УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ
МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ

Душица Дмитровић

# ИНТЕГРАЛНЕ СРЕДИНЕ КОМПОЗИЦИОНОГ ОПЕРАТОРА НА ПРОСТОРИМА ХОЛОМОРФНИХ ФУНКЦИЈА

докторска дисертација

Београд, 2026.

UNIVERSITY OF BELGRADE
FACULTY OF MATHEMATICS

Dušica Dmitrović

# INTEGRAL MEANS OF THE COMPOSITION OPERATOR ON SPACES OF HOLOMORPHIC FUNCTIONS

Doctoral Dissertation

Belgrade, 2026.

**Ментор**:

др Бобан Карапетровић, ванредни професор
Математички факултет, Универзитет у Београду

**Чланови комисије**:

др Владимир Божин, доцент
Математички факултет, Универзитет у Београду

др Миљан Кнежевић, доцент
Математички факултет, Универзитет у Београду

др Божидар Јовановић, научни саветник
Математички институт САНУ, Београд

**Датум одбране**: ____________________

**Наслов дисертације**: Интегралне средине композиционог оператора на просторима холоморфних функција


**Резиме**: Испитивање интегралних средина композиције функција дефинисаним на јединичном диску $\mathbb{D}$ у комплексној равни започето је 20-тих година прошлог века, где је један од првих резултата на ову тему Литлвудов принцип субординације.

Посматрајући норму композиционих оператора на неким просторима холоморфних функција, природно се јавила потреба за испитивањем односа интегралних средина композиције $f \circ \varphi$ и функције $f$. Литлвудов принцип, један је од главних алата који нам помаже да направимо ову везу, међутим није и једини. У овој тези приказане су и друге методе којима можемо испитивати однос ових средина. Њиховом применом добијамо оцену норме композиционог оператора $C_\varphi$ на просторима са мешовитом нормом $H^{p,q,\alpha}$ у облику $K_1 \leq \| \mathrm{C}_\varphi \|_{H^{p,q,\alpha} \to H^{p,q,\alpha}} \leq K_2$, где константе $K_1$ и $K_2$ зависе од параметара $p, q, \alpha$ и $|\varphi(0)|$.

Осим тога, у тези је испитана и монотоност интегралне средине холоморфне функције $f$ на јединичном диску $\mathbb{D}$, $M_{p,q,\alpha}[f](\rho, R, s)$, где је $0 < p, q, \alpha < \infty$, $0 \leq \rho < R \leq 1$ и $0 \leq s \leq 1$. Једна од последица овог резултата је монотоност норме функције $f$ на просторима мешовите норме, $\|f\|_{p,q,\alpha}$, по параметрима $p$, $q$ и $\alpha$.

Један од оператора који се може приказати као интеграл тежинског композиционог оператора $T_t$ је оператор Хилбертове матрице $H$ на тежинским Бергмановим просторима $A^p_\gamma$. Познато је да је оператор $H$ ограничен ако и само ако је $1 < \gamma + 2 < p$, као и да тада важи следеће доње ограничење за норму оператора $\|H\|_{A^p_\gamma \to A^p_\gamma} \geq \pi / \sin \frac{(\gamma+2)\pi}{p}$. У случају када је $\gamma > 0$ и $p \geq 2(\gamma + 2)$ познато је да је норма једнака овој константи. При посматрању норме оператора $H$, применом теореме Минковског проблем се своди на оцењивање норме оператора $T_t$. Као резултат овог испитивања, у случају када је $\gamma < 0$, пронађено је ново горње ограничење норме оператора $H$, док је, у случају када је $\gamma > 0$, проширен интервал на коме је норма једнака константи $\pi / \sin \frac{(\gamma+2)\pi}{p}$.

У тези је приказано пооштравање Литлвудовог принципа субординације уз додатан услов инјективности и примене нове неједнакости у случају теореме Рогозинског и оцени норме композиције функције на тежинским Бергмановим

просторима.

**Кључне речи**: интегралне средине, композициони оператор, Хилбертова матрица, принцип субординације, Бергманови простори, простори са мешовитом нормом

**Научна област**: Математика

**Ужа научна област**: Реална и комплексна анализа

**УДК број**: 004.415.5(043.3)

**Dissertation title**: Integral Means of the Composition Operator on Spaces of Holomorphic Functions

**Abstract**: The study of integral means of the composition of functions defined on the unit disk $\mathbb{D}$ in the complex plane dates back to the 1920s, with one of the earliest results in this area being Littlewood's subordination principle.

When investigating the norm of composition operators on certain spaces of holomorphic functions, a natural need arises to study the relationship between the integral means of the composition $f \circ \varphi$ and those of the function $f$ itself. Littlewood's principle is one of the main tools used to establish this connection. However, it is not the only one. In this dissertation, additional methods for studying the relationship between these integral means are presented. By applying these methods, two-sided estimates for the norm of the composition operator $C_\varphi$ on spaces of mixed norm $H^{p,q,\alpha}$ are obtained in the form $K_1 \leq \| \mathrm{C}_\varphi \|_{H^{p,q,\alpha} \to H^{p,q,\alpha}} \leq K_2$, where the constants $K_1$ and $K_2$ depend on the parameters $p, q, \alpha$ and $|\varphi(0)|$.

Furthermore, the monotonicity of the integral mean of a holomorphic function $f$ on the unit disk $\mathbb{D}$, denoted by $M_{p,q,\alpha}[f](\rho, R, s)$ , is investigated, where $0 < p, q, \alpha < \infty$, $0 \leq \rho < R \leq 1$ and $0 \leq s \leq 1$. One consequence of this result is the monotonicity of the norm $\|f\|_{p,q,\alpha}$ in mixed norm spaces with respect to the parameters $p, q, \alpha$.

One of the operators that can be represented as an integral of weighted composition operators $T_t$ is the Hilbert matrix operator $H$ acting on the weighted Bergman spaces $A^p_\gamma$. Moreover, it is known that the operator $H$ is bounded if and only if $1 < \gamma + 2 < p$, and in this case, the following lower bound for the norm of the operator holds: $\|H\|_{A^p_\gamma \to A^p_\gamma} \geq \pi / \sin \frac{(\gamma+2)\pi}{p}$ . When $\gamma > 0$ and $p \geq 2(\gamma + 2)$, it is known that the norm is equal to this constant. In studying the norm of the operator $H$, after applying Minkowski's theorem, the application of Minkowski's inequality reduces the problem to estimating the norm of the operator $T_t$. As a result of this analysis, in the case where $\gamma < 0$ a new upper bound for the norm of the operator $H$ is obtained, while in the case where $\gamma > 0$, the interval on which the norm equals the constant $\pi / \sin \frac{(\gamma+2)\pi}{p}$ is extended.

Finally, the dissertation presents a refinement of Littlewood's subordination principle under an additional injectivity assumption, together with applications of the new inequality to the Rogosinski theorem and to norm estimates for compositions of functions on weighted Bergman spaces.

**Keywords**: integral means, composition operator, Hilbert matrix, subordination principle, Bergman spaces, mixed norm spaces

**Research area**: Mathematics

**Research sub-area**: Real and Complex analysis

**UDC number**: 004.415.5(043.3)

# Захвалница

Посебно се захваљујем свом ментору, проф. др Бобану Карапетровићу, на издвојеном времену, стрпљењу, подршци и корисним саветима током докторских студија, а нарочито током израде ове дисертације.

Захвалност дугујем и свом наставнику Ризану Тасовићу, као и свим професорима математике који су у мени развијали љубав према овој науци.

Захваљујем се својим колегама и др Ивану Вајсу, мом куму, на корисним саветима и подршци.

На крају, искрену захвалност упућујем својој породици, посебно супругу Стевану, на безусловној подршци и разумевању током свих ових година.

*У Београду, фебруар 2026.* *Душица Дмитровић*

# Садржај

# Увод

Један од основних појмова математичке анализе је појам композиционог оператора. Изучавање композиционих оператора са фиксираном функцијом која дејствује на просторе холоморфних функција, започето је средином 60-тих година прошлог века, [36]. Интегралне средине заузимају централно место у дефинисању норме на многим просторима холоморфних функција. Интересовање за интегралне средине функција почиње почетком 20. века, кроз развој комплексне и хармонијске анализе. Један од првих радова на тему проучавања интегралних средина композиционих оператора на просторима холоморфних функција је рад Џ. Е. Литлвуда из 1923. године [31]. У том раду Литлвуд уместо термина композиционих оператора, користи термин субординације, видети дефиницију 1.6. Његов рад наставио је Ф. Рис у раду [40], где уместо холоморфних посматра субхармонијске функције. Он тада даје један од главних алата за рад са овим срединама, познат под називом Литлвудов принцип субординације:

*Нека су функције* $u$ *и* $v$ *субхармонијске на јединичном диску* $\mathbb{D}$ *комплексне равни, такве да постоји холоморфно пресликавање* $\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ *са својством да је* $\varphi(0) = 0$ *и* $v = u \circ \varphi$ *на* $\mathbb{D}$*. Тада*

$$\int_0^{2\pi} v\left(re^{i\theta}\right) d\theta \leq \int_0^{2\pi} u\left(re^{i\theta}\right) d\theta,$$

*за све* $0 < r < 1$*.*

Заинтересовани овим проблемом, Б. Карапетровић и аутор дисертације у раду [15], приказују побољшање ове познате теореме уз додатан услов да је пресликавање $\varphi$ инјективно.

Једна од основних особина сваког оператора је његова норма. На тежинским Бергмановим просторима $A^p_\gamma$ важи следећа оцена норме композиционог оператора:

*Нека је $-1 < \gamma < \infty$, $0 < p < \infty$ и $\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ холоморфно. Тада је*

$$\frac{1}{(1 - |\varphi(0)|^2)^{\frac{\gamma+2}{p}}} \le \|C_\varphi\|_{A^p_\gamma \to A^p_\gamma} \le \left(\frac{1 + |\varphi(0)|}{1 - |\varphi(0)|}\right)^{\frac{\gamma+2}{p}}.$$

Као последица пооштравања Литлвудовог принципа субординације, јавља се и оштрија оцена одозго норме композиционог оператора са инјективним симболом на тежинским Бергмановим просторима.

За одговарајуће параметре $p, q, \alpha$, простори са мешовитом нормом $H^{p,q,\alpha}$ поклапају се са тежинским Бергмановим просторима. При израчунавању норме композиције функција на простору $H^{p,q,\alpha}$ управо се јавља интегрална средина композиционог оператора, али у односу на Бергманове просторе, ситуација постаје компликованија када су параметри $p$ и $q$ различити. У раду [2], И. Аревало, М. Д. Контрерас и И. Родригез-Пјаца, између осталог, показују да је норма композиционог оператора сразмерна константи $\left(\frac{1+|\varphi(0)|}{1-|\varphi(0)|}\right)^{\gamma+1/p}$. Аутор дисертације, мотивисан резултатом теореме 2.2.2 и радом [2], у самосталном раду [13], показује теорему 2.3.2 која тврди да за норму оператора $C_\varphi$, где је $\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ холоморфно на простору са мешовитом нормом $H^{p,q,\alpha}$, важе следеће неједнакости

$$C_1 \frac{1}{(1 - |\varphi(0)|^2)^{\alpha+\frac{1}{p}}} \le \| \mathrm{C}_\varphi \| \le C_2 \left(\frac{1 + |\varphi(0)|}{1 - |\varphi(0)|}\right)^{\alpha+\frac{1}{p}},$$

где су $C_1$ и $C_2$ експлицитно одређене константе које зависе од параметара $p, q, \alpha$ и вредности $|\varphi(0)|$.

Још један интересантан проблем јесте одређивање норме оператора Хилбертове матрице $H$ на просторима холоморфних функција. У случају Хардијевих и Бергманових простора, проблем је у потпуности решен [4], [10], [11], [16], док у случају тежинских Бергманових простора $A^p_\gamma$, није решен у целости. М. Јевтић и Б. Карапетровић у раду [24] су показали да је оператор $H$ ограничен на овим просторима ако и само ако је $1 < \gamma + 2 < p$. У раду [26], Б. Карапетровић је, између осталог, оценио норму одоздо константом $\frac{\pi}{\sin\frac{(\gamma+2)\pi}{p}}$ и показао да је норма једнака тој константи ако $\gamma > 0$ и $p \ge 2(\gamma+2)$. Познато је да се оператор Хилбертове матрице може представити као интеграл тежинског композиционог оператора, што нам даје један од главних алата за процену њене норме. Користећи се том чињеницом, аутор дисертације и Б. Карапетровић, у раду [5], приказују прву оцену одозго норме оператора

$H$ у случају када је $\gamma < 0$. Потом, у раду [14], приказују и нове оцене у случају када је $\gamma > 0$, а $p < 2(\gamma + 2)$.

Мотивисани радом А, Линареса и Д. Вукотића, [33], Карапетровић и аутор дисертације посматрају интегралне средине холоморфне функције $f$ на јединичном диску $M_{p,q,\alpha}[f](\rho, R, s)$, где је $0 < p, q, \alpha < \infty$, $0 \leq \rho < R \leq 1$ и $0 \leq s \leq 1$, погледати дефиницију 1.10. У раду [12], одређују монотоност ових интегралних средина у зависности од параметара. У случају када је $\rho = 0$, $R = 1$ и $s = 1$, средина $M_{p,q,\alpha}[f](0, 1, 1)$ представља норму функције $f$ на простору мешовите норме $H^{p,q,\alpha}$. Као последицу монотоности ових средина добијамо и монотоност норме функције $f$ у односу параметре $p, q$ и $\alpha$.

Садржај дисертације подељен је у четири главе.

Прва глава је уводног карактера и у њој је дат преглед основних појмова и тврђења која се користе у даљем тексту. Осим тога, дат је преглед новијих резултата који се тичу инклузивности простора мешовите норме $H^{p,q,\alpha}$ проистеклих из рада [33], као и преглед рада [12].

Друга глава дисертације посвећена је норми композиционог оператора на просторима холоморфних функција. У прве две секције дат је преглед познатих резултата о норми на Хардијевим и тежинским Бергмановим просторима. Док је у трећој секцији приказан самосталан рад аутора дисертације [5], као и помоћни резултати који се тичу Форели-Рудин оцене преузети из рада [32].

Тема треће главе је оператор Хилбертове матрице и његова норма на тежинским Бергмановим просторима. Прво је дат преглед познатих резултата, а потом су приказани радови који су проистекли из сарадње аутора и Б. Карапетровића, [5] и [14].

Четврта глава ове дисертације бави се пооштравањем Литлвудовог принципа субординације у случају када је симбол инјективан и применом тога на теорему Рогозинског и оцену композиције на тежинским Бергмановим просторима. У овој глави приказан је заједнички рад, [15], аутора дисертације и Б. Карапетровића.

# Глава 1

# Основни појмови и тврђења

У овом уводном поглављу дат је преглед неких основних појмова и тврђења која ће се користити у даљем тексту.

- **Простор комплексних бројева $\mathbb{C}$**

  Нека су $x = \operatorname{Re} z$ и $y = \operatorname{Im} z$, редом, реалан и имагинаран део броја $z = x + iy$. Просторе $\mathbb{C}$ и $\mathbb{R}^2$ можемо идентификовати придруживањем сваком комплексном броју $z$ уређен пар $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Свако $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ се може написати у облику $z = re^{i\theta}$, где је $r = |z|$ модул, а $\theta \in \mathbb{R}$ аргумент броја $z$. Ознака $\arg z$ представља аргумент броја $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ који се налази у интервалу $(-\pi, \pi]$.
  $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ је векторски простор са скаларним производом дефинисаним са $< z, w >= z\overline{w}$, за $z, w \in \mathbb{C}$, где је $\overline{w}$ конјугат броја $w$.

- **Јединични диск $\mathbb{D}$ у простору $\mathbb{C}$**

  Са $D(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\}$ означићемо диск у комплексној равни са центром у тачки $z_0 \in \mathbb{C}$ полупречника $r > 0$, са $\mathbb{D} = D(0, 1)$ јединични диск са центром у тачки 0, а са $\mathbb{D}_r = D(0, r)$, за $r > 0$.

- **Простор холоморфних функција**

  Нека је $\Omega \subset \mathbb{C}$ отворен скуп, функција $f : \Omega \to \mathbb{C}$ је холоморфна на $\Omega$ ако је комплексно диференцијабилна на $\Omega$. Тада за функције $\operatorname{Re} f$ и $\operatorname{Im} f$ важе Коши-Риманове једначине. Осим тога, важи и да је $\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = 0$ на $\Omega$, користимо ознаку $f'(z) = \frac{\partial f}{\partial z}$.

  Простор свих холоморфних функција на јединичном диску означавамо са $\operatorname{Hol}(\mathbb{D})$. Познато је да је свака холоморфна функција комплексно аналитичка и обратно. Односно, сваку холоморну функцију $f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D})$, можемо на јединствен начин представити у облику Тејлоровог реда

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \widehat{f}(n) z^n,\ z \in \mathbb{D}, \text{ где је } \widehat{f}(n) = \frac{f^{(n)}(0)}{n!},\ n \in \mathbb{N}_0.$$

Ако низ Тејлорових коефицијената $\left\{\widehat{f}(n)\right\}_{n=0}^{\infty}$ поистоветимо са функцијом $f$, онда се простор $\mathrm{Hol}(\mathbb{D})$ може видети као одговарајући простор низова.

- **Хипергеометријске функције**

  Означимо са
  $$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt, \quad \mathrm{Re}\, z > 0,$$
  Гама функцију и са
  $$B(z, w) = \int_0^1 t^{z-1}(1-t)^{w-1} dt, \quad \mathrm{Re}\, z, \mathrm{Re}\, w > 0$$
  Бета функцију. Нека од основних својстава ових функција су:

  * $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$;
  * $\Gamma(n+1) = n!$, где је $n \in \mathbb{N}_0$;
  * $\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}$;
  * $\lim\limits_{m \to +\infty} \frac{(m-1)! m^c}{\Gamma(m+c)} = 1$ (Ојлер - Гаусова формула) ;
  * $B(z, w) = B(w, z)$;
  * $B(z, w) = \frac{\Gamma(z)\Gamma(w)}{\Gamma(z+w)}$.

  Нека је $a, b, c \in \mathbb{C}$, $c \neq 0, -1, -2, ...$ и $\lambda \in \mathbb{D}$. Хипергеометријску функцију дефинишемо на следећи начин
  $$F(a, b, c; \lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k (b)_k}{(c)_k} \frac{\lambda^k}{k!},$$
  где је са $(x)_k$ означен израз
  $$(x)_k = \frac{\Gamma(x+k)}{\Gamma(x)} = x(x+1)(x+2)\cdots(x+k-1) \text{ за } k \geq 1;$$
  $$(x)_0 = 1.$$

Приметимо да ред којим је задата функција $F(a, b, c; \lambda)$ задаје аналитичку функцију на диску $\mathbb{D}$ по параметру $\lambda$. Ова функција назива се Гаусова хипергеометријска функција са параметрима $(a, b, c)$ и добија се као решење хомогене линеарне диференцијалне једначине другог реда

$$z(1-z)\frac{d^2 f}{dz^2} + (c - (a+b+1)z)\frac{df}{dz} - abf = 0.$$

Неке особине хипергеометријских функција:

* Основна интегрална репрезентација - Ојлерова формула:
  Ако је $\operatorname{Re} c > \operatorname{Re} b > 0$ онда

$$F(a, b, c; \lambda) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \int_0^1 t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}(1-\lambda t)^{-a} dt. \tag{1.1}$$

* Нека за параметре $a, b, c$ осим основних важи и додатна претпоставка $\operatorname{Re}(c - a - b) > 0$, онда важи

$$F(a, b, c; 1-) = \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}. \tag{1.2}$$

* За $\lambda \in \mathbb{D}$ важи

$$F(a, b, c; \lambda) = (1-\lambda)^{c-a-b} F(c-a, c-b, c; \lambda). \tag{1.3}$$

* Уколико $\operatorname{Re} c > \gamma > 0$ и $|\arg(1-\lambda)| < \pi$ и $\lambda \neq 1$, онда важи

$$F(a, b, c; \lambda) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(\gamma)\Gamma(c-\gamma)} \int_0^1 t^{\gamma-1}(1-t)^{c-\gamma-1} F(a, b, \gamma; t\lambda) dt. \tag{1.4}$$

* Ако $c = a + b$, онда имамо

$$\lim_{\lambda \to 1-} \left( \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)} \log \frac{1}{1-x} \right)^{-1} F(a, b, a+b; \lambda) = 1. \tag{1.5}$$

## 1.1 Шварцова лема

Једно од основних својстава холоморфних пресликавања из јединичног диска у јединичан диск која фиксирају 0 је Шварцова лема. Прву формулацију овог тврђења, уз додатну претпоставку да је пресликавање инјекција, дао је Шварц 1890. године у раду [44], док тврђење које се у литератури наводи као Шварцова лема, први је доказао и тако назвао Каратеодори у раду [7] из 1912. године. За више информација о Шварцовој леми погледати [6].

**Теорема 1.1.1** (Шварцова лема). *Нека је $\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ холоморфно пресликавање такво да $\varphi(0) = 0$. Онда $|\varphi(z)| \leq |z|$ за све $z \in \mathbb{D}$ и $|\varphi'(0)| \leq 1$.*

*Штавише, уколико $|\varphi(z)| = |z|$ за неко $z \in \mathbb{D} \setminus \{0\}$ или $|\varphi'(0)| = 1$, онда постоји $\theta \in \mathbb{R}$ тако да је $\varphi(z) = e^{i\theta} z$ за све $z \in \mathbb{D}$.*

Осим основног облика Шварцове леме, постоји и варијанта позната као Шварц-Пикова теорема, где није неопходан услов $\varphi(0) = 0$.

**Теорема 1.1.2** (Шварц-Пикова лема). *Нека је $\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ холоморфно пресликавање. Тада, за све $z_1, z_2 \in \mathbb{D}$ важи*

$$\left| \frac{\varphi(z_1) - \varphi(z_2)}{1 - \overline{\varphi(z_1)}\varphi(z_2)} \right| \leq \left| \frac{z_1 - z_2}{1 - \overline{z_1} z_2} \right| \tag{1.6}$$

*и за све $z \in \mathbb{D}$*

$$\frac{|\varphi'(z)|}{1 - |\varphi(z)|^2} \leq \frac{1}{1 - |z|^2}. \tag{1.7}$$

*Уколико важи једнакост у (1.6) за неке различите $z_1, z_2 \in \mathbb{D}$, или у (1.7) за неко $z \in \mathbb{D}$ онда је функција $\varphi$ Мебијусово пресликавање.*

Наредна пропозиција је још један од облика Шварцове леме, где је $|\varphi(z)|$ оцењено у класичном облику, али без претпоставке да је $\varphi(0) = 0$.

**Пропозиција 1.1.1.** *Нека је $\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ холоморфно пресликавање. Тада је*

$$|\varphi(z)| \leq \frac{|z| + |\varphi(0)|}{1 + |\varphi(0)||z|}.$$

*Доказ.* Приметимо да за $a, b \in \mathbb{D}$ важи

$$\left| \frac{a - b}{1 - \overline{a} b} \right|^2 = 1 - \frac{(1 - |a|^2)(1 - |b|^2)}{|1 - \overline{a} b|^2}$$

$$\geq 1 - \frac{(1 - |a|^2)(1 - |b|^2)}{(1 - |a||b|)^2} = \frac{(|a| - |b|)^2}{(1 - |a||b|)^2}.$$

Узимајући $a = \varphi(z)$, за $z \in \mathbb{D}$ и $b = \varphi(0)$, на основу претходне неједнакости и Шварц-Пикове леме, имамо

$$\frac{|\varphi(z)| - |\varphi(0)|}{1 - |\varphi(z)||\varphi(0)|} \leq \left| \frac{\varphi(z) - \varphi(0)}{1 - \overline{\varphi(0)}\varphi(z)} \right| \leq |z|,$$

одакле добијамо тражену неједнакост

$$|\varphi(z)| \leq \frac{|z| + |\varphi(0)|}{1 + |\varphi(0)||z|}.$$

□

Једна од директних последица претходне пропозиције је:

**Последица 1.1.1.** *Нека је $\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ холоморфно пресликавање. Тада је*

$$|\varphi(z)| \leq \frac{(1 - |\varphi(0)|)|z| + 2|\varphi(0)|}{1 + |\varphi(0)||z|}.$$

Наредна пропозиција назива се унутрашњи облик Шварцове леме.

**Пропозиција 1.1.2.** [37] *Нека је $\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ холоморфно и $\varphi(0) = 0$. Онда*

$$|\varphi(z)| \leq |z| \frac{|z| + |\varphi'(0)|}{1 + |\varphi'(0)||z|}, \tag{1.8}$$

*за све $z \in \mathbb{D}$.*

*Доказ.* Нека је $g(z) = \varphi(z)/z$. На основу Шварцове леме, $\varphi$ је ротација или $|g(z)| < 1$ за $z \in \mathbb{D}$.

У првом случају је $|\varphi'(0)| = 1$, па тражена неједнакост (1.8) важи тривијално.

Посматрајмо други случај, када $|g(z)| < 1$. Тада је неједнакост (1.8) еквивалентна са

$$|g(z)| \leq \frac{|z| + |g(0)|}{1 + |g(0)||g(z)|},$$

а претходно важи на основу пропозиције 1.1.1. □

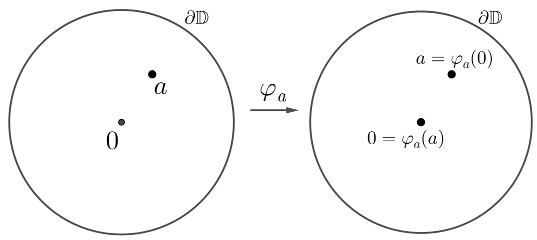
Скуп свих аутоморфизама јединичног диска означићемо са $Aut(\mathbb{D})$. Једна од последица Шварцове леме је:

*Сваки аутоморфизам јединичног диска је Мебијусово пресликавање.* Односно, свако $\varphi \in Aut(\mathbb{D})$ је облика

$$\varphi(z) = e^{i\theta} \frac{z - a}{1 - \overline{a}z},$$

за неко $\theta \in \mathbb{R}$ и $a \in \mathbb{D}$. Користимо ознаку

$$\varphi_a(z) = \frac{a - z}{1 - \overline{a}z}.$$




Слика 1.1: Пресликавање $\varphi_a$

Директним рачуном проверава се да важе једнакости

$$\varphi_a^{-1}(z) = \varphi_a(z),\, z \in \mathbb{D}; \quad \varphi_a'(z) = \frac{1-|a|^2}{(1-\overline{a}z)^2};$$

$$1 - |\varphi_a(z)|^2 = \frac{(1-|z|^2)\,(1-|a|^2)}{|1-\overline{a}z|^2}.$$

**Пропозиција 1.1.3.** *Нека је $f \in L^1(\mathbb{D}, dm_\alpha)$, где је $dm_\alpha(z) = (1-|z|^2)^\alpha\, dm(z)$, а $dm$ Еуклидска мера $dxdy$. Онда важи једнакост*

$$\int_{\mathbb{D}} f\circ\varphi_a(z) dm_\alpha(z) = \int_{\mathbb{D}} f(z)\frac{(1-|a|^2)^{\alpha+2}}{|1-\overline{a}z|^{2(2+\alpha)}} dm_\alpha(z).$$

*Доказ.* Приметмо да је

$$\int_{\mathbb{D}} f\circ\varphi_a(z) dm_\alpha(z) = \int_{\mathbb{D}} f\circ\varphi_a(z)\left(1-|z|^2\right)^\alpha dm(z).$$

Након смене $w = \varphi_a(z)$, односно $w = \varphi_a(z)$, добијамо

$$\int_{\mathbb{D}} f\circ\varphi_a(z) dm_\alpha(z) = \int_{\varphi_a(\mathbb{D})} f(w)\left(1-|\varphi_a(w)|^2\right)^\alpha |\varphi'(w)|^2 dm(w)$$

Користећи својства пресликавања $\varphi_a$ имамо

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{D}} f\circ\varphi_a(z) dm_\alpha(z) &= \int_{\mathbb{D}} f(w)\left(\frac{(1-|w|^2)\,(1-|a|^2)}{|1-\overline{a}w|^2}\right)^\alpha \left|\frac{1-|a|^2}{(1-\overline{a}w)^2}\right|^2 dm(w)\\ &= \int_{\mathbb{D}} f(w)\frac{(1-|a|^2)^{\alpha+2}}{|1-\overline{a}w|^{2(2+\alpha)}} dm_\alpha(w).\end{aligned}$$

Заменом промењиве $w$ са $z$ добијамо тражену једнакост. $\square$

## 1.2 Хармонијска пресликавања

**Дефиниција 1.1.** Нека је $\Omega \subset \mathbb{C}$ област и $u : \Omega \to \mathbb{C}$ класе $C^2(\Omega)$. Лапласијан функције $u$ дефинишемо са

$$\Delta u(z) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(z) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(z),$$

где $z = x + iy$.

Лако се показује да важи $\Delta u(z) = 4\dfrac{\partial^2 u}{\partial z \partial \overline{z}}(z)$.

**Пропозиција 1.2.1.** *Нека су $\Omega_1, \Omega_2 \subset \mathbb{C}$ обласӣи и нека је $u \in C^2(\Omega_2)$ и $\varphi : \Omega_1 \to \Omega_2$ холоморфно. Тада је*

$$\Delta(u \circ \varphi)(z) = \Delta u(\varphi(z)) \cdot |\varphi'(z)|^2,$$

*за све $z \in \Omega_1$.*

*Доказ.* Важи

$$\frac{\partial(u \circ \varphi)}{\partial z} = \frac{\partial u}{\partial w}\frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial \overline{w}}\frac{\partial \overline{\varphi}}{\partial z}.$$

Како је $\varphi$ холоморфно имамо $\dfrac{\partial \overline{\varphi}}{\partial z} = \overline{\left(\dfrac{\partial \varphi}{\partial \overline{z}}\right)} = 0$ на $\Omega_1$. Онда је

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2(u \circ \varphi)}{\partial z \partial \overline{z}} &= \frac{\partial}{\partial \overline{z}}\left(\frac{\partial u}{\partial w} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial z}\right) \\ &= \frac{\partial^2 u}{\partial w^2} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial z} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial \overline{z}} + \frac{\partial^2 u}{\partial w \partial \overline{w}} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial z} \cdot \frac{\partial \overline{\varphi}}{\partial \overline{z}} + \frac{\partial u}{\partial w} \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z \partial \overline{z}}.\end{aligned}$$

Како важи $\dfrac{\partial \varphi}{\partial \overline{z}} = 0$, $\dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial z \partial \overline{z}} = 0$ и $\dfrac{\partial \overline{\varphi}}{\partial \overline{z}} = \overline{\left(\dfrac{\partial \varphi}{\partial z}\right)}$, добијамо тражену једнакост. □

**Дефиниција 1.2.** Нека је $\Omega \subset \mathbb{C}$ област. Функција $u : \Omega \to \mathbb{C}$ је хармонијска функција на $\Omega$ ако $u \in C^2(\Omega)$ и $\Delta u(z) = 0$, за све $z \in \Omega$.

Приметимо да је реалан и имагинаран део холоморфне функције хармонијска функција, одатле имамо и да је свака холоморфна функција на некој области и хармонијска. Штавише, уколико посматрамо реално-вредносну хармонијску функцију $u : \Omega \to \mathbb{R}$, где је $\Omega \subset \mathbb{C}$ просто повезана област, онда постоји холоморфна функција $f : \Omega \to \mathbb{C}$ таква да је $u = \operatorname{Re} f$ на $\Omega$. На основу овога, можемо закључити да је свака хармонијска функција класе $C^\infty$. Такође, на основу пропозиције 1.2.1 видимо да ће композиција хармонијске и холоморфне функције бити хармонијска функција. Осим тога, за хармонијске функције важе и следећа битна својства која ћемо навести без доказа:

**Теорема 1.2.1** (Принцип максимума и минимума за хармонијске функције). *Нека је $\Omega \subset \mathbb{C}$ област и $u : \Omega \to \mathbb{R}$ хармонијска функција. Ако функција $u$ достиже локални максмимум или локални минимум у $\Omega$, онда она мора бити константна.*

На основу принципа максимума можемо закључити да ће неконстантна хармонијска функција на ограниченој области $\Omega$, дефинисана на $\overline{\Omega}$, достизати свој максимум на граници $\partial\Omega$. Наредна теорема приказује како се конструише хармонијска функција на унутрашњости диска на основу њене вредности на граници.

**Теорема 1.2.2** (Дирихлеов проблем на диску). *Нека је функција $f : \partial\mathbb{D} \to \mathbb{C}$ део по део непрекидна функција. Нека је са*

$$P(z,\zeta) = \frac{1}{2\pi r}\frac{r^2 - z^2}{|z-\zeta|^2}.$$

*означено Поасоново језгро на јединичном диску $\mathbb{D}$. Тада је*

$$P[f](z) = \int_{\partial\mathbb{D}} f(\zeta)P(z,\zeta)d\zeta$$

*јединствена хармонијска функција на $\mathbb{D}$, непрекидна на $\overline{\mathbb{D}}$ сем у тачкама прекида функције $f$, таква да је $P[f](z) = f(z)$ за све $z \in \partial\mathbb{D}$ у којима је функција $f$ непрекидна.*

**Напомена 1.1.** Ако је $f : \partial D(z_0, r) \to \mathbb{C}$ део по део непрекидна функција. Приметимо да увођењем смене $g(z) = f(z_0 + rz)$, $z \in \partial\mathbb{D}$, функција $h(w) = P[g](\frac{w-z_0}{r})$ решење Дирихлеовог проблема на диску $D(z_0, r)$. Функцију $h$ ћемо такође означавати са $P[f]$ наглашавајући диск на коме је дефинисана.

Још једна од особина хармонијских функција која их потпуно карактерише је теорема о средњој вредности.

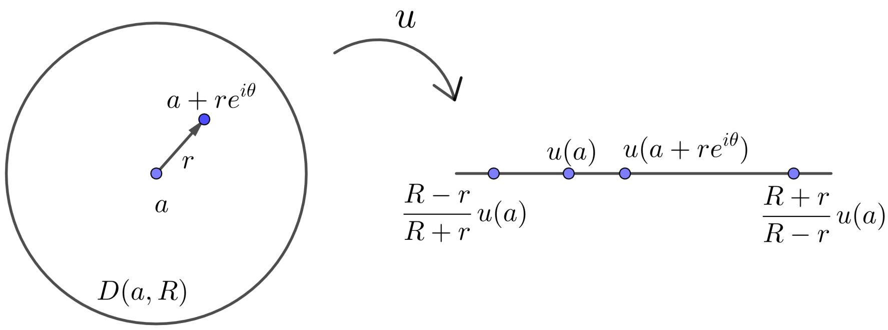
**Теорема 1.2.3** (Теорема о средњој вредности). *Нека је $\Omega \subset \mathbb{C}$ област. Тада је функција $u : \Omega \to \mathbb{C}$ хармонијска функција ако и само ако за свако $a \in \Omega$ и $r > 0$ такво да $\overline{D(a,r)} \subset \Omega$ важи*

$$u(a) = \frac{1}{\pi r^2}\int_{D(a,r)} u(z)dm(z) = \frac{1}{\pi r}\int_0^{2\pi} u\left(re^{i\theta}\right)d\theta,$$

*где је са $dm$ означена стандардна Еуклидска мера на $\mathbb{D}$.*

**Теорема 1.2.4** (Харнакова неједнакост)**.** *Нека је $u$ ненегативна функција дефинисана у затвореном диску $\overline{D(a,R)} \subset \mathbb{C}$, $a \in \mathbb{C}$, $R > 0$. Ако је $u$ непрекидна на $\overline{D(a,R)}$ и хармонијска у $D(a,R)$, онда за свако $0 < r < R$ и $\theta \in [0, 2\pi)$ важи*

$$\frac{R-r}{R+r}u(a) \leq u\left(a + re^{i\theta}\right) \leq \frac{R+r}{R-r}u(a).$$




Слика 1.2: Харнакова неједнакост

Харнакова неједнакост један је од основних алата који се користе при процени вредности хармонијске функције у произвољној тачки. Ову теорему представио је А. Харнак 1887. године. Ова теорема обично је исказана у општијем облику, где се посматра позитивна хармонијска функција дефинисана на затвореној лопти у простору $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$. За потребе ове тезе, довољно је посматрати да је $n = 2$.

## 1.3 Гринова формула

Веза између интеграла на области и одговарајућег криволинијског интеграла на граници те области назива се Гринова формула. Основни облик Гринове формуле гласи:

**Теорема 1.3.1** (Гаусова теорема)**.** *Нека је $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ област ограничена део по део глатком кривом $\Gamma$. Ако су функције $P, Q$ непрекидне као и њихови парцијални изводи $\frac{\partial P}{\partial y}, \frac{\partial Q}{\partial x}$ на $\overline{\Omega}$, онда важи*

$$\int_{\Gamma^+} Pdx + Qdy = \iint_{\Omega} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy, \tag{1.9}$$

*где $\Gamma^+$ означава да се интеграција врши у смеру при коме тачке области $\Omega$ остају са леве стране.*

Посматрајмо функцију $u(x, y)$ која има непрекидне парцијалне изводе на $\overline{\Omega}$ и функцију $v(x, y)$ такву да има непрекидне изводе првог и другог реда на $\overline{\Omega}$. Дефинишимо функције

$$P(x, y) = u(x, y)\frac{\partial v}{\partial x}(x, y), \qquad Q(x, y) = u(x, y)\frac{\partial v}{\partial y}(x, y).$$

Функције $P$ и $Q$ задовољавају услове Гаусове теореме и важи

$$\frac{\partial P}{\partial x} = u \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial v}{\partial x}, \qquad \frac{\partial Q}{\partial y} = u \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial v}{\partial y}.$$

Тада на основу (1.9)

$$\iint_\Omega \left( u\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + u\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y} \right) dxdy$$
$$= \int_{\Gamma+} u \left( \frac{\partial v}{\partial x} dy - \frac{\partial v}{\partial y} dx \right).$$

Уколико у криволинијском интегралу уведемо извод у правцу спољашње нормале, онда

$$\frac{\partial v}{\partial n} = \frac{\partial v}{\partial x}\cos(x, n) + \frac{\partial v}{\partial y}\cos(y, n),$$

где $(x, n)$ и $(y, n)$ представљају углове које вектор нормале заклапа са позитивним деловима $x$ и $y$ осе, редом. Уколико $s$ представља дужину лука криве и ако се вектор нормале криве $\Gamma$ креће у позитивном смеру, важи

$$\cos(x, n) = \frac{dy}{ds} \quad \text{и} \quad \cos(y, n) = -\frac{dx}{ds}.$$

Односно, важи

$$\frac{\partial v}{\partial n} ds = \frac{\partial v}{\partial x} dy - \frac{\partial v}{\partial y} dx.$$

Користећи да је $\Delta v = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}$, добијамо

$$\iint_\Omega u\Delta v \, dxdy + \iint_\Omega \left( \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y} \right) dxdy = \int_\Gamma u\frac{\partial v}{\partial v} ds. \tag{1.10}$$

Уколико претпоставимо да су обе функције $u$ и $v$ такве да имају непрекидне прве и друге парцијалне изводе, мењајући улогу $u$ и $v$ у формули (1.10) и добијено одузимајући од (1.10), добијамо Гринову формулу

$$\iint_\Omega (u\Delta v - v\Delta u) \, dxdy = \int_\Gamma \left( u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n} \right) ds. \tag{1.11}$$

Када поистоветимо $\mathbb{C}$ са $\mathbb{R}^2$, добијамо следећу теорему.

**Теорема 1.3.2** (Гринова формула)**.** *Нека је* $\Omega$ *област у* $\mathbb{C}$*, ограничена аналитичком Жордановом кривом, тада*

$$\int_{\Omega} (u\Delta v - v\Delta u)\, dm = \int_{\Gamma} \left( u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n} \right) |dz|,$$

*за* $u, v \in C^2\left(\overline{\Omega}\right)$*.*

Узимајући да је $u = 1$ и $v = F$ класе $C^2$ на диску $\mathbb{D}_R$ за неко $R > 0$ добијамо на основу Гринове формуле

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\partial F}{\partial r}\left(re^{i\theta}\right) d\theta = \frac{1}{2\pi r}\int_{\mathbb{D}_r} \Delta F(z) dm(z), \tag{1.12}$$

за све $0 < r < R$. Како је функција $F$ класе $C^2\left(\mathbb{D}_R\right)$ можемо заменити места интегралу и изводу $\frac{\partial}{\partial r}$ са леве стране једнакости. Тада добијамо

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} F\left(re^{i\theta}\right) d\theta\right) = \frac{1}{2\pi r}\int_{\mathbb{D}_r} \Delta F(z) dm(z). \tag{1.13}$$

За више детаља о Гриновој формули и њеним примена погледати [35].

## 1.4 Субхармонијске функције

Субхармонијске функције представио је Ф. Рис у радовима [41], [42]. Ове функције имају централну улогу у многим гранама анализе, специјално у теорији потенцијала и теорији комплексних функција.

**Дефиниција 1.3.** Функција $u : \Omega \to [-\infty, \infty)$, где је $\Omega \subset \mathbb{C}$ област, назива се субхармонијском у $\Omega$ ако је полунепрекидна одозго, односно,

$$\limsup_{z\to a} u(z) \leq u(a), \text{ за све } a \in \Omega,$$

и ако за свако $a \in \Omega$ постоји $r > 0$ тако да $D(a, r) \subset \Omega$ и

$$u(a) \leq \frac{1}{\pi\rho^2}\int_{D(a,\rho)} u(z) dm(z), \text{ за све } 0 < \rho < r. \tag{1.14}$$

Приметимо да је неједнакост (1.14) еквивалентна неједнакости

$$u(a) \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u\left(a + \rho e^{i\theta}\right) d\theta \text{ за све } 0 < \rho < r. \tag{1.15}$$

Често, уместо неједнакости (1.14) користимо неједнакост (1.15).

**Пример 1.1.** Свака реално вредносна хармонијска функција је и субхармонијска. Сума и максимум коначно много субхармонијских функција ће такође бити субхармонијска функција. Један нетривијалан пример је функција $\log|f(z)|$, где је $f$ холоморфна функција на области $\Omega$.

Наредна пропозиција илуструје један од начина како можемо да конструишемо нове субхармонијске функције.

**Пропозиција 1.4.1.** *Нека је $u$ субхармонијска функција на области $\Omega \subset \mathbb{C}$ и $\varphi$ растућа конвексна функција на $[-\infty, \infty)$, непрекидна у $-\infty$ . Тада је $\varphi \circ u$ субхармонијска на $\Omega$.*

*Доказ.* Како је свака конвексна функција на $\mathbb{R}$ непрекидна на $\mathbb{R}$, функција $\varphi$ је непрекидна на $[-\infty, \infty)$. На основу тога закључујемо да је функција $\varphi \circ u$ полунепрекидна одозго.

Ако је $a \in \Omega$ и $D(a,r) \subset \Omega$, онда за $0 < \rho < r$ на основу монотоности функције $\varphi$ и Јенсенове неједнакости за конвексна пресликавања имамо да важе неједнакости

$$\begin{aligned}\varphi(u(a)) &\leq \varphi\left(\frac{1}{\pi\rho^2}\int_{D(a,\rho)} u(z)dm(z)\right)\\ &\leq \frac{1}{\pi\rho^2}\int_{D(a,\rho)} \varphi\left(u(z)\right)dm(z).\end{aligned}$$

Овим је доказ завршен. □

**Пример 1.2.** На основу пропозиције 1.4.1, ако је $f$ холоморфна на $\Omega$, онда је $|f(z)|^p = e^{p\log|f(z)|}$ субхармонијска на $\Omega$ за $0 < p < \infty$.

**Пропозиција 1.4.2** (Принцип максимума за субхармонијске функције)**.** *Субхармонијска функција не достиже максимум унутар повезане области $\Omega$, осим уколико је константна на $\Omega$.*

*Доказ.* Нека је $u$ субхармонијска функција на $\Omega$ и нека је са $M$ означен скуп $M = \{a \in \Omega : u(a) = \max_{z\in\Omega} u(z)\}$. На основу полунепрекидности одозго функције $u$, скуп $M$ је затворен.

Нека је $a \in M$ произвољно. На основу (1.14), постоји $r > 0$ тако да $u(a) \leq u(z)$ за свако $z \in D(a,r)$. Односно, $u(z) = u(a)$ на $D(a,r)$. Одакле имамо $D(a,r) \subset M$.

Дакле, скуп $M$ је и отворен. На основу повезаности скупа $\Omega$, закључујемо да је $M = \Omega$ или $M = \emptyset$. □

Ако је $u$ субхармонијска функција, а $h$ реално-вредносна хармонијска функција на области $\Omega$ и $\overline{D} \subset \Omega$ диск, следећа пропозиција тврди да уколико важи неједнакост $u \leq h$ на $\partial D$, онда је $u \leq h$ на $\overline{D}$.

**Пропозиција 1.4.3.** *Нека је $u$ полунепрекидна одозго реално вредносна функција дефинисана на области $\Omega$. Тада је $u$ субхармонијска функција на $\Omega$ ако и само ако за сваки отворен диск $D$ такав да је $\overline{D} \subset \Omega$ и сваку реално вредносну функцију $h$ непрекидну на $\overline{D}$, хармонијску на $D$, такву да $u \leq h$ на $\partial D$, важи $u \leq h$ у $D$.*

*Доказ.* Нека је функција $u$ субхармонијска на области $\Omega$ и $D$ затворен диск такав да $\overline{D} \subset \Omega$. Посматрајмо произвољну функцију $h$, непрекидну на $\overline{D}$ и хармонијску на $D$, такву да $u \leq h$ на $\partial D$. Онда, на основу принципа макисмума за субхармонијске функције, примењеном на функцију $u - h$, имамо да је

$$\max_{z \in \overline{D}} (u(z) - h(z)) = \max_{z \in \partial D} (u(z) - h(z)) \leq 0.$$

Дакле, $u(z) \leq h(z)$ за све $z \in D$.

С друге стране, ако је функција $u$ полунепрекидна одозго на $\Omega$ таква да за сваку функцију $h$ непрекидну на $\overline{D}$ и хармонијску на $D$ важи $u \leq h$ на $\partial D$, онда $u \leq h$ на $D$ за сваки затворен диск $\overline{D} \subset \Omega$.

Без умањења општости, посматрајмо тачку $a = 0$ и претпоставимо да важи $\overline{\mathbb{D}} \subset \Omega$. Нека је $\varphi$ произвољна непрекидна фунција на $\partial\mathbb{D}$ таква да $u \leq \varphi$ на $\partial\mathbb{D}$. Онда је функција $h = P[\varphi](z)$ хармонијска на $\mathbb{D}$, непрекидна на $\overline{\mathbb{D}}$ и $u \leq h$ на $\partial\mathbb{D}$. Дакле, $u \leq h$ на $\overline{\mathbb{D}}$. Специјално,

$$u(0) \leq h(0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi\left(e^{i\theta}\right) d\theta.$$

Како је $u$ полунепрекидна одозго, функцију $u\left(e^{i\theta}\right)$ можемо видети као инфимум фамилије непрекидних функција. Одакле важи

$$u(0) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u\left(e^{i\theta}\right) d\theta.$$

Овим је доказ завршен, у општем случају довољно је применити претходну неједнакост на функцију $z \to u(a + \rho z)$.

□

**Последица 1.4.1.** *Нека је $u : \Omega \to \mathbb{R}$ субхармонијска функција и $z \in \Omega$ произвољно. Ако је $D(z, r_z) \subset \Omega$ онда је функција $I_{u,z}(r) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(z + re^{i\theta})d\theta$ растућа функција на интервалу $(0, r_z)$.*

*Доказ.* Нека је $z_0 \in \Omega$, $r_{z_0} > 0$ тако да $D(z_0, r_0) \subset \Omega$ и $0 < r_1 < r_2 < r_{z_0}$ произвољно. Ако је $f(z) = u(z)$, $z \in \partial D(z_0, r_2)$, означимо са $h(z) = P[f](z)$, $z \in D(z_0, r_2)$ решење Дирихлеовог проблема на диску $D(z_0, r_2)$. На основу претходне пропозиције $u \leq h$ на диску $D(z_0, r_2)$.

На основу теореме о средњој вредности за хармонијске функције важи

$$\begin{aligned} I_{u,z_0}(r_1) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(z_0 + r_1 e^{i\theta})d\theta \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} h(z_0 + r_1 e^{i\theta})d\theta \leq h(z_0) \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} h(z_0 + r_2 e^{i\theta})d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(z_0 + r_2 e^{i\theta})d\theta = I_{u,z_0}(r_2). \end{aligned}$$

□

У случају два пута диференцијабилних функција, субхармоничност можемо окарактерисати знаком Лапласијана. Да бисмо показали то тврђење, неопходна нам је следећа лема.

**Лема 1.4.1.** *Ако је $u : \Omega \to \mathbb{R}$ класе $C^2$, онда је за све $a \in \Omega$*

$$\Delta u(a) = \lim_{r \to 0+} \frac{4}{r^2}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left(u\left(a + re^{i\theta}\right) - u(a)\right)d\theta.$$

*Доказ.* Нека је $a \in \Omega$ и $R > 0$ такво да $D(a, R) \subset \Omega$. Посматрајмо функцију $h(z) = u(a + z)$, за $z \in \mathbb{D}_R$. Тада је $h$ класе $C^2$ на $\mathbb{D}_R$ и Маклоренов развој функције $h$ је облика

$$\begin{aligned} h(z) =& h(0) + z\frac{\partial h}{\partial z}(0) + \overline{z}\frac{\partial h}{\partial \overline{z}}(0) \\ &+ \frac{1}{2}\left(z^2\frac{\partial^2 h}{\partial z^2}(0) + 2z\overline{z}\frac{\partial^2 h}{\partial z \partial \overline{z}}(0) + \overline{z}^2\frac{\partial^2 h}{\partial \overline{z}^2}(0)\right) + o(|z|^2). \end{aligned}$$

Уколико узмемо да је $z = re^{i\theta}$, интеграљењем претходне једнакости по $\theta$ на интервалу $[0, 2\pi]$ добијамо

$$\frac{4}{r^2}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left(h\left(re^{i\theta}\right) - h(0)\right)d\theta = \Delta h(0) + o(r).$$

Односно, пуштајући лимес $r \to 0+$, имамо тражену једнакост

$$\Delta u(a) = \lim_{r \to 0+} \frac{4}{r^2}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left(u\left(a + re^{i\theta}\right) - u(a)\right)d\theta.$$

□

**Пропозиција 1.4.4.** *Нека је $u : \Omega \to \mathbb{R}$ функција класе $C^2$. Онда је функција $u$ субхармонијска ако и само ако је $\Delta u \geq 0$.*

*Доказ.* Тврђење тривијално важи на основу леме 1.4.1.

□

**Пропозиција 1.4.5.** *Нека је $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ опадајући низ субхармонијских функција такав да, $u_1 \geq u_2 \geq \cdots \geq u_n \geq \cdots$ у $\Omega \subset \mathbb{C}$, онда је $u = \lim\limits_{n\to\infty} u_n$ субхармонијска функција у $\Omega$.*

*Доказ.* Лако се види да ће функција $u$ бити полунепрекидна одозго. Посматрајмо произвољну реално-вредносну функцију $h$, хармонијску на $D(a,r)$, непрекидна на $\overline{D(a,r)}$ и $u \leq h$ на $\partial D(a,z)$, где је $\overline{D(a,r)} \subset \Omega$ произвољно. Ако је $\varepsilon > 0$, онда постоји $n$ за које је $u_n \leq u + \varepsilon$ на $\partial D(a,r)$. Дакле, $u \leq u_n \leq h + \varepsilon$ на $D(a,r)$. Пуштајући $\varepsilon \to 0$, добијамо $u \leq h$ на $D(a,r)$, одакле, на основу пропозиције 1.4.3 следи да је $u$ субхармонијска функција на $\Omega$. □

У наредној пропозицији показаћемо на који начин можемо да апроксимирамо субхармонијске функције глатким субхармонијским функцијама.

**Пропозиција 1.4.6** (Апроксимација глатким функцијама)**.** *Нека је $u : \Omega \to \mathbb{R}$ субхармонијска функција. Тада постоји низ глатких субхармонијских функција $u_n : \Omega_n \to \mathbb{R}$ такав да:*

*(i) за свако $n \in \mathbb{N}$, $\Omega_n$ је отворен, $\overline{\Omega}_n \subset \Omega_{n+1}$ и $\Omega = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} \Omega_n$;*

*(ii) $u_n \geq u_{n+1}$ на $\Omega_n$ и низ $u_n$ локално равномерно конвергира ка $u$ на $\Omega$.*

*Доказ.* Нека је $\chi(z) \in C^\infty(\mathbb{C})$ радијална функција, $\chi(z) = \chi(|z|)$, таква да $\operatorname{supp}\chi \subset \mathbb{D}$, $\int_{\mathbb{C}} \chi dm = 1$ и $\chi(z) \geq 0$ за $z \in \mathbb{C}$, где је $\operatorname{supp}\chi$ представља ознаку за носач функције $\chi$. Један пример овакве функције је

$$\chi(z) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{1-|z|^2}}/I, & |z| < 1 \\ 0, & |z| \geq 1 \end{cases}$$

где је $I$ константа којом нормализујемо интеграл $\int_{\mathbb{C}} \chi dm$. Дефинишимо функцију $\varphi_\varepsilon(z) = \chi(z/\varepsilon)$, тада је $\operatorname{supp}\varphi_\varepsilon \subset \mathbb{D}_\varepsilon$. Нека је

$$u_\varepsilon(z) = \frac{1}{\varepsilon^2} \int_{\mathbb{D}_\varepsilon} u(z-w)\varphi_\varepsilon(w)dm(w).$$

Познато је да је $u_\varepsilon$ класе $C^\infty$ у области $\Omega_\varepsilon = \{z \in \Omega : D(z, \varepsilon) \subset \Omega\}$ и $u_\varepsilon$ равномерно конвергира ка $u$ на $\Omega_{\varepsilon_0}$ за $\varepsilon_0 > 0$.

Проверавамо да ли је $u_{\varepsilon_1} \leq u_{\varepsilon_2}$ за $\varepsilon_1 \leq \varepsilon_2$ на $\Omega_{\varepsilon_2}$. Како је $\varphi(w) = \varphi(|w|)$, имамо на основу последице 1.4.1 следеће

$$\begin{aligned} u_{\varepsilon_1}(z) &= \frac{1}{\varepsilon_1^2}\int_{\mathbb{D}_{\varepsilon_1}} u(z-w)\varphi_{\varepsilon_1}(w)dm(w) = \frac{1}{\varepsilon_1^2}\int_{\mathbb{D}_{\varepsilon_1}} u(z-w)\varphi(\frac{w}{\varepsilon_1})dm(w) \\ &= \int_{\mathbb{D}} u(z-\varepsilon_1 w)\varphi(w)dm(w) = \int_0^1 r\varphi(r)\int_0^{2\pi} u(z-\varepsilon_1 re^{i\theta})d\theta dr \\ &\leq \int_0^1 r\varphi(r)\int_0^{2\pi} u(z-\varepsilon_2 re^{i\theta})d\theta dr = u_{\varepsilon_2}(z), \end{aligned}$$

за све $z \in \Omega_{\varepsilon_2}$.

Да бисмо показали субхармоничност функција $u_\varepsilon$, посматрајмо интеграл

$$\frac{1}{r^2\pi}\int_{D(a,r)} u_\varepsilon(z)dm(z) = \frac{1}{r^2\pi}\int_{D(a,r)}\int_{\mathbb{D}_\varepsilon} u(z-w)\varphi_\varepsilon(w)dm(w)dm(z),$$

где је $a \in \Omega_\varepsilon$ и $r > 0$ такво да $D(a,r) \subset \Omega_\varepsilon$. Како је скуп $D(a-w,r) \subset \Omega$ за свако $w \in \mathbb{D}_\varepsilon$, на основу примене Фубинијеве теореме и субхармоничности функције $u$ имамо

$$\begin{aligned} \frac{1}{r^2\pi}\int_{D(a,r)} u_\varepsilon(z)dm(z) &= \int_{\mathbb{D}_\varepsilon}\left(\frac{1}{r^2\pi}\int_{D(a-w,r)} u(t)dm(t)\right)\varphi_\varepsilon(w)dm(w) \\ &\geq \int_{\mathbb{D}_\varepsilon} u(a-w)\varphi_\varepsilon(w)dm(w) = u_\varepsilon(a). \end{aligned}$$

Узимајући за $\varepsilon = \frac{1}{n}$ добијамо тражени низ.

□

**Пропозиција 1.4.7.** *Нека су $\Omega$ и $V$ области у $\mathbb{C}$ и нека је $f : \Omega \to V$ холоморфна функција. Ако је $u$ субхармонијска на $V$, онда је $u \circ f$ субхармонијска на $\Omega$.*

*Доказ.* Нека је $u_n$ низ из пропозиције 1.4.6. Онда низ $u_n \circ f$ конвергира ка $u \circ f$ када $n \to \infty$, па на основу пропозиције 1.4.5 довољно је испитати субхармоничност функција $u_n \circ f$ на $\Omega_n$. Како је за свако $n \in \mathbb{N}$ функција $u_n$ глатка, имамо да $u_n \circ f$ је такође глатко. На основу пропозиције 1.4.4 довољно је посматрати Лапласијан пресликавања $u_n \circ f$. Како је $\Delta u_n \geq 0$ имамо да

$$\Delta(u_n \circ f)(z) = \Delta u_n(f(z)) \cdot |f'(z)|^2 \geq 0,$$

одакле следи тврђење.

□

## 1.5 Интегралне средине

У даљем тексту, интегралну средину субхармонијске функције $\omega : \mathbb{D} \to [-\infty, \infty)$ означавамо са

$$I_\omega(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \omega\left(re^{i\theta}\right) d\theta,$$

где је $0 < r < 1$.

**Дефиниција 1.4.** Реално вредносна функција $\phi(r)$, $r > 0$, је конвексна по $\log r$ ако је функција $x \to \phi\left(e^x\right)$ конвексна. Односно, тада важи неједнакост

$$\phi\left(r_1^{1-\lambda} r_2^{\lambda}\right) \leq (1-\lambda)\phi(r_1) + \lambda\phi(r_2),\ r_1, r_2 > 0, \quad 0 < \lambda < 1.$$

Лако се проверава да је функција $\phi$ класе $C^2$ конвексна по $\log r$ ако и само ако $\phi''(r) + \frac{\phi'(r)}{r} \geq 0$.

**Теорема 1.5.1.** *Нека је $u$ субхармонијска функција у диску $\mathbb{D}_R$. Тада је функција $I_u(r)$ конвексна по $\log r$ и растућа. Исто важи и за функцију $J_u(r) = \max\limits_{0 \leq \theta \leq 2\pi} u\left(re^{\theta}\right)$.*

*Доказ.* За фиксиране $0 < r_1 < r_2 < R$ дефинишимо хармонијску функцију $h(z) = a \log|z| + b$ такву да $h(r_j) = I_u(r_j)$ за $j = 1, 2$. Дефинишимо и

$$v(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u\left(ze^{i\theta}\right) d\theta,$$

за $z \in \mathbb{D}_R$. Покажимо прво да је функција $v$ полунепрекидна одозго.

Нека је $\rho < R$ произвољно. На основу пропозиције 1.4.6, постоји низ глатких субхармонијских функција $u_n$ дефинисаним на $\overline{\mathbb{D}_\rho}$ тако да $u_n \geq u_{n+1}$ и $u_n \to u$, $n \to \infty$ равномерно на $\overline{\mathbb{D}_\rho}$. Како су функције $u_n$ глатке, оне су и непрекидне на $\overline{\mathbb{D}_\rho}$, онда је

$$v_n(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u_n\left(ze^{i\theta}\right) d\theta, \quad z \in \overline{\mathbb{D}_\rho},\ n \in \mathbb{N}$$

низ непрекидних функција такав да $v_n \geq v_{n+1}$ и $v(z) = \lim\limits_{n \to \infty} v_n(z)$ за све $z \in \overline{\mathbb{D}_\rho}$. На основу претходног, за свако $a \in \mathbb{D}_\rho$ и $\varepsilon > 0$ постоји $n \in \mathbb{N}$ тако да

$$\limsup_{z \to a} v(z) \leq \limsup_{z \to a} v_n(z) = v_n(a) \leq v(a) + \varepsilon.$$

Пуштајући да $\varepsilon \to 0$, имамо полунепрекидност одозго функције $v$ у тачки $a \in \mathbb{D}_\rho$. Како је $0 < \rho < R$ произвољно, функција $v$ је полунепрекидна одозго на $\mathbb{D}_R$.

Да би функција $v$ била субхармонијска неопходно је показати да задовољава неједнакост (1.15).

Нека је $\overline{D(a,\rho)} \subset \mathbb{D}_R$. Тада

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} v\left(a+\rho e^{it}\right)dt &= \frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\left(\int_0^{2\pi} u\left(\left(a+\rho e^{it}\right)e^{i\theta}\right)d\theta\right)dt\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u\left(ae^{i\theta}+\rho e^{i(t+\theta)}\right)dt\right)d\theta\\ &\leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u\left(ae^{i\theta}\right)d\theta = v(a).\end{aligned}$$

Дакле, функција $v$ је субхармонијска на $\mathbb{D}_R$.

Како је $v(z) = h(z)$ на $\partial A(0, r_1, r_2)$, на основу пропозиције 1.4.3 имамо $v(z) \leq h(z)$ на $A(0, r_1, r_2)$. Односно, функција $I_u(r)$ конвексна по $\log r$.

Да је функција $I_u(r)$ растућа по $r$, следи на основу последице 1.4.1.

У случају $J_u(r)$, доказ је сличан, али за функцију $h$ узимамо $h(z) = J_u(r_j)$, за $|z| = r_j$, $j = 1, 2$. □

У раду [20], Г. Х. Харди уводи ознаку и проучава интегралне средине модула холоморфних функција. Он их дефинише на следећи начин.

**Дефиниција 1.5.** Ако је $0 < r < 1$, $f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D})$, интегрална средина модула функције $f$ за $0 < p < \infty$ је

$$M_p(r,f) = \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|f\left(re^{i\theta}\right)\right|^p d\theta\right)^{\frac{1}{p}}$$

и за $p = \infty$,

$$M_\infty(r,f) = \sup_{\theta\in[0,2\pi)}\left|f\left(re^{i\theta}\right)\right|.$$

Претходна теорема нам даје за директну последицу монотоност интегралне средине $M_p(r,f)$ по параметру $r$.

**Последица 1.5.1.** *Нека је $f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D})$ и $0 < p \leq \infty$. Тада је $M_p(r,f)$ растућа функција по $r$.*

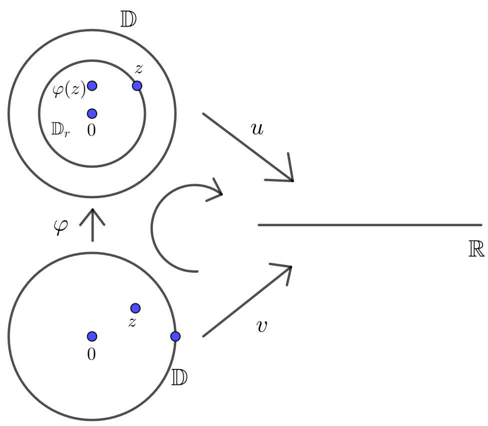
**Дефиниција 1.6.** Нека су $u$ и $v$ субхармонијске функције на јединичном диску $\mathbb{D}$. Функција $v$ је субординована функцијом $u$ на $\mathbb{D}$ ако постоји холоморфно пресликавање $\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ такво да $\varphi(0) = 0$ и $v(z) = u(\varphi(z))$ за све $z \in \mathbb{D}$. Тада користимо ознаку $v \prec u$.

**Теорема 1.5.2** (Литлвудов принцип субординације)**.** *Нека су функције $u$ и $v$ субхармонијске, такве да $v \prec u$. Тада*

$$I_v(r) \leq I_u(r),$$

*за све $0 < r < 1$.*

*Доказ.* С обзиром да $u \prec v$, постоји холоморфна функција $\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ тако да $\varphi(0) = 0$ и $v = u \circ \varphi$. Нека је $0 < r < 1$ фиксирано. Тада постоји хармонијска функција $U$ у диску $\mathbb{D}_r$ таква да $U(z) = u(z)$ за $|z| = r$. Онда $u(z) \leq U(z)$ у затвореном диску $\overline{\mathbb{D}_r}$ и $v(z) \leq U(\varphi(z)) = V(z)$ на кружници $|z| = r$. Тада,




Слика 1.3: Композиција $v = u \circ \varphi$

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} v\left(re^{i\theta}\right)d\theta \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} V\left(re^{i\theta}\right)d\theta = V(0)\\ = U(0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} U\left(re^{i\theta}\right)d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u\left(re^{i\theta}\right)d\theta.\end{aligned}$$

Овим је теорема доказана. □

Теорему 1.5.2 показао је Ф. Рис, у раду [40], 1925. године. Он наводи да је прву верзију ове теореме показао Ј. Е. Литлвуд у раду [31] који је написан 1923. године, али је објављен 1925.

**Теорема 1.5.3.** [31] *Нека $f, g \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D})$ и нека је $g \prec f$. Онда за $0 < p < \infty$ важи*

$$M_p(r, g) \le M_p(r, f), \tag{1.16}$$

*за све $0 < r < 1$.*

*Доказ.* Функције $|f|^p$ и $|g|^p$ су субхармонијске у $\mathbb{D}$, на основу доказа теореме 1.5.2 важи неједнакост (1.16). □

**Пропозиција 1.5.1.** *Нека је $f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D})$ и $0 < r < 1$. Тада је функција $p \to M_p(r, f)$ растућа на $(0, +\infty)$.*

*Доказ.* Нека је $0 < p_1 < p_2 < \infty$. На основу Хелдерове неједнакости за $\frac{p_1}{p_2}$ и $1 - \frac{p_1}{p_2}$ важи

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left|f\left(re^{i\theta}\right)\right|^{p_1} d\theta \le \frac{1}{2\pi}(2\pi)^{1-p_1/p_2}\left(\int_0^{2\pi} \left|f\left(re^{i\theta}\right)\right|^{p_2}\right)^{p_1/p_2}.$$

□

**Лема 1.5.1.** *Нека је $f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D})$ и $\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ холоморфно пресликавање. Тада за $0 < p < \infty$ и $0 < r < 1$*

$$M_p^p(r, f \circ \varphi) \le \frac{R + |\varphi(0)|}{R - |\varphi(0)|} M_p^p(R, f),$$

*где $|\varphi(z)| \le R < 1$ за све $|z| = r$.*

*Доказ.* Нека је $|\varphi(0)| = c$. Функција $|f|^p$ је субхармонијска на скупу $\mathbb{D}_R$ и непрекидна на $\overline{\mathbb{D}_R}$. На основу претходног, постоји непрекидна функција $u$ на $\overline{\mathbb{D}_R}$, тако да је $u$ хармонијска на $\mathbb{D}_R$, $|f(z)|^p \le u(z)$ за $z \in \mathbb{D}_R$ и $|f(z)|^p = u(z)$ за $|z| = R$. Онда

$$\begin{aligned} M_p^p(r, f \circ \varphi) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left|f\left(\varphi\left(re^{i\theta}\right)\right)\right|^p d\theta \\ &\le \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u\left(\varphi\left(re^{i\theta}\right)\right) d\theta = u(\varphi(0)). \end{aligned} \tag{1.17}$$

На основу примене Харнакове неједнакости у (1.17), добијамо

$$\begin{aligned} M_p^p(r, f \circ \varphi) \le& \frac{R + c}{R - c} u(0) = \frac{R + c}{R - c}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u\left(Re^{i\theta}\right) d\theta \\ =& \frac{R + c}{R - c}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left|f\left(Re^{i\theta}\right)\right|^p d\theta. \end{aligned}$$

Дакле,

$$M_p^p(r, f \circ \varphi) \leq \frac{R+c}{R-c} M_p^p(R, f).$$

□

## 1.6 Неки простори холоморфних функција

Један од основних примера простора холоморфних функција на јединичном диску су Хардијеви простори које је представио Рис 1923. године, [39]. Име су добили по Г. Х. Хардију који је пре тога посматрао интегралне средине холоморфних функција, које су саставни део дефиниције ових простора.

**Дефиниција 1.7.** Хардијев простор $H^p$ за $0 < p \leq \infty$ је скуп функција $f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D})$ које задовољавају

$$\|f\|_{H^p} = \sup_{0 \leq r < 1} M_p(r, f) < \infty.$$

Скуп $H^p$ је векторски простор, а у случају када је $1 \leq p \leq \infty$, са $\|\cdot\|_{H^p}$ је дефинисана норма на $H^p$. Хардијеви простори за $1 \leq p \leq \infty$ су подскупови одговарајућих простора $L^p$, док за $0 < p < 1$ простори $H^p$ имају лепша својства од простора $L^p$. Како су интегралне средине $M_p(r, f)$ растуће по параметру $r \in (0, 1)$ за све $f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D})$ и $0 < p \leq \infty$, испоставља се да је

$$\|f\|_{H^p} = \lim_{r \to 1-} M_p(r, f),$$

за све $f \in H^p$. Када је $1 \leq p \leq \infty$, важи и наредна теорема:

**Теорема 1.6.1.** [39] *Нека је $f \in H^p$, $1 \leq p \leq \infty$. Тада за скоро све $\theta \in [0, 2\pi)$ постоји $\lim_{r \to 1-} f\left(re^{i\theta}\right) = f_*\left(e^{i\theta}\right)$, и важе следеће релације:*

$$\|f\|_{H^p} = \|f_*\|_p, \quad 0 < p \leq \infty;$$

$$\lim_{r \to 1-} \int_0^{2\pi} \left|f\left(re^{i\theta}\right) - f_*\left(e^{i\theta}\right)\right|^p d\theta = 0, \quad 0 < p < \infty.$$

*Доказ.* Ако је $g \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D})$, користићемо ознаке $g_r\left(e^{i\theta}\right) = g\left(re^{i\theta}\right)$ за $0 < r < 1$, за функцију дефинисану на јединичној кружници $\partial\mathbb{D}$ и $\|\cdot\|_p$ за норму дефинисану на простору $L^p\left(\partial\mathbb{D}\right)$.

Нека је $f=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\widehat{f}(n)z^n\in H^p$ тада

$$M=\sup_{0<r<1}\|f_r\|_p<\infty. \tag{1.18}$$

За $1<p<\infty$, простор $L^p(\partial\mathbb{D})$ можемо посматрати као дуал простора $L^q(\partial\mathbb{D})$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. Како је $L^q(\partial\mathbb{D})$ један нормиран векторски простор, на основу Банах-Алаоглу теореме, затворена јединична лопта у $L^p(\partial\mathbb{D})$ је компактан скуп у односу на слабу-* топологију. Односно, претходно нам даје да постоји $f_*\in L^p(\partial\mathbb{D})$ и низ $r_n\to 1$, тако да функционали $\Lambda_{r_n}$ дефинисани на простору $L^q(\partial\mathbb{D})$ одређени функцијама $f_{r_n}$ који конвергира ка функционалу $\Lambda_*$ одређеног функцијом $f_*\in L^p(\partial\mathbb{D})$. Дакле, за свако $\theta\in[0,2\pi)$, важи

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{2\pi}f_{r_n}\left(e^{i\theta}\right)g\left(e^{i\theta}\right)d\theta=\int_0^{2\pi}f_*\left(e^{i\theta}\right)g\left(e^{i\theta}\right)d\theta. \tag{1.19}$$

Треба показати да конвергенција важи и у норми простора $L^p(\partial\mathbb{D})$.

Узимајући за $g_k\left(e^{i\theta}\right)=e^{-ik\theta}$, $\theta\in[0,2\pi)$ , $k\in\mathbb{Z}$ и $a_k=0$ за $k<0$, имамо на основу (1.19) за све $k\in\mathbb{Z}$

$$\lim_{n\to\infty}a_kr_n^k=\widehat{f}_*(k),$$

где је $f_*\left(e^{i\theta}\right)=\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty}\widehat{f}_*(k)e^{ik\theta},\theta\in[0,2\pi)$. Дакле, важи $\widehat{f}_*(k)=0$, за $k<0$ и $\widehat{f}_*(k)=a_k$, за $k\geq 0$. Посматрајући решење Дирихлеовог проблема за функцију $f_*$, добијамо $P[f_*]_r\left(e^{i\theta}\right)=f_r\left(e^{i\theta}\right)$. На основу својстава функције $P[f_*]$ имамо да

$$\|f_r-f_*\|_p=\|P[f_*]_r-f_*\|_p\to 0,\quad r\to 1.$$

Дакле, $f_r$ конвергира ка $f_*$ у норми простора $L^p(\partial\mathbb{D})$.

Слично, када је $p=\infty$ показујемо да је $f_r\to f$, $r\to 1$ слаба-* конвергенција у $L^\infty$.

Када је $p=1$, дуал простора $L^1(\partial\mathbb{D})$ може се видети као подскуп простора свих комплексних мера на $\partial\mathbb{D}$, $\mathcal{M}(\partial\mathbb{D})$. Како је $\mathcal{M}(\partial\mathbb{D})=C(\partial\mathbb{D})^*$, на основу Банах-Алаоглуове теореме, лопте простора $\mathcal{M}(\partial\mathbb{D})$ су компактне у слабој-* топологији.

Поново добијамо постојање лимеса $\mu\in\mathcal{M}(\partial\mathbb{D})$ као $\lim\limits_{r\to 1}f_r=\mu$, али је овај лимес у простору $\mathcal{M}(\partial\mathbb{D})$. Односно, важиће

$$\int_0^{2\pi}f_r\left(e^{i\theta}\right)g\left(e^{i\theta}\right)d\theta\to\int_0^{2\pi}\mu\left(e^{i\theta}\right)g\left(e^{i\theta}\right)d\theta,\quad q\in C(\partial\mathbb{D}).$$

Узимајући за $g_k$ као и у случају када је $1 < p < \infty$, добијамо $\widehat{\mu}(k) = \lim\limits_{r\to 1} \widehat{f}_r(k)$, $k \in \mathbb{Z}$. Дакле, $\widehat{\mu}(k) = 0$, $k < 0$. На основу теореме браће Рис, важи да је $\mu$ апсолутно непрекидна мера у односу на Лебегову меру $d\theta$, а онда на основу Радон Никодим теореме је $d\mu = f_* d\theta$, где $f_* \in L^1(\partial\mathbb{D})$ тако да $\widehat{f}_*(k) = \widehat{f}(k)$ , $k \geq 0$. Одакле, слично као и раније имамо

$$\lim_{r\to 1} \|f_r - f_*\|_1 = 0.$$

Сада ћемо показати и да је $\|f\|_{H^p} = \|f_*\|_p$ за $1 \leq p \leq \infty$.

Посматрајмо прво случај када је $p < \infty$. Како је $f_* = \lim\limits_{r\to 1} f_r$, добијамо

$$\|f_*\|_p = \lim_{r\to 1} \|f_r\|_p = \|f\|_{H^p}.$$

Када је $p = \infty$, на основу слабе-* конвергенције имамо

$$\|f_*\|_\infty \leq \liminf_{r\to 1} \|f_r\|_\infty = \|f\|_{H^\infty},$$

а с друге стране како је $f_r = P[f_*]_r$, добијамо

$$\limsup_{r\to 1} \|f_r\|_\infty \leq \|f_*\|_\infty.$$

Одакле, $\|f\|_{H^\infty} = \|f_*\|_\infty$. □

На основу претходне теореме, функције $f \in H^p(\mathbb{D})$ можемо идентификовати са одговарајућим функцијама на јединичној кружници $f_*$ са $f = P[f_*]$.

**Последица 1.6.1.** *За $z \in \mathbb{D}$ произвољно, функционал $F_z : f \to f(z)$ је ограничен на $H^p$, $1 \leq p \leq \infty$. Штавише, важи*

$$\|F_z\|_{H^p} = \frac{1}{(1-|z|^2)^{\frac{1}{p}}},$$

*где дефинишемо $\frac{1}{\infty} = 0$.*

*Доказ.* Нека је $z \in \mathbb{D}$, $1 \leq p < \infty$ и $f \in H^p(\mathbb{D})$ произвољно. Посматрајмо функцију

$$F(w) = f \circ \varphi_z(w) \cdot \frac{1-|z|^2}{(1-w\overline{z})^2}.$$

Тада $F(0) = f(z) \cdot (1-|z|^2)$ и функција $F \in H^p(\mathbb{D})$. На основу теореме 1.6.1, постоји $F_* \in L_p(\partial\mathbb{D})$, тако да $\lim\limits_{r\to 1} F\left(re^{i\theta}\right) = F_*\left(e^{i\theta}\right)$ и $M_p^p(r,F) \leq \|F_*\|_p$. Како је $|F|^p$ субхармонијска функција, за $0 < r < 1$ имамо

$$|F(0)|^p \leq M_p^p(r,F) \leq \|F_*\|_p,$$

односно,

$$|F(0)|^p \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left|f_* \circ \varphi_z\left(e^{i\theta}\right)\right|^p \frac{(1-|z|^2)^p}{|1-\overline{z}e^{i\theta}|^{2p}} d\theta.$$

Након смене променљиве $e^{it} = \varphi_z\left(e^{i\theta}\right)$, добијамо

$$|F(0)|^p \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left|f_*\left(e^{it}\right)\right|^p dt = \|f\|_{H^p}^p.$$

Дакле,

$$|f(z)| \leq \frac{\|f\|_p}{(1-|z|^2)^{\frac{1}{p}}}. \tag{1.20}$$

Узимајући за $f(w) = \frac{1}{1-\overline{z}w}$, лаким рачуном добијамо $\|f\|_{H^p} = \frac{1}{(1-|z|^2)^{\frac{1}{p}}}$, одакле следи да се једнакост (1.20) достиже за $f \in H^p$.

Уколико је $p = \infty$, онда за свако $f \in H^\infty(\mathbb{D})$ имамо да је $|f(z)| \leq \|f\|_{H^\infty}$. Узимајући за $f \equiv 1$ видимо да тврђење важи и у овом случају. □

Једно од уопштења Хардијевих простора су Бергманови просотори.

**Дефиниција 1.8.** Функција $f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D})$ припада тежинском Бергмановом простору $A^p_\alpha$, за $0 < p < \infty$ и $\alpha > -1$ ако

$$\|f\|_{A^p_\alpha} = \left(\frac{\alpha+1}{\pi}\int_{\mathbb{D}} |f(z)|^p \, dm_\alpha(z)\right)^{\frac{1}{p}},$$

где је са $dm_\alpha(z)$ означена мера $(1-|z|^2)^\alpha \, dm(z)$.

Испоставља се да $H^p \subset A^p_\alpha$. У случају када је параметар $\alpha = 0$, добијамо Бергманов простор $A^p$.

Простори $A^p_\alpha$ су Банахови простори, а $A^2_\alpha$ Хилбертов простор. Прво се у литератури појавио простор $A^2$, који је увео Бергман у раду [3] из 1950. године. Након тога, као природна генерализација простора $A^2$ појавили су се Бергманови простори $A^p$, а потом и тежински Бергманови простори $A^p_\alpha$. За више информација о Бергмановим просторима погледати [17], [22], [25], [38].

Још један пример простора холоморфних функција на јединичном диску су и простори са мешовитом нормом.

**Дефиниција 1.9.** Функција $f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D})$ припада скупу $H^{p,q,\alpha}$ за $0 < p \leq \infty$, $0 < q < \infty$ и $0 < \alpha < \infty$ уколико важи

$$\|f\|_{p,q,\alpha} = \left(2\alpha q \int_0^1 r(1-r^2)^{\alpha q - 1} M_p^q(r,f) dr\right)^{\frac{1}{q}} < \infty, \tag{1.21}$$

а за $0 < p < \infty$, $q = \infty$ и $0 < \alpha < \infty$ ако

$$\|f\|_{p,q,\alpha} = \sup_{0<r<1} (1 - r^2) M_p(r, f) < \infty. \tag{1.22}$$

Флет је 1972. године представио просторе $H^{p,q,\alpha}$ у радовима [18], [19]. За дефиницију норме функције $f \in H^{p,q,\alpha}$ узео је модификацију претходних израза, где се уместо израза $r(1 - r^2)$ јавља $(1 - r)$. Лако се проверава да се и у једном и у другом случају добијени простори поклапају. Флет је у [19] показао да су простори $H^{p,q,\alpha}$ комплетни и да важе следеће инклузије:

- за $0 < \alpha < \beta < \infty$, $1 < p \leq \infty$ и $0 < q_1 < q_2 < \infty$

$$H^{p,\infty,\beta} \subset H^{p,q_1,\alpha} \subset H^{p,q_2,\alpha} \subset H^{p,\infty,\alpha},$$

- за $0 < \alpha < \infty$, $1 < p_1 < p_2 \leq \infty$ и $0 < q \leq \infty$

$$H^{p_2,q,\alpha} \subset H^{p_1,q,\alpha}.$$

У даљем тексту користићемо дефиниције (1.21) и (1.22). У том случају, добијамо праву генерализацију тежинског Бергмановог простора $A^p_\gamma$, узимајући $q = p$ и $\alpha = \frac{\gamma+1}{p}$ добијамо $A^p_\gamma = H^{p,p,\frac{\gamma+1}{p}}$ и $\|f\|_{A^p_\gamma} = \|f\|_{H^{p,p,\frac{\gamma+1}{p}}}$.
Питање које се природно јавља:
*Да ли важи неједнакост $\|f\|_{u,v,\beta} \leq \|f\|_{p,q,\alpha}$ за све $f \in H^{u,v,\beta} \cap H^{p,q,\alpha}$ за неке параметре $0 < u, v, p, q, \alpha, \beta \leq \infty$?*

Линарес и Вукотић, у раду [33], показују да је $H^{p,q,\alpha} \subset H^{u,v,\beta}$ ако је $p \geq q$ и да контрактивност норме важи ако и само ако $q \leq v$ и $\alpha \leq \beta$, или $q > v$ и $\alpha q \leq \beta v$.

**Пропозиција 1.6.1** ([33])**.** *Нека је $0 < u \leq p \leq \infty$, $0 < q \leq v \leq \infty$, $0 < \alpha < \infty$. Онда*

$$\|f\|_{u,v,\alpha} \leq \|f\|_{p,q,\alpha}. \tag{1.23}$$

*Доказ.* Претпоставимо прво да је $v < \infty$. Дефинишимо за $0 \leq R < 1$ функцију

$$\Phi(R) = \left( \int_R^1 2\alpha q r (1 - r^2)^{\alpha q - 1} M_p^q(r, f) dr \right)^{\frac{v}{q}} - \int_R^1 2\alpha v r (1 - r^2)^{\alpha v - 1} M_u^v(r, f) dr.$$

Да би се показала неједнакост (1.23), довољно је показати да је $\Phi(0) \geq 0$. Како је $\lim\limits_{R \to 1-} \Phi(R) = 0$, испоставља се да је довољно показати да је функција

$\Phi$ опадајућа. На основу монотоности $M_p(r,f)$ по параметру $r$, имамо

$$\begin{aligned}\int_R^1 2\alpha q r(1-r^2)^{\alpha q-1}M_p^q(r,f)dr &\geq M_p^q(R,f)\int_R^1 2\alpha q r(1-r^2)^{\alpha q-1}dr\\ &= M_p^q(R,f)(1-R^2)^{\alpha q}.\end{aligned}$$

Узимајући у обзир да је $v/q-1\geq 0$, добијамо

$$\begin{aligned}\Phi'(R) &= 2\alpha v R(1-R^2)^{\alpha v-1}M_u^v(R,f) - 2\alpha v R(1-R^2)^{\alpha q-1}M_p^q(R,f)\\ &\qquad \cdot\left(\int_R^1 2\alpha q r(1-r^2)^{\alpha q-1}M_p^q(r,f)dr\right)^{\frac{v}{q}-1}\\ &\leq 2\alpha v R(1-R^2)^{\alpha v-1}M_u^v(R,f) - 2\alpha v R(1-R^2)^{\alpha q-1}M_p^q(R,f)\\ &\qquad \cdot M_p^{v-q}(R,f)(1-R^2)^{\alpha v-\alpha q}\\ &= 2\alpha v R(1-R^2)^{\alpha v-1}\Big(M_u^v(R,f)-M_p^v(R,f)\Big)\leq 0,\end{aligned}$$

где последња неједнакост важи на основу пропозиције 1.5.1. Дакле, неједнакост (1.23) важи када је $v<\infty$.

Нека је $v=\infty$. Онда имамо два случаја $q=\infty$ и $0<q<\infty$.

• **Случај $q=\infty$ :**

Како је $u\leq p$, имамо

$$(1-r^2)^\alpha M_u(r,f)\leq (1-r^2)^\alpha M_p(r,f)\leq \|f\|_{p,\infty,\alpha}.$$

Узимајући супремум $0<r<1$ добијамо (1.23).

• **Случај $0<q<\infty$ :**

На основу пропозиције 1.5.1 и последице 1.5.1, добијамо

$$\begin{aligned}(1-R^2)^{\alpha q}M_u^q(R,f) &\leq (1-R^2)^{\alpha q}M_p^q(R,f)\\ &= \alpha q\int_R^1 2r(1-r^2)^{\alpha q-1}M_p^q(R,f)dr\\ &\leq 2\alpha q\int_R^1 r(1-r^2)^{\alpha q-1}M_p^q(r,f)dr\leq \|f\|_{p,q,\alpha}.\end{aligned}$$

Узимајући супремум по $R\in(0,1)$, добијамо тражену неједнакост. □

**Пропозиција 1.6.2.** *Нека је $0\leq u\leq p\leq\infty$, $0<v\leq q<\infty$ и $\alpha q\leq\beta v$. Онда је*

$$\|f\|_{u,v,\beta}\leq\|f\|_{p,q,\alpha}. \tag{1.24}$$

*Доказ.* Сменом променљиве $s = (1-r^2)^{\beta v}$ добијамо

$$\|f\|_{u,v,\beta}^q = \left(\int_0^1 M_u^v\left(\sqrt{1-s^{1/(\beta v)}}, f\right) ds\right)^{\frac{q}{v}}.$$

Коришћењем Хелдерове неједнакости, монотоности интегралне средине $M_t(\rho, f)$ по параметру $0 < t \leq \infty$, а потом и монотоности по параметру $0 < \rho < 1$, добијамо

$$\begin{aligned}
\|f\|_{u,v,\beta}^q &\leq \int_0^1 M_u^q\left(\sqrt{1-s^{1/(\beta v)}}, f\right) ds \\
&\leq \int_0^1 M_p^q\left(\sqrt{1-s^{1/(\beta v)}}, f\right) ds \\
&\leq \int_0^1 M_p^q\left(\sqrt{1-s^{1/(\alpha q)}}, f\right) ds \\
&= \int_0^1 2\alpha q r(1-r^2)^{\alpha q-1} M_p^q(r,f) dr = \|f\|_{p,q,\alpha},
\end{aligned}$$

где претпоследњу једнакост добијамо коришћењем смене $s = (1-r^2)^{\alpha q}$. □

**Пропозиција 1.6.3.** *Нека је $0 < u \leq p \leq \infty$, $0 < v < q \leq \infty$ и $0 < \alpha < \beta < \infty$. Ако је $\alpha q > \beta v$, онда инклузија $H^{p,q,\alpha} \subset H^{u,v,\beta}$ није контрактивна.*

*Доказ.* Довољно је наћи $f \in H^{p,q,\alpha}$ тако да је

$$\|f\|_{p,q,\alpha} < \|f\|_{p,q,\beta}.$$

У случају када је $q = \infty$, довољно је посматрати функцију $f(z) = (1+z^2)^\alpha$. Тада је

$$(1-r^2)^\alpha M_p(r,f) \leq (1-r^2)^\alpha M_\infty(r,f) = (1-r^4)^\alpha \leq 1 = |f(0)| < \|f\|_{u,v,\beta},$$

за све $r \in (0,1)$, где је последња неједнакост добијена на основу строге монотоности функције $M_p(r,f)$ по параметру $r$ у случају да $f$ није константно.

Ако је $0 < q < \infty$, на основу Хелдерове неједнакости за све $f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D})$ важи

$$\|f\|_{p,q,\alpha} \leq \|f\|_{\infty,q,\alpha} \text{ и } \|f\|_{A_{\beta v-1}^{\min\{u,v\}}} \leq \|f\|_{u,v,\beta},$$

одакле закључујемо да је довољно показати да неједнакост важи у случају када $p = \infty$ и када је $H^{u,v,\beta}$ тежински Бергманов простор. Нека је $w = \min\{u,v\}$, довољно је наћи функцију $f \in H^{\infty,q,\alpha}$ тако да

$$\|f\|_{\infty,q,\alpha} < \|f\|_{A_{\beta v-1}^w}.$$

Нека је $\gamma \in \left(0, \frac{\alpha}{2}\right)$ и

$$f_n(z) = \frac{1}{(1 - z^{2n})^{2\gamma}},$$

за $n \in \mathbb{N}$. Користећи развој

$$(1-x)^{-c} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-c}{k} (-1)^k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(c+k)}{k!\Gamma(c)} x^k$$

и основна својства функција $B$ и $\Gamma$, након смене променљиве $R = r^2$ добијамо

$$\begin{aligned}
\|f_n\|_{\infty,q,\alpha}^q &= \alpha q \int_0^1 (1-R)^{\alpha q - 1} (1 - R^n)^{-2\gamma q} dR \\
&= \alpha q \int_0^1 (1-R)^{\alpha q-1} \left( \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(2\gamma q + k)}{k!\Gamma(2\gamma q)} R^{nk} \right) dR \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \alpha q \frac{\Gamma(2\gamma q + k)}{k!\Gamma(2\gamma q)} \left( \int_0^1 (1-R)^{\alpha q - 1} R^{nk} dR \right) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \alpha q \frac{\Gamma(2\gamma q + k)}{k!\Gamma(2\gamma q)} B(\alpha q, nk+1) \\
&= \frac{\Gamma(\alpha q + 1)}{\Gamma(2\gamma q)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(2\gamma q + k)}{k!} \frac{(nk)!}{\Gamma(\alpha q + nk + 1)}.
\end{aligned}$$

На основу Ојлер-Гаусове формуле за функцију $\Gamma$ постоји $m_1 \in \mathbb{N}$ тако да за све $n \geq m_1$ важи

$$\|f_n\|_{\infty,q,\alpha}^q \leq 1 + \frac{3\Gamma(\alpha q + 1)}{2\Gamma(2\gamma q)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\Gamma(k + 2\gamma q)}{k!} \frac{1}{k^{\alpha q}} \frac{1}{n^{\alpha q}} = 1 + \frac{C_1(q, \alpha, \gamma)}{n^{\alpha q}}.$$

С друге стране, постоји $m_2 \in \mathbb{N}$, тако да за све $n \geq m_2$ важи

$$\begin{aligned}
\|f\|_{A^w_{\beta v - 1}}^w &= 1 + \frac{\Gamma(\beta v + 1)}{\Gamma^2(\gamma w)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\Gamma^2(k + \gamma w)}{(k!)^2} \frac{(2nk)!}{\Gamma(2nk + \beta v + 1)} \\
&\geq 1 + \frac{\Gamma(\beta v + 1)}{2^{\beta v + 1}\Gamma^2(\gamma w)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\Gamma^2(k+\gamma w)}{(k!)^2} \frac{1}{k^{\beta v}} \frac{1}{n^{\beta v}} = 1 + \frac{C_2(w, v, \beta, \gamma)}{n^{\beta v}},
\end{aligned}$$

Како је $q > v \geq w$ и $\|f_n\|_{A^w_{\beta v-1}} \geq 1$, добијамо

$$n^{\beta v} \left( \|f\|_{A^w_{\beta v-1}}^q - \|f_n\|_{\infty,q,\alpha}^q \right) \geq n^{\beta v} \left( \|f\|_{A^w_{\beta v-1}}^w - \|f_n\|_{\infty,q,\alpha}^q \right) \geq C_2 - \frac{C_1}{n^{\alpha q - \beta v}},$$

за $n \geq \max\{m_1, m_2\}$. Уз претпоставку да $\alpha q > \beta v$, за довољно велико $n$ имаћемо неједнакост

$$\|f_n\|_{\infty,q,\alpha} < \|f_n\|_{A^w_{\beta v-1}}.$$

□

**Теорема 1.6.2.** [33] *Нека је $0 < v, q \leq \infty$, $0 < \alpha, \beta < \infty$, $0 < u \leq p \leq \infty$ и нека важи да је $\alpha < \beta$, или $\alpha = \beta$ и $q \leq v$. Тада важи да је инклузија $H^{p,q,\alpha} \subset H^{u,v,\beta}$ контрактивна ако и само ако важи један од следећих случајева*

$$(1) \quad q \leq v \text{ и } \alpha \leq \beta, \quad \text{или} \quad (2) \quad q > v \text{ и } \alpha q \leq \beta v.$$

*Специјално, у случају Бергманових простора за $p \geq q$, инклузија $A^p_\alpha \subset A^q_\beta$ ако и само ако $\alpha \leq \beta$.*

*Доказ.* Директно на основу пропозиције 1.6.2 када $q > v$ и $\alpha q \leq \beta v$ имамо да је

$$\|f\|_{u,v,\beta} \leq \|f\|_{p,q,\alpha}.$$

У случају када $0 < q \leq v \leq \infty$ и $\alpha \leq \beta$ на основу пропозиције 1.6.1 важи

$$\|f\|_{u,v,\beta} \leq \|f\|_{u,v,\alpha},$$

а на основу пропозиције 1.6.2 имамо

$$\|f\|_{u,v,\alpha} \leq \|f\|_{p,q,\alpha}.$$

Одакле, добијамо да важи контрактивност инклузије. На основу пропозиције 1.6.3, инклузија није контрактивна у супротном. □

**Дефиниција 1.10.** Нека је $0 \leq \rho < R \leq 1$. За $f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D})$ и $0 \leq s < 1$, ознака $f_s$ представља дилатацију функције $f$, односно, $f_s(z) = f(sz)$ за све $z \in \mathbb{D}$. Дефинишимо

$$M_{p,q,\alpha}[f](\rho, R, s) = \left( \frac{2\alpha q}{(1-\rho^2)^{\alpha q} - (1-R^2)^{\alpha q}} \int_\rho^R r(1-r^2)^{\alpha q - 1} M_p^q(r, f_s) dr \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Мотивисани радом [33], Карапетровић и аутор ове дисертације посматрајући следећу интегралну средину $M_{p,q,\alpha}[f](\rho, R, s)$, у раду [12], долазе до следећег резултата

**Теорема 1.6.3.** *Нека је $f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D})$, $0 < p, q, \alpha < \infty, 0 \leq \rho < R \leq 1$ и $0 \leq s \leq 1$. Тада су наредне функције*

$$p \to M_{p,q,\alpha}[f](\rho, R, s), \quad s \to M_{p,q,\alpha}[f](\rho, R, s),$$
$$\rho \to M_{p,q,\alpha}[f](\rho, R, s), \quad R \to M_{p,q,\alpha}[f](\rho, R, s),$$

*растуће, док су функције*

$$\alpha \to M_{p,q,\alpha}[f](\rho, R, s), \quad q \to M_{p,q,\alpha}[f](\rho, 1, s),$$

*опадајуће.*

*Доказ.* Како је функција $r \to M_p(r, f_s)$, растућа, следи да је и функција $s \to M_p(r, f_s) = M_p(sr, f)$ такође растућа фунцкија. На основу претходног, монотоности функције $p \to M_p(r, f_s)$ и једнакости

$$M_{p,q,\alpha}[f](\rho, R, s) = \left(\frac{2\alpha q}{(1-\rho^2)^{\alpha q} - (1-R^2)^{\alpha q}} \int_\rho^R r(1-r^2)^{\alpha q-1} M_p^q(r, f_s)dr\right)^{\frac{1}{q}},$$

закључујемо да су функције

$$p \to M_{p,q,\alpha}[f](\rho, R, s), \text{ и } s \to M_{p,q,\alpha}[f](\rho, R, s),$$

растуће. С друге стране, важи

$$M_{p,q,\alpha}^q[f](\rho, R, s) = \frac{\int_\rho^R r(1-r^2)^{\alpha q-1} M_p^q(r, f_s)dr}{\int_\rho^R r(1-r^2)^{\alpha q-1} dr},$$

одакле добијамо

$$\begin{aligned}\frac{d}{dR} M_{p,q,\alpha}^q[f](\rho, R, s) = \frac{R(1-R^2)^{\alpha q-1} M_p^q(R, f_s) \int_\rho^R r(1-r^2)^{\alpha q-1} dr}{\left(\int_\rho^R r(1-r^2)^{\alpha q-1} dr\right)^2} \\ - \frac{R(1-R^2)^{\alpha q-1} \int_\rho^R r(1-r^2)^{\alpha q-1} M_p^q(r, f_s)dr}{\left(\int_\rho^R r(1-r^2)^{\alpha q-1} dr\right)^2}.\end{aligned}$$

Претходно је једнако са

$$\frac{R(1-R^2)^{\alpha q-1}}{\left(\int_\rho^R r(1-r^2)^{\alpha q-1} dr\right)^2} \int_\rho^R r(1-r^2)^{\alpha q-1} \underbrace{\left(M_p^q(R, f_s) - M_p^q(r, f_s)\right)}_{\geq 0} dr \geq 0,$$

одакле закључујемо да је функција $R \to M_{p,q,\alpha}^q[f](\rho, R, s)$ растућа. Тада је и функција $R \to M_{p,q,\alpha}[f](\rho, R, s)$ растућа. Слично, важи

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\rho} M_{p,q,\alpha}^q[f](\rho, R, s) = -\frac{\rho(1-\rho^2)^{\alpha q-1} M_p^q(\rho, f_s) \int_\rho^R r(1-r^2)^{\alpha q-1} dr}{\left(\int_\rho^R r(1-r^2)^{\alpha q-1} dr\right)^2} \\ + \frac{\rho(1-\rho^2)^{\alpha q-1} \int_\rho^R r(1-r^2)^{\alpha q-1} M_p^q(r, f_s)dr}{\left(\int_\rho^R r(1-r^2)^{\alpha q-1} dr\right)^2}.\end{aligned}$$

Десна страна неједнакости једнака је

$$\frac{\rho(1-\rho^2)^{\alpha q-1}}{\left(\int_\rho^R r(1-r^2)^{\alpha q-1}dr\right)^2}\int_\rho^R r(1-r^2)^{\alpha q-1}\underbrace{\left(M_p^q(r,f_s)-M_p^q(\rho,f_s)\right)}_{\geq 0}dr\geq 0.$$

Дакле, добијамо и да је функција $\rho \to M_{p,q,\alpha}[f](\rho,R,s)$ растућа. Сада показујемо да је функција $\alpha \to M_{p,q,\alpha}[f](\rho,R,s)$ опадајућа. Нека је

$$\varphi(r)=M_p^q(r,f_s)\,\text{и}\,\chi(r)=\varphi(r)-\varphi(0),$$

за $0<r<1$. Функција $\varphi$ је растућа и диференцијабилна на $(0,1)$, па је таква и функција $\chi$. Дакле, $\chi'\geq 0$ на $(0,1)$ и $\chi(r)=\int_0^r\chi'(u)du$, за $0<r<1$. Тада

$$\begin{aligned}M_{p,q,\alpha}[f](\rho,R,s)&=\frac{2\alpha q}{(1-\rho^2)^{\alpha q}-(1-R^2)^{\alpha q}}\int_\rho^R r(1-r^2)^{\alpha q-1}\varphi(r)dr\\&=\frac{2\alpha q}{(1-\rho^2)^{\alpha q}-(1-R^2)^{\alpha q}}\int_\rho^R r(1-r^2)^{\alpha q-1}\chi(r)dr+\varphi(0)\\&=\frac{2\alpha q}{(1-\rho^2)^{\alpha q}-(1-R^2)^{\alpha q}}\int_\rho^R\int_0^r r(1-r^2)^{\alpha q-1}\chi'(u)dudr+\varphi(0).\end{aligned}$$

Применом Фубинијеве теореме, добијамо

$$\begin{aligned}&M_{p,q,\alpha}[f](\rho,R,s)\\&=\frac{2\alpha q}{(1-\rho^2)^{\alpha q}-(1-R^2)^{\alpha q}}\int_0^R\int_{\max\{u,\rho\}}^R r(1-r^2)^{\alpha q-1}\chi'(u)drdu+\varphi(0)\\&=\frac{2\alpha q}{(1-\rho^2)^{\alpha q}-(1-R^2)^{\alpha q}}\int_0^R\chi'(u)\int_{\max\{u,\rho\}}^R r(1-r^2)^{\alpha q-1}drdu+\varphi(0)\\&=\frac{2\alpha q}{(1-\rho^2)^{\alpha q}-(1-R^2)^{\alpha q}}\int_0^\rho\chi'(u)\int_\rho^R r(1-r^2)^{\alpha q-1}drdu\\&\quad+\frac{2\alpha q}{(1-\rho^2)^{\alpha q}-(1-R^2)^{\alpha q}}\int_\rho^R\chi'(u)\int_u^R r(1-r^2)^{\alpha q-1}drdu+\varphi(0)\end{aligned}$$

Односно, важи

$$\begin{aligned}M_{p,q,\alpha}[f](\rho,R,s)&=\int_0^\rho\chi'(u)du+\int_\rho^R\chi'(u)\frac{(1-u^2)^{\alpha q}-(1-R^2)^{\alpha q}}{(1-\rho^2)^{\alpha q}-(1-R^2)^{\alpha q}}du+\varphi(0)\\&=\varphi(r)+\int_\rho^R\chi'(u)\frac{(1-u^2)^{\alpha q}-(1-R^2)^{\alpha q}}{(1-\rho^2)^{\alpha q}-(1-R^2)^{\alpha q}}du.\end{aligned}$$

Дакле, довољно је показати да је функција

$$\alpha\to\frac{(1-u^2)^{\alpha q}-(1-R^2)^{\alpha q}}{(1-\rho^2)^{\alpha q}-(1-R^2)^{\alpha q}}$$

опадајућа, када $0 \leq \rho < u < R \leq 1$. У случају када је $R = 1$, на основу неједнакости $(1-u^2)/(1-\rho^2) < 1$, добијамо да је функција

$$\alpha \to \left(\frac{1-u^2}{1-\rho^2}\right)^{\alpha q},$$

опадајућа. У случају када је $0 \leq \rho < u < R < 1$,

$$\frac{(1-u^2)^{\alpha q} - (1-R^2)^{\alpha q}}{(1-\rho^2)^{\alpha q} - (1-R^2)^{\alpha q}} = \frac{A^\alpha - 1}{B^\alpha - 1},$$

где је

$$A = \left(\frac{1-u^2}{1-R^2}\right)^q \text{ и } B = \left(\frac{1-\rho^2}{1-R^2}\right)^q.$$

Приметимо да је $1 < A < B$. Дакле, довољно је показати да је функција

$$\xi(\alpha) = \frac{A^\alpha - 1}{B^\alpha - 1}$$

опадајућа за $\alpha > 0$. Функцију $\xi$ можемо посматрати и на следећи начин

$$\xi(\alpha) = \frac{\ln A}{\ln B} \frac{\int_0^\alpha A^t dt}{\int_0^\alpha B^t dt},$$

одакле следи

$$\begin{aligned} \xi'(\alpha) &= \frac{\ln A}{\ln B} \frac{A^\alpha \int_0^\alpha B^t dt - B^\alpha \int_0^\alpha A^t dt}{\left(\int_0^\alpha B^t dt\right)^2} = \frac{\ln A}{\ln B} \frac{\int_0^\alpha \left(A^\alpha B^t - B^\alpha A^t\right) dt}{\left(\int_0^\alpha B^t dt\right)^2} \\ &= \frac{\ln A}{\ln B} \frac{B^\alpha}{\left(\int_0^\alpha B^t dt\right)^2} \int_0^\alpha B^t \underbrace{\left(\left(\frac{A}{B}\right)^\alpha - \left(\frac{A}{B}\right)^t\right)}_{\leq 0} dt \leq 0. \end{aligned}$$

Овим смо показали да је функција $\xi$ опадајућа, одакле следи и да је функција $\alpha \to M_{p,q,\alpha}[f](\rho, R, s)$ опадајућа.

Преостаје нам још да покажемо да је функција $q \to M_{p,q,\alpha}[f](\rho, 1, s)$ опадајућа. Нека је $0 < q_1 \leq q_2 < \infty$. Довољно је показати да је

$$M_{p,q_1,\alpha}[f](\rho, 1, s) \geq M_{p,q_2,\alpha}[f](\rho, 1, s). \tag{1.25}$$

Како је

$$M_{p,q,\alpha}[f](\rho, 1, s) = \left(\frac{2\alpha q}{(1-\rho^2)^{\alpha q}} \int_\rho^1 r(1-r^2)^{\alpha q - 1} M_p^q(r, f_s) dr\right)^{\frac{1}{q}},$$

неједнакост (1.25) еквивалентна је са

$$\left(\frac{2\alpha q_1}{(1-\rho^2)^{\alpha q_1}}\int_\rho^1 r(1-r^2)^{\alpha q_1-1}M_p^{q_1}(r,f_s)dr\right)^{\frac{q_2}{q_1}} - \frac{2\alpha q_2}{(1-\rho^2)^{\alpha q_2}}\int_\rho^1 r(1-r^2)^{\alpha q_2-1}M_p^{q_2}(r,f_s)dr \geq 0.$$

Посматрајмо наредну функцију

$$\Phi(x) = \left(\frac{2\alpha q_1}{(1-\rho^2)^{\alpha q_1}}\int_x^1 r(1-r^2)^{\alpha q_1-1}M_p^{q_1}(r,f_s)dr\right)^{\frac{q_2}{q_1}} - \frac{2\alpha q_2}{(1-\rho^2)^{\alpha q_2}}\int_x^1 r(1-r^2)^{\alpha q_2-1}M_p^{q_2}(r,f_s)dr,$$

где $x \in [\rho, 1]$. Довољно је показати да је $\Phi(\rho) \geq 0$. Добијамо

$$\Phi'(x) = -\frac{q_2}{q_1}\left(\frac{2\alpha q_1\int_x^1 r(1-r^2)^{\alpha q_1-1}M_p^{q_1}(r,f_s)dr}{(1-\rho^2)^{\alpha q_1}}\right)^{\frac{q_2}{q_1}-1}\frac{2\alpha q_1 x(1-x^2)^{\alpha q_1-1}M_p^{q_1}(x,f_s)}{(1-r^2)^{\alpha q_1}} + \frac{2\alpha q_2 x(1-x^2)^{\alpha q_2-1}M_p^{q_2}(x,f_s)}{(1-r^2)^{\alpha q_2}}.$$

На основу неједнакости

$$\frac{2\alpha q_1\int_x^1 r(1-r^2)^{\alpha q_1-1}M_p^{q_1}(r,f_s)dr}{(1-\rho^2)^{\alpha q_1}} \geq \frac{2\alpha q_1 M_p^{q_1}(x,f_s)\int_x^1 r(1-r^2)^{\alpha q_1-1}dr}{(1-\rho^2)^{\alpha q_1}} = \frac{(1-x^2)^{\alpha q_1}}{(1-\rho^2)^{\alpha q_1}}M_p^{q_1}(x,f_s),$$

и $q_2/q_1 - 1 \geq 0$, закључујемо

$$\left(\frac{2\alpha q_1\int_x^1 r(1-r^2)^{\alpha q_1-1}M_p^{q_1}(r,f_s)dr}{(1-\rho^2)^{\alpha q_1}}\right)^{\frac{q_2}{q_1}-1} \geq \frac{(1-x^2)^{\alpha q_2-\alpha q_1}}{(1-\rho^2)^{\alpha q_2-\alpha q_1}}M_p^{q_2-q_1}(x,f_s),$$

одакле следи

$$\Phi'(x) \leq -\frac{q_2}{q_1}\frac{(1-x^2)^{\alpha q_2-\alpha q_1}}{(1-\rho^2)^{\alpha q_2-\alpha q_1}}M_p^{q_2-q_1}(x,f_s)\frac{2\alpha q_1 x(1-x^2)^{\alpha q_1-1}M_p^{q_1}(x,f_s)}{(1-\rho^2)^{\alpha q_1}} + \frac{2\alpha q_2 x(1-x^2)^{\alpha q_2-1}M_p^{q_2}(x,f_s)}{(1-\rho^2)^{\alpha q_2}}.$$

Сређивањем претходног израза добијамо

$$\Phi'(x) \leq 0.$$

Дакле, функција $\Phi$ је опадајућа на интервалу $[\rho, 1]$. Одакле, следи

$$\Phi(\rho) \geq \Phi(1) = 0.$$

Овим је доказ завршен. $\square$

**Напомена 1.2.** У општем случају, функција $q \to M_{p,q,\alpha}[f](\rho, R, s)$ не мора бити опадајућа. На пример, за $f(z) = z^4$ имамо

$$\begin{aligned} M_{1,q,1}[z^4](\rho, R, 1) &= \left( \frac{2q}{(1-\rho^2)^q - (1-R^2)^q} \int_\rho^R r(1-r^2)^{q-1} r^{4q} dr \right)^{\frac{1}{q}} \\ &= \left( \frac{q}{(1-\rho^2)^q - (1-R^2)^q} \int_{\rho^2}^{R^2} r^{2q}(1-r)^{q-1} dr \right)^{\frac{1}{q}}. \end{aligned}$$

У случају када је $\rho = \sqrt{0.3}$ и $R = \sqrt{0.4}$ користећи програм Mathematica при израчунавању, добијамо

$$M_{1,1,1}[z^4](\sqrt{0.3}, \sqrt{0.4}, 1) \approx 0.123333,$$

за $q = 1$, док за $q = 2$ добијамо

$$M_{1,2,1}[z^4](\sqrt{0.3}, \sqrt{0.4}, 1) \approx 0.124086.$$

Одакле закључујемо да функција $q \to M_{p,q,\alpha}[z^4](\rho, R, s)$ није опадајућа.

**Напомена 1.3.** Приметимо да у случају када је $\rho = 0$, $R = 1$ и $s = 1$,

$$M_{p,q,\alpha}[f](0, 1, 1) = \|f\|_{p,q,\alpha}.$$

На основу претходног имамо наредну последицу теореме 1.6.3, која је између осталог и резултат рада [33].

**Последица 1.6.2.** *Нека је $f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D})$ и $0 < p, q, \alpha < \infty$. Онда су следеће функције*

$$q \to \|f\|_{p,q,\alpha}, \quad \alpha \to \|f\|_{p,q,\alpha}$$

*опадајуће, док је функција*

$$p \to \|f\|_{p,q,\alpha}$$

*растућа.*

У специјалном случају када је $p = q$, важи следећи резултат који такође проистиче и из рада [28] као специјалан случај, где се уместо простора $\mathbb{D}$ посматра јединична лопта у комплексном простору.

**Последица 1.6.3.** *Нека је* $f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D})$ *и* $0 < p, \alpha < \infty$, $0 \leq \rho < R \leq 1$ *и* $0 \leq s \leq 1$. *Онда су следеће функције*

$$r \to M_{p,p,\alpha}[f](\rho, R, s), \quad R \to M_{p,q,\alpha}[f](\rho, R, s), \quad s \to M_{p,p,\alpha}[f](\rho, R, s)$$

*растуће.*

# Глава 2

# Оцене норме композиционог оператора

Нека је $X \subset \mathbb{C}$ и $\mathcal{B}$ неки Банахов простор комплексних функција на скупу $X$. Пресликавање $\varphi : X \to X$, индукује композициони оператор $\mathrm{C}_\varphi$, дефинисан са

$$(\mathrm{C}_\varphi f)(x) = f(\varphi(x)),$$

за све $x \in X$ и $f \in \mathcal{B}$. Јасно је да су оператори $\mathrm{C}_\varphi$ линеарни. Додатно, уколико је $\psi$ комплексно вредносна функција дефинисана на $X$, тежински композициони оператор $W_{\varphi,\psi}$ дефинишемо са $W_{\varphi,\psi}(x) = \psi(x)f(\varphi(x))$, за све $x \in X$ и $f \in \mathcal{B}$. За више информација о тежинским композиционим операторима погледати [8].

Изучавање дејства оператора $\mathrm{C}_\varphi$ на просторима холоморфних функција започиње радом Нордгрена из 1968. године. Након тога, многи аутори су изучавали особине ових оператора. Једна од основних особина оператора је његова норма. Природно се јавља питање да ли се може одредити. У малом броју случајева норма композиционог оператора на просторима холоморфних функција је експлицитно одређена.

На неким просторима холоморфних функција норма оператора $\mathrm{C}_\varphi$ је у потпуности одређена у случају када је $\varphi(0) = 0$.

**Теорема 2.0.1.** *Нека је $0 < p < \infty$ и $\mu$ коначна позитивна мера на интервалу $[0, 1]$. Нека је $\mathcal{B}$ простор аналитичких функција за који важи*

$$\|f\|_{\mathcal{B}}^p = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \left|f\left(re^{i\theta}\right)\right|^p \frac{d\theta}{2\pi} d\mu(r) < \infty.$$

*Ако је $\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ холоморфно тако да $\varphi(0) = 0$, онда је $\mathrm{C}_\varphi$ ограничен оператор на $\mathcal{B}$ и $\| \mathrm{C}_\varphi \|_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}} = 1$.*

*Доказ.* На основу Литлвудовог принципа субординације важи

$$\int_0^{2\pi} \left| f\left(\varphi\left(re^{i\theta}\right)\right)\right|^p \frac{d\theta}{2\pi} \leq \int_0^{2\pi} \left| f\left(re^{i\theta}\right)\right|^p \frac{d\theta}{2\pi},$$

одакле

$$\begin{aligned} \| \mathrm{C}_\varphi f\|_{\mathcal{B}}^p &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \left| f\left(\varphi\left(re^{i\theta}\right)\right)\right|^p \frac{d\theta}{2\pi} d\mu(r) \\ &\leq \int_0^1 \int_0^{2\pi} \left| f\left(re^{i\theta}\right)\right|^p \frac{d\theta}{2\pi} d\mu(r) = \|f\|_{\mathcal{B}}^p. \end{aligned}$$

Дакле, $\| \mathrm{C}_\varphi \|_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}} \leq 1$.

Узимајући за $f$ константну функцију $f \equiv 1$, имамо да $f \in \mathcal{B}$ и $\mathrm{C}_\varphi f \equiv 1$, одакле следи $\| \mathrm{C}_\varphi \|_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}} = 1$. □

Претходна теорема може да се примени на Хардијеве просторе, тежинске Бергманове просторе, просторе са мешовитом нормом, као и на многе друге.

## 2.1 Норма на Хардијевим просторима

У случају произвољног Хардијевог простора $H^p$, дата је следећа оцена норме произвољног композиционог оператора:

**Теорема 2.1.1.** *Нека је $\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ холоморфно и $p \geq 1$, тада*

$$\left(\frac{1}{1-|\varphi(0)|^2}\right)^{\frac{1}{p}} \leq \|C_\varphi\|_{H^p\to H^p} \leq \left(\frac{1+|\varphi(0)|}{1-|\varphi(0)|}\right)^{\frac{1}{p}}.$$

*Доказ.* Нека је $\varphi(0) = a$ и $\varphi_a(z) = \frac{a-z}{1-\bar{a}z}$ аутоморфизам диска $\mathbb{D}$. Означимо са $\varphi_0 = \varphi_a \circ \varphi$. Важи $\varphi_a^{-1} = \varphi_a$, и $\varphi = \varphi_a \circ \varphi_0$. Дакле, $C_\varphi = C_{\varphi_a} C_{\varphi_0}$. Односно,

$$\|C_\varphi\|_{H^p\to H^p} \leq \|C_{\varphi_0}\|_{H^p\to H^p} \|C_{\varphi_a}\|_{H^p\to H^p}.$$

На основу Литлвудовог принципа субординације имамо

$$M_p(r, f\circ\varphi_0) \leq M_p(r, f),$$

за све $0 < r < 1$ и $f \in H^p$. Узимајући супремум по $r$, добијамо

$$\|C_{\varphi_0}\|_{H^p\to H^p} \leq 1.$$

Дакле, довољно је показати

$$\|C_{\varphi_a}\|_{H^p\to H^p} \leq \left(\frac{1+|a|}{1-|a|}\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Нека је $f$ полином. Тада је $f\circ\varphi_a$ ограничена холоморфна функција на $\overline{\mathbb{D}}$. На основу монотоности средине $M_p(r, f\circ\varphi_a)$ по параметру $r\in(0,1)$, важи

$$\|f\circ\varphi_a\|_{H^p}^p = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|f\left(\varphi_a\left(e^{i\theta}\right)\right)\right|^p d\theta.$$

Након смене $e^{it} = \varphi_a\left(e^{i\theta}\right)$ и примене неједнакост $|1-\overline{a}e^{it}|\geq 1-|a|$, имамо

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi}\left|f\left(\varphi_a\left(e^{i\theta}\right)\right)\right|^p d\theta &= \int_0^{2\pi}\left|f\left(e^{i\theta}\right)\right|^p \frac{1-|a|^2}{|1-\overline{a}e^{it}|}dt\\ &\leq \frac{1+|a|}{1-|a|}\int_0^{2\pi}\left|f\left(\left(e^{it}\right)\right)\right|^p dt.\end{aligned}$$

На основу претходног, долазимо до

$$\|f\circ\varphi_a\|_{H^p} \leq \left(\frac{1+|a|}{1-|a|}\right)^{\frac{1}{p}}\|f\|_{H^p},$$

за све полиноме $f$, а како су полиноми густи у скупу холоморфних функција имамо да претходна неједнакост важи и за све $f\in H^p(\mathbb{D})$. Одакле добијамо доње ограничење за норму $\|C_\varphi\|_{H^p\to H^p}$.

На основу последице 1.6.1, важи $\|F_z\|_{H^p} = \frac{1}{(1-|z|^2)^{\frac{1}{p}}}$. Тада

$$F_z\,\mathrm{C}_\varphi\, f = \mathrm{C}_\varphi\, f(z) = f(\varphi(z)) = F_{\varphi(z)}f,$$

за $z\in\mathbb{D}$ и $f\in H^p$ произвољне. Односно, $F_z\,\mathrm{C}_\varphi = F_{\varphi(z)}$ за било које $z\in\mathbb{D}$. У терминима норми, важи да је $\|C_\varphi\|_{H^p\to H^p} \geq \frac{\|F_{\varphi(z)}\|_{H^p}}{\|F_z\|_{H^p}}$. Узимајући $z=0$, добијамо леву неједнакост. □

За више информација о норми композиционих оператора на Хардијевим и Бергмановим просторима погледати [46].

## 2.2 Норма на тежинским Бергмановим просторима

У случају Хардијевих простора теорема 1.6.1 нам даје да уместо произвољне функције $f \in H^p$ дефинисане на $\mathbb{D}$, можемо посматрати одговарајућу функцију $f_*$ дефинисану на $\partial\mathbb{D}$. У случају тежинских Бергманових простора и простора мешовите норме, произвољна функција не мора имати овакво својство. Без обзира на то, вредност функције $f \in A^p_\gamma$ у тачки $z$ се може оценити на следећи начин:

**Теорема 2.2.1.** *Нека је* $-1 < \gamma < \infty$ *и* $0 < p < \infty$. *Ако* $f \in A^p_\gamma$ *и* $z \in \mathbb{D}$ *онда*

$$|f(z)| \leq \frac{\|f\|_{A^p_\gamma}}{(1-|z|^2)^{(\gamma+2)/p}}.$$

*Доказ.* Посматрајмо холоморфну функцију

$$F(w) = f \circ \varphi_z(w) \frac{(1-|z|^2)^{(\gamma+2)/p}}{(1-w\overline{z})^{2(\gamma+2)/p}},\ w \in \mathbb{D}.$$

Како је

$$\|F\|^p_{A^p_\gamma} = \frac{\gamma+1}{p} \int_{\mathbb{D}} |f \circ \varphi_z(w)|^p \frac{(1-|z|^2)^{(\gamma+2)}}{(1-w\overline{z})^{2(\gamma+2)}} (1-|w|^2)^\gamma dm(w),$$

сменом промењиве у претходном интегралу $u = \varphi_z(w)$, добијамо

$$\|F\|^p_{A^p_\gamma} = \frac{\gamma+1}{p} \int_{\mathbb{D}} |f(u)|^p (1-|u|^2)^\gamma dm(u) = \|f\|^p_{A^p_\gamma}.$$

Дакле, довољно је показати да је $|F(0)| \leq \|F\|_{A^p_\gamma}$. На основу субхармоничности функције $|F|^p$ имамо $|F(0)|^p \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |F\left(re^{i\theta}\right)|^p d\theta$, одакле следи $|F(0)|^p \leq \|F\|_{A^p_\gamma}$. □

Ако означимо са $F_z$ функционал на простору $A^p_\gamma$ за $z \in \mathbb{D}$, дефинисан са $F_z f = f(z)$. Онда важи следеће:

**Последица 2.2.1.**

$$\|F_z\|_{A^p_\gamma} = \frac{1}{(1-|z|^2)^{\gamma+2}}.$$

*Доказ.* Нека је $z \in \mathbb{D}$ произвољно. На основу теореме 2.2.1 важи

$$\|F_z\|_{A^p_\gamma} \leq \frac{1}{(1-|z|^2)^{(\gamma+2)/p}}.$$

Посматрајмо функцију $f_z(w) = \frac{1}{(1-\overline{z}w)^{\frac{2(\gamma+2)}{p}}}$. Тада важи

$$\|f_z\|^p_{A^p_\gamma} = \frac{\gamma+1}{p} \int_{\mathbb{D}} \frac{(1-|w|^2)^\alpha}{|1-\overline{z}w|^{2(\alpha+2)}} dm(w).$$

Како је $1-|\varphi_z(w)|^2 = \frac{(1-|w|^2)(1-|z|^2)}{|1-\overline{z}w|^2}$, где је $\varphi_z(w) = \frac{z-w}{1-\overline{z}w}, w \in \mathbb{D}$ Мебијусово пресликавање диска $\mathbb{D}$, имамо

$$\|f_z\|^p_{A^p_\gamma} = \frac{1}{(1-|z|^2)^\alpha}\frac{\gamma+1}{p}\int_{\mathbb{D}}\left(1-|\varphi_z(w)|^2\right)^\alpha \frac{1}{|1-\overline{z}w|^4}dm(w).$$

Користећи да $dm(\varphi_z(w)) = |\varphi'_z(w)|^2 dm(w) = \frac{(1-|z|^2)^2}{|1-\overline{z}w|^4}dm(w)$ добијамо

$$\|f_z\|^p_{A^p_\gamma} = \frac{1}{(1-|z|^2)^{\alpha+2}}\frac{\gamma+1}{p}\int_{\mathbb{D}}\left(1-|\varphi_z(w)|^2\right)^\alpha \frac{(1-|z|^2)^2}{|1-\overline{z}w|^4}dm(w) = \frac{1}{(1-|z|^2)^{\alpha+2}}.$$

На основу претходног $f_z \in A^p_\gamma$ и неједнакости

$$\|F_z\|_{A^p_\gamma} \geq \frac{|F_z f_z|}{\|f_z\|} = \frac{1}{(1-|z|^2)^{\frac{\gamma+2}{p}}},$$

важи

$$\|F_z\|_{A^p_\gamma} = \frac{1}{(1-|z|^2)^{(\gamma+2)/p}}.$$

$\square$

Слично као у случају Хардијевих простора, можемо оценити норму оператора $C_\varphi$ на просторима $A^p_\gamma$.

**Теорема 2.2.2.** *Нека је* $-1<\gamma<\infty$, $0<p<\infty$ *и* $\varphi:\mathbb{D}\to\mathbb{D}$ *холоморфно. Тада је*

$$\frac{1}{(1-|\varphi(0)|^2)^{\frac{\gamma+2}{p}}} \leq \|C_\varphi\|_{A^p_\gamma\to A^p_\gamma} \leq \left(\frac{1+|\varphi(0)|}{1-|\varphi(0)|}\right)^{\frac{\gamma+2}{p}}.$$

*Доказ.* Као и у теореми 2.1.1 имамо за холоморфно пресликавање $\varphi:\mathbb{D}\to\mathbb{D}$ и $z\in\mathbb{D}$ да је $F_z\,\mathrm{C}_\varphi = F_{\varphi(z)}$. У терминима норми, важи $\|C_\varphi\| \geq \frac{\|F_{\varphi(z)}\|}{\|F_z\|}$. На основу последице 2.2.1 важи

$$\|C_\varphi\| \geq \left(\frac{1-|z|^2}{1-|\varphi(z)|^2}\right)^{\frac{\gamma+2}{p}}.$$

Узимајући за $z=0$ добијамо леву неједнакост.

Означимо са $c=|\varphi(0)|$ и посматрајмо функцију $\psi:\mathbb{D}\to\mathbb{D}$, дефинисану са $\psi=\varphi_c\circ\varphi$. Тада је $\psi$ холоморфно, $\psi(0)=0$ и $\varphi=\varphi_a\circ\psi$. На основу Литлвудовог принципа субординације, имамо

$$\int_0^{2\pi}\left|f\circ\varphi\left(re^{i\theta}\right)\right|^p d\theta = \int_0^{2\pi}\left|f\circ\varphi_c\circ\psi\left(re^{i\theta}\right)\right|^p d\theta \leq \int_0^{2\pi}\left|f\circ\varphi_c\left(re^{i\theta}\right)\right|^p d\theta$$

за све $0 < r < 1$. Множећи претходну неједнакост са $r(1-r^2)^\gamma dr$ интеграљењем од 0 до 1, добијамо

$$\int_{\mathbb{D}} |f\circ\varphi(z)|^p\,(1-|z|^2)^\gamma dm(z) \le \int_{\mathbb{D}} |f\circ\varphi_c(z)|^p\,(1-|z|^2)^\gamma dm(z).$$

Након смене променљиве, имамо

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{D}} |f\circ\varphi(z)|^p\,(1-|z|^2)^\gamma dm(z) &\le (1-|c|^2)^{\gamma+2}\int_{\mathbb{D}} \frac{|f(z)|^p(1-|z|^2)^\gamma}{|1-\overline{c}z|^{2(2\gamma+2)}}dm(z)\\ &\le \frac{(1-|c|^2)^{\gamma+2}}{(1-|c|)^{\gamma+2}}\int_{\mathbb{D}}|f(z)|^p(1-|z|^2)^\gamma dm(z)\\ &= \left(\frac{1+|c|}{1-|c|}\right)^{\gamma+2}\int_{\mathbb{D}}|f(z)|^p(1-|z|^2)dm(z).\end{aligned}$$

Овим је доказ завршен. □

**Напомена 2.1.** Приметимо да на основу претходног доказа важи

$$\|C_\varphi\| \ge \sup_{z\in\mathbb{D}}\left(\frac{1-|z|^2}{1-|\varphi(z)|^2}\right)^{\frac{\gamma+2}{p}}.$$

За више информација на ову тему погледати [45].

## 2.3 Норма на просторима са мешовитом нормом

Мотивисан оценама норме композиционог оператора на Хардијевим и тежинским Бергмановим просторима, аутор ове дисертације дошао је до питања да ли слична оцена важи и у случају простора са мешовитом нормом $H^{p,q,\alpha}$. И. Аревало, М. Д. Контрерас и Л. Родригез-Пјаца, у раду [2], показују да је оператор $C_\varphi$ ограничен на $H^{p,q,\alpha}$ просторима као и да је његова норма сразмерна константи

$$\left(\frac{\|\varphi\|_\infty+|\varphi(0)|}{\|\varphi\|_\infty-|\varphi(0)|}\right)^{\alpha+\frac{1}{p}},$$

где је $\|\varphi\|_\infty = \sup\limits_{z\in\mathbb{D}}|\varphi(z)|$. У раду [13], аутор дисертације налази константе $C_1$ и $C_2$ такве да

$$C_1\left(\frac{1+|\varphi(0)|}{1-|\varphi(0)|}\right)^{\alpha+\frac{1}{p}} \le \|C_\varphi\| \le C_2\left(\frac{1+|\varphi(0)|}{1-|\varphi(0)|}\right)^{\alpha+\frac{1}{p}}.$$

Пре саме оцене норме композиционог оператора, оценићемо вредност произвољне функције простора $H^{p,q,\alpha}$ у некој тачки $z$, а да бисмо то урадили биће нам неопходна помоћна тврђења која се тичу Форели-Рудин оцене.

## Оштре Форели-Рудин оцене

Дефинишимо за $c \in \mathbb{R}$ и $t > -1$

$$I_c(z) = \int_{\partial\mathbb{D}} \frac{d\sigma(\zeta)}{|1-<z,\zeta>|^{c+1}}$$

и

$$J_{c,t}(z) = \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{D}} \frac{(1-|w|^2)^t}{|1-<z,w>|^{2+t+c}} dm(w).$$

У овој подсекцији излажемо специјалан случај резултата из рада [32], везаног за оцењивање интеграла $I_c$ и $J_{c,t}$.

**Лема 2.3.1.** *За све $k, j, l \in \mathbb{N}_0$ и $z, w \in \mathbb{D}$, важи следећа једнакост*

$$\int_{\partial\mathbb{D}} <z,\zeta>^j <w,\zeta>^k <\zeta,w>^l \, d\sigma(\zeta) = \delta_{j+k,l}\, |w|^{2k} <z,w>^j,$$

*где је* $\delta_{x,y} = \begin{cases} 1, & x = y \\ 0, & x \neq y \end{cases}.$

*Доказ.*

$$\begin{aligned}\int_{\partial\mathbb{D}} <z,\zeta>^j <w,\zeta>^k <\zeta,w>^l \, d\sigma(\zeta) &= \left(\int_{\partial\mathbb{D}} \zeta^{j+k-l} d\sigma(\zeta)\right) z^j \overline{w}^{l-k} |w|^2 k \\ &= \delta_{j+k,l}\, |w|^{2k} <z,w>^j .\end{aligned}$$

$\square$

**Лема 2.3.2.** *Нека су $a, b, c \in \mathbb{R}$ и $t > -1$, онда важе идентитети*

$$\begin{aligned}&\int_{\partial\mathbb{D}} \frac{d\sigma(\zeta)}{(1-<z,\zeta>)^a(1-<w,\zeta>)^b(1-<\zeta,w>)^c} \\ &\quad= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(a)_j (c)_j}{(j!)^2} F(b, c+j, j+1; |w|^2) <z,w>^j\end{aligned} \tag{2.1}$$

*и*

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{D}} \frac{(1-|\xi|^2)^t dm(\xi)}{(1-<z,\xi>)^a(1-<w,\xi>)^b(1-<\xi,w>)^c} \\ &\quad= \frac{\Gamma(1+t)}{\Gamma(2+t)} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(a)_j (c)_j}{(2+t)_j j!} F(b, c+j, 2+t+j; |w|^2) <z,w>^j,\end{aligned} \tag{2.2}$$

*за све $z, w \in \mathbb{D}$.*

*Доказ.* Приметимо да је

$$(1-\lambda)^{-\gamma}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\gamma)_k}{k!}\lambda^k$$

за свако $\lambda \in \mathbb{D}$ и $\gamma \in \mathbb{R}$. На основу тога и претходне леме важи

$$\begin{aligned}
&\int_{\partial\mathbb{D}}\frac{d\sigma(\zeta)}{(1-<z,\zeta>)^a(1-<w,\zeta>)^b(1-<\zeta,w>)^c}\\
&\quad=\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(a)_j(b)_k(c)_l}{j!k!l!}\int_{\partial\mathbb{D}}<z,\zeta>^j<w,\zeta>^k<\zeta,w>^l\,d\sigma(\zeta)\\
&\quad=\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(a)_j(b)_k(c)_{j+k}}{j!k!(j+k)!}|w|^{2k}<z,w>^j\,.
\end{aligned}$$

Како је $(c)_{j+k}=(c+j)_k(c)_j$ и $(j+k)!=(j+1)_k j!$, добијамо

$$\begin{aligned}
&\int_{\partial\mathbb{D}}\frac{d\sigma(\zeta)}{(1-<z,\zeta>)^a(1-<w,\zeta>)^b(1-<\zeta,w>)^c}\\
&\quad=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(a)_j(c)_j}{(j!)^2}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(b)_k(c+j)_k}{(j+1)_k k!}|w|^{2k}\right)<z,w>^j\\
&\quad=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(a)_j(c)_j}{(j!)^2}F(b,c+j,j+1;|w|^2)<z,w>^j\,.
\end{aligned}$$

Овим је показана једнакост (2.1). Да бисмо показали (2.2), користићемо смену $\xi=r\zeta$, где $\zeta\in\partial\mathbb{D}$, и (2.1).

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{D}}\frac{(1-|\xi|^2)^t dm(\xi)}{(1-<z,\xi>)^a(1-<w,\xi>)^b(1-<\xi,w>)^c}\\
&=2\int_0^1\left(\int_{\partial\mathbb{D}}\frac{d\sigma(\zeta)}{(1-<rz,\zeta>)^a(1-<rw,\zeta>)^b(1-<\zeta,rw>)^c}\right)(1-r^2)^t r dr\\
&=2\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(a)_j(c)_j}{(j!)^2}\left(\int_0^1 r^{1+2j}(1-r^2)^t F(b,c+j,j+1,r^2|w|^2)dr\right)<z,w>^j\,.
\end{aligned}$$

Након примене особине (1.4) хипергеометријских функција, добијамо (2.2). $\square$

**Последица 2.3.1.** *Нека је $a\in\mathbb{R}$ и $t>-1$, имамо*

$$\int_{\partial\mathbb{D}}\frac{d\sigma(\zeta)}{|1-<z,\zeta>|^{2a}}=F(a,a,1;|z|^2)$$

*и*

$$\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{D}} \frac{(1-|\xi|^2)^t dm(\xi)}{|1-<z,\xi>|^{2a}} = \frac{\Gamma(1+t)}{\Gamma(2+t)} F(a,a,2+t;|z|^2)$$

*за све* $z \in \mathbb{D}$.

*Доказ.* Последица важи тривијално на основу леме 2.3.2 узимајући $c = a$, $b = 0$ и $z = w$. □

Наредна теорема је специјалан случај теореме 1.3 рада [32].

**Теорема 2.3.1.** [32] *Нека је* $t > -1$ *и* $c \in \mathbb{R}$. *Тада*

*(i) Ако је* $c < 0$, *за све* $z \in \mathbb{D}$ *важи*

$$1 \leq I_c(z) \leq \frac{\Gamma(-c)}{\Gamma\left(\frac{1-c}{2}\right)^2};$$
$$\frac{\Gamma(1+t)}{\Gamma(2+t)} \leq J_{c,t}(z) \leq \frac{\Gamma(1+t)\Gamma(-c)}{\Gamma\left(\frac{2+t-c}{2}\right)^2}.$$

*(ii) Ако је* $c > 0$, *за све* $z \in \mathbb{D}$ *важи*

$$1 \leq (1-|z|^2)^c I_c(z) \leq \frac{\Gamma(-c)}{\Gamma\left(\frac{1-c}{2}\right)^2};$$
$$\frac{\Gamma(1+t)}{\Gamma(2+t)} \leq (1-|z|^2)^c J_{c,t}(z) \leq \frac{\Gamma(1+t)\Gamma(-c)}{\Gamma\left(\frac{2+t+c}{2}\right)^2}.$$

*(iii) Ако је* $c = 0$, *за све* $z \in \mathbb{D}$ *важи*

$$1 \leq |z|^2 \left(\log\frac{1}{1-|z|^2}\right)^{-1} I_0(z) \leq \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)^2};$$
$$\frac{\Gamma(1+t)}{\Gamma(2+t)} \leq |z|^2 \left(\log\frac{1}{1-|z|^2}\right)^{-1} J_{0,t}(z) \leq \frac{\Gamma(1+t)}{\Gamma\left(\frac{2+t}{2}\right)^2}.$$

*Доказ.* На основу последице 2.3.1 важи

$$I_c(z) = F\left(\frac{1+c}{2}, \frac{1+c}{2}, 1; |z|^2\right),$$
$$J_{c,t}(z) = \frac{\Gamma(1+t)}{\Gamma(2+t)} F\left(\frac{2+c+t}{2}, \frac{2+c+t}{2}, 2+t; |z|^2\right).$$

**Случај $(i)$ : $c < 0$.**

Приметимо да је функција $F(a,a,b;r)$ растућа по $r$ на $[0,1)$ за $a \in \mathbb{R}$ и $b > 0$, јер су сви коефицијенти реда којим је задата позитивни. Онда важи $I_c(0) \leq I_c(z) \leq I_c(1)$ и $J_{c,t}(0) \leq J_{c,t}(z) \leq J_{c,t}(1)$. Лако се проверава да је $I_c(0) = 1$ и $J_{c,t}(0) = \Gamma(1+t)/\Gamma(2+t)$. На основу (1.2), важи и

$$I_c(1) = F\left(\frac{1+c}{2}, \frac{1+c}{2}, 1; 1\right) = \frac{\Gamma(-c)}{\Gamma\left(\frac{1-c}{2}\right)^2}$$

и

$$J_{c,t}(1) = \frac{\Gamma(1+t)}{\Gamma(2+t)} F\left(\frac{2+c+t}{2}, \frac{2+c+t}{2}, 2+t; 1\right) = \frac{\Gamma(1+t)\Gamma(-c)}{\Gamma\left(\frac{2+t-c}{2}\right)^2}.$$

Овим је показано и да су одговарајуће неједнакости оштре.

**Случај $(ii)$: $c > 0$.**

На основу Ојлерове релације (1.1) имамо

$$I_c(z) = (1-|z|^2)^{-c} I_{-c}(z) \text{ и } J_{c,t}(z) = (1-|z|^2)^{-c} J_{-c,t}(z),$$

одакле неједнакости важе на основу случаја $(i)$.

**Случај $(iii)$: $c = 0$.**

У овом случају довољно је показати да за $0 < a < 1$ важи

$$\frac{\Gamma(2a)}{\Gamma(a)^2} \frac{1}{x} \log \frac{1}{1-x} \leq F(a,a,2a;x) \leq \frac{1}{x} \log \frac{1}{1-x} \tag{2.3}$$

за све $x \in [0,1)$ и да у случају да је $a \geq 1$ важи обрнута неједнакост.

Посматрајмо случај када је $0 < a < 1$. Приметимо да важи

$$\frac{1}{x} \log \frac{1}{1-x} = \int_0^1 \frac{ds}{1-xs},$$

и да на основу особине (1.4) важи

$$F(a,a,2a;x) = \frac{\Gamma(2a)}{\Gamma(a)^2} \int_0^1 \frac{s^{a-1}(1-s)^{a-1}}{(1-xs)^a} ds.$$

Довољно је показати

$$\int_0^1 \frac{s^{a-1}(1-s)^{a-1}}{(1-xs)^a} ds \geq \int_0^1 \frac{ds}{1-xs},$$

да би важила лева страна неједнакости (2.3). Претходно важи на основу неједнакости $\frac{s(1-s)}{1-sx} \leq 1$ за све $x \in [0,1)$ и $s \in [0,1]$. Да бисмо показали десну страну неједнакости (2.3), користићемо развој функције

$$\frac{1}{x} \log \frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k+1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{((1)_k)^2}{(2)_k} \frac{x^k}{k!}.$$

На основу дефиниције хипергеометријских функција, имамо

$$F(a,a,2a;x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{((a)_k)^2}{(2a)_k}\frac{x^k}{k!}.$$

Дакле, довољно је показати да за свако $k\in\mathbb{N}$, функција $a\to((a)_k)^2/(2a)_k$ расте на $(0,+\infty)$. Како је

$$\frac{((a)_k)^2}{(2a)_k}=\prod_{j=0}^{k-1}\frac{(a+j)^2}{2a+j},$$

лако се проверава да је функција $a\to\frac{(a+j)^2}{2a+j}$ растућа на $(0,+\infty)$ за свако $j\in\mathbb{N}$. На основу претходног, важи и десна страна неједнакости (2.3).

Штавише, како је $\lim\limits_{x\to 0+}F(a,a,2a;x)=1$ и $\lim\limits_{x\to 0+}\frac{1}{x}\log\frac{1}{1-x}=1$ онда

$$\lim_{x\to 0+}x\left(\log\frac{1}{1-x}\right)^{-1}F(a,a,2a;x)=1.$$

Док на основу асимптотске формуле (1.5) важи

$$\lim_{x\to 1-}x\left(\log\frac{1}{1-x}\right)^{-1}F(a,a,2a;x)=\frac{\Gamma(2a)}{\Gamma(a)^2}.$$

Овим смо показали да су једнакости у (2.3) оштре.

Неједнакост у случају када је $a\geq 1$, показујемо на идентичан начин. $\square$

## Процене вредности функције у тачки

Приметимо да за $-1<\gamma<\infty$ и $0<p<\infty$, простор $H^{p,p,\frac{\gamma+1}{p}}$ се поклапа са тежинским Бергмановим простором $A^p_\gamma$. Ако посматрамо функционал $F_z$ дефинисан на $A^p_\gamma$ за $z\in\mathbb{D}$ са $F_zf=f(z)$, $f\in A^p_\gamma$, онда на основу теореме 2.2.1 важи $\|F_z\|_{A^p_\gamma}\leq\frac{1}{(1-|z|^2)^{\frac{\gamma+1}{p}}}$. Штавише, важи да је $\|F_z\|_{A^p_\gamma}=\frac{1}{(1-|z|^2)^{\frac{\gamma+1}{p}}}$.

Аревало је, у раду [1], показала да је

$$|f(z)|=o\left((1-|z|^2)^{\alpha+\frac{1}{p}}\right).$$

А након тога, у раду [2], Аревало и остали су показали да је $|f(z)|$ сразмерно $\frac{\|f\|_{H^{p,q,\alpha}}}{(1-|z|^2)^{\alpha+\frac{1}{p}}}$.

Ради краћег записа означавамо са $\|F_z\|$ норму функционала $F_z$ на простору $H^{p,q,\alpha}$, $0<p,q\leq\infty$, $0<\alpha<\infty$, $z\in\mathbb{D}$.

У раду [13], аутор ове дисертације налази константе $L_1,L_2>0$ тако да

$$\frac{L_1}{(1-|z|^2)^{\alpha+\frac{1}{p}}}\leq\|F_z\|\leq\frac{L_2}{(1-|z|^2)^{\alpha+\frac{1}{p}}}.$$

**Лема 2.3.3.** *Нека је $z \in \mathbb{D}$ онда*

$$L_1 \frac{1}{(1-|z|^2)^{\alpha+\frac{1}{p}}} \leq \|F_z\| \leq L_2 \frac{1}{(1-|z|^2)^{\alpha+\frac{1}{p}}},$$

*где*

$$L_1 = \begin{cases} \frac{\Gamma\left(\frac{\alpha p+\frac{p}{q}+1}{2}\right)^{\frac{2}{p}}}{\Gamma\left(\alpha p+\frac{p}{q}\right)^{\frac{1}{p}}}, & 0<p<\infty,\ 0<q\leq\infty; \\ \left(\frac{2\alpha q|z|}{1-|z|^2}+\left(\frac{3\sqrt{3}}{4}\right)^{\alpha q}\right)^{-\frac{1}{q}}, & p=\infty,\ 0<q<\infty; \\ 1, & p=\infty,\ q=\infty, \end{cases}$$

*и*

$$L_2 = \begin{cases} 1, & 0<p,q<\infty,\ \frac{p}{q}\geq 1 \ \ \textit{или}\ \ p=\infty, 0<q\leq\infty; \\ 2^{\alpha+\frac{3}{p}}, & 0<p,q<\infty,\ \frac{p}{q}<1; \\ 2^{\alpha}(1+3|z|)^{\frac{1}{p}}(1+|z|)^{\frac{1}{p}}, & 0<p<\infty,\ q=\infty. \end{cases}$$

*Доказ.* Норма $\|F_z\|$ једнака је $\sup \frac{|F_z f|}{\|f\|_{p,q,\alpha}}$, где супремум узимамо на скупу свих ненула функција $f \in H^{p,q,\alpha}$. На основу тога што је норма $\|\cdot\|_{p,q,\alpha}$ ротационо инваријантна, имамо и да је норма $F_z$ такође ротационо инвариантна јер

$$\frac{|f(z)|}{\|f\|_{p,q,\alpha}} = \frac{|f\circ\mathcal{R}_{\arg z}(|z|)|}{\|f\|_{p,q,\alpha}}$$

где је $\mathcal{R}_\theta z = ze^{i\theta}$ и $f \in H^{p,q,\alpha}$.

Да бисмо нашли ограничење нроме $F_z$ одоздо за $|z| = r_0$, биће довољно ограничити одоздо израз $\frac{|F_{r_0} f|}{\|f\|_{p,q,\alpha}}$ за неку конкретну функцију $f \in H^{p,q,\alpha}$.

За израчунавање горњег ограничења норме $\|F_z\|$, ограничићемо одозго $|f(z)|$ за све $f \in H^{p,q,\alpha}$ и $z \in \mathbb{D}$.

• **Случај $0 < p, q < \infty$ :**

Нека је $z \in \mathbb{D}$ произвољно и $|z| = r_0$. Функција $f(w) = \frac{1}{(1-r_0 w)^{\alpha+\frac{1}{p}+\frac{1}{q}}}, w \in \mathbb{D}$ припада простору $H^{p,q,\alpha}$. Тада

$$\|f\|_{p,q,\alpha} = \left(2\alpha q \int_0^1 r(1-r^2)^{\alpha q-1} M_p^q(r,f)\, dr\right)^{\frac{1}{q}}.$$

На основу 2.3.1 добијамо наредну оцену

$$M_p^p(r,f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{|1-r_0 re^{i\theta}|^{\alpha p+\frac{p}{q}+1}} \leq \frac{\Gamma\left(\alpha p+\frac{p}{q}\right)}{\Gamma\left(\frac{\alpha p+\frac{p}{q}+1}{2}\right)^2} \frac{1}{(1-r_0^2 r^2)^{\alpha p+\frac{p}{q}}}.$$

Ако $C = \frac{\Gamma\left(\alpha p + \frac{p}{q}\right)}{\Gamma\left(\frac{\alpha p + \frac{p}{q} + 1}{2}\right)}$, добијамо

$$\|f\|_{p,q,\alpha}^{q} \leq C^{\frac{q}{p}} 2\alpha q \int_0^1 r \left(\frac{1 - r^2}{1 - r_0^2 r^2}\right)^{\alpha q - 1} \frac{dr}{(1 - r_0^2 r^2)^2}.$$

Увођењем смене $t = \frac{1-r^2}{1-r_0^2 r^2}$, имамо

$$\|f\|_{p,q,\alpha}^{q} \leq \frac{C^{\frac{q}{p}}}{1 - r_0^2} \alpha q \int_0^1 t^{\alpha q - 1}\, dt = \frac{C^{\frac{q}{p}}}{1 - r_0^2}.$$

Након замене $|z| = r_0$, добијамо оцену

$$\|F_z\| \geq \frac{|f(r_0)|}{\|f\|_{p,q,\alpha}} \geq \frac{\Gamma\left(\frac{\alpha p + \frac{p}{q} + 1}{2}\right)^{\frac{2}{p}}}{\Gamma\left(\alpha p + \frac{p}{q}\right)^{\frac{1}{p}}} \frac{1}{(1 - |z|^2)^{\alpha + \frac{1}{p}}}.$$

Сада ћемо оценити норму $F_z$ одозго. Користећи својство субхармоничности функција $|f|^p$, за $z = r_0 e^{i\theta}$ и $r > r_0$ имамо

$$\begin{aligned} \left|f\left(r_0 e^{i\theta}\right)\right|^p \leq & \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left|f\left(re^{it}\right)\right|^p \frac{r^2 - r_0^2}{\left|r - r_0 e^{i(\theta - t)}\right|^2}\, dt \\ \leq & \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left|f\left(re^{it}\right)\right|^p \frac{r + r_0}{r - r_0}\, dt. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Дакле,

$$|f(z)|^q \left(\frac{r - r_0}{r + r_0}\right)^{\frac{q}{p}} \leq M_p^q(r, f).$$

Након интеграције претходне неједнакости у односу на меру $2\alpha q r(1-r^2)^{\alpha q - 1}\, dr$ на интервалу $(A, 1)$, где је $A \in (r_0, 1)$, добијамо

$$|f(z)|^q \int_A^1 2\alpha q r(1 - r^2)^{\alpha q - 1} \left(\frac{r - r_0}{r + r_0}\right)^{\frac{q}{p}} dr \leq \|f\|_{p,q,\alpha}^q.$$

Како је функција $\frac{r - r_0}{r + r_0}$ растућа по $r \in (r_0, 1)$ и $A$ произвољно у $(r_0, 1)$, можемо изабрати за $A = \frac{1 + r_0}{2}$. Онда је

$$\begin{aligned} 2\alpha q \int_A^1 r(1 - r^2)^{\alpha q - 1} \left(\frac{r - r_0}{r + r_0}\right)^{\frac{q}{p}} dr &\geq \left(\frac{A - r_0}{A + r_0}\right)^{\frac{q}{p}} (1 - A^2)^{\alpha q} \\ &= \left(\frac{1 - r_0}{1 + 3r_0}\right)^{\frac{q}{p}} \left(\frac{1 - r_0}{2}\right)^{\alpha q} \left(\frac{3 + r_0}{2}\right)^{\alpha q}. \end{aligned}$$

На основу неједнакости $\frac{3+r_0}{2} \geq 1 + r_0$ и $\frac{1}{1+3r_0} \geq \frac{1+r_0}{8}$, имамо

$$\left(\frac{1-r_0}{1+3r_0}\right)^{\frac{q}{p}} \left(\frac{1-r_0}{2}\right)^{\alpha q} \left(\frac{3+r_0}{2}\right)^{\alpha q} \geq (1-r_0^2)^{\alpha q + \frac{q}{p}} \frac{1}{2^{\alpha q + 3\frac{q}{p}}}.$$

Дакле, добијамо да је оцена одозго у случају $0 < p, q < \infty$

$$\|F_z\| \leq 2^{\alpha + \frac{3}{p}} \frac{1}{(1-|z|^2)^{\alpha + \frac{1}{p}}}.$$

На основу пропозиције 1.6.1, норма $\|\cdot\|_{p,q,\alpha}$ је опадајућа у односу на параметар $q$ и на основу теореме 1.6.2, $H^{p,q,\alpha} \subseteq H^{p,p,\alpha}$. Тада, у случају када $p \geq q$, важи

$$\|f\|_{p,q,\alpha} \geq \|f\|_{p,p,\alpha}.$$

Како је простор $H^{p,p,\alpha}$ заправо Бергманов тежински простор $A^p_{\alpha p - 1}$. Онда на основу теореме 2.2.1 важи

$$|f(z)| \leq \frac{\|f\|_{A^p_\gamma}}{(1-|z|^2)^{\frac{\gamma+2}{p}}}.$$

Дакле, за $f \in H^{p,q,\alpha}$

$$|f(z)| \leq \frac{\|f\|_{p,q,\alpha}}{(1-|z|^2)^{\alpha + \frac{1}{p}}},$$

односно $\|F_z\| \leq \frac{1}{(1-|z|^2)^{\alpha+\frac{1}{p}}}$ када $0 < p, q < \infty$ и $p \geq q$.

• **Случај $0 < p < \infty$, $q = \infty$:**

Нека је $z \in \mathbb{D}$ и $|z| = r_0$. За $f(w) = \frac{1}{(1-r_0 w)^{\alpha+\frac{1}{p}}}$, $w \in \mathbb{D}$, на основу теореме 2.3.1 имамо

$$M_p^p(r, f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{|1 - r_0 r e^{i\theta}|^{\alpha p + 1}} \leq \frac{\Gamma(\alpha p)}{\Gamma\left(\frac{\alpha p + 1}{2}\right)^2} \frac{1}{(1 - r_0^2 r^2)^{\alpha p}}.$$

Онда

$$\|f\|_{p,\infty,\alpha} \leq \left(\frac{\Gamma(\alpha p)}{\Gamma\left(\frac{\alpha p+1}{2}\right)^2}\right)^{\frac{1}{p}} \sup_{0<r<1} \left(\frac{1-r^2}{1-r_0^2 r^2}\right)^{\alpha} = \left(\frac{\Gamma(\alpha p)}{\Gamma\left(\frac{\alpha p+1}{2}\right)^2}\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Дакле,

$$\|F_z\| \geq \frac{|f(r_0)|}{\|f\|_{p,\infty,\alpha}} \geq \left(\frac{\Gamma\left(\frac{\alpha p+1}{2}\right)^2}{\Gamma(\alpha p)}\right)^{\frac{1}{p}} \frac{1}{(1-|z|^2)^{\alpha + \frac{1}{p}}}.$$

Да бисмо ограничили норму одозго, користићемо (2.4) у произвољној тачки $z = r_0 e^{i\theta} \in \mathbb{D}$. Дакле, за произвољно $f \in H^{p,\infty,\alpha}$ и $r > r_0$

$$\left(\frac{r - r_0}{r + r_0}\right)^{\frac{1}{p}} |f(z)| \leq M_p(r, f).$$

Након множења претходне неједнакости са $(1 - r^2)^\alpha$ и узимањем супремума за $r_0 < r < 1$, добијамо

$$|f(z)| \sup_{r_0<r<1} (1 - r^2)^\alpha \left(\frac{r - r_0}{r + r_0}\right)^{\frac{1}{p}} \leq \sup_{r_0<r<1} M_p(r, f)(1 - r^2)^\alpha \leq \|f\|_{p,\infty,\alpha}.$$

Узимајући $r = \frac{1+r_0}{2}$, закључујемо

$$\sup_{r_0<r<1} (1 - r^2)^\alpha \left(\frac{r - r_0}{r + r_0}\right)^{\frac{1}{p}} \geq \frac{(1 - r_0^2)^{\alpha+\frac{1}{p}}}{2^\alpha(1 + 3r_0)^{\frac{1}{p}}(1 + r_0)^{\frac{1}{p}}}.$$

Дакле, добијамо

$$\|F_z\| \leq 2^\alpha(1 + 3|z|)^{\frac{1}{p}}(1 + |z|)^{\frac{1}{p}} \frac{1}{(1 - |z|^2)^{\alpha+\frac{1}{p}}} \leq 2^{\alpha+\frac{3}{p}} \frac{1}{(1 - |z|^2)^{\alpha+\frac{1}{p}}}.$$

• **Случај $p = \infty$, $0 < q < \infty$ :**

За $z \in \mathbb{D}$ такво да $|z| = r_0$, функција $f(w) = \frac{1}{(1-r_0 w)^{2\alpha}}$ за $w \in \mathbb{D}$ је у $H^{\infty,q,\alpha}$ и $M_\infty(r, f) = \frac{1}{(1-r_0 r)^{2\alpha}}$. Нека је

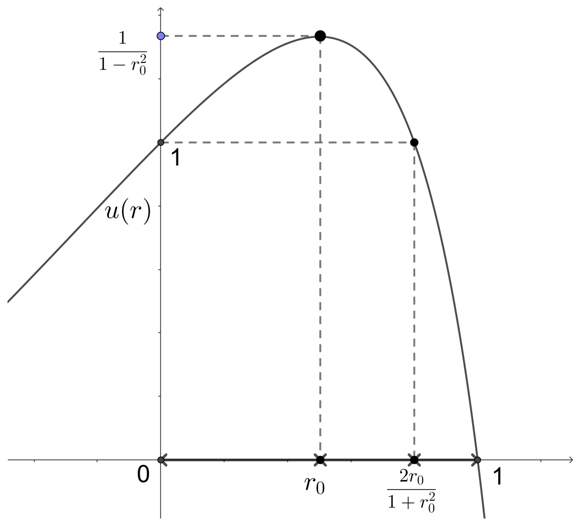
$$g(r) = r(1 - r^2)^{\alpha q-1} M_\infty^q(r, f) = r\left(\frac{1 - r^2}{(1 - r_0 r)^2}\right)^{\alpha q-1} \frac{1}{(1 - r_0 r)^2}, 0 < r < 1.$$

Тада

$$\|f\|_{\infty,q,\alpha}^q = 2\alpha q \left( \underbrace{\int_0^{r_0} g(r)\, dr}_{I_1} + \underbrace{\int_{r_0}^{\frac{2r_0}{1+r_0^2}} g(r)\, dr}_{I_2} + \underbrace{\int_{\frac{2r_0}{1+r_0^2}}^1 g(r)\, dr}_{I_3} \right).$$

У интегралима $I_1$ и $I_2$, уведимо променљиву $u = \frac{1-r^2}{(1-r_0 r)^2}$. Односно, када је $0 < r < r_0$, $r = \frac{ur_0 - \sqrt{ur_0^2 - u + 1}}{ur_0^2 + 1}$ за $1 < u < \frac{1}{1-r_0^2}$ и када $r_0 < r < \frac{2r_0}{1+r_0^2}$, $r = \frac{ur_0 + \sqrt{ur_0^2 - u + 1}}{ur_0^2 + 1}$ за $1 < u < \frac{1}{1-r_0^2}$. На основу смене променљиве и монотоности функције $u^{\alpha q}$, добијамо

$$\begin{aligned} I_1 + I_2 = &\int_1^{\frac{1}{1-r_0^2}} u^{\alpha q-1} \frac{r_0 u}{\sqrt{ur_0^2 - u + 1}(1 + ur_0^2)}\, du \leqslant \frac{1}{2} \int_1^{\frac{1}{1-r_0^2}} u^{\alpha q} \frac{du}{\sqrt{ur_0^2 - u + 1}} \\ \leqslant &\frac{1}{2(1 - r_0^2)^{\alpha q}} \int_1^{\frac{1}{1-r_0^2}} \frac{du}{\sqrt{ur_0^2 - u + 1}} = \frac{r_0}{(1 - r_0^2)^{\alpha q+1}}. \end{aligned}$$




Слика 2.1: График смене промењиве $u(r)$

Како је $\frac{1}{1-r_0 r}$ растућа функција и $\alpha q > 0$

$$
\begin{aligned}
I_3 = &\int_{\frac{2r_0}{1+r_0^2}}^{1} r\frac{(1-r^2)^{\alpha q-1}}{(1-r_0 r)^{2\alpha q}}\,dr \leqslant \frac{1}{(1-r_0)^{2\alpha q}}\int_{\frac{2r_0}{1+r_0^2}}^{1} r(1-r^2)^{\alpha q-1}\,dr\\
=&\frac{1}{(1-r_0)^{2\alpha q}}\frac{1}{2\alpha q}\frac{(1-r_0^2)^{2\alpha q}}{(1+r_0^2)^{2\alpha q}} = \frac{1}{2\alpha q}\frac{(1+r_0)^{2\alpha q}}{(1+r_0^2)^{2\alpha q}}\\
<&\frac{1}{2\alpha q}\left(\frac{3\sqrt{3}}{4}\right)^{\alpha q}\frac{1}{(1-r_0^2)^{\alpha q}}.
\end{aligned}
$$

Дакле,

$$
\|f\|_{\infty,q,\alpha}^q \leqslant \frac{1}{(1-r_0^2)^{\alpha q}}\left(\frac{2\alpha q r_0}{1-r_0^2} + \left(\frac{3\sqrt{3}}{4}\right)^{\alpha q}\right),
$$

на основу чега закључујемо

$$
\|F_z\|_{\infty,q,\alpha} \geqslant \frac{f(r_0)}{\|f\|_{p,q,\alpha}} \geqslant \frac{1}{(1-|z|^2)^{\alpha}}\left(\frac{2\alpha q|z|}{1-|z|^2} + \left(\frac{3\sqrt{3}}{4}\right)^{\alpha q}\right)^{-\frac{1}{q}}.
$$

За ограничавање норме одозго, за произвољно $f \in H^{\infty,q,\alpha}$ и $z \in \mathbb{D}$ , на основу принципа максимума имамо

$$
|f(z)|^q \leq \sup_{\theta\in[0,2\pi)} \left|f\left(re^{i\theta}\right)\right|^q, \tag{2.5}
$$

за све $r \geq |z|$. Интеграљењем (2.5) у односу на меру $2\alpha q r(1-r^2)^{\alpha q-1}$, на интервалу $[|z|, 1]$, добијамо

$$
(1-|z|^2)^{\alpha q}|f(z)|^q \leq 2\alpha q\int_{|z|}^{1} r(1-r^2)^{\alpha q-1}M_\infty^q(r,f)\,dr \leq \|f\|_{\infty,q,\alpha}^q.
$$

Дакле,

$$\|F_z\| \leq \frac{1}{(1-|z|^2)^\alpha}.$$

- **Случај $\boldsymbol{p=\infty,\ q=\infty}$ :**

За $f(w)=\frac{1}{(1-w^2)^\alpha}$, $w\in\mathbb{D}$, имамо

$$\|f\|_{\infty,\infty,\alpha}=\sup_{0<r<1}(1-r^2)^\alpha \sup_{\theta\in[0,2\pi)}\frac{1}{|1-r^2e^{2i\theta}|^\alpha}=\sup_{0<r<1}\left(\frac{1-r^2}{1-r^2}\right)^\alpha=1.$$

Тада, за произвољно $z\in\mathbb{D}$ такво да $|z|=r_0$, добијамо

$$\|F_z\|\geq\frac{|f(r_0)|}{\|f\|_{\infty,\infty,\alpha}}=\frac{1}{(1-|z|^2)^\alpha}.$$

Нека је сада $f\in H^{\infty,\infty,\alpha}$ произвољно и $z\in\mathbb{D}$. На основу принципа максимума, имамо

$$|f(z)|\leq\sup_{\theta\in[0,2\pi)}\left|f\left(re^{i\theta}\right)\right|,$$

где $r\geq|z|$ произвољно. Како је

$$(1-|z|^2)^\alpha|f(z)|\leq\sup_{|z|\leq r<1}(1-r^2)^\alpha M_\infty(r,f)\leq\|f\|_{\infty,\infty,\alpha},$$

онда

$$\|F_z\|\leq\frac{1}{(1-|z|^2)^\alpha}.$$

Овим је доказ завршен. □

**Хипотеза.** На основу претходног, претпостављамо да ће за све $0<p,q\leq\infty$, $0<\alpha<\infty$ и $f\in H^{p,q,\alpha}$ важити неједнакост

$$|f(z)|\leqslant\frac{\|f\|_{p,q,\alpha}}{(1-|z|^2)^{\alpha+\frac{1}{p}}}.$$

## Норма композиционог оператора у просторима са мешовитом нормом

Наредна теорема је главни резултат рада [13].

**Теорема 2.3.2.** *Нека је $0<p,q\leq\infty$, $0<\alpha<\infty$ и $\varphi:\mathbb{D}\to\mathbb{D}$ холоморфно пресликавање. Тада*

$$C_1\frac{1}{(1-|\varphi(0)|^2)^{\alpha+\frac{1}{p}}}\leq\|\,\mathrm{C}_\varphi\,\|\leq C_2\left(\frac{1+|\varphi(0)|}{1-|\varphi(0)|}\right)^{\alpha+\frac{1}{p}},$$

*где*

$$C_1 = \begin{cases} \dfrac{\Gamma\left(\frac{\alpha p+\frac{p}{q}+1}{2}\right)^{\frac{2}{p}}}{\Gamma\left(\alpha p+\frac{p}{q}\right)^{\frac{1}{p}}}, & 0<p,q<\infty,\ \frac{q}{p}\leq 1;\\ \dfrac{\Gamma\left(\frac{\alpha p+\frac{p}{q}+1}{2}\right)^{\frac{2}{p}}}{2^{\alpha+\frac{3}{p}}\Gamma\left(\alpha p+\frac{p}{q}\right)^{\frac{1}{p}}}, & 0<p,q<\infty,\ \frac{q}{p}>1;\\ \dfrac{\Gamma\left(\frac{\alpha p+1}{2}\right)^{\frac{2}{p}}}{2^{\alpha}\Gamma(\alpha p)^{\frac{1}{p}}}, & 0<p<\infty,\ q=\infty;\\ \left(\frac{2\alpha q|\varphi(0)|}{1-|\varphi(0)|^2}+\left(\frac{3\sqrt{3}}{4}\right)^{\alpha q}\right)^{-\frac{1}{q}}, & p=\infty,\ 0<q<\infty;\\ 1, & p=\infty,\ q=\infty, \end{cases}$$

*и*

$$C_2 = \begin{cases} 1, & \alpha q\geq 1, \frac{q}{p}\leq 1 \ \text{ или } \ \alpha q<1, \frac{q}{p}\leq\frac{1}{2} \ \text{ или } \ p=\infty, q=\infty;\\ \left(\frac{3+|\varphi(0)|}{1+|\varphi(0)|}\right)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}, & \alpha q\geq 1, \frac{q}{p}>1;\\ \left(\frac{1+|\varphi(0)|}{1+3|\varphi(0)|}\right)^{\alpha-\frac{1}{q}}, & \alpha q<1, \frac{1}{2}<\frac{q}{p}\leq 1;\\ (1+|\varphi(0)|)^{\alpha-\frac{1}{p}}, & \alpha q<1, \frac{q}{p}>1. \end{cases}$$

*Доказ.* Нека је пресликавање $\varphi:\mathbb{D}\to\mathbb{D}$ холоморфно, тада

$$F_z\,\mathrm{C}_\varphi f = \mathrm{C}_\varphi f(z) = f(\varphi(z)) = F_{\varphi(z)}f,$$

за $z\in\mathbb{D}$ и $f\in H^{p,q,\alpha}$ произвољне. Односно, $F_z\,\mathrm{C}_\varphi = F_{\varphi(z)}$ за било које $z\in\mathbb{D}$. У терминима норми, важи

$$\|C_\varphi\| \geq \frac{\|F_{\varphi(z)}\|}{\|F_z\|}.$$

Узимајући $z=0$, имамо

$$\|\,\mathrm{C}_\varphi\,\| \geq \frac{\|F_{\varphi(0)}\|}{\|F_0\|}.$$

На основу леме 2.3.3 важи следећа оцена за $\|C_\varphi\|$ одоздо

$$\|C_\varphi\| \geq \begin{cases} \dfrac{\Gamma\left(\frac{\alpha p+\frac{p}{q}+1}{2}\right)^{\frac{2}{p}}}{\Gamma\left(\alpha p+\frac{p}{q}\right)^{\frac{1}{p}}}\dfrac{1}{(1-|\varphi(0)|^2)^{\alpha+\frac{1}{p}}}, & 0<p,q<\infty,\ \frac{p}{q}\geq 1;\\ \dfrac{\Gamma\left(\frac{\alpha p+\frac{p}{q}+1}{2}\right)^{\frac{2}{p}}}{2^{\alpha+\frac{3}{p}}\Gamma\left(\alpha p+\frac{p}{q}\right)^{\frac{1}{p}}}\dfrac{1}{(1-|\varphi(0)|^2)^{\alpha+\frac{1}{p}}}, & 0<p,q<\infty,\ \frac{p}{q}<1;\\ \dfrac{\Gamma\left(\frac{\alpha p+1}{2}\right)^{\frac{2}{p}}}{2^{\alpha}\Gamma(\alpha p)^{\frac{1}{p}}}\dfrac{1}{(1-|\varphi(0)|^2)^{\alpha+\frac{1}{p}}}, & 0<p<\infty,\ q=\infty;\\ \left(\frac{2\alpha q|\varphi(0)|}{1-|\varphi(0)|^2}+\left(\frac{3\sqrt{3}}{4}\right)^{\alpha q}\right)^{-\frac{1}{q}}\dfrac{1}{(1-|\varphi(0)|^2)^{\alpha}}, & p=\infty,\ 0<q<\infty;\\ \dfrac{1}{(1-|\varphi(0)|^2)^{\alpha}}, & p=\infty,\ q=\infty. \end{cases}$$

Да бисмо ограничили норму оператора $C_\varphi$ одозго, посматраћемо да ли су $p$ или $q$ бесконачни.

Нека је $\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ холоморфно тако да $|\varphi(0)| = c$. Нека је $0 < p, q \leq \infty$, $0 < \alpha < \infty$ и $f \in H^{p,q,\alpha}$ произвољно.

• **Случај $0 < p, q < \infty$:**

У овом случају користимо две методе, у зависности од тога како се параметри $p, q$ и $\alpha$ односе. Први метод је сличан методу који је приказан у раду [2].

На основу последице 1.1.1 важи,

$$|\varphi(z)| \leq \frac{(1-c)|z| + 2c}{1+c},$$

за $z \in \mathbb{D}$. Нека је $z \in \mathbb{D}$ такво да $|z| = r$, и нека је $R = \frac{(1-c)r+2c}{1+c}$. Тада на основу леме 1.5.1, важиће следећа неједнакост

$$M_p^p(r, f \circ \varphi) \leq \frac{R+c}{R-c} M_p^p(R, f).$$

На основу претходне неједнакости и смене променљиве $R = \frac{(1-c)r+2c}{1+c}$, долазимо до наредне оцене

$$\begin{aligned} \|f \circ \varphi\|_{p,q,\alpha}^q =& 2\alpha q \int_0^1 r(1-r^2)^{\alpha q - 1} M_p^q(r, f \circ \varphi)\, dr \\ \leq& 2\alpha q \int_0^1 r(1-r^2)^{\alpha q-1} \left(\frac{R+c}{R-c}\right)^{\frac{q}{p}} M_p^q(R, f)\, dr \\ =& \frac{(1+c)^{\alpha q}}{(1-c)^{2\alpha q}} \int_{\frac{2c}{1+c}}^1 \frac{((1+c)R - 2c)(R+c)}{R(R-c)} \left(\frac{R+c}{R-c}\right)^{\frac{q}{p}-1} \cdot \\ & \cdot \left(\frac{(1+c)R + 1 - 3c}{1+R}\right)^{\alpha q - 1} R(1-R^2)^{\alpha q-1} M_p^q(R, f)\, dR. \end{aligned} \tag{2.6}$$

Како

$$\frac{((1+c)R - 2c)(R+c)}{R(R-c)} \leq 1 + c,$$

за $R \in (\frac{2c}{1+c}, 1)$ , на основу (2.6), имамо

$$\begin{aligned} \|f \circ \varphi\|_{p,q,\alpha}^q \leq \frac{(1+c)^{\alpha q+1}}{(1-c)^{2\alpha q}} \int_{\frac{2c}{1+c}}^1 \left(\frac{R+c}{R-c}\right)^{\frac{q}{p}-1} \left(\frac{(1+c)R + 1 - 3c}{1+R}\right)^{\alpha q - 1} \cdot \\ \cdot R(1-R^2)^{\alpha q - 1} M_p^q(R, f)\, dR. \end{aligned} \tag{2.7}$$

Нека је $\alpha q = a$ и $\frac{q}{p} = b$. Имамо следеће случајеве

1. $a \geq 1$:

   Користећи $\frac{(1+c)R+1-3c}{1+R} \leq 1-c$ у (2.7), имамо

$$\|f \circ \varphi\|_{p,q,\alpha}^q \leq \frac{(1+c)^{a+1}}{(1-c)^{a+1}} \int_{\frac{2c}{1+c}}^1 \left(\frac{R+c}{R-c}\right)^{b-1} R(1-R^2)^{a-1} M_p^q(R,f)\, dR. \quad (2.8)$$

   За $b \leq 1$ на основу тога да $\frac{R+c}{R-c} \geq \frac{1+c}{1-c}$ и (2.8), добијамо

$$\|f \circ \varphi\|_{p,q,\alpha}^q \leq \left(\frac{1+c}{1-c}\right)^{a+b} \|f\|_{p,q,\alpha}^q.$$

   За $b > 1$, имамо $\frac{R+c}{R-c} \leq \frac{3+c}{1-c}$, онда, на основу (2.8), добијамо

$$\|f \circ \varphi\|_{p,q,\alpha}^q \leq \left(\frac{1+c}{1-c}\right)^{a+b} \left(\frac{3+c}{1+c}\right)^{b-1} \|f\|_{p,q,\alpha}^q.$$

2. $a < 1$:

   На основу неједнакости $\frac{(1-c)(1+c)}{1+3c} \leq \frac{(1+c)R+1-3c}{1+R}$, и (2.7) важи

$$\|f \circ \varphi\|_{p,q,\alpha}^q \leq \frac{(1+c)^{2a}}{(1-c)^{a+1}(1+3c)^{a-1}} \cdot \int_{\frac{2c}{1+c}}^1 \left(\frac{R+c}{R-c}\right)^{b-1} R(1-R^2)^{a-1} M_p^q(R,f)\, dR. \quad (2.9)$$

   Ако $b \leq 1$, користећи да $\frac{R+c}{R-c} \geq \frac{1+c}{1-c}$ у (2.9), добијамо

$$\|f \circ \varphi\|_{p,q,\alpha}^q \leq \left(\frac{1+c}{1-c}\right)^{a+b} \left(\frac{1+c}{1+3c}\right)^{a-1} \|f\|_{p,q,\alpha}^q.$$

   За $b > 1$, важи $\frac{R+c}{R-c} \leq \frac{3+c}{1-c}$, применом тога у (2.9), имамо

$$\|f \circ \varphi\|_{p,q,\alpha}^q \leq \left(\frac{1+c}{1-c}\right)^{a+b} (1+c)^{a-b} \|f\|_{p,q,\alpha}^q.$$

На други начин долазимо до боље оцене у случају када $a < 1$ и $b \leq \frac{1}{2}$:

Користећи последицу 1.1.1, добијамо $|\varphi(z)| \leq \frac{|z|+c}{1+c|z|}$. Нека је $|z| = r < 1$ и $\rho = \frac{r+c}{1+cr}$. На основу леме 1.5.1 важи

$$\begin{aligned} \|f \circ \varphi\|_{p,q,\alpha} &= 2a \int_0^1 r(1-r^2)^{a-1} M_p^q(r, f\circ\varphi)\, dr \\ &\leq 2a \int_0^1 r(1-r^2)^{a-1} \left(\frac{\rho+c}{\rho-c}\right)^b M_p^q(\rho, f)\, dr. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Након смене променљиве $\rho = \frac{r+c}{1+cr}$ у (2.10) имамо

$$\|f\circ\varphi\|_{p,q,\alpha} \le 2a\int_c^1 \frac{(\rho-c)^{1-b}(\rho+c)^b(1-c^2)^a}{(1-\rho c)^{2a+1}}(1-\rho^2)^{a-1}M_p^q(\rho,f)\,d\rho.$$

Нека је

$$\begin{aligned}\Phi(\rho) =& \frac{(\rho-c)^{1-b}(\rho+c)^b(1-c^2)^a}{(1-\rho c)^{2a+1}}(1-\rho^2)^{a-1}M_p^q(\rho,f),\\ \Psi(\rho) =& \rho(1-\rho^2)^{a-1}M_p^q(\rho,f).\end{aligned}$$

Посматрајмо функцију

$$h(\rho) = \frac{\Phi(\rho)}{\Psi(\rho)} = \frac{(\rho-c)^{1-b}(\rho+c)^b(1-c^2)^a}{\rho(1-\rho c)^{2a+1}}$$

за $c < \rho < 1$, тада

$$\begin{aligned}h'(\rho) = & \frac{c(1-c^2)^a(\rho-c)^{-b}(\rho+c)^{b-1}}{\rho^2(1-\rho c)^{2a+2}}\cdot\\ & \cdot\left(((1-2b)\rho+c)(1-c\rho)+(2a+1)\rho(\rho^2-c^2)\right).\end{aligned}$$

Ако $b \le \frac{1}{2}$ онда $h'(\rho) \ge 0$. Дакле, $h(\rho) \le \left(\frac{1+c}{1-c}\right)^{a+b}$. Како $\Phi(\rho) \le \left(\frac{1+c}{1-c}\right)^{a+b}\Psi(\rho)$, за $c < \rho < 1$ и $b \le \frac{1}{2}$, онда

$$\begin{aligned}\|f\circ\varphi\|_{p,q,\alpha}^q \le & 2a\int_c^1 \Phi(\rho)\,d\rho \le \left(\frac{1+c}{1-c}\right)^{a+b}\int_c^1 \Psi(\rho)\,d\rho\\ \le & \left(\frac{1+c}{1-c}\right)^{a+b}\|f\|_{p,q,\alpha}^q.\end{aligned}$$

**• Случај $0 < p < \infty$, $q = \infty$ :**

На основу последице 1.1.1 и леме 1.5.1, за $z \in \mathbb{D}$ такво да $|z| = r$ и $R = \frac{(1-c)r+2c}{1+c}$, имамо

$$\begin{aligned}\|f\circ\varphi\|_{p,\infty,\alpha} \le & \sup_{0<r<1}(1-r^2)^\alpha\left(\frac{R+c}{R-c}\right)^{\frac{1}{p}}M_p(R,f)\\ = & \left(\frac{1+c}{(1-c)^2}\right)^\alpha \sup_{\frac{2c}{1+c}\le R<1}(1-R)^\alpha(1-3c+(1+c)R)^\alpha\left(\frac{R+c}{R-c}\right)^{\frac{1}{p}}M_p(R,f).\end{aligned}$$

Како $1-3c+(1+c)R \le (1-c)(1+R)$, онда

$$\|f\circ\varphi\|_{p,\infty,\alpha} \le \left(\frac{1+c}{1-c}\right)^{\alpha+\frac{1}{p}}\left(\frac{3+c}{1+c}\right)^{\frac{1}{p}}\|f\|_{p,\infty,\alpha}.$$

Дакле,

$$\| \, \mathrm{C}_\varphi \, \| \leq \left( \frac{1+c}{1-c} \right)^{\alpha + \frac{1}{p}} \left( \frac{3+c}{1+c} \right)^{\frac{1}{p}}.$$

• **Случај $p = \infty$, $0 < q < \infty$ :**

На основу принципа максимума за $0 \leq r < 1$ важи

$$\sup_{0 \leq \theta < 2\pi} \left| f \circ \varphi \left( re^{i\theta} \right) \right| \leq \sup_{0 \leq \theta < 2\pi} \left| f \left( Re^{i\theta} \right) \right|,$$

где на основу последице 1.1.1, $\left| \varphi \left( re^{i\theta} \right) \right| \leq R = \frac{r+c}{1+rc}$ за све $0 \leq \theta < 2\pi$. Тада

$$\|f \circ \varphi\|^q_{\infty,q,\alpha} \leq 2\alpha q \int_0^1 r(1-r^2)^{\alpha q - 1} M_\infty(R, f) \, dr.$$

Након смене промењиве $R = \frac{r+c}{1+rc}$ у претходном интегралу, добијамо

$$\|f \circ \varphi\|^q_{\infty,q,\alpha} \leq (1-c^2)^{\alpha q} 2\alpha q \int_c^1 \frac{R-c}{(1-Rc)^{2\alpha q+1}} (1-R^2)^{\alpha q - 1} M_\infty(R, f) \, dR.$$

Како $\frac{R-c}{1-Rc} \leq R$ и $\frac{1}{(1-Rc)^{2\alpha q}} \leq \frac{1}{(1-c)^{2\alpha q}}$ када $c < R < 1$, онда

$$\|f \circ \varphi\|^q_{\infty,q,\alpha} \leq \left( \frac{1+c}{1-c} \right)^{\alpha q} \|f\|^q_{\infty,q,\alpha}.$$

Дакле,

$$\| \, \mathrm{C}_\varphi \, \| \leq \left( \frac{1+c}{1-c} \right)^{\alpha}.$$

• **Случај $p = \infty$, $q = \infty$ :**

На основу последице 1.1.1 и принципа максимума, добијамо

$$\begin{aligned}
\|f \circ \varphi\|_{\infty,\infty,\alpha} &= \sup_{0 \leq r < 1} (1-r^2)^\alpha \sup_{0 \leq \theta < 2\pi} \left| f \circ \varphi \left( re^{i\theta} \right) \right| \\
&\leq \sup_{0 \leq r < 1} (1-r^2)^\alpha \sup_{0 \leq \theta < 2\pi} \left| f \left( Re^{i\theta} \right) \right| \\
&= (1-c^2)^\alpha \sup_{c \leq R < 1} \frac{1}{(1-Rc)^{2\alpha}} (1-R^2)^\alpha M_\infty(R, f) \\
&\leq \left( \frac{1+c}{1-c} \right)^\alpha \|f\|_{\infty,\infty,\alpha}.
\end{aligned}$$

Дакле,

$$\| \, \mathrm{C}_\varphi \, \| \leq \left( \frac{1+c}{1-c} \right)^{\alpha}.$$

Овим је доказ завршен. □

**Напомена 2.2.** Приметимо да је у доказу теореме 2.2.2 при процени ограничења одозго била коришћена смена променљивих која се спроводила на јединичном диску. Из тог разлога, овај доказ не можемо директно применити на процену норме композиционог оператора одозго у случају простора $H^{p,q,\alpha}$ када су параметри $p$ и $q$ различити.

**Хипотеза.** Мотивисани оценама норме композиционог оператора на Хардијевим и тежинским Бергмановим просторима, можемо претпоставити да ће за $0 < p, q \leq \infty$, $0 < \alpha < \infty$ и $f \in H^{p,q,\alpha}$ важити

$$\|C_\varphi\| \leqslant \left(\frac{1 + |\varphi(0)|}{1 - |\varphi(0)|}\right)^{\alpha + \frac{1}{p}}.$$

# Глава 3

# Оцене норме оператора Хилбертове матрице на Бергмановим просторима

Хилбертову матрицу представио је Д. Хилберт у раду [23] 1895. године, где је добијена као Грамова матрица система $\{x^n\}_{n=0}^{\infty}$. Њени елементи су облика $h_{nm} = \int_0^1 x^{n+m} dx$ за $n, m \geq 0$. Ову матрицу можемо посматрати и као оператор који дејствује на просторима холоморфних функција.

У овој глави дата је дефиниција оператора Хилбертове матрице на просторима холоморфних функција и посматрана је норма овог оператора на тежинским Бергмановим просторима.

## 3.1 Оператор Хилбертове матрице

**Дефиниција 3.1.** Пресликавање $A : X \to Y$, где су $X$ и $Y$ простори низова, је Ханкелов оператор ако постоји низ комплексних бројева $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ тако да за елементе матрице тог пресликавања $[A] = [\alpha_{nm}]_{n,m=0}^{\infty}$ важи $\alpha_{nm} = a_{n+m}$ за све $n, m \leq 0$.

Приметимо да ово заправо значи да су елементи матрице Ханкеловог оператора исти на споредним дијагоналама. Један од најважнијих примера Ханкеловог оператора је управо оператор Хилбертове матрице који је облика $[H] = [\frac{1}{n+m+1}]_{n,m=0}^{\infty}$. За више информација о Ханкеловим операторима, видети [29].

**Дефиниција 3.2.** Оператор Хилбертове матрице $H$ јесте оператор индукован бесконачном квадратном матрицом

$$[H] = [h_{nm}]_{n,m=0}^{\infty} = \left[\frac{1}{n+m+1}\right]_{n,m=0}^{\infty}.$$

Прво је разматрано дејство Хилбертове матрице на елементарним просторима низова.

**Дефиниција 3.3.** Простор $\ell^p$, $0 < p < \infty$, се састоји од низова $\boldsymbol{a} = \{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ за које важи

$$\|\boldsymbol{a}\|_{\ell^p} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^p\right)^{1/p} \leq \infty.$$

Тада оператор Хилбертове матрице $H$ дејствује на $\ell^p$ на следећи начин

$$H : \{a_n\}_{n=0}^{\infty} \to \left\{\sum_{m=0}^{\infty} \frac{a_m}{n+m+1}\right\}_{n=0}^{\infty} \quad \text{за све } \{a_n\}_{n=0}^{\infty} \in \ell^p.$$

Показано је у [34] да је непрекидан део спектра оператора Хилбертове матрице интервал $[0, \pi]$ и да је то заправо цео спектар овог оператора на простору $\ell^p$. Осим тога, Литлвуд, Харди и Полија, у [21], показали су да је $\|H\|_{\ell^p \to \ell^p} \leq \frac{1}{\sin \frac{\pi}{p}}$ за све $1 < p < \infty$.

Диамантополус и Сискакис, у раду [11], посматрају оператор Хилбертове матрице $H$ као оператор који дејствује на просторима холоморфних функција. Како функцији $f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D})$ можемо придружити низ Тејлорових коефицијената $\left\{\widehat{f}(n)\right\}_{n=0}^{\infty}$, односно $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \widehat{f}(n) z^n$, имамо да важи

$$Hf(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} h_{nm}\widehat{f}(m) z^n = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} \frac{\widehat{f}(m)}{n+m+1} z^n.$$

У раду [11], Диамантополус и Сискакис показују да је оператор $H$ ограничен на Хардијевом простору $H^p$ ако и само ако $1 < p < \infty$. У случају када $2 \leq p < \infty$, добијају да је $\|H\|_{H^p \to H^p} \leq \frac{\pi}{\sin \frac{\pi}{p}}$. Осим тога, Диамантополус у [10], посматра понашање оператора $H$ на Бергмановим просторима $A^p$, где показује да је оператор $H : A^p \to A^p$ ограничен ако и само ако је $2 < p < \infty$ и у случају када је $4 \leq p < \infty$ показује да важи $\|H\|_{A^p \to A^p} \leq \frac{\pi}{\sin \frac{2\pi}{p}}$. Достанић, Јевтић и Вукотић у [16] добијају да је $\|H\|_{H^p \to H^p} = \frac{\pi}{\sin \frac{\pi}{p}}$ за све $1 < p < \infty$ и да је $\|H\|_{A^p \to A^p} \geq \frac{\pi}{\sin \frac{2\pi}{p}}$ за све $2 < p < \infty$. Односно, тиме је показано да је $\|H\|_{A^p \to A^p} = \frac{\pi}{\sin \frac{2\pi}{p}}$ за све

$4 \leq p < \infty$. Божин и Карапетровић у [4] показују да је $\|H\|_{A^p\to A^p} = \frac{\pi}{\sin\frac{2\pi}{p}}$ за $2 < p < 4$ и да $\|H\|_{A^p\to A^p} \geq \frac{\pi}{\sin\frac{2\pi}{p}}$ за $2 < p < \infty$. И овим је показано да је $\|H\|_{A^p\to A^p} = \frac{\pi}{\sin\frac{2\pi}{p}}$ за све $2 < p < \infty$.

За више информација о Ханкеловим операторима, оператору Хилбертове матрице на просторима низова и Хардијевим просторима, погледати [25].

Један од главних алата за процену норме оператора Хилбертове матрице на тежинским Бергмановим просторима је интегрална репрезентација овог оператора.

**Пропозиција 3.1.1.** *Нека је $f \in A^p_\alpha$ и $1 < \alpha + 2 < p$. Тада важи*

$$Hf(z) = \int_0^1 \frac{f(t)}{1-tz}dt.$$

*Доказ.* На основу теореме 2.2.1

$$\left|\int_0^1 \frac{f(t)}{1-tz}dt\right| \leq \int_0^1 \frac{|f(t)|}{|1-zt|}dt \leq \frac{\int_0^1 \frac{1}{(1-t^2)^{(\alpha+2)/p}}dt}{1-|z|}\|f\|_{A^p_\alpha} < +\infty,$$

јер интеграл $\int_0^1 \frac{1}{(1-t^2)^{(\alpha+2)/p}}dt$ конвергира за $\alpha + 2 < p$. Дакле, интеграл са десне стране једнакости конвергира. Нека је развој функције $f$ у Тејлоров ред облика $f(z) = \sum\limits_{m=0}^{\infty} \widehat{f}(m)z^m$, за све $z \in \mathbb{D}$. Тада важи

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{f(t)}{1-tz}dt &= \int_0^1 f(t)\sum_{n=0}^{\infty}(tz)^n dt = \int_0^1 \sum_{m=0}^{\infty}\widehat{f}(m)t^m \sum_{n=0}^{\infty} t^n z^n dt \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{m=0}^{\infty}\widehat{f}(m)\int_0^1 t^{n+m}dt\right)z^n = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\widehat{f}(m)}{n+m+1}\right)z^n \\
&= Hf(z),
\end{aligned}$$

што је и требало доказати. □

**Лема 3.1.1.** [10] *Нека је $f \in A^p_\alpha$, где је $2 < p < \infty$. Тада важи*

$$Hf(z) = \int_0^1 \frac{1}{1-(1-t)z} f\left(\frac{t}{1-(1-t)z}\right)dt.$$

*Доказ.* За $z \in \mathbb{D}$ и $0 < r < 1$ дефинишимо

$$C_r f(z) = \int_0^r \frac{f(t)}{1-tz}dt.$$

На основу интегралне репрезентације оператора $H$, имамо

$$Hf(z) = \lim_{r\to 1-} C_r f(z).$$

Нека је $z \in \mathbb{D}$. Увођењем смене променљиве $t = t(s) = \frac{rs}{1-r(1-s)z}$ за $0 \le s \le 1$, добијамо да важи

$$\begin{aligned} C_r f(z) &= \int_0^r \frac{f(t)}{1-tz} dt = \int_0^1 f(t(s)) \frac{1}{1-t(s)z} t'(s) ds \\ &= \int_0^1 \frac{r}{1-r(1-s)z} f\left(\frac{rs}{1-r(1-s)z}\right) ds. \end{aligned}$$

С друге стране, означимо са

$$h_r(s) = \frac{r}{1-r(1-s)z} f(\phi_{r,s}(z)),$$

где је

$$\phi_{r,s}(z) = \frac{rs}{1-r(1-s)z}.$$

Приметимо да је $\phi_{r,s} : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ холоморфно пресликавање за све $0 \le r, s \le 1$. Осим тога,

$$\frac{r}{|1-r(1-s)z|} \le \frac{1}{|1-z|} \le \frac{2}{1-|z|^2}.$$

На основу теореме 2.2.1, важи

$$|f(\phi_{r,s}(z))| \le \frac{1}{(1-|z|^2)^{(\alpha+2)/p}} \|f \circ \phi_{r,s}\|_{A^p_\alpha}, \text{ за све } z \in \mathbb{D}. \tag{3.1}$$

На основу тоереме 2.2.2, важи да је

$$\|C_{\phi_{r,s}}\|_{A^p_\alpha \to A^p_\alpha} \le \left(\frac{1+|\phi_{r,s}(0)|}{1-|\phi_{r,s}(0)|}\right)^{\frac{\alpha+2}{p}},$$

односно,

$$\|f \circ \phi_{r,s}\|_{A^p_\alpha} \le \left(\frac{1+rs}{1-rs}\right)^{\frac{\alpha+2}{p}} \|f\|_{A^p_\alpha} \le \left(\frac{1+s}{1-s}\right)^{\frac{\alpha+2}{p}} \|f\|_{A^p_\alpha}.$$

Користећи претходну неједнакост и (3.1), добијамо

$$|h_r(s)| \le \frac{2}{(1-|z|^2)^{1+(\alpha+2)/p}} \left(\frac{1+s}{1-s}\right)^{\frac{\alpha+2}{p}} \|f\|_{A^p_\alpha}.$$

Како је $\alpha + 2 < p$, десна страна претходне неједнакости је интеграбилна функција по параметру $s$ на интервалу $(0, 1)$. На основу Лебегове теореме о доминантној конвергенцији, добијамо да важи

$$Hf(z) = \int_0^1 \frac{1}{1-(1-s)z} f\left(\frac{s}{1-(1-s)z}\right) ds.$$

$\square$

Са $T_t$ означићемо тежински композициони оператор, дефинисан на следећи начин:

$$T_t f(z) = \frac{1}{1-(1-t)z} f\left(\frac{t}{1-(1-t)z}\right).$$

Тада, за све $z \in \mathbb{D}$ и $f \in A^p_\alpha$, важи

$$Hf(z) = \int_0^1 T_t f(z) dt.$$

Карапетровић и Јевтић, у раду [24], показали су да је оператор Хилбертове матрице $H : A^p_\alpha \to A^p_\alpha$ ограничен ако и само ако је $1 < \alpha + 2 < p$. Након тога, Карапетровић у [26] показује да је норма Хилбертове матрице ограничена одоздо са $\frac{\pi}{\sin \frac{(\alpha+2)\pi}{p}}$, за $1 < \alpha + 2 < p$. У наведеном раду он такође формулише хипотезу да је норма и једнака овој константи за све $\alpha$ и $p$ такве да $1 < \alpha+2 < p$.

**Теорема 3.1.1.** [26] *Нека је $1 < \alpha + 2 < p$. Тада за оператор Хилбертове матрице $H$, који дејствује на тежинском Бергмановом простору $A^p_\alpha$, важи*

$$\|H\|_{A^p_\alpha \to A^p_\alpha} \geq \frac{\pi}{\sin \frac{(\alpha+2)\pi}{p}}.$$

*Доказ.* Нека је $1 < \gamma < \alpha + 2 < p$ и $f_\gamma(z) = (1-z)^{-\frac{\gamma}{p}}$, $z \in \mathbb{D}$. Тада

$$\|f_\gamma\|^p_{A^p_\alpha} = F\left(\frac{\gamma}{2}, \frac{\gamma}{2}, \alpha+2; 1\right).$$

На основу Ојлер-Гаусове формуле важи

$$\frac{\Gamma^2\left(k+\frac{\gamma}{2}\right)}{\Gamma(k+\alpha+2)} \sim \frac{k!}{(k+1)^{\alpha+3-\gamma}},\ k \to \infty.$$

Како $\alpha+3-\gamma > 1$, имамо $\|f_\gamma\|_{A^p_\alpha} < \infty$. С друге стране, имамо да $\lim\limits_{\gamma \to \alpha+2} \|f\|_{A^p_\alpha} = \infty$. На основу пропозиције 3.1.1 и да је

$$F\left(\frac{\gamma}{2}, \frac{\gamma}{2}, \alpha+2; 1\right) = \frac{1}{B\left(\frac{\gamma}{2}, \alpha+2-\frac{\gamma}{2}\right)} \int_0^1 \frac{t^{\frac{\gamma}{2}-1}(1-t)^{\alpha+1-\frac{\gamma}{2}}}{(1-tz)^{\frac{\gamma}{2}}},$$

долазимо до

$$Hf_\gamma(z) = \int_0^1 \frac{dt}{(1-t)^{\frac{\gamma}{p}}(1-tz)} = B\left(1, 1-\frac{\gamma}{p}\right) F\left(1, 1, 2-\frac{\gamma}{p}; z\right).$$

Односно,

$$Hf_\gamma(z) = \Gamma\left(\frac{\gamma}{p}\right)\Gamma\left(1-\frac{\gamma}{p}\right)\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma^2(k+1)}{\Gamma\left(k+2-\frac{\gamma}{p}\right)\Gamma\left(k+\frac{\gamma}{p}\right)} \frac{\Gamma\left(k+\frac{\gamma}{p}\right)}{\Gamma\left(\frac{\gamma}{p}\right)} \frac{z^k}{k!}.$$

Како је
$$\frac{\Gamma^2(k+1)}{\Gamma\left(k+2-\frac{\gamma}{p}\right)\Gamma\left(k+\frac{\gamma}{p}\right)} = 1 + O\left(\frac{1}{k+1}\right),$$
добијамо
$$Hf_\gamma(z) = \frac{\pi}{\sin\frac{\pi\gamma}{p}}(f_\gamma(z) + g_\gamma(z)),$$
где је
$$\sup_{1<\gamma<\alpha+2} \|g_\gamma\|_\infty \le C_{p,\alpha} < \infty,$$
односно
$$\sup_{1<\gamma<\alpha+2} \|g_\gamma\|_{A^p_\alpha} \le C_{p,\alpha} < \infty.$$
Дакле,
$$\|H\|_{A^p_\alpha \to A^p_\alpha} \ge \frac{\|Hf_\gamma\|_{A^p_\alpha}}{\|f_\gamma\|_{A^p_\alpha}} \ge \frac{\pi}{\sin\frac{\pi\gamma}{p}} \frac{\|f_\gamma\|_{A^p_\alpha} - \|g_\gamma\|_{A^p_\alpha}}{\|f_\gamma\|}.$$
Пуштајући да $\gamma \to \alpha+2$, добијамо
$$\begin{aligned}\|H\|_{A^p_\alpha \to A^p_\alpha} &\ge \lim_{\gamma\to\alpha+2}\left(\frac{\pi}{\sin\frac{\pi\gamma}{p}} \frac{\|f_\gamma\|_{A^p_\alpha} - \|g_\gamma\|_{A^p_\alpha}}{\|f_\gamma\|}\right)\\ &= \frac{\pi}{\sin\frac{(\alpha+2)\pi}{p}} \lim_{\gamma\to\alpha+2}\left(1 - \frac{\|g_\gamma\|_{A^p_\alpha}}{\|f_\gamma\|_{A^p_\alpha}}\right) = \frac{\pi}{\sin\frac{(\alpha+2)\pi}{p}},\end{aligned}$$
јер је $\lim_{\gamma\to\alpha+2} \|f\|_{A^p_\alpha} = \infty$ и $\sup_{1<\gamma<\alpha+2} \|g_\gamma\|_{A^p_\alpha} \le C_{p,\alpha} < \infty$. Овим је доказ завршен.

□

**Хипотеза.** Ако $1 < \alpha+2 < p$, онда $\|H\|_{A^p_\alpha \to A^p_\alpha} = \frac{\pi}{\sin{(\alpha+2)/p}}$.

## 3.2 Хилбертова матрица на Бергмановим просторима са позитивним индексом

Циљ ове секције јесте испитивање области параметра $\alpha$ на коме важи претпоставка да је норма оператора Хилбертове матрице $H$ на тежинском Бергмановом простору $A^p_\alpha$, за $\alpha \ge 0$, једнака $\frac{\pi}{\sin\frac{(\alpha+2)\pi}{p}}$.

Карапетровић је у [26] показао да је претпоставка тачна уколико је $p \ge 2(\alpha+2)$ за $\alpha \ge 0$. Овим резултатом је сегмент на коме претпоставка није показана сведен на $\alpha+2 < p < 2(\alpha+2)$ за $\alpha \ge 0$, а на том сегменту, оценио је норму одозго.

**Теорема 3.2.1.** [26] *Нека је* $\alpha \geq 0$ *и* $p > \alpha + 2$.

*(i) Ако је* $p \geq 2(\alpha+2)$, *онда*

$$\|H\|_{A^p_\alpha \to A^p_\alpha} \leq \frac{\pi}{\sin \frac{(\alpha+2)\pi}{p}};$$

*(ii) Ако је* $2\alpha + 3 \leq p < 2(\alpha+2)$, *онда*

$$\|H\|_{A^p_\alpha \to A^p_\alpha} \leq 2^{\frac{\alpha+1}{p}} \frac{\pi}{\sin \frac{(\alpha+2)\pi}{p}};$$

*(iii) Ако је* $\alpha + 2 < p < 2\alpha + 3$, *онда*

$$\|H\|_{A^p_\alpha \to A^p_\alpha} \leq \left(1 + 2^{\frac{2(\alpha+2)}{p} - 1}\right) \frac{\pi}{\sin \frac{(\alpha+2)\pi}{p}}.$$

У даљем тексту дат је доказ дела $(i)$ теореме 3.2.1. За остатак доказа и више детаља о норми оператора $H$ на Хардијевим и Бергмановим просторима, погледати [26].

*Доказ.* На основу пропозиције 3.1.1 важи

$$Hf(z) = \int_0^1 T_t f(t) dt.$$

Користећи интегралну неједнакост Минковског, добијамо

$$\begin{aligned}
\|Hf\|_{A^p_\alpha} &= \left( \frac{\alpha+1}{\pi} \int_{\mathbb{D}} |Hf(z)|^p \, (1-|z|^2)^\alpha dm(z) \right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \left( \frac{\alpha+1}{\pi} \right)^{\frac{1}{p}} \left( \int_{\mathbb{D}} \left| \int_0^1 T_t f(z) (1-|z|^2)^{\frac{\alpha}{p}} dt \right|^p dm(z) \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \left( \frac{\alpha+1}{\pi} \right)^{\frac{1}{p}} \left( \int_0^1 \left( \int_{\mathbb{D}} |T_t f(z)|^p \, (1-|z|^2)^\alpha dt \right) dm(z) \right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \int_0^1 \|T_t f\|_{A^p_\alpha} dt.
\end{aligned} \tag{3.2}$$

Користећи смену променљиве $w = \phi_t(z)$, $z \in \mathbb{D}$, добијамо

$$\begin{aligned}
\|T_t f\|^p_{A^p_\alpha} &= \frac{(\alpha+1)}{\pi} \int_{\mathbb{D}} |\omega_t(z)|^p \, |f(\phi_t(z))|^p \, (1-|z|^2)^\alpha dm(z) \\
&= \frac{(\alpha+1)}{\pi} \int_{\phi_t(\mathbb{D})} \left|\omega_t(\phi_t^{-1}(w))\right|^p \frac{|f(w)|^p (1 - \left|\phi_t^{-1}(w)\right|^2)^\alpha}{\left|\phi_t'(\phi_t^{-1}(w))\right|^2} dm(w) \\
&= \frac{t^{2-p}}{(1-t)^2} \frac{(\alpha+1)}{\pi} \int_{\phi_t(\mathbb{D})} |w|^{p-4} |f(w)|^p \left( 1 - \left| \frac{w-t}{(1-t)w} \right|^2 \right)^\alpha dm(w).
\end{aligned}$$

Дакле,

$$\|T_t f\|_{A^p_\alpha} = \frac{t^{\frac{2}{p}-1}}{(1-t)^{\frac{2}{p}}} \left( \frac{\alpha+1}{\pi} \int_{D_t} |w|^{p-4} |f(w)|^p \left( 1 - \left| \frac{w-t}{(1-t)w} \right|^2 \right)^\alpha dm(w) \right)^{\frac{1}{p}},$$

где је $D_t = \phi_t(\mathbb{D}) = D\left(\frac{1}{2-t}, \frac{1-t}{2-t}\right)$. С друге стране, имамо да

$$\begin{aligned} 1 - \left| \frac{w-t}{(1-t)w} \right|^2 &= \frac{(1-t)^2|w|^2 - |w-t|^2}{(1-t)^2|w|^2} = \frac{2t\operatorname{Re} w - t^2 - t(2-t)|w|^2}{(1-t)^2|w|^2} \\ &= \frac{t}{1-t} \cdot \frac{2\operatorname{Re} w - t - (2-t)|w|^2}{(1-t)|w|^2}. \end{aligned}$$

Дакле,

$$\|T_t f\|_{A^p_\alpha} = \frac{t^{\frac{\alpha+2}{p}-1}}{(1-t)^{\frac{\alpha+2}{p}}} \left( \frac{\alpha+1}{\pi} \int_{D_t} |w|^{p-4} |f(w)|^p g_t(w)^\alpha dm(w) \right)^{\frac{1}{p}},$$

где је

$$g_t(w) = \frac{2\operatorname{Re} w - t - (2-t)|w|^2}{(1-t)|w|^2}, \text{ за } w \in D_t.$$

Користећи

$$\begin{aligned} g_t(w) &\le \frac{2|w| - t - (2-t)|w|^2}{(1-t)|w|^2} \\ &\le \frac{1 + |w|^2 - t - (2-t)|w|^2}{(1-t)|w|^2} \\ &= \frac{1-|w|^2}{|w|^2} \end{aligned}$$

и $\alpha \ge 0$, долазимо до тога да је

$$g_t(w)^\alpha \le |w|^{-2\alpha}(1-|w|^2)^\alpha.$$

Дакле, добијамо

$$\|T_t f\|_{A^p_\alpha} \le \frac{t^{\frac{\alpha+2}{p}-1}}{(1-t)^{\frac{\alpha+2}{p}}} \left( \frac{\alpha+1}{\pi} \int_{D_t} |w|^{p-2(\alpha+2)} |f(w)|^p (1-|w|^2)^\alpha dm(w) \right)^{\frac{1}{p}}. \tag{3.3}$$

**Случај $(i)$ : $p \ge 2(\alpha+2)$.**

Користећи (3.3) и $|w|^{p-2(\alpha+2)} \le 1$, за $w \in D_t \subset \mathbb{D}$, имамо да је

$$\begin{aligned} \|T_t f\|_{A^p_\alpha} &\le \frac{t^{\frac{\alpha+2}{p}-1}}{(1-t)^{\frac{\alpha+2}{p}}} \left( \frac{\alpha+1}{\pi} \int_{D_t} |f(w)|^p (1-|w|^2)^\alpha dm(w) \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\le \frac{t^{\frac{\alpha+2}{p}-1}}{(1-t)^{\frac{\alpha+2}{p}}} \left( \frac{\alpha+1}{\pi} \int_{\mathbb{D}} |f(w)|^p (1-|w|^2)^\alpha dm(w) \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \frac{t^{\frac{\alpha+2}{p}-1}}{(1-t)^{\frac{\alpha+2}{p}}} \|f\|_{A^p_\alpha}. \end{aligned}$$

На основу претходног и (3.2), добијамо

$$\begin{aligned}\|Hf\|_{A^p_\alpha} &\le \int_0^1 \frac{t^{\frac{\alpha+2}{p}-1}}{(1-t)^{\frac{\alpha+2}{p}}} dt \|f\|_{A^p_\alpha} = B\left(\frac{\alpha+2}{p}, 1-\frac{\alpha+2}{p}\right)\|f\|_{A^p_\alpha} \\ &= \Gamma\left(\frac{\alpha+2}{p}\right)\Gamma\left(1-\frac{\alpha+2}{p}\right)\|f\|_{A^p_\alpha} = \frac{\pi}{\sin\frac{(\alpha+2)\pi}{p}}\|f\|_{A^p_\alpha}.\end{aligned}$$

Дакле, закључујемо да је у случају $p \ge 2(\alpha+2)$

$$\|H\|_{A^p_\alpha \to A^p_\alpha} \le \frac{\pi}{\sin\frac{(\alpha+2)\pi}{p}}.$$

$\square$

У раду [30], Линдстром, Микинен и Викман потврдили су претпоставку за све

$$\alpha+2+\sqrt{(\alpha+2)^2-\frac{1}{2}(\alpha+2)} \le p < 2(\alpha+2).$$

Потом, у раду [27], Карапетровић показује да је она тачна за све $\alpha > 0$ за које $\alpha_0 \le p < 2(\alpha+2)$, где је $\alpha_0$ јединствена нула функције

$$\Phi_\alpha(x) = 2x^2 - (4(\alpha+2)+1)\,x + 2\sqrt{\alpha+2}\sqrt{x} + \alpha + 2,$$

на интервалу $(\alpha+2, 2(\alpha+2))$. Након тога, Карапетровић и аутор дисертације у раду [14] показали су у случају $\alpha > 0$ да је претпоставка тачна за све

$$\frac{3\alpha}{4}+2+\sqrt{\left(\frac{3\alpha}{4}+2\right)^2-\frac{\alpha+2}{2}} \le p.$$

Како је функција $\Phi_\alpha$ строго растућа функција на интервалу $(\alpha+2, 2(\alpha+2))$, онда $\Phi_\alpha < 0$ на $(\alpha+2, \alpha_0)$ и $\Phi_\alpha > 0$ на $(\alpha_0, 2(\alpha+2))$. Осим тога, испоставља се да је

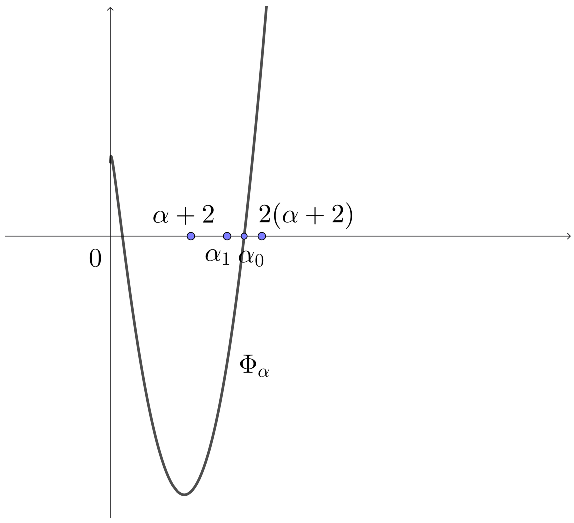
$$\alpha+2+\sqrt{(\alpha+2)^2-(\alpha+2)} < \alpha_0 < \alpha+2+\sqrt{(\alpha+2)^2-\left(\sqrt{2}-\frac{1}{2}\right)(\alpha+2)}.$$

Користећи програм Mathematica, проверили смо да важи следећа неједнакост

$$\Phi_\alpha\left(\frac{3\alpha}{4}+2+\sqrt{\left(\frac{3\alpha}{4}+2\right)^2-\frac{\alpha+2}{2}}\right) < 0,$$

односно,

$$\frac{3\alpha}{4}+2+\sqrt{\left(\frac{3\alpha}{4}+2\right)^2-\frac{\alpha+2}{2}} < \alpha_0,$$




Слика 3.1: Функција $\Phi_\alpha$, где је $\alpha_1 = \frac{3\alpha}{4} + 2 + \sqrt{\left(\frac{3\alpha}{4}+2\right)^2 - \frac{\alpha+2}{2}}$.

за $\alpha > 0.496$. Овим је показано да теорема 3.2.2 побољшава резултат рада [27] у случају када је $\alpha > \frac{1}{2}$.

**Теорема 3.2.2.** [14] *Нека је* $\alpha > 0$ *и* $\frac{3\alpha}{4} + 2 + \sqrt{\left(\frac{3\alpha}{4}+2\right)^2 - \frac{\alpha+2}{2}} \le p < 2(\alpha+2)$. *Онда*

$$\|H\|_{A^p_\alpha \to A^p_\alpha} = \frac{\pi}{\sin\frac{(\alpha+2)\pi}{p}}.$$

*Доказ.* Нека је $f \in A^p_\alpha$. Довољно је показати да

$$\|Hf\|_{A^p_\alpha} \le \frac{\pi}{\sin\frac{(\alpha+2)\pi}{p}} \|f\|_{A^p_\alpha}. \tag{3.4}$$

Означимо са $\varphi(r) = 2M_p^p(r,f)$ и $\chi(r) = \varphi(r) - \varphi(0)$ за $0 \le r < 1$. Онда је $\varphi$ растућа и диференцијабилна функција на интервалу $(0,1)$, одакле следи да је функција $\chi$ такође растућа и диференцијабилна на $(0,1)$. Дакле,

$$\chi' \ge 0 \text{ на } (0,1) \text{ и } \chi(r) = \int_0^r \chi'(s)ds \text{ за } 0 < r < 1.$$

За $0 < t < 1$ и $w \in D_t$ имамо

$$\begin{aligned}
\frac{\rho_t^2 - |w-c_t|^2}{\rho_t} &= \frac{\rho_t^2 - |w|^2 - c_t^2 + 2c_t \operatorname{Re} w}{\rho_t} \\
&\le \frac{\rho_t^2 - |w|^2 - c_t^2 + 2c_t|w|}{\rho_t} \\
&= \frac{\rho_t - c_t - |w|^2 + (1-\rho_t+c_t)|w|}{\rho_t} \\
&= (1-|w|)\frac{|w| + \rho_t - c_t}{\rho_t},
\end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned}\frac{|w|+\rho_t-c_t}{\rho_t} &= \frac{(c_t-\rho_t+2\rho_t)|w|+\rho_t-c_t}{\rho_t}\\ &= 2|w| - \frac{(c_t-\rho_t)(1-|w|)}{\rho_t} < 2|w|.\end{aligned}$$

Одавде следи

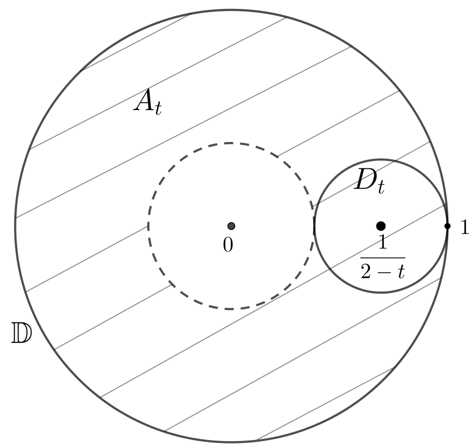
$$\frac{\rho_t^2-|w-c_t|^2}{\rho_t} \le 2|w|(1-|w|).$$

Како je $\alpha > 0$, добијамо

$$\left(\frac{\rho_t^2-|w-c_t|^2}{\rho_t}\right)^{\alpha} \le 2^{\alpha}|w|^{\alpha}(1-|w|)^{\alpha}.$$

Приметимо

$$A_t = A\left(0, c_t-\rho_t, c_t+\rho_t\right) = A\left(0, \frac{t}{2-t}, 1\right) \supset D_t$$




Слика 3.2: $D_t \subset A_t$

Тада

$$\begin{aligned}\|T_t f\|_{A^p_\alpha} &\le \psi_{p,\alpha}(t)\left(\frac{\alpha+1}{\pi}\int_{D_t} 2^{\alpha}|w|^{p-\alpha-4}|f(w)|^p(1-|w|)^{\alpha}dm(w)\right)^{\frac{1}{p}}\\ &\le \psi_{p,\alpha}(t)\left(\frac{\alpha+1}{\pi}\int_{A_t} 2^{\alpha}|w|^{p-\alpha-4}|f(w)|^p(1-|w|)^{\alpha}dm(w)\right)^{\frac{1}{p}},\end{aligned}$$

одакле следи

$$\|T_t f\|_{A^p_\alpha} \le \psi_{p,\alpha}(t)\left((\alpha+1)\int_{\frac{t}{2-t}}^{1} 2^{\alpha} r^{p-\alpha-3}(1-r)^{\alpha}\varphi(r)dr\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Осим тога, важи

$$\frac{\pi}{\sin\frac{(\alpha+2)\pi}{p}}\|f\|_{A^p_\alpha} = \int_0^1 \psi_{p,\alpha}(t)\left((\alpha+1)\int_0^1 r(1-r^2)^\alpha\varphi(r)dr\right)^{\frac{1}{p}} dt.$$

Дакле, како бисмо доказали (3.4), довољно је показати

$$\int_0^1 \psi_{p,\alpha}(t)\left(I(t)^{\frac{1}{p}} - J^{\frac{1}{p}}\right) dt \le 0, \tag{3.5}$$

где

$$I(t) = \int_{\frac{t}{2-t}}^1 2^\alpha r^{p-\alpha-3}(1-r)^\alpha\varphi(r)dr \text{ и } J = \int_0^1 r(1-r^2)^\alpha\varphi(r)dr.$$

Како $\frac{1}{p}\in(0,1)$, имамо

$$I(t)^{\frac{1}{p}} - J^{\frac{1}{p}} \le \frac{1}{p}J^{\frac{1}{p}-1}\left(I(t)-J\right).$$

Дакле, да би важила неједнакост (3.5), довољно је показати

$$\int_0^1 \psi_{p,\alpha}(t)\left(I(t)-J\right)dt \le 0.$$

Односно,

$$\int_0^1 \psi_{p,\alpha}(t)\left(\int_{\frac{t}{2-t}}^1 2^\alpha r^{p-\alpha-3}(1-r)^\alpha\varphi(r)dr - \int_0^1 r(1-r^2)^\alpha\varphi(r)dr\right)dt \le 0,$$

или еквивалентно

$$V_{p,\alpha} - U_{p,\alpha} + \varphi(0)W_{p,\alpha} \le 0, \tag{3.6}$$

где

$$V_{p,\alpha} = \int_0^1 \psi_{p,\alpha}(t)\int_{\frac{t}{2-t}}^1 2^\alpha r^{p-\alpha-3}(1-r)^\alpha\chi(r)drdt,$$
$$U_{p,\alpha} = \int_0^1 \psi_{p,\alpha}(t)\int_0^1 r(1-r^2)^\alpha\chi(r)drdt$$

и

$$W_{p,\alpha} = \int_0^1 \psi_{p,\alpha}(t)\int_{\frac{t}{2-t}}^1 2^\alpha r^{p-\alpha-3}(1-r)^\alpha drdt$$
$$- \int_0^1 \psi_{p,\alpha}(t)\int_0^1 r(1-r^2)^\alpha drdt.$$

За $s \in [0,1]$ дефинишимо функцију

$$F_{p,\alpha}(s) = \xi_{p,\alpha}(s)\int_0^s \psi_{p,\alpha}(t)dt + \int_s^1 \psi_{p,\alpha}(t)\xi_{p,\alpha}(t)dt - \int_{\frac{s}{2-s}}^1 r(1-r^2)^\alpha dr B_{p,\alpha},$$

где је

$$\xi_{p,\alpha}(s) = \int_{\frac{s}{2-s}}^1 2^\alpha r^{p-\alpha-3}(1-r)^\alpha dr \text{ и } B_{p,\alpha} = \int_0^1 \psi_{p,\alpha}(t)dt.$$

Тада, добијамо

$$\begin{aligned}\int_{\frac{t}{2-t}}^1 2^\alpha r^{p-\alpha-3}(1-r)^\alpha \chi(r)dr &= \int_{\frac{t}{2-t}}^1 2^\alpha r^{p-\alpha-3}(1-r)^\alpha \int_0^r \chi'(s)dsdr \\ &= \int_0^1 \chi'(s)\int_{\max\{s,\frac{t}{2-t}\}}^1 2^\alpha r^{p-\alpha-3}(1-r)^\alpha drds \\ &= \int_0^1 \frac{2}{(2-u)^2}\chi'\left(\frac{u}{2-u}\right)\int_{\max\{\frac{u}{2-u},\frac{t}{2-t}\}}^1 2^\alpha r^{p-\alpha-3}(1-r)^\alpha drdu \\ &= \int_0^1 \frac{2}{(2-u)}\chi'\left(\frac{u}{2-u}\right)\xi_{p,\alpha}\left(\max\{u,t\}\right)du,\end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned}\int_0^1 r(1-r^2)^\alpha \chi(r)dr &= \int_0^1 r(1-r^2)^\alpha \int_0^r \chi'(s)dsdr \\ &= \int_0^1 \chi'(s)\int_s^1 r(1-r^2)^\alpha drds \\ &= \int_0^1 \frac{2}{(2-u)^2}\chi'\left(\frac{u}{2-u}\right)\int_{\frac{u}{2-u}}^1 r(1-r^2)^\alpha drdu,\end{aligned}$$

одакле следи

$$V_{p,\alpha} = \int_0^1 \frac{2}{(2-u)^2}\chi'\left(\frac{u}{2-u}\right)\int_0^1 \psi_{p,\alpha}(t)\xi_{p,\alpha}\left(\max\{u,t\}\right)dtdu,$$

и

$$U_{p,\alpha} = \int_0^1 \frac{2}{(2-u)^2}\chi'\left(\frac{u}{2-u}\right)\int_{\frac{u}{2-u}}^1 r(1-r^2)^\alpha dr\int_0^1 \psi_{p,\alpha}(t)dtdu.$$

Дакле,

$$V_{p,\alpha} - U_{p,\alpha} = \int_0^1 \frac{2}{(2-u)^2}\chi'\left(\frac{u}{2-u}\right)F_{p,\alpha}(u)du \text{ и } W_{p,\alpha} = F_{p,\alpha}(0).$$

Приметимо да $\varphi(0) = 2|f(0)|^p$. Да бисмо показали (3.6), довољно је доказати

$$\int_0^1 \frac{2}{(2-u)^2}\chi'\left(\frac{u}{2-u}\right)F_{p,\alpha}(u)du + 2|f(0)|^p F_{p,\alpha}(0) \leq 0. \tag{3.7}$$

Имајући у виду $\chi' \geq 0$, да би неједнакост (3.7) била тачна, довољно је да $F_{p,\alpha} \leq 0$ на $[0,1]$. Добијамо

$$\begin{aligned}
F'_{p,\alpha}(s) &= \xi'_{p,\alpha}(s)\int_0^s \psi_{p,\alpha}(t)dt + \xi_{p,\alpha}(s)\psi_{p,\alpha}(s) - \psi_{p,\alpha}(s)\xi_{p,\alpha}(s) \\
&\qquad + \frac{2}{(2-s)^2}\frac{s}{2-s}\left(1-\left(\frac{s}{2-s}\right)^2\right)^{\alpha} B_{p,\alpha} \\
&= -\frac{2}{(2-s)^2}2^{\alpha}\left(\frac{s}{2-s}\right)^{p-\alpha-3}\left(1-\frac{s}{2-s}\right)^{\alpha}\int_0^s \psi_{p,\alpha}(t)dt \\
&\qquad + \frac{2}{(2-s)^2}\frac{s}{2-s}\left(1-\left(\frac{s}{2-s}\right)^2\right)^{\alpha} B_{p,\alpha} \\
&= \frac{2}{(2-s)^2}2^{\alpha}\left(\frac{s}{2-s}\right)^{p-\alpha-3}\left(1-\frac{s}{2-s}\right)^{\alpha} G_{p,\alpha}(s),
\end{aligned}$$

где

$$G_{p,\alpha}(s) = \frac{1}{s^{\alpha}}\left(\frac{s}{2-s}\right)^{2(\alpha+2)-p} B_{p,\alpha} - \int_0^s \psi_{p,\alpha}(t)dt.$$

Приметимо да функције $F'_{p,\alpha}$ и $G_{p,\alpha}$ су истог знака. С друге стране, важи

$$B_{p,\alpha} = \int_0^1 t^{\frac{\alpha+2}{p}-1}(1-t)^{-\frac{\alpha+2}{p}}dt = \int +0^s t^{\frac{\alpha+2}{p}-1}(s-t)^{-\frac{\alpha+2}{p}}dt,$$

одакле следи

$$G_{p,\alpha}(s) = \int_0^s t^{\frac{\alpha+2}{p}-1}\left(\frac{1}{s^{\alpha}}\left(\frac{s}{2-s}\right)^{2(\alpha+2)-p}(s-t)^{-\frac{\alpha+2}{p}} - (1-t)^{-\frac{\alpha+2}{p}}\right)dt.$$

Означимо са

$$H_{p,\alpha,s}(t) = \frac{1}{s^{\alpha}}\left(\frac{s}{2-s}\right)^{2(\alpha+2)-p}(s-t)^{-\frac{\alpha+2}{p}} - (1-t)^{-\frac{\alpha+2}{p}}, t \in (0,s).$$

Показаћемо да је $G_{p,\alpha}(s) \leq 0$ за све $s \in [0,1]$. Како је

$$G_{p,\alpha}(s) = \frac{s^{\alpha+4-p}}{(2-s)^{2(\alpha+2)-p}}B_{p,\alpha} - \int_0^s \psi_{p,\alpha}(t)dt,$$

закључујемо да је $G_{p,\alpha}(1) = 0, G_{p,\alpha}(0) = 0$ ако $\alpha+4 > p$, $G_{p,\alpha}(0) = B_{p,\alpha}$ ако $\alpha + 4 = p$ и $G_{p,\alpha} = +\infty$ ако $\alpha + 4 < p$. У сваком од могућих случајева важи $G_{p,\alpha}(1) = 0$ и $G_{p,\alpha}(0) \geq 0$.

Претпоставимо да $s \in (0,1)$. Доказаћемо да је $H_{p,\alpha,s}(t) \geq 0$, за све $t \in (0,s)$. Приметимо

$$\lim_{t\to s^-} H_{p,\alpha,s}(t) = +\infty. \tag{3.8}$$

Покажимо да функција $H_{p,\alpha,s}$ нема нуле на интервалу $(0,s)$. Претпоставимо да $H_{p,\alpha,s}(t_0)=0$, онда

$$\frac{1}{s^\alpha}\left(\frac{s}{2-s}\right)^{2(\alpha+2)-p}(s-t_0)^{-\frac{\alpha+2}{p}}=(1-t_0)^{-\frac{\alpha+2}{p}},$$

одакле следи

$$\left(\frac{1}{s^\alpha}\left(\frac{s}{2-s}\right)^{2(\alpha+2)-p}\right)^{\frac{p}{\alpha+2}}(1-t_0)=s-t_0,$$

или

$$t_0=\frac{s^{1+\alpha\frac{p}{\alpha+2}}-\left(\frac{s}{2-s}\right)^{\frac{p}{\alpha+2}(2(\alpha+2)-p)}}{s^{\alpha\frac{p}{\alpha+2}}-\left(\frac{s}{2-s}\right)^{\frac{p}{\alpha+2}(2(\alpha+2)-p)}}=\frac{X_{p,\alpha,s}}{Y_{p,\alpha,s}},$$

где означавамо са

$$X_{p,\alpha,s}=s^{1+\alpha\frac{p}{\alpha+2}}-\left(\frac{s}{2-s}\right)^{\frac{p}{\alpha+2}(2(\alpha+2)-p)},$$

и

$$Y_{p,\alpha,s}=s^{\alpha\frac{p}{\alpha+2}}-\left(\frac{s}{2-s}\right)^{\frac{p}{\alpha+2}(2(\alpha+2)-p)}$$

Како $\alpha>0$, $\frac{3\alpha}{4}+2+\sqrt{(\frac{3\alpha}{4}+2)^2-\frac{\alpha+2}{2}}\le p<2(\alpha+2)$ и $s\in(0,1)$, имамо

$$2(\alpha+2)-p>0 \text{ и } 1+\alpha\frac{p}{\alpha+2}\ge 2\frac{p}{\alpha+2}(2(\alpha+2)-p).$$

На основу претходног важи

$$s^{1+\alpha\frac{p}{\alpha+2}}\le (s^2)^{\frac{p}{\alpha+2}(2(\alpha+2)-p)}<\left(\frac{s}{2-s}\right)^{\frac{p}{\alpha+2}(2(\alpha+2)-p)}.$$

Односно, $X_{p,\alpha,s}<0$. Онда, у случају када $Y_{p,\alpha,s}\ge 0$, добијамо

$$t_0=\frac{X_{p,\alpha,s}}{Y_{p,\alpha,s}}<0,$$

а у случају када $Y_{p,\alpha,s}<0$, важи

$$t_0=\frac{X_{p,\alpha,s}}{Y_{p,\alpha,s}}>s,$$

јер

$$\left(\frac{s}{2-s}\right)^{\frac{p}{\alpha+2}(2(\alpha+2)-p)}-s^{1+\alpha\frac{p}{\alpha+2}}>s\left(\left(\frac{s}{2-s}\right)^{\frac{p}{\alpha+2}(2(\alpha+2)-p)}-s^{\alpha\frac{p}{\alpha+2}}\right).$$

Дакле, у оба случаја важи $t_0 \notin (0,s)$, одакле следи да функција $H_{p,\alpha,s}$ нема нуле на интервалу $(0,s)$. На основу претходног и (3.8), закључујемо $H_{p,\alpha,s}(t) \geq 0$ за све $t \in (0,s)$. Како је $G_{p,\alpha} = \int_0^s t^{\frac{\alpha+2}{p}-1} H_{p,\alpha,s}(t)dt$, следи $G_{p,\alpha}(s) \geq 0$ за све $s \in (0,1)$. На основу $G_{p,\alpha}(1) = 0$ и $G_{p,\alpha}(0) \geq 0$, важи $G_{p,\alpha}(s) \geq 0$ на интервалу $[0,1]$, одакле следи да $F'_{p,\alpha} \geq 0$ на $[0,1]$. Како функција $F_{p,\alpha}$ расте на интервалу $[0,1]$, важи

$$F_{p,\alpha}(s) \leq F_{p,\alpha}(1) = 0,$$

за све $s \in [0,1]$. Односно $F_{p,\alpha} \leq 0$ на интервалу $[0,1]$. На основу петходног важи и неједнакост (3.7), чиме је доказ завршен. $\square$

Након објављивања радова [14] 2023. године, у раду [9] из 2024. године, Ј. Даи долази до резултата теореме 3.2.2 на други начин и осим тога показује да је хипотеза тачна за још вредности параметара $\alpha$ и $p$. Специјално, показује да је претпоставка тачна за мале вредности параметра $p$ у случају да је $\alpha > 0$, као и у случају када је $\alpha = 1$ и $0 < \alpha \leq \frac{1}{47}$ за $\alpha + 2 < p$.

## 3.3 Хилбертова матрица на Бергмановим просторима са негативним индексом

У случају негативно индексираних тежинских Бергманових простора $A^p_\alpha$, у раду [5] из 2022., Карапетровић и Дмитровић представљају прво ограничење норме одозго оператора Хилбертове матрице. Након тога, 2024. године Ј. Даи у раду [9] показује да је хипотеза о норми тачна и за негативне индексе $-1 > \alpha > 0$ ако $p \geq 2(\alpha+2)$.

У овој секцији представљен је резултат рада [5]. Пре самог резултата овог рада, теореме 3.3.1, дат је преглед лема које се користе при његовом доказивању.

**Лема 3.3.1.** *Нека је* $0 < c < 1, -1 < \alpha < 0$ *и*

$$F(s) = F_{c,\alpha}(s) = \frac{\int_{\max\{s,c\}}^1 (r+c)\left((1-c)^2 - (r-c)^2\right)^\alpha dr}{\int_s^1 r(1-r^2)^\alpha dr}, s \in [0,1).$$

*Онда*

$$\max_{s\in[0,1)} F(s) = F(c) \leq \frac{(1-c)^\alpha(1+3c)}{(1+c)^{\alpha+1}}.$$

*Доказ.* Нека је

$$\Phi(r) = (r+c)\left((1-c)^2 - (r-c)^2\right)^\alpha, \Psi(r) = r(1-r^2)^\alpha, r \in (0,1).$$

Онда

$$F(s) = \frac{\int_{\max\{s,c\}}^1 \Phi(r)dr}{\int_s^1 \Psi(r)dr}, s \in [0,1).$$

Ако $s \in [0,c]$, онда

$$F(s) = \frac{\int_c^1 \Phi(r)dr}{\int_s^1 \Psi(r)dr}.$$

На основу претходног, $F$ је растућа функција на интервалу $[0,c]$ јер је функција $s \to \int_s^1 \Psi(r)d(r)$ опадајућа. Уколико $s \in [c,1)$, онда је

$$F(s) = \frac{\int_s^1 \Phi(r)dr}{\int_s^1 \Psi(r)dr}.$$

Означимо са

$$h(r) = \frac{\Phi(r)}{\Psi(r)} = \frac{(r+c)(1+r-2c)^\alpha}{r(1+r)^\alpha}, \quad r \in [c,1).$$

Тада је

$$h'(r) = \frac{c(1+r-2c)^{\alpha-1}\xi(r)}{r^2(1+r)^{\alpha+1}},$$

где је $\xi(r) = 2c - 1 + (2\alpha c + 2c - 2)r + (2\alpha - 1)r^2$ на $[c,1)$. Како је $0 < c < 1$ и $-1 < \alpha < 0$, имамо $\xi''(r) = 2(2\alpha - 1) < 0$, одакле следи $\xi'(r) \leq \xi'(c) = 6\alpha c - 2 < 0$ на $[c,1)$. На основу претходног, $\xi(r) \leq \xi(c) = (4\alpha+1)c^2 - 1 < 0$ на $[c,1)$. Односно, важи $h' \leq 0$ на $[c,1)$. Дакле, $h$ је опадајућа функција на интервалу $[c,1)$. Нека је $c \leq t \leq s < 1$. Онда, добијамо

$$\begin{aligned}\int_s^1 \Phi(r)dr \int_t^s \Psi(r)dr &= \int_s^1 h(r)\Psi(r)dr \int_t^s \Psi(r)dr \leq \int_s^1 \Psi(r)dr h(s) \int_t^s \Psi(r)dr \\ &\leq \int_s^1 \Psi(r)dr \int_t^s h(r)\Psi(r)dr = \int_s^1 \Psi(r)dr \int_t^s \Phi(r)dr,\end{aligned}$$

или еквивалентно

$$\int_s^1 \Phi(r)dr \left(\int_t^1 \Psi(r)dr - \int_s^1 \Psi(r)dr\right) \leq \int_s^1 \Psi(r)dr \left(\int_t^1 \Phi(r)dr - \int_s^1 \Phi(r)dr\right),$$

одакле следи

$$F(s) = \frac{\int_s^1 \Phi(r)dr}{\int_s^1 \Psi(r)dr} = F(t).$$

На основу претходног имамо да је функција $F$ опадајућа на $[c,1)$ и растућа на $[0,c]$. Дакле,

$$\max_{s\in[0,1)} F(s) = F(c) = \frac{\int_c^1 \Phi(r)dr}{\int_c^1 \Psi(r)dr}.$$

Приметимо да је

$$\int_c^1 \Psi(r)dr = \int_c^1 r(1-r^2)^\alpha dr = \frac{(1-c^2)^{\alpha+1}}{2(\alpha+1)},$$

и

$$\begin{aligned}
\int_c^1 \Phi(r)dr &= \int_c^1 (r+c)\left((1-c)^2-(r-c)^2\right)^\alpha dr \\
&= \int_0^{1-c} (t+2c)\left((1-c)^2-t^2\right)^\alpha dt \\
&= (1-c)^{2\alpha+1}\int_0^1 ((1-c)x+2c)\left(1-x^2\right)^\alpha dx \\
&= (1-c)^{2\alpha+1}\left(\frac{1-c}{2(\alpha+1)} + 2c\int_0^1 \left(1-x^2\right)^\alpha dx\right) \\
&\le (1-c)^{2\alpha+1}\left(\frac{1-c}{2(\alpha+1)} + 2c\int_0^1 (1-x)^\alpha dx\right) = \frac{(1-c)^{2\alpha+1}(1+3c)}{2(\alpha+1)}.
\end{aligned}$$

Дакле

$$F(c) \le \frac{(1-c)^{2\alpha+1}(1+3c)}{2(\alpha+1)} \Bigg/ \frac{(1-c^2)^{\alpha+1}}{2(\alpha+1)} = \frac{(1-c)^\alpha(1+3c)}{(1+c)^{\alpha+1}}.$$

$\square$

**Лема 3.3.2.** *Нека је* $0<p<\infty, -1<\alpha<0, 0<c<1$ *и* $\eta(z)=\rho z+c$ *за* $z\in\mathbb{D}$, *где је* $\rho = 1-c$. *Онда*

$$\rho^{\alpha+2}\int_{\mathbb{D}} |(f\circ\eta)(z)|^p\,(1-|z|^2)^\alpha dm(z) \le \frac{1+3c}{(1+c)^{\alpha+1}}\int_{\mathbb{D}} |f(z)|^p(1-|z|^2)^\alpha dm(z),$$

*где* $f\in \mathrm{Hol}(\mathbb{D})$.

*Доказ.* Нека је $0<r<1$. Дефинишимо са $R=R(r)=\rho r+c$. Приметимо да $c<R<1$. Ако $z\in\overline{\mathbb{D}_r}$, онда $|\eta(z)|\le\rho|z|+c\le\rho r+c=R$, односно $|\eta(z)|\in\overline{\mathbb{D}_R}$. Нека је $u$ хармонијска функција у $\mathbb{D}_R$ таква да $u=|f|^p$ на $\partial\mathbb{D}_R$. Како је $|f|^p$ субхармонијска функција на $\mathbb{D}$, важи $|f|^p\le u$ на $\overline{\mathbb{D}_R}$. Одакле, $|f\circ\eta|^p\le u\circ\eta$

на $\overline{\mathbb{D}_r}$. На основу претходног и тога да је $u \circ \eta$ такође хармонијска функција, добијамо

$$\int_0^{2\pi} \left|(f \circ \eta)\left(re^{i\theta}\right)\right|^p d\theta \leq \int_0^{2\pi} (u \circ \eta)\left(re^{i\theta}\right) d\theta = 2\pi(u \circ \eta)(0) = 2\pi u(c). \tag{3.9}$$

На основу Харнакове неједнакости добијамо

$$u(c) \leq \frac{R+c}{R-c} u(0) = \frac{1}{2\pi} \frac{R+c}{R-c} \int_0^{2\pi} u\left(re^{i\theta}\right) d\theta. \tag{3.10}$$

На основу (3.9) и (3.10) важи

$$\int_0^{2\pi} \left|(f \circ \eta)\left(re^{i\theta}\right)\right|^p d\theta \leq \frac{R+c}{R-c} \int_0^{2\pi} u\left(re^{i\theta}\right) d\theta$$

и како $u = |f|^p$ на $\partial\mathbb{D}_r$, долазимо до неједнакости

$$\int_0^{2\pi} \left|(f \circ \eta)\left(re^{i\theta}\right)\right|^p d\theta \leq \int_0^{2\pi} \left|f\left(re^{i\theta}\right)\right|^p d\theta, \tag{3.11}$$

где $0 < r < 1$ и $R = R(r) = \rho r + c$. С друге стране, означимо са

$$\varphi(r) = 2\pi M_p^p(r, f) = \int_0^{2\pi} \left|f\left(re^{i\theta}\right)\right|^p d\theta \text{ и } \chi(r) = \varphi(r) - \varphi(0),$$

за $0 < r < 1$. Како је $\varphi$ растућа и диференцијабилна функција на $(0,1)$, онда је таква и функција $\chi$. Дакле,

$$\chi' \geq 0 \text{ на } (0,1) \text{ и } \chi(r) = \int_0^r \chi'(s) ds,$$

за $0 < r < 1$. Тада следи на основу (3.11)

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{D}} |(f \circ \eta)(z)|^p \left(1-|z|^2\right)^\alpha dm(z) &= \int_0^1 r\left(1-r^2\right)^\alpha \int_0^{2\pi} \left|(f \circ \eta)(re^{i\theta})\right|^p d\theta dr \\
&\leq \int_0^1 r\left(1-r^2\right)^\alpha \frac{R+c}{R-c} \int_0^{2\pi} \left|f\left(Re^{i\theta}\right)\right|^p d\theta dr \\
&= \int_0^1 r\left(1-r^2\right)^\alpha \frac{R+c}{R-c} \varphi(R) dr.
\end{aligned}$$

Након смене променљиве $R = R(r) = \rho r + c$, добијамо

$$\int_0^1 r\left(1-r^2\right)^\alpha \frac{R+c}{R-c} \varphi(R) dr = \int_c^1 \frac{R-c}{\rho} \left(1 - \left(\frac{R-c}{\rho}\right)^2\right)^\alpha \frac{R+c}{R-c} \varphi(R) \frac{dR}{\rho},$$

одакле следи

$$\int_{\mathbb{D}} |(f\circ\eta)(z)|^p \left(1-|z|^2\right)^{\alpha} dm(z) \le \frac{1}{\rho^{2\alpha+2}}\int_c^1 (R+c)\left(\rho^2-(R-c)^2\right)^{\alpha}\varphi(R)dR,$$

или еквивалентно

$$\int_{\mathbb{D}} |(f\circ\eta)(z)|^p \left(1-|z|^2\right)^{\alpha} dm(z) \le \frac{\int_c^1 (r+c)\left((1-c)^2-(r-c)^2\right)^{\alpha}\varphi(r)dr}{(1-c)^{2\alpha+2}}.$$

Односно, имамо

$$\rho^{\alpha+2}\int_{\mathbb{D}} |(f\circ\eta)(z))|^p \left(1-|z|^2\right)^{\alpha} dm(z) \le \frac{1}{(1-c)^{\alpha}}\int_c^1 \Phi(r)\varphi(r)dr,$$

где користимо ознаке леме 3.3.1. Такође

$$\frac{1+3c}{(1+c)^{\alpha+1}}\int_{\mathbb{D}} |f(z)|^p \left(1-|z|^2\right)^{\alpha} dm(z) = \frac{1+3c}{(1+c)^{\alpha+1}}\int_0^1 \Psi(r)\varphi(r)dr.$$

На основу претходних формула, довољно је доказати

$$\int_c^1 \Phi(r)\varphi(r)dr \le \frac{(1-c)^{\alpha}(1+3c)}{(1+c)^{\alpha+1}}\int_0^1 \Psi(r)\varphi(r)dr,$$

или еквивалентно

$$\begin{aligned}\int_c^1 \Phi(r)\chi(r)dr + \varphi(0)\int_c^1 \Phi(r)dr& \\ &\le \frac{(1-c)^{\alpha}(1+3c)}{(1+c)^{\alpha+1}}\int_0^1 \Psi(r)\chi(r)dr + \varphi(0)\int_0^1 \Psi(r)dr.\end{aligned}$$

На основу леме 3.3.1, имамо

$$\varphi(0)\int_c^1 \Phi(r)dr = F(0)\varphi(0)\int_0^1 \Psi(r)dr \le \frac{(1-c)^{\alpha}(1+3c)}{(1+c)^{\alpha+1}}\varphi(0)\int_0^1 \Psi(r)dr.$$

Дакле, довољно је доказати

$$\int_c^1 \Phi(r)\chi(r)dr \le \frac{(1-c)^{\alpha}(1+3c)}{(1+c)^{\alpha+1}}\int_0^1 \Psi(r)\chi(r)dr.$$

Користећи Фубинијеву теорему и лему 3.3.1, добијамо

$$\begin{aligned}\int_c^1 \Phi(r)\chi(r)dr &= \int_c^1\int_0^r \Phi(r)\chi'(s)dsdr \\ &= \int_0^1 \chi'(s)\int_{\max\{s,c\}}^1 \Phi(r)drds = \int_0^1 \chi'(s)F(s)\int_s^1 \Psi(r)drds \\ &\le \frac{(1-c)^{\alpha}(1+3c)}{(1+c)^{\alpha+1}}\int_0^1 \chi'(s)\int_s^1 \Psi(r)drds \\ &= \frac{(1-c)^{\alpha}(1+3c)}{(1+c)^{\alpha+1}}\int_0^1\int_0^r \Psi(r)\chi'(s)dsdr \\ &= \frac{(1-c)^{\alpha}(1+3c)}{(1+c)^{\alpha+1}}\int_0^1 \Psi(r)\chi(r)dr.\end{aligned}$$

Овим је доказ завршен. $\square$

**Лема 3.3.3.** *Нека је* $-1 < \alpha < 0$ *и* $\kappa(x) = \frac{1+3x}{(1+x)^{\alpha+1}}$ *за* $x \in [0,1]$. *Тада*

$$\max_{x\in[0,1]} \kappa(x) = \kappa(1) = 2^{1-\alpha}.$$

*Доказ.* Приметимо да је $\kappa'(x) = \frac{2-\alpha-3\alpha x}{(1+x)^{\alpha+2}} > 0$ за $x \in [0,1]$, одакле следи да је $\kappa$ растућа функција на интервалу $[0,1]$. Дакле, $\max\limits_{x\in[0,1]} \kappa(x) = \kappa(1) = 2^{1-\alpha}$. $\square$

Мотивисани доказом теореме 3.2.1, доказана је следећа теорема, која је главни резултат рада [5].

**Теорема 3.3.1.** *Нека је* $-1 < \alpha < 0$ *и* $\alpha + 2 < p$.

(*i*) *Ако* $2(\alpha+2) \le p$ *онда*

$$\|H\|_{A^p_\alpha \to A^p_\alpha} \le 2^{\frac{1-\alpha}{p}} \frac{\pi}{\sin\frac{(\alpha+2)\pi}{p}}.$$

(*ii*) *Ако* $\alpha + 2 < p < 2(\alpha+2)$ *онда*

$$\|H\|_{A^p_\alpha \to A^p_\alpha} \le 2^{\frac{1-\alpha}{p}} \left(1 + 2^{\frac{2(\alpha+2)}{p}-1}\right) \frac{\pi}{\sin\frac{(\alpha+2)\pi}{p}}.$$

*Доказ.* Нека је $f \in A^p_\alpha$, где $-1 < \alpha < 0$ и $\alpha + 2 < p$. Тада имамо два случаја.

(*i*) $\boldsymbol{2(\alpha+2) \le p}$.

Користећи лему 3.3.2, лему 3.3.3 и да у овом случају важи $|w|^{p-2(\alpha+2)} \le 1$, за $w \in \eta_t(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$, добијамо

$$\begin{aligned}
\|T_t f\|_{A^p_\alpha} &\le \psi_{p,\alpha}(t) \left(\frac{\alpha+1}{\pi}\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{\eta_t(\mathbb{D})} |f(w)|^p \left(\frac{\rho_t^2 - |w-c_t|^2}{\rho_t}\right)^\alpha dm(w)\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \psi_{p,\alpha}(t) \left(\frac{\alpha+1}{\pi}\right)^{\frac{1}{p}} \left(\rho_t^{\alpha+2} \int_{\mathbb{D}} |(f\circ\eta_t)(z)|^p \left(1-|z|^2\right)^\alpha dm(w)\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\le \psi_{p,\alpha}(t)\kappa(c_t)^{\frac{1}{p}} \|f\|_{A^p_\alpha} \le 2^{\frac{1-\alpha}{p}} \psi_{p,\alpha}(t)\|f\|_{A^p_\alpha}.
\end{aligned}$$

На основу претходног, следи

$$\|Hf\|_{A^p_\alpha} \le \int_0^1 \|T_t f\|_{A^p_\alpha} dt \le 2^{\frac{1-\alpha}{p}} \frac{\pi}{\sin\frac{(\alpha+2)\pi}{p}}.$$

$(ii)$ $\boldsymbol{\alpha + 2 < p < 2(\alpha + 2)}$**.**

Ако $w \in \eta_t(\mathbb{D})$, онда $w = \eta_t(z)$ за неко $z \in \mathbb{D}$. Дакле,

$$|w| = |\rho_t z + c_t| \geq c_t - \rho_t |z| > c_t - \rho_t = t/(2-t).$$

Односно,

$$|w|^{p-2(\alpha+2)} \leq \left(\frac{2-t}{t}\right)^{2(\alpha+2)-p}.$$

Слично случају $(i)$, добија се следећа неједнакост

$$\|T_t f\|_{A^p_\alpha} \leq 2^{\frac{1-\alpha}{p}} \left(\frac{2-t}{t}\right)^{\frac{2(\alpha+2)}{p}-1} \psi_{p,\alpha}(t) \|f\|_{A^p_\alpha}.$$

Како $\frac{2(\alpha+2)}{p} - 1 \in (0,1)$, онда

$$(2-t)^{\frac{2(\alpha+2)}{p}-1} = (t + 2(1-t))^{\frac{2(\alpha+2)}{p}-1} \leq t^{\frac{2(\alpha+2)}{p}-1} + 2^{\frac{2(\alpha+2)}{p}-1}(1-t)^{\frac{2(\alpha+2)}{p}-1},$$

одакле следи

$$\left(\frac{2-t}{t}\right)^{\frac{2(\alpha+2)}{p}-1} \psi_{p,\alpha}(t) \leq \psi_{p,\alpha}(t) + 2^{\frac{2(\alpha+2)}{p}-1} \psi_{p,\alpha}(1-t).$$

Онда

$$\|T_t f\|_{A^p_\alpha} \leq 2^{\frac{1-\alpha}{p}} \left(\psi_{p,\alpha}(t) + 2^{\frac{2(\alpha+2)}{p}-1} \psi_{p,\alpha}(1-t)\right) \|f\|_{A^p_\alpha},$$

што доводи до неједнакости

$$\|Hf\|_{A^p_\alpha} \leq \int_0^1 \|T_t f\|_{A^p_\alpha} dt \leq 2^{\frac{1-\alpha}{p}} \left(1 + 2^{\frac{2(\alpha+2)}{p}-1}\right) \frac{\pi}{\sin \frac{(\alpha+2)\pi}{p}} \|f\|_{A^p_\alpha}.$$

Овим је доказ завршен. □

Приметимо да Карапетровићева претпоставка о норми оператора Хилбертове матрице није показана у свим случајевима када је $1 < \alpha + 2 < p$. Између осталог, након рада [9], остало је израчунати тачну норму оператора за $-1 < \alpha < 0$ када $\alpha + 2 < p < 2(\alpha + 2)$.

# Глава 4

# Литлвудов принцип субординације са унивалентним симболом

Прву верзију Литлвудовог принципа субординације исказао је Џ. Е. Литлвуд 1923. године, где је посматрао модуле холоморфних функција, теорема 1.5.3. Другу верзију, општију од прве, показао је Ф. Рис 1925. године. Ова теорема, теорема 1.5.2, тврди да уколико је функција $u$ субхармонијска на $\mathbb{D}$ и $\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ холоморфна функција таква да је $\varphi(0) = 0$, онда је

$$I_{u\circ\varphi}(r) \leq I_u(r) \text{ за све } 0 < r < 1, \tag{4.1}$$

где је са $I_v(r)$ за субхармонијску функцију $v$ на диску $\mathbb{D}$ означена интегрална средина $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} v\left(re^{i\theta}\right) d\theta$.

Карапетровић и аутор ове дисертације су, у раду [15], пооштрили неједнакост (4.1) у случају када за пресликавање $\varphi$ важи и додатан услов да је инјективно.

У овој глави дат је приказ рада [15].

## 4.1 Пооштравање Литлвудовог принципа субординације са унивалентним симболом

**Дефиниција 4.1.** Пресликавање $\varphi : \Omega \to \mathbb{C}$ је унивалентно уколико је инјективно и холоморфно на $\Omega$.

У наредној теореми пооштрићемо неједнакост (4.1) у случају када је пресликавање $\varphi$ унивалентно.

**Теорема 4.1.1.** *Нека је $u$ субхармонијска функција на $\mathbb{D}$ и нека је $\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ унивалентна функција таква да $\varphi(0) = 0$. Онда,*

$$I_{u\circ\varphi}(r) \leq I_u(r) - \kappa \int_0^r (I_u(r) - I_u(t))dt, \tag{4.2}$$

*где $0 \leq r < 1$ и $\kappa = (1 - |\varphi'(0)|)/2$.*

*Доказ.* У случају када $u \equiv -\infty$, неједнакост (4.2) важи тривијално, али је тада интерпретирамо у следећој еквивалентној форми:

$$I_{u\circ\varphi}(r) \leq (1 - \kappa r)I_u(r) + \kappa \int_0^r I_u(t)dt.$$

Посматрајмо нетривијалан случај, када $u \not\equiv -\infty$.

Нека је $r < \rho < 1$ и $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < \rho\}$. Тада на основу пропозиције 1.4.6 постоје субхармонијске функције $u_n \in C^\infty(D)$, $n \geq 1$ тако да $u_1 \geq u_2 \geq \cdots \geq u$ на $D$ и $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = u$. Примењујући последицу Гринове формуле (1.13), добијамо

$$(I_{u_n})'(s) = \frac{1}{2\pi s}\int_{\mathbb{D}_s} \Delta u_n dm \text{ и } (I_{u_n\circ\varphi})'(s) = \frac{1}{2\pi s}\int_{\mathbb{D}_s} \Delta(u_n \circ \varphi)dm,$$

где $0 < s < \rho$. Имајући у виду да је $u_n \in C^\infty(D)$ субхармонијска функција, закључујемо

$$\Delta u_n \geq 0 \text{ и } \Delta(u_n \circ \varphi) = (\Delta u_n \circ \varphi)|\varphi'|^2.$$

На основу претходног и тога да је функција $\varphi$ унивалентна, следи

$$(I_{u_n\circ\varphi})'(s) = \frac{1}{2\pi s}\int_{\mathbb{D}_s} (\Delta u_n \circ \varphi)|\varphi'|^2 dm = \frac{1}{2\pi s}\int_{\varphi(\mathbb{D}_s)} \Delta u_n dm.$$

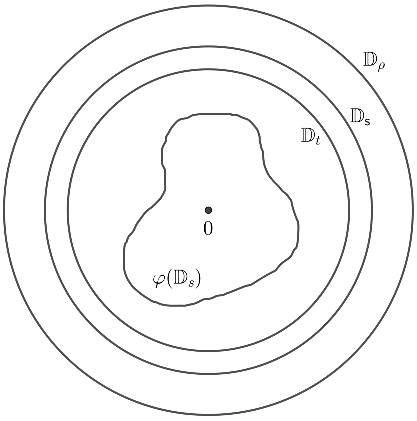
С друге стране, користећи Шварцову лему и користећи чињеницу да $\varphi$ унивалентна функција, закључујемо $0 < b \leq 1$, где $b = |\varphi'(0)|$. Дакле, добијамо

$$R = r\frac{r+b}{1+rb} \leq r.$$

Осим тога, на основу унутрашње варијанте Шварцове леме, важи $\varphi(\mathbb{D}_s) \subset \mathbb{D}_t$, где $t = s(s+b)/(1+sb)$.

Дакле,

$$(I_{u_n\circ\varphi})'(s) \leq \frac{1}{2\pi s}\int_{\mathbb{D}_t} \Delta u_n dm = \frac{t}{s}\frac{1}{2\pi t}\int_{\mathbb{D}_t} \Delta u_n dm = \frac{t}{s}(I_{u_n})'(t),$$




Слика 4.1: Инклузије $\varphi(\mathbb{D}_s) \subset \mathbb{D}_t \subset \mathbb{D}_s \subset \mathbb{D}_\rho$

одакле следи

$$I_{u_n\circ\varphi}(r) = I_{u_n\circ\varphi}(0) + \int_0^r (I_{u_n\circ\varphi})'(s)ds \le I_{u_n\circ\varphi}(0) + \int_0^r \frac{t}{s}(I_{u_n})'(t)ds.$$

Приметимо да $I_{u_n\circ\varphi}(0) = I_{u_n}(0)$, онда

$$I_{u_n\circ\varphi}(r) \le I_{u_n}(0) + \int_0^r \frac{t}{s}(I_{u_n})'(t)ds. \tag{4.3}$$

Како је $t = s(s+b)/(1+sb)$, важи

$$s = \frac{\sqrt{b^2(1-t)^2+4t} - b(1-t)}{2} \text{ и } ds = \frac{1}{2}\left(\frac{2-b^2(1-t)}{\sqrt{b^2(1-t)^2+4t}} + b\right)dt,$$

односно, $\frac{t}{s}ds = H(t)dt$, где

$$H(t) = \frac{t}{\sqrt{b^2(1-t)^2+4t} - b(1-t)}\left(\frac{2-b^2(1-t)}{\sqrt{b^2(1-t)^2+4t}} + b\right),$$

или еквивалентно,

$$H(t) = \frac{1}{2} + \frac{b}{2}\frac{1+t}{\sqrt{b^2(1-t)^2+4t}}.$$

Након примене смене променљиве $t = s(s+b)/(1+sb)$ у неједнакости (4.3), имамо следеће

$$I_{u_n\circ\varphi}(r) \le I_{u_n}(0) + \int_0^R H(t)(I_{u_n})'(t)dt.$$

Применом парцијалне интеграције, добијамо

$$I_{u_n\circ\varphi}(r) \le I_{u_n}(0) + H(R)I_{u_n}(R) - H(0)I_{u_n}(0) - \int_0^R H'(t)I_{u_n}(t)dt.$$

Како је $H(0)=1$, важи

$$I_{u_n\circ\varphi}(r)\leq H(R)I_{u_n}(R)-\int_0^R H'(t)I_{u_n}(t)dt.$$

Нека је

$$\Phi_n(x)=H(x)I_{u_n}(x)-\int_0^x H'(t)I_{u_n}(t)dt,$$

где је $x\in[0,r]$. Тада је $(\Phi_n)'(x)=H(x)\left(I_{u_n}\right)'(x)\geq 0$, одакле закључујемо да функција $\Phi_n$ расте на $[0,r]$. На основу претходног, важи

$$I_{u_n\circ\varphi}(r)\leq\Phi_n(R)\leq\Phi_n(r)=H(r)I_{u_n}(r)-\int_0^r H'(t)I_{u_n}(t)dt,$$

односно,

$$I_{u_n\circ\varphi}(r)\leq I_{u_n}(r)+\int_0^r H'(t)\left(I_{u_n}(r)-I_{u_n}(t)\right)dt.$$

Једноставним рачуном добија се

$$H'(t)=-\frac{b(1-b^2)(1-t)}{\left(b^2(1-t)^2+4t\right)^{3/4}}$$

и

$$H''(t)=\frac{2b(1-b^2)\left(3-t-b^2(1-t)^2\right)}{\left(b^2(1-t)^2+4t\right)^{5/2}}.$$

Како је $H''(t)\geq 0$, закључујемо да је $H'$ растућа функција. Осим тога, фунцкија $t\to I_{u_n}(r)-I_{u_n}(t)$ је опадајућа јер је функција $t\to I_{u_n}(t)$ растућа. Након примене Чебишевљеве интегралне неједнакост, добијамо

$$\int_0^r H'(t)\left(I_{u_n}(r)-I_{u_n}(t)\right)dt\leq\frac{1}{r}\int_0^r H'(t)dt\int_0^r\left(I_{u_n}(r)-I_{u_n}(t)\right)dt. \tag{4.4}$$

Функција

$$h(x)=\frac{1}{x}\int_0^x H'(t)dt$$

је растућа јер

$$h'(x)=\frac{1}{x^2}\left(xH'(x)-\int_0^x H'(t)dt\right)\geq 0,$$

где користимо чињеницу да је функција $H'$ растућа. Дакле,

$$\frac{1}{r}\int_0^r H'(t)dt=h(r)\leq h(1)=H(1)-H(0)=-\frac{1-b}{2}=-\kappa.$$

Како је

$$\int_0^r\left(I_{u_n}(r)-I_{u_n}(t)\right)dt\geq 0,$$

добијамо

$$\frac{1}{r}\int_0^r H'(t)dt\int_0^r \left(I_{u_n}(r)-I_{u_n}(t)\right)dt \le -\kappa\int_0^r \left(I_{u_n}(r)-I_{u_n}(t)\right)dt. \tag{4.5}$$

На основу (4.1), (4.4) и (4.5), имамо

$$I_{u_n\circ\varphi}(r) \le I_{u_n}(r) - \kappa\int_0^r \left(I_{u_n}(r)-I_{u_n}(t)\right)dt,$$

или еквивалентно

$$I_{u_n\circ\varphi}(r) \le (1-\kappa r)I_{u_n}(r) + \kappa\int_0^r I_{u_n}(t)dt. \tag{4.6}$$

Функција $u_1$ је полунепрекидна одозго на диску $D = \mathbb{D}_\rho$, и на основу тога, ограничена одозго на компакту $\overline{\mathbb{D}_r} \subset D$ константом $m$. Дакле, $0 \le m - u_1 \le m - u_2 \le \cdots \le m - u$ на $\overline{\mathbb{D}_r}$ и $\lim\limits_{n\to\infty}(m-u_n) = m-u$. Приметимо да неједнакост (4.6) можемо написати у еквивалентној форми

$$I_{m-u_n\circ\varphi}(r) \ge (1-\kappa r)I_{m-u_n}(r) + \kappa\int_0^r I_{m-u_n}(t)dt. \tag{4.7}$$

На основу теореме о монотоној конвергенцији, пуштајући да $n \to \infty$ у неједнакости (4.7), добијамо

$$I_{m-u\circ\varphi}(r) \ge (1-\kappa r)I_{m-u}(r) + \kappa\int_0^r I_{m-u}(t)dt,$$

или

$$I_{u\circ\varphi}(r) \ge (1-\kappa r)I_u(r) + \kappa\int_0^r I_u(t)dt,$$

што је заправо тражена неједнакост (4.2). $\square$

**Напомена 4.1.** На основу Шварцове леме важи да је $\kappa \ge 0$. Како је функција $t \to I_u(t)$ растућа, теорема 4.1.1 је заиста побољшање теореме 1.5.2 у случају када је $\varphi$ унивалентно. С друге стране, ако бисмо изоставили услов инјективности пресликавања $\varphi$, теорема 4.1.1 не би била тачна. Ако би посматрали субхармонијску функцију $u(z) = |z|$ и холоморфно пресликавање $\varphi(z) = z^2$ које није инјективно, а $\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ и $\varphi(0) = 0$, неједнакост (4.2) би се свела на $5r^2 \le 4r$, што није тачно за све $0 < r < 1$.

## 4.2 Теорема Рогозинског са униваленетним симболом

У овој секцији приказаћемо побољшање теореме Рогозинског у случају да је $\varphi$ унивалентно. Теорема Рогозинског тврди да за холоморфну функцију $f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D})$, такву да је њен развој на $\mathbb{D}$ облика

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n,$$

и за $\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ холоморфно пресликавање такво да $\varphi(0) = 0$ и

$$(f \circ \varphi)(z) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n z^n$$

на диску $\mathbb{D}$, важи

$$\sum_{j=1}^{n} |b_j|^2 \leq \sum_{j=1}^{n} |a_j|^2,$$

за сваки природан број $n$. За више информација о овој теореми, погледати [43].

**Теорема 4.2.1.** *Нека је $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ холоморфна функција на $\mathbb{D}$ и нека је $\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ унивалентна функција таква да $\varphi(0) = 0$ и $(f \circ \varphi)(z) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n z^n$ на диску $\mathbb{D}$. Тада*

$$\sum_{j=1}^{n} |b_j|^2 \leq \sum_{j=1}^{n} \left(1 - \frac{2j}{2j+1}\kappa\right) |a_j|^2, \tag{4.8}$$

*за било који природан број $n$, где је $\kappa = (1 - |\varphi'(0)|)/2$.*

*Доказ.* Нека је

$$s_n(z) = \sum_{j=1}^{n} a_j z^j, \quad t_n(z) = \sum_{j=1}^{n} b_j z^j$$

и

$$r_n(z) = f(z) - s_n(z)$$

на јединичном диску $\mathbb{D}$. Тада,

$$f(\varphi(z)) = s_n(\varphi(z)) + r_n(\varphi(z)).$$

Како је $\varphi(0) = 0$, важи

$$s_n(\varphi(z)) = t_n(z) + \sum_{j=n+1}^{\infty} c_j z^j,$$

за неки низ $\{c_j\}$. Користећи Парсевалов идентитет, закључујемо

$$\sum_{j=1}^{n} |b_j|^2 r^{2j} \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |s_n(\varphi\left(re^{i\theta}\right))|^2 d\theta = I_{|s_n \circ \varphi|^2}(r) = I_{|s_n|^2 \circ \varphi}(r), \tag{4.9}$$

где $0 \leq r < 1$. Применом теореме 4.1.1 на субхармонијске функције $|s_n|^2$ и на унивалентну функцију $\varphi$, добијамо

$$I_{|s_n|^2 \circ \varphi}(r) \leq I_{|s_n|^2}(r) - \kappa \int_0^r \left(I_{|s_n|^2}(r) - I_{|s_n|^2}(t)\right) dt.$$

Приметимо да $I_{|s_n|^2}(t) = \sum\limits_{j=1}^{n} |a_j|^2 t^{2j}$ за све $0 \leq t < 1$, одакле следи

$$\int_0^r \left(I_{|s_n|^2}(r) - I_{|s_n|^2}(t)\right) dt = \sum_{j=1}^{n} |a_j|^2 r^{2j+1} - \sum_{j=1}^{n} |a_j|^2 \frac{r^{2j+1}}{2j+1}.$$

На основу претходног, имамо

$$I_{|s_n|^2 \circ \varphi}(r) \leq \sum_{j=1}^{n} |a_j|^2 r^{2j} - \kappa \sum_{j=1}^{n} \frac{2j}{2j+1} |a_j|^2 r^{2j+1}. \tag{4.10}$$

Комбиновањем неједнакоси (4.9) и (4.10), закључујемо

$$\sum_{j=1}^{n} |b_j|^2 r^{2j} \leq \sum_{j=1}^{n} |a_j|^2 r^{2j} - \kappa \sum_{j=1}^{n} \frac{2j}{2j+1} |a_j|^2 r^{2j+1},$$

допуштајући $r \to 1^-$, добијамо тражену неједнакост (4.8). $\square$

## 4.3 Неједнакост повезана са композиционим операторима у Бергмановим просторима

Теорему 4.1.1 можемо применити и када оцењујемо норму композиционог оператора на тежинским Бергмановим просторима $A^p_\alpha$.

Нека је $f \in A^p_\alpha$ за $0 < p < \infty$ и $\alpha > -1$ и нека је $\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ холоморфно пресликавање. Теорема 2.2.2 тврди

$$\int_{\mathbb{D}} |f \circ \varphi|^p dm_\alpha \leq \left(\frac{1+c}{1-c}\right)^{\alpha+2} \int_{\mathbb{D}} |f|^p dm_\alpha,$$

где користимо ознаку $c = |\varphi(0)|$ и $dm_\alpha(z) = (1-|z|^2)^\alpha dm(z)$. У случају када је функција $\varphi$ унивалентна, добијамо наредно побољшање оцене:

**Теорема 4.3.1.** *Нека је $f$ холоморфна функција на јединичном диску $\mathbb{D}$, $0 < p < \infty, \alpha > -1$, и нека је $\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ унивалентна функција. Онда,*

$$\int_{\mathbb{D}} |f\circ\varphi|^p dm_\alpha + \lambda \int_{\mathbb{D}} \Delta|f|^p dm_{\alpha+2} \le \left(\frac{1+|a|}{1-|a|}\right)^{\alpha+2} \int_{\mathbb{D}} |f|^p dm_\alpha, \tag{4.11}$$

*где*

$$\lambda = \frac{1}{8(\alpha+1)(\alpha+2)} \left(1 - \frac{|\varphi'(0)|}{1-|a|^2}\right) \left(\frac{1-|a|}{1+|a|}\right)^{\alpha+2} \text{ и } a = \varphi(0).$$

*Доказ.* У случају када је $\int_{\mathbb{D}} |f|^p dm_\alpha = \infty$, неједнакост (4.11) важи тривијално, надаље претпостављамо да је $\int_{\mathbb{D}} |f|^p dm_\alpha < \infty$. Нека је $\varphi_a(z) = (a-z)/(1-\overline{a}z)$ за $z \in \mathbb{D}$. Тада је функција $g = f \circ \varphi_a$ холоморфна на јединичном диску $\mathbb{D}$ и $\psi = \varphi_a \circ \varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ је унивалентна функција таква да $\psi(0) = 0$. Онда је функција $|g|^p$ субхармонијска на $\mathbb{D}$. Примењујући теорему 4.1.1 на субхармонијску функцију $|g|^p$ и пресликавање $\psi$, добијамо

$$I_{|g\circ\psi|^p}(r) = I_{|g|^p\circ\psi}(r) \le (1-cr) I_{|g|^p}(r) + c\int_0^r I_{|g|^p}(t)dt,$$

што је еквивалентно са

$$I_{|g\circ\psi|^p}(r) + c\left(rI_{|g|^p}(r) - \int_0^r I_{|g|^p}(t)dt\right) \le I_{|g|^p}(r), \tag{4.12}$$

где

$$c = \frac{1-|\psi'(0)|}{2} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{|\varphi'(0)|}{1-|a|^2}\right).$$

Интеграљењем (4.12) на интервалу $(0,1)$ у односу на меру $2\pi r(1-r^2)^\alpha dr$, добијамо

$$\int_{\mathbb{D}} |g\circ\psi|^p dm_\alpha + 2\pi c(A-B) \le \int_{\mathbb{D}} |g|^p dm_\alpha, \tag{4.13}$$

где

$$A = \int_0^1 r^2(1-r^2)^\alpha I_{|g|^p}(r)dr \text{ и } B = \int_0^1\int_0^r r(1-r^2)^\alpha I_{|g|^p}(t)dtdr.$$

На основу једнакости

$$\int_{\mathbb{D}} |g|^p dm_\alpha = \int_{\mathbb{D}} |f\circ\varphi_a|^p dm_\alpha = \int_{\mathbb{D}} (|f|^p\circ\varphi_a) dm_\alpha = \int_{\mathbb{D}} |f|^p \frac{(1-|a|^2)^{\alpha+2}}{|1-\overline{a}z|^{2(\alpha+2)}} dm_\alpha,$$

важи

$$2\pi \int_0^1 t(1-t^2)^\alpha I_{|g|^p}(t)dt = \int_{\mathbb{D}} |g|^p dm_\alpha \leq \left(\frac{1+|a|}{1-|a|}\right)^{\alpha+2} \int_{\mathbb{D}} |f|^p dm_\alpha < \infty. \tag{4.14}$$

Дакле,

$$\lim_{r\to 1^-} \int_r^1 t(1-t^2)^\alpha I_{|g|^p}(t)dt = 0.$$

Како је функција $t \to I_{|g|^p}(t)$ растућа, налазимо

$$(1-r^2)^{\alpha+1} I_{|g|^p}(r) \leq 2(\alpha+1) \int_r^1 t(1-t^2)^\alpha I_{|g|^p}(t)dt,$$

одакле следи

$$\lim_{r\to 1^-} (1-r^2)^{\alpha+1} I_{|g|^p}(r) = 0. \tag{4.15}$$

Тада, на основу Фубинијеве теореме, добијамо

$$B = \int_0^1 \int_t^1 r(1-r^2)^\alpha I_{|g|^p}(t)drdt = \int_0^1 \frac{(1-t^2)^{\alpha+1}}{2(\alpha+1)} I_{|g|^p}(t)dt,$$

онда важи

$$A - B = \int_0^1 \left(r^2(1-r^2)^\alpha - \frac{(1-r^2)^{\alpha+1}}{2(\alpha+1)}\right) I_{|g|^p}(r)dr,$$

или еквивалентно,

$$A - B = \int_0^1 I_{|g|^p}(r) d\left(-\frac{r(1-r^2)^{\alpha+1}}{2(\alpha+1)}\right).$$

Користећи парцијалну интеграцију и (4.15), добијамо

$$A - B = \frac{1}{2(\alpha+1)} C, \quad C = \int_0^1 r(1-r^2)^{\alpha+1} \left(I_{|g|^p}\right)'(r)dr.$$

Како

$$\left(I_{|g|^p}\right)'(r) = \frac{1}{2\pi r} \int_{\mathbb{D}_r} \Delta |g|^p dm = \frac{1}{r} \int_0^r s I_{\Delta|g|^p}(s)ds,$$

добијамо

$$C = \int_0^1 \int_0^r s(1-r^2)^{\alpha+1} I_{|\Delta|g|^p}(s)dsdr = \int_0^1 \int_s^1 s(1-r^2)^{\alpha+1} I_{\Delta|g|^p}(s)drds,$$

или

$$C = \int_0^1 s I_{\Delta|g|^p}(s) \int_s^1 (1-r^2)^{\alpha+1} drds.$$

Приметимо да

$$\int_s^1 (1-r)^{\alpha+1} dr = \frac{(1-s)^{\alpha+2}}{\alpha+2} \geq \frac{(1+s)(1-s)^{\alpha+2}}{2(\alpha+2)},$$

одакле следи

$$\int_s^1 (1-r^2)^{\alpha+1} dr \geq (1+s)^{\alpha+1} \int_s^1 (1-r)^{\alpha+1} dr \geq \frac{1}{2(\alpha+2)}(1-s^2)^{\alpha+2}.$$

Дакле,

$$C \geq \frac{1}{2(\alpha+2)} \int_0^1 s(1-s^2)^{\alpha+2} I_{\Delta|g|^p}(s) ds = \frac{1}{4\pi(\alpha+2)} \int_{\mathbb{D}} \Delta|g|^p dm_{\alpha+2},$$

односно,

$$A - B = \frac{1}{2(\alpha+1)} C \geq \frac{1}{8\pi(\alpha+1)(\alpha+2)} \int_{\mathbb{D}} \Delta|g|^p dm_{\alpha+2}. \tag{4.16}$$

Такође, имамо

$$\int_{\mathbb{D}} \Delta|g|^p dm_{\alpha+2} = \int_{\mathbb{D}} \Delta|f \circ \varphi_a|^p dm_{\alpha+2} = \int_{\mathbb{D}} \Delta(|f|^p \circ \varphi_a) dm_{\alpha+2},$$

одакле следи

$$\int_{\mathbb{D}} \Delta|g|^p dm_{\alpha+2} = \int_{\mathbb{D}} (\Delta|f|^p \circ \varphi_a)|\varphi_a'|^2 (1 - |\varphi_a \circ \varphi_a|^2)^{\alpha+2} dm,$$

или

$$\int_{\mathbb{D}} \Delta|g|^p dm_{\alpha+2} = \int_{\varphi_a(\mathbb{D})} \Delta|f|^p (1-|\varphi_a|^2)^{\alpha+2} dm = \int_{\mathbb{D}} \Delta|f|^p (1-|\varphi_a|^2)^{\alpha+2} dm.$$

С обзиром да важи следећа неједнакост

$$1 - |\varphi_a(z)|^2 = \frac{(1-|a|^2)(1-|z|^2)}{|1-\overline{a}z|^2} \geq \frac{(1-|a|^2)(1-|z|^2)}{(1+|a|)^2} = \frac{(1-|a|)(1-|z|^2)}{1+|a|},$$

за све $z \in \mathbb{D}$, добијамо

$$\int_{\mathbb{D}} \Delta|g|^p dm_{\alpha+2} \geq \left(\frac{1-|a|}{1+|a|}\right)^{\alpha+2} \int_{\mathbb{D}} \Delta|f|^p dm_{\alpha+2}. \tag{4.17}$$

На основу (4.16) и (4.17), налазимо

$$A - B \geq \frac{1}{8\pi(\alpha+1)(\alpha+2)} \left(\frac{1-|a|}{1+|a|}\right)^{\alpha_2} \int_{\mathbb{D}} \Delta|f|^p dm_{\alpha+2}, \tag{4.18}$$

односно,

$$2\pi c(A-B) \geq \frac{1}{8\pi(\alpha+1)(\alpha+2)} \left(1 - \frac{|\varphi'(0)|}{1-|a|^2}\right) \left(\frac{1-|a|}{1+|a|}\right)^{\alpha_2} \int_{\mathbb{D}} \Delta|f|^p dm_{\alpha+2},$$

или

$$2\pi c(A-B) \geq \lambda \int_{\mathbb{D}} \Delta|f|^p dm_{\alpha+2}. \tag{4.19}$$

На основу (4.13), (4.14) и (4.19) и тога да $g \circ \psi = f \circ \varphi$, добијамо тражену неједнакост (4.11). $\square$

# Литература


[1] I. Arévalo, “A characterization of the inclusions between mixed norm spaces,” Journal of Mathematical Analysis and Applications, vol. 429, no. 2, pp. 942–955, 2015.

[2] I. Arévalo, M. D. Contreras, and L. Rodríguez-Piazza, “Semigroups of composition operators and integral operators on mixed norm spaces,” Revista Matemática Complutense, vol. 32, pp. 767–798, 2019.

[3] S. Bergman, The Kernel Function and Conformal Mapping (AMS Colloquium Publications). American Mathematical Society, 1950, vol. 5.

[4] V. Božin and B. Karapetrović, “Norm of the hilbert matrix on bergman spaces,” Journal of Functional Analysis, vol. 274, no. 2, pp. 525–543, 2018.

[5] D. Bralović and B. Karapetrović, “New upper bound for the hilbert matrix norm on negatively indexed weighted bergman spaces,” Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciences Society, vol. 45, no. 3, pp. 1183–1193, 2022.

[6] R. B. Burckel, An Introduction to Classical Complex Analysis. New York: Academic Press, 1979, vol. 1.

[7] C. Carathéodory, “Untersuchungen über die konformen abbildungen von festen und veränderlichen gebieten,” Mathematische Annalen, vol. 72, no. 1, pp. 107–144, 1912.

[8] C. Cowen and B. MacCluer, Composition Operators on Spaces of Analytic Functions. Boca Raton: CRC Press, 1995.

[9] J. Dai, “On the norm of the hilbert matrix operator on weighted bergman spaces,” Journal of Functional Analysis, vol. 287, no. 9, 2024.

[10] E. Diamantopoulos, “Hilbert matrix on bergman spaces,” Illinois Journal of Mathematics, Duke University Press, vol. 48, no. 3, pp. 1067–1078, 2004.

[11] E. Diamantopoulos and A. G. Siskakis, “Composition operators and the hilbert matrix,” Studia Mathematica, vol. 140, no. 2, pp. 191–198, 2000.

[12] D. Dmitrović and B. Karapetrović, “Monotonicity of integral means in mixed norm spaces,” Proceedings - Mathematical Sciences, vol. 135, no. 15, 2025.

[13] D. Dmitrović, “Norm of composition operators on mixed norm spaces,” Operators and Matrices, vol. 18, no. 3, pp. 697–710, 2024.

[14] D. Dmitrović and B. Karapetrović, “On the hilbert matrix norm on positively indexed weighted bergman spaces,” Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales. Serie A. Matemáticas, vol. 117, no. 4, 2023.

[15] D. Dmitrović and B. Karapetrović, “Sharpening littlewood subordination principle with univalent symbol,” Mathematika, vol. 70, no. 3, 2024.

[16] M. Dostanić, M. Jevtić, and D. Vukotić, “Norm of the hilbert matrix on bergman and hardy spaces and a theorem of nehari type,” Journal of Functional Analysis, vol. 254, no. 11, pp. 2800–2815, 2008.

[17] P. L. Duren and A. Schuster, Bergman Spaces. Providence, RI: American Mathematical Society, 2004.

[18] T. M. Flett, “Lipschitz spaces of functions on the circle and the disk,” Journal of Mathematical Analysis and Applications, vol. 39, no. 1, pp. 125–158, 1972.

[19] T. M. Flett, “The dual of an inequality of hardy and littlewood and some related inequalities,” Journal of Mathematical Analysis and Applications, vol. 38, no. 3, pp. 746–765, 1972.

[20] G. H. Hardy, “The mean value of the modulus of an analytic function,” Proceedings of the London Mathematical Society, vol. 14, pp. 269–277, 1915.

[21] G. H. Hardy, J. E. Littlewood, and G. Pólya, Inequalities. Cambridge University Press, 1952.

[22] H. Hedenmalm, B. Korenblum, and K. Zhu, Theory of Bergman Spaces. Springer, 2000.

[23] D. Hilbert, “Ein beitrag zur theorie des legendreschen polynoms,” in Algebra und Invariantentheorie, Springer, 1970, pp. 367–370.

[24] M. Jevtić and B. Karapetrović, “Hilbert matrix on spaces of bergman-type,” Journal of Mathematical Analysis and Applications, vol. 453, no. 1, pp. 241–254, 2017.

[25] M. Jevtić, D. Vukotić, and M. Arsenović, Taylor Coefficients and Coefficient Multipliers of Hardy and Bergman-type Spaces. Cham: Springer, 2016.

[26] B. Karapetrović, “Norm of the hilbert matrix operator on the weighted bergman spaces,” Glasgow Mathematical Journal, vol. 60, no. 3, pp. 513–525, 2018.

[27] B. Karapetrović, “Hilbert matrix and its norm on weighted bergman spaces,” Journal of Geometric Analysis, vol. 31, no. 6, pp. 5909–5940, 2021.

[28] B. Karapetrović, “Volume integral means over spherical shell,” Canad. Math. Bull., vol. 65, no. 1, pp. 180–197, 2022.

[29] S. V. Kislyakov and V. V. Peller, “Hankel operators and their applications,” Algebra i Analiz, vol. 15, no. 6, pp. 216–221, 2003.

[30] M. Lindström, S. Miihkinen, and N. Wikman, “On the exact value of the norm of the hilbert matrix operator on weighted bergman spaces,” Annales Academiae Scientiarum Fennicae Mathematica, vol. 46, no. 1, pp. 201–224, 2021.

[31] J. E. Littlewood, “On inequalities in the theory of functions,” Proceedings of the London Mathematical Society, vol. 23, pp. 481–519, 1925.

[32] C. Liu, “Sharp forelli–rudin estimates and the norm of the bergman projection,” Journal of Functional Analysis, vol. 268, no. 2, pp. 255–277, 2015.

[33] A. Llinares and D. Vukotić, “Contractive inequalities for mixed norm spaces and the beta function,” Journal of Mathematical Analysis and Applications, vol. 509, no. 1, 2022.

[34] W. Magnus, “On the spectrum of hilbert’s matrix,” American Journal of Mathematics, vol. 72, no. 4, pp. 699–704, 1950.

[35] Z. Nehari, Conformal Mapping. New York: Dover, 1975.

[36] E. A. Nordgren, “Composition operators,” Canadian Journal of Mathematics, vol. 20, pp. 442–449, 1968.

[37] R. Osserman, “A sharp schwarz inequality on the boundary,” Proceedings of the American Mathematical Society, vol. 128, no. 12, pp. 3513–3517, 2000.

[38] M. Pavlović, Introduction to Function Spaces on the Disk. Belgrade: Matematički Institut SANU, 2004.

[39] F. Riesz, "Über die randwerte einer analytischen funktion," Mathematische Zeitschrift, vol. 18, pp. 87–95, 1923.

[40] F. Riesz, "Sur une inégalité de m. littlewood dans la théorie des fonctions," Proceedings of the London Mathematical Society, vol. 23, pp. 36–39, 1925.

[41] F. Riesz, "Sur les fonctions sousharmoniques et leur rapport à la théorie du potentiel i," Acta Mathematica, vol. 48, pp. 329–343, 1926.

[42] F. Riesz, "Sur les fonctions sousharmoniques et leur rapport à la théorie du potentiel ii," Acta Mathematica, vol. 54, pp. 321–360, 1930.

[43] W. Rogosinski, "On the coefficients of subordinate functions," Proceedings of the London Mathematical Society, vol. 48, pp. 48–82, 1945.

[44] H. A. Schwarz, Gesammelte Mathematische Abhandlungen, Zweiter Band. Berlin: Springer, 1890.

[45] D. Vukotić, "On norms of composition operators acting on bergman spaces," Journal of Mathematical Analysis and Applications, vol. 291, no. 1, pp. 189–202, 2004.

[46] K. Zhu, Operator Theory in Function Spaces, 2nd ed. Providence, RI: American Mathematical Society, 2007.

# Биографија аутора

Душица Дмитровић рођена је 8.11.1996. године у Прибоју. Завршила је основну школу и Математичку гимназију у Београду. Током средње школе освојила је неколико награда на државним такмичењима из математике. Основне академске студије на Математичком факултету Универзитета у Београду, смер Теоријска математика и примене, уписала је 2015. године и дипломирала 2019. године са просечном оценом 9,50. Мастер студије завршила је 2020. године са просечном оценом 10. Током студија била је стипендиста Фонда за младе таленте Републике Србије. Од 2019. године запослена је на Математичком факултету, Универзитета у Београду на Катедри за реалну и комплексну анализу.

Списак објављених радова:

- D. Bralović, B. Karapetrović, New Upper Bound for the Hilbert Matrix Norm on Negatively Indexed Weighted Bergman Spaces, Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciences Society, 45, 1183–1193 (2022).
- D. Dmitrović, B. Karapetrović, On the Hilbert matrix norm on positively indexed weighted Bergman spaces, Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales. Serie A. Matemáticas, 117, 138 (2023).
- D. Dmitrović, B. Karapetrović, Sharpening Littlewood subordination principle with univalent symbol, Mathematika 70 (2024).
- D. Dmitrović, Norm of Composition Operator on Mixed Norm Spaces, Operators and Matrices 18, 697-710 (2024).
- D. Dmitrović, B. Karapetrović, Monotonicity of integral means in mixed norm spaces, Proceedings-Mathematical Sciences 135 (2025).

**Прилог 1.**

# Изјава о ауторству

Потписани-а ____________________________________________________________

број индекса ____________________________________________________

**Изјављујем**

да је докторска дисертација под насловом

_______________________________________________________________________________

_______________________________________________________________________________

- резултат сопственог истраживачког рада,
- да предложена дисертација у целини ни у деловима није била предложена за добијање било које дипломе према студијским програмима других високошколских установа,
- да су резултати коректно наведени и
- да нисам кршио/ла ауторска права и користио интелектуалну својину других лица.

**Потпис докторанда**

У Београду, ___________________

___________________________

**Прилог 2.**

# Изјава о истоветности штампане и електронске верзије докторског рада

Име и презиме аутора _______________________________________________

Број индекса _______________________________________________________

Студијски програм __________________________________________________

Наслов рада _______________________________________________________

Ментор ___________________________________________________________

Потписани/а _______________________________________

Изјављујем да је штампана верзија мог докторског рада истоветна електронској верзији коју сам предао/ла за објављивање на порталу **Дигиталног репозиторијума Универзитета у Београду.**

Дозвољавам да се објаве моји лични подаци везани за добијање академског звања доктора наука, као што су име и презиме, година и место рођења и датум одбране рада.

Ови лични подаци могу се објавити на мрежним страницама дигиталне библиотеке, у електронском каталогу и у публикацијама Универзитета у Београду.

**Потпис докторанда**

У Београду, ________________________

________________________

**Прилог 3.**

# Изјава о коришћењу

Овлашћујем Универзитетску библиотеку „Светозар Марковић“ да у Дигитални репозиторијум Универзитета у Београду унесе моју докторску дисертацију под насловом:

____________________________________________________________________

____________________________________________________________________

која је моје ауторско дело.

Дисертацију са свим прилозима предао/ла сам у електронском формату погодном за трајно архивирање.

Моју докторску дисертацију похрањену у Дигитални репозиторијум Универзитета у Београду могу да користе сви који поштују одредбе садржане у одабраном типу лиценце Креативне заједнице (Creative Commons) за коју сам се одлучио/ла.

1. Ауторство

2. Ауторство - некомерцијално

3. Ауторство – некомерцијално – без прераде

4. Ауторство – некомерцијално – делити под истим условима

5. Ауторство – без прераде

6. Ауторство – делити под истим условима

(Молимо да заокружите само једну од шест понуђених лиценци, кратак опис лиценци дат је на полеђини листа).

**Потпис докторанда**

У Београду, __________________________

____________________