

УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ
МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ

Матија В. Миловић

СЛАБА ИНТЕГРАЦИЈА ВЕКТОР-ВРЕДНОСНИХ
ФУНКЦИЈА СА ВРЕДНОСТИМА У ИДЕАЛИМА
ОПЕРАТОРА И ВЕЗА СА ЕЛЕМЕНТАРНИМ
ОПЕРАТОРИМА

докторска дисертација

Београд, 2025.

UNIVERSITY OF BELGRADE
FACULTY OF MATHEMATICS

Matija V. Milović

WEAK INTEGRATION OF VECTOR-VALUED
FUNCTIONS WITH VALUES IN OPERATOR IDEALS
AND THEIR CONNECTION TO ELEMENTARY
OPERATORS

Doctoral Dissertation

Belgrade, 2025.

Ментори:

др Данко Јоцић, Редовни професор
Универзитет у Београду - Математички факултет

др Стефан Милошевић, Доцент
Универзитет у Београду - Математички факултет

Чланови комисије:

др Милош АРСЕНОВИЋ, редовни професор
Универзитет у Београду - Математички факултет

др Милан ЛАЗАРЕВИЋ, доцент
Универзитет у Београду - Математички факултет

др Драган ЂОРЂЕВИЋ, редовни професор
Универзитет у Нишу - Природно математички факултет

Датум одбране: _____

Тањи и својој породици, са захвалношћу

Наслов дисертације: Слаба интеграција вектор-вредносних функција са вредностима у идеалима оператора и веза са елементарним операторима

Резиме: Предмет дисертације је питање припадности слабих операторних интеграла одговарајућим идеалима компактних оператора и пертурбационе неједнакости. Дата питања су разматрана још у раду [16] где су изведене неједнакости Коши–Шварцовог типа које, осим процене норме, дају довољне услове да операторни интеграл припада идеалу. У првом делу дисертације, применом наведених неједнакости, изводе се пертурбационе норма неједнакости за елементарне операторе генерисане аналитичким функцијама. Специјално, за аналитичку функцију f , тригонометријске полиноме $T, S: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ и $t \in \mathbb{R}$, ако су $f_{TS,t}, f_{\bar{T}T,t}$ и $f_{\bar{S}S,t}$ придружене аналитичке функције, $X \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ и $\sum_{n=1}^{\infty} (A_n X B_n - C_n X D_n)$ је у симетрично нормирајућем (с.н.) идеалу $\mathcal{C}_\Phi(\mathcal{H})$, за неку с.н. функцију Φ , тада важи неједнакост

$$\begin{aligned} & \left\| \sum_{n=1}^{\infty} (A_n^* A_n - C_n^* C_n) \left| \left(f_{TS,t} \left(\sum_{n=1}^{\infty} A_n \otimes B_n \right) X - f_{TS,t} \left(\sum_{n=1}^{\infty} C_n \otimes D_n \right) X \right) \right| \sum_{n=1}^{\infty} (B_n B_n^* - D_n D_n^*) \right| \right\|_{\Phi}^{\frac{1}{2}} \\ & \leq \left\| \left| f_{\bar{T}T,t} \left(\sum_{n=1}^{\infty} A_n^* A_n \right) - f_{\bar{T}T,t} \left(\sum_{n=1}^{\infty} C_n^* C_n \right) \right|^{\frac{1}{2}} \sum_{n=1}^{\infty} (A_n X B_n - C_n X D_n) \right. \\ & \quad \times \left. \left| f_{\bar{S}S,t} \left(\sum_{n=1}^{\infty} B_n B_n^* \right) - f_{\bar{S}S,t} \left(\sum_{n=1}^{\infty} D_n D_n^* \right) \right|^{\frac{1}{2}} \right\|_{\Phi}, \end{aligned}$$

при одређеним условима за фамилије $(A_n)_{n=1}^{\infty}, (B_n)_{n=1}^{\infty}, (C_n)_{n=1}^{\infty}$ и $(D_n)_{n=1}^{\infty}$ у $\mathcal{B}(\mathcal{H})$.

Даље, разматрају се векторске мере индуковане слабо* интегралним оператор-вредносним функцијама са вредностима у Шатен–фон Нојмановим идеалима. Такође, изводе се критеријуми компактности и нуклеарности Гелфандовог интеграла, са нагласком на позитивне оператор-вредносне функције.

Коначно, у зависности од својстава симетрично нормирајуће функције Φ , испитују се последице услова

$$\sup_{e, f \in \mathfrak{B}} \int_{\Omega} \Phi((\langle \mathcal{A} e_n, f_n \rangle)_{n=1}^{\infty}) d\mu(t) < +\infty.$$

Прецизније, доказује се припадност слабог* интеграла симетричном идеалу $\mathcal{C}_\Phi(\mathcal{H})$, као и Гелфанд и Петис интегралност $\mathcal{C}_\Phi(\mathcal{H})$ -вредносне функције $\mathcal{A}$.

Кључне речи: Пертурбације елементарних трансформера, Слаба интеграција на Банаховим просторима, Симетрично нормирајуће функције и идеали

Научна област: Математика

Ужа научна област: Анализа

УДК број: 517.983.6(043.3)

Dissertation title: Weak integration of vector-valued functions with values in operator ideals and their connection to elementary operators

Abstract: The subject of this dissertation is the study of the belonging of weak operator integrals in appropriate ideals of compact operators, as well as the investigation of perturbation inequalities. These questions were previously considered in [16], where Cauchy–Schwarz type inequalities were established. In addition to providing norm estimates, these inequalities also yield sufficient conditions for an operator integral to belong to a given ideal. In the first part of the dissertation, using these inequalities, perturbation norm inequalities are derived for elementary operators generated by analytic functions. Specially, for an analytic function f , trigonometric polynomials $T, S: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ and $t \in \mathbb{R}$, if $f_{TS,t}$, $f_{\bar{T}T,t}$ and $f_{\bar{S}S,t}$ are the associated analytic functions, and if $X \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ and the operator $\sum_{n=1}^{\infty} (A_n X B_n - C_n X D_n)$ belongs to a symmetric norming (s.n.) ideal $\mathcal{C}_{\Phi}(\mathcal{H})$, for some s.n. function Φ , then the following inequality holds

$$\begin{aligned} & \left\| \left| \sum_{n=1}^{\infty} (A_n^* A_n - C_n^* C_n) \right|^{\frac{1}{2}} \left(f_{TS,t} \left(\sum_{n=1}^{\infty} A_n \otimes B_n \right) X - f_{TS,t} \left(\sum_{n=1}^{\infty} C_n \otimes D_n \right) X \right) \left| \sum_{n=1}^{\infty} (B_n B_n^* - D_n D_n^*) \right|^{\frac{1}{2}} \right\|_{\Phi} \\ & \leq \left\| \left| f_{\bar{T}T,t} \left(\sum_{n=1}^{\infty} A_n^* A_n \right) - f_{\bar{T}T,t} \left(\sum_{n=1}^{\infty} C_n^* C_n \right) \right|^{\frac{1}{2}} \sum_{n=1}^{\infty} (A_n X B_n - C_n X D_n) \right. \\ & \quad \times \left. \left| f_{\bar{S}S,t} \left(\sum_{n=1}^{\infty} B_n B_n^* \right) - f_{\bar{S}S,t} \left(\sum_{n=1}^{\infty} D_n D_n^* \right) \right|^{\frac{1}{2}} \right\|_{\Phi}, \end{aligned}$$

under certain conditions on the families $(A_n)_{n=1}^{\infty}$, $(B_n)_{n=1}^{\infty}$, $(C_n)_{n=1}^{\infty}$ and $(D_n)_{n=1}^{\infty}$ in $\mathcal{B}(\mathcal{H})$.

Next, the dissertation considers vector measures induced by weak* integrable operator-valued functions taking values in Schatten–von Neumann ideals. Furthermore, the criteria for the compactness and nuclearity of the Gel'fand integral are derived, with emphasis on positive operator-valued functions.

Finally, depending on the properties of the symmetric norming function Φ , the consequences of the condition

$$\sup_{e, f \in \mathfrak{B}} \int_{\Omega} \Phi((\langle \mathcal{A}_t e_n, f_n \rangle)_{n=1}^{\infty}) d\mu(t) < +\infty.$$

are explored. More precisely, it is proved that the weak* integral belongs to the symmetric ideal $\mathcal{C}_{\Phi}(\mathcal{H})$, as well as the Gelfand and Pettis integrability of the $\mathcal{C}_{\Phi}(\mathcal{H})$ -valued function $\mathcal{A}$.

Keywords: Perturbations of elemental transformers, Weak integration on Banach spaces, Symmetric norming functions and ideals

Research area: Mathematics

Research sub-area: Analysis

UDC number: 517.983.6(043.3)

Садржај

Увод	1
1 Основни појмови	3
1.1 Простор ограничених оператора на Хилбертовом простору	3
1.2 Симетрично нормирајуће функције и индуковани простори низова	7
1.3 Идеали компактних оператора у $\mathcal{B}(\mathcal{H})$	11
1.4 Теорија мере и интеграције у Банаховим просторима	19
1.5 Неједнакости Коши-Шварца и σ -елементарни трансформери	29
2 Пертурбације елементарних оператора генерисаних аналитичким функцијама са позитивним Тејлоровим коефицијентима	35
2.1 Припремни резултати	35
2.2 Главни резултати	42
2.3 Примена резултата	51
2.4 Аналогни резултати за Шатен-фон Нојманове норме	52
3 Слаба* интеграција позитивних оператор-вредносних функција	57
3.1 Позитивне оператор-вредносне векторске мере	57
3.2 Компактност слабог* интеграла позитивних о.в. функција	59
4 Слаба интеграбилност оператор-вредносних функција са вредностима у идеалима компактних оператора	65
4.1 Слаба* интеграбилност $\mathcal{C}_f(\mathcal{H})$ -вредносних функција	65
4.2 Петис интеграбилност оператор-вредносних функција...	68
Библиографија	75
Биографија аутора	81

Увод

Теорија апстрактних Хилбертових простора и ограничених оператора на њима започиње свој интензиван развој почетком двадесетог века, доприносом више математичара. Међу њима бисмо посебно издвојили имена Хилберта, Риса и фон Нојмана. Област додатно добија на значају са развојем квантне механике, где и лежи њена највећа примена у науци. С друге стране, њене примене у математици леже у решавању диференцијалних и интегралних једначина, где се посебно истиче класа компактних оператора, чије основе задају Фредхолм и Шмит. Дубље изучавање компактних оператора коначно доводи до теорије симетричних идеала и унитарно инваријантних норми. У овом процесу, највише бисмо истакли Ки-Фана, Калкина, Шатена и на крају Гохберга и Крејна.

Корени интеграције вектор-вредносних функција сежу у давне 30-те године двадесетог века. Међу значајним именима везаних за развој поменуте теорије истичемо Бохнера, Данфорда, Петиса и Гелфанда. Истакли бисмо радове [2], [9] и [32] у којима су уведени типови интеграла који данас носе имена наведених аутора. Такође важан допринос зачетку теорије дали су и Биркоф и Сегал.

Коначно, теорију елементарних трансформера на $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ су засновали Лумер и Росенблум у [27], чији се даљи развој може наћи у радовима [5], [6], [7], [8] и [29], као и референцама у њима. Нагласимо овде рад [14], где Д. Р. Јоцић изводи неједнакости Коши–Шварцовог типа за σ -елементарне операторе, које ће бити једна од главних тема првог дела дисертације. Настављајући у истом духу, аутор у раду [16] наведене неједнакости уопштава и на оператор-вредносне функције, где сумирање оператора замењује Гелфандовим интегралом. Специјално, применом наведених неједнакости се изводе одређене пертурбационе неједнакости σ -елементарних трансформера аналитичким функцијама, што је приказано у радовима [20] и [22].

Тема ове дисертације обухвата претходно наведене области. Наиме, главне методе и добијени резултати се односе на слабу интеграцију оператор-вредносних функција са вредностима у симетричним идеалима. Излагање у дисертацији је подељено у четири поглавља.

Прво поглавље је посвећено основним појмовима из теорије оператора на Хилбертовим просторима, теорији мере и интеграције на Банаховим просторима, као и неједнакостима Коши–Шварцовог типа.

У другом поглављу је изложена теорија пертурбација елементарних трансформера. Функције којима се врше пертурбације су индуковане аналитичким функцијама са позитивним Тејлоровим коефицијентима. Посебно је примењена теорија на случај Шатен–фон Нојманових симетрично нормирајућих функција.

Треће поглавље се бави слабом* интеграцијом $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ -вредносних функција као и индукованих $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ -вредносних мера. Главни акценат је на позитивним оператор-вредносним функцијама које узимају вредности у Шатеновим идеалима. Дати су и одговарајући критеријуми за компактност и нуклеарност Гелфандовог интеграла.

Коначно, четврто поглавље се надовезује на претходно. У њему су изложени резултати о критеријумима припадности Гелфандовог интеграла произвољном идеалу компактних оператора. Додатно, користећи теорију симетрично нормирајућих функција и идеала, као и апстрактне интеграције на Банаховим просторима, представљени су резултати о слабој* и Петис интеграбилности $\mathfrak{C}_\Phi(\mathcal{H})$ -вредносних функција.

Глава 1

Основни појмови

1.1 Простор ограничених оператора на Хилбертовом простору

Основи објекти, који су предмет ове дисертације, су ограничени линеарни оператори на сепарабилном Хилбертовом простору $\mathcal{H}$. Скаларни производ два вектора $f, g \in \mathcal{H}$ ћемо означавати са $\langle f, g \rangle$, при чему је он линеаран по првој, а антилинеаран по другој компоненти. Сва теорија и резултати ће бити изложени у случају када је $\mathcal{H}$ бесконачне димензије, имајући у виду да они сви важе и у коначно-димензионалном случају. Дакле, амбијентални Хилбертов простор $\mathcal{H}$ има пребројиву ортонормирану базу (о.н.б.) и сви ортонормирани системи (о.н.с.) су највише пребројиве кардиналности. Скуп свих пребројивих о.н.с. ћемо означавати са $\mathfrak{B}$. За свако $f \in \mathcal{H}$ и $e \in \mathfrak{B}$ важи Беселова неједнакост

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\langle f, e_n \rangle|^2 \leq \|f\|^2,$$

где је у случају када је e једна о.н.б. увек испуњена једнакост (Парсевалова), када се сваки вектор $f \in \mathcal{H}$ може развити у Фуријеов ред

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} \langle f, e_n \rangle e_n,$$

при чему ред конвергира у норми простора $\mathcal{H}$. Дуални простор, тј. простор свих ограничених линеарних оператора на $\mathcal{H}$ је изометрички изоморфан са $\mathcal{H}$ преко (антилинеарне) кореспонденције $\mathcal{H}^* \ni \varphi^* \leftrightarrow f \in \mathcal{H}$, где за свако $g \in \mathcal{H}$ важи $\varphi^*(g) = \langle g, f \rangle$ (Рисова теорема о кореспонденцији). Због тога ћемо $\mathcal{H}^*$ увек поистовећивати са $\mathcal{H}$, имајући на уму претходно наведене чињенице. Даље, простор свих ограничених линеарних оператора на $\mathcal{H}$ ћемо означавати са $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$. То је Банахов простор када се нормира са $\|A\| = \sup_{\|h\| \leq 1} \|Ah\|$, за свако $A \in \mathfrak{B}(\mathcal{H})$. Језгро оператора $A \in \mathfrak{B}(\mathcal{H})$, тј. скуп свих вектора који се сликају у 0, означавамо са $N(A)$, док његову слику (скуп свих вредности) означавамо са $R(A)$. У питању су векторски потпростори, при чему је $N(A)$ увек затворен, док $R(A)$ то не мора бити. Са $r(A)$ ћемо означавати димензију простора $R(A)$, имајући у виду да тај број може бити и бесконачан. Уколико је $r(A) < +\infty$, за оператор A кажемо да је **коначног ранга**. За $e, f \in \mathcal{H}$, дефинишемо оператор $(e \otimes f^*)x \stackrel{\text{def}}{=} \langle x, f \rangle e$, за $x \in \mathcal{H}$. Сваки оператор коначног ранга се може представити

у облику $\sum_{k=1}^{r(A)} e_k \otimes f_k$, за неке $e_1, f_1, \dots, e_{r(A)}, f_{r(A)} \in \mathcal{H}$ (за више детаља видети прво поглавље у [11]). Простор свих оператора коначног ранга означавамо са $\mathcal{K}(\mathcal{H})$.

Адјунговани оператор од $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, који означавамо са A^* , је јединствени оператор за који важи да је $\langle Af, g \rangle = \langle f, A^*g \rangle$ за свако $f, g \in \mathcal{H}$. Додатно, увек важи да је $\mathcal{H} = N(A^*) \oplus \overline{R(A)}$, као и да је $\|A\| = \|A^*\| = \|A^*A\|^{\frac{1}{2}}$. За $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ кажемо да је **самоадјунгован** ако је $A = A^*$, када важи да му је квадратна форма, тј. пресликавање $f \mapsto \langle Af, f \rangle$ за $f \in \mathcal{H}$, реална. Ако је додатно и позитивна, за оператор A кажемо да је **позитиван** и пишемо $A \geq 0$. Такође, за оператор A кажемо да је **полу-дефинитан** ако је или $A \geq 0$ или $-A \geq 0$. Један од најбитнијих услова који ће се појављивати у дисертацији је управо позитивност одређених оператора. Појам позитивности индукује релацију поретка на класи самоадјунгованих оператора коју означавамо са $\leq$, где је $A \leq B$ акко је $B - A \geq 0$, тј. акко је $\langle Af, f \rangle \leq \langle Bf, f \rangle$, за свако $f \in \mathcal{H}$. Једно од главних својстава позитивних оператора јесте постојање квадратног корена, тј. важи

Тврђење 1.1.1. *За свако $0 \leq A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ постоји јединствено $0 \leq B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ такво да је $B^2 = A$.*

Оператор B из претходног тврђења, који називамо **квадратним кореном** оператора A , означавамо са $\sqrt{A}$ или $A^{\frac{1}{2}}$. За свако $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, важи да је оператор A^*A увек позитиван. На основу Тврђења 1.1.1, увек је добро дефинисан оператор $|A| \stackrel{\text{def}}{=} (A^*A)^{\frac{1}{2}}$. Приметимо да је $\||A|\| = \|A\|$, за свако $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. Од велике важности су и оператори који чувају норму, тј. скаларни производ.

Дефиниција 1.1.2. Оператор $V \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ се назива **изометрија** ако је $\|Vh\| = \|h\|$, за свако $h \in \mathcal{H}$. Уколико је V додатно и сурјективан, рећи ћемо да је V **унитаран** оператор.

Изометрије су баш они оператори који чувају скаларни производ, тј. за њих важи да је $\langle Vf, Vg \rangle = \langle f, g \rangle$, за свако $f, g \in \mathcal{H}$. Дакле, изометрије чувају норму вектора, као и њихову међусобну ортогоналност. Одавде следи да свака изометрија елементе из $\mathfrak{B}$ слика у елементе из $\mathfrak{B}$, али не мора нужно сликати ортонормирану базу (о.н.б.) у о.н.б. То је тачно искључиво код унитарних оператора. Код њих важи и да им је инверз унитаран, при чему имамо једнакост $V^{-1} = V^*$. Тада је дакле $V^*V = VV^* = I$. Унитарни оператори припадају једној широј класи оператора који комутирају са својим адјунгованим оператором, тзв. нормалним операторима. Самоадјунговани оператори су очигледно такође у тој класи. У дисертацији ћемо користити наредне две теореме које дају репрезентацију ограничених оператора преко унитарних. Обе су оригинално исказане у терминима C^* алгебри. Њихови докази се могу наћи у [24, Теорема 1. и Последица 2.], редом.

Теорема 1.1.3. *Нека је $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ такав да је $\|A\| \leq 1 - \frac{2}{n}$, за неко $n \geq 3$. Тада постоје унитарни оператори $U_1, U_2, \dots, U_n \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ такви да је $A = \frac{U_1 + U_2 + \dots + U_n}{n}$.*

Теорема 1.1.4. *Сваки $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ се може написати као позитиван умножак збира три унитарна оператора на $\mathcal{H}$.*

Наведимо сада још једну битну класу оператора, која уопштава класу изометричних оператора.

Дефиниција 1.1.5. Оператор $V \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ се назива **парцијалном изометријом** ако постоји затворен потпростор $L \subseteq \mathcal{H}$, такав да је $\|Vh\| = \|h\|$, за свако $h \in L$, док је $Vh = 0$, за све $f \in L^\perp$. Простор L се назива почетним простором, а $R(V) = V(L)$ долазним простором парцијалне изометрије V .

Аналогно поларној декомпозицији комплексних бројева, важи наредно тврђење о тзв. поларној декомпозицији ограниченог оператора $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, где $|A|$ игра улогу комплексног модула, а одговарајућа парцијална изометрија улогу његовог аргумента. Прецизније, важи следећа

Теорема 1.1.6. *За сваки оператор $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ постоји јединствена парцијална изометрија $V \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ таква да је $A = V|A|$ и да важи $N(V) = N(|A|)$.*

Напомена 1.1.7. Парцијална изометрија V у претходној теорему има полазни простор $R(|A|)$ и долазни простор $R(A)$.

Компактни оператори на $\mathcal{H}$

Сада, уводимо класу оператора која ће играти централну улогу у дисертацији. У овом одељку издвајамо сва њихова својства и тврђења која су неопходна за даље излагање. Комплетнији приказ се може наћи у [11] и [35].

Дефиниција 1.1.8. Оператор $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ се назива **компактним** ако пресликава ограничене подскупе од $\mathcal{H}$ у релативно компактне скупе. Класу свих компактних оператора на $\mathcal{H}$ означавамо са $\mathcal{C}_\infty(\mathcal{H})$.

Важи да је $\mathcal{C}_\infty(\mathcal{H})$ један затворен двострани идеал у $\mathcal{B}(\mathcal{H})$. Провера компактности оператора из $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ се углавном врши преко наредног критеријума.

Лема 1.1.9. *Нека је $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. Тада важи да је $A \in \mathcal{C}_\infty(\mathcal{H})$ ако за сваки низ $(h_n)_{n=1}^\infty$ у $\mathcal{H}$ који слабо тежи ка 0 важи да је $\lim_{n \rightarrow \infty} \|Ah_n\| = 0$.*

Посебан акценат у дисертацији ће бити позитивни компактни оператори. Сада наводимо једно елементарно тврђење везано за такве операторе.

Лема 1.1.10. *Нека је $0 \leq A \leq B \in \mathcal{C}_\infty(\mathcal{H})$. Онда је $A \in \mathcal{C}_\infty(\mathcal{H})$.*

Доказ. Нека је и $(h_n)_{n=1}^\infty$ произвољан низ у $\mathcal{H}$ који слабо тежи 0. Тада је

$$0 \leq \|\sqrt{A}h_n\|^2 = \langle Ah_n, h_n \rangle \leq \langle Bh_n, h_n \rangle \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} \|h_n\| \cdot \|Bh_n\| \rightarrow 0,$$

када $n \rightarrow \infty$, јер је низ $(h_n)_{n=1}^\infty$ ограничен и $B \in \mathcal{C}_\infty(\mathcal{H})$. Дакле, $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\sqrt{A}h_n\| = 0$, па је оператор $\sqrt{A} \in \mathcal{C}_\infty(\mathcal{H})$, одакле је и оператор $A = \sqrt{A} \cdot \sqrt{A}$ такође компактан, што је требало и доказати. $\square$

Наредна теорема представља камен темељац у изучавању компактних оператора на Хилбертовом простору. Иако важи и у случају нормалних оператора, исказујемо је у првобитном облику, тј. када је посматрани компактан оператор и самоадјунгован (за њен доказ и више информација видети [10, Теорема IV.5.1.]).

Теорема 1.1.11. Нека је $A \in \mathfrak{C}_\infty(\mathcal{H})$ самоадјунгован. Тада су све не-нула сопствене вредности реалне и коначне вишеструкости, па их је могуће поређасти у низ $(\lambda_n)_{n=1}^{r(A)}$ који опада по апсолутној вредности и тежи 0, у случају када је $r(A) = +\infty$. Ако је $(e_n)_{n=1}^{r(A)}$ одговарајући о.н.с. сопствених вектора, важи да се оператор A може представити развојем

$$A = \sum_{n=1}^{r(A)} \lambda_n(A) e_n \otimes e_n^*, \quad (1.1.1)$$

где у случају $r(A) = +\infty$ претходни ред конвертира униформно.

Уколико је оператор A из претходне теореме коначног ранга, о.н.с. $(e_n)_{n=1}^{r(A)}$ је могуће допунити до базе целог простора, при чему вектори из допуне припадају језгру оператора A . Како је у овом случају 0 сопствена вредност бесконачне вишеструкости (јер је $\dim N(A) = +\infty$), низ сопствених вредности $(\lambda_n(A))_{n=1}^{r(A)}$ ћемо допунити са бесконачно нула. Дакле, и у случају када је $r(A) < +\infty$, важи да се оператор A може записати у облику

$$A = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n(A) e_n \otimes e_n^*, \quad (1.1.2)$$

где је $(\lambda_n(A))_{n=1}^{\infty}$ по апсолутној вредности опадајући низ сопствених вредности који тежи 0 и $(e_n)_{n=1}^{\infty} \in \mathfrak{B}$ одговарајући низ сопствених вектора од A .

Као што смо видели, сваки позитиван оператор има јединствено дефинисан квадратни корен. Код компактних оператора, користећи спектралну теорему, степеновање на произвољан позитиван степен уводимо на следећи начин.

Дефиниција 1.1.12. Нека је $0 \leq A \in \mathfrak{C}_\infty(\mathcal{H})$ и $p > 0$ произвољно. Ако је спектрални развој оператора A дат са (1.1.2), тада дефинишемо

$$A^p \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^p(A) e_n \otimes e_n^*.$$

Приметимо да се у случају $p = \frac{1}{2}$, оператор из претходне дефиниције поклапа са оператором из Тврђења 1.1.1, с обзиром да је у питању позитиван оператор чији је квадрат једнак оператору A .

Код позитивних компактних оператора, за низ сопствених вредности важи следеће својство монотоности.

Тврђење 1.1.13. Нека су $0 \leq A \leq B \in \mathfrak{C}_\infty(\mathcal{H})$. Тада је $A \in \mathfrak{C}_\infty(\mathcal{H})$ и важи да је $\lambda_n(A) \leq \lambda_n(B)$, за свако $n \in \mathbb{N}$.

Доказ. Компактност оператора A следи директно из Леме 1.1.10. Остатак тврђења следи из познатог „минимакс“ својства сопствених вредности компактних позитивних оператора (за више детаља видети друго поглавље у [11]). $\square$

Ако је оператор A компактан, такав је и оператор A^*A , као и оператор $|A|$. Применом Теореме 1.1.11 на оператор $0 \leq |A| \in \mathfrak{C}_\infty(\mathcal{H})$, добијамо $|A| = \sum_{n=1}^{r(|A|)} \lambda_n(|A|) f_n \otimes f_n^*$, где је $(f_n)_{n=1}^{r(|A|)}$ о.н.с. који разапиње $\overline{R(|A|)}$. Даље, из Теореме 1.1.6 имамо једнакост $A = V|A| = \sum_{n=1}^{r(|A|)} \lambda_n(|A|) (V f_n) \otimes f_n^*$, због униформне конвергенције претходног реда у случају када је $r(|A|) = +\infty$. Систем вектора $(e_n)_{n=1}^{r(|A|)} \stackrel{\text{def}}{=} (V f_n)_{n=1}^{r(|A|)}$ такође ортонормиран

и разапиње $\overline{R(A)}$, на основу Напомене 1.1.7 и особина парцијалних изометрија. Као и у случају код спектралног развоја, уколико је оператор A (па самим тим и $|A|$) коначног ранга, о.н.с. $(e_n)_{n=1}^{r(|A|)}$ и $(f_n)_{n=1}^{r(|A|)}$ можемо проширити до база $(e_n)_{n=1}^\infty$ и $(f_n)_{n=1}^\infty$ од $\mathcal{H}$. Низ бројева $s_n(A) \stackrel{\text{def}}{=} \lambda_n(|A|)$, за $n \in \mathbb{N}$ (по потреби допуњен са бесконачно нула), назива се низ **сингуларних вредности** компактног оператора A . Из претходног, добијамо да важи следећа

Теорема 1.1.14. *Сваки оператор $A \in \mathfrak{C}_\infty(\mathcal{H})$ се може представити преко реда*

$$A = \sum_{n=1}^{\infty} s_n(A) e_n \otimes f_n^*, \quad (1.1.3)$$

где $(e_n)_{n=1}^\infty, (f_n)_{n=1}^\infty \in \mathfrak{B}$ и $(s_n(A))_{n=1}^\infty$ је низ позитивних бројева који моноћно тежи ка 0. Израз (1.1.3) називамо **Шмитовим развојем** оператора A .

Као и у случају спектралног развоја, парцијалне суме Шмитовог развоја оператора $A \in \mathfrak{C}_\infty(\mathcal{H})$ конвергирају униформно ка оператору A . Као директну последицу претходне теореме добијамо следеће

Тврђење 1.1.15. *Затворење попростора $\mathcal{K}(\mathcal{H})$ у норми простора $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$ је простор компактних оператора $\mathfrak{C}_\infty(\mathcal{H})$.*

1.2 Симетрично нормирајуће функције и индуковани простори низова

Први део одељка је посвећен просторима низова комплексних бројева, тј. потпросторима од $\mathbb{C}^\mathbb{N}$. Са $\mathfrak{c}_{00}$ ћемо означати простор свих комплексних низова који имају коначан број не-нула вредности, док ћемо са $\mathfrak{c}_0$ означавати простор свих комплексних низова који теже ка 0.

Дефиниција 1.2.1. За $a \in \mathfrak{c}_0$ дефинишемо индуктивно низ a^* , тако да је $a_1^* = \max_{i \in \mathbb{N}} |a_i|$, $a_1^* + a_2^* = \max_{i \neq j} (|a_i| + |a_j|), \dots, a_1^* + a_2^* + \dots + a_n^* = \max_{i_1, i_2, \dots, i_n \text{ су различити}} (|a_{i_1}| + |a_{i_2}| + \dots + |a_{i_n}|), \dots$. Тај низ називамо опадајуће преуређење низа a и за њега важи да су му елементи позитивни, као и да је $a_1^* \geq a_2^* \geq \dots \geq a_n^* \geq \dots$.

Напомена 1.2.2. Приметимо да је низ из претходне дефиниције увек добро дефинисан, као и да се може десити да низови $(|a_n|^*)_{n=1}^\infty$ и $(a_n^*)_{n=1}^\infty$ немају исте елементе. То се дешава искључиво када низ a има бесконачно не-нула вредности и бар једном узима вредност нула, када важи да низ a^* ниједном не узима вредност нула.

За $1 \leq p < \infty$, са ℓ^p обележавамо класичне просторе p -сумабилних низова, тј. скуп свих комплексних низова a таквих да је $\sum_{n=1}^\infty |a_n|^p < +\infty$. Наведени простори су Банахови када се нормирају са $\|a\|_p := \sqrt[p]{\sum_{n=1}^\infty |a_n|^p}$. Очигледно је да је $\mathfrak{c}_{00} \subsetneq \ell^p \subsetneq \mathfrak{c}_0$, за свако $1 \leq p < \infty$. Додатно, важи и да је $\ell^p \subsetneq \ell^q$, за свако $1 \leq p < q < +\infty$. Простор свих ограничених комплексних низова означамо са ℓ^∞ и он је Банахов када се нормира са $\|a\|_\infty = \sup_{n \in \mathbb{N}} |a_n|$, као и његов (затворени) потпростор $\mathfrak{c}_0$. Самим тим је и $\ell^p \subsetneq \ell^\infty$, за свако $1 \leq p < \infty$. На простору $\mathfrak{c}_{00}$ се могу посматрати све наведене норме $\|\cdot\|_p$, за $1 \leq p \leq \infty$, и важи да он није Банахов ни у једној од тих норми. Штавише, важи да је $\overline{\mathfrak{c}_{00}}^{\|\cdot\|_p} = \ell^p$, за $1 \leq p < \infty$, док је $\overline{\mathfrak{c}_{00}}^{\|\cdot\|_\infty} = \mathfrak{c}_0$. Једно од битних својства које задовољавају

p -норме јесте да је $\|a\|_p = \|a^*\|_p$, за свако $a \in \mathfrak{c}_{00}$ и свако $1 \leq p \leq \infty$. У наставку аксиоматизујемо све такве норме на $\mathfrak{c}_{00}$.

Дефиниција 1.2.3. Пресликавање $\Phi: \mathfrak{c}_{00} \rightarrow [0, +\infty)$ се назива симетрично нормирајућа (с.н.) функција ако задовољава следећа својства:

- 1. $\Phi(a) > 0$, за свако $a \neq 0$
- 2. $\Phi(\lambda a) = |\lambda| \Phi(a)$, за свако $\lambda \in \mathbb{C}$ и свако $a \in \mathfrak{c}_{00}$
- 3. $\Phi(a + b) \leq \Phi(a) + \Phi(b)$, за свако $a, b \in \mathfrak{c}_{00}$
- 4. $\Phi(a) = \Phi(a^*)$, за свако $a \in \mathfrak{c}_{00}$
- 5. $\Phi(1, 0, 0, \dots) = 1$.

Четврто својсто се назива својство симетричности и оно нам даје да је функција Φ инваријантна у односу на пермутације, као и на промене аргумента координата низа (тј. на множење чланова низа комплексним бројевима модула 1). Користећи особине с.н. функција је могуће доказати да је за свако $a \in \mathfrak{c}_0$, низ $\Phi(a_1, a_2, \dots, a_n, 0, 0, \dots)$ монотono растући.

Пример 1.2.4. У Дефиницији 1.2.1, функције $\|\cdot\|_{(n)}: \mathfrak{c}_{00} \rightarrow [0, +\infty)$ дефинисане изразима $\|a\|_{(n)} \stackrel{def}{=} a_1^* + a_2^* + \dots + a_n^*$, за свако $a \in \mathfrak{c}_{00}$, такође представљају примере с.н. функција. Сва својства осим трећег следе непосредно из дефиниције, док неједнакост троугла добијамо из низа неједнакости

$$\begin{aligned} \|a + b\|_{(n)} &= \max_{\substack{i_1, \dots, i_n \\ \text{су различити}}} |a_{i_1} + b_{i_1}| + \dots + |a_{i_n} + b_{i_n}| \leq \max_{\substack{i_1, \dots, i_n \\ \text{су различити}}} |a_{i_1}| + |b_{i_1}| + \dots + |a_{i_n}| + |b_{i_n}| \\ &\leq \max_{\substack{i_1, \dots, i_n \\ \text{су различити}}} |a_{i_1}| + \dots + |a_{i_n}| + \max_{\substack{i_1, \dots, i_n \\ \text{су различити}}} |b_{i_1}| + \dots + |b_{i_n}| = \|a\|_{(n)} + \|b\|_{(n)}. \end{aligned}$$

Свака с.н. функција се може природно проширити са простора $\mathfrak{c}_{00}$, уз очување свих својстава из Дефиниције 1.2.3.

Дефиниција 1.2.5. Нека је Φ с.н. функција на $\mathfrak{c}_{00}$. Тада она индукује простор низова

$$\mathfrak{c}_\Phi \stackrel{def}{=} \{a \in \mathfrak{c}_0 : \Phi(a) \stackrel{def}{=} \sup_{n \in \mathbb{N}} \Phi(a_1, a_2, \dots, a_n, 0, 0, \dots) < +\infty\}.$$

Овако продужење с.н. функције Φ (које означавамо исто) задаје комплетну норму на простору $\mathfrak{c}_\Phi$. Простори ℓ^p , у случају $1 \leq p < \infty$, се могу видети као $\mathfrak{c}_\Phi$ простори, за с.н. функције $\|\cdot\|_p$ које ћемо у наставку означавати исто са ℓ^p . Такође, простор $\mathfrak{c}_0$ се може видети као простор $\mathfrak{c}_\Phi$, где је с.н. функција Φ једнака $\|\cdot\|_\infty$, а коју ћемо у наставку означавати са ℓ^∞ . Приметимо да је $\|(a_n)_{n=1}^\infty\|_p^p = \|(|a_n|^p)_{n=1}^\infty\|_1$, за свако $a \in \mathfrak{c}_{00}$. Слична конструкција се може урадити за произвољну с.н. функцију.

Дефиниција 1.2.6. Нека је Φ произвољна с.н. функција и $p \geq 1$. Тада израз

$$\Phi^{(p)}((a_n)_{n=1}^\infty) \stackrel{def}{=} \sqrt[p]{\Phi(|a_n|^p)_{n=1}^\infty} \tag{1.2.1}$$

дефинише једну с.н. функцију коју називамо p -модификација с.н. функције Φ .

Придružени простор $\mathfrak{c}_{\Phi(p)}$ је заправо простор свих комплексних низова $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, таквих да је $(|a_n|^p)_{n=1}^{\infty} \in \mathfrak{c}_{\Phi}$. Нуклеарна с.н. функција ℓ^1 се често означава са ℓ . Дакле, важи да је $\ell^p = \ell^{(p)}$, за свако $1 \leq p < \infty$. Као што је напоменуто, за све просторе p -сумабилних низова важи да је $\mathfrak{c}_{00}$ густ у њима. То не мора да буде случај са произвољном с.н. функцијом Φ .

Дефиниција 1.2.7. Нека је Φ с.н. функција. Тада затворење потпростора $\mathfrak{c}_{00}$ у Банаховом простору $\mathfrak{c}_{\Phi}$ означавамо са $\mathfrak{c}_{\Phi}^{(\circ)}$.

Како је $\mathfrak{c}_{00}$ сепарабилан, такав је очигледно и простор $\mathfrak{c}_{\Phi}^{(\circ)}$. Простори $\mathfrak{c}_{\Phi}$ и $\mathfrak{c}_{\Phi}^{(\circ)}$ се не морају поклапати. У случају када је то тако, уводимо следећу дефиницију.

Дефиниција 1.2.8. За с.н. функцију Φ кажемо да је мононормализујућа ако је $\mathfrak{c}_{\Phi} = \mathfrak{c}_{\Phi}^{(\circ)}$. У супротном кажемо да је бинормализујућа.

Напомена 1.2.9. Испоставља се да је с.н. функција Φ мононормализујућа ако за свако $a \in \mathfrak{c}_{\Phi}$ важи да је $\lim_{n \rightarrow \infty} \Phi(a_{n+1}, a_{n+2}, a_{n+3}, \dots) = 0$. Такође, важи да је Φ мононормализујућа ако је Банахов простор $\mathfrak{c}_{\Phi}$ сепарабилан (доказ ове тврдње сличан је као и за операторне идеале у наставку поглавља). Како су простори $\mathfrak{c}_0$ и ℓ^p сви сепарабилни, за $1 \leq p < \infty$, одговарајуће с.н. функције ℓ^p су мононормализујуће, за $1 \leq p \leq \infty$.

Дефиниција 1.2.10. За две с.н. функције Φ и Ψ кажемо да су еквивалентне, у ознаци $\Phi \sim \Psi$, ако важи да је

$$\sup_{0 \neq a \in \mathfrak{c}_{00}} \frac{\Phi(a)}{\Psi(a)} < +\infty \quad \text{и} \quad \sup_{0 \neq a \in \mathfrak{c}_{00}} \frac{\Psi(a)}{\Phi(a)} < +\infty.$$

Еквивалентне с.н. функције задају исте индуковане скупоове низова. Да је и обрат тачан следи из Банахове Теореме о Хомеоморфизму. Одатле закључујемо и да су еквивалентне с.н. функције истовремено мононормализујуће.

С.н. функције из Примера 1.2.4 су дефинисане на целом простору $\mathfrak{c}_0$, па је $\mathfrak{c}_{\|\cdot\|_{(n)}} = \mathfrak{c}_0$, за свако $n \in \mathbb{N}$. Штавише, важи да је $\|\cdot\|_{(1)} = \ell^{\infty}$, као и неједнакости

$$\ell^{\infty}(a) = a_1^* \leq a_1^* + a_2^* \dots + a_n^* \leq n \cdot a_1^* = n \cdot \ell^{\infty}(a),$$

за свако $a \in \mathfrak{c}_0$. Дакле, важи да је $\|\cdot\|_{(n)} \sim \ell^{\infty}$, за свако $n \in \mathbb{N}$.

Тврђење 1.2.11. За сваку с.н. функцију Φ и свако $a \in \mathfrak{c}_{00}$ важе неједнакости

$$\max_{n \in \mathbb{N}} |a_n| \leq \Phi(a) \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|. \quad (1.2.2)$$

Како је леви израз у неједнакости (1.2.2) заправо $\ell^{\infty}(a)$, следи да је ℓ^{∞} најмања од свих с.н. функција, па за њу кажемо да је минимална. Слично, десни израз у неједнакости (1.2.2) је једнак $\ell(a)$, одакле закључујемо да је с.н. функција ℓ максимална. У наставку дисертације ће бити често од значаја да ли је задата с.н. функција еквивалентна са неком од ових екстремних с.н. функција, тј. са минималном или са максималном с.н. функцијом. Користећи претходно тврђење доказујемо

Тврђење 1.2.12. Нека је Φ произвољна с.н. функција и $n \in \mathbb{N}$ фиксирано. Тада за сваки низ $(a^m)_{m=1}^{\infty}$ елемената из $\mathfrak{c}_{00}$ таквих да су им све вредности после n -те координате једнаке 0 и који покоординатно теже неком низу a , важи да је $\lim_{m \rightarrow \infty} \Phi(a^m) = \Phi(a)$.

Доказ. Приметимо прво да је $a \in \mathfrak{c}_{00}$, као и да су му све координате после n -те једнаке 0. Из неједнакости (1.2.2) добијамо да је

$$|\Phi(a^m) - \Phi(a)| \leq \Phi(a^m - a) \leq \sum_{k=1}^{\infty} |a_k^m - a_k| = \sum_{k=1}^n |a_k^m - a_k| \rightarrow 0,$$

кад $m \rightarrow \infty$, чиме је доказана тражена конвергенција. $\square$

Напомена 1.2.13. Из претходног тврђења следи да су функције $\Phi_n: \mathbb{C}^n \rightarrow [0, +\infty)$ дефинисане са $\Phi_n(a_1, a_2, \dots, a_n) \stackrel{\text{def}}{=} \Phi(a_1, a_2, \dots, a_n, 0, 0, \dots)$, за $(a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{C}^n$ и $n \in \mathbb{N}$, покоординатно непрекидне, па самим тим и непрекидне у стандардној топологији на $\mathbb{C}^n$.

Досадашњи примери с.н. функција су сви били мононормализујући. У наставку уводимо класу простора низова који су под одређеним условима увек бинормализујући. За сваки неоппадајући низ позитивних бројева $\Pi = (\pi_n)_{n=1}^{\infty}$, где је $\pi_1 = 1$, формуле:

$$\Phi_{\Pi}(a) = \sup_{n \in \mathbb{N}} \frac{\sum_{k=1}^n a_k^*}{\sum_{k=1}^n \pi_k}, \quad \text{за } a \in \mathfrak{c}_{00} \quad (1.2.3)$$

и

$$\Phi_{\pi}(a) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^* \pi_n, \quad \text{за } a \in \mathfrak{c}_{00} \quad (1.2.4)$$

задају с.н. функције на $\mathfrak{c}_{00}$. У зависности од својстава низа Π , својства наведених с.н. функција наводимо у наредном тврђењу (за доказ видети [11, Леме III.14.1. и III.15.1.]).

Тврђење 1.2.14. Нека је низ $\Pi = (\pi_n)_{n=1}^{\infty}$ оппадајући низ позитивних бројева такав да је $\pi_1 = 1$. Тада:

- а) Ако је $\sum_{n=1}^{\infty} \pi_n < +\infty$, онда је $\Phi_{\Pi} \sim \ell^1$ и $\Phi_{\pi} \sim \ell^{\infty}$;
- б) Ако је $\lim_{n \rightarrow \infty} \pi_n > 0$, онда је $\Phi_{\Pi} \sim \ell^{\infty}$ и $\Phi_{\pi} \sim \ell^1$;
- в) Ако је $\sum_{n=1}^{\infty} \pi_n = +\infty$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} \pi_n = 0$, онда ниједна од с.н. функција Φ_{Π} и Φ_{π} није еквивалентна ни минималној ни максималној. Функција Φ_{Π} је у овом случају бинормализујућа, док је Φ_{π} мононормализујућа.

Приметимо да је с.н. функција Φ_{π} увек мононормализујућа. Уколико низ Π задовољава својства из дела под в) претходног тврђења, њега називамо *бинормализујућим*. Одговарајуће индуковане просторе низова ћемо означавати са $\mathfrak{c}_{\Pi} \stackrel{\text{def}}{=} \mathfrak{c}_{\Phi_{\Pi}}$ и $\mathfrak{c}_{\pi} \stackrel{\text{def}}{=} \mathfrak{c}_{\Phi_{\pi}}$.

Дефиниција 1.2.15. Нека је Φ с.н. функција. Тада је функција $\Phi^*: \mathfrak{c}_{00} \rightarrow [0, +\infty)$, дефинисана са

$$\Phi^*(a) \stackrel{\text{def}}{=} \sup \left\{ \left| \sum_n a_n b_n \right| : b \in \mathfrak{c}_{00}, \Phi(b) \leq 1 \right\},$$

за свако $a \in \mathfrak{c}_{00}$, једна с.н. функција. Кажемо да је с.н. функција Φ^* адјунгована с.н. функцији Φ .

Доказ да је претходна дефиниција коректна, тј. да наведени израз задаје једну с.н. функцију се може наћи у [11, Теорема III.11.1.]. У истој теорему је доказана и следећа

Теорема 1.2.16. *Нека је Φ произвољна с.н. функција. Тада је она адјунгована с.н. функција Φ , тј. важи да је $\Phi^{**} = \Phi$.*

Функције ℓ^p и ℓ^q су међусобно адјунговане ако је $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Такође, с.н. функције Φ_Π и Φ_π су међусобно адјунговане, за сваки позитиван неоппадајући низ $\Pi = (\pi_n)_{n=1}^\infty$, где је $\pi_1 = 1$ (следи директно из дефиниција наведених с.н. функција). Појам адјунговане с.н. функције је у уској вези са дуалним простором низова. Доказ наредне теореме се може наћи у [35, Теорема 1.17.].

Теорема 1.2.17. *Нека је Φ с.н. функција. Тада важи:*

а) $\sum_{n=1}^\infty |a_n b_n| \leq \Phi(a) \Phi^*(b)$, за свако $a, b \in \mathfrak{c}_{00}$;

б) $(\mathfrak{c}_\Phi^{(o)})^* \cong \mathfrak{c}_{\Phi^*}$, где изометрички изоморфизам сваком ограниченом линеарном функционалу $\varphi \in (\mathfrak{c}_\Phi^{(o)})^*$ додељује низ $b \in \mathfrak{c}_{\Phi^*}$ такав да за свако $a \in \mathfrak{c}_\Phi^{(o)}$ важи једнакост $\varphi(a) = \sum_{n=1}^\infty a_n b_n$.

в) простор $\mathfrak{c}_\Phi^{(o)}$ (тј. $\mathfrak{c}_\Phi$) је рефлексиван ако су обе с.н. функције Φ и Φ^* мононормализујуће.

Напомена 1.2.18. Неједнакост у делу под а) је задовољена и за свако $a \in \mathfrak{c}_\Phi$ и $b \in \mathfrak{c}_{\Phi^*}$. Такође, како је с.н. функција Φ_π мононормализујућа, на основу Теореме 1.2.17 важи да је $(\mathfrak{c}_\pi)^* \cong \mathfrak{c}_\Pi$. Наравно, увек важи да је и $(\mathfrak{c}_\Pi^{(o)})^* \cong \mathfrak{c}_\pi$, па је $(\mathfrak{c}_\Pi^{(o)})^{**} \cong \mathfrak{c}_\Pi$.

1.3 Идеали компактних оператора у $\mathcal{B}(\mathcal{H})$

Фокус овог одељка биће симетрични идеали ограничених оператора и симетричне норме на њима. За почетак потребна нам је следећа

Дефиниција 1.3.1. За скуп $\mathcal{I} \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$ кажемо да је **двострани идеал** у $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ ако важи

- 1. За свако $X, Y \in \mathcal{I}$ важи да је и $X + Y \in \mathcal{I}$;
- 2. За свако $X \in \mathcal{I}$ и $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ важи да су и оператори $AX, XA \in \mathcal{I}$;
- 3. $\mathcal{I}$ је нетривијалан, тј. важи да је $\{0\} \subsetneq \mathcal{I} \subsetneq \mathcal{B}(\mathcal{H})$.

Примери двостраних идеала са којима смо се већ сусрели су $\mathcal{K}(\mathcal{H})$ и $\mathcal{C}_\infty(\mathcal{H})$. Испоставља се да су у питању екстремни случајеви. Прецизније, важи наредна теорема (за доказ погледати [11, Теорема III.1.1]).

Теорема 1.3.2. *Нека је $\mathcal{I}$ двострани (не нужно затворен) идеал у $\mathcal{B}(\mathcal{H})$. Тада важе инклузије:*

$$\mathcal{K}(\mathcal{H}) \subseteq \mathcal{I} \subseteq \mathcal{C}_\infty(\mathcal{H}). \quad (1.3.1)$$

Како је, на основу Тврђења 1.1.15, $\mathcal{K}(\mathcal{H})$ густ у $\mathcal{C}_\infty(\mathcal{H})$ у операторној норми и како је $\mathcal{C}_\infty(\mathcal{H})$ комплетан у њој, директно следи

Последица 1.3.3. *Једини затворени двострани идеал у $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ је $\mathcal{C}_\infty(\mathcal{H})$.*

На основу претходног, двостране идеале ћемо називати и идеалима компактних оператора. Као што смо видели, они нису комплетни у операторној норми (осим у случају $\mathcal{C}_\infty(\mathcal{H})$). Зато је природно посматрати и друге норме на њима. Најважнију класу таквих норми нам даје следећа

Дефиниција 1.3.4. Нека је $\mathfrak{I}$ двострани идеал у простору $\mathcal{B}(\mathcal{H})$. За пресликавање $\|\cdot\| : \mathfrak{I} \rightarrow [0, +\infty)$ кажемо да је **симетрична норма** ако су задовољени следећи услови:

- 1. $\|X\| > 0$, за свако $0 \neq X \in \mathfrak{I}$;
- 2. $\|\lambda \cdot X\| = |\lambda| \cdot \|X\|$, за свако $\lambda \in \mathbb{C}$ и свако $X \in \mathfrak{I}$;
- 3. $\|X + Y\| \leq \|X\| + \|Y\|$, за свако $X, Y \in \mathfrak{I}$;
- 4. $\|AXB\| \leq \|A\| \cdot \|X\| \cdot \|B\|$, за свако $A, B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ и свако $X \in \mathfrak{I}$;
- 5. $\|X\| = \|X\| = s_1(X)$, за сваки ограничен оператор X ранга 1.

Уколико услов 4, који зовемо својство симетричности норме, заменимо условом

- 4'. $\|UXV\| = \|X\|$, за свако $X \in \mathfrak{I}$ и сваке унитарне операторе $U, V \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$,

онда за $\|\cdot\|$ кажемо да је **унитарно инваријантна (у.и.) норма**.

Појмови симетричних и у.и. норми на двостраним идеалима су еквивалентни, о чему нам говори наредна

Теорема 1.3.5. Нека је $\mathfrak{I}$ двострани идеал у $\mathcal{B}(\mathcal{H})$. Тада је $\|\cdot\| : \mathfrak{I} \rightarrow [0, +\infty)$ симетрична норма ако је у.и. норма.

Доказ. Нека је $\|\cdot\|$ једна симетрична норма на $\mathfrak{I}$. Тада, за произвољне унитарне $U, V \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ и свако $X \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, како је $\|U\| = \|V\| = 1$, важи да је $\|UXV\| \leq \|U\| \cdot \|X\| \cdot \|V\| = \|X\|$. За доказ обратне неједнакости, приметимо да је $\|X\| = \|U^{-1}(UXV)V^{-1}\| \leq \|U^{-1}\| \cdot \|UXV\| \cdot \|V^{-1}\| = \|UXV\|$. Дакле, $\|UXV\| = \|X\|$, па је $\|\cdot\|$ једна у.и. норма на $\mathfrak{I}$.

Претпоставимо сада да је $\|\cdot\|$ једна у.и. норма на идеалу $\mathfrak{I}$. Нека су $A, B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ и $X \in \mathfrak{I}$ произвољни. За свако $\varepsilon > 0$, постоји $n \geq 3$ такво да је $\frac{\|A\|}{\|A\| + \varepsilon} \leq 1 - \frac{2}{n}$. На основу теореме 1.1.3, постоје унитарни оператори $U_1, U_2, \dots, U_n \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, такви да је $\frac{A}{\|A\| + \varepsilon} = \frac{U_1 + U_2 + \dots + U_n}{n}$. Одавде следи да је

$$\begin{aligned} \|AXB\| &= (\|A\| + \varepsilon) \left\| \frac{A}{\|A\| + \varepsilon} XB \right\| = \frac{\|A\| + \varepsilon}{n} \|(U_1 + \dots + U_n)XB\| \\ &\leq \frac{\|A\| + \varepsilon}{n} (\|U_1XB\| + \dots + \|U_nXB\|) = \frac{\|A\| + \varepsilon}{n} (\|XB\| + \dots + \|XB\|) = (\|A\| + \varepsilon) \|XB\|. \end{aligned}$$

Како је $\varepsilon > 0$ било произвољно, добијамо да важи неједнакост $\|AXB\| \leq \|A\| \cdot \|XB\|$. Слично, применом Теореме 1.1.3 на оператор $\frac{B}{\|B\| + \varepsilon}$, за произвољно $\varepsilon > 0$, добијамо да важи неједнакост $\|XB\| \leq \|X\| \cdot \|B\|$. Коначно, доказали смо да је $\|AXB\| \leq \|A\| \|B\| \|X\|$, па следи да је $\|\cdot\|$ једна симетрична норма на $\mathfrak{I}$. $\square$

Користећи Теорему 1.1.6, може се показати да је сваки двострани идеал самоадјунгован, тј. важи да ако $A \in \mathfrak{I}$ онда и $A^* \in \mathfrak{I}$, као и да $|A|, |A^*| \in \mathfrak{I}$. Додатно, важи да је $\|A\| = \|A^*\| = \||A|\| = \||A^*|\|$.

Двострани идеал у $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ који има на себи дефинисану симетричну норму која га чини Банаховим простором називамо **симетрично нормираним (с.н.) идеалом**. Као и у случају простора низова, важи следећа

Теорема 1.3.6. *Ако с.н. идеали $\mathfrak{I}_1$ и $\mathfrak{I}_2$ имају исте елементе, њихове норме су еквивалентне.*

Доказ претходне теореме је последица Банахове Теореме о Хомеоморфизму и може се наћи у [11, Теорема III.2.1.].

Како за свака два коначна ортонормирана система у $\mathcal{H}$ исте кардиналности постоји унитаран оператор $U \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ који један пресликава на други, следи да свака у.и. норма на $\mathcal{K}(\mathcal{H})$ узима исте вредности на операторима који имају исти (коначан) низ сингуларних вредности. Одавде следи наредна важна теорема (за више детаља погледајте доказ [11, Теореме III.3.1.]).

Теорема 1.3.7. *Постоји 1 – 1 кореспонденција између свих с.н. функција на $\mathfrak{c}_{00}$ и свих у.и. норми на $\mathcal{K}(\mathcal{H})$. Прецизније:*

а) Нека је $\|\cdot\|$ једна у.и. норма на $\mathcal{K}(\mathcal{H})$. Тада једнакости

$$\Phi(a_1, a_2, \dots, a_n, 0, 0, \dots) \stackrel{\text{def}}{=} \left\| \sum_{k=1}^n a_k e_k \otimes e_k^* \right\|, \quad \text{за свако } a \in \mathfrak{c}_{00},$$

где је $(e_k)_{k=1}^n$ произвољан о.н.с. у $\mathcal{H}$, задаје једну с.н. функцију на $\mathfrak{c}_{00}$.

б) Нека је Φ једна с.н. функција на $\mathfrak{c}_{00}$. Тада једнакости

$$\|A\| \stackrel{\text{def}}{=} \Phi((s_n(A))_{n=1}^\infty), \quad \text{за свако } A \in \mathcal{K}(\mathcal{H}), \quad (1.3.2)$$

задаје једну у.и. норму на $\mathcal{K}(\mathcal{H})$.

Норму индуковану с.н. функцијом Φ , задату изразом (1.3.2) ћемо убудуће означавати са $\|\cdot\|_\Phi$. Као и у случају низова постоји природан (максималан) с.н. идеал на коме је она дефинисана. О томе говори наредна теорема, чији доказ се може наћи у [11, Теореме III.4.1.].

Теорема 1.3.8. *Нека је Φ произвољна с.н. функција. Тада је*

$$\mathfrak{C}_\Phi(\mathcal{H}) \stackrel{\text{def}}{=} \{A \in \mathfrak{C}_\infty(\mathcal{H}) : (s_n(A))_{n=1}^\infty \in \mathfrak{c}_\Phi\} \quad (1.3.3)$$

с.н. идеал нормиран симетричном нормом дефинисаном са $\|A\|_\Phi \stackrel{\text{def}}{=} \Phi((s_n(A))_{n=1}^\infty)$, за свако $A \in \mathfrak{C}_\Phi(\mathcal{H})$.

Када за Φ узмемо с.н. функцију ℓ^p , где је $1 \leq p \leq \infty$, добијамо класу тзв. **Шатен-Фон Нојманових идеала** које означавамо са $\mathfrak{C}_p(\mathcal{H})$. Дакле, компактан оператор A припада идеалу $\mathfrak{C}_p(\mathcal{H})$ за $1 \leq p < \infty$ ако је $\sum_{n=1}^\infty s_n^p(A) < +\infty$ и његову норму ћемо означавати са $\|A\|_p \stackrel{\text{def}}{=} \|A\|_{\ell^p} = \sqrt[p]{\sum_{n=1}^\infty s_n^p(A)}$. С.н. функција ℓ^∞ наравно индукује простор свих компактних оператора, што оправдава његову стандардну ознаку $\mathfrak{C}_\infty(\mathcal{H})$. Међу наведеним идеалима се посебно издвајају случајеви $p = 1$ и $p = 2$, о којима ће бити више речи мало касније.

Дефиниција 1.3.9. Нека је $\|\cdot\|_{\Phi}$ произвољна у.и. норма индукована с.н. функцијом Φ . Тада с.н. норму $\|\cdot\|_{\Phi^{(p)}}$ називамо **p -модификацијом** норме $\|\cdot\|_{\Phi}$.

Ако је $A \in \mathfrak{C}_{\Phi^{(p)}}(\mathcal{H})$, тада је и $|A| \in \mathfrak{C}_{\Phi^{(p)}}(\mathcal{H})$ и важи једнакост $\||A|\|_{\Phi^{(p)}} = \|A\|_{\Phi^{(p)}}$. Дакле, важи да је $(s_n(|A|))_{n=1}^{\infty} \in \mathfrak{c}_{\Phi^{(p)}}$, одакле је (функционални рачун за компактне самоадјунговане) $(s_n(|A|^p))_{n=1}^{\infty} = (s_n^p(|A|))_{n=1}^{\infty} \in \mathfrak{c}_{\Phi}$ и важи низ једнакости

$$\|A\|_{\Phi^{(p)}} = \||A|\|_{\Phi^{(p)}} = \Phi^{(p)}(s_1(|A|), s_2(|A|), \dots) = \Phi(s_1(|A|^p), s_2(|A|^p), \dots) = \||A|^p\|_{\Phi}.$$

Приметимо и да је $\mathfrak{C}_{\Phi^{(p)}}(\mathcal{H}) = \{A \in \mathfrak{C}_{\infty}(\mathcal{H}) : |A|^p \in \mathfrak{C}_{\Phi}(\mathcal{H})\}$. Унитарно инваријантне норме $\|\cdot\|_{\Phi^{(2)}}$ које су настале 2-модификацијом неке у.и. норме $\|\cdot\|_{\Phi}$ називамо **Q нормама**, док се норме облика $\|\cdot\|_{\Phi^{(2)*}}$ називају **Q^* нормама**. Важи да је свака p -модификација норме уједно и Q норма за свако $p \geq 2$, јер је $(\Phi^{(\frac{p}{2})})^{(2)} = \Phi^{(p)}$.

Напомена 1.3.10. Ако у.и. норми $\||\cdot|\|$ одговара с.н. функција Φ из Теореме 1.3.7, индуковани с.н. идеал $\mathfrak{C}_{\Phi}(\mathcal{H})$ ћемо означавати и са $\mathfrak{C}_{\||\cdot|\|}(\mathcal{H})$. Такође, појам p -модификације је могао да се уведе директно на у.и. нормама, без ослањања на везу са с.н. функцијом која је у кореспонденцији са њом, на следећи начин:

$$\||A|\|_{(p)} \stackrel{def}{=} \||A|^p\|^{\frac{1}{p}}, \quad \text{за свако } A \in \mathfrak{B}(\mathcal{H}), \text{ такво да је } |A|^p \in \mathfrak{C}_{\||\cdot|\|}(\mathcal{H}). \quad (1.3.4)$$

Није тешко проверити да се појмови поклапају, па је самим тим наведена дефиниција коректна. Такође, произвољну у.и. Q норму ћемо зато повремено означавати и са $\||\cdot|\|_{(2)}$.

С обзиром да су с.н. функције ℓ^p заправо p -модификације с.н. функције ℓ , следи да су Шатенове p -норме заправо p -модификације нуклеарне норме $\|\cdot\|_1$. Дакле, у.и. норме $\|\cdot\|_p$ су Q норме, за свако $p \geq 2$, док су у питању Q^* норме за $1 \leq p \leq 2$.

За свако $k \in \mathbb{N}$ дефинишемо тзв. **Ки-Фанове норме** на простору свих компактних оператора изразом $\|A\|_{(n)} \stackrel{def}{=} \sum_{k=1}^n s_k(A)$. Чињеница да је су у питању симетричне норме на простору компактних оператора следи из Теореме 1.3.8, јер су настале од с.н. функција из Примера 1.2.4. Следећа теорема представља тзв. Ки-Фаново доминационо својство (за доказ видети [11, Теорема III.4.2.]) и представља основни алат при доказивању припадности неког оператора задатом с.н. идеалу, као и за процену норме оператора у њему.

Теорема 1.3.11. Нека су $A \in \mathfrak{C}_{\Phi}(\mathcal{H})$ и $B \in \mathfrak{C}_{\infty}(\mathcal{H})$ такви да је $\|B\|_{(n)} \leq \|A\|_{(n)}$, за свако $n \in \mathbb{N}$. Тада важи да $B \in \mathfrak{C}_{\Phi}(\mathcal{H})$ и да је $\|B\|_{\Phi} \leq \|A\|_{\Phi}$.

Специјално, на основу Тврђења 1.1.13, услови претходне теореме су задовољени када је $0 \leq A \leq B$.

Наредна теорема, која је директна последица [35, Став 2.6] и [3, Теорема 4.6], нам даје оперативан начин за проверу припадности с.н. идеалу произвољног ограниченог оператора, као и за одређивање његове норме у идеалу.

Теорема 1.3.12. За свако $A \in \mathfrak{B}(\mathcal{H})$ важи да је $A \in \mathfrak{C}_{\Phi}(\mathcal{H})$ ако и само ако за свако $e, f \in \mathfrak{B}$ важи да $(\langle Ae_n, f_n \rangle)_{n=1}^{\infty} \in \mathfrak{c}_{\Phi}$, у ком случају је

$$\|A\|_{\Phi} = \sup_{e, f \in \mathfrak{B}} \Phi((\langle Ae_n, f_n \rangle)_{n=1}^{\infty}), \quad (1.3.5)$$

где се супремум добијаше на системима вектора Шмишовој развоја оператора A .

Напомена 1.3.13. Да би закључили да ограничен оператор A припада идеалу $\mathfrak{C}_\Phi(\mathcal{H})$, довољно је да за свако $e \in \mathfrak{B}$ важи да је $(\langle Ae_n, e_n \rangle)_{n=1}^\infty \in \mathfrak{c}_\Phi$. Доказ компактности оператора A је сличан доказу у Проблему 177 из [12]. Даље, за $\Phi \approx \ell^\infty$, ако са $A_{\Re}$ и $A_{\Im}$ означимо реални и имагинарни део од A редом, како за свако $h \in \mathcal{H}$ важи $|\langle Ah, h \rangle|^2 = |\langle A_{\Re}h, h \rangle|^2 + |\langle A_{\Im}h, h \rangle|^2$, следи да је $|\langle Ah, h \rangle| \geq |\langle A_{\Re}h, h \rangle|$ па дакле и да је $\Phi((\langle A_{\Re}e_n, e_n \rangle)_{n=1}^\infty) \leq \Phi((\langle Ae_n, e_n \rangle)_{n=1}^\infty) < +\infty$, за свако $e \in \mathfrak{B}$. Како је оператор $A_{\Re}$ компактан и самоадјунгован, на основу Спектралне Теореме следи да је $A_{\Re} = \sum_{m=1}^{+\infty} \lambda_m f_m \otimes f_m^*$ за неко $f = (f_n)_{n=1}^\infty \in \mathfrak{B}$. Дакле, $\Phi((\langle A_{\Re}f_n, f_n \rangle)_{n=1}^\infty) = \Phi((\lambda_n)_{n=1}^\infty) = \Phi((s_n(A_{\Re}))_{n=1}^\infty) < +\infty$, одакле добијамо да је $A_{\Re} \in \mathfrak{C}_\Phi(\mathcal{H})$. Слично, $A_{\Im} \in \mathfrak{C}_\Phi(\mathcal{H})$, па је дакле и $A = A_{\Re} + iA_{\Im} \in \mathfrak{C}_\Phi(\mathcal{H})$ што је требало и доказати.

Слично, као и у случају низова, с.н. идеал $\mathfrak{C}_\Phi(\mathcal{H})$ не мора бити сепарабилан. С друге стране, идеал $\mathfrak{C}_\Phi^{(o)}(\mathcal{H}) \stackrel{\text{def}}{=} \overline{(\mathfrak{K}(\mathcal{H}))}^{\|\cdot\|_\Phi}$ је увек сепарабилан, јер је такав и $\mathfrak{K}(\mathcal{H})$ у свакој од норми $\|\cdot\|_\Phi$. Важи и да је $\mathfrak{C}_\Phi^{(o)}(\mathcal{H}) = \{A \in \mathfrak{C}_\infty(\mathcal{H}) : (s_n(A))_{n=1}^\infty \in \mathfrak{c}_\Phi^{(o)}\}$, одакле следи да се простори $\mathfrak{C}_\Phi(\mathcal{H})$ и $\mathfrak{C}_\Phi^{(o)}(\mathcal{H})$ поклапају акко је с.н. функција Φ мононормализујућа. Сепарабилне с.н. идеале је могуће у потпуности описати.

Теорема 1.3.14. Нека је $\mathfrak{I}$ сепарабилан с.н. идеал у $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$. Тада је он једнак (као Банахов простор) идеалу $\mathfrak{C}_\Phi^{(o)}(\mathcal{H})$, за неку с.н. функцију Φ .

Доказ претходне теореме се може наћи у [11, Теорема III.6.2.]. Из истог доказа се види и да уколико је $\mathfrak{C}_\Phi^{(o)}(\mathcal{H}) \subsetneq \mathfrak{C}_\Phi(\mathcal{H})$, следи да с.н. идеал $\mathfrak{C}_\Phi(\mathcal{H})$ није сепарабилан, што је случај акко је с.н. функција Φ бинормализујућа. Одавде директно следи наредна

Теорема 1.3.15. Идеал $\mathfrak{C}_\Phi(\mathcal{H})$ је сепарабилан акко је с.н. функција Φ мононормализујућа.

Напомена 1.3.16. За сваки $A \in \mathfrak{C}_\Phi(\mathcal{H})$ важи да парцијалне суме његовог Шмитовог развоја конвергирају ка A акко је $A \in \mathfrak{C}_\Phi^{(o)}(\mathcal{H})$.

Наредна лема нам даје резултат о конвергенцији низова позитивних оператора у сепарабилним идеалима компактних оператора. Слично тврђење у Шатеновим идеалима, са мало општијим претпоставкама за низ оператора (без претпоставке позитивности), може се наћи у [35, Теорема 2.16.].

Лема 1.3.17. Нека је $A_n \in \mathfrak{B}(\mathcal{H})$, за $n \in \mathbb{N}$, низ позитивних оператора који конвертира слабо ка $A \in \mathfrak{B}(\mathcal{H})$ и нека постоји оператор $B \in \mathfrak{C}_{|||\cdot|||}(\mathcal{H})$, где је $\mathfrak{C}_{|||\cdot|||}(\mathcal{H})$ сепарабилан идеал, такав да је $A_n \leq B$, за свако $n \in \mathbb{N}$. Тада $|||A_n - A||| \rightarrow 0$, кад $n \rightarrow \infty$.

Доказ. Пуштањем лимеса кад $n \rightarrow \infty$ у неједнакости $\langle A_n f, f \rangle \leq \langle B f, f \rangle$ добијамо да је $A \leq B$, док из својства монотоности $|||\cdot|||$ добијамо да $A_n, A \in \mathfrak{C}_{|||\cdot|||}(\mathcal{H})$, за свако $n \in \mathbb{N}$.

Нека је $\varepsilon > 0$ произвољно. Како је идеал $\mathfrak{C}_{|||\cdot|||}(\mathcal{H})$ сепарабилан, постоји ортопројектор коначног ранга P (нпр. ортопројектор на линеал првих неколико сопствених вектора из спектралног развоја оператора B) такав да за $Q = I - P$ важи $|||QBQ||| < \varepsilon$. Додатно, из $QA_nQ \leq QBQ$ и $QAQ \leq QBQ$ добијамо да је $|||QA_nQ||| < \varepsilon$ и $|||QAQ||| < \varepsilon$. Према [1, Последица IV.2.6] такође имамо да је

$$\begin{aligned} |||A_nQ||| &= |||\sqrt{A_n}\sqrt{A_n}Q||| \leq |||\sqrt{A_n}|||_{(2)} |||\sqrt{A_n}Q|||_{(2)} \\ &= |||A_n|||^{1/2} |||QA_nQ|||^{1/2} \leq |||B|||^{1/2} \varepsilon^{1/2}. \end{aligned}$$

Слично, добијамо да је $\|AQ\| \leq \|B\|^{1/2} \varepsilon^{1/2}$. Коначно, како је P ортопројектор коначног ранга, из слабе конвергенције низа A_n следи да $\|P(A_n - A)P\| \rightarrow 0$, кад $n \rightarrow \infty$.

На основу неједнакости троугла добијамо

$$\|A_n - A\| \leq \|P(A_n - A)P\| + \|Q(A_n - A)\| + \|P(A_n - A)Q\|,$$

што тежи ка 0 према већ доказаним проценама. $\square$

Приметимо да је сепарабилност идеала $\mathcal{C}_{\|\cdot\|}(\mathcal{H})$ неопходна у претпоставци претходне леме. Наиме, за позитиван $B \in \mathcal{C}_{\|\cdot\|}(\mathcal{H}) \setminus \mathcal{C}_{\|\cdot\|}(\mathcal{H})^{(0)}$, парцијлне суме његовог Шмитовог развоја, које су такође позитивни оператори, не конвергира ка B у норми идеала, на основу Напомене 1.3.16. Слично је случај и у наредној теорему, која ће бити пресудна у доказу једног важног тврђења у четвртој глави дисертације (доказ је могуће наћи у [11, Теорему III.6.3.]).

Теорема 1.3.18. *Нека је Φ мононормализујућа с.н. функција и $(X_n)_{n=1}^\infty$ низ самоадјунгованих оператора у $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ који конвертира јако ка $X \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. Тада за свако $A \in \mathcal{C}_\Phi(\mathcal{H})$, низови оператора $(X_n A)_{n=1}^\infty$, $(A X_n)_{n=1}^\infty$ и $(X_n A X_n)_{n=1}^\infty$ конвертирају у норми идеала $\mathcal{C}_\Phi(\mathcal{H})$ ка операторима XA , AX и AXA , редом.*

С обзиром да су све с.н. функције ℓ^p , за $1 \leq p < \infty$, мононормализујуће, сви Шатенови идеали су сепарабилни. Симетрично нормирајући идеал $\mathcal{C}_1(\mathcal{H})$ називамо идеалом нуклеарних оператора. Доказ наредне теореме се може наћи у [35, Теорему 2.14.] и потпуно описује позитивне нуклеарне операторе.

Теорема 1.3.19. *Нека је $0 \leq A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. Тада је вредности израза*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \langle A e_n, e_n \rangle \tag{1.3.6}$$

увек исћа за сваки избор о.н.б. $(e_n)_{n=1}^\infty$ у $\mathcal{H}$. Сума (1.3.6) је коначна акко је $A \in \mathcal{C}_1(\mathcal{H})$ и једнака је $\|A\|_1$.

Израз (1.3.6) је дакле добро дефинисан (коначан) за све позитивне нуклеарне операторе. Испоставља се да ће то важити и за све остале нуклеарне операторе. Прецизније, важи следећа теорема (за више детаља погледати [35, Теорему 3.1.]).

Теорема 1.3.20. *Нека је $A = \sum_{n=1}^\infty s_n(A) e_n \otimes f_n^* \in \mathcal{C}_1(\mathcal{H})$. Тада за сваку о.н.б. $(h_n)_{n=1}^\infty$ важи да је $\sum_{n=1}^\infty |\langle A h_n, h_n \rangle| < +\infty$. Пресликавање $\text{tr}: \mathcal{C}_1(\mathcal{H}) \rightarrow \mathbb{C}$ дајмо изразом*

$$\text{tr}(A) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \langle A h_n, h_n \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} s_n(A) \langle e_n, f_n \rangle \tag{1.3.7}$$

*је добро дефинисано (не зависи од избора о.н.б.) и назива се **трагом** нуклеарног оператора A . Шљавице, $\text{tr} \in (\mathcal{C}_1(\mathcal{H}))^*$ и важи да је $\|\text{tr}\|_{(\mathcal{C}_1(\mathcal{H}))^*} = 1$, тј. да је $|\text{tr}(A)| \leq \|A\|_1$, за свако $A \in \mathcal{C}_1(\mathcal{H})$. Додајмо, за свако $A \in \mathcal{C}_1(\mathcal{H})$ и $B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ важи да је $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$.*

На основу Теореме 1.3.19, следи да се норма трага достиже на свим позитивним нуклеарним операторима, тј. важи да је $\text{tr}(A) = \|A\|_1$, за свако $0 \leq A \in \mathcal{C}_1(\mathcal{H})$. Као што ћемо сада видети, појам трага ће бити кључан за описивање ограничених линеарних функционала на с.н. идеалима. Слично као и у Теорему 1.2.17, важи тврђење које даје везу између дуалних идеала и адјунговане с.н. функције. Тачније, важи следећа

Теорема 1.3.21. Нека су Φ и Φ^* међусобно адјунговане с.н. функције. Тада, из $A \in \mathfrak{C}_\Phi(\mathcal{H})$ и $B \in \mathfrak{C}_{\Phi^*}(\mathcal{H})$ следи да је $AB \in \mathfrak{C}_1(\mathcal{H})$ и важи неједнакост $\|AB\|_1 \leq \|A\|_\Phi \|B\|_{\Phi^*}$. Штавише, за свако $B \in \mathfrak{C}_{\Phi^*}(\mathcal{H})$, пресликавање $A \mapsto \text{tr}(AB)$ је један ограничени линеаран функционал на $\mathfrak{C}_\Phi(\mathcal{H})$ чија је норма једнака $\|B\|_{\Phi^*}$. Ако је $\Phi^* \sim \ell^\infty$ (или еквивалентно $\Phi \sim \ell^1$), онда је сваки ограничени линеаран функционал на $\mathfrak{C}_\Phi^{(\circ)}(\mathcal{H})$ овог облика, тј. $(\mathfrak{C}_\Phi^{(\circ)}(\mathcal{H}))^* \cong \mathfrak{C}_{\Phi^*}(\mathcal{H})$ (изометрички). Посебно, простор $\mathfrak{C}_\Phi(\mathcal{H})$ је рефлексиван ако су обе с.н. функције Φ и Φ^* мононормализујуће. У случају када је $\Phi \sim \ell^1$, важи да је $(\mathfrak{C}_\Phi(\mathcal{H}))^* \cong \mathfrak{B}_{\Phi^*}(\mathcal{H})$.

Доказ претходне теореме је могуће наћи у [35, Теорема 3.2.]. Из наведеног изометричног изоморфизма, тј. формуле за норму функционала, следи да је

$$\|A\|_\Phi = \sup_{0 \neq B \in \mathfrak{C}_{\Phi^*}^{(\circ)}(\mathcal{H})} \frac{|\text{tr}(AB)|}{\|B\|_{\Phi^*}}, \quad (1.3.8)$$

за сваку с.н. функцију Φ која није еквивалентна са ℓ^1 и свако $A \in \mathfrak{C}_\Phi(\mathcal{H})$. У случају када је $\Phi \sim \ell^1$ такође важи формула (1.3.8), што се види из изометричког изоморфизма $(\mathfrak{C}_\Phi(\mathcal{H}))^* \cong \mathfrak{B}_{\Phi^*}(\mathcal{H})$, и чињенице да је норму вектора могуће изразити преко функционала (последича теореме Хан-Банаха), као и чињенице да је $\Phi^* \sim \ell^\infty$, па мора бити мононормализујућа. У оба случаја, за свако $A \in \mathfrak{C}_\Phi(\mathcal{H})$, функција $X \mapsto \frac{|\text{tr}(AX)|}{\|X\|_{\Phi^*}}$ је непрекидна на $\mathfrak{C}_{\Phi^*}^{(\circ)}(\mathcal{H}) \setminus \{0\}$, па се супремум може узети и по $\mathfrak{K}(\mathcal{H}) \setminus \{0\}$, тј. по густом подскупу. Дакле, важи наредна

Лема 1.3.22. Нека је Φ произвољна с.н. функција и $A \in \mathfrak{C}_\Phi(\mathcal{H})$. Тада важи следећа једнакост

$$\|A\|_\Phi = \sup_{0 \neq K \in \mathfrak{K}(\mathcal{H})} \frac{|\text{tr}(AK)|}{\|K\|_{\Phi^*}}. \quad (1.3.9)$$

У случају када је $\Phi \sim \ell^\infty$, припадност с.н. идеалу $\mathfrak{C}_\Phi(\mathcal{H})$ је могуће, по угледу на претходну лему, испитати преко оператора коначног ранга.

Тврђење 1.3.23. Нека је Φ с.н. функција нееквивалентна минималној и $A \in \mathfrak{B}(\mathcal{H})$. Тада, $A \in \mathfrak{C}_\Phi(\mathcal{H})$ ако је

$$\sup_{0 \neq K \in \mathfrak{K}(\mathcal{H})} \frac{|\text{tr}(AK)|}{\|K\|_{\Phi^*}} < +\infty.$$

Доказ претходног тврђења се може наћи у [11, Лема 12.1.] у трећем поглављу. Напоменимо да претходно тврђење није тачно у случају када је $\Phi \sim \ell^\infty$. Наиме, ако је $\Phi = \ell^\infty$ (сличан закључак важи за све норме еквивалентне минималној), тада имамо да за свако $0 \neq K \in \mathfrak{K}(\mathcal{H})$ важи да је $\frac{|\text{tr}(K)|}{\|K\|_1} \leq 1$, па је наведени супремум коначан, али оператор I не припада идеалу $\mathfrak{C}_\infty(\mathcal{H})$. Користећи Лему 1.3.22 ћемо сада доказати слабу полунепрекидност одоздо норме $\|\cdot\|_\Phi$. Тачније, важи следеће

Тврђење 1.3.24. Нека је Φ произвољна с.н. функција и нека је $(X_n)_{n=1}^\infty$ низ оператора у $\mathfrak{C}_\Phi(\mathcal{H})$ који слабо тежи ка $X \in \mathfrak{C}_\Phi(\mathcal{H})$. Тада важи неједнакост

$$\|X\|_\Phi = \|w - \lim_{n \rightarrow \infty} X_n\|_\Phi \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|X_n\|_\Phi. \quad (1.3.10)$$

Доказ. Нека је $0 \neq K \in \mathfrak{K}(\mathcal{H})$ произвољан. Из формуле (1.3.9) следи да за свако $n \in \mathbb{N}$ важи неједнакост $\frac{|\operatorname{tr}(X_n K)|}{\|K\|_{\Phi^*}} \leq \|X_n\|_{\Phi}$. Нека је $K = \sum_{k=1}^m s_k(K) e_k \otimes f_k^*$. Сада, из формуле (1.3.11) добијамо да важи једнакост $\operatorname{tr}(X_n K) = \sum_{k=1}^m s_n(K) \langle X_n e_k, f_k \rangle$, као и да је $\operatorname{tr}(XK) = \sum_{k=1}^m s_n(K) \langle X e_k, f_k \rangle$. Како је $w\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} X_n = X$, следи да је $\lim_{n \rightarrow \infty} \langle X_n e_k, f_k \rangle = \langle X e_k, f_k \rangle$, за свако $k \in \{1, 2, \dots, m\}$, па добијамо да је $\lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{tr}(X_n K) = \operatorname{tr}(XK)$. Дакле, важи да је

$$\frac{|\operatorname{tr}(XK)|}{\|K\|_{\Phi^*}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|\operatorname{tr}(X_n K)|}{\|K\|_{\Phi^*}} \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|X_n\|_{\Phi}.$$

Коначан закључак сада следи узимањем супремума по $K \in \mathfrak{K}(\mathcal{H}) \setminus \{0\}$. $\square$

У Теореме 1.3.20 смо видели да tr има својство комутативности, тј. да је $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$, за свако $A \in \mathfrak{B}(\mathcal{H})$ и $B \in \mathfrak{C}_1(\mathcal{H})$. Ово својство важи и у општијем случају, тј. важи

Теорема 1.3.25. *Нека су $A \in \mathfrak{B}(\mathcal{H})$ и $B \in \mathfrak{C}_{\infty}(\mathcal{H})$ такви да су $AB, BA \in \mathfrak{C}_1(\mathcal{H})$. Тада важе једнакости*

$$\operatorname{tr}(AB) = \sum_{n=1}^{+\infty} s_n(B) \langle A e_n, f_n \rangle = \operatorname{tr}(BA), \quad (1.3.11)$$

где је $B = \sum_{n=1}^{\infty} s_n(B) e_n \otimes f_n^*$.

Доказ претходне теореме се може наћи у [11, Теорема 8.2]. Њени услови су посебно задовољени када је $A \in \mathfrak{C}_{\Phi}(\mathcal{H})$ и $B \in \mathfrak{C}_{\Phi^*}(\mathcal{H})$, што следи директно из Теореме 1.3.21. У случају када је $\Phi = \ell^2$ важи да је и $\Phi^* = \ell^2$, па Теорема 1.3.25 тада има посебан значај. Идеал $\mathfrak{C}_2(\mathcal{H})$ се назива идеалом **Хилберт-Шмитових** оператора. Он се посебно издваја међу с.н. идеалима, јер је на њему могуће увести скаларни производ формулом

$$\langle A, B \rangle_{\mathfrak{C}_2(\mathcal{H})} \stackrel{\text{def}}{=} \operatorname{tr}(AB^*), \quad \text{за свако } A, B \in \mathfrak{C}_2(\mathcal{H}). \quad (1.3.12)$$

Са уведеним скаларним производом, простор $\mathfrak{C}_2(\mathcal{H})$ је један сепарабилан Хилбертов простор. За оператор $A \in \mathfrak{B}(\mathcal{H})$ важи да је Хилберт-Шмитов ако је

$$\|A\|_2^2 = \operatorname{tr}(AA^*) = \sum_{n=1}^{\infty} \|A e_n\|^2 = \sum_{m,n=1}^{\infty} |\langle A e_m, e_n \rangle|^2 < +\infty, \quad (1.3.13)$$

за сваку ортонормирану базу $(e_n)_{n=1}^{\infty}$.

За крај, подсетимо се да из Тврђења 1.2.14 следи да је за бинормализујући низ $\Pi = (\pi_n)_{n=1}^{\infty}$ с.н. функција Φ_{π} увек мононормализујућа, док је с.н. функција Φ_{Π} увек бинормализујућа. Сада, из Теорема 1.3.15 и 1.3.21 следи

Последица 1.3.26. *Нека је $\Pi = (\pi_n)_{n=1}^{\infty}$ бинормализујући низ. Тада је с.н. идеал $\mathfrak{C}_{\pi}(\mathcal{H})$ сепарабилан, док је с.н. идеал $\mathfrak{C}_{\Pi}(\mathcal{H})$ несепарабилан. Додајно, важи да је $(\mathfrak{C}_{\Pi}^{(\circ)}(\mathcal{H}))^* \cong \mathfrak{C}_{\pi}(\mathcal{H})$, као и $(\mathfrak{C}_{\pi}(\mathcal{H}))^* \cong \mathfrak{C}_{\Pi}(\mathcal{H})$.*

1.4 Теорија мере и интеграције у Банаховим просторима

У овом одељку, са X ћемо означавати Банахов простор док ћемо са X^* означавати његов (тополошки) дуал. У наставку дисертације, где се разматрају појмови везани за теорију Банахових простора, са $\langle \varphi^*, x \rangle$ ћемо означавати дејство функционала $\varphi^* \in X^*$ на вектор $x \in X$, уколико је недвосмислено да није у питању скаларни производ на Хилбертовим просторима. Такође, са $(\Omega, \mathfrak{M}, \mu)$ ћемо означавати простор са мером.

Векторске мере

У овом пододељку ћемо приказати основне појмове везане за мере које узимају вредности у Банаховим просторима. Докази свих наведених резултата се могу наћи у [4].

Дефиниција 1.4.1. Пресликавање $\nu: \mathfrak{M} \rightarrow X$ се назива **коначно адитивном векторском мером** ако за свака два дисјунктна скупа $E, F \in \mathfrak{M}$ важи да је $\nu(E \sqcup F) = \nu(E) + \nu(F)$. Ако, додатно, за сваки низ дисјунктних скупова $(E_n)_{n=1}^\infty$ из $\mathfrak{M}$ важи једнакост $\nu(\bigsqcup_{n=1}^\infty E_n) = \sum_{n=1}^\infty \nu(E_n)$, где ред конвергира у норми простора X , пресликавање ν називамо **пребројиво адитивном векторском мером**.

Напомена 1.4.2. Напоменимо да је претходни појам могуће увести и у случају када је $\mathfrak{M}$ само алгебра скупова на Ω . Међутим, како су главни резултати у дисертацији изведени само у случају σ -алгебри, теорију ћемо, зарад јасноће излагања, представити у складу са претходном дефиницијом.

Уколико кажемо само да је ν векторска мера, подразумевамо само коначну адитивност. Наведимо сада један пример пребројиво адитивне векторске мере.

Пример 1.4.3. Нека је $\mathfrak{M}_{[0,1]}$ σ -алгебра Лебегових подскупова од $[0, 1]$ и m Лебегова мера на $\mathfrak{M}_{[0,1]}$. За произвољно $T \in \mathcal{B}(L^1[0, 1], X)$, дефинишимо пресликавање $\nu: \mathfrak{M}_{[0,1]} \rightarrow X$ са $\nu_T(E) \stackrel{\text{def}}{=} T(\chi_E)$, за свако $E \in \mathfrak{M}_{[0,1]}$. Важи да је ν_T коначно адитивна, као и да је $\|\nu_T(E)\| \leq \|T\| \cdot \|\chi_E\|_{L^1[0,1]} = m(E) \cdot \|T\|$. Следи да за сваки низ $(E_n)_{n=1}^\infty$ дисјунктних скупова у $\mathfrak{M}_{[0,1]}$ важи

$$0 \leq \left\| \nu_T\left(\bigsqcup_{k=1}^\infty E_k\right) - \sum_{k=1}^n \nu_T(E_k) \right\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \nu_T\left(\bigsqcup_{k=n+1}^\infty E_k\right) \right\| \leq m\left(\bigsqcup_{k=n+1}^\infty E_k\right) \cdot \|T\| \rightarrow 0,$$

кад $n \rightarrow \infty$, одакле следи пребројива адитивност векторске мере ν_T .

Дефиниција 1.4.4. Нека је $\nu: \mathfrak{M} \rightarrow X$ векторска мера. Пресликавање $|\nu|: \mathfrak{M} \rightarrow [0, +\infty]$ дефинисано изразом

$$|\nu|(E) \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{\pi} \sum_{A \in \pi} \|\nu(A)\|, \quad \text{за свако } E \in \mathfrak{M},$$

где се супремум узима по свим коначним мерљивим дисјунктним разлагањима π скупа E , називамо **варијацијом** од ν . Ако је $|\nu|(\Omega) < +\infty$, кажемо да је ν **ограничене варијације**.

Није тешко показати да је варијација векторске мере монотона и коначно адитивна. Векторске мере дефинисане у Примеру 1.4.3 имају ограничену варијацију. Из неједнакости $\|\nu(E)\| \leq m(E) \cdot \|T\|$, директно следи да је и $|\nu|(E) \leq m(E) \cdot \|T\|$, за свако $E \in \mathfrak{M}_{[0,1]}$.

Дефиниција 1.4.5. Нека је $\nu: \mathfrak{M} \rightarrow X$ векторска мера. Пресликавање $\|\nu\|: \mathfrak{M} \rightarrow [0, +\infty]$ дефинисано изразом

$$\|\nu\|(E) \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{\|\varphi^*\|_{X^*} \leq 1} |\varphi^* \nu|(E), \quad \text{за свако } E \in \mathfrak{M},$$

где је $|\varphi^* \nu|$ тотална варијација комплексне мере $\varphi^* \nu: E \mapsto \varphi^*(\nu(E))$, називамо **полуваријацијом** од ν . Ако је $\|\nu\|(\Omega) < +\infty$, кажемо да је ν **ограничене полуваријације**.

Као и варијација, полуваријација је монотono пресликавање, али је за разлику од варијације само субадитивно. Такође, из дефиниција лако следи да је $\|\nu\|(E) \leq |\nu|(E)$, за свако $E \in \mathfrak{M}$, одакле следи да је свака векторска мера ограничене полуваријације такође и ограничене варијације. Да обратно не мора да важи, говори нам следећи

Пример 1.4.6. Нека је пресликавање $\nu: \mathfrak{M}_{[0,1]} \rightarrow L^\infty[0,1]$, дефинисано са $\nu(E) \stackrel{\text{def}}{=} \chi_E$, за свако $E \in \mathfrak{M}_{[0,1]}$. Тада, за сваки мерљив E строго позитивне мере, ако је $E = \bigsqcup_{k=1}^\infty E_k$ његово мерљиво разбијање, важи

$$\sum_{k=1}^\infty \|\nu(E_k)\|_\infty = \sum_{k=1}^{n-1} \|\chi_{E_k}\|_\infty + \|\chi_{\bigsqcup_{k=n}^\infty E_k}\|_\infty = n,$$

за свако $n \in \mathbb{N}$. Дакле, $\|\nu\|(E) = +\infty$, па ν није ограничене варијације. Да је полуваријација од ν коначна следи из наредног примера, када се за простор X узме $L^\infty[0,1]$ и за оператор T узме јединични оператор.

Пример 1.4.7. Нека је $T \in \mathcal{B}(L^\infty[0,1], X)$ и пресликавање $\nu: \mathfrak{M}_{[0,1]} \rightarrow X$ дефинисано са $\nu(E) \stackrel{\text{def}}{=} T(\chi_E)$, за свако $E \in \mathfrak{M}_{[0,1]}$. Нека је $\varphi^* \in X^*$ такав да је $\|\varphi^*\|_{X^*} \leq 1$. Ако је π произвољна мерљива подела интервала $[0,1]$, важи да је

$$\begin{aligned} \sum_{E \in \pi} |\varphi^* \nu(E)| &= \sum_{E \in \pi} |\varphi^* T \chi_E| = \sum_{E \in \pi} e^{-i \arg(\varphi^* T \chi_E)} \varphi^* T \chi_E \\ &= \varphi^* T \left(\sum_{E \in \pi} e^{-i \arg(\varphi^* T \chi_E)} \chi_E \right) \leq \|T^* \varphi^*\|_{(L^\infty[0,1])^*} \left\| \sum_{E \in \pi} e^{-i \arg(\varphi^* T \chi_E)} \chi_E \right\|_\infty \leq \|T^*\| = \|T\|. \end{aligned}$$

Узимањем супремума по свим разбијањима π добијамо да је $|\varphi^* \nu|([0,1]) \leq \|T\|$. Коначно, узимањем супремума по свим $\|\varphi^*\| \leq 1$ добијамо да је $\|\nu\|([0,1]) \leq \|T\| < +\infty$, тј. да векторска мера ν има коначну полуваријацију.

Рачунање полуваријације по дефиницији може представљати проблем уколико X има незгодан дуални простор. Наредно тврђење нам даје алат да то урадимо, без познавања простора X^* .

Тврђење 1.4.8. Нека је $\nu: \mathfrak{M} \rightarrow X$ векторска мера. Тада, за свако $E \in \mathfrak{M}$ важи једнакост

$$\|\nu\|(E) = \sup \left\| \sum_{k=1}^n \lambda_k \nu(E_k) \right\|, \quad (1.4.1)$$

где се супремум узима по свим коначним мерљивим дисјунктним разбијањима скупа E и по свим коначним скуповима комплексних бројева модула ≤ 1 . Додајмо, важи да је

$$\sup_{E \supseteq F \in \mathfrak{M}} \|\nu(F)\| \leq \|\nu\|(E) \leq 4 \cdot \sup_{E \supseteq F \in \mathfrak{M}} \|\nu(F)\|,$$

на основу чега закључујемо да је ν мера коначне полуваријације ако су јој вредности ограничene у X .

Због последњег закључка у претходном тврђењу, векторске мере ограничene полуваријације називамо **ограниченим векторским мерама**. Као што ћемо сада видети, могуће је једноставно увести интеграцију ограничених функција по ограниченој векторској мери. Означимо са $B(\Omega, \mathfrak{M})$ простор свих ограничених мерљивих функција на Ω , нормиран са униформном нормом. На потпростору простих мерљивих функција дефинишимо оператор $T_\nu(\sum_{k=1}^n \lambda_k \chi_{E_k}) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=1}^n \lambda_k \nu(E_k)$. Могуће је показати да је на овај начин добро дефинисан линеаран оператор који слика простор простих мерљивих функција у X , као и да је

$$\|T_\nu f\| = \left\| \sum_{k=1}^n \lambda_k \nu(E_k) \right\| = \|f\|_\infty \left\| \sum_{k=1}^n \frac{\lambda_k}{\|f\|_\infty} \nu(E_k) \right\| \leq \|f\|_\infty \|\nu\|(\Omega), \quad (1.4.2)$$

према формули (1.4.1), за сваку просту $f = \sum_{k=1}^n \lambda_k \chi_{E_k}$, где су скупови $E_1, \dots, E_n$ међусобно дисјунктни. Дакле, оператор T_ν је ограничен, па се може по непрекидности (потпростор свих простих функција је густ у $B(\Omega, \mathfrak{M})$) продужити на цео простор $B(\Omega, \mathfrak{M})$ без увећања нормe (означаваћемо га исто са T_ν), за коју због једнакости (1.4.1) важи да је $\|T_\nu\| = \|\nu\|(\Omega)$. Тако дефинисан оператор другачије означавамо и са $\int_\Omega f d\nu \stackrel{\text{def}}{=} T_\nu(f)$. Иста конструкција важи и за оператор интеграције по векторској мери, дефинисан на простору $L^\infty(\Omega, \mathfrak{M}, \mu)$, као проширење са простора $\Pi(\Omega, \mathfrak{M}, \mu)$ (простор класа простих мерљивих функција). С обзиром да се овде ради о простору класа μ с.с. једнаких функција, потребно је да се векторска мера ν анулира на скуповима μ мере 0.

Теорема 1.4.9. Нека је $(\Omega, \mathfrak{M}, \mu)$ простор са мером и $\nu: \mathfrak{M} \rightarrow X$ ограничена векторска мера која се анулира на скуповима μ -мере нула. Тада је на $L^\infty(\Omega, \mathfrak{M}, \mu)$ добро дефинисан оператор интеграције по векторској мери ν , у ознаци $\int_\Omega f d\nu \in X$, за свако $f \in L^\infty(\Omega, \mathfrak{M}, \mu)$, при чему је $\int_\Omega \chi_E d\nu = \nu(E)$ за свако $E \in \mathfrak{M}$.

Наредно битно својство векторске мере, које је јаче од анулирања на скуповима мере нула, се природно јавља у теорији слабе интеграције у Банаховим просторима.

Дефиниција 1.4.10. Нека је $(\Omega, \mathfrak{M}, \mu)$ простор са мером и нека је $\nu: \mathfrak{M} \rightarrow X$ једна векторска мера. За ν кажемо да је μ -непрекидна ако важи да је

$$\lim_{\mu(E) \rightarrow 0} \nu(E) = 0,$$

тј. ако за свако $\varepsilon > 0$ постоји $\delta > 0$ такво да за свако $E \in \mathfrak{M}$ важи да из $\mu(E) < \delta$ следи да је $\|\nu(E)\| < \varepsilon$.

Напоменимо и да су услови μ -непрекидности векторске мере ν и анулирање на скуповима μ -мере 0 еквивалентни у случају када је мера μ коначна и када је векторска мера ν пребројиво адитивна (видети [4, Теорема I.2.1.]).

Слаба интеграција у Банаховим просторима

У овом пододељку наводимо основе теорије слабе интеграције у Банаховим просторима. Више детаља о овој теми, као и доказе наведених тврђења, је могуће наћи у другом поглављу у [4].

Дефиниција 1.4.11. За функцију $f: \Omega \rightarrow X$ кажемо да је слабо мерљива (интеграбилна) ако за свако $x^* \in X^*$ важи да је пресликавање $t \mapsto \langle x^*, f(t) \rangle$ мерљиво (интеграбилно).

Наредна теорема представља основу у теорији слабе интеграције вектор-вредносних функција.

Теорема 1.4.12. Нека је $f: \Omega \rightarrow X$ слабо интеграбилна. Тада за свако $E \in \mathfrak{M}$ постоји $x_E^{**} \in X^{**}$ такво да за свако $x^* \in X^*$ важи

$$\langle x_E^{**}, x^* \rangle = \int_E \langle x^*, f(t) \rangle d\mu(t).$$

За функцију f тада кажемо и да је Данфорд интеграбилна, док x_E^{**} називамо Данфорд-овим интегралом функције f по скупу E .

Код слабо интеграбилних функција се посебно издвајају оне којима интеграл „не бежи у други дуал”.

Дефиниција 1.4.13. Нека је $f: \Omega \rightarrow X$ слабо интеграбилна, таква да за свако $E \in \mathfrak{M}$ постоји $x_E \in X$ такво да за свако $x^* \in X^*$ важи

$$\langle x^*, x_E \rangle = \int_E \langle x^*, f(t) \rangle d\mu(t).$$

Тада кажемо да је функција f Петис интеграбилна и означавамо њен Петисов интеграл x_E на E са $(P) - \int_E f d\mu$.

На простору слабо интеграбилних функција се природно уводи следећа релација еквиваленције.

Дефиниција 1.4.14. Кажемо да су две слабо мерљиве функције $f, g: \Omega \rightarrow X$ слабо еквивалентне ако за свако $x^* \in X^*$ важи да је $\langle x^*, f(t) \rangle = \langle x^*, g(t) \rangle$ за с.с. $t \in \Omega$.

У општем случају, слабо еквивалентне функције не морају бити једнаке скоро свуда. Ипак, за широку класу простора то јесте тачно. Прецизније важи

Тврђење 1.4.15. Уколико је простор X^* сепарабилан, класе еквиваленције слабо еквивалентних функција су тривијалне, тј. ако за свако $x^* \in X^*$ важи да је $\langle x^*, f(t) \rangle = 0$ с.с. онда је $f(t) = 0$ с.с.

На основу доказа Теореме 1.4.12, за сваку слабо интеграбилну функцију $f: \Omega \rightarrow X$, израз

$$\sup_{x^* \in B(X^*)} \int_{\Omega} |\langle x^*, f(t) \rangle| d\mu(t) \tag{1.4.3}$$

је коначан и директно се проверава да задаје норму на следећем простору.

Дефиниција 1.4.16. Простор класа еквиваленције слабо еквивалентних Петис интегралних функција означавамо са $\mathbb{P}(\Omega, \mathfrak{M}, \mu, X)$, а норму задату изразом (1.4.3) означавамо са $\|f\|_{\mathbb{P}}$.

Ако је простор X рефлексиван, онда је свака слабо мерљива функција Петис интегрална. Петис интегралне функције су у директној вези са пребројиво адитивним векторским мерама. О једној од тих повезаности нам говори следећа

Теорема 1.4.17. Нека је $f \in \mathbb{P}(\Omega, \mathfrak{M}, \mu, X)$. Тада је пресликавање $\nu_f: \mathfrak{M} \rightarrow X$ дефинисано са

$$\nu_f(E) \stackrel{\text{def}}{=} (P) - \int_E f d\mu,$$

за свако $E \in \mathfrak{M}$, једна пребројиво адитивна μ -непреривна векторска мера на $(\Omega, \mathfrak{M})$.

У случају када посматрамо функције које узимају вредности у дуалном простору, могуће је разматрати мерљивост и интегралност на следећи начин.

Дефиниција 1.4.18. Кажемо да је функција $f: \Omega \rightarrow X^*$ слабо* мерљива (интегрална) ако за свако $x \in X$ важи да је пресликавање $t \mapsto \langle f(t), x \rangle$ мерљиво (интегрално).

Слично као и у случају слабе интегралности, испоставља се да постоји одговарајући интеграл. За разлику од Данфордског интеграла, слаби* интеграл остаје у простору у коме функција узима вредност. Прецизније, важи

Теорема 1.4.19. Нека је $f: \Omega \rightarrow X^*$ слабо* интегрална. Тада за свако $E \in \mathfrak{M}$ постоји $x_E^* \in X^*$ такво да за свако $x \in X$ важи

$$\langle x_E^*, x \rangle = \int_E \langle f(t), x \rangle d\mu(t).$$

За функцију f сада кажемо и да је Гелфанд интегрална, док x_E^* називамо Гелфандовим интегралом функције f по скупу E и означавамо са $(G) - \int_E f d\mu$.

Поред тога што нема „бежања” у други дуал, слаба* мерљивост и интегралност су по правилу много згоднији за рад и проверу, с обзиром да дуални простор може бити јако компликован (као што је случај са простором $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, који је нама од највећег значаја).

Дефиниција 1.4.20. Кажемо да су две слабо* мерљиве функције $f, g: \Omega \rightarrow X^*$ слабо* еквивалентне, ако за свако $x \in X$ важи да је $\langle f(t), x \rangle = \langle g(t), x \rangle$ за с.с. $t \in \Omega$.

Ни слабо* еквивалентне функције не морају бити једнаке скоро свуда. Аналогно Тврђењу 1.4.15 важи наредно

Тврђење 1.4.21. Уколико је простор X сепарабилан, класе еквиваленције слабо* еквивалентних функција су тривијалне, тј. ако за свако $x \in X$ важи да је $\langle f(t), x \rangle = 0$ за с.с. $t \in \Omega$, онда је $f(t) = 0$ с.с.

Доказ. Нека је $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ густ у X . Следи да за свако $n \in \mathbb{N}$ постоји $E_n \in \mathfrak{M}$ мере 0, такав да је $\langle f(t), x_n \rangle = 0$ ван E_n . Тада је $E \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathfrak{M}$ такође мере 0 и важи да је $\langle f(t), x_n \rangle = 0$ за свако $t \in X \setminus E$ и свако $n \in \mathbb{N}$. Из непрекидности функционала $f(t)$ сада добијамо да за свако $t \in X \setminus E$ важи да је $f(t) = 0$, чиме је доказ завршен. $\square$

Слично као и у случају слабе интеграбилности, за сваку Гелфанд интеграбилну $f: \Omega \rightarrow X^*$ важи да је израз

$$\|f\|_{\mathbb{G}} \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{x \in B(X)} \int_{\Omega} |\langle f(t), x \rangle| d\mu(t) \quad (1.4.4)$$

коначан на основу Теореме 1.4.19 и важи да задаје норму на наредном простору.

Дефиниција 1.4.22. Простор класа еквиваленције слабо* еквивалентних Гелфанд интеграбилних функција, нормиран са (1.4.4), означавамо са $\mathbb{G}(\Omega, \mathfrak{M}, \mu, X)$.

Норме Петисовог и Гелфандовог интеграла по произвољном мерљивом скупу су униформно ограничене. Прецизније, за свако $f \in \mathbb{P}(\Omega, \mathfrak{M}, \mu, X)$ и свако $E \in \mathfrak{M}$ важи

$$\begin{aligned} \left\| (P) - \int_E f d\mu \right\|_X &= \sup_{\|x^*\|_{X^*} \leq 1} \left| \left\langle x^*, \int_E f d\mu \right\rangle \right| = \sup_{\|x^*\|_{X^*} \leq 1} \left| \int_E \langle x^*, f(t) \rangle d\mu(t) \right| \\ &\leq \sup_{\|x^*\|_{X^*} \leq 1} \int_E |\langle x^*, f(t) \rangle| d\mu(t) \leq \sup_{\|x^*\|_{X^*} \leq 1} \int_{\Omega} |\langle x^*, f(t) \rangle| d\mu(t) = \|f\|_{\mathbb{P}}, \end{aligned} \quad (1.4.5)$$

док за свако $f \in \mathbb{G}(\Omega, \mathfrak{M}, \mu, X^*)$ и свако $E \in \mathfrak{M}$ важи

$$\begin{aligned} \left\| (G) - \int_E f d\mu \right\|_{X^*} &= \sup_{\|x\|_X \leq 1} \left| \left\langle \int_E f d\mu, x \right\rangle \right| = \sup_{\|x\|_X \leq 1} \left| \int_E \langle f(t), x \rangle d\mu(t) \right| \\ &\leq \sup_{\|x\|_X \leq 1} \int_E |\langle f(t), x \rangle| d\mu(t) \leq \sup_{\|x\|_X \leq 1} \int_{\Omega} |\langle f(t), x \rangle| d\mu(t) = \|f\|_{\mathbb{G}}. \end{aligned} \quad (1.4.6)$$

Ако је Банахов простор X рефлексиван, тада увек важи да је свака слабо* интеграбилна функција и слабо интеграбилна (па самим тим и Петис интеграбилна). У наредној дефиницији уводимо својство простора X које нам омогућава да претходни закључак уопштимо.

Дефиниција 1.4.23. Кажемо да је Банахов простор X слабо* секвенцијално густ у X^{**} ако за свако $x^{**} \in X^{**}$ постоји низ $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ у X такав да за свако $x^* \in X^*$ важи да је $\lim_{n \rightarrow \infty} \langle x^*, x_n \rangle = \langle x^{**}, x^* \rangle$.

Свака слабо мерљива функција $f: \Omega \rightarrow X^*$ је и слабо* мерљива. Услов из Дефиниције 1.4.23 нам даје да важи и обрат, тј.

Лема 1.4.24. Нека је X слабо* секвенцијално густ у X^{**} . Тада је свака слабо* мерљива функција $f: \Omega \rightarrow X^*$ такође и слабо мерљива.

Доказ. Нека је $f: \Omega \rightarrow X^*$ слабо* мерљива и нека је $x^{**} \in X^{**}$ произвољан. Из претпоставки следи да постоји низ $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ такав да за свако $x^* \in X^*$ важи да је $\lim_{n \rightarrow \infty} \langle x^*, x_n \rangle = \langle x^{**}, x^* \rangle$. Дакле, за свако $t \in \Omega$ важи да је $\lim_{n \rightarrow \infty} \langle f(t), x_n \rangle = \langle x^{**}, f(t) \rangle$. Из слабе* мерљивости функције f следи да су пресликавања $t \mapsto \langle f(t), x_n \rangle$ мерљива за свако $n \in \mathbb{N}$, па је и пресликавање $t \mapsto \langle x^{**}, f(t) \rangle$ такође мерљиво као лимес мерљивих, чиме је доказана тражена слаба мерљивост функције f . $\square$

Лема 1.4.25. Нека је X сејарабилан Банахов простор који је слабо* секвенцијално густ у X^{**} . Тада је свака слабо* интеграбилна функција $f: \Omega \rightarrow X^*$ и слабо интеграбилна и важи

$$\sup_{x^{**} \in B(X^{**})} \int_{\Omega} |\langle x^{**}, f(t) \rangle| d\mu(t) = \|f\|_{\mathbb{G}}. \quad (1.4.7)$$

Доказ. За $f \in \mathbb{G}(\Omega, \mathfrak{M}, \mu, X^*)$ важи неједнакост $\|f\|_{\mathbb{G}} \leq \sup_{x^{**} \in B(X^{**})} \int_{\Omega} |\langle x^{**}, f(t) \rangle| d\mu(t)$, јер је супремум десног израза узет по већем скупу. Да бисмо доказали обратну неједнакост, узмимо произвољно $x^{**} \in B(X^{**})$. На основу претпоставке и Напомене после [26, Последица 3.], постоји низ $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ у $B(X)$ који конвергира ка x^{**} у слабој* топологији. Дакле, за свако $t \in \Omega$, важи да је $\lim_{n \rightarrow \infty} \langle f(t), x_n \rangle = \langle x^{**}, f(t) \rangle$. Уз помоћ Фатуове леме добијамо

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |\langle x^{**}, f(t) \rangle| d\mu(t) &\leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |\langle f(t), x_n \rangle| d\mu(t) \\ &\leq \sup_{n \in \mathbb{N}} \int_{\Omega} |\langle f(t), x_n \rangle| d\mu(t) \leq \sup_{x \in B(X)} \int_{\Omega} |\langle f(t), x \rangle| d\mu(t) = \|f\|_{\mathbb{G}}. \end{aligned}$$

Коначан закључак сада следи узимањем супремума по $x^{**} \in B(X^{**})$. $\square$

Напомена 1.4.26. Ако је додатно мера μ коначна, свака слабо* интеграбилна функција је и Петис интеграбилна, као што се може видети у [31] и [30, Теореме 5]. Дакле, простори $\mathbb{P}(\Omega, \mathfrak{M}, \mu, X^*)$ и $\mathbb{G}(\Omega, \mathfrak{M}, \mu, X^*)$ се поклапају у том случају (као нормирани простори, на основу Леме 1.4.25). Коначност мере μ је овде неопходна због примене Виталијеве теореме о конвергенцији у [25, Теореме 1].

Слабо* интеграција $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ -вредносних функција

У овом пододељку се бавимо оператор-вредносним (о.в.) функцијама са вредностима у $\mathcal{B}(\mathcal{H})$. Како, на основу Теореме 1.3.21, важи изоморфизам $(\mathcal{C}_1(\mathcal{H}))^* \cong \mathcal{B}(\mathcal{H})$, оператор-вредносна функција $\mathcal{A}: \Omega \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$ ће бити слабо* мерљива (интеграбилна) акко је за свако $Y \in \mathcal{C}_1(\mathcal{H})$ пресликавање $t \mapsto \text{tr}(\mathcal{A}_t Y)$ мерљиво (интеграбилно), где у случају интеграбилности важи једнакост

$$\text{tr} \left(\int_{\Omega} \mathcal{A}_t d\mu(t) Y \right) = \int_{\Omega} \text{tr}(\mathcal{A}_t Y) d\mu(t), \quad \text{за свако } Y \in \mathcal{C}_1(\mathcal{H}). \quad (1.4.8)$$

У наставку дисертације ћемо користити искључиво наредну битну карактеризацију, значајно оперативнију и лакшу за проверу него (1.4.8).

Лема 1.4.27. *Оператор-вредносна функција $\mathcal{A}: \Omega \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$ је слабо* мерљива (интеграбилна) акко за све $f, g \in \mathcal{H}$ важи да је скаларно пресликавање $t \mapsto \langle \mathcal{A}_t f, g \rangle$ мерљиво (интеграбилно).*

Доказ. Сваки једнодимензионалан оператор $f \otimes g^*$ је у $\mathcal{C}_1(\mathcal{H})$ и важи $\text{tr} \mathcal{A}_t(f \otimes g^*) = \text{tr}(\mathcal{A}_t f \otimes g^*) = \langle \mathcal{A}_t f, g \rangle$, па мерљивост (интеграбилност) пресликавања $t \rightarrow \text{tr}(\mathcal{A}_t Y)$ повлачи слабо* мерљивост (интеграбилност).

Обратно, ако су сва пресликавања $t \mapsto \langle \mathcal{A}_t f, g \rangle$ мерљива, тада за свако $Y \in \mathcal{C}_1(\mathcal{H})$ чији је Шмитов развој $Y = \sum_{n=1}^{\infty} s_n(Y) f_n \otimes e_n^*$, важи

$$\text{tr}(\mathcal{A}_t Y) = \sum_{n=1}^{\infty} s_n(Y) \langle \mathcal{A}_t f_n, e_n \rangle. \quad (1.4.9)$$

Због апсолутне сумабилности реда у (1.4.9) (која важи јер је $Y \in \mathcal{C}_1(\mathcal{H})$) добијамо да је $\text{tr}(\mathcal{A}_t Y)$ мерљива као тачка по тачка лимес мерљивих функција.

Када су сва пресликавања $t \mapsto \langle \mathcal{A}_t f, g \rangle$ додатно и интеграбилна, да би доказали интеграбилност пресликавања $t \mapsto \text{tr}(\mathcal{A}_t Y)$ довољно је да докажемо да је пресликавање $\phi: \mathcal{H} \times \mathcal{H} \rightarrow L^1(\Omega, \mu)$, дефинисано са

$$\phi(f, g) = \langle \mathcal{A}_t f, g \rangle, \quad \text{за свако } t \in \Omega \text{ и све } f, g \in \mathcal{H} \quad (1.4.10)$$

једно ограничено сесквилинеарно пресликавање. Одатле, на основу једнакости (1.4.9), добијамо да је пресликавање $t \mapsto \text{tr}(\mathcal{A}_t Y)$ тачка по тачка лимес од $L^1(\Omega, \mu)$ —апсолутно сумабилног реда (због $\sum_{n=1}^{\infty} s_n(Y) < +\infty$), па је самим тим и интеграбилно.

Доказаћемо да је ϕ затворено линеарно пресликавање по обе променљиве. Фиксирајмо $g \in \mathcal{H}$ и дефинишимо $\mathcal{J}_g: \mathcal{H} \rightarrow L^1(\Omega, \mu)$ са $\mathcal{J}_g f(t) = \langle \mathcal{A}_t f, g \rangle$. Оператор $\mathcal{J}_g$ је линеаран и затворен јер $\|f_n - f\| + \|\mathcal{J}_g f_n - \mathcal{J}_g f\|_{L^1} \rightarrow 0$ за неке $f, f_n \in \mathcal{H}, n = 1, 2, \dots$ и $h \in L^1(\Omega, \mu)$, имплицира (преласком на одговарајући подниз уколико је потребно) да је $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{J}_g f_n(t) = h(t)$ за скоро свако $t \in \Omega$. За такве $t \in \Omega$, како је $\mathcal{A}_t$ ограничен оператор, такође важи да $\langle \mathcal{A}_t f_n, g \rangle \rightarrow \langle \mathcal{A}_t f, g \rangle$ кад $n \rightarrow \infty$. Дакле, $\mathcal{J}_g f(t) = h(t)$ за скоро свако $t \in \Omega$, па је на основу Теореме о Затвореном Графику (видети [34, Теорема 2.15.]) оператор $\mathcal{J}_g$ ограничен, тј. за неку константу $C_g < +\infty$ важи да је

$$\|\langle \mathcal{A}_t f, g \rangle\|_{L^1} = \|\mathcal{J}_g f\| \leq C_g \|f\|, \quad \text{за свако } f \in \mathcal{H}.$$

Аналогно, дефинишимо $\{\mathcal{I}_f\}_{f \in \mathcal{H}} \subseteq \mathcal{B}(\mathcal{H}, L^1(\Omega, \mu))$ са $\mathcal{I}_f g(t) = \langle \mathcal{A}_t^* g, f \rangle$, за свако $g \in \mathcal{H}$. Подфамилија оператора $\{\mathcal{I}_f\}_{\|f\| \leq 1}$ је тачка по тачка ограничена јер је

$$\sup_{\|f\| \leq 1} \|\mathcal{I}_f g\|_{L^1} = \sup_{\|f\| \leq 1} \|\langle \mathcal{A}_t f, g \rangle\|_{L^1} = \sup_{\|f\| \leq 1} \|\mathcal{J}_g f\| \leq C_g < +\infty, \quad \text{за свако } g \in \mathcal{H}.$$

На основу Принципа Униформне Ограничености (видети [34, Теорема 2.4.]) постоји константа $M := \sup_{\|f\| \leq 1} \|\mathcal{I}_f\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H}, L^1)} < +\infty$, одакле је

$$\sup_{\|f\|, \|g\| \leq 1} \|\langle \mathcal{A}_t f, g \rangle\|_{L^1} = \sup_{\|f\|, \|g\| \leq 1} \|\langle \mathcal{A}_t^* g, f \rangle\|_{L^1} \leq \sup_{\|f\| \leq 1} \|\mathcal{I}_f\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H}, L^1)} = M,$$

што је требало и доказати. $\square$

Напомена 1.4.28. Како је $\mathcal{H}$ сепарабилан, следи да је за сваку слабо* мерљиву о.в. функцију $\mathcal{A}: \Omega \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$ и $h \in \mathcal{H}$ пресликавање $t \mapsto \|\mathcal{A}_t h\| = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} |\langle \mathcal{A}_t h, e_n \rangle|^2}$, где је $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ о.н.б. у $\mathcal{H}$, такође мерљиво. Притом, ако је $\mathcal{A}$ слабо* интеграбилна, за свако $E \in \mathfrak{M}$ и $h \in \mathcal{H}$ важи

$$\begin{aligned} \left\| \left(\int_E \mathcal{A} d\mu \right) h \right\| &= \sup_{\|f\|=1} \left| \left\langle \left(\int_E \mathcal{A} d\mu \right) h, f \right\rangle \right| = \sup_{\|f\|=1} \left| \int_E \langle \mathcal{A}_t h, f \rangle d\mu(t) \right| \\ &\leq \int_E \sup_{\|f\|=1} |\langle \mathcal{A}_t h, f \rangle| d\mu(t) = \int_E \|\mathcal{A}_t h\| d\mu(t), \end{aligned} \quad (1.4.11)$$

при чему последњи интеграл не мора бити коначан. Додатно, ако $\{h_n : n \in \mathbb{N}\}$ густ у јединичној лопти од $\mathcal{H}$, добијамо да је и пресликавање $t \mapsto \|\mathcal{A}_t\| = \sup_{n \in \mathbb{N}} \|\mathcal{A}_t h_n\|$ такође мерљиво и да за свако $E \in \mathfrak{M}$ важи

$$\begin{aligned} \left\| \int_E \mathcal{A} d\mu \right\| &= \sup_{\|f\|=\|g\|=1} \left| \left\langle \left(\int_E \mathcal{A} d\mu \right) f, g \right\rangle \right| = \sup_{\|f\|=\|g\|=1} \left| \int_E \langle \mathcal{A}_t f, g \rangle d\mu(t) \right| \\ &\leq \sup_{\|f\|=\|g\|=1} \int_E |\langle \mathcal{A}_t f, g \rangle| d\mu(t) \leq \int_E \sup_{\|f\|=\|g\|=1} |\langle \mathcal{A}_t f, g \rangle| d\mu(t) = \int_E \|\mathcal{A}_t\| d\mu(t), \end{aligned}$$

при чему пресликавање $t \mapsto \|\mathcal{A}_t\|$ не мора бити интеграбилно.

Кроз наставак дисертације, уколико се не нагласи другачије, под слабо* мерљивошћу (интеграбилношћу) о.в. функције ћемо увек сматрати у смислу $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, тј. ако је пресликавање $t \mapsto \langle \mathcal{A}_t f, g \rangle$ мерљиво (интеграбилно). Гелфандов интеграл од $\mathcal{A} \in \mathbb{G}(\Omega, \mathfrak{M}, \mu, \mathcal{B}(\mathcal{H}))$ по $E \in \mathfrak{M}$ ћемо означавати са $\int_E \mathcal{A} d\mu$. Додатно, можемо израчунати Гелфандову норму преко сесквилинеарне форме. Прецизније

Тврђење 1.4.29. За $\mathcal{A} \in \mathbb{G}(\Omega, \mathfrak{M}, \mu, \mathcal{B}(\mathcal{H}))$ важи

$$\|\mathcal{A}\|_{\mathbb{G}} = \sup_{\|f\|=\|g\|=1} \int_{\Omega} |\langle \mathcal{A}_t f, g \rangle| d\mu(t). \quad (1.4.12)$$

Слично, за $\mathcal{A} \in \mathbb{P}(\Omega, \mathfrak{M}, \mu, \mathcal{C}_{\infty}(\mathcal{H}))$ важи

$$\|\mathcal{A}\|_{\mathbb{P}} = \sup_{\|f\|=\|g\|=1} \int_{\Omega} |\langle \mathcal{A}_t f, g \rangle| d\mu(t). \quad (1.4.13)$$

Доказ. Доказаћемо случај $\mathcal{A} \in \mathbb{G}(\Omega, \mathfrak{M}, \mu, \mathcal{B}(\mathcal{H}))$. За јединичне векторе $f, g \in \mathcal{H}$ важи $\|f \otimes g^*\|_1 = \|f\| \cdot \|g\| = 1$ и имамо

$$\int_{\Omega} |\operatorname{tr}(\mathcal{A}_t(f \otimes g^*))| d\mu(t) = \int_{\Omega} |\langle \mathcal{A}_t f, g \rangle| d\mu(t) \leq \|\mathcal{A}\|_{\mathbb{G}}.$$

Узимањем супремума по $\|f\| = \|g\| = 1$ добијамо неједнакост „ $\geq$ ” у (1.4.12). Обратно, нека је $Y = \sum_{n=1}^{+\infty} s_n(Y) e_n \otimes f_n^*$ нуклеаран оператор представљен у Шмитовом развоју где је $\|Y\|_1 = \sum_{n=1}^{+\infty} s_n(Y) \leq 1$. Тада је

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |\operatorname{tr}(\mathcal{A}_t Y)| d\mu(t) &= \int_{\Omega} \left| \sum_{n=1}^{+\infty} s_n(Y) \langle \mathcal{A}_t e_n, f_n \rangle \right| d\mu(t) \leq \sum_{n=1}^{+\infty} s_n(Y) \int_{\Omega} |\langle \mathcal{A}_t e_n, f_n \rangle| d\mu(t) \leq \\ &\sum_{n=1}^{+\infty} s_n(Y) \sup_{\|f\|=\|g\|=1} \int_{\Omega} |\langle \mathcal{A}_t f, g \rangle| d\mu(t) \leq \sup_{\|f\|=\|g\|=1} \int_{\Omega} |\langle \mathcal{A}_t f, g \rangle| d\mu(t). \end{aligned}$$

Узимањем супремума по $Y \in \mathcal{B}(\mathcal{C}_1(\mathcal{H}))$ добијамо супротну неједнакост. $\square$

Дефиниција 1.4.30. За слабо* мерљиву функцију $\mathcal{A}: \Omega \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$ кажемо да је **јако квадратно интеграбилна** ако за свако $h \in \mathcal{H}$ важи да је $\int_{\Omega} \|\mathcal{A}_t h\|^2 d\mu(t) < +\infty$. Простор свих таквих функција означавамо са $L_G^2(\Omega, \mu, \mathcal{B}(\mathcal{H}))$. Тај простор је нормиран са

$$\|\mathcal{A}\|_2 = \left\| \int_{\Omega} \mathcal{A}^* \mathcal{A} d\mu \right\|^{\frac{1}{2}} = \sup_{\|h\|=1} \sqrt{\int_{\Omega} \|\mathcal{A}_t h\|^2 d\mu(t)}.$$

Више информација о наведеном простору се могу наћи у [16]. У наставку дисертације ће нам највише требати специјалан случај простора $L_G^2(\Omega, \mu, \mathcal{B}(\mathcal{H}))$, када је мера Ω скуп природних бројева и мера μ бројачка.

Дефиниција 1.4.31. За низ оператора $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ у $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ кажемо да је **јако квадратно сумабилан (ј.к.с.)** ако за свако $h \in \mathcal{H}$ важи да је $\sum_{n=1}^{\infty} \|A_n h\|^2 < +\infty$. Простор свих таквих низова означаваћемо са $\ell_s^2(\mathcal{B}(\mathcal{H}))$.

За ј.к.с. фамилију $(A_n)_{n=1}^\infty$ важи да низ парцијалних сума $S_n := \sum_{k=1}^n A_k^* A_k$ слабо конвергира ка оператору $S := \sum_{n=1}^\infty A_n^* A_n$, тј. ка оператору чија је квадратна форма једнака $\langle Sh, h \rangle = \langle \sum_{n=1}^\infty A_n^* A_n h, h \rangle = \sum_{n=1}^\infty \|A_n h\|^2$, за свако $h \in \mathcal{H}$. Како је низ $(S_n)_{n=1}^\infty$ монотонно растући низ позитивних оператора, та конвергенција је додатно и јака (одатле и термин ј.к.с.). Потпростор свих ј.к.с. низова чија сума припада фиксираним идеалу $\mathfrak{C}_\Phi(\mathcal{H})$ означаваћемо са $\ell_s^2(\mathfrak{C}_\Phi(\mathcal{H}))$. Ј.к.с. фамилије оператора ће у наставку дисертације играти кључну улогу у конструкцији тзв. σ -елементарних оператора.

За крај одељка, доказујемо да слабо* интеграбилне о.в. функције индукују $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ -векторске мере по којима је могуће интегралити све есенцијално ограничене функције (тј. могуће је проширење по непрекидности са простора свих простих функција). Нека је $\mathcal{A} \in \mathbb{G}(\Omega, \mathfrak{M}, \mu, \mathcal{B}(\mathcal{H}))$ пресликавање. Тада пресликавање $\nu: \mathfrak{M} \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$, дефинисано са

$$\nu(E) \stackrel{\text{def}}{=} \int_E \mathcal{A} d\mu, \quad \text{за свако } E \in \mathfrak{M}, \quad (1.4.14)$$

представља једну (коначно адитивну) векторску меру. Испоставља се да таква векторска мера мора бити ограничена, тј. важи следеће

Тврђење 1.4.32. *Нека је $\mathcal{A} \in \mathbb{G}(\Omega, \mathfrak{M}, \mu, \mathcal{B}(\mathcal{H}))$. Тада векторска мера $\nu: \mathfrak{M} \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$, дефинисана изразом (1.4.14) има коначну полувариацiju и важи процена $\|\nu\|(\Omega) \leq \|\mathcal{A}\|_{\mathbb{G}}$.*

Доказ. Нека је $\Omega = \bigsqcup_{k=1}^n E_n$, произвољно коначно разбијање простора Ω на дисјунктну унију мерљивих подскупова и нека су $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ модула ≤ 1 . Тада, важи да је

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{k=1}^n \lambda_k \nu(E_k) \right\| &= \left\| \sum_{k=1}^n \lambda_k \int_{E_k} \mathcal{A} d\mu \right\| = \sup_{\|f\|=\|g\|=1} \left| \left\langle \left(\sum_{k=1}^n \lambda_k \int_{E_k} \mathcal{A} d\mu \right) f, g \right\rangle \right| \\ &= \sup_{\|f\|=\|g\|=1} \left| \sum_{k=1}^n \lambda_k \int_{E_k} \langle \mathcal{A}_t f, g \rangle d\mu(t) \right| \leq \sup_{\|f\|=\|g\|=1} \sum_{k=1}^n |\lambda_k| \int_{E_k} |\langle \mathcal{A}_t f, g \rangle| d\mu(t) \\ &\leq \sup_{\|f\|=\|g\|=1} \sum_{k=1}^n \int_{E_k} |\langle \mathcal{A}_t f, g \rangle| d\mu(t) = \sup_{\|f\|=\|g\|=1} \int_{\Omega} |\langle \mathcal{A}_t f, g \rangle| d\mu(t) = \|\mathcal{A}\|_{\mathbb{G}} < +\infty. \end{aligned}$$

Узимањем супремума по свим коначним мерљивим разбијањима простора Ω и свим коначним скуповима комплексних бројева модула ≤ 1 , на основу Тврђења 1.4.8 добијамо да је $\|\nu\|(\Omega) \leq \|\mathcal{A}\| < +\infty$, што је требало и доказати. $\square$

Приметимо да се горе дефинисана векторска мера анулира на скуповима μ -мере 0. Наиме, за свако $f, g \in \mathcal{H}$ важи да је

$$\langle \nu(E)f, g \rangle = \left\langle \left(\int_E \mathcal{A} d\mu \right) f, g \right\rangle = \int_E \langle \mathcal{A}_t f, g \rangle d\mu(t) = 0,$$

за сваки скуп $E \in \mathfrak{M}$ такав да је $\mu(E) = 0$. Сада, на основу Теореме 1.4.9 имамо да је добро дефинисан оператор интеграције по векторској мери (1.4.14) на простору $L^\infty(\Omega, \mathfrak{M}, \mu)$, тј. имамо ограничен линеаран оператор $T: L^\infty(\Omega, \mathfrak{M}, \mu) \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$, такав да за свако $f \in L^\infty(\Omega, \mathfrak{M}, \mu)$ важи

$$Tf = \int_{\Omega} f d\nu. \quad (1.4.15)$$

Специјално, за свако $E \in \mathfrak{M}$ важи да је $T(\chi_E) = \nu(E) = \int_E \mathcal{A} d\mu$. Додатно, из [4, Теорема I.13.] следи да је $\|T\| = \|\nu\|(\Omega) \leq \|\mathcal{A}\|_{\mathbb{G}}$.

1.5 Неједнакости Коши-Шварца и σ -елементарни трансформери

Дефиниција 1.5.1. За операторе $A, B \in \mathfrak{B}(\mathcal{H})$ дефинишемо оператор двостраног множења $A \otimes B: \mathfrak{B}(\mathcal{H}) \rightarrow \mathfrak{B}(\mathcal{H})$ са $(A \otimes B)X = AXB$, за свако $X \in \mathfrak{B}(\mathcal{H})$.

Приметимо да су класични оператори множења оператором $A \in \mathfrak{B}(\mathcal{H})$ слева и здесна само специјални случајеви оператора двостраног множења и једнаки су $A \otimes I$ и $I \otimes A$, редом. Оператори двостраног множења су градивни блокови елементарних трансформера, тј. пресликавања облика $X \mapsto \sum_{k=1}^n A_k X B_k$, индуковане коначним фамилијама $(A_k)_{k=1}^n$ и $(B_k)_{k=1}^n$ ограничених оператора на $\mathcal{H}$.

Дефиниција 1.5.2. За фамилију оператора $(\mathcal{A}_t)_{t \in \Omega}$ у $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$ кажемо да се састоји од међусобно комутирајућих нормалних оператора (м.к.н.о.) ако за свако $t, s \in \Omega$ важи да је $\mathcal{A}_t^* \mathcal{A}_s = \mathcal{A}_s \mathcal{A}_t^*$.

Доказ наредне теореме се може наћи у [14, Теорема 2.2].

Теорема 1.5.3. За ј.к.с. фамилије $(A_n)_{n=1}^\infty$ и $(B_n)_{n=1}^\infty$ оператора на $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$ које су м.к.н.о. важи

$$\left\| \sum_{n=1}^\infty A_n X B_n \right\| \leq \left\| \left(\sum_{n=1}^\infty A_n^* A_n \right)^{\frac{1}{2}} X \left(\sum_{n=1}^\infty B_n^* B_n \right)^{\frac{1}{2}} \right\|, \quad (1.5.1)$$

за свако $X \in \mathfrak{B}(\mathcal{H})$ и све у.и. норме $\|\cdot\|$. Ако је $\mathfrak{C}_{\|\cdot\|}(\mathcal{H})$ сепарабилан и $X \in \mathfrak{C}_{\|\cdot\|}(\mathcal{H})$, онда сума са леве стране неједнакости (1.5.1) конвертира у норми идеала.

Специјално, у случају Шатенових идеала, м.к.н.о. услов из претходне теореме је могуће изоставити, тј. важи наредна теорема (видети [15, Теорему 2.1]).

Теорема 1.5.4. Нека су $(A_n)_{n=1}^\infty$ и $(B_n)_{n=1}^\infty$ низови ограничених оператора на $\mathcal{H}$ такви да је $\sum_{n=1}^\infty \|A_n h\|^2 + \|A_n^* h\|^2 + \|B_n h\|^2 + \|B_n^* h\|^2 < +\infty$, за свако $h \in \mathcal{H}$ и нека је $X \in \mathfrak{B}(\mathcal{H})$. Тада је

$$\left\| \sum_{n=1}^\infty A_n X B_n \right\| \leq \sqrt{\left\| \sum_{n=1}^\infty A_n A_n^* \right\| \cdot \left\| \sum_{n=1}^\infty B_n^* B_n \right\|} \cdot \|X\|.$$

Ако је $X \in \mathfrak{C}_\infty(\mathcal{H})$, тада је такође и $\sum_{n=1}^\infty A_n X B_n \in \mathfrak{C}_\infty(\mathcal{H})$. Додајмо,

$$\left\| \sum_{n=1}^\infty A_n X B_n \right\|_p \leq \left\| \sqrt[2p]{\sum_{n=1}^\infty A_n^* \left(\sum_{n=1}^\infty A_n A_n^* \right)^{p-1} A_n X} \sqrt[2p]{\sum_{n=1}^\infty B_n \left(\sum_{n=1}^\infty B_n^* B_n \right)^{p-1} B_n^*} \right\|_p \quad (1.5.2)$$

за свако $1 \leq p < \infty$, где лева сума конвертира у норми простора $\mathfrak{C}_p(\mathcal{H})$ кад год је $X \in \mathfrak{C}_p(\mathcal{H})$.

Наредна теорема уопштава претходни резултат, тј. неједнакост (1.5.2). Иако ћемо користити само дискретну верзију у дисертацији, наводимо је и у интегралном облику (како је и изворно исказана и доказана у [16, Теорему 3.3]).

Теорема 1.5.5. Нека је μ σ -коначна мера на Ω и нека су $\mathcal{A}, \mathcal{B}: \Omega \rightarrow \mathfrak{B}(\mathcal{H})$ слабо* мерљиве о.в. функције, њакве да $\mathcal{A}, \mathcal{A}^*, \mathcal{B}, \mathcal{B}^* \in L_G^2(\Omega, \mu, \mathfrak{B}(\mathcal{H}))$. Тада, за све $p, q, r \geq 1$ њакве да је $\frac{2}{p} = \frac{1}{q} + \frac{1}{r}$ и свако $X \in \mathfrak{C}_p(\mathcal{H})$ важи

$$\left\| \int_{\Omega} \mathcal{A} X \mathcal{B} d\mu \right\|_p \leq \left\| \sqrt[2q]{\int_{\Omega} \mathcal{A}^* \left(\int_{\Omega} \mathcal{A} \mathcal{A}^* d\mu \right)^{q-1} \mathcal{A} d\mu} X \sqrt[2r]{\int_{\Omega} \mathcal{B} \left(\int_{\Omega} \mathcal{B}^* \mathcal{B} d\mu \right)^{r-1} \mathcal{B}^* d\mu} \right\|_p.$$

Специјално, када је μ бројачка мера на $\mathbb{N}$, њј. у случају када су $(A_n)_{n=1}^{\infty}, (A_n^*)_{n=1}^{\infty}, (B_n)_{n=1}^{\infty}$ и $(B_n^*)_{n=1}^{\infty}$ ј.к.с. фамилије оператора у $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$, важи неједнакост

$$\left\| \sum_{n=1}^{\infty} A_n X B_n \right\|_p \leq \left\| \sqrt[2q]{\sum_{n=1}^{\infty} A_n^* \left(\sum_{n=1}^{\infty} A_n A_n^* \right)^{q-1} A_n} X \sqrt[2r]{\sum_{n=1}^{\infty} B_n \left(\sum_{n=1}^{\infty} B_n^* B_n \right)^{r-1} B_n^*} \right\|_p. \quad (1.5.3)$$

Израз са десне стране неједнакости (1.5.3) је јако рогобатан. Уз додатне претпоставке инвертибилности оператора $\sum_{n=1}^{\infty} A_n A_n^*$ и $\sum_{n=1}^{\infty} B_n^* B_n$, увођењем одговарајуће смене, могуће га је значајно упростити (додуше на рачун израза са леве стране неједнакости).

Последица 1.5.6. Нека су $(A_n)_{n=1}^{\infty}, (A_n^*)_{n=1}^{\infty}, (B_n)_{n=1}^{\infty}$ и $(B_n^*)_{n=1}^{\infty}$ ј.к.с. фамилије оператора у $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$ њакве да су $\sum_{n=1}^{\infty} A_n A_n^*$ и $\sum_{n=1}^{\infty} B_n^* B_n$ инвертибилни и нека су $p, q, r \geq 1$ њакви да је $\frac{2}{p} = \frac{1}{q} + \frac{1}{r}$. Тада, за свако $X \in \mathfrak{C}_p(\mathcal{H})$ важи неједнакост

$$\left\| \left(\sum_{n=1}^{\infty} A_n A_n^* \right)^{\frac{1}{2q}-\frac{1}{2}} \sum_{n=1}^{\infty} A_n X B_n \left(\sum_{n=1}^{\infty} B_n^* B_n \right)^{\frac{1}{2r}-\frac{1}{2}} \right\|_p \leq \left\| \left(\sum_{n=1}^{\infty} A_n^* A_n \right)^{\frac{1}{2q}} X \left(\sum_{n=1}^{\infty} B_n B_n^* \right)^{\frac{1}{2r}} \right\|_p. \quad (1.5.4)$$

Доказ. Уведимо смене $C_n \stackrel{\text{def}}{=} \left(\sum_{n=1}^{\infty} A_n A_n^* \right)^{\frac{1}{2q}-\frac{1}{2}} A_n$ и $D_n \stackrel{\text{def}}{=} B_n \left(\sum_{n=1}^{\infty} B_n^* B_n \right)^{\frac{1}{2r}-\frac{1}{2}}$, за $n \in \mathbb{N}$. Имамо да за свако $h \in \mathcal{H}$ важи да је $\sum_{n=1}^{\infty} \|C_n h\|^2 \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} A_n A_n^* \right)^{\frac{1}{q}-1} \sum_{n=1}^{\infty} \|A_n h\|^2 < +\infty$, па је фамилија $(C_n)_{n=1}^{\infty}$ ј.к.с. Слично, и фамилије $(C_n^*)_{n=1}^{\infty}, (D_n)_{n=1}^{\infty}$ и $(D_n^*)_{n=1}^{\infty}$ су такође ј.к.с. и важе једнакости

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_n C_n^* = \left(\sum_{n=1}^{\infty} A_n A_n^* \right)^{\frac{1}{2q}-\frac{1}{2}} \sum_{n=1}^{\infty} A_n A_n^* \left(\sum_{n=1}^{\infty} A_n A_n^* \right)^{\frac{1}{2q}-\frac{1}{2}} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} A_n A_n^* \right)^{\frac{1}{q}}$$

и

$$\sum_{n=1}^{\infty} D_n^* D_n = \left(\sum_{n=1}^{\infty} B_n^* B_n \right)^{\frac{1}{2r}-\frac{1}{2}} \sum_{n=1}^{\infty} B_n^* B_n \left(\sum_{n=1}^{\infty} B_n^* B_n \right)^{\frac{1}{2r}-\frac{1}{2}} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} B_n^* B_n \right)^{\frac{1}{r}},$$

одакле следи да је

$$\begin{aligned} & \sqrt[2q]{\sum_{n=1}^{\infty} C_n^* \left(\sum_{n=1}^{\infty} C_n C_n^* \right)^{q-1} C_n} \\ &= \sqrt[2q]{\sum_{n=1}^{\infty} A_n^* \left(\sum_{n=1}^{\infty} A_n A_n^* \right)^{\frac{1}{2q}-\frac{1}{2}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} A_n A_n^* \right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} A_n A_n^* \right)^{\frac{1}{2q}-\frac{1}{2}} A_n} = \sqrt[2q]{\sum_{n=1}^{\infty} A_n^* A_n} \quad (1.5.5) \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} & \sqrt[2r]{\sum_{n=1}^{\infty} D_n \left(\sum_{n=1}^{\infty} D_n^* D_n \right)^{r-1} D_n^*} \\ &= \sqrt[2r]{\sum_{n=1}^{\infty} B_n \left(\sum_{n=1}^{\infty} B_n^* B_n \right)^{\frac{1}{2r}-\frac{1}{2}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} B_n^* B_n \right)^{1-\frac{1}{r}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} B_n^* B_n \right)^{\frac{1}{2r}-\frac{1}{2}} B_n^*} = \sqrt[2r]{\sum_{n=1}^{\infty} B_n B_n^*}. \quad (1.5.6) \end{aligned}$$

Коначно, применом неједнакости (1.5.3) из Теореме 1.5.5 на фамилије $(C_n)_{n=1}^{\infty}$ и $(D_n)_{n=1}^{\infty}$ и користећи једнакости (1.5.5) и (1.5.6) добијамо тражену неједнакост (1.5.4). $\square$

У наредној леми наводимо Коши-Шварцове неједнакости за σ -елементарне операторе који дејствују на $\mathfrak{C}_{\Phi(p)}(\mathcal{H})$ и $\mathfrak{C}_{\Phi(p)^*}(\mathcal{H})$ идеалима (за више детаља и доказ видети [19, Лему 2.1.]).

Лема 1.5.7. *Нека су $(A_n^*)_{n=1}^{\infty}, (B_n)_{n=1}^{\infty}$ и $(B_n^*)_{n=1}^{\infty}$ ј.к.с. фамилије у $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$, нека је Φ произвољна с.н. функција и $p \geq 2$. Тада за свако $X \in \mathfrak{C}_{\Phi(p)}(\mathcal{H})$ важи*

$$\left\| \sum_{n=1}^{\infty} A_n X B_n \right\|_{\Phi(p)} \leq \left\| \sum_{n=1}^{\infty} A_n A_n^* \right\|^{\frac{1}{2}} \cdot \max \left\{ \left\| \sum_{n=1}^{\infty} B_n^* B_n \right\|^{\frac{1}{2}}, \left\| \sum_{n=1}^{\infty} B_n B_n^* \right\|^{\frac{1}{2}} \right\} \cdot \|X\|_{\Phi(p)}. \quad (1.5.7)$$

Ако су фамилије $(A_n^*)_{n=1}^{\infty}$ и $(B_n)_{n=1}^{\infty}$ ј.к.с, при чему је фамилија $(B_n)_{n=1}^{\infty}$ гогашно м.к.н.о, онда за свако $X \in \mathfrak{C}_{\Phi}(\mathcal{H})$ важи

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{n=1}^{\infty} A_n X B_n \right\|_{\Phi(p)} &\leq \left\| \sum_{n=1}^{\infty} A_n A_n^* \right\|^{\frac{1}{2}} \cdot \left\| X \left(\sum_{n=1}^{\infty} B_n^* B_n \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_{\Phi(p)} \\ &\leq \left\| \sum_{n=1}^{\infty} A_n A_n^* \right\|^{\frac{1}{2}} \cdot \left\| \sum_{n=1}^{\infty} B_n^* B_n \right\|^{\frac{1}{2}} \cdot \|X\|_{\Phi(p)}. \quad (1.5.8) \end{aligned}$$

Слично, ако су фамилије $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ и $(B_n)_{n=1}^{\infty}$ ј.к.с, при чему је фамилија $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ гогашно м.к.н.о, онда за свако $X \in \mathfrak{C}_{\Phi}(\mathcal{H})$ важи

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{n=1}^{\infty} A_n X B_n \right\|_{\Phi(p)} &\leq \left\| \left(\sum_{n=1}^{\infty} A_n^* A_n \right)^{\frac{1}{2}} X \right\|_{\Phi(p)} \cdot \left\| \sum_{n=1}^{\infty} B_n^* B_n \right\|^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \left\| \sum_{n=1}^{\infty} A_n^* A_n \right\|^{\frac{1}{2}} \cdot \left\| \sum_{n=1}^{\infty} B_n^* B_n \right\|^{\frac{1}{2}} \cdot \|X\|_{\Phi(p)}. \quad (1.5.9) \end{aligned}$$

Ако су фамилије $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ и $(B_n^*)_{n=1}^{\infty}$ ј.к.с. иако да је барем једна од њих м.к.н.о, онда за свако $Y \in \mathfrak{C}_{\Phi(p)^*}(\mathcal{H})$ важи

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{n=1}^{\infty} A_n Y B_n \right\|_{\Phi(p)^*} &\leq \left\| \left(\sum_{n=1}^{\infty} A_n^* A_n \right)^{\frac{1}{2}} Y \left(\sum_{n=1}^{\infty} B_n B_n^* \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_{\Phi(p)^*} \\ &\leq \left\| \sum_{n=1}^{\infty} A_n^* A_n \right\|^{\frac{1}{2}} \cdot \left\| \sum_{n=1}^{\infty} B_n B_n^* \right\|^{\frac{1}{2}} \cdot \|Y\|_{\Phi(p)^*}. \quad (1.5.10) \end{aligned}$$

У случају идеала Хилберт-Шмитових оператора, који је истовремено облика $\mathfrak{C}_{\Phi(p)}(\mathcal{H})$ и $\mathfrak{C}_{\Phi(p)^*}(\mathcal{H})$, претпоставке о комутативности из претходне теореме је могуће изоставити. Више детаља у вези наредне леме се могу наћи у [18, Лема 2.1.]. Овде наводимо само формулације случаја (д1) и (д2) наведене леме.

Лема 1.5.8. (а) Нека су $(A_n^*)_{n=1}^\infty$ и $(B_n^*)_{n=1}^\infty$ ј.к.с. фамилије оператора у $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$ и нека је $X \in \mathfrak{C}_2(\mathcal{H})$. Тада $\sum_{n=1}^\infty A_n X B_n$ конвертира у Хилберт-Шмитовој норми и важи

$$\left\| \sum_{n=1}^\infty A_n X B_n \right\|_2 \leq \left\| \sum_{n=1}^\infty A_n A_n^* \right\|_2^{\frac{1}{2}} \cdot \left\| X \left(\sum_{n=1}^\infty B_n B_n^* \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_2. \quad (1.5.11)$$

(б) Нека су $(A_n)_{n=1}^\infty$ и $(B_n)_{n=1}^\infty$ ј.к.с. фамилије оператора у $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$ и нека је $X \in \mathfrak{C}_2(\mathcal{H})$. Тада $\sum_{n=1}^\infty A_n X B_n$ конвертира у Хилберт-Шмитовој норми и важи

$$\left\| \sum_{n=1}^\infty A_n X B_n \right\|_2 \leq \left\| \left(\sum_{n=1}^\infty A_n^* A_n \right)^{\frac{1}{2}} X \right\|_2 \cdot \left\| \sum_{n=1}^\infty B_n^* B_n \right\|_2^{\frac{1}{2}}. \quad (1.5.12)$$

Доказ наредне теореме, исказане преко трансформера типа унутрашњег производа (т.у.п. трансформера), може се наћи у [16, Теорема 3.1.].

Теорема 1.5.9. Нека су $(A_n)_{n=1}^\infty$, $(B_n)_{n=1}^\infty$ и $(X_n)_{n=1}^\infty$ низови оператора у $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$ такви да су низови $(A_n |X_n^*|^{1-\theta})_{n=1}^\infty$ и $(U_n |X_n|^\theta B_n)_{n=1}^\infty$ у простору $\ell_s^2(\mathfrak{B}(\mathcal{H}))$, за неко $\theta \in [0, 1]$, при чему су парцијалне изометрије U_n добијене из поларне декомпозиције $X_n = U_n |X_n|$, за свако $n \in \mathbb{N}$. Тада:

а) за свако $m \in \mathbb{N}$ важи

$$\prod_{k=1}^m s_k \left(\sum_{n=1}^\infty A_n X_n B_n \right) \leq \prod_{k=1}^m s_k^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n=1}^\infty A_n |X_n^*|^{2-2\theta} A_n^* \right) \cdot \prod_{k=1}^m s_k^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n=1}^\infty B_n^* |X_n|^{2\theta} B_n \right);$$

б) за свако $m \in \mathbb{N}$ и $\alpha > 0$ важи

$$\sum_{k=1}^m s_k^\alpha \left(\sum_{n=1}^\infty A_n X B_n \right) \leq \sum_{k=1}^m s_k^{\frac{\alpha}{2}} \left(\sum_{n=1}^\infty A_n |X_n^*|^{2-2\theta} A_n^* \right) \cdot \sum_{k=1}^m s_k^{\frac{\alpha}{2}} \left(\sum_{n=1}^\infty B_n^* |X_n|^{2\theta} B_n \right);$$

в) за свако $\alpha > 0$ важи уопштена Хелдјева неједнакост

$$\left\| \left\| \sum_{n=1}^\infty A_n X B_n \right\|^\alpha \right\|_{\Phi_1} \leq \left\| \left\| \sqrt{\sum_{n=1}^\infty A_n |X_n^*|^{2-2\theta} A_n^*} \right\|^\alpha \right\|_{\Phi_2} \left\| \left\| \sqrt{\sum_{n=1}^\infty B_n^* |X_n|^{2\theta} B_n} \right\|^\alpha \right\|_{\Phi_3}, \quad (1.5.13)$$

где с.н. функције Φ_1, Φ_2 и Φ_3 задовољавају неједнакост

$$\Phi_1((s_n t_n)_{n=1}^\infty) \leq \Phi_2((s_n)_{n=1}^\infty) \cdot \Phi_3((t_n)_{n=1}^\infty),$$

за свако $(s_n)_{n=1}^\infty, (t_n)_{n=1}^\infty \in \mathfrak{c}_{00}$.

За низове оператора $A := (A_n)_{n=1}^\infty$ и $B := (B_n)_{n=1}^\infty$, σ -елементарни оператор $X \mapsto \sum_{n=1}^\infty A_n X B_n$ који дејствује на одговарајућем идеалу од $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ (или на целом $\mathcal{B}(\mathcal{H})$) ћемо означавати са $\mathcal{E}_{A,B}$. Такође, адјунговане низове $(A_n^*)_{n=1}^\infty$ и $(B_n^*)_{n=1}^\infty$ ћемо означавати са A^* и B^* , редом. Теорија σ -елементарних оператора се може видети као специјалан случај такозваних интегралних трансформера који се уводе преко Гелфандовог интеграла. Наредну теорему наводимо у терминима σ -елементарних трансформера, док је оригинално формулисана у [17, Теорема 2.1.] преко т.у.п. трансформера.

Теорема 1.5.10. *Нека је Φ произвољна с.н. функција и $(A_n)_{n=1}^\infty, (A_n^*)_{n=1}^\infty, (B_n)_{n=1}^\infty$ и $(B_n^*)_{n=1}^\infty$ низови оператора који припадају простору $\ell_s^2(\mathfrak{C}_\Phi(\mathcal{H}))$. Тада, важе неједнакости*

$$\|\mathcal{E}_{A,B}\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H}) \rightarrow \mathfrak{C}_\Phi(\mathcal{H})} \leq \left\| \sum_{n=1}^\infty A_n A_n^* \right\|_\Phi^{\frac{1}{2}} \cdot \left\| \sum_{n=1}^\infty B_n^* B_n \right\|_\Phi^{\frac{1}{2}} \quad (1.5.14)$$

и

$$\|\mathcal{E}_{A,B}\|_{\mathfrak{C}_{\Phi^*}(\mathcal{H}) \rightarrow \mathfrak{C}_1(\mathcal{H})} \leq \left\| \sum_{n=1}^\infty A_n^* A_n \right\|_\Phi^{\frac{1}{2}} \cdot \left\| \sum_{n=1}^\infty B_n B_n^* \right\|_\Phi^{\frac{1}{2}}. \quad (1.5.15)$$

У специјалном случају када је $A^* = B$ (тј. када важи да је $A_n^* = B_n$ за свако $n \in \mathbb{N}$) имамо једнакости у (1.5.14) и (1.5.15), тј. важи

$$\|\mathcal{E}_{A,A^*}\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H}) \rightarrow \mathfrak{C}_\Phi(\mathcal{H})} = \|\mathcal{E}_{A,A^*}(I)\|_\Phi = \left\| \sum_{n=1}^\infty A_n A_n^* \right\|_\Phi \quad (1.5.16)$$

и

$$\|\mathcal{E}_{A,A^*}\|_{\mathfrak{C}_{\Phi^*}(\mathcal{H}) \rightarrow \mathfrak{C}_1(\mathcal{H})} = \left\| \sum_{n=1}^\infty A_n^* A_n \right\|_\Phi. \quad (1.5.17)$$

Доказ. Примењујући неједнакост (1.5.13) из Теореме 1.5.9, где је $\alpha = 1, \theta = \frac{1}{2}, \Phi_1 = \Phi$ и $\Phi_2 = \Phi_3 = \Phi^{(2)}$, добијамо да важи

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{n=1}^\infty A_n X B_n \right\|_\Phi &\leq \left\| \sqrt{\sum_{n=1}^\infty A_n |X^*| A_n^*} \right\|_{\Phi^{(2)}} \left\| \sqrt{\sum_{n=1}^\infty B_n^* |X| B_n} \right\|_{\Phi^{(2)}} \\ &= \left\| \sum_{n=1}^\infty A_n |X^*| A_n^* \right\|_\Phi^{\frac{1}{2}} \left\| \sum_{n=1}^\infty B_n^* |X| B_n \right\|_\Phi^{\frac{1}{2}} \leq \left\| \sum_{n=1}^\infty A_n A_n^* \right\|_\Phi^{\frac{1}{2}} \left\| \sum_{n=1}^\infty B_n^* B_n \right\|_\Phi^{\frac{1}{2}} \|X\|, \end{aligned} \quad (1.5.18)$$

за свако $X \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. Одавде директно следи неједнакост (1.5.14), као и једнакост (1.5.16) која се достиже на оператору $X = I$. Како је трансформер $\mathcal{E}_{B,A}: \mathfrak{C}_{\Phi^*}(\mathcal{H}) \rightarrow \mathfrak{C}_1(\mathcal{H})$ конјугован трансформеру $\mathcal{E}_{A,B}$, неједнакост (1.5.15) и једнакост (1.5.17) следе из чињенице да конјуговани оператори имају једнаку норму, тј. да важи једнакост $\|\mathcal{E}_{A,B}\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H}) \rightarrow \mathfrak{C}_\Phi(\mathcal{H})} = \|\mathcal{E}_{B,A}\|_{\mathfrak{C}_{\Phi^*}(\mathcal{H}) \rightarrow \mathfrak{C}_1(\mathcal{H})}$. $\square$

Глава 2

Пертурбације елементарних оператора генерисаних аналитичким функцијама са позитивним Тејлоровим коефицијентима

2.1 Припремни резултати

У овом поглављу ће бити представљени резултати објављени у [21]. Они представљају камен темељац за рад са пертурбацијама елементарних оператора генерисаних аналитичким функцијама. Излагање почињемо једном битном техничком лемом, која омогућава рачун са наведеним пертурбацијама.

Лема 2.1.1. Нека је $X \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ и нека су $(A_n^*)_{n=1}^\infty, (B_n)_{n=1}^\infty, (C_n^*)_{n=1}^\infty$ и $(D_n)_{n=1}^\infty$ ј.к.с. фамилије у $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, такве да је $A_n C_n = C_n A_n$ и $B_m D_n = D_n B_m$ за свако $m, n \in \mathbb{N}$. Тада, користећи мулти-индексне скраћенице $\mathbf{n}_k \stackrel{\text{def}}{=} (n_1, \dots, n_k) \in \mathbb{N}^k$ и $A_{\mathbf{n}_k} \stackrel{\text{def}}{=} \prod_{i=1}^k A_{n_i} \stackrel{\text{def}}{=} A_{n_1} \cdots A_{n_k}$, важи да је за свако $m \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} & \left(\sum_{n=1}^{\infty} A_n \otimes B_n \right)^m X - \left(\sum_{n=1}^{\infty} C_n \otimes D_n \right)^m X \\ &= \sum_{k=0}^{m-1} \left(\sum_{n=1}^{\infty} A_n \otimes B_n \right)^{m-k-1} \left(\sum_{n=1}^{\infty} C_n \otimes D_n \right)^k \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \otimes B_n - C_n \otimes D_n) X \\ &= \sum_{k=0}^{m-1} \sum_{(\mathbf{n}_{m-k-1}, \mathbf{n}_k) \in \mathbb{N}^{m-1}} A_{\mathbf{n}_{m-k-1}} C_{\mathbf{n}_k} \otimes D_{\mathbf{n}_k} B_{\mathbf{n}_{m-k-1}} \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \otimes B_n - C_n \otimes D_n) X \\ &= \sum_{k=0}^{m-1} \sum_{(\mathbf{n}_{m-k-1}, \mathbf{n}_k) \in \mathbb{N}^{m-1}} A_{\mathbf{n}_{m-k-1}} C_{\mathbf{n}_k} \sum_{n=1}^{\infty} (A_n X B_n - C_n X D_n) D_{\mathbf{n}_k} B_{\mathbf{n}_{m-k-1}}. \end{aligned} \tag{2.1.1}$$

Ако су, с друге стране, $(A_n)_{n=1}^\infty, (B_n^*)_{n=1}^\infty, (C_n)_{n=1}^\infty$ и $(D_n^*)_{n=1}^\infty$ ј.к.с. фамилије у $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, онда

је

$$\begin{aligned} & \left(\sum_{n=1}^{\infty} A_n^* \otimes A_n \right)^m (I) - \left(\sum_{n=1}^{\infty} C_n^* \otimes C_n \right)^m (I) \\ &= \sum_{k=0}^{m-1} \sum_{(\mathbf{n}_{m-k-1}, \mathbf{n}_k) \in \mathbb{N}^{m-1}} A_{\mathbf{n}_{m-k-1}}^* C_{\mathbf{n}_k}^* \sum_{n=1}^{\infty} (A_n^* A_n - C_n^* C_n) C_{\mathbf{n}_k} A_{\mathbf{n}_{m-k-1}}, \end{aligned} \quad (2.1.2)$$

$$\begin{aligned} & \left(\sum_{n=1}^{\infty} B_n \otimes B_n^* \right)^m (I) - \left(\sum_{n=1}^{\infty} D_n \otimes D_n^* \right)^m (I) \\ &= \sum_{k=0}^{m-1} \sum_{(\mathbf{n}_{m-k-1}, \mathbf{n}_k) \in \mathbb{N}^{m-1}} B_{\mathbf{n}_{m-k-1}} D_{\mathbf{n}_k} \sum_{n=1}^{\infty} (B_n B_n^* - D_n D_n^*) D_{\mathbf{n}_k}^* B_{\mathbf{n}_{m-k-1}}^*. \end{aligned} \quad (2.1.3)$$

Доказ. Да бисмо доказали једнакости у (2.1.1), приметимо прво да су трансформери $\mathcal{E} := \sum_{n=1}^{\infty} A_n \otimes B_n$ и $\mathcal{F} := \sum_{n=1}^{\infty} C_n \otimes D_n$ међусобно комутирајући и да задовољавају једнакости

$$\mathcal{E}^m = \sum_{\mathbf{n}_m \in \mathbb{N}^m} A_{\mathbf{n}_m} \otimes B_{\mathbf{n}_m}, \quad \mathcal{F}^m = \sum_{\mathbf{n}_m \in \mathbb{N}^m} C_{\mathbf{n}_m} \otimes D_{\mathbf{n}_m}, \quad (2.1.4)$$

за свако $m \in \mathbb{N}$, као и

$$\begin{aligned} \mathcal{E}^m - \mathcal{F}^m &= \sum_{k=0}^{m-1} \mathcal{E}^{m-k-1} (\mathcal{E} - \mathcal{F}) \mathcal{F}^k = \sum_{k=0}^{m-1} \mathcal{E}^{m-k-1} \mathcal{F}^k (\mathcal{E} - \mathcal{F}) \\ &= \sum_{k=0}^{m-1} \sum_{(\mathbf{n}_{m-k-1}, \mathbf{n}_k) \in \mathbb{N}^{m-1}} A_{\mathbf{n}_{m-k-1}} C_{\mathbf{n}_k} \otimes D_{\mathbf{n}_k} B_{\mathbf{n}_{m-k-1}} \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \otimes B_n - C_n \otimes D_n). \end{aligned} \quad (2.1.5)$$

Прва једнакост у (2.1.5) се доказује директно индукцијом, док последња следи из формула (2.1.4). Дакле, применом формула (2.1.5) на $X \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ добијамо формулу (2.1.1). Такође, формуле (2.1.2) и (2.1.3) представљају специјалне случајеве формуле (2.1.1), чиме је доказ завршен. $\square$

Дефиниција 2.1.2. Ако је Ψ с.н. функција и ако су $A := (A_n)_{n=1}^{\infty}, B := (B_n)_{n=1}^{\infty}$ фамилије у $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, онда са $r_{A,B,\Psi}$ (односно r_{A,B,ℓ^∞}) означавамо спектрални радијус ограниченог трансформера $\sum_{n=1}^{\infty} A_n \otimes B_n$ из $\mathcal{C}_\Psi(\mathcal{H})$ у $\mathcal{C}_\Psi(\mathcal{H})$ (односно из $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ у $\mathcal{B}(\mathcal{H})$).

Такође, користићемо и упрошћену ознаку $r_{A,\Psi} \stackrel{\text{def}}{=} r_{A^*,A,\Psi}$.

Неке процене спектралних радијуса $r_{A,B,\Psi}$ су дате у

Лема 2.1.3. Нека су Φ, Ψ с.н. функције, $p \geq 2$ и $(A_n)_{n=1}^{\infty}, (B_n)_{n=1}^{\infty}$ фамилије у $\mathcal{B}(\mathcal{H})$.

(a) Ако су $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ и $(B_n^*)_{n=1}^{\infty}$ j.к.с. фамилије, онда важи

$$r_{A,\ell^\infty} = \lim_{m \rightarrow \infty} \left\| \sum_{\mathbf{n}_m \in \mathbb{N}^m} A_{\mathbf{n}_m}^* A_{\mathbf{n}_m} \right\|^{\frac{1}{m}}, \quad r_{B^*,\ell^\infty} = \lim_{m \rightarrow \infty} \left\| \sum_{\mathbf{n}_m \in \mathbb{N}^m} B_{\mathbf{n}_m} B_{\mathbf{n}_m}^* \right\|^{\frac{1}{m}}, \quad (2.1.6)$$

$$r_{A,B,\Psi} \leq \sqrt{r_{A,\ell^\infty}} \cdot \sqrt{r_{B^*,\ell^\infty}} = \lim_{m \rightarrow \infty} \left\| \sum_{\mathbf{n}_m \in \mathbb{N}^m} A_{\mathbf{n}_m}^* A_{\mathbf{n}_m} \right\|^{\frac{1}{2m}} \lim_{m \rightarrow \infty} \left\| \sum_{\mathbf{n}_m \in \mathbb{N}^m} B_{\mathbf{n}_m} B_{\mathbf{n}_m}^* \right\|^{\frac{1}{2m}}, \quad (2.1.7)$$

(a1) ако је $\Psi := \ell^1$ (када важе једнакости $r_{A,\ell^1} = \lim_{m \rightarrow \infty} \left\| \sum_{\mathbf{n}_m \in \mathbb{N}^m} A_{\mathbf{n}_m} A_{\mathbf{n}_m}^* \right\|^{1/m}$ и $r_{B^*,\ell^1} = \lim_{m \rightarrow \infty} \left\| \sum_{\mathbf{n}_m \in \mathbb{N}^m} B_{\mathbf{n}_m}^* B_{\mathbf{n}_m} \right\|^{1/m}$),

(a2) ако је $\Psi := \Phi^{(p)*}$ и бар једна од фамилија $(A_n)_{n=1}^\infty$ или $(B_n)_{n=1}^\infty$ је м.к.н.о,
 (a3) ако су (обе) фамилије $(A_n)_{n=1}^\infty$ и $(B_n)_{n=1}^\infty$ м.к.н.о;

$$r_{A,B,\Psi} \leq \sqrt{r_{A^*,\ell^\infty}} \cdot \sqrt{r_{B^*,\ell^\infty}} = \lim_{m \rightarrow \infty} \left\| \sum_{\mathbf{n}_m \in \mathbb{N}^m} A_{\mathbf{n}_m} A_{\mathbf{n}_m}^* \right\|_{\mathfrak{B}(\mathcal{H})}^{\frac{1}{2m}} \lim_{m \rightarrow \infty} \left\| \sum_{\mathbf{n}_m \in \mathbb{N}^m} B_{\mathbf{n}_m} B_{\mathbf{n}_m}^* \right\|_{\mathfrak{B}(\mathcal{H})}^{\frac{1}{2m}}, \quad (2.1.8)$$

ако су $(A_n^*)_{n=1}^\infty$ и $(B_n^*)_{n=1}^\infty$ ј.к.с. фамилије и

(б1) $\Psi := \ell^2$,

(б2) $\Psi := \Phi^{(p)}$ и ако је догађајно $(B_n)_{n=1}^\infty$ једна м.к.н.о. фамилија;

$$r_{A,B,\Psi} \leq \sqrt{r_{A,\ell^\infty}} \cdot \sqrt{r_{B,\ell^\infty}} = \lim_{m \rightarrow \infty} \left\| \sum_{\mathbf{n}_m \in \mathbb{N}^m} A_{\mathbf{n}_m}^* A_{\mathbf{n}_m} \right\|_{\mathfrak{B}(\mathcal{H})}^{\frac{1}{2m}} \lim_{m \rightarrow \infty} \left\| \sum_{\mathbf{n}_m \in \mathbb{N}^m} B_{\mathbf{n}_m}^* B_{\mathbf{n}_m} \right\|_{\mathfrak{B}(\mathcal{H})}^{\frac{1}{2m}}, \quad (2.1.9)$$

ако су $(A_n)_{n=1}^\infty$ и $(B_n)_{n=1}^\infty$ ј.к.с. фамилије и

(в1) $\Psi := \ell^2$,

(в2) $\Psi := \Phi^{(p)}$ и ако је догађајно $(A_n)_{n=1}^\infty$ једна м.к.н.о. фамилија;

$$r_{A,B,\Psi} \leq \sqrt{r_{A^*,\ell^\infty}} \cdot \sqrt{r_{B,\ell^\infty}} = \lim_{m \rightarrow \infty} \left\| \sum_{\mathbf{n}_m \in \mathbb{N}^m} A_{\mathbf{n}_m} A_{\mathbf{n}_m}^* \right\|_{\mathfrak{B}(\mathcal{H})}^{\frac{1}{2m}} \lim_{m \rightarrow \infty} \left\| \sum_{\mathbf{n}_m \in \mathbb{N}^m} B_{\mathbf{n}_m}^* B_{\mathbf{n}_m} \right\|_{\mathfrak{B}(\mathcal{H})}^{\frac{1}{2m}}, \quad (2.1.10)$$

ако су $(A_n^*)_{n=1}^\infty$ и $(B_n)_{n=1}^\infty$ ј.к.с. фамилије и

(г) $\Psi := \ell^\infty$.

Доказ. Доказ прве формуле у (2.1.6) се заснива на једнакостима

$$\begin{aligned} r_{A,\ell^\infty} &= \lim_{m \rightarrow \infty} \left\| \left(\sum_{n=1}^\infty A_n^* \otimes A_n \right)^m \right\|_{\mathfrak{B}(\mathcal{B}(\mathcal{H}))}^{\frac{1}{m}} = \lim_{m \rightarrow \infty} \left\| \left(\sum_{n=1}^\infty A_n^* \otimes A_n \right)^m (I) \right\|_{\mathfrak{B}(\mathcal{B}(\mathcal{H}))}^{\frac{1}{m}} \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \left\| \sum_{\mathbf{n}_m \in \mathbb{N}^m} A_{\mathbf{n}_m}^* A_{\mathbf{n}_m} \right\|_{\mathfrak{B}(\mathcal{H})}^{\frac{1}{m}}, \end{aligned} \quad (2.1.11)$$

где је друга једнакост у (2.1.11) заснована на формули (1.5.16) у Теорему 1.5.10, док је последња једнакост у (2.1.11) заснована на примени прве формуле у (2.1.4) на пар фамилија $((A_n^*)_{n=1}^\infty, (A_n)_{n=1}^\infty)$ уместо $((A_n)_{n=1}^\infty, (B_n)_{n=1}^\infty)$. Одавде такође следи и валидност друге формуле у (2.1.6).

Слично, формула у (a1) следи из

$$\begin{aligned} r_{A,\ell^1} &= \lim_{m \rightarrow \infty} \left\| \left(\sum_{n=1}^\infty A_n^* \otimes A_n \right)^m \right\|_{\mathfrak{B}(\mathcal{C}_1(\mathcal{H}))}^{\frac{1}{m}} = \lim_{m \rightarrow \infty} \left\| \left(\sum_{n=1}^\infty A_n \otimes A_n^* \right)^m (I) \right\|_{\mathfrak{B}(\mathcal{C}_1(\mathcal{H}))}^{\frac{1}{m}} \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \left\| \sum_{\mathbf{n}_m \in \mathbb{N}^m} A_{\mathbf{n}_m} A_{\mathbf{n}_m}^* \right\|_{\mathfrak{B}(\mathcal{H})}^{\frac{1}{m}}, \end{aligned} \quad (2.1.12)$$

где је друга једнакост у (2.1.12) заснована на формули (1.5.17) у Теорему 1.5.10, док последња једнакост у (2.1.12) следи из специјалног случаја $B := A^*$ у формули (2.1.4). Применом формуле (2.1.12) на фамилију $(B_n^*)_{n=1}^\infty$ уместо $(A_n)_{n=1}^\infty$ добијамо формулу $r_{B^*,\ell^1} = \lim_{m \rightarrow \infty} \left\| \sum_{\mathbf{n}_m \in \mathbb{N}^m} B_{\mathbf{n}_m}^* B_{\mathbf{n}_m} \right\|_{\mathfrak{B}(\mathcal{H})}^{1/m}$.

Да бисмо доказали неједнакост (2.1.7) у случајевима (a1), (a2) и (a3), кренимо од процена

$$\begin{aligned} r_{A,B,\Psi}^2 &= \lim_{m \rightarrow \infty} \left\| \left(\sum_{n=1}^{\infty} A_n \otimes B_n \right)^m \right\|_{\mathcal{B}(\mathcal{C}_\Psi(\mathcal{H}))}^{\frac{2}{m}} \\ &\leq \lim_{m \rightarrow \infty} \left\| \left(\left(\sum_{n=1}^{\infty} A_n^* \otimes A_n \right)^m (I) \right)^{\frac{1}{2}} \otimes \left(\left(\sum_{n=1}^{\infty} B_n \otimes B_n^* \right)^m (I) \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_{\mathcal{B}(\mathcal{C}_\Psi(\mathcal{H}))}^{\frac{2}{m}} \end{aligned} \quad (2.1.13)$$

$$\leq \lim_{m \rightarrow \infty} \left\| \left(\sum_{n=1}^{\infty} A_n^* \otimes A_n \right)^m (I) \right\|^{\frac{1}{m}} \cdot \left\| \left(\sum_{n=1}^{\infty} B_n \otimes B_n^* \right)^m (I) \right\|^{\frac{1}{m}} = r_{A,\ell^\infty} \cdot r_{B^*,\ell^\infty}, \quad (2.1.14)$$

где је неједнакост у (2.1.13) у случају (a1) заснована на Коши–Шварцовој норма неједнакости (1.5.2) у случају $p := 1$ из Теореме 1.5.4, у случају (a2) је заснована на неједнакости (1.5.10) у Леми 1.5.7 и у случају (a3) је заснована на неједнакости (1.5.1) у Теорему 1.5.3. Неједнакост у (2.1.14) је заснована на својству симетричности у.и. норме, док једнакост у (2.1.14) следи из формула (2.1.11) и (2.1.6), што све заједно доказује неједнакост (2.1.7) у случајевима (a1), (a2) и (a3).

Доказ неједнакости (2.1.8) се ослања на процене

$$\begin{aligned} r_{A,B,\Psi}^2 &= \lim_{m \rightarrow \infty} \left\| \left(\sum_{n=1}^{\infty} A_n \otimes B_n \right)^m \right\|_{\mathcal{B}(\mathcal{C}_\Psi(\mathcal{H}))}^{\frac{2}{m}} \\ &\leq \lim_{m \rightarrow \infty} \left\| \left(\left(\sum_{n=1}^{\infty} A_n \otimes A_n^* \right)^m (I) \right)^{\frac{1}{2}} \right\|^{\frac{2}{m}} \left\| I \otimes \left(\left(\sum_{n=1}^{\infty} B_n \otimes B_n^* \right)^m (I) \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_{\mathcal{B}(\mathcal{C}_\Psi(\mathcal{H}))}^{\frac{2}{m}} \end{aligned} \quad (2.1.15)$$

$$\leq \lim_{m \rightarrow \infty} \left\| \left(\sum_{n=1}^{\infty} A_n \otimes A_n^* \right)^m (I) \right\|^{\frac{1}{m}} \left\| \left(\sum_{n=1}^{\infty} B_n \otimes B_n^* \right)^m (I) \right\|^{\frac{1}{m}} = r_{A^*,\ell^\infty} \cdot r_{B^*,\ell^\infty}, \quad (2.1.16)$$

где је неједнакост у (2.1.15) у случају (b1) заснована на Коши–Шварцовој норма неједнакости (1.5.11) из Леме 1.5.8, док је у случају (b2) заснована на неједнакости (1.5.8) у Леми 1.5.7. Неједнакост у (2.1.16) је поново заснована на својству симетричности у.и. норме, док једнакост у (2.1.16) следи из формула (2.1.11) и (2.1.6).

Слично, доказ неједнакости (2.1.9) се ослања на процене

$$\begin{aligned} r_{A,B,\Psi}^2 &= \lim_{m \rightarrow \infty} \left\| \left(\sum_{n=1}^{\infty} A_n \otimes B_n \right)^m \right\|_{\mathcal{B}(\mathcal{C}_\Psi(\mathcal{H}))}^{\frac{2}{m}} \\ &\leq \lim_{m \rightarrow \infty} \left\| \left(\left(\sum_{n=1}^{\infty} A_n^* \otimes A_n \right)^m (I) \right)^{\frac{1}{2}} \otimes I \right\|_{\mathcal{B}(\mathcal{C}_\Psi(\mathcal{H}))}^{\frac{2}{m}} \left\| \left(\left(\sum_{n=1}^{\infty} B_n^* \otimes B_n \right)^m (I) \right)^{\frac{1}{2}} \right\|^{\frac{2}{m}} \end{aligned} \quad (2.1.17)$$

$$\leq \lim_{m \rightarrow \infty} \left\| \left(\sum_{n=1}^{\infty} A_n^* \otimes A_n \right)^m (I) \right\|^{\frac{1}{m}} \left\| \left(\sum_{n=1}^{\infty} B_n^* \otimes B_n \right)^m (I) \right\|^{\frac{1}{m}} = r_{A,\ell^\infty} \cdot r_{B,\ell^\infty}, \quad (2.1.18)$$

где је неједнакост у (2.1.17) у случају (v1) заснована на Коши–Шварцовој норма неједнакости (1.5.12) из Леме 1.5.8, док је у случају (v2) заснована на неједнакости (1.5.9) из Леме 1.5.7. Неједнакост у (2.1.18) је поново заснована на својству симетричности у.и. норме, док једнакост у (2.1.18) следи из формула (2.1.11) и (2.1.6).

Коначно, доказ неједнакости (2.1.10) у (г) се ослања на

$$\begin{aligned} r_{A,B,\ell^\infty}^2 &= \lim_{m \rightarrow \infty} \left\| \left(\sum_{n=1}^{\infty} A_n \otimes B_n \right)^m \right\|_{\mathcal{B}(\mathcal{B}(\mathcal{H}))}^{\frac{2}{m}} \\ &\leq \lim_{m \rightarrow \infty} \left\| \left(\left(\sum_{n=1}^{\infty} A_n \otimes A_n^* \right)^m (I) \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_{\mathcal{B}(\mathcal{B}(\mathcal{H}))}^{\frac{2}{m}} \left\| \left(\left(\sum_{n=1}^{\infty} B_n^* \otimes B_n \right)^m (I) \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_{\mathcal{B}(\mathcal{B}(\mathcal{H}))}^{\frac{2}{m}} = r_{A^*,\ell^\infty} \cdot r_{B,\ell^\infty}, \end{aligned} \quad (2.1.19)$$

где је неједнакост у (2.1.19) заснована на Коши–Шварцовој норма неједнакости (1.5.2) у Теорему 1.5.4, док једнакост у (2.1.19) следи из формула (2.1.11) и (2.1.6). $\square$

Лема 2.1.4. *За низ $(c_m)_{m=0}^\infty$ у $[0, +\infty)$ и $R > 0$ такве да је $\sum_{m=0}^\infty c_m R^m < +\infty$, дефинишимо функцију $f: \mathbb{D}(0, R) \rightarrow \mathbb{C}: z \mapsto \sum_{m=0}^\infty c_m z^m$ и нека је Ψ произвољна с.н. функција. Ако је $r_{E,F,\Psi} < R$ за неке фамилије $E := (E_n)_{n=1}^\infty$ и $F := (F_n)_{n=1}^\infty$, онда $f(\sum_{n=1}^\infty E_n \otimes F_n): \mathcal{C}_\Psi(\mathcal{H}) \rightarrow \mathcal{C}_\Psi(\mathcal{H}): X \mapsto \sum_{m=0}^\infty c_m (\sum_{n=1}^\infty E_n \otimes F_n)^m X$ дефинише један ограничен трансформер на $\mathcal{C}_\Psi(\mathcal{H})$, чија норма задовољава процену $\|f(\sum_{n=1}^\infty E_n \otimes F_n)\|_{\mathcal{B}(\mathcal{C}_\Psi(\mathcal{H}))} \leq \sum_{m=0}^\infty c_m \|\sum_{n=1}^\infty E_n \otimes F_n\|_{\mathcal{B}(\mathcal{C}_\Psi(\mathcal{H}))}^m < +\infty$.*

Специјално, ако су $E^* := (E_n^*)_{n=1}^\infty$ и $F := (F_n)_{n=1}^\infty$ ј.к.с. фамилије у $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, такве да је $\max\{r_{E^*,\ell^\infty}, r_{F,\ell^\infty}\} < R$ или $\max\{\|\sum_{n=1}^\infty E_n E_n^*\|, \|\sum_{n=1}^\infty F_n^* F_n\|\} \leq R$ онда важи да су $f(\sum_{n=1}^\infty E_n \otimes E_n^*)$, $f(\sum_{n=1}^\infty F_n^* \otimes F_n)$ и $f(\sum_{n=1}^\infty E_n \otimes F_n)$ добро дефинисани (као) ограничени трансформери на $\mathcal{B}(\mathcal{H})$.

Доказ. Услов $r_{E,F,\Psi} < R$ нам даје $\sum_{m=0}^\infty c_m \|\sum_{n=1}^\infty E_n \otimes F_n\|_{\mathcal{B}(\mathcal{C}_\Psi(\mathcal{H}))}^m < +\infty$ и апсолутну конвергенцију од $f(\sum_{n=1}^\infty E_n \otimes F_n) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{m=0}^\infty c_m (\sum_{n=1}^\infty E_n \otimes F_n)^m$, одакле следи тражена процена.

Да бисмо оправдали добру дефинисаност израза $f(\sum_{n=1}^\infty E_n \otimes E_n^*)$ и $f(\sum_{n=1}^\infty F_n^* \otimes F_n)$ под условом $\max\{r_{E^*,\ell^\infty}, r_{F,\ell^\infty}\} < R$, приметимо да постоји природан број m_0 такав да је $\max\{\|(\sum_{n=1}^\infty E_n \otimes E_n^*)^m\|_{\mathcal{B}(\mathcal{B}(\mathcal{H}))}, \|(\sum_{n=1}^\infty F_n^* \otimes F_n)^m\|_{\mathcal{B}(\mathcal{B}(\mathcal{H}))}\} < R^m$ за свако $\mathbb{N} \ni m \geq m_0$, одакле следи да редови $\sum_{m=0}^\infty c_m (\sum_{n=1}^\infty E_n \otimes E_n^*)^m$ и $\sum_{m=0}^\infty c_m (\sum_{n=1}^\infty F_n^* \otimes F_n)^m$ конвергирају апсолутно у $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, па оба реда конвергирају у норми простора $\mathcal{B}(\mathcal{B}(\mathcal{H}))$. Слично, како је $r_{E,F,\ell^\infty} < R$ на основу неједнакости (2.1.10) из Леме 2.1.3(д), одавде следи да је $f(\sum_{n=1}^\infty E_n \otimes F_n)$ добро дефинисан као ограничени трансформер на $\mathcal{B}(\mathcal{H})$.

Ово је такође случај ако је $\max\{\|\sum_{n=1}^\infty E_n E_n^*\|, \|\sum_{n=1}^\infty F_n^* F_n\|\} \leq R$, у ком случају је $\|\sum_{n=1}^\infty E_n \otimes F_n\|_{\mathcal{B}(\mathcal{B}(\mathcal{H}))} \leq \|\sum_{n=1}^\infty E_n E_n^*\|^{\frac{1}{2}} \|\sum_{n=1}^\infty F_n^* F_n\|^{\frac{1}{2}} \leq R$, одакле следи да је ред $\sum_{m=0}^\infty c_m (\sum_{n=1}^\infty E_n \otimes F_n)^m$ такође апсолутно конвергентан у простору $\mathcal{B}(\mathcal{B}(\mathcal{H}))$, па су и изрази $f(\sum_{n=1}^\infty E_n \otimes F_n)$ и $f(\sum_{n=1}^\infty E_n \otimes E_n^*)$, $f(\sum_{n=1}^\infty F_n^* \otimes F_n)$ добро дефинисани. $\square$

Лема 2.1.5. *За низ $(c_m)_{m=0}^\infty$ у $[0, +\infty)$ и $R > 0$ такве да је $\sum_{m=0}^\infty c_m R^m < +\infty$, дефинишимо функцију $f: \mathbb{D}(0, R) \rightarrow \mathbb{C}: z \mapsto \sum_{m=0}^\infty c_m z^m$. Ако су $A := (A_n)_{n=1}^\infty$ и $C := (C_n)_{n=1}^\infty$ ј.к.с. фамилије такве да је $A_m C_n = C_n A_m$ за свако $m, n \in \mathbb{N}$ и важи да је $\max\{r_{A,\ell^\infty}, r_{C,\ell^\infty}\} < R$ или $\max\{\|\sum_{n=1}^\infty A_n^* A_n\|, \|\sum_{n=1}^\infty C_n^* C_n\|\} \leq R$, онда је:*

$$\begin{aligned} (a) \quad & f\left(\sum_{n=1}^\infty A_n^* \otimes A_n\right)(I) - f\left(\sum_{n=1}^\infty C_n^* \otimes C_n\right)(I) \\ &= \sum_{m=1}^\infty \sum_{k=0}^{m-1} \sum_{(\mathbf{n}_{m-k-1}, \mathbf{n}_k) \in \mathbb{N}^{m-1}} c_m A_{\mathbf{n}_{m-k-1}}^* C_{\mathbf{n}_k}^* \sum_{n=1}^\infty (A_n^* A_n - C_n^* C_n) C_{\mathbf{n}_k} A_{\mathbf{n}_{m-k-1}} \geq 0, \end{aligned} \quad (2.1.20)$$

ако је $\sum_{n=1}^{\infty} A_n^* A_n \geq \sum_{n=1}^{\infty} C_n^* C_n$;

$$\begin{aligned}
 (\delta) \quad & f\left(\sum_{n=1}^{\infty} A_n^* \otimes A_n\right)(I) \geq f\left(\sqrt{D} \otimes \sqrt{D} + \sum_{n=1}^{\infty} C_n^* \otimes C_n\right)(I) \\
 & = f\left(\sum_{n=1}^{\infty} C_n^* \otimes C_n\right)(I) + \sum_{m=1}^{\infty} c_m \left(D^m + \sum_{k=1}^m \binom{m}{k} \left(\sum_{n=1}^{\infty} C_n^* \otimes C_n\right)^k (D^{m-k})\right) \\
 & \geq f\left(\sum_{n=1}^{\infty} C_n^* \otimes C_n\right)(I) + f(D) - f(0)I,
 \end{aligned} \tag{2.1.21}$$

ако је $\sum_{n=1}^{\infty} A_n^* A_n - \sum_{n=1}^{\infty} C_n^* C_n \geq D \geq 0$, где је D оператор који комутира са свим елементима фамилије $(A_n)_{n=1}^{\infty} \cup (C_n)_{n=1}^{\infty}$. Ако је, додатно, $\sum_{n=1}^{\infty} A_n^* A_n - \sum_{n=1}^{\infty} C_n^* C_n$ инвертибилан оператор и f није константна функција, онда је и $f(\sum_{n=1}^{\infty} A_n^* \otimes A_n)(I) - f(\sum_{n=1}^{\infty} C_n^* \otimes C_n)(I)$ шакође инвертибилан;

$$\begin{aligned}
 (\epsilon) \quad & \left| f\left(\sum_{n=1}^{\infty} A_n^* A_n\right) - f\left(\sum_{n=1}^{\infty} C_n^* C_n\right) \right| \\
 & = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{m-1} \sum_{(\mathbf{n}_{m-k-1}, \mathbf{n}_k) \in \mathbb{N}^{m-1}} c_m A_{\mathbf{n}_{m-k-1}}^* C_{\mathbf{n}_k}^* \left| \sum_{n=1}^{\infty} (A_n^* A_n - C_n^* C_n) C_{\mathbf{n}_k} A_{\mathbf{n}_{m-k-1}} \right|,
 \end{aligned} \tag{2.1.22}$$

ако су $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ и $(C_n)_{n=1}^{\infty}$ додатно м.к.н.о. фамилије (без претпоставке $\sum_{n=1}^{\infty} A_n^* A_n \geq \sum_{n=1}^{\infty} C_n^* C_n$).

Доказ. Изрази $f(\sum_{n=1}^{\infty} A_n^* \otimes A_n)$ и $f(\sum_{n=1}^{\infty} C_n^* \otimes C_n)$ су добро дефинисани под претпоставком $\max\{r_{A, \ell^{\infty}}, r_{C, \ell^{\infty}}\} < R$, на основу Леме 2.1.4. Доказ формуле (2.1.20) се ослања на следећи низ једнакости

$$\begin{aligned}
 & f\left(\sum_{n=1}^{\infty} A_n^* \otimes A_n\right)(I) - f\left(\sum_{n=1}^{\infty} C_n^* \otimes C_n\right)(I) \\
 & = \sum_{m=1}^{\infty} c_m \left(\left(\sum_{n=1}^{\infty} A_n^* \otimes A_n\right)^m (I) - \left(\sum_{n=1}^{\infty} C_n^* \otimes C_n\right)^m (I) \right) \\
 & = \sum_{m=1}^{\infty} c_m \sum_{k=0}^{m-1} \sum_{(\mathbf{n}_{m-k-1}, \mathbf{n}_k) \in \mathbb{N}^{m-1}} A_{\mathbf{n}_{m-k-1}}^* C_{\mathbf{n}_k}^* \sum_{n=1}^{\infty} (A_n^* A_n - C_n^* C_n) C_{\mathbf{n}_k} A_{\mathbf{n}_{m-k-1}}
 \end{aligned} \tag{2.1.23}$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{m-1} \sum_{(\mathbf{n}_{m-k-1}, \mathbf{n}_k) \in \mathbb{N}^{m-1}} c_m \left| \left(\sum_{n=1}^{\infty} (A_n^* A_n - C_n^* C_n) \right)^{\frac{1}{2}} C_{\mathbf{n}_k} A_{\mathbf{n}_{m-k-1}} \right|^2 \geq 0, \tag{2.1.24}$$

где друга једнакост у (2.1.23) следи из једнакости (2.1.2), док је једнакост у (2.1.24) последица позитивне дефинитности оператора $\sum_{n=1}^{\infty} (A_n^* A_n - C_n^* C_n)$, као и дефиније модула оператора у $\mathcal{B}(\mathcal{H})$.

Уз доказану формулу (2.1.20), приметимо да је прва неједнакост у (2.1.21) последица формуле (2.1.20), примењене на ј.к.с. фамилију $(C_n)_{n=0}^{\infty}$ уместо $(C_n)_{n=1}^{\infty}$, где је $C_0 := \sqrt{D}$.

Даље,

$$\begin{aligned} & f\left(\sum_{n=1}^{\infty} C_n^* \otimes C_n + \sqrt{D} \otimes \sqrt{D}\right)(I) \\ &= c_0 I + \sum_{m=1}^{\infty} c_m \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} \left(\sum_{n=1}^{\infty} C_n^* \otimes C_n\right)^k (\sqrt{D} \otimes \sqrt{D})^{m-k}(I) \end{aligned} \quad (2.1.25)$$

$$\begin{aligned} &= c_0 I + \sum_{m=1}^{\infty} c_m \left(D^m + \sum_{k=1}^{m-1} \binom{m}{k} \left(\sum_{n=1}^{\infty} C_n^* \otimes C_n\right)^k (D^{m-k}) + \left(\sum_{n=1}^{\infty} C_n^* \otimes C_n\right)^m (I)\right) \\ &\geq f\left(\sum_{n=1}^{\infty} C_n^* \otimes C_n\right)(I) + f(D) - f(0)I, \end{aligned} \quad (2.1.26)$$

где једнакост у (2.1.25) следи из примене биномне формуле, примењене на међусобно комутирајуће трансформере $\sum_{n=1}^{\infty} C_n^* \otimes C_n$ и $\sqrt{D} \otimes \sqrt{D}$. Неједнакост у (2.1.26) је лака последица једнакости $\left(\sum_{n=1}^{\infty} C_n^* \otimes C_n\right)^k (D^{m-k}) = \sum_{\mathbf{n}_k \in \mathbb{N}^k} C_{\mathbf{n}_k}^* D^{m-k} C_{\mathbf{n}_k} \geq 0$ за свако $m \in \mathbb{N}$ и свако $\mathbb{N} \ni k \leq m$.

Ако је, додатно, $\sum_{n=1}^{\infty} A_n^* A_n - \sum_{n=1}^{\infty} C_n^* C_n$ позитивно дефинитно и инвертибилно, па тиме ограничено одоздо са $D := \delta I$, за неко $\delta > 0$, онда је $f(\sum_{n=1}^{\infty} A_n^* \otimes A_n)(I) - f(\sum_{n=1}^{\infty} C_n^* \otimes C_n)(I) \geq (f(\delta) - f(0))I$, где је $f(\delta) - f(0) > 0$ кад год f није константна функција, одакле следи да је $f(\sum_{n=1}^{\infty} A_n^* \otimes A_n)(I) - f(\sum_{n=1}^{\infty} C_n^* \otimes C_n)(I)$ инвертибилно у овом случају, што је требало и доказати.

За доказ дела (в) имамо да је

$$\begin{aligned} & \left(f\left(\sum_{n=1}^{\infty} A_n^* A_n\right) - f\left(\sum_{n=1}^{\infty} C_n^* C_n\right)\right)^2 \\ &= \left(\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{m-1} \sum_{(\mathbf{n}_{m-k-1}, \mathbf{n}_k) \in \mathbb{N}^{m-1}} c_m A_{\mathbf{n}_{m-k-1}}^* C_{\mathbf{n}_k}^* \sum_{n=1}^{\infty} (A_n^* A_n - C_n^* C_n) C_{\mathbf{n}_k} A_{\mathbf{n}_{m-k-1}}\right)^2 \\ &= \sum_{m,j=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{m-1} \sum_{i=0}^{j-1} \sum_{(\mathbf{n}_{m-k-1}, \mathbf{n}_k) \in \mathbb{N}^{m-1}} \sum_{(l_{j-i-1}, l_i) \in \mathbb{N}^{j-1}} c_m c_j A_{l_{j-i-1}}^* C_{l_i}^* \left(\sum_{l=1}^{\infty} A_l^* A_l - C_l^* C_l\right) \\ &\quad \times C_{l_i} A_{l_{j-i-1}} A_{\mathbf{n}_{m-k-1}}^* C_{\mathbf{n}_k}^* \left(\sum_{n=1}^{\infty} A_n^* A_n - C_n^* C_n\right) C_{\mathbf{n}_k} A_{\mathbf{n}_{m-k-1}} \end{aligned} \quad (2.1.27)$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{m,j=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{m-1} \sum_{i=0}^{j-1} \sum_{(\mathbf{n}_{m-k-1}, \mathbf{n}_k) \in \mathbb{N}^{m-1}} \sum_{(l_{j-i-1}, l_i) \in \mathbb{N}^{j-1}} c_m c_j A_{\mathbf{n}_{m-k-1}}^* A_{l_{j-i-1}}^* C_{\mathbf{n}_k}^* C_{l_i}^* \\ &\quad \times \left(\sum_{n=1}^{\infty} A_n^* A_n - C_n^* C_n\right)^2 C_{l_i} C_{\mathbf{n}_k} A_{l_{j-i-1}} A_{\mathbf{n}_{m-k-1}} \end{aligned} \quad (2.1.28)$$

$$= \left(\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{m-1} \sum_{(\mathbf{n}_{m-k-1}, \mathbf{n}_k) \in \mathbb{N}^{m-1}} c_m A_{\mathbf{n}_{m-k-1}}^* C_{\mathbf{n}_k}^* \left|\sum_{n=1}^{\infty} (A_n^* A_n - C_n^* C_n)\right| C_{\mathbf{n}_k} A_{\mathbf{n}_{m-k-1}}\right)^2, \quad (2.1.29)$$

што доказује формулу (2.1.22). Овде прва једнакост у (2.1.27) следи из једнакости у (2.1.23), једнакост у (2.1.28) је последица опште комутативности свих оператора који учествују у изразу, док се једнакост у (2.1.29) проверава директно на исти начин као и друга једнакост у (2.1.27). $\square$

2.2 Главни резултати

Дефиниција 2.2.1. За аналитичку функцију $f(z) := \sum_{m=0}^{\infty} c_m z^m$ са R_f ћемо означавати њен радијус конвергенције. За тригонометријски полином $T: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}: t \mapsto \sum_{k=-K}^K a_k e^{ikt}$, где $K \in \mathbb{N}_0$ и $\{a_k\}_{k=-K}^K$ је низ у $\mathbb{C}$, дефинишимо $f_{T,t}(z) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{m=0}^{\infty} c_m T(mt) z^m$ за свако $t \in \mathbb{R}$ и $|z| < R_{f_{T,t}}$.

Како је $G_t(z) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=-K}^K \frac{a_k}{1-e^{ikt}z} = \sum_{k=-K}^K \sum_{m=0}^{\infty} a_k e^{ikmt} z^m = \sum_{m=0}^{\infty} T(mt) z^m$ (за $|z| < 1$)

рационална функција за свако $t \in \mathbb{R}$, функција $f_{T,t}$ се може видети као конволуциони производ $f * G_t$. Приметимо такође да је $|c_m T(mt)| \leq |c_m| \max_{[0,2\pi]} |T|$ за свако $m \in \mathbb{N}_0$, одакле следи да је $R_{f_{T,t}} \geq R_f$.

Напомена 2.2.2. За аналитичку функцију $f(z) := \sum_{m=0}^{\infty} c_m z^m$, свако $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ и произвољне тригонометријске полиноме T и S важи следеће својство линеарности:

$$f_{\alpha T + \beta S, t}(z) = \sum_{m=0}^{\infty} c_m (\alpha T + \beta S)(mt) z^m = \alpha f_{T,t}(z) + \beta f_{S,t}(z) \text{ за свако } t \in \mathbb{R}. \quad (2.2.1)$$

Како је показано у [19], свака функција f са позитивним коефицијентима нам даје следеће четири функције дефинисане за $|z| < R_f$ са $f_{ch}(z) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{f(z)+f(-z)}{2}$ и $f_{sh}(z) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{f(z)-f(-z)}{2}$, које такође имају позитивне коефицијенте, и функције $f_c(z) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{f(iz)+f(-iz)}{2}$ и $f_s(z) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{f(iz)-f(-iz)}{2i}$ са алтернирајућим коефицијентима. Ове четири функције и њихове линеарне комбинације се такође могу видети као примери $f_{T,t}$ функција уведених у Дефиницију 2.2.1 за одговарајући избор тригонометријског полинома T и $t \in \mathbb{R}$. Наиме, користећи идентитете $f(z) = f_{1, \frac{\pi}{2}}(z)$, $f(iz) = \sum_{m=0}^{\infty} c_m i^m z^m = \sum_{m=0}^{\infty} c_m e^{im \frac{\pi}{2}} z^m = f_{\cos + i \sin, \frac{\pi}{2}}(z)$, $f(-z) = \sum_{m=0}^{\infty} c_m (-1)^m z^m = \sum_{m=0}^{\infty} c_m \cos(2m \frac{\pi}{2}) z^m = f_{1-2 \sin^2, \frac{\pi}{2}}$ и $f(-iz) = \sum_{m=0}^{\infty} c_m (-i)^m z^m = \sum_{m=0}^{\infty} c_m e^{-im \frac{\pi}{2}} z^m = f_{\cos - i \sin, \frac{\pi}{2}}$, заједно са својством линеарности (2.2.1) добијамо следеће $f_{T, \frac{\pi}{2}}$ репрезентације функција: $f_{ch}(z) = f_{2 \cos^2, \frac{\pi}{2}}(z)$, $f_{sh}(z) = f_{2 \sin^2, \frac{\pi}{2}}(z)$, $f_c(z) = f_{\cos, \frac{\pi}{2}}(z)$ и $f_s(z) = f_{\sin, \frac{\pi}{2}}(z)$.

Теорема 2.2.3. Нека је $(c_m)_{m=0}^{\infty}$ низ у $[0, +\infty)$, $f(z) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{m=0}^{\infty} c_m z^m$ и $R > 0$, такви да је $\sum_{m=0}^{\infty} c_m R^m < +\infty$, и нека су $T: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}: t \mapsto \sum_{k=-K}^K a_k e^{ikt}$ и $S: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}: t \mapsto \sum_{l=-L}^L b_l e^{ilt}$ тригонометријски полиноми за неке $K, L \in \mathbb{N}_0$ и $t \in \mathbb{R}$. Нека је још $X \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, нека су $A := (A_n)_{n=1}^{\infty}$, $B := (B_n)_{n=1}^{\infty}$, $C := (C_n)_{n=1}^{\infty}$ и $D := (D_n)_{n=1}^{\infty}$ фамилије у $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, такве да је $A_m C_n = C_n A_m$ и $B_m D_n = D_n B_m$ за свако $m, n \in \mathbb{N}$, $p \geq 2$ и нека су Φ, Ψ с.н. функције такве да $\sum_{n=1}^{\infty} (A_n X B_n - C_n X D_n) \in \mathcal{E}_{\Psi}(\mathcal{H})$.

(а) Ако су A, B^*, C и D^* јако квадрантно сумабилне, шд. важи $\max\{\|\sum_{n=1}^{\infty} A_n^* A_n\|, \|\sum_{n=1}^{\infty} B_n B_n^*\|, \|\sum_{n=1}^{\infty} C_n^* C_n\|, \|\sum_{n=1}^{\infty} D_n D_n^*\|\} \leq R$ или $\max\{r_{A, \ell^\infty}, r_{B^*, \ell^\infty}, r_{C, \ell^\infty}, r_{D^*, \ell^\infty}\} < R$, онда имамо да је $|\sum_{n=1}^{\infty} (A_n^* A_n - C_n^* C_n)|^{\frac{1}{2}} (f_{TS,t}(\sum_{n=1}^{\infty} A_n \otimes B_n) X - f_{TS,t}(\sum_{n=1}^{\infty} C_n \otimes D_n) X) \times |\sum_{n=1}^{\infty} (B_n B_n^* - D_n D_n^*)|^{\frac{1}{2}} \in \mathcal{E}_{\Psi}(\mathcal{H})$ и:

$$\begin{aligned} & \left\| \sum_{n=1}^{\infty} (A_n^* A_n - C_n^* C_n) \right\|^{\frac{1}{2}} \left(f_{TS,t} \left(\sum_{n=1}^{\infty} A_n \otimes B_n \right) X - f_{TS,t} \left(\sum_{n=1}^{\infty} C_n \otimes D_n \right) X \right) \\ & \times \left\| \sum_{n=1}^{\infty} (B_n B_n^* - D_n D_n^*) \right\|^{\frac{1}{2}} \Big\|_{\Psi} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq \left\| \left| f_{\bar{T}T,t} \left(\sum_{n=1}^{\infty} A_n^* A_n \right) - f_{\bar{T}T,t} \left(\sum_{n=1}^{\infty} C_n^* C_n \right) \right|^{\frac{1}{2}} \sum_{n=1}^{\infty} (A_n X B_n - C_n X D_n) \right. \\ &\quad \times \left. \left| f_{\bar{S}S,t} \left(\sum_{n=1}^{\infty} B_n B_n^* \right) - f_{\bar{S}S,t} \left(\sum_{n=1}^{\infty} D_n D_n^* \right) \right|^{\frac{1}{2}} \right\|_{\Psi}, \end{aligned} \quad (2.2.2)$$

(a1) ако су догађајно A, B^*, C и D^* м.к.н.о. фамилије;

$$\begin{aligned} &\left\| \left| \sum_{n=1}^{\infty} (A_n^* A_n - C_n^* C_n) \right|^{\frac{1}{2}} \left(f_{TS,t} \left(\sum_{n=1}^{\infty} A_n \otimes B_n \right) X - f_{TS,t} \left(\sum_{n=1}^{\infty} C_n \otimes D_n \right) X \right) \right. \\ &\quad \times \left. \left| \sum_{n=1}^{\infty} (B_n B_n^* - D_n D_n^*) \right|^{\frac{1}{2}} \right\|_{\Psi} \\ &\leq \left\| \left| f_{\bar{T}T,t} \left(\sum_{n=1}^{\infty} A_n^* A_n \right) - f_{\bar{T}T,t} \left(\sum_{n=1}^{\infty} C_n^* C_n \right) \right|^{\frac{1}{2}} \sum_{n=1}^{\infty} (A_n X B_n - C_n X D_n) \right. \\ &\quad \times \left. \left| f_{\bar{S}S,t} \left(\sum_{n=1}^{\infty} B_n \otimes B_n^* \right) (I) - f_{\bar{S}S,t} \left(\sum_{n=1}^{\infty} D_n \otimes D_n^* \right) (I) \right|^{\frac{1}{2}} \right\|_{\Psi}, \end{aligned} \quad (2.2.3)$$

(a2) ако је $\Psi := \Phi^{(p)*}$, фамилије A, C су догађајно м.к.н.о. и $\sum_{n=1}^{\infty} (B_n B_n^* - D_n D_n^*)$ је полу-дефинијна;

$$\begin{aligned} &\left\| \left| \sum_{n=1}^{\infty} (A_n^* A_n - C_n^* C_n) \right|^{\frac{1}{2}} \left(f_{TS,t} \left(\sum_{n=1}^{\infty} A_n \otimes B_n \right) X - f_{TS,t} \left(\sum_{n=1}^{\infty} C_n \otimes D_n \right) X \right) \right. \\ &\quad \times \left. \left| \sum_{n=1}^{\infty} (B_n B_n^* - D_n D_n^*) \right|^{\frac{1}{2}} \right\|_{\Psi} \\ &\leq \left\| \left| f_{\bar{T}T,t} \left(\sum_{n=1}^{\infty} A_n^* \otimes A_n \right) (I) - f_{\bar{T}T,t} \left(\sum_{n=1}^{\infty} C_n^* \otimes C_n \right) (I) \right|^{\frac{1}{2}} \sum_{n=1}^{\infty} (A_n X B_n - C_n X D_n) \right. \\ &\quad \times \left. \left| f_{\bar{S}S,t} \left(\sum_{n=1}^{\infty} B_n B_n^* \right) - f_{\bar{S}S,t} \left(\sum_{n=1}^{\infty} D_n D_n^* \right) \right|^{\frac{1}{2}} \right\|_{\Psi}, \end{aligned} \quad (2.2.4)$$

(a3) ако је $\Psi := \Phi^{(p)*}$, фамилије B, D су догађајно м.к.н.о. и $\sum_{n=1}^{\infty} (A_n^* A_n - C_n^* C_n)$ је полу-дефинијна;

$$\begin{aligned} &\left\| \left| \sum_{n=1}^{\infty} (A_n^* A_n - C_n^* C_n) \right|^{\frac{1}{2}} \left(f_{TS,t} \left(\sum_{n=1}^{\infty} A_n \otimes B_n \right) X - f_{TS,t} \left(\sum_{n=1}^{\infty} C_n \otimes D_n \right) X \right) \right. \\ &\quad \times \left. \left| \sum_{n=1}^{\infty} (B_n B_n^* - D_n D_n^*) \right|^{\frac{1}{2}} \right\|_{\Psi} \\ &\leq \left\| \left| f_{\bar{T}T,t} \left(\sum_{n=1}^{\infty} A_n^* \otimes A_n \right) (I) - f_{\bar{T}T,t} \left(\sum_{n=1}^{\infty} C_n^* \otimes C_n \right) (I) \right|^{\frac{1}{2}} \sum_{n=1}^{\infty} (A_n X B_n - C_n X D_n) \right. \\ &\quad \times \left. \left| f_{\bar{S}S,t} \left(\sum_{n=1}^{\infty} B_n \otimes B_n^* \right) (I) - f_{\bar{S}S,t} \left(\sum_{n=1}^{\infty} D_n \otimes D_n^* \right) (I) \right|^{\frac{1}{2}} \right\|_{\Psi}, \end{aligned} \quad (2.2.5)$$

(а4) ако је $\Psi := \ell^1$ ($\bar{u}j. \|\cdot\|_\Psi := \|\cdot\|_1$) и оба $\sum_{n=1}^\infty (A_n^* A_n - C_n^* C_n)$ и $\sum_{n=1}^\infty (B_n B_n^* - D_n D_n^*)$ су $\bar{u}$ олу-дефинитни.

(б) Ако су фамилије A^*, B^*, C^* и D^* $j.k.c.$ $\bar{u}$ акве да је $\bar{u}$ ператор $\sum_{n=1}^\infty (A_n A_n^* - C_n C_n^*)$ $\bar{u}$ стро $\bar{u}$ олу-дефинитан и важи да је $\max\{r_{A^*, \ell^\infty}, r_{B^*, \ell^\infty}, r_{C^*, \ell^\infty}, r_{D^*, \ell^\infty}\} < R$ или је $\max\{\|\sum_{n=1}^\infty A_n A_n^*\|, \|\sum_{n=1}^\infty B_n B_n^*\|, \|\sum_{n=1}^\infty C_n C_n^*\|, \|\sum_{n=1}^\infty D_n D_n^*\|\} \leq R$, $\bar{u}$ ада је $\bar{u}$ акође и $(f_{TS,t}(\sum_{n=1}^\infty A_n \otimes B_n)X - f_{TS,t}(\sum_{n=1}^\infty C_n \otimes D_n)X) \left| \sum_{n=1}^\infty (B_n B_n^* - D_n D_n^*) \right|^{\frac{1}{2}} \in \mathfrak{C}_\Psi(\mathcal{H})$ и важи:

$$\begin{aligned} & \left\| \left| f_{\bar{T}T,t} \left(\sum_{n=1}^\infty A_n \otimes A_n^* \right) (I) - f_{\bar{T}T,t} \left(\sum_{n=1}^\infty C_n \otimes C_n^* \right) (I) \right|^{-\frac{1}{2}} \right. \\ & \times \left(f_{TS,t} \left(\sum_{n=1}^\infty A_n \otimes B_n \right) X - f_{TS,t} \left(\sum_{n=1}^\infty C_n \otimes D_n \right) X \right) \left| \sum_{n=1}^\infty (B_n B_n^* - D_n D_n^*) \right|^{\frac{1}{2}} \left. \right\|_\Psi \\ & \leq \left\| \left| \sum_{n=1}^\infty (A_n A_n^* - C_n C_n^*) \right|^{-\frac{1}{2}} \sum_{n=1}^\infty (A_n X B_n - C_n X D_n) \right. \\ & \times \left| f_{\bar{S}S,t} \left(\sum_{n=1}^\infty B_n \otimes B_n^* \right) (I) - f_{\bar{S}S,t} \left(\sum_{n=1}^\infty D_n \otimes D_n^* \right) (I) \right|^{\frac{1}{2}} \left. \right\|_\Psi, \end{aligned} \quad (2.2.6)$$

(б1) ако је $\Psi := \ell^2$ ($\bar{u}j. \|\cdot\|_\Psi := \|\cdot\|_2$), функција $f_{\bar{T}T,t}$ није константна и $\bar{u}$ ператор $\sum_{n=1}^\infty (B_n B_n^* - D_n D_n^*)$ је $\bar{u}$ олу-дефинитан;

$$\begin{aligned} & \left\| \left(f_{TS,t} \left(\sum_{n=1}^\infty A_n \otimes B_n \right) X - f_{TS,t} \left(\sum_{n=1}^\infty C_n \otimes D_n \right) X \right) \left| \sum_{n=1}^\infty (B_n B_n^* - D_n D_n^*) \right|^{\frac{1}{2}} \right\|_\Psi \\ & \leq \left\| f_{\bar{T}T,t} \left(\sum_{n=1}^\infty A_n \otimes A_n^* \right) (I) - f_{\bar{T}T,t} \left(\sum_{n=1}^\infty C_n \otimes C_n^* \right) (I) \right\|^{\frac{1}{2}} \\ & \times \left\| \left| \sum_{n=1}^\infty (A_n A_n^* - C_n C_n^*) \right|^{-\frac{1}{2}} \sum_{n=1}^\infty (A_n X B_n - C_n X D_n) \right. \\ & \times \left| f_{\bar{S}S,t} \left(\sum_{n=1}^\infty B_n \otimes B_n^* \right) (I) - f_{\bar{S}S,t} \left(\sum_{n=1}^\infty D_n \otimes D_n^* \right) (I) \right|^{\frac{1}{2}} \left. \right\|_\Psi, \end{aligned} \quad (2.2.7)$$

(б2) ако је $\Psi := \ell^2$ и $\bar{u}$ ператор $\sum_{n=1}^\infty (B_n B_n^* - D_n D_n^*)$ је $\bar{u}$ олу-дефинитан;

$$\begin{aligned} & \left\| \left| f_{\bar{T}T,t} \left(\sum_{n=1}^\infty A_n \otimes A_n^* \right) (I) - f_{\bar{T}T,t} \left(\sum_{n=1}^\infty C_n \otimes C_n^* \right) (I) \right|^{-\frac{1}{2}} \right. \\ & \times \left(f_{TS,t} \left(\sum_{n=1}^\infty A_n \otimes B_n \right) X - f_{TS,t} \left(\sum_{n=1}^\infty C_n \otimes D_n \right) X \right) \left| \sum_{n=1}^\infty (B_n B_n^* - D_n D_n^*) \right|^{\frac{1}{2}} \left. \right\|_\Psi \\ & \leq \left\| \left| \sum_{n=1}^\infty (A_n A_n^* - C_n C_n^*) \right|^{-\frac{1}{2}} \sum_{n=1}^\infty (A_n X B_n - C_n X D_n) \right. \\ & \times \left| f_{\bar{S}S,t} \left(\sum_{n=1}^\infty B_n B_n^* \right) - f_{\bar{S}S,t} \left(\sum_{n=1}^\infty D_n D_n^* \right) \right|^{\frac{1}{2}} \left. \right\|_\Psi, \end{aligned} \quad (2.2.8)$$

(б3) ако је $\Psi := \Phi^{(p)}$, функција $f_{\bar{T}T,t}$ није константна и фамилије B и D су догајно м.к.н.о;

$$\begin{aligned}
 & \left\| \left(f_{TS,t} \left(\sum_{n=1}^{\infty} A_n \otimes B_n \right) X - f_{TS,t} \left(\sum_{n=1}^{\infty} C_n \otimes D_n \right) X \right) \left| \sum_{n=1}^{\infty} (B_n B_n^* - D_n D_n^*) \right|^{\frac{1}{2}} \right\|_{\Psi} \\
 & \leq \left\| f_{\bar{T}T,t} \left(\sum_{n=1}^{\infty} A_n \otimes A_n^* \right) (I) - f_{\bar{T}T,t} \left(\sum_{n=1}^{\infty} C_n \otimes C_n^* \right) (I) \right\|^{\frac{1}{2}} \\
 & \times \left\| \sum_{n=1}^{\infty} (A_n A_n^* - C_n C_n^*) \right|^{-\frac{1}{2}} \sum_{n=1}^{\infty} (A_n X B_n - C_n X D_n) \\
 & \times \left\| f_{\bar{S}S,t} \left(\sum_{n=1}^{\infty} B_n B_n^* \right) - f_{\bar{S}S,t} \left(\sum_{n=1}^{\infty} D_n D_n^* \right) \right|^{\frac{1}{2}} \right\|_{\Psi}, \tag{2.2.9}
 \end{aligned}$$

(б4) ако је $\Psi := \Phi^{(p)}$ и фамилије B и D су догајно м.к.н.о.

(в) Ако су фамилије A, B, C и D ј.к.с. њакве да је ојератор $\sum_{n=1}^{\infty} (B_n^* B_n - D_n^* D_n)$ сјројо јолу-дефинијан и важи да је $\max\{r_{A,\ell^\infty}, r_{B,\ell^\infty}, r_{C,\ell^\infty}, r_{D,\ell^\infty}\} < R$ или важи да је $\max\{\|\sum_{n=1}^{\infty} A_n^* A_n\|, \|\sum_{n=1}^{\infty} B_n^* B_n\|, \|\sum_{n=1}^{\infty} C_n^* C_n\|, \|\sum_{n=1}^{\infty} D_n^* D_n\|\} \leq R$, њада је њакође и $|\sum_{n=1}^{\infty} (A_n^* A_n - C_n^* C_n)|^{\frac{1}{2}} (f_{TS,t}(\sum_{n=1}^{\infty} A_n \otimes B_n) X - f_{TS,t}(\sum_{n=1}^{\infty} C_n \otimes D_n) X) \in \mathfrak{C}_{\Psi}(\mathcal{H})$ и важи:

$$\begin{aligned}
 & \left\| \left| \sum_{n=1}^{\infty} (A_n^* A_n - C_n^* C_n) \right|^{\frac{1}{2}} \left(f_{TS,t} \left(\sum_{n=1}^{\infty} A_n \otimes B_n \right) X - f_{TS,t} \left(\sum_{n=1}^{\infty} C_n \otimes D_n \right) X \right) \right. \\
 & \times \left. \left| f_{\bar{S}S,t} \left(\sum_{n=1}^{\infty} B_n^* \otimes B_n \right) (I) - f_{\bar{S}S,t} \left(\sum_{n=1}^{\infty} D_n^* \otimes D_n \right) (I) \right|^{-\frac{1}{2}} \right\|_{\Psi} \\
 & \leq \left\| f_{\bar{T}T,t} \left(\sum_{n=1}^{\infty} A_n^* \otimes A_n \right) (I) - f_{\bar{T}T,t} \left(\sum_{n=1}^{\infty} C_n^* \otimes C_n \right) (I) \right|^{\frac{1}{2}} \sum_{n=1}^{\infty} (A_n X B_n - C_n X D_n) \\
 & \times \left\| \sum_{n=1}^{\infty} (B_n^* B_n - D_n^* D_n) \right|^{-\frac{1}{2}} \right\|_{\Psi}, \tag{2.2.10}
 \end{aligned}$$

(в1) ако је $\Psi := \ell^2$, функција $f_{\bar{S}S,t}$ није константна и ојератор $\sum_{n=1}^{\infty} (A_n^* A_n - C_n^* C_n)$ је јолу-дефинијан;

$$\begin{aligned}
 & \left\| \left| \sum_{n=1}^{\infty} (A_n^* A_n - C_n^* C_n) \right|^{\frac{1}{2}} \left(f_{TS,t} \left(\sum_{n=1}^{\infty} A_n \otimes B_n \right) X - f_{TS,t} \left(\sum_{n=1}^{\infty} C_n \otimes D_n \right) X \right) \right\|_{\Psi} \\
 & \leq \left\| f_{\bar{S}S,t} \left(\sum_{n=1}^{\infty} B_n^* \otimes B_n \right) (I) - f_{\bar{S}S,t} \left(\sum_{n=1}^{\infty} D_n^* \otimes D_n \right) (I) \right\|^{\frac{1}{2}} \\
 & \times \left\| f_{\bar{T}T,t} \left(\sum_{n=1}^{\infty} A_n^* \otimes A_n \right) (I) - f_{\bar{T}T,t} \left(\sum_{n=1}^{\infty} C_n^* \otimes C_n \right) (I) \right|^{\frac{1}{2}} \sum_{n=1}^{\infty} (A_n X B_n - C_n X D_n) \\
 & \times \left\| \sum_{n=1}^{\infty} (B_n^* B_n - D_n^* D_n) \right|^{-\frac{1}{2}} \right\|_{\Psi}, \tag{2.2.11}
 \end{aligned}$$

(в2) ако је $\Psi := \ell^2$ и оператор $\sum_{n=1}^{\infty} (A_n^* A_n - C_n^* C_n)$ је полу-дефинитан;

$$\begin{aligned}
 & \left\| \left| \sum_{n=1}^{\infty} (A_n^* A_n - C_n^* C_n) \right|^{\frac{1}{2}} \left(f_{TS,t} \left(\sum_{n=1}^{\infty} A_n \otimes B_n \right) X - f_{TS,t} \left(\sum_{n=1}^{\infty} C_n \otimes D_n \right) X \right) \right. \\
 & \times \left. \left| f_{\bar{S}S,t} \left(\sum_{n=1}^{\infty} B_n^* B_n \right) - f_{\bar{S}S,t} \left(\sum_{n=1}^{\infty} D_n^* D_n \right) \right|^{-\frac{1}{2}} \right\|_{\Psi} \\
 & \leq \left\| \left| f_{\bar{T}T,t} \left(\sum_{n=1}^{\infty} A_n^* \otimes A_n \right) (I) - f_{\bar{T}T,t} \left(\sum_{n=1}^{\infty} C_n^* \otimes C_n \right) (I) \right|^{\frac{1}{2}} \sum_{n=1}^{\infty} (A_n X B_n - C_n X D_n) \right. \\
 & \times \left. \left| \sum_{n=1}^{\infty} (B_n^* B_n - D_n^* D_n) \right|^{-\frac{1}{2}} \right\|_{\Psi}, \tag{2.2.12}
 \end{aligned}$$

(в3) ако је $\Psi := \Phi^{(p)}$, функција $f_{\bar{S}S,t}$ није константна и фамилије B и D су додато м.к.н.о;

$$\begin{aligned}
 & \left\| \left| \sum_{n=1}^{\infty} (A_n^* A_n - C_n^* C_n) \right|^{\frac{1}{2}} \left(f_{TS,t} \left(\sum_{n=1}^{\infty} A_n \otimes B_n \right) X - f_{TS,t} \left(\sum_{n=1}^{\infty} C_n \otimes D_n \right) X \right) \right\|_{\Psi} \\
 & \leq \left\| f_{\bar{S}S,t} \left(\sum_{n=1}^{\infty} B_n^* B_n \right) - f_{\bar{S}S,t} \left(\sum_{n=1}^{\infty} D_n^* D_n \right) \right\|^{\frac{1}{2}} \\
 & \times \left\| \left| f_{\bar{T}T,t} \left(\sum_{n=1}^{\infty} A_n^* \otimes A_n \right) (I) - f_{\bar{T}T,t} \left(\sum_{n=1}^{\infty} C_n^* \otimes C_n \right) (I) \right|^{\frac{1}{2}} \sum_{n=1}^{\infty} (A_n X B_n - C_n X D_n) \right. \\
 & \times \left. \left| \sum_{n=1}^{\infty} (B_n^* B_n - D_n^* D_n) \right|^{-\frac{1}{2}} \right\|_{\Psi}, \tag{2.2.13}
 \end{aligned}$$

(в4) ако су $\Psi := \Phi^{(p)}$ и фамилије B и D су додато м.к.н.о.

Доказ. Дефинишимо $\Delta_{f_{\bar{T}T,t}}(E, F) \stackrel{\text{def}}{=} |f_{\bar{T}T,t}(\sum_{n=1}^{\infty} E_n^* \otimes E_n)(I) - f_{\bar{T}T,t}(\sum_{n=1}^{\infty} F_n^* \otimes F_n)(I)|$ и $\Delta_{f_{\bar{S}S,t}}(E, F) \stackrel{\text{def}}{=} |f_{\bar{S}S,t}(\sum_{n=1}^{\infty} E_n^* \otimes E_n)(I) - f_{\bar{S}S,t}(\sum_{n=1}^{\infty} F_n^* \otimes F_n)(I)|$ за ј.к.с. фамилије оператора $E := (E_n)_{n=1}^{\infty}$ и $F := (F_n)_{n=1}^{\infty}$. Уколико су фамилије E и F додатно м.к.н.о, имамо да важи једнакост $\Delta_{f_{\bar{T}T,t}}(E, F) = |f_{\bar{T}T,t}(\sum_{n=1}^{\infty} E_n^* E_n) - f_{\bar{T}T,t}(\sum_{n=1}^{\infty} F_n^* F_n)|$.

Прво, приметимо да под било којим од услова $\max\{r_{A,\ell^\infty}, r_{B^*,\ell^\infty}, r_{C,\ell^\infty}, r_{D^*,\ell^\infty}\} < R$ или $\max\{\|\sum_{n=1}^{\infty} A_n^* A_n\|, \|\sum_{n=1}^{\infty} B_n B_n^*\|, \|\sum_{n=1}^{\infty} C_n^* C_n\|, \|\sum_{n=1}^{\infty} D_n D_n^*\|\} \leq R$ који се појављују у (а1)–(а4) трансформери $f_{\bar{T}T,t}(\sum_{n=1}^{\infty} A_n^* \otimes A_n)$, $f_{\bar{S}S,t}(\sum_{n=1}^{\infty} B_n \otimes B_n^*)$, $f_{\bar{T}T,t}(\sum_{n=1}^{\infty} C_n^* \otimes C_n)$ и $f_{\bar{S}S,t}(\sum_{n=1}^{\infty} D_n \otimes D_n^*)$ су ограничени на $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ на основу другог дела Леме 2.1.4. Слично, $f_{TS,t}(\sum_{n=1}^{\infty} A_n \otimes B_n)$ и $f_{TS,t}(\sum_{n=1}^{\infty} C_n \otimes D_n)$ су ограничени трансформери на $\mathcal{C}_{\Psi}(\mathcal{H})$ у случајевима (а1)–(а4) на основу Леме 2.1.4 и неједнакости (2.1.7) из Леме 2.1.3.

Доказ дела (а1) се заснива на следећем низу једнакости и неједнакости:

$$\begin{aligned}
 & \left\| \left| \sum_{n=1}^{\infty} (A_n^* A_n - C_n^* C_n) \right|^{\frac{1}{2}} \left(f_{TS,t} \left(\sum_{n=1}^{\infty} A_n \otimes B_n \right) X - f_{TS,t} \left(\sum_{n=1}^{\infty} C_n \otimes D_n \right) X \right) \right. \\
 & \times \left. \left| \sum_{n=1}^{\infty} (B_n B_n^* - D_n D_n^*) \right|^{\frac{1}{2}} \right\|_{\Psi}
 \end{aligned}$$

$$= \left\| \left| \sum_{n=1}^{\infty} (A_n^* A_n - C_n^* C_n) \right|^{\frac{1}{2}} \sum_{m,n=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{m-1} \sum_{(\mathbf{n}_{m-k-1}, \mathbf{n}_k) \in \mathbb{N}^{m-1}} c_m T(mt) S(mt) \right. \quad (2.2.14)$$

$$\times A_{\mathbf{n}_{m-k-1}} C_{\mathbf{n}_k} (A_n X B_n - C_n X D_n) D_{\mathbf{n}_k} B_{\mathbf{n}_{m-k-1}} \left| \sum_{n=1}^{\infty} (B_n B_n^* - D_n D_n^*) \right|^{\frac{1}{2}} \Big\|_{\Psi} \quad (2.2.15)$$

$$\leq \left\| \left(\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{m-1} \sum_{(\mathbf{n}_{m-k-1}, \mathbf{n}_k) \in \mathbb{N}^{m-1}} c_m |T(mt)|^2 A_{\mathbf{n}_{m-k-1}}^* C_{\mathbf{n}_k}^* \left| \sum_{n=1}^{\infty} (A_n^* A_n - C_n^* C_n) \right| \right. \right. \quad (2.2.15)$$

$$\times C_{\mathbf{n}_k} A_{\mathbf{n}_{m-k-1}} \Big)^{\frac{1}{2}} \sum_{n=1}^{\infty} (A_n X B_n - C_n X D_n) \left(\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{m-1} \sum_{(\mathbf{n}_{m-k-1}, \mathbf{n}_k) \in \mathbb{N}^{m-1}} c_m |S(mt)|^2 \right.$$

$$\times B_{\mathbf{n}_{m-k-1}} D_{\mathbf{n}_k} \left| \sum_{n=1}^{\infty} (B_n B_n^* - D_n D_n^*) \right| D_{\mathbf{n}_k}^* B_{\mathbf{n}_{m-k-1}}^* \Big)^{\frac{1}{2}} \Big\|_{\Psi}$$

$$= \left\| \sum_{m=1}^{\infty} c_m |T(mt)|^2 \sum_{k=0}^{m-1} \sum_{(\mathbf{n}_{m-k-1}, \mathbf{n}_k) \in \mathbb{N}^{m-1}} A_{\mathbf{n}_{m-k-1}}^* C_{\mathbf{n}_k}^* \sum_{n=1}^{\infty} (A_n^* A_n - C_n^* C_n) \right.$$

$$\times C_{\mathbf{n}_k} A_{\mathbf{n}_{m-k-1}} \Big|^{\frac{1}{2}} \sum_{n=1}^{\infty} (A_n X B_n - C_n X D_n) \left| \sum_{m=1}^{\infty} c_m |S(mt)|^2 \sum_{k=0}^{m-1} \sum_{(\mathbf{n}_{m-k-1}, \mathbf{n}_k) \in \mathbb{N}^{m-1}} \right.$$

$$B_{\mathbf{n}_{m-k-1}} D_{\mathbf{n}_k} \sum_{n=1}^{\infty} (B_n B_n^* - D_n D_n^*) D_{\mathbf{n}_k}^* B_{\mathbf{n}_{m-k-1}}^* \Big|^{\frac{1}{2}} \Big\|_{\Psi}$$

$$= \left\| \sum_{m=1}^{\infty} c_m |T(mt)|^2 \left(\left(\sum_{n=1}^{\infty} A_n^* \otimes A_n \right)^m (I) - \left(\sum_{n=1}^{\infty} C_n^* \otimes C_n \right)^m (I) \right) \right|^{\frac{1}{2}} \quad (2.2.16)$$

$$\times \sum_{n=1}^{\infty} (A_n X B_n - C_n X D_n)$$

$$\times \left| \sum_{m=1}^{\infty} c_m |S(mt)|^2 \left(\left(\sum_{n=1}^{\infty} B_n \otimes B_n^* \right)^m (I) - \left(\sum_{n=1}^{\infty} D_n \otimes D_n^* \right)^m (I) \right) \right|^{\frac{1}{2}} \Big\|_{\Psi}$$

$$= \left\| f_{\bar{T}T,t} \left(\sum_{n=1}^{\infty} A_n^* \otimes A_n \right) (I) - f_{\bar{T}T,t} \left(\sum_{n=1}^{\infty} C_n^* \otimes C_n \right) (I) \right|^{\frac{1}{2}} \sum_{n=1}^{\infty} (A_n X B_n - C_n X D_n)$$

$$\times \left| f_{\bar{S}S,t} \left(\sum_{n=1}^{\infty} B_n \otimes B_n^* \right) (I) - f_{\bar{S}S,t} \left(\sum_{n=1}^{\infty} D_n \otimes D_n^* \right) (I) \right|^{\frac{1}{2}} \Big\|_{\Psi}$$

$$= \left\| \Delta_{f_{\bar{T}T,t}}(A, C)^{\frac{1}{2}} \sum_{n=1}^{\infty} (A_n X B_n - C_n X D_n) \Delta_{f_{\bar{S}S,t}}(B^*, D^*)^{\frac{1}{2}} \right\|_{\Psi}. \quad (2.2.17)$$

Једнакост у (2.2.14) је заснована на формули (2.1.1), док је неједнакост у (2.2.15) заснована на Коши–Шварцовој норма неједнакости (1.5.1) из Теореме 1.5.3, примењеној на м.к.н.о. фамилије $\mathbf{A} := (\sqrt{c_m} T(mt) \left| \sum_{n=1}^{\infty} (A_n^* A_n - C_n^* C_n) \right|^{\frac{1}{2}} A_{\mathbf{n}_{m-k-1}} C_{\mathbf{n}_k})_{1 \leq m, 0 \leq k \leq m-1, (\mathbf{n}_{m-k-1}, \mathbf{n}_k) \in \mathbb{N}^{m-1}}$ и $\mathbf{B} := (\sqrt{c_m} S(mt) B_{\mathbf{n}_{m-k-1}} D_{\mathbf{n}_k} \left| \sum_{n=1}^{\infty} (B_n B_n^* - D_n D_n^*) \right|^{\frac{1}{2}})_{1 \leq m, 0 \leq k \leq m-1, (\mathbf{n}_{m-k-1}, \mathbf{n}_k) \in \mathbb{N}^{m-1}}$, уместо на $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ и $(B_n)_{n=1}^{\infty}$, редом, што је последица чињенице да је фамилија $(A_n)_{n=1}^{\infty} \cup (C_n)_{n=1}^{\infty}$ такође м.к.н.о, под претпоставкама ове теореме. Једнакост у (2.2.15) је заснована на дуплој

примени формуле (2.1.22) на $c_m|T(mt)|^2$ и $c_m|S(mt)|^2$ уместо на c_m за свако $m \in \mathbb{N}$, док је једнакост (2.2.16) заснована на идентитетима (2.1.2) и (2.1.3). Доказ дела под (a1) сада следи из чињенице да је $\Delta_{f_{\bar{T}T,t}}(A, C) = |f_{\bar{T}T,t}(\sum_{n=1}^{\infty} A_n^* A_n) - f_{\bar{T}T,t}(\sum_{n=1}^{\infty} C_n^* C_n)|$ и $\Delta_{f_{\bar{S}S,t}}(B^*, D^*) = |f_{\bar{S}S,t}(\sum_{n=1}^{\infty} B_n B_n^*) - f_{\bar{S}S,t}(\sum_{n=1}^{\infty} D_n D_n^*)|$ с обзиром да су фамилије $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \cup \{C_n\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{B_n\}_{n=1}^{\infty} \cup \{D_n\}_{n=1}^{\infty}$ м.к.н.о.

Доказ делова (a2), (a3) и (a4) је сличан као у (2.2.14)–(2.2.17), с тим што уместо Теореме 1.5.3 сада користимо Коши–Шварцову норма неједнакост (1.5.10) из Леме 1.5.7 да бисмо доказали неједнакост у (2.2.15) у (a2) и (a3), док користимо специјалан случај $p := 1$ у Коши–Шварцовој норма неједнакости (1.5.2) у Теорему 1.5.4 да бисмо доказали неједнакост у (2.2.15) у (a4). Израз у (2.2.17) постаје израз у (2.2.3), јер је фамилија $(A_n)_{n=1}^{\infty} \cup (C_n)_{n=1}^{\infty}$ м.к.н.о. под претпоставкама из (б1), и слично, постаје израз у (2.2.4), јер је фамилија $(B_n)_{n=1}^{\infty} \cup (D_n)_{n=1}^{\infty}$ м.к.н.о. под претпоставкама из (a3).

За доказ дела (б), приметимо прво да под условима $\max\{r_{A^*,\ell^\infty}, r_{B^*,\ell^\infty}, r_{C^*,\ell^\infty}, r_{D^*,\ell^\infty}\} < R$ или $\max\{\|\sum_{n=1}^{\infty} A_n A_n^*\|, \|\sum_{n=1}^{\infty} B_n B_n^*\|, \|\sum_{n=1}^{\infty} C_n C_n^*\|, \|\sum_{n=1}^{\infty} D_n D_n^*\|\} \leq R$ који се појављују у (б1)–(б4), важи да су трансформери $f_{TS,t}(\sum_{n=1}^{\infty} A_n \otimes B_n)$ и $f_{TS,t}(\sum_{n=1}^{\infty} C_n \otimes D_n)$ ограничени на $\mathfrak{C}_\Psi(\mathcal{H})$ на основу Леме 2.1.4 и неједнакости (2.1.8) из Леме 2.1.3. Трансформери $f_{\bar{T}T,t}(\sum_{n=1}^{\infty} A_n \otimes A_n^*)$, $f_{\bar{S}S,t}(\sum_{n=1}^{\infty} B_n \otimes B_n^*)$, $f_{\bar{T}T,t}(\sum_{n=1}^{\infty} C_n \otimes C_n^*)$ и $f_{\bar{S}S,t}(\sum_{n=1}^{\infty} D_n \otimes D_n^*)$ су ограничени на $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$ на основу другог дела Леме 2.1.4.

Доказ неједнакости (2.2.6) у случају (б1) се ослања на следећи низ једнакости и једну неједнакост:

$$\begin{aligned}
 & \left\| \Delta_{f_{\bar{T}T,t}}(A^*, C^*)^{-\frac{1}{2}} \left(f_{TS,t} \left(\sum_{n=1}^{\infty} A_n \otimes B_n \right) X - f_{TS,t} \left(\sum_{n=1}^{\infty} C_n \otimes D_n \right) X \right) \right. \\
 & \times \left. \left| \sum_{n=1}^{\infty} (B_n B_n^* - D_n D_n^*) \right|^{\frac{1}{2}} \right\|_{\Psi} \\
 &= \left\| \Delta_{f_{\bar{T}T,t}}(A^*, C^*)^{-\frac{1}{2}} \left(\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{m-1} \sum_{(\mathbf{n}_{m-k-1}, \mathbf{n}_k) \in \mathbb{N}^{m-1}} c_m T(mt) S(mt) A_{\mathbf{n}_{m-k-1}} C_{\mathbf{n}_k} \right. \right. \\
 & \times \left. \left. \sum_{n=1}^{\infty} (A_n X B_n - C_n X D_n) D_{\mathbf{n}_k} B_{\mathbf{n}_{m-k-1}} \right) \left| \sum_{n=1}^{\infty} (B_n B_n^* - D_n D_n^*) \right|^{\frac{1}{2}} \right\|_{\Psi} \\
 &= \left\| \Delta_{f_{\bar{T}T,t}}(A^*, C^*)^{-\frac{1}{2}} \left(\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{m-1} \sum_{(\mathbf{n}_{m-k-1}, \mathbf{n}_k) \in \mathbb{N}^{m-1}} c_m T(mt) S(mt) A_{\mathbf{n}_{m-k-1}} C_{\mathbf{n}_k} \right. \right. \\
 & \times \left. \left. \sum_{n=1}^{\infty} (A_n A_n^* - C_n C_n^*) \right|^{\frac{1}{2}} Y D_{\mathbf{n}_k} B_{\mathbf{n}_{m-k-1}} \right) \left| \sum_{n=1}^{\infty} (B_n B_n^* - D_n D_n^*) \right|^{\frac{1}{2}} \right\|_{\Psi}
 \end{aligned} \tag{2.2.18}$$

$$\begin{aligned}
 & \leq \left\| \Delta_{f_{\bar{T}T,t}}(A^*, C^*)^{-\frac{1}{2}} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{m-1} \sum_{(\mathbf{n}_{m-k-1}, \mathbf{n}_k) \in \mathbb{N}^{m-1}} c_m |T(mt)|^2 A_{\mathbf{n}_{m-k-1}} C_{\mathbf{n}_k} \right. \\
 & \times \left| \sum_{n=1}^{\infty} (A_n A_n^* - C_n C_n^*) \right| C_{\mathbf{n}_k}^* A_{\mathbf{n}_{m-k-1}}^* \Delta_{f_{\bar{T}T,t}}(A^*, C^*)^{-\frac{1}{2}} \left\|^{\frac{1}{2}} \right. \\
 & \times \left\| Y \left| \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{m-1} \sum_{(\mathbf{n}_{m-k-1}, \mathbf{n}_k) \in \mathbb{N}^{m-1}} c_m |S(mt)|^2 B_{\mathbf{n}_{m-k-1}} D_{\mathbf{n}_k} \right. \right.
 \end{aligned} \tag{2.2.19}$$

$$\begin{aligned} & \times \left\| \sum_{n=1}^{\infty} (B_n B_n^* - D_n D_n^*) D_{\mathbf{n}_k}^* B_{\mathbf{n}_{m-k-1}} \right\|_{\Psi}^{\frac{1}{2}} \\ & = \left\| \Delta_{f_{\bar{T}T,t}}(A^*, C^*)^{-\frac{1}{2}} \Delta_{f_{\bar{T}T,t}}(A^*, C^*) \Delta_{f_{\bar{T}T,t}}(A^*, C^*)^{-\frac{1}{2}} \right\|_{\Psi}^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (2.2.20)$$

$$\times \left\| \left| \sum_{n=1}^{\infty} (A_n A_n^* - C_n C_n^*) \right|^{-\frac{1}{2}} \sum_{n=1}^{\infty} (A_n X B_n - C_n X D_n) \Delta_{f_{\bar{S}S,t}}(B^*, D^*)^{\frac{1}{2}} \right\|_{\Psi}. \quad (2.2.21)$$

Оператор $\Delta_{f_{\bar{T}T,t}}(A^*, C^*)^{-\frac{1}{2}}$ је дефинисан на основу додатних услова из Леме 2.1.5(б), примењених на $f_{\bar{T}T,t}$ уместо на f и фамилије A^* и C^* уместо A и C . Друга једнакост у (2.2.18) је због смене променљиве $Y := \left| \sum_{n=1}^{\infty} (A_n A_n^* - C_n C_n^*) \right|^{-\frac{1}{2}} \sum_{n=1}^{\infty} (A_n X B_n - C_n X D_n)$, неједнакост (2.2.19) је заснована на Коши–Шварцовој норма неједнакости (1.5.11) из Леме 1.5.8, примењене на пребројиву фамилију $(\Delta_{f_{\bar{T}T,t}}(A, C)^{-\frac{1}{2}} \sqrt{c_m} T(mt) A_{\mathbf{n}_{m-k-1}} C_{\mathbf{n}_k} \left| \sum_{n=1}^{\infty} (A_n A_n^* - C_n C_n^*) \right|^{\frac{1}{2}})_{1 \leq m, 0 \leq k \leq m-1, (\mathbf{n}_{m-k-1}, \mathbf{n}_k) \in \mathbb{N}^{m-1}}$ уместо на фамилију $(A_n)_{n=1}^{\infty}$, на пребројиву фамилију $(\sqrt{c_m} S(mt) D_{\mathbf{n}_k} B_{\mathbf{n}_{m-k-1}} \left| \sum_{n=1}^{\infty} (B_n B_n^* - D_n D_n^*) \right|^{\frac{1}{2}})_{1 \leq m, 0 \leq k \leq m-1, (\mathbf{n}_{m-k-1}, \mathbf{n}_k) \in \mathbb{N}^{m-1}}$ уместо на $(B_n)_{n=1}^{\infty}$ и на Y уместо на X . Једнакост (2.2.20) је добијена дуплом применом формуле (2.1.3), чиме је доказ случаја (б1) завршен.

Доказ случаја (б2) се ослања на

$$\begin{aligned} & \left\| \left(f_{TS,t} \left(\sum_{n=1}^{\infty} A_n \otimes B_n \right) X - f_{TS,t} \left(\sum_{n=1}^{\infty} C_n \otimes D_n \right) X \right) \left| \sum_{n=1}^{\infty} (B_n B_n^* - D_n D_n^*) \right|^{\frac{1}{2}} \right\|_{\Psi} \\ & = \left\| \Delta_{f_{\bar{T}T,t}}(A^*, C^*)^{\frac{1}{2}} \Delta_{f_{\bar{T}T,t}}(A^*, C^*)^{-\frac{1}{2}} \right. \\ & \times \left(f_{TS,t} \left(\sum_{n=1}^{\infty} A_n \otimes B_n \right) X - f_{TS,t} \left(\sum_{n=1}^{\infty} C_n \otimes D_n \right) X \right) \left| \sum_{n=1}^{\infty} (B_n B_n^* - D_n D_n^*) \right|^{\frac{1}{2}} \left. \right\|_{\Psi} \\ & \leq \left\| \Delta_{f_{\bar{T}T,t}}(A^*, C^*)^{\frac{1}{2}} \right\|_{\Psi} \left\| \Delta_{f_{\bar{T}T,t}}(A^*, C^*)^{-\frac{1}{2}} \right. \\ & \times \left(f_{TS,t} \left(\sum_{n=1}^{\infty} A_n \otimes B_n \right) X - f_{TS,t} \left(\sum_{n=1}^{\infty} C_n \otimes D_n \right) X \right) \left| \sum_{n=1}^{\infty} (B_n B_n^* - D_n D_n^*) \right|^{\frac{1}{2}} \left. \right\|_{\Psi} \end{aligned} \quad (2.2.22)$$

$$\begin{aligned} & \times \left(f_{TS,t} \left(\sum_{n=1}^{\infty} A_n \otimes B_n \right) X - f_{TS,t} \left(\sum_{n=1}^{\infty} C_n \otimes D_n \right) X \right) \left| \sum_{n=1}^{\infty} (B_n B_n^* - D_n D_n^*) \right|^{\frac{1}{2}} \left. \right\|_{\Psi} \\ & \leq \left\| \Delta_{f_{\bar{T}T,t}}(A^*, C^*) \right\|_{\Psi}^{\frac{1}{2}} \\ & \times \left\| \left| \sum_{n=1}^{\infty} (A_n A_n^* - C_n C_n^*) \right|^{-\frac{1}{2}} \sum_{n=1}^{\infty} (A_n X B_n - C_n X D_n) \Delta_{f_{\bar{S}S,t}}(B^*, D^*)^{\frac{1}{2}} \right\|_{\Psi}, \end{aligned} \quad (2.2.23)$$

где је неједнакост у (2.2.22) последица својства симетричности у.и. норме, док неједнакост (2.2.23) следи из малопре доказане неједнакости (2.2.6).

Доказ случаја (б1) наликује доказу случаја (б3), где је једина разлика што је за доказ неједнакости (2.2.19) потребно применити Коши–Шварцову норма неједнакост (1.5.8) из Леме 1.5.7 уместо неједнакости (1.5.11) из Леме 1.5.8 на фамилије A и B . Израз у (2.2.21) можемо препознати као последњи израз у (2.2.8), јер је фамилија $(B_n)_{n=1}^{\infty} \cup (D_n)_{n=1}^{\infty}$ М.К.Н.О.

Неједнакост (2.2.9) у случају (б4) следи из неједнакости (2.2.8) на исти начин као што неједнакост (2.2.7) следи из неједнакости (2.2.6).

Слично, да бисмо доказали случај (в) под условима $\max\{r_{A,\ell^\infty}, r_{B,\ell^\infty}, r_{C,\ell^\infty}, r_{D,\ell^\infty}\} < R$ или $\max\{\|\sum_{n=1}^\infty A_n^* A_n\|, \|\sum_{n=1}^\infty B_n^* B_n\|, \|\sum_{n=1}^\infty C_n^* C_n\|, \|\sum_{n=1}^\infty D_n^* D_n\|\} \leq R$ који се јављају у (в1)–(в4), приметимо да су трансформери $f_{TS,t}(\sum_{n=1}^\infty A_n \otimes B_n)$ и $f_{TS,t}(\sum_{n=1}^\infty C_n \otimes D_n)$ ограничени на $\mathfrak{C}_\Psi(\mathcal{H})$ на основу Леме 2.1.4 и неједнакости (2.1.9) из Леме 2.1.3. Трансформери $f_{\bar{T}T,t}(\sum_{n=1}^\infty A_n^* \otimes A_n)$, $f_{\bar{S}S,t}(\sum_{n=1}^\infty B_n^* \otimes B_n)$, $f_{\bar{T}T,t}(\sum_{n=1}^\infty C_n^* \otimes C_n)$ и $f_{\bar{S}S,t}(\sum_{n=1}^\infty D_n^* \otimes D_n)$ су ограничени на $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$ на основу другог дела Леме 2.1.4.

Доказ неједнакости (2.2.10) у случају (в1) се заснива на

$$\begin{aligned} & \left\| \sum_{n=1}^\infty (A_n^* A_n - C_n^* C_n) \right\|^{\frac{1}{2}} \left(f_{TS,t} \left(\sum_{n=1}^\infty A_n \otimes B_n \right) X - f_{TS,t} \left(\sum_{n=1}^\infty C_n \otimes D_n \right) X \right) \\ & \times \left| f_{\bar{S}S,t} \left(\sum_{n=1}^\infty B_n^* \otimes B_n \right) (I) - f_{\bar{S}S,t} \left(\sum_{n=1}^\infty D_n^* \otimes D_n \right) (I) \right|^{-\frac{1}{2}} \Big\|_\Psi \\ & = \left\| f_{\bar{S}S,t} \left(\sum_{n=1}^\infty B_n^* \otimes B_n \right) (I) - f_{\bar{S}S,t} \left(\sum_{n=1}^\infty D_n^* \otimes D_n \right) (I) \right|^{-\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (2.2.24)$$

$$\begin{aligned} & \times \left(f_{\bar{T}S,t} \left(\sum_{n=1}^\infty B_n^* \otimes A_n^* \right) X^* - f_{\bar{T}S,t} \left(\sum_{n=1}^\infty D_n^* \otimes C_n^* \right) X^* \right) \left\| \sum_{n=1}^\infty (A_n^* A_n - C_n^* C_n) \right\|^{\frac{1}{2}} \Big\|_\Psi \\ & \leq \left\| \sum_{n=1}^\infty (B_n^* B_n - D_n^* D_n) \right\|^{-\frac{1}{2}} \sum_{n=1}^\infty (B_n^* X^* A_n^* - D_n^* X^* C_n^*) \end{aligned} \quad (2.2.25)$$

$$\begin{aligned} & \times \left| f_{\bar{T}T,t} \left(\sum_{n=1}^\infty A_n^* \otimes A_n \right) (I) - f_{\bar{T}T,t} \left(\sum_{n=1}^\infty C_n^* \otimes C_n \right) (I) \right|^{\frac{1}{2}} \Big\|_\Psi \\ & = \left\| f_{\bar{T}T,t} \left(\sum_{n=1}^\infty A_n^* \otimes A_n \right) (I) - f_{\bar{T}T,t} \left(\sum_{n=1}^\infty C_n^* \otimes C_n \right) (I) \right|^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (2.2.26)$$

$$\times \sum_{n=1}^\infty (A_n X B_n - C_n X D_n) \left\| \sum_{n=1}^\infty (B_n^* B_n - D_n^* D_n) \right\|^{-\frac{1}{2}} \Big\|_\Psi,$$

где су једнакости у (2.2.24) и (2.2.26) базиране на $\mathbf{B}^*$ својству свих у.и. норми, док се неједнакост у (2.2.25) добија применом неједнакости (2.2.6).

Слично, неједнакост (2.2.11) у случају (в2) се доказује користећи $\mathbf{B}^*$ својство у.и. норми и применом одговарајућих неједнакости (2.2.7).

Коначно, неједнакост (2.2.12) у (в3) и неједнакост (2.2.13) у (в4) се редом изводе из неједнакости (2.2.8) у (б3), односно неједнакост (2.2.9) у (б4), коришћењем опет $\mathbf{B}^*$ својства у.и. норми. $\square$

Напомена 2.2.4. Приметимо да је $R \leq R_f$ под условима Теореме 2.2.3.

Специјалан случај $C_1 := D_1 := I$ и $C_n := D_n := 0$ за $n \geq 2$ у случајевима (а2) и (а3) Теореме 2.2.3, нам даје

$$\left\| \left\| I - \sum_{n=1}^\infty A_n^* A_n \right\|^{\frac{1}{2}} \left(f_{TS,t}(1)X - f_{TS,t} \left(\sum_{n=1}^\infty A_n \otimes B_n \right) X \right) \left\| I - \sum_{n=1}^\infty B_n B_n^* \right\|^{\frac{1}{2}} \right\|_{\Phi^{(p)*}}$$

$$\begin{aligned} &\leq \left\| \left| f_{\bar{T}T,t}(1)I - f_{\bar{T}T,t}\left(\sum_{n=1}^{\infty} A_n^* \otimes A_n\right)(I) \right|^{\frac{1}{2}} \left(X - \sum_{n=1}^{\infty} A_n X B_n \right) \right. \\ &\quad \times \left. \left| f_{\bar{S}S,t}(1)I - f_{\bar{S}S,t}\left(\sum_{n=1}^{\infty} B_n \otimes B_n^*\right)(I) \right|^{\frac{1}{2}} \right\|_{\Phi^{(p)}^*}. \end{aligned} \quad (2.2.27)$$

2.3 Примена резултата

Специјалан случај $T \equiv S \equiv 1$ на $\mathbb{R}$ и $f(z) := \arcsin z + \alpha \log(\beta z + \sqrt{1 + \beta^2 z^2}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1+(-1)^n \alpha \beta^{2n+1})(2n)!}{2^{2n}(n!)^2(2n+1)} z^{2n+1}$ за $\alpha, \beta \in [-1, 1]$ и $|z| < 1$ (за више детаља видети доказ (27) у [19, Последица 2.5]) неједнакости (2.2.27) нам даје пример:

$$\begin{aligned} &\left\| \left(I - \sum_{n=1}^{\infty} A_n^* A_n \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\pi}{2} X + \alpha \log(\beta + \sqrt{1 + \beta^2}) X - \arcsin\left(\sum_{n=1}^{\infty} A_n \otimes B_n\right) X \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \alpha \log\left(\beta \sum_{n=1}^{\infty} A_n \otimes B_n + \sqrt{I \otimes I + \beta^2 \left(\sum_{n=1}^{\infty} A_n \otimes B_n\right)^2}\right) X \right) \left(I - \sum_{n=1}^{\infty} B_n B_n^* \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_{\Phi^{(p)}^*} \\ &\leq \left\| \left(\frac{\pi}{2} I + \alpha \log(\beta + \sqrt{1 + \beta^2}) I - \arcsin\left(\sum_{n=1}^{\infty} A_n^* \otimes A_n\right)(I) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \alpha \log\left(\beta \sum_{n=1}^{\infty} A_n^* \otimes A_n + \sqrt{I \otimes I + \beta^2 \left(\sum_{n=1}^{\infty} A_n^* \otimes A_n\right)^2}\right)(I) \right)^{\frac{1}{2}} \left(X - \sum_{n=1}^{\infty} A_n X B_n \right) \right. \\ &\quad \times \left(\frac{\pi}{2} I + \alpha \log(\beta + \sqrt{1 + \beta^2}) I - \arcsin\left(\sum_{n=1}^{\infty} B_n \otimes B_n^*\right)(I) \right. \\ &\quad \left. \left. - \alpha \log\left(\beta \sum_{n=1}^{\infty} B_n \otimes B_n^* + \sqrt{I \otimes I + \beta^2 \left(\sum_{n=1}^{\infty} B_n \otimes B_n^*\right)^2}\right)(I) \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_{\Phi^{(p)}^*}. \end{aligned}$$

Додатно, узимањем $A_1 := A$, $B_1 := B$, $A_n := B_n := 0$ за свако $n \geq 2$ и $T \equiv S \equiv 1$ на $\mathbb{R}$, видимо да (2.2.27) уопштава део (52) у [20, Теореме 2.1].

Специјалан случај $T \equiv S \equiv 1$ на $\mathbb{R}$ у делу (54) Теореме 2.2.3, примењен на полилогаритамску функцију Li_α , дефинисану са $\text{Li}_\alpha: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}: z \mapsto \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 \frac{z \ln^{\alpha-1} \frac{1}{x}}{1-xz} dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^\alpha}$ за $\alpha > 0$ даје

$$\begin{aligned} &\left\| \left(\text{Li}_\alpha\left(\sum_{n=1}^{\infty} A_n \otimes B_n\right) X - \text{Li}_\alpha\left(\sum_{n=1}^{\infty} C_n \otimes D_n\right) X \right) \left| \sum_{n=1}^{\infty} (B_n B_n^* - D_n D_n^*) \right|^{\frac{1}{2}} \right\|_{\Phi^{(p)}} \\ &\leq \left\| \text{Li}_\alpha\left(\sum_{n=1}^{\infty} A_n \otimes A_n^*\right)(I) - \text{Li}_\alpha\left(\sum_{n=1}^{\infty} C_n \otimes C_n^*\right)(I) \right\|^{\frac{1}{2}} \\ &\quad \times \left\| \sum_{n=1}^{\infty} (A_n A_n^* - C_n C_n^*) \right\|^{-\frac{1}{2}} \sum_{n=1}^{\infty} (A_n X B_n - C_n X D_n) \\ &\quad \times \left\| \text{Li}_\alpha\left(\sum_{n=1}^{\infty} B_n B_n^*\right) - \text{Li}_\alpha\left(\sum_{n=1}^{\infty} D_n D_n^*\right) \right\|^{\frac{1}{2}} \Big\|_{\Phi^{(p)}}, \end{aligned}$$

ако је (уз услове Теореме 2.2.3(б4)) и $\max\{r_{A^*,\ell^\infty}, r_{B^*,\ell^\infty}, r_{C^*,\ell^\infty}, r_{D^*,\ell^\infty}\} < 1$.

2.4 Аналогни резултати за Шатен-фон Нојманове норме

У овом одељку изводимо одговарајуће пертурбационе неједнакости за идеале $\mathfrak{C}_p(\mathcal{H})$, где ћемо се ослањати на наредну лему.

Лема 2.4.1. Нека је $(c_m)_{m=0}^\infty$ низ у $[0, +\infty)$, функција $f(z) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{m=0}^\infty c_m z^m$ и $R > 0$, такође да је $\sum_{m=0}^\infty c_m R^m < +\infty$, и нека су $T: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}: t \mapsto \sum_{k=-K}^K a_k e^{ikt}$ и $S: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}: t \mapsto \sum_{l=-L}^L b_l e^{ilt}$ тригонометријски полиноми. Нека су додато $X \in \mathfrak{B}(\mathcal{H})$ и $(A_n)_{n=1}^\infty, (B_n)_{n=1}^\infty, (C_n)_{n=1}^\infty$ и $(D_n)_{n=1}^\infty$ ј.к.с. фамилије у $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$, такође да је $A_m C_n = C_n A_m$ и $B_m D_n = D_n B_m$ за свако $m, n \in \mathbb{N}$, $\sum_{n=1}^\infty (A_n A_n^* - C_n C_n^*)$, $\sum_{n=1}^\infty (B_n^* B_n - D_n^* D_n)$, $\sum_{n=1}^\infty (A_n^* A_n - C_n^* C_n)$ и $\sum_{n=1}^\infty (B_n B_n^* - D_n D_n^*)$ су полу-дефинитни и $r_{G,\ell^\infty} < R$ или $\|\sum_{n=1}^\infty G_n^* G_n\| \leq R$ за $G \in \{A, B, C, D, A^*, B^*, C^*, D^*\}$. Тада, за свако $t \in \mathbb{R}$ важи

$$\sum_{m=1}^\infty \sum_{k=0}^{m-1} \sum_{(\mathbf{n}_{m-k-1}, \mathbf{n}_k) \in \mathbb{N}^{m-1}} c_m \left| T(mt) \left| \sum_{n=1}^\infty (A_n^* A_n - C_n^* C_n) \right|^{\frac{1}{2}} A_{\mathbf{n}_{m-k-1}} C_{\mathbf{n}_k} \left| \sum_{n=1}^\infty (A_n A_n^* - C_n C_n^*) \right|^{\frac{1}{2}} \right|^2 \quad (2.4.1)$$

$$= \left| \left| f_{\bar{T}T,t} \left(\sum_{n=1}^\infty A_n^* \otimes A_n \right) (I) - f_{\bar{T}T,t} \left(\sum_{n=1}^\infty C_n^* \otimes C_n \right) (I) \right|^{\frac{1}{2}} \left| \sum_{n=1}^\infty (A_n A_n^* - C_n C_n^*) \right|^{\frac{1}{2}} \right|^2, \quad (2.4.2)$$

$$\sum_{m=1}^\infty \sum_{k=0}^{m-1} \sum_{(\mathbf{n}_{m-k-1}, \mathbf{n}_k) \in \mathbb{N}^{m-1}} c_m \left| T(mt) \left| \sum_{n=1}^\infty (A_n A_n^* - C_n C_n^*) \right|^{\frac{1}{2}} A_{\mathbf{n}_{m-k-1}}^* C_{\mathbf{n}_k}^* \left| \sum_{n=1}^\infty (A_n^* A_n - C_n^* C_n) \right|^{\frac{1}{2}} \right|^2$$

$$= \left| \left| f_{\bar{T}T,t} \left(\sum_{n=1}^\infty A_n \otimes A_n^* \right) (I) - f_{\bar{T}T,t} \left(\sum_{n=1}^\infty C_n \otimes C_n^* \right) (I) \right|^{\frac{1}{2}} \left| \sum_{n=1}^\infty (A_n^* A_n - C_n^* C_n) \right|^{\frac{1}{2}} \right|^2, \quad (2.4.3)$$

$$\sum_{m=1}^\infty \sum_{k=0}^{m-1} \sum_{(\mathbf{n}_{m-k-1}, \mathbf{n}_k) \in \mathbb{N}^{m-1}} c_m \left| S(mt) \left| \sum_{n=1}^\infty (B_n^* B_n - D_n^* D_n) \right|^{\frac{1}{2}} B_{\mathbf{n}_{m-k-1}} D_{\mathbf{n}_k} \left| \sum_{n=1}^\infty (B_n B_n^* - D_n D_n^*) \right|^{\frac{1}{2}} \right|^2$$

$$= \left| \left| f_{\bar{S}S,t} \left(\sum_{n=1}^\infty B_n^* \otimes B_n \right) (I) - f_{\bar{S}S,t} \left(\sum_{n=1}^\infty D_n^* \otimes D_n \right) (I) \right|^{\frac{1}{2}} \left| \sum_{n=1}^\infty (B_n B_n^* - D_n D_n^*) \right|^{\frac{1}{2}} \right|^2, \quad (2.4.4)$$

$$\sum_{m=1}^\infty \sum_{k=0}^{m-1} \sum_{(\mathbf{n}_{m-k-1}, \mathbf{n}_k) \in \mathbb{N}^{m-1}} c_m \left| S(mt) \left| \sum_{n=1}^\infty (B_n B_n^* - D_n D_n^*) \right|^{\frac{1}{2}} B_{\mathbf{n}_{m-k-1}}^* D_{\mathbf{n}_k}^* \left| \sum_{n=1}^\infty (B_n^* B_n - D_n^* D_n) \right|^{\frac{1}{2}} \right|^2$$

$$= \left| \left| f_{\bar{S}S,t} \left(\sum_{n=1}^\infty B_n \otimes B_n^* \right) (I) - f_{\bar{S}S,t} \left(\sum_{n=1}^\infty D_n \otimes D_n^* \right) (I) \right|^{\frac{1}{2}} \left| \sum_{n=1}^\infty (B_n^* B_n - D_n^* D_n) \right|^{\frac{1}{2}} \right|^2. \quad (2.4.5)$$

Доказ. Израз у (2.4.1) је једнак

$$\left| \sum_{n=1}^\infty (A_n A_n^* - C_n C_n^*) \right|^{\frac{1}{2}} \sum_{m=1}^\infty \sum_{k=0}^{m-1} \sum_{(\mathbf{n}_{m-k-1}, \mathbf{n}_k) \in \mathbb{N}^{m-1}} c_m |T(mt)|^2 C_{\mathbf{n}_k}^* A_{\mathbf{n}_{m-k-1}}^*$$

$$\times \left| \sum_{n=1}^\infty (A_n^* A_n - C_n^* C_n) \right| A_{\mathbf{n}_{m-k-1}} C_{\mathbf{n}_k} \left| \sum_{n=1}^\infty (A_n A_n^* - C_n C_n^*) \right|^{\frac{1}{2}}$$

$$\begin{aligned}
 &= \left| \sum_{n=1}^{\infty} (A_n A_n^* - C_n C_n^*) \right|^{\frac{1}{2}} \left| f_{\bar{T}T,t} \left(\sum_{n=1}^{\infty} A_n^* \otimes A_n \right) (I) - f_{\bar{T}T,t} \left(\sum_{n=1}^{\infty} C_n^* \otimes C_n \right) (I) \right| \\
 &\times \left| \sum_{n=1}^{\infty} (A_n A_n^* - C_n C_n^*) \right|^{\frac{1}{2}},
 \end{aligned} \tag{2.4.6}$$

док је израз у (2.4.6) једнак са (2.4.2) чиме је доказана једнакост у (2.4.2).

Једнакости у (2.4.3), (2.4.4) и (2.4.5) се доказују аналогно. $\square$

Ово поглавље завршавамо теоремом у којој изводимо одговарајуће норма неједнакости у Шатен-фон Нојмановим идеалима.

Теорема 2.4.2. Нека су, уз претпоставке Леме 2.4.1, оператори $\sum_{n=1}^{\infty} (A_n A_n^* - C_n C_n^*)$ и $\sum_{n=1}^{\infty} (B_n^* B_n - D_n^* D_n)$ додатно и строго полу-дефинитни и нека су $p, q, r \geq 1$ и гдј. $2/p = 1/q + 1/r$. Тада, за свако $X \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ такво да је $\sum_{n=1}^{\infty} (A_n X B_n - C_n X D_n) \in \mathfrak{C}_p(\mathcal{H})$ важи

$$\begin{aligned}
 &\left\| \left| f_{\bar{T}T,t} \left(\sum_{n=1}^{\infty} A_n^* \otimes A_n \right) (I) - f_{\bar{T}T,t} \left(\sum_{n=1}^{\infty} C_n^* \otimes C_n \right) (I) \right|^{\frac{1}{2}} \left| \sum_{n=1}^{\infty} (A_n^* A_n - C_n^* C_n) \right|^{\frac{1}{2}} \right|^{\frac{1}{q}-1} \\
 &\times \left| \sum_{n=1}^{\infty} (A_n^* A_n - C_n^* C_n) \right|^{\frac{1}{2}} \left(f_{TS,t} \left(\sum_{n=1}^{\infty} A_n \otimes B_n \right) X - f_{TS,t} \left(\sum_{n=1}^{\infty} C_n \otimes D_n \right) X \right) \\
 &\times \left| \sum_{n=1}^{\infty} (B_n B_n^* - D_n D_n^*) \right|^{\frac{1}{2}} \left| f_{\bar{S}S,t} \left(\sum_{n=1}^{\infty} B_n^* \otimes B_n \right) (I) - f_{\bar{S}S,t} \left(\sum_{n=1}^{\infty} D_n^* \otimes D_n \right) (I) \right|^{\frac{1}{2}} \\
 &\times \left| \sum_{n=1}^{\infty} (B_n B_n^* - D_n D_n^*) \right|^{\frac{1}{2}} \right|^{\frac{1}{r}-1} \Big\|_p \\
 &\leq \left\| \left| f_{\bar{T}T,t} \left(\sum_{n=1}^{\infty} A_n^* \otimes A_n \right) (I) - f_{\bar{T}T,t} \left(\sum_{n=1}^{\infty} C_n^* \otimes C_n \right) (I) \right|^{\frac{1}{2}} \left| \sum_{n=1}^{\infty} (A_n A_n^* - C_n C_n^*) \right|^{\frac{1}{2}} \right|^{\frac{1}{q}} \\
 &\times \left| \sum_{n=1}^{\infty} (A_n A_n^* - C_n C_n^*) \right|^{-\frac{1}{2}} \sum_{n=1}^{\infty} (A_n X B_n - C_n X D_n) \left| \sum_{n=1}^{\infty} (B_n^* B_n - D_n^* D_n) \right|^{-\frac{1}{2}} \\
 &\times \left\| f_{\bar{S}S,t} \left(\sum_{n=1}^{\infty} B_n \otimes B_n^* \right) (I) - f_{\bar{S}S,t} \left(\sum_{n=1}^{\infty} D_n \otimes D_n^* \right) (I) \right|^{\frac{1}{2}} \left| \sum_{n=1}^{\infty} (B_n^* B_n - D_n^* D_n) \right|^{\frac{1}{2}} \right\|_p.
 \end{aligned} \tag{2.4.7}$$

Доказ. Означимо са $\Delta_{A,C} := \left| \sum_{n=1}^{\infty} (A_n^* A_n - C_n^* C_n) \right|^{\frac{1}{2}}$, $\Delta_{A^*,C^*} := \left| \sum_{n=1}^{\infty} (A_n A_n^* - C_n C_n^*) \right|^{\frac{1}{2}}$, $\Delta_{B,D} := \left| \sum_{n=1}^{\infty} (B_n^* B_n - D_n^* D_n) \right|^{\frac{1}{2}}$ и $\Delta_{B^*,D^*} := \left| \sum_{n=1}^{\infty} (B_n B_n^* - D_n D_n^*) \right|^{\frac{1}{2}}$ и уведемо оператор $Y := \sum_{n=1}^{\infty} \Delta_{A^*,C^*}^{-1} (A_n X B_n - C_n X D_n) \Delta_{B,D}^{-1}$. Тада важи

$$\begin{aligned}
 &\Delta_{A,C} \left(f_{TS,t} \left(\sum_{n=1}^{\infty} A_n \otimes B_n \right) X - f_{TS,t} \left(\sum_{n=1}^{\infty} C_n \otimes D_n \right) X \right) \Delta_{B^*,D^*} \\
 &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{m-1} \sum_{(\mathbf{n}_{m-k-1}, \mathbf{n}_k) \in \mathbb{N}^{m-1}} c_m T(mt) S(mt) \Delta_{A,C} A_{\mathbf{n}_{m-k-1}} C_{\mathbf{n}_k} \\
 &\times \sum_{n=1}^{\infty} (A_n X B_n - C_n X D_n) D_{\mathbf{n}_k} B_{\mathbf{n}_{m-k-1}} \Delta_{B^*,D^*}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{m-1} \sum_{(\mathbf{n}_{m-k-1}, \mathbf{n}_k) \in \mathbb{N}^{m-1}} c_m T(mt) S(mt) \Delta_{A,C} A_{\mathbf{n}_{m-k-1}} C_{\mathbf{n}_k} \Delta_{A^*, C^*} \\
 &\times Y \Delta_{B,D} D_{\mathbf{n}_k} B_{\mathbf{n}_{m-k-1}} \Delta_{B^*, D^*} = \sum_{\omega \in \Omega} E_{\omega} Y F_{\omega},
 \end{aligned} \tag{2.4.8}$$

где је $\Omega \stackrel{\text{def}}{=} \{(m, k, \mathbf{n}_{m-k-1}, \mathbf{n}_k) : (m, \mathbf{n}_{m-k-1}, \mathbf{n}_k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^{m-k-1} \times \mathbb{N}^k, 0 \leq k \leq m-1\}$ и за свако $\omega := (m, k, \mathbf{n}_{m-k-1}, \mathbf{n}_k) \in \Omega$ нека је $E_{\omega} \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{c_m} T(mt) \Delta_{A,C} A_{\mathbf{n}_{m-k-1}} C_{\mathbf{n}_k} \Delta_{A^*, C^*}$ и $F_{\omega} \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{c_m} S(mt) \Delta_{B,D} D_{\mathbf{n}_k} B_{\mathbf{n}_{m-k-1}} \Delta_{B^*, D^*}$. Тада, према формулама (2.4.1)-(2.4.2), (2.4.3), (2.4.4) и (2.4.5) имамо

$$\begin{aligned}
 \sum_{\omega \in \Omega} E_{\omega}^* E_{\omega} &= |\Delta_{f_{\bar{T}T,t}}(A, C)^{\frac{1}{2}} \Delta_{A^*, C^*}|^2, \quad \sum_{\omega \in \Omega} E_{\omega} E_{\omega}^* = |\Delta_{f_{\bar{T}T,t}}(A^*, C^*)^{\frac{1}{2}} \Delta_{A,C}|^2, \\
 \sum_{\omega \in \Omega} F_{\omega}^* F_{\omega} &= |\Delta_{f_{\bar{S}S,t}}(B, D)^{\frac{1}{2}} \Delta_{B^*, D^*}|^2, \quad \sum_{\omega \in \Omega} F_{\omega} F_{\omega}^* = |\Delta_{f_{\bar{S}S,t}}(B^*, D^*)^{\frac{1}{2}} \Delta_{B,D}|^2,
 \end{aligned} \tag{2.4.9}$$

па на основу формула (2.4.8)-(2.4.9) добијамо прву једнакост (2.4.10) у

$$\begin{aligned}
 &\left\| \left| \Delta_{f_{\bar{T}T,t}}(A^*, C^*)^{\frac{1}{2}} \left| \sum_{n=1}^{\infty} (A_n^* A_n - C_n^* C_n) \right|^{\frac{1}{2}} \right|^{\frac{1}{q}-1} \left| \sum_{n=1}^{\infty} (A_n^* A_n - C_n^* C_n) \right|^{\frac{1}{2}} \right. \\
 &\times \left(f_{TS,t} \left(\sum_{n=1}^{\infty} A_n \otimes B_n \right) X - f_{TS,t} \left(\sum_{n=1}^{\infty} C_n \otimes D_n \right) X \right) \\
 &\times \left| \sum_{n=1}^{\infty} (B_n B_n^* - D_n D_n^*) \right|^{\frac{1}{2}} \left| \Delta_{f_{\bar{S}S,t}}(B, D)^{\frac{1}{2}} \left| \sum_{n=1}^{\infty} (B_n B_n^* - D_n D_n^*) \right|^{\frac{1}{2}} \right|^{\frac{1}{r}-1} \Big\|_p \\
 &= \left\| \left(\sum_{\omega \in \Omega} E_{\omega} E_{\omega}^* \right)^{\frac{1}{2q}-\frac{1}{2}} \sum_{\omega \in \Omega} E_{\omega} Y F_{\omega} \left(\sum_{\omega \in \Omega} F_{\omega}^* F_{\omega} \right)^{\frac{1}{2r}-\frac{1}{2}} \right\|_p = \left\| \sum_{\omega \in \Omega} G_{\omega} Y H_{\omega} \right\|_p
 \end{aligned} \tag{2.4.10}$$

$$\leq \left\| \left(\sum_{\omega \in \Omega} G_{\omega}^* \left(\sum_{\omega \in \Omega} G_{\omega} G_{\omega}^* \right)^{q-1} G_{\omega} \right)^{\frac{1}{2q}} Y \left(\sum_{\omega \in \Omega} H_{\omega} \left(\sum_{\omega \in \Omega} H_{\omega}^* H_{\omega} \right)^{r-1} H_{\omega} \right)^{\frac{1}{2r}} \right\|_p \tag{2.4.11}$$

$$= \left\| \left(\sum_{\omega \in \Omega} E_{\omega}^* E_{\omega} \right)^{\frac{1}{2q}} Y \left(\sum_{\omega \in \Omega} F_{\omega} F_{\omega}^* \right)^{\frac{1}{2r}} \right\|_p, \tag{2.4.12}$$

где се друга једнакост у (2.4.10) добија сменама променљиве $G_{\omega} := \left(\sum_{\omega \in \Omega} E_{\omega} E_{\omega}^* \right)^{\frac{1}{2q}-\frac{1}{2}} E_{\omega}$ и $H_{\omega} := F_{\omega} \left(\sum_{\omega \in \Omega} F_{\omega}^* F_{\omega} \right)^{\frac{1}{2r}-\frac{1}{2}}$ за свако $\omega \in \Omega$. Неједнакост (2.4.11) следи из Коши-Шварцове норма неједнакости (1.5.3) из Теореме 1.5.5, примењене на $Y \in \mathfrak{C}_p(\mathcal{H})$ и на пребројиве ј.к.с. фамилије $\{G_{\omega}\}_{\omega \in \Omega}$ и $\{H_{\omega}\}_{\omega \in \Omega}$. Директан рачун нам сада даје једнакости $\sum_{\omega \in \Omega} G_{\omega} G_{\omega}^* = \left(\sum_{\omega \in \Omega} E_{\omega} E_{\omega}^* \right)^{\frac{1}{2q}-\frac{1}{2}} \sum_{\omega \in \Omega} E_{\omega} E_{\omega}^* \left(\sum_{\omega \in \Omega} E_{\omega} E_{\omega}^* \right)^{\frac{1}{2q}-\frac{1}{2}} = \left(\sum_{\omega \in \Omega} E_{\omega} E_{\omega}^* \right)^{\frac{1}{q}}$, одакле следи да је

$$\begin{aligned}
 &\left(\sum_{\omega \in \Omega} G_{\omega}^* \left(\sum_{\omega \in \Omega} G_{\omega} G_{\omega}^* \right)^{q-1} G_{\omega} \right)^{\frac{1}{2q}} = \left(\sum_{\omega \in \Omega} E_{\omega}^* \left(\sum_{\omega \in \Omega} E_{\omega} E_{\omega}^* \right)^{\frac{1}{2q}-\frac{1}{2}} \left(\sum_{\omega \in \Omega} E_{\omega} E_{\omega}^* \right)^{\frac{1}{2q}} \right)^{\frac{1}{2q}} \\
 &\times \left(\sum_{\omega \in \Omega} E_{\omega} E_{\omega}^* \right)^{\frac{1}{2q}-\frac{1}{2}} E_{\omega} \Big)^{\frac{1}{2q}} = \left(\sum_{\omega \in \Omega} E_{\omega}^* E_{\omega} \right)^{\frac{1}{2q}} = |\Delta_{f_{\bar{T}T,t}}(A, C)^{\frac{1}{2}} \Delta_{A^*, C^*}|^{\frac{1}{q}} \\
 &= \left| f_{\bar{T}T,t} \left(\sum_{n=1}^{\infty} A_n^* \otimes A_n \right) (I) - f_{\bar{T}T,t} \left(\sum_{n=1}^{\infty} C_n^* \otimes C_n \right) (I) \right|^{\frac{1}{2}} \left| \sum_{n=1}^{\infty} (A_n A_n^* - C_n C_n^*) \right|^{\frac{1}{2}} \Big|^{\frac{1}{q}},
 \end{aligned}$$

као и да је

$$\begin{aligned} & \left(\sum_{\omega \in \Omega} H_{\omega} \left(\sum_{\omega \in \Omega} H_{\omega}^* H_{\omega} \right)^{r-1} H_{\omega}^* \right)^{\frac{1}{2r}} \\ &= \left| \left| f_{\bar{S},t} \left(\sum_{n=1}^{\infty} B_n \otimes B_n^* \right) (I) - f_{\bar{S},t} \left(\sum_{n=1}^{\infty} D_n \otimes D_n^* \right) (I) \right|^{\frac{1}{2}} \left| \sum_{n=1}^{\infty} (B_n^* B_n - D_n^* D_n) \right|^{\frac{1}{2}} \right|^{\frac{1}{r}}. \end{aligned}$$

Дакле, изрази у (2.4.10)-(2.4.11) доказују тражену неједнакост (2.4.7). $\square$

Напомена 2.4.3. Уместо примене неједнакости (1.5.3) из Теореме 1.5.4 на фамилије $\{G_{\omega}\}_{\omega \in \Omega}$ и $\{H_{\omega}\}_{\omega \in \Omega}$, могли смо директно да применимо Последицу 1.5.6 на фамилије $\{E_{\omega}\}_{\omega \in \Omega}$ и $\{F_{\omega}\}_{\omega \in \Omega}$, одакле бисмо директно добили израз (2.4.12).

Глава 3

Слабо* интеграција позитивних оператор-вредносних функција

Резултати изложени у овој глави су објављени у [23]. Испитује се под којим условима се може закључити компактност (или припадање конкретном идеалу компактних оператора) интеграла слабо* интеграбилне о.в. функције, при чему је највећи акценат на позитивне о.в. функције. Такође, изводе се својства векторских мера индукованих позитивним о.в. функцијама.

3.1 Позитивне оператор-вредносне векторске мере

Векторска мера (1.4.14) индукована слабо* интеграбилном о.в. функцијом $\mathcal{A}$ је, поред коначне адитивности, и пребројиво адитивна у слабој операторној топологији, тј. за свако $f, g \in \mathcal{H}$ и низ дисјунктних $(E_n)_{n=1}^\infty$ у $\mathfrak{M}$ важи да је

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_{E_n} \langle \mathcal{A}_t f, g \rangle d\mu(t) = \int_{\bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} E_n} \langle \mathcal{A}_t f, g \rangle d\mu(t). \quad (3.1.1)$$

У случају позитивних о.в. функција чији интеграл припада неком сепарабилном симетричном идеалу важи и више, о чему нам говори наредна

Теорема 3.1.1. *Нека је $\mathcal{A} : \Omega \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$ слабо* интеграбилна функција, која за вредности узима позитивне операторе, таква да је $\int_{\Omega} \mathcal{A} d\mu \in \mathcal{C}_{||| \cdot |||}(\mathcal{H})$, где је идеал $\mathcal{C}_{||| \cdot |||}(\mathcal{H})$ сепарабилан. Тада:*

- а) $\mathcal{C}_{||| \cdot |||}(\mathcal{H})$ -вредносна мера $\nu(E) = \int_E \mathcal{A} d\mu$ је пребројиво адитивна.
- б) У случају Шатенових идеала $\mathcal{C}_p(\mathcal{H})$, за низ дисјунктних $(E_n)_{n=1}^\infty$ у $\mathfrak{M}$ важи $\sum_{n=1}^\infty \|\nu(E_n)\|_p^p < +\infty$.

Доказ. Како су оператори $\mathcal{A}_t$ позитивни, за свако $E \in \mathfrak{M}$ важи

$$\left\langle \left(\int_E \mathcal{A} d\mu \right) f, f \right\rangle = \int_E \langle \mathcal{A}_t f, f \rangle d\mu(t) \geq 0, \quad (3.1.2)$$

па је и оператор $\int_E \mathcal{A} d\mu$ такође позитиван, тј. ν је позитивна о.в. векторска мера. Слично, за мерљиве $E \subseteq F$ добијамо да је $\int_E \mathcal{A} d\mu \leq \int_F \mathcal{A} d\mu$. Дакле, из (3.1.1) и (3.1.2), на основу Леме 1.3.17 добијамо да $\sum_{n=1}^\infty \int_{E_n} \mathcal{A} d\mu$ конвергира у норми идеала $\mathcal{C}_{||| \cdot |||}(\mathcal{H})$.

За доказ дела б), фиксирајмо низ дисјунктних скупова $(E_n)_{n=1}^\infty$ у $\mathfrak{M}$ и $N \in \mathbb{N}$. Тада, за сваку у.и. норму $\|\cdot\|$, примењујући неједнакост [13, Лема 2.1.ц] на операторни идентитет $\sum_{n=1}^N \int_{E_n} \mathcal{A} d\mu = \int_{\bigsqcup_{n=1}^N E_n} \mathcal{A} d\mu$, за конвексну функцију $f(t) = t^p$, где је $p \geq 1$, добијамо

$$\left\| \sum_{n=1}^N \left(\int_{E_n} \mathcal{A}_t d\mu(t) \right)^p \right\| \leq \left\| \left(\int_{\bigsqcup_{n=1}^N E_n} \mathcal{A}_t d\mu(t) \right)^p \right\|. \quad (3.1.3)$$

Даље, означимо операторе $A_N = \int_{\bigsqcup_{n=1}^N E_n} \mathcal{A} d\mu$ и $A = \int_{\bigsqcup_{n=1}^\infty E_n} \mathcal{A} d\mu$. Тада, како важи да је $0 \leq A_N \leq A$, следи да је $s_n(A_N) \leq s_n(A)$, па је $s_n(A_N^p) = s_n^p(A_N) \leq s_n^p(A) = s_n(A^p)$, за свако $n \in \mathbb{N}$. Дакле, за сваку у.и. норму $\|\cdot\|$ важи неједнакост $\|A_N^p\| \leq \|A^p\|$. Примењујући ово на (3.1.3) за случај нуклеарне норме $\|\cdot\|_1$, добијамо

$$\left\| \sum_{n=1}^N \left(\int_{E_n} \mathcal{A}_t d\mu(t) \right)^p \right\|_1 \leq \left\| \left(\int_{\bigsqcup_{n=1}^\infty E_n} \mathcal{A}_t d\mu(t) \right)^p \right\|_1 = \left\| \int_{\bigsqcup_{n=1}^\infty E_n} \mathcal{A}_t d\mu(t) \right\|_p^p.$$

Даље, због позитивности оператора $\int_{E_n} \mathcal{A}_t d\mu(t)$ (и адитивности трага), важе једнакости

$$\left\| \sum_{n=1}^N \left(\int_{E_n} \mathcal{A}_t d\mu(t) \right)^p \right\|_1 = \sum_{n=1}^N \left\| \left(\int_{E_n} \mathcal{A}_t d\mu(t) \right)^p \right\|_1 = \sum_{n=1}^N \left\| \int_{E_n} \mathcal{A}_t d\mu(t) \right\|_p^p,$$

одакле коначно добијамо неједнакост

$$\sum_{n=1}^N \left\| \int_{E_n} \mathcal{A}_t d\mu(t) \right\|_p^p \leq \left\| \int_{\bigsqcup_{n=1}^\infty E_n} \mathcal{A}_t d\mu(t) \right\|_p^p.$$

Како је N било произвољно, пуштањем $N \rightarrow \infty$ и применом дела под а) добијамо тражени резултат. $\square$

За $f \in \mathbb{P}(\Omega, \mathfrak{M}, \mu, X)$ важи да је оператор интеграције по индукованој векторској мери слабо компактан (видети [4, Теорема II.3.8.(b)]). У случају позитивне $\mathcal{A} \in \mathbb{G}(\Omega, \mathfrak{M}, \mu, \mathcal{B}(\mathcal{H}))$ чији је интеграл компактан, оператор интеграције T , дефинисан изразом (1.4.15), ће такође бити компактан. Прецизније, важи следећа

Теорема 3.1.2. Нека је $\mathcal{A}: \Omega \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$ слабо* интеграбилна, таква да су оператори $\mathcal{A}_t$ позитивни и $\int_\Omega \mathcal{A} d\mu$ је компактан оператор. Тада је оператор $T: L^\infty(\Omega, \mu) \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$ дефинисан са

$$Tf = \int_\Omega f(t) d\nu(t),$$

где је $\nu(E) = \int_E \mathcal{A} d\mu$, компактан.

Доказ. Као што је већ напоменуто у доказу Теореме 3.1.1, за свако $E \in \mathfrak{M}$, важи да је $0 \leq \nu(E) \leq \nu(\Omega)$. Дакле, $\nu(\mathfrak{M}) = \{\nu(E) | E \in \mathfrak{M}\} \subset \{A \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) | 0 \leq A \leq \nu(\Omega)\} =: K$

Докажимо прво да је за сваки компактан $B \geq 0$, скуп $K_B = \{A \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) | 0 \leq A \leq B\}$ компактан у униформној топологији. За свако $A \in K_B$ важи да је $\|A\| \leq \|B\|$, па је скуп K_B униформно ограничен. Како је $\mathcal{B}(\mathcal{H}) \cong (\mathcal{C}_1(\mathcal{H}))^*$, теорема Банаха–Алаоглуа (видети [34, Теорема 3.15.]) нам даје слабу* компактност лопте $B_{\mathcal{B}(\mathcal{H})}[0, \|B\|]$. Даље, како је $\mathcal{C}_1(\mathcal{H})$ сепарабилан (преддуал од $\mathcal{B}(\mathcal{H})$), из [34, Теорема 3.16.] следи да је наведена

лопта и слабо* метризабилна. Дакле, K_B је релативно компактан и метризабилян у слабој* топологији јер је подскуп од $B_{\mathcal{B}(\mathcal{H})}[0, \|B\|]$. Нека је сада $(A_n)_{n=1}^\infty$ произвољан низ у K_B . Следи да постоји подниз $(A_{n_k})_{k=1}^\infty$ који конвергира ка неком оператору A у слабој* топологији. Дакле, за свако $f, g \in \mathcal{H}$ важи да је $\lim_{k \rightarrow \infty} \operatorname{tr}(A_{n_k}(f \otimes g^*)) = \operatorname{tr}(A(f \otimes g^*))$, тј. да је $\lim_{k \rightarrow \infty} \langle A_{n_k} f, g \rangle = \langle A f, g \rangle$, па низ $(A_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ слабо тежи ка A и важи да је $0 \leq A \leq B$. Коначно, како је $\mathcal{C}_\infty(\mathcal{H})$ сепарабилян идеал, на основу Леме 1.3.17 следи да је $\lim_{k \rightarrow \infty} \|A_{n_k} - A\| = 0$ одакле је оператор $A \in \mathcal{C}_\infty(\mathcal{H})$, па самим тим и $A \in K_B$, чиме је доказана тражена компактност од K_B . Узимајући сада $B := \nu(\Omega)$ добијамо да је скуп K компактан.

Нека је сада φ произвољна проста позитивна функција из затворене јединичне лопте у $L^\infty(\Omega, \mu)$. Тада је $\varphi = \sum_{k=1}^n \alpha_k \chi_{E_k}$, где је $0 \leq \alpha_k \leq \alpha_{k+1} \leq 1$, за свако $k \in \{1, 2, \dots, n\}$, и скупови $E_1, E_2, \dots, E_n \in \mathfrak{M}$ су међусобно дисјунктни. Као у доказу [4, Теореме II.3.8.(b)], приметимо да је

$$\varphi = \alpha_1 \sum_{k=1}^n \chi_{E_k} + \sum_{k=2}^n (\alpha_k - \alpha_{k-1}) \sum_{j=k}^n \chi_{E_k} = \sum_{k=1}^n \beta_k \chi_{F_k}.$$

Важи да $F_1, \dots, F_n \in \mathfrak{M}$, као и $0 \leq \beta_1, \dots, \beta_n$, где је $\sum_{k=1}^n \beta_k = \alpha_1 + \sum_{k=2}^n (\alpha_k - \alpha_{k-1}) = \alpha_n \leq 1$. Одатле следи да је

$$0 \leq T\varphi = \sum_{k=1}^n \beta_k \nu(F_k) \leq \sum_{k=1}^n \beta_k \nu(\Omega) = \alpha_n \nu(\Omega) \leq \nu(\Omega),$$

па је $T\varphi \in K$. Дакле, доказали смо да је $T(\{\sum_{k=1}^n \alpha_k \chi_{E_k} | 0 \leq \alpha_k \leq 1, E_k \in \mathfrak{M}\}) \subseteq K$. Даље, ако је ψ произвољна проста функција из затворене јединичне лопте простора $L^\infty(\Omega, \mu)$, тада се она може представити као збир $\psi = \psi_1 - \psi_2 + i\psi_3 - i\psi_4$, где су функције ψ_1, ψ_2, ψ_3 и ψ_4 просте, позитивне и чија је норма ≤ 1 . Важи да је $T\psi = T\psi_1 + (-T\psi_2) + (iT\psi_3) + (-iT\psi_4) \in K + (-K) + (iK) + (-iK) =: \tilde{K}$, при чему је скуп $\tilde{K}$ компактан (видети Вежбање 3.(d) у првој глави у [34]). Како је ψ била произвољна, добијамо да је $T(\{\psi | \psi \text{ је проста и } \|\psi\|_\infty \leq 1\}) \subseteq \tilde{K}$. Коначно, како су просте функције густе у $L^\infty(\Omega, \mu)$, из непрекидности од T следи да је $T(B_{L^\infty(\Omega, \mu)}[0, 1]) \subseteq T(\{\psi | \psi \text{ је проста и } \|\psi\|_\infty \leq 1\}) = \tilde{K}$, па је скуп $T(B_{L^\infty(\Omega, \mu)}[0, 1])$ релативно компактан, чиме је доказана тражена компактност оператора T . $\square$

3.2 Компактност слабог* интеграла позитивних оператор-вредносних функција

У овом одељку испитујемо повезаност $\mathcal{A}_t \in \mathcal{C}_{||\cdot||}(\mathcal{H})$ и $\int_\Omega \mathcal{A} d\mu \in \mathcal{C}_{||\cdot||}(\mathcal{H})$ код слабо* интегралних функција $\mathcal{A}$. У случају када је $\mathcal{A}$ позитивна и $\mathcal{C}_1(\mathcal{H})$ -вредносна, потпун одговор нам даје следећа

Лема 3.2.1. *Нека је $\mathcal{A}: \Omega \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$ слабо* интеграбилна о.в. функција таква да су $\mathcal{A}_t$ позитивни оператори за с.с. $t \in \Omega$. Тада, $\int_\Omega \mathcal{A} d\mu \in \mathcal{C}_1(\mathcal{H})$ акко $\mathcal{A}_t \in \mathcal{C}_1(\mathcal{H})$ за с.с. $t \in \Omega$ и $\int_\Omega \|\mathcal{A}_t\|_1 d\mu(t) < +\infty$.*

Доказ. Како је оператор $\int_\Omega \mathcal{A} d\mu$ позитиван, на основу [11, Лема III.8.1.], он припада идеалу $\mathcal{C}_1(\mathcal{H})$ акко је $\sum_{n=1}^\infty \langle \int_\Omega \mathcal{A} d\mu e_n, e_n \rangle < +\infty$, где је $(e_n)_{n=1}^\infty$ произвољна о.н.б. у $\mathcal{H}$.

Према дефиницији Гелфандовог интеграла добијамо да је

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left\langle \int_{\Omega} \mathcal{A}_t d\mu(t) e_n, e_n \right\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\Omega} \langle \mathcal{A}_t e_n, e_n \rangle d\mu(t). \quad (3.2.1)$$

Како су оператори $\mathcal{A}_t$ позитивни, па је тиме $\langle \mathcal{A}_t e_n, e_n \rangle \geq 0$, за с.с. $t \in \Omega$ и свако $n \in \mathbb{N}$, применом Теореме Бепо Левија (видети [33, Теорема 1.27.]) у изразу (3.2.1) добијамо

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_{\Omega} \langle \mathcal{A}_t e_n, e_n \rangle d\mu(t) = \int_{\Omega} \sum_{n=1}^{\infty} \langle \mathcal{A}_t e_n, e_n \rangle d\mu(t). \quad (3.2.2)$$

Штавише, из позитивности оператора $\mathcal{A}_t$ такође имамо да важи $\|\mathcal{A}_t\|_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \langle \mathcal{A}_t e_n, e_n \rangle$. Дакле, $\int_{\Omega} \mathcal{A} d\mu$ припада идеалу $\mathcal{C}_1(\mathcal{H})$ акко је скаларна функција $t \mapsto \|\mathcal{A}_t\|_1$ интеграбилна, чиме је доказ завршен. $\square$

У осталим идеалима компактних оператора не важе закључци из претходне леме, што је демонстрирано у наредном примеру.

Пример 3.2.2. Нека су $f_{n,k}: [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$, за $n, k \in \mathbb{N}$ и $1 \leq k \leq n$, дефинисане са

$$f_{n,k}(t) = \begin{cases} 1, & \frac{k-1}{n} \leq t \leq \frac{k}{n} \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

и нека је $(g_n)_{n=1}^{\infty}$ низ функција настао преуређењем двоиндексираног низа $(f_{n,k})_{n,k=1}^{\infty}$. Приметимо да низ $g_n(t)$ дивергира за свако $t \in [0, 1]$ (јер узима вредности 0 и 1 бесконачно пута), као и да $\int_0^1 g_n(t) dt \rightarrow 0$, кад $n \rightarrow \infty$.

Дефинишимо о.в. функцију $\mathcal{A}: [0, 1] \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$ са $\mathcal{A}_t = \sum_{n=1}^{\infty} g_n(t) e_n \otimes e_n^*$, где је $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ нека о.н.б. у $\mathcal{H}$. Тада је $\mathcal{A}_t \geq 0$ за свако $t \in \Omega$ и важи да је пресликавање $\mathcal{A}$ слабо* мерљиво, јер за свако $f \in \mathcal{H}$ важи

$$\langle \mathcal{A}_t f, f \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} g_n(t) \langle f, e_n \rangle \langle e_n, f \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} g_n(t) |\langle f, e_n \rangle|^2, \quad (3.2.3)$$

што је мерљиво као сума реда позитивних мерљивих функција. Штавише, како је $g_n(t) \leq 1$ за свако $t \in [0, 1]$ и свако $n \in \mathbb{N}$, десну страну једнакости (3.2.3) даље можемо проценити са

$$\sum_{n=1}^{\infty} g_n(t) |\langle f, e_n \rangle|^2 \leq \sum_{n=1}^{\infty} |\langle f, e_n \rangle|^2 \leq \|f\|^2,$$

што је интеграбилна функција на $[0, 1]$.

Коначно, квадратна форма Гелфандовог интеграла од $\mathcal{A}$ је једнака

$$\left\langle \int_0^1 \mathcal{A}_t dt f, f \right\rangle = \int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty} g_n(t) |\langle f, e_n \rangle|^2 dt = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 g_n(t) dt |\langle f, e_n \rangle|^2,$$

одакле следи да је $\int_0^1 \mathcal{A} d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} (\int_0^1 g_n(t) dt) e_n \otimes e_n^*$. Како $\int_0^1 g_n(t) dt \rightarrow 0$, кад $n \rightarrow \infty$, оператор $\int_0^1 \mathcal{A} d\mu$ је компактан. Штавише, како за свако $t \in [0, 1]$ важи да се низ $g_n(t)$ састоји од бесконачног броја нула и јединица, следи да је оператор $\mathcal{A}_t$ ортопројектор на потпростор бесконачне димензије. Дакле, оператор $\mathcal{A}_t$ није компактан ни за једно $t \in [0, 1]$.

Приметимо да оператор $\int_{\Omega} \mathcal{A} d\mu$ из претходног примера припада идеалу у $\mathfrak{C}_p(\mathcal{H})$ за свако $2 < p < +\infty$, јер је у питању дијагоналан оператор чији су елементи дијагонале нека пермутација низа

$$\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \dots, \underbrace{\frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n}}_n, \dots\right). \quad (3.2.4)$$

Дакле, низ сингуларних вредности оператора $\int_{\Omega} \mathcal{A} d\mu$ је управо (3.2.4), одакле добијамо да је

$$\left\| \int_{\Omega} \mathcal{A}_t d\mu(t) \right\|_p^p = \sum_{n=1}^{\infty} s_n^p \left(\int_0^1 \mathcal{A}_t d\mu(t) \right) = \sum_{m=1}^{\infty} \underbrace{\left(\frac{1}{m} \right)^p + \dots + \left(\frac{1}{m} \right)^p}_m = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^{p-1}} < +\infty,$$

за свако $p > 2$.

Напоменимо да је могуће конструисати примере сличне претходном, тј. примере позитивних о.в. функција са некомпактним вредностима, чији Гелфандов интеграл упада у произвољан идеал $\mathfrak{C}_\Phi(\mathcal{H})$ неизоморфан идеалу нуклеарних оператора.

У општем случају, слабо* интеграбилна функција која узима вредности у идеалу $\mathfrak{C}_\infty(\mathcal{H})$ не мора имати компактан интеграл, чак ни уз претпоставку позитивности, о чему нам говори наредни

Пример 3.2.3. Нека је μ бројачка мера на $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ и нека је $\mathcal{A}: \mathbb{N} \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$ дефинисана са $\mathcal{A}_n \stackrel{\text{def}}{=} e_n \otimes e_n^*$, за свако $n \in \mathbb{N}$, где је $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ једна о.н.б. Хилбертовог простора $\mathcal{H}$. Важи да је $\int_{\mathbb{N}} |\langle \mathcal{A}_n h, h \rangle| d\mu(n) = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle h, e_n \rangle|^2 = \|h\|^2 < +\infty$, за свако $h \in \mathcal{H}$, па је о.в. функција $\mathcal{A}$ слабо* интеграбилна. Квадратна форма оператора $A = \int_{\mathbb{N}} \mathcal{A} d\mu$ је једнака

$$\langle Ah, h \rangle = \int_{\mathbb{N}} \langle \mathcal{A}_n h, h \rangle d\mu(n) = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle h, e_n \rangle|^2 = \|h\|^2 = \langle Ih, h \rangle,$$

за свако $h \in \mathcal{H}$, па следи да је $A = I \notin \mathfrak{C}_\infty(\mathcal{H})$.

У претходном примеру, о.в. функција је заправо узимала вредности у $\mathcal{K}(\mathcal{H})$, па самим тим и у свим идеалима компактних оператора, док интеграл није био ни у $\mathfrak{C}_\infty(\mathcal{H})$. У наредној теорему дајемо довољне услове да слабо* интеграбилна функција чије су вредности у $\mathfrak{C}_\infty(\mathcal{H})$ има компактан интеграл.

Теорема 3.2.4. Нека је $\mathcal{A}: \Omega \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$ слабо* интеграбилна, где је $(\Omega, \mathfrak{M}, \mu)$ простор са коначном мером, $\mathcal{A}_t \in \mathfrak{C}_\infty(\mathcal{H})$ за скоро свако $t \in \Omega$ и важи да за свако $\varepsilon > 0$ постоји $\delta > 0$, тако да за свако $E \in \mathfrak{M}$ за које је $\mu(E) < \delta$ важи да је $\left\| \int_E \mathcal{A} d\mu \right\| < \varepsilon$. Тада је $\mathcal{A} \in \mathbb{P}(\Omega, \mathfrak{M}, \mu, \mathfrak{C}_\infty(\mathcal{H}))$.

Доказ. Како је $(\mathfrak{C}_\infty(\mathcal{H}))^{**} \cong \mathcal{B}(\mathcal{H})$, слабо* интеграбилност од $\mathcal{A}$ је еквивалентна њеној $\mathfrak{C}_\infty(\mathcal{H})$ -слабој интеграбилности и одговарајући интеграл се поклапају. Дакле, треба још показати да су интеграл по свим мељивим подскуповима од Ω компактни (тј. да нису „побегли у други дуал”). Нека је $E \in \mathfrak{M}$ и $(h_n)_{n=1}^{\infty}$ произвољан низ у $\mathcal{H}$ који слабо тежи ка 0. Како је $\mathcal{A}_t \in \mathfrak{C}_\infty(\mathcal{H})$ за с.с. $t \in \Omega$, на основу Леме 1.1.9 следи да низ функција $\varphi_n: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$, дефинисан са $\varphi_n(t) = \|\mathcal{A}_t h_n\|$ за свако $n \in \mathbb{N}$, конвергира с.с. ка нула-функцији. Нека је $\varepsilon > 0$ и $\delta > 0$ добијено из претпоставке теореме. Како је $\mu(\Omega) < +\infty$,

из Теореме Јегорова (видети [33, Вежбање 16 у III поглављу]) следи да постоји $X_\delta \in \mathfrak{M}$ такво да $\varphi_n \Rightarrow 0$ на X_δ и да је $\mu(X_\delta) < \delta$. Користећи неједнакост (1.4.11) добијамо

$$\begin{aligned} \left\| \left(\int_E \mathcal{A} d\mu \right) h_n \right\| &\leq \left\| \left(\int_{E \cap X_\delta} \mathcal{A} d\mu \right) h_n \right\| + \left\| \left(\int_{E \setminus X_\delta} \mathcal{A} d\mu \right) h_n \right\| \\ &\leq \int_{E \cap X_\delta} \|\mathcal{A}_t h_n\| d\mu(t) + \left\| \int_{E \setminus X_\delta} \mathcal{A} d\mu \right\| \cdot \|h_n\|. \end{aligned} \quad (3.2.5)$$

С обзиром да је низ $(h_n)_{n=1}^\infty$ слабо конвергентан, он мора бити ограничен, па имамо да је $M \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{n \in \mathbb{N}} \|h_n\| < +\infty$. Такође, важи да је $\mu(E \setminus X_\delta) \leq \mu(\Omega \setminus X_\delta) < \delta$, па следи да је $\left\| \int_{E \setminus X_\delta} \mathcal{A} d\mu \right\| < \varepsilon$. Како $\varphi_n \Rightarrow 0$ на X_δ , постоји $N \in \mathbb{N}$ такво да за свако $n \geq N$ важи да је $\varphi_n(t) = \|\mathcal{A}_t h_n\| < \varepsilon$. Дакле, за свако $n \geq N$ важи $\int_{E \cap X_\delta} \|\mathcal{A}_t h_n\| d\mu(t) \leq \int_\Omega \varepsilon d\mu(t) = \varepsilon \cdot \mu(\Omega)$. Одавде следи да је

$$\left\| \left(\int_E \mathcal{A} d\mu \right) h_n \right\| \leq \int_{E \cap X_\delta} \|\mathcal{A}_t h_n\| d\mu(t) + \left\| \int_{E \setminus X_\delta} \mathcal{A} d\mu \right\| \cdot \|h_n\| \leq (\mu(\Omega) + M) \cdot \varepsilon$$

за свако $n \geq N$. Односно, важи да је $\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \left(\int_E \mathcal{A} d\mu \right) h_n \right\| = 0$, па је оператор $\int_E \mathcal{A} d\mu$ компактан на основу Леме 1.1.9, чиме је доказ завршен. $\square$

Напомена 3.2.5. Услов униформне интеграбилности из претходне теореме, који је заправо услов μ -непрекидности векторске мере индуковане са слабо* интеграбилном о.в. функцијом $\mathcal{A}$, је увек испуњен код Петис интеграбилних функција, као што се може видети у Теорему 1.4.17. Теорема 3.2.4 нам говори да је тај услов еквивалентан Петис интеграбилности у случају Банаховог простора $\mathcal{C}_\infty(\mathcal{H})$.

У случају када о.в. функција $\mathcal{A}$ узима компактне и позитивне вредности с.с. компактност њеног Гелфандовог интеграла по целом простору повлачи $\mathcal{C}_\infty(\mathcal{H})$ -Петис интеграбилност, без обзира на коначност мере μ . Прецизније, важи следеће

Тврђење 3.2.6. Нека је $\mathcal{A} : \Omega \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$ слабо* интеграбилна таква да је $0 \leq \mathcal{A}_t \in \mathcal{C}_\infty(\mathcal{H})$ за скоро свако $t \in \Omega$ и $\int_\Omega \mathcal{A} d\mu \in \mathcal{C}_\infty(\mathcal{H})$. Тада је $\mathcal{A} \in \mathbb{P}(\Omega, \mathfrak{M}, \mu, \mathcal{C}_\infty(\mathcal{H}))$.

Доказ. Као и у Теорему 3.2.4, слаба* интеграбилност о.в. функције $\mathcal{A}$ је заправо њена $\mathcal{C}_\infty(\mathcal{H})$ -слаба интеграбилност. Дакле, и овде је довољно још само доказати да су интегрални по свим мерљивим скуповима једнаки. Нека је $E \in \mathfrak{M}$ произвољан. Као и у доказу Теореме 3.1.1, важи монотоност Гелфандовог интеграла, тј. имамо да је $0 \leq \int_E \mathcal{A} d\mu \leq \int_\Omega \mathcal{A} d\mu$. Компактност оператора $\int_E \mathcal{A} d\mu$ сада директно следи из Теореме 1.1.10, чиме је доказ завршен. $\square$

У претходној теорему је претпоставка о с.с. компактности о.в. функције $\mathcal{A}$ сувишна за доказ компактности интеграла по сваком мерљивом подскупу. Она је неопходна само да би имало смисла причати о Петис интеграбилности. За крај ове главе наводимо теорему у којој се такође не претпоставља компактност о.в. функције да би се добила компактност њеног интеграла.

Теорема 3.2.7. Нека је $\mathcal{A} : \Omega \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$ слабо* интеграбилна таква да постоји о.н.б. $(e_n)_{n=1}^\infty$ у $\mathcal{H}$ и коначан скуп $\mathcal{I} \subset \mathbb{Z}$ такви да је

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_\Omega |\langle \mathcal{A}_t e_n, e_{n+i} \rangle| d\mu(t) = 0 \quad \text{за свако } i \in \mathcal{I} \quad (3.2.6)$$

и

$$\sum_{\substack{i,j \in \mathbb{N} \\ i-j \notin \mathcal{I}}} \left(\int_{\Omega} |\langle \mathcal{A}_t e_j, e_i \rangle| d\mu(t) \right)^2 < +\infty. \quad (3.2.7)$$

Тада је оператор $\int_{\Omega} \mathcal{A} d\mu$ компактан.

Доказ. По дефиницији Гелфандовог интеграла, матрична репрезентација ограниченог оператора $\int_{\Omega} \mathcal{A} d\mu$ у о.н.б. $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ Хилбертовог простора $\mathcal{H}$ је

$$\left(\left\langle \left(\int_{\Omega} \mathcal{A} d\mu \right) e_j, e_i \right\rangle \right)_{i,j=1}^{\infty} = \left(\int_{\Omega} \langle \mathcal{A}_t e_j, e_i \rangle d\mu(t) \right)_{i,j=1}^{\infty}.$$

Дакле, оператор $\int_{\Omega} \mathcal{A} d\mu$ је облика $B + \sum_{k \in \mathcal{I}} A_k$ где је

$$\langle B e_j, e_i \rangle = \begin{cases} \int_{\Omega} \langle \mathcal{A}_t e_j, e_i \rangle d\mu(t), & \text{за } i - j \notin \mathcal{I}; \\ 0 & \text{за } i - j \in \mathcal{I}, \end{cases}$$

док матрице оператора A_k имају тачно једну не-нула дијагоналу чији су елементи

$$\int_{\Omega} \langle \mathcal{A}_t e_n, e_{n+k} \rangle d\mu(t) \quad \text{за } n \geq \max\{1, 1-k\}.$$

Како елементи дијагонале од A_k теже ка 0, из услова (3.2.6), добијамо да је оператор A_k компактан, јер је

$$A_k = \sum_{n=\max\{1, 1-k\}}^{\infty} \left[\int_{\Omega} \langle \mathcal{A}_t e_n, e_{n+k} \rangle d\mu(t) \right] e_{n+k} \otimes e_n^* \quad \text{за } k \in \mathcal{I},$$

где претходни ред конвергира у норми простора $\mathcal{B}(\mathcal{H})$. Оператор B је Хилберт-Шмитов према (1.3.13), одакле добијамо да је оператор $\int_{\Omega} \mathcal{A} d\mu$ компактан као коначна сума компактних оператора. $\square$

Приметимо и да је оператор из Примера 3.2.2 компактан, као директна последица претходне Теореме (узимајући за $\mathcal{I} = \{0\}$).

Глава 4

Слаба интеграбилност оператор-вредносних функција са вредностима у идеалима компактних оператора

У претходном поглављу смо разматрали компактност слабих* интеграла позитивних о.в. функција. У наставку дисертације изводимо критеријуме Гелфанд и Петис интеграбилности не нужно позитивних о.в. функција, које узимају вредности у симетричним идеалима компактних оператора. Приказани резултати су објављени у самосталном раду аутора [28].

4.1 Слаба* интеграбилност $\mathcal{C}_\Phi(\mathcal{H})$ -вредносних функција

Овај одељак почињемо са две техничке леме у вези са мерљивошћу и интеграбилношћу функција индукованих с.н. функцијама.

Лема 4.1.1. *Нека је Φ с.н. функција и нека су $h_n: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ мерљиве за свако $n \in \mathbb{N}$. Тада је функција $F: \Omega \rightarrow [0, +\infty]$, дефинисана са $F(t) \stackrel{\text{def}}{=} \Phi((h_n(t))_{n=1}^\infty)$, шакође мерљива.*

Доказ. Дефинишимо $F_n: \Omega \rightarrow [0, +\infty]$ са $F_n(t) \stackrel{\text{def}}{=} \Phi(h_1(t), h_2(t), \dots, h_n(t), 0, 0, \dots)$ за $n \in \mathbb{N}$. Важи да су функције $\varphi_n: \Omega \rightarrow \mathbb{C}^n$ дефинисане са $\varphi_n(t) \stackrel{\text{def}}{=} (h_1(t), h_2(t), \dots, h_n(t))$, за $t \in \Omega$ мерљиве за свако $n \in \mathbb{N}$, јер су такве све функције h_n . Сада је $F_n = \Phi_n \circ \varphi_n$, где су функције Φ_n дефинисане као у Напомени 1.2.13, па су на основу ње и непрекидне. Следи да су функције F_n мерљиве као композиције непрекидне и мерљиве, за свако $n \in \mathbb{N}$. Мерљивост од функције F сада добијамо из чињенице да је $F(t) = \sup_{n \in \mathbb{N}} F_n(t)$, за свако $t \in \Omega$. $\square$

Лема 4.1.2. *Нека је Φ с.н. функција и $(h_n)_{n=1}^\infty$ низ мерљивих функција на $(\Omega, \mathfrak{M}, \mu)$ таквих да је $\int_\Omega \Phi((h_n(t))_{n=1}^\infty) d\mu(t) < +\infty$. Тада важи следећа неједнакост*

$$\Phi\left(\left(\int_\Omega h_n d\mu\right)_{n=1}^\infty\right) \leq \int_\Omega \Phi((h_n(t))_{n=1}^\infty) d\mu(t). \quad (4.1.1)$$

Доказ. Важи да је $h_n \in L^1(\Omega, \mathfrak{M}, \mu)$ за свако $n \in \mathbb{N}$, јер је

$$\int_{\Omega} |h_n(t)| d\mu(t) \leq \int_{\Omega} \sup_{m \in \mathbb{N}} |h_m(t)| d\mu(t) \leq \int_{\Omega} \Phi((h_m(t))_{m=1}^{\infty}) d\mu(t) < +\infty.$$

Из претпоставки следи да је $\Phi((h_n(t))_{n=1}^{\infty}) < +\infty$ за с.с. $t \in \Omega$. То даље имплицира да је $(h_n(t))_{n=1}^{\infty} \in \mathfrak{c}_\Phi$ с.с. у случају $\Phi \sim \ell^\infty$, односно да је $(h_n(t))_{n=1}^{\infty} \in \ell^\infty$ с.с. у случају $\Phi \sim \ell^\infty$. Нека је Φ^* адјунгована с.н. функција од Φ . На основу [35, Теорема 1.17.(б)] имамо да је $(\mathfrak{c}_{\Phi^*}^{(\circ)})^* \cong \mathfrak{c}_\Phi$ у случају $\Phi \sim \ell^\infty$ и $(\mathfrak{c}_{\Phi^*}^{(\circ)})^* = (\mathfrak{c}_{\Phi^*})^* \cong \ell_\Phi^\infty$ у случају $\Phi \sim \ell^\infty$ (знамо да је тада $\mathfrak{c}_{\Phi^*}^{(\circ)} = \mathfrak{c}_{\Phi^*}$ јер је Φ^* мононормализујућа, с обзиром да је еквивалентна са ℓ^1). У оба случаја, за свако $a \in \mathfrak{c}_{\Phi^*}^{(\circ)}$ такво да је $\|a\|_{\Phi^*} \leq 1$ важи

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \sum_{n=1}^{+\infty} |a_n| \cdot |h_n(t)| d\mu(t) &\leq \int_{\Omega} \sup_{x \in B(\mathfrak{c}_{\Phi^*}^{(\circ)})} \left| \sum_{n=1}^{+\infty} x_n |h_n(t)| \right| d\mu(t) \\ &= \int_{\Omega} \Phi((|h_n(t)|)_{n=1}^{\infty}) d\mu(t) = \int_{\Omega} \Phi((h_n(t))_{n=1}^{\infty}) d\mu(t) < +\infty, \end{aligned}$$

одакле следи да је ред $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \int_{\Omega} h_n d\mu$ апсолутно конвергентан и

$$\left| \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \int_{\Omega} h_n d\mu \right| \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \int_{\Omega} |a_n h_n(t)| d\mu(t) \leq \int_{\Omega} \Phi((h_n(t))_{n=1}^{\infty}) d\mu(t).$$

Узимањем супремума по $a \in B(\mathfrak{c}_{\Phi^*}^{(\circ)})$ добијамо (4.1.1). $\square$

Ако је $\mathcal{A}: \Omega \rightarrow \mathfrak{B}(\mathcal{H})$ о.в. функција таква да $\mathcal{A}_t \in \mathfrak{C}_\Phi(\mathcal{H})$ за с.с. $t \in \Omega$, онда на основу Теореме 1.3.12 следи да за сваке $e, f \in \mathfrak{B}$ важи да је $\Phi((\langle \mathcal{A}_t e_n, f_n \rangle)_{n=1}^{\infty}) < +\infty$ с.с. У наставку изводимо последице интеграбилности тог пресликавања за сваки пар о.н.б. $e, f \in \mathfrak{B}$, у зависности од с.н. функције Φ . За почетак разматрамо случај када је $\Phi \sim \ell^\infty$, с обзиром да је тада Банахов простор $\mathfrak{C}_\Phi(\mathcal{H})$ изоморфан тополошком дуалу од $\mathfrak{C}_{\Phi^*}^{(\circ)}(\mathcal{H})$.

Теорема 4.1.3. *Нека је Φ с.н. функција нееквивалентна са ℓ^∞ и нека је $\mathcal{A}: \Omega \rightarrow \mathfrak{B}(\mathcal{H})$ слабо* мерљива о.в. функција таква да $\mathcal{A}_t \in \mathfrak{C}_\Phi(\mathcal{H})$ за скоро свако $t \in \Omega$ и свако $e, f \in \mathfrak{B}$ важи*

$$\int_{\Omega} \Phi((\langle \mathcal{A}_t e_n, f_n \rangle)_{n=1}^{\infty}) d\mu(t) < +\infty. \quad (4.1.2)$$

Тада је о.в. функција $\mathcal{A}$ слабо интеграбилна и важи да је $\int_{\Omega} \mathcal{A} d\mu \in \mathfrak{C}_\Phi(\mathcal{H})$. Додајно, $\mathcal{A} \in \mathbb{G}(\Omega, \mathfrak{M}, \mu, \mathfrak{C}_\Phi(\mathcal{H}))$ и важе неједнакости*

$$\left\| \int_{\Omega} \mathcal{A} d\mu \right\|_{\Phi} \leq \|\mathcal{A}\|_{\mathbb{G}} \leq \sup_{e, f \in \mathfrak{B}} \int_{\Omega} \Phi((\langle \mathcal{A}_t e_n, f_n \rangle)_{n=1}^{\infty}) d\mu(t). \quad (4.1.3)$$

Доказ. Приметимо прво да слабо* мерљивост од $\mathcal{A}$, заједно са условом (4.1.2), даје слабо* интеграбилност. Наиме, како за све јединичне векторе $x, y \in \mathcal{H}$ постоје $e, f \in \mathfrak{B}$ такве да је $e_1 = x$ и $f_1 = y$, важи да је

$$\int_{\Omega} |\langle \mathcal{A}_t x, y \rangle| d\mu(t) \leq \int_{\Omega} \sup_{n \in \mathbb{N}} |\langle \mathcal{A}_t e_n, f_n \rangle| d\mu(t) \leq \int_{\Omega} \Phi((\langle \mathcal{A}_t e_n, f_n \rangle)_{n=1}^{\infty}) d\mu(t) < +\infty.$$

Дакле, $\mathcal{A}$ је слабо* интегрabilна, на основу Леме 1.4.27, па постоји ограничен линеаран оператор $A \stackrel{\text{def}}{=} \int_\Omega \mathcal{A} d\mu$. Како је задовољен услов (4.1.2), из Леме 4.1.2 добијамо

$$\begin{aligned} \Phi((\langle Ae_n, f_n \rangle)_{n=1}^\infty) &= \Phi\left(\left(\left\langle \left(\int_\Omega \mathcal{A} d\mu\right) e_n, f_n \right\rangle\right)_{n=1}^\infty\right) \\ &= \Phi\left(\left(\int_\Omega \langle \mathcal{A} e_n, f_n \rangle d\mu(t)\right)_{n=1}^\infty\right) \leq \int_\Omega \Phi((\langle \mathcal{A} e_n, f_n \rangle)_{n=1}^\infty) d\mu(t) < +\infty, \end{aligned}$$

за сваке $e, f \in \mathfrak{B}$, одакле следи да је $A \in \mathfrak{C}_\Phi(\mathcal{H})$, на основу Теореме 1.3.12. Узимањем супремума по $e, f \in \mathfrak{B}$ добијамо

$$\|A\|_\Phi = \sup_{e, f \in \mathfrak{B}} \Phi((\langle Ae_n, f_n \rangle)_{n=1}^\infty) \leq \sup_{e, f \in \mathfrak{B}} \int_\Omega \Phi((\langle \mathcal{A} e_n, f_n \rangle)_{n=1}^\infty) d\mu(t).$$

Додатно, ако је $A = \sum_{n=1}^{+\infty} s_n(A) g_n \otimes h_n^*$ представљен у Шмитовом развоју, тада важи процена

$$\|A\|_\Phi = \Phi((s_n(A))_{n=1}^\infty) = \Phi((\langle Ag_n, h_n \rangle)_{n=1}^\infty) \leq \int_\Omega \Phi((\langle \mathcal{A} g_n, h_n \rangle)_{n=1}^\infty) d\mu(t) < +\infty.$$

Да бисмо доказали да је $\mathcal{A} \in \mathbb{G}(\Omega, \mathfrak{M}, \mu, \mathfrak{C}_\Phi(\mathcal{H}))$, довољно је према Теорему 1.3.21 да докажемо да је за свако $Y \in \mathfrak{C}_{\Phi^*}^{(o)}(\mathcal{H})$ функција $t \mapsto \text{tr}(\mathcal{A}_t Y)$ у $L^1(\Omega, \mathfrak{M}, \mu)$. Нека је зато $Y = \sum_{n=1}^{+\infty} s_n(Y) e_n \otimes f_n^*$ произвољан оператор из $B(\mathfrak{C}_{\Phi^*}^{(o)}(\mathcal{H}))$ представљен у Шмитовом развоју. Тада је $\Phi^*((s_n(Y))_{n=1}^\infty) = \|Y\|_{\Phi^*} \leq 1$. Из једнакости (1.3.11) добијамо $\text{tr}(\mathcal{A}_t Y) = \sum_{n=1}^{+\infty} s_n(Y) \langle \mathcal{A}_t e_n, f_n \rangle$, где ред апсолутно конвергира јер је

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |s_n(Y) \langle \mathcal{A}_t e_n, f_n \rangle| \leq \Phi^*((s_n(Y))_{n=1}^\infty) \cdot \Phi((\langle \mathcal{A}_t e_n, f_n \rangle)_{n=1}^\infty) \leq \|\mathcal{A}_t\|_\Phi < +\infty.$$

Одатле следи и мерљивост пресликавања $t \mapsto \text{tr}(\mathcal{A}_t Y)$. Додатно важи

$$\begin{aligned} \int_\Omega |\text{tr}(\mathcal{A}_t Y)| d\mu(t) &= \int_\Omega \left| \sum_{n=1}^{+\infty} s_n(Y) \langle \mathcal{A}_t e_n, f_n \rangle \right| d\mu(t) \leq \sum_{n=1}^{+\infty} |s_n(Y)| \int_\Omega |\langle \mathcal{A}_t e_n, f_n \rangle| d\mu(t) \\ &\leq \Phi^*((s_n(Y))_{n=1}^\infty) \cdot \Phi\left(\left(\int_\Omega |\langle \mathcal{A}_t e_n, f_n \rangle| d\mu(t)\right)_{n=1}^\infty\right) \leq \int_\Omega \Phi((\langle \mathcal{A}_t e_n, f_n \rangle)_{n=1}^\infty) d\mu(t) < +\infty, \end{aligned}$$

где је друга неједнакост задовољена на основу [35, Теорема 1.17(a)], чиме смо доказали да је $\mathcal{A} \in \mathbb{G}(\Omega, \mathfrak{M}, \mu, \mathfrak{C}_\Phi(\mathcal{H}))$. Штавише, из претходне неједнакости следи да за свако $Y \in B(\mathfrak{C}_{\Phi^*}^{(o)}(\mathcal{H}))$ важи да је

$$\int_\Omega |\text{tr}(\mathcal{A}_t Y)| d\mu(t) \leq \sup_{e, f \in \mathfrak{B}} \int_\Omega \Phi((\langle \mathcal{A}_t e_n, f_n \rangle)_{n=1}^\infty) d\mu(t). \quad (4.1.4)$$

Коначно, тражену неједнакост (4.1.3) добијамо из (4.1.4), узимањем супремума по свим $Y \in B(\mathfrak{C}_{\Phi^*}^{(o)}(\mathcal{H}))$. $\square$

Напомена 4.1.4. Приметимо да у случају $\Phi = \ell^1$ и $\mathcal{A}_t \geq 0$ с.с. претходна теорема уопштава [23, Лема 2.1]. Наиме, ако је задовољен услов (4.1.2), узимањем произвољне ортонормиране базе e добијамо

$$\int_\Omega \|\mathcal{A}_t\|_1 d\mu(t) = \int_\Omega \left(\sum_{n=1}^\infty \langle \mathcal{A}_t e_n, e_n \rangle \right) d\mu(t) = \int_\Omega \ell^1((\langle \mathcal{A}_t e_n, e_n \rangle)_{n=1}^\infty) d\mu(t) < +\infty,$$

па је задовољен услов помену те леме.

4.2 Петис интеграбилност оператор-вредносних функција са вредностима у сепарабилним идеалима компактних оператора

Сада разматрамо случај $\Phi \sim \ell^\infty$, када простор $\mathcal{C}_\Phi(\mathcal{H})$ нема преддуал, али знамо да важи $(\mathcal{C}_\Phi(\mathcal{H}))^* \cong \mathcal{C}_{\Phi^*}(\mathcal{H})$ јер је Φ мононормализујућа. У случају када је мера μ коначна, Теорема 3.2.4 нам даје неопходне и довољне услове да о.в. функција $\mathcal{A}: \Omega \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$ припада простору $\mathbb{P}(\Omega, \mathfrak{M}, \mu, \mathcal{C}_\infty(\mathcal{H}))$. Наредна теорема даје довољне услове $\mathcal{C}_\infty(\mathcal{H})$ -Петис интеграбилности, без обзира на то да ли је мера μ коначна.

Теорема 4.2.1. Нека је Φ с.н. функција еквивалентна са ℓ^∞ и нека је $\mathcal{A}: \Omega \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$ слабо* мерљива о.в. функција таква да $\mathcal{A}_t \in \mathcal{C}_\Phi(\mathcal{H})$ за с.с. $t \in \Omega$ и да за сваке $e, f \in \mathfrak{B}$ важи

$$\int_{\Omega} \Phi((\langle \mathcal{A}_t e_n, f_n \rangle)_{n=1}^{\infty}) d\mu(t) < +\infty. \quad (4.2.1)$$

Тада је $\mathcal{A} \in \mathbb{P}(\Omega, \mathfrak{M}, \mu, \mathcal{C}_\Phi(\mathcal{H}))$ и важи процена

$$\|\mathcal{A}\|_{\mathbb{P}} \leq \sup_{e, f \in \mathfrak{B}} \int_{\Omega} \Phi((\langle \mathcal{A}_t e_n, f_n \rangle)_{n=1}^{\infty}) d\mu(t). \quad (4.2.2)$$

Доказ. Мерљивост пресликавања $t \mapsto \Phi((\langle \mathcal{A}_t e_n, f_n \rangle)_{n=1}^{\infty})$ за сваке $e, f \in \mathfrak{B}$ следи из Леме 4.1.1. Доказ слабе* интеграбилности од $\mathcal{A}$ је исти као и у доказу Теореме 4.1.3. Одатле следи да за свако $Y \in \mathcal{C}_{\Phi^*}(\mathcal{H})$ ($= \mathcal{C}_1(\mathcal{H})$ скуповно, јер је $\Phi^* \sim \ell^1$) важи да је $\int_{\Omega} |\text{tr}(\mathcal{A}_t Y)| d\mu(t) < +\infty$, одакле добијамо слабу мерљивост о.в. функције $\mathcal{A}: \Omega \rightarrow \mathcal{C}_\Phi(\mathcal{H})$.

Да бисмо доказали $\mathcal{C}_\Phi(\mathcal{H})$ -Петис интеграбилност, потребно је показати да за свако $E \in \mathfrak{M}$ важи да је оператор $\int_E \mathcal{A} d\mu \in \mathcal{C}_\Phi(\mathcal{H})$ (тј. да је компактан). Нека је зато $E \in \mathfrak{M}$ и нека су $e, f \in \mathfrak{B}$ произвољни. Тада важи да је

$$0 \leq \left| \left\langle \left(\int_E \mathcal{A} d\mu \right) e_n, f_n \right\rangle \right| \leq \int_E |\langle \mathcal{A}_t e_n, f_n \rangle| d\mu(t) \leq \int_{\Omega} |\langle \mathcal{A}_t e_n, f_n \rangle| d\mu(t). \quad (4.2.3)$$

Како су оператори $\mathcal{A}_t$ компактни за с.с. $t \in \Omega$, на основу Теореме 1.3.12 добијамо да је $\lim_{n \rightarrow \infty} |\langle \mathcal{A}_t e_n, f_n \rangle| = 0$ за с.с. $t \in \Omega$. Такође, за свако $n \in \mathbb{N}$ важи

$$|\langle \mathcal{A}_t e_n, f_n \rangle| \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} |\langle \mathcal{A}_t e_n, f_n \rangle| \leq \Phi((\langle \mathcal{A}_t e_n, f_n \rangle)_{n=1}^{\infty}) \in L^1(\Omega, \mathfrak{M}, \mu),$$

због услова (4.2.1). На основу Теореме о Доминантној Конвергенцији добијамо да је $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |\langle \mathcal{A}_t e_n, f_n \rangle| d\mu(t) = 0$, па следи да је $\lim_{n \rightarrow \infty} \left\langle \left(\int_E \mathcal{A} d\mu \right) e_n, f_n \right\rangle = 0$. Коначно, Теорема 1.3.12 нам даје компактност оператора $\int_E \mathcal{A} d\mu$, одакле добијамо да $\mathcal{A} \in \mathbb{P}(\Omega, \mathfrak{M}, \mu, \mathcal{C}_\Phi(\mathcal{H}))$, што је требало и доказати. $\square$

Нека је $\mathcal{A}: \Omega \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$ слабо* мерљиво. На основу Леме 1.3.22 за свако $t \in \Omega$ важи једнакост

$$\|\mathcal{A}_t\|_{\Phi} = \sup_{\substack{Y \in \mathcal{K}(\mathcal{H}) \\ \|Y\|_{\Phi^*} \leq 1}} |\text{tr}(\mathcal{A}_t Y)|,$$

па како је простор $\mathcal{K}(\mathcal{H})$ сепарабилан, следи да је пресликавање $t \mapsto \|\mathcal{A}_t\|_{\Phi}$ мерљиво. Додатно,

$$\sup_{e, f \in \mathfrak{B}} \int_{\Omega} \Phi((\langle \mathcal{A}_t e_n, f_n \rangle)_{n=1}^{\infty}) d\mu(t) \leq \int_{\Omega} \sup_{e, f \in \mathfrak{B}} \Phi((\langle \mathcal{A}_t e_n, f_n \rangle)_{n=1}^{\infty}) d\mu(t) = \int_{\Omega} \|\mathcal{A}_t\|_{\Phi} d\mu(t),$$

одакле следи да је услов (4.1.2) увек задовољен када је пресликавање $t \mapsto \|\mathcal{A}_t\|_\Phi$ интеграбилно. Да обрат не важи можемо видети у наредном примеру.

Пример 4.2.2. Нека је $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ о.н.б. у $\mathcal{H}$ и m Лебегова мера на $[0, 1)$. Дефинишимо о.в. функцију $\mathcal{A}: [0, 1) \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$ са $\mathcal{A}_t \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n=1}^{+\infty} n\chi_{[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n})}(t)e_n \otimes e_1^*$. Важи да је за свако $t \in [0, 1)$ оператор $\mathcal{A}_t \in \mathcal{K}(\mathcal{H}) \subseteq \mathcal{C}_\Phi(\mathcal{H})$ за сваку с.н. функцију Φ . Додатно, ако је Φ једна Q -норма, тј. ако је $\Phi = \Psi^{(2)}$ за неку с.н. функцију Ψ , доказаћемо да је услов (4.1.2) испуњен. Наиме, нека су вектори $f, g \in \mathfrak{B}$ произвољни. Тада за свако $t \in [\frac{1}{n}, \frac{1}{n+1})$ важи да је $\Phi((\langle \mathcal{A}_t f_m, g_m \rangle)_{m=1}^\infty) = \Phi(n(\langle f_m, e_1 \rangle \langle e_n, g_m \rangle)_{m=1}^\infty) = n \cdot \Phi((\langle f_m, e_1 \rangle \langle e_n, g_m \rangle)_{m=1}^\infty)$, одакле добијамо

$$\Phi((\langle \mathcal{A}_t f_m, g_m \rangle)_{m=1}^\infty) = \sum_{n=1}^{+\infty} n\chi_{[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n})}(t)\Phi((\langle f_m, e_1 \rangle \langle e_n, g_m \rangle)_{m=1}^\infty).$$

Интеграцијом претходне једнакости на $[0, 1)$ по Лебеговој мери и заменом места реда и интеграла низа позитивних функција добијамо

$$\begin{aligned} \int_{[0,1)} \Phi((\langle \mathcal{A}_t f_m, g_m \rangle)_{m=1}^\infty) dm(t) &= \sum_{n=1}^{+\infty} n \int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}} \Phi((\langle f_m, e_1 \rangle \langle e_n, g_m \rangle)_{m=1}^\infty) dt \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n+1} \Psi^{(2)}((\langle f_m, e_1 \rangle \langle e_n, g_m \rangle)_{m=1}^\infty) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n+1} \sqrt{\Psi((|\langle f_m, e_1 \rangle \langle e_n, g_m \rangle|^2)_{m=1}^\infty)} \\ &\leq M \sqrt{\sum_{n=1}^{+\infty} \Psi((|\langle f_m, e_1 \rangle \langle e_n, g_m \rangle|^2)_{m=1}^\infty)} \leq M \sqrt{\sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{m=1}^{+\infty} |\langle f_m, e_1 \rangle|^2 |\langle e_n, g_m \rangle|^2} \\ &= M \sqrt{\sum_{m=1}^{+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} |\langle f_m, e_1 \rangle|^2 |\langle e_n, g_m \rangle|^2} = M \sqrt{\sum_{m=1}^{+\infty} |\langle f_m, e_1 \rangle|^2 \|g_m\|^2} = M \|e_1\| < +\infty, \end{aligned}$$

где је $M \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)^2}} = \sqrt{\frac{\pi^2}{6} - 1}$.

Коначно, докажимо да пресликавање $t \mapsto \|\mathcal{A}_t\|_\Phi$ није Лебег интеграбилно на $[0, 1)$. Важи да је

$$\begin{aligned} |\mathcal{A}_t|^2 &= \mathcal{A}_t^* \mathcal{A}_t = \left(\sum_{m=1}^{+\infty} m\chi_{[\frac{1}{m+1}, \frac{1}{m})}(t)e_1 \otimes e_m^* \right) \sum_{n=1}^{+\infty} n\chi_{[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n})}(t)e_n \otimes e_1^* \\ &= \sum_{m,n=1}^{+\infty} mn\chi_{[\frac{1}{m+1}, \frac{1}{m})}(t)\chi_{[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n})}(t)\langle e_n, e_m \rangle e_1 \otimes e_1^* = \left(\sum_{n=1}^{+\infty} n^2\chi_{[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n})}(t) \right) e_1 \otimes e_1^*, \end{aligned}$$

одакле добијамо

$$\|\mathcal{A}_t\|_\Phi = \|\mathcal{A}_t\|_{\Psi^{(2)}} = \sqrt{\| |\mathcal{A}_t|^2 \|_\Psi} = \sqrt{\sum_{n=1}^{+\infty} n^2\chi_{[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n})}(t)} = \sum_{n=1}^{+\infty} n\chi_{[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n})}(t), \quad (4.2.4)$$

јер су скупови $[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n})$ међусобно дисјунктни и сви оператори $|\mathcal{A}_t|^2$ су ранга 1. Сада, интеграцијом израза (4.2.4) на $[0, 1)$ добијамо

$$\int_{[0,1)} \|\mathcal{A}_t\|_\Phi dm(t) = \int_{[0,1)} \sum_{n=1}^{+\infty} n\chi_{[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n})}(t) dm(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} n \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n+1} = +\infty.$$

На основу Теореме 1.3.21, у случају када је Φ мононормализујућа и није еквивалентна ни са ℓ^1 ни са ℓ^∞ , важи да је $(\mathfrak{C}_{\Phi^*}^{(\circ)}(\mathcal{H}))^{**} \cong \mathfrak{C}_{\Phi^*}(\mathcal{H})$, док у случају $\Phi \sim \ell^1$ важи дуалност $(\mathfrak{C}_{\Phi^*}^{(\circ)}(\mathcal{H}))^{**} \cong \mathfrak{B}_{\Phi^*}(\mathcal{H})$. Додатно, важи следећа

Лема 4.2.3. Нека је Φ мононормализујућа с.н. функција нееквивалентна са ℓ^∞ . Тада је идеал $\mathfrak{C}_{\Phi^*}^{(\circ)}(\mathcal{H})$ слабо* секвенцијално густ у $\mathfrak{C}_{\Phi^*}(\mathcal{H})$. У случају кад је $\Phi \sim \ell^1$ важи да је $\mathfrak{C}_{\Phi^*}^{(\circ)}(\mathcal{H})$ слабо* секвенцијално густ у $\mathfrak{B}_{\Phi^*}(\mathcal{H})$.

Доказ. На основу Теореме 1.3.21, све што треба доказати је да за свако $X \in \mathfrak{C}_{\Phi^*}(\mathcal{H})$ постоји низ $(X_n)_{n=1}^\infty$ из $\mathfrak{C}_{\Phi^*}^{(\circ)}(\mathcal{H})$ такав да за свако $Y \in \mathfrak{C}_{\Phi}(\mathcal{H})$ важи $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{tr}(X_n Y) = \text{tr}(Y X)$. Нека је $X \in \mathfrak{C}_{\Phi^*}(\mathcal{H})$ произвољан и $(P_n)_{n=1}^\infty$ низ ортогоналних пројекција коначног ранга који конвергира јако ка јединичном оператору на $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$. Тада је $X_n \stackrel{\text{def}}{=} P_n X \in \mathfrak{K}(\mathcal{H}) \subset \mathfrak{C}_{\Phi^*}^{(\circ)}(\mathcal{H})$ за свако $n \in \mathbb{N}$ и важи

$$\text{tr}(X_n Y) = \text{tr}(P_n X Y) = \text{tr}(X Y P_n) = \text{tr}(X Y_n), \quad (4.2.5)$$

где је $Y_n \stackrel{\text{def}}{=} Y P_n$. Како је с.н. функција Φ мононормализујућа, према Теорему 1.3.18 следи да $\|Y_n - Y\|_\Phi \rightarrow 0$, кад $n \rightarrow \infty$. Коначно, на основу једнакости (4.2.5) и неједнакости из Теореме 1.3.21, добијамо да

$$\begin{aligned} |\text{tr}(Y X) - \text{tr}(X_n Y)| &= |\text{tr}(X Y) - \text{tr}(X Y_n)| = |\text{tr}(X(Y_n - Y))| \\ &\leq \|X(Y_n - Y)\|_1 \leq \|X\|_{\Phi^*} \|Y_n - Y\|_\Phi \rightarrow 0, \end{aligned}$$

кад $n \rightarrow \infty$, чиме је доказ завршен. $\square$

Приметимо да ако је поред Φ и с.н. функција Φ^* такође мононормализујућа и $\Phi \sim \ell^1$, онда на основу Теореме 1.3.21 важи да је $\mathfrak{C}_{\Phi^*}^{(\circ)}(\mathcal{H}) = \mathfrak{C}_{\Phi^*}(\mathcal{H})$. У том случају нам претходна лема не даје никакав закључак, с обзиром на рефлексивност простора $\mathfrak{C}_{\Phi}(\mathcal{H})$. Најпознатији пример мононормализујуће с.н. функције са бинормализујућом адјунгованом с.н. функцијом је Φ_π где је $(\Phi_\pi)^* = \Phi_\pi$, у случају бинормализујућег низа $\Pi = (\pi_n)_{n=1}^\infty$ (видети Тврђење 1.2.14). Последица 1.3.26 нам даје однос одговарајућих идеала, где нам претходна лема даје слабу* секвенцијалну густину простора $\mathfrak{C}_\pi(\mathcal{H})$ у свом другом дуалу.

Као директну последицу Леме 4.2.3 и Напомене 1.4.26 добијамо

Последица 4.2.4. Ако је $(\Omega, \mathfrak{M}, \mu)$ простор са коначном мером и Φ мононормализујућа с.н. функција нееквивалентна са ℓ^∞ , онда је $\mathbb{P}(\Omega, \mathfrak{M}, \mu, \mathfrak{C}_\Phi(\mathcal{H})) = \mathbb{G}(\Omega, \mathfrak{M}, \mu, \mathfrak{C}_\Phi(\mathcal{H}))$.

У случају произвољног простора са мером (без претпоставке о њеној коначности) важи следећа

Теорема 4.2.5. Нека је Φ мононормализујућа с.н. функција и $\mathcal{A}: \Omega \rightarrow \mathfrak{B}(\mathcal{H})$ слабо* мерљива о.в. функција таква да $\mathcal{A}_t \in \mathfrak{C}_\Phi(\mathcal{H})$ с.с. и за сваке $e, f \in \mathfrak{B}$ важи

$$\int_\Omega \Phi((\langle \mathcal{A}_t e_n, f_n \rangle)_{n=1}^\infty) d\mu(t) < +\infty. \quad (4.2.6)$$

Тада $\mathcal{A} \in \mathbb{P}(\Omega, \mathfrak{M}, \mu, \mathfrak{C}_\Phi(\mathcal{H}))$ и важи процена

$$\|\mathcal{A}\|_\mathbb{P} \leq \sup_{e, f \in \mathfrak{B}} \int_\Omega \Phi((\langle \mathcal{A}_t e_n, f_n \rangle)_{n=1}^\infty) d\mu(t). \quad (4.2.7)$$

Доказ. Случај када је $\Phi \sim \ell^\infty$ је већ доказан у Теорему 4.2.1. У случају када је $\Phi \sim \ell^\infty$ имамо да $\mathcal{A} \in \mathbb{G}(\Omega, \mathfrak{M}, \mu, \mathfrak{C}_\Phi(\mathcal{H}))$, на основу Теореме 4.1.3. Додадатно, према Лему 4.2.3, знамо да је $\mathfrak{C}_\Phi^{(o)}(\mathcal{H})$ слабо* секвенцијално густ у свом другом дуалу, одакле следи да је $\mathcal{A}$ слабо $\mathfrak{C}_\Phi(\mathcal{H})$ -интеграбилна, на основу Леме 1.4.25. Нека је $E \in \mathfrak{M}$ и $A_E \stackrel{\text{def}}{=} \int_E \mathcal{A} d\mu$.

Докажимо тврђење прво у случају $\Phi \sim \ell^1$. Нека је $X = \sum_{n=1}^{+\infty} s_n(X) e_n \otimes f_n^*$ произвољан оператор у $\mathfrak{C}_{\Phi^*}(\mathcal{H})$ представљен у Шмитовом развоју. Користећи (1.3.11), добијамо

$$\begin{aligned} \text{tr}(A_E X) &= \sum_{n=1}^{+\infty} s_n(X) \langle A_E e_n, f_n \rangle = \sum_{n=1}^{+\infty} s_n(X) \int_E \langle \mathcal{A}_t e_n, f_n \rangle d\mu(t) \\ &= \int_E \sum_{n=1}^{+\infty} s_n(X) \langle \mathcal{A}_t e_n, f_n \rangle d\mu(t) = \int_E \text{tr}(\mathcal{A}_t X) d\mu(t), \end{aligned}$$

где је замена места реда и интеграла оправдана јер је

$$\begin{aligned} \int_E \sum_{n=1}^{\infty} |s_n(X) \langle \mathcal{A}_t e_n, f_n \rangle| d\mu(t) &\leq \int_E \Phi^*((s_n(X))_{n=1}^{\infty}) \Phi((|\langle \mathcal{A}_t e_n, f_n \rangle|)_{n=1}^{\infty}) d\mu(t) \\ &\leq \|X\|_{\Phi^*} \int_{\Omega} \Phi((\langle \mathcal{A}_t e_n, f_n \rangle)_{n=1}^{\infty}) d\mu(t) < +\infty. \end{aligned}$$

Дакле, $\mathcal{A} \in \mathbb{P}(\Omega, \mathfrak{M}, \mu, \mathfrak{C}_\Phi(\mathcal{H}))$, што је требало и доказати.

Докажимо сада случај када је $\Phi \sim \ell^1$. Тада постоји $M > 0$ такво да за свако $a \in \mathfrak{c}_\Phi$ важи $\Phi(a) \leq \ell^1(a) \leq M \cdot \Phi(a)$. Нека је $X \in \mathfrak{B}_{\Phi^*}(\mathcal{H})$ произвољан. На основу Теореме 1.1.4 имамо да је $X = C \cdot \sum_{k=1}^3 U_k$, за неко $C > 0$ и неке унитарне операторе $U_1, U_2, U_3 \in \mathfrak{B}(\mathcal{H})$. Ако је $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ произвољна о.н.б. од $\mathcal{H}$, онда је

$$\begin{aligned} \text{tr}(A_E X) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \langle A_E X e_n, e_n \rangle = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_E \langle \mathcal{A}_t X e_n, e_n \rangle d\mu(t) \\ &= \int_E \sum_{n=1}^{+\infty} \langle \mathcal{A}_t X e_n, e_n \rangle d\mu(t) = \int_E \text{tr}(\mathcal{A}_t X) d\mu(t), \end{aligned}$$

где је замена места реда и интеграла оправдана јер је

$$\begin{aligned} \int_E \sum_{n=1}^{\infty} |\langle \mathcal{A}_t X e_n, e_n \rangle| d\mu(t) &\leq C \cdot \sum_{k=1}^3 \int_E \sum_{n=1}^{+\infty} |\langle \mathcal{A}_t U_k e_n, e_n \rangle| d\mu(t) \\ &= C \cdot \sum_{k=1}^3 \int_E \sum_{n=1}^{+\infty} |\langle \mathcal{A}_t f_n^{(k)}, e_n \rangle| d\mu(t) \leq M \cdot C \cdot \sum_{k=1}^3 \int_{\Omega} \Phi((\langle \mathcal{A}_t f_n^{(k)}, e_n \rangle)_{n=1}^{\infty}) d\mu(t) < +\infty, \end{aligned}$$

с обзиром да $(f_n^{(k)})_{n=1}^{\infty} \in \mathfrak{B}$ за свако $k \in \{1, 2, 3\}$. Дакле, $\mathcal{A} \in \mathbb{P}(\Omega, \mathfrak{M}, \mu, \mathfrak{C}_\Phi(\mathcal{H}))$. Коначно, према Напомени 1.4.26 и неједнакости (4.1.3), изводимо тражену процену (4.2.7). $\square$

У [18, Теорема 3.1] аутори изводе разне процене норми као и одређене типове конвергенције интеграла о.в. функција. У наредном тврђењу доказујемо како услови дела под (с) наведене теореме имплицирају услов (4.2.6). Прецизније,

Последица 4.2.6. Нека су $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ о.в. функције такве да је $\mathcal{A}, \mathcal{B}^* \in L_G^2(\Omega, \mu, \mathfrak{B}(\mathcal{H}))$ и нека је $X \in \mathfrak{C}_1(\mathcal{H})$. Тада о.в. функција $t \mapsto \mathcal{A}_t X \mathcal{B}_t$ припада простору $\mathbb{P}(\Omega, \mathfrak{M}, \mu, \mathfrak{C}_1(\mathcal{H}))$. Последишно, важи да је $\int_{\Omega} \mathcal{A}_t X \mathcal{B}_t d\mu(t) \in \mathfrak{C}_1(\mathcal{H})$ и за сваки низ $(\delta_n)_{n=1}^{\infty}$ у $\mathfrak{M}$, такав да $\delta_n \uparrow \delta$ кад $n \rightarrow \infty$, важи

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \int_{\delta_n} \mathcal{A}_t X \mathcal{B}_t d\mu(t) - \int_{\delta} \mathcal{A}_t X \mathcal{B}_t d\mu(t) \right\|_1 = 0. \quad (4.2.8)$$

Доказ. Нека је оператор $X = \sum_{n=1}^{\infty} s_n(X) e_n \otimes f_n^*$ представљен у Шмитовом развоју и нека су $g, h \in \mathfrak{B}$. Тада је $\mathcal{A}_t X \mathcal{B}_t = \sum_{n=1}^{\infty} s_n(X) (\mathcal{A}_t e_n) \otimes (\mathcal{B}_t^* f_n)^*$, где ред конвергира апсолутно у $\mathfrak{C}_1(\mathcal{H})$, па за свако $m \in \mathbb{N}$ важи

$$\langle \mathcal{A}_t X \mathcal{B}_t g_m, h_m \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} s_n(X) \langle \mathcal{A}_t e_n, h_m \rangle \langle g_m, \mathcal{B}_t^* f_n \rangle,$$

одакле је

$$\begin{aligned} \ell^1((\langle \mathcal{A}_t X \mathcal{B}_t g_m, h_m \rangle)_{m=1}^{\infty}) &\leq \sum_{n=1}^{\infty} s_n(X) \sum_{m=1}^{\infty} |\langle \mathcal{A}_t e_n, h_m \rangle \langle g_m, \mathcal{B}_t^* f_n \rangle| \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} s_n(X) \sqrt{\sum_{m=1}^{\infty} |\langle \mathcal{A}_t e_n, h_m \rangle|^2} \sqrt{\sum_{m=1}^{\infty} |\langle \mathcal{B}_t^* f_n, g_m \rangle|^2} \leq \sum_{n=1}^{\infty} s_n(X) \|\mathcal{A}_t e_n\| \|\mathcal{B}_t^* f_n\|. \end{aligned} \quad (4.2.9)$$

Интеграцијом (4.2.9) на Ω добијамо

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \ell^1((\langle \mathcal{A}_t X \mathcal{B}_t g_m, h_m \rangle)_{m=1}^{\infty}) d\mu(t) &\leq \sum_{n=1}^{\infty} s_n(X) \int_{\Omega} \|\mathcal{A}_t e_n\| \|\mathcal{B}_t^* f_n\| d\mu(t) \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} s_n(X) \sqrt{\int_{\Omega} \|\mathcal{A}_t e_n\|^2 d\mu(t)} \sqrt{\int_{\Omega} \|\mathcal{B}_t^* f_n\|^2 d\mu(t)} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} s_n(X) \sqrt{\int_{\Omega} \langle \mathcal{A}_t^* \mathcal{A}_t e_n, e_n \rangle d\mu(t)} \sqrt{\int_{\Omega} \langle \mathcal{B}_t \mathcal{B}_t^* f_n, f_n \rangle d\mu(t)} \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} s_n(X) \sqrt{\left\| \int_{\Omega} \mathcal{A}_t^* \mathcal{A}_t d\mu(t) \right\|} \sqrt{\left\| \int_{\Omega} \mathcal{B}_t \mathcal{B}_t^* d\mu(t) \right\|} \\ &= \|X\|_1 \sqrt{\left\| \int_{\Omega} \mathcal{A}_t^* \mathcal{A}_t d\mu(t) \right\|} \sqrt{\left\| \int_{\Omega} \mathcal{B}_t \mathcal{B}_t^* d\mu(t) \right\|} < +\infty. \end{aligned}$$

Тражена Петис интеграбилност сада следи директно из Теореме 4.2.5. Коначно, једнакост (4.2.8) је последица пребројиве адитивности векторске мере ν , дефинисане са $\nu(E) \stackrel{\text{def}}{=} \int_E \mathcal{A}_t X \mathcal{B}_t d\mu(t)$, која следи директно из Теореме 1.4.17. $\square$

Напомена 4.2.7. За крај, приметимо да су Гелфандова и Петисова норма процењене изразом $\sup_{e, f \in \mathfrak{B}} \int_{\Omega} \Phi((\langle \mathcal{A}_t e_n, f_n \rangle)_{n=1}^{\infty}) d\mu(t)$ иако није утврђено да ли је и под којим условима тај израз коначан. Докажимо да наведена величина задовољава аксиоме норме на одговарајућем потпростору од $\mathbb{P}(\Omega, \mathfrak{M}, \mu, \mathfrak{C}_F(\mathcal{H}))$. Хомогеност и неједнакост троугла следе директно из својстава супремума, интеграла и с.н. функције Φ . Зато, покажимо још

својство недегенерисаности норме. Нека је о.в. функција $\mathcal{A} \in \mathbb{P}(\Omega, \mathfrak{M}, \mu, \mathfrak{C}_\Phi(\mathcal{H}))$ таква да је $\sup_{e, f \in \mathfrak{B}} \int_{\Omega} \Phi((\langle \mathcal{A}_t e_n, f_n \rangle)_{n=1}^{\infty}) d\mu(t) = 0$ и нека су $x, y \in \mathcal{H}$ произвољни јединични вектори. Допуњавањем до $e, f \in \mathfrak{B}$ таквих да је $e_1 = x$ и $f_1 = y$ добијамо да је $\Phi((\langle \mathcal{A}_t e_n, f_n \rangle)_{n=1}^{\infty}) \geq \ell^{\infty}((\langle \mathcal{A}_t e_n, f_n \rangle)_{n=1}^{\infty}) \geq |\langle \mathcal{A}_t x, y \rangle|$, за свако $t \in \Omega$, одакле следи да је

$$\|\mathcal{A}\|_{\mathbb{P}} = \sup_{\|x\|=\|y\|=1} \int_{\Omega} |\langle \mathcal{A}_t x, y \rangle| d\mu(t) \leq \sup_{e, f \in \mathfrak{B}} \int_{\Omega} \Phi((\langle \mathcal{A}_t e_n, f_n \rangle)_{n=1}^{\infty}) d\mu(t) = 0,$$

па је $\mathcal{A}$ нула-вектор у простору $\mathbb{P}(\Omega, \mathfrak{M}, \mu, \mathfrak{C}_\Phi(\mathcal{H}))$, чиме је доказана и недегенерисаност наведеног израза.

Библиографија

- [1] R. Bhatia, *Matrix Analysis*, Springer-Verlag, New York, 1997.
- [2] S. Bochner, *Integration von Funktionen deren Werte die Elemente eines Vektorraumes sind*, *Fundamenta Mathematicae*, 20 (1933), 262–276.
- [3] J. Diestel, H. Jarchow, A. Tonge, *Absolutely Summing Operators*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, Vol. 43 (1995)
- [4] J. Diestel, J. J. Uhl, *Vector Measures*, Amer. Math. Soc., Mat. Surveys and Monographs, Vol.15, (1977)
- [5] L. Fialkow, *Spectral properties of elementary operators*, *Acta Sci. Math. (Szeged)*, 46 (1983), 269–282.
- [6] L. Fialkow, *Spectral properties of elementary operators II*, *Trans. Amer. Math. Soc.* 290 (1985), 415–429.
- [7] L. Fialkow, *The range inclusion problem for elementary operators*, *Michigan J. Math.* 34 (1987), 451–459.
- [8] L. Fialkow and R. Loebel, *Elementary mappings into ideals of operators*, *Illinois Journal Math.* Vol 28 (1984), 555–578.
- [9] I. M. Gel'fand, *Sur un lemme de la théorie des espaces linéaires*, *Commun. Inst. Sci. Math. et Mecan., Univ. Kharkoff et Soc. Math. Kharkoff*, IV. Ser. 13, 35-40 (1936).
- [10] I. C. Gohberg, S. Goldberg, M.A. Kaashoek, *Basic Classes of Linear Operators*, *Operator Theory: Advances and Applications*, vol. 63, Birkhäuser, Basel, 2003.
- [11] I. C. Gohberg, M. G. Krein, *Introduction to the Theory of Linear Non-selfadjoint Operators*, *Transl. Math. Monographs*, Vol. 18, Amer. Math. Soc. Providence, R.I. 1969.
- [12] P. Halmos, *A Hilbert space problem book*, 2nd ed., Springer-Verlag, New York (1982)
- [13] O. Hirzallah, F. Kittaneh, *Non-commutative Clarkson Inequalities for n -Tuples of Operators*, *Integ. Equ. Oper. Theory.* 60 (2008), 369–379.
- [14] D. R. Jocić, *Cauchy-Schwarz and mean inequalities for elementary operators into norm ideals*, *Proc. Amer. Math. Soc.* 126 (1998), 2705–2711.
- [15] D. R. Jocić, *The Cauchy-Schwarz norm inequality for elementary operators in Schatten ideals*, *J. London Math. Soc.* (2) 60 (1999), 925–934.

- [16] D. R. Jocić, *Cauchy-Schwarz norm inequalities for weak*-integrals of operator valued functions*, J. Funct. Anal. 218 (2005), 318–346.
- [17] D. R. Jocić, *Interpolation norms between row and column spaces and the norm problem for elementary operators*, Linear Algebra Appl. 430 (2009), 2961–2974.
- [18] D. R. Jocić, Đ. Krtinić, M. Lazarević, *Cauchy-Schwarz inequalities for inner product type transformers in Q^* norm ideals of compact operators*, Positivity 24 (2020), 933–956.
- [19] D. R. Jocić, M. Lazarević, S. Milošević, *Norm inequalities for a class of elementary operators generated by analytic functions with non-negative Taylor coefficients in ideals of compact operators related to p -modified unitarily invariant norms*, Linear Alg. Appl. 540 (2018), 60–83.
- [20] D. R. Jocić, M. Lazarević, S. Milošević, *Inequalities for generalized derivations of operator monotone functions in norm ideals of compact operators*, Linear Alg. Appl. 586 (2020), 43–63.
- [21] D. R. Jocić, M. Lazarević, M. Milović, *Perturbation norm inequalities for elementary operators generated by analytic functions with positive Taylor coefficients*, Positivity 26, 4 (2022)
- [22] D. R. Jocić, S. Milošević, V. Đurić, *Norm inequalities for elementary operators and other inner product type integral transformers with the spectra contained in the unit disc*, Filomat 31 (2017), 197–206.
- [23] M. Krstić, M. Milović, S. Milošević, *Belonging of Gel’fand integral of positive operator valued functions to separable ideals of compact operators on Hilbert space*, Positivity 27, 4 (2023)
- [24] Richard V. Kadison, Gert K. Pedersen, *Means and convex combinations of unitary operators*, Math. Scand. 57 (1985), 249–266
- [25] Z. Lipecki, K. Musiał, *On the Radon–Nikodym derivative of a measure taking values in Banach space with basis*, Rev. Roum. Math. Pures Appl. 28, 911–915 (1978)
- [26] M. Lopez-Pellicer, V. Montesinos *Some remarks on ℓ^1 -sequences*, Arch. Math. 79 (2002) 119–124
- [27] G. Lumer, M. Rosenblum, *Linear operator equations*, Proc. Amer. Math. Soc. 10 (1959), 32–41.
- [28] M. Milović, *Weak integrability of operator valued functions with values in ideals of compact operators on Hilbert space*, Positivity 28 (2024) 30
- [29] A. McIntosh, A. Pryde, W. Ricker, *Estimates for the solution of operator equation $\sum_{j=1}^m A_j Q B_j = U$* , Operator Theory, Adv. & Appl., Vol. 20, pp. 197–207. Birkhauser Verlag Basel 1988.
- [30] K. Musiał, *The weak Radon–Nikodym property in Banach spaces*, Stud. Math. 64, 151–174 (1979)

- [31] E. Odell, H. P. Rosenthal, *A double-dual characterization of separable Banach spaces containing ℓ^1* , Israel J. Math. 20(3–4), 375–384 (1975)
- [32] B. J. Pettis, *On integration in vector spaces*, Transactions of the American Mathematical Society, 44(2) (1938), 277–304.
- [33] W. Rudin, *Real and Functional Analysis*, 3rd ed., McGraw–Hill, New York, 1987.
- [34] W. Rudin, *Functional Analysis*, Second edition, McGraw-Hill Book, 1991.
- [35] B. Simon, *Trace Ideals and Their Applications*, Amer. Math. Soc., Mat. Surveys and Monographs, Vol.120 (2005)

Биографија аутора

Матија (Вукашин) Миловић је рођен 22. фебруара 1991. године у Београду. Још током основног образовања показао је изражене склоности ка математици. У трећем разреду основне школе постао је члан школе математике „Архимедес”, а од четвртог разреда се активно такмичио и постигао запажене резултате на такмичењима из математике. У седмом разреду основне школе постао је део прве генерације огледног одељења Математичке гимназије, а од првог разреда средње школе постаје ученик специјалног одељења за обдарене ученике. Током школовања освојио је низ награда, међу којима се издвајају бронзана медаља на Јуниорској олимпијади из астрономије у Пекингу, бронзана медаља на Јуниорској балканијади из математике у Кишињеву, као и прва награда на Републичком такмичењу из математике. Као представник града Београда учествовао је на Међународном математичком турниру градова и похађао летњу школу у Минску.

Студије математике уписао је 2010. године на Математичком факултету Универзитета у Београду, на смеру Теоријска математика и примене. Основне студије завршио је 2016. године са просечном оценом 9,80. Исте године уписао је мастер студије на истом факултету, а мастер рад под називом „Операторне и блок матрице и њихова примена” одбранио је 2018. године са просечном оценом 10,0. Докторске студије започео је школске 2018/2019. године и до сада је положио све испите са просечном оценом 10,0.

Запослен је на Математичком факултету Универзитета у Београд од 2016. године као сарадник у настави, а од 2018. године ради као асистент. У оквиру наставног рада држао је вежбе и предавања из више курсева, међу којима су Анализа 1, 2, 3А и 3Б, Теорија мере и интеграције, курсеви математике за студенте физике и астрофизике, као и специјализована поглавља анализе, реалне анализе и матричне анализе.

У научно-истраживачком раду учествовао је као члан пројекта Министарства просвете, науке и технолошког развоја Републике Србије под називом „Простори функција и оператори на њима“ (бр. 174017). Учествовао је и на научној конференцији, 15. Српски математички конгрес одржан у Београду 2024. године, где је одржао предавање под насловом "Weak integration of operator valued functions".

Матија има објављена три рада на СЦИ листи:

Danko R. Jocić, Milan Lazarević, Matija Milović *Perturbation norm inequalities for elementary operators generated by analytic functions with positive Taylor coefficients*, Positivity 26, 62 (2022)
<https://doi.org/10.1007/s11117-022-00923-z>

Mihailo Krstić, Matija Milović, Stefan Milošević *Belonging of Gel'fand integral of positive operator valued functions to separable ideals of compact operators on Hilbert space*, Positivity 27, 4 (2023)
<https://doi.org/10.1007/s11117-022-00958-2>

Matija Milović *Weak integrability of operator valued functions with values in ideals of compact operators on Hilbert space*, Positivity 28, 30 (2024)
<https://doi.org/10.1007/s11117-024-01047-2>

Прилог 1.

Изјава о ауторству

Потписани-а Матија Миловић

број уписа 2021/2018

Изјављујем

да је докторска дисертација под насловом

Слаба интеграција вектор-вредносних функција са вредностима у идеалима оператора и веза са елементарним операторима

- резултат сопственог истраживачког рада,
- да предложена дисертација у целини ни у деловима није била предложена за добијање било које дипломе према студијским програмима других високошколских установа,
- да су резултати коректно наведени и
- да нисам кршио/ла ауторска права и користио интелектуалну својину других лица.

Потпис докторанда

У Београду, 15.8.2025.

Матија Миловић

Прилог 2.

**Изјава о истоветности штампане и електронске
верзије докторског рада**

Име и презиме аутора Матија Миловић
Број уписа 2021/2018
Студијски програм МАТЕМАТИКА
Наслов рада СЛАБА ИНТЕГРАЦИЈА ВЕКТОР-ВРЕДНОСТИХ ФУНКЦИЈА СА ВРЕДНОСТИМА
У ИДЕАЛИМА ОПЕРАТОРА И ВЕЗА СА ЕЛЕМЕНТАРНИМ ОПЕРАТОРИМА
Ментори проф. др Данко Р. Јокић и др Стефан Милошевић
Потписани Матија Миловић

изјављујем да је штампана верзија мог докторског рада истоветна електронској верзији коју сам предао/ла за објављивање на порталу **Дигиталног репозиторијума Универзитета у Београду**.

Дозвољавам да се објаве моји лични подаци везани за добијање академског звања доктора наука, као што су име и презиме, година и место рођења и датум одбране рада.

Ови лични подаци могу се објавити на мрежним страницама дигиталне библиотеке, у електронском каталогу и у публикацијама Универзитета у Београду.

Потпис докторанда

У Београду, 15. 8. 2025.

Матија Миловић

Прилог 3.

Изјава о коришћењу

Овлашћујем Универзитетску библиотеку „Светозар Марковић“ да у Дигитални репозиторијум Универзитета у Београду унесе моју докторску дисертацију под насловом:

СЛАБА ИНТЕГРАЦИЈА ВЕКТОР-ВРЕДНОСТИХ ФУНКЦИЈА СА ВРЕДНОСТИМА У ИДЕАЛНИМ ОПЕРАТОРА И ВЕЗА СА ЕЛЕМЕНТАРНИМ ОПЕРАТОРИМА

која је моје ауторско дело.

Дисертацију са свим прилозима предао/ла сам у електронском формату погодном за трајно архивирање.

Моју докторску дисертацију похрањену у Дигитални репозиторијум Универзитета у Београду могу да користе сви који поштују одредбе садржане у одабраном типу лиценце Креативне заједнице (Creative Commons) за коју сам се одлучио/ла.

1. Ауторство
2. Ауторство - некомерцијално
- ☒ 3. Ауторство – некомерцијално – без прераде
4. Ауторство – некомерцијално – делити под истим условима
5. Ауторство – без прераде
6. Ауторство – делити под истим условима

(Молимо да заокружите само једну од шест понуђених лиценци, кратак опис лиценци дат је на полеђини листа).

Потпис докторанда

У Београду, 15.8.2025.

Милош Миловић

и одређен од стране аутора дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора

дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце, чак и у комерцијалне сврхе. Ово је најслободнија од свих лиценци.

2. Ауторство – некомерцијално. Дозвољавање умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дела.

3. Ауторство - некомерцијално – без прераде. Дозвољавање умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, без промена, преобликовања или употребе дела у свом делу, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дела. У односу на све остале лиценце, овом лиценцом се ограничава највећи обим права коришћења дела.

4. Ауторство - некомерцијално – делити под истим условима. Дозвољавање умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце и ако се прерада дистрибуира под истом или сличном лиценцом. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дела и прерада.

5. Ауторство – без прераде. Дозвољавање умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, без промена, преобликовања или употребе дела у свом делу, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца дозвољава комерцијалну употребу дела.

6. Ауторство - делити под истим условима. Дозвољавање умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце и ако се прерада дистрибуира под истом или сличном лиценцом. Ова лиценца дозвољава комерцијалну употребу дела и прерада. Слична је софтверским лиценцама, односно лиценцама отвореног кода.