N}_0. \quad (6)$$

Максимум је дискретна величина која може да има само целобројне вредности веће или једнаке нули (због начина на који смо дефинисали $S(n)$, тако да креће од нуле). Сада ћемо наћи расподелу за M .

У црвено-црној стратегији, пошто $Y(n)$ може једино да узме вредност 1 или -1 и узевши у обзир (5) видимо да $S(n)$ не може да 'прескочи' ниједну вредност из $\mathbb{Z}$. Поред тога $S(0) = 0$ јер на почетку игре ништа још нисмо освојили већ само имамо један динар са којим играмо прву рунду. Другим речима: ако постоји $n \in \mathbb{N}$ такво да $S(n) = k > 0$, онда постоји $m \in \mathbb{N}$ такво да $S(m) = k - 1$. Из тога следи:

$$\begin{aligned} P(M = k) &= \\ &= P(M \geq k) - P(M \geq k + 1) = \\ &= P(S(n) \text{ достиже } k \text{ у неком моменту}) - P(S(n) \text{ достиже } k + 1 \text{ у неком моменту}) \end{aligned} \quad (7)$$

Да бисмо израчунали ову вероватноћу, можемо да користимо неколико техника. У овом раду користићемо мартингале и ланце Маркова да бисмо то постигли.

Дефинишемо случајну величину $X(n)$ тако да:

$$X(n) = \left(\frac{p}{1-p} \right)^{S(n)} \quad (8)$$

Сада ћемо показати да је ова случајна величина мартингал у дискретном времену:

$$\begin{aligned}
E(X(n+1) \mid S(0), \dots, S(n)) &= \\
&= E_n \left(\frac{p}{1-p} \right)^{S(n+1)} = \\
&= E_n \left(\frac{p}{1-p} \right)^{S(n)+Y(n+1)} = \\
&= \left(\frac{p}{1-p} \right)^{S(n)} \cdot E \left(\frac{p}{1-p} \right)^{Y(n+1)} = \\
&= \left(\frac{p}{1-p} \right)^{S(n)} \cdot \left(\left(\frac{p}{1-p} \right)^1 \cdot (1-p) + \left(\frac{p}{1-p} \right)^{-1} \cdot p \right) = \\
&= \left(\frac{p}{1-p} \right)^{S(n)} \cdot (p+1-p) = \\
&= \left(\frac{p}{1-p} \right)^{S(n)} = X(n)
\end{aligned} \tag{9}$$

Дефинишимо време заустављања са $\tau = \min\{n : S(n) = 1 \text{ или } S(n) = b\}$. Онда је $X(n)$ мартингал у дискретном времену који задовољава услове теореме 8. Очекивана вредност за $X(1)$ је

$$\begin{aligned}
E(X(1)) &= E \left(\frac{p}{1-p} \right)^{S(1)} = E \left(\frac{p}{1-p} \right)^{Y(1)} = \\
&= \left(\frac{p}{1-p} \right)^1 \cdot (1-p) + \left(\frac{p}{1-p} \right)^{-1} \cdot p = 1
\end{aligned}$$

Користећи теорему 8 добијамо

$$1 = E \left(\frac{p}{1-p} \right)^{S(\tau)} = \left(\frac{p}{1-p} \right)^1 \cdot P(S(\tau) = 1) + \left(\frac{p}{1-p} \right)^b \cdot P(S(\tau) = b).$$

Ако користимо лимес $b \rightarrow -\infty$, други сабирак у претходној једначини нестаје, јер $\frac{p}{1-p} > 0$. Дакле,

$$\begin{aligned}
1 &= \frac{p}{1-p} \cdot P(S(\tau) = 1), \\
P(S(\tau) = 1) &= \frac{p}{1-p} = \frac{18}{19}
\end{aligned}$$

Ово је вероватноћа да ће случајно лутање $S(n)$ евентуално достигне вредност 1; или, еквивалентно, вероватноћа да је максимум већи од 0.

3.1.1 Ланци Маркова

Користићемо наредни израз да бисмо приказали процес богаћења као случајно лутање:

$$W(n) = k - S(n) \quad (10)$$

Процес W има измештен почетак у вредност k и тежи $+\infty$. Догађај да процес $W(n)$ има вредност 0 у неком моменту еквивалентан је догађају да $S(n)$ има вредност k . Пре свега треба израчунати вероватноћу:

$$\begin{aligned} \alpha(k) &= P(W(n) \text{ узима вредност } 0 \text{ у неком моменту} \mid W(0) = k) = \\ &= P(S(n) \text{ узима вредност } k \text{ у неком моменту} \mid S(0) = 0). \end{aligned} \quad (11)$$

Из једначине (5), јасно је да $S(n)$ зависи само од претходне вредности $S(n-1)$ и од тренутне вредности $Y(n)$. Као резултат, $S(n)$ (као и $W(n)$) задовољава својства ланаца Маркова, те можемо да се користимо карактеристикама истих. Најкорисније за сада биће нам својство множења вероватноћа:

$$\alpha(k) = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha(j)p(k, j), \quad (12)$$

где је $p(k, j)$ вероватноћа помераја из позиције k у позицију j . Ово су ткзв. Чепмен-Колмогоров једначине (теорема 6).

У црвено-црној стратегији, $S(n), n \geq 1$, може само да се достигне из позиције $S(n) - 1$ и то са вероватноћом $1 - p = \frac{18}{37}$ или из позиције $S(n) + 1$ са вероватноћом $p = \frac{19}{37}$. Једначина за даље израчунавање $\alpha(k)$ се своди на:

$$\alpha(k) = (1 - p) \cdot \alpha(k - 1) + p \cdot \alpha(k + 1). \quad (13)$$

Ово је једначина и њено решење ћемо наћи на следећи начин. Прво, нађимо партикуларно решење у форми x^k и онда ћемо добити опште решење које задовољава услове ограничености.

Заменом $\alpha(k) = x^k (x \neq 0)$ у једначини (13), добијамо:

$$\begin{aligned} x^k &= (1 - p) \cdot x^{k-1} + p \cdot x^{k+1} \\ x &= 1 - p + p \cdot x^2 \\ p \cdot x^2 - x + (1 - p) &= 0. \end{aligned} \quad (14)$$

Квадратна једначина има два корена

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4p(1 - p)}}{2p} = \frac{1 \pm (1 - 2p)}{2p} = \begin{cases} 1 \\ \frac{1-p}{p} = \frac{18}{19} \end{cases}. \quad (15)$$

Добили смо партикуларно решење, док је опште решење облика:

$$\alpha(k) = \sum_{i=1}^2 c_i x_i^k = c_1 \left(\frac{18}{19} \right)^k + c_2 1^k. \quad (16)$$

Границе су нам потребне како бисмо пронашли c_i . Први услов добијамо из $S(0) = 0$, а уз то и $\alpha(0) = 1$. Други услов добијамо тако што знамо да $S(n)$ конвергира ка $-\infty$ скоро сигурно

када n тежи ∞ , тако да вероватноћа достизања $S(n) = \infty$ у неком моменту конвергира нули скоро сигурно. Тако добијамо $\lim_{x \rightarrow \infty} \alpha(k) = 0$.

$$\begin{aligned} 1 = \alpha(0) &= c_1 \left(\frac{18}{19}\right)^0 + c_2 = c_1 + c_2 \\ 0 = \lim_{k \rightarrow \infty} \alpha(k) &= \lim_{k \rightarrow \infty} c_1 \left(\frac{18}{19}\right)^k + c_2 = c_2. \end{aligned} \quad (17)$$

Из ових једначина добијамо $c_2 = 0$ и $c_1 = 1$, па је вероватноћа $\alpha(k)$:

$$\alpha(k) = \left(\frac{18}{19}\right)^k. \quad (18)$$

Стога,

$$P(M = k) = \alpha(k) - \alpha(k+1) = \left(\frac{18}{19}\right)^k - \left(\frac{18}{19}\right)^{k+1} = \frac{1}{19} \cdot \left(\frac{18}{19}\right)^k \quad (19)$$

за свако $k \geq 0$.

Расподела максимума је геометријска, са параметром $\lambda = \frac{1}{19}$. Овај податак можемо да искористимо за наредне прорачуне. Пре свега, како бисмо добили вредност очекивања, дисперзије и стандардне девијације преко формула које важе за геометријску расподелу.

$$E(M) = \frac{1 - \lambda}{\lambda} = \frac{\frac{18}{19}}{\frac{1}{19}} = 18 \quad (20)$$

$$D(M) = \frac{1 - \lambda}{\lambda^2} = \frac{\frac{18}{19}}{\frac{1}{19^2}} = 18 \cdot 19 = 342 \quad (21)$$

$$\sigma(M) = \sqrt{D(M)} = \sqrt{342} = 18.49 \quad (22)$$

Затим је израчуната вероватноћа да је максимум 0 или, еквивалентно, да никад не дође до позитивне вредности.

$$P(M = 0) = \frac{1}{19} = 0.0526316 \quad (23)$$

Још битније нам је да израчунамо вероватноћу да ћемо достићи неку позитивну вредност.

$$P(M \geq 1) = 1 - P(M = 0) = \frac{18}{19} = 0.947368 \quad (24)$$

Коначно, медијана је 12, док је 95% квантил 55 ($P(M \leq 55) \geq 0.95$)

Код који је коришћен за израчунавање медијане и цртања графика (Python програмски језик) је дат у додатку под ставком 3)

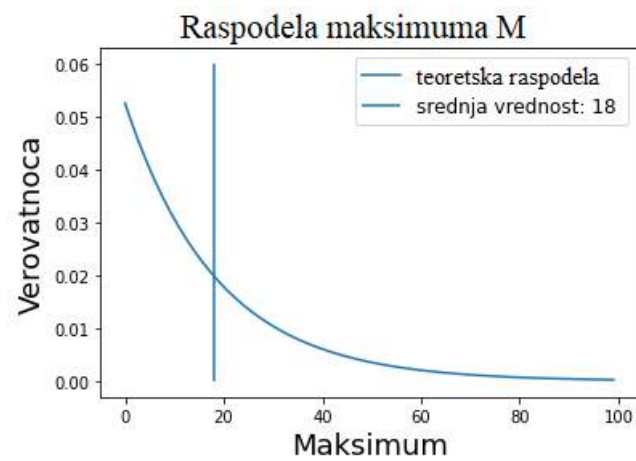


График 1.1: Расподела максимума са очекиваном вредношћу

3.2 Време последњег излаза

Знајући да ће се игра скоро сигурно завршити у негативном салду, природно је да се запитамо када смо последњи пут (по времену које чува величина τ) били на нули. Време последњег излаза је дефинисано са:

$$\tau = \max(n \geq 0 \mid S(n) = 0). \quad (25)$$

Случајно лутање $S(n)$ може да буде на нули само у парним моментима. Као и у претходном поглављу, главни циљ нам је да нађемо расподелу за τ . Тако да,

$$P(\tau = 2n)$$

мора да буде пронађено за свако $n \in \mathbb{N}_0$.

Развој случајног лутања пре момента $2n$ није битан за даљу рачуницу. Последње време излаза τ је $2n$ само у следећој ситуацији, када је $S(2n) = 0$, а у следећем кораку сиђе до вредности -1 ($S(2n+1) = -1$). Након тога, случајно лутање мора да остане испод нивоа -1 , тако да је немогуће опет достићи нулу. То значи да $\max_{k \geq 2n+1} S(k) = -1$. Илустрација свега овога је на следећем графику.

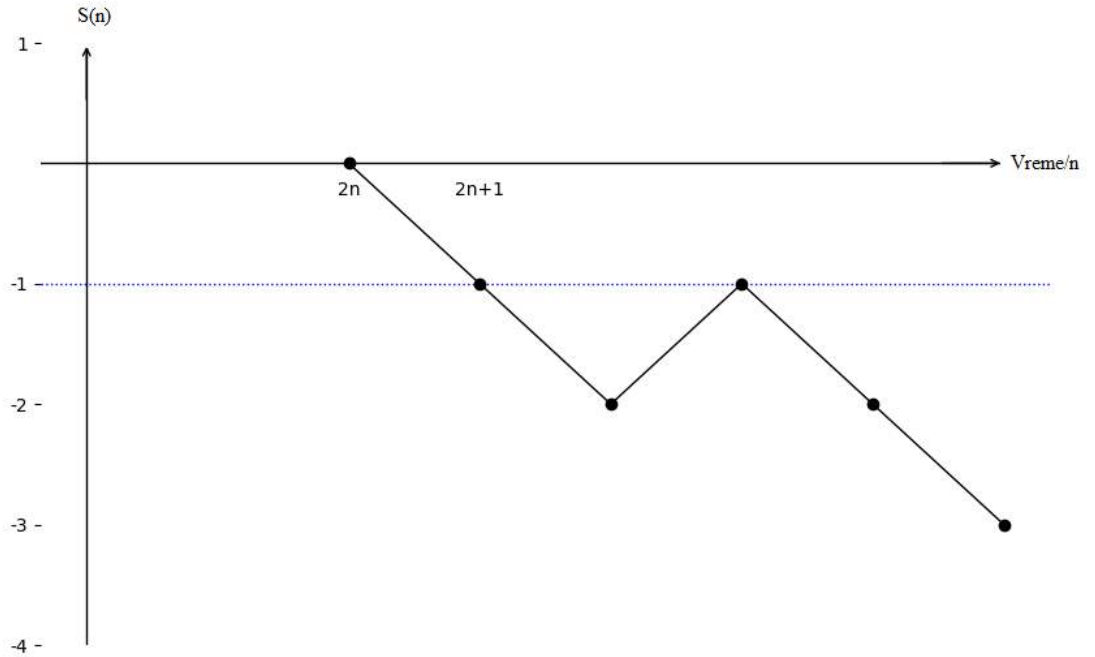


График 1.2: Део случајног лутања за $\tau = 2n$

Код за претходни график је дат у додатку под ставком 4)

То можемо изразити на следећи начин:

$$P(\tau = 2n) = P(S(2n) = 0 \ \& \ S(2n + 1) = -1) \cdot P(\max_{k \geq 2n+1} S(k) = -1). \quad (26)$$

Дефиниција условне вероватноће може да се користи за рачунање првог фактора претходне једначине.

$$\begin{aligned} P(S(2n) = 0 \ \& \ S(2n + 1) = -1) &= \\ &= P(S(2n) = 0) \cdot P(S(2n + 1) = -1 \mid S(2n) = 0) = \\ &= \binom{2n}{n} p^n (1-p)^n \cdot p = \\ &= \binom{2n}{n} p^{n+1} (1-p)^n \end{aligned} \quad (27)$$

Други фактор једначине (26) може се добити на следећи начин. Вероватноћа да смо на -1 и да нећемо ићи изнад те вредности је иста као и вероватноћа да смо на нули и да нећемо ићи изнад те вредности. Једино што смо изменили јесте да почетна вредност за $S(n)$ буде -1. Ова вероватноћа је израчуната у одељку 3.1. тако да једначина (23) може да се користи.

$$P\left(\max_{k \geq 2n+1} S(k) = -1\right) = P\left(\max_{k \geq 0} S(k) = 0\right) = P(M = 0) = \frac{1}{19} \quad (28)$$

Замењујући једначине (27) и (28) у једначину (23) добијамо вероватноћу:

$$P(\tau = 2n) = \frac{1}{19} \cdot \binom{2n}{n} p^{n+1} (1-p)^n. \quad (29)$$

Користећи Wolfram Mathematica(код је дат у додатку под ставком 5), добијамо:

$$E(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} 2n \cdot P(\tau = 2n) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n}{19} \binom{2n}{n} p^{n+1} (1-p)^n = 1368 \quad (30)$$

$$D(\tau) = E(\tau^2) - (E(\tau))^2 = 5617008 - (1368)^2 = 3745584 \quad (31)$$

$$\sigma(\tau) = \sqrt{D(\tau)} = 1935.35 \quad (32)$$

Основни квантили (такође користећи Wolfram Mathematica) су израчунати. Медијана је 622, док је 95% квантил 5256.

Код који је коришћен за израчунавање медијане и цртања графика (Python програмски језик) је дат у додатку под ставком 6)

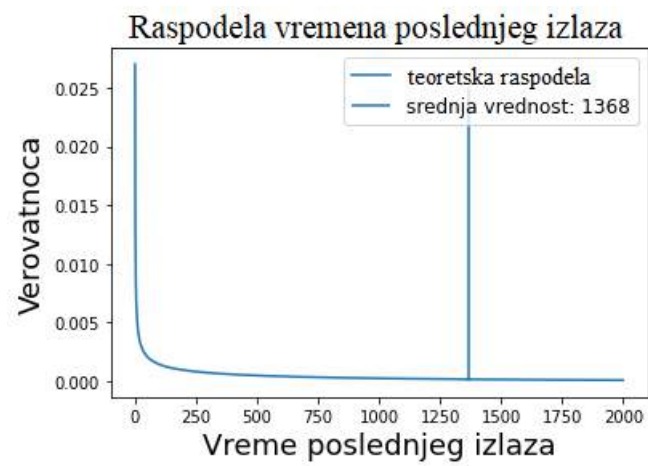


График 1.3: Расподела времена последњег излаза са очекиваном вредношћу

3.3 Број посета нули

Претпоставимо да бисмо желели да знамо колико пута процес $S(n)$ има вредност нула. Овај број нам говори колико пута случајно лутање прође кроз нулу, што је моменат када су наш добитак и губитак у балансу. Случајна величина Z која броји посете нули је дефинисана са:

$$Z = \sum_{n=0}^{\infty} \chi_{\{S(n)=0\}} \quad (33)$$

где је χ индикатор случајне величине.

Z достиже само вредности из $\mathbb{N}$ ($P(Z \geq 1) = 1$). Поново, наш циљ је да нађемо расподелу за Z :

$$P(Z = k) = P\left(\sum_{n=0}^{\infty} \chi_{\{S(n)=0\}} = k\right) \quad (34)$$

за позитивне, целобројне k .

Ако је $Z = k$, можемо да поделимо случајно лутање на k секција, као што је показано на графику 1.4

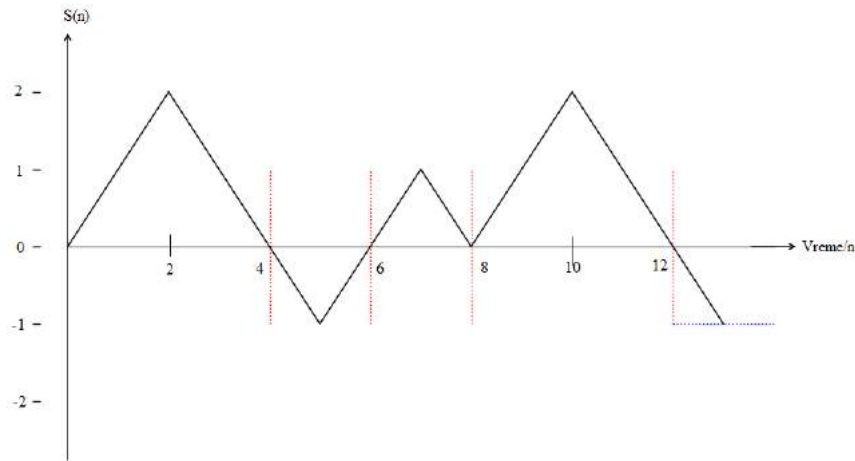


График 1.4: Пример дела случајног лутања за $Z = 5$

Код за претходни график је дат у додатку под ставком 7)

Сегменти $1, \dots, k-1$ исти су у следећем смислу: почињу у нули, завршавају се у нули и не постоји њихова међувредност у којој је случајно лутање на нули. Последњи сегмент је различит од осталих - случајно лутање почиње у нули, у следећем кораку иде до вредности -1 и након тога никада више не достиже нулу. Сви сегменти су међусобно независни, што последично значи да је вероватноћа од $Z = k$ једнака производу вероватноћа свих сегмената понаособ. Нека је вероватноћа сегмента i једнака p_i за $i \in 1, \dots, k$. Онда:

$$P(Z = k) = \prod_{i=1}^k p_i. \quad (35)$$

Пре свега, размотримо последњи сегмент и његову вероватноћу p_k . Ми додирујемо нулу у неком моменту и то је последњи пут да се то десило. Након тога случајно лутање мора да се

спусти до вредности -1 и да се његово даље кретање настави испод вредности -1 (максимална вредност у будућности да му буде -1), тако да никада више не досегне нулу. Ово је заправо исто као и вероватноћа коју смо већ извели у одељку 3.2. Ми се спуштамо до вредности -1 (са вероватноћом $\frac{19}{37}$) и остајемо тамо са вероватноћом $\frac{1}{19}$, што је добијено из једначине 1.9. Добијамо да је

$$p_k = \frac{19}{37} \cdot \frac{1}{19} = \frac{1}{37}.$$

Вероватноће p_i су различите, али се рачунају на исти начин за свако $i \in 1, \dots, k-1$. Фиксирајмо i . Случајно лутање $S(n)$ можемо да представимо као ланац Маркова у 2 стања - поново досежемо нулу или је више никада не досежемо. Вероватноћа да је више никада не досегнемо је p_k , док је вероватноћа да ћемо је поново досећи $1 - p_k$. Тако да овај ланац Маркова има геометријску расподелу:

$$P(Z = k) = \frac{1}{37} \cdot \left(\frac{36}{37}\right)^{k-1} \quad (36)$$

Очекивање, дисперзије и стандардна девијација су:

$$E(Z) = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot \frac{1}{37} \cdot \left(\frac{36}{37}\right)^{k-1} = 36 \quad (37)$$

$$D(Z) = 1332 \quad (38)$$

$$\sigma(Z) = 36.5 \quad (39)$$

Важни квантили су: медијана је 25, док је 95% квантил 109.

Код који је коришћен за израчунавање медијане и цртања графика (Python програмски језик) је дат у додатку под ставком 8)

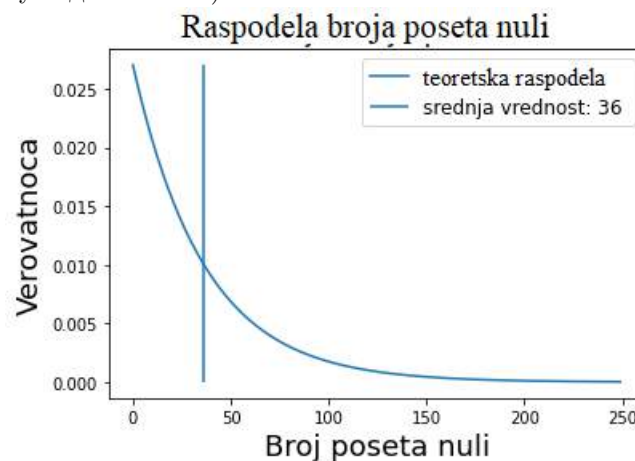


График 1.5: Расподела броја посета нули са очекиваном вредношћу

3.4 Монте Карло симулација

Користићемо Монте Карло метод како бисмо симулирали $N = 1000000$ случајних лутања. За $i = \{1, \dots, N\}$, нека је R_i репрезентација случајног лутања $S(n)$. За свако R_i користићемо вредност максимума M_i , време последњег излаза τ_i и број посета нули Z_i које смо израчунали у ранијим поглављима. У симулацији ћемо користити зауставно правило које се односи на то да када случајно лутање достигне вредност -100, симулација се завршава.

Код који је коришћен за спровођење Монте Карло симулације (Python програмски језик) је дат у додатку под ставком 9)

Код који је коришћен за постављање услова за црвено-црну стратегију (Python програмски језик) је дат у додатку под ставком 10)

3.4.1 Максимум

Означимо са M_i максимум који је достигнут за време i -тог случајног лутања. Средња вредност за M_i добијена овом симулацијом је

$$\overline{M_N} = 17,9886.$$

Приметимо да $E(M) = 18$ (из једначине (20)).

Узорачка дисперзија максимума је $S_N^2 = 343.14$, а $D(M) = 342$ добијена из једначине (21).

Узорачка стандардна девијација је $s_N = 18.52$, а $\sigma(M) = 18.49$ што добијамо из једначине (22).

Помоћу пређашњих резултата и теореме 3, можемо да конструишемо интервал поверења за очекивану вредност μ_M . За $N \rightarrow \infty$

$$P(u_{\frac{\alpha}{2}} < \sqrt{N}(\overline{M_N} - \mu_M)/S_N < u_{1-\frac{\alpha}{2}}) \rightarrow 1 - \alpha.$$

95%-тни интервал поверења за μ_M је

$$(17,9582; 18.0191).$$

Из једначине (20) добијамо да $E(M) = 18$. Максимална вредност максимума у узорку је 267, $P(M \geq 267) = \frac{1}{1859741}$

На следећој слици су представљени:

-График релативне фреквенције са средњом вредношћу $\overline{M_N}$

-Кумулативна фреквенција максимума добијена коришћењем узорка из Монте Карло стратегије

-Расподела максимума

Код који је коришћен за израчунавање медијане и цртања графика (Python програмски језик) је дат у додатку под ставком 11)

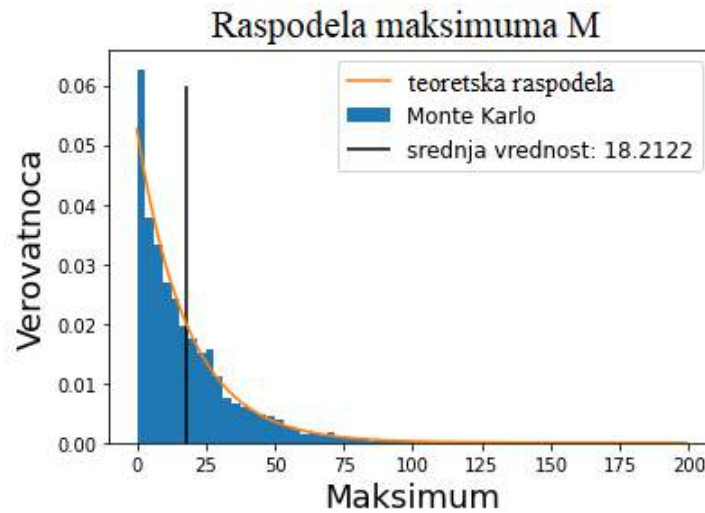


График 1.6: Релативна и кумулативна фреквенција максимума са узорачном средњом вредношћу и расподелом максимума

3.4.2 Време последњег излаза

Означимо са τ_i време последњег излаза i -тог случајног лутања.

Узорачка средња вредност времена последњег излаза је било

$$\overline{\tau_N} = 1366,23$$

а из једначине (30) добијамо $E(\tau) = 1368$.

Узорачка дисперзија је $S_N^2 = 3.8085 \cdot 10^6$, а $D(\tau) = 3745584$ из једначине (31).

Узорачка стандардна девијација је $s_N = 1951.53$, а $\sigma(\tau) = 1935.35$ из једначине (32).

Из ових резултата и теореме 3 можемо да конструишемо интервал поверења за очекивану вредност μ_τ . За $N \rightarrow \infty$

$$P(u_{\frac{\alpha}{2}} < \sqrt{N}(\overline{\tau_N} - \mu_\tau)/S_N < u_{1-\frac{\alpha}{2}}) \rightarrow 1 - \alpha.$$

95%-тни интервал поверења за μ_τ је

$$\mu_\tau \in (1363,02; 1369,44).$$

Максимално време последњег излаза у узорка је било 34 433.

На следећој слици може се видети:

- График релативне фреквенције са узорачком средњом вредношћу.
- Кумулативна фреквенција из узорка коришћењем Монте Карло симулације
- Расподела времена последњег излаза

Код који је коришћен за израчунавање медијане и цртања графика (Python програмски језик) је дат у додатку под ставком 12)

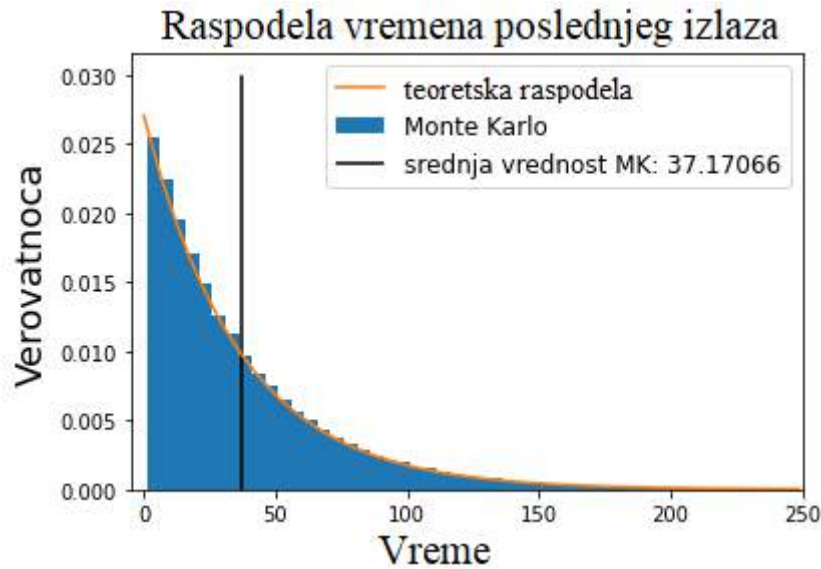


График 1.7: Релативна и кумулативна фреквенција времена последњег излаза са узорачном средњом вредношћу и расподелом времена последњег излаза

3.4.3 Број посета нули

Означимо са Z_i број посета нули i -тог случајног лутања.

Узорачка средња вредност броја посете нули је

$$\overline{Z_N} = 36,935$$

а $E(Z) = 36$ добијено из једначине (37).

Узорачна дисперзија је $S_N^2 = 1,7022 \cdot 10^6$, а $D(Z) = 1332$ из једначине (38).

Узорачна стандардна девијација је $s_N = 1304,7$, а $\sigma(Z) = 36,5$ из једначине (39).

Из ових резултата и теореме 3, можемо да конструишемо интервал поверења за очекивану вредност μ_Z . За $N \rightarrow \infty$

$$P(u_{\frac{\alpha}{2}} < \sqrt{N}(\overline{Z_N} - \mu_Z)/S_N < u_{1-\frac{\alpha}{2}}) \rightarrow 1 - \alpha.$$

95%-тни интервал поверења за μ_Z је

$$\mu_Z \in (34,7889; 39,0809).$$

На следећој слици можемо видети:

- График релативне фреквенције са узорачком средњом вредношћу
- Кумулативна фреквенција за Монте Карло податке
- Расподела броја посета нули

Код који је коришћен за израчунавање медијане и цртања графика (Python програмски језик) је дат у додатку под ставком 13)

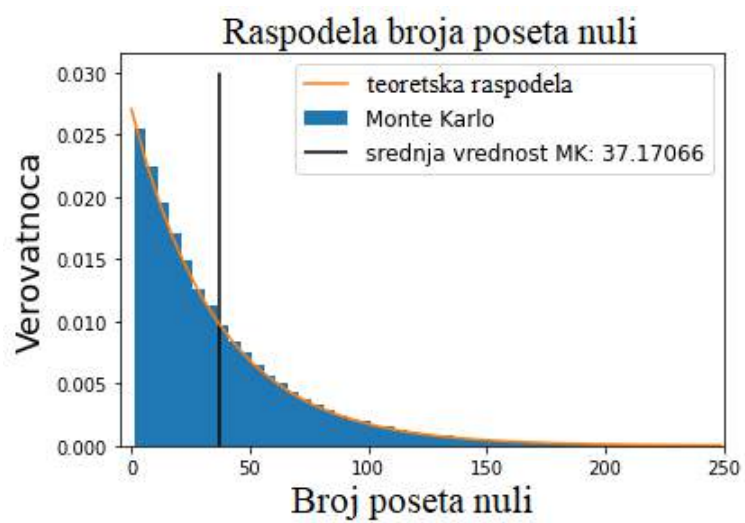


График 1.8: Релативна и кумулативна фреквенција броја посета нули са узорачном средњом вредношћу и расподелом броја посета нули

Литература коришћена у овом поглављу: [2], [3], [8], [12], [13]

4 Стратегија једног броја

Исте статистике као у Поглављу 1 биће описане и у овом поглављу. Разлика је у томе што се сада базирамо на опкладама стратегијом једног броја. У Европском рулету то значи да се кладимо на једно поље, а на 36 преосталих поља се не кладимо. Играч се опклади на једно поље са јединственим бројем, а вероватноће добитка и губитка су респективно $\frac{1}{37}$ и $\frac{36}{37}$. Поредиши са црвено-црном стратегијом чини се да имамо мање шансе да нешто освојимо. Али то је истина само ако разматрамо једну појединачну опкладу. Разматрајући процес појединачних опклада долазимо до различитих закључака који ће бити објашњени у наредним секцијама.

Дефинишимо дискретни случајни процес $Y = \{Y(n), n \in \mathbb{N}_0\}$, где n представља време, а $Y(n)$ представља појединачну опкладу у моменту n (добитак/губитак). Као и у претходном поглављу, размотрићемо само једноставне опкладе на 1 динар. Ово значи да уколико се опкладимо на број на којем се лоптица заустави, добићемо 35 динара. А уколико се заустави на било којем другом броју, изгубићемо уложени динар. Тако да, $\{Y(1), Y(2), Y(3), \dots\}$ је низ независних и идентично распоређених случајних величина са наредном расподелом:

$$Y(n) = \begin{cases} +35, & \text{са вероватноћом } 1 - p = \frac{1}{37} \\ -1, & \text{са вероватноћом } p = \frac{36}{37} \end{cases} \quad (40)$$

Када се опкладимо на број на коме се касније лоптица заустави, добијамо 35 динара, док у супротном губимо уложени динар.

Дефинишимо $S(n)$ као кумулативни добитак/губитак:

$$\begin{aligned} S(n) &= \sum_{i=1}^n Y(i) \\ S(0) &= 0. \end{aligned} \quad (41)$$

Јасно је да за свако $n \in \mathbb{N}$ важи:

$$S(n) = S(n-1) + Y(n).$$

Очекивана вредност је $E(Y(n)) = 35 \cdot \frac{1}{37} + (-1) \cdot \frac{36}{37} = -\frac{1}{37}$. Случајни процес $S(n)$ формира једнодимензионо случајно лутање са негативним током. Очекивана вредност је иста као и у црвено-црној стратегији. Захваљујући томе можемо да користимо неке резултате из Поглавља 1 као што је:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S(n) = -\infty \text{ с.с.}$$

4.1 Максимум

Као и у секцији 3.1. одредићемо расподелу максимума. Случајна величина, максимум, која може бити достигнута у стратегији једног броја је дефинисана са:

$$M = \max_n S(n), n \in \mathbb{N}_0. \quad (42)$$

Она може да узима вредности из $\mathbb{N}_0$ и за налажење њене расподеле, потребно је прво да нађемо вероватноћу када је $P(M = k)$ за све $k \in \mathbb{N}_0$

$$P(M = k) = P(\max_n S(n) = k). \quad (43)$$

У стратегији једног броја $Y(n) = +35$ или -1 ; последично, $Y(n)$ прескаче бројеве када се пење на горе, али не прескаче када опада. С обзиром да знамо да ће се случајно лутање скоро сигурно завршити у $-\infty$, сваки корак на горе мора евентуално бити праћен са 35 корака на доле (наравно, не нужно овим редоследом). Тако да, поново, као и у црвено-црној стратегији, ниједна вредност k не може бити прескочена. Ово нас води до тога да

$$\begin{aligned} P(M = k) &= P(M \geq k) - P(M \geq k + 1) = \\ &= P(S(n) \text{ узима вредност } k \text{ у неком моменту}) - P(S(n) \text{ узима вредност } k + 1 \text{ у неком моменту}). \end{aligned} \quad (44)$$

Користићемо наредну трансформацију да бисмо приказали процес богаћења као једноставно случајно лутање:

$$W(n) = k - S(n).$$

Процес W има фиксирану почетну вредност k и иде ка $+\infty$. Догађај да процес $W(n)$ буде на нули у неком моменту еквивалентан је томе да $S(n)$ достигне вредност k . Тако да, за решење нашег проблема, ми само треба да израчунамо вероватноћу

$$\begin{aligned} \alpha(k) &= P(W(n) \text{ узима вредност } 0 \text{ у неком моменту} \mid W(0) = k) = \\ &= P(S(n) \text{ узима вредност } k \text{ у неком моменту} \mid S(0) = 0). \end{aligned} \quad (45)$$

Случајна величина $S(n), n > 0$ зависи само од $S(n-1)$ и од нове вредности $Y(n)$, тако да то задовољава Марковљево својство. Ово нам даје метод за рачунање $\alpha(k)$:

$$\alpha(k) = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha(j) p(k, j) \quad (46)$$

где је $p(k, j)$ вероватноћа помераја из позиције k у j . Играјући стратегију једног броја, $S(n), n \geq 1$, може да се досегне само из позиције $S(n+1)$ са вероватноћом $\frac{36}{37}$ и из позиције $S(n) - 35$ са вероватноћом од $\frac{1}{37}$. Овај податак своди претходну једначину на:

$$\alpha(k) = p \cdot \alpha(k+1) + (1-p) \cdot \alpha(k-35) \quad (47)$$

За решавање ове једначине можемо да користимо исту методу као и у секцији 3.1. Заменјујући $\alpha(k) = x^k (x \neq 0)$ у једначини (47) добијамо:

$$\begin{aligned} x^k &= p \cdot x^{k+1} + (1-p) \cdot x^{k-35}, \\ x^{35} &= p \cdot x^{36} + 1 - p, \\ 0 &= p \cdot x^{36} - x^{35} + 1 - p \end{aligned} \quad (48)$$

Ово је полиномска једначина 36-тог степена и можемо је решити користећи Wolfram Mathematica-у. Одавде добијамо корене:

$$\begin{aligned}
x_1 &= -0.882643 - 0.078397i \\
x_2 &= -0.882643 + 0.078397i \\
x_3 &= -0.855197 - 0.232788i \\
x_4 &= -0.855197 + 0.232788i \\
x_5 &= -0.801135 - 0.380045i \\
x_6 &= -0.801135 + 0.380045i \\
x_7 &= -0.722094 - 0.515652i \\
x_8 &= -0.722094 + 0.515652i \\
x_9 &= -0.620465 - 0.635444i \\
x_{10} &= -0.620465 + 0.635444i \\
x_{11} &= -0.499321 - 0.735735i \\
x_{12} &= -0.499321 + 0.735735i \\
x_{13} &= -0.362323 - 0.813426i \\
x_{14} &= -0.362323 + 0.813426i \\
x_{15} &= -0.213606 - 0.866101i \\
x_{16} &= -0.213606 + 0.866101i \\
x_{17} &= -0.057652 - 0.892093i \\
x_{18} &= -0.057652 + 0.892093i \\
x_{19} &= +0.100855 - 0.890536i \\
x_{20} &= +0.100855 + 0.890536i \\
x_{21} &= +0.257172 - 0.861384i \\
x_{22} &= +0.257172 + 0.861384i \\
x_{23} &= +0.406657 - 0.805403i \\
x_{24} &= +0.406657 + 0.805403i \\
x_{25} &= +0.544935 - 0.724134i \\
x_{26} &= +0.544935 + 0.724134i \\
x_{27} &= +0.668081 - 0.619809i \\
x_{28} &= +0.668081 + 0.619809i \\
x_{29} &= +0.772853 - 0.495218i \\
x_{30} &= +0.772853 + 0.495218i \\
x_{31} &= +0.857135 - 0.353398i \\
x_{32} &= +0.857135 + 0.353398i \\
x_{33} &= +0.921415 - 0.196615i \\
x_{34} &= +0.921415 + 0.196615i \\
x_{35} &= +0.988443 \\
x_{36} &= +1.
\end{aligned}$$

Ово је партикуларно решење. Генерално решење је облика

$$\alpha(k) = \sum_{i=1}^{36} c_i x_i^k. \tag{49}$$

Потребни су нам гранични услови да бисмо одредили c_i . Из $S(0) = 0$, имамо $\alpha(0) = 1$. Добијамо други услов из чињенице да $S(n)$ конвергира ка $-\infty$, скоро сигурно за $n \rightarrow \infty$. Тако да $\lim_{k \rightarrow \infty} \alpha(k) = 0$. За свако $k \in \{-34, \dots, -1\}$ знамо да $S(n)$ не може да прескочи ниједну вредност и да се скоро сигурно завршава у $-\infty$, тако да мора сваку од њих да досегне у неком моменту (скоро сигурно). Одатле добијамо $\alpha(k) = 1$ за $k \in \{-34, \dots, -1\}$. Сада имамо 36 услова и 36 непознатих величина. Користећи Wolfram Mathematica-у добили смо решење:

$$\begin{aligned}
c_1 &= 0.000409310 - 0.000017051i \\
c_2 &= 0.000409310 + 0.000017051i \\
c_3 &= 0.000409633 - 0.000051422i \\
c_4 &= 0.000409633 + 0.000051422i \\
c_5 &= 0.000410300 - 0.000086612i \\
c_6 &= 0.000410300 + 0.000086612i \\
c_7 &= 0.000411348 - 0.000123227i \\
c_8 &= 0.000411348 + 0.000123227i \\
c_9 &= 0.000412845 - 0.000161969i \\
c_{10} &= 0.000412845 + 0.000161969i \\
c_{11} &= 0.000414893 - 0.000203698i \\
c_{12} &= 0.000414893 + 0.000203698i \\
c_{13} &= 0.000417645 - 0.000249512i \\
c_{14} &= 0.000417645 + 0.000249512i \\
c_{15} &= 0.000421336 - 0.000300882i \\
c_{16} &= 0.000421336 + 0.000300882i \\
c_{17} &= 0.000426330 - 0.000359857i \\
c_{18} &= 0.000426330 + 0.000359857i \\
c_{19} &= 0.000433208 - 0.000429429i \\
c_{20} &= 0.000433208 + 0.000429429i \\
c_{21} &= 0.000442953 - 0.000514183i \\
c_{22} &= 0.000442953 + 0.000514183i \\
c_{23} &= 0.000457316 - 0.000621568i \\
c_{24} &= 0.000457316 + 0.000621568i \\
c_{25} &= 0.000479691 - 0.000764617i \\
c_{26} &= 0.000479691 + 0.000764617i \\
c_{27} &= 0.000517423 - 0.000968462i \\
c_{28} &= 0.000517423 + 0.000968462i \\
c_{29} &= 0.000589141 - 0.001288803i \\
c_{30} &= 0.000589141 + 0.001288803i \\
c_{31} &= 0.000755717 - 0.001879529i \\
c_{32} &= 0.000755717 + 0.001879529i \\
c_{33} &= 0.001342830 - 0.003392991i \\
c_{34} &= 0.001342830 + 0.003392991i \\
c_{35} &= 0.982496 \\
c_{36} &= 0.
\end{aligned}$$

Сада имамо све вредности за x_i и c_i . Решење за $\alpha(k)$ је

$$\alpha(k) = \sum_{i=1}^{35} c_i x_i^k. \quad (50)$$

Наш примарни циљ је да нађемо $P(M = k)$,

$$P(M = k) = \alpha(k) - \alpha(k + 1) = \sum_{i=1}^{35} c_i x_i^k - \sum_{i=1}^{35} c_i x_i^{k+1} = \sum_{i=1}^{35} c_i x_i^k (1 - x_i). \quad (51)$$

Вероватноћа да $M = 0$ је

$$P(M = 0) = \alpha(0) - \alpha(1) = 1 - \sum_{i=1}^{35} c_i x_i^k. \quad (52)$$

Али, с обзиром да смо рачунали корене нумерички, није нам позната тачна расподела. Wolfram Mathematica проналази резултате само са коначним бројем вредности иза децималне запете. Наша претпоставка је да је

$$P(M = 0) = \frac{1}{36} = 0.02778. \quad (53)$$

Треба напоменути да су наредни резултати базирани само на рачуници, без теоријског доказа:

$$P(M = 0) = \frac{1}{36} = 0.02778, \quad (54)$$

$$P(M > 0) = \frac{35}{36} = 0.97222, \quad (55)$$

$$E(M) = 630, \quad (56)$$

$$D(M) = 411793, \quad (57)$$

$$\sigma(M) = 641. \quad (58)$$

Медијана је 434 и 95% квантил је 1912.

Очекивана вредност максимума играјући црвено-црну стратегију је 18 и испада да је то 35 пута мање од очекиване вредности када се игра стратегијом једног броја. Дисперзија је 1200 пута мања.

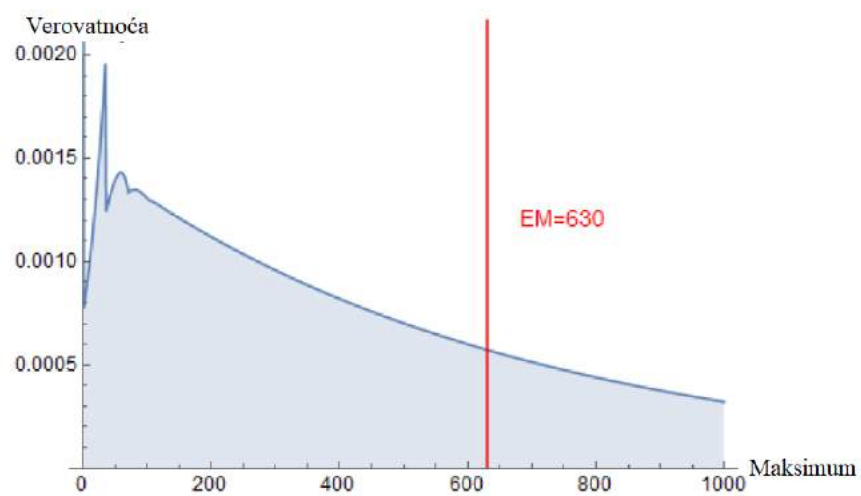


График 2.1: Теоријска расподела максимума са очекиваном вредношћу

4.2 Време последњег излаза

Наш наредни циљ је да нађемо време последњег излаза током једног случајног лутања. Почнимо са дефиницијом времена последњег излаза τ :

$$\tau = \max\{n \geq 0 \mid S(n) = 0\}, \quad (59)$$

где је τ дискретна случајна величина која може да има вредност 0 или позитиван цео број. Али не било који позитиван цео број, већ само оне дељиве са 36 (случајно лутање може да има вредност 0 само у моментима $36n$, $n \in \mathbb{N}_0$). Волели бисмо да знамо њену расподелу, а то значи да прво морамо да нађемо њену вероватноћу

$$P(\tau = 36n) = P(\max\{k \geq 0 \mid S(k) = 0\} = 36n) \quad (60)$$

за свако $k \in \mathbb{N}_0$. Начин на који се одвија случајно лутање пре момента $36n$ нам није битан. Једино је важно да у моменту $36n$ има вредност 0 и да је никада више не досегне у будућности. Другим речима, у моменту $36n$, ми смо на нули, а у моменту $36n + 1$ спуштамо се на вредност -1 и од тог момента, максимална вредност коју достижемо је -1 . Говорећи кроз вероватноћу:

$$P(\tau = 36n) = P(S(36n) = 0 \ \& \ S(36n + 1) = -1) \cdot P\left(\max_{k \geq 36n+1} S(k) = -1\right). \quad (61)$$

Први члан производа може да се израчуна користећи дефиницију условне вероватноће.

$$\begin{aligned} P(S(36n) = 0 \ \& \ S(36n + 1) = -1) &= \\ &= P(S(36n) = 0) \cdot P(S(36n + 1) = -1 \mid S(36n) = 0) = \\ &= \binom{36n}{n} p^{35n} (1-p)^n \cdot p \\ &= \binom{36n}{n} p^{35n+1} (1-p)^n \end{aligned} \quad (62)$$

Други члан производа једначине (61) може да се реши на исти начин као што смо га решили и у секцији 3.2. Поступак је једноставан - вероватноћа да смо на вредности -1 и да нећемо ићи изнад ње се подудара са вероватноћом да смо на нули у почетку и да никада нећемо ићи изнад нуле. Тако да једначина (53) може да се искористи у следећем,

$$P\left(\max_{k \geq 36n+1} S(k) = -1\right) = P\left(\max_{k \geq 0} S(k) = 0\right) = P(M = 0) = \frac{1}{36}. \quad (63)$$

Сада имамо све што нам треба и користећи једначину (59), једначину (60) и једначину (61), за свако $n \in \mathbb{N}_0$ добијамо

$$P(\tau = 36n) = \frac{1}{36} \cdot \binom{36n}{n} p^{35n+1} (1-p)^n.$$

Волели бисмо да знамо нешто више о самој расподели (као што је очекивана вредност, итд.), али $\binom{36n}{n}$ је немогуће израчунати сасвим прецизно чак и успомоћ програмских пакета. Користићемо Стирлингову апроксимацију факторијала (књига [11], 84. страна):

$$n! \approx \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$$

где је e Ојлеров број. Користећи га у нашој расподели

$$\binom{36n}{n} = \frac{(36n)!}{n!(35n)!} \approx \frac{6}{\sqrt{70 \cdot \pi n}} \cdot \frac{36^{36n}}{35^{35n}} = \frac{6}{\sqrt{70 \cdot \pi n}} \cdot \left(35 \cdot \left(\frac{36}{35}\right)^{36}\right)^n.$$

Дакле,

$$P(\tau = 36n) \approx \frac{p}{6} \cdot \frac{1}{\sqrt{70 \cdot \pi n}} \cdot \left(35 \cdot \left(\frac{36}{35}\right)^{36} \cdot p^{35}(1-p)\right)^n.$$

Апроксимација даје приближну вредност вероватноће. Приметимо да уколико користимо апроксимацију, $P(\tau = 0)$ није дефинисана и $P(\tau \rightarrow 0) = \infty$. Следи поређење тачних вредности и апроксимација у табели.

Унели смо код у Wolfram Mathematica који је дат у додатку под ставком 14)

n	Тачна вредност	Апроксимација
0	0.027027	-
1	0.0100792	0.010931
2	0.00741327	0.00772642
3	0.0061339	0.00630619
4	0.00534681	0.00545923
5	0.00480038	0.0048102
10	0.00341621	0.00344481
20	0.00241645	0.00242655
50	0.00151465	0.00151718
100	0.00105162	0.00105249
1000	0.000235898	0.000235918

Табела 2: Поређење тачних вредности и апроксимација

Користећи Wolfram Mathematica -у,

$$E(\tau) \approx 46658.9 \quad (64)$$

$$D(\tau) \approx 4.41222 \cdot 10^9 \quad (65)$$

$$\sigma(\tau) \approx 66424.5 \quad (66)$$

Медијана је 583, 95% квантил је апроксимативно 128 135.

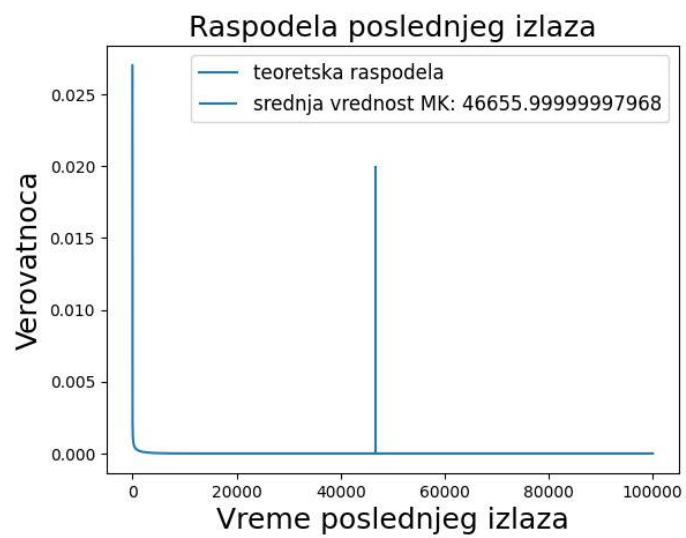


График 2.2: Распредела времена последњег излаза

4.3 Број посета нули

Сада бисмо волели да знамо колико пута ћемо посетити нулу. Дефинишимо случајну величину Z која представља број пута када смо посетили нулу. Она је дефинисана са:

$$Z = \sum_{n=0}^{\infty} \chi_{\{S(n)=0\}},$$

где је χ индикатор случајне величине. Случајна величина Z може да има само вредности из $\mathbb{N}$, што значи да је $P(Z \geq 1) = 1$. Циљ овог потпоглавља је да пронађемо расподелу за Z и то значи да треба да нађемо

$$P(Z = k) = P\left(\sum_{n=0}^{\infty} \chi_{\{S(n)=0\}} = k\right)$$

за све позитивне k .

Можемо да наставимо на исти начин као што смо радили у секцији 3.3. Фиксирајмо $k \in \mathbb{N}$. Ако је $Z = k$, можемо да разделимо случајно лутање на k делова. Делови $1, \dots, k-1$ су идентични зато што сви почињу у нули, завршавају се у нули и никада не пролазе кроз вредност нула у међувремену. Последњи, односно k -ти, део је другачији, идемо до вредности -1 и више се не пењемо изнад те вредности. Рецимо да су p_i , $i \in \{1, \dots, k\}$ вероватноће свих делова редом. Вероватноће да $p_1, \dots, p_{k-1}$ су једнаке. Као што можемо да видимо, ови делови су међусобно независни. Тако да,

$$P(Z = k) = \prod_{i=1}^k p_i = p_k \prod_{i=1}^{k-1} p_i = p_k (p_1)^{k-1}. \quad (67)$$

Пре свега, прво пронађимо p_k . Она може бити пронађена на сличан начин као у секцији 3.3. Описано речима: ми смо на нули у неком моменту $36n$. У следећем кораку морамо да се спустимо на вредност -1 ($q = \frac{36}{37}$) и од сада на даље, морамо остати испод -1 (наш максимум је -1) и то је ситуација идентична овој: ми смо на 0 и морамо да останемо испод те вредности (и то је вероватноћа $P(M = 0)$). Приметимо да смо вероватноћу $P(M = 0)$ рачунали само нумерички. Из тога добијамо

$$p_k = \frac{36}{37} \cdot P(M = 0) = \frac{36}{37} \cdot \frac{1}{36} = \frac{1}{37}. \quad (68)$$

Следеће, волели бисмо да добијемо вредност p_1 . Знамо да је сума вероватноћа у расподели случајне величине једнака 1 и користећи једнчину (67) и (68) добијамо

$$\begin{aligned} 1 &= \sum_{k=1}^{\infty} P(Z = k) = \sum_{k=1}^{\infty} p_k (p_1)^{k-1} = \frac{1}{37} \sum_{k=1}^{\infty} (p_1)^{k-1} \\ 37 &= \sum_{k=1}^{\infty} (p_1)^{k-1} = \frac{1}{1 - p_1} \\ p_1 &= \frac{36}{37}. \end{aligned} \quad (69)$$

То је све што нам је потребно да нађемо расподелу од Z . Тако да,

$$P(Z = k) = \frac{1}{37} \cdot \left(\frac{36}{37}\right)^k. \quad (70)$$

То је идентична расподела као када се кладимо на боју. Очекивана вредност, дисперзија, итд. су:

$$E(Z) = 36, \quad (71)$$

$$D(Z) = 1332 \quad (72)$$

$$\sigma(Z) = 36.5 \quad (73)$$

Значајни квантили су: медијана је 25 и 95% квантил је 109.

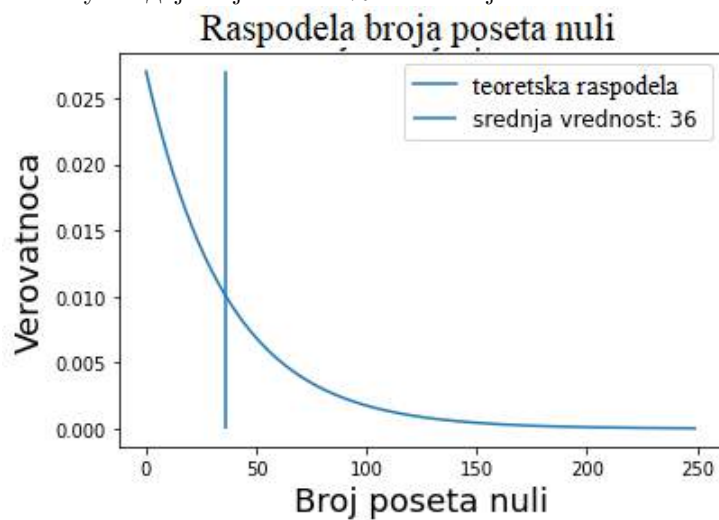


График 2.3: Расподела броја посета нули

4.4 Монте Карло симулације

Сада ћемо податке добијене Монте Карло методом анализирати даље. Користила сам псеудослучајне бројеве како бих симулирала 1 000 000 случајних лутања. Означимо са R_i сваку симулацију од $S(n)$. За све R_i користићемо вредности максимума M_i , време задњег излаза τ_i и број посета нули Z_i . Ови подаци помоћи ће нам да проверимо нумеричке резултате добијене у претходним секцијама. Користићемо зауставно правило, које ће бити доња граница случајног лутања, постављена на вредност од -2000. Када достигне ову вредност, симулација ће стати.

Код који је коришћен за спровођење Монте Карло симулације (Python програмски језик) је исти као у одељку 3.4.

Код који је коришћен за постављање услова за стратегију једног броја (Python програмски језик) је дат у додатку под ставком 15)

4.4.1 Максимум

M_i је максимум i -те симулације. Средња вредност M_i је:

$$\overline{M_N} = 639,175.$$

Интересантно је то да је потврђено осцилаторно понашање за мале вредност M предвиђених теоријском расподелом максимума.

Узорачна дисперзија максимума је $S_N = 46.1 \cdot 10^6$, док је узорачна стандардна девијација $s_N = 6788.2$. Нумеричке вредности очекиване вредности, дисперзије и стандардне девијације су дате једначинама (56), (57) и (58).

Из ових резултата и теореме 5 може да се конструише интервал поверења за очекивану вредност μ_M . За $N \rightarrow \infty$

$$P(u_{\frac{\alpha}{2}} < \sqrt{N}(\overline{M_N} - \mu_M)/S_N < u_{1-\frac{\alpha}{2}}) \rightarrow 1 - \alpha.$$

95%-тни интервал поверења за μ_M је

$$\mu_M \in (628,00; 650,34).$$

На следећој слици можемо видети:

- График релативне фреквенције са узорачком средњом вредношћу
- Релативна фреквенција за Монте Карло податке
- Расподела максимума

Код који је коришћен за израчунавање медијане и цртања графика (Python програмски језик) је дат у додатку под ставком 16)

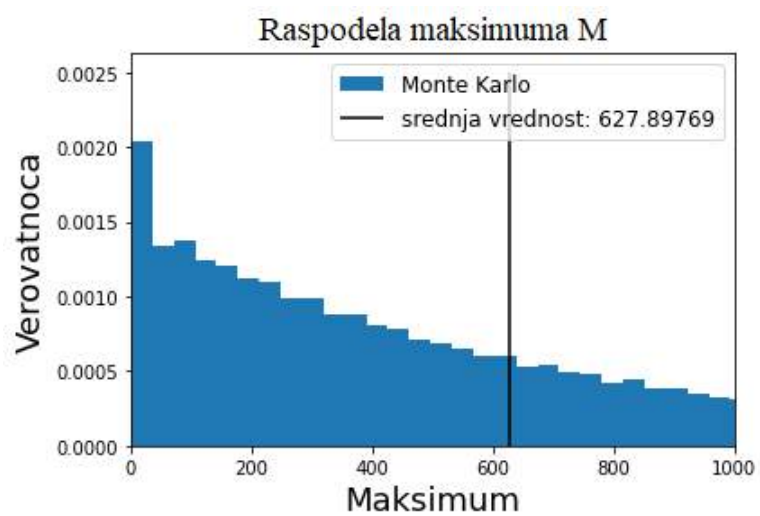


График 2.4: Релативна и кумулативна фреквенција максимума са узорачном средњом вредношћу и расподелом максимума

4.4.2 Време последњег излаза

Претпоставимо да је τ_i време последњег излаза i -те симулације. Узорачна средња вредност је

$$\overline{\tau_N} = 46432.8.$$

Узорачна дисперзија је $S_N = 3.9851 \cdot 10^{10}$.

Узорачна стандардна девијација је $s_N = 199273.18$.

У сегменту 4.2, извели смо апроксимације очекиваних вредности, итд. Добијени су следећи резултати:

$$\begin{aligned} E(\tau) &\approx 46658.9, \\ D(\tau) &\approx 4.41222 \cdot 10^9, \\ \sigma(\tau) &\approx 66424.5 \end{aligned}$$

95%-тни интервал поверења за μ_τ је

$$\mu_\tau \in (46105; 46760.6).$$

На следећој слици можемо видети:

- График релативне фреквенције са узорачком средњом вредношћу
- Релативна фреквенција за Монте Карло податке
- Расподела времена последњег излаза

Код за рачунање и цртање графика је дат у додатку под ставком 17)

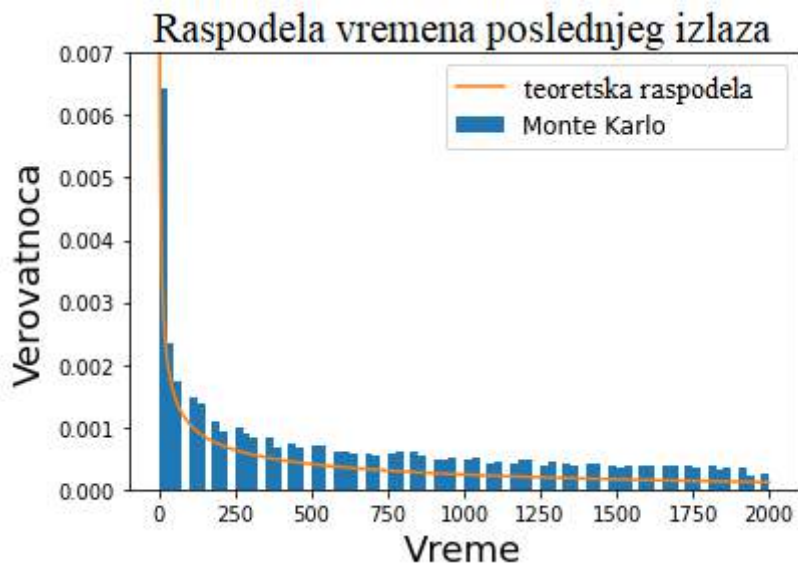


График 2.5: Релативна и кумулативна фреквенција последњег излаза са узорачном средњом вредношћу и расподелом времена последњег излаза

4.4.3 Број посета нули

Означимо Z_i као број посета нули i -тог случајног лутања. Узорачна средња вредност је

$$\overline{Z}_N = 35.239.$$

$E(Z) = 36$ из једначине (71).

Узорачна дисперзија је $S_N^2 = 762303.1$ и $D(Z) = 1332$ из једначине (72).

Узорачна стандардна девијација је $s_N = 876.1$ и $\sigma(Z) = 36.5$ из једначине (73).

Из ових резултате и теореме 3, можемо да конструишемо интервал поверења за очекивану вредност μ_Z . За $N \rightarrow \infty$

$$P(u_{\frac{\alpha}{2}} < \sqrt{N}(\overline{Z}_N - \mu_Z)/S_N < u_{1-\frac{\alpha}{2}}) \rightarrow 1 - \alpha.$$

95%-тни интервал поверења за μ_Z је

$$\mu_Z \in (33.8; 36.674).$$

На следећој слици можемо видети:

- График релативне фреквенције са узорачком средњом вредношћу
- Релативна фреквенција за Монте Карло податке
- Расподела посета нули

Код за рачунање и цртање графика је дат у додатку под ставком 18)

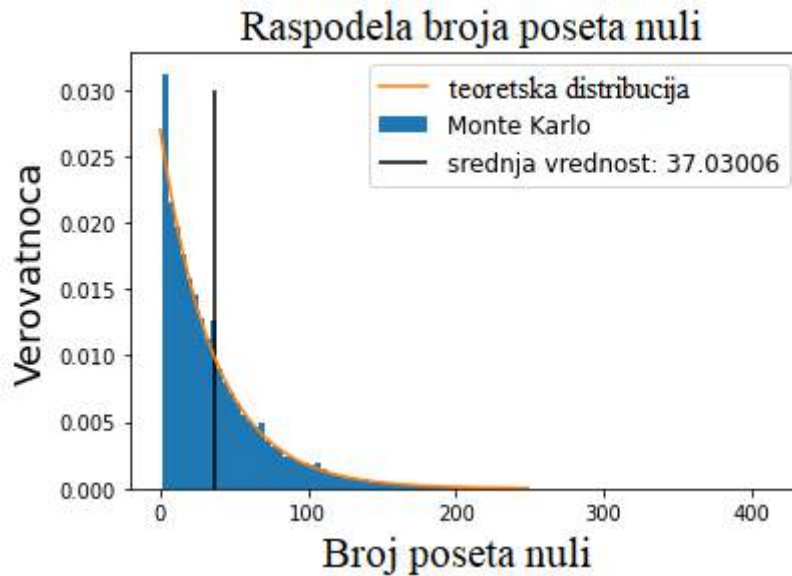


График 2.6: Релативна и кумулативна фреквенција броја посета нули са узорачном средњом вредношћу и расподелом броја посета нули

Литература коришћена у овом поглављу: [2], [3], [8], [12], [13]

5 Закључак

Област вероватноће је традиционално повезана са проблемима игара на срећу. У овом раду је укратко описана и, на одабраним примерима, илустрована та веза. С друге стране, детаљно је описана игра на срећу рулет и упоређене су две различите стратегије у тој игри. Добијени су следећи резултати:

Црвено-црна стратегија и стратегија једног броја имају исто очекивање, али различиту дисперзију. Приметимо да су сви резултати добијени стратегијом једног броја добијени нумеричким прорачунима без релевантног теоријског доказа. Апроксимативни резултати подржани су Монте Карло симулацијом.

Максимум има очекивану вредност 18 у црвено-црној стратегији, а приближно 630 у стратегији једног броја, што је 35 пута више. Вероватноћа да ћемо једном, евентуално освојити нешто је приближно 0.947 у црвено-црној стратегији и приближно 0.9722 у стратегији једног броја. Са ове тачке гледишта, клађење на број је боља опција.

Време последњег излаза има очекивану вредност 1368 у црвено-црној стратегији и приближно 46659 у стратегији једног броја. Ако се кладимо стратегијом једног броја, игра може да траје дуже или макар да дуже времена салдо буде изнад нуле, тако да је у том смислу боља опција за игру.

Број посета нули има идентичну очекивану вредност за обе стратегије. Тако да су са ове тачке гледишта ове стратегије равноправне.

Из претходних поглавља делује да је сигурније играти црвено-црну стратегију, у којој се улог раздели, али закључујемо да је ипак много ризикантнија стратегија једног броја боља опција за играње због веће дисперзије.

Дакле, закључак овог рада је да играње стратегије једног броја (нераздељени улог) има више бенифиција за нас, тако да је ипак боље да се одлучимо за ову, ризикантнију стратегију.

6 Литература

- [1] Casella G. and Berger R. *Statistical Inference*. Duxbury, Thomson Learning, Pacific Grove, 2002.
- [2] Dupač V. and Hušková M. *Probability and Mathematical Statistics*, volume 2, revised edition. Karolinum, Praha, 2013.
- [3] Dubins L.E. and Savage L.J. *How to Gamble If You Must: Inequalities for Stochastic Processes*. McGraw-Hill Book Company, Inc., New York, 1965.
- [4] Durrett R. *Probability: Theory and Examples*. Cambridge University Press, Cambridge, 2019.
- [5] Dynkin, E.B., Uspenskii V.A. *Random Walks*. Translated by Norman D. Whaland, Jr, and Olga A. Titelbaum. University of Chicago, 1963.
- [6] Epstein R. *The Theory of Gambling and Statistical Logic*. Elsevier Inc., Academic Press, San Diego, 2009.
- [7] Grimmet G. and Stirzaker D. *Probability and Random Processes*. Oxford University Press, Oxford, 2001.
- [8] Jevremović V. *Rečnik statističkih termina*. Univerzitet u Novom Sadu, Centar za primenjenu statistiku, 2014.
- [9] Kandapriya, B. *A short history of probability theory and its applications*. International Journal of Mathematical Education in Science and Technology. Volume 46, Issue 1, p. 13-39. 2015.
- [10] Maitra A. and Sudderth W. *Discrete Gambling and Stochastic Games*. Springer-Verlag. New York. 1996.
- [11] Mladenović P. *Elementaran uvod u verovatnoću i statistiku*. Društvo matematičara Srbije, Beograd, 1998.
- [12] Mladenović P. *Verovatnoća i statistika*. Matematički fakultet, Beograd, 2009.
- [13] Stirzaker D. *Stochastic Processes and Models*, Oxford University Press, Oxford, 2005.
- [14] Taylor H.M. and Karlin S. *A First Course in Stochastic Processes*. Academic Press, San Diego, 1975.
- [15] Taylor H.M. and Karlin S. *An Introduction to Stochastic Modelling*. Academic Press, San Diego, 1984.
- [16] Venttsel Ye. S. *Elements of Game Theory*. Translated by Vladimir Shokurov. Mir Publishers, Moscow, 1980.

7 Биографија



Слика 5: Милица Влајчић Гашић
Сликао: Мирослав Петровић

Милица Влајчић Гашић рођена је 5. априла 1990. године у Београду, где је завршила основно и средње образовање као добитник Вукове награде. Средњошколско образовање стекла је у Трећој београдској гимназији - природно математички смер, након чега уписује Статистику, актуарску и финансијску математику на Математичком факултету у Београду. Дипломирала је 2018. године и након тога уписује Мастер студије на поменутом факултету за које добија стипендију ИТ компаније Ask me Why 2020. године. Прва радна искуства стиче као стални професор математике у основним и средњим школама, а затим као .NET програмер у фирмама као Asseco, TNation са најдужим задржавањем у Републичком заводу за статистику, сектор за дисеминацију и интеграцију административних извора.

2018. године придружује се удружењу Valinor као финансијски саветник, а уједно се окреће промоцији гејминг индустрије кроз организовање хуманитарних дешавања, гејминг догађаја, промоцији културе и одскора почиње да ради као 3D аниматор у приватној гејминг компанији.

8 Додатак

1) Код за слику 3 на страни 18.

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# Define the points
points = {
    0: (0, 0),
    1: (1, 1),
    2: (2, 2),
    3: (3, 1),
    4: (4, 2),
    5: (5, 3),
    6: (6, 2),
    7: (7, 1),
    8: (8, 0),
    9: (9, -1),
    10: (10, 0),
    11: (11, 1),
    12: (12, 0),
    13: (13, -1),
    14: (14, -2),
    15: (15, -1),
    16: (16, 0),
    17: (17, 1),
    18: (18, 2),
    19: (19, 3),
    20: (20, 2),
    21: (21, 3),
    22: (22, 4),
    23: (23, 5),
    24: (24, 4)
}

# Extract x and y coordinates of the points
x_coords = [point[0] for point in points.values()]
y_coords = [point[1] for point in points.values()]

# Plot the random walk
plt.figure(figsize=(10, 6))
plt.plot(x_coords, y_coords, color='black', marker='o', linestyle='-', linewidth=1)

# Mark specified points
mark_points = [0, 2, 5]
for point in mark_points:
    plt.text(points[point][0], points[point][1], \
        f'A{point}', ha='right', va='bottom', color='black')
```

```

# Set the y-axis limits
plt.ylim(-3, 6)

# Remove the x and y axis labels
plt.xlabel('')
plt.ylabel('')

# Set the x-axis and y-axis color to black
plt.axhline(0, color='black', linewidth=1)
plt.axvline(0, color='black', linewidth=1)

# Add arrows at the ends of x and y axes
plt.annotate('', xy=(25, 0), xytext=(23.5, 0), arrowprops=dict(arrowstyle='->', color='black'))
plt.annotate('', xy=(0, 5.5), xytext=(0, 4), arrowprops=dict(arrowstyle='->', color='black'))

# Remove the ticks for the values on the x and y axes
plt.xticks([])
plt.yticks([])

# Remove the grid
plt.grid(False)

# Remove the outer boundaries
for spine in plt.gca().spines.values():
    spine.set_visible(False)

# Display the plot
plt.show()

```

2) Код за слику 4 на страни 19.

```

import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# Define the points
points = {
    0: (4, 2),
    1: (5, 1),
    2: (6, 2),
    3: (7, 1),
    4: (8, 0),
    5: (4, -2),
    6: (5, -1),
    7: (6, -2),
    8: (7, -1),
    9: (8, 0),
    10: (9, -1),

```

```

11: (10, 0),
12: (11, 1),
13: (12, 2),
14: (13, 3),
15: (14, 2)
}

# Extract x and y coordinates of the points
x_coords = [point[0] for point in points.values()]
y_coords = [point[1] for point in points.values()]

# Plot the random walk
plt.figure(figsize=(10, 6))

# Plot dotted line for points below the x-axis and up to point X
x_below = x_coords[5:10]
y_below = y_coords[5:10]
plt.plot(x_below, y_below, color='black', marker='o', linestyle=':', linewidth=1)

# Plot continuous line for points from point X onwards
x_above = x_coords[:5] + x_coords[10:]
y_above = y_coords[:5] + y_coords[10:]
plt.plot(x_above, y_above, color='black', marker='o', linestyle='-', linewidth=1)

# Plot dotted line for points above the x-axis
x_dotted = [x_coords[4], x_coords[9]]
y_dotted = [y_coords[4], y_coords[9]]
plt.plot(x_dotted, y_dotted, color='black', linestyle=':', linewidth=1)

# Mark specified points

# Set the y-axis limits
plt.ylim(-3, 4)

# Set the x-axis and y-axis labels
plt.xlabel('x')
plt.ylabel('y')

# Set the x-axis and y-axis color to black
plt.axhline(0, color='black', linewidth=1)
plt.axvline(0, color='black', linewidth=1)

# Add arrows at the ends of x and y axes
plt.annotate('', xy=(14, 0), xytext=(13, 0), arrowprops=dict(arrowstyle='->', color='black'))
plt.annotate('', xy=(0, 3.5), xytext=(0, 3), arrowprops=dict(arrowstyle='->', color='black'))

# Remove the numbers from the axes
plt.xticks([])

```

```
plt.yticks([])

# Remove the grid
plt.grid(False)

# Remove the box lines that envelop the graph
for spine in plt.gca().spines.values():
    spine.set_visible(False)

# Display the plot
plt.show()
```

3) Код коришћен за рачунање медијана и цртање графика 1.1 на страни 28.

```
import numpy as np
from matplotlib import pyplot as plt
from scipy.stats import bernoulli

n = 10 **6
M_dist = [(18/19)**k/19 for k in range(n)]
M_srednja_vrednost = np.sum([m*k for m, k in zip(M_dist, range(n))])
print("M srednja vrednost: ", M_srednja_vrednost)

>>> M srednja vrednost: 17.999999999999996

plt.plot(range(100), M_dist[:100], label="teoretska raspodela")
plt.vlines(x=18, ymin=0, ymax=0.06, label="srednja vrednost: 18")
plt.title("Raspodela maksimuma M", fontsize=18)
plt.xlabel("Maksimum", fontsize=18)
plt.ylabel("Verovatnoca", fontsize=18)
plt.legend(fontsize=12)
```

4) Код за график 1.2 на страни 29.

```
import matplotlib.pyplot as plt

# Define the points
points = {
    0: (2, 0),
    1: (3, -1),
    2: (4, -2),
    3: (5, -1),
    4: (6, -2),
```

```

    5: (7, -3)
}

# Extract x and y coordinates of the points
x_coords = [point[0] for point in points.values()]
y_coords = [point[1] for point in points.values()]

# Plot the graph
plt.figure(figsize=(10, 6))

# Plot the dotted horizontal line at y=-1
plt.axhline(y=-1, color='blue', linestyle=':', linewidth=1)

# Plot the points and connect them with a full black line
plt.plot(x_coords, y_coords, color='black', marker='o', linestyle='-', linewidth=1)

# Mark the points on the x-axis as 2n and 2n+1
plt.text(2, -0.3, '2n', ha='center', va='bottom', color='black')
plt.text(3, -0.3, '2n+1', ha='center', va='bottom', color='black')

# Set the y-axis limits
plt.ylim(-4, 1)

# Set the x-axis and y-axis labels
plt.xlabel('x')
plt.ylabel('y')

# Set the x-axis and y-axis color to black
plt.axhline(0, color='black', linewidth=1)
plt.axvline(0, color='black', linewidth=1)

# Add arrows at the ends of x and y axes
plt.annotate('', xy=(7, 0), xytext=(6.5, 0), \
arrowprops=dict(arrowstyle='->', color='black'))
plt.annotate('', xy=(0, 1.0), xytext=(0, 0.5), \
arrowprops=dict(arrowstyle='->', color='black'))

# Remove the numbers from the axes
plt.xticks([])
plt.yticks([])

# Mark the points on the y-axis
y_ticks = [-4, -3, -2, -1, 1]
y_tick_labels = ['-4', '-3', '-2', '-1', '1']
plt.yticks(y_ticks, y_tick_labels)

# Remove the grid
plt.grid(False)

```

```

# Remove the box lines that envelop the graph
for spine in plt.gca().spines.values():
    spine.set_visible(False)

# Display the plot
plt.show()

```

5) Wolfram Mathematica код на страни 30.

```

E1 = Sum[((2 n)/19)*
  Binomial[2 n, n]*(19/37)^(n + 1)*(1 - 19/37)^n, {n, 0, Infinity}]
>>>E1 = 1368
E2 = Sum[((4 n^2)/19)*
  Binomial[2 n, n]*(19/37)^(n + 1)*(1 - 19/37)^n, {n, 0, Infinity}]
>>>E2 = 5617008
Var = E2 - E1^2
>>>Var = 3745584
Sqrt[Var]
>>>444 Sqrt[19]
N[444 Sqrt[19]]
>>>1935.35

```

6) Код коришћен за израчунавање медијане и цртање графика 1.3 на страни 31.

```

p = 19.0 / 37.0 # sa verovatnocom p: Y(n)=-1, sa verovatnocom 1-p: Y(n)=1
n = 10**5

tau = 1/37
tau_dist = [tau]
for k in range(1, n):
    tau = tau*p*(1-p)*(2*k-1)*2*k/k/k
    tau_dist.append(tau)

tau_srednja_vrednost = np.sum([tau*2*k for tau, k in zip(tau_dist, range(n))])
print("tau srednja vrednost: ", tau_srednja_vrednost)

>>>tau srednja vrednost: 1368.0000000000008

plt.plot(range(2000), tau_dist[:2000], label="teoretska raspodela")
plt.vlines(x=1368, ymin=0, ymax=0.025, label="srednja vrednost: 1368")
plt.title("Raspodela vremena poslednjeg izlaza", fontsize=18)
plt.xlabel("Vreme poslednjeg izlaza", fontsize=18)
plt.ylabel("Verovatnoca", fontsize=18)
plt.legend(fontsize=12)

```

7) Код за график 1.4 на страни 32.

```
import matplotlib.pyplot as plt

# Define the points
points = {
    0: (0, 0),
    1: (2, 2),
    2: (4, 0),
    3: (5, -1),
    4: (6, 0),
    5: (7, 1),
    6: (8, 0),
    7: (10, 2),
    8: (12, 0),
    9: (13, -1)
}

# Extract x and y coordinates of the points
x_coords = [point[0] for point in points.values()]
y_coords = [point[1] for point in points.values()]

# Plot the graph
plt.figure(figsize=(10, 6))

# Set the y-axis limits
plt.ylim(-3, 3)

# Plot the central line (x-axis)
plt.plot([x_coords[0], x_coords[-1] + 1], [0, 0], \
color='black', linestyle='-', linewidth=1, alpha=0.5)

# Plot the points and connect them with full black lines
for i in range(len(x_coords) - 1):
    plt.plot([x_coords[i], x_coords[i + 1]], [y_coords[i], y_coords[i + 1]], \
color='black', linewidth=1)

# Plot the vertical dotted red lines at x = 4, 6, 8, and 12
for x in [4, 6, 8, 12]:
    plt.plot([x, x], [-1, 1], color='red', linestyle=':', linewidth=1)

# Plot the blue dotted line from (12, -1) to (14, -1)
plt.plot([12, 14], [-1, -1], color='blue', linestyle=':', linewidth=1)

# Set the x-axis ticks for even integer values
x_ticks = [x for x in range(15) if x % 2 == 0]
plt.xticks(x_ticks)
plt.tick_params(axis='x', which='both', direction='in', length=6, width=1)
```



```

# Set the y-axis ticks for whole numbers and draw the ticks on the x-axis
y_ticks = [y for y in range(-3, 4)]
plt.yticks(y_ticks)
plt.tick_params(axis='y', which='both', direction='in', length=6, width=1)

# Add arrows at the ends of x and y axes
plt.annotate('', xy=(14.5, 0), xytext=(13.5, 0), arrowprops=dict(arrowstyle='->', color='black'))
plt.annotate('', xy=(0, 2.8), xytext=(0, -2.8), arrowprops=dict(arrowstyle='->', color='black'))

# Remove all spines
plt.gca().spines['left'].set_visible(False)
plt.gca().spines['right'].set_visible(False)
plt.gca().spines['top'].set_visible(False)
plt.gca().spines['bottom'].set_visible(False)

# Display the plot
plt.show()

```

8) Код за računanje medijane i crtanje grafika 1.5 na strani 33.

```

n = 10**3
Z_dist = [1/37 * np.power(36/37, k) for k in range(n)]
Z_srednja_vrednost = np.sum([Z*k for Z, k in zip(Z_dist, range(n))])
print("Z srednja vrednost: ", Z_srednja_vrednost)
>>>Z srednja vrednost: 35.99999999869357

plt.plot(range(250), Z_dist[:250], label="teoretska raspodela")
plt.vlines(x=36, ymin=0, ymax=0.027, label="srednja vrednost: 36")
plt.title("Raspodela broja poseta nuli", fontsize=18)
plt.xlabel("Broj poseta nuli", fontsize=18)
plt.ylabel("Verovatnoca", fontsize=18)
plt.legend(fontsize=12)

```

9) Код који је коришћен за спровођење Монте Карло симулације на страни 34.

```

def simulacija(p, N, n_sims, dobitak):

    Z_all = []
    M_all = []
    tau_all = []

    for i in range(n_sims):
        if i % (10 ** 3) == 0:
            print(i)
            bernoulli_samples = bernoulli(1-p).rvs(N)

```

```

Y = np.array(2 * bernoulli_samples - 1)
Y[np.where(Y==1)[0]] = dobitak
S = np.cumsum(Y)
S = np.append(np.array([0]), S) # prvi element S[0]=0

M = np.max(S)
M_all.append(M)

tau = np.max(np.where(S == 0)[0])
tau_all.append(tau)

Z = np.sum(S == 0)
Z_all.append(Z)

return (M_all, tau_all, Z_all)

```

10) Код коришћен за постављање услова за црвено-црну стратегију на страни 34.

```

N = 10 ** 6 # duzina slucajnog lutanja
p = 19.0 / 37.0 # sa verovatnocom p: Y(n)=-1, sa verovatnocom 1-p: Y(n)=1
n_sims = 10 ** 5 # ukupan broj simulacija
M_all, tau_all, Z_all = simulacija(p=p, N=N, n_sims=n_sims, dobitak=1)

```

11) Код коришћен за рачунање медијане и цртање графика 1.6 на страни 35.

```

print("M srednja vrednost: ", np.mean(M_all))
print("M standardna greska: ", np.std(M_all))
print("M disperzija: ", np.var(M_all))
print("Verovatnoca M=0: ", np.sum(M_all==0)/len(M_all))
print("M medijana: ", np.median(M_all))
print("95-ti kvantil: ", np.quantile(M_all, 0.95))

plt.hist(M_all, density=True, bins=50, label="Monte Karlo")
plt.plot(range(200), M_dist[:200], label="teoretska raspodela")
plt.vlines(x=np.mean(M_all), ymin=0, ymax=0.06, label=f"srednja vrednost MK: {np.mean(M_all)}")

plt.title("Raspodela maksimuma M", fontsize=18)
plt.xlabel("Maksimum", fontsize=18)
plt.ylabel("Verovatnoca", fontsize=18)
plt.legend(fontsize=12)

>>> M srednja vrednost: 18.04009
>>> M standardna greska: 18.560309878660426
>>> M disperzija: 344.48510279189986
>>> Verovatnoca M=0: 0.0

```

```
>>> M medijana: 12.0
>>> 95-ti kvantil: 55.0
```

12) Код коришћен за рачунање медијане и цртање графика 1.7 на страни 36.

```
print("tau srednja vrednost: ", np.mean(tau_all))
print("tau standardna greska: ", np.std(tau_all))
print("tau disperzija: ", np.var(tau_all))
print("tau medijana: ", np.median(tau_all))
print("95-ti kvantil: ", np.quantile(tau_all, 0.95))
axes = plt.gca()
axes.set_xlim([-100, 10000])
axes.set_ylim([0, 0.002])
plt.hist(tau_all, density=True, bins=100, label="Monte Karlo")
plt.plot(range(1000), tau_dist[:1000], label="teoretska raspodela")
plt.vlines(x=np.mean(tau_all), ymin=0, ymax=0.0012,
          label=f"srednja vrednost MK: {np.mean(tau_all)}")
plt.title("Raspodela vremena poslednjeg izlaza", fontsize=18)
plt.xlabel("Vreme", fontsize=18)
plt.ylabel("Verovatnoca", fontsize=18)
plt.legend(fontsize=12)

>>> tau srednja vrednost: 1373.6768
>>> tau standardna greska: 1938.0124325560353
>>> tau disperzija: 3755892.188741761
>>> tau medijana: 622.0
>>> 95-ti kvantil: 5292.0
```

13) Код коришћен за цртање медијане и цртање графика 1.8 на страни 37.

```
print("Z srednja vrednost: ", np.mean(Z_all))
print("Z standardna greska: ", np.std(Z_all))
print("Z disperzija: ", np.var(Z_all))
print("Z medijana: ", np.median(Z_all))
print("95-ti kvantil: ", np.quantile(Z_all, 0.95))

axes = plt.gca()
axes.set_xlim([-5, 250])

plt.hist(Z_all, density=True, bins=100, label="Monte Karlo")
plt.plot(range(250), Z_dist[:250], label="teoretska raspodela")
plt.vlines(x=np.mean(Z_all), ymin=0, ymax=0.03,
          label=f"srednja vrednost MK: {np.mean(Z_all)}")
```

```
plt.title("Raspodela broja poseta nuli", fontsize=18)
plt.xlabel("Broj poseta nuli", fontsize=18)
plt.ylabel("Verovatnoca", fontsize=18)
plt.legend(fontsize=12)
```

```
>>> Z srednja vrednost: 37.17066
>>> Z standardna greska: 36.71359823232258
>>> Z disperzija: 1347.8882951643998
>>> Z medijana: 26.0
>>> 95-ti kvantil: 111.0
```

14) Wolfram Mathematica код на страни 46 за апроксимирање приближних вредности вероватноће.

$$36/37/6*1/\text{Sqrt}[70*Pi*n]*(35*(36/35)^(36)*(36/37)^(35)*(1 - 36/37))^n$$

15) Код коришћен за постављање услова за стратегију једног броја на страни 45.

```
N = 10 ** 6 # duzina slucajnog lutanja
p = 36.0 / 37.0 # sa verovatnocom p: Y(n)=-1, sa verovatnocom 1-p: Y(n)=1
n_sims = 10 ** 5 # ukupan broj simulacija
M_all, tau_all, Z_all = simulacija(p=p, N=N, n_sims=n_sims, dobitak=35)
```

16) Код коришћен за рачунање медијане и цртање графика 2.4 на страни 50.

```
print("M srednja vrednost: ", np.mean(M_all))
print("M standardna greska: ", np.std(M_all))
print("M disperzija: ", np.var(M_all))
print("Verovatnoca M=0: ", np.sum(M_all==0)/len(M_all))
print("M medijana: ", np.median(M_all))
print("95-ti kvantil: ", np.quantile(M_all, 0.95))

plt.hist(M_all, density=True, bins=200, label="Monte Karlo")
plt.xlim(0, 1000)
plt.vlines(x=np.mean(M_all), ymin=0, ymax=0.0025,
           label=f"srednja vrednost: {np.mean(M_all)}")
plt.title("Raspodela maksimuma M", fontsize=18)
plt.xlabel("Maksimum", fontsize=18)
plt.ylabel("Verovatnoca", fontsize=18)
plt.legend(fontsize=12)

>>> M srednja vrednost: 627.89769
>>> M standardna greska: 639.6189860711328
>>> M disperzija: 409112.44734266395
>>> Verovatnoca M=0: 0.0
```

```
>>> M medijana: 432.0
>>> 95-ti kvantil: 1901.0499999999884
```

17) Код за рачунање медијане и цртање графика 2.5 на страни 51.

```
print("tau srednja vrednost: ", np.mean(tau_all))
print("tau standardna greska: ", np.std(tau_all))
print("tau disperzija: ", np.var(tau_all))
print("tau medijana: ", np.median(tau_all))
print("95-ti kvantil: ", np.quantile(tau_all, 0.95))

axes = plt.gca()
# axes.set_xlim([-50, 5000])
axes.set_ylim([0, 0.007])

plt.hist(tau_all, density=True, bins=80, label="Monte Karlo", range=[0,2000])
plt.plot(range(2000), tau_dist[:2000], label="teoretska raspodela")
plt.title("Raspodela vremena poslednjeg izlaza", fontsize=18)
plt.xlabel("Vreme", fontsize=18)
plt.ylabel("Verovatnoca", fontsize=18)
plt.legend(fontsize=12)

>>> tau srednja vrednost: 46560.68676
>>> tau standardna greska: 66277.49041117747
>>> tau disperzija: 4392705735.203721
>>> tau medijana: 20952.0
>>> 95-ti kvantil: 179748.0
```

18) Код за рачунање медијане и цртање графика 2.6 на страни 52.

```
print("Z srednja vrednost: ", np.mean(Z_all))
print("Z standardna greska: ", np.std(Z_all))
print("Z disperzija: ", np.var(Z_all))
print("Z medijana: ", np.median(Z_all))
print("95-ti kvantil: ", np.quantile(Z_all, 0.95))

plt.hist(Z_all, density=True, bins=100, label="Monte Karlo")
plt.plot(range(250), Z_dist[:250], label="teoretska raspodela")
plt.vlines(x=np.mean(Z_all), ymin=0, ymax=0.03,
          label=f"srednja vrednost: {np.mean(Z_all)}")
plt.title("Raspodela broj poseta nuli", fontsize=18)
plt.xlabel("Broj poseta nuli", fontsize=18)
plt.ylabel("Verovatnoca", fontsize=18)
```

```
plt.legend(fontsize=12)
```

```
>>> Z srednja vrednost: 37.03006  
>>> Z standardna greska: 36.49614276052197  
>>> Z disperzija: 1331.9684363964004  
>>> Z medijana: 26.0  
>>> 95-ti kvantil: 110.0
```