**UNIVERZITET U BEOGRADU**

MATEMATIČKI FAKULTET

Božana Agbaba

# BROJ RAZAPINJUĆIH STABALA U GRAFU

-Master rad-

Beograd, 2024.

**Mentor**:

Prof. dr Goran Đanković, vanredni profesor
Univerzitet u Beogradu, Matematički fakultet

**Članovi komisije**:

Prof. dr Marko Radovanović, vanredni profesor
Univerzitet u Beogradu, Matematički fakultet

Ilija Vrećica, asistent
Univerzitet u Beogradu, Matematički fakultet

**Datum odbrane**: ____________________

# SADRŽAJ

# PREDGOVOR

Mnoge situacije u stvarnom svetu mogu se konvencionalno opisati korišćenjem dijagrama koji sadrži tačke i linije. Na primer, tačke mogu predstavljati ljude, dok linije mogu predstavljati parove prijatelja, ili tačke mogu biti komunikacioni centri dok bi linije u tom slučaju predstavljale komunikacione linkove. Matematička apstrakcija situacija ovog tipa nas dovodi do koncepta grafova. U toj apstrakciji tačke predstavljaju čvorove, a linije predstavljaju grane u okviru datog grafa. Poslednjih godina, teorija grafova se etablirala kao važno matematičko sredstvo u širokom spektru predmeta, i to u rasponu od operativnih istraživanja i hemije do genetike i lingvistike, kao i od elektrotehnike i geografije do sociologije i arhitekture. Osim toga što se uspostavila kao matematičko sredstvo, teorija grafova postaje sama po sebi matematička disciplina.

Osnovni cilj rada jeste teoretski prikaz algoritama koji se koriste u prebrojavanju razapinjućih stabala. Rad je podeljen u tri poglavlja. Kako bismo se upoznali sa konceptom razapinjućih stabala i njihovim prebrojavanjem neophodno je da se upoznamo sa osnovnim definicijama i tvrđenjima iz teorije grafova.

*Prvo poglavlje* rada bavi se osnovnim konceptom teorije grafova. U njemu je data definicija grafova kao i elementarni pregled tipova grafova. Dodatno, ovo poglavlje sadrži dublji pregled njihovih karakteristika poput podgrafova, izomorfizam grafova, njhove povezanosti, rastojanja itd.

U *drugom poglavlju* rada prikazana su stabla koja predstavljaju jednu od najvažnijih klasa grafova. U ovom poglavlju dat je pregled osnovnih karakteristika stabala.

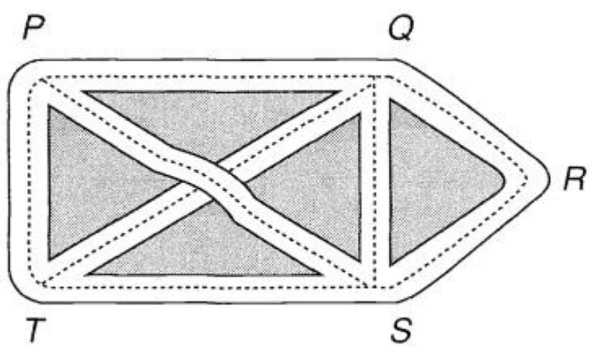
*U trećem poglavlju* rada predstavljen je poseban tip stabala – razapinjuća stabla. Dodatno, prikazana su različita tvrđenja pomoću kojih je prebrojavanje razapinjućih stabala postao relativno lak posao.

# 1. GRAFOVI

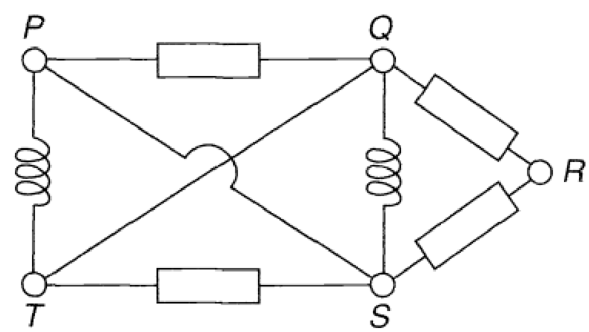
U ovom poglavlju biće predstavljene osnovne definicije i koncept grafova koji će se koristiti u kasnijim poglavljima.

## 1.1. Osnove grafova

Posmatrajmo sliku 1.1.1. i sliku 1.1.2. koje prikazuju deo mape puta i deo električne mreže.

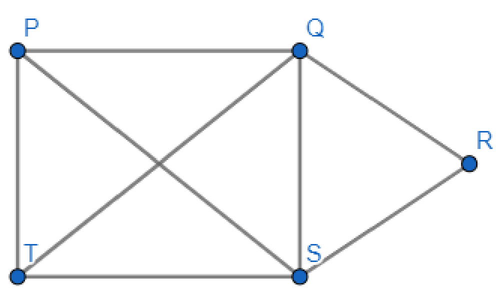



**Slika 1.1.1.** Prikaz dela mape puta




**Slika 1.1.2.** Prikaz električne mreže

Bilo koja od ovih situacija može se prikazati pomoću tačaka i linija kao što je prikazano na slici 1.1.3. Tačke $P, Q, R, S$ i $T$ se nazivaju čvorovi (ili temena), linije se nazivaju grane (ili ivice), dok se ceo dijagram naziva graf. Sa druge strane, stepen čvora predstavlja broj grana čije je krajnje teme upravo dati čvor.




**Slika 1.1.3.** Primer grafa

Grafik predstavljen na slici 1.1.3. može reprezentovati i drugačiju situaciju. Na primer, ako $P, Q, R, S$ i $T$ predstavljaju fudbalske timove, tada bi postojanje grane moglo korespondirati sa odigravanjem utakmice između timova na krajnjim tačkama. Tako, sa slike 1.1.3. se može zaključiti da je tim $P$ igrao protiv timova $Q, S$ i $T$, ali ne i protiv tima $R$. U ovakvom predstavljanju, stepen temena jeste upravo broj utakmica koje je odigrao odgovarajući tim. U nastavku rada sledi prikaz osnovnih definicija vezanih za teoriju grafova.

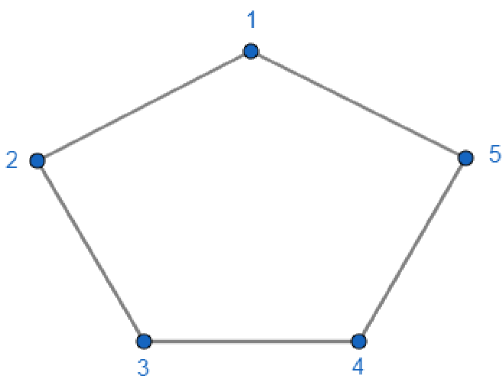
**Definicija 1.1.1.** Graf $G = (V, E)$ je uređeni par koji se sastoji od skupa ***čvorova*** $V$ i skupa ***grana*** $E \subseteq \binom{V}{2}$, gde je sa $\binom{V}{2}$ označen binomni koeficijent, odnosno na koliko načina od svih elemenata skupa $V$ možemo izabrati dva. Za čvorove $u, v \in V$ kažemo da su ***susedni*** ako je $\{u, v\} \in E$. Ako je $e = \{u, v\} \in E$ kažemo da ***grana*** $e$ ima krajeve $u$ i $v$. Takođe, kada je $e = \{u, v\} \in E$ kažemo da su čvorovi $u$ i $v$ ***incidentni*** sa granom $e$. Uz sve ovo, za dve grane u grafu kažemo da su ***susedne*** ukoliko imaju zajednički kraj (čvor).

Graf definisan na prethodni način zovemo još i ***prost graf***. Definicija prostog grafa se može proširiti, čime dobijamo sledeće definicije grafova.

**Definicija 1.1.2.**

- ***Neorijentisani graf*** $G = (V, E)$ je uređeni par skupova čvora $V$ i grana $E$, gde je $E \subseteq \binom{V}{2} \cup V$. Razlika je u tome što možemo imati i grane oblika $e = v$ (gde je $v \in V$), tj. grane u kojima su oba kraja u istom čvoru. Takve grane se nazivaju ***petlje***.
- ***Orijentisani graf*** ili ***digraf*** $G = (V, E)$ je uređeni par skupova čvorova $V$ i grana $E$, gde je $E \subseteq V \times V$. Razlika je u tome što grane u ovom slučaju imaju orijentaciju: grana $e = (x, y)$ ima početni čvor $x$ i krajnji čvor $y$.
- ***Turnir*** sa $n$ čvorova je kompletan graf $K_n$ kod koga su sve grane orijentisane.
- ***Težinski graf*** $G = (V, E, w)$ je uređena trojka skupova čvorova $V$ i grana $E$, kao i težinske funkcije $w: E \to \mathbb{R}$ koja svakoj grani dodeljuje težinu. Težinski grafovi mogu biti orijentisani i neorijentisani.
- ***Multigrafovi*** dozvoljavaju da između dva čvora postoji više od jedne grane. Zbog toga se multigraf $G = (V, E, f)$ definiše kao uređena trojka skupova čvorova $V$ i grana $E$ kao i preslikavanja $f: E \to V \times V$ koje svakoj grani $e \in E$ dodeljuje njen početni i krajnji čvor.

Iako su grafovi relacione strukture, najčešće se predstavljaju crtežima u ravni tako što se čvorovi predstavljaju kao tačke (kružićima), a grane se predstavljaju neprekidnim (Žordanovim) krivama između tačaka određenih njihovim krajevima. Pri izučavanju grafova, često važi da je slika mnogo bolji prikaz u odnosu na definiciju. Na primer, strukturu[1] sledećeg grafa je lakše shvatiti iz predstavljanja grafičkim putem nego li iz definicije.




$$G = \big(\{1,2,3,4,5\}, \{\{1,2\},\{2,3\},\{3,4\},\{4,5\},\{5,1\}\}\big)$$

**Slika 1.1.4.** Grafičko predstavljanje grafa $G$

**Definicija 1.1.3.** Pod ***okolinom*** $N_G(u)$ čvora $u$ i grafa $G = (V, E)$ podrazumevamo skup svih suseda čvora $u$:

$$N_G(u) = \{v \in V : \{u, v\} \in E\}.$$

Okolina $N_G(u)$ skupa čvorova $U \subseteq V$ je skup čvorova iz $V$ koji su susedni sa bar jednim čvorom iz $U$. ***Stepen*** $d_G(u)$ čvora $u$ je broj njegovih suseda $d_G(u) = |N_G(u)|$. Čvor stepena 1 se naziva ***list.*** Čvor stepena 0 se naziva ***izolovani čvor***. ***Najmanji*** i ***najveći stepen čvora*** imaju posebne oznake:

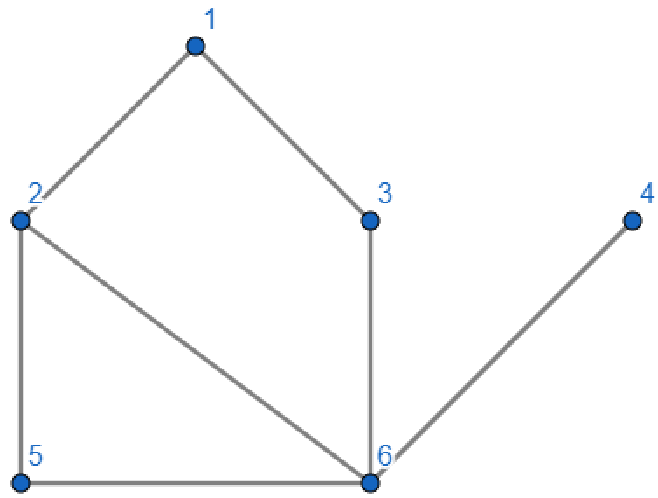
$$\delta(G) = \min_{u \in V} d_G(u) \qquad \triangle(G) = \max_{u \in V} d_G(u).$$

[1] Za kreiranje grafa korišćen je online programski paket https://graphonline.ru/en/

Graf $G$ je ***regularan*** ako svi čvorovi imaju isti stepen, tj. ako je $\delta(G) = \triangle(G)$. Kažemo da je $G$ ***regularan graf stepena r*** ili $r$ −regularan ako je $\delta(G) = \triangle(G) = r$ .

Napomena. Ukoliko je jasno o kom grafu se radi, indeksi iz oznaka $d_G(u)$ i $N_G(u)$ se mogu izostaviti.

**Zadatak 1.1.1.** U grafu $G$ sa slike 1.2.5. odrediti okoline i stepene čvorova.




**Slika 1.1.5.** Grafički prikaz grafa $G$

**Rešenje.** Za čvorove datog grafa $G$ važi:

| | |
|---|---|
| $N(1) = \{2,3\}$ | $d(1) = 2$ |
| $N(2) = \{1,5,6\}$ | $d(2) = 3$ |
| $N(3) = \{1,6\}$ | $d(3) = 2$ |
| $N(4) = \{6\}$ | $d(4) = 1$ |
| $N(5) = \{2,6\}$ | $d(5) = 2$ |
| $N(6) = \{2,3,4,5\}$ | $d(6) = 4$ |

Dodatno, za dati graf važi da je $\delta(G) = 1$ i $\triangle(G) = 4$.

**Lema 1.1.1.** U proizvoljnom grafu $G = (V, E)$ važi:

$$\sum_{v \in V} d_G(v) = 2|E|.$$

**Dokaz.** Za svako $v \in V$ sabirak $d_G(v)$ označava broj grana čiji je jedan kraj $v$. S obzirom da svaka grana ima po dva kraja, zbir

$$\sum_{v \in V} d_G(v)$$

prebrojava svaku granu u grafu $G$ po dva puta, odakle sledi gornja jednakost.

**Posledica. (Lema o rukovanju).** U proizvoljnom grafu broj čvorova neparnog stepena je paran.

**Dokaz.** Ukoliko neki graf $G = (V, E)$ sadrži neparan broj čvorova neparnog stepena, tada je zbir

$$\sum_{v \in V} d_G(v)$$

takođe neparan. Međutim, to je u kontradikciji sa prethodno dokazanom lemom.

Posledica poznata kao Lema o rukovanju kaže da u svakom društvu broj osoba koje su se rukovale neparan broj puta je paran (osobe predstavljaju čvorove grafa, a između dve osobe postoji grana ukoliko su se rukovale).

**Zadatak 1.1.2.** U skupu od barem četiri osobe ($n \geq 4$), među svake četiri osobe postoji jedna osoba koja se poznaje sa preostale tri osobe. Dokazati da u tom skupu postoji osoba koja poznaje sve ostale osobe.

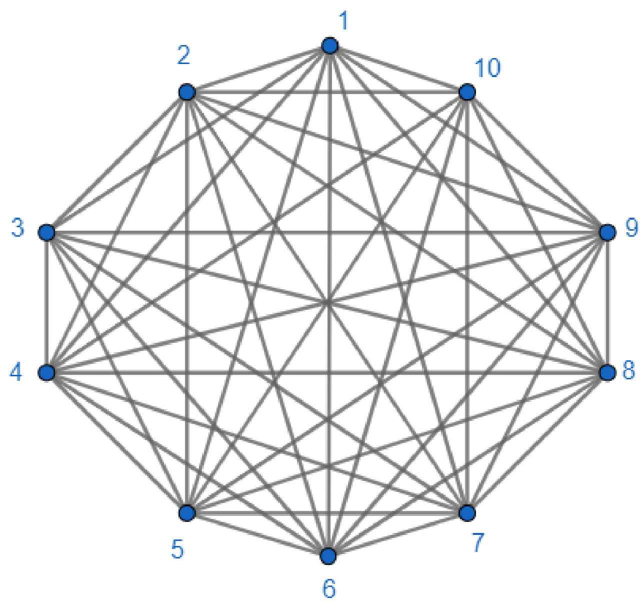
**Rešenje.** Predstavimo ovaj skup osoba pomoću grafa $G = (V, E)$ tako što svaku osobu predstavimo čvorom, a poznanstvo dveju osoba granom između odgovarajućih čvorova. Ovako pridruženi graf ima osobinu da među proizvoljna četiri čvora postoji čvor koji je susedan sa svim ostalim čvorovima. Ukoliko je svaki par čvorova u $G$ susedan, tada je svaki čvor iz $G$ susedan sa svim ostalim čvorovima. U suprotnom, neka su $u$ i $v$ nesusedni čvorovi u $G$. Tada za proizvoljan par čvorova $s$ i $t$ iz $V \setminus \{u, v\}$, u četvorci $u, v, s, t$ postoji čvor susedan sa preostala tri čvora. Takav čvor ne može da bude ni $u$ ni $v$, jer su $u$ i $v$ nesusedni. Prema tome, takav čvor je ili $s$ ili $t$. U svakom slučaju, važi da su $s$ i $t$ susedni čvorovi. Stoga, kako je par čvorova $s, t$ izabran proizvoljno, zaključujemo da je svaki par čvorova iz $V \setminus \{u, v\}$ susedan. Kako je bar jedan od čvorova $s, t$ pritom susedan i sa $u$ i sa $v$, zaključujemo da je taj čvor susedan sa svim ostalim čvorovima grafa $G$.

## 1.2. Pojedine klase grafova

Poznato je da se određene klase grafova sreću češće od ostalih. U nastavku je dat pregled pojedinih tipova grafova.

***Kompletan graf*** ili ***potpun graf*** $K_n$ je graf sa čvorovima $1,2,\ldots,n$ u kome je svaki par čvorova povezan sa granom, tj.

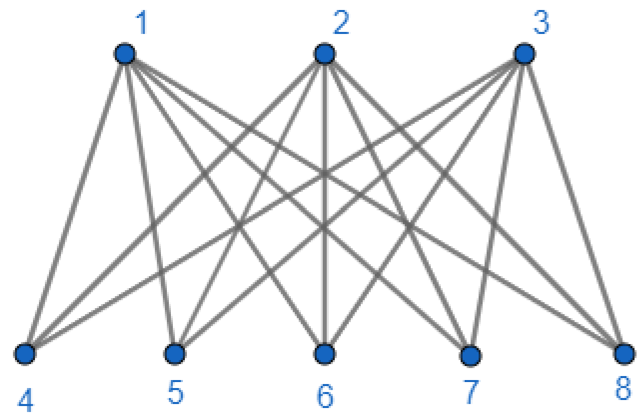
$$K_n = \left(\{1,2,\ldots,n\}, \left\{\{i,j\}: 1 \le i < j \le n\right\}\right).$$




**Slika 1.2.1.** Kompletan graf $K_{10}$

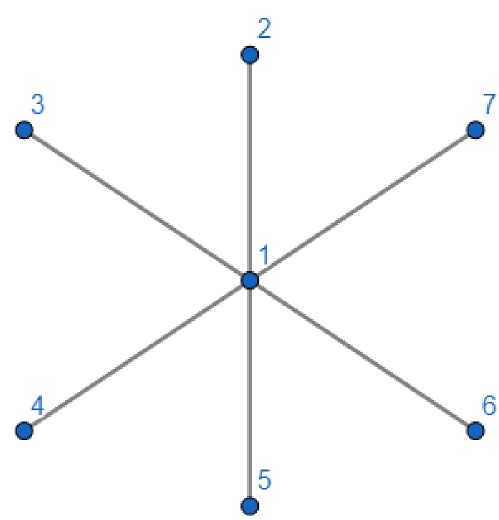
***Bipartitan graf*** je graf $G$ kod koga skup čvorova $V(G)$ možemo razbiti na dva podskupa $X$ i $Y$, tako da svaka grana $e \in E(G)$ ima jedan kraj u $X$, a drugi u $Y$. Podskupovi $X$ i $Y$ se nazivaju klase ili obojeni skupovi. $k -$ partitivan graf je graf $G$ čiji se skup čvorova $V(G)$ može predstaviti kao unija disjunktnih skupova $X_1, X_2, \dots, X_k$. Svaka grana $k$ −partitivnog grafa spaja dva čvora koji pripadaju različitim klasama. Neki od specijalnih slučajeva ovih grafova dati su u nastavku.

***Kompletan bipartitan graf*** $K_{m,n}$ je graf koji ima dve grupe čvorova $1,2, \dots, m$ i $m+1, m+2, \dots, m+n$ tako da je svaki čvor $i$ iz prve grupe susedan sa svakim čvorom $m+j$ iz druge grupe.



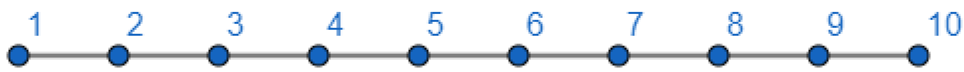

**Slika 1.2.2.** Kompletan bipartitan graf $K_{3,5}$

***Zvezda*** $S_n$ je kompletan bipartitan graf $K_{1,n-1}$.




**Slika 1.2.3.** Zvezda $S_7$

***Put*** $P_n$ je graf sa čvorovima $1,2, \dots, n$ i granom između čvorova $i$ i $i+1$, za svako $i = 1,2, \dots, n$. Čvorovi 1 i $n$ su krajevi puta.

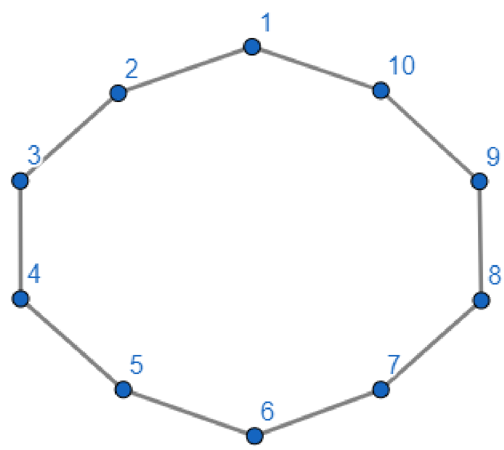



**Slika 1.2.4.** Put $P_{10}$

***Ciklus*** $C_n$ je graf dobijen od puta $P_n$ dodavanjem nove grane koja spaja krajeve puta. Drugim rečima,

$$C_n = \left(\{1,2,\dots,n\}, \left\{\{i,i+1\}: i = 1,2,\dots,n-1\right\} \cup \{1,n\}\right).$$

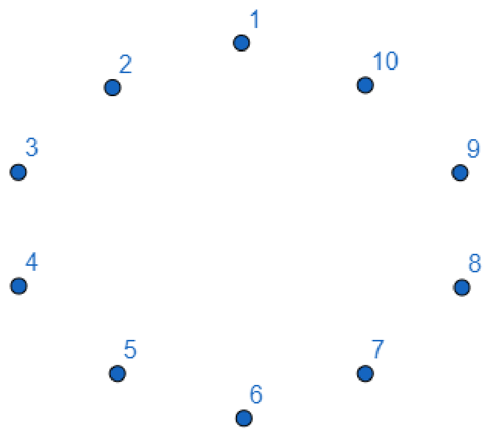
U literaturi se ciklus često naziva i konturom.




**Slika 1.2.5.** Ciklus $C_{10}$

***Prazan graf*** $\overline{K}_n$ je graf sa čvorovima $1,2,\dots,n$ koji ne sadrži ni jednu granu. Drugim rečima,

$$\overline{K}_n = (\{1,2,\dots,n\}, \emptyset).$$




**Slika 1.2.6.** Prazan graf $\overline{K}_{10}$

## 1.3. Izomorfizam grafova

**Definicija 1.3.1.** Dva grafa $G_1 = (V_1, E_1)$ i $G_2 = (V_2, E_2)$ su ***izomorfna*** ako postoji bijekcija

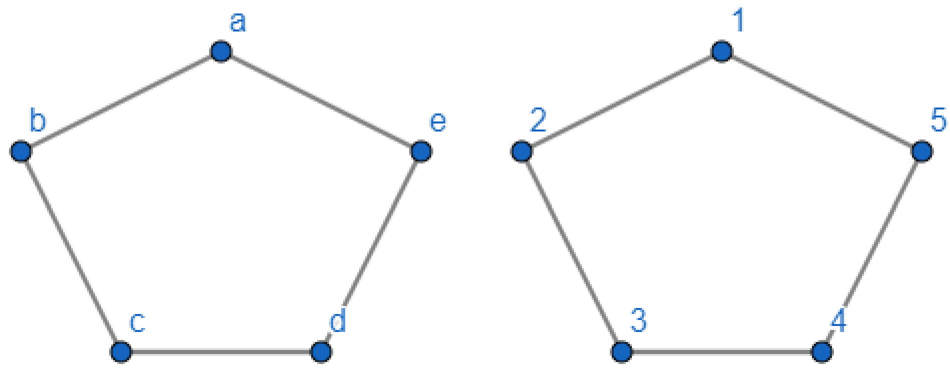
$$f: V_1 \rightarrow V_2$$

za koju važi da je $\{u, v\} \in E_1$ ako i samo ako je $\{f(u), f(v)\} \in E_2$. Funkcija $f$ se naziva ***izomorfizam*** grafova, a činjenicu da su grafovi $G_1$ i $G_2$ izomorfni označavamo sa $G_1 \cong G_2$.

**Zadatak 1.3.1.** Napiši dva proizvoljna izomorfna grafa.

**Rešenje.** Izomorfizam $f$ grafova na slici 1.4.1. dat je pomoću bijekcije

$$f = \begin{pmatrix} a & b & c & d & e \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$




**Slika 1.3.1.** Dva izomorfna grafa

Na osnovu definicije, a i primera, očigledno je da označavanje čvorova nema posebnog značaja za strukturu grafa.

**Definicija 1.3.2.** Funkcija $i$, definisana na skupu grafova, naziva se ***invarijantom grafova***, ukoliko za svaka dva izomorfna grafa $G \cong H$ važi da je $i(G) = i(H)$.

Dakle, invarijante grafova zavise od strukture, a ne od označavanja grafa. Neki od primera invarijanti grafova jesu sledeće funkcije:

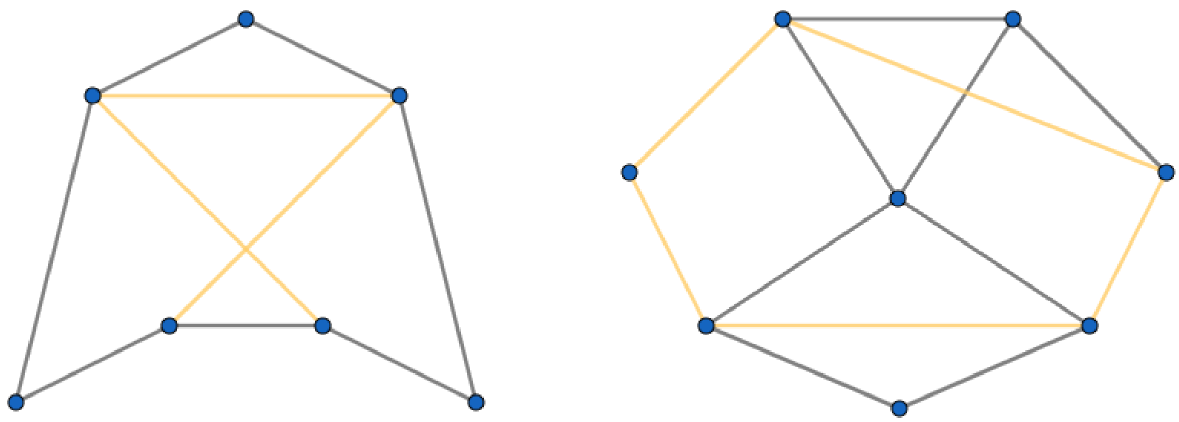
- broj čvorova u grafu,
- broj grana u grafu,
- broj čvorova stepena 1,
- broj grana čiji jedan kraj ima stepen 2, a drugi kraj stepen 3, itd.

## 1.4. Podgrafovi

**Definicija 1.4.1.** Neka su $G = (V, E)$ i $G' = (V', E')$ grafovi. Ako je $V' \subseteq V$ i $E' \subseteq E$, tada kažemo da je $G'$ ***podgraf*** grafa $G$, dok je $G$ ***nadgraf*** grafa $G'$. Dodatno, ako je $V' = V$, tada kažemo da je

$G'$ ***razapinjući podgraf*** grafa $G$. Takođe, kažemo da je $G'$ ***indukovani podgraf*** grafa G ukoliko $G'$ sadrži sve grane iz $G$ čiji su krajevi u $V'$, tj. ako je $E' = E \cap \binom{V'}{2}$.

**Primer 1.4.1.** Na slici 1.4.1. levo je prikazan graf, i pomoći žutih grana njegov podgraf izomorfan sa $P_4$. Na slici 1.4.1. desno je prikazan indukovani podgraf, izomorfan sa $C_5$.



**Slika 1.4.1.** Grafovi i njihovi podgrafovi

Dakle, indukovani podgraf se dobija tako što se iz grafa $G$ obriše nekoliko čvorova i sve grane koje sadrže obrisane čvorove. Ako je obrisan samo jedan čvor $v$, takav indukovani podgraf može da se označi sa $G - v$. Sa druge strane, podgraf se dobija tako što se obrišu i još neke grane. Ako je obrisana samo jedna grana $e$, takav podgraf može da se označi sa $G - e$.

Primetimo da je svaki graf sa $n$ čvorova podgraf kompletnog grafa $K_n$, kao i da je prazan graf $\overline{K}_n$ podgraf svakog grafa sa $n$ čvorova. Koristeći pojam indukovanih podgrafova mogu se definisati još dve invarijante grafova:

- $\omega(G)$ je broj čvorova najvećeg kompletnog grafa koji je indukovani podgraf grafa $G$. Takav kompletan podgraf se naziva i ***klika*** grafa $G$.
- $\alpha(G)$ je broj čvorova najvećeg praznog grafa koji je indukovani podgraf grafa $G$. Takav prazan podgraf se naziva i ***nezavisan skup*** grafa $G$.

Veza između ove dve invarijante daje komplement grafa čija definicija je data u nastavku.

**Definicija 1.4.2.** ***Komplement grafa*** $G = (V, E)$ je graf $\bar{G}$ dat sa $\bar{G} = \left(V, \binom{V}{2} \setminus E\right)$.

Dakle, komplement $\bar{G}$ sadrži sve one grane koje ne sadrži graf $G$, pa se iz definicija klike i nezavisnog skupa dobija:

$$\omega(G) = \alpha(\bar{G}).$$

## 1.5. Šetnje po grafu

**Definicija 1.5.1.** ***Šetnja*** $W$ u grafu $G = (V, E)$ je niz

$$W = (v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \dots, e_t, v_t)$$

gde su $v_0, v_1, v_2, \dots, v_t$ čvorovi grafa $G$, a $e_i$ je grana čiji su krajevi $v_{i-1}$ i $v_i$, za $i = 1,2, \dots, t$. Dužina šetnje $W$ je $t$, s tim što dopuštamo i da je $t = 0$, a ukoliko je $v_0 = v_t$, tada je $W$ ***zatvorena šetnja***.

Ovako definisana šetnja dozvoljava slobodno ponavljanje čvorova i grana. Ona se može predstaviti kao ruta nekog šetača koji ne mari ako kroz neki čvor ili granu prođe više puta. Ukoliko se zabrani ponavljanje grana, ali se dozvoli ponavljanje čvorova, tada se dobija ***staza***, a ukoliko se ne dozvoli bilo kakvo ponavljanje (ni čvorova ni grana) tada se dobija ***put***.

**Lema 1.5.1.** Svaka šetnja $W = (v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \dots, e_t, v_t)$ u grafu $G$ sadrži put između čvorova $v_0$ i $v_t$.

**Dokaz.** Ukoliko u šetnji $W$ nema ponavljanja čvorova, tada je ona sama po sebi put i dokaz je gotov. Zbog toga, pretpostavimo da u njoj postoji ponavljanje čvorova i neka je, na primer, $v_i = v_j$ za neko $i < j$. Tada se od šetnje $W$ može napraviti nova šetnja

$$W' = \left(v_0, e_1, v_1, \dots, e_i, v_i = v_j, e_{j+1}, v_{j+1}, \dots, e_t, v_t\right)$$

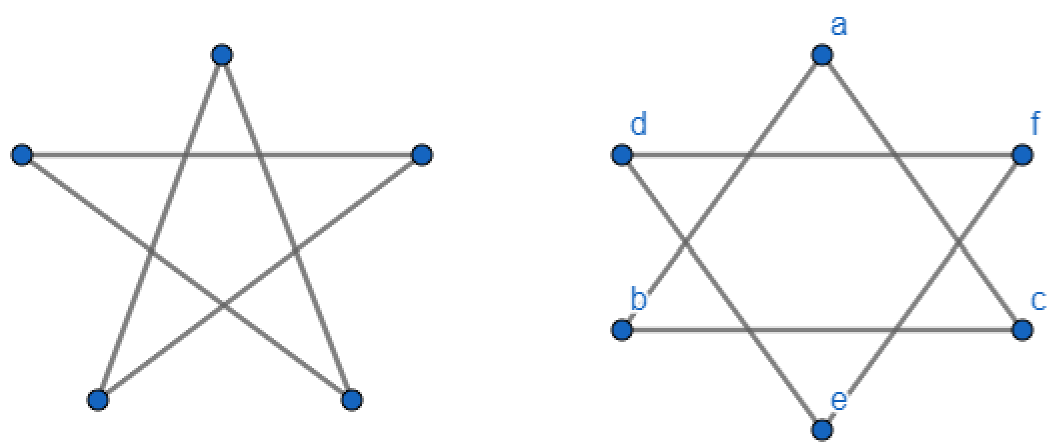
između istih čvorova tako što se obriše deo šetnje između $v_i$ i $v_j$ i u kojoj je broj ponavljanja čvorova smanjen za bar jedan. Ukoliko $W'$ nije put, tada se ovaj postupak može nastaviti dalje, smanjujući broj ponavljanja čvorova u novodobijenim šetnjama, sve dok se ne dođe do šetnje u kojoj nema ponavljanja čvorova, a upravo takva šetnja jeste traženi put.

## 1.6. Povezanost

**Definicija 1.6.1.** Čvorovi $u$ i $v$ grafa $G = (V, E)$ su ***povezani*** ako u $G$ postoji šetnja od $u$ do $v$. Graf $G$ je ***povezan*** ako su svaka dva čvora $u, v \in V$ povezana.

**Zadatak 1.6.1.** Navesti primer povezanog i nepovezanog grafa.

**Rešenje.** Graf sa leve strane slike 1.6.1. je povezan, dok graf sa desne strane slike 1.6.1. nije povezan. U njemu su međusobno povezani čvorovi $a, b$ i $c$, ali ni jedan od njih nije povezan sa čvorovima $d, e$ i $f$.




**Slika 1.6.1.** Primer povezanog i nepovezanog grafa

**Definicija 1.6.2.** ***Komponente povezanosti*** grafa $G = (V, E)$ su njegovi maksimalni povezani podgrafovi.

**Teorema 1.6.1.** Graf $G = (V, E)$ je povezan ako i samo ako za svaku podelu $V = V_1 \cup V_2$, $V_1 \cap V_2 = \emptyset, V_1, V_2 \neq \emptyset$ važi da postoji grana koja spaja čvor iz $V_1$ sa čvorom iz $V_2$.

**Dokaz.** ($\Longleftarrow$) Ako $G$ nije povezan graf, tada on ima bar dve komponente povezanosti $C_1, C_2, \dots, C_t, t \geq 2$, između kojih ne može da postoji nijedna grana. Sada za podelu $V_1 = C_1$, $V_2 = C_2 \cup \dots \cup C_t$, važi da ne postoji nijedna grana koja spaja čvor iz $V_1$ sa čvorom iz $V_2$.

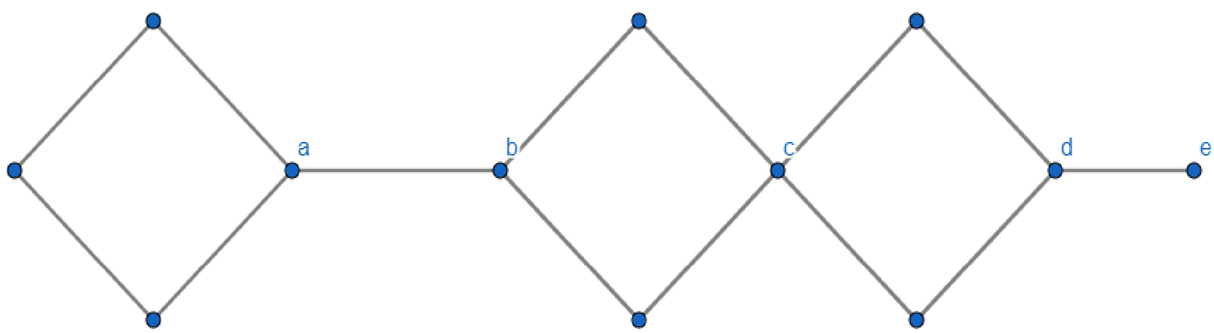
($\Longrightarrow$) Neka je $G$ povezan graf i $V = V_1 \cup V_2$ proizvoljna podela čvorova. Neka je $u \in V_1$ i $v \in V_2$. Iz povezanosti grafa $G$ sledi da između $u$ i $v$ postoji šetnja

$$W = (u = \omega_0, e_1, \omega_1, e_2, \omega_2, \dots, e_{t-1}, \omega_{t-1}, e_t, \omega_t = v).$$

Primetimo da je $\omega_0 \in V_1, \omega_t \in V_2$. Neka je $j$ najmanji indeks za koji je $\omega_j \in V_2$. Tada je $\omega_{j-1} \in V_1$ a grana $e_j$, između $\omega_{j-1}$ i $\omega_j$, predstavlja traženu granu koja spaja čvor iz $V_1$ sa čvorom iz $V_2$.

**Definicija 1.6.3.** Čvor $v$ u grafu $G$ se naziva ***vezivni čvor*** ukoliko graf $G - v$ ima više komponenti povezanosti od $G$. Grana $e$ u grafu $G$ se naziva ***most*** ukoliko graf $G - e$ ima više komponenti povezanosti od $G$.

**Primer 1.6.1.** U grafu $G$ sa slike 1.6.2., čvorovi $a, b, c$ i $d$ su vezivni čvorovi, a grane $\{a, b\}$ i $\{d, e\}$ su mostovi.




**Slika 1.6.2.** Vezivni čvorovi i mostovi u grafu $G$

**Definicija 1.6.4.** Za netrivijalan povezan graf kažemo da je ***nedeljiv***, ako nema vezivnih čvorova. Podgraf $H$ grafa $G$ je ***blok*** u grafu $G$ ako je $H$ nedeljiv i on je maksimalan graf u odnosu na ovo svojstvo. Trivijalan blok se sastoji od samo jednog čvora.

## 1.7. Rastojanje

**Definicija 1.7.1.** Neka je $G = (V, E)$ povezan graf. Rastojanje $d_G(u, v)$ dva čvora $u, v \in V$ je dužina najkraćeg puta između $u$ i $v$ u $G$.

**Definicja 1.7.2.** Neka je $G = (V, E)$ povezan graf. ***Ekscentricitet*** $ecc(u)$ čvora $u \in V$ je najveće rastojanje od čvora $u$ do svih ostalih čvorova, tj.

$$ecc(u) = \max_{v \in V} d_G(u, v).$$

**Definicja 1.7.3.** Neka je $G = (V, E)$ povezan graf. ***Dijametar*** $D(G)$ grafa $G$ je najveći ekscentricitet

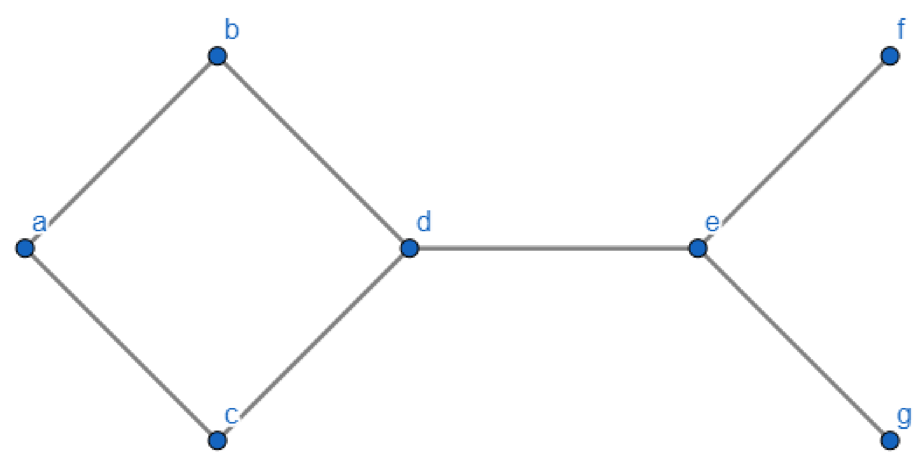
$$D(G) = \max_{u \in V} ecc(u).$$

**Definicja 1.7.4.** Neka je $G = (V, E)$ povezan graf. ***Radijus*** $r(G)$ grafa $G$ je najmanji ekscentricitet

$$r(G) = \min_{u \in V} ecc(u).$$

Čvorove sa najmanjim ekscentricitetom možemo shvatiti kao ***centar*** grafa, dok čvorove sa najvećim ekscentricitetom možemo shvatiti kao ***periferiju*** grafa.

**Zadatak 1.7.1.** Odrediti rastojanja između svih čvorova u grafu $G$ sa sllike 1.7.1., kao i ekscentricitete čvorova.




**Slika 1.7.1.** Graf $G$

**Rešenje.** Rastojanja između čvorova u grafu $G$ kao i ekscentriciteti su data u tabeli ispod.

| | $a$ | $b$ | $c$ | $d$ | $e$ | $f$ | $g$ | $ecc(v)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $a$ | 0 | 1 | 1 | 2 | 3 | 4 | 4 | 4 |
| $b$ | 1 | 0 | 2 | 1 | 2 | 3 | 3 | 3 |
| $c$ | 1 | 2 | 0 | 1 | 2 | 3 | 3 | 3 |
| $d$ | 2 | 1 | 1 | 0 | 1 | 2 | 2 | 2 |
| $e$ | 3 | 2 | 2 | 1 | 0 | 1 | 1 | 3 |
| $f$ | 4 | 3 | 3 | 2 | 1 | 0 | 2 | 4 |
| $g$ | 4 | 3 | 3 | 2 | 1 | 2 | 0 | 4 |

**Tabela 1.7.1.** Rastojanja i ekscentriciteti čvorova grafa $G$

Dijametar datog grafa je 4, dok je radijus 2.

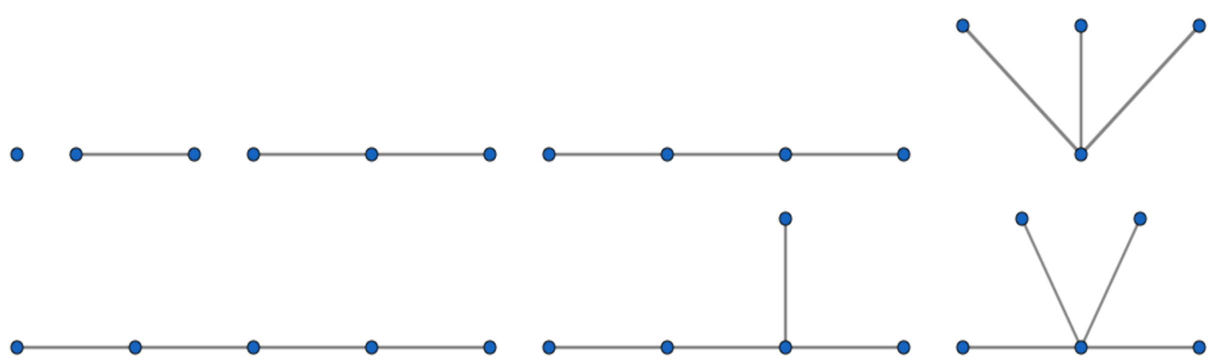
# 2. STABLA

Stablo ili drvo (eng. *tree*) predstavlja jednu od najvažnijih klasa grafova. Stabla imaju višestruku primenu u različitim oblastima, uključujući matematiku i informatiku. Na primer, ono se koristi kao alat za proračun i čuvanje, kao i za sortiranje i pretraživanje podataka. Ovi grafovi se nazivaju stabla, jer kad se nacrtaju liče na stablo. U nastavku sledi pregled njihovih osnovnih karakteristika.

## 2.1. Pojam i osnovna svojstva stabala

**Definicija 2.1.1.** ***Stablo*** je povezan graf bez kontura.

Za graf koji ne sadrži konture kaže se da je ***acikličan***. U nastavku rada dat je primer svih stabala sa najviše pet čvorova.



**Slika 2.1.1.** Sva stabla sa $n \leq 5$ čvorova

Iz grafičkog prikaza uočavamo da postoji samo jedno stablo sa $n = 1$ (tj. trivijalno stablo), $n = 2$ i $n = 3$ čvora. Postoje dva stabla sa $n = 4$ čvora i 3 stabla sa $n = 5$ čvorova.

Iz ovog primera mogu se uočiti određene osobine stabla koje su date u narednoj teoremi.

**Teorema 2.1.1.** Neka je $G$ graf sa $n$ čvorova. Sledeći iskazi su ekvivalentni:

1. $G$ je stablo,
2. $G$ je povezan graf sa $n$ čvorova i $m = n - 1$ grana,
3. $G$ je graf sa $n$ čvorova, $m = n - 1$ grana i bez kontura,
4. $G$ je minimalan povezan graf (udaljavanjem bilo koje grane postaje nepovezan graf),
5. $G$ je maksimalan graf bez kontura (a dodavanjem bilo koje grane formira se kontura),
6. $G$ je graf u kome su svaka dva čvora povezana jedinstvenim elementarnim putem.

**Dokaz.** Dokaz ove teoreme se izvodi na način da svaki iskaz implicira sledeći, a poslednji implicira prvi.

1. $\Longrightarrow$ 2. Dokaz se izvodi indukcijom po $n$. Pretpostavimo da tvrđenje važi za sve grafove sa najviše $n$ čvorova ($n > 2$, jer za $n \leq 2$ nema šta da se dokazuje). Posmatrajmo povezan graf bez kontura sa $n + 1$ čvorova. Uočimo dva čvora u tom grafu na najvećoj udaljenosti. Tada su ti čvorovi stepena 1. U suprotnom, važilo bi da postoji duži put, ili se javlja kontura. Udaljavanjem jednog od tih čvorova stepena 1 dobija se graf koji je povezan i bez kontura. Na osnovu indukcijske hipoteze on ima $n$ čvorova i $m = n - 1$ granu, pa posmatrani graf ima $n + 1$ čvorova i $n$ grana, što je i trebalo dokazati.

2. $\Longrightarrow$ 3. Pretpostavimo da graf poseduje bar jednu konturu, i neka je $K$ jedna od tih kontura. Svaki čvor konture $K$ ima stepen bar dva. Sa druge strane, prosečan stepen čvora grafa $G$ je manji od 2 ($\bar{d} = 2\frac{m}{n} = 2 - \frac{2}{n}$). Ova činjenica implicira da postoji bar jedan čvor u grafu stepena 1 (naravno $n > 1$ jer u suprotnom nema šta da se dokazuje). Udaljimo iz grafa bilo koji čvor stepena 1 i njemu incidentnu granu (udaljeni čvor ne pripada konturi $K$ jer mu je stepen 1). Tada se dobija povezan graf sa $n' = n - 1$ čvorova i $m' = n' - 1$ grana. Ponavljajući isti postupak na dobijeni podgraf, a zatim i na njegove podgrafove, dobićemo posle konačno mnogo koraka graf koji sadrži samo čvorove konture $K$, a za taj graf ne važi da mu je broj grana za 1 manji od broja čvorova, što je kontradikcija. Dakle, posmatrani graf $G$ nema kontura.

3. $\Longrightarrow$ 4. Najpre pretpostavimo da je graf nepovezan i da ima $k > 1$ komponenata. Tada je svaka njegova komponenta stablo (jer nema kontura). Stoga $i-$ta komponenta ima $n_i$ čvorova i $m_i = n_i - 1$ grana ($i = 1,2, \dots, k$). Odatle sledi da je ukupan broj grana grafa $m = n - k$, što je

kontradikcija uzimajući u obzir da je $m = n - 1$. Sada je neophodno pokazati i minimalnost. Pretpostavimo da smo udaljavanjem neke grane dobili povezan graf. Tada između krajnjih čvorova te grane postoji bar jedan put. Ako bismo vratili udaljenu granu, ona bi sa uočenim putem formirala konturu, što je u kontradikciji sa pretpostavkom iz 3.

4. $\Longrightarrow$ 5. Ovaj graf nema kontura jer bismo udaljavanjem bilo koje grane sa konture dobili povezan graf što je u kontradikciji sa 4. Sada je neophodno pokazati i maksimalnost. Pretpostavimo da smo grafu dodali granu i da nismo formirali konturu. Međutim, to je nemoguće, jer je graf bio povezan, tako da je između krajnjih čvorova dodate grane postojao put, a samim tim je dodavanjem grane neminovno došlo do formiranja konture.

5. $\Longrightarrow$ 6. Pretpostavimo da između 2 čvora ne postoji put koji ih povezuje. Tada bi dodavanjem grane između ta 2 čvora dobili graf bez konture, što je u suprotnosti sa 5. Dakle, između svaka 2 čvora postoji bar 1 put. Ako bi između 2 čvora postojala bar 2 puta, tada bi u grafu postojala kontura. Naime, ovi putevi se najpre razdvajaju počevši od nekog čvora (potencijalno polaznog za oba puta), a zatim i stapaju u isti čvor (potencijalno završnog za oba puta). Međutim, postojanje konture je u suprotnosti sa 5.

6. $\Longrightarrow$ 1. Pošto su svaka 2 čvora povezana jedinstvenim putem ovaj graf je povezan. Ako bi u grafu postojala bar jedna kontura, tada bi između bilo koja dva čvora neke konture postojala dva različita puta, što je u suprotnosti sa 6.

**Lema 2.1.1.** Svako stablo sa bar dva čvora sadrži bar dva lista.

**Definicija 2.1.2.** ***Šuma*** je graf čija je svaka komponenta stablo.

S obzirom da je glavni fokus rada na razapinjućim stablima, u nastavku je dat pregled određenih pojmova koja su, u tom kontekstu, važni.

**Definicija 2.1.3.** ***Razapinjuće stablo*** je razapinjući podgraf koji je stablo, a ***razapinjuća šuma*** je maksimalni razapinjući podgraf koji je šuma.

Maksimalan podgraf koji je šuma se misli u smislu broja grana. Drugim rečima, ako bi se dodala bilo koja grana to više ne bi bila šuma, već graf koji sadrži tačno jednu konturu. Stoga, razapinjuća šuma sadrži razapinjuća stabla kao svoje komponente povezanosti.

**Definicija 2.1.4.** Ako je razapinjuće stablo $T = (V, E')$ grafa $G = (V, E)$ tada se graf $G' = (V, E \backslash E')$ naziva ***kostablo***.

**Definicija 2.1.5.** Za nepovezan graf $G = (V, E)$ i njegovu razapinjuću šumu $T = (V, E')$ uvodi se pojam ***košuma*** u oznaci $G' = (V, E \backslash E')$.

**Teorema 2.1.2.** Centar stabla se sastoji ili od jednog čvora ili od dva susedna čvora.

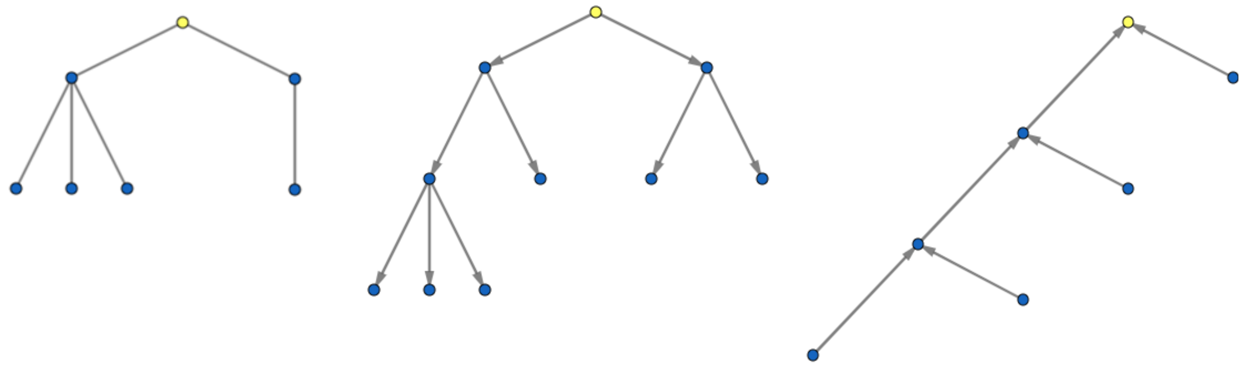
**Dokaz.** Dokaz prethodne teoreme se može izvesti indukcijom po broju čvorova stabla. Za potrebe dokaza uzećemo stabla do 5 čvorova (slika 2.1.1.). Posmatrajmo proizvoljno stablo $T$ sa $n > 5$ čvorova. Neka je $T'$ graf dobijen iz $T$ udaljavanjem svih listova iz $T$. Tada je $T'$ stablo (jer je dobijeni graf povezan i bez kontura). Dalje, ekscentricitet svakog čvora iz $T'$ je umanjen za jedan u odnosu na njegov ekscentricitet u $T$. Prethodna rečenica predstavlja implikaciju činjenice da ako za neki čvor $v$ važi da je najudaljeniji čvor od njega (recimo $\omega$) stepena većeg od jedan, tada bi mogli naći suseda čvorova $\omega$ koji je na većoj udaljenosti od $\omega$, što je u suprotnosti sa izborom čvora $\omega$. Samim tim stabla $T$ i $T'$ imaju iste centre. Na osnovu indukcijske hipoteze, centar stabla $T'$ se sastoji od jednog čvora ili od dva susedna čvora, a stoga i stablo $T$.

**Posledica 2.1.1.** Centar stabla $T$ se sastoji od jednog čvora ako i samo ako je $D(T) = 2r(T)$, u suprotnom je $D(T) = 2r(T) - 1$.

## 2.2. Korenska stabla

**Definicija 2.2.1.** Stablo u kome je jedan čvor posebno izdvojen naziva se ***korensko stablo***, a taj čvor se naziva ***koren*** stabla.

**Primer 2.2.1.** Neki od korenskih stabala (koren je predstavljen žutim kružićem) dati su na slici 2.2.1. Prvi primer je korensko stablo neorijentisanog grafa (slika 2.2.1.a)), a drugi i treći primer su korenska stabla orijentisanog grafa (slika 2.2.1.b), c)).



a) b) c)

**Slika 2.2.1.** Primeri korenskih stabala

**Definicija 2.2.2.** Ako je $T$ korensko stablo orijentisanog grafa, a $v$ čvor različit od korena, ***roditelj čvora*** $v$ je čvor $u$ takav da je $uv$ orijentisana grana od $u$ ka $v$. Tada je $v$ dete čvora $u$ (čvorovi sa istim roditeljem $u$ su deca čvora $u$).

**Definicija 2.2.3.** ***Preci*** čvora $u$, koji nije koren, su svi čvorovi koji leže na putu od korena do čvora $u$, a ***potomci*** čvora $u$ su svi čvorovi koji imaju čvor $u$ kao pretka.

**Defincija 2.2.4.** ***List*** je čvor bez dece (nazivaju se još i terminalni ili završni čvorovi), dok su ostali čvorovi ***unutrašnji čvorovi*** (ili interni čvorovi).

**Definicija 2.2.5.** ***Visina h*** korenskog stabla je dužina najdužeg mogućeg puta od korena do lista.

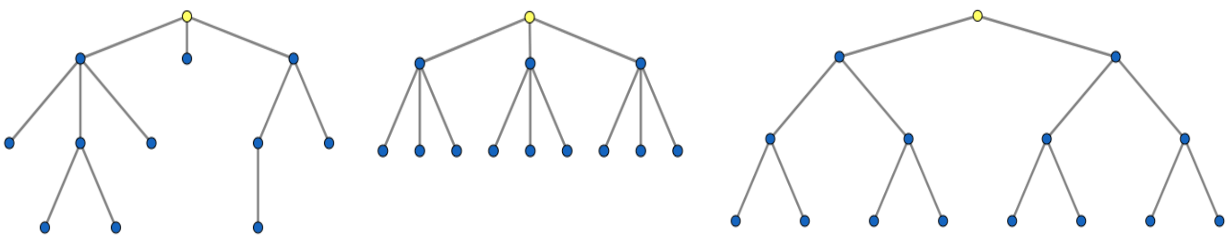
**Definicija 2.2.6.** Korensko stablo se naziva ***m −arno*** stablo ako svaki interni čvor ima najviše $m$ dece. ***Potpuno*** $m$ −arno stablo je stablo u kome svaki interni čvor ima tačno $m$ dece.

**Definicija 2.2.7.** Za korensko stablo se kaže da je ***binarno*** ako svaki čvor stabla (roditelj) ima najviše dva susedna čvora na sledećem nivou (deteta).

**Teorema 2.2.1.** Neka je $T$ binarno stablo sa $n$ čvorova i visine $h$. Tada je:

$$n \leq 2^{h+1} - 1 \; ili \; h \geq \log_2(n+1) - 1.$$

**Primer 2.2.2.** Primeri $m-$arnih stabala dati su na slici 2.2.2.. Prvo stablo je ternarno (slika 2.2.2.a)), drugo je potpuno ternarno (slika 2.2.2.b)), dok je treće stablo potpuno binarno (slika 2.2.2.c))



a) b) c)

**Slika 2.2.2.** Tri $m-$arna korenska stabla

# 3. RAZAPINJUĆA STABLA

Glavne teoreme u ovom poglavlju odnose se na Kejlijevu teoremu  i Kirhofovu teoremu za matrice i stabla. Nemački fizičar Kirhof je svoju teoremu pokazao 1947. godine i ona mu je poslužila za izračunavanje jačina električnih struja u granama nekog električnog kola. Drugi naučnik, Kejli, jeste engleski matematičar koji je 1857. godine uveo u matematiku pojam stabla. Sa druge strane, dve godine kasnije, otkrivene su strukture formule hemijskih jedinjenja. Kejli je napisao vezu između ova dva pojma, tj. povezao je stabla i strukturne formule alkana. Dodatno, u svom radu „O matematičkoj teoriji izomera" iz 1874. godine postavio je temelj naučne discipline hemijske teorije grafova.

## 3.1. Definicije i osobine razapinjućih stabala

**Definicja 3.1.1.** ***Matrica susedstva (ili povezanosti)*** grafa $G$ je matrica $A = A(G)$ dimenzije $p \times p$, čiji je $(i, j)$ element, tj. $a_{ij}$, jednak broju grana koje su vezane za čvorove $v_i$ i $v_j$.

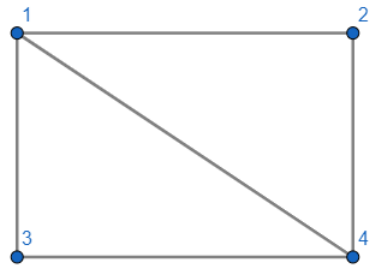
**Definicija 3.1.2.** Za kvadratnu matricu $A = \left(a_{ij}\right) \in F^{n\times n}$ polinom

$$P_n(\lambda) = \begin{vmatrix} (a_{11} - \lambda) & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & (a_{22} - \lambda) & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & (a_{nn} - \lambda) \end{vmatrix}$$

se naziva ***karakteristični polinom*** matrice $A$. Koreni karakterističnog polinoma se nazivaju ***karakteristični koreni*** (sopstvene vrednosti) matrice $A$.

Matrica susedstva $A = A(G)$ grafa G je na osnovu Definicije 3.1.1. realna simetrična matrica, a uzimajući u obzir Definiciju 3.1.2. ona ima karakteristične korene.

**Primer 3.1.1.** Za graf $G$ dat na slici 3.1.1. odrediti matricu susedstva.




**Slika 3.1.1.** Graf $G$

**Rešenje.**

$$A(G) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

**Definicija 3.1.3.** ***Kompleksnost*** grafa $G$ je broj razapinjućih stabala grafa. Kompleksnost grafa $G$ ćemo označavati sa $t(G)$ (sa $t_n = t(K_n)$ ćemo označiti broj razapinjućih stabala u potpunom grafu $K_n$).

**Lema 3.1.1.** Graf je povezan ako i samo ako ima razapinjuće stablo.

**Dokaz.** ($\Longrightarrow$) Neka je $G$ povezan graf, a $T$ minimalni povezani razapinjući podgraf od $G$. Tada je $T$ povezan, a $T - e$ je nepovezan za svaku granu $e \in E(T)$, pa sledi da je $T$ stablo, a samim tim i razapinjuće stablo.

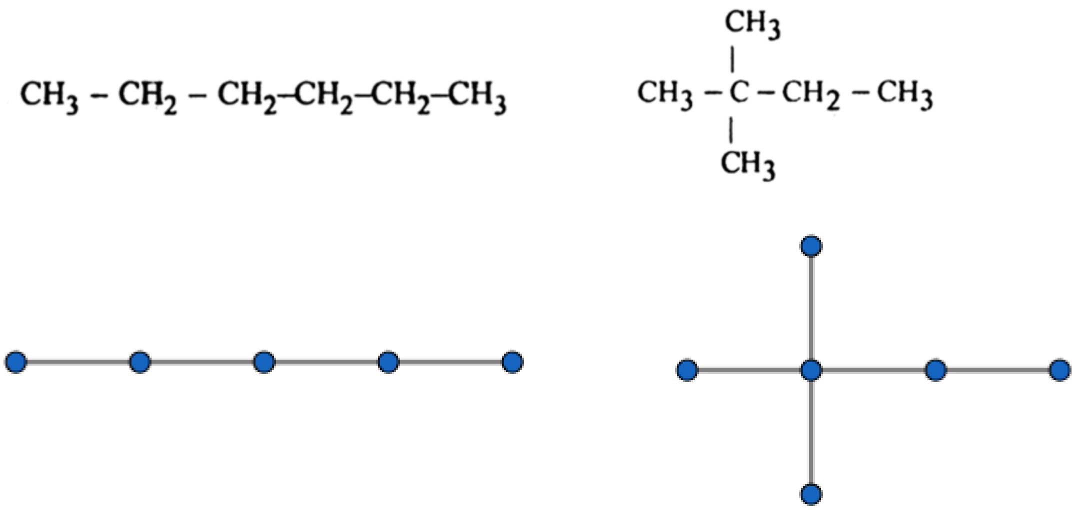
($\Longleftarrow$) Ako graf $G$ ima razapinjuće stablo $T$, tada postoji put između bilo koja dva čvora u $T$, pa samim tim postoji i put između bilo koja dva čvora u $G$, te je $G$ povezan.

**Lema 3.1.2.** Svaki graf ima razapinjuću šumu.

**Dokaz.** Ako je $G$ nepovezan, tada u svakoj njegovoj komponenti povezanosti možemo naći razapinjuće stablo. Unija svih tih razapinjućih stabala daje traženu razapinjuću šumu.

## 3.2. Određivanje broja razapinjućih stabala

Kao što smo već rekli, Kejli je pronašao vezu između stabla i strukturne formule alkana. Na slici ispod, prikazana su dva alkana koji imaju formulu $C_6H_{14}$ (izomeri) i odgovarajuća stabla (čvorovi su ugljenikovi atomi, a grane veze između njih).




**Slika 3.2.1.** Strukturne formule dva alkana i odgovarajuća stabla

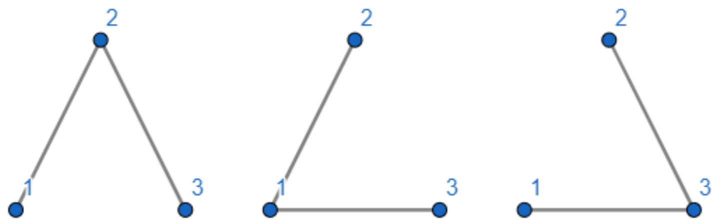
Kejli je pokušao da pronađe broj izomera $I_n$ alkana $C_nH_{2n+2}$, ali nije uspeo u tome (danas se time bave napredne enumerativne tehnike). Međutim, za broj razapinjućih stabala na fiksiranom skupu čvorova postoji jednostavna formula. Pre nego što se detaljnije razradi tema određivanja broja razapinjućih stabala, dat je zadatak radi ilustracije određivanja pomenutog broja.

**Zadatak 3.2.1.** Odrediti sva razapinjuća stabla kompletnog grafa sa 1, 2, 3 i 4 čvora.

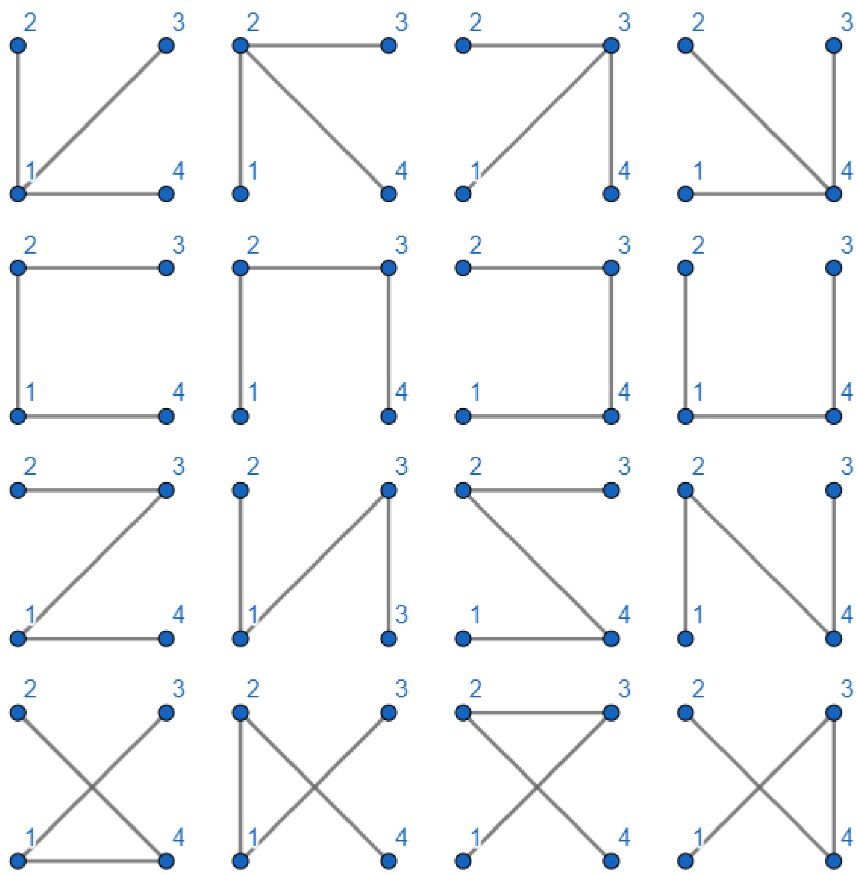
**Rešenje.** Formiranje razapinjućih stabala kompletnog grafa sa jednim i dva čvora je trivijalno. Sa druge strane, postoje tri moguća razapinjuća stabla koja se mogu generisati u zavisnosti od toga koju granu odabiramo da uklonimo iz kompletnog grafa sa tri čvora (pogledati sliku 3.2.4.).


**Slika 3.2.2.** Sva razapinjuća stabla kompletnog grafa sa 1 čvorom


**Slika 3.2.3.** Sva razapinjuća stabla kompletnog grafa sa 2 čvora




**Slika 3.2.4.** Sva razapinjuća stabla kompletnog grafa sa 3 čvora




**Slika 3.2.5.** Sva razapinjuća stabla kompletnog grafa sa 4 čvora

Ono što se može uočiti jeste sledeće:

- za $n = 1$ ima $1^{-1} = 1$ razapinjuće stablo,
- za $n = 2$ ima $2^0 = 1$ razapinjuće stablo,
- za $n = 3$ ima $3^1 = 3$ razapinjuća stabla i
- za $n = 4$ ima $4^2 = 16$ razapinjućih stabala.

Intuitivno možemo zaključiti (a u narednom delu rada i dokazati) da je broj razapinjućih stabala jednak $n^{n-2}$. U nastavku rada pretpostavićemo da su čvorovi razapinjućeg stabla sa $n$ čvorova označeni brojevima $1,2,\dots,n$. Sledi pregled dva veoma važna tvrđenja koja su vezana za razapinjuća stabla. Prvo tvrđenje je Teorema o matricama i stablima, a drugo Kejlijeva teorema.

### 3.2.1. Teorema o matricama i stablima

Teorema o matricama i stablima (eng. *Matrix-Tree Theorem*) daje vezu broja razapinjućih stabala $t(G)$ i kofaktora Laplasove matrice $L$.

Naš cilj je da dobijemo formulu za $t(G)$. Za to nam je neophodan važan rezultat postignut u teoriji matrica, poznat kao Bine–Koši teorema. Kasnije će se dokazati uopštenija formula bez korišćenja Bine– Košijeve teoreme. Međutim, korišćenje Bine-Košijeve teoreme pruža dodatni algebarski uvid. Bine-Košijeva teorema predstavlja uopštenje poznate činjenice da ako su $A$ i $B$ matrice dimenzija $n \times n$, tada $det(AB) = det(A)det(B)$, gde $det$ označava determinantu. Želimo da proširimo ovu formulu na slučajeve gde su $A$ i $B$ „pravougaone“ matrice (broj vrsta i kolona se razlikuju) čiji je proizvod kvadratna matrica (tako da je $det(AB)$ definisana). Drugim rečima, $A$ će biti matrica dimenzije $m \times n$, a $B$ će biti matrica dimenzije $n \times m$, za neko $m, n \geq 1$.

Koristićemo sledeću notaciju koja uključuje podmatrice. Pretpostavimo da je $A = \left(a_{ij}\right)$ matrica dimenzije $m \times n$, gde je $1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n, m \leq n$. Neka je $S$ podskup od $m$ elemenata skupa $\{1,2,\dots,n\}$, neka $A[S]$ označava podmatricu matrice $A$ sa dimenzijom $m \times m$, dobijena uzimajući kolone koje su indeksirane sa elementima skupa $S$. Drugim rečima, ako su elementi skupa $S$ dati sa $j_1 < j_2 < \cdots < j_m$, tada je $A[S] = (a_{i,j_k})$, gde je $1 \leq i \leq m$ i

$1 \le k \le m$. Slično, neka je $B = (b_{ij})$ matrica dimenzije $n \times m$, gde je $1 \le i \le n$, $1 \le j \le m, m \le n$. Neka je $S$ podskup od $m$ elemenata skupa $\{1,2,\dots,n\}$. Tada $B[S]$ označava matricu dimenzije $m \times m$ (podmatricu matrice $B$) koja je dobijena uzimajući vrste matrice $B$, koji su indeksirani sa elementima skupa $S$.

Na primer ako je:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \end{bmatrix}$$

i $S = \{2,3,5\}$, tada je:

$$A[S] = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 7 & 8 & 10 \\ 12 & 13 & 15 \end{bmatrix}.$$

**Teorema 3.2.1.1. (*Bine–Košijeva teorema*).** Neka je $A = (a_{ij})$ matrica dimenzije $m \times n$, gde $1 \le i \le m$ i $1 \le j \le n$. Neka je $B = (b_{ij})$ matrica dimenzije $n \times m$, gde $1 \le i \le n$ i $1 \le j \le m$ (matrica $AB$ ima dimenzije $m \times m$). Ako je $m > n$, tada $det(AB) = 0$. Ako je $m \le n$, tada:

$$det(AB) = \sum_S \big(det(A[S])\big)\big(det(B[S])\big),$$

gde se $S$ kreće preko svih m-točlanih podskupova skupa $\{1,2,\dots,n\}$.

Ilustraciju Bine-Košijeve teoreme daćemo kroz primer. Sa $|a_{ij}|$ označićemo determinantu matrice $(a_{ij})$. Neka je:

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} c_1 & d_1 \\ c_2 & d_2 \\ c_3 & d_3 \end{bmatrix}.$$

Tada:

$$det(AB) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} c_1 & d_1 \\ c_2 & d_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} c_1 & d_1 \\ c_3 & d_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} c_2 & d_2 \\ c_3 & d_3 \end{vmatrix}.$$

**Dokaz (Bine-Košijeve teoreme).** Najpre pretpostavimo da je $m > n$. S obzirom da iz linearne algebre znamo da je $rang(AB) \leq rang(A)$ i da rang matrice dimenzije $m \times n$ ne može premašiti $min\ (n, m)$, imamo da je $rang(AB) \leq n < m$. Međutim, $AB$ je matrica dimenzije $m \times m$, pa je $det(AB) = 0$, kao što se i tvrdi.

Sada pretpostavimo da je $m \leq n$. Koristićemo zapis $M_{rs}$ kako bismo označili matricu $M$ dimenzije $r \times s$. Neposredna posledica definicije množenja matrica je da:

$$\begin{bmatrix} R_{mm} & S_{mn} \\ T_{nm} & U_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{mn} & W_{mm} \\ X_{nn} & Y_{nm} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} RV + SX & RW + SY \\ TV + UX & TW + UY \end{bmatrix}.$$

Drugim rečima, možemo množiti blok matrice odgovarajućih dimenzija kao da su njihovi elementi brojevi. Primetimo da svi elementi sa desne strane imaju dobro definisane dimenzije, npr. $RV + SX$ je matrica dimenzije $m \times n$, s obzirom da su obe matrice, i $RV$ i $SX$, dimenzije $m \times n$.

Neka je u prethodnoj matričnoj jednačini $R = I_m$ (jedinična matrica dimenzije $m \times m$), $S = A, T = O_{nm}$ (nula matrica dimenzije $n \times m$), $U = I_n, V = A, W = O_{mm}, X = -I_n$ i $Y = B$. Dobijamo:

$$\begin{bmatrix} I_m & A \\ O_{nm} & I_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & O_{mm} \\ -I_n & B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} O_{mn} & AB \\ -I_n & B \end{bmatrix}.$$

Uzmimo sada determinantu obe strane jednačine. Prva matrica sa leve strane jednakosti je gornjetrougaona sa jedinicama na glavnoj dijagonali. Iz date činjenice sledi da je determinanta ove matrice 1. S obzirom da je determinanta proizvoda kvadratnih matrica proizvod determinanti faktora, dobijamo:

$$\begin{vmatrix} A & O_{mm} \\ -I_n & B \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} O_{mn} & AB \\ -I_n & B \end{vmatrix}.$$

Uočimo da je determinanta sa desne strane jednakosti jednaka $\pm det(AB)$ (lako se pokazuje primenom Laplasovog razvoja, a znak determinante zavisi od parnosti m i n). Posmatrajmo sada levu stranu jednakosti. Primetićemo da su dimenzije determinante sa leve strane $(m + n) \times (m + n)$.

Da bi dokazali tvrđenje, moramo odabrati $m + n$ nenula elemenata (po jedan u svakom redu i koloni) na sledeći način. Biramo $m$ elemenata iz poslednjih $m$ kolona. Ovi elemeni pripadaju $m$

od poslednjih $n$ vrsta. Neka to budu vrste $m+s_1, m+s_2, \dots, m+s_m$. Neka je $S=\{s_1, s_2, \dots, s_m\} \subseteq \{1,2,\dots,n\}$. Moramo odabrati $n-m$ sledećih elemenata od poslednjih $n$ vrsta, pri čemu nemamo izbora osim da se odaberu $-1$ u ovih $m+i$ vrsta za koje $i \notin S$. Zbog toga svaki član u razvoju determinante sa leve strane koristi $-1$ tačno $n-m$ puta u donjem levom bloku $-I_n$.

Ovim transformacijama (brisanjem svih vrsta i kolona kojima pomenute $-1$ pripadaju tj. brisanje vrste $m+i$ i kolone $i$ za svako $i \in \{1,2,\dots n\} - S$ i uzimajući determinantu koja ostaje množeći odgovarajučim znakom) dobijamo matricu $M_S$ koja je blok dijagonalne forme i dimenzije $2m \times 2m$, gde je prvi blok samo matrica $A[S]$, a drugi blok matrica $B[S]$.

$$M_s = \begin{bmatrix} A[S]_{mm} & O_{mm} \\ -I_m & B[S]_{mm} \end{bmatrix}$$

Stoga, uzimajući u obzir Teoremu o determinanti blok dijagonalne matrice ( Neka je M trougaona (gornje ili donje) blok matrica sa dijagonalnim blokovima $A_1, A_2, \dots, A_n$. Tada je $\det(M) = \det(A_1)\det(A_2)\dots\det(A_n)$.) važi da je $det(M_S) = det(A[S])det(B[S])$.

S obzirom da $S$ prolazi podskupovima $n$ −točlanog skupa indeksa dobijamo:

$$\pm det(AB) = \sum_{\substack{S \subseteq \{1,2,\dots,n\} \\ |S|=m}} \pm det(A[S])det(B[S]).$$

Jednostavnim putem se pokazuje da su svi znaci $+$ i time je tvrđenje dokazano.

#### 3.2.1.1. Teorema i njena upotreba u prebrojavanju razapinjućih stabala

**Definicija 3.2.1.1.** Neka je $G$ graf sa skupom čvorova $V = \{v_1, v_2, \dots, v_p\}$ i skupom grana $E = \{e_1, e_2, \dots, e_q\}$. Davanje grafu $G$ orjentacije $\sigma$ podrazumeva da se za svaku granu $e$ sa čvorovima $u, v$, izabere jedan od parova $(u, v)$ ili $(v, u)$. Ako odaberemo recimo $(u, v)$, to podrazumeva stavljanje strele na $e$ pokazujući smer iz $u$ u $v$, i tada kažemo da je grana $e$ usmerena od $u$ ka $v$, da je $u$ inicijalni čvor i da je $v$ finalni čvor grane $e$.

**Definicija 3.2.1.2.** ***Matrica incidencije*** $M(G)$ grafa $G$ (uzimajući u obzir orjentaciju $\sigma$) je matrica dimenzije $p \times q$ čiji je $(i, j) -$ član tj. $M_{ij}$ dat sa:

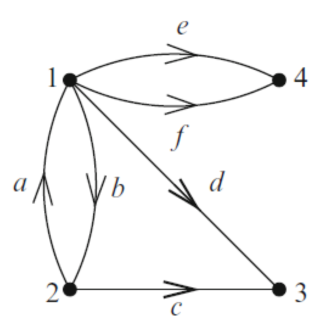
$$M_{ij} = \begin{cases} -1, & ako\ grana\ e_j\ sadrži\ inicijalni\ čvor\ v_i, \\ 1, & ako\ grana\ e_j\ sadrži\ finalni\ čvor\ v_i, \\ 0, & ostalo. \end{cases}$$

**Definicija 3.2.1.3.** ***Laplasova matrica*** $L(G)$ grafa $G$ je matrica dimenzije $p \times p$ čiji je $(i, j) -$ član tj. $L_{ij}$ dat sa:

$$L_{ij} = \begin{cases} -m_{ij}, \text{ako } i \neq j \text{ i između čvorova } v_i \text{ i } v_j \text{ postoji } m_{ij} \text{ grana (bez obzira na orijentaciju)} \\ deg(v_i), ako\ i = j, \end{cases}$$

gde je $deg(v_i)$ broj grana incidentnih sa $v_i$. Dodatno, $L(G)$ je simetrična matrica i ne zavisi od orjentacije $\sigma$ tj. na osnovu Definicije 3.2.1.3. elementi matrice predstavljaju broj grana (elementi van glavne dijagonale) i stepene čvora (elementi na glavnoj dijagonali) .

**Zadatak 3.2.1.1.** Na grafu koji je dat na slici ispod, odredi matricu incidencije i Laplasovu matricu.




**Slika 3.2.1.1.** Graf $G$

**Rešenje.** Matrica incidencije i Laplasova matrica za dati graf $G$ imaju sledeći oblik:

$$M(G) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$L(G) = \begin{bmatrix} 5 & -2 & -1 & -2 \\ -2 & 3 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Za bilo koji graf $G$, svaka kolona matrice $M(G)$ sadrži jednu 1, jednu -1, i $q-2$ nula, pa je zbog toga zbir svih članova po svakoj koloni jednak nuli. Dakle, sve vrste se zbrajaju u nula vektor, tj. postoji odnos linearne zavisnosti koji pokazuje da je $rang\big(M(G)\big) < p$. Osobine matrica $M(G)$ i $L(G)$ date su u naredne dve leme.

**Lema 3.2.1.1.** Važi:

a) $MM^t = L$.
b) Ako je graf $G$ regularan stepena $d$, tada $L(G) = dI - A(G)$, gde $A(G)$ označava matricu susedstva grafa $G$. Otuda, ako $G$ (ili $A(G)$) ima karakteristične korene $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ tada $L(G)$ ima karakteristične korene $d-\lambda_1, \dots, d-\lambda_p$.

**Dokaz.**

a) Tvrđenje neposredno sledi iz definicije množenja matrica. Konkretno, za $v_i, v_j \in V(G)$ imamo:

$$(MM^t)_{ij} = \sum_{e_k \in E(G)} M_{ik} M_{jk}.$$

Ako je $i \neq j$, onda bi za $M_{ik}M_{jk} \neq 0$, moralo da važi da grana $e_k$ povezuje čvorove $v_i$ i $v_j$. Ako je to slučaj, tada će jedan od $M_{ik}$ i $M_{jk}$ biti 1, a drugi -1, pa je njihov proizvod uvek -1. Stoga, $(MM^t)_{ij} = -m_{ij}$, kao što se i tvrdi.

Ostaje slučaj kada je $i = j$. Tada će $M_{ik}M_{jk}$ biti 1 ako je $e_k$ grana sa $v_i$ kao jednim njegovim čvorom, ili će u suprotnom biti 0. Sada imamo da je $(MM^t)_{ii} = deg(v_i)$ što je i trebalo pokazati.

b) Očigledno, uzimajući u obzir tvrđenje pod a), tj. tim tvrđenjem znamo da su svi dijagonalni elementi matrice $MM^t$ jednaki $d$.

Sada pretpostavimo da je graf $G$ povezan, i označimo sa $M_0(G)$ matricu $M(G)$ bez njenog poslednjeg reda. Dakle, $M_0(G)$ ima $p-1$ vrsta i $q$ kolona. Napomenimo da je broj vrsta jednak broju grana u razapinjućem stablu grafa $G$ (Teorema 2.1.1.). Matricu $M_0(G)$ nazivamo ***redukovana incidentna matrica*** grafa $G$. Sledeći rezultat (lema) nam daje determinante svih $(p-1) \times (p-1)$ podmatrica $N$ matrice $M_0$. Takve podmatrice su dobijene odabirom skupa $X = \left\{e_{i_1}, \dots, e_{i_{p-1}}\right\}$, od $p-1$ grana grafa $G$, i uzimanjem svih kolona matrice $M_0$ indeksiranih skupom $S = \{i_1, i_2, \dots, i_{p-1}\}$. Dakle, ova podmatrica je $M_0[S]$.

**Lema 3.2.1.2.** Neka je $S$ skup $p-1$ grana grafa $G$. Ako $S$ ne formira skup grana razapinjućeg stabla, tada važi da je $det(M_0[S]) = 0$. Sa druge strane, ako je $S$ skup grana razapinjućeg stabla grafa $G$, tada važi da je $det(M_0[S]) = \pm 1$.

**Dokaz.** Ako $S$ nije skup grana razapinjućeg stabla, tada je neki podskup $R$ (skupa $S$) skup grana konture $C$ u grafu $G$. Pretpostavimo da kontura $C$ definisana sa $R$ ima grane $f_1, f_2, \dots, f_s$ redom. Pomnožimo kolonu matrice $M_0[S]$ (indeksiranu sa $f_j$) sa 1, ako u obilasku $C$ pređemo $f_i$ u pravcu njegove strelice, u suprotnom pomnožimo kolonu sa -1. Zatim saberemo ove modifikovane kolone. Na ovaj način se dobija 0 kolona, što implicira da je $det(M_0[S]) = 0$.

Sada pretpostavimo da je $S$ skup grana razapinjućeg stabla $T$. Neka je $e$ grana stabla $T$ koja je povezana sa $v_p$ (čvor koji indeksira poslednju vrstu matrice $M$, tj. red koji je sklonjen kako bi se dobila matrica $M_0$). Kolona $M_0[S]$ indeksirana sa $e$ sadrži tačno jedan nenula član, što je $\pm 1$. Uklanjanjem vrste i kolone iz (matrice $M_0[S]$) koji sadrže nenula član kolone $e$, dobija se matrica $M_0'$ dimenzije $(p-2) \times (p-2)$. Napomenimo da je $det(M_0[S]) = \pm det(M_0')$. Neka je $T'$ stablo dobijeno iz $T$ kontrahovanjem grane $e$ u jedan čvor (tako da su $v_p$ i preostali čvor grane $e$ spojeni u jedan čvor $u$). Tada je $M_0'$ matrica dobijena iz incidentne matrice $M(T')$ uklanjanjem vrste indeksiranog sa $u$. Stoga, indukcijom po broju čvorova $p$ (slučaj $p = 1$ je trivijalan) dobijamo da je $detM_0' = \pm 1$.Prema tome, $det(M_0[S]) = \pm 1$ što je i trebalo dokazati.

Sada su pokazane sve relevantne teoreme za dokaz glavnog rezultata. Podsetimo se, $t(G)$ označava broj razapinjućih stabala grafa $G$.

**Teorema 3.2.1.2.** ***(Teorema o matricama i stablima).*** Neka je $G$ konačan povezan graf bez petlji, sa Laplasovom matricom $L = L(G)$. Sa $L_0$ označimo Laplasovu matricu $L$ bez poslednje vrste i bez poslednje kolone (ili opštije bez $i$ −te vrste i $i$ −te kolone, za bilo koje $i$). Tada:

$$det(L_0) = t(G).$$

Drugim rečima, broj razapinjućih stabala $t(G)$ grafa $G$ jednak je bilo kom kofaktoru matrice $L$.

**Dokaz.** S obzirom da prema lemi 3.2.1.1. važi $L = MM^t$, odmah sledi da je $L_0 = M_0 M_0^t$. Otuda prema Bine-Košijevoj teoremi imamo da je:

$$det(L_0) = \sum_S \big(det(M_0[S])\big)\big(det(M_0^t[S])\big),$$

gde je $S$ raspon svih podskupova od $\{1,2,\dots,q\}$ sa $(p-1)$ elemenata (što je ekvivalentno sa: svi podskupovi skupa grana grafa $G$ sa $(p-1)$ elemenata). S obzirom da važi $A^t[S] = A[S]^t$, prethodna jednačina ima sledeći oblik:

$$det(L_0) = \sum_S \big(det(M_0[S])\big)^2.$$

Prema lemi 3.2.1.2., $det(M_0[S]) = \pm 1$ ako $S$ formira skup grana razapinjućeg stabla grafa $G$, u suprotnom važi $det(M_0[S]) = 0$. Zbog toga, svaki izraz indeksiran sa $S$ u sumi na desnoj strani je 1 ako $S$ formira skup grana razapinjućeg stabla grafa $G$, u suprotnom je jednak 0. Dakle, zbir je jednak $t(G)$ što je i trebalo dokazati.

**Zadatak 3.2.1.2.** Naći broj razapinjućih stabala u potpunom bipartitnom grafu $K_{2,n}$.

**Rešenje.** Neka su prvih $n$ čvorova stepena 2 i poslednja dva čvora stepena $n$. Tada imamo da su matrica susedstva i Laplasova matrica ovog grafa jednake:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad L = \begin{bmatrix} 2 & 0 & \cdots & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & \cdots & 0 & -1 & -1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 2 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & \cdots & -1 & n & 0 \\ -1 & -1 & \cdots & -1 & 0 & n \end{bmatrix}.$$

U Teoremi o matricama i stablima odredićemo kofaktor $L_{n+2,n+2}$ (neka u $L$ poslednje dve vrste i poslednje dve kolone odgovaraju čvorovima $a$ i $b$). Tada je:

$$t(K_{2,n}) = L_{n+2,n+2} = (-1)^{n+2+n+2} \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & \cdots & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & \cdots & -1 & n \end{vmatrix},$$

gde je determinanta reda $(n+1)$, tj. $t(K_{2,n}) = D_{n+1}$. Ako determinantu ovog oblika (sa $n$ na poslednjem mestu), dimenzija $m \times m$ razvijemo po prvoj koloni, a zatim po prvoj vrsti dobijamo rekurentnu jednačinu:

$$D_m = 2D_{m-1} - 2^{m-2},$$

uz početni uslov $D_2 = 2n - 1$. Njeno rešenje je $D_m = 2^{m-2}(2n + 1 - m)$. Kada ovde uvrstimo $m = n + 1$ dobijamo da je broj razapinjućih stabala jednak:

$$t(K_{2,n}) = D_{n+1} = 2^{n-1} \cdot n.$$

**Teorema 3.2.1.3.**

a) Neka je $G$ povezan graf sa $p$ čvorova. Pretpostavimo da su karakteristični koreni matrice $L(G)$ upravo $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{p-1}, \mu_p$, gde je $\mu_p = 0$. Tada važi:

$$t(G) = \frac{1}{p} \mu_1 \mu_2 \cdots \mu_{p-1}.$$

b) Pretpostavimo da je $G$ takođe regularan stepena $d$ i da su karakteristični koreni matrice $A(G)$ upravo $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{p-1}, \lambda_p$, gde je $\lambda_p = d$. Tada važi:

$$t(G) = \frac{1}{p}(d - \lambda_1)(d - \lambda_2) \cdots (d - \lambda_{p-1}).$$

Pre nego što se uputstimo u dokaz ove teoreme, neophodno je da navedemo pomoćnu lemu koju ćemo koristiti u ovom dokazu.

**Lema 3.2.1.3.** Neka je matrica $M$ dimenzije $p \times p$ takva da je suma elemenata u svakom redu i koloni jednaka 0. Neka je $M_0$ matrica dobijena uklanjanjem poslednje vrste i poslednje kolone iz matrice $M$ (ili opštije, uklanjanjem bilo koje vrste i bilo koje kolone). Tada je koeficijent uz $x$ u karakterističnom polinomu $det(M - xI)$ matrice $M$ jednak $-p \cdot det(M_0)$.

Fokus je na dokazu Teoreme 3.2.1.3.. Dokaz leme 3.2.1.3. se može naći u [5].

**Dokaz.**

a) Važi:

$$det(L - xI) = (\mu_1 - x) \cdots (\mu_{p-1} - x)(\mu_p - x) = -(\mu_1 - x)(\mu_2 - x) \cdots (\mu_{p-1} - x)x.$$

Dakle, koeficijent uz $x$ je $-\mu_1\mu_2 \dots \mu_{p-1}$. Prema pomoćnoj lemi 3.2.1.3. znamo da važi da je $-\mu_1\mu_2 \cdots \mu_{p-1} = -p \cdot det(L_0)$. Prema teoremi o matricama i stablima znamo da je $det(L_0) = t(G)$, čime je teorema dokazana.

b) Sledi direktno iz tvrđenja pod a) i leme 3.2.1.1.

**Primer 3.2.1.1.** Neka je $G = K_p$, kompletan graf sa $p$ čvorova. $K_p$ je regularan stepena $d = p - 1$, i karakteristični koreni matrice $A(K_p)$ su -1 ($p - 1$ puta) i $p - 1 = d$. Stoga, iz teoreme 3.2.1.3. sledi:

$$t(K_p) = \frac{1}{p}\left((p-1) - (-1)\right)^{p-1} = p^{p-2}.$$

Primer 3.2.1.1. jeste u suštini Kejlijeva teorema koja je data u narednom poglavlju rada.

### 3.2.2. Kejlijeva teorema

**Teorema 3.2.1.1.** ***Kejlijeva teorema.*** Broj razapinjućih stabala kompletnog grafa $K_n$, za $n \in \mathbb{N}$, jednak je $n^{n-2}$.

Postoje brojni dokazi ove teoreme, međutim, u radu ćemo prikazati onaj u kome se koristi Teorema o matricama i stablima.

**Dokaz.** Na osnovu Teoreme o matricama i stablima imamo da je broj razapinjućih stabala jednak sledećoj determinanti reda $n-1$:

$$t_n = \begin{vmatrix} n-1 & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & n-1 & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & -1 & n-1 & \cdots & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & -1 & -1 & \cdots & n-1 \end{vmatrix}.$$

Ako prvoj vrsti dodamo preostale vrste dobijamo vrstu sa svim elementima 1. Zatim tu vrstu dodamo svim ostalim i dobijamo:

$$t_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & n & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & n & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n \end{vmatrix} = n^{n-2}.$$

**Teorema 3.2.1.2.** Neka su $v_1, v_2, \dots, v_n$ dati čvorovi i $d_1, d_2, \dots, d_n$ dati brojevi tako da je:

$$\sum_{i=1}^{n} d_i = 2n - 2.$$

Tada je broj stabala sa skupom čvorova $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, takvih da čvor $v_i$ ima stepen $d_i$, $i = 1,2, \dots, n$, jednak:

$$\frac{(n-2)!}{(d_1-1)!\,(d_2-1)!\cdots(d_n-1)!}.$$

**Dokaz.** Ova teorema se dokazuje matematičkom indukcijom po $n$. Za $n = 1{,}2$ tvrđenje je tačno. Pretpostavimo da je $n > 2$. S obzirom da važi da je $\sum_{i=1}^{n} d_i = 2n - 2 < 2n$, postoji $i$ tako da je $d_i = 1$. Bez gubitka opštosti, pretpostavimo da je $d_n = 1$. Neka je $\tau$ skup svih stabala sa čvorovima $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ takvih da svaki čvor $v_i$ ima stepen $d_i, i = 1,2, \dots, n$. Podelimo stabla iz $\tau$ u $n - 1$ grupa, tj. $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{n-1}$. Skup $\tau_j$ sadrži stabla u kojima je čvor $v_n$ susedan sa čvorom $v_j$. Ako uzmemo stablo iz $\tau_j$ i obrišemo čvor $v_n$ dobijamo stablo sa čvorovima $\{v_1, v_2, \dots, v_{n-1}\}$ takvih da je stepen $v_i$ jednak $d_i$ za $i \neq j$, dok je stepen $v_j$ jednak $d_j - 1$. Na ovaj način dobijamo bijekciju između skupa $\tau_j$ i skupa $\tau_j'$ svih stabala sa čvorovima $\{v_1, v_2, \dots, v_{n-1}\}$ sa nizom stepena $d_1, d_2, \dots, d_{j-1}, d_j - 1, d_{j+1}, \dots, d_{n-1}$ (uzimajući u obzir da različita stabla iz $\tau_j$ daju različita stabla iz $\tau_j'$, a iz svakog stabla iz $\tau_j'$ možemo da dobijemo stablo iz $\tau_j$ dodavanjem čvora $v_n$ i njegovim spajanjem sa čvorom $v_j$). Dakle, po induktivnoj predpostavci imamo da je:

$$
\begin{aligned}
|\tau_j| = |\tau_j'| &= \frac{(n-3)!}{(d_1 - 1)! \cdot \dots \cdot (d_{j-1} - 1)!\,(d_j - 2)!\,(d_{j+1} - 1)! \cdot \dots \cdot (d_{n-1} - 1)!} \\
&= \frac{(n-3)!\,(d_j - 1)}{(d_1 - 1)!\,(d_2 - 1)! \cdot \dots \cdot (d_{n-1} - 1)!}.
\end{aligned}
$$

Ova formula važi i kada je $d_j = 1$. Ona tada daje 0, što se slaže sa činjenicom da ne postoji stablo sa stepenom $d_j - 1 = 0$ čvora $v_j$. Sada je ukupan broj stabala u $\tau$ jednak:

$$
\begin{aligned}
|\tau| = \sum_{j=1}^{n-1} |\tau_j| &= \sum_{j=1}^{n-1} \frac{(n-3)!\,(d_j - 1)}{(d_1 - 1)!\,(d_2 - 1)! \cdot \dots \cdot (d_{n-1} - 1)!} \\
&= \left( \sum_{j=1}^{n-1} (d_j - 1) \right) \frac{(n-3)!}{(d_1 - 1)!\,(d_2 - 1)! \cdot \dots \cdot (d_{n-1} - 1)!} \\
&= \frac{(n-2)(n-3)!}{(d_1 - 1)!\,(d_2 - 1)! \cdot \dots \cdot (d_{n-1} - 1)!}.
\end{aligned}
$$

Kako važi da je $d_n = 1$, razlomak možemo da proširimo sa $(d_n - 1)! = 0! = 1$, čime smo pokazali tvrđenje.

**Posledica 3.2.1.1.** Broj stabala sa skupom čvorova $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ takvih da čvor $v_1$ ima stepen $k$ jednak je:

$$\binom{n-2}{k-1}(n-1)^{n-k-1}.$$

**Dokaz.**

$$\sum \binom{n-2}{k-1, d_2-1, \dots, d_n-1} = \frac{(n-2)!}{(k-1)!\,(n-k-1)!} \sum \binom{n-k-1}{d_2-1, \dots, d_n-1}$$
$$= \binom{n-2}{k-1}(n-1)^{n-k-1},$$

gde sume idu po svim $d_2, d_3, \dots, d_n \in \mathbb{N}$ (to su stepeni čvorova $v_2, v_3, \dots, v_n$ u tim stablima) za koje važi $d_2 + d_3 + \cdots + d_n = 2n - k - 2$.

### 3.2.3. Druga važna tvrđenja

Pored Teoreme o matricama i stablima i Kejlijeve teoreme, postoji nekoliko tvrđenja koja mogu da se koriste kako bi se odredio broj razapinjućih stabala. U prvoj takvoj teoremi pojavljuje se Laplasova matrica reda $n$ (u prethodnim poglavljima videli smo da je $L = D - A$), kao i matrica $J$ koja ima sve elemente jednake 1 i isto je reda $n$. Za potpun graf $K_n$ imamo da je $A = J - I$, i da je $D = (n-1)I$, pa je $L = nI - J$, pri čemu je $I$ jedinična matrica reda $n$.

**Teorema 3.2.3.1.** Broj razapinjućih stabala grafa G je:

$$t(G) = \frac{1}{n^2} det(J + L).$$

**Dokaz.** Kako je $J^2 = nJ$ i $JL = 0$ (važi i $LJ = 0$) imamo sledeću jednakost:

$$(nI - J)(J + L) = nJ - J^2 + nL - JL = nL.$$

Sada je neophodno odrediti adjungovane matrice leve i desne strane prethodne jednakosti. U nastavku sa leve strane su prikazani koraci, dok su sa desne strane prikazane tvrdnje korišćene u koracima.

| | |
|---|---|
| $adj(J+L) \cdot adj(nI-J) = adj(nL)$ | Rezultati linearne algebre vezane za adjungovane matrice: $adj(nL) = n^{n-1} adj(L)$ <br> $M \cdot adj(M) = M \cdot det(M) M^{-1}$ <br> $= det(M) I$ |
| $adj(J+L) \cdot n^{n-2} J = n^{n-1} adj(L)$ | Kejlijeva teorema: $adj(L) = adj(nI-J) = n^{n-2} J$ |
| $adj(J+L) J = nt(G) J$ | Teorema o matricama i stablima: $adj(L) = t(G) J$ |
| $(J+L) adj(J+L) J = (J+L) nt(G) J$ | Množenje obe strane sa $(J+L)$ |
| $(J+L) det(J+L)(J+L)^{-1} J = nt(G)(J^2 + LJ)$ | $adj(M) = det(M) M^{-1}$ |
| $det(J+L) J = nt(G)(J^2 + 0)$ | $LJ = 0$ |
| $det(J+L) J = nt(G) nJ$ | $J^2 = nJ$ |

Iz poslednje matrične jednakosti dobijamo da je $det(J+L) = n^2 t(G)$, čime smo pokazali teoremu.

**Teorema 3.2.3.2.** Za kompleksnost grafa važi:

$$t(G) = t(G-e) + t(G \cdot e),$$

gde $G-e$ predstavlja graf koji se dobija izbacivanjem grane $e$, a $G \cdot e$ predstavlja graf koji se dobija od grafa $G$ uklanjanjem grane $e = \{u, v\}$ i identifikovanjem njenih krajeva $u$ i $v$ (tj. spajanjem krajeva grane $e$ u jedan novi čvor koji je incidentan sa svim granama koje su bile incidentne sa $u$ i $v$). Graf $G \cdot e$ se naziva ***kontrakcija*** grafa $G$ u odnosu na granu $e$.

**Dokaz.** Svakom razapinjućem grafu $G$ koje ne sadrži granu $e$ odgovara razapinjuće stablo u $G - e$. Svakom razapinjućem stablu u $G$ koje sadrži granu $e$ odgovara razapinjuće stablo u $G \cdot e$.

# LITERATURA


[1] Anderson A. J., *Discrete Mathematics with Combinatorics*, University of South Carolina, Spartanburg, Prentice Hall, Upper Saddle River, New Jersey, 2005.

[2] Bondy A. J., Murty R. S. U., *Graph theory with applications*, The Macmillan Press Ltd., London, 1976.

[3] Chair D., *Graph Theory with Application to Engineering & Computer Science*, Dover Publications, Mineola, New York, 2016.

[4] Cvetković D., Milić M., *Teorija grafova i njene primene*, Univerzitet u Beogradu, beogradski izdavačko-grafički zavod, Beograd, 1971.

[5] Stanely P. R., *Algebraic Combinatorics; Walks, Trees, Tableaux, and More*¸Springer, New York, 2010.

[6] Stevanović D., Baltić V., Simić S., Ćirić M., *Diskretna matematika; Osnove kombinatorike i teorije grafova*, Društvo matematičara Srbije, Beograd, 2008.

[7] Wilson J. R., *Introduction to Graph Theory*, Addison Wesley Longman Limited, Edinburgh Gate, Harlow, 1996.