UNIVERZITET U NOVOM SADU

PRIRODNO MATEMATIČKI FAKULTET

Milan Janić

PRILOG PROJEKTOVANJU n-DIMENZIONOG EUKLIDSKOG PROSTORA

Doktorska disertacija

Novi Sad, 1982.

PREDGOVOR

Ovaj rad je podeljen na tri dela. U prvom delu rada definisani su poznati pojmovi n-dimenzione geometrije i relacije incidentnosti, ortogonalnosti i paralelnosti u skladu sa navedenom literaturom [6] i [15] a koji će biti korišćeni u naredna dva dela rada.

U drugom delu rada prikazani su neki od poznatih načina projektovanja n-dimenzionog euklidskog prostora na ravan medju kojima i naš rad [3]. Izabran je metod projektovanja izložen u radu [3] i njime rešeni osnovni položajni i metrički zadaci euklidskog prostora E^n. U delu rada 2.2 data je primena takvog načina projektovanja na rešavanju nekih stavova euklidske geometrije. Rešavan je problem kada skup od k+1 tačke, predstavljene projekcijama, predstavlja simpleks nekog k-dimenzionog potprostora prostora E^n. Dat je jedan nov dokaz uopštene Dezargove teoreme.

U trećem delu rada iskorišćen je metod projektovanja n-dimenzionog prostora na ravan pa je u 3.1 definisana mreža u ravni E^2_{12} i njoj izomorfna mreža u prostoru E^n. U delu rada 3.2 definisan je jedan model n-dimenzione projektivne geometrije sa stanovišta modularnih mreža. Konstruisali smo model takve mreže, čiji su atomi-tačke skupovi od n-1 kolinearne tačke proširene euklidske ravni P^2, pri čemu je prava-nosač tih tačaka elemenat jednog fiksnog pramena pravih ravni P^2. Takva mreža označena je sa P^n_M i dokazano je da u takvoj mreži vrede neka od svojstava koja vrede i u sistemu potprostora vektorskog prostora. Na taj način dokazali smo da se može konstruisati vektorski prostor takav da sistem potprostora toga vektorskog prostora i mreža P_M^n budu projektivno ekvivalentni [13].

Na kraju rada dat je sadržaj rada i literatura koja je korišćena.

1 OSNOVNA SVOJSTVA EUKLIDSKOG PROSTORA

U ovom delu rada biće navedena neka poznata svojstva euklidskog prostora E^n. Biće izložene i neke definicije onih pojmova koji će biti korišćeni u daljem radu u skladu sa navedenom literaturom [6] i [15].

1.1 Euklidski n-dimenzioni prostor

Neka je E neprazan skup čije elemente zovemo tačkama a X n-dimenzioni realan vektorski prostor. Tada se afini prostor definiše na sledeći način:

Definicija 1.1.1 Skup E zove se n-dimenzioni afini prostor a njegovi elementi tačke afinog prostora, ako postoji preslikavanje $g\colon E\times E \to X$ sa sledećim svojstvima:

1. $g(P,Q)+g(Q,R)=g(P,R)$ $(P,Q,R\in E)$,
2. za svaku tačku P iz E i vektor $x\in X$ postoji tačno jedna tačka $Q\in E$, takva da je $x=g(P,Q)$.

Takav prostor najčešće označavamo sa E^n da bi istakli dimenziju toga prostora.

Ako je $x_o\in X$, $x_o\neq 0$ i ako je Y_1 potprostor generisan vektorom x_o, tada za skup

$$L_1=\left\{P/g(P_o,P)\in Y_1, P\in E^n\right\},$$

kažemo da je prava prostora E koja sadrži tačku P_o. Analogno za dvodimenzioni potprostor $Y_2\subseteq X$ i proizvoljnu tačku $P_o\in E$, skup

$$L_2=\left\{P/g(P_o,P)\in Y_2, P\in E^n\right\},$$

kažemo da je ravan koja sadrži tačku P_o. Ako je Y_k potprostor vektorskog prostora X i $P_o \in E$, tada za skup

$$L_k=\left\{P/g(P_o,P)\in Y_k,\ P\in E\right\},$$

kažemo da je afini potprostor prostora E^n. Ako je $\dim Y_k=\dim X-1$ onda za takav potprostor kažemo da je hiperravan, koja sadrži tačku P_o.

Neka je $O\in E$ i $e_1,\dots,e_n$ baza vektorskog prostora X a E_i $(i=1,\dots,n)$ prava kroz tačku O, takva da je $X(E_i)$ potprostor odredjen vektorom e_i. Za $P\in E$ je

$$x=g(O,P)=\sum_{j=1}^{n} k_j e_j,$$

pri čemu su brojevi $k_1,\dots,k_n$ jednoznačno odredjeni tačkom P. Za brojeve $k_1,\dots,k_n$ kažemo da su kartezijeve ili afine koordinate tačke P. Na taj način je uspostavljena bijekcija izmedju tačaka iz E^n i uredjenih n-torki realnih brojeva $(k_1,\dots,k_n)$ [6]. Za tačku O kažemo da je koordinatni početak a za prave $E_1,\dots,E_n$ da su koordinatne ose. Tačka P pripada osi E_i tačno tada ako su sve njene koordinate, osim možda i-te, jednake nuli.

Definicija 1.1.2 Vektorski prostor X nad telom F realnih ili kompleksnih brojeva zovemo unitarnim prostorom, ako je svakom uredjenom paru $x,y\in X$ pridružen tačno jedan broj $(x,y)\in F$ pri čemu vredi:

1. $(x_1+x_2,y)=(x_1,y)+(x_2,y)$ $\quad (x_1,x_2,y\in X)$
2. $(kx,y)=k(x,y)$ $\quad (x,y\in X, k\in F)$
3. $(x,y)=\overline{(y,x)}$ $\quad (x,y\in X)$
4. $(x,x)\geq 0$ $\quad (x\in X)$
5. $(x,x)=0$ tačno tada kada je $x=0$.

Funkcija koja vektorima $x,y \in X$ pridružuje broj zove se skalarni proizvod vektora.

Definicija 1.1.3 Vektorski unitarni prostor X nad telom realnih brojeva R zove se Euklidov ili euklidski vektorski prostor.

Definicija 1.1.4 n-dimenzioni euklidski prostor E^n je skup E, euklidski vektorski prostor X i preslikavanje $g: E \times E \to X$ sa svojstvima 1 i 2 definicije 1.1.1 .

Ako je tačka $O \in E^n$ i ako je $e_1,\ldots,e_n$ ortonormirana baza u vektorskom prostoru X, tada se koordinatni sistem $(O,(e))$ zove pravougli koordinatni sistem.

1.2 Euklidska geometrija

Definicija 1.2.1 Transformacija $E^n \to E^n$ zove se kongruencija prostora E^n, ako ona očuvava udaljenost tačaka, tj. ako vredi:

$$d(g(P),g(Q))=d(P,Q),$$

za sve tačke $P,Q \in E^n$. $d(P,Q)$ je realan broj a funkcija d je razdaljinska funkcija. Sve kongruencije prostora E^n čine grupu [6]. Ta grupa se naziva grupa kongruencija prostora E^n.

Proizvoljan podskup $F \subset E^n$ zovemo figura prostora E^n. Za dve figure F^1 i F^2 kažemo da su kongruentne ili podudarne ako postoji bar jedna kongruencija g koja preslikava jednu figuru na drugu, tj. ako je $F^1=g(F^2)$.

Kažemo da je iskaz $f(F^1,\ldots,F^n)$ o figurama $F^1,\ldots,F^n$ invarijantan, ako je on tačan i za figure $g(F^1),\ldots,g(F^n)$ za svako g.

Definicija 1.2.2 Matematička disciplina koja proučava svojstva figura euklidskog prostora E^n, koja su invarijantna u odnosu na kongruencije, zove se euklidska ili Euklidova geometrija.

Skup svih invarijantnih iskaza o figurama sadržaj je geometrije euklidskog prostora, odnosno to je sadržaj geometrije grupe G svih kongruencija euklidskog prostora E^n.

1.3 Euklidski prostor E^n dopunjen jednom hiperravni

Neka je E^n n-dimenzioni euklidski prostor. Elementi toga prostora jesu tačke, prave, ravni, potprostori tri dimenzije, potprostori četiri dimenzije itd. Svaki potprostor prostora E^n označavaćemo sa E^k, gde je k $(k<n)$ dimenzija toga prostora. Ponekada se za $3\leqslant k\leqslant n-1$ kaže da je E^k k-dimenziona ravan. Svaka k-dimenziona ravan odredjena je simpleksom od k+1 tačke.

Euklidski prostor E^n može se dopuniti jednom hiperravni za koju kažemo da je nesvojstvena ili beskonačna hiperravan i koju označavamo sa E^{n-1}_{∞}. Takav euklidski prostor, dopunjen beskonačnom hiperravni E^{n-1}_{∞}, zovemo euklidski prostor dopunjen beskonačnim ili nesvojstvenim elementima. Svaka prava E^1 prostora E^n, ima zajedničku tačku sa hiperravni E^{n-1}_{∞}, svaka ravan E^2 prostora E^n, ima sa hiperravni E^{n-1}_{∞} zajedničku pravu itd.

Euklidski prostor E^n, dopunjen beskonačnim elementima označava se sa P^n. Mi ćemo u daljem radu takav prostor, odnosno takve potprostore, označavati isto kao i euklidski prostor, odnosno euklidske potprostore, znajući da ćemo samo sa takvim raditi.

1.4 Paralelnost, normalnost i incidentnost u prostoru E^n

U prostoru E^n dva potprostora E^{k_1} i E^{k_2} seku se po potprostoru dimenzije k_1+k_2-n, što ćemo zapisivati:

$$E^{k_1} \times E^{k_2} = E^{k_1+k_2-n}.$$

Ako se pri preseku potprostora E^{k_1} i E^{k_2} $(k_1 \leq k_2)$ dobije potprostor E^m, tj. ako je $E^{k_1} \times E^{k_2} = E^m$, tada se stepen incidentnosti izražava relacijom:

$$S_{incidentnosti} = \frac{m+1}{k_1+1} \quad [15].$$

Ako je $E^{k_1} \times E^{k_2} = E^m_\infty$ $(k_1 \leq k_2)$, tada se stepen paralelnosti izražava formulum:

$$S_{paralelnosti} = \frac{m+1}{k_1}.$$

Ako je $S_{paralelnosti}=1$, tada kažemo da su potprostori E^{k_1} i E^{k_2} potpuno ili puno paralelni, u suprotnom slučaju kažemo da su delimično paralelni.

Potpuno ortogonalni elementi moraju biti nezavisni, tj. $S_{incidentnosti}=0$ ili da se seku u tački a sve prave jednog potprostora normalne su na sve prave drugog elementa potprostora i obratno. Ako u potprostoru E^{k_1} postoji m različitih incidentnih pravih koje su normalne na potprostor E^{k_2} $(k_1 \leq k_2)$, tada se stepen ortogonalnosti (normalnosti) izražava formulom:

$$S_{ortogonalnosti} = \frac{m}{k_1} \quad [15].$$

Za ravni prostora E^3 kažemo da su samo normalne a iz ovih razmatranja se može zaključiti da se tu može govoriti samo o delimičnoj normalnosti, tj ovde je $S_{ortogonalnosti} = \frac{1}{2}$.

2 PROJEKTOVANJE n-DIMENZIONOG EUKLIDSKOG PROSTORA I PRIMENA NA REŠAVANJU NEKIH STAVOVA EUKLIDSKE GEOMETRIJE

Različiti načini projektovanja euklidskog n-dimenzionog prostora E^n prikazani su izmedju ostalog i u radovima [3], [9], [15] i [18]. Mi ćemo izložiti ukratko projektovanje prostora E^n na jednu njegovu ravan onako kako je to učinjeno u radovima [3] i [18]. Koristeći metod projektovanja izložen u našem radu [3], rešićemo osnovne položajne i metričke zadatke. Takvom metodom projektovanja rešićemo neke stavove vezane za Polke-Švarcov stav. Biće dat i jedan deo dokaza Dezargove teoreme.

2.1 Projektovanje prostora E^n metodom paralelnih odsečaka

U radu [18] takav način projektovanja nazvan je projektovanje metodom paralelnih odsečaka. U navedenom radu [3] autor je došao do rezultata, koji se još opravdanije mogu nazvati projektovanje metodom paralelnih odsečaka.

U čitavom ovom delu rada biće reči o projektovanju metodom paralelnih odsečaka, onakvom kako je to uradjeno u radu [3].

2.1.1 Neki postupci projektovanja prostora E^n na ravan

U radu [18] dat je jedan način projektovanja prostora E^4 na ravan. Taj se postupak može na jednostavan način proširiti i na prostor E^n $(4<n)$ što ćemo mi i učiniti.

Posmatraćemo u E^n koordinatni sistem $Ox_1 \ldots x_n$. Neka je ravan E_o^2 odredjena osama x_1 i x_2. Neka je $X_{i\infty}=x_i \times E_\infty^{n-1}$

$(i=1,\ldots,n)$. Skup tačaka $\{X_{ioo}/i=3,\ldots,n\}$ je simpleks prostora E^{n-3}_{ooo}. Neka je X'_{2oo} tačka prostora E^n, takva da tačke X_{1oo}, $X'_{2oo},X_{3oo},\ldots,X_{noo}$, obrazuju simpleks prostora E^{n-1}_{oo}. Neka je M bilo koja tačka prostora E^n koja nije u E^{n-1}_{oo}. Potprostor E^{n-1}_M, odredjen tačkama $M,X'_{2oo},X_{3oo},\ldots,X_{noo}$, seče ravan E^2_o po pravoj $E_o=E^1_o=E^{n-1}_M\times E^2_o$. Ako je E^{n-2}_M potprostor odredjen tačkama $M,X_{3oo},\ldots,X_{noo}$, tada je

$$E^2_o\times E^{n-2}_M=M^{12}.$$

Za tačku M^{12} kažemo da je projekcija tačke M iz potprostora E^{n-3}_{ooo}. Nekada za potprostor E^{n-3}_{ooo} kažemo da je centar projektovanja.

Neka su projekcije tačke M iz potprostora odredjenog simpleksom $\{X'_{2oo},X_{3oo},\ldots,X_{noo}\}-\{X_{ioo}\}$, tačka $M^i I E^1_o$ $(i=3,\ldots,n)$.

Koordinate tačke M^{12} jesu x^1 i x^2, koordinata tačke M^i je x^i $(i=3,\ldots,n)$, a koordinate tačke M jesu $x^1,\ldots,x^n$. To ćemo zapisivati

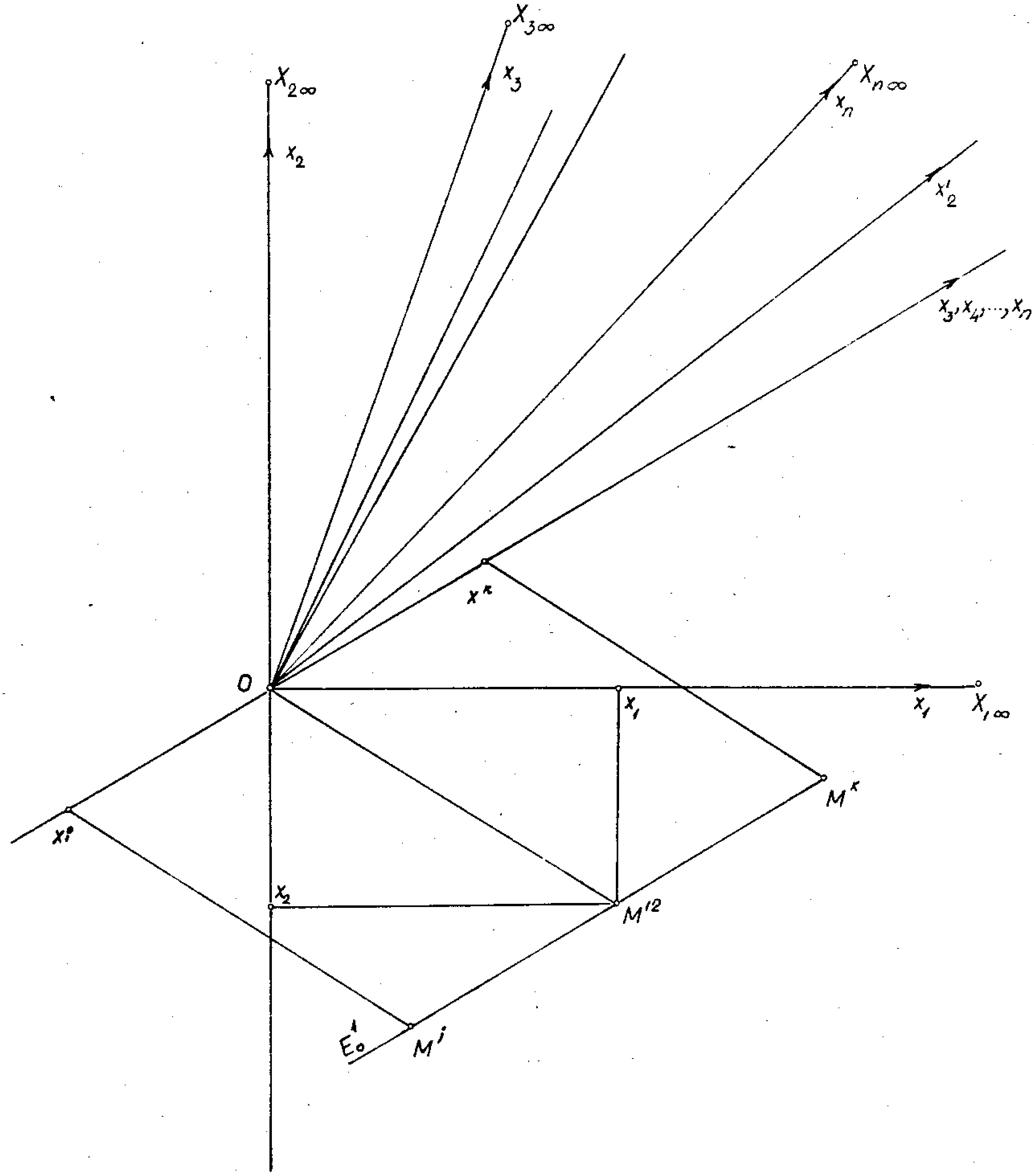
$$M(M^{12},M^3,\ldots,M^n) \text{ ili } M(x^1,\ldots,x^n).$$

Ako bi se izabralo da je

$$Ox_3=Ox_4=\ldots=Ox_n=Ox_1,$$

dobila bi se tačka projektovana na ravan analognim postupkom kao i u [3].

Moglo bi se pokazati da projektovanje iz centara X_{noo}, $X_{(n-1)oo},\ldots,X_{3oo}$ ne zavisi od reda projektovanja, što ćemo mi i učiniti.


$X_{3\infty}$
x_3
$X_{2\infty}$
x_2
$X_{n\infty}$
x_n
x'_2
$x_3, x_4, \dots, x_n$
x^k
O
x_1
$X_{1\infty}$
M^k
x^i
x_2
M'^2
E_0^1
M^i

Slika 1

Stav 2.1.1.1 Projekcija tačke A euklidskog prostora E^n na ravan E^2_{12} iz centara $X_{n\infty}$, $X_{(n-1)\infty}, \dots,$ $X_{3\infty}$ ne zavisi od reda projektovanja.

Dokaz. Pokazano je da projektovanje iz tačaka $X_{n\infty}$, $X_{(n-1)\infty}, \dots, X_{3\infty}$ tačke A na ravan E^2_{12}, daje tačku A^{12}. Takodje je poznato da pri projektovanju iz potprostora odredjenog tačkama $X_{n\infty}, \dots, X_{3\infty}$ na ravan E^2_{12} dobija se tačka A^{12}. Ako bi se počelo sa projektovanjem tačke A iz centra $X_{i\infty}$ na hiperravan $E^{n-1}_{12\dots i-1,i+1,\dots n}$, koja je odredjena osama $x_1, \dots, x_{i-1}$, $x_{i+1}, \dots, x_n$ a zatim ta projekcija projektovala iz nekog drugog centra $X_{j\infty}$ na potprostor $E^{n-2}_{12\dots i-1,i+1,\dots,j-1,j+1,\dots n}$ $(i=3,\dots,n; j=3,\dots,i-1,i+1,\dots,n)$ dobile bi se za projekcije tačke u potprostoru koji je odredjen tačkama $X_{n\infty}, \dots, X_{3\infty}$ i tačkom A. Kako taj potprostor i ravan E^2_{12} imaju tačno jednu zajedničku tačku, uključujući u razmatranje i beskonačno daleke tačke, to je rezultat takvog projektovanja opet tačka A^{12} ravni E^2_{12}.

Ovakav način projektovanja tačaka prostora E^n na ravan jednoznačno odredjuje projekciju tačke A. Mi ćemo navesti još jedan način projektovanja prostora E^n na ravan E^2_{12}, pri čemu će se u toj ravni pojaviti koordinate tačke A, odnosno postići će se bijekcija izmedju tačaka prostora E^n i (n-1)-torki kolinearnih tačaka ravni E^2_{12}.

Projekcija euklidskog prostora E^n na ravan može se realizovati i na drugi način.

Neka je u tom smislu $Ox_1 \ldots x_n$ pravougli koordinatni sistem prostora E^n. Neka su tačke $X_{i\infty}$, respektivno, na pravima x_i $(i=1,\ldots,n)$, ali ujedno i elementi nesvojstvene hiperravni E^{n-1}_{∞}. Potprostor odredjen tačkom M i tačkama $X_{n\infty},\ldots,X_{(i+1)\infty}$, $X_{(i-1)\infty},\ldots,X_{3\infty},X_{1\infty}$ ima sa ravni E^2_{2i} zajedničku tačku M^{2i} $(i=3,\ldots,n)$. Sve te koordinatne ravni su elementi trodimenzionih potprostora odredjenih osama x_1,x_2 i x_i. Ako izvršimo rotaciju svih tih ravni oko koordinatne ose x_2, dok se odgovarajuće ravni ne poklope sa ravni E^2_{12} a osa x_i sa osom x_1, dobiće se u ravni E^2_{12} tačka pretstavljena na isti način kao i u radu [3].

Izložićemo na kraju rezultat objavljen u našem radu [3]

U proširenom euklidskom prostoru E^n može se posmatrati ortogonalni koordinatni sistem $Ox_1\ldots x_n$. U tom slučaju tačka n-dimenzionog prostora E^n odredjena je sa n koordinata. Neka su koordinate tačke M brojevi $x_1,\ldots,x_n$. Broj $|x_i|$ odredjuje odstojanje razmatrane tačke M od koordinatne hiperravni $E^{n-1}_{12\ldots,i-1,i+1,\ldots n}$, odredjene osama $x_1,\ldots,x_n$. Tačka M i tačka $X_{n\infty}$ ose x_n, odredjuju pravu $MX_{n\infty}$. Ta prava i hiperravan $E^{n-1}_{12\ldots n-1}$ imaju zajedničku tačku, kao potprostori istog n-dimenzionog prostora. Neka je to tačka $M^{12\ldots n-1}$. Tačke prave $MX_{n\infty}$ imaju koordinate $x_1,\ldots,x_{n-1},0$ ukoliko one pripadaju u isto vreme i hiperravni $E^{n-1}_{12\ldots n-1}$. Posmatrajmo ravan odredjenu tačkama $X_{n\infty}$, $X_{1\infty}$ i M. Kako su prave $M^{12\ldots n-1}X_{n\infty}$ i

$M^{12\ldots n-1}X_{1\infty}$ ortogonalne, to postoji par tačaka Y_1, Y_2 na pravoj $X_{1\infty}X_{n\infty}$, tako da je Y_1, Y_2 harmonijski konjugovan par sa parom tačaka $X_{1\infty}, X_{n\infty}$. Prave $Y_1M^{12\ldots n-1}$ i $Y_2M^{12\ldots n-1}$ jesu simetrale uglova koje obrazuju prave $X_{n\infty}M^{12\ldots n-1}$ i $X_{1\infty}M^{12\ldots n-1}$. Projekcijom iz tačke Y_1, odnosno Y_2 tačke M na pravu $X_{1\infty}M^{12\ldots n-1}$ dobija se tačka $M^n=(M^n)^{12\ldots n-1}$. Duž $M^{12\ldots n-1}M^n$ odredjuje koordinatu x_n tačke M u sistemu $Ox_1\ldots x_n$. Izbor tačke Y_1, odnosno Y_2, uslovljen je zahtevom da smer od $M^{12\ldots n-1}$ ka M^n bude isti kao smer ose x_1, ako je koordinata x_n pozitivna, odnosno da taj smer bude suprotan od smera ose x_1, ako je koordinata x_n negativna. Projektovanjem iz tačke $X_{(n-1)\infty}$ tačke M^n i tačke $M^{12\ldots n-1}$ dobija se koordinata x_n u hiperravni $E^{n-2}_{12\ldots n-2}$ a na analogan način i koordinata x_{n-1}. Posle n-3 takva koraka dobija se projekcija tačke M na ravan E^2_{12}.

2.1.2 Projekcija tačke, prave i ravni

Odredićemo projekcije tačaka, pravih i ravni u skladu sa metodom projektovanja datim u radu [3].

Tačka M datog euklidskog prostora E^n u ortogonalnom sistemu $Ox_1\ldots x_n$, odredjena je uredjenom n-torkom realnih brojeva $(x_1,\ldots,x_n)$. Ako tačku M projektujemo na ravan E^2_{12} dobićemo n-1 kolinearnu tačku M^{12}, $M^3,\ldots,M^n$. Nosač tačaka M^{12}, $M^3,\ldots$ $\ldots,M^n$ je paralelan x_1 osi (dokaz te paralelnosti dat je lemom 2.1.3.2). Rastojanje $M^{12}M^{i}$ $(i=3,\dots,n)$ prestavlja apsolutnu vrednost i-te koordinate tačke M. Ta koordinata je pozitivna ako je smer od M^{12} ka M^{i} isti kao smer ose x_1 u suprotnom ta je koordinata negativna.

Prema [19] prava se preslikava u pravu a prema [3] ta su preslikavanja identična.

Mi ćemo dokazati da se prava preslikava u pravu onim postupkom kako je dobijena i projekcija ma koje tačke.

Stav 2.1.2.1 Pri projektovanju prave prostora E^n na ravan E^2_{12} dobija se skup od n-1 prave u toj ravni.

Dokaz. Neka je AB prava datog n-dimenzionog euklidskog prostora E^n. Projekcija prave AB na hiperravan $E^{n-1}_{12\dots n-1}$ iz tačke $X_{n\infty}$, jeste presek te hiperravni i ravni odredjene tačkama A, B i $X_{n\infty}$. Taj presek je prava, tj. projekcija prave AB na hiperravan $E^{n-1}_{12\dots n-1}$ je prava

$$A^{12\dots n-1}B^{12\dots n-1}.$$

Projekcija prave $A^{12\dots n-1}B^{12\dots n-1}$ na potprostor $E^{n-2}_{12\dots n-2}$ iz tačke $X_{(n-1)\infty}$ je prava preseka ravni odredjene tačkama $A^{12\dots n-1}$, $B^{12\dots n-1}$ i $X_{(n-1)\infty}$ i potprostora $E^{n-2}_{12\dots n-2}$ itd. Tako bi smo u ravni E^2_{12} dobili pravu $A^{12}B^{12}$.

U ovom procesu nismo pratili projekcije tačaka A i B iz jedne od harmonijski konjugovanih tačaka sa tačkama $X_{1\infty}$ i $X_{n\infty}$. Takodje nismo pratili projekcije tačaka $A^{12\dots n-1}$ i $B^{12\dots n-1}$ iz jedne od dve harmonijski konjugovane tačke sa tačkama $X_{1\infty}$ i $X_{(n-1)\infty}$ itd.

Pri projektovanju na potprostor nižeg broja dimenzija pojavljuje se u tom potprostoru prostora E^n, kao projekcija jedna prava više u odnosu na broj pravih u prethodnom, po dimenziji za jedan većem, potprostoru.

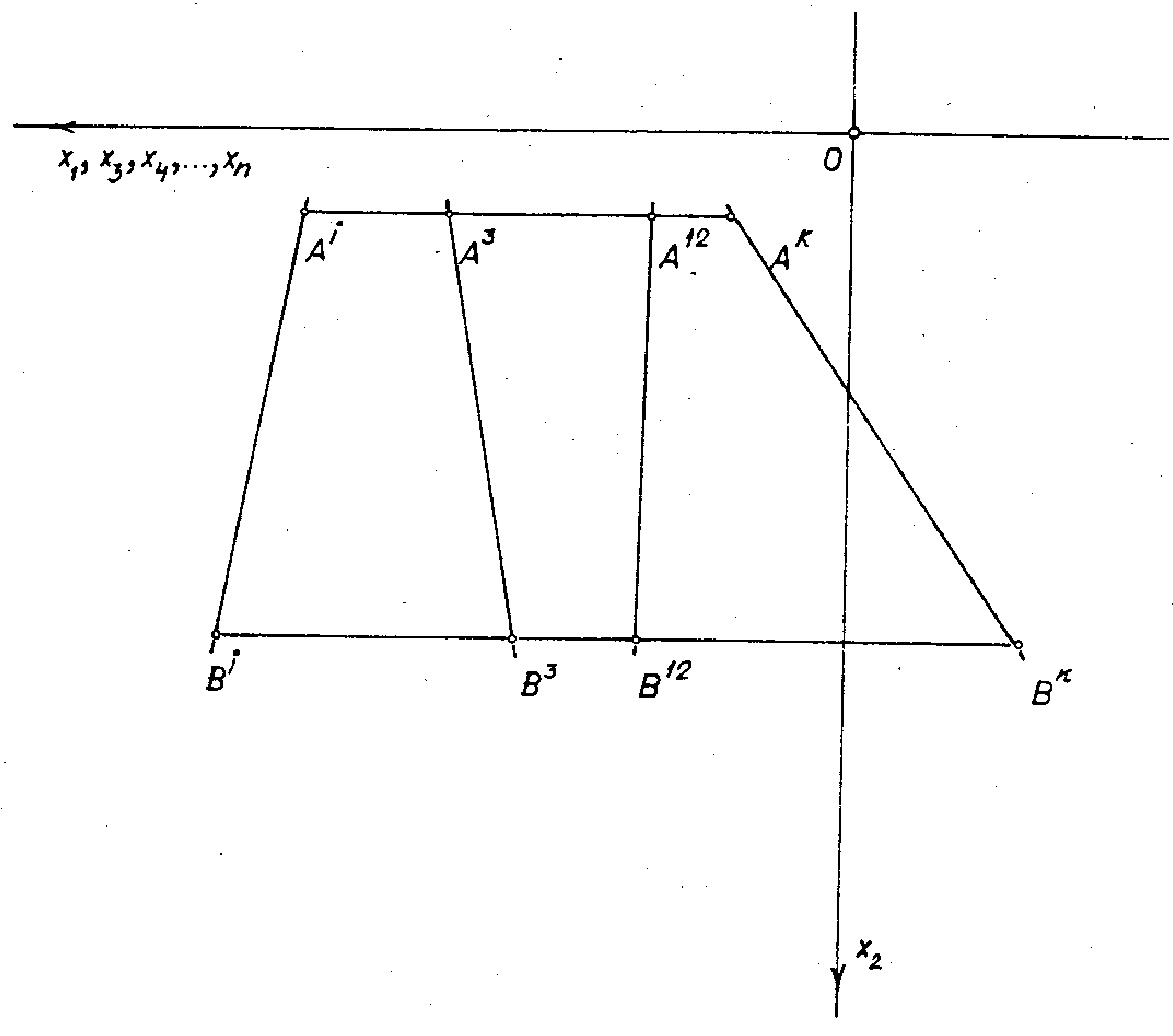
Stav 2.1.2.2 Postoji obostrano jednoznačna korespodencija izmedju pravih prostora E^n i skupova od n-k+1 prave potprostora od k dimenzije $(2 \leq k \leq n)$.

U slučaju k=2 imamo bijekciju izmedju pravih prostora E^n i skupova od n-1 prave ravni E^2_{12}.

Dokaz. Ako je prava AB prava prostora E^n tada njoj, prema stavu 2.1.2.1 odgovara u ravni skup od n-1 prave $A^{12}B^{12}$, $A^3B^3, \ldots, A^nB^n$. Do skupa od n-1 prave može se doći ako se prava AB projektuje iz potprostora odredjenog tačkama A, B, $X_{3\infty}$, $\ldots, X_{n\infty}$. Ako sve ravni E^2_{2i} $(i=3,\ldots,n)$ rotiramo oko ose x_2 dok se ne poklope sa ravni E^2_{12} i ose x_i sa osom x_1, dobićemo u ravni E^2_{12} skup od n-1 prave (slika 2).

Projektovanjem prema [3], odnosno na osnovu stava 2.1.2.1 razlikuje se od projektovanja gore izloženoga na svaku od koordinatnih ravni E^2_{2i}. Posle rotacije svih ravni E^2_{2i} na ravan E^2_{2i} dok se ose x_i ne poklopi smerom sa osom x_1, dobija se drugi rezultat. Ta razlika se ogleda u tome što se kod ovakvog načina projektovanja svaka od tačaka A^i $(i=3,\ldots,n)$ odredjuje sa dve koordinate x_2 i x_i u sistemu x_2Ox_i, a prema [3] koordinata tačke je odredjena odstojanjem $A^{12}A^i$, uzimajući u obzir i znak povezan sa smerom ose x_1, odnosno za koordinate različite od prve i druge koordinate, sve ostale koordinate odredjuju se od tačke A^{12}.

Neka je u ravni E^2_{12} dat skup od n-1 prave $A^{12}B^{12}$, $A^3B^3, \ldots, A^nB^n$. Neka je par tačaka Y^3_1 i Y^3_2 harmoniski konjugovan sa parom tačaka X_{100}, X_{300} i pri tome je tačka Y^3_1 u oblasti pravog ugla $X_{100}OX_{300}$. Prave $X_{300}A^{12}$ i $Y^3_2A^3$ seku se u tački A^{123}. Analogno je presek pravih $X_{300}B^{12}$ i $Y^3_2B^3$ tačka B^{123}.



Slika 2

Prave $X_{300}A^i$ $(i=4,\ldots,n)$ seku prave kroz tačku A^{123}, koje su paralelne koordinatnoj osi x_1, u tačkama $(A^i)^{123}$ $(i=4,\ldots,n)$. Analogno vredi i za tačke B^i $(i=4,\ldots,n)$. Ako sada nastavimo proces pridruživanja skupa od n-2 prave potprostora E^3_{123}, skupu od n-3 prave potprostora E^4_{1234} na analogan način itd., dobili bi smo u koordinatnoj hiperravni $E^{n-1}_{12\ldots n-1}$ prave

$$A^{12\ldots n-1}B^{12\ldots n-1} \text{ i } A^nB^n=(A^n)^{12\ldots n-1}(B^n)^{12\ldots n-1}.$$

Prava $X_{noo}A^{12\ldots n-1}$ i $X_{noo}B^{12\ldots n-1}$ imaju sa pravama $Y^n_2A^n$ i $Y^n_2B^n$, respektivno, zajedničke tačke A i B. Par tačaka Y^n_1, Y^n_2 je harmonijski konjugovan sa parom tačaka X_{1oo}, X_{noo}. Na taj način je jednoznačno odredjena prava AB prostora E^n.

Ravan je odredjena trima nekolinearnim tačkama. Prema tome ako je u n-dimenzionom prostoru E^n zadan simpleks od tri tačke P_1,P_2,P_3 , tada je potpuno odredjena ravan u prostoru E^n. Tačkama $P_1(P^{12}_1,P^3_1,\ldots,P^n_1)$, $P_2(P^{12}_2,P^3_2,\ldots,P^n_2)$ i $P_3(P^{12}_3,P^3_3,\ldots,P^n_3)$ odredjeno je n-1 ravan

$$P^{12}_1P^{12}_2P^{12}_3,\ P^i_1P^i_2P^i_3\ (i=3,\ldots,n).$$

2.1.3 Odredjivanje prave veličine duži

Ako su A i B tačke n-dimenzionog euklidskog prostora E^n, tada se duž AB može kongruentno preslikati na ravan E^2_{12}. Posmatrajmo ortogonalni koordinatni sistem $Ox_1\ldots x_n$ prostora E^n. Neka je projekcija tačke A iz tačke X_{noo} na hiperravan $E^{n-1}_{12\ldots n-1}$ tačka $A^{12\ldots n-1}$. Neka su Z_{ioo} i Z'_{ioo} par harmonijski konjugovanih tačaka u odnosu na par tačaka X_{1oo} i X_{ioo}. Neka je, dalje, projekcija tačke A iz tačke Z_{noo} na hiperravan $E^{n-1}_{12\ldots n-1}$ tačka A^n. Dokazaćemo sledeću lemu.

Lema 2.1.3.1 Ako je duž AB normalna na ravan, tada je njena projekcija u hiperravni $E^{n-1}_{12...n-1}$ iz tačke X_{noo} normalna na trag te ravni u hiperravni $E^{n-1}_{12...n-1}$.

Dokaz. Ravan kroz tačku X_{noo} normalna na pravu AB, seče hiperravan $E^{n-1}_{12...n-1}$ po pravoj c_1. Neka je $C_{1oo}=c_1 x E^{n-1}_{oo}$ (slika 4). Ravni $X_{noo}AB$ i $X_{noo}C_1C_{1oo}$ normalne su jedna na drugu, jer ravan $X_{noo}AB$ sadrži normalu na ovu drugu ravan. Misli se na normalnost u trodimenzionom potprostoru izmedju dve ravni, odnosno u skladu sa prvim delom ovoga rada na ortogonalnost stepena $\frac{1}{2}$. Ravan $A^{12...n-1}B^{12...n-1}C_{1oo}$ je elemenat potprostora $E^{n-1}_{12...n-1}$ na koju je ortogonalno projektovan par tačaka A i B. C_1 je tačka preseka duži $A^{12...n-1}B^{12...n-1}$ i prave c_1. Taj presek postoji na osnovu toga što se ravni $X_{noo}A^{12...n-1}B^{12...n-1}$ i $X_{noo}c_1$ seku po pravoj $X_{noo}C_1$, tj. tačka C_1 je prodor te normale kroz hiperravan $E^{n-1}_{12...n-1}$. Kako je prava c_1 trag ravni $X_{noo}C_1C_{1oo}$ u toj ravni, to je projekcija duži AB na hiperravan $E^{n-1}_{12...n-1}$ normalna na trag ravni $X_{noo}C_1C_{1oo}$. Isključen je iz razmatranja slučaj kada prava AB, nosač duži AB, sadrži tačku X_{noo}. U tom slučaju je projekcija normale AB u hiperravni $E^{n-1}_{12...n-1}$ tačka C_1, prodor te normale.

Dokazaćemo sledeću lemu.

Lema 2.1.3.2 Neka je A bilo koja tačka prostora E^n. Ako je

$$X_{noo}AxE^{n-1}_{12...n-1}=A^{12...n-1} \text{ i } Z_{noo}AxE^{n-1}_{12...n-1}=A^n,$$

gde je $Z_{noo}IX_{1oo}X_{noo}$, tada je prava $A^nA^{12...n-1}$ paralelna x_1

osi.

Dokaz. Ako je

$$A_{\infty}=A^nA^{1\ldots n-1}\times E_{\infty}^{n-1},$$

tada je tačka $A_{\infty}IX_{1\infty}X_{n\infty}$. Zaista, kako je ravan $X_{n\infty}Z_{n\infty}A^n=X_{n\infty}Z_{n\infty}A^{1\ldots n-1}$ paralelna ravni $X_{1\infty}X_{n\infty}O$, jer sadrže beskonačno daleku pravu $X_{1\infty}X_{n\infty}=X_{n\infty}Z_{n\infty}$, to tačka A_{∞} mora pripadati pravoj $X_{1\infty}X_{n\infty}$. Sa druge strane tačka A_{∞} je tačka hiperravni $E_{1\ldots n-1}^{n-1}$. Ako je tačka A_{∞} na pravoj $X_{1\infty}X_{n\infty}$ i u hiperravni $E_{1\ldots n-1}^{n-1}$, tada je

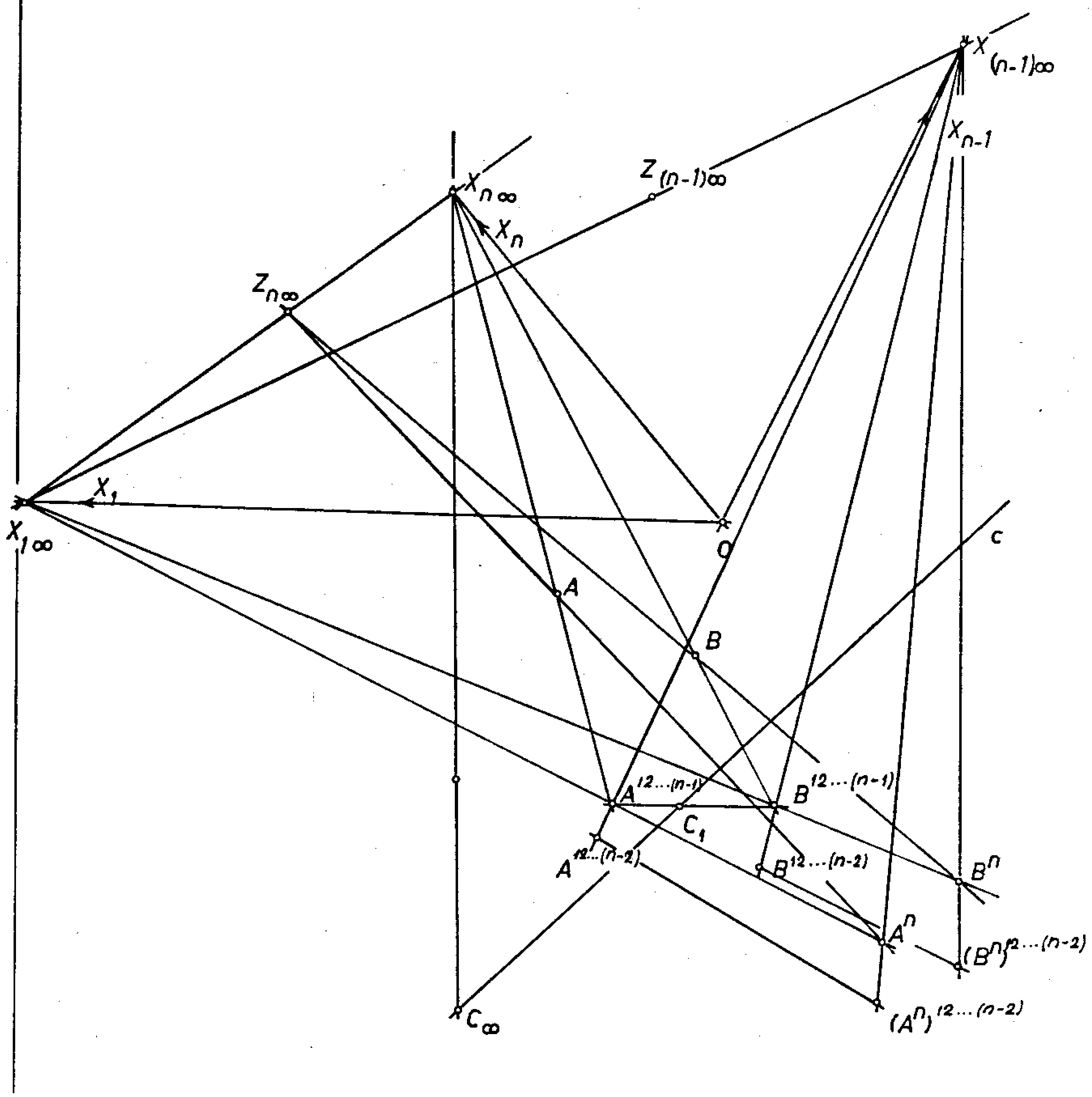
$$A_{\infty}=X_{1\infty}X_{n\infty}\times E_{1\ldots n-1}^{n-1}.$$

Prava $X_{1\infty}X_{n\infty}$ ne pripada razmatranoj hiperravni $E_{1\ldots n-1}^{n-1}$, pa sa tom hiperravni može imati najviše jednu zajedničku tačku A_{∞}. Kako je tačka $X_{1\infty}$, prave $X_{1\infty}X_{n\infty}$, tačka razmatrane hiperravni, to je

$$X_{1\infty}=A_{\infty}.$$

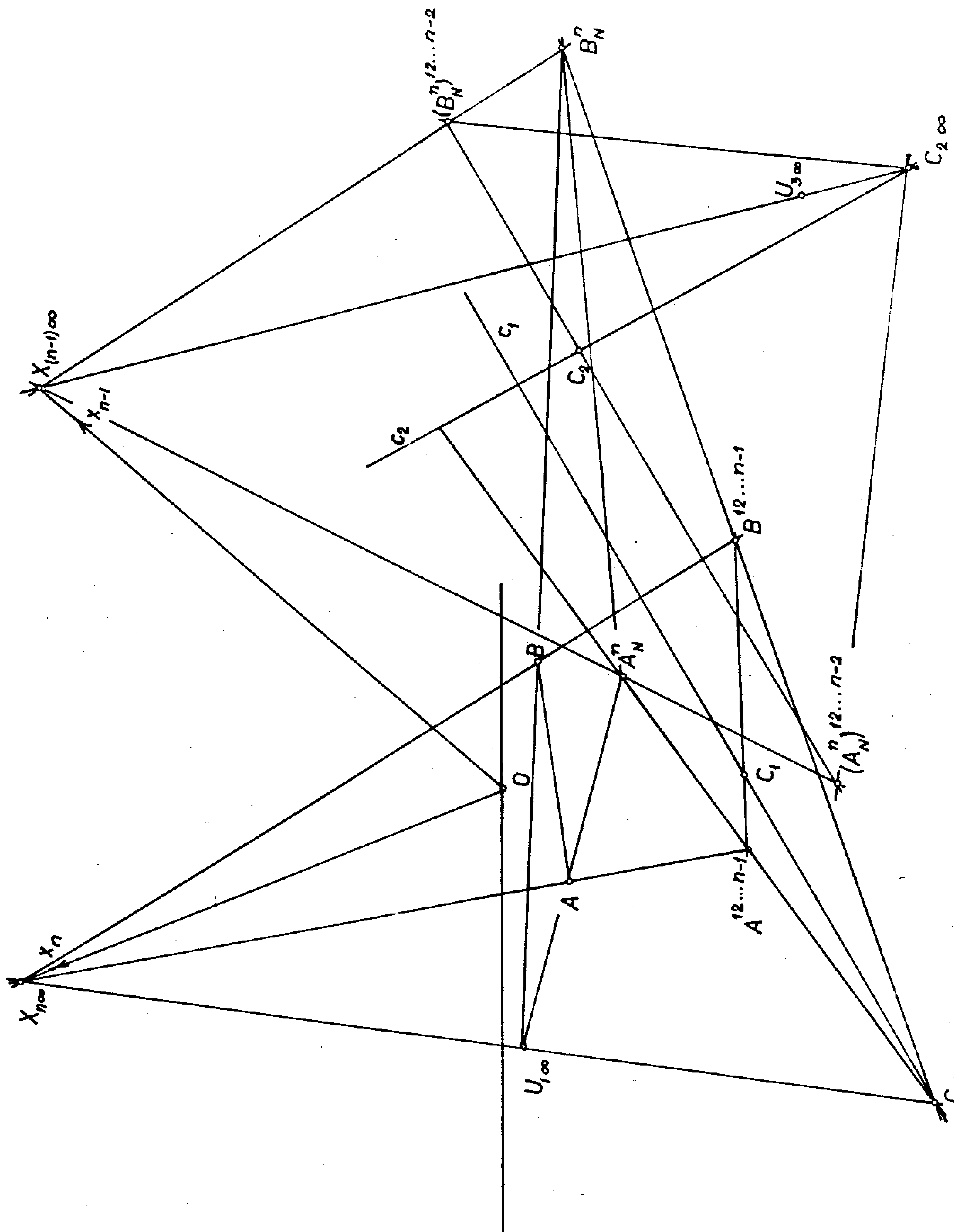
Prema tome prave $A^{1\ldots n-1}A^n$ i $X_{1\infty}O=x_1$ imaju zajedničku beskomačno daleku tačku $X_{1\infty}$, pa su prema tome paralelne.

Neka su projekcije tačaka A i B iz tačke $X_{n\infty}$ na hiperravan $E_{1\ldots n-1}^{n-1}$, respektivno tačke $A^{1\ldots n-1}$ i $B^{1\ldots n-1}$. Ravan kroz tačku $X_{n\infty}$ normalna na pravu AB, seče pravu $A^{1\ldots n-1}B^{1\ldots n-1}$ u tački C_1 a hiperravan $E_{12\ldots n-1}^{n-1}$ po pravoj c_1. Neka je $C_{1\infty}=c_1\times E_{\infty}^{n-1}$. Prava $C_{1\infty}A^{1\ldots n-1}$ je takodje normalna na pravu $A^{1\ldots n-1}B^{1\ldots n-1}$, jer su prave c_1 i $C_{1\infty}A^{1\ldots n-1}$ medju sobom paralelne (slika 4). Neka je $U_{1\infty},U_{2\infty}$ harmonijski konjugovan par tačaka sa tačkama $C_{1\infty},X_{n\infty}$.



X (n-1)∞
Xn-1
Z (n-1)∞
Xn∞
Xn
Zn∞
X1
X1∞
O
c
A
B
A12...(n-1)
B12...(n-1)
C1
A12...(n-2)
B12...(n-2)
Bn
An
(Bn)12...(n-2)
C∞
(An)12...(n-2)

Slika 3



Slika 4

Neka je U_{100} u oblasti pravog ugla $C_{100}A^{12\ldots n-1}X_{n00}$. Prava $U_{100}A$ seče pravu $C_{100}A^{12\ldots n-1}$ u tački A_N^n. Analogno se dobija tačka B_N^n. Duž $A_N^n B_N^n$ je prava veličina duži AB u hiperravni $E_{12\ldots n-1}^{n-1}$.

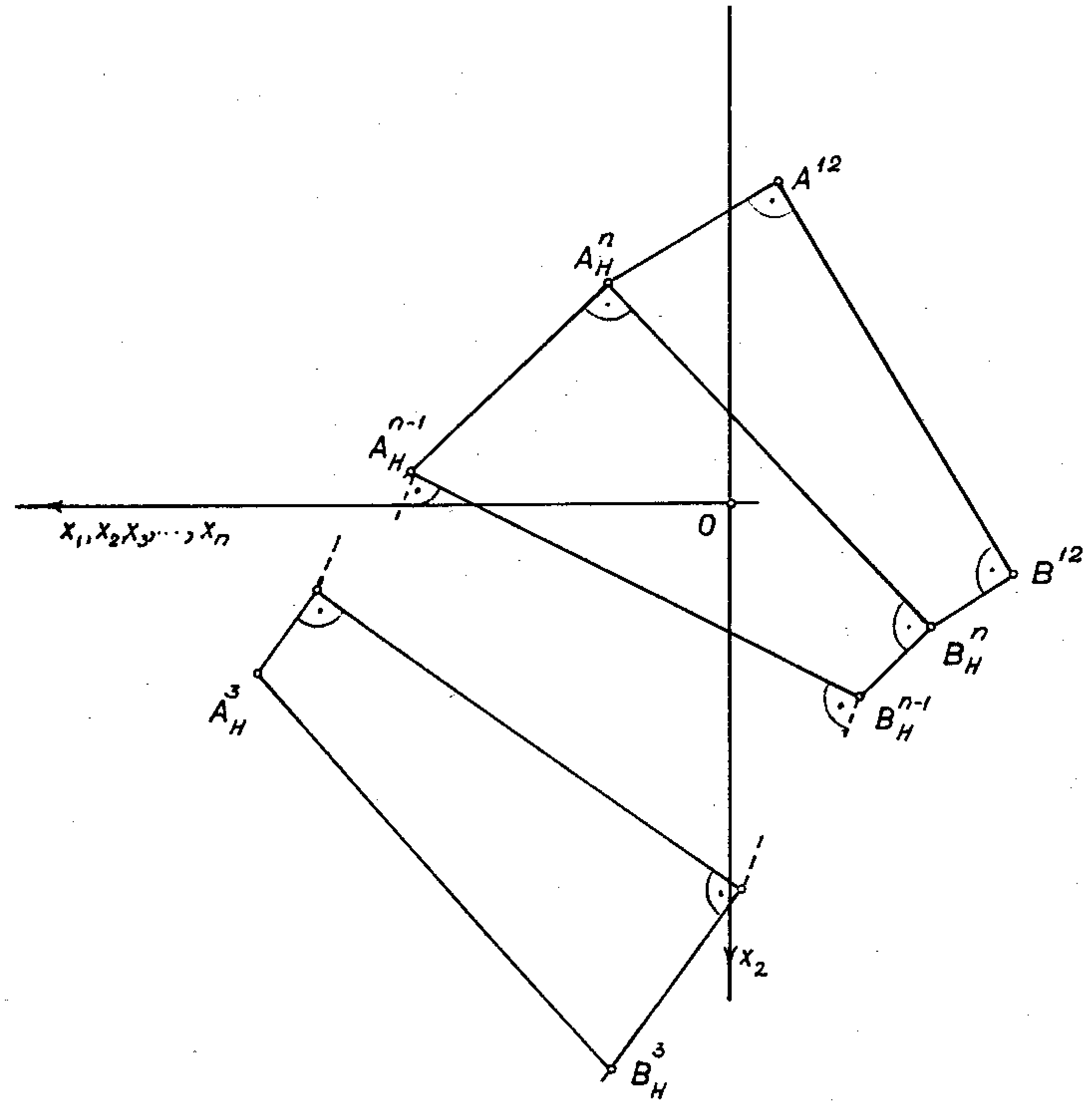
Kada su poznate tačke $A(A^{12},A^3,\ldots,A^n)$ i $B(B^{12},B^3,\ldots,B^n)$ tada se prava veličina duži AB u ravni E_{12}^2 odredjuje na sledeći način. Ako je $A^{12}A_N^n=A^{12}A^n$ i $B^{12}B_N^n=B^{12}B^n$ i ako je pritom $A^{12}A_N^n$ normalna duž na duž $A^{12}B^{12}$ i duž $B^{12}B_N^n$ normalna na duž $B^{12}A^{12}$, zatim $A_N^nA_N^{n-1}=A^{12}A^{n-1}$ i $B_N^nB_N^{n-1}=B^{12}B^{n-1}$ i pritom duž $A_N^nA_N^{n-1}$ normalna na duž $A_N^nB_N^n$ i duž $B_N^nB_N^{n-1}$ normalna na duž $A_N^nB_N^n$ itd. i na kraju ako je $A_N^3A_N^4=A^{12}A^3$ i $B_N^3B_N^4=B^{12}B^3$ i pri tome duž $A_N^3A_N^4$ normalna na duž $A_N^4B_N^4$ i duž $B_N^3B_N^4$ normalna na duž $A_N^4B_N^4$, tada je $A_N^3B_N^3$ prava veličina duži AB. Na slici 5 pretpostavljeno je da su sve vrednosti $A^{12}A^n$, $A^{12}A^{n-1},\ldots,A^{12}A^3$ kao i vrednosti $B^{12}B^n$, $B^{12}B^{n-1},\ldots,B^{12}B^3$ pozitivne.

2.1.4 Položajni zadaci

Razlikujemo dva tipa takvih zadataka. Prvi tip zadataka jesu oni zadaci gde se rešavaju problemi vezani za elemente-potprostore n-dimenzionog prostora E^n koji pripadaju jedan drugom a dugi tip zadataka je onaj gde elementi-potprostori imaju presek različit od 0 potprostora, tj. to su zavisni potprostori ali ni jedan ne pripada onom drugom.

U ovom radu neće posebno biti razmatrani zadaci jednog tipa od zadataka drugog tipa.

Tačka sadržana na pravoj. Neka je $A(A^{12},A^{3},\dots,A^{n})$ $B(B^{12},B^{3},\dots,B^{n})$ prava n-dimenzionog euklidskog prostora E^{n}. Neka je $C(C^{12},C^{3},\dots,C^{n})$ tačka toga istog prostora. Tačka C je sadržana na pravoj AB tačno tada kada je tačka C^{12} sadržana na pravoj $A^{12}B^{12}$, tačka C^{i} sadržana na pravoj $A^{i}B^{i}$ za svako $i=3,\dots,n$ (slika 6).



Slika 5

Prave koje se seku. Ako su $A(A^{12},A^{3},\dots,A^{n})B(B^{12},\dots,B^{n})$ i $C(C^{12},C^{3},\dots,C^{n})D(D^{12},D^{3},\dots,D^{n})$ dve prave, tada je tačka preseka $E(E^{12},E^{3},\dots,E^{n})$ tih pravih sadržana na jednoj i drugoj pravoj pa je

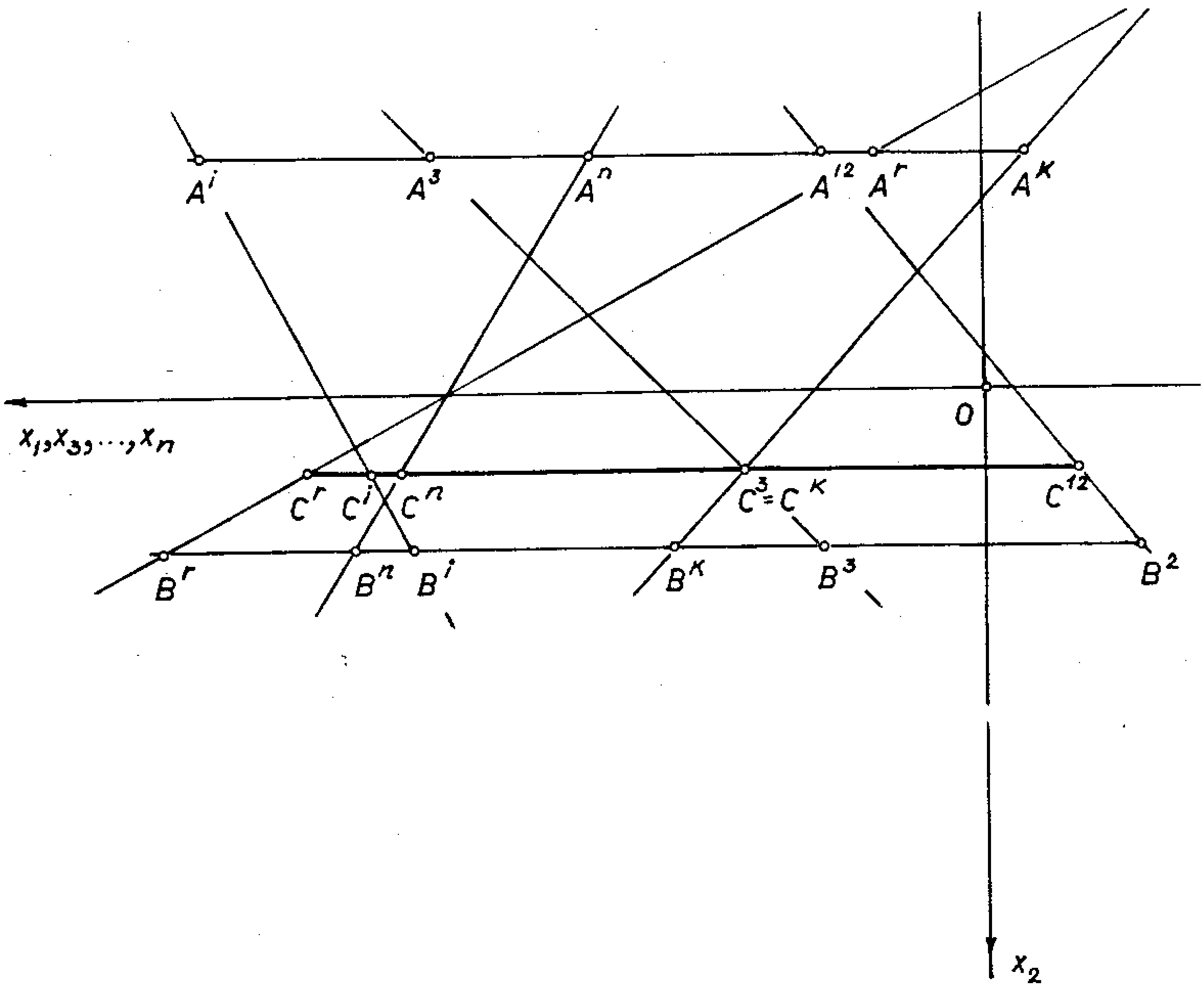
$$E^{12}=A^{12}B^{12}\times C^{12}D^{12},$$

$$E^{3}=A^{3}B^{3}\times C^{3}D^{3},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$E^{n}=A^{n}B^{n}\times C^{n}D^{n},$$

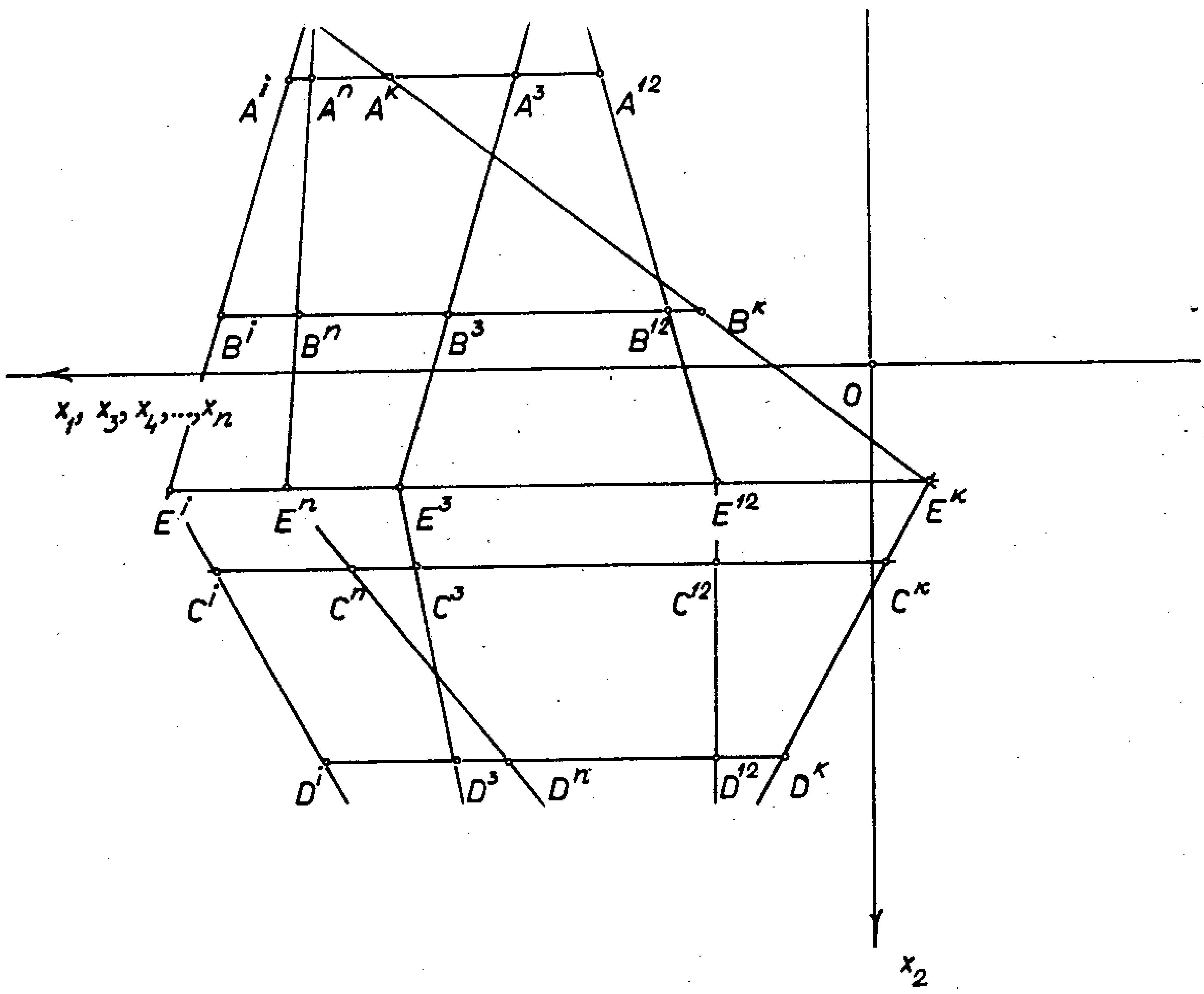
za svako $i=3,\ldots,n$ (slika 7).



Slika 6

Paralelne prave. Ako je tačka preseka E pravih AB i CD elemenat potprostora E^{n-1}_{∞}, tada su prave AB i CD paralelne (slika 8).

Paralelnost pravih prostora E^n i pravih koje odgovaraju toj pravoj u ravni E^2_{12} može se iskazati sledećim stavom.



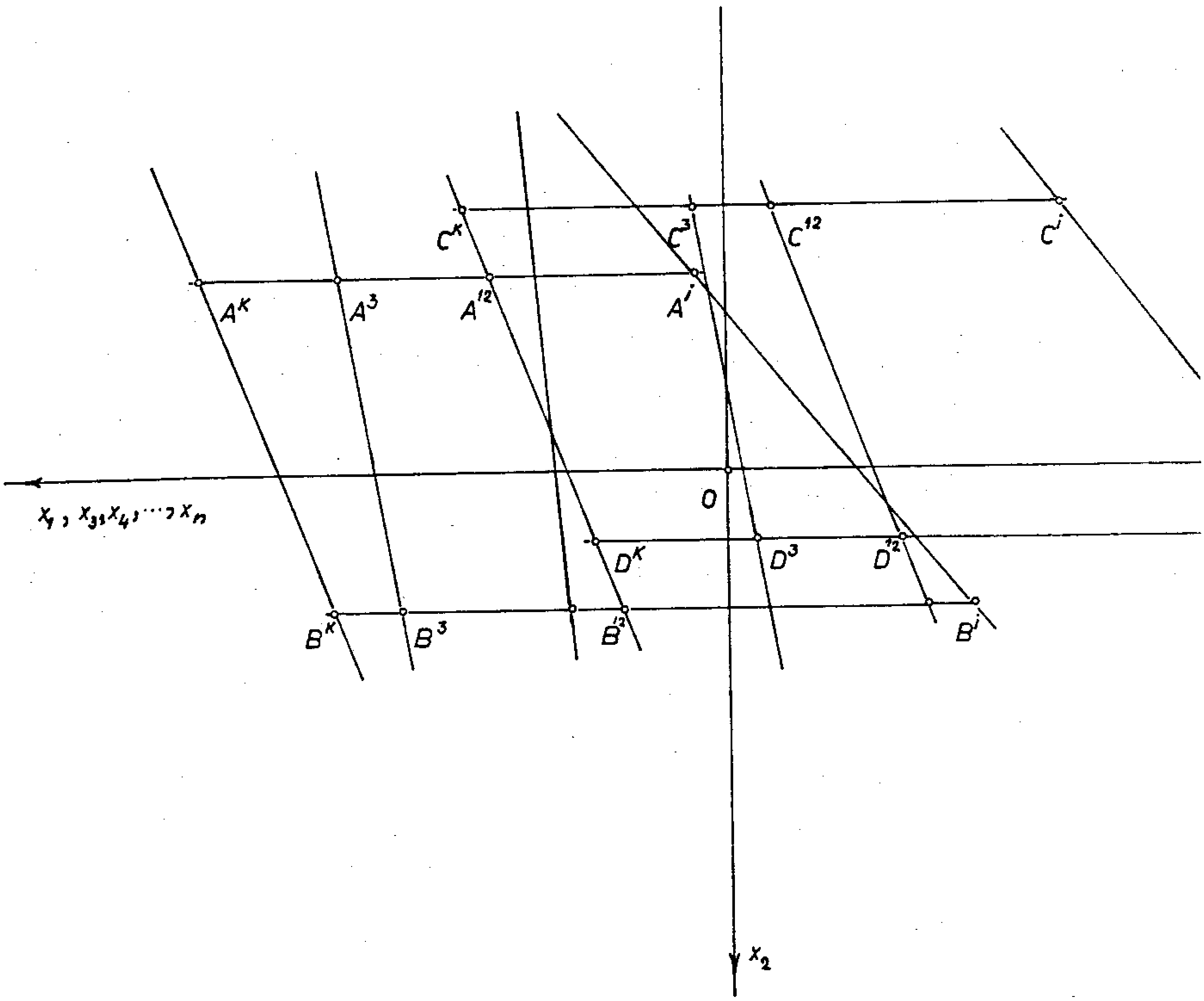
Slika 7

Stav 2.1.4.1 Dve prave AB i CD n-dimenzionog euklidskog prostora E^n paralelne su tačno tada, kada su paralelne prave A^iB^i i C^iD^i za svako i=12,3,...,n.

Dokaz. Neka su u n-dimenzionom euklidskom prostoru E^n

paralelne prave AB i CD. To znači da je $AB \times CD = E_{\infty} I E^{n-1}_{\infty}$.

Ako projektujemo tačke A, B, C i D, odnosno ako odredimo pre-



Slika 8

seke ravni $X_{n\infty}AB$ i $X_{n\infty}CD$ sa hiperravni $E^{n-1}_{12\dots n-1}$, imaćemo kao preseke prave

$A^{12...n-1}B^{12...n-1}$ i $C^{12...n-1}D^{12...n-1}$.

Te su prave paralelne, jer ako to nebi bile, već imale za presek tačku $E^{12...n-1} \not\in E^{n-1}_{\infty}$, to bi značilo da prava $X_{n\infty}E_{\infty}$ ima neku konačnu tačku, medjutim ta prava pripada nesvojstvenoj hiperravni E^{n-1}_{∞} pa su sve njene tačke nesvojstvene. Ako je par tačaka $Z_{1\infty}$, $Z_{2\infty}$ harmonijski konjugovan sa parom tačaka $X_{1\infty}$, $X_{n\infty}$, tada pri projektovanju iz tačke $Z_{1\infty}$, odnosno $Z_{2\infty}$ na hiperravan $E^{n-1}_{12...n-1}$ dobijamo paralelne prave A^nB^n i C^nD^n. Sada se postupak projektovanja nastavlja iz centra $X_{(n-1)\infty}$ na potprostor $E^{n-2}_{12...n-2}$ i tako dobiju, respektivno, paralelne prave $A^{12...n-2}B^{12...n-2}$ i $C^{12...n-2}D^{12...n-2}$ sa jedne strane i A^iB^i paralelne sa C^iD^i sa druge strane. Tu bi, ustvari, trebalo pisati $(A^i)^{12...n-2}(B^i)^{12...n-2}$ za $i=n-1,n$, ali obzirom da se zna na koji se koordinatni potprostor vrši projektovanje, to se indeksi van zagrade mogu izostaviti. Nastavljanjem takvog postupka dobilo bi se u ravni E^2_{12} dva skupa od n-1 prave medju sobom paralelne.

Neka je, sada, poznato da su paralelne prave A^iB^i sa C^iD^i za svako $i=12,3,...,n$. Trebalo bi pokazati da tim skupovima iz ravni E^2_{12} odgovaraju prave medju sobom paralelne. Neka je par tačaka $Z_{1\infty}$, $Z_{3\infty}$ harmonijski konjugovan sa parom tačaka $X_{1\infty}$, $X_{3\infty}$. Paralelne ravni $X_{3\infty}A^{12}B^{12}$ i $X_{3\infty}C^{12}D^{12}$ i par paralelnih ravni $Z_{1\infty}A^3B^3$ i $Z_{1\infty}C^3D^3$, odnosno $Z_{3\infty}A^3B^3$ i $Z_{3\infty}C^3D^3$ seku se, respektivno po pravama $A^{123}B^{123}$ i $C^{123}D^{123}$. Iz tačke $X_{3\infty}$ preslikava se skup od preostale n-3 prave na ravan kroz tačku A^{123} i tačku B^{123} koja je paralelna osi x_1, odnosno skup od preostale n-3 prave na ravan kroz tačke C^{123}, D^{123} koja je paralelna osi x_1. Na taj način skup od n-1 prave ravni E^2_{12} preslika se na skup od n-2 prave potprostora E^3_{123}. Iz postupka preslikavanja vidi se da su medju sobom paralelne prave A^iB^i i C^iD^i $(i=4,\dots,n)$ kao i prave $A^{123}B^{123}$ i $C^{123}D^{123}$. Tako u svakoj etapi preslikavanja imamo da je skup pravih i dimenzija potprostora u kome su te prave, konstantan i iznosi n+1. U hiperravni $E^{n-1}_{12\dots n-1}$ imamo prave

$$A^{12\dots n-1}B^{12\dots n-1} \text{ i } C^{12\dots n-1}D^{12\dots n-1},$$

koje su paralelne kao i prave A^nB^n i C^nD^n. Ravni

$$X_{n\infty}A^{12\dots n-1}B^{12\dots n-1} \text{ i } Z_{1\infty}A^nB^n,$$

odnosno $Z_{n\infty}A^nB^n$, seku se po pravoj AB a ravni

$$X_{n\infty}C^{12\dots n-1}D^{12\dots n-1} \text{ i } Z_1C^nD^n,$$

seku se po pravoj CD. Iz konstrukcije samih ravni sleduje paralelnost pravih AB i CD. U procesu dokaza za par tačaka $X_{1\infty}$, $X_{i\infty}$ harmonijski konjugovan par je označavan sa $Z_{1\infty}$, $Z_{i\infty}$, znajući da sve tačke $Z_{1\infty}$ koje se javljaju u paru sa $Z_{i\infty}$ tačkama nisu jedna te ista tačka.

Tačka pripada ravni. Ako tačka D pripada ravni ABC, tada svaka prava ravni ABC kroz tačku D, seče strane AB, AC i BC. Na slici 9 tačka E je presek pravih AD i BC.

Tačka pripada potprostoru E^k $(3\leq k)$. Potprostor E^k n-dimenzionog euklidskog prostora E^n odredjen je simpleksom $A_1,\dots,A_{k+1}$. Prava A_iM, gde je M tačka prostora E^k, ima sa svakim od potprostora $A_1\dots A_{i-1}A_{i+1}\dots A_{k+1}$ zajedničku tačku.

Mimoilazne prave. Mimoilazne prave AB i CD odredjuju 3-dimenzioni potprostor. Ako su poznate prave

$$A(A^{12},A^{3},\ldots,A^{n})B(B^{12},B^{3},\ldots,B^{n})$$

i

$$C(C^{12},C^{3},\ldots,C^{n})D(D^{12},D^{3},\ldots,D^{n}),$$

tada tačka preseka tih pravih data je kao skup od n-1 kolinearne tačke na nosaču paralelnom x_1 osi. Ako je presek pravih AB i CD tačka $E(E^{12},E^{3},\ldots,E^{n})$, tada je $E^{i}=A^{i}B^{i}xC^{i}D^{i}$ za svako $i=12,3,\ldots,n$. Prema tome ako ne postoji takva tačka E i ako bar jedna od pravih $A^{i}B^{i}$ nije paralelna sa pravom $C^{i}D^{i}$ $(i=12,3,\ldots,n)$, tada su prave AB i CD mimoilazne.

Prava u ravni. Prava AB je u ravni CDE tačno tada kada prava AB seče bar dve prave CD, DE ili CE (slika 10).

Prava prodire ravan. Ako je poznata ravan

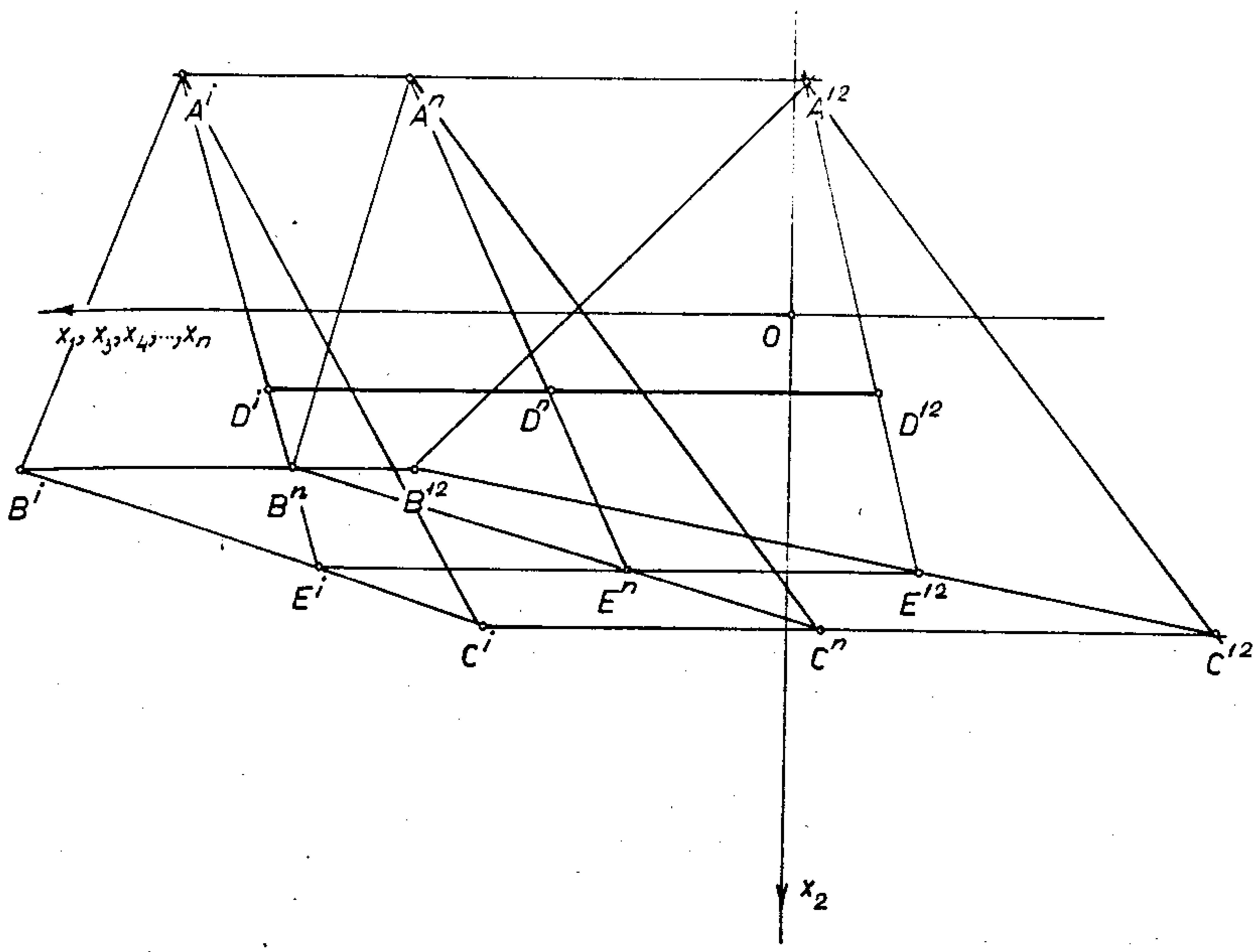
$$A(A^{12},A^{3},\ldots,A^{n})B(B^{12},B^{3},\ldots,B^{n})C(C^{12},C^{3},\ldots,C^{n})$$

i prava $D(D^{12},D^{3},\ldots,D^{n})E(E^{12},E^{3},\ldots,E^{n})$ tada se može odrediti prodor prave DE kroz ravan ABC, ako ti objekti pripadaju istom trodimenzionom potprostoru. Neka je $P(P^{12},P^{3},\ldots,P^{n})$ tačka prodora prave DE kroz ravan ABC. Za odredjivanje tačke P uzmimo ravan $P_1P_2P_3$, koja sadrži pravu DE i normalna je na projekcijsku ravan E^{2}_{12} ili na bilo koju drugu projekcisku ravan sadržanu u 3-dimenzionom prostoru u kome vršimo razmatranja. Prava $P^{12}_{1}P^{12}_{2}=P^{12}_{2}P^{12}_{3}=P^{12}_{1}P^{12}_{3}$ poklapa se sa pravom $D^{12}E^{12}$. Tačke

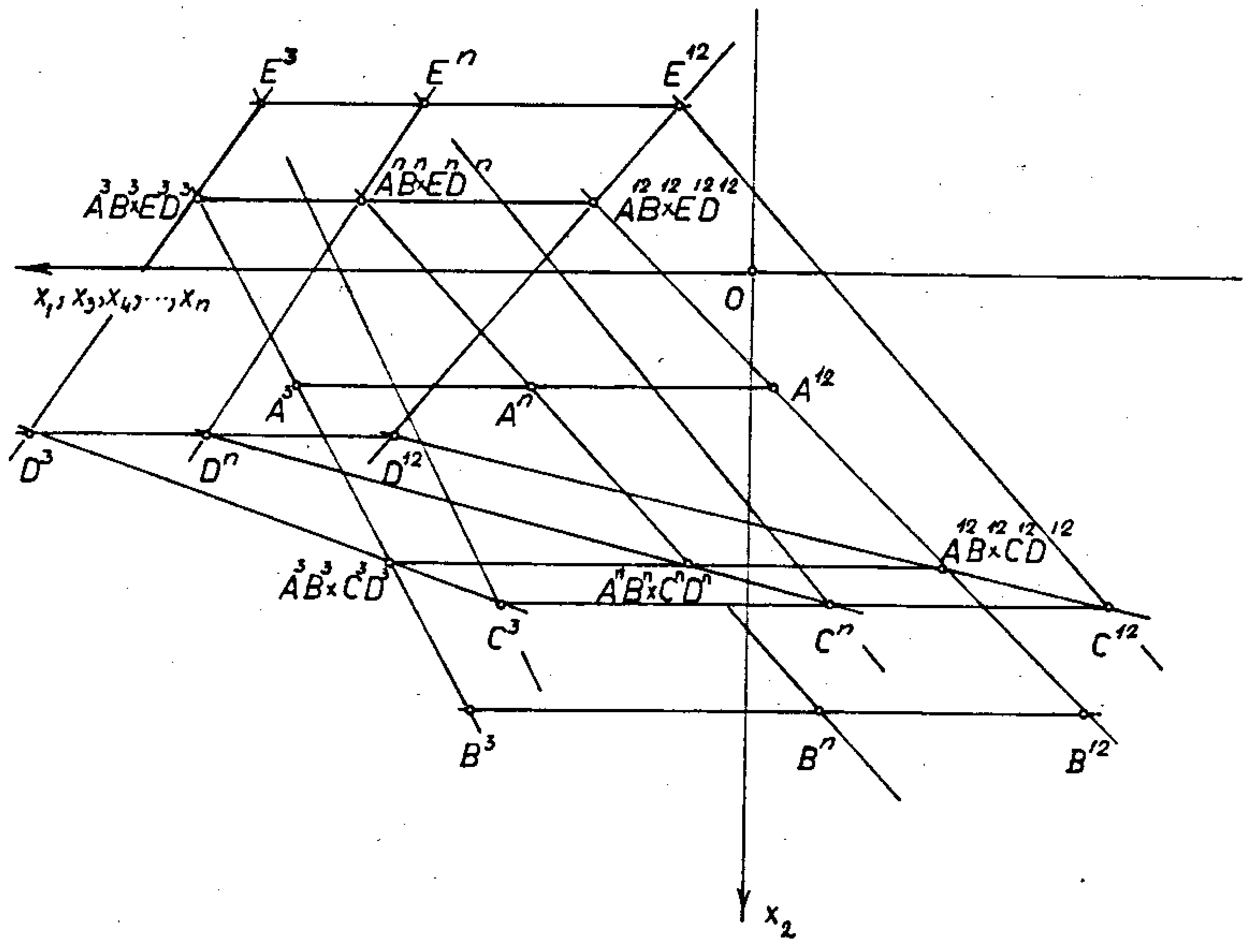
$$P^{i}=D^{i}E^{i}x(A^{i}B^{i}C^{i}xP^{i}_{1}P^{i}_{2}P^{i}_{3})\ (i=3,\ldots,n),$$

odredjuju tačku prodora prave DE kroz ravan ABC (slika 11).

Presek prave sa koordinatnim hiperravnima. Koordinatne hiperravni i prava imaju zajedničke tačke. Da bi smo odredili



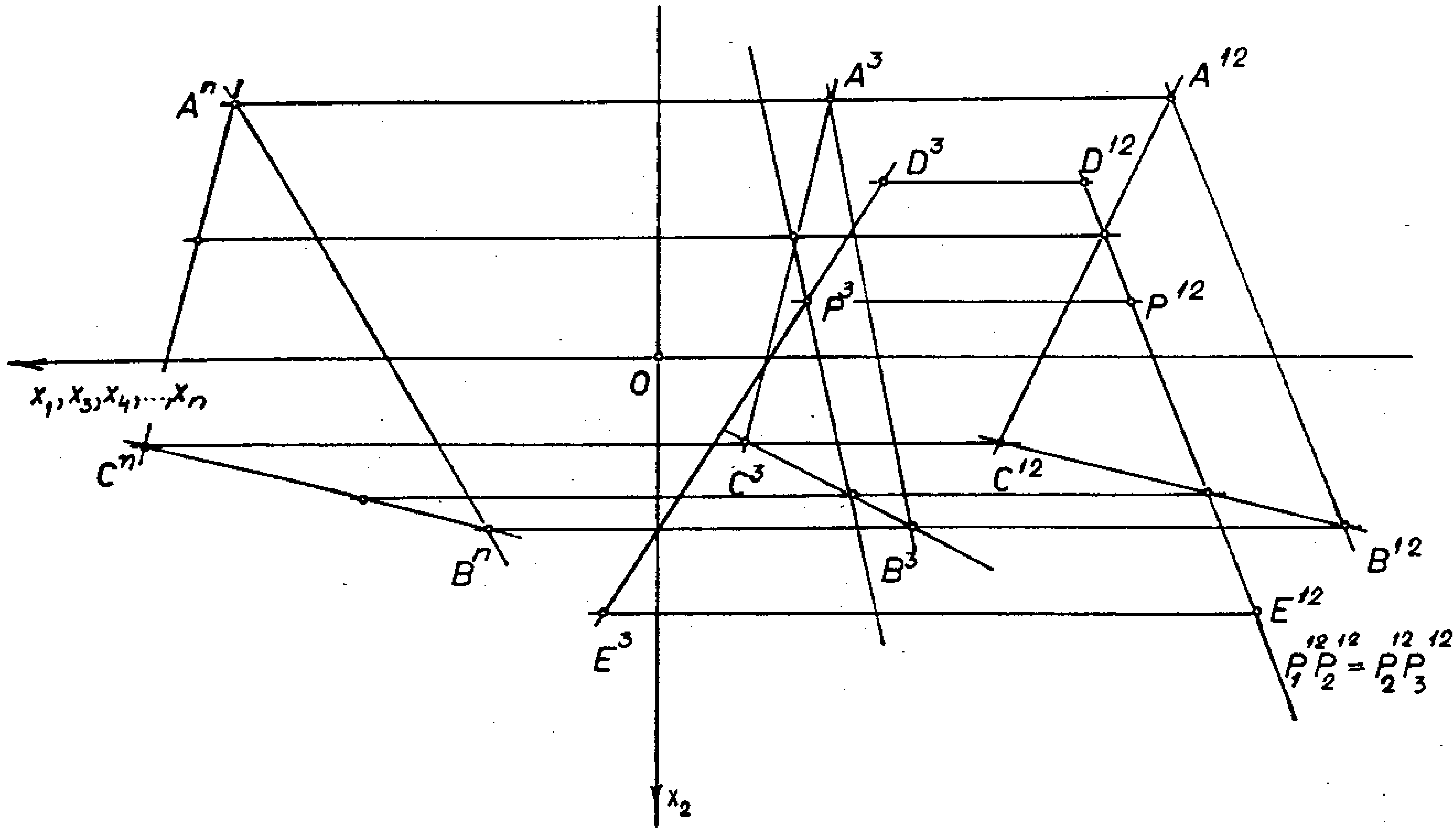
Slika 9



Slika 10

presek prave AB i hiperravni $E^{n-1}_{12\ldots k-1,k+1,\ldots n}$, potrebno je naći tačku E, takvu da je

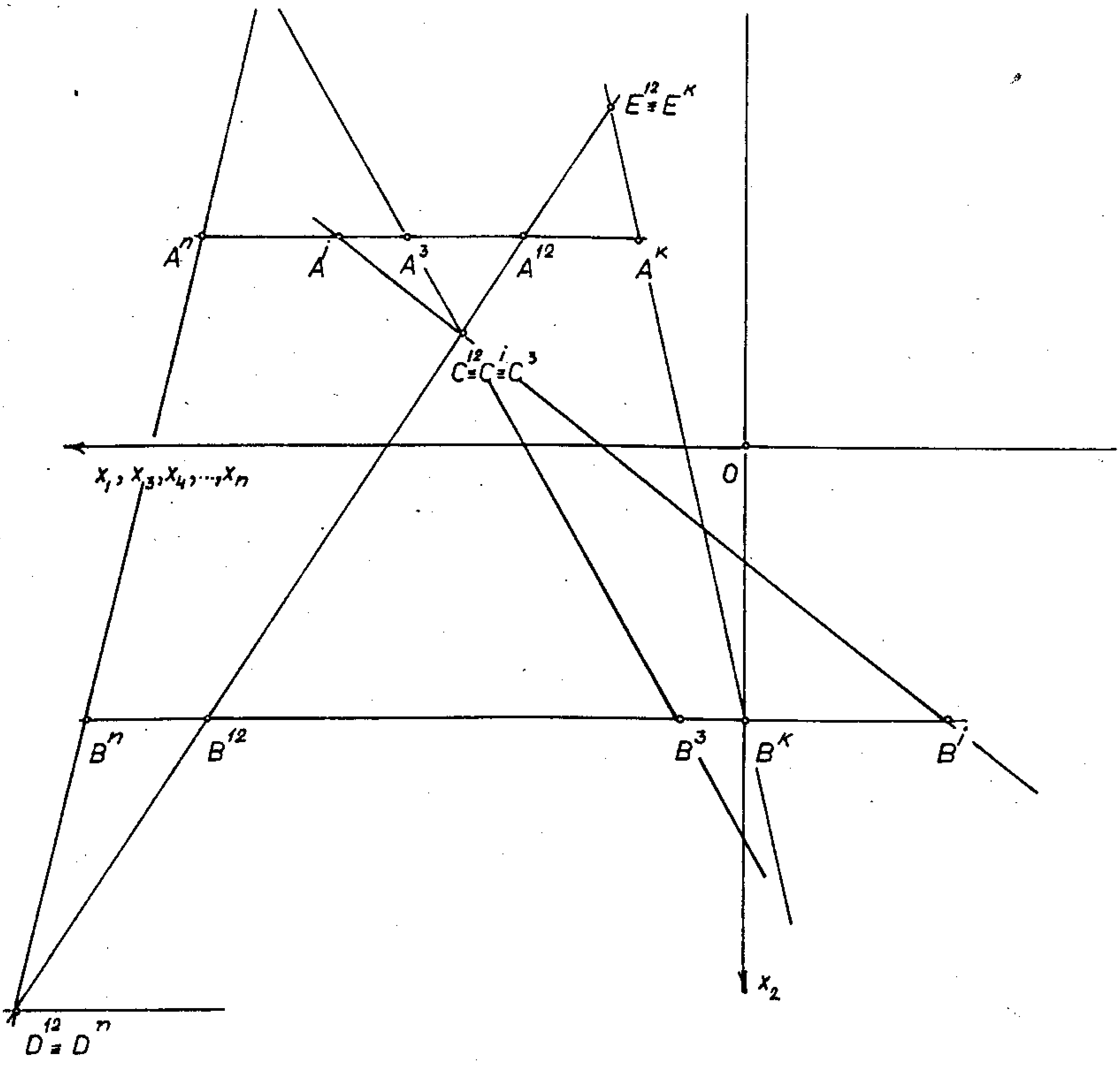
$E^{12}=E^{k}=A^{12}B^{12}\times A^{k}B^{k}$ (slika 12).



Slika 11

Presek ravni u potprostoru E^3_{123}. Neka su $P_1P_2P_3$ i $Q_1Q_2Q_3$ ravni potprostora E^3_{123}. Svaka od tih ravni ima presek sa koordinatnim ravnima. Ako je presek ravni $P_1P_2P_3$ i koordinatne ravni E^2_{12} prava p_{12} i odgovarajući presek za ravan $Q_1Q_2Q_3$ prava q_{12}, tada je $p_{12}\times q_{12}$ tačka prave preseka datih ravni (slika 13). Na analogan način se odredjuje još jedna tačka te prave.

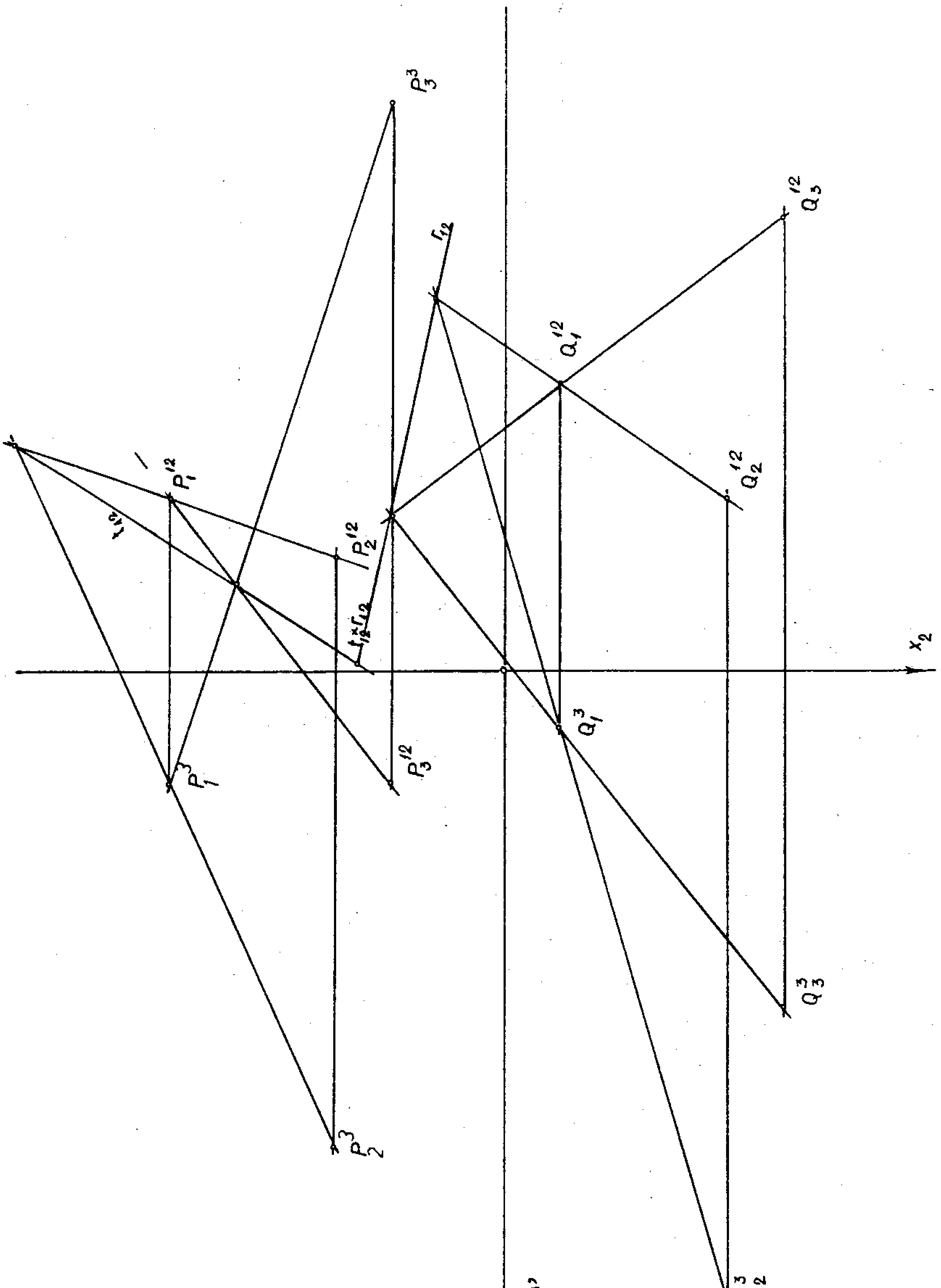
Presek dve ravni se može odrediti i tako što se odrede prodori pravih Q_1Q_2 i Q_2Q_3 kroz ravan $P_1P_2P_3$. Tačke prodora odredjuju pravu preseka tih ravni (slika 14).



slika 12

Presek ravni i projekcijske ravni u potprostoru E^4_{1234}.

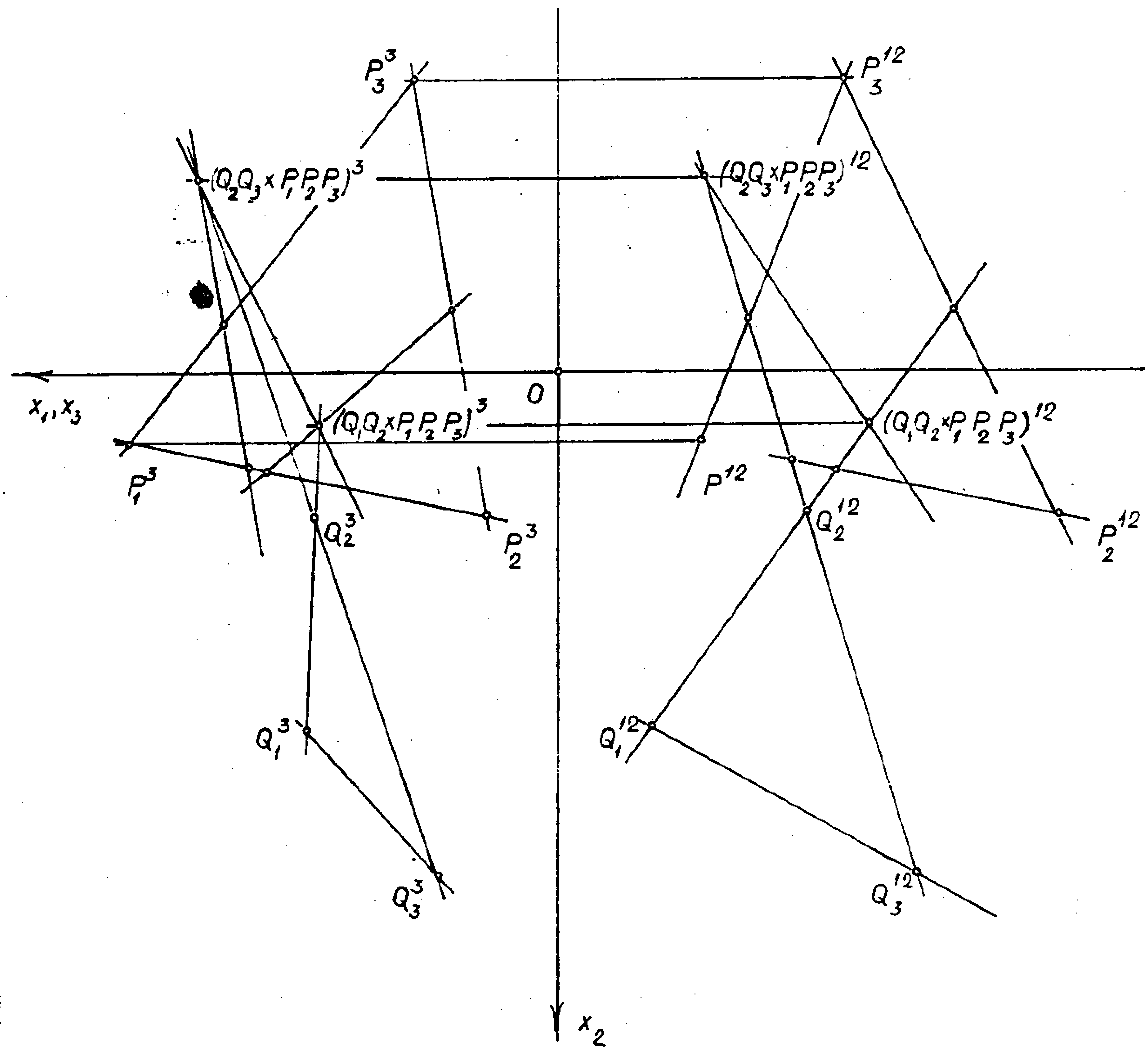
Taj presek je u opštem slučaju tačka. Neka je ravan odredjena simpleksom A, B i C. Ako prava AB prodire potprostor E^3_{123} u tački D a prava AC prodire taj potprostor u tački F, tada je



P_3^3
Q_3^12
r_12
Q_1^12
P_1^12
Q_2^12
P_2^12
t_12
t_12×r_12
x_2
Q_1^3
P_1^3
P_3^12
Q_3^3
P_2^3
Q_2^3
x_1, x_3

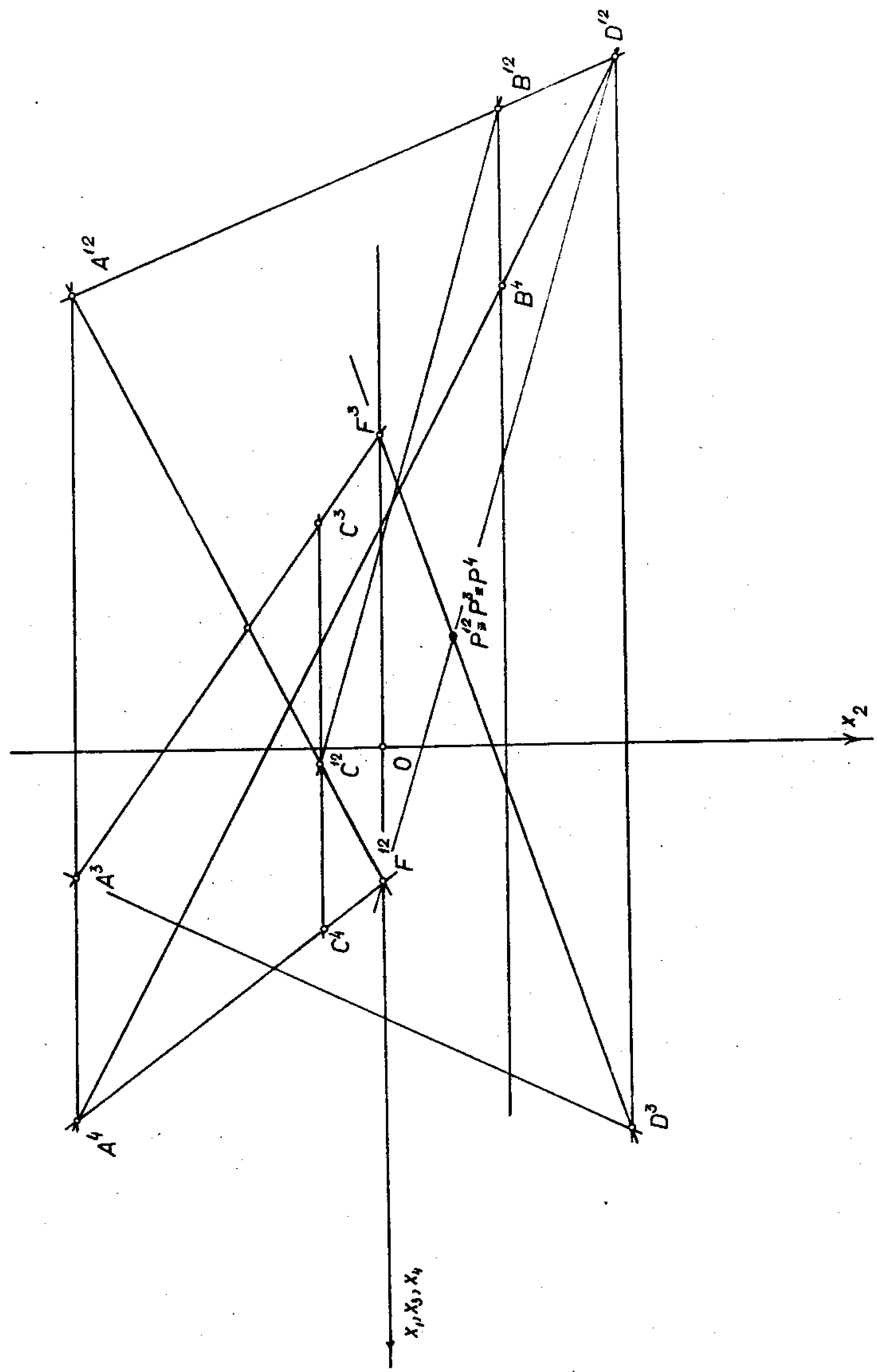
Slika 13

prava DF elemenat potprostora E^3_{123}. Prodor prave DF kroz ravan E^2_{12} je presek ravni ABC i koordinatne ravni E^2_{12}. Prava DF prodire i koordinatne ravni E^2_{23} i E^2_{13}. Da bi smo odredili tragove ravni u preostalim koordinatnim ravnima, posmatraćemo preseke ravni ABC i koordinatnih potprostora E^3_{234} i potprostora E^3_{124}.



Slika 14

Tako se dobijaju preseci u ravnima E^2_{24}, E^2_{34} i E^2_{14}



Slika 15

(slika 15).

Presek ravni i projektujuće hiperravni. Neka je ravan odredjena tačkama A, B i C a hiperravan E_N^{n-1} tačkama $D_1,\dots,D_n$. Presek ravni ABC i hiperravni E_N^{n-1} biće prava. Kako je E_N^{n-1} ortogonalna na ravan E_{12}^2 to je prava $D_1^{12}D_2^{12}=D_1^{12}D_3^{12}=\dots=D_1^{12}D_n^{12}$, prava preseka projekcijske ravni E_{12}^2 i projektujuće hiperravni E_N^{n-1}. Neka je $D_1^{12}D_2^{12}$ presekla trougao $A^{12}B^{12}C^{12}$ u tačkama

$$K^{12}=B^{12}C^{12}xD_1^{12}D_2^{12} \text{ i } L^{12}=A^{12}B^{12}xD_1^{12}D_2^{12}.$$

Tačke K^i i L^i odredjuju prave K^iL^i (slika 16).

Obzirom na standardno prezentiranje koordinatnog sistema na slici 16 koordinatni sistem nije nacrtan.

Presek dve ravni u koordinatnom potprostoru E_{1234}^4. Neka su poznate ravni (konstrukciju izvodimo prema [18])

$$P_1(P_1^{12},P_1^3,P_1^4)P_2(P_2^{12},P_2^3,P_2^4)P_3(P_3^{12},P_3^3,P_3^4)$$

i

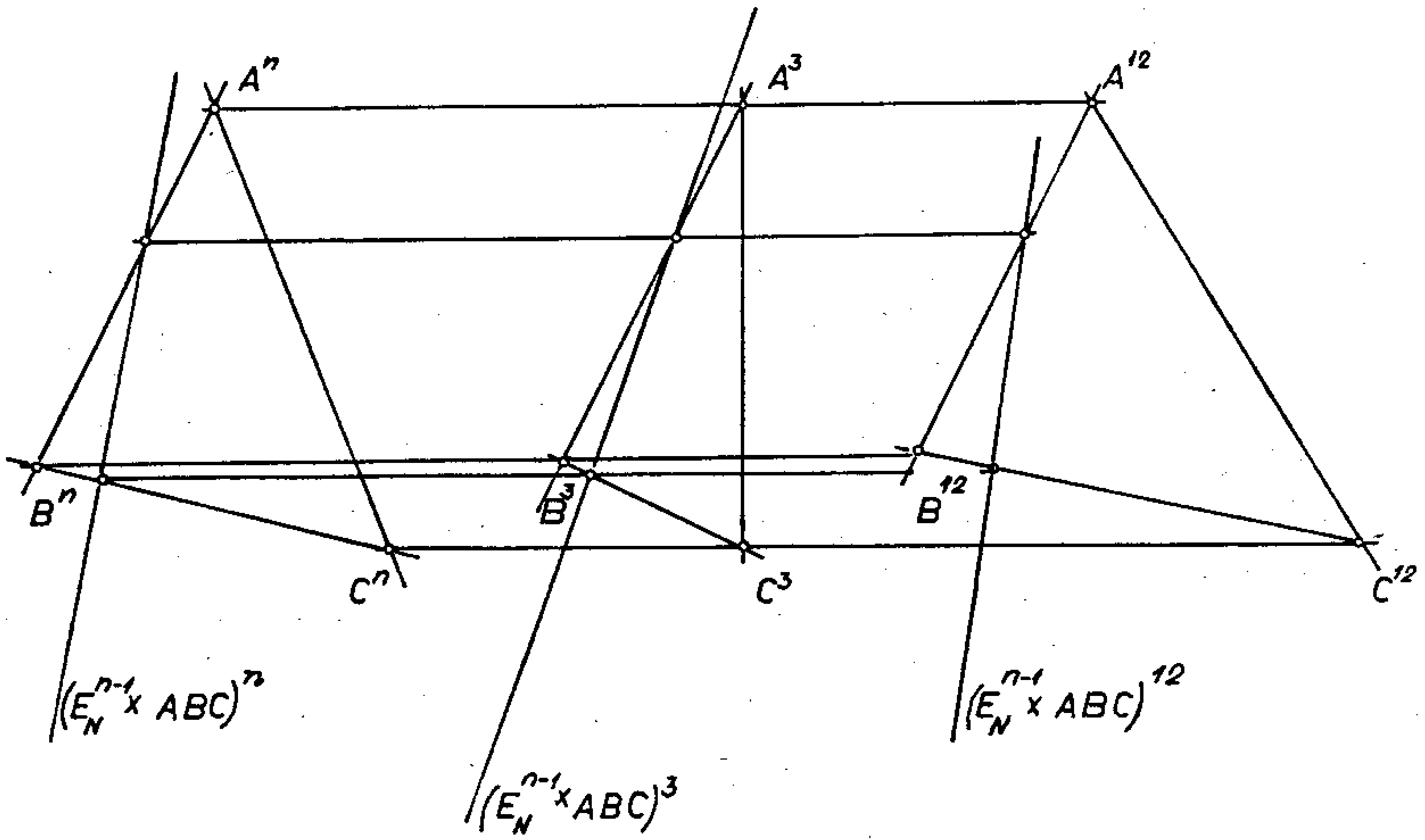
$$Q_1(Q_1^{12},Q_1^3,Q_1^4)Q_2(Q_2^{12},Q_2^3,Q_2^4)Q_3(Q_3^{12},Q_3^3,Q_3^4)$$ (slika 17). Odredimo projektujuće trodimenzione potprostore kroz prave Q_1Q_3 i Q_2Q_3 i obeležimo ih respektivno sa $E_{Q_1Q_3}^3$ i $E_{Q_2Q_3}^3$. Tada je

$$E_{Q_1Q_3}^3xE_{12}^2=Q_1^{12}Q_3^{12} \text{ i } E_{Q_2Q_3}^3xE_{12}^2=Q_2^{12}Q_3^{12}.$$

Neka je

$$P_5^{12}=P_1^{12}P_2^{12}xQ_1^{12}Q_3^{12},$$
$$P_6^{12}=P_1^{12}P_2^{12}xQ_2^{12}Q_3^{12},$$
$$P_7^{12}=P_2^{12}P_3^{12}xQ_1^{12}Q_3^{12},$$
$$P_8^{12}=P_2^{12}P_3^{12}xQ_2^{12}Q_3^{12}.$$

Tada se mogu odrediti tačke $K_1^3=P_1^3P_2^3 x P_5^3P_6^3$, $K_2^3=P_2^3P_3^3 x P_7^3P_8^3$, $L_1^4=P_1^4P_2^4 x P_5^4P_6^4$ i $L_2^4=P_2^4P_3^4 x P_7^4P_8^4$. Presek pravih K_1K_2 i L_1L_2 je tražena zajednička tačka datih ravni u potprostoru E^4_{1234}.

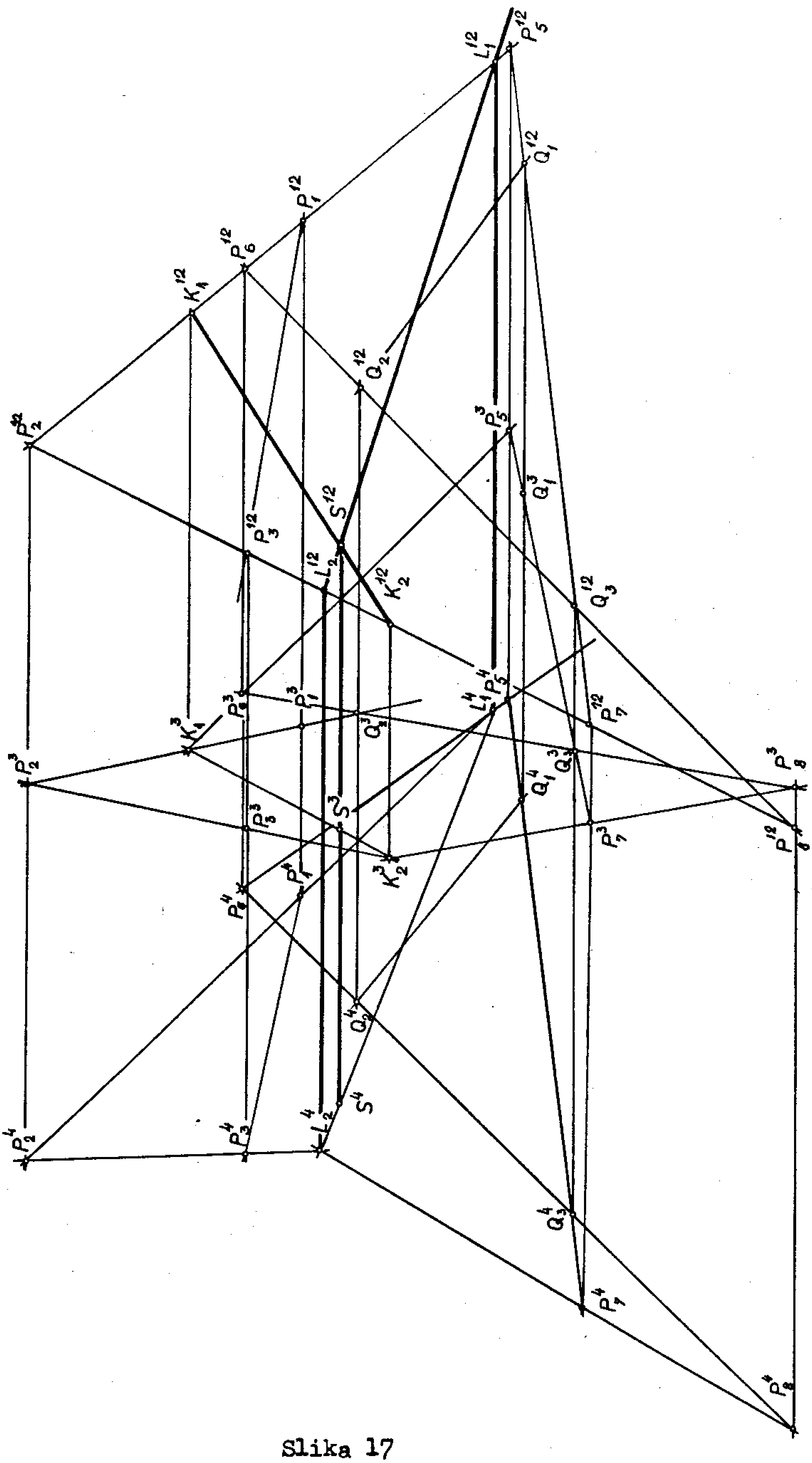


Slika 16

Ako je ta zajednička tačka $S(S^{12},S^3,S^4)$, tada je

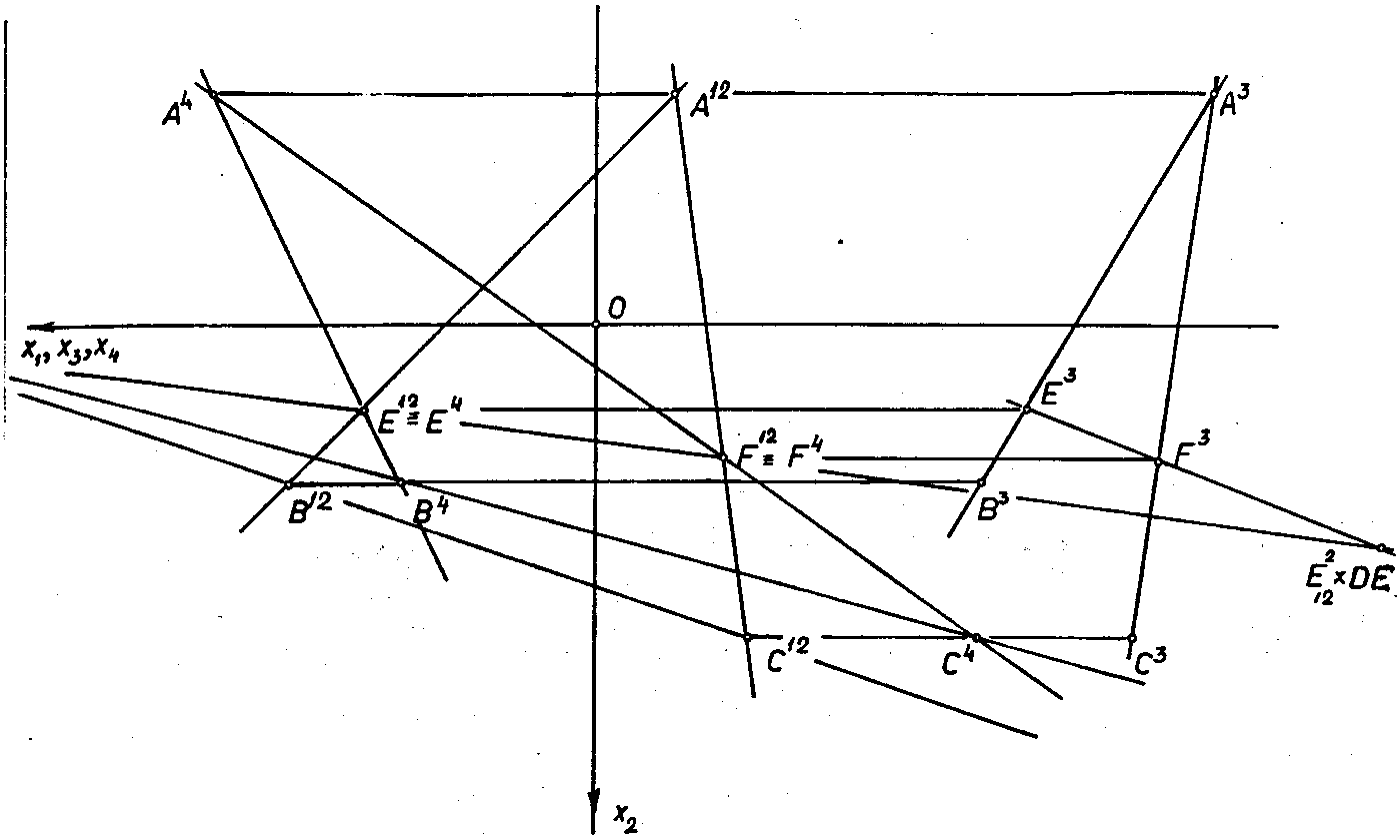
$$S^{12}=L_1^{12}L_2^{12} x K_1^{12}K_2^{12}.$$

Odredjivanje tragova ravni u koordinatnom potprostoru E^4_{1234}. Neka je poznata ravan ABC. Potprostor E^3_{123} prava AB seče u tački E, prava BC seče u tački D a prava AC seče taj isti potprostor u tački F. Kako je presek ravni ABC i potprostora E^3_{123} prava, to su tačke E, D i F kolinearne.



Slika 17

Prava odredjena tačkama D, E i F prodire projekcisku ravan E^2_{12} u tački koja predstavlja trag date ravni u koordinatnoj ravni E^2_{12} (slika 18).



Slika 18

Odredjivanje tragova koordinatnog potprostora E^{n-k} u koordinatnim potprostorima E^k. Jedan od načina da se odrede tragovi hiperravni u koordinatnim ravnima, dat je u radu [10].

Neka je potprostor E^{n-k} odredjen simpleksom $P_1, \ldots, P_{n-k+1}$. Prave P_iP_j $(i,j=1,2,\ldots,n-k+1$ i $i \neq j)$ prodiru koordinatnu hiperravan $E^{n-1}_{12\ldots n-1}$ u tačkama. Te tačke odredjuju prave potprostora $E^{n-k} \times E^{n-1}_{12\ldots n-1}$. Tako odredjene prave prodiru potprostor

$E^{n-2}_{12\ldots n-2}$ u tačkama, jer su to prave hiperravni $E^{n-1}_{12\ldots n-1}$ a potprostor $E^{n-2}_{12\ldots n-2}$ je hiperravan te hiperravni. Takvim postupkom dolazimo do prave potprostora $E^{k+1}_{12\ldots k+1}$. Ta prava prodire koordinatni potprostor $E^{k}_{12\ldots k}$ u tački koja predstavlja trag potprostora E^{n-k}. Obzirom da ima $\binom{n}{k}$ takvih koordinatnih potprostora, pa i toliko prodora, odnosno tragova, to bi se moralo poći i od razmatranja koordinatne hiperravni koja sadrži osu x_n.

Odredjivanje preseka dve hiperravni. Pokazaćemo postupak izložen u radu [3].

Neka su H_1 i H_2 dve hiperravni jednog istog n-dimenzionog euklidskog prostora E^n. Neka su pritom hiperravni H_1 i H_2 zadane respektivno simpleksima $\{P_1,\ldots,P_n\}$ i $\{Q_1,\ldots,Q_n\}$. Kako prava i hiperravan imaju zajedničku tačku, to postoje preseci hiperravni i koordinatnih osa. Neka su ti preseci respektivno tačke

$$T_1^1,\ldots,T_1^n \text{ i } T_2^1,\ldots,T_2^n.$$

Sada imamo da su simpleksi T_1^i i T_2^i perspektivni iz tačke O a na taj način perspektivni i iz jednog (n-2)-dimenzionog potprostora (i=1,...,n). Prema lemi 2.2.2.2, taj potprostor je odredjen tačkama

$$T_1^iT_1^{i+1}\times T_2^iT_2^{i+1}=R^{i,i+1}.$$

2.2 Primena projektovanja na rešavanju nekih stavova euklidske geometrije

Metodom projektovanja, kojim su rešeni osnovni položajni i metričku zadaci, u 2.2.1 rešićemo neke od stavova koji se odnose na Polke-Švarcov stav a u delu 2.2.2 daćemo jedan dokaz Dezargove teoreme sa stanovišta ovakvog načina projektovanja.

2.2.1 Neki potrebni, dovoljni ili i potrebni i dovoljni uslovi da bi skup tačaka predstavljao simpleks nekog potprostora prostora E^n

Dokazaćemo neke pomoćne stavove da bi smo dokazali stav: Ako je skup tačaka $P_1,\dots,P_{k+1}$ simpleks k-dimenzionog euklidskog prostora E^k, tada tačke

$$P_1^{1\dots m},\ P_2^{1\dots m},\dots,P_{k+1}^{1\dots m}$$

mogu biti kolinearne za $m \leq n-k+1$.

Dokazaćemo šta je potreban i dovoljan uslov da dva potprostora euklidskog prostora E^n budu paralelni.

Stav 2.2.1.1 Neka su odredjene hiperravni E_1^{n-1} i E_2^{n-1}, respektivno simpleksima $\{A_1,\dots,A_n\}$ i $\{B_1,\dots,B_n\}$. Neka su pritom simpleksi perspektivni iz tačke O. Hiperravni E_1^{n-1} i E_2^{n-1} paralelne su tačno tada kada su paralelne prave A_iA_{i+1} sa B_iB_{i+1} $(i=1,\dots,n-1)$.

Dokaz. Pretpostavimo da su paralelne hiperravni E_1^{n-1} i E_2^{n-1}. Neka su te hiperravni odredjene navedenim simpleksima. Ako neki par pravih A_kA_{k+1} i B_kB_{k+1} ne bi bio paralelan, tada $A_kA_{k+1}\times B_kB_{k+1} \notin E_{\infty}^{n-1}$. Tačka $A_kA_{k+1}\times B_kB_{k+1}$ postoji kao presek komplanarnih pravih. To znači da hiperravni imaju jednu zajedniččku tačku koja je konačna tačka, pa sledi da te hiperravni nisu paralelne, što je suprotno polaznoj pretpostavci.

Pretpostavimo sada da su paralelne sve prave A_iA_{i+1} i B_iB_{i+1} $(i=1,\ldots,n-1)$. Prema lemi 2.2.2.2 prave A_iA_{i+1} i B_iB_{i+1} odredjuju simpleks potprostora $E_{1\infty}^{n-2}$. Kako su sve tačke toga simpleksa u beskonačnosti to je $E_{1\infty}^{n-2}\subset E_{\infty}^{n-1}$. Prema tome hiperravni E_1^{n-1} i E_2^{n-1} jesu paralelne.

Neposredne posledice stava 2.2.1.1 su:

Kroz datu tačku van date hiperravni prolazi tačno jedna hiperravan paralelna datoj hiperravni.

Ako su paralelne hiperravni E_1^{n-1} i E_2^{n-1} odredjene, respektivno, simpleksima $\{A_1,\ldots,A_n\}$ i $\{B_1,\ldots,B_n\}$, tada vredi

$OA_1:OB_1=\ldots=OA_n:OB_n$.

Dokazaćemo stav koji se odnosi na perspektivnost skupova tačaka vezano za simplekse odgovarajućih potprostora.

Stav 2.2.1.2 Neka su E_1^k i E_2^k potprostori $(k+1)$-dimenzionog prostora E^{k+1}. Neka je $\{A_1,\ldots,A_{k+1}\}$ simpleks potprostora E_1^k. Pretpostavimo da je tačka O iz potprostora E^{k+1}, ali takva da ne pripada potprostorima E_1^k i E_2^k. Prodori pravih $OA_1,\ldots,OA_{k+1}$ kroz potprostor E_2^k čine simpleks $\{B_1,\ldots,B_{k+1}\}$ toga potprostora.

Dokaz. Neka su tačke $B_1,\ldots,B_{k+1}$, respektivno, prodori pravih $OA_1,\ldots,OA_{k+1}$ kroz potprostor E_2^k. Pretpostavimo suprotno polaznoj hipotezi, tj. da skup tačaka $\{B_1,\ldots,B_{k+1}\}$ nije simpleks potprostora E_2^k. To znači da taj skup tačaka pripada nekom potprostoru niže dimenzije od k. Neka je to potprostor E_2^{k-1}. To bi značilo da tačka O i tačke $B_1,\dots,B_{k+1}$ odredjuju neki potprostor E_3^k. Potprostor E_3^k u preseku sa potprostorom E_1^k odredjuje potprostor E_3^{k-1}, pa sledi da skup tačaka $A_1,\dots,$ A_{k+1} predstavlja skup tačaka iz potprostora dimenzije (k-1) što je u kontradikciji da je to simpleks prostora dimenzije k. Prema tome prodori pravih $OA_1,\dots,OA_{k+1}$ u potprostoru E_2^k predstavljaju simpleks toga potprostora.

Daćemo odgovore na neka od pitanja da pojedini skupovi tačaka predstavljaju simplekse odgovarajućih potprostora.

Posmatrajmo skup od tri tačke $P_1(P_1^{12},P_1^3)$, $P_2(P_2^{12},P_2^3)$, $P_3(P_3^{12},P_3^3)$. Da bi tačke P_1, P_2 i P_3 odredjivale neku ravan moraju biti nekolinearne. Ako su kolinearne tačke P_i^{12}, tada ne mogu biti kolinearne tačke P_i^3 (i=1,2,3). To isto vredi i za kolinearnost tačaka P_i^3 (i=1,2,3). Isključen je iz razmatranja slučaj kada tačke P_1, P_2 i P_3 odredjuju koordinatnu ravan x_1x_3 ili njoj paralelnu ravan. Važi i obratno, ako jedna od trojaka tačaka P_i^{12}, P_i^3 nije kolinearna tada tačke $P_i^{123}=P_i$ odredjuju neku ravan (slika 19).

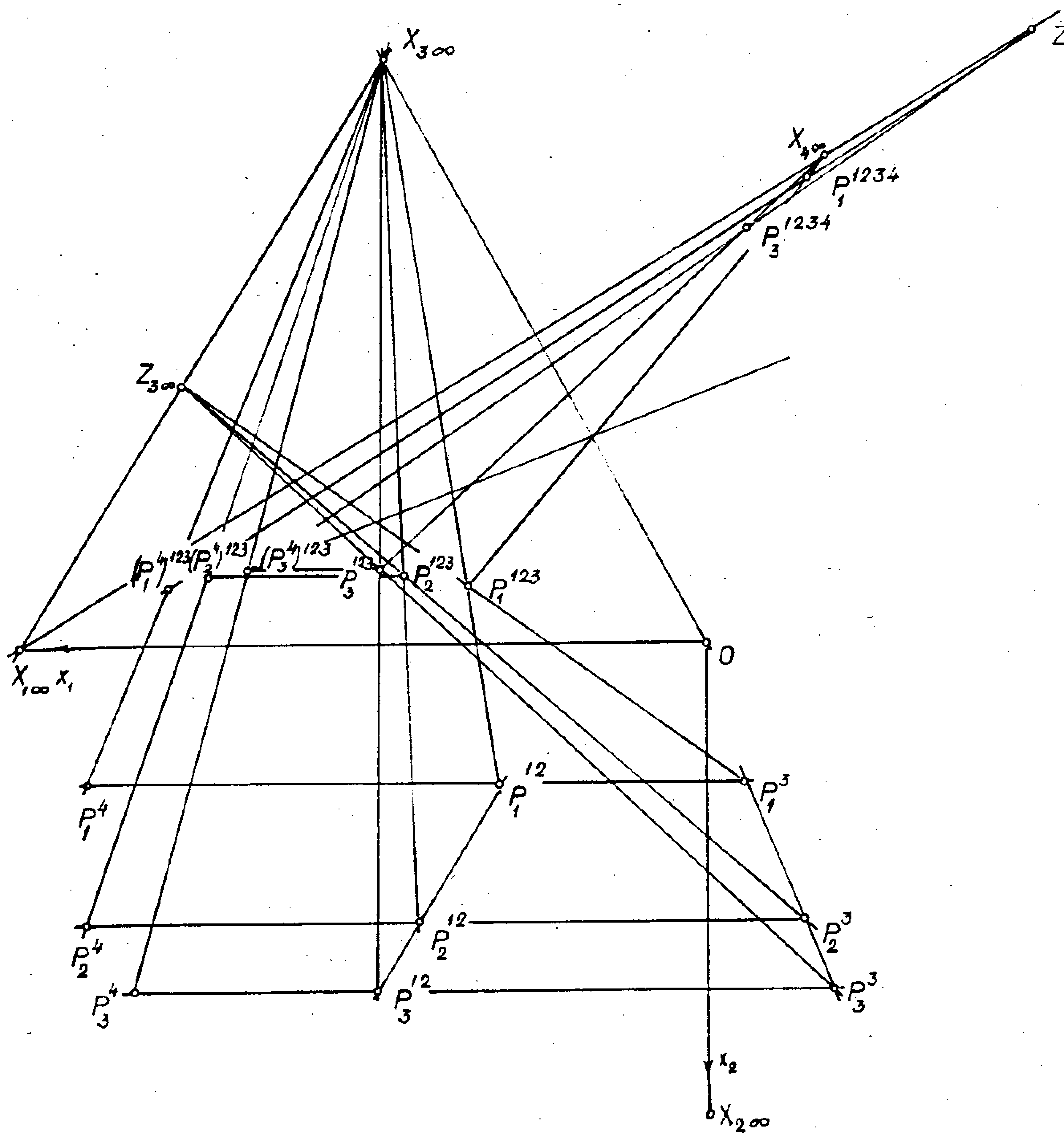
Prećićemo na razmatranje potprostora veće domenzije od dva. Sve zaključke koje budemo izvodili odnose se na opšti slučaj.

U procesu dokaza nekih stavova koristićemo harmonijsku konjugovanost. Za par tačaka X_{100}, X_{i00} harmonijski konjugovan par tačaka označavaćemo sa Z_{i00}, Z'_{i00}.

Dokazaćemo najpre neke stavove vezane za ovakav način projektovanja.

Stav 2.2.1.3 Projekcija koordinatnog potprostora $E^{k}_{1\ldots k}$ iz centra $X_{k\infty}$ na koordinatni potprostor $E^{k-1}_{12\ldots k-1}$ je taj potprostor $E^{k-1}_{12\ldots k-1}$.

Dokaz. Pretpostavimo obratno od tvrdnje stava, tj. da



Slika 19

je projekcija potprostora $E^{k}_{1\ldots k}$ na potprostor $E^{k-1}_{1\ldots k-1}$ različita od tog potprostora. Kako se ovakvim projektovanjem potprostor preslikava na potprostor, to je projekcija potprostora $E^{k}_{1\ldots k}$ neki potprostor E^{m}_{o} $(m<k-1)$. Potprostor E^{m}_{o} i tačka X_{koo} odredjuju $(m+1)$-dimenzioni potprostor E^{m+1}_{o}. U tom potprostoru je skup svih pravih $X_{koo}P_i$ $(i=1,\ldots,k+1)$, pa prema tome i čitav simpleks prostora $E^{k}_{1\ldots k}$. Na osnovu toga sleduje da je $k\leqslant m+1$, što je u suprotnosti sa relacijom $m<k-1$. Sledi $m=k-1$.

Stav 2.2.1.4 Ako se pri projektovanju prostora E^{k} $(k<n)$ iz centra X_{noo}, prostora $(E^{k})^{X_{noo}}_{E^{n-1}_{1\ldots n-1}}$ iz centra $X_{(n-1)oo}$ itd., sve do potprostora

$$(\ldots(((E^{k})^{X_{noo}}_{E^{n-1}_{1\ldots n-1}})^{X_{(n-1)oo}}_{E^{n-2}_{1\ldots n-2}})\ldots)^{X_{(k+1)oo}}_{E^{k}_{1\ldots k}},$$

dobije potprostor dimenzije k, tada vredi jednakost

$$(\ldots(((E^{k})^{X_{noo}}_{E^{n-1}_{1\ldots n-1}})^{X_{(n-1)oo}}_{E^{n-2}_{1\ldots n-2}})\ldots)^{X_{4oo}}_{E^{3}_{123}}=E^{3}_{123}.$$ Ako je skup tačaka $P_1,\ldots,P_{k+1}$ simpleks prostora E^{k}, tada ne mogu biti kolinearne sve $(k+1)$-torke P^{12}_{i}, $P^{3}_{i},\ldots,P^{n}_{i}$ $(i=1,\ldots,k+1)$.

Dokaz. Sve dok drugačije ne bude rečeno i će uzimati vrednosti od 1 do k+1. Da navedena jednakost vredi sledi iz stava 2.2.1.3 . Dokažimo drugi deo stava 2.2.1.4. Pretpostavimo obratno tvrdnji stava, tj. da su kolinearne sve $(k+1)$-torke tačaka $P^{12}_{i},P^{3}_{i},\ldots,P^{n}_{i}$. To znači da su komplanarne $(k+1)$-torke P^{123}_{i}, $(P^{4}_{i})^{123},\ldots,(P^{n}_{i})^{123}$, ali kako se ravni $P^{3}_{i}Z_{3oo}$ i $P^{12}_{i}X_{3oo}$ seku po pravoj to su tačke P^{123}_{i} kolinearne a otuda i tačke

$(P_i^4)^{123},\ldots,(P_i^n)^{123}$. Komplanarnost tačaka P_i^{123}, $P_i^4=(P_i^4)^{123}$, $\ldots,P_i^n=(P_i^n)^{123}$, povlači netačnost jednakosti date u sadržaju stava 2.2.1.4.

Ako bi sve razmatrane tačke bile na istom nosaču, paralelnom x_1 osi, tada bi ravni $X_{300}P_i^{12}$ i $Z_{300}P_i^3$ bile jedna ista ravan paralelna ravni x_1x_3.

Iz ovoga stava neposredno sledi:

Lema 2.2.1.1 Tačke P_i^{12} i P_i^3 biće kolinearne ako su kolinearne tačke P_i^{123} (slika 20).

Ta se tvrdnja može jednostavno uopštiti.

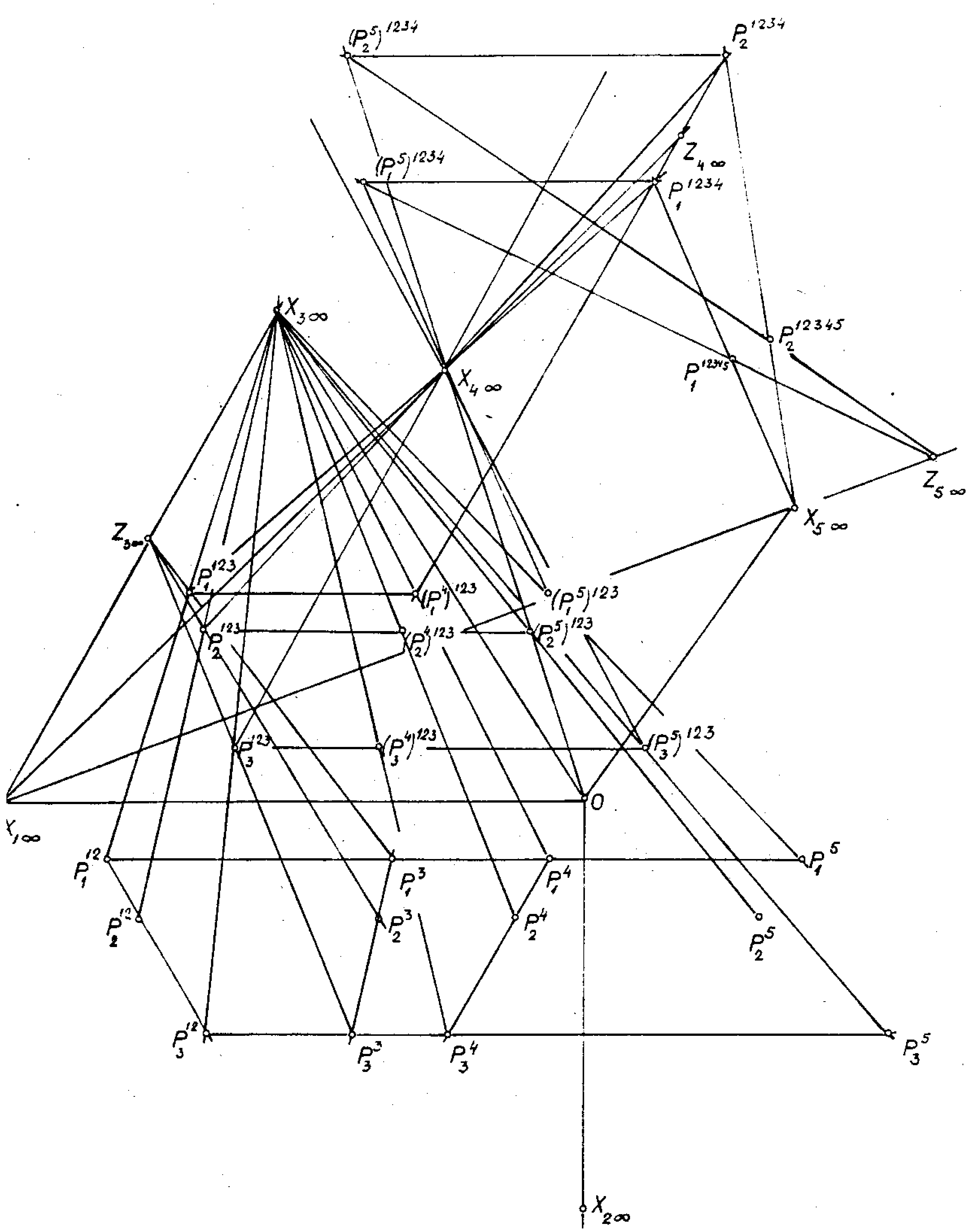
Lema 2.2.1.2 Kolinearnost tačaka P_i^{1234} povlači kolinearnost svih tačaka P_i^{12}; P_i^3; P_i^4.

Dokaz. Ako su kolinearne tačke P_i^{1234} tada ravni

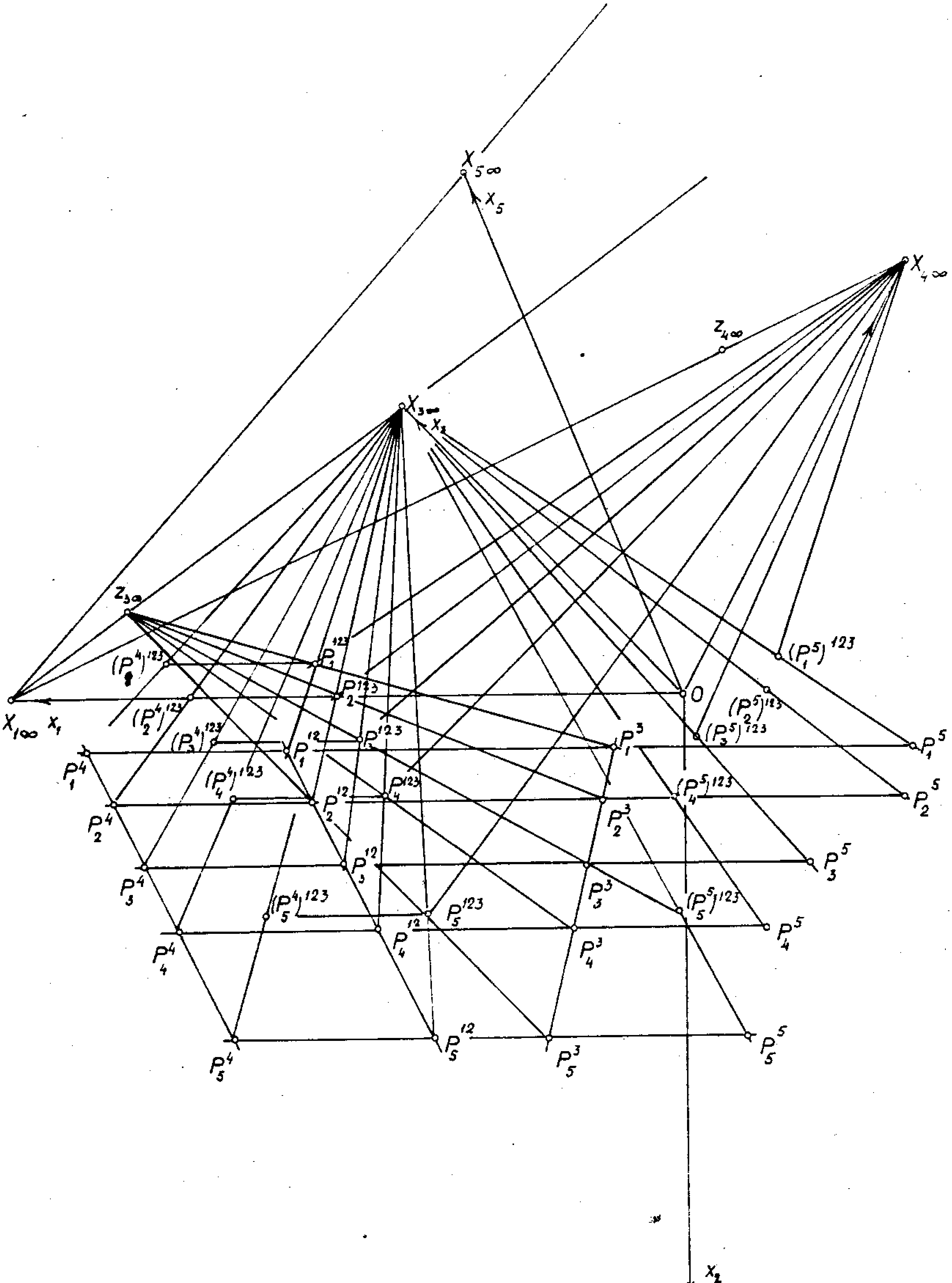
$P_i^{1234}X_{400}$ i $P_i^{1234}Z_{400}$,

seku koordinatni potprostor E_{123}^3 po pravama P_i^{123} i P_i^4, odnosno po nosačima tih kolinearnih tačaka. Prema lemi 2.2.1.1 iz kolinearnosti tačaka P_i^{123} sledi kolinearnost tačaka P_i^{12} i P_i^3. Ravan odredjena tačkom X_{300} i pravom-nosačem tačaka $P_i^4=(P_i^4)^{123}$, seče projekcisku ravan E_{12}^2 po nosaču tačaka $P_i^4=(P_i^4)^{12}$.

Iz kolinearnosti tačaka P_i^{12}; P_i^3; P_i^4 ne može se zaključiti kolinearnost tačaka P_i^{1234}, jer ako je nosač tačaka P_i^{12}; P_i^3 i P_i^4 jedna te ista prava, tada ne sleduje kolinearnost tačaka P_i^{123} niti kolinearnost tačaka P_i^4 (slika 20 i 21).


$(P_2^5)^{1234}$
P_2^{1234}
$Z_{4\infty}$
$(P_1^5)^{1234}$
P_1^{1234}
$X_{3\infty}$
$X_{4\infty}$
P_2^{12345}
P_1^{12345}
$Z_{5\infty}$
$X_{5\infty}$
$Z_{3\infty}$
P_1^{123}
$(P_1^4)^{123}$
$(P_1^5)^{123}$
P_2^{123}
$(P_2^4)^{123}$
$(P_2^5)^{123}$
P_3^{123}
$(P_3^4)^{123}$
$(P_3^5)^{123}$
$X_{1\infty}$
O
P_1^{12}
P_1^3
P_1^4
P_1^5
P_2^{12}
P_2^3
P_2^4
P_2^5
P_3^{12}
P_3^3
P_3^4
P_3^5
$X_{2\infty}$

Slika 20



$X_{5\infty}$
x_5
$X_{4\infty}$
$Z_{4\infty}$
$X_{3\infty}$
x_3
$Z_{3\infty}$
$X_{1\infty}$
x_1
O
x_2
P_1^{123}
P_2^{123}
P_3^{123}
P_4^{123}
P_5^{123}
$(P_1^4)^{123}$
$(P_2^4)^{123}$
$(P_3^4)^{123}$
$(P_4^4)^{123}$
$(P_5^4)^{123}$
$(P_1^5)^{123}$
$(P_2^5)^{123}$
$(P_3^5)^{123}$
$(P_4^5)^{123}$
$(P_5^5)^{123}$
P_1^{12}
P_2^{12}
P_3^{12}
P_4^{12}
P_5^{12}
P_1^3
P_2^3
P_3^3
P_4^3
P_5^3
P_1^4
P_2^4
P_3^4
P_4^4
P_5^4
P_1^5
P_2^5
P_3^5
P_4^5
P_5^5

Slika 21

Najopštija tvrdnja koja vredi u ovom smislu je:

Stav 2.2.1.5 Kolinearnost tačaka $P_i = P_i^{1\dots n}$, ostvaruje kolinearnost tačaka

$$P_i^{12}; P_i^3; \dots; P_i^n.$$

Dokaz. Ako su tačke $P_i = P_i^{1\dots n}$ kolinearne, tada pri projektovanju prave-nosača tih tačaka na svaku od koordinatnih ravni E_{2i}^2, dobijamo u tim ravnima prave. Te ravni su elementi trodimenzionih potprostora odredjenih osama x_1, x_2 i x_i. Rotiranjem svih tih ravni u ravan E_{12}^2, dok se ose x_1 i x_i ne poklope, dobiće se u ravni E_{12}^2 n-1 prava. Takav skup pravih razlikuje se od skupa pravih koji bi se dobio projektovanjem prave-nosača tačaka P_i. Da bi se ti skupovi pravih poklopili dovoljno je translatorno preslikati skup od n-1 prave na skup od n-1 prave dobijen našom metodom projektovanja.

Stav 2.2.1.6 Neka su tačke $P_1, \dots, P_{k+1}$ simpleks euklidskog prostora E^k. Ako za neku trojku tačaka P_r, P_s, P_q iz skupa $\{P_1, \dots, P_{k+1}\}$ vredi kolinearnost svih tačaka

$$P_r^{12},\ P_s^{12},\ P_q^{12};\ P_r^3,\ P_s^3,\ P_q^3; \dots; P_r^{n-1},\ P_s^{n-1},\ P_q^{n-1},$$

tada postoji ravan odredjena tačkama P_r, P_s i P_q.

Dokaz. Projektovanjem neke ravni iz tačke $X_{n\infty}$ na hiperravan $E_{1\dots n-1}^{n-1}$ dobijaju se ili dve ravni ili ravan i prava ili dve prave. Ako je kao rezultat projektovanja dobijena prava, tada su kolinearne tačke $P_r^{1\dots n-1}$, $P_s^{1\dots n-1}$ i $P_q^{1\dots n-1}$. Iz te kolinearnosti sleduje kolinearnost razmatranih tačaka.

Misli se na uporedo projektovanje iz tačke $X_{n\infty}$ i tačke $Z_{n\infty}$. Par tačaka $X_{1\infty}, X_{n\infty}$ je harmonijski konjugovan sa parom tačaka $Z'_{n\infty}, Z_{n\infty}$.

Stav 2.2.1.7 Neka je skup tačaka $\{P_1, \ldots, P_{k+1}\}$ $(k \leq n)$ simpleks euklidskog prostora E^k. Ako za neku četvorku tačaka P_r, P_s, P_p, P_q vredi kolinearnost tačaka

$$P_r^{12},\ P_s^{12},\ P_p^{12},\ P_q^{12};\ P_r^3,\ P_s^3,\ P_p^3,\ P_q^3; \ldots ; P_r^{n-2},\ P_s^{n-2},\ P_p^{n-2},\ P_q^{n-2},$$

tada tačke P_r, P_s, P_p i P_q mogu biti simpleks nekog trodimenzionog potprostora.

Dokaz. Ako je odredjen trodimenzioni potprostor tačkama P_1, P_2, P_3 i P_4, tada pri projektovanju toga potprostora iz tačke $X_{n\infty}$ na hiperravan $E^{n-1}_{1\ldots n-1}$ dobijamo u toj hiperravni ili dva trodimenziona potprostora ili jedan trodimenzioni potprostor i jednu ravan ili dve ravni. Projektovanje se uporedo vrši iz tačke $Z_{n\infty}$, pa otuda dva potprostora za projekciju. Ako je kao rezultat projektovanja iz tačke $X_{n\infty}$ dobijena ravan u hiperravni $E^{n-1}_{1\ldots n-1}$, tada se projektovanjem iz tačke $X_{(n-1)\infty}$ te ravni na potprostor $E^{n-2}_{1\ldots n-2}$ dobija ili ravan ili prava. Ako je kao rezultat projektovanja dobijena prava, tada su kolinearne tačke $P_1^{1\ldots n-2}$, $P_2^{1\ldots n-2}$, $P_3^{1\ldots n-2}$ i $P_4^{1\ldots n-2}$.

Iz te kolinearnosti na osnovu dokazanog stava 2.2.1.5, sleduje kolinearnost tačaka

$$P_1^{12},\ P_2^{12},\ P_3^{12},\ P_4^{12};\ P_1^3,\ P_2^3,\ P_3^3,\ P_4^3; \ldots ; P_1^{n-2},\ P_2^{n-2},\ P_3^{n-2},\ P_4^{n-2}.$$

Uzimanje tačaka P_1, P_2, P_3 i P_4 umesto tačaka P_r, P_s, P_p i P_q ne ograničava opštost dokaza.

U procesu dokaza nije praćeno projektovanje tačaka iz tačke $Z_{n\infty}$, odnosno nije praćeno projektovanje dobijenih projekcija u hiperravni $E^{n-1}_{1\ldots n-1}$, iz tačke $Z_{(n-1)\infty}$. Par tačaka $X_{1\infty}, X_{(n-1)\infty}$ je harmonijski konjugovan sa parom tačaka $Z'_{(n-1)\infty}$, $Z_{(n-1)\infty}$.

Stav 2.2.1.8 Ako je skup $\{P_1,\ldots,P_{k+1}\}$ simpleks k-dimenzionog euklidskog prostora E^k, koji je potprostor euklidskog prostora E^n, tada tačke

$$P_1^{1\ldots m},\ P_2^{1\ldots m},\ldots,P_{k+1}^{1\ldots m},$$

mogu biti kolinearne za $m<n-k+1$.

Dokaz. Ako je tačka $X_{n\infty}$ u potprostoru E^k, tada je

$$\dim\Big((E^k)^{X_{n\infty}}_{E^{n-1}_{1\ldots n-1}}\Big)=k-1.$$

Ako je potprostor $(E^k)^{X_{n\infty}}_{E^{n-1}_{1\ldots n-1}}$ sadrži tačku $X_{(n-1)\infty}$, tada je

$$\dim\Big(\big((E^k)^{X_{n\infty}}_{E^{n-1}_{1\ldots n-1}}\big)^{X_{(n-1)\infty}}_{E^{n-2}_{1\ldots n-2}}\Big)=k-2.$$

Ako se takvo rezonovanje nastavi, odnosno ako su sve tačke $X_{n\infty}$, $X_{(n-1)\infty},\ldots,X_{(n-k+2)\infty}$ u odgovarajućim potprostorima, tada su tačke

$$P_1^{1\ldots n-k+1},\ P_2^{1\ldots n-k+1},\ldots,P_{k+1}^{1\ldots n-k+1}\ \text{kolinearne.}$$

Stav 2.2.1.9 Neka je skup tačaka $\{P_1,\ldots,P_{k+1}\}$ simpleks k-dimenzionog euklidskog prostora E^k. Tačke P_i^{12}, $P_i^{3},\ldots,P_i^{n-k+1}$ $(i=1,\ldots,k+1)$ biće kolinearne tada kada je nesvojstveni potprostor E^{k-1}_{∞} prostora E^k generisan tačkama $X_{n\infty}$, $X_{(n-1)\infty}$, $\ldots, X_{(n-k+1)\infty} (k<n)$.

U cilju dokaza ovoga stava dokažimo sledeću lemu.

Lema 2.2.1.3 Pri projektovanju tačaka $X_{(r-1)\infty}, \ldots, X_{(r-k+1)\infty}$ $(r-k+1<r)$ iz centara $X_{r\infty}$, te tačke ostaju invarijantne.

Dokaz. Trebalo bi pokazati da pri projektovanju iz tačke $X_{r\infty}$ tačke $X_{(r-1)\infty}, \ldots, X_{(r-k+1)\infty}$ ostaju invarijantne. Zaista, prave $X_{n\infty}X_{(n-1)\infty}$, $X_{n\infty}X_{(n-2)\infty}, \ldots, X_{n\infty}X_{(n-k+1)\infty}$ prodiru hiperravan $E^{n-1}_{1\ldots n-1}$ u tačkama $X_{(n-1)\infty}, X_{(n-2)\infty}, \ldots, X_{(n-k+1)\infty}$ a kako tačka $X_{n\infty}$ nije u toj hiperravni to te prave ne pripadaju razmatranoj hiperravni. Prava koja ne pripada hiperravni sa njom može imati najviše jednu zajedničku tačku. Prema tome tačke $X_{(n-1)\infty}, \ldots, X_{(n-k+1)\infty}$ pri ovakvom projektovanju su invarijantne. Isti bi se rezultat, u smislu invarijantnosti, dobio ako bi se projektovale tačke $X_{(n-2)\infty}, \ldots, X_{(n-k+1)\infty}$ iz tačke $X_{(n-1)\infty}$, odnosno, tačke $X_{(r-1)\infty}, \ldots, X_{(r-k+1)\infty}$ iz tačke $X_{r\infty}$ $(r=n,\ldots,4)$.

Dokaz stava 2.2.1.9. Kako je svaka tačka-centar projektovanja $X_{n\infty}$, $X_{(n-1)\infty}, \ldots, X_{(n-k+1)\infty}$, respektivno, u potprostorima

$$E^k,\ (E^k)^{X_{n\infty}}_{E^{n-1}_{1\ldots n-1}},\ldots,(\ldots((E^k)^{X_{n\infty}}_{E^{n-1}_{1\ldots n-1}})\ldots)^{X_{(n-k+1)\infty}}_{E^{n-k}_{1\ldots n-k}},$$

to dimenzije tih potprostora obrazuju niz $k, k-1, \ldots, 2, 1$ pa su prema tome tačke $P_i^{1\ldots n-k+1}$ $(i=1,\ldots,k+1)$ kolinearne a prema ranije dokazanom stavu 2.2.1.8, odnosno stavu 2.2.1.5, sledi i kolinearnost tačaka

$$P_i^{12},\ P_i^3,\dots,P_i^{n-k+1}\ (i=1,\dots,k+1).$$

Stav 2.2.1.10 Pretpostavimo da tačke P_i^{12}, $P_i^3,\dots,P_i^n$ nisu na istom nosaču paralelnom x_1 osi. Iz kolinearnosti tačaka P_i^{12}, $P_i^3,\dots,P_i^n$, sleduje komplanarnost tačaka

$$P_i^{123},\ P_i^j=(P_i^j)^{123}\ (j=4,\dots,n).$$

Dokaz. Uz dato ograničenje u stavu, sleduje da se seku ravni $X_{300}P_i^{12}$ i $Z_{300}P_i^3$. Prava preseka tih ravni je nosač tačaka P_i^{123}. Tačke P_i^{123} i tačka X_{100} odredjuju ravan. Sve ostale ravni

$$X_{300}P_i^4,\ X_{300}P_i^5,\dots,X_{300}P_i^n,$$

seku ravan odredjenu tačkom X_{100} i tačkama P_i^{123} po pravama, koje su nosači tačaka

$$(P_i^4)^{123},\ (P_i^5)^{123},\dots,(P_i^n)^{123}.$$

Ograničenje u stavu nije neophodno, jer se i u tom slučaju razmatrane tačke javljaju kao komplanarne, ali je ravan-nosač tih tačaka projektujuća ravan paralelna ravni x_1x_3.

Razmatranja se mogu nastaviti sa tačkama

$$(P_i^5)^{1234},\dots,(P_i^n)^{1234},$$

odnosno sa tačkama

$$(P_i^k)^{123\dots k-1},\dots,(P_i^n)^{123}\ (k=6,\dots,n;\ i=1,\dots,k+1).$$

2.2.2 Dezargova teorema

Naš sledeći cilj je da dokažemo Dezargovu teoremu.

Dezargova teorema vredi u pojedinim ravnima, na osnovu koje se po nekada i vrši klasifikacija projektivnih ravni na Dezargove i ne Dezargove ravni. Poznata su uopštenja Dezargove teoreme kao i neki od dokaza te uopštene Dezargove teoreme [23], [26], [27].

Neka su poznati simpleksi

$$P=\{P_1,\dots,P_{k+1}\} \text{ i } Q=\{Q_1,\dots,Q_{k+1}\},$$

respektivno, potprostora E_P^k i E_Q^k $(k<n)$. Neka su pritom kolinearne tačke S, P_j i Q_j $(j=1,\dots,k+1)$, tada kažemo da su simpleksi P i Q perspektivni iz tačke S i to zapisujemo:

$$P \overset{S}{\overline{\wedge}} Q.$$

Dezargova teorema glasi:

Stav 2.2.2.1 Ako su simpleksi P i Q perspektivni iz tačke, tada su ti simpleksi perspektivni i iz $(k-1)$-dimenzionog potprostora.

Obrnuta Dezargova teorema tvrdi da perspektivnost simpleksa iz potprostora dimenzije $k-1$, povlači perspektivnost tih istih simpleksa i iz tačke.

Mi ćemo dokazati Dezargovu teoremu, tj. da perspektivnost dva simpleksa iz tačke povlači njihovu perspektivnost iz potprostora odredjene dimenzije.

Neka su P i Q simpleksi potprostora E_P^k i E_Q^k. Neka je, dalje,

$$P_1P_2 \times Q_1Q_2 = R_{12},$$

$$P_1P_3 \times Q_1Q_3 = R_{13},$$

$$\dots\dots\dots\dots$$

$$P_1P_{k+1} \times Q_1Q_{k+1} = R_{1,k+1}.$$

Lema 2.2.2.1 Tačke $R_{ij}=R_{i,j}$ $(i,j=2,\dots,k+1)$ zavisne su od tačaka R_{1j} $(j=2,\dots,k+1)$.

Dokaz. Trebalo bi pokazati da se svaka preostala tačka R_{ij} nalazi na nekoj od pravih $R_{1r}R_{1s}$ $(r,s=2,\dots,k+1)$. Na taj način pokazaćemo da od ukupno $\binom{k+1}{2}$ tačaka R_{ij}, $k+1$ je najviše nezavisnih. To će i značiti da potprostor iz koga su perspektivni simpleksi P i Q ne može imati veću dimenziju od k.

Iz relacija

$$P_1^{12}P_2^{12}\times Q_1^{12}Q_2^{12}=R_{12}^{12},$$
$$P_2^{12}P_3^{12}\times Q_2^{12}Q_3^{12}=R_{23}^{12},$$
$$P_1^{12}P_3^{12}\times Q_1^{12}Q_3^{12}=R_{13}^{12},$$

sledi:

$$P_1^{12}P_2^{12}P_3^{12} \overset{S^{12}}{\overline{\overline{\wedge}}} Q_1^{12}Q_2^{12}Q_3^{12} \Rightarrow k(R_{12}^{12},R_{23}^{12},R_{13}^{12}) \text{ (slika 22).}$$

Za tačke R_{ij} moglo bi se analogno pokazati da iz

$$P_1^{12}P_i^{12}P_j^{12} \overset{S^{12}}{\overline{\overline{\wedge}}} Q_1^{12}Q_i^{12}Q_j^{12} \Rightarrow k(R_{1i}^{12},R_{ij}^{12},R_{1j}^{12}).$$

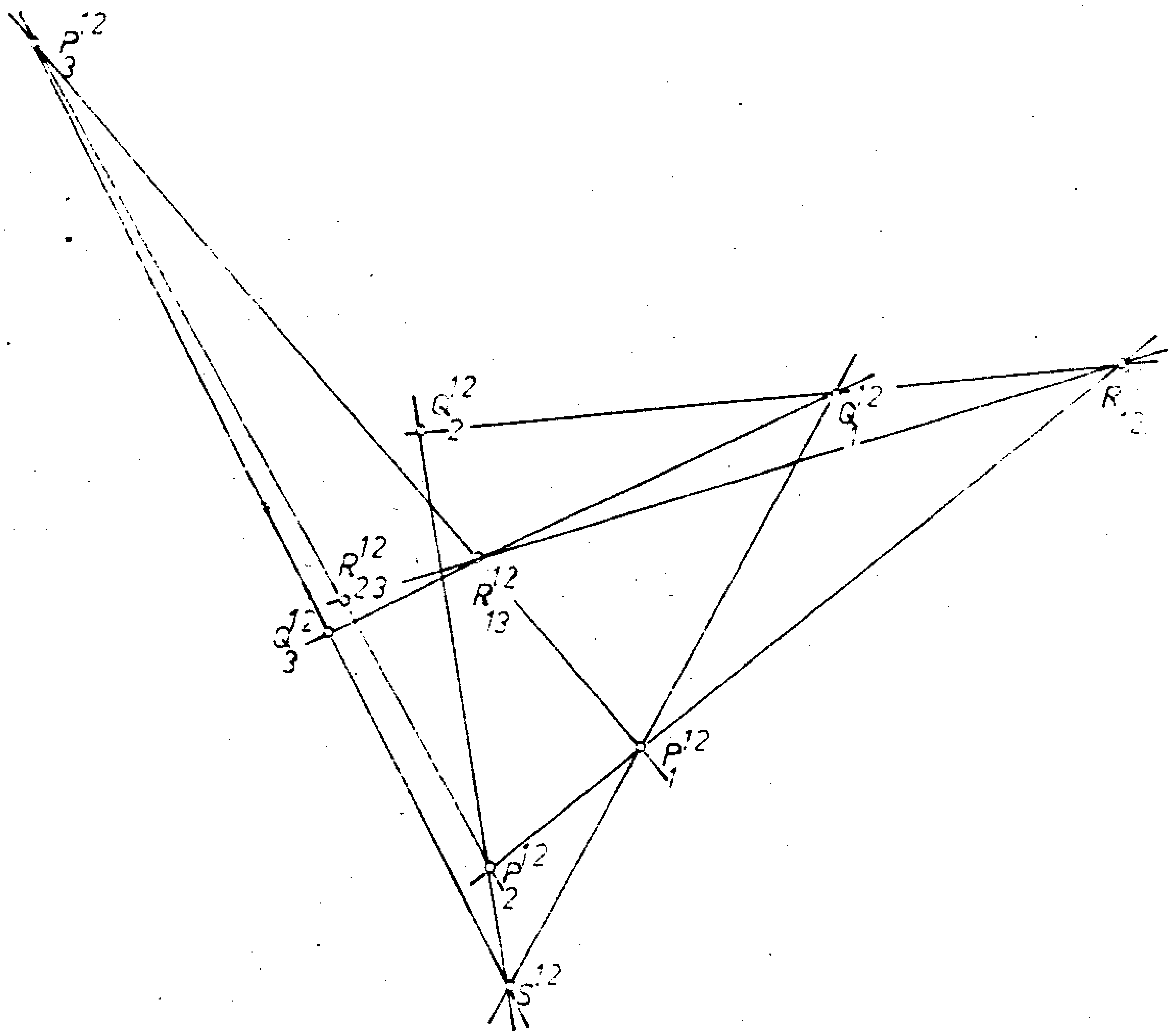
Prema tome sve ostale tačke $\binom{k+1}{2}-(k+1)=\frac{(k+1)(k-2)}{2}$ zavise od tačaka R_{1r} $(r=2,\dots,k+1)$.

Lema 2.2.2.2 Skup tačaka $\left\{R_{1j}/j=2,\dots,k+1\right\}$ predstavlja simpleks nekog k-dimenzionog potprostora.

Dokaz. Dokaz izvodimo metodom matematičke indukcije. Dokazaćemo da je skup tačaka $\left\{R_{1j}/j=2,\dots,k+1\right\}$ nezavisan.

Tačka R_{14} je nezavisna od tačaka R_{12} i R_{13}, jer ako bi bila zavisna od njih onda bi to značilo da je $k(R_{12},R_{13},R_{14})$. Ta kolinearnost povlačila bi komplanarnost četiri tačke P_1, P_2, P_3 i P_4, odnosno Q_1, Q_2, Q_3 i Q_4 što je u kontradikciji

da su skupovi $\{P_1, P_2, P_3, P_4\}$ i $\{Q_1, Q_2, Q_3, Q_4\}$ simpleksi.
Ako bi pretpostavili da je R_{15} zavisna od tačaka R_{12}, R_{13} i R_{14}, to bi značilo da su tačke R_{12}, R_{13}, R_{14} i R_{15} komplanarne.



slika 22

Iz te komplanarnosti sledovalo bi da su prave

$$P_1R_{12},\ P_1R_{13},\ P_1R_{14} \text{ i } P_1R_{15}$$

u trodimenzionom potprostoru koji je odredjen tačkama R_{12}, R_{13}, R_{14} i P_1. Prema tome u tom istom trodimenzionom potprostoru su i tačke P_1, P_2, P_3, P_4 i P_5 što je u suprotnosti sa pretpostavkom da je skup tačaka $\{P_1, \ldots, P_5\}$ simpleks 4-dimenzionog potprostora.

Pretpostavimo sada da je nezavisan skup tačaka

$\{R_{12}, R_{13}, \ldots, R_{1s_1}\}$ $(s_1 < k+1)$,

pa dokažimo da je nezavisan i skup tačaka

$\{R_{12}, \ldots, R_{1,s_1+1}\}$.

U smislu tog dokaza pretpostavimo suprotno, tj. da je nezavisan skup tačaka $\{R_{12}, \ldots, R_{1s_1}\}$, ali da je zavisan skup tačaka $\{R_{12}, \ldots, R_{1,s_1+1}\}$. To bi značilo da su prave

P_1R_{12}, $P_1R_{13}, \ldots, P_1R_{1s_1}$,

u nekom (s_1-1)-dimenzionom potprostoru odredjenom tačkama R_{12}, $R_{13}, \ldots, R_{1s_1}$ i P_1. Kako je $P_i I P_1 R_{1i}$, to su i tačke $P_1, \ldots, P_{s_1+1}$ u tom istom (s_1-1)-dimenzionom potprostoru, što je u kontradikciji da je skup tačaka $\{P_1, \ldots, P_{1,s_1+1}\}$ simpleks s_1-dimenzionog prostora. Na osnovu toga dokazano je da tačke $R_{12}, \ldots, R_{1s_1}$, R_{1,s_1+1}, odnosno tačke $R_{12}, \ldots, R_{1,k+1}$ predstavljaju simpleks prostora iz koga su simpleksi P i Q perspektivni.

U procesu dokaza vezali smo se za tačke $P_1, \ldots, P_{1+s_1}$, bez ograničenja opštosti dokaza.

3 n-DIMENZIONA PROJEKTIVNA GEOMETRIJA

U skupu tačaka $P(P^{12},P^{3},\ldots,P^{n})$ ravni E^2_{12} definisaćemo mrežu i pokazati da je takva mreža izomorfna mreži definisanoj u n-dimenzionom euklidskom prostoru E^n.

Poznato je da se nad skupom potprostora vektorkog prostora može definisati geometrija. Geometrija se može definisati i sistemom aksioma a osnovni problem koji se pri tome javlja je kako odabrati taj sistem aksioma pa da geometrija nad vektorskim prostorom i geometrija definisana sistemom aksioma budu projektivno ekvivalentne. Jedno od rešenja toga problema dato je u navedenoj literaturi [13] , pri čemu je izbor aksioma učinjen sa stanovišta modularnih mreža. U delu 3.2 dajemo jedan konkretan model modularne mreže, gde se za tačke-atome mreže uzimaju skupovi od po n-1 kolinearne tačke realne projektivne ravni P^2, pri čemu je prava-nosač tih tačaka elemenat jednog fiksnog pramena pravih.

3.1 Mreže E^2_{12} i E^n

Skup svih tačaka $P(P^{12},P^{3},\ldots,P^{n})$ ravni E^2_{12} označićemo takodje sa E^2_{12}. Smatraćemo da skup tačaka E^2_{12} zadovoljava sva svojstva definisana i razmatrana u drugom delu. Na skupu E^2_{12} mogu se definisati dve operacije na sledeći način. Tačkama P_1 i P_2 skupa E^2_{12} pridružujemo tačku P_i, tako da je:

$$P_1\cdot P_2=P_1P_2=P_i(P_i^{12},P_i^{3},\ldots,P_i^{n}),$$

pri čemu je :

$P_i^1=\inf(P_1^1,P_2^1)$,

$P_i^2=\inf(P_1^2,P_2^2)$,

$P_i^3=\inf(P_1^3,P_2^3)$,

....

$P_i^n=\inf(P_1^n,P_2^n)$,

$P_i^{12}=P_i^{12}(P_i^1,P_i^2)$.

Pod infimumom tačaka podrazumeva se manje odstojanje od tačke P_k^{12} do P_k^i ako je smer od P_k^{12} ka P_k^i isti kao smer ose x_1, odnosno veće odstojanje od tačke P_k^{12} do P_k^i ako je smer od P_k^{12} ka P_k^i suprotan od smera x_1 ose, gde je k=1,2 za prethodni slučaj.

Na skupu E_{12}^2 može se definisati i sledeća binarna operacija. Tačkama P_1 i P_2 može se pridružiti tačka P_s na sledeći način:

$P_1+P_2=P_s(P_s^{12},P_s^3,\ldots,P_s^n)$,

pri čemu je :

$P_s^1=\sup(P_1^1,P_2^1)$,

$P_s^2=\sup(P_1^2,P_2^2)$,

$P_s^3=\sup(P_1^3,P_2^3)$,

....

$P_s^n=\sup(P_1^n,P_2^n)$,

$P_s^{12}=P_s^{12}(P_s^1,P_s^2)$.

Na analogan način je definisan supremum tačaka ravni E_{12}^2, tj. $\sup(P_1^i,P_2^i)$ je ona od tačaka P_1^i, P_2^i čije je odstojanje od tačke P_1^{12}, odnosno P_2^{12} veće ako je smer od P_1^{12} ka P_1^i, odnosno od P_2^{12} ka P_2^i, isti kao smer ose x_1 i suprotno za suprotan smer.

Tačke P_i^{12} i P_s^{12} odredjene su, kao i sve ostale tačke sa gornjim indeksom 12, u odnosu na ose x_1 i x_2 (inf,sup tih odstojanja).

Stav 3.1.1 Skup E_{12}^2 u odnosu na definisane operacije $\cdot$ i $+$ predstavlja mrežu.

Dokaz. Trebalo bi pokazati da su zadovoljeno aksiome mreže, tj. da vredi:

1. $P+P=P$ i $PP=P$,
2. $P_1+P_2=P_2+P_1$ i $P_1P_2=P_2P_1$,
3. $(P_1+P_2)+P_3=P_1+(P_2+P_3)$ i $(P_1P_2)P_3=P_1(P_2P_3)$,
4. $P_1(P_1+P_2)=P_1$ i $P_1+P_1P_2=P_1$.

Proverićemo posebno sva navedena svojstva.

1. Operacija + definisan je tako da je $P+P=P_s(P_s^{12},P_s^3,\ldots$ $\ldots,P_s^n)$. Kako je

$$P_s^1=\sup(P^1,P^1)=P^1,$$
$$P_s^2=\sup(P^2,P^2)=P^2,$$
$$P_s^3=\sup(P^3,P^3)=P^3,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$P_s^n=\sup(P^n,P^n)=P^n,$$

to je

$$P_s(P_s^{12},P_s^3,\ldots,P_s^n)=P_s(P^{12},P^3,\ldots,P^n)=P.$$

Analogno se dokazuje dualna tvrdnja, tj da je $PP=P$.

2. Trebalo bi pokazati da je $P_1+P_2=P_2+P_1$. Neka je $P_1+P_2=P_s(P_s^{12},P_s^3,\ldots,P_s^n)$. Kako je po definiciji

$$P_s^i = \sup(P_1^i, P_2^i) = \sup(P_2^i, P_1^i) \quad (i=1,\dots,n),$$

to je

$$P_1+P_2=P_s(P_s^{12},P_s^3,\dots,P_s^n)=P_s((\sup(P_1^1,P_2^1),\sup(P_1^2,P_2^2)),$$

$\sup(P_1^3,P_2^3),\dots,\sup(P_1^n,P_2^n))=P_s((\sup(P_2^1,P_1^1),\sup(P_2^2,P_1^2)),$

$\sup(P_2^3,P_1^3),\dots,\sup(P_2^n,P_1^n))=P_2+P_1$. P_s^i je P_1^i, odnosno P_2^i u zavisnosti da li je $P_1^iP_1^{12}>P_2^iP_2^{12}$ i obratno za smer od P_k^{12} ka P_k^i koji je isti kao smer ose x_1, odnosno za $P_1^iP_1^{12}<P_2^iP_2^{12}$ i obratno ako je smer od P_k^{12} ka P_k^i suprotan od smera ose x_1.

Na analogan način se dokazuje dualni deo tvrdnje.

3. Trebalo bi pokazati da je $(P_1+P_2)+P_3=P_1+(P_2+P_3)$. Neka je u tom smislu

$$(P_1+P_2)+P_3=P_{1+2}+P_3=P_{(1+2)+3} \text{ i } P_1+(P_2+P_3)=P_1+P_{2+3}=P_{1+(2+3)}$$

Kako je

$$P^i_{(1+2)+3}=\sup(P^i_{1+2},P_3^i)=\sup(\sup(P_1^i,P_2^i),P_3^i)=\sup(P_1^i,\sup(P_2^i,$$

$P_3^i))=\sup(P_1^i,P^i_{2+3})=P^i_{1+(2+3)}$ $(i=1,\dots,n)$, to je jedan deo svojstva 3 dokazan na analogan način se dokazuje dualni deo svojstva 3.

U dokazu svojstva 3 korišćen je sledeći stav, koji se može naći i u navedenoj literaturi [21] .

Stav 3.1.2 Ako je $\{A_k\}$ neki skup podskupova delimično uredjenog skupa R, zatim $A=\bigcup A_k$ i ako postoji $\sup A$ i $\sup A_k$ ($\inf A$, $\inf A_k$) za svako k, tada je

$$\sup A=\sup\{\sup A_k\}, \quad (\inf A=\inf\{\inf A_k\}).$$

4. Trebalo bi pokazati da vredi $P_1(P_1+P_2)=P_1$. Neka je

$$P_1(P_1+P_2)=P_1P_{1+2}=P_{1(1+2)}.$$

Pošto je

$$P^i_{1(1+2)}=\inf(P^i_1,P^i_{1+2})=\inf(P^i_1,\sup(P^i_1,P^i_2))=P^i_1$$

$(i=1,\dots,n)$, to je prvi deo svojstva 4 dokazan. Drugi deo se dokazuje na analogan način.

Na ovaj način je dokazano da skup E^2_{12} sa uvedenim operacijama + i • predstavlja mrežu.

U mreži E^2_{12} može se posmatrati i jedna podmreža. Tu podmrežu čini skup svih tačaka mreže E^2_{12} kod kojih je $P^{12}_1=P^{12}_2=\dots$. Zapravo podmreža u mreži E^2_{12} ima više, jer i skup tačaka sa svojstvom $P^i_1=P^i_2=\dots$ za neko $i=1,\dots,n$ je takodje mreža.

Euklidski n-dimenzioni prostor E^n može se posmatrati kao skup nizova dužine n, pri čemu su elementi nizova realni brojevi. Svaki od tih nizova $(x_1,\dots,x_n)$ predstavlja tačku prostora E^n. Može se pokazati da se u E^n može definisati mreža pri čemu se relacija parcijalnog uredjenja može definisati na sledeći način. Za tačke $M_1(x^1_1,\dots,x^1_n)$ i $M_2(x^2_1,\dots,x^2_n)$ kažemo da su uporedive i pišemo $M_1\leqslant M_2$ tačno tada kada je

$$x^1_1\leqslant x^2_1,\ x^1_2\leqslant x^2_2,\dots,x^1_n\leqslant x^2_n.$$

Relacija parcijalnog uredjenja kod tačaka prostora E^n i koordinata tih tačaka nije ista iako je ovde isto označena.

Supremum i infimum tačaka M_1 i M_2 definiše se preko supremuma i infimuma odgovarajućih koordinata.

Ako je f funkcija koja tačku M skupa E^n preslikava na tačku P mreže E^2_{12} na sledeći način:

$$f(x_i)=P^i\ (i=3,\dots,n),\ f(x_1)=x_1 \text{ i } f(x_2)=x_2,$$

pri čemu je $P^iP^{12}=x_i$. Smer od P^{12} ka P^i je isti kao smer x_i

ose za $x_i \geq 0$ a smer od P^{12} ka P^i je suprotan od smera x_i ose za $x_i < 0$. Tada pišemo $f(M)=P$.

Stav 3.1.3 Preslikavanje $f: E^n \rightarrow E^2_{12}$, prethodno definisano, je obostrano jednoznačno preslikavanje.

Dokaz. Neka su M_1 i M_2 dve različite tačke prostora E^n. Neka je $P_1=f(M_1)$ i $P_2=f(M_2)$. Ako bi bilo $P_1=P_2$, tada bi značilo da je $P_1^i=P_2^i$ za svako $i=12,3,\ldots,n$ ali na osnovu definisanog preslikavanja f sledi jednakost koordinata x_i^1 i x_i^2, što povlači jednakost tačaka M_1 i M_2 za koje je pretpostavljeno da su različite. Prema tome iz $M_1 \neq M_2$ sledi $P_1 \neq P_2$. Kako je svaka tačka mreže E^2_{12} slika neke tačke-niza, to je preslikavanje f bijekcija skupova E^n i E^2_{12}.

Ako je za tačke M_1 i M_2 supremum tačaka M_s a infimum tačaka M_i, tada je jasno da će biti za $P_1=f(M_1)$ i $P_2=f(M_2)$

$$P_1+P_2=P_s=f(M_s) \text{ i } P_1P_2=P_i=f(M_i).$$

Funkcija f sa navedenim svojstvima predstavlja izomorfizam mreža E^n i E^2_{12}. Na osnovu toga dokazali smo stav:

Stav 3.1.4 Mreže E^n i E^2_{12} predstavljaju izomorfne mreže.

Na mreži E^2_{12} može se definisati sledeća relacija ekvivalencije.

Definicija 3.1.1 Relacija ekvivalencije $\equiv$, definisana na mreži E^2_{12}, naziva se relacija kongruencije ako iz $P_1 \equiv P_3$ i $P_2 \equiv P_4$ sledi

$$P_1+P_2 \equiv P_3+P_4 \text{ i } P_1P_2 \equiv P_3P_4.$$

Naša naredna razmatranja vezana su takodje za mreže, ili preciznije rečeno da se posredstvom modularnih mreža definiše jedan model n-dimenzione projektivne geometrije.

3.2 Model n-dimenzione projektivne geometrije

Neka je P^2 euklidska ravan dopunjena beskonačno dalekom pravom, tj. neka je P^2 realna projektivna ravan. Neka je P_∞ tačka ravni P^2. Sa P^n_M označićemo skup elemenata $P(P^{12}, P^3, \ldots, P^n)$, gde su $P^{12}, P^3, \ldots, P^n$ kolinearne tačke ravni P^2 sa nosačem koji pripada pramenu pravih sa centrom u tački P_∞. Za element P kažemo da je tačka skupa P^n_M. Svaka druga tačka $Q(Q^{12}, Q^3, \ldots, Q^n)$ ima nosač tačaka $Q^{12}, Q^3, \ldots, Q^n$ koji takodje pripada pramenu čiji je centar tačka P_∞.

Definicija 3.2.1 Skup svih mogućih tačaka $R(R^{12}, R^3, \ldots, R^n)$ takvih da je

$$R^{12} I P^{12} Q^{12},\ R^3 I P^3 Q^3, \ldots, R^n I P^n Q^n,$$

predstavlja pravu PQ skupa P^n_M.

Definicija 3.2.2 Za trojku tačaka P,Q i R kažemo da je kolinearna tačno tada kada je kolinearno n-1 trojki tačaka P^i, Q^i, R^i $(i=12,3,\ldots,n)$.

Po nekada ćemo za kolinearne tačke P, Q, R skupa P^n_M ili kolinearne tačke ravni P^2, P^i, Q^i, R^i, pisati: $k(P,Q,R)$, odnosno $k(P^i, Q^i, R^i)$.

Definicija 3.2.3 Ako su P, Q, R tri nekolinearne tačke skupa P^n_M, tada kažemo da te tačke odredjuju trotemenik PQR skupa P^n_M.

Prave PQ, PR i QR su strane tog trotemenika a tačka P, Q i R su temena tog trotemenika.

Za teme P kažemo da mu je naspramna ili suprotna strana QR i analogno za temena Q i R su naspramne ili suprotne strane PR i PQ. Isto tako se kaže da je za stranu QR naspramno ili suprotno teme P i analogno za strane PQ i PR su naspramna ili suprotna temena R i Q.

Definicija 3.2.4 Prava odredjena temenom trotemenika i tačkom suprotne strane naziva se temena prava l i najčešće biće označavana sa t_l ili $(AB)_l$ a ako se zna da se jedino govori o temenoj pravi l, tada ćemo l izostavljati.

Definicija 3.2.5 Skup svih tačaka svih mogućih temenih pravih trotemenika PQR predstavlja ravan PQR.

Dokazaćemo nekoliko pomoćnih stavova potrebnih za dokaz nekih svojstava koje karakterišu skup P_M^n.

Lema 3.2.1 Kakve god bile dve različite tačke skupa P_M^n, postoji tačno jedna prava odredjena tim tačkama.

Dokaz. Ako su $P(P^{12},P^3,\ldots,P^n)$ i $Q(Q^{12},Q^3,\ldots,Q^n)$ različite tačke skupa P_M^n, tada svaki par tačaka P^i, Q^i $(i=12,3,\ldots$ $\ldots,n)$ ravni P^2 odredjuje tačno jednu pravu te ravni. Na osnovu toga sleduje da i razmatrane tačke P i Q skupa P_M^n odredjuju tačno jednu pravu skupa P_M^n.

Lema 3.2.2 Postoji ravan skupa P_M^n.

Dokaz. Trebalo bi dokazati da za dve tačke P i Q skupa P_M^n postoji treća tačka R, takva da tačke P, Q i R nisu kolinearne.

Ako je $R(R^{12},R^{3},\dots,R^{n})$ takva tačka skupa P_M^n da je

$R^{12}=P^{12}$, $R^{3}=P^{3},\dots,R^{i-1}=P^{i-1}$, $R^{i}\neq P^{i}$, $R^{i+1}=P^{i+1},\dots,$ $R^{n}=P^{n}$, gde je $P=P(P^{12},P^{3},\dots,P^{n})$, tada su P, Q i R tri različite tačke i pritom ne kolinearne.

Biće od značaja za dalji rad i sledeći pomoćni stav.

Lema 3.2.3 Ako su P_1, P_2, P_3 i P_4 četiri komplanarne tačke, pri čemu nisu sve kolinearne i ako se pri tome seku prave

P_2P_3 i P_1P_4, tada se seku i prave P_1P_2 i P_3P_4, odnosno P_1P_3 i P_2P_4.

Dokaz. Neka je

$P_1P_4 \times P_2P_3 = P_5$,

odnosno,

$P_1^{12}P_4^{12} \times P_2^{12}P_3^{12} = P_5^{12}$,

$P_1^{3}P_4^{3} \times P_2^{3}P_3^{3} = P_5^{3}$,

....

$P_1^{n}P_4^{n} \times P_2^{n}P_3^{n} = P_5^{n}$.

Da bi dokazali da se seku prave P_1P_3 sa P_2P_4 i P_1P_2 sa P_3P_4, posmatraćemo tačke

$P_1^{12}P_3^{12} \times P_2^{12}P_4^{12} = P_6^{12}$ i $P_1^{i}P_3^{i} \times P_2^{i}P_4^{i} = P_6^{i}$ $(i=3,\dots,n)$.

Tačke P_6^{12} i P_6^{i} postoje jer je P^2 projektivna ravan. Ako se prave $P_1^{12}P_1^{i}$ i $P_2^{12}P_2^{i}$ seku u tački P_∞, tada je dovoljno pokazati kolinearnost tačaka P_∞, P_6^{12} i P_6^{i}. Na slici 23 je tačka $P_k^{i}=P_k^{n}$. Kako su trotemenici $P_1^{12}P_3^{12}P_4^{12}$ i $P_1^{n}P_3^{n}P_4^{n}$ perspektivni iz tačke P_∞, to su oni perspektivni i iz prave

$$(P_1^{12}P_3^{12} \times P_1^n P_3^n)(P_1^{12}P_4^{12} \times P_1^n P_4^n) = p_{134}.$$

Imamo da su trotemenici $P_5^{12}P_3^{12}P_4^{12}$ i $P_5^n P_3^n P_4^n$ perspektivni iz tačke P_∞, pa kako je

$$P_1^{12}P_4^{12} = P_4^{12}P_5^{12},\ (P_4^{12}P_5^{12} \times P_4^n P_5^n)(P_3^{12}P_4^{12} \times P_3^n P_4^n) = p_{345} = p_{134},$$

to zaključujemo da su trotemenici

$$P_1^{12}P_3^{12}P_4^{12},\ P_1^n P_3^n P_4^n \text{ i } P_3^{12}P_4^{12}P_5^{12},\ P_3^n P_4^n P_5^n,$$

perspektivni iz iste tačke i iz iste prave. Takodje imamo da su trotemenici

$$P_2^{12}P_3^{12}P_4^{12} \text{ i } P_2^n P_3^n P_4^n,$$

perspektivni iz tačke P_∞ a otuda i iz prave $p_{234} = p_{134}$. Kako je

$$P_2^{12}P_4^{12} \times P_2^n P_4^n I p_{134},\ P_1^{12}P_3^{12} \times P_1^n P_3^n I p_{134},$$

to zaključujemo da su trotemenici

$$P_1^{12}P_4^{12}P_6^{12} \text{ i } P_1^n P_4^n P_6^n,$$

perspektivni iz prave p_{134}, a otuda sleduje i perspektivnost iz tačke. Kako je $P_1^{12}P_1^n \times P_4^{12}P_4^n = P_\infty$, to sledi kolinearnost tačaka P_6^{12}, P_6^n i P_∞, što je i trebalo dokazati.

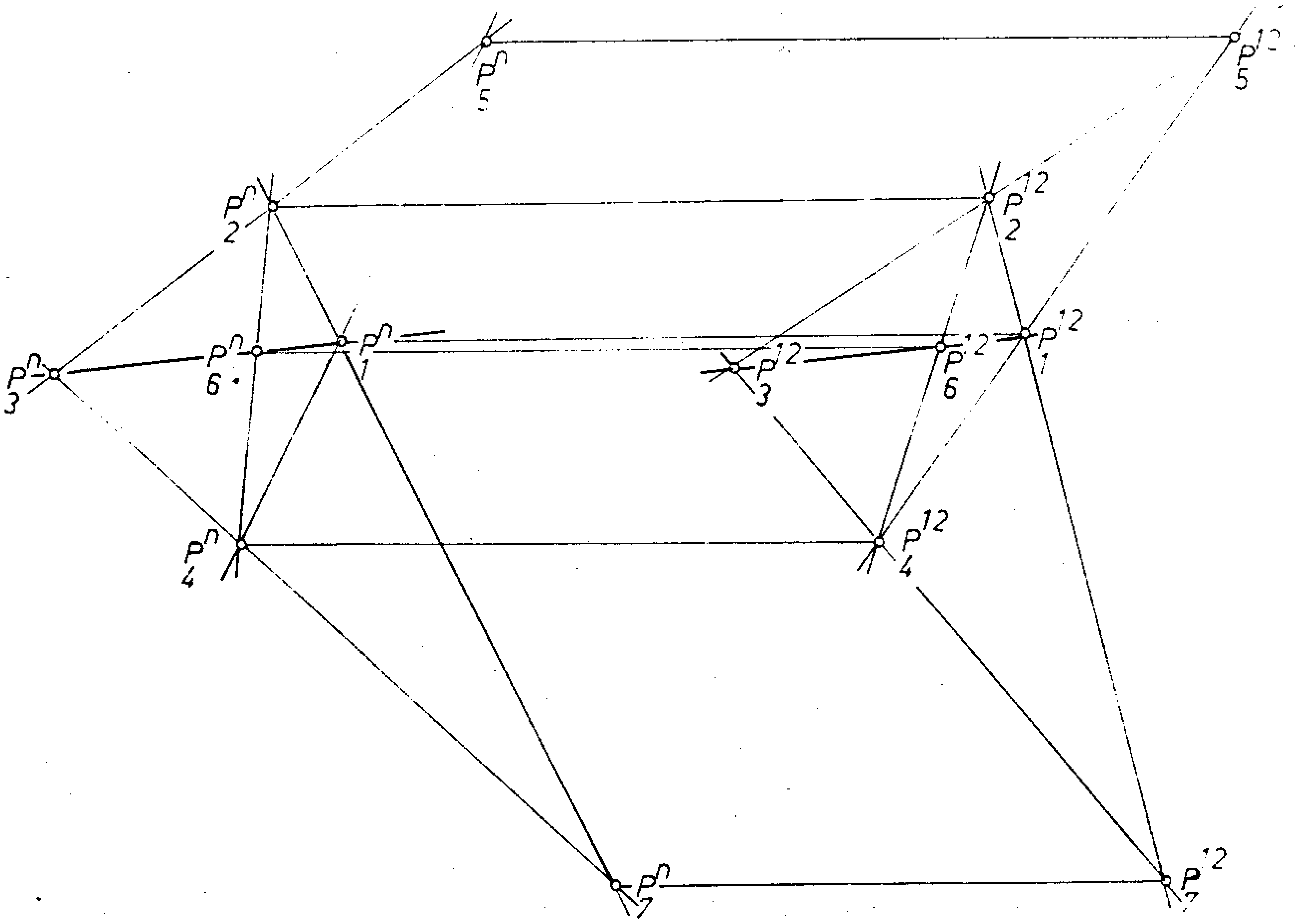
Jasno je da bi trebalo da se dokaže kolinearnost svih n-1 tačaka $P_6^{12}, P_6^3, \ldots, P_6^n$, medjutim i na osnovu ovog dokaza može se izvesti zaključak da tvrdnja vredi.

Da bi se dokazalo da se prave P_1P_2 i P_3P_4 seku u tački trebalo bi dokazati da su kolinearne tačke

$$P_\infty,\ P_7^{12} = P_1^{12}P_2^{12} \times P_3^{12}P_4^{12},\ P_7^3 = P_1^3 P_2^3 \times P_3^3 P_4^3, \ldots,\ P_7^n = P_1^n P_2^n \times P_3^n P_4^n.$$

Već je pokazano da su trotemenici $P_1^{12}P_4^{12}P_7^{12}$ i $P_1^n P_4^n P_7^n$ perspektivni iz prave p_{134}, što povlači perspektivnost i iz tačke.

Kako je $P_1^{12}P_1^n \times P_4^{12}P_4^n = P_\infty$, to su tačke P_∞, P_7^{12} i P_7^n kolinearne. Time je lema dokazana.



Slika 23

Definicija 3.2.6 Potpuni četvorotemenik je skup od četiri komplanarne tačke P_1, P_2, P_3 i P_4 od kojih nikoje tri nisu kolinearne i šest pravih odredjenih tim tačkama. Tačke nazivamo temenima a prave stranama potpunog četvorotemenika. Strane koje ne pripadaju istom temenu jesu naspramne ili suprotne. Potpuni četvorotemenik $P_1P_2P_3P_4$ ima tri para naspramnih strana. Za tačke

$$P_1P_2 \times P_3P_4 = P_{12,34};\ P_1P_3 \times P_2P_4 = P_{13,24};\ P_1P_4 \times P_2P_3 = P_{14,23},$$

kažemo da su dijagonalne tačke potpunog četvorotemenika.

Definicija 3.2.7 Za potpuni četvorotemenik $P_1P_2P_3P_4$ kažemo da je F četvorotemenik ako dijagonalne tačke tog četvorotemenika nisu kolinearne.

Ako su dijagonalne tačke nekog četvorotemenika kolinearne kažemo za taj četvorotemenik da je AF četvorotemenik.

Za neku ravan kažemo da je F ravan ako su svi četvorotemenici te ravni F četvorotemenici.

Za ravan kažemo da je AF ravan ako su svi četvorotemenici te ravni AF četvorotemenici.

Ako ravan sadrži F i AF četvorotemenike tada za tu ravan kažemo da je FAF ravan.

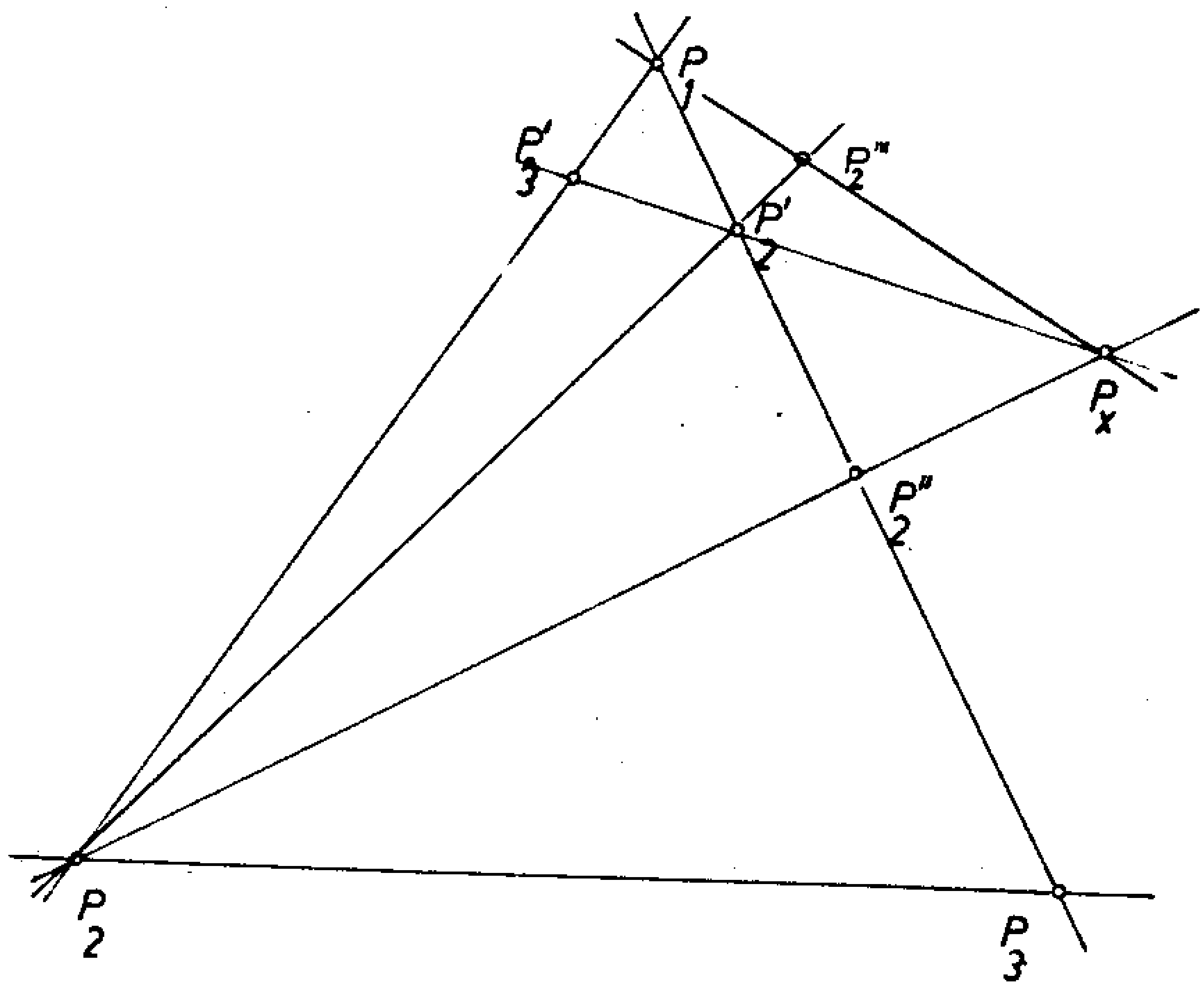
Stav 3.2.1 Ako je P^2 jedna F ravan tada je svaka ravan skupa P^n_M F ravan.

Dokaz. Kako je P^2 po pretpostavci stava jedna F ravan, to znači da su svi četvorotemenici te ravni F četvorotemenici. Neka je $P_1P_2P_3P_4$ bilo koji četvorotemenik skupa P^n_M. Ako bi pretpostavili da je to AF četvorotemenik to bi povlačilo kolinearnost tačaka $P_{12,34}$, $P_{13,24}$, $P_{14,23}$. Kolinearnost tih tačaka povlači kolinearnost tačaka $P^i_{12,34}$, $P^i_{13,24}$, $P^i_{14,23}$ za svako $i=12,3,\ldots,n$, što je u suprotnosti sa činjenicom da je ravan $P_1P_2P_3$ jedna F ravan. Prema tome ne mogu biti kolinearne dijagonalne tačke četvorotemenika $P_1P_2P_3P_4$. Kako je $P_1P_2P_3$ ma koja ravan skupa P^n_M i $P_1P_2P_3P_4$ ma koji četvorotemenik, to je stav dokazan.

Naš sledeći cilj je da dokažemo egzistenciju tačke koja ne pripada uočenoj ravni. U tom smislu dokazaćemo nekoliko pomoćnih stavova.

Lema 3.2.4 Ako neka prava seče dve strane trotemenika $P_1P_2P_3$, tada svaka tačka te prave pripada ravni $P_1P_2P_3$.

Dokaz. Neka je $P_1P_2P_3$ trotemenik u ravni $P_1P_2P_3$ skupa P^n_M. Neka prava a seče strane P_1P_2, odnosno P_1P_3 respektivno u tačkama P_3' i P_2'. Neka je P_x proizvoljna tačka prave $P_2'P_3'$. Posmatrajmo tačke P_x, P_2', P_1 i P_2. Imamo da se seku prave P_xP_2' i P_1P_2, odnosno da je $P_3'=P_xP_2'\times P_1P_2$ (slika 24).



Slika 24

Prema već dokazanoj lemi imamo da se seku još dva para pravih, tj. da je

$$P_xP_2\times P_1P_2'=P_2'' \text{ i } P_1P_x\times P_2P_2'=P_2'''.$$

Prema tome tačka P_x pripada temenoj pravoj $(P_2P_2'')_1$, odnosno temenoj pravoj $(P_1P_2''')_1$. Na osnovu definicije 3.2.5 tačka P_x pripada ravni $P_1P_2P_3$ čime je lema dokazana.

Jednostavno se može dokazati sledeća lema.

Lema 3.2.5 Ako bilo koje dve tačke neke prave pripadaju ravni, tada svaka tačka te prave pripada toj istoj ravni.

Dokaz. Najpre ćemo dokazati da ako dve tačke P_4 i P_5 neke prave pripadaju ravni $P_1P_2P_3$, tada ta prava seče strane trotemenika $P_1P_2P_3$. Ako su tačke P_4 i P_5 u ravni $P_1P_2P_3$ tada ta prava seče strane trotemenika $P_1P_2P_3$, zaista u tom slučaju tačke P_4 i P_5 moraju pripadati nekim temenim pravama trotemenika $P_1P_2P_3$. Bez smanjenja opštosti neka su te temene prave P_1P_4 i P_2P_5. Neka je, dalje,

$$P_1'=P_1P_4xP_2P_3 \text{ i } P_2'=P_2P_5xP_1P_3.$$

Kako se prave P_2P_3 i P_1P_4 seku u tački P_1' to na osnovu leme 3.2.3 seku se i prave P_2P_4 i P_1P_3 (slika 25). Neka je $P_1P_3xP_2P_4=P_6$. Opet na osnovu leme 3.2.3 sledi da se seku i prave $P_2'P_3=P_1P_3$ i P_4P_5. Prema tome $P_7=P_1P_3xP_4P_5$ je tačka preseka pravih P_4P_5 i jedne strane trotemenika $P_1P_2P_3$.

Na analogan način se dokazuje egzistencija tačke $P_8=$ $=P_2P_3xP_4P_5$.

Na osnovu leme 3.2.4 može se zaključiti da bilo koja tačka razmatrane prave P_4P_5 pripada razmatranoj ravni $P_1P_2P_3$.

Stav 3.2.2 Postoji tačka preseka bilo koje dve prave neke ravni skupa P_M^n.

Dokaz. Neka su poznate prave ravni $P_1P_2P_3$. Te prave moraju seći strane trotemenika $P_1P_2P_3$ na osnovu prvog dela dokaza leme 3.2.5. Neka stranu P_1P_2 seku u tačkama P_3' i P_3'', stranu P_2P_3 u tačkama P_1' i P_1'' i stranu P_1P_3 u tačkama P_2' i P_2'' (slika 26). Prave $P_1P_2=P_3'P_3''$ i $P_2P_3=P_1'P_1''$ seku se u tački P_2. Na osnovu dokazane leme 3.2.3 seku se i prave $P_1'P_3'$ i $P_2''P_3''$, što je i trebalo dokazati.

Stav 3.2.3 Ako je $P_1P_2P_3$ ravan skupa P_M^n, tada postoji tačka P_4 skupa P_M^n koja nije u ravni $P_1P_2P_3$.

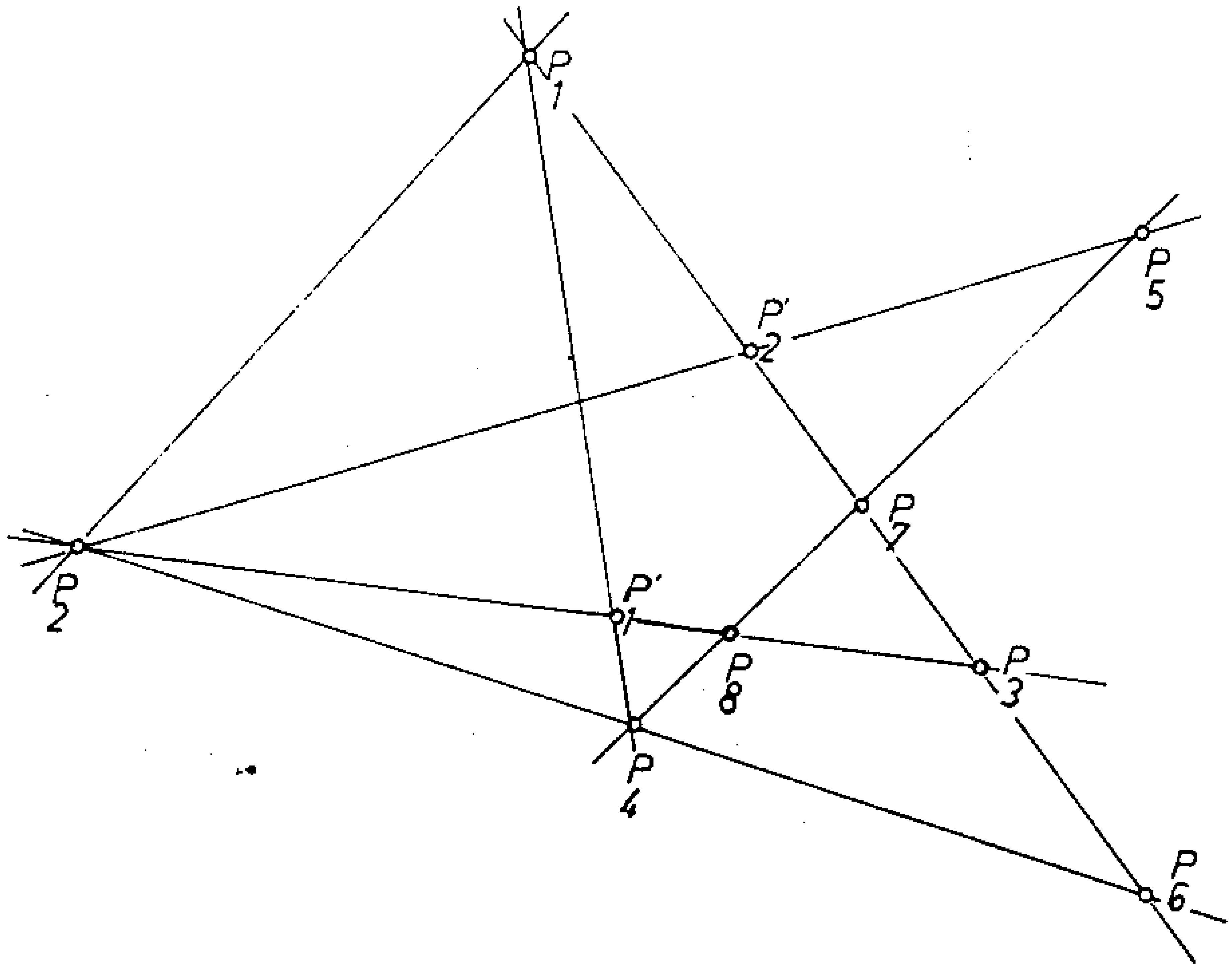
Dokaz. Ako je neka tačka P_x u ravni $P_1P_2P_6$ tada svaka prava te ravni koja sadrži tačku P_x seče strane trotemenika $P_1P_2P_6$. Vredi još i jača tvrdnja, tj. da svaka prava je prava ravni $P_1P_2P_6$ tačno tada kada seče strane tog trotemenika. Neka je trotemenik

$$P_1(P_1^{12},P_1^3,\ldots,P_1^n)P_2(P_2^{12},P_2^3,\ldots,P_2^n)P_3(P_3^{12},P_3^3,\ldots,P_3^n),$$

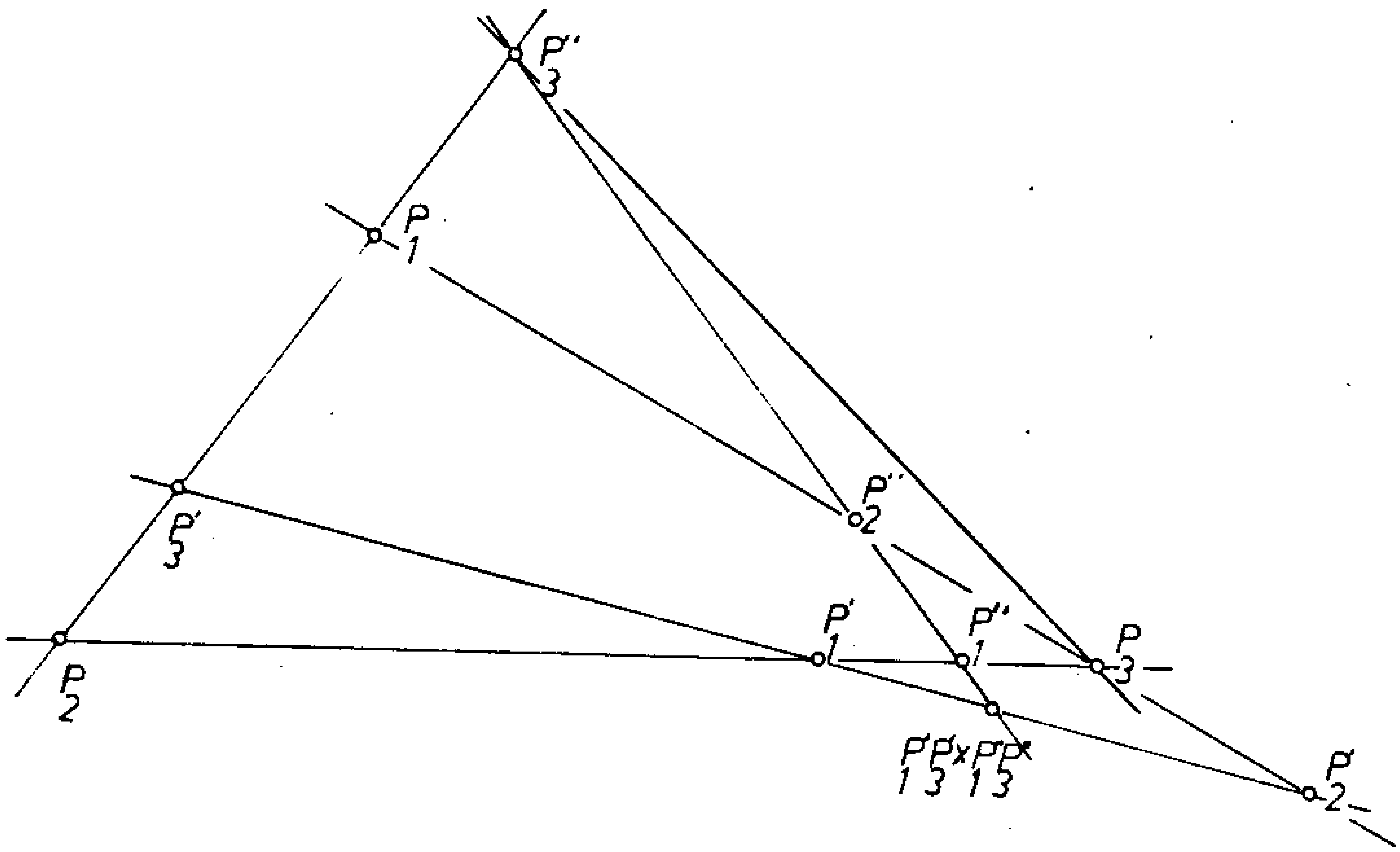
jedan od trotemenika ravni $P_1P_2P_6$ (slika 27). Neka je

$$P_{31}(P_{31}^{12},P_{31}^3,\ldots,P_{31}^n)P_{32}(P_{32}^{12},P_{32}^3,\ldots,P_{32}^n),$$

prava te ravni pri čemu je $P_{31}IP_2P_6$ i $P_{32}IP_1P_2$. Svaka tačka prave $P_{31}P_{32}$ je tačka te ravni. Tačka $P_4(P_4^{12},P_4^3,\ldots,P_4^n)$ je tačka prave $P_{31}P_{32}$, prema tome tačka P_4 je u ravni $P_1P_2P_6$. Ako je $P_{33}^n \neq P_{31}^n$ tada prava $P_{32}(P_{32}^{12},P_{32}^3,\ldots,P_{32}^n)P_{33}(P_{31}^{12},P_{31}^3,\ldots,P_{31}^{n-1},P_{33}^n)$nije prava ravni $P_1P_2P_6$. Tačka $P_3=P_3(P_3^{12},P_3^3,\ldots,P_3^n)$ je tačka prave $P_{32}P_{33}$. Ako bi tačka P_3 bila u ravni $P_1P_2P_6$ tada bi prava $P_{32}P_{33}$ imala pored tačke P_{32} još i tačku P_3 u ravni $P_1P_2P_6$ što bi značilo da je čitava prava u toj ravni a otuda



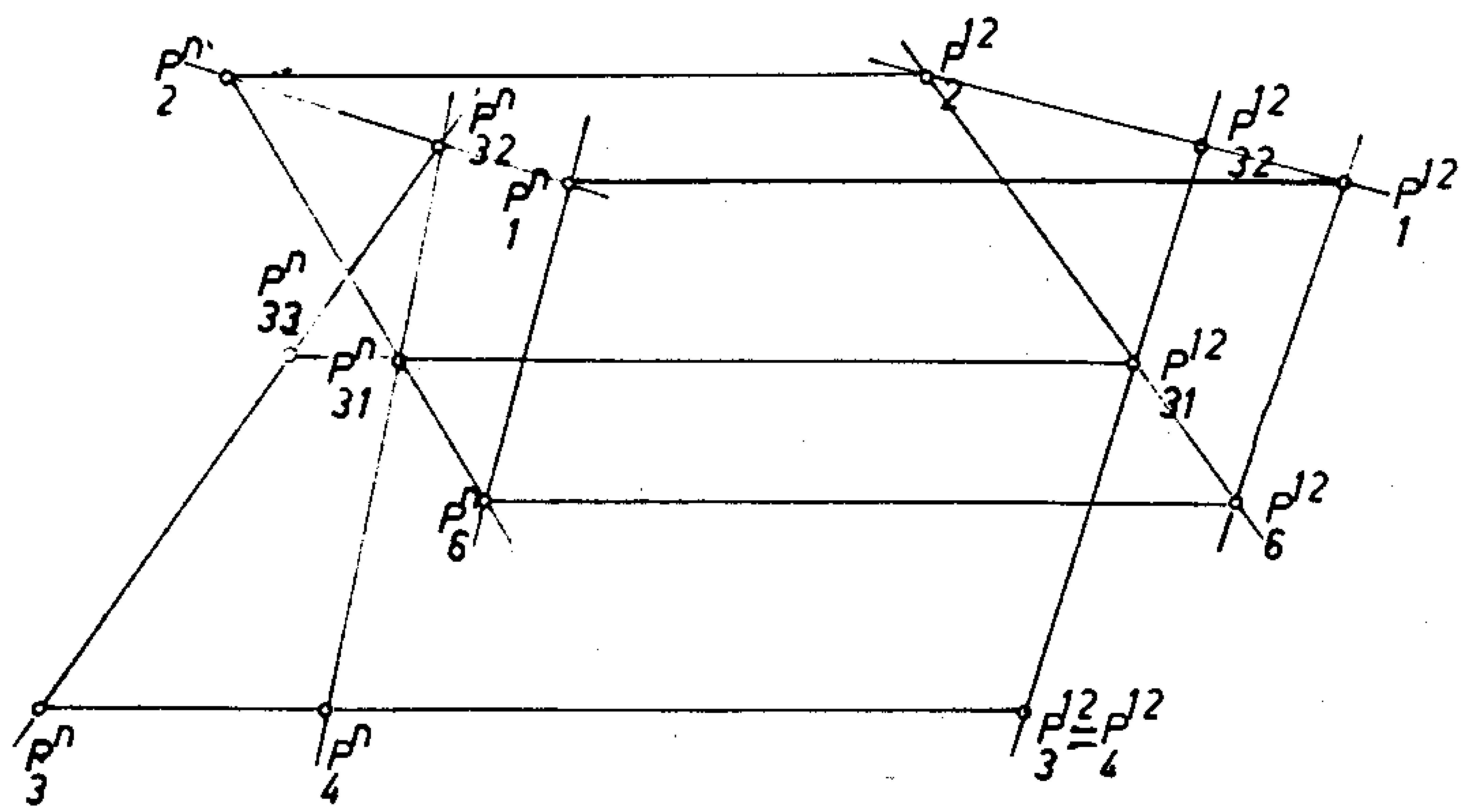
Slika 25



Slika 26

bi sledilo da je tačka P_{33} u toj ravni što je kontradiktorno sa činjenicom da tačka P_{33} nije u toj ravni.

Ako su P_1, P_2, P_3 i P_4 četiri nekoplanarne tačke i ako je P_{123} tačka ravni $P_1P_2P_3$, tada prava P_4P_{123} ne pripada ravni $P_1P_2P_3$.



Slika 27

Definicija 3.2.8 Ako su P_1, P_2, P_3 i P_4 četiri nekomplanarne tačke, tada za pravu odredjenu nekom od tih tačaka i tačkom ravni, koja je odredjena preostalim trima tačkama, kažemo da je temena prava 2.

Definicija 3.2.9 Skup svih mogućih tačaka svih mogućih temenih pravih 2 predstavlja 3-ravan.

Na dosta jednostavan način mogle bi se dokazati sledeće tvrdnje:

Ako tačke Q_1 i Q_2 pripadaju 3-ravni tada svaka tačka prave Q_1Q_2 pripada 3-ravni.

Ako tri nekolinearne tačke Q_1, Q_2 i Q_3 pripadaju 3-ravni, tada svaka tačka te ravni pripada 3-ravni.

Ako tačke Q_1 i Q_2 pripadaju 3-ravni, tada prava Q_1Q_2 prodire svaku od četiri ravni odredjene tačkama simpleksa.

Ako je $Q_1Q_2Q_3$ ravan 3-ravni $P_1P_2P_3P_4$, tada svaka od pravih P_iP_k $(i,k=1,2,3,4;\ i\neq k)$ prodire ravan $Q_1Q_2Q_3$.

Ravan i prava u istoj 3-ravni, imaju zajedničku tačku.

Dve različite ravni u istoj 3-ravni imaju zajedničku pravu.

Na osnovu tih tvrdnji može se dokazati sledeći stav.

Stav 3.2.4 Postoji 4-ravan skupa P_M^n.

Dokaz. Neka je $P_1P_2P_3P_4$ jedna 3-ravan, čija je egzistencija dokazana. Neka je $P_{123}(P_{123}^{12},P_{123}^{3},\dots,P_{123}^{n})$ tačka ravni $P_1P_2P_3$ i pritom je:

$$P_{21}(P_{21}^{12},P_{21}^{3},\dots,P_{21}^{n})=P_2P_{123}\times P_1P_3,$$

$$P_{11}(P_{11}^{12},P_{11}^{3},\dots,P_{11}^{n})=P_1P_{123}\times P_2P_3.$$

Neka je $P_{134}(P_{134}^{12},P_{134}^{3},\dots,P_{134}^{n})$ tačka ravni $P_1P_3P_4$ i neka je pored toga

$$P_{12}(P_{12}^{12},P_{12}^{3},\dots,P_{12}^{n})=P_1P_{134}\times P_3P_4,$$

$$P_{31}(P_{31}^{12},P_{31}^{3},\dots,P_{31}^{n})=P_3P_{134}\times P_1P_4.$$

Ako je tačka $P_{1234}\mathrm{I}P_{123}P_{134}$, tada je:

$$P_{1234}\mathrm{I}P_{123}P_{134},$$

ekvivalentno sa

$$P^{12}_{1234}IP^{12}_{123}P^{12}_{134},\ P^{3}_{1234}IP^{3}_{123}P^{3}_{134},\dots,P^{n}_{1234}IP^{n}_{123}P^{n}_{134}.$$ Ako

je

$$P^{i}_{x}IP^{12}_{134}P^{i}_{134} \text{ i } P^{i}_{x}\neq P^{i}_{134},$$

tada prava $P_{123}P_x$ ne pripada 3-ravni $P_1P_2P_3P_4$, pri čemu su koordinate tačke P_x:

$$P^{12}_{134},P^{3}_{134},\dots,P^{i-1}_{134},P^{i}_{x},P^{i+1}_{134},\dots,P^{n}_{134} \text{ (slika 28).}$$

Kako tačka P_{123} pripada 3-ravni $P_1P_2P_3P_4$, to nijedna druga tačka

$$P_{12345}(P^{12}_{12345}=P^{12}_{1234},P^{3}_{12345}=P^{3}_{1234},\dots,P^{i-1}_{12345}=P^{i-1}_{1234},$$
$$P^{i}_{12345}\neq P^{i}_{1234},P^{i+1}_{12345}=P^{i+1}_{1234},\dots,P^{n}_{12345}=P^{n}_{1234}),$$

ne pripada toj 3-ravni

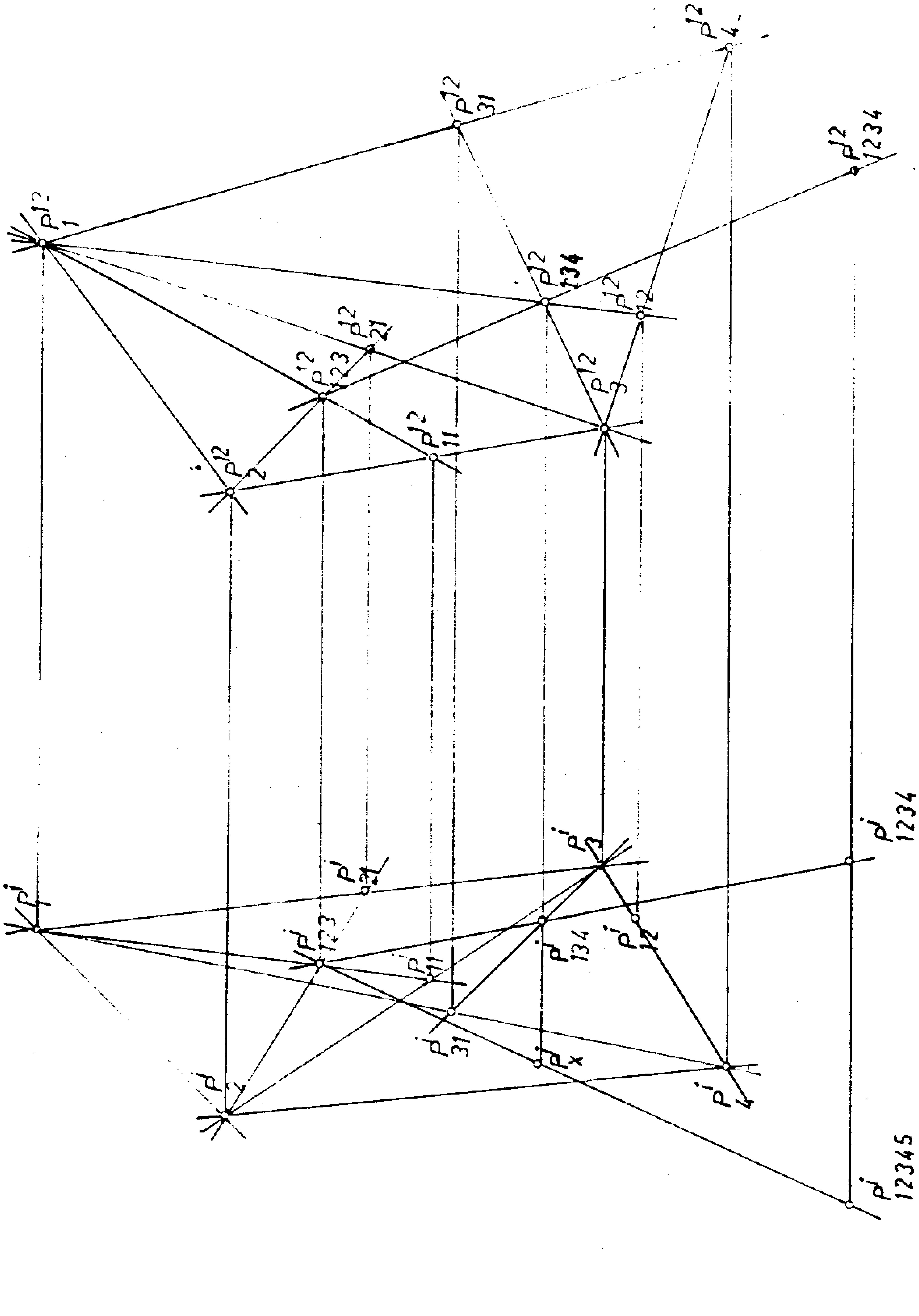
Postupak dokazivanja egzistencije 5-ravni, 6-ravni itd. mogao bi biti nastavljen na analogan način. Mi ćemo pokazati egzistenciju k-ravni skupa P^n_M, pri čemu je $3\leq k\leq n$. U tom cilju trebalo bi dokazati neke pomoćne stavove koji bi bili korišćeni pri tom dokazu. Najveći deo tih pomoćnih stavova nećemo dokazivati, jednostavno zato što ti dokazi ne predstavljaju neke posebne teškoće a spadju u tipične dokaze ove vrste.

Prema tome naš sledeći cilj izražen je narednim stavom.

Stav 3.2.5 Ako je $P_1\dots P_{k+1}$ jedna k-ravan skupa P^n_M, tada postoji u skupu P^n_M tačka P_{k+2} takva da ne pripada k-ravni $P_1\dots P_{k+1}$ $(3\leq k\leq n<\infty)$.

Navodimo bez dokaza sledeće tvrdnje.

Ako su Q_1 i Q_2 dve tačke k-ravni, tada svaka tačka prave



Slika 28

Q_1Q_2 je i tačka k-ravni.

Ako simpleks $P_1,\ldots,P_k$ pripada k-ravni tada svaka tačka (k-1)-ravni odredjene tim simpleksom pripada k-ravni.

Ako je Q_1Q_2 prava k-ravni odredjene tačkama $P_1,\ldots,P_{k+1}$, tada ta prava ima zajedničku tačku sa svakom od (k-1)-ravni

$P_1\ldots P_{i-1}P_{i+1}\ldots P_{k+1}$ $(i=1,\ldots,k+1)$.

Sledeća lema ustvari dokazuje navedeni stav 3.2.5.

Lema 3.2.6 Skup tačaka

$P_1(P_1^{12},P_1^{12},\ldots,P_1^{12})$,

$P_2(P_2^{12},P_2^{12},\ldots,P_2^{12})$,

$P_3(P_3^{12},P_3^{3},P_3^{12},\ldots,P_3^{12})$,

....

$P_k(P_k^{12},P_k^{3},\ldots,P_k^{k},P_k^{12},\ldots,P_k^{12})$

....

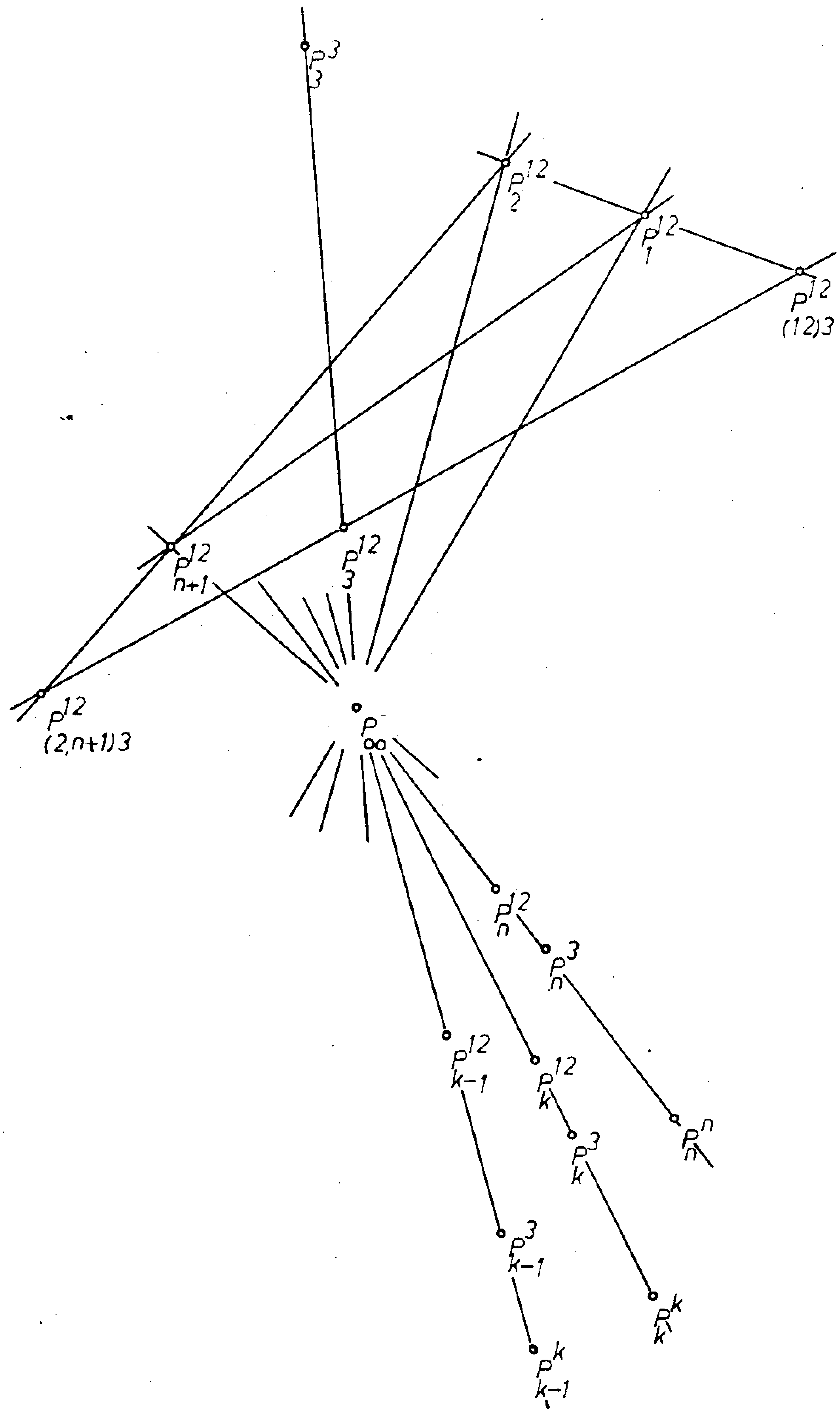
$P_n(P_n^{12},P_n^{3},\ldots,P_n^{n})$

$P_{n+1}(P_{n+1}^{12},P_{n+1}^{12},\ldots,P_{n+1}^{12})$,

pri čemu su sve prave $P_{\infty}P_1^{12}$, $P_{\infty}P_2^{12},\ldots,P_{\infty}P_{n+1}^{12}$ medju sobom različite kao i tačke P_3^{12} i P_3^{3}; P_4^{12}, P_4^{3} i $P_4^{4};\ldots;P_k^{12},P_k^{3},\ldots,P_k^{k}$ $(k=5,\ldots,n)$, predstavlja skup nezavisnih tačaka skupa P_M^n.

Dokaz. Posmatrajmo ravan $P_1P_2P_{n+1}$ (slika 29). Toj ravni ne pripada tačka P_3. Zaista, ako bi tačka P_3 pripadala ravni $P_1P_2P_{n+1}$, tada bi svaka prava koja sadrži tačku P_3 a u ravni je $P_1P_2P_{n+1}$ sekla strane tog trotemenika. Ako je tačka $P_{(12)3}^{12}$ na pravoj $P_1^{12}P_2^{12}$ i ako je

$$P_3^{12}P_{(12)3}^{12}\times P_2^{12}P_{n+1}^{12}=P_{(2,n+1)3}^{12},$$


P_3^3
P_2^{12}
P_1^{12}
$P_{(12)3}^{12}$
P_{n+1}^{12}
P_3^{12}
$P_{(2,n+1)3}^{12}$
P_∞
P_n^{12}
P_n^3
P_{k-1}^{12}
P_k^{12}
P_k^3
P_n^n
P_{k-1}^3
P_k^k
P_{k-1}^k

Slika 29

tada je

$$P^{12}_{(12)3}=P^{3}_{(12)3} \text{ i } P^{12}_{(2,n+1)3}=P^{3}_{(2,n+1)3}.$$ Da bi se poklapale prave $P_3P_{(12)3}$ i $P_3P_{(2,n+1)3}$ moralo bi da P_3^{12} se poklopi sa P_3^3. Kako je po pretpostavci $P_3^{12}\neq P_3^3$, to tačka P_3 nije u ravni $P_1P_2P_{n+1}$. Analogno vredi i za tačku P_k $(3<k)$.

Dokažimo da tačka P_k ne pripada $(k-2)$-ravni $P_1\ldots P_{k-1}$ $(k\neq 1,2,n+1)$. Pretpostavimo da tačka P_{k-1} ne pripada ravni $P_1\ldots P_{k-2}$, pa dokažimo da i tačka P_k ne pripada ravni $P_1\ldots P_{k-1}$. U tom smislu pretpostavimo suprotno, tj. da tačka P_k pripada $(k-2)$-ravni $P_1\ldots P_{k-1}$. Bez ograničenja opštosti dokaza može se pretpostaviti da tačka P_k nije ni u jednoj r-ravni za $r<k-2$. Tada je prava $P_{k-1}P_k$ u $(k-2)$-ravni $P_1\ldots P_{k-1}$. Takva prava ima sa $(k-3)$-ravni $P_1\ldots P_{k-2}$ zajedničku tačku $P_{1\ldots k-2}$. Prava

$$P_{k-1}P_k(P^{12}_{k-1}P^{12}_k, P^3_{k-1}P^3_k, \ldots, P^{k-1}_{k-1}P^{k-1}_k, P^{12}_{k-1}P^k_k = P^k, P^{12}_{k-1}P^{12}_k, \ldots, P^{12}_{k-1}P^{12}_k),$$

pri čemu je $P_k^k\neq P_k^{12}$, sadrži tačku $P_{1\ldots k-2}$, koja mora imati

$$P^k_{1\ldots k-2}\neq P^{12}_{1\ldots k-2},$$

jer bi ta jednakost povlačila $P_k^k=P_k^{12}$. Kako po pretpostavci u $(k-3)$-ravni $P_1\ldots P_{k-2}$ nema tačaka sa indeksom k (gornjim indeksom) koja se ne poklapa sa tačkom indeksa 12, to znači da prava $P_{k-1}P_k$ nije u $P_1\ldots P_{k-1}$. Kako je tačka P_{k-1} u toj $(k-2)$-ravni to drugih tačaka prave $P_{k-1}P_k$ ne može biti u toj $(k-2)$-ravni. Prema tome tačka P_k nije u $(k-2)$-ravni $P_1\ldots P_{k-1}$.

Time je dokazana nezavisnost tačaka $P_1,\ldots,P_{n+1}$.

Definicija 3.2.10 Ako je $P_1,\ldots,P_{k+1}$ skup nezavisnih tačaka skupa P_M^n i ako je $P_{1\ldots i-1,i+1,\ldots,k+1}$ tačka u (k-1)-ravni $P_1\ldots P_{i-1}P_{i+1}\ldots P_{k+1}$, tada skup svih mogućih pravih

$$P_iP_{1\ldots i-1,i+1,\ldots,k+1}\ (i=1,\ldots,k+1),$$

predstavlja temene prave k-1.

Definicija 3.2.11 Skup svih mogućih tačaka svih mogućih temenih pravih k-1, pretstavlja k-ravan.

Na osnovu dokazane leme 3.2.6 sledi tačnost stava 3.2.5.

U specijalnom slučaju za $k=-1$ kažemo da je ta k-ravan prazan skup; za $k=0$ kažemo da je ta k-ravan tačka; za $k=1$ kažemo da je ta k-ravan prava; za $k=2$ samo kažemo to je ravan itd.

Na osnovu dokazane leme 3.2.6 kao i na osnovu definicije tačke skupa P_M^n, sledi da u tom skupu ima najviše n+1 nezavisna tačka, tj. postoji jedinstvena n-ravan.

Definicija 3.2.12 Ako je $P_1,\ldots,P_{k+1}$ simpleks neke k-ravni, tada je $P_1,\ldots,P_{i+1}$ simpleks neke i-ravni $(i\leq k\leq n)$. Za takvu i-ravan kažemo da je podravan k-ravni, odnosno n-ravni.

Pored skupa P_M^n može se posmatrati i skup $\bar{P}_M^n$ kao skup svih podravni. Ako sa G_k označimo skup svih k-podravni, tada se može reći da je $\bar{P}_M^n=\left\{G_{-1},G_o,G_1,\ldots,G_n\right\}$. Mi ćemo sa P_M^n označavati skup svih r-ravni $(r=-1,o,1,\ldots,n)$.

U skupu P_M^n može se uvesti poredak na sledeći način.

Definicija 3.2.13 Ako su U_1 i U_2 elementi skupa P_M^n, neke podravni n-ravni, tada kažemo da su oni uporedivi i to zapisujemo: $U_1 \leqslant U_2$, tačno tada kada je U_1 podskup skupa U_2.

Obzirom na uvedeni poredak u skupu P_M^n, jednostavno se može zaključiti da u skupu P_M^n vrede sledeća svojstva:

A_1 refleksivnost;

A_2 antisimetričnost;

A_3 tranzitivnost;

tj. da je skup P_M^n relacijom $\leqslant$ parcijalno uredjen.

Definicija 3.2.14 Ako su $U^k 1$ i $U^k 2$, respektivno, elementi podskupova G_{k_1} i G_{k_2}, tada je supremum (sup) ili zbir elemenata $U^k 1$ i $U^k 2$ elemenat

$$U^k 1 + U^k 2 = U^k s,$$

sa sledećim svojstvima:

a) $U^k 1 \leqslant U^k s$ i $U^k 2 \leqslant U^k s$,

b) ako postoji elemenat $U^k s1$ sa svojstvima pod a), tada je $U^k s \leqslant U^k s1$.

Definicija 3.2.15 Ako su $U^k 1$ i $U^k 2$, respektivno, elementi podskupova G_{k_1} i G_{k_2}, tada je infimum (inf) ili presek elemenata $U^k 1$ i $U^k 2$ elemenat

$$U^k 1 U^k 2 = U^k i \ ,$$

sa ledećim svojstvima:

a) $U^k i \leqslant U^k 1$ i $U^k i \leqslant U^k 2$,

b) ako je $U^k i1$ neki elemenat sa svojstvom pod a), tada je $U^k i1 \leqslant U^k i$.

Egzistencija $\sup(U^k1,U^k2)=U^k1+U^k2=U^ks$ i $\inf(U^k1,U^k2)=$ $=U^k1U^k2=U^ki$ sledovaće iz narednog svojstva A_4.

Ako su P_1 i P_2 tačke skupa P^n_M, tada je supremum tačaka P_1 i P_2 prava P_1+P_2 odredjena tim tačkama. Infimum tačaka P_1 i P_2 je ili tačka $P_1P_2=P_1=P_2$ ili je P_1P_2 prazan skup.

Dokazaćemo naredno važno svojstvo parcijalno uredjenog skupa P^n_M.

A_4 Ako je Θ neprazan podskup skupa P^n_M, tada skup Θ ima supremum i infimum.

Presek svih elemenata skupa P^n_M označavamo sa 0 a zbir svih elemenata skupa P^n_M označavamo sa 1 ili kažemo to je n-ravan.

Dokaz. Dovoljno je pokazati da skup P^n_M ima jedinicu i da svaki podskup skupa P^n_M ima presek.

Ako je Θ neki podskup skupa P^n_M, to znači da je Θ skup nekih k-ravni ($k=-1,0,1,\dots,n$). Neka je D skup svih tačaka skupa P^n_M koje pripadaju svim elementima skupa Θ. Pokazaćemo da je $D=\inf\Theta$. Ako je $D=\emptyset$ ili $D=P$, gde je P tačka skupa P^n_M, tada je taj infimum prazan skup, odnosno tačka P. Ako D sadrži dve različite tačke P_1 i P_2, to znači da svaki elemenat skupa Θ sadrži tačke P_1 i P_2. U skladu sa već dokazanom tvrdnjom sledi da svaka tačka prave P_1+P_2 pripada svim elementima skupa Θ. Ako pored tačaka prave P_1+P_2 nema drugih tačaka u skupu D, tada je $\inf\Theta=P_1+P_2$. Ako postoji tačka P_3 koja ne pripada pravoj P_1+P_2 a pripada skupu D, tada svaki elemenat skupa Θ sadrži ravan $P_1P_2P_3$, pa je $\inf\Theta=P_1+P_2+P_3$. Nastavljanjem takvog postupka zaključili bi da je

$$\inf\Theta=P_1+P_2+\dots+P_{r+1},$$

tj. da je r-ravan infimum skupa Θ, gde r može biti $-1,0,1,\dots,n$.

Svojstva A_1, A_2, A_3 i A_4 definišu skup P_M^n kao potpunu mrežu. Kako je svaka potpuna mreža-mreža, to ćemo skup P_M^n od sada nazivati mrežom, odnosno potpunom mrežom.

Dokazaćemo naredno svojstvo mreže P_M^n.

A_5 U mreži P_M^n vredi modularni zakon, tj. mreža P_M^n je modularna (modulska, Dedekindova).

Dokaz. Da bi to dokazali trebalo bi dokazati da za elemente U_1, U_2 i U_3 iz mreže P_M^n, pri čemu je $U_1\leqslant U_3$, vredi modularni zakon

$$U_1+U_2U_3=(U_1+U_2)U_3.$$

Jednostavno se zaključuje da je $U_1+U_2U_3\leqslant(U_1+U_2)U_3$. Zaista, kako je $U_1\leqslant U_3$ i $U_1<U_1+U_2$, to je $U_1\leqslant(U_1+U_2)U_3$. Isto tako je $U_2U_3\leqslant U_3$ i $U_2U_3\leqslant U_1+U_2$, pa je $U_2U_3\leqslant(U_1+U_2)U_3$. Na osnovu toga je

$$U_1+U_2U_3\leqslant(U_1+U_2)U_3.$$

Trebalo bi pokazati da je i $(U_1+U_2)U_3\leqslant U_1+U_2U_3$. Neka je u smislu toga dokaza P ma koja tačka sadržana u elementu $(U_1+U_2)U_3$, tj. $P\leqslant(U_1+U_2)U_3$. Ako bi bilo $P\leqslant U_1$, tada bi bilo i $P\leqslant U_1+U_2U_3$. Ako bi bilo $P\leqslant U_2$, tada bi bilo $P\leqslant U_1+U_2U_3$. Pretpostavimo da P nije sadržana u U_1 i P nije sadržana u U_2. Kako je $P \leqslant U_3$, to neka je $P=P_3$. Iz relacije $P_3 \leqslant U_1+U_2$, sledi da je $P_3 \leqslant P_1+P_2$, gde je P_1 tačka iz U_1 i P_2 tačka iz U_2. U_1 i U_2 ne mogu biti O istovremeno, jer je u tom slučaju na trivijalan način zadovoljena tražena jednakost. Ako bi samo jedan od elemenata bio O, tada bi tačka P_3 bila u onom od elemenata koji nije O, što je već razmatrano kao slučaj. Pretpostavimo da su elementi U_1 i U_2 različiti od O. Kako tačka P_3 nije iz U_1 to ne može biti $P_3=P_1$. Iz relacije

$$P_3 \leqslant P_1+P_2 \text{ sledi relacija } P_2 \leqslant P_1+P_3.$$

Kako je $P_1 \leqslant U_1$ i $P_3 \leqslant U_3$, to je

$$P_2 \leqslant P_1+P_3 \leqslant U_1+U_3=U_3.$$

Iz relacija $P_2 \leqslant U_2$ i $P_2 \leqslant U_3$, sleduje

$$P_2 \leqslant U_2U_3.$$

Sa druge strane je

$$P_1 \leqslant U_1 \text{ i } P_2 \leqslant U_2U_3,$$

pa je

$$P_1+P_2 \leqslant U_1+U_2U_3,$$

odnosno

$$P=P_3 \leqslant P_1+P_2 \leqslant U_1+U_2U_3.$$

Prema tome dokazali smo da je

$$U_1+U_2U_3=(U_1+U_2)U_3.$$

Kako u mreži P_M^n vredi modularni zakon, to je svojstvo A_5 dokazano, tj. mreža P_M^n je modularna.

Uvešćemo neke od definicija prema navedenoj literaturi [21] a koje se odnose na parcijalno uredjene skupove.

Definicija 3.2.16 Ako su a i b elementi parcijalno uredjenog skupa L, pri čemu je $a \leq b$, tada skup

$$[a,b] = \{x / a \leq x \leq b\},$$

nazivamo intervalom skupa L.

Ako interval sadrži tačno dva različita elementa tada za taj interval kažemo da je prost interval.

Definicija 3.2.17 Lanac $a_0 \leq a_1 \leq \dots \leq a_n$, koji pripada parcijalno uredjenom skupu P_M^n sa 0 i 1, naziva se invarijantnim redom (kompozicionim redom), ako je $a_0=0$ i $a_n=1$ i svi intervali $[a_{i-1}, a_i]$ $(i=1,\dots,n)$ su prosti. Broj n je dužina invarijantnog reda.

Ako u mreži P_M^n posmatramo bilo koju tačku P_1, pravu P_1+P_2, ravan $P_1+P_2+P_3$, 3-ravan $P_1+P_2+P_3+P_4, \dots$, n-ravan $P_1+\dots+P_{n+1}$, tada imamo sledeći invarijamtni red

$$0=\emptyset,\ P_1,\ P_1+P_2, \dots,\ P_1+\dots+P_{n+1}=1.$$

Navodimo bez dokaza sledeći stav. Taj se dokaz izmedju ostalog može naći i u navedenoj literaturi [21].

Stav 3.2.6 Ako modularna mreža P_M^n ima invarijantan red, tada su ekvivalentna sledeća svojstva:

a) P_M^n je komplementarna mreža (mreža sa dopunom),

b) svaki elemenat iz P_M^n predstavljen je kao diraktan zbir tačaka,

c) 1 se može predstaviti kao zbir tačaka.

Na osnovu stava 3.2.6 možemo zaključiti da u mreži P^n_M vredi:

A_6 Ako je U proizvoljan elemenat mreže P^n_M, tada se u toj mreži može naći elemenat U_c, takav da vredi

$U+U_c=1$ i $UU_c=0$.

Svojstvo A_6 sledi i iz same konstrukcije k-ravni.

Definicija 3.2.18 Ako je $U_1+U_3=U_2+U_3$, gde je zbir direktan, tada za elemente U_1 i U_2 kažemo da su perspektivni a za elemenat U_3 da je centar perspektivnosti.

Perspektivnim preslikavanjem se elemenat $U_x\in[0,U_1]$ preslikava na elemenat $U_y=(U_x+U_3)U_2\in[0,U_2]$.

Definicija 3.2.19 Funkcija mere na mreži P^n_M je celobrojna funkcija d, sa sledećim svojstvima:

a) ako je $[U_1,U_2]$ prost interval, tada je $d(U_2)=d(U_1)+$ $+1$,

b) $d(U_1)+d(U_2)=d(U_1+U_2)+d(U_1U_2)$.

Navodimo bez dokaza sledeći stav. Dokaz se može naći u [21].

Stav 3.2.7 U mreži P^n_M, čiji su svi ograničeni lanci konačni, ekvivalentna su sledeća svojstva:

a) P^n_M je modularna mreža,

b) za elemente U_1 i U_2 mreže P^n_M interval $[U_1U_2,U_2]$ je prost tačno tada kada i interval $[U_1,U_1+U_2]$.

c) na mreži P^n_M postoji funkcija mere u skladu sa definicijom 3.2.19.

Iz dosadašnjih razmatranja sledi naredna tvrdnja.

A_7 Ako je E_s proizvoljan skup elemenata mreže P_M^n i ako je za tačku P zadovoljeno

$$P \leqslant \sum_{X \in E_s} X \quad ,$$

tada u skupu E_s postoji konačan broj elemenata $P_1, \ldots, P_k$ takvih da je

$$P \leqslant \sum_{i=1}^{k} P_i .$$

Potrebno je dokazati i ovu sledeću tvrdnju.

A_8 Ako su P_1 i P_2 različite tačke mreže P_M^n, tada postoji tačka P_3 te mreže, takva da je $P_3 \leqslant P_1 + P_2$.

Dokaz. To je svojstvo već korišćeno kod dokaza svojstva A_5.

Ako su P_1 i P_2 tačke skupa P_M^n, tada su nosači tih tačaka prave istog pramena. Neka je $P_1^{12}P_1^n \times P_2^{12}P_2^n = P_{\infty}$. Kako je P^2 realna projektivna ravan, to prava $P_1^{12}P_2^{12}$ sadrži treću tačku P_3^{12}. Tačke P_3^{12} i P_{∞} odredjuju pravu ravni P^2. Kako se u P^2 svake dve prave seku, to postoje preseci

$$P_3^3 = P_1^3 P_2^3 \times P_3^{12} P_{\infty}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$P_3^n = P_1^n P_2^n \times P_3^{12} P_{\infty} .$$

Tražena treća tačka prave $P_1 + P_2$ je prema tome

$$P_3(P_3^{12}, \ldots, P_3^n).$$

Definicija 3.2.20 Za trotemenike $A_1A_2A_3$ i $B_1B_2B_3$ kažemo da su perspektivni iz tačke O, ako su trotemenici

$A_1^{12}A_2^{12}A_3^{12}$ i $B_1^{12}B_2^{12}B_3^{12}$ perspektivni iz tačke O^{12},

....

$A_1^nA_2^nA_3^n$ i $B_1^nB_2^nB_3^n$ perspektivni iz tačke O^n.

Definicija 3.2.21 Za trotemenike $A_1A_2A_3$ i $B_1B_2B_3$ kažemo da su perspektivni iz prave, ako su kolinearne tačke

$$A_1^{12}A_2^{12}xB_1^{12}B_2^{12},\ A_1^{12}A_3^{12}xB_1^{12}B_3^{12},\ A_2^{12}A_3^{12}xB_2^{12}B_3^{12}$$

i

$$A_1^iA_2^ixB_1^iB_2^i,\ A_1^iA_3^ixB_1^iB_3^i,\ A_2^iA_3^ixB_2^iB_3^i \text{ za svako } i=3,\dots,n,$$

pri čemu je

$$(A_1A_2xB_1B_2)^{12}=A_1^{12}A_2^{12}xB_1^{12}B_2^{12},$$
$$(A_1A_3xB_1B_3)^{12}=A_1^{12}A_3^{12}xB_1^{12}B_3^{12},$$
$$(A_2A_3xB_2B_3)^{12}=A_2^{12}A_3^{12}xB_2^{12}B_3^{12},$$

i

$$(A_1A_2xB_1B_2)^i=A_1^iA_2^ixB_1^iB_2^i,$$
$$(A_1A_3xB_1B_3)^i=A_1^iA_3^ixB_1^iB_3^i,$$
$$(A_2A_3xB_2B_3)^i=A_2^iA_3^ixB_2^iB_3^i \text{ za svako } i=3,\dots,n.$$

Poslednje svojstvo koje dokazujemo sadržaj je Dezargove teoreme.

A_9 Trotemenici $A_1A_2A_3$ i $B_1B_2B_3$ perspektivni su iz tačke O tačno tada kada su perspektivni i iz prave

$$(A_1A_2xB_1B_2)(A_2A_3xB_2B_3).$$

Dokaz. Pretpostavimo da su trotemenici $A_1A_2A_3$ i $B_1B_2B_3$ perspektivni iz tačke O. To znači da su perspektivni trotemenici

$$A_1^iA_2^iA_3^i \overset{O^i}{\overline{\wedge}} B_1^iB_2^iB_3^i \text{ za svako } i=12,3,\dots,n. \tag{1}$$

Iz relacije (1) sledi perspektivnost tih trotemenika i iz odgovarajućih pravih, respektivno,

$$(A_1^{12}A_2^{12}\times B_1^{12}B_2^{12})(A_1^{12}A_3^{12}\times B_1^{12}B_3^{12}),$$

$$(A_1^iA_2^i\times B_1^iB_2^i)(A_1^iA_3^i\times B_1^iB_3^i) \quad \text{za svako } i=3,\dots,n. \tag{2}$$

Prema tome može se zaključiti da je (1) ekvivalentno (2).

Trebalo bi pokazati da su

$$(A_1^{12}A_2^{12}\times B_1^{12}B_2^{12},\dots,A_1^nA_2^n\times B_1^nB_2^n),$$

$$(A_1^{12}A_3^{12}\times B_1^{12}B_3^{12},\dots,A_1^nA_3^n\times B_1^nB_3^n),$$

$$(A_2^{12}A_3^{12}\times B_2^{12}B_3^{12},\dots,A_2^nA_3^n\times B_2^nB_3^n),$$

tačke mreže P_M^n (slika 30).

Dokazaćemo samo jedan slučaj od navedena tri. Druga dva se dokazuju na potpuno analogan način.

Dokažimo da je $(A_1^{12}A_3^{12}\times B_1^{12}B_3^{12},\dots,A_1^nA_3^n\times B_1^nB_3^n)$ tačka mreže. U tom smislu dovoljno je pokazati da su kolinearne tačke

$$P_{\infty},\ A_1^{12}A_3^{12}\times B_1^{12}B_3^{12},\dots,A_1^nA_3^n\times B_1^nB_3^n,$$

gde je $P_{\infty}=A_1^{12}A_1^n\times A_3^{12}A_3^n$.

Za trotemenike $O^{12}A_1^{12}A_3^{12}$ i $O^nA_1^nA_3^n$ može se napisati da je

$$O^{12}A_1^{12}A_3^{12} \overset{P_{\infty}}{\underset{\wedge}{=}} O^nA_1^nA_3^n \text{ i } O^{12}A_1^{12}A_3^{12} \overset{P_{13}}{\underset{\wedge}{=}} O^nA_1^nA_3^n.$$

Iz istih razloga su trotemenici

$$B_1^{12}B_2^{12}B_3^{12} \text{ i } B_1^nB_2^nB_3^n,$$

perspektivni iz tačke P_{∞} i odgovarajuće prave. Perspektivnost zadovaoljavaju i trotemenici

$$A_1^{12}B_3^{12}A_3^{12} \text{ i } A_1^nB_3^nA_3^n,$$

$$A_1^{12}B_1^{12}B_3^{12} \text{ i } A_1^nB_1^nB_3^n.$$

Takodje sleduje da je

$$A_3^{12}B_3^{12}(A_1^{12}A_3^{12} \times B_1^{12}B_3^{12}) \stackrel{(A_1^{12}A_3^{12} \times A_1^nA_3^n)(O^{12}A_1^{12} \times O^nA_1^n)}{\overline{\overline{\wedge}}} A_3^nB_3^n(A_1^nA_3^n \times B_1^nB_3^n.$$

Prema tome zaključujemo da je:

$$A_3^{12}B_3^{12}(A_1^{12}A_3^{12} \times B_1^{12}B_3^{12}) \stackrel{P_\infty}{\overline{\overline{\wedge}}} A_3^nB_3^n(A_1^nB_3^n \times B_1^nB_3^n),$$

gde je $P_\infty = A_3^{12}A_3^n \times B_3^{12}B_3^n$. Time je i dokazana kolinearnost razmatranih tačaka. Na osnovu toga možemo reći da vredi sledeća implikacija

$$A_1A_2A_3 \stackrel{O}{\overline{\overline{\wedge}}} B_1B_2B_3 \Longrightarrow A_1A_2A_3 \stackrel{p_{123}}{\overline{\overline{\wedge}}} B_1B_2B_3.$$

Sada ćemo dokazati da se ta implikacija može zameniti ekvivalencijom.

Iz pretpostavke da su trotemenici $A_1A_2A_3$ i $B_1B_2B_3$ perspektivni iz prave, sleduje:

$A_1^iA_2^iA_3^i$ perspektivan sa $B_1^iB_2^iB_3^i$ iz tačke O^i za svako $i = 12, 3, \ldots, n$.

Ostaje da se pokaže da je $(O^{12}, O^3, \ldots, O^n)$ tačka. U tom smislu treba pokazati kolinearnost tačaka

$$P_\infty, O^{12}, O^3, \ldots, O^n.$$

Iz

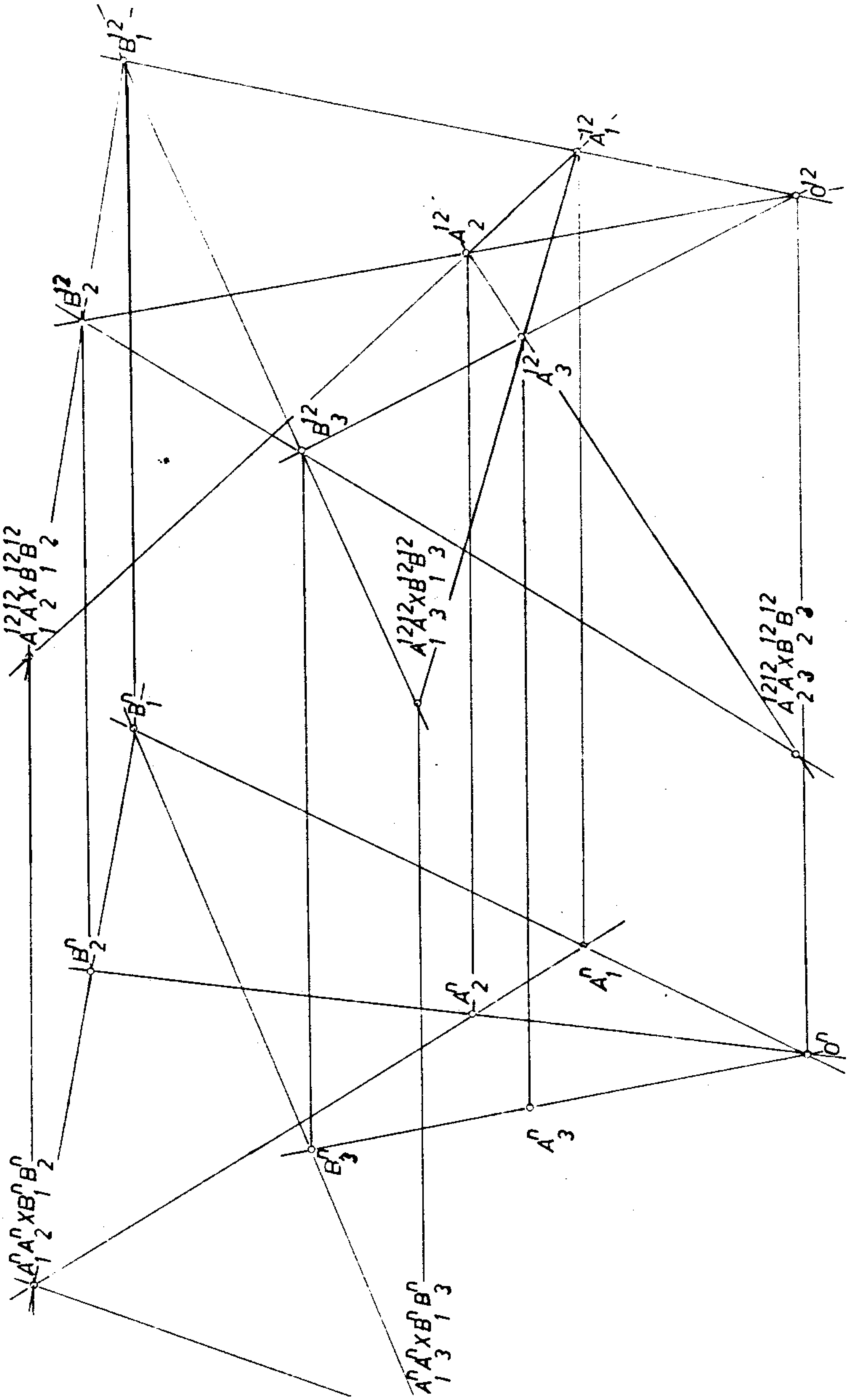
$$A_1^{12}B_1^{12}(A_1^{12}A_3^{12} \times B_1^{12}B_3^{12}) \stackrel{P_\infty}{\overline{\overline{\wedge}}} A_1^nB_1^n(A_1^nA_3^n \times B_1^nB_3^n) \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow A_1^{12}B_1^{12}(A_1^{12}A_3^{12} \times B_1^{12}B_3^{12}) \stackrel{p'_{13}}{\overline{\overline{\wedge}}} A_1^nB_1^n(A_1^nB_3^n \times B_1^nB_3^n).$$

Analogna perspektivnost bi se mogla napisati za trotemenike

$$A_3^{12}B_3^{12}(A_1^{12}A_3^{12} \times B_1^{12}B_3^{12}) \text{ i } A_3^nB_3^n(A_1^nA_3^n \times B_1^nB_3^n),$$

na osnovu čega sledi perspektivnost trotemenika $A_1^{12}A_3^{12}O^{12}$ i



Slika 30

$A_1^n A_3^n O^n$ iz tačke P_∞ i odgovarajuće prave. Na osnovu toga zaključujemo o kolinearnosti razmatranih tačaka.

Naš cilj se može iskazati sledećim stavom.

Stav 3.2.8 Ako neki skup P_M^n zadovoljava sva svojstva A_1-A_9 i ako je taj skup atomna mreža, tada postoji vektorski prostor, takav da su sistem potprostora toga vektorskog prostora i mreža P_M^n projektivno ekvivalentni.

Dokaz stava 3.2.8 može se naći u navedenoj literaturi [13].

Ovim je pokazano da se skup P_M^n može smatrati modelom n-dimenzione projektivne geometrije.

LITERATURA

[1] Esser M. :Self-dual postulates for n-dimensional geometry, This jurnal, vol. 18(1951),pp,475-479.

[2] Hall M. :Projektive planes and related topics, California institut of tehnology (1954).

[3] Janić M. :Jedan način projektovanja n-dimenzionog euklidskog prostora, Zbornik radova, Tehnički fakultet Bor (1980/81).

[4] Janić M. :Projektivna geometrija i teorija mreža, Magistarski rad (1977)

[5] Jonsson B. :Modular laticces and Desargues theorem,Math. skand. 2(1954), 295-314.

[6] Kurepa S. :Konačno dimenzionalni vektorski prostori i primjene, "Tehnička knjiga", Zagreb (1967).

[7] Prvanović M. :Projektivna geometrija, "Naučna knjiga", Beograd(1968).

[8] Volenec V. :Othocentre and feuerbach's hypersphere of an n-siplex,Glasnik matematički 10(30)(1975).

[9] Volenec V. :A generalization of Desargues theorem in P^n and some of its consequences,Glasnik matematički 12(32)(1977).

[10] Šnajder Z. :Odredjivanje tragova ravni u četvorodimenzionom prostoru i tragova (n-2)-dimenzionog prosttora u n-dimenzionom prostoru, Bilten de la Societe des mathematiciens et physiciens de la R.P. de Serbie,IX,1-2,Beograd (1957).

[11] Šnajder Z. :Eine eigenschaft der spurenbestimung eines (n-2)-dimensionalen Raumes in einem E_n Raum,

Bulletin de la Societe des mathematiciens et physiciens de la R.P. de Serbie, XI,1-4, Beograd (1959).

[12] Šnajder Z. :Eine interpretation der graphischen methode von van den Berg und Mehmke vom standpunkte der mehrdimensionalen darstellenden geometrie, Bulletion de la Societe des mathematiciens et physiciens de la R.P. de Serbie, XI,Beograd (1959).

[13] Бэр Р. :Линейная алгебра и проективная геометрия, Москва 1955.

[14] Филиппов П.В. :Начертательная геометрия многомерного пространства и ее приложения.Л.:Изд-во Ленингр. ун-та, 1979.

[15] Глоговский В.В., Гринева Б.М., Гнатюк М.О. Львов, 1978. Начертательная геометрия на алгоритмической основе.

[16] Куликов С. М. Введение в начертательную геометрию многомерных пространств.-М.,1970.

[17] Наумович Н.В. О применении многомерной начертательной геометрии к доказательству некоторых теорем планиметрии и стереометрии.-Методы начертательной геометрии и ее приложеня.-М., 1955.

[18] Прянишникова З. И. Обобщение проекций Е. С. Федорова.-Методы начерт. геом. и ее приложения.-1955.

[19] Четверухин Н. Ф. Многомерная аксонометрия.-Методы начер. геом. и ее приложения.-1955.

[20] Ефимов Н. В.,Розендорн Э. Р. Линейная алгебра и многомерная геометрия.-М.1970.

[21] Скорняков Л. А. Элементы теории структур.-М.1970.

[22] Топалов А. Д., Новожилова Н. В., Первикова В. Н. Геометрическое моделирование при определении надежности електронной аппаратуры. -В кн.: Прикл. геом. и инж. графика. Вып. 13.-Киев, 1971.

[23] Bell P.O., Generalized of Desargues for n-dimensional space, Proc.Amer.Soc. 6(1955).

[24] Luneburg H.,Ein neuer Beweis eines hauptsatzes der projektiven Geometrie, Math.Z.87(1965).

[25] Luneburg H.,Uber die struktursatze der projektiven Geometrie, Arch.Math. (1966).

[26] Mandan S.R.,Desargues' theorem in n-space, J.Austral.Math. Soc.1(1960).

[27] Tallini G.,Su una estensione del teorema di Desargues, Boll. Un.Mat.Ital.(3)11(1956).

SADRŽAJ RADA

PREDGOVOR

1 OSNOVNA SVOJSTVA EUKLIDSKOG PROSTORA 1

1.1 Euklidski n-dimenzioni prostor 1

1.2 Euklidska geometrija 3

1.3 Euklidski prostor E^n dopunjen jednom hiperravni 4

1.4 Paralelnost, normalnost i incidentnost u prostoru E^n.5

2 PROJEKTOVANJE n-DIMENZIONOG EUKLIDSKOG PROSTORA I PRIMENA NA REŠAVANJU NEKIH STAVOVA EUKLIDSKE GEOMETRIJE 6

2.1 Projektovanje prostora E^n metodom paralelnih odsečaka 6

2.1.1 Neki postupci projektovanja prostora E^n na ravan..6

2.1.2 Projekcija tačke, prave i ravni 11

2.1.3 Odredjivanje prave veličine duži 15

2.1.4 Položajni zadaci 20

2.2 Primena projektovanja na rešavanju nekih stavova euklidske geometrije 37

2.2.1 Neki potrebni, dovoljni ili i potrebni i dovoljni uslovi da bi skup tačaka predstavljao simpleks nekog potprostora prostora E^n.................38

2.2.2 Dezargova teorema 50

3 n-DIMENZIONA PROJEKTIVNA GEOMETRIJA 55

3.1 Mreže E^2_{12} i E^n 55

3.2 Model n-dimenzione projektivne geometrije 61

LITERATURA 91