УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ
МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ

Катарина М. Лукић

ПРИНЦИПИ ПСЕУДО-РИМАНОВИХ ОСЕРМАНОВИХ ТЕНЗОРА И МНОГОСТРУКОСТИ

докторска дисертација

Београд, 2024.

UNIVERSITY OF BELGRADE
FACULTY OF MATHEMATICS

Katarina M. Lukić

PRINCIPLES OF PSEUDO-RIEMANNIAN OSSERMAN TENSORS AND MANIFOLDS

doctoral dissertation

Belgrade, 2024.

Ментор:

др Владица Андрејић, ванредни професор
Универзитет у Београду - Математички факултет

Чланови комисије:

др Зоран Ракић, редовни професор
Универзитет у Београду - Математички факултет

др Иван Димитријевић, ванредни професор
Универзитет у Београду - Математички факултет

др Божидар Јовановић, научни саветник
Математички институт САНУ у Београду

Датум одбране: ____________________

Свим мојим професорима математике

Наслов дисертације: Принципи псеудо-Риманових Осерманових тензора и многострукости

Резиме: У дисертацији се полази од тензора кривине псеудо-Риманове многострукости или алгебарског тензора кривине на векторском простору са (могуће недефинитним) скаларним производом. Проучавају се особине тензора кривине које су карактеристичне за Риманове Осерманове многострукости, односно принципи Осерманових тензора: дуалност, пропорционалност и ортогоналност. Установљени принципи се уопштавају на псеудо-Риманов случај и посматрају двосмерно. Са једне стране занима нас у којој мери ти принципи следе из Осерманових услова, а са друге, у којој мери су Осерманови услови последица установљених принципа. Уведени су квази-Клифордови тензори као уопштење Клифордових тензора, а потом су дати неки довољни услови под којима важи потпуни принцип дуалности за квази-Клифордове тензоре, а представљен је и пример псеудо-Римановог Осермановог тензора за који не важи принцип дуалности. Доказана је теорема о постојању алгебарског тензора кривине за дате Јакобијеве операторе која је искоришћена за доказивање резултата о принципу пропорционалности. Осмишљен је принцип ортогоналности као нова потенцијална карактеризација Риманових Осерманових тензора. Сваки Риманов Јакоби-ортогоналан тензор је Осерманов, док су Клифордови и два корена Риманови Осерманови тензори Јакоби-ортогонални. Приказана су уопштења принципа ортогоналности у псеудо-Римановом случају, посебно у случајевима малих димензија 3 и 4.

Кључне речи: Осерманова многострукост, Осерманов тензор, Јакобијев оператор, принцип дуалности, принцип ортогоналности, принцип пропорционалности, квази-Клифордов тензор

Научна област: Математика

Ужа научна област: Геометрија

УДК број: 514.764.2(043.3)

Dissertation title: Principles of pseudo-Riemannian Osserman tensors and manifolds

Abstract: In this dissertation, we start from the curvature tensor of the pseudo-Riemannian manifold or the algebraic curvature tensor on a vector space with a (possibly indefinite) scalar product. The duality, proportionality and orthogonality principles of Osserman tensors are studied as they are properties of curvature tensors that are characteristic of Riemannian Osserman manifolds. The established principles are generalized to the pseudo-Riemannian case and are observed in two directions. On the one hand, we are interested whether these principles follow from Osserman's conditions, and on the other, to what extent Osserman's conditions are a consequence of established principles. Quasi-Clifford tensors are introduced as a generalization of Clifford tensors, and then some sufficient conditions are given under which the totally duality principle holds for quasi-Clifford tensors, and an example of a pseudo-Riemannian Osserman tensor is presented for which the duality principle does not hold. The theorem on the existence of the algebraic curvature tensor for the given Jacobi operators is proved, which is used to prove the results on the principle of proportionality. The principle of orthogonality is devised as a new potential characterization of Riemannian Osserman tensors. Every Riemannian Jacobi-orthogonal tensor is an Osserman tensor, while Clifford and two-root Riemannian Oserman tensors are Jacobi-orthogonal. Generalizations of the orthogonality principle in the pseudo-Riemannian case are presented, especially in the cases of small dimensions 3 and 4.

Keywords: Osserman manifold, Osserman tensor, Jacobi operator, duality principle, orthogonality principle, proportionality principle, quasi-Clifford tensor

Research area: Mathematics

Research sub-area: Geometry

UDC number: 514.764.2(043.3)

Захвалница

Велику захвалност дугујем свом ментору, проф. др Владици Андрејићу, на издвојеном времену и труду да своје знање и искуство подели са мном и да ме уведе у истраживачки процес. Његови стални подстицаји и вера у мене допринели су квалитету тезе.

Желела бих да се захвалим и члановима комисије, проф. др Зорану Ракићу, научном саветнику др Божидару Јовановићу и проф. др Ивану Димитријевићу, на корисним смерницама које су унапредиле ову дисертацију.

На крају, велику захвалност дугујем својој породици, тета Слоби, пријатељима и колегама због подршке коју су ми несебично пружали.

У Обреновцу, септембра 2024. *Катарина Лукић*

Предговор

Један од најважнијих догађаја у историји геометрије догодио се 10. јуна 1854. када је Бернхард Риман[1] на Филозофском факултету Универзитета у Гетингену одржао предавање под називом „О хипотезама које леже у основама геометрије“ (Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen). Риман је 1851. године одбранио докторску дисертацију из основа комплексне анализе, а ментор му је био Гаус[2]. Наредни корак у његовој академској каријери био је да напише рад и одржи јавно предавање, а област из које ће бити то предавање бирао је факултет са листе од три Риманова предлога. Прва два Риманова предлога биле су области у којима је већ радио и имао резултате, али Гаус је одабрао трећу предложену тему која је била из основа геометрије. Иако је излагање било разумљиво и идеје су биле јасно дефинисане, Риманово предавање је било само усмено и без употребе аналитичког апарата, те је изазвало значајне реакције математичара тек две године након Риманове смрти када га је у писаној форми (видети [63]) објавио Дедекинд[3], а данас се то предавање сматра основом за развој гране диференцијалне геометрије коју називамо Риманова геометрија (видети [65]). Риман је први дао значајан допринос уопштењу идеје површи на више димензије и он је за такав простор користио реч mannigfaltigkeit. Касније се у енглеском језику усталила реч manifold иако је Клифорд[4] у првом преводу на енглески користио реч manifoldness (видети [64]), док ми користимо реч многострукост и то је основни објекат диференцијалне геометрије. Више о овоме, као и чувено Риманово предавање (преведено на енглески) може се видети у четвртој глави у Спиваковој[5] књизи [67].

---

[1] Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826–1866), немачки математичар

[2] Johann Carl Friedrich Gauß (1777–1855), немачки математичар

[3] Richard Dedekind (1831–1916), немачки математичар

[4] William Kingdon Clifford (1845–1879), енглески математичар и филозоф

[5] Michael David Spivak (1940-2020), амерички математичар

Са друге стране, Берже[6] је сматрао да је кривина најприроднија и најважнија инваријанта Риманове геометрије (видети [16], страна 9), а тога су били свесни и раније Гаус и Риман. И по Осермановом[7] мишљењу, појам кривине је један од централних концепата диференцијалне геометрије који раздваја геометријско језгро предмета изучавања од оних аспеката који су аналитички, алгебарски или тополошки (видети [60]). Кривина има примене у физици јер је према Њутновим[8] законима износ силе који је потребан да би се материјална честица кретала константном брзином дуж неке криве пропорционалан кривини трајекторије те материјалне честице (видети [15]). Такође, Ајнштајн[9] је користио да је кретање материјалног тела у гравитационом пољу одређено кривином Лоренцове[10] многострукости (видети [42]).

Један од основних проблема диференцијалне геометрије и неких грана физике је проблем одређивања геометријске структуре псеудо-Риманове многострукости на основу познатог тензора кривине. Информација о кривини садржана је у тензору кривине са којим је тешко радити упркос многим симетријама које поседује. Издвајање геометријске информације која се тамо налази је прилично изазован задатак. Зато је Громов[11] описао тензор кривине као малог монструма (мулти)линеарне алгебре чије потпуно геометријско значење није најјасније (видети [38]). Уместо да радимо са самим тензором кривине, често користимо Јакобијеве[12] операторе или секционе кривине јер је са њима једноставније радити. Секционе кривине делују једноставније, а значајно је да оне у потпуности одређују тензор кривине у тачкама у којима је познат скаларни производ. Када су све секционе кривине Риманове многострукости једнаке, тада је та многострукост простор константне секционе кривине и метрика је потпуно одређена. У наставку нас занима наредни најједноставнији случај, а то је када Јакобијев оператор $\mathcal{J}_X$ има константне сопствене вредности (рачунајући вишеструкости) независне од јединичног вектора X и од тачке многострукости. Овај услов зовемо условом Осермановог типа.

Космолошки принцип је филозофска претпоставка по којој наш положај у васиони ни по чему није специјалан, те да је на довољно великој скали про-

---

[6] Marcel Yves Marie Joseph Berger (1927-2016), француски математичар

[7] Robert Osserman (1926–2011), амерички математичар

[8] Isaac Newton (1643-1727), енглески физичар и математичар

[9] Albert Einstein (1879–1955), немачки теоријски физичар

[10] Hendrik Antoon Lorentz (1853–1928), холандски физичар

[11] Михаил Леонидович Громов (1943), руски математичар

[12] Carl Gustav Jacob Jacobi (1804–1851), немачки математичар

сторна дистрибуција материје у васиони хомогена и изотропна. Ова претпоставка је и потврђена на довољно великим скалама. Добро је познат Волфов[13] резултат (видети [71, Лема 8.12.1]) да је повезана Риманова многострукост изотропна (има геометрију која не зависи од праваца) ако и само ако је две-тачке хомогена, односно ако се сваки пар тачака може трансформисати, у смислу одговарајуће изометрије, у било који пар тачака са истим растојањем између њих. Две-тачке хомогене многострукости су својеврсни модел простори, веома добри примери са којима упоређујемо апстрактне многострукости тражећи заједничке особине. Као последица потпуне класификације, модел Риманове многострукости су еуклидски простори, сфере, те реални, комплексни или кватернионски, пројективни или хиперболички простори, као и Кејлијева[14] пројективна или хиперболичка раван.

Локалне изометрије локалних две-тачке хомогених простора дејствују транзитивно на јединичном сферном раслојењу, те зато тамо фиксирају карактеристични полином Јакобијевог оператора. То нас мотивише да дефинишемо Риманове Осерманове многострукости у којима карактеристични полином Јакобијевог оператора не зависи од избора вектора из јединичног тангентног раслојења.

Недостатак других примера усмерило је Осермана да размишља о обратном тврђењу (видети [60]). Питање да ли је свака Осерманова Риманова многострукост локално две-тачке хомогена познато је под именом Осерманова хипотеза, и то је једно од суштинских питања Риманове геометрије.

Основна идеја у овој дисертацији је изучавање елегантних особина тензора кривине које нису одмах видљиве, а које су блиске Осермановим тензорима, што би нам омогућило боље разумевање Осермановил многострукости и самим тим нас примакло решењу Осерманове хипотезе.

У Глави 1 дат је преглед основних појмова псеудо-Риманове геометрије, као што су недегенерисаност, недефинитност и симетричност билинеарне форме, ортогонални вектори, скаларни производ, простор са скаларним производом, Грамова[15] матрица билинеарне форме, квадратна норма, просторни, временски и изотропни вектори, дефинитни вектори, јединични вектори, норма или дужина вектора, ортогонални потпростор, недегенерисан потпростор, дефинитан потпростор, ортонормирана база, индекс и сигнатура простора са

---

[13] Joseph Albert Wolf (1936), амерички математичар

[14] Arthur Cayley (1821–1895), британски математичар

[15] Jørgen Pedersen Gram (1850–1916), дански математичар

скаларним производом, Силвестеров[16] закон инерције, потпуно изотропан потпростор, метрика, псеудо-Риманова многострукост, индекс метрике, индекс псеудо-Риманове многострукости, Риманова метрика, Риманова многострукост, Лоренцова метрика, Лоренцова многострукост, неутрална метрика, Вокерова[17] метрика, Клајнова[18] многострукост, еуклидска метрика, еуклидски простор, псеудо-еуклидски простор, простор Минковског[19], повисилица, снизилица, псеудо-Риманова имерзија, изометрија, изометричне многострукости, метричка повезаност, торзија, симетрична повезаност, Леви-Чивита[20] повезаност, оператор кривине псеудо-Риманове многострукости, тензор кривине псеудо-Риманове многострукости, Ричијев[21] тензор, Ајнштајнова псеудо-Риманова многострукост, тангентна раван, секциона кривина, алгебарски тензор кривине, $\mathbb{Z}_2$ симетрије, први Бјанкијев[22] идентитет, тензор константне секционе кривине 1, компоненте тензора кривине.

У првом поглављу Главе 2 приказани су познати појмови попут алгебарског оператора кривине, поларизованог Јакобијевог оператора, Јакобијевог оператора, услова компатибилности и редукованог Јакобијевог оператора. Познато је да Јакобијеви оператори једнозначно одређују тензор кривине, а природно се поставља питање о постојању алгебарског тензора кривине за дате Јакобијеве операторе. У другом поглављу Главе 2 доказана је одговарајућа теорема о постојању алгебарског тензора кривине на простору са скаларним производом за дате Јакобијеве операторе која је део коауторског рада [8] са Андрејићем[23]. Прецизније, ако $\mathcal{K}_X$ за све дефинитне $X \in \mathcal{V}$ чине компатибилну фамилију самоадјунгованих ендоморфизама на (могуће недефинитном) простору са скаларним производом $\mathcal{V}$ који задовољавају $\mathcal{K}_X X = 0$, онда постоји јединствени алгебарски тензор кривине на $\mathcal{V}$ такав да су $\mathcal{K}_X$ његови Јакобијеви оператори.

У прва два поглавља Главе 3 приказана је Осерманова хипотеза и принцип дуалности у Римановом случају, као и уопштења Осермanових услова и принципа дуалности у псеудо-Римановом случају. Принцип дуалности је особина

---

[16] James Joseph Sylvester (1814-1897), енглески математичар

[17] Arthur Geoffrey Walker (1909–2001), британски математичар

[18] Felix Klein (1849–1925), немачки математичар

[19] Hermann Minkowski (1864–1909), немачки математичар

[20] Tullio Levi-Civita (1873–1941), италијански математичар

[21] Gregorio Ricci-Curbastro (1853–1925), италијански математичар

[22] Luigi Bianchi (1856–1928), италијански математичар

[23] Владица Андрејић (1978), српски математичар

да је X сопствени вектор Јакобијевог оператора $\mathcal{J}_Y$ ако је Y сопствени вектор Јакобијевог оператора $\mathcal{J}_X$. Поставио га је Ракић[24] (видети [61, 62]) 1998. године, а касније се испоставило да је Риманов тензор Осерманов ако и само ако задовољава принцип дуалности (видети [57, 58]). Овај принцип је омогућио велики напредак у решавању Осерманове хипотезе кроз више радова Николајевског[25] (видети [53, 54, 55, 56]). У трећем поглављу Главе 3 приказани су резултати објављени у коауторском раду [7] са Андрејићем. Уведени су квази-Клифордови тензори користећи уопштење Клифордове фамилије и доказано је да су они Осерманови. Дати су неки довољни услови, а и неки потребни услови под којима важи потпуни принцип дуалности за квази-Клифордове тензоре, а представљен је и пример псеудо-Римановог Осермановог тензора за који не важи принцип дуалности.

Принцип пропорционалности у Римановом случају је 2022. године увео Андрејић као појачање принципа дуалности (видети [5]), а испоставља се да он важи за Клифордове, а и за два корена Риманове Осерманове тензоре. У Глави 4 су представљени резултати из коауторског рада [8] са Андрејићем везани за принцип пропорционалности у псеудо-Римановом случају, као и значајне примене принципа пропорционалности у Римановом случају повезани са Осермановом хипотезом које се могу наћи у Андрејићевом раду [5].

У првом поглављу Главе 5 представљени су резултати коауторског рада [9] са Андрејићем из 2024. године. Уведен је принцип ортогоналности као нова потенцијална карактеризација Риманових Осерманових алгебарских тензора кривине. Принцип ортогоналности је нов концепт по којем је $\mathcal{J}_X Y$ ортогонално на $\mathcal{J}_Y X$ за свака два међусобно ортогонална вектора X и Y. Доказано је да је сваки Риманов Јакоби-ортогоналан тензор Осерманов, док су Клифордови, а и два корена Риманови Осерманови тензори Јакоби-ортогонални. У другом поглављу Главе 5 приказани су резултати објављени у самосталном раду [48]. Уопштен је појам Јакоби-ортогоналности на недефинитне просторе са скаларним производом. Упоређивани су различити принципи и утврђиване везе између Осерманових, Јакоби-дуалних и Јакоби-ортогоналних алгебарских тензора кривине. Показано је да је сваки квази-Клифордов тензор Јакоби-ортогоналан. Доказано је да је Јакоби-дијагонализабилан Јакоби-ортогоналан тензор Јакоби-дуалан кадгод $\mathcal{J}_X$ нема изотропних сопствених вектора за сва-

---

[24] Зоран Ракић (1964), српски математичар

[25] Yuri Nikolayevsky, руско-аустралијски математичар

ко дефинитно X. Показано је да је сваки алгебарски тензор кривине димензије 3 Јакоби-ортогоналан ако и само ако је константне секционе кривине. Доказано је да је сваки 4-димензиони Јакоби-дијагонализабилан алгебарски тензор кривине Јакоби-ортогоналан ако и само ако је Осерманов.

У Глави А дата су четири додатка из линеарне алгебре, топологије, диференцијалне геометрије и тензорског рачуна. Теза се завршава списком коришћене литературе, индексом имена и индексом појмова.

Садржај

Глава 1

Псеудо-Риманова геометрија

У овој глави дате су основне дефиниције и изложени познати резултати из псеудо-Риманове геометрије који се могу наћи у [6], [24] или [59]. Иако је реч о резултатима чији докази постоје у поменутој литератури, у овој докторској дисертацији су ти докази изложени јер су допуњени са неколико детаља који нису дати у оригиналним референцама.

1.1 Билинеарне форме

Нека је $\mathcal{V}$ векторски простор над пољем $\mathbb{R}$ коначне димензије n. ***Билинеарна форма*** на $\mathcal{V}$ је пресликавање $g\colon \mathcal{V} \times \mathcal{V} \to \mathbb{R}$ које је $\mathbb{R}$-билинеарно, што значи да за све векторе X, Y и Z из $\mathcal{V}$ и свака два реална броја a и b важи да је $g(aX+bY,Z) = ag(X,Z)+bg(Y,Z)$ и $g(X,aY+bZ) = ag(X,Y)+bg(X,Z)$. Билинеарна форма g на $\mathcal{V}$ је ***симетрична*** ако за свака два вектора X и Y из $\mathcal{V}$ важи $g(X,Y) = g(Y,X)$. За векторе X и Y из $\mathcal{V}$ кажемо да су ***међусобно ортогонални*** у ознаци $X \perp Y$ ако је $g(X,Y) = 0$. Слично, за два подскупа $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ од $\mathcal{V}$ кажемо да су ***ортогонални*** и пишемо $\mathcal{A} \perp \mathcal{B}$ ако за свако $X \in \mathcal{A}$ и свако $Y \in \mathcal{B}$ важи да је $X \perp Y$. За билинеарну форму g на $\mathcal{V}$ кажемо да је ***недегенерисана*** ако једнакости $g(X,Y) = 0$ за свако $Y \in \mathcal{V}$ повлаче да је $X = 0$, односно ако је једини вектор из $\mathcal{V}$ који је ортогоналан на све векторе $Y \in \mathcal{V}$ нула вектор. ***Скаларни производ*** g на $\mathcal{V}$ је недегенерисана симетрична билинеарна форма на $\mathcal{V}$.

Простор са скаларним производом $(\mathcal{V}, g)$ димензије n је n-димензиони реални векторски простор са скаларним производом g на $\mathcal{V}$.

Када посматрамо неку базу $(E_1, ..., E_n)$ простора $\mathcal{V}$, онда билинеарна форма g на $\mathcal{V}$ одређује ***Грамову матрицу*** G чији су елементи $G_{ij} = g(E_i, E_j)$ за $i \in \{1, ..., n\}$ и $j \in \{1, ..., n\}$. Са друге стране, ова матрица у потпуности одређује билинеарну форму g, јер ако нам је позната матрица G, можемо одредити $g(X, Y)$ за свака два вектора X и Y из $\mathcal{V}$. Заиста, вектори X и Y се могу изразити као линеарне комбинације базних елемената, односно $X = \sum_{i=1}^{n} x_i E_i$ и $Y = \sum_{j=1}^{n} y_j E_j$, где су x_i за $i \in \{1, ..., n\}$ и y_j за $j \in \{1, ..., n\}$ реални бројеви. Тада на основу билинеарности форме g имамо да је $g(X, Y) = \sum_{i=1}^{n} x_i g(E_i, \sum_{j=1}^{n} y_j E_j) = \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{j=1}^{n} y_j g(E_i, E_j) = \sum_{i,j=1}^{n} x_i y_j G_{ij}$, што се користећи матрице записује у облику

$$(x_1, \ldots, x_n) \begin{pmatrix} G_{11} & \ldots & G_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ G_{n1} & \ldots & G_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = X^T G Y,$$

где су вектори X и Y представљени као колона матрице координата тих вектора у бази $(E_1, ..., E_n)$, те матрица G једнозначно одређује билинеарну форму g. Испитајмо у каквој су вези особине симетричности и недегенерисаности билинеарне форме g са особинама Грамове матрице G.

Приметимо да је услов симетричности билинеарне форме g еквивалентан са симетричношћу матрице G, односно условом $G^T = G$. Заиста, ако је билинеарна форма g симетрична, онда за свака два вектора X и Y из $\mathcal{V}$ важи $g(X, Y) = g(Y, X)$, те и за произвољне базне векторе E_i и E_j, при чему $i \in \{1, ..., n\}$ и $j \in \{1, ..., n\}$, важи $g(E_i, E_j) = g(E_j, E_i)$, односно $G_{ij} = G_{ji}$, те је Грамова матрица G симетрична. Са друге стране, ако је Грамова матрица G симетрична, односно $G^T = G$, онда за свако $i \in \{1, ..., n\}$ и $j \in \{1, ..., n\}$ важи $G_{ij} = G_{ji}$, односно $g(E_i, E_j) = g(E_j, E_i)$, те за свака два вектора X и Y чија су представљања помоћу базних вектора $X = \sum_{i=1}^{n} x_i E_i$ и $Y = \sum_{j=1}^{n} y_j E_j$ (где су x_i за $i \in \{1, ..., n\}$ и y_j за $j \in \{1, ..., n\}$ реални бројеви) на основу малопре изведеног важи да је $g(X, Y) = \sum_{i,j=1}^{n} x_i y_j G_{ij} = \sum_{j,i=1}^{n} y_j x_i G_{ji} = g(Y, X)$, те је билинеарна форма g симетрична.

Наредна лема нам говори да је услов недегенерисаности симетричне билинеарне форме g на $\mathcal{V}$ еквивалентан услову инвертибилности Грамове матрице G у односу на било коју базу.

Лема 1.1. *Симетрична билинеарна форма g на $\mathcal{V}$ је недегенерисана ако и само ако је њена Грамова матрица G у односу на било коју базу од $\mathcal{V}$ инвертибилна.*

Доказ. Нека је симетрична билинеарна форма g на $\mathcal{V}$ недегенерисана и нека је G њена Грамова матрица у односу на базу $(E_1, \ldots, E_n)$ од $\mathcal{V}$. Претпоставимо супротно, да матрица G није инвертибилна, односно да је $\det G = 0$. Тада на основу последице Крамерове[1] теореме хомоген квадратни систем једначина $GY = 0$ има нетривијално решење Y, односно постоји вектор $Y \in \mathcal{V}$ различит од 0 такав да за свако $X \in \mathcal{V}$ важи да је $g(Y, X) = g(X, Y) = X^T GY = X^T 0 = 0$, те није испуњена импликација из дефиниције недегенерисаности билинеарне форме g, што је у супротности са претпоставком да је g недегенерисана. Добијена контрадикција доказује да Грамова матрица G мора бити инвертибилна.

Нека је Грамова матрица G у односу на базу $(E_1, \ldots, E_n)$ од $\mathcal{V}$ инвертибилна, односно $\det G \neq 0$. Тада на основу Крамерове теореме хомоген квадратни систем једначина $GY = 0$ има јединствено решење $Y = 0$, односно за $Y \neq 0$ је $GY \neq 0$. Посматрајмо $Y \neq 0$. Тада је $GY \neq 0$. Како је GY матрица типа $n \times 1$, то постоји бар један елемент те колоне GY различит од 0. Ако је i-ти елемент GY различит од 0, онда је $g(Y, E_i) = g(E_i, Y) = E_i^T GY \neq 0$. Дакле, ако је $Y \neq 0$, онда постоји вектор E_i из $\mathcal{V}$ такав да је $g(Y, E_i) \neq 0$, те закључујемо да услов $g(Y, X) = 0$ за свако $X \in \mathcal{V}$ повлачи да је $Y = 0$, што по дефиницији значи да је g недегенерисана билинеарна форма. □

Ако за сваки ненула вектор X из $\mathcal{V}$ важи да је $g(X, X) > 0$, онда је билинеарна форма g ***позитивно дефинитна*** билинеарна форма на $\mathcal{V}$. Ако за сваки ненула вектор X из $\mathcal{V}$ важи да је $g(X, X) < 0$, онда је билинеарна форма g ***негативно дефинитна*** билинеарна форма на $\mathcal{V}$. За билинеарну форму g на $\mathcal{V}$ кажемо да је ***дефинитна*** ако је g позитивно дефинитна или негативно дефинитна билинеарна форма на $\mathcal{V}$. У супротном кажемо да је билинеарна форма g на $\mathcal{V}$ ***недефинитна***.

Докажимо да ако је билинеарна симетрична форма g дефинитна, онда је g недегенерисана. Претпоставимо да за свако $Y \in \mathcal{V}$ важи $g(X, Y) = 0$. Специјално, за $Y = X$ је $g(X, X) = 0$. Како је g дефинитна, онда је g или позитивно или негативно дефинитна. Ако је, без умањења општости, g позитивно дефинитна, то повлачи да је $X = 0$ (иначе би било $g(X, X) > 0$), те је g по дефиницији недегенерисана.

Покажимо сада да ако је билинеарна симетрична форма g недегенерисана, она не мора бити дефинитна, односно може бити недефинитна. Довољно је

---

[1] Gabriel Cramer (1704-1752), швајцарски математичар

наћи пример билинеарне симетричне форме g која је недегенерисана и недефинитна. За почетак наводимо један једноставан пример.

Пример 1.1. Посматрајмо билинеарну форму g на простору $\mathcal{V}$ димензије $n > 1$ која је једнозначно одређена помоћу Грамове матрице у односу на базу $(E_1, \dots, E_n)$ дате помоћу

$$G = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & a_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_n \end{pmatrix},$$

где су $a_1, a_2, \dots, a_n$ ненула реални бројеви и постоје $i, j \in \{1, \dots, n\}$ такви да је $a_i < 0$ и $a_j > 0$. Како је G дијагонална матрица, то се њена детерминанта израчунава као производ елемената на њеној главној дијагонали, одакле је $\det G = a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n \neq 0$, што значи да је G инвертибилна матрица, те на основу Леме 1.1 следи да је g недегенерисана симетрична билинеарна форма. Са друге стране, g је недефинитна јер није ни позитивно дефинитна јер за ненула базни елемент E_i важи да је $g(E_i, E_i) = G_{ii} = a_i$ што није позитивно, а g није ни негативно дефинитна јер за ненула базни елемент E_j важи да је $g(E_j, E_j) = G_{jj} = a_j$ што није негативно. Зато је билинеарна симетрична форма g индукована Грамовом матрицом G недегенерисана и недефинитна.

$\triangle$

У наставку наводимо још један пример билинеарне симетричне форме која је недегенерисана и недефинитна, који ће нам бити интересантан касније.

Пример 1.2. Посматрајмо билинеарну форму g на простору $\mathcal{V}$ парне димензије $n = 2k$ која је једнозначно одређена помоћу Грамове матрице у односу на базу $(E_1, \dots, E_n)$ дате помоћу блок матрице са блоковима величине $k \times k$

$$G = \begin{pmatrix} \tilde{G} & \mathrm{Id} \\ \mathrm{Id} & 0 \end{pmatrix}$$

где је $\tilde{G} = (G_{ij})$ симетрична матрица, при чему су $G_{ij} \in \mathbb{R}$ произвољни за $i \leqslant j$, $i \in \{1, \dots, k\}$ и $j \in \{1, \dots, k\}$. На основу [66, Лема 2] за детерминанту блок матрице важи да је

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det(AD - BC)$$

када је бар један од блокова A, B, C, D нула блок, те је

$$\det G = \det(\tilde{G} \cdot 0 - \mathrm{Id} \cdot \mathrm{Id}) = \det(-\mathrm{Id}) = (-1)^k.$$

Како је $\det G \neq 0$, то је Грамова матрица G инвертибилна, те на основу Леме 1.1 следи да је g недегенерисана симетрична форма.

Приметимо сада да недегенерисана симетрична билинеарна форма g није дефинитна јер није ни позитивно ни негативно дефинитна јер је E_n ненула базни елемент за који је $g(E_n, E_n) = G_{nn} = 0$, те не важи $g(E_n, E_n) > 0$, нити $g(E_n, E_n) < 0$.

Дакле, билинеарна форма индукована Грамовом матрицом G јесте симетрична и недегенерисана, али није дефинитна. △

Симетрична билинеарна форма g на $\mathcal{V}$ је јединствено одређена квадратном формом $\varepsilon\colon \mathcal{V} \to \mathbb{R}$ која је дефинисана са $\varepsilon_X = g(X, X)$, јер ако нам је позната форма ε, онда можемо једнозначно одредити $g(X, Y)$ за свака два вектора X и Y из $\mathcal{V}$ помоћу

$$g(X, Y) = \frac{1}{2}(\varepsilon_{X+Y} - \varepsilon_X - \varepsilon_Y). \tag{1.1}$$

Заиста, користећи дефиницију квадратне форме ε, билинеарност и симетричност форме g закључујемо да је

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}(\varepsilon_{X+Y} - \varepsilon_X - \varepsilon_Y) =& \frac{1}{2}(g(X+Y, X+Y) - g(X, X) - g(Y, Y))\\ =& \frac{1}{2}(g(X, X+Y) + g(Y, X+Y) - g(X, X) - g(Y, Y))\\ =& \frac{g(X, X) + g(X, Y) + g(Y, X) + g(Y, Y) - g(X, X) - g(Y, Y)}{2}\\ =& \frac{2g(X, Y)}{2} = g(X, Y).\end{aligned}$$

Приметимо да се коришћењем билинеарности форме g за $X \perp Y$ добија да је

$$\begin{aligned}\varepsilon_{\alpha X+\beta Y} =& g(\alpha X + \beta Y, \alpha X + \beta Y) = \alpha g(X, \alpha X + \beta Y) + \beta g(Y, \alpha X + \beta Y)\\ =& \alpha^2 g(X, X) + \alpha\beta g(X, Y) + \beta\alpha g(Y, X) + \beta^2 g(Y, Y) = \alpha^2 \varepsilon_X + \beta^2 \varepsilon_Y.\end{aligned} \tag{1.2}$$

1.2 Простор са скаларним производом

Квадратну норму вектора X дефинишемо помоћу $\varepsilon_X = g(X, X)$. ***Норма*** или ***дужина*** вектора $X \in \mathcal{V}$ је ненегативан број $||X|| = \sqrt{|g(X, X)|} = \sqrt{|\varepsilon_X|}$, те је $|\varepsilon_X| = ||X||^2$. Вектор $X \in \mathcal{V}$ је ***дефинитан*** ако $\varepsilon_X \neq 0$, а ***јединичан*** је ако $\varepsilon_X \in \{-1,1\}$. Приметимо да дељењем дефинитног вектора X његовом нормом $\sqrt{|\varepsilon_X|}$ добијамо јединичан вектор $X/\sqrt{|\varepsilon_X|}$ јер на основу билинеарности форме g важи да је

$$g\left(\frac{X}{\sqrt{|\varepsilon_X|}}, \frac{X}{\sqrt{|\varepsilon_X|}}\right) = \frac{1}{|\varepsilon_X|} g(X,X) = \frac{\varepsilon_X}{|\varepsilon_X|} \in \{-1,1\},$$

а овај поступак називамо ***нормирање*** дефинитног вектора. Користећи знак квадратне норме $\varepsilon_X = g(X,X)$ разликујемо три типа ненула вектора $X \in \mathcal{V}$. Вектор $X \in \mathcal{V}$ је:

- ***просторан*** ако је $\varepsilon_X > 0$;
- ***временски*** ако је $\varepsilon_X < 0$;
- ***изотропан*** ако је $\varepsilon_X = 0$ и $X \neq 0$.

Како за изотропан вектор X важи да је $0 = \varepsilon_X = g(X,X)$, то је сваки изотропан вектор ортогоналан на себе. Ако је g дефинитна форма онда само за нула вектор важи да је ортогоналан на себе, односно ако је форма g дефинитна, онда не постоје изотропни вектори.

За сваки векторски потпростор $\mathcal{W} \leqslant \mathcal{V}$ дефинишемо ***ортогонални потпростор*** или ***нормалан потпростор*** у ознаци $\mathcal{W}^\perp$ као скуп свих вектора из $\mathcal{V}$ који су ортогонални на сваки вектор из $\mathcal{W}$. Приметимо да је скуп $\mathcal{W}^\perp$ непразан јер садржи нула вектор зато што за свако $X \in \mathcal{W}$ важи $g(0,X) = 0$ због билинеарности форме g. Да би непразан подскуп $\mathcal{W}^\perp$ био векторски потпростор од $\mathcal{V}$ довољно је проверити да за свака два вектора X и Y из $\mathcal{W}^\perp$ и свака два реална броја a и b важи да је $aX + bY \in \mathcal{W}^\perp$. Како $X \in \mathcal{W}^\perp$ и $Y \in \mathcal{W}^\perp$, то за сваки вектор $Z \in \mathcal{W}$ важи да је $g(X,Z) = 0$ и $g(Y,Z) = 0$, одакле на основу билинеарности форме g важи $g(aX+bY,Z) = ag(X,Z)+bg(Y,Z) = a\cdot 0+b\cdot 0 = 0$, односно $aX+bY \in \mathcal{W}^\perp$, чиме је доказано да је ортогонални потпростор $\mathcal{W}^\perp$ заиста векторски потпростор. У наставку наводимо неке особине ортогоналног потпростора простора са скаларним производом $(\mathcal{V}, g)$.

Лема 1.2. *За потпростор $\mathcal{W}$ простора са скаларним производом $(\mathcal{V}, g)$ важи $\dim \mathcal{W} + \dim \mathcal{W}^\perp = \dim \mathcal{V}$.*

Доказ. Нека је $\mathcal{W}$ потпростор димензије d и нека је $(E_1, \dots, E_d)$ његова база. Тада се она може продужити до базе $(E_1, \dots, E_d, \dots, E_n)$ за $\mathcal{V}$. Приметимо да вектор $X = \sum_{i=1}^{n} x_i E_i$ припада $\mathcal{W}^{\perp}$ ако и само ако за свако $j \in \{1, \dots, d\}$ важи да је $0 = g(X, E_j) = \sum_{i=1}^{n} x_i g(E_i, E_j) = \sum_{i=1}^{n} x_i G_{ij}$. Заиста, ако $X \in \mathcal{W}^{\perp}$, онда је X ортогонално на сваки вектор из $\mathcal{W}$, те је специјално ортогоналан и на све базне векторе $E_1, \dots, E_d$ из $\mathcal{W}$, те је $0 = g(X, E_j)$ за свако $j \in \{1, \dots, d\}$. Са друге стране, ако за свако $j \in \{1, \dots, d\}$ важи да је $0 = g(X, E_j)$, онда следи да је $X \in \mathcal{W}^{\perp}$ јер је X ортогонално на сваки вектор из $\mathcal{W}$, зато што је произвољан вектор Y из $\mathcal{W}$ облика $Y = \sum_{j=1}^{d} y_j E_j$, те је $g(X, Y) = \sum_{j=1}^{d} y_j g(X, E_j) = \sum_{j=1}^{d} y_j \cdot 0 = 0$. Како је

$$0 = \sum_{i=1}^{n} x_i G_{ij} = \sum_{i=1}^{n} x_i G_{ji} = \begin{pmatrix} G_{j1} & G_{j2} & \dots & G_{jn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},$$

то се свих d једначина може записати у облику матричне једначине

$$\begin{pmatrix} G_{11} & G_{12} & \dots & G_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ G_{d1} & G_{d2} & \dots & G_{dn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

и посматрати као хомоген систем од d једначина са n непознатих $x_1, \dots, x_n$. Како је $(\mathcal{V}, g)$ простор са скаларним производом, то је g недегенерисана симетрична билинеарна форма, те је на основу Леме 1.1 Грамова матрица G инвертибилна, те је њених првих d врста линеарно независно, те је ранг матрице посматраног система једначина једнак d, а онда на основу Кронекер[2]-Капелијеве[3] теореме закључујемо да је потпростор решења тог система димензије $n - d$, а тај потпростор је баш $\mathcal{W}^{\perp}$ и зато је $\dim \mathcal{W} + \dim \mathcal{W}^{\perp} = d + (n - d) = n = \dim \mathcal{V}$. □

Лема 1.3. *За потпростор $\mathcal{W}$ простора са скаларним производом $(\mathcal{V}, g)$ важи да је $(\mathcal{W}^{\perp})^{\perp} = \mathcal{W}$.*

Доказ. Приметимо да је $\mathcal{W} \leqslant (\mathcal{W}^{\perp})^{\perp}$ јер је $\mathcal{W}$ потпростор и за свако $X \in \mathcal{W}$ важи да $X \in (\mathcal{W}^{\perp})^{\perp}$ зато што је за свако $Y \in \mathcal{W}^{\perp}$ на основу дефиниције $\mathcal{W}^{\perp}$ испуњено да је $g(Y, Z) = 0$ за свако $Z \in \mathcal{W}$, те специјално за $Z = X$ важи

---

[2] Leopold Kronecker (1823-1891), немачки математичар

[3] Alfredo Capelli (1855-1910), италијански математичар

да је $0 = g(Y, X) = g(X, Y)$, те је X ортогонално на сваки вектор $Y \in \mathcal{W}^{\perp}$. Применом Леме 1.2 на векторске потпросторе $\mathcal{W}$ и $\mathcal{W}^{\perp}$ добијамо да важи $\dim \mathcal{W} + \dim \mathcal{W}^{\perp} = \dim \mathcal{V}$ и $\dim \mathcal{W}^{\perp} + \dim(\mathcal{W}^{\perp})^{\perp} = \dim \mathcal{V}$, одакле је $\dim \mathcal{W} = \dim(\mathcal{W}^{\perp})^{\perp}$, што заједно са $\mathcal{W} \leqslant (\mathcal{W}^{\perp})^{\perp}$ повлачи да је $(\mathcal{W}^{\perp})^{\perp} = \mathcal{W}$. □

Лема 1.4. *За потпросторе $\mathcal{W}$ и $\mathcal{U}$ простора са скаларним производом $\mathcal{V}$ такве да је $\mathcal{W} \leqslant \mathcal{U}$ важи да је $\mathcal{U}^{\perp} \leqslant \mathcal{W}^{\perp}$.*

Доказ. Како смо већ видели да су $\mathcal{U}^{\perp}$ и $\mathcal{W}^{\perp}$ векторски потпростори од $\mathcal{V}$, довољно је доказати да је $\mathcal{U}^{\perp}$ подскуп од $\mathcal{W}^{\perp}$. Нека је $X \in \mathcal{U}^{\perp}$ произвољан. На основу дефиниције $\mathcal{U}^{\perp}$ за свако $Y \in \mathcal{U}$ важи да је $g(X, Y) = 0$. Како је $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{U}$, то специјално за свако $Z \in \mathcal{W}$ важи да је $g(X, Z) = 0$, те $X \in \mathcal{W}^{\perp}$, одакле је $\mathcal{U}^{\perp} \subseteq \mathcal{W}^{\perp}$. □

Последица 1.5. *За потпросторе $\mathcal{W}$ и $\mathcal{U}$ простора са скаларним производом $\mathcal{V}$ такве да је $\mathcal{U}^{\perp} \leqslant \mathcal{W}^{\perp}$ важи да је $\mathcal{W} \leqslant \mathcal{U}$.*

Доказ. Применом Леме 1.4 на векторске потпросторе $\mathcal{U}^{\perp}$ и $\mathcal{W}^{\perp}$ добијамо да је $(\mathcal{W}^{\perp})^{\perp} \leqslant (\mathcal{U}^{\perp})^{\perp}$, те на основу Леме 1.3 следи да је $\mathcal{W} \leqslant \mathcal{U}$. □

За потпростор $\mathcal{W}$ кажемо да је ***недегенерисан*** / ***позитивно дефинитан*** / ***негативно дефинитан*** ако је таква рестрикција $g{\restriction}_{\mathcal{W}}$ скаларног производа g простора са скаларним производом $(\mathcal{V}, g)$ на потпростор $\mathcal{W}$. На основу дефиниције позитивне (негативне) дефинитности форме g, јасно је да ако је g позитивно (негативно) дефинитна, онда је и $g{\restriction}_{\mathcal{W}}$ позитивно (негативно) дефинитна, те је $\mathcal{W}$ позитивно (негативно) дефинитан потпростор. Са друге стране, ако је недегенерисана симетрична билинеарна форма g на $\mathcal{V}$ таква да постоји изотропан вектор N из $\mathcal{V}$, онда је $\mathcal{W} = \mathrm{Span}\{N\}$ потпростор од $\mathcal{V}$ такав да је Грамова матрица форме $g{\restriction}_{\mathcal{W}}$ у односу на базу са једним базним елементом N нула матрица јер за изотропан вектор важи $g(N, N) = \varepsilon_N = 0$, те на основу Леме 1.1 форма $g{\restriction}_{\mathcal{W}}$ није недегенерисана, те ни потпростор $\mathcal{W} = \mathrm{Span}\{N\}$ није недегенерисан, односно особина недегенерисаности се није пренела са простора на потпростор.

Наредна лема нам говори да за потпростор $\mathrm{Span}\{N\}$ простора $\mathcal{V}$ који није недегенерисан не важи да је $\mathrm{Span}\{N\} + (\mathrm{Span}\{N\})^{\perp} = \mathcal{V}$.

Лема 1.6. *Нека је $\mathcal{W}$ потпростор простора са скаларним производом $(\mathcal{V}, g)$. Следећа три исказа су еквивалентна:*

1. *$\mathcal{W}$ је недегенерисан;*
2. *$\mathcal{W}^\perp$ је недегенерисан;*
3. *$\mathcal{W}+\mathcal{W}^\perp=\mathcal{V}$.*

Доказ. Еквивалентност наведених тврђења доказујемо тако што ћемо доказати да су сва три тврђења еквивалентна са $\mathcal{W}\cap\mathcal{W}^\perp=\{0\}$.

По дефиницији $\mathcal{W}$ је недегенерисан ако и само ако је 0 једини вектор из $\mathcal{W}$ који је ортогоналан на све векторе из $\mathcal{W}$, односно 0 је једини вектор из $\mathcal{W}$ који припада $\mathcal{W}^\perp$, што је еквивалентно са $\mathcal{W}\cap\mathcal{W}^\perp=\{0\}$.

Слично је $\mathcal{W}^\perp$ недегенерисан ако и само ако је $\mathcal{W}^\perp\cap(\mathcal{W}^\perp)^\perp=\{0\}$, што је на основу Леме 1.3 еквивалентно са $\mathcal{W}\cap\mathcal{W}^\perp=\{0\}$.

На основу Грасманове[4] формуле закључујемо да је $\dim\mathcal{W}+\dim\mathcal{W}^\perp=\dim(\mathcal{W}+\mathcal{W}^\perp)+\dim(\mathcal{W}\cap\mathcal{W}^\perp)$, а на основу Леме 1.2 је $\dim\mathcal{W}+\dim\mathcal{W}^\perp=\dim\mathcal{V}$, те је $\dim(\mathcal{W}+\mathcal{W}^\perp)+\dim(\mathcal{W}\cap\mathcal{W}^\perp)=\dim\mathcal{V}$, одакле је због $\mathcal{W}+\mathcal{W}^\perp\leqslant\mathcal{V}$ то да је $\mathcal{W}+\mathcal{W}^\perp=\mathcal{V}$ еквивалентно са $\dim(\mathcal{W}+\mathcal{W}^\perp)=\dim\mathcal{V}$, односно $\dim(\mathcal{W}\cap\mathcal{W}^\perp)=0$, што је еквивалентно са $\mathcal{W}\cap\mathcal{W}^\perp=\{0\}$. □

Приметимо да ако је $\mathcal{W}$ потпростор простора са дефинитним скаларним производом $(\mathcal{V},g)$, онда је и $g\restriction_{\mathcal{W}}$ дефинитна, те је и недегенерисана, одакле на основу Леме 1.6 закључујемо да је $\mathcal{W}+\mathcal{W}^\perp=\mathcal{V}$, те је раније коришћен назив ***ортогонални комплемент*** од $\mathcal{W}$ за $\mathcal{W}^\perp$ у дефинитном случају смислен. На основу Леме 1.6 за недегенерисан $\mathcal{W}\leqslant\mathcal{V}$ важи да је $\mathcal{W}\cap\mathcal{W}^\perp=\{0\}$, а $\mathcal{W}$ и $\mathcal{W}^\perp$ су међусобно ортогонални, те је $\mathcal{V}=\mathcal{W}\oplus\mathcal{W}^\perp$, при чему $\oplus$ означава директну ортогоналну суму.

Ако су $E_1,E_2,...,E_n\in\mathcal{V}$ међусобно ортогонални јединични вектори, кажемо да је $(E_1,...,E_n)$ ***ортонормирана база*** за $\mathcal{V}$. Добро је познато да сваки векторски простор има базу, а сваки простор са скаларним производом има ортонормирану базу.

Лема 1.7. *Сваки простор са скаларним производом има ортонормирану базу.*

Доказ. Доказ спроводимо методом математичке индукције по димензији простора са скаларним производом.
База индукције: Ако је димензија простора са скаларним производом $(\mathcal{V},g)$ једнака 1, онда постоји вектор X чија је квадратна норма различита од нуле,

---

[4] Hermann Günther Graßmann (1809–1877), немачки физичар и математичар

иначе би у произвољној бази Грамова матрица од g била нула матрица, те не би била инвертибилна, а онда на основу Леме 1.1 g не би била недегенерисана, што је у супротности са претпоставком леме. Како је $\varepsilon_X \neq 0$, то нормирањем добијамо јединични вектор $X/\sqrt{|\varepsilon_X|}$ и он представља тражену ортонормирану базу за $\mathcal{V}$.

Индуктивна хипотеза: Претпостављамо да сваки простор са скаларним производом који је димензије $n-1$ има ортонормирану базу.

Индуктивни корак: Доказујемо да простор са скаларним производом $(\mathcal{V}, g)$ димензије n има ортонормирану базу. Приметимо да постоји дефинитан вектор $X \in \mathcal{V}$, иначе би сви вектори из $\mathcal{V}$ били квадратне норме 0, те би Грамова матрица од g у произвољној бази била нула матрица и не би била инвертибилна, те на основу Леме 1.1 форма g не би била недегенерисана што је у супротности са претпоставком да је g скаларни производ. Како је $\varepsilon_X \neq 0$, то као у бази индукције можемо посматрати јединичан вектор $E_1 = X/\sqrt{|\varepsilon_X|}$. Како је Грамова матрица од $g\restriction_{\mathrm{Span}\{E_1\}}$ у бази од једног елемента E_1 једнака броју $g(E_1, E_1) = \varepsilon_{E_1} \neq 0$, односно инвертибилна је, то је једнодимензиони потпростор $\mathrm{Span}\{E_1\}$ на основу Леме 1.1 недегенерисан. На основу Леме 1.6 закључујемо да је и $(\mathrm{Span}\{E_1\})^{\perp}$ недегенерисан, као и да је $\mathcal{V} = \mathrm{Span}\{E_1\} + (\mathrm{Span}\{E_1\})^{\perp}$, односно $\mathcal{V} = \mathrm{Span}\{E_1\} \oplus (\mathrm{Span}\{E_1\})^{\perp}$. Како на основу Леме 1.2 важи да је $\dim(\mathrm{Span}\{E_1\})^{\perp} = \dim \mathcal{V} - \dim \mathrm{Span}\{E_1\} = n-1$, то се на недегенерисани $(\mathrm{Span}\{E_1\})^{\perp}$ може применити индуктивна хипотеза, те постоји његова ортонормирана база $(E_2, \ldots, E_n)$. Како је $\mathcal{V} = \mathrm{Span}\{E_1\} \oplus (\mathrm{Span}\{E_1\})^{\perp}$, то је $(E_1, \ldots, E_n)$ ортонормирана база за $(\mathcal{V}, g)$. □

Лема 1.8. *Сваки вектор X из простора са скаларним производом $(\mathcal{V}, g)$ са ортонормираном базом $(E_1, \ldots, E_n)$ се на јединствен начин изражава у облику $X = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_{E_i} g(X, E_i) E_i$.*

Доказ. Нека је $X = \sum_{i=1}^{n} x_i E_i$ јединствено представљање вектора X као линеарне комбинације базних елемената. Тада на основу билинеарности форме g и ортонормираности базе $(E_1, \ldots, E_n)$ (која повлачи да је $g(E_i, E_j) = 0$ за $i \neq j$), следи да за свако $j \in \{1, \ldots, n\}$ важи да је $g(X, E_j) = \sum_{i=1}^{n} x_i g(E_i, E_j) = x_j g(E_j, E_j) = x_j \varepsilon_{E_j}$, одакле је $x_j = g(X, E_j)/\varepsilon_{E_j} = \varepsilon_{E_j} g(X, E_j)$ јер за базни вектор E_j важи да је $\varepsilon_{E_j}^2 = 1$. Одавде је $X = \sum_{i=1}^{n} x_i E_i = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_{E_i} g(X, E_i) E_i$. □

Како за ортонормирану базу $(E_1, \ldots, E_n)$ од $\mathcal{V}$ важи да је $G_{ij} = g(E_i, E_j) = 0$ за $i \neq j$, то је Грамова матрица за g у односу на ортонормирану базу дијагонална. По договору, векторе у тој бази уређујемо тако да су на почетних v места временски базни вектори при чему $v \in \{0, 1, \ldots, n\}$, а на преосталих $n - v$ места су просторни базни вектори.

Највећи број $\operatorname{Ind}(g) \in \mathbb{N}_0$ који је димензија неког негативно дефинитног потпростора од $\mathcal{V}$ називамо ***индекс*** скаларног производа g на $\mathcal{V}$. Број $\operatorname{Ind}(g)$ једнак је броју временских базних вектора у произвољној ортонормираној бази за $\mathcal{V}$, што тврди наредна теорема позната као ***Силвестеров закон инерције***.

Теорема 1.9. *Број временских базних вектора не зависи од избора ортонормиране базе простора са скаларним производом* $(\mathcal{V}, g)$ *и једнак је броју* $\operatorname{Ind}(g)$.

Доказ. Нека су само првих v базних вектора ортонормиране базе $(E_1, \ldots, E_n)$ временски. Тада је потпростор $S = \operatorname{Span}\{E_1, \ldots, E_v\}$ негативно дефинитан јер се сваки ненула вектор X из S на основу Леме 1.8 може записати на јединствен начин као линеарна комбинација временских јединичних ортогоналних вектора $E_1, \ldots, E_v$, односно $X = \sum_{i=1}^{v} \varepsilon_{E_i} g(X, E_i) E_i$, где је $\sum_{i=1}^{v} \varepsilon_{E_i}^2 g^2(X, E_i) \neq 0$, те на основу (1.2) важи $\varepsilon_X = \sum_{i=1}^{v} \varepsilon_{E_i}^2 g^2(X, E_i) \varepsilon_{E_i} = -\sum_{i=1}^{v} \varepsilon_{E_i}^2 g^2(X, E_i) < 0$ и зато је $g\restriction_S$ негативно дефинитна форма на S. На основу дефиниције индекса од g закључујемо да је $\dim S = v \leqslant \operatorname{Ind}(g)$. Ако је $\mathcal{W}$ произвољан негативно дефинитан потпростор од $\mathcal{V}$, онда је пресликавање $\pi \colon \mathcal{W} \to S$ дефинисано помоћу $\pi(X) = \sum_{i=1}^{v} g(X, E_i) E_i$ линеарно јер због билинеарности g важи да је

$$\begin{aligned}\pi(aX + bY) &= \sum_{i=1}^{v} g(aX + bY, E_i) E_i = a \sum_{i=1}^{v} g(X, E_i) E_i + b \sum_{i=1}^{v} g(Y, E_i) E_i \\ &= a\pi(X) + b\pi(Y).\end{aligned}$$

Докажимо да је π инјективно пресликавање. Нека је $\pi(X) = 0$. Тада је $\sum_{i=1}^{v} g(X, E_i) E_i = 0$, те на основу линеарне независности базних вектора $E_1, \ldots, E_v$, следи да је $g(X, E_i) = 0$ за $i \in \{1, \ldots, v\}$. Тада на основу Леме 1.8 имамо да је $X = \sum_{i=v+1}^{n} g(X, E_i) E_i$, јер су базни вектори $E_{v+1}, \ldots, E_n$ просторни јединични вектори. Како $X \in \mathcal{W}$, односно X је елемент негативно дефинитног потпростора, то је $\varepsilon_X = g(X, X) \leqslant 0$, а на основу (1.2) је $\varepsilon_X = \sum_{i=v+1}^{n} g^2(X, E_i) \varepsilon_{E_i} = \sum_{i=v+1}^{n} g^2(X, E_i)$, те је $\sum_{i=v+1}^{n} g^2(X, E_i) \leqslant 0$, што је могуће само ако је $g(X, E_i) = 0$ за $i \in \{v + 1, \ldots, n\}$, одакле је $X = \sum_{i=v+1}^{n} g(X, E_i) E_i = \sum_{i=v+1}^{n} 0 \cdot E_i = 0$. Доказали смо да из $\pi(X) = 0$ следи да је $X = 0$, те је π инјективно пресликавање, што повлачи да је

$\dim \mathcal{W} \leqslant \dim S = v$, а како је $\mathcal{W}$ био произвољан негативно дефинитан потпростор, то је $\mathrm{Ind}(g) \leqslant v$, што заједно са раније доказаним $v \leqslant \mathrm{Ind}(g)$ имплицира да је $v = \mathrm{Ind}(g)$. Тиме је доказано и да број временских базних вектора не зависи од избора ортонормиране базе јер је једнак броју $\mathrm{Ind}(g)$. □

Сигнатура простора са скаларним производом $(\mathcal{V}, g)$ је пар $(v, n-v)$ где је v број временских базних вектора произвољне ортонормиране базе. На основу Теореме 1.9 сигнатура не зависи од избора ортонормиране базе што повлачи следећу елементарну, али корисну лему.

Лема 1.10. *У простору са недефинитним скаларним производом* $(\mathcal{V}, g)$ *постоји изотропан вектор.*

Доказ. Како је $(\mathcal{V}, g)$ простор са недефинитним скаларним производом, то за његову сигнатуру $(v, n-v)$ важи да је $v \geqslant 1$ и $n - v \geqslant 1$. На основу Леме 1.7 постоји ортонормирана база $(E_1, \dots, E_n)$ простора $\mathcal{V}$, а на основу Теореме 1.9 сматрамо да за $i \in \{1, \dots, v\}$ важи $\varepsilon_{E_i} = -1$, а за $i \in \{v+1, \dots, n\}$ важи $\varepsilon_{E_i} = 1$. Како је $E_1 \perp E_n$, то на основу (1.2) следи да је $\varepsilon_{E_1+E_n} = \varepsilon_{E_1} + \varepsilon_{E_n} = -1+1 = 0$, а на основу линеарне независности базних елемената E_1 и E_n закључујемо да $E_1 + E_n$ није нула вектор, те је он тражени изотропан вектор. □

Лема 1.11. *Сваки простор са скаларним производом* $(\mathcal{V}, g)$ *чија је сигнатура* $(v, n-v)$ *може се написати у облику* $\mathcal{V} = \mathcal{V}^+ \oplus \mathcal{V}^-$, *где је* $\mathcal{V}^+$ *максималан позитивно дефинитан потпростор димензије* $n - v$, *а* $\mathcal{V}^-$ *је максималан негативно дефинитан потпростор димензије* v.

Доказ. На основу Теореме 1.9 можемо сматрати да је произвољна ортонормирана база од $\mathcal{V}$ облика $(E_1, \dots, E_n)$, при чему је $\varepsilon_{E_i} = -1$ за $i \in \{1, \dots, v\}$ и $\varepsilon_{E_i} = 1$ за $i \in \{v+1, \dots, n\}$ и важи да је $\mathcal{V}^- = \mathrm{Span}\{E_1, \dots, E_v\}$ максималан негативно дефинитан потпростор од $\mathcal{V}$, а слично је $\mathcal{V}^+ = \mathrm{Span}\{E_{v+1}, \dots, E_n\}$ максималан позитивно дефинитан потпростор од $\mathcal{V}$. Како је база $(E_1, \dots, E_n)$ ортонормирана, то су потпростори $\mathcal{V}^-$ и $\mathcal{V}^+$ међусобно ортогонални јер за све векторе $X \in \mathcal{V}^-$ и $Y \in \mathcal{V}^+$ важи да је $X = \sum_{i=1}^{v} x_i E_i$ и $Y = \sum_{j=v+1}^{n} y_j E_j$, те је $g(X, Y) = \sum_{i=1}^{v} \sum_{j=v+1}^{n} x_i y_j g(E_i, E_j) = 0$, односно $X \perp Y$. Приметимо и да је пресек потпростора $\mathcal{V}^-$ и $\mathcal{V}^+$ тривијалан јер ако $Z \in \mathcal{V}^- \cap \mathcal{V}^+$, онда је $Z = \sum_{i=1}^{v} z_i E_i$ и $Z = \sum_{j=v+1}^{n} a_j E_j$, односно $\sum_{i=1}^{v} z_i E_i - \sum_{j=v+1}^{n} a_j E_j = 0$, али како су $E_1, \dots, E_n$ линеарно независни, то је $z_1 = z_2 = \ldots = z_v = a_{v+1} = \ldots = a_n = 0$, те је $Z = 0$, чиме је доказано да је $\mathcal{V} = \mathcal{V}^- \oplus \mathcal{V}^+$. □

Једна битна веза између изотропних, временских и просторних вектора је дата у следећој леми (видети [2, Лема 1]).

Лема 1.12. *Сваки изотропан вектор* N *из простора са скаларним производом* $(\mathcal{V}, g)$ *се може написати као* $N = S + T$, *где* $S, T \in \mathcal{V}$, $S \perp T$ *и* $\varepsilon_S = -\varepsilon_T > 0$. *Додатно, постоји више таквих растављања изотропног вектора* N, *специјално и растављање* $N = S_1 + T_1$, *такво да је* $S_1, T_1 \in \mathcal{V}$, $S_1 \perp T_1$ *и* $\varepsilon_{S_1} = -\varepsilon_{T_1} = 1$.

Доказ. На основу Леме 1.11 сваки изотропан вектор N се може записати у облику $N = S + T$, при чему $S \in \mathcal{V}^+$, $T \in \mathcal{V}^-$ и $S \perp T$ јер је $\mathcal{V}^+ \perp \mathcal{V}^-$. Како је N изотропан и $S \perp T$, то на основу (1.2) важи да је $0 = \varepsilon_N = \varepsilon_{S+T} = \varepsilon_S + \varepsilon_T$, те је $\varepsilon_S = -\varepsilon_T$. Како је $S \in \mathcal{V}^+$ и $T \in \mathcal{V}^-$, то је $\varepsilon_S \geqslant 0$ и $\varepsilon_T \leqslant 0$. Не може бити $\varepsilon_S = \varepsilon_T = 0$, јер би на основу позитивне дефинитности $\mathcal{V}^+$ и негативне дефинитности $\mathcal{V}^-$ следило да је $S = T = 0$, те би и $N = S + T = 0$, што је немогуће јер је N изотропан вектор. Зато је $\varepsilon_S = -\varepsilon_T > 0$. Користимо ово растављање $N = S + T$ да нађемо још нека таква растављања у облику $N = S_1 + T_1$, при чему је $S_1 = tS + (1-t)T \in \mathcal{V}$ и $T_1 = (1-t)S + tT \in \mathcal{V}$ за реалан број $t > 1/2$. Тада је $S_1 + T_1 = tS + (1-t)T + (1-t)S + tT = S + T = N$, а на основу $S \perp T$, билинеарности форме g и (1.2) важи да је

$$\begin{aligned} g(S_1, T_1) =& g(tS + (1-t)T, (1-t)S + tT) \\ =& t(1-t)g(S,S) + t^2 g(S,T) + (1-t)^2 g(T,S) + (1-t)tg(T,T) \\ =& t(1-t)(\varepsilon_S + \varepsilon_T) = t(1-t)\varepsilon_{S+T} = t(1-t)\varepsilon_N = 0, \end{aligned}$$

те је $S_1 \perp T_1$, одакле применом (1.2) добијамо да је $0 = \varepsilon_N = \varepsilon_{S_1+T_1} = \varepsilon_{S_1} + \varepsilon_{T_1}$, те је $\varepsilon_{S_1} = -\varepsilon_{T_1}$. Због $S \perp T$ на основу (1.2) следи да је

$$\begin{aligned} \varepsilon_{S_1} =& \varepsilon_{tS+(1-t)T} = t^2\varepsilon_S + (1-t)^2\varepsilon_T = t^2\varepsilon_S - (1-t)^2\varepsilon_S \\ =& (t^2 - (1-t)^2)\varepsilon_S = (t^2 - 1 + 2t - t^2)\varepsilon_S = (2t-1)\varepsilon_S, \end{aligned}$$

а важи и $\varepsilon_S > 0$, те за свако $t > 1/2$ добијамо ново растављање $N = S_1 + T_1$ такво да је $S_1, T_1 \in \mathcal{V}$, $S_1 \perp T_1$ и $\varepsilon_{S_1} = -\varepsilon_{T_1} > 0$. Специјално, да бисмо добили растављање за које важи $\varepsilon_{S_1} = 1$, довољно је узети t такво да је $(2t-1)\varepsilon_S = 1$, односно $t = (1/\varepsilon_S + 1)/2 = (1+\varepsilon_S)/(2\varepsilon_S)$ и приметити да је за такво t испуњено да је $t = 1/(2\varepsilon_S) + 1/2 > 1/2$. □

Кажемо да је потпростор $\mathcal{W}$ простора са недефинитним скаларним производом $(\mathcal{V}, g)$ ***потпуно изотропан*** ако се састоји само од вектора чија је квадратна норма једнака 0, односно од нула вектора и изотропних вектора. На основу формуле (1.1) следи да су свака два вектора из потпуно изотропног потпростора $\mathcal{W}$ међусобно ортогонална, те је свака база од $\mathcal{W}$ ортогонална, а важи и да је $\mathcal{W} \leqslant \mathcal{W}^\perp$ јер за сваки вектор из $\mathcal{W}$ важи да је ортогоналан на све векторе из $\mathcal{W}$, те је $\dim \mathcal{W} \leqslant \dim \mathcal{W}^\perp$. Сада на основу Леме 1.2 закључујемо да је $2\dim \mathcal{W} \leqslant \dim \mathcal{W} + \dim \mathcal{W}^\perp = \dim \mathcal{V}$, те за димензију потпуно изотропног потпростора $\mathcal{W}$ важи да је $\dim \mathcal{W} \leqslant (\dim \mathcal{V})/2$. Приметимо да ако је $(\mathcal{V}, g)$ простор са скаларним производом индекса $\mathrm{Ind}(g)$, онда је и $(\mathcal{V}, -g)$ простор са скаларним производом индекса $\mathrm{Ind}(-g) = \dim \mathcal{V} - \mathrm{Ind}(g)$. Без умањења општости, можемо претпоставити да је $\mathrm{Ind}(g) \leqslant (\dim \mathcal{V})/2$, јер ако је $\mathrm{Ind}(g) > (\dim \mathcal{V})/2$, онда можемо посматрати $-g$ уместо g и важиће $\mathrm{Ind}(-g) = \dim \mathcal{V} - \mathrm{Ind}(g) < \dim \mathcal{V} - (\dim \mathcal{V})/2 = (\dim \mathcal{V})/2$, а разлика између g и $-g$ у нашим разматрањима није суштинска. У наредној леми доказујемо да димензија потпуно изотропног потпростора простора са скаларним производом $(\mathcal{V}, g)$ није већа од индекса од g.

Лема 1.13. *За потпуно изотропан потпростор* $\mathcal{W}$ *простора са скаларним производом* $(\mathcal{V}, g)$ *важи* $\dim \mathcal{W} \leqslant \min(\mathrm{Ind}(g), \dim \mathcal{V} - \mathrm{Ind}(g))$.

Доказ. На основу Леме 1.11 следи да је $\mathcal{V} = \mathcal{V}^+ \oplus \mathcal{V}^-$, где је $\mathcal{V}^+$ максималан позитивно дефинитан потпростор од $\mathcal{V}$, а $\mathcal{V}^-$ је максималан негативно дефинитан потпростор од $\mathcal{V}$. На основу Грасманове формуле за векторске потпросторе $\mathcal{W}$ и $\mathcal{V}^+$ је $\dim \mathcal{W} = \dim(\mathcal{W} + \mathcal{V}^+) + \dim(\mathcal{W} \cap \mathcal{V}^+) - \dim \mathcal{V}^+$, а како је $\dim(\mathcal{W} + \mathcal{V}^+) \leqslant \dim \mathcal{V}$ јер је $\mathcal{W} + \mathcal{V}^+ \leqslant \mathcal{V}$ и $\dim(\mathcal{W} \cap \mathcal{V}^+) = 0$ зато што је $\mathcal{W} \cap \mathcal{V}^+ = \{0\}$, то је $\dim \mathcal{W} \leqslant \dim \mathcal{V} + 0 - \dim \mathcal{V}^+ = \dim \mathcal{V}^- = \mathrm{Ind}(g)$. Заменом g са $-g$ добијамо и $\dim \mathcal{W} \leqslant \mathrm{Ind}(-g) = \dim \mathcal{V} - \mathrm{Ind}(g)$, одакле је $\dim \mathcal{W} \leqslant \min(\mathrm{Ind}(g), \dim \mathcal{V} - \mathrm{Ind}(g))$. □

У наставку наводимо следећу добро познату тврдњу о изотропном суплементу од потпуно изотропног потпростора $\mathcal{W}$ произвољног простора са скаларним производом $(\mathcal{V}, g)$ (видети [7, Пропозиција 1] и [26, Теорема 6.2]).

Лема 1.14. *Ако је* $(N_1, ..., N_k)$ *база потпуно изотропног потпростора* $\mathcal{W}$ *простора са скаларним производом* $\mathcal{V}$ *произвољне димензије, онда постоји потпуно изотропни потпростор* $\mathcal{U} \leqslant \mathcal{V}$, *који има тривијалан пресек* $\{0\}$ *са* $\mathcal{W}$ *и базу* $(M_1, ..., M_k)$, *тако да* $g(N_i, M_j) = \delta_{ij}$ *важи за све* $i \in \{1, \dots, k\}$ *и* $j \in \{1, \dots, k\}$.

Доказ. Доказ спроводимо методом математичке индукције по димензији k потпуно изотропног потпростора од простора са скаларним производом произвољне димензије.

База индукције: Ако је димензија потпуно изотропног потпростора $\mathcal{W}_0$ једнака $k = 0$, онда је $\mathcal{W}_0 = \{0\}$, те се за $\mathcal{U}_0$ може узети $\{0\}$ и сви услови тривијално важе.

Индуктивна хипотеза: Претпостављамо да ако је $(N_1, \dots, N_{k-1})$ база потпуно изотропног потпростора $\mathcal{W}_{k-1}$ димензије $k-1$ простора са скаларним производом $\mathcal{V}_{k-1}$, онда постоји потпуно изотропан потпростор $\mathcal{U}_{k-1}$ од $\mathcal{V}_{k-1}$ који има тривијалан пресек $\{0\}$ са $\mathcal{W}_{k-1}$ и базу $(M_1, \dots, M_{k-1})$ такву да важи $g(N_i, M_j) = \delta_{ij}$ за $i \in \{1, \dots, k-1\}$ и $j \in \{1, \dots, k-1\}$.

Индуктивни корак: Доказујемо да ако је $(N_1, \dots, N_k)$ база потпуно изотропног потпростора $\mathcal{W}_k$ димензије k простора са скаларним производом $(\mathcal{V}_k, g)$, онда постоји потпуно изотропан потпростор $\mathcal{U}_k$ од $\mathcal{V}_k$ који има тривијалан пресек $\{0\}$ са $\mathcal{W}_k$ и базу $(M_1, \dots, M_k)$ такву да важи $g(N_i, M_j) = \delta_{ij}$ за све $i \in \{1, \dots, k\}$ и $j \in \{1, \dots, k\}$. Како је $\mathcal{W}_k = \operatorname{Span}\{N_1, \dots, N_k\}$ и због линеарне независности базних вектора $N_1, \dots, N_k$ важи да $\operatorname{Span}\{N_k\}$ није потпростор од $\mathcal{W}_{k-1} = \operatorname{Span}\{N_1, \dots, N_{k-1}\}$, то применом Последице 1.5 закључујемо да $\mathcal{W}_{k-1}^{\perp}$ није потпростор од $(\operatorname{Span}\{N_k\})^{\perp}$, те постоји $X_k \in \mathcal{W}_{k-1}^{\perp}$ који не припада $(\operatorname{Span}\{N_k\})^{\perp}$, односно важи да је $g(X_k, N_k) \neq 0$. Дефинишемо

$$M_k = \frac{-\varepsilon_{X_k}}{2(g(X_k, N_k))^2} N_k + \frac{1}{g(X_k, N_k)} X_k.$$

Како је N_k изотропан, билинеарност и симетричност форме g повлаче да је

$$\begin{aligned} \varepsilon_{M_k} =& g(M_k, M_k) = \frac{\varepsilon_{X_k}^2}{4(g(X_k, N_k))^4} \varepsilon_{N_k} - \frac{2\varepsilon_{X_k}}{2(g(X_k, N_k))^3} g(X_k, N_k) + \frac{g(X_k, X_k)}{(g(X_k, N_k))^2} \\ =& - \frac{\varepsilon_{X_k}}{(g(X_k, N_k))^2} + \frac{\varepsilon_{X_k}}{(g(X_k, N_k))^2} = 0, \end{aligned}$$

те је M_k изотропан вектор, а важи и

$$g(N_k, M_k) = \frac{-\varepsilon_{X_k}}{2(g(X_k, N_k))^2} g(N_k, N_k) + \frac{1}{g(X_k, N_k)} g(N_k, X_k) = 1,$$

а за $i \in \{1, \dots, k-1\}$ важе и једнакости

$$g(N_i, M_k) = \frac{-\varepsilon_{X_k}}{2(g(X_k, N_k))^2} g(N_i, N_k) + \frac{1}{g(X_k, N_k)} g(N_i, X_k) = 0$$

јер су базни вектори N_i и N_k потпуно изотропног потпростора $\mathcal{W}_k$ међусобно ортогонални и $X_k \in \mathcal{W}_{k-1}^{\perp} = (\operatorname{Span}\{N_1, \dots, N_{k-1}\})^{\perp}$, те је $g(X_k, N_i) = 0$.

Докажимо да $M_k \notin \mathcal{W}_k = \mathrm{Span}\{N_1, \ldots, N_k\}$. Претпоставимо супротно, да $M_k \in \mathcal{W}_k$, односно да постоје реални бројеви $a_1, \ldots, a_k$ такви да важи да је $M_k = a_1N_1 + a_2N_2 + \ldots + a_kN_k$. Како важи и $M_k = b_1N_k + b_2X_k$, где је

$$b_1 = \frac{-\varepsilon_{X_k}}{2(g(X_k, N_k))^2}, \quad b_2 = \frac{1}{g(X_k, N_k)} \neq 0,$$

то следи да је $a_1N_1 + a_2N_2 + \ldots + (a_k - b_1)N_k = b_2X_k$. Како је N_k изотропан вектор ортогоналан на базне векторе $N_1, \ldots, N_{k-1}$, то је

$$0 = g(a_1N_1 + a_2N_2 + \ldots + (a_k - b_1)N_k, N_k) = g(b_2X_k, N_k) = b_2g(X_k, N_k) \neq 0,$$

чиме добијамо контрадикцију. Дакле, $M_k \notin \mathcal{W}_k = \mathrm{Span}\{N_1, \ldots, N_k\}$.

Уочимо да је потпростор $\mathrm{Span}\{N_k, M_k\}$ недегенерисан на основу Леме 1.1 јер има ортонормирану базу $((N_k + M_k)/\sqrt{2}, (N_k - M_k)/\sqrt{2})$ у односу на коју је Грамова матрица инвертибилна. Заиста, $((N_k + M_k)/\sqrt{2}, (N_k - M_k)/\sqrt{2})$ је генератриса потпростора $\mathrm{Span}\{N_k, M_k\}$ јер је сваки вектор из тог потпростора облика $aN_k + bM_k$ и може се записати као

$$\frac{a+b}{\sqrt{2}} \cdot \frac{N_k + M_k}{\sqrt{2}} + \frac{a-b}{\sqrt{2}} \cdot \frac{N_k - M_k}{\sqrt{2}}.$$

Такође, вектори $(N_k + M_k)/\sqrt{2}$ и $(N_k - M_k)/\sqrt{2}$ су линеарно независни јер из $\alpha(N_k + M_k)/\sqrt{2} + \beta(N_k - M_k)/\sqrt{2} = 0$ следи $(\alpha + \beta)N_k + (\alpha - \beta)M_k = 0$, а како $M_k \notin \mathcal{W}_k = \mathrm{Span}\{N_1, \ldots, N_k\}$, то су изотропни вектори N_k и M_k линеарно независни, те је $\alpha + \beta = 0$ и $\alpha - \beta = 0$, одакле је $\alpha = \beta = 0$. Због тога је $((N_k+M_k)/\sqrt{2}, (N_k-M_k)/\sqrt{2})$ база, а да је ортонормирана следи из једнакости

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{\frac{N_k+M_k}{\sqrt{2}}} &= g\left(\frac{N_k + M_k}{\sqrt{2}}, \frac{N_k + M_k}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{2}\varepsilon_{N_k} + g(N_k, M_k) + \frac{1}{2}\varepsilon_{M_k} = 1,\\
\varepsilon_{\frac{N_k-M_k}{\sqrt{2}}} &= g\left(\frac{N_k - M_k}{\sqrt{2}}, \frac{N_k - M_k}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{2}\varepsilon_{N_k} - g(N_k, M_k) + \frac{1}{2}\varepsilon_{M_k} = -1,\\
g\left(\frac{N_k + M_k}{\sqrt{2}}, \frac{N_k - M_k}{\sqrt{2}}\right) &= \frac{1}{2}\varepsilon_{N_k} - \frac{1}{2}g(N_k, M_k) + \frac{1}{2}g(M_k, N_k) - \frac{1}{2}\varepsilon_{M_k} = 0.
\end{aligned}$$

Важи да је $\mathrm{Span}\{N_k, M_k\} = \mathrm{Span}\{N_k, X_k\}$. Заиста, како $N_k \in \mathrm{Span}\{N_k, X_k\}$ и $M_k \in \mathrm{Span}\{N_k, X_k\}$, то је $\mathrm{Span}\{N_k, M_k\} \leqslant \mathrm{Span}\{N_k, X_k\}$. Са друге стране, како $N_k \in \mathrm{Span}\{N_k, M_k\}$ и

$$X_k = g(X_k, N_k)M_k + \frac{\varepsilon_{X_k}}{2g(X_k, N_k)}N_k \in \mathrm{Span}\{N_k, M_k\},$$

то је $\mathrm{Span}\{N_k, X_k\} \leqslant \mathrm{Span}\{N_k, M_k\}$.

Како је $N_k \perp N_i$ за свако $i \in \{1, \ldots, k-1\}$, то $N_k \in (\mathrm{Span}\{N_1, \ldots, N_{k-1}\})^\perp = \mathcal{W}_{k-1}^\perp$, што са $X_k \in \mathcal{W}_{k-1}^\perp$ и чињеницом да је $\mathcal{W}_{k-1}^\perp$ потпростор имплицира да је $\mathrm{Span}\{N_k, M_k\} = \mathrm{Span}\{N_k, X_k\} \leqslant \mathcal{W}_{k-1}^\perp$. Одавде на основу Лема 1.4 и 1.3 закључујемо да је $\mathcal{W}_{k-1} \leqslant (\mathrm{Span}\{N_k, M_k\})^\perp$, а $(\mathrm{Span}\{N_k, M_k\})^\perp$ је недегенерисан на основу Леме 1.6. Дакле, можемо применити индуктивну хипотезу на потпростор $\mathcal{W}_{k-1} = \mathrm{Span}\{N_1, \ldots, N_{k-1}\}$ од простора са скаларним производом $(\mathrm{Span}\{N_k, M_k\})^\perp$ при чему је $(N_1, \ldots, N_{k-1})$ база тог потпростора. Тако добијамо базу $(M_1, \ldots, M_{k-1})$ неког потпуно изотропног потпростора од $(\mathrm{Span}\{N_k, M_k\})^\perp$ која је таква да важи $g(N_i, M_j) = \delta_{ij}$ за $i \in \{1, \ldots, k-1\}$ и $j \in \{1, \ldots, k-1\}$.

Докажимо да је $\mathcal{U}_k = \mathrm{Span}\{M_1, \ldots, M_k\}$ са базом $(M_1, \ldots, M_k)$ тражени скроз изотропан потпростор од $\mathcal{V}_k$ који има тривијалан пресек $\{0\}$ са $\mathcal{W}_k = \mathrm{Span}\{N_1, \ldots, N_k\}$ и важи $g(N_i, M_j) = \delta_{ij}$ за $i \in \{1, \ldots, k\}$ и $j \in \{1, \ldots, k\}$. Како је $(M_1, \ldots, M_{k-1})$ база потпростора простора $(\mathrm{Span}\{N_k, M_k\})^\perp$, то је $g(N_k, M_j) = 0$ за свако $j \in \{1, \ldots, k-1\}$, што са раније доказаним једнакостима даје $g(N_i, M_j) = \delta_{ij}$ за $i \in \{1, \ldots, k\}$ и $j \in \{1, \ldots, k\}$.

Докажимо сада да су $M_1, \ldots, M_k$ линеарно независни вектори. Ако је $\xi_1 M_1 + \xi_2 M_2 + \ldots + \xi_k M_k = 0$, онда на основу једнакости $g(N_k, M_j) = \delta_{kj}$ за $j \in \{1, \ldots, k\}$ добијамо да је $\xi_k = g(N_k, \xi_1 M_1 + \xi_2 M_2 + \ldots + \xi_k M_k) = g(N_k, 0) = 0$, те је $\xi_1 M_1 + \xi_2 M_2 + \ldots + \xi_{k-1} M_{k-1} = 0$, одакле на основу линеарне независности вектора $M_1, \ldots, M_{k-1}$ (коју имамо из индуктивне хипотезе) закључујемо да важи и $\xi_1 = \xi_2 = \ldots = \xi_{k-1} = 0$, те су $M_1, \ldots, M_k$ линеарно независни и представљају базу скроз изотропног потпростора $\mathcal{U}_k = \mathrm{Span}\{M_1, \ldots, M_k\}$.

Преостало је да се докаже да је пресек потпростора $\mathcal{W}_k = \mathrm{Span}\{N_1, \ldots, N_k\}$ и $\mathcal{U}_k = \mathrm{Span}\{M_1, \ldots, M_k\}$ тривијалан, односно да је $\mathcal{W}_k \cap \mathcal{U}_k = \{0\}$. Нека је $P \in \mathcal{W}_k \cap \mathcal{U}_k$. То значи да постоје реални бројеви $\gamma_1, \ldots, \gamma_k$ и $\mu_1, \ldots, \mu_k$ такви да је $P = \gamma_1 N_1 + \ldots + \gamma_k N_k$ и $P = \mu_1 M_1 + \ldots + \mu_k M_k$. Закључујемо да је $\gamma_1 N_1 + \ldots + \gamma_k N_k = \mu_1 M_1 + \ldots + \mu_k M_k$, а онда за свако $i \in \{1, \ldots, k\}$ користећи једнакости $g(N_i, M_j) = \delta_{ij}$ закључујемо да важи $0 = g(N_i, \gamma_1 N_1 + \ldots + \gamma_k N_k) = g(N_i, \mu_1 M_1 + \ldots + \mu_k M_k) = \mu_i$, што повлачи да је $\mu_1 = \mu_2 = \ldots = \mu_k = 0$, односно $P = \mu_1 M_1 + \ldots + \mu_k M_k = 0$.

Тиме је доказ методом математичке индукције комплетиран. □

1.3 Псеудо-Риманове многострукости

У овом поглављу сматраћемо познатим све појмове и тврђења наведена у Додатку из топологије А.2, диференцијалне геометрије А.3 и тензорског рачуна А.4.

Псеудо-Риманова метрика или ***метрика*** на многострукости M је пресликавање $g\colon \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{F}(M)$ које свакој тачки $p \in M$ глатко додељује скаларни производ $g_p\colon T_pM \times T_pM \to \mathbb{R}$ на тангентном простору T_pM, при чему $\mathrm{Ind}(g_p)$ не зависи од тачке p. ***Псеудо-Риманова многострукост*** је многострукост (M, g) са придруженом метриком g. Иако је метрика битна јер две различите метрике на истој многострукости дају различите псеудо-Риманове многострукости, често се псеудо-Риманова многострукост (M, g) обележава са M када се подразумева која метрика је придружена многострукости M. Како по дефиницији псеудо-Риманове многострукости индекс $\mathrm{Ind}(g_p)$ не зависи од избора тачке $p \in M$, тај заједнички индекс свих скаларних производа g_p називамо ***индекс метрике*** $\mathrm{Ind}(g)$, а то је и ***индекс псеудо-Риманове многострукости*** $\mathrm{Ind}(M)$. ***Риманова многострукост*** је многострукост (M, g) чији је $\mathrm{Ind}(M) = 0$, а метрика g се назива ***Риманова метрика*** и за њу важи да је за сваку тачку $p \in M$ скаларни производ g_p на T_pM позитивно дефинитан.

Пример 1.3. Један од најважнијих примера Риманове многострукости је ***еуклидски простор*** $(\mathbb{R}^n, \bar{g})$ са ***еуклидском метриком*** $\bar{g}$ која свакој тачки $p \in M$ придружује позитивно дефинитан скаларни производ g_p на T_pM (који природно идентификујемо са $\mathbb{R}^n$) који је одређен јединичном Грамовом матрицом $G = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n}$. Под ознаком $\mathbb{R}^n$ подразумевамо $(\mathbb{R}^n, \bar{g})$ ако није другачије наглашено. △

Лоренцова многострукост је многострукост (M, g) чији је $\mathrm{Ind}(M) = 1 \neq n$, а метрика g је ***Лоренцова метрика***.

Пример 1.4. Приметимо да је индекс скаларног производа g_p који је одређен Грамовом матрицом из Примера 1.1 за $a_1 = \ldots = a_{n-1} = 1$ и $a_n = -1$ једнак 1, те је метрика g која свакој тачки p многострукости M додељује скаларни производ g_p Лоренцова, а (M, g) је Лоренцова многострукост. ***Простор Минковског*** је Лоренцова многострукост $(\mathbb{R}^n, g)$, а $(\mathbb{R}^4, g)$ је релативистички простор-време који има бројне примене у физици. △

У наставку наводимо примере псеудо-Риманових многострукости чији је $v = \mathrm{Ind}(g)$ произвољан број између 0 и $n = \dim M$.

Пример 1.5. ***Псеудо-еуклидски простор*** $\mathbb{R}^n_v$ индекса v је псеудо-Риманова многострукост $(\mathbb{R}^n, g)$ за чију метрику g важи да свакој тачки $p \in \mathbb{R}^n$ додељује скаларни производ g_p одређен дијагоналном Грамовом матрицом на чијих је првих v места на главној дијагонали -1, а на преосталих $n - v$ места 1. $\triangle$

Како индекс псеудо-Риманове многострукости не зависи од тачке, то ни сигнатура скаларног производа g_p не зависи од тачке $p \in M$, те одговарајући уређени пар зовемо и ***сигнатура метрике*** g, као и ***сигнатура псеудо-Риманове многострукости***. ***Клајнова многострукост*** је псеудо-Риманова многострукост сигнатуре (v, v), а за њену метрику g кажемо да је ***Клајнова*** или ***неутрална***. Како сигнатура (v, v) постоји само за многострукости парне димензије, то Клајнове многострукости могу бити само парне димензије.

Пример 1.6. ***Вокерова метрика*** g се дефинише на неком отвореном подскупу M од $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{2v}$ са стандардним координатама $(x^1, \ldots, x^{2v})$ помоћу Грамове матрице у односу на координатни репер $\partial_1, \partial_2, \ldots, \partial_{2v}$ задате са

$$G = \begin{pmatrix} G_{11} & G_{12} & \ldots & G_{1v} & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ G_{12} & G_{22} & \ldots & G_{2v} & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ G_{1v} & G_{2v} & \ldots & G_{vv} & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix},$$

при чему су $G_{ij}(x^1, \ldots, x^{2v})$ за $i \leqslant j$, $i \in \{1, \ldots, v\}$ и $j \in \{1, \ldots, v\}$ произвољне глатке функције на M. Као у Примеру 1.2 се доказује да ова метрика свакој тачки $p \in M$ додељује скаларни производ g_p. Да би (M, g) била псеудо-Риманова многострукост неопходно је обезбедити да сваки скаларни производ g_p има исти индекс. Посматрамо потпростор $\mathcal{W}_p = \mathrm{Span}\{\partial_{v+1}, \partial_{v+2}, \ldots, \partial_{2v}\}$ простора T_pM. Како је доњи десни $v \times v$ блок матрице G нула блок, то је $\mathcal{W}_p$ v-димензиони потпуно изотропан потпростор јер се састоји само од вектора квадратне норме 0. На основу Леме 1.13 закључујемо да је $v = \dim \mathcal{W}_p \leqslant$

$\min(\mathrm{Ind}(g_p), \dim \mathcal{V} - \mathrm{Ind}(g_p)) = \min(\mathrm{Ind}(g_p), 2v - \mathrm{Ind}(g_p))$, одакле је $v \leqslant \mathrm{Ind}(g_p)$ и $v \leqslant 2v - \mathrm{Ind}(g_p)$, односно $v \leqslant \mathrm{Ind}(g_p) \leqslant v$, те је $\mathrm{Ind}(g_p) = v$ за свако $p \in M$, што повлачи да је $\mathrm{Ind}(g) = v$, те је (M, g) псеудо-Риманова многострукост сигнатуре (v, v). △

Нека је (M, g) псеудо-Риманова многострукост. По дефиницији, метрика g је симетрично коваријантно тензорско поље на M реда 2. ***Снизилица*** је пресликавање $\flat\colon \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}^*(M)$ које векторском пољу $X \in \mathfrak{X}(M)$ додељује ковекторско поље $X^\flat \in \mathfrak{X}^*(M)$ дефинисано помоћу $X^\flat(Y) = g(X, Y)$ за свако $Y \in \mathfrak{X}(M)$. За произвољну тачку $p \in M$ можемо рестриковати снизилицу и добити пресликавање $\flat_p\colon T_pM \to T_p^*M$ које тангентни вектор X_p пресликава у ковектор $X_p^\flat \in T_p^*M$ дефинисан помоћу $X_p^\flat(Y_p) = g_p(X_p, Y_p)$ за свако $Y_p \in T_pM$.

Приметимо да је $\flat_p$ линеарно пресликавање јер се линеарној комбинацији тангентних вектора $aX_p + bZ_p$ додељује ковектор $(aX_p + bZ_p)^\flat \in T_p^*M$ дефинисан помоћу $(aX_p + bZ_p)^\flat(Y_p) = g_p(aX_p + bZ_p, Y_p) = ag_p(X_p, Y_p) + bg_p(Z_p, Y_p) = aX_p^\flat(Y_p) + bZ_p^\flat(Y_p)$ за свако $Y_p \in T_pM$. Линеарно пресликавање $\flat_p$ је инјективно ако и само ако је $\mathrm{Ker}(\flat_p) = \{0\}$, а то је еквивалентно са тим да је нула вектор једини тангентни вектор X_p такав да је $0 = X_p^\flat(Y_p) = g_p(X_p, Y_p)$ за свако $Y_p \in T_pM$, а то је еквивалентно услову да је форма g_p недегенерисана. Како је метрика g псеудо-Риманове многострукости таква да је g_p недегенерисана форма, то је $\flat_p$ инјективно, али како је $\dim T_pM = \dim T_p^*M = \dim M$, то је на основу Теореме о рангу и дефекту

$$\dim T_p^*M = \dim(T_pM) = \dim \mathrm{Ker}(\flat_p) + \dim \mathrm{Im}(\flat_p) = \dim \mathrm{Im}(\flat_p),$$

те је $\flat_p$ и сурјективно, односно $\flat_p$ је изоморфизам тангентног и котангентног простора, односно $\flat$ је изоморфизам векторских и ковекторских поља. Инверзни изоморфизам $\sharp\colon \mathfrak{X}^*(M) \to \mathfrak{X}(M)$ називамо ***йовисилица*** и то је пресликавање које ковекторско поље $\omega \in \mathfrak{X}^*(M)$ пресликава у векторско поље $\omega^\sharp \in \mathfrak{X}(M)$ такво да је $\omega(Y) = g(\omega^\sharp, Y)$ за свако $Y \in \mathfrak{X}(M)$. Берже је за пресликавања $\flat\colon \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}^*(M)$ и $\sharp\colon \mathfrak{X}^*(M) \to \mathfrak{X}(M)$ користио име ***музички изоморфизми***.

Снизилица је назив добила по томе што је повезана са појавом коју зовемо ***сӣушӣање индекса***. Нека је (U, ϕ) карта многострукости M са координатним функцијама x^i, за $i \in \{1, \dots, n\}$. Како је $\partial_1, \dots, \partial_n$ координатни репер за M над U, а $dx^1, \dots, dx^n$ координатни корепер за M над U (видети Додатак из диференцијалне геометрије A.3), онда се произвољно векторско поље X

(идентификује се са контраваријантним тензорским пољем реда 1, односно $X \in \mathfrak{T}^1_0(M)$) може записати као $X = \sum_{i=1}^n X^i \partial_i$. Испоставља се да је $X^\flat$ ковекторско поље (које идентификујемо са коваријантним тензорским пољем реда 1, односно $X^\flat \in \mathfrak{T}^0_1(M)$) које се може записати као $X^\flat = \sum_{j=1}^n X_j dx^j$, при чему је $X_j = \sum_{i=1}^n X^i g_{ij}$, где је $g_{ij} = g(\partial_i, \partial_j)$. Заиста, на основу Додатка из диференцијалне геометрије А.3 имамо да је $dx^i(\partial_j) = \delta^i_j$, где је δ^i_j Кронекерова делта, те је

$$\begin{aligned} X_j &= \sum_{i=1}^n X_i \cdot \delta^i_j = \sum_{i=1}^n X_i \cdot dx^i(\partial_j) = \left(\sum_{i=1}^n X_i dx^i\right)(\partial_j) = X^\flat(\partial_j) \\ &= g(X, \partial_j) = g\Big(\sum_{i=1}^n X^i \partial_i, \partial_j\Big) = \sum_{i=1}^n X^i g(\partial_i, \partial_j) = \sum_{i=1}^n X^i g_{ij}. \end{aligned}$$

Ове једначине за $j \in \{1, \ldots, n\}$ се могу записати у матричном облику

$$\Big(X^1, \ \ X^2, \ \ \ldots, \ \ X^n\Big) \begin{pmatrix} g_{11} & \cdots & g_{1j} & \cdots & g_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{n1} & \cdots & g_{nj} & \cdots & g_{nn} \end{pmatrix} = \Big(X_1, \ \ \ldots, \ \ X_j, \ \ \ldots, \ \ X_n\Big),$$

односно $\Big(X^1, \ X^2, \ \ldots, \ X^n\Big) G = \Big(X_1, \ X_2, \ \ldots, \ X_n\Big)$, те ако елементе инверзне матрице G^{-1} означимо са g^{ij} за $i \in \{1, \ldots, n\}$ и $j \in \{1, \ldots, n\}$, онда је $\Big(X^1, \ X^2, \ \ldots, \ X^n\Big) = \Big(X_1, \ X_2, \ \ldots, \ X_n\Big) G^{-1}$, те је $X^j = \sum_{i=1}^n X_i g^{ij}$. То оправдава назив за повисилицу јер она има везе са ***подизањем индекса***.

Псеудо-Риманова имерзија је глатко пресликавање $f\colon M \to N$ између псеудо-Риманових многострукости (M, g_M) и (N, g_N) такво да је $(g_M)_p(X_p, Y_p) = (g_N)_{f(p)}(T_p f(X_p), T_p f(Y_p))$, за свако $p \in M$ и $X_p, Y_p \in T_pM$. ***Изометрија*** из псеудо-Риманове многострукости (M, g_M) у (N, g_N) је псеудо-Риманова имерзија $f\colon M \to N$ која је дифеоморфизам. Псеудо-Риманова имерзија $f\colon M \to N$ која је локални дифеоморфизам се зове ***локална изометрија***. За две псеудо-Риманове многострукости (M, g_M) и (N, g_N) кажемо да су ***изометричне*** ако постоји изометрија између тих многострукости. ***Псеудо-Риманова геометрија*** је грана геометрије која се бави проучавањем особина псеудо-Риманових многострукости које су инваријантне у односу на локалне или глобалне изометрије.

Ако је M псеудо-Риманова многострукост, онда изометрију $f\colon M \to M$ називамо ***изометрија од*** M. Испоставља се да скуп свих изометрија од M чини групу $I(M)$, коју зовемо ***група изометрија од*** M.

Нека је (M, g) псеудо-Риманова многострукост и ∇ повезаност на M. Повезаност ∇ је ***метричка*** ако за све $X \in \mathfrak{X}(M)$, $Y \in \mathfrak{X}(M)$, $Z \in \mathfrak{X}(M)$ важи да је $X(g(Y,Z)) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z)$. ***Торзија*** је пресликавање $\tau\colon \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ дефинисано помоћу $\tau(X,Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y]$. Повезаност без торзије, односно таква да за свако $X \in \mathfrak{X}(M)$ и $Y \in \mathfrak{X}(M)$ важи да је $0 = \tau(X,Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y]$, назива се ***симетрична***. Симетрична метричка повезаност на псеудо-Римановој многострукости (M, g) назива се ***Леви-Чивита повезаност***. Доказ наредне теореме која говори о постојању и јединствености Леви-Чивита повезаности на псеудо-Римановој многострукости може се пронаћи у [59, Теорема 3.11].

Теорема 1.15. *На свакој псеудо-Римановој многострукости* (M, g) *постоји јединствена Леви-Чивита повезаност.*

Оператор кривине на псеудо-Римановој многострукости (M, g) са Леви-Чивита повезаности ∇ је функција $\mathcal{R}\colon \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ дефинисана помоћу $\mathcal{R}(X,Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z$ за све $X \in \mathfrak{X}(M)$, $Y \in \mathfrak{X}(M)$ и $Z \in \mathfrak{X}(M)$. Напоменимо да неки аутори попут до Карма[5] дефинишу оператор кривине помоћу $-\mathcal{R}(X,Y)Z$, те треба бити опрезан која дефиниција се узима. Најбитнија својства оператора кривине $\mathcal{R}$ на псеудо-Римановој многострукости су дата у следећој леми чији се доказ може наћи у [59, Лема 3.35] и [59, Пропозиција 3.36].

Лема 1.16. *За оператор кривине* $\mathcal{R}$ *псеудо-Риманове многострукости* M *важи*

1. $\mathcal{R} \in \mathfrak{T}^1_3(M)$, *односно* $\mathcal{R}$ *је* $\mathfrak{F}(M)$*-мултилинеаран,*
2. *антисиметричност по прва два аргумента* $\mathcal{R}(Y,X) = -\mathcal{R}(X,Y)$,
3. ***Бјанкијев идентитет*** $\mathcal{R}(X,Y)Z + \mathcal{R}(Y,Z)X + \mathcal{R}(Z,X)Y = 0$.

Битно је напоменути да помоћу метрике g на псеудо-Римановој многострукости (M, g) можемо изразити Кристофелове симболе, а помоћу њих оператор кривине, о чему нам говоре наредне две леме чији се докази могу наћи у [24, Пропозиција 1.1] и [34, стр. 14], редом.

---

[5] Manfredo Perdigão do Carmo (1928–2018), бразилски математичар

Лема 1.17. *Ако су* $(x^1, \dots, x^n)$ *координате на некој околини тачке псеудо-Риманове многострукости* (M, g), *тада је*

$$\Gamma^k_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{l=1}^{n} g^{lk} \left(\frac{\partial g_{jl}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{li}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l} \right),$$

при чему су g_{ij} *компоненте Грамове матрице придружене метрици* g, *а* g^{ij} *су компоненте њој инверзне матрице.*

Лема 1.18. *На околини са координатама* $(x^1, \dots, x^n)$ *псеудо-Риманове многострукости* (M, g) *важи да је* $\mathcal{R}(\partial_i, \partial_j)\partial_k = \sum_{l=1}^{n} \mathcal{R}^l_{ijk} \partial_l$, *где је*

$$\mathcal{R}^l_{ijk} = \partial_i \Gamma^l_{jk} - \partial_j \Gamma^l_{ik} + \sum_{m=1}^{n} (\Gamma^m_{jk} \Gamma^l_{im} - \Gamma^m_{ik} \Gamma^l_{jm}).$$

Спуштањем индекса од оператора кривине $\mathcal{R}$ добијамо тензор кривине $R = \mathcal{R}^\flat \in \mathfrak{T}^0_4(M)$. Доказ следеће теореме о особинама тензора кривине R може се пронаћи у [59, Пропозиција 3.36].

Теорема 1.19. *За тензор кривине* R *псеудо-Риманове многострукости* M *важи*

1. $R(X, Y, Z, W) = -R(Y, X, Z, W)$,
2. $R(X, Y, Z, W) = -R(X, Y, W, Z)$,
3. $R(X, Y, Z, W) + R(Y, Z, X, W) + R(Z, X, Y, W) = 0$ *(**први Бјанкијев идентитет**).*

Како коваријантни тензори вишег реда могу бити компликовани, корисно је конструисати једноставније тензоре који сажимају неке информације. Ако пођемо од коваријантног тензора, попут тензора кривине R, можемо посматрати ***траг*** $\operatorname{tr}_g R$, односно контракцију повисилице тензора кривине R. Већ смо имали да је $R = \mathcal{R}^\flat$, те је $\operatorname{tr}_g R = C(R^\sharp) = C((\mathcal{R}^\flat)^\sharp) = C\mathcal{R}$. Међутим, за контракцију је неопходно нагласити који коваријантни индекс ћемо упарити са контраваријантним индексом. Ако изаберемо први индекс, добијамо ***Ричијев тензор*** $\mathrm{Ric} \in \mathfrak{T}^0_2(M)$ дефинисан са $\mathrm{Ric} = \operatorname{tr}_g R = C\mathcal{R}$, односно тензор чије су компоненте $R_{ij} = \sum_{m=1}^{n} \mathcal{R}^m_{mij} = \sum_{m=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} R_{mijl} g^{lm}$. ***Скаларна кривина*** Sc је траг Ричијевог тензора, $\mathrm{Sc} = \operatorname{tr}_g \mathrm{Ric} = C(\mathrm{Ric}^\sharp) \in \mathfrak{F}(M)$, те за њу важи $\mathrm{Sc} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} R_{ij} g^{ji}$.

Псеудо-Риманова многострукост (M,g) је ***Ајнштајнова*** ако је $\mathrm{Ric} = \lambda g$ за неку константу $\lambda \in \mathbb{R}$.

Тангентна раван σ на M у тачки $p \in M$ је дводимензиони потпростор тангентног простора T_pM. ***Секциона кривина*** κ недегенерисане тангентне равни $\sigma = \mathrm{Span}\{X,Y\}$ у T_pM је дата помоћу

$$\kappa(\sigma) = \kappa(X,Y) = \frac{R(X,Y,Y,X)}{\varepsilon_X\varepsilon_Y-(g(X,Y))^2}.$$

Испоставља се да је дефиниција коректна јер вредност $\kappa(\sigma)$ не зависи од избора базе за тангентну раван σ (видети [59, Лема 3.39]).

1.4 Алгебарски тензор кривине

Нека је $(\mathcal{V},g)$ простор са скаларним производом. За мултилинеарно пресликавање $R\colon \mathcal{V}^4 \to \mathbb{R}$ кажемо да је ***алгебарски тензор кривине*** на $(\mathcal{V},g)$ ако задовољава следеће особине:

$$R(X,Y,Z,W) = -R(Y,X,Z,W), \tag{1.3}$$

$$R(X,Y,Z,W) = -R(X,Y,W,Z), \tag{1.4}$$

$$R(X,Y,Z,W) = R(Z,W,X,Y), \tag{1.5}$$

$$R(X,Y,Z,W) + R(Y,Z,X,W) + R(Z,X,Y,W) = 0, \tag{1.6}$$

за све $X,Y,Z,W \in \mathcal{V}$. Прве три једнакости називамо $\mathbb{Z}_2$ ***симетрије***, а четврту једнакост ***први Бјанкијев идентитет***. На основу наредне леме следи да смо алгебарски тензор кривине R могли дефинисати као мултилинеарно пресликавање из $\mathcal{V}^4$ у $\mathbb{R}$ за које важе једнакости (1.3), (1.4) и (1.6).

Лема 1.20. *Ако је $(\mathcal{V},g)$ простор са скаларним производом и за пресликавање $R\colon \mathcal{V}^4 \to \mathbb{R}$ важе једнакости* (1.3), (1.4) *и* (1.6) *за све $X,Y,Z,W \in \mathcal{V}$, онда R задовољава и једнакости* (1.5) *за све $X,Y,Z,W \in \mathcal{V}$.*

Доказ. Доказујемо да из једнакости (1.3), (1.4) и (1.6) за све $X,Y,Z,W \in \mathcal{V}$ следи једнакост (1.5) за све $X,Y,Z,W \in \mathcal{V}$. Заиста, коришћењем друге $\mathbb{Z}_2$ симетрије и првог Бјанкијевог идентитета добијамо да је

$$\begin{aligned}2R(X,Y,Z,W) &= R(X,Y,Z,W) + R(X,Y,Z,W) = R(X,Y,Z,W) - R(X,Y,W,Z)\\ &= -R(Y,Z,X,W) - R(Z,X,Y,W) + R(Y,W,X,Z) + R(W,X,Y,Z),\end{aligned}$$

а са друге стране поновном употребом друге $\mathbb{Z}_2$ симетрије и првог Бјанкијевог идентитета добијамо да је

$$\begin{aligned}2R(Z,W,X,Y) &= R(Z,W,X,Y) + R(Z,W,X,Y) = R(Z,W,X,Y) - R(Z,W,Y,X)\\ &= -R(W,X,Z,Y) - R(X,Z,W,Y) + R(W,Y,Z,X) + R(Y,Z,W,X),\end{aligned}$$

одакле применом друге, а потом и прве $\mathbb{Z}_2$ симетрије следи да је

$$\begin{aligned}2R(Z,W,X,Y) &= R(W,X,Y,Z) + R(X,Z,Y,W) - R(W,Y,X,Z) - R(Y,Z,X,W)\\ &= R(W,X,Y,Z) - R(Z,X,Y,W) + R(Y,W,X,Z) - R(Y,Z,X,W).\end{aligned}$$

Зато је $R(X,Y,Z,W) = R(Z,W,X,Y)$, што је баш једнакост (1.5). □

У наредној леми доказујемо да ако пресликавање $R\colon \mathcal{V}^4 \to \mathbb{R}$ задовољава (1.3), (1.4) и (1.6) за све $X,Y,Z,W \in \mathcal{V}$ и линеарно је по првом аргументу, тада је R алгебарски тензор кривине.

Лема 1.21. *Нека је $(\mathcal{V}, g)$ простор са скаларним производом. Ако пресликавање $R\colon \mathcal{V}^4 \to \mathbb{R}$ задовољава једнакости* (1.3)*,* (1.4) *и* (1.6) *за све $X,Y,Z,W \in \mathcal{V}$ и R је линеарно по првом аргументу, тада је R алгебарски тензор кривине.*

Доказ. На основу Леме 1.20 важи да пресликавање R задовољава и једнакости (1.5) за све $X,Y,Z,W \in \mathcal{V}$. Линеарност по другом аргументу следи из (1.3) и линеарности по првом аргументу јер за свака два $a,b \in \mathbb{R}$ имамо да је

$$\begin{aligned}&R(X,aY+bY_1,Z,W) = -R(aY+bY_1,X,Z,W)\\ &\quad = -aR(Y,X,Z,W) - bR(Y_1,X,Z,W) = aR(X,Y,Z,W) + bR(X,Y_1,Z,W).\end{aligned}$$

Линеарност по трећем аргументу следи из једнакости (1.5) и линеарности по првом аргументу јер за свака два реална броја a и b важи

$$\begin{aligned}R(X,Y,aZ+bZ_1,W) =&R(aZ+bZ_1,W,X,Y) = aR(Z,W,X,Y) + bR(Z_1,W,X,Y)\\ =&aR(X,Y,Z,W) + bR(X,Y,Z_1,W).\end{aligned}$$

Линеарност по четвртом аргументу следи из једнакости (1.5) и већ доказане линеарности по другом аргументу јер за свака два реална броја a и b важи

$$\begin{aligned}R(X,Y,Z,aW+bW_1) =&R(Z,aW+bW_1,X,Y) = aR(Z,W,X,Y) + bR(Z,W_1,X,Y)\\ =&aR(X,Y,Z,W) + bR(X,Y,Z,W_1).\end{aligned}$$

Тиме је доказано да је R алгебарски тензор кривине на $\mathcal{V}$. □

У наставку дајемо два примера алгебарског тензора кривине на простору са скаларним производом.

Пример 1.7. Нека је $(\mathcal{V}, g)$ простор са скаларним производом и нека је пресликавање $R^1 \colon \mathcal{V} \to \mathbb{R}$ дефинисано помоћу

$$R^1(X, Y, Z, W) = g(Y, Z)g(X, W) - g(X, Z)g(Y, W).$$

Да бисмо доказали да је R^1 алгебарски тензор кривине, на основу Леме 1.21 довољно је доказати да је R^1 линеарно по првом аргументу и да задовољава (1.3), (1.4) и (1.6) за све $X, Y, Z, W \in \mathcal{V}$. Линеарност по првом аргументу пресликавања R^1 следи из билинеарности форме g јер за свако $a, b \in \mathbb{R}$ важи

$$\begin{aligned}
&R^1(aX + bX_1, Y, Z, W) = g(Y, Z)g(aX + bX_1, W) - g(aX + bX_1, Z)g(Y, W)\\
&= g(Y, Z)(ag(X, W) + bg(X_1, W)) - (ag(X, Z) + bg(X_1, Z))g(Y, W)\\
&= a(g(Y, Z)g(X, W) - g(X, Z)g(Y, W)) + b(g(Y, Z)g(X_1, W) - g(X_1, Z)g(Y, W))\\
&= aR^1(X, Y, Z, W) + bR^1(X_1, Y, Z, W).
\end{aligned}$$

Једнакости (1.3) за све $X, Y, Z, W \in \mathcal{V}$ следе из

$$\begin{aligned}
R^1(Y, X, Z, W) &= g(X, Z)g(Y, W) - g(Y, Z)g(X, W)\\
&= -(g(Y, Z)g(X, W) - g(X, Z)g(Y, W)) = -R^1(X, Y, Z, W).
\end{aligned}$$

Једнакости (1.4) за све $X, Y, Z, W \in \mathcal{V}$ следе из

$$\begin{aligned}
R^1(X, Y, W, Z) &= g(Y, W)g(X, Z) - g(X, W)g(Y, Z)\\
&= -(g(Y, Z)g(X, W) - g(X, Z)g(Y, W)) = -R^1(X, Y, Z, W).
\end{aligned}$$

Једнакости (1.6) за све $X, Y, Z, W \in \mathcal{V}$ следе из симетричности форме g јер је

$$\begin{aligned}
&R^1(X, Y, Z, W) + R^1(Y, Z, X, W) + R^1(Z, X, Y, W)\\
=&g(Y, Z)g(X, W) - g(X, Z)g(Y, W) + g(Z, X)g(Y, W) - g(Y, X)g(Z, W)\\
&+ g(X, Y)g(Z, W) - g(Z, Y)g(X, W) = 0.
\end{aligned}$$

Дакле, R^1 је заиста алгебарски тензор кривине који се назива ***тензор константне секционе кривине***. Овај назив је смислен јер ако је $\sigma = \mathrm{Span}\{X, Y\}$ недегенерисан потпростор од $\mathcal{V}$ са алгебарским тензором кривине R^1, онда је секциона кривина једнака

$$\kappa(\sigma) = \frac{R^1(X, Y, Y, X)}{\varepsilon_X \varepsilon_Y - (g(X, Y))^2} = \frac{g(Y, Y)g(X, X) - g(X, Y)g(Y, X)}{g(X, X)g(Y, Y) - (g(X, Y))^2} = 1.$$

Слично помоћу $R = \mu R^1$ дефинишемо алгебарски тензор ***константне секционе кривине*** μ. $\triangle$

За линеарни оператор $J\colon \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ на простору са скаларним производом $(\mathcal{V}, g)$ кажемо да је ***косоадјунгован*** или ***кососиметричан*** ако важи $g(JX, Y) = -g(X, JY)$ за свако $X \in \mathcal{V}$ и $Y \in \mathcal{V}$.

Пример 1.8. Сваки косоадјунгован ендоморфизам J на $\mathcal{V}$ генерише нов пример алгебарског тензора кривине помоћу

$$R^J(X, Y, Z, W) = g(JX, Z)g(JY, W) - g(JY, Z)g(JX, W) + 2g(JX, Y)g(JZ, W),$$

за свако $X, Y, Z, W \in \mathcal{V}$. Да бисмо доказали да је R^J алгебарски тензор кривине, на основу Леме 1.21 довољно је доказати да је R^J линеарно по првом аргументу и да задовољава једнакости (1.3), (1.4) и (1.6) за све $X, Y, Z, W \in \mathcal{V}$. Линеарност по првом аргументу пресликавања R^J следи из линеарности оператора J и билинеарности форме g јер за свако $a \in \mathbb{R}$ и $b \in \mathbb{R}$ важи

$$\begin{aligned}
&R^J(aX + b\tilde{X}, Y, Z, W) = g(J(aX + b\tilde{X}), Z)g(JY, W) - g(JY, Z)g(J(aX + b\tilde{X}), W)\\
&+ 2g(J(aX + b\tilde{X}), Y)g(JZ, W) = g(aJX + bJ\tilde{X}, Z)g(JY, W)\\
&- g(JY, Z)g(aJX + bJ\tilde{X}), W) + 2g(aJX + bJ\tilde{X}), Y)g(JZ, W)\\
&= (ag(JX, Z) + bg(J\tilde{X}, Z))g(JY, W) - g(JY, Z)(ag(JX, W) + bg(J\tilde{X}, W))\\
&+ 2(ag(JX, Y) + bg(J\tilde{X}, Y))g(JZ, W)\\
&= a(g(JX, Z)g(JY, W) - g(JY, Z)g(JX, W) + 2g(JX, Y)g(JZ, W))\\
&+ b(g(J\tilde{X}, Z)g(JY, W) - g(JY, Z)g(J\tilde{X}, W) + 2g(J\tilde{X}, Y)g(JZ, W))\\
&= aR^J(X, Y, Z, W) + bR^J(\tilde{X}, Y, Z, W).
\end{aligned}$$

Једнакости (1.3) за све $X, Y, Z, W \in \mathcal{V}$ следе из тога што за косоадјунговани оператор J важи $g(JY, X) = -g(Y, JX) = -g(JX, Y)$, те је

$$\begin{aligned}
R^J(Y, X, Z, W) &= g(JY, Z)g(JX, W) - g(JX, Z)g(JY, W) + 2g(JY, X)g(JZ, W)\\
&= -(g(JX, Z)g(JY, W) - g(JY, Z)g(JX, W) + 2g(JX, Y)g(JZ, W))\\
&= -R^J(X, Y, Z, W).
\end{aligned}$$

Слично се изводе и једнакости (1.4) за све $X, Y, Z, W \in \mathcal{V}$ користећи да за косоадјунговани оператор J важи $g(JW, Z) = -g(W, JZ) = -g(JZ, W)$.
Једнакости (1.6) за све $X, Y, Z, W \in \mathcal{V}$ следе из тога што за косоадјунговани

оператор J важе једнакости $g(JX,Z) = -g(X,JZ) = -g(JZ,X)$, $g(JX,Y) = -g(X,JY) = -g(JY,X)$ и $g(JY,Z) = -g(Y,JZ) = -g(JZ,Y)$ те је

$$\begin{aligned}
&R^J(X,Y,Z,W) + R^J(Y,Z,X,W) + R^J(Z,X,Y,W)\\
&= g(JX,Z)g(JY,W) - g(JY,Z)g(JX,W) + 2g(JX,Y)g(JZ,W)\\
&+ g(JY,X)g(JZ,W) - g(JZ,X)g(JY,W) + 2g(JY,Z)g(JX,W)\\
&+ g(JZ,Y)g(JX,W) - g(JX,Y)g(JZ,W) + 2g(JZ,X)g(JY,W)\\
&= g(JX,Z)g(JY,W) + g(JX,Y)g(JZ,W) + g(JY,X)g(JZ,W)\\
&+ g(JY,Z)g(JX,W) + g(JZ,Y)g(JX,W) + g(JZ,X)g(JY,W)\\
&= (-g(JZ,X) + g(JZ,X))g(JY,W) + (-g(JY,X) + g(JY,X))g(JZ,W)\\
&+ (-g(JZ,Y) + g(JZ,Y))g(JX,W) = 0.
\end{aligned}$$

Дакле, R^J је заиста алгебарски тензор кривине. △

Пример 1.9. Докажимо да ако су $R_1,\ldots,R_k$ алгебарски тензори кривине на простору са скаларним производом $(\mathcal{V},g)$ и $a_1,\ldots,a_k$ произвољни реални бројеви, онда је и линеарна комбинација $\sum_{i=1}^k a_iR_i$ такође алгебарски тензор кривине. Није тешко закључити да је скуп S свих мултилинеарних пресликавања $R\colon \mathcal{V}^4 \to \mathbb{R}$ са стандардним операцијама сабирања и множења скаларом векторски простор. Довољно је још доказати да је скуп алгебарских тензора кривине на $\mathcal{V}$ векторски потпростор векторског простора $(S,+,\cdot)$, односно ако су R_1 и R_2 алгебарски тензори кривине из S, а a_1 и a_2 произвољни реални бројеви, да је мултилинеарно пресликавање $R = a_1R_1 + a_2R_2$ алгебарски тензор кривине. Једнакости (1.3) за све $X,Y,Z,W \in \mathcal{V}$ за пресликавање R следе из једнакости (1.3) за тензоре R_1 и R_2 јер је

$$\begin{aligned}
R(Y,X,Z,W) &= a_1R_1(Y,X,Z,W) + a_2R_2(Y,X,Z,W)\\
&= a_1(-R_1(X,Y,Z,W)) + a_2(-R_2(X,Y,Z,W))\\
&= -(a_1R_1(X,Y,Z,W) + a_2R_2(X,Y,Z,W)) = -R(X,Y,Z,W).
\end{aligned}$$

Једнакости (1.4) за све $X,Y,Z,W \in \mathcal{V}$ за пресликавање R следе из једнакости (1.4) за тензоре R_1 и R_2 зато што је

$$\begin{aligned}
R(X,Y,W,Z) &= a_1R_1(X,Y,W,Z) + a_2R_2(X,Y,W,Z)\\
&= a_1(-R_1(X,Y,Z,W)) + a_2(-R_2(X,Y,Z,W))\\
&= -(a_1R_1(X,Y,Z,W) + a_2R_2(X,Y,Z,W)) = -R(X,Y,Z,W).
\end{aligned}$$

Једнакости (1.6) за све $X, Y, Z, W \in \mathcal{V}$ следе из првог Бјанкијевог идентитета за тензоре R_1 и R_2 јер је

$$\begin{aligned} & R(X,Y,Z,W) + R(Y,Z,X,W) + R(Z,X,Y,W) \\ & = \sum_{i=1}^{2} a_i R_i(X,Y,Z,W) + \sum_{i=1}^{2} a_i R_i(Y,Z,X,W) + \sum_{i=1}^{2} a_i R_i(Z,X,Y,W) \\ & = \sum_{i=1}^{2} a_i (R_i(X,Y,Z,W) + R_i(Y,Z,X,W) + R_i(Z,X,Y,W)) = \sum_{i=1}^{2} a_i \cdot 0 = 0. \end{aligned}$$

Одавде на основу Леме 1.21 закључујемо да је R алгебарски тензор кривине.

△

Ако је $(E_1, \ldots, E_n)$ произвољна база простора са скаларним производом $(\mathcal{V}, g)$, онда на основу мултилинеарности алгебарског тензора кривине R следи да се $R(X, Y, Z, W)$, при чему је $X = \sum_{i=1}^{n} x_i E_i$, $Y = \sum_{j=1}^{n} y_j E_j$, $Z = \sum_{k=1}^{n} z_k E_k$ и $W = \sum_{l=1}^{n} w_l E_l$, може записати у облику $R(X,Y,Z,W) = \sum_{i,j,k,l=1}^{n} x_i y_j z_k w_l R(E_i, E_j, E_k, E_l)$, односно алгебарски тензор кривине R се може изразити помоћу ***компоненти тензора кривине*** $R_{ijkl} = R(E_i, E_j, E_k, E_l)$ у односу на базу $(E_1, \ldots, E_n)$. Потребно је само $n^2(n^2-1)/12$ компоненти да бисмо изразили све компоненте тензора кривине, што следи из наредне теореме (видети Вајнберг[6] [70, стр. 142-144] или [28, Својство 5.3.1]).

Теорема 1.22. *Димензија простора алгебарских тензора кривине на простору са скаларним производом димензије* n *једнака је* $n^2(n^2-1)/12$.

Доказ. Разликујемо 4 врсте компоненти тензора кривине.

Први случај: Сви индекси компоненте тензора кривине су једнаки. На основу једнакости (1.3) је $R_{iiii} = R(E_i, E_i, E_i, E_i) = -R(E_i, E_i, E_i, E_i) = -R_{iiii}$, те је $R_{iiii} = 0$.

Други случај: Међу индексима компоненте тензора кривине су два различита броја i и j. Без умањења општости можемо претпоставити да је i индекс који се не јавља мање пута од индекса j, односно да се број i у индексима компоненте тензора кривине јавља 2 или 3 пута. Приметимо да на основу једнакости (1.3) и једнакости (1.4) следи да је $R_{iiij} = R_{iiji} = R_{ijii} = R_{jiii} = 0$, као и да је $R_{iijj} = R_{jjii} = 0$, док је $R_{ijij} = -R_{ijji}$, $R_{jiji} = -R_{ijji}$, а на основу једнакости (1.5) је $R_{jiij} = R_{ijji}$. Дакле, све компоненте тензора кривине међу чијим

---

[6] Steven Weinberg (1933-2021), амерички теоријски физичар

индексима се јављају два различита броја i и j при чему се i јавља не мање пута од j се могу изразити помоћу R_{ijji}, а те компоненте се могу изабрати на $n(n-1)$ начина (индекс i се бира на n начина као један од бројева из скупа $\{1,\ldots,n\}$, а за индекс j онда имамо $n-1$ преосталих могућности), али како је $R_{jiij}=R_{ijji}$, то нам није битан редослед којим смо бирали индексе i и j, те можемо сматрати да су компоненте тензора кривине у чијим индексима се јављају два различита броја одређене помоћу R_{ijji}, где је $i>j$, а њихов укупан број је једнак $n(n-1)/2$. Приметимо да су све ове компоненте независне јер применом једнакости (1.3), (1.4) и (1.5) добијамо већ искоришћене једнакости, док применом првог Бјанкијевог идентитета не добијамо никакву нову везу јер је $R_{ijji}+R_{jjii}+R_{jiji}=R_{ijji}+0+(-R_{ijji})=0$.

Трећи случај: Међу индексима компоненте тензора кривине су три различита броја i, j и k, при чему се индекс i јавља два пута. Применом једнакости (1.3) добијамо да је $R_{iijk}=R_{iikj}=0$, док применом једнакости (1.4) добијамо да је $R_{jkii}=R_{kjii}=0$. Уочимо да се применом једнакости (1.3), (1.4) и (1.6) све остале компоненте могу изразити помоћу R_{jiik} јер је

$$\begin{aligned}&R_{ijik}=-R_{jiik},\quad R_{ikij}=-R_{ikji}=-R_{jiik},\quad R_{ijki}=-R_{ijik}=R_{jiik},\\&R_{ikji}=R_{jiik},\quad R_{kiij}=R_{ijki}=R_{jiik},\quad R_{jiki}=-R_{jiik},\quad R_{kiji}=R_{jiki}=-R_{jiik}.\end{aligned}$$

Број избора различитих индекса i, j и k је $n(n-1)(n-2)$ јер i бирамо на n начина, j на $n-1$ начина и k на $n-2$ начина, али како је $R_{kiij}=R_{jiik}$, то су компоненте тензора кривине које у индексима имају i, j и k при чему се i јавља 2 пута, одређене са R_{jiik} где је $j<k$, а њихов број је $n(n-1)(n-2)/2$. Приметимо да су све ове компоненте независне јер применом једнакости (1.3), (1.4) и (1.5) добијамо већ искоришћене једнакости, док је први Бјанкијев идентитет одмах испуњен зато што је $R_{jiik}+R_{iijk}+R_{ijik}=R_{jiik}+0+(-R_{jiik})=0$.

Четврти случај: Међу индексима компоненте тензора кривине су четири различита броја i, j, k и l, при чему је $i<j<k<l$. Уочимо да се применом једнакости (1.3), (1.4) и (1.6) све остале компоненте могу изразити помоћу R_{ijkl} и R_{ikjl} јер је

$$\begin{aligned}&R_{ijlk}=-R_{ijkl},\quad R_{iklj}=-R_{ikjl},\\&R_{iljk}=-R_{ljik}-R_{jilk}=R_{jlik}+R_{ijlk}=R_{ikjl}-R_{ijkl},\\&R_{ilkj}=-R_{iljk}=-R_{ikjl}+R_{ijkl},\quad R_{jikl}=-R_{ijkl},\quad R_{jilk}=-R_{ijlk}=R_{ijkl},\\&R_{jkil}=R_{iljk}=R_{ikjl}-R_{ijkl},\quad R_{jkli}=-R_{jkil}=-R_{ikjl}+R_{ijkl},\quad R_{jlik}=R_{ikjl},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&R_{jlki} = R_{kijl} = -R_{ikjl}, \quad R_{kijl} = -R_{ikjl}, \quad R_{kilj} = -R_{iklj} = R_{ikjl},\\
&R_{kjil} = R_{ilkj} = -R_{ikjl} + R_{ijkl}, \quad R_{kjli} = -R_{kjil} = R_{ikjl} - R_{ijkl}, \quad R_{klij} = R_{ijkl},\\
&R_{klji} = -R_{klij} = -R_{ijkl}, \quad R_{lijk} = -R_{iljk} = -R_{ikjl} + R_{ijkl},\\
&R_{likj} = -R_{ilkj} = R_{ikjl} - R_{ijkl}, \quad R_{ljik} = R_{iklj} = -R_{ikjl}, \quad R_{ljki} = -R_{ljik} = R_{ikjl},\\
&R_{lkij} = R_{ijlk} = -R_{ijkl}, \quad R_{lkji} = -R_{lkij} = R_{ijkl}.
\end{aligned}$$

Четири различита индекса i, j, k и l, при чему је $i < j < k < l$ се могу изабрати на $n(n-1)(n-2)(n-3)/24$ начина, а то множимо са 2 јер сваком избору i, j, k и l, при чему је $i < j < k < l$ одговарају две компоненте тензора R_{ijkl} и R_{ikjl} преко којих се све остале компоненте тензора са различитим индексима i, j, k и l могу изразити и зато је укупан број таквих компоненти тензора једнак $2 \cdot n(n-1)(n-2)(n-3)/24 = n(n-1)(n-2)(n-3)/12$. Приметимо да су све ове компоненте независне јер применом једнакости (1.3), (1.4) и (1.5) добијамо већ искоришћене једнакости, док је први Бјанкијев идентитет одмах испуњен зато што је $R_{ijkl} + R_{jkil} + R_{kijl} = R_{ijkl} + R_{ikjl} - R_{ijkl} + (-R_{ikjl}) = 0$. Дакле, димензија простора алгебарских тензора кривине на простору са скаларним производом димензије n једнака је

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}n(n-1) + \frac{1}{2}n(n-1)(n-2) + \frac{1}{12}n(n-1)(n-2)(n-3)\\
&= \frac{n(n-1)}{12}(6 + 6(n-2) + (n-2)(n-3))\\
&= \frac{n(n-1)}{12}(6 + 6n - 12 + n^2 - 3n - 2n + 6)\\
&= \frac{n(n-1)}{12}(n^2 + n) = \frac{n(n-1)}{12}n(n+1) = \frac{1}{12}n^2(n^2-1).
\end{aligned}$$

☐

У наставку наводимо две директне последице претходне теореме које се односе на случајеве $n = 3$ и $n = 4$.

Последица 1.23. *Алгебарски тензор кривине на простору са скаларним производом* $(\mathcal{V}, g)$ *димензије* 3 *је у потпуности одређен помоћу* $3^2(3^2-1)/12 = 6$ *компоненти тензора кривине* R_{2112}, R_{3113}, R_{3223}, R_{2113}, R_{1223} *и* R_{1332} *у односу на произвољну базу* (E_1, E_2, E_3) *простора* $\mathcal{V}$.

Пример 1.10. Ако је R тензор константне секционе кривине μ на простору са скаларним производом $(\mathcal{V}, g)$ димензије 3, односно

$$R(X,Y,Z,W) = \mu R^1(X,Y,Z,W) = \mu(g(Y,Z)g(X,W) - g(X,Z)g(Y,W)),$$

онда је он на основу Последице 1.23 у потпуности одређен помоћу компоненти

$$\begin{aligned}
R_{2112} &= R(E_2,E_1,E_1,E_2) = \mu(g(E_1,E_1)g(E_2,E_2) - g(E_2,E_1)g(E_1,E_2)) = \mu\varepsilon_1\varepsilon_2,\\
R_{3113} &= R(E_3,E_1,E_1,E_3) = \mu(g(E_1,E_1)g(E_3,E_3) - g(E_3,E_1)g(E_1,E_3)) = \mu\varepsilon_1\varepsilon_3,\\
R_{3223} &= R(E_3,E_2,E_2,E_3) = \mu(g(E_2,E_2)g(E_3,E_3) - g(E_3,E_2)g(E_2,E_3)) = \mu\varepsilon_2\varepsilon_3,\\
R_{2113} &= R(E_2,E_1,E_1,E_3) = \mu(g(E_1,E_1)g(E_2,E_3) - g(E_2,E_1)g(E_1,E_3)) = 0,\\
R_{1223} &= R(E_1,E_2,E_2,E_3) = \mu(g(E_2,E_2)g(E_1,E_3) - g(E_1,E_2)g(E_2,E_3)) = 0,\\
R_{1332} &= R(E_1,E_3,E_3,E_2) = \mu(g(E_3,E_3)g(E_1,E_2) - g(E_1,E_3)g(E_3,E_2)) = 0
\end{aligned}$$

у односу на ортонормирану базу (E_1, E_2, E_3) простора $\mathcal{V}$. △

Последица 1.24. *Алгебарски тензор кривине на простору са скаларним производом* $(\mathcal{V}, g)$ *димензије* 4 *је у потпуности одређен помоћу* $4^2(4^2-1)/12 = 20$ *компоненти тензора кривине* R_{2112}, R_{3113}, R_{4114}, R_{3223}, R_{4224}, R_{4334}, R_{2113}, R_{2114}, R_{3114}, R_{1223}, R_{1224}, R_{3224}, R_{1332}, R_{1334}, R_{2334}, R_{1442}, R_{1443}, R_{2443}, R_{1234} *и* R_{1324} *у односу на произвољну базу* (E_1, E_2, E_3, E_4) *простора* $\mathcal{V}$.

За алгебарски тензор кривине R на n-димензионом простору са скаларним производом $(\mathcal{V}, g)$ кажемо да је ***n*-димензион** или ***димензије* *n***. Ако је уређени пар $(v, n-v)$ сигнатура простора са скаларним производом $(\mathcal{V}, g)$, онда кажемо да је алгебарски тензор кривине R на $\mathcal{V}$ ***Риманов*** ако је $v = 0$; ***Лоренцов*** ако је $v = 1$; ***Клајнов*** ако је $v = n - v$. За алгебарски тензор кривине R на $(\mathcal{V}, g)$ кажемо да је ***Ајнштајнов*** ако је $\mathrm{Ric} = C\mathcal{R}$ пропорционалан са формом g, односно постоји константа $\lambda \in \mathbb{R}$ таква да је $\mathrm{Ric}(X, Y) = \lambda g(X, Y)$ за свако X и Y из $\mathcal{V}$.

Проучавање алгебарског окружења простора са скаларним производом нам је значајно у псеудо-Римановој геометрији јер редукцијом псеудо-Риманове многострукости (M, g) на произвољну тачку $p \in M$ добијамо векторски простор $\mathcal{V} = T_pM$ са скаларним производом g_p. Додатно, на основу Теореме 1.19 и Леме 1.21 закључујемо да је тензор кривине R псеудо-Риманове многострукости (M, g) редукован на произвољну тачку $p \in M$ алгебарски тензор кривине на T_pM. Зато се сваки резултат који важи за алгебарски тензор кривине може пренети на тензор кривине псеудо-Риманове многострукости.

Глава 2

Егзистенција алгебарског тензора кривине

2.1 Јакобијев оператор и његове особине

У овом поглављу наводимо неке основне особине Јакобијевог оператора које се често користе, а могу се пронаћи у [6], [33] или [59].

Нека је (M, g) псеудо-Риманова многострукост и $p \in M$ произвољна тачка. Тада је тензор кривине псеудо-Риманове многострукости редукован на тачку p алгебарски тензор кривине на простору са скаларним производом $(\mathcal{V}, g) = (T_pM, g_p)$ који означавамо са R. Приметимо да је $R \in \mathfrak{T}^0_4(\mathcal{V})$. Подизањем последњег индекса коваријантног тензора R реда 4 добијамо ***алгебарски оператор кривине*** $\mathcal{R} \in \mathfrak{T}^1_3(\mathcal{V})$, а то идентификујемо са одговарајућим пресликавањем $\mathcal{R}\colon \mathcal{V}\times\mathcal{V}\times\mathcal{V} \to \mathcal{V}$ (видети Додатак из тензорског рачуна). Приметимо да важи једнакост $R(X, Y, Z, W) = g(\mathcal{R}(X, Y)Z, W)$ за све $X, Y, Z, W \in \mathcal{V}$, односно да је $\mathcal{R} = R^\sharp$. Заиста, ако је $(E_1, \dots, E_n)$ произвољна база простора $\mathcal{V}$, $G = (g_{ij})$ одговарајућа Грамова матрица форме g у односу на ту базу, а R_{ijkl} и $\mathcal{R}^l_{ijk}$ компоненте тензора $R \in \mathfrak{T}^0_4(\mathcal{V})$ и $\mathcal{R} \in \mathfrak{T}^1_3(\mathcal{V})$, редом, онда је $R_{ijkl} = \sum_{m=1}^n \mathcal{R}^m_{ijk} g_{ml}$ јер се R добија од $\mathcal{R}$ спуштањем индекса на последње место, а тада је

$$\begin{aligned} R(E_i, E_j, E_k, E_l) = R_{ijkl} &= \sum_{m=1}^n \mathcal{R}^m_{ijk} g_{ml} = \sum_{m=1}^n \mathcal{R}^m_{ijk} g(E_m, E_l) \\ &= g\left(\sum_{m=1}^n \mathcal{R}^m_{ijk} E_m, E_l\right) = g(\mathcal{R}(E_i, E_j)E_k, E_l), \end{aligned}$$

одакле на основу билинеарности форме g и мултилинеарности тензора следи да је $R(X,Y,Z,W) = g(\mathcal{R}(X,Y)Z,W)$ за све $X,Y,Z,W \in \mathcal{V}$. Ако је $(E_1,\dots,E_n)$ ортонормирана база простора са скаларним производом $(\mathcal{V},g)$, онда на основу Леме 1.8 имамо да је $\mathcal{R}(X,Y)Z = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_{E_i} g(\mathcal{R}(X,Y)Z,E_i)E_i = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_{E_i} R(X,Y,Z,E_i)E_i$. Помоћу ове формуле се лако могу извести особине алгебарског оператора кривине наведене у наредној леми.

Лема 2.1. *За алгебарски оператор кривине $\mathcal{R}$ простора са скаларним производом $(\mathcal{V},g)$ важи*

1. *$\mathcal{R}$ је $\mathbb{R}$-мултилинеаран,*
2. *антисиметричност по прва два аргумента $\mathcal{R}(Y,X) = -\mathcal{R}(X,Y)$,*
3. ***Бјанкијев идентитет** $\mathcal{R}(X,Y)Z + \mathcal{R}(Y,Z)X + \mathcal{R}(Z,X)Y = 0$.*

Последица ове леме је да важи $\mathcal{R}(X,X)X = -\mathcal{R}(X,X)X$, односно $\mathcal{R}(X,X)X = 0$. Приметимо да одговарајуће особине на основу Леме 1.16 важе и за оператор кривине псеудо-Риманове многострукости (M,g) редукован на тачку $p \in M$.

Поларизован Јакобијев оператор је пресликавање $\mathcal{J} \colon \mathcal{V}^3 \to \mathcal{V}$ дефинисано помоћу

$$\mathcal{J}(X,Y)Z = \frac{1}{2}(\mathcal{R}(Z,X)Y + \mathcal{R}(Z,Y)X)$$

за све $X,Y,Z \in \mathcal{V}$. Ово пресликавање је линеарно по првом аргументу зато што је $\mathcal{R}$ мултилинеарно пресликавање, те за свака два реална броја a и b, као и за све $X, X_1, Y, Z \in \mathcal{V}$ важи да је

$$\begin{aligned}
&\mathcal{J}(aX + bX_1, Y)Z = \frac{1}{2}(\mathcal{R}(Z, aX + bX_1)Y + \mathcal{R}(Z,Y)(aX + bX_1)) \\
&= \frac{1}{2}(a\mathcal{R}(Z,X)Y + b\mathcal{R}(Z,X_1)Y + a\mathcal{R}(Z,Y)X + b\mathcal{R}(Z,Y)X_1) \\
&= a \cdot \frac{1}{2}(\mathcal{R}(Z,X)Y + \mathcal{R}(Z,Y)X) + b \cdot \frac{1}{2}(\mathcal{R}(Z,X_1)Y + \mathcal{R}(Z,Y)X_1) \\
&= a\mathcal{J}(X,Y)Z + b\mathcal{J}(X_1,Y)Z.
\end{aligned}$$

Слично се доказује и линеарност поларизованог Јакобијевог оператора по другом и трећем аргументу. Поларизовани Јакобијев оператор је симетричан по прва два аргумента јер је

$$\mathcal{J}(Y,X)Z = \frac{1}{2}(\mathcal{R}(Z,Y)X + \mathcal{R}(Z,X)Y) = \frac{1}{2}(\mathcal{R}(Z,X)Y + \mathcal{R}(Z,Y)X) = \mathcal{J}(X,Y)Z.$$

Уочимо да је $\mathrm{Ric}(X,Y)=\mathrm{Tr}(Z\mapsto\mathcal{R}(Z,X)Y)$, јер је $\mathrm{Ric}=C\mathcal{R}$ и онда за фиксиране $X\in\mathcal{V}$ и $Y\in\mathcal{V}$ можемо посматрати тензор $\mathcal{R}\in\mathfrak{T}^1_3(\mathcal{V})$ као пресликавање из $\mathcal{V}$ у $\mathcal{V}$ које $Z\in\mathcal{V}$ пресликава у $\mathcal{R}(Z,X)Y\in\mathcal{V}$, а такво пресликавање идентификујемо са тензором из $\mathfrak{T}^1_1(\mathcal{V})$, а његова контракција је баш траг линеарног оператора $Z\mapsto\mathcal{R}(Z,X)Y$ на $\mathcal{V}$ (видети [46, стр. 395]). Ако је $(E_1,\dots,E_n)$ ортонормирана база за простор са скаларним производом $(\mathcal{V},g)$, онда на основу Леме 1.8 имамо да је $\mathcal{R}(E_i,X)Y=\sum_{j=1}^n\varepsilon_{E_j}g(\mathcal{R}(E_i,X)Y,E_j)E_j$, одакле је i-ти елемент главне дијагонале матрице пресликавања $Z\mapsto\mathcal{R}(Z,X)Y$ једнак $\varepsilon_{E_i}g(\mathcal{R}(E_i,X)Y,E_i)=\varepsilon_{E_i}R(E_i,X,Y,E_i)$. Зато је

$$\mathrm{Ric}(X,Y)=\mathrm{Tr}(Z\mapsto\mathcal{R}(Z,X)Y)=\sum_{i=1}^n\varepsilon_{E_i}R(E_i,X,Y,E_i). \tag{2.1}$$

Одавде, користећи и $\mathbb{Z}_2$ симетрије на основу којих је $\varepsilon_{E_i}R(Y,E_i,E_i,X)=-\varepsilon_{E_i}R(E_i,Y,E_i,X)=\varepsilon_{E_i}R(E_i,Y,X,E_i)$, закључујемо да је

$$\mathrm{Ric}(X,Y)=\sum_{i=1}^n\varepsilon_{E_i}R(E_i,Y,X,E_i)=\mathrm{Tr}(Z\mapsto\mathcal{R}(Z,Y)X)=\mathrm{Ric}(Y,X),$$

односно Ричијев тензор је симетричан. Одатле је

$$\begin{aligned}\mathrm{Ric}(X,Y)=&\frac{1}{2}\mathrm{Ric}(X,Y)+\frac{1}{2}\mathrm{Ric}(Y,X)\\=&\frac{1}{2}(\mathrm{Tr}(Z\mapsto\mathcal{R}(Z,X)Y)+\mathrm{Tr}(Z\mapsto\mathcal{R}(Z,Y)X))\\=&\frac{1}{2}\mathrm{Tr}(Z\mapsto(\mathcal{R}(Z,X)Y+\mathcal{R}(Z,Y)X))\\=&\mathrm{Tr}\left(Z\mapsto\frac{1}{2}(\mathcal{R}(Z,X)Y+\mathcal{R}(Z,Y)X)\right)=\mathrm{Tr}(\mathcal{J}(X,Y)).\end{aligned} \tag{2.2}$$

За свако $X\in\mathcal{V}$ ***Јакобијев оператор*** $\mathcal{J}_X$ је оператор $\mathcal{J}_X\colon\mathcal{V}\to\mathcal{V}$ дефинисан помоћу $\mathcal{J}_XY=\mathcal{J}(X,X)Y$, те се Јакобијев оператор изражава преко $\mathcal{R}$ помоћу $\mathcal{J}_XY=(\mathcal{R}(Y,X)X+\mathcal{R}(Y,X)X)/2=\mathcal{R}(Y,X)X$ за свако $Y\in\mathcal{V}$. Линеарност Јакобијевог оператора $\mathcal{J}_X$ следи из линеарности алгебарског оператора кривине $\mathcal{R}$ по првом аргументу јер за свака два реална броја a и b, као и за све $Y,Y_1\in\mathcal{V}$ имамо да је

$$\begin{aligned}\mathcal{J}_X(aY+bY_1)&=\mathcal{R}(aY+bY_1,X)X\\&=a\mathcal{R}(Y,X)X+b\mathcal{R}(Y_1,X)X=a\mathcal{J}_XY+b\mathcal{J}_XY_1.\end{aligned}$$

Јакобијев оператор $\mathcal{J}_X$ је самоадјунгован или симетричан јер за свако $Y, Z \in \mathcal{V}$ важи да је $g(\mathcal{J}_X Y, Z) = g(Y, \mathcal{J}_X Z)$. Заиста, како је $\mathcal{R} = R^\sharp$, за алгебарски тензор кривине на основу (1.3), (1.4) и (1.5) следи да је $R(Y, X, X, Z) = -R(X, Y, X, Z) = R(X, Y, Z, X) = R(Z, X, X, Y)$ и g је симетрично, те је

$$\begin{aligned} g(\mathcal{J}_X Y, Z) &= g(\mathcal{R}(Y, X)X, Z) = R(Y, X, X, Z) = R(Z, X, X, Y) \\ &= g(\mathcal{R}(Z, X)X, Y) = g(\mathcal{J}_X Z, Y) = g(Y, \mathcal{J}_X Z). \end{aligned}$$

Приметимо и да је линеарна комбинација $J = \sum_{i=1}^{k} a_i J_i$ самоадјунгованих оператора $J_1, \ldots, J_k$ на $\mathcal{V}$ такође самоадјунгован оператор јер за свака два вектора X и Y из $\mathcal{V}$ на основу билинеарности форме g важи да је

$$\begin{aligned} g(JX, Y) &= g\left(\sum_{i=1}^{k} a_i J_i X, Y\right) = \sum_{i=1}^{k} a_i g(J_i X, Y) \\ &= \sum_{i=1}^{k} a_i g(X, J_i Y) = g\left(X, \sum_{i=1}^{k} a_i J_i Y\right) = g(X, JY). \end{aligned}$$

Због мултилинеарности од $\mathcal{R}$, за сваки реалан број t и свако $Y, Z \in \mathcal{V}$ је

$$\mathcal{J}_{tX} Y = \mathcal{R}(Y, tX)(tX) = t^2 \mathcal{R}(Y, X)X = t^2 \mathcal{J}_X Y \tag{2.3}$$

и

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_{X+Y} Z =& \mathcal{R}(Z, X+Y)(X+Y) = \mathcal{R}(Z, X)X + \mathcal{R}(Z, X)Y + \mathcal{R}(Z, Y)X \\ &+ \mathcal{R}(Z, Y)Y = \mathcal{J}_X Z + 2\mathcal{J}(X, Y)Z + \mathcal{J}_Y Z. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Свака два Јакобијева оператора задовољавају ***услов компатибилности***, што значи да

$$g(\mathcal{J}_X Y, Y) = g(\mathcal{J}_Y X, X) \tag{2.5}$$

важи за све $X, Y \in \mathcal{V}$. Заиста, користећи $\mathcal{R} = R^\sharp$ и да из (1.5) следи да је $R(Y, X, X, Y) = R(X, Y, Y, X)$, закључујемо да је

$$\begin{aligned} g(\mathcal{J}_X Y, Y) &= g(\mathcal{R}(Y, X)X, Y) = R(Y, X, X, Y) \\ &= R(X, Y, Y, X) = g(\mathcal{R}(X, Y)Y, X) = g(\mathcal{J}_Y X, X). \end{aligned}$$

Како је $\mathcal{J}_X X = \mathcal{R}(X, X)X = 0$ и $g(\mathcal{J}_X Y, X) = g(\mathcal{R}(Y, X)X, X) = R(Y, X, X, X) = 0$, следи да је за сваки дефинитан вектор $X \in \mathcal{V}$ Јакобијев оператор $\mathcal{J}_X$ такав да је X његов сопствени вектор за сопствену вредност

0, а да за $Y \in X^\perp = (\mathrm{Span}\{X\})^\perp$ важи да $\mathcal{J}_X Y \in X^\perp$, те је $\mathcal{J}_X$ у потпуности одређен помоћу своје рестрикције $\widetilde{\mathcal{J}}_X \colon X^\perp \to X^\perp$ коју зовемо ***редукован Јакобијев оператор***.

Напомињемо да због мултилинеарности алгебарског оператора кривине $\mathcal{R}$ важи да је $\mathcal{J}_0 Y = \mathcal{R}(Y,0)0 = 0$, док за изотропан вектор X (који постоји на основу Леме 1.10) Јакобијев оператор $\mathcal{J}_X$ на недефинитном простору са скаларним производом $(\mathcal{V}, g)$ није у потпуности одређен редукованим Јакобијевим оператором. Заиста, на основу Леме 1.12 изотропни вектор X се може написати у облику $X = S + T$, где $S \in \mathcal{V}$, $T \in \mathcal{V}$, $S \perp T$ и $\varepsilon_S = -\varepsilon_T > 0$. Тада $\mathcal{J}_X = \mathcal{J}_{S+T}$ није у потпуности одређен редукованим Јакобијевим оператором $\widetilde{\mathcal{J}}_{S+T}$ јер не знамо вредност $\mathcal{J}_{S+T}$ у $S - T$ зато што $S - T \notin (\mathrm{Span}\{S+T\})^\perp$ јер због билинеарности форме g закључујемо да је

$$g(S-T, S+T) = g(S,S) + g(S,T) - g(T,S) - g(T,T) = \varepsilon_S + 0 - \varepsilon_T = 2\varepsilon_S \neq 0,$$

а $S - T \notin \mathrm{Span}\{S+T\}$ иначе би важило $S - T = \lambda(S+T)$, те би S и T били линеарно зависни, а то није могуће јер је $S \perp T$ и $\varepsilon_S = -\varepsilon_T \neq 0$.

2.2 Теорема о постојању алгебарског тензора кривине

У овом поглављу изложен је доказ теореме о постојању алгебарског тензора кривине на простору са скаларним производом за дате Јакобијеве операторе који је објављен у раду [8].

Нека је R алгебарски тензор кривине на простору са скаларним производом $(\mathcal{V}, g)$. Користећи (1.4), (1.6), (1.3), (1.5), мултилинеарност алгебарског тензора кривине R, билинеарност форме g и дефиницију Јакобијевог оператора за произвољне $X, Y, Z, W \in \mathcal{V}$ добијамо да је

$$\begin{aligned}
3R(X,Y,Z,W) =& R(X,Y,Z,W) + R(X,Y,Z,W) + R(X,Y,Z,W)\\
=& R(X,Y,Z,W) - R(X,Y,W,Z) - R(Y,Z,X,W) - R(Z,X,Y,W)\\
=& R(X,Y,Z,W) + R(X,Z,Y,W) - R(X,Y,W,Z) - R(X,W,Y,Z)\\
=& R(X,Y+Z,Y+Z,W) - R(X,Y,Y,W) - R(X,Z,Z,W)\\
&- (R(X,Y+W,Y+W,Z) - R(X,Y,Y,Z) - R(X,W,W,Z))\\
=& g((\mathcal{J}_{Y+Z} - \mathcal{J}_Y - \mathcal{J}_Z)X, W) - g((\mathcal{J}_{Y+W} - \mathcal{J}_Y - \mathcal{J}_W)X, Z),
\end{aligned}$$

одакле користећи особину самоадјунгованости линеарних комбинација Јакобијевих оператора $\mathcal{J}_{Y+Z} - \mathcal{J}_Y - \mathcal{J}_Z$ и $\mathcal{J}_{Y+W} - \mathcal{J}_Y - \mathcal{J}_W$ следи да је

$$3R(X,Y,Z,W) = g((\mathcal{J}_{Y+Z} - \mathcal{J}_Y - \mathcal{J}_Z)W - (\mathcal{J}_{Y+W} - \mathcal{J}_Y - \mathcal{J}_W)Z, X). \tag{2.6}$$

Формула (2.6) показује да Јакобијеви оператори једнозначно одређују алгебарски тензор кривине.

Природно се поставља питање постојања алгебарског тензора кривине за дате Јакобијеве операторе (видети [5] и [8]). Претпоставимо да су нам дати самоадјунговани ендоморфизми $\mathcal{K}_X$ на $\mathcal{V}$ за сваки дефинитан $X \in \mathcal{V}$, тако да су они компатибилни у смислу да (2.5) важи. Да ли постоји алгебарски тензор кривине R на $(\mathcal{V}, g)$, такав да $\mathcal{J}_X = \mathcal{K}_X$ важи за сваки дефинитан $X \in \mathcal{V}$? Теорема која се односи на одговор на ово питање у случају простора са позитивно дефинитним скаларним производом (Риманов случај) је дата у [5], а модификација и надоградња одговарајуће теореме у случају недефинитног простора са скаларним производом (псеудо-Риманов случај) је дата у [8].

Посматрајмо услов $\mathcal{J}_X X = 0$ који испуњавају сви Јакобијеви оператори. Уочимо да су $\mathcal{K}_X = \varepsilon_X \operatorname{Id}$ самоадјунговани ендоморфизми на $\mathcal{V}$ јер су линеарна пресликавања на $\mathcal{V}$ за која важи

$$g(\mathcal{K}_X Y, Z) = g(\varepsilon_X \operatorname{Id} Y, Z) = \varepsilon_X g(Y, Z) = g(Y, \varepsilon_X \operatorname{Id} Z) = g(Y, \mathcal{K}_X Z).$$

Ови оператори су и компатибилни јер је

$$\begin{aligned} g(\mathcal{K}_X Y, Y) &= g(\varepsilon_X \operatorname{Id} Y, Y) = \varepsilon_X g(Y, Y) = \varepsilon_X \varepsilon_Y \\ &= \varepsilon_Y g(X, X) = g(\varepsilon_Y \operatorname{Id} X, X) = g(\mathcal{K}_Y X, X), \end{aligned}$$

али за дефинитан $X \in \mathcal{V}$ је $\mathcal{K}_X X = \varepsilon_X \operatorname{Id} X = \varepsilon_X X \neq 0$. Зато додајемо услов

$$\mathcal{K}_X X = 0 \tag{2.7}$$

за сваки дефинитан $X \in \mathcal{V}$. Тако долазимо до формулације наредне теореме о постојању алгебарског тензора кривине за дате Јакобијеве операторе.

Теорема 2.2. *Нека $\mathcal{K}_X$ за све дефинитне $X \in \mathcal{V}$ чине компатибилну фамилију самоадјунгованих ендоморфизама на (могуће недефинитном) простору са скаларним производом $\mathcal{V}$ који задовољавају $\mathcal{K}_X X = 0$. Тада постоји јединствени алгебарски тензор кривине на $\mathcal{V}$ такав да су $\mathcal{K}_X$ његови Јакобијеви оператори.*

Доказ. 1. корак: Проширујемо фамилију $\mathcal{K}_X$ на свако $X \in \mathcal{V}$, односно дефинишемо $\mathcal{K}_X$ у случају да X није дефинитан вектор.

Природно проширење је $\mathcal{K}_0 = 0$, што завршава проширење фамилије у дефинитном случају јер је 0 једини вектор који није дефинитан у случају простора са дефинитним скаларним производом. Међутим, ако је скаларни производ недефинитан, онда морамо дефинисати $\mathcal{K}_X$ и за све изотропне $X \in \mathcal{V}$. Нека су $X, Y, X+Y, X-Y \in \mathcal{V}$ дефинитни (такви вектори постоје јер на основу Леме 1.7 сваки простор са скаларним производом димензије n има ортонормирану базу $(E_1, \ldots, E_n)$, те можемо узети $X = 2E_1$ и $Y = E_1$). Користећи (2.5), линеарност и самоадјунгованост ендоморфизма $\mathcal{K}_Z$, билинеарност и симетричност форме g, имамо да је

$$\begin{aligned} g(\mathcal{K}_{X\pm Y}Z, Z) &= g(\mathcal{K}_Z(X \pm Y), X \pm Y) = g(\mathcal{K}_Z X \pm \mathcal{K}_Z Y, X \pm Y) \\ &= g(\mathcal{K}_Z X, X) \pm g(\mathcal{K}_Z X, Y) \pm g(\mathcal{K}_Z Y, X) + g(\mathcal{K}_Z Y, Y) \\ &= g(\mathcal{K}_Z X, X) \pm 2g(\mathcal{K}_Z X, Y) + g(\mathcal{K}_Z Y, Y) \\ &= g(\mathcal{K}_X Z, Z) \pm 2g(\mathcal{K}_Z X, Y) + g(\mathcal{K}_Y Z, Z), \end{aligned}$$

одакле је

$$g(\mathcal{K}_{X+Y}Z, Z) + g(\mathcal{K}_{X-Y}Z, Z) = 2g(\mathcal{K}_X Z, Z) + 2g(\mathcal{K}_Y Z, Z) \tag{2.8}$$

за сваки дефинитан вектор $Z \in \mathcal{V}$. Напоменимо да смо користили услов компатибилности који по претпоставци теореме важи за дате ендоморфизме у чијим индексима су дефинитни вектори и зато је било битно нагласити да су $X, Y, X+Y, X-Y, Z \in \mathcal{V}$ дефинитни. Примењујемо ***поларизацију***, односно у добијеној једнакости (2.8) Z замењујемо са $V + W$, при чему су V и W такође дефинитни. Еквивалентним трансформацијама леве стране једнакости у (2.8) коришћењем линеарности и самоадјунгованости ендоморфизама $\mathcal{K}_{X+Y}$ и $\mathcal{K}_{X-Y}$ добијамо

$$\begin{aligned} & g(\mathcal{K}_{X+Y}(V+W), V+W) + g(\mathcal{K}_{X-Y}(V+W), V+W) \\ =& g(\mathcal{K}_{X+Y}V + \mathcal{K}_{X+Y}W, V+W) + g(\mathcal{K}_{X-Y}V + \mathcal{K}_{X-Y}W, V+W) \\ =& g(\mathcal{K}_{X+Y}V, V) + g(\mathcal{K}_{X+Y}V, W) + g(\mathcal{K}_{X+Y}W, V) + g(\mathcal{K}_{X+Y}W, W) \\ & + g(\mathcal{K}_{X-Y}V, V) + g(\mathcal{K}_{X-Y}V, W) + g(\mathcal{K}_{X-Y}W, V) + g(\mathcal{K}_{X-Y}W, W) \\ =& g(\mathcal{K}_{X+Y}V, V) + 2g(\mathcal{K}_{X+Y}V, W) + g(\mathcal{K}_{X+Y}W, W) \\ & + g(\mathcal{K}_{X-Y}V, V) + 2g(\mathcal{K}_{X-Y}V, W) + g(\mathcal{K}_{X-Y}W, W). \end{aligned}$$

То је једнако еквивалентно трансформисаној десној страни једнакости (2.8) коришћењем линеарности и самоадјунгованости ендоморфизама $\mathcal{K}_X$ и $\mathcal{K}_Y$

$$\begin{aligned}
&2g(\mathcal{K}_X(V+W),V+W)+2g(\mathcal{K}_Y(V+W),V+W)\\
=&2g(\mathcal{K}_XV+\mathcal{K}_XW,V+W)+2g(\mathcal{K}_YV+\mathcal{K}_YW,V+W)\\
=&2g(\mathcal{K}_XV,V)+2g(\mathcal{K}_XV,W)+2g(\mathcal{K}_XW,V)+2g(\mathcal{K}_XW,W)\\
&+2g(\mathcal{K}_YV,V)+2g(\mathcal{K}_YV,W)+2g(\mathcal{K}_YW,V)+2g(\mathcal{K}_YW,W)\\
=&2g(\mathcal{K}_XV,V)+4g(\mathcal{K}_XV,W)+2g(\mathcal{K}_XW,W)\\
&+2g(\mathcal{K}_YV,V)+4g(\mathcal{K}_YV,W)+2g(\mathcal{K}_YW,W).
\end{aligned}$$

Када у ове еквивалентно трансформисане стране једнакости (2.8) убацимо и једнакости

$$\begin{aligned}
g(\mathcal{K}_{X+Y}V,V)+g(\mathcal{K}_{X-Y}V,V)&=2g(\mathcal{K}_XV,V)+2g(\mathcal{K}_YV,V),\\
g(\mathcal{K}_{X+Y}W,W)+g(\mathcal{K}_{X-Y}W,W)&=2g(\mathcal{K}_XW,W)+2g(\mathcal{K}_YW,W)
\end{aligned}$$

добијене заменом Z у (2.8) редом са V и W, добијамо

$$2g(\mathcal{K}_{X+Y}V,W)+2g(\mathcal{K}_{X-Y}V,W)=4g(\mathcal{K}_XV,W)+4g(\mathcal{K}_YV,W).$$

Дакле, поларизација помоћу $Z=V+W$ даје

$$g((\mathcal{K}_{X+Y}+\mathcal{K}_{X-Y}-2\mathcal{K}_X-2\mathcal{K}_Y)V,W)=0, \tag{2.9}$$

кад год је $\varepsilon_V\varepsilon_W\varepsilon_{V+W}\neq 0$.

Уместо ортонормиране базе $(E_1,E_2,\ldots,E_n)$ простора $(\mathcal{V},g)$, можемо посматрати ортогоналну базу $(E_1,2E_2,\ldots,nE_n)$, за коју на основу (1.2) важи $\varepsilon_{iE_i}=i^2\varepsilon_{E_i}\neq 0$, $\varepsilon_{iE_i+iE_i}=\varepsilon_{2i\cdot E_i}=4i^2\varepsilon_{E_i}\neq 0$ и $\varepsilon_{iE_i+jE_j}=i^2\varepsilon_{E_i}+j^2\varepsilon_{E_j}\neq 0$ за $i\neq j$, $i\in\{1,\ldots,n\}$ и $j\in\{1,\ldots,n\}$. Приметимо да се V и W у (2.9) могу заменити било којим елементима pE_p и qE_q направљене ортогоналне базе. Ако су A и B произвољни вектори из $\mathcal{V}$, тада се они могу представити помоћу направљене ортогоналне базе као $A=\sum_{p=1}^n a_ppE_p$ и $B=\sum_{q=1}^n b_qqE_q$, одакле из билинеарности форме g следи да је

$$\begin{aligned}
&g((\mathcal{K}_{X+Y}+\mathcal{K}_{X-Y}-2\mathcal{K}_X-2\mathcal{K}_Y)A,B)\\
=&\sum_{p=1}^n\sum_{q=1}^n a_pb_qg((\mathcal{K}_{X+Y}+\mathcal{K}_{X-Y}-2\mathcal{K}_X-2\mathcal{K}_Y)pE_p,qE_q)=\sum_{p=1}^n\sum_{q=1}^n a_pb_q\cdot 0=0,
\end{aligned}$$

одакле на основу недегенерисаности форме g закључујемо да важи да је $(\mathcal{K}_{X+Y} + \mathcal{K}_{X-Y} - 2\mathcal{K}_X - 2\mathcal{K}_Y)A = 0$, а како је $A \in \mathcal{V}$ произвољан, то је

$$\mathcal{K}_{X+Y} + \mathcal{K}_{X-Y} = 2\mathcal{K}_X + 2\mathcal{K}_Y \tag{2.10}$$

кад год је $\varepsilon_X \varepsilon_Y \varepsilon_{X+Y} \varepsilon_{X-Y} \neq 0$. Једначина (2.10) нас мотивише да дефинишемо $\mathcal{K}_N$ за изотропно $N \in \mathcal{V}$ помоћу

$$2\mathcal{K}_N = \mathcal{K}_{N+X} + \mathcal{K}_{N-X} - 2\mathcal{K}_X,$$

кад год је десна страна једнакости дефинисана, односно за $\varepsilon_X \varepsilon_{N+X} \varepsilon_{N-X} \neq 0$.

2. корак: Доказујемо да је помоћу претходне једнакости за изотропан вектор N коректно дефинисан самоадјунгован ендоморфизам $\mathcal{K}_N$.
Из дефиниције ендоморфизма $\mathcal{K}_N$ одмах следи да је он самоадјунгован на $\mathcal{V}$ као линеарна комбинација самоадјунгованих ендоморфизама.

Због (2.10), ако је $\varepsilon_X \varepsilon_{N+X} \varepsilon_{N-X} \varepsilon_Y \varepsilon_{N+Y} \varepsilon_{N-Y} \neq 0$, онда имамо

$$\begin{aligned}
&2(\mathcal{K}_{N+X} + \mathcal{K}_{N-X} - 2\mathcal{K}_X)\\
&\qquad = (\mathcal{K}_{N+X+Y} + \mathcal{K}_{N+X-Y} - 2\mathcal{K}_Y) + (\mathcal{K}_{N-X+Y} + \mathcal{K}_{N-X-Y} - 2\mathcal{K}_Y) - 4\mathcal{K}_X\\
&\qquad = (\mathcal{K}_{N+X+Y} + \mathcal{K}_{N-X+Y} - 2\mathcal{K}_X) + (\mathcal{K}_{N+X-Y} + \mathcal{K}_{N-X-Y} - 2\mathcal{K}_X) - 4\mathcal{K}_Y\\
&\qquad = 2(\mathcal{K}_{N+Y} + \mathcal{K}_{N-Y} - 2\mathcal{K}_Y),
\end{aligned}$$

кад год је $\varepsilon_{N+X+Y} \varepsilon_{N+X-Y} \varepsilon_{N-X+Y} \varepsilon_{N-X-Y} \neq 0$. У супротном, можемо искористити $\mathcal{K}_{N+tX} + \mathcal{K}_{N-tX} - 2\mathcal{K}_{tX}$, где t није решење једначине

$$\begin{aligned}
&\varepsilon_{tX} \varepsilon_{N+tX} \varepsilon_{N-tX} \varepsilon_{N+X+tX} \varepsilon_{N+X-tX} \varepsilon_{N-X+tX} \varepsilon_{N-X-tX} \cdot\\
&\qquad\qquad \varepsilon_{N+tX+Y} \varepsilon_{N+tX-Y} \varepsilon_{N-tX+Y} \varepsilon_{N-tX-Y} = 0
\end{aligned}$$

(постоји t које није корен ове полиномне једначине по t степена 22), јер је

$$\begin{aligned}
&2(\mathcal{K}_{N+X} + \mathcal{K}_{N-X} - 2\mathcal{K}_X)\\
=&(\mathcal{K}_{N+X+tX} + \mathcal{K}_{N+X-tX} - 2\mathcal{K}_{tX}) + (\mathcal{K}_{N-X+tX} + \mathcal{K}_{N-X-tX} - 2\mathcal{K}_{tX}) - 4\mathcal{K}_X\\
=&(\mathcal{K}_{N+X+tX} + \mathcal{K}_{N-X+tX} - 2\mathcal{K}_X) + (\mathcal{K}_{N+X-tX} + \mathcal{K}_{N-X-tX} - 2\mathcal{K}_X) - 4\mathcal{K}_{tX}\\
=&2(\mathcal{K}_{N+tX} + \mathcal{K}_{N-tX} - 2\mathcal{K}_{tX})\\
=&(\mathcal{K}_{N+tX+Y} + \mathcal{K}_{N+tX-Y} - 2\mathcal{K}_Y) + (\mathcal{K}_{N-tX+Y} + \mathcal{K}_{N-tX-Y} - 2\mathcal{K}_Y) - 4\mathcal{K}_{tX}\\
=&(\mathcal{K}_{N+Y+tX} + \mathcal{K}_{N+Y-tX} - 2\mathcal{K}_{tX}) + (\mathcal{K}_{N-Y+tX} + \mathcal{K}_{N-Y-tX} - 2\mathcal{K}_{tX}) - 4\mathcal{K}_Y\\
=&2(\mathcal{K}_{N+Y} + \mathcal{K}_{N-Y} - 2\mathcal{K}_Y).
\end{aligned}$$

Ово доказује да $\mathcal{K}_N$ не зависи од избора $X \in \mathcal{V}$ таквог да је $\varepsilon_X \varepsilon_{N+X} \varepsilon_{N-X} \neq 0$, те је $\mathcal{K}_N$ добро дефинисано.

3. корак: Доказујемо да добијена фамилија $\mathcal{K}_X$, при чему $X \in \mathcal{V}$, задовољава услов компатибилности.

Ако искористимо $Z \in \mathcal{V}$ које задовољава $\varepsilon_{N+Z} \varepsilon_{N-Z} \varepsilon_Z \neq 0$, онда на основу услова компатибилности (2.5) за операторе чији су индекси дефинитни вектори X и $N+Z$, односно X и $N-Z$, односно X и Z, а затим линеарности ендоморфизма $\mathcal{K}_X$ и билинеарности форме g следи да једнакост

$$\begin{aligned}
&2g(\mathcal{K}_N X, X) = g((\mathcal{K}_{N+Z} + \mathcal{K}_{N-Z} - 2\mathcal{K}_Z)X, X) \\
=&g(\mathcal{K}_{N+Z} X, X) + g(\mathcal{K}_{N-Z} X, X) - 2g(\mathcal{K}_Z X, X) \\
=&g(\mathcal{K}_X(N+Z), N+Z) + g(\mathcal{K}_X(N-Z), N-Z) - 2g(\mathcal{K}_X Z, Z) \\
=&g(\mathcal{K}_X N, N) + g(\mathcal{K}_X N, Z) + g(\mathcal{K}_X Z, N) + g(\mathcal{K}_X Z, Z) \\
&+ g(\mathcal{K}_X N, N) - g(\mathcal{K}_X N, Z) - g(\mathcal{K}_X Z, N) + g(\mathcal{K}_X Z, Z) - 2g(\mathcal{K}_X Z, Z) \\
=&2g(\mathcal{K}_X N, N)
\end{aligned}$$

важи за свако изотропно N и свако дефинитно X, што значи да су ендоморфизми $\mathcal{K}_N$ и $\mathcal{K}_X$ компатибилни. Слично, за свака два изотропна вектора N и $\tilde{N}$, као и за $Z \in \mathcal{V}$ које задовољава $\varepsilon_{N+Z} \varepsilon_{N-Z} \varepsilon_Z \neq 0$, на основу управо доказаног услова компатибилности (2.5) за операторе чији су индекси дефинитан вектор $N+Z$ и изотропан вектор $\tilde{N}$, односно $N-Z$ и $\tilde{N}$, односно Z и $\tilde{N}$, а затим линеарности ендоморфизма $\mathcal{K}_{\tilde{N}}$ и билинеарности форме g важи

$$\begin{aligned}
&2g(\mathcal{K}_N \tilde{N}, \tilde{N}) = g((\mathcal{K}_{N+Z} + \mathcal{K}_{N-Z} - 2\mathcal{K}_Z)\tilde{N}, \tilde{N}) \\
=&g(\mathcal{K}_{N+Z} \tilde{N}, \tilde{N}) + g(\mathcal{K}_{N-Z} \tilde{N}, \tilde{N}) - 2g(\mathcal{K}_Z \tilde{N}, \tilde{N}) \\
=&g(\mathcal{K}_{\tilde{N}}(N+Z), N+Z) + g(\mathcal{K}_{\tilde{N}}(N-Z), N-Z) - 2g(\mathcal{K}_{\tilde{N}} Z, Z) \\
=&g(\mathcal{K}_{\tilde{N}} N, N) + g(\mathcal{K}_{\tilde{N}} N, Z) + g(\mathcal{K}_{\tilde{N}} Z, N) + g(\mathcal{K}_{\tilde{N}} Z, Z) \\
&+ g(\mathcal{K}_{\tilde{N}} N, N) - g(\mathcal{K}_{\tilde{N}} N, Z) - g(\mathcal{K}_{\tilde{N}} Z, N) + g(\mathcal{K}_{\tilde{N}} Z, Z) - 2g(\mathcal{K}_{\tilde{N}} Z, Z) \\
=&2g(\mathcal{K}_{\tilde{N}} N, N).
\end{aligned}$$

Услов компатибилности тривијално важи за нула вектор 0 и произвољан вектор $X \in \mathcal{V}$ јер је $g(\mathcal{K}_0 X, X) = g(0, X) = 0 = g(\mathcal{K}_X 0, 0)$. Приметимо да сада имамо $\mathcal{K}_X$ за свако $X \in \mathcal{V}$ и да ова проширена фамилија задовољава услов компатибилности.

4. корак: Доказујемо да за сваки вектор X из $\mathcal{V}$ важи да је $\mathcal{K}_X X = 0$. По претпоставци теореме та једнакост важи за сваки дефинитан $X \in \mathcal{V}$. Како је $\mathcal{K}_0 = 0$, то је $\mathcal{K}_0 0 = 0$. Остало је да израчунамо $\mathcal{K}_N N$ за изотропан вектор $N \in \mathcal{V}$. За свако $X \in \mathcal{V}$ за које важи $\varepsilon_X \varepsilon_{N+X} \varepsilon_{N-X} \neq 0$, користећи симетричност и билинеарности форме g, самоадјунгованост оператора $\mathcal{K}_X$, линеарност оператора K_{N+X} и K_{N-X}, као и $K_T T = 0$ за $T \in \{N+X, N-X, X\}$ добијамо

$$\begin{aligned}
2g(\mathcal{K}_N N, X) = & g(\mathcal{K}_{N+X}N + \mathcal{K}_{N-X}N - 2\mathcal{K}_X N, X)\\
=& g(\mathcal{K}_{N+X}N, X) + g(\mathcal{K}_{N-X}N, X) - 2g(\mathcal{K}_X N, X)\\
=& g(\mathcal{K}_{N+X}(N+X-X), X) + g(\mathcal{K}_{N-X}(N-X+X), X) - 2g(N, \mathcal{K}_X X)\\
=& g(\mathcal{K}_{N+X}(N+X), X) - g(\mathcal{K}_{N+X}X, X) + g(\mathcal{K}_{N-X}(N-X), X)\\
&+ g(\mathcal{K}_{N-X}X, X) - 2g(\mathcal{K}_X X, N)\\
=& 0 - g(\mathcal{K}_X(N+X), N+X) + 0 + g(\mathcal{K}_X(N-X), N-X) - 2\cdot 0\\
=& - g(\mathcal{K}_X N, N) - g(\mathcal{K}_X N, X) - g(\mathcal{K}_X X, N) - g(\mathcal{K}_X X, X)\\
&+ g(\mathcal{K}_X N, N) - g(\mathcal{K}_X N, X) - g(\mathcal{K}_X X, N) + g(\mathcal{K}_X X, X) = -4g(\mathcal{K}_X X, N),
\end{aligned}$$

односно

$$g(\mathcal{K}_N N, X) = 0. \tag{2.11}$$

Посматрамо ортогоналну базу $(mE_1, mE_2, \dots, mE_n)$, при чему је $(E_1, E_2, \dots, E_n)$ раније поменута ортонормирана база од $(\mathcal{V}, g)$ и $m > \max_{1\leqslant i\leqslant n}|2g(N, E_i)|$ да бисмо на основу једнакости (1.2) обезбедили $\varepsilon_{mE_i} = m^2\varepsilon_{E_i} \neq 0$, а на основу билинеарности и симетричности форме g да је

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{N\pm mE_i} &= g(N \pm mE_i, N \pm mE_i) = g(N,N) \pm 2g(N, mE_i) + m^2 g(E_i, E_i)\\
&= 0 \pm 2mg(N, E_i) + m^2\varepsilon_{E_i} = m(2g(N,E_i) + m\varepsilon_{E_i}) \neq 0
\end{aligned}$$

за $1 \leqslant i \leqslant n$ (ако је $2g(N,E_i) + m\varepsilon_{E_i} = 0$, онда је $m = |2g(N,E_i)|$, али то није могуће јер смо узели да је $m > \max_{1\leqslant i\leqslant n}|2g(N,E_i)|$). Приметимо да се X у (2.11) може заменити било којим елементом mE_p посматране ортогоналне базе. Ако је A произвољни вектор из $\mathcal{V}$, тада се он може представити као $A = \sum_{p=1}^{n} a_p mE_p$, одакле из билинеарности форме g следи да је

$$g(\mathcal{K}_N N, A) = g\left(\mathcal{K}_N N, \sum_{p=1}^{n} a_p mE_p\right) = \sum_{p=1}^{n} a_p g(\mathcal{K}_N N, mE_p) = \sum_{p=1}^{n} a_p \cdot 0 = 0,$$

те на основу недегенерисаности форме g закључујемо да је $\mathcal{K}_N N = 0$.

5. корак: Посматрамо конструисану компатибилну фамилију самоадјунгованих ендоморфизама $\mathcal{K}_X$ за свако $X \in \mathcal{V}$ такву да важи $\mathcal{K}_X X = 0$ и доказујемо да за свако $X \in \mathcal{V}$ и сваки реалан број t важи $\mathcal{K}_{tX} = t^2\mathcal{K}_X$, што је уобичајено својство (2.3) Јакобијевих оператора.
На основу услова компатибилности, линеарности енфоморфизама $\mathcal{K}_Y$ и билинеарности форме g, за све $X, Y \in \mathcal{V}$ и $t \in \mathbb{R}$ имамо

$$g(\mathcal{K}_{tX}Y, Y) = g(\mathcal{K}_Y(tX), tX) = t^2 g(\mathcal{K}_Y X, X) = g(t^2\mathcal{K}_X Y, Y). \tag{2.12}$$

Примењујемо поступак поларизације тако што у добијеној једнакости (2.12) Y заменимо са $V + W$, при чему су V и W произвољни вектори из $\mathcal{V}$. Еквивалентним трансформацијама леве стране једнакости у (2.12) коришћењем билинеарности форме g, линеарности и самоадјунгованости ендоморфизма $\mathcal{K}_{tX}$ добијамо

$$\begin{aligned}
&g(\mathcal{K}_{tX}(V+W), V+W) = g(\mathcal{K}_{tX}V, V+W) + g(\mathcal{K}_{tX}W, V+W)\\
=&g(\mathcal{K}_{tX}V, V) + g(\mathcal{K}_{tX}V, W) + g(\mathcal{K}_{tX}W, V) + g(\mathcal{K}_{tX}W, W)\\
=&g(\mathcal{K}_{tX}V, V) + 2g(\mathcal{K}_{tX}V, W) + g(\mathcal{K}_{tX}W, W).
\end{aligned}$$

То је једнако еквивалентно трансформисаној десној страни једнакости (2.12) коришћењем билинеарности форме g, линеарности и самоадјунгованости ендоморфизма $\mathcal{K}_X$

$$\begin{aligned}
&g(t^2\mathcal{K}_X(V+W), V+W) = g(t^2\mathcal{K}_X V + t^2\mathcal{K}_X W, V+W)\\
=&g(t^2\mathcal{K}_X V, V) + g(t^2\mathcal{K}_X V, W) + g(t^2\mathcal{K}_X W, V) + g(t^2\mathcal{K}_X W, W)\\
=&g(t^2\mathcal{K}_X V, V) + 2g(t^2\mathcal{K}_X V, W) + g(t^2\mathcal{K}_X W, W).
\end{aligned}$$

Када у ове еквивалентно трансформисане стране једнакости (2.12) убацимо и једнакости $g(\mathcal{K}_{tX}V, V) = g(t^2\mathcal{K}_X V, V)$ и $g(\mathcal{K}_{tX}W, W) = g(t^2\mathcal{K}_X W, W)$ добијене заменом Y у (2.12) редом са V и W, добијамо $2g(\mathcal{K}_{tX}V, W) = 2g(t^2\mathcal{K}_X V, W)$. Дакле, $g(\mathcal{K}_{tX}V, W) = g(t^2\mathcal{K}_X V, W)$, односно $g(\mathcal{K}_{tX}V - t^2\mathcal{K}_X V, W) = 0$ за $W \in \mathcal{V}$, те како је g недегенерисана, следи да је $\mathcal{K}_{tX}V - t^2\mathcal{K}_X V = 0$ за $V \in \mathcal{V}$, одакле закључујемо да је

$$\mathcal{K}_{tX} = t^2\mathcal{K}_X. \tag{2.13}$$

6. корак: Доказујемо да за свако $X, Y \in \mathcal{V}$ важи $\mathcal{K}_{X+Y}Y - \mathcal{K}_X Y + \mathcal{K}_Y X = 0$. Користећи услов компатибилности, линеарност и самоадјунгованост ендоморфизма $\mathcal{K}_Z$ и билинеарност форме g за све $X, Y, Z \in \mathcal{V}$ и $t \in \mathbb{R}$ следи да је

$$\begin{aligned}
g(\mathcal{K}_{X+tY}Z, Z) &= g(\mathcal{K}_Z(X+tY), X+tY)\\
&= g(\mathcal{K}_Z X + t\mathcal{K}_Z Y, X+tY)\\
&= g(\mathcal{K}_Z X, X) + tg(\mathcal{K}_Z X, Y) + tg(\mathcal{K}_Z Y, X) + t^2 g(\mathcal{K}_Z Y, Y)\\
&= g(\mathcal{K}_Z X, X) + 2tg(\mathcal{K}_Z X, Y) + t^2 g(\mathcal{K}_Z Y, Y)\\
&= g(\mathcal{K}_X Z, Z) + 2tg(\mathcal{K}_Z X, Y) + t^2 g(\mathcal{K}_Y Z, Z),
\end{aligned}$$

те користећи линеарност и самоадјунгованост ендоморфизма $\mathcal{K}_Z$, билинеарност и симетричност форме g, као и услов компатибилности добијамо да је

$$\begin{aligned}
&g((\mathcal{K}_{X+tY} - \mathcal{K}_X - t^2\mathcal{K}_Y)Z, Z) = 2tg(\mathcal{K}_Z X, Y)\\
=&tg(\mathcal{K}_Z X, X) + tg(\mathcal{K}_Z X, Y) + tg(\mathcal{K}_Z X, Y) + tg(\mathcal{K}_Z Y, Y)\\
&- tg(\mathcal{K}_Z X, X) - tg(\mathcal{K}_Z Y, Y)\\
=&tg(\mathcal{K}_Z X, X) + tg(\mathcal{K}_Z X, Y) + tg(\mathcal{K}_Z Y, X) + tg(\mathcal{K}_Z Y, Y)\\
&- tg(\mathcal{K}_Z X, X) - tg(\mathcal{K}_Z Y, Y)\\
=&tg(\mathcal{K}_Z(X+Y), X+Y) - tg(\mathcal{K}_Z X, X) - tg(\mathcal{K}_Z Y, Y)\\
=&tg(\mathcal{K}_{X+Y}Z, Z) - tg(\mathcal{K}_X Z, Z) - tg(\mathcal{K}_Y Z, Z)\\
=&tg((\mathcal{K}_{X+Y} - \mathcal{K}_X - \mathcal{K}_Y)Z, Z).
\end{aligned}$$

Слично као што смо урадили већ два пута у оквиру овог доказа, вршимо поларизацију помоћу $Z = V + W$ и добијамо $g((\mathcal{K}_{X+tY} - \mathcal{K}_X - t^2\mathcal{K}_Y)V, W) = tg((\mathcal{K}_{X+Y} - \mathcal{K}_X - \mathcal{K}_Y)V, W)$ за све $V, W \in \mathcal{V}$, те из недегенерисаности g следи

$$\mathcal{K}_{X+tY} - \mathcal{K}_X - t^2\mathcal{K}_Y = t(\mathcal{K}_{X+Y} - \mathcal{K}_X - \mathcal{K}_Y), \tag{2.14}$$

што повлачи $\mathcal{K}_{X+tY} = t\mathcal{K}_{X+Y} + (1-t)\mathcal{K}_X + (t^2-t)\mathcal{K}_Y$. Одавде, користећи (2.7) на основу које је $\mathcal{K}_{X+tY}(X+tY) = 0$, $\mathcal{K}_X X = 0$, $\mathcal{K}_Y Y = 0$, као и линеарност ендоморфизама $\mathcal{K}_{X+Y}$, $\mathcal{K}_X$ и $\mathcal{K}_Y$, добијамо да је

$$\begin{aligned}
0 =&\mathcal{K}_{X+tY}(X+tY)\\
=&(t\mathcal{K}_{X+Y} + (1-t)\mathcal{K}_X + (t^2-t)\mathcal{K}_Y)(X+tY)\\
=&t\mathcal{K}_{X+Y}(X+tY) + (1-t)\mathcal{K}_X(X+tY) + (t^2-t)\mathcal{K}_Y(X+tY)\\
=&t\mathcal{K}_{X+Y}(X+Y+tY-Y) + (1-t)\mathcal{K}_X X + (1-t)\mathcal{K}_X(tY)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&+ t(t-1)\mathcal{K}_Y X + t(t-1)\mathcal{K}_Y(tY)\\
=&t\mathcal{K}_{X+Y}(X+Y) + t\mathcal{K}_{X+Y}(tY-Y) + (1-t)\mathcal{K}_X X + (1-t)\mathcal{K}_X(tY)\\
&+ t(t-1)\mathcal{K}_Y X + t^2(t-1)\mathcal{K}_Y Y\\
=&t\mathcal{K}_{X+Y}((t-1)Y) + (1-t)t\mathcal{K}_X Y + t(t-1)\mathcal{K}_Y X\\
=&t(t-1)(\mathcal{K}_{X+Y}Y - \mathcal{K}_X Y + \mathcal{K}_Y X),
\end{aligned}$$

што за $t \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}$ повлачи да за све $X, Y \in \mathcal{V}$ важи

$$\mathcal{K}_{X+Y}Y - \mathcal{K}_X Y + \mathcal{K}_Y X = 0. \tag{2.15}$$

7. корак: Користимо компатибилну фамилију самоадјунгованих ендоморфизама $\mathcal{K}_X$ на $\mathcal{V}$ који задовољавају $\mathcal{K}_X X = 0$ да бисмо, мотивисани формулом (2.6), дефинисали пресликавање $R\colon \mathcal{V}^4 \to \mathbb{R}$ помоћу

$$3R(X,Y,Z,W) = g((\mathcal{K}_{Y+Z} - \mathcal{K}_Y - \mathcal{K}_Z)W - (\mathcal{K}_{Y+W} - \mathcal{K}_Y - \mathcal{K}_W)Z, X), \tag{2.16}$$

за све $X, Y, Z, W \in \mathcal{V}$, а затим доказујемо еквивалентне једнакости помоћу којих се може окарактерисати R, а које су нам погодније за наставак доказа. На основу (2.14) следи да је за $Y, Z \in \mathcal{V}$ и $t \neq 0$ испуњено да је $\mathcal{K}_{Y+Z} - \mathcal{K}_Y - \mathcal{K}_Z = (\mathcal{K}_{Y+tZ} - \mathcal{K}_Y - t^2\mathcal{K}_Z)/t$, одакле закључујемо да је

$$g((\mathcal{K}_{Y+Z} - \mathcal{K}_Y - \mathcal{K}_Z)W, X) = g\Big(\frac{\mathcal{K}_{Y+tZ} - \mathcal{K}_Y - t^2\mathcal{K}_Z}{t}W, X\Big),$$

те ако посматрамо лимес када t тежи нули, онда на основу билинеарности форме g и дефиниције парцијалног извода добијамо да је

$$\begin{aligned}
&g((\mathcal{K}_{Y+Z} - \mathcal{K}_Y - \mathcal{K}_Z)W, X) = \lim_{t\to 0} g((\mathcal{K}_{Y+Z} - \mathcal{K}_Y - \mathcal{K}_Z)W, X)\\
&= \lim_{t\to 0} g\Big(\frac{\mathcal{K}_{Y+tZ} - \mathcal{K}_Y - t^2\mathcal{K}_Z}{t}W, X\Big)\\
&= \lim_{t\to 0}\left(\frac{g(\mathcal{K}_{Y+tZ}W, X) - g(\mathcal{K}_Y W, X)}{t} - tg(\mathcal{K}_Z W, X)\right)\\
&= \lim_{t\to 0}\left(\frac{g(\mathcal{K}_{Y+tZ}W, X) - g(\mathcal{K}_{Y+0\cdot Z}W, X)}{t}\right) = \frac{\partial}{\partial t}\Big|_{t=0} g(\mathcal{K}_{Y+tZ}W, X),
\end{aligned}$$

а одавде на основу (2.16) и билинеарности форме g добијамо да је

$$\begin{aligned}
3R(X,Y,Z,W) =&g((\mathcal{K}_{Y+Z} - \mathcal{K}_Y - \mathcal{K}_Z)W, X) - g(\mathcal{K}_{Y+W} - \mathcal{K}_Y - \mathcal{K}_W)Z, X)\\
=& \frac{\partial}{\partial t}\Big|_{t=0} g(\mathcal{K}_{Y+tZ}W, X) - \frac{\partial}{\partial t}\Big|_{t=0} g(\mathcal{K}_{Y+tW}Z, X),
\end{aligned}$$

односно (2.16) је еквивалентна са

$$3R(X,Y,Z,W) = \frac{\partial}{\partial t}\bigg|_{t=0} g(\mathcal{K}_{Y+tZ}W - \mathcal{K}_{Y+tW}Z, X). \tag{2.17}$$

Примећујемо да на основу линеарности и самоадјунгованости оператора $\mathcal{K}_{Y+tZ}$, као и билинеарности и симетричности форме g следи да је

$$\begin{aligned}
&2g(\mathcal{K}_{Y+tZ}W, X) = 0 + 2g(\mathcal{K}_{Y+tZ}W, X) + 2\cdot 0 \cdot g(\mathcal{K}_{Y+tZ}W, W)\\
&= \frac{\partial}{\partial s}\bigg|_{s=0} (g(\mathcal{K}_{Y+tZ}X, X) + 2sg(\mathcal{K}_{Y+tZ}W, X) + s^2 g(\mathcal{K}_{Y+tZ}W, W))\\
&= \frac{\partial}{\partial s}\bigg|_{s=0} (g(\mathcal{K}_{Y+tZ}X, X) + g(\mathcal{K}_{Y+tZ}X, sW) + g(\mathcal{K}_{Y+tZ}(sW), X)\\
&\quad + g(\mathcal{K}_{Y+tZ}(sW), sW)) = \frac{\partial}{\partial s}\bigg|_{s=0} g(\mathcal{K}_{Y+tZ}(X+sW), X+sW).
\end{aligned}$$

Уведимо ознаку $\mu(X,Y) = g(\mathcal{K}_Y X, X)$ за све $X, Y \in \mathcal{V}$. Тада је

$$2g(\mathcal{K}_{Y+tZ}W, X) = \frac{\partial}{\partial s}\bigg|_{s=0} \mu(X+sW, Y+tZ). \tag{2.18}$$

Слично, на основу линеарности и самоадјунгованости оператора $\mathcal{K}_{Y+tZ}$, као и билинеарности и симетричности форме g имамо да је

$$2g(\mathcal{K}_{Y+tZ}W, X) = \frac{\partial}{\partial s}\bigg|_{s=0} \mu(W+sX, Y+tZ). \tag{2.19}$$

Једнакост (2.18) показује да је (2.17) еквивалентна са

$$\begin{aligned}
&6R(X,Y,Z,W) = 2\,\frac{\partial}{\partial t}\bigg|_{t=0} g(\mathcal{K}_{Y+tZ}W - \mathcal{K}_{Y+tW}Z, X)\\
&= \frac{\partial}{\partial t}\bigg|_{t=0} (2g(\mathcal{K}_{Y+tZ}W, X) - 2g(\mathcal{K}_{Y+tW}Z, X))\\
&= \frac{\partial}{\partial t}\bigg|_{t=0} \Big(\frac{\partial}{\partial s}\bigg|_{s=0} \mu(X+sW, Y+tZ) - \frac{\partial}{\partial s}\bigg|_{s=0} \mu(X+sZ, Y+tW)\Big)
\end{aligned}$$

односно

$$\begin{aligned}
6R(X,Y,Z,W) = \frac{\partial}{\partial t}\bigg|_{t=0} \Big(\frac{\partial}{\partial s}\bigg|_{s=0} (&\mu(X+sW, Y+tZ)\\
&- \mu(X+sZ, Y+tW))\Big).
\end{aligned} \tag{2.20}$$

Приметимо да због услова компатибилности (2.5) важи $g(\mathcal{K}_Y X, X) = g(\mathcal{K}_X Y, Y)$, те је $\mu(X,Y) = g(\mathcal{K}_X Y, Y)$, односно $\mu(X,Y) = \mu(Y,X)$, те је μ симетрично. На основу једнакости приказаних приликом извођења једнакости

(2.18) закључујемо да је разлика $\mu(X+sW,Y+tZ)-\mu(X+sZ,Y+tW)$ квадратни полином по s, а због симетричности μ и по t. Зато је реална функција $\mu(X+sW,Y+tZ)-\mu(X+sZ,Y+tW)$ по s и t класе $\mathbb{C}^\infty$, што обезбеђује да парцијални изводи комутирају, односно испоставља се да је свеједно да ли ће се прво урадити $\frac{\partial}{\partial s}\big|_{s=0}$, па онда $\frac{\partial}{\partial t}\big|_{t=0}$ или ће се прво урадити $\frac{\partial^2}{\partial s\partial t}$ (под овом ознаком подразумевамо да се прво ради парцијални извод по s, а онда по t), а онда у добијени израз заменити $s=0$ и $t=0$, одакле следи да је

$$6R(X,Y,Z,W)=\frac{\partial^2}{\partial s\partial t}\bigg|_{s=0,t=0}(\mu(X+sW,Y+tZ)-\mu(X+sZ,Y+tW)). \quad (2.21)$$

Дефиниција (2.16) за R је еквивалентна са (2.21), али је ова последња дефиниција лакша за доказивање да је R алгебарски тензор кривине.

8. корак: Доказујемо да је пресликавање R дефинисано помоћу (2.21) алгебарски тензор кривине коришћењем Леме 1.21. Особина (1.3) следи из комутативности $\partial_s\partial_t=\partial_t\partial_s$ и симетричности μ јер је

$$\begin{aligned}R(Y,X,Z,W)=&\frac{1}{6}\frac{\partial^2}{\partial s\partial t}\bigg|_{s=0,t=0}(\mu(Y+sW,X+tZ)-\mu(Y+sZ,X+tW))\\=&-\frac{1}{6}\frac{\partial^2}{\partial t\partial s}\bigg|_{s=0,t=0}(\mu(Y+sZ,X+tW)-\mu(Y+sW,X+tZ))\\=&-\frac{1}{6}\frac{\partial^2}{\partial s\partial t}\bigg|_{t=0,s=0}(\mu(Y+tZ,X+sW)-\mu(Y+tW,X+sZ))\\=&-\frac{1}{6}\frac{\partial^2}{\partial s\partial t}\bigg|_{s=0,t=0}(\mu(X+sW,Y+tZ)-\mu(X+sZ,Y+tW))\\=&-R(X,Y,Z,W).\end{aligned}$$

Својство (1.4) следи директно из (2.21) зато што је

$$\begin{aligned}R(X,Y,W,Z)=&\frac{1}{6}\frac{\partial^2}{\partial s\partial t}\bigg|_{s=0,t=0}(\mu(X+sZ,Y+tW)-\mu(X+sW,Y+tZ))\\=&-\frac{1}{6}\frac{\partial^2}{\partial s\partial t}\bigg|_{s=0,t=0}(\mu(X+sW,Y+tZ)-\mu(X+sZ,Y+tW))\\=&-R(X,Y,Z,W).\end{aligned}$$

На основу једнакости (2.18) и (2.19) следи да је $\frac{\partial}{\partial s}\big|_{s=0}\mu(X+sW,Y+tZ)=\frac{\partial}{\partial s}\big|_{s=0}\mu(W+sX,Y+tZ)$ за произвољне $X,Y,Z,W\in\mathcal{V}$. Одатле на основу

(2.21), комутативности парцијалних извода и $\mu(X,Y)=\mu(Y,X)$ за произвољне $X,Y\in\mathcal{V}$ можемо извести (1.6) јер је

$$\begin{aligned}
&R(X,Y,Z,W)+R(Y,Z,X,W)+R(Z,X,Y,W)\\
=&\frac{1}{6}\left.\frac{\partial^2}{\partial s\partial t}\right|_{s=0,t=0}(\mu(X+sW,Y+tZ)-\mu(X+sZ,Y+tW))\\
&+\frac{1}{6}\left.\frac{\partial^2}{\partial s\partial t}\right|_{s=0,t=0}(\mu(Y+sW,Z+tX)-\mu(Y+sX,Z+tW))\\
&+\frac{1}{6}\left.\frac{\partial^2}{\partial s\partial t}\right|_{s=0,t=0}(\mu(Z+sW,X+tY)-\mu(Z+sY,X+tW))\\
=&\frac{1}{6}\left.\frac{\partial^2}{\partial t\partial s}\right|_{s=0,t=0}\mu(X+sW,Y+tZ)-\frac{1}{6}\left.\frac{\partial^2}{\partial s\partial t}\right|_{s=0,t=0}\mu(Z+sY,X+tW)\\
&+\frac{1}{6}\left.\frac{\partial^2}{\partial t\partial s}\right|_{s=0,t=0}\mu(Y+sW,Z+tX)-\frac{1}{6}\left.\frac{\partial^2}{\partial s\partial t}\right|_{s=0,t=0}\mu(X+sZ,Y+tW)\\
&+\frac{1}{6}\left.\frac{\partial^2}{\partial t\partial s}\right|_{s=0,t=0}\mu(Z+sW,X+tY)-\frac{1}{6}\left.\frac{\partial^2}{\partial s\partial t}\right|_{s=0,t=0}\mu(Y+sX,Z+tW)\\
=&\frac{1}{6}\left.\frac{\partial}{\partial s}\right|_{s=0}\Big(\left.\frac{\partial}{\partial t}\right|_{t=0}\mu(Y+tZ,X+sW)\Big)-\frac{1}{6}\left.\frac{\partial^2}{\partial t\partial s}\right|_{t=0,s=0}\mu(Z+tY,X+sW)\\
&+\frac{1}{6}\left.\frac{\partial}{\partial s}\right|_{s=0}\Big(\left.\frac{\partial}{\partial t}\right|_{t=0}\mu(Z+tX,Y+sW)\Big)-\frac{1}{6}\left.\frac{\partial^2}{\partial t\partial s}\right|_{t=0,s=0}\mu(X+tZ,Y+sW)\\
&+\frac{1}{6}\left.\frac{\partial}{\partial s}\right|_{s=0}\Big(\left.\frac{\partial}{\partial t}\right|_{t=0}\mu(X+tY,Z+sW)\Big)-\frac{1}{6}\left.\frac{\partial^2}{\partial t\partial s}\right|_{t=0,s=0}\mu(Y+tX,Z+sW)\\
=&\frac{1}{6}\left.\frac{\partial}{\partial s}\right|_{s=0}\Big(\left.\frac{\partial}{\partial t}\right|_{t=0}(\mu(Y+tZ,X+sW)-\mu(Z+tY,X+sW))\Big)\\
&+\frac{1}{6}\left.\frac{\partial}{\partial s}\right|_{s=0}\Big(\left.\frac{\partial}{\partial t}\right|_{t=0}(\mu(Z+tX,Y+sW)-\mu(X+tZ,Y+sW))\Big)\\
&+\frac{1}{6}\left.\frac{\partial}{\partial s}\right|_{s=0}\Big(\left.\frac{\partial}{\partial t}\right|_{t=0}(\mu(X+tY,Z+sW)-\mu(Y+tX,Z+sW))\Big)\\
=&\frac{1}{6}\left.\frac{\partial}{\partial s}\right|_{s=0}0+\frac{1}{6}\left.\frac{\partial}{\partial s}\right|_{s=0}0+\frac{1}{6}\left.\frac{\partial}{\partial s}\right|_{s=0}0=0+0+0=0.
\end{aligned}$$

Из (2.17) следи да је $R(X,Y,Z,W)$ линеарно по првом аргументу јер на основу билинеарности форме g и линеарности парцијалног извода имамо да је

$$\begin{aligned}
&R(aX+b\tilde{X},Y,Z,W)=\frac{1}{3}\left.\frac{\partial}{\partial t}\right|_{t=0}g(\mathcal{K}_{Y+tZ}W-\mathcal{K}_{Y+tW}Z,aX+b\tilde{X})\\
=&a\cdot\frac{1}{3}\left.\frac{\partial}{\partial t}\right|_{t=0}g(\mathcal{K}_{Y+tZ}W-\mathcal{K}_{Y+tW}Z,X)+b\cdot\frac{1}{3}\left.\frac{\partial}{\partial t}\right|_{t=0}g(\mathcal{K}_{Y+tZ}W-\mathcal{K}_{Y+tW}Z,\tilde{X})\\
=&aR(X,Y,Z,W)+bR(\tilde{X},Y,Z,W).
\end{aligned}$$

9. корак: Преостаје да докажемо да су оператори $\mathcal{K}_X$ за $X \in \mathcal{V}$ Јакобијеви оператори за R.
Како смо доказали да је R алгебарски тензор кривине, то користећи $\mathbb{Z}_2$ симетрије добијамо да је

$$\begin{aligned} g(\mathcal{J}_Y W, X) = g(\mathcal{R}(W,Y)Y, X) = R(W,Y,Y,X) = R(Y,X,W,Y) = -R(X,Y,W,Y) \\ = R(X,Y,Y,W). \end{aligned}$$

Одавде, на основу (2.16), (2.13) и (2.7) имамо да за свако $X \in \mathcal{V}$ важи да је

$$\begin{aligned} 3g(\mathcal{J}_Y W, X) =& 3R(X,Y,Y,W) \\ =& g((\mathcal{K}_{Y+Y} - \mathcal{K}_Y - \mathcal{K}_Y)W - (\mathcal{K}_{Y+W} - \mathcal{K}_Y - \mathcal{K}_W)Y, X) \\ =& g((\mathcal{K}_{2Y} - 2\mathcal{K}_Y)W - \mathcal{K}_{Y+W}Y + \mathcal{K}_Y Y + \mathcal{K}_W Y, X) \\ =& g((4\mathcal{K}_Y - 2\mathcal{K}_Y)W - \mathcal{K}_{Y+W}Y + 0 + \mathcal{K}_W Y, X) \\ =& g(2\mathcal{K}_Y W - \mathcal{K}_{Y+W}Y + \mathcal{K}_W Y, X), \end{aligned}$$

одакле на основу недегенерисаности форме g следи да је

$$3\mathcal{J}_Y W = 2\mathcal{K}_Y W - \mathcal{K}_{Y+W}Y + \mathcal{K}_W Y.$$

На основу (2.7) закључујемо да је

$$-\mathcal{K}_{Y+W}Y = -\mathcal{K}_{Y+W}(Y + W - W) = -\mathcal{K}_{Y+W}(Y+W) + \mathcal{K}_{Y+W}W = \mathcal{K}_{Y+W}W,$$

а на основу (2.15) је $\mathcal{K}_{Y+W}W = \mathcal{K}_Y W - \mathcal{K}_W Y$, те је

$$3\mathcal{J}_Y W = 2\mathcal{K}_Y W + \mathcal{K}_Y W - \mathcal{K}_W Y + \mathcal{K}_W Y = 3\mathcal{K}_Y W$$

за свако $W \in \mathcal{V}$, што даје $\mathcal{J}_Y = \mathcal{K}_Y$ за свако $Y \in \mathcal{V}$. Јединственост траженог алгебарског тензора кривине следи на основу формуле (2.6), односно чињенице да Јакобијеви оператори једнозначно одређују алгебарски тензор кривине, те смо тиме завршили доказ Теореме 2.2. □

Глава 3

Јакоби-дуалност и квази-Клифордови тензори

У овој глави излажемо неке добро познате чињенице о Осермановим тензорима и принципу дуалности, а потом разматрамо квази-Клифордове тензоре (уведене у раду [7]) као уопштење Клифордових тензора и истражујемо везе између њих и Осерманових услова и принципа дуалности у псеудо-Римановом случају.

3.1 Осерманови услови

У овом поглављу наводимо Осерманову хипотезу у Римановом случају (видети [60]) која је веома битна у Римановој геометрији и коју је у случајевима димензије различите од 16 решио Николајевски (видети [55, 54, 56, 53]), а потом приказујемо уопштења Осерманових услова у псеудо-Римановом случају и неке корисне једначине које важе за Осерманов алгебарски тензор кривине (видети [2]).

Нека је (M, g) Риманова многострукост. Већ смо поменули да скуп свих изометрија многострукости M чини групу, а на основу Мајерсове[1] и Стинродове[2] теореме из 1939. године (видети [52]) ова група се може посматрати као Лијева група. Најважнија примена Лијевих група у геометрији је када посматрамо њихово дејство на многострукости.

---

[1] Sumner Byron Myers (1910–1955), амерички математичар

[2] Norman Earl Steenrod (1910–1971), амерички математичар

Дејство групе G ***на многострукости*** M је функција $\rho\colon G \times M \to M$, при чему $\rho(f,p)$ често записујемо као $f \cdot p$, која задовољава $f_1 \cdot (f_2 \cdot p) = (f_1 f_2) \cdot p$ и $e \cdot p = p$ за свако $f_1, f_2 \in G$ и $p \in M$, где је e јединични елемент од G. Скуп $G \cdot p = \{f \cdot p | f \in G\}$ тачака из M у које се p може пресликати помоћу елемената из G назива се ***орбита тачке*** $p \in M$. За дејство кажемо да је ***транзитивно*** ако има тачно једну орбиту, што значи да за сваки пар тачака $p, q \in M$ постоји $f \in G$ такво да је $f \cdot p = q$.

Тако можемо посматрати дејство групе изометрија $I(M)$ на Риманову многострукост (M, g) дефинисано помоћу $f \cdot p = f(p)$, за свако $f \in I(M)$ и $p \in M$. За Риманову многострукост M кажемо да је ***хомогена*** ако њена група изометрија $I(M)$ дејствује транзитивно на M. Хомогена Риманова многострукост геометријски изгледа исто кад је посматрамо из било које тачке. Повезана Риманова многострукост се назива ***две-тачке хомогеном*** ако се сваки пар тачака може трансформисати (у смислу одговарајуће изометрије) у било који пар тачака са истим растојањем између њих, односно ако група изометрија $I(M)$ дејствује транзитивно на једнако удаљеним паровима тачака.

Многострукост M је ***изотропна у*** $p \in M$ ако за све јединичне векторе $X, Y \in T_pM$ постоји изометрија f многострукости M таква да је $f(p) = p$ и да је $df_p(X) = Y$. Риманова многострукост је ***изотропна*** ако је изотропна у свакој тачки. Изотропна многострукост изгледа исто у свим правцима.

Испоставља се да је повезана Риманова многострукост изотропна ако и само ако је две-тачке хомогена (видети Wolf [71, Лема 8.12.1]). Ово су најједноставније и најлепше Риманове многострукости са којима обично упоређујемо друге просторе и зато их зовемо ***модел простори***. Позната је потпуна класификација ових простора, компактне је класификовао Ванг[3] 1952. (видети [69]), док је некомпактне решио Титс[4] 1955. године (видети [68]). Више детаља о две-тачке хомогеним просторима може се пронаћи у [71, стр. 293–300] и у књизи Хелгасона[5] (видети [40, стр. 535]).

Последица класификације је да је сваки модел простор локално изометричан једном од следећих простора:

- еуклидски простор $\mathbb{R}^n$,
- сфера $\mathbf{S}^n$,

---

[3] Hsien Chung Wang (1918–1978), кинеско-амерички математичар

[4] Jacques Tits (1930-2021), белгијско-француски математичар

[5] Sigurdur Helgason (1927-2023), исландски математичар

- реални пројективни простор $\mathbb{R}\mathbf{P}^n$,
- комплексни пројективни простор $\mathbb{C}\mathbf{P}^n$,
- кватернионски пројективни простор $\mathbb{H}\mathbf{P}^n$,
- Кејлијева пројективна раван $\mathbb{O}\mathbf{P}^2$,
- реални хиперболички простор $\mathbb{R}\mathbf{H}^n$,
- комплексни хиперболички простор $\mathbb{C}\mathbf{H}^n$,
- кватернионски хиперболички простор $\mathbb{H}\mathbf{H}^n$,
- Кејлијева хиперболичка раван $\mathbb{O}\mathbf{H}^2$.

Локалне изометрије локално две-тачке хомогених простора дејствују транзитивно на сферном раслојењу јединичних тангентних вектора и зато ту фиксирају карактеристични полином Јакобијевог оператора. Такве Риманове многострукости за које је карактеристични полином (или еквивалентно сопствене вредности и њихове вишеструкости) Јакобијевог оператора $\mathcal{J}_X$ независан од X из јединичног тангентног раслојења називају се ***Риманове (глобално) Осерманове многострукости***. Једно од кључних питања у Римановој геометрији је да ли важи обратно (свака Риманова Осерманова многострукост је локално модел простор) и оно је познато под називом ***Осерманова хипотеза*** (видети [60]). Прве резултате о Осermановој хипотези изложио је Чи[6], који је установио позитиван одговор за многострукости димензије која није дељива са четири (видети [25]). Напоменимо да је Николајевски [53, 54, 55, 56] доказао хипотезу у свим случајевима осим за многострукости димензије 16 чији редуковани Јакобијев оператор има сопствену вредност вишеструкости 7 или 8. Циљ ове дисертације је проучавање алгебарских особина везаних за алгебарске тензоре кривине који се могу уочити у тачки Осерманове многострукости.

Ове дефиниције се могу проширити на псеудо-Риманову многострукост (M, g) за коју кажемо да је ***(глобално) Осерманова*** ако је карактеристични полином $\omega_X(\lambda) = \det(\lambda \operatorname{Id} - \mathcal{J}_X)$ Јакобијевог оператора $\mathcal{J}_X$ исти за X из ***јединичног временског тангентног раслојења***

$$S^- M = \bigsqcup_{p\in M} S_p^- M = \bigsqcup_{p\in M} \{X \in T_pM | g_p(X, X) = -1\},$$

---

[6] Quo-Shin Chi (1955), тајванско-амерички математичар

а исти је и за X из ***јединичног просторног тангентног раслојења***

$$S^{+}M = \bigsqcup_{p\in M} S^{+}_{p}M = \bigsqcup_{p\in M}\{X \in T_{p}M | g_{p}(X,X) = 1\}.$$

Већ смо коментарисали да је погодно изучавати геометријске проблеме у алгебарском окружењу и да редуковањем псеудо-Риманове многострукости (M, g) на тачку $p \in M$ добијамо алгебарски тензор кривине R_p на простору са скаларним производом (T_pM, g_p). Зато уводимо неке појмове везане за алгебарски тензор кривине R на простору са скаларним производом $(\mathcal{V}, g)$.

Посматрамо карактеристични полином редукованог Јакобијевог оператора $\widetilde{w}_X(\lambda) = \det(\lambda \operatorname{Id} - \widetilde{\mathcal{J}}_X)$. Кажемо да је алгебарски тензор кривине R ***временски Осерманов*** ако $\widetilde{w}_X$ не зависи од избора јединичног временског $X \in \mathcal{V}$. Алгебарски тензор кривине R је ***просторно Осерманов*** ако је $\widetilde{w}_X$ независан од јединичног просторног вектора $X \in \mathcal{V}$. За тензор R кажемо да је ***Осерманов*** ако је временски и просторно Осерманов. Познато је да је R временски Осерманов ако и само ако је просторно Осерманов (видети [30]). Одатле следи наредна теорема (видети [6]) која говори да Осерманов услов не морамо посматрати кроз две независне константности различитих полинома, једне за просторне јединичне, а друге за временске јединичне векторе, већ је довољно гледати јединствени полином који је константан за сваки дефинитан вектор.

Теорема 3.1. *Алгебарски тензор кривине на простору са скаларним производом $(\mathcal{V}, g)$ је Осерманов ако и само ако је полином $\det(\lambda \operatorname{Id} - \mathcal{J}_X/\varepsilon_X)$ независан од дефинитног вектора $X \in \mathcal{V}$.*

Псеудо-Риманова многострукост M је ***тачка по тачка Осерманова*** ако је одговарајући алгебарски тензор кривине R_p Осерманов у свакој тачки $p \in M$. Јасно је да глобално Осерманова многострукост свакако јесте тачка по тачка Осерманова, али обратно не важи (видети [21]).

Даља уопштења Осермановых услова у тачки тичу се сопствене структуре Јакобијевих оператора који у случају да је скаларни производ недефинитан не морају бити дијагонализабилни и зато посматрамо Жорданову нормалну форму Јакобијевог оператора (видети [20]). Алгебарски тензор кривине R је ***временски Жордан-Осерманов*** ако Жорданова нормална форма Јакобијевог оператора $\mathcal{J}_X$ не зависи од јединичног временског $X \in \mathcal{V}$. Алгебарски тензор кривине R се назива ***просторно Жордан-Осерманов*** ако Жорданова нормална форма оператора $\mathcal{J}_X$ не зависи од јединичног просторног $X \in \mathcal{V}$.

Кажемо да је R ***Жордан-Осерманов*** ако је и временски и просторно Жордан-Осерманов. Испоставља се да временски и просторни Жордан-Осерманови услови нису еквивалентни (видети [36]).

Кажемо да је R ***k-штајн*** ако постоје константе $c_1, ..., c_k \in \mathbb{R}$ такве да

$$\operatorname{Tr}((\mathcal{J}_X)^j) = (\varepsilon_X)^j c_j \tag{3.1}$$

важи за свако $j \in \{1, \ldots, k\}$ и за свако $X \in \mathcal{V}$.

Назив k-штајн потиче од тога што је 1-штајн услов еквивалентан услову да је R Ајнштајнов (име славног физичара Ајнштајна на немачком значи један камен, односно 1 штајн), што доказујемо у наредној леми.

Лема 3.2. *Алгебарски тензор кривине на простору са скаларним производом* $(\mathcal{V}, g)$ *је* 1-*штајн ако и само ако је Ајнштајнов.*

Доказ. На основу (2.2) је $\operatorname{Ric}(X,Y) = \operatorname{Tr}(\mathcal{J}(X,Y))$ за свака два вектора X и Y из $\mathcal{V}$, те је $\operatorname{Ric}(X,X) = \operatorname{Tr}(\mathcal{J}(X,X)) = \operatorname{Tr}(\mathcal{J}_X)$. На основу (1.1) форма g је једнозначно одређена помоћу квадратне форме ε, а слично је симетрични тензор $\operatorname{Ric} \in \mathfrak{T}^0_2(\mathcal{V})$ због своје билинеарности одређен помоћу

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{4}(\operatorname{Ric}(X+Y, X+Y) - \operatorname{Ric}(X-Y, X-Y))\\
=&\frac{1}{4}(\operatorname{Ric}(X, X+Y) + \operatorname{Ric}(Y, X+Y) - \operatorname{Ric}(X, X-Y) + \operatorname{Ric}(Y, X-Y))\\
=&\frac{1}{4}(\operatorname{Ric}(X,X) + \operatorname{Ric}(X,Y) + \operatorname{Ric}(Y,X) + \operatorname{Ric}(Y,Y)\\
&\ - \operatorname{Ric}(X,X) + \operatorname{Ric}(X,Y) + \operatorname{Ric}(Y,X) - \operatorname{Ric}(Y,Y))\\
=&\frac{1}{4}(2\operatorname{Ric}(X,Y) + 2\operatorname{Ric}(Y,X)) = \frac{1}{4}\cdot(2\operatorname{Ric}(X,Y) + 2\operatorname{Ric}(X,Y))\\
=&\frac{1}{4}\cdot 4\operatorname{Ric}(X,Y) = \operatorname{Ric}(X,Y).
\end{aligned}$$

На основу претходно изведеног закључујемо да је алгебарски тензор кривине R 1-штајн ако и само ако постоји константа c таква да за свако $X \in \mathcal{V}$ важи $\operatorname{Tr}(\mathcal{J}_X) = \varepsilon_X c$, што је еквивалентно са $\operatorname{Ric}(X,X) = g(X,X)c$, односно са $\operatorname{Ric}(X,Y) = cg(X,Y)$ за свака два вектора $X, Y \in \mathcal{V}$, што значи да је $\operatorname{Ric} = cg$, а то важи ако и само ако је алгебарски тензор кривине R Ајнштајнов. □

У наставку наводимо две теореме о корисним једначинама које важе за Ајнштајнове (1-штајн) и ***цвајштајнове*** (2-штајн) алгебарске тензоре кривине, а њихови докази се могу пронаћи у [2].

Теорема 3.3. *Ако је R Ајнштајнов алгебарски тензор кривине на простору са скаларним производом $(\mathcal{V}, g)$ димензије n, тада у ортонормираној бази $(E_1, \ldots, E_n)$ простора $\mathcal{V}$ за све $1 \leqslant x \neq y \leqslant n$ важе једначине*

$$\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i \varepsilon_x R_{ixxi} = \mathrm{Const} = c_1, \tag{3.2}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i R_{ixyi} = 0, \tag{3.3}$$

при чему је $\varepsilon_i = \varepsilon_{E_i} \in \{-1, 1\}$ за $i \in \{1, \ldots, n\}$ и $R_{ijkl} = R(E_i, E_j, E_k, E_l)$ за $i, j, k, l \in \{1, \ldots, n\}$.

Теорема 3.4. *Ако је R цвајштајн алгебарски тензор кривине на простору са скаларним производом $(\mathcal{V}, g)$ димензије n, тада у ортонормираној бази $(E_1, \ldots, E_n)$ простора $\mathcal{V}$ за све $1 \leqslant x \neq y \leqslant n$ важе једначине* (3.2), (3.3) *и*

$$\sum_{i,j=1}^{n} \varepsilon_i \varepsilon_j (R_{ixxj})^2 = \mathrm{Const} = c_2, \tag{3.4}$$

$$\sum_{i,j=1}^{n} \varepsilon_i \varepsilon_j R_{ixxj} R_{ixyj} = 0, \tag{3.5}$$

$$2 \sum_{i,j=1}^{n} \varepsilon_i \varepsilon_j R_{ixxj} R_{iyyj} + \sum_{i,j=1}^{n} \varepsilon_i \varepsilon_j (R_{ixyj} + R_{iyxj})^2 = 2\varepsilon_x \varepsilon_y c_2, \tag{3.6}$$

при чему је $\varepsilon_i = \varepsilon_{E_i} \in \{-1, 1\}$ за $i \in \{1, \ldots, n\}$ и $R_{ijkl} = R(E_i, E_j, E_k, E_l)$ за $i, j, k, l \in \{1, \ldots, n\}$.

Познато је да је алгебарски тензор кривине димензије n Осерманов ако и само ако је n-штајн (видети [33, Лема 1.7.3]). Одавде је n-димензиони Осерманов алгебарски тензор кривине n-штајн, те за сваки изотропан вектор $X \in \mathcal{V}$ важи да је $\mathrm{Tr}(\mathcal{J}_X)^j = (\varepsilon_X)^j c_j = 0$ за $j \in \{1, \ldots, n\}$, одакле на основу Леме А.3 закључујемо да за коефицијенте карактеристичног полинома $\omega_X(\lambda) = \lambda^n + k_1 \lambda^{n-1} + \cdots + k_{n-1}\lambda + k_n$ линеарног оператора $\mathcal{J}_X$ важи $k_1 = k_2 = \ldots = k_n = 0$, те је $\omega_X(\lambda) = \det(\lambda \,\mathrm{Id} - \mathcal{J}_X) = \lambda^n$, одакле следи наредна теорема (видети Гилки [33, Лема 1.7.4]).

Теорема 3.5. *Ако је R Осерманов алгебарски тензор кривине на простору са скаларним производом $(\mathcal{V}, g)$, тада су све сопствене вредности од $\mathcal{J}_X$ за изотропан $X \in \mathcal{V}$ једнаке нули.*

3.2 Принцип дуалности

У овом поглављу наводимо познате резултате о принципу дуалности који се показао као врло значајан за решавање Осерманове хипотезе у Римановом случају. Осмислио га је Ракић 1998. године у [61, 62], а више о његовој вези са Осермановим тензорима и уопштењима у псеудо-Римановом случају може се пронаћи у радовима Андрејића, Ракића и Николајевског (видети [1], [3], [4], [10], [11], [57], [58], [61]).

Нека је $(\mathcal{V}, g)$ n-димензион простор са позитивно дефинитним скаларним производом. Тада у $\mathcal{V}$ постоје само дефинитни вектори и нула вектор. Нека је R алгебарски тензор кривине на $(\mathcal{V}, g)$, односно R је Риманов алгебарски тензор кривине. Већ смо коментарисали да је Јакобијев оператор $\mathcal{J}_X$ за сваки дефинитан $X \in \mathcal{V}$ у потпуности одређен својом рестрикцијом $\widetilde{\mathcal{J}}_X \colon X^\perp \to X^\perp$ коју називамо редуковани Јакобијев оператор. Кажемо да је R ***Риманов Осерманов*** алгебарски тензор кривине ако је карактеристични полином $\widetilde{\omega}_X(\lambda) = \det(\lambda \operatorname{Id} - \widetilde{\mathcal{J}}_X)$ редукованог Јакобијевог оператора $\widetilde{\mathcal{J}}_X$ независан од јединичног $X \in \mathcal{V}$.

Једно важно својство Риманових Осерманових тензора је такозвани ***Ракићев принцип дуалности*** који је увео Ракић 1998. године (видети [61, 62]). По оригиналној дефиницији кажемо да је Риманов алгебарски тензор кривине R ***Јакоби-дуалан*** ако $\mathcal{J}_X Y = \lambda Y$ за међусобно ортогоналне јединичне векторе $X, Y \in \mathcal{V}$ повлачи да је $\mathcal{J}_Y X = \lambda X$. Испоставља се да Јакоби-дуалност говори да је X сопствени вектор оператора $\mathcal{J}_Y$ ако је Y сопствени вектор оператора $\mathcal{J}_X$, о чему говори наредна лема.

Лема 3.6. *Риманов алгебарски тензор кривине R је Јакоби-дуалан ако и само ако за произвољне векторе X и Y важи импликација*

$$\mathcal{J}_X Y = \varepsilon_X \lambda Y \implies \mathcal{J}_Y X = \varepsilon_Y \lambda X. \tag{3.7}$$

Доказ. Очигледно је да ако за произвољне векторе важи импликација (3.7), онда и за међусобно ортогоналне јединичне векторе X и Y важи импликација $\mathcal{J}_X Y = \varepsilon_X \lambda Y \implies \mathcal{J}_Y X = \varepsilon_Y \lambda X$, односно $\mathcal{J}_X Y = \lambda Y \implies \mathcal{J}_Y X = \lambda X$, те је R Јакоби-дуалан.

У наставку доказујемо да ако је R Риманов Јакоби-дуалан алгебарски тензор кривине, онда за произвољне векторе X и Y важи импликација (3.7). Ако је $X = 0$, онда се (3.7) своди на $\mathcal{J}_0 Y = \varepsilon_0 \lambda Y \implies \mathcal{J}_Y 0 = \varepsilon_Y \lambda \cdot 0$, односно

$0 = 0 \implies 0 = 0$, што је очигледно тачно. Слично, ако је $Y = 0$, онда се импликација (3.7) своди на $\mathcal{J}_X 0 = \varepsilon_X \lambda \cdot 0 \implies \mathcal{J}_0 X = \varepsilon_0 \lambda X$, односно $0 = 0 \implies 0 = 0$, што је тривијално тачно. У наставку доказа сматрамо да је $X \neq 0$ и $Y \neq 0$. Како је $X \neq 0$ и X припада простору са позитивно дефинитним скаларним производом $(\mathcal{V}, g)$, то је $\varepsilon_X > 0$, те је $\mathrm{Span}\{X\}$ недегенерисан потпростор на основу Леме 1.1, а на основу Леме 1.6 је $\mathcal{V} = \mathrm{Span}\{X\} + (\mathrm{Span}\{X\})^\perp$, те за $Y \in \mathcal{V}$ важи да је $Y = \alpha X + Z$, где је $\alpha \in \mathbb{R}$ и $Z \in (\mathrm{Span}\{X\})^\perp$. Разликујемо два случаја у зависности од тога да ли је $\alpha = 0$ или је $\alpha \neq 0$.

Ако је $\alpha = 0$, онда је $Y = \alpha X + Z = Z \in (\mathrm{Span}\{X\})^\perp$, те је $X \perp Y$. Претпостављамо да је $\mathcal{J}_X Y = \varepsilon_X \lambda Y$, а доказујемо да је $\mathcal{J}_Y X = \varepsilon_Y \lambda X$. Из $\mathcal{J}_X Y = \varepsilon_X \lambda Y$ следи да је

$$\mathcal{J}_{\sqrt{\varepsilon_X}\frac{X}{\sqrt{\varepsilon_X}}}\left(\sqrt{\varepsilon_Y}\frac{Y}{\sqrt{\varepsilon_Y}}\right) = \varepsilon_X \lambda \sqrt{\varepsilon_Y}\frac{Y}{\sqrt{\varepsilon_Y}},$$

одакле на основу (2.3) и линеарности Јакобијевог оператора следи да је

$$\varepsilon_X \sqrt{\varepsilon_Y}\mathcal{J}_{\frac{X}{\sqrt{\varepsilon_X}}}\frac{Y}{\sqrt{\varepsilon_Y}} = \varepsilon_X \lambda \sqrt{\varepsilon_Y}\frac{Y}{\sqrt{\varepsilon_Y}},$$

одакле после скраћивања са $\varepsilon_X \neq 0$ и $\sqrt{\varepsilon_Y} \neq 0$ добијамо

$$\mathcal{J}_{\frac{X}{\sqrt{\varepsilon_X}}}\frac{Y}{\sqrt{\varepsilon_Y}} = \lambda \frac{Y}{\sqrt{\varepsilon_Y}}.$$

Како су вектори $X/\sqrt{\varepsilon_X}$ и $Y/\sqrt{\varepsilon_Y}$ јединични и међусобно ортогонални и R је Риманов Јакоби-дуалан, то закључујемо да је

$$\mathcal{J}_{\frac{Y}{\sqrt{\varepsilon_Y}}}\frac{X}{\sqrt{\varepsilon_X}} = \lambda \frac{X}{\sqrt{\varepsilon_X}},$$

одакле коришћењем (2.3) и линеарности Јакобијевог оператора добијамо

$$\frac{1}{\varepsilon_Y}\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_X}}\mathcal{J}_Y X = \lambda \frac{X}{\sqrt{\varepsilon_X}},$$

што након множења са $\varepsilon_Y \sqrt{\varepsilon_X}$ постаје $\mathcal{J}_Y X = \varepsilon_Y \lambda X$, што смо и желели да добијемо.

Преостало је да у случају да је $\alpha \neq 0$ из претпоставке да је $\mathcal{J}_X Y = \varepsilon_X \lambda Y$ закључимо да је $\mathcal{J}_Y X = \varepsilon_Y \lambda X$. Како је $\mathcal{J}_X Y = \varepsilon_X \lambda Y$, то је $\mathcal{J}_X(\alpha X + Z) = \varepsilon_X \lambda(\alpha X + Z)$, одакле на основу линеарности Јакобијевог оператора добијамо да је $\alpha \mathcal{J}_X X + \mathcal{J}_X Z = \varepsilon_X \lambda \alpha X + \varepsilon_X \lambda Z$, што се због $\mathcal{J}_X X = 0$ трансформише у $\mathcal{J}_X Z =$

$\varepsilon_X\lambda\alpha X+\varepsilon_X\lambda Z$. Одатле је $g(\mathcal{J}_X Z, X)=g(\varepsilon_X\lambda\alpha X+\varepsilon_X\lambda Z, X)$, што коришћењем самоадјунгованости Јакобијевог оператора, $\mathcal{J}_X X=0$, билинеарности форме g и $Z\perp X$ постаје $g(Z,\mathcal{J}_X X)=\varepsilon_X\lambda\alpha g(X,X)$, односно $0=\varepsilon_X^2\lambda\alpha$, а како $\varepsilon_X\neq 0$ и $\alpha\neq 0$, то је $\lambda=0$ и $\mathcal{J}_X Z=\varepsilon_X\lambda\alpha X+\varepsilon_X\lambda Z=0$, те на основу већ доказаног случаја (може се применити јер је $X\perp Z$) следи да је $\mathcal{J}_Z X=0$. Циљ је доказати $\mathcal{J}_Y X=\varepsilon_Y\lambda X$, односно $\mathcal{J}_{\alpha X+Z}X=0$, што је на основу формула (2.3) и (2.4) еквивалентно са $\alpha^2\mathcal{J}_X X+2\alpha\mathcal{J}(X,Z)X+\mathcal{J}_Z X=0$, а када искористимо $\mathcal{J}_X X=0$, $\mathcal{J}_Z X=0$ и $\alpha\neq 0$, добијамо еквивалентну једнакост $2\mathcal{J}(X,Z)X=0$, односно једнакост $\mathcal{R}(X,X)Z+\mathcal{R}(X,Z)X=0$, а како је $\mathcal{R}$ антисиметрично по прва два аргумента, добијамо $\mathcal{R}(X,X)Z=0$ и $\mathcal{R}(X,Z)X=-\mathcal{R}(Z,X)X$, те је $-\mathcal{R}(Z,X)X=0$, односно $\mathcal{J}_X Z=0$, што је тачно. □

Историјски, Ракић је први доказао да је сваки Риманов Осерманов R Јакоби-дуалан (видети [62]), док су се касније појавили неки резултати у вези обратне тврдње (видети [1] и [22]). У раду [9] може се пронаћи нов елегантан доказ да је сваки Риманов Јакоби-дуалан алгебарски тензор кривине бар Ајнштајнов. У том доказу се користи наредна лема која нам даје посебну ортонормирану сопствену базу за простор са дефинитним скаларним производом $(\mathcal{V},g)$ у односу на самоадјунговани Јакобијев оператор $\mathcal{J}_{E_1}$, где је E_1 јединичан вектор из $\mathcal{V}$.

Лема 3.7. *Ако је E_1 јединичан вектор из простора са дефинитним скаларним производом, тада постоји ортонормирана сопствена база за тај простор у односу на Јакобијев оператор $\mathcal{J}_{E_1}$ таква да је њен први базни вектор E_1.*

Доказ. Приметимо да је $\mathcal{J}_{E_1}E_1=0=0\cdot E_1$, те јединичан вектор E_1 може бити први базни вектор тражене ортонормиране сопствене базе за простор са дефинитним скаларним производом $(\mathcal{V},g)$ димензије n. Како је E_1 дефинитан, то је на основу Леме 1.1 потпростор $\operatorname{Span}\{E_1\}$ недегенерисан, а онда је на основу Леме 1.6 и $\mathcal{W}=(\operatorname{Span}\{E_1\})^{\perp}$ недегенерисан, а свакако је и дефинитан јер је $g\restriction_{\mathcal{W}}$ дефинитна као рестрикција дефинитне форме g. Такође је $\dim(\operatorname{Span}\{E_1\})^{\perp}=\dim\mathcal{V}-\dim\operatorname{Span}\{E_1\}=n-1$ на основу Леме 1.2. Како је $\mathcal{J}_{E_1}\restriction_{\mathcal{W}}$ самоадјунгован оператор на простору са дефинитним скаларним производом $(\mathcal{W},g\restriction_{\mathcal{W}})$, то на основу Леме А.6 постоји ортонормирана сопствена база $(E_2,\dots,E_n)$ за $\mathcal{W}$ у односу на $\mathcal{J}_{E_1}\restriction_{\mathcal{W}}$. Зато је $(E_1,\dots,E_n)$ тражена ортонормирана сопствена база за $\mathcal{V}$ у односу на $\mathcal{J}_{E_1}$. □

У доказу ћемо користити и наредну значајну лему.

Лема 3.8. *Ако је* $(E_1, \ldots, E_n)$ *ортонормирана база простора са позитивно дефинитним скаларним производом* $(\mathcal{V}, g)$, *тада је* $\mathrm{Ric}^\sharp = \mathcal{J}_{E_1} + \ldots + \mathcal{J}_{E_n}$.

Доказ. Како су $\sharp$ и $\flat$ инверзни изоморфизми, то за свако $X \in \mathcal{V}$ и $Y \in \mathcal{V}$ на основу (2.1) важи да је

$$(\mathrm{Ric}^\sharp(X))^\flat(Y) = \mathrm{Ric}(X,Y) = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_{E_i} R(E_i, X, Y, E_i) = \sum_{i=1}^{n} R(E_i, X, Y, E_i).$$

Са друге стране, на основу дефиниције снизилице, билинеарности форме g, дефиниције Јакобијевог оператора и $\mathbb{Z}_2$ симетрија следи да је

$$\begin{aligned}((\mathcal{J}_{E_1} + \ldots + \mathcal{J}_{E_n})(X))^\flat(Y) &= g((\mathcal{J}_{E_1} + \ldots + \mathcal{J}_{E_n})(X), Y) = g\left(\sum_{i=1}^{n} \mathcal{J}_{E_i} X, Y\right)\\ &= \sum_{i=1}^{n} g(\mathcal{J}_{E_i} X, Y) = \sum_{i=1}^{n} g(\mathcal{R}(X, E_i)E_i, Y) = \sum_{i=1}^{n} R(X, E_i, E_i, Y)\\ &= \sum_{i=1}^{n} (-R(E_i, X, E_i, Y)) = \sum_{i=1}^{n} R(E_i, X, Y, E_i).\end{aligned}$$

Закључујемо да је $(\mathrm{Ric}^\sharp(X))^\flat = ((\mathcal{J}_{E_1} + \ldots + \mathcal{J}_{E_n})(X))^\flat$, а како је $\flat$ инјективно пресликавање, то повлачи да је $\mathrm{Ric}^\sharp(X) = (\mathcal{J}_{E_1} + \ldots + \mathcal{J}_{E_n})(X)$, односно $\mathrm{Ric}^\sharp = \mathcal{J}_{E_1} + \ldots + \mathcal{J}_{E_n}$. □

Лема 3.9. *Сваки Риманов Јакоби-дуалан алгебарски тензор кривине је Ајнштајнов.*

Доказ. На основу Леме 3.7 за произвољан јединични вектор $E_1 \in \mathcal{V}$ постоји ортонормирана сопствена база $(E_1, \ldots, E_n)$ за простор са позитивно дефинитним скаларним производом $(\mathcal{V}, g)$ у односу на Јакобијев оператор $\mathcal{J}_{E_1}$, те постоје $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ који зависе од E_1, тако да $\mathcal{J}_{E_1} E_i = \lambda_i E_i$ важи за $i \in \{1, \ldots, n\}$, а тада је $\mathrm{Tr}\, \mathcal{J}_{E_1} = \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n$. На основу Леме 3.8 имамо да је $\mathrm{Ric}^\sharp = \mathcal{J}_{E_1} + \cdots + \mathcal{J}_{E_n}$, а како је алгебарски тензор кривине R Јакоби-дуалан, то из $\mathcal{J}_{E_1} E_i = \lambda_i E_i$ следи да је $\mathcal{J}_{E_i} E_1 = \lambda_i E_1$ за $i \in \{1, \ldots, n\}$, одакле закључујемо да је $\mathrm{Ric}^\sharp(E_1) = (\mathcal{J}_{E_1} + \cdots + \mathcal{J}_{E_n})E_1 = (\lambda_1 + \cdots + \lambda_n)E_1$. Како је јединични вектор E_1 био произвољан, следи да је сваки јединични вектор $E_1 \in \mathcal{V}$ сопствени вектор оператора $\mathrm{Ric}^\sharp$, одакле рескалирањем добијамо да је сваки ненула вектор из $\mathcal{V}$ сопствени вектор линеарног оператора $\mathrm{Ric}^\sharp$, те су на основу Леме А.2 све сопствене вредности оператора $\mathrm{Ric}^\sharp$ исте, што повлачи да је $\lambda_1 + \cdots + \lambda_n$ константно. Прецизније, ако је X ненула вектор, онда за јединични вектор $X/\sqrt{\varepsilon_X}$ важи да је $\operatorname{Tr}\mathcal{J}_{X/\sqrt{\varepsilon_X}} = \lambda_1 + \ldots + \lambda_n$, те на основу (2.3) закључујемо да је

$$\operatorname{Tr}\mathcal{J}_X = \operatorname{Tr}\mathcal{J}_{\sqrt{\varepsilon_X}\cdot\frac{X}{\sqrt{\varepsilon_X}}} = \operatorname{Tr}\left(\varepsilon_X\mathcal{J}_{\frac{X}{\sqrt{\varepsilon_X}}}\right) = \varepsilon_X\cdot\operatorname{Tr}\mathcal{J}_{\frac{X}{\sqrt{\varepsilon_X}}} = \varepsilon_X\cdot(\lambda_1+\ldots+\lambda_n).$$

Додатно, за нула вектор важи да је $\operatorname{Tr}\mathcal{J}_0 = \varepsilon_0\cdot(\lambda_1+\ldots+\lambda_n)$ јер је $0=0$, те је за свако $X\in\mathcal{V}$ испуњено $\operatorname{Tr}\mathcal{J}_X = \varepsilon_X\cdot(\lambda_1+\ldots+\lambda_n)$, при чему је $\lambda_1+\ldots+\lambda_n$ константа, што по дефиницији значи да је R 1-штајн, а онда је на основу Леме 3.2 R Ајнштајнов. ☐

Штавише, испоставља се да Јакоби-дуалност карактерише Риманове Осермановe тензоре, што су доказали (коришћењем теорије пертурбација) Николајевски и Ракић 2013. године (видети [57, 58]).

Теорема 3.10. *Риманов алгебарски тензор кривине је Осерманов ако и само ако је Јакоби-дуалан.*

Уопштења принципа дуалности у псеудо-Римановом случају (видети [10, 11]) су дата помоћу импликације

$$\mathcal{J}_X Y = \varepsilon_X\lambda Y \implies \mathcal{J}_Y X = \varepsilon_Y\lambda X, \tag{3.8}$$

за неко $\lambda\in\mathbb{R}$.

Ако (3.8) важи за све међусобно ортогоналне јединичне $X, Y\in\mathcal{V}$ кажемо да је R ***слабо Јакоби-дуалан***, а ако (3.8) важи за све $X, Y\in\mathcal{V}$ са ограничењем $\varepsilon_X\neq 0$, кажемо да је R ***Јакоби-дуалан***. Ако (3.8) важи за све $X, Y\in\mathcal{V}$ кажемо да је R ***потпуно Јакоби-дуалан***.

Приметимо да се доказ да је алгебарски тензор кривине R слабо Јакоби-дуалан може спровести тако што се за међусобно ортогоналне јединичне векторе X и Y докаже импликација: ако је $Y\in\mathcal{V}$ сопствени вектор за $\mathcal{J}_X$, односно $\mathcal{J}_X Y = \varepsilon_X\lambda Y$ за неко $\lambda\in\mathbb{R}$, онда је X сопствени вектор за $\mathcal{J}_Y$. Заиста, ако би било $\mathcal{J}_Y X = \varepsilon_Y\mu X$ за неко $\mu\in\mathbb{R}$, онда би на основу услова компатибилности (2.5) важило $g(\mathcal{J}_Y X, X) = g(\mathcal{J}_X Y, Y)$, те би $g(\varepsilon_Y\mu X, X) = g(\varepsilon_X\lambda Y, Y)$, односно $\mu\varepsilon_Y\varepsilon_X = \lambda\varepsilon_X\varepsilon_Y$, одакле због дефинитности вектора X и Y следи је $\mu=\lambda$, односно $\mathcal{J}_Y X = \varepsilon_Y\lambda X$, те је R по дефиницији слабо Јакоби-дуалан.

Такође, доказ да је алгебарски тензор кривине R Јакоби-дуалан може се спровести тако што се за дефинитан вектор X докаже импликација: ако је $Y\in\mathcal{V}$ сопствени вектор за $\mathcal{J}_X$, односно $\mathcal{J}_X Y = \varepsilon_X\lambda Y$ за неко $\lambda\in\mathbb{R}$, онда је X

сопствени вектор за $\mathcal{J}_Y$. Заиста, ако би било $\mathcal{J}_Y X = \varepsilon_Y \mu X$ за неко $\mu \in \mathbb{R}$, онда би на основу услова компатибилности (2.5) важило $g(\mathcal{J}_Y X, X) = g(\mathcal{J}_X Y, Y)$, те би $g(\varepsilon_Y \mu X, X) = g(\varepsilon_X \lambda Y, Y)$, односно $\mu\varepsilon_Y\varepsilon_X = \lambda\varepsilon_X\varepsilon_Y$, одакле због дефинитности X следи је $\mu\varepsilon_Y = \lambda\varepsilon_Y$. Ако је $\varepsilon_Y \neq 0$, онда одмах следи $\mu = \lambda$, односно $\mathcal{J}_Y X = \varepsilon_Y \lambda X$. Ако је $\varepsilon_Y = 0$, онда је $\mathcal{J}_Y X = \varepsilon_Y \mu X = 0$, те је тачно и да је $\mathcal{J}_Y X = \varepsilon_Y \lambda X$ јер је десна страна једнакости једнака 0. У оба случаја смо извели да је $\mathcal{J}_Y X = \varepsilon_Y \lambda X$, те је R по дефиницији Јакоби-дуалан.

Како импликација (3.8) тривијално важи за $X = 0$, то је у доказивању да је R потпуно Јакоби-дуалан довољно проверити да импликација важи за $X \neq 0$. Доказ да је алгебарски тензор кривине R потпуно Јакоби-дуалан може се спровести тако што се за ненула вектор X докаже импликација: ако је $Y \in \mathcal{V}$ сопствени вектор за $\mathcal{J}_X$, односно $\mathcal{J}_X Y = \varepsilon_X \lambda Y$ за неко $\lambda \in \mathbb{R}$, онда је X сопствени вектор за $\mathcal{J}_Y$. Заиста, докажимо то тако што ћемо размотрити два случаја у зависности од тога да ли је ненула вектор X дефинитан или изотропан вектор. Ако је X дефинитан и ако би било $\mathcal{J}_Y X = \varepsilon_Y \mu X$ за неко $\mu \in \mathbb{R}$, онда би на основу услова компатибилности (2.5) важило $g(\mathcal{J}_Y X, X) = g(\mathcal{J}_X Y, Y)$, те би $g(\varepsilon_Y \mu X, X) = g(\varepsilon_X \lambda Y, Y)$, односно $\mu\varepsilon_Y\varepsilon_X = \lambda\varepsilon_X\varepsilon_Y$. Како је X дефинитан, следи да је $\mu\varepsilon_Y = \lambda\varepsilon_Y$. Ако је $\varepsilon_Y \neq 0$ онда одмах следи $\mu = \lambda$, односно $\mathcal{J}_Y X = \varepsilon_Y \lambda X$. Ако је $\varepsilon_Y = 0$, онда је $\mathcal{J}_Y X = \varepsilon_Y \mu X = 0$, те је тачно и да је $\mathcal{J}_Y X = \varepsilon_Y \lambda X$ јер је десна страна једнакости једнака 0. Ако је X изотропан, онда је $\mathcal{J}_X Y = \varepsilon_X \lambda Y = 0 = \varepsilon_X \mu Y$, а како је $\mathcal{J}_Y X = \varepsilon_Y \mu X$, то важи импликација (3.8). У свим случајевима смо извели да важи импликација (3.8), те је R по дефиницији потпуно Јакоби-дуалан.

Дакле, у дефиницији различитих врста Јакоби-дуалности импликацију (3.8) можемо заменити импликацијом: Ако је Y сопствени вектор оператора $\mathcal{J}_X$, онда је X сопствени вектор оператора $\mathcal{J}_Y$.

Видели смо да је Јакобијев оператор самоадјунговани оператор на простору са скаларним производом $(\mathcal{V}, g)$, те је на основу Леме А.6 дијагонализабилан када је g дефинитна форма. Али, ово не мора бити тачно када је g недефинитна форма и зато уводимо следећу дефиницију.

Кажемо да је алгебарски тензор кривине R ***Јакоби-дијагонализабилан*** ако је $\mathcal{J}_X$ дијагонализабилан за сваки дефинитан вектор X. Тада важи

$$\mathcal{V} = \mathrm{Span}\{X\} \oplus \bigoplus_{l=1}^{k} \mathrm{Ker}(\widetilde{\mathcal{J}}_X - \varepsilon_X \lambda_l \,\mathrm{Id}), \tag{3.9}$$

где су $\varepsilon_X\lambda_1, ..., \varepsilon_X\lambda_k$ све сопствене вредности од $\widetilde{\mathcal{J}}_X$ и $\oplus$ означава директну ортогоналну суму. Заправо, сопствена структура $\mathcal{J}_X$ је одређена помоћу Жорданове нормалне форме (бројем и величином Жорданових блокова).

Ако је R Јакоби-дијагонализабилан, довољно је доказати да је слабо Јакоби-дуалан да би био Јакоби-дуалан што следи из следеће леме (видети [2, 10]).

Лема 3.11. *Сваки Јакоби-дијагонализабилан алгебарски тензор кривине на простору са скаларним производом је Јакоби-дуалан ако и само ако је слабо Јакоби-дуалан.*

Николајевски и Ракић су у [58] доказали Теорему 2 на основу које је услов да је R Јакоби-дијагонализабилан довољан да обезбеди еквивалентност између Осермановог и Јакоби-дуалног својства у псеудо-Римановом случају и у наставку наводимо дефиницију и две леме које нам помажу да дамо скицу тог доказа.

Нека је R алгебарски тензор кривине на простору са скаларним производом $(\mathcal{V}, g)$. Ако за $X \in \mathcal{V}$ постоји околина $\mathcal{U}$ вектора X у простору са скаларним производом $(\mathcal{V}, g)$ који је опремљен топологијом Зариског[7] (видети [39]) таква да за свако $Y \in \mathcal{U}$, број и величина Жорданових блокова у Жордановој нормалној форми, као и број различитих сопствених вредности од $\mathcal{J}_Y$ је исти као од $\mathcal{J}_X$ (при чему рачунамо и комплексне сопствене вредности), онда кажемо да је вектор X ***генерички***.

Наредну лему о скупу генеричких вектора доказали су Николајевски и Ракић 2016. године [58, Лема 1].

Лема 3.12. *Ако је R алгебарски тензор кривине на простору са скаларним производом $(\mathcal{V}, g)$, онда је скуп генеричких вектора отворен и густ у $\mathcal{V}$.*

Доказ наредне леме (видети [58, Лема 2]) следи из тога што за генеричко X, сопствене вредности од $\mathcal{J}_X$ и њихови одговарајући сопствени простори, посматрани као тачке одговарајућих Грасманијана (диференцијабилне многострукости које параметризују скуп линеарних потпростора векторског простора $\mathcal{V}$ који су одговарајуће димензије), зависе глатко на координатама од X (погледати Като[8][43]).

Лема 3.13. *Нека је R алгебарски тензор кривине на простору са скаларним производом $(\mathcal{V}, g)$ и $X \in \mathcal{V}$ генерички такав да $\mathcal{J}_X(E) = \mu E$ важи за неко*

---

[7] Oscar Zariski (1899–1986), руско-амерички математичар

[8] Tosio Kato (1917–1999), јапански математичар

$\mu \in \mathbb{R}$ и $E \in \mathcal{V}$. Тада на околини $\mathcal{U}$ од X у $\mathcal{V}$ постоје глатка пресликавања $e\colon \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ и $f\colon \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ таква да је $e(X) = \mu$, $f(X) = E$ и да за свако $Y \in \mathcal{U}$ важи $\mathcal{J}_Y f(Y) = e(Y)f(Y)$.

Посматрамо околину $\mathcal{U}$ генеричког $X \in \mathcal{V}$ и пресликавања e и f која постоје на основу Леме 3.13. Нека је $W \in \mathcal{V}$ произвољан вектор и $Z\colon (-\delta, \delta) \to \mathcal{U}$ глатка крива таква да је $Z(0) = X$ и $Z'(0) = W$. Тада је

$$\begin{aligned} R(f(Z(t)), Z(t), Z(t), f(Z(t))) &= g(\mathcal{J}_{Z(t)} f(Z(t)), f(Z(t))) \\ &= g(e(Z(t))f(Z(t)), f(Z(t))) = e(Z(t))\varepsilon_{f(Z(t))}. \end{aligned}$$

Диференцирањем претходне једначине у $t = 0$ лева страна једнакости се коришћењем $\mathbb{Z}_2$ симетрија трансформише у

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt} R(f(Z(t)), Z(t), Z(t), f(Z(t)))\Big|_{t=0} \\ =&\Big(R\Big(\frac{d}{dt} f(Z(t)), Z(t), Z(t), f(Z(t))\Big) + R\Big(f(Z(t)), \frac{d}{dt} Z(t), Z(t), f(Z(t))\Big) \\ &\quad + R\Big(f(Z(t)), Z(t), \frac{d}{dt} Z(t), f(Z(t))\Big) + R\Big(f(Z(t)), Z(t), Z(t), \frac{d}{dt} f(Z(t))\Big)\Big)\Big|_{t=0} \\ =&2\Big(R\Big(f(Z(t)), Z(t), Z(t), \frac{d}{dt} f(Z(t))\Big) + R\Big(Z(t), f(Z(t)), f(Z(t)), \frac{d}{dt} Z(t)\Big)\Big)\Big|_{t=0} \\ =&2g\Big(\mathcal{J}_{Z(t)} f(Z(t)), \frac{d}{dt} f(Z(t))\Big)\Big|_{t=0} + 2g\Big(\mathcal{J}_{f(Z(t))} Z(t), \frac{d}{dt} Z(t)\Big)\Big|_{t=0} \\ =&2g\Big(e(Z(t))f(Z(t)), \frac{d}{dt} f(Z(t))\Big)\Big|_{t=0} + 2g(\mathcal{J}_{f(Z(0))} Z(0), Z'(0)) \\ =&2e(Z(0))g\Big(f(Z(t)), \frac{d}{dt} f(Z(t))\Big)\Big|_{t=0} + 2g(\mathcal{J}_{f(X)} X, W) \\ =&e(X)\left(g\Big(f(Z(t)), \frac{d}{dt} f(Z(t))\Big) + g\Big(\frac{d}{dt} f(Z(t)), f(Z(t))\Big)\right)\Big|_{t=0} + 2g(\mathcal{J}_{f(X)} X, W) \\ =&\mu \frac{d}{dt} g(f(Z(t)), f(Z(t)))\Big|_{t=0} + 2g(\mathcal{J}_E X, W) = \mu \frac{d}{dt} \varepsilon_{f(Z(t))}\Big|_{t=0} + 2g(\mathcal{J}_E X, W), \end{aligned}$$

док се десна страна једнакости трансформише у

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} e(Z(t))\varepsilon_{f(Z(t))}\Big|_{t=0} &= e(Z(0)) \frac{d}{dt} \varepsilon_{f(Z(t))}\Big|_{t=0} + \frac{d}{dt} e(Z(t))\Big|_{t=0} \cdot \varepsilon_{f(Z(0))} \\ &= e(X) \frac{d}{dt} \varepsilon_{f(Z(t))}\Big|_{t=0} + \varepsilon_{f(X)} \frac{d}{dt} e(Z(t))\Big|_{t=0} = \mu \frac{d}{dt} \varepsilon_{f(Z(t))}\Big|_{t=0} + \varepsilon_E \frac{d}{dt} e(Z(t))\Big|_{t=0}. \end{aligned}$$

Одатле након скраћивања првог сабирка на основу ланчаног правила следи

$$2g(\mathcal{J}_E X, W) = \varepsilon_E \frac{d}{dt} e(Z(t))\Big|_{t=0} = \varepsilon_E T_0(e \circ Z) = \varepsilon_E T_{Z(0)} e \circ T_0 Z,$$

што повлачи

$$2g(\mathcal{J}_E X, W) = \varepsilon_E (T_X e)(W). \tag{3.10}$$

Како је скуп свих вектора квадратне норме 0 затворен, то можемо рестриковати $\mathcal{U}$ на дефинитне векторе и посматрати глатко пресликавање $h\colon \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ дефинисано помоћу $e(Y) = \varepsilon_Y h(Y)$. Важи да је

$$(T_X\varepsilon)(W) = (T_X\varepsilon)(Z'(0)) = \frac{d}{dt}\varepsilon_{Z(t)}\Big|_{t=0} = 2g\left(Z(t), \frac{d}{dt}Z(t)\right)\Big|_{t=0} = 2g(X,W)$$

и $T_X e = T_X(\varepsilon h) = \varepsilon_X T_X h + h(X) T_X \varepsilon$, те једначина (3.10) даје

$$\begin{aligned} 2g(\mathcal{J}_E X, W) &= \varepsilon_E(\varepsilon_X T_X h + h(X) T_X \varepsilon)(W) \\ &= \varepsilon_E \varepsilon_X (T_X h)(W) + 2\varepsilon_E h(X) g(X,W). \end{aligned} \tag{3.11}$$

Користећи претходно извођење, у наставку дајемо скицу доказа поменуте битне теореме Николајевског и Ракића која се може пронаћи у [58] и [6].

Теорема 3.14. *Сваки Јакоби-дијагонализабилан алгебарски тензор кривине на простору са скаларним производом* $(\mathcal{V}, g)$ *је Осерманов ако и само ако је Јакоби-дуалан.*

Доказ. Претпостављамо да је алгебарски тензор кривине R Јакоби-дијагонализабилан и Осерманов. Тада је R временски (просторно) Жордан-Осерманов јер су за сваки јединичан временски (просторни) вектор из $\mathcal{V}$ сви Жорданови блокови у Жордановој нормалној форми одговарајућег Јакобијевог оператора величине 1×1, а сопствене вредности су исте јер је R временски (просторно) Осерманов. Зато је R Жордан-Осерманов. Приметимо да је сваки дефинитан вектор $X \in \mathcal{V}$ генерички јер је скуп свих вектора квадратне норме 0 затворен, те можемо рестриковати околину вектора X на дефинитне векторе и искористити да је R Жордан-Осерманов. Циљ нам је да докажемо да је R Јакоби-дуалан, те претпостављамо да за дефинитан вектор $X \in \mathcal{V}$ важи $\mathcal{J}_X E = \mu E$ за неко $\mu \in \mathbb{R}$ и $E \in \mathcal{V}$. Како је дефинитан вектор X генерички, то на основу Леме 3.13 имамо околину $\mathcal{U}$ од X у $\mathcal{V}$ (састављену од дефинитних вектора) и постоје глатка пресликавања $e\colon \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ и $f\colon \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ таква да важи $e(X) = \mu$, $f(X) = E$ и да је за свако $Y \in \mathcal{U}$ испуњено $\mathcal{J}_Y f(Y) = e(Y) f(Y)$. Посматрајмо глатко пресликавање $h\colon \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ дефинисано помоћу $e(Y) = \varepsilon_Y h(Y)$. Користећи да је R Осерманов, закључујемо да су сопствене вредности од $\mathcal{J}_Y$ константе на $\varepsilon_Y = \mathrm{Const}$ и да је $h(Y) = \mathrm{Const} = h(X) = e(X)/\varepsilon_X = \mu/\varepsilon_X$, те је $h(Y) = \mathrm{Const}$

за свако $Y \in \mathcal{U}$, те за тангентно пресликавање важи $T_X h = 0$, одакле на основу (3.11) следи да је за свако $W \perp X$ испуњено $g(\mathcal{J}_E X, W) = 0$. На основу Леме 1.1 следи да је $\mathrm{Span}\{X\}$ недегенерисан јер је X дефинитан, те на основу Леме 1.6 важи да је $\mathcal{V} = \mathrm{Span}\{X\} + (\mathrm{Span}\{X\})^{\perp}$, односно $\mathcal{J}_E X \in \mathrm{Span}\{X\}$, те је X сопствени вектор од $\mathcal{J}_E$, одакле закључујемо да је R Јакоби-дуалан.

Обратно, претпостављамо да је алгебарски тензор кривине R Јакоби-дијагонализабилан Јакоби-дуалан. Тада скуп S свих вектора $X \in \mathcal{V}$ за које је $\mathcal{J}_X$ дијагонализабилан садржи све дефинитне векторе због претпоставке да је R Јакоби-дијагонализабилан. На основу Леме 3.12 постоји отворен $\mathcal{U} \subseteq S$ који се састоји од дефинитних генеричких вектора. Посматрамо $X \in \mathcal{U}$. Како је X дефинитан, то је $\mathcal{J}_X$ дијагонализабилан, те за сваку сопствену вредност μ постоји дефинитан вектор E такав да је $\mathcal{J}_X(E) = \mu E$. Применом Леме 3.13 добијамо да на околини $\mathcal{U}$ од X у $\mathcal{V}$ постоје глатка пресликавања $e\colon \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ и $f\colon \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ таква да је $e(X) = \mu$, $f(X) = E$ и да за свако $Y \in \mathcal{U}$ важи $\mathcal{J}_Y f(Y) = e(Y) f(Y)$. Нека је $h\colon \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ глатко пресликавање дефинисано помоћу $e(Y) = \varepsilon_Y h(Y)$. Тада је за $X \in \mathcal{U}$ испуњено $e(X) = \varepsilon_X h(X)$, односно $\mu = \varepsilon_X h(X)$. Како је $\mathcal{J}_X E = \mu E = \varepsilon_X(\mu/\varepsilon_X)E = \varepsilon_X h(X) E$, то на основу претпоставке да је R Јакоби-дуалан закључујемо да је $\mathcal{J}_E X = \varepsilon_E h(X) X$, одакле користећи (3.11) добијамо да важи $2g(\varepsilon_E h(X) X, W) = \varepsilon_E \varepsilon_X (T_X h)(W) + 2\varepsilon_E h(X) \cdot 0$ за $X \perp W$, односно $0 = \varepsilon_E \varepsilon_X (T_X h)(W)$, као и $2g(\varepsilon_E h(X) X, \alpha X) = \varepsilon_E \varepsilon_X (T_X h)(\alpha X) + 2\varepsilon_E h(X) g(X, \alpha X)$, односно $0 = \varepsilon_E \varepsilon_X (T_X h)(\alpha X)$. Како је $\mathrm{Span}\{X\}$ недегенерисан на основу Леме 1.1 јер је X дефинитан, а важи $\mathcal{V} = \mathrm{Span}\{X\} + (\mathrm{Span}\{X\})^{\perp}$ на основу Леме 1.6, то је $\varepsilon_E \varepsilon_X (T_X h)(W) = 0$ за свако $W \in \mathcal{V}$, те како су вектори X и E дефинитни следи да је $T_X h = 0$. Одавде је $T_X h = 0$ за свако $X \in \mathcal{U}$, те последично и за свако $X \in \mathcal{V}$, одакле је $h = \mathrm{Const}$, што значи да је R Осерманов. $\square$

Како је на основу Леме А.6 сваки Риманов алгебарски тензор кривине Јакоби-дијагонализабилан, онда је на основу претходне теореме Риманов алгебарски тензор кривине Осерманов ако и само ако је Јакоби-дуалан, те добијамо Теорему 3.10.

3.3 Квази-Клифордови тензори

Клифордови тензори (видети [32, 37, 13]) су значајни за проучавање Осермanових тензора. У раду [11] је доказано да су Клифордови тензори на простору са скаларним производом Јакоби-дуални. У овом поглављу представљамо уопштење Клифордових тензора, а то су квази-Клифордови тензори који су уведени у раду [7] и ту се могу наћи тврђења која наводимо у овом поглављу.

Квази-Клифордова фамилија ранга m је антикомутативна фамилија косоадјунгованих ендоморфизама J_i, за $i \in \{1, \dots, m\}$, таквих да је $J_i^2 = c_i \,\mathrm{Id}$, за $c_i \in \mathbb{R}$. Другим речима, квази-Клифордова фамилија задовољава релације Хурвицовог[9] типа, $J_iJ_j + J_jJ_i = 2\delta_{ij}c_i \,\mathrm{Id}$, за $i, j \in \{1, \dots, m\}$. Кажемо да је алгебарски тензор кривине R ***квази-Клифордов*** ако је

$$R = \mu_0 R^1 + \sum_{i=1}^{m} \mu_i R^{J_i}, \tag{3.12}$$

за неке $\mu_0, \dots, \mu_m \in \mathbb{R}$, где J_i, за $i \in \{1, \dots, m\}$, чине придружену квази-Клифордову фамилију. Посебно, квази-Клифордов R је ***Клифордов*** ако је $c_i = -1$ за свако $i \in \{1, \dots, m\}$.

У наредној леми израчунавамо Јакобијев оператор квази-Клифордовог алгебарског тензора кривине на простору са скаларним производом.

Лема 3.15. *За X из простора са скаларним производом $(\mathcal{V}, g)$ Јакобијев оператор $\mathcal{J}_X$ квази-Клифордовог алгебарског тензора кривине на $\mathcal{V}$ облика* (3.12) *износи $\mathcal{J}_X Y = \mu_0(\varepsilon_X Y - g(Y, X)X) - 3\sum_{i=1}^{m} \mu_i g(Y, J_iX)J_iX$, за свако $Y \in \mathcal{V}$.*

Доказ. Користећи да је $\mathcal{R} = R^\sharp$ из $R = \mu_0 R^1 + \sum_{i=1}^{m} \mu_i R^{J_i}$ закључујемо да је $\mathcal{R} = \mu_0\mathcal{R}^1 + \sum_{i=1}^{m} \mu_i \mathcal{R}^{J_i}$, при чему је $\mathcal{R}^1(X, Y)Z = g(Y, Z)X - g(X, Z)Y$ и

$$\mathcal{R}^{J_i}(X, Y)Z = g(J_iX, Z)J_iY - g(J_iY, Z)J_iX + 2g(J_iX, Y)J_iZ.$$

Како је по дефиницији квази-Клифордове фамилије за свако $i \in \{1, \dots, m\}$ оператор J_i косоадјунгован, то је $g(J_iY, X) = -g(Y, J_iX)$ и $g(J_iX, X) = -g(X, J_iX)$, односно $g(J_iX, X) = 0$, те израчунавамо Јакобијев оператор

$$\begin{aligned}\mathcal{J}_X Y =&\mathcal{R}(Y, X)X = \left(\mu_0\mathcal{R}^1 + \sum_{i=1}^{m} \mu_i \mathcal{R}^{J_i}\right)(Y, X)X \\ =&\mu_0\mathcal{R}^1(Y, X)X + \sum_{i=1}^{m} \mu_i \mathcal{R}^{J_i}(Y, X)X = \mu_0(g(X, X)Y - g(Y, X)X) \\ &+ \sum_{i=1}^{m} \mu_i(g(J_iY, X)J_iX - g(J_iX, X)J_iY + 2g(J_iY, X)J_iX) \\ =&\mu_0(\varepsilon_X Y - g(Y, X)X) + 3\sum_{i=1}^{m} \mu_i g(J_iY, X)J_iX,\end{aligned}$$

---

[9] Adolf Hurwitz (1859–1919), немачки математичар

односно

$$\mathcal{J}_X Y = \mu_0(\varepsilon_X Y - g(Y,X)X) - 3\sum_{i=1}^{m} \mu_i g(Y, J_i X) J_i X. \tag{3.13}$$

□

Добро је познато да је сваки Клифордов тензор Осерманов, а у [7] је доказано да је сваки квази-Клифордов алгебарски тензор кривине Осерманов.

Теорема 3.16. *Сваки квази-Клифордов тензор на простору са скаларним производом је Осерманов.*

Доказ. Нека је R квази-Клифордов алгебарски тензор кривине облика (3.12), $X \in \mathcal{V}$ дефинитан вектор и $\mathcal{F}_t = \{X, J_1 X, \dots, J_t X\}$ за $t \in \{1, \dots, m\}$. Из $J_i J_j + J_j J_i = 2\delta_{ij} c_i \operatorname{Id}$ следи да за $1 \leqslant i \neq j \leqslant n$ важи $J_i J_j = -J_j J_i$, те због косоадјунгованости оператора J_i и J_j, као и симетричности форме g важи

$$g(J_i X, J_j X) = -g(X, J_i J_j X) = g(X, J_j J_i X) = -g(J_j X, J_i X) = -g(J_i X, J_j X),$$

одакле је $g(J_i X, J_j X) = 0$, а на основу $J_i^2 = c_i \operatorname{Id}$ и билинеарности форме g је

$$\varepsilon_{J_i X} = g(J_i X, J_i X) = -g(X, J_i^2 X) = -g(X, c_i \operatorname{Id} X) = -c_i g(X,X) = -c_i \varepsilon_X.$$

Одавде, користећи Лему (3.15) и да косоадјунгованост оператора J_i повлачи да је $g(J_i X, X) = 0$, добијамо да за све $1 \leqslant i \leqslant m$ важи

$$\begin{aligned}
\mathcal{J}_X(J_i X) &= \mu_0(\varepsilon_X J_i X - g(J_i X, X)X) - 3\sum_{j=1}^{m} \mu_j g(J_i X, J_j X) J_j X \\
&= \mu_0(\varepsilon_X J_i X - 0 \cdot X) - 3\sum_{j=1, j\neq i}^{m} \mu_j g(J_i X, J_j X) J_j X - 3\mu_i g(J_i X, J_i X) J_i X \\
&= \mu_0 \varepsilon_X J_i X - 3\sum_{j=1, j\neq i}^{m} \mu_j \cdot 0 \cdot J_j X - 3\mu_i \varepsilon_{J_i X} J_i X \\
&= \mu_0 \varepsilon_X J_i X + 3\mu_i c_i \varepsilon_X J_i X = \varepsilon_X(\mu_0 + 3c_i\mu_i) J_i X,
\end{aligned}$$

а за $Z \in \mathcal{F}_m^{\perp} = (\operatorname{Span} \mathcal{F}_m)^{\perp}$, важи да је

$$\begin{aligned}
\mathcal{J}_X Z &= \mu_0(\varepsilon_X Z - g(Z,X)X) - 3\sum_{j=1}^{m} \mu_j g(Z, J_j X) J_j X \\
&= \mu_0(\varepsilon_X Z - 0 \cdot X) - 3\sum_{j=1}^{m} \mu_j \cdot 0 \cdot J_j X = \varepsilon_X \mu_0 Z.
\end{aligned}$$

То значи да би ненула J_iX били сопствени вектори који одговарају сопственој вредности $\varepsilon_X(\mu_0 + 3c_i\mu_i)$ за $i \in \{1, \dots, m\}$, а ненула Z је сопствени вектор који одговара сопственој вредности $\varepsilon_X\mu_0$ (по дефиницији сопствени вектор је различит од нула вектора). Да бисмо груписали исте сопствене вредности, без умањења општости претпостављамо да су константе c_i из дефиниције квази--Клифордове фамилије такве да је $c_i \neq 0$ за $1 \leqslant i \leqslant k$, а за $k < i \leqslant m$ је $c_i = 0$, при чему $k \in \{0, \dots, m\}$. Приметимо да се скуп $\mathcal{F}_k = \{X, J_1X, \dots, J_kX\}$ састоји од међусобно ортогоналних дефинитних вектора јер смо већ доказали да је $g(X, J_iX) = 0$, $g(J_iX, J_jX) = 0$ за $1 \leqslant i \neq j \leqslant k$ и да је $\varepsilon_{J_iX} = -c_i\varepsilon_X$ што није 0 за $i \in \{1, \dots, k\}$. Зато је Грамова матрица форме $g\restriction_{\operatorname{Span}\mathcal{F}_k}$ инвертибилна, те је на основу Леме 1.1 $\operatorname{Span}\mathcal{F}_k$ недегенерисан, одакле је на основу Леме 1.6 и $\mathcal{F}_k^\perp = (\operatorname{Span}\mathcal{F}_k)^\perp$ недегенерисан. Са друге стране, вектори из $\mathcal{F}_m \setminus \mathcal{F}_k$ су такви да је $\varepsilon_{J_iX} = -c_i\varepsilon_X = 0$ за $k < i \leqslant m$, те је $\operatorname{Span}(\mathcal{F}_m \setminus \mathcal{F}_k)$ потпуно изотропан простор. Приметимо да је

$$\mathcal{F}_k^\perp \cap (\operatorname{Span}(\mathcal{F}_m \setminus \mathcal{F}_k))^\perp \leqslant \operatorname{Ker}(\mathcal{J}_X\restriction_{\mathcal{F}_k^\perp} - \varepsilon_X\mu_0 \operatorname{Id}) \leqslant \operatorname{Ker}((\mathcal{J}_X\restriction_{\mathcal{F}_k^\perp} - \varepsilon_X\mu_0 \operatorname{Id})^n)$$

јер су вектори из $\mathcal{F}_k^\perp \cap (\operatorname{Span}(\mathcal{F}_m \setminus \mathcal{F}_k))^\perp$ ортогонални на векторе из $\mathcal{F}_k$, као и на векторе из $\mathcal{F}_m \setminus \mathcal{F}_k$, те су ортогонални на све векторе из $\mathcal{F}_m$, те припадају $\mathcal{F}_m^\perp$, а ту су нула вектор и сопствени вектори за Јакобијев оператор $\mathcal{J}_X$ који одговарају сопственој вредности $\varepsilon_X\mu_0$, те су вектори из $\mathcal{F}_k^\perp \cap (\operatorname{Span}(\mathcal{F}_m \setminus \mathcal{F}_k))^\perp$ нула вектор и сопствени вектори за Јакобијев оператор $\mathcal{J}_X\restriction_{\mathcal{F}_k^\perp}$ који одговарају сопственој вредности $\varepsilon_X\mu_0$. Одатле на основу Лема 1.4 и 1.3 следи да је

$$\mathcal{F}_k^\perp \cap (\operatorname{Ker}(\mathcal{J}_X\restriction_{\mathcal{F}_k^\perp} - \varepsilon_X\mu_0 \operatorname{Id})^n)^\perp \leqslant ((\operatorname{Span}(\mathcal{F}_m \setminus \mathcal{F}_k))^\perp)^\perp = \operatorname{Span}(\mathcal{F}_m \setminus \mathcal{F}_k).$$

На основу Леме А.8 уопштени сопствени потпростор $\operatorname{Ker}(\mathcal{J}_X\restriction_{\mathcal{F}_k^\perp} - \varepsilon_X\mu_0 \operatorname{Id})^n$ је недегенерисан, одакле је на основу Леме 1.6 и $(\operatorname{Ker}(\mathcal{J}_X\restriction_{\mathcal{F}_k^\perp} - \varepsilon_X\mu_0 \operatorname{Id})^n)^\perp$ недегенерисан потпростор простора $\mathcal{F}_k^\perp$, те он може бити потпростор потпуно изотропног потпростора $\operatorname{Span}(\mathcal{F}_m \setminus \mathcal{F}_k) \subseteq \mathcal{F}_k^\perp$ само ако је тривијалан, те је $(\operatorname{Ker}(\mathcal{J}_X\restriction_{\mathcal{F}_k^\perp} - \varepsilon_X\mu_0 \operatorname{Id})^n)^\perp = \{0\}$, односно на основу Леме 1.6 закључујемо да је $\operatorname{Ker}(\mathcal{J}_X\restriction_{\mathcal{F}_k^\perp} - \varepsilon_X\mu_0 \operatorname{Id})^n = \mathcal{F}_k^\perp$. На основу Леме 1.6 је $\mathcal{F}_k \oplus \mathcal{F}_k^\perp = \mathcal{V}$, те је

$$\det\left(\lambda \operatorname{Id} - \frac{1}{\varepsilon_X}\mathcal{J}_X\right) = \lambda \cdot (\lambda - \mu_0)^{n-k-1} \prod_{i=1}^{k} (\lambda - (\mu_0 + 3c_i\mu_i)),$$

односно карактеристични полином не зависи од избора дефинитног вектора $X \in \mathcal{V}$, те је на основу Теореме 3.1 алгебарски тензор кривине R Осерманов.

□

Приметимо да се за $Y \in \mathcal{F}_k^\perp = (\operatorname{Span}\{X, J_1X, \dots, J_kX\})^\perp$ на основу формуле (3.13) добија

$$\begin{aligned}\mathcal{J}_X Y &= \mu_0(\varepsilon_X Y - g(Y,X)X) - 3\sum_{i=1}^{m} \mu_i g(Y, J_iX)J_iX \\ &= \mu_0\varepsilon_X Y - 3\sum_{i=k+1}^{m} \mu_i g(Y, J_iX)J_iX,\end{aligned}$$

те $\operatorname{Im}(\mathcal{J}_X\restriction_{\mathcal{F}_k^\perp} - \mu_0\varepsilon_X \operatorname{Id}) \subseteq \operatorname{Span}\{J_{k+1}X, \dots, J_mX\}$, а како важи да су вектори $J_{k+1}X, \dots, J_mX \in \mathcal{F}_k^\perp$ сопствени за оператор $\mathcal{J}_X$ који одговарају сопственој вредности $\mu_0\varepsilon_X$, то је $\operatorname{Span}\{J_{k+1}X, \dots, J_mX\} \subseteq \operatorname{Ker}(\mathcal{J}_X - \mu_0\varepsilon_X \operatorname{Id})$, одакле закључујемо да важи да је $\operatorname{Im}(\mathcal{J}_X\restriction_{\mathcal{F}_k^\perp} - \mu_0\varepsilon_X \operatorname{Id}) \subseteq \operatorname{Ker}(\mathcal{J}_X\restriction_{\mathcal{F}_k^\perp} - \mu_0\varepsilon_X \operatorname{Id})$, те је $(\mathcal{J}_X\restriction_{\mathcal{F}_k^\perp} - \mu_0\varepsilon_X \operatorname{Id})^2 = 0$. Одавде следи да квази-Клифордов алгебарски тензор кривине R не допушта Жорданове блокове величине веће од 2 јер се матрица у Жордановој нормалној форми квадрира тако што се квадрира сваки њен блок, а Жорданов блок величине бар 3×3 се квадрирањем не би поништио. Ово је разлог зашто обратно не важи, односно није тачно да је сваки Осерманов алгебарски тензор кривине квази-Клифордов јер у наставку дајемо пример тензора који је Осерманов и има Жорданов блок величине 3×3, те није квази-Клифордов.

Пример 3.1. У [31] се може наћи фамилија псеудо-Риманових многострукости (M, g), при чему је $M = \mathbb{R}^4$ и (x_1, x_2, x_3, x_4) су стандардне координате, а метрика g је задата помоћу одговарајуће Грамове матрице

$$G = \begin{pmatrix} x_3f_1 & a & 1 & 0 \\ a & x_4f_2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

у односу на стандардни глобални покретни репер $(\partial_1, \partial_2, \partial_3, \partial_4)$ за M, где су $f_1 = f_1(x_1, x_2)$ и $f_2 = f_2(x_1, x_2)$ глатке реалне функције које зависе само од x_1 и x_2, док $a \in \mathbb{R}$. За $f_1(x_1, x_2) = x_2$, $f_2(x_1, x_2) = -x_1$ и $a = 1$ је

$$G = \begin{pmatrix} x_2x_3 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -x_1x_4 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Како је ово специјалан случај Вокерове метрике из Примера 1.6, то је (M, g) псеудо-Риманова многострукост сигнатуре $(2, 2)$. Лако се израчунава да је инверзна матрица Грамове матрице G једнака

$$(g^{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -x_2x_3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & x_1x_4 \end{pmatrix}.$$

Одавде на основу Леме 1.17 можемо израчунати Кристофелов симбол

$$\begin{aligned}
\Gamma_{11}^{1} =& \frac{1}{2}\sum_{l=1}^{4} g^{l1}\left(\frac{\partial g_{1l}}{\partial x_1} + \frac{\partial g_{l1}}{\partial x_1} - \frac{\partial g_{11}}{\partial x_l}\right) \\
=& \frac{1}{2}\Bigg(g^{11}\left(\frac{\partial g_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial g_{11}}{\partial x_1} - \frac{\partial g_{11}}{\partial x_1}\right) + g^{21}\left(\frac{\partial g_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial g_{21}}{\partial x_1} - \frac{\partial g_{11}}{\partial x_2}\right) \\
&+ g^{31}\left(\frac{\partial g_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial g_{31}}{\partial x_1} - \frac{\partial g_{11}}{\partial x_3}\right) + g^{41}\left(\frac{\partial g_{14}}{\partial x_1} + \frac{\partial g_{41}}{\partial x_1} - \frac{\partial g_{11}}{\partial x_4}\right)\Bigg) \\
=& \frac{1}{2}\left(0 + 0 + 1\cdot\left(\frac{\partial}{\partial x_1}1 + \frac{\partial}{\partial x_1}1 - \frac{\partial}{\partial x_3}(x_2x_3)\right) + 0\right) = -\frac{1}{2}x_2,
\end{aligned}$$

а истим поступком се добијају и преостали ненула Кристофелови симболи

$$\begin{aligned}
&\Gamma_{11}^{3} = \frac{1}{2}x_2^2x_3, \quad \Gamma_{11}^{4} = -\frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{2}x_2, \quad \Gamma_{12}^{3} = \Gamma_{21}^{3} = \frac{1}{2}x_3, \\
&\Gamma_{12}^{4} = \Gamma_{21}^{4} = -\frac{1}{2}x_4, \quad \Gamma_{22}^{2} = \frac{1}{2}x_1, \quad \Gamma_{22}^{3} = \frac{1}{2}x_4 - \frac{1}{2}x_1, \\
&\Gamma_{22}^{4} = \frac{1}{2}x_1^2x_4, \quad \Gamma_{13}^{3} = \Gamma_{31}^{3} = \frac{1}{2}x_2, \quad \Gamma_{24}^{4} = \Gamma_{42}^{4} = -\frac{1}{2}x_1.
\end{aligned}$$

Користећи Лему 1.18 израчунавамо компоненту оператора кривине

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}(\partial_1, \partial_2)\partial_1 =& \sum_{l=1}^{4}\mathcal{R}_{121}^{l}\partial_l = \sum_{l=1}^{4}\left(\partial_1\Gamma_{21}^{l} - \partial_2\Gamma_{11}^{l} + \sum_{m=1}^{4}(\Gamma_{21}^{m}\Gamma_{1m}^{l} - \Gamma_{11}^{m}\Gamma_{2m}^{l})\right)\partial_l \\
=& \sum_{l=1}^{4}(\partial_1\Gamma_{21}^{l} - \partial_2\Gamma_{11}^{l} + \Gamma_{21}^{1}\Gamma_{11}^{l} - \Gamma_{11}^{1}\Gamma_{21}^{l} + \Gamma_{21}^{2}\Gamma_{12}^{l} - \Gamma_{11}^{2}\Gamma_{22}^{l} \\
&+ \Gamma_{21}^{3}\Gamma_{13}^{l} - \Gamma_{11}^{3}\Gamma_{23}^{l} + \Gamma_{21}^{4}\Gamma_{14}^{l} - \Gamma_{11}^{4}\Gamma_{24}^{l})\partial_l \\
=& \sum_{l=1}^{4}\Bigg(\partial_1\Gamma_{21}^{l} - \partial_2\Gamma_{11}^{l} + 0 + \frac{1}{2}x_2\Gamma_{21}^{l} + 0 - 0 + \frac{1}{2}x_3\Gamma_{13}^{l} - \frac{1}{2}x_2^2x_3\Gamma_{23}^{l} \\
&- \frac{1}{2}x_4\Gamma_{14}^{l} - \frac{1}{2}(-x_3 + x_2)\Gamma_{24}^{l}\Bigg)\partial_l = -\partial_2\left(-\frac{1}{2}x_2\right)\partial_1 + 0\cdot\partial_2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&+\left(\frac{1}{2}\partial_1 x_3 - \frac{1}{2}\partial_2(x_2^2 x_3) + \frac{1}{4}x_2x_3 + \frac{1}{4}x_2x_3\right)\partial_3\\
&+\left(-\frac{1}{2}\partial_2(-x_3+x_2) - \frac{1}{4}x_2x_4 - \frac{1}{4}(x_3-x_2)x_1\right)\partial_4\\
=&\frac{1}{2}\partial_1 - \frac{1}{2}x_2x_3\partial_3 + \frac{1}{4}(-2+x_1x_2-x_1x_3-x_2x_4)\partial_4,
\end{aligned}$$

а слично се добијају и преостале ненула компоненте оператора кривине

$$\begin{aligned}
&\mathcal{R}(\partial_1,\partial_2)\partial_2 = \frac{1}{2}\partial_2 - \frac{1}{4}(-x_1x_3-(x_2x_4-2)+x_1x_2)\partial_3 + \frac{1}{2}x_1x_4\partial_4,\\
&\mathcal{R}(\partial_1,\partial_2)\partial_3 = -\frac{1}{2}\partial_3, \quad \mathcal{R}(\partial_1,\partial_2)\partial_4 = -\frac{1}{2}\partial_4, \quad \mathcal{R}(\partial_1,\partial_3)\partial_1 = \frac{1}{2}\partial_4,\\
&\mathcal{R}(\partial_1,\partial_3)\partial_2 = -\frac{1}{2}\partial_3, \quad \mathcal{R}(\partial_2,\partial_4)\partial_1 = \frac{1}{2}\partial_4, \quad \mathcal{R}(\partial_2,\partial_4)\partial_2 = -\frac{1}{2}\partial_3.
\end{aligned}$$

Ако је вектор $X=\sum_{i=1}^4 a_i\partial_i$, онда је

$$\begin{aligned}
\mathcal{J}_X(\partial_1) =&\mathcal{R}(\partial_1,X)X = \mathcal{R}\left(\partial_1,\sum_{i=1}^4 a_i\partial_i\right)\left(\sum_{j=1}^4 a_j\partial_j\right)\\
=&\sum_{i=1}^4\sum_{j=1}^4 a_ia_j\mathcal{R}(\partial_1,\partial_i)\partial_j = a_2a_1\mathcal{R}(\partial_1,\partial_2)\partial_1 + a_2a_2\mathcal{R}(\partial_1,\partial_2)\partial_2\\
&+ a_2a_3\mathcal{R}(\partial_1,\partial_2)\partial_3 + a_2a_4\mathcal{R}(\partial_1,\partial_2)\partial_4 + a_3a_1\mathcal{R}(\partial_1,\partial_3)\partial_1 + a_3a_2\mathcal{R}(\partial_1,\partial_3)\partial_2\\
=&a_1a_2\left(\frac{1}{2}\partial_1 - \frac{1}{2}x_2x_3\partial_3 + \frac{1}{4}(-2+x_1x_2-x_1x_3-x_2x_4)\partial_4\right)\\
&+a_2^2\left(\frac{1}{2}\partial_2 - \frac{1}{4}(-x_1x_3-(x_2x_4-2)+x_1x_2)\partial_3 + \frac{1}{2}x_1x_4\partial_4\right)\\
&-\frac{1}{2}a_2a_3\partial_3 - \frac{1}{2}a_2a_4\partial_4 + \frac{1}{2}a_1a_3\partial_4 - \frac{1}{2}a_2a_3\partial_3 = \frac{1}{2}a_1a_2\partial_1 + \frac{1}{2}a_2^2\partial_2\\
&-\left(\frac{1}{2}a_1a_2x_2x_3 - \frac{1}{4}a_2^2(x_1x_3+(x_2x_4-2)-x_1x_2) + a_2a_3\right)\partial_3\\
&+\frac{1}{4}(a_1a_2(-2+x_1x_2-x_1x_3-x_2x_4) + 2a_2^2x_1x_4 - 2a_2a_4 + 2a_1a_3)\partial_4
\end{aligned}$$

те добијамо елементе у првој колони матрице Јакобијевог оператора $\mathcal{J}_X$ јер су они једнаки коефицијентима у представљању вектора $\mathcal{J}_X(\partial_1)$ помоћу репера $(\partial_1,\partial_2,\partial_3,\partial_4)$. Слично се добијају и остале компоненте матрице $\mathcal{J}_X$ и испоставља се да се она може написати у облику

$$\mathcal{J}_X = \begin{pmatrix} A & 0\\ B & A^T\end{pmatrix},$$

при чему је

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}a_1a_2 & -\frac{1}{2}a_1^2 \\ \frac{1}{2}a_2^2 & -\frac{1}{2}a_1a_2 \end{pmatrix},$$

док је

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix},$$

при чему је

$$\begin{aligned} b_{11} =& -\frac{1}{4}a_2^2x_1x_2 - \frac{1}{4}(2a_1a_2x_2x_3 - a_2^2x_1x_3 - a_2^2x_2x_4 + 4a_2a_3 + 2a_2^2), \\ b_{12} =& \frac{1}{4}a_1a_2x_1x_2 + \frac{1}{4}(2a_1^2x_2x_3 - a_1a_2x_1x_3 - a_1a_2x_2x_4 + 2a_1a_3 + 2a_1a_2 - 2a_2a_4), \\ b_{21} =& \frac{1}{4}a_1a_2x_1x_2 - \frac{1}{4}(a_1a_2x_2x_4 - 2a_2^2x_1x_4 + a_1a_2x_1x_3 - 2a_1a_3 + 2a_1a_2 + 2a_2a_4), \\ b_{22} =& -\frac{1}{4}a_1^2x_1x_2 + \frac{1}{4}(-2a_1a_2x_1x_4 + a_1^2x_2x_4 + a_1^2x_1x_3 + 4a_1a_4 + 2a_1^2). \end{aligned}$$

Из линеарне алгебре знамо да је карактеристични полином оператора $\mathcal{J}_X$ једнак производу карактеристичних полинома блокова A и A^T, као и да су карактеристични полиноми транспонованих матрица једнаки, те је

$$\begin{aligned} \omega_X(\lambda) &= \det(\lambda \operatorname{Id} - \mathcal{J}_X) = \det(\lambda \operatorname{Id} - A)\det(\lambda \operatorname{Id} - A^T) = (\det(\lambda \operatorname{Id} - A))^2 \\ &= \begin{vmatrix} \lambda - \frac{1}{2}a_1a_2 & \frac{1}{2}a_1^2 \\ -\frac{1}{2}a_2^2 & \lambda + \frac{1}{2}a_1a_2 \end{vmatrix}^2 = \left(\lambda^2 - \frac{1}{4}a_1^2a_2^2 + \frac{1}{4}a_1^2a_2^2\right)^2 = \lambda^4, \end{aligned}$$

што не зависи од избора вектора X, те је (M, g) глобално Осерманова псеудо-Риманова многострукост. Матричне операције са блок матрицама могу се вршити тако што се блокови третирају као компоненте матрице, те је

$$\mathcal{J}_X^2 = \begin{pmatrix} A & 0 \\ B & A^T \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A & 0 \\ B & A^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^2 & 0 \\ BA + A^TB & (A^T)^2 \end{pmatrix}.$$

Важи да је

$$\begin{aligned} A^2 &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2}a_1a_2 & -\frac{1}{2}a_1^2 \\ \frac{1}{2}a_2^2 & -\frac{1}{2}a_1a_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2}a_1a_2 & -\frac{1}{2}a_1^2 \\ \frac{1}{2}a_2^2 & -\frac{1}{2}a_1a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \left(A^T\right)^2 =& A^T \cdot A^T = (A \cdot A)^T = \left(A^2\right)^T = 0^T = 0, \\ BA + A^TB &= \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2}a_1a_2 & -\frac{1}{2}a_1^2 \\ \frac{1}{2}a_2^2 & -\frac{1}{2}a_1a_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2}a_1a_2 & \frac{1}{2}a_2^2 \\ -\frac{1}{2}a_1^2 & -\frac{1}{2}a_1a_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2}a_1a_2b_{11} + \frac{1}{2}a_2^2b_{12} & -\frac{1}{2}a_1^2b_{11} - \frac{1}{2}a_1a_2b_{12} \\ \frac{1}{2}a_1a_2b_{21} + \frac{1}{2}a_2^2b_{22} & -\frac{1}{2}a_1^2b_{21} - \frac{1}{2}a_1a_2b_{22} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$+\begin{pmatrix} \frac{1}{2}a_1a_2b_{11}+\frac{1}{2}a_2^2b_{21} & \frac{1}{2}a_1a_2b_{12}+\frac{1}{2}a_2^2b_{22} \\ -\frac{1}{2}a_1^2b_{11}-\frac{1}{2}a_1a_2b_{21} & -\frac{1}{2}a_1^2b_{12}-\frac{1}{2}a_1a_2b_{22} \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} a_1a_2b_{11}+\frac{1}{2}a_2^2(b_{12}+b_{21}) & \frac{1}{2}(a_2^2b_{22}-a_1^2b_{11}) \\ \frac{1}{2}(a_2^2b_{22}-a_1^2b_{11}) & -\frac{1}{2}a_1^2(b_{12}+b_{21})-a_1a_2b_{22} \end{pmatrix}.$$

Како је

$$\begin{aligned} \varepsilon_X =& g(X,X)=g\left(\sum_{i=1}^{4}a_i\partial_i,\sum_{j=1}^{4}a_j\partial_j\right)=\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{4}a_ia_jg(\partial_i,\partial_j) \\ =& \sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{4}a_ia_jG_{ij}=a_1^2x_2x_3+2a_1a_2+2a_1a_3-a_2^2x_1x_4+2a_2a_4 \end{aligned}$$

то је

$$\begin{aligned} a_2^2b_{22}-a_1^2b_{11} =& a_2^2\left(-\frac{1}{4}a_1^2x_1x_2+\frac{1}{4}(-2a_1a_2x_1x_4+a_1^2x_2x_4+a_1^2x_1x_3+4a_1a_4+2a_1^2)\right) \\ &-a_1^2\left(-\frac{1}{4}a_2^2x_1x_2-\frac{1}{4}(2a_1a_2x_2x_3-a_2^2x_1x_3-a_2^2x_2x_4+4a_2a_3+2a_2^2)\right) \\ =&-\frac{1}{2}a_1a_2^3x_1x_4+a_1a_2^2a_4+a_1^2a_2^2+\frac{1}{2}a_1^3a_2x_2x_3+a_1^2a_2a_3 \\ =&\frac{1}{2}a_1a_2(-a_2^2x_1x_4+2a_2a_4+2a_1a_2+a_1^2x_2x_3+2a_1a_3)=\frac{1}{2}a_1a_2\varepsilon_X, \end{aligned}$$

а директним рачуном се добијају и једнакости $a_1a_2b_{11}+a_2^2(b_{12}+b_{21})/2=-a_2^2\varepsilon_X/4$, $-a_1^2(b_{12}+b_{21})/2-a_1a_2b_{22}=-a_1^2\varepsilon_X/4$ одакле је

$$\mathcal{J}_X^2=\frac{1}{4}\varepsilon_X\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -a_2^2 & a_1a_2 & 0 & 0 \\ a_1a_2 & -a_1^2 & 0 & 0 \end{pmatrix}\neq 0,$$

јер како је $\varepsilon_X=a_1^2x_2x_3+2a_1a_2+2a_1a_3-a_2^2x_1x_4+2a_2a_4$ квадратна норма јединичног вектора $X=\sum_{i=1}^{4}a_i\partial_i$, то је $(a_1,a_2)\neq(0,0)$.

Даље је

$$\mathcal{J}_X^3=\mathcal{J}_X^2\mathcal{J}_X=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ BA+A^TB & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & 0 \\ B & A^T \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ (BA+A^TB)A & 0 \end{pmatrix}.$$

Како је $(BA+A^TB)A$ једнако

$$\begin{pmatrix} a_1a_2b_{11}+\frac{1}{2}a_2^2(b_{12}+b_{21}) & \frac{1}{2}(a_2^2b_{22}-a_1^2b_{11}) \\ \frac{1}{2}(a_2^2b_{22}-a_1^2b_{11}) & -\frac{1}{2}a_1^2(b_{12}+b_{21})-a_1a_2b_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{2}a_1a_2 & -\frac{1}{2}a_1^2 \\ \frac{1}{2}a_2^2 & -\frac{1}{2}a_1a_2 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} a_1^2a_2^2b_{11} + a_1a_2^3(b_{12}+b_{21}) + a_2^4b_{22} & -a_1^3a_2b_{11} - a_1^2a_2^2(b_{12}+b_{21}) - a_1a_2^3b_{22} \\ -a_1^3a_2b_{11} - a_1^2a_2^2(b_{12}+b_{21}) - a_1a_2^3b_{22} & a_1^4b_{11} + a_1^3a_2(b_{12}+b_{21}) + a_1^2a_2^2b_{22} \end{pmatrix},$$

а важи да је

$$\begin{aligned} & a_1^2a_2^2b_{11} + a_1a_2^3(b_{12}+b_{21}) + a_2^4b_{22} \\ =& a_1^2a_2^2\left(-\frac{1}{4}a_2^2x_1x_2 - \frac{1}{4}(2a_1a_2x_2x_3 - a_2^2x_1x_3 - a_2^2x_2x_4 + 4a_2a_3 + 2a_2^2)\right) \\ & + \frac{1}{2}a_1a_2^3(a_1a_2x_1x_2 + a_1^2x_2x_3 - a_1a_2x_1x_3 - a_1a_2x_2x_4 + 2a_1a_3 - 2a_2a_4 + a_2^2x_1x_4) \\ & + a_2^4\left(-\frac{1}{4}a_1^2x_1x_2 + \frac{1}{4}(-2a_1a_2x_1x_4 + a_1^2x_2x_4 + a_1^2x_1x_3 + 4a_1a_4 + 2a_1^2)\right) = 0, \end{aligned}$$

а слично је $a_1^3a_2b_{11}+a_1^2a_2^2(b_{12}+b_{21})+a_1a_2^3b_{22} = 0$ и $a_1^4b_{11}+a_1^3a_2(b_{12}+b_{21})+a_1^2a_2^2b_{22} = 0$, те је $\mathcal{J}_X^3 = 0$, одакле следи да је минимални полином Јакобијевог оператора $\mu(\lambda) = \lambda^3$, те је Жорданова нормална форма независна од јединичног вектора X јер се увек састоји од једног Жордановог блока величине 3×3 и једног Жордановог блока величине 1×1. Како овај Жордан-Осерманов алгебарски тензор кривине има Жорданов блок величине 3×3, то он не може бити квази-Клифордов. △

Наредни циљ је да испитамо да ли су квази-Клифордови алгебарски тензори кривине Јакоби-дуални.

Нека је $X \in \mathcal{V}$ дефинитан вектор и Y сопствени вектор Јакобијевог оператора $\mathcal{J}_X$, односно $\mathcal{J}_X Y = \varepsilon_X \lambda Y$ важи за неко $\lambda \in \mathbb{R}$. Тада користећи Лему 3.15 добијамо да је

$$\varepsilon_X(\lambda - \mu_0)Y = -\mu_0 g(Y,X)X - 3\sum_{i=1}^{m}\mu_i g(Y, J_iX)J_iX, \tag{3.14}$$

као и

$$\mathcal{J}_Y X = \mu_0(\varepsilon_Y X - g(X,Y)Y) - 3\sum_{i=1}^{m}\mu_i g(X, J_iY)J_iY. \tag{3.15}$$

Разликујемо два случаја у зависности од тога да ли је $\lambda \neq \mu_0$ или је $\lambda = \mu_0$.

Ако је $\lambda \neq \mu_0$, онда изражавањем Y из (3.14) добијамо да је

$$Y = \frac{-\mu_0 g(Y,X)}{\varepsilon_X(\lambda - \mu_0)}X - 3\sum_{i=1}^{m}\frac{\mu_i g(Y, J_iX)}{\varepsilon_X(\lambda - \mu_0)}J_iX,$$

а када ову једнакост искористимо у (3.15) имамо да је

$$\mathcal{J}_Y X = \mu_0\left(\varepsilon_Y X - g(X,Y)\left(\frac{-\mu_0 g(Y,X)}{\varepsilon_X(\lambda - \mu_0)}X - 3\sum_{i=1}^{m}\frac{\mu_i g(Y, J_iX)}{\varepsilon_X(\lambda - \mu_0)}J_iX\right)\right)$$

$$
\begin{aligned}
&-3\sum_{i=1}^{m}\mu_i g(X,J_iY)J_i\left(\frac{-\mu_0 g(Y,X)}{\varepsilon_X(\lambda-\mu_0)}X-3\sum_{j=1}^{m}\frac{\mu_j g(Y,J_jX)}{\varepsilon_X(\lambda-\mu_0)}J_jX\right)\\
=\;&\mu_0\left(\varepsilon_Y+\frac{\mu_0(g(X,Y))^2}{\varepsilon_X(\lambda-\mu_0)}\right)X+\frac{3\mu_0 g(X,Y)}{\varepsilon_X(\lambda-\mu_0)}\sum_{i=1}^{m}\mu_i\left(g(Y,J_iX)+g(X,J_iY)\right)J_iX\\
&+\frac{9}{\varepsilon_X(\lambda-\mu_0)}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}\mu_i\mu_j g(X,J_iY)g(Y,J_jX)J_iJ_jX,
\end{aligned}
$$

те користећи да су за $i\in\{1,\ldots,m\}$ ендоморфизми J_i косоадјунговани због чега је $g(Y,J_iX)=-g(J_iY,X)=-g(X,J_iY)$, закључујемо да је

$$\mathcal{J}_YX=\mu_0\left(\varepsilon_Y+\frac{\mu_0(g(X,Y))^2}{\varepsilon_X(\lambda-\mu_0)}\right)X+\frac{9}{\varepsilon_X(\lambda-\mu_0)}\sum_{i,j=1}^{m}\mu_i\mu_j g(X,J_iY)g(Y,J_jX)J_iJ_jX.$$

На основу једнакости Хурвицовог типа и косоадјунгованости ендоморфизама J_i и J_j за $i,j\in\{1,\ldots,m\}$ последња двострука сума се може упростити:

$$
\begin{aligned}
&\sum_{i,j=1}^{m}\mu_i\mu_j g(X,J_iY)g(Y,J_jX)J_iJ_jX=\sum_{1\leqslant i<j\leqslant m}\mu_i\mu_j g(X,J_iY)g(Y,J_jX)J_iJ_jX\\
&+\sum_{1\leqslant j<i\leqslant m}\mu_i\mu_j g(X,J_iY)g(Y,J_jX)J_iJ_jX+\sum_{i=1}^{m}\mu_i\mu_i g(X,J_iY)g(Y,J_iX)J_iJ_iX\\
&=\sum_{1\leqslant j<i\leqslant m}\mu_j\mu_i g(X,J_jY)g(Y,J_iX)J_jJ_iX+\sum_{1\leqslant j<i\leqslant m}\mu_i\mu_j g(X,J_iY)g(Y,J_jX)J_iJ_jX\\
&+\sum_{i=1}^{m}\mu_i^2 g(X,J_iY)g(Y,J_iX)J_i^2X=\sum_{1\leqslant j<i\leqslant m}\mu_i\mu_j(-g(J_jX,Y))(-g(J_iY,X))J_jJ_iX\\
&+\sum_{1\leqslant j<i\leqslant m}\mu_i\mu_j g(X,J_iY)g(Y,J_jX)J_iJ_jX+\sum_{i=1}^{m}\mu_i^2(-g(J_iX,Y))g(Y,J_iX)c_iX\\
&=\sum_{1\leqslant j<i\leqslant m}\mu_i\mu_j g(X,J_iY)g(Y,J_jX)(J_jJ_i+J_iJ_j)X-\sum_{i=1}^{m}\mu_i^2 g(Y,J_iX)^2c_iX\\
&=\sum_{1\leqslant j<i\leqslant m}\mu_i\mu_j g(X,J_iY)g(Y,J_jX)2\delta_{ij}c_iX-\sum_{i=1}^{m}\mu_i^2 g(Y,J_iX)^2c_iX\\
&=-\sum_{i=1}^{m}\mu_i^2 g(Y,J_iX)^2c_iX,
\end{aligned}
$$

одакле закључујемо да је

$$\mathcal{J}_YX=\left(\mu_0\varepsilon_Y+\frac{\mu_0^2(g(X,Y))^2}{\varepsilon_X(\lambda-\mu_0)}-\frac{9}{\varepsilon_X(\lambda-\mu_0)}\sum_{i=1}^{m}\mu_i^2(g(Y,J_iX))^2c_i\right)X,$$

те је X сопствени вектор оператора $\mathcal{J}_Y$.

У случају да је $\lambda = \mu_0$ на основу (3.14) имамо да је

$$\mu_0 g(Y,X)X + 3\sum_{i=1}^{m} \mu_i g(Y,J_iX)J_iX = 0. \tag{3.16}$$

Нека је $k \in \{0,1,\dots,m\}$ такво да $c_i \neq 0$ за $1 \leqslant i \leqslant k$ и $c_i = 0$ за $k < i \leqslant m$. Даље, као у доказу Теореме 3.16 закључујемо да је за свако дефинитно X простор $\operatorname{Span}\{X, J_1X,\dots,J_kX\}$ недегенерисан потпростор од $\mathcal{V}$ димензије $k+1$ који је ортогоналан на $\{J_{k+1}X,\dots,J_mX\}$. Како је $X \perp J_iX$ за свако $i \in \{1,\dots,m\}$, то на основу (3.16) и билинеарности форме g закључујемо да је

$$\begin{aligned}\mu_0 g(Y,X)\varepsilon_X &= \mu_0 g(Y,X)g(X,X) + 3\sum_{i=1}^{m} \mu_i g(Y,J_iX)g(J_iX,X)\\ &= g\left(\mu_0 g(Y,X)X + 3\sum_{i=1}^{m} \mu_i g(Y,J_iX)J_iX, X\right) = g(0,X) = 0,\end{aligned}$$

те како је X дефинитан следи $\mu_0 g(Y,X) = 0$. Одавде, користећи да за свако $i \in \{1,\dots,k\}$ важи $J_iX \perp X$ и $J_iX \perp J_jX$ за $j \in \{1,\dots,m\} \setminus \{i\}$, на основу (3.16) и билинеарности форме g изводимо да је

$$\begin{aligned}3\mu_i g(Y,J_iX)\varepsilon_{J_iX} &= \mu_0 g(Y,X)g(X,J_iX) + 3\sum_{j=1}^{m} \mu_j g(Y,J_jX)g(J_jX,J_iX)\\ &= g\left(\mu_0 g(Y,X)X + 3\sum_{j=1}^{m} \mu_j g(Y,J_jX)J_jX, J_iX\right) = g(0,J_iX) = 0,\end{aligned}$$

а из доказа Теореме 3.16 знамо да је $\varepsilon_{J_iX} = -c_i\varepsilon_X \neq 0$, те је $\mu_i g(Y,J_iX) = 0$ за $i \in \{1,\dots,k\}$. Када добијене једнакости убацимо у (3.16) добијамо да је

$$\sum_{i=k+1}^{m} \mu_i g(Y,J_iX)J_iX = 0. \tag{3.17}$$

На основу $\mu_0 g(Y,X) = 0$ и $\mu_i g(X,J_iY) = -\mu_i g(Y,J_iX) = 0$ за $i \in \{1,\dots,k\}$ једнакост (3.15) се своди на

$$\mathcal{J}_Y X = \mu_0\varepsilon_Y X - 3\sum_{i=k+1}^{m} \mu_i g(X,J_iY)J_iY.$$

Размотримо случај када је $k+1 = m$. Тада из (3.17) закључујемо да је $\mu_{k+1} g(Y,J_{k+1}X)J_{k+1}X = 0$. Ако је $J_{k+1}X = 0$, онда је $\mu_{k+1} g(X,J_{k+1}Y)J_{k+1}Y =$

$-\mu_{k+1}g(J_{k+1}X,Y)J_{k+1}Y = -\mu_{k+1}g(0,Y)J_{k+1}Y = 0$, а ако је $\mu_{k+1}g(Y,J_{k+1}X) = 0$, онда је $\mu_{k+1}g(X,J_{k+1}Y)J_{k+1}Y = -\mu_{k+1}g(J_{k+1}X,Y)J_{k+1}Y = -0 \cdot J_{k+1}Y = 0$. Дакле, у случају да је $k+1 = m$ важи да је $\mathcal{J}_Y X = \mu_0 \varepsilon_Y X$, што по дефиницији повлачи Јакоби-дуалност. Наравно, ако је $k = m$ још брже следи да је R Јакоби-дуалан. Тако смо пронашли довољан услов да квази-Клифордов R буде Јакоби-дуалан, што формулишемо у следећој теореми.

Теорема 3.17. *Сваки квази-Клифордов алгебарски тензор кривине облика* (3.12) *на простору са скаларним производом са највише једним* $c_i = 0$ *је Јакоби-дуалан.*

У наставку ћемо показати да квази-Клифордов алгебарски тензор кривине који има бар два $c_i = 0$ не мора бити Јакоби-дуалан. На основу Леме 1.7 постоји ортонормирана база $(T_1, \dots T_p, S_1, \dots, S_q)$ простора са скаларним производом $(\mathcal{V}, g)$ сигнатуре (p,q), при чему је $p+q=n$. Тада је $\varepsilon_{T_i} = -1$ за $i \in \{1,\dots,p\}$ и $\varepsilon_{S_j} = 1$ за $j \in \{1,\dots,q\}$. Дефинишемо ендоморфизам J на елементима базе од $\mathcal{V}$ помоћу

$$JT_1 = T_2 + S_2 = -JS_1, \quad -JT_2 = T_1 + S_1 = JS_2, \quad JT_3 = T_4 + S_4 = -JS_3,$$
$$-JT_4 = T_3 + S_3 = JS_4, \quad JT_5 = \ldots = JT_p = JS_5 = JS_6 = \ldots = JS_q = 0,$$

а онда се J линеарно прошири. Приметимо да је матрица оператора J у ортонормираној бази $(T_1, S_1, T_2, S_2, T_3, S_3, T_4, S_4, T_5, S_5, T_6, S_6, T_7 \dots, T_p, S_7, \dots, S_q)$ блок-дијагонална матрица

$$J = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & O \end{pmatrix},$$

где је O нула матрица типа $(p+q-8)\times(p+q-8)$ и

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Како је

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0,$$

то на основу правила за множење блок-дијагоналних матрица следи да је

$$J^2 = \begin{pmatrix} A^2 & 0 & 0 \\ 0 & A^2 & 0 \\ 0 & 0 & O^2 \end{pmatrix} = 0.$$

Грамова матрица форме g у односу на ортонормирану базу $(T_1, S_1, T_2, S_2, T_3, S_3, T_4, S_4, T_5, S_5, T_6, S_6, T_7 \ldots, T_p, S_7, \ldots, S_q)$ је

$$G = \begin{pmatrix} B & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & B & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & B & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & B & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & B & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & D \end{pmatrix},$$

при чему је

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

C је једнако минус јединична матрица типа $(p-6) \times (p-6)$ и D је јединична матрица типа $(q-6) \times (q-6)$. Оператор J је косоадјунгован ако за свака два вектора $X, Y \in \mathcal{V}$ важи $g(JX, Y) = -g(X, JY)$, односно $(JX)^T GY = -X^T GJY$ што је еквивалентно са $X^T J^T GY = -X^T GJY$, те је довољно доказати да је $J^T G = -GJ$. Директним множењем матрица закључујемо да је $J^T G = -GJ$, одакле следи да је J косоадјунгован оператор.

Посматрамо $R_1 = R^J$ дефинисан као у Примеру 1.8, те за $\mathcal{R}_1 = R_1^\sharp$ важи

$$\mathcal{R}_1(X, Y)Z = g(JX, Z)JY - g(JY, Z)JX + 2g(JX, Y)JZ,$$

одакле, користећи да косоадјунгованост J повлачи $g(JX, X) = 0$ и $g(JY, X) = -g(Y, JX)$, за јединичан вектор X израчунавамо Јакобијев оператор

$$\begin{aligned} (\mathcal{J}_1)_X Y = \mathcal{R}_1(Y, X)X &= g(JY, X)JX - g(JX, X)JY + 2g(JY, X)JX \\ &= 3g(JY, X)JX = -3g(Y, JX)JX. \end{aligned}$$

За $Y \in (\mathrm{Span}\{JX\})^\perp = (JX)^\perp$ је $g(Y, JX) = 0$, те је сваки ненула вектор из $(JX)^\perp$ сопствени вектор за сопствену вредност 0, док за ненула векторе облика

αJX на основу косоадјунгованости J, билинеарности форме g и $J^2 = 0$ важи

$$g(\alpha JX, JX) = \alpha g(JX, JX) = -\alpha g(X, J^2X) = -\alpha g(X, 0) = 0,$$

те су и они сопствени вектори који одговарају сопственој вредности 0. Како се на тај начин добијају сви сопствени вектори оператора $(\mathcal{J}_1)_X$, закључујемо да је његова једина сопствена вредност једнака 0, односно да је његов карактеристични полином $\omega_1(\lambda) = \lambda^n$. Како је JX квадратне норме нула, то на основу Леме 1.14 за потпуно изотропан потпростор $\mathrm{Span}\{JX\}$ простора са скаларним производом $(\mathcal{V}, g)$ постоји потпуно изотропан потпростор $\mathrm{Span}\{Z\}$ који са њим има тривијалан пресек и $g(JX, Z) = 1$. На основу доказа Леме 1.14 имамо да је $\mathrm{Span}\{JX, Z\} = \mathrm{Span}\{(JX + Z)/\sqrt{2}, (JX - Z)/\sqrt{2}\}$ и да је $\mathrm{Span}\{(JX + Z)/\sqrt{2}, (JX - Z)/\sqrt{2}\}$ недегенерисан потпростор, те на основу Леме 1.6 закључујемо да је

$$\mathcal{V} = \mathrm{Span}\{(JX+Z)/\sqrt{2}, (JX-Z)/\sqrt{2}\} \oplus (\mathrm{Span}\{(JX+Z)/\sqrt{2}, (JX-Z)/\sqrt{2}\})^{\perp},$$

одакле следи да $(JX + Z)/\sqrt{2}$, $(JX - Z)/\sqrt{2}$ и елементи базе простора $(\mathrm{Span}\{(JX+Z)/\sqrt{2}, (JX-Z)/\sqrt{2}\})^{\perp}$ чине базу за $\mathcal{V}$, односно JX, Z и елементи базе простора $(\mathrm{Span}\{JX, Z\})^{\perp}$ чине базу простора $\mathcal{V}$. Занима нас матрица Јакобијевог оператора $(\mathcal{J}_1)_X$ у бази коју чине JX, $-Z/3$ и елементи базе за $(\mathrm{Span}\{JX, Z\})^{\perp}$. Разликујемо два случаја.

Ако је $JX = 0$, онда је $(\mathcal{J}_1)_X Y = -3g(Y, JX)JX = -3g(Y, 0)0 = 0$, те је $(\mathcal{J}_1)_X = 0$, односно Жорданова нормална форма оператора $(\mathcal{J}_1)_X$ се састоји од n Жордановых блокова величине 1×1 у којима је број 0.

Ако је $JX \neq 0$, онда је

$$\begin{aligned} (\mathcal{J}_1)_X JX &= -3g(JX, JX)JX = -3 \cdot 0 \cdot JX = 0, \\ (\mathcal{J}_1)_X \left(-\frac{Z}{3}\right) &= -3g\left(-\frac{Z}{3}, JX\right) JX = g(Z, JX)JX = JX \end{aligned}$$

и за $Y \in (\mathrm{Span}\{JX, Z\})^{\perp}$ је $(\mathcal{J}_1)_X Y = -3g(Y, JX)JX = -3 \cdot 0 \cdot JX = 0$, те је

$$(\mathcal{J}_1)_X = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

те се Жорданова нормална форма оператора $(\mathcal{J}_1)_X$ састоји од једног блока величине 2×2 и $n-2$ блокова величине 1×1.

Ако је $4 = p < q$, онда R_1 није просторно Жордан-Осерманов јер за јединичне просторне векторе S_1 и S_5 Жордановe нормалне форме оператора $(\mathcal{J}_1)_{S_1}$ и $(\mathcal{J}_1)_{S_5}$ нису исте јер је $JS_1 = -T_2 - S_2 \neq 0$, а $JS_5 = 0$. Докажимо да је R_1 временски Жордан-Осерманов. На основу (1.2) за јединичан временски вектор $X = \sum_{i=1}^4 \alpha_i T_i + \sum_{j=1}^q \beta_j S_j$ имамо да је

$$-1 = \varepsilon_X = \sum_{i=1}^4 \alpha_i^2 \varepsilon_{T_i} + \sum_{j=1}^q \beta_j^2 \varepsilon_{S_j} = -\sum_{i=1}^4 \alpha_i^2 + \sum_{j=1}^q \beta_j^2. \tag{3.18}$$

Како је

$$\begin{aligned}
JX = J\left(\sum_{i=1}^4 \alpha_i T_i + \sum_{j=1}^q \beta_j S_j\right) &= \sum_{i=1}^4 \alpha_i JT_i + \sum_{j=1}^q \beta_j JS_j \\
=&\alpha_1 JT_1 + \alpha_2 JT_2 + \alpha_3 JT_3 + \alpha_4 JT_4 + \beta_1 JS_1 + \beta_2 JS_2 + \beta_3 JS_3 + \beta_4 JS_4 + \sum_{j=5}^q \beta_j JS_j \\
=&\alpha_1(T_2 + S_2) + \alpha_2(-T_1 - S_1) + \alpha_3(T_4 + S_4) + \alpha_4(-T_3 - S_3) + \beta_1(-T_2 - S_2) \\
&+ \beta_2(T_1 + S_1) + \beta_3(-T_4 - S_4) + \beta_4(T_3 + S_3) + \sum_{j=5}^q \beta_j \cdot 0 \\
=&(\beta_2 - \alpha_2)T_1 + (\alpha_1 - \beta_1)T_2 + (\beta_4 - \alpha_4)T_3 + (\alpha_3 - \beta_3)T_4 \\
&+ (\beta_2 - \alpha_2)S_1 + (\alpha_1 - \beta_1)S_2 + (\beta_4 - \alpha_4)S_3 + (\alpha_3 - \beta_3)S_4.
\end{aligned}$$

Ако би $JX = 0$, онда би на основу линеарне независности базних вектора $T_1, T_2, T_3, T_4, S_1, \dots, S_q$ следило $\alpha_i = \beta_i$, за $i \in \{1,2,3,4\}$, те би из (3.18) следило

$$-1 = -\sum_{i=1}^4 \alpha_i^2 + \sum_{j=1}^q \beta_j^2 = -\sum_{i=1}^4 \beta_i^2 + \sum_{j=1}^q \beta_j^2 = \sum_{j=5}^q \beta_j^2,$$

а није могуће да збир квадрата реалних бројева буде -1. Дакле, важи $JX \neq 0$, те се Жорданова нормална форма за сваки временски вектор X састоји од једног Жордановог блока величине 2×2 и $n-2$ блокова величине 1×1. Зато за $4 = p < q$, Осерманов алгебарски тензор кривине $R_1 = R^J$ јесте временски Жордан-Осерманов, али није просторно Жордан-Осерманов, што личи на резултат који су дали Гилки и Иванова [35, Теорема 3] и Гилки [33, Поглавље 3.2].

Теорема 3.18. *Постоје временски Жордан-Осерманови алгебарски тензори кривине на простору са скаларним производом који нису просторно Жордан-Осерманови.*

На основу Теореме 3.17 закључујемо да је у циљу прављења примера квази-Клифордовог R који није Јакоби-дуалан, поред већ конструисаног косоадјунгованог ендоморфизма J који задовољава $J^2 = 0$, потребан бар још један косоадјунговани ендоморфизам K такав да је $K^2 = 0$, при чему треба да важи антикомутативност $JK = -KJ$, а на основу доказа Теореме 3.17 потребно је обезбедити да постоји дефинитан X такав да су JX и KX линеарно зависни. Дефинишемо ендоморфизам K на $\mathcal{V}$ помоћу његовог деловања на бази

$$\begin{aligned} KT_1 &= T_2 + S_2 = -KS_1, \quad -KT_2 = T_1 + S_1 = KS_2, \\ KT_5 &= T_6 + S_6 = -KS_5, \quad -KT_6 = T_5 + S_5 = KS_6, \\ KT_3 &= KT_4 = KT_7 = \ldots = KT_p = KS_3 = KS_4 = KS_7 = \ldots = KS_q = 0, \end{aligned}$$

а потом се K линеарно прошири. Приметимо да оператор K има сличну дефиницију као J, само су се T_3 и T_4 заменили са T_5 и T_6, односно S_3 и S_4 су се заменили са S_5 и S_6, те је матрица оператора K у ортонормираној бази $(T_1, S_1, T_2, S_2, T_3, S_3, T_4, S_4, T_5, S_5, T_6, S_6, T_7, \ldots, T_p, S_7, \ldots, S_q)$ једнака

$$K = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & 0 & O, \end{pmatrix}$$

где је O нула матрица типа $(p+q-12) \times (p+q-12)$ и

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(то је матрица коју смо имали као блок и у матрици ендоморфизма J).

Како је $A^2 = 0$, то на основу правила за множење блок-дијагоналних матрица следи да је

$$K^2 = \begin{pmatrix} A^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & O^2, \end{pmatrix} = 0.$$

Оператор K је косоадјунгован ако за свака два $X, Y \in \mathcal{V}$ важи да је $g(KX, Y) = -g(X, KY)$, односно $(KX)^T GY = -X^T GKY$ што је еквивалентно са $X^T K^T GY = -X^T GKY$. Довољно је доказати да је $K^T G = -GK$, што се добија директним множењем матрица. Дакле, ендоморфизам K је косоадјунгован.

Директним множењем матрица се добија да је $JK = -KJ$, те ендоморфизми J и K антикомутирају. Дефинишемо $R = R^J - R^K$, и он је квази-Клифордов алгебарски тензор кривине јер су J и K косоадјунговани ендоморфизми такви да је $J^2 = K^2 = 0$ и $JK + KJ = 0$. На основу Леме 3.15 за његов Јакобијев оператор важи да је

$$\mathcal{J}_X Y = 0 \cdot (\varepsilon_X Y - g(Y, X)X) - 3 \cdot 1 \cdot g(Y, JX)JX - 3 \cdot (-1) \cdot g(Y, KX)KX,$$

односно

$$\mathcal{J}_X Y = 3(g(Y, KX)KX - g(Y, JX)JX). \tag{3.19}$$

Како је $JT_1 = T_2 + S_2 = KT_1$, то за свако $Y \in \mathcal{V}$ следи да је

$$\mathcal{J}_{T_1} Y = 3(g(Y, KT_1)KT_1 - g(Y, JT_1)JT_1) = 3(g(Y, KT_1)KT_1 - g(Y, KT_1)KT_1) = 0,$$

те и за $Y = T_2 + \sqrt{2}S_4$ имамо да је $\mathcal{J}_{T_1}(T_2 + \sqrt{2}S_4) = 0$. Како је

$$\begin{aligned}
K(T_2 + \sqrt{2}S_4) &= KT_2 + \sqrt{2}KS_4 = -T_1 - S_1 + \sqrt{2} \cdot 0 = -T_1 - S_1,\\
J(T_2 + \sqrt{2}S_4) &= JT_2 + \sqrt{2}JS_4 = -T_1 - S_1 + \sqrt{2}(T_3 + S_3),\\
g(T_1, K(T_2 + \sqrt{2}S_4)) &= g(T_1, -T_1 - S_1) = -g(T_1, T_1) - g(T_1, S_1) = -(-1) = 1,\\
g(T_1, J(T_2 + \sqrt{2}S_4)) &= g(T_1, -T_1 - S_1 + \sqrt{2}(T_3 + S_3))\\
&= -g(T_1, T_1) - g(T_1, S_1) + \sqrt{2}g(T_1, T_3) + \sqrt{2}g(T_1, S_3) = 1,
\end{aligned}$$

то на основу (3.19) имамо да је

$$\begin{aligned}
&\mathcal{J}_{T_2 + \sqrt{2}S_4} T_1\\
&= 3(g(T_1, K(T_2 + \sqrt{2}S_4))K(T_2 + \sqrt{2}S_4) - g(T_1, J(T_2 + \sqrt{2}S_4))J(T_2 + \sqrt{2}S_4))\\
&= 3(1 \cdot (-T_1 - S_1) - 1 \cdot (-T_1 - S_1 + \sqrt{2}(T_3 + S_3)))\\
&= 3(-T_1 - S_1 + T_1 + S_1 - \sqrt{2}(T_3 + S_3)) = -3\sqrt{2}(T_3 + S_3).
\end{aligned}$$

Како је $T_2 \perp S_4$, то на основу (1.2) закључујемо да је

$$\varepsilon_{T_2 + \sqrt{2}S_4} = \varepsilon_{T_2} + 2\varepsilon_{S_4} = -1 + 2 = 1,$$

а на основу билинеарности форме g је

$$g(T_1, T_2 + \sqrt{2}S_4) = g(T_1, T_2) + \sqrt{2}g(T_1, S_4) = 0 + \sqrt{2} \cdot 0 = 0,$$

те су T_1 и $T_2 + \sqrt{2}S_4$ међусобно ортогонални јединични вектори такви да је $\mathcal{J}_{T_1}(T_2 + \sqrt{2}S_4) = 0$ и $\mathcal{J}_{T_2+\sqrt{2}S_4}T_1 = -3\sqrt{2}(T_3 + S_3)$, односно R није слабо Јакоби-дуалан, те није ни Јакоби-дуалан, а тиме је доказана наредна теорема која се може наћи у [6].

Теорема 3.19. *Постоји квази-Клифордов алгебарски тензор кривине на простору са скаларним производом који није Јакоби-дуалан.*

Како је на основу Теореме 3.16 сваки квази-Клифордов тензор кривине Осерманов, то постоји Осерманов тензор на простору са скаларним производом који није Јакоби-дуалан.

Наредни циљ нам је да нађемо неке услове под којима је квази-Клифордов алгебарски тензор кривине R потпуно Јакоби-дуалан. Како смо већ установили да косоадјунговани ендоморфизми са $J_i^2 = 0$ нису погодни за принцип дуалности, сматраћемо да је $m = k$ у ознакама из доказа Теореме 3.17, односно да су сви J_i такви да је $J_i^2 = c_i \operatorname{Id} \neq 0$, што значи да постоје $J_i^{-1} = J_i/c_i$, односно да су J_i аутоморфизми. Без умањења општости, можемо сматрати да уместо са аутоморфизмима J_i и скаларима μ_i радимо са $J_i/\sqrt{|c_i|}$ и скаларима $|c_i|\mu_i$ јер тако добијамо исти квази-Клифордов алгебарски тензор кривине облика (3.12), односно претпостављамо да $c_i \in \{-1, 1\}$ за свако $i \in \{1, \dots, m\}$ и такав алгебарски тензор кривине R зовемо ***полу-Клифордов***. Косоадјунговани ендоморфизми J_i на $\mathcal{V}$ за које је $J_i^2 = -\operatorname{Id}$ су ***комплексне структуре***, а они за које је $J_i^2 = \operatorname{Id}$ су ***производ структуре***. Приметимо да производ структуре J_i мењају сигнатуру простора $\mathcal{V}$ зато што за сваки вектор $X \in \mathcal{V}$ важи да је $\varepsilon_{J_iX} = g(J_iX, J_iX) = -g(X, J_i^2X) = -g(X, X) = -\varepsilon_X$, те зато сваки полу-Клифордов тензор R који није Клајнов не може имати производ структуре, односно за све J_i важи да је $J_i^2 = -\operatorname{Id}$ што повлачи да је R Клифордов.

Како важи $k = m$, то слично као у доказу Теореме 3.16 закључујемо да је $\mathcal{F}_m = \operatorname{Span}\{X, J_1X, \dots, J_mX\}$ недегенерисан потпростор састављен од међусобно ортогоналних дефинитних вектора, те је на основу Леме 1.6 $\mathcal{V} = \mathcal{F}_m \oplus \mathcal{F}_m^\perp$. У оквиру доказа Теореме 3.16 смо видели и да су дефинитни вектори J_iX сопствени вектори који одговарају сопственој вредности $\varepsilon_X(\mu_0 + 3c_i\mu_i)$ за $i \in \{1, \dots, m\}$, а сваки ненула вектор $Z \in \mathcal{F}_m^\perp$ је сопствени вектор који одговара сопственој вредности $\varepsilon_X\mu_0$, те се зато $\mathcal{J}_X$ дијагонализује у бази од $\mathcal{V}$ састављеној од $X, J_1X, \ldots, J_mX$ и елемената базе за $\mathcal{F}_m^{\perp}$. То значи да је полу-Клифордов R Јакоби-дијагонализабилан, те се Жорданова нормална форма Јакобијевог оператора $\mathcal{J}_X$ састоји од n блокова величине 1×1, те је она независна од избора јединичног временског вектора $X \in \mathcal{V}$, као и од избора јединичног просторног $X \in \mathcal{V}$, те је R Жордан-Осерманов.

Како полу-Клифордов R нема $c_i = 0$, то је он на основу Теореме 3.17 Јакоби-дуалан. Наредна теорема даје довољан услов за потпуну Јакоби-дуалност полу-Клифордовог R (видети рад [11, Пропозиција 5.2] Андрејића и Ракића из 2015. године).

Теорема 3.20. *Ако је полу-Клифордов алгебарски тензор кривине R на простору са скаларним производом $(\mathcal{V}, g)$ генерисан полу-Клифордовом фамилијом $\{J_1, \ldots, J_m\}$, такав да је за свако изотропно $X \in \mathcal{V}$ скуп $\{X, J_1X, \ldots, J_mX\}$ линеарно независан, онда је R потпуно Јакоби-дуалан.*

Доказ. Да бисмо доказали да је R потпуно Јакоби-дуалан, довољно је доказати да за свако $X \neq 0$ из тога што је Y сопствени вектор за $\mathcal{J}_X$ следи да је X сопствени вектор за $\mathcal{J}_Y$. На основу Теореме 3.17, сваки полу-Клифордов R је Јакоби-дуалан, што даје импликацију (3.8) за дефинитно $X \in \mathcal{V}$. На основу Теореме 3.16 полу-Клифордов R је Осерманов, те ако је X изотропно, онда су на основу Теореме 3.5 све сопствене вредности оператора $\mathcal{J}_X$ једнаке нули, те претпоставка да је Y сопствени вектор од $\mathcal{J}_X$ даје $\mathcal{J}_X Y = 0$. Тада на основу Леме 3.15 закључујемо да је

$$\mu_0 g(Y, X)X + 3\sum_{i=1}^{m} \mu_i g(Y, J_iX)J_iX = 0,$$

те линеарна независност од $\mathcal{F}_m$ даје $\mu_0 g(Y, X) = 0$, као и $\mu_i g(Y, J_iX) = 0$ за $i \in \{1, \ldots, m\}$. Одавде користећи Лему 3.15 и косоадјунгованост оператора J_i за $i \in \{1, \ldots, m\}$ добијамо да је

$$\begin{aligned}\mathcal{J}_Y X =& \mu_0(\varepsilon_Y X - g(X, Y)Y) - 3\sum_{i=1}^{m} \mu_i g(X, J_iY)J_iY \\ =& \mu_0\varepsilon_Y X - \mu_0 g(X, Y)Y + 3\sum_{i=1}^{m} \mu_i g(J_iX, Y)J_iY = \varepsilon_Y \mu_0 X,\end{aligned}$$

те је X сопствени вектор од $\mathcal{J}_Y$, што завршава доказ да је R потпуно Јакоби-дуалан. □

У раду [7] разматрана је линеарна независност $\mathcal{F}_m = \{X, J_1X, ..., J_mX\}$ за изотропан вектор X и прво је доказана следећа теорема.

Теорема 3.21. *Ако за неко* $X \neq 0$ *важи* $\theta_0 X + \theta_1 J_1 X + \ldots + \theta_m J_m X = 0$ *за квази-Клифордову фамилију* $\{J_1, \ldots, J_m\}$ *са* $J_i^2 = c_i \operatorname{Id}$, *ӣри чему* $i \in \{1, \ldots, m\}$ *и* $\theta_0, \ldots, \theta_m \in \mathbb{R}$, *ӣада је* $\theta_0^2 - c_1\theta_1^2 - \ldots - c_m\theta_m^2 = 0$.

Доказ. За свако $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m) \in \{0,1\}^m$ дефинишемо ендоморфизам J^α помоћу композиције пресликавања $J^\alpha = J_m^{\alpha_m} \ldots J_1^{\alpha_1}$ и $(-1)^\alpha = (-1)^{\alpha_1 + \ldots + \alpha_m}$. Применом $(-1)^\alpha J^\alpha$ на једнакост $\theta_0 X + \theta_1 J_1 X + \ldots + \theta_m J_m X = 0$, следи да је

$$\sum_{i=0}^{m} (-1)^\alpha \theta_i J^\alpha J^{e_i} X = 0, \tag{3.20}$$

где смо поставили $e_i = (\delta_{i1}, \delta_{i2}, \ldots, \delta_{im})$ са додатним $e_0 = (0, \ldots, 0)$, односно $J^{e_i} = J_i$ и $J^{e_0} = \operatorname{Id}$. Приметимо да је $(-1)^\alpha J^\alpha J^{e_i} = (-1)^{\alpha_i + \ldots + \alpha_m} (c_i)^{\alpha_i} J^{\alpha \pm e_i}$ за $i \in \{1, \ldots, m\}$, где се $\alpha \pm e_i$ и α разликују само на i-том месту (односно под $\alpha \pm e_i$ подразумевамо $\alpha + e_i$ ако је $\alpha_i = 0$, а $\alpha - e_i$ ако је $\alpha_i = 1$). Заиста, разликујемо два случаја у зависности од тога да ли је $\alpha_i = 0$ или $\alpha_i = 1$. Ако је $\alpha_i = 0$, онда је i-та компонента уређене m-торке $\alpha + e_i$ једнака $(\alpha + e_i)_i = 1$, те на основу антикомутативности квази-Клифордове фамилије $J_1, \ldots, J_m$ следи

$$\begin{aligned}
(-1)^\alpha J^\alpha J^{e_i} =& (-1)^{\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_m} J_m^{\alpha_m} \ldots J_i^{\alpha_i} \ldots J_1^{\alpha_1} J_i \\
=& (-1)^{\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_m} J_m^{\alpha_m} \ldots J_i^{\alpha_i} \ldots (-1)^{\alpha_1} J_i J_1^{\alpha_1} \\
=& (-1)^{\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_m} J_m^{\alpha_m} \ldots J_i^{\alpha_i} (-1)^{\alpha_1 + \ldots + \alpha_{i-1}} J_i J_{i-1}^{\alpha_{i-1}} \ldots J_1^{\alpha_1} \\
=& (-1)^{\alpha_i + \alpha_{i+1} + \ldots + \alpha_m} J_m^{\alpha_m} \ldots J_{i+1}^{\alpha_{i+1}} J_i^{\alpha_i} J_i J_{i-1}^{\alpha_{i-1}} \ldots J_1^{\alpha_1} \\
=& (-1)^{\alpha_i + \alpha_{i+1} + \ldots + \alpha_m} J_m^{\alpha_m} \ldots J_{i+1}^{\alpha_{i+1}} (c_i)^0 J_i^{(\alpha + e_i)_i} J_{i-1}^{\alpha_{i-1}} \ldots J_1^{\alpha_1} \\
=& (-1)^{\alpha_i + \alpha_{i+1} + \ldots + \alpha_m} (c_i)^{\alpha_i} J^{\alpha + e_i}.
\end{aligned}$$

Ако је $\alpha_i = 1$, онда i-та компонента уређене m-торке $\alpha - e_i$ износи $(\alpha - e_i)_i = 0$, те користећи почетак претходног извођења, антикомутативност квази-Клифордове фамилије $J_1, \ldots, J_m$ и $J_i^2 = c_i \operatorname{Id}$ закључујемо да је

$$\begin{aligned}
(-1)^\alpha J^\alpha J^{e_i} =& (-1)^{\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_m} J_m^{\alpha_m} \ldots J_i^{\alpha_i} (-1)^{\alpha_1 + \ldots + \alpha_{i-1}} J_i J_{i-1}^{\alpha_{i-1}} \ldots J_1^{\alpha_1} \\
=& (-1)^{\alpha_i + \alpha_{i+1} + \ldots + \alpha_m} J_m^{\alpha_m} \ldots J_{i+1}^{\alpha_{i+1}} J_i^1 J_i J_{i-1}^{\alpha_{i-1}} \ldots J_1^{\alpha_1} \\
=& (-1)^{\alpha_i + \alpha_{i+1} + \ldots + \alpha_m} J_m^{\alpha_m} \ldots J_{i+1}^{\alpha_{i+1}} c_i J_i^0 J_{i-1}^{\alpha_{i-1}} \ldots J_1^{\alpha_1} \\
=& (-1)^{\alpha_i + \alpha_{i+1} + \ldots + \alpha_m} (c_i)^{\alpha_i} J^{\alpha - e_i}.
\end{aligned}$$

Приметимо да и за $i = 0$ због

$$(-1)^{\alpha} J^{\alpha} J^{e_0} = (-1)^{\alpha_1+\ldots+\alpha_m} J^{\alpha}\,\mathrm{Id} = (-1)^{\alpha_0+\alpha_1+\ldots+\alpha_m} (c_0)^{\alpha_0} J^{\alpha},$$

при чему је $\alpha_0 = 0$, важи да је $(-1)^{\alpha} J^{\alpha} J^{e_i} = (-1)^{\alpha_i+\ldots+\alpha_m} (c_i)^{\alpha_i} J^{\alpha\pm e_i}$. Одавде на основу (3.20) следи да за свако $\alpha \in \{0,1\}^m$ добијамо једначину

$$\sum_{i=0}^{m} (-1)^{\alpha_i+\ldots+\alpha_m} (c_i)^{\alpha_i} \theta_i J^{\alpha\pm e_i} X = 0. \tag{3.21}$$

Приметимо да се коефицијент $M_{\alpha\alpha}$ уз $J^{\alpha}X$ добија за $i = 0$ јер је $e_0 = (0, \ldots, 0)$, те он износи $M_{\alpha\alpha} = (-1)^{\alpha_0+\ldots+\alpha_m} (c_0)^{\alpha_0} \theta_0 = (-1)^{\alpha_1+\ldots+\alpha_m} \theta_0$ јер је $\alpha_0 = 0$. Коефицијент $M_{\alpha(\alpha\pm e_i)}$ уз $J^{\alpha\pm e_i}X$ је једнак $M_{\alpha(\alpha\pm e_i)} = (-1)^{\alpha_i+\ldots+\alpha_m} (c_i)^{\alpha_i} \theta_i$, где је $i \in \{1, \ldots, m\}$, док је $M_{\alpha\beta} = 0$ за преостале уређене m-торке β. Зато једначине (3.21) које имамо за свако $\alpha \in \{0,1\}^m$ можемо посматрати као систем

$$\sum_{\beta\in\{0,1\}^m} M_{\alpha\beta} J^{\beta} X = 0 \tag{3.22}$$

од 2^m једначина са непознатим $J^{\beta}X$ којих има 2^m (јер имамо 2^m уређених m-торки $\beta \in \{0,1\}^m$). Нека је $M = (M_{\alpha\beta})$ матрица величине $2^m \times 2^m$ која одговара овом систему једначина. Посматрамо матрицу M^2 типа $2^m \times 2^m$ и користећи да је $M_{(\alpha\pm e_i)\alpha} = (-1)^{\alpha_i\pm1+\ldots+\alpha_m} (c_i)^{\alpha_i\pm1} \theta_i$ израчунавамо да је

$$\begin{aligned}
(M^2)_{\alpha\alpha} &= M_{\alpha\alpha}M_{\alpha\alpha} + M_{\alpha(\alpha\pm e_1)}M_{(\alpha\pm e_1)\alpha} + \ldots + M_{\alpha(\alpha\pm e_m)}M_{(\alpha\pm e_m)\alpha}\\
&=(-1)^{\alpha_1+\ldots+\alpha_m}\theta_0(-1)^{\alpha_1+\ldots+\alpha_m}\theta_0 + (-1)^{\alpha_1+\ldots+\alpha_m}(c_1)^{\alpha_1}\theta_1(-1)^{\alpha_1\pm1+\ldots+\alpha_m}(c_1)^{\alpha_1\pm1}\theta_1\\
&\quad + \ldots + (-1)^{\alpha_m}(c_m)^{\alpha_m}\theta_m(-1)^{\alpha_m\pm1}(c_m)^{\alpha_m\pm1}\theta_m = \theta_0^2 - c_1\theta_1^2 - \ldots - c_m\theta_m^2,\\
(M^2)_{\alpha(\alpha\pm e_i)} &= M_{\alpha\alpha}M_{\alpha(\alpha\pm e_i)} + M_{\alpha(\alpha\pm e_i)}M_{(\alpha\pm e_i)(\alpha\pm e_i)}\\
&=(-1)^{\alpha_1+\ldots+\alpha_m}\theta_0(-1)^{\alpha_i+\ldots+\alpha_m}(c_i)^{\alpha_i}\theta_i + (-1)^{\alpha_i+\ldots+\alpha_m}(c_i)^{\alpha_i}\theta_i(-1)^{\alpha_1+\ldots\alpha_i\pm1+\ldots+\alpha_m}\theta_0\\
&=(-1)^{\alpha_1+\ldots+\alpha_{i-1}}\theta_0\theta_i(c_i)^{\alpha_i} + (-1)^{\alpha_1+\ldots+\alpha_{i-1}\pm1}\theta_0\theta_i(c_i)^{\alpha_i} = 0,
\end{aligned}$$

За $i < j$ имамо да је

$$\begin{aligned}
(M^2)_{\alpha(\alpha\pm e_i\pm e_j)} &= M_{\alpha(\alpha\pm e_i)}M_{(\alpha\pm e_i)(\alpha\pm e_i\pm e_j)} + M_{\alpha(\alpha\pm e_j)}M_{(\alpha\pm e_j)(\alpha\pm e_i\pm e_j)}\\
&=(-1)^{\alpha_i+\ldots+\alpha_m}(c_i)^{\alpha_i}\theta_i(-1)^{\alpha_j+\ldots+\alpha_m}(c_j)^{\alpha_j}\theta_j\\
&\quad + (-1)^{\alpha_j+\ldots+\alpha_m}(c_j)^{\alpha_j}\theta_j(-1)^{\alpha_i+\ldots+\alpha_j\pm1+\ldots\alpha_m}(c_i)^{\alpha_i}\theta_i\\
&=(-1)^{\alpha_i+\ldots+\alpha_{j-1}}(c_i)^{\alpha_i}(c_j)^{\alpha_j}\theta_i\theta_j + (-1)^{\alpha_i+\ldots+\alpha_{j-1}\pm1}(c_i)^{\alpha_i}(c_j)^{\alpha_j}\theta_i\theta_j = 0,
\end{aligned}$$

док за $i = j$ важи $(M^2)_{\alpha(\alpha \pm e_i \pm e_i)} = (M^2)_{\alpha\alpha}$. Приметимо и да је у преосталим случајевима $(M^2)_{\alpha\beta} = 0$, те је M^2 дијагонална матрица. Користећи да је детерминанта производа две матрице једнака производу детерминанти почетних матрица, као и да је детерминанта дијагоналне матрице једнака производу елемената на њеној главној дијагонали добијамо да је

$$(\det M)^2 = \det M \cdot \det M = \det(M \cdot M) = \det(M^2) = (\theta_0^2 - c_1\theta_1^2 - \ldots - c_m\theta_m^2)^{2^m}.$$

Претпоставимо да је $\theta_0^2 - c_1\theta_1^2 - \ldots - c_m\theta_m^2 \neq 0$, односно да је $(\det M)^2 \neq 0$, што повлачи да је $\det M \neq 0$. Тада на основу Крамерове теореме следи да хомоген квадратни систем једначина (3.22) има јединствено нула решење, те следи да је $0 = J^{e_0}X = X$, што је у контрадикцији са претпоставком теореме да $X \neq 0$. Одавде следи да је $\theta_0^2 - c_1\theta_1^2 - \ldots - c_m\theta_m^2 = 0$, што је и требало доказати. □

Као последицу претходне две теореме лако добијамо следећу теорему.

Теорема 3.22. *Сваки Клифордов алгебарски тензор кривине облика* (3.12) *на простору са скаларним производом* $(\mathcal{V}, g)$ *је потпуно Јакоби-дуалан.*

Доказ. Клифордов алгебарски тензор кривине R је полу-Клифордов алгебарски тензор кривине такав да је $c_i = -1$ за свако $i \in \{1, \ldots, m\}$. Посматрамо једнакост $\theta_0 X + \theta_1 J_1 X + \ldots + \theta_m J_m X = 0$, за $\theta_0, \theta_1, \ldots, \theta_m \in \mathbb{R}$ и изотропно $X \in \mathcal{V}$ и на основу Теореме 3.21 закључујемо да је $\theta_0^2 + \theta_1^2 + \ldots + \theta_m^2 = 0$, те је $\theta_0 = \theta_1 = \ldots = \theta_m = 0$. Одавде следи да је $\mathcal{F}_m = \{X, J_1X, \ldots, J_mX\}$ линеарно независан скуп за свако изотропно $X \in \mathcal{V}$, те је на основу Теореме 3.20 Клифордов алгебарски тензор кривине R потпуно Јакоби-дуалан. □

Наредна теорема нам даје довољне услове за полу-Клифордов алгебарски тензор кривине R који повлаче да је он потпуно Јакоби-дуалан.

Теорема 3.23. *Ако је* $(3c_i\mu_i + \mu_0)/\mu_i > 0$ *за свако* $i \in \{1, \ldots, m\}$ *или* $(3c_i\mu_i + \mu_0)/\mu_i < 0$ *за свако* $i \in \{1, \ldots, m\}$, *онда је одговарајући полу-Клифордов алгебарски тензор кривине* R *облика* (3.12) *на простору са скаларним производом потпуно Јакоби-дуалан.*

Доказ. На основу Теореме 3.17 полу-Клифордов R је Јакоби-дуалан, те импликација (3.8) важи за свако дефинитно $X \in \mathcal{V}$, те ако желимо да испитамо да ли је R потпуно Јакоби-дуалан, довољно је проверити импликацију (3.8) за изотропно $X \in \mathcal{V}$. Дакле, претпостављамо да је $\mathcal{J}_X Y = \varepsilon_X \lambda Y = 0$. Тада на основу Леме 3.15 закључујемо да је

$$\mu_0 g(Y,X)X + 3\sum_{i=1}^{m} \mu_i g(Y, J_i X) J_i X = 0,$$

што можемо записати у облику

$$\theta_0 X + \theta_1 J_1 X + \ldots + \theta_m J_m X = 0, \tag{3.23}$$

при чему је $\theta_0 = \mu_0 g(Y,X)$ и $\theta_i = 3\mu_i g(Y, J_i X)$ за $i \in \{1,\ldots,m\}$. На основу Леме 3.15 и косоадјунгованости оператора J_i важи да је

$$\begin{aligned}\mathcal{J}_Y X &= \mu_0(\varepsilon_Y X - g(X,Y)Y) + 3\sum_{i=1}^{m} \mu_i g(J_i X, Y) J_i Y\\ &= \varepsilon_Y \mu_0 X - \theta_0 Y + \sum_{i=1}^{m} \theta_i J_i Y.\end{aligned}$$

На основу (3.23) закључујемо да је

$$\begin{aligned}\theta_0^2 =& \theta_0\theta_0 = \theta_0 \mu_0 g(Y,X) = \mu_0 g(Y, \theta_0 X) = \mu_0 g(Y, -\theta_1 J_1 X - \ldots - \theta_m J_m X)\\ =& -\mu_0 g\left(Y, \sum_{i=1}^{m} \theta_i J_i X\right) = -\mu_0 \sum_{i=1}^{m} \theta_i g(Y, J_i X) = -\mu_0 \sum_{i=1}^{m} \theta_i \cdot \frac{\theta_i}{3\mu_i} = -\mu_0 \sum_{i=1}^{m} \frac{\theta_i^2}{3\mu_i},\end{aligned}$$

а како (3.23) важи за изотропно $X \in \mathcal{V}$, то на основу Теореме 3.21 следи да је $\theta_0^2 = \sum_{i=1}^{m} c_i \theta_i^2$, те је

$$\sum_{i=1}^{m} c_i \theta_i^2 = \theta_0^2 = -\mu_0 \sum_{i=1}^{m} \frac{\theta_i^2}{3\mu_i}, \tag{3.24}$$

одакле закључујемо да је

$$0 = \sum_{i=1}^{m} \left(c_i + \frac{\mu_0}{3\mu_i}\right) \theta_i^2 = \sum_{i=1}^{m} \frac{3c_i\mu_i + \mu_0}{3\mu_i} \theta_i^2 = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^{m} \frac{3c_i\mu_i + \mu_0}{\mu_i} \theta_i^2.$$

Претпоставка теореме је да су $(3c_i\mu_i + \mu_0)/\mu_i$ истог знака за $i \in \{1,\ldots,m\}$, те је једино решење претходне једначине $\theta_1 = \ldots = \theta_m = 0$, те на основу (3.24) закључујемо да је $\theta_0 = 0$, одакле је $\mathcal{J}_Y X = \varepsilon_Y \mu_0 X$, односно X је сопствени вектор за $\mathcal{J}_Y$,те је R потпуно Јакоби-дуалан. □

Квази-Клифордов алгебарски тензор кривине R облика (3.12) такав да је $c_i = 1$ за свако $i \in \{1,\ldots,m\}$ назива се ***анти-Клифордов***. У наредној теореми дајемо довољне услове под којима анти-Клифордов алгебарски тензор кривине није потпуно Јакоби-дуалан.

Теорема 3.24. *Ако постоје* $\theta_0, \ldots, \theta_m \in \mathbb{R}$ *при чему нису сви једнаки нули, такви да* $\theta_0 X + \theta_1 J_1 X + \ldots + \theta_m J_m X = 0$ *важи за неко изотропно* X *и да је* $\theta_0^2 = -\mu_0 \sum_{i=1}^m \theta_i^2/(3\mu_i)$, *тада одговарајући анти-Клифордов алгебарски тензор кривине облика* (3.12) *и димензије* $n > 2m$ *није потпуно Јакоби-дуалан.*

Доказ. Ако би $\theta_0 = 0$, онда бисмо применом Теореме 3.21 на анти-Клифордов R из претпоставке $\theta_1 J_1 X + \ldots + \theta_m J_m X = 0$ за изотропан вектор $X \in \mathcal{V}$ закључили да је $-\theta_1^2 - \ldots - \theta_m^2 = 0$, одакле је $\theta_1 = \ldots = \theta_m = 0$, те би сви $\theta_0, \ldots, \theta_m$ били једнаки 0, што је у супротности са претпоставком теореме. Дакле, $\theta_0 \neq 0$. Како за изотропан вектор $X \in \mathcal{V}$ и свако $i \in \{1, \ldots, m\}$ важи

$$\varepsilon_{J_i X} = g(J_i X, J_i X) = -g(X, J_i^2 X) = -g(X, c_i X) = -g(X, X) = -\varepsilon_X = 0,$$

то линеарно независни вектори $J_1 X, \ldots, J_m X$ чине базу потпуно изотропног потпростора од $\mathcal{V}$, те на основу Леме 1.14 постоји база $(P_1, \ldots, P_m)$ изотропног суплемента, тако да $g(J_i X, P_j) = \delta_{ij}$ и $g(P_i, P_j) = 0$ важе за $i, j \in \{1, \ldots, m\}$ (вектори потпуно изотропног потпростора $\mathrm{Span}\{P_1, \ldots, P_m\}$ су међусобно ортогонални). Нека је $Z = \sum_{i=1}^m \theta_i P_i/(3\mu_i)$. Тада је Z изотропан вектор и

$$\begin{aligned} 3\mu_i g(Z, J_i X) =& 3\mu_i g\left(\sum_{j=1}^m \frac{\theta_j}{3\mu_j} P_j, J_i X\right) = 3\mu_i \sum_{j=1}^m \frac{\theta_j}{3\mu_j} g(P_j, J_i X) \\ =& 3\mu_i \sum_{j=1}^m \frac{\theta_j}{3\mu_j} \delta_{ij} = 3\mu_i \frac{\theta_i}{3\mu_i} = \theta_i. \end{aligned}$$

Даље, како је $\theta_0 X + \theta_1 J_1 X + \ldots + \theta_m J_m X = 0$, то је

$$\begin{aligned} \theta_0 g(Z, X) = g(Z, \theta_0 X) &= g\left(Z, -\sum_{i=1}^m \theta_i J_i X\right) = -\sum_{i=1}^m \theta_i g\left(\sum_{j=1}^m \frac{\theta_j}{3\mu_j} P_j, J_i X\right) \\ &= -\sum_{i=1}^m \theta_i \sum_{j=1}^m \frac{\theta_j}{3\mu_j} g(P_j, J_i X) = -\sum_{i=1}^m \theta_i \sum_{j=1}^m \frac{\theta_j}{3\mu_j} \delta_{ij} \\ &= -\sum_{i=1}^m \theta_i \frac{\theta_i}{3\mu_i} = -\sum_{i=1}^m \frac{\theta_i^2}{3\mu_i}, \end{aligned}$$

одакле након множења са μ_0 на основу претпоставке теореме добијамо да је

$$\mu_0 \theta_0 g(Z, X) = -\mu_0 \sum_{i=1}^m \frac{\theta_i^2}{3\mu_i} = \theta_0^2,$$

те након дељења са $\theta_0 \neq 0$ следи да је $\theta_0 = \mu_0 g(Z, X)$.

Приметимо да и $Z + W$ за свако $W \in (\mathrm{Span}\{J_1 X, \ldots, J_m X\})^\perp$ задовољава те две особине јер је

$$\begin{aligned}
3\mu_i g(Z+W, J_iX) &= 3\mu_i(g(Z, J_iX) + g(W, J_iX)) = 3\mu_i(g(Z, J_iX) + 0)\\
&= 3\mu_i g(Z, J_iX) = \theta_i,\\
\mu_0 g(Z+W, X) &= \mu_0 g(Z, X) + \mu_0 g(W, X) = \theta_0 + \frac{\mu_0}{\theta_0} g(W, \theta_0 X)\\
&= \theta_0 + \frac{\mu_0}{\theta_0} g\left(W, -\sum_{i=1}^{m} \theta_i J_i X\right) = \theta_0 - \frac{\mu_0}{\theta_0}\sum_{i=1}^{m} \theta_i g(W, J_iX) = \theta_0.
\end{aligned}$$

Користећи Лему 3.15 на основу које је

$$\begin{aligned}
\mathcal{J}_{Z+W}X &= \mu_0 \varepsilon_{Z+W} X - \mu_0 g(X, Z+W)(Z+W) + 3\sum_{i=1}^{m} \mu_i g(J_iX, Z+W) J_i(Z+W)\\
&= \mu_0 \varepsilon_{Z+W} X - \theta_0(Z+W) + \sum_{i=1}^{m} \theta_i J_i(Z+W)
\end{aligned}$$

закључујемо да је довољно пронаћи $Y = Z + W$ такво да $-\theta_0 Y + \sum_{i=1}^{m} \theta_i J_i Y$ није пропорционално са X да бисмо доказали да R није потпуно Јакоби-дуалан. Дакле, тражимо $Y = Z + W$ такво да $\mathcal{K}(Z+W)$ није пропорционално са X, при чему је $\mathcal{K} = -\theta_0 \operatorname{Id} + \sum_{i=1}^{m} \theta_i J_i$. Ако је D дефинитан вектор, скуп $\{D, J_1D, \ldots, J_mD\}$ (слично као у доказу Теореме 3.16) чине међусобно ортогонални и дефинитни вектори. Како из $\alpha_0 D + \alpha_1 J_1 D + \ldots + \alpha_m J_m D = 0$ следи

$$\begin{aligned}
\alpha_0 \varepsilon_D =& \alpha_0 g(D, D) + \alpha_1 g(J_1D, D) + \ldots + \alpha_m g(J_mD, D)\\
=& g(\alpha_0 D + \alpha_1 J_1 D + \ldots + \alpha_m J_m D, D) = g(0, D) = 0,
\end{aligned}$$

одакле је $\alpha_0 = 0$, а за свако $i \in \{1, \ldots, m\}$ је

$$\begin{aligned}
\alpha_i \varepsilon_{J_iD} =& \alpha_0 g(D, J_iD) + \alpha_1 g(J_1D, J_iD) + \ldots + \alpha_m g(J_mD, J_iD)\\
=& g(\alpha_0 D + \alpha_1 J_1 D + \ldots + \alpha_m J_m D, J_iD) = g(0, J_iD) = 0,
\end{aligned}$$

те је $\alpha_i = 0$ и скуп $\{D, J_1D, \ldots, J_mD\}$ је линеарно независан. Одавде $\mathcal{K}(D) = 0$, односно $(-\theta_0 \operatorname{Id} + \sum_{i=1}^{m} \theta_i J_i)(D) = 0$ повлачи да је $\theta_0 = \ldots = \theta_m = 0$, што није могуће јер је $\theta_0 \neq 0$. Дакле, $\mathcal{K}(D) \neq 0$ за свако дефинитно $D \in \mathcal{V}$. Претпоставка теореме $n > 2m$ обезбеђује постојање дефинитног вектора H из $(\operatorname{Span}\{J_1X, \ldots, J_mX, P_1, \ldots, P_m\})^{\perp}$ јер је на основу доказа Леме 1.14 тај потпростор недегенерисан. Приметимо да је

$$\mathcal{K}(X) = -\theta_0 X + \sum_{i=1}^{m} \theta_i J_i X = -2\theta_0 X.$$

Докажимо да R није потпуно Јакоби-дуалан. Претпоставимо супротно, да је R потпуно Јакоби-дуалан. Одатле имамо да је $\mathcal{K}(Z) = \phi X$ и $\mathcal{K}(Z+H) = \xi X$ јер $H \in (\mathrm{Span}\{J_1X, \dots, J_mX\})^{\perp}$. Одавде користећи да је $\mathcal{K}$ линеаран оператор и да је H дефинитан вектор добијамо да је $0 \neq \mathcal{K}(H) = \mathcal{K}(Z+H) - \mathcal{K}(Z) = \xi X - \phi X = (\xi - \phi)X$, одакле је

$$\mathcal{K}\left(Z - \frac{\phi}{\xi - \phi}H\right) = \mathcal{K}(Z) - \frac{\phi}{\xi - \phi}\mathcal{K}(H) = \phi X - \frac{\phi}{\xi - \phi}(\xi - \phi)X = 0,$$

што повлачи да је $\varepsilon_{Z-(\phi/(\xi-\phi))H} = 0$. Како важи $Z \in \mathrm{Span}\{P_1, \dots, P_m\}$, док $H \in (\mathrm{Span}\{P_1, \dots, P_m\})^{\perp}$, то је $Z \perp H$, те на основу (1.2) следи да је

$$0 = \varepsilon_{Z - \frac{\phi}{\xi - \phi}H} = \varepsilon_Z + \frac{\phi^2}{(\xi - \phi)^2}\varepsilon_H = \frac{\phi^2}{(\xi - \phi)^2}\varepsilon_H,$$

одакле је $\phi = 0$. Тада је $\mathcal{K}(H) = (\xi - \phi)X = \xi X$, те је

$$\mathcal{K}\left(X + \frac{2\theta_0}{\xi}H\right) = \mathcal{K}(X) + \frac{2\theta_0}{\xi}\mathcal{K}(H) = -2\theta_0 X + \frac{2\theta_0}{\xi}\xi X = 0,$$

одакле је $\varepsilon_{X+2\theta_0 H/\xi} = 0$. Даље, користећи да је $\theta_0 X = -\sum_{i=1}^{m}\theta_i J_i X$ и $\theta_0 \neq 0$ следи да $X \in \mathrm{Span}\{J_1X, \dots, J_mX\}$, а важи и $H \in (\mathrm{Span}\{J_1X, \dots, J_mX\})^{\perp}$, те је $X \perp H$, одакле на основу (1.2) закључујемо да је

$$0 = \varepsilon_{X + \frac{2\theta_0}{\xi}H} = \varepsilon_X + \frac{4\theta_0^2}{\xi^2}\varepsilon_H = \frac{4\theta_0^2}{\xi^2}\varepsilon_H,$$

што је у контрадикцији са $\theta_0 \neq 0$. На основу добијене контрадикције закључујемо да R није потпуно Јакоби-дуалан. □

У наставку су два примера анти-Клифордових алгебарских тензора кривине на простору са скаларним производом који нису потпуно Јакоби-дуални.

Пример 3.2. Нека је $m = 1$ и сматрамо да је $\mu_1 \neq 0$. На основу Теореме 3.23 следи да мора бити $(3c_1\mu_1 + \mu_0)/\mu_1 = 0$, односно $3\mu_1 + \mu_0 = 0$ да анти-Клифордов алгебарски тензор кривине $R = \mu_0 R^1 + \mu_1 R^J = -3\mu_1 R^1 + \mu_1 R^J$ не би био потпуно Јакоби-дуалан.

Нека је J ендоморфизам на $\mathcal{V}$ задат са $JT_i = S_i$ и $JS_i = T_i$ за све $i \in \{1, \dots, t\}$, $n = 2t \geqslant 4$, где је $(T_1, \dots, T_t, S_1, \dots, S_t)$ ортонормирана база у n-димензионом простору са скаларним производом $(\mathcal{V}, g)$ неутралне сигнатуре (t, t) која постоји на основу Леме 1.7, а на основу Теореме 1.9 можемо сматрати да је

$\varepsilon_{T_i} = -1$ и $\varepsilon_{S_i} = 1$ за $i \in \{1, \dots, t\}$. Ендоморфизам J је косоадјунгован јер је за $i, j \in \{1, \dots, t\}$ испуњено да је

$$\begin{aligned} &g(JT_i, T_j) = g(S_i, T_j) = 0 = -g(T_i, S_j) = -g(T_i, JT_j), \\ &g(JT_i, S_j) = g(S_i, S_j) = \delta_{ij} = -\delta_{ij} \cdot (-1) = -g(T_i, T_j) = -g(T_i, JS_j), \\ &g(JS_i, S_j) = g(T_i, S_j) = 0 = -g(S_i, T_j) = -g(S_i, JS_j). \end{aligned}$$

Важи да је J производ структура јер је за $i \in \{1, \dots, t\}$ испуњено да је $J^2 T_i = J(JT_i) = JS_i = T_i$ и $J^2 S_i = J(JS_i) = JT_i = S_i$. Зато је $R = 3\mu R^1 - \mu R^J$ за $\mu \neq 0$ анти-Клифордов алгебарски тензор кривине на $(\mathcal{V}, g)$. Како је $T_1 \perp S_1$, то на основу (1.2) важи $\varepsilon_{S_1+T_1} = \varepsilon_{S_1} + \varepsilon_{T_1} = 1 + (-1) = 0$, те је $X = S_1 + T_1$ изотропан,

$$X - JX = S_1 + T_1 - J(S_1 + T_1) = S_1 + T_1 - JS_1 - JT_1 = S_1 + T_1 - T_1 - S_1 = 0$$

и $\theta_0^2 = 1 = -3\mu\theta_1^2/(-3\mu)$, те су задовољене све претпоставке Теореме 3.24 одакле следи да $R = 3\mu R^1 - \mu R^J$ за $\mu \neq 0$ није потпуно Јакоби-дуалан. △

Пример 3.3. Нека је $m = 2$ и сматрамо да је $\mu_0 \neq 0$, $\mu_1 \neq 0$, $\mu_2 \neq 0$ и $\mu_1 \neq \mu_2$. На основу Теореме 3.23 следи да мора бити $(3c_1\mu_1 + \mu_0)(3c_2\mu_2 + \mu_0)/(\mu_1\mu_2) \leqslant 0$, односно $(\mu_0 + 3\mu_1)(\mu_0 + 3\mu_2)\mu_1\mu_2 \leqslant 0$ да анти-Клифордов алгебарски тензор кривине $R = \mu_0 R^1 + \mu_1 R^J + \mu_2 R^K$ не би био потпуно Јакоби-дуалан. Нека су J и K ендоморфизми дефинисани помоћу

$$\begin{aligned} &JT_{2i-1} = S_{2i-1}, \quad JT_{2i} = S_{2i}, \quad JS_{2i-1} = T_{2i-1}, \quad JS_{2i} = T_{2i}, \\ &KT_{2i-1} = S_{2i}, \quad KT_{2i} = -S_{2i-1}, \quad KS_{2i-1} = -T_{2i}, \quad KS_{2i} = T_{2i-1}. \end{aligned}$$

за све $i \in \{1, \dots, t\}$, $n = 4t \geqslant 8$, где је $(T_1, \dots, T_{2t}, S_1, \dots, S_{2t})$ ортонормирана база у n-димензионом простору са скаларним производом $(\mathcal{V}, g)$ неутралне сигнатуре $(2t, 2t)$, а на основу Теореме 1.9 узимамо да за $i \in \{1, \dots, 2t\}$ важи $\varepsilon_{T_i} = -1$ и $\varepsilon_{S_i} = 1$. Као у Примеру 3.2 закључујемо да је ендоморфизам J косоадјунгована производ структура, док је K косоадјунгован јер је

$$\begin{aligned} g(KT_{2i-1}, T_{2j-1}) &= g(S_{2i}, T_{2j-1}) = 0 = -g(T_{2i-1}, S_{2j}) = -g(T_{2i-1}, KT_{2j-1}), \\ g(KT_{2i-1}, T_{2j}) &= g(S_{2i}, T_{2j}) = 0 = -g(T_{2i-1}, -S_{2j-1}) = -g(T_{2i-1}, KT_{2j}), \\ g(KT_{2i}, T_{2j}) &= g(-S_{2i-1}, T_{2j}) = 0 = -g(T_{2i}, -S_{2j-1}) = -g(T_{2i}, KT_{2j}), \\ g(KT_{2i-1}, S_{2j-1}) &= g(S_{2i}, S_{2j-1}) = 0 = -g(T_{2i-1}, -T_{2j}) = -g(T_{2i-1}, KS_{2j-1}), \\ g(KT_{2i-1}, S_{2j}) &= g(S_{2i}, S_{2j}) = \delta_{ij} = -g(T_{2i-1}, T_{2j-1}) = -g(T_{2i-1}, KS_{2j}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
g(KT_{2i},S_{2j-1})&=g(-S_{2i-1},S_{2j-1})=-\delta_{ij}=-g(T_{2i},-T_{2j})=-g(T_{2i},KS_{2j-1}),\\
g(KT_{2i},S_{2j})&=g(-S_{2i-1},S_{2j})=0=-g(T_{2i},T_{2j-1})=-g(T_{2i},KS_{2j}),\\
g(KS_{2i-1},S_{2j-1})&=g(-T_{2i},S_{2j-1})=0=-g(S_{2i-1},-T_{2j})=-g(S_{2i-1},KS_{2j-1}),\\
g(KS_{2i-1},S_{2j})&=g(-T_{2i},S_{2j})=0=-g(S_{2i-1},T_{2j-1})=-g(S_{2i-1},KS_{2j}),\\
g(KS_{2i},S_{2j})&=g(T_{2i-1},S_{2j})=0=-g(S_{2i},T_{2j-1})=-g(S_{2i},KS_{2j}),
\end{aligned}$$

а важи и да је K производ структура зато што је

$$\begin{aligned}
&K^2T_{2i-1}=K(KT_{2i-1})=KS_{2i}=T_{2i-1}, \quad K^2T_{2i}=K(KT_{2i})=K(-S_{2i-1})=T_{2i},\\
&K^2S_{2i-1}=K(KS_{2i-1})=K(-T_{2i})=S_{2i-1}, \quad K^2S_{2i}=K(KS_{2i})=KT_{2i-1}=S_{2i}.
\end{aligned}$$

Ендоморфизми J и K антикомутирају јер је

$$\begin{aligned}
JK(T_{2i-1})&=JS_{2i}=T_{2i}=-KS_{2i-1}=-KJ(T_{2i-1}),\\
JK(T_{2i})&=J(-S_{2i-1})=-T_{2i-1}=-KS_{2i}=-KJ(T_{2i}),\\
JK(S_{2i-1})&=J(-T_{2i})=-S_{2i}=-KT_{2i-1}=-KJ(S_{2i-1}),\\
JK(S_{2i})&=JT_{2i-1}=S_{2i-1}=-KT_{2i}=-KJ(S_{2i}).
\end{aligned}$$

Зато је $R=\mu_0R^1+\mu_1R^J+\mu_2R^K$ анти-Клифордов алгебарски тензор кривине. За $X=\cos\alpha T_1+\sin\alpha T_2+\cos\beta S_1+\sin\beta S_2$, где $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, на основу (1.2) важи

$$\begin{aligned}
\varepsilon_X&=\varepsilon_{\cos\alpha T_1+\sin\alpha T_2+\cos\beta S_1+\sin\beta S_2}=\cos^2\alpha\varepsilon_{T_1}+\sin^2\alpha\varepsilon_{T_2}+\cos^2\beta\varepsilon_{S_1}+\sin^2\beta\varepsilon_{S_2}\\
&=-(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)+(\cos^2\beta+\sin^2\beta)=-1+1=0,
\end{aligned}$$

те је X изотропан вектор за који важи

$$\begin{aligned}
&\cos(\beta-\alpha)JX+\sin(\beta-\alpha)KX\\
&\quad=(\cos\beta\cos\alpha+\sin\beta\sin\alpha)J(\cos\alpha T_1+\sin\alpha T_2+\cos\beta S_1+\sin\beta S_2)+\\
&\qquad+(\sin\beta\cos\alpha-\cos\beta\sin\alpha)K(\cos\alpha T_1+\sin\alpha T_2+\cos\beta S_1+\sin\beta S_2)\\
&\quad=(\cos\beta\cos\alpha+\sin\beta\sin\alpha)(\cos\alpha JT_1+\sin\alpha JT_2+\cos\beta JS_1+\sin\beta JS_2)+\\
&\qquad+(\sin\beta\cos\alpha-\cos\beta\sin\alpha)(\cos\alpha KT_1+\sin\alpha KT_2+\cos\beta KS_1+\sin\beta KS_2)\\
&\quad=(\cos\beta\cos\alpha+\sin\beta\sin\alpha)(\cos\alpha S_1+\sin\alpha S_2+\cos\beta T_1+\sin\beta T_2)+\\
&\qquad+(\sin\beta\cos\alpha-\cos\beta\sin\alpha)(\cos\alpha S_2+\sin\alpha(-S_1)+\cos\beta(-T_2)+\sin\beta T_1)\\
&\quad=(\cos^2\beta\cos\alpha+\sin\beta\cos\beta\sin\alpha+\sin^2\beta\cos\alpha-\sin\beta\cos\beta\sin\alpha)T_1\\
&\qquad+(\sin\beta\cos\beta\cos\alpha+\sin^2\beta\sin\alpha-\sin\beta\cos\beta\cos\alpha+\cos^2\beta\sin\alpha)T_2\\
&\qquad+(\cos\beta\cos^2\alpha+\sin\beta\sin\alpha\cos\alpha-\sin\beta\sin\alpha\cos\alpha+\cos\beta\sin^2\alpha)S_1
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+(\cos\beta\sin\alpha\cos\alpha+\sin\beta\sin^2\alpha+\sin\beta\cos^2\alpha-\cos\beta\sin\alpha\cos\alpha)S_2\\
=&(\cos^2\beta+\sin^2\beta)\cos\alpha T_1+(\sin^2\beta+\cos^2\beta)\sin\alpha T_2\\
&+(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)\cos\beta S_1+(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)\sin\beta S_2\\
=&\cos\alpha T_1+\sin\alpha T_2+\cos\beta S_1+\sin\beta S_2=X,
\end{aligned}
$$

односно користећи ознаке из Теореме 3.24 важи $\theta_0 = 1$, $\theta_1 = -\cos(\beta—\alpha)$ и $\theta_2 = -\sin(\beta—\alpha)$. Да би био испуњен услов $\theta_0^2 = -\mu_0\sum_{i=1}^m \theta_i^2/(3\mu_i)$ из те теореме мора бити $1 = -\mu_0(\cos^2(\beta—\alpha)/(3\mu_1) + \sin^2(\beta—\alpha)/(3\mu_2))$, односно $-1/\mu_0 = (\mu_2\cos^2(\beta—\alpha) + \mu_1\sin^2(\beta—\alpha))/(3\mu_1\mu_2)$, те је

$$
\frac{-3\mu_1\mu_2}{\mu_0} = \mu_2\cos^2(\beta—\alpha)+\mu_1\sin^2(\beta—\alpha) = \mu_2\cos^2(\beta—\alpha)+\mu_1(1-\cos^2(\beta-\alpha)),
$$

те је $-3\mu_1\mu_2/\mu_0 - \mu_1 = (\mu_2-\mu_1)\cos^2(\beta-\alpha)$, односно

$$
\cos^2(\beta-\alpha) = \frac{\frac{-3\mu_1\mu_2}{\mu_0}-\mu_1}{\mu_2-\mu_1} = \frac{-\mu_1(3\mu_2+\mu_0)}{\mu_0(\mu_2-\mu_1)}.
$$

Слично је $\sin^2(\beta-\alpha) = \mu_2(3\mu_1+\mu_0)/(\mu_0(\mu_2-\mu_1))$. Одавде је

$$
\operatorname{tg}^2(\beta-\alpha) = \frac{\sin^2(\beta-\alpha)}{\cos^2(\beta-\alpha)} = \frac{\frac{\mu_2(3\mu_1+\mu_0)}{\mu_0(\mu_2-\mu_1)}}{\frac{-\mu_1(3\mu_2+\mu_0)}{\mu_0(\mu_2-\mu_1)}} = \frac{\mu_2(3\mu_1+\mu_0)}{-\mu_1(3\mu_2+\mu_0)} = -\frac{3\mu_1+\mu_0}{3\mu_2+\mu_0}\cdot\frac{\mu_2}{\mu_1},
$$

те је довољно узети $\alpha = 0$ и $\beta = \operatorname{arctg}\sqrt{-\frac{\mu_0+3\mu_1}{\mu_0+3\mu_2}\cdot\frac{\mu_2}{\mu_1}}$ при чему је поткорена величина ненегативна под претпоставком да је $(\mu_0+3\mu_1)(\mu_0+3\mu_2)\mu_1\mu_2 < 0$. Заиста, користећи $\sin^2\beta = \operatorname{tg}^2\beta/(1+\operatorname{tg}^2\beta)$ и $\cos^2\beta = 1/(1+\operatorname{tg}^2\beta)$ следи да је

$$
\begin{aligned}
-\mu_0&\left(\frac{\cos^2\beta}{3\mu_1}+\frac{\sin^2\beta}{3\mu_2}\right) = -\mu_0\left(\frac{1}{3\mu_1(1+\operatorname{tg}^2\beta)}+\frac{\operatorname{tg}^2\beta}{3\mu_2(1+\operatorname{tg}^2\beta)}\right)\\
=&-\mu_0\left(\frac{1}{3\mu_1\left(1-\frac{\mu_0+3\mu_1}{\mu_0+3\mu_2}\cdot\frac{\mu_2}{\mu_1}\right)}+\frac{-\frac{\mu_0+3\mu_1}{\mu_0+3\mu_2}\cdot\frac{\mu_2}{\mu_1}}{3\mu_2\left(1-\frac{\mu_0+3\mu_1}{\mu_0+3\mu_2}\cdot\frac{\mu_2}{\mu_1}\right)}\right)\\
=&-\mu_0\left(\frac{(\mu_0+3\mu_2)\mu_1}{3\mu_1((\mu_0+3\mu_2)\mu_1-(\mu_0+3\mu_1)\mu_2)}-\frac{(\mu_0+3\mu_1)\mu_2}{3\mu_2((\mu_0+3\mu_2)\mu_1-(\mu_0+3\mu_1)\mu_2)}\right)\\
=&-\mu_0\frac{(\mu_0+3\mu_2)\mu_1\mu_2-(\mu_0+3\mu_1)\mu_1\mu_2}{3\mu_1\mu_2((\mu_0+3\mu_2)\mu_1-(\mu_0+3\mu_1)\mu_2)}\\
=&-\mu_0\frac{\mu_0\mu_1\mu_2+3\mu_1\mu_2^2-\mu_0\mu_1\mu_2-3\mu_1^2\mu_2}{3\mu_1\mu_2(\mu_0\mu_1+3\mu_1\mu_2-\mu_0\mu_2-3\mu_1\mu_2)} = -\mu_0\frac{3\mu_1\mu_2(\mu_2-\mu_1)}{3\mu_0\mu_1\mu_2(\mu_1-\mu_2)} = 1,
\end{aligned}
$$

те основу Теореме 3.24 закључујемо да R није потпуно Јакоби-дуалан. △

Глава 4

Јакоби-пропорционалност

4.1 Псеудо-Риманова Јакоби-пропорционалност

Резултати из овог поглавља о принципу пропорционалности у псеудо-Римановом случају налазе се у раду [8], где је уопштен принцип пропорционалности за Риманове Осерманове тензоре представљен у раду [5].

За Јакоби-дијагонализабилан алгебарски тензор кривине на простору са скаларним производом $(\mathcal{V}, g)$ кажемо да је k***-корена*** ако за сваки дефинитан вектор $X \in \mathcal{V}$ редуковани Јакобијев оператор $\widetilde{\mathcal{J}}_X$ има k сопствених вредности $\varepsilon_X\lambda_1(X), \dots, \varepsilon_X\lambda_k(X)$ са вишеструкостима $\nu_1, \dots, \nu_k$, редом, при чему $\lambda_1(X), \dots, \lambda_k(X) \in \mathbb{R}$, односно ако за сваки дефинитан $X \in \mathcal{V}$ и неке скаларе $\nu_1, \dots, \nu_k \in \mathbb{N}$, $\lambda_1(X), \dots, \lambda_k(X) \in \mathbb{R}$ за које је $\lambda_1(X) < \ldots < \lambda_k(X)$ важи да је

$$\widetilde{\omega}_X(\lambda) = \det(\lambda \operatorname{Id} - \widetilde{\mathcal{J}}_X) = (\lambda - \varepsilon_X\lambda_1(X))^{\nu_1} \ldots (\lambda - \varepsilon_X\lambda_k(X))^{\nu_k}.$$

Како је R Јакоби-дијагонализабилан, то минимални полином редукованог Јакобијевог оператора има корене $\varepsilon_X\lambda_1(X), \dots, \varepsilon_X\lambda_k(X)$ који су вишеструкости 1, те за дефинитан вектор $X \in \mathcal{V}$ и $i \in \{1, \dots, k\}$ потпростори $\mathcal{V}_i(X) = \operatorname{Ker}(\widetilde{\mathcal{J}}_X - \varepsilon_X\lambda_i(X) \operatorname{Id})$ представљају ν_i-димензионе (уопштене) сопствене просторе редукованог Јакобијевог оператора $\widetilde{\mathcal{J}}_X$. На основу Леме А.8 за свако дефинитно $X \in \mathcal{V}$ имамо директну ортогоналну декомпозицију $\mathcal{V} = \oplus_{i=0}^{k}\mathcal{V}_i(X)$, при чему је $\mathcal{V}_0 = \operatorname{Span}\{X\}$.

За k-корена Јакоби-дијагонализабилан алгебарски тензор кривине R на простору са скаларним производом $(\mathcal{V}, g)$ кажемо да је ***Јакоби-пропорцио-***

налан ако за сваки пар дефинитних вектора $X, Y \in \mathcal{V}$ важи једнакост

$$\varepsilon_X(\varepsilon_{Y_0}, \varepsilon_{Y_1}, \dots, \varepsilon_{Y_k}) = \varepsilon_Y(\varepsilon_{X_0}, \varepsilon_{X_1}, \dots, \varepsilon_{X_k}),$$

при чему је $X = \sum_{i=0}^k X_i$ и $Y = \sum_{j=0}^k Y_j$ тако да $X_i \in \mathcal{V}_i(Y)$ и $Y_j \in \mathcal{V}_j(X)$.

Основна идеја из рада [5] је да се посматра Јакоби-пропорционалан Осерманов алгебарски тензор R и да се искористи да за $V \in \mathcal{V}_i(X)$, где је $i \in \{1, \dots, k\}$, важи $\mathcal{J}_X V = \varepsilon_X \lambda_i V$ да бисмо дефинисали ендоморфизам $\mathcal{K}$ на $\mathcal{V} = \oplus_{i=0}^k \mathcal{V}_i(X)$ помоћу $\mathcal{K}_X V = \varepsilon_X \mu_i V$ за $V \in \mathcal{V}_i(X)$, где $i \in \{1, \dots, k\}$, а $\mu_1, \dots, \mu_k$ су произвољни реални бројеви и $\mathcal{K}_X X = 0$, односно сматрамо да је $\mu_0 = 0$. Тако смо за свако дефинитно $X \in \mathcal{V}$ дефинисали ендоморфизме $\mathcal{K}_X$ задржавајући постојеће сопствене просторе и замењујући им сопствене вредности $\varepsilon_X \lambda_i$ са $\varepsilon_X \mu_i$. Користећи да је $\mathcal{V} = \oplus_{i=0}^k \mathcal{V}_i(X)$, имамо да за $Y, Z \in \mathcal{V}$ важи $Y = \sum_{i=0}^k Y_i$ и $Z = \sum_{i=0}^k Z_i$, при чему $Y_i, Z_i \in \mathcal{V}_i(X)$, те су ендоморфизми $\mathcal{K}_X$ самоадјунговани јер је

$$\begin{aligned}
g(\mathcal{K}_X Y, Z) &= g\left(\mathcal{K}_X\left(\sum_{i=0}^k Y_i\right), \sum_{j=0}^k Z_j\right) = g\left(\sum_{i=0}^k \mathcal{K}_X Y_i, \sum_{j=0}^k Z_j\right)\\
&= g\left(\sum_{i=0}^k \varepsilon_X \mu_i Y_i, \sum_{j=0}^k Z_j\right) = \sum_{i,j=0}^k \varepsilon_X g(\mu_i Y_i, Z_j) = \sum_{i,j=0}^k \varepsilon_X \mu_i \delta_{ij} g(Y_j, Z_j)\\
&= \sum_{j=0}^k \varepsilon_X \mu_j g(Y_j, Z_j) = \sum_{i,j=0}^k g(Y_i, \varepsilon_X \mu_j Z_j) = g\left(\sum_{i=0}^k Y_i, \sum_{j=0}^k \varepsilon_X \mu_j Z_j\right)\\
&= g\left(\sum_{i=0}^k Y_i, \sum_{j=0}^k \mathcal{K}_X Z_j\right) = g\left(\sum_{i=0}^k Y_i, \mathcal{K}_X\left(\sum_{j=0}^k Z_j\right)\right) = g(Y, \mathcal{K}_X Z).
\end{aligned}$$

Како је $\mathcal{V} = \oplus_{i=0}^k \mathcal{V}_i(Y)$ и $\mathcal{V} = \oplus_{i=0}^k \mathcal{V}_i(X)$, то за дефинитне векторе $X, Y \in \mathcal{V}$ важи $X = \sum_{i=0}^k X_i$ и $Y = \sum_{j=0}^k Y_j$, при чему је $X_i \in \mathcal{V}_i(Y)$ и $Y_j \in \mathcal{V}_j(X)$, те је

$$\begin{aligned}
&g(\mathcal{K}_X Y, Y) = g\left(\mathcal{K}_X\left(\sum_{i=0}^k Y_i\right), \sum_{j=0}^k Y_j\right) = g\left(\sum_{i=0}^k \mathcal{K}_X Y_i, \sum_{j=0}^k Y_j\right)\\
&= g\left(\sum_{i=0}^k \varepsilon_X \mu_i Y_i, \sum_{j=0}^k Y_j\right) = \sum_{i,j=0}^k \varepsilon_X \mu_i g(Y_i, Y_j) = \sum_{i,j=0}^k \varepsilon_X \mu_i \delta_{ij} g(Y_i, Y_i) = \sum_{i=0}^k \mu_i \varepsilon_X \varepsilon_{Y_i},
\end{aligned}$$

а слично се заменом слова X и Y изводи да је $g(\mathcal{K}_Y X, X) = \sum_{i=0}^k \mu_i \varepsilon_Y \varepsilon_{X_i}$.

Пошто је R Јакоби-пропорционалан онда за све $i \in \{0, \dots, k\}$ важи да је $\varepsilon_X \varepsilon_{Y_i} = \varepsilon_Y \varepsilon_{X_i}$. Одатле је $\sum_{i=0}^k \mu_i \varepsilon_X \varepsilon_{Y_i} = \sum_{i=0}^k \mu_i \varepsilon_Y \varepsilon_{X_i}$, те је $g(\mathcal{K}_X Y, Y) =$

$g(\mathcal{K}_Y X, X)$, те за ендоморфизме $\mathcal{K}_X$ и $\mathcal{K}_Y$, при чему су $X, Y \in \mathcal{V}$ дефинитни, важи услов компатибилности. Тиме смо доказали да су испуњене све претпоставке Теореме 2.2, што даје наредну теорему о Јакоби-пропорционалном Осермановом алгебарском тензору кривине (видети [8, Теорема 2]) која је уопштење теореме у Римановом случају (погледати [5, Теорема 2]).

Теорема 4.1. *Ако постоји Јакоби-пропорционалан алгебарски тензор кривине на простору са скаларним производом чији је карактеристични полином редукованог Јакобијевог оператора једнак* $\Pi_{i=1}^{k}(\lambda - \varepsilon_X \lambda_i)^{\nu_i}$ *(односно тензор је Осерманов), тада за све* $\mu_1, \ldots, \mu_k \in \mathbb{R}$ *постоји нови Осерманов алгебарски тензор кривине чији је карактеристични полином редукованог Јакобијевог оператора једнак* $\Pi_{i=1}^{k}(\lambda - \varepsilon_X \mu_i)^{\nu_i}$.

У наредној леми доказујемо да за k-корена Јакоби-дијагонализабилан алгебарски тензор кривине важи једнакост првих компоненти $\varepsilon_X(\varepsilon_{Y_0}, \varepsilon_{Y_1}, \ldots, \varepsilon_{Y_k})$ и $\varepsilon_Y(\varepsilon_{X_0}, \varepsilon_{X_1}, \ldots, \varepsilon_{X_k})$ из дефиниције Јакоби-пропорционалности.

Лема 4.2. *За k-корена Јакоби-дијагонализабилан алгебарски тензор кривине на простору са скаларним производом* $(\mathcal{V}, g)$ *и дефинитне векторе* $X, Y \in \mathcal{V}$ *такве да је* $X = \sum_{i=0}^{k} X_i$ *и* $Y = \sum_{j=0}^{k} Y_j$, *где* $X_i \in \mathcal{V}_i(Y)$ *и* $Y_j \in \mathcal{V}_j(X)$, *важи*

$$\varepsilon_Y \varepsilon_{X_0} = \varepsilon_X \varepsilon_{Y_0}. \tag{4.1}$$

Доказ. Како $Y_0 \in \mathcal{V}_0(X) = \mathrm{Span}\{X\}$, то је $Y_0 = \alpha X$, за неко $\alpha \in \mathbb{R}$. Како је

$$\begin{aligned} g(Y, X) &= g\left(\sum_{j=0}^{k} Y_j, X\right) = \sum_{j=0}^{k} g(Y_j, X) \\ &= g(Y_0, X) = g(\alpha X, X) = \alpha g(X, X) = \alpha \varepsilon_X \end{aligned}$$

и X је дефинитан вектор, то је $\alpha = g(X, Y)/\varepsilon_X$, те је $Y_0 = \alpha X = g(X, Y)X/\varepsilon_X$, одакле је $\varepsilon_X Y_0 = g(Y, X)X$, односно

$$\begin{aligned} \varepsilon_X \varepsilon_{Y_0} &= \varepsilon_X g(Y_0, Y_0) = g\left(\varepsilon_X Y_0, \frac{g(X, Y)}{\varepsilon_X} X\right) = \frac{1}{\varepsilon_X} g(g(Y, X)X, g(X, Y)X) \\ &= \frac{(g(X, Y))^2}{\varepsilon_X} g(X, X) = \frac{(g(X, Y))^2}{\varepsilon_X} \varepsilon_X = (g(X, Y))^2. \end{aligned}$$

Заменом слова X и Y добијамо да је $\varepsilon_Y \varepsilon_{X_0} = (g(X, Y))^2$, те је $\varepsilon_Y \varepsilon_{X_0} = \varepsilon_X \varepsilon_{Y_0}$.

□

Доказ наредне теореме (видети [8, Теорема 4]) у Римановом случају се може наћи у [5, Теорема 3].

Теорема 4.3. *Сваки два-корена Јакоби-дијагонализабилан Осерманов алгебарски тензор кривине на простору са скаларним производом* $(\mathcal{V}, g)$ *је Јакоби-пропорционалан.*

Доказ. Нека су $X, Y \in \mathcal{V}$ дефинитни вектори. Како је посматрани алгебарски тензор кривине R два-корена Јакоби-дијагонализабилан Осерманов, то постоје $\lambda_1 \neq \lambda_2$, такви да је $\mathcal{V} = \oplus_{i=0}^{2}\mathcal{V}_i(X) = \oplus_{j=0}^{2}\mathcal{V}_j(Y)$, при чему је $\mathcal{V}_i(X) = \operatorname{Ker}(\widetilde{\mathcal{J}}_X - \varepsilon_X\lambda_i \operatorname{Id})$ и $\mathcal{V}_j(Y) = \operatorname{Ker}(\widetilde{\mathcal{J}}_Y - \varepsilon_Y\lambda_j \operatorname{Id})$, те важи да је $X = \sum_{i=0}^{2} X_i$ и $Y = \sum_{j=0}^{2} Y_j$, при чему $X_i \in \mathcal{V}_i(Y)$ и $Y_j \in \mathcal{V}_j(X)$. На основу (1.2) је $\varepsilon_X = \varepsilon_{X_0} + \varepsilon_{X_1} + \varepsilon_{X_2}$ и $\varepsilon_Y = \varepsilon_{Y_0} + \varepsilon_{Y_1} + \varepsilon_{Y_2}$, а на основу Леме 4.2 важи једнакост $\varepsilon_Y\varepsilon_{X_0} = \varepsilon_X\varepsilon_{Y_0}$, те закључујемо да је

$$\begin{aligned}\varepsilon_X\varepsilon_{Y_1} - \varepsilon_Y\varepsilon_{X_1} =& \varepsilon_X(\varepsilon_Y - \varepsilon_{Y_0} - \varepsilon_{Y_2}) - \varepsilon_Y(\varepsilon_X - \varepsilon_{X_0} - \varepsilon_{X_2})\\ =& \varepsilon_X\varepsilon_Y - \varepsilon_X\varepsilon_{Y_0} - \varepsilon_X\varepsilon_{Y_2} - \varepsilon_Y\varepsilon_X + \varepsilon_Y\varepsilon_{X_0} + \varepsilon_Y\varepsilon_{X_2} = \varepsilon_Y\varepsilon_{X_2} - \varepsilon_X\varepsilon_{Y_2},\end{aligned}$$

те почетни и крајњи израз можемо означити са I. Како је

$$\begin{aligned}g(\mathcal{J}_X Y, Y) &= g(\mathcal{J}_X(Y_0 + Y_1 + Y_2), Y) = g(\mathcal{J}_X Y_0 + \mathcal{J}_X Y_1 + \mathcal{J}_X Y_2, Y_0 + Y_1 + Y_2)\\ &= g(0 + \varepsilon_X\lambda_1 Y_1 + \varepsilon_X\lambda_2 Y_2, Y_0 + Y_1 + Y_2)\\ &= \lambda_1\varepsilon_X g(Y_1, Y_1) + \lambda_2\varepsilon_X g(Y_2, Y_2)\\ &= \lambda_1\varepsilon_X\varepsilon_{Y_1} + \lambda_2\varepsilon_X\varepsilon_{Y_2}\end{aligned}$$

и слично заменом слова X и Y добијамо да је $g(\mathcal{J}_Y X, X) = \lambda_1\varepsilon_Y\varepsilon_{X_1} + \lambda_2\varepsilon_Y\varepsilon_{X_2}$, то користећи услов компатибилности $g(\mathcal{J}_X Y, Y) = g(\mathcal{J}_Y X, X)$ добијамо да је $\lambda_1\varepsilon_X\varepsilon_{Y_1} + \lambda_2\varepsilon_X\varepsilon_{Y_2} = \lambda_1\varepsilon_Y\varepsilon_{X_1} + \lambda_2\varepsilon_Y\varepsilon_{X_2}$, одакле добијамо да је $\lambda_1\varepsilon_X\varepsilon_{Y_1} - \lambda_1\varepsilon_Y\varepsilon_{X_1} = \lambda_2\varepsilon_Y\varepsilon_{X_2} - \lambda_2\varepsilon_X\varepsilon_{Y_2}$, односно $\lambda_1 I = \lambda_1(\varepsilon_X\varepsilon_{Y_1} - \varepsilon_Y\varepsilon_{X_1}) = \lambda_2(\varepsilon_Y\varepsilon_{X_2} - \varepsilon_X\varepsilon_{Y_2}) = \lambda_2 I$, одакле због $\lambda_1 \neq \lambda_2$ следи да је $I = 0$, односно $\varepsilon_X\varepsilon_{Y_1} = \varepsilon_Y\varepsilon_{X_1}$ и $\varepsilon_X\varepsilon_{Y_2} = \varepsilon_Y\varepsilon_{X_2}$, што заједно са раније закљученом једнакости $\varepsilon_X\varepsilon_{Y_0} = \varepsilon_Y\varepsilon_{X_0}$ повлачи да је $\varepsilon_X(\varepsilon_{Y_0}, \varepsilon_{Y_1}, \varepsilon_{Y_2}) = \varepsilon_Y(\varepsilon_{X_0}, \varepsilon_{X_1}, \varepsilon_{X_2})$, односно R је Јакоби-пропорционалан. □

Видели смо да је сваки полу-Клифордов алгебарски тензор кривине Јакоби-дијагонализабилан (доказ је непосредно након дефиниције полу-Клифордовог R), а на основу Теореме 3.16 је Осерманов. Доказ следеће теореме (видети [8, Теорема 5]) у Римановом случају се налази у [5, Теорема 4].

Теорема 4.4. *Сваки полу-Клифордов алгебарски тензор кривине на простору са скаларним производом* $(\mathcal{V}, g)$ *је Јакоби-пропорционалан.*

Доказ. Нека су X и Y дефинитни вектори из $\mathcal{V}$. Како је посматрани алгебарски тензор кривине R полу-Клифордов, то повлачи да је потпростор $\mathcal{F}_m = \mathrm{Span}\{X, J_1X, \dots, J_mX\}$ недегенерисан, те на основу Леме 1.6 важи да је $\mathcal{V} = \mathcal{F}_m + \mathcal{F}_m^{\perp}$, одакле је $Y = \alpha_0 X + \sum_{i=1}^m \alpha_i J_i X + P$, за $P \in \mathcal{F}_m^{\perp}$, а слично је $X = \beta_0 Y + \sum_{i=1}^m \beta_i J_i Y + Q$, за $Q \in \mathrm{Span}\{Y, J_1Y, \dots, J_mY\}^{\perp}$. Одавде користећи косоадјунгованост оператора J_t и раније изведене једнакости $\varepsilon_{J_tX} = -c_t\varepsilon_X$, $\varepsilon_{J_tY} = -c_t\varepsilon_Y$, $g(X, J_tX) = 0$, $g(Y, J_tY) = 0$, $g(J_iX, J_tX) = 0$ и $g(J_iY, J_tY) = 0$ за $i \in \{1, \dots, t-1, t+1, \dots, m\}$ закључујемо да је

$$\begin{aligned} -c_t\varepsilon_X\alpha_t =& \varepsilon_{J_tX}\alpha_t = \alpha_t g(J_tX, J_tX) = g\left(\alpha_0 X + \sum_{i=1}^m \alpha_i J_i X + P, J_tX\right) = g(Y, J_tX) \\ =& -g(X, J_tY) = -g\left(\beta_0 Y + \sum_{i=1}^m \beta_i J_i Y + Q, J_tY\right) = -\beta_t\varepsilon_{J_tY} = c_t\varepsilon_Y\beta_t, \end{aligned}$$

за $t \in \{1, \dots, m\}$, а како је посматрани алгебарски тензор кривине R полу-Клифордов, то је $c_t \neq 0$, те је $\varepsilon_X^2\alpha_t^2 = \varepsilon_Y^2\beta_t^2$, одакле на основу (1.2) следи

$$\varepsilon_Y\varepsilon_{\beta_tJ_tY} = \varepsilon_Y\beta_t^2\varepsilon_{J_tY} = -c_t\varepsilon_Y^2\beta_t^2 = -c_t\varepsilon_X^2\alpha_t^2 = \alpha_t^2\varepsilon_X\varepsilon_{J_tX} = \varepsilon_X\varepsilon_{\alpha_tJ_tX}.$$

Како важи да је $X = \beta_0 Y + \sum_{i=1}^m \beta_i J_i Y + Q$, то на основу (1.2) закључујемо да је $\varepsilon_X = \beta_0^2\varepsilon_Y + \sum_{i=1}^m \varepsilon_{\beta_iJ_iY} + \varepsilon_Q$, одакле је $\varepsilon_Q = \varepsilon_X - \beta_0^2\varepsilon_Y - \sum_{i=1}^m \varepsilon_{\beta_iJ_iY}$, а слично је $\varepsilon_P = \varepsilon_Y - \alpha_0^2\varepsilon_X - \sum_{i=1}^m \varepsilon_{\alpha_iJ_iX}$. Како је R полу-Клифордов, то је он Јакоби-дијагонализабилан и Осерманов, те је и l-корена за неко l, те применом Леме 4.2 закључујемо да је $\varepsilon_Y\varepsilon_{\beta_0Y} = \varepsilon_X\varepsilon_{\alpha_0X}$, односно $\varepsilon_Y^2\beta_0^2 = \varepsilon_X^2\alpha_0^2$, одакле је

$$\begin{aligned} \varepsilon_Y\varepsilon_Q =& \varepsilon_Y\left(\varepsilon_X - \beta_0^2\varepsilon_Y - \sum_{i=1}^m \varepsilon_{\beta_iJ_iY}\right) = \varepsilon_Y\varepsilon_X - \beta_0^2\varepsilon_Y^2 - \sum_{i=1}^m \varepsilon_Y\varepsilon_{\beta_iJ_iY} \\ =& \varepsilon_X\varepsilon_Y - \varepsilon_X^2\alpha_0^2 - \sum_{i=1}^m \varepsilon_X\varepsilon_{\alpha_iJ_iX} = \varepsilon_X\left(\varepsilon_Y - \alpha_0^2\varepsilon_X - \sum_{i=1}^m \varepsilon_{\alpha_iJ_iX}\right) = \varepsilon_X\varepsilon_P, \end{aligned}$$

одакле је $\varepsilon_Y(\varepsilon_{\beta_0Y}, \varepsilon_{\beta_1J_1Y}, \dots, \varepsilon_{\beta_mJ_mY}, \varepsilon_Q) = \varepsilon_X(\varepsilon_{\alpha_0X}, \varepsilon_{\alpha_1J_1X}, \dots, \varepsilon_{\alpha_mJ_mX}, \varepsilon_P)$, те на основу дефиниције закључујемо да је посматрани полу-Клифордов алгебарски тензор кривине R на простору са скаларним производом $(\mathcal{V}, g)$ Јакоби-пропорционалан. □

4.2 Јакоби-пропорционалност и Осерманова хипотеза

Резултати из овог поглавља су део Андрејићевог рада [5], а наводимо их у циљу приказивања једне значајне примене принципа пропорционалности.

Нека је R Риманов Јакоби-пропорционалан алгебарски тензор кривине на простору са скаларним производом $(\mathcal{V}, g)$, а X и Y међусобно ортогонални јединични вектори такви да је $X = \sum_{i=0}^{k} X_i$, при чему $X_i \in \mathcal{V}_i(Y) = \operatorname{Ker}(\widetilde{\mathcal{J}}_Y - \varepsilon_Y \lambda_i(Y)\operatorname{Id})$ и $Y = \sum_{j=0}^{k} Y_j$, где $Y_j \in \mathcal{V}_j(X) = \operatorname{Ker}(\widetilde{\mathcal{J}}_X - \varepsilon_X \lambda_j(X)\operatorname{Id})$. Приметимо да ако је $Y \in \mathcal{V}_i(X)$, онда је

$$\begin{aligned}\varepsilon_Y(\varepsilon_{X_0}, \varepsilon_{X_1}, \dots, \varepsilon_{X_k}) &= \varepsilon_X(\varepsilon_{Y_0}, \dots, \varepsilon_{Y_{i-1}}, \varepsilon_{Y_i}, \varepsilon_{Y_{i+1}}, \dots, \varepsilon_{Y_k}) \\ &= \varepsilon_X(0, \dots, 0, \varepsilon_{Y_i}, 0, \dots, 0),\end{aligned}$$

те је $\varepsilon_{X_0} = \ldots = \varepsilon_{X_{i-1}} = \varepsilon_{X_{i+1}} = \ldots = \varepsilon_{X_k} = 0$, те $X \in \mathcal{V}_i(Y)$ јер је нула једини вектор квадратне норме 0 у случају простора са позитивно дефинитним скаларним производом. Дакле, ако је $Y \in \mathcal{V}_i(X)$, односно Y је сопствени вектор оператора $\mathcal{J}_X$, онда је $X \in \mathcal{V}_i(Y) = \operatorname{Ker}(\widetilde{\mathcal{J}}_Y - \varepsilon_Y \lambda_i(Y)\operatorname{Id})$, односно X је сопствени вектор оператора $\mathcal{J}_Y$, одакле је R слабо Јакоби-дуалан, а важи и да је R Јакоби-дијагонализабилан (јер је Јакоби-пропорционалан), те на основу Леме 3.11 закључујемо да је R Јакоби-дуалан, одакле на основу Теореме 3.14 следи да је R Осерманов, те је $\lambda_i(X) = \lambda_i(Y) = \lambda_i$ за $i \in \{1, \dots, k\}$. Дакле, сваки Риманов Јакоби-пропорционалан алгебарски тензор кривине R је Осерманов.

У Теореми 3.16 (која се односи на псеудо-Риманов случај) смо доказали да је сваки квази-Клифордов алгебарски тензор кривине Осерманов, те је и сваки Риманов Клифордов тензор R Осерманов, док је обратно тачно у великом броју случајева, што следи на основу закона контрапозиције примењеног на наредну теорему коју је доказао Николајевски (видети [53, 54, 55, 56]).

Теорема 4.5. *Ако Риманов Осерманов алгебарски тензор кривине није Клифордов, онда он има димензију 16 и редуковани Јакобијев оператор има сопствену вредност вишеструкости 7 или 8.*

На основу Теореме 4.5 сваки Риманов Осерманов R димензије $n \neq 16$ је Клифордов, те је на основу Теореме 4.4 Јакоби-пропорционалан. У димензији 16 постоје Риманови Осерманови тензори кривине који нису Клифордови, а то су случајеви модел простора $\mathbb{O}\mathbf{P}^2$ и $\mathbb{O}\mathbf{H}^2$. Али, добро је познато да су сви модел простори један-корена или два-корена, при чему су $\mathbb{O}\mathbf{P}^2$ и $\mathbb{O}\mathbf{H}^2$ два-корена простори, а Риманови алгебарски тензори кривине јесу Јакоби-дијагонализабилни, те на основу Теореме 4.3 следи да су и ти Риманови Осерманови алгебарски тензори кривине који нису Клифордови ипак Јакоби-пропорционални. Дакле, сви познати примери Римановог Осермановог R (а они су Клифордови или два-корена) су Јакоби-пропорционални.

У наставку ћемо доказати да су Риманови Јакоби-пропорционални (а тиме и Осерманови) тензори који нису Клифордови 2-корена са вишеструкостима корена карактеристичног полинома редукованог Јакобијевог оператора 8 и 7 или су 3-корена са вишеструкостима 7, 7 и 1 (видети [5, Теорема 5]).

Теорема 4.6. *Ако је R Риманов Јакоби-пропорционалан алгебарски тензор кривине на простору са скаларним производом који није Клифордов, онда је R 2-корена са вишеструкостима 8 и 7, или је 3-корена са вишеструкостима 7, 7 и 1.*

Доказ. Ако је R Риманов Јакоби-пропорционалан (а самим тим и Осерманов) 1-корена тензор који није Клифордов, онда он на основу Теореме 4.5 има димензију 16, те је вишеструкост тог јединог корена карактеристичног полинома редукованог Јакобијевог оператора једнака 15, али то је у контрадикцији са закључком Теореме 4.5 да редуковани Јакобијев оператор има сопствену вредност вишеструкости 7 или 8.

Ако је R Риманов Јакоби-пропорционалан (а зато и Осерманов) 2-корена тензор који није Клифордов, онда на основу Теореме 4.5 R има димензију 16 и редуковани Јакобијев оператор има сопствену вредност вишеструкости 7 или 8, што је могуће једино у случају да је R 2-корен са вишеструкостима сопствених вредности редукованог Јакобијевог оператора 7 и 8. (Поменимо да је Николајевски о случају вишеструкости $\nu_1 = 8, \nu_2 = 7$ објавио тврђење да је одговарајућа Осерманова многострукост локално изометрична са $\mathbb{O}\mathbf{P}^2$ или $\mathbb{O}\mathbf{H}^2$ (видети [56, Теорема 1.2]). У питању су једине познате Осерманове многострукости које нису Клифордове.)

У наставку доказа R је Риманов Јакоби-пропорционалан (а самим тим и Осерманов) k-корена алгебарски тензор кривине, при чему је $k \geqslant 3$ и R није Клифордов. Тада на основу Теореме 4.5 следи да је димензија простора са скаларним производом $(\mathcal{V}, g)$ једнака $n = 16$ и важи $\nu_1 = 8$ или $\nu_1 = 7$ под претпоставком да за вишеструкости корена карактеристичног полинома $\widetilde{\omega}_X(\lambda) =$

$\Pi_{i=1}^{k}(\lambda-\varepsilon_X\lambda_i)^{\nu_i}$ редукованог Јакобијевог оператора важи $\nu_1 \geqslant \nu_2 \geqslant \ldots \geqslant \nu_k$. Применом Теореме 4.1 добијамо Осерманов алгебарски тензор кривине чији је карактеристични полином редукованог Јакобијевог оператора $\Pi_{i=1}^{k}(\lambda-\varepsilon_X\mu_i)^{\nu_i}$ за произвољне скаларе $\mu_1,\ldots,\mu_k \in \mathbb{R}$. За дефинисање Осермановог тензора R_1 користимо скаларе $(\mu_1,\mu_2,\mu_3,\ldots,\mu_k)=(\lambda_1,\lambda_1,\lambda_3,\ldots,\lambda_k)$, док за прављење Осермановог тензора R_2 користимо $(\mu_1,\mu_2,\mu_3,\ldots,\mu_k)=(0,\lambda_2-\lambda_1,0,\ldots,0)$. Докажимо да је $R=R_1+R_2$. Како на основу (2.6) следи да Јакобијеви оператори једнозначно одређују алгебарски тензор кривине, то је довољно доказати да су за свако $X\in\mathcal{V}$ Јакобијев оператор $\mathcal{J}_X$ тензора R и Јакобијев оператор $\mathfrak{J}_X$ тензора R_1+R_2 једнаки. На основу (2.3) довољно је посматрати јединичне векторе $X\in\mathcal{V}$. Како је $\widetilde{\omega}_X(\lambda)=\Pi_{i=1}^{k}(\lambda-\varepsilon_X\lambda_i)^{\nu_i}$ карактеристични полином редукованог Јакобијевог оператора $\widetilde{\mathcal{J}}_X$ Јакоби-дијагонализабилног R, то на основу Леме 3.7 постоји ортонормирана сопствена база $(X,E_1,\ldots,E_{n-1})$ за $\mathcal{V}$ таква да за сопствене векторе $E_1,\ldots,E_{n-1}$ важи $\mathcal{J}_X E_i=\varepsilon_X\lambda_1 E_i$, за $i\in\{1,\ldots,\nu_1\}$, ..., $\mathcal{J}_X E_i=\varepsilon_X\lambda_k E_i$, за $i\in\{n-\nu_k,\ldots,n-1\}$. Са друге стране, важи да је

$$\mathfrak{J}_X Y=(\mathcal{R}_1+\mathcal{R}_2)(Y,X)X=\mathcal{R}_1(Y,X)X+\mathcal{R}_2(Y,X)X=(\mathfrak{J}_1)_X Y+(\mathfrak{J}_2)_X Y,$$

где су $\mathfrak{J}_1$ и $\mathfrak{J}_2$ Јакобијеви оператори који одговарају тензорима R_1 и R_2. Због начина на који су дефинисани тензори R_1 и R_2, имамо да важи

$$\begin{aligned}
\mathfrak{J}_X X =&(\mathfrak{J}_1)_X X+(\mathfrak{J}_2)_X X=0+0=0=\mathcal{J}_X X,\\
\mathfrak{J}_X E_i =&(\mathfrak{J}_1)_X E_i+(\mathfrak{J}_2)_X E_i=\varepsilon_X\lambda_1 E_i+\varepsilon_X\cdot 0\cdot E_i\\
=&\varepsilon_X\lambda_1 E_i=\mathcal{J}_X E_i, i\in\{1,\ldots,\nu_1\},\\
\mathfrak{J}_X E_i =&(\mathfrak{J}_1)_X E_i+(\mathfrak{J}_2)_X E_i=\varepsilon_X\lambda_1 E_i+\varepsilon_X\cdot(\lambda_2-\lambda_1)\cdot E_i\\
=&\varepsilon_X\lambda_2 E_i=\mathcal{J}_X E_i, i\in\{\nu_1+1,\ldots,\nu_1+\nu_2\},\\
\mathfrak{J}_X E_i =&(\mathfrak{J}_1)_X E_i+(\mathfrak{J}_2)_X E_i=\varepsilon_X\lambda_3 E_i+\varepsilon_X\cdot 0\cdot E_i\\
=&\varepsilon_X\lambda_3 E_i=\mathcal{J}_X E_i, i\in\{\nu_1+\nu_2+1,\ldots,\nu_1+\nu_2+\nu_3\},\\
&\vdots\\
\mathfrak{J}_X E_i =&(\mathfrak{J}_1)_X E_i+(\mathfrak{J}_2)_X E_i=\varepsilon_X\lambda_k E_i+\varepsilon_X\cdot 0\cdot E_i\\
=&\varepsilon_X\lambda_k E_i=\mathcal{J}_X E_i, i\in\{\nu_1+\ldots+\nu_{k-1}+1,\ldots,n-1\},
\end{aligned}$$

те су линеарни Јакобијеви оператори $\mathcal{J}_X$ и $\mathfrak{J}_X$ једнаки, одакле је $R=R_1+R_2$.

Приметимо да је R_1 $(k-1)$-корена при чему је максимална вишеструкост неког корена карактеристичног полинома редукованог Јакобијевог оператора једнака $\nu_{\max} = \nu_1 + \nu_2$ и то за корен λ_1, а важи $\nu_{\max} \geqslant 7+1 = 8$, те је Риманов Осерманов тензор R_1 Клифордов, осим у случају да је

$$\nu_1 = 7, \nu_2 = \ldots = \nu_9 = 1 \tag{4.2}$$

(јер је иначе $\nu_{\max} = \nu_1 + \nu_2 > 7 + 1 = 8$, те би на основу Теореме 4.5 R_1 био Клифордов). Слично, тензор R_2 је 2-корена Осерманов при чему је максимална вишеструкост неког корена карактеристичног полинома редукованог Јакобијевог оператора једнака $\nu_{\max} = n{-}1{-}\nu_2$ (јер је вишеструкост корена 0 једнака $n - 1 - \nu_2$, а вишеструкост корена $\lambda_2 - \lambda_1$ је ν_2, а важи $n{-}1{-}\nu_2 \geqslant \nu_2$ јер је $n - 1 - \nu_2 \geqslant \nu_1 \geqslant \nu_2$), те је R_2 Клифордов, осим у случају да је

$$\nu_1 = \nu_2 = 7, \nu_3 = 1. \tag{4.3}$$

Заиста, за $\nu_2 < 7$ важи $\nu_{\max} = n{-}1{-}\nu_2 > 16 - 1 - 7 = 8$, те би R_2 на основу Теореме 4.5 био Клифордов. Не може бити ни $\nu_2 > 7$, јер би $\nu_1 \geqslant \nu_2 > 7$, те би $\nu_1 + \nu_2 \geqslant 8 + 8 = 16$, што је немогуће јер је $\nu_1 + \nu_2 < n - 1 = 15$. Како је $k \geqslant 3$, то је $\nu_3 \geqslant 1$, а свакако је $\nu_1 \geqslant \nu_2$ и $\nu_1 + \nu_2 + \nu_3 \leqslant n - 1 = 15$, те преостаје само могућност $\nu_1 = \nu_2 = 7, \nu_3 = 1$ да R_2 не буде Клифордов.

Дакле, ако искључимо случајеве (4.2) и (4.3), онда је $R = R_1 + R_2$ сума два Клифордова тензора. Приметимо да је Клифордова фамилија придружена Клифордовом тензору R_1 ранга $\nu_3 + \ldots + \nu_k$ јер се на основу доказа Теореме 3.16 у случају димензије 16 са вишеструкости 7 или 8 испоставља да можемо претпоставити да је сопствена вредност $\varepsilon_X \mu_0$ највеће вишеструкости, а већ смо показали да је за тензор R_1 та максимална вишеструкост $\nu_1 + \nu_2$, а важи и да је број косоадјунгованих ендоморфизама у Клифордовој фамилији једнак броју осталих сопствених вредности (бројаних са вишеструкостима) $\nu_3 + \ldots + \nu_k$. Слично, Клифордова фамилија придружена Клифордовом тензору R_2 је ранга ν_2 јер је број косоадјунгованих ендоморфизама у Клифордовој фамилији једнак разлици броја $n-1$ и максималне вишеструкости која је једнака $n - 1 - \nu_2$ за тензор R_2. Приметимо да ако је J_1 комплексна структура из Клифордове фамилије ранга $\nu_3 + \ldots + \nu_k$ придружене оператору R_1, а J_2 комплексна структура из Клифордове фамилије ранга ν_2 придружене оператору R_2, тада на основу Леме А.5 за свако $X \in \mathcal{V}$ важи $J_1 X \perp J_2 X$. Заиста, тензори R_1 и R_2 су такви да њихови редуковани Јакобијеви оператори имају исте сопствене просторе са одговарајућим сопственим вредностима и важи да $J_1 X \in \operatorname{Ker}(\widetilde{\mathcal{J}}_X - \varepsilon_X \lambda_3 \operatorname{Id}) + \ldots + \operatorname{Ker}(\widetilde{\mathcal{J}}_X - \varepsilon_X \lambda_k \operatorname{Id})$ и $J_2 X \in \operatorname{Ker}(\widetilde{\mathcal{J}}_X - \varepsilon_X \lambda_2 \operatorname{Id})$, те J_1X и J_2X представљају сопствене векторе који одговарају међусобно ортогоналним потпросторима полазног редукованог Јакобијевог оператора $\widetilde{\mathcal{J}}_X$.

Одавде из косоадјунгованости ендоморфизма J_1 добијамо $g(J_1J_2X, X) = -g(J_2X, J_1X) = 0$, а слично важи $g(J_1J_2Y, Y) = 0$ и $g(J_1J_2(X+Y), X+Y) = 0$, те применом поларизације и билинеарности форме g закључујемо да за све $X, Y \in \mathcal{V}$ важи да је

$$\begin{aligned}0 &= g(J_1J_2(X+Y), X+Y) = g(J_1J_2X + J_1J_2Y, X+Y)\\ &= g(J_1J_2X, X) + g(J_1J_2X, Y) + g(J_1J_2Y, X) + g(J_1J_2Y, Y)\\ &= 0 + g(J_1J_2X, Y) + g(J_1J_2Y, X) + 0 = g(J_1J_2X, Y) + g(J_1J_2Y, X).\end{aligned}$$

Даље, на основу симетричности и билинеарности форме g, као и косоадјунгованости ендоморфизама J_1 и J_2 имамо да је

$$\begin{aligned}&g((J_1J_2 + J_2J_1)X, Y) = g(J_1J_2X, Y) + g(J_2J_1X, Y) = g(J_1J_2X, Y) - g(J_1X, J_2Y)\\ =&g(J_1J_2X, Y) + g(X, J_1J_2Y) = g(J_1J_2X, Y) + g(J_1J_2Y, X) = 0,\end{aligned}$$

те закључујемо да је $J_1J_2 + J_2J_1 = 0$, што значи да је унија Клифордових фамилија придружених тензорима R_1 и R_2 такође Клифордова фамилија и она је придружена тензору $R_1 + R_2 = R$, те је он Клифордов, што је у контрадикцији са претпоставком теореме да R није Клифордов.

Да бисмо употпунили доказ теореме довољно је још показати да је у случају (4.2) тензор R Клифордов. На већ виђени начин можемо написати тај 9-корена R са вишеструкостима $\nu_1 = 7, \nu_2 = \ldots = \nu_9 = 1$ као збир два Клифордова тензора R_3 и R_4, при чему R_3 дефинишемо помоћу $(\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4, \ldots, \mu_9) = (\lambda_1, \lambda_1, \lambda_1, \lambda_4, \ldots, \lambda_9)$, а R_4 дефинишемо тако што $(\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4, \ldots, \mu_9)$ заменимо са $(0, \lambda_2 - \lambda_1, \lambda_3 - \lambda_1, 0, \ldots, 0)$. Тада је тензор R_3 $9 - 2 = 7$-корена Осерманов са $\nu_{\max} = 7 + 1 + 1 = 9 > 8$, док је R_4 3-корена Осерманов са $\nu_{\max} = 7 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 13 > 8$, те су на основу Теореме 4.5 оба Клифордова, а на исти начин као раније се доказује да је унија њима придружених Клифордових фамилија такође Клифордова, а она одговара тензору $R_3 + R_4 = R$ који је самим тим Клифордов, што је у контрадикцији са претпоставком теореме да R није Клифордов. Дакле, ако је алгебарски тензор кривине R Риманов Јакоби-пропорционалан k-корена за $k \geqslant 3$ и који није Клифордов, он мора бити као у случају (4.3), односно 3-корена са вишеструкостима сопствених вредности редукованог Јакобијевог оператора једнаким 7, 7 и 1. $\square$

Глава 5

Јакоби-ортогоналност

5.1 Риманова Јакоби-ортогоналност

У овом поглављу представљамо Јакоби-ортогоналност као нову потенцијалну карактеризацију Риманових Осерманових алгебарских тензора кривине и доказујемо да је сваки Риманов Јакоби-ортогоналан тензор Осерманов, док су сви познати Риманови Осерманови тензори Јакоби-ортогонални. Добијени резултати су објављени у раду [9].

Нека је R Риманов алгебарски тензор кривине на простору $(\mathcal{V}, g)$ димензије n са позитивно дефинитним скаларним производом. За Риманов алгебарски тензор кривине кажемо да је ***Јакоби-ортогоналан*** ако $\mathcal{J}_X Y \perp \mathcal{J}_Y X$ важи за све међусобно ортогоналне векторе X и Y из $\mathcal{V}$.

Теорема 5.1. *Сваки Риманов Јакоби-ортогоналан алгебарски тензор кривине је Јакоби-дуалан.*

Доказ. Нека су $X, Y \in \mathcal{V}$ међусобно ортогонални јединични вектори такви да $\mathcal{J}_X Y = \lambda Y$ важи за неко $\lambda \in \mathbb{R}$. На основу (2.5) и билинеарности форме g важи да је $g(\mathcal{J}_Y X, X) = g(\mathcal{J}_X Y, Y) = g(\lambda Y, Y) = \lambda g(Y, Y) = \lambda$. На основу Леме 1.1 следи да је потпростор $\mathrm{Span}\{X, Y\}$ недегенерисан, те је на основу Леме 1.6 $\mathcal{V} = \mathrm{Span}\{X, Y\} + (\mathrm{Span}\{X, Y\})^\perp$, одакле је $\mathcal{J}_Y X = aX + bY + Z$, при чему $a, b \in \mathbb{R}$ и $Z \in (\mathrm{Span}\{X, Y\})^\perp$. Одатле користећи билинеарност форме g, већ изведену једнакост $g(\mathcal{J}_Y X, X) = \lambda$, $Y \perp X$ и $Z \perp X$ добијамо да је

$$\begin{aligned} a =& a \cdot 1 + b \cdot 0 + 0 = ag(X, X) + bg(Y, X) + g(Z, X) = g(aX + bY + Z, X) \\ =& g(\mathcal{J}_Y X, X) = \lambda. \end{aligned}$$

Даље, користећи $X \perp Y$, $Z \perp Y$, билинеарност форме g, самоадјунгованост оператора $\mathcal{J}_Y$ и $\mathcal{J}_Y Y = 0$ закључујемо да је

$$\begin{aligned} b =& a \cdot 0 + b \cdot 1 + 0 = ag(X,Y) + bg(Y,Y) + g(Z,Y) = g(aX + bY + Z, Y) \\ =& g(\mathcal{J}_Y X, Y) = g(X, \mathcal{J}_Y Y) = g(X, 0) = 0. \end{aligned}$$

Дакле, $\mathcal{J}_Y X = aX + bY + Z = \lambda X + Z$. Приметимо да је $X + Y \perp X - Y$ јер је

$$g(X+Y, X-Y) = g(X,X) - g(X,Y) + g(Y,X) - g(Y,Y) = 1 - 0 + 0 - 1 = 0,$$

те из Јакоби-ортогоналности следи да је $\mathcal{J}_{X+Y}(X-Y) \perp \mathcal{J}_{X-Y}(X+Y)$. Са друге стране, сабирањем једнакости (2.4) и

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_{X-Y} Z =& \mathcal{R}(Z, X-Y)(X-Y) = \mathcal{R}(Z,X)X - \mathcal{R}(Z,X)Y - \mathcal{R}(Z,Y)X \\ &+ \mathcal{R}(Z,Y)Y = \mathcal{J}_X Z - 2\mathcal{J}(X,Y)Z + \mathcal{J}_Y Z. \end{aligned}$$

добијамо да је

$$\mathcal{J}_{X+Y} + \mathcal{J}_{X-Y} = 2\mathcal{J}_X + 2\mathcal{J}_Y. \tag{5.1}$$

Користећи (5.1), линеарност Јакобијевог оператора, $\mathcal{J}_{X-Y}(X-Y) = 0$, $\mathcal{J}_X X = 0$, $\mathcal{J}_Y Y = 0$ и $\mathcal{J}_{X+Y}(X+Y) = 0$ добијамо да је

$$\begin{aligned} &\mathcal{J}_{X+Y}(X-Y) = (2\mathcal{J}_X + 2\mathcal{J}_Y - \mathcal{J}_{X-Y})(X-Y) \\ &= 2\mathcal{J}_X(X-Y) + 2\mathcal{J}_Y(X-Y) - \mathcal{J}_{X-Y}(X-Y) = 2(\mathcal{J}_Y X - \mathcal{J}_X Y), \\ &\mathcal{J}_{X-Y}(X+Y) = (2\mathcal{J}_X + 2\mathcal{J}_Y - \mathcal{J}_{X+Y})(X+Y) \\ &= 2\mathcal{J}_X(X+Y) + 2\mathcal{J}_Y(X+Y) - \mathcal{J}_{X+Y}(X+Y) = 2(\mathcal{J}_Y X + \mathcal{J}_X Y). \end{aligned}$$

Зато на основу билинеарности и симетричности форме g имамо да је

$$\begin{aligned} 0 =& g(\mathcal{J}_{X+Y}(X-Y), \mathcal{J}_{X-Y}(X+Y)) = g(2(\mathcal{J}_Y X - \mathcal{J}_X Y), 2(\mathcal{J}_Y X + \mathcal{J}_X Y)) \\ =& 4(g(\mathcal{J}_Y X, \mathcal{J}_Y X) + g(\mathcal{J}_Y X, \mathcal{J}_X Y) - g(\mathcal{J}_X Y, \mathcal{J}_Y X) - g(\mathcal{J}_X Y, \mathcal{J}_X Y)) \\ =& 4(\varepsilon_{\mathcal{J}_Y X} - \varepsilon_{\mathcal{J}_X Y}). \end{aligned}$$

што повлачи да је $\varepsilon_{\mathcal{J}_X Y} = \varepsilon_{\mathcal{J}_Y X}$, односно $\varepsilon_{\lambda Y} = \varepsilon_{\lambda X + Z}$, што на основу (1.2) повлачи да је $\lambda^2 \varepsilon_Y = \lambda^2 \varepsilon_X + \varepsilon_Z$. Одатле је $\lambda^2 = \lambda^2 + \varepsilon_Z$, те закључујемо да је $\varepsilon_Z = 0$, а како Z припада простору са позитивно дефинитним скаларним производом, то је $Z = 0$, одакле следи да је $\mathcal{J}_Y X = \lambda X + Z = \lambda X$, што доказује Јакоби-дуалност. □

На основу Теореме 3.10 сваки Риманов Јакоби-дуалан R је Осерманов, што нас доводи до следеће последице.

Последица 5.2. *Сваки Риманов Јакоби-ортогоналан алгебарски тензор кривине је Осерманов.*

Обратно, питамо се да ли је сваки Риманов Осерманов R Јакоби-ортогоналан. У наставку доказујемо да је одговор потврдан за познате Осерманове тензоре (оне који су Клифордови или два-корена).

Теорема 5.3. *Сваки Риманов Клифордов алгебарски тензор кривине је Јакоби-ортогоналан.*

Доказ. Нека је R Риманов Клифордов алгебарски тензор кривине облика (3.12). Користећи да је $\mathcal{R} = R^\sharp$ из $R = \mu_0 R^1 + \sum_{i=1}^m \mu_i R^{J_i}$ закључујемо да је $\mathcal{R} = \mu_0 \mathcal{R}^1 + \sum_{i=1}^m \mu_i \mathcal{R}^{J_i}$, при чему је $\mathcal{R}^1(X,Y)Z = g(Y,Z)X - g(X,Z)Y$ и

$$\mathcal{R}^{J_i}(X,Y)Z = g(J_iX,Z)J_iY - g(J_iY,Z)J_iX + 2g(J_iX,Y)J_iZ.$$

Даље, користећи косоадјунгованост оператора J_i на основу које је $g(J_iY,X) = -g(Y,J_iX)$ и $g(J_iX,X) = -g(X,J_iX)$, односно $g(J_iX,X) = 0$, израчунавамо

$$\begin{aligned}
\mathcal{J}_X Y =&\mathcal{R}(Y,X)X = \left(\mu_0\mathcal{R}^1 + \sum_{i=1}^m \mu_i \mathcal{R}^{J_i}\right)(Y,X)X \\
=&\mu_0\mathcal{R}^1(Y,X)X + \sum_{i=1}^m \mu_i\mathcal{R}^{J_i}(Y,X)X = \mu_0(g(X,X)Y - g(Y,X)X) \\
&+ \sum_{i=1}^m \mu_i(g(J_iY,X)J_iX - g(J_iX,X)J_iY + 2g(J_iY,X)J_iX) \\
=&\mu_0(\varepsilon_X Y - g(Y,X)X) + 3\sum_{i=1}^m \mu_i g(J_iY,X)J_iX \\
=&\mu_0(\varepsilon_X Y - g(Y,X)X) - 3\sum_{i=1}^m \mu_i g(Y,J_iX)J_iX.
\end{aligned}$$

За $X \perp Y$ због билинеарности и симетричности форме g, $g(Y,J_jY) = 0$ и $g(J_iX,X) = 0$ важи да је

$$\begin{aligned}
g(\mathcal{J}_X Y, \mathcal{J}_Y X) =&g\left(\mu_0\varepsilon_X Y - 3\sum_{i=1}^m \mu_i g(Y,J_iX)J_iX, \mu_0\varepsilon_Y X - 3\sum_{j=1}^m \mu_j g(X,J_jY)J_jY\right) \\
=&9\sum_{i,j=1}^m \mu_i\mu_j g(Y,J_iX)g(X,J_jY)g(J_iX,J_jY) \\
=&-9\sum_{i,j=1}^m \mu_i\mu_j g(Y,J_iX)g(J_jX,Y)g(J_iX,J_jY)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&=9\sum_{i,j=1}^{m}\mu_i\mu_j g(Y,J_iX)g(Y,J_jX)g(J_jJ_iX,Y)\\
&=9\sum_{i,j=1}^{m}\mu_i\mu_j g(Y,J_iX)g(Y,J_jX)g(Y,J_jJ_iX)\\
&=\frac{9}{2}\sum_{i,j=1}^{m}\mu_i\mu_j g(Y,J_iX)g(Y,J_jX)g(Y,J_jJ_iX)\\
&\quad+\frac{9}{2}\sum_{i,j=1}^{m}\mu_i\mu_j g(Y,J_iX)g(Y,J_jX)g(Y,J_jJ_iX)\\
&=\frac{9}{2}\sum_{i,j=1}^{m}\mu_i\mu_j g(Y,J_iX)g(Y,J_jX)g(Y,J_jJ_iX)\\
&\quad+\frac{9}{2}\sum_{j,i=1}^{m}\mu_j\mu_i g(Y,J_jX)g(Y,J_iX)g(Y,J_iJ_jX)\\
&=\frac{9}{2}\sum_{i,j=1}^{m}\mu_i\mu_j g(Y,J_iX)g(Y,J_jX)g(Y,(J_iJ_j+J_jJ_i)X)\\
&=\frac{9}{2}\sum_{i,j=1}^{m}\mu_i\mu_j g(Y,J_iX)g(Y,J_jX)g(Y,(-2\delta_{ij}\operatorname{Id})X)\\
&=9\sum_{i=1}^{m}\mu_i\mu_i g(Y,J_iX)g(Y,J_iX)g(Y,(-\operatorname{Id})X)\\
&=-9\sum_{i=1}^{m}\mu_i^2 g(Y,J_iX)^2 g(Y,X)=0,
\end{aligned}
$$

што доказује да је R Јакоби-ортогоналан. □

Кажемо да је Риманов алгебарски тензор кривине R ***k*-корена** тензор ако $\widetilde{\mathcal{J}}_X$ има тачно k различитих сопствених вредности за сваки ненула вектор $X \in \mathcal{V}$.

У наредне две теореме доказујемо да су k-корена Риманови Осерманови тензори кривине за $k \in \{1,2\}$ Јакоби-ортогонални.

Теорема 5.4. *Сваки један-корена Риманов Осерманов алгебарски тензор кривине је Јакоби-ортогоналан.*

Доказ. Нека су X и Y два међусобно ортогонална вектора из простора са позитивно дефинитним скаларним производом $(\mathcal{V}, g)$. Ако је $Y = 0$, онда тривијално важи $g(\mathcal{J}_X Y, \mathcal{J}_Y X) = g(\mathcal{J}_X 0, \mathcal{J}_0 X) = 0$. Ако је Y произвољан ненула вектор из $\mathcal{V}$, онда на основу Леме 1.1 следи да је $\mathrm{Span}\{Y\}$ недегенерисан, те је на основу Леме 1.6 $\mathcal{V} = \mathrm{Span}\{Y\} \oplus (\mathrm{Span}\{Y\})^\perp$. Како је R по претпоставци теореме један-корена Риманов Осерманов тензор, то постоји само једна сопствена вредност $\varepsilon_Y\lambda \in \mathbb{R}$ линеарног самоадјунгованог оператора $\widetilde{\mathcal{J}}_Y$ на простору са позитивно дефинитним скаларним производом $((\mathrm{Span}\{Y\})^\perp, g\restriction_{(\mathrm{Span}\{Y\})^\perp})$, одакле применом спектралне теореме А.7 добијамо да је $(\mathrm{Span}\{Y\})^\perp = \mathrm{Ker}(\widetilde{\mathcal{J}}_Y - \varepsilon_Y\lambda\,\mathrm{Id})$. Како $X \in (\mathrm{Span}\{Y\})^\perp = \mathrm{Ker}(\widetilde{\mathcal{J}}_Y - \varepsilon_Y\lambda\,\mathrm{Id})$, то је $\widetilde{\mathcal{J}}_Y X = \varepsilon_Y\lambda X$, односно $\mathcal{J}_Y X = \varepsilon_Y\lambda X$. На основу Теореме 3.10 сваки Риманов Осерманов R је Јакоби-дуалан, те из $\mathcal{J}_Y X = \varepsilon_Y\lambda X$ закључујемо да је $\mathcal{J}_X Y = \varepsilon_X\lambda Y$, те је $g(\mathcal{J}_X Y, \mathcal{J}_Y X) = g(\varepsilon_X\lambda Y, \varepsilon_Y\lambda X) = \varepsilon_X\varepsilon_Y\lambda^2 g(Y, X) = 0$, што доказује да је R Јакоби-ортогоналан. □

Сличну идеју користимо да докажемо и наредну теорему о два-корена Римановим Осермановим алгебарским тензорима кривине.

Теорема 5.5. *Сваки два-корена Риманов Осерманов алгебарски тензор кривине је Јакоби-ортогоналан.*

Доказ. Нека су X и Y два међусобно ортогонална вектора из простора са позитивно дефинитним скаларним производом $(\mathcal{V}, g)$. Ако је $Y = 0$, онда тривијално важи $g(\mathcal{J}_X Y, \mathcal{J}_Y X) = g(\mathcal{J}_X 0, \mathcal{J}_0 X) = 0$. Ако је Y произвољан ненула вектор из $\mathcal{V}$, онда на основу Леме 1.1 следи да је $\mathrm{Span}\{Y\}$ недегенерисан, те је на основу Леме 1.6 $\mathcal{V} = \mathrm{Span}\{Y\} \oplus (\mathrm{Span}\{Y\})^\perp$. Како је R два-корена Риманов Осерманов тензор, то постоје две различите сопствене вредности $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ линеарног самоадјунгованог оператора $\widetilde{\mathcal{J}}_Y$ на простору са позитивно дефинитним скаларним производом $((\mathrm{Span}\{Y\})^\perp, g\restriction_{(\mathrm{Span}\{Y\})^\perp})$, одакле применом спектралне теореме А.7 закључујемо да је $(\mathrm{Span}\{Y\})^\perp = \mathcal{V}_1(Y) \oplus \mathcal{V}_2(Y)$, где је $\mathcal{V}_i(Y) = \mathrm{Ker}(\widetilde{\mathcal{J}}_Y - \lambda_i\,\mathrm{Id})$ за $i \in \{1, 2\}$. Напишимо $X \in (\mathrm{Span}\{Y\})^\perp$ у облику $X = X_1 + X_2$ при чему $X_1 \in \mathcal{V}_1(Y)$ и $X_2 \in \mathcal{V}_2(Y)$. На основу линеарности Јакобијевог оператора $\mathcal{J}_Y$ је $\mathcal{J}_Y X = \mathcal{J}_Y X_1 + \mathcal{J}_Y X_2 = \lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2$, а на основу (1.4) је $R(Y, X_1 + X_2, X_1, X_1) = -R(Y, X_1 + X_2, X_1, X_1)$, односно $R(Y, X_1 + X_2, X_1, X_1) = 0$ и слично $R(Y, X_1 + X_2, X_2, X_2) = 0$, те на основу мултилинеарности R и (1.4) добијамо да је

$$\begin{aligned} g(\mathcal{J}_X Y, \mathcal{J}_Y X) =& g(\mathcal{R}(Y, X)X, \lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2) = R(Y, X, X, \lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2) \\ =& R(Y, X_1 + X_2, X_1 + X_2, \lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2) \\ =& \lambda_1 R(Y, X_1 + X_2, X_1, X_1) + \lambda_2 R(Y, X_1 + X_2, X_1, X_2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&+\lambda_1 R(Y,X_1+X_2,X_2,X_1)+\lambda_2 R(Y,X_1+X_2,X_2,X_2)\\
=&\lambda_2 R(Y,X_1+X_2,X_1,X_2)+\lambda_1 R(Y,X_1+X_2,X_2,X_1)\\
=&\lambda_2 R(Y,X_1+X_2,X_1,X_2)-\lambda_1 R(Y,X_1+X_2,X_1,X_2)\\
=&(\lambda_2-\lambda_1)R(Y,X_1+X_2,X_1,X_2)\\
=&(\lambda_2-\lambda_1)(R(Y,X_1,X_1,X_2)+R(Y,X_2,X_1,X_2))\\
=&(\lambda_2-\lambda_1)(g(\mathcal{R}(Y,X_1)X_1,X_2)-R(Y,X_2,X_2,X_1))\\
=&(\lambda_2-\lambda_1)(g(\mathcal{J}_{X_1}Y,X_2)-g(\mathcal{J}_{X_2}Y,X_1)).
\end{aligned}$$

На основу Теореме 3.10 сваки Риманов Осерманов R је Јакоби-дуалан, те из $X_1\in\mathcal{V}_1(Y)$ закључујемо да је $\mathcal{J}_{X_1}Y\in\operatorname{Span}\{Y\}$, а како $X_2\in(\operatorname{Span}\{Y\})^\perp$, то је $g(\mathcal{J}_{X_1}Y,X_2)=0$. Јакоби-дуалност и $X_2\in\mathcal{V}_2(Y)$ повлаче да је $\mathcal{J}_{X_2}Y\in\operatorname{Span}\{Y\}$, а како $X_1\in(\operatorname{Span}\{Y\})^\perp$, то је $g(\mathcal{J}_{X_2}Y,X_1)=0$, те добијамо да је

$$g(\mathcal{J}_XY,\mathcal{J}_YX)=(\lambda_2-\lambda_1)(g(\mathcal{J}_{X_1}Y,X_2)-g(\mathcal{J}_{X_2}Y,X_1))=(\lambda_2-\lambda_1)(0-0)=0,$$

што доказује да је R Јакоби-ортогоналан. □

На основу Теореме 4.5 сваки Риманов Осерманов R димензије $n\neq 16$ је Клифордов, те је на основу Теореме 5.3 Јакоби-ортогоналан. У димензији 16 постоје Риманови Осерманови тензори кривине који нису Клифордови, а то су случајеви модел простора $\mathbb{O}\mathbf{P}^2$ и $\mathbb{O}\mathbf{H}^2$. Али, добро је познато да су сви модел простори један-корена или два-корена, при чему су $\mathbb{O}\mathbf{P}^2$ и $\mathbb{O}\mathbf{H}^2$ два-корена простори, те на основу Теореме 5.5 следи да су и ти Риманови Осерманови тензори кривине који нису Клифордови ипак Јакоби-ортогонални. Дакле, сви нама познати Риманови Осерманови алгебарски тензори кривине су Јакоби--ортогонални. Закључујемо да је Јакоби-ортогоналност важан концепт који може окарактерисати Риманове Осерманове тензоре у случају да је Осерманова хипотеза тачна.

Нека је R Риманов Осерманов алгебарски тензор кривине, одакле је на основу Теореме 3.10 R и Јакоби-дуалан. Осерманов тензор је k-корена тензор, при чему можемо сматрати да је $k>2$, јер смо у Теоремама 5.4 и 5.5 већ доказали да су један-корена и два-корена Риманови Осерманови тензори Јакоби-ортогонални. Услов Јакоби-ортогоналности Римановог Осермановог k-корена тензора за $k>2$ нам даје неке интересантне једначине.

Теорема 5.6. *Нека је R Јакоби-ортогоналан Риманов Осерманов k-корена тензор на простору са скаларним производом $(\mathcal{V},g)$, при чему је $k>2$. Ако* *су за произвољан јединичан вектор* $X \in \mathcal{V}$ *вектори* $A, B, C \in (\mathrm{Span}\{X\})^{\perp}$ *међусобно ортогонални вектори такви да је* $\mathcal{J}_X A = \lambda_A A$, $\mathcal{J}_X B = \lambda_B B$ *и* $\mathcal{J}_X C = \lambda_C C$, *где* $\lambda_A, \lambda_B, \lambda_C \in \mathbb{R}$, *тада важи*

$$R(X, A, B, C)(\lambda_C - 2\lambda_B + \lambda_A) + R(X, B, A, C)(\lambda_C + \lambda_B - 2\lambda_A) = 0.$$

Доказ. Приметимо да на основу Лема А.5 и А.4 за произвољан јединичан вектор $X \in \mathcal{V}$ постоје међусобно ортогонални сопствени вектори A, B, C самоадјунгованог линеарног оператора $\mathcal{J}_X$ ортогонални на X, као и $\lambda_A, \lambda_B, \lambda_C \in \mathbb{R}$ тако да је $\mathcal{J}_X A = \lambda_A A$, $\mathcal{J}_X B = \lambda_B B$ и $\mathcal{J}_X C = \lambda_C C$, одакле на основу Јакоби-дуалности имамо да је $\mathcal{J}_A X = \varepsilon_A \lambda_A X$, $\mathcal{J}_B X = \varepsilon_B \lambda_B X$ и $\mathcal{J}_C X = \varepsilon_C \lambda_C X$. Одатле користећи линеарност $\mathcal{J}_X$ следи да је $\mathcal{J}_X(A + B + C) = \mathcal{J}_X A + \mathcal{J}_X B + \mathcal{J}_X C = \lambda_A A + \lambda_B B + \lambda_C C$, док на основу мултилинеарности оператора $\mathcal{R}$ имамо да је

$$\begin{aligned}
\mathcal{J}_{A+B+C} X = &\mathcal{R}(X, A + B + C)(A + B + C) = \mathcal{R}(X, A)A + \mathcal{R}(X, A)B + \mathcal{R}(X, A)C \\
&+ \mathcal{R}(X, B)A + \mathcal{R}(X, B)B + \mathcal{R}(X, B)C + \mathcal{R}(X, C)A + \mathcal{R}(X, C)B + \mathcal{R}(X, C)C \\
= &\mathcal{J}_A X + \mathcal{R}(X, A)B + \mathcal{R}(X, B)A + \mathcal{R}(X, A)C + \mathcal{R}(X, C)A + \mathcal{J}_B X + \mathcal{R}(X, B)C \\
&+ \mathcal{R}(X, C)B + \mathcal{J}_C X \\
= &(\varepsilon_A \lambda_A + \varepsilon_B \lambda_B + \varepsilon_C \lambda_C)X + \mathcal{R}(X, A)B + \mathcal{R}(X, B)A + \mathcal{R}(X, A)C + \mathcal{R}(X, C)A \\
&+ \mathcal{R}(X, B)C + \mathcal{R}(X, C)B.
\end{aligned}$$

На основу (1.4) и $B \perp X$ је

$$\begin{aligned}
R(X, A, B, A) &= -R(X, A, A, B) = -g(\mathcal{R}(X, A)A, B) = -g(\mathcal{J}_A X, B) \\
&= -g(\varepsilon_A \lambda_A X, B) = -\varepsilon_A \lambda_A g(X, B) = 0,
\end{aligned}$$

а на основу (1.4) и $A \perp X$ је

$$\begin{aligned}
R(X, B, A, B) &= -R(X, B, B, A) = -g(\mathcal{R}(X, B)B, A) = -g(\mathcal{J}_B X, A) \\
&= -g(\varepsilon_B \lambda_B X, A) = -\varepsilon_B \lambda_B g(X, A) = 0.
\end{aligned}$$

На основу Леме 1.1 је $\mathrm{Span}\{X, A, B, C\}$ недегенерисан потпростор, те из Леме 1.6 следи да је $\mathcal{V} = \mathrm{Span}\{X, A, B, C\} + (\mathrm{Span}\{X, A, B, C\})^{\perp}$, што повлачи да се $\mathcal{R}(X, A)B + \mathcal{R}(X, B)A$ може изразити као $\xi X + \alpha A + \beta B + \gamma C + D$, при чему је $D \in (\mathrm{Span}\{X, A, B, C\})^{\perp}$. На основу $\mathbb{Z}_2$ симетрија важи да је

$$R(X, A, B, X) = -R(A, X, B, X) = R(A, X, X, B) = g(\mathcal{J}_X A, B) = g(\lambda_A A, B) = 0,$$

$$R(X, B, A, X) = -R(B, X, A, X) = R(B, X, X, A) = g(\mathcal{J}_X B, A) = g(\lambda_B B, A) = 0,$$

одакле је

$$\begin{aligned}\xi = \xi\varepsilon_X &= \xi g(X,X) + \alpha g(A,X) + \beta g(B,X) + \gamma g(C,X) + g(D,X)\\ &= g(\xi X + \alpha A + \beta B + \gamma C + D, X) = g(\mathcal{R}(X,A)B + \mathcal{R}(X,B)A, X)\\ &= g(\mathcal{R}(X,A)B, X) + g(\mathcal{R}(X,B)A, X) = R(X,A,B,X) + R(X,B,A,X) = 0.\end{aligned}$$

На основу (1.4) је $R(X,B,A,A) = -R(X,B,A,A)$ те је $R(X,B,A,A) = 0$, а већ смо доказали и да је $R(X,A,B,A) = 0$, те је

$$\begin{aligned}\alpha\varepsilon_A &= \alpha g(A,A) + \beta g(B,A) + \gamma g(C,A) + g(D,A)\\ &= g(\alpha A + \beta B + \gamma C + D, A) = g(\mathcal{R}(X,A)B + \mathcal{R}(X,B)A, A)\\ &= g(\mathcal{R}(X,A)B, A) + g(\mathcal{R}(X,B)A, A) = R(X,A,B,A) + R(X,B,A,A) = 0,\end{aligned}$$

одакле је $\alpha = 0$. На основу (1.4) је $R(X,A,B,B) = -R(X,A,B,B)$, те је $R(X,A,B,B) = 0$, а већ смо доказали и да је $R(X,B,A,B) = 0$, те је

$$\begin{aligned}\beta\varepsilon_B &= \beta g(B,B) + \gamma g(C,B) + g(D,B)\\ &= g(\beta B + \gamma C + D, B) = g(\mathcal{R}(X,A)B + \mathcal{R}(X,B)A, B)\\ &= g(\mathcal{R}(X,A)B, B) + g(\mathcal{R}(X,B)A, B) = R(X,A,B,B) + R(X,B,A,B) = 0,\end{aligned}$$

одакле је $\beta = 0$. Даље је $\mathcal{R}(X,A)B + \mathcal{R}(X,B)A = \gamma C + D$, те је

$$\begin{aligned}\gamma\varepsilon_C &= \gamma g(C,C) + g(D,C)\\ &= g(\gamma C + D, C) = g(\mathcal{R}(X,A)B + \mathcal{R}(X,B)A, C)\\ &= g(\mathcal{R}(X,A)B, C) + g(\mathcal{R}(X,B)A, C) = R(X,A,B,C) + R(X,B,A,C),\end{aligned}$$

одакле је

$$\gamma = \frac{R(X,A,B,C) + R(X,B,A,C)}{\varepsilon_C},$$

односно

$$\mathcal{R}(X,A)B + \mathcal{R}(X,B)A = \frac{R(X,A,B,C) + R(X,B,A,C)}{\varepsilon_C}C + D.$$

Понављајући исти поступак добијамо једнакости

$$\mathcal{R}(X,A)C + \mathcal{R}(X,C)A = \frac{R(X,A,C,B) + R(X,C,A,B)}{\varepsilon_B}B + E,$$

$$\mathcal{R}(X,B)C + \mathcal{R}(X,C)B = \frac{R(X,B,C,A) + R(X,C,B,A)}{\varepsilon_A}A + F,$$

при чему $E, F \in (\mathrm{Span}\{X, A, B, C\})^{\perp}$. Зато је

$$\begin{aligned}
&g(\mathcal{J}_X(A+B+C), \mathcal{J}_{A+B+C}X) = g(\lambda_A A + \lambda_B B + \lambda_C C, (\varepsilon_A\lambda_A + \varepsilon_B\lambda_B + \varepsilon_C\lambda_C)X \\
&\quad + \frac{R(X,A,B,C)+R(X,B,A,C)}{\varepsilon_C}C + D + \frac{R(X,A,C,B)+R(X,C,A,B)}{\varepsilon_B}B + E \\
&\quad + \frac{R(X,B,C,A)+R(X,C,B,A)}{\varepsilon_A}A + F) \\
=&\lambda_A\frac{R(X,B,C,A)+R(X,C,B,A)}{\varepsilon_A}\varepsilon_A + \lambda_B\frac{R(X,A,C,B)+R(X,C,A,B)}{\varepsilon_B}\varepsilon_B \\
&\quad + \lambda_C\frac{R(X,A,B,C)+R(X,B,A,C)}{\varepsilon_C}\varepsilon_C = \lambda_A(R(X,B,C,A)+R(X,C,B,A)) \\
&\quad + \lambda_B(R(X,A,C,B)+R(X,C,A,B)) + \lambda_C(R(X,A,B,C)+R(X,B,A,C)).
\end{aligned}$$

На основу (1.4) закључујемо да је $R(X,B,C,A) = -R(X,B,A,C)$, $R(X,C,B,A) = -R(X,C,A,B)$, $R(X,A,C,B) = -R(X,A,B,C)$, те је

$$\begin{aligned}
&g(\mathcal{J}_X(A+B+C), \mathcal{J}_{A+B+C}X) = \lambda_A(-R(X,B,A,C) - R(X,C,A,B)) \\
&\quad + \lambda_B(-R(X,A,B,C) + R(X,C,A,B)) + \lambda_C(R(X,A,B,C) + R(X,B,A,C)) \\
=&R(X,A,B,C)(\lambda_C - \lambda_B) + R(X,B,A,C)(\lambda_C - \lambda_A) + R(X,C,A,B)(\lambda_B - \lambda_A).
\end{aligned}$$

Користећи први Бјанкијев идентитет (1.6) добијамо да је

$$R(C,B,A,X) + R(B,A,C,X) + R(A,C,B,X) = 0,$$

а како на основу $\mathbb{Z}_2$ симетрија имамо да је

$$R(C,B,A,X) = R(A,X,C,B) = -R(X,A,C,B) = R(X,A,B,C),$$

а слично је $R(B,A,C,X) = R(X,C,A,B)$ и $R(A,C,B,X) = R(X,B,C,A)$, то је $R(X,A,B,C) + R(X,C,A,B) + R(X,B,C,A) = 0$, односно

$$R(X,C,A,B) = -R(X,A,B,C) - R(X,B,C,A) = -R(X,A,B,C) + R(X,B,A,C).$$

Зато је

$$\begin{aligned}
&g(\mathcal{J}_X(A+B+C), \mathcal{J}_{A+B+C}X) \\
=&R(X,A,B,C)(\lambda_C - \lambda_B) + R(X,B,A,C)(\lambda_C - \lambda_A) + R(X,C,A,B)(\lambda_B - \lambda_A) \\
=&R(X,A,B,C)(\lambda_C - \lambda_B) + R(X,B,A,C)(\lambda_C - \lambda_A) \\
&\quad + (-R(X,A,B,C) + R(X,B,A,C))(\lambda_B - \lambda_A) \\
=&R(X,A,B,C)(\lambda_C - 2\lambda_B + \lambda_A) + R(X,B,A,C)(\lambda_C + \lambda_B - 2\lambda_A).
\end{aligned}$$

Дакле, како је $X \perp A+B+C$, да би R био Јакоби-ортогоналан, закључујемо да мора бити испуњена једнакост

$$R(X,A,B,C)(\lambda_C - 2\lambda_B + \lambda_A) + R(X,B,A,C)(\lambda_C + \lambda_B - 2\lambda_A) = 0.$$

□

Последња једнакост из Теореме 5.6 представља један неопходан услов Јакоби-ортогоналности за Риманове Осерманове тензоре, али за сада нисмо успели да га оповргнемо, чиме бисмо добили пример k-корена (при чему је $k > 2$) Римановог Осермановог тензора R који није Јакоби-ортогоналан.

5.2 Псеудо-Риманова Јакоби-ортогоналност

У поглављу 5.1 уведени су Риманови Јакоби-ортогонални алгебарски тензори кривине као нова потенцијална карактеризација Риманових Осермановых тензора и доказано је да је сваки Риманов Јакоби-ортогоналан тензор Осерманов, док су сви познати Риманови Осерманови тензори (који су Клифордови или два-корена) Јакоби-ортогонални. Циљ овог поглавља је да представи резултате из рада [48] у којем је уопштен концепт Јакоби-ортогоналности на просторе са недефинитним скаларним производом и истражене су његове везе са другим битним појмовима као што су Осерманови, квази-Клифордови и Јакоби-дуални тензори.

Кажемо да је алгебарски тензор кривине ***Јакоби-ортогоналан*** ако импликација

$$X \perp Y \implies \mathcal{J}_X Y \perp \mathcal{J}_Y X \tag{5.2}$$

важи за све јединичне $X, Y \in \mathcal{V}$. Ову особину није тешко проширити на све $X, Y \in \mathcal{V}$, што је доказано у наредној леми.

Лема 5.7. *Ако је алгебарски тензор кривине на простору са скаларним производом* $(\mathcal{V}, g)$ *Јакоби-ортогоналан, онда* (5.2) *важи за све* $X, Y \in \mathcal{V}$.

Доказ. Претпоставимо да је алгебарски тензор кривине R Јакоби-ортогоналан и да је $X \perp Y$.

Тврђење очигледно важи за $X = 0$ или $Y = 0$. Заиста, ако због симетричности импликације (5.2) по X и Y, без умањења општости претпоставимо да је $X = 0$, онда на основу дефиниције Јакобијевог оператора имамо да је $g(\mathcal{J}_X Y, \mathcal{J}_Y X) = g(\mathcal{J}_0 Y, \mathcal{J}_Y 0) = g(0,0) = 0$.

Ако су X и Y дефинитни вектори, онда на основу билинеарности форме g, (2.3) и претпоставке да (5.2) важи за јединичне ортогоналне векторе $X/\sqrt{|\varepsilon_X|}$ и $Y/\sqrt{|\varepsilon_Y|}$ из $\mathcal{V}$ (јединични су јер су добијени нормирањем, а ортогонални су јер је $g(X/\sqrt{|\varepsilon_X|}, Y/\sqrt{|\varepsilon_Y|}) = g(X,Y)/(\sqrt{|\varepsilon_X|}\sqrt{|\varepsilon_Y|}) = 0$) имамо да је

$$\begin{aligned} g(\mathcal{J}_X Y, \mathcal{J}_Y X) &= g\left(\mathcal{J}_{\sqrt{|\varepsilon_X|}\frac{X}{\sqrt{|\varepsilon_X|}}}\left(\sqrt{|\varepsilon_Y|}\frac{Y}{\sqrt{|\varepsilon_Y|}}\right), \mathcal{J}_{\sqrt{|\varepsilon_Y|}\frac{Y}{\sqrt{|\varepsilon_Y|}}}\left(\sqrt{|\varepsilon_X|}\frac{X}{\sqrt{|\varepsilon_X|}}\right)\right) \\ &= g\left(|\varepsilon_X|\sqrt{|\varepsilon_Y|}\mathcal{J}_{\frac{X}{\sqrt{|\varepsilon_X|}}}\left(\frac{Y}{\sqrt{|\varepsilon_Y|}}\right), |\varepsilon_Y|\sqrt{|\varepsilon_X|}\mathcal{J}_{\frac{Y}{\sqrt{|\varepsilon_Y|}}}\left(\frac{X}{\sqrt{|\varepsilon_X|}}\right)\right) \\ &= |\varepsilon_X|^{\frac{3}{2}}|\varepsilon_Y|^{\frac{3}{2}} g\left(\mathcal{J}_{\frac{X}{\sqrt{|\varepsilon_X|}}}\left(\frac{Y}{\sqrt{|\varepsilon_Y|}}\right), \mathcal{J}_{\frac{Y}{\sqrt{|\varepsilon_Y|}}}\left(\frac{X}{\sqrt{|\varepsilon_X|}}\right)\right) = 0. \end{aligned}$$

Разматрамо случај када је један од ненула вектора X и Y дефинитан, а други изотропан. Због симетрије (5.2) по X и Y, можемо претпоставити да је $\varepsilon_X \neq 0$ и $\varepsilon_Y = 0$. Како је, на основу Леме 1.1, $\mathrm{Span}\{X\}$ недегенерисан потпростор, то је на основу Леме 1.6 и $X^\perp = (\mathrm{Span}\{X\})^\perp$ недегенерисан, а како он садржи изотропан вектор Y, то на основу Леме 1.12, постоје $S, T \in X^\perp$ такви да је $Y = S + T$, $S \perp T$, $\varepsilon_S = -\varepsilon_T > 0$. Означимо $K = \mathcal{J}_S X$, $L = 2\mathcal{J}(S,T)X$, $M = \mathcal{J}_T X$, $P = \mathcal{J}_X S$ и $Q = \mathcal{J}_X T$. Како су X, S, T дефинитни, $X \perp S$ и $X \perp T$, користећи (5.2) за дефинитне векторе добијамо да је $g(P,K) = g(\mathcal{J}_X S, \mathcal{J}_S X) = 0$ и $g(Q,M) = g(\mathcal{J}_X T, \mathcal{J}_T X) = 0$. Стога, користећи линеарност Јакобијевог оператора, (2.4), мултилинеарност поларизованог Јакобијевог оператора, (2.3) и билинеарност форме g следи да за $\lambda \in \mathbb{R}$ важи

$$\begin{aligned} &g(\mathcal{J}_X(S + \lambda T), \mathcal{J}_{S+\lambda T} X) = g(\mathcal{J}_X S + \lambda \mathcal{J}_X T, \mathcal{J}_S X + 2\mathcal{J}(S, \lambda T)X + \mathcal{J}_{\lambda T} X) \\ &= g(\mathcal{J}_X S + \lambda \mathcal{J}_X T, \mathcal{J}_S X + \lambda \cdot 2\mathcal{J}(S,T)X + \lambda^2 \mathcal{J}_T X) = g(P + \lambda Q, K + \lambda L + \lambda^2 M) \\ &= (g(P,M) + g(Q,L))\lambda^2 + (g(Q,K) + g(P,L))\lambda. \end{aligned} \tag{5.3}$$

Важи да је $X \perp S + \lambda T$ зато што из $X \perp S$ и $X \perp T$ следи да важи да је $g(X, S+\lambda T) = g(X,S) + \lambda g(X,T) = 0 + \lambda \cdot 0 = 0$. За свако $\lambda \neq \pm 1$, користећи (1.2) добијамо $\varepsilon_{S+\lambda T} = \varepsilon_S + \lambda^2 \varepsilon_T = \varepsilon_S(1 - \lambda^2) \neq 0$, те $X \perp S + \lambda T$ применом (5.2) за дефинитне векторе повлачи да важи $g(\mathcal{J}_X(S+\lambda T), \mathcal{J}_{S+\lambda T} X) = 0$, при чему (5.3) имплицира да је $g(P,M) + g(Q,L) = 0$ и $g(Q,K) + g(P,L) = 0$. Одавде, заменом $\lambda = 1$ у (5.3) добијамо да је $g(\mathcal{J}_X(S+T), \mathcal{J}_{S+T} X) = 0$, односно $g(\mathcal{J}_X Y, \mathcal{J}_Y X) = 0$, што доказује (5.2) за један дефинитан и један изотропан вектор.

Остаје да докажемо (5.2) за два изотропна вектора $X = N_1$ и $Y = N_2$. Ако су они линеарно зависни, онда се неки од њих може изразити као скалар пута други вектор, а због симетричности (5.2) по X и Y можемо претпоставити да је $N_1 = \xi N_2$ за неко $\xi \in \mathbb{R}$, те на основу (2.3) имамо да је $\mathcal{J}_{N_1}N_2 = \mathcal{J}_{\xi N_2}N_2 = \xi^2\mathcal{J}_{N_2}N_2 = 0$ и зато важи (5.2). Ако су N_1 и N_2 линеарно независни међусобно ортогонални вектори, онда они формирају базу (N_1, N_2) потпуно изотропног потпростора $\operatorname{Span}\{N_1, N_2\} \leqslant \mathcal{V}$. На основу Леме 1.14 постоји база (M_1, M_2) потпуно изотропног потпростора од $\mathcal{V}$ који има тривијалан пресек $\{0\}$ са $\operatorname{Span}\{N_1, N_2\}$ и $g(N_i, M_j) = \delta_{ij}$, за $i, j \in \{1, 2\}$. Можемо написати $N_2 = S + T$, где је $S = (N_2 + M_2)/2$, $T = (N_2 - M_2)/2$ и $S, T \in N_1^\perp$ јер на основу билинеарности форме g и чињенице да су свака два вектора из потпуно изотропног простора међусобно нормална следи да је

$$g(S, N_1) = g\left(\frac{1}{2}(N_2 + M_2), N_1\right) = \frac{1}{2}g(N_2, N_1) + \frac{1}{2}g(M_2, N_1) = \frac{1}{2}\cdot 0 + \frac{1}{2}\cdot 0 = 0,$$

$$g(T, N_1) = g\left(\frac{1}{2}(N_2 - M_2), N_1\right) = \frac{1}{2}g(N_2, N_1) - \frac{1}{2}g(M_2, N_1) = \frac{1}{2}\cdot 0 - \frac{1}{2}\cdot 0 = 0.$$

Приметимо да је

$$\begin{aligned}\varepsilon_S = g(S, S) &= g\left(\frac{1}{2}(N_2 + M_2), \frac{1}{2}(N_2 + M_2)\right)\\ &= \frac{1}{4}(g(N_2, N_2) + g(N_2, M_2) + g(M_2, N_2) + g(M_2, M_2)) = \frac{1}{4}(0 + 1 + 1 + 0) = \frac{1}{2},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varepsilon_T = g(T, T) &= g\left(\frac{1}{2}(N_2 - M_2), \frac{1}{2}(N_2 - M_2)\right)\\ &= \frac{1}{4}(g(N_2, N_2) - g(N_2, M_2) - g(M_2, N_2) + g(M_2, M_2)) = \frac{1}{4}(0 - 1 - 1 + 0) = -\frac{1}{2},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}g(S, T) &= g\left(\frac{1}{2}(N_2 + M_2), \frac{1}{2}(N_2 - M_2)\right)\\ &= \frac{1}{4}(g(N_2, N_2) - g(N_2, M_2) + g(M_2, N_2) - g(M_2, M_2)) = \frac{1}{4}(0 - 1 + 1 + 0) = 0,\end{aligned}$$

односно $\varepsilon_S = -\varepsilon_T = 1/2$ и $S \perp T$, те понављајући исти поступак као у претходном делу доказа, добијамо да важи (5.3) и користећи већ доказану импликацију (5.2) за дефинитан вектор $S + \lambda T$ и изотропан вектор N_1 који су међусобно ортогонални јер је $g(S + \lambda T, N_1) = g(S, N_1) + \lambda g(T, N_1) = 0 + \lambda \cdot 0 = 0$, закључујемо да (5.2) важи и за изотропне векторе $X = N_1$ и $Y = N_2$. □

Понекад је корисно да додамо тензор константне секционе кривине на посматрани алгебарски тензор кривине R.

Лема 5.8. *Ако је алгебарски тензор кривине R на простору са скаларним производом $(\mathcal{V}, g)$ Јакоби-ортогоналан, тада је за свако $\mu \in \mathbb{R}$ тензор $R + \mu R^1$ Јакоби-ортогоналан.*

Доказ. Нека је $\mathcal{J}'$ Јакобијев оператор придружен алгебарском тензору кривине $R' = R + \mu R^1$, а X и Y су међусобно ортогонални јединични вектори. Тада користећи дефиницију тензора R^1 добијамо је

$$\begin{aligned}\mathcal{J}'_X Y &= \mathcal{R}'(Y,X)X = (\mathcal{R} + \mu\mathcal{R}^1)(Y,X)X = \mathcal{R}(Y,X)X + \mu\mathcal{R}^1(Y,X)X \\ &= \mathcal{J}_X Y + \mu(g(X,X)Y - g(Y,X)X) = \mathcal{J}_X Y + \mu(\varepsilon_X Y - 0 \cdot X) \\ &= \mathcal{J}_X Y + \mu\varepsilon_X Y,\end{aligned}$$

а на исти начин се добија и $\mathcal{J}'_Y X = \mathcal{J}_Y X + \mu\varepsilon_Y X$. Користећи самоадјунгованост Јакобијевих оператора $\mathcal{J}_X$ и $\mathcal{J}_Y$, $\mathcal{J}_X X = 0$ и $\mathcal{J}_Y Y = 0$ имамо да је $g(\mathcal{J}_X Y, X) = g(Y, \mathcal{J}_X X) = g(Y, 0) = 0$ и $g(Y, \mathcal{J}_Y X) = g(\mathcal{J}_Y Y, X) = g(0, X) = 0$, а користећи Јакоби-ортогоналност од R добијамо да је $g(\mathcal{J}_X Y, \mathcal{J}_X Y) = 0$, те на основу билинеарности форме g закључујемо да је

$$\begin{aligned}g(\mathcal{J}'_X Y, \mathcal{J}'_Y X) &= g(\mathcal{J}_X Y + \mu\varepsilon_X Y, \mathcal{J}_Y X + \mu\varepsilon_Y X) \\ &= g(\mathcal{J}_X Y, \mathcal{J}_Y X) + \mu\varepsilon_Y g(\mathcal{J}_X Y, X) + \mu\varepsilon_X g(Y, \mathcal{J}_Y X) + \mu\varepsilon_X \mu\varepsilon_Y g(Y, X) \\ &= 0 + 0 + 0 + 0 = 0,\end{aligned}$$

што значи да је $R' = R + \mu R^1$ Јакоби-ортогоналан. □

На основу Теореме 5.3 знамо да је сваки Риманов Клифордов алгебарски тензор кривине Јакоби-ортогоналан. У наставку, користећи Лему 5.8 дајемо уопштење на псеудо-Риманов случај.

Теорема 5.9. *Сваки квази-Клифордов алгебарски тензор кривине на простору са скаларним производом $(\mathcal{V}, g)$ је Јакоби-ортогоналан.*

Доказ. Нека $J_1, J_2, ..., J_m$ чине квази-Клифордову фамилију придружену квази-Клифордовом алгебарском тензору кривине облика (3.12). Посматрамо $R = \sum_{i=1}^{m} \mu_i R^{J_i}$ и јединичне векторе $X \perp Y$. Како је ендоморфизам J_i косоадјунгован, имамо да је $g(J_i X, X) = -g(X, J_i X)$, одакле је $g(J_i X, X) = 0$, те на основу дефиниције тензора R^{J_i} закључујемо да је

$$\begin{aligned}\mathcal{J}_X Y = \mathcal{R}(Y,X)X &= \sum_{i=1}^{m} \mu_i \mathcal{R}^{J_i}(Y,X)X \\ &= \sum_{i=1}^{m} \mu_i (g(J_iY,X)J_iX - g(J_iX,X)J_iY + 2g(J_iY,X)J_iX) \\ &= 3\sum_{i=1}^{m} \mu_i g(J_iY,X)J_iX,\end{aligned}$$

а слично је $\mathcal{J}_Y X = 3\sum_{j=1}^{m} \mu_j g(J_jX,Y)J_jY$. Користећи да је J_i косоадјунгован за $i \in \{1,2,...,m\}$ одакле је $g(J_iY,X) = -g(Y,J_iY)$, као и билинеарност форме g добијамо да је

$$\begin{aligned}g(\mathcal{J}_X Y, \mathcal{J}_Y X) =& g\left(3\sum_{i=1}^{m} \mu_i g(J_iY,X)J_iX,\ 3\sum_{j=1}^{m} \mu_j g(J_jX,Y)J_jY\right) \\ =& 9\sum_{i,j=1}^{m} \mu_i\mu_j g(J_iY,X)g(J_jX,Y)g(J_iX,J_jY) \\ =& -9\sum_{i,j=1}^{m} \mu_i\mu_j g(Y,J_iX)g(J_jX,Y)g(J_iX,J_jY).\end{aligned}$$

Као у доказу Теореме 5.3 претходни израз се трансформише у

$$\begin{aligned}&\frac{9}{2}\sum_{i,j=1}^{m} \mu_i\mu_j g(Y,J_iX)g(Y,J_jX)g(Y,(J_iJ_j + J_jJ_i)X) \\ &= \frac{9}{2}\sum_{i,j=1}^{m} \mu_i\mu_j g(Y,J_iX)g(Y,J_jX)g(Y,(2\delta_{ij}c_i\,\mathrm{Id})X) \\ &= 9\sum_{i,j=1}^{m} \delta_{ij}c_i\mu_i\mu_j g(Y,J_iX)g(Y,J_jX)g(Y,X) = 0,\end{aligned}$$

при чему смо користили релације Хурвицовог типа и да је $X \perp Y$. Добијена једнакост $g(\mathcal{J}_X Y, \mathcal{J}_Y X) = 0$ доказује да је R Јакоби-ортогоналан. На основу Леме 5.8 следи да је квази-Клифордов тензор $R + \mu_0 R^1$ Јакоби-ортогоналан. □

У циљу испитивања Јакоби-дуалности Јакоби-дијагонализабилног Јакоби--ортогоналног алгебарског тензора кривине, у наставку дајемо две леме које нам дају информације о $\mathcal{J}_Y X$, где је Y сопствени вектор оператора $\mathcal{J}_X$ за дефинитан вектор $X \in \mathcal{V}$.

Лема 5.10. *Нека је R Јакоби-дијагонализабилан Јакоби-ортогоналан алгебарски тензор кривине на простору са скаларним производом* $(\mathcal{V}, g)$. *Ако је* $X \in \mathcal{V}$ *дефинитан вектор и* $Y \in \mathcal{V}_i(X) = \operatorname{Ker}(\widetilde{\mathcal{J}}_X - \varepsilon_X \lambda_i \operatorname{Id})$, *тада* $\mathcal{J}_Y X \in \operatorname{Span}\{X\} \oplus \mathcal{V}_i(X)$.

Доказ. Како је X дефинитан, то је на основу Леме 1.1 потпростор $\operatorname{Span}\{X\}$ недегенерисан, а на основу Леме 1.6 је и $X^\perp = (\operatorname{Span}\{X\})^\perp$ недегенерисан и важи да је $\mathcal{V} = \operatorname{Span}\{X\} + X^\perp$. Ако $\widetilde{\mathcal{J}}_X$ има само једну сопствену вредност $\varepsilon_X \lambda_i$, тада на основу тога што је R Јакоби-дијагонализабилан примењујући Лему А.8 закључујемо да је $\operatorname{Span}\{X\} \oplus \mathcal{V}_i(X) = \mathcal{V}$, те је тврдња очигледна јер $\mathcal{J}_Y X \in \mathcal{V} = \operatorname{Span}\{X\} \oplus \mathcal{V}_i(X)$. У наставку доказа сматрамо да $\widetilde{\mathcal{J}}_X$ има бар две различите сопствене вредности $\varepsilon_X \lambda_i$ и $\varepsilon_X \lambda_j$. Посматрамо $Z \in \mathcal{V}_j(X) = \operatorname{Ker}(\widetilde{\mathcal{J}}_X - \varepsilon_X \lambda_j \operatorname{Id})$ за $\lambda_j \neq \lambda_i$ и $L = Y + tZ$, где је $t \in \mathbb{R}$. Како $Y \in \mathcal{V}_i(X) \leqslant X^\perp$, $Z \in \mathcal{V}_j(X) \leqslant X^\perp$ и $X^\perp$ је потпростор, то следи да је и $L = Y + tZ \in X^\perp$, те је $L \perp X$, те користећи Јакоби-ортогоналност оператора R и Лему 5.7 закључујемо да је $\mathcal{J}_L X \perp \mathcal{J}_X L$. На основу линеарности Јакобијевог оператора $\mathcal{J}_X$, $Y \in \mathcal{V}_i(X) = \operatorname{Ker}(\widetilde{\mathcal{J}}_X - \varepsilon_X \lambda_i \operatorname{Id})$, $Z \in \mathcal{V}_j(X) = \operatorname{Ker}(\widetilde{\mathcal{J}}_X - \varepsilon_X \lambda_j \operatorname{Id})$, мултилинеарности тензора R и (1.4) која повлачи да је $R(X, Y+tZ, Y, Y) = 0$, $R(X, Y+tZ, Z, Z) = 0$, $R(X, Y+tZ, Z, Y) = -R(X, Y+tZ, Y, Z)$ и $R(X, Z, Y, Z) = -R(X, Z, Z, Y)$, закључујемо да је

$$\begin{aligned}
0 = g(\mathcal{J}_L X, \mathcal{J}_X L) =& g(\mathcal{R}(X, L)L, \mathcal{J}_X(Y + tZ)) \\
=& g(\mathcal{R}(X, Y + tZ)(Y + tZ), \mathcal{J}_X Y + t\mathcal{J}_X Z) \\
=& g(\mathcal{R}(X, Y + tZ)(Y + tZ), \varepsilon_X \lambda_i Y + t\varepsilon_X \lambda_j Z) \\
=& R(X, Y + tZ, Y + tZ, \varepsilon_X \lambda_i Y + t\varepsilon_X \lambda_j Z) \\
=& \varepsilon_X \lambda_i R(X, Y + tZ, Y, Y) + \varepsilon_X \lambda_j R(X, Y + tZ, Y, Z)t \\
&+ \varepsilon_X \lambda_i R(X, Y + tZ, Z, Y)t + \varepsilon_X \lambda_j R(X, Y + tZ, Z, Z)t^2 \\
=& \varepsilon_X \lambda_j R(X, Y + tZ, Y, Z)t + \varepsilon_X \lambda_i R(X, Y + tZ, Z, Y)t \\
=& \varepsilon_X \lambda_j R(X, Y + tZ, Y, Z)t - \varepsilon_X \lambda_i R(X, Y + tZ, Y, Z)t \\
=& \varepsilon_X (\lambda_j - \lambda_i) R(X, Y + tZ, Y, Z)t \\
=& \varepsilon_X (\lambda_j - \lambda_i)(R(X, Y, Y, Z) + tR(X, Z, Y, Z))t \\
=& \varepsilon_X (\lambda_j - \lambda_i) R(X, Y, Y, Z)t + \varepsilon_X (\lambda_j - \lambda_i) R(X, Z, Y, Z)t^2 \\
=& \varepsilon_X (\lambda_i - \lambda_j) R(X, Z, Z, Y)t^2 + \varepsilon_X (\lambda_j - \lambda_i) R(X, Y, Y, Z)t.
\end{aligned}$$

Како ово важи за свако $t \in \mathbb{R}$, закључујемо да је коефицијент уз t једнак

0 и зато што је $\varepsilon_X(\lambda_j - \lambda_i) \neq 0$ добијамо да је $R(X, Y, Y, Z) = 0$, одакле је $g(\mathcal{R}(X, Y)Y, Z) = 0$, односно $\mathcal{J}_Y X \perp Z$ и то важи за свако $Z \in \mathcal{V}_j(X)$, кад год је $\lambda_j \neq \lambda_i$. Како је R Јакоби-дијагонализабилан, то важи (3.9), где су $\varepsilon_X\lambda_1, \ldots, \varepsilon_X\lambda_k$ све (различите) сопствене вредности оператора $\widetilde{\mathcal{J}}_X$, те на основу Леме 1.8 следи да $\mathcal{J}_Y X \in \operatorname{Span}\{X\} \oplus \mathcal{V}_i(X)$. $\square$

Лема 5.11. *Нека је R Јакоби-дијагонализабилан Јакоби-ортогоналан алгебарски тензор кривине на простору са скаларним производом $(\mathcal{V}, g)$. Ако је $X \in \mathcal{V}$ дефинитан вектор и $Y \in \mathcal{V}(X) = \operatorname{Ker}(\widetilde{\mathcal{J}}_X - \varepsilon_X\lambda \operatorname{Id})$, тада је $\mathcal{J}_Y X = \varepsilon_Y\lambda X + Z$, при чему је $Z \perp X$ и $\varepsilon_Z = 0$.*

Доказ. На основу Леме 1.1 следи да је потпростор $\operatorname{Span}\{X\}$ недегенерисан јер је X дефинитан вектор, те по Леми 1.6 важи да је $\mathcal{V} = \operatorname{Span}\{X\} + X^\perp$, при чему је $X^\perp = (\operatorname{Span}\{X\})^\perp$. Нека је $\mathcal{J}_Y X = \alpha X + Z$, где $Z \in X^\perp$ и $\alpha \in \mathbb{R}$. Једнакост (2.5) за Јакобијеве операторе нам даје $g(\mathcal{J}_Y X, X) = g(\mathcal{J}_X Y, Y)$, одакле закључујемо да је $g(\alpha X + Z, X) = g(\varepsilon_X\lambda Y, Y)$. Одатле на основу билинеарности форме g следи да је $\alpha g(X, X) + g(Z, X) = \lambda\varepsilon_X g(Y, Y)$, односно због $Z \perp X$ је $\alpha\varepsilon_X = \lambda\varepsilon_X\varepsilon_Y$ и како је $\varepsilon_X \neq 0$, закључујемо да је $\alpha = \varepsilon_Y\lambda$, те је $\mathcal{J}_Y X = \alpha X + Z = \varepsilon_Y\lambda X + Z$. На основу $Y \in \mathcal{V}(X) \leqslant X^\perp$, добијамо да је

$$\begin{aligned} g(\varepsilon_X Y - t\varepsilon_Y X, X + tY) &= \varepsilon_X g(Y, X) + t\varepsilon_X g(Y, Y) - t\varepsilon_Y g(X, X) - t^2\varepsilon_Y g(X, Y) \\ &= t\varepsilon_X\varepsilon_Y - t\varepsilon_Y\varepsilon_X = 0, \end{aligned}$$

те користећи да је R Јакоби-ортогоналан применом Леме 5.7 добијамо да је $g(\mathcal{J}_{X+tY}(\varepsilon_X Y - t\varepsilon_Y X), \mathcal{J}_{\varepsilon_X Y - t\varepsilon_Y X}(X + tY)) = 0$. На основу (2.4), $\mathcal{J}_X X = 0$, (2.3), линеарности Јакобијевих оператора $\mathcal{J}_X$ и $\mathcal{J}_{tY}$, $\mathcal{J}_Y Y = 0$ и једнакости

$$2\mathcal{J}(X, Y)Y = \mathcal{R}(Y, X)Y + \mathcal{R}(Y, Y)X = -\mathcal{R}(X, Y)Y = -\mathcal{J}_Y X,$$

$$2\mathcal{J}(X, Y)X = \mathcal{R}(X, X)Y + \mathcal{R}(X, Y)X = -\mathcal{R}(Y, X)X = -\mathcal{J}_X Y,$$

имамо да је

$$\begin{aligned} &\mathcal{J}_{X+tY}(\varepsilon_X Y - t\varepsilon_Y X) = (\mathcal{J}_X + 2\mathcal{J}(X, tY) + \mathcal{J}_{tY})(\varepsilon_X Y - t\varepsilon_Y X) \\ &= \mathcal{J}_X(\varepsilon_X Y - t\varepsilon_Y X) + 2\mathcal{J}(X, tY)(\varepsilon_X Y - t\varepsilon_Y X) + \mathcal{J}_{tY}(\varepsilon_X Y - t\varepsilon_Y X) \\ &= \varepsilon_X\mathcal{J}_X Y - t\varepsilon_Y\mathcal{J}_X X + 2t\mathcal{J}(X, Y)(\varepsilon_X Y - t\varepsilon_Y X) + t^2\mathcal{J}_Y(\varepsilon_X Y - t\varepsilon_Y X) \\ &= \varepsilon_X\mathcal{J}_X Y + t\varepsilon_X \cdot 2\mathcal{J}(X, Y)Y - t^2\varepsilon_Y \cdot 2\mathcal{J}(X, Y)X + \varepsilon_X t^2\mathcal{J}_Y Y - t^3\varepsilon_Y\mathcal{J}_Y X \\ &= \varepsilon_X\mathcal{J}_X Y - t\varepsilon_X\mathcal{J}_Y X + t^2\varepsilon_Y\mathcal{J}_X Y - t^3\varepsilon_Y\mathcal{J}_Y X. \end{aligned}$$

Слично, на основу (2.4), линеарности Јакобијевих оператора, (2.3), $\mathcal{J}_X X = 0$, $\mathcal{J}_Y Y = 0$ и једнакости $2\mathcal{J}(Y,X)X = -\mathcal{J}_X Y$ и $2\mathcal{J}(Y,X)Y = -\mathcal{J}_Y X$ добијамо да је $\mathcal{J}_{\varepsilon_X Y - t\varepsilon_Y X}(X+tY) = \varepsilon_X^2 \mathcal{J}_Y X + t\varepsilon_X\varepsilon_Y \mathcal{J}_X Y + t^2\varepsilon_X\varepsilon_Y\mathcal{J}_Y X + t^3\varepsilon_Y^2\mathcal{J}_X Y$. Зато је

$$\begin{aligned} 0 &= g(\mathcal{J}_{X+tY}(\varepsilon_X Y - t\varepsilon_Y X), \mathcal{J}_{\varepsilon_X Y - t\varepsilon_Y X}(X+tY)) \\ &= g(\varepsilon_X \mathcal{J}_X Y - t\varepsilon_X \mathcal{J}_Y X + t^2\varepsilon_Y \mathcal{J}_X Y - t^3\varepsilon_Y\mathcal{J}_Y X, \\ &\qquad \varepsilon_X^2\mathcal{J}_Y X + t\varepsilon_X\varepsilon_Y\mathcal{J}_X Y + t^2\varepsilon_X\varepsilon_Y\mathcal{J}_Y X + t^3\varepsilon_Y^2\mathcal{J}_X Y). \end{aligned}$$

Како је свако $t \in \mathbb{R}$ корен полиномне једначине

$$g(\mathcal{J}_{X+tY}(\varepsilon_X Y - t\varepsilon_Y X), \mathcal{J}_{\varepsilon_X Y - t\varepsilon_Y X}(X+tY)) = 0,$$

закључујемо да су сви коефицијенти полинома једнаки 0, те је и коефицијент уз t једнак 0, односно $\varepsilon_X^2\varepsilon_Y g(\mathcal{J}_X Y, \mathcal{J}_X Y) - \varepsilon_X^3 g(\mathcal{J}_Y X, \mathcal{J}_Y X) = 0$, што након дељења са $\varepsilon_X^2 \neq 0$ имплицира да је $\varepsilon_Y \varepsilon_{\mathcal{J}_X Y} = \varepsilon_X\varepsilon_{\mathcal{J}_Y X}$, те на основу $Y \in \mathcal{V}(X) = \mathrm{Ker}(\widetilde{\mathcal{J}}_X - \varepsilon_X\lambda\,\mathrm{Id})$ и $\mathcal{J}_Y X = \varepsilon_Y\lambda X + Z$ важи да је $\varepsilon_Y\varepsilon_{\varepsilon_X\lambda Y} = \varepsilon_X\varepsilon_{\varepsilon_Y\lambda X+Z}$. Како $Z \in X^\perp$, користећи (1.2), добијамо да је $\varepsilon_Y\varepsilon_X^2\lambda^2\varepsilon_Y = \varepsilon_X(\varepsilon_Y^2\lambda^2\varepsilon_X + \varepsilon_Z)$, односно $\varepsilon_X^2\varepsilon_Y^2\lambda^2 = \varepsilon_X^2\varepsilon_Y^2\lambda^2 + \varepsilon_X\varepsilon_Z$, што повлачи да је $\varepsilon_Z = 0$. □

Као последицу две последње леме директно добијамо наредну теорему.

Теорема 5.12. *Сваки Јакоби-дијагонализабилан Јакоби-ортогоналан алгебарски тензор кривине на простору са скаларним производом* $(\mathcal{V}, g)$ *је Јакоби-дуалан када* $\mathcal{J}_X$ *нема изотропних сопствених вектора за свако дефинитно* $X \in \mathcal{V}$.

Доказ. Нека су X и Y два међусобно ортогонална јединична вектора таква да је $\mathcal{J}_X Y = \varepsilon_X\lambda Y$. Тада је $\varepsilon_X \neq 0$ и $Y \in \mathrm{Ker}(\widetilde{\mathcal{J}}_X - \varepsilon_X\lambda\,\mathrm{Id})$, те користећи Лему 5.11 закључујемо да је $\mathcal{J}_Y X = \varepsilon_Y\lambda X + Z$, при чему је $Z \perp X$ и $\varepsilon_Z = 0$, док Лема 5.10 даје да $Z \in \mathrm{Ker}(\widetilde{\mathcal{J}}_X - \varepsilon_X\lambda\,\mathrm{Id})$. Како по претпоставци теореме оператор $\mathcal{J}_X$ нема изотропних сопствених вектора, то је $Z = 0$, те је $\mathcal{J}_Y X = \varepsilon_Y\lambda X$, одакле следи да је R по дефиницији слабо Јакоби-дуалан, те је на основу Леме 3.11 Јакоби-дуалан. □

Сада разматрамо случајеве мале димензије $n \in \{3, 4\}$. У случају димензије 3 доказујемо следећи очекивани резултат.

Теорема 5.13. *Сваки алгебарски тензор кривине на простору са скаларним производом димензије* 3 *је Јакоби-ортогоналан ако и само ако је константне секционе кривине.*

Доказ. Претпостављамо да је R тродимензиони алгебарски тензор константне секционе кривине μ, односно $R = \mu R^1$. Како је нула тензор очигледно Јакоби-ортогоналан, Лема 5.8 повлачи да је $R = 0 + \mu R^1$ Јакоби-ортогоналан.

Обратно, претпостављамо да је R Јакоби-ортогоналан алгебарски тензор кривине на простору са скаларним производом $(\mathcal{V}, g)$ димензије 3. Нека је (E_1, E_2, E_3) произвољна ортонормирана база простора $\mathcal{V}$ која постоји на основу Леме 1.7, $\varepsilon_i = \varepsilon_{E_i}$, за $1 \leqslant i \leqslant 3$, и $R_{ijkl} = R(E_i, E_j, E_k, E_l)$, за $i, j, k, l \in \{1, 2, 3\}$. На основу Леме 1.8 важи да је

$$\mathcal{R}(E_i, E_j)E_k = \sum_{l=1}^{3} \varepsilon_l g(\mathcal{R}(E_i, E_j)E_k, E_l)E_l = \sum_{l=1}^{3} \varepsilon_l R_{ijkl} E_l,$$

а због (1.4) је $R_{2111} = 0$ и $R_{1222} = 0$, те закључујемо да је

$$\mathcal{J}_{E_1} E_2 = \mathcal{R}(E_2, E_1)E_1 = \sum_{l=1}^{3} \varepsilon_l R_{211l} E_l = \varepsilon_2 R_{2112} E_2 + \varepsilon_3 R_{2113} E_3,$$

$$\mathcal{J}_{E_2} E_1 = \mathcal{R}(E_1, E_2)E_2 = \sum_{l=1}^{3} \varepsilon_l R_{122l} E_l = \varepsilon_1 R_{1221} E_1 + \varepsilon_3 R_{1223} E_3.$$

Даље, како је $E_1 \perp E_2$ и R је Јакоби-ортогоналан, те на основу билинеарности форме g, $E_1 \perp E_3$ и $E_2 \perp E_3$ добијамо да је

$$\begin{aligned} 0 =& g(\mathcal{J}_{E_1} E_2, \mathcal{J}_{E_2} E_1) = g(\varepsilon_2 R_{2112} E_2 + \varepsilon_3 R_{2113} E_3, \varepsilon_1 R_{1221} E_1 + \varepsilon_3 R_{1223} E_3) \\ =& \varepsilon_2 R_{2112} \varepsilon_1 R_{1221} g(E_2, E_1) + \varepsilon_2 R_{2112} \varepsilon_3 R_{1223} g(E_2, E_3) + \varepsilon_3 R_{2113} \varepsilon_1 R_{1221} g(E_3, E_1) \\ & + \varepsilon_3 R_{2113} \varepsilon_3 R_{1223} g(E_3, E_3) = \varepsilon_3^3 R_{2113} R_{1223}, \end{aligned}$$

односно $R_{2113} R_{1223} = 0$. Истим поступком се добија да важи

$$R(B, A, A, C)R(A, B, B, C) = 0, \tag{5.4}$$

за произвољну ортогоналну базу (A, B, C) састављену од дефинитних вектора.

Посматрајмо базу $X = E_1$, $Y = E_2 + tE_3$, $Z = t\varepsilon_3 E_2 - \varepsilon_2 E_3$, при чему је $t > 1$. Како је (E_1, E_2, E_3) ортонормирана база за $\mathcal{V}$, то $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3 \in \{-1, 1\}$, те користећи (1.2), добијамо да је

$$\begin{aligned} \varepsilon_X =& \varepsilon_1 \neq 0, \quad \varepsilon_Y = \varepsilon_2 + t^2 \varepsilon_3 \neq 0, \quad \varepsilon_Z = t^2 \varepsilon_3^2 \varepsilon_2 + \varepsilon_2^2 \varepsilon_3 \neq 0, \\ g(X, Y) =& g(E_1, E_2 + tE_3) = g(E_1, E_2) + tg(E_1, E_3) = 0, \\ g(X, Z) =& g(E_1, t\varepsilon_3 E_2 - \varepsilon_2 E_3) = t\varepsilon_3 g(E_1, E_2) - \varepsilon_2 g(E_1, E_3) = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}g(Y,Z)=&g(E_2+tE_3,t\varepsilon_3E_2-\varepsilon_2E_3)=t\varepsilon_3g(E_2,E_2)-\varepsilon_2g(E_2,E_3)+t^2\varepsilon_3g(E_3,E_2)\\&-t\varepsilon_2g(E_3,E_3)=t\varepsilon_3\varepsilon_2-t\varepsilon_2\varepsilon_3=0,\end{aligned}$$

те је (X,Y,Z) ортогонална база која се састоји од дефинитних вектора, одакле примењујући (5.4) закључујемо да је

$$0=R(E_2+tE_3,E_1,E_1,t\varepsilon_3E_2-\varepsilon_2E_3)R(E_1,E_2+tE_3,E_2+tE_3,t\varepsilon_3E_2-\varepsilon_2E_3).$$

На основу мултилинеарности тензора R је

$$\begin{aligned}&R(E_2+tE_3,E_1,E_1,t\varepsilon_3E_2-\varepsilon_2E_3)=t\varepsilon_3R(E_2,E_1,E_1,E_2)\\&-\varepsilon_2R(E_2,E_1,E_1,E_3)+t^2\varepsilon_3R(E_3,E_1,E_1,E_2)-t\varepsilon_2R(E_3,E_1,E_1,E_3)\\&=-\varepsilon_2R_{2113}+(\varepsilon_3R_{2112}-\varepsilon_2R_{3113})t+\varepsilon_3R_{3112}t^2,\end{aligned}$$

а због мултилинеарности тензора R и (1.4) која даје

$$R(E_1,E_2,E_2,E_2)=R(E_1,E_2,E_3,E_3)=R(E_1,E_3,E_2,E_2)=R(E_1,E_3,E_3,E_3)=0,$$

$R_{1232}=-R_{1223}$ и $R_{1323}=-R_{1332}$ следи да је

$$\begin{aligned}&R(E_1,E_2+tE_3,E_2+tE_3,t\varepsilon_3E_2-\varepsilon_2E_3)\\=&t\varepsilon_3R(E_1,E_2,E_2,E_2)-\varepsilon_2R(E_1,E_2,E_2,E_3)+t^2\varepsilon_3R(E_1,E_2,E_3,E_2)\\&-t\varepsilon_2R(E_1,E_2,E_3,E_3)+t^2\varepsilon_3R(E_1,E_3,E_2,E_2)-t\varepsilon_2R(E_1,E_3,E_2,E_3)\\&+t^3\varepsilon_3R(E_1,E_3,E_3,E_2)-t^2\varepsilon_2R(E_1,E_3,E_3,E_3)\\=&-\varepsilon_2R_{1223}+t^2\varepsilon_3R_{1232}-t\varepsilon_2R_{1323}+t^3\varepsilon_3R_{1332}\\=&-\varepsilon_2R_{1223}-t^2\varepsilon_3R_{1223}+t\varepsilon_2R_{1332}+t^3\varepsilon_3R_{1332}\\=&R_{1223}(-\varepsilon_2-\varepsilon_3t^2)-tR_{1332}(-\varepsilon_2-\varepsilon_3t^2)=(R_{1223}-tR_{1332})(-\varepsilon_2-\varepsilon_3t^2).\end{aligned}$$

Одатле је

$$\begin{aligned}0&=R(E_2+tE_3,E_1,E_1,t\varepsilon_3E_2-\varepsilon_2E_3)R(E_1,E_2+tE_3,E_2+tE_3,t\varepsilon_3E_2-\varepsilon_2E_3)\\&=(-\varepsilon_2R_{2113}+(\varepsilon_3R_{2112}-\varepsilon_2R_{3113})t+\varepsilon_3R_{3112}t^2)(R_{1223}-tR_{1332})(-\varepsilon_2-\varepsilon_3t^2).\end{aligned}$$

Како ово важи за свако $t>1$, закључујемо да је коефицијент испред t у добијеном полиному једнак 0. Одатле, користећи $\varepsilon_2\neq 0$, следи да је

$$\varepsilon_2R_{2113}R_{1332}+(\varepsilon_3R_{2112}-\varepsilon_2R_{3113})R_{1223}=0,$$

а како (5.4) за $(A, B, C) = (E_3, E_1, E_2)$ повлачи да је $R_{1332}R_{3112} = 0$, односно $R_{2113}R_{1332} = 0$ јер је због $\mathbb{Z}_2$ симетрија $R_{3112} = -R_{3121} = R_{1321} = R_{2113}$, то закључујемо да је $(\varepsilon_3 R_{2112} - \varepsilon_2 R_{3113})R_{1223} = 0$. Рескалирањем вектора добијамо

$$(\varepsilon_C R(B, A, A, B) - \varepsilon_B R(C, A, A, C))R(A, B, B, C) = 0, \tag{5.5}$$

за произвољну ортогоналну базу (A, B, C) састављену од дефинитних вектора.

Посматрамо произвољну ортонормирану базу (E_1, E_2, E_3) за $\mathcal{V}$ и нека је (p, q, r) пермутација скупа $\{1, 2, 3\}$. Означимо $s_1 = R_{2113}$, $s_2 = R_{1223}$, $s_3 = R_{1332}$, $k_1 = \varepsilon_2\varepsilon_3 R_{3223}$, $k_2 = \varepsilon_1\varepsilon_3 R_{3113}$ и $k_3 = \varepsilon_1\varepsilon_2 R_{2112}$. Једначина (5.4) за $(A, B, C) = (E_p, E_q, E_r)$ повлачи да је $R_{qppr}R_{pqqr} = 0$, односно $s_p s_q = 0$, и како ово важи за произвољну пермутацију (p, q, r) скупа $\{1, 2, 3\}$, то добијамо систем једначина $s_1 s_2 = 0$, $s_1 s_3 = 0$, $s_2 s_3 = 0$, одакле следи да су бар два међу бројевима s_1, s_2, s_3 једнака 0, односно бар два од s_p, s_q и s_r су једнака нули. Нека је, без умањења општости, $s_p = s_q = 0$ и претпоставимо да је $s_r \neq 0$. Приметимо да нам једначина (5.5) за $(A, B, C) = (E_q, E_r, E_p)$ даје $(\varepsilon_p R_{rqqr} - \varepsilon_r R_{pqqp})R_{qrrp} = 0$, што након множења са $\varepsilon_p\varepsilon_q\varepsilon_r \neq 0$ даје $(\varepsilon_q\varepsilon_r R_{rqqr} - \varepsilon_q\varepsilon_p R_{pqqp})R_{qrrp} = 0$, односно $(k_p - k_r)s_r = 0$, што због претпоставке да је $s_r \neq 0$ повлачи да је $k_p = k_r$.

Посматрајмо $A = E_1 + tE_3$, $B = E_2$, $C = \varepsilon_3 tE_1 - \varepsilon_1 E_3$, за $t > 1$. Користећи (1.2), билинеарност форме g и да је (E_1, E_2, E_3) ортонормирана база следи

$$\begin{aligned}
\varepsilon_A =& \varepsilon_1 + t^2\varepsilon_3 \neq 0, \quad \varepsilon_B = \varepsilon_2 \neq 0, \quad \varepsilon_C = \varepsilon_3^2 t^2 \varepsilon_1 + \varepsilon_1^2\varepsilon_3 = t^2\varepsilon_1 + \varepsilon_3 \neq 0,\\
g(A, B) =& g(E_1 + tE_3, E_2) = g(E_1, E_2) + tg(E_3, E_2) = 0,\\
g(A, C) =& g(E_1 + tE_3, \varepsilon_3 tE_1 - \varepsilon_1 E_3) = \varepsilon_3 tg(E_1, E_1) - \varepsilon_1 g(E_1, E_3) + t^2\varepsilon_3 g(E_3, E_1)\\
& - t\varepsilon_1 g(E_3, E_3) = \varepsilon_3 t\varepsilon_1 - t\varepsilon_1\varepsilon_3 = 0,\\
g(B, C) =& g(E_2, \varepsilon_3 tE_1 - \varepsilon_1 E_3) = \varepsilon_3 tg(E_2, E_1) - \varepsilon_1 g(E_2, E_3) = 0,
\end{aligned}$$

те је $(E_1 + tE_3, E_2, \varepsilon_3 tE_1 - \varepsilon_1 E_3)$ ортогонална база која се састоји од дефинитних вектора и применом (5.5) добијамо да је

$$\begin{aligned}
&(\varepsilon_{\varepsilon_3 tE_1 - \varepsilon_1 E_3} R(E_2, E_1 + tE_3, E_1 + tE_3, E_2) - \varepsilon_{E_2} R(\varepsilon_3 tE_1 - \varepsilon_1 E_3, E_1 + tE_3, E_1 + tE_3,\\
&\varepsilon_3 tE_1 - \varepsilon_1 E_3)) \cdot R(E_1 + tE_3, E_2, E_2, \varepsilon_3 tE_1 - \varepsilon_1 E_3) = 0.
\end{aligned}$$

На основу (1.2) је $\varepsilon_{\varepsilon_3 tE_1 - \varepsilon_1 E_3} = \varepsilon_3^2 t^2\varepsilon_1 + \varepsilon_1^2\varepsilon_3 = t^2\varepsilon_1 + \varepsilon_3$, док је због мултилинеарности тензора R и $\mathbb{Z}_2$ симетрија

$$R(E_2, E_1 + tE_3, E_1 + tE_3, E_2) = R(E_2, E_1, E_1, E_2) + tR(E_2, E_1, E_3, E_2)$$

$$\begin{aligned}
&+ tR(E_2, E_3, E_1, E_2) + t^2 R(E_2, E_3, E_3, E_2) = R_{2112} + tR_{2132} + tR_{2312} + t^2 R_{2332} \\
=&R_{2112} + tR_{1223} + tR_{1223} + t^2 R_{3223} = R_{2112} + 2R_{1223}t + R_{3223}t^2.
\end{aligned}$$

Даље, на основу $\mathbb{Z}_2$ симетрија имамо да је

$$\begin{aligned}
&R(E_1, E_1, E_1, E_1) = R(E_1, E_1, E_1, E_3) = R(E_1, E_1, E_3, E_1) = R(E_1, E_1, E_3, E_3) \\
=&R(E_1, E_3, E_1, E_1) = R(E_1, E_3, E_3, E_3) = R(E_3, E_1, E_1, E_1) = R(E_3, E_1, E_3, E_3) \\
=&R(E_3, E_3, E_1, E_1) = R(E_3, E_3, E_1, E_3) = R(E_3, E_3, E_3, E_1) = R(E_3, E_3, E_3, E_3),
\end{aligned}$$

те на основу мултилинеарности тензора R и $\mathbb{Z}_2$ симетрија следи да је

$$\begin{aligned}
&R(\varepsilon_3 tE_1 - \varepsilon_1 E_3, E_1 + tE_3, E_1 + tE_3, \varepsilon_3 tE_1 - \varepsilon_1 E_3) = \varepsilon_3^2 t^2 R(E_1, E_1, E_1, E_1) \\
&\quad - \varepsilon_3 \varepsilon_1 tR(E_1, E_1, E_1, E_3) + \varepsilon_3^2 t^3 R(E_1, E_1, E_3, E_1) - \varepsilon_1 \varepsilon_3 t^2 R(E_1, E_1, E_3, E_3) \\
&\quad + \varepsilon_3^2 t^3 R(E_1, E_3, E_1, E_1) - \varepsilon_1 \varepsilon_3 t^2 R(E_1, E_3, E_1, E_3) + \varepsilon_3^2 t^4 R(E_1, E_3, E_3, E_1) \\
&\quad - \varepsilon_1 \varepsilon_3 t^3 R(E_1, E_3, E_3, E_3) - \varepsilon_1 \varepsilon_3 tR(E_3, E_1, E_1, E_1) + \varepsilon_1^2 R(E_3, E_1, E_1, E_3) \\
&\quad - \varepsilon_1 \varepsilon_3 t^2 R(E_3, E_1, E_3, E_1) + \varepsilon_1^2 tR(E_3, E_1, E_3, E_3) - \varepsilon_1 \varepsilon_3 t^2 R(E_3, E_3, E_1, E_1) \\
&\quad + \varepsilon_1^2 tR(E_3, E_3, E_1, E_3) - \varepsilon_1 \varepsilon_3 t^3 R(E_3, E_3, E_3, E_1) + \varepsilon_1^2 t^2 R(E_3, E_3, E_3, E_3) \\
=& - \varepsilon_1 \varepsilon_3 t^2 R(E_1, E_3, E_1, E_3) + \varepsilon_3^2 t^4 R(E_1, E_3, E_3, E_1) + \varepsilon_1^2 R(E_3, E_1, E_1, E_3) \\
&\quad - \varepsilon_1 \varepsilon_3 t^2 R(E_3, E_1, E_3, E_1) = -\varepsilon_1 \varepsilon_3 R_{1313} t^2 + t^4 R_{1331} + R_{3113} - \varepsilon_1 \varepsilon_3 t^2 R_{3131} \\
=&\varepsilon_1 \varepsilon_3 R_{3113} t^2 + R_{3113} t^4 + R_{3113} + \varepsilon_1 \varepsilon_3 R_{3113} t^2 = R_{3113}(\varepsilon_1 + \varepsilon_3 t^2)^2.
\end{aligned}$$

На основу мултилинеарности тензора R и $\mathbb{Z}_2$ симетрија је

$$\begin{aligned}
&R(E_1 + tE_3, E_2, E_2, \varepsilon_3 tE_1 - \varepsilon_1 E_3) = \varepsilon_3 tR(E_1, E_2, E_2, E_1) - \varepsilon_1 R(E_1, E_2, E_2, E_3) \\
&\quad + \varepsilon_3 t^2 R(E_3, E_2, E_2, E_1) - \varepsilon_1 tR(E_3, E_2, E_2, E_3) = \varepsilon_3 tR_{1221} - \varepsilon_1 R_{1223} + \varepsilon_3 R_{3221} t^2 \\
&\quad - \varepsilon_1 R_{3223} t = \varepsilon_3 R_{2112} t - \varepsilon_1 R_{1223} + \varepsilon_3 R_{1223} t^2 - \varepsilon_1 R_{3223} t \\
=& - \varepsilon_1 R_{1223} + (\varepsilon_3 R_{2112} - \varepsilon_1 R_{3223})t + \varepsilon_3 R_{1223} t^2.
\end{aligned}$$

Зато је

$$\begin{aligned}
((t^2 \varepsilon_1 + \varepsilon_3)(R_{2112} + 2R_{1223}t + R_{3223}t^2) - \varepsilon_2 R_{3113}(\varepsilon_1 + \varepsilon_3 t^2)^2)\cdot& \\
(-\varepsilon_1 R_{1223} + (\varepsilon_3 R_{2112} - \varepsilon_1 R_{3223})t + \varepsilon_3 R_{1223} t^2) &= 0.
\end{aligned}$$

Ово важи за свако $t > 1$, те је коефицијент уз t једнак нули, односно

$$-2\varepsilon_3 R_{1223} \varepsilon_1 R_{1223} + (\varepsilon_3 R_{2112} - \varepsilon_2 R_{3113} \varepsilon_1^2)(\varepsilon_3 R_{2112} - \varepsilon_1 R_{3223}) = 0,$$

те користећи $\varepsilon_1^2\varepsilon_2^2\varepsilon_3^2 = 1$ закључујемо да је

$$-2\varepsilon_1\varepsilon_3 R_{1223}^2 + (\varepsilon_1\varepsilon_2 R_{2112} - \varepsilon_1\varepsilon_3 R_{3113})(\varepsilon_1\varepsilon_2 R_{2112} - \varepsilon_2\varepsilon_3 R_{3223}) = 0.$$

Зато је $-2\varepsilon_1\varepsilon_3 s_2^2 + (k_3 - k_2)(k_3 - k_1) = 0$. Даље, користећи базу (E_q, E_r, E_p) уместо базе (E_1, E_2, E_3), добијамо да је

$$-2\varepsilon_q\varepsilon_p s_r^2 + (k_p - k_r)(k_p - k_q) = 0, \tag{5.6}$$

што са $k_p = k_r$ и $\varepsilon_q\varepsilon_p \neq 0$ повлачи $s_r = 0$, а то је у контрадикцији са $s_r \neq 0$. Зато је $s_p = s_q = s_r = 0$, одакле је

$$R_{2113} = R_{1223} = R_{1332} = 0.$$

Одатле, (5.6) повлачи да је $(k_p - k_r)(k_p - k_q) = 0$ за било коју пермутацију (p, q, r) скупа $\{1, 2, 3\}$, те су бар две од разлика $k_3 - k_2$, $k_3 - k_1$ и $k_2 - k_1$ једнаке нули, што повлачи да је $k_1 = k_2 = k_3 = \mu$, и зато је

$$R_{2112} = \frac{k_3}{\varepsilon_1\varepsilon_2} = \varepsilon_1\varepsilon_2\mu,\ R_{3113} = \frac{k_2}{\varepsilon_1\varepsilon_3} = \varepsilon_1\varepsilon_3\mu,\ R_{3223} = \frac{k_1}{\varepsilon_2\varepsilon_3} = \varepsilon_2\varepsilon_3\mu.$$

Како је тродимензиони алгебарски тензор кривине на основу Последице 1.23 јединствено одређен помоћу својих 6 компоненти тензора: R_{2113}, R_{1223}, R_{1332}, R_{2112}, R_{3113}, R_{3223}, претходне једначине и Пример 1.10 повлаче да је R константне секционе кривине μ. □

Претходна теорема повлачи да је сваки тродимензиони R Јакоби-ортогоналан ако и само ако је Осерманов. Заиста, ако је тродимензиони R Јакоби-ортогоналан, онда је на основу претходне теореме R константне секционе кривине, те је квази-Клифордов, те је на основу Теореме 3.16 Осерманов. Са друге стране, ако је тродимензиони R Осерманов, онда је R 3-штајн на основу [33, Лема 1.7.3], те је и 1-штајн, а како је сваки тродимензиони R 1-штајн ако и само ако је константне секционе кривине на основу [18, Пропозиција 1.120], то је R тензор константне секционе кривине, те је на основу претходне теореме Јакоби-ортогоналан. У наредној теореми доказујемо сличан резултат у димензији 4 уз додатну претпоставку да је R Јакоби-дијагонализабилан.

Теорема 5.14. *Сваки Јакоби-дијагонализабилан алгебарски тензор кривине димензије* 4 *је Осерманов ако и само ако је Јакоби-ортогоналан.*

Доказ. Претпоставимо да је R Јакоби-дијагонализабилан Осерманов алгебарски тензор кривине на простору са скаларним производом $(\mathcal{V}, g)$ димензије 4. Већ смо коментарисали да се случај сигнатуре $(v, 4-v)$ своди на случај сигнатуре $(4-v, v)$ заменом форме g са $-g$, те је довољно разматрати само Риманов, Лоренцов и Клајнов тензор R. Добро је познато да Лоренцов Осерманов алгебарски тензор кривине има константну секциону кривину (видети [19, 29]), те је облика $R = \mu R^1$. Одавде, користећи да је нула тензор Јакоби-ортогоналан и примењујући Лему 5.8, закључујемо да је Лоренцов тензор R Јакоби-ортогоналан. Остаје да решимо случајеве када је R Риманов или Клајнов. Нека су X и Y међусобно ортогонални јединични вектори из $\mathcal{V}$. Означимо $X = E_1$. Како је R Јакоби-дијагонализабилан, то на основу једнакости (3.9) постоји ортонормирана сопствена база (E_1, E_2, E_3, E_4) за $\mathcal{V}$ придружена $\mathcal{J}_{E_1}$ таква да је $\mathcal{J}_{E_1} E_i = \varepsilon_1 \lambda_i E_i$, за $i \in \{2, 3, 4\}$, при чему је $\varepsilon_j = \varepsilon_{E_j}$, за $j \in \{1, 2, 3, 4\}$, као и $\varepsilon_i^2 = 1$, за $i \in \{1, 2, 3, 4\}$. Како R није Лоренцов, важи да је $\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3\varepsilon_4 = 1$ јер је паран број бројева међу ε_1, ε_2, ε_3 и ε_4 који су једнаки -1. Означавајући $R_{ijkl} = R(E_i, E_j, E_k, E_l)$, на основу билинеарности форме g имамо да је

$$R_{i11j} = g(\mathcal{R}(E_i, E_1)E_1, E_j) = g(\mathcal{J}_{E_1} E_i, E_j) = \varepsilon_1 \lambda_i g(E_i, E_j) = \varepsilon_1 \lambda_i \delta_{ij} \varepsilon_i.$$

Даље за $(i, j) \in \{(2, 2), (3, 3), (4, 4), (2, 3), (2, 4), (3, 4)\}$ добијамо

$$R_{2112} = \varepsilon_1\varepsilon_2\lambda_2, \quad R_{3113} = \varepsilon_1\varepsilon_3\lambda_3, \quad R_{4114} = \varepsilon_1\varepsilon_4\lambda_4, \tag{5.7}$$

$$R_{2113} = R_{2114} = R_{3114} = 0. \tag{5.8}$$

На основу Теореме 3.14, Јакоби-дијагонализабилан Осерманов R је Јакоби-дуалан, те $\mathcal{J}_{E_1} E_i = \varepsilon_1 \lambda_i E_i$, за $i \in \{2, 3, 4\}$, повлачи да је $\mathcal{J}_{E_i} E_1 = \varepsilon_i \lambda_i E_1$, те је $\mathcal{J}_{E_i} E_1 \perp E_j$ за $j \in \{2, 3, 4\}$, одакле је $0 = g(\mathcal{J}_{E_i} E_1, E_j) = g(\mathcal{R}(E_1, E_i)E_i, E_j) = R_{1iij}$ и одатле закључујемо да је

$$R_{1223} = R_{1224} = R_{1332} = R_{1334} = R_{1442} = R_{1443} = 0. \tag{5.9}$$

Како је R Осерманов, то је он и 1-штајн, те на основу (3.2) добијамо да је $\sum_{i=1}^{4} \varepsilon_i \varepsilon_x R_{ixxi} = c_1$, за $x \in \{1, 2, 3, 4\}$. Одавде, користећи (1.3) због које важи $R_{1111} = R_{2222} = R_{3333} = R_{4444} = 0$ и (1.5) због које је $R_{1221} = R_{2112}$, $R_{1331} = R_{3113}$, $R_{2332} = R_{3223}$, $R_{1441} = R_{4114}$, $R_{2442} = R_{4224}$, $R_{3443} = R_{4334}$, закључујемо да је

$$\begin{aligned}
\varepsilon_1\varepsilon_2 R_{2112} + \varepsilon_1\varepsilon_3 R_{3113} + \varepsilon_1\varepsilon_4 R_{4114} &= c_1, \\
\varepsilon_1\varepsilon_2 R_{2112} + \varepsilon_2\varepsilon_3 R_{3223} + \varepsilon_2\varepsilon_4 R_{4224} &= c_1, \\
\varepsilon_1\varepsilon_3 R_{3113} + \varepsilon_2\varepsilon_3 R_{3223} + \varepsilon_3\varepsilon_4 R_{4334} &= c_1, \\
\varepsilon_1\varepsilon_4 R_{4114} + \varepsilon_2\varepsilon_4 R_{4224} + \varepsilon_3\varepsilon_4 R_{4334} &= c_1.
\end{aligned}$$

Одузимањем збира прве и четврте једначине од збира преостале две једначине добијамо $\varepsilon_2\varepsilon_3 R_{3223} = \varepsilon_1\varepsilon_4 R_{4114}$, одакле након множења са $\varepsilon_2\varepsilon_3$ следи да је $\varepsilon_2^2\varepsilon_3^2 R_{3223} = \varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3\varepsilon_4 R_{4114}$, те је $R_{3223} = R_{4114}$. Одузимањем збира друге и четврте једначине од збира преостале две једначине добијамо $\varepsilon_2\varepsilon_4 R_{4224} = \varepsilon_1\varepsilon_3 R_{3113}$, одакле након множења са $\varepsilon_2\varepsilon_4$ следи да је $\varepsilon_2^2\varepsilon_4^2 R_{4224} = \varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3\varepsilon_4 R_{3113}$, те је $R_{4224} = R_{3113}$. Одузимањем збира треће и четврте једначине од збира преостале две једначине добијамо $\varepsilon_3\varepsilon_4 R_{4334} = \varepsilon_1\varepsilon_2 R_{2112}$, одакле након множења са $\varepsilon_3\varepsilon_4$ следи да је $\varepsilon_3^2\varepsilon_4^2 R_{4334} = \varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3\varepsilon_4 R_{2112}$, те је $R_{4334} = R_{2112}$. Користећи (5.7), имамо да је

$$R_{3223} = \varepsilon_1\varepsilon_4\lambda_4, \quad R_{4224} = \varepsilon_1\varepsilon_3\lambda_3, \quad R_{4334} = \varepsilon_1\varepsilon_2\lambda_2. \tag{5.10}$$

Из тога што је тензор R 1-штајн на основу (3.3) имамо додатне једначине $\sum_{i=1}^{4} \varepsilon_i R_{ixyi} = 0$ за $1 \leqslant x \neq y \leqslant 4$. Заменом $(x, y) \in \{(2,3), (2,4), (3,4)\}$ добијамо

$$\begin{aligned}
\varepsilon_1 R_{1231} + \varepsilon_2 R_{2232} + \varepsilon_3 R_{3233} + \varepsilon_4 R_{4234} = 0,\\
\varepsilon_1 R_{1241} + \varepsilon_2 R_{2242} + \varepsilon_3 R_{3243} + \varepsilon_4 R_{4244} = 0,\\
\varepsilon_1 R_{1341} + \varepsilon_2 R_{2342} + \varepsilon_3 R_{3343} + \varepsilon_4 R_{4344} = 0,
\end{aligned}$$

а како једначине (1.3), (1.4) и (1.5) дају да је

$$\begin{aligned}
&R_{2232} = R_{3233} = R_{2242} = R_{4244} = R_{3343} = R_{4344} = 0,\\
&R_{1231} = -R_{2131} = R_{2113}, \quad R_{4234} = -R_{2434} = R_{2443},\\
&R_{1241} = -R_{2141} = R_{2114}, \quad R_{3243} = -R_{2343} = R_{2334},\\
&R_{1341} = -R_{3141} = R_{3114}, \quad R_{2342} = -R_{3242} = R_{3224},
\end{aligned}$$

то закључујемо да је

$$\varepsilon_1 R_{2113} + \varepsilon_4 R_{2443} = 0, \quad \varepsilon_1 R_{2114} + \varepsilon_3 R_{2334} = 0, \quad \varepsilon_1 R_{3114} + \varepsilon_2 R_{3224} = 0,$$

односно $R_{2443} = -\varepsilon_1\varepsilon_4 R_{2113}$, $R_{2334} = -\varepsilon_1\varepsilon_3 R_{2114}$ и $R_{3224} = -\varepsilon_1\varepsilon_2 R_{3114}$. Даље, користећи (5.8), добијамо да је

$$R_{2443} = R_{2334} = R_{3224} = 0. \tag{5.11}$$

Како је четвородимензиони Осерманов R 2-штајн, једначина (3.1) важи за $j = 2$, одакле је $\mathrm{Tr}(\mathcal{J}_{E_1})^2 = (\varepsilon_{E_1})^2 c_2$, што повлачи да је

$$\lambda_2^2 + \lambda_3^2 + \lambda_4^2 = c_2, \tag{5.12}$$

јер је због $\mathcal{J}_{E_1}E_i = \varepsilon_1\lambda_i E_i$, где је $i \in \{2,3,4\}$, матрица Јакобијевог оператора $\mathcal{J}_{E_1}$ у ортонормираној бази (E_1, E_2, E_3, E_4) једнака

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_1\lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_1\lambda_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \varepsilon_1\lambda_4 \end{pmatrix}.$$

Како је R 2-штајн, на основу (3.6) за све $1 \leqslant x \neq y \leqslant 4$ важи да је

$$2\sum_{1\leqslant i,j\leqslant 4} \varepsilon_i\varepsilon_j R_{ixxj}R_{iyyj} + \sum_{1\leqslant i,j\leqslant 4} \varepsilon_i\varepsilon_j (R_{ixyj} + R_{iyxj})^2 = 2\varepsilon_x\varepsilon_y c_2.$$

За $(x,y) = (2,3)$ је

$$2\sum_{1\leqslant i,j\leqslant 4} \varepsilon_i\varepsilon_j R_{i22j}R_{i33j} + \sum_{1\leqslant i,j\leqslant 4} \varepsilon_i\varepsilon_j (R_{i23j} + R_{i32j})^2 = 2\varepsilon_2\varepsilon_3 c_2.$$

На основу (1.3), (1.4), (1.5) је $R_{222j} = R_{333j} = R_{223j} = R_{332j} = 0$ за $j \in \{1,2,3,4\}$, $R_{i222} = R_{i333} = R_{i233} = R_{i322} = 0$ за $i \in \{1,2,3,4\}$, те је $2\varepsilon_2\varepsilon_3 c_2$ једнако

$$\begin{aligned} &2(\varepsilon_1\varepsilon_1 R_{1221}R_{1331} + \varepsilon_1\varepsilon_4 R_{1224}R_{1334} + \varepsilon_4\varepsilon_1 R_{4221}R_{4331} + \varepsilon_4\varepsilon_4 R_{4224}R_{4334}) \\ &\quad + \varepsilon_1\varepsilon_1(R_{1231} + R_{1321})^2 + \varepsilon_1\varepsilon_2(R_{1232})^2 + \varepsilon_1\varepsilon_3(R_{1323})^2 + \varepsilon_1\varepsilon_4(R_{1234} + R_{1324})^2 \\ &\quad + \varepsilon_2\varepsilon_1(R_{2321})^2 + \varepsilon_2\varepsilon_3(R_{2323})^2 + \varepsilon_2\varepsilon_4(R_{2324})^2 \\ &\quad + \varepsilon_3\varepsilon_1(R_{3231})^2 + \varepsilon_3\varepsilon_2(R_{3232})^2 + \varepsilon_3\varepsilon_4(R_{3234})^2 \\ &\quad + \varepsilon_4\varepsilon_1(R_{4231} + R_{4321})^2 + \varepsilon_4\varepsilon_2(R_{4232})^2 + \varepsilon_4\varepsilon_3(R_{4323})^2 + \varepsilon_4\varepsilon_4(R_{4234} + R_{4324})^2, \end{aligned}$$

а како $\mathbb{Z}_2$ симетрије дају

$$\begin{aligned} &R_{1221} = R_{2112}, \quad R_{1331} = R_{3113}, \quad R_{4221} = -R_{2421} = R_{2412} = R_{1224}, \\ &R_{1231} = -R_{2131} = R_{2113}, \quad R_{1321} = R_{2113}, \quad R_{1232} = -R_{1223}, \\ &R_{1323} = -R_{1332}, \quad R_{2321} = R_{2123} = -R_{1223}, \quad R_{2323} = -R_{3223}, \\ &R_{2324} = -R_{3224}, \quad R_{3231} = R_{3132} = -R_{1332}, \quad R_{3232} = -R_{3223}, \\ &R_{3234} = -R_{2334}, \quad R_{4231} = R_{3142} = -R_{1342} = R_{1324}, \\ &R_{4321} = R_{2143} = -R_{1243} = R_{1234}, \quad R_{4232} = R_{3242} = -R_{3224}, \\ &R_{4323} = R_{2343} = -R_{2334}, \quad R_{4234} = -R_{2434} = R_{2443}, \quad R_{4324} = R_{2443}, \end{aligned}$$

то из (5.8), (5.9) и (5.11) закључујемо да је

$$\begin{aligned} &2\varepsilon_1^2 R_{2112}R_{3113} + 2\varepsilon_4^2 R_{4224}R_{4334} + \varepsilon_1\varepsilon_4(R_{1234} + R_{1324})^2 \\ &+\varepsilon_2\varepsilon_3(-R_{3223})^2 + \varepsilon_3\varepsilon_2(-R_{3223})^2 + \varepsilon_4\varepsilon_1(R_{1324} + R_{1234})^2 = 2\varepsilon_2\varepsilon_3 c_2. \end{aligned}$$

Коришћењем (5.7) и (5.10) следи $4\varepsilon_2\varepsilon_3\lambda_2\lambda_3 + 2\varepsilon_2\varepsilon_3(R_{1234} + R_{1324})^2 + 2\varepsilon_2\varepsilon_3\lambda_4^2 = 2\varepsilon_2\varepsilon_3 c_2$. Дељењем са $2\varepsilon_2\varepsilon_3 \neq 0$, добијамо да је $c_2 - \lambda_4^2 - 2\lambda_2\lambda_3 = (R_{1234} + R_{1324})^2$, а користећи (5.12) имамо да је $c_2 - \lambda_4^2 = \lambda_2^2 + \lambda_3^2$, те је

$$(\lambda_3 - \lambda_2)^2 = (R_{1234} + R_{1324})^2.$$

Понављајући сличан поступак и користећи једначине (1.3), (1.4), (1.5) и (1.6) на основу којих је

$$\begin{aligned}
&R_{1243} = -R_{1234}, \quad R_{1423} = -R_{4213} - R_{2143} = -R_{1342} + R_{1243} = R_{1324} - R_{1234},\\
&R_{1432} = -R_{4312} - R_{3142} = -R_{1243} + R_{1342} = R_{1234} - R_{1324}, \quad R_{1342} = -R_{1324},
\end{aligned}$$

добијамо да је

$$\begin{aligned}
(\lambda_2 - \lambda_4)^2 &= (R_{1243} + R_{1423})^2 = (R_{1324} - 2R_{1234})^2,\\
(\lambda_4 - \lambda_3)^2 &= (R_{1432} + R_{1342})^2 = (R_{1234} - 2R_{1324})^2.
\end{aligned}$$

Одатле следи да је

$$\begin{aligned}
&s_4(\lambda_3 - \lambda_2) = R_{1234} + R_{1324},\ s_3(\lambda_2 - \lambda_4) = R_{1324} - 2R_{1234},\\
&s_2(\lambda_4 - \lambda_3) = R_{1234} - 2R_{1324},
\end{aligned} \tag{5.13}$$

при чему $s_2, s_3, s_4 \in \{-1, 1\}$. На основу Дирихлеовог[1] принципа, бар два од s_2, s_3, s_4 су једнаки бројеви. Претпоставимо да је $s_i = s_j = -s_k$, при чему је (i, j, k) пермутација од $(2, 3, 4)$. Сабирањем једначина у (5.13) добијамо да је

$$(s_3 - s_4)\lambda_2 + (s_4 - s_2)\lambda_3 + (s_2 - s_3)\lambda_4 = 0.$$

Ако уместо пермутације $(2, 3, 4)$ посматрамо пермутацију (i, j, k), закључујемо да важи $(s_j - s_k)\lambda_i + (s_k - s_i)\lambda_j + (s_i - s_j)\lambda_k = 0$, те због $s_i = s_j = -s_k$ важи да је $(s_j - (-s_j))\lambda_i + (-s_j - s_j)\lambda_j = 0$, односно $2s_j\lambda_i - 2s_j\lambda_j = 0$, одакле је $2s_j(\lambda_i - \lambda_j) = 0$, те је $\lambda_i = \lambda_j$. Тада је $s_k(\lambda_j - \lambda_i) = s_k \cdot 0 = 0$, као и $-s_k(\lambda_j - \lambda_i) = 0$, те примећујемо да замена s_k са $-s_k$ не мења једначине (5.13) и тако обезбеђујемо да је $s_2 = s_3 = s_4$.

Ако је $s_2 = s_3 = s_4 = -1$, онда заменама сопствених вектора E_2, E_3 и E_4 са $-E_2$, $-E_3$ и $-E_4$, редом, закључујемо да R_{1234} и R_{1324} мењају предзнак, као и s_2, s_3, s_4. То је разлог зашто, без умањења општости, можемо претпоставити

---

[1] Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805–1859), немачки математичар

да је $s_2 = s_3 = s_4 = 1$ и добити једначине

$$\begin{aligned} R_{1234} + R_{1324} &= \lambda_3 - \lambda_2, \\ R_{1324} - 2R_{1234} &= \lambda_2 - \lambda_4, \\ R_{1234} - 2R_{1324} &= \lambda_4 - \lambda_3. \end{aligned} \tag{5.14}$$

За произвољно $Y \perp X = E_1$ постоје реални бројеви k_2, k_3, k_4 такви да је $Y = k_2E_2 + k_3E_3 + k_4E_4$, те је на основу линеарности оператора $\mathcal{J}_X$ испуњено

$$\mathcal{J}_X Y = \mathcal{J}_{E_1}(k_2E_2 + k_3E_3 + k_4E_4) = k_2\varepsilon_1\lambda_2E_2 + k_3\varepsilon_1\lambda_3E_3 + k_4\varepsilon_1\lambda_4E_4.$$

Користећи једначине (1.3), (1.4), (1.6), (1.5), (5.8), (5.9), (5.14) и Лему 1.8 на основу које је

$$\mathcal{R}(E_j, E_k)E_l = \sum_{i=1}^{4} \varepsilon_i g(\mathcal{R}(E_j, E_k)E_l, E_i)E_i = \sum_{i=1}^{4} \varepsilon_i R_{jkli}E_i,$$

израчунавамо да је

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_Y X =& \mathcal{J}_{k_2E_2+k_3E_3+k_4E_4}E_1 = \mathcal{R}(E_1, k_2E_2 + k_3E_3 + k_4E_4)(k_2E_2 + k_3E_3 + k_4E_4) \\ =& k_2^2\mathcal{R}(E_1, E_2)E_2 + k_2k_3\mathcal{R}(E_1, E_2)E_3 + k_2k_4\mathcal{R}(E_1, E_2)E_4 \\ & + k_3k_2\mathcal{R}(E_1, E_3)E_2 + k_3^2\mathcal{R}(E_1, E_3)E_3 + k_3k_4\mathcal{R}(E_1, E_3)E_4 \\ & + k_4k_2\mathcal{R}(E_1, E_4)E_2 + k_4k_3\mathcal{R}(E_1, E_4)E_3 + k_4^2\mathcal{R}(E_1, E_4)E_4 \\ =& k_2^2(\varepsilon_1R_{1221}E_1 + \varepsilon_2R_{1222}E_2 + \varepsilon_3R_{1223}E_3 + \varepsilon_4R_{1224}E_4) \\ & + k_2k_3(\varepsilon_1R_{1231}E_1 + \varepsilon_2R_{1232}E_2 + \varepsilon_3R_{1233}E_3 + \varepsilon_4R_{1234}E_4) \\ & + k_2k_4(\varepsilon_1R_{1241}E_1 + \varepsilon_2R_{1242}E_2 + \varepsilon_3R_{1243}E_3 + \varepsilon_4R_{1244}E_4) \\ & + k_3k_2(\varepsilon_1R_{1321}E_1 + \varepsilon_2R_{1322}E_2 + \varepsilon_3R_{1323}E_3 + \varepsilon_4R_{1324}E_4) \\ & + k_3^2(\varepsilon_1R_{1331}E_1 + \varepsilon_2R_{1332}E_2 + \varepsilon_3R_{1333}E_3 + \varepsilon_4R_{1334}E_4) \\ & + k_3k_4(\varepsilon_1R_{1341}E_1 + \varepsilon_2R_{1342}E_2 + \varepsilon_3R_{1343}E_3 + \varepsilon_4R_{1344}E_4) \\ & + k_4k_2(\varepsilon_1R_{1421}E_1 + \varepsilon_2R_{1422}E_2 + \varepsilon_3R_{1423}E_3 + \varepsilon_4R_{1424}E_4) \\ & + k_4k_3(\varepsilon_1R_{1431}E_1 + \varepsilon_2R_{1432}E_2 + \varepsilon_3R_{1433}E_3 + \varepsilon_4R_{1434}E_4) \\ & + k_4^2(\varepsilon_1R_{1441}E_1 + \varepsilon_2R_{1442}E_2 + \varepsilon_3R_{1443}E_3 + \varepsilon_4R_{1444}E_4) \\ =& k_2^2\varepsilon_1R_{2112}E_1 + k_2k_3\varepsilon_1R_{2113}E_1 - k_2k_3\varepsilon_2R_{1223}E_2 + k_2k_3\varepsilon_4R_{1234}E_4 \\ & + k_2k_4\varepsilon_1R_{2114}E_1 - k_2k_4\varepsilon_2R_{1224}E_2 + k_2k_4\varepsilon_3R_{1243}E_3 + k_3k_2\varepsilon_1R_{2113}E_1 \\ & - k_3k_2\varepsilon_3R_{1332}E_3 + k_3k_2\varepsilon_4R_{1324}E_4 + k_3^2\varepsilon_1R_{3113}E_1 + k_3k_4\varepsilon_1R_{3114}E_1 \\ & + k_3k_4\varepsilon_2R_{1342}E_2 - k_3k_4\varepsilon_3R_{1334}E_3 + k_4k_2\varepsilon_1R_{2114}E_1 + k_4k_2\varepsilon_3R_{1423}E_3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&- k_4k_2\varepsilon_4R_{1442}E_4 + k_4k_3\varepsilon_1R_{3114}E_1 + k_4k_3\varepsilon_2R_{1432}E_2 - k_4k_3\varepsilon_4R_{1443}E_4\\
&+ k_4^2\varepsilon_1R_{4114}E_1\\
=&k_2^2\varepsilon_1R_{2112}E_1 + k_2k_3\varepsilon_4R_{1234}E_4 + k_2k_4\varepsilon_3R_{1243}E_3\\
&+ k_3k_2\varepsilon_4R_{1324}E_4 + k_3^2\varepsilon_1R_{3113}E_1 + k_3k_4\varepsilon_2R_{1342}E_2\\
&+ k_4k_2\varepsilon_3R_{1423}E_3 + k_4k_3\varepsilon_2R_{1432}E_2 + k_4^2\varepsilon_1R_{4114}E_1\\
=&(k_2^2\varepsilon_1R_{2112} + k_3^2\varepsilon_1R_{3113} + k_4^2\varepsilon_1R_{4114})E_1 + k_3k_4\varepsilon_2(R_{1342} + R_{1432})E_2\\
&+ k_2k_4\varepsilon_3(R_{1243} + R_{1423})E_3 + k_2k_3\varepsilon_4(R_{1234} + R_{1324})E_4\\
=&(k_2^2\varepsilon_2\lambda_2 + k_3^2\varepsilon_3\lambda_3 + k_4^2\varepsilon_4\lambda_4)E_1 + k_3k_4\varepsilon_2(R_{1234} - 2R_{1324})E_2\\
&+ k_2k_4\varepsilon_3(R_{1324} - 2R_{1234})E_3 + k_2k_3\varepsilon_4(R_{1234} + R_{1324})E_4\\
=&(k_2^2\varepsilon_2\lambda_2 + k_3^2\varepsilon_3\lambda_3 + k_4^2\varepsilon_4\lambda_4)E_1 + k_3k_4\varepsilon_2(\lambda_4 - \lambda_3)E_2\\
&+ k_2k_4\varepsilon_3(\lambda_2 - \lambda_4)E_3 + k_2k_3\varepsilon_4(\lambda_3 - \lambda_2)E_4.
\end{aligned}$$

Даље, користећи да је (E_1, E_2, E_3, E_4) ортонормирана база, на основу билинеарности форме g израчунавамо да је

$$\begin{aligned}
&g(\mathcal{J}_XY, \mathcal{J}_YX) = k_2k_3k_4\varepsilon_1\varepsilon_2\lambda_2(\lambda_4 - \lambda_3)g(E_2, E_2)\\
&+ k_2k_3k_4\varepsilon_1\varepsilon_3\lambda_3(\lambda_2 - \lambda_4)g(E_3, E_3) + k_2k_3k_4\varepsilon_1\varepsilon_4\lambda_4(\lambda_3 - \lambda_2)g(E_4, E_4)\\
&= \varepsilon_1k_2k_3k_4(\lambda_2(\lambda_4 - \lambda_3) + \lambda_3(\lambda_2 - \lambda_4) + \lambda_4(\lambda_3 - \lambda_2)) = 0,
\end{aligned}$$

што доказује да је R Јакоби-ортогоналан.

Обратно, претпостављамо да је R Јакоби-дијагонализабилан Јакоби-ортогоналан алгебарски тензор кривине на простору са скаларним производом $(\mathcal{V}, g)$ димензије 4. Прво доказујемо да је R слабо Јакоби-дуалан. Нека су X и Y међусобно ортогонални јединични вектори из $\mathcal{V}$ такви да је $\mathcal{J}_XY = \varepsilon_X\lambda Y$. Наш циљ је да докажемо да је $\mathcal{J}_YX = \varepsilon_Y\lambda X$. Како је R Јакоби-дијагонализабилан и Јакоби-ортогоналан, X је дефинитан и $Y \in \mathcal{V}(X) = \mathrm{Ker}(\widetilde{\mathcal{J}}_X - \varepsilon_X\lambda\,\mathrm{Id})$, користећи Лему 5.10 и Лему 5.11, добијамо да је $\mathcal{J}_YX = \varepsilon_Y\lambda X + Z$, при чему је $\varepsilon_Z = 0$ и $Z \in \mathcal{V}(X) \leqslant X^\perp$. Заправо, како на основу билинеарности форме g, самоадјунгованости Јакобијевог оператора $\mathcal{J}_Y$ и $\mathcal{J}_YY = 0$ следи да је $g(Z, Y) = g(\mathcal{J}_YX - \varepsilon_Y\lambda X, Y) = g(X, \mathcal{J}_YY) - \varepsilon_Y\lambda g(X, Y) = 0$, то је $Z \perp Y$, те закључујемо да $Z \in \mathrm{Span}\{X, Y\}^\perp$.

Разликујемо два случаја. Случај када је $\mathrm{Span}\{X, Y\}^\perp$ дефинитан потпростор простора $\mathcal{V}$ је јасан јер $\varepsilon_Z = 0$ и $Z \in \mathrm{Span}\{X, Y\}^\perp$ повлачи да је $Z = 0$.

Остаје да решимо случај када је $\mathrm{Span}\{X, Y\}^\perp$ недефинитан ($\varepsilon_X = \varepsilon_Y$ ако је R Лоренцов, $\varepsilon_X = -\varepsilon_Y$ ако је R Клајнов, док за Риманов тензор R нема овог случаја). Како је $\mathcal{J}_Y X = \varepsilon_Y \lambda X + Z$, наш циљ је да докажемо да је $Z = 0$. Претпостављамо да је $Z \neq 0$, те нам $\varepsilon_Z = 0$ повлачи да је Z изотропан. Како је R Јакоби-дијагонализабилан, то на основу (3.9) и Леме А.8 закључујемо да је $\mathcal{V}(X)$ недегенерисан, а по Леми 1.6 такав је и $\operatorname{Span}\{Y\}^\perp \cap \mathcal{V}(X)$ који садржи изотропан вектор Z, те је његова димензија бар 2. Одатле, како је $Y \in \mathcal{V}(X) \leqslant X^\perp$, добијамо да је $\dim \mathcal{V}(X) = 3$, што са $\mathcal{V}(X) \leqslant X^\perp$ повлачи да је $\mathcal{V}(X) = X^\perp$ и $\widetilde{\mathcal{J}}_X = \varepsilon_X \lambda \operatorname{Id}$. Како је $\operatorname{Span}\{X, Y\}^\perp$ недефинитан, то постоји вектор $W \in \operatorname{Span}\{X, Y\}^\perp$ такав да је $\varepsilon_W = -\varepsilon_Y$ и нека је $Y = (Y - tW) + tW$ за $t > 1$. Како важи $Y \in X^\perp$, $W \in \operatorname{Span}\{X, Y\}^\perp \leqslant X^\perp$ и $X^\perp = \mathcal{V}(X)$ је потпростор, то $Y - tW$, $tW \in \mathcal{V}(X)$, те је $\mathcal{J}_X(Y - tW) = \varepsilon_X \lambda (Y - tW)$ и $\mathcal{J}_X(tW) = \varepsilon_X \lambda tW$. Користећи да је $W \perp Y$ и (1.2), закључујемо да је $\varepsilon_{Y-tW} = \varepsilon_Y + t^2 \varepsilon_W = (1 - t^2)\varepsilon_Y$ и $\varepsilon_{tW} = t^2 \varepsilon_W = -t^2 \varepsilon_Y$. Зато је $\operatorname{sgn}(\varepsilon_{Y-tW}) = \operatorname{sgn}(\varepsilon_{tW}) = -\operatorname{sgn}(\varepsilon_Y)$ и можемо применити већ решен случај на X, $Y - tW$ и X, tW, јер су $\operatorname{Span}\{X, Y - tW\}^\perp$ и $\operatorname{Span}\{X, tW\}^\perp$ дефинитни, те добијамо да је $\mathcal{J}_{Y-tW} X = \varepsilon_{Y-tW} \lambda X$ и $\mathcal{J}_{tW} X = \varepsilon_{tW} \lambda X$. Како је $W \in \operatorname{Span}\{X, Y\}^\perp$, то је $Y \perp tW$, те на основу (1.2) имамо да је $\varepsilon_{Y-tW} = \varepsilon_Y + \varepsilon_{tW}$, те користећи једначину (2.4), $\mathcal{J}(tW, tW)X = \mathcal{J}_{tW} X$ и линеарност поларизованог Јакобијевог оператора израчунавамо да је

$$\begin{aligned}
\mathcal{J}_Y X = \mathcal{J}_{(Y-tW)+tW} X &= \mathcal{J}_{Y-tW} X + 2\mathcal{J}(Y - tW, tW)X + \mathcal{J}_{tW} X \\
&= \varepsilon_{Y-tW} \lambda X + 2t\mathcal{J}(Y, W)X - 2\mathcal{J}_{tW} X + \mathcal{J}_{tW} X \\
&= \varepsilon_{Y-tW} \lambda X + 2t\mathcal{J}(Y, W)X - \mathcal{J}_{tW} X = \varepsilon_{Y-tW} \lambda X + 2t\mathcal{J}(Y, W)X - \varepsilon_{tW} \lambda X \\
&= (\varepsilon_{Y-tW} - \varepsilon_{tW})\lambda X + 2t\mathcal{J}(Y, W)X = \varepsilon_Y \lambda X + 2t\mathcal{J}(Y, W)X.
\end{aligned}$$

Како $\mathcal{J}_Y X = \varepsilon_Y \lambda X + 2t\mathcal{J}(Y, W)X$ важи за свако $t > 1$, добијамо да је $2\mathcal{J}(Y, W)X = 0$ и $\mathcal{J}_Y X = \varepsilon_Y \lambda X$, што је у супротности са претпоставком да $Z \neq 0$, те је $Z = 0$.

Дакле, R је слабо Јакоби-дуалан, а како је R Јакоби-дијагонализабилан, користећи Лему 3.11, закључујемо да је R Јакоби-дуалан. Коначно, Теорема 3.14 повлачи да је R Осерманов. □

Посебно, како су на основу Леме А.6 Риманови тензори кривине Јакоби-дијагонализабилни, следи да је сваки алгебарски тензор кривине на простору са позитивно дефинитним скаларним производом димензије 4 Осерманов ако и само ако је Јакоби-ортогоналан.

На крају, закључујемо да је принцип Јакоби-ортогоналности, као и принципи дуалности и пропорционалности, веома важан у карактеризацији Осермановог тензора.

Глава А

Додатак

У овој глави излажемо неке појмове и тврђења из линеарне алгебре, топологије, диференцијалне геометрије и тензорског рачуна које користимо у овој докторској дисертацији.

А.1 Линеарна алгебра

У овом поглављу наводимо неке добро познате теореме из Линеарне алгебре које примењујемо у овој дисертацији, а њихови докази могу се пронаћи у књигама [6], [14], [44], [47] и [51].

Лема А.1. *Сопствени вектори* $X_1, \ldots, X_k$ *линеарног оператора* $\mathcal{J}$ *који редом одговарају различитим сопственим вредностима* $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ *су линеарно независни.*

Лема А.2. *Ако су сви ненула вектори сопствени за линеарни оператор* $\mathcal{J}$ *на векторском простору, онда постоји само једна сопствена вредност* ξ *оператора* $\mathcal{J}$ *и важи да је* $\mathcal{J} = \xi \cdot \mathrm{Id}$.

Карактеристични полином линеарног оператора $\mathcal{J}$ је полином $\omega(\lambda) = \det(\lambda \,\mathrm{Id} - \mathcal{J})$ и свака сопствена вредност је корен од ω. Није тешко приметити да се траг и детерминанта линеарног оператора $\mathcal{J}$ појављају као коефицијенти у његовом карактеристичном полиному $\omega(\lambda) = \lambda^n - \mathrm{Tr}(\mathcal{J})\lambda^{n-1} + \ldots + (-1)^n \det(\mathcal{J})$. Испоставља се да се и остали коефицијенти карактеристичног полинома ω линеарног оператора $\mathcal{J}$ полиномијално изражавају преко елемената матрице оператора $\mathcal{J}$.

Лема А.3. *Ако је $\mathcal{J}$ линеарни оператор на векторском простору димензије n чији је карактеристични полином $\omega(\lambda) = \lambda^n + k_1\lambda^{n-1} + \ldots + k_{n-1}\lambda + k_n$, онда за свако $m \in \{1, \ldots, n\}$ важи*

$$mk_m + k_{m-1}\operatorname{Tr}(\mathcal{J}) + k_{m-2}\operatorname{Tr}(\mathcal{J}^2) + \ldots + k_1\operatorname{Tr}(\mathcal{J}^{m-1}) + \operatorname{Tr}(\mathcal{J}^m) = 0.$$

Како карактеристични полином ω линеарног оператора $\mathcal{J}$ има реалне коефицијенте, то његови корени могу бити реални, али такође могу бити и комплексни бројеви који нису реални. Такви корени зову се ***комплексне сопствене вредности***. Тада уместо $\mathcal{V}$ користимо комплексни векторски простор $\mathcal{V}^{\mathbb{C}} \cong \mathcal{V} \oplus i\mathcal{V}$, а самоадјунговани оператор $\mathcal{J}$ на $\mathcal{V}$ се претвара у самоадјунгован оператор $\mathcal{J}^{\mathbb{C}}$ на $\mathcal{V}^{\mathbb{C}}$.

Лема А.4. *Сопствене вредности самоадјунгованог линеарног оператора на простору са дефинитним скаларним производом су реалне.*

Лема А.5. *Сопствени вектори самоадјунгованог оператора на простору са дефинитним скаларним производом који одговарају различитим сопственим вредностима су међусобно ортогонални.*

Ако се база од $\mathcal{V}$ састоји од сопствених вектора линеарног оператора $\mathcal{J}$ на $\mathcal{V}$, онда за ту базу кажемо да је ***сопствена база***.

Лема А.6. *Постоји ортонормирана сопствена база простора са дефинитним скаларним производом $(\mathcal{V}, g)$ у односу на самоадјунговани оператор $\mathcal{J}$ на $\mathcal{V}$.*

Наредна последица је позната под називом ***спектрална теорема***.

Последица А.7. *Нека је $\mathcal{J}$ самоадјунгован линеаран оператор на простору са дефинитним скаларним производом $(\mathcal{V}, g)$. Тада је $\mathcal{V} = \oplus_\lambda \operatorname{Ker}(\mathcal{J} - \lambda \operatorname{Id})$, при чему $\oplus_\lambda$ представља директну ортогоналну суму по свим сопственим вредностима оператора $\mathcal{J}$.*

Међутим, декомпозиција простора са скаларним производом $(\mathcal{V}, g)$ се компликује кад је g недефинитно. За самоадјунговани линеарни оператор $\mathcal{J}$ на простору са скаларним производом $(\mathcal{V}, g)$ димензије n, дефинишемо линеарне операторе $\mathcal{J}_\lambda = \mathcal{J} - \lambda \operatorname{Id}$ за $\lambda \in \mathbb{R}$ и $\mathcal{J}_\lambda = (\mathcal{J} - \lambda \operatorname{Id})(\mathcal{J} - \bar{\lambda} \operatorname{Id})$ за $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. ***Уопштени сопствени простори*** су потпростори $\mathcal{V}_\lambda = \operatorname{Ker}((\mathcal{J}_\lambda)^n)$. Наредна лема чији се доказ може пронаћи у [34, Лема 4.4.2] говори да су уопштени сопствени простори недегенерисани и да се $\mathcal{V}$ може представити као њихова директна ортогонална сума при чему сабирамо по сопственим вредностима чији је имагинарни део не мањи од нула.

Лема А.8. *Уопштени сопствени простори самоадјунгованог линеарног оператора на простору са скаларним производом* $(\mathcal{V}, g)$ *су недегенерисани и* $\mathcal{V}$ *се може раставити на њихову ортогоналну директну суму* $\mathcal{V} = \oplus_{\mathrm{Im}(\lambda)\geqslant 0}\mathcal{V}_\lambda$.

Жорданов блок величине $k \times k$ који одговара реалној сопственој вредности $\lambda \in \mathbb{R}$ је матрица

$$\mathcal{J}(k,\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Ако је сопствена вредност λ комплексан број $a + ib$, при чему $a, b \in \mathbb{R}$, ***Жорданов блок*** величине $2k{\times}2k$ који одговара пару комплексних конјугованих сопствених вредности $a + ib$ и $a{-}ib$ је матрица

$$\mathcal{J}(k,a,b) = \begin{pmatrix} A & I_2 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A & I_2 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & A & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & A & I_2 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & A \end{pmatrix},$$

при чему су A и I_2 блокови величине 2×2 дефинисани помоћу

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}, \quad I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Добро је позната теорема из линеарне алгебре која говори да се матрица у погодно изабраној бази може представити помоћу Жорданових блокова.

Теорема А.9. *За сваки линеарни оператор* $\mathcal{J}$ *реалног векторског простора* $\mathcal{V}$, *постоји база за* $\mathcal{V}$ *тако да* $\mathcal{J}$ *у односу на ту базу има блок дијагоналну* *матрицу састављену од Жорданових блокова додељених сопственим вредностима тог оператора.*

Неуређена фамилија Жорданових блокова из претходне теореме зове се ***Жорданова нормална форма*** оператора.

А.2 Топологија

У овом поглављу подсећамо се основних појмова из топологије обрађиваних на основним академским студијама смера Теоријска математика и примене у оквиру предмета Топологија А (videti [50]).

Топологија на скупу X је подскуп τ партитивног скупа $\mathcal{P}(X)$ скупа X такав да важи:

1. $\emptyset \in \tau$ и $X \in \tau$;
2. Пресек коначног броја елемената из τ припада τ;
3. Унија произвољног броја елемената из τ припада τ.

Уређен пар (X, τ) назива се ***тополошки простор***, а елементи скупа τ су ***отворени скупови*** у тој топологији. Ако $x \in X$, онда сваки скуп U који садржи x називамо ***околином*** тачке x. Додатно, ако $U \in \tau$, онда је U ***отворена околина*** тачке x.

Тополошки простор (X, τ) је ***Хаусдорфов***[1] ***простор*** уколико за сваке две различите тачке x_1 и x_2 из простора X постоје њихове отворене околине U_1 и U_2, редом, такве да је $U_1 \cap U_2 = \emptyset$.

Нека су (X, τ) и (X_1, τ_1) тополошки простори. Пресликавање $f\colon X \to X_1$ је ***непрекидно у тачки*** $x \in X$ ако за сваку отворену околину U_1 тачке $f(x)$ у X_1 постоји отворена околина U тачке x у X таква да је $f(U) \subseteq U_1$. Пресликавање f је ***непрекидно пресликавање*** ако је непрекидно у свакој тачки.

Пресликавање $f\colon X \to X_1$ између тополошких простора (X, τ) и (X_1, τ_1) је ***хомеоморфизам*** ако је бијективно пресликавање такво да су f и f^{-1} непрекидна пресликавања.

Скуп подскупова $\mathcal{B}$ скупа X је ***база топологије*** на X (елементи скупа $\mathcal{B}$ се зову ***базни елементи***) такав да важи:

---

[1] Felix Hausdorff (1868–1942), немачки математичар

1. За свако $x \in X$, постоји бар један базни елемент B који садржи x.
2. Ако x припада пресеку два базна елемента B_1 и B_2, онда постоји базни елемент B_3 који садржи x такав да је $B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$.

Ако скуп $\mathcal{B}$ има пребројиво много елемената, онда је $\mathcal{B}$ ***пребројива база***.

А.3 Диференцијална геометрија

У овом поглављу подсећамо се основних појмова из диференцијалне геометрије обрађиваних на основним академским студијама смера Теоријска математика и примене у оквиру предмета Геометрија кривих и површи (видети [27]) и Диференцијална геометрија (видети [12], [17] и [59]). Конкретно, дефинишемо тополошке и диференцијабилне многострукости, а затим уводимо појмове глатког пресликавања између многострукости, тангентног вектора, тангентног простора, векторског поља, комутатора векторских поља, повезаности, коваријантног извода и Кристофелових симбола.

Ако је M Хаусдорфов тополошки простор са пребројивом базом, такав да за сваку тачку $p \in M$ постоји отворен скуп $U \subseteq M$ који садржи тачку p и хомеоморфизам ϕ којим се U пресликава у неки отворен подскуп од $\mathbb{R}^n$, онда се M назива ***n-димензиона тополошка многострукост***, а користи се и ознака M^n да се нагласи да је ***димензија многострукости*** M једнака n. Хомеоморфизам ϕ зовемо ***карта*** или ***локални координатни систем*** на M, а за n кажемо да је ***димензија карте***. Домен U карте ϕ зовемо ***координатна околина***, а често се карта обележава као уређени пар (U, ϕ).

Пресликавања $\pi_i \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ за $i \in \{1, 2, ..., n\}$ дефинисана помоћу $\pi_i(x^1, x^2, ..., x^n) = x^i$ називају се ***координатне пројекције***. Њихове рестрикције $\pi_i\restriction_{\phi(U)} \circ \phi \colon U \to \mathbb{R}^n$ које пресликавају сваку тачку $p \in U$ у i-ту координату њене слике $\phi(p)$ зовемо ***координатне функције*** или ***локалне координате***.

Значајно је нагласити да се некада у литератури под системом координата на M у тачки p подразумева уређени пар (U_α, x_α), при чему је x_α инјективно пресликавање из отвореног скупа $U_\alpha \subseteq \mathbb{R}^n$ у многострукост M (видети [23]).

Тополошка многострукост M је ***повезана*** уколико не може да се представи као унија два дисјунктна непразна отворена подскупа од M.

Покривач неког скупа је фамилија скупова чија унија садржи тај скуп као подскуп, а уколико су сви елементи те фамилије отворени, онда је то

отворен покривач. ***Потпокривач*** неког покривача је његова потфамилија која је такође покривач. За тополошку многострукост кажемо да је ***компактна*** ако сваки њен отворен покривач има коначан потпокривач.

Атлас на M је фамилија карата на M таква да је унија свих координатних околина једнака M.

За две карте (U_α, ϕ_α) и (U_β, ϕ_β) n-димензионе тополошке многострукости M кажемо да су ***сагласне*** ако је ***функција преласка*** дефинисана помоћу $\phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1}\restriction_{\phi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)} \colon \phi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \to \phi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$ глатка. ***Гладак атлас*** на М је атлас на М чије су сваке две карте сагласне. ***Комплетан гладак атлас*** је гладак атлас који није садржан ни у једном већем глатком атласу, односно, карта која је сагласна са свим картама из комплетног глатког атласа је већ садржана у њему. ***Глатка n-многострукост*** или ***диференцијабилна n-многострукост*** је тополошка n-многострукост снабдевена комплетним глатким атласом. Захваљујући наредној леме чији се доказ налази у књизи [45, Пропозиција 1.17], за одређивање глатке структуре није неопходно навести конкретан комплетан гладак атлас, већ само неки гладак атлас.

Лема А.10. *Сваки гладак атлас $\mathcal{A}$ на M је садржан у јединственом комплетном глатком атласу (који зовемо глатка структура одређена са $\mathcal{A}$).*

Реална функција $f \colon M \to \mathbb{R}$ је ***глатка*** ако је $f \circ \phi^{-1}$ глатко за неку карту (U, ϕ) глатког атласа на M (због сагласности карата то важи за сваку карту одговарајућег јединственог комплетног глатког атласа).

Скуп свих глатких реалних функција $f \colon M \to \mathbb{R}$ на многострукости M означавамо са $\mathfrak{F}(M)$. За две функције f и g из $\mathfrak{F}(M)$ дефинишемо функције $f + g$ (збир), $f \cdot g$ (производ) помоћу једнакости $(f+g)(p) = f(p) + g(p)$ и $(f \cdot g)(p) = f(p)g(p)$, редом, које важе за свако $p \in M$. Познато је да је скуп $\mathfrak{F}(M)$ са овако уведеним бинарним операцијама $+$ и $\cdot$ комутативан прстен са јединицом.

Пресликавање $f \colon M \to N$ између многострукости M и N је ***глатко*** ако за сваку тачку $p \in M$ постоје карте (U, ϕ) у $p \in M$ и (V, ψ) у $f(p) \in N$, при чему је $f(U) \subseteq V$ и $\psi \circ f \circ \phi^{-1} \colon \phi(U) \to \psi(V)$ је глатко.

Дифеоморфизам између многострукости M и N је глатко бијективно пресликавање $f \colon M \to N$ које има гладак инверз. Ако такав дифеоморфизам постоји, онда су M и N ***дифеоморфне многострукости***.

Нека је M многострукост и $p \in M$. ***Танīенѿни векѿор*** X_p на M у тачки p је пресликавање $X_p\colon \mathfrak{F}(M) \to \mathbb{R}$ за које важи:

1. $\mathbb{R}$-линеарност: $X_p(\alpha f + \beta g) = \alpha X_p(f) + \beta X_p(g)$;
2. Лајбницовост[2]: $X_p(fg) = X_p(f)g + fX_p(g)$,

за свако $\alpha \in \mathbb{R}$, $\beta \in \mathbb{R}$ и $f \in \mathfrak{F}(M)$, $g \in \mathfrak{F}(M)$. Скуп свих тангентних вектора у тачки p се означава са T_pM.

Сабирање тангентних вектора и множење скаларом уводимо на природан начин, односно тако да за $X_p \in T_pM$, $Y_p \in T_pM$, $f \in \mathfrak{F}(M)$ и $\alpha \in \mathbb{R}$ важи $(X_p + Y_p)(f) = X_p(f) + Y_p(f)$ и $(\alpha X_p)(f) = \alpha X_p(f)$. Није тешко доказати да је скуп T_pM са ове две операције векторски простор над $\mathbb{R}$ који зовемо ***ѿанīенѿни ӣросѿор*** многострукости M у тачки p. Многострукости су закривљени простори који могу бити компликовани за проучавање, док су векторски простори једноставнији и зато је основна идеја диференцијалног рачуна да уместо многострукости M у околини тачке $p \in M$ посматрамо њену најбољу линеарну апроксимацију, а то је тангентни простор T_pM. Слично, апроксимирамо глатко пресликавање између многострукости M и N линеарном трансформацијом тангентних простора. ***Танīенѿно ӣресликавање*** придружено глатком пресликавању $f\colon M \to N$ у тачки p је пресликавање $T_pf\colon T_pM \to T_{f(p)}N$ дефинисано помоћу $T_pf(X_p)(h) = X_p(h \circ f)$, где је $X_p \in T_pM$ и $h \in \mathfrak{F}(N)$. Неки аутори тангентно пресликавање T_pf називају и ***диференцијал*** од f у p и означавају га са df_p.

Нека је (U, ϕ) карта на n-многострукости M у тачки $p \in M$ и нека су $x^i = \pi_i \circ \phi$ за $i \in \{1, 2, ..., n\}$ одговарајуће координатне функције. ***Парцијални извод*** функције $f \in \mathfrak{F}(M)$ за $i \in \{1, 2, ..., n\}$ дефинишемо помоћу

$$(\partial_i)_p(f) = \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_p (f) = \frac{\partial f}{\partial x^i}(p) = \frac{\partial (f \circ \phi^{-1})}{\partial \pi_i}(\phi(p)).$$

Како за $(\partial_i)_p$ важи $\mathbb{R}$-линеарност и Лајбницовост, то је $(\partial_i)_p$ тангентни вектор од M у p.

Испоставља се да парцијални изводи чине базу тангентног простора T_pM, о чему говори следећа лема (видети [45, стр. 61]).

Лема А.11. *Нека је M īлаѿка n-многосѿрукосѿ и нека је $p \in M$. Таgа је T_pM n-gимензиони векѿорски ӣросѿор и за сваку карѿу (U, ϕ) у ѿачки p*

---

[2] Gottfried Wilhelm von Leibniz (1646–1716), немачки математичар и филозоф

важи да парцијални изводи $(\partial_1)_p, (\partial_2)_p, ..., (\partial_n)_p$ *чине базу за* T_pM*, при чему су за* $i \in \{1, 2, ..., n\}$ *функције* $x^i = \pi_i \circ \phi$ *одговарајуће координатне функције и* $(\partial_i)_p = \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_p$.

Тангентно раслојење многострукости M је дисјунктна унија тангентних простора од M, односно $TM = \bigsqcup_{p\in M} T_pM = \bigcup_{p\in M}\{(p, X_p)|X_p \in T_pM\}$.

Елемент тангентног раслојења TM можемо схватити као уређен пар (p, X_p), где је p тачка из M, а X_p тангентни вектор на M у p. ***Природна пројекција*** $\pi\colon TM \to M$ је пресликавање дефинисано помоћу $\pi(p, X_p) = p$, која сваки тангентни вектор из T_pM шаље у његову основну тачку p. У [45, стр. 66] налази се доказ следеће леме која говори да тангентно раслојење има структуру $2n$-димензионе многострукости.

Лема А.12. *За сваку глатку* n*-многострукост* M*, тангентно раслојење* TM *има глатку структуру која га чини* $2n$*-димензионом многострукости. У односу на ову структуру, пројекција* $\pi\colon TM \to M$ *је глатка.*

Посматрамо пресликавање X из многострукости M на тангентно раслојење TM, које свакој тачки многострукости додељује један тангентни вектор. За сваку фиксирану функцију $f \in \mathfrak{F}(M)$ је помоћу $p \mapsto (Xf)(p) = X_p(f)$ дефинисано пресликавање $(Xf)\colon M \to \mathbb{R}$. Одабир тангентних вектора, односно пресликавање X је ***глатко*** ако је пресликавање (Xf) диференцијабилно за произвољну функцију $f \in \mathfrak{F}(M)$.

Сечење тангентног раслојења TM је пресликавање $X\colon M \to TM$ за које је $\pi \circ X = \mathrm{Id}_M$, где је $\pi\colon TM \to M$ природна пројекција. ***Векторско поље*** на многострукости M је глатко сечење тангентног раслојења TM, односно глатко пресликавање $X\colon M \to TM$ које свакој тачки $p \in M$ додељује тангентни вектор $X_p = X(p) \in T_pM$.

Скуп свих векторских поља на многострукости M означавамо са $\mathfrak{X}(M)$. Ако $X \in \mathfrak{X}(M)$ и $Y \in \mathfrak{X}(M)$, онда сабирање векторских поља и множење функцијом $f \in \mathfrak{F}(M)$ дефинишемо помоћу $(X + Y)p = X_p + Y_p$ и $(fX)_p = f(p)X_p$, редом, за сваку тачку $p \in M$. Познато је да скуп $\mathfrak{X}(M)$ са ове две операције има структуру модула над прстеном $\mathfrak{F}(M)$.

У [12, стр. 41-42] је доказано да за векторска поља X и Y важи да XY није, али $XY - YX$ јесте векторско поље, те је следећа дефиниција коректна.

Лијеве[3] ***заграде*** или ***комутатор*** векторских поља X и Y је векторско поље $[X,Y]$ дефинисано помоћу $[X,Y]f = X(Yf) - Y(Xf)$, за свако $f \in \mathfrak{F}(M)$.

У [59, стр. 13] се налази следећа лема о особинама Лијеве заграде.

Лема А.13. *Нека су $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ и $a, b \in \mathbb{R}$. Тада важи:*

1. *R-билинеарност: $[aX + bY, Z] = a[X,Z] + b[Y,Z]$, $[X, aY + bZ] = a[X,Y] + b[X,Z]$;*
2. *антисиметричност: $[X,Y] = -[Y,X]$;*
3. *Јакобијев идентитет: $[X,[Y,Z]] + [Y,[Z,X] + [Z,[X,Y]] = 0$.*

Како је $\mathfrak{X}(M)$ векторски простор над пољем $\mathbb{R}$ на коме је дефинисана Лијева заграда, као билинеарно пресликавање које је антисиметрично и задовољава Јакобијев идентитет, то је $\mathfrak{X}(M)$ једна Лијева алгебра (видети [41]).

Котангентни простор многострукости M у тачки $p \in M$ је дуални простор $T_p^*M = (T_pM)^*$ тангентног простора, односно скуп свих линеарних пресликавања из T_pM у $\mathbb{R}$. Елементи котангентног простора T_p^*M су ***тангентни ковектори*** у p. Унија свих котангентних простора је ***котангентно раслојење*** $T^*M = \bigsqcup_{p \in M} T_p^*M$ многострукости M, а пресликавање $\pi\colon T^*M \to M$ дефинисано помоћу $\pi(\omega_p) = p$ за $\omega_p \in T_p^*M$ зовемо ***природна пројекција***. ***Сечења котангентног раслојења*** су пресликавања $\omega\colon M \to T^*M$ таква да је $\pi \circ \omega = \mathrm{Id}_M$. ***Ковекторско поље*** на многострукости M је глатко сечење котангентног раслојења T^*M. Скуп свих ковекторских поља на M означавамо са $\mathfrak{X}^*(M)$.

Нека је M глатка многострукост и U њен отворен скуп. Уређена k-торка $(X_1, \dots, X_k)$ векторских поља дефинисаних на U је ***линеарно независна*** ако је $(X_1)_p, \dots, (X_k)_p$ линеарно независна уређена k-торка на T_pM за свако $p \in U$, а $(X_1, \dots, X_k)$ ***разапиње тангентно раслојење*** ако k-торка $(X_1)_p, \dots, (X_k)_p$ генерише T_pM за свако $p \in U$. ***Локални репер*** за M је уређена n-торка векторских поља $(X_1, \dots, X_n)$ дефинисана на отвореном подскупу $U \subseteq M$ која је линеарно независна и разапиње тангентно раслојење, односно $(X_1)_p, \dots, (X_k)_p$ чине базу за T_pM за свако $p \in U$. Овај репер је ***глобални*** ако је $U = M$. ***Локални корепер*** за M над U је уређена n-торка ковекторских поља $\epsilon^1, \dots, \epsilon^n$ дефинисаних на U таквих да $(\epsilon^1)\restriction_p, \dots, (\epsilon^n)\restriction_p$ чине базу за T_p^*M за сваку тачку $p \in U$. Ако је $U = M$, онда се $\epsilon^1, \dots, \epsilon^n$ назива ***глобални корепер***.

---

[3] Marius Sophus Lie (1842–1899), норвешки математичар

Испоставља се да векторска поља $\partial_1, \partial_2, \ldots, \partial_n$ чине локални репер за M над U који називамо и ***координатни репер*** за многострукост M над U (видети [45, Пример 8.10]), а да ковекторска поља $dx^1, \ldots, dx^n$ чине локални корепер за многострукост M над U који називамо и ***координатни корепер*** за многострукост M над U (видети [45, Пример 11.13]).

Нека је (U, ϕ) карта у тачки $p \in M$. Како $\partial_1, \partial_2, \ldots, \partial_n$ чине локални репер за M над U, то $(\partial_1)_q, (\partial_2)_q, \ldots, (\partial_n)_q$ чине базу за тангентни простор T_qM за $q \in U$. Из линеарне алгебре нам је познато да бази $(\partial_1)_q, (\partial_2)_q, ..., (\partial_n)_q$ векторског простора T_qM можемо придружити дуалну базу $(\lambda^1)\upharpoonright_q, \ldots, (\lambda^n)\upharpoonright_q$ дуалног векторског простора T_q^*M. Тако дефинишемо n пресликавања $\lambda^1, \ldots, \lambda^n$ из U у T^*M која зовемо ***координатна ковекторска поља***. У [45, стр. 281] је доказано да λ^i морају бити dx^i за $i \in \{1, \ldots, n\}$, те је $(dx^1)\upharpoonright_q, \ldots, (dx^n)\upharpoonright_q$ база котангентног простора T_q^*M дуална бази $(\partial_1)_q, (\partial_2)_q, ..., (\partial_n)_q$ тангентног простора T_qM, односно важи да је $dx^i(\partial_j) = \delta^i_j$.

Повезаност или ***конексија*** на многострукости M је пресликавање $\nabla \colon \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ које уређеном пару векторских поља (X, Y) додељује векторско поље у ознаци $\nabla_X Y$ тако да за све $X \in \mathfrak{X}(M)$, $Y \in \mathfrak{X}(M)$, $Z \in \mathfrak{X}(M)$, $f \in \mathfrak{F}(M)$ и $g \in \mathfrak{F}(M)$ важи:

1. $\mathfrak{F}(M)$-линеарност по првом аргументу $\nabla_{fX+gY} Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z$,
2. $\mathbb{R}$-линеарност по другом аргументу $\nabla_X(Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$,
3. Лајбницово правило по другом аргументу $\nabla_X(fY) = f\nabla_X Y + (Xf)Y$.

$\nabla_X Y$ зовемо ***коваријантни извод*** од Y у односу на X.

Ако је ∇ повезаност на многострукости M димензије n, а $(E_1, \ldots, E_n)$ локални покретни репер над отвореним подскупом $U \subseteq M$, тада се коваријантни извод $\nabla_{E_i} E_j$ за $i \in \{1, \ldots, n\}$ и $j \in \{1, \ldots, n\}$ може изразити помоћу $\nabla_{E_i} E_j = \sum_{k=1}^n \Gamma^k_{ij} E_k$. Функције Γ^k_{ij} за $i \in \{1, \ldots, n\}$, $j \in \{1, \ldots, n\}$ и $k \in \{1, \ldots, n\}$ називају се ***Кристофелови***[4] ***симболи*** од ∇ у односу на дати покретни репер и они у потпуности одређују повезаност јер ако је $X = \sum_{i=1}^n X^i E_i$ и $Y = \sum_{j=1}^n Y^j E_j$, онда је

$$\nabla_X Y = \nabla_X \left(\sum_{j=1}^n Y^j E_j \right) = \sum_{j=1}^n \nabla_X (Y^j E_j) = \sum_{j=1}^n X(Y^j) E_j + \sum_{j=1}^n Y_j \nabla_X E_j$$

---

[4] Elwin Bruno Christoffel (1829–1900), немачки математичар и физичар

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{j=1}^{n} X(Y^j)E_j + \sum_{j=1}^{n} Y^j \nabla_{\sum_{i=1}^{n} X^i E_i} E_j = \sum_{j=1}^{n} X(Y^j)E_j + \sum_{j=1}^{n} Y^j \sum_{i=1}^{n} X^i \nabla_{E_i} E_j \\
&= \sum_{k=1}^{n} X(Y^k)E_k + \sum_{i,j=1}^{n} X^i Y^j \sum_{k=1}^{n} \Gamma_{ij}^{k} E_k = \sum_{k=1}^{n} \left(X(Y^k) + \sum_{i,j=1}^{n} X^i Y^j \Gamma_{ij}^{k} \right) E_k.
\end{aligned}
$$

A.4 Тензорски рачун

Физичар Фоигт[5] је открио тензоре и дао им ово име у својој књизи „Уџбеник из физике кристала” објављеној 1910. године. Ричи и његов ученик, Леви-Чивита су се такође бавили развојем тензора, али је Ајнштајнова употреба тензора као алата у његовој општој теорији релативности била најодговорнија за изненадну појаву тензорског рачуна као популарне области у математици, посебно 1915. године након објављивања Ајнштајновог чувеног рада „Општа теорија релативности”. Тензор је генерализација појма вектор, а тензорски рачун је генерализација векторске анализе. Пошто се тензорски рачун бави објектима и особинама које су независне од избора референтних система, он је корисно средство за изучавање диференцијалне геометрије и класичне механике. У овом додатку наводимо основне појмове из тензорског рачуна, а више о применама тензора се може наћи у [28], [46] и [49].

Нека је $\mathcal{V}$ модул над прстеном K и $\mathcal{V}^*$ њему дуалан модул који чине сви хомоморфизми из $\mathcal{V}$ у K. ***Тензор*** типа $(k,l) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ над $\mathcal{V}$ је K-мултилинеарно пресликавање $T\colon (\mathcal{V}^*)^k \times (\mathcal{V})^l \to K$. Скуп свих тензора типа (k,l) на $\mathcal{V}$ се означава са $\mathfrak{T}_l^k(\mathcal{V})$. Испоставља се да тај скуп са стандардним операцијама сабирања и множења са елементима из K представља модул над K.

Тензори типа $(0,l)$ су ***коваријантни*** тензори реда l, а тензори типа $(k,0)$ су ***контраваријантни*** реда k. Тензоре типа (k,l) при чему је $kl \neq 0$ зовемо ***мешовитим***. ***Ранг*** тензора је укупан број аргумената на које се он примењује.

Коваријантан или контраваријантан тензор (реда бар 2) је ***симетричан*** ако његова вредност остаје непромењена приликом замене било која два аргумента. Уколико свака таква замена узрокује промену знака онда за тај тензор кажемо да је ***антисиметричан***.

Тензорско поље T на многострукости M је тензор на $\mathfrak{F}(M)$-модулу $\mathfrak{X}(M)$. ***Тензорско поље типа*** $(k,l) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ је $\mathfrak{F}(M)$-мултилинеарно пресликавање

---

[5] Woldemar Voigt (1850-1919), немачки физичар

$T\colon (\mathfrak{X}^*(M))^k \times (\mathfrak{X}(M))^l \to \mathfrak{F}(M)$. Са $\mathfrak{T}^k_l(M)$ означавамо модул над $\mathfrak{F}(M)$ којег чине сва тензорска поља на M типа (k,l). Тензорско поље на многострукости M представља уопштење глатких реалних функција $\mathfrak{F}(M)$ (то су тензорска поља типа $(0,0)$), векторских поља $\mathfrak{X}(M)$ (то су тензорска поља типа $(1,0)$) и ковекторских поља $\mathfrak{X}^*(M)$ (то су тензорска поља типа $(0,1)$).

За произвољна тензорска поља $T_1 \in \mathfrak{T}^{k_1}_{l_1}(M)$ и $T_2 \in \mathfrak{T}^{k_2}_{l_2}(M)$ дефинишемо њихов производ $T_1 \otimes T_2\colon (\mathfrak{X}^*(M))^{k_1+k_2} \times (\mathfrak{X}(M))^{l_1+l_2} \to \mathfrak{F}(M)$ помоћу

$$\begin{aligned}&(T_1 \otimes T_2)(\omega_1,\dots,\omega_{k_1+k_2},X_1,\dots,X_{l_1+l_2})\\ &\qquad = T_1(\omega_1,\dots,\omega_{k_1},X_1,\dots,X_{l_1})T_2(\omega_{k_1+1},\dots,\omega_{k_1+k_2},\dots,X_{l_1+1},\dots,X_{l_1+l_2}).\end{aligned}$$

Тада је $T_1 \otimes T_2$ тензорско поље типа (k_1+k_2, l_1+l_2) које зовемо ***тензорски производ*** тензорских поља T_1 и T_2.

Нека је $T\colon (\mathfrak{X}(M))^l \to \mathfrak{X}(M)$ $\mathfrak{F}(M)$-мултилинеарно пресликавање. Тада се овом пресликавању може доделити тензорско поље $\bar{T}$ типа $(1,l)$ помоћу $\bar{T}(\omega, X_1,\dots,X_l) = \omega(T(X_1,\dots,X_l))$. Некада и за пресликавање T кажемо да је тензорско поље типа $(1,l)$, при чему подразумевамо да смо T идентификовали са $\bar{T}$.

Нека је (U,ϕ) карта на многострукости M димензије n, а $x^i = \pi_i \circ \phi$ њене координатне функције. За све индексе $1 \leqslant i_1,\dots,i_k,j_1,\dots,j_l \leqslant n$ дефинишемо функције $T^{i_1,\dots,i_k}_{j_1,\dots,j_l} = T(dx^{i_1},\dots,dx^{i_k},\frac{\partial}{\partial x^{j_1}},\dots,\frac{\partial}{\partial x^{j_l}})$ које називамо ***компоненте тензорског поља*** T у односу на карту (U,ϕ). Произвољно тензорско поље се на јединствен начин може изразити помоћу својих компоненти, о чему говори следећа лема која се може наћи у [46, стр. 397].

Лема A.14. *Нека су $x^i = \pi_i \circ \phi$ координатне функције за карту (U,ϕ) на многострукости M димензије n. Тада се свако тензорско поље $T \in \mathfrak{T}^k_l(M)$ може на јединствен начин представити као*

$$T = \sum_{1\leqslant i_1,\dots,i_k,j_1,\dots,j_l\leqslant n} T^{i_1,\dots,i_k}_{j_1,\dots,j_l}\frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \otimes \ldots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{i_k}} \otimes dx^{j_1} \otimes \ldots \otimes dx^{j_l}.$$

Нека је $T \in \mathfrak{T}^k_l(M)$. Ако $r \in \{1,\dots,k\}$ представља једно контраваријантно место и $s \in \{1,\dots,l\}$ једно коваријантно место, онда од $T \in \mathfrak{T}^k_l(M)$ са компонентама $T^{i_1\dots i_k}_{j_1\dots j_l}$ можемо направити ново тензорско поље $C^r_s T \in \mathfrak{T}^{k-1}_{l-1}(M)$ које има компоненте $(C^r_s)^{i_1\dots i_{k-1}}_{j_1\dots j_{l-1}} = \sum_{m=1}^n T^{i_1\dots i_{r-1} m i_r \dots i_{k-1}}_{j_1\dots j_{s-1} m j_s \dots j_{l-1}}$ (више детаља се може пронаћи у [46, стр. 395]). Новодобијени тензор $C^r_s T$ се назива ***контракција*** од тензора T над r, s. Контракција је важна операција која нам омогућава да од постојећих тензора добијемо нове тензоре.

Литература

[1] V. Andrejić, *On certain classes of algebraic curvature tensors*, Proc. 5th Math. Phys. Meeting: Summer School and Conference on Modern Mathematical Physics, 6–17 July 2008, Belgrade, Serbia, Institute of Physics, Belgrade, (2009), 43-50.

[2] V. Andrejić, *Strong duality principle for four-dimensional Osserman manifolds*, Kragujevac J. Math. **33** (2010), 17–28.

[3] В. Андрејић, *Принцип дуалности за Осерманове многострукости*, Универзитет у Београду, докторска теза, 2010.

[4] V. Andrejić, *Duality principle and special Osserman manifolds*, Publ. Inst. Math., Nouv. Sér. **94** (2013), 197–204.

[5] V. Andrejić, *The proportionality principle for Osserman manifolds*, J. Geom. Phys. **176** (2022), 104516.

[6] В. Андрејић, *Виша геометрија*, електронско издање, 2024, `https://poincare.matf.bg.ac.rs/~vladica.andrejic/Visa.pdf`.

[7] V. Andrejić, K. Lukić, *On quasi-Clifford Osserman curvature tensors*, Filomat **33** (2019), 1241–1247.

[8] V. Andrejić, K. Lukić, *On the existence of a curvature tensor for given Jacobi operators*, Filomat **37** (2023), 8465–8471.

[9] V. Andrejić, K. Lukić, *The Orthogonality Principle for Osserman Manifolds*, Acta Math. Hungar. **173** (2024), 246-252.

[10] V. Andrejić, Z. Rakić, *On the duality principle in pseudo-Riemannian Osserman manifolds*, J. Geom. Phys. **57** (2007), 2158–2166.

[11] V. Andrejić, Z. Rakić, *On some aspects of duality principle*, Kyoto J. Math. **55** (2015), 567–577.

[12] M. Антић, *Диференцијална геометрија многострукости*, Математички факултет, Београд, 2015.

[13] M. Atiyah, R. Bott, A. Shapiro, *Clifford modules*, Topology **3**, (1964), 3–38.

[14] S. Axler, *Linear Algebra Done Right*, fourth edition, Undergraduate Texts in Mathematics, Springer, 2024.

[15] G. Bardini, G. M. Gianella, *A historical walk along the idea of curvature, from Newton to Gauss passing from Euler*, International Mathematical Forum, Vol. **11**(2016), no. 6, 259-278.

[16] M. Berger, *La géometrie métrique des variétés Riemanniennes*, in Élie Cartan et les Mathématiques d'Aujourd' Hui, Astérisque, N° Hors Série, Société Mathématique de France, 1985, pp. 9-66.

[17] A. Besse, *Manifolds all of whose geodesics are closed*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 2. Folge, Vol. 93, Springer-Verlag, Berlin, 1978.

[18] A. Besse, *Einstein manifolds*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge, Vol. 10, Springer-Verlag, Berlin, 1987.

[19] N. Blažić, N. Bokan, P. Gilkey, *A Note on Osserman Lorentzian manifolds*, Bull. London Math. Soc. **29** (1997), 227–230.

[20] N. Blažić, N. Bokan, Z. Rakić, *Osserman Pseudo-Riemannian manifolds of signature (2,2)*, J. Austral. Math. Soc. A **71** (2001), 367–395.

[21] N. Blažić, S. Vukmirović, *Examples of self-dual, Einstein metrics of (2,2)-signature*, Math. Scand. **94** (2004), 63–74.

[22] M. Brozos-Vázquez, E. Merino, *Equivalence between the Osserman condition and the Rakić duality principle in dimension 4*, J. Geom. Phys. **62** (2012), 2346–2352.

[23] M. P. do Carmo, *Riemannian geometry*, Boston, 1992.

[24] B. Y. Chen, *Differential Geometry of Warped Product Manifolds and Submanifolds*, World Scientific, 2017.

[25] Q. Chi, *A curvature characterization of certain locally rank-one symmetric spaces*, J. Diff. Geom. **28** (1988), 187–202.

[26] P. Clark, *Quadratic Forms, Chapter 1: Witt's theory*, Lecture notes, 2013.

[27] I. Dimitrijević, Z. Rakić, *Geometrija krivih i površi*, Matematički fakultet, Beograd, 2024.

[28] D. De, *Introduction to Differential Geometry with Tensor Applications*, Wiley-Scrivener, 2022.

[29] E. García-Río, D.N. Kupeli, M.E. Vázquez-Abal, *On a problem of Osserman in Lorentzian geometry*, Differ. Geom. Appl. **7** (1997), 85–100.

[30] E. García-Río, D.N. Kupeli, M.E. Vázquez-Abal, R. Vázquez-Lorenzo, *Affine Osserman connections and their Riemann extensions*, Differ. Geom. Appl. **11** (1999), 145–153.

[31] E. García-Río, D.N. Kupeli, R. Vázquez-Lorenzo, *Osserman manifolds in semi-Riemannian geometry*, Springer-Verlag, 2002.

[32] P. Gilkey, *Manifolds whose curvature operator has constant eigenvalues at the basepoint*, J. Geom. Anal. **4** (1994), 155–158.

[33] P. Gilkey, *Geometric properties of natural operators defined by the Riemann curvature tensor*, World Scientific, 2001.

[34] P. Gilkey, *The geometry of curvature homogeneous pseudo-Riemannian manifolds*, Imperial College Press, 2007.

[35] P. Gilkey, R. Ivanova, *The Jordan normal form of Osserman algebraic curvature tensors*, Result. Math. **40** (2001), 192–204.

[36] P. Gilkey, S. Nikčević, *Curvature homogeneous spacelike Jordan Osserman pseudo-Riemannian manifolds*, Class. Quantum Grav. **21** (2004), 497-507.

[37] P. Gilkey, A. Swann, L. Vanhecke, *Isoparametric geodesic spheres and a conjecture of Osserman concerning the Jacobi operator*, Q. J. Math., Oxf. II. Ser. **46** (1995), 299–320.

[38] M. Gromov, *Sign and geometric meaning of curvature*, Rend. Sem. Mat. Fis. Milano **61** (1991), 9–123.

[39] R. Hartshorne, *Algebraic geometry*, Springer, 2013.

[40] S. Helgason, *Differential geometry, Lie groups, and symmetric spaces*, Academic Press, 1978.

[41] J. Humphreys, *Introduction to Lie Algebras and Representation Theory*, Springer Verlag, 1972.

[42] J. Jost, *Bernhard Riemann, On the Hypotheses Which Lie at the Bases of Geometry*, Springer, 2016.

[43] T. Kato, *Perturbation theory for linear operators*, corrected printing of the 2nd Edition, Springer, 1995.

[44] R. Kaye, R. Wilson, *Linear Algebra, Oxford University Press*, 1998.

[45] John M. Lee, *Introduction to Smooth Manifolds*, 2nd Edition, Springer, 2013.

[46] John M. Lee, *Introduction to Riemannian Manifolds*, 2nd Edition, Springer, 2018.

[47] А. Липковски, *Линеарна алгебра и аналитичка геометрија*, четврто издање, Математички факултет, Београд, 2020.

[48] K. Lukić, *The Jacobi-orthogonality in indefinite scalar product spaces*, Publ. Inst. Math., Nouv. Sér. **115** (2024), 33-44.

[49] S. Minčić, Lj. Velimirović, *Tenzorski račun*, PMF u Nišu, Niš, 2009.

[50] J. R. Munkres, *Topology*, 2nd Edition, Prentice Hall, 2000.

[51] A.I. Mal'cev, *Foundations of linear algebra*, Rus.edit., Nauka, Moskva, 1970.

[52] S. B. Myers, N. E. Steenrod, *The group of isometries of a Riemannian manifold*, Annals of Math. **40** (1939), 400–416.

[53] Y. Nikolayevsky, *Osserman manifolds and Clifford structures*, Houston J. Math. **29** (2003), 59–75.

[54] Y. Nikolayevsky, *Osserman manifolds of dimension 8*, Manuscripta Math. **115** (2004), 31–53.

[55] Y. Nikolayevsky, *Osserman conjecture in dimension* $n \neq 8, 16$, Math. Ann. **331** (2005), 505–522.

[56] Y. Nikolayevsky, *On Osserman manifolds of dimension 16*, Contemporary Geometry and Related Topics, Proc. Conference, Belgrade (2006), 379–398.

[57] Y. Nikolayevsky, Z. Rakić, *A note on Rakić duality principle for Osserman manifolds*, Publ. Inst. Math., Nouv. Sér. **94** (2013), 43–45.

[58] Y. Nikolayevsky, Z. Rakić, *The duality principle for Osserman algebraic curvature tensors*, Linear Algebra Appl. **504** (2016), 574–580.

[59] B. O'Neill, *Semi-Riemannian Geometry With Applications to Relativity*, Academic Press, 1983.

[60] R. Osserman, *Curvature in the eighties*, Am. Math. Mon. **97** (1990), 731–756.

[61] Z. Rakić, *Ossermanove mnogostrukosti*, Univerzitet u Beogradu, doktorska teza, 1998.

[62] Z. Rakić, *On duality principle in Osserman manifolds*, Linear Algebra Appl. **296** (1999), 183–189.

[63] B. Riemann, *Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen* (Mitgetheilt durch R. Dedekind), Abhandlungen der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften in Göttingen **13** (1868), 133–152.

[64] B. Riemann, *On the Hypotheses Which Lie at the Bases of Geometry* (translated by W. K. Clifford), Nature **8** (1873), 14–17, 36–37.

[65] C.J. Scriba, P. Schreiber, *5000 Years of Geometry*, Springer Basel, 2015.

[66] J. Silvester, *Determinants of Block Matrices*, Math. Gaz. **84** (2000), 460–467.

[67] M. Spivak, *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry, Vol. 2*, 3rd Edition, Publish or Perish, Inc., Houston, Texas, 1999.

[68] J. Tits, *Sur certaines classes d'espaces homogènes de groupes de Lie*, Acad. Roy. Belgique, Cl. Sci., Mém., Coll. **29** (1955).

[69] H. C. Wang, *Two-point homogeneous spaces*, Annals of Math. **55** (1952), 177–191.

[70] S. Weinberg, *Gravitation and cosmology: Principles and applications of the general theory of relativity*, John Wiley & Sons, Inc., 1972.

[71] J. A. Wolf, *Spaces of constant curvature*, 6th Edition, AMS Chelsea Publishing (Berkeley, 2011).

Индекс имена

Индекс појмова

Биографија аутора

Катарина Лукић рођена је 25.7.1994. у Београду. Завршила је основну школу и Математичку гимназију у Београду као ученик генерације са просечном оценом 5, освојивши неколико награда на државним и међународним такмичењима из математике. Њен матурски рад на тему „Вероватноћа и њене примене у пракси“, објављен је у зборнику „Најбољи матурски радови“, Задужбине Андрејевић, 2014. године. Основне академске студије на Математичком факултету Универзитета у Београду, смер Теоријска математика и примене, уписала је 2013. године и дипломирала 2017. године са просечном оценом 10. Током студија је више пута награђивана као један од најбољих студената у генерацији, а 2015. године је освојила друго место на такмичењу студената математике „MATF CHALLENGE“. Мастер академске студије, модул Математика, на истом факултету уписала је 2017. године и дипломирала 2018. године одбранивши мастер рад „О Хопфовим фибрацијама“, под менторством проф. др Владице Андрејића, са просечном оценом 10. Докторске студије на Катедри за Геометрију Математичког факултета Универзитета у Београду уписала је школске 2018/19 и и положила је све испите са оценом 10.

Запослена је на Математичком факултету Универзитета у Београду од 2017. године, и то прво као сарадник у настави до 2019. године, затим као асистент до данас. Држала је вежбе на курсевима Аналитичка геометрија, Основи геометрије, Геометрија 1, Геометрија 2, Геометрија 5 на основним академским студијама Математичког факултета и Биоматематика на основним академским студијама Биолошког факултета. У Математичкој гимназији у Београду запослена је од 2017. године као спољни сарадник у образовању средњошколаца, а од тада је ангажована и као предавач у оквиру Школе младих математичара за 5. и 6. разред, као и за извођење додатних настава за ученике 7. разреда Математичке гимназије.

Била је члан пројекта Министарства просвете, науке и технолошког развоја Републике Србије „Геометрија, образовање, визуелизација са применама“ под бројем 174012, од 2018. године.

Учествовала је на више међународних конференција: *ICMS-Sofia Inaugural Conference Edging Higher* у Бугарској и *The 8th International conference Geometry, Dynamics, Integrable Systems GDIS2022* на Златибору, 2022. године, као и на *Првом конгресу младих математичара* у Новом Саду 2019. године и *XX*

Geometrical Seminar у Врњачкој Бањи 2018. године. Била је члан Организационог одбора међународне конференције *XXI Geometrical seminar*, одржане у Београду 2022. године. На националном скупу са међународним учешћем *XIII симпозијум Математика и примене* 2023. године имала је саопштење „О постојању алгебарског тензора кривине за дате Јакобијеве операторе“, а 2024. године саопштење „Квази-Клифордови тензори“. 2024. године је представљала постер „Noncommutative integrability in cosymplectic geometry“ на међународној конференцији *The 9th International conference Geometry, Dynamics, Integrable Systems*. Исте године је на међународној конференцији *XXII Geometrical seminar* имала саопштење „The Jacobi-orthogonality and Osserman tensors“, а на националном скупу са међународним учешћем *15. Српски математички конгрес* имала је излагање „О Јакоби-ортогоналности у Римановој и псеудо-Римановој геометрији“.

Катарина Лукић је учесница семинара „Геометрија, образовање и визуелизација са применама“ од 2017. године и имала је четири излагања на њему. Од 2019. године је ангажована као предавач у летњим и зимским школама математике у организацији Друштва математичара Србије. На 19. Јуниорској балканској математичкој олимпијади одржаној 2015. године у организацији Србије, била је један од координатора при прегледу задатака, као и на Балканској математичкој олимпијади у организацији Србије 2018. године на Авали и на 7. Купу Математичке гимназије 2019. године. Била је и члан комисије на Регионалном такмичењу у Регионалном центру за таленте 1 у Београду 2018. године. Рецензирала је збирку задатака за упис у 7. разред Математичке гимназије „Математика 6*“ аутора Милице Живановић, Верице Илић, Бојане Матић и Срђана Огњановића. У периоду од 2013. до 2017. године остварила је почасна 33 ЕСПБ за популаризовање математике и Математичког факултета у разним градовима Србије. Била је аутор поставке „Историја математике“ Математичког факултета у оквиру Ноћи истраживача 2015. године и поставке „Математика Египта и Месопотамије“ у оквиру манифестације Мај месец математике 2016. године.

Списак објављених научних радова:

1. V. Andrejić, K. Lukić, On quasi-Clifford Osserman curvature tensors, Filomat 33 (2019), 1241–1247. (M 22, IF2019: 0.848);
2. V. Andrejić, K. Lukić, On the existence of a curvature tensor for given Jacobi operators, Filomat 37 (2023), 8465–8471. (M 22, IF2021: 0.988);
3. B. Jovanović, K. Lukić, Integrable systems in cosymplectic geometry, J. Phys. A, Math. Theor. 56 (2023), 015201. (M 21, IF2021: 2.331);
4. V. Andrejić, K. Lukić, The Orthogonality Principle for Osserman Manifolds, Acta Math. Hungar. 173 (2024), 246-252. (M 22, IF2022: 0.9);
5. K. Lukić, The Jacobi-orthogonality in indefinite scalar product spaces, Publ. Inst. Math., Nouv. Sér. 115 (2024), 33-44.

Прилог 1.

Изјава о ауторству

Потписани-а Катарина Лукић

број индекса 2001/2018

Изјављујем

да је докторска дисертација под насловом

Принципи псеудо-Римановиx Осермановиx тензора и многострукости

- резултат сопственог истраживачког рада,
- да предложена дисертација у целини ни у деловима није била предложена за добијање било које дипломе према студијским програмима других високошколских установа,
- да су резултати коректно наведени и
- да нисам кршио/ла ауторска права и користио интелектуалну својину других лица.

Потпис докторанда

У Београду, 27.11.2024.

Катарина Лукић

Прилог 2.

Изјава о истоветности штампане и електронске верзије докторског рада

Име и презиме аутора Катарина Лукић

Број индекса 2001/2018

Студијски програм Математика

Наслов рада Принципи псеудо-Риманових Осермановиx тензора и многострукости

Ментор проф. др Владица Андрејић

Потписани/а Катарина Лукић

Изјављујем да је штампана верзија мог докторског рада истоветна електронској верзији коју сам предао/ла за објављивање на порталу **Дигиталног репозиторијума Универзитета у Београду.**

Дозвољавам да се објаве моји лични подаци везани за добијање академског звања доктора наука, као што су име и презиме, година и место рођења и датум одбране рада.

Ови лични подаци могу се објавити на мрежним страницама дигиталне библиотеке, у електронском каталогу и у публикацијама Универзитета у Београду.

Потпис докторанда

У Београду, 27.11.2024.

Катарина Лукић

Прилог 3.

Изјава о коришћењу

Овлашћујем Универзитетску библиотеку „Светозар Марковић“ да у Дигитални репозиторијум Универзитета у Београду унесе моју докторску дисертацију под насловом:

Принципи псеудо-Риманових Осермановиx тензора и
многострукости

која је моје ауторско дело.

Дисертацију са свим прилозима предао/ла сам у електронском формату погодном за трајно архивирање.

Моју докторску дисертацију похрањену у Дигитални репозиторијум Универзитета у Београду могу да користе сви који поштују одредбе садржане у одабраном типу лиценце Креативне заједнице (Creative Commons) за коју сам се одлучио/ла.

1. Ауторство

2. Ауторство - некомерцијално

[✓ 3. Ауторство – некомерцијално – без прераде]

4. Ауторство – некомерцијално – делити под истим условима

5. Ауторство – без прераде

6. Ауторство – делити под истим условима

(Молимо да заокружите само једну од шест понуђених лиценци, кратак опис лиценци дат је на полеђини листа).

Потпис докторанда

У Београду, 27.11.2024.

Катарина Лукић

1. Ауторство - Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце, чак и у комерцијалне сврхе. Ово је најслободнија од свих лиценци.

2. Ауторство – некомерцијално. Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дела.

3. Ауторство - некомерцијално – без прераде. Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, без промена, преобликовања или употребе дела у свом делу, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дела. У односу на све остале лиценце, овом лиценцом се ограничава највећи обим права коришћења дела.

4. Ауторство - некомерцијално – делити под истим условима. Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце и ако се прерада дистрибуира под истом или сличном лиценцом. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дела и прерада.

5. Ауторство – без прераде. Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, без промена, преобликовања или употребе дела у свом делу, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца дозвољава комерцијалну употребу дела.

6. Ауторство - делити под истим условима. Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце и ако се прерада дистрибуира под истом или сличном лиценцом. Ова лиценца дозвољава комерцијалну употребу дела и прерада. Слична је софтверским лиценцама, односно лиценцама отвореног кода.