УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ
МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ



Ђорђе Мијовић

СПЕКТРОПОЛАРИМЕТРИЈСКА ДИЈАГНОСТИКА МАГНЕТНОГ ПОЉА У ФОТОСФЕРИ ОКО СУНЧЕВИХ ПОЛОВА

мастер рад

Београд, 2025.

Ментор:

др Иван Милић, доцент
Универзитет у Београду, Математички факултет

Чланови комисије:

проф. др Бојан Арбутина, редовни професор
Универзитет у Београду, Математички факултет

проф. др Душан Оњић, ванредни професор
Универзитет у Београду, Математички факултет

Датум одбране: _____

Захвалнице и посвета

Дубоку захвалност дугујем ментору др Ивану Милићу, због његовог стрпљења, отворености и ентузијазма. Захваљујем се проф. др Душану Онићу и проф. др Бојану Арбутини, чији су коментари допринијели унапређењу тезе.

Посвећено мајци.

Наслов мастер рада: Спектрополариметријска дијагностика магнетног поља у фотосфери око Сунчевих полова

Резиме: Магнетно поље Сунца је доминантни фактор који одређује услове у магнетосфери, односно тзв. свемирску климу. Сунчеви магнетни полови су посебно важни у овом контексту пошто су мјеста у Сунчевој фотосфери која формирају Сунчево полоидно магнетно поље и самим тим одређују понашање Сунчевог вјетра. Дакле, за разумијевање магнетносфере и Сунчевог вјетра, неопходна су поуздана мјерења магнетног поља у фотосфери око Сунчевих полова. Таква мјерења се ослањају на спектрополариметријска посматрања и коришћење Земановог ефекта за интерпретацију поларизације у спектралним линијама. Овакав приступ је поуздан што се тиче интерпретације посматрања на центру Сунчевог диска, али је релативно непрецизан за интерпретацију посматрања на половима. Два главна узрока за ту непрецизност су непогодан угао посматрања и ограничена просторна резолуција. Овај рад се бави испитивањем постојећих инхерентних неодређености досадашњих метода и *предлаже* методу за повећање прецизности одређивања магнетног поља на половима. У оквиру овог рада, на основу магнетохидродинамичке симулације фотосфере Сунца, анализира се конфигурација вектора магнетног поља у поларном региону. Тестиране су могућности методе за отклањање двозначности азимута магнетног поља, која је *реимплементирана* у овом раду, кроз употребу машинског учења. Поларна магнетна конфигурација је интерпретирана напредном методом за спектрополариметријску инверзију, са циљем да се добије прецизнија вриједност магнетног поља у референтном систему посматрача. На основу интерпретације унапријеђеног случаја и оригиналне симулације, квантификован је напредак у мјерењу поларног магнетног поља.

Кључне ријечи: спектрополариметрија, фотосфера, двозначност, инверзија

Садржај

1 Увод **1**

2 Дијагностика магнетног поља **5**

2.1 Поларизација свјетлости и Стоксови параметри 5

2.2 Земанов ефекат и мјерење магнетног поља 8

2.3 Спектрополариметријска инверзија 10

2.4 Просторно-спрегнута инверзија 14

3 Сунчево поларно магнетно поље – изазови **20**

3.1 Ограничења при посматрању поларних региона 20

3.2 Азимутална двозначност 21

3.3 Отклањање азимуталне двозначности 23

4 Резултати **28**

4.1 Примјер тест конфигурације *цвијета* 28

4.2 Отклањање азимуталне двозначности на примјеру тест конфигурације *цвијета* 31

4.3 Отклањање азимуталне двозначности на тест примјеру из симулације – центар диска 33

4.4 Просторно-спрегнута инверзија синтетичких посматрања на Сунчевом полу 36

5 Закључак **41**

Литература **43**

Глава 1

Увод

Сунце (астрономски симбол: $\odot$), као нама најближа звијезда, представља најдетаљније проучен звјездани објекат. Оно је централно тијело Сунчевог система и основни извор енергије која покреће физичке, хемијске и биолошке процесе на Земљи. У питању је звијезда спектралне класе G2V. Сунце има масу $m_\odot \sim 2 \cdot 10^{30}\,\mathrm{kg}$, што је 99.8% укупне масе Сунчевог система. Његова унутрашњост се може грубо подијелити у неколико различитих слојева, а сваки од њих карактеришу различити физички услови и механизми преноса енергије.

Језгро се простире до отприлике 0.2 соларних радијуса ($\mathrm{R}_\odot \approx 6.96 \cdot 10^8\,\mathrm{m}$). У њему се достиже температура до чак $1.5 \cdot 10^7\,\mathrm{K}$ и притисак до $2.6 \cdot 10^{16}\,\mathrm{Pa}$. Сачињава га изузетно врела и густа плазма, гдје водоник нуклеарном фузијом бива конвертован у хелијум, кроз протон-протон[1.1] ланчану реакцију. Слој изнад језгра назива се радијативна зона, која се простире до ~ 0.7 соларних радијуса. У њој се енергија, произведена у језгру, преноси посредством зрачења које дифундује кроз безбројне процесе апсорпције и реемисије. У радијативној зони, густина (ρ) опада од $2 \cdot 10^4\,\mathrm{kg/m^3}$ до $2 \cdot 10^2\,\mathrm{kg/m^3}$ (у језгру $\rho \sim 1.5 \cdot 10^5\,\mathrm{kg/m^3}$). Између радијативне и наредне (конвективне) зоне налази се тзв. тахоклин – уска прелазна област која раздваја униформну ротацију радијативне зоне од диференцијалне ротације конвективне зоне. У конвективној зони енергија се више не може ефикасно преносити зрачењем, јер оптичка дубина расте са опадањем температуре. Ту доминирају конвективна кретања на великим скалама која условљавају појаву гранулације, видљиве и на Сунчевој површини.

Појам Сунчеве атмосфере се односи на стратификоване спољашње регионе Сунца, које можемо директно посматрати, а најчешћа подјела је на фотосферу,

[1.1] Реакције: $^1\mathrm{H} + {}^1\mathrm{H} \rightarrow {}^2\mathrm{D} + e^+ + \nu_e$ | $^2\mathrm{D} + {}^1\mathrm{H} \rightarrow {}^3\mathrm{He} + \gamma$ | $^3\mathrm{He} + {}^3\mathrm{He} \rightarrow {}^4\mathrm{He} + {}^1\mathrm{H} + {}^1\mathrm{H}$

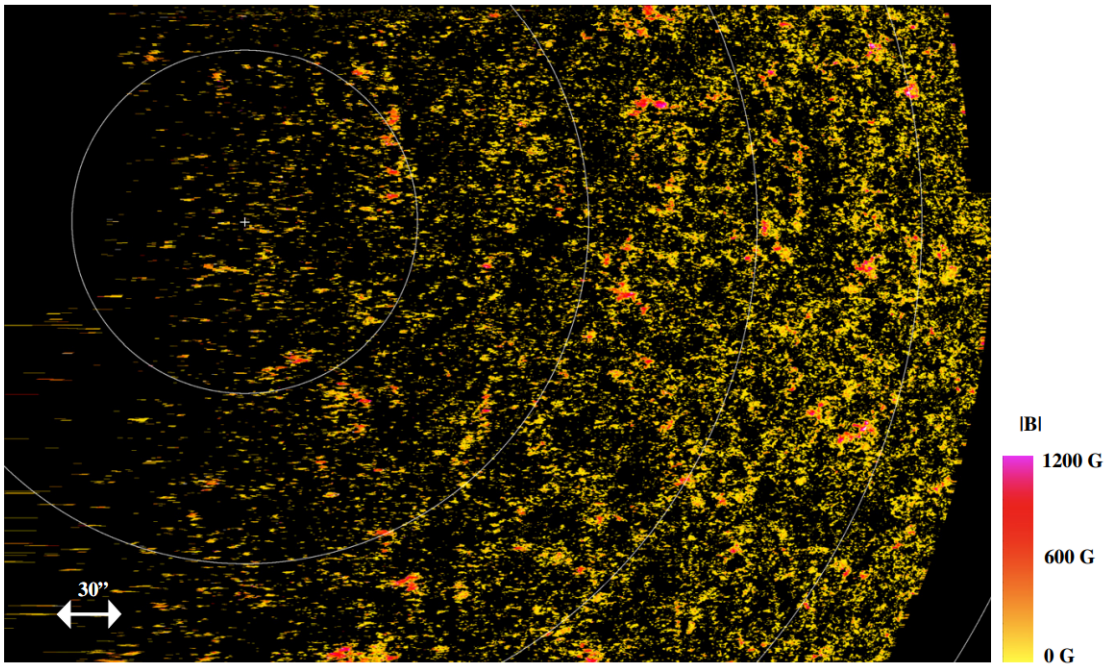
хромосферу и корону (ови региони нијесу прецизно одвојени). У Сунчевој атмосфери манифестују се феномени као што су бакље и пјеге, а одатле потиче Сунчев вјетар који представља ток наелектрисаних честица у међупланетарни простор (густина тих честица на 1 AJ је $\sim 5\mathrm{cm}^{-3}$ али може значајно варирати). Видљива површина Сунца назива се фотосфера. Има ефективну температуру од $\sim 5770\,\mathrm{K}$. Изнад ње се простире хромосфера, у којој, супротно претпоставкама равнотеже зрачења, температура расте и достиже вриједности до $2 \cdot 10^4\,\mathrm{K}$. Између најдаљег слоја (короне) и хромосфере протеже се прелазни регион. Корона се протеже милионима километара у свемир, а температура прелази $10^6\,\mathrm{K}$. Иако се ови слојеви традиционално описују кроз температурни профил и геометријску структуру, важно је разматрати и физичке процесе који одређују динамику и енергетску равнотежу плазме. Енергетски биланс плазме у горњој хромосфери и прелазном региону директно зависи од јонизационог стања хелијума, које утиче на ефикасност радијативног хлађења и посљедично, на температурну структуру ових слојева (Golding, Carlsson и Leenaarts, 2014).

Сунчево магнетно поље потиче од комплексних процеса који се догађају у његовој унутрашњости. Диференцијална ротација Сунца (екватор ротира брже него полови, са периодом од 25 дана насупрот 35 дана), у комбинацији са конвективним кретањима у спољашњим слојевима, амплификује магнетно поље кроз магнетохидродинамичке процесе. Најважнија (квази) периодична промјена глобалног Сунчевог магнетног поља назива се Сунчев циклус и траје отприлике 11 година, а генерише је *динамо* механизам (Moffatt, 1978). Магнетни флукс на Сунчевој површини се значајно мијења у овом процесу. Такође, ова појава је уско повезана са бројем и површином Сунчевих пјега, укупним Сунчевим зрачењем и учесталошћу Сунчевих бакљи (Hathaway, 2015).

Глобално Сунчево магнетно поље представља скуп магнетних структура великих размјера које обухватају цијело Сунце и простиру се у међупланетарни простор. У првој апроксимацији оно се описује као диполно (полоидно), са магнетним половима приближно поравнатим уз осу ротације, нарочито у периоду соларног минимума. Иако се глобално поље у најједноставнијој апроксимацији може представити као искошени дипол, испод површине диференцијална ротација узрокује настанак јаког тороидалног поља. Ово тороидално поље постаје видљиво на површини кроз избијање горепоменутих Сунчевих пјега и активних региона, што представља спољашњи израз соларног динамо механизма (Charbonneau, 2020).

Поларна поља имају кључну улогу у одређивању глобалне конфигурације: њихова јачина и поларитет дефинишу снагу и геометрију диполног поља и у великој мјери одређују ток Сунчевог циклуса. На крају сваког једанаестогодишњег циклуса долази до обртања поларитета у поларним областима, што означава почетак новог циклуса. Јачина поларног поља у минимуму директно утиче на снагу наредног циклуса Сунчевих пјега и укупну Сунчеву активност (Petrie, 2015). Мапа магнетног поља у поларном региону приказана је на слици 1.1 (посматрања су вршена од 00:10 до 07:26 UT, 25. септембра 2007. године).

Поред тога, отворене линије магнетног поља из поларних области чине главни извор брзог Сунчевог вјетра, који одржава хелиосферску струју и обликује укупну структуру хелиосфере. Брзи Сунчев вјетар, који потиче из поларних короналних празнина, одликује се приближно константном брзином од $\sim 700\,\mathrm{km/s}$ и има пресудну улогу у одређивању физичких услова у међупланетарном простору. Његова интеракција са међупланетарним магнетним пољем утиче на ток космичких зрака и на динамику Земљине магнетосфере (Cranmer, 2009).



Слика 1.1: Поларни регион Сунца; мапа јачине магнетног поља које је конвертовано у мапу визуре изнад сјеверног пола. Видљиви су ефекти геометријске компресије. Концентричне кружнице (линије латитуде) су на међусобној удаљености од 5°. (Ito и др., 2010).

Циљ овог рада је прецизније одређивање магнетног поља на Сунчевим половима. То постижемо комбинацијом просторно-спрегнуте спектрополариметријске инверзије и методе за отклањање инхерентне азимуталне двозначности. У наредним главама ћемо изложити начин *мјерења* магнетног поља на основу доступних спектралних профила, путем спектрополариметријске инверзије. Представићемо проблем азимуталне двозначности и методу за њено отклањање, кроз реимплементацију већ постојећег метода коришћењем машинског учења. Показаћемо резултате примјене методе отклањања азимуталне двозначности на неколико примјера, као и резултате просторно-спрегнуте инверзије у случају симулације поларног региона Сунца.

Глава 2

Дијагностика магнетног поља

2.1 Поларизација свјетлости и Стоксови параметри

Попут многих открића у науци, и за поларизацију се може рећи да је откривена *случајно*. У другој половини седамнаестог вијека, феномен двоструке рефракције у исландском кристалу (тзв. оптички калцит) први је описао дански научник Размус Бартолин (1669). Убрзо затим (1678), Кристијан Хајгенс тумачи двоструку рефракцију у оквиру таласне теорије. У наредним деценијама, Исак Њутн и Томас Јанг, а нарочито Огистен Френел, показују да двоструко рефрактовани зраци имају различита својства у различитим правцима, што доводи до закључка да су свјетлосне вибрације трансверзалне (del Toro Iniesta, 2003). Феномен двоструке рефракције био је, дакле, прва назнака да свјетлост може постојати у различитим *стањима* у зависности од правца осцилације – оно што ће касније бити препознато као поларизација. Неколико деценија касније, Џорџ Стокс (1852) формулише математички опис поларизације, уводећи четири величине (данас познате као Стоксови параметри $\{I, Q, U, V\}$). Иако је њихова општа дефиниција била позната, тек средином двадесетог вијека добијају централно мјесто у астрофизици. Наиме, Субраманијан Чандрасекар систематски примјењује Стоксов формализам у једначинама преноса зрачења, чиме отвара врата за његову ширу примјену у моделима звјезданих атмосфера (Chandrasekhar, 1947). Убрзо постаје јасно да се ради о веома моћном алату за интерпретацију посматрања и теоријско моделовање поларизованих атмосфера (Arteaga, 2017).

Математичка формулација поларизације

У хомогеној и изотропној средини без извора, Максвелове једначине указују да вектор електричног поља $\vec{E}$ задовољава таласну једначину:

$$\nabla^2 \vec{E} - \frac{\varepsilon_r \mu_r}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0, \tag{2.1}$$

гдје су ε_r и μ_r релативна диелектрична и релативна магнетна пермеабилност, респективно. Једно од могућих рјешења ове једначине је равни талас облика:

$$E_j(\vec{r}, t) = a_j e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t + \delta_j)}, \ j \in \{x, y, z\}, \tag{2.2}$$

гдје је a_j реална амплитуда сваке од компоненти вектора $\vec{E}$, δ_j је фаза, таласни број је дат преко k, и важи $\omega = 2\pi\nu$. Такође, имамо $\vec{k} = k\hat{s} = \frac{2\pi}{\lambda}\hat{s}$, уз то да је $\hat{s}$ јединични вектор (у правцу пропагације таласа), тзв. нормала на таласни фронт[2.1]. Једначину (2.2) можемо написати на другачији начин, као:

$$E_j(\vec{r}, t) = A_j e^{-i(\omega t - \delta_j)}, \ A_j = a_j e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}, \tag{2.3}$$

гдје је A_j комплексна амплитуда таласа.
Пошто важи услов трансверзалности $\vec{k} \cdot \vec{E} = 0$, у правцу ширења таласа нема компоненте електричног поља. Ако узмемо да се талас простире дуж z-осе ($\vec{k} = k\hat{z}$), онда електрично поље можемо писати као:

$$\vec{E}(t) = \Re\left\{A_x e^{-i\omega t}\right\} \hat{x} + \Re\left\{A_y e^{-i\omega t}\right\} \hat{y}, \tag{2.4}$$

са комплексним амплитудама $A_x = a_x e^{i\delta_x}$, $A_y = a_y e^{i\delta_y}$.

Трајекторија врха вектора електричног поља $\vec{E}(t)$ у равни xy, током осцилације описује криву која у општем случају има облик елипсе, а која је геометријски приказ стања поларизације зрака. Њен облик одређују два параметра: однос амплитуда a_y/a_x и фазна разлика $\delta = \delta_y - \delta_x$. Уколико је $\delta = \{0, \pi\}$, трајекторија се своди на праву линију, те имамо линеарну поларизацију. Ако су амплитуде једнаке ($|a_x| = |a_y|$) и фазна разлика $\delta = \pm\pi/2$, врх вектора $\vec{E}(t)$ описује круг – кружна поларизација. У свим осталим случајевима добија се елиптична поларизација, коју карактеришу азимут ψ (оријентација главне осе елипсе) и елиптични угао χ (мјери степен *заобљености* елипсе). Управо наведени геометријски опис је основа за касније увођење Стоксових параметара, јер

[2.1] Често се употребљава енглеска верзија *line-of-sight* (LOS), што се на српском преводи као *правац визуре*.

они пружају квантитативан алат да се свако стање поларизације прикаже на једноставан начин.

Даље, за неиделизоване/физичке изворе свјетлости често имамо само дјелимично кохерентно зрачење. Онда користимо просјек у времену или по ансамблу:

$$\mathbf{J} = \langle \vec{E}_\perp \vec{E}_\perp^\dagger \rangle = \begin{bmatrix} \langle E_x E_x^* \rangle & \langle E_x E_y^* \rangle \\ \langle E_y E_x^* \rangle & \langle E_y E_y^* \rangle \end{bmatrix}. \tag{2.5}$$

Матрица $\mathbf{J}$ се назива тензор поларизације. Ако се подсјетимо да је Поинтингов вектор $\vec{S} \propto EE^* \hat{s}$, и да је повезан са флуксом енергије, то имплицира да тензор поларизације карактерише енергијски садржај[2.2] и векторска својства електромагнетних таласа, одједном. Дијагонални елементи горепоменуте матрице дају интензитете у x и y правцу. Недијагонални елементи дају корелацију између компоненти (фазна повезаност).

Напокон, у пракси, Стоксови параметри се уводе на сљедећи начин:

$$S_\mu = \mathrm{Tr}(\mathbf{J}\,\sigma_\mu), \quad \mu = 0, 1, 2, 3, \tag{2.6}$$

гдје су σ_μ Паулијеве матрице ($\sigma_0 = I_2$).

Одавде се може расписати низ веома корисних једнакости:

$$\begin{aligned} S_0 &= \langle |E_x|^2 + |E_y|^2 \rangle && \text{(укупни интензитет)}, \\ S_1 &= \langle |E_x|^2 - |E_y|^2 \rangle && \text{(линеарна поларизација)}, \\ S_2 &= 2\Re\langle E_x E_y^* \rangle && \text{(линеарна поларизација} \pm 45^\circ), \\ S_3 &= -2\Im\langle E_x E_y^* \rangle && \text{(десна/лијева кружна поларизација)}. \end{aligned}$$

Уколико се формира вектор (S_1, S_2, S_3), он задаје тачку унутар или на површини тзв. Поенкареове сфере, и дужина тог вектора мјери колико је свјетлост поларизована, преко степена поларизације:

$$\mathcal{P} = \frac{\sqrt{S_1^2 + S_2^2 + S_3^2}}{S_0}, \quad 0 \leq \mathcal{P} \leq 1. \tag{2.7}$$

У случају да је $\mathcal{P} = 1$, онда је у питању потпуна поларизација. На крају, можемо записати једначину која повезује Стоксове параметре у препознатљивом облику:

$$S_0^2 = S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 \iff I^2 = Q^2 + U^2 + V^2. \tag{2.8}$$

[2.2] Детектори су осјетљиви управо на електромагнетну енергију.

2.2 Земанов ефекат и мјерење магнетног поља

Главна метода за мјерење Сунчевог магнетног поља заснива се на употреби Земановог ефекта (видјети слику 2.1), који описује цијепање атомских енергетских нивоа, а самим тим и спектралних линија, у више компоненти различите поларизације када је у региону формирања линија присутно магнетно поље (Hale, 1908). Другим ријечима, до цијепања долази због интеракције између спољашњег магнетног поља $\vec{B}$ и магнетног момента повезаног са орбиталним и спинским угловним моментом електрона. Класични опис Земановог ефекта (тзв. Ларморова прецесија електрона у магнетном пољу) је донекле задовољавајући, али потпуно разумијевање цијепања захтијева квантно-механички третман атомских нивоа и узимање у обзир селекционих правила за прелазе. У апроксимацији слабог магнетног поља, промјена енергије (укидање дегенерације енергетских нивоа) усљед наведене интеракције, пише се као:

$$\Delta E = \mu_B g_m m_J B, \tag{2.9}$$

гдје је $\mu_B = \frac{e\hbar}{2m_e}$ Боров магнетон, g_m је Ландеов g-фактор нивоа, а m_J магнетни квантни број нивоа (m_e и e су маса и наелектрисање електрона, респективно). Одговарајућа промјена у таласној дужини је:

$$\Delta\lambda = \frac{e\lambda^2 B}{4\pi m_e c^2} g_{\text{eff}} \implies \Delta\lambda\,[\text{Å}] \approx 4.67 \cdot 10^{-13}\, g_{\text{eff}}\, \lambda^2\,[\text{Å}^2]\, B\,[\text{G}], \tag{2.10}$$

гдје је λ централна таласна дужина за спектралну линију, а g_{eff} ефективни Ландеов фактор за посматрани прелаз (Landi Degl'Innocenti и Landolfi, 2004). Ова формула важи у апроксимацији $\Delta\lambda \ll \lambda$. Илустративан примјер може бити дат преко линије Fe I на 6302.5 Å (често коришћена линија у соларној спектрополариметрији). Узимајући да је $g_{\text{eff}} = 2.5$ и $B = 1000$ G добија се $\Delta\lambda \approx 0.046$ Å. Овај износ је довољно велик да се спектралне компоненте раздвоје високоразлучивим инструментима, али и довољно мали да захтијева пажљиву интерпретацију поларизационих сигнала (Stenflo, 1994).

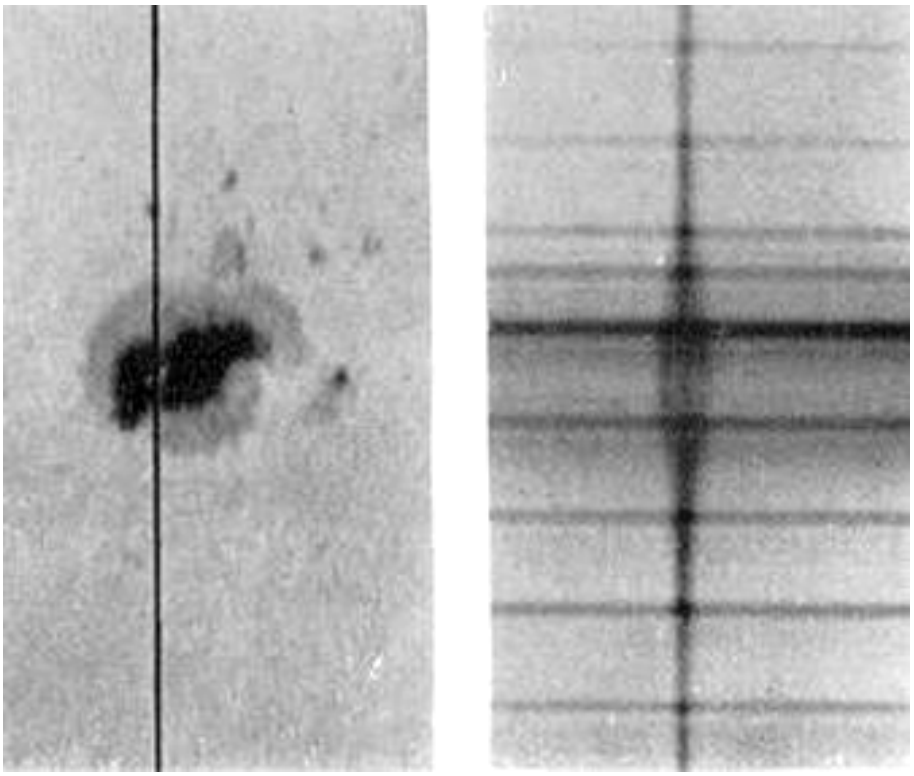
Поларизација спектралних линија у Земановом ефекту зависи од геометрије посматрања у односу на магнетно поље. Када се посматра дуж правца магнетних линија (лонгитудинални Земанов ефекат), кружна поларизација (σ^+, σ^- : $\Delta m_J = \pm 1$) доминира, док је π компонента ($\Delta m_J = 0$) одсутна. У случају посматрања нормално у односу на поље (трансверзални Земанов ефекат), све три компоненте су линеарно поларизоване: π паралелно са пројекцијом поља

у равни неба, а σ^+ и σ^- ортогонално на њу. Наведена својства чине основу за дијагностику вектора магнетног поља на Сунцу, преко Стоксових параметара $\{I, Q, U, V\}$ (Rees и Semel, 1979).

У апроксимацији слабог магнетног поља, лонгитудинална компонента $B_\parallel$ може се директно апроксимирати из Стоксовог параметра V:

$$V(\lambda) \propto \lambda^2 g_{\text{eff}} B_\parallel \frac{dI}{d\lambda}, \tag{2.11}$$

одакле се фитовањем облика посматраног $V(\lambda)$ и познатог градијента интензитета $dI/d\lambda$ процјењује $B_\parallel$ (Jefferies, Lites и Skumanich, 1989). Одређивање трансверзалне компоненте $B_\perp$ је теже, јер се она манифестује у Стоксовим параметрима Q и U, чији сигнали су много слабији и подложнији шуму. Због тога, нужна је употреба инверзионих техника које користе пуни Стоксов вектор, као што је нпр. Милне–Едингтонова спектрополариметријска инверзија (Skumanich и Lites, 1987; del Toro Iniesta и Ruiz Cobo, 2016) коју ћемо описати у наставку.



Слика 2.1: Земанов ефекат на примјеру спектралне линије Сунчеве пјеге (Hale, 1908). Цијепање је пропорционално јачини магнетног поља.

2.3 Спектрополариметријска инверзија

Директни проблем

Прије описа инверзног проблема даћемо пар информација о директном проблему, те увести неке нове величине и појмове. Директни проблем представља одређивање синтетичких Стоксових профила $\vec{I}(\lambda) = (I(\lambda), Q(\lambda), U(\lambda), V(\lambda))^T$ из претпостављеног/познатог модела атмосфере $\vec{x}(\tau_c)$. Овдје је τ_c оптичка дубина континуума. Модел атмосфере се формално може записати као вектор атмосферских параметара:

$$\vec{x}(\tau_c) \equiv \left[T(\tau_c), p_e(\tau_c), v_{\mathrm{LOS}}(\tau_c), B(\tau_c), \theta(\tau_c), \varphi(\tau_c), ...\right], \tag{2.12}$$

гдје редом фигуришу температура, електронски притисак, брзина у правцу визуре, јачина, инклинација и азимут магнетног поља.

Једначина преноса поларизованог зрачења (користићемо само скраћено ЈПЗ), чијим рјешавањем се добијају синтетички Стоксови профили, у условима локалне термодинамичке равнотеже има облик:

$$\frac{d\vec{I}}{d\tau_c} = \mathbf{K}\,(\vec{I} - \vec{S}), \tag{2.13}$$

гдје је $\mathbf{K}$ матрица пропагације[2.3], а $\vec{S} = (B_\nu(T), 0, 0, 0)^T$ функција извора. У присуству магнетног поља јавља се спрегнутост између компоненти Стоксовог вектора – рјешење ЈПЗ није тривијално. Уводи се еволуциони оператор $\mathbf{O}(\tau_c, \tau_c')$, који омогућава формално изражавање рјешења (за нпр. средину између τ_0 и τ_1):

$$\vec{I}(\tau_1) = \mathbf{O}(\tau_1, \tau_0)\vec{I}(\tau_0) - \int_{\tau_0}^{\tau_1} \mathbf{O}(\tau_1, \tau_c)\mathbf{K}(\tau_c)\vec{S}(\tau_c)\, d\tau_c, \tag{2.14}$$

и задовољава једнакост:

$$\frac{d\mathbf{O}(\tau_c, \tau_c')}{d\tau_c'} = -\mathbf{K}(\tau_c')\mathbf{O}(\tau_c, \tau_c'). \tag{2.15}$$

Уз претпоставку полубесконачне средине ($\tau_0 \to \infty$, $\tau_1 \to 0$), слиједи облик формалног рјешења (Landi Degl'Innocenti, 1987; del Toro Iniesta, 2003):

$$\vec{I}(0) = \int_0^{\infty} \mathbf{O}(0, \tau_c)\mathbf{K}(\tau_c)\vec{S}(\tau_c)\, d\tau_c. \tag{2.16}$$

[2.3] Ова матрица облика 4×4 садржи информације о апсорпцији, дихроизму и дисперзији. Наведени процеси спрежу Стоксове параметре у току преноса зрачења.

Милне-Едингтонова апроксимација

У пракси је рјешење инверзног проблема могуће једино уз усвајање апроксимација које поједностављују опис атмосфере. Једна од најчешће коришћених је Милне–Едингтонова апроксимација. Она узима да се функција извора мијења линеарно са оптичком дубином:

$$\vec{S} \equiv \vec{S}_0 + \vec{S}_1 \tau_c, \tag{2.17}$$

те да су други параметри константни са висином (Unno, 1956; Rachkovsky, 1962). Ако претпоставимо наведену стратификацију физичких величина кроз атмосферу, онда се матрица пропагације може написати као:

$$\mathbf{K}(\tau_c) = \mathbf{K}_0 f(\tau_c). \tag{2.18}$$

Ако разматрамо средину за коју важи $\mathbf{K}(\tau_c) = \mathbf{K}_0$, то је онда најједноставнији случај и еволуциони оператор је облика:

$$\mathbf{O}(0, \tau_c) = e^{-\mathbf{K}_0 \tau_c}. \tag{2.19}$$

Сада, формално рјешење ЈПЗ јесте:

$$\vec{I}_0 = \int_0^\infty e^{-\mathbf{K}_0 \tau_c} \mathbf{K_0} (\vec{S}_0 + \vec{S}_1 \tau_c) d\tau_c = \vec{S}_0 + \mathbf{K}_0^{-1} \vec{S}_1. \tag{2.20}$$

Наглашавамо да се код Милне-Едингтонове апроксимације могу нпр. претпоставити константна температура, магнетно поље и брзина у цијелом слоју. За задату атмосферу интегрише се ЈПЗ и добијају се синтетички профили $\{I, Q, U, V\}$. Међутим, напоминьемо један битан недостатак ове апроксимације, а то је да је немогуће репродуковати асиметричности облика спектралне линије.

Инверзни проблем

Примарни циљ инверзије је одређивање атмосферских услова који су одговорни за посматране Стоксове профиле. Ови профили зависе нелинеарно од магнетног поља (B, θ, φ), брзине, температуре, односно функције извора, као и од притиска тј. густине. Мала промјена у атмосфери може направити велике разлике у профилима. Такође, више различитих комбинација параметара атмосфере могу дати врло сличне спектралне профиле (дегенерисаност рјешења). Нпр. различита комбинација температуре и турбулентне брзине може дати

сличну ширину линије. Посматрања садрже фотонски шум, инструменталне ефекте и систематске грешке. Све ово додатно компликује инверзију, а морамо имати у виду и то да атмосферу не можемо реконструисати савршено детаљно (Orozco Suárez, Bellot Rubio и del Toro Iniesta, 2010).

Аналитичко рјешење ЈПЗ за поларизовану свјетлост представља полазиште за инверзионе методе. Другим ријечима, директно моделовање које смо претходно описали чини саставни дио инверзионе стратегије. Избор модела атмосфере дефинише простор параметара у којем се тражи њихова оптимална комбинација – она која најбоље репродукује посматране Стоксове профиле. Истовремено, модел одређује и степен сложености инверзије: што је број параметара већи, а њихове зависности више нелинеарне, то је простор претраге сложенији и процес инверзије тежи (Ruiz Cobo и del Toro Iniesta, 1992).

Уколико је познато рјешење ЈПЗ, као логичан сљедећи корак се намеће упоређивање израчунатих и посматраних Стоксових профила. Одавде се извлачи информација о томе да ли је, и како, потребно модификовати модел. Итеративно унапријеђени модели доносе најбоље слагање између посматрања и теоријских израчуна (Socas-Navarro, Trujillo Bueno и Ruiz Cobo, 2000). Пожељно је истовремено одређивати више параметара[2.4] и користити више спектралних линија, јер то повећава поузданост и стабилност инверзије. Пошто модерни инструменти дају огромне количине података у кратком времену, тј. огроман број Стоксових профила, нужно је користити аутоматизоване процедуре (del Toro Iniesta, 2003).

Израчунате Стоксове профиле сада зовемо синтетичким, и требају бити што ближи посматраним. Напомињемо, параметри модела који генеришу синтетичке Стоксове профиле, биће изведени параметри средине/атмосфере. Растојање између нека два профила I_1 и I_2, под претпоставком да су квадратно интеграбилни[2.5], јесте њихово квадратно одстојање:

$$d \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} |I_1(\lambda) - I_2(\lambda)|^2 d\lambda. \tag{2.21}$$

Међутим, у пракси се мјерења врше на дискретним узорцима таласних дужина (λ_i), те интеграл прелази у суму (напомена – фитујемо сва четири Сток-

[2.4] Милне-Едингтонов модел типично броји око 10 параметара (Unno, 1956; Ruiz Cobo и del Toro Iniesta, 1992; Borrero и др., 2011).

[2.5] Значење се може видјети из једначина: $\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} I^2(\lambda)d\lambda < \infty$, $\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} Q^2(\lambda)d\lambda < \infty$,... Стоксови профили су мјерени преко коначног спектралног интервала, па су интеграли аутоматски коначни. У питању су глатке и ограничене функције, што је згодно за употребу методе најмањих квадрата.

сова профила). Да би се изнивелисали доприноси различитих профила и таласних дужина, потребно је увести тежине. Ако извршимо нормализацију, читав израз треба подијелити са бројем степени слободе[2.6] (што је заправо разлика између броја опсервабли и слободних параметара). На крају, средње квадратно растојање између посматраних (I_s^{obs}) и синтетичких (I_s^{syn}) Стоксових профила дато је преко тзв. редукованог χ^2:

$$\chi^2(\vec{x}) \equiv \frac{1}{\nu}\sum_{s=0}^{3}\sum_{i=1}^{q}\left(I_s^{obs}(\lambda_i) - I_s^{syn}(\lambda_i;\vec{x})\right)^2\omega_{s,i}^2, \tag{2.22}$$

гдје вриједности индекса $s = 0, 1, 2, 3$ представљају четири Стоксова параметра, i води рачуна о таласним дужинама, а ν представља број степени слободе. Тежине су дате са $\omega_{s,i}$ и зависе од нивоа шума. У општем случају број слободних параметара модела мора бити оптималан, како би се избјегла дегенерисаност рјешења и прекомјерно фитовање (у Милне-Едингтоновој апроксимацији имамо већ фиксан број параметара).

Процедура се наставља тражењем извода[2.7] χ^2 (у односу на слободне параметре) и минимизацијом χ^2. За минимизацију може послужити Левенберг-Маркардов алгоритам (Levenberg, 1944; Marquardt, 1963), који суштински комбинује двије методе оптимизације – градијентни спуст и Гаус-Њутнов алгоритам. Левенберг-Маркардова метода налази параметре фита модела минимизацијом сума квадрата грешака између предвиђања модела и правих вриједности. У близини минимума χ^2 важи *параболички* развој:

$$\chi^2(\vec{x}+\delta\vec{x}) \approx \chi^2(\vec{x}) + \delta\vec{x}^{\mathrm{T}}(\nabla\chi^2 + \mathbf{H}'\delta\vec{x}), \tag{2.23}$$

гдје је матрица $\mathbf{H}'$ једна половина хесијана. Ако је ова апроксимација у реду, тј. ако смо близу минимума, може се узети:

$$\nabla\chi^2 + \mathbf{H}'\delta\vec{x} = 0 \implies \delta\vec{x} = -\mathbf{H}'^{-1}\nabla\chi^2. \tag{2.24}$$

У случају да смо далеко од минимума, узима се:

$$\delta\vec{x} = a\nabla\chi^2, \tag{2.25}$$

гдје је a константа мале вриједности, о којој не знамо много (мисли се на ред величине). Срећом, уз познавање дијагоналних елемената хесијана и увођењем

[2.6] Овај корак даје редуковано χ^2, тј. средњу квадратну пондерисану девијацију. Модел добро фитује неке податке ако је $\chi^2 \approx 1$.

[2.7] Тзв. функција одзива; говорићемо о томе у наставку.

фактора пригушења λ, овај проблем се превазилази:

$$\delta x_i = -\frac{1}{\lambda H'_{ii}} \nabla \chi_i^2. \tag{2.26}$$

Фактор пригушења регулише облик насталог хесијана (видјети испод) и омогућава стабилну конвергенцију. Он је кључ Левенберг-Маркардове методе. Комбинацијом једначина (2.24) и (2.26), слиједи:

$$\nabla \chi^2 + \mathbf{H} \delta \vec{x} = 0, \tag{2.27}$$

гдје је нови хесијан дат као:

$$\mathbf{H}_{ij} = \begin{cases} H'_{ij}(1+\lambda), & \text{ако } i = j, \\ H'_{ij}, & \text{ако } i \neq j. \end{cases} \tag{2.28}$$

Уколико је λ велико, модификовани хесијан мора бити квази-дијагоналан, па се прихвата апроксимација првог реда (имамо градијентни спуст, који осигурава спор напредак ка рјешењу). У супротном, прихвата се апроксимација другог реда (Гаус-Њутнова, која доноси брзу и ефикасну конвергенцију ка рјешењу). Једначина (2.27) рјешава се за $\delta \vec{x}$, па се процјењује $\chi^2(\vec{x} + \delta \vec{x})$ које се пореди са $\chi^2(\vec{x})$ (иницијална процјена). Ако важи $\chi^2(\vec{x} + \delta \vec{x}) \leq \chi^2(\vec{x})$, у близини је минимум, треба смањити λ, унаприједити пробно рјешење $\vec{x} + \delta \vec{x} \to \vec{x}$, те вратити се на једначину (2.27). До заустављања долази тек онда кад се χ^2 занемарљиво смањи (нпр. 0.1%). Дабоме, у случају $\chi^2(\vec{x} + \delta \vec{x}) \leq \chi^2(\vec{x})$, минимум је предалеко и треба повећати вриједност фактора пригушења λ. Ово је сажет преглед алгоритма (видјети del Toro Iniesta, 2003), који је прилагођен проблему спектрополариметријске инверзије.

2.4 Просторно-спрегнута инверзија

Просторно-спрегнута инверзија спектрополариметријских података представља напредну методу за анализу соларних спектрополариметријских мјерења. Она узима у обзир ефекте деградације слике усљед коначне просторне и угловне резолуције телескопа. Ова метода омогућава самоконзистентно рјешење које најбоље одговара посматраним подацима, уз истовремено коришћење мањег броја слободних параметара у односу на конвенционалне приступе (van Noort, 2012).

Многобројни кодови за спектрополариметријску инверзију значајно се међусобно разликују у начину описа атмосфере, преноса зрачења и разних нумеричких детаља. Деградација, спектралне или просторне врсте, увијек је пристуна, а њено отклањање зна бити изазовно. Углавном се третира деградација у спектралном смислу. Корисне информације се извлаче из конволуције синтетичких профила са инструменталним трансмисионим профилом, а онда се овај резултат пореди са посматраним профилима. Међутим, ситуација је другачија кад се ради о просторној деградацији података, и она се почела узимати у обзир недавно (нпр. Orozco Suárez и del Toro Iniesta, 2007). Један од првих интегрисаних приступа проблему инверзије спектрално и просторно деградираних података дат је нешто касније (van Noort, 2012). Ми ћемо га концизно изложити испод.

Ако претпоставимо да се спектар формира у некој тачки (x_0, y_0), деградација потекла од коначне апертуре инструмента се може описати функцијом просторног расијања ϕ (енг. *Point Spread Function* – PSF):

$$d(x, y, \lambda) = I(x_0, y_0, \lambda)\phi(x - x_0, y - y_0, \lambda), \tag{2.29}$$

гдје је d мјерење (детектовани сигнал), а I идеална слика (интринзични сигнал). За спектар који је потпуно описан скупом параметара a_i, одзив посматраних података на промјену параметра a_i, на локацији (x, y) јесте:

$$\frac{\partial d(x, y, \lambda)}{\partial a_i} = \phi(x - x_0, y - y_0, \lambda)\frac{\partial I(x_0, y_0, \lambda)}{\partial a_i}, \tag{2.30}$$

а извод на десној страни је функција одзива моделованог спектра (енг. *Response Function* – RF) која се користи у већини инверзионих метода[2.8]. Ради једноставности, PSF се може третирати на сљедећи начин: $\phi(x, y, \lambda) = \varphi(x, y)\psi(\lambda)$.

Подсјећамо, Левенберг-Марквардова минимизација заснива се на линеаризацији око најбољег процијењеног скупа параметара. Милне-Едингтонова апроксимација осигурава аналитички облик за парцијалне изводе $\partial I_i/\partial x_j$, што су заправо елементи јакобијана (*матрице одзива*) $\mathbf{J}_{i,j}$. Под претпоставком да су познате функције одзива, добија се рјешење α за посматрања/мјерења d:

$$\mathbf{J}\alpha = \mathbf{d}, \;\; \mathbf{J}\alpha' = \mathbf{d}' \neq \mathbf{d}, \tag{2.31}$$

[2.8] Уопштено, RF описује осјетљивост Стоксових профила на разне атмосферске параметре (Orozco Suárez и del Toro Iniesta, 2007).

гдје је написана једначина и за апроксимативно рјешење α'. Даље слиједи:

$$\mathbf{J}(\alpha - \alpha') = \mathbf{J}\nu = \mathbf{d} - \mathbf{d}' = \beta, \tag{2.32}$$

гдје је ν линеарна корекција за скуп атмосферских параметара α, а β је разлика између посматраних података и спектра синтетисаног користећи α. Имамо:

$$\mathbf{J}^T\mathbf{J}\nu = \mathbf{J}^T\beta. \tag{2.33}$$

Додавањем константе пригушења λ_{m} добија се Левенберг-Маркардов облик:

$$\left(\mathbf{J}^T\mathbf{J} + \lambda_{\mathrm{m}}\,\mathrm{diag}[\mathbf{J}^T\mathbf{J}]\right)\nu = \delta, \tag{2.34}$$

гдје је $\delta = \mathbf{J}^T\beta$. Инвертује се матрица δ за корекцију ν.

Јакобијан за случај без просторног спрезања, и без укључених ефеката PSF, има облик (*низ матрица испод нећемо нумерисати као једначине*):

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_{1,1} & & \cdots & & 0 \\ & \mathbf{J}_{1,2} & & & \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ & & & \mathbf{J}_{n,m-1} & \\ 0 & & \cdots & & \mathbf{J}_{n,m} \end{bmatrix},\ \mathbf{J}^T = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_{1,1}^T & & \cdots & & 0 \\ & \mathbf{J}_{1,2}^T & & & \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ & & & \mathbf{J}_{n,m-1}^T & \\ 0 & & \cdots & & \mathbf{J}_{n,m}^T \end{bmatrix},$$

одакле закључујемо да је $\mathbf{J}^T\mathbf{J}$ блок-дијагонална матрица. Када се укључе PSF и просторно спрезање, произлазе матрични записи:

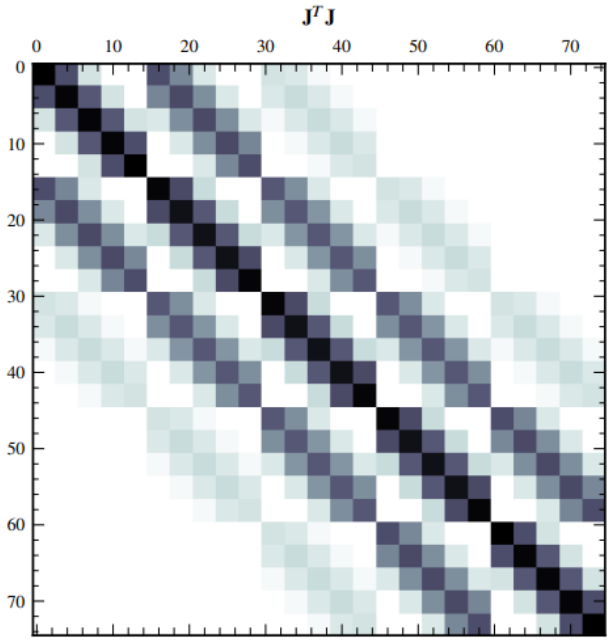
$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \varphi_{0,0}\mathbf{J}_{1,1} & \varphi_{0,-1}\mathbf{J}_{1,2} & \cdots & \varphi_{1-n,2-m}\mathbf{J}_{n,m-1} & \varphi_{1-n,1-m}\mathbf{J}_{n,m} \\ \varphi_{0,1}\mathbf{J}_{1,1} & \varphi_{0,0}\mathbf{J}_{1,2} & \cdots & \varphi_{1-n,3-m}\mathbf{J}_{n,m-1} & \varphi_{1-n,2-m}\mathbf{J}_{n,m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \varphi_{n-1,m-2}\mathbf{J}_{1,1} & \varphi_{n-1,m-3}\mathbf{J}_{1,2} & \cdots & \varphi_{0,0}\mathbf{J}_{n,m-1} & \varphi_{0,-1}\mathbf{J}_{n,m} \\ \varphi_{n-1,m-1}\mathbf{J}_{1,1} & \varphi_{n-1,m-2}\mathbf{J}_{1,2} & \cdots & \varphi_{0,1}\mathbf{J}_{n,m-1} & \varphi_{0,0}\mathbf{J}_{n,m} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{J}^T = \begin{bmatrix} \varphi_{0,0}\mathbf{J}_{1,1}^T & \varphi_{0,1}\mathbf{J}_{1,1}^T & \cdots & \varphi_{n-1,m-2}\mathbf{J}_{1,1}^T & \varphi_{n-1,m-1}\mathbf{J}_{1,1}^T \\ \varphi_{0,-1}\mathbf{J}_{1,2}^T & \varphi_{0,0}\mathbf{J}_{1,2}^T & \cdots & \varphi_{n-1,m-3}\mathbf{J}_{1,2}^T & \varphi_{n-1,m-2}\mathbf{J}_{1,2}^T \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \varphi_{1-n,2-m}\mathbf{J}_{n,m-1}^T & \varphi_{1-n,3-m}\mathbf{J}_{n,m-1}^T & \cdots & \varphi_{0,0}\mathbf{J}_{n,m-1}^T & \varphi_{0,1}\mathbf{J}_{n,m-1}^T \\ \varphi_{1-n,1-m}\mathbf{J}_{n,m}^T & \varphi_{1-n,2-m}\mathbf{J}_{n,m}^T & \cdots & \varphi_{0,-1}\mathbf{J}_{n,m}^T & \varphi_{0,0}\mathbf{J}_{n,m}^T \end{bmatrix},$$

који нам служе да изведемо једнакост:

$$\mathbf{J}^T\mathbf{J} = \begin{bmatrix} Y_{0,0}\mathbf{J}_{1,1}^T\mathbf{J}_{1,1} & \cdots & Y_{1-n,1-m}\mathbf{J}_{1,1}^T\mathbf{J}_{n,m} \\ Y_{0,1}\mathbf{J}_{1,2}^T\mathbf{J}_{1,1} & \cdots & Y_{1-n,2-m}\mathbf{J}_{1,2}^T\mathbf{J}_{n,m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ Y_{n-1,m-2}\mathbf{J}_{n,m-1}^T\mathbf{J}_{1,1} & \cdots & Y_{0,-1}\mathbf{J}_{n,m-1}^T\mathbf{J}_{n,m} \\ Y_{n-1,m-1}\mathbf{J}_{n,m}^T\mathbf{J}_{1,1} & \cdots & Y_{0,-1}\mathbf{J}_{n,m}^T\mathbf{J}_{n,m} \end{bmatrix}. \tag{2.35}$$

Овдје се користи аутокорелациона функција $Y = \varphi \star \varphi$, центрирана на локацији $\mathbf{J}_{x,y}$. Директно инвертовање више није практично, те се користи итеративни приступ. Олакшавајућа околност је што радимо са проређеним матрицама. На слици 2.2 је приказана комплексност линеарног система, при увођењу инструменталних ефеката. Систем једначина је изузетно захтјевно ријешити. Димензије матрице су $(n_x \cdot n_y \cdot n_{par})^2$, гдје је n_{par} број параметара по пикселу.



Слика 2.2: Просторно-спрегнут хесијан са укљученим ефектима PSF. Инверзни хесијан није проређена матрица (de la Cruz Rodríguez, 2019).

Нови Левенберг-Маркардов облик, из (2.34) јесте:

$$(\mathbf{J}^T\mathbf{J} - \lambda_{\mathrm{m}}\,\mathrm{diag}[\mathbf{J}^T\mathbf{J}])x_n = Ax_n = \delta_n. \tag{2.36}$$

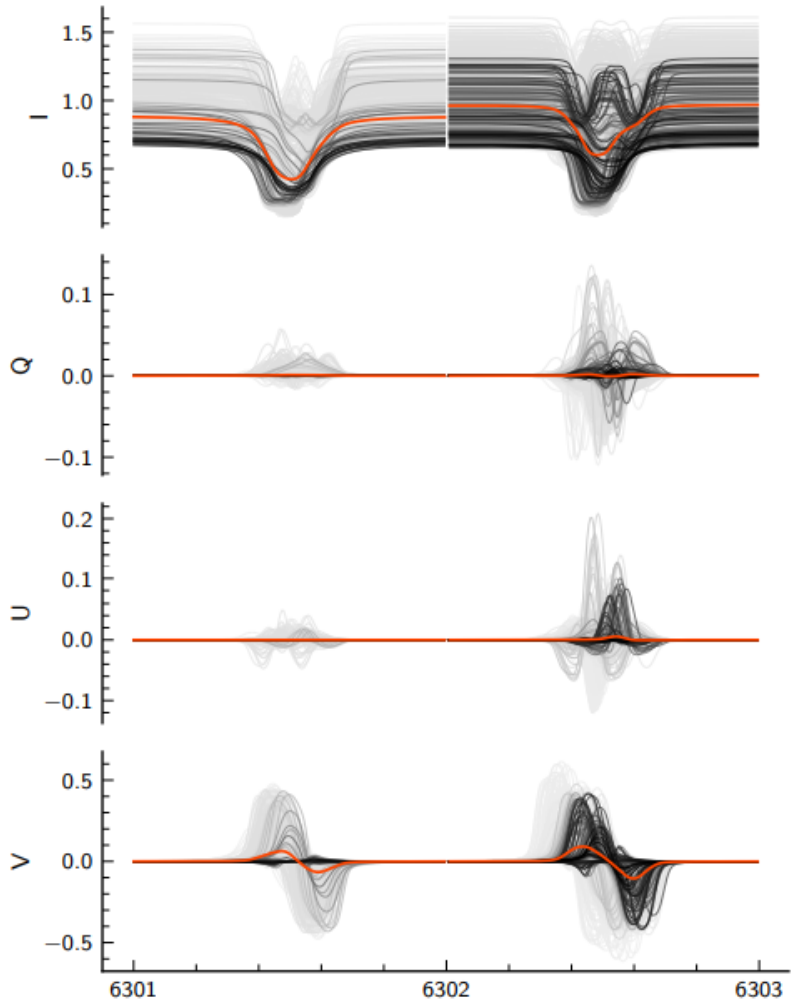
Овдје се рачуна дефект $\mathbf{d}_n$ у тренутној процјени x_n *корекционог* вектора ν:

$$\mathbf{d}_n = \delta - \delta_n. \tag{2.37}$$

Затим се A апроксимира са довољно тачним обликом A^* који је лако инвертибилан, $A^*\zeta_n = d_n$, што се користи за побољшање процјене:

$$x_{n+1} = x_n + \zeta_n. \tag{2.38}$$

Итерације се понављају све док ε у неједнакости $|\mathbf{d}_n| < \varepsilon$ није довољно мало.



Слика 2.3: Илустрација ефеката просторне деградације на Стоксове синтетичке профиле. Коришћене су двије различите апертуре телескопа. Резултујући профили су истакнути, а у позадини је допринос свих профила који су садржани у оператору деградације. Ордината представља таласну дужину у ангстремима [Å] (de la Cruz Rodríguez, 2019).

Проширење овдје изложеног метода (van Noort, 2012) одрађено је нешто касније (de la Cruz Rodríguez, 2019). Превасходно се односи на употребу Тихонов регуларизације (Tikhonov и Arsenin, 1977), која обезбјеђује глаткост рјешења Левенберг-Маркардовог алгоритма, и на експериментисање са различитим облицима PSF за различите спектралне опсјеге. То је изузетно корисно ако су у питању симултана посматрања са различитим инструментима различитих просторних резолуција (видјети слику 2.3).

Као техника деконволуције, просторно-спрегнута инверзија постиже резолуцију до дифракционе границе под условом да је PSF познат и да су подаци оптимално узорковани. Највише је примјењива на податке прикупљене са свемирских телескопа.

Глава 3

Сунчево поларно магнетно поље – изазови

3.1 Ограничења при посматрању поларних региона

Сунчеви поларни региони су есенцијални за анализу дугорочне еволуције магнетног поља и производње Сунчевог вјетра који се генерише у короналним празнинама карактеристичним за ове области. Међутим, детаљна карактеризација магнетног поља у поларним регионима јесте озбиљан изазов, прије свега због неповољне геометрије посматрања. Наиме, већина досадашњих посматрања Сунца обављена је из равни еклиптике, што онемогућава директан увид у поларне области (посматрања под правим углом) и тиме значајно ограничава тачност добијених векторских магнетограма (Centeno и др., 2023; Gosain и Uitenbroek, 2024). Прецизна детекција магнетног поља у овим регионима додатно је отежана скупом међусобно повезаних фактора: промјењиви атмосферски услови, изражени градијенти интензитета у Стоксовим профилима, ефекат скраћења/компресије који настаје усљед посматрања близу соларног руба, итд. Ови ефекти значајно увећавају систематски шум магнетограма, посебно ако су у питању земаљска посматрања и још важније, тиме ограничавају поузданост инверзије Стоксових параметара.

Једна од кључних геометријских компликација односи се на пројекцију трансверзалне и линијске компоненте магнетног поља. Како се хелиографска латитуда (угловно растојање од Сунчевог екватора) повећава, трансверзална компо-

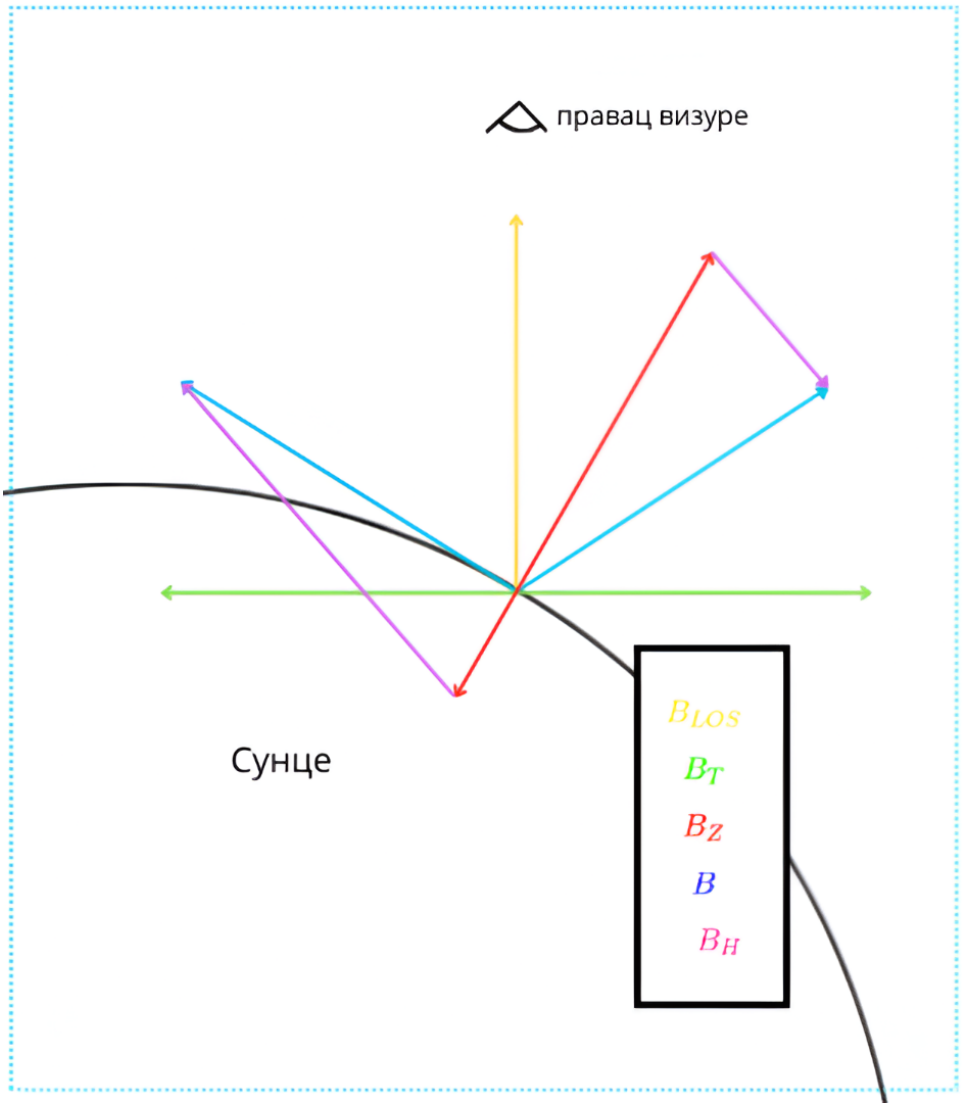
нента све више одговара локалној вертикалној компоненти магнетног поља. Истовремено, компонента дуж правца визуре постаје мање осјетљива на стварно вертикално поље. Овакво геометријско мијешање компонената отежава физичку интерпретацију добијених компоненти магнетног поља. Додатно, *пројекциона деформација* доводи до тога да појединачни пиксели на магнетограму покривају све већу површину на фотосфери, како се приближавамо рубу Сунчевог диска. Ово смањује ефективну просторну резолуцију и уводи грешке у израчунавање величина које укључују просторне изводе, као што су дивергенција, ротор или густина струје.

3.2 Азимутална двозначност

Поред геометријских ограничења посматрања, постоји и инхерентна неодређеност која произлази из саме природе мјерења магнетног поља. При реконструкцији вектора магнетног поља из Стоксових параметара, компонента поља дуж правца визуре (лонгитудинална) одређује се недвосмислено на основу кружне поларизације, која директно повезује Стоксов параметар V са пројекцијом поља. Међутим, компонента попречна на правац визуре (трансверзална) носи са собом проблематичну неодређеност (слика 3.1).
Ова неодређеност представља један од најпознатијих и најдуже проучаваних проблема у соларној магнетометрији – тзв. азимуталну двозначност од 180° код трансверзалне компоненте магнетног поља. Она настаје зато што линеарна поларизација, која се користи за процјену трансверзалне компоненте, остаје инваријантна ако се азимутални угао φ трансформише као $\varphi \to \varphi + 180°$ (Valori и др., 2023). Конкретније, трансверзална компонента $B_\perp$ вектора магнетног поља процјењује се кроз Стоксове параметре Q и U као $B_\perp \propto \sqrt{Q^2 + U^2}$, док је азимутални угао у равни неба повезан са њима преко односа $Q \propto \cos 2\varphi, U \propto \sin 2\varphi$. Параметри Q и U не разликују правце φ и $\varphi + 180°$. Дакле, у коначници није могуће разлучити у ком правцу показује вектор магнетног поља, што је озбиљно ограничење у интерпретацији података (Metcalf, 1994).

Ако се посматрана област налази даље од центра Сунчевог диска, ова двозначност утиче значајно на све три компоненте вектора магнетног поља (гледано у хелиографским координатама). Разлика између двије могуће азимуталне оријентације постаје промјењива и различита од 180°, па је потребно примијенити одређене процедуре да би се одредила исправна вриједност ази-

мута у свакој тачки, омогућавајући тако отклањање двозначности преко читавог посматраног подручја. Додатна отежавајућа околност је, међутим, то што проблем није у потпуности дефинисан. Нпр. посматрања се често врше само на једној висини у Сунчевој атмосфери – ово значи да није могуће одредити вертикални извод за компоненту B_z (Georgoulis, 2005).



Слика 3.1: Проблем азимуталне двозначности. На слици су означене компонента магнетног поља у правцу визуре (жуто), трансверзална компонента (зелено), радијална компонента (црвено), хоризонтална компонента (љубичасто), те укупно магнетно поље (плаво). Двозначност је садржана у трансверзалној компоненти, а њен одабир утиче на остале компоненте. Адаптирано из презентације са сајта за *Helioseismic and Magnetic Imager* (Leka, 2009).

3.3 Отклањање азимуталне двозначности

Као што смо поменули, посматрања атмосферског слоја на једној висини не садрже довољно информација да би се отклонила азимутална двозначност. Стога, адекватан алгоритам треба бити заснован на што бољим, физички оправданим апроксимацијама (Metcalf и др., 2006). Испод дајемо преглед неких алгоритама који су направљени за отклањање азимуталне двозначности.

Назив	**Мин. величина**	**Шема минимизације**
Оштар угао у односу на референтно поље	$\lvert\theta_o - \theta_r\rvert$	локална
Метод униформног смицања	$\lvert\theta_o - \theta_r - \Delta\theta_{mp}\rvert$	локална
Израчунавање непотенцијалног поља	$\lvert\theta_o - \theta_r\rvert$, $\vec{B}_r = \vec{B}_p + \vec{B}_c$	углађивање
Псеудо-струјни метод	$\int d^2a\, J_z^2$	коњуговани градијент
Итеративни метод Унив. Хаваји	$\int d^2a\, J_z^2$, $\lvert\theta_o - \theta_r\rvert$	итеративна
Метод минималне енергије v0	$(\lambda\lvert J_z\rvert + \lvert\nabla \cdot \vec{B}\rvert)$	симулирано жарење
Метод минималне енергије v2	$\lvert\vec{J}\rvert$, $\lvert\nabla \cdot \vec{B}\rvert$	тзв. *генетски кросовер*
NCAR/HAO AZAM	сусједни пиксели	интерактивна

Табела 3.1: Табеларни преглед неких важнијих алгоритама за отклањање двозначности азимуталног угла (Leka и др., 2009). Угао θ_o означава посматрани азимутални угао, θ_r означава азимутални угао референтног поља, а $\Delta\theta_{mp}$ означава највјероватнији угао смицања.

У овом раду смо се одлучили за имплементацију методе минималне енергије и за то постоји неколико разлога:

- ⋆ глобални приступ: за разлику од локалних метода, читава магнетна структура се узима у обзир симултано; локалне (пиксел-по-пиксел) методе често креирају неконзистентности између пиксела;
- ⋆ физичка заснованост: минимизују се двије величине одједном (дивергенција магнетног поља и вертикална густина струје), а код других метода

се минимизује једна или ниједна;

⋆ доказана супериорност: у свим тестовима поређења различитих метода, ова је показала најбоље резултате, посебно у нешто сложенијим тест магнетним конфигурацијама.

У идеалним околностима, азимутална двозначност је рјешива само из једнакости $\nabla \cdot \vec{B} = 0$, јер услов важи за Сунчево магнетно поље (Metcalf, 1994). Међутим, у практичној примјени овај приступ често није довољан, па се прибјегава додатним физичким претпоставкама:

i) $\nabla \times \vec{B} = 0$ – потенцијално поље, без струја, важи $\vec{B} = -\nabla\Phi$, гдје је Φ скаларни потенцијал;

ii) $\nabla \times \vec{B} \neq 0$ – непотенцијално поље, присутне струје, постоји слободна магнетна енергија.

Важно је напоменути да се у израчуну дивергенције магнетног поља члан $\partial_z B_z$ просто мора апроксимирати на неки начин, јер је висинску зависност тешко одредити (нпр. Милне-Едингтонова инверзија не даје овај члан). Један од начина да то урадимо је да претпостављено потенцијално поље $\vec{P}$ (за њега важи $\nabla \cdot \vec{P} = 0$) апроксимирамо преко стварног поља $\vec{B}$:

$$\frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0 \implies \frac{\partial B_z}{\partial z} = -\Big(\frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y}\Big) \approx -\Big(\frac{\partial P_x}{\partial x} + \frac{\partial P_y}{\partial y}\Big). \quad (3.1)$$

Суштински, важно је одабрати једну између двије могуће оријентације поља $\vec{B}(x, y)$, а бира се она која минимизује апсолутну вриједност дивергеније:

$$|\nabla \cdot \vec{B}| \approx \Big|\frac{\partial}{\partial x}(B_x - P_x) + \frac{\partial}{\partial y}(B_y - P_y)\Big|. \quad (3.2)$$

Минимизација ове врсте није довољна сама по себи. Показало се корисним да се уз дивергенцију минимизује и вертикална густина струје (њу је лако израчунати, а има физички смисао јер донекле отклања лажне електричне струје):

$$J_z \approx \frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y}. \quad (3.3)$$

Да нагласимо, пошто имамо податке са једне висине, не бавимо се рачунањем комплетног вектора густине електричне струје. Дакле, у методи минималне енергије минимизује се енергетски функционал:

$$E = \sum_i^{N_x} \sum_j^{N_y} \Big(\big|\nabla \cdot \vec{B}(i,j)\big|^2 + \eta \, \big|J_z(i,j)\big|^2 \Big), \quad (3.4)$$

гдје су i, j индекси пиксела у нашем видном пољу, а η је регуларизациони параметар. Функционал енергије се даље може написати као:

$$E = \sum_{i,j}^{N_x,N_y} \left(\left| \frac{\partial B_x}{\partial x}(i,j) + \frac{\partial B_y}{\partial y}(i,j) + \frac{\partial B_z}{\partial z}(i,j) \right|^2 + \eta \left| \frac{\partial B_y}{\partial x}(i,j) - \frac{\partial B_x}{\partial y}(i,j) \right|^2 \right). \quad (3.5)$$

У једначини изнад се користи тзв. $\mathcal{L}^2$ норма (квадрат апсолутних вриједности) јер креира глатку, диференцијабилну функцију која је погодна за примјену оптимизационих алгоритама.

Што се тиче израчуна парцијалних извода, хоризонтални изводи B_x и B_y могу се одредити преко апроксимације коначних разлика:

$$\frac{\partial B_x}{\partial x}(i,j) \approx \frac{B_x(i+1,j) - B_x(i-1,j)}{2\Delta x}, \quad (3.6)$$

$$\frac{\partial B_y}{\partial y}(i,j) \approx \frac{B_y(i,j+1) - B_y(i,j-1)}{2\Delta y}, \quad (3.7)$$

$$\frac{\partial B_y}{\partial x}(i,j) \approx \frac{B_y(i+1,j) - B_y(i-1,j)}{2\Delta x}, \quad (3.8)$$

$$\frac{\partial B_x}{\partial y}(i,j) \approx \frac{B_x(i,j+1) - B_x(i,j-1)}{2\Delta y}. \quad (3.9)$$

Вертикални извод за компоненту B_z налазимо спектралном (Фуријеовом) методом (Alissandrakis, 1981; Gary, 1989). У Фуријеовом простору, извод по z на $z = 0$ има форму множења са $-|k|$:

$$\widehat{\frac{\partial B_z}{\partial z}}(k_x, k_y) = -\sqrt{k_x^2 + k_y^2}\ \widehat{B}_z(k_x, k_y), \quad (3.10)$$

гдје је

$$\widehat{B}_z(k_x, k_y) = \mathcal{F}\{B_z(x,y)\}(k_x, k_y). \quad (3.11)$$

Инверзна трансформација даје резултат у реалном простору:

$$\frac{\partial B_z}{\partial z}(x,y) \ = \ \mathcal{F}^{-1}\Big\{ -\sqrt{k_x^2 + k_y^2}\ \widehat{B}_z(k_x, k_y) \Big\}. \quad (3.12)$$

Прије спектралног прорачуна врши се неколико корака претпроцесирања да би се ублажили ивични ефекти. У операцији проширења домена (енг. *padding*), околина се допуњује нулама:

$$B_z^*(x,y) = \begin{cases} B_z(x,y), & (x,y) \text{ у оригиналном домену}, \\ 0, & \text{иначе}. \end{cases}$$

Аподизација се примјењује да би се избјегло тзв. звоњење (енг. *ringing*) или настанак бочних режњева (енг. *spectral leakage*). Једнодимензионални *прозор* дуж осе дужине N са ширином ивице w дефинисан је као:

$$w(i) = \begin{cases} \frac{1}{2}\Big(1 - \cos\Big(\dfrac{\pi\, i}{w-1}\Big)\Big), & i = 0, \ldots, w-1, \\ 1, & i = w, \ldots, N-w-1, \\ \frac{1}{2}\Big(1 - \cos\Big(\dfrac{\pi\,(N-1-i)}{w-1}\Big)\Big), & i = N-w, \ldots, N-1. \end{cases} \tag{3.13}$$

У двије димензије имамо $W(x, y) = w(x)\, w(y)$. Коначно, добија се верзија вертикалне компоненте магнетног поља која се користи у спектралној методи:

$$B_z^{**}(x, y) = B_z^{*}(x, y)\, W(x, y). \tag{3.14}$$

На крају, враћамо се енергетском функционалу, на који се примјењује техника симулираног жарења (енг. *simulated annealing*). Ова метода представља стохастички алгоритам оптимизације који омогућава проналажење апроксимативног глобалног минимума и избјегавање заглављивања у локалним минимумима (Kirkpatrick, Gelatt и Vecchi, 1983). Основна идеја заснива се на Метрополисовом алгоритму (Metropolis и др., 1953), који дефинише вјероватноћу прихватања промјене стања. За сваки пиксел, предлаже се промјена знака хоризонталних компоненти магнетног поља (обртање азимута[3.1] тј. додавање 180°), и израчунава се промјена енергије:

$$\Delta E = E_{\text{ново}} - E_{\text{старо}}. \tag{3.15}$$

Ако је $\Delta E < 0$, ново стање се аутоматски прихвата. У случају да је $\Delta E > 0$, прихватање прати Болцманову формулу:

$$P(\Delta E) = e^{-\frac{\Delta E}{T}}, \tag{3.16}$$

гдје је T тзв. *температура*, параметар који контролише вјероватноћу прихватања неповољних промјена. Систем се постепено *хлади* смањивањем T, чиме се и постепено сузбијају неповољне промјене, те алгоритам конвергира ка глобално оптималној конфигурацији магнетног поља. Алгоритам прво рјешава регионе јаког магнетног поља (велико ΔE у случају реоријентације азимута), а како температура опада, рјешавају се и региони слабијег магнетног поља. Напомињемо, не истражује се свака могућност за *стање* магнетне конфигурације (велике вриједности $\nabla \cdot \vec{B}$ и/или J_z су мало вјероватне).

[3.1] Локално, за израчун хоризонталних извода посматра се *центар* четири сусједна пиксела, који образују 2^4 могућих рјешења, тј. локалних доприноса енергији – сваки се евалуира.

Имплементација машинског учења

У овом раду смо постојећи *Fortran* код (метод минималне енергије наведен у табели 3.1) прилагодили тако да се заснива на *Physics-Informed Neural Networks* (PINNs) приступу, при чему су очуване његове основне функционалности.
PINNs приступ ћемо укратко представити[3.2] у наставку. Приступ интегрише неуронску мрежу у физику проблема, тако што физику укључује директно у функцију губитка (Raissi, Perdikaris и Karniadakis, 2019). Пошто је наш проблем дискретне природе, није у питању сасвим тривијална примјена. Мрежа предвиђа вјероватноћу да знак азимута магнетног поља у одређеном пикселу буде *обрнут* (испитује се знак хоризонталних компоненти магнетног поља):

$$\vec{B}'_x(x,y) = F(x,y)\vec{B}_x(x,y) + (1 - F(x,y))(-\vec{B}_x(x,y)) \tag{3.17}$$

$$\vec{B}'_y(x,y) = F(x,y)\vec{B}_y(x,y) + (1 - F(x,y))(-\vec{B}_y(x,y)) \tag{3.18}$$

$$\vec{B}'_z(x,y) = \vec{B}_z(x,y) \tag{3.19}$$

гдје је $F(x,y) \in \{0,1\}$ маска *обртања* (вјероватноћа задржавања знака).
Архитектура је формално заснована на конволуционим неуронским мрежама (енг. *Convolutional Neural Networks* – CNN), а операције се извршавају на неколико просторних скала, у циљу учења локалних и глобалних структура истовремено. Дискретност проблема се заобилази тзв. *Gumbel-Softmax* релаксацијом (Jang, Gu и Poole, 2016), која омогућава да дискретни избори буду третирани на диференцијабилан начин ($F'(x,y) \in (0,1) \to F(x,y) \in \{0,1\}$). Функција губитка се гради на основу енергетског функционала (3.5), и то посредством једначина:

$$\mathcal{L}_\nabla \equiv \sum_{x,y} \left(\nabla_\perp \cdot \vec{B}'(x,y) + \partial_z \vec{B}'_z(x,y)\right)^2, \tag{3.20}$$

$$\mathcal{L}_j \equiv \sum_{x,y} \left(\partial_x \vec{B}'_y(x,y) - \partial_y \vec{B}'_x(x,y)\right)^2, \tag{3.21}$$

одакле имамо (ознака $\nabla_\perp$ указује на извод по x, y):

$$\mathcal{L}_\mathrm{T} = \eta_\nabla \mathcal{L}_\nabla + \eta_j \mathcal{L}_j, \tag{3.22}$$

гдје су (η_∇, η_j) хиперпараметри који балансирају доприносе појединих термина. У пракси се овај физички губитак може комбиновати са различитим регуларизујућим терминима. По аналогији са енергетским функционалом, у току тренинга се минимизује функција губитка $\mathcal{L}_\mathrm{T}$.

[3.2] Нотацијски, са (i,j) прелазимо на (x,y) јер је интуитивније.

Глава 4

Резултати

У овом поглављу представљамо резултате тестирања методе отклањања азимуталне двозначности на више примјера тест конфигурација магнетног поља. Потом приказујемо исходе пиксел-по-пиксел и просторно-спрегнуте спектрополариметријске инверзије за случај поларног региона, које упоређујемо са оригиналном атмосфером. Циљ је квантификација напретка у мјерењу поларног магнетног поља.

4.1 Примјер тест конфигурације *цвијета*

Тест конфигурација – центар диска

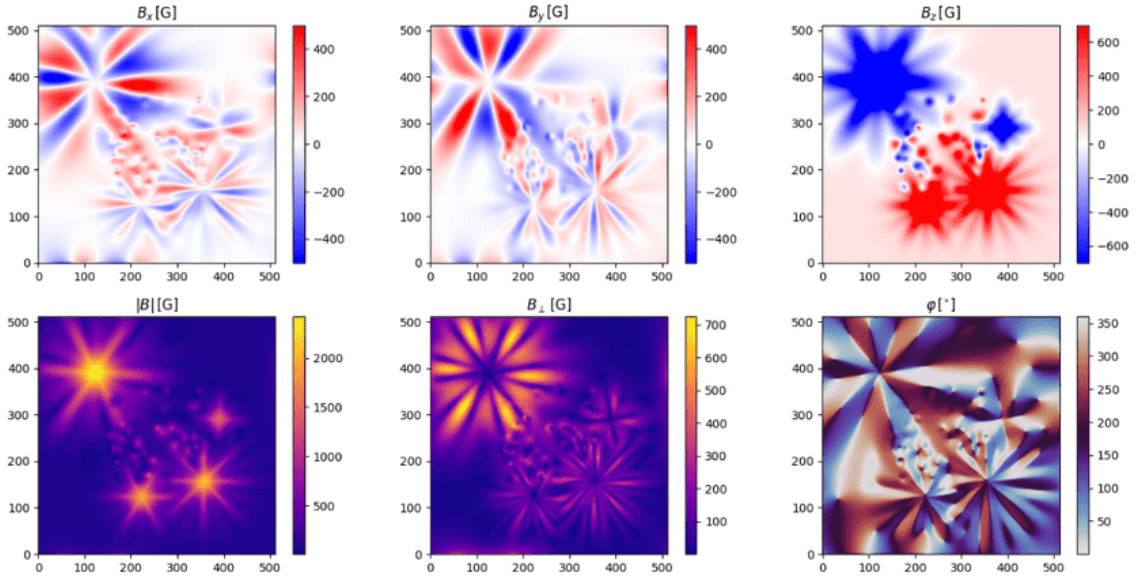
Магнетна конфигурација *цвијета* представља тест случај у коме се граде сложене магнетне структуре са финим детаљима, намијењене за тестирање алгоритама за рјешавање азимуталне двозначности. Овакви модели омогућавају да се под контролисаним условима испитају претпоставке алгоритама и њихова осјетљивост на просторну резолуцију и геометрију посматрања. Овај дио је инспирисан једним од радова који се баве азимуталном двозначношћу (видјети Leka и др., 2009).

Свака појединачна *Сунчева пјега* дефинисана је аналитичким изразом за нормалну компоненту магнетног поља на доњој и горњој хоризонталној површини преко једначине:

$$B_s(r,\theta) = B_0 e^{-\frac{r^2}{a_0^2}} + B_1 \left(\frac{r^2}{a_1^2}\right) e^{-\frac{r^2}{a_1^2}} \left[1 + \cos(n_1\theta + \phi_1)\right] + B_2 \left(\frac{r^2}{a_2^2}\right) e^{-\frac{r^2}{a_2^2}} \left[1 + \cos(n_2\theta + \phi_2)\right], \tag{4.1}$$

гдје први члан описује аксијално-симетричну умбру, док други и трећи члан представљају пенумбралне структуре у облику латица. Фазни помјераји ϕ_j између доње и горње површине стварају хоризонталне компоненте поља. Нормална компонента B_z се експлицитно задаје на двије близу постављене хоризонталне равни, док се хоризонталне компоненте B_x и B_y добијају рјешавањем потенцијалног поља под условима $\nabla \cdot \vec{B} = 0$ и $\nabla \times \vec{B} = 0$.

Цијела конфигурација гради се суперпозицијом више оваквих магнетних *цвјетова* (умбри са латицама), постављених на различите положаје у пољу посматрања. На тај начин, добија се модел са богатом морфологијом, укључујући умбре, пенумбре и сл. На слици 4.1 приказана је *цвјетна* конфигурација центра диска са својим компонентама.



Слика 4.1: Различите компоненте тест конфигурације магнетног поља, за имитацију центра диска ($\theta = 0°$).

Тест конфигурација – пол

У циљу ваљаног тестирања методе отклањања двозначности, креирали смо и конфигурацију *цвијета* за имитацију поларног региона. У општем случају го-

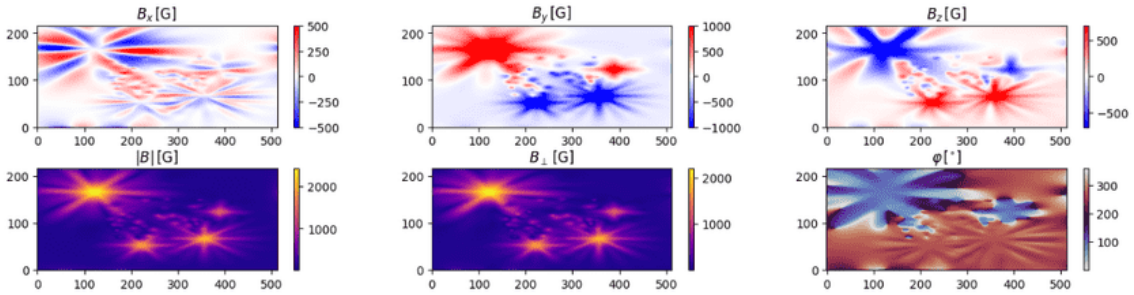
ворећи, вектор магнетног поља који мјеримо зависи од угла посматрања. Претходни примјер је био једноставнији јер смо радили са центром диска ($\theta = 0°$) и није било никаквих пројекционих ефеката. Међутим, како хелиографска латитуда расте (удаљавамо се од центра диска према рубу), то су ови ефекти израженији. Постоје два основна пројекциона ефекта:

1. **поларна пројекција** (координатна ротација): настаје због чињенице да посматрамо сферну површину Сунца под углом. Тродимензионални вектор магнетног поља се пројектује на раван посматрања. У нашем случају (одабрали смо ротацију око x-осе), вертикална компонента B_z мијеша се са B_y. Након ротације, имамо неки нови вектор магентног поља $\vec{B}'$, приказан једначином (4.2).

$$\vec{B}' = R_x(\theta)\vec{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_x \\ B_y\cos\theta - B_z\sin\theta \\ B_y\sin\theta + B_z\cos\theta \end{bmatrix} \tag{4.2}$$

   гдје је $R_x(\theta)$ матрица ротације око x-осе.

2. **геометријска компресија** (енг. *foreshortening*): због перспективе, настаје компресија дуж y-осе. Када посматрамо површину под углом, она изгледа *сабијено*. Пошто радимо са једновисинским случајевима, можемо апроксимирати ефекте скраћивања као $y' = y\cos\theta$ (видјети слику 4.2).

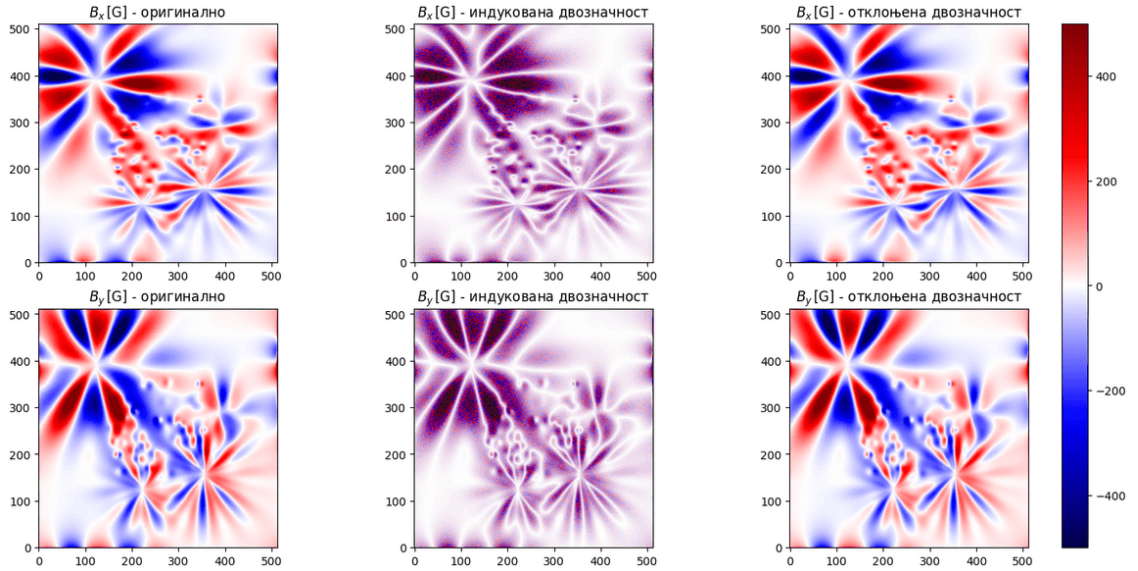


Слика 4.2: Различите компоненте тест конфигурације магнетног поља, за имитацију поларне области на хелиографској латитуди од $\theta = 65°$. Уочљиви су ефекти геометријске компресије дуж вертикалне осе.

4.2 Отклањање азимуталне двозначности на примјеру тест конфигурације *цвијета*

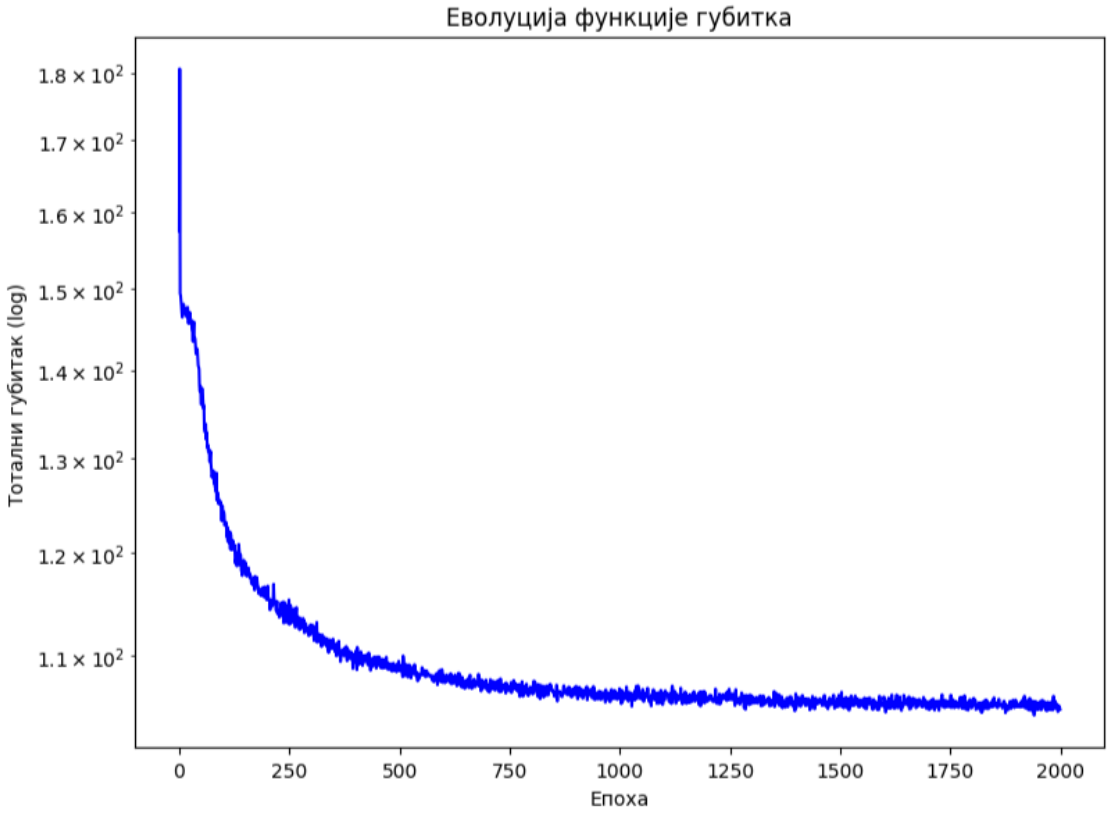
Да бисмо тестирали нашу методу отклањања азимуталне двозначности, примијенили смо је на тест конфигурације *цвијета*, о којима смо претходно дискутовали, и то за два случаја: $\theta = \{0°, 65°\}$. Метода је остварила задовољавајуће резултате (видјети слике испод).

Центар диска ($\theta = 0°$)



Слика 4.3: Отклањање азимуталне двозначности на тест конфигурацији магнетног поља – центар диска. Компоненте оригиналног магнетног поља (B_x, B_y) дате су у првој колони. У средњој колони су њихове вриједности обрнуте (знак је обрнут), тј. 50% насумичних пиксела има супротне вриједности по знаку од оригинала – дакле, уведена је двозначност азимута. У трећој колони су компоненте магнетног поља којима је отклоњена двозначност.

На слици 4.3 приказан је поступак отклањања двозначности на тест конфигурацији центра диска. Овдје је успјешност методе (поредимо оригинал и верзију у којој је отклоњена двозначност) $\sim 99\%$ – враћен је прави знак за B_x и B_y, те се верзије разликују по знаку за $\sim 1\%$ пиксела.



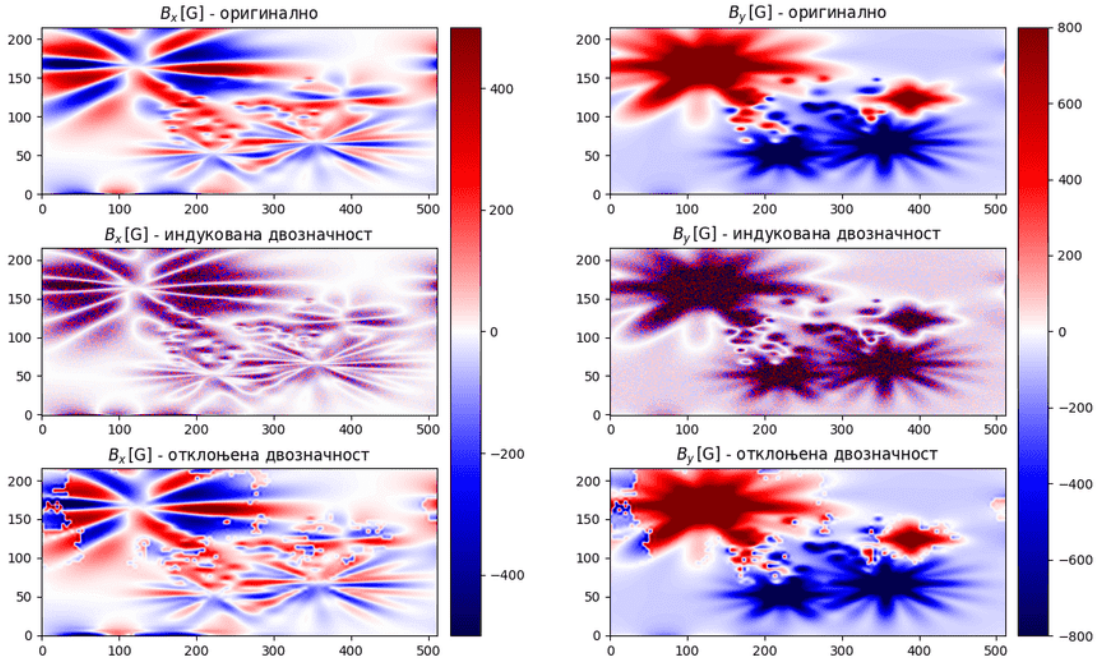
Слика 4.4: Отклањање двозначности на тест конфигурацији магнетног поља – понашање функције губитка у току тренирања, за случај центра диска.

На слици 4.4 приказана је еволуција функције губитка у зависности од епоха тренирања. Функција губитка је опадајућа, те је минимизација извршена успјешно.

Поларни регион ($\theta = 65°$)

На слици 4.5 приказан је поступак отклањања двозначности на тест конфигурацији поларног региона. Овдје је успјешност методе $\sim 93\%$ – враћен је прави знак за B_x и B_y, те се оригиналне компоненте и оне гдје је отклањана двозначност разликују по знаку за $\sim 7\%$ пиксела.

Примјећујемо да је тачност методе сада већа за слабија поља (слика 4.6). Тест конфигурације које имитирају поларну геометрију нарушавају *симетрију* која изазива азимуталну двозначност и уносе асиметрије које саме донекле чак и олакшавају отклањање двозначности. Слаба поља од тога имају већу корист па геометријски сигнали доминирају и лакше се уклапају са условима

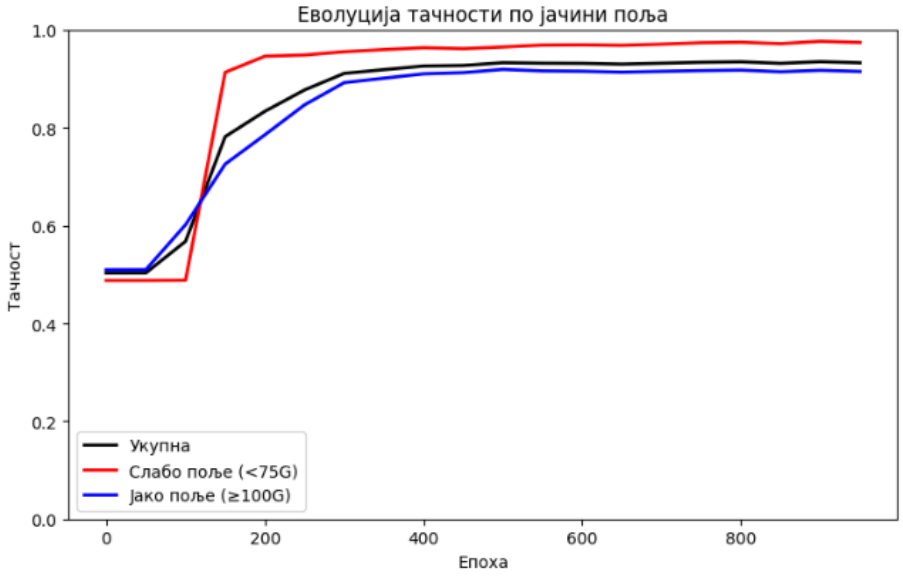


Слика 4.5: Отклањање двозначности на тест конфигурацији магнетног поља – поларни регион (присутни значајни пројекциони ефекти, $\theta = 65°$). У првом реду су оригиналне компоненте магнетног поља, у другом реду су компоненте гдје постоји двозначност азимута, док су у трећем реду дате компоненте са отклоњеном двозначношћу. Наставак објашњења је идентичан као у опису слике 4.3.

минималне дивергенције и минималне струје. Јака поља, напротив, стварају снажне струјне обрасце па су у сукобу са геометријским захтјевима пројекције. Додатно, наша метода фаворизује тачност јаких поља (што добро ради у конфигурацији центра диска), али тај приступ постаје хендикеп у поларној геометрији гдје би управо геометријске информације требало да доминирају. Наравно, треба имати у виду да је ово идеализована магнетна конфигурација.

4.3 Отклањање азимуталне двозначности на тест примјеру из симулације – центар диска

Овдје се прелази са идеализованих тест конфигурација, попут *цвијета*, на знатно сложенији сценарио симулације фотосферског слоја у области центра диска. Симулација слиједи из MURaM кода. MURaM (скраћено од енг. *Max Planck University of Chicago Radiative MHD*) је 3D магнетохидронамичка симу-

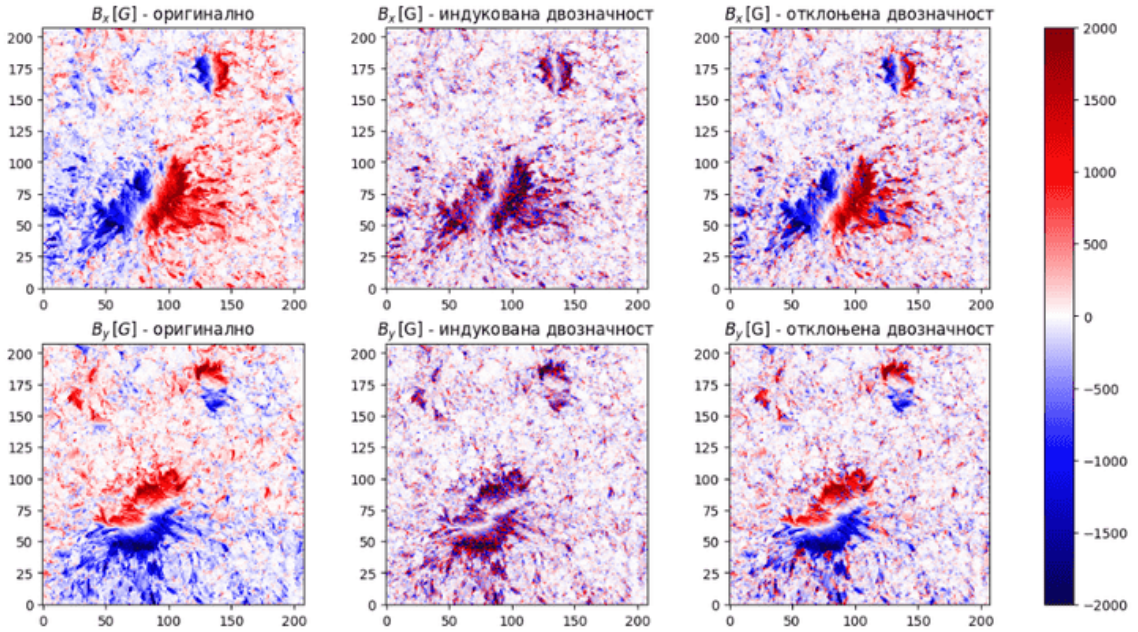


Слика 4.6: Еволуција тачности отклањања азимуталне двозначности према јачини магнетног поља, за поларну тест конфигурацију. Тачност мјеримо (дефинишемо) тако што се упоређују оригинална и текућа (мисли се на процес отклањања двозначности) конфигурација, у смислу знака компоненти магнетног поља, а након сваких неколико епоха. Резултати приказују податке о тачности за три случаја: укупну (која представља цјелокупну конфигурацију магнетног поља без обзира на јачину поља), области слабог поља (гдје је јачина поља $B < 75\,\mathrm{G}$), и области јаког поља (гдје је јачина поља $B \geq 100\,\mathrm{G}$).

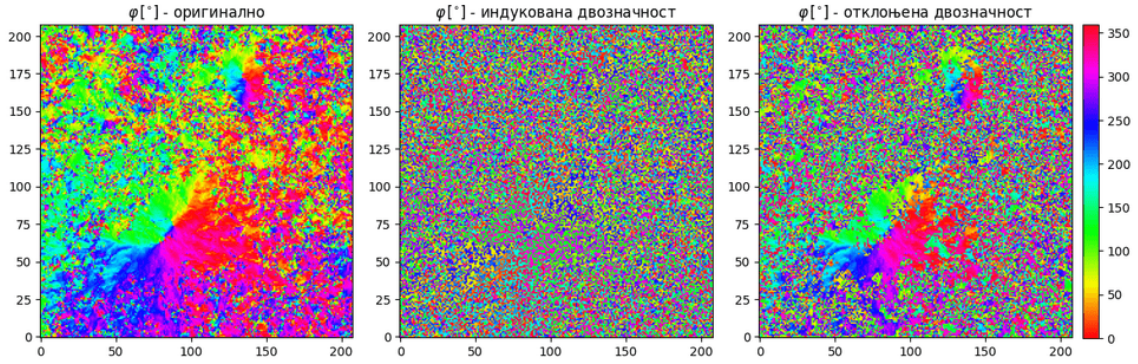
лација, тј. код за примјену у Сунчевој конвективној зони и фотосфери (Vögler и др., 2005).

За разлику од тест примјера са јасно дефинисаном геометријом, овдје магнетна поља показују стохастичке варијације, турбулентне структуре и локалне нехомогености условљене магнетохидродинамичким процесима. Физичке претпоставке методе минималне енергије у овом контексту нијесу у потпуности испуњене; нпр. апроксимације засноване на потенцијалној екстраполацији могу бити непоуздане у фотосфери гдје готово сигурно постоје електричне струје.

На слици 4.7 приказани су резултати отклањања двозначности у активном региону на центру диска. У поређењу са оригиналним пољима, исправно је враћен знак за B_x и B_y у приближно 60% пиксела, док је у преосталих $\sim 40\%$ дошло до грешке у оријентацији. Метод показује већу поузданост у областима са јачим магнетним пољем. На слици 4.8 приказани су резултати отклањања двозначности преко азимуталног угла.



Слика 4.7: Отклањање двозначности код магнетне конфигурације на центру Сунчевог диска: у првој колони су оригиналне компоненте магнетног поља, у другој колони су компоненте гдје постоји двозначност азимута, а у трећој колони су дате компоненте са отклоњеном двозначношћу.

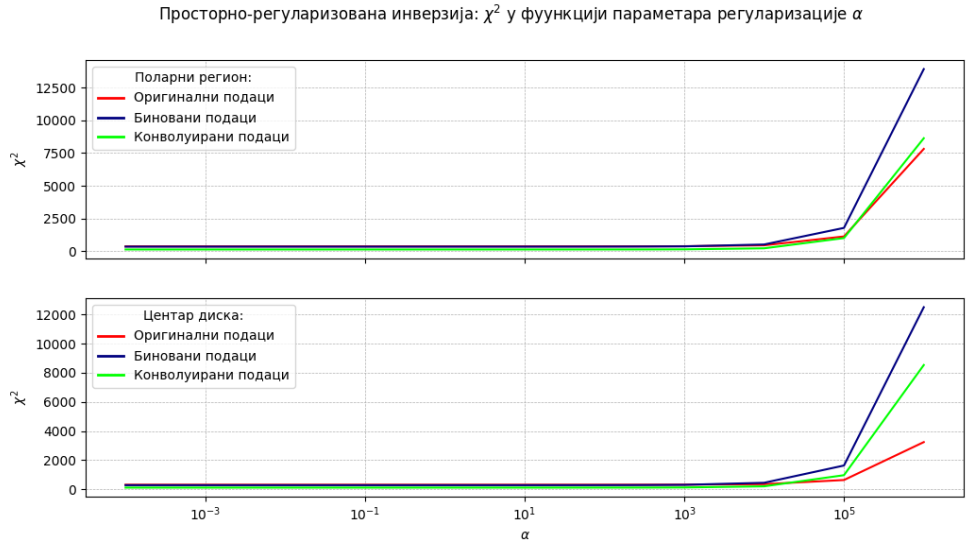


Слика 4.8: Отклањање двозначности код магнетне конфигурације на центру Сунчевог диска: оригинална мапа азимута (лијево), уведена двозначност (средина) и отклоњена азимутална двозначност (десно).

4.4 Просторно-спрегнута инверзија синтетичких посматрања на Сунчевом полу

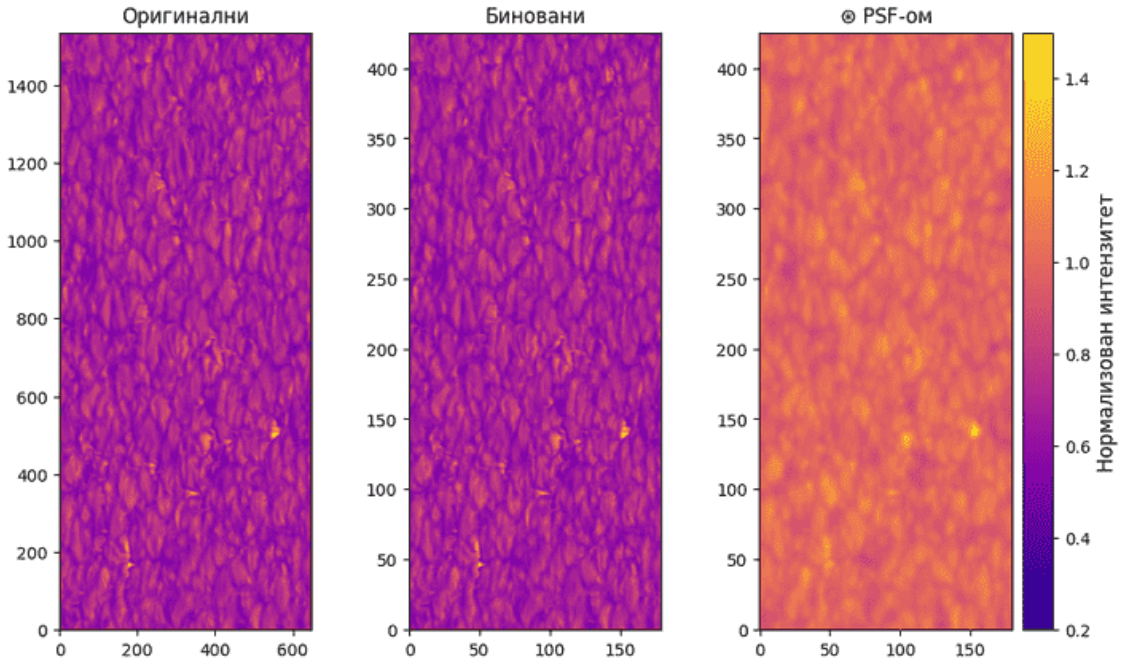
Прије него што пређемо на описивање просторно-спрегнуте инверзије, подсјетићемо се просторно-регуларизоване инверзије. Она представља варијанту пиксел-по-пиксел инверзије у којој се сваки пиксел и даље третира независно, али се у оптимизацију уводи додатни члан који обуздава јаке просторне градијенте. На тај начин добијају се глаткија рјешења и смањује се утицај шума, без експлицитног моделовања просторних спрега као у просторно-спрегнутим инверзијама. Кључни аспект ове технике је компромис: ако је регуларизација сувише јака, параметри се удаљавају од најбољег фита, што доводи до раста χ^2. Наш задатак је да нађемо оптималну регуларизацију, прије него спроведемо просторно-спрегнуту инверзију.

На слици 4.9 приказана је зависност χ^2 од јачине просторне регуларизације у три случаја: за оригиналну атмосферу, биновану (дефинисана у наставку) атмосферу и атмосферу конволуирану са PSF. Горњи дијаграм односи се на поларни регион, а доњи на центар диска. Постоји оптимална вриједност регуларизације која обезбјеђује довољно изглађена рјешења, али уз минималан пораст χ^2, односно уз задржавање што бољег квалитета фита. Одабиром регуларизације, прелазимо на просторно-спрегнуту инверзију.



Слика 4.9: Мјерење χ^2 у току просторно-регуларизованих инверзија за различите параметре регуларизације.

Да подсјетимо, магнетно поље Сунца не може се директно мјерити; о њему добијамо само посредне и несавршене информације путем спектрополаримеријских инверзија. При томе настају одређене пристрасности, условљене самим инверзионим кодовима и карактеристикама PSF. Ради испитивања утицаја ових фактора на одређивање магнетног поља, спровели смо пиксел-по-пиксел и просторно-спрегнуту инверзију (за линије Fe I 6301 Å и 6302 Å) над Стоксовим профилима који одговарају поларном региону из MURaM симулације (видјети Centeno и др., 2023; Milić и др., 2024). Резултати добијени овим инверзијама упоређени су са оригиналном атмосфером из симулације, што омогућава директну процјену тачности и поузданости метода инверзије. У анализи се фокусирамо на реконструкцију магнетног поља, јер су његове просторне скале и магнитуде посебно осјетљиве на ефекте PSF и шум у спектрополариметријским мјерењима.

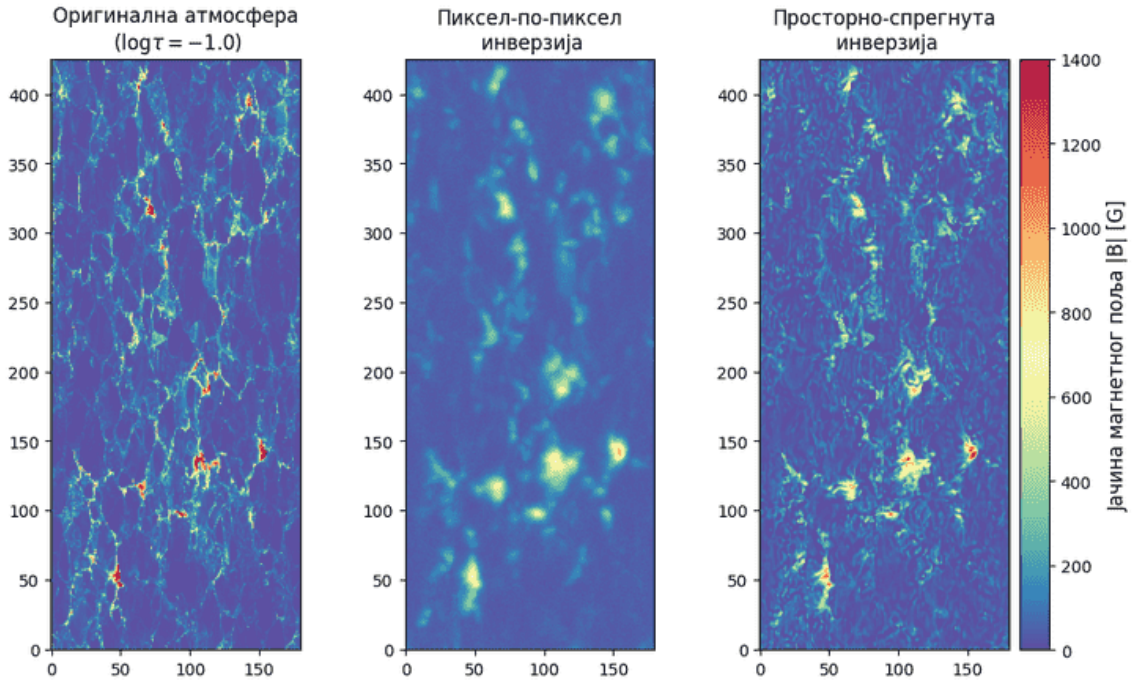


Слика 4.10: Конструисање профила за инверзију, примјер са Стоксовим параметром I. Поред оригинала, приказани су резултати биновања и конволуције са PSF.

Стоксови профили који су прослијеђени инверзионим методама конструисани су из профила генерисаних магнетохидродинамичком симулацијом у пуној резолуцији. Основни профили су најприје били биновани, при чему операцију *биновања* дефинишемо као груписање пиксела ради смањења просторне резолу-

ције. Величина видног поља смањена је за одређени фактор тако да димензије пиксела одговарају онима у PSF. Добијени профили затим су конволуирани са PSF телескопа Хиноде, након чега је додат реалистичан ниво шума (слика 4.10). Тако припремљени профили прослијеђени су инверзионим кодовима.

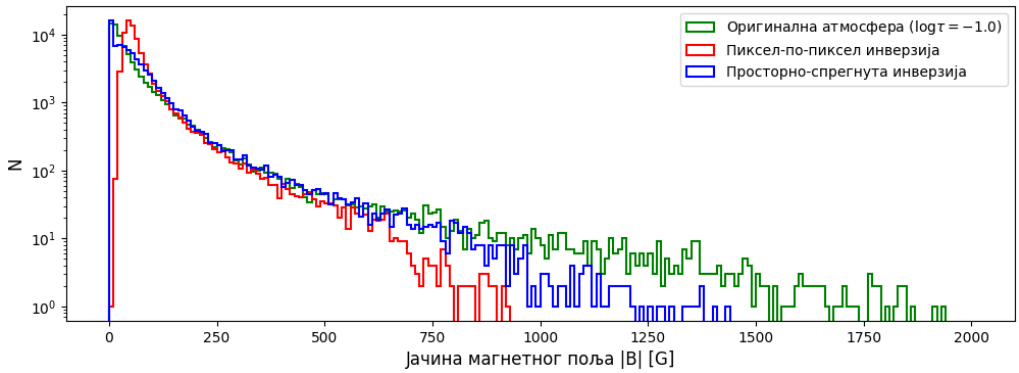
Просторно-спрегнута инверзија показује супериорност у односу на пиксел-по-пиксел инверзију (слике 4.11 и 4.12) како у области веома слабих магнетних поља ($|B| \lesssim 50, \mathrm{G}$), тако и у области јачих поља ($|B| \gtrsim 1000, \mathrm{G}$). Слика 4.13 је додатак упоређивању двије инверзионе методе. Укључивање познате PSF током инверзије омогућава реконструкцију атмосфере близу дифракционе границе телескопа, уз значајно смањење грешака у односу на пиксел-по-пиксел методу (видјети van Noort, 2012). У случају слабих поља, просторна спрегнутост повећава однос сигнал-шум у Стоксовим параметрима, док код јаких поља спречава систематско потцјењивање јачине усљед тзв. просторног *разливања*.



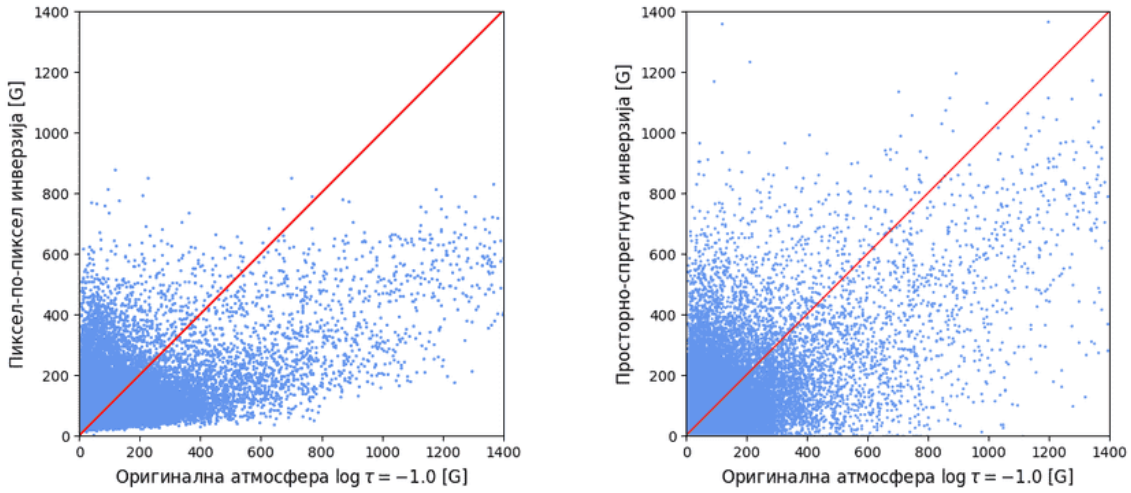
Слика 4.11: Сунчев поларни регион ($\theta = 65°$): дата је јачина магнетног поља из оригиналне атмосфере на $\log \tau = -1.0$ (лијево), те јачина магнетног поља добијена пиксел-по-пиксел инверзијом (средина) и просторно-спрегнутом инверзијом (десно).

Просторно-спрегнута инверзија ефикасно уклања ефекте PSF при чему добијене мапе јачине магнетног поља показују високу сличност са оригиналним симулацијама атмосфере. Овакав приступ доводи до повећања контраста,

оштријег раздвајања магнетних структура и смањења артефаката који произилазе из конволуције са PSF (видјети de la Cruz Rodríguez, 2019).

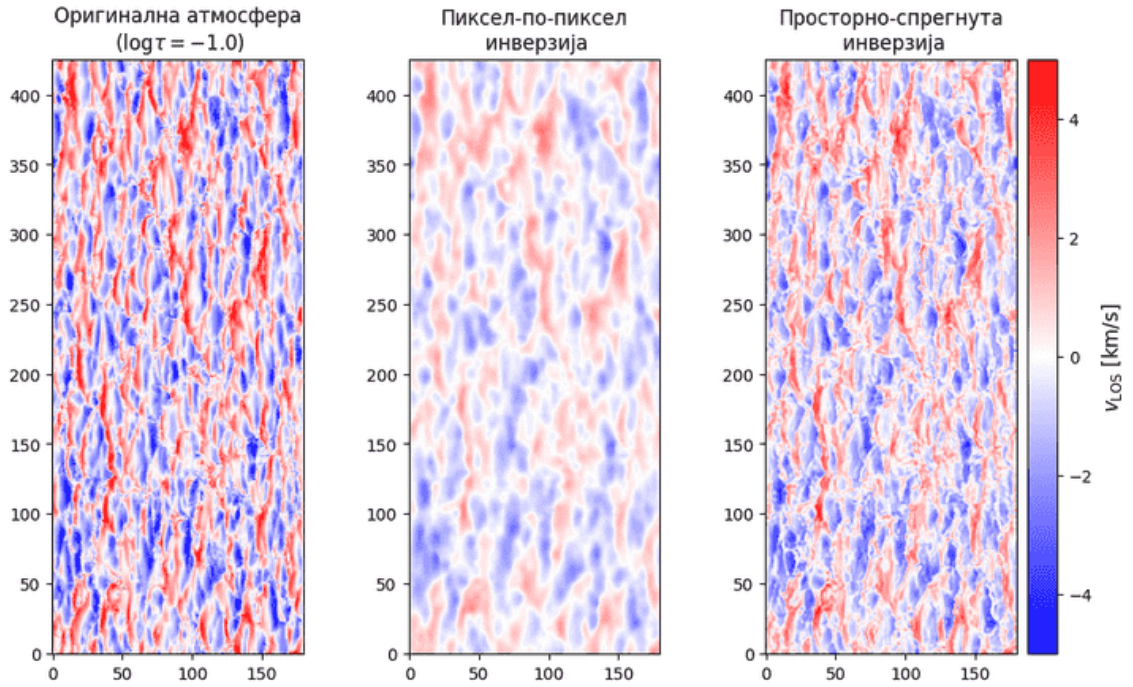


Слика 4.12: Сунчев поларни регион ($\theta = 65°$): дати су хисторграми јачине магнетног поља за оригиналну атмосферу на $\log \tau = -1.0$ и резултати добијени из пиксел-по-пиксел и просторно-спрегнуте инверзије.

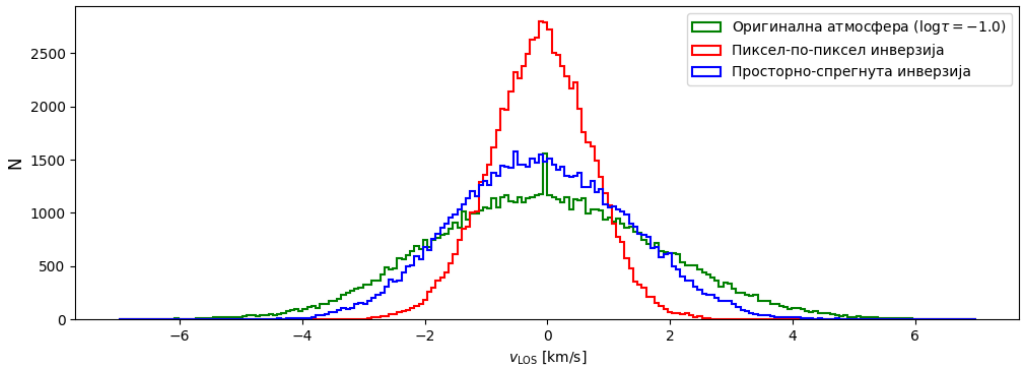


Слика 4.13: Сунчев поларни регион ($\theta = 65°$): поређење резултата инверзије са оригиналном атмосфером појединачно, путем распршеног дијаграма/плота. Распршеност је мања код пиксел-по-пиксел инверзије, али је уочљиво да нијесу добро враћене веће вриједности јачине магнетног поља.

Ради комплетности, на сликама 4.14 и 4.15 приказали смо брзину у правцу визуре (v_{LOS}). Просторно-спрегнута инверзија враћа евидентно боље резултате од пиксел-по-пиксел инверзије: детаљи на мапама су боље разлучени те је опсјег брзина много ближи оригиналном случају.



Слика 4.14: Сунчев поларни регион ($\theta = 65°$): дата је брзина v_{LOS} из оригиналне атмосфере на $\log\tau = -1.0$ (лијево), те она добијена пиксел-по-пиксел инверзијом (средина) и просторно-спрегнутом инверзијом (десно).



Слика 4.15: Сунчев поларни регион ($\theta = 65°$): дати су хисторграми v_{LOS} за оригиналну атмосферу на $\log\tau = -1.0$ и резултати добијени из пиксел-по-пиксел и просторно-спрегнуте инверзије.

Глава 5

Закључак

У овом раду тестиране су методе за поузданије одређивање Сунчевог поларног магнетног поља, кроз комбинацију реимплементације поступка отклањања азимуталне двозначности методом минималне енергије и просторно-спрегнуте спектрополариметријске инверзије. Коришћењем магнетохидродинамичких симулација фотосфере, синтетисана су посматрања у линијама Fe I 6301 Å и 6302 Å, која су потом деградирана конволуцијом са PSF и додавањем шума, чиме су апроксимирани услови реалних посматрања.

Метода минималне енергије за отклањање азимуталне двозначности показала је добру ефикасност на тест-конфигурацијама (преко 90% тачности), док је на реалистичнијим синтетичким симулацијама центра диска успјешност око 60%. Тачност је већа у областима јачег поља, док су слабља поља осјетљивија на шум. При томе треба имати у виду да је азимутална двозначност формално неодређен проблем за једновисинске инверзије/атмосфере, јер недостаје информација о вертикалним градијентима $\partial B_z/\partial z$.

Просторно-спрегнута инверзија значајно надмашује пиксел-по-пиксел инверзију у поларним регионима гдје ограничена просторна резолуција и ниски сигнали представљају кључни изазов. Просторно-спрегнути приступ ефикасно уклања ефекте PSF, повећава однос сигнал-шум и омогућава реконструкцију магнетних структура ближе дифракционој граници телескопа.

Резултати у овој тези представљају корак ка поузданијем одређивању поларног Сунчевог магнетног поља, што је есенцијално за моделовање глобалне магнетосфере и разумијевање механизама који управљају Сунчевим циклусом и Сунчевим вјетром.

Могуће руте за наставак истраживања су:

1. Истовремена примјена просторно-спрегнуте инверзије и методе отклањања азимуталне двозначности (тј. отклањање двозначности се може интегрисати у инверзију те служити као још један регуларизациони параметар) ради боље евалуације процеса мјерења магнетног поља на полу;

2. Модификација процедуре отклањања двозначности тако да се може примијенити директно над тродимензионалним магнетним пољем $\vec{B}(x, y, z)$, а не само над једновисинским конфигурацијама;

3. Испитивање стратегија за реконструкцију слабих поља: нпр. адаптивна регуларизација и експлицитно моделовање шума у функцији губитка.

Литература

Alissandrakis, C. E. (Јул 1981). „On the computation of constant alpha force-free magnetic field". У: *A&A* 100.1, стр. 197–200.

Arteaga, Oriol (Мар. 2017). „Historical revision of the differential Stokes–Mueller formalism: discussion". У: *Journal of the Optical Society of America A* 34.3, стр. 410–414. doi:10.1364/JOSAA.34.000410.

Borrero, J. M. и др. (Окт. 2011). „VFISV: Very Fast Inversion of the Stokes Vector for the Helioseismic and Magnetic Imager". У: *Sol. Phys.* 273.1, стр. 267–293. doi:10.1007/s11207-010-9515-6. arXiv: 0901.2702 [astro-ph.IM].

Centeno, R. и др. (Јул 2023). „Limitations and Biases in the Retrieval of the Polar Magnetic Field. I. The Role of the Magnetic Filling Factor in Milne-Eddington Inversions of Simulated Hinode/SP Data". У: *ApJ* 951.1, 23, стр. 23. doi:10.3847/1538-4357/acd178. arXiv: 2305.00924 [astro-ph.SR].

Chandrasekhar, S. (Maj 1947). „On the Radiative Equilibrium of a Stellar Atmosphere. XV." У: *ApJ* 105, стр. 424. doi:10.1086/144917.

Charbonneau, Paul (Дец. 2020). „Dynamo models of the solar cycle". У: *Living Reviews in Solar Physics* 17.1, 4, стр. 4. doi:10.1007/s41116-020-00025-6.

Cranmer, Steven R. (Дец. 2009). „Coronal Holes". У: *Living Reviews in Solar Physics* 6.1, 3, стр. 3. doi:10.12942/lrsp-2009-3. arXiv: 0909.2847 [astro-ph.SR].

de la Cruz Rodríguez, J. (Нов. 2019). „A method for global inversion of multi-resolution solar data". У: *A&A* 631, A153, A153. doi:10.1051/0004-6361/201936635. arXiv: 1909.02604 [astro-ph.SR].

del Toro Iniesta, J. C. (2003). *Introduction to Spectropolarimetry*.

del Toro Iniesta, J. C. и Ruiz Cobo, B. (Дец. 2016). „Inversion of the radiative transfer equation for polarized light". У: *Living Reviews in Solar Physics* 13.1, 4, стр. 4. doi:10.1007/s41116-016-0005-2. arXiv: 1610.10039 [astro-ph.SR].

Gary, G. A. (Феб. 1989). „Linear Force-free Magnetic Fields for Solar Extrapolation and Interpretation". У: *ApJS* 69, стр. 323. doi:10.1086/191316.

Georgoulis, Manolis K. (Авг. 2005). „A New Technique for a Routine Azimuth Disambiguation of Solar Vector Magnetograms". У: *ApJ* 629.1, стр. L69–L72. doi:10.1086/444376.

Golding, Thomas Peter, Carlsson, Mats и Leenaarts, Jorrit (Мар. 2014). „Detailed and Simplified Nonequilibrium Helium Ionization in the Solar Atmosphere". У: *ApJ* 784.1, 30, стр. 30. doi:10.1088/0004-637X/784/1/30. arXiv: 1401.7562 [astro-ph.SR].

Gosain, S. и Uitenbroek, H. (Јул 2024). „Estimation of projection effects in the polar magnetic field measurements from the ecliptic view". У: *arXiv e-prints*, arXiv:2407.09010, arXiv:2407.09010. doi:10.48550/arXiv.2407.09010. arXiv: 2407.09010 [astro-ph.SR].

Hale, George E. (Дец. 1908). „The Zeeman Effect in the Sun". У: *PASP* 20.123, стр. 287. doi:10.1086/121847.

Hathaway, David H. (Дец. 2015). „The Solar Cycle". У: *Living Reviews in Solar Physics* 12.1, 4, стр. 4. doi:10.1007/lrsp-2015-4. arXiv: 1502.07020 [astro-ph.SR].

Ito, Hiroaki и др. (Maj 2010). „Is the Polar Region Different from the Quiet Region of the Sun?" У: *The Astrophysical Journal* 719. doi:10.1088/0004-637X/719/1/131.

Jang, E., Gu, S. и Poole, B. (Нов. 2016). „Categorical Reparameterization with Gumbel-Softmax". У: *arXiv e-prints* arXiv:1611.01144. doi:10.48550/arXiv.1611.01144.

Jefferies, J., Lites, B. W. и Skumanich, A. (Авг. 1989). „Transfer of Line Radiation in a Magnetic Field". У: *ApJ* 343, стр. 920. doi:10.1086/167762.

Kirkpatrick, S., Gelatt, C. D. и Vecchi, M. P. (Maj 1983). „Optimization by Simulated Annealing". У: *Science* 220.4598, стр. 671–680. doi:10.1126/science.220.4598.671.

Landi Degl'Innocenti, E. (1987). „Transfer of Polarized Radiation, using 4 x 4 Matrices". У: *Numerical Radiative Transfer*. Ур. Wolfgang Kalkofen, стр. 265.

Landi Degl'Innocenti, E. и Landolfi, M. (2004). *Polarization in Spectral Lines*. Св. 307. doi:10.1007/978-1-4020-2415-3.

Leka, K. D. (2009). *Ambiguity Resolution for HMI*. Presentation at HMI Team Meeting, Stanford University. http://hmi.stanford.edu/TeamMeetings/Sep_2009/presentations/Leka.AmbigForHMI.pdf.

Leka, K. D. и др. (Нов. 2009). „Resolving the 180° Ambiguity in Solar Vector Magnetic Field Data: Evaluating the Effects of Noise, Spatial Resolution, and Method Assumptions". У: *Sol. Phys.* 260.1, стр. 83–108. doi:10.1007/s11207-009-9440-8.

Levenberg, K. (1944). „A Method for the Solution of Certain Problems in Least Squares". У: *Quarterly of Applied Mathematics* 2, стр. 164–168. doi:10.1090/qam/10666.

Marquardt, D. W. (Јун 1963). „An Algorithm for Least Squares Estimation of Nonlinear Parameters". У: *Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics* 11.2, стр. 431–441. doi:10.1137/0111030.

Metcalf, Thomas R. (Дец. 1994). „Resolving the 180-degree ambiguity in vector magnetic field measurements: The 'minimum' energy solution". У: *Sol. Phys.* 155.2, стр. 235–242. doi:10.1007/BF00680593.

Metcalf, Thomas R. и др. (Септ. 2006). „An Overview of Existing Algorithms for Resolving the 180 Ambiguity in Vector Magnetic Fields: Quantitative Tests with Synthetic Data". У: *Sol. Phys.* 237.2, стр. 267–296. doi:10.1007/s11207-006-0170-x.

Metropolis, N. и др. (Јун 1953). „Equation of State Calculations by Fast Computing Machines". У: *J. Chem. Phys.* 21.6, стр. 1087–1092. doi:10.1063/1.1699114.

Milić, I. и др. (Мар. 2024). „Spatial resolution effects on the solar open flux estimates". У: *A&A* 683, A134, A134. doi:10.1051/0004-6361/202347272. arXiv: 2402.02486 [astro-ph.SR].

Moffatt, H. K. (1978). *Magnetic field generation in electrically conducting fluids*.

Orozco Suárez, D., Bellot Rubio, L. R. и del Toro Iniesta, J. C. (Јул 2010). „Milne-Eddington inversion of the Fe I line pair at 630 nm". У: *A&A* 518, A3, A3. doi:10.1051/0004-6361/201014374. arXiv: 1005.5013 [astro-ph.SR].

Orozco Suárez, D. и del Toro Iniesta, J. C. (Феб. 2007). „The usefulness of analytic response functions". У: *A&A* 462.3, стр. 1137–1145. doi:10.1051/0004-6361:20066201. arXiv: 1211.1502 [astro-ph.SR].

Petrie, Gordon J. D. (Дец. 2015). „Solar Magnetism in the Polar Regions". У: *Living Reviews in Solar Physics* 12.1, 5, стр. 5. doi:10.1007/lrsp-2015-5.

Rachkovsky, D. N. (Јан. 1962). „Magnetic rotation effects in spectral lines”. У: *Izvestiya Ordena Trudovogo Krasnogo Znameni Krymskoj Astrofizicheskoj Observatorii* 28, стр. 259–270.

Raissi, M., Perdikaris, P. и Karniadakis, G. E. (Феб. 2019). „Physics-informed neural networks: A deep learning framework for solving forward and inverse problems involving nonlinear partial differential equations”. У: *Journal of Computational Physics* 378, стр. 686–707. doi:10.1016/j.jcp.2018.10.045.

Rees, D. E. и Semel, M. D. (Апр. 1979). „Line formation in an unresolved magnetic element: a test of the centre of gravity method.” У: *A&A* 74.1, стр. 1–5.

Ruiz Cobo, B. и del Toro Iniesta, J. C. (Окт. 1992). „Inversion of Stokes Profiles”. У: *ApJ* 398, стр. 375. doi:10.1086/171862.

Skumanich, A. и Lites, B. W. (Нов. 1987). „Stokes Profile Analysis and Vector Magnetic Fields. I. Inversion of Photospheric Lines”. У: *ApJ* 322, стр. 473. doi:10.1086/165743.

Socas-Navarro, H., Trujillo Bueno, J. и Ruiz Cobo, B. (Феб. 2000). „Non-LTE Inversion of Stokes Profiles Induced by the Zeeman Effect”. У: *ApJ* 530.2, стр. 977–993. doi:10.1086/308414.

Stenflo, J. O. (1994). *Solar Magnetic Fields: Polarized Radiation Diagnostics*. Св. 189. doi:10.1007/978-94-015-8246-9.

Tikhonov, A.N. и Arsenin, V.I.A. (1977). *Solutions of Ill-posed Problems*. Halsted Press book. Winston. ISBN: 9780470991244. URL: https://books.google.rs/books?id=ECrvAAAAMAAJ.

Unno, W. (Јан. 1956). „Line Formation of a Normal Zeeman Triplet”. У: *PASJ* 8, стр. 108.

Valori, G. и др. (Септ. 2023). „Stereoscopic disambiguation of vector magnetograms: First applications to SO/PHI-HRT data”. У: *A&A* 677, A25, A25. doi:10.1051/0004-6361/202345859. arXiv: 2307.09907 [astro-ph.SR].

van Noort, M. (Дец. 2012). „Spatially coupled inversion of spectro-polarimetric image data. I. Method and first results”. У: *A&A* 548, A5, A5. doi:10.1051/0004-6361/201220220. arXiv: 1210.4636 [astro-ph.IM].

Vögler, A. и др. (Јан. 2005). „Simulations of magneto-convection in the solar photosphere. Equations, methods, and results of the MURaM code”. У: *A&A* 429, стр. 335–351. doi:10.1051/0004-6361:20041507.

Биографија аутора

Ђорђе Мијовић је рођен 1998. године у Беранама. Гимназију је завршио у Плаву. Двије године је студирао војно инжењерство на Универзитету у Загребу. Основне студије астрофизике уписао је школске 2019/2020. на Математичком факултету у Београду. Дипломирао је 2024. године и исте године уписао мастер студије астрофизике. Од те школске године ангажован је на Математичком факултету у Београду као сарадник у настави за ужу научну област *Астрономија*. Од школске 2025/2026. ради и као наставник астрономије у Земунској гимназији.