UNIVERZITET U BEOGRADU
MATEMATIČKI FAKULTET

Rami Haider

KPT KORESPONDENCIJA

master rad

Beograd, 2024.

Mentor:

prof. dr Slavko MOCONJA, vanredni profesor
Univerzitet u Beogradu, Matematički fakultet

Članovi komisije:

prof. dr Zoran PETROVIĆ, redovni profesor
Univerzitet u Beogradu, Matematički fakultet

prof. dr Nebojša IKODINOVIĆ, redovni profesor
Univerzitet u Beogradu, Matematički fakultet

Datum odbrane: ____________________

Naslov master rada: KPT Korespondencija

Rezime: Ovaj master rad istražuje vezu između strukturalne Remzijeve teorije i topološke dinamike, fokusirajući se na KPT korespondenciju. Pre dvadesetak godina u radu [9] autori Kehris, Pestov i Todorčević otkrili su iznenađujuću korespondenciju između kombinatornih svojstava klase konačno generisanih podstruktura Frajseove strukture i dinamičkih svojstava njene grupe automorfizama. U radu će biti prikazani koncepti strukturalne Remzijeve teorije i topološke dinamike neophodni za formulaciju KPT korespondencije. Preciznije, istražićemo kako je grupa automorfizama, kao topološka grupa, Frajseove strukture ekstremno amenabilna (svako njeno neprekidno dejstvo na kompaktnom, Hauzdorfovom prostoru ima fiksnu tačku) ako i samo ako klasa konačno generisanih podstruktura ima Remzijevo svojstvo. Glavni cilj rada je da se predstave dokaz i neki primeri primene KPT korespondencije. Ova teorema, danas poznata pod imenom KPT korespondencija, nakon objavljivanja izazvala je veliku pažnju; veliki broj radova u poslednjih dvadeset godina posvećen je istraživanjima njenih primena i mogućih uopštenja.

Ključne reči: KPT Korespondencija, Topološka dinamika, Remzijevo svojstvo, Ekstremna amenabilnost, Najveći ambit, Univerzalni minimalni tok, Grupa automorfizama

Sadržaj

Izjava zahvalnosti

Veliku zahvalnost dugujem svom mentoru, prof. dr Slavku Moconji, na ogromnoj pomoći u objašnjenju materijala, kao i na brojnim konsultacijama i angažovanju tokom pisanja ovog rada.

Pored toga, želeo bih da se zahvalim svojim kolegama i prijateljima na njihovoj ogromnoj podršci. Bez njih, ne bih bio u mogućnosti da nastavim svoje studije. Među mnogima, želeo bih da se zahvalim Danijelu Aleksiću, Daliboru Daniloviću, Spomenki Milić i Nikoli Velovu.

Takođe bih želeo da se zahvalim svojoj porodici koja je uložila mnogo truda kako bi mi pomogla da ostvarim svoje ciljeve.

Glava 1

Uvod

U radu [11], Pestov je dokazao da je $\mathrm{Aut}(\mathbb{Q}, <)$, kao topološka grupa, ekstremno amenabilna, tj. da svako njeno neprekidno dejstvo na kompaktnom Hauzdorfovom prostoru ima fiksnu tačku. Dokaz ovog rezultata zasniva se na klasičnoj Remzijevoj teoremi koja kaže da za svako bojenje m-točlanih podskupova prebrojivog skupa X u k boja postoji prebrojiv podskup $Y \subseteq X$ čiji su m-točlani podskupovi obojeni istom bojom. Proširujući ovaj rezultat, Kehris, Pestov i Todorčević u radu [9] dokazali su da postoji duboka veza između topološko-dinamičkih osobina grupe automorfizama prebrojive strukture i kombinatornih osobina klase njenih konačno generisanih podsktruktura. Konkretno, za prebrojivu, ultrahomogenu i lokalno konačnu strukturu $\mathcal{M}$ važi da je $\mathrm{Aut}(\mathcal{M})$, kao topološka grupa, ekstremno amenabilna ako i samo ako $\mathrm{Age}(\mathcal{M})$, klasa konačno generisanih podstruktura od $\mathcal{M}$, ima Remzijevo svojstvo, kao i da su svi članovi $\mathrm{Age}(\mathcal{M})$ rigidni (imaju trivijalne grupe automorfizama). Ova teorema, poznata kao *KPT korespondencija*, otvorila je široko polje za istraživanje njenih primena i uopštenja.

Jedno od uopštenja je proširenje korespondencije na neprebrojive strukture. U ovom kontekstu, teoremu je uopštila Bartošova u svojoj doktorskoj tezi [2] i radu [3]. Originalni dokaz Kehrisa, Pestova i Todorčevića suštinski koristi prebrojivost strukture, dok Bartošova predlaže drugačiji pristup u kojem prebrojivost ne igra značajnu ulogu. Njen dokaz zasniva se na analizi Stonovog prostora ultrafiltera topološke grupe, kao i odgovarajuće Samuelove kompaktifikacije.

Cilj ovog rada pre svega je da predstavimo dokaz KPT korespondencije, pri čemu pratimo pristup Bartošove. Glavni rezultat, KPT korespondencija, je dat u teoremi 3.3, koja je za prebrojive strukture dokazana u [9], a za proizvoljne strukture u [2, 3]. Sam dokaz koji ćemo predstaviti već je poznat iz [9], međutim oslanja se na tvrđenje 4.2 u [9], čiji dokaz suštinski koristi prebrojivost strukture. U ovom radu, u teoremi 2.17, daćemo dokaz pomenutog tvrđenja u opštem slučaju. Koliko je nama poznato, dokaz koji dajemo u radu nije od ranije prisutan u literaturi. Dokaz KPT korespondencije u opštem slučaju koji daje Bartošova, ne zasniva se na pomenutom tvrđenju, nego na opštijoj analizi univerzalnog minimalnog toka.

U ovom uvodnom poglavlju predstavljamo potrebne pojmove i rezultate za dalju analizu u radu. U drugom poglavlju ćemo opisati Samuelovu kompaktifikaciju proizvoljne topološke grupe. Ovde ćemo dokazati teoremu 2.17, ali takođe ćemo predstaviti i nekoliko osnovnih osobina ekstremno amenabilnih grupa. U poslednjem poglavlju dokazaćemo KPT korespondenciju (teorema 3.3) i navešćemo primere njene primene.

1.1 Ultrafilteri i βX

U ovom delu pratimo strukturu izlaganja iz [7, 8]

Definicija 1.1. Neka je X neprazan skup. Familija podskupova od $X, \mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X)$ je *filter nad* X ukoliko je ispunjeno:

1. $\varnothing \notin \mathcal{F}$, $X \in \mathcal{F}$;
2. Ako $A \subseteq B \subseteq X$ i $A \in \mathcal{F}$, onda i $B \in \mathcal{F}$;
3. Ako $A, B \in \mathcal{F}$ onda i $A \cap B \in \mathcal{F}$.

Primer 1.2. 1. *Trivijalan filter* – $\mathcal{F} = \{X\}$ je filter nad X.

2. *Glavni filter* – Za $A \subseteq X$, $A \neq \varnothing$, $\widehat{A} = \{B \subseteq X \mid A \subseteq B\}$ je glavni filter generisan podskupom A.
3. *Frešeov filter* – $\mathcal{F} = \{A \subseteq \mathbb{N} \mid |\mathbb{N} \setminus A| < \infty\}$.

Definicija 1.3. Neka je $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{P}(X)$. Familija $\mathcal{K}$ ima *svojstvo konačnog preseka* ako za svako $n \in \mathbb{N}$ i $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{K}$ važi $A_1 \cap \ldots \cap A_n \neq \varnothing$.

Definicija 1.4. Neka je $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{P}(X)$. Familija $\langle \mathcal{K} \rangle \subseteq \mathcal{P}(X)$ je definisana sa

$$\langle \mathcal{K} \rangle = \{B \subseteq X \mid (\exists A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{K})\ A_1 \cap \ldots \cap A_n \subseteq B\}.$$

Lema 1.5. *1. Ako je $\mathcal{F}$ filter, tada je $\langle \mathcal{F} \rangle = \mathcal{F}$.*

2. *Familija $\mathcal{K}$ ima svojstvo konačnog preseka ako i samo ako je $\langle\mathcal{K}\rangle$ filter. Tada zovemo $\langle\mathcal{K}\rangle$ filter generisan sa $\mathcal{K}$.*

Dokaz. 1. Jasno, za $B \in \mathcal{F}$ imamo $B \in \langle\mathcal{F}\rangle$ jer $B \subseteq B$. Sa druge strane, neka je $C \in \langle\mathcal{F}\rangle$. Tada postoje $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{F}$ takvi da je $A_1 \cap \dots \cap A_n \subseteq C$. Međutim, važi $A_1 \cap \dots \cap A_n \in \mathcal{F}$ (indukcijom), pa je i $C \in \mathcal{F}$.

2. Jasno, ako $\mathcal{K}$ ima svojstvo konačnog preseka, onda $\varnothing \notin \langle\mathcal{K}\rangle$, i jasno da za $A, B \in \mathcal{K}$, onda $A \cap B \subseteq A \cap B$, pa je $A \cap B \in \langle\mathcal{K}\rangle$; slično za $B \supseteq A \in \mathcal{K}$. Sa druge strane, ako je $\langle\mathcal{K}\rangle$ filter, onda $\varnothing \notin \langle\mathcal{K}\rangle$, time za svako $n \in \mathbb{N}$, $A_1 \cap \dots \cap A_n \neq \varnothing$, pa $\mathcal{K}$ ima svojstvo konačnog preseka. □

Definicija 1.6. Filter p nad skupom X je *ultrafilter* ako je maksimalan filter, tj. važi: ako je p' filter takav da $p' \supseteq p$, onda je $p' = p$.

Lema 1.7. *Sledeći iskazi su ekvivalentni:*

1. *p je ultrafilter nad X;*
2. $(\forall A \subseteq X)(A \in p \veebar A^{\complement} \in p)$;
3. $(\forall A, B \subseteq X)(A \cup B \in p \Rightarrow A \in p \vee B \in p)$;
4. $(\forall A_1, \dots, A_n \subseteq X)(X = A_1 \sqcup \dots \sqcup A_n \Rightarrow \exists! i \in \{1, \dots, n\}\ A_i \in p)$.

Dokaz. $(1 \Rightarrow 2)$ Pretpostavimo suprotno. Ako $A, A^{\complement} \in p$, onda važi i $\varnothing = A \cap A^{\complement} \in p$, što je kontradikcija. Neka $A \notin p$ i $A^{\complement} \notin p$. Tada posmatramo na primer skup $p \cup \{A\}$, i primetimo da ima svojstvo konačnog preseka. Kako je p filter, ako postoji podskup $B \in p$ takav da važi $A \cap B = \varnothing$, onda bi važilo $B \subseteq A^{\complement}$, pa bi važilo $A^{\complement} \in p$. Dakle, skup $p \cup \{A\}$ ima svojstvo konačnog preseka, pa je familija $\langle p \cup \{A\}\rangle$ filter koji je strogo veći od p, što je kontradikcija jer je p ultrafilter.

$(2 \Rightarrow 3)$ Pretpostavimo suprotno. Neka je $A \cup B \in p$, ali $A \notin p$ i $B \notin p$. Tada prema pretpostavci, $A^{\complement}, B^{\complement} \in p$, pa je i $A^{\complement} \cap B^{\complement} = (A \cup B)^{\complement} \in p$ jer je p filter. Ali, to je nemoguće zbog pretpostavke.

$(3 \Rightarrow 4)$ Prvo, jasno je da, pošto je p filter, $X \in p$. Što znači da $X = A_1 \sqcup \dots \sqcup A_n \in p$, pa postoji (indukcijom) neko $i \in \{1, \dots, n\}$ takvo da je $A_i \in p$. Sa druge strane, ako postoje $i, j \in \{1, \dots, n\}$ takva da važi $A_i, A_j \in p$, onda bi i $A_i \cap A_j = \varnothing \in p$, a to je nemoguće jer je p filter.

$(4 \Rightarrow 1)$ Pretpostavimo suprotno. Neka je filter p' takav da je $p' \supsetneq p$, i neka je $A \in p' \setminus p$. Kako je $X = A \sqcup A^{\complement}$ i $A \notin p$, važi $A^{\complement} \in p$, pa i $A^{\complement} \in p'$. Tada i $\varnothing = A \cap A^{\complement} \in p'$, što nije moguće. □

Primer 1.8. 1. Glavni filter $\widehat{A}$ je ultrafilter ako i samo ako $|A| = 1$. Ako postoji $a, b \in A, a \neq b$, tada za bilo koji skup B takav da važi $a \in B, b \notin B$ imamo da ni B ni $B^{\complement}$ ne pripadaju filteru $\widehat{A}$, pa tad $\widehat{A}$ nije ultrafilter. Sa druge strane, za $|A| = 1, A = \{a\}$ se vidi da za bilo koji skup $B \subseteq X$, ili $a \in B$ ili $a \in B^{\complement}$, što znači da ili B ili $B^{\complement}$ pripada filteru.

2. Frešeov filter nije ultrafilter; jer ni skup $\{2k \mid k \in \mathbb{N}\}$ ni njegov komplement $\{2k+1 \mid k \in \mathbb{N}\}$ ne pripadaju filteru.

Koristeći aksiomu izbora možemo lako da dobijemo sledeći važan rezultat:

Teorema 1.9 (Teorema o ultrafilteru)**.** *Neka je $\mathcal{F}$ filter nad X. Postoji ultrafilter p nad X takav da $\mathcal{F} \subseteq p$.*

Dokaz. Uočimo familiju $\{\mathcal{D} \mid \mathcal{D}$ je filter i $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{D}\}$, uređenu sa $\subseteq$. Familija je neprazna jer $\mathcal{F}$ pripada toj familiji. Ako je $\mathcal{L} = \{\mathcal{F}_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ lanac u toj familiji, tada je $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} \mathcal{F}_\lambda$ filter, pa i gornje ograničenje lanca $\mathcal{L}$. Sada prema Cornovoj lemi postoji maksimalni element u toj familiji, koji je ultrafilter. $\square$

Posledica 1.10. *1. Postoji ultrafilter nad X.*

2. Ako $\mathcal{K}$ ima svojstvo konačnog preseka, onda postoji ultrafilter p takav da $\mathcal{K} \subseteq p$.

Dokaz. 1. sledi primenom teoreme 1.9 za trivijalni filter $\{X\}$. 2. Prema lemi 1.5 imamo da je $\langle\mathcal{K}\rangle$ filter, pa tvrđenje sledi primenom teoreme 1.9 na $\langle\mathcal{K}\rangle$. $\square$

Definicija 1.11. 1. Sa βX obeležavamo skup svih ultrafiltera nad X.

2. Za $A \subseteq X$, definišemo $[A] = \{p \in \beta X \mid A \in p\}$.

Lema 1.12. *Neka su $A, B \subseteq X$.*

1. $[\varnothing] = \varnothing$ i $[X] = \beta X$;

2. $[A]^{\complement} = [A^{\complement}]$;

3. $[A \cap B] = [A] \cap [B]$.

Dokaz. 1. Za svaki ultrafilter $p \in \beta X$, $\varnothing \notin p$ i $X \in p$, pa je $[\varnothing] = \varnothing$ i $[X] = \beta X$.

2. Znamo da za $A \subseteq X$ i $p \in \beta X$, $p \in [A]^{\complement}$ ako i samo ako $p \notin [A]$, ako i samo ako $A \notin p$, ako i samo ako $A^{\complement} \in p$, ako i samo ako je $p \in [A^{\complement}]$.

3. Imamo $p \in [A \cap B]$ ako i samo ako $A \cap B \in p$, ako i samo $A, B \in p$ (zbog osobina filtera), ako i samo ako je $p \in [A]$ i $p \in [B]$, tj. $p \in [A] \cap [B]$. $\square$

Napomena. Prema lemi 1.12, podskupovi $[A]$ generišu topologiju čija je to baza. Takođe, ti skupovi su bazni elementi koji su i otvoreni i zatvoreni. Prostor βX sa ovom topologijom zovemo *Stonov prostor.*

Teorema 1.13. *Stonov prostor βX je Hauzdorfov, kompaktan i totalno nepovezan.*

Dokaz. Neka su $p, q \in \beta X, p \neq q$, tada postoji podskup $A \subseteq X$ takav da je $A \in p$ i $A \notin q$. Odatle sledi da je $p \in [A]$ i $q \in [A]^\complement = [A^\complement]$, pa je prostor Hauzdorfov. Neka je sad $\{[A_i] \mid i \in \mathcal{I}\}$ pokrivač baznim skupovima. To je ekvivalentno sa činjenicom da $\bigcap_{i \in \mathcal{I}} [A_i^\complement] = \varnothing$, pa familija $\{A_i^\complement \mid i \in \mathcal{I}\}$ nema svojstvo konačnog preseka, pa postoji konačno mnogo skupova $A_i^\complement$ takvih da je $A_1^\complement \cap \ldots \cap A_n^\complement = \varnothing$, odakle je i $[A_1^\complement] \cap \ldots \cap [A_n^\complement] = \varnothing$; dakle, skupovi $[A_1], \ldots, [A_n]$ čine konačan potpokrivač. Konačno, totalna nepovezanost sledi iz činjenica da je Stonov prostor Hauzdorfov i ima bazu otvoreno-zatvorenih skupova. $\square$

Napomena. Skup X možemo da identifikujemo sa gustim podskupom prostora βX. Za $a \in X$, $\widehat{\{a\}}$ je ultrafilter, pa imamo utapanje $X \to \beta X$ dato sa $a \mapsto \widehat{\{a\}}$. Prema ovoj identifikaciji X je i gust u βX jer za svaki $\varnothing \neq A \in X$ i $a \in A$, $\widehat{\{a\}} \in [A]$.

Glavni ultrafilter $\widehat{\{a\}}$ kraće ćemo označavati $\widehat{a}$.

Definicija 1.14. Neka je G grupa i βG prostor svih ultrafiltera nad njom. Definišemo dejstvo $G \curvearrowright \beta G$ sa

$$g \cdot p = \{gA \mid A \in p\}.$$

Lema 1.15. *1. Gornja formula zaista dobro definiše dejstvo.*

2. Za $g, h \in G$ važi $g \cdot \widehat{h} = \widehat{gh}$.

Dokaz. 1. Za $g \in G$ i p ultrafilter, lako vidimo da $g \cdot p = \{gA \mid A \in p\}$ jeste ultrafilter jer je translacija $A \mapsto gA$ automorfizam Bulove algebre $\mathcal{P}(G)$. Imamo da je $A \in g \cdot p$ ako i samo ako $g^{-1}A \in p$, pa važi

$$A \in g \cdot (h \cdot p) \Leftrightarrow g^{-1}A \in h \cdot p \Leftrightarrow h^{-1}g^{-1}A \in p \Leftrightarrow (gh)^{-1}A \in p \Leftrightarrow A \in (gh) \cdot p.$$

Kako je očigledno i $e \cdot p = p$, gornja definicija zadaje dejstvo.

2. $A \in g \cdot \widehat{h}$ ako i samo ako $g^{-1}A \in \widehat{h}$, tj. ako i samo ako $h \in g^{-1}A$, ako i samo ako $gh \in A$. Poslednje je ekvivalentno sa $A \in \widehat{gh}$. $\square$

Definicija 1.16. Neka je $p \in \beta G$. Definišemo unarnu operaciju ∂_p na podskupovima grupe G sa

$$\partial_p A = \{g \in G \mid g^{-1}A \in p\} = \{g \in G \mid A \in g \cdot p\}.$$

Lema 1.17. *Neka je $p \in \beta G$, $g \in G$ i $A \subseteq G$.*

1. $\partial_p \varnothing = \varnothing$ *i* $\partial_p G = G$;
2. ∂_p *čuva skupovne operacije;*
3. ∂_p *čuva inkluziju, tj.* $\partial_p A \subseteq \partial_p B$, *za* $A \subseteq B \subseteq G$;
4. $\partial_p(gA) = g\partial_p A$;
5. $\partial_{g \cdot p} A = (\partial_p A)g^{-1}$;
6. $\partial_{\widehat{g}} A = Ag^{-1}$.

Dokaz. Deo 1. je očigledan.

2. Dovoljno je dokazati da operacija čuva komplement i presek, tj. $\partial_p(A \cap B) = \partial_p A \cap \partial_p B$, $\partial_p(A^{\complement}) = (\partial_p A)^{\complement}$. Imamo $g \in \partial_p(A \cap B)$ ako i samo ako $A \cap B \in g \cdot p$, ako i samo ako $A \in g \cdot p$ i $B \in g \cdot p$ (osobina filtera), ako i samo ako $g \in \partial_p A \cap \partial_p B$. Imamo takođe $g \in \partial_p(A^{\complement})$ ako i samo ako $A^{\complement} \in g \cdot p$, ako i samo ako $A \notin g \cdot p$, ako i samo ako $g \notin \partial_p A$, što je ekvivalentno sa time da je $g \in (\partial_p A)^{\complement}$.

3. Neka su $A \subseteq B \subseteq G$. Važi $g \in \partial_p A$ ako i samo ako $A \in g \cdot p$, što povlači i $B \in g \cdot p$ (osobina filtera), i to je ekvivalentno sa time da je $g \in \partial_p B$. Dakle, $\partial_p A \subseteq \partial_p B$.

4. Imamo: $h \in \partial_p(gA)$ ako i samo ako $gA \in h \cdot p$, ako i samo ako $A \in g^{-1}h \cdot p$, tj. ako i samo ako $g^{-1}h \in \partial_p A$, što je ekvivalentno sa $h \in g(\partial_p A)$.

5. Važi $h \in \partial_{g \cdot p} A$ ako i samo ako $A \in h \cdot (g \cdot p)$, ako i samo ako $A \in hg \cdot p$, ako i samo ako $hg \in \partial_p A$, što je ekvivalentno sa $h \in (\partial_p A)g^{-1}$.

6. Važi $h \in \partial_{\widehat{g}} A$ ako i samo ako $h^{-1}A \in \widehat{g}$, ako i samo ako $g \in h^{-1}A$, ako i samo ako $hg \in A$, što je ekvivalentno sa $h \in Ag^{-1}$. $\square$

Definicija 1.18. Neka su p, $q \in \beta G$. Definišemo binarnu operaciju na βG sa:

$$p * q = \{A \subseteq G \mid \partial_q A \in p\},$$

tj. $A \in p * q$ ako i samo ako $\partial_q A \in p$.

Lema 1.19. *1. βG je zatvorena za $*$;*

2. $\partial_{p*q}A = \partial_p\partial_q A$;

3. $(\beta G, *)$ je polugrupa;

4. $\widehat{g} * p = g \cdot p$, $\widehat{g} * \widehat{h} = \widehat{gh}$;

5. preslikavanje $\rho_p : \beta G \to \beta G$, dato sa $\rho_p(x) = x * p$ je neprekidno i važi $\rho_p^{-1}[[A]] = [\partial_p A]$.

Dokaz. 1. Primetimo da je $G \in p * q$ jer po lemi 1.17, $\partial_q G = G \in p$, a $\varnothing \notin p * q$ jer $\partial_q \varnothing = \varnothing \notin p$. Neka je sad $A \in p * q$ i $A \subseteq B \subseteq G$. Tada je $\partial_q A \in p$ i $\partial_q A \subseteq \partial_q B$ što povlači $\partial_q B \in p$, tj. $B \in p * q$. Neka su $A, B \in p * q$. Po definiciji je $\partial_q A, \partial_q B \in p$, pa je po lemi 1.17, $\partial_q(A \cap B) = \partial_q A \cap \partial B \in p$, tj. $A \cap B \in p * q$. Odatle zaključujemo da je $p * q$ filter. Pretpostavimo da $A \notin p * q$. Tada $\partial_q A \notin p$, pa $\partial_q(A^\complement) = (\partial_q A)^\complement \in p$, odakle $A^\complement \in p * q$, pa je $p * q$ ultrafilter.

2. Znamo da je $g \in \partial_{p*q}A$ ako i samo ako $g^{-1}A \in p*q$, ako i samo ako $\partial_q(g^{-1}A) \in p$, tj. ako i samo ako $g^{-1}\partial_q A \in p$, što je ekvivalentno sa $g \in \partial_p\partial_q A$.

3. Prema 1 dovoljno je dokazati asocijativnost. Prema 2 imamo $A \in p * (q * r)$ ako i samo ako $\partial_{q*r}A \in p$ ako i samo ako $\partial_q\partial_r A \in p$ ako i samo ako $\partial_r A \in p * q$, što je ekvivalentno sa $A \in (p * q) * r$.

4. Važi $A \in \widehat{g} * p$ ako i samo ako $\partial_p A \in \widehat{g}$, ako i samo ako $g \in \partial_p A$, ako i samo ako $A \in g \cdot p$. Odatle dobijamo i $\widehat{g} * \widehat{h} = g \cdot \widehat{h} = \widehat{gh}$, što dokazuje i drugi deo.

5. Za $x \in \beta G$ imamo: $x \in \rho_p^{-1}[[A]]$ je po definiciji ekvivalentno sa $x * p \in [A]$, ako i samo ako $A \in x * p$, ako i samo ako $\partial_p A \in x$, što je ekvivalentno sa $x \in [\partial_p A]$. $\square$

1.2 Polugrupe sa topologijom

U ovom odeljku pretpostavljamo sledeće:

Pretpostavka. S je polugrupa sa Hauzdorfovom kompaktnom topologijom, takva da su preslikavanja $x \mapsto xa$ neprekidna, za svako $a \in S$.

Napomena. Preslikavanja $x \mapsto xa$, $a \in S$, su i zatvorena kao neprekidna preslikavanja iz kompaktnog u Hauzdorfov prostor.

Definicija 1.20. 1. Skup $I \subseteq S$, $I \neq \varnothing$ zovemo *levim idealom*, u oznaci $I \lhd S$, ako je $I \neq \varnothing$, I je (topološki) zatvoren, i važi $SI \subseteq I$.

2. Za skup $A \subseteq S$, sa $\mathcal{J}(A) = \{x \in A \mid x^2 = x\}$ označavamo skup svih idempotenata u A.

Napomena. Primetimo da kad je $I \lhd S$, za svako $a \in S$ važi i $Ia \lhd S$. Jasno $Ia \neq \emptyset$, imamo $S(Ia) = (SI)a \subseteq Ia$, i Ia je zatvoren kao slika zatvorenog skupa I pri zatvorenom preslikavanju $x \mapsto xa$.

Lema 1.21. *S sadrži minimalni ideal.*

Dokaz. Označavamo sa $\mathcal{F}$ familiju svih ideala. Jasno, $S \in \mathcal{F}$. Po Hauzdorfovom principu možemo da izaberemo maksimalan lanac $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{F}$. Skup $M = \bigcap \mathcal{L}$ je neprazan po kompaktnosti prostora S, zatvoren i važi $SM \subseteq M$, pa je $M \in \mathcal{F}$. Odatle sledi da je M traženi minimalni ideal. □

Lema 1.22. *Za $F \neq \emptyset$, $F \underset{zatv.}{\subseteq} S$ takav da je $F^2 \subseteq F$, važi $\mathcal{J}(F) \neq \emptyset$.*

Dokaz. Neka je $\mathcal{F} = \{Z \subseteq F \mid Z \text{ je neprazan, zatvoren i } Z^2 \subseteq Z\}$; jasno, $F \in \mathcal{F}$. Izaberemo po Hauzdorfovom principu $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{F}$ maksimalan lanac. Tada imamo $Z = \bigcap \mathcal{L}$ neprazan zbog kompaktnosti prostora, zatvoren i važi $Z^2 \subseteq Z$, pa $Z \in \mathcal{L}$ i Z je minimalan neprazan zatvoren podskup od F takav da $Z^2 \subseteq Z$, po konstrukciji. Neka je sad $a \in Z$. Tada je Za takođe neprazan i zatvoren ($x \mapsto xa$ je zatvoreno preslikavanje), i $(Za)(Za) \subseteq Z^2 a \subseteq Za$, tj. $Za \in \mathcal{F}$; kako je $Za \subseteq Z^2 \subseteq Z$, mora da je $Za = Z$, iz minimalnosti Z. Sad definišemo $Y = \{x \in Z \mid xa = a\}$. Kako je $Za = Z$, Y je neprazan. Pošto je $f : Z \to Z$ preslikavanje dato sa $f(x) = xa$ neprekidno, $Y = f^{-1}[\{a\}]$ je zatvoren jer je prostor Hauzdorfov. Konačno, za $x_1, x_2 \in Y$, $x_1 x_2 a = x_1 a = a$, pa i $x_1 x_2$ pripada Y, tj. $Y^2 \subseteq Y$, a kako je $Y \subseteq Z$, dobijemo da je $Y = Z$ (zbog minimalnosti od Z). Dakle, $a \in Y$, pa je $a^2 = a$, i $\mathcal{J}(F) \neq \emptyset$. □

Lema 1.23. *Neka je $M \lhd S$ minimalan ideal. Tada:*

1. *$\mathcal{J}(M) \neq \emptyset$;*
2. *za $u \in \mathcal{J}(M)$ i $x \in M$ važi $xu = x$.*

Dokaz. 1. M zadovoljava uslove leme 1.22.

2. Primetimo da je Mu ideal i $Mu \subseteq M$, pa je $Mu = M$ zbog minimalnosti. Dakle, Za $x \in M$ imamo $y \in M$ takvo da važi $yu = x$. Odakle je $xu = (yu)u = yu^2 = yu = x$. □

Teorema 1.24. *Neka su M i N minimalni ideali u S, i neka je $v \in \mathfrak{J}(N)$. Tada je $x \mapsto xv$ homeomorfizam ideala M i N.*

Dokaz. Znamo, Mv je ideal, i iz $Mv \subseteq N$ sledi $Mv = N$, iz minimalnosti N. Pa imamo dobro definisano preslikavanje $f : M \to N$, $f(x) = xv$, koje je i neprekidno kao restrikcija neprekidnog preslikavanja $x \mapsto xv$. Definišemo sad skup $Z = \{x \in M \mid xv = v\}$, koji je neprazan (jer $Mv = N$) i zatvoren podskup od M (kao inverzna slika $f^{-1}[\{v\}]$) takav da važi $Z^2 \subseteq Z$. Prema lemi 1.22, Z sadrži idempotent, tj. $\exists u \in \mathfrak{J}(Z)$. Odatle je i $u \in \mathfrak{J}(M)$ i $uv = v$. Na isti način, u odnosu na u možemo naći idempotent $v' \in \mathfrak{J}(N)$ takav da je $v'u = u$. Tada je:

$$v = uv = v'uv = v'v = v'$$

gde je poslednja jednakost ispunjena prema lemi 1.23. Dakle, važi $vu = u$. Na isti način kao i za f, imamo neprekidno preslikavanje $g : N \to M$ dato sa $g(y) = yu$. Kako važi $g(f(x)) = g(xv) = xvu = xu = x$, i $f(g(y)) = f(yu) = yuv = yv = y$, gde u oba izvođenja poslednja jednakost važi prema lemi 1.23, vidimo da su f i g uzajmno inverzna neprekidna preslikavanja. Dakle, f je homeomorfizam. □

1.3 Topološke grupe

Radimo po rezultatima pokazanim u [1].

Definicija 1.25. Topološka grupa je topološki prostor G koji je takođe i grupa, takav da su grupne operacije

$$\cdot : G \times G \to G,\ (x,y) \mapsto x \cdot y \quad \text{i}$$

$$^{-1} : G \to G,\ x \mapsto x^{-1}$$

neprekidne, gde je topologija na $G \times G$ Tihonovljeva.

Primer 1.26.
1. $(\mathbb{R}, +, -, 0)$ je topološka grupa sa uobičajenom euklidskom topologijom.
2. $(\mathbb{Z}, +, -, 0)$ je topološka grupa sa diskretnom topologijom (svaka grupa sa diskretnom ili antidiskretnom topologijom je topološka).
3. $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$, tj. grupa matrica $n \times n$ sa nenula determinantom sa matričnim množenjem, i $\mathrm{SL}(n, \mathbb{C})$ grupa matrica sa determinantom jednakom 1, topološke su grupe sa topologijom nasleđenom iz $\mathbb{C}^{n^2}$.

Teorema 1.27. *Neka je (G, e) topološka grupa, gde je e neutral, i $a \in G$. Levi i desni translati*

$$L_a : G \to G,\ g \mapsto ag, \quad i$$

$$R_a : G \to G,\ g \mapsto ga$$

su homeomorfizmi.

Dokaz. Preslikavanje L_a je zapravo kompozicija dvaju neprekidnih preslikavanja:

$$G \to G \times G,\ g \mapsto (a, g),\ \text{za } g \in G,\ a \in G \text{ fiksirano, i}$$

$$G \times G \to G,\ (x, y) \mapsto xy,\ \text{za } x, y \in G.$$

Takođe, neprekidno preslikavanje $L_{a^{-1}}$ je inverz od L_a, jer $L_{a^{-1}}(L_a(g)) = L_{a^{-1}}(ag) = a^{-1}ag = g = aa^{-1}g = L_a(a^{-1}g) = L_a(L_{a^{-1}}(g))$. □

Napomena. Neka je (G, e) topološka grupa i $\mathcal{B}$ lokalna baza oko e (tj. familija otvorenih skupova koji sadrže e takva da svaki otvoren skup koji sadrži e sadrži i neki skup iz $\mathcal{B}$). Primetimo da za svaki element $g \in G$ i otvorenu okolinu $V \in \mathcal{B}$ od e važi $gV = L_g(V)$ i $Vg = R_g(V)$ su otvoreni skupovi.

Teorema 1.28. *Neka je G topološka grupa, i neka je $H \subseteq G$ otvorena podgrupa (tj. podgrupa koja je i otvoren skup u G). Tada je H i zatvorena.*

Dokaz. Neka je $y \in G \setminus H$. Kako je koset yH otvorena okolina od y, koja je disjunktna sa H, možemo da vidimo da je $G \setminus H = \bigcup_{y \in G \setminus H} yH$, tj. unija otvorenih skupova, pa je sam i otvoren. Odatle je njegov komplement H zatvoren. □

1.4 Grupe automorfizama

Neka je $\mathcal{L}$ jezik prvog reda i $\mathcal{M} = \{X, \{R_i\}_{i \in I}, \{f_j\}_{j \in J}, \{c_k\}_{k \in K}\}$ jedna $\mathcal{L}-$*struktura*. Posmatramo grupu permutacija skupa X, $\mathrm{Sym}(X)$, sa operacijom kompozicije funkcija. Grupa automorfizama od $\mathcal{M}$, $\mathrm{Aut}(\mathcal{M})$, je podgrupa elemenata od $\mathrm{Sym}(X)$ koji čuvaju $\mathcal{L}$-strukturu, tj. za $\sigma \in \mathrm{Sym}(X)$, $\sigma \in \mathrm{Aut}(\mathcal{M})$ akko

1. za sve $i \in I$ i $x_1, \ldots, x_n \in X$, $R_i(x_1, \ldots, x_n) \iff R_i(\sigma(x_1), \ldots, \sigma(x_n))$;

2. za sve $j \in J$ i $x_1, \ldots, x_n \in X$, $\sigma(f_j(x_1, \ldots, x_n)) = f_j(\sigma(x_1), \ldots, \sigma(x_n))$; i

3. za sve $k \in K$, $\sigma(c_k) = c_k$.

Definicija 1.29. Struktura $\mathcal{M}$ je *lokalno konačna* ako je svaka konačno generisana podstruktura od $\mathcal{M}$ konačna. $\mathcal{M}$ je *ultrahomogena* ako se svaki izomorfizam između dve konačne podstrukture proširuje do automorfizma od $\mathcal{M}$.

Napomena. Ako $\mathcal{L}$ ne sadrži funkcijske simbole ($J = \varnothing$) i ima konačno mnogo simbola konstanti ($|K| < \infty$), $\mathcal{M}$ je lokalno konačna.

Na grupi $\mathrm{Sym}(X)$ možemo da definišemo topologiju na sledeći način. Posmatrajmo X kao diskretni topološki prostor. Tada X^X, familija funkcija $X \to X$, ima Tihonovljevu topologiju na sebi, pa $\mathrm{Sym}(X)$, kao podskup od X^X, nasleđuje topologiju potprostora. Tada je baza topologije na $\mathrm{Sym}(X)$ određena okolinama neutrala $S_A = \{g \in \mathrm{Sym}(X) \mid g(a) = a,\ a \in A\}$, gde je $A \subseteq X$ konačan podskup.

Neka je sad $G \leqslant \mathrm{Sym}(X)$ podgrupa, i neka je $A \subseteq X$ konačan podskup, definišemo:

- *tačka-po-tačka stabilizator* od A, $G_A = \{g \in G \mid (\forall a \in A)\ ga = a\}$; i
- *skupovni stabilizator* od A, $G_{(A)} = \{g \in G \mid g[A] = A\}$.

Teorema 1.30. *Neka je $G \leqslant \mathrm{Sym}(X)$. Sledeći iskazi su ekvivalentni:*

1. *G je zatvorena podgrupa;*
2. *$G = \mathrm{Aut}(\mathcal{M})$, za neku strukturu $\mathcal{M}$ na skupu X;*
3. *$G = \mathrm{Aut}(\mathcal{M})$, za neku ultrahomogenu, lokalno konačnu relacijsku strukturu $\mathcal{M}$ na skupu X.*

Dokaz. ($1 \Rightarrow 3$) Uočimo dejstvo $G \curvearrowright X^n$ dato sa $g \cdot (x_1, \ldots, x_n) = (gx_1, \ldots, gx_n)$. Neka su $\mathcal{O}_{n,i}$, $i \in I_n$, orbite tog dejstva. Uočimo relacijsku strukturu

$$\mathcal{M} = (X, \{\mathcal{O}_{n,i}\}_{n \geqslant 1, i \in I_n}).$$

Dokazaćemo da je $\mathcal{M}$ željena struktura.

Dokažimo najpre da je $G = \mathrm{Aut}(\mathcal{M})$. Jasno je da je $G \leqslant \mathrm{Aut}(\mathcal{M})$. Neka $\sigma \notin G$. Kako je G zatvorena podgrupa, postoji bazna okolina O permutacije σ takva da $O \cap G = \varnothing$; neka su $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n \in X$ takvi da je $O = \{\pi \in \mathrm{Sym}(X) \mid \pi(a_i) = b_i\}$, i neka je $\mathcal{O}_{n,i} = G \cdot (a_1, \ldots, a_n)$. Kako je $G \cap O = \varnothing$, $(b_1, \ldots, b_n) \notin \mathcal{O}_{n,i}$, pa σ nije automorfizam strukture $\mathcal{M}$. Dakle, $G = \mathrm{Aut}(\mathcal{M})$.

Struktura $\mathcal{M}$ je lokalno konačna jer je relacijska, pa dokažimo da je i ultrahomogena. Neka su $(a_1, \ldots, a_n)$ i $(b_1, \ldots, b_n)$ nosači dveju konačnih podstruktura, i f izomorfizam tih struktura, tj.

$$(a_1, \ldots, a_n) \xrightarrow[\cong]{f} (b_1, \ldots, b_n).$$

Jasno je tad da $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathcal{O}_{n,i}$ ako i samo ako $(b_1, \ldots, b_n) \in \mathcal{O}_{n,i}$, jer f čuva relacije. Odatle iz činjenice da pripadaju istoj orbiti, postoji $g \in G$ takvo da je $g \cdot (a_1, \ldots, a_n) = (b_1, \ldots, b_n)$; g je željeni automorfizam koji proširuje f.

($3 \Rightarrow 2$) je očigledno.

($2 \Rightarrow 1$) Neka je $\pi \in \mathrm{Sym}(X) \setminus G$. Kako $\pi \notin G = \mathrm{Aut}(\mathcal{M})$, imamo tri slučaja:

1° π ne poštuje relaciju R. Neka su $a_1, \ldots, a_n \in X$ takvi da, bez umanjenja opštosti, $R(a_1, \ldots, a_n)$, ali $\neg R(\pi(a_1), \ldots, \pi(a_n))$. Jasno je da π pripada baznoj okolini $O = \{\chi \mid \chi(a_1) = \pi(a_1), \ldots, \chi(a_n) = \pi(a_n)\}$ i da je $O \cap G = \varnothing$.

2° π ne poštuje funkciju f. Neka su $a_1, \ldots, a_n \in X$ takvi da $\pi(f(a_1, \ldots, a_n)) \neq f(\pi(a_1), \ldots, \pi(a_n))$. Jasno da π pripada baznoj okolini

$$O = \{\chi \mid (\forall i \leqslant n)\ \chi(a_i) = \pi(a_i),\ \chi(f(a_1, \ldots, a_n)) = \pi(f(a_1, \ldots, a_n)\},$$

i da je $O \cap G = \varnothing$.

3° π ne poštuje konstantu c. Tada $\pi(c) \neq c$, pa π pripada predbaznoj okolini $O = \{\chi \mid \chi(c) = \pi(c)\}$, i jasno $O \cap G = \varnothing$.

Dakle, ako $\pi \in \mathrm{Sym}(X) \setminus G$, onda postoji okolina O permutacije π disjunktna sa G, pa $\pi \notin \overline{G}$. Odatle, $G = \overline{G}$, tj. G je zatvorena podgrupa. □

1.5 Tokovi

Definicija 1.31. Neka je G topološka grupa koja dejstvuje na topološki prostor X (X će uvek biti kompaktan Hauzdorfov prostor).

1. X je *G-tok* ako je dejstvo neprekidno kao preslikavanje $G \times X \to X$;

2. $Y \subseteq X$ je *G-podtok* od X ako je Y zatvoren podskup od X koji je invariajnatan u odnosu na dejstvo (tj. Y je zatvoren i sam po sebi G-tok);

3. G-tok X je *minimalan* ako nema prave G-podtokove; G-podtok od X je *minimalan* ako je minimalan kao G-tok;

4. *G-homomorfizam* G-tokova X i Y je neprekidno preslikavanje $\varphi : X \to Y$ koje poštuje dejstvo, tj. $(\forall g \in G, x \in X)\ \varphi(g \cdot x) = g \cdot \varphi(x)$;

5. G-tok Y je *količnik* G-toka X ako postoji G-homomorfizam $X \xrightarrow{na} Y$;

6. minimalni G-tok je *univerzalni minimalni G-tok* ako je svaki minimalni G-tok njegov količnik;

7. *G-ambit* (X, x_0) je G-tok X sa istaknutom tačkom $x_0 \in X$ koja ima gustu orbitu: $\overline{G \cdot x_0} = X$;

8. *G-homomorfizam* G-ambita $(X, x_0) \to (Y, y_0)$ je G-homomorfizam tokova koji dodatno slika x_0 u y_0;

9. G-ambit (Y, y_0) je *količnik* G-ambita (X, x_0) ako postoji G-homomorfizam $(X, x_0) \xrightarrow{na} (Y, y_0)$;

10. G-ambit (X, x_0) je *najveći* ako je svaki drugi G-ambit njegov količnik.

Dokazaćemo da svaka topološka grupa ima najveći G-ambit, kao i minimalni univerzalni G-tok.

Sada ćemo da damo primer G-toka koji će nam biti bitan kasnije.

Definicija 1.32. Neka je X beskonačan skup i $G \leqslant \mathrm{Sym}(X)$ podgrupa.

1. Sa $\mathrm{LO}(X)$ označavamo familiju linearnih uređenja na X. Kako $< \in \mathrm{LO}(X)$ možemo da vidimo kao element u $2^{X \times X}$, prirodno imamo $\mathrm{LO}(X) \subseteq 2^{X \times X}$, pa $\mathrm{LO}(X)$ nasleđuje topologiju potprostora iz $2^{X \times X}$, gde je topologija na $2^{X \times X}$ Tihonovljeva, dobijena od diskretne topologije na 2. Primetimo da je $2^{X \times X}$ kompaktan, Hauzdorfov prostor.

2. Grupa G dejstvuje na $\mathrm{LO}(X)$ sa: $a(g\cdot <)b$ ako i samo ako $g^{-1}a < g^{-1}b$.

Lema 1.33.
1. *$\mathrm{LO}(X)$ je zatvoren u $2^{X \times X}$. Dakle, $\mathrm{LO}(X)$ je kompaktan Hauzdorfov prostor.*

2. *$\mathrm{LO}(X)$ je G-tok u odnosu na definisano dejstvo.*

Dokaz. 1. Neka $\rho \in 2^{X \times X} \setminus \mathrm{LO}(X)$. Kako relacija ρ nije strogo linearno uređenje na X, imamo tri slučaja:

1° ρ ne zadovoljava irefleksivnost, tj. imamo $x \in X$ takvo da $x \rho x$. Tada ρ pripada predbaznoj okolini $O = \{\chi \in 2^{X \times X} \mid \chi(x,x) = 1\}$, i jasno je da $O \cap \mathrm{LO}(X) = \varnothing$.

2° ρ ne zadovoljava tranzitivnost, tj. imamo $x, y, z \in X$ takve da $x \rho y$, $y \rho z$ i $x \not\rho z$. Tada ρ pripada baznoj okolini $O = \{\chi \in 2^{X \times X} \mid \chi(x,y) = 1,\ \chi(y,z) = 1,\ \chi(x,z) = 0)\}$, i jasno je $O \cap \mathrm{LO}(X) = \varnothing$.

3° ρ ne zadovoljava linearnost, tj. imamo $x \neq y \in X$ takve da $x \not\rho y$ i $y \not\rho x$. Tada ρ pripada baznoj okolini $O = \{\chi \in 2^{X \times X} \mid \chi(x,y) = 0 = \chi(y,x)\}$, i ponovo $O \cap \mathrm{LO}(X) = \varnothing$.

Prethodno pokazuje $\overline{\mathrm{LO}(X)} = \mathrm{LO}(X)$, pa je $\mathrm{LO}(X)$ zatvoren skup u $2^{X \times X}$.

2. Lako vidimo da data formula, $a(g\cdot <)b$ ako i samo ako $g^{-1}a < g^{-1}b$, dobro definiše dejstvo $G \curvearrowright \mathrm{LO}(X)$. Dokažimo da je ovo dejstvo $\varphi : G \times \mathrm{LO}(X) \to \mathrm{LO}(X)$ neprekidno. Dovoljno je da dokažemo da je inverzna slika predbaznog skupa otvorena. Uočimo predbazni skup $O = \{\lhd \in \mathrm{LO}(X) \mid a \lhd b\}$ u $\mathrm{LO}(X)$, i neka je element $(g, <) \in \varphi^{-1}[\mathcal{O}]$; dakle, $g^{-1}a < g^{-1}b$. Dovoljno je da dokažemo da je otvoreni boks

$$\Pi = gG_{\{g^{-1}a, g^{-1}b\}} \times \{\lhd \in \mathrm{LO}(X) \mid g^{-1}a \lhd g^{-1}b\},$$

koji očigledno sadrži $(g, <)$, sadržan u inverznoj slici od O pri dejstvu φ. Neka je $(gh, \lhd) \in \Pi$ proizvoljan element. Primetimo da

$$a(gh \cdot \lhd)b \ \Leftrightarrow\ h^{-1}g^{-1}a \lhd h^{-1}g^{-1}b \ \Leftrightarrow\ g^{-1}a \lhd g^{-1}b$$

jer $h \in G_{\{g^{-1}a, g^{-1}b\}}$. Kako i $g^{-1}a \lhd g^{-1}b$, zaključujemo $gh \cdot \lhd \in O$. Dakle, $\varphi^{-1}[O]$ je otvoren. □

1.6 Age($\mathcal{M}$)

Definicija 1.34. Klasu svih konačno-generisanih podstruktura strukture $\mathcal{M}$ označavamo sa $\mathrm{Age}(\mathcal{M}) = \{A \leqslant \mathcal{M} \mid A \text{ konačno generisana}\}$.

Definicija 1.35. Neka je $\mathcal{K}$ klasa.

1. Kažemo da $\mathcal{K}$ ispunjava *nasledno svojstvo* (HP) ako za $A \in \mathcal{K}$ i konačno generisanu podstrukturu B od A važi da $\mathcal{K}$ sadrži i B.

2. Kažemo da $\mathcal{K}$ ispunjava *svojstvo zajedničkog utapanja* (JEP) ako za $A, B \in \mathcal{K}$ postoji $C \in \mathcal{K}$ takva da se A, B utapaju u C:

$$\begin{tikzcd}
& C & \\
A \arrow[ur, dashed, hook] & & B \arrow[ul, dashed, hook']
\end{tikzcd}$$

3. Kažemo da $\mathcal{K}$ ispunjava *svojstvo amalgamacije* (AP) ako za $A, B_1, B_2 \in \mathcal{K}$, $f_1 : A \hookrightarrow B_1$ i $f_2 : A \hookrightarrow B_2$, postoje $C \in \mathcal{K}$, $g_1 : B_1 \hookrightarrow C$ i $g_2 : B_2 \hookrightarrow C$ takvi da $g_1 f_1 = g_2 f_2$:

$$\begin{tikzcd}
& C & \\
B_1 \arrow[ur, dashed, hook, "g_1"] \arrow[rr, phantom, "\circlearrowleft"] & & B_2 \arrow[ul, dashed, hook', "g_2"'] \\
& A \arrow[ul, hook', "f_1"] \arrow[ur, hook, "f_2"'] &
\end{tikzcd}$$

Teorema 1.36. *Neka je $\mathcal{M}$ struktura.*

1. $\mathrm{Age}(\mathcal{M})$ *zadovoljava HP i JEP.*

2. Ako je $\mathcal{M}$ ultrahomogena struktura, onda $\mathrm{Age}(\mathcal{M})$ *zadovoljava i AP.*

Dokaz. Deo 1. je očigledan. Pretpostavimo da je $\mathcal{M}$ ultrahomogena struktura, i pretpostavimo da su $A, B_1, B_2 \in \mathrm{Age}(\mathcal{M})$, $f_1 : A \hookrightarrow B_1$ i $f_2 : A \hookrightarrow B_2$. Primetimo da je $f_2 f_1^{-1} : f_1(A) \xrightarrow{\cong} f_2(A)$ izomorfizam, pa iz ultrahomogenosti od $\mathcal{M}$ sledi da postoji automorfizam φ koji ga proširuje. Neka je $C = \langle \varphi(B_1) \cup B_2 \rangle \leqslant \mathcal{M}$. Primetimo $C \in \mathrm{Age}(\mathcal{M})$, i definišimo

$$g_1 : B_1 \to C,\ g_1(b) = \varphi(b),\ b \in B_1$$
$$g_2 : B_2 \to C,\ g_2(b) = b,\ b \in B_2.$$

Po konstrukciji, g_1, g_2 su utapanja u C i važi za svako $a \in A$:

$$g_1 f_1(a) = \varphi f_1(a) = f_2 f_1^{-1} f_1(a) = f_2(a) = g_2 f_2(a).$$

Dakle, $g_1 f_1 = g_2 f_2$. $\square$

Glava 2

Samuelova kompaktifikacija

2.1 Najveći ambit σG

U ovom odeljku ćemo dokazati da svaka topološka grupa ima najveći ambit. Podsetimo se da je G-ambit (X, x_0) *najveći* ako za svaki G-ambit (Y, y_0) postoji surjektivni G-homomorfizam $(X, x_0) \to (Y, y_0)$. Radi lakšeg računa, pretpostavićemo da grupa G ima lokalnu bazu $\mathcal{B}$ oko neutrala sačinjenu od otvorenih podgrupa, i da je $\mathcal{B}$ zatvorena za konačne preseke i konjugaciju ($V \in \mathcal{B}$ povlači $gVg^{-1} \in \mathcal{B}$). Ova pretpostavka je ispunjena za grupe koje ćemo izučavati ovde, ali napomenimo da svi rezultati izloženi ovde, uz nešto tehnički složenije dokaze, važe i u opštem slučaju.

Sa G označavamo fiksiranu topološku grupu, a sa $\mathcal{B}$ lokalnu bazu oko neutrala otvorenih podgrupa.

Definicija 2.1. Neka je $p \in \beta G$, $V \in \mathcal{B}$ otvoreni bazni element oko neutrala u G. Definišemo $p' = \{VA \mid V \in \mathcal{B}, A \in p\}$.

Napomena. $p' \subseteq p$ jer $e \in V$, pa je $VA \supseteq A$, i $VA \in p$.

Na βG definišemo relaciju $\sim$ sa: $p \sim q$ ako i samo ako $p' = q'$. Jasno je da je $\sim$ relacija ekvivalencije na βG. Klase ekvivalencije $[p]_\sim$ označavamo sa $\widetilde{p}$. Specijalno, $\widetilde{g}$ je klasa ekvivalencije glavnog ultrafiltera $[\widehat{g}]_\sim$. Količnički skup $\beta G/_\sim$ obeležavamo sa σG; σG je topološki prostor sa količničkom topologijom, tj. skup $O \subseteq \sigma G$ je otvoren ako samo ako je $\pi^{-1}[O]$ otvoren, gde je $\pi : \beta G \to \sigma G$ količničko preslikavanje $\pi(p) = \widetilde{p}$. Količnički prostor σG naziva se *Samuelova kompaktifikacija* grupe G.

Lema 2.2. *Sledeći iskazi su ekvivalentni:*

1. $p \sim q$;

2. $(\forall V \in \mathcal{B})\ (\forall A \in p)\ VA \in q$;

3. $(\forall V \in \mathcal{B})\ (\forall A \in q)\ VA \in p$;

Dokaz. Iz simetričnosti 2 i 3 dovoljno je dokazati $(1 \Rightarrow 2)$, $(2 \wedge 3 \Rightarrow 1)$ i $(2 \Rightarrow 3)$.

$(1 \Rightarrow 2)$ Iz $p' \subseteq p$, $q' \subseteq q$, imamo da za sve $V \in \mathcal{B}$, $A \in p$, $VA \in p' = q'$, pa $VA \in q$.

$(2 \wedge 3 \Rightarrow 1)$ Dokažimo $p' \subseteq q'$. Neka $V \in \mathcal{B}$ i $A \in p$. Prema 2, $VA \in q$, pa i $VA = (VV)A = V(VA) \in q'$. Inkluzija $q' \subseteq p'$ slično sledi iz 3.

$(2 \Rightarrow 3)$ Neka je $V \in \mathcal{B}$, $A \in q$. Pretpostavimo da $VA \notin p$, tj. $(VA)^{\complement} \in p$. Tada prema 2, $V(VA)^{\complement} \in q$, pa je i skup $A \cap V(VA)^{\complement}$ neprazan jer pripada q, time postoje $a \in A, v \in V, b \in (VA)^{\complement}$ takvi da je $a = vb$; međutim, tada $b = v^{-1}a \in VA$, što je kontradikcija. □

Prethodna karakterizacija direktno daje:

Posledica 2.3. $\widetilde{p} = \bigcap\limits_{\substack{V \in \mathcal{B} \\ A \in p}} [VA]$. *Specijalno, klasa $\widetilde{p}$ je zatvoren skup u βG.*

Lema 2.4. 1. *Za $Z \subseteq \beta G$ zatvoren skup takav da je $\widetilde{p} \cap Z = \varnothing$, postoje $V \in \mathcal{B}, A \in p$ takvi da je $[VA] \cap Z = \varnothing$.*

2. *Ako $p \nsim q$, tada postoje $V, W \in \mathcal{B}$, $A \in p$, $B \in q$ takvi da $[VA] \cap [WB] = \varnothing$.*

Dokaz. 1. Prema posledici 2.3, $\widetilde{p} \cap Z = \varnothing$ daje $\bigcap\limits_{\substack{V \in \mathcal{B} \\ A \in p}} [VA] \cap Z = \varnothing$ pa iz kompaktnosti prostora βG postoje $V_i \in \mathcal{B}, A_i \in p$ takvi da je $\bigcap\limits_{i=1}^{n} [V_i A_i] \cap Z = \varnothing$. Uzmimo sad $V = V_1 \cap \ldots \cap V_n \in \mathcal{B}$ i $A = A_1 \cap \ldots \cap A_n \in p$. Jasno, $[VA] \subseteq \bigcap\limits_{i=1}^{n} [V_i A_i]$, pa sledi $[VA] \cap Z = \varnothing$.

2. Pošto je $\sim$ relacija ekvivalencije, $p \nsim q$ implicira $\widetilde{p} \cap \widetilde{q} = \varnothing$. Prema 1. postoje $V \in \mathcal{B}$ i $A \in p$ takvi da je $[VA] \cap \widetilde{q} = \varnothing$. Ponovo primenjujući 1. postoje $W \in \mathcal{B}, B \in q$ takvi da važi $[VA] \cap [WB] = \varnothing$. □

Lema 2.5. 1. *$p \sim q$ povlači $g \cdot p \sim g \cdot q$;*

2. Ako $p \sim q$, tada $(\forall V \in \mathcal{B})$ $(\forall A \subseteq G)$ $\partial_p(VA) = \partial_q(VA)$;

3. Za $V \in \mathcal{B}, A \subseteq G$, i $p \in \beta G$ je $V\partial_p A \subseteq \partial_p(VA)$;

4. Ako $p \sim q$, $r \sim s$, onda je $p * r \sim q * s$.

Dokaz. 1. Dovoljno je, prema lemi 2.2, da proverimo $(\forall V \in \mathcal{B}, A \in g \cdot p)$ $VA \in g \cdot q$. Neka je $V \in \mathcal{B}$, $A \in g \cdot p$. Tada je $g^{-1}A \in p$, i kako je $g^{-1}Vg \in \mathcal{B}$, iz $p \sim q$ (tj. karakterizacije 2 iz leme 2.2) dobijamo $g^{-1}VA = (g^{-1}Vg)(g^{-1}A) \in q$. Dakle, $VA \in g \cdot q$.

2. Neka je $p \sim q$, $V \in \mathcal{B}$, i $A \subseteq G$. Imamo $g \in \partial_p(VA)$ ako i samo ako $VA \in g \cdot p$, tj. ako i samo ako $VA \in g \cdot q$ (prema 1. i karakterizaciji 2.2 i činjenici da $VA = V(VA)$), ako i samo ako $g \in \partial_q(VA)$.

3. Neka je $v \in V$ i $g \in \partial_p A$, tj. $A \in g \cdot p$. Tada $v^{-1}VA = VA \in g \cdot p$ jer $A \subseteq VA$, pa je $VA \in v \cdot (g \cdot p) = vg \cdot p$, tj. $vg \in \partial_p(VA)$.

4. Dovoljno je da dokažemo da $p \sim q$ povlači $p * r \sim q * r$ i $r * p \sim r * q$. Neka je $V \in \mathcal{B}$, $A \in p * r$, tj. $\partial_r A \in p$. Lema 2.2 daje $V\partial_r A \in q$, pa je i $\partial_r(VA) \in q$ prema 3, odakle je i $VA \in q * r$; dakle, $p * r \sim q * r$ prema lemi 2.2. Sa druge strane, neka je $V \in \mathcal{B}$ i $A \in r * p$, tj. $\partial_p A \in r$. Tada je i $V\partial_p A \in r$, pa je i $\partial_p(VA) \in r$ prema 3, odakle je $\partial_q(VA) \in r$ prema 2, tj. $VA \in r * q$; dakle, $r * p \sim r * q$ prema lemi 2.2. □

Za $V \in \mathcal{B}$ i $A \subseteq G$ direktnu sliku $\pi[[VA]]$ ćemo obeležavati sa $[\![VA]\!]$. Sledeća lema dokazuje da ovakvi skupovi čine bazu za Samuelovu kompaktifikaciju:

Lema 2.6. *1. $\widetilde{p} \in [\![VA]\!]$ u σG ako i samo ako $\widetilde{p} \subseteq [VA]$ (kao skup u βG);*

2. $\pi^{-1}[[\![VA]\!]] = [VA]$;

3. $[\![VA]\!]$ je otvoreno-zatvoreni skup;

4. $[\![VA]\!]$ čine bazu za topologiju na σG.

Dokaz. 1. $\widetilde{p} \in [\![VA]\!] = \pi[[VA]]$ znači da postoji $q \sim p$ takav da je $q \in [VA]$, tj. $VA \in q$. Prema lemi 2.2, $VA = V(VA) \in p$, pa prema posledici 2.3, $\widetilde{p} \subseteq [V(VA)]$. Ponovo, kako je $V(VA) = VA$, sledi i $\widetilde{p} \subseteq [VA]$. Drugi smer je očigledan.

2. Jasno, $[VA] \subseteq \pi^{-1}[[\![VA]\!]] = \pi^{-1}[\pi[[VA]]]$ jer je uvek $S \subseteq f^{-1}[f[S]]$ za bilo koju funkciju f i skup S. Neka je $p \in \pi^{-1}[[\![VA]\!]]$, tj. $\widetilde{p} \in [\![VA]\!]$. Tada je $\widetilde{p} \subseteq [VA]$ prema 1, pa specijalno i $p \in [VA]$.

3. sledi direktno iz prethodne tačke jer je $[VA]$ otvoreno-zatvoreni skup, i inverzna slika otvoreno-zatvorenog skupa pri količničkom preslikavanju je otvoreno--zatvorena.

4. Neka je $O \subseteq \sigma G$ otvoren skup, tj. $\pi^{-1}[O]$ je otvoren u βG, i neka je $\widetilde{p} \in O$. Treba da nađemo $[\![VA]\!]$ takav da $\widetilde{p} \in [\![VA]\!] \subseteq O$. Primetimo da iz $\widetilde{p} \in O$ sledi $\widetilde{p} \subseteq \pi^{-1}[O]$, tj. $\bigcap\limits_{\substack{V\in\mathcal{B}\\ A\in p}}[VA] \subseteq \pi^{-1}[O]$. Zbog kompaktnosti imamo da postoje $V_i \in \mathcal{B}$ i $A_i \in p$ za $1 \leqslant i \leqslant n$, takvi da je $\bigcap\limits_{i=1}^{n}[V_iA_i] \subseteq \pi^{-1}[O]$. Neka su sad $V = \bigcap\limits_{i=1}^{n} V_i \in \mathcal{B}$ i $A = \bigcap\limits_{i=1}^{n} \in p$. Tada važi $[VA] \subseteq \bigcap\limits_{i=1}^{n}[V_iA_i] \subseteq \pi^{-1}[O]$, tj. imamo da je $\widetilde{p} \in [\![VA]\!] = \pi[[VA]] \subseteq \pi[\pi^{-1}[O]] = O$, gde poslednja jednakost važi jer je količničko preslikavanje π „na". □

Teorema 2.7. *Prostor σG je kompaktan, Hauzdorfov prostor.*

Dokaz. Jasno, σG je kompaktan kao neprekidna slika kompaktnog prostora βG. Neka su $\widetilde{p}$ i $\widetilde{q}$ različite tačke, tj. $\widetilde{p} \cap \widetilde{q} = \varnothing$ kao skupovi u βG. Tada po lemi 2.4 imamo $V, W \in \mathcal{B}$ i $A \in p, B \in q$ takve da je $[VA] \cap [WB] = \varnothing$. Kako $p \in [VA]$, $q \in [WB]$, to i $\widetilde{p} \in [\![VA]\!]$ i $\widetilde{q} \in [\![WB]\!]$, i važi i $[\![VA]\!] \cap [\![WB]\!] = \varnothing$ jer je $\pi^{-1}[[\![VA]\!] \cap [\![WB]\!]] = \pi^{-1}[[\![VA]\!]] \cap \pi^{-1}[[\![WB]\!]] = [VA] \cap [WB] = \varnothing$ i π je „na". Time smo dokazali da je σG Hauzdorfov. □

Koristeći lemu 2.5 imamo dobro definisano dejstvo $G \curvearrowright \sigma G$ dato sa $g \cdot \widetilde{p} = \widetilde{g \cdot p}$. Prema lemi 1.15, za $g, h \in G$ je $g \cdot \widetilde{h} = \widetilde{g \cdot \widehat{h}} = \widetilde{gh}$.

Sledeći rezultat ćemo dokazati kroz niz koraka:

Teorema 2.8. *$(\sigma G, \widetilde{e})$ je najveći G-ambit.*

Dokaz. Po teoremi 2.7 znamo da je σG kompaktan i Hauzdorfov. Treba sad da dokažemo da je gore zadato dejstvo neprekidno, da $\widetilde{e}$ ima gustu orbitu, i da za svaki G-ambit (X, x_0) postoji homomorfizam G-tokova $f : \sigma G \to X$ takav da je $f(\widetilde{e}) = x_0$ i da je f „na", tj. da je X količnik od σG.

Korak 1: Dejstvo $G \curvearrowright \sigma G$ je neprekidno.

Dokaz. Neka je $\varphi : G \times \sigma G \to \sigma G$ dato dejstvo, i neka je $[\![VA]\!] \subseteq \sigma G$ bazni element, i neka je $(g, \widetilde{p}) \in \varphi^{-1}[[\![VA]\!]]$; dakle, $\widetilde{g \cdot p} = g \cdot \widetilde{p} \in [\![VA]\!]$. Posmatramo $Vg \times [\![g^{-1}VA]\!]$ otvoreni boks oko elementa $(g, \widetilde{p})$. Zaista, Vg jeste otvorena okolina oko g u G jer su translacije homeomofizmi. Kako je $\widetilde{g \cdot p} \in [\![VA]\!]$, prema lemi 2.6 važi $\widehat{g \cdot p} \subseteq [VA]$, tj. $VA \in g \cdot p$, odnosno $g^{-1}VA \in p$, pa je $p \in [g^{-1}VA]$, odakle $\widetilde{p} \in [\![g^{-1}VA]\!]$; iz činjenice da je $g^{-1}VA = (g^{-1}Vg)(g^{-1}A)$ sledi da je i $[\![g^{-1}VA]\!]$ bazna okolina u σG. Neka je sad $v \in V$, i $\widetilde{q} \in [\![g^{-1}VA]\!]$, tj. $g^{-1}VA \in q$, pa je $VA = vVA = vgg^{-1}VA \in vg \cdot q$, tj. $vg \cdot \widetilde{q} = \widetilde{vg \cdot q} \in [\![VA]\!]$, odnosno $Vg \times [\![g^{-1}VA]\!] \subseteq \varphi^{-1}[[\![VA]\!]]$, čime je dokazano da je dejstvo neprekidno. □

Korak 2: Orbita od $\widetilde{e}$ je gusta.

Dokaz. Kako je $g \cdot \widetilde{e} = \widetilde{g}$, dovoljno da nađemo u svakoj nepraznoj baznoj okolini $[\![VA]\!]$ neki glavni filter $\widetilde{g}$. Kako je $A \neq \varnothing$, neka je $g \in A$, pa je i $g \in VA$, odnosno $\widehat{g} \in [VA]$, pa sledi da je $\widetilde{g} \in [\![VA]\!]$. □

Dakle, $(\sigma G, \widetilde{e})$ je G-ambit. Posmatramo sad proizvoljan G-ambit (X, x_0). Za $p \in \beta G$ definišemo skup:

$$F_p = \bigcap_{\substack{V \in \mathcal{B} \\ A \in p}} \overline{VA \cdot x_0}.$$

Korak 3: Za sve $p, q \in \beta G$ je ispunjeno:

1. F_p je jednočlan skup;
2. $p \sim q$ povlači $F_p = F_q$.

Dokaz. 1. Treba da dokažemo da je F_p neprazan. Familija $\{VA \mid V \in \mathcal{B}, A \in p\}$ ima svojstvo konačnog preseka (jer svi njeni elementi pripadaju filteru p), pa će i familija zatvorenih skupova $\{\overline{VA \cdot x_0} \mid V \in \mathcal{B}, A \in p\}$ imati svojstvo konačnog preseka, što znači da njen presek F_p nije prazan (zbog kompaktnosti prostora X). Neka je $x \in F_p$, i neka je $y \neq x$. X je Hauzdorfov prostor, pa možemo naći O_x, O_y otvorene okoline oko x, y redom takve da je $O_x \cap O_y = \varnothing$. Kako je dejstvo $\varphi : G \curvearrowright X$ neprekidno i $(e, x) \in \varphi^{-1}[O_x]$, možemo naći otvoren boks $V \times O'_x$ oko (e, x) takav da je $V \cdot O'_x \subseteq O_x$. Skup $A = \{g \in G \mid g \cdot x_0 \in O'_x\}$ je neprazan jer je $G \cdot x_0$ gusta orbita.

Pretpostavimo da $VA \notin p$, tada je $(VA)^{\complement} \in p$. Primetimo da je $(VA)^{\complement}$ unija koseta podgrupe od V, pa je $(VA)^{\complement} = VB$ za neki skup B. To znači da je $VVB = VB = (VA)^{\complement}$. Pošto je $F_p \subseteq \overline{V(VA)^{\complement} \cdot x_0} = \overline{(VA)^{\complement} \cdot x_0}$, to je $x \in \overline{(VA)^{\complement} \cdot x_0}$. Specijalno, O'_x seče $(VA)^{\complement} \cdot x_0$, pa imamo $g \in (VA)^{\complement}$ takvo da $g \cdot x_0 \in O'_x$, tj. $g \in A$, što je kontradikcija jer je $A \subseteq VA$. Dakle, $VA \in p$.

Konačno, iz $A \cdot x_0 \subseteq O'_x$ sledi $VA \cdot x_0 \subseteq V \cdot O'_x \subseteq O_x \subseteq O_y^{\complement}$, pa je i $\overline{VA \cdot x_0} \subseteq O_y^{\complement}$ (jer je $O_y^{\complement}$ zatvoren skup). Dakle, $y \notin \overline{VA \cdot x_0} = \overline{V(VA) \cdot x_0}$, pa imamo da $y \notin F_p$.

2. Po definiciji relacije $\sim$ važi $\{VA \mid V \in \mathcal{B}, A \in p\} = \{VA \mid V \in \mathcal{B}, A \in q\}$, pa direktno imamo $F_p = F_q$. $\square$

U prethodnom koraku smo dokazali da je sa

$$f(\widetilde{p}) = \text{jedini element skupa } F_p$$

dobro definisano preslikavanje $f : \sigma G \to X$.

Korak 4: $f(\widetilde{e}) = x_0$.

Dokaz. Primetimo da je za sve $V \in \mathcal{B}$ i $A \in \widehat{e} imamo e = ee \in VA$, pa je $x_0 \in \overline{VA \cdot x_0}$. Odatle je $x_0 \in F_{\widehat{e}}$, tj. $\{x_0\} = F_{\widehat{e}}$. $\square$

Korak 5: $f(g \cdot \widetilde{p}) = g \cdot f(\widetilde{p})$.

Dokaz. Posmatramo jednočlani skup

$$F_{g \cdot p} = \bigcap_{\substack{V \in \mathcal{B} \\ A \in p}} \overline{VgA \cdot x_0} = \bigcap_{\substack{V \in \mathcal{B} \\ A \in p}} \overline{gg^{-1}VgA \cdot x_0} = \bigcap_{\substack{V \in \mathcal{B} \\ A \in p}} \overline{gVA \cdot x_0}$$

, gde smo koristili da je lokalna baza $\mathcal{B}$ zatvorena za konjugaciju, prema našoj pretpostavci. Sad zbog neprekidnosti dejstva $G \curvearrowright X$ važi

$$F_{g \cdot p} = \bigcap_{\substack{V \in \mathcal{B} \\ A \in p}} \overline{g \cdot (VA \cdot x_0)} = \bigcap_{\substack{V \in \mathcal{B} \\ A \in p}} g \cdot \overline{(VA \cdot x_0)} = g \cdot \bigcap_{\substack{V \in \mathcal{B} \\ A \in p}} \overline{(VA \cdot x_0)} = g \cdot F_p = \{g \cdot f(\widetilde{p})\}$$

. Dakle, $f(g \cdot \widetilde{p}) = f(\widetilde{g \cdot p}) = g \cdot f(\widetilde{p})$. $\square$

Korak 6: f je „na”.

Dokaz. Neka je $x \in X$. Za okolinu O oko x, definišemo $A_O = \{g \in G \mid g \cdot x_0 \in O\}$. Jasno da je A_O neprazan jer je orbita od x_0 gusta, pa seče svaku okolinu. Takođe važi $A_{O'} \cap A_{O''} = A_{O' \cap O''}$. Odatle vidimo da familija $\{A_O \mid O \in \mathcal{O}(x)\}$ ima svojstvo konačnog preseka, pa po lemi 1.5 postoji ultrafilter $p \in \beta G$ koji sadrži sve skupove $A_O, O \in \mathcal{O}(x)$. Neka je $f(\widetilde{p}) = y$. Kako je X Hauzdorfov, $\bigcap_{O \in \mathcal{O}(x)} \overline{O} = \{x\}$. Dovoljno je da dokažemo da $y \in \overline{O}$ za svako $O \in \mathcal{O}(x)$, što će dati $y = x$. Za proizvolju okolinu $O \in \mathcal{O}(x)$ važi da (e, x) pripada inverznoj slici od O pri dejstvu $G \curvearrowright X$, pa time imamo otvoreni boks $V \times O'$ oko (e, x) takav da $V \cdot O' \subseteq O$. Tada $VA_{O'} \subseteq A_O$, i važi $VA_{O'} \cdot x_0 \subseteq A_O \cdot x_0 \subseteq O$. Tada iz $y \in F_p$ dobijamo $y \in \overline{VA_{O'} \cdot x_0} \subseteq \overline{O}$. $\square$

Korak 7: f je neprekidno.

Dokaz. Neka je O otvoren skup, $\widetilde{p} \in f^{-1}[O]$. Kako $f(\widetilde{p}) \in O$, to je $\bigcap_{\substack{V \in \mathcal{B} \\ A \in p}} \overline{VA \cdot x_0} \subseteq O$, i iz kompaktnosti postoje $V_i \in \mathcal{B}, A_i \in p, 1 \leqslant i \in n$, takvi da $\bigcap_{i=1}^{n} \overline{V_i A_i \cdot x_0} \subseteq O$. Onda za $V = \bigcap_{i=1}^{n} V_i \in \mathcal{B}$, i $A = \bigcap_{i=1}^{n} A_i \in p$ imamo $\overline{VA \cdot x_0} \subseteq O$. Jasno je tad da $\widetilde{p} \in [\![VA]\!]$. Takođe, za $\widetilde{q} \in [\![VA]\!]$, tada je $VA \in q$ prema lemi 2.6, i kako je $VA = V(VA)$ imamo $f(\widetilde{q}) \in \overline{VA \cdot x_0} \subseteq O$. Odakle je $[\![VA]\!] \subseteq f^{-1}[O]$. □

Time smo završili dokaz teoreme. □

2.2 Univerzalni minimalni tok

Lema 2.9. *Svaki G-tok X ima minimalni podtok (tj. minimalni neprazan zatvoren podskup od X koji je zatvoren za dejstvo).*

Dokaz. Uočimo familiju $\mathcal{F} = \{Y \subseteq X \mid Y \text{ neprazan } G\text{-podtok}\}$. Jasno, $\mathcal{F}$ je neprazna jer sam prostor X joj pripada. Uređenje na toj familiji je inkluzija. Koristimo Hauzdorfov princip; za maksimalni lanac $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{F}$ posmatramo $M = \bigcap \mathcal{L}$. Iz činjenice da je $\mathcal{L}$ lanac, $\mathcal{L}$ ima svojstvo konačnog preseka, pa kako je X kompaktan, M je neprazan. Takođe, M je zatvoren (kao presek podtokova), i lako se vidi da je zatvoren za dejstvo od G. Dakle, $M \in \mathcal{F}$ i prema tome, M je traženi minimalni podtok. □

Lema 2.5 nam daje da je $\widetilde{p} * \widetilde{q} = \widetilde{p * q}$ dobro definisana operacija $*$ na σG. Prema lemi 1.19 važi i $\widetilde{g} * \widetilde{p} = g \cdot \widetilde{p}$ i $\widetilde{g} * \widetilde{h} = \widetilde{gh}$ za $g, h \in G$ i $p \in \beta G$.

Lema 2.10. *1. $(\sigma G, *)$ je polugrupa;*

2. preslikavanje $\widetilde{\rho}_{\widetilde{p}} : \sigma G \to \sigma G$, dato sa $\widetilde{\rho}_{\widetilde{p}}(x) = x * \widetilde{p}$ je neprekidno.

Dokaz. 1. sledi direktno primenom leme 1.19.

2. Preslikavanje $\rho_p : \beta G \to \beta G$, dato sa $\rho_p(x) = x * p$ je neprekidno prema lemi 1.19. Sledeći dijagram

$$\begin{tikzcd} \beta G \arrow[r, "\rho_p"] \arrow[d, "\pi"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & \beta G \arrow[d, "\pi"] \\ \sigma G \arrow[r, "\widetilde{\rho}_{\widetilde{p}}"'] & \sigma G \end{tikzcd}$$

je komutativan. Dokazaćemo da je preslikavanje $\widetilde{\rho}_{\widetilde{p}}$ neprekidno. Uočimo $Z \subseteq \sigma G$ zatvoren skup. Kako su π, ρ_p neprekidna preslikavanje, to je i $\pi \circ \rho_p$. Iz dijagrama imamo

$$\widetilde{\rho}_{\widetilde{p}}^{-1}[Z] = \pi[\pi^{-1}[\widetilde{\rho}_{\widetilde{p}}^{-1}[Z]]] = \pi[(\widetilde{\rho}_{\widetilde{p}} \circ \pi)^{-1}[Z]] = \pi[(\pi \circ \rho_p)^{-1}[Z]].$$

Odatle je $(\pi\circ\rho_p)^{-1}[Z]$ zatvoren, time je i $\pi[(\pi\circ\rho_p)^{-1}[Z]]$ zatvoren jer je π zatvoreno (kao neprekidno preslikavanje iz kompaktnog u Hauzdorfov prostor). Dakle, $\widetilde{\rho}_{\widetilde{p}}^{-1}[Z]$ je zatvoren. □

Lema 2.11. *$M \subseteq \sigma G$ je minimalan ideal ako i samo ako je minimalni podtok.*

Dokaz. Jasno, dovoljno je dokazati da je skup $I \subseteq \sigma G$ ideal ako i samo ako je podtok.

($\Leftarrow$) Neka je I podtok. Specijalno, I je i zatvoren skup. Neka $\widetilde{p} \in \sigma G$ i $\widetilde{q} \in I$, i neka je $O \in \mathcal{O}(\widetilde{p} * \widetilde{q})$ okolina. Tada je $\widetilde{p} \in \widetilde{\rho}_{\widetilde{q}}^{-1}[O]$, pa kako je orbita od $\widetilde{e}$ gusta i preslikavanje $\widetilde{\rho}_{\widetilde{q}}$ neprekidno, važi da je $\widetilde{g} = g \cdot \widetilde{e} \in \widetilde{\rho}_{\widetilde{q}}^{-1}[O]$, za neko $g \in G$. Odatle je $g \cdot \widetilde{q} = \widetilde{g} * \widetilde{q} \in O$ i $g \cdot \widetilde{q} \in I$ (pošto je I podtok), pa je $O \cap I \neq \varnothing$. Iz toga da svaka okolina od $\widetilde{p} * \widetilde{q}$ seče I, sledi $\widetilde{p} * \widetilde{q} \in \overline{I} = I$. Dakle, I je ideal.

($\Rightarrow$) Neka je I ideal. I je i zatvoren skup, pa za $\widetilde{p} \in I$ i $g \in G$ važi $g \cdot \widetilde{p} = \widetilde{g} * \widetilde{p} \in I$. Odatle je I i podtok. □

Lema 2.12. *Minimalni ideali (tj. podtokovi) od σG su G-izomorfni.*

Dokaz. Prema teoremi 1.24, za dva minimalna ideala $M, N \lhd \sigma G$, i $\widetilde{v} \in \mathcal{J}(N)$, sa $f(\widetilde{p}) = \widetilde{p} * \widetilde{v}$ definisan je homeomorfizam $f : M \to N$. Štaviše, važi $f(g \cdot \widetilde{p}) = f(\widetilde{g} * \widetilde{p}) = (\widetilde{g} * \widetilde{p}) * \widetilde{v} = \widetilde{g} * (\widetilde{p} * \widetilde{v}) = \widetilde{g} * f(\widetilde{p}) = g \cdot f(\widetilde{p})$, pa f čuva dejstvo, time je i G-izomorfizam. □

Teorema 2.13. *Minimalni ideal (tj. podtok) $M \lhd \sigma G$ je univerzalni minimalni tok.*

Dokaz. Neka je $M \lhd \sigma G$ minimalni ideal, pa je i minimalni G-podtok od σG. Neka je X proizvoljan minimalni tok. Za bilo koju tačku $x_0 \in X$, orbita od x_0 je gusta zbog minimalnosti, pa je (X, x_0) G-ambit. Kako je $(\sigma G, \widetilde{e})$ najveći G-ambit, to postoji neprekidno i „na" G-preslikavanje $f : \sigma G \to X$ takvo da je $f(\widetilde{e}) = x_0$. f je zatvoreno preslikavanje kao neprekidno preslikavanje iz kompaktnog u Hauzdorfov prostor. Dakle, $f[M]$ je zatvoreni podskup od X. Takođe, $f[M]$ je podtok od X jer važi $g \cdot f(\widetilde{p}) = f(g \cdot \widetilde{p}) \in f[M]$, za $\widetilde{p} \in M, g \in G$. Iz minimalnosti X sledi $f[M] = X$. Dakle, kad ograničimo $f|_M : M \to X$ dobijamo neprekidno G-preslikavanje na X. Dakle, M je univerzalni minimalni G-tok. □

2.3 Ekstremna amenabilnost

Definicija 2.14. Topološka grupa G je ekstremno amenabilna ako svaki G-tok X ima fiksnu tačku, tj. $(\exists x \in X)(\forall g \in G)\ g \cdot x = x$.

Lema 2.15. *Neka je G topološka grupa. Sledeći iskazi su ekvivalentni*

1. *G je ekstremno amenabilna;*
2. *$(\exists \widetilde{p} \in \sigma G)(\forall g \in G)\ g \cdot \widetilde{p} = \widetilde{p}$;*
3. *$(\exists p \in \beta G)(\forall g \in G)\ g \cdot p \sim p$;*
4. *Univerzalni minimalni G-tok je jednočlan.*

Dokaz. Niz implikacija $1 \Rightarrow 2 \Leftrightarrow 3$ je očigledan.

$(2 \Rightarrow 4)$ Neka je $\widetilde{p} \in \sigma G$ takav da je $(\forall g \in G)\ g \cdot \widetilde{p} = \widetilde{p}$. Tada je jednočlani skup $\{\widetilde{p}\}$ G-podtok od σG, pa prema teoremi 2.13, on mora biti i univerzalni minimalni G-tok.

$(4 \Rightarrow 1)$ Neka je X proizvoljan tok, i neka je $Y \subseteq X$ minimalni G-podtok. Kako se univerzalni minimalni G-tok projektuje na svaki G-podtok, time i na Y, mora da bude $Y = \{y\}$, pa je y fiksna tačka toka X. □

Posledica 2.16. *G je ekstremno amenabilna ako i samo ako*

$$(\exists p \in \beta G)(\forall V \in \mathcal{B})(\forall g \in G)(\forall K \subseteq G)(VK \in p \Leftrightarrow g^{-1}VK \in p). \qquad (\dagger)$$

Dokaz. Koristimo lemu 2.15 3.

($\Rightarrow$) Neka je $p \in \beta G$ takav da $(\forall g \in G)\ g \cdot p \sim p$. Neka $V \in \mathcal{B}$, $g \in G$ i $K \subseteq G$. Neka $VK \in p$. Pošto $p \sim g \cdot p$, $VK = V(VK) \in g \cdot p$ prema lemi 2.2, tj. $g^{-1}VK \in p$. Slično, ako $g^{-1}VK \in p$, onda $VK \in g \cdot p$, i $VK = V(VK) \in p$ prema lemi 2.2.

($\Leftarrow$) Ponovo koristimo lemu 2.2. Neka p zadovoljava uslov (†), i neka je $g \in G$. Za $V \in \mathcal{B}$ i $K \in p$ važi i $VK \in p$, pa prema (†) je i $g^{-1}VK \in p$, tj. $VK \in g \cdot p$. Dakle, $p \sim g \cdot p$. □

Teorema 2.17. *Sledeći iskazi su ekvivalentni:*

1. *G je ekstremno amenabilna;*

2. *važi* $(\forall V \in \mathcal{B})(\forall k \geqslant 2)(\forall c : G/V \to k)$
$$(\exists l < k)(\forall T \underset{kon.}{\subseteq} G/V)(\exists \gamma \in G)(\forall t \in T)\ c(\gamma \cdot t) = l;$$

3. *važi* $(\forall V \in \mathcal{B})(\forall k \geqslant 2)(\forall c : G/V \to k)$
$$(\forall T \underset{kon.}{\subseteq} G/V)(\exists l < k)(\exists \gamma \in G)(\forall t \in T)\ c(\gamma \cdot t) = l.$$

Napomena. Dejstvo grupe G na skupu levih koseta G/V podgrupe V, $G \curvearrowright G/V$, dato je sa $g \cdot aV = gaV$. Možemo da posmatramo k kao diskretan topološki prostor $\{0, 1, \ldots, k-1\}$, preslikavanje $c : G/V \to k$ je bojenje koseta pomoću k boja.

Dokaz. ($1 \Rightarrow 2$) Drugim rečima, treba da dokažemo da za svaku otvorenu podgrupu i svako bojenje koseta, postoji boja takva da je za konačan skup koseta, bojenje tih koseta je monohromatsko. Neka je $V \in \mathcal{B}$, $k \geqslant 2$, i $c : G/V \to k.$, pa je $X = k^{G/V}$ kompaktan Hauzdorfov prostor sa Tihonovljevom topologijom. Jasno je da je $c \in X$. Posmatramo dejstvo $G \curvearrowright X$, za $\chi \in X$ dato sa:

$$g \cdot \chi(aV) = \chi(g^{-1}aV)$$

Prvi korak je da dokažemo da je X sa definisanim dejstvom $G \curvearrowright X$ G-tok. Označimo ovo dejstvo sa $\varphi : G \times X \to X$. Neka je $O \subseteq X$ neki predbazni skup, tj. $O = \{\chi \in X \mid \chi(aV) = l\}$ za neke $a \in G$ i $l < k$. Neka $(g, \chi_0) \in \varphi^{-1}[O]$, tj. $g \cdot \chi_0 \in O$, tj. $g \cdot \chi_0(aV) = l$ što po definiciji dejstva, znači da je $\chi_0(g^{-1}aV) = l$. Uočimo otvorenu okolinu $aVa^{-1}g \times O'$ oko tačke (g, χ_0), gde je $O' = \{\chi \in X \mid \chi(g^{-1}aV) = l\}$ predbazni skup. Ako je $v \in V$ i $\chi \in O'$, tada je $ava^{-1}g \cdot \chi(aV) = \chi(g^{-1}av^{-1}a^{-1}aV) = \chi(g^{-1}av^{-1}V) = \chi(g^{-1}aV) = l$, pa $ava^{-1}g \cdot \chi \in O$. Dakle, $aVa^{-1}g \times O' \subseteq \varphi^{-1}[O]$, što znači da je dejstvo φ neprekidno.

Neka je sad $Z = \overline{G \cdot c}$, i neka je $z \in Z$ fiksna tačka dejstva $G \curvearrowright Z$; dakle, $(\forall g \in G)\ g \cdot z = z$. Primetimo da to znači da je za svako $g \in G, z(V) = z(g^{-1}V)$, tj. $z : G/V \to k$ je konstantna funckija, i neka je $l < k$ takvo da $z(aV) = l$ za svako $a \in G$. Neka je sad $T \underset{kon.}{\subseteq} G/V$ i posmatramo otvorenu okolinu $O = \{\chi \in X \mid (\forall t \in T)\ \chi(t) = l\}$ oko tačke z. Kako je $z \in \overline{G \cdot c}$, to povlači da za neko $\gamma \in G$ važi $\gamma \cdot c \in O$, tj. $(\forall t \in T)\ \gamma \cdot c(t) = l$, odnosno $(\forall t \in T)\ c(\gamma^{-1} \cdot t) = l$, što završava dokaz.

$(2 \Rightarrow 3)$ je očigledno.

$(3 \Rightarrow 1)$ Neka je $\mathcal{F} = \{(H, \mathcal{K}) \mid H \underset{kon.}{\subseteq} G,\ \mathcal{K} \underset{kon.}{\subseteq} \mathcal{P}(G)\}$. Familiju $\mathcal{F}$ prirodno možemo urediti sa $(H, \mathcal{K}) \trianglelefteq (H', \mathcal{K}')$ ako i samo ako $H \subseteq H' \wedge \mathcal{K} \subseteq \mathcal{K}'$; jasno je da je familija $\mathcal{F}$ usmerena sa $\trianglelefteq$.

Korak 1: Za $V \in \mathcal{B}$ i $f = (H, \mathcal{K}) \in \mathcal{F}$ postoji $\gamma_{V,f} \in G$ tako da:

$$(\forall h \in H)(\forall K \in \mathcal{K})(VK \in \widehat{\gamma}_{V,f} \Leftrightarrow h^{-1}VK \in \widehat{\gamma}_{V,f}).$$

Dokaz. Neka je $H = \{h_i \mid i < m\}$ i $\mathcal{K} = \{K_j \mid j < n\}$. Uočimo bojenje $c : G/V \to 2^n$, dato sa:

$$c(gV)(j) = \begin{cases} 1, & e \in gVK_j \\ 0, & e \notin gVK_j \end{cases}, \quad \text{za} \quad j < n.$$

Uočimo $T = \{V\} \cup \{h_i^{-1}V \mid i < m\} \underset{kon.}{\subseteq} G/V$. Prema 3. postoji $l \in 2^n$ i $\gamma \in G$ tako da $c(\gamma V) = l$ i $(\forall i < m), c(\gamma h_i^{-1}V) = l$, što znači da $(\forall i < m)(\forall j < n)(e \in \gamma VK_j \Leftrightarrow e \in \gamma h_i^{-1}VK_j)$, tj.

$$(\forall i < m)(\forall j < n)(\gamma^{-1} \in VK_j \Leftrightarrow \gamma^{-1} \in h_j^{-1}VK_j),$$

pa je jasno da tad možemo uzeti $\gamma_{V,f} = \gamma^{-1}$. $\square$

Za fiksirano $V \in \mathcal{B}$ i $f \in \mathcal{F}$ izaberemo prema prethodnom koraku $\gamma_{V,f} \in G$. Neka je p_V neka tačka nagomilavanja mreže $(\widetilde{\gamma}_{V,f})_{f \in \mathcal{F}}$ u βG.

Korak 2: Za sve $V \in \mathcal{B}$ važi

$$(\forall g \in G)(\forall K \subseteq G)(VK \in p_V \Leftrightarrow g^{-1}VK \in p_V).$$

Dokaz. Pretpostavimo suprotno. Tada postoje $g \in G$ i $K \subseteq G$ tako da, bez umanjenja opštosti, $VK \in p_V$ ali $g^{-1}VK \notin p_V$, tj. $p_V \in [VK] \cap [g^{-1}VK]^\complement$. Neka je $f_0 = (\{g\}, \{K\})$. Postoji $f = (H, \mathcal{K}) \in \mathcal{F}$ tako da $f_0 \trianglelefteq f$ (specijalno, $g \in H, K \in \mathcal{K}$) i $\widehat{\gamma}_{V,f} \in [VK] \cap [g^{-1}VK]^\complement$. Međutim, ovo je nemoguće prema prethodnom koraku. $\square$

Familija $\mathcal{B}$ je takođe usmerena, sa relacijom $\supseteq$. Neka je sad p neka tačka nagomilavanja mreže $(p_V)_{V\in\mathcal{B}}$ u βG.

Korak 3: p zadovoljava uslove (†).

Dokaz. Pretpostavimo suprotno. Tada postoje $V \in \mathcal{B}$, $g \in G$, i $K \subseteq G$ tako da, bez umanjenja opštosti, $VK \in p$ ali $g^{-1}VK \notin p$, tj. $p \in [VK] \cap [g^{-1}VK]^{\complement}$. Neka je $W \in \mathcal{B}$ takva da je $V \supseteq W$ i $p_W \in [VK] \cap [g^{-1}VK]^{\complement}$. Primetimo da iz $W \subseteq V$ sledi $V = WV$, pa imamo $p_W \in [W(VK)] \cap [g^{-1}W(VK)]$, što je nemoguće prema prethodnom koraku. □

Dakle, G je ekstremno amenabilna i dokaz je završen. □

Za kraj ovog dela navešćemo nekoliko osobina ekstremno amenabilnih grupa.

Teorema 2.18. *Neka je G grupa, i neka je $G' \leqslant G$ gusta podgrupa. Tada je G' ekstremno amenabilna ako i samo ako je G ekstremno amenabilna.*

Dokaz. ($\Rightarrow$) Pretpostavimo da je grupa G' ekstremno amenabilna. Neka je $\varphi : G \curvearrowright X$ neprekidno dejstvo grupe G na X. Jasno, restrikcija tog dejstva na G', $\varphi|_{G'} : G' \curvearrowright X$, je neprekidno dejstvo G' na X. To dejstvo ima fiksnu tačku $x_0 \in X$, tj. $(\forall g' \in G')\ g' \cdot x_0 = x_0$. Iz činjenice da je G' gusta podgrupa od G, za svako $g \in G$ postoji mreža $(g_i)_{i\in\mathcal{I}}$ elemenata iz G' tako da je $\lim\limits_{i\in\mathcal{I}} g_i = g$. Neka je $g \in G$, primetimo:

$$\varphi(g, x_0) = \varphi(\lim_{i\in\mathcal{I}} g_i, x_0) = \lim_{i\in\mathcal{I}} \varphi(g_i, x_0) = \lim_{i\in\mathcal{I}} x_0 = x_0,$$

što važi iz neprekidnosti φ.

($\Leftarrow$) Pretpostavimo da je grupa G ekstremno amenabilna. Neka je $\varphi : G' \curvearrowright X$ neprekidno dejstvo grupe G' na X. Ovo dejstvo se može proširiti do dejstva $\overline{\varphi} : G \curvearrowright X$ na sledeći način: Neka je $g \in G,\ x \in X$, i neka je $(g_i)_{i\in\mathcal{I}}$ mreža tako da $\lim\limits_{i\in\mathcal{I}} g_i = g$. Tada je:

$$\overline{\varphi}(g, x) = \lim_{i\in\mathcal{I}} \varphi(g_i, x),$$

što je dobro definisano i neprekidno. Dejstvo $\overline{\varphi}$ po pretpostavci ima fiksnu tačku, $x_0 \in X$. Takođe, $\overline{\varphi}|_{G'} = \varphi$, i odatle važi da je x_0 fiksna tačka dejstva φ. □

Sledeća teorema je lema 6.7(i) u [9].

Teorema 2.19. *Neka je $\mathcal{H}$ u odnosu na inkluziju na gore usmerena familija ekstremno amenabilnih podgrupa od G takva da je $H = \bigcup \mathcal{H}$ gusta u G. Tada je i G ekstremno amenabilna.*

Dokaz. Prema teoremi 2.18 dovoljno je da dokažemo da je H ekstremno amenabilna. Neka je X neki H-tok, i neka je $Y_A = \{x \in X \mid (\forall a \in A)\ a \cdot x = x\}$, gde $A \in \mathcal{H}$. Kako je A ekstremno amenabilna, i kako je X takođe i A-tok, imamo $Y_A \neq \emptyset$. Za konvergentnu mrežu elemenata $(x_i)_{i \in \mathcal{I}}$ iz Y_A imamo

$$a \cdot \lim_{i \in \mathcal{I}} x_i = \lim_{i \in \mathcal{I}} a \cdot x_i = \lim_{i \in \mathcal{I}} x_i,$$

za svako $a \in A$, pa je $\lim_{i \in \mathcal{I}} x_i \in Y_A$, tj. Y_A je zatvoren podskup od X. Familija $\{Y_A \mid A \in \mathcal{H}\}$ ima svojstvo konačnog preseka jer je $\mathcal{H}$ usmerena i $A \subseteq B$ povlači $Y_B \subseteq Y_A$, pa kako je X kompaktan postoji $x \in \bigcap_{A \in \mathcal{H}} Y_A$. Tada je x fiksna tačka za H, tj. H je ekstremno amenabilna. □

Sledeća teorema je lema 13 u [4].

Teorema 2.20. *Neka je G ekstremno amenabilna grupa, i neka je $H \underset{otv.}{\leqslant} G$ otvorena podgrupa od G. Tada je i H ekstremno amenabilna.*

Dokaz. Neka je $\varphi : H \curvearrowright X$ dejstvo H na kompaktan Hauzdorfov prostor X. Neka je $G/H = \{Hg \mid g \in G\}$. Neka je $\pi : G \to G/H$ količničko preslikavanje, i neka $s : G/H \to G$ preslikavanje takvo da je $\pi \circ s = \mathrm{id}_{G/H}$ i $s(H) = e$. Neka je $\alpha : G/H \times G \to H$ dato sa:

$$\alpha(w, g) = s(w)g(s(wg))^{-1}$$

za $w \in G/H$ i $g \in G$. Primetimo da $s(w)g$ i $s(wg)$ pripadaju istom kosetu wg, pa je zaista $\alpha[H/G \times G] \subseteq H$. Ovo preslikavanje takođe ispunjava:

$$\begin{aligned} \alpha(w, g_1 g_2) &= s(w) g_1 g_2 (s(w g_1 g_2))^{-1} \\ &= s(w) g_1 (s(w g_1))^{-1} s(w g_1) g_2 (s(w g_1 g_2))^{-1} \\ &= \alpha(w, g_1) \alpha(w g_1, g_2). \end{aligned}$$

Kako je H otvorena, sledi da je G/H sa količničkom topologijom diskretan prostor, stoga je s neprekidno, pa je i α. Definišemo sad dejstvo $\psi : G \curvearrowright X^{G/H}$, dato sa

$$(g \cdot \xi)(w) = \alpha(w, g) \cdot \xi(wg).$$

Koristeći gornju jednakost, direktno vidimo da prethodna formula zaista definiše dejstvo. Dokažimo da je ψ neprekidno. Neka je $U = \{\xi \in X^{G/H} \mid \xi(Ha) \in O\}$ predbazni skup u $X^{G/H}$, gde je $O \subseteq X$ otvoren skup i $a \in G$, i neka je $(g_0, \xi_0) \in \psi^{-1}[U]$. Naći ćemo otvoren boks oko (g_0, ξ_0) unutar $\psi^{-1}[U]$. Kako $(g_0 \cdot \xi_0)(Ha) \in O$, tj. $\alpha(Ha, g_0) \cdot \xi_0(HAg_0) \in O$, kako je φ neprekidno, možemo da nađemo otvoreni boks $H' \times O'$ oko $(\alpha(Ha, g_0), \xi_0(Hag_0))$ takav da $H' \cdot O' \subseteq O$. Uočimo predbazni skup $U' = \{\xi \in X^{G/H} \mid \xi(Hag_0) \in O'\}$; primetimo $\xi_0 \in U'$. Takođe, $\alpha(Ha, g_0) = s(Ha)g_0(s(Hag_0))^{-1} \in H'$ povlači $g_0 \in (s(Ha))^{-1}H's(Hag_0)$, i primetimo da je ovo otvoren skup. Dakle, tvrdimo da je $(s(Ha))^{-1}H's(Hag_0) \times U'$ željeni boks.

Neka je $h \in H'$ i $\xi \in U'$, tj. $\xi(Hag_0) \in O'$, treba da dokažemo

$$(s(Ha))^{-1}hs(Hag_0) \cdot \xi \in U, \quad \text{tj.} \quad ((s(Ha))^{-1}hs(Hag_0) \cdot \xi)(Ha) \in O.$$

Imamo $((s(Ha))^{-1}hs(Hag_0) \cdot \xi)(Ha) =$

$$= \alpha(Ha, (s(Ha))^{-1}hs(Hag_0)) \cdot \xi(Ha(s(Ha))^{-1}hs(Hag_0)).$$

Primetimo da $a(s(Ha))^{-1}hs(Hag_0) \in aa^{-1}HhHag_0 = Hag_0$. Odatle direktno vidimo da je $\alpha(Ha, (s(Ha))^{-1}hs(Hag_0)) = h$ i $\xi(Ha(s(Ha))^{-1}hs(Hag_0)) = \xi(Hag_0)$, pa dobijamo $((s(Ha))^{-1}hs(Hag_0) \cdot \xi)(Ha) = h \cdot \xi(HAg_0) \in H' \cdot O' \subseteq O$, što završava dokaz neprekidnosti.

Zbog ekstremne amenabilnosti grupe G, prethodno dejstvo ima fiksnu tačku ξ_0. Pokazaćemo da je $\xi_0(H) \in X$ fiksna tačka dejstva $H \curvearrowright X$. Neka je $h \in H$, tada važi $h \cdot \xi_0 = \xi_0$ i $\xi_0(H) = (h \cdot \xi_0)(H) = \alpha(H, h) \cdot \xi_0(Hh) = h \cdot \xi_0(H)$, jer je $\alpha(H, h) = s(H)h(s(Hh))^{-1} = ehe^{-1} = h$. □

Napomena. Zatvorena podgrupa ekstremno amenabilne grupe ne mora biti ekstremno amenabilna. Za primer pogledati teoremu 8.1 i posledicu 8.2 u [11].

Sledeća teorema je lema 6.7(ii) u [9].

Teorema 2.21. *Neka je $N \underset{zatv.}{\lhd} G$ normalna zatvorena podgrupa od G. Ako su $N, G/N$ ekstremno amenabilne, onda je i G.*

Dokaz. Neka je $\varphi : G \curvearrowright X$ neprekidno dejstvo. Odatle je dejstvo $N \curvearrowright X$ takođe neprekidno kao restrikcija. Posmatramo skup

$$Y = \{x \in X \mid (\forall n \in N)\ n \cdot x = x\}.$$

Jasno, pošto je N ekstremno amenabilna, Y je neprazan skup. Ako je $(x_i)_{i\in\mathcal{I}}$ konvergentna mreža elemenata iz Y i $\lim_{i\in\mathcal{I}} x_i = y$, za $n \in N$ važi:

$$n \cdot y = n \cdot \lim_{i\in\mathcal{I}} x_i = \lim_{i\in\mathcal{I}} (n \cdot x_i) = \lim_{i\in\mathcal{I}} x_i = y,$$

tj. $y \in Y$, pa je Y zatvoren podskup od X. Dakle, Y je kompaktan Hauzdorfov prostor. Takođe, za $g \in G$ i $y \in Y$, i proizvoljno $n \in N$ važi $n \cdot (g \cdot y) = ng \cdot y = gg^{-1}ng \cdot y = g \cdot (g^{-1}ng \cdot y) = g \cdot y$ jer $g^{-1}ng \in N$ zbog normalnosti N, tj. $g \cdot y \in Y$. Dakle, Y je G-podtok od X.

Za $g \in G$, $y \in Y$ i $n \in N$ je $gn \cdot y = g \cdot (n \cdot y) = g \cdot y$, što znači da je sa $gN \cdot y = g \cdot y$ dobro definisano dejstvo $\psi : G/N \curvearrowright Y$. Dejstvo ψ je i neprekidno. Uzmimo $O \subseteq Y$ otvoren skup i $(gN, y) \in \psi^{-1}[Y]$; tada $gN \cdot y = g \cdot y \in O$. Iz neprekidnosti $\varphi : G \times Y \to Y$ imamo otvoreni box $U \times O'$ oko (g, y) takav da $U \cdot O' \subseteq O$. Primetimo da je tada i $UN \times O'$ još jedan otvoren boks oko (g, y) takav da $UN \cdot O' \subseteq O$. (UN je otvoren skup jer je $UN = \bigcup_{n\in N} Un$, a za $u \in U$, $n \in N$ i $y \in O'$ je $un \cdot y = u \cdot (n \cdot y) = u \cdot y \in O$.) Kako je $UN = \pi^{-1}[\pi[UN]]$, gde je $\pi : G \to G/N$ količničko preslikavanje, $\pi[UN]$ je otvoren, i direktno vidimo da je $\pi[UN] \times O'$ otvoreni boks oko (gN, y) takav da $\pi[UN] \cdot O' \subseteq O$.

Kako je G/N ekstremno amenabilna, imamo fiksnu tačku $y_0 \in Y$ dejstva ψ. Primetimo da je $y_0 = gN \cdot y_0 = g \cdot y_0$ za svako $g \in G$. Dakle, y_0 je tražena fiksna tačka dejstva φ i G je ekstremno amenabilna. $\square$

Sledeća teorema je lema 6.7(iii) u [9].

Teorema 2.22. *Dekartov proizvod ekstremno amenabilnih grupa je ekstremno amenabilan.*

Dokaz. Ako su G_1 i G_2 ekstremno amenabilne, onda je i $G_1 \times G_2$ ekstremno amenabilna direktno prema teoremi 2.21. Indukcijom sledi da su konačni proizvodi ekstremno amenabilnih grupa ekstremno amenabilni.

Neka je sada $\{G_i \mid i \in \mathcal{I}\}$ beskonačna familija ekstremno amenabilnih grupa. Za konačne $\mathcal{I}_0 \subseteq \mathcal{I}$, $P_{\mathcal{I}_0} = \prod_{i\in\mathcal{I}_0} G_i$ je ekstremno amenabilna podgrupa od $P = \prod_{i\in\mathcal{I}} G_i$. Takođe, familija $\{P_{\mathcal{I}_0} \mid \mathcal{I}_0 \subseteq \mathcal{I} \text{ konačan}\}$ je usmerena na gore u odnosu na inkluziju. Prema teoremi 2.19 dovoljno je da dokažemo da je $P' = \bigcup_{\substack{\mathcal{I}_0\subseteq\mathcal{I} \\ kon.}} P_{\mathcal{I}_0}$ gusta u P. Bazni skup u P je oblika $\{(x_i)_{i\in\mathcal{I}} \mid (\forall k < n)\ x_{i_k} \in O_k\}$ za neke $i_k \in \mathcal{I}$ i otvorene skupove $O_k \subseteq G_{i_k}$, $k < n$. Ovaj bazni skup očigledno seče bilo koju podgrupu $P_{\mathcal{I}_0}$ za koju važi $\{i_k \mid k < n\} \subseteq \mathcal{I}_0$. $\square$

Glava 3

Ekstremna amenabilnost grupe automorfizama

3.1 Remzijevo svojstvo

Ako su A i B strukture istog jezika, oznakom $\binom{B}{A}$ ćemo označiti skup svih podstruktura od B koje su izomorfne sa A.

Definicija 3.1. Neka je $\mathcal{K}$ klasa konačnih struktura.

1. Za $A, B, C \in \mathcal{K}$ takve da $A \leqslant B \leqslant C$, i $k \geqslant 2$, oznaka $C \to (B)^A_k$ će označavati:
$$\left(\forall c : \binom{C}{A} \to k\right) (\exists l < k) \left(\exists B' \in \binom{C}{B}\right) \left(\forall A' \in \binom{B'}{A}\right) c(A') = l.$$

2. Klasa $\mathcal{K}$ ima *Remzijevo svojstvo* ako
$$(\forall A \leqslant B \in \mathcal{K})(\forall k \geqslant 2)(\exists C \in \mathcal{K})(B \leqslant C \wedge C \to (B)^A_k).$$

Lema 3.2. *Neka je $\mathcal{M}$ ultrahomogena lokalno konačna struktura. Sledeći iskazi su ekvivalentni:*

1. $\mathrm{Age}(\mathcal{M})$ *ima Remzijevo svojstvo;*

2. $(\forall A \leqslant B \in \mathrm{Age}(\mathcal{M}))(\forall k \geqslant 2)\ \mathcal{M} \to (B)^A_k$.

Dokaz. $(1 \Rightarrow 2)$ Neka je $A \leqslant B \in \mathrm{Age}(\mathcal{M})$ i $k \geqslant 2$, i dokažimo $\mathcal{M} \to (B)^A_k$. Neka je $c : \binom{\mathcal{M}}{A} \to k$ bojenje. Možemo izabrati $C \in \mathrm{Age}(\mathcal{M})$ tako da $B \leqslant C$ i $C \to (B)^A_k$.

Posmatrajmo bojenje $c' : \binom{C}{A} \to k$ dato sa $c'(A') = c(A')$ (tj. c' je restrikcija od c). Kako $C \to (B)^A_k$, imamo i $l < k$ i $B' \in \binom{C}{B}$ tako da $c'(A') = l$ za sve $A' \in \binom{B'}{A}$. Kako $B' \in \binom{\mathcal{M}}{B}$ i $c(A') = c'(A') = l$ za sve $A' \in \binom{B'}{A}$, gotov je dokaz.

($2 \Rightarrow 1$) Pretpostavimo suprotno. Neka su $A \leqslant B \in \mathrm{Age}(\mathcal{M})$ i $k \geqslant 2$ takvi da za sve $C \in \mathrm{Age}(\mathcal{M})$ takve da $B \leqslant C$, važi $C \not\to (B)^A_k$. Označimo sa $\mathcal{C}$ familiju svih podstruktura $C \in \mathrm{Age}(\mathcal{M})$ takvih da $B \leqslant C$; familija $\mathcal{C}$ je prirodno usmerena sa relacijom $\leqslant$. Za $C \in \mathcal{C}$ definišemo

$$\mathcal{F}_C = \left\{ c : \binom{C}{A} \to k \mid \binom{B'}{A} \text{ nije } c\text{-monohromatski za sve } B' \in \binom{C}{B} \right\}.$$

Jasno, skup $\mathcal{F}_C$ je konačan i neprazan (jer $C \not\to (B)^A_k$).

Za $C, D \in \mathcal{C}$ takve da $C \leqslant D$ imamo preslikavanje $f_{C,D} : \mathcal{F}_D \to \mathcal{F}_C$ dato restrikcijom bojenja $\binom{D}{A} \to k$ na manji skup $\binom{C}{A}$. Jasno je da je $f_{C,C} = id_{\mathcal{F}_C}$, i za $C \leqslant D \leqslant E \in \mathcal{C}$ važi $f_{C,E} = f_{C,D} \circ f_{D,E}$. Dakle, $((\mathcal{F}_C)_{C \in \mathcal{C}}, (f_{C,D})_{C \leqslant D \in \mathcal{C}})$ je inverzan sistem nepraznih konačnih skupova, pa inverzni limes $\mathcal{F} = \varprojlim_{C \in \mathcal{C}} \mathcal{F}_C$ postoji i neprazan je skup; označimo sad sa $f_C : \mathcal{F} \to \mathcal{F}_C$, za svako $C \in \mathcal{C}$, kanonske projekcije. Neka je $\gamma \in \mathcal{F}$.

Definišemo bojenje $c : \binom{\mathcal{M}}{A} \to k$ sa:

$$c(A') = f_C(\gamma)(A'), \text{ gde je } C \in \mathcal{C} \text{ proizvoljno takvo da } A' \leqslant C.$$

Primetimo da je c dobro definisnao. Zaista, ako $D \in \mathcal{C}$ i $A' \leqslant D$, izaberemo tad $E \in \mathcal{C}$ ako da $C, D \leqslant E$. Imamo $f_C = f_{C,E} \circ f_E$ i $f_D = f_{D,E} \circ f_E$, pa je:

$$f_C(\gamma)(A') = (f_{C,E} \circ f_E(\gamma))(A') = f_E(\gamma)|_{\binom{C}{A}}(A') = f_E(\gamma)(A'),$$

i slično je $f_D(\gamma)(A') = f_E(\gamma)(A')$, što dokazuje da vrednost $c(A')$ ne zavisi od izbora C.

Neka je $B' \in \binom{\mathcal{M}}{A}$ proizvoljno. Neka je $C \in \mathcal{C}$ takav da $B' \leqslant C$. Kako $f_C(\gamma) \in \mathcal{F}_C$ i $f_C(\gamma) = c|_{\binom{C}{A}}$ po konstrukciji, imamo da $\binom{B'}{A}$ nije c-monohromatski. Ovo protivreči $\mathcal{M} \to (B)^A_k$. □

3.2 KPT korespondencija

Sledeća teorema je poznata pod nazivom *KPT korespondencija*.

Teorema 3.3. *Neka je X beskonačan skup, $\mathcal{M} = (X, \ldots)$ neka ultrahomogena lokalno konačna struktura na X, i neka je $G = \mathrm{Aut}(\mathcal{M})$. Sledeći iskazi su ekvivalentni:*

1. *G je ekstremno amenabilna;*

2. *važe:*

   (a) $(\forall A \underset{kon.}{\subseteq} X)\ G_A = G_{(A)}$ *i*

   (b) $\mathrm{Age}(\mathcal{M})$ *ima Remzijevo svojstvo;*

3. *važe:*

   (a′) $G \curvearrowright \mathrm{LO}(X)$ *ima fiksnu tačku i*

   (b) $\mathrm{Age}(\mathcal{M})$ *ima Remzijevo svojstvo.*

Dokaz. $(1 \Rightarrow a')$ je očigledno (setimo se leme 1.33).

$(a' \Rightarrow a)$ Neka je $< \in \mathrm{LO}(X)$ fiksna tačka dejstva $G \curvearrowright \mathrm{LO}(X)$. Neka je $A \underset{kon.}{\subseteq} X$. Kako je očigledno $G_A \subseteq G_{(A)}$, dokazujemo drugu inkluziju. Neka $g \in G_{(A)}$. Zapišimo $A = \{a_0 < a_1 < \ldots < a_{n-1}\}$. Kako je $(g\cdot <) = <$, važi $g^{-1}(a_0) < g^{-1}(a_1) < \ldots < g^{-1}(a_{n-1})$, pa kako g (i g^{-1}) fiksira skup A, mora biti $g^{-1}(a_i) = a_i$, tj. $g(a_i) = a_i$ za sve $i < n$. Prema tome, $g \in G_A$.

$(1 \Rightarrow b)$ Prema prethodno dokazanom, važi (a), tj. $(\forall A \underset{kon.}{\subseteq} X)\ G_A = G_{(A)}$. Proverićemo uslov 2. iz leme 3.2. Neka $A \leqslant B \in \mathrm{Age}(\mathcal{M})$ i $k \geqslant 2$, i dokažimo da $\mathcal{M} \to (B)^A_k$. Neka je $c : \binom{\mathcal{M}}{A} \to k$.

Prema teoremi 2.17 za $V = G_A$ i izabrano k, uočimo bojenje $c' : G/G_A \to k$, dato sa $c'(gG_A) = c(g[A])$. Ovo je dobro definisano bojenje. Zaista, $g[A] \in \binom{\mathcal{M}}{A}$, ali takođe, ako $g_1G_A = g_2G_A$, tada $g_2^{-1}g_1 \in G_A$, odakle je $g_1[A] = g_2[A]$. Dalje, uočimo skup $S = \{g \in G \mid g[A] \leqslant B\}$ i skup $T = \{gG_A \mid g \in S\}$. Primetimo da je $T \underset{kon.}{\subseteq} G/G_A$. Zaista, videli smo da $g_1G_A = g_2G_A$ povlači $g_1[A] = g_2[A]$, ali važi i obrnuto: ako $g_1[A] = g_2[A]$, onda $g_2^{-1}g_1[A] = A$, pa je $g_2^{-1}g_1 \in G_{(A)} = G_A$. Odatle, kako je $\binom{B}{A}$ konačan, može biti samo konačno mnogo koseta gG_A za $g \in S$, tj. T je konačan.

Prema teoremi 2.17 izaberemo $l < k$ i $\gamma \in G$ tako da $(\forall g \in S)\ c'(\gamma g G_A) = l$. Neka je $B' = \gamma[B] \in \binom{\mathcal{M}}{B}$. Tvrdimo da je B' željeni skup. Neka je $A' \in \binom{B'}{A}$ proizvoljno. Zbog ultrahomogenosti imamo $h \in G$ tako da $h[A] = A'$. Primetimo da je $\gamma^{-1}h[A] \leqslant B$, pa $\gamma^{-1}h \in S$. Zato je $c(A') = c(h[A]) = c'(hG_A) = c'(\gamma\gamma^{-1}hG_A) = l$. Završili smo dokaz.

$(3 \Rightarrow 2)$ sledi iz $(a' \Rightarrow a)$.

$(2 \Rightarrow 1)$ Dokazaćemo uslov 3. iz teoreme 2.17. Neka je $V = G_A$, gde $A \underset{kon.}{\subseteq} X, k \geqslant 2, c : G/G_A \to k$ i $T \underset{kon.}{\subseteq} G/G_A$. Primetimo da možemo da pretpostavimo da je

$A \in \mathrm{Age}(\mathcal{M})$ jer je $G_{\langle A\rangle} = G_A$. Neka je $T = \{h_i G_A \mid i < n\}$ i neka je $B = \langle A \cup \bigcup_{i<n} h_i[A]\rangle$. Prema lemi 3.2 važi $\mathcal{M} \to (B)^A_k$. Neka je $c' : \binom{\mathcal{M}}{A} \to k$ dato sa: $c'(A') = c(gG_A)$, gde je $g \in G$ takvo da $g[A] = A'$ (takvo g postoji zbog ultrahomogenosti). Primetimo da je c' dobro definisano bojenje jer, kao u prethodnom koraku, $g_1[A] = g_2[A]$ povlači $g_2^{-1}g_1 \in G_{(A)} = G_A$, tj. $g_1G_A = g_2G_A$. Kako važi $\mathcal{M} \to (B)^A_k$, to postoje $j < k$ i $B' \in \binom{\mathcal{M}}{B}$ tako da $c'(A') = l$ za sve $A' \in \binom{B'}{A}$. Koristeći ultrahomogenost, izaberemo $\gamma \in G$ tako da $\gamma[B] = B'$. Sada je, za $i < n, c(\gamma h_i G_A) = c'(\gamma h_i[A]) = l$, jer $\gamma h_i[A] \in \binom{B'}{A}$, time je završen dokaz. □

3.3 Primeri ekstremno amenabilnih grupa

Sledeća teorema je prvi put dokazana u [11] (teorema 5.4).

Teorema 3.4. $\mathrm{Aut}(\mathbb{Q}, <)$ *je ekstremno amenabilna.*

Dokaz. Struktura $(\mathbb{Q}, <)$, kao relacijaska struktura, je lokalno-konačna. Takođe, ona je ultrahomogena. Zaista bilo koji izomorfizam $\{a_1 < a_2 < \cdots < a_n\} \to \{b_1 < b_2 < \cdots < b_n\}$ se može produžiti do automorfizma $(\mathbb{Q}, <)$ tako što ga dodefinišemo linearnim bijekcijama $(-\infty, a_1) \to (-\infty, b_1)$, $(a_i, a_{i+1}) \to (b_i, b_{i+1})$ i $(a_n, +\infty) \to (b_n + \infty)$. Dakle, možemo da koristimo teoremu 3.3.

Dokazaćemo karakterizaciju 3. iz teoreme 3.3. Uslov (a') očigledno je ispunjen jer $\mathrm{Aut}(\mathbb{Q}, <)$ fiksira $<\in \mathrm{LO}(\mathbb{Q})$. Ostaje da proverimo uslov (b): $\mathrm{Age}(\mathbb{Q}, <)$, tj. familija konačnih podurеđenja od $\mathbb{Q}$, ima Remzijevo svojstvo. Prema lemi 3.2 treba da dokažemo da za proizvoljne konačne $A \leqslant B \leqslant (\mathbb{Q}, <)$ i proizvoljno $k \geqslant 2$, $\mathbb{Q} \to (B)^A_k$. Neka je $c : \binom{\mathbb{Q}}{A} \to k$ bojenje. Primetimo da je $\varphi : \binom{\mathbb{Q}}{A} \to [\mathbb{Q}]^{|A|}$, gde je $[\mathbb{Q}]^{|A|}$ familija $|A|$-točlanih podskupova od $\mathbb{Q}$, definisana sa $\varphi(A') =$ skup nosač od A', bijekcija. Zaista, na svakom $|A|$-točlanom podskupu od $\mathbb{Q}$ postoji samo jedan način da se definiše uređenje do podstrukture od $(\mathbb{Q}, <)$. Dakle, c je bojenje $[\mathbb{Q}]^{|A|} \to k$. Prema klasičnoj Remzijevoj teoremi postoji beskonačan skup $X \subseteq \mathbb{Q}$ takav da je familija $[X]^{|A|}$ monohromatska u odnosu na c. Sada je dovoljno da za B' uzmemo bilo koji $|B|$-točlani podskup od X sa nasleđenim uređenjem iz $\mathbb{Q}$. □

Kao što smo primetili u dokazu, $\mathrm{Aut}(\mathbb{Q}, <)$ deluje tranzitivno na svim n-točlanim podskupovima od $\mathbb{Q}$, za sve $n \geqslant 1$. Sledeća teorema kaže da je ekstremno amenabilna grupa sa ovom osobinom vrlo bliska $\mathrm{Aut}(\mathbb{Q}, <)$. Preciznije, važi sledeća teorema:

Teorema 3.5. *Neka je X prebrojiv skup i $G \leqslant \mathrm{Sym}(X)$. Tada G je (topološki) izomorfna gustoj podgrupi od* $\mathrm{Aut}(\mathbb{Q},<)$ *ako važe sledeća dva uslova:*

$\diamond_1$ *G je ekstremno amenabilna, i*

$\diamond_2$ *za svako $n \geqslant 1$, G deluje tranzitivno na n-točlanim podskupovima od X.*

Dokaz. Prema uslovu ($\diamond_1$), postoji linearno uređenje $\prec$ na X takvo da:

$$(\forall g \in G)(\forall x, y \in X)(x \prec y \Leftrightarrow g(x) \prec g(y)) \tag{‡}$$

tj. $\prec$ je fiksna tačka dejstva $G \curvearrowright \mathrm{LO}(X)$. Dakle, $G \leqslant \mathrm{Aut}(X,\prec)$.

Dokažimo sad da je $(X,\prec) \cong (\mathbb{Q},<)$. Dovoljno je dokazati da je $(X,\prec)$ gusto linearno uređenje bez krajeva. Izaberimo proizvoljne tri tačke $a,b,c \in X$ takve da $a \prec b \prec c$. Neka $x,y \in X$ i $x \prec y$. Prema uslovu ($\diamond_2$) postoji $g \in G$ tako da $g \cdot \{a,c\} = \{x,y\}$, pa prema (‡), mora biti $g(a) = x$ i $g(b) = y$, pa je i $x \prec g(b) \prec y$, odnosno, $(X,\prec)$ je gusto linearno uređenje. Takođe, prema uslovu ($\diamond_2$), za svako $x \in X$ postoji $g \in G$ takvo da $g(b) = x$. Tada prema (‡), $g(a) \prec x \prec g(c)$, pa x nije ni najmanji ni najveći element uređenja. Dakle, $(X,\prec)$ nema krajeve i time je $(X,\prec) \cong (\mathbb{Q},<)$. Specijalno, važi i $\mathrm{Aut}(X,\prec) \cong \mathrm{Aut}(\mathbb{Q},<)$.

Sad je dovoljno da dokažemo da je $G \leqslant \mathrm{Aut}(X,\prec)$ gusta podgrupa. Neka je $B \subseteq \mathrm{Aut}(X,\prec)$ neprazan bazni skup. Tada je $B = \{f \in \mathrm{Aut}(X,\prec) \mid (\forall i < n)\ f(a_i) = b_i\}$, gde su $a_0 \prec a_1 \prec \ldots \prec a_{n-1}$ i $b_0 \prec b_1 \prec \ldots \prec b_{n-1}$ elementi iz X. Prema ($\diamond_2$) imamo $g \in G$ tako da $g \cdot \{a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}\} = \{b_0, b_1, \ldots, b_{n-1}\}$, pa zbog (‡) mora biti $g(a_0) = b_0, g(a_1) = b_1, \ldots, g(a_{n-1}) = b_{n-1}$. Dakle, $g \in B$. Prema tome, G je gusta u $\mathrm{Aut}(X,\prec)$. □

Sa druge strane, svaka gusta podgrupa G od $\mathrm{Aut}(\mathbb{Q},<)$ zadovoljava dva uslova iz prethodne teoreme. Zaista, G je ekstremno amenabilna prema teoremi 2.18 i teoremi 3.4. Takođe, ako $A = \{a_0 < a_1 < \cdots < a_{n-1}\}$ i $B = \{b_0 < b_1 < \cdots < b_{n-1}\}$, G seče baznu okolinu datu sa $\{f \in \mathrm{Aut}(\mathbb{Q},<) \mid (\forall i < n)\ f(a_i) = b_i\}$ jer je gusta, pa imamo $g \in G$ tako da $g[A] = B$. Time su guste podgrupe od $\mathrm{Aut}(\mathbb{Q},<)$ u potpunosti okarakterisane.

Nakon dokaza KPT korespondencije, u literaturi se pojavilo puno rezultata koji dokazuju ekstremnu amenabilnost grupa automorfizama određenih struktura. Dokazi ovih rezultata zasnivaju se na proveri da Age (klasa konačnih podstruktura) određene strukture ima Remzijevo svojstvo. Neki od ovih rezultata su:

Teorema 3.6. *Grupe automorfizama sledećih struktura su ekstremno amenabilne:*

1. *Uređeni slučajni graf (Frajseov limes konačnih linearno uređenih grafova), čiji* Age *ima Remzijevo svojstvo prema [10];*

2. *Frajseov limes konačnih skupova sa* n *linearnih uređenja* $\{<_1, \ldots, <_n\}$ *prema [13];*

3. *Frajseov limes konačnih skupova sa parcijalnim uređenjem* $\prec$ *i linearnim uređenjem* $<$ *koje proširuje* $\prec$ *prema [12];*

4. *Frajseov limes linearno uređenih konačnih vektorskih prostora nad fiksiranim konačnim poljem* F *na jeziku* $\{+, m_a, <\}_{a \in F}$*, gde je* $m_a : x \mapsto ax$ *operacija množenja skalarom* $a \in F$*, a* $<$ *antileksikografsko uređenje indukovano uređenjem na bazi, prema [5];*

5. *Frajseov limes linearno uređenih konačnih Bulovih algebri, sa antileksikografskim uređenjem indukovanim uređenjem atoma, prema [6].*

Kao što smo rekli, dokazi navedenih rezultata zasnivaju se na proveri da Age određene strukture ima Remzijevo svojstvo. Sa druge strane, u literaturi nema puno rezultata koji iz ekstremne amenabilnosti grupe automorfizama zaključuju Remzijevo svojstvo odgovarajućeg Age-a. Jedan takav primer dat je u sledećoj teoremi i posledici ([9]).

Teorema 3.7. *Grupa automorfizama strukture* $\mathcal{M} = (\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}, \lhd, E)$*, gde je:*

- $\lhd$ *leksikografsko uređenje, tj.* $(a, b) \lhd (a', b')$ *ako i samo ako* $a < a'$*, ili* $a = a'$ *i* $b < b'$*, i*

- E *je ekvivalencija data sa* $(a, b)\ E\ (a', b')$ *ako i samo ako* $a = a'$*,*

je ekstremno amenabilna.

Dokaz. Primetimo da su E-klase konveksni skupovi u odnosu na uređenje $\lhd$, što znači da je količnički skup $\mathcal{M}/E$ prirodno linearno uređen sa $\lhd$, kao i da je $(\mathcal{M}/E, \lhd) \cong (\mathbb{Q}, <)$. Označimo sa C_a, $a \in \mathbb{Q}$, klasu elementa $(a, 0)$ (tj. klasu elementa (a, b), za bilo koje $b \in \mathbb{Q}$).

Uočimo $N = \{f \in \mathrm{Aut}(\mathcal{M}) \mid (\forall a \in \mathbb{Q})\ f[C_a] = C_a\}$ – skup automorfizama koji fiksiraju sve klase. Nije teško videti da je $N \lhd \mathrm{Aut}(\mathcal{M})$. Primetimo i da je N zatvorena podgrupa od $\mathrm{Aut}(\mathcal{M})$. Ako $f_0 \notin N$, imamo $a \neq b$ takve da $f(a, q) = (b, q')$ za neke q, q', pa f_0 pripada predbaznoj okolini $\{f \in \mathrm{Aut}(\mathcal{M}) \mid f(a, q) = (b, q')\}$; kako jasno ova okolina ne seče N, zaključujemo $f_0 \notin \overline{N}$. Dakle, $N = \overline{N}$. (Alternativno, možemo primetiti da je N grupa automorfizama ekspanzije $(\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}, \lhd, E, C_a)_{a \in \mathbb{Q}}$ strukture $\mathcal{M}$ unarnim predikatima, pa je zato zatvorena podgrupa prema teoremi 1.30.) Da bismo dokazali da je $\mathrm{Aut}(\mathcal{M})$ ektremno amenabilna, dovoljno je, prema teoremi 2.21, da dokažemo da su N i $\mathrm{Aut}(\mathcal{M})/N$ ekstremno amenabilne.

Uočimo $H_a = \{f \in \mathrm{Aut}(\mathcal{M}) \mid (\forall b \neq a)\ f|_{C_b} = \mathrm{id}_{C_b}\}$ – skup automorfizama koji fiksiraju sve tačke osim tačaka klase C_a, za $a \in \mathbb{Q}$; primetimo da je tada obavezno $f[C_a] = C_a$. Nije teško videti da je $H_a \lhd N$, očigledno $H_a \cap H_b = \langle \mathrm{id}_{\mathcal{M}} \rangle$ za $a \neq b$, i nije teško videti da je $N = \prod_{a \in \mathbb{Q}} H_a$. Prema teoremi 2.22, da bismo zaključili da je N ekstremno amenabilna, dovoljno je da vidimo da su H_a ekstremno amenabilne. Uočimo preslikavanje $\varphi : \mathrm{Aut}(\mathbb{Q}, <) \to H_a$ određeno sa $\varphi(f)(a, q) = (a, f(q))$ i $\varphi(f)(b, q) = (b, q)$ za $b \neq a$. Nije teško videti da je φ topološki izomorfizam, pa zaključujemo da je H_a ekstremno amenabilna prema teoremi 3.4.

Ostaje da dokažemo da je $\mathrm{Aut}(\mathcal{M})/N$ ekstremno amenabilna. Posmatrajmo preslikavanje $\psi : \mathrm{Aut}(\mathbb{Q}, <) \to \mathrm{Aut}(\mathcal{M})/N$ dato sa $\psi(f) = \widehat{f}N$, gde je $\widehat{f}$ definisan sa $\widehat{f}(a, q) = (f(a), q)$. Ponovo nije teško videti da je ψ dobro definisan topološki izomorfizam, pa je i $\mathrm{Aut}(\mathcal{M})/N$ ekstremno amenabilna prema teoremi 3.4. $\square$

Posledica 3.8. *Klasa $\mathcal{K}$ konačnih struktura jezika $\{\lhd, E\}$ u kojima je $\lhd$ interpretirano kao linearno uređenje, a E kao konveksna relacija ekvivalencije, ima Remzijevo svojstvo.*

Dokaz. Dovoljno je da primetimo da je $\mathcal{K} = \mathrm{Age}(\mathcal{M})$, gde je $\mathcal{M}$ struktura iz teoreme 3.7, i da primenimo teoremu 3.3. $\square$

Literatura

[1] A.V. Arkhangel′skiĭ and M. Tkachenko. *Topological Groups and Related Structures*. Atlantis studies in mathematics. Atlantis Press, 2008.

[2] Dana Bartošová. *Topological dynamics of automorphism groups of ω-homogeneous structures via near ultrafilters*. PhD thesis, University of Toronto, 2013.

[3] Dana Bartošová. Universal minimal flows of groups of automorphisms of uncountable structures. *Canadian Mathematical Bulletin*, 56(4):709--722, 2013.

[4] Manuel Bodirsky, Michael Pinsker, and Todor Tsankov. Decidability of definability. *The Journal of Symbolic Logic*, 78(4):1036--1054, 2013.

[5] RL Graham, K Leeb, and BL Rothschild. Ramsey's theorem for a class of categories. *Classic Papers in Combinatorics*, pages 431--445, 1987.

[6] Ronald L Graham and Bruce L Rothschild. Ramsey's theorem for n-parameter sets. *Transactions of the American Mathematical Society*, 159:257--292, 1971.

[7] Neil Hindman and Dona Strauss. *Algebra in the Stone-Cech Compactification*. De Gruyter, Berlin, Boston, 2012.

[8] Wilfrid Hodges. *A shorter model theory*. Cambridge University Press, USA, 1997.

[9] AS Kechris, VG Pestov, and S Todorcevic. Fraïssé limits, ramsey theory, and topological dynamics of automorphism groups. *Geometric & Functional Analysis GAFA*, 15:106--189, 2005.

[10] Jaroslav Nešetřil and Vojtěch Rödl. Ramsey classes of set systems. *Journal of Combinatorial Theory, Series A*, 34(2):183--201, 1983.

[11] Vladimir Pestov. On free actions, minimal flows, and a problem by ellis. *Transactions of the American Mathematical Society*, 350(10):4149--4165, 1998.

[12] Miodrag Sokić. Ramsey properties of finite posets. *Order*, 29:1--30, 2012.

[13] Miodrag Sokić. Ramsey property, ultrametric spaces, finite posets, and universal minimal flows. *Israel Journal of Mathematics*, 194:609--640, 2013.

Biografija autora

Rami Haider rođen je 10.09.1997. godine u Damasku, Sirija, gde je završio osnovnu i srednju školu. 2017. godine upisao je osnovne akademske studije na Matematičkom fakultetu Univerziteta u Beogradu, studijski program Matematika, modul Teorijska matematika i primene, kao stipendista programa „Svet u Srbiji", i diplomirao je 6.07.2022. godine. Iste godine upisao je i master akademske studije na istom studijskom programu i modulu, o svom trošku.