ILIJA
S. LUKAČEVIĆ

osnovi teorije relativnosti

Naučna Knjiga • BEOGRAD

Ilija S. LUKAČEVIĆ,

OSNOVE TEORIJE RELATIVNOSTI

"There can be no living science unless there is a widespread instinctive conviction in the existence of an order of things and, in particular, of an order on Nature."

A.N. WHITEHEAD

(Science and the Modern World)

Naučna knjiga

Beograd, 1980.

OSNOVE TEORIJE RELATIVNOSTI

Recenzenti:

dr Marko Leko,
dr Tatomir Anđlić

Izdavač: Naučna knjiga,

Za izdavača: Dragoslav Joković,

Urednik: Božica Vidanović

tehnički urednik: Gordana Kostić

Korice: Vasil Micevski.

Štampa: "Bakar"Bor.

Tiraž: 1000 primeraka

Rešenjem Univerziteta u Beogradu br. 06-866/1-79 od 4. februara 1980. godine odobreno štampanje ovog udžbenika

PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET

UNIVERZITET U BEOGRADU

Beograd, 1979.

Sadržaj

II Opšta relativnost

III Dodatak

Predgovor

Ova knjiga predestavlja prvenstveno udžbenik kursa koji držim na redovnim studijana Odseka za matematičke, mehaničke i astronomske nauke Prirodno-matematičkog fakulteta u Beograd. Moram odmah dodati naponenu da pojedini njeni delovi ne spadaju u program redovnih studija, kao što će, svakako, odgovarajući kurs uskoro obuhvatati i gradivo kojeg u ovon udžbeniku nema.

Kad se radi o nastavi teorije relativnosti postoje uglavnom dva pristupa. Prvi pristup, nazovamo ga eupirijski, izlaže relativnost kao dodatak uz kurseve opšte i teorijske fizike. Po njenu je ona pretežno prikazana kao modifikovana njutnovska fizika. Drugi pristup, nazovamo ga deduktivni, izlaže relativnost kao deo diferencijalne geonetrije, sa uzgrednim napomenama o fizici; on sve više osvaja savremenu, naročito monografsku, literaturu. Ova knjiga ne pripada matici ni jedne od te dve struje, mada ima uzore i izvore u nekim poznatim uđbenicima i monografijana. Ja se nadam da će ona biti korisna čitaocima različitih sprema i zaninanja, podlazunevajući tu, pored onih kojima je namenjena kao uđibenik, i nastavnike srednjih škola, studente fizike i tehničkih struka.

U prvon delu, specijalnoj relativnosti, izlaganje je dosta postupno i induktivno. U nehanici sistema i neprekidne sredine držao, sa, naravno uz dosta izmena, pristupa za koji se opredelio, a dobrim delom i izgradio, Synge. On je, za moje shvatanje, po jednostavnosti i ubedljivosti, najbolji. U izlaganju opšte relativnosti, koja je po svojim rezultatima, a i kao oblast rada, daleko razgranatija, razumljivo je da nena takvog jedinstva. Tamo sam se potrudio da iznesem glavne činjenice koje treba da upozna čitalac koji se interesuje za tu obrast. Pomenimo, između ostalog, da je pristup teoriji gravitacionih talasa prvenstveno zasnovan na onom što su dali Lichnerowicz i njegova škola. Matenatičke dopune date su u obimu koji je neophodan za nposrednu primenu. Izvođenja su ponekad vrlo elementarna, važan je samo cilj. Uopšte uzev, prednost ima iznošenje činjenica nad interpretacijana, kao što su, na primer, varijacione metode ili posebni formalizmi. Dodaci A, B, C ne predstavljaju pomoćne, ili manje važne, odeljke, već jednostavno nisu mogli biti skupljeni u posebnu glavu. U nekom eventualnom sledećem izdanju bilo bi ih svakako više. Neki od zadataka, oni najvredniji, izabrani su tako da dopunjavaju tekst.

Pored spiska korišćenih udžbenika i monografija, datog na kraju knjige, navedeni su, uz tekst, pojedini radovi koji su u neposrednoj vezi s njim. Tih radova nema mnogo, i ja sam, pri njihovom izboru, bio daleko od neke sistematičnosti, što je u današnje vreme, uostalom, vrlo teška stvar.

Zahvaljujen mone učitelju, akademiku profesoru Dr Tatomiru Anđeliću i kolegi Dr Marku Leku, vanrednom profesoru, koji su pročitali rukopis knjige, dali svoje primedbe i preporučili ga za štampu. Dugujem zahvalnost i mone učeniku Bogdanu Grujoviću, koji je napravio lepe crteže prema mojim, često nejasnim, uputstvima, a više njih znatno poboljšao. Bez ove ponoći i kritike recenzenata ovaj udžbenik bio bi u osetnom gubitku.

11. decembar 1979. I. S. L.

Specijalna relati

Specijalna relati

Uvod

Uvod

Mi u relativnost ulazino preko specijalne teorijet koja se pojmovno i istorijski naetavlja na njutnovsku fiziku. To znači da 6euo za okvir naBi-h opaZanJa, prostor, snatrati da Je euklidski, odnosno, da budemo u skladu s relativuoEdur smatra- 6emo da svaki posnatrad koJi se kre6e neubrzaao opaZa prostor kao euklidski. Slede6e pitanJe odnosi se na nerenje rrrenenekih iutervala i duZina. U njutnovskoJ kinematici vrene Je biLo sbva6eno kao apso3-utno, to Jest takvo da nu je tok Jedinstven u odnosu na sve posnatrade, pod uslovon da nehanizni koJi ga tnere budu za6ti6eni od EiniLaca koii bi naru5avali raYnornernost nJihovog rada. Isto je vaZilo i za duiine. ?o epecijalnoJ relativnosti, uedutim, pitanje postojanja iIi nepostojanJa iedinstvenog toka vreurena i vrednosti duZina vezuJe se za jednu pojavu koJa u nju?aovekoJ nehanici ne igra nikakvu posebau ulogu, za brzinu svetLosti. Inogo je puta doead potrrdena dinjenica da svetlost ne nenJa brzinu usled kretanJa posnatrada prena nJenon izvoru. U speciJalnoJ relativnosti se kao oEiaovtra postavka uzima da Je brzina evetlosti u praznon prostonr naJve6a nogu6a, i da Je koustantna u odnosu na 6ve posnatrade. Prostorne koordinate i vreme, koJi odreduju neki dogadaj, uskladiva6emo tako da vaZi ova postavka. Dalje se postavla pitanJe DBSo Ukoliko nena nekog procesa tro6enja, ona ie po njutnovskoJ dinanici konetantnat to jest nezavisna od. kretanja. Odgovor na to pitanJe po specijal- noj relativnosti je da se vrednosti nase i energiie noraju, u zavisnosti od kretanJa, uskladiti sa osnovnon postavkon o konstantnosti brzirfe svetlosti. NaJzad postoji jedno poLje si3-a koje ne6emo razmatrati, a to je gravitaciono polie. U specijalno’j relatirmosti sil- a teZe se ne posmatra ni u njutnovskoJ aproksimaciJi. lzudava6emo fizidke pojave samo u eludaJevima kada se ona opravdano moZe zanemariti.

1. Svet specijalne relativnosti

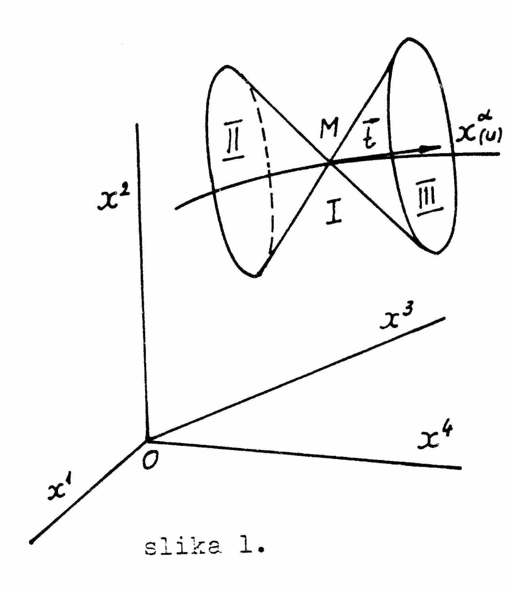
1.1 Pojam Svet

Kao što je poznato, fizičke pojave se u specijalnoj teoriji relativnosti posmatraju u prostor-vremenu, ili **Svetu**, čije se tačke, određene u odnosu na neki sistem referencije koji meri protorne i vremenske koordinate, nazivaju **događaji**. Uzmimo jednu materijalnu tačku. Niz položaja koje ona zauzima u prostoru, posmatan i meren iz našeg sistema, leži na jednoj liniji, ili prostorvremenskoj putanji, koju ćerno nazivati **svetska linija**. Deo svetske linije koju je materijalna tačka opisala do sadašnjeg trenutka, po našem nerilu, nazivaćemo **istorija materijalne tačke**. Dodajemo, uz te osnovne definlclje, da ćemo prostorno-vremenki sistem zvati **posmatrač** ili **posmatrački sistem**.

Prostor-vreme, odaosno Svet, deli se, u odnosu na svaki događaj, na **prošlost**, **istovremenost**, **budućnost** i **nulti konus**. U njutnovskoj kinematici mogla je postojati samo jedna istovremenost, bolje reći sadašnjost, a to je prostor u kojem se, u svakom trenutku jedinstvenog vremena nalaze svi objekti koje uočavamo. U specijalnoj relativnosti, međutim, istovremenost jednog događaja preastavlja deo Sveta koji od prošlosti i budćnosti odvajaju zraci po jednog od polukonusa koji sačinjavaju nulti konus, a sustiču se u tom događaju. Zraci nultog konusa jednog događaja imaju određeno fizičko tumačenje koje ćemo dati kasnije, a događaji koji na njima leže ne spadaju ni u jednu od navedene tri kategorije.

Uvedimo nezavine koordinate x^α ($\alpha = 1,2,3,4$) koje nam određuju događaje u Svetu specijalne relativnosti. Tada će konačne jednačine svetske linije jedne materijalne tačke, izražene pomoću nekog parametra u, glasiti

$$x^\alpha = x^\alpha(u). \tag{1.1}$$



Slika 1.1: Svetska linija unutar konusa.

Pošto svaka materijalna tačka putuje ”iz prošlosti u budućnost”, tangenta njene svetske linije u svakom događaju M mora ležati unutar nultog knusa čija je teme taj događaj (s1. 1.1). Među svetskim pravcima koji salrže događaj M moramo nekako razlikovati one koji leže u području njegove istovremenosti (oblast I) od onih koji leže unutar polukonusa prošlosti i budućnosti (oblasti II i III) i na samoj hiperpovršin nultog konusa koji razdvaja sve te oblasti. Zato ćemo uvesti prostorno-vremenska ili svetska rastojanja i izvšiti njihovu klasifikaciju. Osnovna metrička forma Sveta specijalne relativnosti ima oblik:

$$\mathrm{d}s^2 = \varepsilon g_{\alpha\beta}\mathrm{d}x^\alpha \mathrm{d}x^\beta, \quad \varepsilon = \pm 1. \tag{1.2}$$

Ovako zadata osnovna forma u opštem slučaju karakteriše rimanske metrike, među koje spada kao poseban slučaj, i metrika ravrnog prostor-vremena. Bitna je jedino signatura koju određuje koeficijent ε u gornjen izrazu. Za $\varepsilon = 1$ kažemo da $\varepsilon \mathrm{d}s^2$ određuje prostorno elenentarno rastojanje, a $\mathrm{d}x^\alpha$ je **vektor prostornog tipa** i leži izvan nultog konusa. Za $\varepsilon = -1$ izraz $g_{\alpha\beta}\mathrm{d}x^\alpha\mathrm{d}x^\beta$ mora biti negativan, a $\mathrm{d}x^\alpha$ je **vektor vremenskog tipa**, orijentisan unutar polukonusa prošlosti ili budućnosti. Najzad za

$$\mathrm{d}s^2 = 0 \tag{1.2$'$}$$

radi se o elementarnom vektoru ”rastojanja”između M 1 nekog bliskog događaja sa nultog konusa. Ovaj izraz smo stavili pod znazk navoda, jer je prostorno - vrermensko rastojanje između temena nultog konusa i ma kojeg događaja na njemu jednako nuli po formuli (1.2$'$), ma da se posmatrane tačke, odnosno događaji, razlikuju po koordinatama. Tada je $\mathrm{d}x^\alpha$ **nulti vektor**, koji pripada zracima jednog od dva polukonusa.

Uopšte uzev, vrednost skalarnog kvadrata nekog proizvoljnog vektora v^α će nam određivati njegovu orijentaciju, odnosno tip:

$$\begin{aligned} &\text{a) za vremenski slučaj je} && g_{\alpha\beta}v^\alpha v^\beta < 0,\\ &\text{b) za prostorni slučaj je} && g_{\alpha\beta}v^\alpha v^\beta > 0,\\ &\text{c) za nulti konus} && g_{\alpha\beta}v^\alpha v^\beta = 0. \end{aligned} \tag{1.3}$$

Vratimo se osnovnij formi 1.2, odnosno (1.2$'$). Na koji je oblik možemo svesti? U jednoj rimanskoj metrici osnovna metrička forma može se lokalno, a u euklidskoj metrici (u stvari pseudoeuklidskoj, jer je naša definitnost promenljiva) i u celinisvesti na zbir kvadrata dx^α sa konstantnim koeficijentima. Kako smo pošli od toga da svaki posmatrač u Svetu specijalne relativnosti opaža prostor kao euklidski, sad ćemo taj osnovni zahtev proširiti na čitav Svet, čime uslovljamo njegovu pseudoeuklidsku, odnosno ravnu, unutrašnju metriku. Tako možemo postaviti u celini prostor-vremena jedan ortogonalni koordinatni sistem Dekartovog tipa, čiji su dijagonalni elementi metričkog tenzora konstantni dok su ostali jednaki nuli. Neka bar jedna osa tog sistema, recimo x^4, bude orijentisana vremenski, unutar nultogkonusa koji odgovara događaju odabranom za koordinatni početak O. Kako posmatrač u O uočava jedan trodimenzionalni prostor u svakom trenutku svog vremena, koje određuje parametar x^4 (s tim što nema dimenziju, to jest putuje ravnomerno po odgovarajućoj pravoj) zaključak je da kvadrati tri nezavisna vektora u pravcima prostornih osa imaju signaturu $+1$, a kvadrat u pravcu vremenske ose signaturu -1. Osnovna metrička forma u odnosu na takvog posmatrača glasi

$$g_{\alpha\beta}\mathrm{d}x^\alpha \mathrm{d}x^\beta = \left(\mathrm{d}x^1\right)^2 + \left(\mathrm{d}x^2\right)^2 + \left(\mathrm{d}x^3\right)^2 - \left(\mathrm{d}x^4\right)^2. \tag{1.4}$$

U odnosu na taj sistem imamo:

za vremenski elementarni interval

$$\left(\mathrm{d}x^4\right)^2 > \left(\mathrm{d}x^1\right)^2 + \left(\mathrm{d}x^2\right)^2 + \left(\mathrm{d}x^3\right)^2, \tag{1.5}$$

za prostorni elementarni interval

$$\left(\mathrm{d}x^4\right)^2 < \left(\mathrm{d}x^1\right)^2 + \left(\mathrm{d}x^2\right)^2 + \left(\mathrm{d}x^3\right)^2, \tag{1.5$'$}$$

za nulti elementarni interval

$$\left(\mathrm{d}x^4\right)^2 = \left(\mathrm{d}x^1\right)^2 + \left(\mathrm{d}x^2\right)^2 + \left(\mathrm{d}x^3\right)^2, \tag{1.5$''$}$$

Izraz **interval** označava neko prostorno-vremensko rastojanje. (1.5) je ustvari jednačina nultog konusa u diferencijalnom obliku. Vidimo da se radi o kružnom hipekonusu, što tumačimo ravnopravnošću ili **izotropnošću** nultih pravaca u odnosu na datitok vremena. To je stoga što nema razloga za promenljivost najveće brzine u zavisnosti od pravca u prostoru. Jednačina (1.5$''$) u konačnom obliku u nekom događ aju M glasi

$$(x^4 - x^4_M)^2 = (x^1 - x^1_M)^2 + (x^2 - x^3_M)^2 + (x^4 - x^3_M)^2. \tag{1.6}$$

Vidimo sa de otvor konusa ne menja ni u zavisnosti od izbora temenog događaja. znači da je Svet specijalne relativnosti **homogen** u odnosu na nulte pravce, jer najveća brzina ne zavisi unapred od mesta u prostoru i vremenu prema posmatraču. Zraci koji ograničavaju polukonuseprošlosti i budućnosti događaja M dobijaju se za pozitivne, odnosno negativne, vrednosti $x^4 - x^4_M$.

Ako pogledamo veze (1.3) ili (1.5) vidimo da su svojstva prostorne, vremenske ili nulte orijentacije uzajamno za bilo koje dva događaja M i M', s tim što za događaje vremenskog ili nultog tipa postoji pojam vremenskog sledovanja, jer dva takva događaja leže unutar, ili na površima, suprotnih polukonusa koji odgovaraju svakom od njih.

Vezon (1.3) uveli smo, za skalarne kvadrate svih vektora, izraze istog oblika kao i u definitnim metrikama. Skalarni proizvodi su takođe definisani isto kao u definitnim metrikama, a posmatraćemo ih u sledećem odeljku.

Prostor-vreme specijalne relativnosti, koje se naziva **Svet Minkovskog**[1], po svom tvorcu, predstavlja izvanrednu geometrijsku zamisao koja služi, kao cement, povezivanju zaključaka relativističke fizike. Minkovski je uveo pojam Sveta specijalne relativnosti tri godine posle prvih Ajnštajnovih rezultata u toj oblasti.

[1] H. Minkowski

1.2 Ortogonalnost vektora

U prethodnom odeljku uveli smo bili jedan ortogonalni koordinatni sistem u kojem je osnovna metrička forma

$$\mathrm{d}s^2 = \varepsilon\left[\left(\mathrm{d}x^1\right)^2 + \left(\mathrm{d}x^2\right)^2 + \left(\mathrm{d}x^3\right)^2\right], \tag{1.7}$$

čime smo podrazumevali da postoje neki sistem međusobno ortogonalnih baznih vektora koordinatnih osa, s tim što je jedan od njih vremenski orijentisan, a ostala tri prostorno. Postavlja se pitanje da li postoji vremenski vektor za koji preostala ortogonalna trojka vektora ne bi bila isključivo prostorna, kao u (1.7). Drugim rečima, da li jedan vremenski vektor može biti ortogonalan na nekom vremenskom ili nultom vektoru?

Pođimo od dva vektora, vremenskog u^α, i vremenskog ili nultog v^α:

$$g_{\alpha\beta}u^\alpha u^\beta < 0, \quad g_{\alpha\beta}v^\alpha v^\beta \leq 0. \tag{1.8}$$

Dokazaćeom da je

$$g_{\alpha\beta}u^\alpha v^\beta \neq 0, \tag{1.9}$$

tj. da **vremenski vektor ne može biti ortogonalan na vremenskom ili nultom vektoru**.

N Uvešćemo dve konvenije:

prvo, ukoliko indeksi idu od tri, beležićemo ih it latinskim slovima, dok ćemo one koji idu do četiri beležiti *grčkim slovima*;

drugo, svako ponavljanje indeksa, bilo gornjih, donjih ili mešovitih, podrazumevaćemo da označava sabiranje, osim ako se drugačije ne naglasi. To je takozvana **Singova konvencija**[2]. Dosad smo podrazumevali da samo ponavljanje indeksa suprotnih tipova (gornjih i donjih) označava sabiranje, što predstavlja poznatu **Ajnštajnovu konvenciju**.

[2] J.L. Synge

Dokaz

U skladu s prethodnim, kako koeficijenti metričke forme (1.7) glase

$$g_{ij} = \delta_{ij}, \quad g_{i4} = 0, \quad g_{ii} = -1, \quad i, j = 1, 2, 3, \tag{1.10}$$

pisaćemo uslove (1.8)

$$u^k u^k - (u^4)^2 < 0, \quad v^k v^k - (v^4)^2 \leq 0. \tag{1.8$''$}$$

Odakle je

$$|u^4 u^4| > (u^k u^k v^s v^s)^{1/2}. \tag{1.11}$$

Svaka linearna kombinacija, sa realnim činiocem λ, prostornih delova vektora u^k i v^k, mora imati intenzitet veći ili jednak nuli. Dakle

$$\left(u^k + \lambda v^k\right)\left(u^k + \lambda v^k\right) \geq 0,$$

što nam daje kvadratnu nejednačinu po λ, koja ne može imati različiterealne korene. Njena diskriminanta je manja ili jednaka nuli. Otud

$$|u^k v^k| \leq \left(u^k u^s v^k v^s\right)^{1/2}.$$

Kad pogledamo (1.11) vidimo da mora da bude

$$|u^k v^k| - |u^4 v^4| < 0 \quad \Rightarrow \quad g_{\alpha\beta} u^\alpha v^\beta = u^k v^k - u^4 v^4 \neq 0,$$

što je trebalo dokazati.

Znak gornjeg izraza zavisi od orijentacije vektora u^α i v^α u odnosu na koordinatni sistem. Posebno za vremenske koordinate znaci će biti jednaki pri orijentaciji unutar istog polukonusa, a suprotni za različite polukonusa.

Što se tiče ortogonalnosti vremenskog vektora na prostornom, ona je moguća već i po tome što su bazni vektori za sistem (1.7), od kojih su tri prostorna, a jedan vremenski, uzajamno ortogonalni. Mož se pokazati da za neki prostorni vektor postoje, pored prostornih, i vremenski vektori koji su ortogonalni na njemu. Vektori nultog konusa takođe mogu bitiortogonalni na prostornim vektorima, pored toga što je svaki od njih "ortogonalan na samom sebi".

1.3 Skalarni proizvod vektora. Dvoravni i troravni

Uzmimo dva vremenski orijentisana jedinična vektora, u^α i v^α, usmerena prema budućnosti $(u^4, v^4) > 0$

$$g_{\alpha\beta} u^\alpha u^\beta = g_{\alpha\beta} v^\alpha v^\beta = -1. \tag{1.12}$$

Izaberimo, među različitim mogućim koordinatnim sistemima (posmatračima), onaj na čijoj je vremenskoj skali u^α. U odnosu na njega će biti

$$u^i = 0, \quad u^4 = -1. \tag{1.13}$$

U tom sistemu skalarni proizvod u^α sa v^α svodi se, na osnovu (1.10), na

$$g_{\alpha\beta} u^\alpha v^\beta = -v^4, \tag{1.14}$$

dok iz druge jednakosti (1.12) imamo za v^4

$$v^4 = \sqrt{1 + v^i v^i}. \tag{1.15}$$

Otude

$$g_{\alpha\beta} u^\alpha v^\beta = -\sqrt{1 + v^i v^i} < -1. \tag{1.15$''$}$$

Dakle, *za različite vremenske jedinične vektore u^α i v^α, iste orijentacije, skalarni proizvod je negativan i po apsolutnoj vrednosti veći od jedinice*.

U prethodnom smo odeljku pokazali da je vektor ortogonalan na vremenskom vektoru uvek prostoran. Ako uzmemo proizvoljanjedinični prostorni vektor P^α, imaćemo niz vrednosti skalarnih proizvoda $g_{\alpha\beta}u^\alpha v^\alpha$ koji, već prema uzijamnim orijentacijama u^4 i v^4, može biti pozitivan, negativan, a u slučaju ortogonalnosti jednak nuli. U kojimse intervalima kreću vrednosti prostornih i vremenskih komponenti P^α?

Imamo, u odnosu na sistem u kojem smo vršili razlaganje (1.13)

$$P^4 = \pm\sqrt{P^j P^j - 1}. \tag{1.16}$$

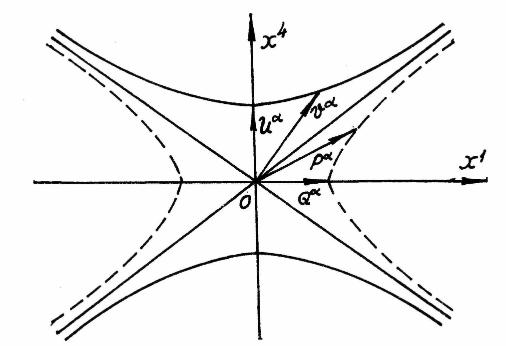
Jasno je da mora biti

$$P^j P^j \geq 1. \tag{1.17}$$

Vidimo da, osim što zadovoljavaju vezu (1.16) i uslov (1.17) , komponente P^i i P^4 nemaju gornju granicu pozitivnih vrednosti, niti donju granicu negativnih. Kada (1.17) pređe u jednakost P^α i u^α su uzajamno ortogonalni. Ako izaberemo jedinični prostorni vektor Q^α tako da određuje prvu po redu koordinatnu osu x^1, dakle $Q^\alpha(1,0,0,0)$, imaćemo

$$g_{\alpha\beta}P^\alpha Q^\beta = P^1. \tag{1.18}$$

Ako je ukupni niz vektora P^α sadržan u ravni određen osama x^1 i x^4 (slika (1.2) imaćemo, na osnovu (1.17) $|P^1| \geq 1$. Jednačine (1.15) i (1.18) predstavljene su na tome dijagramu, prva punom, druga isprekidanom linijom.



Slika 1.2: Niz vektora P^α sadržan u ravni određen osama x^1 i x^4.

Vidimo da je geometrijsko mesto završetaka jediničnih vektora v^α ravnostrana hiperbola u dvoravi x^1, x^4. S obzirom na izotropiju prostornih pravaca u prostor-vremenu imaćemo trodimenzioni, dvokrilni rotacioni hiperboloid čije grane asimptotski teže nultom konusu. Kada v^α teži zraku nultog konusa njegove komponeote teže beskonačnim vrednostima. Geometrijsko mesto završetaka vektora P^α opisuje ranostranu hiperbolu koja u prostor-vremenu prelazi u Jednokrilni rotacioni hiperboloid koji asimptotski teži nultom konusu sa prostorne strane. Tačkastim linijama su na slici 1.2 obeležene granice unutar kojlh leže one vrednosti P^α za koje je $|P^\alpha u_\alpha| < 1$. Prostorni vektori ortogonalni na P^α leže na prostornoj dvoravni upravnoj na x^1 i x^4, pa imaju komponente različite od nule na osama x^2 i x^3.

Objasnićemo izraze **troravan** i **dvoravan**, koje ćemo dalje redovno koristiti. Prve su zadane pomoću jedne, a druge pomoću dve nezavisne linearne jednačine u odnosu na posmatračev sistem. Troravni i dvoravni mogu biti prostornog, nultog i vremenskog tipa, već prema tome kako su orijentisani vektori koji su na njima ortogonalni.

Neka troravan Σ kroz koordinatni početak (posmatračev početni događaj) bude zadata jednačinom:

$$a_\alpha x^\alpha = 0. \tag{1.19}$$

Tada je za
$$a_1^2+a_2^2+a_3^2-a_4^2<0$$
ta troravan prostornog tipa, kako je na njoj ortogonalan vektor a_α, vremenski orijentisan. Za
$$a_1^2+a_2^2+a_3^2-a_4^2\geq 0$$
Σ je vremenska, odnosno nulta. U prvom slučaju ona seče nulti konus, a u drugom ga tangira duž jedne zavojnice.

Neka dvoravan σ kroz koordinatni početak zadata je sa
$$a_\alpha x^\alpha=0,\quad b_\alpha x^\alpha=0. \tag{1.20}$$

Njen tip će zavisiti od tipa njenog ortogonalnog komplementa, dvoravni σ', koju određuju a^α i b^α. Ako je σ prostorna dvoravan, σ' će biti vremenska, i obrnuto. Znači da se pitanje tipa σ svodi na to da li na σ' postoje, pored prostornih pravaca, kojih uvek mora biti, još i vremenski i nulti pravci, odnosno samo nulti pravci, ako σ' tangira nulti konus. Zato ćemo ispitati skalarni kvadrar φ vektora različitih pravaca na σ', dobijenih linearnim kombinacijama a^α i b^α
$$\varphi=g_{\alpha\beta}\left(a^\alpha+\lambda b^\alpha\right)\left(a^\beta+\lambda b^\beta\right).$$
Foirmirajmo odgovarajuću kvadratnu jednačinu
$$b_\alpha b^\alpha\lambda^2+2a_\alpha b^\alpha\lambda+a_\alpha a^\alpha=0. \tag{1.21}$$
Ako je diskriminanta negativna
$$(a_\alpha b^\alpha)^2-(a_\alpha a^\alpha)(b_\beta b^\beta)<0, \tag{1.22}$$
trinom na levoj strani (1.21) će za svaku realnu linearnu kombinaciju $a^\alpha+\lambda b^\alpha$ biti veći od nule. Svaki vektor na σ' će dakle biti prostorno orijentisan, pa će σ samim tim biti vremenskog tipa.

Ako je diskriminanta nenegrativna
$$(a_\alpha b^\alpha)^2-(a_\alpha a^\alpha)(b_\beta b^\beta)\geq 0, \tag{1.23}$$
imaćemo, u slučaju da je pozitivna, indefinitne vrednosti φ, pa će, pored prostornih, postojati i vremenski pravci, kao i dva nulta koji ih razdvajaju na σ'. Tada je njen ortogonalni komplement, dvoravan σ, prostornog tipa. Najzad, ako je diskriminanta (1.23) jednaka nuli, imamo dvostruki koren λ i σ' tangira nulti konus duž đvostruke”izvodnice, a isto to biva i sa dvoravni σ.

Primer vremenske dvoravni imamo na dijagramu slike 1.2.

1.4 Ortogonalna razlaganja vektora i tenzora

Uzmimo neki proizvoljan vektor u^α (može biti i nulti) i razložimo ga na dve upravne projekcije, jednu na pravac jediničnog vremenskog vektora v^α, i drugu, koju ćemo obeležiti sa $\hat{u}^\alpha$, na njegov ortogonalni komplement, prostornu troravan
$$u_\alpha=(u^\beta v_\beta)v_a+\hat{u}_\alpha. \tag{1.24}$$
Negativan znak uz koeficijent prvog člana potiče od vremenske orijentacije v_α. U ortogonalnom sistemu u kojem je v^α jedinični vektor ose x^4 sleduje, ako iskoristimo (1.14)
$$u^\alpha v_\alpha=-u^4$$
pa je otud

(1.24′)

Kako kontravarijantna koordinata nekog vektora predstavlja njegovu brojnu vrednost u odnosu na neku bazu, to nam (1.24’) daje opravdanje za (1.24). Iz te veze sledi

$$\hat{u}_\alpha = \left(g_{\alpha\beta} + v_\alpha v_\beta\right) u^\beta. \tag{1.25}$$

Tenzor $h_{\alpha\beta}$, koji ćemo nazivati **tenzor projektor** za vremenski pravac v_α, daje nam vrednost projekcije nekog proizvoljnog vektora u Svetu Minkovskog na prostornu troravan upravnu na vremenskom jediničnom vektoru v_α. S obzirom na tenzorsku prirodu, $h_{\alpha\beta}$ zadržava projektorsko svojstvo i kad je zadat pomoću mešovitih ili kontravarijantnih koordinata.

Svaki tenzor proizvoljnog reda može se projektovati, preko svih svojih koordinata, na komplementalnu troravan vektora v_α pomoću tenzora $h_{\alpha\beta}$. Na primer, za tenzor drugog reda $\tau_{\alpha\beta}$ ćemo imati

$$\hat{\tau}_{\alpha\beta} = h^\gamma_\alpha h^\delta_\beta \tau_{\gamma\delta}. \tag{1.26}$$

Ako sada, analogno prethodnom, razložimo vektor u_α na pravac nekog prostornog jediničnog vektora P^α i njegov ortogonalni komplement, vremensku troravan, imaćemo

$$u_\alpha = ()P_\alpha + \tilde{u}_\alpha.$$

Otud

$$\tilde{u}_\alpha = (g_{\alpha\beta} - P_\alpha P_\beta)u^\beta = k_{\alpha\beta}u^\beta. \tag{1.27}$$

Tenzor projektor $k_{\alpha\beta}$ na ortogonalni komplement prostornog pravca zadatog jediničnim vektorom P_α razlikuje se znakom od odgovarajućeg projektora za neki vremenski pravac.

Neka prostorni vektor P^α i vremenski v^α budu međusobnoortogonalni. Ispitajmo kako treba da glasi tenzor koji će komponente vektora i tenzora projektovati na ravan upravnu na ta dva vektora. Stoga ćemo prvo projektovati vektor u^α upravno na v^α, a potom na P^α. Dakle

$$\hat{\hat{u}}_\alpha = k_{\alpha\beta}\hat{u}^\beta = k_{\alpha\beta}h^\beta_\gamma u^\gamma. \tag{1.28}$$

Razvijanjem dobijamo

$$k_{\alpha\beta}h^\beta_\gamma = g_{\alpha\gamma} + v_\alpha v_\gamma - P_\alpha P_\gamma = \ell_{\alpha\gamma}. \tag{1.29}$$

Iz oblika desne strane vidi se da su operacije projektovanja po međusobno ortogonalnim pravcima komutativne u Svetu Minkovskog. Izraz (1.29) je poseban slučaj opštijih izraza za projektovanje na dva proizvoljna pravca različitog ili istog tipa. Jedino su nulti pravci isključeni.

Uzmimo jednu ortonormiranu vektorsku bazu sa tri prostorna pravca $\lambda^\alpha_{(i)}$, i četvrtim vektorskim $\lambda^\alpha_{(4)}$. Na osnovu izraza za $h_{\alpha\beta}$ (1.25) i $\ell_{\alpha\beta}$ (1.29) vidimo da se mogu redom napraviti tenzori projektori za sve pravce u Svetu Minkovskog. U ovom slučajurezultat takvog projektovanja upravno na sve nezavisne pravce je očigledno nula vektor ili tenzor. Dakle

$$\left(g_{\alpha\beta} - \lambda_{(1)\alpha}\lambda_{(1)\beta} - \lambda_{(2)\alpha}\lambda_{(2)\beta} - \lambda_{(3)\alpha}\lambda_{(3)\beta} - \lambda_{(4)\alpha}\lambda_{(4)\beta}\right) u^\beta = 0. \tag{1.30}$$

Otud

$$u_\alpha = u^\beta\lambda_{(1)\beta}\lambda_{(1)\alpha} + u^\beta\lambda_{(2)\beta}\lambda_{(2)\alpha} + u^\beta\lambda_{(3)\beta}\lambda_{(3)\alpha} - u^\beta\lambda_{(4)\beta}\lambda_{(4)\alpha} \tag{1.31}$$

Dok je za neki tenzor drugog reda $T_{\alpha\beta}$

$$\begin{aligned} T_{\gamma\delta}&\left(\delta^\gamma_\alpha - \lambda_{(1)\alpha}\lambda^\gamma_{(1)} - \lambda_{(2)\alpha}\lambda^\gamma_{(2)} - \lambda_{(3)\alpha}\lambda^\gamma_{(3)} + \lambda_{(4)\alpha}\lambda^\gamma_{(4)}\right) \times \\ &\times \left(\delta^\delta_\beta - \lambda_{(1)\beta}\lambda^\delta_{(1)} - \lambda_{(2)\beta}\lambda^\delta_{(2)} - \lambda_{(3)\beta}\lambda^\delta_{(3)} + \lambda_{(4)\beta}\lambda^\delta_{(4)}\right) \end{aligned} \tag{1.32}$$

Otuda

$$
\begin{aligned}
T_{\alpha\beta} = &\sum_{i=1}^{3} T_{\alpha\delta}\lambda_{(i)\beta}\lambda^{\delta}_{(i)} + \sum_{i=1}^{3} T_{\gamma\beta}\lambda_{(i)\alpha}\lambda^{\gamma}_{(i)} - T_{\alpha\delta}\lambda_{(1)\beta}\lambda^{\delta}_{(1)} - T_{\gamma\beta}\lambda_{(1)\alpha}\lambda^{\gamma}_{(1)} - \\
&- \sum_{i,j=1}^{3} T_{\gamma\delta}\lambda^{\gamma}_{(i)}\lambda^{\delta}_{(j)}\lambda_{(i)\alpha}\lambda_{(j)\beta} + \sum_{i=1}^{3} T_{\gamma\delta}\lambda^{\gamma}_{(i)}\lambda^{\delta}_{(i)}\lambda_{(i)\alpha}\lambda_{(i)\beta} + \\
&+ \sum_{i=1}^{3} T_{\gamma\delta}\lambda^{\gamma}_{(i)}\lambda^{\delta}_{(i)}\lambda_{(i)\alpha}\lambda_{(i)\beta} - T_{\gamma\delta}\lambda^{\gamma}_{(4)}\lambda^{\delta}_{(4)}\lambda_{(4)\alpha}\lambda_{(4)\beta}.
\end{aligned}
\tag{1.33}
$$

Tenzor $T_{\alpha\beta}$ je proizvoljan, ne mora biti simetričan niti antisimetričan. Za slučajeve simetrije, odnosno antisimetrije, u gornjem izrazu dolazi do određenih uprošćenja.

Ako ovako razlaganje primenimo na metrički tenzor $g_{\alpha\beta}$ imaćemo, na osnovu (1.33)

$$
g_{\alpha\beta} = \lambda_{(1)\alpha}\lambda_{(1)\beta} + \lambda_{(2)\alpha}\lambda_{(2)\beta} + \lambda_{(3)\alpha}\lambda_{(3)\beta} - \lambda_{(4)\alpha}\lambda_{(4)\beta}, \tag{1.34}
$$

što se može zaključiti i neposredno iz (1.30), jer je tenzor u zagradi ortogonalan na svakom vektoru, pa se prema tome svodi na nula tenzor.

1.5 Zadaci

Zadatak 1

Dokazati da je, od svih vektora nultog konusa, svaki ortogonalan jedino na sebi.

Rešenje

Zadatak 2

Neka je M temeni događaj nultog konusa, i neka događaj A pripada polukonusu prošlosti, a događaj B polukonusu budućnosti (A, M i B ne leže na jednoj nultoj pravoj). Ako događaj N leži na svetskoj pravoj AB, pokazati da uvek važi $\overline{MN}^2 = \overline{AN} \cdot \overline{BN}$.

Rešenje

Zadatak 3

a) Ako su λ_α i μ_β jedinični vremenski vektori, naći tenzor $p_{\alpha\beta}$ koji vrši projektovanje upravno na njihovu dvoravan.
b) Neka za isti λ_α vektor μ_β bude jedinični prostoran, ali ne i upravan na njemu.
c) Neka za isti λ_α vektor μ_β bude nulti.

Rešenje

Zadatak 1

2. Kretanje po inerciji

2.1 Geodezijske linije i kretanje po inerciji

S obzirom na infinitezimalnu metriku Sveta Minkovskog, razlikovaćemo tri vrste geodezijskih linija:

a) prostorno orijentisane,
b) vremenski orijentisane,
c) nulte.

Konačne jednačine prostorno orijentisanih geodezijskih linija jesu, kao i u definitnoj metrici, rešenja jednog sistema diferencijalnih jednačina drugog reda. Ove su, ustvari, transformisani oblik jednačina ekstremala, dobijenih varijacionim putem

$$\frac{\mathrm{d}^2x^\alpha}{\mathrm{d}s^2} + \Gamma^\alpha{}_{\beta\gamma}\frac{\mathrm{d}x^\beta}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}x^\gamma}{\mathrm{d}s} = 0, \tag{2.1}$$

uz uslov

$$g_{\alpha\beta}\frac{\mathrm{d}x^\alpha}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}x^\beta}{\mathrm{d}s} = 1,$$

gde je s dužina luka geodezijske linije, dok su koeficijenti

$$\Gamma^\alpha{}_{\beta\gamma} = g^{\alpha\delta}\Gamma_{\beta g,\delta} = \frac{1}{2}g^{\alpha\delta}\left(\frac{\partial g_{\gamma\delta}}{\partial x^\beta} + \frac{\partial g_{\beta\delta}}{\partial x^\gamma} - \frac{\partial g_{\beta\gamma}}{\partial x^\delta}\right). \tag{2.2}$$

Kristofelovi[1] simboli druge vrste. Uslov za pozitivnu definitnost elementarnog intervala (2.1) dobijamo iz osnovnog opredeljenja za signaturu naše metrike, izraženog jednačinom (1.2) .

Za vremenski orijentisane geodezijske linije biće

$$\frac{\mathrm{d}^2x^\alpha}{\mathrm{d}\tau^2} + \Gamma^\alpha{}_{\beta\gamma}\frac{\mathrm{d}x^\beta}{\mathrm{d}\tau}\frac{\mathrm{d}x^\gamma}{\mathrm{d}\tau} = 0 \tag{2.3}$$

[1] Christoffel

uz uslov

$$g_{\alpha\beta}\frac{dx^\alpha}{d\tau}\frac{dx^\beta}{d\tau} = -1.$$

Ostaje pitanje nultih geodezijskih linija. Tu se pojavljuje jedna teškoća. Ne možemo više uzeti dužinu ili proteklo vreme τ kao prametre, jer za nulte linije pojmovi dužine i trajanjegube smisao. Stoga ćemo posmatrati jedn vremensku geodezijsku liniju, i uvesti parametar $u = \tau/r$, gde je r neka proizvoljna konstanta. Uslov uz jednačine (2.3) će biti

$$g_{\alpha\beta}\frac{dx^\alpha}{du}\frac{dx^\beta}{du} = -r^2.$$

Ako pustimo τ i r da istovremeno teže nuli, tako da u postane neodređen izraz, vremenska geodezijska linija će težiti nultoj. Tako ćemo dobiti izraz

$$\frac{d^2x^\alpha}{du^2} + \Gamma^\alpha{}_{\beta\gamma}\frac{dx^\beta}{du}\frac{dx^\gamma}{du} = 0, \tag{2.4}$$

uz

$$g_{\alpha\beta}\frac{dx^\alpha}{du}\frac{dx^\beta}{du} = 0.$$

Podvlačimo činjenicu da diferencijalne jednačine geodezijskih linijaimaju oblike (2.1) i (2.3) u odnosu na **kanonske parametre**, među koje spada dužina. Ovako smo dobili kanonski oblik diferencijalnih jednačina i za nulte geodezijske linije. Svi kanonski parametri su linearne funkcije jedni drugih, pa će jednačine (2.4) zadržati oblik u odnosu na svaki drugi parametra u' zadan sa

$$u' = au + b. \tag{2.5}$$

Iskazaćemo osnovne postavke o kretanju po geodezijskim linijama:

1) *Svetska linija slobodne materijalne tačke koja se kreće po inerciji je vremenska geodezijska linija Sveta Minkovskog.*
2) *Svetska linija svetlosnog zraka u praznom prostoru je nulta geodezijska linija Sveta Minkovskog.*

Ove dve postavke iskazuju ustvari prvi Njutnov zakon u specijalnoj relativnosti.

S obzirom na pseudoeuklidski karakter metrike, koji izražava forma (1.7), Kristofelovi simboli u jednačinama (2.1), (2.3) i (2.4) biće jednaki nuli u odnosu na odgovarajući koordinatni sistem, pa ćemo imati sledeće konačne jednačine:

$$x^\alpha = a^\alpha s + b^\alpha, \quad a^i a^i - (a^4)^2 = 1, \tag{2.6}$$

$$x^\alpha = a^\alpha \tau + b^\alpha, \quad a^i a^i - (a^4)^2 = -1, \tag{2.6$'$}$$

$$x^\alpha = a^\alpha u + b^\alpha, \quad a^i a^i - (a^4)^2 = 0. \tag{2.6$''$}$$

U gornjim jedmačinama s i τ predstavljaju dužinu, odnosno proteklo vreme. Poredak događaja na nultoj pravoj izražen je, u jednakim intervalima, kanonskim parametrom u.

2.2 Brzina svetlosti

Osnovne postavke o geodezijskim linijama sadrže, ustvari, hipotezu da je brzina svetlosti u praznom prostoru najveća moguća. Posmatrajmo svetlosni zrak koji putuje u vakuumu, u pravcima datim baznim vektorima prostornih Dekartovih osa. Imaćemo

$$(\Delta x^1)^2 + (\Delta x^2)^2 + (\Delta x^3)^2 - c^2(\Delta t)^2 = 0. \tag{2.7}$$

Upoređivanjem sa (1.5") vidimo da je $\Delta x^4 = c\Delta t$. Veza (2.7) jednaostavno kaže da je za svetlost $v = c$. Ako izvršimo linarnu transformaciju u vezi (2.6') dovešćemo osu x^4 do poklapanja s tom pravom, koja predstavlja svetsku liniju jedne materijalne tačke koja se kreće po inerciji. Njene konačne jednačine su tada

$$x^i = 0, \quad x^4 = a^4\tau + b^4.$$

Izbor koordinatnog početka i jedinice merenja $ct = a^4\tau + b^4$, daće nam, najzad

$$x^4 = ct.$$

Ovakav koordinatni sistem predstavlja **posmatračev inercijalni sistem**, jer smo $Ox^1x^2x^3x^4$ vezali za svetsku liniju kretanja po inerciji. Tok vremena u tom sistemu srazmeran je koordinati x^4 do na konstantni faktor, brzinu svetlosti. Stoga ćemo nulti konus nazvati **svetlosni konus**. Metrička forma u odnosu na jedan inercijalni sistem glasi

$$\varepsilon \mathrm{d}s^2 = (\mathrm{d}x^1)^2 + (\mathrm{d}x^2)^2 + (\mathrm{d}x^3)^2 - c^2(\mathrm{d}t)^2. \tag{2.8}$$

Nadalje ćemo obeležavati sa x^4 vremensku koordinatu (ukoliko se drugačije ne napomene). Ortogonalne inercijalne sisteme ćemo nazivati i **najpogodniji sistemi** u Svetu Minkovskog.

2.3 Galilejeva transformacija

U prethodnom odeljku smo rastumačili izbor vremenske ose jednog pravouglog sistema u Svetu specijalne relativnosti kao vezivanje nekog prostornog Dekartovog sistema za materijalnu tačku koja se kreće po inerciji. Vreme, mereno u takvom sistemu, može imati različite početne trenutke i jedinice. Od osnovnog je značaja zapažanje da svaka prirodna pojava koja u jednom inercijalnom sistemu, u odsustvu smetnje ili prinude, pravilno teče, daje jedno kanonsko meril toka vremena, kao što je ukazanu u Glavi 2.1.

Transformacije:

$$\begin{aligned} x'^k &= G^k_{\cdot s} x^s + b, \\ x'^4 &= x^4 + b^4, \end{aligned} \tag{2.9}$$

naziva se **Galilejeva transformacija**, koja zadovoljava uslove ortogonalnosti

$$G^k_{\cdot s} G^s_{\cdot t} = \delta^k_t, \quad \text{gde je } G^k_{\cdot s} = (G^s_{\cdot k})^{-1}, \text{ a } \delta^k_t \text{je Kronekerov simbol.} \tag{2.10}$$

Sistem čije se prostorne ose i tok vremena transformišu po formulama (2.9) uz uslov (2.10), nazivaju se **Galilejevi sistemi** ili posmatrači.

Iz (2.9) se vidida se prostorna transformacija sastoji u promenipočetka prostornog Dakartovog sistema, dok se vremenska osa preslikava na samu sebe izborom drugog početnog trenutka. Ne dolazi dakle do promene inercije posmatrača. Uslov (2.10), koji izražava ortogonalnost novog prostornog sistema, garantuje očuvanje uglova među osama i jedinica na njemu.

Ova transformacijaodržava interval svetske metrike. Akokvadrat prostornog intervala u odnosu na polazni sistem oveležimo sa $\mathrm{d}\sigma^2$, a vremenskog sa $\mathrm{d}\tau^2$, biće

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\sigma'^2 &= \delta_{rt}\, \mathrm{d}x'^r \mathrm{d}x'^t = \delta_{rt}\, G^r_{\cdot s} G^t_{\cdot \mu}\, \mathrm{d}x^s \mathrm{d}x^\mu \\ &= G_{ts} G^t_{\cdot \mu}\, \mathrm{d}x^s \mathrm{d}x^\mu = \delta_{s\mu}\, \mathrm{d}x^s \mathrm{d}x^\mu = \mathrm{d}\sigma^2, \\ \mathrm{d}\tau'^2 &= \mathrm{d}\tau^2. \end{aligned}$$

Otud

$$\mathrm{d}s'^2 = \varepsilon(\mathrm{d}\sigma'^2 - \mathrm{d}\tau'^2) = \varepsilon(\mathrm{d}\sigma^2 - \mathrm{d}\tau^2) = \mathrm{d}s^2.$$

Što je trebalo dokazati.

3. Lorencove transformacije

3.1 Transformacije ortogonalnih sistema

Pokazali smo, u prethodnom odeljku, da pri Galilejevoj transformaciji ostaje invarijantan $\mathrm{d}s^2$ Sveta Minkovskog. Postavimo sad pitanje nejopštije transformacije koja prevodi jedan ortogonalan posmatrački sistem u drugi, a da ostane očuvan kvadrat intervala svetske metrike

$$\Phi \equiv \varepsilon\, \mathrm{d}s^2 = \varepsilon\, \mathrm{d}s'^2. \tag{3.1}$$

Ovim je isključena promena signature, što potiče iz suštine našeg shvatanja metrike Sveta specijalne relativnosti. Dakle, relacija (3.1) povlači:

$$\begin{gathered} g_{\alpha\beta}\, \mathrm{d}x^\alpha \mathrm{d}x^\beta = g'_{\alpha\beta}\, \mathrm{d}x'^\alpha \mathrm{d}x'^\beta, \\ g_{ij} = g'_{ij} = \delta_{ij}, \quad g_{i4} = g'_{i4} = \delta_{i4}, \quad g_{44} = g'_{44} = -1. \end{gathered} \tag{3.2}$$

Ako formiramo koeficijente povezanosti u odnosu na naša dva sistema, dobićemo

$$\Gamma^\alpha{}_{\beta\gamma} = \Gamma^{\alpha'}{}_{\beta'\gamma'} = 0. \tag{3.3}$$

Kako njihov zakon transformacije glasi

$$\Gamma^\alpha{}_{\beta\gamma} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\alpha}\frac{\partial x'^\beta}{\partial x^\beta}\frac{\partial x'^\gamma}{\partial x^\gamma}\Gamma^{\alpha'}{}_{\beta'\gamma'} + \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\delta}\frac{\partial^2 x'^\delta}{\partial x^\beta \partial x^\gamma}$$

to zbog (3.3) sleduje

$$\frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\delta}\frac{\partial^2 x'^\delta}{\partial x^\beta \partial x^\gamma} = 0. \tag{3.4}$$

Zahtevamo da Jakobijan ove transformavije bude različit od nule

$$J = \left\| \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{\delta}} \right\| \neq 0,$$

i zaključujemo da za svaki utvrđeni par indeksa β, γ, (3.4) predstavlja homogeni sistem linearnih jednačina s koeficijentom $\dfrac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{\delta}}$, pa imamo

$$\frac{\partial^2 x'^{\delta}}{\partial x^{\beta} \partial x^{\gamma}} = 0 \tag{3.5}$$

menjajući β, γ, δ' dobije se sistem diferencijalnih jednačina sa očiglednim rešenjima

$$x'^{\delta} = L^{\delta}_{\cdot\gamma} x^{\gamma} + L^{\delta}, \tag{3.6}$$

ili **Lorencova transformacija je linearna**. Ako je primenimo na vektor koordinatnih razlika $\Delta x'^{\delta}$, imaćemo

$$\Delta x'^{\delta} = L^{\delta}_{\cdot\gamma} \Delta x^{\gamma} \tag{3.6$'$}$$

Transformacija (3.6$'$) izražava $(\vec{x}) \to (\vec{x'})$. Za inverznu transformaciju $(\vec{x'}) \to (\vec{x})$ ćemo imati

$$\Delta x^{\gamma} = L_{\varepsilon\cdot}^{\cdot\gamma} \Delta x'^{\varepsilon}. \tag{3.6$''$}$$

S obzirom na ortogonalnost oba sistema i linearnost transformacije, matrica (L) će zadovoljavati sledeći uslov

$$(L^{\varepsilon}_{\cdot\gamma}) = (L_{\varepsilon\cdot}^{\cdot\gamma})',$$

gde simbol $'$ označava transpoziciju. Pošto proizvod direktne transformacije (3.6$'$) i inverzne (3.6$''$) vodi identičnosti, biće

$$L^{\delta}_{\cdot\gamma} L_{\varepsilon\cdot}^{\cdot\gamma} = \delta^{\delta}_{\varepsilon}. \tag{3.7}$$

Vidimo da $L^{\alpha}_{\cdot\beta}$ ima svojstvo matrice ortogonalne transformacije u Svetu Minkovskog. Ona najšire transformiše ortogonalne posmatračke sisteme, dok je Galilejeva transformacija (2.9) transformisala posmatračke sisteme bez promene inercije, to jest vremenske ose. Relacija (3.6) se od (3.6$'$) razlikuje po konstantama integracije L^{γ}, koje imaju smisao pomeranja koordinatnog početka, to jest izbora različitih događaja za početak posmatračkog sistema. Na dalje ćemo pod Lorencovim transformacijama podrazumevati samo one koje su homogene. Ortogonalne posmatračke sisteme u Svetu Minkovskognazivaćemo i **Lorencovi sistemi**.

Iz (3.7) imamo, za determinantu transformacije

$$\left\| L_{\cdot\beta}^{\alpha} \right\| = \pm 1. \tag{3.8}$$

Lorencove transformacije delimo na **svojstvene** i **nesvojstvene**, već prema tome da li je determinanta (3.8) pozitivna ili negativna.

Svojstvena Lorencova transformacija sadrži identičnost $x'^{\alpha} = x^{\alpha}$. Ali među svojstvenim transformacijama postoje i takve koje <u>ne sadrže identičnost</u>, već vrše ogledanje svih osa $x'^{\alpha} = -x^{\alpha}$. Promena orijentacije prostornih osa naziva se **promena partiteta**, dok se promena orijentacije vremenske ose naziva **inverzija toka vremena** ili **ortohronost**.

Nesvojstvene Lorencove transformacije ne sadrže identičnost. One mogu biti ili ortohrone uz promenu paritete, ili neortohrone uz očuvanje pariteta.

Matematička fizika bavi se razmatranjem ove četiri varijante Lorencovih transformacija otkako su 1957 god. Li[1] i Jang[2] prvi put teorijski ustanovili narušavanje partiteta pri nekim radioaktivnim pojavama, dok se osnovano veruje da bi tada mogla nastupiti i inverzija toka vremena, odnosno neortohronost, što je velika

[1] Lee
[2] Yang

promena za klasičnu relativnost. Mi ćemo se ograničiti u ovom kursu, na svojstvene ortohrone Lorencove transformacije.

Imamo već činjenicu da za Lorencovu transformaciju postoji inverzna, što je dato odnosom veza (3.6′) i (3.6″). Videli smo i to da je identičnost sadržana među svojstvenim ortogonalnim transformacijama. Ostaje nam da dokažemo da je proizvod dve Lorencove transformacije takođe Lorencova transformacija, da bismo za nju utvrdili sva svojstva grupe. Podvrgnimo stoga vektor $\vec{x}(x^1, x^2, x^3, x^4)$ dvema uzastopnim transformacijama

$$\begin{aligned} \vec{x} \to \vec{x'} \quad &: \quad x'^{\beta} = L_{\cdot\alpha}^{\;\beta} x^{\alpha}, \\ \vec{x'} \to \vec{x''} \quad &: \quad x''^{\gamma} = L'^{\;\gamma}_{\cdot\beta} x'^{\beta}. \end{aligned} \tag{3.9}$$

Proizvod operacija (3.9) pisaćemo

$$x''^{\gamma} = L'^{\;\gamma}_{\cdot\beta} L_{\cdot\alpha}^{\;\beta} x^{\alpha} = L''^{\gamma}_{\cdot\alpha} x^{\alpha}. \tag{3.9′}$$

S obzirom na to da se jedno od sabiranja vrši po indeksima vrste, a drugo po indeksima kolona, izmena reda pisanja matrica ne menja rezultat:

$$\begin{aligned} \bar{\bar{L}}^{\gamma}_{\cdot\alpha} \bar{\bar{L}}_{\gamma\cdot}^{\;\varepsilon} &= \bar{L}^{\gamma}_{\cdot\beta} L^{\beta}_{\cdot\alpha} \bar{L}_{\gamma\cdot}^{\;\delta} L_{\delta\cdot}^{\;\varepsilon} = \\ &= \bar{L}^{\gamma}_{\cdot\beta} \bar{L}_{\gamma\cdot}^{\;\delta} L^{\beta}_{\cdot\alpha} L_{\delta\cdot}^{\;\varepsilon} = \\ &= \delta^{\delta}_{\beta} L^{\beta}_{\cdot\alpha} L_{\delta\cdot}^{\;\varepsilon} = \delta^{\varepsilon}_{\alpha}. \end{aligned} \tag{3.10}$$

Odavde sleduje da je transformacija $\vec{x} \to \vec{\bar{\bar{x}}}$ takođe Lorencova. Dakle, možemo da zaključimo da je *Lorencove transformacije čine transformacionu grupu.*

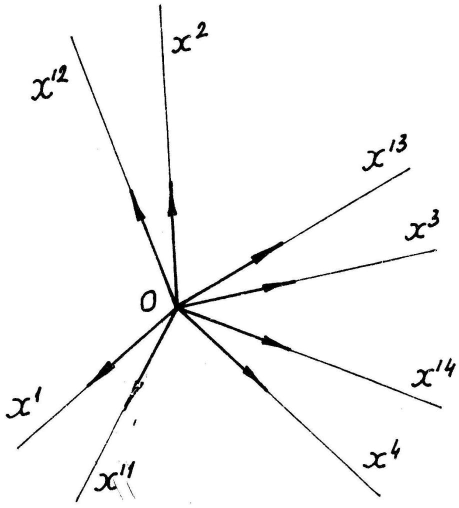
Primetimo da svojstvene Lorencove transformacije, s obzirom na to da sadrže identičnost, i same čine grupu. Nehomogene transformacije (3.6) čine **Poenkarovu**[3] **grupu**.

3.2 Vektorske baze i Lorencove transformacije

Uzmimo dva Lorencova sistema $Ox^1x^2x^3x^4$ i $O\bar{x}^1\bar{x}^2\bar{x}^3\bar{x}^4$ (kraće Ox i $O\bar{x}$) sa odgovarajućim ortonormiranim vektorskim bazama $\vec{V}_{(1)}, \vec{V}_{(2)}, \vec{V}_{(3)}, \vec{V}_{(4)}$ i $\vec{\bar{V}}_{(1)}, \vec{\bar{V}}_{(2)}, \vec{\bar{V}}_{(3)}, \vec{\bar{V}}_{(4)}$. Kontravarijantne koordinatejedne i druge baze u odnosu na neki treći Lorencov sistem $Oy^1y^2y^3y^4$ (kraće Oy) obeležićemo sa $V^{\alpha}_{(\gamma)}$, $\bar{V}^{\alpha}_{(\gamma)}$ $(\alpha, \gamma = 1,2,3,4)$. Vektori svake od ove dve baze, izraženi u svojim sistemima (3.1), glase:

$$\begin{array}{llll} O_x & V^{\alpha}_{(1)}(1,0,0,0), & \bar{O}_x & \bar{V}^{\alpha}_{(1)}(1,0,0,0), \\ & V^{\alpha}_{(2)}(0,1,0,0), & & \bar{V}^{\alpha}_{(2)}(0,1,0,0), \\ & V^{\alpha}_{(3)}(0,0,1,0), & & \bar{V}^{\alpha}_{(3)}(0,0,1,0), \\ & V^{\alpha}_{(4)}(0,0,0,1), & & \bar{V}^{\alpha}_{(4)}(0,0,0,1), \end{array} \tag{3.11}$$

[3] Poincaré



Slika 3.1: Dva Lorencova sistema - Dve baze.

Razume se da ni jedna od ove dve baze nema, u opštem slučaju, dijagonalan oblik u sistemu Oy. Potražimo u odnosu na Oy, izraze za $\vec{\bar{V}}_{(\gamma)}$, posredstvom $\vec{V}_{(\gamma)}$. Primenom obrasca (1.31), za razlaganje vektora u Svetu Minkovskog, dobićemo:

$$\begin{aligned}
\bar{V}_{(1)\alpha} &= \bar{V}^{\beta}_{(1)}V_{(1)\beta}V_{(1)\alpha} + \bar{V}^{\beta}_{(1)}V_{(2)\beta}V_{(2)\alpha} + \bar{V}^{\beta}_{(1)}V_{(3)\beta}V_{(3)\alpha} - \bar{V}^{\beta}_{(1)}V_{(4)\beta}V_{(4)\alpha},\\
\bar{V}_{(2)\alpha} &= \bar{V}^{\beta}_{(2)}V_{(1)\beta}V_{(1)\alpha} + \bar{V}^{\beta}_{(2)}V_{(2)\beta}V_{(2)\alpha} + \bar{V}^{\beta}_{(2)}V_{(3)\beta}V_{(3)\alpha} - \bar{V}^{\beta}_{(2)}V_{(4)\beta}V_{(4)\alpha}\\
\bar{V}_{(3)\alpha} &= \bar{V}^{\beta}_{(3)}V_{(1)\beta}V_{(1)\alpha} + \bar{V}^{\beta}_{(3)}V_{(2)\beta}V_{(2)\alpha} + \bar{V}^{\beta}_{(3)}V_{(3)\beta}V_{(3)\alpha} - \bar{V}^{\beta}_{(3)}V_{(4)\beta}V_{(4)\alpha}\\
\bar{V}_{(4)\alpha} &= \bar{V}^{\beta}_{(4)}V_{(1)\beta}V_{(1)\alpha} + \bar{V}^{\beta}_{(4)}V_{(2)\beta}V_{(2)\alpha} + \bar{V}^{\beta}_{(4)}V_{(3)\beta}V_{(3)\alpha} - \bar{V}^{\beta}_{(4)}V_{(4)\beta}V_{(4)\alpha}.
\end{aligned} \tag{3.12}$$

Kako indeksi u zagradama označavaju redni broj vektora iz pojedine baze, imamo:

$$V_{(\gamma)\alpha} \equiv V^{(\gamma)}_{\alpha}, \quad \bar{V}_{(\gamma)\alpha} \equiv \bar{V}^{(\gamma)}_{\alpha}. \tag{3.13}$$

Koristićemo jedan ili drugi oblik već prema potrebi ili pogodnosti pisanja.

S obzirom na to da smo $\vec{V}_{(\gamma)}$ i $\vec{\bar{V}}_{(\gamma)}$ razlagali u odnosu na Oy, vektor položaja $\vec{x}$, odnosno $\vec{\bar{x}}$, izražen po koordinatama, glasi:

$$x^{\gamma} = V^{(\gamma)}_{\beta} y^{\beta}, \quad \bar{x}^{\gamma} = \bar{V}^{(\gamma)}_{\beta} y^{\beta} \tag{3.14}$$

Ako skalarno pomnožimo (3.12) sa y^{α}, koristeći (3.14), dobićemo

$$\bar{x}^{\gamma} = \bar{V}^{(\gamma)}_{\alpha} V^{\alpha}_{(i)} x^i - \bar{V}^{(\gamma)}_{\alpha} V^{\alpha}_{(4)} x^4. \tag{3.15}$$

Ovo predstavlja Lorencove transformacije $(\vec{x}) \to (\vec{\bar{x}})$. Pomoću simboličkih vektorskih oznaka matrica transformacije glasi

$$(L^{\alpha}_{\cdot\beta}) = \begin{pmatrix}
\vec{\bar{V}}^{(1)}\vec{V}_{(1)} & \vec{\bar{V}}^{(1)}\vec{V}_{(2)} & \vec{\bar{V}}^{(1)}\vec{V}_{(3)} & -\vec{\bar{V}}^{(1)}\vec{V}_{(4)}\\
\vec{\bar{V}}^{(2)}\vec{V}_{(1)} & \vec{\bar{V}}^{(2)}\vec{V}_{(2)} & \vec{\bar{V}}^{(2)}\vec{V}_{(3)} & -\vec{\bar{V}}^{(2)}\vec{V}_{(4)}\\
\vec{\bar{V}}^{(3)}\vec{V}_{(1)} & \vec{\bar{V}}^{(3)}\vec{V}_{(2)} & \vec{\bar{V}}^{(3)}\vec{V}_{(3)} & -\vec{\bar{V}}^{(3)}\vec{V}_{(4)}\\
\vec{\bar{V}}^{(4)}\vec{V}_{(1)} & \vec{\bar{V}}^{(4)}\vec{V}_{(2)} & \vec{\bar{V}}^{(4)}\vec{V}_{(3)} & -\vec{\bar{V}}^{(4)}\vec{V}_{(4)}
\end{pmatrix} \tag{3.16}$$

S obzirom na to da su vektorske baze ortogonalne, što izražavaju veze (3.11), imaćemo, na osnovu prvog niza uslova:

$$\vec{V}_{(i)} \cdot \vec{V}_{(i)} = 1, \quad \vec{V}_{(i)} \cdot \vec{V}_{(i)} = -1, \quad \vec{V}_{(\alpha)} \cdot \vec{V}_{(\beta)} = 0, \quad (\alpha \neq \beta). \tag{3.17}$$

Pretpostavimo, za trenutak, da je transformacija (3.12) prevela ortonormiranu bazu $\vec{V}_{(\gamma)}$ u neku proizvoljnu bazu $\vec{\bar{V}}_{(\gamma)}$. Tada bi svih 16 elemenata matrice (3.16) bilo proizvoljno. Međutim, pošto zahtevamo da i nova baza bude ortonormirana, što izražava druga grupa uslova (3.11), imaćemo:

$$\vec{\bar{V}}_{(i)} \cdot \vec{\bar{V}}_{(i)} = 1, \quad \vec{\bar{V}}_{(i)} \cdot \vec{\bar{V}}_{(i)} = -1, \quad \vec{\bar{V}}_{(\alpha)} \cdot \vec{\bar{V}}_{(\beta)} = 0, \quad (\alpha \neq \beta). \tag{3.18}$$

Ovo predstavlja ukupno 10 uslova, pa izlazi da je i proizvoljnost u matrici (3.16) svedena na najviše šestparametara transformacije. Dakle **homogene Lorencove transformacije obrazuju šestoparametarsku grupu**.

Ostaje nam još da pogledamo na kakve se inercijalne sistememogu odnositi Lorencove transformacije. One ustvarizahtevaju jedino invarijantnost intervala (3.1), to jest očuvanje ravnog karaktera metrike Minkovskog i njenih prostornih, vremenskih i nultih pravaca. Mi smo se ograničili na one transformacije koje prevode jednu ortonormiranu bazu u drugu bazu, takođe ortonormiranu. Postoje i vektorske baze koje povezuje takozvana **singularna Lorencova transformacija**. Ona se sastoji iz dva nulta i dva prostorna vektora, koji su ortogonalni jedanna rdugom i na nultim vektorima. Transformacija prevodi nulte vektore u sebe same, a prostorne vektore u druge prostorne vektore, tako da nova baza ima ista svojstva kao i prethodna. Nećemo se zadržavati na takvim konačnim transformacijama (videti J. Synge, [6], str. 102-107 i 434-437).

3.3 Infinitezimalne Lorencove transformacije

Lorencove transformacije smo izučavali samo u slučaju da su konačne, to jest da su uglovi između osa starog i novog sistema konačne veličine. Posmatrajmo sad Lorencove transformacije koje prevode jedan posmatrački sistem u njemubeskonačno bliski. To ćemo iskazati time što ćemo koeficijente transformacije podvrgnuti uslovu

$$L^{\alpha}_{\cdot\beta} = \delta^{\alpha}_{\beta} + \lambda^{\alpha}_{\cdot\beta} + O^{\alpha}_{\cdot\beta}(\lambda^2) \tag{3.19}$$

($O^{\alpha}_{\cdot\beta}$ je sistem funkcija ostataka).

Veličine $\lambda_{\alpha\beta}$ su parametri ove infinitezimalne transformacije, po kojima ćemo linearizovati koeficijente $L^{\alpha}_{\cdot\beta}$ u gornjoj formuli. Lorencove transformacije, bilo konačne, kakve smo prethodno izučavali, ili infinitezimalne, su **ortogonalne**, što izražava uslov (3.7). Imaćemo dakle

$$(\delta^{\alpha}_{\beta} + \lambda^{\alpha}_{\cdot\beta})(\delta^{\beta}_{\gamma} + \lambda^{\beta}_{\cdot\gamma}) = \delta^{\alpha}_{\gamma}. \tag{3.20}$$

S obzirom na to da odbacujemo članove koji su kvadratni po λ, imaćemo iz (3.20), posle spuštanja indeksa

$$\lambda_{\gamma\delta} + \lambda_{\delta\gamma} = 0. \tag{3.21}$$

Dakle, parametri $\lambda_{\alpha\beta}$, infinitezimalne Lorencove transformacije, su simetrični. S obzirom na to da indeksi idu od 1 do 4, biće najviše šest nezavisnih među njima, što je u skladu s utvrđenjim svojstvima te grupe. Na osnovu (3.19) ova transformacija eksplicitno glasi

$$\delta x^{\alpha} = x^{\alpha} + \lambda^{\alpha}_{\cdot\beta} x^{\beta}. \tag{3.22}$$

Veze (3.22) znače da transformacija $\vec{x} \to \vec{\bar{x}}$ prevodi bilo koje vektore Sveta Minkovskog u drugi, koji predstavlja beskonačno blisku linearnu kombinaciju njegovih komponenti. Ako uzmemo vektorska polja x^{α} i $x^{\alpha} + \lambda^{\alpha}_{\cdot\beta} x^{\beta}$ u odnosu na <u>isti</u> posmatrački sistemm, biće

$$g_{\alpha\beta} x^{\alpha} x^{\beta} = g_{\alpha\beta} x^{\alpha} \bar{x}^{\beta} \tag{3.23}$$

zbog antisimetričnosti parametra $\lambda_{\alpha\beta}$. Ako dakle, Lorencovu transformaciju ne tumačimo kao infinitezimalnu promenu osa ortogonalnog sistema, već kao prelazak jednog polja vektora položaja u drugo, beskonačno blisko, *u odnosu na istog posmatrača*, vektori x^{α} i $\bar{x}^{\alpha}$ zadovoljavaće vezu (3.23)

Ako posle (3.22) izvršimo još jednu infinitezimaln transformaciju, s parametrom $\bar{\lambda}_{\cdot\sigma}^{\varphi}$

$$\bar{\bar{x}}^{\alpha} = \bar{x}^{\alpha} + \bar{\lambda}_{\cdot\beta}^{\alpha}\bar{x}^{\beta},$$

imaćemo, s obzirom na ono što je prethodno navedeno

$$g_{\alpha\beta}x^{\alpha}\bar{x}^{\beta} = g_{\alpha\beta}x^{\alpha}\bar{\bar{x}}^{\beta} = g_{\alpha\beta}\bar{x}^{\alpha}\bar{\bar{x}}^{\beta}.$$

Budući da svaki konačni zbir proizvoda parametara $\lambda_{\cdot\beta}^{(k)\alpha}$ predstavlja zanemarljivi ostatak, dok se ostali članovi ponište zbog antisimetrije, imaćemo uopšte za infinitezimalne Lorencove transformacije

$$g_{\alpha\beta}x^{\alpha}x^{\beta} = g_{\alpha\beta}x^{(k)\alpha}x^{(l)\beta}, \quad (k,l = 0,1,\dots). \tag{3.23$'$}$$

Proučićemo algebarski infinitezimalnu Lorencovu transformaciju, polazeći od njenih sopstvenih vektora, to jest od sverskih pravaca koji ostaju nepromenjeni pod njenim dejstvom.

Uslov da pri transformaciji jedan vektor pređe u njemu beskonačno bliski kolinearni vektor, glasi, na osnovu (3.22)

$$\bar{x}^{\alpha} = (1+\varphi)x^{\alpha} = (\delta_{\beta}^{\alpha} + \lambda_{\cdot\beta}^{\alpha})x^{\beta},$$

odnosno

$$\varphi x^{\alpha} = \lambda_{\cdot\beta}^{\alpha}x^{\beta}. \tag{3.24}$$

Iz ove veze zaključujemo da traženi vektor x^{α} postoji za sve vrednosti φ koje zadovoljavaju karakterističnu jednačinu

$$\|\lambda_{\alpha\beta} - \varphi g_{\alpha\beta}\| = 0, \tag{3.25}$$

koja u razvijenom obliku glasi

$$\varphi^4 - \left(\lambda_{12}^2 + \lambda_{23}^2 + \lambda_{31}^2 - \lambda_{14}^2 - \lambda_{24}^2 - \lambda_{34}^2\right)\varphi^2 - (\lambda_{12}\lambda_{34} + \lambda_{23}\lambda_{14} + \lambda_{31}\lambda_{24}) = 0. \tag{3.25$'$}$$

Ako stavimo

$$\begin{aligned} 2P &= \lambda_{12}^2 + \lambda_{23}^2 + \lambda_{31}^2 - \lambda_{14}^2 - \lambda_{24}^2 - \lambda_{34}^2, \\ Q &= \lambda_{12}\lambda_{34} + \lambda_{23}\lambda_{14} + \lambda_{31}\lambda_{24}, \end{aligned} \tag{3.26}$$

imaćemo rešenja bikvadratne jednačine (3.25′) u obliku

$$\varphi^2 = P \pm \sqrt{P^2 + Q^2}. \tag{3.27}$$

Za proizvoljno $P \neq 0$ i $Q \neq 0$ svi su koreni različiti od nule, i to dva realna, a dva imaginarna. Za $Q = 0$ dva su korena jednaka nuli, a dva mogu biti realna ili imaginarna. Za $P = Q = 0$ svi su koreni jednaki nuli. Kad su koreni različiti od nule, oni su različiti među sobom i suprotnih znakova po parovima.

Imaginarnim korenima odgovaraju kompleksni sopstvenivektori, što znači da za te vrednosti φ ni jedan pravac u Svetu Minkovskog.

a) Za realne sopstvene korene različite od nule biće, na osnovu (3.24)

$$\varphi g_{\alpha\beta}x^{\alpha}x^{\beta} = \lambda_{\alpha\beta}x^{\alpha}x^{\beta} = 0 \quad \Rightarrow \quad g_{\alpha\beta}x^{\alpha}x^{\beta} = 0. \tag{3.28}$$

Sopstveni vektori $x_{(i)}^{\alpha}$ kojiodgovaraju ovakvim vrednostima φ su, dakle, različiti međusobnom, i pripadaju svetlosnom konusu. Na osnovu prethodnog ih ne možebiti više od dva. Iz formulekoje daje $(x_{(i)}^{\alpha}) \to (\bar{x}_{(i)}^{\alpha})$, $(i = 1,2)$ vidimo da koordinate tij sopstvenih vektorabivaju za jednog uvećane, a za drugog umanjenog u istoj srazmeri, s koeficijentima $\pm\varphi$.

b) Ako su dva korena jednaka nuli, biće, iz (3.24)

$$\lambda_{\alpha\beta x^\beta = 0},$$

to jest

$$\begin{aligned} \lambda_{12}x^2 + \lambda_{13}x^3 + \lambda_{11}x^4 &= 0, \\ -\lambda_{21}x^1 + \lambda_{23}x^3 + \lambda_{24}x^4 &= 0, \\ -\lambda_{31}x^1 - \lambda_{32}x^2 + \lambda_{34}x^4 &= 0, \\ -\lambda_{41}x^4 - \lambda_{42}x^3 - \lambda_{43}x^4 &= 0, \end{aligned} \tag{3.29}$$

a to važi, kao što smo utvrdili, akko je $Q = 0$. S obzirom na antisimetriju matrice koeficijenata $\lambda_{\alpha\beta}$ njen rang mora biti paran. On ne može biti jednak 4, zbog gorenje veze, a u slučaju da je O svi su koeficijenti jednaki nuli, pa imamo identičnost. Ostaje slučaj je njen rang 2, što značida postoji neka dvoravan čiji su vektori invarijantni pod dejstvom ove transformacije. Ako je pritom i $P < 0$ nema drugih invarijantnih vektora. Ako je $P > 0$ postoje, pored ove invarijantne dvoravni, još dva invarijantna vektora nultog konusa, kao što smo pokazali.

c) Ako su sva četiri korena jednaka nuli, za $P = Q = 0$, nastupa takozvani **singularni slučaj**, za koji postoji opet samo jedna invarijantna dvoravan data sa (3.29).

Kako je slučaj a) razjašnjen, proučićemo slučajeve b) i c) da bismo utvrdili kako stoji karakteristična invarijantna dvoravan, koju imamo za $Q = 0$, prema nultom konusu posmatranog događaja. U tom cilju koristićemo jednostavne i pogodne operacije simboličkog vektorskog računa. Pretpostavimo da su bazni jedinični vektori u našem koordinatnom sistemu bili $\vec{V}_{(1)}, \vec{V}_{(2)}, \vec{V}_{(3)}, \vec{V}_{(4)}$. Izvršimo ortogonalnu transformaciju $(\vec{V}_{(\alpha)}) \to (\vec{\bar{V}}_{(\alpha)})$:

$$\begin{aligned} e\vec{\bar{V}}_{(1)} &= \lambda_{14}\vec{V}_{(1)} + \lambda_{24}\vec{V}_{(2)} + \lambda_{34}\vec{V}_{(3)}, \\ h\vec{\bar{V}}_{(2)} &= \lambda_{23}\vec{V}_{(1)} + \lambda_{31}\vec{V}_{(2)} + \lambda_{12}\vec{V}_{(3)}, \\ \vec{\bar{V}}_{(3)} &= \alpha\vec{V}_{(1)} + \beta\vec{V}_{(2)} + \alpha\gamma\vec{V}_{(3)}, \\ \vec{\bar{V}}_{(4)} &= \vec{V}_{(4)} \end{aligned} \tag{3.30}$$

Ovde smo stavili

$$\left.\begin{aligned} e^2 =& \lambda_{14}^2 + \lambda_{24}^2 + \lambda_{34}^2 \\ h^2 =& \lambda_{12}^2 + \lambda_{23}^2 + \lambda_{31}^2 \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad -2P = e^2 - h^2. \tag{3.31}$$

Vektori $\vec{\bar{V}}_{(1)}$ i $\vec{\bar{V}}_{(2)}$ su uzajamno ortogonalni na osnovu uslova

$$Q = \lambda_{12}\lambda_{34} + \lambda_{23}\lambda_{14} + \lambda_{31}\lambda_{24} = 0.$$

Koeficijente α, β, γ treba izabrati tako da $\vec{\bar{V}}_{(3)}$ bude ortogonalan na $\vec{\bar{V}}_{(1)}$ i $\vec{\bar{V}}_{(2)}$ i da ima jedinični intenzitet, dok su sva tri očigledno ortogonalna na $\vec{\bar{V}}_{(4)}$. To je ustvari jedna Galilejeva transformacija, odnosno Lorencova transformacijabez promene vremenske ose sistema (videti Poglavlje 2.3, str. 29). Vektor $\vec{x}$ predstavlja "geometrijsku"invarijantu u smislu da je

$$\vec{x} = x^\alpha \vec{V}_{(\alpha)} = \bar{x}^\alpha \vec{\bar{V}}_{(\alpha)} \quad \Rightarrow \quad x^4 = \bar{x}^4.$$

Vratimo se jeednačinama (3.29). Ako prve tri redom izmnožimo sa $\vec{V}_{(1)}$, $\vec{V}_{(2)}$, $\vec{V}_{(3)}$ i rezultat saberemo, imaćemo, napisanopomoću simbolične detrminante

$$\begin{vmatrix} \vec{V}_{(1)} & \vec{V}_{(2)} & \vec{V}_{(3)} \\ x^1 & x^2 & x^3 \\ \lambda_{23} & \lambda_{31} & \lambda_{12} \end{vmatrix} = -e\bar{x}^4 \vec{\bar{V}}_{(1)}. \tag{3.32}$$

Izrazimo linearnu kombinaciju vektora na levoj strani gornje formule pomoću $\vec{\bar{V}}_{(1)}$, $\vec{\bar{V}}_{(2)}$, $\vec{\bar{V}}_{(3)}$. Prvo videćemo da je, kad skalarno pomnožimo (3.30) sa $\vec{x}$, a na osnovu poslednje veze (3.29), u novom sistemu $\bar{x}^1 = 0$. Zatim, vektor koji je u bazi $\vec{V}_{(\alpha)}$ imamo komponente $(\lambda_{23}, \lambda_{31}, \lambda_{12}, 0)$ imaće u novoj bazi, na osnovu druge jednačine (3.30), komponente $(0, h, 0, 0)$. Dobićemo dakle, kad simbolički vektor na levoj strani (3.32) razložimo u novoj bazi

$$-e\bar{x}^4\vec{\bar{V}}_{(1)} = \begin{vmatrix} \vec{\bar{V}}_{(1)} & \vec{\bar{V}}_{(2)} & \vec{\bar{V}}_{(3)} \\ 0 & \bar{x}^2 & \bar{x}^3 \\ 0 & h & 0 \end{vmatrix} = -h\bar{x}^3\vec{\bar{V}}_{(1)}.$$

Vidimo da je karakteristična dvoravan u transformisanom sistemu zadata jednačinama:

$$\begin{aligned} \bar{x}^1 &= 0, \\ \bar{x}^3 &= \frac{e}{h}\bar{x}^4. \end{aligned} \tag{3.33}$$

Uzmimo neki proizvoljni vektor na toj dvoravni. Kvadrat njegovog intenziteta je, prema prethodnom

$$g_{\alpha\beta}\bar{x}^\alpha\bar{x}^\beta = \left(\bar{x}^2\right)^2 + \left(\bar{x}^4\right)^2 (e^2/h^2 - 1). \tag{3.34}$$

Ovde mogu da nastupe tri slučaja. Prva dva važe za uslov b), a treći za c).

1) Ako je uz b) $P < 0$, odnosno na osnovu (3.31) $e > h$, karakteristična dvoravanje prostorno orijentisana. Ona je punktualno invarijantna, to jest svi njeni vektori su nepromenjeni pod dejstvom transformacije. Drugih invarijantnih pravaca nema.
2) Ako je uz b) $P > 0$, odnosno $e < h$, karakteristična dvoravan je vremenski orijentisana i takođe punktualno invarijantna. Kao što je navedeno u b), tada postoje i dva vektora svetlosnog konusa koji su invarijantni po pravcu.
3) Ako je $P = 0$, odnosno $e = h$, nastupa singularni slučaj pod c). Karakteristična dvoravan postaje nulta. Ona tangira svetlosni konus duž linije $\bar{x}^2 = 0$.

Sva računica sprovedena u ovom odeljku važi za karakteristične vektore bilo kojeg antisimetričnog tenzora drugog reda u Svetu Minkovskog. Kasnije ćemo $\vec{e}$ i $\vec{h}$ tumačiti kao vektore električnog i magnetnog polja.

Podsetimo se samo da smo pri kraju prethodnog odeljkapomenuli konačnu singularnu Lorencovu transformaciju, koja je analogna slučaju a) infinitezimalne transformacije.

3.4 Jednostavna Lorencova transformacija

Vratimo se konačnim Lorencovim transformacijama.

Pod **jednostavnom Lorencovom transformacijom** podrazumevamo onu koja dejstvuje na koordinatne ose koje leže samo u jednoj od tri vremenske dvoravni određene vremenskim i po jednim od prostornih baznih vektora. Ta transformacija ima, dakle, samo jedan stepen slobode. To je oblik u kojem se ona najčešćekoristi u fizici. Ovakva transformacija je dovoljna da bi se utvrdile bitne posledice koje iz nje proističu, a može bitiproširena Galilejevom transformacijom prostornih osa i takodovedena u opšti oblik koji smo razmatrali u Glavi 3.1, od str. 31.

Uzmimo da se transformacija vrši u ravni prostornog baznog vektora $\vec{V}_{(1)}$ i vremenskog $\vec{V}_{(4)}$. Ta "kvazirotacija", izražena pomoću baznih vektora, glasi:

$$\begin{aligned} \vec{\bar{V}}_{(1)} &= \vec{V}_{(1)}\,\mathrm{ch}\,\theta + \vec{V}_{(4)}\,\mathrm{sh}\,\theta, \\ \vec{\bar{V}}_{(2)} &= \vec{V}_{(2)}, \\ \vec{\bar{V}}_{(3)} &= \vec{V}_{(3)}, \\ \vec{\bar{V}}_{(4)} &= \vec{V}_{(4)}\,\mathrm{sh}\,\theta + \vec{V}_{(4)}\,\mathrm{ch}\,\theta. \end{aligned} \tag{3.35}$$

Može se odmah proveriti da ona zadovoljava uslove ortogonalnosti (3.17). Na osnovu (3.16) ćemo imati:

$$\begin{aligned} &L^1_{\cdot 1} = \operatorname{ch}\theta, \quad L^1_{\cdot 1} = \operatorname{sh}\theta, \\ &L^4_{\cdot 1} = \operatorname{sh}\theta, \quad L^4_{\cdot 4} = \operatorname{ch}\theta, \\ &L^2_{\cdot 2} = L^3_{\cdot 3} = 1, \end{aligned} \tag{3.36}$$

Ostali koeficijenti matrice transformacije jednaki su nuli. Kako je $x^4 = ct$, imaćemo, ako redom zamenimo x^i sa x, y, z, sledeće obrasce za transformacije koordinata:

$$\begin{aligned} \bar{x} &= x \operatorname{ch}\theta + ct \operatorname{sh}\theta, \\ \bar{y} &= y, \\ \bar{z} &= z, \\ c\bar{t} &= x \operatorname{sh}\theta + ct \operatorname{ch}\theta. \end{aligned} \tag{3.37}$$

Budući da su ose y i z nepromenjene, treba da nađemo kinematički smisao ove transformacije $(x,t) \to (\bar{x},\bar{t})$. Zamislimojednu materijalnu tačku u koordinatnom početku Galilejevog sistema $\bar{S}(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$ u relativnom miru prema njemu. Za nju

$$\mathrm{d}\bar{x} = \mathrm{d}\bar{y} = \mathrm{d}\bar{z} = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}y = \mathrm{d}z = 0, \quad \operatorname{ch}\theta \mathrm{d}x + c \operatorname{sh}\theta \, \mathrm{d}t = 0.$$

Otud

$$v = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -c \operatorname{th}\theta. \tag{3.38}$$

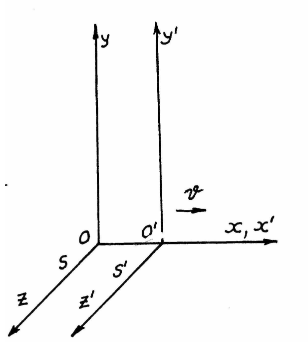
Dakle, brzina kretanja koordinatnog početka $\bar{S}$ prema S, podeljena brzinom svetlosti, daje nam hiperbolički tanges ugla ”kvazirotacije”u zajedničkoj koordinatnoj dvoravni (x,t), odnosno $(\bar{x},\bar{t})$. Kako je za određenu transformaciju $\theta = \text{const.}$ sledi da i v mora biti konstantno, inače bi se koordinatne ose krivile jedna prema drugoj (i očuvanje ravnog karaktera metrike došlo bi u pitanje). U tom je duboka opravdanost uslova neubrzanog kretanja posmatračkih sistema, to jest zahteva da sesvi događaji u specijalnoj relativnosti posmatraju u odnosu na inercijalne sisteme.

Na osnovu (3.38) imamo da je

$$\operatorname{sh}\theta = \frac{-v}{c\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \quad \operatorname{ch}\theta = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}.$$

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}(x - vt), \\ \bar{y} &= y, \\ \bar{z} &= z, \\ \bar{t} &= \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\left(t - \frac{1}{c^2}vx\right). \end{aligned} \tag{3.39}$$

Ovo su čuveni transformacioni obrasci specijalne teorije relativnosti. Iz (3.39) se može proveriti da početak koordinatnog sistema S prema $\bar{S}$ ima brzinu jednaku $-v$.



Slika 3.2: Relativne brzine $\bar{S}$ prema S.

3.5 Zadaci

Zadatak 4

Neka su kompleksni brojevi p,q,r,s sledeće funkcije:

$$p=\frac{1}{2}\left(x^1+ix^4\right),\quad q=\frac{1}{2}\left(x^1-ix^4\right),\quad r=\frac{1}{2}\left(x^3+ix^4\right),\quad s=\frac{1}{2}\left(-x^3+ix^4\right).$$

Koristeći ih naći:

a) izraz za interval,
b) uslove pod kojima neki događaj leži na polukonusu vudućnosti.

Rešenje

Zadatak 5

Ako su $\varkappa,\lambda,\mu,\nu$ četiri kompleksne konstante, takvr da važi

$$\|A\|=1,\quad \text{gde je}\quad A=\begin{pmatrix}\varkappa & \lambda\\ \mu & \nu\end{pmatrix},$$

pokazati da pod uslovom

$$Y=AX\bar{A},\quad X=\begin{pmatrix}r & q\\ p & s\end{pmatrix},\quad Y=\begin{pmatrix}\bar{r} & \bar{q}\\ \bar{p} & \bar{s}\end{pmatrix},$$

interval zadržava oblik u funkciji $\bar{p},\bar{q},\bar{r},\bar{s}$.

Rešenje

Zadatak 6

Sprovesti diskusiju Poglavlja 3.3, početak na str. 35, koristići simbolične operacije između vektora $\vec{e}$, $\vec{h}$ (3.30), trovektora položaja u prostoru $\vec{x}$ i vremenu t kao promenljivih.

Rešenje

Zadatak 7

Pokazati kako se Lorencove transformacije (3.6) može svesti Galilejevu transformaciju (2.9) i jednostavnu Lorencovu transformaciju (3.39) uz promenu početka merenja vremena. Rastumačiti taj postupak geometrijski, rotacijama ortogonalnih dvoravni.

Rešenje

Zadatak 4

4. Relativistička kinematika

4.1 Promena dužine i toka vremena. Slaganje brzina

Razmatrimo osnovne posledice jednostavne Lorencove transformacije, izloženo u prethodnom odeljku. Ako stavimo

$$\gamma = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2} > 1,$$

veze (3.39) će glasiti:

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \gamma(x - vt), \\ \bar{y} &= y, \\ \bar{z} &= z, \\ \bar{t} &= \gamma\left(1 - \frac{v^2}{c^2} + t\right). \end{aligned} \tag{4.1}$$

Ako uzmemo jednu duž koja miruje u odnosu na S, zadatu sa

$$\Delta\bar{x} = \bar{x}_2 - \bar{x}_1, \quad \bar{y} = \bar{z} = 0,$$

i uočimo je u jednom trenutku vremena merenog u sistemu S ($\Delta t = 0$), dobićemo (4.1)

$$\Delta\bar{x} = \gamma\Delta x. \tag{4.2}$$

Dužina predmeta koji miruje u jednom inercijalnom sistemu biva skraćen u pravcu kretanja, u odnosu na posmatrača iz drugog inercijalnog sistema, s razmerom skraćenja γ.

S obzirom na drugu i treću formulu (4.1) i na (4.2) zaključujemo da je promena zapremine $\Delta V = \Delta x\Delta y\Delta z$

$$\Delta\bar{V} = \gamma\Delta V. \tag{4.2$'$}$$

Pređimo na ocenu promene toka vremena. Ako ga merimo u sistemu $\bar{S}$ na jednom mestu, recimo $(\bar{x},0,0)$ i obavimo čitanje u trenucima $\bar{t}_1$ i $\bar{t}_2$, tada, da bismo utvrdili tok vremena u sistemu S, treba da imamo vreme t dato u funkciji $\bar{x}$ i $\bar{t}$, a to značida ga izrazimo pomoću inverzneLorencove transformacije $\bar{S} \to S$, koja, na osnovu (4.1) glasi

$$\begin{aligned} x &= \gamma(\bar{x}+v\bar{t}), \\ t &= \gamma\left(\frac{v}{c^2}\bar{x}+\bar{t}\right). \end{aligned} \tag{4.3}$$

Iz druge od ovih jednačina dobijamo

$$\Delta t = \gamma \Delta \bar{t}. \tag{4.4}$$

$$u = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\bar{x}+v\mathrm{d}\bar{t}}{\mathrm{d}\bar{t}+c^{-2}\mathrm{d}\bar{x}} = \frac{\bar{u}+v}{1-c^{-2}v\bar{u}v}. \tag{4.5}$$

Tok vremena u jednominercijalnom sistemu biva usporen u odnosu na posmatrača iz drugog sistema, s razmerom usporenja γ.

Kako bi sad glasila relativistička teorema slaganja btzina? Uzeli smo bili da je v brzina sistema $\bar{S}$ prema S. Pretpostavimoda se u odnosu na posmatrača S neki objekt kreće brzinom u. Kolika će biti njegova brzina u odnosu na $\bar{S}$? Kako nam je data u, imaćemo na osnovu (4.3)

$$v = -c\,\mathrm{th}\,\theta, \quad u = -c\,\mathrm{th}\,\eta, \quad \bar{u} = -c\,\mathrm{th}\,\bar{\eta}.$$

Slaganje brzina se u relativnosti dakle ne sastoji samo u jednostavnom sabiranju. Ako se podsetimo da smo geometrijski argument kvazirotacije v u obrascu (3.38) kinematički tumačili pomoću brzine v, možemo staviti:

$$v = -c\,\mathrm{th}\,\theta, \quad u = -c\,\mathrm{th}\,\eta, \quad \bar{u} = -c\,\mathrm{th}\,\bar{\eta}.$$

Na osnovu čega (4.5) postaje:

$$\mathrm{th}\,\eta = \mathrm{th}(\theta+\bar{\eta}) \quad \Rightarrow \quad \eta = \theta+\bar{\eta}. \tag{4.6}$$

Slaganje brzina izraženo je sabiranjem odgovarajućih argunmenata kvazirotacije.

Kako je hiporbolički tanges manji ili najviše jednak jedinici, za beskonačnu vrednost argumenta kvazirotacije, to sledi da je rezultanta dve brzine, po hipotezi manja od brzine svetlosti, opet manja od brzine svetlosti.

Brzina svetlosti ne može se postići slaganjem ni jednog broja brzina manjih od nje.

Ako je $\bar{u}$ bila brzina svetlosti, izmerena u sistemu $\bar{S}$, dobili bismo za u, iz formule (4.5)

$$u = \frac{c+v}{1+\frac{v}{c}} = c. \tag{4.7}$$

Brzina svetlosti jednaka je u odnosu na svakog posmatrača.

Iz svega što prethodi vidimo da merila za apsolutno kretanje ne može biti, jer ako svetlost oddmiče jednakom brzinom u odnosu na svakog posmatrača, ako se nikakvim slaganjem brzinamanjih od svetlosti ona ne može dostići, jasno je da se ni za jedno kretanje ne može utvrditi koliko žaostaježa svetlošću. Geometrijski rečeno, vremenska osa svakog inercijalnog sistemamože se ravnopravno uzeti za osu simetrije nultog konusa. Dijagram skalarnih proizvoda jednog polja jediničnih vektora sa različitim vremenskom baznim vektorima, dat je u Poglavlju 1.3, sa početkom na str. 21, predstavlja hiperboloid sa istom jednačinom.

4.2 Četvorobrzina i četvoroubrzanje

Još od prvog odeljka govorimo o svetskoj liniji kao putanji nekog objekta ili svetlosnog zraka. Postavlja sepitanje zašto ne formulišemo neku svetsku brzinu koja bi bila tangentni vektor na svetsku liniju, onako kao što brzina tangira putanju u prostoru.

Ako je s interval na nekoj svetskoj liniji, tada vektor definisan sa

$$u^\alpha = \frac{\mathrm{d}x^\alpha}{\mathrm{d}s} \quad \Rightarrow \quad g_{\alpha\beta}u^\alpha u^\beta = -1 \tag{4.8}$$

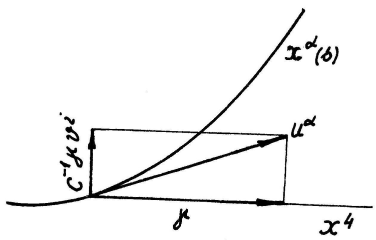
nazivamo **vektor četvorobrzine** objekta čije je to svetska linija. Iz (1.2) se vidi da je u^α njen jedinični tangentni vektor. Četvorobrzina nekog inercijalnog sistema je jedinični vektor njegove vremenske ose. Dijagram vrednosti jednog polja četvorobrzine daje Slika 1.2 (str. 22) u odeljku 1.3. Stoga ćemo za svaki elementarni intervalneke svetske linije smatrati da se, trenutno i lokalno, poiklapa s tokom vremena jednog inercijalnog sistema koji ima tu četvorobrzinu. Iz tih razloga ćemo meru dužine svetske linije nazvati **sopstveno vreme**. Razume se da je fizičkimerodavnost takvog vremena bila dugo dosta nesigurna stvar, jer se vreme meri časovnicima, a ovi trpe od promene inercije, pa je izvođenje svih redukcija, čak i za najprostije mehanizme, vrlo složeno. Ipak je sopstveno vreme od početka predstavljajo jedno formalno, ali jednostavno i uspešno proširenje pojma vremena sa inercijalnih sistema, gde se ono jedino moglo pouzdanomeriti, pa prema tome i definisati, na proizvoljne sisteme. Vide’cemo dalje da postoje činjenice koje opravdavaju njegovu definiciju.

Izrazimo četvorobrzinu u funkciji brzine v^i jednog objekta (vidi Sl. 4.1), merene iz nekog inercijalnog sistema. Kako je $\varepsilon = -1$ imamo:

$$\begin{aligned} \mathrm{d}s^2 &= c^2\,\mathrm{d}t^2 - \delta_{ij}\mathrm{d}x^i\mathrm{d}x^j \\ \mathrm{d}s &= c\mathrm{d}t\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \quad \Rightarrow \quad c\mathrm{d}t = \gamma\mathrm{d}s. \end{aligned} \tag{4.9}$$

Odavde je

$$u^i = \frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}s} = c^{-1}\gamma v^i, \quad u^4 = \frac{\mathrm{d}x^4}{\mathrm{d}s} = \gamma. \tag{4.10}$$



Slika 4.1: Četvorobrzina.

Ubuduće ćemo v^i, brzinu koja biva efektivno izmerena iz posmatračevog inercijalnog sistema, nazivati **trobrzina**, a četvorobrzina u^α biće prava relativistička brzina. Ona ima tenzorski zakon transformacije u odnosu na svetsku metriku, dok trobrzina ima nehomogenizakon transformacije, odnosno slaganja, u odnosu na različite inercijalne sisteme, dat sa (4.5).

Tok sopstvenog vremena iznosi, na osnovu (4.9)

$$\tau_2 - \tau_1 = \frac{1}{c}\int_{s_1}^{s_2}\mathrm{d}s = \int_{s_1}^{s_2}\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\mathrm{d}t. \tag{4.11}$$

Izračunato trajanje $\tau_2 - \tau_1$ sopstvenog vremena datog kretanja može se uporediti sa odgovarajućim konačnim intervalom proteklog vremena $t_2 - t_1$. Očigledno je da se ta dva intervala mogu poklopiti samo ako je $v = 0$. Podintegralni izraz u (4.11) ne predstavlja totalni diferencijal, to jest mi možemo spojiti svetskim linijama različitih dužina događaja A i B. Izaberimo te događaje tako da početak posmatračevog sistema prođe oba, jedan za drugim. Interval posmatračevog vremena razlikuje se od intervala raznih mogućih svetskih linija, a i oni među sobom, osim ako neke nismo birali tako da im dužine između A i B budu jednake. Ovo je suština takozvanog **paradoks blizanaca**, ili problem različitog starenja, bar u formalnim vremenskim jedinicama, dve jedinke između rastanka i ponovnog sastanka. U opštoj teoriji relativnosti taj problem postaje složeniji, ali ima stvarniji karakter.

Analogno četvorobrzini, četvoroubrzanje je definisano sa

$$w^{\alpha} = \frac{\mathrm{d}u^{\alpha}}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{d}^2 x^{\alpha}}{\mathrm{d}s^2}. \tag{4.12}$$

Na osnovu (4.10) ono eksplicitno glasi

$$w^i = c^{-2}\gamma\frac{\mathrm{d}(\gamma v^i)}{\mathrm{d}t}, \quad w^4 = c^{-1}\gamma\frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t} \tag{4.13}$$

Možemo odmah proveriti, polazeći od (4.8) i (4.12), da su vektori četvorobrzine i četvoroubrzanja međusobno ortogonalni

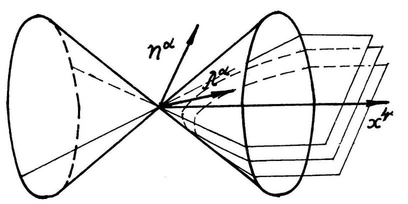
$$g_{\alpha\beta}u^{\alpha}u^{\beta} = 0. \tag{4.14}$$

Kako je četvorobrzina orijentisana vremenski ili nulto, izlazi sa w^{α} mora biti prostorni ili nulti vektor. U posebnom slučaju on se poklapa s nultom četvorobrzinom, što se može proveriti na dijagramima (vidi poglavlja 1.2 str. 20 i 1.3 str. 21) za uzajamno ortogonalne vektore. Činjenica da je w^{α} uvek ortogonalan na datoj četvorobrzini umanjuje njegovu proizvoljnost. Troubrzanje ćemo obeležavati sa $\dot{v}^i$.

Primetimo jedno svojstvo četvoroubrzanja. Za svako kretanje može sa zamisliti, u svakom trenutku, jedna inercijalni sistem koji ima istu četvorobrzinu. Trenutna trobrzina $v^i = 0$ u odnosu na takvog posmatrača. Međutim, zbog prostornog karaktera četvoroubrzanja, ne postoji inercijalni sistem čija bi se vremenska osa mogla trenutno poklopiti s njim. Znači da je troubrzanje, izvod po vremenu trobrzine, u funkciji kojeg je izraženo četvoroubrzanje (4.13), vektor koji mora biti zapažen u svakom inercijalnom sistemu, ako je zapažen u jednom.

4.3 Talasni frontovi i učestanost. Doplerovi crveni pomak

Posmatraćemo prostiranje jednog ravnog talasa konstantnom brzinom $\vec{\chi}$. Kako će izgledati njegova trajektorija? Pretpostavimo prvo da se posmatrač kreće zajedno s talasom. Tada istorija talasnog fronta predstavlja jednu trotavan na kojoj leži osa x^4. Pošto se u opštem slučaju talas kreće u odnosu na posmatrača brzinom $\chi^i \neq 0$, njegova istorija Σ ima prema osi x^4 izvestan nagib, određen intenzitetom χ. Ta troravan je, dakle, vremenska, a u slučaju svetlosnog talasa, nulta. Uslod toga je njen vektor normale n^{α} prostorno ili nulto orijentisana (Sl. 4.2).



Slika 4.2: Vektor normale n^{α} prostorno ili nulto orijentisan.

Pošto je istorija ovog talasa određena svetskim linijama čije su tangente u svakom događaju njegove četvorobrzine, to s obzirom na konstantnost zadatih veličina vidimo da polje četvorobrzina u potpunosti leži na njoj. S druge straneje trovektor pravca prostiranja talasa u prostoru kolinearan s trobrzinom. Imamo dakle, zaključak da jedinični četvorovektor n^{α} normale na talasu stoji upravno na četvorobrzini λ^{α}, dok je odgovarajući trovektor normale kolinearan s trobrzinom.

Izrazimo te činjenice. Za četvorobrzinu imamo iz (4.10), a za četvoronormalu iz prethodnog:

$$\lambda^\alpha(c^{-1}\gamma,\chi^i,\gamma_1), \quad n^\alpha(\mu\chi^i,n^4), \quad \gamma_1 = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{\chi^2}{c^2}}}, \tag{4.15}$$

uz uslove, ako se sad ograničimo na brzine manje od svetlosne:

$$\begin{aligned} g_{\alpha\beta}\lambda^\alpha\lambda^\beta &= -1, \\ g_{\alpha\beta}n^\alpha n^\beta &= 1, \quad \Rightarrow \quad \mu^2\delta_{ij}\chi^i\chi^j - (n^4)^2 = 1, \\ g_{\alpha\beta}\lambda^\alpha n^\beta &= 0, \quad \Rightarrow \quad c^{-1}\mu\gamma_1\delta_{ij}\chi^i\chi^j - \gamma_1 n^4 = 0. \end{aligned} \tag{4.16}$$

Prvi uslov je identički zadovoljen iz (4.15). Kako uzimamo da je trovektor normale usmeren kao i brzina talasa ($\mu > 0$), iz prethodnog sledi

$$\mu = \gamma_1\chi^{-1}, \quad n^4 = c^{-1}\gamma_1\chi.$$

Dakle

$$n^\alpha(\gamma_1\ell^i; c^{-1}\gamma_1\chi). \tag{4.17}$$

gde je $\ell^i\left(\chi^1/\chi,\chi^2/\chi,\chi^3/\chi\right)$ jedinične vektor prostorne normale na talasu.

Ovde smo izrazili istoriju samo onog talasnog fronta na kojiem leži posmatračev početni događaj. Međutim, postoji proizvoljno mnogo paralelnih ravni u prostoru i njihovoh istorija, troravni u Svetu Minkovskog, koje odgovaraju različitim fazama ovog talasnog kretanja, i zapremaju tokom vremena određeni deo prostora, pa prema tome i Sveta. Njihove jednačine su linearne po x^α i glase

$$g_{\alpha\beta}n^\alpha x^\beta = \text{const.} \tag{4.18}$$

Rastojanja od početnog događaja su invarijantna pod dejstvom homogene Lorencove transformacije, pa je to i leva strana (4.18), koja nam daje upravno rastojanje početka od određenog talasnog fronta. Dakle

$$g_{\alpha\beta}n^\alpha x^\beta = \bar{g}_{\alpha\beta}\bar{n}^\alpha\bar{x}^\beta,$$

pri čemu su vrednosti $\bar{g}^{\alpha\beta}$ dijagonalne, kao i $g_{\alpha\beta}$.

Posmatrajmo sada talasno kretanje najprostijeg zakona periodičnosti

$$\varphi = \varphi^{(0)}\cos 2\pi\nu(t-t_0), \quad (\nu = T^{-1}). \tag{4.19}$$

Proteklo vreme ćemo obeležiti, posmatrajući sa stanovišta prostora i vremena

$$t = \chi^{-1}\ell_i x^i, \quad t_0 = c^{-1}x^4. \tag{4.20}$$

Početna faza t_0 je proizvoljna, jer se uzima za bilo koji talasni front, pa je zato i izražavamo pomoú promenljive x^4. Tako da (4.19) možemo da napišemo kao

$$\varphi = \varphi^{(0)}\cos 2\pi f_\alpha x^\alpha.$$

Ovde $\varphi^{(0)}$ predstavlja asimptotu oscilovanja, φ njegovu elongaciju, a f^α je frekventni vektor, koji je na osnovu (4.19) i (4.20), jednak

$$f^\rho = \left(\frac{\nu}{\chi}\ell^i;\frac{\nu}{c}\right). \tag{4.21}$$

Može se proveriti, pomoću (4.17), da je f^ρ kolinearan s četvoronormalom n^ρ. Ispitajmo promenu frekvencije u zavisnosti od promene posmatrača. Ako izaberemo posmatrače S i S', povezane jednostavnom Lorencovom transformacijom (3.36), imaćemo

$$\begin{aligned} f^1 &= L_{1\cdot}^{\ 1}\bar{f}^1 + L_{4\cdot}^{\ 1}\bar{f}^1 = \gamma\bar{f}^1 + c^{-1}\gamma v\bar{f}^4, \\ f^2 &= \bar{f}^2, \\ f^3 &= \bar{f}^3, \\ f^4 &= L_{1\cdot}^{\ 4}\bar{f}^1 + L_{4\cdot}^{\ 4}\bar{f}^4 = \gamma\bar{f}^4 + c^{-1}\gamma v\bar{f}^4, \end{aligned} \tag{4.22}$$

gde je

$$\gamma = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2}.$$

Pretpostavimo sad da se posmatrani talas prostire u pravcu x - ose. Tada je po (4.21)

$$f^\rho\left(\frac{\nu}{\chi},\, 0,\, 0;\, \frac{\nu}{c}\right),$$

a i njegov transformat $\bar{f}^\rho$ ostaje u istoj dvoravni. Tada iz (4.22) dobijamo:

$$\frac{\nu}{\chi} = \gamma\nu'\left(\frac{1}{\chi'} + \frac{v}{c^2}\right), \tag{4.22$'$}$$

$$\nu = \gamma\nu'\left(1 + \frac{v}{\chi'}\right). \tag{4.22$''$}$$

Kada sa ν iz (4.22$'$) zameni (4.22$''$), dobijamo

$$\chi = \frac{\chi' + v}{1 + c^{-2}\chi' v},$$

što je već dobijeni izraz za slaganje brzina (4.5). Veza (4.22$''$) predstavlja relativističku formulu za promenu učestalosti talasnog kretanjakada se posmatrač kreće brzinom v prema izvoru čija je sopstvena frekvencija emitovanja ν, a brzina prostiranja talasa χ. Relacija (4.22$''$) se od nerelativističke Doplerove[1] formule razlikuje činiocem γ, i vrednošću χ' transformisane brzine u funkciji χ i v.

Primenimo ovo na svetlosne talase. Kako je brzina svetlosti u vakuumu jednaka za sve posmatrače, $\chi = \chi' = c$, iz (4.22$'$) je

$$\nu = \nu'\sqrt{\frac{1 + c^{-1}v}{1 - c^{-1}v}}. \tag{4.23}$$

Ako se u izrazu (4.21) za frekventni vektor f^α, stavi $\chi = c$, dobija se da je njihov intenzitet jednak nuli

$$g_{\alpha\beta} f^\alpha f^\beta = 0. \tag{4.24}$$

Vidimo da vektor normale n^α, budući da je definisan kao jedinični, gubi smisao, jer je kolinearan sa f^α, pa mu komponente postaju, kao i četvorobrzini, neograničeno velike. Kako je četvorobrzina prostiranja talasa λ^α, po (4.16) ortogonalne na n^α

$$g_{\alpha\beta}\lambda^\alpha n^\beta = g_{\alpha\beta}\lambda^\alpha f^\beta = 0, \tag{4.25}$$

to zbog (4.24) i (4.25) sledi da je za svetlosni talas $n^\alpha = \xi\lambda^\alpha$, to jest *vektor normale na istoriji svetlosnog talasa kolinearan je s vektorom njegove četvorobrzine.* Što predstavlja svojstvo nultih površi, budući da je od svih vektora nultog konusa, na svakom od njih ortogonalan samo jedan, a to je on sam. Četvorotalas u slučaju svetlosti dotiče nulti konus dužčetvorobrzine λ^α, čija je trajektorija svetlosni zrak.

Vratimo se obrascu (4.23). Brzina prostiranja svetlosti u vakuumu je nepromenljiva, ali vidimo da njena učestalost to nije. Mi bismo, u zavisnosti od brzine kretanja prema izvoru, jedno isto zračenje mogli identifikovati kao emisiju γ - zrakova, vidljivu svetlost ili radiotalas.

Prthodne zaključke koristimo za objašnjenje doplerovog crvenog pomaka spektralnih linija svetlosti emitovane sa vrlo udaljenih nebeskih tela, poznatog još pod sugestivnim nazivom **starenje svetlosti**. Ovaj pomak prema crvenom delu spektra svedoči o uzajamnom udaljavanju galaksija, a tumači se ekspanzijom Vasione. Objašnjenje bitnih crta same pojave ne zahteva za sad da napustimo sliku Sveta specijalne teorije relativnosti.

Pođimo od pretpostavke da je cela Vasiona nastala iz ekspanzije jednog središta zgusnute mase, i da se ravnomerno širi (Ajnštajn je pizao da se Švemir širi brzinom prvobitne ekspanzije ...”), što ne opovrgavaju

[1] Dopler

dosadašnja posmatranja. Tada je, ako je po merilima posmatrača daljina izvora zračenja ℓ, vreme proteklo od početka ekspanzije t, brzina udaljavanja v jednaka

$$v = \frac{\ell}{t}. \tag{4.26}$$

Ovo ćemo uneti u obrazac za promenu frekvencije svetlosti (4.23), imajući u vidu da zbog udaljenosti moramo staviti umesto v, i uz oznaku $\nu^i = \nu_n$

$$\nu = \nu_n \sqrt{\frac{1 - \frac{\ell}{ct}}{1 + \frac{\ell}{ct}}}. \tag{4.27}$$

Ovde ν_n predstavlja sopstvenu (prirodnu), a ν relativnu frekvenciju izvora prema posmatraču.

Činjenica je da je brzina razilaženja ne suviše udaljenih galaksija mala prema brzini svetlosti. Stoga se, kad razvijemo u stepeni red funkciju na desnoj strani (4.27), možemozadržati ne linearnoj aproksimaciji

$$\nu \approx \nu_n \left(1 - \frac{\ell}{ct}\right).$$

Ako stavimo $\delta\nu = \nu_n - \nu$, to će dati približnu formulu

$$\frac{\delta\nu}{\nu_n} \approx \frac{\ell}{ct}. \tag{4.28}$$

Pomak $\delta\nu$ i daljina ℓ posmatranih objekata su promenljivi, dok su ostale veličine, za svetlost određene talasne dužine, konstantne. Zahvaljujući tome možemo, merenjem crvenog pomaka pogodno izabranih objekata, utvrditi, u jedinicama trajanja našeg doba na Zemlji, približnu starost Vasione. Za to se možemo poslužiti bilo strogom formulom (4.27), ili približnom (4.28). Do danas je, posmatranjem najudaljenijih izvora zračenja, ustanovljena starost od 17 milijardi godina. Taj broj srazmeran je recipročnoj vrednosti čuvenog Hablovog[2] koeficijenta H.

4.4 Neki opiti koji potvrđuju specijalnu teoriju relativnosti

U ovom odeljku ćemo izložiti dva opita od velikog značaja za specijalnu relativnost.

Prvi od njih, čuveni Majklson[3] - Morlijev[4] eksperiment, izvršen je 1889. god. i ponovljen 1900. god. On je vodio negativnom zaključku, i imao je za posledicu neogrživost Galilejevih trnasformacija prostornih i vremenske koordinate, pa prema tome i Njutnove mehanike.

Drugi eksperiment, Hafele[5] - Kitingov[6], izvršen je mnogo kasnije, 1971. god., odnosi se na promenu toka vremena pri relativnom kretanju. On se sa iznenađujućom tačnošću slaže sa relativističkim formulama. Ma da ovaj eksperiment nije bio prva ppotvrda te vrste (postojanje μ-mezona na nivou morske površi prvo je ukazalo na dilataciju sopstvenog vremena), činjenica da je izvršen sredstvima koja je za tu svrhu napravila ljudska ruka, i da su relativne brzine bile male, daju mu veliki značaj.

Prvi eksperiment.

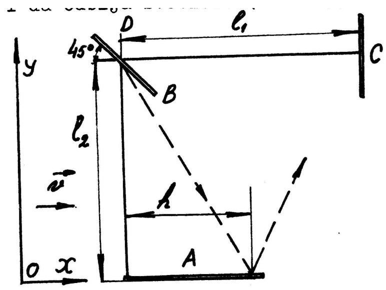
Razmotrićemo prvo Majklson-Morlijev ogled. Zato ćemo poćiod predrelativističkog shvatanja po kojem svetlost ima brzinu c samo u odnosu na apsolutno mirujući "etat". Tada bi brzina svetlosti, prema objektu koji se izvoru približava vrzinom v, iznosila $c + v$, a u slučaju udaljavanja $c - v$. Prema tome, ako je rastojanje od svetlosnog izvora do ogledala koje se kreće prema njemu jednako ℓ u trenutkukada se svetlosni zrak

[2] Hubble
[3] Michelson
[4] Morley
[5] Hafele
[6] Keating

odbije, vreme koje protekne od emisije do njegovog povratka, posmatrano u laboratoriji koja se prema etru kreće zajedno sa ogledalom, iznosi

$$t = \frac{\ell}{c+v} + \frac{\ell}{c-v} = \frac{2\ell}{c}\frac{1}{1-\frac{v^2}{c^2}} \approx \frac{2\ell}{c}\left(1+\frac{v^2}{c^2}\right) \tag{4.29}$$

Ekspirementalni uređej sastoji se iz tri ogledala: A, B i C, od kojih je B poluposrebreno kako bi moglo i da propušta i da odbija svetlost (Sl. 4.3).



Slika 4.3: Ekspirementalni uređej.

Svetlosni zrak, koji se prostire u pravcu x-ose, delom prolazi, a delom se odbija na poluposrebrenom ogledalu B. Propušteni zrak stiže do ogledala C i odbija natrag do B, a odatle do zastora D. Zrak koji je odbijen od B ide do A, odbija se s njega i vreća kroz B do D. Ako bi uređaj mirovao prema etru moguće bi bilo tačno podesitiodnos odstojanja ℓ_1 i ℓ_2 takoda posmatračna zastoru D primeti interferenciju bilo gašenja ili pojačavanja monohromatske svetlosti. Za $\ell_1 = \ell_2$ imali bismo interferenciju pojačavanja.

Pođimo od pretpostavke da se Zamlja kreće u pravcu x-ose vrlo približno konstantnom brzinom v. Vreme potrebno svetlosti da pređe od B o C i natrag iznosi, na osnovu (4.29)

$$t_1 = \frac{2\ell_1}{c}\frac{1}{1-\frac{v^2}{c^2}} \approx \frac{2\ell_1}{c}\left(1+\frac{v^2}{c^2}\right), \tag{4.30}$$

dok je

$$h = \frac{1}{2}vt_2. \tag{4.31}$$

Dužina ukupnog puta svetlosnog zrakz od poluposrebrenog ogledala B do ogledala A i natrag (na slici obeleženo tačkastom linijom) iznosi

$$\bar{\ell}_2 = 2\sqrt{\ell_2^2 + \frac{1}{4}v^2t_2^2}, \tag{4.32}$$

pa je, s obzirom na brzinu svetlosti c

$$t_2 = \frac{2}{c}\sqrt{\ell_2^2 + \frac{1}{4}v^2t_2^2}, \tag{4.32$'$}$$

Otud

$$t_2 = \frac{2\ell_2}{c\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \approx \frac{2\ell_2}{c}\left(1+\frac{v^2}{2c^2}\right). \tag{4.33}$$

Imamo dakle, na osnovu (4.29) i (4.33)

$$\Delta t = t_1 - t_2 = \frac{2}{c}\left(\frac{\ell_1}{1-\frac{v^2}{c^2}} - \frac{\ell_1}{1-\frac{v^2}{2c^2}}\right).$$

U eksperimentu je bilo uzeto $\ell_1 = \ell_2$. Tada prethodni izraz daje

$$\Delta t \approx \frac{2\ell}{c}\left(1+\frac{v^2}{c^2}-1-\frac{v^2}{2c^2}\right)=\frac{1}{c^3}\ell v^2. \tag{4.34}$$

Pomeranje interferencione linije u spektru je žakašnjenje" Δt.

Ovaj eksperiment nije dao očekivane rezultate. Zapaženiefekti bili su daleko ispod reda veličine koji bi ova pojava morala imati. Opit je ponavljan više puta, u različita godišnjadoba, uređaj postavljan u različite pravce, ali je rezultat ostao negativan.

Kasniji opiti vršeni su sa znatno osetljivijim uređajima, ne bi li se ustanovilo šta treba da pokažu takva merenja, ako se već apsolutno kretanje ne može utvrditi. Dobijeni podacinisu bili dovoljno jasni za tumačenje.

Drugi eksperiment. Ovaj eksperiment izveli su Hafele i Kiting 1971. god., imao je za cilj da proveri usporenje toka vremena na objektu koji se kreće u odnosu na posmatrača. Merenje je vršenocezijumskom časovnicima na četiri aviona, od kojih su dva kretala u istočnom, a dva u zapadnom smeru, na određenoj geografskoj širini. Visine leta su iznosile oko 6000 metara, a brzine oko 960 km/h. Tako je utvrđeno da dilatacija vremena iz relativističkih formula odgovara stvarnosti. Pritom je uzeta u obzir i popravka zbog promene gravitacionog polja s povećanjem visine, što je takođe relativistički efekat.

Polazi se od sledećeg. Kako se Zemlja okreće u istočnom smeruugaonom brzinom ω, pa na visini na kojoj je vršeneksperiment ima brzinu $R\omega$, vreme na tom mestu treba da ima usporenje u odnosu na neki hipotetički inercijalni sistem S, vezan za središte Zemlje, koji ne vrši njenu dnevnu rotaciju. Odnos između vremenskog intervala Δt u tom sistemu zemaljskog $\Delta\bar{t}$ će biti

$$\Delta t = \frac{\Delta\bar{t}}{\sqrt{1-\dfrac{R^2\omega^2}{c^2}}}. \tag{4.35}$$

Za avion koji leti prema istoku brzinom v u odnosu na Zemlju, vremenski interval $\Delta\bar{\bar{t}}$ iznosi Δt, a obzirom na grupna svojstva Lorencovih transformacija, a na osnovu obrasca (4.5)

$$\Delta t = \frac{\Delta\bar{\bar{t}}}{\sqrt{1-\dfrac{(R\omega+v)^2}{c^2(1-c^{-2}R\omega v)^2}}}. \tag{4.36}$$

Ako sa γ_1 označimo transformacioni faktor za odnos toka vremena na Zemlji prema usporenom toku na avionu

$$\Delta\bar{t} = \gamma_1 \Delta\bar{\bar{t}} \tag{4.37}$$

imaćemo

$$\begin{aligned}\gamma_1 &= \frac{\sqrt{1-\frac{R^2\omega^2}{c^2}}}{\sqrt{1-\dfrac{(R\omega+v)^2}{c^2(1+c^{-2}R\omega v)^2}}} \approx \\ &\approx \left(1-\frac{R^2\omega^2}{2c^2}\right)\left[1-\frac{(R\omega+v)^2}{c^2(1+c^{-2}R\omega v)^2}\right] \approx \\ &\approx 1+\frac{1}{2c^2}\left(v^2+2R\omega v\right) > 1.\end{aligned} \tag{4.38}$$

S tačnošću do članova višeg reda.

Na avion koji leti prema zapadu istom brzinom v nastalo bi, u odnosu na sistem S, a pod uslovom $v < R\omega$ koji je ispunjen, usporenje toka vremena manje od zemaljskog. Prema tome, vreme na tom avionu će brže teći nego na Zemlji, a još brže nego na avionu koji leti prema istoku. Veličina traženog odnosa dobije se kad se u formuli (4.36) svavi $-v$ umesto v. Ako sa γ_2 obeležimo faktor ubrzanja tokom vremena na avionu prema toku na Zemlji imaćemo, umasto (4.38)

$$\gamma_2 \approx 1-\frac{1}{2c^2}\left(v^2+2R\omega v\right) < 1. \tag{4.39}$$

Tako su dobijene sledeće vrednosti usporenja i ubrzanja vremena u odnosu na zemaljsko

Srednja vrednost razlika za četiri cezijumska časovnika	$\Delta\tau/10^{-9}\,s$	
	istočni smer	zapadni smer
zapaženo	-59 ± 10	273 ± 17
predviđeno	-40 ± 23	275 ± 21

Tabela 4.1: Izmerene vrednosti drugog eksperimenta (videti J. Taylor, [25], str. 19.).

Popravke na ovoj tablici potiču od dejstva gravitacionog polja. Posledice ubrzanja i usporenja aviona na početku i na kraju leta su se pokazale od malog značaja, što se i očekivalo, jer su kratko trajale. Rezultati se vrlo dobro slažu sa predviđanjima.

Osim ovog, astronomi Vašingtonske opservatorije izvršili su, u toku jeseni izime 1975/76. god., više eksperimenata istog tipa, pomoću poboljšanih cezijumskih i rubidijumskih časovnika. Avioni su leteli na većoj i manjom brzinom nego pre prethodno opisanom eksperimentu, a u pravcima za koje nastaje manje izrazito ubrzanje ili usporenje toka vremena usled kretanja prema posmatraču na Zemlji. Cilj je bio da se izdvoji pojava ubrzanja toka sopstvenog vremena usled opadanja Zemljinog gravitacionog potencijala s visinom od njegovog ubrzanja ili usporenja usled kretanja. O ovom će biti reči detaljnije u §60. Ti opitisu takođe dali vrlo dobre rezutlate. Efekt o kojem je reč spada u opštu relativnost. Ovde ga navodimo zato što je omogućio razdvajanje posledica navedene dve vrste, i odagnao sumnju o nekom mogućem trećem uzroku tih pojava.

Ovo je lep i značajan primer objašnjenja jedne prirodne pojave koja se dotle mogla naslutiti jedino po trajanju μ-mezona.

Zadaci

Zadatak 8

Napisati pravilo slaganja nekolinearnih trobrzina $\vec{u}$ i $\vec{v}$. Izvršiti Lorencovu, a zatim Galilejevu, transformaciju, tako da odgovarajuće četvorobrzine imaju njajmanji broj komponenata. Naći vezu između dva moguća pomeranja.

Rešenje

5. Dinamika tačke i sistema

5.1 Masa, impuls i sila

Obično se smatra da je promenljivost mase u zavisnosti od kretanja prema posmatraču jedna od njenih osnovnihkarakteristika po relativistiučkom shvatanju. Ne treba, međutim, gubiti iz vida činjenicu da se ta promenljivost ne pojavljuje u osnovnim transformacionim formulama. U tim, čseto kinematičkim obrascima, prostor i vreme su suštinski povezani, a mase nema. Ali, kad budemo uveli izraz za količinu kretanja zasnovan na četvorobrzini, za masu koja se u odnosu na posmatrača kreće nekom određenom trobrzinom $\vec{v}$, doći ćemoprirodno do pojmova **sopstvene** i **relativne mase**.

Uzmimo dakle materijalnu tačku kojoj smo izmerili masu u stanju mirovanja, i utvrdili da iznosi m. Relativističku količinu kretanja, koju ćemo dalje kratko nazvati **impuls** (imati u vidu da se pod impulso obično podrazumeva konačna promena količine kretanja) definisaćemo pomoću četvorobrzine

$$K^\rho = m\frac{\mathrm{d}x^\rho}{\mathrm{d}s} = mu^\rho, \tag{5.1}$$

odnosno, iz (4.10)

$$K^i = c^{-1}m\gamma v^i, \quad K^4 = m\gamma. \tag{5.2}$$

Sad možemo uvesti, ili bolje, uočiti pojam relativne mase. To je proizvod $m\gamma$ sopstvene mase i dilatacionog faktora γ. Vidimo da je od svih vrednosti koje masa može imati najmanja ona koju ima u odnosu na posmatrača prema kojem miruje, što predstavlja sopstvenu masu m.

Kao što je četvoroubrzanja definisano pomoću četvorobrzine, tako je i četvorosila F^ρ definisana pomoću impulsa K^ρ

$$F\rho = \frac{\mathrm{d}K^\rho}{\mathrm{d}s}. \tag{5.3}$$

Kako radimo sa najpogodnijim koordinatnim sistemima zadovoljićemo se oblikom (5.3), koji odgovara izrazu za drugi Njutnom zakon u odnosu na Dekartov sistem. Ako unesemo izraz za četvoroubrzanje w^α iz

(4.12), relacija (5.3) će eksplicitno glasiti

$$F^{\alpha} = u^{\alpha} \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}s} + mw^{\alpha}. \tag{5.4}$$

Kako smo utvrdili da su četvorobrzina i četvoroubrzanje uzajamno ortogonalni, to ćemo iz (5.4) dobiti, kontrakcijom sa u^{α}

$$g_{\alpha\beta} u^{\alpha} F^{\beta} = -\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}s}. \tag{5.5}$$

Došli smo do zaključka da je specifična promena sopstvene mase po sopstvenom vremenu izražena skalarnim proizvodom, s promenjenim znakom, relativističkih vektora brzine i sile. U slučajunepromenljivosti sopstvene mase (nepostojanje nekog procesasagorevanja ili zračenja) četvorobrzina i četvorosila su ortogonalni i obrnuto. To je slučaj koji ćemo na dalje isključivo posmatrati. Tada je

$$F^{\alpha} u_{\alpha} = 0. \tag{5.6}$$

Kako vektor relativističke brzine u slučaju svetlostipripada nultom konusu, razmotrićemo i taj slučaj. Impuls fotona definisan je sa

$$K^{\rho} = c^{-1} h f^{\rho} \quad (h = 6,624 \cdot 10^{-27}\, [ergsec]), \tag{5.7}$$

gde je f^{ρ} frekventni četvorovektor talasnog kretanja, a h Plankova konstanta. Takav talsni front kreće se trobrzinom čiji je intenzitet c, i njegov će frekventni vektor u (4.21) biti

$$f^{\rho} = (c^{-1} \nu \ell^{i}; c^{-1} \nu).$$

Odakle je vektor impulsa fortona

$$K^{\rho} = (c^{-2} h \nu \ell^{i}; c^{-2} h \nu). \tag{5.8}$$

Pojam mase je zaobiđen kod fotona, jer frekventni vektor pripada nultom konusu.

5.2 Snaga i energija

U §5 formulisali smo bili prvi Njutnov zakon kao Primcip vremenskih i nultih geodezijskih linija svetske metrike. U prethodnom odeljku dali smo relativistički prošireniskaz Drugog Njutnovog zakona, polazeći od dfeinicije relativističkog impulsa. Ostalo bi nam treći Njutnov zakon. Alinećemo ni pokušati da ga iskažemo zbog uslova istovremenosti akcije i reakcije, koji je ležao u osnovi Njutnovemehanike, a kooji ne važi za različite posmatrače. Inače imamo činjenicu da skalarne i vektorske veličine iz njutnovske fizike, koje smo do sada sterali, zadržavaju svoje transformaciona svojstva u odnosu na metriku specijalne relativnosti.

Sad treba ići dalje i uvesti, analogno, pojmove snage i energije.Pri njihovoj formulaciji, međutim, može nastati izvesna nedoumica. Ako bismo hteli da izrazimo kinetičku energiju polazeći od relativističke brzine i impulsa, dobili bismo sopstvenu masu s promenjenim znakom, jer je kvadrat četvorobrzine jednak -1. A za snagu bismo, prema tome, imali uvek nulu. Stoga treba prvo razmotriti odnose trosile i četvorosile.

S obzirom na to da je po (4.9) veza između intervala sopstvenog i posmatračevog vremena $\gamma \mathrm{d}s = c\mathrm{d}t$, četvorosila (5.3) glasi, eksplicitno izražena pomoću impulsa (5.2):

$$\begin{aligned} F^{i} &= c^{-2} \gamma \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m\gamma v^{i}), \\ F^{4} &= c^{-1} \gamma \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m\gamma). \end{aligned} \tag{5.9}$$

Izrazi u zagradi na desnoj strani jednačine za F^{i} su slični izrazima za silu u Njutnovoj mehanici, samo što umesto sopstvene mase stoji relativna $m\gamma$. Stoga ćemo fakto ispred operatora diferenciranja prebaciti na drugu stranu i tako dovijeniizraz nazvati **relativna trosila** P^{i}

$$P^{i} = c^{2} \gamma^{-1} F^{i} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m\gamma v^{i}). \tag{5.10}$$

Uslov ortogonalnosti (5.6), eksplicitno napisan, daje

$$g_{\alpha\beta}u^{\alpha}F^{\beta} = c^{-3}\gamma^2 v_i \frac{\mathrm{d}(m^* v^i)}{\mathrm{d}t} - c^{-1}\gamma^2 \frac{\mathrm{d}m^*}{\mathrm{d}t} = 0,$$

gde smo relativnu masu obeležili sa $m^* = m\gamma$. Na osnovu definicije (5.10) prethodna veza dobija oblik

$$v_i P^i = \frac{\mathrm{d}(m^* c^2)}{\mathrm{d}t}. \tag{5.11}$$

Proizvod relativne trosile i trobrzine tumačićemo, analogno Njutnovoj mehanici, kao specifičnu promenu energije po vremenu. To (5.11) upravo izražava, jer predstavlja promenu neke funkcije po posmatračevom vremenu. Tu funkciju ćemo smatrati kao **relativnu energiju** E

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = v_i P^i, \tag{5.12}$$

gde je

$$E = m^* c^2. \tag{5.13}$$

Ove četiri relativističke definicije energoje svode se na $E_0 = mc^2$, to jest na energiju mirovanja nekog tela sopstvene mase m, u odnosu na posmatrača koji se kreće zajedno sa njom.

Pored relativne energije E u relativnosti se radi i sa **telativnom kinetičkom energijom** T. Ona je definisana sa

$$T = E - E_0 = mc^2(\gamma - 1),$$

odnosno, akorazvijemo γ u stepeni red po v^2/c^2:

$$\begin{aligned} T &= mc^2\left(1 + \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2} + \frac{3}{8}\frac{v^4}{c^4} + \cdots - 1\right) = \\ &= \frac{1}{2}mv^2\left(1 + \frac{3}{4}\frac{v^2}{c^2} + \cdots\right). \end{aligned} \tag{5.14}$$

Ovaj izraz se, uopšte uzev, malo razlikuje od kinetičke energije u Njutnovoj mehanici, jer je u većini slučajeca $v \ll c$, pa se ostatak $v[m/c^2]$ u redu (5.14) može odbaciti, tako da se relativna kinetička energija svodi na njutnovski izraz.

Četvrta komponenta K^4 impulsa predstavlja, po formuli (5.2), relativnu masu, pa je srazmerna, do na konstantni faktor c^2, relativnoj energiji. Dakle

$$E = c^2 K^4. \tag{5.15}$$

Odavde zaključujemo da je za foton, čija je vremenska komponenta po (5.8) jednaka $c^{-2}h\nu$, energija u odnosu na bilo kojeg posmatrača $E = h\nu$. To i jeste definicija svetlosnog kvanta, i mogli smo obrnuto, poći od nje i konstruisati impuls K^{ρ}, dat formulom (5.8).

5.3 Impuls i kinetički moment materijalnog sistema

Sistem materijalnih tačaka ćemo razmatrati polazeći od pojmova relativističkog impulsa, već uvedenog za tačku, i kinetičkog momenta (ili momenta količine kretanja) u odnosu na neki proizvoljni događaj.

Ukupni impuls K^{ρ}, sistema on n materijalnih tačaka iznosi

$$K^{\rho} = \sum_{\ell=1}^{n} K^{\rho}_{(\ell)} = \sum_{\ell=1}^{n} m_{(\ell)} u^{\rho}_{(\ell)}, \tag{5.16}$$

gde je $K^{\rho}_{(\ell)}$ impuls pojedine tačke sistema.

Kinetički moment $M^{\rho\sigma}_{(\ell)}$, materijalne tačke u odnosu na događaj a^ρ, definisan sa

$$M^{\rho\sigma}_{(\ell)} = \left(x^{\rho}_{(\ell)} - a^{\rho}_{(\ell)}\right) K^{\sigma}_{(\ell)} - \left(x^{\sigma}_{(\ell)} - a^{\sigma}_{(\ell)}\right) K^{\rho}_{(\ell)}, \tag{5.17}$$

gde je $x^{\rho}_{(\ell)}$ događaj u kojem materijalna tačka ima impuls $K^{\rho}_{(\ell)}$.

Kinetički moment definisan je analogno Njutnovoj mehanici, ali ne može više biti predstavljen simboličkim vektorima, jer u svetskoj metrici antisimetričan tenzor ima šect komponenti. U odnosu na Lorencove transformacije $M^{\rho\sigma}$ se ponaša kao tenzor, ma da nema stvarno tenzorski karakter u slučaju proizvoljne transformacije.

Kinetičkimoment ostaje nepromenjen ako se vektor impulsa pomera duž svoje napadne linije. Neka koordinate njegove napadne linije budu

$$\bar{x}^\rho = x^\rho + \lambda K^\rho.$$

Tada je

$$\bar{M}^{\rho\sigma} = (x^\rho - a^\rho + \lambda K^\rho)K^\sigma - (x^\sigma - a^\sigma + \lambda K^\sigma)K^\rho = M^{\rho\sigma}, \tag{5.18}$$

što je trebalo dokazati.

U slučaju da se materijalni sistem sastoji iz objekata koji se kreću po inerciji, postoji mogućnost sudara između njih, ili neke razmene energetskih kvanta (videti Synge [6], str. 209). Tada između svaka dva uzastopna sudara, ili i zračenja, za svaku materijalnu tačku sistema očuvani impuls i kinetički moment u odnosu na neki događaj a^ρ.

Da bi sabiranje kinetičkih momenata imalo smisla, oni treba da budu uzeti u odnosu na jedan događaj. na dalje ćemo smatrati, ako se drugačije ne napomene, da kinetičke momente tačaka računamo u odnosu na posmatračev početni događaj $a^\rho = 0$. Kinetički moment sistema iznosi

$$M^{\rho\sigma} = \sum_{\ell} M^{\sigma\rho}_{(\ell)}. \tag{5.19}$$

Mi ćemo se ograničiti na one sisteme čije su sve interakcije unutrašnje i to takve da ostanu očuvani ukupni impulsi i kinetički moment. Izrazit primer takvih sistema nalazi se u kinetičkoj teoriji izotropskih gasova (gasova čija je ukupna razmena dejstava s okolinom jednaka nuli). Ako sa K^ρ i $M^{\rho\sigma}$ obeležimo impuls i kinetički moment sistema u jednom trenutku, a sa $\bar{K}^\rho$ i $\bar{M}^{\rho\sigma}$ te iste veličine u nekom drugom trenutku, zahtevamo da bude:

$$K^\rho = \bar{L}^\rho, \quad M^{\rho\sigma} = \bar{M}^{\rho\sigma}, \tag{5.20}$$

odnosno

$$\sum_k K^{\rho}_{(k)} = \sum_{\ell} \bar{K}^{\rho}_{(\ell)}, \quad \sum_k M^{\rho\sigma}_{(k)} = \sum_{\ell} \bar{M}^{\rho\sigma}_{(\ell)}. \tag{5.20$'$}$$

Indeksi k i ℓ ne moraju ići do istog broja, jer se neke čestice mogu spojiti ili raspasti.

Geometrijski opis uslova (5.20), poznat kao **otvoreni zakon održanja impulsa** (videti: Synge [6], str. 214-219), izkazuje se time što **kroz svaku prostornu troravan Σ prolaze svetska linija materijalnog sistema čiji su ukupni impuls i kinetički moment nepromenjeni**.

Svaka takva troravan predstavlja opažaj prostora u određenom trenutku vremena nekog posmatrača.

Drugi opis, poznat kao **zatvoreni zakon održanja impulsa**, iskazan je time što je **ukupni protok impulsa i kinetičkog momenta kroz neku zatvorenu tropovrš Σ jednak nuli, ukoliko kroz nju prolaze svetske linije celokupnog materijalnog sistema**.

5.4 Centar mase materijalnog sistema

U njutnovojskoj mehanici jedno od osnovnih svojstava centra mase sistema bilo je to da je linearni moment mase u odnosu na njega jednak nuli. Kako u relativnosti mase pojedinih objekata predstavljaju, u zavisnosti od kretanja, u različitoj meri izmenjene sopstvene mase, treba naći pogodnu definiciju za taj događaj. Zato je odabrana definicija srodna onoj koja određuje centar inercije u njutnovskoj mehanici, po kojoj je linearni moment mase u odnosu na tu tačku jednak nuli.

Poći ćemo od kinetičkog momenta $\tilde{M}^{\rho\sigma}$ materijalnog sistema za neki događaj a^ρ. S obzirom na antisimetriju, matrica $(\tilde{M}^{\rho\sigma})$ mora imati parni rang. Mi biramo a^ρ tako da joj rang bude niži od 4, a da K_ρ bude jedan od vektora rešenja linearnog sistema

$$\tilde{M}^{\rho\sigma} K_\sigma = 0. \tag{5.21}$$

Ako je kinetički moment u odnosu na početak $M^{\rho\sigma}$, ovaj sistem jednačina glasi

$$M^{\rho\sigma} K_\sigma - a^\rho K^\sigma K_\sigma + a_\sigma K^\sigma K^\rho = 0. \tag{5.22}$$

Odavde određujemo vektor a^ρ, koji definišemo kao centar mase sistema. U (5.18) smo bili utvrdili da se $M^{\rho\sigma}$ ne menja ako dodamo λK^ρ. Tako imamo da: **vektor $a^\rho + \lambda K^\rho$ definiše istoriju centra mase posmatranog materijalnog sistema**.

Da bismo efektivno odredili koordinate centra mase, uzećemo posmatrača čiji tok vremena određuje rezultujući impuls sistema. Tada je $K^i = 0$, $K^4 \neq 0$, a veza (5.22) postaje

$$M^{i4} K_4 - a^i K^4 K_4 = 0 \quad \Rightarrow \quad a^i = \frac{M^{i4}}{K^4}. \tag{5.23}$$

Ovde je a^4 neodređeno, što iskazuje činjenicu da je istorija centra mase paralelna vremenskoj osi posmatrača, odnosno da važi zakon održanja impulsa.

Ostaje nam da ovaj izbor malo bliže uporedimo s onim iz njutnovske mehanike. Zato ćemo rezultujući impuls i rezultujući moment napisati kao zbirove odgovarajućih komponenti veličina $K^i_{(\ell)}$ i M^{i4}_ℓ (5.2) i (5.17):

$$\begin{aligned} K^4 &= \sum_\ell m_{(\ell)} \gamma_{(\ell)}, \\ M^{i4} &= \sum_\ell m_{(\ell)} \gamma_{(\ell)} x^i_{(\ell)} - \sum_\ell m_{(\ell)} x^4_{(\ell)} u^i_{(\ell)}. \end{aligned}$$

S obzirom na to da posmatrač jedinstveno određuje vremensku koordinatu x^4, drugi član u izrazu za M^{i4} je K^i, koji je za našeg posmatrača jednak nuli. Dakle, iz (5.23) sledi

$$a_i = \frac{\sum_\ell m_{(\ell)} \gamma_{(\ell)} x^i}{\sum_\ell m_{(\ell)} \gamma_{(\ell)}} \tag{5.24}$$

Ovaj obrazac za centar mase izmenjen je, u odnosu na njutnovski, utoliko što umesto apsolutnih (ovde sopstvenih) masa, stoje relativne. Obrazac (5.21), pomoću kojeg nalazimo istoriju centra mase materijalnog sistema, važi za svakog Lorencovog posmatrača.

Zadaci

Zadatak 9

Relativne trosile $\vec{P}$ i $\vec{Q}$ dejstvuju na masu m. Kako se odnosi rezultujuće ubrzanje prema izvodu rezultujuće brzine?

Rešenje

Zadatak 10

Dat je materijalni sistem, gde su poznate tri sopstvene mase $m_{(i)}$ i četvrta $m_{(4)}$, relativna u odnosu na centar mase sistema. Dati su, u određenom trenutku: trovektori $\vec{r}_{(k)}$ $(k = 1,2,3,4)$ položaja masa, centra inercije $\vec{a}$, njegove brzine $\vec{\lambda}$ i pravca $\vec{\ell}_{(i)}$ $(i = 1,2,3)$ $(\ell^2 = 1)$ brzina prve tri mase. Odrediti brzine sistema i četvrtu sopstvenu masu.

Rešenje

6. Mehanika neprekidnih sredina

6.1 Gustina, impuls i energija

Prvi pristuppojmu gustine učinićemo, po klasičnoj koncepciji fizike, posmatrajući mnoštvo materijalnih tačaka. Na taj način je definisana brojna gustina.

Brojna gustina predstavlja količnik

$$\frac{n}{V} = N, \tag{6.1}$$

gde je n ukupan broj čestica u datoj zapremini od V jedinica. Nju opaža posmatrač po čijim merilima uočena zapremina iznosi V. Stoga ćemo je nazvati **relativna brojna gustina**. Ako bi posmatrač mirovao u odnosu na centar masa toga sistema čestica, zapremina koju uočava bila bi, na osnovu (4.2′), veća. Otud sledi da je brojna gustina sistema za takvog posmatrača najmanja. Tu gustinu ćemo nazvati **sopstvena brojna gustina**. Ona iznosi

$$\frac{n}{V_0} = N_0. \tag{6.2}$$

Odnos ovih gustina, sopstvene i relativne, ako se materijalnisistem prema posmatraču kreće brzinom intenziteta v, dogija se, pomoću (4.2′), iz (6.1) i (6.2):

$$\frac{n}{V_0} = \frac{n}{\gamma V} = N\gamma^{-1} \quad \Rightarrow \quad N = \gamma N_0. \tag{6.3}$$

Dok samo za brojnu gustinu imali dve mogućnosti, (6.1) i (6.2), dotle gustina kao količina materije u jedinici zapremine, dopušta četiri mogućnosti. Tako je zbog pojma relativne mase, koja se pojavljuje počev od §17 (Gl. 5.2, str. 54), i koju smo obeležili sa $m^* = \gamma m$. Možemo dakle računati bil sopstvenu ili relativnu masu po jedinici bilo sopstvene ili relativne zapremine. Količnik sopstvene mase i sopstvene zapremine smatraćemo kao najprirodniji; on se najčešće koristi, a obeležavaćemo ga sa ρ

$$\rho = \sum_i \frac{m_i}{V} \tag{6.4}$$

i naziva se **sopstvena gustina**. U slučaju da nam se u računu pojavineka od ostalih, relativnih gustina, ona će biti drugačije obeležena.

Možemo zamisliti izolovanu materijalnu sredinu koja ne međudejstvuje sa okolinom, kao što smo činili za diskretni sistem u §18 (Gl. 5.3, str. 55). Tada smo posmatrali jednostavan slučaj kada nema promene ukupnog impulsa i kinematičkog momenta prvenstvenostoga što takav sistem odgovara nekom procesu gde materijalne tačke predstavljaju izolovana tela konačnih dimenzija koja ne mogu lako promeniti impuls i moment. Međutim, kada se radi o nekoj struji sastavljenoj od vrlo velikog broja čestica neznatnih masa i dimenzija, interakcija sa okolinom, dakle promenljivost mehaničkih parametara, predstavlja daleko realniju mogućnost.

Zadržimo pojam impulsa koji se prenosi na velika mnoštva, koristeći makroskopski pojam mase. Ali, umesto kinetičkog momenta, koji se menja od tačke do tačke, pa nije pogodan za prenošenje na velika mnoštva, razmatraćemo kinetičku energiju.

Elementarno dejstvo sile F^ρ (5.9), na intervalu ds neke svetske linije, glasi:

$$F^\rho \,\mathrm{d}s = c\gamma^{-1}F^\rho \,\mathrm{d}t = c^{-1}\frac{\mathrm{d}(m\gamma v^i)}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t + \frac{\mathrm{d}(m\gamma)}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t. \tag{6.5}$$

Na osnovu izraza (5.10) za relativnu trosilu P^i, i (5.13) za relativnu energiju E, gornju vezu možemo predstaviti kao:

$$\begin{aligned} cF^i \,\mathrm{d}s &= P^i \,\mathrm{d}t, \\ c^2F^4 \,\mathrm{d}s &= \mathrm{d}(m^*c^2) = \mathrm{d}E. \end{aligned} \tag{6.6}$$

Izraz za impuls (5.2) daje:

$$\begin{aligned} \bar{\mathrm{K}}^i &= F^i \,\mathrm{d}s, \\ \mathrm{d}E &= \mathrm{d}(c^2K^4). \end{aligned} \tag{6.7}$$

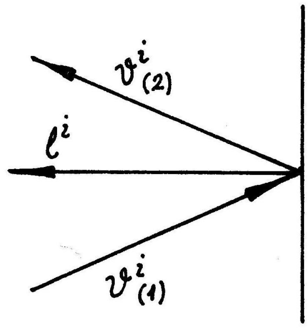
Sad možemo iskazati zakone priraštaja relativnog impulsa i relativne energije, date vezama (6.6):

1) priraštaj relativnog impulsa m^*v^i jednak je dejstvu relativne trosile na sistem u elementarnom intervalu posmatračevog vremena,
2) priraštaj relativne energije E srazmeran je, sa faktorom c^2, priraštaju komponente K^4 četvoroimpulsa.

6.2 Kinetički pojam pritiska

Posmatrajmo strujunekog "fluidaša stanovišta kinetičkete teorije gasova, kao veliki broj čestica različih masa i brzina koje imaju osobinu da elastično odskaču prilikom sudara s nekom dvrstom i nepokretnom preprekom. Takvo gledište, klasično u fizici, prirodno vodi pojmu pritiska. Pod pojmom **elastičnog odbijanja čestice** podrazumeva se ono za koje je održan inpuls po intenzitetu, i to tako što njegova komponenta paralelna prepreci ostaje neizmenjena, dok upravna komponenta menja smer a zadžava intenzitet. Stoga kinetička energija te struje ostaje neizmenjena. Pritisak fluida nastaje kao statistička posledica inpulsa koje čestice predaju zidovima, menjajući brzinu u normalnon pravcu.

Šta opaža jedan posmatrač prema kome miruju zidovi na koje pritiska gas opisan ovoom kinetičkom slikom? Neka jedinidnični vektor normale na površ zida lma u prostoru komponente ℓ^i, a brzina nailazeće struje fluida neka u datom trenutku bude v^i, računajući zasad da sve čestice imaju iste brzine (Sl. 6.1).



Slika 6.1: Čestice istih brzina.

Prvo, brzina gustina takvog roja čestica mora biti, po merilima posmatrača, uvećana, i iznositi γN_0 na osnovu (6.3), gde je N_0 sopstvena brojna gustina, a γ funkcija brzine roja. Zatim svaka masa biva uvećana u istoj srazmeri, pa tako i masa svih čestica u celini. Ako je sopstvena gustina ρ (videti Synge, [6] str. 264-271), tada ono što opaža posmatrač predstavlja relativnu gustinu mase ρ^{**}, čiji odnos prema sopstvenoj gustini mora biti, na osnovu prethodnog

$$\rho^{**} = \gamma^2 \rho.$$

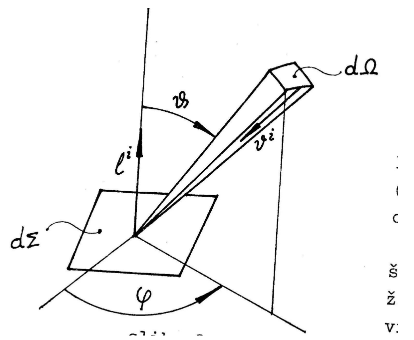
Specifičan broj čestica u jedinici posmatračevog vremena određen je normalnom komponentom brzine nailaženja $\overset{N}{v}_{(2)} = -\overset{N}{v}_{(1)} = v_i \ell^i$. Veličina impulsa koje jedinici površine predaju čestice sadržane u jedinici posmatračeve zapremine iznose

$$\left(\overset{N}{v}_{(2)} - \overset{N}{v}_{(1)}\right) \rho^{**} = 2 v_i \ell^i \gamma^2 \rho. \tag{6.8}$$

Kako broj čestica koje dejstvuju na jedinicu površine, u jedinici vremena, sadrži $v_i \ell^i$ puta gornji izraz, to pritisak iznosi

$$p = 2\gamma^2 \rho \left(v_i \ell^i\right)^2. \tag{6.9}$$

Pređimo na opšti slučaj, kada su ne samo amse, već i brzineproizvoljne. Čestice gasa nailaze iz svih pravaca jedne polusfere i pogađaju jednu elementarnu površinu dΣ na kojoj je smešten početak afernog koordinatnog sistema čija je ravan $\theta = \frac{\pi}{2}$ određena pomoću dΣ (Sl. 6.2).



Slika 6.2: Elementarna površ dΣ i sferni ugao dΩ.

Relativnu brojnu gustinu podskupa (klase) čestica čije su mase, sa određenom približnošću, jednake$m$, a brzine sa istom približnošćuimaju intenzitet v, obeležimo sa $\xi(\theta, \varphi, v, m)$. Ovim smo dopustili mogućnost da roj jedne određene klase dolazi iz svih pravaca gornje polusfere. Relativna gustina relativne mase, koja nam je potrebna s obzirom na (6.9), za onaj roj čestica koji dolazi iz pravca određenog datim vrednostima θ i φ, i prolazi kroz sferni ugao $\mathrm{d}\Omega = \sin\theta \mathrm{d}\theta \mathrm{d}\varphi$, iznosi

$$m\gamma\xi(\theta,\varphi,v,m)\sin\theta \mathrm{d}\theta \mathrm{d}\varphi \mathrm{d}v \mathrm{d}m. \tag{6.10}$$

Pretpostavimo kinetičku izotropnost, ravnomernu raspodelu masa i brzina u svim pravcima. Tada je $\xi = \xi(v,m)$. Ako su mase i brzine ove struje čestica dovoljno gusto raspoređene da bismo ih makroskopski mogli smatrati za kontinuum, imaćemo za celu polusferu, kad izvršimo integraciju preko svih masa od 0 (masa fotona) do M, i trobrzina od 0 do c, imaćemo, s obzirom na (6.9), za ukupni pritisak

$$p = 2\int\limits_{\theta=0}^{\pi/2}\int\limits_{\varphi=0}^{2\pi}\int\limits_{v=0}^{c}\int\limits_{m=0}^{M} m\gamma v^2\cos^2\theta\,\xi(v,m)\sin\theta\,\mathrm{d}\theta \mathrm{d}\varphi \mathrm{d}v \mathrm{d}m,$$

odnosno

$$p = \frac{4\pi}{3}\int\limits_{v=0}^{c}\int\limits_{m=0}^{M} m\gamma v^2\xi(v,m)\,\mathrm{d}v \mathrm{d}m. \tag{6.11}$$

Kako posmatrana masa gasa sadrži u jednakoj meri nailazeće i odlazeće čestice, relativnu brojnu gustinu, koju smo računaki za nailazeću struju, treba pomnožiti sa 2 i integraliti po polusferi. Treba dakle integrisati $2\xi(v,m)\,\mathrm{d}\Omega$ da bismo dobili ukupnu relativnu brojnu gustinu N

$$N = 4\pi\int\limits_{v=0}^{c}\int\limits_{m=0}^{M}\xi(v,m)\,\mathrm{d}v \mathrm{d}m. \tag{6.12}$$

Ako relativnu gustinu relativne mase za pojedinu klasu masa i brzina (6.10) pomnožimo sa $2c^2$ i integrišemo po polusferi, dobićemo relativnu gustinu relativne energije E i relativne kinetičke energije T:

$$E = 4\pi\int\limits_{v=0}^{c}\int\limits_{m=0}^{M} m\gamma c^2\xi(v,m)\,\mathrm{d}v \mathrm{d}m, \tag{6.13}$$

$$T = 4\pi\int\limits_{v=0}^{c}\int\limits_{m=0}^{M} m(\gamma-1)c^2\xi(v,m)\,\mathrm{d}v \mathrm{d}m. \tag{6.14}$$

Relativna kinetička energija prosečne čestice $\bar{T}$ iznosi, prema tome

$$\bar{T} = N^{-1}T = \frac{4\pi}{N}\int\limits_{v=0}^{c}\int\limits_{m=0}^{M} m(\gamma-1)c^2\xi(v,m)\,\mathrm{d}v \mathrm{d}m. \tag{6.15}$$

gde je N dato sa (6.12).

Ako pustimo mase svih čestica da teže jednoj vrednosti m, odnosno da iščezavaju klase čestica s drugim masama, što odgovara monoatomskom gasu, dobićemo distribucije definisane sa:

$$\mu(v) = \int\limits_{0}^{M}\xi(v,x)\delta(x-m)\,\mathrm{d}x$$

i

$$m\mu(v) = \int\limits_{0}^{M} x\xi(v,x)\delta(x-m)\,\mathrm{d}x,$$

gde je $\delta(x-m)$ Dirakova funkcija (videti: L. Schwartz, [12], str. 83-86). Tada će izrazi: (6.11). (6.12), (6.13) i (6.14) glasiti:

$$p = \frac{4}{3}\pi m \int_0^c \gamma v^2 \mu(v)\,\mathrm{d}v, \tag{6.11$''$}$$

$$N = 4\pi \int_0^c \mu(v)\,\mathrm{d}v, \tag{6.12$''$}$$

$$E = 4\pi mc^2 \int_0^c \gamma\mu(v)\,\mathrm{d}v \tag{6.13$'$}$$

$$T = 4\pi mc^2 \int_0^c (\gamma-1)\mu(v)\,\mathrm{d}v. \tag{6.14$'$}$$

Prosečna relativna kinetička energija po čestici $\bar{T}$ je

$$\bar{T} = 4\pi mc^2 N^{-1} \int_{v=0}^c (\gamma-1)\mu(v)\,\mathrm{d}v \tag{6.15$'$}$$

Kako (6.13$'$) predstavlja relativnu gustinu relativne energije, relativnu gustinu mase ρ^{**} ćemo dobiti kad taj izraz podelimo sa c^2. Na osnovu toga (6.12$'$) veza (6.15$'$) ima oblik

$$\bar{T} = c^2\bar{\gamma}^2\rho N^{-1} - mc2, \tag{6.15$''$}$$

gde $\bar{\gamma}$ treba shvatiti kao srednji dilatacioni faktor za posmatrani skup čestica.

Ako apsolutnu trmperaturu Θ definišemo uobičajenom jednačinom gasnog stanja

$$p = NR\Theta, \tag{6.16}$$

gde je R gasna konstanta, imaćemo

$$R\Theta = \frac{1}{3}m\frac{\int_0^c \gamma v^2\mu(v)\,\mathrm{d}v}{\int_0^c \mu(v)\,\mathrm{d}v.} \tag{6.17}$$

(6.15$''$) i (6.17) su, kao i (6.11$'$)-(6.14$'$), relativističke jednačine za savršeni monoatomski gas.

Za male brzine $v \ll c$ možemo staviti $\gamma = 1$ u (6.11), a $\gamma - 1 = \dfrac{v^2}{2c^2}$ u (6.15) i (6.15$''$), pa ćemo na osnovu prve dve veze dobiti:

$$p = \frac{2}{3}N\bar{T},$$

a na osnovu treće

$$R\Theta = \frac{2}{3}m\bar{T}.$$

Ovo su poznate formule kinetičke teorije gasova.

Prethodno smo razmatrali gas sastavljen od "ponderabilne"materije, dopuštajući kao graničnu mogućnost, da za izvesne čestice sopstvene mase teže nuli, a brzina vrednosti c.

Pređimo sad na slučaj fluida sastavljenog isključivo od svetlosnih čestica, ili **fotonskog gasa**. Mi ćemo ga ispitivati pod pretpostavkom da površ zida savršeno odbija svetlost. Tako je potpuna analogija sa gasom koji ne vrši rad.

Da bismo za takav fluid našli prilaz pojmu pritiska, dovoljno je da pođemo od činjenice da je relativna energija po jedinici relativne zapremine jednaka, pojmovno i dimenzijski, relativnoj sili po jedinici zidne površine, dakle pritisku. Iz (5.2), (5.8) i (5.13) imali smo da je energija fotona $E_f = h\nu$, gde je h Plankova konstanta, a ν frekvencija. Uzmimo u razmatranje određenu klasu fotona (određenu ”boju”fotona) koja ima utvrđenu veličinu frekvencije ν. Ako je relativna brojna gustina tih kvanta N, relativna gustina relativne energije će iznositi $Nh\nu$. Pretpostavimoda naš svetlosni zrak nailazi iz pravca koji s normalom zaklapa ugao θ. Tada se on razređuje po površi zida srazmerno $\cos\theta$, a i impulsi koje zid prima su u istoj meri oslabljeni, pa će pritisak tog malaza opasti, u odnosu na normalni upadni ugao srazmerno $\cos^2\theta$. Kako fontovi bivaju odbijeni, njihov pritisak je dvostruko veći nego da su zaustavljeni na zidu. Dakle

$$p = 2Nh\nu\cos^2\theta. \tag{6.18}$$

Što je analogno (6.9). Ako uzmemo u obzir fotonske snopove koji dolaze iz svih pravaca, a imaju različite frekvencije koje se neprekidno menjaju (uzev čak 0 za donju granicu), i obeležimo sa ξ funkciju relativne brojne gustine, ukupni fotonski pritisak će biti

$$p = 2h \int\limits_{\theta=0}^{\pi/2} \int\limits_{\varphi=0}^{2\pi} \int\limits_{0}^{v} \xi(\theta,\varphi,v)v\cos^2\theta\sin\theta\,d\theta d\varphi dv. \tag{6.19}$$

Pod pretpostavkom izotropnosti raspodele fotona to će glasiti

$$p = \frac{4\pi}{3}h\int\limits_0^v v\xi(v)\,dv. \tag{6.20}$$

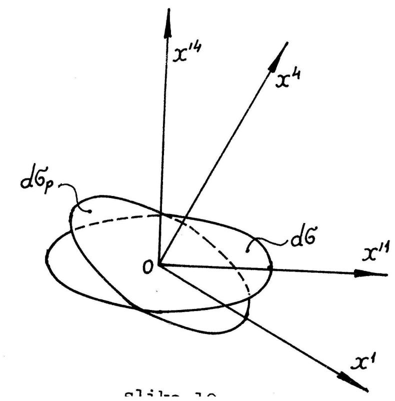
6.3 Elementarne hiperpovrši u Svetu Minkovskog

Da bismo mogli dalje ići u mehanici neprekidnih sredina, potrebne su nam neke osnovne formule koje se odnose na elementarne trodimenzionalne površi ili hiperpovrši. To ćemoprimeniti na transformacije integrala po zatvorenim oblastimaSveta specijalne relativnosti.

Posmatrajmo prvo jednu elementarnu, prostorno orijentisanu hiperpovrš $d\sigma$ (visi §3 - Gl. 1.3, str. 21), sa uzajamno upravnim ivicama. Neka jedinični vremenski vektor upravan na njoj bude bazni vektor ose $\bar{x}^4$ Lorencovog sistema $O\bar{x}$. Ostale ose tog sistema možemo odabrati tako da budu paralelne ivicama elementarne hiperpovrši, pa će njena vrednost iznositi

$$d\sigma = d\bar{x}^1\,d\bar{x}^2\,d\bar{x}^3. \tag{6.21}$$

Uzmimo drugi sistem Ox, koji je s prethodnim povezan jednostavnom Lorencovom transformacijom (3.35), odnosno (3.37). Prostorne ose x^2 i x^3 su zajedničke za oba sistema, samo se parovi x^1, x^4 i $\bar{x}^1, \bar{x}^4$ međusobno razlikuju. Izvršimo projektovanje, paralelno osi x^4, elementa $d\sigma$ na sopstveni prostor u kom su smeštene ose x^1, x^2, x^3 srugog posmatrača (sl. 6.3).



Slika 6.3: Orijentisana hiperpovrš.

Kakva je veza između $\mathrm{d}\sigma$ i $\mathrm{d}\sigma_p$? Da bismo to ispitali poći ćemo od vektorskog izraza za elementarnu hiperpoveš $\mathrm{d}\vec{\sigma}$, koji predstavlja spoljni proizvod vektora $\mathrm{d}\bar{x}^1, \mathrm{d}\bar{x}^2, \mathrm{d}\bar{x}^3$, izražen simboličkom determinantom

$$\mathrm{d}\vec{\sigma} = \mathrm{d}\bar{x}^1 \wedge \mathrm{d}\bar{x}^2 \wedge \mathrm{d}\bar{x}^3 = \begin{vmatrix} \vec{\bar{v}}_{(1)} & \vec{\bar{v}}_{(2)} & \vec{\bar{v}}_{(3)} & \vec{\bar{v}}_{(4)} \\ \mathrm{d}\bar{x}^1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{d}\bar{x}^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{d}\bar{x}^3 & 0 \end{vmatrix} = -\mathrm{d}\bar{x}^1 \mathrm{d}\bar{x}^2 \mathrm{d}\bar{x}^3 \vec{\bar{v}}_{(4)}. \tag{6.22}$$

Ovaj simbolički vektorski izraz može da se razloži u odnosu na svaki sistem. Tako ćemo, na osnovu (3.35), imati za sistem Ox

$$\mathrm{d}\vec{\sigma} = \begin{vmatrix} \vec{v}_{(1)} & \vec{v}_{(2)} & \vec{v}_{(3)} & \vec{v}_{(4)} \\ \operatorname{ch}\theta \mathrm{d}x^1 & 0 & 0 & \operatorname{sh}\theta \mathrm{d}x^4 \\ 0 & \mathrm{d}x^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{d}x^3 & 0 \end{vmatrix} = \operatorname{sh}\theta \mathrm{d}x^2 \mathrm{d}x^3 \mathrm{d}x^4\, \vec{v}_{(1)} - \operatorname{ch}\theta \mathrm{d}x^1 \mathrm{d}x^2 \mathrm{d}x^3\, \vec{v}_{(4)}. \tag{6.23}$$

Kako se projektovanje ove elementarne površi vrši paralelno osi x^4, čiji je bazni vektor $\vec{v}_{(4)}$, to će se $\mathrm{d}\sigma_p$ svesti naodgovarajući član u gornjem izrazu

$$\mathrm{d}\sigma_p = \operatorname{ch}\theta\, \mathrm{d}\sigma. \tag{6.24}$$

Projekcija paralelno osi koju određuje $\vec{v}_{(1)}$ će biti

$$\vec{v}_{(1)} \cdot \mathrm{d}\vec{\sigma} = \operatorname{sh}\theta\, \mathrm{d}x^2 \mathrm{d}x^3 \mathrm{d}x^4, \tag{6.25}$$

dok se za preostala dva vektora dobija nula. Iz (3.37) vidimo da se ovi koeficijenti svode na uzajamno skalarne proizvode vektora dve baze, pa će biti

$$\mathrm{d}\sigma_p^{(4)} = \left| \vec{\bar{v}}_{(4)} \cdot \vec{v}_{(\alpha)} \right| \mathrm{d}\sigma, \tag{6.26}$$

gde je uzeta apsolutna vrednost zato što se projektovanje moževršiti paralelno nekom suprotno orijentisanom vektoru, dok je mera površine uvek pozitivna. Ako bismo ponovili rezonovanje, polazeći od jedne vremenski orijentisane hiperpovrši, dakle sa prostornim jediničnim vektorom normale, imali bismo

$$\mathrm{d}\sigma_p^{(i)} = \left| \vec{\bar{v}}_{(i)} \cdot \vec{v}_{(\alpha)} \right| \mathrm{d}\sigma. \tag{6.27}$$

Dakle, uopšte, upravna projekcija po svakom vremenski ili prostorno orijentisanom vektoru v^α, ako je $\bar{v}^\alpha$ jedinični vektor upravan na elementarnu hiperpovrš $\mathrm{d}\sigma$, ne nulte orijentacije, računa se po obrascu

$$\mathrm{d}\sigma_p = \left|\bar{v}_\gamma v^\gamma\right| \mathrm{d}\sigma, \tag{6.28}$$

koji je analogan onom iz euklidske geometrije.

Ostao je slučaj elementa nulte hiperpovrši. Njegova veličina ne može se oceniti, jer mu jedna ivica nema dužinu, avektor normale na njemu ne može se smatrati jediničnim. Zato ćemo uzeti element $\mathrm{d}\sigma_p$, koji je nastao upravnim projektovanjem, paralelno nekom vektoru u^α, dva različita elementa, $\mathrm{d}\sigma$ s normalom v^α, i $\mathrm{d}\bar{\sigma}$ s normalom $\bar{v}^\alpha$. Podrazumevamo to da su $\mathrm{d}\sigma$, $\mathrm{d}\bar{\sigma}$ i njihova projekcija $\mathrm{d}\sigma_p$ nenulti elementi. Tada imamo

$$\mathrm{d}\sigma_p = |u^\alpha \bar{v}_\alpha|\, \mathrm{d}\bar{\sigma} = |u^\alpha v_\alpha|\, \mathrm{d}\sigma. \tag{6.29}$$

Možemo pomerati elemente $\mathrm{d}\sigma$ i $\mathrm{d}\bar{\sigma}$ po TroRavnima na kojima leže, a čije su normale v^α i $\bar{v}^\alpha$, sve dok ne dospu u takav uzajamni položaj da ih spajaju nulti zraci. Svaki upravni presektih zraka je nulta hiperpovrš. Te snopove određuju paralelni nulti vektori n^α, umesto jediničnih prostornih ili vremenskih vektora. Tada će druga jednakost u gornjem obrascu postati

$$|n^\alpha v_\alpha|\, \mathrm{d}\sigma = |n^\alpha \bar{v}_\alpha|\, \mathrm{d}\bar{\sigma}. \tag{6.30}$$

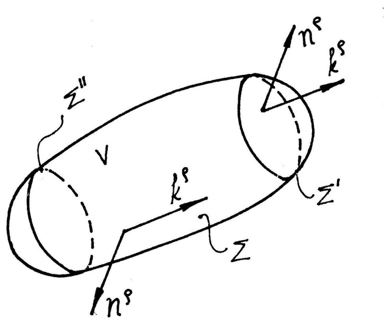
I ovo je analogno obrascima projektovanja iz euklidske geometrije.

6.4 Teorema o divergenciji

Teorema o divergenciji, koja je u magnetizam ušla kaoGausova teorema, dok je u analizi poznate nekad kao formula Ostrogradskog, nekad opet kao Gausova teorema, a nekad i kao Grinova formula u prostoru, izvešćemo u Svetu Minkovskog.

Pođimo od jedne četvorodimenzionalne, prosto povezane oblasti Ω, koja ograničava zatvorena trodimanzionalna hiperpovrš Σ. Ovu ćemo smatrati kao neprekidno diferencijabilnu, bar do prvog reda izvoda, tako da neprekidno menja normalu n^α u svakom događaju x^α. Odatle intuitivno zaključujemo da Σ mora imati i prostorno i vremenski i nulto orijentisane tangentne elemente.

Smatraćemo dalje da vektor normale na Σ, ako se ide nekom linijom po njoj, pri promeni signature dobija nulti karakter samo u izdvojenim događajima $\bar{x}^\alpha$ u opštem slučaju. Krive koje imaju nulti tangentni pravac (prema tome i normalu) u svakom od tih događaja $\bar{x}^\alpha$, sačinjavaju jedan podskup na Σ. Smatraćemo da ti događaji leže na međusobno odvojenim, zatvorenim dvodimenzionalnim površima $\bar{\Sigma}, \bar{\bar{\Sigma}}, \ldots$ hiperpovrši Σ (Sl. 6.4), a sa svake od njih polaze nulti upravni zraci koji pripadaju polukonusima, ili samo prošlosti, ili samo budućnosti $\bar{x}^\alpha$. Za celu hiperpovrš Σ moraju postojati sve moguće orijentacije.



Slika 6.4: Zatvorene dvodimenzionalne površi $\bar{\Sigma}, \bar{\bar{\Sigma}}, \ldots$ hiperpovrši Σ.

Kako smo se ograničili na prethodnu heurističku sliku, smatraćemo i to da je učešće nultih delova $\bar{\Sigma}, \bar{\bar{\Sigma}}, \ldots$ hiperpovrši Σ, pri integraciji neke merljive funkcije F prek cele Σ, zanemarljivo. Stoga ćemo u razmatranje uzimati samo područje definisanih vektora normala n^α na Σ, za koje određujemo da budu jedinični

$$g_{\alpha\beta} n^\alpha n^\beta = \varepsilon(n). \tag{6.31}$$

Uzmimo neko konstantno polje jediničnih vektora k^α. Na onim mestima Σ gde se k^α i n^α poklapaju po pravcu i smeru njihov skalarni proizvod jednak je $\varepsilon(n)$, kao i skalarni kvadrat n^α u (6.31). Tamo gde se ta dva vektora ne podudaraju po smeru njihov skalarni proizvod ima vrednost suprotnu signaturi n^α. Za ostale događaje nastupiće različiti slučajevi već prema tome da li je k^α lokalno orijentisan unutar ili izvan Σ, jer je n^α uvek spoljna normala. Ako je

$$\varepsilon(n) g_{\alpha\beta} k^\alpha n^\beta > 0, \tag{6.32}$$

zaključujemo da su n^α i k^α iste orijentacije, to jest da je k^α lokalno orijentisan izvan Σ. Ako je

$$\varepsilon(n) g_{\alpha\beta} k^\alpha n^\beta < 0, \tag{6.33}$$

zaključujemo da su k^α i n^α suprotnih orijentacija, to jest da je k^α lokalno orijentisan unutar Σ.

Pređimo sad na dokazivanje same teoreme. Poći ćemo od integrala

$$J = \int_\Omega \frac{\partial F}{\partial x^4}\, \mathrm{d}\tau \quad \text{gde je} \quad \mathrm{d}\tau = \mathrm{d}x^1 \mathrm{d}x^2 \mathrm{d}x^3 \mathrm{d}x^4, \tag{6.34}$$

gde je F funkcija klase C^1 u Ω. Ako sa k^α obeležimo jedinični vektor x^1-ose, dakle $k^\alpha(1,0,0,0)$ i pristupimo integraciji u njegovom pravcu i smeru, imaćemo

$$J = \int \mathrm{d}x^2 \mathrm{d}x^3 \mathrm{d}x^4 \int_{\Sigma_1}^{\Sigma_2} \frac{\partial F}{\partial x^1}\, \mathrm{d}x^1 = \int_\Sigma [F]_1^2 \mathrm{d}x^2 \mathrm{d}x^3 \mathrm{d}x^4. \tag{6.35}$$

Uzimamo da je $\mathrm{d}x^2 \mathrm{d}x^3 \mathrm{d}x^4$ pozitivno, to jest da su priraštaji u smerovima koordinata. Ta elementarna hiperpovršina predstavlja ustvari upravnu projekciju, paralelno x^1-osi, elementarne hiperpovršine $\mathrm{d}\sigma$. Na osnovu (6.29) to će biti

$$\mathrm{d}x^2 \mathrm{d}x^3 \mathrm{d}x^4 = (|k_\alpha n^\alpha|\, \mathrm{d}\sigma)_2 = (|k_\alpha n^\alpha|\, \mathrm{d}\sigma)_1\,. \tag{6.36}$$

Kako je k^α u tačkama gornje granice integracije, na Σ_2, usmereno izvan Σ, kao n^α, a na Σ_1 suprotno od n^α, biće u odnosu na naš sistem:

$$(k_\alpha n^\alpha)_{\Sigma_2} = \varepsilon(n) n^1, \quad (k_\alpha n^\alpha)_{\Sigma_1} = -\varepsilon(n) n^1, \tag{6.37}$$

na osnovu (6.32) i (6.33), jer k^α, ma da je prostorno orijentisan, ne uslovljava orijentaciju n^α na granicama. Dakle (6.36) će glasiti

$$J = \int_\Omega \frac{\partial F}{\partial x^1}\, \mathrm{d}\tau = \int_\Sigma \varepsilon(n) n_1 F\, \mathrm{d}\sigma. \tag{6.38}$$

Ovaj zaključak važi, putem istovetnih rezonovanja, i za ose x^2 i x^3. Dakle

$$J = \int_\Omega \frac{\partial F}{\partial x^i}\, \mathrm{d}\tau = \int_\Sigma \varepsilon(n) n_i F\, \mathrm{d}\sigma. \tag{6.39}$$

Ostaje nam vremenska osa x^4. Za nju je

$$k_\alpha n^\alpha = -n^4 = n_4, \tag{6.40}$$

jer je $k^\alpha(0,0,0,1)$ i $k_\alpha(0,0,0,-1)$. Otud, analogno ranijim izvođenjima

$$J = \int\limits_\Omega \frac{\partial F}{\partial x^4}\,\mathrm{d}\tau = \int\limits_\Sigma \varepsilon(n) n_4 F\,\mathrm{d}\sigma. \tag{6.39'}$$

Dakle najzad

$$J = \int\limits_\Omega \frac{\partial F}{\partial x^\alpha}\,\mathrm{d}\tau = \int\limits_\Sigma \varepsilon(n) n_\alpha F\,\mathrm{d}\sigma. \tag{6.41}$$

Funkcija F može, po zakonu transformacije, biti svaka veličina: skalar, vektor ili tenzor bilo kojeg reda. U slučaju da je skalar ova teorema postaje **teorema o gradijentu**. U ostalim slučajevima to je **teorema o divergenciji**. Mi ćemo je primenjivati na polja vektora i tenzora drugog reda. Treba istaći da ćemo sve veličine zastupljene u integralnim formulama zadavati u odnosu na Lorencove sisteme i zahtevati njihovu Lorencovu invarijantnost. Istina, ako je dat vektor, njegova divergencija, pošto je skalar, ostaje invarijantna u odnosu na svaku transformaciju i pod integralom. Ostale veličinemogu imati opšte zakone transformacije samo izvan integrala.

6.5 Cevi svetskih linija

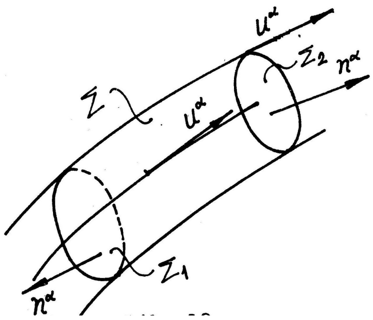
Kongruencije bliskih svetskih linija, koje odgovaraju česticama čiji se uzajamni položaji ne menjaju preko određenih granica, nazivaćemo, po analogiji s klasičnom hidrodinamikom, **cevi svetskih linija**.

Primenićemo rezultate prethodnog odeljka na specifičnu promenu prostornog hiperpovršinskog elementa, koji predstavlja presek jedne cevi, po njenim svetskim linijama. Taj presek predstavlja elementarnu zapreminu, i posmatramo njenu promenu u odnosu na tok vremena koje odgovara tim svetskim linijana.

Uzmino kongruenciju svetskih linija čije četvorobrzine sačinjavaju vektorsko polje u^α. Odgovarajući sistem diferencijalnih jednačina glasi

$$\frac{\mathrm{d}x^1}{u^1} = \frac{\mathrm{d}x^2}{u^2} = \frac{\mathrm{d}x^3}{u^3} = \frac{\mathrm{d}x^4}{u^4}. \tag{6.42}$$

Rešenje tog sistema, uz date početne uslove, daje ”putanje”polja u^α. Izdvojimo jednu cev linija, za sad konačnih dimenzija, ograničenu na krajevima, ravnim prostornim presecima Σ_1 i Σ_2 (slika 6.5).



Slika 6.5: Cev linija.

Četvorozapremina tog odsečka neka iznosi V. Odgovarajuća hiperpovrš, zajedno s krajevima, neka bude Σ. Posmatrajmo integral po zapremini V divergencije četvorobrzine. Po teoremi o divergenciji (6.41) imamo transformaciju integrala:

$$\int\limits_V \frac{\partial u^\alpha}{\partial x^\alpha}\,\mathrm{d}\tau = \int\limits_\Sigma \varepsilon(n) u^\alpha n_\alpha\,\mathrm{d}\sigma \tag{6.43}$$

S obzirom na to da je bočna površina ovog odsečka sastavljena od svetskih linija, trajektorija u^α, skalarni proizvod $u^\alpha n_\alpha$ jednak je nuli u svakoj njenoj tački, pa taj deo ukupne površine Σ ne igra nikakvu ulogu na desnoj strani (6.43). Pustimo sad da preseci Σ_1 i Σ_2 teže jedan drugom duž strujnih linija koje oni presecaju. Obeležimo sa $u^\alpha_{(2)}$ i $u^\alpha_{(1)}$ vrednosti četvorobrzine u odgovarajućim tačkama dovoljno bliskih hiperpovršina preseka Σ_1 i Σ_2. Tada će nam razvoj u^α u red po stepenima $\mathrm{d}x^\alpha$ (priraštaj koordinata između Σ_1 i Σ_2) glasiti

$$u^\alpha_{(2)} = u^\alpha_{(1)} + \frac{\partial u^\alpha_{(1)}}{\partial x^\beta}\,\mathrm{d}x^\beta + \cdots \tag{6.44}$$

Kako Σ_2 možemo učiniti po volji bliskim Σ_1, priraštaji u (6.44) se mogu linearizovati. Tada (6.43) glasi

$$\int\limits_V \frac{\partial u^\alpha}{\partial x^\alpha}\,\mathrm{d}\tau = \int\limits_{\Sigma_2} \varepsilon(n)\left(u^\alpha + \frac{\partial u^\alpha}{\partial x^\beta}\mathrm{d}x^\beta\right) n_\alpha\,\mathrm{d}\Sigma - \int\limits_{\Sigma_1} \varepsilon(n) u^\alpha n_\alpha\,\mathrm{d}\Sigma. \tag{6.45}$$

(Ovde upotrebljavamo $\mathrm{d}\Sigma$ umesto $\mathrm{d}\sigma$, jer se radi isključivo o bočnim površima.) Priraštaje $\mathrm{d}x^\alpha$ možemo računati upravno na Σ_1 i Σ_2, jer je uzajamna pomerenost ivica, zbog kose struje svetskih linija, zanemarljiva s obzirom na bliskost i odnos veličina preseka prema zakošenosti, pa ćemo staviti $\mathrm{d}x^\alpha = n^\alpha \mathrm{d}s$, imajući u vidu da je zapremina V, s istim redom iščezavanja greške, jednaka $\Sigma_i \mathrm{d}s$ $(i = 1,2)$, i da je $\varepsilon(n) = -1$. Zbog vremenske orijentacije strujnih linija, gornje formule će postati

$$\int\limits_V \left(\frac{\partial u^\alpha}{\partial x^\alpha} + \frac{\partial u^\alpha}{\partial x^\beta} n_\alpha n^\beta\right) \mathrm{d}\tau = \int\limits_{\Sigma_2} \varepsilon(n) u^\alpha n_\alpha\,\mathrm{d}\Sigma - \int\limits_{\Sigma_1} \varepsilon(n) u^\alpha n_\alpha\,\mathrm{d}\Sigma. \tag{6.46}$$

Ako uzajamno bliske vrednosti oba prerseka obeležimo sa Σ, i uzmemo podintegralnu funkciju na levoj strani kao srednju vrednost na tom preseku, koji ćemo suziti i po bočnim dimenzijama, zadržavajući u odnosu na njega viši red opadanja rastojanja $\Sigma_1\Sigma_2$, imaćemo, kad stavimo $V = \Sigma \mathrm{d}s$

$$\left(\frac{\partial u^\alpha}{\partial x^\alpha} + \frac{\partial u^\alpha}{\partial x^\beta} n_\alpha n^\beta\right) \Sigma\,\mathrm{d}s = \varepsilon(n)\left(\Sigma_2 u^\alpha n_\alpha - \Sigma_1 u^\alpha n_\alpha\right). \tag{6.47}$$

Skalarni proizvod $u^\alpha n_\alpha$ je negativan na gornjoj granici, jer su u^α i n^α vremenski vektori, a ova usmerena izvan cevi, dok je pozitivan na donjoj granici, jer su različito usmereni.

Najzad (6.47) dobija oblik

$$\left(\frac{\partial u^\alpha}{\partial x^\alpha} + \frac{\partial u^\alpha}{\partial x^\beta} n_\alpha n^\beta\right) \Sigma\,\mathrm{d}s = -\vartheta \mathrm{d}\Sigma, \quad \text{gde je} \quad \Sigma_2 - \Sigma_1 = \mathrm{d}\Sigma,\ \vartheta = u^\alpha n_\alpha, \tag{6.48}$$

gde je $\mathrm{d}s$ upravan na elementarnim hiperpovršima. Ovo je, dakle, specifični priraštaj jednog prostornog zapreminskog elementa Σ dužcevi svetskih linija u^α, po upravnom odstojanju. Izraz u zagradi na levoj strani (6.48) predstavlja **relativnu ekspanziju** zapreminskog elementa i on je invarijanta renzora relativne deformacije.

Ako bismo presek izvršili upravno na cev svetskih linija, celokupno rezovanje, polazeći od (6.43), vodilo bi nas izrazu

$$\frac{\partial U^\alpha}{\partial x^\alpha} \Sigma\,\mathrm{d}s = \mathrm{d}\Sigma, \tag{6.49}$$

što predstavlja vezu koja daje **sopstvenu specifičnu ekspanziju cevi svetskih linija**. S ovzirom na to da su u^α i n_α konstantnih intenziteta i da se u ovom slučaju poklapaju, (6.49) se može dobiti i neposredno iz (6.48).

6.6 Tenzor energije neprekidne sredine

Kako smo u poglavljima 6.1 (str. 59) i 6.2 (str. 60) uveli pojmove gustine i pritiska u materijalnoj sredini, izvedene iz kinetičke teorije gasova, možemo pristupiti, koristeći isto statističko stanovište, ispitivanju protoka impulsa i energije neke neprekidne sredine. Da bismo opisali tu sredinu, poći ćemo od jednog veoa brojnog materijalnog sistema, čije čestice ne moraju vršiti isključivo elastične sudare. Taj sistem može sadržati, kao što je već slučaj, i svetlosne kvante, to jest fotone. Pretpostavićemo da taj sistem ne prima i ne predaje impulse okoline.

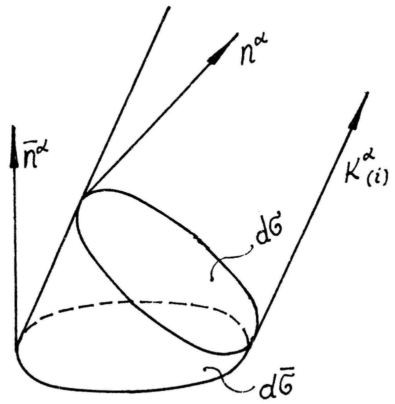
Poći ćemo od vremenski orijentisanog jediničnog vektora $\bar{n}^{\alpha}$, koji određuje konstantno vektorsko polje. Elementarne hiperpovrši, upravne na njemu, obeležavaćemo sa $\mathrm{d}\bar{\sigma}$. Od svih svetskih linija koje presecaju takav element izdvojićemo one kojima odgovaraju čestice čiji se impulsikreću u granicama vrednosti $,\mathrm{d}K^1, \mathrm{d}K^2, \mathrm{d}K^3, \mathrm{d}K^4$. Njihov broj ćemo oceniti, u skladu s razmatranjima u GL. 6.2 (str. 60), izrazom

$$\xi(x; K; \bar{n})\, \mathrm{d}K^1 \mathrm{d}K^2 \mathrm{d}K^3 \mathrm{d}K^4. \tag{6.50}$$

Umesto funkcije brojne gustine ξ, rasporedimo sve čestice u klase, prema vrednostima impulsa. Svaku do klasa obeležavaćemo indeksom u zagradama, koji ide od 1 do nekog proizvoljnog broja. Neka broj čestica i-te klase bude $\bar{N}_{(i)}$. Tada je ukupni protok impulsa te klase kroz $\mathrm{d}\bar{\sigma}$ jednak

$$\bar{N}_{(1)} K^{\beta}_{(i)}\, \mathrm{d}\bar{\sigma}, \quad \text{ne sabirati po } i. \tag{6.51}$$

Materijalni sistem koji posmatramo grupisan je tako da mu je brojna gustina, makroskopski uzev, konačna, što je preciznije izraženo činjenicom da je prostorno rastojanje izmeđubilo koje dve čestice konačno, a da je broj čestica čije je uzajamno rastojanje ispod neke određene vrednosti zanemarljiv. Postoji dakle neka zatvorena prosto povezana tropovrš Σ, kroz koju ovaj sistem mora proći u toku strujanja. Postavimo unutar Σ cev svetskih linija koju određuje vektor impulsa $K^{\alpha}_{(i)}$, tako da $\mathrm{d}\bar{\sigma}$ bude njegov kosi presek s normalom $\bar{n}^{\alpha}$. Ta cev prodire kroz Σ na dva mesta, od kojih ćemoposmatrati jedno, na kojem data cev iseca $\mathrm{d}\sigma$, s normalom n^{α}, orijentisanom prema spolja, a proizvoljne signature (Sl. 6.6)



Slika 6.6: Cev svetskih linija.

Sve svetske linije $K^{\alpha}_{(i)}$ koje prodiru kroz $\mathrm{d}\bar{\sigma}$, s obzirom na pretpostavku, koju smo učinili u prethodnom odeljku, da svetska linija ne bude promenljive preko izvesnih granica, određenih sa $\mathrm{d}K^1_{(i)}, \mathrm{d}K^2_{(i)}, \mathrm{d}K^3_{(i)}, \mathrm{d}K^4_{(i)}$. Ukoliko izvestan broj častica izleti iz preostalog sistema, usled uzajamnih sudara, on je neznatan, jer u tako kratkom intervelu vremena, bilo sopstvenog ili posmatračevog, rashod čestica može biti samo mala veličina višeg reda u odnosu na onaj broj koji prolazi kroz elementarne hiperpovršine $\mathrm{d}\sigma$ i $\mathrm{d}\bar{\sigma}$. Smatramo da je u kratkim vremenskim intervalima impuls očuvan.

Na osnovu izloženog, ako sa $K_{(i)}$ simbolički obeležimo orotok impulsa i-te klase kroz $\mathrm{d}\sigma$, a sa $\bar{K}_{(i)}$ njegov protok kroz $\mathrm{d}\bar{\sigma}$, imaćemo, po zakonu održanja impulsa (Gl.5.3)

$$K_{(i)} = \pm \bar{K}_{(i)} \tag{6.52}$$

gde znak + ili - odgovara slučajevima kada je smer strujanja jednak ili suprotan znaku n^α. Ocenimo te skalarne proizvode. Iz (6.32) i (6.33) će biti:

$$\text{znaci} \begin{cases} +, & \text{za } \varepsilon(n) n_\alpha K^\alpha_{(i)} > 0, \\ -, & \text{za } \varepsilon(n) n_\alpha K^\alpha_{(i)} < 0. \end{cases} \tag{6.53}$$

Na osnovu (6.30) za odnose elementarnih hiperpovršina važi veza

$$\left| n_\alpha K^\alpha_{(i)} \right| \mathrm{d}\sigma = \left| \bar{n}_\alpha K^\alpha_{(i)} \right| \mathrm{d}\bar{\sigma}. \tag{6.54}$$

Sad izraz (6.51) za protok impulsa čestica i-te klase kroz $\mathrm{d}\bar{\sigma}$ glasi

$$\pm \bar{N}_{(i)} K^\beta_{(i)} \left| K^\alpha_{(i)} n_\alpha \right| \left| K^\gamma_{(i)} \bar{n}_\gamma \right|^{-1} \mathrm{d}\sigma = \varepsilon(n) \bar{N}_{(i)} K^\beta_{(i)} K^\alpha_{(i)} n_\alpha \left| K^\gamma_{(i)} \bar{n}_\gamma \right|^{-1} \mathrm{d}\sigma. \tag{6.55}$$

Zbir po i ovih izraza predstavlja protok impulsa čestica svih klasa kroz $\mathrm{d}\sigma$. Ako sa $T^{\alpha\beta}$ obeležimo zbir po i sledećih članova

$$T^{\alpha\beta} \equiv \sum_i \bar{N}_{(i)} K^\alpha_{(i)} K^\beta_{(i)} \left| K^\gamma_{(i)} \bar{n}_\gamma \right|^{-1}, \tag{6.56}$$

Proizvod koji se pojavljuje u (6.55) glasiće, za ukupni sadržaj impulsa u $\mathrm{d}\sigma$

$$\bar{N}_{(i)} K^\beta_{(i)} \mathrm{d}\bar{\sigma} = \varepsilon(n) T^{\alpha\beta} n_\alpha \mathrm{d}\sigma, \quad \text{sabiranje po } i. \tag{6.57}$$

S obzirom na definicioni obrazac (6.56), gde su $\bar{N}_{(i)}$ brojevi, $K^\beta_{(i)}$ vektori, a izraz u zagradi skalar, $T^{\alpha\beta}$ je apsolutni simetrični tenzor drugog reda, jer predstaavlja opšti proizvod dva vektora pomnožen skalarom.

Pretpostavimo da smo prešli na neprekidnu sredinu, i da se umesto brojnih gustina i pojedinih impulsa pojavljuju srednje vrednosti tih veličina u svim tačkama. Pokazaćemotreći bitno svojstvo $T^{\alpha\beta}$, da mu je divergencija jednaka nuli. Teorema o divergenciji (6.41) primenjuje se ovde na tenzorsku funkciju drugog reda. Dakle

$$J = \int_V \frac{\partial T^{\alpha\beta}}{\partial x^\alpha} \mathrm{d}\tau = \int_\Sigma \varepsilon(n) T^{\alpha\beta} n_\alpha \mathrm{d}\sigma = 0. \tag{6.58}$$

Jednakost nuli je posledica održanja impulsa matrijalnog sistema koji prolazi kroz čitavu zatvorenu površinu Σ (videti 5.3 (str. 55)), jer unutar Σ nema izvora ili ponora za impuls i energiju. Ako uslovimo da naš zaključak za svaki proizvoljno umanjeni deo posmatranog materijalnog sistema u svakom trenutku, biće

$$\frac{\partial T^{\alpha\beta}}{\partial x^\beta} = 0. \tag{6.59}$$

Tenzor $T^{\alpha\beta}$ je, dakle, konzervativan. Nazvaćemo ga **tenzor energije materijalne sredine**. On igra bitnu ulogu u teoriji relativnosti. Takav simetričan i konzervativan tenzordrugog reda formuliše se za svaku materijalnu sredinu i za elektromagnetno polje. Prilaz koji je ovde dat, zasnovan na statističkim razmatranjima, ne može nam opisati pojedinosti pojavakao što su elastična povratna sila, viskozniotpordeformacije i druga svojstva neprekidnih sredina. Ali on je jedini koji dosledno polazeći od prostog pojma impulsa čestice, vodi takvom tenzoru. Svojstva $T^{\alpha\beta}$ su dobijene, a ne pretpostavljene. Ovaj izvanredno racionalan postupak pripada Singu. Ovde je izvođenje unekoliko izmenjeno, jer nije uzet u obzir, kao ni u daljem tekstu, pojam takozvanih **unutrašnjih impulsa** sistema.

Da bismo ispitali komponente tenzora energije, uzećemo posmatrački sistemčija vremenska osa leži na vektoru n^α, normale na $\mathrm{d}\sigma$. Taj element površine time određujemo da bude prostorno orijentisan. Dakle

$$n^\alpha(0,0,0,1), \quad \varepsilon(n) = -1.$$

Podintegrlana funkcija u (6.58) će glasiti

$$\varepsilon(n) T^{\alpha\beta} n_\alpha \mathrm{d}\sigma = T^{\beta 4} \mathrm{d}\sigma. \tag{6.60}$$

S obzirom na proizvoljnost izbora n^α, uzećemo da se poklapa sa jediničnim vektorom $\bar{n}^\alpha$, a to isto neka važi i za elementarne preseke $\mathrm{d}\sigma$ i $\mathrm{d}\bar{\sigma}$. Iz (5.2) i (5.13) imamo

$$K^j = c^{-1} m\gamma v^j, \quad E = c^2 K^4 = m\gamma c^2,$$

odakle sledi da je relativna gustina relativnog impulsa jednaka cT^{j4}, a relativna gustina relativne energije $c^2 T^{44}$:

$$\begin{aligned} cT^{j4} &= c\bar{N}_{(i)} K^j_{(i)} = \bar{N}_{(i)} m^*_{(i)} v^j_{(i)} \\ c^2 T^{44} &= c^2 \bar{N}_{(i)} K^4_{(i)} = \bar{N}_{(i)} m^*_{(i)} c^2. \end{aligned} \tag{6.61}$$

Iz oblika desnih strana (6.61) vidi se da se radi o gustinama. To su relativne gustine relativnog impulsa i energije sadržane u elementu $\mathrm{d}\sigma$, koje opaža posmatrač prema kome taj element miruje.

Uzmimo sad da je $\mathrm{d}\sigma$ vremenski orijentisan. Njegova normala stoji proizvoljno u prostoru i možemo je razložiti po osama x^k jednog inercijalnog sistema. Tada $\mathrm{d}\sigma$ možemo predstaviti kao proizvod dvodimenzionalnog elementa $\mathrm{d}S$, upravnog na jediničnoj prostornoj normali, i elementa vremenske ose $\mathrm{d}x^4$ toga sistema. Obrazac koji odgovara (6.60) će glasiti

$$\varepsilon(n) T^{\alpha\beta} n_\beta \, \mathrm{d}\sigma = T^{\alpha k} n_k \, \mathrm{d}s \, c \, \mathrm{d}t. \tag{6.62}$$

Ovo je, s obzirom na elementarnu promenu vremena $\mathrm{d}t$, srazmerno relativnom protoku impulsa i energije kroz $\mathrm{d}s$. Zaista, ako redom uzmemo n^k bude jedinični vektor osa x^1, x^2, x^3, relativni protoci impulsa i energije u jedinici vremena kroz jedinice odgovarajućih dvopovrši će biti:

$$\begin{aligned} c^2 T^{jk} n_k &= c\bar{N}_{(i)} K^j_{(i)} = \bar{N}_{(i)} m^*_{(i)} v^j_{(i)}, \\ c^3 T^{4k} n_k &= c^2 \bar{N}_{(i)} K^4_{(i)} = \bar{N}_{(i)} E_{(i)} \qquad k = 1,2,3. \end{aligned} \tag{6.63}$$

Kako je $T^{\alpha\beta}$ simetričan tenzor, prve veze (6.61) i (6.63) pokazuju da su komponente relativnog protoka energije po jedinici površine srazmerne, do na činilac c^2, odgovarajućim komponentamarelativne gustine impulsa. Odnos veličina konstruisanih u Svetu specijalne relativnosti vodi tome zaključku.

6.7 Sopstvene vrednosti tenzora energije

Izgradili smo, koristećistatistički prilaz, tenzor energije $T_{\alpha\beta}$ neprekidne sredine i ustanovili da on mora biti simetričan. Dalje algebarsko ispitivanje tog tenzora ići će preko sopstvenih vrednosti. Ovom pristupamo uz jednu napomenu. Karakter sopstvenih vrednosti i vektora u definitnim metrikama je dobro poznata stvar. One su realne, a vektori koji im odgovaraju uzajamno ortogonalni. U indefinitnoj metrici stvari drugačije stoje. U Svetu Minkovskog dva sopstvena korena simetričnog tenzora mogu biti kompleksna. Našzadatak je da utvrdimo slučajeve kada su sva rešenja karakteristične jednačine realna, jer se pomoću njih može obrazovati celokupni tenzor $T_{\alpha\beta}$, a on mora biti realan.

Treba reći da bismo mogli samo da formulišemo uslovepod kojima je spektar sopstvenih vrednosti $T_{\alpha\beta}$ realan. Posle bismo ustanovili da su oni sa fizičke strane opravdani, što je zadovoljavajuće kao postupak. Mi ćemo, međutim, to pitanje bliže razmotriti, zbog geometrijskih svojstava simetričnih tenzora drugog reda u svetskoj metrici. Sopstvene vrednosti i vektore antisimetričnog tenzora drugog reda već smo ispitivali u poglavlju 3.3 (str. 35), što je korisno za poređenje.

Počnimo od sopstvenog vektora $V^\alpha_{(\gamma)}$, koji odgovara prostom korenu $\lambda_{(\gamma)}$ karakterističkog polinoma

$$T^\alpha_\beta V^\beta_{(\gamma)} = \lambda_{(\gamma)} V^\alpha_{(\gamma)}. \tag{6.64}$$

Neka $\lambda_{(\gamma)}$ i $\lambda_{(\delta)}$ budu dva različita korena kojima odgovaraju vektori $V^\alpha_{(\gamma)}$ i $V^\alpha_{(\delta)}$. Ako napišemo karakteristične jednačine za oba, pomnožimo svaku od njih skalarno s drugim sopstvenim vektorom i oduzmemo jednu od druge, dobićemo, zbog simetrije $T_{\alpha\beta}$

$$(\lambda_{(\gamma)} - \lambda_{(\delta)}) g_{\alpha\beta} V^\alpha_{(\gamma)} V^\beta_{(\gamma)} = 0. \tag{6.65}$$

S obzirom na to da su $\lambda_{(\gamma)}$ i $\lambda_{(\delta)}$ različiti, izlazi da su $V^{\alpha}_{(\gamma)}$ i $V^{\alpha}_{(\delta)}$ uzajamno ortogonalni. Tako zaključujemo da su u svetskoj metrici sopstveni pravci simetrične matrice ortogonalni nezavisno od toga da li su sopstveni koreni realni ili ne.

Pitanje postojanja realnih sopstvenih vrednosti korenova $T_{\alpha\beta}$ vezano je za mogućnost njihovog predstavljanja, analogno načinu koji važi u trodimenzionalnom prostoru definitne metrike. Stoga ćemo izvesti jedan dovoljan uslov koji glasi:

Ako je tenzor $T_{\alpha\beta}$ takav da za svaki vremenski ili nulti vektor φ^{α} bude

$$T_{\alpha\beta}\varphi^{\alpha}\varphi^{\beta} > 0 \tag{6.66}$$

on ima četiri realna sopstvena korena.

Pre nego što pređemo na dokazivanje, ispitajmo da litenzor energije naše sredine, onakav kako smo ga definisali u prethodnom odeljku, zadovoljava taj uslov. Na osnovu (6.56) imamo

$$T_{\alpha\beta}\varphi^{\alpha}\varphi^{\beta} = \sum_i \bar{N}_{(i)} \left(K^{\alpha}_{(i)}\varphi_{\alpha}\right)^2 \left|K^{\gamma}_{(i)}\bar{n}_{\gamma}\right|^{-1} > 0. \tag{6.67}$$

Uslov (6.66) je ispunjen, jer su skalarni proizvodi različiti od nule s obzirom na vremenske ili nulte orijentacije vektora, dok su $N_{(i)}$ prirodni brojevi.

Uzmimo, u jednom događaju, polje svih vremenskih vektora jediničnog intenziteta φ^{α}, orijentisanih prema budućnosti. Svaki od njih možemo predstaviti kao vektor neke četvorobrzine. To je, po obrascu (4.10)

$$\varphi^{i} = c^{-1}\gamma v\ell^{i}, \quad \varphi^{4} = \gamma, \tag{6.68}$$

gde je ℓ^i jedinični vektor upravljen i usmeren kao i trobrzina $v^i = v\ell^i$. Tada uslov (6.66) glasi

$$\gamma^2\left(T_{ij}\ell^i\ell^j\frac{v^2}{c^2} + 2T_{i4}\ell^i\frac{v}{c} + T_{44}\right) > 0. \tag{6.69}$$

Ovo predstavlja jednu kvadratnu formu koja treba da bude pozitivno definitna za različite vrednosti v/c. Uzmimo vremenske dvoravni koje određuju osa x^4 i vektor ℓ^i. Svaka takva dvoravan sadrži temeni događaj datog nultog konusa i krivu koja odgovara formi (6.69). Ona mora imati minimum, odnosno teme. Kad pređemo na granicu $v \to c$ izraz u zagradi teži veličini

$$T_{ij}\ell^i\ell^j + 2T_{i4}\ell^i + T_{44} > 0, \tag{6.70}$$

jer je γ^2 pozitivno. Kako tada $\gamma^2 \to \infty$, nulte linije suasimptote. Ove asimptote rastežu nulti vektor φ^{α}. Budući da je tako za svaku vremensku dvoravan koja sadrži temeni događaj, postoji vektor ℓ^i, i njemu odgovarajući φ^{α}, za koji forma (6.66) ima minimum. Drugim rečima, imamo jednu hiperpovrš unutar polukonusa budućnosti, koja ima teme i simetrična je u odnosu na osu[1] koja kroz njega prolazi, a težiasimptotski njegovim zracima. S obzirom na to da karakterističnipravci određuju temene ose površi drugog stepena,sopstveni vektor φ^{α} leži na vremenski orijentisanom pravcu, dakle realan je. Odgovarajući koren je takođe realan.

Kako je karakteristični polinom četvrtog stepena, sa realnim koeficijentima, mora imati još jedan realan koren, kojem odgovara vektor ortogonalan na φ^{α}, dakle prostornoorijentisan. Preostale dve sopstvene vrednosti računaju se uodnosu na definitnu metriku prostorno orijentisane dvoravni upravne na prva dva sopstvena vektora. One su realne i odgovaraju im realni sopstveni pravci. Dakle, pod uslovom (6.66), $T_{\alpha\beta}$ ima realan spektar kojem odgovaraju jedan vremenski i tri prostorna vektora. Takav $T_{\alpha\beta}$ ćemo nazivati **normalan tenzor**. U odnosu na glavne ose karakteristična jednačina glasi

$$\begin{vmatrix} T_{11}-\lambda_{(1)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & T_{22}-\lambda_{(2)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & T_{33}-\lambda_{(3)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & T_{44}-\lambda_{(4)} \end{vmatrix} = 0. \tag{6.71}$$

[1] Simetrija ne mora biti rotaciona.

Postoji fizičko tumačenje zaključaka da pri (6.66) imamo jedan vremenski orijentisani vektor tenzora energije. S obzirom na minimalnu vrednost koju dobija kvadratna forma (6.69) u odnosu na odgovarajuću karakterističnu osu, zaključujemo da za normalni tenzor energije postojiposmatrač koji uočava **minimalnu vrednost** gustine energije c^2T^{44}, što sledi iz (6.61). Sopstveno vreme toga posmatračaodređeno je pravcem vektora $\varphi^\alpha = V^\alpha_{(4)}$.

6.8 Impuls, energija i napon neprekidne sredine

Neprekidnu sredinu karakterišu brzina, gustina i napon, koji se, u slučaju savršenog fluida, svodi na pritisak. Brzina ima tri komponente, gustina jednu, a napon devet, od kojih, zbog simetrije, ima šest nezavisnih. Termodinamičke pojave gubitka ili dovođenja, i uopšte provođenja, energije, ostavićemo po strani. Znači da je stanje jedne neprekidne sredine opisano sa deset funkcija. U relativnosti tenzor energije ima, zbog simetrije, deset koordinata. Njihov broj odgovara broju promenljivih koje treba odrediti da bismo opisali kretanje neprekidne sredine. Videćemo da između njih upravo i postoji najneposrednija veza, pošto definicija tenzora energije, uvedena pomoću statističkih pojmova, ima smisao i dovoljno širine za određivanje traženih veličina.

Smatraćemo, na temelju onog što je utvrđeno u prethodnom odeljku, da je tenzor energije neprekidne sredine normalan u smislu date definicije.

Karakteristične pravce tenzora energije podelićemo tako što ćemo za vremenski sopstveni vektor smatrati da određuje četvorobrzinu neprekidne sredine, a odgovarajuća sopstvena vrednost njenu makroskopski merenu gustinu. Opravdanje za to leži u drugoj vezi (6.61), koja nam daje gustinu T_{44} u odnosu na posmatrača. Preostala tri prostorna sopstvena vektora, sa odgovarajućim soptvenim vrednostima određuju, kao celina, tenzor napona te sredine. Ako četvorobrzinu, makroskopski shvaćenu kao srednju vrednost zajedničkih brzina svih klasa čestica, obeležimo sa u^α, a gustinu sa ρ, imaćemo

$$\lambda_{(4)} = -\rho, \quad V^\alpha_{(4)} = u^\alpha. \tag{6.72}$$

Nastavimo za preostala tri jedinična vektora sopstvenih pravaca

$$V^\alpha_{(i)} = \vartheta^\alpha_{(i)}. \tag{6.73}$$

Primenimo na tenzor energije obrazac (1.33), izvršimo njegovo razlaganje na vektorsku bazu $\vartheta^\alpha_{(i)}, u^\alpha$:

$$\begin{aligned} T^{\alpha\beta} = {} & T^{\alpha\delta}\vartheta_{(i)\delta}\vartheta^\beta_{(i)} + T^{\gamma\beta}\vartheta^\alpha_{(i)}\vartheta_{(i)\gamma} - T^{\alpha\delta}u^\beta u_\delta - T^{\gamma\beta}u_\gamma u^\alpha - \\ & - T^{\gamma\delta}\vartheta_{(i)\gamma}\vartheta_{(j)\delta}\vartheta^\alpha_{(i)}\vartheta^\beta_{(j)} + T^{\gamma\delta}\vartheta_{(i)\gamma}u_\delta\left(\vartheta^\alpha_{(i)}u^\beta + \vartheta^\beta_{(i)}u^\alpha\right) - \\ & - T^{\gamma\delta}u_\gamma u_\delta u^\alpha u^\beta, \qquad \text{podrazumeva se sabiranje po } i \text{ i } j. \end{aligned} \tag{6.74}$$

Kako ovu bazu sačinjavaju sopstveni vektori, određeni članovi će otpasti, dok će se ostatak svesti na

$$T^{\alpha\beta} = \lambda_{(1)}\vartheta^\alpha_{(1)}\vartheta^\beta_{(1)} + \lambda_{(2)}\vartheta^\alpha_{(2)}\vartheta^\beta_{(2)} + \lambda_{(3)}\vartheta^\alpha_{(3)}\vartheta^\beta_{(3)} - \lambda_{(4)}u^\alpha u^\beta, \tag{6.75}$$

odnosno, na osnovu (6.72) i (6.73)

$$T^{\alpha\beta} = \rho u^\alpha u^\beta + \vartheta^{\alpha\beta}, \tag{6.76}$$

gde smo sa $\vartheta^{\alpha\beta}$ obeležili sve članove u kojima se pojavljaju $\vartheta^\alpha_{(i)}$. S obzirom na tenzorsku prirodu veličina zastupljenih u (6.76) ta veza će imati isti oblik u odnosu na svaki koordinatni sistem. Veličinu $\vartheta^{\alpha\beta}$ ćemo nazivati **tenzor pseudo-pritiska**, podrazumavajući da se radi o naponu koji može nastati iz svih mogućih uzroka, osim elektromagnetnih.

Treba reći da je tenzor energije, onakav kako smo ga izveli, simetričan, ali da se u specijalnoj relativnosti operiše i s nesimetričnim tenzorima energije. Prime za to je tenzor energije ferofluida koji se u novije vreme dosta izučava. Postoji inače i postupak simetrizacije tih tenzora dodavanjem takozvanih članova interakcije. Mi ovde nećemo zalaziti u ta izvođenja.

Postoji inače i postupak simetrizacije tih tenzora dodavanjem takozvanih članova interakcije. Mi ovde nećemo zalaziti u ta izvođenja.

Trag tenzora energije (6.76) glasi

$$T^{\alpha}_{\alpha} = -\rho + \vartheta^{\alpha}_{\alpha}. \tag{6.77}$$

Možemo naći vezu između mikro i makroskopskih izraza za energiju neprekidne sredine. Trag izraza za tenzor energije (6.56) glasi

$$T^{\alpha}_{\alpha} = \sum_i \bar{N}_{(i)} K^{\alpha}_{(i)} K_{(i)\alpha} \left| K^{\beta}_{(i)} \bar{n}_{\beta} \right|^{-1}. \tag{6.78}$$

Uzmimo, umesto jedinstvenog preseka $\bar{n}_{\beta}$, poseban presek s normalom $\bar{n}_{(i)\beta}$ za svaku klasu čestica, i to tako da normala leži na vektoru impulsa $K_{(i)\beta}$, odnosno da čestice struje upravno na presek. Tada je

$$\bar{n}_{(i)} = u_{(i)\beta}, \quad K^{\beta}_{(i)} = m_{(i)} u^{\beta}_{(i)}. \tag{6.79}$$

Veza (6.78) tada glasi

$$T^{\alpha}_{\alpha} = -\bar{N}_{(i)} m_{(i)} = -\sum_i \rho_{(i)}. \tag{6.80}$$

Ovde je $\rho_{(i)}$ sopstvena gustina sopstvene mase i-te klase. Izraz (6.77) sada postaje

$$\rho = \sum_j \rho_{(j)} + \vartheta^{\alpha}_{\alpha}. \tag{6.81}$$

makroskopska sopstvena gustina jednaka je mikroskopskoj, uvećajnoj za prvu invarijantu napona $\vartheta^{\alpha}_{\alpha}$.

Ovakav pojam gustine razvijen je iz Edingtonovog[2] shvatanja pritiska.

6.9 Raspršena sredina

Za ”raspršenušmatramo takvusredinu čije čestice ne deluju jedna na drugu. Taj naziv je uobičajen u literaturi. Ponekad se koristi možda bolji izraz ”gas bez pritiska”. S obzirom na odsustvo interakcije čestica, i na činjenicu da njihovu skupinu ne bismo mogli pomerati dejstvom spolja, a da ne dođe do uzajamnog delovanja unutar njega, tenzor energije nema član koji izražava napon u (6.76), te se svodi na najprostiji oblik

$$T_{\alpha\beta} = \rho u_{\alpha} u_{\beta}. \tag{6.82}$$

Uslov odrežanje energije (6.59) glasi

$$\frac{\partial T^{\alpha\beta}}{\partial x^{\beta}} = u^{\alpha} \frac{\partial(\rho u^{\beta})}{\partial x^{\beta}} + \rho u^{\beta} \frac{\partial u^{\alpha}}{\partial x^{\beta}} = 0. \tag{6.83}$$

Kako je u^{α} jedinični vektor, množenje s njim u gornjij vezi će nam dati

$$\frac{\partial(\rho u^{\beta})}{\partial x^{\beta}} = 0. \tag{6.84}$$

Otud se (6.83)

$$u^{\alpha} \frac{\partial u^{\alpha}}{\partial x^{\beta}} = \frac{\mathrm{d}u^{\alpha}}{\mathrm{d}s} = 0. \tag{6.85}$$

Ova diferencijalne jednačine nam kažu da brzina ne zavisi od sopstvenog vremena, jer je očigledno rešenje gornjih jednačina

$$u^{\alpha} = \text{const.}. \tag{6.86}$$

pa su putanje ove sredine prave, odnosno geodezijske linije, koje se dobijaju za kretanje po inerciji.

[2] Eddington

Jednačinu (6.84) ćemo rastumačiti koristeći izraze za komponente četvorobrzine (4.10)

$$\frac{\partial(\gamma\rho)}{\partial t}+\frac{\partial(\gamma\rho v^i)}{\partial x^i}=0. \tag{6.87}$$

Ako bismo izostavili dilatacioni činilac γ, ova jednačina bi se svela na dobro poznatu jednačinu kontinuiteta klasične mehanike neprekidnih sredina. Relativistička jednačina se od nje razlikuje upravo time što se umesto sopstvenegustine ρ, pojavljuje relativna ρ^*, što je ispravno, s obzirom na činjenicu da položaj, vreme, brzina, pa najzad i gustina, meri posmatrač.

6.10 Savršeni fluid

Materijalnu sredinu koja se naziva **savršeni fluid** opisuje tenzor napona $\vartheta_{\alpha\beta}$ sfernog oblika. Tri korena $\lambda_{(i)}$ su, dakle, međusobno jednaka. Spektar sopstvenih vrednosti glasi

$$\lambda_{(i)}=c^{-2}p, \quad \lambda_{(4)}=-\rho, \tag{6.88}$$

pa je otud iz (6.75) i (6.76)

$$T_{\alpha\beta}=\rho u_\alpha u_\beta+c^{-2}p(\vartheta_{(1)\alpha}\vartheta_{(1)\beta}+\vartheta_{(2)\alpha}\vartheta_{(2)\beta}+\vartheta_{(3)\alpha}\vartheta_{(3)\beta}) \tag{6.89}$$

Obrazac (1.34) daje nam metrički tenzor izražen u odnosu na proizvoljno izabranu ortogonalnu četvorku vektora, od kojih je jedan vremenski, a ostali su prostorni. Ako za tu svrhu iskoristimo našu četvorku, to će biti

$$g_{\alpha\beta}=\vartheta_{(1)\alpha}\vartheta_{(1)\beta}+\vartheta_{(2)\alpha}\vartheta_{(2)\beta}+\vartheta_{(3)\alpha}\vartheta_{(3)\beta}-u_\alpha u_\beta.$$

Formula (6.89) tako dobija oblik

$$T_{\alpha\beta}=\left(\rho+c^{-2}p\right)u_\alpha u_\beta+c^{-2}pg_{\alpha\beta}. \tag{6.90}$$

Ovo je tenzor energije savršenog fluida, zbog čega dodajemo zahtev da bude zadovoljena i jednačina stanja $\rho=\varphi(p)$.

Činjenica da pritisakmnožimo sa c^{-2} potiče od reda njegovog odnosa prema gustini energije. Videli smo bili, iz (6.60), da je protok impulsa srazmeran, do na činilac c^2, prvom bloku 3×3 tenzora energije. A pritisak je srazmeran tom protoku.

Svetske linije savršenog fluida odstupaju od geodezijskih, što je u odgovarajućim fizičkim jedinicama, uslovljeno odnosom ρ prema $c^{-2}p$.

Uslov održanja energije (6.59) daje nam, kao i kod raspršene sredine, diferencijalnu jednačinu kretanja

$$\frac{\partial T^\alpha_\alpha}{\partial x^\beta}=\left(\rho+c^{-2}p\right)\frac{\mathrm{d}u_\alpha}{\mathrm{d}s}+u_\alpha\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\rho+c^{-2}p\right)+\left(\rho+c^{-2}p\right)u_\alpha\frac{\partial u^\beta}{\partial x^\beta}+c^{-2}\frac{\partial p}{\partial x^\alpha}=0. \tag{6.91}$$

Ako ovu jednačinu skalarno pomnožimo sa u^α dobićemo, s obzirom na jedinični intenzitet tog vektora

$$\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}s}+\left(\rho+c^{-2}p\right)u_\alpha\frac{\partial u^\beta}{\partial x^\beta}=0. \tag{6.92}$$

Kad ovo unesemo u (6.91) imaćemo

$$\left(\rho+c^{-2}p\right)\frac{\mathrm{d}u_\alpha}{\mathrm{d}s}+c^{-2}\left(u_\alpha\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}s}+\frac{\partial p}{\partial x^\alpha}\right)=0,$$

što se može napisati u obliku

$$\left(\rho+c^{-2}p\right)\frac{\mathrm{d}u_\alpha}{\mathrm{d}s}+c^{-2}\left(u_\alpha u^\beta+\delta^\beta_\alpha\right)\frac{\partial p}{\partial x^\beta}=0. \tag{6.93}$$

Ovo su relativističke diferencijalne jednačine strujanja savršenog fluida. Veza (6.92) predstavlja jednačinu kontinuiteta te sredine. Iz (6.93) vidimo da je relativna četvorosila suprotno orijentisana od projekcije, upravne na svetskoj liniji, gradijenta pritiska. Ovaj fluid struji van gravitacionog polja, koje ne postoji u specijalnoj relativnosti.

Jednačine kontinuiteta i dinamike mogu se izraziti pomoću posmatračevog vremena i trobrzine, budući da su to stvarno merene veličine. Koristeći obrasce: (4.9), (4.10) i (4.13) za sopstveno vreme, četvorobrzinu i četvoroubrzanje, dobićemo za (6.92)

$$\rho\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t}+\left(\rho+c^{-2}p\right)\left[\frac{\partial(\gamma v^i)}{\partial x^i}+\frac{\partial\gamma}{\partial t}\right]=0, \tag{6.94}$$

dok će se jednačine (6.93) podeliti na prve tri

$$\gamma\left(\rho+c^{-2}p\right)\frac{\mathrm{d}(\gamma v_i)}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial p}{\partial x^i}+c^{-2}\gamma^2 v_i\left(v^j\frac{\partial p}{\partial x^j}+\frac{\partial p}{\partial t}\right)=0 \tag{6.95}$$

i četvrtu

$$\gamma\left(\rho+c^{-2}p\right)\frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t}+c^{-2}\gamma^2 v^j\frac{\partial p}{\partial x^j}+c^{-2}\left(\gamma^2-1\right)\frac{\partial p}{\partial t}=0. \tag{6.96}$$

Pomnožimo (6.96) sa v_i i oduzmimo od (6.95). Dobićemo, ako dopišemo (6.94):

$$\begin{aligned}\gamma^2\left(\rho+c^{-2}p\right)\frac{\mathrm{d}v_i}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial p}{\partial x^i}+c^{-2}v_i\frac{\partial p}{\partial t}&=0,\\ \gamma\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t}+\left(\rho+c^{-2}p\right)\left[\frac{\partial(\gamma v^j)}{\partial x^j}+\frac{\partial\gamma}{\partial t}\right]&=0.\end{aligned} \tag{6.97}$$

Prve tri jednačine ovog sistema su dinamičke, a četvrta je jednačina održanje mase ili kontinuiteta. Tri jednačine kretanja su međusobno nezavisne, s obzirom na to da ih više ne može biti. Jed. (6.97) kao celina predstavlja relativistički modifikovani sistem diferencijalnih jednačina klasične hidrodinamike.

Dokaz da (6.95) i (6.96) nisu međusobno nezavisne može se odmah dobiti tako što sistem (6.93), skalarno pomnožen sa u^α, daje identički nulu.

6.11 Hidrodinamički talasi

Poznato je da se jednačine hidrodinamičkih talasa dobijaju iz diferencijalnih jednačina strujanja. Mi smo u §4.3 (str. 31) posmatrali istoriju fronta najjednostavnijeg mogućeg talasa, dakle ravnog i koji se ravnomemo prostire. Osim toga uzimali smo, opet radi jednostavnosti, da je i odgovarajuće talasno kretanje harmonijsko. Sad ćemo potražiti lokalne uslove za pojavu talasa, kao površi poremećaja hidrodinamičkih veličina.

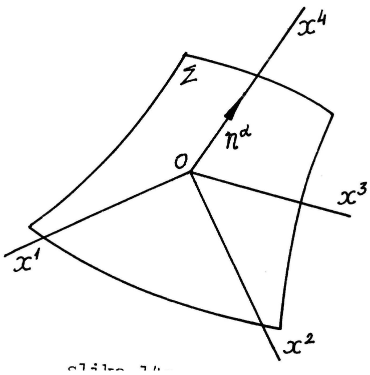
Kako su diferencijalne jednačine (6.92 i (6.93 prvog reda, njihovo rešavanje zahteva da znamo vrednosti traženih veličina na nekoj "početnoj"hiperpovrši Σ. To je, s obzirom na hiperboličku metriku, ustvari rešavanje Košijevog problema; treba imati u vidu da se u Svetu Minkovskog ne zahteva da ta hiperpovrš bude isključivo prostorno orijentisana, pa da vrednosti na njoj budu upravo početne. Košijev problem ćemo detaljnije razmatrati u delu koji se odnosi na opštu relativnost. Sad ćemo proučiti lokalnu orijentaciju, da bi upoznali slučajeve koji su od fizičkog interesa.

Pretpostavićemo da je hiperpovrš Σ lokalno zadata jednačinom $x^4=\text{const.}$, gde x^4 predstavlja četvrtu po redu koordinatu, i može biti prostorna, vremenska ili nulta. Tada, u okolini posmatranog događaja na Σ, preostale tri koordinatne ose x^i, koje se u njemu seku, leže na toj hiperpovrši.

Podelićemo izvode promenljivih, čije su vrednosti $p_{(0)}$, $u^\alpha_{(0)}$ zadate na Σ, u dve grupe. To su:

$$\left(\frac{\partial u^\alpha}{\partial x^i}\right)_0,\ \left(\frac{\partial p}{\partial x^i}\right)_0;\ \left(\frac{\partial u^\alpha}{\partial x^4}\right)_0,\ \left(\frac{\partial p}{\partial x^4}\right)_0,\quad \text{gde je } \rho=\varphi(p). \tag{6.98}$$

Prva dva izraza, $\left(\frac{\partial u^\alpha}{\partial x^i}\right)_0$ i $\left(\frac{\partial p}{\partial x^i}\right)_0$, mogu se efektivno izračunati, jer se to svodi na diferenciranje vrednosti zadatih na Σ, koju dotiču tri ose x^i lokalnog Lorencovog sistema. Druga dva izraza $\left(\frac{\partial u^\alpha}{\partial x^4}\right)_0$ i $\left(\frac{\partial p}{\partial x^4}\right)_0$ su neodređena, jer se diferenciranje vrši po promenljivoj koja je lokalno konstantna na Σ (Sl. 6.7).



Slika 6.7: Površ Σ u x^α.

Imajući to u vidu napisaćemo, u posmatranom događaju x^α, jednačinu (6.92), i četvrtu jednačinu dinamike (6.93). Koristeći (6.98), napisaćemo ih kao:

$$\begin{aligned} &\left[\varphi(p_0)+c^{-2}p_0\right]\frac{\partial u^4}{\partial x^4}+u^4_{(0)}\varphi'(p_0)\frac{\partial p}{\partial x^4}= \\ &-\left\{\left[\varphi(p_0)+c^{-2}p_0\right]\frac{\partial u^i}{\partial x^i}+u^i_{(0)}\varphi'(p_0)\frac{\partial p}{\partial x^i}\right\}\equiv C, \\ &\left[\varphi(p_0)+c^{-2}p_0\right]u^4_{(0)}\frac{\partial u^4}{\partial x^4}+c^{-2}\left[(u^4_{(0)})^2+g^{44}\right]\frac{\partial p}{\partial x^4}= \\ &-\left\{\left[\varphi(p_0)+c^{-2}p_0\right]u^i_{(0)}\frac{\partial u^4}{\partial x^i}+c^{-2}u^i_{(0)}u^4_{(0)}\frac{\partial p}{\partial x^i}\right\}\equiv D^4 \end{aligned} \tag{6.99}$$

Veličine C i D^4, na desnoj strani (6.99) sastoje se iz poznatih veličina, i onih izvoda koji se mogu izračunati diferenciranjem na Σ.

Postavlja se pitanje, bitno za Košijev problem, algebarske rešivosti sistema (6.99) po promenljivim $\left(\frac{\partial u^\alpha}{\partial x^4}\right)_0$ i $\left(\frac{\partial p}{\partial x^4}\right)_0$. Determinanta tog sistema treba da bude različita od nule. Ako izostavimo indekse koji označavaju da se radi o veličinama na Σ, ona glasi

$$\Delta=\bar{c}^2\left[\varphi(p)+c^{-2}p\right]\left[(u^4)^2+g^{44}\right]-(u^4)^2\left[\varphi(p)+c^{-2}p\right]\varphi'(p).$$

Odavde vidimo, kako su gustine i pritisak nužno pozitivne, da je potreban uslov rešivosti Košijevog problema

$$g^{44}+(u^4)^2\left[1-c^2\varphi'(p)\right]\neq 0. \tag{6.100}$$

Primetimo da za izvode $\frac{\partial u^i}{\partial x^4}$ jednačine dinamike daju

$$\left[\varphi(p_0)+c^{-2}p_0\right]u^4_{(0)}+c^{-2}u^i_{(0)}u^4_{(0)}\frac{\partial p}{\partial x^4}=D^i.$$

Celokupna analiza se dalje sprovodi isto kao za $\dfrac{\partial u^4}{\partial x^4}$.

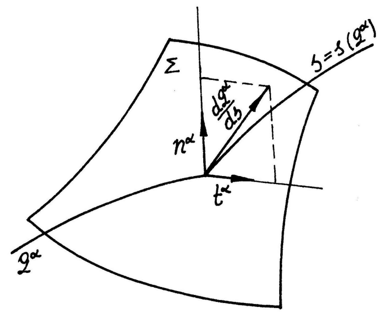
Postoje dva opšta slučaja kada uslovi postavljeni na Σ mogu dovesti do neodređenosti rešenja zadatka usled prekidnosti izvoda na toj hiperpovrši, ili usled nedovoljnosti podataka. To su:

1) kada strujne linije leže na Σ ($u^4 = 0$).
2) Kada je determinanta Δ singularna, odnosno

$$g^{44} + (u^4)^2 \left[1 - c^2 \varphi'(p)\right] = 0. \tag{6.101}$$

Potražimo opšti oblik (6.101). S obzirom na to da ose x^i lokalnog Lorencovog repera leže na Σ, x^4 je upravna na njoj, pa tako i komponenta u^4 četvorobrzine. Pređimo sad na neki krivolinijski sistem q^α, nesingularnom smenom promenljivih $(x^\alpha) \to (q^\alpha)$. Izvode ćemo razložiti na komponente u pravcima normale n^α i tangente t^α (izraženo u odnosu na nove promenljive q^α, vidi sl. 6.8), tako da imamo

$$\frac{\partial}{\partial x^\alpha} = n^\alpha \frac{\partial}{\partial q^\alpha} + t^\alpha \frac{\partial}{\partial q^\alpha} \equiv \frac{\partial}{\partial n} + \frac{\partial}{\partial t}. \tag{6.102}$$



Slika 6.8: Prevci normale n^α i tangente t^α.

$$\begin{aligned}
\left[\varphi(p_0) + c^{-2} p_0\right] \frac{\partial (u^\alpha n_\alpha)}{\partial n} + \varphi'(p_0) u^\alpha_{(0)} n_\alpha \frac{\partial p}{\partial n} &= C, \\
\left[\varphi(p_0) + c^{-2} p_0\right] u^\beta_{(0)} n_\beta \frac{\partial (u^\alpha n_\alpha)}{\partial n} + c^{-2} \left(u^\alpha_{(0)} u^\beta_{(0)} + g^{\alpha\beta}\right) n_\alpha n_\beta \frac{\partial p}{\partial n} &= D^4.
\end{aligned} \tag{6.99$'$}$$

Izvodi u tangentnoj ravni svode se na ono što se dobija diferenciranjem po oni su stavljeni na desnu stranu (6.99$'$). Uzmimo da je Σ zadata, u odnosu na promenljive q^α, jednačinama:

$$\psi(q^\alpha) = 0, \quad n_\alpha = \lambda \operatorname{grad} \psi,$$

gde je λ neki skalarni faktor. Tada se, pošto formiramo determinantu Δ u odnosu na sistem (6.99$'$), jednaćina (6.101) svodi se na oblik:

$$\left[g^{\alpha\beta} + u^\alpha u^\beta (1 - c^2 \varphi')\right] \frac{\partial \psi}{\partial q^\alpha} \frac{\partial \psi}{\partial q^\beta} = 0. \tag{6.103}$$

Ovo predstavlje kvadratnu parcijalnu diferencijalnu jednaćinu prvog reda, čije rešenje određuje familiju karakteristićnih hiperpovrši Σ, odnosno funkcija $\psi = \text{const.}$. Skalarna funkcija ψ može biti izražena u odnosu na proizvoljan koordinatni sistem, pa se možemo vratiti i na polaznog Lorencovog posmatraća, dakle $\psi(x^\alpha) = \text{const}$. Na sva koj takvoj hiperpovrši sistem diferencijalnih jednaćina strujanja fluida (6.92), (6.93) može imati rešenje ćiji su prvi izvodi prekidni, dak klase C^1 po delovima. Ta hiperpovrš predstavlja, analogno onom što je poznato u klasićnoj mehanici fluida, istoriju jednog **komopresionog hidrodinamićkog talasa u Svetu Ninkovskog**.

Na osnovu rasuđivanja iz §3.1, smatramo da svaki talasni front, zbog konaćne brzine prostiranja, mora biti vremenski, ili u krajnjoj liniji nulto orijentisan u svakom svom događaju. Automatski sleduje da su mu normale prostorno ili nulto orijentisane. Podrazumevamo da se radi o istoriji talasa u svetskoj metrici. Znaći da je:

$$g^{\alpha\beta}\frac{\partial\psi}{\partial x^{\alpha}}\frac{\partial\psi}{\partial x^{\beta}} \geq 0. \tag{6.104}$$

Iz jednačine (6.102) sledi zbog toga

$$1-c^2\varphi' \leq 0, \tag{6.105}$$

jer je $\left(u^{\alpha}\frac{\partial\psi}{\partial x^{\alpha}}\right)^2 > 0$. Sledi da je $\varphi' \geq c^{-2}$. Ova ćinjenica je veoma važna. Brzina kompresionog talasa u stišljivom savršenom fluidu definisana je u klasićnoj teoriji obrascem

$$v=\sqrt{\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}\rho}}=\frac{1}{\sqrt{\varphi'}}, \tag{6.106}$$

pa iz (6.104) sleduje da je brzina talasa $V \leq c$, što je bitno sa relativistićkog stanovišta. Karakteristićni konus hidrodinamićkih talasa je, s obzirom na prostornu orijentaciju njihovih normala u opštem slućaju, sadržan unutar nultog konusa, a može se u granićnom slućaju poklopiti s njim.

6.12 Pojam nestišljivog fluida

Nestišljiv je, u klasićnoj hidrodinamici, onaj fluid čija je gustina nepromenljiva, odnosno čija je divergencija brzine jednaka nuli, odnosno u kojem se kompresioni talasi prostiru beskonačnom brzinom. Sve ove tri definicije su ravnopravne. Zato smo ih i naveli u jednoj rečenici.

U relativističkoj mehanici moguće su različite definicije nestišljivosti. Svaka od njih ima svoje opravdanje i određene posledice.

Pođimo od rezultata prethodnog odeljka. Pokazali smo da je najveća moguća brzina kompresionih talasa jednaka brzini svetlosti. Tada je $\varphi' = c^{-2}$, pa rešavanjem (6.105) dobijamo

$$\rho - c^{-2}p = \text{const.} \tag{6.107}$$

Ako diferenciramo ova rešenja duž svetskij linija i to unesemo u jednačinu kontinuiteta (6.92), dobićemo

$$\frac{\partial u^{\beta}}{\partial x^{\beta}}+\left(\rho+c^{-2}p\right)^{-1}u^{\beta}\frac{\partial p}{\partial x^{\beta}}=0. \tag{6.108}$$

Budući da je $\rho=\rho(p)$, definisaćemo funkciju f, poznatu u relativnosti pod nazivom **funkcija-indeks** fluida (videti Lichnerowicz, [3], str. 37) na sledeći način

$$\mathrm{d}(\ln f)=\frac{c^{-2}\,\mathrm{d}p}{\rho+c^{-2}p} \quad \Rightarrow \quad f=\exp\int_{p+0}^{p}\frac{c^{-2}}{\rho+c^{-2}p}\,\mathrm{d}p. \tag{6.109}$$

Sada, umesto (6.108), možemo pisati

$$f\frac{\partial u^{\alpha}}{\partial x^{\alpha}}+u^{\alpha}\frac{\partial f}{\partial x^{\alpha}}=0.$$

odnosno

$$\frac{\partial C^{\alpha}}{\partial x^{\alpha}}=\frac{\partial}{\partial x^{\alpha}}(fu^{\alpha})=0. \tag{6.110}$$

Vektor $C^{\alpha} \equiv fu^{\alpha}$ naziva se **pseudobrzina fluida**. Ako bismo pošli od jednačine (6.110) kao date, imali bismo samo potreban uslov nestišljivosti, jer to što je divergencija pseudobrzine jednaka nuli povlači, s obzirom na jednačinu kontinuiteta (6.92), kao posledicu jedino

$$u^{\alpha}\frac{\partial}{\partial x^{\alpha}}(\rho - c^{-2}p) = 0, \tag{6.111}$$

to jest da $\rho - c^{-2}p$ ostaje nepromenljivo duž svetskih linija, a ne svuda. Ako bismo se ograničili na "homogenešredine, kako se nazivaju one u kojima je $\rho - c^{-2}p$ nepromenljivo u prostornim pravcima, uslov (6.111), odnosno (6.110), postao bi i dovoljan, jer bi tada ta veličina bila konstantna.

Pređimo na drugu definiciju nestišljivosti. Ona zahteva da zbir mikroskopskih gustina sopstvene mase $\rho_{(j)}$ bude nepromenljiva. Za savršen fluid imamo, na osnovu (6.89) i (6.90)

$$\vartheta_{\alpha\beta} = c^{-2}p(f_{\alpha\beta} + u_{\alpha}u_{\beta}) \quad \Rightarrow \quad \vartheta^{\alpha}_{\alpha} = 3c^{-2}p.$$

Otud definicioni obrazac (6.81) daje

$$\sum_j \rho_{(j)} = \rho - 3c^{-2}p. \tag{6.112}$$

Zahtev da ova veličina bude konstantna odgovara uslovu da je

$$T^{\alpha}_{\alpha} = \text{const.}$$

Diferenciranjem prethodnog dobijamo

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}r} = \frac{1}{3}c^2.$$

Iz (6.106) sledi da je najveća brzina kompresionog talasa

$$v = \frac{c}{\sqrt{3}}. \tag{6.113}$$

Pored ove dve definicije nestišljivosti, koje ćemo nazvati **dinamičke**, od kojih prva garantuje da brzina prostiranja talasa ne može biti veća od brzine svetlosti, a druga je ograničava dosta manjom vrednošću i povlači konstantnost traga T^{α}_{α} tenzora energije, navešćemo i treću. Ova definicija, ili boljerečeno, vrsta definicije, uvodi ono što ćemo nazivati **konematička nestišljivost**. Ona zahteva nepromenljivost specifične zapremine, bilo relativne ili sopstvene.

Pođimo od obrasca (6.48), za relativni priraštaj specifične zapremine. Imamo, u slučaju relativne nestišljivosti

$$\frac{\partial u^{\alpha}}{\partial x^{\alpha}} + n^{\alpha}n^{\beta}\frac{\partial u_{\beta}}{\partial x^{\alpha}} = 0. \tag{6.114}$$

Vektor u^{α} je četvorobrzina lokalne cevi posmatračkih svetskih linija, n^{α} četvorobrzina cevi svetskih linija zapreminskog elementa. U odnosu na cev svetskih linija sopstvenog vremena toga elementa, kada je $n^{\alpha} = u^{\alpha}$, obrazac (6.114) jednostavno daje

$$\frac{\partial u^{\alpha}}{\partial x^{\alpha}} = 0 \tag{6.115}$$

Tada iz jednačine kontinuiteta (6.92) sledi

$$u^{\beta}\frac{\partial \rho}{\partial x^{\beta}} = \frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}s} = 0. \tag{6.116}$$

Ako pođemo od prirodne pretpostavke da je naš fluid, budući savršen, prostorno homogen, gustina će mu, na osnovu (6.116), biti konstantan u prostoru i vremenu. Tada iz (6.114) sledi

$$\rho = \text{const.} \quad \Rightarrow \quad v = \infty. \tag{6.117}$$

Mada je ovaj zaključak u relativnosti teško prihvatljiv, možemo smatrati s dovoljnom približnošću da su, u odsustvu talasnih poremećaja, konstantnost sopstvene gustine i nepromenljivostspecifične zapremine uzajamno uslovljene činjenice.

U nekim novijim radovima uzima se za astrofizičke primene (vidi Pekaris, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, vol. 73, No. 3, pp. 687-691, 1976) prva definicija ($v_{\max} = c$) kao najrazumnija. Druga, za koju je $v_{\max} = \frac{c}{\sqrt{3}}$, korišćena je za fotonske mlazeve, dok je treća definicija, (6.114) ili (6.115) pogodna pri proučavanja deformacije spletova linija sila nekog polja u vakuumu ili materiji.

Zadaci

Zadatak 11

Izvesti obrazac projektovanja (6.27) za vremenski orijentisanu elementarnu hiperpovrš.

Rešenje

Zadatak 12

Naći vezu između pritiska fotona i relativne gustine njihove relativne energije, a zatim, koristeći (6.16) i (6.17), naćizraz za apsolutnu temperaturu fotonskog gasa.

Rešenje

Zadatak 13

Pokazati da se jednačine dinamike savršenog fluida (6.93) mogu predstaviti pomoću funkcije f iz (6.109) i pseudobrzine C_α (6.110), u obliku

$$u^\alpha \Omega_{\alpha\beta} \equiv u^\alpha \left(\frac{\partial C_\beta}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial C_\alpha}{\partial x^\beta} \right) = 0.$$

Ispitati, s obzirom na antisimetriju tenzora $\Omega_{\alpha\beta}$, algebarski rang ovog sistema i naći, za $\Omega_{\alpha\beta} \neq 0$ vektor vrtložnosti ϑ^α, ortogonalan na pseudobrzini, koji zadovoljava taj sistem.

Rešenje

7. Elektromagnetno polje

7.1 Maksvelove jednačine

Poći ćemo od klasičnih Maksvelovih jednačina elektromagnetnog polja, pod pretpostavkom da se za dielektričnu konstantu i za magnetnu permeabilnost može uzeti da su jednake jedinici. Tada te jednačine (videti: D. Mušicki, Teorijska fizika II, str 19-33) glase:

$$\begin{aligned} \frac{1}{c}\frac{\partial E_r}{\partial t} + j_r &= e_{rst}\frac{\partial H_t}{\partial x^j}, \\ \frac{\partial E_s}{\partial x^s} &= q; \end{aligned} \tag{7.1}$$

$$\begin{aligned} -\frac{1}{c}\frac{\partial H_r}{\partial t} &= e_{rst}\frac{\partial E_t}{\partial x^j}, \\ \frac{\partial H_s}{\partial x^s} &= 0. \end{aligned} \tag{7.2}$$

gde je vektor elastičnog protoka j_r

$$j_r = \sigma\left(E_r + e_{rst}v_s H_t\right).$$

E_r i H_r su vektori električnog i magnetnog polja, brzina sredine koja provodi, q specifiona gustina naelektrisanja, σ električna provodljivost, e_{rst} antisimetrični permutacioni simbol. Sabiranje se vrši po ponovljenim indeksima, koji su ovde donji, jer se radi o fizičkim koordinatama u definitnoj metrici.

Budući da vektori električnog i magnetnog polja u opštem slučaju imaju sve tri komponente različite od nule, pokazaćemo da se oni u Svetu Minkovskog mnogu predstaviti pomoću jednog sistema antisimetričnih veličina drugog reda $F_{\alpha\beta}$, jer on ima u opštem slučaju šest komponenata različitih od nule. Taj sistem veličina je ustvari tenzor i naziva se **Maksvelov tenzor** ili tenzor elektromagnetnog polja. Priroda Maksvelovih jednačina u odnosu na svetsku metriku je tenzorska, pa ćemo ih dovesti u taj oblik.

Komponente $F_{\alpha\beta}$ su redom jednake

$$\begin{aligned} E_1 = F_{14}, \quad E_2 = F_{24}, \quad E_3 = F_{34}, \\ H_1 = F_{23}, \quad H_2 = F_{31}, \quad H_3 = F_{12}. \end{aligned} \tag{7.3}$$

Tenzoru $F_{\alpha\beta}$ pridružićemo njegov **dualni tenzor** $*F_{\alpha\beta}$ definisan sa:

$$-*F^{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}F_{\gamma\delta}, \quad -*F_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}F^{\gamma\delta}, \tag{7.4}$$

gde su

$$\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} = \sqrt{-\|g\|}e_{\alpha\beta\gamma\delta}, \quad \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} = -\frac{1}{\sqrt{-\|g\|}}e_{\alpha\beta\gamma\delta}.$$

Ričijevi permutacioni antisimetrični tenzori, dati u odnosu na svtesku metriku, a $e_{\alpha\beta\gamma\delta}$ i $e^{\alpha\beta\gamma\delta}$ odgovarajući permutacioni simboli (v. Anđelić, Tenzorski račun, 1973, str 78, [2]). Na osnovu prethodnih veza može se proveriti da je:

$$\begin{aligned} F_{\alpha\beta} &= -\frac{1}{2}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}\left(*F^{\gamma\delta}\right) = -**F_{\alpha\beta}, \\ F^{\alpha\beta} &= -\frac{1}{2}\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}\left(*F_{\gamma\delta}\right) = -**F^{\alpha\beta}. \end{aligned} \tag{7.4'}$$

S obzirom na to da posmatramo u Lorencovim reperima, koeficijcnt $\sqrt{-|g|}$ jednak je jedinici. Tako sad trovektore električnog i magnetnog polja možemo pisati, pomoću dualnih tenzora, u odgovarajućem obliku:

$$\begin{aligned} E_1 = -*F^{23}, \quad E_2 = -*F^{31}, \quad E_3 = -*F^{12}, \\ H_1 = -*F^{11}, \quad H_2 = -*F^{24}, \quad H_3 = -*F^{34}. \end{aligned} \tag{7.5}$$

Vratimo se vezama (7.3), pomoću kojih smo uveli tenzor polja $F_{\alpha\beta}$. S obzirom na to da je antisimetričan, a da su $\vec{E}$ i $\vec{H}$ prostorno orijentisani, vektoru magnetnog polja, gledano iz prostornog, "galilejskogđela Lorencovog sistema možemo pridružiti antisimetrični permutacioni simbol treceg reda e_{rst}, kako bi indeksi leve i desne strane uzajamno odgovarali

$$F_{rs} = e_{rst}H_t. \tag{7.6}$$

Dok je, na osnovu prvih veza (7.5), za električno polje

$$-*F^{rs} = e^{rst}E_t., \tag{7.7}$$

jer su vrednosti simbola e^{rst} i e_{rst} jednake zbog definitnosti metrike. Pri podizanju četvrtog indeksa menja se znak. Koristeći (7.6), jednačine (7.1) dobijaju oblik:

$$\frac{\partial F^{rs}}{\partial x^s} + \frac{\partial F^{r4}}{\partial x^4} = j^r, \quad \frac{\partial F^{4s}}{\partial x^s} = q. \tag{7.1'}$$

Dok iz (7.7) i drugog niza veza (7.5) imamo (7.2)

$$\frac{\partial(*F^{rs})}{\partial x^s} + \frac{\partial(*F^{r4})}{\partial x^4} = 0, \quad \frac{\partial(*F^{4s})}{\partial x^s} = 0. \tag{7.2'}$$

Desna strana jednačina (7.1′), kao divergencija tenzora, treba da predstavlja vektorsku veličinu koja odgovara četvrtoj komponenti $F_{\alpha\beta}$, pa je prema tome q samo algebarska vrednost jednog vektora koji mora ležati na vremonskoj osi Lorencovog posmatrače $\lambda^{\alpha}(0,0,0;q)$. S druge strane, električni protok j_r je, po svojoj defimiciji, prostorni vektor, jer se provođenje vrši u prostornom pravcu, pa se to svojstvo mora preneti u relativnost. Zato ćemo uvesti četvorovektor $J_{\alpha}(j_k;\lambda_4)$ upnog električnog protoka, koji predstavlja divergencijm prve grupe Maksvelovih jednačina. Radi se o tenzorskim veličinama, pa ćemo (7.1′) i (7.2′) prepisati u definitivnom obliku:

$$\frac{\partial F^{\beta\alpha}}{\partial x^{\alpha}} = J^{\beta}, \tag{7.8}$$

$$\frac{\partial(*F^{\beta\alpha})}{\partial x^{\alpha}} = 0 \tag{7.9}$$

Ovo je tenzorski oblik Maksvelovik jednačina u svetskoj metrici, u odnosu na Lorencove posmatrače. U proizvoljnom koordinatnom sistemu izvodi bi, umesto parcijalnih, bili kovarijantni. Taj kovarijantni oblik one imaju, dakle, u opštoj relativnosti. S obzirom na antisimetriju $F^{\alpha\beta}$ njegova druga divergencija daje identički nulu, pa iz prve grupe (7.8) tih jednačina sleduje da je divergencija četvorovektora električnog protoka J^{α} takođe jednaka nuli

$$\frac{\partial^2 F^{\alpha\beta}}{\partial x^{\alpha}\partial x^{\beta}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial J^{\beta}}{\partial x^{\beta}} = 0. \tag{7.10}$$

Ovaj zaključak iskazuje Lorencov uslov održanja električnog protoka, izražen u svetskoj metrici.

7.2 Lorencove transformacije elektromagnetnog polja. Osnovne invarijante

Lorencov transformat tenzora elektromagnetnog polja glasi, na osnovu §8 (Gl. 7.2, str. 85):

$$F'^{\alpha\beta} = L^{\alpha}_{\cdot\gamma} L^{\beta}_{\cdot\delta} F^{\gamma\delta}, \quad F'_{\alpha\beta} = L_{\alpha\cdot}^{\gamma} L_{\beta\cdot}^{\delta} F_{\gamma\delta} \tag{7.11}$$

Jednostavna Lorencova transformacija, izložena u §11 (Gl. 3.4, str. 38), koja se od opšte razlikuje samo pogodnim uzajamnim rasporedom osa inercijalnih sistema, ima sva njena bitna svojstva. Kad unesemo koeficijente transformacije (3.36), veze (7.11) daju eksplicitno:

$$\begin{aligned}
F'^{14} &= L^{1}_{\cdot 1} L^{4}_{\cdot 4} F^{14} + L^{1}_{\cdot 4} L^{4}_{\cdot 1} F^{41} = F^{14}, \\
F'^{24} &= L^{2}_{\cdot 2} L^{4}_{\cdot 1} F^{21} + L^{2}_{\cdot 2} L^{4}_{\cdot 4} F^{24} = \operatorname{sh}\theta F^{21} + \operatorname{ch}\theta F^{24}, \\
F'^{34} &= L^{3}_{\cdot 3} L^{4}_{\cdot 1} F^{31} + L^{3}_{\cdot 3} L^{4}_{\cdot 4} F^{34} = \operatorname{sh}\theta F^{31} + \operatorname{ch}\theta F^{34}, \\
\\
F'^{12} &= L^{1}_{\cdot 1} L^{2}_{\cdot 2} F^{12} + L^{1}_{\cdot 4} L^{2}_{\cdot 2} F^{42} = \operatorname{ch}\theta F^{12} + \operatorname{sh}\theta F^{42}, \\
F'^{23} &= L^{2}_{\cdot 2} L^{3}_{\cdot 3} F^{23} = F^{23}, \\
F'^{31} &= L^{3}_{\cdot 3} L^{1}_{\cdot 1} F^{31} + L^{3}_{\cdot 3} L^{1}_{\cdot 4} F^{34} = \operatorname{ch}\theta F^{31} + \operatorname{sh}\theta F^{34}.
\end{aligned} \tag{7.12}$$

Kada se ovi transformacioni obrasci izraze pomoću trovektora električnog i magnetnog polja (7.3), vodeći računa o tome da pri spuštanju indeksa vremenske koordinate, kao i pri promeni reda pisanja indeksa menjamo znak, dobićemo Lorencove transformate elektromagnetnog polja:

$$\begin{aligned}
3E_1' &= E_1, & H_1' &= H_1, \\
E_2' &= \gamma\left(E_2 - \frac{v}{c}H_3\right), & H_2' &= \gamma\left(\frac{v}{c}E_3 + H_2\right), \\
E_3' &= \gamma\left(E_3 + \frac{v}{c}H_2\right), & H_3' &= \gamma\left(-\frac{v}{c}E_2 + H_3\right).
\end{aligned} \tag{7.13}$$

Iz ovih izraza se vidi da jedino one komponente trovektora električnog i magnetnog polja koje su paralelne s pravcem kretanje Lorencovog posmatrača S' prema S, ostaju nepromenjene pri prelazu iz jednog sistema u drugi. Komponente koje su upravne na prave kretanja menjaju se, i to tako da su izrazi za vektore u S' spregnute funkcije oba polja u S. Štaviše, vektori $\vec{E}$ i $\vec{H}$ mogu u transformisanom sistemu imati neke transverzalne komponente i ako ih nemaju u polaznom, i obrnuto.

Kako su električno i magnetno polje identifikovani kao vektori u odnosu na galilejskog posmatrača, daćemo za njih izraze koji su vektorski u svetskoj metrici. Ti četvorovektori električnog i magnetnog polja glase:

$$e_{\alpha} \equiv F_{\alpha\beta} u^{\beta}, \quad h_{\alpha} \equiv *F_{\alpha\beta} u^{\beta} \tag{7.14}$$

gde je u^{α} jedinični vektor ose x^4. Iz (7.3) i (7.5) za trovektore električnog i magnetnog polja, vidimo odmah da se e_{α} i h_{α} svode na $(E_i;0)$ i $(H_i;0)$. Značaj ovih četvorovektora je u tome što omogućuju da se, u nekoj materijalnoj sredini čija je četvorobrzina u^{α}, odredi električni protok u osnovnim jednačinama (7.1). Ovo je potrebno zato što je on vektor, pa mora predstavljati kombinaciju vektorskih veličina. Definisaćemo ga u sledećem odeljku.

S obzirom na antisimetriju $F_{\alpha\beta}$ uvej je

$$e_\alpha u^\alpha = h_\alpha u^\alpha = 0. \tag{7.15}$$

Četvorovektori električnog i magnatnog polja su prostorno orijentisani, što se, drugačije napisano, svodi na

$$e'_\alpha = (E'_i;0), \quad h'_\alpha = (H'_i;0).$$

Lorencove transformacije (7.12), primenjene na e^α i h^α, glase

$$\begin{aligned} e'_\alpha &= L^\alpha_{\cdot\beta} e^\beta = L^\alpha_{\cdot i} F^i_{\cdot 4} \\ h'_\alpha &= L^\alpha_{\cdot\beta} h^\beta = L^\alpha_{\cdot i} * F^{4i}, \end{aligned}$$

što eksplicitno daje:

$$\begin{aligned} & e'^1 = \operatorname{ch}\theta e^1 = \operatorname{ch}\theta E^1, \quad e'^2 = e^2 = E^2, \\ & e'^3 = e^3 = E^3, \quad e'^4 = \operatorname{sh}\theta e^1 = \operatorname{sh}\theta E^1; \\ & h'^1 = \operatorname{ch}\theta h^1 = \operatorname{ch}\theta H^1, \quad h'^2 = h^2 = H^2, \\ & h'^3 = h^3 = H^3, \quad h'^4 = \operatorname{sh}\theta h^1 = \operatorname{sh}\theta H^1. \end{aligned} \tag{7.16}$$

Ovde se zapaža jedna bitna razlika između trovektora i četvorovektora električnog i magnetnog polja. Dok se kod prvih menjaju samo komponente upravne na pravac kretanja posmatrača, dotle kod drugih jedino one ostaju nepromenjene, ali se, kao posledica kretanja, pojavljuju i vremenske komponente.

Ako uvedemo oznake:

$$e^2 \equiv g_{\alpha\beta} e^\alpha e^\beta, \quad h^2 \equiv g_{\alpha\beta} h^\alpha h^\beta, \quad \vec{e}\cdot\vec{h} \equiv g_{\alpha\beta} e^\alpha h^\beta, \tag{7.17}$$

vidimo iz (7.16) da je:

$$e'^2 = e^2, \quad h'^2 = h^2, \quad \vec{\bar{e}}\cdot\vec{\bar{h}} = \vec{e}\cdot\vec{h} \tag{7.18}$$

Intenziteti i skalarni proizvod četvorovektora električnog i magnetnog polja, pa prema tome i ugao između njih, ostaju nepromenjeni pod dejstvom Lorencove transformacije. Budući da su to pravi vektori, ti bi odnosi ostali nepromenjeni i pod dejstvom proizvoljne transformacije. Iz obrazaca (7.13) može se, međutim, videti da transformati trovektora $\vec{E}$ i $\vec{H}$ ne zadržavaju ni intenzitet niti zahvaćeni ugao u odnosu na različite posmatrače, mada ćemo i za njih utvrditi da skalarni proizvod, kao celina, ostaje nepromenjen.

Pogledaćemo, radi daljeg izučavanja transformacionih svojstava elektromagnetnog polja, neke ranije izraze uvedene u §10 koji se odnose na infinitezimalnu Lorencovu transformaciju. Tada smo bili uveli dva skalara, P i Q, funkcije koeficijenata $\lambda_{\rho\sigma}$ infinitezimalne transformacije. Veličine $\lambda_{\rho\sigma}$ su antisimetrične kao što je to i tenzor elektromagnetnog polja, dok su P i Q vezani za njene karakteristične vrednosti, što je dato sa (3.25) i (3.25′).

Možemo obrazovati, u funkciji $F_{\alpha\beta}$, izraze koji odgovaraju P i Q. Uvedimo:

$$\begin{aligned} F_1 &\equiv F_{14}^2 + F_{24}^2 + F_{34}^2 - F_{12}^2 - F_{23}^2 - F_{31}^2, \\ F_2 &\equiv 2\left(F_{12}F_{34} + F_{23}F_{14} + F_{31}F_{24}\right). \end{aligned} \tag{7.19}$$

Na osnovu (7.3) i (7.5) ovo se može napisati kao:

$$F_{(1)} = -\frac{1}{2} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta}, \quad F_{(2)} = -\frac{1}{2} F_{\alpha\beta} * F^{\alpha\beta}. \tag{7.19′}$$

Veličine $F_{(1)}$ i $F_{(2)}$ predstavljaju skalare u jednom, pa otud u svakom Lorencovom sistemu, što se može proveriti pomoću (7.11) i (3.7). Sve veličine moraju šta više biti, po svojoj definiciji, invarijantne u odnosu na svaku koordinatnu transformaciju u Svetu Minkovskog.

Iz (7.3) i (7.19) vidimo da je:

$$\begin{aligned} -F_{(1)} &= E^2 - H^2, \\ -F_{(2)} &= 2\vec{E}\cdot\vec{H}. \end{aligned} \tag{7.20}$$

S obzirom na invarijantnost $F_{(1)}$ i $F_{(2)}$ imamo:

$$\begin{aligned} E^2 - H^2 &= E'^2 - H'^2, \\ \vec{E}\cdot\vec{H} &= \vec{E}'\cdot\vec{H}'. \end{aligned} \tag{7.21}$$

Trovektori električnog i magnetnog polja zadovoljavaju dakle, ovakve veze u odnosu na svaki posmatrački sistem. $F_{(1)}$ i $F_{(2)}$ se nazivaju **osnovne invarijante** elektromagnetnog polja.

7.3 Tenzor energije elektromagnetnog polja

Tenzor energije, onakav kakav je u prethodnoj glavi bio formulisan za neprekidnu sredinu, imao je fizičko tumačenje zasnovano na protoku i gustini impulsa i energije, dato izrazima (6.61), (6.62) i (6.63). Analogno tome, uvešćemo tenzor energije elektromagnetnog polja, koji je definisan na sledeći način:

(7.22)

Algebarski zaključci koji neposredno sleduju iz oblika ovog tenzora su njegova simetrija i odsustvo traga. Prvi od njih smo već napisali, a drugi je gotovo očigledan

$$\tau^{\alpha}_{\alpha} = 0. \tag{7.23}$$

Potražićemo čemu je jednaka divergencija tenzora energije. Radi toga ćemo prvo prepisati drugu grupu Maksvelovih jednačina (7.9) u obliku

$$\frac{\partial F_{\beta\gamma}}{\partial x^{\alpha}} + \frac{\partial F_{\gamma\alpha}}{\partial x^{\beta}} + \frac{\partial F_{\alpha\beta}}{\partial x^{\gamma}} = 0. \tag{7.24}$$

Divergencija tenzora energije glasi

$$\frac{\partial \tau^{\alpha}_{\beta}}{\partial x^{\alpha}} = c^{-2}\left(\frac{\partial F^{\alpha\gamma}}{\partial x^{\alpha}} F_{\beta\gamma} + F^{\alpha\gamma}\frac{\partial F_{\beta\gamma}}{\partial x^{\alpha}} - \frac{1}{2}F^{\gamma\delta}\frac{\partial F_{\gamma\delta}}{\partial x^{\beta}}\right). \tag{7.25}$$

Drugi član u gornjoj zagradi može se napisati, s obzirom na antisimetriju $F_{\alpha\beta}$ u obliku:

$$F^{\alpha\gamma}\frac{\partial F_{\beta\gamma}}{\partial x^{\alpha}} = \frac{1}{2}F^{\alpha\gamma}\left(\frac{\partial F_{\beta\gamma}}{\partial x^{\alpha}} + \frac{\partial F_{\alpha\beta}}{\partial x^{\gamma}}\right),$$

što se, uz pomoć Maksvelovih jednačina (7.24), svodi na:

$$F^{\alpha\gamma}\frac{\partial F_{\beta\gamma}}{\partial x^{\alpha}} = \frac{1}{2}F^{\alpha\gamma}\frac{\partial F_{\alpha\gamma}}{\partial x^{\beta}}.$$

Kad se ovo stavi u jednačine (7.25), potre se sa poslednjim članom u zagradi, pa dobijemo:

$$\frac{\partial \tau^{\alpha}_{\beta}}{\partial x^{\alpha}} = c^{-2}\frac{\partial F^{\alpha\gamma}}{\partial x^{\alpha}} F_{\beta\gamma},$$

odnosno, na osnovu prve grupe Maksvelovih jednačina (7.8):

$$\frac{\partial \tau^{\alpha}_{\beta}}{\partial x^{\alpha}} = c^{-2} F_{\gamma\beta} J^{\gamma}. \tag{7.26}$$

Znači da je divergencija tenzora energije elektromagnetnog polja različita od nule ako postoji protok J^γ. To je ispravno, jer protoka elektriciteta nema bez protoka materije, pa je tek divergencija ukupnog tenzora energije jednaka nuli, a taj mora sadržati, pored elektromagnetnog, i jedan materijalni deo. U slučaju elektromagnetnog polja u vakuumu, protok J^γ u opštem slučaju ne postoji, pa je i divergencija tenzora energije jednaka nuli. Ako je, obrnuto, divergencija tenzora energije jednaka nuli, iz (7.26) sledi da je J^β jednak nuli onda kada je determinanta $\|F_{\alpha\beta}\|$ različita od nule. U sledećem odeljku ćemo dati tumačenje toga.

Možemo odrediti vektor J^α. Za nenaelektrisani elektroprovodljivi fluid, ako zanemarimo nefaradejevske Holove[1] struje, on iznosi σe^α, gde je σ provodljivost, a e^α četvorovektor električnog polja. To se u približnosti malih brzina posmatrača prema izvoru polja svodi na kiasični izraz za struju u provodniku. Ako postoji i sopstveno specificno naelektrisanje q, ukupni vektor protoka će, s obzirom na drugu jednačinu (7.1′), glasiti

$$J^\beta = qu^\beta + \sigma e^\beta. \tag{7.27}$$

Ovo se moše proveriti poređenjem sa galilejski približnim izrazom za električni protok u (7.1).

Nećemo razmatrati u ovom kursu oblik koji dobiju Maksvelove jednačine kad su dielektrični koeficijent i magnetna permeabilnost proizvoljne. Ostavljene su po strani i takozvane nefaradejske struje u izrazu za protok.

Ostaje nam da opravdamo definiciju (7.22) tenzora energije u smislu razmatranja iz §25 (Gl, 7.3, str. 87), koja su se odnosila na tenzor energije neprekidne sredine. Stoga ćemo, pomoću obrasca (7.3) za trovektore $\vec{E}$ i $\vec{H}$, ispisati tenzor energije (7.22) uzimajući, radi jednostavnosti, da je $c = 1$

$$\left(\tau_{\alpha\beta}\right) = \begin{pmatrix} \Phi - E_1^2 - H_1^2 & -E_1E_2 - H_1H_2 & -E_1E_3 - H_1H_3 & E_2H_1 - E_1H_2 \\ 0 & \Phi - E_2^2 - H_2^2 & -E_2E_3 - H_2H_3 & E_1H_3 - E_3H_1 \\ 0 & 0 & \Phi - E_3^2 - H_3^2 & E_3H_2 - E_2H_3 \\ 0 & 0 & 0 & \Phi \end{pmatrix} \tag{7.28}$$

Ovde je $(\Phi = \frac{1}{2}(E^2 - H^2)$ dok su simetrični elementi izostevljeni.

Oblik (7.28) tenzora energije dat je u odnosu na mirujućeg posmatrača, prostorne ose se mogu birati po volji, i izraz za $\tau_{\alpha\beta}$ učiniti jednostavnijim bez promene njegovih fizičkih svojstava. Izaberimo jednu od koordinatnih ravni posmatračevog sistema tako da u njoj leže vektori $\vec{E}$ i $\vec{H}$. Neka osa x^2 bude upravna na njoj. Tada (7.28) ima oblik

$$\left(\tau_{\alpha\beta}\right) = \begin{pmatrix} \Phi - E_1^2 - H_1^2 & 0 & -E_1E_3 - H_1H_3 & 0 \\ 0 & \Phi & 0 & E_1H_3 - E_3H_1 \\ 0 & 0 & \Phi - E_3^2 - H_3^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Phi \end{pmatrix} \tag{7.28′}$$

Obratimo pažnju na poslednju kolonu (ili vrstu) matrice, drugi član so noše napisati:

$$-c^{-1}P_2 = \varepsilon_{2jk}H_jE_k = c^2\tau_{24}, \tag{7.29}$$

gde smo c privremeno vratili na njegovo mesto. Ovde je $\vec{P}(0, P_2, 0)$ poznati Pojntingov[2] vektor, izražen u odnosu na ovaj sistem. U mirujućem sistemu četvorovektori električnog i magnetnog polja ℓ_α i h_α identični su s odgovarajućim trovektorima $\ell_\alpha(E_1, 0, E_3, 0)$ i $h_\alpha(H_1, 0, H_3, 0)$ četvorobrzina je $u_\alpha(0, 0, 0, -1)$. Tada je Pojntingov četvorovektor protoka energije p^α

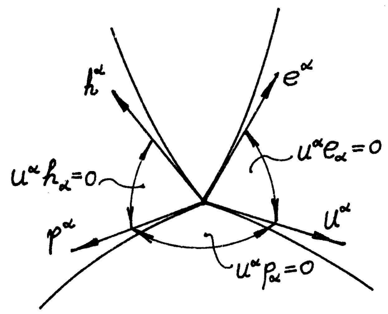
$$p^\alpha = c\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}u_\beta e_\gamma h_\delta. \tag{7.29′}$$

p_α se (slika 7.1) za nepokretni sistem svodi $p_\alpha(p_i, 0)$. Trovektor P^j, koji u (7.28′) ima samo jednu koordinatu različitu od nule, predstavlja specifični protok elektromagnetne energije po jedinici površine, što

[1] Hall

[2] Poynting

se slaše sa drugim izrazom (6.63), gde koordinate c^3T^{j4} predstavljaju specifični protok energije neprekidne sredine. Da čitalac ne bi pomislio da se radi o grešci, podsećamo da P^j kao prostorni vektor ne menja signaturu pri podizanju indeksa, dok je τ^{j4} menja u odnosu na τ_{j4}. Otud je $c^{-3}p^2 = \tau^{24}$ u našem koordinatnom sistcmu, dok u (7.28′) stoji, na osnovu (7.29), $-c^{-3}P_2$ kao vrednost τ_{24}.



Slika 7.1: Pojntingov četvorovektor protoka energije $p_\alpha(p_i, 0)$ za nepokretni sistem.

Poslednja koordinata tenzora energije daje

$$c^2\tau_{44} = \frac{1}{2}\left(E^2 + H^2\right). \tag{7.30}$$

Ovo predstavlja specifičnu gustinu energije elektromagnetnog polja. Kako je po (6.61) ta gustina za neprekidnu sredinu jednaka c^2T^{44}, to se gornji izraz slaše s njom. (7.29) i (7.30) su dobro poznate formule teorijske fizike koje izrašavaju protok i gustinu energije.

Prostorne koordinate tenzora energije tumače se kao "napon"elektromagnetnog polja. Svođenjem metričnog bloka τ_{ij} tenzora energije u (7.28′), pomoću jedne dopunske linearne transformacije, na dijagonalan oblik, nalaze se glavne vrednosti Maksvelovog napona polja.

7.4 Sopstvene vrednosti tenzora energije elektromagnetnog polja

Algebarski ćemo ispitati tenzor energije $\Theta_{\alpha\beta}$. Zato ćemo prvo, među posmatračkim sistemima u odnosu na koje taj tenzor ima uprošćeni oblik (7.28′), potražiti onaj koji se dobija svođenjem na dijagonalni oblik submatrice

$$\begin{pmatrix} \tau_{11} & \tau_{13} \\ \tau_{31} & \tau_{33} \end{pmatrix}.$$

Takav koordinatni sistem ćemo nazivati **prost sistem**. U njemu je

$$E_3E_1 + H_3H_1 = 0. \tag{7.31}$$

Na osnovu elementarne identičnosti

$$(E_3E_1 + H_3H_1)^2 + (E_1H_3 - E_3H_1)^2 = (E_1^2 + H_1^2)(E_3^2 + H_3^2), \tag{7.32}$$

ako stavimo

$$\chi^2 \equiv E_1^2 + H_1^2, \quad \psi^2 \equiv E_3^2 + H_3^2, \tag{7.33}$$

imaćemo, zbog (7.31)

$$\psi\chi = E_1H_3 - E_3H_1,$$

gde smo izabrali pozitivan predznak za proizvod $\chi\psi$. Tada će se matrica (7.28′) svesti na

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2}\left(\psi^2-\chi^2\right) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}\left(\psi^2+\chi^2\right) & 0 & \chi\psi \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2}\left(\psi^2-\chi^2\right) & 0 \\ 0 & \chi\psi & 0 & \frac{1}{2}\left(\psi^2+\chi^2\right) \end{pmatrix}. \tag{7.34}$$

Za ovako redukovani tenzor energije potražićemo sopstvene vrednosti, dakle rešenja jednačine

$$\|\tau_{\alpha\beta-\lambda g_{\alpha\beta}}\| = 0, \tag{7.35}$$

što nam za (7.34) daje

$$\left[\frac{1}{2}\left(\psi^2-\chi^2\right)-\lambda\right]\left[\frac{1}{2}\left(\psi^2-\chi^2\right)+\lambda\right]\times$$
$$\times\left\{\left[\frac{1}{2}\left(\psi^2+\chi^2\right)-\lambda\right]\left[\frac{1}{2}\left(\psi^2+\chi^2\right)+\lambda\right]-\chi^2\psi^2\right\}=0$$

odnosno

$$\left[\frac{1}{4}\left(\psi^2-\chi^2\right)^2-\lambda^2\right]^2=0. \tag{7.36}$$

Vidimo da rešenje karakterističnog polinoma predstavlja dva dvostruka korena

$$\lambda = \pm\frac{1}{2}\left(\psi^2-\chi^2\right). \tag{7.37}$$

N **Sopstvene vrednosti tenzora energije elektromagnetnog polja sastoji se iz dva dvostruka korena jednakih intenziteta, a suprotnih znakova**.

Možemo, pomoću invarijanti $F(1)$ i $F(2)$ elektromagnetnog polja (7.19) i (7.20), potražiti izraz za kvadrat sopstvenog korena λ. S obzirom na definicione obrasce (7.33) imamo

$$\begin{aligned} \lambda^2 &= \frac{1}{4}\left[(H_3^2-E_1^2)-(H_1^2-E_3^2)\right]^2 = \\ &= \frac{1}{4}\left[(H_3^2-E_1^2)+(H_1^2-E_3^2)\right]^2-(H_3^2-E_1^2)(H_1^2-E_3^2). \end{aligned} \tag{7.38}$$

Drugi član na desnoj strani (7.38) može se predstaviti pomoću sledeće elementarne identičnosti

$$(H_3^2-E_1^2)(H_1^2-E_3^2) = (E_1E_3+H_1H_3)^2-(E_1H_1+E_3H_3)^2.$$

U izabranom prostom sistemu je, na osnovu (7.31), prvi član na desnoj strani jednak je nuli. S obzirom na prvu vezu (7.19), odnosno (7.20), drugi član je srazmeran kvadratu invarijante $F(2)$ polja

$$(H_3^2-E_1^2)(H_1^2-E_3^2) = -\frac{1}{4}F_{(2)}^2.$$

Prvi član na desnoj strani (7.38) jednak je, na osnovu druge veze (7.19), odnosno (7.20)

$$H_1^2+H_3^2-E_1^2-E_3^2 = F_{(1)}.$$

Tako da (7.38) konačno glasi

$$\lambda^2 = \frac{1}{4}\left(F_{(1)}^2+F_{(2)}^2\right). \tag{7.39}$$

Razmotrićemo, na osnovu izloženog, dva slučaja. U prvom je sopstveni koren λ različit, a u drugom je dednak nuli.

1) Ako je $\lambda \neq 0$ postoji kanonska baza sopstvenih vektora tenzora $\rho_{\alpha\beta}$. Kako su sopstvene vrednosti dvostruke, vektori nisu jedinstveno određeni, već postoje dve dvoravni sopstvenih pravaca, od kojih svaka odgovara po jednom od dva korena. Te dvoravni moraju biti, na osnovu (6.65), međusobno ortogonalne. U svakoj od njih možemo, dakle, naći po dva uzajamno ortogonoalna vektora, i tako sastaviti ortogonalnu bazu vektora u sopstvenim dvoravnima. Uzmimo kao uslov iz (7.30) da gustina energije $c^2\tau_{44}$ ostaje pozitivna i u potpuno dijagonalizovanoj matrici. Tada, s obirom na to da za bazni vektor $\vec{v}_{(4)}$ imamo

$$v^{\alpha}_{(4)}(0,0,0,1),, \quad v_{(4)\alpha}v^{\alpha}_{(4)} = -1,$$

sledi da je pri $\lambda < 0$

$$\tau_{\alpha\beta}v^{\beta}_{(4)} = \lambda v_{(4)\alpha}. \tag{7.40}$$

Dakle, jedan od vektora koji odrovaraju negativnom dvostrukom korenu može se izabrati teko da bude vremenski orijentisan. Ta sopstvena dvoravan je vremenska, a druga, koja odgovara $\lambda > 0$ je automatski prostorna. Na osnovu toga ćemo obrazovati prost sistem sopstvenih vektora, od kojih je jedan vremenski a preostala tri su prostorna. Ako stavimo:

$$\lambda_{(1)} = \lambda_{(2)} = \varkappa, \quad \lambda_{(3)} = \lambda_{(4)} = -\varkappa, \quad (\varkappa > 0)$$

i primenimo obrazac (6.75) za razlaganje tenzora na ovakve sopstvene vektore, imaćemo posle nešto računa:

$$\begin{aligned}\tau^{\alpha\beta} &= 2\varkappa\left(V^{\alpha}_{(1)}V^{\beta}_{(1)} + V^{\alpha}_{(2)}V^{\beta}_{(2)} - V^{\alpha}_{(3)}V^{\beta}_{(3)}\right) + 2\varkappa V^{\alpha}_{(4)}V^{\beta}_{(4)} - \\ &- \varkappa\left(V^{\alpha}_{(1)}V^{\beta}_{(1)} + V^{\alpha}_{(2)}V^{\beta}_{(2)} - V^{\alpha}_{(3)}V^{\beta}_{(3)}\right) - \varkappa V^{\alpha}_{(4)}V^{\beta}_{(4)} = \\ &= \varkappa\left(V^{\alpha}_{(1)}V^{\beta}_{(1)} + V^{\alpha}_{(2)}V^{\beta}_{(2)} - V^{\alpha}_{(3)}V^{\beta}_{(3)} + V^{\alpha}_{(4)}V^{\beta}_{(4)}\right)\end{aligned} \tag{7.41}$$

Što predstavlja kanonski izraz za $\tau_{\alpha\beta}$ u nesingularnom slučaju.

2) Ako je $\lambda = 0$, što po (7.37) i (7.39) povlači

$$\Psi^2 = \chi^2, \quad F_{(1)} = F_{(2)} = 0. \tag{7.42}$$

Imamo takozvano **singularno elektromagnetno polje**. Na osnovu definicije (7.19) invarijanata $F_{(1)}$ i $F_{(2)}$, i njihove veze (7.20) sa vektorima polja, vidimo da je tada:

$$\vec{E}\cdot\vec{H} = \vec{e}\cdot\vec{h} = 0, \quad E^2 = H^2, \quad e^2 = h^2. \tag{7.42$'$}$$

Električno i magnetno polje, bilo da su izraženi preko svojih tro ili četvorovektora, su tada ortogonalna uzajamno i jednakih intenziteta. S obzirom na univerzalnost invarijanata, iskazanu uslovima (7.21), sleduje da svojstva uzajamne ortogonalnosti i jedrakosti intenziteta važe za svkog Lorencovog posmatrača. Razume se da i svaki pojedini od uslova (7.42′) ostaje očuvan, ali su ti slučajevi obuhvaćeni sa 1), jer je tada $\lambda \neq 0$. Na osnovu prve veze (7.42) matrica tenzora energije tada ima oblik

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \psi^2 & 0 & -\varepsilon\psi^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\varepsilon\psi^2 & 0 & \psi^2 \end{pmatrix}. \tag{7.43}$$

gde je $\varepsilon = \pm 1$.
Formirajmo, pomoću ovog nultog voktora, posmetranog sistema, u kojem je izražen tonzor $\tau_{\alpha\beta}$ iz prethodnog obrasca, vektor n^{α}

$$n^{\alpha} = \varepsilon V^{\alpha}_{(2)} + V^{\alpha}_{(4)} \quad \Rightarrow \quad g_{\alpha\beta}n^{\alpha}n^{\beta} = 0. \tag{7.44}$$

Tenzor (7.43) može biti predstavljen pomoću ovog nultog vektora, na sledeći način

$$\tau_{\alpha\beta} = \psi^2 n_{\alpha} n_{\beta}. \tag{7.45}$$

Odavde se vidi da je n_α sopstveni vektor nultog korena. Ovakvo razlaganje daje izraz za tenzor energije singularnog elektromagnetnog polja u odnosu na proizvoljnog Lorencovog posmatrača, a i na bilo koji koordinatni sistem.

Kad uporedimo rezultoate ovog odeljka s onim iz §10, vidimo da se singularan slučaj simetričnog tenzora energije $\tau_{\alpha\beta}$ poklapa sa singularnim slučajem antisimetričnog tenzora polja $F_{\alpha\beta}$.

Singularno elektromagnetno polje tumači se pomoću "fotonskog fluida"(videti: Lichnerowicz, Théories relativistes, [3] str. 52-54). Fizički smisao ovog slučaja je u tome što on u vakuumu predstavlja, na osnovu (7.42′), prostiranje elektromagnetnog zračenja. U svetlosnom zraku vektori električnog i magnetnog polja su uzajamno ortogonalni i jednakih intenziteta, dok je pravac prostiranja zraka dat nultim vektorom n^α.

Posmatrajmo opštiji slučaj 1), i to onda kada su električno i magnetno polje ortogonalni ($F_{(2)} = 0$), ali ne i jednakih intenziteta ($F_{(1)} \neq 0$). Može se neposredno proveriti da je vrednost determinante $F_{\alpha\beta}$ jednaka

$$\|F_{\alpha\beta}\| = \frac{1}{4}F_{(2)}^2.$$

Što znači da je za $F_{(2)}^2 = 0$ rang matrice $(F_{\alpha\beta})$ niži od 4. U svetlosti te činjenice možemo protumačiti slučaj kada je divergencija tenzora u obrascu (7.26) jednaka nuli

$$\frac{\partial \tau^\gamma_\beta}{\partial x^\gamma} = F_{\beta\gamma}J^\gamma = 0. \tag{7.46}$$

Ovaj uslov ne garantuje da je električni protok J^γ jednak nuli onda kada su vektori električnog i magnetnog polja ortogonalni. Dakle, tek lokalna neortogonalnost električnog i magnetnog polja predstavlja potreban i dovoljan uslov za to da iz (7.46) sleduje $J^\gamma = 0$. Pritom prva invarijanta $F_{(1)}$ može imati proizvoljnu vrednost.

7.5 Četvoropotencijal elektromagnetnog polja

Druga grupa Maksvelovih jednačina (7.3′) jednostavnije napisana u obliku (7.24)

$$\frac{\partial F_{\beta\gamma}}{\partial x^\alpha} + \frac{\partial F_{\gamma\alpha}}{\partial x^\beta} + \frac{\partial F_{\alpha\beta}}{\partial x^\gamma} = 0, \tag{7.47}$$

ima nekih opštih posledica. Da bismo protumačili te posledice, poslužićemo se nekim osnovnim pojmovima iz teorije spoljnih diferencijalnih formi. Za ozbiljnije upoznavanje s tom teorijom upućujemo na knjigu: H. Cartan, Calcul différentiel, Formes différentielles, [14], takođe: H. Guggenheimer, Differential Geometry. [28]. Ovde nećemo posmatrati diferencijalne forme reda višeg od trećeg.

Metrika Sveta Minkovskog je pseudoeuklidska, a osnovni stavovi i teoreme spoljnog diferencijalnog računa važe i za rimanske metrike, pa se prema tome prenose na opštu relativnost, bar u njenom klasičnom obliku, ali ne važe za nerimanske metrike.

Jedna linearna spoljna diferencijalna forma glasi

$$L(\varphi, \mathrm{d}x) \equiv \varphi_\alpha \, \mathrm{d}x^\alpha \tag{7.48}$$

Dok jedna kvadratna spoljna diferencijalna forma ima oblik

$$M(\Phi, \mathrm{d}x) \equiv \Phi_{\alpha\beta}\mathrm{d}x^\alpha \wedge \mathrm{d}x^\beta = \frac{1}{2}\Phi_{\alpha\beta}\left(\mathrm{d}x^\alpha\mathrm{d}x^\beta - \mathrm{d}x^\beta\mathrm{d}x^\alpha\right), \tag{7.49}$$

gde su koeficijenti $\Phi_{\alpha\beta} = \Phi_{\beta\alpha}$ antisimetrični, a $\wedge$ označava operaciju antikomutativnog ili spoljnog množenja (što smo na primeru elementarnih hiperpovrši već imali u §22). Mogli bismo formirati spoljnu diferencijalnu formu proizvoljnog reda pod uslovon da bude homogena po diferencijalima $\mathrm{d}x^\rho$ i potpuno antisimotričnih kocficijenata. S obzirom na zahtev invarijantnosti formi, i na to da se diferencijali koordinata transformišu kao kontravarijantni vektori, sleduje da koeficijenti takvih formi moraju biti apsolutni kovanjantni tenzori odgovarajućeg reda.

Za takve forme definisana je operacija **spoljnog diferenciranja**, koja se od jedne spoljne diferencijalne forme reda p dobija odgovarajuća forma reda $p+1$.Pošto dobijena forma mora imati isti karakter u odnosu na transformacije, to diferenciranja predstavlja kombinaciju kovarijantnih isvoda, tako da njeni koeficijenti opet budu koordinate jednog potpuno antisimetričnog tenzora reda za jedan višeg. Ta corne predstavlja **spoljni diferencijal** polazne forme. Njeni koeficijenti su **spoljni izvodi** koeficijenata polazne forme. Simbolična oznaka spoljnog izvoda $D\Gamma$ koeficijenata neke forne Γ glasi:

$$D\Gamma \equiv \left(\frac{\partial}{\partial x} \wedge \Gamma\right) \mathrm{d}x, \tag{7.50}$$

i sastoji se u antikomutativnoj primeni operatora diferenciranja. Činjenica da se u ovoj opštoj formuli pojavljuju samo parcijalni izvodi potiče otud što se pri antisimetričnim kombinacijama potiru koeficijenti povezanosti kovarijantmh izvoda.

Kako je svaka skalarna funkcija tenzor nultog redza takvu funkciju f jea, njen obični diferencijal je istovetan sa spoljnim.

$$Df \equiv \frac{\partial f}{\partial x^\alpha} \mathrm{d}x^\alpha.$$

A za koeficijente linearne forme (7.48)

$$D\varphi = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \varphi_\beta}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial x^\beta}\right) \mathrm{d}x^\alpha \wedge \mathrm{d}x^\beta. \tag{7.51}$$

Najzad, za koeficijente neke kvadratne spoljne forme diferencijalne forme imamo

$$DF = \frac{1}{3!}\left(\frac{\partial F_{\beta\gamma}}{\partial x^\alpha} + \frac{\partial F_{\alpha\gamma}}{\partial x^\beta} + \frac{\partial F_{\alpha\beta}}{\partial x^\gamma}\right) \mathrm{d}x^\alpha \wedge \mathrm{d}x^\beta \wedge \mathrm{d}x^\gamma. \tag{7.52}$$

U teoriji diferencijalnih formi osnovna je Poenkareova teorema koja glasi:

Teorema 1

Ako je spoljni diferencijal jedne diferencijalne forme jednak nulii, postoji forma za koju data diferencijalna forma predstavlja spoljni diferencijal.

Suorotni stav, po kojem je spoljni diferencijal spoljneg difercncijala jedne forme jednak nuli, proističe iz same operacije spoljneg diferenciranja:

$$DDF = 0.$$

Strogi uslov pod kojim važi Poenkareova teorema jeste da spoljni diferencijal date diferencijalne forme bude jednak nuli u jednoj **zvezdastoj oblasti** normiranog potpunog prostora. Tada u toj oblasti postoji forma za koju zadata forma predstavlja spoljni diferencijal. Pod zvezdastom oblašću U podrazumeva se ona koja zadovoljava, u odnosu na jednu svoju tačku, uslov da se interval $[a,x]$, $x \in U$, koji sadrži tačke definisane sa $(1-t)a+tx$ $(0 \leq t \leq 1)$, ceo sadrži u U.

Navedeni uslovi, koji podrazumevaju povezanost oblasti su minimalni. Izoštrićemo ih zahtevom da povezanost bude prosta, a oblast orijentabilna. Orijentabilnost je lzražena time što je za svaki koordinatni sistem x^i, u posmatranoj oblasti jakobijan u odnosu na Lorencovog posmatrača definitan, $\| \frac{\partial x^i}{\partial x} \| > 0$. U svim slučajevima koji bi mogli doći u obzir, navedeni uslovi će biti ispunjeni u Svetu Minkovskog. Sve što smo naveli važi i za Svet opšte relativnosti, zbog čega smo i sproveli ovu diskusiju.

Sad vidimo da druga grupa Maksvelovih jednačina (7.47) glasi, na osnovu (7.52)

$$DF = 0. \tag{7.53}$$

U Svetu Minkovskog postoji, dakle, vektorski potencijal φ_α takav da za odgovarajuću linearnu diferencijabilnu formu $\varphi_\alpha\,\mathrm{d}x^\alpha$, kvadratna diferencijabilna forma M

$$M(F,\mathrm{d}x) \equiv F_{\alpha\beta}\mathrm{d}x^\alpha \wedge \mathrm{d}x^\beta = DL(\varphi,\mathrm{d}x), \tag{7.54}$$

predstavlja spoljni diferencijal. Ili

$$F_{\alpha\beta} = \frac{\partial \varphi_\beta}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial x^\beta}. \tag{7.55}$$

Poznati slučajevi iz klasične mehanike tačke i fluida, gde su rotor gravitacionog ili divergencija vrtložnog polja uvek jednaki nuli, posledica su Poenkareove teoreme.

Ako umesto nekog određenog vektora φ_α, koji zadovoljavaMaksvelove jednačine (7.47), odnosno (7.53), stavimo vektor $\varphi_\alpha + \dfrac{\partial f}{\partial x^\alpha}$, gde je f proizvoljna skalarna funkcija, one će opet biti zadovoljene. Taj sistem od četiri parcijalne jednačine prvog reda ne mora imati jedinstveno rešenje. Transformacije $\varphi_\alpha \to \varphi_\alpha + \dfrac{\partial f}{\partial x^\alpha}$ poznate su u teorijskoj fizici kao **kalibracione transformacije**, a funkcije φ_α predstavljaju **kalibracione invarijante** u odnosu na njih. Da bi se ove neofređenost uklonila, uvode se različite pretpostavke o vektorskom potencijalu. Najpoznatija od tih pretpostavki definiševektorsko polje φ^α analogno solenoidnim poljima iz njutnovske fizike. Daklr

$$\frac{\partial \varphi^\alpha}{\partial x^\alpha} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \varphi^\alpha}{\partial x^\alpha} + g^{\alpha\beta}\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\left(\frac{\partial f}{\partial x^\beta}\right) = 0. \tag{7.56}$$

Znači da je

$$g^{\alpha\beta}\frac{\partial^2 f}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} = 0 \tag{7.57}$$

U prostoru definitne metrike ove jednačine se svode na Laplasovu, pa bi tamo funkcija f bila harmonijska. U Svetu Minkovskog je međutim

$$g^{\alpha\beta}\frac{\partial^2 f}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} \equiv \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0. \tag{7.57'}$$

funkcija f zadovoljava, dakle, Dalamberovu jednačinu. Napomenimo da je uslov (7.56) u odnosu na proizvoljni koordinatni sistem izražen kovarijantnom divergencijom, a takve su i ostale veze.

Dovde smo utvrdili neke opšte posledice druge grupe Maksvelovih jednačina, uz dopunski uslov (7.56) za voktorski potencijal. Ako pogledamo prvu grupu tih jednačina (7.8) i unesemo u njih izraz (7.55) za $F_{\alpha\beta}$, imaćemo na osnovu (7.56)

$$\frac{\partial}{\partial x^\beta}\left(\frac{\partial \varphi^\beta}{\partial x^\alpha} - g^{\beta\gamma}\frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial x^\gamma}\right) = -g^{\beta\gamma}\frac{\partial^2 \varphi_\alpha}{\partial x^\beta \partial x^\gamma} = J_\alpha.$$

Odnosno

$$\Box^2\varphi^\alpha + J^\alpha = 0, \quad \text{gde je } \Box^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{c}\frac{\partial^2}{\partial t^2}. \tag{7.58}$$

Vektorski potencijal φ^α elektromagnetnog polja zadovoljava, znači, nehomogenu Dalamberovu jednačinu (7.57′). Njegovo određivanjo ide, slično klasičnom njutnovskom gravitacionom potencijalu, putem uzastopnih integracija. U svakom slučaju postoji dosuta široke neodređenost rešenja, utoliko što ono zavisi od više proizvolpnih funkcija, mada se koordinatnom transformacijom može postići da one ne zavise od svih promenljivih.

Činjeni su i drugi pokušaji da se suzi proizvoljnost potencijala φ^α. Uzmimo je, na primer, da on ima konstantan intenzitet. To je sa fizičke stranc dosta nepouzdana pretpostavka, mada ima dobrih svojstava za izučavanje. U poznatoj monografiji "Teorija polja"od Landau-Lifšica (videti [20], str.109-112) polazi se, pri konstrukciji tenzora $F_{\alpha\beta}$ varijacionim putem implicitno od toga da linearna forma $\varphi_\alpha\,\mathrm{d}x^\alpha$ dopušta faktor integracije. Takav slučaj bi, po jednostavnosti, dolazio odmah posle neposredne integrabilnosti te forme, koja postoji za $F_{\alpha\beta} = 0$. I taj slučaj nam ukazuje na veliku meru neodređenosti vektorskog potencijala.

U novije vreme, počev od Švingera[3], formulisane su izmenjene Maksvelove jednačine, pod pretpostavkom postojanja magnetnih punjenja i protoka. Tada bi na desnim stranama jednačina (7.9) stajali izrazi za takav protok. H. Rund (videti: Jr Math Phys, vol 18, no 1, 1977, str 84-95) je konstruisao takvo polje pomoću dvostrukog vektorskog potencijala i pokazao, pored ostalog, da je član koji predstavlja gustinu energije u odgovarajućem tenzoru energije indefinitan. Elektromagnetno polje koje bi opisivao takav sistem jednačina je zasad hipotetično.

7.6 Zadaci

Zadatak 14

Ako je τ^α_β tenzor energije elektromagnetnog polja, pokazati da važi jednakost

$$\tau^\alpha_\beta \tau^\beta_\gamma = \varsigma \tau^\alpha_\varphi$$

i naći skalar ς.

Rešenje

Zadatak 15

Pokazati da se, pri datom $F_{\alpha\beta}$, prve tri komponente vektprskog potencijala mogu predstaviti na sledeći način

$$\varphi_r = f_r(x^1, x^2, x^3) + \int_0^{x^4} \frac{\partial \varphi_4}{\partial x^r} \, dx^4 + \int_0^{x^4} F_{4r} \, dx^4$$

gde je $\varphi_4(x^1, x^2, x^3, x^4)$ proizvoljna. Haksimalno odrediti, koristeći drugu grupu Maksvelovih jednačina (7.47), funkcije f_r. Pokazati da se najviše dve od njih mogu naći, i da u njima ostaju dve proizvoljne funkcije, jedna od dve, a druga od jedne promenljive (podrazumeva se da su uslovi integrabilnosti, razmatrani u prethodnom odeljku, ispunjeni u posmatranoj oblasti).

Rešenje

Zadatak 16

Proučiti sopstvene vrednosti tenzora $F_{\alpha\beta}$ i $*F_{\alpha\beta}$ (uputstvo: razlikovati slučajeve $\lambda \vee 0$ i $\lambda = 0$ iz §35. Uzeti, kao polazne, kanonske Lorencove repere (7.40), odnosno (7.44), u kojima je razlagan $\tau_{\alpha\beta}$).

[3] J.Schwinger

Rešenje

Zadatak 17

Pokazati da se za $\gamma \approx 1$ izraz (7.27) svodi na klasični električni protok.

Rešenje

II

Opšta relativn

II Opšta relativn

Uvod

Uvod

Osnovni uslov na kojem se insistira u specijalnoj teoiji relativnosti sastoji se u tone da se sve pojave mogu posmatrati u odnosu na inercijalne sisteme. Taj uslov počiva na pseudoeuklidskon karakteru metrike Minkovskog.

Prvi pokušaji stvaranja relativističke teorije gravitacionog polja pošli su od zamisli da bi ono trebalo da bude sadržano u Svetu Minkovskog. To je izgledalo sasvim prirodno, s obziron na to da je specijalna teorija relativnosti nastala iz dubljeg proučavanja Maksvelove teorije elektromagnetnog polja. Postojalo je, dakle, jedno znadačajno polje karakterisano dejstvon na daljinu, čiji se opis mogao uklopiti u pseudoeuklidsku geonetriju. Treba međutim odmah podvući bitne razlike između ta dva polja. Elektronagnetno polje ne poetoji uvek i svuda, a njegov intenzitet nije u nekoj određenoj srazmeri s masama tela između kojih deluje. Dok gravitaciono polje, koliko je do sad utvrđeno, nastaje između svih tela čija su uzajama dejstva dovoljno precizno ispitana. Što je još važnije, ono svude prodire, budući da ne postoji neki danas pozaat način da se isključi. Znači da je načelno nemoguće postojanje inercijalnih sistema u konačnim oblastima prostora i konačnim vremenskin intervalina. Gravitaciono polje nekog tela, po Njutnovskoj teoriji, koja predstavlja prvu aproksimaciju svake nove teorije, ne zavisi od načina kretanja toga tela prema drugima, dok se po osnovnim relativističkim pojmovina mase tela i uočena rastojanja menjaju usled kretanja, pa bi to moralo da menja dejstvo gravitacionog polja. Postoje, dakle, opšta svojstva toga polja koja treba uneti u okvire indefinitne metrike sa brzinon svetlosti kao najvećon mogućom.

Posle više pokušaja, Ajnštajn je bio došao do zaključka da gravitaciono polje mora biti suštinski povezano s geometrijom. To bi bilo slično onom kako su zakoni transfomacije elektromagnetnog polja, pri prelasku iz jednog inercijalnog sistena u drugi, povezani s geometrijon Minkovskog. Univerzalnost gravitacionog polja i njegova svojstvo dejstva na daljinu navodili su na pomisao da ono određuje metriku Sveta, uz noguće promene usled, drugih polja, i to na neki jednostavan načio. Ajnštajn je pretpostavio da je upravo metrički tenzor Sveta srazmeran do na konstantni činilac, gravitacionon potencijalu. On se opredelio:

- **prvo** za to da gravitacioni potencijal bude tenzorska veličina,

- **drugo** da metrika Sveta opiše relativnosti bude rimanska.

Ta je teorija kasnije nazvana **metrička teorija gravitacije**. Njene potvrde spadaju među najveća iznenađenja koja je ikad doživeo naučni svet.

Bilo je, kao što smo pomenuli, pokušaja da se teorija gravitacionog polja formuliše u okviru Sveta Minkovskog. Oni se i danas čine, s različitim uspehon. Pošto je njutnovski poteneijal skalarna funkcija, njutnovska teorija je u ton smislu **skalarna**, pa su to pokušale da budu i ”nemetričke”relativističke teorije. Osim njih su fornulisane, kao načelno noguće, i takozvane **skalarno-tenzorske** teorije gravitacije, kod kojih se jednačine gravitacionog polja razlikuju dopunskim (”inercijalnim”) članovima od klasičnih Ajnštajnovih.

Iz mikrofizike proistekli su postupci kvantizacije gravitacionog polja. U račune je uveden spin elementarnih čestica, počela se razvijati teorija gravitacioaog polja u kojoj su se, umesto Kristofelovih simbola, pojavili asimetrični koeficijenti povezanosti (prostor s torzijom). Prve zamisli za ovakvu formulaciju imale su oslonac u ranijim pokušajima zasnivanja jedistvenog gravitacionog i elektromagnetnog polja.

Vrene će pokazati da li postoje efekti višeg reda veličine od onih koji su u svoje vrene uzdigli Ajnštajnovu teoriju posle Njutnove, a koji bi opravdali neku od izmenjenih teorija gravitacionog po1ja.

8. Masa i ubrzanje

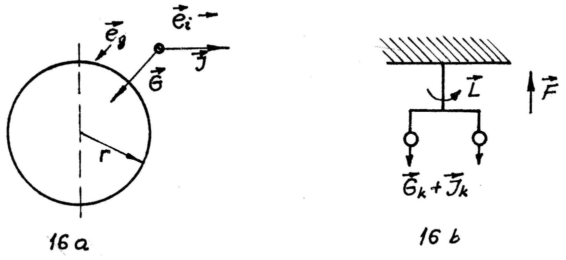
8.1 Srazmerost teške i inertne mase

Pre nego što pristupimo izučavanju osnova relativističke teorije gravitacionog polja, izložićemo izvesne zaključke koji su prethodili njenom nastanku. To je, na prvom mestu, čuveni Etvešov[1] ekeperiment. Pomoću njega je, u okviru njutnovske mehanike, izvršena provera pitanja de li su gravitacione, to jest teške, mase tela na Zemlji srazmerne, do na konstantni činilac, njihovim inertnim masama.

U tom opitu polazi se od činjenice da je centripetalno ubrzanje, koje nastaje usled Zemljine dnevne rotacije jednako za sva tela, koja se nolaze na istoj geografskoj širini i nadmorskoj visini. Time odgovarajući centrifugalni pritisak postaje merilo inertne mase tela.

Uređaj na kojem je izvršen opit sastoji se uglavnom iz jednih terazija čiji su kraci postavljeni tačno u pravac istok-zapad. O krake su obešeni tereti čije ćemo inertne mase obeležiti sa m_1 i m_2, a odgovarajuće teške (gravitacione) mase sa M_1 i M_2. Obeležimo sa $\vec{J}_k$ inercijalne, a sa $\vec{G}_k$ $(k = 1,2)$ gravitacione sile koje deluju na tela, sa $\vec{e}_i$ i $\vec{e}_k$ jedinične vektore pravaca tih sila (slika 8.1a) i sa g gravitaciono ubrzanje.

[1] Eötvös



Slika 8.1: a) Vektori pravca sila. b) Dejstvo reakcije $\vec{F}$.

Imamo uslov da u koncu o koji su obešene terazije (slika 8.1b) dejstvuje reakcija $\vec{F}$, koja uravnotežava sve te sile. Dakle

$$-\vec{F} = \vec{R} = \vec{G}_1 + \vec{G}_2 + \vec{J}_1 + \vec{J}_2. \tag{8.1}$$

Gravitacione sile koje dejstvuju na posmatrana tela predstavljaju vektore

$$\vec{G}_k = M_k g \vec{e}_k. \tag{8.2}$$

A inercijalne sile

$$\vec{J}_k = m_k r \omega^2 \cos\lambda \vec{e}_k. \tag{8.3}$$

Ovde je r poluprečnik Zemlje, ω ugaona brzina njene rotacije, a λ geografska širina mesta gde je vršeno merenje.

Posmatrajmo moment sila $\vec{L}$, u odnosu na tačku vešanja terazija o konac, koji će nastati ako je odnos inercijalnih i gravitacionih sila promenljiv. ako sa $\vec{\ell}$ obeležimo krak tela M_1 u odnosu na pravac konca, $\vec{L}$ glasi

$$\vec{L} = \vec{\ell} \times \left(\vec{G}_1 - \vec{G}_2 + \vec{J}_1 - \vec{J}_2\right). \tag{8.4}$$

Jedna komponenta ovog momenta, pralelna sa koncem, uravnotežena je suprotnim torzionim momentom konca. S obzirom na to da je reakcija $\vec{R}(= -\vec{F})$ paralelna sa koncem, to intenzitet te komponente $\vec{L}'$ iznosi

$$\begin{aligned} L' = \frac{\vec{R}\cdot\vec{L}}{|\vec{R}|} &= \frac{g(M_1+M_2)\vec{e}_g + r\omega^2\cos\lambda(m_1+m_2)\vec{e}_i\cdot}{|g(M_1+M_2)\vec{e}_g + r\omega^2\cos\lambda(m_1+m_2)\vec{e}_i|}\cdot \\ &\cdot\left[\vec{\ell}\times\left(\vec{G}_1 - \vec{G}_2 + \vec{J}_1 - \vec{J}_2\right)\right] \approx \\ &\approx \frac{1}{g(M_1+M_2)}\left\{g(M_1+M_2)\vec{e}_g + r\omega^2\cos\lambda(m_1+m_2)\vec{e}_i\right\}\left[\vec{\ell}\times\left(\vec{G}_1 - \vec{G}_2 + \vec{J}_1 - \vec{J}_2\right)\right]. \end{aligned} \tag{8.5}$$

Ovakva približnost važi s obzirom na to da su inercijalne sile, koje nastaju usled Zemljine rotacije, mnogo manje od gravitacionih, pa smo ih izostavili u imeniocu. Ako uvedmo koeficijente srazmernosti α_k između teških i inertnih masa $M_k = \alpha_k m_k$ i zamenimo (8.2) i (8.3) u (8.5), imajući u vidu da je $\vec{G}_1 - \vec{G}_2$ kolinearno sa $\vec{e}_j$, a $\vec{J}_1 - \vec{J}_2$ kolinearno sa $\vec{e}_i$, dobićemo posle nešto sređivanja

$$\begin{aligned} L' &\approx \frac{(\alpha_1 m_1 + \alpha_2 m_2)(m_1 - m_2) + (\alpha_2 m_2 - \alpha_1 m_1)(m_1 + m_2)}{\alpha_1 m_1 + \alpha_2 m_2}\cdot r\omega^2\cos\lambda|\vec{\ell}\cdot(\vec{e}_i)\times\vec{e}_g| = \\ &= \frac{2(\alpha_2 - \lambda_1)}{\alpha_1 m_1 + \alpha_2 m_2} m_1 m_2 r\omega^2\cos\lambda|\vec{\ell}\cdot(\vec{e}_i\times\vec{e}_g)|. \end{aligned} \tag{8.6}$$

S obzirom na nekomplanarnost vektora $\vec{\ell}$, $\vec{e}_i$ i $\vec{e}_g$ i na geografsku širinu na kojoj je vršeno merenje (približna širina Budimpešte) gornji izraz može biti jednak nuli onda i samo onda kada je $\alpha_1 = \alpha_2$. To znači da je za nepromenljiv odnos teških i inercijarnih masa moment sila za tačku vešanja terazija jednak nuli, i obrnuto.

Ovaj eksperiment, prvi put izvršen 1890. godine, dao je negativan rezultat. Promenljivost odnosa teške i inertne mase nije mogla biti ustanovljena u granicama tačnosti od 10^{-8} masa tera. Isti eksperiment, ponovljen u toku druge decenije ovog veka, povećao je tačnost merenja na 10^{-9} masa.

Dike[2] i jedna grupa istraživača uspeli su, tokom pedesetih godina, da izvrše odgovarajući opit sa zemaljskim telima, a u Sunčevom gravitacionom po1ju. Polje inercijalnih sila bilo je orbitalno, to jest nastalo us1ed kruženja Zemlje oko Sunca. To je postignuto pomoću usavršenog mehanizma kojim je konpenzovan uticaj Zemljine dnevne rotacije, i razdvojeno dejstvo Sunčevog gravitacionog polja na Zemlji od zemaljskog. Tačnost merenja dostigla je 10^{-11} probnih masa, a uzorci su bili od zlata i aluminijuma. Kasnije su Panov i Braginski poboljšali te rezultate, i moguća greška je pala ispod 10^{-12}. Isti zakljudci dobijeni su i za teške elementarne čestice (neutrone i protone).

Ovde ćemo ukratko podsetiti na to da mnogi naučnici, počev od Galileja koji je prvi uočio inerciju tela, nisu uzimali utvrđenu srazmernost teške i inertne mase kao gotovu činjenicu. Galilej i Hajgens vršili su merenja pomoću strme ravni i klatna da bi je proverili, a Njutn je smatrao da ta srazmernost, već utvrđena do njegovog vremena, može biti samo približna. U XIX veku preciznije eksperimente vršio je Besel[3]. Etvešov opit odlikuju originalnost metode i neuporedivo veća postignuta tačnost.

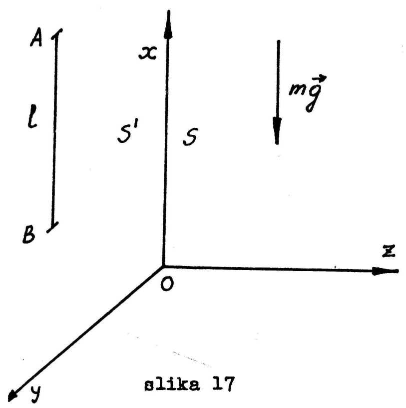
8.2 Ravnopravnost posmatrača

Drugo osnovno pitanje koje ćemo razmotriti zahteva, za razliku od prethodnog, relativističko stanovište. Radi se o odnosu energija objekata posmatranih, trenutno i lokalno, iz ubrzanih i neubrzanih sisterna.

Ajnštajn je, polazeći od utvrđene srazmernosti teške i inertne mase, smatrao da se verodostojno može postaviti jedan **princip ekvivalentnosti**. To je zahtev da merenja izvršena u jednom koordinatnom sistemu koji miruje u odnosu na vremenski nepromenljivo (stacionarno) gravitaciono polje, budu ravnopravna s onim koja su, trenutno i lokalno, izvšena u drugom sistemu u kojem se ne oseća gravitacija, a koji ima ubrzanje jednako gravitacionom, ali suprotno usmereno. Podvlačimo da ćemo se ovde ograničiti na homogeno po1je, to jest ono čija je veličina konstantna.

Proverićemo zakon transformacije energije pomoću sledećeg zamišljenog eksperimenta. Uzmimo dva pravougla Dekartova sistema, S i S'. U sistemu S opaža se gravitaciono polje ubrzanja $\vec{g}$, a x-osa je usmerena nasuprot njegovom dejstvu. Drugi sistem S', koji u početnom trenutku miruje i poklapa se sa S polazi s ubrzanjem $-\vec{g}$, dakle u pozitivnom smeru x-ose i nastavlja da se kreće jednako ubrzano. U S' se ne oseća gravitaciono polje. Uočimo iz sistema S dve tačke A i B, koje određuju duž $\overline{AB}$, paralelne sa x-osom dužine ℓ (vidi sl. 8.2).

[2]Dicke
[3]Bessel



Slika 8.2: Duž $\overline{AB}$ iz sistema S.

Neka je materijalna tačka mase M spuštena iz A u B, kojom je prilikom gravitaciono polje izvršilo rad jednak $mg\ell$. Onda je iz A izračen foton u pravcu B i u istom trenutku je sistem S' krenuo u odnosu na sistem S.Energija fotona, zapažena u oba sistema, jednaka je i iznosi E_A. U trenutku kada je taj foton apsorbovan na masi m u tački B, brzina S' prema S iznosi $c^{-1}g\ell$. Obeležimo energiju apsorbovanog fotona, opaženu iz S', sa E_B. Kako je ona data pomoću obrasca (5.15) imaćemo u tom trenutku za ova dva sistema

$$E_A = h\nu, \quad E_B = h\nu'.$$

Upotrebićemo obrazac za transformaciju frekvencije (4.23) da bismo utvrdili odnos energija E_A i E_B. On nam daje

$$E_B = E_A\sqrt{\frac{1+v/c}{1-v/c}} \approx \gamma E_A\left(1+\frac{v}{c}\right), \quad \text{gde je } v = c^{-1}g\ell. \tag{8.7}$$

Vratimo sad masu m, koja, uvećana za energiju apsorbovanog fotona, iznosi m', u tački A, mereći sad iz sistema S. Neka u toj tački masa izrači foton energije E_A, koji je ranije iz nje poslat. Kako zbir primljene i poslate energije i izvršenih radova na pomeranju tela mora biti jednak nuli, imaćemo

$$mg\ell + E_B = m'g\ell + E_A. \tag{8.8}$$

Ako pođemo od toga da je $v \ll c$, možemo odbaciti članove gde se pojavljuje $(v/c)^2$, pa je i $\gamma \approx 1$. Tada se (8.7) svodi na

$$E_B = E_A\left(1+\frac{v}{c}\right). \tag{8.9}$$

Otud iz (8.8) dobijamo

$$m' - m = c^{-2}E_A. \tag{8.10}$$

Znači da je promena masemirovanja u gravitacionom polju srazmerna promeni energije mirovanja, onako kako bi sledovalo po specijalnoj telativnosti. Time je princip ekvivalentnosti u bitnom opravdan. Ipak ne treba zaboraviti na ograničenje pod kojima on važi, niti na približnost zaključka (8.10). Stoga izraz (8.7) uneo bi neke promene, male ali načelno važne, u naše zaključke. Zbog tih ograničenaj i približnosti neki ugledni naučnici osporavaju potrebu za takvim principom.

Na Etvešovom eksperimentu zasnovano je ono što se danas naziva **galilejska** ili **slaba ekvivalentnost**. Ajnštajn zamišljeni eksperiment nam ukazuje na to da se i u neinercijalnim sistemima može, trenutno, lokalno i s određenom tačnošću, računati sa transformacionim obrascima specijalne relativnosti. Izvođenje koje je ovde dato nije naročito široko, ali u osnovi iskazuje ono što se naziva **Ajnštajnov princip ekvivalentnosti**. Mi ćemose kasnije neki put osloniti na taj princip, koji je i opdanas predmet izučavanja (videti npr. W.T. Ni, Phys. Rev. Letters, Vol.38, str. 301, 1977.).

8.3 Princip geodezijskih svetskih linija

Pođimo od postavki o kretanju po geodezijskim linijama, datih u §5. Jednačine vremenskih i nultih geodezijskih linija, to jest, svetskij linija kretanja po inerciji materijalnih tačaka i svetlosnih zrakova, bile su napisane u odnosu na jedan jedinstveni inercijalni sistem. Međutim, pprvo što smo učinili u prethodnom odeljku bilo je da posmatrača koji miruje u odnosu na stacionarno homogeno gravitaciono polje izjednačimo s drugim, jednako ubrzanim, posmatračem.

Načelno nepostojanje inercijalnih sistema u širokom, vodi zaključku da svetska metrika u gravitacionom polju **ne dopušta** da Kristofelovi simboli ${\Gamma^\alpha}_{\beta\gamma}$ budu svuda jednaki nuli, odakle sleduje da tenzor krivine mora biti različit od nule. Zato Svet sa gravitacionim poljem ima zakrivljenu metriku. Druga posledica nepostojanja inercijalnih sistema u širokom je ta da ubrzanje nema više u opštoj relativnosti apsolutno značenje iz specijalne.

Treba da se opredelimo za ono što predstavljaju svetske linije kretanja po inerciji. Postavićemo dakle **Princip geodeziiskih linija** koji glasi:

1) Svetska linija slobodne materijalne tačke u gravitacionom polju je vremenska linaja Sveta opšte relativnosti.
2) Svetska linija svetlosno zraka u slobodnon prostoru s gravitacionim polje je nulta geodezijska linija Sveta opšte relativnosti.

Mi znamo da diferencijalne jednačine geodezijskih linija u odnosu na jedan vremenski ili nulti kanonski parametar glase:

$$\frac{\mathrm{d}^2x^\alpha}{\mathrm{d}s^2}+{\Gamma^\alpha}_{\beta\gamma}\frac{\mathrm{d}x^\beta}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}x^\gamma}{\mathrm{d}s}=0. \tag{8.11}$$

Ili, izraženo pomoću četvorobrzine

$$\frac{\mathrm{d}u^\alpha}{\mathrm{d}s}+{\Gamma^\alpha}_{\beta\gamma}u^\beta u^\gamma=0. \tag{8.12}$$

Ove jednačine se u konačnim oblastima Sveta ne mogu svesti na prosti oblik iz pseudoeuklidske metrike, mada se izborom metrike može postići da Kristofelovi simboli budu jednakl nuli duž jedne geodezijske linije. To se može učiniti upravo duž svetske linije određene materijalne čestice u gravitacionom po1ju. U takvom sistemu ona izgleda neubrzana, ali je to posledica prilagođavanja uslova posmatranja samo jednoj tački, a već neki drugi objekt koji se kreće po inerciji, posmatran iz toga sistema, trpi ubrzanje. I prvi objekt trpi ubrzanje po nerilima drugog, pa vidimo da neubrzanost više ne može biti opšte svojstvo niza odvojenih materijalnih tačaka.

Sve što je rečeno važi izričito za materijalne tačke ili čestice, u gravitacionom polju koje su stvorile mnogo veće mase nego što su njihove. Mi ustvari zanemarujemo sopstveno gravitacono polje čestice u odnosu na ono u kojem se ona kreće. Princip geodezijskih linija ne važi, ako su razmere posmatranog tela takve da se njegovo gravitaciono polje ne može zanemariti u ukupnom bilansu, jer materija unutar njega više ne predstavlja slobodne čestice.

U prethodnom odeljku smo pokazali opravdanost pretpostavke o tome da se pojave mogu, lokalno i trenutno, izraziti u odnosu na neki Lorencov sistem u homogenom gravitacionom polju. Sad ćemo tu pretpostavku proširiti na proizvoljno gravitaciono po1je. Taj zahtev se sastoji u tone da se metrika 1okalno uvek može dovesti u oblik

$$\mathrm{d}s^2=(\omega^1)^2+(\omega^2)^2+(\omega^3)^2-(\omega^4)^2. \tag{8.13}$$

Gde su ω^α međusobno nezavisne linearne diferencijalne forme po koordinatama x^α $(\alpha=1,2,3,4)$. Znači da uvek možemo naći promenljive $\mathrm{d}y^\alpha=\omega^\alpha$ u odnosu na koje metrika ima 1okalno Lorencov oblik. Ovo je, ustvari najopštije i najjednostavnije iskazan princip ekvivalentnosti.

U §50 biće dat razrađen prilaz pitanju vremenskih geodezijskih linija, i kooridinatnih sistema u širokom koji se pomoću njih mogu definisati.

Zadaci

Zadatak 18

Ako x^4 određuje lokalno vremenski orijentisanu krivu, u sistemu čiji je metrički tenzor $g_{\alpha\beta}$, postaviti lokalni Lorencov ortogonalni sistem čija osa $\bar{x}^4$ dotiče x^4 u posmatranom događaju, i pokazati da je interval $\mathrm{d}\bar{s}$, upravan na $\mathrm{d}x^4$, određen izrazom

$$\mathrm{d}\bar{s}^2 = \left(g_{ij} - \frac{1}{\bar{g}_4}\right)\mathrm{d}x^i\mathrm{d}x^j.$$

Rešenje

9. Svet opšte relativnosti

9.1 Jednačine gravitacionog polja

Već smo istakli činjenicu da opšta teorija relativnosti izjednačava, po pretpostavci, metrički tenzor Sveta s potencijalom giavitacionog polja. Stoga funkcije gravitacionog potencijala određenog geometrijskog značenja, i identičnosti koje $g_{\alpha\beta}$ zadovoljava preko tih funkcija, moraju imati i fizičko značenje. Osnovne veze u koje ulazi potencijal moraju biti tenzorske, dakle ne smeju zavisiti, u svome opštem obliku i bitnim svojstvima, od izabranog koordinatnog sistema. Nadalje će se samo izuzetno događati da neki opšti relativistički obrazac ne bude tenzorska jednačina.

Kao prvi sistem funkcija gravitacionog potencijala takvih svojstava nameće se Riman-Kristofelov tenzor krivine $R^{\alpha}_{\cdot\beta\gamma\delta}$, koji u potpunosti određuje krivinu Sveta:

$$R^{\alpha}_{\cdot\beta\gamma\delta} = \frac{\partial}{\partial x^{\gamma}}\Gamma^{\alpha}{}_{\beta\delta} - \frac{\partial}{\partial x^{\delta}}\Gamma^{\alpha}{}_{\beta\gamma} + \Gamma^{\lambda}{}_{\beta\gamma}\Gamma^{\alpha}{}_{\delta\lambda} - \Gamma^{\lambda}{}_{\beta\delta}\Gamma^{\alpha}{}_{\gamma\lambda}. \tag{9.1}$$

Ovaj tenzor zavisi samo od gravitacionog potencijala i njegovih prvih i drugih izvoda. Na osnovu algebarskih identičnosti koje zadovoljava, on ima $\frac{1}{2}n^2(n^2-1)$ međusobno nezavisnih komponenata u n-dimenzionoalnom prostoru, što znači da u svetskoj metrici predstavlja sistem od 20 međusobno nezavisnih funkcija, koje preko potencijala, kojih ima 10 nezavisnih, i njihovih prvih i drugih izvoda, zavise od četiri koordinate. Ali time nismo, uzeli u obzir sve opšte uslove koje $R_{\alpha\beta\gamma\delta}$ zadovoljava. Jer postoji i poznata Bjankijeva[1] ciklična identičnost:

$$\nabla_{\alpha}R_{\beta\gamma\delta\varepsilon} + \nabla_{\beta}R_{\gamma\alpha\delta\varepsilon} + \nabla_{\gamma}R_{\alpha\beta\delta\varepsilon} = 0. \tag{9.2}$$

Može se odmah primetiti da Ričijev[2] tenzor krivine $R_{\alpha\beta}$, dobijen kontaakcijom iz Riman-Kristofelovog, ima zbog simetrije 10 komponenata. U slučaju da su vrednosti tih komponenata pro pisane, imamo sistem

[1] Bianchi
[2] Ricci

diferencijalnih jednačina koji je broj jednak broju komponenata gravitacionog potencijala. Tome, razume se, treba dodati i uslov $R_{\alpha\beta}$, dobijene kontrakciion iz (9.2).

Postavlja se pitanje sistema diferencijalnih jednačina koji predstavlja relativistički ekvivalent Laplas-Poasonove jednačine[3] za njutnovski potencijal. Postavićemo tri uslova čija ispunjenosti treba da odgovori na to pitanje:

a) Osnovni sistem diferencijalnih jednačina koje zadovoljavaju gravitacioni potencijal predstavlja, po svom obliku, simetričnu tenzorsku funkciju drugog reda $G_{\alpha\beta}$, koja je jednaka nuli (homogeni slučaj) ili nekom zadatom tenzoru (nehomogeni slučaj).
b) Komponente $G_{\alpha\beta}$ zavise samo od gravitacionog potencijala $g_{\alpha\beta}$ njegovih prvih i drugih izvoda, od ovih poslednjih linearno.
c) Tenzor $G_{\alpha\beta}$ je konzervativan u tom smislu da mu jekovarijantna divergencija jednaka nuli.

Ako izvršimo dve uzastopne kontrakcije u sistemu (9.2) dobiémo

$$\nabla_\alpha\left(R^\alpha_\beta-\frac{1}{2}R\delta^\alpha_\beta\right)=0,\text{gde je}\,R_{\alpha\beta}=R^{\gamma}_{\cdot\alpha\gamma\beta},\;R=R^\alpha_\alpha. \tag{9.3}$$

Ovaj sisten od četiri jednačine predstavlja divergnciju jednog simetričnog tenzora drugog reda čije komponente zavise samo od gravitacionog potencijala onako kako to zahtevaju uslovi a), b) i c). Taj tenzor ćerno smatrati da predstavlja $G_{\alpha\beta}$

$$G_{\alpha\beta}\equiv R_{\alpha\beta}-\frac{1}{2}Rg_{\alpha\beta}\quad\Rightarrow\quad\nabla_\alpha G^\alpha_\beta=0. \tag{9.4}$$

Istraživanje tenzora koji zadovoljavaju navedene zahteve, a da ne ograničavaju svetsku metriku nekim dopunskim uslovina, dovelo je do toga da gravitacione, ili Ajnštajnove jednačine kako se još zovu, mogu imati levu stranu opštijeg oblika

$$G_{\alpha\beta}\equiv R_{\alpha\beta}-\frac{1}{2}(R+\Lambda)g_{\alpha\beta}. \tag{9.5}$$

Dopunski član Λ predstavlja konstantu koja je protumačena kao recippročna vrednost kvadrata "poluprečnika Vasione"(videti gl. XII) i dobila naziv **kosmološka konstanta**. Zasad je nećemo koristiti jer izvan kosmologije nije potrebna.

Ajnštajn je pretpostavio da jednačine kojima na levoj strani stoje izrazi (9.4), odnosno (9.5), predstavljaju relativistički ekvivalent Laplas-Poasonove jednačine. Osim navedenih razloga opravdanje za to leži i u činjenici da ti izrazi za takozvano **slabo gravitaciono polje**, koje se od njutnovskog razlikuje za dovoljno mala odstupanja, dobijaju oblik Dalamberovog operatora nad $g_{\alpha\beta}$ (videti Dodatak C). Francuski matematičar Kartan[4] strogo je dokazao da pod uslovima a), b), c) najšire uopštenje klasične jednačine za njutnovski potencijal može imati na levoj strani samo izraze oblika (9.5). Razume se da bi se pod nekim drugim uslovima, kad bi na primer uzeli u obzir i neke inercijalne članove, na levim stranama pojavili i drukčiji operatori.

Iz uslova (9.3), da je kovarijantna divergencija G^α_β jednaka nuli, sleduje da on može biti izjednačen samo s nekim konzervativnim tenzorom istog tipa. To može biti jedino tenzor energije T^α_β, za određenu materijalnu sredinu ili polje, jer se time ne uvode nikakvi novi pomoćni tenzori, niti posebni uslovi

$$R_{\alpha\beta}-\frac{1}{2}Rg_{\alpha\beta}=-\varkappa T_{\alpha\beta} \tag{9.6}$$

gde je $\varkappa$ relativistička gravitaciona konstanta, koja izjednačava dimenzije veličina na levoj i desnoj strani. To su Ajnštajnove jednačine, ili jednačine gravitacionog polja. One opisuju gravitaciono polje i njegovo sadejstvo s drugim poljima. S obzirom na identičnosti (9.3) sleduje da jednačine dinamike, analogno onom što smo imali u specijalnoj relativnosti, glase

$$\nabla_\alpha T^\alpha_\beta=0. \tag{9.7}$$

[3] Laplace-Poisson
[4] E. Cartan

Situacija je izmenjena utoliko što tenzor gravitacionog potencijala, koji podiže i spušta indekse, sad pripada rimanskoj metrici. To je i razlog što divergencija mora biti kovarijantna.

U vakuumu, u odsustvu elektromagnetnog polja (takozvani slobodni prostor), gravitacione jednačine glase, na osnovu uslova a):

$$R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}Rg_{\alpha\beta} = 0 \Longleftrightarrow R_{\alpha\beta} = 0. \tag{9.8}$$

Slobodni prostor u gravitacionom polju odlikuje činjenica da je Ričijev tenzor jednak nuli. U četvorodimenzionom Svetu opšte relativnosti V_4 Riman-Kristofelov tenzor ostaje različit od nule, dakle postoji krivina metrike.

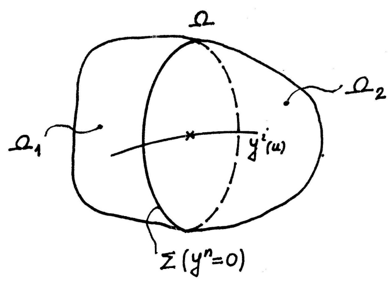
Treba da opravdamo identičnosti (9.3), jer one važe pored deset jednačina (9.6) ili (9.8), koje zadovoljava isti toliki broj komponenata $g_{\alpha\beta}$. Mi možemo lokalno, u svim događajima koji leže u blizini neke hiperpovrši Σ, izvršiti transformaciju koordinata tako da četiri komponente $g_{\alpha\beta}$ dobiju određene vrednosti. Tada ostaje šest proizvoljnih komponenata toga tenzora, koje zadovoljavaju sistem od deset jednačina gravitacionog polja, pa uslovi (9.3), kojih je četiri, uprevo otklanjaju proizvoljnost u istoj meri. Dalje ćemo detaljnije razmotriti ovo pitanje.

9.2 Pretpostavke o metrici

Ispitivanje metrike Sveta opšte relativnosti zahteva neka načelna opredeljenja u pogledu koordinatnih sistema koje možemo koristiti, u određenoj oblasti oko nekog dogadaja, linije, površi ili hiperpovrši. Sledeći korak odnosi se na metriku, koja je zbog potencijala zastupljena u gravitacionim jednačinama. Zato ćemo, u najkraćem, razmotriti osnovne zaključke i obrasce koji se odnose na prekidne funkcije i njihove izvode prva dva reda, a koji će nam u sledeća četiri odeljka biti osnovno oruđe.

Neka funkcija f je klase C^* u nekoj oblasti, ako je definisana i neprekidna po svim argumentima u datom koordinatnom sistemu, s tim što to ne važi za njene izvode. Opštije uzev, jedna funkcija f je klase C^k ($k = 0, 1, 2, \dots$) u nekoj oblasti, ako su osim nje definisani i neprekidni svi izvodi, zaključno s redom k, po svim argumentima, a u odnosu na dati koordinatni sistem.

Sledeći na redu je pojam funkcije deo po deo neprekidne, ili deo po deo glatke, do određenog reda izvoda. Neka je definisana u nekoj oblasti Ω lokalnih koordinata y^α ($\alpha 1, 2, \dots, n$), koju deli hiperpovrš Σ, zadana sa $y^n = 0$ (slika 9.1).



Slika 9.1: ?????????????.

Pretpostavimo da je u celoj Ω funkcija f klase C^*, to jest definisana i neprekidna. Uslovimo dalje da f u toj oblasti bude deo po deo neprekidna reda k ($k > 0$). Pretpostavimo takođe da je Ω izabrana tako da je u svakoj od dve podoblasti Ω_1 i Ω_2, na koje Σ deli Ω, neprekidna klase C^k, a tim što svi njeni izvodi, od prvog reda naviše, trpe prekide pri prolasku kroz Σ. Ako je Ω_1 određeno sa $y^n < 0$, a Ω_2 sa $y^n > 0$, izvodi $f^{(r)}$ ($r = 1, \dots, k$) u nekom pravcu koji prodire kroz Σ, ravnomerno teže $f_1^{(r)}$ na Σ kad y^n teži nuli preko negativnih vrednosti (dakle iz Ω_1), odnosno $f_2^{()r}$ na Σ kad y^n teži nuli preko pozitivnih vrednosti (dakle iz

Ω_2). Same $f_1^{(k)}$, odnosno $f_2^{(k)}$, ponašaju se kao funcije klase C^* ostalih argumenata y^i $(i = 1,2,\dots,n-1)$ na $\sum$ (videtl sliku). Primetimo da su, u slučaju da je f u Ω klase C^j i C^k po delovima uz $k \geq 1$, već prvi izvodi prekidni pri prolasku kroz Σ, dok na njoj isti izvodi f_1' i f_2' predstavljaju, u odnosu na promenljive y^i, neprekidne funkcije klase C^{k-1} kad se pomeramo po bilo kojoj putanji $y^i(u)$ $(i = 1,2,\dots,n-1)$. Za $k \geq 2$ bismo imali da su f_1” i y_2” neprekidno diferencij bilne klase C^{k-2} na samoj Σ. I dalje redom tako.

Prethodno smo se ograničili na slučaj kada je f neprekidna funkcija klase C^*, a C^k $(k > 0)$ po delovima, u oblasti Ω. Možemo, bez bitnih promena u rasuđivanju, posmatrati funkcije koje su klase C^j $(j > 0)$, a C^k $(k > j)$ po delovima u toj oblasti. Tada su funkcija f i njeni izvodi do reda j (najmanje prvog) definisani i neprekidni u celoj oblasti Ω, a od reda $j+1$ do k neprekidni u oblastima Ω_1 i Ω_2, a prekidni pri prolasku kroz Σ. Na samoj toj hiperpovrši važe, za izvode čiji red ide od f_ℓ^{j+1} do f_ℓ^k $(\ell = 1,2)$ bez bitnih izmena, svi zaključci koje smo imali u slučaju kada je f klase C^*, a C^k $(k > 0)$ po delovima.

Treba i formalno da iskažemo prethodna razmatranja. Prekidi funkcija podležu u analizi poznatim Adamarovim[5] uslovima. Mi ćemo ukratko dati veze između prekidne funkcije i njenih izvoda. Analitički prilaz, dosta pristupačan, dat je u Švarcovoj knjizi već navedenoj u §21 (L. Schwartz, [12], Méthodes mathématiques pour les sciences physiques, str. 89-95). Uzmimo da je f skalarna funkcija klase C^*, a C^2 po delovima. Tada će, ako zagradama $[\cdots]$ označimo razlike vrednosti $f_2 - f_1$, funkcije f, ili $(\partial f)_2 - (\partial f)_1$ njenih izvoda, biti pri prolasku kroz Σ:

$$[f] = 0, \quad \left[\frac{\partial f}{\partial y^i}\right] = 0, \quad \left[\frac{\partial f}{\partial y^n}\right] = D, \tag{9.9}$$

$$\left[\frac{\partial^2 f}{\partial y^i \partial y^j}\right] = 0, \quad \left[\frac{\partial^2 f}{\partial y^i \partial y^n}\right] = \frac{\partial D}{\partial y^n}, \quad \left[\frac{\partial^2 f}{\partial (y^n)^2}\right] = E, \quad i,j = 1,2,\dots,n-1, \tag{9.10}$$

$$[f] \equiv f_2 - f_1, \quad \left[\frac{\partial f}{\partial y^\alpha}\right] \equiv \left(\frac{\partial f}{\partial y^\alpha}\right)_2 - \left(\frac{\partial f}{\partial y^\alpha}\right)_1,$$

gde D i E označavaju skokove izvoda odgovarajućeg reda na Σ.

Postavlja se pitanje da li prekidi neke funkcije i njenih izvoda, ustanovljeni u jednom sistemu, postoje i posle transformacije koordinata. Očigledno je da se za nesingularnu transformaciju $(y) \to (x)$, pri kojoj su nove koordinate prekidne funkcije, ili funkcije s prekidnim prvim izvodima, od ranijih koordinata, moraju pojaviti prekidi funkcije f, ili njenih prvih izvoda, i tamo gde ih u ranijem sistemu nije bilo. Stoga, ako funkcija f i njeni izvodi zadovolgavaju uslove (9.9) i (9.10), nove koordinate x^α moraju biti funkcije klase C^2 od ranijih y^α u Ω, pa će isti prekidi postojati u novom sistemu, a novi se neće pojaviti. Zaista, tada (9.9) i (9.10) daju:

$$\begin{aligned}
&[f] = 0, \quad \left[\frac{\partial f}{\partial y^i}\right] = \left[\frac{\partial f}{\partial x^\alpha}\right]\frac{\partial x^\alpha}{\partial y^i} = D_\alpha \frac{\partial x^\alpha}{\partial y^i} = 0, \quad \left(D_\alpha \equiv \left[\frac{\partial f}{\partial x^\alpha}\right]\right),\\
&\left[\frac{\partial f}{\partial y^n}\right] = D_\alpha \frac{\partial x^\alpha}{\partial y^n} = D \neq 0, \cdots\\
&\left[\frac{\partial^2 f}{\partial y^i \partial y^j}\right] = \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^\alpha \partial x^\beta}\right]\frac{\partial x^\alpha}{\partial y^i}\frac{\partial x^\beta}{\partial y^j} + \left[\frac{\partial f}{\partial x^\alpha}\right]\frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial y^i \partial y^j} =\\
&\qquad = E_{\alpha\beta}\frac{\partial x^\alpha}{\partial y^i}\frac{\partial x^\beta}{\partial y^j} + D_\alpha \frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial y^i \partial y^j} = 0, \quad \left(E_{\alpha\beta} \equiv \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^\alpha \partial x^\beta}\right]\right).
\end{aligned} \tag{9.11}$$

$$\begin{aligned}
&\left[\frac{\partial^2 f}{\partial y^i \partial y^n}\right] = E_{\alpha\beta}\frac{\partial x^\alpha}{\partial y^i}\frac{\partial x^\beta}{\partial y^n} + D_\alpha \frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial y^i \partial y^n} = \frac{\partial D_\alpha}{\partial y^i}\frac{\partial x^\alpha}{\partial y^n} + D_\alpha \frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial y^i \partial y^n} = \frac{\partial D}{\partial y^i} \neq 0,\\
&\left[\frac{\partial^2 f}{(\partial y^n)^2}\right] = E_{\alpha\beta}\frac{\partial x^\alpha}{\partial y^n}\frac{\partial x^\beta}{\partial y^n} + D_\alpha \frac{\partial^2 x^\alpha}{(\partial y^n)^2} = E \neq 0,\\
&\qquad \alpha,\beta = 1,2,\dots,n, \quad i,j = 1,2,\dots,n-1.
\end{aligned} \tag{9.12}$$

[5] J. Hadamard

S obzirom na nezavisnost rezultata od poretka parcijalnog diferenciranja, veličine $E_{\alpha\beta}$ su simetrične.

Ako pogledamo prvu vezu sistema (9.11), vidimo da je ona posledica odgovarajuće veze u (9.9). Sledeći sistem linearnih jednačina ima, kako je jakobijan transformacije $J \neq 0$, a poslednja jednačina nehomogena sa $D \neq 0$, jedinstveno netrivijalno rešenje za D_α u funkciji D. Kad te vrednosti uneseno u (9.12) dobijano, pri utvrđenom indeksu β, rešenje za jedan niz vrednosti $E_{\alpha\beta}$ (α pronenljivo). Menjajući β, a samim tim i koeficijenti $\dfrac{\partial x^\beta}{\partial y^2}$, dobijano niz saglasnih nehomogenih sistema linearnih jednačina po $E_{\alpha\beta}$, čija su rešenja jedinstvena u funkciji već nađenih D_α, njihovih parcijalnih izvoda i veličine E. Tako možemo, u zavisnosti od veličina D i E, koje predstavljaju skokove izvoda u ranijem koordinatnom sistemu, odrediti na jedinstven način skokove u novom sistenu. Može se pokazati da neprekidnost te funkcije i njena prva dva izvoda na Ω u ranijem sistemu povlači, pod našim pretpostavkama, njihovu neprekidnost i u novon sistenu.

Razmotrino pitanje ponašanja funkcije f u pogledu zakona transformacije. Mi smo posmatrali slučaj kada je ona bila skalar. Ako bi bila tenzor, ili neki drugi geometrijski objekt, situacija se menja, jer bi se tada u transformatu našli i izvodi jednih koordinata po drugim, prvog reda za tenzore, a drugog za koeficijente povezanosti $\Gamma^\alpha{}_{\beta\gamma}$ (vldeti §8). Otud se u izvodima transformata tih geometrijskih objekata pojavljuje red diferenciranja koji unosi prekide, pod našin uslovima, i onda kada ih u polaznom sistemu nije bi1o. U sledećem odeljku ćemo ispitivati prekide izvoda tenzora i njihoviti transformacija.

Široko ispitivanje sa izrazito deduktivnim pristupom, prekidnih geometrijskih objekata, možc se na primer neći u Lišnerovičevom članku (A. Lichnerowicz, Cndes de choc, ondes infinitesimales, ..., CIME session, Relativistic Fluid Dynamics, 1971) i drugim njegovim kursevima.

Smatraćemo, uopšte uzev, da Svet opšte relativnosti predstavlja povezanu, orijentabilnu i diferencijabilnu mnogostrutost V_4 na lokalno pseudoeuklidskom strukturom. Ovo poslednje smo već bili nagovestili pretpostavkon o egzistcnciji lokalno Lorencovih posmatrača u svakom događaju x^α.

Ostaje nam da konkretizujeno naše zaključke. Posmatraćemo moguće prekide izvoda tenzora gravitecionog potencijala koji su zastupljeni u jednačinama polja (9.6) i (9.8). Koordinatne sisteme, koji lokalno zadovolavaju postavljene uslove, nazivaćemo **dopušteni sistemi**. Pored izaza (8.12), koji iskazuje 1okalno pseudoeuklidski karakter metrike, smatraćemo da su transformacije nesingularne i da zadovoljavaju jedan od dva izbora pretpostavki.

Po prvom izboru je:

a_1) Dopuštene koordinate su funkcije bar klase C^2, a C^4 po delovima, jedne od drugih.
a_2) Gravitacioni potencijal je funkcija bar klase C^1, a C^3 po delovima, dopuštenih koordinata.

Podrazumeva se da polazni lokalni dopušteni koordinatni sistem mora zadovoljiti ove dve pretpostavke, s tim što u preseku njegove oblasti definisanosti ω_1, s nekom drugon oblašću ω_2 drugog lokalnog sistema, ovaj mora zadovoljavati iste pretpostavkeda bi bio dopušten. Tako se dalje može širiti oblast definisanosti polaznog sistema.

Po drugom izboru je:

b_1) Dopuštene koordinate su funkcije bar klase C^1, a C^3 po delovima, jedne od drugih.
b_2) Gravitacioni potencijal je funkcija bar klase C^0, a C^2 po delovima, dopuštenih koordinata.

Pada u oči odmah da naša ranija diskusija, sprovedena pod pretpostavkom da su jedne koordinate funkcije klase C^2 od drugih, važi za prvi izbor pretpostavki, a ne za drugi.

M ćemo prekide izvoda gravitacionog potencijala pod uslovima a_1) i a_1) (prekidi drugih izvoda) tumačiti kao poremećaje na frontovima infinitezimalnih ili **običnih gravitacionih talasa**. Prekide koji se pojavljuju pod uslovima b_1) i b_1) (prekidi prvih izvoda) tumačićemo kao poremećaje potencijala na frontovima **udarnih gravitacionih talasa**. Ovi poslednji bili su predmet novijih ispitivanja Lišneroviča i njegovih saradnika (C.R. Acad. Sc. t 273, A 1385-1389; Y. Choquet-Bruhat, Comm. Math. Phys. 12, 16-36; i trugi). Treba reći da ima još naučnika koji su izučavali udarne gravitacione talase, drugačijim metodama ili u nekim konkretnijim slučajevina. Mi ih nećemo razmatrati. Ogranidčićemo se na izlaganje uslova za postojanje običnih gravltacionih talasa i ne njihove glavnasvojstvae, koristeći ovakav prilaz, u sledećim odeljcima.

9.3 Uslovi za gravitacione talase u slobodnom prostoru

Ričijev tenzor krivine glasi, na osnovu kontrakcije u (9.1)

$$R_{\alpha\beta} = \frac{\partial}{\partial x^\gamma}\Gamma^\gamma{}_{\alpha\beta} - \frac{\partial}{\partial x^\alpha}\Gamma^\gamma{}_{\gamma\beta} + \Gamma^\delta{}_{\delta\gamma}\Gamma^\gamma{}_{\alpha\beta} - \Gamma^\delta{}_{\alpha\gamma}\Gamma^\gamma{}_{\beta\delta}, \tag{9.13}$$

ili eksplicitno

$$R_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}g^{\gamma\delta}\left(\frac{\partial^2 g_{\alpha\delta}}{\partial x^\beta \partial x^\gamma} + \frac{\partial^2 g_{\beta\gamma}}{\partial x^\alpha \partial x^\delta} - \frac{\partial^2 g_{\alpha\beta}}{\partial x^\gamma \partial x^\delta} - \frac{\partial^2 g_{\gamma\delta}}{\partial x^\alpha \partial x^\beta}\right) + Q_{\alpha\beta}\left(g;\, \frac{\partial g}{\partial x}\right) \tag{9.13$'$}$$

gde su članovi u kojima nisu zattupljeni drugi izvodi $g_{\alpha\beta}$ grupisani u simetrčne funkcije $Q_{\alpha\beta}$. Jednačine gravitacionog polja u slobodnom prostoru (9.8) koje razmatramo prema tome glase

$$R_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}g^{\gamma\delta}\left(\frac{\partial^2 g_{\alpha\delta}}{\partial x^\beta \partial x^\gamma} + \frac{\partial^2 g_{\beta\gamma}}{\partial x^\alpha \partial x^\delta} - \frac{\partial^2 g_{\alpha\beta}}{\partial x^\gamma \partial x^\delta} - \frac{\partial^2 g_{\gamma\delta}}{\partial x^\alpha \partial x^\beta}\right) + Q_{\alpha\beta} = 0 \tag{9.14}$$

Postavlja se načelno pitanje rešavanja ovog sistema parcijalnih jednačina drugog reda od nepoznatih funkcija $g_{\alpha\beta}$ po promenljivim x^p. Prvo moramo imati, na nekoj hiperpovrši Σ, zasad proizvoljne orijentacije, zadane vrednosti promenljivih $(g_{\alpha\beta})_0$ i $(\partial_n g_{\alpha\beta})_0$, gde sa ∂ označavamo izvod u pravcu upravnom na Σ. Pod pretpostavkama a_1) i a_2), usvojenim u prethodnom odeljku, $g_{\alpha\beta}$ mora biti neprekidan i bar jednom neprekidno diferencijabilan, a još dvaput diferencijabilan po delovima (dakle klase C^1 a C^3 po delovima) u posmatranoj oblasti Ω od V_4. Ispitivanje regularnosti Σ sastoji se u tome da utvrdimo pod kojim uslovima ona može da postane površ prekidnosti za druge izvode $\partial_{rn} g_{\alpha\beta}$. Smatraćemo da idući po samoj Σ tenzor $(g_{\alpha\beta})_0$ treba da bude bar klase C^3, a $(\partial_n g_{\alpha\beta})_0$ bar klase C^2. Ovo možemo uvek zahtevati, jer mi postavljamo problem i zadajemo vrednosti na Σ. Pri prelasku kroz tu hiperpovrš mogu se pojaviti prekidi već drugih izvoda gravitacionog potencijala.

Izvršimo razvrstavanje izvoda na Σ. Neka ta hiperpovrš bude prvo prostorno orijentisana, i lokalno zadana sa $x^4 = 0$. Koordinatna linija x^4 ne mora biti ortogonalna na Σ, što bi nužno povlačilo njenu vremensku orijentacijn, ali ćemo postaviti kao uslov da bude vremanski orijentisana, što opet ne znači da mora biti i ortogonalna na toj hiperpovršini. Tada je $g^{44} < 0$. Izvod u pravcu x^4 razlaže se lokalno po tangenti i normali u odnosu na Σ. Kako se izvodi u tangentnim pravcima dobijaju diferenciranjem po promenljivim x^i koje se menjaju na Σ, sleduje da su uz $(\partial_n g_{\alpha\beta})_0$ zadani i $(\partial_4 g_{\alpha\beta})_0$ i obrnuto. Znači da se drugi izvodi $(\partial_{ij} g_{\alpha\beta})_0$ zadani i $(\partial_{i4} g_{\alpha\beta})_0$ dobijaju diferenciranjem zadanih veličina na Σ, pa su neprekidni. Ostaju još $\partial_{44} g_{\alpha\beta}$ koji bi jedini mogli imati prekide.

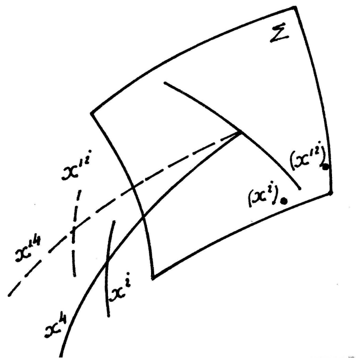
Ako ispišemo jednačine polja (9.14) na Σ, razdeljene u tri grupe prema indeksima, imaćemo:

$$R_{ij} = -\frac{1}{2}g^{44}\frac{\partial^2 g_{ij}}{(\partial x^4)^2} + \zeta_{ij}\left(\frac{\partial^2 g}{\partial x^k \partial x^\alpha};\, \frac{\partial g}{\partial x^\beta};\, g\right) = 0, \tag{9.15}$$

$$\begin{aligned} R_{i4} &= \frac{1}{2}g^{4j}\frac{\partial^2 g_{ij}}{(\partial x^4)^2} + \eta_i\left(\frac{\partial^2 g}{\partial x^k \partial x^\alpha};\, \frac{\partial g}{\partial x^\beta};\, g\right) = 0, \\ R_{44} &= -\frac{1}{2}g^{4j}\frac{\partial^2 g_{ij}}{(\partial x^4)^2} + \theta\left(\frac{\partial^2 g}{\partial x^k \partial x^\alpha};\, \frac{\partial g}{\partial x^\beta};\, g\right) = 0. \end{aligned} \tag{9.16}$$

U ovim vezarna, koje se mogu neposredno proveriti, ζ_{ij}, eta_i, θ, su funkcije samo onih veličina koje su zadate ili se mogu izračunati diferenciranjem na Σ. Vidimo odmah dve stvari. Prvo da je ovaj sistem, s obzirom na indefinitnu metriku, hiperboličkog tipa. To se vidi po koeficijentima uz članove sa najvišim redom izvoda. Stoga je ispravno postaviti Košijev problem za koji smo se u prethodnom izlaganju implicitno opredelili. Drugo, da ne među onim veličinama koje mogu imati prekide na Σ pojavijuju samo komponente g_{ij} tenzora potencijala koje odgovaraju krivim na toj povrĹ˘i (ma da su na njoj zadane i ostale komponente $g_{\alpha\beta}$ i njihovi prvi izvodi u normalnom pravcu). Ustvari, za određivanje vrednosti traženih drugih izvoda gravitacionog potencijala dovoljan je sistem od šest jednačina (9.15) koji je zbog toga i izdvojen. Kako se u (9.15) drugi izvodi tih šest komponenata $\partial_{44}g_{ij}$ mogu izračunati iz podataka za Košijev problem, to zasad nema mogućnosti da se u te jasno određene izraze unesu neki prekidi, odnosno promene vrednosti posmatranih veličina.

U §41 smo ustanovili da se pri transformaciji koordinata ne može garantovati, u odnosu na svaki sistem, neprekidnost određenog reda izvoda tensora i drugih geometrijskih objekata. Treba proveriti pitanje postojanja, ili nepostojanja, prekida izvoda komponenata $g_{\alpha\beta}$ u odnosu na različite dopustive sisteme, naročito s obzirom na $\partial_{44}g_{\alpha 4}$ koji se ne pojavljuju u (9.15) i (9.16). Zato ćemo izvršiti transformaciju $(x) \to (\bar{x})$, takvu da na Σ ostanu sačuvani koordinatna mreža x^i i lokalni tangentni pravci na x^4. Time su očuvani i podaci za Košijev problom, dok za vrednosti $x^4 \neq 0$ koordinatne krive izmene konfiguraciju (videti sliku 9.2).



Slika 9.2: Promena konfiguracije.

Takva je sigurno transformaciju:

$$\bar{x}^4 = x^\alpha + \frac{1}{3!}(x^4)^3\left[\varphi^\alpha(x^i) + \varepsilon^\alpha\right], \quad \alpha = \bar{\alpha} = 1,2,3,4,$$

gde je ε^α definisano tako da teži nuli istovremeno kad i x^4. Na hiperpovrši Σ nosaču problema tada imamo

$$\begin{gathered}
\left(\frac{\partial \bar{x}^\alpha}{\partial x^\beta}\right)_0 = \delta^\alpha_\beta, \quad \left(\frac{\partial}{\partial x^\gamma}\frac{\partial \bar{x}^\alpha}{\partial x^4}\right)_0 = \left(\frac{\partial}{\partial x^4}\frac{\partial \bar{x}^\alpha}{\partial x^\gamma}\right)_0 = 0 \\
\left(\frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^4}, \frac{\partial \bar{x}^\alpha}{\partial x^4}\right)_0 = \left(\frac{\partial^2}{(\partial x^4)^2}\frac{\partial \bar{x}^\alpha}{\partial x^i}\right)_0 = 0, \quad \left(\frac{\partial^2}{(\partial x^4)^2}\frac{\partial \bar{x}^\alpha}{\partial x^4}\right)_0 = \varphi^\alpha.
\end{gathered} \tag{9.17}$$

Na osnovu zakona transformacije tenzora $(g_{\alpha\beta}) \to (\bar{g}_{\alpha\beta})$ i veza (9.17), dobijamo

$$(g_{\alpha\beta}) = (\bar{g}_{\alpha\beta}), \quad \left(\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^4}\right)_0 = \left(\frac{\partial \bar{g}_{\alpha\beta}}{\partial \bar{x}^4}\right)_0, \tag{9.18}$$

vidimo da su podaci za Košijev problem očuvani. za druge izvode po x^4, odnosno $\bar{x}^4$, treba razdelitni promenljive, kao što je učinjeno u (9.15) i (9.16). Tada račun daje:

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{\partial^2 g_{ij}}{(\partial x^4)^2}\right)_0 = \left(\frac{\partial^2 \bar{g}_{ij}}{(\partial \bar{x}^4)^2}\right)_0, \\
&\left(\frac{\partial^2 g_{\alpha 4}}{(\partial x^4)^2}\right)_0 = \left(\frac{\partial^2 \bar{g}_{\alpha 4}}{(\partial \bar{x}^4)^2}\right)_0 + \varphi_\alpha + \delta^4_\alpha \varphi_4, \quad \text{gde je } \varphi_\alpha \equiv g_{\alpha\beta}\varphi^\beta
\end{aligned} \tag{9.19}$$

I posle ovakve transformacije dobijamo, dakle, neprekidnost izvoda $\partial_{44}g_{ij}$ na Σ, dok izvodi $\partial_{44}g_{\alpha 4}$ mogu imati prekide. Pri izboru φ^α, takvom da bude $[\varphi^\alpha]_0 \neq 0$, što je moguće, jer su jedne koordinate klase C^2 u odnosu na druge, a φ^α se pojavljuju tek počev od trećeg izvoda na Σ, mogu se stvoriti ili ukloniti prekidi izvoda $[\partial_{44}g_{4\alpha}]$.

Ista analiza bi se mogla sprovesti i za Σ vremenskog tipa $(g^{44}) < 0$. Otud vidimo da je problem ispravno postavljen na hiperpovršima koje su u svakom događaju orijentisane bilo prostorno ili vremenski. Drugi je zaključak da samo prekidi drugih izvoda transverzalnih komponenata g_{ij} na Σ mogu imati fizičko tumačenje, jer se dopuštenim transformacijama koordinata ne mogu ni stvoriti ni otkloniti.

Ostaje slučaj kada Σ lokalno dotiče nulti konus. Tada normalni pravac na toj hiperpovrši mora biti, kao što smo videliu slučaju ravnog talasa (§14, jednačina (4.24) i dalje), nulti vektor. koordinata x^4, koju razlažemo na normalni i tangentni pravac u odnosu na Σ, biće singularne, pa je $g^{44} = 0$. Iz (9.15) i (9.16) vidimo da tada i $\partial_{44}g_{ij}$ mogu biti prekidni jedino na nultim hiperpovršima.

9.4 Saglasnost jednačina gravitacionog polja. Gravitacioni zraci i talasi

Posmatrajmo, u slučaju da su uslovi za rešenje jednačina polja ispravno postavljeni, dakle lokalno $g^{44} \neq 0$, veličine G^4_α iz (9.4):

$$\begin{aligned} G^4_i &= g^{4j}R_{ij} + g^{44}R_{i4} = 0, \\ G^4_4 &= \frac{1}{2}\left(g^{44}R_{44} - g^{ij}R_{ij}\right) = 0. \end{aligned} \tag{9.20}$$

Zamislimo da su na Σ dati $(G^4_\alpha)_0$. Može se proveriti da ni u jednojod komponenata tenzora G^4_α nema izvoda $\partial_{44}g_{\alpha\beta}$. Dakle, tada podaci za Košijev problem $(g_{\alpha\beta})_0$ i $(\partial_n g_{\alpha\beta})_0$ omogućavajuda se diferenciranjem po koordinatama x^i, odrede ostali izvodi, pa prema tome i vrednosti $(G^4_\alpha)_0$. Obrnuto, ako su dati $(R_{ij})_0$ i $(R_{4\alpha})_0$, jednačine

$$\left(G^4_\alpha\right)_0 = 0, \tag{9.21}$$

moraju biti zadovoljene. Sad možemo zadržati, među gravitacionim jednačinama, sistem (9.15), a umesto (9.16) staviti (9.20). To je moguće stoga što su, na osnovu važećeg sistema (9.15), R_{ij} jednaki nuli, pa u (9.20) ostaje G^i_4 i G^4_4, srazmerni R_{i4} i R_{44} preko regularnog koeficijenta g^{44}. Ta zamena je, dakle, izpravna. Zbog (9.15) takođe imamo:

$$\begin{aligned} G^i_j &= g^{i4}R_{4j} - \frac{1}{2}\delta^i_j\left(g^{44}R_{44} + 2g^{4k}R_{4k}\right), \\ G^i_4 &= g^{\alpha i}R_{\alpha 4}. \end{aligned} \tag{9.22}$$

Znači da su i preostale komponente tenzora G^α_β linearne funkcije samo $R_{\alpha 4}$, čime su ujedno linearne funkcije i G^4_α. Ako napišemo jednačine (9.3), odnosno (9.4), u obliku

$$\nabla_4 G^4_\alpha + \nabla_i G^i_\alpha = 0,$$

vidimo da se one mogu izraziti u vidu kovarijantnih divergencija samo od G^4_α. S obzirom na definiciju kovarijantnog izvoda, kad izvršimo ove zamene, i grupišemo sve linearne kombinacije koeficijenata povezanosti pa ih obeležimo kao funkcije $A^{i\beta}_\alpha$ i B^β_α, gornji sistemće glasiti

$$g^{44}\frac{\partial}{\partial x^4}G^4_\alpha = A^{i\beta}_\alpha \frac{\partial}{\partial x^i}G^4_\beta + B^\beta_\alpha G^4_\beta. \tag{9.23}$$

Kad u ove jednačine unesemo vrednosti $(G^4_\alpha)_0$ na hiperpovrši Σ, dobićemo da je izvod na levoj strani jednak nuli, jer se diferenciranje na desnoj strani vrši po Σ, a to znači da funkcije G^4_α ostaju jednake nuli i kad se napusti Σ. Nikakvi skokovi promenljivih ne mogu se pojaviti u sistemu (9.23), su mu koeficijenti funkcije koordinata klase bar C^0, jer zavise od $\partial_\alpha g_{\beta\gamma}$. Stoga se njegova rešenja mogu produžiti preko cele oblasti Ω. Znači da je sistem (9.15), zadovoljen u celoj oblasti Ω koja sadrži Σ, uz uslove (9.21) koji važe na Σ, dopunjen sistemom (9.23) na osnovu kojeg su $G^4_\alpha = 0$ svuda u Ω.

Ovim smo pokazali da rešenje osnovnog sistema diferencijalnih jednačina ostaje isto kada se umesto sistema (9.16) unese (9.23), koje pored potpunog sistema (9.15) i (9.16) predstavljaju identičnosti. Znači da je rešenje gravitacionih jednačina saglasno, pa je taj sistem u involuciji. Što je trebalo dokazati.

Pređimo na sledeći slučaj kada je lokalno $g^{44} = 0$, pa se, kao što smo videli, mogući prekidi $[\partial_{44} g_{\alpha\beta}] \neq 0$. Ovi poremećaji gravitacionog potencijala, kako smo ih nazvali, jedinimogu fizički odgovarati pojavi gravitacionih talasa. Podsećamo na to da se radi o običnim ili slabim talasima, a ne o udarnim, koji bi odgovarali prekidima prvog reda $[\partial_4 g_{\alpha\beta}]$. Uslovi za ovesu bili iskazani pretpostavkama b_1) i b_2).

S obzirom na nulti karakter gradijanta na hiperpovrši Σ imaćemo, ako je ona data sa $f = \mathrm{const.}$

$$f(x^\alpha) = 0, \quad g^{\alpha\beta} \frac{\partial f}{\partial x^\alpha} \frac{\partial f}{\partial x^\beta} = 0. \tag{9.24}$$

Konačna jednačina $f = \mathrm{const.}$ predstavlja familiju rešenja gornje parcijalne jednačine. ako uvedemo Hamiltonove funkcije

$$H(x;p) = \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} p_\alpha p_\beta = \mathrm{const.} \tag{9.25}$$

imaćemo odgovarajući karakteristični sistem običnih diferencijalnih jednačina:

$$\frac{\mathrm{d}x^1}{\dfrac{\partial H}{\partial p_1}} = \cdots = \frac{\mathrm{d}x^4}{\dfrac{\partial H}{\partial p_4}} = -\frac{\mathrm{d}p_1}{\dfrac{\partial H}{\partial x_1}} = -\frac{\mathrm{d}p_4}{\dfrac{\partial H}{\partial x_4}} = -\frac{\mathrm{d}f}{p_\alpha \dfrac{\partial H}{\partial p_\alpha}} = \mathrm{d}u, \tag{9.26}$$

koji se svodi na kanonski sistem u odnosu na parametar u:

$$\frac{\mathrm{d}x^\alpha}{\mathrm{d}u} = \frac{\partial H}{\partial p_\alpha}, \quad \frac{\mathrm{d}p_\alpha}{\mathrm{d}u} = -\frac{\partial H}{\partial x^\alpha}. \tag{9.27}$$

Lagranževa funkcija $L(x;\dot{x})$, u klasičnoj mehanici poznata kao "kinetički potencijal", definisana je sa

$$L = p_\alpha \dot{x}^\alpha - H, \quad \text{gde je } \dot{x}^\alpha \equiv \frac{\mathrm{d}x^\alpha}{\mathrm{d}u}. \tag{9.28}$$

Kanonske jednačine su transformati jednačina ekstremala Lagranžove funkcije. Kako je iz njihove prve grupe (9.27)

$$\frac{\mathrm{d}x^\alpha}{\mathrm{d}u} = \dot{x}^\alpha = g^{\alpha\beta} p_\beta,$$

imamo

$$L = \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta. \tag{9.29}$$

Tada je, na osnovu prethodnog i druge grupe jednačina (9.27)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\alpha}\right) = -\frac{\partial H}{\partial x^\alpha}$$

Iz (9.28) je najzad

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\alpha}\right) - \frac{\partial L}{\partial x^\alpha} = 0. \tag{9.30}$$

Što predstavlja diferencijalne jednačine ekstremala u odnosu na kanonski parametar u. Ako je konstanta C u (9.25) jednaka nuli, kanonski sistem daje rešenja (karakteristika) za parcijalnu jednačinu (9.24). Konačna jednačina hiperpovrši Σ obrazovana je od ekstremale Lagranževe funkcije, koje je na osnovu definicije i prethodnih veza jednakih nuli, $L = 0$. Odmah vidimo iz (9.29) da to odgovara nultom slučaju $\mathrm{d}s^2 = 0$. Tako zaključujemo da su rešenja jednačine (9.26), koje predstavljaju bikarakteristika jednačina gravitacionog polja u slobodnom prostoru (9.8), odnosno (9.14), formirane od nultih ekstremala svetske metrike i odgovarajućih tangentnih obvojnih elemenata p_α, sistema (9.26).

U §5 smo već imali pojam nultih geodezijskih linija. Ističnemo da su bikarakteristikama, po definiciji iz teorije jednačina matematičke fizike, putanje prstiranja bilo kojeg talasnog kretanja. U ovom slučaju one su svetske linije gravitacionog zračenja, pa se nulti konus u opštoj relativnosti naziva i **gravitacioni konus**.

Gravitaciono polje u slobodnom prostoru dopušta nulte hiperpovrši na kojima postoje poremećaji drugog reda (slabi poremećaji) gravitacionog potencijala. Oni se prostiru duž nultih geodezijskih linija svetske metrike.

9.5 Opšta svojstva gravitacionih poremećaja

Pokazali smo da se na nurtim hiperpovrši Σ, pojaviti prekidi samo drugih normalnih izvoda transverzalnih konponenata tenzora potencijala $\partial_{44} g_{ij}$. To smo izveli u koordinatnom sistenu u kojem je Σ lokalno zadana sa $x^4 = 0$. Postavlja se pitanje opšteg oblika uslova koje zadovoljavaju poremećaji $g_{\alpha\beta}$ u koordinatnom sistemu koji nije prilagođen, na Σ, Rešavanju Košijevog problema.

Ovo ćemo iskazati time što ćemo za druge izvode $g_{\alpha\beta}$ u pravcima koji imaju konponente upravne na talasnom frontu staviti da unose prekide. Ako sa n^α obeležimo lokalnu normalu na četvorotalasu (videti §14), ti prekidi glase

$$\left[\frac{\partial^2 g_{\alpha\beta}}{\partial x^\gamma \partial x^\delta}\right] = n_\gamma n_\delta \gamma_{\alpha\beta}. \tag{9.31}$$

Kad uporedimo ove izraze sa onim koje smo imali u §41, a koji su se odnosili na skalarne funkcije, vidimo da je razlika u tome što je koordinatni sistem bio prilagođen, pa je vektor normale glasio $n^\alpha(0,\ldots,1)$. Veličine $\gamma_{\alpha\beta}$ su zasad neodređene, a zbog simetrije $g_{\alpha\beta}$ noraju, takođe biti simetrične.

Jednačine gravitacionog polja u slobodnom prostoru (9.8) imaju članove koji teže različitim vrednostima na Σ, već prema tome da li posmatramo njihove nizove u tačkema kojo teže jednoj ili drugoj strani Σ. Razlike na Σ date su izrazime (9.31). Ako sa $R^1_{\alpha\beta}$ i $R^2_{\alpha\beta}$ obeležimo vrednosti kojima teže komponente Ričijevog tenzora, jednačine polja (9.8), koje moraju biti zadovoljene svuda u V_4, glase:

$$R^1_{\alpha\beta} = R^2_{\alpha\beta} = 0 \quad \Rightarrow \quad \left[R_{\alpha\beta}\right] = 0. \tag{9.32}$$

Ovo nam, kad se eksplicitnon napiše (9.14), daje višak članova na levoj strani prve od gornjih jednačina, što predstavlja veličinu skoka $\left[R_{\alpha\beta}\right]$. Na osnovu (9.31) to je

$$g^{\gamma\delta}\left(n_\beta n_\gamma \gamma_{\alpha\delta} + n_\alpha n_\delta \gamma_{\beta\gamma} - n_\gamma n_\delta \gamma_{\alpha\beta} - n_\alpha n_\beta \gamma_{\gamma\delta}\right) = 0. \tag{9.33}$$

S obzirom na nultost talasnog fronta Σ, gradijent mu je takođe nulti vektor, pa jedan od članova u (9.33) otpada. Dakle

$$n_\beta n^\delta \gamma_{\alpha\delta} + n_\alpha n^\delta \gamma_{\beta\delta} - n_\alpha n_\beta \gamma^\delta_\delta = 0, \quad \text{gde je } \gamma^\delta_\delta \equiv g^{\delta\varepsilon}\gamma_{\delta\varepsilon},$$

što se može napisati kao

$$\left(\gamma_{\alpha\delta} n^\delta - \frac{1}{2}\gamma^\delta_\delta n_\alpha\right) n_\beta + \left(\gamma_{\beta\delta} n^\delta - \frac{1}{2}\gamma^\delta_\delta n_\beta\right) n_\alpha = 0. \tag{9.34}$$

Zbog $n_\alpha \neq 0$ sledi da vektor u zagradi mora biti jednak nuli

$$\gamma_{\alpha\delta} n^\delta = \frac{1}{2}\gamma^\delta_\delta n_\alpha. \tag{9.35}$$

Poremećaji $\gamma_{\alpha\beta}$ gravitacionog potencijala, kojih ima 10, zadovoljavaju ove četiri linearne jednačine, pa ih može biti najviše šest nezavisnih. to je posledica činjenice, utvrđene u ranijim odeljcima, da samo komponente $\partial_{44} g_{ij}$ mogu imati poremećaje na gravitacionom talsau. Zaključci §42 kažu da postojedopuštene transformacije pomoću kojih se poremećaji mogu stvoritiili ukloniti na drugim izvodima onih $g_{\alpha\beta}$ koji imaju komponente upravne na Σ. To znači da stvarni poremećaji mogu biti jedino oni koji su upravni na n^β

$$\gamma_{\alpha\beta} n^\beta = 0. \tag{9.36}$$

Odakle je

$$\gamma^{\beta}_{\beta} = 0. \tag{9.37}$$

Kako je n^{α} nulti vektor, dakle istovremeno tangentan na karakteristici i na bikarakteristici, to se u događaju na Σ više ne može odrediti lokalno ortogonalna vektorska četvorka, već trojka, sastavljena od n^{α} i dva prostorna vektora. Kako ni

jedan vremenski vektor ne može biti ortogonalan na nultom (videt §3) to su preostala dva, tangentna na Σ, prostorno orijentisana. Koeficijenti $\gamma_{\alpha\beta}$ leže u dvoravni upravnoj na pravac prostiranja zraka, pa imaju zbog simetrije tri nezavisne komponente. Međutim, uslov (9.37), da im trag bude jednak nuli, sužava samo dve nezavisne veličine.

Gravitacioni talasi su transverzalni, a poremećaji na njima dvoparametarski.

Možemo, na osnovu rečenog dati lokalnu geometrijsku predstavu za $\gamma_{\alpha\beta}$. Ako su $\vec{W}_{(1)}$ i $\vec{W}_{(2)}$ dva ortonormirana prostorna vektora upravna na $\vec{n}$, dakle tangentna na Σ, poremećaj $\gamma_{\alpha\beta}$ može se napisati pomoću sledeća dva vektora $\vec{M}$ i $\vec{N}$

$$\begin{aligned} \vec{M} &= a\vec{W}_{(1)} + b\vec{W}_{(2)}, \\ \vec{N} &= -b\vec{W}_{(1)} + a\vec{W}_{(2)}, \\ \text{gde je} \quad \vec{W}_{(1)}\cdot\vec{n} &= \vec{W}_{(2)}\cdot\vec{n} = 0, \quad W^2_{(1)} = W^2_{(2)} = 1, \end{aligned} \tag{9.38}$$

u obliku

$$\gamma_{\alpha\beta} = M_{\alpha}N_{\beta} + M_{\beta}N_{\alpha}. \tag{9.39}$$

Ovakav $\gamma_{\alpha\beta}$ zadovoljava (9.36) i (9.37) i zavisi od dva parametra a i b.

9.6 Gravitacioni i elektromagnetni talasi

Preći ćemo na slučaj kada je tenzor $T_{\alpha\beta}$ različit od nule, a odgovara elektromagnetnom polju (videti §34) u praznom prostoru. Tada su jednačine polja oblika (9.5) dakle nehomogene. Ovaj slučaj se nazvan **spolino jedinstveno polje**. Spoljnim se naziva zato što u posmatranoj oblasti nema materije (tačnije rečeno nema supstancije) koja je inače njegov izvor, a jedinstveno zato što se radi o istovremenoo prisustvu dva polja koja dejetvuju na daljinu.

Makevelove jednačine (7.8) i (7.9) elektromagnetaog polja izražene su, u opštoj relativnosti, ponoću kovarijantnih izvoda tenzota $F_{\alpha\beta}$. S obzirom na to da u vakuumu nema električnog protoka J_{β}, one glase:

$$C^{\alpha} \equiv \nabla_{\beta}F^{\alpha\beta} = 0, \tag{9.40}$$

(9.41)

$$D^{\alpha} \equiv \nabla_{\beta}\left(*F^{\alpha\beta}\right) = 0. \tag{9.42}$$

Osnovne jednačine (9.6) su tada

$$H_{\alpha\beta} \equiv G_{\alpha\beta} + \kappa\tau_{\alpha\beta} = 0, \tag{9.43}$$

gde je $\tau_{\alpha\beta}$ tenzor energije elektromagnetaog polja, oblika (7.22). Pošto je na osaovu (7.23) trag toga tanzora jednak nuli, iz (9.43) sledi i $R = 0$.

Neka početni uslovi za rešavanje sistema (9.43) budu zadani na hiperpovrši čija je lokalna konačaa Jednačina $x^4 = 0$. Uzećemo, kao prvu pretpostavku, da Σ ne dotiše nulti konug ($g^{44} \neq 0$). Što se tiče metrike i dalje su ispunjeni uslovli a_1) i a_2) iz §41, koji su važili za gravitaciono polje u slobodnom prostoru. Treba da ih dopunimo podacima o elektromagnetnom polju. Tako ćeno imati, zadane na Σ, vrednosti gravitacionih potencijala $(g_{\alpha\beta})_0$, i njihovih izvoda u normalnom pravcu $(\partial_n g_{\alpha\beta})_0$, a uz njih i vrednosti tenzora elektromagnetnog polja $(F_{\alpha\beta})_0$. Kao i prethodno, $(g_{\alpha\beta})_0$, je triput, a $(\partial_n g_{\alpha\beta})_0$ dvaput diferencijabilan, odnosno toliko puta neprekidno diferencijabilan po samoj Σ, a dodajemo zahtev da $(F_{\alpha\beta})_0$ bude dvaput diferencijabilan, neprekidno po Σ. Svi izvodi višeg reda izračunavaju se iz vrednogti zadatih za

Kogšijev problem. Dakle, jedini izvodi koji bi na Σ mogli imati prekide su $\partial_{nn}g_{\alpha\beta}$ i $\partial_n F_{\alpha\beta}$. Činjenica da već prvi normalni izvodi $\partial_n F_{\alpha\beta}$ mogu biti prekidni počiva na tome što ti poremećaji nastaju na elektromagnetnin talasima, a jednačine polja koje oni zadovoljavaju, (9.41) i (9.42), su prvog reda.

Napisaćemo Maksvelove jednačine (9.41) i (9.42), izdvajajući vrednosti promenljivih koje su zadane na Σ:

$$\begin{aligned} C^2 &\equiv g^{44}\frac{\partial}{\partial x^4}F_{4\cdot}{}^{i} + g^{ij}\frac{\partial}{\partial x^4}F_{j\cdot}^{\ i} + \lambda^i\left(F;\frac{\partial g}{\partial x};g\right) = 0, \\ C^4 &\equiv g^{4i}\frac{\partial}{\partial x^4}F_{i\cdot}{}^{4} + \lambda^4\left(F;\frac{\partial g}{\partial x};g\right) = 0; \end{aligned} \tag{9.44}$$

$$\begin{aligned} D^i &\equiv \varepsilon^{i\beta\gamma\delta}\frac{\partial}{\partial x^\beta}F_{\gamma\delta} = \varepsilon^{i4jk}\frac{\partial}{\partial x^4}F_{jk} + \mu^i\left(F;\frac{\partial g}{\partial x};g\right) = 0, \\ D^4 &\equiv \varepsilon^{4ijk}\frac{\partial}{\partial x^i}F_{jk}. \end{aligned} \tag{9.45}$$

Ako leva strana (9.41) napišemo u kovarijantnim koordinatama, videćemo da se iz prve tri jednačine (9.44) $\partial_4 F_{4i}$ mogu zameniti u četvrtoj. Sređivanjem ćemo izvršiti tako da bude

$$C^4 \equiv g^{ij}C_j + f^{44}C_4 = -F_{ji}\frac{\partial}{\partial x^4}\left(g^{4i}f^{4j}\right) + g^{4i}\lambda_i(\cdots) + g^{44}\lambda_4(\cdots) = 0,$$

Odavde sledi da se sve veličine zadate u izrazu za C^4 moguizračunati iz podataka za Košijev problem. Isto važi i za poslednju jednačinu u sistemu (9.45), koja predstavlja D^4, budući da se u permutacionom tenzoru $\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}$ pojavljuje gustina $\sqrt{-\|g\|}$, koja je, kao i $F_{\alpha\beta}$, zadana na Σ.

Sistem diferencijalnih jednačina polja razlažemo na dve grupe:

$$H_{ij} \equiv R_{ij} + \varkappa\tau_{ij} = 0, \tag{9.46}$$

$$H^4_\alpha \equiv G^4_\alpha + \varkappa\tau^4_\alpha = 0. \tag{9.47}$$

sistemu (9.46) se može, kao u (9.15), izdvojiti najviši red izvoda $\partial_{44}g_{ij}$, u svakoj jednačini i izraziti pomoću zadatih vrednosti $(f_{\alpha\beta})_0$, $(\partial_\gamma f_{\alpha\beta})_0$ i $(F_{\alpha\beta})_0$. U (9.47) se ne pojavljuju drugi izvodi ∂_{44}, isto kao ni u (9.20). Odgovarajući zaključci važe, što se tiče izvoda $\partial_4 F_{\alpha\beta}$, za jednačine (9.44) i (9.45). To se vidi iz levih strana prve tri jednačine oba sistema. odatle jasno sleduje da se za C_i, D_i i H_{ij} u potpunosti mogu odrediti, to jest algebarski rešiti, veličine $\partial_4 F_{\alpha\beta}$, $\partial_{44}g_{\alpha\beta}$. Dakle na hiperpovrši Σ, lokalno orijentisanoj bilo prostorno ili vremenski, ne mogu se pojaviti prekidi izvoda koji su zastupljeni u osnovnim jednačinama gravitacionog i elektromagnetnog polja.

Ako bi Σ doticala nulti konus ($g^{44} = 0$), iz (9.44) sledi da $\partial_4 F_{4i}$ mogu imati prekide, a znamo već da isto važi i za $\partial_{44}g_{ij}$. Hiperpovrš Σ postaje karakteristična za gravitaciono i elektromagnetno polje istovremeno. Napomenimo da je činjenica da se C^4 i D^4 neposredno nalaze iz veličina zadanih na Σ u skladu s tim da $F_{\alpha\beta}$ ima šest komponenata, i da ostaje ukupno šest jednačina C^i i D^i za njihovo određivanje.

Treba da ispitamo poremećaje elektromagnetnog polja na talasu onako kako smo to učinili za gravitacione poremećaje u slobodnom prostoru.

Kako su elektromagnetni talasi nulte hiperpovrši poremećaja prvog reda tenzora elektromagnetnog polja, što predstavlja slučaj čistog zračenja (videti §35), imaćemo na njima, analogno vezi (9.31) za gravitacioni slučaj

$$\left[\frac{\partial F_{\alpha\beta}}{\partial x^\gamma}\right] = \varphi_{\alpha\beta}n_\gamma \tag{9.48}$$

Gde su $\varphi_{\alpha\beta}$ komponente antisimetričnog tenzora poremećaja polja. Ove veličine vezane su, na osnovu Maksvelovih jednačina (9.41) i (9.42) uslovima

$$n_\beta\varphi^{\alpha\beta} = 0, \tag{9.49}$$

$$n_\alpha\varphi_{\beta\gamma} + n_\beta\varphi_{\gamma\alpha} + n_\gamma\varphi_{\alpha\beta} = 0. \tag{9.50}$$

Koji su analogni (9.32), odnosno (9.33). Jednačina (9.42) pisali smo u razvijenom obliku.

Utvrdili smo da samo veličine $\partial_4 F_{4i}$ mogu imati prekide, pa treba prema tome i da sastavimo $\varphi_{\alpha\beta}$. Jasno je da taj tenzor mora imati komponentu u pravcu normale, ili bikarakteristike (fizički rečeno zrake), jer je Σ lokalno zadata sa $x^4 = 0$. Ali s obzirom na nultost Σ, upravna bikarakteristika i tangentna karakteristika se dotiču. Tako možemo, kao i u prethodnom odeljku (videti (9.38), postaviti dva, do na ugao rotacije proizvoljna, ortonormirana vektora $\vec{W}_{(1)}$ i $\vec{W}_{(2)}$, tangentna na Σ, a upravna na $\vec{n}$, tako da proizvoljni vektor $\vec{p}$, prostoran i tangentan na Σ, bude

$$\vec{p} = k\vec{W}_{(1)} + \ell\vec{W}_{(2)},$$

a pomoću ovog

$$\varphi_{\alpha\beta} = n_\alpha p_\beta - n_\beta p_\alpha. \tag{9.51}$$

Ovako obrazovan $\varphi_{\alpha\beta}$ identički zedovoljava (9.49) i (9.50). Otud

Elektromagnetni talesi u gravitacionom polju su transverzalni, a poremećaji na njima dvoparametarski.

U oblasti u kojoj se prostire elektromagnetno zračenje, tenzor energije $\tau_{\alpha\beta}$ ima, u jednačinama gravitacionog polja (9.43), radijacioni oblik koji smo razmatrali u §35. Takav tenzor odgovara singularnom elektromagnetnon polju, to jest onom čije su invarijante jednake nuli.

* * *

Nećemo ulaziti u ispitivanja drugih mogućih oblika tenzora energije, kao ni u razmatranja načelnog pristupa integraciji sistema jednačina gravitacionog i drugih spergnutih polja.

Pomenimo samo neke činjenice. U §30 razmatrali smo hidrodinamičke (komresione) talase u savršenom fluidu. Oni predstavljaju površi prekida normalnih izvoda brzine, gustine i pritiska, dobijene iz jednačina dinamike. Takvi talasi su jednoparametarski u smislu da je skok jednog od pomenutih izvoda proizvoljan. Veličina toga skoka određuje veličine ostalih skokova. Videli smo da su elektromagnetni talasi, kao i gravitacioni, dvoparametarski. Pored te razlike, imamo i činjenicu da je brzina kompresionih talasa u stišljivoj sredini manja od brzine svetlosti, pa se normale na njihovim frontovima (§14) prostorno orijentisane. Mogli smo inače razmatrati hidrodinamičke talase u opštoj relativnosti kao što smo i elektromagnetne talase mogli raznatrati u specijalnoj.

U opštoj relativnosti na **udarnim talasima** u materijalnoj sredini tenzor energije postaje prekidan, pa se na levim stranama (9.6) moraju pojaviti prekidi drugog reda tenzora $g_{\alpha\beta}$. Ali normala na frontu njegovih prekida nije nulto već prostorno orijentisana (videti na primer: I. Lukačević, Ann. Inst. E. Poincaré, str. 219-248, XIV 3, l971).

Osnovne jednačine elektromagnetnog polja materijalnoj sredini izmenjene su jer se pojavljuje indukcija (videti Ch. Møller, The Theory of Relativity, [16], glava 7). Brzina svetlosti je manja nego u vakuumu, pa je obvojni konus elektromagnetnih talasa sadržan u nultom, koji ostaje samo gravitacioni. U elektromagnetnon konusu sadržan je hidrodinamički, čije su obvojnice kompresioni talasi.

Diskutovali smo gravitacione talase pod uslovima a_1) i a_2) §41, a nogući su drugi uslovi i drukčiji prilaz. Kao knjigu koja ie posvećena gravitacionim talasima, navodino monografiju [19] , od. V. Zaharova.

Eksperimentalnom istraživanju gravitacionih talasa prvi je pristupio Veber[6], autor [5]. On je merio, na međusobno udaljenim mestima, rezonanciju kristalno čistih blokova aluminijuma sa treperenjem Zemlje, na frekventnom području koje najverovatnije odgovara gravitacionim talasina. U prvo vrene zapažene pojave su potvrđivale očekivanja, zbog istovremenosti i načina reagovanja udaljenih uređaja. One su ukazivale na to da su talasi transverzalni, i da bi mogli dolaziti iz središta naše galaksije. Ovo je zanimljivo, jer je izgledalo da je ona neko veliko sočivo, koje skuplja i razašilje talasa. Od 1973. međutim, nova merenja vršena preciznijin sredstvina nisu ništa otkrila. Da li je to značilo prestanak neke emisije gravitacionih talasa u Vasioni, i1i ranija merenja nisu bila ispravna, ostaje da se utvrdi u budućaosti.

[6] J. Weber

9.7 Tenzor konformne krivine

Tenzor $C_{\alpha\beta\gamma\delta}$ definisan, za rimanski prostor čiji je broj dimenzija $n \geq 3$, izrazom

$$\begin{aligned} C_{\alpha\beta\gamma\delta} = R_{\alpha\beta\gamma\delta} + \frac{1}{n-2}\left(R_{\alpha\delta}g_{\beta\gamma} + R_{\beta\gamma}g_{\alpha\delta} - R_{\alpha\gamma}g_{\beta\delta} - R_{\beta\delta}g_{\alpha\gamma}\right) + \\ + \frac{R}{(n-1)(n-2)}\left(g_{\alpha\gamma}g_{\beta\delta} - g_{\alpha\delta}g_{\beta\gamma}\right) \end{aligned} \tag{9.52}$$

naziva se **tenzor konformne krivine** ili **Vajlov tenzor**[7]. Može se proveriti da $C_{\alpha\beta\gamma\delta}$ zadovoljava sve algebarske identičnosti kao i Riman-Kristofelov tenzor $R_{\alpha\beta\gamma\delta}$:

$$\begin{aligned} C_{\alpha\beta\gamma\delta} &= -C_{\beta\alpha\gamma\delta} = -C_{\alpha\beta\delta\gamma}, \\ C_{\alpha\beta\gamma\delta} &= C_{\gamma\delta\alpha\beta}, \\ C_{\alpha\beta\gamma\delta} + C_{\beta\gamma\alpha\delta} + C_{\gamma\alpha\beta\delta} &= 0. \end{aligned} \tag{9.53}$$

Ali on identički zadovoljava još jedan izraz, što proističe iz njegove definicije

$$C_{\alpha\gamma} = C_{\alpha\beta\gamma\cdot}^{\quad\ \ \beta} = 0. \tag{9.54}$$

U slučaju trodimenzionalnog prostora se pokazuje da Riman-Kristofelov tenzor ima oblik (videti: P.K. Raševski, [8], 1964, str. 608-614)

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} = g_{\alpha\gamma}S_{\beta\delta} - g_{\beta\gamma}S_{\alpha\delta} + g_{\beta\delta}S_{\alpha\gamma} - g_{\alpha\delta}S_{\beta\gamma},$$

gde je

$$S_{\beta\delta} = \frac{1}{n-2}\left(R_{\beta\delta} - \frac{1}{2(n-1)}Rg_{\beta\delta}\right).$$

Kada se ovo unese u (9.52) dobija se $C_{\alpha\beta\gamma\delta} = 0$. Znači da taj tenzor ima smisla koristiti tek za prostore od četiri dimenzije naše.

Tenzor konformne krivine dobio je naziv po tome što se pri konformnoj korespondenciji metrike $\mathrm{d}s^2$ jednog rimanskog prostora, a matrikom $\mathrm{d}\tilde{s}^2$ drugog, preko neke skalarne funkcije f^2

$$\mathrm{d}\tilde{s}^2 = f^2\mathrm{d}s^2, \tag{9.55}$$

dakle pri

$$\tilde{g}_{\alpha\beta} = f^2 g_{\alpha\beta} \Longleftrightarrow \tilde{g}^{\alpha\beta} = f^{-2}g^{\alpha\beta}, \tag{9.56}$$

on se transformiše po zakonu

$$\tilde{C}_{\alpha\beta\gamma\delta} = f^2 C_{\alpha\beta\gamma\delta} \Longleftrightarrow \tilde{C}^{\alpha}_{\cdot\beta\gamma\delta} = C^{\alpha}_{\cdot\beta\gamma\delta}. \tag{9.57}$$

Pogledajmo svojstva $C_{\alpha\beta\gamma\delta}$ u Svetu opšte relativnosti. Tenzor $R_{\alpha\beta\gamma\delta}$ u njemu ima, na osnovu algebarskih identičnosti oblike (9.53) koje zadovoljava, 20 nezavisnih komponentata. Tenzor $C_{\alpha\beta\gamma\delta}$ zadovoljava, pored (9.53), i veze (9.54), kojih zbog simetrije ima 10. Otud on ima 10 nezavisnih komponenata. Taj broj je jednak broju nezavisnih komponenti $R_{\alpha\beta}$, pa se za izučavanje ustrojstva V_4 možemo poslužiti i jednim i drugim tenzorom, i pomoću $C_{\alpha\beta\gamma\delta}$ ustanoviti ono za šta nije dovoljan samo $R_{\alpha\beta}$. Dve metrike koje imaju jednake tenzore $C_{\alpha\beta\gamma\delta}$ nazivaju se **konformno ekvivalentne**. Na osnovu (9.56) vidimo da su dve konformno korespodentne metrike ujedno i konformno ekvivalentne. Pođimo, obrnuto, od konformne ekvivalentnosti, dakle od (9.57). Ako postavimo konformnu korespodenciju između dve ispravno izabrane hiperpovrši, Σ i $\tilde{\Sigma}$ iveličina kojima su zadati početni uslovi na njima, dobićemo, kao posledicu, konformnu korespondenciju tih metrika u celini,

[7] H. Weyl

Za svaku rimansku metriku važi:

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} = 0 \quad \Rightarrow \quad C_{\alpha\beta\gamma\delta} = 0 \tag{9.58}$$

i

$$\left.\begin{aligned} C_{\alpha\beta\gamma\delta} &= 0 \\ R_{\alpha\beta} &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad R_{\alpha\beta\gamma\delta} = 0 \tag{9.59}$$

Metrika u kojoj je $C_{\alpha\beta\gamma\delta}$ jednak nuli nazivamo **konformno ravanska**. Kako je u slobodnom prostoru tenzor energije $T_{\alpha\beta}$ jednak nuli, to u odsustvu kosmološke konstante Λ, koje se pojavljuje u opštijim gravitacionim jednačinama (9.5), vidimo iz (9.8) i (9.52), da se Riman-Kristofelov tenzor svode na Vajlov. Znači da je u odsustvu kosmološke konstante (videti XII glavu) konformno ravanska metrika u slobodnom prostoru pseudoeuklidska. U oblasti u kojima ima energije ne-gravitacionog porekla metrika nije pseudoeuklidska, ali se iz (9.6) i (9.52) vidi da se tada Riman-Kristofelov tenzor može u potpuosti izraziti pomoću tenzora energije.

Konformno ravanske metrike, poznate i pod nazivom Robertson-Vokerove[8], predstavljaju veliku idealizaciju gravitacionog polja. U idućem odeljku ćemo videti kako se dele opštiji slučajevi. Kretanje planeta, na primer, ne može se relativistički ispravno predstaviti u konformno ravanskoj metrici, jer u nju ne spada centralno-simetrično gravitaciono polje. Ali za velika rastojanja, međugalaktičkog reda veličina, i uz kosmološku konstantu različitu od nule, ona može dobro da posluži.

9.8 Algebarsko razvrstavanje tenzora konformne krivine

U §10 smo algebarski izučili, u Svetu Minkovskog, koeficijente $\lambda_{\alpha\beta}$ infinitezimalne Lorencove transformacije. Kako su $\lambda_{\alpha\beta}$ antisimetrični, zaključci su se mogli odnositi i na tenzore $F_{\alpha\beta}$ elektromagnetnog polja. U §35 smo skrenuli pažnju na vezu između tenzora elektromagnetnog polja i odgovarajućeg tenzora energije, koja važi za njihove sopstvene vrednosti i pravce.

Sad ćemo pristupiti dosta srodnom algebarskom ispitivanju $C_{\alpha\beta\gamma\delta}$ u V_4. Za tu ćemo svrhu prvo uvesti tenzorsku veličinu $g_{\alpha\beta\gamma\delta}$

$$g_{\alpha\beta\gamma\delta} \equiv g_{\alpha\gamma}g_{\beta\delta} - g_{\beta\gamma}g_{\alpha\delta}, \tag{9.60}$$

koja ima, što može proveriti iz (9.52), ista svojstva u odnosu na razmenu indeksa kao i Vajlov tenzor. Zatim ćemo uvesti đivektorsku”veličinu, antisimetrični tenzor $\mu_{\alpha\beta}$, i potražiti rešenje jednačine

$$\left(C_{\alpha\beta\gamma\delta} - \lambda g_{\alpha\beta\gamma\delta}\right)\mu^{\gamma\delta} = 0. \tag{9.61}$$

Kako je naše stanovište lokalno, koristićemo jedan Lorencov posmatrački sistem. Tada se može, s obzirom na dijagonalnost netrike, reći, za parove indeksa $\alpha\beta$ i $\gamma\delta$, jedinstvena korespondencija s indeksima jednog simetričnog simboličnog tenzora g_{AB}, koji idu do broja jednakog broju antisimetričnih elemenata, različitih od nule i nezavisnih u V_4, dakle 6. Može se proveriti da je, za dijagonalan oblik $g_{\alpha\beta}(1,1,1,-1)$ koji koristimo

$$\begin{aligned} &g_{AB} = 0, \quad A \neq B, \\ &g_{AB} = (1,1,1;-1,-1,-1), \quad A = B, \\ &A,B = (23,31,12;14,24,34). \end{aligned} \tag{9.62}$$

Odgovarajuće razvrstavanje indeksa vrši se u tenzoru konformne krivine i u divektoru $\mu^{\alpha\beta}$, na osnovu čega ćemo ih obeležiti sa C_{AB} i D^B, i dobiti simboličnu šestodimenzionalnu vektorsku jednačinu

$$(C_{AB} - \lambda g_{AB})D^B = 0. \tag{9.63}$$

Treba prevesti divektorski formalizam algebarske identičnosti (9.53) i (9.54). Za tu svrhu ćemo matricu elemenata C_{AB} podeliti na četiri submatrice (3×3)

$$(C) = \begin{pmatrix} (K) & (L) \\ (M) & (N) \end{pmatrix}. \tag{9.64}$$

[8] Robertson-Walker

Submatrice (K) (N) moraju biti simetrične, zbog simetrije (C). Ispišimo identičnosti (9.54), imajući u vidu (9.53) idijagonalni karakter $g^{\alpha\beta}$, a zatim obeležiti to po (9.62). Imaćemo, za nedijagonalne elemente tih submatrica:

$$\begin{aligned} C_{21}+C_{54} &= 0, \\ C_{31}+C_{64} &= 0, \\ C_{32}+C_{65} &= 0. \end{aligned} \tag{9.65}$$

Odavde vidimo da su nedijagonalni elementi matrice (K) jednaki odgovarajućim (po mestu) nedijagonalnim elementima matrice (N). Pređimo na dijagonalne elemente. Identičnosti (9.54) daju za njih:

$$\begin{aligned} C_{11}+C_{22}-C_{66} &= 0, \\ C_{44}+C_{55}-C_{46} &= 0, \\ C_{22}+C_{33}-C_{14} &= 0, \\ C_{41}+C_{33}-C_{55} &= 0. \end{aligned} \tag{9.66}$$

Sabiranjem prve i druge, zatim druge i četvrte, najzad druge i treće od gornjih veza, dobijamo:

$$\begin{aligned} C_{11}+C_{44}+C_{22}+C_{55} &= 0, \\ C_{11}+C_{44}+C_{33}+C_{66} &= 0, \\ C_{22}+C_{55}+C_{33}+C_{66} &= 0. \end{aligned}$$

Ako stavimo

$$C_{11}+C_{44}=a, \quad C_{22}+C_{55}=b, \quad C_{33}+C_{66}=c,$$

ovaj sistem će nam dati

$$a=b=c=0.$$

Sleduje dakle da su i dijagonalni elementi (K) jednaki odgovarajućim elementima (N), s promenjenim znakom. Druga jednačina u (9.66) nam kaže da su tragovi submatrica (K) i (N) jednaki nuli.

Može se isto tako pokazati da su matrice (L) i (M) međusobno jednake, i da su njihovi tregove jednaki nuli. Znači da se matrica elemenata C_{AB} svodi na oblik

$$(C)=\begin{pmatrix} (K) & (L) \\ (L) & -(K) \end{pmatrix}, \tag{9.67}$$

uz

$$k_{11}+k_{22}+k_{33}=\ell_{11}+\ell_{22}+\ell_{33}=0. \tag{9.68}$$

Gde su

(9.63)

$$\|C_{AB}-\lambda g_{AB}\| = \begin{Vmatrix} K-\lambda I & L \\ L & -K+\lambda I \end{Vmatrix}. \tag{9.69}$$

Matrica sistema (9.55) je svodljiva. Zaista, pomnožimo u (9.69) desnu kolonu submatrice sa i i oduzmimo je od leve, zatimtako dobijenu gornju vrstu submatrice ponovo pomnožimo sa i i oduzmimo od donje. Dobićemo determinantu (9.69) u obliku

$$\begin{Vmatrix} K-\lambda I-iL & L \\ 0 & -K+\lambda I-iL \end{Vmatrix} = \|K+iL-\lambda I\| \times \|K-iL-\lambda I\| = 0 \tag{9.69'}$$

Ovim je karakteristični polinom šestog stepena faktorizovan sa dva polinoma trećeg stepena. Kako je determinanta sastavljena iz konjugovanih elemenata polazne matrice jednaka njenoj konjugovanoj vrednosti, a i stepeni konjugovanih brojeva su konjugovane vrednosti stepena polaznih, sledi da trojci λ_m korenova prve subdeterminante odgovara konjugovana trojka $\bar{\lambda}_m$ korenova druge.

Tregovi submatrica (K) i (L) jednaki su nuli po (9.68). Iz (9.69′) se vidi da nove submatrice imaju takođe tragove jednake nuli. Tragovi su jednaki, na osnovu iste veze, zbirovima korenova oba polinoma trećeg stepena koji faktorizuje (9.69). Dakle:

$$\sum_m \lambda_m = \sum_m \bar{\lambda}_m = 0. \tag{9.70}$$

Vratimo se sistemu (9.63), da u njega unesemo sopstvene vrednosti λ_m i $\bar{\lambda}_m$. Zato ćemo divektor D^A razbiti na dva realna "trovektora" $D^A(D^m;\tilde{D}^n)$. Kada taj sistem ispišemo u obliku (9.69) imaćemo:

$$\begin{aligned}(k_{mn} - \lambda\,\delta_{mn})\,D^n + \ell_{mn}\tilde{D}^n &= 0,\\ \ell_{mn}D^n + (-k_{mn} + \lambda\,\delta_{mn})\,\tilde{D}^n &= 0.\end{aligned}$$

Ako drugi niz jednačina pomnožimo sa i i saberemo sa prvim, imaćemo

$$(k_{mn} + i\ell_{mn} - \lambda\,\delta_{mn})\,(D^n - i\tilde{D}^n) = 0, \quad \text{gde je } m,n = 1,2,3. \tag{9.71}$$

Ovaj kompleksni sistem linearnih jednačina odgovara dvostruko brojnijem realnom sistemu, pa je time (9.63) potpuno izražen u kompleksnom obliku.

Algebarsko razvrstavanje tenzora konformne krivine predstavlja vrlo značajan rezultat A.Z. Petrova (videti [13], str. 101-133). One se svode na sledeće tri mogućnosti:

a) C_{AB} je tipa I ako su tri korena λ_m međusobno različita,

b) C_{AB} je tipa II ako su dva korena međusobno jednaka,

c) C_{AB} je tipa III ako su sva tri korena međusobno jednaka. Tada je $\lambda_m = \bar{\lambda}_m = 0$.

Slučaj I naziva se algebarski opšti, a slučajevi II i III algebarski posebni.

Submatrice (K) i (L) svode se na lokalne algebarski svedene oblika. Ne ulazeći u pojedinosti izvođenja, ovi oblici se dovode na sledeće kanonske oblike:

1) U slučaju I

$$(K) = \begin{pmatrix} \xi_1 & 0 & 0 \\ 0 & \xi_2 & 0 \\ 0 & 0 & \xi_3 \end{pmatrix}, \quad (L) = \begin{pmatrix} \eta_1 & 0 & 0 \\ 0 & \eta_2 & 0 \\ 0 & 0 & \eta_3 \end{pmatrix}, \tag{9.72}$$
$$\sum \xi_n = \sum \eta_n = 0, \quad \lambda_n = -(\xi_n + i\eta_n).$$

2) U slučaju II

$$(K) = \begin{pmatrix} 2\xi & 0 & 0 \\ 0 & -\xi + \nu & 0 \\ 0 & 0 & -(\xi + \nu) \end{pmatrix}, \quad (L) = \begin{pmatrix} 2\eta & 0 & 0 \\ 0 & -\eta & \nu \\ 0 & \nu & -\eta \end{pmatrix}, \tag{9.73}$$
$$\sum \xi_1 = -2(\xi + i\eta), \quad \lambda_2 = \lambda_3 = \xi + i\eta.$$

3) U slučaju III

$$(K) = \begin{pmatrix} 0 & \nu & 0 \\ \nu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (L) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \nu \\ 0 & \nu & 0 \end{pmatrix}, \tag{9.74}$$
$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$$

4) Iz slučaja I izdvaja se slučaj D, kad se stavi $\lambda_2 = \lambda_3$, što predstavlja dva uslova, s obzirom na jednakost realnih i imaginarnih delova. Isti se rezultat dobija i kad se u slučaju II stavi $\nu = 0$.

5) Iz slučaja II izdvaja se, opet uz dva uslova $\xi = \eta = 0$, slučaj N.

6) Poslednji je slučaj nulti, kada je Vajlov tenzor jednak nuli, pa je matrica konformno ravanska.

Navešćemo bez izvođenja Debever-Penrouzovu[9] jednačinu, u kojoj su zastupljeni Vajlov tenzor i glavni nulti vektor k^α, a koja glasi

[9] Debever-Penrose

$$k_{[\alpha}C_{\beta]\gamma\delta[\varepsilon}k_{\xi]}k^{\gamma}k^{\delta} = 0. \tag{9.75}$$

Prethodnih šest slučajeva se redom pojavljuju, uz upojedinačenije lpkalno geometrijske oblike:
1) sve četiri karakteristična korena su prosta,
2) jedan koren je dvostruki, dva su prosta,
3) dva dvostruka korena,
4) jedan koren je trostruki, jedan je prost,
5) koren je četvorostruki,
6) konformno ravanski slučaj, (9.75) je trivijalno zadovoljen.

U svim slučajevima osim I postoje, pored (9.75), prostije veze koje zadovoljavaju k^{α}. Ova pitanja sa pojedinostima izložena su u nekim knjigama (videti npr: M. Carmeli, Group Theoty and General Relativity, [27], str. 185; C.W. Kilmister, [22], str. 319).

9.9 Liov izvod

Poći ćemo, sličnoonom što smo imali u §10 za infintezimalnu Lorencovu transformaciju, od preslikavanja $P \to Q$, gde su $P(x)$ i $Q(\bar{x})$ odgovarajuće tačke punktualne transformacije

$$\bar{x}^{\alpha} = x^{\alpha} + \varepsilon\lambda^{\alpha}(x) + \mathscr{O}^{\alpha}(\varepsilon^2) \tag{9.76}$$

prostora V_n u samog sebe. Ovde je ε linearizovani infinitezimalni parametar transformacije, λ^{α} vektorsko polje koje vrši prevođenje koordinata. Takvoj transformaciji mogu se podvrgnuti različiti geometrijski objekti u V_n. Mi ćemo se ovde ograničiti na apsolutne tenzorske veličine.

Krenimo od skalarne funkcije $f(x^{\alpha})$. Imamo

$$f_Q = f(\bar{x}^{\alpha}), \quad f_P = f(x^{\alpha}).$$

Njen priraštaj u pravcu vektorskog polja λ^{α} iznosi, posle linearizacijje

$$f(\bar{x}^{\alpha}) = f(x^{\alpha}) + \varepsilon\lambda^{\beta}\frac{\partial f(x^{\alpha})}{\partial x^{\beta}}, \quad x^{\alpha} \to \bar{x}^{\alpha}.$$

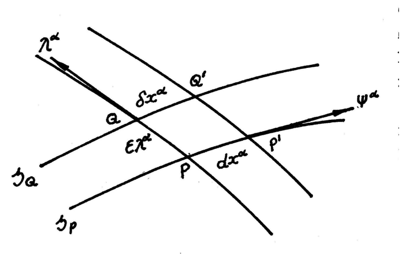
Na osnovu ovakvog priraštaja definisan je Liov[10] izvod

$$\mathfrak{L}_{\lambda} f \equiv \frac{f(\bar{x}) - f(x)}{\varepsilon} = \lambda^{\alpha}\frac{\partial f}{\partial x^{\alpha}}. \tag{9.77}$$

Ovaj naziv dat je u čast tvorca teorije transformacionih grupa, ma da je operator $\mathfrak{L}_{\lambda}$ uveden tridesetih godina XX veka, nekoliko decenija posle njegove smrti. On je vezan za pojam prevođenja duž vektorskog polja, pri kojem se vrši takvo diferenciranje. Iz (9.77) vidimo da se Liov izvod skalara svodi na izvod u pravcu vektora λ^{α}.

Potražimo Liov izvod kontravarijantnog vektora ψ^{α}, zadatog u tački P. Uslovljavamo vektorsko polje ψ^{α} da obrazuje putanje, isto kao i λ^{α}, za koje se to vidi iz (9.76). Obeležimo aa $\mathrm{d}x^{\alpha}$ pomeranje, duž putanje s_P, vektora ψ^{α} iz tačke P u blisku tačku $\bar{P}$. Uočimo drugu putanju s_Q vektora istog polja kroz tačku Q , blisku P, odabranu tako da leži na preseku te putanje s putanjom τ_P polja λ^{α} kroz P. Postavimo najzad, kroz $\bar{P}$, putanju $\tau_{\bar{P}}$ polja λ^{α}, čiji je presek s putanjom polja ψ^{α} kroz Q tačka $\bar{Q}$. Obeležimo sa δx^{α} (videti sliku 9.3). Ovim podrazumevamo da se dovoljno bliske putanje dva posmatrana vektorska polja presecaju u parovima, odnosno da je ”mimoilaženje”tangentnih vektora zanemarljivo prema redu veličine pomeranja $P\bar{P}$ i $Q\bar{Q}$, odnosno PQ i $\bar{P}\bar{Q}$, koje ćemo obeležiti sa $\varepsilon\lambda_{\beta}$ i $\varepsilon\lambda_{\bar{P}}$.

[10] S. Lie



Slika 9.3: Liov izvod.

Ono što je prethodno rečeno povlači dakle

$$\delta x^\alpha + \varepsilon\lambda_P^\alpha = \mathrm{d}x^\alpha + \varepsilon\lambda_{\bar{P}}^\alpha + \mathscr{O}^\alpha(\varepsilon, \mathrm{d}x). \tag{9.78}$$

Odavde je, ako zamenimo ostatak $\mathscr{O}^\alpha(\varepsilon, \mathrm{d}x)$

$$\delta x^\alpha = \mathrm{d}x^\alpha + \frac{\partial \lambda^\alpha}{\partial x^\beta}\mathrm{d}x^\beta.$$

S obzirom na to da ψ_P^α i ψ_Q^α leže na svojim putanjama, dobijemo kad $s_P \to s_Q$, na osnovu srazmernosti tangentnih vektora i njihovih priraštaja

$$\psi_{P\to Q}^\alpha = \psi_P^\alpha + \varepsilon\Psi^\beta\frac{\partial \lambda^\alpha}{\partial x^b}. \tag{9.79}$$

Sad možemo pisati

$$\mathfrak{L}_\lambda\psi^\alpha = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\psi_Q^\alpha - \psi_{P\to Q}^\alpha}{\varepsilon},$$

odnosno, iz (9.79)

$$\mathfrak{L}_\lambda\psi^\alpha = \lambda^\beta\frac{\partial \psi^\alpha}{\partial x^\beta} - \psi^\beta\frac{\partial \lambda^\alpha}{\partial x^\beta}. \tag{9.80}$$

Može se proveriti da se (9.80) ne menja, kao uostalom ni Liov izvod bilo kojeg geometrijskog objekta, ako se umesto parcijalnih izvoda stave kovarijantni. Znači da Liov izvod, kao i Bjankijev (apsolutni) izvod, ne menja tenzorsku valentnost diferencirane veličine. Za skalarnu funkciju to je očigledno iz (9.77). Tu činjenicu ćemo iskoristiti da bismo dobili Liov izvod kovarijantnog vektorskog polja ξ_α. Ako stavimo $\varphi = \xi_\alpha\psi^\alpha$ imaćemo, posle linearizacije priraštaja:

$$\mathfrak{L}_\lambda\varphi = \xi_\alpha\mathfrak{L}_\lambda\psi^\alpha + \psi^\alpha\mathfrak{L}_\lambda\xi_\alpha. \tag{9.81}$$

Što na osnovu (9.80) glasi u razvijenom oblik

$$\xi_\alpha\left(\lambda^\beta\frac{\partial \psi^\alpha}{\partial x^\beta} - \psi^\beta\frac{\partial \lambda^\alpha}{\partial x^\beta}\right) + \psi^\alpha\mathfrak{L}_\lambda\xi_\alpha = \lambda^\beta\left(\frac{\partial \psi^\alpha}{\partial x^\beta}\xi_\alpha + \psi^\alpha\frac{\partial \xi_\alpha}{\partial x^\beta}\right)$$

ili

$$\psi^\alpha\left(\mathfrak{L}_\lambda\xi_\alpha - \lambda^\beta\frac{\partial \xi_\alpha}{\partial x^\beta} - \xi_\beta\frac{\partial \lambda^\beta}{\partial x^\alpha}\right) = 0.$$

Kako ψ^α i ξ_α mogu biti proizvoljno izabrani, sledi

$$\mathfrak{L}_\lambda\xi_\alpha = \lambda^\beta\frac{\partial \xi_\alpha}{\partial x^\beta} + \xi_\beta\frac{\partial \lambda^\beta}{\partial x^\alpha} \tag{9.82}$$

Treba dobro uočiti činjenicu da su ova pravila diferenciranja različita za kovarijantne i kontravarijantne vektore Metrički tenzor, pošto podiže ili spušta indekse, nije u opštem slučaju konstantan u odnosu na operator $\mathfrak{L}_\lambda$.

Diferenciranje skalara dobijenog kontrakcijom svih indeksa nekog tenzora s odgovarajućim brojem vektorakih polja, daje induktlvno pravilo za Liov izvod proizvoljnog apsolutnog tenzora. Primera radi, navešćemo izraz za Liov izvod nekog kovarijantnog tenzora drugog reda $v_{\alpha\beta}$

$$\mathfrak{L}_\lambda v_{\alpha\beta} = \lambda^\gamma \frac{\partial v_{\alpha\beta}}{\partial x^\gamma} + v_{\gamma\beta} \frac{\partial \lambda^\gamma}{\partial x^\alpha} + v_{\alpha\gamma} \frac{\partial \lambda^\gamma}{\partial x^\beta}. \tag{9.83}$$

Na osnovu svega što je rečeno, linearizovanje infinitezimalne transformacije (9.76) nekog tenzora $T^{\alpha\cdots}_{\beta\ldots}$, daje vrednost toga tenzora u istoj tački prostora, izmenjenu do na ”Liov”priraštaj. Da bi se to proverilo, treba povezati po svim pravilima, pomoću (9.76) , tenzor $T^{\alpha\cdots}_{\beta\ldots}$ s njegovim transformatom $T^{\bar{\alpha}\cdots}_{\bar{\beta}\ldots}$.

Opšta svojstva operatora $\mathfrak{L}_\lambda$ iste su kao i operatora parcijalnog ili kovarijantnog diferenciranja. On je linearan, podleže Lajbnicovom pravilu diferenciranja proizvoda, što smo već iskoristili u (9.81), a Kronekerov simbol δ^α_β ponaša se u odnosu na njega kao konstanta.

9.10 Izometrija. Stacionarnost metrike

U slučaju kada je Liov izvod metričkog tenzora jednak nuli

$$\mathfrak{L}_\lambda g_{\alpha\beta} = \lambda^\gamma \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\gamma} + g_{\gamma\beta} \frac{\partial \lambda^\gamma}{\partial x^\alpha} + g_{\alpha\gamma} \frac{\partial \lambda^\gamma}{\partial x^\beta} = 0. \tag{9.84}$$

Kažemo da infinitezimalna transformacija (9.76) predstavlja izometriju. Jednačine (9.84) dovešćemo u tenzorski oblik, koji je uobičajen, na sledeći način:

$$\lambda^\gamma \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\gamma} + \frac{\partial (g_{\beta\gamma}\lambda^\gamma)}{\partial x^\alpha} + \frac{\partial (g_{\alpha\gamma}\lambda^\gamma)}{\partial x^\beta} - \lambda^\gamma \frac{\partial g_{\beta\gamma}}{\partial x^\alpha} - \lambda^\gamma \frac{\partial g_{\alpha\gamma}}{\partial x^\beta} =$$
$$\frac{\partial \lambda_\beta}{\partial x^\alpha} + \frac{\partial \lambda_\alpha}{\partial x^\beta} - \lambda_\delta g^{\gamma\delta} \left(\frac{\partial g_{\beta\gamma}}{\partial x^\alpha} + \frac{\partial g_{\gamma\alpha}}{\partial x^\beta} - \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\gamma} \right) = 0$$

Što predstavlja

$$\nabla_\alpha \lambda_\beta + \nabla_\beta \lambda_\alpha = 0. \tag{9.85}$$

Jednačine (9.85) zovu se Kilingove[11], a vektori λ_α, koji ih zadovoljavaju, Kilingovi vektori. S obzirom na ono što smo rekli u prethodnom odeljku, mogli smo odmah zameniti parcijalne izvode kovarijantnim u (9.84), i dobiti (9.85). Ovim putem smo išli zato da bismo podvukli činjenicu da obrnuto ne važi, to jest da se kovarijantni izvodi u (9.85) ne mogu zameniti parcijalnim.

Čitalac će se možda setiti kurseva racinalne mehanike mehanike (na primer Anđelić-Stojanović, Racionalna mehanim, [11], str. 71-731), gde polje brzina nekog tela u trodimenzionom euklidskom prostoru prestavlja Kilingove vektore onda i samo onda kada je to telo kruto. Takva polja određuju odsustvo deformacije, samo što mi sada ne posmatramo odsustvo deformacije neke neprekidne sredine u prostoru, nego samog prostora, odnosno metrike.

Kada posle transformacije $(x) \to (\bar{x})$ metrički tenzor $g_{\alpha\beta}(\bar{x})$, postane funkcija novih koordinata istog oblika kao i ranijih $g_{\alpha\beta}(x)$, metrika se naziva **forminvarijantna**. Pitanje forminvarijantnoti pri najopštijoj transformaciji vrlo je široko, stoga ćemo se ograničiti na leariizovane infinitezimalne transformacije (9.76). Ako stavimo

$$g_{\alpha\beta}(x) = g_{\gamma\delta(\bar{z})} \frac{\partial \bar{x}^\gamma}{\partial x^\alpha} \frac{\partial \bar{x}^\delta}{\partial x^\beta}, \tag{9.86}$$

[11] W. Killing

gde se podrazumeva da su koordinate tenzora $g_{\alpha\beta}$ na levoj i desnoj strani forminvarijantne imaćeno, posle zamene iz (9.60) i linearizacije po ε

(9.87)

što predstavlja jednačine (9.84) izometrija. Ako u (9.87) uneseno infinitezinmlne transformacije (9.76) moženo ponovo konstrusati (9.86). Otud zaključak da za infinitezimalne transformacije (9.76) metrika ostaje forminvrijantna onda i samo onda kada određuju izometrije, odnosno kada vektorsko polje λ^α, koje vrše transformaciju, zadovoljava sistem (9.85).

Neka postoji polje vremenski orijentisanih vektora u^α ($g_{\alpha\beta}u^\alpha u^\beta < 0$) takvo da metrika V_4 u odnosu na njega ima svojstov izometrije. Podesimo uslov da se duž putanja toga polja menja samo koordinata x^4, odabrana tako da vektorsko polje glasi $u^\alpha(O,O,O;1)$. Jednačine (9.87), kao što se neposredno vidi, dobiju oblik

$$\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^4} = 0. \tag{9.88}$$

U ovakvom sistemu, koji je prilagođen posmatranom problenu (takav se sistem i naziva adaptiran, to jest prilagođen), vidimo da metrika ne zavisi od svetskih linija date kongruencije. Ako postoji, kao u slučaju (9.88) tok vremena od kojeg metrika ne zavisi, kažemo da je stacionarna.

Pretpostavimo da je u^α vektorsko polje konstantnog intenziteta. Pošto ono zadovoljava sistem (9.85), koji je ravnopravan sa (9.88), imamo

$$u^\alpha\left(\nabla_\alpha u_\beta + \nabla_\beta u_\alpha\right) = u^\beta \nabla_\beta u_\alpha = 0. \tag{9.89}$$

Znači da je tada kongruencija putanja u^α geodezijska na V_4.

9.11 Geodezijske vremenske linije u V_4

Neka je data kongruencija geodezijskih svetskih linija četvorobrzina u^α. Njihove diferencijalne jednačine možemo razvijanjem kovarijantnih izvoda, ispisati u obliku

$$u^\beta \nabla_\beta u_\alpha = u^\beta\left(\nabla_\beta u_\alpha - \nabla_\alpha u_\beta\right) = u^\beta\left(\frac{\partial u_\alpha}{\partial x^\beta} - \frac{\partial u_\beta}{\partial x^\alpha}\right) = 0. \tag{9.90}$$

Uzmimo neku prostorno orijentisanu hiperpovrš Σ, i posmatrajmo geodezijske linije upravne na njoj. One moraju biti vremenski orijentisane. Odaberimo koordinatni sistem tako da Σ bude lokalno zadana sa $x^4 = 0$, i da na njoj budu $(g_{i4})_0 = 0$, dok se x^4 ravnomerno menja duž svetskih linija kongruencije od 0 pa nadalje. U takvom sistcmu je lokalno $u^\alpha(0,0,0;1)$, pa jednačine (9.90) na Σ glase:

$$\left(\frac{\partial u_i}{\partial x^4} - \frac{\partial u_4}{\partial x^i}\right)_) = 0, \quad i = 1,2,3. \tag{9.91}$$

Pošto je izraz u zagradi na levoj strani poslednje jednakosti u (9.90) rotor vektora u_α, on zadovoljava sistem identičnosti:

$$\frac{\partial}{\partial x^\gamma}\left(\frac{\partial u_\alpha}{\partial x^\beta} - \frac{\partial u_\beta}{\partial x^\alpha}\right) + \frac{\partial}{\partial x^\beta}\left(\frac{\partial u_\gamma}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial u_\alpha}{\partial x^\gamma}\right) + \frac{\partial}{\partial x^\alpha}\left(\frac{\partial u_\beta}{\partial x^\gamma} - \frac{\partial u_\gamma}{\partial x^\beta}\right) = 0,$$

među kojima je

$$\frac{\partial}{\partial x^4}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x^j} - \frac{\partial u_j}{\partial x^i}\right) + \frac{\partial}{\partial x^j}\left(\frac{\partial u_4}{\partial x^i} - \frac{\partial u_i}{\partial x^4}\right) + \frac{\partial}{\partial x^i}\left(\frac{\partial u_j}{\partial x^4} - \frac{\partial u_4}{\partial x^j}\right) = 0. \tag{9.92}$$

Kako koordinate x^i za $x^4 = 0$ leže na Σ, na kojoj važi (9.91), sledi da su izvodi u pravcima x^i izraza u zagradama jednaki nuli. Otud se (9.92) svodi na

$$\frac{\partial}{\partial x^4}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x^j} - \frac{\partial u_j}{\partial x^i}\right) = 0. \tag{9.93}$$

Komponente u_i jednake su nuli na Σ zbog toga što je

$$u_i = g_{ij}u^j + g_{i4}u^4 = g_{i4} = 0,$$

pa je, na osnovu toga i izraz u zagradi (9.93) jednak nuli na Σ

$$\left(\frac{\partial u_i}{\partial x^j} - \frac{\partial u_j}{\partial x^i}\right) = 0. \tag{9.94}$$

Činjenica da se u (9.91) i (9.93) pojavljuju izvodi promenljivih u pravcu normalnom na Σ pokazuje da su veličine na levim stranama (9.91) i (9.94) jednake nuli i u nekoj okolini Σ, pa će u toj okolini sve jednačine zajedno glasiti:

$$\frac{\partial u_\alpha}{\partial x^\beta} - \frac{\partial u_\beta}{\partial =}\nabla_\beta u_\alpha - \nabla_\alpha u_\beta = 0. \tag{9.95}$$

Odavde sledi da je gradijent nekog skalarnog polja φ, konstantnog na Σ. Ponavljanjem tog postupka na nekoj dovoljno bliskoj hiperpovrši $\bar{\Sigma}$, u okolini Σ, možemo utvrditi da (9.95) važi na proizvoljno mnogo hiperpovrši sa okolinama, dakle u jednoj oblasti Ω od V_4. Za svaku vrednost $\varphi = \text{const.}$ dobijamo jednu hiperpovrš upravnu na svetskim linijama u^α.

Ako se φ menja samo sa koordinatom x^4, u_α će imati komponente $u_\alpha(0,0,0;-1)$. Biće dakle

$$g_{44} = g^{44} = -1.$$

Otud se mogu naći koordinatni sistemi u odnosu na koje se metrika piše u obliku

$$\varepsilon \mathrm{d}s^2 = g_{ij}\mathrm{d}x^i\mathrm{d}x^j - (\mathrm{d}x^4)^2. \tag{9.96}$$

Ovo je oblik koji metrika ima u odnosu na jedan **Gausov normalni koordinatni sistem.**, kraće posnat kao Gausov sistem. Obrnuto, napišimo, za hiperpovrš Σ, levu stranu diferencijalnih jednačina geodezijskih linija u pravcu priraštaja koordrnate x^4 sistema (9.96). Imaćemo

$$\frac{\mathrm{d}^2x^\alpha}{\mathrm{d}s^2} + \Gamma^\alpha{}_{\beta\gamma}\frac{\mathrm{d}x^\beta}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}x^\gamma}{\mathrm{d}s} = \Gamma^\alpha{}_{44}. \tag{9.97}$$

zbog $g_{i4} = g^{i4} = 0$ biće

$$\Gamma^\alpha{}_{44} = \frac{1}{2}g^{\alpha 4}\frac{\partial g_{44}}{\partial x^4} = 0.$$

Sledi da su u pravcu koordinate x^4 zadovoljene jednačine kongruencije

$$u^\beta\nabla_\beta u_\alpha = 0, \tag{9.98}$$

što je trebalo dokazati.

Razmatranja §38,39 daju fizičku stranu onog što smo ovde analitički dobili. Zaista, zamislimo sistem koji je sastavljen iz velikog broja materijalnih tačaka, koje u početku miruju u gravitacionom polju. Merenje vromena na svakoj čestici neka počne od trenutka, jedinstvenog za celi sistem, kada po činje slobodno padanje. Ako uza svaku od njih vežemo po jedan inercijalni sistem $\mathscr{O}\bar{x}$ nazovimo ga **saputnički sistem**, sva će uzajamna rastojanja u početnom trenutku biti, po merilima tih posmatrača, prostorna. Ako su x^i i x^4 tekuće koordinate prostornog i vremenskog tipa u tom polju, imaćemo

$$\left(\frac{\partial \bar{x}^4}{\partial x^i}\right)_0 = 0, \quad \left(\frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^4}\right)_0 = 0. \tag{9.99}$$

U svakom od saputničkih repera[12] metrika ima lokalno pseudoeuklidske odlike, i neka u bilo kojem od njih komponente metričkog tenzora budu $\eta_{\alpha\beta}(\delta_{ij};-\delta_{4\gamma})$. Tada je:

$$g_{i4}(x^j;0) = \left(\eta_{\alpha\beta}\frac{\partial \bar{x}^\alpha}{\partial x^i}\frac{\partial \bar{x}^\beta}{\partial x^4}\right)_0 = 0. \tag{9.100}$$

[12]eng. comoving frames

Prvobitno stanje mirovanja materijalnog sistema određuje transverzalnu hiperpovrš $\sum$, dok su putanje slobodnog padanja geodezijske linije (videti §39). Dalje sve ide onako kako je bilo izvedeno u obrascima ((9.90)-(9.98). Time smo dobili prirodno definisane Gausove koordinate

$$\varepsilon \mathrm{d}s^2 = g_{ij}(x^k;x^4)\,\mathrm{d}x^i\mathrm{d}x^j - (\mathrm{d}x^4)^2. \tag{9.101}$$

Pretpostavimo da u^α pradstavlja polje Kilingovih vektora stalnog intenziteta (znamo da se pogodno izabranim parametrom za vreme to uvek može postići). Putanje tog polja će biti, na osnovu (9.95), geodezijske linije. Ako postoji transverzala Σ tih svetskih linija, dobićemo, na osnovu (9.85) (gde je $\lambda_\alpha \equiv u_\alpha$) i (9.95) da je

$$\nabla_\alpha u_\beta = 0. \tag{9.102}$$

Četvorobrzine tada obrazuju kovarijantno konstantno polje.

Polja transverzalnih vremenskih Kilingovih vektora koja zadovoljavaju jednačine (9.102) dopuštaju, na osnovu (9.88) i (9.96), koordinatni sistem u odnosu na koji je

$$g_{44} = -1, \quad g_{i4} = 0, \quad \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^4} = 0. \tag{9.103}$$

Metrika koja zadovoljava uslove:

$$\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^4} = 0, \quad g_{i4} = 0, \tag{9.104}$$

naziva se **statička metrika**. Jasno je da se transformacijom koordinata statička metrika može dovesti na normalni oblik (9.103). U sledećim odeljcima ćemo naići na nju.

9.12 Zadaci

Zadatak 19

Izvesti, na osnovu (9.17), jednačine (9.18) i (9.19), i ispitati slučaj vremenski orijentisane hiperpovrši Σ.

Rešenje

Zadatak 20

Pokazati da su, u (9.64), matrice (L) i (M) međusobno jednake, i da su im tragovi jednaki nuli.

Rešenje

Zadatak 21

Ako je $\bar{g}_{\alpha\beta} = f^2 g_{\alpha\beta}$, naći eksplicitan izraz za $\bar{\Gamma}^\alpha_{\beta\gamma}$ u funkciji $g_{\alpha\beta}$. Proveriti izraz za $\bar{C}^\alpha_{\cdot\beta\gamma\delta}$.

Rešenje

Zadatak 22

Pokazati da se u obrascima (9.82) i (9.83), za Liov izvode vektora i tenzora, parcijalni izvodi mogu zameniti kovarijantnim.

Rešenje

Zadatak 23

Napisati, na osnovu (9.76), izraze za $\dfrac{\partial \bar{x}^{\alpha}}{\partial x^{\beta}}$, a zatimsastaviti Liov priraštaj transformata proizvoljnog tenzora u posmatranom događaju.

Rešenje

Zadatak 24

Izvesti, iz (6.99′), osnovne veze koje zadovoljavaju poremećaji promenljivih na frontovima hidrodinamičkih talasa.

Rešenje

Zadatak 19

10. Neka rešenja gravitacionog polja

10.1 Prostor sa sfernom simetrijom

Posmatrajmo metriku čije prostorne komponente imaju svojstvo sferne ili centralne simetrije u odnosu na određeni događaj (ili svetsku liniju, ako posmatramo njegovu istoriju). Tu ćemo taču smatrati za središte tela simetričnog oblika, čija je masa raspoređena po koncentričnim slojevima jednakih gustina. Za gravitaciono polje takvog tela smatraćemo da može zavisiti samo od vremena i rastojanja. Takvo polje naziva se **sferno simetrično**.

Sferno simetrično gravitaciono polje ćemo ispitivati uz dve pretpostavke:

1) Za radijalnu promenljivu, obeležimo je sa r, zadovoljićemo se izrazima. koji važe u euklidskoj metrici:

$$r = \left\{ \sum_{i=1}^{3} (x^i)^2 \right\}^{1/2}, \quad r\,\mathrm{d}r = x^i\,\mathrm{d}x^i. \tag{10.1}$$

2) Smatramo da gravitaciono polje tog izvora iščezava u beskonačnosti, usled čega je tamo metrika Minkovskog:

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}s_M^2, \quad r \to \infty. \tag{10.2}$$

Da bismo razjasnili (10.1) uvešćemo sferne uglove θ i φ oko središta simetrije (izvora). Zoordinate x^i su, kao i u euklidskoj metrici, definisane sa: definisane:

$$\begin{aligned} x^1 &= r\sin\theta\cos\varphi, \\ x^2 &= r\sin\theta\sin\varphi, \\ x^3 &= r\cos\theta. \end{aligned} \tag{10.3}$$

Ako bismo izvršili smenu cikličnih promenljivih $(\theta,\varphi) \to (\bar{\theta},\bar{\varphi})$, uslovi (10.1) bi ostali neizmenjeni. Pri transformacijama na koncentričnim sferama, dakle pri $r = \text{const.}$, $t = \text{const.}$, metrika ostaje, po (9.86), forminvarijantna.

U nestacionarnom polju radijalno širenje ili skupljanje metrike tokom vremena neće menjati njen sferno simetrični oblik. Ove transformacije su, dakle, izometrije (9.87). Inače, uz rezervu forminvarijantnosti dela koji leži na sferi, koeficijenti elementarnog intervala u celini opet ne zavise od ugaonih promenljivih. Potražićemo stoga interval oblika

$$\varepsilon\,\mathrm{d}s^2 = E(r,t)\,\mathrm{d}r^2 + F(r,t)(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta\,\mathrm{d}\varphi^2) + G(r,t)\,\mathrm{d}r\mathrm{d}t + H(r,t)\mathrm{d}t^2. \tag{10.4}$$

Kako interval Minkovskog glasi

$$\varepsilon\,\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}r^2 + r^2\left(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta\mathrm{d}\varphi^2\right) - c^2\,\mathrm{d}t^2, \tag{10.5}$$

to na osnovu (10.2) sledi da $F(r,t)$ ne može biti identički jednako konstanti.

Izvršimo transformaciju $(r,\theta,\varphi;t) \to (\bar{r},\bar{\theta},\bar{\varphi};\bar{t})$, koja će uprostiti (10.4), održavajući sfernu simetriju. Ispitajmo da li je moguće naći sistem u kojem će koeficijent uz član $\mathrm{d}\bar{r}\mathrm{d}\bar{t}$ biti jednak nuli, dok bi uz deo intervala koji leži na sferi stajalo $\bar{r}^2$. Takvu nesingularnu transformaciju ćemo izvesti iz dva koraka. Stavićemo prvo:

$$\bar{r}^2 = F(r,t), \quad \bar{\theta} = \theta, \quad \bar{\varphi} = \varphi; \quad \bar{t} = t. \tag{10.6}$$

Zatim ćemo preći na pomoćne promenljive $\bar{\bar{r}}$ i $\bar{\bar{t}}$:

$$\bar{\bar{r}} = \bar{r}, \quad \bar{\bar{t}} = f(\bar{r},\bar{t}) \quad \Rightarrow \quad \bar{t} = g(\bar{\bar{r}},\bar{\bar{t}}), \tag{10.7}$$

gde funkciju f, odnosno g, treba odrediti tako da u intevalu (10.4) koeficijent uz mešoviti član bude jednak nuli. Iz (10.7) je:

$$\mathrm{d}\bar{r} = \mathrm{d}\bar{\bar{r}}, \quad \mathrm{d}\bar{t} = \frac{\partial g}{\partial \bar{\bar{r}}}\mathrm{d}\bar{\bar{r}} + \frac{\partial g}{\partial \bar{\bar{t}}}\mathrm{d}\bar{\bar{t}} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}\bar{\bar{t}} = \left(\mathrm{d}\bar{t} - \frac{\partial g}{\partial \bar{\bar{r}}}\mathrm{d}\bar{\bar{r}}\right)\left(\frac{\partial g}{\partial \bar{\bar{t}}}\right)^{-1}. \tag{10.8}$$

Ako sad sastavimo metričku formu u odnosu na pomoćne promenljive $\bar{\bar{r}}$, $\bar{\bar{t}}$, izražene pomoću (10.8) imaćemo, ako njene koeficijente posle izvršenih transformacija obeležimo sa E_1, G_1, H_1

$$\varepsilon\,\mathrm{d}s^2 = E_1(\bar{\bar{r}},\bar{\bar{t}})\mathrm{d}\bar{\bar{r}}^2 + \bar{\bar{r}}^2\left(\mathrm{d}\bar{\bar{\theta}}^2 + \sin^2\bar{\bar{\theta}}\,\mathrm{d}\bar{\bar{\varphi}}^2\right) + G_1(\bar{\bar{r}},\bar{\bar{t}})\mathrm{d}\bar{\bar{r}}\mathrm{d}\bar{\bar{t}} + H_1(\bar{\bar{r}},\bar{\bar{t}})\mathrm{d}\bar{\bar{t}}^2 =$$

$$= E_1\,\mathrm{d}\bar{r}^2 + \bar{r}^2\left(\mathrm{d}\bar{\theta}^2 + \sin^2\bar{\theta}\,\mathrm{d}\bar{\varphi}^2\right) + G_1\mathrm{d}\bar{r}\left(\mathrm{d}\bar{t} - \frac{\partial g}{\partial \bar{\bar{r}}}\,\mathrm{d}\bar{\bar{r}}\right)\left(\frac{\partial g}{\partial \bar{\bar{t}}}\right)^{-1} + H_1\left(\mathrm{d}\bar{t} - \frac{\partial g}{\partial \bar{\bar{r}}}\,\mathrm{d}\bar{\bar{r}}\right)\left(\frac{\partial g}{\partial \bar{\bar{t}}}\right)^{-2}$$

Uslov ortogonalnosti koji smo postavili zahteva da bude

$$G_1\left(\frac{\partial g}{\partial \bar{\bar{t}}}\right)^{-1} + 2H_1\frac{\partial g}{\partial \bar{\bar{t}}}\left(\frac{\partial g}{\partial \bar{\bar{t}}}\right)^{-2} = 0$$

odnosno

$$G_1(\bar{\bar{r}},\bar{\bar{t}})\frac{\partial g}{\partial \bar{\bar{t}}} + 2H_1(\bar{\bar{r}},\bar{\bar{t}})\frac{\partial g}{\partial \bar{\bar{r}}} = 0. \tag{10.9}$$

Funkcija $g(\bar{\bar{r}},\bar{\bar{t}})$ se neposredno određuje iz ove linearne homogene parcijalne jednačine prvog reda.

Postoji dakle transformacija koja, uz navedene uslove nesingularnosti, prevodi metriku u jednostavniji dijagonalni oblik, koji ćemo pisati

$$\varepsilon\,\mathrm{d}s^2 = e^{\mu}\,\mathrm{d}r^2 + r^2\left(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta\,\mathrm{d}\varphi^2\right) - c^2e^{\nu}\,\mathrm{d}t^2, \tag{10.10}$$

gdc je brzina c svetlosti u slobodnom Svetu Minkovskog, a $\mu(r,t)$ i $\nu(r,t)$ su funkcije koje treba određivati u zavisnosti od gravitacionog polja. One moraju, naravno, zadovoljiti uslov (10.5) u beskonačnosti. Eksponencijalni oblik je pogodan zbog definitnosti određenih članova.

10.2 Sferno simetrično gravitaciono polje u slobodnom prostoru

Smatramo da nebesko telo, sferno simetričnog oblika i gustine, koje miruje prema zvezdanoj (galaktičkoj) pozadini, stvara sferno simetrično gravitaciono polje. Uverićemo se da ova slika odgovara, sa zadovoljavajućom približnošću, Sunčevom gravitacionom polju. Pretpostavke 1) i 2) iz prethodnog odeljka predstavljaju prvi korak u tom pravcu. Na dalje ćemo koristiti izraz **koordinatno vreme**. To je broj jedinica na svetskoj liniji x^4.

U §50 smo uveli pojam statičke metrike, koja zadovoljava uslove (9.104). Videćemo malo dalje da je sferna simetrija gravitacionog polja u slobodnom prostoru dovoljna za to da ono bude statičko.

Pretpostavka o simetriji dopušta da se metrika dovede u oblik (10.10, gde ćemo staviti:

$$\begin{aligned} g_{11} &= e^{\mu(r,t)}, \quad g_{22} = r^2, \quad g_{33} = r^2\sin^2\theta, \\ g_{44} &= -c^2 e^{\nu(r,t)}; \quad g^{\alpha\alpha} = \frac{1}{g_{\alpha\alpha}}. \end{aligned} \tag{10.11}$$

Zasad dakle ne zahtevamo da metrika bude i stacionarna, što znači statička, jer je po pretpostavci već ortogonalna.

Kristofelovi sitmboli druge vrste, koji su različiti od nule, glase:

$$\begin{aligned} &\Gamma^1{}_{11} = \frac{1}{2}\frac{\partial\mu}{\partial r}, \quad \Gamma^1{}_{14} = \frac{1}{2}\frac{\partial\mu}{\partial t}, \quad \Gamma^1{}_{22} = -re^{-\mu}, \\ &\Gamma^1{}_{33} = -re^{-\mu}\sin\theta, \quad \Gamma^1{}_{44} = \frac{1}{2}e^{\nu-\mu}\frac{\partial\nu}{\partial r}, \\ &\Gamma^2{}_{12} = \Gamma^3{}_{13} = \frac{1}{r}, \quad \Gamma^2{}_{33} = -\sin\theta\cos\theta, \quad \Gamma^3{}_{23} = \mathrm{ctg}\theta, \\ &\Gamma^3{}_{14} = \frac{1}{2}\frac{\partial\mu}{\partial t}e^{\mu-\nu}, \quad \Gamma^4{}_{14} = \frac{1}{2}\frac{\partial\nu}{\partial r}, \quad \Gamma^4{}_{44} = \frac{1}{2}\frac{\partial\nu}{\partial t}. \end{aligned} \tag{10.12}$$

Gravitaciono polje ovog, i svakog drugog, izvora u slobodnom prostoru, opisuju jednačine (9.8). Mi smo u diskusiji gravitacionih talasa koristili oblik $R_{\alpha\beta} = 0$, koji je ravnopravan sa osnovnim oblikom $G_{\alpha\beta} = 0$ tih jednačina. Za ovu priliku ćemo koristiti osnovni oblik. Kao prvu komponentu koja nije identički jednaka nuli napisaćemo

$$G^1_4 = -\frac{1}{r}e^{-\mu}\frac{\partial\mu}{\partial t} = 0. \tag{10.13}$$

Promenljiva μ, odnosno g_{11}, ne zavisi od t. Znači da se celokupni prostorni deo metrike ne menja s vremenom. Ostale jednačine se stoga uprošćavaju na oblik:

$$\begin{aligned} &G^1_1 = -e^{-\mu}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\nu}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\right) + \frac{1}{r^2} = 0, \\ &G^2_2 = G^3_3 = -\frac{1}{2}e^{-\mu}\left\{\frac{\partial^2\nu}{\partial r^2} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\nu}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial\nu}{\partial r} - \frac{\partial\mu}{\partial r}\right) - \frac{1}{2}\frac{\partial\mu}{\partial r}\frac{\partial\nu}{\partial r}\right\} = 0, \\ &G^4_4 = e^{-\mu}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\mu}{\partial r} - \frac{1}{r^2}\right) + \frac{1}{r^2} = 0. \end{aligned} \tag{10.14}$$

Oduzimanjem prve od ovih jednačina od poslednje dobijamo

$$\frac{1}{r}e^{-\mu}\left(\frac{\partial\mu}{\partial r} + \frac{\partial\nu}{\partial r}\right) = 0. \tag{10.15}$$

Pošto je μ funkcija samo r, sleduje da ν mora imati oblik:

$$\nu(r,t) = \nu_1(r) + \nu_2(t).$$

Kad se ova funkcijd stavi u izraz za g_{44} u (10.11) imaćemo, posle transformacije $t \to \bar{t}$

$$d\bar{t} = e^{-\frac{\nu_2(t)}{2}}\, dt \quad \Rightarrow \quad \bar{t} = \int e^{-\frac{\nu_2(t)}{2}}\, dt. \tag{10.16}$$

Ovakvim izborom nove vremenske promenljive dobili smo potpunu nezavisnost svih koeficijenata metrike od vremena. Ovaj zaključak iskazuje Birkhofova[1] teorema,

Teorema 2

koja kaže da je metrika sferno simetričnog gravitacionog polja u slobodnom prostoru statička.

Pođimo od poslednje jednačine (10.14). Ako uvedemo smenu

$$u = \frac{e^{\mu}}{r},$$

ona se svodi na oblik

$$\frac{du}{dr} + u^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{u} + 2m = 0.$$

Gde smo stavili $2m$ za vrednost konstante integracije. Fizički smisao m ćemo objasniti u sledećem odeljku. Tada je

$$e^{\mu} = g_{11} = \frac{1}{1 - \frac{2m}{r}}. \tag{10.17}$$

Kako je na osnovu (10.15) $\mu = -\nu$ (konstanta integracije se uklanja izborom jedinica) dobićemo da je

$$c^2 e^{\nu} = -g_{44} = c^2 \left(1 - \frac{2m}{r}\right). \tag{10.18}$$

Sad imamo potpuno određenu statičku metriku koja, kad se ovo unese u (10.10), glasi:

$$\varepsilon ds^2 = \frac{dr^2}{1 - \frac{2m}{r}} + r^2 \left(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2\right) - c^2 \left(1 - \frac{2m}{r}\right) dt^2. \tag{10.19}$$

Ovo predstavlja čuveno Švarcšildovo[2] rešenje **spoljnog** sfemo simetričnog gravitacionog polja. Rešenje se naziva spoljno, er se odnosi na gravitaciju izvan materijalne sredine koja je stvarna.

Može se postaviti pitanje da li je nađeno zatvoreno rešenje jedinstveno, jer smo dve veličine, μ i ν, odredili iz tri jednačine (10.14). Neposredna provera će nas ubediti da su samo dve jednačine tog sistema nezavisne. Identičnosti (9.3) su te koje stvarno stoje iza prethodnog zaključka, jer pokazuju da jednačine polja nisu međusobno nezavisne.

10.3 Unutrašnje sferno simetrično statičko polje

Pređim. na unutrašnje polje, pod pretpostavkom da mu je izvor mirujuća sfemo simetrična masa savršeno fluidnog sastava. Što znači da ćemo ostale procese provođenja energije zanemariti. To se još naziva **samogravitirajući savršeni fluid**. S obzirom na ovako postavljen problem, koristićemo isti koordinatni sistem kao i za spoljni statički slučaj. Odgovarajući tenzor energije, oblika (6.90), napisaćemo na desnoj strani jednačina gravitacionog polja (9.6)

$$G_{\alpha\beta} = -\varkappa T_{\alpha\beta} = -\varkappa \left\{ (\rho + c^{-2} p) u_{\alpha} u_{\beta} + c^{-2} p g_{\alpha\beta} \right\}. \tag{10.20}$$

[1] G. Birkhoff
[2] K. Schwarzschild

Stavićemo $c = 1$ i uvesti u (10.11) promenljive

$$M(r) = e^{\mu(r)} = g_{11}, \quad N(r) = e^{\nu(r)} = -g_{44}, \tag{10.21}$$

koje su statičke, jer fluid miruje. U odnosu na taj koordinatni sistem sve su komponente četvorobrzine, izuzev vremenske, jednake nuli. Na osnovu ((10.11) tada imamo:

$$u^4 = \frac{1}{\sqrt{-g_{44}}} = \frac{1}{\sqrt{N(r)}}, \quad u_4 = \frac{1}{\sqrt{-g^{44}}} = -\sqrt{N(r)}, \quad u^i = u_i = 0. \tag{10.22}$$

Jednačine gravitacionog polja u fluidu glase, na osnovu ((10.14), ((10.20) i ((10.22):

$$\begin{aligned}
G^1_1 &= -\frac{1}{M}\left(\frac{1}{rN}\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}r}\right) + \frac{1}{r^2} = -\varkappa p(r), \\
G^2_2 &= G^3_3 = \\
&= -\frac{1}{2M}\left\{\frac{1}{N}\frac{\mathrm{d}^2N}{\mathrm{d}r^2} - \frac{1}{2N^2}\left(\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}r}\right)^2 + \frac{1}{r}\left(\frac{1}{N}\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}r} - \frac{1}{M}\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}r}\right) - \frac{1}{2MN}\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}r}\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}r}\right\} = \\
&- \varkappa p(r), \\
G^4_4 &= \frac{1}{M}\left(\frac{1}{rM}\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}r}\right) + \frac{1}{r^2} = -\varkappa \rho(r)
\end{aligned} \tag{10.23}$$

Jednačine hidrodinamike, koje u specijalnoj relativnosti imaju oblik (6.93), moraju biti kovarijantne u opštoj relativnosti. To proističe iz uslova (9.7) konzervacije tenzora energije. Fošto je ovaj tenzor na desnoj strani sistema (10.20), to će biti:

$$(\rho + p)u^\beta \nabla_\beta u^\alpha + \left(g^{\alpha\beta} + u^\alpha u^\beta\right)\frac{\partial p}{\partial x^\beta} = 0. \tag{10.24}$$

Ako iskoristimo činjenicu da su prostorne komponente u^i jednake nuli, prve tri jednačine sistema (10.24) glase

$$(\rho + p)\Gamma^i{}_{44}(u^4)^2 + g^{i\beta}\frac{\partial p}{\partial x^\beta} = 0.$$

Odnosno, zbog dijagonalnosti metrike

$$-\frac{1}{2}(\rho + p)(u^4)^2\frac{\partial p}{\partial x^\beta}\Gamma^i{}_{44} + g^{i\beta} = 0. \tag{10.25}$$

Na osnovu (10.21) i (10.22) jedina netrivijalna jednačina (10.25) je

$$\frac{1}{2}(\rho + p)\frac{1}{N}\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}r} + \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}r} = 0. \tag{10.26}$$

Kako je $p = p(r)$, dakle funkcija jedne promenljive, umesto pnrcijalnog izvoda pišemo obični. Budući da je fluid savršen, za njega važi neka jednačina stanja $\rho = \varphi(p)$. Veza (10.26) predstavlja diferencijclnu jednačinu hidrostatičke ravnoteže u sferno simetričnom polju.

Ako pogledamo sistem (10.23), primetićemo da mu poslednja jednačina daje vezu između gustine i koeficijenta $M(r)$ metričke forme (odnosno $g_{11}(r)$). Ta veza se može napisati u pogodnom obliku

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(\frac{r}{M}\right) = 1 - \varkappa\rho r^2. \tag{10.27}$$

Jednačine (10.26) i (10.27) služe određivanju metrike u funkciji radijalne promenljive, neposredno i posredstvom gustine i pritiska.

Ako umesto korstante $\varkappa$ napišemo $8\pi G$ (ustvar $8\pi G/c^4$), gde je G Njutnvova gravitaciona konstanta, imaćemo rešenje jednačine (10.27)

$$\frac{r}{M(r)} = r - 2G\int_0^r 4\pi r^2 \rho(r)\,\mathrm{d}r = r - 2m(r),$$

gde je $m(r)$ masa nebeskog tela, pomnožena konstantom G, i time svedene na jedinice dužine, od središta do poluprečnika r. Pretpostavljamo da je $M(0) \neq 0$. Za to je dovoijno da red opadanja mase bude viši od reda opadanja radijalne promenljive, što je opravdano, jer je masa srazmerna zapremini. Tada imamo iz prethodne jednačine:

$$M(r) = g_{11}(r) = \frac{1}{1-\frac{2m(r)}{r}} \quad \Rightarrow \quad M(0) = 1. \tag{10.28}$$

Ovaj rezultat, koji neposrodno sleduje iz (10.23), pokazuje nam jednu zanimijivo svojstvo relativističkog statičkog polja unutar samogravitirajućeg fluida. Radijalna komponenta metričkog tenzora, odnosno potencijala, određena je samo onim delom mase koji leži ispod središnjeg rastojanja r. Znači da se, kao i u Njutnovom polju, dejstva sferno simetričnog sloja iznad r potiru.

Pretpostavimo da imamo šupiji tečni sloj. Iz (10.27) i (10.28) vidimo da je tada $M = 1$ unutar njega. Pošto u odsustvu materije nema ni pritiska, to iz prve jednačine (10.23) izlazi da je i N konstantno, što znači da tada imamo metriku Minkovskog unutar tela.

Iz (10.28) dobijamo tumačenje za konstautu m u izrazu za Švarcšildovu metriku (10.19). Ona predstavija celokupnu masu gravitacionog izvora u jodinicama dužine. Iz (10.19) vidimo da radijalno širenja i skupljanje mase izvora ne može uticati na intenzitet polja u nekom događaju koji ostaje izvan njega, jer ni poluprečnik tela, niti rospored njegove gustine po koncentričnim slojovima, nisu zastupljeni u spoljnoj metrici. I tu se u relativnost prenosi jedno svojstvo Njutnovog gravitacionog polja.

Stavimo uslov da na granici tela bude $\rho = r = 0$. Time se iz spoljnog statičkog polja prelazi u unutrašnje hidrostatičko, bez skoka u veličinama na desnoj, pa prema tome ni na levoj strani gravitacionih jednačina (10.14), odnosno (10.23).

Ostaje nam da potražimo, unutar tela, opšte veze između gustine i pritiska. Ako u prvu jednačinu (10.23) unesemo vrednosti iz (10.28), zatim $\bar{N}(r)/N(r)$ iz (10.26),

$$-\left(1-\frac{2m(r)}{r}\right)\left(\frac{1}{r^2}-\frac{2}{r(\rho+p)}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}r}\right)+\frac{1}{r^2} = 8\pi G p,$$

odakle je

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}r} = r(\rho+p)\left(\frac{m(r)}{r^3}-4\pi G p\right)\left(1-\frac{2m(r)}{r}\right)^{-1}.$$

Ovo ćemo napisati u obliku

$$-r^2\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}r} = m(r)\rho(r)\left(1+\frac{p(r)}{\rho(r)}\right)\left(1-\frac{4\pi G r^3 p(r)}{m(r)}\right)\left(1-\frac{2m(r)}{r}\right)^{-1}. \tag{10.29}$$

U klasičnoj hidrodinamici zvezdanih masa sva tri člana nalaze u zagradama, u ovoj jednačini, svela bi se na jednačine. (10.29) predstavlja relativistički oblik toga obrasca, a naziva se Tolman-Openhajmer-Volkovljeva[3] jednačina. Ona predstavlja jednačinu ravnotežnog stanja fluida koji se sastoji iz raspodele, ekstremalne u energetskom smislu, teških elementarnih čestica ili bariona (videti: Harrison-Thorne-Wakano-Wheeler, Gravitation Theory and Gravitational Collapse, 1965; gl. III).

Švarcšild je rešavao metriku unutar fluida tako Ĺˇto je odmah pretpostavio da je gustina konstantna. To vrlo idealizovano rešenje ovde nećemo izvoditi, mada je inače korisno odrediti gravitacioni potencijal pod tom pretpostavkom. Takva aproksimacija pokazala se nedavno dobra pri nalaženju gornje granice gravitacionog crvenog pomaka spektra svetlosti koja dolazi sa zvezda (videti: S. Weinberg, Gravitation and Cosmology, Wiley, [17]; XI, §6).

[3]Tolman-Oppenheimer-Volkov

10.4 Geodezijske linije sferno simetrične metrike

Proučićemo neka svojstva geodezijskih linija Švarcšildove metrike, odnosno sferno simetričnog gravitacionog polja u slobodnom prostoru.

U odnosu na jedan kanonski parametar (videti §5), za koji ćemo uzeti sopstveno vreme u slučaju vremenskih, a dužinu u slučaju prostornih krivih, diferencijalne jednačine geodezijskih linija glase

$$\frac{\mathrm{d}^2x^\alpha}{\mathrm{d}s^2}+\Gamma^\alpha{}_{\beta\gamma}\frac{\mathrm{d}x^\beta}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}x^\gamma}{\mathrm{d}s}=0.$$

Ako unesemo izraze za Kristofelove simbole II vrste (10.12), imajući u vidu svojstvo statičnosti (10.13), dobijamo:

$$\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}^2r}{\mathrm{d}s^2}+\frac{1}{2}\mu'\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}s}\right)^2-re^{-\mu}\left(\frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}s}\right)^2-re^{-\mu}\sin^2\theta\left(\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}s}\right)^2+\frac{1}{2}c^2e^{\nu-\mu}\nu'\left(\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s}\right)^2=0,\\
&\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}s^2}+\frac{2}{r}\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}s}-\sin\theta\cos\nu\left(\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}s}\right)^2=0,\\
&\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}s^2}+\frac{2}{r}\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}s}+2\mathrm{ctg}\theta\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}s}=0,\\
&\frac{\mathrm{d}^2t}{\mathrm{d}s^2}+\nu'\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s}=0,
\end{aligned}\tag{10.30}$$

gde su:

$$\mu'\equiv\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}r},\quad \nu'\equiv\frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}r}=-\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}r}.$$

Ispitajmo geodezijske linije radijalnog pravca, to jest one koje dobijamo za konstante θ,φ,t. Obrazovaćemo, iz izraza (10.19) za metričke elemente, jedinični tangentni vektor koordinatne linije duž koje se menja r

$$\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}s}\right)^2=\pm\left(1-\frac{2m}{r}\right).\tag{10.31}$$

Znak ćemo određivati tako da desna strana bude pozitivna. Iz istog metričkog elementa dobijamo za μ'

$$\mu'=-\frac{2m}{r^2\left(1-\dfrac{2m}{r}\right)}.$$

Radijalna geodezijska linija, zadovoljava prvu jednačin sistem (10.30) koje se svode na

$$\frac{\mathrm{d}^2r}{\mathrm{d}t^2}-\frac{m}{r^2\left(1-\dfrac{2m}{r}\right)}\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}s}\right)^2=0.\tag{10.32}$$

Ako u nju unesemo drugi izvod koji na osnovu (10.31) glasi

$$\frac{\mathrm{d}^2r}{\mathrm{d}t^2}=\pm\frac{m}{r^2}$$

ona će biti identički zadovoljena. Dakle tangentni vektor radijalnih koordinatnih linija se paralelno prenosi duž njih. **Radijalne koordinatne linije sferno simetrične su geodezijske**.

Razmotrimo sad nulte linije, koje dobijamo za konstantne θ i φ. Nazvaćemo **radijalne nulte geodezijske linije**. Jasno je da one nisu radijalne u smislu prethodnih, jer se duž njih menja i t, ali su opet geodezijske i utvrđene time što su nulte. Elementarni interval na tim linijama glasi

$$\frac{\mathrm{d}r^2}{1-\dfrac{2m}{r}}-c^2\left(1-\frac{2m}{r}\right)\mathrm{d}t^2=0.\tag{10.33}$$

Diferencijalne jednačine koje one zadovoljavaju svešće se na prvu i poslednju iz sistema (10.30), uprošćene za sve članove u kojima se pojavljuju izvodi θ i φ. Samo se postavlja pitanje parametara, jer to više može biti dužina, kao u (10.30). Može se proveriti da koordinatno vreme t nije kanonski parametar. Mi ćemo pokazati da je radijalna promenljiva r kanonski parametar.

Zaista, ako na levim stranama diferencijalnih jednačina stavimo r, umesto s, one će se svesti na

$$\begin{gathered} \mu' + c^2 e^{\nu-\mu}\nu' \left(\frac{\mathrm{d}t'}{\mathrm{d}r}\right)^2 = 0, \\ \frac{\mathrm{d}^2 t}{\mathrm{d}r^2} + \nu' \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}r} = 0. \end{gathered} \tag{10.34}$$

Zamenom $\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}r}$ iz (10.33), unošenjem ostalih veličina kao u prethodnom slučaju i diferenciranjem, ovaj sistem će biti identički zadovoljen, što je trabalo dokazati.

Daćemo fizičko tumačenje prethodno utvrđene činjenice. Radijalna promenljiva je mera pređenog puta svetlosnih ili gravitacionih zrakova iz nekog izvora. Ona stoji umesto sopstvenog vremena, koje na zracima mora ”mirovati”.

Razmotrićemo sad opštije pitanje geodezijskih svetskih, dakle vremenskih, linija u jednoj ”ravni”izvora, to jest površi $\theta = \pi/2$. kako su sve takve površine metyrički ravnopravne zbog sferne simetrije polja, uzećemo radi uprošćenja ekvatorsku ravan.

Uslovi za to da početni polažaj i početna brzina neke materijalne tačke leže u ekvatorskoj ravni glase

$$\theta_0 = \frac{\pi}{2}, \quad \left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}s}\right)_0 = 0.$$

Iz druge jednačine sistema (10.30) vidimo da je tada

$$\left(\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}s^2}\right)_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{\mathrm{d}^n\theta}{\mathrm{d}s^n}\right)_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad \theta = \theta_0.$$

Dakle, ako jedna geodezijska linija u nekom trenutku dodiruje površ simetrije polja, ona stalno leže u njoj.

Kinematičku terminologiju smo usvojili zato što putanje materijalnih tačaka u gravitacionom polju moraju, po načelima opšte relativnosti, biti geodezijske svetske linije. Taj uslov je bio postavljen u §39.

Iz poslednje dve jednačine (10.30) dobijamo, koristeći (10.18), a kako je $r \neq 0$, prve integrale

$$\begin{gathered} r^2 \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}s} = \alpha = \mathrm{const.}, \\ \left(1 - \frac{2m}{r}\right) \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s} = \beta = \mathrm{const.} \end{gathered} \tag{10.35}$$

Budući da su $\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}s}$ i $\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s}$ treća i četvrta kontravarijantna komponenta četvorobrzine, sledi zbog $\sin\theta = 1$, a s obzirom na koeficijenta (10.19) metričke forme, da se prethodno veze svode na:

$$u_3 = \alpha, \quad u_4 = \beta. \tag{10.36}$$

Prvi od integrala (10.35), odnosno (10.36), predstavlja relativističko izdanje principa površina, odnosno drugog Keplerovog zakona.

10.5 Horiziont sferno simetričnog polja. Crna oblast (crna jama)

U §53 rastumačili smo bili konstantu m, u izrazu za metričku formu, kao veličinu celokupne mase gravitacionog izvora, datu u dužinskim jedinicama. Zbog toga ćemo $2m$ nazvati **gravitacioni poluprečnik** pojedinog nebeskog tela. Na primer, za mase Sunca m_S i Zemlje m_T, imaćemo sledeće vrednosti:

$$m_S \approx 1,5 \times 10^5\,[cm], \quad m_T \approx 0,5\,[cm]. \tag{10.37}$$

Hiperpovrš koja se dobija za $r = 2m$ naziva se **Š varcšildova sfera** Σ sferno simetričnog polja. Na Σ je:

$$g_{11} = \infty, \quad g_{44} = 0, \quad \|g_{\alpha\beta}\| = -16m^4c^2\sin^2\theta. \tag{10.38}$$

Uzmimo u razmatranje jedinični tangentni vektor v^α, radijalne promenljive $(\theta, f, t = \text{const.})$ Na osnovu (10.19) ćemo imati

$$\mathrm{d}s = \frac{\mathrm{d}r}{\sqrt{1-\frac{2m}{r}}} \quad \Rightarrow \quad v^\alpha\left(\sqrt{1-\frac{2m}{r}}, 0, 0, 0\right). \tag{10.39}$$

Odavde je

$$\varepsilon\,\mathrm{d}s^2 = \frac{\mathrm{d}r^2}{1-\dfrac{2m}{r}} \begin{cases} r > 2m, & \text{za } \varepsilon = 1 \\ r < 2m, & \text{za } \varepsilon = -1. \end{cases} \tag{10.40}$$

Ovaj zaključak važi, na osnovu rezultata §52,53, ukoliko je izvor gravitacionog polja ispod Švarcšildove sfere. Iz (10.28) vidimo da isto biva i onda kada je, unutar nebeskog tela, deo mase $m(r)$, koji se nalazi ispod datog poluprečnika, toliki da je koeficijent g_{11}, odnosno $M(r)$, singularan. Samo onda ne znamo ponašanje celokupne metrike, jer g_{44}, odnosno $N(r)$ treba odrediti iz (10.26).

U slučaju slobodnog prostora, čija je metrika potpuno određena, iz prethodnog vidimo da radijalna koordinata polazi od površi izvora kao vremenska promenljiva, a posle Σ postaje prostorna! Štaviše, kako smo pokazali da su radijalne koordinate linije geodezijske, sledi da se v^α dužnjih do gravitacionog poluprečnika prenosi kao vremenski vektor, posle čega postaje prostoran, ostajući paralelan sebi. Na osnovu svih naših pojmova, ovo ”prevrtanje”bi trebalo da znači prekid tih linija!

Razmotrimo hiperpovrš Σ. Ona je zadana sa

$$f(x^\alpha) \equiv x^1 - 2m = 0. \tag{10.41}$$

Vektor normale na njoj glasi

$$\mathrm{grad} f = n_\alpha(1,0,0,0).$$

Otud

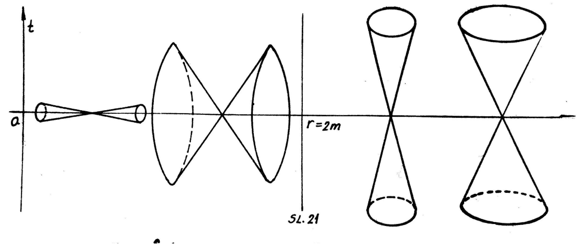
$$g^{\alpha\beta}n_\alpha n_\beta = g^n(n_1)^2 = 1 - \frac{2m}{r} = 0. \tag{10.42}$$

Kako je gradijent Σ nulti vektor, to je hiperpovrš nulta, kao što smo već videli iz razmatranja §43,44. Inače na njoj postoje, u svakom događaju, po dva prostorna pravca u kojima se menjaju ciklične koordinate. Ona predstavlja jednu **karakterističnu hiperpovrš**, pa ne možemo govoriti o njoj kao o istoriji sfere. Treba da proučimo ponašanje nultih konusa čije je ona obvojnica.

S obzirom na sfernu sinetriju polja, daćemo proizvoljne konstantne vrednosti ugaonim promenljvim $\varphi = \text{const.}$, $\theta = \text{const.}$ Radijalne nulte linije koje smo razmatrali u prethodnon odeljku zadovoljavaju (10.33), dakle

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = \pm c\left(1 - \frac{2m}{r}\right).$$

Za $r > 2m$, nulti konus je otvoren prema vremenskoj koordinati. Kad $r \to \infty$, otvor mu teži odnosu veličina koji odgovara metrtci Minkovskog. Kada $r \to 2m$ spolja, otvor konusa se smanjuje do nule, Ovo bi odgovaralo opadanju brzine svetlosti. Obrnuto, ako posmatramo oblast $r < 2m$, otvor konusa, koji je sad okrenut prema koordinati r (videti sliku 10.1), teži nultoj hiperravni s unutrašnje strane, i potpuno se otvara kad $r \to 2m$, a sužava do nule kad $r \to 0$.



Slika 10.1: Polažaji konusa.

Još u §1 smo pomenuli činjenicu da je Svet Minkovskog homogen u odnosu na nulte[4] pravce, jer je otvor nultog konusa

nepronenljiv, budući da je određen nepromenljivom brzinom svetlosti u vakuumu. Sad vidimo da je Svet opšte relativnosti nehomogen u odnosu na nulte pravce, jer brzina svetlosti zavisi od udaljenosti od središta izvora, naravno za $r > 2m$, koje je jedino pouzdano područje.

Neobično ponšanje metrike zbog postojanja Švarcšildove sfere zahteva da ispitamo da li se dosad utvrđena svojstva javljaju u svakom koordinatnom sistemu. Razume se da je dovoljno naći jedan sistem u kojem se neke od njih menjaju, da bismo ih smatrali kao neverodostojne. Zato ćemo izvršiti smenu promenljivih:

$$\begin{aligned} t &= \bar{t} \pm 2mc^{-1} \ln\left(\frac{r}{2m} - 1\right), \quad r > 2m, \\ t &= \bar{t} \pm 2mc^{-1} \ln\left(1 - \frac{r}{2m}\right), \quad r < 2m, \\ r &= \bar{r}, \quad \theta = \bar{\theta}, \quad \varphi = \bar{\varphi}. \end{aligned} \tag{10.43}$$

Pomoću ovih promenljivih dobijamo Edington-Finkelštajnov[5] oblik intervala (10.19)

$$\varepsilon \, \mathrm{d}\bar{s}^2 = \left(1 + \frac{2m}{r}\right) \mathrm{d}r^2 + r^2 \left(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta \, \mathrm{d}\varphi^2\right) \mp \frac{4mc}{r} \mathrm{d}r \mathrm{d}\bar{t} - c^2 \left(1 - \frac{2m}{r}\right) \mathrm{d}t^2. \tag{10.44}$$

Metrika ostaje stacionarna, ali više nije dijagonalna. Štaviše, u zavisnosti od znaka četvrtog člana, imamo za nju dva oblika (+) i (-). Prednost ovakvog izraza je u tome što mu na Σ ni jedan koeficijent više nije beskonačan, te se koordinatna mreža jednostavno produžuje iz unutrašnjosti Švarcšildove sfere u njenu spoljašnjost.

U odnosu na uvedeni sistem, radijalna nulta linija, umesto (10.33), u slučaju (+) zadovoljava formu

$$\mathrm{d}s^2 = \left(1 + \frac{2m}{r}\right) \mathrm{d}r^2 + \frac{4mc}{r} \mathrm{d}r \mathrm{d}t - c^2 \left(1 - \frac{2m}{r}\right) \mathrm{d}\bar{t}^2 = 0. \tag{10.45}$$

odnosno

$$(\mathrm{d}r + c\mathrm{d}\bar{t}) \left\{ \left(1 + \frac{2m}{r}\right) \mathrm{d}r - c\left(1 + \frac{2m}{r}\right) \mathrm{d}\bar{t} \right\} = 0.$$

U konfiguraconoj ravni $(\bar{t}, r)$ te linije zadovoljavaju dve diferencijalne jednačine:

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\bar{t}} + c = 0, \quad \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\bar{t}} + c\frac{2m - c}{2m + c} = 0. \tag{10.46}$$

[4]Pod pojmom **prostorne izotropnosti** podrazumeva se forminvarijantnost, podrazumeva postojanje, u svakom događaju, posmatrača u odnosu na kojeg je mera forminvarijantnosti jednaka.

[5]Eddington-Finkelstein

Rešenje ovog sistema glasi:

$$\begin{aligned} &r + c\bar{t} = \text{const.}, \\ &r + 4m\ln(r - 2m) - c\bar{t} = \text{const.}, \quad r > 2m, \\ &r + 4m\ln(2m - r) - c\bar{t} = \text{const.}, \quad r < 2m. \end{aligned} \tag{10.47}$$

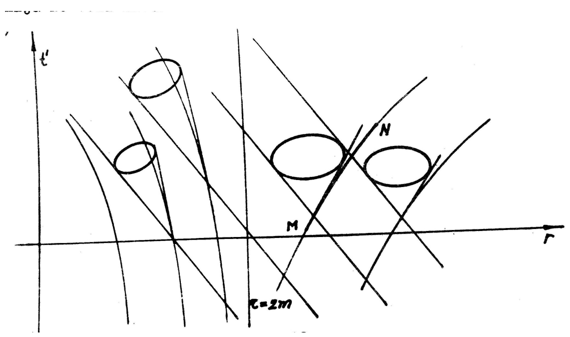
Prvo rešenje predstavlja familiju pravih i važi sa obe strane hiperpovrši Σ, odnosno linije $r = 2m$. Rešenje druge diferencijalne jednačine (10.47) razdvaja se, kao što vidimo, na dve potfamilije, levo i desno od te linije. Druga jednačina (10.46) pokazuje nam da za potfamiliju važi:

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\bar{t}} \to \begin{cases} 1, & \text{za } r \to \infty \\ 0, & \text{za } r \to 2m \end{cases} \quad (r > 2m),$$

a za drugu

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\bar{t}} \to \begin{cases} 0, & \text{za } r \to 2m \\ -1, & \text{za } r \to 0 \end{cases} \quad (r < 2m).$$

U prethodnom odeljku smo pokazali da su radijalne nulte linije geodezijske. Druga njihova potfanilija ne prelazi $r = 2m$. Kako su sve moguće svetske linije, odnosno putanje, obuhvaćene između graničnih nultih linija ove dve potfamilije, što se može proveriti, to na levom području (slika 10.2.) ni jedna ne može preći ovu granicu. Švarcšildova sfera Σ, odnosno linija $r = 2m$, naziva se **horizont događaja**. Taj evokatorski naziv treba da nam kaže da se radi o jednoi granici ispod koje nemamo uvida, a ni sa koje nema povratka. Ni jedna svetska linija ne vodi izvan te sfere!



Slika 10.2: Potfanilije.

Fizičko tumačenje nultih linija sa dijagrama na sl. 10.2 je jednostavao. Prave prve familije (10.47) predstavljaju zrake radijaho nailazeće svetlosti, koja ima brzinu c. Prva potfamilija krivih, desno od horizonta, prikazuje zrake svetlosti koja se radijalno udaljava od gravitacionog izvora. Ukoliko je površina koja zrači sa spoljne strane bliža horizontu, brzina je manja, a u beskonadčosti, dostiže vrednost iz Sveta Minkovskog. Svetlosni zraci i sve ostale čestice sa unutrašnje strane horizonta padaju ka središiu. Ova asimetrija nultog konusa, koja potiče od različitih brzina dolaženja i odlaženja svetlosti u gravitacionom polju, pokazuje još jedno svojstvo Sveta opšte relativnosti, **neizotropnost** koju u opštem slučaju pokazuju nulti ztaci.

Prethodna izvođenja se odnose na sludaj (+) svetske metrike (10.44). U sludaju (-) dijagram bi bio, prena onon sa slike 10.2, simetrično izvrnut u odnosu na osu r.

Vratićemo se jednom zaključku iz §54. Imali smo da je radijalna promenljiva r koordinatnog sistema u kojem je data forma (10.19) kanonski parametar za radijalne nulte linije. U transformisanom obliku (10.45) radijalna promenljiva ostaje ista, dok novo vreme $\bar{t}$ i dalje nije kanonski parametar. Dakle, put od M do N na slici 10.2 razlikuje se, na bilo kojoj nultoj geodezijskoj liniji potfamilije $r > 2m$, za konačni iznos, ukoliko je r_N konačno i veće od r_M. Sa dijagrama se vidi da koordinatno vreme mora porasti za beskonačan iznos da bi $r(\bar{t})$ iz druge veze (10.47) porastao za $r_N - 2m$, jer je $r(-\infty) = 2m$. Što je glavno stvari stoje nejasno sa svetlošću koja je u konačnoj prošlosti trebalo da krene sa horizonta. Ovaj zaključak o beskonačnom priraštaju još izrazitije važi za vremenske radijalne geodezijske linije, jer se kod ovih r, kao funkcija $\bar{t}$ još sporije điže”iznad horizonta. A te geodezijske linije su putanje čestica koje se udaljavaju u sfemom gravitacionom polju.

Na području $r < 2m$ čestice i fotoni stižu za konačno vreme, bilo sopstveno ili koordinatno, do $r = O$, što se vidi sa dijagrama.

U cilju daljeg ispitivanja ponašanja metrike u blizini horizonta uvode se takozvane **Kruskalove koordinate**[6]. U njima su otklonjene teškoće s beskonačno dugim putovanjem, u odnosu na $\bar{t}$, po radijalnoj geodezijskoj liniji, od horizonta naviše. Vrši se transformacija $(r,\bar{t}) \to (u,v)$ iz Edington-Finkelštajnovih promenljivih (10.43) u nove:

$$\begin{aligned} u+v &= \frac{1}{2m}(r-2m)\,e^{(r-c\bar{t})/4m}, \\ u-v &= e^{(r+c\bar{t})/4m}. \end{aligned} \tag{10.48}$$

Sad dobijamo treći oblik intervala, koji glasi, za posmatranu (+) metriku

$$\varepsilon \mathrm{d}s^2 = r^2\left(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta\,\mathrm{d}\varphi^2\right) + f^2(r)\left(\mathrm{d}u^2 - \mathrm{d}v^2\right), \tag{10.49}$$

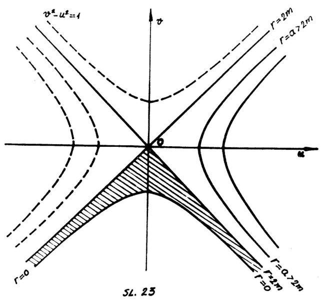
gde je

$$f^2 = \frac{32m^3}{re^{r/2m}}.$$

Razume se da r u gornjem obrascu treba zameniti pomoću u i v. Mi to nismo učinili zbog preglednosti obrasca.

$$\mathrm{d}u^2 - \mathrm{d}v^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad u \pm v = \text{const.} > 0. \tag{10.50}$$

Kruskalov dijagram izgleda ovako



Slika 10.3: Kruskalov dijagram.

Ako pomoću transformacionih obrazaca (10.48) ispitamo dijagram sa slike 10.3, videćemo da on ima smisla za onaj deo koji leži između krive $r = 0$ i dijagonale $u = v$, kojoj teže vrednosti kad u (10.48). Oblast $0 < r < 2m$ sa dijagrama slike 10.2, preslikava se na osenčenu oblast na dijagramu slike 10.3. Da li ostatak ravni (u,v), između isprekidane linije $v^2 - u^2 = 1$ i $v = u$ ima neki smisao nije jasno. Možda bi i on mogao nesto fizički da znači, jer prava $u = v$, odnosno $r = 2m$, ograničava dijagram, pored toga što predstavlja polupravu $u = -v$ $(u > 0)$ koja je horizont. Na slici 10.2, $r = 2m$ je ležala isključivo unutar dijagrama.

* * *

[6]M. D. Kruskal

Videli sno da se svojstva v Svsrcšildovog gravitacionog polja ne mogu opisati u potpunosti ako se koristi samo koordinatni sistes u odnosu na koji netrička forma ima oblik (10.19). IzvrĹˇili smo bili dve snene promenljivih da bismo otklonili na - stranosti koje se pojavljuju u tom sistemu u blizini singularne hiperpovrĹˇi ZT - Dijagrami koji odgcvaraju sluÄŤajevima (+) i (-) opisuju fiziÄŤki suprotne procese. Kruskalov dijagram je pogodan za izuÄŤavanje pojave sasimanja matcrijc u blizini Σ

Mi znamo da postavka problema u opštoj relativnosti ne treba da zavisi od koordinatnog sistena, jer jednačine moraju biti tenzorske, ali pri diskusiji dobijenih rešenja vidimo da stvari itekako zavise od sistema. Napomenimo samo da je jedno od važnih pitanja pri izučavanju singulariteta razlikovanje takozvanih koordinatnih singulariteta od fizičkih, to jest od onih koji odgovaraju stvarnoj pojavi. Nešto slično smo imali i pri ispitivanju gravitacionih talasa.

Oblast ispod horizonta, u kojoj bi bio smešten celokupni izvor gravitacionog polja, nosi danas dobro poznati naziv **crna jama**, ili kako ćemo je još nazivati **crna oblast**, u ovom slučaju statička. Iz svega što je prethodno rečeno vidi se smisao tog naziva. Videli smo da statička crna oblast ima gravitaciono polje isto kao i ono koje je imalo normalno nebesko telo, ali smo se uverili i u to da masa tela, posle prolaska ispod horizonta, za konačno vreme padne na središte. šta onda biva? Da li dolazi do neke eksplozije crne jame, praćene na primer emisijom **tahiona**, zasad hipotetičnih čestica, koje zahvaljujući brzini većoj od svetlosne mogu proći kroz singularnu površ Σ? Ili nastaje neka druga pojava? Gravitacioni izvor je telo, čija metrika ima zakone ponašanja pod fizičkim uslovima koji vladaju u određenim granicama, a koje smo dosad uspeli donekle da proučimo. Pojava sažimanja celokupne mase nebeskog tela do krajnje moguće granice, a pod uticajem gravitacionog polja, naziva se **gravitacioni kolaps**. Ona prvobitno nije bila izučavana sa relativističkog stanovišta. Bitno je pitanje da li se gravitaciono kolaps sferno simetričnog nerotirajućeg nebeskog tela može odvijati savršeno pravilno, zadržavajući u svim fazama početnu simetriju. Poluprecnik $2m$ je, kao što se vidi iz (10.37), krajnje mali. Šta biva pod uslovima koji neposredno prethode prolasku kroz Σ? Na to se ne može dati pouzdan odgovor.

Ova pitanja mnogo su pretresana u naučnim monografijama i časopisima (da navedemo: G.Mc Vittie, [10]; S. Weinberg, [17]; Misner-Thorne-Wheeler, [23]; itd). U svakom slučaju, crne oblasti su još uvek hipotetične, mada izvesne pojave, ukazuju na to da se možda i otkrivene.

Začudo, neke vizije kolapsa i pratećih pojava bile su, da li slučajno, predmet pesničke intuicije. Vladislav Petković-Dis, koji je od fizike XX veka mogao samo nešto načuti o specijalnoj relativnosti (a i to je vrlo malo verovatno), napisa je u pesmi "Nirvana"(videti: M. Pavlović, Antologija srpskog pesništva, SKZ, 1964.) sledeće vrlo uočljive stihove:

Tu su bili umrli oblaci,
Mrtvo vreme s istorijom dana,
Tu su bili poginuli zraci:
Svu selenu pritisnu nirvana.

10.6 Polje rotirajućeg izvora

Iznećemo, u najkraćem, svojstva gravitacionog polja koje stvara rotirajući, po sastavu osno simetrični izvor. Takvo polje određuje Kerovu[7] metriku.

Prvi zaključak koji imamo jeste da ovakvo rešenje više ne može imati sfemu simetriju u prostoru, jer je jedan pravac pnvilegovan. Pretpostavka je da je taj pravac, odnosno osa simetrije, nepromenljiv, da se moment za njega ne menja, i da izvor polja ne podleže ni drugim promenama tokom vremena. Tada je metrika opet stacionarna, a pored toga i simetrična u odnosu na osu rotacije. Znači da jedinični vektori svetskih linija koordinatnog vremena čine jedn. Kilingovo polje. Takođe i jedmični vektori meridijanskih linija φ oko ose rotacije (odredimo je sa $\theta = 0$) čine Kilingovo poije, jer je metrika forminvarijantna za zaokrete oko te ose.

Kerova metrika spada u algebarski specijalne tipove u smislu izloženom u §47. Ona je Petrovljevog tipa D, u koji spada i Švarcšildova. Ovde nećemo ulaziti u proveravanje toga (Physmal Review Letters, 11, str 237,

[7] R. Kerr

1963). Opet se smatra, kao i za Švarcšildovu metriku (videti §51, uslovi 1) i 2)), da r predstavlja rastojanje od središta izvora. dd^2 u beskonačnosti teži metrici Minkovskog, što ćemo pokazati. Pored konstante m, koju smo već imali u (10.19), ovde se kao posledica postojanja ugaonog momenta, pojavljuje i konstanta a. Kvadrat intervala glasi:

$$\begin{aligned}\varepsilon \mathrm{d}s^2 &= (1+U)\mathrm{d}r^2 + \left(r^2+a^2\cos^2\theta\right)\mathrm{d}\theta^2 + \left(r^2+a^2+a^2U\sin^2\theta\right)\sin^2\theta\,\mathrm{d}\varphi^2 + \\ &+ 2a(1+U)\sin^2\theta\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi + 2cU\mathrm{d}r\mathrm{d}t + 2acU\sin^2\theta\,\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}t - c^2(1-U)\mathrm{d}t^2,\end{aligned} \tag{10.51}$$

gde je

$$U = \frac{2mr}{r^2+a^2\cos^2\theta}.$$

Ako bi a bilo jednako nuli (odsustvo rotacije) vidimo da bi se metrika svela na Švarcšildovu (+) metriku (10.44), to jest na onu čije su svetske linije date na slici 10.2.

U slučaju spoljnog Švarcšildovog rešenja nismo ništa morali znati o tenzoru energije izvora, osim da mora odgovarati sferno simetričnoj raspodeli materije, koja se može radijalno kretati. Naveli smo bili, kao primer unutrašnjeg rešenja, savršenu hidrostatičku sferu. Ali je to rešenje ostajalo nepotpuno određeno ukoliko nismo znali zavisnost gustine od pritiska. U tom smislu ni za Kerovu metriku ne znamo o izvoru ništa drugo osim da mora imati simetriju materijalne raspodele i moment za određenu osu. Jedino je sigurno da ta metrika važi svuda izvan horizonta, na koji ćemo ukazati.

Potražimo, kao i u slučaju Švarcšildove metrike, površ na kojoj će u formi (10.51) iščeznuti koeficijent uz dt^2. Znači:

$$r^2 - 2mr + a^2\cos^2\theta = 0.$$

Rešenje ove kvadratne jednačine može imati smisla samo za $a \le 2m$. Fizički smisao za $a \ge m$ bio bi da se centrifugalno ubrzanje suprotstavlja gravitacionom kolapsu. Pod tom je pretpostavkom

$$r = m \pm \sqrt{m^2 - a^2\cos^2\theta}. \tag{10.52}$$

Imamo dve površi, koje ćemo označiti sa S_+ i S_-. Može se odmah videti iz (10.52) da ove površi imaju ravan simetrije $\theta = \pi/2$ i da je S_+ ispupčena, a S_- razdvojena u toj ravni.

Pošto je metrika stacionarna vidimo da, zbog promene znaka koeficijenta uz dt^2, brzina toka vremena, koja je Kilingov vektor, menja znak. Ona postaje, od vremenskog vektora izvan S_+, nulti vektor na toj površi, prostoran unutar nje, opet nulti na S_-, a vremenski unutar ove. Naravno, sve to pod uslovom da obe površi pripadaju spoljnoj Kerovoj metrici, čiji se izvor u dovoljnoj meri smanjio da bi bar S_+ u ćelini bila horizontska. Fizički bi to značilo da meridijanska koordinata φ (dakle prostorna) možda neodoljivo teče unutar S_+, umesto vremena.

Bitno je svojstvo površi S_+ i ta da nisu karakteristične. Njihovo je svojstvo da koeficijent uz vremenski član postaje jednak nuli na njima, ali im je gradijent, koji možemo izračunati iz (10.52), nije nulti vektor. Zaista, kontravarijantne koordinate metričke forme glase, na osnovu (10.51):

$$\begin{aligned}&g^{11} = \frac{r^2+a^2}{r^2+a^2\cos^2\theta} - U, \quad g^{22} = \frac{1}{r^2+a^2\cos^2\theta},\\ &g^{33} = \frac{1}{(r^2+a^2\cos^2\theta)\sin^2\theta}, \quad g^{44} = -c^2(1+U),\\ &g^{14} = c^{-1}U, \quad g^{13} = \frac{-a}{r^2+a^2\cos^2\theta}, \quad g^{34} = 0.\end{aligned} \tag{10.53}$$

Pa možemo odmah proveriti da one dve hiperpovrši nisu nulte, odnosno karakteristične.

Posmatrajući veličine (10.53), možemo se uveriti da g^{11} jedini može biti jednak nuli za konačne, netrivijalne i pozitivne (fizički opravdane) vrednosti argumenata, i time odredi karakteristične površi. Vektor radijalne promenljive postaje nulti na toj hiperpovrši, koja je otud nulta. S obzirom na promenu vremenskog toka, ostale linije na njoj su prostorne. One glase:

$$r^2 - 2mr + a^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad r = m \pm \sqrt{m^2 - a^2}, \tag{10.54}$$

uz

$$\|g_{\alpha\beta}\| = -c^2\left(2m^2 \pm 2m\sqrt{m^2-a^2} - a^2\sin^2\theta\right)^2 \sin^2\theta.$$

Imamo znači dve površi, Σ_+ i Σ_-, na kojima je normalni vektor:

$$\begin{aligned} n_\alpha(1,0,0;0), \quad & g^{\alpha\beta}n_\alpha n_\beta = 0, \\ \theta \neq 0,\pi \qquad & \Rightarrow \quad \|g_{\alpha\beta}\| \neq 0, \end{aligned} \tag{10.55}$$

nulti. Te površi predstavljaju koncentrične sfere. Prva od njih je horizontska za Kerovu metriku. U ovom slučaju mogli bismo govoriti o hiperpovrši kao istoriji, s obzirom na to da na ovom horizontu, za razliku od Švarcšildovog, ne nastaje zaustavljanje vremena. Ali izraz "istorija"postaje dvosmislen, zbog promene znaka koeficijenta g_{44} vremenskog intervala na S_+. Iz (10.52) se vidi da S_+ obuhvata Σ_+, i da je dotiče u okolinama polarnih tačaka $\theta = 0,\pi$ (videti sliku 10.4).

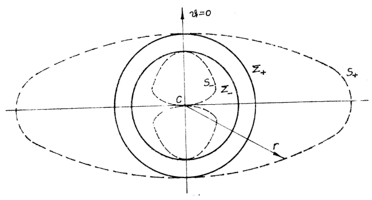
Pogledajmo opet radijalne nulte linije. Postoji, u ovoj metrici, polje nultih vektora konstantnih komponenata k^α:

$$\begin{aligned} & k^\alpha(-1,0,0;c^{-1}), \\ & g_{\alpha\beta}k^\alpha k^\beta = (1+U) - 2U - (1-U) = 0. \end{aligned} \tag{10.56}$$

Drugo polje nultih vektora dato je sa (10.55), na površima Σ. To je analogno sfemo simetričnom slučaju sa slike 10.2, utoliko što se radi o graničnim linijama nultog konusa.

Nulti polukonusi budućnosti horizontskih događaja okrenuti su, dakle, prema unutrašnjosti Σ_+. Neradijalne nulte i vremenske svetske linije imaju još manje mogućnosti da napuste jer su obuhvaćene radijalnim, pa je ta hiperpovrš zaista horizontska.

Kerova crna jama izučavana je, kao i Švarcšildova, pomoću različitih dijagrama, i ima dosta neobičnih svojstava, od kojih smo neke izložili. Unutar nje ne izgleda da bi uvek morao nastupiti pad žarobljenih"čestica u središte. Sa slike se vidi da unutar postoji jedna dvokrilna oblast u kojoj bi čestice mogle da se udaljavaju radijalno, gde bi vreme trebalo da teče i metrika da bude stacionarna.



Slika 10.4: Okolina polarnih tačaka $\theta = 0,\pi$.

Ostaje nam da pokažemo kako se u beskonačnosti Kerova metrika svodi na metriku Minkovskog. Za tu ćemo svrhu uvesti nove promenljive:

$$\begin{aligned} x &= (r\cos\varphi + a\sin\varphi)\sin\theta, \quad z = r\cos\varphi, \\ y &= (r\sin\varphi - a\cos\varphi)\sin\theta, \quad t = t. \end{aligned}$$

Metrička forma (10.51) se tada može napisati u obliku:

$$\begin{aligned} \varepsilon \mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2 + \frac{2mr}{(r^4+a^2z^2)(r^2+a^2)^2} \times \\ \times \left\{ r^2(x\mathrm{d}x + y\mathrm{d}y) + ar(x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x) + (r^2+a^2)(z\mathrm{d}z + cr\mathrm{d}t)\right\}^2. \end{aligned} \tag{10.57}$$

Ovde je ostavljeno r da bi se ocenilo ponašanje u beskonačnosti. Činilac ispred velike zagrade u ovom izrazu ponaša se $\sim r^{-7}$ za dovoljno velike vrednosti radijalne promenljive. Izraz u zagradi ponaša se kao $\sim r^6$. Možemo dakle pisati

$$\varepsilon \mathrm{d}s^2 = \varepsilon \mathrm{d}s_M^2 + \mathscr{O}(r^{-1})\mathrm{d}\tau^2. \tag{10.58}$$

Vidimo da ova metrika u beskonačnosti zaista teži metrici Minkovskog.

10.7 Zadaci

Zadatak 25

Pokazati da postoji zavisnost između jednačina (10.14).

Rešenje

Zadatak 26

Odrediti, iz jednačine (10.29), p u slučaju da je gustina $\rho = \text{const.}$, pod uslovom da je za $r_{\text{max}} = R$ prtisak $p = 0$. Naći tada, iz (10.26) i (10.28), unutrašnju metriku.

Rešenje

Zadatak 27

Pokazati da su u oblastima $r < 2m$ i $r > 2m$, §55, vremenske linije sadržene između nultih, dok su nulte linije sadržane između radijalnih nultih.

Rešenje

Zadatak 28

Ako u (-) Švarcšildovom intervalu (10.44) uvedemo smenu $u = ct - r$ (žaostajuće vreme”), dobićemo njegov radijacioni oblik

$$\varepsilon ds^2 = r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2\right) - 2drdu - \left(1 - \frac{2m}{r}\right)du^2.$$

Pokazati, na osnovu definicija iz §47, a koristeći ovaj oblik intervala, da Švarcšildova metrika spada u Petrovljev tip D.

Rešenje

Zadatak 25

11. Posledice opšte torije relativnosti

11.1 Putanje planeta

Pretpostavićemo da su osnovni pravci sfernog koordinatnog sistema, čiji je početak u središtu Sunca, utvrđeni u odnosu na zvezde nekretnice. Pretpostavićemo takođe da su gravitaciona polja planeta zanemarljiva u odnosu na Sunčevo, pa se one, prema tome, kreću po geodezijskim linijama u ekliptičkoj ravni $\theta = \pi/2$. Tada iz metričke forme (10.19) imamo za svaku svetsku liniju uslov

$$\left(1-\frac{2m}{r}\right)^{-1}\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}s}\right)^2+r^2\left(\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}s}\right)^2-c^2\left(1-\frac{2m}{r}\right)\left(\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s}\right)^2=-1. \tag{11.1}$$

Ako potražimo radijus vektor r u zavisnosti od anomalije φ, dobićemo, koristeći prve integrale (10.35)

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}s}=\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\varphi}\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}s}=\alpha r^{-2}\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\varphi}=-\alpha\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varphi}\left(\frac{1}{r}\right),$$

pa će (11.1) imati oblik

$$\alpha^2\left(1-\frac{2m}{r}\right)^{-1}\left\{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varphi}\left(\frac{1}{r}\right)\right\}^2+\frac{\alpha^2}{r^2}-c^2\beta^2\left(1-\frac{2m}{r}\right)^{-1}=-1$$

odnosno

$$\left\{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varphi}\left(\frac{1}{r}\right)\right\}^2+\frac{1}{r^2}=\frac{1}{\alpha^2}\left(c^2\beta^2-1\right)+\frac{2m}{\alpha^2 r}+\frac{2m}{r^3}. \tag{11.2}$$

Pretpostavimo da je u početnom trenutku $\dot{\varphi}_0 \neq 0$, to jest da se r menja u zavisnosti od φ. Diferenciranje gornjeg izraza po φ tada daje, kad se sredi

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\varphi^2}\left(\frac{1}{r}\right)+\frac{1}{r}=\frac{m}{\alpha^2}+\frac{3m}{r^2} \tag{11.3}$$

Ovo predstavlja relativistički oblik poznatog Bineovog[1] obrasca za kretanje tela u centralnom polju Njutnove gravitacije. Difeiencijalna jednačina (11.3) razlikuje se od njutnovske samo po drugom članu na desnoj strani (videti: Anđelić-Stojanović, Racionalna mehanika, str. 190) na koji se, u sferno simetričnom polju, strogo svodi relativistička popravka.

Diferencijalna jednačina (11.3) rešava se iteracijama. Rešenje njutnovskog dela obeležićemo sa $(1/r)$. Ono se dobija kad se uzme u obzir samo konstantni član na desnoj strani, i glasi

$$\left(\frac{1}{r}\right)_1 = \frac{m}{\alpha^2}\,(1+e\cos\varphi)\,. \tag{11.4}$$

Što predstavlja konačnu jednačinu konusnog preseka. Anomalija φ se računa od pravca perihela, a e je ekscentričnost putanje. U slučaju planeta radi se o elipsama, pa je $e<1$ (za Merkur je $e\approx 0,2$). Sledeći korak iteracija, od kojeg nećemo ići dalje, sastoji se u rečavanju (11.3), bez konstantnog člana, a sa (11.4) na desnoj strani:

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\varphi^2}\left(\frac{1}{r}\right)+\frac{1}{r} = 3m\left(\frac{1}{r}\right)_1^2 + 3\frac{m^3}{\alpha^4}\,(1+e\cos\varphi)^2 \approx 3\frac{m^3}{\alpha^4}\,(1+2e\cos\varphi)\,. \tag{11.5}$$

Partikularno rešenje ove, vrlo približne, jednačine je:

$$\left(\frac{1}{r}\right)_2 = 3\frac{m^3}{\alpha^4}\,(1+e\varphi\sin\varphi)\,. \tag{11.6}$$

Pa je ukupni integral, iz (11.4) i (11.6)

$$\frac{1}{r} = \left(\frac{1}{r}\right)_1 + \left(\frac{1}{r}\right)_2 = \frac{m}{\alpha^2}\left\{1+3\frac{m^2}{\alpha^2}+e\left(\cos\varphi+3\frac{m^2}{\alpha^2}\varphi\sin\varphi\right)\right\}. \tag{11.7}$$

Konstantni deo izraza na desnoj strani dopunjen je popravkom dužine veće ose elipse. Ona je snazmerno malo izinenjena, i ne utiče bitno na rešenje. Ali je popravka promenljivog dela zanimljiva za razmatranje, jer kvalitativno menja prirodu putanje. Zato ćemo prvo dati tumačenje konstante m/α^2. U njutnovskoj mehanici, gde se planete kreću po zakonu (11.4), ona se svodi na r_0^{-1}, gde je r_0 srednja vrednost radijus vektora. U slučaju kretanja po relativističkom zakonu (11.5) treba, umesto r_0, staviti $r_0(1-e^2)$. Razvijmo promenljivi deo u izrazu (11.7), imajući u vidu da je, na osnovu (10.37), $2m$ (gravitacioni poluprečnik Sunca) mala veličina u odnosu na srednji poluprečnik r_0 bilo koje planetske putanje. Tada možemo pisati

$$\cos\varphi + \frac{3m}{r_0(1-e^2)}\varphi\sin\varphi \approx \cos\left\{\varphi - \frac{3m\varphi}{r_0(1-e^2)}\right\}.$$

Iz ovog izraza vidimo da će (11.7) predstavljati perihelsko (najmanje) rastojanje planete za vrednost anomalije:

$$\varphi = 0,\ \frac{2\pi}{1-\dfrac{3m}{r_0(1-e^2)}}\ \frac{4\pi}{1-\dfrac{3m}{r_0(1-e^2)}},\cdots$$

Svaki član ovog niza predstavlja zbir jednog geometnjskog reda

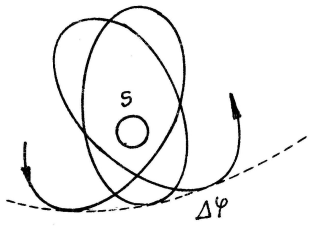
$$\frac{2\pi}{1-\dfrac{3m}{r_0(1-e^2)}} = 2n\pi\left(1+\frac{3m}{r_0(1-e^2)}+\cdots\right),\quad n=0,1,2,\ldots$$

Vidimo da se između dva uzastopna prolaska kroz perihel izvrši s tačnošću od dva člana reda (ostatak je vrlo mali), promena anomalije za

$$\Delta\gamma \approx \frac{6\pi m}{r_0(1-e^2)}. \tag{11.8}$$

[1] Binet

Ovo je čuveni relativistički obrazac za pomeranje perihela planeta (slika 11.1). Tablica sekularnih pomeranja (vrednosti za jedan vek zemaljskog vremena) za pojedine planete dat je u Tabeli 11.1.



Slika 11.1: Pomeranje perihela planeta.

Planete	$\Delta\varphi$
Merkur	43,03”
Venera	8,60”
Zemlja	3,8”
Mars	1,35”

Tabela 11.1: Tablica sekularnih pomeraja.

Krajem XIX veka, kada su astronomska posmatranja postala dovoljno oštra i pouzdana, utvrđena je pojava male precesije Merkurovog perihela, koja se nije mogla objasniti pomoću klasičnih zakona nebeske mehanike. Otud je objašnjenje te pojave, koje je predložio Ajnštajn, predstavljalo prvi veliki argument u prilog opšte teorije relativnosti. Svi kasniji pokušaji zasnivanja novih teorija gravitacije morali su voditi računa o tome da daju zadovoljavajuće tumačenje pomeranja planetskih putanja.

Početkom 60-tih godina Dike[2] je predložio jedno objašnjenje ove pojave polazeći od promene gravitacionog polja Sunca usled njegove spljoštenosti. Tako je uspeo da objasni oko 10% efekta. Uz pretpostavku da bi ta spljoštenost mogla biti veća nego što se sad smatra (jer je vrlo mala i teška za posmatranje) moglo bi se objasniti do jedne petine efekta. Dakle ipak nedovoljno. Tada je nastalo mišljenje da je relativističko tumačenje našlo najveću potvrdu upravo u tome što i najjači protivargument može objasniti samo manji deo ove pojave.

11.2 Putanje svetlosnih zrakova

Putanje planeta predstavljaju vremenske, a putanje svetlosnih zrakova nulte geodezijske linije svetske metrike. Svetlosni zrak koji dolazi sa neke zvezde i prolazi Sunčevim gravitacionim poljem morao bi imati svojstva neradijalne geodezijske linije (ukoliko ne pada prema središtu Sunca) Švarcšildove metrike. Za takve će se putanje u obrascu (11.1) pojaviti nula na desnoj strani, dok će na desnim stranama prvih integrala (10.35) konstante α i β težiti beskonačnosti kada svetska linija teži nultoj. Te konstante imaju isti red rašćenja i količnik treba da im bude konačan. Tako imamo, umesto (11.2)

$$\left\{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varphi}\left(\frac{1}{r}\right)\right\}^2+\frac{1}{r^2}=c^2\frac{\beta^2}{\alpha^2}+\frac{2m}{r^3}. \tag{11.9}$$

Odakle sledi, umesto (11.3), diferencijalna jednačina

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varphi}\left(\frac{1}{r}\right)+\frac{1}{r}=\frac{3m}{r^2}, \tag{11.10}$$

putanja svetlosnih zrakova.

Rešenje homogenog dela jednačine (11.10) glasi

$$\left(\frac{1}{r}\right)_1=\frac{1}{r_0}\cos\varphi, \tag{11.11}$$

[2](R. Dicke

gde je koordinatni sistem izabran tako da za $\varphi = 0$ bude $r = r_0$. Ovo je jednačina prave u polamom sistemu, upravne na polarnoj osi. U sledećem koraku stavljamo rešenje (11.11) na desnu stranu (11.10)

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\varphi^2}\left(\frac{1}{r}\right) + \frac{1}{r} = \frac{3m}{r_0^2}\cos^2\varphi,$$

što daje partikularno rešenje

$$\left(\frac{1}{r}\right)_2 = \frac{m}{r_0^2}\left(1 + \sin^2\varphi\right).$$

Ukupno rešenje otud glasi

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{r\,0}\left\{\cos\varphi + \frac{m}{r_0}(1 + \sin^2\varphi),\right\} \tag{11.12}$$

što predstavlja konačnu jednačinu putanje fotona. Ona je simetrična u odnosu na polarnu osu, jer je $r(\varphi) = r(-\varphi)$.

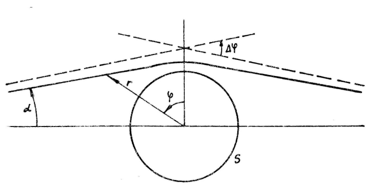
Za $\varphi = \pm(\pi/2 + \alpha)$ ćemo imati asimptotske pravce jednačine (11.12) koji, s obziLrom na malu popravku, malo odstupaju od prave (11.11), pa je i odstupanje α ugla φ od 90° malo. Dakle, (11.12) tada daje:

$$-\sin\alpha + \frac{m}{r_0}\left(1 + \cos^2\alpha\right) = 0. \tag{11.13}$$

S obzirom na ono što smo rekli, sinus možemo zameniti uglom, a kosinus, pošto mu se pojavljuje kvadrat, jedinicom. Tada je, iz (11.13)

$$\alpha \approx \frac{2m}{r_0}.$$

Slika 11.2 nam daje ukupno odstupanje svetlosnog zraka od prave $r = r_0$.



Slika 11.2: Odstupanje svetlosnog zraka od prave $r = r_0$.

Otud ukupno odstupanje $\Delta\varphi$ svetlosnog zraka iznosi

$$\Delta\varphi = 2\alpha \approx \frac{4m}{r_0}. \tag{11.14}$$

Imamo, za zrak koji neposredno prolazi uz rub Sunca, $r_0 \approx 7 \times 10^5\,[cm]$ i vrednost m, odnosno iz (10.37), za gravitacioni poluprečnik Sunca. Odatle je

$$\delta\varphi \approx 1{,}75''. \tag{11.15}$$

Skretanje svetlosnih zrakova u Suncevom gravitacionom polju, tačnije rečeno, veličina njihovog skretanja, predstavlja takođe jedan od jakih argumenata u prilog opštoj relativnosti. Dosadašnja merenja šavijenihžrakova svetlosti sa zvezda koje se geometrijski nalaze neposredno ispod Sunčevog ruba, vršena prilikom pomračenja Sunca, dala su odstupanja reda veličine od oko 10% u odnosu na očekivanja, i to u smislu povećanja. Takvi rezultati se, s obzirom na velike teškoće koje prate posmatranja, mogu smatrati kao zadovoljavajući.

Inače, savijanje svetlosti bi trebalo da nastupi i u njutnovskom gravitacionom polju. Ako bismo fotonima, kao kvantima energije, pripisali odgovarajuće mase, oni bi skretali prema izvoru njutnovskog polja, samo što bi efekat bio upola manji od relativističkog.

11.3 Promene u spektrima

U prvom delu ovog kursa, u §14, bila je izvedena relativistička formula za promenu učestalosti oscilatora u zavisnosti od kretanja, ili Doplerov efekt. Tada smo, kao poseban i pažnje vredan primer, objasnili crveni pomak u spektrima vrlo dalekih nebeskih tela, sveopštim udaljavanjem u Svemiru. Taj doplerovski crveni pomak treba razlikovati od gravitacionog, koji je poznat i pod nazivom **Ajnštajnov efekt**.

Osnov od kojeg polazimo jesu zaključci §38, 39 o promeni energije svake čestice, pa prema tome i one koja zrači, usled promene gravitacionog polja. Slobodno padanje u različitim gravitacionim poljima ima, kao posledicu, kretanje po različitim geodezijskim linijama. Ali činjenica da i posmatrači u tim poljima trpe gravitacione sile čini da oni ne mogu prrmetiti razlike. Ovde su posmatrač i posmatrani izvor udaljeni jedan od drugog i svaki od njih može zanemariti dejstvo na sebe gravitacionog polja u kojem se nalazi onaj drugi. Posmatrač prima na daljinu informacije putem zračenja i može da potraži razlike.

Mi smatramo da atomi nekog elementa na Suncu, koji zrače usled visoke temperature, slobodno padaju u Sunčevom gravitacionom polju. Njihove putanje, između sudara, treba da budu geodezijske linije metrike na Sunčevoj površi. Pritom zanemarujemo sudare kao relativno kratkotrajnu pojavu, jer u blizini tačaka (događaja) sudara svetske linije odstupaju od geodezijskih. Nikakvu razliku u zračenju usled nekog jačanja ili slabljenja gravitacionog polja ne bi mogao da primeti posmatrač koji bi mirovao u blizini njegovog izvora (videti: Pound, Rebka, Phys. Rev. Lett. 4, 337, [22]; Pound, Snyder, Phys. Rev. B 140, 788, 1965). Iskoristićemo tu činjenicu koja je posledica principa ekvivalentnosti.

U jednom lokalno Lorencovom sistemu (videti §39, 50) impuls fotona iznosi po (5.8)

$$K^i = c^{-2}h\nu\ell^i, \quad K^4 = c^{-1}h\nu = c^{-2}E, \tag{11.16}$$

gde je h Plankova konstanta, prostorna normala (tronormala) na elektromagnetnom talasu, ν frekvencija i E energija. K^α je nulti vektor, njegove putanje su nulte geodezijske linije, za koje možemo s velikom približnošću uzeti da su radijalne (upravljene tačno od središta Sunca prema posmatraču na Zemlji). Odgovarajući interval je stoga oblika (10.33), pa je proteklo koordinatno vreme Δt vezano s prevaljenim putem $\Delta\ell$ obrascem:

$$c\Delta_1 t = \frac{\Delta\ell}{\sqrt{1-\dfrac{2m}{r}}}, \quad \text{gde je } \Delta\ell^2 = g_{11}\Delta r^2 = \frac{\Delta r^2}{1-\dfrac{2m}{r}}, \tag{11.17}$$

gde je gravitacioni radijus Sunca (videti (10.37), a r njegov poluprečnik. Ovo znači da posmatramo radijalni nulti interval čiji je izvor u događaju koji se nalazi neposredno iznad površi Sunca. Kvant koji je tamo izračen treba, na osnovu onog što rekosmo, da bude za tamošnjeg posmatrača, nosilac iste energije kao i onaj koji se u zemaljskom procesu zračenja posmatra u laboratoriji. Ali zato vreme za koje foton izračen sa Sunca pređe jednak put $\Delta\ell$ kad je blizu Zemlje iznosi

$$c\Delta_2 t = \frac{\Delta\ell}{\sqrt{1-\dfrac{2m}{R}}}, \tag{11.18}$$

gde je R rastojanje Sunce-Zemlja. Ovaj period vremena manji je od onog koji je dat u (11.17). Ako je frekvencija jednaka broju treptaja u jedinici koordinatnog vremena, frekvencija ν_1, koja odgovara periodu vremena $\Delta_1 t$ iz (11.17), veća je od frekvencije ν_2, koja odgovara periodu $\Delta_2 t$ iz (11.18). dakle

$$\frac{\nu_2}{\nu_1} = \frac{\Delta_2 t}{\Delta_1 t} = \left(1-\frac{2m}{r}\right)^{1/2}\left(1-\frac{2m}{R}\right)^{-1/2} \tag{11.19}$$

pa je promena frekvencije

$$\begin{aligned} \Delta\nu &= \nu_1\left(1-\frac{\nu_2}{\nu_1}\right) = \\ &= \nu_1\left\{1-\left(1-\frac{2m}{r}\right)^{1/2}\left(1-\frac{2m}{R}\right)^{-1/2}\right\} = \\ &= \nu_1\left\{1-\left(1-\frac{m}{r}+\cdots\right)\left(1-\frac{m}{R}+\cdots\right)\right\} \approx m\nu_1\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{R}\right). \end{aligned} \tag{11.20}$$

Ovom, po (11.16), odgovara promena energije fotona primljenog sa Sunca.

Ovde smo izvršili dva zanemarenja. Prvo zanenanli smo uticaj Zemljinog gravitacionog polja na foton, jer smatramo da ono znatnije deluje na njega tek na malom delu puta blizu Zemlje. Drugo, zanemarili smo doplerovsku popravku usled Zemljrnog kruženja oko Sunca, jer ma da ta trzina nije mala, radijalna komponenta joj je neznatna.

Pošto je, dakle, učestalost za element koji zraci na Zemlji, u latoratorijskim uslovima, ili na Suncu, veća od one koju ima svetlost primljena sa Sunca, sleduje da ova poslednja ima veću talasnu dužinu, odnosno sistematski pomak spektra prema crvenom delu. Izraz (11.20) predstavlja čuveni relativistički otrazac za gravitacionu promenu spektra. On je pružio treću klasičnu potvrdu opšte teorije relatrvnosti.

Gravitacione popravke se traže i u spektrima drugrh zvezda. Napominjemo da je tada, zbog velike daljine, drugi član u poslednjem izrazu (11.20) zanemarljiv.

Za Sunce nam (11.20) daje

$$\frac{\Delta\nu}{\nu} \approx 2\times 10^{-6}. \tag{11.21}$$

Kvalitivno, ovakva promena u spektru je utvrđena, mada rezultat u dosta velikoj meri zavisi od izabrane linije, i dela Sunca sa kojeg se prima svetlost. Efekt je veći za svetlost koja dolazi s kraja nego sa sredine Sunčeve vidljive površi. U svemu, ovaj efekt dosta ometa činjenica da atomi na Suncu ustvari ne padaju slobodno, zetim turbulentno kretanje, odnosno ”kljucanjeŠunčeve površine, koje mestimično dodaje crveni, a mestimično oduzima ljubičasti doplerovski pomak.

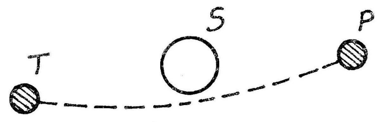
Od 1960. godine ovakve se pojave na spektrima mogu posmatrati u laboratorijskim uslovima, u Zemljinom gravitacionom polju. To je moguće zahvaljujući Mesbauerovom[3] efektu, koji otkriva razlike u rezonanciji vrlo oštrih γ-zrakova već i pri malim promenama visine. Rezultati ispitivanja potvrdili su očekivanja teorije relativnosti.

11.4 Noviji opiti koji potvrđuju opštu teoriju relativnosti

Ovde ćemo načelno izložiti dva novija opita. Prvi od njih pokazuje povećano trajanje puta elektromagnetnog impulsa u Sunčevom gravitacionom polju, prema onom koje bi imao u Svetu Minkovskog. Drugi opit, koji se odnosi na usporenje toka vremena na objektu u kretanju, izložen je već u §15. Sad ćemo diskusiju upotpuniti uzimajući u obzir promenu koja nastaje usled dejstva Zemljinog gravitacionog polja.

Prvi eksperiment, koji su izveli Šapiro[4] i njegovi saradnici 1970. godine, sastoji se u merenju vremena za koje radarski signal poslat sa Zemlje pređe put do jedne planete, odbije se i vrati na Zemlju. Bitno je da ta planeta bude u **gornjoj konjunkciji** prema Suncu, to jest da se Sunce nađe između nje i Zemlje. Razume se da planeta stvarno treba, gledano sa Zemlje, da se nalazi blizu Sunčevog ruba, da bi impuls mogao da stigne do nje i da se vrati (slika 11.3).

[3] Mössbauer
[4] I. Shapiro



Slika 11.3: ??????????.

Ravan ekliptike i dalje je određena sa $\theta = \pi/2$. Nulta geodezijska svetska linija radarskog impulsa zadovoljava, na osnovu (10.19) vezu ($2m_S$ je gravitacioni poluprečnik Sunca)

$$\left(1-\frac{2m}{r}s\right)^{-1}\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\right)^2+\lambda^2\left(\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\right)^2-c^2\left(1-\frac{2m}{r}s\right)=0. \tag{11.22}$$

Uzmimo u razmatranje prve integrale kretanja (10.35) po nenultim geodezijskim linijama, i podelimo jedan od njih drugim

$$\frac{r^2}{1-\frac{2m}{r}s}\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}=\frac{\alpha}{\beta}\equiv\gamma. \tag{11.23}$$

Ako pustimo da ovakva linija teži nultoj, primetićemo da se u prethodnoj vezi ništa ne menja. (11.23) podjednako važi za vremenske i za nulte intervale. Sad ćeno (11.22) napisati u obliku:

$$\left(1-\frac{2m}{r}s\right)^{-1}\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\right)^2+\frac{\gamma^2}{r^2}\left(1-\frac{2m}{r}s\right)^2-c^2\left(1-\frac{2m}{r}s\right)=0. \tag{11.24}$$

Ovakve putanje moraju imati, između krajnjih tačaka, minimalno odstojanje r_{min} od središta Sunca, za koju je vrednost priraštaj radijalne koordinate po vremenu jednaka nuli. Otud je iz (11.24)

$$\gamma^2=\frac{c^2 r_{\mathrm{min}}}{1-\frac{m}{r_{\mathrm{min}}}s}.$$

Pošto smo time odredili smisao i vrednost konstante γ imoćemo, kad je vratimo u (11.24) i izvršimo razdvajanje promenljivih

$$t(r)=c^{-1}\int_{r_{\mathrm{min}}}^{r}\frac{r\,\mathrm{d}r}{\left(1-\frac{2m}{r}s\right)\sqrt{r^2-r_{\mathrm{min}}^2\left(1-\frac{2m}{r}s\right)/\left(1-\frac{2m}{r_{\mathrm{min}}}s\right)}} \tag{11.25}$$

koji period koordinatnog vremena protekne dok signal pređe put tačke najbliže Suncu (perihela) do bilo kojeg događaja na putanji.

Ako sa r_1 obeležimo rastojanje Sunce-Zemlja, a sa r_2 rastojanje od Sunca do posmatrane planete, dobićemo, u metrici Minkovskog, obrazac za vreme T, koje protekne do trenutka kada se vrati, računato u vremenu posmatrača koji miruje prema Suncu

$$T=2c^{-1}\left(\sqrt{r_1^2-r_{\mathrm{min}}^2}+\sqrt{r_2^2-r_{\mathrm{min}}^2}\right). \tag{11.26}$$

Ovde je uzeto da se položaj Zemlje prema Suncu neznatno izmeni dok putuje signal. Odgovarajući period u Švarcšildovoj metrici iznosi, prema (11.25)

$$T'=2\left(t(r_1)+t(r_2)\right). \tag{11.27}$$

U obrascu (11.27) izvršena su izvesna zanemarenja, analogna onim koja smo imali za crveni pomak. Uzeto je, s obzirom na dužinu puta i srazmerno male intenzitete gravitacionih polja, da Zemlja i odabrane planete slabo utiču na radarski impuls. Ovo je utoliko tačnije što su za objeke korišćene nevelike planete, Merkur i Venera, koje su Suncu bliže od Zemlje. Ovo je činjeno zato što bi se pri dužem trajanju opita uzajamni položaji nebeskih tela i $r_{\min}$ znatnije promenili između dva prolaska signala. Tako je dobijena vrednost

$$\Delta T = T' - T \approx 4m_S c^{-1}\left\{\ln\left(\frac{4r_1r_2}{r_{\min}^2}\right)+1\right\}. \tag{11.28}$$

Ova formula izračunata je iz (11.25) dosta posrednim približnim postupkom, u čije pojedinosti ne ulazimo. Za odjek sa Merkura veličina zakašnjenja iznosi $2,4\times 10^{-4}\,[s]$.

Celokupni prethodni račun daje nam zakašnjenje signala u odnosu na koordinatno vreme. Zemlja ima sopstveno vreme, koje se od koordinatnog razlikuje prvenstveno zbog njenog gravitacionog polja, a merenja se vrše na njoj. Svođenje zemaljskog sopstvenog vremena na koordinatno predstavlja ”popravku popravke”reda $10^{-8}\,[s]$, što je sasvim zanemarljivo. Zato se služimo obrascem (11.28).

Sva merenja, izvršena prilikom gornjih konjunkcija Merkura i Venere, pokazala su očekivana usporenja. Ovaj opit ima kvalitativan značaj. Dok se, na primer, za savijanje svetlosti u gravitacionom polju može pokazati da bi postojalo i po njutnovskoj korpuskularnoj teoriji, u iznosu upola manjem od relativističkog, dotle bi u izlozenom opitu trebalo da doÄ‘e, po njutnovskoj teoriji, do ubrzanja elektromagnetnog zračenja.

Drugi eksperiment. Za eksperiment koji utvrđuje promenu toka vremena na pokretnom objektu u Zemljinom gravitacionom polju, uzećemo da se kretanje vrši u ravni polutara $\theta = 0$. Pri stvarnom opitu bila je uzeta druga ravan kretanja, ali su posle svođenja dobijene odgovarajuće vrednosti. Promenljiva je dakie jedino geografska dužina φ. Od Zemljinih parametara obeležićemo poluprečnik sa r, gravitacioni poluprečnik sa $2m$, ugaonu brzinu dnevne rotacije sa ω, kao u §15. Sa t ćemo obeležiti tok vremena nekog idealizovanog posmatrača koji bi se kretao sa Zemljom oko Sunca, ne trpeći uticaj sile teže i ne vršeći dnevnu rotaciju. Trajanje uzletanja i sletanja je kratko, i ne utiče bitno na rezultat.

Vreme koje stvarno protekne, u funkciji t, za posmatrača koji miruje na polutarskoj širini iznosi, s obzirom na konstantnost svih veličina osim vremena, a na osnovu (10.19)

$$\tau_1 = \int_0^t \sqrt{\left(1-\frac{2m}{r}\right)\mathrm{d}t^2 - c^2r^2\,\mathrm{d}\varphi^2} = t\sqrt{1-\frac{2m}{r}-\frac{r^2\omega^2}{c^2}}. \tag{11.29}$$

Dok je vreme koje protekne na avionu koji kruži oko Zemlje na visini h, brzinom v, ugaonom brzinom $\dot\varphi$, po istom obrascu

$$\tau_2 = \sqrt{1-\frac{2m}{r+h}-c^{-2}(r+h)^2\dot\varphi^2}. \tag{11.30}$$

Brzina avina iznosi, po teoremi o slaganju trobrzina

$$(r+h)\dot\varphi = \frac{(r+h)\omega+v}{1-c^{-2}(r+h)\omega v} \approx (r+h)\omega+v, \tag{11.31}$$

gde smo se zadovoljili, zbog $\omega \ll c$ i $v \ll c$, galilejskom adicionom teoremom.

Sad možemo izračunati vremensko odstupanje $\Delta\tau/\tau_1$. Ako se zadržimo na prvim članovima razvoja u stepene redove biće

$$\frac{\Delta\tau}{\tau_1} \approx \left(1-\frac{m}{r}-\frac{r^2\omega^2}{2c^2}\right)\left\{1+\frac{m}{r+h}+\frac{1}{2c^2}\left[(r+h)\omega+v\right]^2\right\}-1.$$

Kad se u ovom izrazu odbace, kao mali, članovi gde se pojavljuju činioci mc^{-2} i c^{-4}, a zatim stavi $r \approx r+h$, imaćemo na kraju

$$\frac{\Delta\tau}{\tau_1} \approx \frac{mh}{r^2} - \frac{v}{c^2}(v+2r\omega). \tag{11.32}$$

Za kretanje prema istoku v je pozitivno, a prema zapadu negativno. kerenja se dobro slažu s obrascem. Tablica i komentar dati su u §15.

Pored ovih eksperimenata vršena su, doskora, merenja pomoću vestačkih satelita nekih relativističkih pojava precesije. Nećemo ulaziti u te eksperimente, ali će u Dodatku B biti izvedcn obrazac za Tomasovu[5] precesiju.

11.5 Zadaci

Zadatak 29

Naći veličinu skretanja svetlosnih zrakova u Njutnovom gravitacionom polju.

Uputstvo: iskoristiti Bineov obrazac i integral površine $\rho_0^2 \dot{\varphi}_0 = r_0 c = \alpha c$ za najmanje rastojanje r_0 putanje od sredista Sunca.

Rešenje

Zadatak 29

[5] L.W. Thomas

12. Uvod u kosmologiju

12.1 Opšti pregled

Osnovna kosmološka pitanja, postavljena pre nastanka teorije relativnosti, vodila su paradoksalnim zaključcima. Euklidski, dakle beskonačan, prostor homogeno ispunjen materijom bilo kako male gustine, imao bi neizmerno snažno gravitaciono polje u svakoj tački. Slično tome, još je ranije zapaženo da bi svetlost sa zvezda, široko uzev ravnomerno raspoređenih po beskonačnoj Vasioni, morala da zaslepi svakog posmatrača. Objašnjenje što nije tako moglo se potražiti u pretpostavci da se materija, raspoređena po ostrvima, odnosno galaksijama, razređuje u svim pravcima polazeći od nekog središta. Jedno od objašnjenja bilo je u takozvanom ”hijerarhijskom”uređenju Vasione, koje je u prvoj deceniji ovog veka predložio Šarlije[1]. On je smatrao da je Vasiona uređena po skupovima zvezda, grozdovima skupova, itd, sa rastućim uzajamnim rastojanjima. Tu nije bilo moguće oceniti prosečnu gustinu materije. Kasnija posmatranja sve daljih i daljih objekata u Vasioni nisu potvrdila pretpostavku o razređivanju, osim do izvesnog stepena, posle kojeg raspodela materije ostavlja, naprotiv, utisak homogenosti u širokom.

U to je vreme Mah[2], posmatrajući stvari sa stanovišta koje nije kosmološko u čisto astronomskom smislu, izneo mišljenje po kojem je inercija svakog pojedinog tela uslovljena masom i rasporedom ostalih tela u Vasioni. On je smatrao da se inercija ne može unapred uzeti kao neka nepromenljiva, gotovo apstraktno, svojstvo **savršeno izolovanih tela**, kako se to činilo u njutnovskoj mehanici.

Mahova shvatanja ogromno su uticala na Ajnštajna, u vreme kada je osnivao opštu relativnost. Pod njihovim uticajem on je potražio jedno dinamičko ustrojstvo Vasione. Ona su poslužila, kao polazna tačka, i pri kasnijim pokušajima stvaranja izmenjenih teorija gravitacije. Tako je, s nastankom opšte teorije relativnosti, potražena šlika Sveta”, odnosno oblik Vasione, koji bi proistekao iz dejstva svih činilaca u njoj. Ovde moramo nešto primetiti. Gravitaciona polja sfernog i osno simetričnog izvora (izvora koji rotira) razmatrali smo u §52, 56. Yideli smo da takve metrike u beskonačnosti teže metrici Minkovskog. Međutim, u kosmološkom prilazu, ukupno gravitaciono dejstvo, ma koliko slabo udaljeni izvori uticali jedni na druge,

[1]Charlier
[2]E. Mach

može, zbog velikog broja masa, inati posledicu da pod određenim uslovima isključi netriku Minkovskog bilo gde, pa i samo pružanje Vasione u beskonačnoet.

Osnovne kosnološke teorije, koje ćemo ovde razmatrati, pretpostavljaju honogenost i izotropnost prostora, tako da u odnosu na koordinatno vreme izvora svaki deo prostora ima iste metrička svojstva u svim pravcima. U odnosu na takvo vreme te se teorije razlikuju po tome što su statičke ili nestatičke. Homogenost i izotropnost znače da je krivina prostora u svakon trenutku konstantna. Ako je sa r_{ijkl} definisan tenzor krivine, obrazovan u odnosu na prostorni deo metrike, imano vezu

$$r_{ijkl} = K(a_{ik}a_{jl} - a_{il}a_{jk}), \quad K = \text{const.}, \tag{12.1}$$

gde je K rimanska kriviaa (videti: P.K. Raševski, [8], str. 591). Dok za a_{ij} važi

$$t = \text{const.} \quad \Rightarrow \quad g_{ij} = a_{ij}.$$

Kakav može biti interval $\mathrm{d}s^2$ prostornog dela kosmološke metrike? S obziron na naše pretpostavke, moguće je postaviti sferni sisten, čiji bi se početak nalazio bilo gde. Drugim rečima, pretpostavljamo sfernu forminvarijantnost prostorne metrike, koja se svodi na prva tri člana u (10.10):

$$\mathrm{d}\sigma^2 = e^{\mu(r)}\,\mathrm{d}r^2 + r^2\left(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta\,\mathrm{d}\varphi^2\right). \tag{12.2}$$

Potraßiemo $\mu(r)$ pomoću (12.1). Kontrakcijom sa a^{ik} imamo prvo Ričijev tenzor prostorne krivine

$$r_{jl} = 2Ka_{jl}. \tag{12.3}$$

Ako obrazujemo, analogno (10.12), Kristofelove simbole druge vrste u odno su na koeficijente (12.2), dobićemo, kad ih unesemo u izraze oblika (9.13), za r_{jl}

$$\begin{aligned} r_{11} &= \frac{1}{r}\mu', \\ r_{22} &= r_{33}\sin^{-2}\theta = 1 + e^{-\mu}\left(\frac{1}{2}r\mu' - 1\right) \\ r_{jl} &= 0, \quad j \neq l. \end{aligned} \tag{12.4}$$

Kad ovo stavimo u (12.3), imaćemo dve nezavisne veze:

$$\frac{1}{r}\mu' = 2Ke^{\mu}, \quad 1 + e^{-\mu}\left(\frac{1}{2}r\mu' - 1\right) = 2Kr^2. \tag{12.5}$$

Smena μ' Piz prve od ovih diferencijalnih jednačina u drugoj daje

$$e^{-\mu} = 1 - Kr^2.$$

Kad se ovo unese u prostorni metrički element (12.2) imaćemo

$$\mathrm{d}\sigma^2 = \frac{\mathrm{d}r^2}{1 - Kr^2} + r^2\left(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta\,\mathrm{d}\varphi^2\right). \tag{12.6}$$

Konstanta K, rimanska krivina, predstavlja recipročnu vrednost kvadrata poluprečnika krivine r_0, s predznakom koji odgovara slučajevima kada je prostor otvoren ili zatvoren. Možemo dakle pisati

$$\mathrm{d}\sigma^2 = \frac{\mathrm{d}r^2}{1 - \zeta(r/r_0)^2} + r^2\left(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta\,\mathrm{d}\varphi^2\right). \tag{12.7}$$

Za $\zeta = 1$ imamo zatvoreni prostor konstantne krivine. Za $\zeta = -1$ prostor je otvoren, konstantne negativne krivine. Za $\zeta = 0$ prostor je euklidski.

12.2 Statička Vasiona

Veza (12.7) dobijena je bez razmatranja materijalnog sastava vasione, to jest izvora gravitacionog polja. Sad ćemo poći od kosmološke pretpostavke po kojoj je, najšire uzev, Vasiona ispunjena savršenim fluidom koji je, kao neka magla, sastavljen iz galaksija. Mi se tine opredeljujemo za shvatanje da daleko pretežan deo energije potiče iz materijalne gustine, dok je "pritisakšamo popravka energije usled međudejstava u materiji. Elektromagnetno polje se zanemaruje. Pritisak p je shvaćen kao da se radi o savršenon fruidu zato što međudejstva nemaju, u srednjem, nekih najpovoljnijih pravaca. Prirodno je uzeti da su ta međudejstva, uopšte uzev, funkcije sano gustine, dakle $p = p(\rho)$. Činjenica je da popravke imaju, u odnosu na energiju, red veličina umanjen do na c^{-2} (videti §25, 26).

Gravitacione jednačine s kosnološkon konstanton Λ (9.5) za savršeni fluid glase

$$R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}(R+\Lambda)g_{\alpha\beta} = -\varkappa\left\{(\rho+p)u_\alpha u_\beta + p g_{\alpha\beta}\right\}, \tag{12.8}$$

gde smo stavili $c = 1$.

Pretpostavićemo da je metrika, pored honogenosti i izotropnosti, statička (videti (9.101) u odnosu na izvore polja. Elementarni interval treba da bude oblika

$$\varepsilon \mathrm{d}s^2 = M(r)\,\mathrm{d}r^2 + r^2\left(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta\,\mathrm{d}\rho^2\right) - N(r)\mathrm{d}t^2. \tag{12.9}$$

Kako je koordinatni sistem vezan za izvore polja, tenzor energije na desnoj strani (12.8) odgovaraće hidrostatičkon fluidu, kao u §53. Kad u (12.8) unesemo koeficijente iz (12.9), dobiémo nešto izmenjene jednačine (10.23), od kojih ćemo ovde napisati prvu i poslednju:

$$\begin{aligned} \frac{1}{M}\left(\frac{1}{rN}\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}r} + \frac{1}{r^2}\right) - \frac{1}{r^2} + \Lambda &= \varkappa p, \\ \frac{1}{M}\left(\frac{1}{rM}\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}r} - \frac{1}{r^2}\right) + \frac{1}{r^2} - \Lambda &= \varkappa \rho. \end{aligned} \tag{12.10}$$

Ilok je jednačina dinamike (10.26) neizmenjena

$$\frac{1}{2}(\rho+p)\frac{1}{N}\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}r} + \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}r} = 0. \tag{12.11}$$

Mi smo koeficijent $M(r)$ u (12.9) ustvari već odredili vezom (12.7), koja izražava prostornu homogenost. Prva jednačina (12.10) će na osnovu toga glasiti

$$\left(1 - \zeta\left(\frac{r}{r_0}\right)^2\right)\left(\frac{1}{rN}\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}r} + \frac{1}{r^2}\right) - \frac{1}{r^2} + \Lambda = \varkappa p. \tag{12.12}$$

Dok se druga svodi na

$$\Lambda = \frac{3\zeta}{r_0^2} - \varkappa\rho. \tag{12.13}$$

Sve veličine osim ρ predstavljaju određene konstante. Otud iz (12.13) sleduje da je i gustina konstantna. Zbog $\rho = \rho(p)$ biće to i pritisak. Dakle:

$$\rho = \text{const.}, \quad p = \text{const.} \tag{12.14}$$

Ovakvo stanje karakteriše homogene modele. Na osnovu nepromenljivosti pritiska (12.11) se svodi na

$$\left(\rho + c^{-2}p\right)\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}r} = 0, \tag{12.15}$$

gde mogućnost za $N = 0$ (videti §55,56) ne dolazi u obzir. Koeficijent c^{-2} vraćen je na svoje mesto.

Jednačina (12.15) ima dva rešenja:

1) $\dfrac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}r} = 0$, što predstavlja **Ajnštajnovu Vasionu**.

2) $\rho^2 + c^{-2}p = 0$, što predstavlja **de Siterovu Vasionu**[3]

[3] W. de Sitter

Prvo rešenje: Razmotrićemo prvo Ajnštajnovu Vasionu. Kako je N konstantan, odabraćemo jedinice merenja tako da bude jednak c^2. Metrički element (12.9) tada glasi

$$\varepsilon \mathrm{d}s^2 = \frac{\mathrm{d}r^2}{1-\zeta(r/r_0)^2} + r^2\left(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta\,\mathrm{d}\varphi^2\right) - c^2\mathrm{d}t^2. \tag{12.16}$$

Na osnovu čega će (12.13) postati

$$\Lambda = \frac{\zeta}{r_0^2} + \varkappa c^{-2}p. \tag{12.17}$$

Iz ove veze i (12.13) dobijamo da je, nezavisno od znaka krivine

$$\Lambda = \frac{1}{2}\varkappa\left(\rho + 3c^{-2}p\right), \tag{12.18}$$

odnosno

$$\frac{\zeta}{r_0^2} = \frac{1}{2}\varkappa\left(\rho + c^{-2}p\right). \tag{12.19}$$

Metrički element (12.16) je takav da u Ajnštajnovoj Vasioni koordinatno vrene svuda jednako teče, nezavisno od metrike. Iz (12.13) i (12.17) vidimo razlog što je kosmološka konstanta različita od nule za oval model Vasione. Ako bi Λ bila jednaka nuli to bi, pošto signatura ne nože imati istovremeno suprotne znakove, pritisak bio negativan i iznosio, na osnovu (12.17), i pored činioca c^{-2}, trećinu energije mirovanja. Ovo nije verovatno, u okviru klasično shvaćenih materijalnih interakcija, tako da $\Lambda \neq 0$ ima opravdanje.

Na osnovu prethodnih razmatranja vidimo da kosmološka konstanta treba da bude ne samo različita od nule, već i pozitivna, što takođe sledi iz (12.18) jer je $\varkappa$ pozitivna konstanta. 7z (12.17) tada izlazi da je $\zeta = 1$, pa je Vasiona zatvorena (Ajnštajn je pisao "Vasiona je bezgranična i konačna…"). Ukoliko zanemarimo $c^{-2}p$, iz (12.17) sledi i to da je kosmološka konstanta jeanakra totalnoj krivini Vasione.

Drugo rešenje: Pređino na de Siterovu Vasionu. Ona je dobijena zanemarivanjem specifične gustine energije koja potiče od mirujuće materije i njenih interakcija. Pošto je ta gustina mala u vasionskin razmeramat ovaj model nije onako daleko od stuarnosti kako bi na prvi pogled moglo da se učini. lzvori polja postoje, koordinatno vreme je i dalje vreme posmatrača koji miruje prena njima.

Kad se saberu jednačine (12.10) (inajući u vidu da ispred p treba da stoji c^{-2}) dobićemo

$$\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(\ln M + \ln N\right) = 0,$$

odnosno

$$MN = \text{const.} = c^2,$$

gde smo se opredelili za c^2 iz istih razloga kao i prethodno. Kad. iz (12.7) ili (12.16) unesemo $M(r)$, odredićemo $N(r)$ i dobiti metrički element oblika

$$\varepsilon \mathrm{d}s^2 = \frac{\mathrm{d}r^2}{1-(r/r_0)^2} + r^2\left(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta\,\mathrm{d}\varphi^2\right) - c^2\left[1-(r/r_0)^2\right]\mathrm{d}t^2, \tag{12.20}$$

koji odgovara Svetu de Siterove Vasione. Kao i Ainštajnov, ovaj nodel je statički, pa se u reperima saputnicima izvora polja metrika lokalno može dovesti na oblik (9.96′). Iz (12.20) vidimo da se tok vremena menja s prostornim udaljavanjem u odnosu na tok u početnoj tački.

Lemetr[4] je otkrio da sledeća smena (necikličkih) promenljivih $(r,t) \to (\bar{r},\bar{t})$

$$\begin{aligned} \bar{r} &= \frac{r}{e^{ct/r_0}\sqrt{1-(r/r_0)^2}}, \quad \bar{\theta} = \theta, \\ \bar{t} &= t + \frac{r_0}{2c}\ln\left[1-(r/r_0)^2\right], \quad \bar{\varphi} = \varphi, \end{aligned} \tag{12.21}$$

[4] Mgr. G. Lemaiter

prevodi metrički element (12.20) u oblik

$$\varepsilon \mathrm{d}s^2 = e^{2c\bar{t}/r_0}\left(\mathrm{d}\bar{r}^2 + \bar{r}^2\mathrm{d}\bar{\theta}^2 + \bar{r}^2\sin^2\bar{\theta}\mathrm{d}\bar{\varphi}^2\right) - c^2\mathrm{d}\bar{t}^2 \tag{12.22}$$

Što se može proveriti. Ovde treba podvući dve činjenice. Prvo metrika nije više statička, već zavisi od vremena onih posmatrača čije svetske linije određuju kongruenciju vremenskog toka $\bar{t}$. Takvi posmatrači, kao što se vidi iz transformacije (12.21), ne miruju prena izvorima gravitacionog polja. Vidi se i to da je prostorni deo metričkog elementa (12.22) u svakom trenutku euklidski, pomnožen činiocem $\exp(2c\bar{t}/r_0)$ koji ukazuje na ekspanziju Vasione, što je u skladu s Hablovin efekton. Vrenenski deo intervala ne zavisi od položaja u odnosu na izabrani početak. Jednostavno transformacijom $\bar{t}\tau\tau$, može se postići da u intervalu (12.22) isti činilac množi kvadratnu formu, koja ima oblik Minkovskog $\mathrm{d}s^2 = f(\tau)\,\mathrm{d}s_M^2$. Znači da je to konformno ravanska metrika (videti §46). Ovo se još naziva **Lemetrova Vasiona**, mada se ona uklapa u Svet de Siterove Vasione (za vasionski horizont, ili daljinsku granicu posmatranja u njoj videti Ch. Moeller, [16], §12.7).

12.3 Nestacionarna Vasiona

Pređimo na neke slučajeve kada je Vasiona nestacionarna u odnosu na izvore gravitacionog polja.

Poći ćemo od pretpostavki da:

a) tok koordinatnog vremena ne zavisi od položaja posmatrača prema izabranon početku i
b) poluprečik krivine Vasione zavisi od vremena $t_0 = r_0(t)$.

Kako u Ajnštajnovoj Vasioni vrene teče jednako svuda, poći ćemo od takvog elementa, imajući u vidu da znak krivine nije određen. Posledica ovog je da gustina i pritisak nisu više konstantni kao u statičkom slučaju (12.14) već zavise od vremena.

Izvršićemo prvo transformaciju radijalne promenljive

$$r = \frac{\bar{r}}{1+\zeta(\bar{r}/2r_0)^2}. \tag{12.23}$$

Otuda

$$\frac{\mathrm{d}r^2}{1-\zeta(\bar{r}/r_0)^2} = \frac{\mathrm{d}\bar{r}^2}{\left(1+\zeta(\bar{r}/2r_0)^2\right)^2}$$

Izvršićemo još jednu transformaciju

$$\bar{r} = r_0 R, \tag{12.24}$$

gde je R nova promenljiva, koju treba razlikovati od Ričijeve skalarne krivine R^α_α. Ako ovo unesemo u (12.16) imaćemo

$$\begin{aligned}\varepsilon \mathrm{d}s^2 &= \frac{r_0^2(t)}{(1+\zeta R^2/4)^2}\left[\mathrm{d}R^2 + R^2\left(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta\mathrm{d}\varphi^2\right)\right] - c^2\mathrm{d}t^2 = \\ &= \frac{r_0^2(t)}{(1+\zeta R^2/4)^2}\left(\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2\right) - c^2\mathrm{d}t^2.\end{aligned} \tag{12.25}$$

Ovakva Vasiona je nestatička, a može biti otvorena, zatvorena ili ravna. S obzirom na euklidski oblik izraza u zagradi u (12.25) prostorni element $\mathrm{d}\sigma^2$ je konformno korespondentan rarnoj metrici preko "indeksa", preslikavanja, skalarnog pozitivnog činioca ispred zagrade. Transformacijom vremena $t \to \bar{t}$ možeemo interval (12.25) učiniti konformno korespondentnim metrici Minkovskog, što znači da je to jedan Robertson-Vokerov interval, i da se radi o konformno ravanskoj metrici (videti §46, od (9.57) na dalje).

Sastavićemo, na osnovu (12.25), gravitacione jednačine za savršeni hidrostatički fluid oblika (12.8) (uz $c = 1$). Pretpostavka je da sve promenljive zavise samo od koordinatnog vremena, tokom kojeg se menja $\mathrm{d}\sigma^2$. Leve strane tih jednačina, posle nešto dužeg neposrednog računa, glase:

$$\begin{aligned}G^i_j &= \frac{1}{r_0^2}\left(2r_0\ddot{r}_0 + \dot{r}_0^2 + \zeta - \Lambda r_0^2\right)\delta^i_j, \\ G^4_4 &= \frac{3}{r_0^2}\left(\dot{r}_0^2 + \zeta\right) - \Lambda.\end{aligned} \tag{12.26}$$

Ostale diferencijalne jednačine imaju nulu na desnoj strani. Kad se desna strana (12.26) izjednači s hidrostatičkim tenzorom energije, iz (12.8), dobićeno, s obzirom na očiglednu izotropnost G^i_j po cikličkin koordinatama, samo dve nezavisne jednačine:

$$\begin{aligned} \frac{1}{r_0^2}\left(2r_0\ddot{r}_0+\dot{r}_0^2+\zeta\right) &= \Lambda-\varkappa p(t), \\ \frac{1}{r_0^2}\left(\dot{r}_0^2+\zeta\right) &= \frac{1}{3}(\Lambda+\varkappa\rho(t)). \end{aligned} \tag{12.27}$$

Ako druga jednačina (12.27) pomnožimo sa r_0^3 i diferenciramo, zatim prvu pomnožimo sa $\dot{r}_0$ i oduzmemo od druge, dobićemo, posle skraćivanja konstantnih članova

$$\frac{\mathrm{d}(r_0^3\rho)}{\mathrm{d}t}+p\frac{\mathrm{d}(r_0^3)}{\mathrm{d}t}=0. \tag{12.28}$$

Ovo predstavlja jednu globalnu jednačinu održanja mase u Vasioni, posledicu gravitacionih jednačina i naših pretpostavki o ovon modelu.

U prethodnom smo se odeljku bili uverili da Ajnštajnova statička Vasiona zahteva uvođeaje kosmološke konstante. Za nestatički slučaj to više nije neophodno. Kosmotoška konstanta mora, u svakom slučaju, biti vrlo mala, što se vidi iz (12.17). Isto se može reći i za pritisak, koji energiju mirovanja menja za neveliki iznos $c^{-3}p$, bar prema onom što je danas poznato o stanju u Vasioni. Rešenje nestacionarnih diferencijalnih jednačina (12.27) predstavlja poluprečnik **Fridmanove Vasione**[5]. Mi ćemo se ograničiti na slučaj kada nisu uzeti u obzir pritisak i kosmološka konstanta

$$\Lambda=c^{-2}p=0.$$

Tada imamo, iz prve jednačine (12.27) i (12.28), očigledno integrale:

$$\begin{aligned} \rho r_0^3 &= C_1, \\ r_0(\dot{r}_0^2+\zeta) &= C_2. \end{aligned} \tag{12.29}$$

Kako je na osnovu drug jednačine (12.27) veza između ovih konstanti $\varkappa C_1=3C_2$, druga jednačina (12.29) glasi

$$\dot{r}_0^2=C_2r_0^{-1}-\zeta. \tag{12.30}$$

U slučaju zatvorene Vasione ($\zeta=1$), konstanta C_2 predstavlja graničnu vrednost poluprečnika r_0. Širenje Vasione ne može preći tu gornju granicu, posle čega mora početi sažimanje, koje nema određenu donju granicu. Neizvesno je da li osnovne jednačine (12.27) imaju do kraja neizmenjene desne strane, ukoliko je krajnji poluprečnik suviše mali. U sučaju $\zeta=0$ iz (12.30) izdvaja se **Ajnštajn-de Siterova Vasiona**. Ona je, na osnovu (12.25), u svakom trenutku ravna i u ravnomernoj ekspanziji.

Robertson-Vokerov metrički element određuje Vasionu koja, ostajući izotropna, ne miruje. Njeno specifično širenje, ili skupljanje, izražava Hablov koeficijent $H(t)$

$$H(t)=\frac{\dot{r}_0}{r_0}, \tag{12.31}$$

o kojem je bilo reči na kraju §14. kad se u drugu vezu (12.27), bez kosmološke konstante, unese vrednost gravitacione konstante $\varkappa$ (videti §53, od (10.27) pa nadalje), i danas prihvaćena

vrednost Habelovog koeficijentia, približno $2\times10^{-18}\,[s^{-1}]$, može se oceniti gustina materije za koju Vasion više nije zatvorena. Kad se zamene sve vrednosti u toj vezi, dobijamo

$$\frac{\zeta}{r_0^2}=\frac{8\pi}{3}G\rho-H^2. \tag{12.32}$$

[5]A.A. Fridman

Gustina pri kojoj je $\zeta = 0$ iznosi približno $\rho \approx 10^{-29}\,[g/cm^3]$.

U današnje vreme se smatra da bi najmanja gustina materje mogla biti za dva decmalna mesta ispod navedene kritične vrednosti, za koju je $\zeta = 0$. Znači da se ne može pouzdano tvrditi da je Vasiona otvorena ili zatvorena. Kosmologija je predmet mnogih istraživačkih spekulacija, naročito pretpostavka o **Prvobitnoj eksploziji**, s kojom je otpočelo širenje Vasione koje i danas traje. Bilo je pokušaja, u okviru izmenjenih teorija gravitacionog polja, da se uvede promenljiva "konstanta", gravltacije G, koja bi opadala s vremenom. To je bila Dirakova pretpostavka, i ona je uključena u neke teorije. Sve do danas nije nađen razlog zbog kojih bi ove teorije bile prihvatljivije od Ajnštajnove relativnosti.

Bili smo pomenuli, na početku ove glave, da se jedan od paradoksa, koji su se pojavili pri prvim pokušajima zasnivanja kosrmološkog gledišta, sastojao u neograničenom intenzitetu ukupnog zračenja koje bi se moralo primiti na svakom mestu u Vasioni. To je poznati Olbersov paradoks. Sigurno je da povećanje radijalne brzine širenja s udaljenošću od posmatrača u odgovarajućoj meri smanjuje frekvenciju, a s njom i energiju zračenja dalekih objekata koju primamo (videti §14). Tako do nas dospeva samo slabo mikrotalasno pozadinsko zračenje iz udaljenih krajeva Vasione, unesto "nebeskog ognja"koji bi žatio kad se ona ne bi širila.

12.4 Zadaci

Zadatak 30

Proveriti Lemetrov oblik intervala (12.22), smenom (12.21) u de Siterovom intervalu (12.20).

Rešenje

Zadatak 31

Naći rešenje diferencijalne jednačine (12.30) za $\zeta = 1, 0, -1$ (Fridmanova Vasiona) i diskutovati vrednosti Hablovog koeficijenta za te slučajeve.

Rešenje

Zadatak 30

III

Dodatak

A. Dodatak-A

A.1 Varijaciono izvođenje jednačina gravitacionog polja

Varijacioni postupak, koji ćeno izložiti, zasnovan je na izboru Lagranževe funkcije $\mathscr{L}_p$. Ekstremalnost ili stacionaraost, integrala te funkcije nad nekon oblašću Ω u V_1 vodi, pod određenim uslovina, osnovnim jednačinama polja (9.6).

Polazni funkcional, ili funlciju dejstva, napisaćemo u obliku

$$J = \int\limits_{\Omega} \left(\mathscr{L}_g + \mathscr{L}_p\right) \sqrt{-\|g\|}\, \mathrm{d}\tau, \quad \text{gde je } \mathrm{d}\tau \equiv \mathrm{d}x^4. \tag{A.1}$$

Gde $\mathscr{L}_g$, odnosno $\mathscr{L}_p$, predstavljaju delove te funkcije koji odgovaraju gravitacionom, odnosno ostalim, poljina. Za $\mathscr{L}_g$ ćeno uzeti velidinu:

$$\mathscr{L}_g = \frac{1}{2\varkappa c} R.$$

gde je $\varkappa$ fizička konstanta na desnoj strani gravitacionih jednačina, a R Ričijeva skalarna krivina. Oblik $\mathscr{L}_p$ zavisi od negravitacionog dela Polja.

Napišimo uslov stacionarnosti funkcionala (A.1)

$$\delta \int\limits_{\Omega} R\sqrt{-\|g\|}\, \mathrm{d}\tau + 2\varkappa c\delta \int\limits_{\Omega} \mathscr{L}_p \sqrt{-\|g\|}\, \mathrm{d}\tau = 0. \tag{A.2}$$

Operator variranja je diferencijalan, pa ćemo na oanovu pravila za izvod determinante po njenon elenentu:

$$\frac{\partial \|g\|}{\partial g_{\alpha\beta}} = \|g\| g^{\alpha\beta},$$

imati

$$\delta\sqrt{-\|g\|} = \frac{1}{2}\sqrt{-\|g\|}\, g^{\alpha\beta}\delta g_{\alpha\beta} = -\frac{1}{2}\sqrt{-\|g\|}\, g_{\alpha\beta}\delta g^{\alpha\beta}. \tag{A.3}$$

Ričijeva skalarna krivina glasi, no osnovu (9.13)

$$R = g^{\alpha\beta}\left(\frac{\partial}{\partial x^{\gamma}}\Gamma^{\gamma}{}_{\alpha\beta} - \frac{\partial}{\partial x^{\alpha}}\Gamma^{\gamma}{}_{\gamma\beta} + \Gamma^{\delta}{}_{\delta\gamma}\Gamma^{\gamma}{}_{\alpha\beta} - \Gamma^{\delta}{}_{\alpha\gamma}\Gamma^{\gamma}{}_{\beta\delta}\right).$$

Pristupićemo variranju ove funkcije pošto prethodno, radi uprošćenja, transformišemo koordinatni sistem tako da svi koeficijenti povezanosti budu lokalno jednaki nuli (lokalno geodezijski sistem)

$$\left(\Gamma^{\alpha}{}_{\beta\gamma}\right)_0 = 0. \tag{A.4}$$

Variranje Ričijevog tenzora krivine se tada svodi na

$$\delta R_{\alpha\beta} = \delta\left(\frac{\partial}{\partial x^{\gamma}}\Gamma^{\gamma}{}_{\alpha\beta}\right) - \delta\left(\frac{\partial}{\partial x^{\alpha}}\Gamma^{\gamma}{}_{\gamma\beta}\right) = \frac{\partial}{\partial x^{\gamma}}\left(\delta\Gamma^{\gamma}{}_{\alpha\beta}\right) - \frac{\partial}{\partial x^{\alpha}}\left(\delta\Gamma^{\gamma}{}_{\gamma\beta}\right). \tag{A.5}$$

Komutativnost operatora variranja i operatora diferenciranja koju koristimo suštinski je zahtev varijasionog računa. To dolazi otud što variranje nad višedimenzionalnim oblastima predstavlja proširenje pojma "transferzalnog diferenciranja"jednostrukih integrala dejstva, a ono je nezavisno od diferenciranja duž putanje. S obzirom na lokalno geodezijski koordinatni sistem, parcijalne izvode ćemo zameniti kovarijantnim

$$\delta R_{\alpha\beta} = \nabla_{\gamma}(\delta R^{\gamma}_{\alpha\beta}) - \nabla_{\alpha}(\delta R^{\gamma}_{\gamma\beta}) \tag{A.6}$$

Varijacija tenzora je tenzor, pa je to i desna strana gornjeg izraza, zbog čega smo i pisali kovarijantne izvode.

Učinićemo osnovnu pretpostavku da su varijacije metričkog tenzora i njegovih parcijalnih izvoda, koje ćemo obeležiti sa $g_{\alpha\beta,\gamma}$, jednaki nuli na granici Σ oblasti Ω

$$\left(\delta g_{\alpha\beta}\right)_{\Sigma} = \left(\delta g_{\alpha\beta,\gamma}\right)_{\Sigma} = 0. \tag{A.7}$$

S obzirom na to da je metrički kovarijantno konstantan imaćemo, na osnovu (A.3) i (A.6)

$$\begin{aligned}\int\limits_{\Omega}\delta\left(\mathscr{L}_g\sqrt{-\|g\|}\right)\mathrm{d}\tau = \frac{1}{2\varkappa c}\int\limits_{\Omega}\nabla_{\gamma}\left[g^{\alpha\beta}(\delta\Gamma^{\gamma}{}_{\alpha\beta}) - g^{\alpha\gamma}(\delta\Gamma^{\beta}{}_{\alpha\beta})\right]\sqrt{-\|g\|}\,\mathrm{d}\tau + \\ + \frac{1}{2\varkappa c}\int\limits_{\Omega}\left(R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}Rg_{\alpha\beta}\right)\delta g^{\alpha\beta}\sqrt{-\|g\|}\,\mathrm{d}\tau.\end{aligned} \tag{A.8}$$

Izraz u velikoj zagradi prvog integrala na desnoj strani je vektor, pa se pod tim integralom, dakle, nalazi kovarijantna divergencija jednog vektora, pomnožena skalarnom gustinom $\sqrt{-\|g\|}$. Tu ćemo divergenciju, po svim pravilima, pisati u obliku

$$\begin{aligned}&\int\limits_{\Omega}\nabla_{\gamma}\left[g^{\alpha\beta}(\delta\Gamma^{\gamma}{}_{\alpha\beta}) - g^{\alpha\gamma}(\delta\Gamma^{\beta}{}_{\alpha\beta})\right]\sqrt{-\|g\|}\,\mathrm{d}\tau = \\ &= \int\limits_{\Omega}\frac{\partial}{\partial x^{\gamma}}\left\{\sqrt{-\|g\|}\left[g^{\alpha\beta}(\delta\Gamma^{\gamma}{}_{\alpha\beta}) - g^{\alpha\gamma}(\delta\Gamma^{\beta}{}_{\alpha\beta})\right]\right\}\mathrm{d}\tau.\end{aligned}$$

Ovaj se integral transformiše, po teoremi o divergenciji, u površinski nad graničnom oblašću Σ

$$\int\limits_{\Omega}\frac{\partial}{\partial x^{\gamma}}\{\cdots\}\,\mathrm{d}\tau = \int\limits_{\Sigma}\left\{g^{\alpha\beta}(\delta\Gamma^{\gamma}{}_{\alpha\beta}) - g^{\alpha\gamma}(\delta\Gamma^{\beta}{}_{\alpha\beta})\right\}\varepsilon(n)n_r\sqrt{-\|g\|}\,\mathrm{d}\sigma, \quad \mathrm{d}\sigma \equiv \mathrm{d}^3x. \tag{A.9}$$

lzraz u velikoj zagradi predstavlja, ponavljamo, vektorsku veličinu, koja se u svakon događaju na Σ može dovesti u ovaj jednostavan oblik. S obzirom na (A.7), varijacije koeficijenata povezanosti će biti jednake nuli nu Σ, pa je i integral (A.9) jednak nuli. Na osnovu toga i (A.8) uslov ekstremalnosti (A.2) glasi

$$\int_{\Omega}\left(R_{\alpha\beta}-\frac{1}{2}Rg_{\alpha\beta}\right)\delta g^{\alpha\beta}\sqrt{-\|g\|}\,\mathrm{d}\tau+2\varkappa c\delta\int_{\Omega}\mathscr{L}_p\sqrt{-\|g\|}\,\mathrm{d}\tau=0. \tag{A.10}$$

Pogledajno varijacije Lagranževe funkcije $\mathscr{L}_p$ negravitacionog dela polja. Učinićemo pretpostavku da ta funkcija ne sadrži izvode gravitacionog potencijala reda višeg od prvog, inače bi ona suštinski menjala izraz za gravitaciono polje. Imaćemo:

$$\delta\int_{\Omega}\mathscr{L}_p\sqrt{-\|g\|}\,\mathrm{d}\tau=\int_{\Omega}\left[\frac{\partial(\mathscr{L}_p\sqrt{-\|g\|})}{\partial g^{\gamma\delta}}\delta g^{\gamma\delta}+\frac{\partial(\mathscr{L}_p\sqrt{-\|g\|})}{\partial g^{\gamma\delta}_{,\alpha}}\delta g^{\gamma\delta}_{\alpha}\right]\mathrm{d}\tau \tag{A.11}$$

Ako iskoristimo identičnost

$$\frac{\partial(\mathscr{L}_p\sqrt{-\|g\|})}{\partial g^{\gamma\delta}_{,\alpha}}\delta g^{\gamma\delta}_{,\alpha}=\frac{\partial}{\partial x^{\alpha}}\left[\frac{\partial(\mathscr{L}_p\sqrt{-\|g\|})}{\partial g^{\gamma\delta}_{,\alpha}}\delta g^{\gamma\delta}\right]-\frac{\partial}{\partial x^{\alpha}}\left[\frac{\partial(\mathscr{L}_p\sqrt{-\|g\|})}{\partial g^{\gamma\delta}_{,\alpha}}\right]\delta g^{\gamma\delta}$$

dobićemo

$$\delta\int_{\Omega}\mathscr{L}_p\sqrt{-\|g\|}\,\mathrm{d}\tau=\int_{\Omega}\left\{\frac{\partial(\mathscr{L}_p\sqrt{-\|g\|})}{\partial g^{\gamma\delta}}\delta g^{\gamma\delta}-\frac{\partial}{\partial x^{\alpha}}\left[\frac{\partial(\mathscr{L}_p\sqrt{-\|g\|})}{\partial g^{\gamma\delta}_{,\alpha}}\right]\delta g^{\gamma\delta}\right\}\mathrm{d}\tau \tag{A.12}$$

jer je prvi član identičnosti jednak nuli, kao posledica teoreme o divergenciji. Izraz pod integralom je invarijanta, tačnije skalerna gustina, s obziron na polazni oblik na levoj strani. Zato ćemo uvesti apsolutni simetrični tenzor $T_{\gamma\delta}$, definisan sa

$$T_{\gamma\delta}=\frac{2c}{\sqrt{-\|g\|}}\left\{\frac{\partial(\mathscr{L}_p\sqrt{-\|g\|})}{\partial g^{\gamma\delta}}-\frac{\partial}{\partial x^{\alpha}}\left[\frac{\partial(\mathscr{L}_p\sqrt{-\|g\|})}{\partial g^{\gamma\delta}_{,\alpha}}\right]\right\}, \tag{A.13}$$

koji ćemo nazvati **tenzor energije**. Kad se on unese u (A.10) dobićemo, s obzirom na proizvoljnost varijacija i izbora oblasti Ω, da podintegralna funkcija mora biti jednaka nulii. Dakle

$$R_{\alpha\beta}-\frac{1}{2}Rg_{\alpha\beta}=-\varkappa T_{\alpha\beta}. \tag{A.14}$$

Ovaj izraz je po obliku istovetan sa jednačinama gravitacionog polja (9.6). Jedino nema kosmološke konstante, koja u opštem slučaju nije ni potrebna. Konzervativnost tenzora energije je posledica Bjankijeve identičnosti, po kojoj je divergencija leve strane (A.13) jednaka nuli. Za pogodno izabranu Lagranževu funkciju $\mathscr{L}_p$, $T_{\alpha\beta}$ će imati oblik tenzora energije odgovarajuće sredine.

B. Dodatak-B

B.1 Potpuni moment. Spin. Tomasova precesija

U §18, 19 uveli smo bili, definicijom kinetičkog momenta $M^{\rho\sigma}$ materijalnog sisterna, jednu antisimetričnu veličinu koja predstavlja poseban slučaj (za diskretan sisten) takozvanog potpunog momenta.

Defininisaćemo, polazeći od stanovišta specijalne relativnosti, veličinu L$L^{\alpha\beta\gamma}$

$$L^{\alpha\beta\gamma} \equiv x^{\alpha} T^{\beta\gamma} - x^{\beta} T^{\alpha\gamma}, \tag{B.1}$$

gde su x^{α} pravougle koordinate nekog događađa, a $T^{\beta\gamma}$ komponente tenzora energije u njemu. $L^{\alpha\beta\gamma}$ predstavlja tenzorsku veličinu samo u odnosu na homogene Lorencove transformacije.S obzirom na konzervativaost tenzora energije sledi da je i $L^{\alpha\beta\gamma}$ konzervativan

$$\frac{\partial}{\partial x^{\gamma}} L^{\alpha\beta\gamma} = T^{\beta\gamma}\delta^{\alpha}_{\gamma} - T^{\alpha\gamma}\delta^{\beta}_{\gamma} = 0. \tag{B.2}$$

Pređimo na opštu relativnost. Uvešćemo veličinu

$$\Lambda^{\alpha\beta\gamma} \equiv x^{\alpha}\tilde{T}^{\beta\gamma}\sqrt{-\|g\|} - x^{\beta}\tilde{T}^{\alpha\gamma}\sqrt{-\|g\|}, \tag{B.3}$$

gde je

$$\tilde{T}^{\alpha\gamma} \equiv T^{\alpha\beta} + t^{\alpha\beta}. \tag{B.4}$$

Simetrični sisten funkcija $t\,\alpha\beta$ nije neposredno dat, ali je uslovljen tako da $\Lambda^{\alpha\beta\gamma}$ bude koazervativan. To znači da $t^{\alpha\beta}$ treba da zadovolji jedan sisten diferencijalnih jednačina koji glasi

$$\frac{\partial t^{\alpha\beta}}{\partial x^{\beta}} + \Gamma^{\beta}{}_{\beta\gamma} t^{\alpha\gamma} - \Gamma^{\alpha}{}_{\beta\gamma} t^{\beta\gamma}. \tag{B.5}$$

U slučaju slabog gravitacionog polja (videti- Dodatak C) $t^{\alpha\beta}$ se može tumačiti kao neposredni doprinos gravitacionog polja impulsu i energije, za linearizovani Ričijev tenzor $\Lambda\Lambda^{\alpha\beta\gamma}$

$$\frac{\partial}{\partial x^\gamma}\Lambda^{\alpha\beta\gamma} =$$

$$+$$

S obzirom na to da je kovarijantna divergencija tenzora energije $T^{\alpha\beta}$ jednaka nuli, i da pravilo diferenciranja skalarne gustine $\sqrt{-\|g\|}$ glasi

$$\frac{\partial}{\partial x^\gamma}\ln\sqrt{-\|g\|} = \Gamma^\beta{}_{\beta\gamma},$$

sledi, kad se uzme u obzir uslov (B.5)

$$\frac{\partial}{\partial x^\gamma}\Lambda^{\alpha\beta\gamma} = 0. \tag{B.6}$$

Definisaćemo, pomoću veličine $\Lambda^{\alpha\beta\gamma}$, pojam **potpuni moment** $N^{\alpha\beta}$ u odnosu na početni događaj sistema

$$N^{\alpha\beta} = -N^{\beta\alpha} \equiv \int\limits_{\Sigma(x^4=\text{const.})} \Lambda^{\alpha\beta 4}\,\mathrm{d}\sigma, \quad \mathrm{d}\sigma \equiv \mathrm{d}^3x, \tag{B.7}$$

gde je sa x^4 obeleženo koordinatno vreme. Kao što vidimo, potpuni moment određuje se u odnosu na hiperpovrši.

Zaključak (B.6) preastavlja lokalni oblik zakona održanja potpunog momenta materijalnog sistema. Integralni zakon održanja zahteva, međutim, uvođenje nekih dopunskih pretpostavki. Integral od $\Lambda^{\alpha\beta\gamma}$ ćeuo posmatrati u oblasti koju obuhvata hiperpovrš sastavljena iz prostornih delova Σ_1 i Σ_2, zadatih konstantnim vrednostima $x^4_{(1)}$ i $x^4_{(2)}$ vremenskog dela S, koji spaja rubove Σ_1 i Σ_2. Na detu S leže svetske linije koordinatnog vremena $x^i = \text{const.}$. Pustićemo da $S \to \infty$, tako da se Σ_1 i Σ_2 neograničeno širee. Oblast koju tada obuhvata ova ukupna hiperpovrš obeležićerno sa Ω. Unutar nje ne sme biti singulariteta (izvora i ponora koji bi postojali u vremenskon intervalu $t_2 - t_1$). Tada imamo, po teoremi o divergenciji, a kao posledicu (B.6)

$$\int\limits_{\Sigma_1\cup S\cup\Sigma_2} \Lambda^{\alpha\beta\gamma} n_\gamma \varepsilon(n)\,\mathrm{d}\sigma = \int\limits_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x^\gamma}\Lambda^{\alpha\beta\gamma}\,\mathrm{d}\tau = 0, \quad \mathrm{d}\tau =\equiv \mathrm{d}^4x. \tag{B.8}$$

Pod pojmom **sistem** podrazumevamo polje čiji je tenzor energije različit od nule. Ako se radi o materiji, smatramo da treba da se pruža do u konačnost, elektromagnetno polje treba da ima izvore u konačnosti, pa je, na osnovu toga, $T^{\alpha\beta}$ jednak nuli u beskonačnosti. Mogućnost interakcije s nekim drugim sistemima zanemarujemo.

Smatraćemo da, na osnovu učinjenih pretpostavki, metrika u beskonačnosti teži vrednostima Minkovskog

$$\left(g_{\alpha\beta}\right)_\infty = \eta_{\alpha\beta},$$

usled čega dobijano, na osaovu (B.5), da je $t^{\alpha\beta}$ konstantno u beskonačnosti. Mi ćeno usloviti da bude jednako nuli[1]

$$\left(t_{\alpha\beta}\right)_\infty = \text{const.} = 0.$$

Celi sistem sadržan je, u trenutku t_1, u "prostoru"Σ_1, a u nekom drugom trenutku t_2 u Σ_2. Pri širenju granica transverzalnih hiperpovrši Σ_1 i Σ_2 računamo, prirodno, da odsečci koordinatnog vremena između njih ne prelaze izvesnu konačnu vrednost, pa tako možemo učiniti da učešće u S u integralu nad uopštenim momenton $\Lambda^{\alpha\beta\gamma}$ opada i teži nuli kad $S \to \infty$. Zadovoljićemo se ovim, donekle slikovitim prilazom. Dakle:

$$\int\limits_{S\to\infty} \Lambda^{\alpha\beta\gamma} n_\gamma \mathrm{d}\sigma = 0. \tag{B.9}$$

[1]Ovi uslovi su dovoljni, a mogu se postaviti i nešto drukčiji. Videti, na primer A. Papapetrou, [24], str. 128-133.

Pokazali smo, u §50, da postojanje jedne hiperpovrši Σ_1, transverzalne na geodezijskoj kongruenciji svetskih linija, povlači postojanje beskonačno mnogo transverzalnih hiperpovrši, i obrnuto. Tok koordinatnog vremena treba da dopušta postojanje transverzalnih hiperpovr5i Σ_2, to jest da bude predstavljen kongruencijom geodezijskih linija. U saputničkim sistemima na Σ_1 jedinični vektori normala glase $n^{\alpha}_{(1)}(0,0,0;-1)$, a zbog suprotne orijentacije oni na Σ_2 glase $n^{\alpha}_{(1)}(0,0,0;1)$. Dakle, na osnovu (B.8) i (**??**) imamo:

$$\int\limits_{\Sigma_1} \Lambda^{\alpha\beta 4}\, \mathrm{d}\sigma = \int\limits_{\Sigma_2} \Lambda^{\alpha\beta 4}\, \mathrm{d}\sigma.$$

Odnosno, prema definiciji (B.7)

$$N^{\alpha\beta} = \text{const.}. \tag{B.10}$$

što je zakon održanja potpunog momenta. Komponente $N^{\alpha\beta}$ dele se na N^{12}, N^{23}, N^{31}, koje predstavljaju kinetički monent sistema u odnosu na koordinatni početak, i na N^{14}, N^{24}, N^{34}, koje iskazuju zakon kretanja njegovog centra mase, odnosno energije.

Vratimo se specijalnoj relativnosti, gde se, umesto $\Lambda^{\alpha\beta\gamma}$ pojavrljuje $L^{\alpha\beta\gamma}$, dat obrascem (B.1). Analogno $N^{\alpha\beta}$, u Svetu Minkovskog ćemo imati

$$M^{\alpha\beta} = -M^{\beta\alpha} = \int\limits_{x^4=\text{const.}} L^{\alpha\beta 4}\, \mathrm{d}\sigma = \text{const.} \tag{B.11}$$

Potpuni moment definisan je za neprekidnu sredinu ili polje, čime su prošireni pojmovi kinetičkog momenta i centra mase, uvedeni u §18,19.

Da bismo povezali potpuni monent sa simboličkim vektorskim interpretacijama njutnovske mehanike i ispitali neke njegova svojstva, uvešćemo simbolični vektro S_α, poznat kao **spin**

$$S_\alpha \equiv \frac{1}{2}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} u^\beta M^{\gamma\delta}, \tag{B.12}$$

gde je u^β četvorobrzina toka sopstvenog vremena. Za razliku od potpunog monenta, koji ima tenzorska svojstva samo u odnosu na homogenu Lorencovu grupu, spin je vektor i u odnosu na nehomogenu Lorencovu, odrrosno Poenkareovu grupu. Spin se prema potpunom momentu odnosi kao što se četvorovektor magnetnog polja h_α odnosi prema tenzoru elektromagnetnog polja $F_{\alpha\beta}$ (videti (7.14)). On je, kako se iz (B.12) vidi, upravan na četvorobrzini.

U opštoj relativnosti spin je analogno definisan sa

$$\Sigma_\alpha \equiv \frac{1}{2}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} u^\beta N^{\gamma\delta}. \tag{B.13}$$

S obziron na ukazanu ortogonalnost u^α i Σ_α, ta dva vektora će, u jednom lokalnom Lorencovom reperu, glasiti $u^\alpha_L(0,0,0;1)$ i $\Sigma_\alpha\left(\Sigma^L_1,\Sigma^L_2,\Sigma^L_3;0\right)$. Pokazaćemo kako se, u opštoj relativnosti, rezultujući spin sistema može pretvoriti u pravi vektor. Diskretan naterijalni sisten koji se kreće po inerciji opisaćemo pomoću uslova da četvorobrzina, koja odgovara rezultujućem impulsu sistema, i ukupni spin budu, u saputničkom reperu, nepromenljivi duž svetskih linija. Kako su oni u takvom reperu sigurno pravi vektori, transformisaćemo njihove komponente u proizvoljan koordinatni sistem i dobiti tenzorske izraze. Ovo je ustvari slučaj u kojem se oslanjamo na princip ekvivalentnosti, jer u saputničkom reperu koji slobodno pada imamo, u odsustvu drugih sila, neubrzano kretanje sistema. Dakle lokalno je

$$\frac{\mathrm{d}u^\alpha_L}{\mathrm{d}s} = 0, \quad \frac{\mathrm{d}\Sigma^L_\alpha}{\mathrm{d}s}, \quad u^\alpha_L \Sigma^L_\alpha = 0, \quad \text{ne sabirati po } L. \tag{B.14}$$

Transformati ovih vektora u neki proizvoljan koordinatni sistem, $u^\alpha_L \to u^\alpha$ i $\Sigma^L_\alpha \to \Sigma_\alpha$, tada zadovoljava uslove zadane u odnosu na proizvoljan koordinatni sistem

$$\frac{\mathrm{D}u^\alpha}{\mathrm{D}s} = 0, \quad \frac{\mathrm{D}\Sigma_\alpha}{\mathrm{D}s} = 0, \quad u^\alpha \Sigma_\alpha = 0. \tag{B.15}$$

Prva od gornjih jednačina opisuje slobodno padanje materijalnog sistena, a druga, koja razvijena glasi:

$$\frac{\mathrm{d}\Sigma_\alpha}{\mathrm{d}s} - \Gamma^\beta{}_{\alpha\gamma} u^\gamma \Sigma_\beta = 0,$$

predstavlja giroskopsku precesiju slobodnog materijalnog sistema usled krivine prostora. Treća od jednačina (B.15) je bezuslovno zadovoljena.

Razmotrićemo slučaj kada je sistem podvrgnut dejstvu sistema čija je rezultanta F_α, a koje se opažaju u saputničkom reperu. Ako F_α podelimo s ukupnom sopstvenom masom materijalnog sistena, jednačine dinamike, izražene u proizvoljnom koordinatnom sistemu glase, umesto prve grupe (B.15):

$$\frac{\mathrm{D}u^\alpha}{\mathrm{D}s} = m^{-1} F^\alpha \neq 0.$$

U opštem slučaju je i

$$\frac{\mathrm{d}\Sigma_\alpha}{\mathrm{d}s} \neq 0.$$

Razmotrićemo poseban slučaj kada se u saputničkom reperu ne primećuje promena Σ^α spina, to jest kada je spin, kao prostorni vektor, nepromenljiv u prostornim pravcima. Tenzorski formulisan, taj se zahtev svodi na to da je izvod spina po sopstvenom vrenenu srazmeran četvorobrzini sistena

$$\frac{\mathrm{d}\Sigma_\alpha}{\mathrm{d}s} = \lambda u^\alpha. \tag{B.16}$$

U ovom slučaju kažemo da materijalni sistem vrši **Tomasovu precesiju**[2]. S obzirom na to da je treća veza (B.15) uvek zadovoljena imaćemo, kad je diferenciramo po sopstvenom vremenu

$$\lambda u_\alpha u^\alpha + \Sigma_\alpha \frac{\mathrm{D}u^\alpha}{\mathrm{D}s} = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = m^{-1} F^\alpha \Sigma_\alpha.$$

Odatle je

$$\frac{\mathrm{D}\Sigma^\alpha}{\mathrm{D}s} = \left(m^{-1} F^\beta \Sigma_\beta\right) u^\alpha, \tag{B.17}$$

što je potpuni izraz za Tomasovu precesiju. (B.17) se može napisati i u obliku

$$\frac{\mathrm{D}\Sigma^\alpha}{\mathrm{D}s} = \left(\frac{\mathrm{D}u_\beta}{\mathrm{D}s} u^\alpha - \frac{\mathrm{D}u^\alpha}{\mathrm{D}s} u_\beta.\right) \Sigma^\beta. \tag{B.18}$$

Nad vektorom Σ^α, koji zadovoljava ovakvu diferencijalnu jednačinu, vrši se takozvani **Fermi-Uokerov prenos**[3]. Ovaj prenos predstavlja jednu nogućnost rerativističke translacije.

[2] L.W. Thomas
[3] Fermi-Walker

C. Dodatak-C

C.1 Slabo gravitaciono polje. Protok i moment ukupne energije

Pod **slabim gravitacionim poljem** podrazumeva se polje čiji se potencijal može podvrgnuti određenoj linearizaciji. Gravitaciona polja svih zvezda, osim neutrouskih (pulsara), mogu se posmatrati u takvoj približnosti, čak i u njihovim središtima. Odstupanja od metrike Minkovskog kreću se, i u središtima vrlo gustih zvezda, oko stotog dela merne jedinice. U Sunčevon polju to odstupanje je, za spoljno područje, oko stohiljaditog dela, a unutar Sunčeve mase ono je nešto veće. Jedino neutronske zvezde imaju, zbog vrlo malih poluprečnika, gravitaciona polja koja se, bar u njihovoj određenoj blizini, ne mogu linearizovati.

Naša pretpostavka o odnosu gravitacionog potencijala $g_{\alpha\beta}$ prema metrici Minkovskog $\eta_{\alpha\beta}$, je da u koordinatnom sistemu koji je naipribližniji lokalnom Lorencovom, bude:

$$|g_{\alpha\beta} - \eta_{\alpha\beta}| \ll 1. \tag{C.1}$$

S tim da u prostornoj beskonačnosti metrika teži vrednostima Minkovskog

$$g_{\alpha\beta} \to \eta_{\alpha\beta}, \quad r \to \infty.$$

Mi ćemo jednostavno napisat da se ove dve metrike razlikuju za neki dovoljno mali tenzo $k_{\alpha\beta}$

$$g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta} \tag{C.2}$$

takav da mu možemo odbaciti ostatak reda višeg od prvog. $h_{\alpha\beta}$ je neprekidno diferencijabilan, pa i njegovi gradijenti zadovoljavaju uslov da bude $|\partial_\alpha h_{\alpha\beta}| \ll 1$.

Kontravarijantni $g^{\alpha\beta}$ podiže indeks u opštem slučaju, ali, s obzirom na učinjene pretpostavke, mi ćemo to svojstvo pripisati metričkom tenzoru Minkovskog

$$h^\gamma_\beta \equiv \eta^{\alpha\gamma} h_{\alpha\beta}, \quad h^{\gamma\delta} \equiv \eta^{\alpha\gamma}\eta^{\beta\delta} h_{\alpha\beta}. \tag{C.3}$$

Sad možemo oceniti izraz za kontravarijantni tenzor $g^{\alpha\beta}$ pomoću veze

$$g^{\alpha\gamma} g_{\alpha\beta} = \delta^{\gamma}_{\beta} = g^{\alpha\gamma}(\eta_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta}).$$

Ako ovaj izraz pomnožimo sa $\eta^{\beta\delta}$ dobićemo

$$\eta^{\gamma\delta} = g^{\gamma\delta} + f^{\alpha\gamma h^{\delta}_{\alpha}} = g^{\gamma\delta} + \eta^{\alpha\gamma} h^{\delta}_{\alpha} + O(h^2),$$

odnosno

$$g^{\gamma\delta} = g\eta^{\gamma\delta} - h^{\gamma\delta}. \tag{C.4}$$

Za koeficijente povezanosti imamo

$$\Gamma^{\alpha}{}_{\beta\gamma} \approx \frac{1}{2}\eta^{\alpha\delta}\left(\frac{\partial h_{\gamma\delta}}{\partial x^{\beta}} + \frac{\partial h_{\delta\beta}}{\partial x^{\gamma}} - \frac{\partial h_{\beta\gamma}}{\partial x^{\delta}}\right). \tag{C.5}$$

Usled čega će se izraz (9.13′) za Ričijev tenzor krivine svesti na

$$\begin{aligned} R_{\alpha\beta} \approx \frac{1}{2}\eta^{\gamma\delta}\left(\frac{\partial^2 h_{\alpha\delta}}{\partial x^{\beta}\partial x^{\gamma}} = \frac{\partial^2 h_{\beta\gamma}}{\partial x^{\alpha}\partial x^{\delta}} - \frac{\partial^2 h_{\alpha\beta}}{\partial x^{\gamma}\partial x^{\delta}} - \frac{\partial^2 h_{\gamma\delta}}{\partial x^{\alpha}\partial x^{\beta}}\right) + \\ + O(\{\partial h\}^2) = R^{(l)}_{\alpha\beta} + O(\{\partial h\}^2). \end{aligned} \tag{C.6}$$

Sad ćemo, pomoću $R^{(l)}_{\alpha\beta}$ i njegove kontrakcije sa $h^{\alpha\beta}$, uvesti tenzor gravitacionog polja $G^{(l)}_{\alpha\beta}$ u linearnoj približnosti

$$\begin{aligned} G^{(l)}_{\alpha\beta} &= R^{(l)}_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}R^{(l)}\eta_{\alpha\beta} = \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 h^{\gamma}_{\alpha}}{\partial x^{\beta}\partial x^{\gamma}} + \frac{\partial^2 h^{\gamma}_{\beta}}{\partial x^{\alpha}\partial x^{\gamma}} - \frac{\partial^2 h^{\gamma}_{\gamma}}{\partial x^{\alpha}\partial x^{\beta}} - \Box^2 h_{\alpha\beta}\right) - \frac{1}{2}\eta_{\alpha\beta}\left(\frac{\partial^2 h^{\gamma}_{\delta}}{\partial x^{\gamma}\partial x^{\delta}} - \Box^2 h^{\gamma}_{\gamma}\right). \end{aligned} \tag{C.7}$$

gde $\Box^2$ označava Dalamberov operator u matrici Minkovskog. "Višak"članova, koji sačinjava razliku između $R_{\alpha\beta}$ i $R^{(l)}_{\alpha\beta}$ i između R i $R^{(l)}$, a koji je kvadratna funkcija gradijenata $\partial_{\alpha} h_{\beta\gamma}$, smatraćeno da predstavlja sistem veličina $t_{\alpha\beta}$ iz dodatka B (gde je $t_{\alpha\beta} \equiv \eta_{\alpha\gamma}\eta_{\beta\delta}t^{\gamma\delta}$). Dakle

$$R_{\alpha\beta} - R^{(l)}_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\left(Rg_{\alpha\beta} - R^{(l)}\eta_{\alpha\beta}\right) = -\varkappa t_{\alpha\beta}. \tag{C.8}$$

Ako pogledamo jednačine polja (9.6) one daju, na osnovu (B.4)

$$R^{(l)}_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}R^{(l)}_{\alpha\beta}\eta_{\alpha\beta} = -\varkappa\left(T_{\alpha\beta} + t_{\alpha\beta}\right) = -\varkappa\tilde{T}^{(l)}_{\alpha\beta}. \tag{C.9}$$

Tenzor $G_{\alpha\beta}$ može se, ponavljanjem postupka kojim smo dobili (C.6), aproksimirati do ostatka višeg reda (videti S. Weinberg, [17], gl. 7, §6).

a) U jednačinana (C.9) nećemo odmah izvršiti pravu linearizaciju, to ćeno na desnim stranama zaržati sistem funkcija $t_{\alpha\beta}$, koji je zanemarljiv za slabo polje. Može se proveriti da je

$$\frac{\partial}{\partial x^{\beta}}\left(R^{(l)\beta}_{\alpha} - \frac{1}{2}R^{(l)}\delta^{\beta}_{\alpha}\right) = 0, \tag{C.10}$$

što predstavlja linearizovanu Bjankijevu identičnost.

Na osnovu prethodnog je i

$$\frac{\partial}{\partial x^{\beta}}\tilde{T}^{(l)\beta}_{\alpha} = 0, \quad \text{gde je } \tilde{T}^{(l)\beta}_{\alpha} \equiv \eta^{\beta\gamma}\tilde{T}^{(l)}_{\alpha\gamma}. \tag{C.11}$$

Funkcije $\tilde{T}_{\alpha}^{(l)\beta}$ su, dakle konzervativne u uobičajenom smislu reči; divergencija im je jednaka nuli. Smatramo da one predstavljaju **ukupnu energiju sistema**, ona koju nose materija, elektromagnetno **gravitaciono polje**.

Posmatrajmo integral od $\tilde{T}_{\alpha}^{(l)\beta}$, nad nekom oblašću Ω. Ako tu oblast odaberemo onako kao u Dodatku B, pod istim pretpostavkama, jer smo i sad uslovili da u beskonačnosti gravitaciono polje isčezava, to jest teži metrici Minkovskog, imaćemo, iz (C.11), a po teoremi o divergenciji

$$\int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x^{\beta}} \tilde{T}_{\alpha}^{(l)\beta} \, \mathrm{d}\tau = \int_{\Sigma} \tilde{T}^{(l)\beta\alpha} n_{\beta} \varepsilon(n) \, \mathrm{d}\sigma = 0$$

gde je Σ hiperpovrš $\Sigma_1 \cup S \cup \Sigma_2$. Ako, kao u prethodnompodatku, odaberemo komponente hiperpovrši Σ tako da integral nad S teži nuli kad $S \to \infty$, imaćemo da je nad transverzalama Σ_1 i Σ_2 koordinatnog vremena, aiz prethodnog obrasca

$$\int_{\Sigma_1} \tilde{T}^{(l)\beta\alpha} n_{\beta} \, \mathrm{d}\sigma = \int_{\Sigma_2} \tilde{T}^{(l)\beta\alpha} n_{\beta} \, \mathrm{d}\sigma. \tag{C.12}$$

Odavde sledi da je simbolini vektor **protoka ukupne energije** P^{α} sistema nepromenljiv na transverzalama

$$P^{\alpha} \equiv \int_{\Sigma_i} \tilde{T}^{(l)\beta\alpha} n_{\beta} \, \mathrm{d}\sigma = \int_{\Sigma_i} \tilde{T}^{(l)\beta 4} n_{\beta} \, \mathrm{d}\sigma = \text{const.}, \quad i = 1, 2, \ldots, \infty, \tag{C.13}$$

što je zakon održanja protoka ukupne energije sistema.

Uvešćemo pomoću obrazaca (B.3) i (B.7), izraz za moment ukupne energije. Imaćemo prvo

$$\Lambda^{(l)\alpha\beta\gamma} = x^{\alpha} \tilde{T}^{(l)\beta\gamma} - x^{\beta} \tilde{T}^{(l)\alpha\gamma}.$$

N Podrazumeva se da je, na osnovu (C.1), determinanta metričkog tenzora približno jednaka jedinici, pa je stoga ne pišemo.

Tako ćemo definisati **moment ukupne energije** $N^{\alpha\beta}$ sistema

$$N^{(l)\alpha\beta} \equiv \int_{\Sigma} \Lambda^{(l)\alpha\beta\gamma} n_{\gamma} \mathrm{d}\sigma, \tag{C.14}$$

gde je sa Σ obeležena neka transverzalna hiperpovrš. Kako je, na osnovu (C.11),

$$\frac{\partial}{\partial x^{\gamma}} \Lambda^{(l)\alpha\beta\gamma} = 0,$$

to ćemo, uzimajući integral (C.14) nad oblašću $\Sigma'(\Sigma_1 \cup S \cup \Sigma_2)$, i istom tehnikom dokazivanja kao i u prethodnom dodatku, dobiti iz gornjeg

$$\int_{\Sigma'} \Lambda^{(l)\alpha\beta\gamma} n_{\gamma} \varepsilon(n) \, \mathrm{d}\sigma = \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x^{\gamma}} \Lambda^{(l)\alpha\beta\gamma} \, \mathrm{d}\tau = 0,$$

odakle je

$$\int_{\Sigma_1} \Lambda^{(l)\alpha\beta\gamma} n_{\gamma} \mathrm{d}\sigma = \int_{\Sigma_2} \Lambda^{(l)\alpha\beta\gamma} n_{\gamma} \mathrm{d}\sigma = \text{const.}$$

ili

$$N^{(l)\alpha\beta} = \int_{\Sigma} \Lambda^{(l)\alpha\beta 4} \, \mathrm{d}\sigma = \text{const.} \tag{C.15}$$

što je zakon održanja momenta ukupne energije sistema.

b) Ako zanemarimo funkcije $t^{\alpha\beta}$ u slučaju kada je, u ukupnom bilansu, deo energije sistema koji potiče neposredno od gravitacionog polja od malog zračenja, tenzor energije $T^{\alpha\beta}$ će, na osnovu (C.10), biti konzervativan u običnom smislu

$$\frac{\partial}{\partial x^\beta}T^\beta_\alpha = 0. \tag{C.16}$$

Ovaj zakon nije kovarijantan, kao ni (C.10), pa se postavlja pitanje posle kakvih će transforrnacija i dalje važiti jednačine polja čije su leve strane date sa (C.7). Prvi zahtev je da gravitaciono polje u novom koordinatnom sistmeu ostane slabo u smislu definicije (C.1), odnosno (C.2). Izvršićemo infinitezimalnu transformaciju $(x^\alpha) \to (\bar{x}^\alpha)$, gde su nove koordinate dovoljno bliske ranijim

$$\bar{x}^\alpha = x^\alpha + \lambda^\alpha(x) + O(\lambda^2). \tag{C.17}$$

Funkcije λ^α su istog reda veličine kao i $h^{\alpha\beta}$. Polazeći od obrasca za transformaciju metričkog tenzora

$$\bar{g}^{\alpha\beta} = g^{\gamma\delta}\frac{\partial\bar{x}^\alpha}{\partial x^\gamma}\frac{\partial\bar{x}^\beta}{\partial x^\delta},$$

imaćemo, na osnovu (C.4)

$$\bar{h}^{\alpha\beta} = h^{\alpha\beta} - \eta^{\alpha\gamma}\frac{\partial\lambda^\beta}{\partial x^\gamma} - \eta^{\beta\gamma}\frac{\partial\lambda^\alpha}{\partial x^\gamma},$$

odnosno

$$\bar{h}_{\alpha\beta} = h_{\alpha\beta} - \underset{\lambda_\alpha}{\pounds}x^\beta - \underset{\lambda_\beta}{\pounds}x^\alpha, \quad \text{gde je } \lambda_\alpha \equiv \eta_{\alpha\gamma}\lambda^\gamma. \tag{C.18}$$

Ako se ovakvi $\bar{h}_{\alpha\beta}$ unesu u (C.7), taj obrazac ostaje nepromenjen, što znači da linearizovane jednačine gravitacionog polja imaju osobinu kalibracione invarijantnosti (videti §36, od (7.55) na dalje). Dakle nove koordinate, koje su sa ranijim povezane transfornacijama oblika (C.17), zadovoljavaju sistem (C.7).

Kalibrasiona invarijantnost jednačina polja ne čini ih još dovoljno jednostavnim za rešavanje. Stoga se ide na izbor koordinatnog sistema koji, pored toga što odslikava osobine slabog polja, treba, koliko je noguće, da pojednostavi sistem (C.9). Za to će poslužiti harmonijske koordinate, koje karakteriše uslov:

$$g^{\beta\gamma}\Gamma^\alpha{}_{\beta\gamma} = 0.$$

Ovo nam, na osnovu (C.5) daje, u aproksimaciji s kojom se služimo

$$\frac{\partial}{\partial x^\beta}h^\beta_\alpha = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x^\alpha}h^\beta_\beta. \tag{C.19}$$

Kad ove uslove unesemo u jednačine (C.9), one će se svesti na oblik

$$G^{(l)}_{\alpha\beta} = -\frac{1}{2}\left(\Box^2 h_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\eta_{\alpha\beta}\Box^2 h^\gamma_\gamma\right) = -\varkappa T_{\alpha\beta} \tag{C.20}$$

Ostaje nam pitanje prelaska iz nekog neharmonijskog polaznog koordinatnog sistema u harmonijski, jer uslovi (C.19) ne moraju, pri postavci zadatka, biti zadovoljeni. Ako napišemo (C.19) u odnosu na novi sistem $\bar{x}^\alpha$, a zatim transformišeno $\bar{h}^\alpha_\beta$ pomoću (C.18), dobićemo, ako pri diferenciranju zanemarimo razliku između $\bar{x}^\alpha$ i x^α

$$\frac{\partial}{\partial x^\beta}h^\beta_\alpha - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x^\alpha}h^\beta_\beta = \Box^2\lambda_\alpha,$$

koje parcijalne jednačine zadovoljavaju koordinate $h_{\alpha\beta}$ potencijala iz polaznog sistema. Izbor dovoljno malih funkcija λ_α, takvih da ove četiri jednačine prvog reda u odnosu na deset funkcija h^α_α imaju rešenja, garantuje nam harmoničnost novog koordinatnog sistema, dakle oblik (C.20) jednačina polja u njenu.

Kako je $\bar{h}_{\alpha\beta}$ novi, harmonijski, potencljal slabog polja (koji zadovoljava jednačine (C.19), tenzor energije ćemo obeležiti sa $\bar{T}_{\alpha\beta}$, i prepisati jednačine (C.20) u pogodnijem obliku

$$\Box^2\bar{h}_{\alpha\beta} = 2\varkappa\left(\bar{T}_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\bar{T}^\gamma_\gamma\right). \tag{C.21}$$

Svođenje leve strane gravitacionih jednačina na Dalamberov operator nad $\bar{h}_{\alpha\beta}$ otkriva nam punu analogiju između potercijala slabog polja i njutnovskog potencijala, koji je skalaran i zedovoljava Laplas-Poasonovu jednačinu. Odavde se jasno vidi kako relativističke jednačine gravitacionog polja uopštavaju osnovnu jednačinu za njutnovski potencijal.

C.2 Zadaci

Zadatak 32

Pokazati vektorsko ponašanje spina u odnosu na Poenkareovu grupu.

Rešenje

Zadatak 33

Pokazati (koristeći δ-funkciju) da se potpuni moment svodi, za diskretan sistem, na moment impulsa iz §18.

Rešenje

Zadatak 34

Proveriti linearizovanu Bjankijevu identičnost (C.10).

Rešenje

Zadatak 35

Naći metriku posmatrača čije svetske linije presecaju koordinate (r,t) de Siterove Vasione (12.16) pod konstantnim uglom, dok (θ,φ) ostaju nepromenjene.

Rešenje

Zadatak 32

Bibliografija

[1] O.Costa de Beauregard, *La théorie de la relativité*, Masson, 1949.
[2] A. Einstein, *The Meaning of Relativity*, Princeton UP, 1950.
[3] A. Lichnerowicz, *Les théories relativistes de la graitation et de l'électromagnétisme*, Masson, 1955.
[4]
[5] J. Weber, *General Relativity and gravitational Waves*, Academic Press, 1961.
[6] J. Synge, *Relativity, the general theory*, North-Holland, 1961.
[7]
[8] D. Bohm, *The Special Theory of Relativity*, W.A. Benjamin, 1965.
[9] G. Mc Vittie, *General relativity and Cosmology*, Chapman and Hall, 1965.
[10] T. Anđelić, R. Stojanović, *Racionalna mehanika*, Beograd, 1965.
[11] L. Schwartz, *Méthodes mathématiques pour les sciences physiques*, Hermann, 1965.
[12]
[13] H. Cartan, *Calcul différentiel. Formes différentielles*, Hermann, 1967.
[14] C.W. Kilmister, *Special theory of relativity*, Pergamon, 1970.
[15] Ch. Moeller, *The teory of relativity*, Clarendon Press, 1972.
[16] S. Weinberg, *Gravitation and Cosmology, J. Wiley, 1972.*
[17] Đ. Mušicki, *Teorijska fizika II*, Beograd, 1972.
[18]
[19]
[20] T. Anđelić, *Tenzorski račun*, Naučna knjiga, 1973.

[21] C.W. Kilmister, *General theory of relativity*, Pergamon, 1973.

[22] Misner-Thorne-Wheeler, *Gravitation*, Freeman, 1973.

[23] A. Papapetrou, *Lectures on General Relativity*, D. Reidel, 1974.

[24] J. Taylor,*Special relativity*, Clarendon Press, 1975.

[25] M Berry, *Principles of cosmology and gravitation*, Cambridge IP, 1976.

[26] M. Carmeli, *Group Theory and General Relativity*, Mc Graw Hill, 1977.

[27] H. Guggenheimer, *Differential Geometry*, Dover, 1977