PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET

UNIVERZITETA U BEOGRADU

MILAN MARTINOVIĆ

O NEKIM PITANJIMA SPEKTRALNE TEORIJE DIFERENCIJALNO-FUNKCIONALNIH OPERATORA DRUGOG REDA

\- DOKTORSKA DISERTACIJA -

BEOGRAD

1986.

GLAVA 1.

UVOD.

tačka 1. REZIME.

U većem dijelu teze razmatra se diferencijalno-funkcionalni operator zadat izrazom

$$L_3 u = -u''(x) + q(x)u + \sum_{k=1}^{n-1} \alpha_k u\left(\frac{k\pi}{n}\right) + \alpha_n \int_0^\pi u(x)dx$$

i graničnim uslovima

$$u(0)=0, \quad u(\pi)=0.$$

Oblast definisanosti operatora L_3 sadrži funkcije $u(x)$ takve da $u''(x) \in \mathcal{H}$. Operator dejstvuje u Hilbertovom prostoru $\mathcal{H} = L_2[0,\pi]$ nad poljem C kompleksnih brojeva.

Pretpostavlja se da je potencijalna funkcija $q(x)$ neprekidna ili da je dovoljno glatka ili da je beskonačno diferencijabilna. Vrijednosti te funkcije su kompleksni brojevi. $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ su proizvoljni kompleksni brojevi, $n \geqslant 2$.

Ovaj operator (L_3) dosad nije bio proučavan, za razliku od Šturm-Liuvilovog operatora (L_0, v. kasnije) za koji su rezultati koji se navode u tezi uglavnom poznati.

U glavi dva proučen je spektar operatora. Dokazano je da se on sastoji od prebrojivog skupa normalnih svojstvenih vrijednosti λ_m, m=1,2,... . Prethodno su konstruisana dva linearno nezavisna rješenja jednačine $L_3 u = \lambda u$, λ - spektralni parametar. Postupak je sličan onom na koji se rješava integralna jednačina sa degenerisanim jezgrom. Izučena je asimptotika spektra i asimptotika svojstvenih funkcija.

U glavi tri izračunat je regularizovani trag operatora, ma kog reda. Primijenjen je postupak Lidskog-Sadovničija. Indikatorski dijagram sadrži međutačke na svojim stranicama.

Formula za prvi trag glasi

$$\sum_{m=1}^{\infty}\left(\lambda_m-m^2-C_o-\frac{C_1}{m}\right)=-\frac{1}{4}(q(0)+q(\pi))+\frac{1}{2}C_o+\pi\alpha_n,$$

gdje je C_o konstanta, a C_1 zavisi od m(mod2n). Takođe je izračunat defekt regularizacije (iznosi nula), izvedena je formula za relativni trag i proučen je uticaj glatkosti koeficijenta q(x) na formule za trag.

U glavi četiri razmatra se ovaj operator bez integralnog sabirka $\alpha_n\int_0^{\pi}u(x)dx$, oznaka L. Dat je novi izraz za operator koji se izučava, naime

$$Lu=L_ou+(L_ou,f)g,$$

gdje je L_o Šturm-Liuvilov operator, tj. $L_ou=-u''(x)+q(x)u$, f(x) izvjesna funkcija, g(x)=1. Dakle, L je izvjesna perturbacija od L_o. Konstruisana je rezolventa operatora L i konjugovani operator L^*. Pokazuje se da skupovi $\mathcal{D}(L)$ i $\mathcal{D}(L^*)$ nisu uporedivi. Dokazana je - metodom konturnog integrisanja - teorema o razlaganju po svojstvenim funkcijama. Na kraju je dokazano da sistem svih svojstvenih funkcija čini Risovu bazu u $\mathcal{H}$.

Razmatranja posljednje glave odnose se na apstraktni analogon dosadašnje situacije.

Razmatranja glave pet odvijaju se u separabilnomHilbertovom prostoru $\mathcal{H}$ nad poljem C kompleksnih brojeva. Za polazni operator L_o pretpostavlja se da je samokonjugovan, poluograničen (tj. pozitivan) i diskretan. L_o je, uopšte uzev, neograničen. Osnovni operator L jeste izvjesna njegova relativno konačno dimenziona perturbacija. Naime,

$$Lu=L_ou+Pu=L_ou+\sum_{j=1}^{r}(L_ou,f_j)g_j.$$

Ovdje je $\mathcal{D}(L)=\mathcal{D}(L_o)$. P je, uopšte uzev, nesamokonjugovan i neograničen. Na početku je konstruisana rezolventa operatora L. Izračunat je prvi regularizovani trag operatora L (koji je takođe diskretan) - to je glavni novi rezultat ove glave. Ta formula važi pod dvije pretpostavke, od kojih se jedna odnosi na funkciju raspodjele svojstvenih vrijednosti od L_0, a druga na odnos $f_1, \ldots, g_r$ i $\mathcal{D}(L_0)$. Formula glasi (relativni trag)

$$\lim_{p\to\infty} \sum_{m=1}^{m_p} (\mu_m - \lambda_m) = \sum_{j=1}^{r} (L_0^{1-q_j} g_j, L_0^{q_j} f_j).$$

Ovdje konstante $q_j \in [0,2]$, $\{\mu_m\}_1^\infty$ i $\{\lambda_m\}_1^\infty$ čine spektar od L i L_0, a $m_1, m_2, \ldots$ je podniz niza $1,2,3,\ldots$. Na kraju su navedeni primjeri za obične diferencijalne operatore (drugog reda ili višeg) i za diferencijalne operatore s parcijalnim izvodima.

Operator L_3 idejno je blizak jednačini Kolmogorov-Felera (pojavljuje se u teoriji vjerovatnoće), gdje takođe jednačina sadrži funkcional od rješenja, i to određeni koeficijent Tejlorovog reda rješenja. U glavama četiri i pet u analizi se koristi metodika teorije perturbacija. Rezultat glave pet odnosi se na teoriju tragova za apstraktne operatore.

Novi rezultati izloženi u ovoj tezi objavljeni su u pet radova (tri samostalna rada autora i dva zajednička rada). Ti su radovi objavljeni u sljedećim časopisima: Doklady AN SSSR, Differencial'nye uravneni'a (dva rada), Vestnik MGU - ser. mat.-meh. i Radovi matematički.

tačka 2. PREGLED SADRŽAJA GLAVE DVA - SVOJSTVENE VRIJEDNOSTI I SVOJSTVENE FUNKCIJE.

(1) Na početku je definisan linearni operator L koji

predstavlja osnovni predmet izučavanja u ovoj i u sljedeće dvije glave. Takođe je definisan i operator L_3 koji je nešto opštiji od operatora L - dodata je i perturbacija integralnog tipa. Razmatraju se, kao njihovi specijalni slučajevi, i operatori L_1 i L_2. Prilikom tog definisanja, uvedena je oznaka L_0 za diferencijalni operator drugog reda, drugi naziv Šturm-Liuvilov operator. Naime, na L se, kao i na L_3, može gledati kao na perturbaciju operatora L_0.

(2) Operatori dejstvuju u separabilnom Hilbertovom prostoru $\mathcal{H}=L_2[0,\pi]$ nad poljem kompleksnih brojeva C. Označimo sa $\mathcal{D}$ dio od $\mathcal{H}$ koji se sastoji od svih funkcija u(x) koje imaju apsolutno neprekidan prvi izvod u'(x), čiji drugi izvod u''(x) pripada $\mathcal{H}$ i koje, osim toga, zadovoljavaju dva granična uslova $u(0)=0$, $u(\pi)=0$. Taj skup jeste oblast definisanosti svih pet operatora koji su gore spomenuti.

Neka je, po definiciji,

$$L_0u=-u''(x)+q(x)u.$$

Neka je, po definiciji,

$$Pu=\sum_{k=1}^{n-1}\alpha_k u\left(\frac{k\pi}{n}\right),$$

$$P_3u=\sum_{k=1}^{n-1}\alpha_k u\left(\frac{k\pi}{n}\right)+\alpha_n\int_0^{\pi}u(x)dx.$$

Na kraju, neka je, po definiciji,

$$L=L_0+P,\quad L_3=L_0+P_3.$$

U gornjim formulama q(x) je neprekidna funkcija na odsječku $[0,\pi]$, koja uzima kompleksne vrijednosti. Za funkciju q(x) se ponekad pretpostavlja i veća glatkost, naročito kod formula za trag, a najviše se pretpostavlja da je ona beskonačno diferencijabilna na odsječku $[0,\pi]$.

U gornjim formulama su α_k $(k=1,2,\dots,n)$ proizvoljni kompleksni brojevi, a n je proizvoljan prirodan broj veći od jedan.

Što se tiče specijalnih slučajeva $L_1=L_o+P_1$ i $L_2=L_o+P_2$, oni su zadati sljedećim formulama

$$P_1u=u(\frac{\pi}{2}),\ P_2u=\alpha_n\int_0^{\pi}u(x)dx.$$

(3) U tački 2. utvrđena su osnovna svojstva ispitivanih operatora L i L_3. Prethodno, operator L_o je neograničen i zatvoren, a ako q(x) uzima realne vrijednosti onda je samokonjugovan. Operator P nije ograničen, nije samokonjugovan i nije zatvoren. Osim toga, taj operator P ne dopušta zatvorenje. Ipak, operator P je ograničen u odnosu na L_o i njegova L_o-granica iznosi nula. Odavde slijedi da je osnovni operator $L=L_o+P$ zatvoren (u vezi toga što je L_o-granica manja od jedan). Takođe je i opšti operator L_3 zatvoren, jer on nastaje dodavanjem operatoru L ograničene perturbacije P_2.

(4) Na početku je pokazano da jednačina $l_3(u)-\lambda u=0$, tj.

$$-u''(x)+q(x)u+\sum_{k=1}^{n-1}\alpha_k u(\frac{k\pi}{n})+\alpha_n\int_0^{\pi}u(x)dx-\lambda u=0$$

ima za svako λ tačno dva linearno nezavisna rješenja. Ta su rješenja označena sa $g_1(x,s)$ i $g_2(x,s)$. Ovdje je $s=\sqrt{\lambda}$. U napomeni 1. i napomeni 2. tačke 4. dat je za njih eksplicitni izraz u specijalnom slučaju L_1. Za opšti slučaj L_3 taj izraz je dat u napomeni 4. tačke 5.

Postupak konstruisanja ova dva linearno nezavisna rješenja: polazi se od dva linearno nezavisna rješenja Šturm-Liuvilove jednačine $l_o(u)-\lambda u=0$, tj.

$$-u''(x)+q(x)u-\lambda u=0.$$

Ta su dva rješenja označena sa $f_1(x,s)$ i $f_2(x,s)$. Činjenice koje se na njih odnose poznate su iz opšte teorije. Osim toga na jednačinu $l_3(u)-\lambda u=0$ gleda se kao na nehomogenu, podrazumijevajući pod homogenom jednačinu $l_0(u)-\lambda u=0$. Drukčije govoreći, koristi se postupak sličan onom koji služi za rješavanje Fredholmove integralne jednačine druge vrste sa degenerisanim jezgrom.

(5) Poslije ovoga, funkcije $g_1(x,s)$ i $g_2(x,s)$ dovode se u vezu sa graničnim uslovima $u(0)=0$ i $u(\pi)=0$, tj. formira se karakteristična determinanta, odnosno karakteristična jednačina $f(s)=0$. Drugi način da se izvede karakteristična jednačina jeste da se istovremeno razmatraju tri uslova: jedan potiče od rješavanja nehomogene jednačine na osnovu homogene, a dva od dva granična uslova. Oba načina daju isti rezultat. Drugi način ima prednost što se izbjegava razdvajanje na dvije mogućnosti po uslovu

$1-\mathcal{A}(s)=0$ ili $1-\mathcal{A}(s)\neq 0$.

Karakteristična jednačina $f(s)=0$ određena je u teoremi 2.1, a po formuli (2.24) je

$f(s)=A(\pi,s)\mathcal{B}(s)-\mathcal{A}(s)B(\pi,s)+B(\pi,s)$.

Pomoćne funkcije $A(x,s)$, $B(x,s)$, $\mathcal{A}(s)$, $\mathcal{B}(s)$ definisane su formulama (2.11), (2.12), (2.21), (2.25).

Analizira se geometrijska višestrukost (dimenzija svojstvenog podprostora) svojstvene vrijednosti λ. Ona iznosi jedan ili dva (napomena 2. tačke 5). Formula (2.26) daje eksplicitni odgovor na pitanje - kada je ta višestrukost jednaka dva.

Analizira se algebarska višestrukost (red nule karakteristične jednačine) svojstvene vrijednosti λ. Ona je uvijek konačna, jer je f cijela analitička funkcija i od s i od λ (napomena 3. te tačke).

(6) Dalje, imajući u vidu buduće asimptotske formule, Košijeva rješenja $f_1(x,s)$ i $f_2(x,s)$ zamjenjuju se pogodni-

jim rješenjima $\widetilde{f}_1(x,s)$ i $\widetilde{f}_2(x,s)$ te iste Šturm-Liuvilove jednačine $l_0(u)-\lambda u=0$. Te funkcije zadovoljavaju uslove $\widetilde{f}_1(0,s)=1$, $\widetilde{f}_2(0,s)=1$. Izučena je veza ta dva para rješenja (tačka 8). Ova posljednja rješenja koriste se kasnije (kod asimptotskih izraza).

(7) U tački 12. pokazano je da su sva rješenja jednačine $f(s)=0$ sadržana u oblasti

$$|\mathrm{Im}s| \leqslant \mathrm{const.}$$

U tački 16. pokazano je da su sva ta rješenja, izuzev njih konačno mnogo, sadržana u kružnicama

$$|s-m| = \frac{1}{2},$$

m cio, tj. m prirodan. Preciznije, počev od nekog m unutar svake takve kružnice nalazi se tačno jedno rješenje. U dokazu se koristi Rušeova teorema. Dosad je za $q(x)$ pretpostavljano samo da je neprekidna. Dakle, riješeno je pitanje egzistencije i lokalizacije svojstvenih vrijednosti.

(8) U tački 10. izvodi se asimptotski izraz za pomoćne funkcije A i B. U tački 14. izvodi se asimptotski izraz za f (f se odnosi na opšti slučaj L_3). U tački 18. izvodi se asimptotska formula za svojstvene vrijednosti (u s ravni).

Postupak izvođenja ove asimptotske formule: uvodi se pomoćna promjenljiva V po formuli

$$V=\exp(is\pi/n)$$

i koristi se Hornov iterativni postupak, koji se može primijeniti na funkcije (za određivanje asimptotike njihovih nula) koje se aproksimiraju kvazipolinomima.

Indikatorski dijagram koji odgovara funkciji f (njegova tjemena su brojevi konjugovani onim koji se pojavljuju pod znakom eksponencijalne funkcije kod tog kvazipolinoma) ima tjemena $Ai\pi/n$, gdje je $A=-n,-(n-1),\dots,-1,0,1,2,\dots,n$.

Kod izvođenja asimptotskih formula pretpostavlja se da je $q(x)$ beskonačno diferencijabilna.

U tačkama 17 (formula (2.55)) i 18. izvedene su izvjesne relacije koje se odnose na koeficijente tih asimptotskih formula. To je izvođenje zasnovano na prisustvu dva puta za numerisanje svojstvenih vrijednosti (tačka 17), imajući u vidu neparnost funkcije f. Takođe je izračunato nekoliko početnih koeficijenata.

Na kraju, kvadriranjem asimptotskih formula za s dobijaju se asimptotske formule za (prave) svojstvene vrijednosti λ (tačka 19).

(9) Opišimo kako izgledaju te asimptotske formule za svojstvene vrijednosti λ. Ako je m redni broj svojstvene vrijednosti onda važi $\lambda_m \sim m^2$, a ostali sabirci u asimptotskoj formuli sadrže $m^0, m^{-1}, m^{-2}, \dots$, tj. asimptotska formula se izražava po cijelim stepenima rednog broja. Redni brojevi su $m=1,2,3,\dots$, sa konačnim viškom ili nedostatkom. Koeficijent uz određeni stepen m^{-k} je periodična funkcija od m sa periodom 2n (u specijalnom slučaju L_1 taj period iznosi 4).

Prepišimo odgovarajuću formulu (2.57). Svojstvena vrijednost je označena kao $\lambda_{m,j}$. Važi (odnosi se na opšti slučaj L_3):

$$\lambda_{m,j} \sim (2nm+j)^2 + C_0 + \frac{C_{1,j}}{(2nm+j)} + \frac{C_{2,j}}{(2nm+j)^2} + \dots,$$

$j=1,2,\dots,2n$; $m=0,1,2,\dots$; $m\to\infty$. Ovdje je

$$C_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi q(x)dx; \quad C_{1,j}=0, \ j \ \text{parno},$$

$$C_{1,j} = -\frac{2i}{\pi}\sum_{k=1}^{n-1}(\alpha_k+\alpha_{n-k})\exp\left(\frac{i\pi jk}{n}\right), \ j \ \text{neparno}.$$

U slučaju L_1: $C_{1,1}=4/\pi$, $C_{1,2}=0$, $C_{1,3}=-4/\pi$, $C_{1,4}=0$.

(10) Na kraju ove glave data je asimptotska formula za

svojstvene funkcije $u_m(x)$.

tačka 3. PREGLED SADRŽAJA GLAVE TRI - REGULARIZOVANI TRAG.

(1) Na početku ove glave (prve četiri tačke) navedene su neke činjenice iz opšte teorije koje se koriste. U tačkama 1, 2. i 4. izloženi su definicija klase K cijelih funkcija, zeta-funkcije njoj asocirane i postupak V.B. Lidskog i V.A. Sadovničija za računanje regularizovanog zbira nula (i zbira cijelih stepena tih nula) funkcije te klase, njihov rad [14]. U tački 3. izložen je detaljno Hornov postupak korišćen u prethodnoj glavi. U tački 6. naveden je rezultat o regularizovanom tragu za Šturm-Liuvilov operator L_o, koji se može dobiti po tom postupku, kao uostalom i za opšti diferencijalni operator ma kog reda na konačnom odsječku (uz izvjesna ograničenja). Trag za Šturm-Liuvilov operator L_o prvi su izračunali I.M. Geljfand i B.M. Levitan, rad [4], čime je i počeo razvoj teorije tragova neograničenih operatora, među njima i diferencijalnih.

(2) U ovoj glavi pretpostavlja se da je potencijalna funkcija q(x) beskonačno diferencijabilna. Osnovni predmet ispitivanja jeste cijela funkcija f(s) koja definiše svojstvene vrijednosti osnovnog operatora L i opšteg operatora L_3. Pokazuje se da ta funkcija pripada klasi K (tačka 5).

(3) Treba uočiti sljedeću specifiku asimptotskog izraza za f(s). Njen indikatorski dijagram svodi se na duž $[-i\pi, i\pi]$. Ta duž podijeljena je ostalim tjemenima na 2n jednakih djelova, tj. prisutne su međutačke. U tekstu tačaka 1, 2. i 4, preuzetom iz opšte teorije, pretpostavlja se da nisu prisutne međutačke (na stranicama indikatorskog dijagrama).

(4) Definisana je zeta-funkcija $Z(\sigma)$ asocirana s f(s)

(tačka 11):

$$Z(\sigma)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} s^{-\sigma}\frac{f'(s)}{f(s)}\,ds,$$

koja se analitički produžava na cijelu kompleksnu σ-ravan, Γ - kontura Hankelovog tipa.

(5) Dalje, takođe po analogiji s postupkom Lidskog-Sadovničija, izvedena je formula za regularizovani zbir nula (na cijeli stepen)funkcije f(s), bez obzira na ukazanu specifiku.

Te formule su ustvari formule za regularizovani trag operatora L_3, odnosno L. Zbir kvadrata nula funkcije f(s) jeste ustvari zbir svojstvenih vrijednosti ispitivanog operatora.

(6) Razjašnjen je pojam regularizacije. Naime, s obzirom da je asimptotika svojstvenih vrijednosti

$$\lambda_m=m^2+C_0+\frac{C_{1,j}}{m}+\frac{C_{2,j}}{m^2}+\dots,$$

m=d,d+1,d+2,...; j=m(mod2n); d je neki cio broj, to red

$$\sum_{m=d}^{\infty}\lambda_m$$

očigledno divergira. S druge strane, konvergira red

$$S=\sum_{m=d}^{\infty}\Big[\lambda_m-m^2-C_0-\frac{C_{1,j}}{m}\Big],$$

kao i red

$$\sum_{m=d}^{\infty}\Big[\lambda_m-m^2-C_0-\frac{C_{1,j}}{m}-\frac{C_{2,j}}{m^2}\Big],$$

itd. Zbirove tih konvergentnih redova zovemo upravo regularizovanim prvim tragom operatora L_3. Slično se definiše drugi regularizovani trag, tj. sabiraju se svi λ_m^2 umanjeni svaki za prvih nekoliko članova svog asimptotskog predstavljanja (uzima se toliko članova da se dobije konvergentni red). Takođe, treći trag, itd.

(7) Formula za trag izvedena je u najopštijoj situaciji, tj. trag ma kog reda sa ma kolikom regularizacijom.

(8) Takođe je razjašnjen pojam defekta regularizacije. Naime, van izvjesne velike kružnice $|s|=R$ u s-ravni važi sljedeće: sve nule funkcije $f(s)$ sadržane su u kružnicama poluprečnika $\frac{1}{2}$ sa centrom u cijelim tačkama, i to unutar svake takve kružnice jedna nula. Međutim, unutar velike kružnice ima izvjestan konačan broj nula. Neodređenost tog konačnog broja odražava se u prisustvu zasad neodređenog broja d u ranijim formulama.

(9) Teorema 3.3. daje opštu formulu za regularizovani trag u slučaju L_1, a teorema 3.4. formulu za prvi regularizovani trag (uz minimalnu regularizaciju) za taj slučaj. Teoreme 3.5. i 3.6. daju odgovarajuće formule za opšti slučaj L_3. Prepišimo ovdje dio tih rezultata.

(10) Prvi trag u opštem slučaju L_3:

$$S=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{j=1}^{2n}\left[\lambda_{m,j}-(2nm+j)^2-C_0-\frac{C_{1,j}}{(2nm+j)}\right]=$$

$$-\frac{1}{4}(q(0)+q(\pi))+\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}q(x)dx+\pi\alpha_n.$$

Ako se stavi $q(x)\equiv 0$, onda se za prvi trag u slučaju L_1 dobija

$$\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{j=1}^{4}\left[\lambda_{m,j}-(4m+j)^2-\frac{C_{1,j}}{(4m+j)}\right]=0,$$

a u slučaju L_2

$$\sum_{m=1}^{\infty}\left[\lambda_m-m^2\right]=\pi\alpha_n.$$

(11) Izvedene formule za trag, osim što je računanje traga jedno od klasičnih pitanja u analizi, mogu se primijeniti za nalaženje približnih vrijednosti prvih svojstvenih vrijednosti (ako je poznat defekt regularizacije) ili kod

rješavanja obrnutog spektralnog zadatka.

(12) Navešćemo ovdje još tri rezultata ove glave, kojima su posvećene tri posljednje tačke (15, 16. i 17) ove glave.

(13) Prvo: određen je defekt regularizacije u opštem slučaju L_3. Ako se svojstvena vrijednost operatora L_3 bliska potpunom kvadratu m^2 numeriše indeksom m (tj. označi kao λ_m), onda će sve svojstvene vrijednosti biti obuhvaćene ako se upotrijebe indeksi m=1, m=2, itd. Može se reći da defekt regularizacije iznosi nula. U ranijim formulama može se umjesto d pisati 1. Slično važi i za Šturm-Liuvilov operator L_o. Sve ovo izvodi se pod pretpostavkom $q(x)\in C[0,\pi]$. Na taj način, u teoremama 3.3-3.6. može da se izostavi znak prim kod sigme.

(14) Drugo: predložen je drugi način regularizacije svojstvenih vrijednosti λ_m opšteg operatora L_3 i izvedena je formula za prvi regularizovani trag u toj situaciji. Naime, regularizacija se vrši pomoću svojstvenih vrijednosti Šturm--Liuvilovog operatora L_o koje su ovdje označene kao λ_{om}. Predlaže se naziv relativni trag za nastali zbir. Dobijena formula važi pod pretpostavkom $q(x)\in C^2[0,\pi]$. U opštem slučaju L_3 imamo

$$\sum_{m=1}^{\infty}[\lambda_m-\lambda_{om}]=\alpha_1+\dots+\alpha_{n-1}+\pi\alpha_n,$$

a u specijalnom slučaju $L_1=L_o+u(\frac{\pi}{2})=-u''(x)+q(x)u+u(\frac{\pi}{2})$ imamo

$$\sum_{m=1}^{\infty}[\lambda_m-\lambda_{om}]=1.$$

(15) Treće: analiziran je uticaj glatkosti koeficijenta q(x) na preciznost asimptotskog izraza za svojstvene vrijednosti λ_m, kao i na mogućnost računanja regularizovanog

traga, oboje u opštem slučaju L_3. Ako $q(x)\in C[0,\pi]$ onda važi

$$\lambda_m = m^2 + O(1),$$

kad $m\to\infty$, a ako $q(x)\in C^2[0,\pi]$ onda važi

$$\lambda_m = m^2 + C_0 + \frac{C_{1,j}}{m} + O(\frac{1}{m^2}),$$

kad $m\to\infty$. Osim toga, u posljednjem slučaju može se izvesti već navedena osnovna formula za prvi trag. Dakle, prisutna je sljedeća tendencija: što je veća glatkost koeficijenta $q(x)$, to je veća preciznost asimptotskog izraza za svojstvene vrijednosti i to se može dobiti sve više tragova. Na kraju, ako je $q(x)$ beskonačno glatka, onda za svojstvene vrijednosti imamo asimptotski red i može se izračunati trag m-a kog reda.

tačka 4. PPREGLED SADRŽAJA GLAVE ČETIRI - RAZLAGANJE.

(1) Osnovni predmet izučavanja u ovoj glavi jeste operator L, definisan na početku glave 2. Za funkciju $q(x)$ pretpostavlja se da je neprekidna i (kao i dosad) da uzima kompleksne vrijednosti.

(2) Na početku je dat novi izraz za perturbaciju P. Ona je izražena kao funkcija od Šturm-Liuvilovog operatora L_0. U tom izražavanju učestvuje Grinova funkcija $G_0(x,y)$ od L_0. Detaljno,

$$Pu = \sum_{k=1}^{n-1} \alpha_k u(x_k) = (L_0 u, f)g,$$

gdje je

$$f(x) = \overline{\sum_{k=1}^{n-1} \alpha_k G_0(x_k,x)} \text{ i } g(x)=1.$$

Ovdje je $x_k = k\pi/n$. Postupak: primijenjen je opšti način za predstavljanje relativno degenerisane perturbacije.

(3) Dalje je izvršena inverzija operatora L. Formula:

$$L^{-1}u=L_o^{-1}u-\frac{(u,f)}{1+(g,f)}L_o^{-1}g,$$

taj inverzni operator (kao i L_o^{-1}) definisan je na cijelom $\mathcal{H}$.

(4) Takođe je izvršena inverzija operatora $(L-\lambda E)$, tj. izračunata je rezolventa operatora L. Formula:

$$(L-\lambda E)^{-1}u=R_\lambda u=R_{o\lambda}u-\frac{(L_o R_{o\lambda}u,f)}{1+(L_o R_{o\lambda}g,f)}R_{o\lambda}g.$$

Ovdje je $R_{o\lambda}=(L_o-\lambda E)^{-1}$, λ je proizvoljan kompleksan broj, R_λ je takođe svuda definisan (kao i L^{-1}). Postupak je analogan onom koji se primjenjuje za rješavanje Fredholmove integralne jednačine sa degenerisanim jezgrom.

(5) Poslije ovog nije teško da se za integralni operator R_λ konstruiše njegovo jezgro, tj. Grinova funkcija $G(x,y,\lambda)$, formula (4.5) ili (4.7). Pokazuje se da je ta funkcija količnik dvije cijele funkcije (tj. da je meromorfna) i da je cijela funkcija $\Delta(\lambda)$ koja figuriše u imeniocu upravo ona koja definiše spektar od L (formula (4.9) i teorema 4.2).

(6) Samim tim je dokazano da su svi kompleksni brojevi λ koji nisu svojstvene vrijednosti od L - tačke njegovog rezolventnog skupa, tj. da je $\sigma(L)$ čisto diskretan.

(7) Postupak koji je primijenjen kod konstruisanja R_λ upoređen je sa sličnim postupkom koji se sreće u opštoj teoriji, pod pretpostavkama (o operatorima koji učestvuju) koje su nešto izmijenjene. Ti se postupci nazivaju npr. Vajnštajn-Aronšajnova determinanta ili determinanta perturbacije $D_{B/A}(\lambda)$.

(8) U sljedećem koraku konstruisan je operator L^*. Koristi se teorema o mogućnosti komutacije simbola "-1" za inverzni i "$*$" za konjugovani operator, tj. $(L^*)^{-1}=(L^{-1})^*$, pod određenim uslovima. Dobijena je sljedeća formula:

$$L^*u=L_o^*[u+(u,g)f].$$

(9) Treba naglasiti da se $\mathfrak{D}(L^*)$ sastoji od funkcija $u(x)$ takvih da $u+(u,g)f\in\mathfrak{D}$, tj. taj domen je neuporediv sa $\mathfrak{D}=\mathfrak{D}(L)$. Drukčije rečeno, neke funkcije iz $\mathfrak{D}$ ne pripadaju $\mathfrak{D}(L^*)$, dok s druge strane tom skupu $\mathfrak{D}(L^*)$ pripadaju neke funkcije smanjene glatkosti, tj. neke funkcije koje su samo apsolutno neprekidne, a u konačnom broju tačaka (u tačkama x_k), uopšte uzev, nisu diferencijabilne.

(10) U toku analize konjugovanog operatora L^* i njegove oblasti definisanosti $\mathfrak{D}(L^*)$ izveden je i izraz za svojstvene funkcije $u_1(x)$ (za L za λ) i $u_2(x)$ (za operator L^* za svojstvenu vrijednost $\bar{\lambda}$), formule (4.16) i (4.15):

$$u_1(x)=R_{o\lambda}g(x),$$

$$u_2(x)=(L_oR_{o\lambda})^*f(x).$$

Ovaj eksplicitni izraz važi u slučaju da $\lambda\notin\sigma(L_o)$, tj. da ne dolazi do poklapanja. Slične formule izvode se i u slučaju poklapanja, koji je potpuno izučen (teorema 4.3, teorema 4.8, tačka 18).

(11) U centralnom dijelu ove glave dokazana je teorema o razlaganju u ravnomjerno konvergentni red po svojstvenim funkcijama $p_1(x)$, $p_2(x)$, ... operatora L svake funkcije $c(x)$ iz njegove oblasti definisanosti $\mathfrak{D}$ (teorema 4.10). Formula:

$$c(x)=\sum_{k=1}^{\infty}c_kp_k(x),$$

pri čemu je

$$c_k=(c,q_k)=\int_0^{\pi}c(x)\overline{q_k(x)}dx.$$

Ovdje je $q_k(x)$ svojstvena funkcija od L^* (odgovara $\bar{\lambda}_k$, dok $p_k(x)$ odgovara λ_k za L). Još, te su svojstvene funkcije odabrane tako da bude $(p_k,q_k)=1$.

Ova osnovna teorema dokazana je metodom konturnog integrisanja. Taj se metod široko koristi kod dokazivanja teorema o razlaganju za diferencijalne operatore, npr. knjiga Najmarka [21]. Naša rasuđivanja su analogna onim iz knjige. Prethodno je izvršena majoracija modula Grinove funkcije $G(x,y,\lambda)$ na sistemu kontura Γ_k, $\Gamma_k=\{\lambda : |\lambda|=(k+\frac{1}{2})^2\}$.

Formula:

$$|G(x,y,\lambda)| \leq \frac{M}{\sqrt{\lambda}} ;$$

M je konstanta; za svako $x \in [0,\pi]$, za svako $y \in [0,\pi]$, za svako $\lambda \in \Gamma_k$, za svako $k \in N$.

(12) Da bi se ovo prepričavanje upotpunilo - treba još reći o dvije pretpostavke koje su prisutne.

Prvo: pretpostavlja se (u cijeloj glavi) da $0 \notin \sigma(L_0)$ (čim je napisano L_0^{-1}, tj. $G_0(x,y)$) i da $0 \notin \sigma(L)$. Iz ovo dvoje slijedi da je $1+(g,f) \neq 0$. Ova pretpostavka ne ograničava opštost razmatranja, zbog mogućnosti translacije po spektralnom parametru.

Drugo: Pretpostavlja se (samo u osnovnoj teoremi 4.10. o razlaganju), jednostavnosti radi, da je spektar operatora L, kao i L_0, prost. To znači da su svojstvene vrijednosti proste nule odgovarajućih funkcija $\Delta(\lambda)$ i $\Delta_0(\lambda)$ (samim tim su i polovi Grinove funkcije prosti). Ova se pretpostavka odnosi samo na konačan broj svojstvenih vrijednosti (tačka 17).

(13) Na kraju, u posljednjoj tački (20) ove glave pokazano je da sistem $\{P_1, P_2, \ldots\}$ svih svojstvenih funkcija osnovnog operatora L čini Risovu bazu (samim tim i bazu bezuslovne konvergencije) prostora $\mathcal{H} = L_2[0,\pi]$. Ovo tvrđenje je jače od prethodnog (koje proističe iz osnovne teoreme o razlaganju): da je taj sistem kompletan u $\mathcal{H}$ (jer je skup $\mathcal{D} =$

$\mathfrak{D}(L)$ svuda gust). Ovdje je $\| P_k \| = 1$. Ova teorema je dokazana pod istim pretpostavkama kao i prethodna osnovna teorema o razlaganju.

Postupak dokaza za Risovu bazu: pokazano je da sistem $\{P_1, P_2, \dots\}$ ima dva svojstva. Prvo svojstvo: da je ω-linearno nezavisan. Ovo važi zato što je prisutan biortogonalni sistem $\{q_1, q_2, \dots\}$ svojstvenih funkcija konjugovanog operatora L^*. Drugo svojstvo: da je kvadratno blizak sistemu svojstvenih funkcija diferencijalnog operatora L_o. Korišćena je teorema Bari, prema knjizi I.C. Gohberga i M.G. Krejna [5].

(14) Time je završena analiza glavnih spektralnih pitanja (spektar, trag, razlaganje) operatora L. Predlaže se dalje proučavanje asimptotike spektralne funkcije i obrnutog spektralnog zadatka.

tačka 5. <u>PREGLED SADRŽAJA GLAVE PET - TRAG - APSTRAKTNI SLUČAJ.</u>

(1) Na početku, u tački 1, dat je kratak pregled rezultata iz teorije tragova. Navedeni su posebno slučajevi običnih diferencijalnih operatora, diferencijalnih operatora s parcijalnim izvodima, diskretnih operatora i operatora s neprekidnim spektrom. Takođe su navedeni slučajevi kada se na pitanje gleda sa stanovišta teorije perturbacija.

(2) Razmatranja ove glave odvijaju se u (apstraktnom) separabilnom Hilbertovom prostoru $\mathcal{H}$ nad poljem kompleksnih brojeva C. Sa L_o je označen samokonjugovani diskretni poluograničeni (tj. pozitivni) operator u $\mathcal{H}$. Sa $\mathfrak{D}$ je označena njegova oblast definisanosti. Osnovni predmet izučavanja jeste operator

$L=L_o+P$

koji je izvjesna perturbacija od L_o.

Perturbacija P je relativno konačno-dimenziona, ranga r. Zadata je formulom

$$Pu=\sum_{j=1}^{r}(L_ou,f_j)g_j,$$

za $u\in\mathcal{D}$, gdje $f_j\in\mathcal{H}$, $g_j\in\mathcal{H}$.

(3) Uočimo odmah dvije karakteristike ove perturbacije. P, uopšte uzev, nije samokonjugovan, tj. osnovni operator L nije samokonjugovan. Drugo: vektori f_j ne moraju da pripadaju oblasti definisanosti $\mathcal{D}$ operatora L_o, tako da je P, uopšte uzev, neograničen operator.

(4) Razmatranje toga operatora L predstavlja prirodno uopštenje zadatka o tragu razmatranog u glavi tri.

(5) Teoriji konačno-dimenzionih perturbacija posvećena je opširna bibliografija. Na primjer, u monografiji [8] T. Katoa ta teorija koristi se prilikom ispitivanja raznih zadataka teorije rasijanja.

(6) Prvi rezultat ove glave (poznat iz opšte teorije) jeste konstruisanje rezolvente operatora L (tačke 5. i 6). U slučaju jednodimenzione perturbacije

$Pu=(L_ou,f)g$,

tj.

$Lu=L_ou+(L_ou,f)g$

ta je formula najjednostavnija i zato je ovdje navodimo (formula (5.16)):

$$R_\lambda u=(L-\lambda E)^{-1}u=R_{o\lambda}u-\frac{(L_oR_{o\lambda}u,f)R_{o\lambda}g}{1+(L_oR_{o\lambda}g,f)},$$

gdje je $R_{o\lambda}u=(L_o-\lambda E)^{-1}u$. Za opšti slučaj perturbacije ranga r važi slična formula (5.14).

(7) Iz te se formule zaključuje da je i L diskretan operator, kao i da se njegova rezolventa razlikuje od rezolvente operatora L_o za konačno-dimenzioni operator. Takođe se uočava da se svojstvene vrijednosti operatora L poklapaju sa singularitetima desne strane te formule.

(8) Drugi naziv za diskretni operator jeste operator s kompaktnom rezolventom. Znatan dio operatora koji se pojavljuju u matematičkoj fizici pripada ovoj klasi (diskretnih operatora).

(9) Do ove formule dolazi se čisto algebarskim sredstvima. Formule analogne ovoj više puta su korišćene u literaturi, o čemu je bilo riječi u prethodnoj tački, pod nazivom WA-determinanta ili determinanta perturbacije $D_{B/A}(\lambda)$.

(10) Drugi (i glavni) rezultat ove glave jeste da je izračunat trag operatora L. Taj je trag regularizovan, pri čemu je regularizacija izvršena pomoću svojstvenih vrijednosti polaznog operatora L_o (relativni trag).

(11) Rezultat o tragu formulisan je u osnovnoj teoremi 5.1. Ona predviđa još dva (posljednja) uslova.

(12) Prvi od njih odnosi se na gustinu svojstvenih vrijednosti od L_o, tj. na ponašanje funkcije distribucije $N(\lambda)$ njegovih svojstvenih vrijednosti, kad $\lambda \to +\infty$. Eksplicitno, neka je

$$N(\lambda)=\sum_{\lambda_n<\lambda} 1 = O(\lambda^p),$$

kad $\lambda \to +\infty$, gdje je p neka konstanta, $0<p<1$.

Komentar ovog uslova. Ako je L_o običan diferencijalni operator na konačnom odsječku, onda je ovaj uslov ispunjen ako je red operatora veći ili jednak od dva. Ako je L_o diferencijalni operator sa parcijalnim izvodima, koji dejstvuje u izvjesnoj ograničenoj oblasti $\Omega \subset R^n$, onda je ovaj uslov ispunjen ako je red operatora veći ili jednak od n+1 (opet govoreći generalno).

(13) Drugi od tih uslova glasi: neka

$$f_j \in \mathcal{D}(L_o^{q_j}) \text{ i } g_j \in \mathcal{D}(L_o^{2-q_j}),$$

za j=1,2,...,r, gdje su q_j - neki realni brojevi, $0 \leq q_j \leq 2$.

Komentar ovog uslova. Uvođenje konstanti q_j u formulaciju teoreme objašnjava se time što se ona može primijenjivati za diferencijalne operatore. Oblast definisanosti takvih operatora zadaje se izvjesnim sistemom graničnih formi. Poznato je da prilokom opisivanja stepena takvih operatora može da nestane jedan dio tog sistema graničnih uslova. Ta okolnost omogućuje da se bilo oslabe, bilo dodaju novi uslovi na perturbaciju, pod kojima važi osnovna formula za trag.

(14) Prije nego što napišemo tu formulu, evo još nekih objašnjenja i oznaka. Stepeni L_o^q samokonjugovanog operatora L_o, kao i njihovi domeni $\mathcal{D}(L_o^q)$, definišu se na standardni način. Sa μ_i (i=1,2,...) označene su sve svojstvene vrijednosti osnovnog operatora L, a sa λ_i (i=1,2,...) ($\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots$) sve svojstvene vrijednosti polaznog operatora L_o. Svaka svojstvena vrijednost broji se onoliko puta kolika je njena algebarska višestrukost (dimenzija korijenog podprostora).

(15) Osnovna formula. Postoji podniz $k_1 < k_2 < \ldots$ niza prirodnih brojeva, takav da važi

$$\lim_{h \to \infty} \sum_{i=1}^{k_h} (\mu_i - \lambda_i) = \sum_{j=1}^{r} (L_o^{1-q_j} g_j, L_o^{q_j} f_j).$$

Komentar. Prirodno je ovu formulu nazvati formulom za računanje (prvog) regularizovanog traga (zbira svih svojstvenih vrijednosti) operatora L, pri čemu se regularizacija vrši pomoću svojstvenih vrijednosti operatora L_o. Dalje će biti dokazana lema koja upoređuje - sravnjuje količinu tih dvaju vrsta (μ i λ) svojstvenih vrijednosti (lema 5.6). Desna strana ove formule predstavlja poznati izraz, tj. izraz koji se može eksplicitno izračunati.

(16) Na početku dokaza izvode se neke leme (5.1-5.4). Ključne riječi: $\{\varphi_n\}_1^\infty$ - baza prostora $\mathcal{H}$ od svojstvenih funkcija od L_o, $\{E_z\}_{z\in R}$ - spektralna familija projektora samokonjugovanog operatora L_o, $d(\lambda)=\rho(\lambda,\sigma(L_o))$ - rastojanje kompleksnog broja λ od spektra od L_o, trag relativno konačno-dimenzionog operatora.

U glavnom dijelu dokaza koristi se metod konturnog integrisanja. Radi se o nizu rastućih kružnica Γ_n u λ-ravni, koje su izabrane tako da budu "daleko" od $\sigma(L_o)$ (lema 5.5). Zatim se po konturi Γ_n integriše trag razlike rezolventi operatora L i L_o. Koriste se svojstva integrala F. Risa.

U završnom dijelu dokaza uočava se da su teškoće koje nastaju prilikom prelaska sa razmatranja jednodimenzione perturbacije na razmatranje r-dimenzione perturbacije čisto tehničkog karaktera. Naime, većina dosadašnjih razmatranja sprovedena je za r=1. Time se dokaz završava.

(17) Treći (i posljednji) rezultat ove glave su tri primjera.

Primjer jedan. Neka je L_o - samokonjugovani obični linearni diferencijalni operator, na konačnom odsječku $[a,b]$. Razmotrimo operator

$$Lu=L_ou+u(x_o)h(x),$$

gdje $h(x)\in \mathcal{D}(L_o^2)$, a $x_o\in(a,b)$. Tada je

$$\sum_n(\mu_n-\lambda_n)=h(x_o).$$

Primjer dva. Neka je L_o - samokonjugovani eliptički operator reda m, zadat u ograničenoj oblasti $\Omega \subset R^n$. Neka je K - neka mnogostrukost u Ω, dimenzije manje od n. Dalje, neka je $h(\xi)$ - izvjesna glatka funkcija na K. Pretpostavimo da je $m>n$. Razmotrimo operator

$$Lu=L_o u+\int_K h(\xi)u(\xi)d\xi \cdot g(x),$$

gdje $g(x)\in \mathcal{D}(L_o^2)$. Tada je

$$\sum_n (\mu_n-\lambda_n)=\int_K h(\xi)g(\xi)d\xi.$$

Primjer tri. Neka je L_o - operator iz prethodnog primjera dva. Razmotrimo operator

$$Lu=L_o u+\int_\Omega K(x,y)(L_o u(y))dy,$$

gdje je jezgro $K(x,y)$ degenerisano, to jest

$$K(x,y)=\sum_{j=1}^{r} P_j(x)Q_j(y),$$

gdje $P_j(x)\in \mathcal{D}(L_o^2)$. Tada je

$$\sum_n (\mu_n-\lambda_n)=\sum_{j=1}^{r}\int_\Omega (L_o P_j(x))Q_j(x)dx.$$

tačka 6. MJESTO I ZNAČAJ OVE PROBLEMATIKE U TEORIJI.

(1) Spektralna teorija operatora predstavlja osnovni dio savremene funkcionalne analize. U toj teoriji, govoreći uprošćeno, mogu se izdvojiti četiri pitanja: spektar, trag, razlaganje i obrnuti zadatak.

(2) Formule za trag operatora mogu se koristiti za nalaženje prvih svojstvenih vrijednosti operatora, pri rješavanju obrnutog spektralnog zadatka, kod integrisanja nelinearnih jednačina s parcijalnim izvodima, pri određivanju spektralne funkcije operatora, itd.

Dobro je poznato da je zbir dijagonalnih elemenata matrice jednak zbiru njenih svojstvenih vrijednosti - kaže se da je matrični trag jednak spektralnom.

Ako se razmatra nuklearni operator A (koji predstavlja specijalni slučaj potpuno neprekidnog operatora) u Hilbertovom prostoru, onda gore navedeni fakt potpuno ostaje. Ako matričnim tragom nazovemo izraz $\sum_j (A\varphi_j,\varphi_j)$, $\{\varphi_j\}$ - bilo koja ortonormirana baza u Hilbertovom prostoru H, a spektralnim tragom $\sum_j \lambda_j$ - zbir svojstvenih vrijednosti operatora A s uračunavanjem višestrukosti, pokazuje se da važi

$$\sum_j (A\varphi_j,\varphi_j)=\sum_j \lambda_j,$$

jer matrični trag ne zavisi od izbora baze $\{\varphi_j\}$.

Ova teorema je prosta u slučaju nenegativnih, pa i samokonjugovanih nuklearnih operatora. Za opšti slučaj nesamokonjugovanog nuklearnog operatora ovu teoremu dokazao je, složenim postupkom, V.B. Lidskij 1959. godine, [13].

Nuklearni operator je ograničen, a šta će biti ako se razmatra neograničeni operator, npr. diferencijalni? Da li u tom slučaju ostaje da važi formula za trag?

1953. godine u radu [4] I.M. Geljfand i B.M. Levitan našli su analogon formule traga za Šturm-Liuvilov operator

$$\begin{cases} -y''+q(x)y=\lambda y, \\ y(0)=y(\pi)=0. \end{cases}$$

Poznato je da u tom slučaju asimptotika spektra ima oblik

$$\lambda_n=n^2+c_0+\frac{c_2}{n^2}+\ldots,$$

$n=1,2,\ldots$; $n\to\infty$; $c_0=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} q(x)dx$, ako je $q(x)$ - dovoljno glatka funkcija.

U tom radu [4] pokazano je da važi

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\lambda_n-n^2-c_0)=\frac{1}{2}c_0-\frac{q(0)+q(\pi)}{4}.$$

Desnu stranu ove jednakosti možemo nazvati matričnim tragom, a lijevu - "regularizovanim spektralnim tragom". Stvar je u tome da je red $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n$ divergentan, dok je red sa sabircima $(\lambda_n - n^2 - c_0)$ - već konvergentan, zato ga i zovemo regularizovanim.

U velikoj seriji radova koja se pojavila poslije rada [4] izračunavane su formule traga za razne operatore drugog reda. To su radovi A.A. Dikija, M.G. Gasimova, R.F. Ševčenka, G. Halberga, V. Kramera i drugih.

U radu [14], 1967. godine, V.B. Lidskij i V.A. Sadovničij uveli su novi pristup za rješavanje zadataka teorije tragova i drugih pitanja spektralne teorije. Vidjeti, isto tako, knjigu V.A. Sadovničija [23].

U tom radu [14] uvedena je izvjesna klasa cijelih analitičkih funkcija K i za njih je postavljena teorija zeta-funkcije i dobijene su formule za regularizovane sume njihovih nula.

Na cijele funkcije klase K svode se najopštiji zadaci za obične diferencijalne jednačine na konačnom odsječku, takve kakve su razmatrali G.D. Birkof i J.D. Tamarkin.

Teorija tragova razvija se sve do današnjih dana. Rezultati se mogu, uslovno, podijeliti na one koji se odnose na konkretne operatore (obične diferencijalne i diferencijalne s parcijalnim izvodima) i na one koji se odnose na apstraktne operatore u Hilbertovom prostoru. U tom razvoju koriste se kako metodi teorije funkcija, tako i metodi teorije operatora. Značajnu ulogu u tom razvoju imaju prof. V.A. Sadovničij i njegovi saradnici sa Mehaničko-matematičkog fakulteta MGU u Moskvi.

(a) Zadatak o određivanju traga Dirihleovog zadatka za Laplasovu jednačinu riješen je samo djelimično, rad V.A. Sadovničija i V.V. Dubrovskog [24], 1977. godine. To rješenje odnosi se na slučaj kada je granica - pravougaonik. Slučaj opšte granice i dalje je otvoren.

(b) Zadaci o tragu za diskretne operatore takođe su slabo proučeni. Među radovima koji ovdje pripadaju treba uočiti rad M.G. Krejna [12], iz 1953. godine, u kome su formule za trag izvedene u slučaju samokonjugovanih nuklearnih perturbacija i rad V.M. Adamjana i B.S. Pavlova [1], 1979. godine, u kome je teorija proširena na slučaj disipativnih perturbacija. U radu V.A. Sadovničija i V.A. Ljubiškina [27], 1981. godine, dat je algoritam za dobijanje formule za trag za široku klasu diskretnih operatora (drugi naziv: operatora s kompaktnom rezolventom).

(c) Kao primjere dubokih ispitivanja u teoriji tragova operatora koji imaju neprekidni spektar navodimo radove L.D. Fadejeva [30], 1957. godine i V.S. Buslajeva [3], 1962. godine.

(3) Izvođenje raznih tipova teorema o spektralnom razlaganju jeste osnovni zadatak spektralne teorije operatora, još od D. Hilberta. U apstraktnom slučaju te se teoreme izvode relativno lako. Međutim, nije uvijek lako konkretizovati oblik razlaganja u slučaju diferencijalnih operatora, pogotovu nesamokonjugovanih.

Glava 4. ove teze posvećena je problemu spektralnog razlaganja za diferencijalno-funkcionalne operatore. Operatori ovog tipa u tom smislu dosad nisu bili proučavani.

tačka 7. PREGLED RADOVA DRUGIH AUTORA O BLISKIM PITANJIMA.

Daćemo kratak pregled sadržaja (glavni rezultat) dva rada u kojima se izučavaju pitanja bliska onim iz glave četiri (razlaganje). To su radovi [36] i [32]. Poslije toga daćemo i kratak pregled sadržaja tri rada u kojima se izučavaju pitanja bliska onim iz glave pet (trag - apstraktni slučaj). To su radovi [7],[28] i [25].

Operatori koji se tamo razmatraju su samo slični onim koji se razmatraju u ovoj tezi. Drukčije rečeno, ono što je u tih pet radova izvedeno ne može se iskoristiti kod rješavanja pitanja obuhvaćenih u ovoj tezi. Te radove navodimo da bi bio jasniji odnos našeg materijala i onoga što je prije urađeno.

O radu [36] A.M. Krala (1971).

Proučava se operator u $L_2^n[0,1]$ definisan izrazom i uslovom

$$LY=Y'+P(x)Y+H(x)[CY(0)+DY(1)],$$

$$AY(0)+BY(1)+\int_0^1 K(x)Y(x)dx=0,$$

gdje su A,B,C,D konstantne matrice oblika $n\times n$, a $P(x)$, $H(x)$ i $K(x)$ promjenljive matrice tog istog oblika.

Prethodno je bilo dopušteno da se umjesto $Y(0)$ i $Y(1)$ pojavljuju $Y(a_{j-1}+0)$ i $Y(a_j-0)$; $j=1,\dots,m$; $0=a_0<a_1<\dots<a_{m-1}<a_m=1$, pa su unutrašnje tačke $a_1,\dots,a_{m-1}$ eliminisane (prelaskom na sistem veće dimenzije, tj. uvećavanjem n).

U glavnom dijelu rada (nesamokonjugovani slučaj), razmatra se samo sljedeći jednostavni slučaj, formule (6.1) i (6.2)

$$LY=Y'+H[CY(0)+DY(1)],$$

$$AY(0)+BY(1)+\int_0^1 K(x)Y(x)dx=0.$$

Konstruisan je konjugovani sistem (konjugovani operator). Rezultat glasi

$$L^{*}Z=-Z'-K^{*}(x)\left[\widetilde{A}Z(0)+\widetilde{B}Z(1)\right],$$

$$\widetilde{C}Z(0)+\widetilde{D}Z(1)+H^{*}\int_0^1 Z(x)dx=0.$$

Dokazana je teorema o razlaganju po svojstvenim funkcijama. Koristi se metod konturnog integrisanja, tj. radi se slično kao u knjizi [21].

Rad je napisan nejasno i sadrži nepreciznosti. Nisu navedeni primjeri u kojima se umjesto o sistemu n jednačina prvog reda govori o jednoj jednačini n-tog reda. Ni daljnji radovi ovog autora ne sadrže takav materijal.

<u>O radu [32] A.P. Hromova (1981).</u>

Razmatra se operator

$$Ly=l_o(y)+l_1(y)$$

u prostoru $L_2[0,1]$, uz n linearno nezavisnih graničnih uslova (uslovi su regularni)

$$U_1(y)=0,\dots,U_n(y)=0,$$

gdje je $l_o(y)$ diferencijalni izraz n-tog reda (s neprekidnim koeficijentima), a $l_1(y)$ je definisano sa

$$l_1(y)=\sum_{j=0}^{n}\int_0^1 K_j(x,t)y^{(j)}(t)dt.$$

Zadatak se svodi na sljedeći (izraz i uslovi):

$$Ly=(E+N)(y^{(n)}+\alpha y),\quad Nf(x)=\int_0^1 N(x,t)f(t)dt,$$

$$U_j(y)-(y,\varphi_j)=0;\ j=1,\dots,n;\ (y,\varphi_j)=\int_0^1 y(x)\varphi_j(x)dx.$$

Dokazuje se da pod određenim ograničenjima važi sljedeća teorema (teorema 4):

Postoji niz indeksa $k_1,k_2,\dots$ takav da za svako $f(x)\in L[0,1]$ i za svako $\delta\in(0,\frac{1}{2})$ važi

$$\lim_{l\to\infty}\left\| S_{k_l}(f)-\sigma_{k_l}(f)\right\|_{C[\delta,1-\delta]}=0,$$

gdje su $S_k(f)$ i $\sigma_k(f)$ - parcijalne sume Furijeovih redova po svojstvenim i pridruženim funkcijama i po običnom trigonometrijskom sistemu (k - broj sabiraka).

Slična teorema je odranije poznata za obične diferencijalne operatore na $[0,1]$ sa regularnim graničnim uslovima.

O radu [7] V.V. Dubroskog i V.A. Sadovničija (1977).

Izvedena je formula za relativni trag operatora T+P, gdje je polazni operator T poluograničen odozdo, diskretan i samokonjugovan. Operator P je, uopšte uzev, neograničen. Regularizacija se vrši pomoću svojstvenih vrijednosti od T.

Uvedene su sljedeće oznake i pretpostavke: H - Hilbertov prostor ; $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ - svojstvene vrijednosti od T; λ_i rastuće uređeni; $\mu_1, \mu_2, \ldots$ - sve svojstvene vrijednosti od T+P; oba puta se uračunava (algebarska) višestrukost; skup $\mathcal{D}(P)$ gust u H; T pozitivan; $N(\lambda) = \sum_{\lambda_n < \lambda} 1$-funkcija raspodjele svojstvenih vrijednosti od T; $\rho_1 = \lim_{\lambda \to \infty} N(\lambda)/(\ln \lambda)$; $v_1, v_2, \ldots$ - sve svojstvene funkcije od T.

Takođe se pretpostavlja, da je operator $P(T-z_0E)^{-\nu}$ ograničen, $0 \leq \nu < \frac{1}{2}$; z_0 je neka tačka van $\sigma(T)$; T pozitivan; $z_0=0$.

Osnovni rezultat rada jeste teorema 1. koja glasi:

Ako je $\rho_1 < 1-2\nu$ i $\sum_{n=1}^{\infty} |\mu_n|^{-1}$ konvergira, onda je

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\mu_n - \lambda_n) = \sum_{k=1}^{\infty} (Pv_k, v_k),$$

pod uslovom da je $\sum_{n=1}^{\infty} |\mu_n - \lambda_n| < \infty$ i $\sum_{k=1}^{\infty} |(Pv_k, v_k)| < \infty$.

Uočimo da formula $\sum (Pv_k, v_k)$ (suma po svim svojstvenim funkcijama) ima znatan stepen opštosti. Na primjer, ona definiše trag operatora P u R^n ($v_1, \ldots, v_n$ - ortonormirana baza u R^n), itd.

O radu [28] V.A. Sadovničija i V.A. Ljubiškina (1981).

Razmatra se, u separabilnom Hilbertovom prostoru H, zatvoreni operator T. Kontura Γ u C ima svojstvo da su sve njene tačke iz rezolventnog skupa od T, a da se int $\Gamma \cap \sigma(T)$ sastoji od konačnog broja normalnih svojstvenih vrijednosti $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$. Posmatra se ograničeni operator P koji ispunjava uslov

$$\max_{\lambda\in\Gamma} \| PR_\lambda(T) \| = q < 1.$$

Na kraju, definiše se operator C_k (za k=1,2,...)

$$C_k=\frac{(-1)^k i}{2\pi} \oint_\Gamma R_\lambda(T)[PR_\lambda(T)]^k d\lambda , \quad R_\lambda(T)=(T-\lambda E)^{-1}.$$

Teorema 1. tvrdi da je operator C_k konačno-dimenzion i da je njegov trag jednak nuli ($SpC_k=0$).

Drugi glavni rezultat ovog rada izražen je teoremom 2. Ona tvrdi da je i operator $C=\sum_{k=1}^{\infty} C_k$ konačno-dimenzion i da za njega važi sličan iskaz o tragu, tj. SpC=0.

O radu [25] V.A. Sadovničija, V.V. Dubrovskog i V.A. Ljubiškina (1982).

Polazni operator T, dejstvuje u separabilnom Hilbertovom prostoru H, jeste diskretan i samokonjugovan. Neka je

$$N_+(\lambda)=\sum_{0\le\lambda_n\le\lambda} 1=O(\lambda^p) \text{ i } N_-(\lambda)=\sum_{\lambda\le\lambda_n\le 0} 1=O(\lambda^p),$$

gdje je $0<p<1$. Ovaj uslov odnosi se na gustinu svojstvenih vrijednosti λ_i operatora T.

Za operator perturbacije P pretpostavlja se da je ograničen i da je svuda definisan. Sa μ_i su označene svojstvene vrijednosti od T+P. Neka je γ takav da je $\gamma>1/(1-p)$.

Osnovna teorema ovog rada tvrdi sljedeće.

Među svojstvenim vrijednostima μ_i i λ_i može da se uspostavi uzajamno jednoznačna korespondencija, tako da postoji podniz cijelih brojeva n_k, takav da je

$$\lim_{k\to\infty}\sum_{i=n_{-k}}^{n_k}\{\mu_i^m-\lambda_i^m+m\operatorname{SpRes}_{\lambda=\lambda_i}[\lambda^{m-1}(R_\lambda(T)P)]+\dots+\frac{m}{N}\operatorname{SpRes}_{\lambda=\lambda_i}[\lambda^{m-1}\times$$

$$(R_\lambda(T)P)^N]\}=0,$$

kada je

$$N>\frac{\gamma(m+1+4p)}{\gamma(1-p)-1}-2.$$

tačka 8. MOJI RADOVI.

Objavljeno je (ili je u štampi) pet radova koji se odnose na pitanja obuhvaćena (ili bliska obuhvaćenim) u ovoj tezi.

U radu [17] razmatraju se pitanja svojstvenih vrijednosti (i svojstvenih funkcija) i regularizovanog traga u slučaju operatora L_1. U radu [18] razmatraju se ta pitanja u slučaju operatora L_3. Ova dva rada odgovaraju sadržaju glava dva i tri.

U radu [19] razmatra se pitanje razlaganja za operator L. Ovaj rad odgovara sadržaju glave četiri.

U radu [29] proučava se pitanje traga u apstraktnom slučaju. Taj rad odgovara sadržaju glave pet. Navedeni rad je zajednički sa V.A. Sadovničijem i V.A. Ljubiškinom.

Na kraju, u radu [22] proučava se pitanje svojstvenih vrijednosti i regularizovanog traga za operator koji je definisan graničnim zadatkom sa diferencijalno-funkcionalnim izrazom čiji argument kasni. Naime, izraz koji ga definiše sastoji se od tri sabirka. Prvi je obični diferencijalni izraz drugog reda, drugi je $p(x)y(\beta)$, $0\leq\beta\leq\pi$ (zbir ova dva odgovara operatoru L razmatranom u glavama dva i tri), a treći sadrži retardirani argument. Preciznije, treći je $q(x)y(\alpha(x))$, gdje je $\alpha(0)=0$, $0<\alpha'(x)<1$ za $x\in[0,\pi]$. Rezultati ovog rada nisu uključeni u ovu tezu. Navedeni rad je zajednički sa M. Pikulom (Sarajevo).

Dakle, originalni rezultati izloženi u ovoj tezi objavljeni su u četiri rada. Od ta četiri rada - tri su samostalna, a jedan je zajednički.

tačka 9. ZAHVALNOST.

Autor želi da istakne (pozitivnu) ulogu sljedećih lica i da im se zahvali:

iz Sovjetskog Saveza (Moskva):

profesor V.A. Sadovničij, doktor fizičko-matematičkih nauka, za postavku zadatka i za korisne diskusije,

V.A. Ljubiškin, kandidat fizičko-matematičkih nauka, za korisne diskusije i

iz Jugoslavije (Beograd):

docent dr Z. Kadelburg, za korisne diskusije i za sugestije u vezi teksta teze.

GLAVA 2.

SVOJSTVENE VRIJEDNOSTI I SVOJSTVENE FUNKCIJE.

tačka 1. DEFINICIJA OSNOVNOG OPERATORA L I OPŠTEG OPERATORA L_3.

Dajemo na početku definiciju linearnog operatora i korespondiranog graničnog zadatka koji je osnovni predmet ispitivanja u ovoj i u sljedeće dvije glave. Ta definicija ima četiri varijante.

Taj linearni operator L, odnosno L_3, pripada klasi diferencijalno-funkcionalnih operatora, jer je predstavljen kao zbir običnog diferencijalnog operatora L_o i operatora P definisanog pomoću linearne forme. Operator dejstvuje u separabilnom Hilbertovom prostoru $\mathcal{H}=L_2[0,\pi]$ nad poljem kompleksnih brojeva C. Neka je

$$L_o u=-u''(x)+q(x)u, \qquad (2.1)$$

gdje se oblast definisanosti $\mathcal{D}$ operatora L_o sastoji iz svih funkcija iz $\mathcal{H}$ čiji je prvi izvod $u'(x)$ apsolutno neprekidna funkcija, drugi izvod $u''(x)$ pripada $\mathcal{H}$ i koje, osim toga, zadovoljavaju granične uslove

$$u(0)=0, \quad u(\pi)=0. \qquad (2.2)$$

Za "potencijalnu" funkciju $q(x)$ pretpostavljaćemo da uzima kompleksne vrijednosti i da je dovoljno glatka. Uvedeni operator poznat je u funkcionalnoj analizi pod imenom Šturm-Liuvilov operator i razna pitanja spektralne teorije operatora za njega su detaljno proučena, v. npr. knjigu [21].

Dalje, neka je operator P definisan za $u(x)\in\mathcal{D}$ sljedećom formulom

$$Pu=\sum_{k=1}^{n-1}\alpha_k u(x_k), \text{ gdje je } x_k=\frac{k\pi}{n}, \; k=1,2,\dots,n-1. \qquad (2.3)$$

U gornjoj formuli su α_k kompleksne konstante, a n prirodan broj $\geqslant 2$. Riječima, razmatra se linearna kombinacija vrijednosti funkcije $u(x)$ u π-racionalnim tačkama, i ta se kombinacija množi funkcijom $i(x)\equiv 1$. Sada smo u stanju da napišemo izraz za osnovni operator L:

$$Lu=L_0u+Pu.$$

Treba uočiti jednostavnu okolnost da zapis $u(x_k)$ za funkciju $u \in L_2[0,\pi]$ nema smisla, ali ima smisla ako $u \in \mathfrak{D}$.

Razmatraćemo i odgovarajući homogeni granični zadatak $Lu=\lambda u$, tj.

$$Lu-\lambda u=0,$$

gdje je λ - kompleksni parametar.

Kako je već napomenuto, osim ovog osnovnog slučaja razmatraće se i sljedeće tri bliske situacije:

$$P_1u=u\left(\frac{\pi}{2}\right) \tag{2.4}$$

(očigledno, specijalni slučaj osnovne situacije).,

$$P_2u=\alpha_n\int_0^{\pi}u(t)dt \tag{2.5}$$

i - opšta situacija, obuhvata sve ostale -

$$P_3u=\sum_{k=1}^{n-1}\alpha_k u(x_k)+\alpha_n\int_0^{\pi}u(t)dt; \tag{2.6}$$

ovdje je α_n bilo koji kompleksan broj, tj. razmatraće se operatori $L_i=L_0+P_i$, $i=1,2,3$.

tačka 2. <u>OSNOVNI OPERATOR L, KAO I OPŠTI OPERATOR L_3, SU ZATVORENI.</u>

<u>Lema 2.1.</u> Ako je $q(x)$ kompleksna i neprekidna na odsječku $[0,\pi]$, onda je Šturm-Liuvilov operator L_0 zatvoren.

Ova činjenica je poznata iz opšte teorije. U knjizi [8], str. 344, tvrdi se da je ovaj operator samokonjugovan (samim tim je zatvoren), kada su brojevi $q(x)$ realni. Mi pretpostavljamo da su ti brojevi kompleksni. Razlika između našeg operatora i operatora iz te knjige jeste operator $u(x) \to iq_2(x)u(x)$, koji je ograničen, jer je $q_2(x)$ neprekidna funkcija. Ovdje je $q(x)=q_1(x)+q_2(x)i$, gdje su $q_1(x)$ realni brojevi i $q_2(x)$ realni brojevi. Dakle, i naš operator je zatvoren, kao zbir zatvorenog i ograničenog operatora (v. istu knjigu, str. 209).

Takođe je poznato da je L_0 neograničen, te da je, ako važi dopunski da je funkcija $q(x)$ realna, samokonjugovan.

Za operator perturbacije P lako se vidi da je takođe neograničen, a da nije samokonjugovan, niti zatvoren. Više od toga, važi sljedeće(izuzima se, naravno, trivijalni slučaj $\alpha_1=\alpha_2=\ldots=\alpha_{n-1}=0$):

Lema 2.2. Operator P ne dopušta zatvorenje.

Dokaz se može pročitati takođe u knjizi [8], str. 211.

Mada su operatori L_0 i P oba neograničeni, može se (opisno) reći da je prvi operator "veći". Podsjetimo se kako glase neke definicije, v. [8], str. 241. i dalje (uključeno iskazi sljedeće naše dvije leme 2.3. i 2.4).

Definicija. Neka operatori T i A dejstvuju u Banahovom prostoru X, pri čemu je $D(T) \subset D(A)$. Ako je, za neke pozitivne konstante a i b, ispunjeno $\|Au\| \leq a\|u\| + b\|Tu\|$, za $u \in D(T)$, onda se operator A naziva ograničenim u odnosu na T ili prosto T-ograničenim. Infimum b_0 svih konstanti b naziva se relativnom granicom operatora A u odnosu na T ili prosto T-granicom operatora A.

Lema 2.3. Operator P je L_0-ograničen i njegova L_0-granica iznosi nula.

Lema 2.4. Neka je, u oznakama prethodne definicije, A T-ograničen i njegova T-granica manja od jedan. Onda je S=T+A zatvoren ako i samo ako je T zatvoren.

Tako smo ustanovili da je naš osnovni operator L zatvoren.

Što se tiče operatora L_i, $i=1,2,3$, jasno je da je perturbacija P_2 zatvoren i ograničen i (ako je α_n realna veličina) samokonjugovan. Za P_1 i P_3 važi sve što je rečeno za osnovnu perturbaciju P. Tako je i L_3 zatvoren operator.

tačka 3. JEDNAČINA ZA ODREĐIVANJE SVOJSTVENIH VRIJEDNOSTI GRANIČNOG ZADATKA, JEDNOSTAVNI SLUČAJ $L_1 u - \lambda u=0$, PRVI NAČIN.

(1) Iz teorije običnih diferencijalnih jednačina je poznato da jednačina

$$l_o(u)-\lambda u=0, \text{ tj. } -u''+q(x)u-\lambda u=0 \tag{2.7}$$

(λ - kompleksno, q - neprekidna, vrijednosti q(x) su kompleksne) ima fundamentalni sistem rješenja $f_1(x,s)$, $f_2(x,s)$ (oznaka: $s^2=\lambda$) koji zadovoljava početne uslove

$$f_i^{(j-1)}(0,s)=\delta_{ij}, \quad i,j=1,2,$$

i, osim toga, da su te dvije funkcije, za svako fiksirano x iz $[0,\pi]$, cijele analitičke funkcije od s (kao i od λ).

Polazeći od tih funkcija, može se, pomoću karakteristične determinante, formirati jednačina za određivanje svojstvenih vrijednosto za L_o.

(2) Analizirajmo sada zadatak o svojstvenim vrijednostima operatora L_1. Razmotrićemo diferencijalnu jednačinu

$$l_1(u)-\lambda u=0, \text{ tj. } -u''+q(x)u+u(\tfrac{\pi}{2})-\lambda u=0. \tag{2.8}$$

Smatrajući (privremeno) $u(\frac{\pi}{2})$ poznatim, primijenimo metod varijacije proizvoljnih konstanti na posljednju jednačinu, zapisanu kao

$$-u''+q(x)u-s^2u=-u(\tfrac{\pi}{2})$$

(imamo u vidu da je homogeni dio $l_o(u)-s^2u=0$ maločas proučen).

Na taj način, dobijamo da opšte rješenje nehomogene jednačine ima oblik

$$u=\left[-\left(\int_0^x f_2(t,s)dt\right)f_1(x,s)+\left(\int_0^x f_1(t,s)dt\right)f_2(x,s)\right]u\left(\frac{\pi}{2}\right)+$$
$$C_1f_1(x,s)+C_2f_2(x,s). \qquad (2.9)$$

Izaberimo proizvoljne konstante C_1 i C_2 tako da bude ispunjen prvi granični uslov, tj. da bude $u(0)=0$. U tom cilju stavimo $C_1=0$. Sada izraz za traženo rješenje u dobija oblik

$$u=A(x,s)u\left(\frac{\pi}{2}\right)+C_2B(x,s), \qquad (2.10)$$

gdje su uvedene oznake

$$A(x,s)=-\left(\int_0^x f_2(t,s)dt\right)f_1(x,s)+\left(\int_0^x f_1(t,s)dt\right)f_2(x,s) \text{ i } \qquad (2.11)$$

$$B(x,s)=f_2(x,s). \qquad (2.12)$$

Stavimo u posljednjoj jednačini za $u(x)$ da je $x=\frac{\pi}{2}$. Tada nastaje sljedeća linearna jednačina po $u(\frac{\pi}{2})$:

$$\left(1-A\left(\frac{\pi}{2},s\right)\right)u\left(\frac{\pi}{2}\right)=C_2B\left(\frac{\pi}{2},s\right). \qquad (2.13)$$

(3) Razmotrimo prvo osnovni slučaj $1-A(\frac{\pi}{2},s)\neq 0$. Tada posljednja jednačina daje izraz za $u(\frac{\pi}{2})$ preko poznatih elemenata, čime se za traženu funkciju $u(x)$ dobija

$$u(x)=A(x,s)\,\frac{C_2B(\frac{\pi}{2},s)}{1-A(\frac{\pi}{2},s)}+C_2B(x,s). \qquad (2.14)$$

Ako ova funkcija $u(x)$ zadovoljava i drugi granični uslov iz (2.2), tj. $u(\pi)=0$, onda je možemo nazvati svojstvenom. Tako i nalazimo željenu jednačinu za određivanje svojstvenih vrijednosti:

$$A(\pi,s)\,\frac{B(\frac{\pi}{2},s)}{1-A(\frac{\pi}{2},s)}+B(\pi,s)=0$$

ili, poslije množenja sa imeniocem,

$$f(s)=A(\pi,s)B(\tfrac{\pi}{2},s)-A(\tfrac{\pi}{2},s)B(\pi,s)+B(\pi,s)=0. \qquad (2.15)$$

Lako se vidi da tada funkcija (2.14) nije identička nula. Analiziraju se dvije mogućnosti: $B(\frac{\pi}{2},s)=0$ i $B(\frac{\pi}{2},s)\neq 0$, tj. da se može nazvati svojstvenom. Treba uzeti u obzir da je $B(\pi,s)=0$ karakteristična jednačina za L_o. Ako je ispunjena prva mogućnost, onda dolazi do poklapanja svojstvenih vrijednosti neperturbiranog operatora Šturm-Liuvila L_o i perturbiranog operatora L_1, jer imamo jednu te istu jednačinu za određivanje svojstvenih vrijednosti $B(\pi,s)=0$ i takođe jednu te istu svojstvenu funkciju $u(x)=B(x,s)$. Ako je ispunjena druga mogućnost, onda naša svojstvena funkcija $u(x)$ uzima u tački $x=\frac{\pi}{2}$ vrijednost $C_2B(\frac{\pi}{2},s)/(1-A(\frac{\pi}{2},s))\neq 0$.

(4) Međutim, za neke $q(x)$ i λ može se desiti da bude $1-A(\frac{\pi}{2},s)=0$. Tada moramo da zajedno proučavamo situaciju u tačkama $x=\frac{\pi}{2}$ i $x=\pi$. Polazimo od formule (2.10). Da bi predstavljena funkcija bila svojstvena, potrebno je i dovoljno da (prvo) relacija bude ispravna za $x=\frac{\pi}{2}$ i (drugo) bude $u(\pi)=0$. Ta dva uslova izražavaju se ovako:

$$\begin{bmatrix} 1-A(\frac{\pi}{2},s) & -B(\frac{\pi}{2},s) \\ A(\pi,s) & B(\pi,s) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u(\frac{\pi}{2}) \\ C_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Zapazimo odmah da je determinanta ovog sistema jednaka $f(s)$, $f(s)$ je uvedena u (2.15). U situaciji koja se obrađuje sistem se prepisuje kao

$$\begin{bmatrix} 0 & -B(\frac{\pi}{2},s) \\ A(\pi,s) & B(\pi,s) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u(\frac{\pi}{2}) \\ C_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Ako je $A(\pi,s)=0$ ili $B(\frac{\pi}{2},s)=0$, no $B(\pi,s)\neq 0$, onda je defekt sistema jednak jedan, pa postoji (nenulto) rješenje ovog sistema (samim tim i nenulta funkcija (2.10)) i to je rješenje (kao i ta funkcija) jedinstveno (do multiplikativne konstante). Ako je $A(\frac{\pi}{2},s)\cdot B(\pi,s)\neq 0$ onda postoji samo trivijalno rješenje. Na kraju, posljednji mogući slučaj, ako su svi elementi matrice sistema jednaki nuli - onda funkcija $u(x)$ iz (2.10) zavisi od dvije proizvoljne konstante, koje su tamo označene sa $u(\frac{\pi}{2})$ i C_2; tada se radi o svojstvenoj vrijednosti čija je geometrijska višestrukost (dimenzija invarijantnog podprostora) jednaka dva. I ovdje se lako sprovodi analiza koja pokazuje da funkcije o kojima se govori (koje zadovoljavaju jednačinu $l_1(u)-\lambda u=0$ i granične uslove) nisu identički jednake nuli. Na primjer, u slučaju dvostruke svojstvene vrijednosti, te su dvije funkcije $A(x,s)$ i $B(x,s)$ i nijedna od njih nije identički jednaka nuli. Što se tiče prve, imamo $A(\frac{\pi}{2},s)=1\neq 0$, što se tiče druge, imamo $B(x,s)=f_2(x,s)$, a $f_2(x,s)$ je element izvjesnog fundamentalnog sistema rješenja. Također, te su dvije funkcije linearno nezavisne, jer imaju u tački $x=0$ različit izvod (prva: 0, druga: 1).

(5) Zaključak. Jednačina za određivanje svojstvenih vrijednosti operatora $L_1=L_0+P_1$ glasi $f(s)=0$, v. (2.15), imajući u vidu vezu $s^2=\lambda$. Odgovarajuća svojstvena funkcija izražava se formulom (2.14), a u posebnom slučaju $1-A(\frac{\pi}{2},s)=0$ ta je funkcija data formulom (2.10). Geometrijska višestrukost svojstvene vrijednosti iznosi jedan, osim slučaja

$$1-A(\tfrac{\pi}{2},s)=0,\quad A(\pi,s)=B(\pi,s)=B(\tfrac{\pi}{2},s)=0, \qquad (2.16)$$

kada iznosi dva.

Tačka 4. KARAKTERISTIČNA JEDNAČINA, JEDNOSTAVNI SLUČAJ $L_1u-\lambda u=0$, DRUGI NAČIN.

Drugi način predviđa promjenu redosljeda poteza. Precizije, sva tri uslova tretiraju se odjednom. Misli se na dva granična uslova i na uslov koji se odnosi na tačku $x=\frac{\pi}{2}$. Opet polazimo od formule (2.9), dobijene metodom varijacije proizvoljnih konstanti, tj. od

$$u(x)=A(x,s)u(\tfrac{\pi}{2})+C_1f_1(x,s)+C_2f_2(x,s).$$

Mi zahtijevamo da bude: (prvo) relacija ispravna za $x=\frac{\pi}{2}$, (drugo) zadovoljen prvi granični uslov i (treće) zadovoljen drugi granični uslov. Ovi zahtjevi odnose se na zasad neodređene elemente $u(\frac{\pi}{2})$, C_1 i C_2. Zapišimo te zahtjeve u obliku linearnog algebarskog sistema:

$$\begin{bmatrix} 1-A(\frac{\pi}{2},s) & -f_1(\frac{\pi}{2},s) & -f_2(\frac{\pi}{2},s) \\ 0 & 1 & 0 \\ A(\pi,s) & f_1(\pi,s) & f_2(\pi,s) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u(\frac{\pi}{2}) \\ C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \tag{2.17}$$

Zapazimo odmah da je determinanta ovog sistema jednaka $f(s)$, $f(s)$ je uvedena u (2.15). Tako, primjenom ovog drugog načina, dobijamo identičan uslov za određivanje svojstvenih vrijednosti. Naime, jasno je da samo u slučaju "determinanta=0" postoji nenulta funkcija $u(x)$. Takođe, se lako vrši analiza geometrijske višestrukosti svojstvene vrijednosti (koja je povezana sa defektom ovog linearnog sistema), te se dolazi do istog zaključka kao u prethodnoj tački, izraženog formulom (2.16).

Napomena 1. O broju linearno nezavisnih rješenja diferencijalne jednačine $l_1(u)-\lambda u=0$. Ta jednačina nikada (tj. ni za koje λ i ni za koje $q(x)$) ne može imati tri linearno nezavisna rješenja. Drukčije rečeno, linearno nezavisnih rješenja ima najviše dva. Dokaz: polazimo od izraza za $u(x)$ sa početka ove tačke, stavljajući $x=\frac{\pi}{2}$. Imamo

$$\left[1-A(\tfrac{\pi}{2},s)\right]u(\tfrac{\pi}{2})=C_1f_1(\tfrac{\pi}{2},s)+C_2f_2(\tfrac{\pi}{2},s)$$

koja čini jedno stvarno ograničenje na neodređene elemente $u(\frac{\pi}{2})$,

i C_2 (te ne mogu biti sva tri proizvoljna), jer njihovi ko-
:icijenti $1-A(\frac{\pi}{2},s)$, $f_1(\frac{\pi}{2},s)$ i $f_2(\frac{\pi}{2},s)$ nisu svi jednaki nuli.
ista, ako je $f_1(\frac{\pi}{2},s)=0$ i $f_2(\frac{\pi}{2},s)=0$ onda je i $A(\frac{\pi}{2},s)=0$,
formulu (2.11), tj. $1-A(\frac{\pi}{2},s)=1\neq 0$.

Napomena 2. Neposredni račun daje sljedeće izraze za dva
nearno nezavisna rješenja jednačine $l_1(u)-\lambda u=0$. Razlikujemo
ije mogućnosti. Prva mogućnost: $1-A(\frac{\pi}{2},s)\neq 0$. Tada

$$g_1(x,s)=A(x,s)f_1(\tfrac{\pi}{2},s)-A(\tfrac{\pi}{2},s)f_1(x,s)+f_1(x,s),$$

$$g_2(x,s)=A(x,s)f_2(\tfrac{\pi}{2},s)-A(\tfrac{\pi}{2},s)f_2(x,s)+f_2(x,s).$$

uga mogućnost: $1-A(\frac{\pi}{2},s)=0$. Tada:

$$g_1(x,s)=A(x,s),\quad g_2(x,s)=f_1(x,s)f_2(\tfrac{\pi}{2},s)-f_2(x,s)f_1(\tfrac{\pi}{2},s).$$

čimo da su $g_1(x,s)$ i $g_2(x,s)$, za svako fiksirano x iz $[0,\pi]$,
jele funkcije od s, ovo važi i za prvu i za drugu mogućnost.
kaz je trivijalan: takvo svojstvo imaju $f_1(x,s)$ i $f_2(x,s)$ (pre-
eto iz opšte teorije), a i $A(x,s)$, v. formulu (2.11).

čka 5. KARAKTERISTIČNA JEDNAČINA, OPŠTI SLUČAJ $L_3u-\lambda u=0$.

Razmatranja koja se odnose na opšti slučaj teku po analo-
ji sa prethodnom tačkom ("drugi način"). Mi rješavamo jed-
činu

$l_3(u)-\lambda u=0$, tj.

$$-u''+q(x)u+\sum_{k=1}^{n-1}\alpha_k u(x_k)+\alpha_n\int_0^{\pi}u(t)dt-\lambda u=0. \qquad (2.18)$$

Uvedimo oznake $u_1=u(x_1),\ldots,u_{n-1}=u(x_{n-1})$, podsjetimo se da
znači $k\pi/n$, zatim $u_n=\int_0^{\pi}u(t)dt$ i na kraju $v=\alpha_1u_1+\alpha_2u_2+\ldots+$
$_{n-1}u_{n-1}+\alpha_nu_n$, tako da posljednji uslov možemo zapisati kao
$-u''+q(x)u-s^2u=-v$.

Smatrajući (privremeno) v poznatim, primijenimo metod varijacije proizvoljnih konstanti, imajući u vidu da je homogeni dio $l_0(u)-s^2u=0$ proučen na početku tačke 3. Na taj način, dobija se da opšte rješenje nehomogene jednačine ima oblik ($A(x,s)$ definisano je sa (2.11)):

$$u=A(x,s)v+C_1f_1(x,s)+C_2f_2(x,s). \tag{2.19}$$

Stavimo u gornjem izrazu $x=x_1$ i zatim pomnožimo lijevu i desnu stranu sa α_1. Slično za $x=x_2,\dots, x=x_{n-1}$. Na kraju, integrišimo gornji izraz po x u granicama od 0 do π i zatim pomnožimo lijevu i desnu stranu sa α_n. Poslije sabiranja tih n uslova dobija se

$$v=\mathcal{A}(s)v+C_1\mathcal{F}_1(s)+C_2\mathcal{F}_2(s), \tag{2.20}$$

gdje su uvedene oznake

$$\mathcal{A}(s)=\sum_{k=1}^{n-1}\alpha_kA(x_k,s)+\alpha_n\int_0^\pi A(t,s)dt \text{ i} \tag{2.21}$$

$$\mathcal{F}_i(s)=\sum_{k=1}^{n-1}\alpha_kf_i(x_k,s)+\alpha_n\int_0^\pi f_i(t,s)dt,\ i=1,2. \tag{2.22}$$

Tek ako važi (2.20) biće (2.19) rješenje jednačine $l_3(u)-s^2u=0$. Da bi (2.19) izražavalo svojstvenu funkciju treba još da budu ispunjeni granični uslovi $u(0)=0$ i $u(\pi)=0$. Zapišimo sve te zahtjeve u obliku linearnog sistema, sa tri nepoznate, v,C_1 i C_2:

$$\begin{bmatrix} 1-\mathcal{A}(s) & -\mathcal{F}_1(s) & -\mathcal{F}_2(s) \\ 0 & 1 & 0 \\ A(\pi,s) & f_1(\pi,s) & f_2(\pi,s) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v \\ C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{2.23}$$

Uslov "$u(x)$ iz (2.19) nije identički jednaka nuli" ekvivalentan je uslovu "nisu svi v,C_1,C_2 jednaki nuli", jer su funkcije $A(x,s)$, $f_1(x,s)$ i $f_2(x,s)$ dvije po dvije linearno nezavisne i, više od toga, ta trojka funkcija čini linearno nezavisan sistem (misli se za svako fiksirano s, tj. kao funkcije od x). Da bismo se u ovo uvjerili, treba pogledati vrijednosti ovih funkcija za $x=0$, kao i vrijednosti njihovog izvoda za tu istu vrijednost argumenta x. Na kraju, funkcija $A(x,s)$ nije identički jednaka nuli, jer kad se na tu funkciju primijeni diferencijalni izraz $l_0(u)-s^2u$, onda se kao rezultat dobije 1.

Dakle, uslov "u(x) je svojstvena funkcija za L_3" ekvivalentan je uslovu "determinanta sistema (2.23) jednaka je nuli". Posljednje zapisujemo kao

$$f(s)=A(\pi,s)\mathcal{B}(s)-\mathcal{A}(s)B(\pi,s)+B(\pi,s)=0, \tag{2.24}$$

gdje je upotrijebljena ranija oznaka $B(x,s)$, v. (2.12), i gdje je uvedena nova oznaka

$$\mathcal{B}(s)=\sum_{k=1}^{n-1}\alpha_k B(x_k,s)+\alpha_n\int_0^{\pi}B(t,s)dt. \tag{2.25}$$

Time je izvedena jednačina čija su rješenja svojstvene vrijednosti (karakteristična jednačina). Formulisaćemo taj rezultat kao teoremu i dati niz komentara.

<u>Teorema 2.1.</u> Svojstvene vrijednosti $\lambda=s^2$ operatora $L_3=L_0+P_3$ zadate su uslovom $f(s)=0$, v. (2.24). Za funkciju $q(x)$ pretpostavlja se samo da je neprekidna, tj. dopušta se da njene vrijednosti budu kompleksni brojevi.

Što se tiče specijalnog slučaja L_1 (staviti $\alpha_n=0$, $n=2$, $\alpha_1=1$), mi zaključujemo, prostim upoređivanjem formula (2.15) i (2.24), da je prva formula specijalni slučaj druge (opštije) formule, što opravdava upotrebu istog slova f za te dvije situacije. Možemo formulisati teoremu za L_1.

<u>Teorema 2.2.</u> Svojstvene vrijednosti $\lambda=s^2$ operatora $L_1=L_0+P_1$ zadate su uslovom $f(s)=0$, v. (2.15). Za funkciju $q(x)$ pretpostavlja se samo da je neprekidna.

<u>Napomena 1.</u> O drukčijem postupku da se izvede karakteristična jednačina. Mogli smo, na početku ove tačke, da proglasimo za nepoznate, umjesto C_1, C_2 i složenog izraza v, veličine

C_1, C_2, u_1, ..., u_n, čime bi se dobio sistem linearnih jednačina dimenzije n+2. Takođe, mogli smo prethodno da realizujemo prvi granični uslov $u(0)=0$, čime bi otpala jedna od dvije proizvoljne konstante (C_1 i C_2), a onda bi, istim putem, nastao linearni sistem dimenzije n+1 (ovaj postupak odgovara onom što je za specijalni slučaj L_1 u tački 3. nazvano "prvim načinom").

Napomena 2. O geometrijskoj višestrukosti svojstvene vrijednosti. Ta je višestrukost jednaka defektu matrice sistema (2.23), tj. iznosi jedan ili dva. Preciznije, iznosi dva jedino u slučaju da je

$$1-\mathcal{A}(s)=0,\ A(\pi,s)=B(\pi,s)=\mathcal{B}(s)=0. \tag{2.26}$$

Napomena 3. O algebarskoj višestrukosti svojstvene vrijednosti. Pod ovim podrazumijevamo red nule funkcije (od s) f(s), odnosno red nule funkcije (od λ) $f(\sqrt{\lambda})$. S obzirom da je f(s) cijela funkcija, algebarska višestrukost svake svojstvene vrijednosti je konačna (uočiti da f(s) nije identički jednaka nuli). Kasnije će ovaj iskaz biti pojačan (u ovoj istoj glavi), tj. biće pokazano da tih (algebarski višestrukih) svojstvenih vrijednosti ima samo konačno mnogo. Inače, znamo da je uvijek $A \geq G$, tj. algebarska višestrukost je veća ili jednaka od geometrijske.

Napomena 4. Neposredni račun daje sljedeće izraze za dva linearno nezavisna rješenja jednačine $l_3(u)-\lambda u=0$, i to za bilo koje s (bez obzira da li je svojstvena vrijednost). Razlikujemo dvije mogućnosti. Prva mogućnost: $1-\mathcal{A}(s)\neq 0$. Tada

$$g_1(x,s)=A(x,s)\mathcal{F}_1(s)-\mathcal{A}(s)f_1(x,s)+f_1(x,s),$$

$$g_2(x,s)=A(x,s)\mathcal{F}_2(s)-\mathcal{A}(s)f_2(x,s)+f_2(x,s).$$

Druga mogućnost: $1-\mathcal{A}(s)=0$. Tada su ta rješenja

$$g_1(x,s)=A(x,s),\quad g_2(x,s)=f_1(x,s)\mathcal{F}_2(s)-f_2(x,s)\mathcal{F}_1(s).$$

Uočimo da su $g_1(x,s)$ i $g_2(x,s)$, za svako fiksirano x iz $[0,\pi]$, cijele funkcije od s; ovo važi i za prvu i za drugu mogućnost.

Tvrđenja iz ove napomene (kao i iz napomene 2) dokazuju se kao i slična tvrđenja za specijalan slučaj L_1, v. tačku 4. Takođe važi, po analogiji sa L_1, da jednačina $l_3(u)-\lambda u=0$ nikad nema više od dva linearno nezavisna rješenja.

<u>Napomena 5.</u> O izrazu za svojstvenu funkciju. U specijalnom slučaju L_1 već je pokazano, u tački 3, da se svojstvena funkcija zapisuje kao

$$u(x)=A(x,s)B(\tfrac{\pi}{2},s)-A(\tfrac{\pi}{2},s)B(x,s)+B(x,s), \tag{2.27}$$

ako je $1-A(\frac{\pi}{2},s)\neq 0$, v. formulu (2.14). Slično, što se tiče opšteg slučaja L_3, ako je $1-\mathcal{A}(s)\neq 0$, onda se svojstvena funkcija zapisuje kao

$$u(x)=A(x,s)\mathcal{B}(s)-\mathcal{A}(s)B(x,s)+B(x,s); \tag{2.28}$$

izvodi se spajajući (2.23) i (2.19).

tačka 6. <u>UKRATKO O SLUČAJEVIMA $L_2u-\lambda u=0$ I $Lu-\lambda u=0$.</u>

Tretiramo oboje kao specijalan slučaj onog što je rečeno u prethodnoj tački. Što se tiče L_2 (staviti $\alpha_1=\ldots=\alpha_{n-1}=0$), karakteristična jednačina se piše kao

$$f(s)\equiv A(\pi,s)\cdot\alpha_n\int_0^\pi B(t,s)dt-\alpha_n\int_0^\pi A(t,s)dt\cdot B(\pi,s)+B(\pi,s)=0,$$

a svojstvena funkcija kao (ako je $1-\alpha_n\int_0^\pi A(t,s)dt\neq 0$)

$$u(x)=A(x,s)\cdot\alpha_n\int_0^\pi B(t,s)dt-\alpha_n\int_0^\pi A(t,s)dt\cdot B(x,s)+B(x,s).$$

Napomenimo još samo da je operator $L_2=L_0+P_2$ samokonjugovan kada je α_n realna veličina, a $q(x)$ uzima samo realne vrijednosti. Tada su sva rješenja jednačine $f(s)=0$ realna (spektar je realan).

Što se tiče osnovnog slučaja L, jasno je da se on dobija iz opšteg slučaja kada se stavi $\alpha_n=0$. Nećemo prepisivati odgovarajuće formule.

tačka 7. KOŠIJEVA RJEŠENJA ŠTURM-LIUVILOVE JEDNAČINE ZAMJENJUJU SE POGODNIJIM RJEŠENJIMA.

Mi smo dosad kao dva linearno nezavisna rješenja obične diferencijalne jednačine

$$l_o(u)-s^2u=0 \tag{2.29}$$

uzimali funkcije $f_1(x,s)$ i $f_2(x,s)$ (Košijeva rješenja). Jasno je da kao dva linearno nezavisna rješenja mogu da posluže i neki drugi parovi funkcija. Kada se radi o određivanju asimptotike spektra pogodno je da uzmemo funkcije koje su, recimo, u knjizi [21] upotrijebljene kod određivanja asimptotike spektra Šturm--Liuvilovog operatora. Označimo te funkcije sa $\tilde{f}_1(x,s)$ i $\tilde{f}_2(x,s)$. U toj knjizi je pokazano da ovaj par rješenja $\tilde{f}_1(x,s)$, $\tilde{f}_2(x,s)$ ima sljedeće asimptotsko predstavljanje kad $s\to\infty$ (pretpostavlja se da je s-ravan razbijena na četiri kvadranta pravima $\arg s=0$ i $\arg s=\frac{\pi}{2}$ i asimptotika važi u svakom od sektora):

$$\tilde{f}_1(x,s)\sim e^{isx}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{a_k(x)}{s^k},\quad \tilde{f}_2(x,s)\sim e^{-isx}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{a_k(x)}{s^k}, \tag{2.30}$$

gdje "$\sim$" u (2.30) ima sljedeći smisao

$$\tilde{f}_1(x,s)=e^{isx}\left(\sum_{k=0}^{m}\frac{a_k(x)}{s^k}+O\left(\frac{1}{s^{m+1}}\right)\right),\quad f_2(x,s)=e^{-isx}\left(\sum_{k=0}^{m}(-1)^k\times\frac{a_k(x)}{s^k}+O\left(\frac{1}{s^{m+1}}\right)\right), \tag{2.31}$$

gsje m može biti ma koji prirodan broj, a ocjena je ravnomjerna po $x\in[0,\pi]$.

U toj knjizi je takođe pokazano da se za koeficijente $a_k(x)$ može dobiti rekurentni sistem. Jednostavno se nalazi da je

$$a_o(x)\equiv 1,$$

$$a_k(x)=\frac{i}{2}\left(a'_{k-1}(x)-a'_{k-1}(0)-\int_0^x a_{k-1}(t)q(t)dt\right),\ k\in N,$$

$$a_k(0)=0,\ k\in N.$$

Tako je, na primjer,

$$a_1(x)=-\frac{i}{2}\int_0^x q(t)dt,\quad a_2(x)=\frac{1}{4}\left[q(x)-q(0)-\frac{1}{2}\left(\int_0^x q(t)dt\right)^2\right].$$

Da bi se dobio cio asimptotski red (2.30) treba da $q(x)\in C^\infty[0,\pi]$. Ako $q(x)$ ima samo nekoliko izvoda, onda važi (2.31) za samo nekoliko prirodnih brojeva m. Za ove funkcije $\tilde{f}_i(x,s)$ važi $\tilde{f}_1(0,s)=\tilde{f}_2(0,s)=1$.

Takođe je iz opšte teorije poznato da je, za svako fiksirano x iz odsječka $[0,\pi]$, funkcija $\tilde{f}_1(x,s)$, kao i $\tilde{f}_2(x,s)$, za sve dovoljno velike $|s|$, u svakom od četiri sektora (tj. kvadranta) s-ravni - analitička funkcija od s. Osim toga, da se asimptotski izraz za $\tilde{f}_1'(x,s)$ i $\tilde{f}_2'(x,s)$ (prim označava izvod po x) dobija formalnim diferenciranjem razlaganja (2.30), v. knjigu [21], str. 58.

tačka 8. VEZA KOŠIJEVOG PARA I NOVOUVEDENOG PARA RJEŠENJA ŠTURM-LIUVILOVE JEDNAČINE.

Za funkcije $\tilde{f}_1(x,s)$ i $\tilde{f}_2(x,s)$ može se napisati

$$\tilde{f}_1(0,s)=a_{11}(s)=1,\ \tilde{f}_1'(0,s)=a_{12}(s),\ \tilde{f}_2(0,s)=a_{21}(s)=1,\ \tilde{f}_2'(0,s)=a_{22}(s),$$

gdje su $a_{ij}(s)$ neke funkcije od s, $(i,j=1,2)$.

Najprije uočavamo da je

$$\tilde{f}_1(x,s)=a_{11}(s)f_1(x,s)+a_{12}(s)f_2(x,s)\ \text{i}\ \tilde{f}_2(x,s)=a_{21}(s)f_1(x,s)+a_{22}(s)f_2(x,s), \tag{2.32}$$

gdje je pri prelasku od jednog para funkcija na drugi bitna determinanta Vronskog

$$W(s)=\begin{vmatrix} a_{11}(s) & a_{12}(s) \\ a_{21}(s) & a_{22}(s) \end{vmatrix}. \tag{2.33}$$

Na primjer, ako želimo da napišemo relacije (2.32) u suprotnom smjeru, pojavljuje se u tom izrazu funkcija (2.33), tj. biće

$$\begin{cases} f_1(x,s)=\frac{1}{W(s)}\left(a_{22}(s)\widetilde{f}_1(x,s)-a_{12}(s)\widetilde{f}_2(x,s)\right) \text{ i} \\ f_2(x,s)=\frac{1}{W(s)}\left(-a_{21}(s)\widetilde{f}_1(x,s)+a_{11}(s)\widetilde{f}_2(x,s)\right). \end{cases}$$

Kasnije ćemo proučiti asimptotiku funkcije $W(s)$. Iz te asimptotike slijedi da je za velike s ispunjeno $W(s)\neq 0$.

tačka 9. <u>KAKO SE POMOĆU NOVOG PARA IZRAŽAVA KARAKTERISTIČNA JEDNAČINA.</u>

(1) Mi smo, prilikom razmatranja u prethodnim tačkama, kod formiranja karakteristične jednačine operatora L_3 koristili funkcije $f_1(x,s)$ i $f_2(x,s)$, a najvažnije je bilo da su to linearno nezavisna rješenja Šturm-Liuvilove jednačine $l_o(u)-s^2u=0$. Ta se procedura može, s malim prilagođavanjima, sprovesti i kada se startuje sa $\widetilde{f}_1(x,s)$ i $\widetilde{f}_2(x,s)$.

(2) Sljedeća rasuđivanja teku po analogiji sa tačkom 5. Na nehomogenu jednačinu

$$-u''+q(x)u-s^2u=-v$$

primijenimo metod varijacije proizvoljnih konstanti, znajući da su $\widetilde{f}_1(x,s)$ i $\widetilde{f}_2(x,s)$ linearno nezavisna rješenja njenog homogenog dijela. Izlazi

$$u=\widetilde{A}(x,s)v+C_1\widetilde{f}_1(x,s)+C_2\widetilde{f}_2(x,s), \qquad (2.34)$$

gdje je uvedena prirodna oznaka

$$\widetilde{A}(x,s)=\left[-\left(\int_0^x\widetilde{f}_2(t,s)dt\right)\widetilde{f}_1(x,s)+\left(\int_0^x\widetilde{f}_1(t,s)dt\right)\widetilde{f}_2(x,s)\right]\cdot(W(s))^{-1}. \qquad (2.35)$$

Dalje se postavljaju tri zahtjeva (odnose se na v i na dva granična uslova), poslije čega se pojavljuje sljedeći linearni sistem dimenzije tri:

$$\begin{bmatrix} 1-\widetilde{\mathcal{A}}(s) & -\widetilde{\mathcal{F}}_1(s) & -\widetilde{\mathcal{F}}_2(s) \\ 0 & 1 & 1 \\ \widetilde{A}(\pi,s) & \widetilde{f}_1(\pi,s) & \widetilde{f}_2(\pi,s) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v \\ C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad (2.36)$$

gdje su uvedene oznake

$$\widetilde{\mathcal{A}}(s)=\sum_{k=1}^{n-1} \alpha_k \widetilde{A}(x_k,s)+\alpha_n\int_0^{\pi} \widetilde{A}(t,s)dt, \quad \widetilde{\mathcal{F}}_i(s)=\sum_{k=1}^{n-1} \alpha_k \widetilde{f}_i(x_k,s)+ \alpha_n\int_0^{\pi} \widetilde{f}_i(t,s)dt, \ i=1,2.$$

Determinanta homogenog sistema (2.36) iznosi

$$\widetilde{f}(s)=\widetilde{A}(\pi,s)\widetilde{\mathcal{B}}(s)-\widetilde{\mathcal{A}}(s)\widetilde{B}(\pi,s)+\widetilde{B}(\pi,s), \qquad (2.37)$$

gdje su uvedeme oznake

$$\widetilde{B}(x,s)=\widetilde{f}_2(x,s)-\widetilde{f}_1(x,s) \text{ i}$$

$$\widetilde{\mathcal{B}}(s)=\sum_{k=1}^{n-1} \alpha_k \widetilde{B}(x_k,s)+\alpha_n\int_0^{\pi}\widetilde{B}(t,s)dt.$$

(3) Sada ćemo uspostaviti vezu između $\widetilde{f}(s)$ i funkcije $f(s)$ iz (2.24). U prethodnoj tački 8. detaljno je proučen odnos parova f_1,f_2 i $\widetilde{f}_1,\widetilde{f}_2$. Osim toga, preko njih se izražavaju A i B, odnosno $\widetilde{A}$ i $\widetilde{B}$. Odatle, direktnim računom, nalazimo da je

$$\widetilde{A}(x,s)=A(x,s) \text{ i } \widetilde{B}(x,s)=W(s)B(x,s), \qquad (2.38)$$

i na osnovu toga

$$\widetilde{f}(s)=W(s)f(s). \qquad (2.39)$$

Dalje, $W(s)$ jeste determinanta linearne transformacije jednog para linearno nezavisnih funkcija u drugi par linearno nezavisnih funkcija, pa je sigurno različita od nule (za svako s), čime se dolazi do prirodnog zaključka: da su uslovi $f(s)=0$ i $\widetilde{f}(s)=0$ ekvivalentni. Formulišimo posebno taj rezultat.

Teorema 2.3. Karakteristična jednačina $f(s)=0$, formula (2.24), operatora L_3 ekvivalentna je jednačini $\widetilde{f}(s)=0$, formula (2.37).

Dakle, i $\widetilde{f}(s)=0$ možemo zvati karakterističnom jednačinom.

Napominjemo da sama računska provjera jednakosti (2.39) dokazuje željenu ekvivalentnost, tj. čini suvišnim pisanje sistema (2.36) i objašnjava zašto je kod sistema (2.36) preskočena diskusija izvršena kod analognog sistema (2.23) (kada je konstruisana funkcija f(s)).

(4) Dosadašnjim rasuđivanjem automatski su riješene i ostale tri varijante (operatori L_1, L_2, L), jer su to specijalni slučajevi. Možemo napisati kako glasi novo izdanje karakteristične jednačine $\tilde{f}(s)$ u slučaju L_1.

$$\tilde{f}(s)=\tilde{A}(\pi,s)\tilde{B}(\tfrac{\pi}{2},s)-\tilde{A}(\tfrac{\pi}{2},s)\tilde{B}(\pi,s)+\tilde{B}(\pi,s)=0. \tag{2.40}$$

tačka 10. <u>ASIMPTOTSKI IZRAZ ZA FUNKCIJE $\tilde{A}(x,s)$ I $\tilde{B}(x,s)$ KOJE UČESTVUJU U KARAKTERISTIČNOJ JEDNAČINI.</u>

Asimptotski izraz za funkcije $\tilde{A}(x,s)$ i $\tilde{B}(x,s)$ biće nam potreban prilikom nalaženja asimptotike svojstvenih vrijednosti operatora L_3.

Polazeći od (2.30) i (2.31), pomoću parcijalne integracije, dobija se

$$\int_0^x \tilde{f}_1(t,s)dt=\sum_{k=0}^{m}\frac{1}{s^k}\sum_{j=0}^{m-k}\frac{(-1)^j}{(is)^{j+1}}(e^{isx}a_k^{(j)}(x)-a_k^{(j)}(0))+O\left(\frac{1}{s^{m+2}}\right), \tag{2.41}$$

$$\int_0^x \tilde{f}_2(t,s)dt=\sum_{k=0}^{m}\frac{1}{s^k}\sum_{j=0}^{m-k}\frac{(-1)^j}{(-is)^{j+1}}(e^{-isx}a_k^{(j)}(x)-a_k^{(j)}(0))+O\left(\frac{1}{s^{m+2}}\right). \tag{2.42}$$

vdje je m ma koji prirodan broj. Znamo da se asimptotika za $\tilde{f}'_1(x,s)$ i $\tilde{f}'_2(x,s)$ dobija formalnim diferenciranjem izraza (2.30). to se tiče determinante Vronskog, izlazi da se W razlaže po eparnim stepenima s ($m\in N_0$):

$$W=2\sum_{k=0}^{m}\frac{1}{s^{2k+1}}\sum_{j=0}^{2k+1}(-1)^{j+1}a_j(0)a'_{2k+1-j}(0)-2is\sum_{k=0}^{m+1}\frac{1}{s^{2k}}\sum_{j=0}^{2k}\times$$

$$(-1)^j a_j(0)a_{2k-j}(0)+ O\left(\frac{1}{s^{2m+3}}\right) \quad . \tag{2.43}$$

Ova razlaganja važe ravnomjerno po $x\in[0,\pi]$ i u oblasti $|\mathrm{Ims}|\leq$ const. Pokazaće se da je za nas dovoljno da znamo kako se razmatrane funkcije ponašaju u tom dijelu s-ravni - jer ta oblast sadrži u sebi cio spektar ovog graničnog zadatka.

Zamjenjujući izraze iz posljednje tri relacije (2.41), (2.42) i (2.43) u (2.35) i u izraz za $\widetilde{B}(x,s)$ izlazi

$$\widetilde{A}(x,s)\sim \frac{1}{2s^2}(2-e^{isx}-e^{-isx})+\frac{a_1(x)}{2s^3}(-e^{isx}+e^{-isx})+\dots, \tag{2.44}$$

$$\widetilde{B}(x,s)\sim(-e^{isx}+e^{-isx})+\frac{a_1(x)}{s}(-e^{isx}-e^{-isx})+\frac{a_2(x)}{s^2}(-e^{isx}+e^{-isx})+\dots . \tag{2.45}$$

Asimptotske formule važe za $s\to\infty$, $|\mathrm{Ims}|\leq$ const (ovdje const ne zavisi od s, zavisi samo od L_3), ravnomjerno po $x\in[0,\pi]$ i složene su po stepenima (negativnim) od s, a ne po funkcijama e^{isx}, e^{-isx}, e^{o}, jer su ove posljednje funkcije ograničene (u posmatranoj oblasti). Koeficijenti uz više stepene s^{-k} mogu se dobiti neposredno.

tačka 11. LOKALIZACIJA NULA FUNKCIJE f(s), SLUČAJ L_1.

U ovoj tački pokazaćemo da za svako $C>0$ (proizvoljno malo) postoji S tako da za $|s|>S$ u oblasti $|\mathrm{Ims}|>C$ nema nula funkcije $\widetilde{f}(s)$, formula (2.40), samim tim nema ni nula funkcije f(s), formula (2.15), tj. nema spektra razmatranog graničnog zadatka povezanog sa L_1. Zato se može reći da je spektar, asimptotski gledano, smješten unutar sektora proizvoljno malog centralnog ugla čija je bisektrisa realna osa.

Ovo opravdava način zapisivanja asimptotskih izraza (2.44) i (2.45) za $\widetilde{A}(x,s)$ i $\widetilde{B}(x,s)$.

Da bi se ovo pokazalo, koristićemo formule (2.31), pišući uvijek samo glavni sabirak. Dobija se

$$\tilde{f}_1(x,s)=e^{isx}[1],\ \tilde{f}_2(x,s)=e^{-isx}[1],$$

$$\int_0^x \tilde{f}_1(t,s)dt=\frac{1}{is}(e^{isx}-1)[1],\ \int_0^x \tilde{f}_2(t,s)dt=\frac{1}{-is}(e^{-isx}-1)[1],$$

$$W=-2is[1],$$

Zatim

$$\tilde{A}(x,s)=\frac{1}{s^2}\cdot\left(\frac{2-e^{isx}-e^{-isx}}{2}\right)[1],\ \tilde{B}(x,s)=(-e^{isx}+e^{-isx})[1],$$

te na kraju

$$\tilde{f}(s)=\{-e^{is\pi}+e^{-is\pi}\}[1]+O\left(\frac{1}{s}\right), \tag{2.46}$$

gdje u svim ovim formulama $[1]$ znači $1+O\left(\frac{1}{s}\right)$.

Ako je $|Ims|>C$ onda u (2.46) preteže (postaje dominantan) sabirak $e^{is\pi}$ (ili $e^{-is\pi}$), te je uslov $\tilde{f}(s)=0$ nemoguć, kao što je nemoguće

$$e^x(1+O\left(\frac{1}{x}\right))=0$$

kad x (realno) $\rightarrow +\infty$.

Dobijeni rezultat može se ovako formulisati:

<u>Teorema 2.4.</u> Za svako $C>0$ postoji konstanta R tako da u oblasti $|Ims|>C$, $|s|>R$ nema nijedne nule funkcije $f(s)$, definisane relacijom (2.15).

Tačka 12. <u>LOKALIZACIJA NULA FUNKCIJE f(s), OPŠTI SLUČAJ L_3.</u>

Radimo po analogiji sa prethodnom tačkom. Funkcija $\tilde{f}(s)$ zadata je formulom (2.37), a teorema 2.3. govori o ekvivalentnosti uslova $\tilde{f}(s)=0$ i $f(s)=0$, formula (2.24). U svakom kvadrantu s-ravni mi imamo

$$\tilde{A}(x,s)=\frac{1}{s^2}\cdot\frac{2-e^{isx}-e^{-isx}}{2}[1],\ \tilde{B}(x,s)=(-e^{isx}+e^{-isx})[1],$$

Zatim

$$|\tilde{A}(s)| \leq con \cdot \frac{1}{|s|^2}, \quad |\tilde{B}(s)| \leq con \cdot |\widetilde{B}(\pi, s)|,$$

gdje con ne zavisi od s, a $[1]$ znači $1+O(\frac{1}{s})$. Ako je $|Ims| > C$ i $s \to \infty$ onda u (2.37) postaje dominantan sabirak $e^{is\pi}$ (ili $e^{-is\pi}$) (u zavisnosti od znaka Ims), te je uslov $\tilde{f}(s)=0$ nemoguć. Formulišimo u obliku posebnog iskaza dobijeni rezultat.

Teorema 2.5. Za svako $C>0$ postoji konstanta R tako da u oblasti $|Ims|>C$, $|s|>R$ nema nijedne svojstvene vrijednosti operatora L_3. Dopušta se da neprekidna funkcija q(x) uzima kompleksne vrijednosti.

tačka 13. ASIMPTOTIKA KARAKTERISTIČNE JEDNAČINE, SLUČAJ L_1.

Do funkcije $\tilde{f}(s)$, formula (2.40), čije su nule svojstvene vrijednosti operatora L_1, došli smo u tri koraka, pa ćemo tim redom graditi i njenu asimptotiku.

Prvi korak. Funkcije $\tilde{f}_1(x,s)$ i $\tilde{f}_2(x,s)$, čija je asimptotika data formulama (2.30), preko koeficijenata $a_0(x)$, $a_1(x)$, itd.

Drugi korak. Funkcije $\tilde{A}(x,s)$ i $\tilde{B}(x,s)$. Njihova asimptotika ispitana je u tački 10, gdje su u zaključku dobijene formule (2.44) i (2.45). Pratimo simetriju koja postoji kod koeficijenata (svi koeficijenti zavise od "potencijala" q(x)):

(1) Ako se uporede koeficijenti funkcija $\tilde{f}_1(x,s)$ i $\tilde{f}_2(x,s)$ uz isti stepen s vidi se da su oni jednaki ako je taj stepen s - paran, a da su suprotni ako je neparan, što se može ovako zapisati:

$$coef(s^{-k}, \tilde{f}_2)=(-1)^k coef(s^{-k}, \tilde{f}_1).$$

(2) U sljedećem trenutku nalazimo

$$coef(e^{-isx}, s^{-k}, \int \tilde{f}_2, a_l(x))=(-1)^{k+l} coef(e^{isx}, s^{-k}, \int \tilde{f}_1, a_l(x))$$

$(l \in N)$.

(3) Za determinantu Vronskog se bez ikakvih teškoća pokazuje da se razlaže po neparnim stepenima s (1 i negativnim), kao što je već napisano u (2.43), tj.

$$W(s)\sim -2is-\frac{2a_1'(0)}{s}-\frac{2a_3'(0)}{s^3}-\frac{2a_5'(0)}{s^5}-\dots \qquad (2.47)$$

(4) Po ovim formulama i po definiciji $\widetilde{A}(x,s)$ izvodi se obrazac

$$\mathrm{coef}(e^{-isx},s^{-k},\widetilde{A}(x,s))=(-1)^k\mathrm{coef}(e^{isx},s^{-k},\widetilde{A}(x,s)), \qquad (2.48)$$

a odatle se, stavljajući $x=0$, dolazi do obrasca

$$\mathrm{coef}(e^{0},s^{-k},\widetilde{A}(x,s))=0 \text{ za } k \text{ neparno.}$$

(5) Za $\widetilde{B}(x,s)$ očito je da važi obrazac tipa (2.48), tj.

$$\mathrm{coef}(e^{-isx},s^{-k},\widetilde{B}(x,s))=(-1)^k\mathrm{coef}(e^{isx},s^{-k},\widetilde{B}(x,s)).$$

<u>Treći korak.</u> Funkcija $\widetilde{f}(s)$, zadata relacijom (2.40). Na osnovu maločas izvedenih relacija proističe za $\widetilde{f}(s)$:

$$\mathrm{coef}(e^{3is\pi/2})=\mathrm{coef}(e^{-3is\pi/2})=\mathrm{coef}(e^{0})=0.$$

Osim toga, za koeficijente uz $e^{\pm is\pi/2}$ i $e^{\pm is\pi}$ važe ovakve formule

$$\mathrm{coef}(s^{-k},e^{-is\pi})=(-1)^{k+1}\mathrm{coef}(s^{-k},e^{is\pi}),$$

$$\mathrm{coef}(s^{-k},e^{-is\pi/2})=(-1)^{k+1}\mathrm{coef}(s^{-k},e^{is\pi/2}),\quad k\in N_0.$$

Ako se izračuna prvih nekoliko pomenutih koeficijenata dobiće se

$$\widetilde{f}(s)\sim -e^{is\pi}\left[1+\frac{a_1(\pi)}{s}+\frac{a_2(\pi)-1}{s^2}+\frac{a_3(\pi)-a_1(\frac{\pi}{2})}{s^3}+\dots\right]+e^{is\pi/2}\times$$

$$\cdot\frac{2}{s^2}+\frac{a_1(\frac{\pi}{2})}{s^3}+\dots\Big]+e^{-is\pi/2}\left[-\frac{2}{s^2}+\frac{a_1(\frac{\pi}{2})}{s^3}+\dots\right]-e^{-is\pi}\left[-1+\frac{a_1(\pi)}{s}-\frac{a_2(\pi)-1}{s^2}+\frac{a_3(\pi)-a_1(\frac{\pi}{2})}{s^3}+\dots\right] \qquad (2.49)$$

Znak "$\sim$" važi u oblasti $|\mathrm{Im}\,s|\leq \mathrm{const.}$

Znači da se $\widetilde{f}(s)$ aproksimira kvazipolinomom čiji su eksponenti $\pm i\pi s$ i $\pm i\pi s/2$.

tačka 14. ASIMPTOTIKA KARAKTERISTIČNE JEDNAČINE, OPŠTI SLUČAJ L_3.

U jednačini (2.37) $\tilde{f}(s)=0$ pojavljuje se uz α_k, $k=1,\dots,n-1$ sljedeći množilac

$$\tilde{A}(\pi,s)\tilde{B}(x_k,s)-\tilde{B}(\pi,s)\tilde{A}(x_k,s).$$

Koristeći simetriju, pominjanu u prethodnoj tački, računom se dobija da se od mogućih eksponenata a oblika e^a, tj. $a=\pm is\pi$, $\pm isx_k$, $\pm is(\pi-x_k)$, $\pm is(\pi+x_k)$ pojavljuju svi osim $\pm is(\pi+x_k)$.

Takođe, α_n u toj jednačini ima sljedeći množilac

$$\tilde{A}(\pi,s)\int_0^\pi \tilde{B}(t,s)dt-\tilde{B}(\pi,s)\int_0^\pi \tilde{A}(t,s)dt,$$

a računom se dobija da se od mogućih eksponenata u njegovoj asimptotici pojavljuju $a=-i\pi s$, 0, $i\pi s$.

Asimptotika nas interesuje jedino u dijelu $|\mathrm{Im}s|\leq \mathrm{const}$ kompleksne s-ravni, v. teoremu 2.5.

Znači da se $\tilde{f}(s)$ aproksimira kvazipolinomom čiji su eksponenti $-nA,-(n-1)A,-(n-2)A,\dots,-A,0,A,\dots,nA$, gdje je $A=isx_1=is\pi/n$.

Izračunajmo nekoliko prvih članova tog asimptotskog predstavljanja.

$$\tilde{f}(s)\sim -e^{is\pi}\Big(1+\frac{a_1(\pi)}{s}+\frac{a_2(\pi)-(\alpha_1+\dots+\alpha_{n-1})-\pi\alpha_n}{s^2}+\dots\Big)-\sum_{k=1}^{n-1} e^{isx_k}\times$$

$$\frac{\ell_k+\alpha_{n-k}}{s^2}+\dots\Big)-\Big(\frac{4i\alpha_n}{s^3}+\dots\Big)-\sum_{k=1}^{n-1} e^{-isx_k}\Big(-\frac{\alpha_k+\alpha_{n-k}}{s^2}+\dots\Big)-$$

$$e^{-is\pi}\Big(-1+\frac{a_1(\pi)}{s}-\frac{a_2(\pi)-(\alpha_1+\dots+\alpha_{n-1})-\pi\alpha_n}{s^2}+\dots\Big). \qquad (2.50)$$

ačka 15. EGZISTENCIJA I LOKALIZACIJA RJEŠENJA KARAKTERISTIČNE JEDNAČINE, SLUČAJ L_1.

Na osnovu (2.49) može se zapisati

$\tilde{f}(s)=F_1(s)+F_2(s)$,

dje je

$$F_1(s)=-e^{is\pi}+e^{-is\pi}, \quad F_2(s)=O\left(\frac{1}{s}\right). \tag{2.51}$$

va ocjena za $F_2(s)$ važi u oblasti $|Ims|\leqslant$ const, što je za nas ovoljno, jer teorema 2.4. tvrdi da u tom dijelu s-ravni leže ıle funkcije $\tilde{f}(s)$.

Opišimo oko tačke s=m (m - cio broj) kružnicu poluprečnika . Za dovoljno velike m biće na toj kružnici ispunjeno $|F_1(s)|$ $|F_2(s)|$, jer je $|F_1(s)|\geqslant 2\sin\frac{1}{2}$, a $F_2(s)\to 0$. Dalje, funkcija $_L(s)=-2i\sin s\pi$ ima unutar te kružnice tačno jednu nulu - u jenom centru. Jasno je da su ispunjeni uslovi analitučnosti - je očito analitička, a $\tilde{f}$ je analitička (za velike s) na osvu već spomenute opšte teorije(ili: ako se $\tilde{f}$ podijeli sa W, ıda se dobija cijela funkcija f, i pri tom dijeljenju ostali elovi dokaza se ne mijenjaju). Pozivajući se na Rušeovu teomu, zaključujemo da $\tilde{f}$ unutar te kružnice ima (tačno) jednu lu, počev od nekog velikog $|m|$.

čka 16. EGZISTENCIJA I LOKALIZACIJA RJEŠENJA KARAKTERISTIČNE JEDNAČINE, OPŠTI SLUČAJ L_3.

Funkciju $\tilde{f}(s)$, definisanu sa (2.37), možemo rastaviti na a sabirka $F_1(s)$, $F_2(s)$ za koje se takođe može zapisati relaja (2.51), koristiti (2.50), i opet je ocjena ispunjena za ms$|\leqslant$const, to opet treba povezati sa teoremom 2.5.

Dakle, po potpunoj analogiji sa prethodnom tačkom, dolazi do analognog zaključka, koji se može zasebno iskazati.

<u>Teorema 2.6.</u> Za sve dovoljno velike prirodne brojeve m, unutar kružnice $|s-m|=\frac{1}{2}$ nalazi se jedno, i to prosto, rješenje karakteristične jednačine $\tilde{f}(s)=0$.

<u>Tumačenje 1.</u> Formulisali smo samo za prirodne m (negativne ne treba uzimati u obzir). Naime, lako se vidi da je funkcija $\tilde{f}(s)$ neparna. Recimo, zato što su $\tilde{B}(x,s)$ i $W(s)$ neparne (misli se po s), a $\tilde{A}(x,s)$ parna. To se uklapa sa odnosom između s i λ. Naime, mi cijelo vrijeme radimo sa promjenljivom s, a na kraju ćemo formulisati odgovor pomoću promjenljive λ, $\lambda=s^2$.

<u>Tumačenje 2.</u> Pokazali smo da $\tilde{f}(s)$, kao uostalom i f(s), ima unutar te kružnice prostu nulu (Rušeova teorema broji nule funkcije sa njihovom višestrukošću). Drukčije rečeno, algebarska višestrukost odgovarajuće svojstvene vrijednosti jednaka je jedan (po s, kao i po λ).

tačka 17. ASIMPTOTIKA SVOJSTVENIH VRIJEDNOSTI ZA VELIKE VRIJEDNOSTI s, SLUČAJ L_1.

(1) U ovoj tački određujemo asimptotiku spektra postavljenog zadatka, tj. asimptotiku rješenja jednačine $\tilde{f}(s)=0$, formula (2.40), odnosno $f(s)=0$, formula (2.15). Ta asimptotika važi za $s\to\infty$ i izražava se po stepenima promjenljive m ($\in N$), m - redni broj svojstvene vrijednosti.

Uvodeći oznaku

$$e^{is\pi/2}=V,$$

jednačinu $\tilde{f}(s)=0$ možemo zapisati u obliku

$$-\left[1+\frac{a_1(\pi)}{s}+\frac{a_2(\pi)-1}{s^2}+\dots\right]V^4+\left[\frac{2}{s^2}+\dots\right]V^3+\left[-\frac{2}{s^2}+\dots\right]V-$$

$$\left[-1+\frac{a_1(\pi)}{s}-\frac{a_2(\pi)-1}{s^2}+\dots\right]=0. \tag{2.52}$$

Pomoćnu promjenljivu V predstavićemo kao

$$V \sim \sum_{j=0}^{\infty} \frac{b_j}{s^j}. \tag{2.53}$$

Zamjenom u (2.52), izjednačavanjem sa nulom u svakom koraku koeficijenta uz $\frac{1}{s}$ na odgovarajući stepen (nulti, prvi, ...), dobija se za određivanje koeficijenata b_j beskonačni sistem rekurentnih relacija:

$$\begin{cases} b_o^4-1=0, \ 4b_o^3b_1+2a_1(\pi)=0, \\ 4b_o^3b_2+6b_o^2b_1^2+a_1(\pi)\cdot 4b_o^3b_1+2b_o^3-2b_o=0, \ \dots \end{cases}$$

Jednačina za određivanje b_o je četvrtog stepena, a jednačine za $b_1, b_2, \dots$ - prvog, tako da jednačina (2.52) ima četiri rješenja.

Koeficijenti b_j određuju se uzastopno, jedan po jedan, što pokazuje ispravnost zapisa (2.53).

Iz jednačine (2.53), stavljajući umjesto V veličinu $e^{is\pi/2}$, dobićemo četiri jednačine za nalaženje nula funkcije $\tilde{f}(s)$. Rješavajući te jednačine metodom uzastopnih aproksimacija (o tome će, za generalni slučaj, biti riječi u sljedećoj glavi), dolazimo do zaključka da postavljeni granični zadatak ima (na s-ravni) osam serija svojstvenih vrijednosti, za koje važi formula (m - veliko):

$$s_{m,j} \sim (4m+j) + \frac{B_{1,j}}{(4m+j)} + \frac{B_{2,j}}{(4m+j)^2} + \dots,$$

$$j=1,2,3,4, \quad m=0,1,2,\dots \ . \tag{2.54}$$

Red na desnoj strani je asimptotski. Možemo ovdje ponoviti definiciju znaka "$\sim$": formula (2.54) govori da je za svako k prirodno tačno sljedeće:

$$s_{m,j}=(4m+j)+\frac{B_{1,j}}{(4m+j)}+\frac{B_{2,j}}{(4m+j)^2}+\dots+\frac{B_{k-1,j}}{(4m+j)^{k-1}}+O\left(\frac{1}{(4m+j)^k}\right),$$

za $j=1,2,3,4$, kad $m \to \infty$.

Koeficijenti $B_{k,j}$ određuju se sukcesivno (metodom uzastopnih aproksimacija), što i pokazuje egzistenciju predstavljanja (3.54).

Brojevi $-s_{m,j}$ takođe su nule funkcije $\tilde{f}(s)$, zbog njene neparnosti. Označimo $-s_{m,j}$ sa $s_{m,4+j}$ za $j=1,2,3,4$, $m\in N_0$.

Time je riješen problem asimptotike spektra (u s-ravni) i problem numeracije.

(2) Sada ćemo izvesti formule koje se odnose na koeficijente $B_{k,j}$. Zbog neparnosti funkcije $\tilde{f}$ važi sljedeća veza među tim koeficijentima:

$$B_{2k-1,1}=B_{2k-1,3},\ B_{2k,1}=-B_{2k,3},\ B_{2k,2}=B_{2k,4}=0, \tag{2.55}$$

k - prirodan.

Naime, u formuli (2.54) mogli smo umjesto $m=0,1,2,\ldots$ da napišemo $m=0,\pm 1,\pm 2,\ldots$ (rješavajući pitanje numeracije na drugi način). Znači da nulu funkcije $\tilde{f}$ koja se nalazi u blizini negativnog cijelog broja možemo asimptotski predstaviti po formuli (2.54) shvaćenoj u tom širem smislu, ili je možemo predstaviti kao $s_{m,j}$ $(j\geqslant 5)$; odgovarajući sabirci (koji sadrže $\frac{1}{4m+j}$ na isti stepen) dvaju postupaka predstavljanja moraju se poklopiti. Korišćenjem ove okolnosti dolazi se do (2.55).

(3) Na kraju ove tačke navodimo vrijednosti nekoliko prvih koeficijenata B:

$$B_{1,j}=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} q(x)dx,\ B_{2,1}=\frac{2}{\pi},\ B_{2,2}=0,\ B_{2,3}=-\frac{2}{\pi},\ B_{2,4}=0.$$

tačka 18. <u>ASIMPTOTIKA SVOJSTVENIH VRIJEDNOSTI ZA VELIKE VRIJEDNOSTI s, OPŠTI SLUČAJ L_3.</u>

U čemu se ovo razmatranje razlikuje od specijalnog slučaja obrađenog u prethodnoj tački? Funkcija $\tilde{f}(s)$ zadata je formulom

(2.37). Pomoćna promjenljiva V uvodi se po formuli

$V=e^{is\pi/n}$.

Nalazimo da imamo 4n serija svojstvenih vrijednosti, čija se asimptotika prikazuje po cijelim negativnim stepenima njihovog rednog broja. Eksplicitno,

$$s_{m,j}\sim(2nm+j)+\frac{B_{1,j}}{(2nm+j)}+\frac{B_{2,j}}{(2nm+j)^2}+\dots,$$

$$j=1,2,\dots,2n,\ m=0,1,2,3,\dots . \tag{2.56}$$

Brojevi $-s_{m,j}$ takođe su nule funkcije $\tilde{f}(s)$. Označimo ih sa $s_{m,2n+j}$, $j=1,2,\dots,2n$.

Zbog neparnosti funkcije $\tilde{f}(s)$ važe sljedeće veze među koeficijentima $B_{k,j}$:

$B_{k,2n-j}=(-1)^{k+1}B_{k,j}$ za k prirodno, $j=1,2,\dots,n$.

Izračunajmo takođe nekoliko prvih koeficijenata $B_{k,j}$:

$B_{1,j}=\frac{1}{2\pi}\int_0^\pi q(x)dx$, za $j=1,2,\dots,2n$,

$B_{2,j}=-\frac{i}{\pi}\sum_{k=1}^{n-1}(\alpha_k+\alpha_{n-k})\exp\left(\frac{i\pi jk}{n}\right)$, j neparno; $=0$, j parno.

tačka 19. <u>ASIMPTOTIKA SVOJSTVENIH VRIJEDNOSTI λ.</u>

U ovoj tački završavamo analizu spektra postavljenog graničnog zadatka, pišući asimptotske formule za $\lambda=s^2$. Cio posao se svodi na (formalno) kvadriranje relacije (2.56). Da je postupak formalnog kvadriranja ispravan slijedi na osnovu elementarnih pravila računanja sa "veliko o". Ostaće (u opštem slučaju L_3) 2n serija svojstvenih vrijednosti, jer je $s^2_{m,j}=s^2_{m,2n+j}$ $(j=1,2,\dots,2n,\ m\in N_0)$. Tim postupkom dobijamo

$$\lambda_{m,j}\sim(2nm+j)^2+C_0+\frac{C_{1,j}}{(2nm+j)}+\frac{C_{2,j}}{(2nm+j)^2}+\dots, \tag{2.57}$$

$j=1,2,\dots,2n$, $m=0,1,2,\dots$, m - veliko.

Koeficijenti C_o i $C_{k,j}$ (k - prirodno, $j=1,2,\dots,2n$)direktno se izražavaju preko $B_{m,j}$, te se svaki od njih može neposredno izračunati (kao i $B_{m,j}$). Na primjer,

$$C_o=2B_{1,j}=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} q(x)dx,$$

$$C_{1,j}=2B_{2,j}.$$

Teorema 2.7. Operator $L_3=L_o+P_3$, definisan formulama (2.1), (2.6) i (2.2), gdje funkcija $q(x)\in C^{\infty}[0,\pi]$, ima prebrojivo mnogo svojstvenih vrijednosti λ_{α} ($\alpha=\beta,\beta+1,\dots$), gdje je β neki cio broj, te su svojstvene vrijednosti počev od nekog α proste (imaju algebarsku višestrukost jedan) i predstavljaju se asimptotskim redom po cijelim negativnim stepenima svog rednog broja α. Odgovarajuća asimptotska formula jeste (2.57), gdje su C_o, $C_{k,j}$ (k prirodan, $j=1,2,\dots,2n$) kompleksne konstante.

Ova teorema obuhvata odgovarajuće iskaze za ostale razmatrane operatore (L_1, L_2, L), jer su to specijalni slučajevi od L. Na primjer, u slučaju L_1 možemo pisati

$$\lambda_m=m^2+C_o+\frac{4}{\pi}\cdot\frac{1}{m}+C_{2,1}\cdot\frac{1}{m^2}+C_{3,1}\cdot\frac{1}{m^3}+\dots \text{ za } m \text{ oblika } 4p+1,\ m\to\infty,$$

$$\lambda_m=m^2+C_o+\frac{C_{2,2}}{m^2}+\dots \text{ za } m \text{ oblika } 4p+2,$$

$$\lambda_m=m^2+C_o-\frac{4}{\pi}\cdot\frac{1}{m}+\frac{C_{2,3}}{m^2}+\dots\ (m=4p+3),\quad \lambda_m=m^2+C_o+\frac{C_{2,4}}{m^2}+\dots\ (m=4p+4).$$

Ako se pretpostavi manja glatkost funkcije $q(x)$, na primjer da je ona samo dvaput neprekidno diferencijabilna, onda za λ_m ne pišemo cio asimptotski red, već samo njegov početak (misli se na opšti slučaj L_3). Na primjer, u toj konkretnoj situaciji:

$$\lambda_m = m^2 + C_0 + \text{koeficijent} \cdot \frac{1}{m} + O\left(\frac{1}{m^2}\right).$$

tačka 20. ASIMPTOTIKA SVOJSTVENIH FUNKCIJA.

Formula (2.27) daje izraz za svojstvenu funkciju za L_1, pod uslovom da je $1-A(\frac{\pi}{2},s) \neq 0$. Sljedeća formula (2.28) daje izraz za svojstvenu funkciju za L_3, pod uslovom da je $1-\mathcal{A}(s) \neq 0$. Ako se te formule pomnože sa $W(s)$, onda se takođe dobija izraz za svojstvenu funkciju. Tako, u vezi (2.38), izlazi za L_1:

$$u(x) = \tilde{A}(x,s)\tilde{B}(\frac{\pi}{2},s) - \tilde{A}(\frac{\pi}{2},s)\tilde{B}(x,s) + \tilde{B}(x,s),$$

a za L_3:

$$u(x) = \tilde{A}(x,s)\tilde{\mathcal{B}}(s) - \tilde{\mathcal{A}}(s)\tilde{B}(x,s) + \tilde{B}(x,s).$$

Što se tiče ograničavajućeg uslova $1-A(\frac{\pi}{2},s) \neq 0$, tj. $1-\mathcal{A}(s) \neq 0$, on ovdje ne predstavlja problem, jer je već pokazano da je, kad $s \to \infty$, u oblasti $|Ims| \leq const$, ispunjeno

$$\tilde{A}(x,s) = O\left(\frac{1}{s^2}\right)$$

uniformno po $x \in [0,\pi]$, a samim tim i

$$\tilde{A}(\frac{\pi}{2},s) = O\left(\frac{1}{s^2}\right), \quad \tilde{\mathcal{A}}(s) = O\left(\frac{1}{s^2}\right)$$

(funkcije $A(x,s)$ i $\tilde{A}(x,s)$ se poklapaju, kao što je i $\mathcal{A}(s) = \tilde{\mathcal{A}}(s)$).

Dakle, imamo eksplicitni izraz za svojstvene funkcije, ako je njihov redni broj dovoljno velik. Dalje, jasno je da umjesto s (u formuli za $u(x)$) treba uvrstiti odgovarajuću svojstvenu (s-) vrijednost. Ranije je pokazano (teorema 2.7) da su za velike redne brojeve te svojstvene vrijednosti proste, tj. da im odgovara jedna jedina svojstvena funkcija.

Koristeći asimptotske izraze (2.44) i (2.45) za $\tilde{A}(x,s)$ i $\tilde{B}(x,s)$ dobija se sljedeće rješenje, za slučaj L_1:

$$u(x) = (-e^{isx} + e^{-isx}) - \frac{a_1(x)}{s}(e^{isx} + e^{-isx}) + \frac{1}{s^2} x$$

$$\left[-e^{is\pi/2}+e^{-is\pi/2}+(1-a_2(x))(e^{isx}-e^{-isx})+e^{is(\frac{\pi}{2}-x)}-e^{-is(\frac{\pi}{2}-x)}\right]+\dots .$$

Pojavljuju se eksponenti tipa exp(isA) šest vrsta $A=\pm x, \pm\frac{\pi}{2}$, $\pm(\frac{\pi}{2}-x)$.

U opštem slučaju L_3:

$$u(x)=(-e^{isx}+e^{-isx})-\frac{a_1(x)}{s}(e^{isx}+e^{-isx})+\frac{1}{s^2}\Big[\sum_{k=1}^{n-1}\alpha_k(-e^{isx_k}+e^{-isx_k})+(\sum_{k=1}^{n-1}\alpha_k-a_2(x))\cdot(e^{isx}-e^{-isx})+\sum_{k=1}^{n-1}\alpha_k(e^{is(x_k-x)}-e^{-is(x_k-x)})\Big]+\cdots .$$

Pojavljuju se sljedeći eksponenti: $A=\pm x, \pm x_k, \pm(x_k-x)$, gdje $k=1,2,\dots,n-1$, kao i $A=\pm\pi, 0$.

Asimptotski izraz za svojstvenu funkciju uređen je po s^0, s^{-1}, itd. Preciznost do koje se može stići sa s^{-k} zavisi od glatkosti funkcije q(x) (i povećava se sa povećavanjem te glatkosti), a ako je ta funkcija beskonačno glatka, onda se ta "preciznost" pretvara u cio asimptotski red.

GLAVA 3.

REGULARIZOVANI TRAG.

tačka 1. IZ OPŠTE TEORIJE - FUNKCIJA KLASE K (DEFINICIJA).

Klasa K cijelih analitičkih funkcija uvedena je u radu [14], a detaljnije se o toj klasi može pročitati u knjizi [23] (odnosi se na tačke 1, 2. i 4. ove glave). Ova klasa je za nas bitna zato što (prvo) funkcija f(s), formula (2.24), koja zadaje karakterističnu jednačinu za L_3, - pripada klasi K (ako je q(x) beskonačno diferencijabilna) i (drugo) trag diferencijalnog operatora računa se na osnovu svojstava funkcija te klase, odnosno asocirane zeta-funkcije. Mi ćemo pokazati da $f(s)\in K$ (slično važi za karakterističnu jednačinu za obične linearne diferencijalne operatore). Istaknimo odmah da se u slučaju manje glatkosti funkcije q(x) takođe mogu izračunati neki tragovi (na primjer, prvi trag) - i to primjenom ove iste opšte teorije (koja slijedi), što će takođe biti pokazano u ovoj istoj glavi.

Neka je f(z) cijela funkcija koja za svako cijelo h dopušta predstavljanje u obliku

$$f(z)=\sum_{k=0}^{N-1} e^{\alpha_k z} P_{k,h}(z), \tag{3.1}$$

gdje su α_k - kompleksne konstante, a

$$P_{k,h}(z)=z^{n_k}\sum_{\nu=0}^{h} \beta_\nu^{(k)} z^{-\nu} + o(z^{n_k-h})$$

kad $z\to\infty$. U gornjoj formuli n_k su neki cijeli brojevi, a $\beta_0^{(k)}\neq 0$.

Pretpostavimo da se z-ravan može prekriti konačnim brojem zatvorenih sektora koji sadrže koordinatni početak, u svakom od njih su funkcije $P_{k,h}(z)$ analitičke za $|z|>R$. Na presjecima sektora funkcije $P_{k,h}(z)$ su, uopšte uzev, višeznačne.

U daljem ćemo izostavljati indeks h u $P_{k,h}(z)$ i pisati

$$P_k(z) \sim z^{n_k} \sum_{\nu=0}^{\infty} \beta_\nu^{(k)} z^{-\nu}, \quad z \to \infty.$$

Takođe ćemo pretpostavljati da predstavljanje za $P_k(z)$ dopušta diferenciranje član po član.

Funkcije sa gore opisanim svojstvima zvaćemo funkcijama klase K. Brojeve α_k i $\beta_\nu^{(k)}$ zvaćemo parametrima asimptotike funkcije f(z).

Naš sljedeći cilj jeste dobijanje eksplicitnih izraza, preko parametara asimptotike f(z), za regularizovane zbirove nula funkcije f(z), tj. sume oblika

$$\sum_{(l)} \{z_l^m - A_m(l)\} = s_m.$$

Ovdje su z_l - nule funkcije f(z), $A_m(l)$ - neki potpuno određeni brojevi, koji obezbjeđuju konvergenciju redova, a m - ma koji prirodan broj. s_m ćemo zvati m-tom regularizovanom sumom nula.

tačka 2. IZ OPŠTE TEORIJE - ZETA-FUNKCIJA ASOCIRANA S $f(z) \in K$.

Neka je f(z) cijela funkcija klase K. Uočimo u kompleksnoj ravni tačke

$$\bar{\alpha}_0, \bar{\alpha}_1, \ldots, \bar{\alpha}_{N-1},$$

a konveksni omotač tih tačaka označimo sa P. U opštem slučaju P je r-tougao ($r \leq N$). Smjerove spoljašnjih normala (na stranice od P, povučene iz koordinatnog početka) nazovimo kritičnim.

Ne umanjujući opštost, možemo smatrati da su vrhovi mnogougla P prvih r izložilaca

$$\bar{\alpha}_0, \bar{\alpha}_1, \ldots, \bar{\alpha}_{r-1}.$$

Izdvojmo iz z-ravni r sektora T_s proizvoljno malog centralnog ugla (s=0,1,...,r-1) s bisektrisama paralelnim kritičnim smjerovima. Preostalu oblast označimo sa Ω; ona se sa svoje strane raspada na r otvorenih sektora Ω_s $(s=0,1,\dots,r-1)$.

Evo prve informacije o nulama funkcije $f(z)$.

Lema 3.1. Za dovoljno veliko R u presjeku oblasti $|z|>R$ i Ω nema nula $f(z)$.

Dokaz. Lako se provjerava da je $\mathrm{Re}(\alpha z)=(\bar{\alpha},z)$, gdje na desnoj strani stoji skalarni proizvod vektora $\bar{\alpha}$ i z. Neka sada z, određenosti radi, pripada oblasti Ω_0 (dio od Ω, između T_{r-1} i T_0). Tada je geometrijski jasno da će, kada $z\notin P$, za neko $\delta>0$ biti ispunjena nejednakost

$$\mathrm{Re}(\alpha_0 z)-\mathrm{Re}(\alpha_k z)>\delta|z| \quad (k\neq 0),$$

jer je projekcija vektora $\bar{\alpha}_0$ na vektor z veća od projekcije vektora $\bar{\alpha}_k$ na vektor z. Kao posljedicu toga iz formule (3.1) odmah dobijamo da je

$$f(z)=Cz^{n_0}e^{\alpha_0 z}(1+o(1)) \quad (z\to\infty).$$

Slične ocjene važe i u drugim sektorima Ω_s. Lema je dokazana.

Izaberimo sada u jednom od sektora Ω_s (određenosti radi - u Ω_0) zrak l (iz koordinatnog početka) i konstruišimo konturu Γ_0 koja se sastoji iz dijela zraka l koji se obilazi dvaput i kružnice γ sa centrom u nuli (od l se uzima dio van γ) (samo γ obilazi se u pozitivnom smjeru), Hankelova kontura. Ne umanjujući opštost, može se smatrati da je $f(0)\neq 0$ (u protivnom slučaju može se $f(z)$ podijeliti cijelim stepenom z). Očigledno je da se zrak l i kružnica γ mogu izabrati tako da se sve nule $f(z)$ nađu u spoljašnjosti konture Γ_0.

Primjećujući, dalje, da je za $z\in\Gamma_0$, $z\to\infty$,

$$\frac{f'(z)}{f(z)}=\alpha_0+\frac{P_0'(z)}{P_0(z)}+O\left(e^{-\delta|z|}\right)\sim\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{\omega_\nu}{z^\nu}, \tag{3.2}$$

uvodimo u razmatranje integral

$$Z_o(\sigma)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_o} z^{-\sigma}\frac{f'(z)}{f(z)}dz, \tag{3.3}$$

koji je zbog (3.2) konvergentan u poluravni $\operatorname{Re}\sigma>1$. U formuli (3.3) je

$$z^{-\sigma}=e^{-\sigma \operatorname{Ln} z}, \tag{3.4}$$

gdje je $\operatorname{Ln} z$ - fiksirana regularna grana logaritma u spoljašnjosti Γ_o. Indeks $Z_o(\sigma)$ ukazuje na zavisnost uvedene funkcije od izbora konture Γ_o. Funkciju (3.3) nazivamo zeta-funkcijom asociranom funkciji $f(z)$.

Pokazuje se da postoji veza između zeta-funkcije i zbira nula funkcije $f(z)$:

Lema 3.2. Za $\operatorname{Re}\sigma>1$ važi

$$Z_o(\sigma)=\sum_{(1)} z_1^{-\sigma}, \tag{3.5}$$

gdje su z_1 - nule od $f(z)$.

Dokaz. Kako je $f(z)$ cijela funkcija prvog reda (rasta), to za $f'(z)/f(z)$ važi ravnomjerno konvergentno u svakom konačnom krugu razlaganje (Vajerštras-Adamarova teorema)

$$\frac{f'(z)}{f(z)}=\sum_{(1)}\left\{\frac{1}{z-z_1}+\frac{1}{z_1}\right\}+a. \tag{3.6}$$

Koristeći činjenicu da za $|z_1|>R_o$ nule $f(z)$ leže u sektorima T_s, nije teško dobiti ocjenu $|z-z_1|>\delta|z_1|$ $(\delta>0)$, za sve 1 i $z\in\Gamma_o$.

Razbijmo sumu na desnoj strani (3.6) na dvije:

$$\sum_{(1)}=\sum_{(1')}+\sum_{(1'')}$$

uzimajući u drugu sabirke za koje je $|z_1|>R_o$. Lako se vidi da je

$$\sum_{(1'')} \leq \sum_{(1'')} \frac{|z|}{|z-z_1|\cdot|z_1|} < \frac{|z|}{\delta} \sum_{(1'')} \frac{1}{|z_1|^2} < \varepsilon |z| \qquad (3.7)$$

za dovoljno veliko R_o. Naime, kako je f(z) - cijela funkcija prvog reda rasta), to red na desnoj strani (3.5) konvergira za $\mathrm{Re}\,\sigma > 1$ i za te σ predstavlja analitičku funkciju.

Pomnožimo (3.6) sa $z^{-\sigma}$ i uzmimo integral obadvije strane po konturi Γ_o. Ocjena (3.7) omogućuje promjenu redosljeda integracije i sumiranja. S obzirom da je dalje, na osnovu Košijeve teoreme o reziduumima,

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_o} z^{-\sigma} \left\{ \frac{1}{z-z_1} + \frac{1}{z_1} \right\} dz = z_1^{-\sigma},$$

dolazimo do formule (3.5) za $\mathrm{Re}\,\sigma > 2$. Zapažajući da su obe strane definisane i analitičke u poluravni $\mathrm{Re}\,\sigma > 1$, dolazimo do zaključka da jednakost (3.5) važi za $\mathrm{Re}\,\sigma > 1$. Lema je dokazana.

Zasad je zeta-funkcija $Z_o(\sigma)$ definisana za $\mathrm{Re}\,\sigma > 1$.

<u>Lema 3.3.</u> Zeta-funkcija $Z_o(\sigma)$ analitički se produžava na čitavu σ-ravan.

<u>Dokaz.</u> Razbijmo integral (3.3) na četiri integrala:

$$Z_o(\sigma) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} z^{-\sigma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_o'} z^{-\sigma} \left(\frac{f'(z)}{f(z)} - \sum_{\nu=0}^{\nu_o} \frac{\omega_\nu^{(o)}}{z^\nu} \right) dz + \frac{1}{2\pi i} \times$$
$$\int_{\Gamma_o} z^{-\sigma} \sum_{\nu=0}^{\nu_o} \frac{\omega_\nu^{(o)}}{z^\nu} dz - \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} z^{-\sigma} \sum_{\nu=0}^{\nu_o} \frac{\omega_\nu^{(o)}}{z^\nu} dz \equiv$$
$$J_1(\sigma) + J_2(\sigma) + J_3(\sigma) + J_4(\sigma), \qquad (3.8)$$

gdje je $\Gamma_o' = \Gamma_o \setminus \gamma$. Lako se vidi da su $J_1(\sigma)$ i $J_4(\sigma)$ cijele funkcije od σ - jer je kontura integracije konačna, a podintegralna funkcija je na toj konturi analitička. Što se tiče

$J_2(\sigma)$ - na osnovu (3.2) izlazi da je izraz u zagradi reda veličine $O(|z|^{-\nu_0-1})$, pa se integral analitički produžava na poluravan $\mathrm{Re}\,\sigma > -\nu_0$. Na kraju, za $\mathrm{Re}\,\sigma > 1$ integral $J_3(\sigma)$ jednak je nuli, pa se kao nula analitički produžava na čitavu ravan.

Dosad smo funkciju $Z_0(\sigma)$ analitički produžili na poluravan $\mathrm{Re}\,\sigma > -\nu_0$. Kako je ν_0 proizvoljan prirodan broj - lema je dokazana.

Predstavljanje (3.8) omogućuje da se nađu vrijednosti $Z_0(\sigma)$ u cijelim tačkama. Važi tvrđenje:

Lema 3.4. Za m=2,3,... je

$$Z_0(m) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} \cdot \frac{1}{z^m}\, dz, \tag{3.9}$$

a za m=0,1,2,... je

$$Z_0(-m) = \omega_{m+1}^{(o)}, \tag{3.10}$$

gdje su $\omega_{\nu}^{(o)}$ - koeficijenti u razlaganju (3.2).

Dokaz. Da bi se dokazala formula (3.9) dovoljno je zapaziti da je integral po Γ_0' jednak nuli, jer se jednoznačna funkcija (σ je prirodan broj) od z integriše duž zraka l u dva suprotna smjera.

Prelazimo na dokaz jednakosti (3.10). Poslužimo se formulom (3.8). Kada je σ cio i nepozitivan imamo da je $J_1(\sigma)=0$, jer se tada pod znakom integrala nalazi funkcija od z koja je analitička unutar γ; dalje, $J_2(\sigma)$ je jednak nuli za cijele σ, kao posljedica toga što se jednoznačna funkcija od z integriše duž zraka l u dva suprotna smjera. Uzimajući u obzir da je $J_3(\sigma)\equiv 0$, mi smo sveli pitanje na izračunavanje integrala $J_4(\sigma)$. To nas, očigledno, dovodi do formule (3.10). Dokaz je završen.

Podvucimo da su vrijednosti $Z_0(\sigma)$ u cijelim pozitivnim tačkama određene ponašanjem f(z) u okolini nule, dok se vrijednosti u cijelim negativnim tačkama izražavaju preko parametara asimptotike za $z \to \infty$.

tačka 3. ASIMPTOTIKA NULA FUNKCIJE KLASE K - HORNOV POSTUPAK.

Prvi dio. U opštem slučaju za nule funkcije $f(z) \in K$ važi formula

$$z_{n,s} = a_s n(1+o(1)),\ a_s = \frac{2\pi i}{\alpha_{s+1} - \alpha_s},\ s=0,1,\dots,r-1,$$

kad je $s=r-1$ onda se pod α_r podrazumijeva α_0, $n \in N$, $n \to \infty$.

Pod jačim pretpostavkama, ova formula može da postane preciznija.

Drugi dio. Neka na stranicama mnogougla P leže samo tačke $\overline{\alpha}_0, \overline{\alpha}_1, \dots, \overline{\alpha}_{r-1}$, a svih ostalih N-r eksponenata padaju, dakle, unutar mnogougla P.

Bavićemo se, određenosti radi, sektorom T_0 čija je bisektrisa normalna na duž sa krajevima $\overline{\alpha}_0$ i $\overline{\alpha}_1$. Izvršimo rotaciju koordinatnog sistema, tako da $\overline{\alpha}_0$ i $\overline{\alpha}_1$ padnu na neku pravu paralelnu imaginarnoj osi, a ostale tačke $\overline{\alpha}_j$ da se nađu lijevo od te prave; zadržavamo dosadašnje oznake. Tada se jednačina $f(z)=0$ može zapisati kao

$$e^{\alpha_0 z} z^{n_0} (\beta_0^{(0)} + o(1)) + e^{\alpha_1 z} z^{n_1} (\beta_0^{(1)} + o(1)) + o(e^{A|z|}) = 0, \quad (3.11)$$

gdje je $A < \mathrm{Re}\,\alpha_0 = \mathrm{Re}\,\alpha_1$, ili, poslije dijeljenja sa $e^{\alpha_0 z} z^{n_1} \times \beta_0^{(1)}$, kao

$$e^{(\alpha_1 - \alpha_0)z} = -\frac{\beta_0^{(0)}}{\beta_0^{(1)}} z^{n_0 - n_1}(1+o(1)) + o(e^{Bz}),$$

gdje je $B<0$ i znak "o" važi za $z \in T_0$. Logaritmovanjem posljednje relacije dobiće se (uzima se grana logaritma regularna u T_0)

$$(\alpha_1 - \alpha_0)z = \pi i + \mathrm{Ln}\,\beta_0^{(0)} - \mathrm{Ln}\,\beta_0^{(1)} + (n_0 - n_1)\mathrm{Ln}\,z + o(1) + 2n\pi i, \quad (3.12)$$

gdje je n ma koji cio broj, a zbog $z \in T_0$, $z \to \infty$ izlazi da n mora da bude prirodan broj. S obzirom da se razmatra $z\to\infty$, dobićemo početnu grubu aproksimaciju za nepoznatu z:

$$z=\frac{2\pi i n}{\alpha_1-\alpha_0}+O(n)=a_0 n+O(n)=a_0 n+z_{(1)},$$

gdje je iza drugog znaka jednakosti definisan koeficijent a_0, a iza trećeg znaka nova nepoznata $z_{(1)}$; ponovimo da $n\to\infty$. Za $z_{(1)}$, iz (3.12), sada se dobija uslov:

$$(\alpha_1-\alpha_0)z_{(1)}=\pi i+\operatorname{Ln}\beta_0^{(0)}-\operatorname{Ln}\beta_0^{(1)}+(n_0-n_1)\ln n+\operatorname{Ln}a_0+O(1),$$

pa se, izjednačavanjem dominantnih sabiraka s jedne i s druge strane, poboljšava informacija o nepoznatoj z, jer je

$$z_{(1)}=\frac{n_0-n_1}{\alpha_1-\alpha_0}\ln n+o(\ln n).$$

Uvodeći oznaku $z_{(2)}$ za $O(\ln n)$ iz prethodne jednakosti, dobijamo za novu pomoćnu nepoznatu $z_{(2)}$ uslov

$$(\alpha_1-\alpha_0)z_{(2)}=\pi i+\operatorname{Ln}\beta_0^{(0)}-\operatorname{Ln}\beta_0^{(1)}+(n_0-n_1)\operatorname{Ln}a_0+O(1),$$

pa

$$z_{(2)}=\frac{1}{\alpha_1-\alpha_0}(\pi i+\operatorname{Ln}\beta_0^{(0)}-\operatorname{Ln}\beta_0^{(1)}+(n_0-n_1)\operatorname{Ln}a_0)+O(1),$$

odnosno

$$z=a_0 n\left\{1+b_0\frac{\ln n}{n}+c_0\cdot\frac{1}{n}\right\}+o(1), \tag{3.13}$$

gdje su uvedene oznake

$$a_0=\frac{2\pi i}{\alpha_1-\alpha_0},\quad b_0=\frac{n_0-n_1}{2\pi i}\quad \text{i}\quad c_0=\frac{1}{2\pi i}\{(n_0-n_1)\operatorname{Ln}a_0+\pi i+\operatorname{Ln}\beta_0^{(0)}-\operatorname{Ln}\beta_0^{(1)}\}.$$

Otklonimo sada glavni nedostatak ovog razmatranja - pitanje egzistencije nula. Rastavimo funkciju $G(z)$ sa lijeve strane (3.11) na dva sabirka $G_1(z)$ i $G_2(z)$, gdje je

$$G_1(z)=e^{\alpha_0 z}z^{n_0}\beta_0^{(0)}+e^{\alpha_1 z}z^{n_1}\beta_0^{(1)},$$

i opišimo oko tačke $a_0 n\left\{1+b_0\frac{\ln n}{n}+\frac{c_0}{n}\right\}$ (to je glavni dio od z u (3.13)) kružnicu poluprečnika $\frac{1}{2}$. Počev od nekog n biće ispunjeno na toj kružnici $|G_1(z)|>|G_2(z)|$, tj. ispunjeni su uslovi

Rušeove teoreme, pa $G(z)$, kao i $G_1(z)$, ima unutar te kružnice tačno jednu nulu.

Time je dokazana egzistencija nule predstavljene formulom (3.13).

Produžavajući gore opisani postupak, dobija se da je sljedeći sabirak za z reda veličine $\frac{\ln n}{n}$, zatim $\frac{1}{n}$, itd.

Jasno je da isti ovakav postupak može da se sprovede u ma kom sektoru T_s. Nastavljanjem ovog iterativnog procesa, dobija se ovakav krajnji rezultat

$$z_{n,s} \sim a_s n \left\{ 1 + b_s \frac{\ln n}{n} + \frac{c_s}{n} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{R_k^{(s)}(\ln n)}{n^{k+1}} \right\}, \tag{3.14}$$

gdje su $R_k^{(s)}(\ln n)$ - polinomi k-tog stepena po $\ln n$, $s=0,1,\dots,r-1$, $n \to \infty$. Osim toga, svi koeficijenti izražavaju se preko parametara asimptotike za $f(z)$; na primjer:

$$a_s = \frac{2\pi i}{\alpha_{s+1} - \alpha_s}, \quad b_s = \frac{n_s - n_{s+1}}{2\pi i}, \quad c_s = \frac{1}{2\pi i} \left\{ (n_s - n_{s+1}) \operatorname{Ln} a_s + \operatorname{Ln} \beta_0^{(s)} - \operatorname{Ln} \beta_0^{(s+1)} + \pi i \right\},$$

$s=0,1,\dots,r-1$.

Mi smo dali konstruktivni opis proračuna formule (3.14). Postoji druga varijanta tog proračuna (metod neodređenih koeficijenata), no ona nema prednosti nad konstruktivnim postupkom . Izloženi iterativni postupak izumio je J. Horn, [35]. Ako je $n_{s+1} - n_s = 0$ onda serija $z_{n,s}$ ne sadrži u gornjoj asimptotici logaritme.

<u>Treći dio.</u> Ako na stranice mnogougla P padne još neki od eksponenata $\overline{\alpha}_j$ (osim ugaonih), treba razlikovati dva slučaja (kada nas interesuje asimptotika korijena $f(z)=0$):

(1) Ako ti eksponenti dijele odgovarajuću (svoju) stranicu mnogougla P na srazmjerne djelove (odnos dužina je racionalan broj), onda se mogu izvesti formule slične (3.14), samo te

formule mogu da sadrže razlomljene stepene n.

(2) Ako dijele na nesrazmjerne djelove, ne dobijaju se formule ovog tipa. Ovaj problem je nedavno riješen (pod dovoljno širokim pretpostavkama) u radu [26]; asimptotski izraz je znatno složeniji nego u (3.14), gdje je po stepenima n i lnn.

Drugi pristup rješavanju asimptotike nula kvazipolinoma može se naći u XII glavi knjige [34].

tačka 4. IZ OPŠTE TEORIJE - TEOREMA O REGULARIZOVANIM SUMAMA NULA FUNKCIJE KLASE K.

U ovoj tački pretpostavićemo, jednostavnosti radi, da nule $z_{n,s}$ funkcije $f(z)$ dopuštaju asimptotsko predstavljanje (3.14), mada se i u slučaju asimptotike po razlomljenim stepenima n sva dalje navedena razmatranja u principu održavaju.

Dižući obe strane (3.14) na stepen $-\sigma$ dobićemo

$$z_{n,s}^{-\sigma} \sim a_s^{-\sigma} n^{-\sigma} \left\{1+b_s\frac{\ln n}{n}+\frac{c_s}{n}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{R_k^{(s)}(\ln n)}{n^{k+1}}\right\}^{-\sigma} . \qquad (3.15)$$

S obzirom da poznata Tejlorova formula za funkciju $(1+x)^{\alpha}$ važi i za kompleksne x i α, možemo treći množitelj na desnoj strani (3.15) predstaviti asimptotskim redom i kao rezultat dobijamo formulu

$$z_{n,s}^{-\sigma} \sim \sum_{k=0}^{\infty}\frac{Q_k^{(s)}(\sigma,\ln n)}{n^{k+\sigma}}, \qquad (3.16)$$

gdje je

$$Q_k^{(s)}(\sigma,\ln n)=a_s^{-\sigma}\sum_{\nu=0}^{k} d_{k,\nu}^{(s)}(\sigma)\ln^{\nu} n, \qquad (3.17)$$

i $d_{k,\nu}^{(s)}(\sigma)$ - polinomi od σ. Posebno,

$$d_{0,0}^{(s)}(\sigma)=1;\ d_{1,0}^{(s)}(\sigma)=-\sigma c_s,\ d_{1,1}^{(s)}(\sigma)=-\sigma b_s;\ \dots . \qquad (3.18)$$

Fiksirajmo sada cijeli dovoljno veliki broj τ. Iz formule (3.16) slijedi da funkcija

$$\psi_{\tau}^{(o)}(\sigma)=\sum_{n=1}^{\infty}{}' \sum_{s=0}^{r-1}\left[z_{n,s}^{-\sigma} - \sum_{k=0}^{\tau} \frac{Q_k^{(s)}(\sigma, \ln n)}{n^{k+\sigma}}\right] \tag{3.19}$$

dopušta analitičko produženje u poluravan

$$\operatorname{Re}\sigma > -\tau, \tag{3.20}$$

jer je opšti član reda (3.19)

$$(\ln^{\tau+1} n/n^{(\tau+1+\sigma)}).$$

Naš cilj je da odredimo brojeve

$$\psi_{\tau}^{(o)}(-m) \quad (m<\tau),$$

koje ćemo zvati regularizovanim m-sumama nula f(z).

Primijetimo da se prvi indeks nule $z_{n,s}$ određuje vrijednošću cjelobrojnog parametra u asimptotskoj formuli (3.14); pri takvom načinu numeracije može se desiti da konačan broj nula f(z) bude nenumerisan, ili pak, obrnuto, može doći do viška cjelobrojnih indeksa - u konačnom broju. Prim nad znakom sigme u (3.19) označava u prvom slučaju da se nenumerisane nule uključuju u sumu, a u drugom da se prvi sabirci u srednjoj zagradi (3.19), čiji su indeksi suvišni, smatraju nulama ("defekt regularizacije").

Uzimajući u obzir ovu primjedbu, nađimo vrijednosti suma (3.19). Uvedimo u razmatranje funkciju

$$\phi_{\tau}^{(o)}(\sigma)=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{s=0}^{r-1}\left(\sum_{k=0}^{\tau}\frac{Q_k^{(s)}(\sigma,\ln n)}{n^{k+\sigma}}\right),$$

koja je regularna za $\operatorname{Re}\sigma>1$. Prema (3.19) imamo da je

$$\psi_{\tau}^{(o)}(\sigma)=Z_o(\sigma)-\phi_{\tau}^{(o)}(\sigma).$$

S obzirom da je $Z_o(\sigma)$ - cijela funkcija, to se zajedno sa $\psi_{\tau}^{(o)}(\sigma)$ i funkcija $\phi_{\tau}^{(o)}(\sigma)$ analitički produžava u poluravan (3.20). Primijetimo da se $\phi_{\tau}^{(o)}(\sigma)$ izražava preko Rimanove ζ-funkcije i njenih izvoda. Zaista, uzimajući u obzir (3.17), dobijamo

$$\Phi_{\tau}^{(o)}(\sigma) = \sum_{k=0}^{\tau} \sum_{\nu=0}^{k} \left[\sum_{s=0}^{r-1} a_s^{-\sigma} d_{k,\nu}^{(s)}(\sigma) \right] \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^{\nu} n}{n^{k+\sigma}} =$$

$$\sum_{k=0}^{\tau} \sum_{\nu=0}^{k} D_{k,\nu}^{(o)}(\sigma) \cdot (-1)^{\nu} \zeta^{(\nu)}(k+\sigma). \tag{3.21}$$

Kako su vrijednosti Rimanove ζ-funkcije i njenih izvoda u cijelim negativnim tačkama poznate, to formula (3.21) omogućuje da se nađu vrijednosti $\Phi_{\tau}^{(o)}(-m)$ za $m < \tau$. Uzimajući dalje u obzir formulu (3.10) za $Z_o(-m)$, mi dolazimo do sljedeće teoreme.

Teorema 3.1. Za svako cijelo $m < \tau$ važe jednakosti

$$\sum_{n=1}^{\infty}{}' \sum_{s=0}^{r-1} \left[z_{n,s}^{m} - \sum_{k=0}^{\tau} \frac{Q_k^{(s)}(-m, \ln n)}{n^{k-m}} \right] = \omega_{m+1}^{(o)} - \Phi_{\tau}^{(o)}(-m), \tag{3.22}$$

gdje su $\omega_{m+1}^{(o)}$ - koeficijenti razlaganja (3.2), a brojevi $\Phi_{\tau}^{(o)}(-m)$ se određuju po formuli (3.21).

Treba obratiti pažnju na okolnost da oba sabirka na desnoj strani (3.22) zavise od izbora konture Γ_o, koja je uvedena prilikom definisanja funkcije $Z_o(\sigma)$, dok njihova razlika ne zavisi od Γ_o - jer to svojstvo ima lijeva strana u (3.22). Koristeći tu invarijantnost, a takođe niz linearnih relacija koje nastaju kao rezultat izjednačavanja sa nulom koeficijenata uz polove ζ-funkcije i njenih izvoda, može se dobiti linearni rekurentni sistem za određivanje koeficijenata asimptotskog reda (3.14), v. o tome u radu [15].

Tačka 5. FUNKCIJA f(s) KOJA DEFINIŠE SPEKTAR (OPŠTI SLUČAJ L_3) PRIPADA KLASI K.

U tački 5. prethodne glave definisana je funkcija f(s), formula (2.24), za koju teorema 2.1. tvrdi da definiše svojstvene vrijednosti opšteg operatora L_3. Osim toga, v. napomenu 3. u toj tački, ako je potencijalna funkcija q(x) neprekidna, onda je ta funkcija $f(s)$ (kao i ta funkcija izražena preko λ) cijela funkcija, jer to svojstvo imaju i Košijeva rješenja Šturm-Liuvilove jednačine $l_0(u)-s^2u=0$, tj. funkcije $f_1(x,s)$ i $f_2(x,s)$, za svako fiksirano x iz segmenta $[0,\pi]$.

Upravo na tu funkciju $f(s)$ primijenićemo maločas opisani postupak za računanje zbira njenih nula.

Teorema 3.2. Ako je $q(x)$ beskonačno diferencijabilna funkcija, onda funkcija $f(s)$, formula (2.24), pripada klasi K cijelih funkcija, definisanoj u tački 1. ove glave.

Dokaz. Ako je koeficijent $q(x)$ u jednačini $l_0(u)-s^2u=0$, formula (2.7), beskonačno diferencijabilan, onda cijele funkcije $f_1(x,s)$ i $f_2(x,s)$ (misli se: x je fiksirano) mogu da se predstave asimptotskim redom, slično kao $\tilde{f}_1(x,s)$ i $\tilde{f}_2(x,s)$ u formulama (2.30) (tj. pojavljuju se eksponenti e^{isx} i e^{-isx}). Pri tome takva asimptotska predstavljanja važe u svakom od četiri kvadranta s-ravni (koji mogu biti translirani po želji). Ovo je sve poznato iz opšte teorije, v. o tome, upravo, u knjizi [21], "posljedica" na str. 64. Tamo se tvrdi i više od toga - da učestvujući asimptotski redovi dopuštaju diferenciranje član po član, neograničeno mnogo puta.

Dakle, pokazano je da funkcije $f_1(x,s)$ i $f_2(x,s)$, za svako x, pripadaju klasi K. Dalje, isto svojstvo imaju i $A(x,s)$, formula (2.11), jer nastaje integracijom po parametru t, i $B(x,s)=f_2(x,s)$, formula (2.12), te na kraju i funkcija $f(s)$, formula (2.24). Dokaz je završen.

U teoremi 3.2, kao i u teoremi 2.1. kada se konstatuje da je $f(s)$ cijela funkcija, nije bitno da li $q(x)$ uzima samo realne vrijednosti ili uzima, uopšte, kompleksne vrijednosti.

Napomena. Mi smo već koristili Hornov postupak, u tačkama 17. i 18. prošle glave, za određivanje asimptotike svojstvenih vrijednosti, kao i činjenicu da funkcija f(s) na koju se taj postupak primjenjuje pripada klasi K (što je tek sad pokazano).

tačka 6. PRIMJER IZ OPŠTE TEORIJE - TRAG ŠTURM--LIUVILOVOG OPERATORA.

Ovaj primjer navodimo zato što ćemo se na neke činjenice vezane za Šturm-Liuvilov operator oslanjati u našim daljim razmatranjima.

Razmotrimo operator L_0, formule (2.1) i (2.2), definisan na skupu $\mathfrak{D}$, gdje je q(x) beskonačno diferencijabilna funkcija. U literaturi se ovaj operator naziva Šturm-Liuvilov operator (mogu se uzeti i neki drugi granični uslovi).

Prvo nekoliko riječi o njegovom spektru. Pokazuje se da je spektar čisto diskretan: sastoji se od prebrojivog skupa svojstvenih vrijednosti λ_n, čija je jedina tačka nagomilavanja $\lambda=\infty$, svaka svojstvena vrijednost ima konačnu (algebarsku) višestrukost, v. npr. knjigu [21]. Može se ustanoviti da spektar ima sljedeću asimptotiku (npr. primjenom metoda sukcesivnih aproksimacija izloženog u tački 3)

$$\lambda_n \sim n^2+d_0+\frac{d_2}{n^2}+\frac{d_4}{n^4}+\dots \quad (n\to\infty) , \tag{3.23}$$

gdje koeficijenti d_0, d_2, d_4, itd, zavise od potencijalne funkcije q(x). Tako je

$$d_0=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi q(x)dx.$$

Ako želimo da numerišemo sve svojstvene vrijednosti (svaka se broji onoliko puta kolika je njena algebarska višestrukost), onda treba upotrijebiti cjelobrojne indekse n=d,d+1,d+2,..., gdje je d izvjestan cio broj, takođe zavisi od q(x). Takođe, za sve dovoljno velike cjelobrojne indekse n, svojstvena vrijednost

λ_n je prosta (ima algebarsku višestrukost jedan).

Ni u ovoj tački nije potrebno pretpostavljati da funkcija q(x) uzima realne vrijednosti (tada bi operator L_o bio samokonjugovan).

Prelazimo na računanje traga operatora (2.1), (2.2). Prvim regularizovanim tragom nazivamo izraz

$$s_1=\sum_{n=1}^{\infty}{}'(\lambda_n-(n^2+d_o)), \tag{3.24}$$

gdje je prim, kao i u tački 4, vezan s defektom regularizacije. Naime, iz asimptotike λ_n oduzimaju se oni članovi koji sadrže $\frac{1}{n}$ na nepozitivne stepene i na prvi stepen, jer se tom regularizacijom obezbjeđuje konvergencija reda. Na isti način definiše se prvi regularizovani trag za opšti linearni diferencijalni operator. Slično, drugi regularizovani trag dobija se sumiranjem svih λ_n^2 iz čije su asimptotike oduzeti članovi koji sadrže $\frac{1}{n}$ na nepozitivne stepene i na prvi stepen. Asimptotika λ_n^2 dobija se formalnim kvadriranjem asimptotike λ_n. Slično – λ_n^k, za k-ti regularizovani trag.

Sumu (3.24) prvi su izračunali I.M. Géljfand i B.M. Levitan u radu [4], koristeći teoriju integralnih i diferencijalnih jednačina. Opšti postupak za nalaženje regularizovanog traga (ma kog reda) za opšti linearni diferencijalni operator (n-tog reda) na konačnom odsječku pronašli su V.B. Lidskij i V.A. Sadovničij, rad [14]. U tom radu uvedena je klasa K. Sadržaj naših tačaka 1, 2. i 4. preuzet je iz tog rada. Koristi se aparat teorije funkcija (cijelih analitičkih funkcija).

Rezultat o tragu glasi:

$$\sum_{n=1}^{\infty}{}'[\lambda_n-n^2-d_o]=-\frac{q(0)+q(\pi)}{4}+\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}q(x)dx. \tag{3.25}$$

Za dobijanje formule prvog traga dovoljno je pretpostaviti da je funkcija $q(x)$ dvaput neprekidno diferencijabilna. Pod tom pretpostavkom izračunali su trag i Geljfand i Levitan. Kada se računaju tragovi reda većeg od prvog, onda se od $q(x)$ zahtijeva veća glatkost.

Postupkom Lidskog-Sadovničija možemo dobiti regularizovane tragove Šturm-Liuvilovog operatora i reda većeg od prvog. Tim postupkom može se efektivno odrediti i defekt regularizacije: u teoremi 3.1. treba staviti $m=0$, τ - neki prirodan broj; tada svakoj s-vrijednosti odgovara sabirak jedan, a radi regularizacije oduzimaju se jedinice. Dakle, izraz na desnoj strani, koji je sastavljen od poznatih elemenata, pokazuje razliku između količine nula cijele funkcije $f(z)$ i količine cjelobrojnih indeksa.

tačka 7. SLUČAJ L_1 - ZETA-FUNKCIJA ASOCIRANA S $f(s)$.

U sljedeće četiri tačke rješava se pitanje regularizovanog traga za modelni slučaj L_1. Samim tim, osnovni predmet ispitivanja jeste funkcija $f(s)$, zadata formulom (2.15). Razmatranja u ovoj tački teku po analogiji s tačkom 2.

Prije svega, $f(s)$ ima u asimptotici eksponente $\pm i\pi$ i $\pm i\pi/2$, v. formule (2.49) i (2.47). Znači da je r-tougao P (indikatorski dijagram) degenerisao u duž $[-i\pi, i\pi]$, koja je međutačkama $\pm i\pi/2$ podijeljena na srazmjerne djelove.

U tački 2. pretpostavlja se da na stranicama P nema međutačaka - što u našem slučaju nije ispunjeno, nego je stranica podijeljena na srazmjerne djelove.

Lema 3.5. Neka je Ω kompleksna s-ravan bez proizvoljno uskih sektora $|\arg s|<\varepsilon$ i $|\arg s-\pi|<\varepsilon$. Za dovoljno veliko R, u presjeku oblasti $|s|>R$ i Ω nema nula funkcije $f(s)$.

Ova lema predstavlja posljedicu teoreme 2.4.

Postavimo sada konturu integracije Γ Hankelovog tipa, koja se sastoji iz zraka l, koji se poklapa s pozitivnom y-osom (do visine ε_0), a obilazi se dvaput, i kružnice γ poluprečnika ε_0 sa centrom u nuli; orjentacija konture - pozitivna. Γ ima svojstvo da su sve nule funkcije f(s) u njenoj spoljašnjosti, jer ε_0 biramo tako da na γ nema nula funkcije f(s). Osim toga, može se smatrati da je $f(0)\neq 0$. Ako bi bilo $f(0)=0$, onda bismo funkciju f(s) podijelili određenim stepenom s, pa bismo dalja razmatranja sprovodili sa tom novom funkcijom f. Ovo dijeljenje je bez uticaja sa stanovišta računanja regularizovanih tragova.

Za $s\in\Gamma$ i $s\to\infty$ važi

$$\frac{f'(s)}{f(s)}=\alpha_0+\frac{P'(s)}{P(s)}+O\left(e^{-\delta|s|}\right)\sim\sum_{\gamma=0}^{\infty}\frac{\omega_\gamma}{s^\gamma}, \quad (\delta>0) \tag{3.26}$$

gdje je $\alpha_0=i\pi$, P(s) je koeficijent ispred $e^{is\pi}$ u asimptotici f(s); konkretno

$$P(s)\sim -\frac{i}{2}\cdot\frac{1}{s}-\frac{i a_1(\pi)}{2}\cdot\frac{1}{s^2}+\left(-\frac{i}{2}a_2(\pi)+\frac{i}{2}+\frac{a_1'(0)}{2}\right)\cdot\frac{1}{s^3}+\cdots,$$

$$\frac{P'(s)}{P(s)}\sim-\frac{1}{s}-\frac{a_1(\pi)}{s^2}+\frac{-2a_2(\pi)+2+a_1^2(\pi)-2i a_1'(0)}{s^3}+\cdots, \tag{3.27}$$

da bi se ovo izračunalo treba koristiti (2.49) i (2.47). Relacija (3.26) služi i za definisanje brojeva ω_γ.

Uvedimo sada u razmatranje integral

$$Z(\sigma)=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma z^{-\sigma}\frac{f'(z)}{f(z)}dz, \tag{3.28}$$

koji je, zbog (3.26), konvergentan u poluravni $\operatorname{Re}\sigma>1$. U formuli (3.28) je

$$z^{-\sigma}=e^{-\sigma \operatorname{Ln} z},$$

gdje je Lnz - fiksirana regularna grana logaritma u spoljašnjosti Γ.

Funkciju $Z(\sigma)$ iz (3.28) zvaćemo <u>zeta-funkcijom</u> asociranom s $f(s)$.

<u>Lema 3.6.</u> Za $\mathrm{Re}\,\sigma > 1$ važi

$$Z(\sigma) = \sum_{(1)} s_l^{-\sigma}, \tag{3.29}$$

gdje su s_l - nule funkcije $f(s)$.

Dokaz je identičan sa dokazom leme 3.2.

Istaknimo da se u zbiru na desnoj strani formule (3.29) svaka nula funkcije $f(s)$ pojavljuje onoliko puta kolika je njena višestrukost. Osim toga, višestrukih nula ima konačno mnogo i svaka od takvih je konačne višestrukosti - jer se radi o nulama cijele funkcije f.

<u>Lema 3.7.</u> Zeta-funkcija $Z(\sigma)$ analitički se produžava na cijelu σ-ravan.

Dokaz je identičan sa dokazom leme 3.3; integral pomoću koga je definisana funkcija $Z(\sigma)$ u (3.28) rastávlja se na četiri sabirka (po istoj šemi), pa se svaki od tih sabiraka produžuje do cijele funkcije.

<u>Lema 2.8.</u> Za $m=0,1,2,\dots$ važi

$$Z(-m) = \omega_{m+1},$$

gdje su brojevi ω_{m+1} definisani relacijom (3.26).

I ovaj dokaz je identičan sa dokazom leme 3.4, pa ga nećemo ponavljati.

tačka 8. <u>SLUČAJ L_1 - DOKAZ OSNOVNE TEOREME O REGULARIZOVANOM TRAGU.</u>

Polazimo od formule (2.54) koja daje asimptotski izraz za svojstvene vrijednosti $s_{m,j}$. Dizanjem obe strane te formule na stepen $-\sigma$ dobićemo

$$s_{m,j}^{-\sigma} \sim 4^{-\sigma}\left(m+\frac{j}{4}\right)^{-\sigma}\left[1+\sum_{k=2}^{\infty}\frac{B_{k-1,j}}{4^k\left(m+\frac{j}{4}\right)^k}\right]^{-\sigma}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{Q_k^{(j)}(\sigma)}{\left(m+\frac{j}{4}\right)^{k+\sigma}},$$

$j=1,2,3,4$. Evo izraza za nekoliko prvih koeficijenata Q, definisanih u posljednjoj relaciji:

$$Q_0^{(j)}(\sigma)=4^{-\sigma},\ Q_1^{(j)}(\sigma)\equiv 0,\ Q_2^{(j)}(\sigma)=-\sigma B_{1,j}\cdot 4^{-\sigma-2},\ Q_3^{(j)}(\sigma)=$$

$$-\sigma B_{2,j}\cdot 4^{-\sigma-3}, \tag{3.30}$$

$j=1,2,3,4$. Osim toga, za $j=5,6,7,8$ pisaćemo

$$s_{m,j}^{-\sigma} \sim \sum_{k=0}^{\infty}\frac{Q_k^{(j)}(\sigma)}{\left(m+\frac{j^*}{4}\right)^{k+\sigma}}$$

gdje je po definiciji

$$j^* = \begin{cases} j, & \text{za } j=1,2,3,4 \\ j-4, & \text{za } j=5,6,7,8 \end{cases}$$

i

$$Q_k^{(j+4)}(\sigma)=(-1)^{\sigma}\,Q_k^{(j)}(\sigma),\ j=1,2,3,4,\ k\in N_0.$$

Uvedimo sada u razmatranje funkciju

$$\Psi_\tau(\sigma)=\sum_{m=0}^{\infty}{}'\sum_{j=1}^{8}\left[s_{m,j}^{-\sigma}-\sum_{k=0}^{\tau}\frac{Q_k^{(j)}(\sigma)}{\left(m+\frac{j^*}{4}\right)^{k+\sigma}}\right]. \tag{3.31}$$

Prim nad znakom sigme potiče od defekta regularizacije, tj. mogućnosti viška ili nedostatka cjelobrojnih indeksa $m=0,1,2,\ldots$, $j=1,\ldots,8$, koji služe za numerisanje svojstvenih vrijednosti u s-ravni. Defekt je jednak nekom cijelom broju. Naš cilj i jeste - proučavanje funkcije Ψ.

Funkcija $\Psi_\tau(\sigma)$ je analitička u poluravni $\mathrm{Re}\,\sigma > -\tau$, jer je opšti član reda

$$O(m^{-(\tau+1+\sigma)}).$$

Posljednja funkcija koja se uvodi u razmatranje jeste

$$\Phi_{\tau}(\sigma)=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{j=1}^{8}\sum_{k=0}^{\tau}\frac{Q_k^{(j)}(\sigma)}{(m+\frac{j^*}{4})^{k+\sigma}},$$

koja je analitička za Re $\sigma > 1$. Imamo da je

$$\Psi_{\tau}(\sigma)=Z(\sigma)-\Phi_{\tau}(\sigma), \qquad (3.32)$$

gdje je $Z(\sigma)$ - zeta-funkcija asocirana s f(s), formula (3.28).

S obzirom da je $Z(\sigma)$ cijela funkcija, to se i funkcija $\Phi_{\tau}(\sigma)$ analitički produžava na poluravan Re$\sigma > -\tau$.

Već je rečeno da ćemo vrijednosti funkcije $\Psi_{\tau}(\sigma)$, definisane sa (3.31), za $\sigma=-1,-2,\dots$ zvati regularizovanim tragovima operatora L_1, zadatog sa (2.4) i (2.2), jer su te vrijednosti ustvari zbirovi (svih njegovih) svojstvenih vrijednosti, koje su "popravljene" oduzimanjem prvih nekoliko članova njihovog asimptotskog izraza, da bi zbir - beskonačni red - postao konvergentan.

Ujedinjavajući rezultate posljednje dvije tačke, možemo da formulišemo osnovnu teoremu (sve oznake uvedene su u posljednje dvije tačke):

<u>Teorema 3.3.</u> Za ma koje $p<\tau$ (p - cio, $\tau \in N_0$) važe jednakosti

$$\sum_{m=1}^{\infty}{}' \sum_{j=1}^{8}\left[s_{m,j}^{p}-\sum_{k=0}^{\tau}\frac{Q_k^{(j)}(-p)}{(m+\frac{j^*}{4})^{k-p}}\right]=\omega_{p+1}-\Phi_{\tau}(-p). \qquad (3.33)$$

Na lijevoj strani prepoznajemo izraz za trag, tj. funkciju $\Psi_{\tau}(\sigma)$ iz (3.31) za $\sigma=-p$. Pogledajmo sada relaciju (3.32): veličina Z(-p), koja učestvuje u njenoj desnoj strani (kada je $\sigma=-p$), izračunata je u lemi 3.8.

Da iskaz teoreme izražen formulom (3.33) ima stvarnu snagu pokazaćemo u daljem tekstu (ova ista tačka), tj. efektivno ćemo izračunati $\Phi_{\tau}(-p)$.

Analitičko produženje funkcije $\Phi_{\tau}(\sigma)$ izražava se preko uopštene Rimanove zeta-funkcije. Zaista,

$$\Phi_\tau(\sigma)=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{j=1}^{8}\sum_{k=0}^{\tau}\frac{Q_k^{(j)}(\sigma)}{(m+\frac{j^*}{4})^{k+\sigma}}=\sum_{j=1}^{8}\sum_{k=0}^{\tau}Q_k^{(j)}(\sigma)\,\zeta\left(k+\sigma,\frac{j^*}{4}\right),$$

pri čemu je $\zeta(x,y)$ - uopštena Rimanova zeta-funkcija:

$$\zeta(z,a)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{(m+\lambda)^z}$$

za Re $z>1$, a zatim se analitički produžava na $C\setminus\{1\}$; u tački $z=1$ ima prost pol; a je parametar, $a\neq 0,-1,-2,\ldots$. Vrijednosti ove funkcije u cijelim negativnim tačkama su poznate. v. npr. knjigu [33].

tačka 9. <u>SLUČAJ L_1 - FORMULA ZA PRVI TRAG.</u>

<u>Teorema 3.4.</u> (o prvom tragu) Za prvi regularizovani trag operatora L_1 važi jednakost

$$\sum_{m=0}^{\infty}{}' \sum_{j=1}^{4}\left[\lambda_{m,j}-(4m+j)^2-C_0-\frac{C_{1,j}}{(4m+j)}\right]=-\frac{1}{4}\left(q(0)+q(\pi)\right)+\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}q(x)dx, \tag{3.34}$$

gdje su sa $\lambda_{m,j}$ numerisane sve svojstvene vrijednosti, a prim nad znakom sigme je u vezi sa defektom regularizacije,

$$C_0=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}q(x)dx;\ C_{1,1}=\frac{4}{\pi},\ C_{1,2}=0,\ C_{1,3}=-\frac{4}{\pi}\ \text{i}\ C_{1,4}=0.$$

Podsjetimo se da je $s^2_{m,j}=\lambda_{m,j}$, a koeficijenti C izračunati su u tački 19. prošle glave.

Da bi se ova teorema dokazala, dovoljno je u prethodnoj osnovnoj teoremi 3.3. staviti $p=2$, $\tau=3$ i izračunati

$$\frac{1}{2}\left[\omega_3-\Phi_3(-2)\right].$$

Množi se sa $\frac{1}{2}$ jer jednoj svojstvenoj vrijednosti λ odgovaraju dvije vrijednosti s.

Na osnovu (3.27) i izraza za $a_1(x)$, $a_2(x)$, itd iz tačke 7. prošle glave, dobija se da je

$$\omega_3=2-\frac{1}{2}\left[q(0)+q(\pi)\right].$$

Posljednji potrebni koeficijent računa se na osnovu formule (3.30) i tabličnih vrijednosti za uopštenu Rimanovu zeta-funkciju:

$$\Phi_3(-2)=\sum_{j=1}^{8}\sum_{k=0}^{3} Q_k^{(j)}(-2)\zeta\left(k-2,\frac{j^*}{4}\right)=2-\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} q(x)dx.$$

Navodimo jednu od formula iz tablice:

$$\lim_{\sigma\to 1}\left[\zeta\left(\sigma,\frac{1}{4}\right)-\zeta\left(\sigma,\frac{3}{4}\right)\right]=\pi.$$

Time je teorema dokazana.

Formula za prvi trag može se izvesti i pod slabijim pretpostavkama za potencijalnu funkciju $q(x)$ (mi smo pretpostavili da $q(x)\in C^{\infty}$). Ako se pretpostavi da je $q(x)$ dvaput neprekidno diferencijabilna, onda za svojstvene vrijednosti važi

$$\lambda_{m,j}=(4m+j)^2+C_0+\frac{C_{1,j}}{(4m+j)}+O\left(\frac{1}{m^2}\right)$$

i važi formula (3.34) za prvi trag.

Vidimo da je vrijednost prvog traga ista kao i kod klasičnog Šturm-Liuvilovog operatora (opisanog u tački 6), mada je opšta formula (kao i asimptotika) različita.

Izvedena formule za trag, osim što je računanje traga jedno od klasičnih pitanja u analizi, mogu se primijeniti za nalaženje prvih svojstvenih vrijednosti ili kod rješavanja obrnutog spektralnog zadatka.

tačka 10. SLUČAJ L_1 - PRIMJER: FORMULA ZA PRVI TRAG U SLUČAJU $q(x)\equiv C$.

Ako je potencijalna funkcija $q(x)$ identički jednaka nuli, onda se razni djelovi dosadašnjih razmatranja mogu napisati eksplicitnije. Tada je

$$L_0u=-u''(x),\ u\in\mathfrak{D},$$

njegove svojstvene vrijednosti (proste) su $\lambda_m=m^2$ $(m=1,2,\dots)$, a odgovarajuće svojstvene funkcije $u(x)=\sin mx$. Osim toga, dva linearno nezavisna rješenja postaju, formula (2.30),

$$\tilde{f}_1(x,s)=e^{isx},\ \tilde{f}_2(x,s)=e^{-isx},$$

odnosno Košijeva rješenja

$$f_1(x,s)=\cos sx,\ f_2(x,s)=\frac{\sin sx}{s},$$

a determinanta Vronskog, formula (2.33),

$$W=W(s)=\begin{vmatrix} \tilde{f}_1(0,s) & \tilde{f}_2(0,s) \\ \tilde{f}_1'(0,s) & \tilde{f}_2'(0,s) \end{vmatrix}=-2is.$$

Dalje, formule (2.14) i (2.12) daju

$$A(x,s)=\frac{1-\cos sx}{s^2},\ B(x,s)=\frac{\sin sx}{s}.$$

Sam operator postaje

$$L_1u=-u''(x)+u\left(\frac{\pi}{2}\right),\ u\in\mathfrak{D}. \tag{3.35}$$

Karakteristična jednačina (2.15) postaje

$$f(s)=\frac{2}{s^3}\sin\frac{s\pi}{2}\left\{(s^2-1)\cos\frac{s\pi}{2}+1\right\}=0. \tag{3.36}$$

Lako se vidi (1) da je $f(0)\neq 0$, tj. da nula nije svojstvena vrijednost, (2) da su sva rješenja ove jednačine realna, kao i (3) da u slučaju da je s rješenje važi $1-A(\frac{\pi}{2},s)\neq 0$. Osim toga, lako se pokazuje da unutar kružnice $|s|=R$, za sve dovoljno velike R oblika $\frac{1}{2}\left[a^2+(a+1)^2\right]$, a - prirodan, jednačina $f(s)=0$ ima isti broj rješenja kao i jednačina (karakteristična za L_0) $f_2(\pi,s)=\frac{\sin s\pi}{s}=0$. Slična činjenica (za L_3 umjesto L_1, uz prisustvo $q(x)$) biće dokazana za opšti slučaj u tački 15. ove glave. Koristi se Rušeova teorema. Takođe, uočimo odmah da su brojevi $s=2,4,6,\dots$ rješenja gornje jednačine (3.36).

Ako svojstvene vrijednosti numerišemo sa $\lambda_{m,j}$, pri čemu je $m=0,1,2,\dots$, a $j=1,2,3,4$ ($\lambda_{m,j}$ je svojstvena vrijednost koja se nalazi u blizini tačke $(4m+j)^2$) - biće one sve numerisane, tj. defekt regularizacije iznosi nula. Za $\lambda_{m,j}$ može se napisati

$$\lambda_{m,1}=(4m+1)^2+\frac{4}{\pi(4m+1)}+O\left(\frac{1}{m^2}\right),\quad \lambda_{m,2}=(4m+2)^2+O\left(\frac{1}{m^2}\right),$$

$$\lambda_{m,3}=(4m+3)^2-\frac{4}{\pi(4m+3)}+O\left(\frac{1}{m^2}\right),\quad \lambda_{m,4}=(4m+4)^2+O\left(\frac{1}{m^2}\right),$$

gdje je $m=0,1,2,\dots$.

Formula za prvi trag:

$$\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{j=1}^{4}\left[\lambda_{m,j}-(4m+j)^2-\frac{c_{1,j}}{(4m+j)}\right]=0, \tag{3.37}$$

pri čemu je (kao i u prethodnoj tački) $c_{1,1}=4/\pi$, $c_{1,2}=0$, $c_{1,3}=-4/\pi$ i $c_{1,4}=0$. Savršeno je jasno da se svi ovi iskazi dobijaju kao specijalni slučajevi odgovarajućih ranije izvedenih.

Na kraju ove tačke, ilustrujmo u ovoj prostoj situaciji ideju koja će biti predmet tačke 16. ove glave. Iz opšte teorije je poznato da se prilikom računanja traga regularizacija može vršiti na razne načine. Često su brojevi koji se oduzimaju (od svojstvenih vrijednosti) sa svoje strane nečije svojstvene vrijednosti. Kod nas je najprirodnije da oduzimamo upravo svojstvene vrijednosti neperturbiranog operatora, tj Šturm-Liuvilovog operatora L_0. Usaglasimo se da rezultat dobijen kod takve regularizacije zovemo <u>relativnim tragom</u> (operatora L_1). U ovoj prostoj situaciji to znači da u formuli (3.37) ne treba da se pojavljuje dio $-c_{1,j}/(4m+j)$. Odredimo kolika se promjena tim izostavljanjem vrši. Saberimo sve izostavljene brojeve:

$$\frac{4}{\pi}\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots\right)=1,$$

- rezultat je dobijen pomoću Furijeovog reda. Tako možemo pisati formulu za relativni trag

$$\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{j=1}^{4}\left[\lambda_{m,j}-(4m+j)^2\right]=1. \tag{3.38}$$

tačka 11. OPŠTI SLUČAJ L_3 - ZETA-FUNKCIJA ASOCIRANA S f(s).

U sljedeće četiri tačke rješava se pitanje regularizovanog traga za opšti slučaj L_3. Samim tim, osnovni predmet ispitivanja jeste cijela funkcija f(s), formula (2.24).

Prije svega, f(s) ima u asimptotici eksponente $-i\pi$, $-i(n-1)\pi/n$, $-i(n-2)\pi/n,\dots,i\pi$, v. formulu (2.50). Znači da je r-tougao P (indikatorski dijagram) degenerisao u duž $[-i\pi, i\pi]$, koja je međutačkama (njih 2n-1) podijeljena na 2n jednakih djelova. U tački 2. smo pretpostavljali da na stranicama r-tougla P nema drugih tačaka (eksponenata), što u našem slučaju nije ispunjeno.

Lema 3.9. Neka je Ω kompleksna s-ravan bez proizvoljno uskih sektora $|\arg s|<\varepsilon$ i $|\arg s-\pi|<\varepsilon$. Za dovoljno veliko R u presjeku oblasti $|s|>R$ i Ω nema nula funkcije f(s).

Ova lema predstavlja posljedicu teoreme 2.9.

Koristimo konturu integracije Hankelovog tipa Γ definisanu u tački 7. Ponovimo: ta se kontura dobija kada se od tačke $s=(+\infty)i$ spustimo po y-osi do tačke $\varepsilon_0 i$, zatim se (u pozitivnom smjeru) obiđe kružnica γ (jednačina $|s|=\varepsilon_0$) i na kraju se po y-osi pređe isti put (u suprotnom smjeru).

Kontura Γ ima svojstvo da su sve nule funkcije f(s) u njenoj spoljašnjosti, jer ε_0 (dovoljno malo) biramo tako da na kružnici γ nema nula funkcije f. Osim toga, može se smatrati da je $f(0)\neq 0$. Ako bi bilo f(0)=0, onda bismo funkciju f podijelili određenim (pozitivnim) stepenom od s, pa bismo dalja razmatranja sprovodili sa tom novom funkcijom f. Ovo dijeljenje je bez uticaja sa stanovišta računanja regularizovanih tragova.

Napomena. Krak konture Γ ide po pozitivnoj y-osi. Može se kontura zarotirati, tako da taj krak bude u gornjoj poluravni, te zarotiranu konturu označiti sa Γ. Pritom se u dokazu ništa ne mijenja. Ovo rotiranje je potrebno ako je neka nula funkcije f(s) čisto imaginaran broj.

Za $s\in\Gamma$ i $s\to\infty$ važi

$$\frac{f'(s)}{f(s)}=\alpha_0+\frac{P'(s)}{P(s)}+O\left(e^{-\delta|s|}\right)\sim\sum_{\gamma=0}^{\infty}\frac{\omega_\gamma}{s^\gamma},\quad(\delta>0) \tag{3.39}$$

gdje je $\alpha_0=i\pi$, P(s) je koeficijent ispred $e^{is\pi}$ u asimptotici f(s).

Nađimo izraz za P(s). Treba koeficijent uz $e^{is\pi}$ funkcije $\tilde{f}(s)$, formula (2.37), podijeliti sa determinantom Vronskog W(s), za koju važi razvoj (2.47). Na taj način,

$$P(s)\sim-\frac{i}{2}\cdot\frac{1}{s}-\frac{ia_1(\pi)}{2}\cdot\frac{1}{s^2}+\left(-\frac{i}{2}a_2(\pi)+\frac{i}{2}(\alpha_1+\dots+\alpha_{n-1}+\pi\alpha_n)+\frac{a_1'(0)}{2}\right)\cdot\frac{1}{s^3}+\dots,$$

a zatim

$$\frac{P'(s)}{P(s)}\sim-\frac{1}{s}-\frac{a_1(\pi)}{s^2}+\Big(-2a_2(\pi)+2(\alpha_1+\dots+\alpha_{n-1}+\pi\alpha_n)+a_1^2(\pi)-$$
$$2i\,a_1'(0)\Big)\cdot\frac{1}{s^3}+\dots\quad. \tag{3.40}$$

Relacija (3.39) služi i za definisanje brojeva ω_γ.

Uvedimo sada u razmatranje integral

$$Z(\sigma)=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma z^{-\sigma}\frac{f'(z)}{f(z)}\,dz, \tag{3.41}$$

koji je, zbog (3.39), konvergentan u poluravni $\operatorname{Re}\sigma>1$.

Funkciju $Z(\sigma)$ iz (3.41) zvaćemo <u>zeta-funkcijom</u> asociranom s f(s).

<u>Lema 3.10.</u> Za $\operatorname{Re}\sigma>1$ važi

$$Z(\sigma)=\sum_{(1)}s_1^{-\sigma} \tag{3.42}$$

gdje su s_1 - nule funkcije f(s).

Dokaz je identičan sa dokazom leme 3.2. Istaknimo da se u zbiru na desnoj strani formule (3.42) svaka nula funkcije f(s) pojavljuje onoliko puta kolika je njena višestrukost.

Lema 3.11. Zeta-funkcija $Z(\sigma)$ analitički se produžava na cijelu σ-ravan (kao cijela funkcija).

Dokaz je identičan sa dokazom leme 3.3.

Lema 3.12. Za m=0,1,2,... važi

$$Z(-m)=\omega_{m+1},$$

gdje su brojevi ω_{m+1} definisani relacijom (3.39).

I ovaj dokaz je identičan sa dokazom leme 3.4, pa ga nećemo ponavljati.

tačka 12. OPŠTI SLUČAJ L_3 - DOKAZ OSNOVNE TEOREME O REGULARIZOVANOM TRAGU.

Polazimo od formule (2.56) koja daje asimptotski izraz za svojstvene vrijednosti $s_{m,j}$. Stepenujući obe strane te formule na $-\sigma$ dobićemo

$$s_{m,j}^{-\sigma}\sim(2n)^{-\sigma}\left(m+\frac{j}{2n}\right)^{-\sigma}\left[1+\sum_{k=2}^{\infty}\frac{B_{k-1,j}}{(2n)^k\left(m+\frac{j}{2n}\right)^k}\right]^{-\sigma}\sim\sum_{k=0}^{\infty}\frac{Q_k^{(j)}(\sigma)}{\left(m+\frac{j}{2n}\right)^{k+\sigma}},$$

j=1,2,...,2n. Evo izraza za nekoliko prvih koeficijenata Q, definisanih u posljednjoj relaciji:

$$Q_0^{(j)}(\sigma)=(2n)^{-\sigma},\quad Q_1^{(j)}(\sigma)\equiv 0,\quad Q_2^{(j)}(\sigma)=-\sigma B_{1,j}(2n)^{-\sigma-2},$$
$$Q_3^{(j)}(\sigma)=-\sigma B_{2,j}(2n)^{-\sigma-3}, \tag{3.43}$$

j=1,2,...,2n. Osim toga, za j=2n+1,2n+2,...,4n pisaćemo

$$s_{m,j}^{-\sigma}\sim\sum_{k=0}^{\infty}\frac{Q_k^{(j)}(\sigma)}{\left(m+\frac{j^*}{2n}\right)^{k+\sigma}}$$

gdje je po definiciji

$$j^*=\begin{cases} j, & \text{za } j=1,2,\dots,2n\\ j-2n, & \text{za } j=2n+1,2n+2,\dots,4n\end{cases}$$

i

$$Q_k^{(j+2n)}(\sigma)=(-1)^{\sigma}\, Q_k^{(j)}(\sigma),\quad j=1,2,\dots,2n.$$

Uvedimo sada u razmatranje funkciju

$$\Psi_\tau(\sigma)=\sum_{m=0}^{\infty}{}' \sum_{j=1}^{4n}\Big[s_{m,j}^{-\sigma}-\sum_{k=0}^{\tau}\frac{Q_k^{(j)}(\sigma)}{\left(m+\frac{j^*}{2n}\right)^{k+\sigma}}\Big]. \qquad (3.44)$$

Prim nad znakom sigme potiče od defekta regularizacije, tj. mogućeg viška ili nedostatka cjelobrojnih indeksa m=0,1,2,..., j=1,...,4n koji služe za numeraciju svojstvenih vrijednosti u s-ravni. Defekt je jednak nekom cijelom broju. U gornjoj formuli, $\tau\in N_0$.

Naš cilj i jeste proučavanje funkcije Ψ. Funkcija $\Psi_\tau(\sigma)$ je analitička u poluravni Re $\sigma > -\tau$, jer je opšti član reda $O(m^{-(\tau+1+\sigma)})$.

Posljednja funkcija koja se uvodi u razmatranje jeste

$$\Phi_\tau(\sigma)=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{j=1}^{4n}\sum_{k=0}^{\tau}\frac{Q_k^{(j)}(\sigma)}{\left(m+\frac{j^*}{2n}\right)^{k+\sigma}},$$

koja je analitička za Re$\sigma > 1$. Imamo da je

$$\Psi_\tau(\sigma)=Z(\sigma)-\Phi_\tau(\sigma). \qquad (3.45)$$

S obzirom da je $Z(\sigma)$ cijela funkcija, to se i funkcija $\Phi_\tau(\sigma)$ analitički produžava na poluravan Re$\sigma > -\tau$.

Već je rečeno da ćemo vrijednosti funkcije $\Psi_\tau(\sigma)$, definisane sa (3.44), za σ =-1,-2,... zvati regularizovanim tragovima operatora L_3 zadatog sa (2.6) i (2.2), jer su te vrijednosti ustvari zbirovi (svih njegovih) svojstvenih vrijednosti, koje su "popravljene" oduzimanjem prvih nekoliko članova njihovog asimptotskog izraza, da bi zbir - beskonačni red - postao konvergentan.

Ujedinjavajući rezultate posljednje dvije tačke, možemo da formulišemo osnovnu teoremu (sve oznake uvedene su u posljednje dvije tačke):

<u>Teorema 3.5.</u> Za ma koje $p < \tau$ (p - cio, $\tau \in N_0$) važe jednakosti

$$\sum_{m=0}^{\infty}{}' \sum_{j=1}^{4n} \left[s_{m,j}^{p} - \sum_{k=0}^{\tau} \frac{Q_k^{(j)}(-p)}{\left(m + \frac{j^*}{2n}\right)^{k-p}} \right] = \omega_{p+1} - \Phi_\tau(-p), \qquad (3.46)$$

Na lijevoj strani prepoznajemo izraz za trag, tj funkciju $\Psi_\tau(\sigma)$ iz (3.44) za $\sigma = -p$. Pogledajmo sada relaciju (3.45): veličina $Z(-p)$, koja učestvuje u njenoj desnoj strani (kada je $\sigma = -p$), izračunata je u lemi 3.12. Sada ćemo efektivno izračunati $\Phi_\tau(-p)$. Analitičko produženje funkcije $\Phi_\tau(\sigma)$ izražava se preko uopštene Rimanove zeta-funkcije. Zaista,

$$\Phi_\tau(\sigma) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{4n} \sum_{k=0}^{\tau} \frac{Q_k^{(j)}(\sigma)}{\left(m + \frac{j^*}{2n}\right)^{k+\sigma}} = \sum_{j=1}^{4n} \sum_{k=0}^{\tau} Q_k^{(j)}(\sigma)\, \zeta\left(k+\sigma, \frac{j^*}{2n}\right).$$

Ova relacija, zajedno sa formulama (3.39) i (3.40), koje se odnose na ω_{p+1} iz iskaza teoreme, omogućuje efektivno izračunavanje traga ma kog reda (prvog, drugog, itd) i s regularizacijom koja zahvata stepene asimptotike do $m^{-(\tau-p)}$ ($\tau - p$ je proizvoljno veliko).

tačka 13. <u>OPŠTI SLUČAJ L_3 - FORMULA ZA PRVI TRAG.</u>

Kao specijalni slučaj prethodne teoreme 3.5, u ovoj tački ćemo izvesti formulu za prvi trag. U toj formuli biće urađena "minimalna" regularizacija (kao i u slučaju L_1, teorema 3.4), tj. biće oduzeti od svojstvenih vrijednosti $\lambda_a \sim a^2$ (a prirodan) samo sabirci u asimptotici reda veličine $a^2, \dots, a^{-1}$. Ako bismo oduzeli, na primjer, još i a^{-2}, onda bismo takođe govorili o prvom tragu, samo sa drukčijom (jačom) regularizacijom.

<u>Teorema 3.6.</u> (o prvom tragu) Za prvi regularizovani trag operatora L_3 važi jednakost

$$\sum_{m=0}^{\infty}{}' \sum_{j=1}^{2n} \left[\lambda_{m,j} - (2nm+j)^2 - C_0 - \frac{C_{1,j}}{(2nm+j)} \right] = -\frac{1}{4}\left[q(0)+q(\pi)\right] + \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} q(x)\,dx + \pi \alpha_n, \tag{3.47}$$

gdje su sa $\lambda_{m,j}$ numerisane sve svojstvene vrijednosti , a prim nad znakom sigme je u vezi sa defektom regularizacije,

$$C_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} q(x)\,dx,$$

$C_{1,j}=0$ za j parno, $C_{1,j} = \frac{-2i}{\pi}\sum_{k=1}^{n-1}(\alpha_k + \alpha_{n-k})\exp\left(\frac{i\pi jk}{n}\right)$ za j neparno.

Podsjetimo se da je $s^2_{m,j} = \lambda_{m,j}$, a koeficijenti C izračunati su u tački 19. prošle glave.

Da bi se ova teorema dokazala, dovoljno je u prethodnoj osnovnoj teoremi 3.5. staviti p=2, τ=3 i izračunati

$$\frac{1}{2}\left[\omega_3 - \Phi_3(-2)\right].$$

Množi se sa $\frac{1}{2}$, jer jednoj svojstvenoj vrijednosti λ odgovaraju dvije vrijednosti s.

Na osnovu (3.40) i izraza za $a_1(x), a_2(x)$, itd iz tačke 7. prošle glave, dobija se da je

$$\omega_3 = 2(\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_{n-1} + \pi\alpha_n) - \frac{1}{2}(q(0)+q(\pi)).$$

Posljednji potrebni koeficijent računa se na osnovu formula (3.43) i tabličnih vrijednosti za uopštenu Rimanovu zeta-funkciju:

$$\Phi_3(-2) = \sum_{j=1}^{4n}\sum_{k=0}^{3} Q_k^{(j)}(-2)\,\zeta\left(k-2, \frac{j^*}{4}\right) = 2(\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_{n-1}) - \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} q(x)\,dx.$$

<u>Objašnjenje.</u> Kako je izračunata posljednja veličina. Treba znati sljedeće:

(1) Iz [33] prepisujemo sljedeće:

$$\zeta(-2,x)=-\frac{4B_3(x)}{12}=\frac{-x}{3}\left(x^2-\frac{3}{2}x+\frac{1}{2}\right),$$

$B_3(x)$ je Bernulijev polinom,

$$\zeta(0,x)=-B_1(x)=-x+\frac{1}{2},$$

$\zeta(-1,x)$ ne treba nam, jer je koeficijent $Q_1^{(j)}(\sigma)$ identički jednak nuli.

(2) Što se tiče sabirka sa k=3, kada se pojavljuje $\zeta(1,x)$, ovdje se podrazumijeva limes, kad prvi argument zeta-funkcije teži ka 1, odgovarajuće sume $\sum_{j=1}^{4n}$. U toj sumi učestvuju $Q_3^{(j)}(\sigma)=-\sigma B_{2,j}(2n)^{-\sigma-3}$. a za koeficijente $B_{2,j}$ (j=1, ...,2n) pokazano je, u tački 18. prošle glave, da važi $B_{2,j}+B_{2,2n-j}=0$ (j=1,...,n). Tako se na prirodan način koriste sljedeći identiteti iz tablice:

$$\lim_{\sigma\to 1}\left[\zeta(\sigma,x)-\zeta(\sigma,1-x)\right]=-\psi(x)+\psi(1-x)$$

i takođe

$$\psi(x)-\psi(1-x)=-\pi\operatorname{ctg}\pi x,$$

gdje je $\psi(x)$, po definiciji, jednako $\frac{d}{dx}\ln\Gamma(x)$, a $\Gamma(x)$ je Ojlerova gama-funkcija.

Time je teorema 3.6. dokazana.

Formula za prvi trag može se izvesti i pod slabijom pretpostavkom, $q(x)\in C^2[0,\pi]$. Ovo posljednje biće razjašnjeno u tački 17.

Značaj izvedenih formula za trag:

1) računanje traga jeste jedno od klasičnih pitanja u analizi,

2) mogu se upotrijebiti za približno nalaženje prvih vojstvenih vrijednosti; da bi se to uradilo, neophodno je prethodno odrediti defekt regularizacije; to određivanje je predmet

tačke 15,

3) mogu se upotrijebiti kod rješavanja obrnutog spektralnog zadatka; u tom zadatku poznate su neke informacije o spektru operatora određene klase, a treba odrediti koji je operator u pitanju.

tačka 14. OPŠTI SLUČAJ L_3 - PRIMJERI: L, L_2.

(1) Ako se u teoremama 3.5. i 3.6. iz prethodne dvije tačke stavi $\alpha_n=0$, onda se dobijaju odgovarajući iskazi, koji se odnose na osnovni operator L, definisan relacijama (2.3), (2.2). Zadržimo se na formuli za prvi trag. Ona postaje

$$\Big(\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{j=1}^{2n}\Big)'\Big[\lambda_{m,j}-(2nm+j)^2-c_0-\frac{c_{1,j}}{(2nm+j)}\Big]=-\frac{1}{4}\big[q(0)+q(\pi)\big]+\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}q(x)dx. \tag{3.48}$$

Zapazimo da se na desnoj strani pojavljuje ista veličina, kao i u Šturm-Liuvilovom slučaju. Treba uočiti da je regularizacija svojstvenih vrijednosti izvršena drukčije od tog slučaja.

(2) Ako se u prethodnim teoremama stavi $\alpha_1=\alpha_2=\ldots=\alpha_{n-1}=0$, onda se operator L_3 pretvara u operator L_2, takođe definisan na početku prošle glave. Radi jednostavnosti, stavimo da je $\alpha_n=1$. Tada je Šturm-Liuvilovom operatoru dodata perturbacija P_2 integralnog tipa. Ta je perturbacija jedan ograničen i (zbog Im$\alpha_n=0$) samokonjugovan operator.

Tako, ako $q(x)$ uzima isključivo realne vrijednosti, sve svojstvene vrijednosti λ_m su realni brojevi. Nema više potrebe za razdvajanjem tih brojeva u 2n serija, nego se mogu numerisati jednim cjelobrojnim indeksom m. Što se tiče asimptotike svojstvenih vrijednosti λ_m, uočava se da se razlika u odnosu na

Šturm-Liuvilov operator pojavljuje tek kod stepena m^{-2}. Naime, svi $C_{1,j}$ iz iskaza teoreme 3.6. su jednaki nuli. Formula za prvi trag postaje

$$\sum_{m=1}^{\infty}{}' \left[\lambda_m - m^2 - C_0 \right] = -\frac{1}{4}\left[q(0) + q(\pi) \right] + \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} q(x)\,dx + \pi .$$

Dakle, regularizacija je izvršena kao kod Šturm-Liuvilovog operatora, a dobijen je novi (različiti) izraz za prvi trag.

tačka 15. DEFEKTI REGULARIZACIJE ŠTURM-LIUVILOVOG OPERATORA I (OPŠTI SLUČAJ) OPERATORA L_3 SE POKLAPAJU.

Teorema 3.7. Neka je $R_p = \frac{1}{2}\left[p^2 + (p+1)^2\right]$. Za sve dovoljno velike prirodne brojeve p, unutar kružnice $|\lambda| = R_p$ nalazi se jednak broj svojstvenih vrijednosti (uzimajući u obzir algebarske višestrukosti) operatora $L_0 u = -u''(x) + q(x)u$ i $L_3 u$. Ovdje se pretpostavlja da $q(x) \in C[0,\pi]$ i da uzima kompleksne vrijednosti. Takođe α_i $(i=1,\dots,n)$ su ma kakvi kompleksni brojevi, n ma koji prirodan broj veći od jedan.

Dokaz. Karakteristična jednačina Šturm-Liuvilovog operatora, v. tačku 6, glasi

$$f_0(s) = B(\pi, s) = 0,$$

a za operator L_3, formula (2.24),

$$f(s) = B(\pi, s) + A(\pi, s)\mathcal{B}(s) - \mathcal{A}(s)B(\pi, s) = 0.$$

Primijenićemo Rušeovu teoremu; dokazaćemo da je

$$|B(\pi, s)| > |A(\pi, s)\mathcal{B}(s) - \mathcal{A}(s)B(\pi, s)|$$

kada $s^2 \in R_p$. Ako se lijeva i desna strana ove nejednakosti pomnože sa $W(s)$ onda pišemo

$$|\widetilde{B}(\pi, s)| > |\widetilde{A}(\pi, s)\widetilde{\mathcal{B}}(s) - \widetilde{\mathcal{A}}(s)\widetilde{B}(\pi, s)| .$$

Razmatraćemo s iz prvog kvadranta (ostali kvadranti se razmatraju analogno).

Za $|\mathrm{Im}\, s| \leq 1$ slijedi iz ocjena

$$\tilde{A}(x,s) = O\left(\frac{1}{s^2}\right), \quad \tilde{B}(x,s) = (-e^{isx} + e^{-isx}) + O\left(\frac{1}{s}\right).$$

Za $|\mathrm{Im}\, s| \geq 1$ slijedi iz

$$\tilde{A}(x,s) = \frac{1}{2s^2}(1 - e^{isx} - e^{-isx})\left(1 + O\left(\frac{1}{s}\right)\right), \quad \tilde{B}(x,s) = (-e^{isx} + e^{-isx}) \times \left(1 + O\left(\frac{1}{s}\right)\right),$$

formule (2.44) i (2.45) iz prošle glave, tačka 10. Naime, $\tilde{A}(\pi,s)\tilde{B}(s) - \tilde{A}(s)\tilde{B}(\pi,s)$ sastoji se iz više sabiraka, među kojima se pojavljuje, recimo, onaj od $x = x_1$ (u funkcionalu P_3), a on daje

$$\alpha_1 [\tilde{A}(\pi,s)\tilde{B}(x_1,s) - \tilde{A}(x_1,s)\tilde{B}(\pi,s)] =$$

$$\alpha_1 \cdot \frac{1}{2}[-e^{isx_1} + e^{-isx_1} + e^{is\pi} - e^{-is\pi} - 2e^{is(\pi - x_1)} + 2e^{-is(\pi - x_1)}] \cdot \frac{1}{s^2} \cdot \left(1 + O\left(\frac{1}{s}\right)\right),$$

što treba uporediti sa $\tilde{B}(\pi,s) = (-e^{is\pi} + e^{-is\pi})(1 + O(\frac{1}{s}))$. Vidimo da se u prvom ne pojavljuje $e^{is\alpha}$, gdje bi bilo $|\alpha| > \pi$. Spomenutih sabiraka ima konačno mnogo. Tako se tretira i sabirak sa koeficijentom α_n. Dokaz je završen.

<u>Teorema 3.8.</u> Neka su ispunjeni uslovi prethodne teoreme. Tada je defekt regularizacije Šturm-Liuvilovog operatora jednak nuli.

<u>Dokaz. Prvi način.</u> U radu [14] je pokazano da se defekt računa na sljedeći način:

$$\varkappa = \omega_1^{(0)} + \frac{r}{2} - \sum_{s=0}^{r-1} b_s \ln a_s + \sum_{s=0}^{r-1} c_s, \tag{3.49}$$

gdje se koriste oznake sa početka ove glave, v. npr. formule (3.2) i (3.14). Ovdje se pod defektom podrazumijeva "razlika" između broja rješenja jednačine $f_0(s)=0$ i količine indeksa (kojima se ta rješenja u asimptotici numerišu) (i,j), gdje $i \in N$, $j \in \{1,2\}$. Kada se izračunaju svi parametri izlazi $\varkappa = 0$. Na primjer, $\omega_1(0) = -1$, $r=2$, $b_1 = b_2 = 0$, $c_1 = c_2 = 0$.

Drugi način. U slučaju $q(x)\equiv 0$ svojstvene vrijednosti (u s-ravni) su 1,2,3,... i -1,-2,-3,..., te je defekt očigledno jednak nuli. Pokazuje se da za opšte q(x) važi isto. Treba uporediti odgovarajuće karakteristične jednačine. U slučaju $q(x)\equiv 0$ ta jednačina glasi

$$(-e^{is\pi}+e^{-is\pi})/(-2is)=0,$$

a u opštem slučaju glasi

$$f_0(s)=B(\pi,s)=0.$$

Sada se primijeni Ruševa teorema, postupa se slično kao u dokazu prethodne teoreme. Može se izvršiti množenje sa W(s). Poluprečnik kružnice u s-ravni može da bude $\sqrt{R_p}$ ili $p+\frac{1}{2}$ (p - prirodan). Opet se koristi ocjena (2.45) za $\widetilde{B}$.

Dokaz je završen.

Dakle, u tački 6. može se umjesto d pisati 1, tj. ako se svojstvene vrijednosti numerišu sa λ_1, λ_2, itd, onda će da važi $\lambda_n-n^2\to C_0=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}q(x)dx$, kad $n\to\infty$.

Teorema 3.9. Neka su ispunjeni uslovi teoreme 3.7. Tada je defekt regularizacije operatora L_3 jednak nuli.

Dokaz. Primijenimo formulu (3.49) na funkciju f(s), formula (2.24). Evo nekih međurezultata tog sabiranja:

r=2, jer imamo dva kritična smjera, po pozitivnoj x-osi i po negativnoj x-osi,

$\omega_1^{(o)}=-1$, koeficijent uz $\frac{1}{s}$ u asimptotici $F'(s)/F(s)$, formula (3.40),

$b_1=b_2=0$, jer asimptotika svojstvenih vrijednosti, formula (2.56), ne sadrži logaritme,

$c_1=c_2=0$, jer je u (2.56) koeficijent uz $(2nm+j)^{o}$ jednak nuli; drukčije rečeno - nema slobodnog sabirka.

Dakle, $\chi=0$. Kako dvije nule $\pm s$ funkcije f(s) odgovaraju jednoj svojstvenoj vrijednosti λ, to se može govoriti i o defektu jednakom nuli (u terminima λ). Dokaz je završen.

Komentar 1. Znači da je za numerisanje svih svojstvenih vrijednosti od L_3, formula (2.57), potrebno i dovoljno upotrijebiti, ako se one označavaju sa $\lambda_{m,j}$, indekse $m=0,1,2,\ldots$, $j=1,\ldots,2n$, tj. da će tada biti $\lambda_{m,j}-(2nm+j)^2 \to C_o = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} q(x)dx$. Drukčije rečeno, u teoremi 2.7. važi $\beta=1$.

Komentar 2. Zaključujemo da se u teoremama 3.3, 3.4, 3.5. i 3.6. može izostaviti prim koji je u vezi sa defektom regularizacije.

Komentar 3. Bilo koja od tri posljednje teoreme 3.7, 3.8. i 3.9. je posljedica druge dvije., jer jedna govori čemu je jednak $def(L_o)$, jedna čemu je jednak $def(L_3)$, a jedna da je $def(L_o)-def(L_3)=0$; "def" označava defekt.

tačka 16. FORMULA ZA RELATIVNI TRAG (OPŠTI SLUČAJ L_3) - REGULARIZACIJA SE VRŠI POMOĆU SVOJSTVENIH VRIJEDNOSTI ŠTURM-LIUVILOVOG OPERATORA L_o.

Teorema 3.10. Neka funkcija $q(x)$ uzima kompleksne vrijednosti i neka pripada $C^2[0,\pi]$. Neka su sa λ_m $(m=1,2,\ldots)$ numerisane sve svojstvene vrijednosti operatora L_3, a sa λ_{om} $(m=1,2,\ldots)$ sve svojstvene vrijednosti Šturm-Liuvilovog operatora L_o. Tada važi jednakost:

$$\sum_{m=1}^{\infty}[\lambda_m-\lambda_{om}]=\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_{n-1}+\pi\alpha_n. \tag{3.50}$$

Objašnjenje. Svaka se svojstvena vrijednost ponavlja u spisku $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ (odnosno ponavlja se u spisku $\lambda_{o1}, \lambda_{o2}, \ldots$) onoliko puta koliko je njena algebarska višestrukost. Da bi pitanje numeracije postalo jasno, ponovimo iz prethodne tačke: u gornjim oznakama važi $\lambda_m-m^2\to C_o$, kao i $\lambda_{om}-m^2\to C_o$, takođe kad $m\to\infty$. Više od toga, $\lambda_m-\lambda_{om}=O(\frac{1}{m})$, v. odgovarajuće asimptotske izraze, formule (2.57) i (3.23).

Dokaz. Upoređujući formule za prvi trag, v. (3.47) i (3.25), zaključujemo da treba izračunati sumu

$$\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{j=1}^{2n}\frac{C_{1,j}}{2nm+j}.$$

Treba pokazati da ova suma konvergira, te se rezultat dobija kada se njoj doda $\pi\alpha_n$. Uzimamo u obzir da je $C_{1,j}=0$ za j parno, da je $C_{1,j}+C_{1,2n-j}=0$ i izraz za $C_{1,j}$, v. tačku 18. prošle glave i relaciju $C_{1,j}=2B_{2,j}$. Direktni račun daje da suma iznosi $\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_{n-1}$. Dokaz je završen.

U specijalnom slučaju $L_3=L_1$ možemo pisati

$$\sum_{m=1}^{\infty}[\lambda_m-\lambda_{om}]=1. \tag{3.51}$$

Ova je formula već izvedena u tački 10, za specijalni slučaj $q(x)\equiv 0$.

tačka 17. UTICAJ GLATKOSTI POTENCIJALNE FUNKCIJE q(x) NA SPEKTAR I NA TRAG.

Prvi korak: Ako $q(x)\in C^0[0,\pi]$, onda se za $\tilde{f}_1(x,s)$ umjesto (2.30) može pisati samo $\tilde{f}_1(x,s)=e^{isx}[1+O(\frac{1}{s})]$. Ako je, međutim $q(x)\in C^2[0,\pi]$, onda se može pisati $\tilde{f}_1(x,s)=e^{isx}[1+\frac{a_1(x)}{s}+\frac{a_2(x)}{s^2}+O(\frac{1}{s^3})]$. Slično za $\tilde{f}_2(x,s)$, v. [21].

Drugi korak: Ako je $q(x)\in C^0[0,\pi]$, onda za $\tilde{A}(x,s)$ možemo pisati samo $\frac{1}{2s^2}(2-e^{isx}-e^{-isx})+O(\frac{1}{s^3})$, tj. samo glavni sabirak. Ako $q(x)\in C^2[0,\pi]$ onda se pojavljuju još dva sabirka, tj. ostatak postaje $O(\frac{1}{s^5})$. Slično važi za $\tilde{B}(x,s)$, uporediti sa (2.45).

Treći korak: Ako je $q(x)\in C^0[0,\pi]$, onda je $\tilde{f}(s)=$

$-e^{is\pi}+e^{-is\pi}+O(\frac{1}{s})$, uporediti sa (2.49). Ako je $q(x)\in C^2[0,\pi]$ onda se pojavljuju, u asimptotskom izrazu za $\widetilde{f}(s)$, sabirci reda veličine $\frac{1}{s}$ i $\frac{1}{s^2}$, tj. ostatak iznosi $O(\frac{1}{s^3})$.

Četvrti korak: Ako je $q(x)\in C^0[0,\pi]$, onda se za rješenja jednačine $f(s)=0$ može napisati, uporediti sa tačkom 3. i formulom (2.54), $s_m=m+O(\frac{1}{m})$. Ako je $q(x)\in C^2[0,\pi]$, onda se u toj asimptotici dodaju sabirci reda veličine $\frac{1}{m}$ i $\frac{1}{m^2}$, tj. ostatak iznosi $O(\frac{1}{m^3})$.

Peti korak (posljednji): Ako je $q(x)\in C^2[0,\pi]$ onda funkcija $\Psi_\tau(\sigma)$, formula (3.44), dopušta analitičko produženje u poluravan $Re\,\sigma>-3$, pa se u teoremi 3.5. može staviti najviše p=2. Takođe je jasno, iz četvrtog koraka, kakva je preciznost asimptotskog izraza za $\lambda_m=s_m^2$. Dakle, pod ovom pretpostavkom važi teorema o prvom tragu.

Dokaz. Za prvi korak: preuzeto iz knjige [21]. Za drugi i treći korak: po pravilima za računanje sa "veliko o". Za četvrti korak: pročitati opšti Hornov postupak. Za peti korak: analitičko produžavanje na poluravan $Re\,\sigma>-3$ vrši se na osnovu ocjene reda veličine opšteg člana odgovarajućeg reda.

Zaključak: Tendencija: sa povećavanjem glatkosti funkcije q(x) povećava se preciznost asimptotskog izraza za svojstvene vrijednosti, formula (2.56), odnosno (2.57). Takođe se može izračunati više tragova (prvi, drugi, itd). Ako je q(x) beskonačno glatka, onda za svojstvene vrijednosti imamo asimptotski red i može se izračunati svaki trag (ma kog reda). Formulisaćemo posebno iskaz koji se odnosi na slučaj $q(x)\in C^2[0,\pi]$.

Teorema 3.11. Neka je funkcija q(x) dvaput neprekidno diferencijabilna i neka uzima kompleksne vrijednosti. Tada za svojstvene vrijednosti $\lambda_{m,j}$ operatora L_3 važi predstavljanje

$$\lambda_{m,j} = (2nm+j)^2 + c_0 + \frac{c_{1,j}}{(2nm+j)} + O\left(\frac{1}{m^2}\right),$$

gdje je $m=0,1,2,\ldots$, $j=1,\ldots,2n$, $m\to\infty$. Važi sljedeća formula (o prvom tragu)

$$\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{j=1}^{2n}\left[\lambda_{m,j} - (2nm+j)^2 - c_0 - \frac{c_{1,j}}{(2nm+j)}\right] = -\frac{1}{4}\left[q(0)+q(\pi)\right] + \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} q(x)\,dx + \pi d_n.$$

GLAVA 4.

RAZLAGANJE.

tačka 1. PREGLED SADRŽAJA OVE GLAVE.

U ovoj glavi takođe dopuštamo da funkcija q(x) uzima kompleksne vrijednosti, tj. operator L_0 ne mora da bude samokonjugovan. Za q(x) se, osim toga, pretpostavlja da je dovoljno glatka. Osnovni predmet proučavanja jeste operator L, koji je definisan na početku glave 2. U ovoj glavi biće izloženo sljedeće:

1) Biće naveden pojam WA (Vajnštajn-Aronšajn) determinante, koja opisuje spektar nekih klasa perturbacija.

2) Biće navedena druga varijanta tih formula - "determinanta perturbacije".

3) Konstruiše se rezolventa operatora L.

4) Dokazuje se da sve vrijednosti λ koje nisu svojstvene - pripadaju rezolventnom skupu operatora L.

5) Konstruiše se konjugovani operator L^*.

6) Perturbacija P izražava se kao funkcija polaznog operatora L_0.

7) Dokazuje se osnovna teorema o razlaganju u red po svojstvenim funkcijama i

8) Dokazuje se da svojstvene funkcije operatora L čine Risovu bazu prostora $L_2[0,\pi]=\mathcal{H}$.

tačka 2. PREGLED RANIJIH REZULTATA O OSNOVNOM OPERATORU L.

Koriste se rezultati iz glave 2. i glave 3. Pretpostavljaćemo da je q(x) klase $C[0,\pi]$. Operator L je definisan formulama (2.1), (2.2) i (2.3). U tim glavama pokazano je sljedeće:

1) što se tiče jednačine za određivanje svojstvenih vrijednosti operatora L - ona je zadata formulom (2.24), koja definiše karakterističnu jednačinu $f(s)=0$ (u terminima $s=\sqrt{\lambda}$). Oznake su uvedene u (2.11) i (2.12) za $A(x,s)$ i $B(x,s)$, odnosno (2.21) i (2.25) za $\mathcal{A}(s)$ i $\mathcal{B}(s)$; svuda treba smatrati da je $\alpha_n=0$, v. o svemu tome teoremu 2.1.

2) što se tiče svojstvenih vrijednosti, pokazano je da za njih važi sljedeće:

$$\lambda_m=m^2+O(1),$$

kad $m\to\infty$. Osim toga, ako se te svojstvene vrijednosti numerišu sa $m=1,2,\dots$, onda je numeracija "tačna" (nema ni viška ni manjka cjelobrojnih indeksa m). Ako je funkcija q ne samo neprekidna, već ima i neprekidan drugi izvod, onda za svojstvene vrijednosti važi preciznije:

$$\lambda_m=m^2+C_0+\frac{C_1(m)}{m}+O\left(\frac{1}{m^2}\right),$$

kad $m\to\infty$, gdje je $C_0=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi q(x)dx$, a $C_1(m)$ je periodična funkcija od m, sa periodom 2n (u specijalnom slučaju L_1, period iznosi 4). V. o svemu ovom tačku 17. prošle glave, teoremu 2.7. i teoremu 3.11 (o glatkosti funkcije q).

3) u tački 20. glave 2. određena je asimptotika svojstvenih funkcija i

4) defekt regularizacije ispitivanog operatora jednak je nuli, a isto važi i za Šturm-Liuvilov operator L_0. Pod ovim se podrazumijeva sljedeće: ako se velikoj svojstvenoj vrijednosti koja se nalazi blizu potpunog kvadrata m^2 prirodnog broja m dodijeli kao indeks upravo taj broj m - onda numeraciju treba početi upravo od m=1, tj. tada će numeracija biti tačna; pri ovom se svojstvena vrijednost algebarske višestrukosti k broji

k puta. V. o svemu ovom teoreme 3.8, 3.9. i 3.10. Ova napomena je pod 2) već bila uzeta u obzir.

Sve vrijeme u ovoj glavi ističe se i specijalni slučaj L_1.

tačka 3. NOVI IZRAZ ZA OPERATOR P.

U našim ispitivanjima korisno će poslužiti operator L_0, čija su spektralna svojstva poznata. Zato ćemo pokušati i operator P da dovedemo u vezu sa L_0. Radi se o konkretizaciji (na ispitivani slučaj) opšteg postupka za prikazivanje degenerisane perturbacije, v. npr. [8], str. 308, formula (6.5).

Radi lakšeg razmišljanja, opišimo prvo najjednostavniji slučaj: $q(x)\equiv 0$, $n=2$, $\alpha_1=1$. Neka je

$$f_o(x)=\frac{1}{2}x \text{ za } 0\leq x\leq\frac{\pi}{2} \quad \text{i} \quad f_o(x)=\frac{1}{2}(\pi-x) \text{ za } \frac{\pi}{2}\leq x\leq\pi$$

(vidimo da ova funkcija ima svojstvo da je $f_o''(x)=0$, gdje god $f_o''(x)$ postoji). Neposredni račun (parcijalna integracija) tada daje (imamo u vidu da je $u(0)=u(\pi)=0$, kao i, očito, $f_o(0)=f_o(\pi)=0$):

$$(L_ou,f_o)=\int_0^\pi -u''(x)\overline{f_o(x)}dx=u(\frac{\pi}{2}).$$

Slično, jedan korak dalje, ako se stavi

$$f_\alpha(x)=\frac{\pi-\alpha}{\pi}x \text{ za } 0\leq x\leq\alpha \quad \text{i} \quad f_\alpha(x)=\frac{\alpha}{\pi}(\pi-x) \text{ za } \alpha\leq x\leq\pi,$$

imamo

$$(L_ou,f_\alpha)=\int_0^\pi -u''(x)\overline{f_\alpha(x)}dx=u(\alpha).$$

U sljedećem koraku uzimamo u obzir i mogućnost prisustva potencijalne funkcije q(x). Tada treba pisati

$$f_1(x)=f_\alpha(x)-\overline{L_o^{-1}(q(x)f_\alpha(x))}$$

i dobijamo

$$(L_ou,f_1)=\int_0^\pi(-u''(x)+q(x)u)\overline{f_1(x)}dx=u(\alpha).$$

Na kraju, nas interesuje $\alpha=\frac{\pi}{n},\frac{2\pi}{n},\dots,\frac{(n-1)\pi}{n}$ i, s obzirom na linearnost operatora L_0 i P, izlazi da treba koristiti

$$f(x)=\sum_{k=1}^{n-1}\alpha_k\left[f_{x_k}(x)-\overline{L_0^{-1}(q(x)f_{x_k}(x))}\right],$$

tj. da tada imamo željeni izraz za perturbaciju:

$$Pu(x)=(L_0u,f)=\sum_{k=1}^{n-1}\alpha_k u(x_k).$$

Možemo pisati $Pu=(L_0u,f)g$, gdje je $g(x)\equiv 1$.

Operator L_0^{-1} jeste integralni operator, i u našem slučaju

$$L_0^{-1}(q(x)f_\alpha(x))=\int_0^\pi G_0(x,y)(q(y)f_\alpha(y))dy,$$

gdje $G_0(x,y)$ označava Grinovu funkciju operatora L_0, v. [21], str. 38. Ponovimo definiciju Grinove funkcije: ako je $L_0u_0(x)=u_1(x)$, onda je

$$\int_0^\pi G_0(x,y)u_1(y)dy=u_0(x).$$

Vidimo da se funkcija f(x) sastoji od dva sabirka. Prilikom konstruisanja prvog sabirka ($f_\alpha(x)$) takođe smo mogli da koristimo Grinovu funkciju i njena svojstva.

Pretpostavili smo da $\lambda=0$ nije svojstvena vrijednost operatora L_0 (čim smo napisali L_0^{-1}).

tačka 4. DRUGI NAČIN DA SE DEFINIŠE f(x).

Teorema 4.1. Neka je funkcija q(x) neprekidna, neka su njene vrijednosti kompleksni brojevi i neka $\lambda=0$ nije svojstvena vrijednost Sturm-Liuvilovog operatora L_0. Označimo sa $G_0(x,y)$ Grinovu funkciju operatora L_0. Neka je, po definiciji,

$$f(y)=\sum_{k=1}^{n-1}\overline{\alpha_k G_0(x_k,y)} \tag{4.1}$$

Tada za svako $u\in\mathcal{D}$ važi

$$Pu(x)=(L_0u,f)g.$$

gdje je g(x)=1 za svako x.

Dokaz. Za funkciju $f(x)$ iz prethodne tačke pokazali smo da ima svojstvo

$$(L_0u,f)=u(\frac{\pi}{2})$$

(up. sa formulom iz prethodne tačke u kojoj se pojavljuju u_0, u_1). Na osnovu definicije Grinove funkcije možemo za $G_0(\frac{\pi}{2},y)$ tvrditi

$$\int_0^{\pi}(L_0u(y))G_0(\frac{\pi}{2},y)dy=u(\frac{\pi}{2}).$$

Treba znati da operator L_0 (kada nula nije njegova svojstvena vrijednost) preslikava skup $\mathcal{D}$ uzajamno jednoznačno na (cio) prostor $\mathcal{H}$, te u gornje dvije formule $u(x)$ prolazi $\mathcal{D}$, a $L_0u(x)$ prolazi cio $\mathcal{H}$. Znači da je razlika $f(y)-G_0(\frac{\pi}{2},y)$ jednaka nuli, jer je jedino nula-vektor ortogonalan na cio prostor; uzeti u obzir glatkost funkcija koje se pojavljuju.

Napomena: Kako se radi o kompleksnom Hilbertovom prostoru, to se skalarni proizvod definiše kao

$$(f_1,f_2)=\int_0^{\pi} f_1(x)\overline{f_2(x)}dx.$$

Pisali smo u specijalnom slučaju L_1. Analogno se piše u opštem slučaju. Dokaz je završen.

tačka 5. INVERZIJA OPERATORA L.

Ispitajmo mogućnost rješavanja jednačine $Lu=F$, tj.

$$L_0u+(L_0u,f)g=F.$$

Pomnožimo napisanu jednačinu skalarno sa f (s desne strane):

$$(L_0u,f)+(L_0u,f)(g,f)=(F,f).$$

Pomoću posljednje relacije eliminisaćemo (L_0u,f) iz jednačine čija se rješivost ispituje, te ona postaje

$$L_0u+\frac{(F,f)}{1+(g,f)}g=F.$$

Kada se na obe strane primijeni L_o^{-1} onda izlazi u=...F..., tj. u se izražava preko F. Tako je inverzija izvršena. Ako umjesto slova F pišemo slovo u, onda se zaključak iskazuje ovako:

$$L^{-1}u=L_o^{-1}u-\frac{(u,f)}{1+(g,f)}L_o^{-1}g. \qquad (4.2)$$

Ovo izvođenje zasniva se na dvije pretpostavke: prvo: da L_o^{-1} postoji (tj. da nula nije svojstvena vrijednost od L_o) i drugo: da je $1+(g,f)$ različito od nule.

Ovo rasuđivanje je analogno postupku koji se primjenjuje za rješavanje Fredholmove integralne jednačine druge vrste sa degenerisanim jezgrom (to se jezgro prikazuje kao X(x)Y(y)).

Iz formule (4.2) zaključujemo da se $L_o^{-1}u$ može izračunati za svako $u\in\mathcal{H}$, tj. da je taj operator svuda definisan, te da je ograničen i da je integralni.

Tačka 6. IZRAZ ZA REZOLVENTU OPERATORA L.

(1) Slično kao u prethodnoj tački, polazimo od jednačine $Lu-\lambda u=F$, tj.

$$L_ou+(L_ou,f)g=F+\lambda u.$$

Prvo dejstvujemo na lijevu i desnu stranu sa $R_{o\lambda}=(L_o-\lambda E)^{-1}$:

$$u+(L_ou,f)R_{o\lambda}g=R_{o\lambda}F.$$

Drugo dejstvujemo sa L_o na lijevu i desnu stranu:

$$L_ou+(L_ou,f)L_oR_{o\lambda}g=L_oR_{o\lambda}F.$$

Treće množimo skalarno sa f (sa desne strane):

$$(L_ou,f)+(L_ou,f)(L_oR_{o\lambda}g,f)=(L_oR_{o\lambda}F,f).$$

Posljednja relacija (ovo je posljednji, četvrti, potez) služi za eliminisanje izraza (L_ou,f) iz ranije jednakosti $u+(L_ou,f)\times R_{o\lambda}g=R_{o\lambda}F$. Tako izlazi u=...F..., tj. u se izražava preko F. Tako je izvršena inverzija operatora $L-\lambda E$. Ako umjesto slova F pišemo slovo u, onda se zaključak iskazuje ovako:

$$(L-\lambda E)^{-1}u=R_{\lambda}u=R_{o\lambda}u-\frac{(L_oR_{o\lambda}u,f)}{1+(L_oR_{o\lambda}g,f)}R_{o\lambda}g. \qquad (4.3)$$

(2) Ovo rasuđivanje je zasnovano na pretpostavci da $R_{o\lambda}$ postoji, tj. da λ nije svojstvena vrijednost operatora L_o. Međutim, formula (4.3) važi i u takvom slučaju, na osnovu teoreme o jedinstvenosti za analitičke (operator-) funkcije. Navedena okolnost precizno je utvrđena u teoremi 4.3, koja slijedi.

(3) Posljednja formula pokazuje da je R_{λ} integralni operator. Označimo njegovo jezgro sa $G(x,y,\lambda)$. Mi tvrdimo da je $R_{\lambda}u_o(x)=u_1(x)$ ekvivalentno sa

$$u_1(x)=\int_0^{\pi} G(x,y,\lambda)u_o(y)dy.$$

Relacija (4.3) omogućuje da se napiše eksplicitni izraz za $G(x,y,\lambda)$. U tom izrazu prirodno učestvuje funkcija $G_o(x,y,\lambda)$ - jezgro integralnog operatora $(L_o-\lambda E)^{-1}$. Rezultat se formuliše ovako (u slučaju L_1):

$$G(x,y,\lambda)=G_o(x,y,\lambda)-\frac{1}{1+(L_oR_{o\lambda}g,f)}.G_o\left(\frac{\pi}{2},y,\lambda\right)\cdot\int_0^{\pi} g_o(x,\beta,\lambda)d\beta \qquad (4.4)$$

(imamo u vidu svojstvo "pretvaranja" $(L_oU,f)=U(\frac{\pi}{2})$), odnosno u opštem slučaju L:

$$G(x,y,\lambda)=G_o(x,y,\lambda)-\frac{1}{1+(L_oR_{o\lambda}g,f)}\cdot\left[\sum_{k=1}^{n-1}\alpha_k G_o(x_k,y,\lambda)\right]\cdot\int_0^{\pi} x$$
$$G_o(x,\beta,\lambda)d\beta. \qquad (4.5)$$

Izraz u imeniocu možemo da zapišemo ("pretvaranje") kao $1+\int_0^{\pi} G_o(\frac{\pi}{2},\beta,\lambda)d\beta$ (u slučaju L_1), odnosno

$$1+\sum_{k=1}^{n-1}\alpha_k\int_0^{\pi} G_o(x_k,\beta,\lambda)d\beta,$$

(4) Navodimo ovdje neke činjenice iz opšte teorije koje

se odnose na funkciju $G_o(x,y,\lambda)$, v. [21], str. 46. i 47. Tamo je pokazano da su njeni polovi upravo svojstvene vrijednosti od L_o, a da se ona prikazuje kao količnik dvije cijele funkcije, tj.

$$G_o(x,y,\lambda)=\frac{H_o(x,y,\lambda)}{\Delta_o(\lambda)}.$$

Pri ovom je $\Delta_o(\lambda)=0$ karakteristična jednačina za L_o, tj.

$$\Delta_o(\lambda)=\begin{vmatrix} f_1(x=0) & f_2(x=0) \\ f_1(x=\pi) & f_2(x=\pi) \end{vmatrix}$$

funkcije f_1 i f_2 uvedene su u tački 3. glave 2. (Košijeva rješenja za Šturm-Liuvilovu jednačinu). Izraz u brojiocu $H_o(x,y,\lambda)$ jeste

$$H_o(x,y,s^2)=\begin{vmatrix} f_1(x,s) & f_2(x,s) & g(x,y) \\ f_1(0,s) & f_2(0,s) & g(0,y) \\ f_1(\pi,s) & f_2(\pi,s) & g(\pi,y) \end{vmatrix},$$

gdje je definisano

$$g(x,y)=\pm\frac{1}{2}\begin{vmatrix} f_1(x,s) & f_2(x,s) \\ f_1(y,s) & f_2(y,s) \end{vmatrix},$$

Znak "plus" treba uzeti ako je $x\leqslant y$, znak "minus" treba uzeti ako je $x\geqslant y$.

(5) Ako se sve ovo uzme u obzir, onda se formula (4.4) može zapisati kao

$$G(x,y,\lambda)=\frac{H_o(x,y,\lambda)}{\Delta_o(\lambda)}-\frac{\Delta_o(\lambda)}{\Delta_o(\lambda)+\int_0^\pi H_o(\frac{\pi}{2},\beta,\lambda)\,d\beta}\cdot\frac{H_o(\frac{\pi}{2},y,\lambda)}{\Delta_o(\lambda)}\times\frac{\int_0^\pi H_o(x,\beta,\lambda)}{\Delta_o(\lambda)},$$

tj.

$$G(x,y,\lambda)=\frac{H_o(x,y,\lambda)\left[\Delta_o(\lambda)+\int_0^\pi H_o(\frac{\pi}{2},\beta,\lambda)\,d\beta\right]-H_o(\frac{\pi}{2},y,\lambda)\cdot\int_0^\pi H_o(x,\beta,\lambda)\,d\beta}{\Delta_o(\lambda)\left[\Delta_o(\lambda)+\int_0^\pi H_o(\frac{\pi}{2},\beta,\lambda)\,d\beta\right]},\qquad(4,6)$$

odnosno u opštem slučaju L:

$$G(x,y,\lambda)=\frac{H_o(x,y,\lambda)\cdot\Delta(\lambda)-H_o(y,\lambda)\int_0^\pi H_o(x,\beta,\lambda)\,d\beta}{\Delta_o(\lambda)\cdot\Delta(\lambda)},\qquad(4.7)$$

gdje su uvedene oznake

$$\mathcal{H}_o(y,\lambda)=\sum_{k=1}^{n-1} d_k H_o(x_k,y,\lambda), \tag{4.8}$$

$$\Delta(\lambda)=\Delta_o(\lambda)+\int_0^{\pi} \mathcal{H}_o(\beta,\lambda)d\beta. \tag{4.9}$$

tačka 7. VEZA NULA FUNKCIJA $\Delta_o(\lambda)$ I $\Delta(\lambda)$ SA SINGULARITETIMA FUNKCIJE $G(x,y,\lambda)$.

Teorema 4.2. Neka je funkcija $q(x)$ neprekidna i neka su njene vrijednosti kompleksni brojevi. Tada su jednačine $\Delta(s^2)=0$, formula (4.9), i $f(s)=0$, formula (2.24), ekvivalentne.

Dokaz. Izvedimo dokaz, radi kraćeg pisanja, za slučaj L_1. Opšti slučaj tretira se analogno. U slučaju L_1 pod $f(s)$ može se podrazumijevati funkcija zadata formulom (2.15).

Sve vrijeme ćemo (u dokazu) kao promjenljivu koja odgovara spektralnom parametru koristiti s, ovdje je $s^2=\lambda$.

Sabirak $B(\pi,s)$ poklapa se sa prvim sabirkom $\Delta_o(s^2)$ iz (4.9). Da se preostali djelovi tih dvaju formula poklapaju može se pokazati direktnim računom. Nad funkcijom $H_o(x,y,s^2)$ treba izvršiti dvoje: zamjenu $x=\frac{\pi}{2}$ (odnosi se na elemente prvog retka njegove determinante) i integrisanje po y od 0 do π (odnosi se na elemente posljednjeg stupca njegove determinante). Treba imati u vidu da je $f_1(0,s)=1$, $f_2(0,s)=0$, kao i definicije funkcija $A(x,s)$ i $B(x,s)$, ranije formule (2.11) i (2.12).

Dokaz je završen.

Teorema 4.3. Ako je λ_o svojstvena vrijednost od L_o. tj. $\Delta_o(\lambda_o)=0$, ali nije svojstvena vrijednost od L, tj. $\Delta(\lambda_o)\neq 0$, onda je λ_o regularna tačka funkcije $G(x,y,\lambda)$, formula (4.7). Za $q(x)$ se kao i u prethodnoj teoremi pretpostavlja da je neprekidna i da uzima kompleksne vrijednosti, λ_o je ma koji kompleksan broj. x i y su parametri, $x\in[0,\pi]$, $y\in[0,\pi]$.

Dokaz. Opet se, bez umanjivanja opštosti, možemo ograničiti na slučaj L_1. Takođe ćemo, kao i u prethodnoj teoremi, pisati s^2 umjesto λ (i s_0^2 umjesto λ_0).

Sprovešćemo dokaz u slučaju da je to s_0^2 prosta svojstvena vrijednost od L_0 (algebarske višestrukosti jedan), a slično se dokazuje i u slučaju veće višestrukosti (koja je, ipak, uvijek konačna - poznato iz opšte teorije, jer se radi o nulama cijele funkcije) (i u tom slučaju se koristi eksplicitni izraz za glavni dio odgovarajućeg Loranovog reda od G_0).

Kako je λ_0 prosta svojstvena vrijednost od L_0, to je, v. [21], str. 48,

$$G_0(x,y,\lambda)=-\frac{u_0(x)\overline{v_0(y)}}{\lambda-\lambda_0}+G_1(x,y,\lambda),$$

gdje je $G_1(x,y,\lambda)$ regularna funkcija u okolini tačke $\lambda=\lambda_0$, u_0 je svojstvena funkcija za L_0, v_0 je svojstvena funkcija za L_0^* (za $\overline{\lambda}_0$), još je $(u_0,v_0)=1$. Dakle, $H_0(x,y,\lambda)\sim C_0\cdot u_0(x)\cdot\overline{v_0(y)}$ kad $\lambda\to\lambda_0$, C_0 je neka konstanta (ne zavisi od λ) ($C_0\neq 0$);

U vezi brojioca formule (4.6) pišemo sljedeće procjene:

$$H_0(x,y,\lambda)\sim C_0\,u_0(x)\overline{v_0(y)},\quad \int_0^\pi H_0\left(\tfrac{\pi}{2},\beta,\lambda\right)d\beta\sim C_0\,u_0\left(\tfrac{\pi}{2}\right)\int_0^\pi\overline{v_0(y)}\,dy,$$

$$H_0\left(\tfrac{\pi}{2},y,\lambda\right)\sim C_0\,u_0\left(\tfrac{\pi}{2}\right)\overline{v_0(y)},\quad \int_0^\pi H_0(x,\beta,\lambda)\,d\beta\sim C_0\,u_0(x)\int_0^\pi\overline{v_0(\beta)}\,d\beta,$$

dakle se zaključuje da se brojilac te formule (4.6) ponaša kao $H_0(x,y,\lambda)\Delta_0(\lambda)$ ($\lambda\to\lambda_0$),

j. "singulariteti" (preciznije: nule) brojioca i imenioca se otiru; zaključak: $G(x,y,\lambda)$ nema singulariteta u tački λ_0. okaz je završen.

Dakle, formule (4.6) do (4.9) daju najbolju informaciju o ezolventi. Pomoću njih smo već izveli dva bitna zaključka.

Dalje zaključke izdvajamo u posebnu tačku.

tačka 8. ZAKLJUČCI O GRINOVOJ FUNKCIJI $G(x,y,\lambda)$ I O REZOLVENTI R_λ.

Teorema 4.4. Neka je funkcija $q(x)$ neprekidna na odsječku $[0,\pi]$ i neka su brojevi $q(x)$ kompleksni. Tada je funkcija $G(x,y,\lambda)$ meromorfna funkcija od λ, za svako fiksirano $(x,y)\in [0,\pi]\times[0,\pi]$. Kompleksni broj λ je pol te funkcije ako i samo ako je λ svojstvena vrijednost operatora L.

Dokaz. Prvo tvrđenje: na osnovu formule (4.7) i na osnovu toga što su $H_0(x,y,\lambda)$ i $\Delta_0(\lambda)$ cijele funkcije od λ. Drugo tvrđenje: v. prethodne dvije teoreme u kojima je analizirana situacija sa tačkama koje su mogući singulariteti. Dokaz je završen.

Teorema 4.5. Neka je funkcija $q(x)$ neprekidna na odsječku $[0,\pi]$ i neka su brojevi $q(x)$ kompleksni. Ako kompleksan broj λ nije svojstvena vrijednost operatora L, onda je operator $R_\lambda=(L-\lambda E)^{-1}$ svuda definisan (na cijelom $\mathcal{H}$), ograničen, integralni i njegovo jezgro $G(x,y,\lambda)$ definisano je formulom (4.7).

Dokaz teoreme sadržan je u materijalu izloženom u tački 6.

tačka 9. ZAKLJUČCI O SPEKTRU OPERATORA L.

Teorema 4.6. Ako kompleksni broj λ nije svojstvena vrijednost operatora L, onda λ pripada rezolventnom skupu operatora L.

Ova teorema predstavlja preformulaciju prethodne teoreme 4.5.

Dakle, neprekidni (i rezidualni) spektar operatora L je prazan skup. Prema tome, spajajući ovo sa ranijim zaključcima (teorema 2.7), utvrđeno je da se $\sigma(L)$ sastoji iz izolovanih svojstvenih vrijednosti konačne višestrukosti. U toj situaciji se kaže (riječ je o zatvorenom operatoru) da je skup $\sigma(L)$ diskretan (jer je još i prebrojiv i nema konačne tačke nagomilavanja), odnosno da je L operator s kompaktnom rezolventom ili da je L diskretan operator, v. knjige [8], [6]. Isto važi i za L_o (Šturm-Liuvilov operator). $\sigma(L)$ označava spektar operatora L.

tačka 10. IZVOĐENJE KARAKTERISTIČNE JEDNAČINE $\Delta(\lambda)=0$ POMOĆU WA-DETERMINANTE.

Način koji je u tački 5. primijenjen za inverziju operatora L poznat je u literaturi, o čemu će još biti riječi u sljedećoj glavi, a najpravilnije je reći da je to analogon postupka za rješavanje integralne jednačine sa degenerisanim jezgrom. U literaturi se tom postupku daju različiti nazivi. U knjizi [8] nazvan je Vajnštajn-Aronšajn determinantom (prve vrste), skraćeno WA-determinantom $\omega(\zeta)$. Ovdje ćemo ga ukratko opisati.

Neka je T zatvoreni operator u Banahovom prostoru X. (Apsolutno) degenerisani operator A reprezentuje se kao

$$Au=\sum_{j=1}^{m}(u,e_j)x_j,$$

gdje $x_j\in X$, $e_j\in X^*$. Relativno degenerisani operator A (relativno u odnosu na T) reprezentuje se kao

$$Au=\sum_{j=1}^{m}((T-\zeta_o)u,f_j)x_j,$$

gdje $f_j\in X^*$, ovdje je ζ_o fiksirana tačka iz rezolventnog skupa operatora T, u posljednjoj formuli $u\in\mathcal{D}(T)$. Oznake se uprošćavaju ako je prostor refleksivan i ako je Hilbertov. Mi ćemo dalje pisati $\zeta_o=0$.

<u>Teorema.</u> (iz knjige [8], str. 310)

$$\tilde{\nu}(\zeta, T+A) - \tilde{\nu}(\zeta, T) = \nu(\zeta, \omega),$$

za svako $\zeta \in \Delta$, Δ (dio kompleksne ravni) sastoji se od tačaka rezolventnog skupa i od izolovanih svojstvenih vrijednosti konačne višestrukosti operatora T, operator A je T-degenerisan, oznaka S=T+A, gdje su prethodno uvedene sljedeće tri oznake:

$$\tilde{\nu}(\zeta, T) = \begin{cases} 0, & \text{ako je } \zeta \text{ element rezolventnog skupa operatora } T, \\ a, & \text{ako je svojstvena vrijednost } \zeta \text{ izolovana tačka} \\ & \quad \text{u skupu } \sigma(T), \\ +\infty, & \text{u ostalim slučajevima,} \end{cases}$$

ovdje je a dimenzija (korijenog) podprostora na koji se (koso) projektuje (a je algebarska višestrukost svojstvene vrijednosti),

$$\nu(\zeta, \omega) = \begin{cases} k, & \text{ako je } \zeta \text{ nula funkcije } \omega \text{ reda } k, \\ -k, & \text{ako je } \zeta \text{ pol funkcije } \omega \text{ reda } k, \\ 0, & \text{u ostalim slučajevima,} \end{cases}$$

$$\omega(\zeta) = \omega(\zeta, T, A) = \det(1 + A(T - \zeta)^{-1}). \tag{4.10}$$

Izračunajmo odmah WA-determinantu (prve vrste) u našem slučaju (sravnjenje oznaka: $T=L_0$, $A=P$, $\zeta=\lambda$), determinanta će biti veličine jedan puta jedan. Dalje sravnjenje oznaka: $f_1=$? iz formule (4.1), $x_1=g$, gdje je $g(x)=1$ za svako $x\in[0,\pi]$.

S obzirom da perturbacija P prevodi svaku funkciju u(x) u konstantnu funkciju Pu(x), to se kao element baze na kojoj se zasniva determinanta $\omega(\zeta)$ uzima konstantna funkcija, tj. može se uzeti konkretno funkcija g.

Elementarno je da se operator $(L_0-\lambda)^{-1}$ izražava preko svoje Grinove funkcije $G_0(x,y,\lambda)$. Računamo determinantu

$$(L_0-\lambda)^{-1}g = \int_0^\pi G_0(x,y,\lambda)dy,$$

$$(L_0-\lambda)^{-1}g = \int_0^\pi G_0(\tfrac{\pi}{2},y,\lambda)dy,$$

na kraju

$$\omega(\lambda)=1+\int_0^{\pi} G_0\left(\frac{\pi}{2},y,\lambda\right)dy.$$

Pisali smo u specijalnom slučaju L_1, slično se piše u opštem slučaju L. Ova formula je saglasna sa formulom (4.4), odnosno teoremama 4.2. i 4.3.

Skicirajmo analizu. Razmotrimo prvo neki broj λ za koji važi $\omega(\lambda)=0$. Ako to λ ne pripada $\sigma(L_0)$, tj. ako je $\tilde{\nu}(\lambda,L_0)=0$, onda je $\tilde{\nu}(\lambda,L)>0$; zaključak: λ pripada $\sigma(L)$. Takođe, ako pripada $\sigma(L_0)$ onda pripada i $\sigma(L)$. Slično se razmatra i drugi slučaj: kada se razmatra λ takvo da je $\omega(\lambda)\neq 0$.

Dakle, WA-determinante daju potpuni odgovor na pitanje o odnosu između spektara dvaju operatora L_0 i L, ali daju samo djelimičan odgovor na pitanje o spektru operatora L (ako o L_0 imamo nedovoljne informacije).

tačka 11. <u>UMJESTO WA-DETERMINANTE MOŽE SE REĆI DETERMINANTA PERTURBACIJE.</u>

U knizi [5], str. 217, iskaz 4, nalazimo teoremu istog tipa, sa različitim uslovima teoreme, tj. iskaz se odnosi na izvjesne ograničene operatore. Ključnu ulogu u tom iskazu ima tzv. determinanta perturbacije $D_{B/A}(\mu)$. Razjasnimo ukratko o čemu je tamo riječ.

Operator A perturbiran je operatorom B-A. Ova determinanta može da bude veličine beskonačno puta beskonačno.

Neka su A i B ograničeni operatori u separabilnom Hilbertovom prostoru, pri čemu je B-A nuklearni operator. Neka je λ_0 zajednička normalna tačka i operatora A i operatora B.

<u>Teorema.</u> (iz knjige [5]) Red (analitičke funkcije od μ) determinante perturbacije

$$D_{B/A}(\mu)=\det\left[(E-\mu B)(E-\mu A)^{-1}\right]$$

u tački $\mu_0=1/\lambda_0$ jednak je razlici $\nu_{\lambda_0}(B)-\nu_{\lambda_0}(A)$, gdje su $\nu_{\lambda_0}(B)$ i $\nu_{\lambda_0}(A)$ - algebarske višestrukosti broja λ_0 respektivno za operatore B i A.

Lako se uvjeravamo da je ova formula formalno ekvivalentna sa sličnom formulom (4.10) iz prethodne tačke. Treba samo izvršiti sljedeću prostu transformaciju

$$(E-\mu B)(E-\mu A)^{-1}=(E-\mu A-\mu(B-A))(E-\mu A)^{-1}=$$
$$E-\mu(B-A)(E-\mu A)^{-1}$$

i umjesto T, A, ζ iz prethodne tačke pisati, po novim oznakama, A, B-A, $1/\mu$.

Tačka 12. IZRAZ ZA KONJUGOVANI OPERATOR L^*.

Pod određenim uslovima na linearni operator L, simboli "$*$" (za njegov konjugovani) i "-1" (za njegov inverzni operator) mogu da zamijene mjesta (tj. komutiraju). Navodimo odgovarajuću teoremu.

Teorema. (iz knjige [21], str. 142) Ako operator A, koji dejstvuje u kompleksnom separabilnom Hilbertovom prostoru, ima inverzni operator i ako su $\mathcal{D}(A)$ i $\mathcal{D}(A^{-1})$ gusti u tom Hilbertovom prostoru, onda je $(A^{-1})^*=(A^*)^{-1}$.

Mi smo u tački 5. već izvršili inverziju operatora L, v. formulu (4.2). Kako je operator L^{-1} integralni, to nema teškoća prilikom nalaženja njegovog konjugovanog. Tako je

$$(L^*)^{-1}u=(L^{-1})^*u=(L_0^{-1})^*u-\frac{(u,L_0^{-1}g)}{1+(f,g)}f=(L_0^{-1})^*u-\frac{((L_0^{-1})^*u,g)}{1+(f,g)}f. \tag{4.11}$$

Koristili smo sljedeću okolnost: ako je $Au=(u,f)g$, onda je $A^*u=(u,g)f$; provjerava se pomoću Lagranžove zagrade, tj. provjerava se da važi definicioni uslov $(Au,v)=(u,A^*v)$.

Prethodno smo se uvjerili da su sva tri uslova navedene teoreme ispunjena, i to: (1) da operator L ima inverzni (kada $\lambda=0$ nije njegova svojstvena vrijednost); (2) da je oblast definisanosti $\mathcal{D}$ operatora L (svuda) gust skup u $\mathcal{H}$ (poznato iz teorije Šturm-Liuvilovog operatora) i (3) da je njegov inverzni operator L^{-1} gusto definisan (taj L^{-1} je čak svuda definisan u $\mathcal{H}$).

Dobijeni eksplicitni izraz za inverzni operator od onog koji nas interesuje, omogućuje da se opiše operator koji nas interesuje, tj. L^*. Posljednja formula (4.11) pokazuje da je $(L^*)^{-1}$ prikazan kao kompozicija sljedeća dva operatora:

$$u \to (L_o^{-1})^* u, \quad u \to u - \frac{(u,g)}{1+(f,g)} f. \tag{4.12}$$

<u>Teorema 4.7.</u> Neka je funkcija $q(x)$ neprekidna na $[0,\pi]$, neka su brojevi $q(x)$ kompleksni i neka $\lambda=0$ nije svojstvena vrijednost ni za L_o ni za L. Dajemo sljedeći opis operatora L^*. Neka je $u(x)$ ma koji element prostora $\mathcal{H}=L_2[0,\pi]$. Neka je $v=(L_o^{-1})^* u$ (prolazi kroz skup $\mathcal{D}$). Neka je, konačno,

$$w = v - \frac{(v,g)}{1+(f,g)} f. \tag{4.13}$$

Oblast definisanosti operatora L^* sastoji se iz svih funkcija $w=w(x)$ i pri tome je $L^* w = L_o^* v$.

Dokaz je sadržan u ranijem tekstu.

<u>Napomena.</u> Uslovi $0 \notin \sigma(L_o)$ i $0 \notin \sigma(L)$ povlače da je $1+(f,g) \neq 0$. Ovo se lako zaključuje analizom uslova $Lu=0$ tj. $L_o u + (L_o u, f) g = 0$.

Posljednja teorema daje jasnu predstavu o $\mathcal{D}(L^*)$. Ako želimo eksplicitnu formulu za L^*, onda treba invertovati oba operatora iz (4.12) i primijeniti elementarnu formulu $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$, u vezi $\mathcal{D}(B)=\mathcal{H}$, $\mathcal{D}(B^{-1})=\mathcal{H}$. Što se tiče B^{-1} (inverznog od drugog operatora iz (4.12)), on se dobija trivijalno, i jeste

$$u \to u + (u,g) f.$$

Dakle,

$$L^{*}u=L_{o}^{*}[u+(u,g)f]. \qquad (4.14)$$

tačka 13. <u>O GLATKOSTI FUNKCIJA IZ OBLASTI DEFINISANOSTI KONJUGOVANOG OPERATORA L^{*}.</u>

Uočimo interesantnu okolnost: domen konjugovanog operatora uključuje i neke neglatke funkcije. Funkcija $w=w(x)$ iz $\mathcal{D}(L^{*})$, formula (4.13) u prethodnoj teoremi, prikazana je kao zbir glatkog dijela $v(x)$ ($\in \mathcal{D}$) i neke funkcije oblika

$$f_{o}(x)=\frac{1}{2}x,\ 0\leq x\leq\frac{\pi}{2} \quad i \ =\frac{1}{2}(\pi-x),\ \frac{\pi}{2}\leq x\leq\pi.$$

Dakle, te funkcije $w(x)\in\mathcal{D}(L^{*})$ su apsolutno neprekidne, a u konačno mnogo tačaka ($x=x_1,\dots,x_{n-1}$), uopšte uzev, nisu diferencijabilne.

tačka 14. <u>IZRAZ ZA SVOJSTVENE FUNKCIJE DVAJU OPERATORA L I L^{*}.</u>

Poznato je iz opšte teorije: ako je kompleksan broj λ normalna svojstvena vrijednost operatora L (koji je zatvoren, djeluje u Banahovom prostoru i ima konjugovani), onda je $\bar{\lambda}$ svojstvena vrijednost od L^{*}, v. npr. knjigu [8], str. 233. Pri tome se održavaju kako algebarska, tako i geometrijska višestrukost svojstvene vrijednosti.

U knjizi [21], str. 50, pokazano je za Grinovu funkciju $G(x,y,\lambda)$ običnog linearnog diferencijalnog operatora (na konačnom odsječku) sljedeće: u glavnom dijelu njenog Loranovog reda u okolini prostog pola λ_o pojavljuje se proizvod jedne funkcije od x i jedne funkcije od y (konjugovano). Pri tome su te funkcije upravo svojstvene, v. o tome detaljnije u dokazu teoreme 4.3. Pokazuje se da slična okolnost važi i za naš operator L. Ustvari, ta okolnost važi za vrlo široku klasu operatora.

Neka za izvjesno fiksirano λ funkcija $G(x,y,\lambda)$, formula (4.5), ima prosti pol. Neka dopunski $\lambda \notin \sigma(L_0)$. Uvedimo oznake

$$u_2(y)=\overline{\sum_{k=1}^{n-1} \alpha_k G_0(x_k,y,\lambda)} = (L_0 R_{0\lambda})^* f(y), \tag{4.15}$$

$$u_1(x)=\int_0^{\pi} G_0(x,\beta,\lambda)d\beta = R_{0\lambda} g(x). \tag{4.16}$$

Ove dvije funkcije pojavljuju se u brojiocu spomenute formule. Što se tiče druge varijante izraza za $u_2(y)$, formula (4.15), detaljno objašnjenje slijedi u tački 16, pod "osnovni proračun", formula (4.18).

Neposrednom provjerom uvjeravamo se da važi

$$L^* u_2 = \overline{\lambda} u_2,$$

tj. u_2 je svojstvena funkcija od L^* za svojstvenu vrijednost $\overline{\lambda}$. U ovom provjeravanju koristimo: (1) da svaki operator komutira sa svojom rezolventom i (2) da jednačina za određivanje svojstvenih vrijednosti za L^* glasi:

$$1+\overline{(L_0 R_{0\lambda} g,f)}=0.$$

Na isti način, neposrednom provjerom utvrđujemo da važi

$$Lu_1 = \lambda u_1.$$

Takođe je $u_1 \neq 0$, $u_2 \neq 0$.

Oslobodimo se sada dopunskog uslova $\lambda \notin \sigma(L_0)$, tj. razmotrimo slučaj kada se svojstvena vrijednost λ poklapa i za L_0 i za L. Tada se umjesto formule (4.5) upotrebljava detaljnija formula (4.7). Osim toga, treba upotrijebiti formulu za $G_0(x,y,\lambda)$, iz dokaza teoreme 4.3, o raspadanju reziduuma Grinove funkcije neperturbiranog operatora L_0. Istim postupkom dolazi se do ista dva zaključka: (1) da je reziduum funkcije $G(x,y,\lambda)$ proizvod dvije funkcije, od kojih jedna zavisi samo od x, a druga samo od y i (2) da je prva od tih funkcija svojstvena za L za λ, dok je druga od njih, poslije konjugovanja, svojstvena za L^* za $\bar{\lambda}$. Mogu se lako napisati eksplicitni izrazi za te dvije svojstvene funkcije.

tačka 15. <u>ZAKLJUČCI O POLOVIMA GRINOVE FUNKCIJE $G(x,y,\lambda)$ OPERATORA $L-\lambda E$.</u>

<u>Teorema 4.8.</u> Neka je funkcija $q(x)$ neprekidna i uzima kompleksne vrijednosti, neka $\lambda=0$ nije svojstvena vrijednost operatora L_o niti operatora L, neka su sve svojstvene vrijednosti operatora L_o i L proste (algebarska višestrukost iznosi jedan). Tada u svakom polu (po λ) Grinove funkcije $G(x,y,\lambda)$, formula (4.7), njen reziduum iznosi

$$-u_1(x)\overline{u_2(y)},$$

gdje je u_1 svojstvena funkcija za L za λ, a u_2 za L^* za $\bar{\lambda}$.

Dokaz je sadržan u izlaganju prethodne tačke. Eksplicitni izraz za u_1 i u_2 u baznom slučaju (kada nije došlo do poklapanja sa spektrom od L_o) dat je formulama (4.16) i (4.15). Eksplicitni izraz za u_1 i u_2 u slučaju poklapanja dat je u drugom dijelu tačke 18.

tačka 16. <u>OCJENA RASTA GRINOVE FUNKCIJE $G(x,y,\lambda)$.</u>

Razmotrimo u kompleksnoj λ-ravni niz rastućih kružnica Γ_k $(k=1,2,\ldots)$ sa zajedničkim centrom u $\lambda=0$ i poluprečnika $\frac{1}{2}\left[k^2+(k+1)^2\right]$. Koristimo sljedeće okolnosti:

<u>prvo:</u> za svojstvene vrijednosti polaznog operatora pokazano je da važi:

$$\lambda_{om}=m^2+O(1), \text{ tj. } s_{om}=m+O\left(\frac{1}{m}\right),$$

a za svojstvene vrijednosti osnovnog operatora L važi:

$$\lambda_m=m^2+O(1), \text{ tj. } s_m=m+O\left(\frac{1}{m}\right),$$

kad $m\to\infty$, ako $q\in C[0,\pi]$.

<u>drugo:</u> Iz navedenih formula slijedi da se (za sve dovoljno

velike k) originali (pri preslikavanju $\lambda=s^2$) (u gornjoj poluravni) svojstvenih vrijednosti polaznog operatora L_o nalaze na rastojanju ne manjem od $\delta=\frac{1}{4}$ od originala kružnica Γ_k. Uzeti u obzir da je $\sqrt{\frac{1}{2}[k^2+(k+1)^2]}\approx k+\frac{1}{2}$.

Zato ove kružnice Γ_k mogu da posluže za dokazivanje teoreme o spektralnom razlaganju za Šturm-Liuvilov operator L_o (operator drugog reda sa pojačano regularnim graničnim uslovima). Takvo dokazivanje, za obične diferencijalne operatore, izloženo je u knjizi [21], str. 92. Naša rasuđivanja u ovoj i u sljedećoj tački teku po analogiji sa tom teorijom razlaganja.

Takođe je jasno (iz asimptotskih formula za s_m) da se originali svojstvenih vrijednosti osnovnog operatora L nalaze na rastojanju ne manjem od $\delta=\frac{1}{4}$ od originala kružnica Γ_k, tj. važi iskaz kao za L_o.

<u>treće:</u> na tim kružnicama Γ_k važi sljedeća ocjena, v. [21], za Grinovu funkciju polaznog operatora L_o, za sve $x\in[0,\pi]$, $y\in[0,\pi]$:

$$|G_o(x,y,\lambda)|\leq\frac{M_o}{|s|} \tag{4.17}$$

(M_o - konstanta).

i <u>četvrto:</u> formule (4.7), koja daje direktnu vezu između te dvije Grinove funkcije.

<u>Osnovni proračun:</u>

Dokaz da je

$$\overline{G_o(\frac{\pi}{2},y,\lambda)}=(L_oR_{o\lambda})^* f(y). \tag{4.18}$$

Dovoljno je dokazati da se poslije skalarnog množenja (sa lijeve strane) ove jednakosti sa proizvoljnim $u\in\mathfrak{D}$ dobija tačna relacija (jer je $\overline{\mathfrak{D}}=\mathcal{H}$), tj. da važi

$$\int_0^\pi u(y)G_o(\frac{\pi}{2},y,\lambda)dy=(L_oR_{o\lambda}u,f).$$

Ovo je tačno zato što: na lijevoj strani imamo -

$R_{o\lambda}u(\frac{\pi}{2})$, po definiciji Grinove funkcije G_o, a na desnoj strani - imamo $R_{o\lambda}u(\frac{\pi}{2})$, na osnovu svojstva "pretvaranja" za f.

Pisali smo u specijalnom slučaju L_1, slično se piše u opštem slučaju L. Dokaz je završen.

Naš cilj u ovoj tački jeste da pokažemo da nejednakost tipa (4.17) važi i za funkciju G. Zato sprovodimo odgovarajuće majoracije.

Majoracije (takođe pišemo, jednostavnosti radi, za slučaj L_1), iz formule (4.4) (ocjene važe za $x\in[0,\pi]$, $y\in[0,\pi]$, $\lambda\in\Gamma_k$):

imenilac (na osnovu svojstva "pretvaranja" za f):

$$1+(L_oR_{o\lambda}g,f)=1+(R_{o\lambda}g)(\frac{\pi}{2})=1+\int_0^\pi G_o(\frac{\pi}{2},y,\lambda)dy,$$

tj. imenilac~ 1.

prvi množitelj u drugom sabirku na desnoj strani (u vezi osnovnog proračuna):

$$G_o(\frac{\pi}{2},y,\lambda)$$

i po modulu $\leq M_o/|s|$,

Drugi množitelj

$$\left|\int_0^\pi G_o(x,\beta,\lambda)d\beta\right|\leq\frac{\pi M_o}{|s|},$$

Opšta slika:

$$G(x,y,\lambda)\sim\frac{1}{s}+\frac{1}{1+\frac{1}{s}}\cdot\frac{1}{s}\cdot\frac{1}{s},$$

tj.

$$|G(x,y,\lambda)|\leq\frac{M}{|s|},$$

M je konstanta. Nepotrebno je pisati odgovarajuće formule u slučaju opšteg funkcionala, tj. u slučaju osnovnog operatora L. Formulisaćemo rezultat u obliku posebnog iskaza.

Teorema 4.9. Na kružnicama Γ_k (k=1,2,...) Grinova funkcija $G(x,y,\lambda)$ operatora $L-\lambda E$ zadovoljava nejednakost gdje je

$$c_k=\int_0^{\pi} c(y)\overline{q_k(y)}dy. \tag{4.21}$$

Dokaz. Razmotrimo niz integrala

$$I_k=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma_k}\frac{G(x,y,\lambda)}{\lambda}d\lambda. \tag{4.22}$$

Po teoremi o reziduumima,

$$I_k=G(x,y,0)+\sum_{\nu=1}^{k}\frac{H_\nu(x,y)}{\lambda_\nu}, \tag{4.23}$$

gdje je $H_\nu(x,y)$ - reziduum Grinove funkcije $G(x,y,\lambda)$ u odnosu na njen pol λ_ν (za koji se ovdje pretpostavlja da je prost). Unutar Γ_k ima tačno k polova (počev od nekog k_0), jer je poluprečnik$(\Gamma_k)\approx(k+\frac{1}{2})^2$, $\lambda_k\approx k^2$, defekt regularizacije=0. U vezi ocjene iz teoreme 4.9. slijedi da je $\lim\limits_{k\to\infty} I_k=0$, i to ravnomjerno po $(x,y)\in[0,\pi]\times[0,\pi]$.

Lako se vidi da je takođe $\lim\limits_{k\to\infty}\frac{1}{\lambda_k}H_k(x,y)=0$, takođe ravnomjerno. Naime, $H_k(x,y)=-p_k(x)\overline{q_k(y)}$ (teorema 4.8), a funkcije p_k i q_k su neprekidne.

Zato je $G(x,y,0)=-\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_k}H_k(x,y)$, takođe ravnomjerno, u vezi pretpostavke o normiranosti, tj. $(p_k,q_k)=1$.

Posljednju formulu pišemo u pogodnijem obliku

$$G(x,y,0)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_k}p_k(x)\overline{q_k(y)},$$

gdje (opet) red konvergira ravnomjerno, zbog razdvojenog oblika za reziduum H_k.

Ostaje samo da se napišu standardne formule $Lc(x)=d(x)$ i $c(x)=\int_0^{\pi}G(x,y,0)d(y)dy$ i da se tako završi dokaz.

Posebno o normiranju $(p_k,q_k)=1$, tj. pitanje reziduuma Grinove funkcije $G(x,y,\lambda)$ iz formule (4.5):

izvod po λ imenioca = izvod $1+(g,f)+\lambda(R_{o\lambda}g,f)$ =

$$(R_{o\lambda}g,f)+\lambda(R_{o\lambda}R_{o\lambda}g,f)$$

(na početku: $L_o=L_o-\lambda E+\lambda E$), a s druge strane, skalarni proizvod svojstvenih funkcija, prvobitnih, označenih kao $u_1(x)$ i $u_2(x)$, formule (4.16) i (4.15)

$$(u_1,u_2)=(R_{o\lambda}g,(L_oR_{o\lambda})^* f)=(L_oR_{o\lambda}R_{o\lambda}g,f)=$$

$$(R_{o\lambda}g,f)+\lambda(R_{o\lambda}R_{o\lambda}g,f).$$

Vidimo da se ove dvije vrijednosti poklapaju. Odatle slijedi da je

$$G(x,y,\lambda)=-\frac{p_k(x)\overline{q_k(y)}}{\lambda-\lambda_k}+\text{ regularni dio, kad } \lambda\to\lambda_k,$$

(slijedi po pravilu o reziduumu u prostom polu).

U slučaju da je pol $\lambda=\lambda_m$ takođe pol funkcije $G_o(x,y,\lambda)$ (slučaj poklapanja) (tada na cijelo pitanje utiče i prvi sabirak - na desnoj strani formule (4.5)) - treba prilagoditi ovo izvođenje (koje se odnosi na normiranost). Tada treba upotrijebiti, umjesto formule (4.5), detaljniju formulu (4.7). Eksplicitno je to urađeno u drugom dijelu sljedeće tačke.

Dokaz teoreme o razlaganju je završen.

Ističemo da je ravnomjerna konvergencija reda (4.20) poseban kvalitet, tj. nije obuhvaćena iskazom da sistem $\{p_1,p_2,\ldots\}$ čini bazu u linearnom skupu $\mathfrak{D}$ (niti time da se koeficijenti računaju preko svojstvenih funkcija od L^*).

<u>Komentar pretpostavke 1.</u> Ova pretpostavka ne predstavlja ograničenje, zbog mogućnosti translacije po spektralnom parametru λ (i okolnosti da je skup svojstvenih vrijednosti, kako za L_o, tako i za L, prebrojiv). Kako se to često radi u spektralnoj teoriji, mogu se razmatrati $L_o+\lambda_oE$ i $L+\lambda_oE$ umjesto L_o i L, gdje je λ_o pogodno izabrano.

Komentar pretpostavke 2. Ova pretpostavka može se drukčije iskazati ovako: algebarska višestrukost svake svojstvene vrijednosti operatora L_o (kao i L) je jednaka jedan, ili ovako: sve nule funkcije $\Delta_o(\lambda)$ (i $\Delta(\lambda)$) su proste. Iz asimptotike svojstvenih vrijednosti (tih dvaju operatora) λ_{om} i λ_m slijedi da se ova pretpostavka odnosi samo na konačan broj svojstvenih vrijednosti, jer su te vrijednosti (počev od nekog $m=m_o$) proste, a one sa indeksom m koji je $<m_o$ imaju konačnu višestrukost (važi i za L_o i za L).

tačka 18. PRIMJEDBA O ZAJEDNIČKOJ TAČKI SPEKTRA DVAJU OPERATORA L_o I L.

Prvi dio.

Neka kompleksan broj λ_o pripada $\sigma(L_o)$. Želimo da odredimo uslove pod kojima broj λ_o pripada i $\sigma(L)$. Označimo sa $u_o(x)$ funkciju za koju važi $L_o u_o=\lambda_o u_o$ (u_o - svojstvena funkcija). Možemo pisati da je $u_o(x)=f_2(x,s_o)$, gdje su $f_1(x,s)$ i $f_2(x,s)$ Košijeva rješenja jednačine $l_o(u)=\lambda u$, i gdje je kao i dosad $s_o^2=\lambda_o$, $s^2=\lambda$.

Treba pogledati karakteristične jednačine za L_o (to je $B(\pi,s)=0$) i za L (to je $f(s)=0$, funkcija iz formule (2.24)). Po uslovu je $B(\pi,s_o)=0$, tako da je - pod tom pretpostavkom - uslov $\lambda_o\in\sigma(L)$ ekvivalentan sa, v. (2.24),

$$A(\pi,s_o)\cdot\mathcal{B}(s_o)=0 \tag{4.24}$$

Imajući dalje u vidu formulu (2.11) koja definiše $A(x,s)$, kao i okolnost da je sada $f_2(\pi,s_o)=0$, posljednja relacija (4.24) dalje se razjašnjava, tj. pretvara se u

$$\int_0^{\pi} f_2(t,s_o)dt\cdot f_1(\pi,s_o)\cdot\sum_{k=1}^{n-1}\alpha_k f_2(x_k,s_o)=0, \tag{4.25}$$

gdje smo i $\mathcal{B}(s)$ transformisali. Nemoguće je da bude $f_1(\pi,s_o)$

$=0$, jer je već $f_2(\pi, s_o)=0$ (a $f_1 \neq f_2$, vidjeti njihove vrijednosti za $x=0$), tj. imali bismo kontradikciju sa teoremom o jedinstvenosti rješenja Košijevog zadatka za linearne diferencijalne jednačine. Dakle, (4.25) je ekvivalentno sa

$$\int_0^{\pi} f_2(t,s_o)dt \cdot \sum_{k=1}^{n-1} \alpha_k f_2(x_k,s_o)=0. \tag{4.26}$$

Ovo je definitivni oblik uslova koji se odnosi na situaciju $\lambda_o \in \sigma(L_o) \cap \sigma(L)$.

Ako je prvi faktor jednak nuli, tj. $\int_0^{\pi} f_2(t,s_o)dt=0$, drukčije zapisano $(u_o,g)=0$, onda se pokazuje da je $\overline{u_o}$ svojstvena funkcija operatora L^* (odgovara svojstvenoj vrijednosti $\overline{\lambda}_o$), u vezi ranijih formula $L_o^* v = L^* w$, $w=v-\frac{(v,g)}{1+(f,g)}f$, v. teoremu 4.7. u kojoj je dat opis konjugovanog operatora L^*. Trivijalno slijedi da je $L^* \overline{u_o} = \overline{\lambda}_o \overline{u_o}$.

Ako je drugi faktor jednak nuli, tj. $\sum_{k=1}^{n-1} \alpha_k u_o(x_k)=0$, drukčije zapisano $Pu_o=0$, onda se pokazuje da je u_o svojstvena funkcija operatora L (odgovara svojstvenoj vrijednosti λ_o). Ovdje je dokaz još prostiji: funkcional P na toj funkciji u_o se anulira (drukčije rečeno, perturbacija odsustvuje), pa je sigurno $Lu_o = \lambda_o u_o$.

<u>Drugi dio.</u>

Radi kraćeg pisanja. ograničićemo se na slučaj L_1.

Koristimo formulu (4.6) za $G(x,y,\lambda)$, odnosno nenumerisanu formulu ispred nje.

Takođe koristimo formulu iz te tačke (tačke6):

$$G_o(x,y,\lambda)=\frac{H_o(x,y,\lambda)}{\Delta_o(\lambda)},$$

kao i formulu iz tačke 7 (iz dokaza teoreme 4.3):

$$G_0(x,y,\lambda)=-\frac{u_0(x)\overline{v_0(y)}}{\lambda-\lambda_0}+G_1(x,y,\lambda),$$

kad $\lambda\to\lambda_0$.

Hoćemo (u ovom drugom dijelu) da pokažemo: (a) da je reziduum funkcije $G(x,y,\lambda)$ za $\lambda=\lambda_0$ jednak $-p_k(x)\overline{q_k(y)}$ i (b) da, samim tim, odgovara normiranje $(p_k,q_k)=1$.

Razdvajamo na tri mogućnosti (u vezi onog što je dosad rečeno u ovoj tački).

Prva mogućnost. Ako je prvi faktor jednak nuli, tj. $\int_0^\pi u_0(x)dx=0$.

Tada beskonačni dio (Loranovog reda) od $G(x,y,\lambda)$, tj. dio koji stoji u brojiocu (a u imeniocu stoji $\lambda-\lambda_0$) iznosi

$$b=-u_0(x)\overline{v_0(y)}-C\left(-u_0\left(\frac{\pi}{2}\right)\overline{v_0(y)}\right)\int_0^\pi G_1(x,\beta,\lambda_0)d\beta,$$

gdje je uvedena oznaka

$$C=\frac{\Delta_0'(\lambda_0)}{\Delta'(\lambda_0)}=\lim_{\lambda\to\lambda_0}\frac{\Delta_0(\lambda)}{\Delta_0(\lambda)+\int_0^\pi H_0\left(\frac{\pi}{2},\beta,\lambda\right)d\beta}=\frac{1}{1+\int_0^\pi G_1\left(\frac{\pi}{2},\beta,\lambda_0\right)d\beta}.$$

Dakle,

$$b=-\left[u_0(x)-C\,u_0\left(\frac{\pi}{2}\right)\int_0^\pi G_1(x,\beta,\lambda_0)d\beta\right]\cdot\left[\overline{v_0(y)}\right]=-U(x)\overline{V(y)},$$

a odavde se neposrednim računom uvjeravamo da je $LU=\lambda_0 U$ i $L^* V=\overline{\lambda}_0 V$. Takođe nije $U\equiv 0$ (v. koliko je $U(\frac{\pi}{2})$), niti $V\equiv 0$ (V je odranije svojstvena funkcija za L_0^*). Takođe, neposrednim računom, važi $(U,V)\neq 0$.

Time je dokaz za prvu mogućnost završen. Ovo je saglasno sa onim što je u prvom dijelu ove tačke rečeno o toj mogućnosti.

Druga mogućnost. Ako je drugi faktor jednak nuli, tj. $u_0(\frac{\pi}{2})=0$. Tretira se analogno.

Treća mogućnost. Presjek prve i druge, tj. $\int_0^\pi u_0(x)dx=0$ i $u_0(\frac{\pi}{2})=0$. Obuhvaćena je dosadašnjim tekstom.

Napomena. U vezi dokaza za (b), tj. dokaza da je uvijek $(p_k,q_k)\neq 0$. Može se (nezavisno od toga da li je došlo do poklapanja) doslovce iskoristiti odgovarajući dokaz za slučaj običnog diferencijalnog operatora, od trenutka kad je pokazano da je reziduum jednak proizvodu svojstvenih funkcija, v. knjigu [21], str. 49, počev od formule (39).

Taj dokaz za $(p_k,q_k)\neq 0$ može da posluži kako u slučaju poklapanja, tako i u osnovnom slučaju (kad nije došlo do poklapanja), što je dokazano ranije, pod "posebno", u prethodnoj tački.

Evo kako izgleda taj dokaz.

Pokazano je da važi

$$G(x,y,\lambda)=\frac{cp_k(x)\overline{q_k(y)}}{\lambda-\lambda_0}+G_2(x,y,\lambda),$$

kad $\lambda\to\lambda_0$, gdje je G_2 regularna funkcija u okolini tačke $\lambda=\lambda_0$ i gdje se cijela neodređenost ogleda u prisustvu zasad neodređenog kompleksnog broja c. Imamo sljedeće jednakosti

$$(\lambda-\lambda_0)\int_0^\pi G(x,y,\lambda)p_k(y)dy=cp_k(x)\int_0^\pi p_k(y)\overline{q_k(y)}dy+(\lambda-\lambda_0)\int_0^\pi G_2(x,y,\lambda)p_k(y)dy,$$

zatim (u vezi $(L-\lambda E)p_k=(\lambda_0-\lambda)p_k$)

$$-p_k(x)=cp_k(x)\int_0^\pi p_k(y)\overline{q_k(y)}dy+(\lambda-\lambda_0)\int_0^\pi G_2(x,y,\lambda)p_k(y)dy,$$

i (sada uzimamo $\lim\limits_{\lambda\to\lambda_0}$)

$$-p_k(x)=cp_k(x)\int_0^\pi p_k(y)\overline{q_k(y)}dy,$$

odakle je najzad $c=-(p_k,q_k)^{-1}$. Završena je napomena.

Time je pokazano i (a) i (b).

tačka 19. SPECIJALNI SLUČAJ $q(x)\equiv 0$.

U ovom slučaju stiče se još jasniji uvid u razne elemente ovog izlaganja. Radi kraćeg pisanja, ograničimo se na slučaj $L_1=L_0+P_1$, tj. $Lu=L_0u+u(\frac{\pi}{2})$. Grinova funkcija operatora $L_0-\lambda E$ jeste (ovdje je $s^2=\lambda$)

$$G_0(x,y,\lambda)=\frac{1}{s\sin s\pi}\cdot\begin{cases}\sin sx\sin s(\pi-y), & 0\leq x\leq y\leq\pi,\\ \sin sy\sin s(\pi-x), & 0\leq y\leq x\leq\pi;\end{cases} \tag{4.27}$$

a Grinova funkcija operatora $L-\lambda E$ jeste, prema formuli (4.4),

$$G(x,y,\lambda)=G_0(x,y,\lambda)-\frac{1}{1+\int_0^{\pi}G_0(\frac{\pi}{2},\beta,\lambda)d\beta}\cdot G_0(\frac{\pi}{2},y,\lambda)\cdot\int_0^{\pi}G_0(x,\beta,\lambda)\,d\beta, \tag{4.28}$$

Karakteristična jednačina $f(s)=0$ ovog operatora L data je eksplicitno u (3.36). Vidimo da su $s=2,4,6,\ldots$ rješenja te jednačine (dolazi do poklapanja sa svojstvenim vrijednostima od L_0, treba uporediti sa tekstom prethodne tačke). Za odgovarajuće svojstvene funkcije $u_0(x)=\sin(sx)$, tj. $\sin 2x$, $\sin 4x$, $\sin 6x,\ldots$ ispunjeno je i $\int_0^{\pi}u_0(t)dt=0$, kao i $P_1u_0=u_0(\frac{\pi}{2})=0$ (tj. i prvi i drugi faktor iz (4.26) jednaki su nuli), tako da su te funkcije $u_0(x)$ svojstvene i za L i za L^* (za svojstvene vrijednosti $2^2,4^2,6^2,\ldots$).

tačka 20. SVOJSTVENE FUNKCIJE OPERATORA L OBRAZUJU RISOVU BAZU.

(1) Navodimo na početku ove tačke nekoliko činjenica iz opšte teorije.

Za pojmove koji se odnose na baze prostora pogledati npr. knjigu [5], glava VI.

Definicija. (Risove baze) Za bazu $e_1,e_2,\ldots$ Hilbertovog prostora $\mathcal{H}$ kažemo da je Risova, ako postoji konstanta $\gamma\geq 1$, tako da je za svako $h\in\mathcal{H}$ ispunjeno

$$\gamma^{-1}\sum_{n=1}^{\infty}|c_n|^2\leq\|h\|^2\leq\gamma\sum_{n=1}^{\infty}|c_n|^2,$$

gdje je c_n koeficijent razlaganja (tj. $h=c_1e_1+c_2e_2+\ldots$).

Definicija: baze bezuslovne konvergencije: ne gubi svojstvo da je baza, pri ma kakvoj permutaciji svojih elemenata.

Teorema. Ako je $\{e_n\}_1^\infty$ baza bezuslovne konvergencije i ako je $0 < m \leq \|e_n\| \leq M < +\infty$ (za n=1,2,...), onda je to Risova baza.

Definicija (kvadratne bliskosti). Za nizove (vektora iz $\mathcal{H}$) α_n i β_n kažemo da su kvadratno bliski, ako je konvergentan sljedeći red

$$\sum_{n=1}^{\infty} \| \alpha_n - \beta_n \|^2. \tag{4.29}$$

Teorema (iz knjige [5], str. 382) (teorema N.K. Bari). Svaki ω-linearno nezavisni sistem $\{g_j\}_1^\infty$ koji je kvadratno blizak bazi $\{\psi_j\}_1^\infty$ ekvivalentnoj ortonormiranoj i sam jeste baza ekvivalentna ortonormiranoj.

Objašnjenje. "Baza ekvivalentna ortonormiranoj" i "Risova baza" su sinonimi.

Definicija (ω-linearne nezavisnosti). Niz vektora $\{g_j\}$ naziva se ω-linearno nezavisnim, ako je jednakost $\sum_{j=1}^{\infty} c_j g_j = 0$ nemoguća pri $0 < \sum_{j=1}^{\infty} |c_j|^2 \cdot \|g_j\|^2 < \infty$.

(2) Sljedeću teoremu preuzimamo iz rada [20], ona predstavlja glavni rezultat tog rada. Slično tvrđenje dokazano je i u radu [10].

Teorema. Razmatramo normirane korijene funkcije diferencijalnog operatora n-tog reda zadatog diferencijalnim izrazom

$$l(u) = u^{(n)} + \sum_{k=1}^{n} a_k(x) u^{(n-k)},$$

koeficijenti a_k imaju svojstvo da $a_k^{(n-k)} \in L_1[a,b]$, i graničnim uslovima $U_1(u)=0, \dots, U_n(u)=0$, koji su međusobno linearno nezavisni. Te funkcije obrazuju Risovu bazu (kompleksnog) prostora $L_2[a,b]$, ako su ti granični uslovi pojačano regularni (a,b -

realni brojevi).

Mi ćemo dati definiciju pojma pojačane regularnosti samo u slučaju koji nas interesuje, tj. u slučaju operatora drugog reda

$$l(u)=-u''+q(x)u,\ U_1(u)=u(0),\ U_2(u)=u(\pi).$$

Opšta definicija može se pročitati u knjizi [21]. Preciznije, mi ćemo verifikovati da su navedeni granični uslovi pojačano regularni, tj. da važi

$\theta_{-1}\neq 0$ i $\theta_1\neq 0$

(tada su regularni), kao i

$\theta_0^2-4\,\theta_1\theta_{-1}\neq 0.$

Brojevi θ_{-1}, θ_0, θ_1 definisani su sljedećom jednakošću:

$$\frac{\theta_{-1}}{s}+\theta_0+\theta_1 s=\begin{vmatrix}(\alpha_1+s\beta_1)\omega_1^{k_1} & (\alpha_1+\frac{1}{s}\beta_1)\omega_2^{k_1}\\ (\alpha_2+s\beta_2)\omega_1^{k_2} & (\alpha_2+\frac{1}{s}\beta_2)\omega_2^{k_2}\end{vmatrix}.$$

Nova slova pojavljuju se iz sljedećih njihovih definicionih relacija (ovdje je $k_1=0$, $k_2=0$):

$$U_1(u)=\alpha_1 u(0)+\beta_1 u(\pi),\ U_2(u)=\alpha_2 u(0)+\beta_2 u(\pi),$$

tj. imamo $\alpha_1=1$, $\beta_1=0$, $\alpha_2=0$, $\beta_2=1$ (u našem slučaju), dok je $\omega_1=i$, $\omega_2=-i$ (korijeni iz -1) (ako se stavi $\omega_1=-i$, $\omega_2=i$, ništa se neće izmijeniti).

Odavde je $(\theta_{-1},\theta_0,\theta_1)=(-1,0,1)$. Dakle, konačno, tačne su sve tri relacije $\theta_{-1}\neq 0$, $\theta_1\neq 0$, $\theta_0^2-4\theta_1\theta_{-1}\neq 0$.

(3) Formulišimo teoremu koja se odnosi na operator L koji mi ispitujemo.

<u>Teorema 4.11.</u> (o Risovoj bazi). Neka su ispunjeni uslovi (i neka su usvojene oznake) prethodne teoreme 4.10. Tada sistem svih svojstvenih funkcija $P_1(x), P_2(x), \dots$ čini Risovu bazu (kompleksnog) prostora $\mathcal{H}=L_2[0,\pi]$. Ovdje je uvedena oznaka $P_k(x)=p_k(x)/\|p_k(x)\|$.

<u>Dokaz.</u> Mi ćemo pod $\{\psi_n\}$ podrazumijevati svojstvene

funkcije Šturm-Liuvilovog operatora L_o. Već je rečeno da one čine Risovu bazu. Pod $\{g_n\}$ podrazumijevaćemo svojstvene funkcije osnovnog operatora L. Prema navedenoj teoremi, treba dokazati da je sistem $\{g_n\}$ ω-linearno nezavisan i da je kvadratno blizak sistemu $\{\psi_n\}$, pa će dokaz biti završen.

Podrazumijeva se da su ψ_n i g_n numerisani tako da ψ_n, odnosno g_n, odgovara svojstvenoj vrijednosti λ koja je bliska vrijednosti n^2. Zasad nismo precizno odredili kolike će biti norme tih funkcija.

Dokaz za ω-linearnu nezavisnost.

ω-linearna nezavisnost sistema $\{P_1,P_2,\dots\}$ slijedi odmah, zato što postoji biortogonalan sistem $\{Q_1,Q_2,\dots\}$ korespondiranih svojstvenih funkcija konjugovanog operatora L^*. Detaljnije, neka je

$c_1P_1+c_2P_2+\dots=0.$

Množimo skalarno sa Q_1 (sa desne strane),

$c_1(P_1,Q_1)+c_2(P_2,Q_1)+\dots=0$, tj. $c_1\cdot 1+c_2\cdot 0+\dots=0$, tj. $c_1=0$.

Ako bismo skalarno pomnožili sa Q_2, onda bismo dobili $c_2=0$. Dakle, svi c_i su jednaki nuli. Da je $(p_k,q_k)\neq 0$ (za svako k), pokazano je u tački 17, pod "posebno", i u tački 18 (u slučaju poklapanja). Dakle, dokazana je ω-linearna nezavisnost niza g_n.

Dokaz za kvadratnu bliskost.

Označimo sa $\lambda_{on}=s_{on}^2$ i $\lambda_n=s_n^2$ svojstvene vrijednosti za L_o i L redom, korespondirane svojstvenim funkcijama ψ_n i g_n redom. Za te svojstvene vrijednosti važi, kao što je ranije pokazano, kad $n\to\infty$,

$$\lambda_{on}=n^2+O(1),\ s_{on}=n+O\left(\frac{1}{n}\right),\ \lambda_n=n^2+O(1),\ s_n=n+O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Sada ćemo izvesti procjene za svojstvene funkcije. Za L_o ta funkcija je

$B(x,s_{on})$,

a za L, v. formulu (2.28),

$B(x,s_n)-\mathcal{A}(s_n)B(x,s_n)+A(x,s_n)\mathcal{B}(s_n)=G_n(x)$,

pri čemu posljednja formula važi za sve dovoljno velike n, tj. kada je $1-\mathcal{A}(s_n)\neq 0$.

Napišimo ocjene koje se odnose na funkcije $A(x,s)$, $\mathcal{A}(s)$, $B(x,s)$, $\mathcal{B}(s)$, za slučaj $|\mathrm{Im}s|\leq$const, kad $s\to\infty$, a potiču od ocjena za $\tilde{A}(x,s)$, $\tilde{B}(x,s)$, $W(s)$, formule (2.44), (2.45), (2.47):

$$|A(x,s)|\leq \frac{C}{|s^2|}\ , \ |\mathcal{A}(s)|\leq \frac{C}{|s^2|},$$

C - konstanta, za svako $x\in[0,\pi]$,

$$B(x,s)=\frac{1}{-2is}(-e^{isx}+e^{-isx})+O\left(\frac{1}{s^2}\right),\quad \mathcal{B}(s)=\sum_{\nu=1}^{n-1}\alpha_\nu B(x_\nu,s),$$

za svako $x\in[0,\pi]$, znak "veliko o " važi uniformno po x.

Opredjelimo se sada za sljedeće normiranje

$$\Psi_n(x)=nB(x,s_{on}),\ g_n(x)=nG_n(x). \tag{4.30}$$

Treba da sa gornje strane ocijenimo $\|\Psi_n-g_n\|$. Pišemo prvu majoraciju:

$$\|\Psi_n-g_n\|\leq n\|B(x,s_{on})-B(x,s_n)\|+n\|-\mathcal{A}(s_n)B(x,s_n)+A(x,s_n)\times$$

$$\mathcal{B}(s_n)\|. \tag{4.31}$$

Procjenjujemo prvi sabirak na desnoj strani ove formule (4.31):

$$n|B(x,s_{on})-B(x,s_n)|=n\left|\frac{\sin(s_{on}x)}{s_{on}}\mp\frac{\sin(s_{on}x)}{s_n}-\frac{\sin(s_nx)}{s_n}\right|\times$$

$$(1+o(1)),$$

odavde

$$n|B(x,s_{on})-B(x,s_n)|=O\left(\frac{1}{n}\right),\quad n\|B(x,s_{on})-B(x,s_n)\|=O\left(\frac{1}{n}\right),$$

jer je $|\mathrm{Im}\,s_n|\leq\frac{C}{n}$, $|\mathrm{Im}\,s_{on}|\leq\frac{C}{n}$, $|s_{on}-s_n|\leq\frac{C}{n}$.

Što se tiče drugog sabirka (ovdje takođe $n\to\infty$):

$$n|-\mathcal{A}(s_n)B(x,s_n)+A(x,s_n)\mathcal{B}(s_n)|\leq$$

$$n\left[O\left(\frac{1}{n^2}\right)O\left(\frac{1}{n}\right)+O\left(\frac{1}{n}\right)O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]=O\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

odavde

$$n\|-A(s_n)B(x,s_n)+A(x,s_n)B(s_n)\|=O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Dakle,

$$\|\Psi_n-g_n\|=O\left(\frac{1}{n}\right)+O\left(\frac{1}{n^2}\right)=O\left(\frac{1}{n}\right). \tag{4.32}$$

i red

$$\sum_{n=1}^{\infty}\|\Psi_n-g_n\|^2$$

konvergira, jer se opšti sabirak ponaša kao $O(\frac{1}{n^2})$, te su nizovi $\{\Psi_n\}$ i $\{g_n\}$ kvadratno bliski.

Time je dokazana kvadratna bliskost.

Niz $\{\Psi_n\}$ je skoro normiran (a sam niz $\{B(x,s_{on})\}$ nije, zato je bilo potrebno množenje sa n), jer

$$\Psi_n(x)=nB(x,s_{on})\sim\sin(s_{on}x)\sim\sin(nx)$$

i

$$\|\sin(nx)\|=\sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

za svako n. Niz $\{g_n\}$ je takođe skoro normiran (sve norme su ograničene odozdo i odozgo), na osnovu (4.32).

Time je dokaz teoreme završen.

Dakle, sistem svojstvenih funkcija P_1, P_2,... operatora L ima sljedeća svojstva: (1) da je kompletan u $\mathcal{H}$, (2) da čini bazu prostora $\mathcal{H}$, (3) da čini Risovu bazu prostora $\mathcal{H}$ i samim tim (4) da čini bazu bezuslovne konvergencije prostora $\mathcal{H}$. Jedino nema svojstvo da čini ortogonalnu bazu prostora $\mathcal{H}$, što se vidi već iz najprostijih konkretnih primjera operatora L.

GLAVA 5.

TRAG - APSTRAKTNI SLUČAJ.

tačka 1. UVOD - PREGLED REZULTATA IZ TEORIJE TRAGOVA.

Teorija regularizovanih tragova zadataka generisanih običnim diferencijalnim izrazima na konačnom odsječku u današnje vrijeme je praktično završena. Ova okolnost u mnogom je povezana sa činjenicom, otkrivenom u radu [14], v. takođe rad [16]. Ta sw činjenica sastoji u sljedećem: dobijanje formula za trag u ovom slučaju svodi se na ispitivanje nekih cijelih funkcija, koje imaju potpuno određenu asimptotsku strukturu. Ta je struktura uslovljena konkretnim oblikom fundamentalnog sistema rješenja diferencijalnih jednačina. Sadržaj rada [14] izložili smo na početku glave 3, tačke 1, 2. i 4. Ipak, već u ovoj situaciji mi se srećemo sa faktom da nule ispitivanih cijelih funkcija nemaju dovoljno pravilno asimptotsko ponašanje. Up. sa tačkom 3. glave 3, tzv. nesrazmjerni slučaj kod indikatorskog dijagrama, v. rad [26]. Zato postaje neophodno da se takvi zadaci razmatraju s tačke gledišta teorije perturbacija.

Situacija se znatno komplikuje prilikom razmatranja zadataka generisanih diferencijalnim operatorima s parcijalnim izvodima. To je prije svega povezano sa složenom strukturom spektra, pa zato i funkcija od spektralnog parametra λ, koje se pojavljuju prilikom ispitivanja zadataka te vrste.

U današnje vrijeme teorija regularizovanih tragova (apstraktnih) diskretnih operatora razvijena je srazmjerno malo. Među takvim radovima treba uočiti rad [12] u kome su formule za trag izvedene u slučaju samokonjugovanih nuklearnih perturbacija i rad [1] u kome je teorija proširena na slučaj disipativnih perturbacija. U radu [27] dat je algoritam za dobijanje formule za trag široke klase diskretnih operatora (drugi naziv: operator s kompaktnom rezolventom, v. u knjizi [8] ili u knjizi [6]).

Treba podvući da i teoretsko-funkcionalni metodi (metodi teorije funkcija) imaju, kao i dosad, važnu ulogu prilikom ispitivanja spektralnih zadataka za apstraktne operatore. Više od toga, upravo ujedinjavanje metoda teorije operatora i metoda teorije funkcija dovodi do najsadržajnijih rezultata. Kao primjer za ovo mogu da posluže duboka ispitivanja u teoriji tragova operatora koji imaju neprekidni spektar, v. npr. radove [3], [30].

tačka 2. UVOD - PREGLED REZULTATA OVE GLAVE.

Ističemo tri osnovma cilja (precizne definicije biće date u daljem tekstu):

1) Navedena je formula za rezolventu konačno-dimenzione perturbacije diskretnog operatora (poznato iz opšte teorije).

2) Za tu perturbaciju (konačno-dimenzionu, od diskretnog samokonjugovanog operatora) izvedena je eksplicitna formula za regularizovani trag, gdje se regularizacija vrši pomoću svojstvenih vrijednosti neperturbiranog operatora (relativni trag) i

3) Navedeni su primjeri iz običnih diferencijalnih operatora i iz diferencijalnih operatora s parcijalnim izvodima.

Teoriji konačno-dimenzionih perturbacija posvećena je opširna bibliografija. Na primjer, u monografiji [8] ta teorija koristi se prilikom ispitivanja raznih zadataka teorije rasijanja. Dalje, u radu [31] je pokazano da se zadatak o razlaganju po svojstvenim funkcijama diferencijalnih operatora na konačnom odsječku svodi na izučavanje konačno-dimenzionih perturbacija Volterovog operatora. U teoriji tragova, konačno-dimenzione perturbacije (ograničene) ispitivane su u radu [12] spomenutom u prethodnoj tački.

Navodimo i rezultate iz tragova u slučaju ograničene perturbacije P, rad [28] (perturbira se zatvoreni operator T), kao i rad [25] (perturbira se diskretni samokonjugovani operator T).

U radu [7] izračunat je relativni trag u slučaju neograničene perturbacije P, a osnovni operator T je diskretan i samokonjugovan. Nametnuti su uslovi na operator $PT^{-\nu}$ $(0 \leq \nu < \frac{1}{2})$ i na red $\sum_{k=1}^{\infty} (Pv_k, v_k)$ (v_k - svojstvene funkcije od T).

U prethodnoj glavi 4, je pokazano da se i naš operator L (koji predstavlja osnovni predmet ispitivanja dosad) može prikazati kao jednodimenziona (neograničena) perturbacija Šturm-Liuvilovog operatora L_o (v. tačku 3). Rezultati o tragu za operator L (tj. materijal izložen u glavi 3) objavljeni su u radovima [17] (odnosi se na specijalni slučaj L_1) i [18] (odnosi se na opšti slučaj L_3).

Rezultati izloženi u ovoj (posljednjoj) glavi objavljeni su u radu [29].

tačka 3. POSTAVKA ZADATKA OVE GLAVE.

(1) Neka je $\mathcal{H}$ kompleksni separabilni Hilbertov prostor. Neka je L_o samokonjugovani diskretni operator koji dejstvuje u $\mathcal{H}$. Označimo sa $\mathcal{D}$ domen operatora L_o.

Ponovimo definiciju diskretnog operatora, knjiga [8], str. 237. Za zatvoreni operator T koji dejstvuje u $\mathcal{H}$ kažemo da je diskretan (sinonim: da je operator s kompaktnom rezolventom), ako bar za neko kompleksno ζ postoji $(T-\zeta E)^{-1}$ koji je kompaktan.

Poznato je iz opšte teorije sljedeće o spektru diskretnog operatora T: spektar jeste prebrojiv skup izolovanih normalnih (konačne algebarske višestrukosti) svojstvenih vrijednosti.

Takođe je poznato da ako je diskretni operator T ograničen, onda je prostor $\mathcal{H}$ konačno-dimenzion.

Diskretni operatori često se sreću u matematičkoj fizici.

(2) Mi ćemo razmatrati izvjesnu perturbaciju operatora L_o. Evo pregleda nekih tipova perturbacija, opet po knjizi [8].

Opšti oblik relativno degenerisanog operatora A (u odnosu na zatvoreni operator T), gdje T dejstvuje iz Banahovog prostora X u Banahov prostor Y, jeste

$$Au=\sum_{j=1}^{m} g_j'[u]y_j', \tag{5.1}$$

gdje su g_j' linearne forme na G(T), ovdje G(T) označava grafik operatora T, a $y_j' \in Y'$.

Ako su X i Y Hilbertovi prostori, onda opšti oblik jeste

$$Au=\sum_{j=1}^{m} ((T-\zeta_o)u,f_j)x_j, \tag{5.2}$$

gdje je ζ_o - fiksirana tačka iz rezolventnog skupa operatora T, a $f_j \in Y'$, $x_j \in Y$. Može se uzeti, na primjer, $\zeta_o=C$.

Perturbacija navedenog tipa (relativno degenerisana) predstavlja specijalni slučaj relativno kompaktne perturbacije, koja sa svoje strane predstavlja specijalni slučaj relativno ograničene perturbacije (preciznije rečeno: T-ograničene perturbacije).

Jasno je da se ovi pojmovi razlikuju od pojmova apsolutno degenerisani, apsolutno kompaktni i apsoluzno ograničeni operator (odnosno perturbacija).

Mi ćemo razmatrati perturbaciju oblika (5.2) (kada $Y=X$), stavivši $\zeta_0=0$. Umjesto relativno degenerisana perturbacija govorićemo relativno konačno-dimenziona perturbacija ili, radi kratkoće, konačno-dimenziona perturbacija. Umjesto "konačno-dimenziona" može se reći "konačnog ranga".

(3) Razmotrimo proizvoljnu (relativno-) konačno-dimenzionu perturbaciju ranga r operatora L_0:

$$Lu=L_0u+Pu=L_0u+\sum_{j=1}^{r}(L_0u,f_j)g_j, \tag{5.3}$$

gdje $f_j\in\mathcal{H}$, $g_j\in\mathcal{H}$. Samu perturbaciju označili smo sa P. Prirodno je $\mathcal{D}(P)=\mathcal{D}(L)=\mathcal{D}(L_0)$, tj. $=\mathcal{D}$.

Rekavši da rang perturbacije iznosi r, mi smo ustvari rekli da su vektori $\{f_1,f_2,\ldots,f_r\}$ međusobno linearno nezavisni, kao i da su vektori $\{g_1,g_2,\ldots,g_r\}$ međusobno linearno nezavisni. Interesantan je specijalni slučaj r=1 (jednodimenziona perturbacija).

Prva karakteristika perturbacije: uopšte uzev, zbog opštosti perturbacije P, operator P nije samokonjugovan, tj. osnovni operator L nije samokonjugovan.

Druga karakteristika perturbacije: vektori f_j ne moraju da pripadaju oblasti definisanosti operatora L_0, u tom slučaju bismo transformisali ovako: $(L_0u,f_j)=(u,L_0f_j)$, te je zato perturbacija P jedan neograničeni operator. Ako je $\mathcal{H}=L_2[0,1]$, možemo reći da perturbacija nije integralni operator.

Ipak, treba isto tako uočiti da je P slaba perturbacija (u smislu rada [9]) samokonjugovanog operatora L_0, kao i da je P jedan L_0-ograničeni operator.

(4) U ovoj glavi mi ćemo izvesti formulu za trag operatora L, pri čemu će biti potrebno da se izvrši regularizacija, a regularizaciju ćemo izvesti pomoću svojstvenih vrijednosti (neperturbiranog) operatora L_o (relativni trag).

tačka 4. FORMULACIJA OSNOVNOG REZULTATA OVE GLAVE.

Teorema 5.1. (formula za trag u apstraktnom slučaju) Neka je L_o - samokonjugovani, diskretni, pozitivni operator koji dejstvuje u separabilnom Hilbertovom prostoru $\mathcal{H}$. Neka funkcija distribucije $N(\lambda)=\sum\limits_{\lambda_n<\lambda} 1$ njegovih svojstvenih vrijednosti ima oblik:

$$N(\lambda)=O(\lambda^p), \tag{5.4}$$

kad $\lambda\to\infty$, gdje je p neka konstanta, $0<p<1$. Razmotrimo operator

$$L=L_o+\sum_{j=1}^{r}(L_o\cdot,f_j)g_j.$$

Pretpostavimo da

$$f_j\in\mathcal{D}(L_o^{q_j}),\ g_j\in\mathcal{D}(L_o^{2-q_j}), \tag{5.5}$$

za $j=1,2,\ldots,r$, gdje su q_j - neki realni brojevi, $0\leqslant q_j\leqslant 2$.

Ovdje simbol $\mathcal{D}(T)$ označava oblast definisanosti operatora T, a stepeni operatora L_o definišu se po formuli:

$$L_o^q=\int_{-\infty}^{+\infty}\lambda^q dE_\lambda, \tag{5.6}$$

gdje je E_λ - spektralna familija projektivnih operatora operatora L_o.

Tada:

1) operator L je takođe diskretan i

2) postoji podniz $k_1,k_2,\ldots$ niza prirodnih brojeva ($k_n\to\infty$ kad $n\to\infty$), takav da je

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{k_n} (\mu_i - \lambda_i) = \sum_{j=1}^{r} (L_o^{1-q_j} g_j, L_o^{q_j} f_j), \qquad (5.7)$$

gdje su μ_i i λ_i - svojstvene vrijednosti operatora L i L_o redom, numerisane po rastućim realnim djelovima, uzete sa uračunavanjem višestrukosti (<u>završena formulacija</u>).

<u>Komentar 1.</u> Može se umjesto "pozitivni" pisati "poluograničen odozdo" (zbog mogućnosti translacije po spektralnom parametru λ) ili prosto "poluograničeni".

<u>Komentar 2.</u> Kada se kaže "višestrukost" svojstvene vrijednosti, onda se misli na algebarsku višestrukost (dimenzija korjenog lineala). U samokonjugovanom slučaju, uostalom, ona se poklapa sa geometrijskom višestrukošću (dimenzija svojstvenog lineala).

<u>Komentar 3.</u> Na desnoj strani formule (5.7), u skalarnom proizvodu, izvjesna količina L_o^s može po volji da pređe sa jedne na drugu stranu skalarnog proizvoda.

<u>Komentar</u> osnovne formule 5.7: prirodno je ovu formulu nazvati formulom za računanje (prvog) regularizovanog traga (zbira svih svojstvenih vrijednosti) operatora L, pri čemu se regularizacija vrši pomoću svojstvenih vrijednosti operatora L_o (dalje će biti dokazana lema koja upoređuje-sravnjuje količinu tih dvaju vrsta svojstvenih vrijednosti). Desna strana formule (5.7) predstavlja poznati izraz, tj. izraz koji se može eksplicitno izračunati.

Šema dokaza: Dokaz će biti izveden u dvije etape. U prvoj etapi ćemo razmotriti detaljno slučaj jednodimenzione perturbacije, a u drugoj će biti izvršen prirodni prelazak na slučaj konačno-dimenzione perturbacije operatora L_o. Prethodno ćemo (priprema za dokaz) izvesti izraz za rezolventu operatora L.

tačka 5. REZOLVENTA OPERATORA L.

Razmatranja ove tačke imaju čisto algebarski karakter i analogna su postupku kojim se Fredholmova integralna jednačina (druge vrste) sa degenerisanim jezgrom svodi na sistem algebarskih jednačina.

Razmatranja se sprovode pod uslovima prethodne teoreme 5.1.

Da bismo našli rezolventu operatora L, tj. operator $(L-\lambda E)^{-1}$, potrebno je da ispitamo rješivost jednačine $(L-\lambda E)u=f$, tj. jednačine

$$L_o u+\sum_{j=1}^{r}(L_o u,f_j)g_j=\lambda u+f. \tag{5.8}$$

Neka λ nije tačka spektra operatora L_o. Dejstvujmo na jednakost (5.8) operatorom $R_{o\lambda}=(L_o-\lambda E)^{-1}$:

$$u+\sum_{j=1}^{r}(L_o u,f_j)R_{o\lambda}g_j=R_{o\lambda}f \tag{5.9}$$

($R_{o\lambda}$ je kompaktni operator, tj. ograničen, tj. svuda definisan). Uvedimo oznaku

$$(L_o u,f_j)=\xi_j. \tag{5.10}$$

Tada imamo

$$u+\sum_{j=1}^{r}\xi_j R_{o\lambda}g_j=R_{o\lambda}f,$$

odakle je

$$u=-\sum_{j=1}^{r}\xi_j R_{o\lambda}g_j+R_{o\lambda}f. \tag{5.11}$$

Uvrstimo posljednji izraz za vektor u u formulu (5.10), kojom se definišu koeficijenti ξ_j. Tako dobijamo sistem linearnih

(algebarskih) jednačina za određivanje tih koeficijenata ξ_j.
Objašnjenje: L_o može da se primijeni na $R_{o\lambda}f$, u vezi jednakosti

$$L_oR_{o\lambda}f=(L_o-\lambda E+\lambda E)R_{o\lambda}f=f+\lambda R_{o\lambda}f.$$

Taj sistem glasi

$$\xi_k+\sum_{j=1}^{r}(L_oR_{o\lambda}g_j,f_k)\xi_j=(L_oR_{o\lambda}f,f_k),\ k=1,2,\dots,r. \tag{5.12}$$

Uvedimo u razmatranje determinantu

$$\Delta(\lambda)=\left|\delta_{jk}+(L_oR_{o\lambda}g_j,f_k)\right|_{k,j=1}^{r} \tag{5.13}$$

(δ_{jk} - Kronekerov simbol). U daljem će biti pokazano da, u uslovima formulisane teoreme, kada λ teži beskonačnosti, na primjer po imaginarnoj osi, veličine $(L_oR_{o\lambda}g_j,f_k)$ teže ka nuli. Odavde slijedi da funkcija $\Delta(\lambda)$ nije identički jednaka nuli. Označimo sa $\Delta_{jk}(\lambda)$ algebarski komplement elementa $\delta_{jk}+(L_oR_{o\lambda}g_j,f_k)$ $(j,k=1,2,\dots,r)$ te determinante.

Neka je λ takav da važi $\Delta(\lambda)\neq 0$. Tada iz sistema (5.12) dobijamo

$$\xi_k=\frac{1}{\Delta(\lambda)}\sum_{j=1}^{r}\Delta_{kj}(\lambda)(L_oR_{o\lambda}f,f_j),\ k=1,2,\dots,r.$$

Kada uvrstimo nađene vrijednosti koeficijenata ξ_k u izraz za u, formula (5.11), nalazimo konačno

$$R_\lambda f=(L-\lambda E)^{-1}f=R_{o\lambda}f-\frac{1}{\Delta(\lambda)}\sum_{k,j=1}^{r}\Delta_{kj}(\lambda)(L_oR_{o\lambda}f,f_j)R_{o\lambda}g_k. \tag{5.14}$$

Relacije analogne formuli (5.14) više puta su korišćene u literaturi, prilikom ispitivanja zadataka razne vrste. Mi smo o tome već govorili u prethodnoj glavi 4, i to tačka 11 (WA-determinanta. v. knjigu [8]) i tačka 12 (determinanta perturbacije $D_{B/A}(\lambda)$, v. knjigu [5] ili rad [12]). V. takođe o tome rad [31].

Zapazimo da, kako je L_0 - diskretni operator, njegova rezolventa jeste meromorfna (operator-) funkcija. Zato su i funkcije $\Delta(\lambda)$ i $\Delta_{kj}(\lambda)$ takođe meromorfne.

Jednakost (5.14) formalno je dobijena pod uslovom da λ nije svojstvena vrijednost operatora L_0 i da je $\Delta(\lambda)\neq 0$. Međutim, zbog teoreme jedinstvenosti za analitičku funkciju, formula (5.14) važi u čitavoj kompleksnoj λ-ravni.

Iz posljednje jednakosti (5.14) slijedi takođe da je i operator L diskretan. Njegova rezolventa razlikuje se od rezolvente operatora L_0 za konačno-dimenzioni operator (dakle, on je zbir dva kompaktna operatora). Uočimo takođe da se svojstvene vrijednosti operatora L poklapaju sa singularitetima desne strane te formule (5.14) (jer tada operator $(L-\lambda E)^{-1}$ nije definisan).

tačka 6. REZOLVENTA OPERATORA L U SLUČAJU JEDNODIMENZIONE PERTURBACIJE.

Dosad smo govorili o perturbaciji ranga r. Neka bude r=1.

U slučaju jednodimenzione perturbacije

$$Lu=L_0u+(L_0u,f)g \tag{5.15}$$

formula (5.14) pretvara se u

$$R_\lambda u=(L-\lambda E)^{-1}u=R_{0\lambda}u-\frac{(L_0R_{0\lambda}u,f)R_{0\lambda}g}{1+(L_0R_{0\lambda}g,f)}\,. \tag{5.16}$$

tačka 7. DOKAZ NEKIH LEMA.

Sva razmatranja u ovoj tački odnose se na slučaj jednodimenzione perturbacije. Isto važi i za sljedeću tačku.

Označimo sa $\{E_z\}$, $z\in R$, spektralnu familiju (samokonjugovanog) operatora L_o, a sa

$E_{\lambda_k} = E_{\lambda_k+0} - E_{\lambda_k-0}$

- projektor na svojstveni podprostor koji odgovara svojstvenoj vrijednosti λ_k. Pomoću ovog možemo da zapišemo

$$(L_o R_{o\lambda} g, f) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d(L_o E_z g, f)}{z-\lambda} = \sum_n \frac{(L_o E_{z_n} g, f)}{\lambda_n - \lambda}. \tag{5.17}$$

O svojstvima $\{E_z\}$ i o operatorskom računu može se pročitati npr. u knjizi [21].

Označimo sa $\{\varphi_k\}$ - ortonormiranu bazu od svojstvenih vektora operatora L_o. Neka je

$c_k = (g, \varphi_k)$ i $b_k = (f, \varphi_k)$.

Tada možemo pisati

$g = \sum_n c_n \varphi_n$ i $f = \sum_n b_n \varphi_n$

(sume su prebrojive, jer je $\mathcal{H}$ separabilan). Razumije se da napisani redovi konvergiraju u smislu konvergencije u Hilbertovom prostoru $\mathcal{H}$. Jednakost (5.17) sada može da se napiše kao

$$(L_o R_{o\lambda} g, f) = \sum_n \frac{\lambda_n c_n (\varphi_n, f)}{\lambda_n - \lambda} = \sum_n \frac{\lambda_n c_n \overline{b_n}}{\lambda_n - \lambda}. \tag{5.18}$$

I ove sume su prebrojive, jer svojstvenih vrijednosti ima koliko ima i svojstvenih vektora, a njih ima dim $\mathcal{H}$ (jer ti vektori čine bazu).

Važi sljedeća lema.

Lema 5.1. Neka $f \in \mathcal{D}(L_o^q)$, $g \in \mathcal{D}(L_o^{1-q})$ $(0 \leq q \leq 1)$. Tada red $\sum_n \lambda_n c_n \overline{b_n}$ konvergira apsolutno i njegova suma iznosi $(L_o^{1-q} g, L_o^q f)$.

Dokaz. Tvrđenje lako slijedi iz (uopštene) Parsevalove jednakosti. Zaista,

$$\sum_n \lambda_n c_n \overline{b}_n = \sum_n \lambda_n^q \lambda_n^{1-q}(g,\varphi_n)(\varphi_n,f) = \sum_n (g,L_o^{1-q}\varphi_n)(L_o^q\varphi_n,f) =$$

$$\sum_n (L_o^{1-q}g,\varphi_n)(\varphi_n,L_o^q f) = (L_o^{1-q}g,L_o^q f)$$

(λ_n su realni brojevi, L_o je samokonjugovani operator). Lema je dokazana.

Neka $d(\lambda)$ označava rastojanje od tačke λ do spektra operatora L_o, tj. $\rho(\lambda,\sigma(L_o))$.

Važi sljedeća lema.

Lema 5.2. Neka $f\in\mathcal{D}(L_o^q)$, $g\in\mathcal{D}(L_o^{1-q})$ $(0\leq q\leq 1)$. Tada je

$$|(L_oR_{o\lambda}g,f)|\leq\frac{\text{const}}{d(\lambda)},$$

gdje const ne zavisi od λ.

Dokaz. Zaista, u vezi jednakosti (5.18) i prethodne leme imamo

$$|(L_oR_{o\lambda}g,f)| = \left|\sum_n \frac{\lambda_n c_n\overline{b}_n}{\lambda_n-\lambda}\right|\leq\frac{1}{d(\lambda)}\sum_n|\lambda_n c_n\overline{b}_n|.$$

Lema je dokazana.

Napomena. Posebno, iz ove leme 5.2. slijedi tvrđenje da veličina $(L_oR_{o\lambda}g,f)$ teži ka nuli kada λ teži ka beskonačnosti po imaginarnoj osi (jer $d(\lambda)\to\infty$), o čemu je bilo riječi u tački 5.

Neka je $\lambda\neq 0$. Tada je

$$\frac{1}{z-\lambda} = -\frac{1}{\lambda}+\frac{1}{\lambda}\cdot\frac{z}{z-\lambda},$$

odakle slijedi da je

$$(L_oR_{o\lambda}g,f) = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{d(L_oE_zg,f)}{z-\lambda} = -\frac{1}{\lambda}\int_{-\infty}^{+\infty}d(L_oE_zg,f)+\frac{1}{\lambda}\times$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{z\, d(L_0 E_z g, f)}{z-\lambda} = -\frac{1}{\lambda} \sum_n \lambda_n c_n \overline{b_n} + \frac{1}{\lambda} \sum_n \frac{\lambda_n^2 c_n \overline{b_n}}{\lambda_n - \lambda}. \qquad (5.19)$$

Slično onome kako je bila dokazana lema 5.1, dobijamo sljedeću lemu.

Lema 5.3. Neka $f \in \mathfrak{D}(L_0^q)$, $g \in \mathfrak{D}(L_0^{2-q})$ $(0 \leq q \leq 2)$. Tada red $\sum_n \lambda_n^2 c_n \overline{b_n}$ konvergira apsolutno i njegova suma iznosi $(L_0^{2-q} g, L_0^q f)$.

Napišimo jednakost (5.16) kao

$$R_\lambda = R_{0\lambda} - \frac{(L_0 R_{0\lambda} \cdot, f) R_{0\lambda} g}{1 + (L_0 R_{0\lambda} g, f)},$$

tj.

$$R_\lambda - R_{0\lambda} = -\frac{(L_0 R_{0\lambda} \cdot, f) R_{0\lambda} g}{1 + (L_0 R_{0\lambda} g, f)}.$$

Uzmimo trag od lijeve i desne strane (trag označavamo sa Sp).

$$\mathrm{Sp}(R_\lambda - R_{0\lambda}) = -\frac{(L_0 R_{0\lambda}^2 g, f)}{1 + (L_0 R_{0\lambda} g, f)}. \qquad (5.20)$$

Ovdje smo iskoristili prostu činjenicu da jednodimenzioni operator $x \to (Ax, a)b$ ima svojstvenu vrijednost (Ab, a), tj. njegov trag (zbir svih svojstvenih vrijednosti) iznosi (Ab, a).

Dalje,

$$(L_0 R_{0\lambda}^2 g, f) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d(L_0 E_z g, f)}{(z-\lambda)^2} = \sum_n \frac{\lambda_n c_n \overline{b_n}}{(\lambda_n - \lambda)^2}. \qquad (5.21)$$

Dokažimo sada sljedeću lemu.

Lema 5.4. Neka $f \in \mathfrak{D}(L_0^q)$, $g \in \mathfrak{D}(L_0^{2-q})$ $(0 \leq q \leq 2)$. Tada je

$$(L_0 R_{0\lambda}^2 g, f) = \frac{1}{\lambda^2} (L_0^{1-q} g, L_0^q f) + F(\lambda),$$

gdje funkcija $F(\lambda)$ dopušta ocjenu

$$|F(\lambda)| \leq \frac{\mathrm{const}}{|\lambda|\, d^2(\lambda)}, \qquad (5.22)$$

gdje const ne zavisi od λ.

Dokaz. Na osnovu relacije (5.21) i leme 5.1. imamo

$$F(\lambda)=(L_oR^2_{o\lambda}g,f)-\frac{1}{\lambda^2}(L_o^{1-q}g,L_o^qf)=$$

$$\sum_n \frac{\lambda_n c_n\overline{b_n}}{(\lambda_n-\lambda)^2}-\frac{1}{\lambda^2}\sum_n \lambda_n c_n\overline{b_n}=$$

(oba reda konvergiraju apsolutno)

$$\sum_n \lambda_n c_n\overline{b_n}\cdot\frac{\lambda_n^2-2\lambda\lambda_n}{\lambda^2(\lambda_n-\lambda)^2}=\sum_n \lambda_n^2 c_n\overline{b_n}\,\frac{\lambda_n-\lambda-\lambda}{\lambda^2(\lambda_n-\lambda)^2}=$$

$$\sum_n \lambda_n^2 c_n\overline{b_n}\left\{\frac{1}{\lambda^2(\lambda_n-\lambda)}-\frac{1}{\lambda(\lambda_n-\lambda)^2}\right\}.$$

Koristeći lemu 5.3. dobijamo

$$|F(\lambda)|\le\left|\sum_n \lambda_n^2 c_n\overline{b_n}\cdot\frac{1}{\lambda^2(\lambda_n-\lambda)}\right|+\left|\sum_n \lambda_n^2 c_n\overline{b_n}\cdot\frac{1}{\lambda(\lambda_n-\lambda)^2}\right|\le$$

$$\mathrm{const}\left\{\frac{1}{|\lambda|^2 d(\lambda)}+\frac{1}{|\lambda| d^2(\lambda)}\right\}.$$

S obzirom da $d(\lambda)$ (rastojanje od λ do spektra operatora L_o) ne prevazilazi po redu veličine $|\lambda|$ (rastojanje od λ do nule), to odavde i slijedi tvrđenje leme.

tačka 8. LEME KOJE SE ODNOSE NA SVOJSTVENE VRIJEDNOSTI.

Formula (5.4) daje ocjenu (s gornje strane) funkcije $N(\lambda)$. Ta je ocjena takva da obezbjeđuje prisustvo na realnoj osi zona, čija dužina teži ka beskonačnosti, slobodnih od spektra operatora L_o. Upravo, važi sljedeće tvrđenje.

Lema 5.5. Neka je $N(\lambda)=\sum\limits_{\lambda_n<\lambda} 1=O(\lambda^p)$, gdje je $0<p<1$. Tada postoji niz realnih brojeva $r_n\to\infty$ (kad $n\to\infty$), takav da $d_n\to\infty$ (kad $n\to\infty$), gdje je $d_n=\rho(\Gamma_n,\sigma(L_o))$ - rastojanje od kružnice $\Gamma_n=\{\lambda:|\lambda|=r_n\}$ do spektra operatora L_o.

Dokaz. Neka je γ - izvjestan pozitivan realan broj, koji će biti izabran niže. Tada širina prstena $K_n=\{\lambda : n^{\gamma}\leq|\lambda|\leq n^{\gamma+1}\}$ ima red veličine $n^{\gamma-1}$. Unutar tog prstena nalazi se

$$N((n+1)^{\gamma})-N(n^{\gamma})=O(n^{\gamma p})$$

tačaka spektra operatora L_o. Izaberimo γ tako da bude

$$\gamma>\frac{1}{1-p}.$$

Tada se unutar prstena K_n može naći kružnica za koju su uslovi leme ispunjeni. Zaista, podijelimo K_n na $n^{\gamma p+\varepsilon}$ (ε - mali pozitivan broj) jednakih po širini djelova. Tada je bar jedan od novodobijenih prstena slobodan od tačaka spektra operatora L_o. Širina tog prstena ima red veličine $n^{\gamma-1-\gamma p-\varepsilon}$, tj. teži ka beskonačnosti kad $n\to\infty$ (jer je eksponent pozitivan). Lema je dokazana, jer se Γ_n uzima po sredini tog prstena.

Neka je Γ_n - kružnica iz leme 5.5. Tada iz leme 5.2. slijedi da na toj kružnici skalarni proizvod $(L_oR_{o\lambda}g,f)$ ima red veličine $o(1)$, kada $n\to\infty$, pri čemu ova oćjena važi ravnomjerno po λ. Iz relacije (5.20) i leme 5.4. zaključujemo da na kružnici Γ_n važi jednakost

$$Sp(R_\lambda-R_{o\lambda})=-\left[\frac{1}{\lambda^2}\left(L_o^{1-q}g,L_o^{q}f\right)+F(\lambda)\right]\cdot\frac{1}{1+o(1)}=$$

$$-\frac{1}{\lambda^2}\left(L_o^{1-q}g,L_o^{q}f\right)+\frac{o(1)}{\lambda^2}+F(\lambda)(1+o(1)), \qquad (5.23)$$

kad $n\to\infty$.

Sljedeće tvrđenje predstavlja, u suštini, jednu varijantu poznate teoreme o stabilnosti korijene višestrukosti.

Lema 5.6. Za sve dovoljno velike n, unutar kružnice Γ_n nalazi se jednak broj (s uračunavanjem višestrukosti) svojstvenih vrijednosti operatora L i L_o.

<u>Dokaz.</u> Pomnožimo jednakost (5.23) sa $\frac{1}{2\pi i}$ i integrišimo po konturi Γ_n.

Što se tiče lijeve strane, na osnovu poznate Risove teoreme, v. knjigu [8], str. 328,

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma_n} Sp(R_\lambda - R_{o\lambda})d\lambda = N_1 - N_2,$$

gdje su N_1 i N_2 - količina svojstvenih vrijednosti (s uračunavanjem višestrukosti) operatora L_o i L, redom, koje se nalaze unutar konture Γ_n.

Na desnoj strani,

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma_n}\left[-\frac{1}{\lambda^2}(L_o^{1-q}g, L_o^q f)\right]d\lambda = O\left(\frac{1}{r_n}\right),$$

dok je

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma_n} F(\lambda)(1+o(1))d\lambda,$$

zbog ocjene iz leme 5.4 - veličina reda $O\left(\frac{1}{d_n^2}\right)$.

Na taj način dobijamo

$$N_1 - N_2 = O\left(\frac{1}{r_n}\right) + O\left(\frac{1}{d_n^2}\right).$$

Sada puštamo da λ teži ka ∞. Uočavamo da su N_1 i N_2 cijeli brojevi i uzimamo u obzir lemu 5.5. Izlazi da je $N_1 - N_2 = 0$. Lema je dokazana.

tačka 9. <u>ZAVRŠETAK DOKAZA TEOREME U SLUČAJU JEDNODIMENZIONE PERTURBACIJE.</u>

Pomnožimo jednakost (5.23) sa $\frac{\lambda}{2\pi i}$ i integrišimo po konturi Γ_n (opet u pozitivnom smjeru). Prema prethodnoj lemi, unutar konture Γ_n nalazi se jednak broj k_n svojstvenih vrijednosti operatora L i L_o. Zato, koristeći svojstva Risovih projektora, imamo na lijevoj strani

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma_n} \lambda\, Sp(R_\lambda - R_{0\lambda})\,d\lambda = -\sum_{k=1}^{k_n}(\mu_k-\lambda_k).$$

Što se tiče desne strane, po Košijevoj teoremi o reziduumima zaključujemo da je

$$-\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma_n}\frac{1}{\lambda}(L_0^{1-q}g, L_0^q f)\,d\lambda = -(L_0^{1-q}g, L_0^q f).$$

Dalje,

$$\oint_{\Gamma_n}\frac{o(1)}{\lambda}\,d\lambda = o(1)$$

kad $n\to\infty$.

Na kraju, zbog leme 5.4. zaključujemo da je

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma_n}\lambda F(\lambda)(1+o(1))\,d\lambda = O\Big(\oint_{\Gamma_n}\frac{d\lambda}{d^2(\lambda)}\Big).$$

Neka je $\lambda = re^{i\varphi}$. Tada je $d(\lambda)\geq r|\sin\varphi|$. S druge strane, na konturi Γ_n važi $d(\lambda)\geq d_n$. Ocijenimo integral po onom dijelu kružnice Γ_n koji leži u prvom kvadrantu λ-ravni (ostali se razmatraju analogno). Razbijmo luk po kome se integriše na dva luka $0\leq\varphi\leq\varphi_n$, $\varphi_n\leq\varphi\leq\frac{\pi}{2}$, gdje će ugao φ_n biti izabran kasnije. Na prvom luku integracije koristićemo ocjenu $d(\lambda)\geq d_n$, a na drugom $d(\lambda)\geq r\sin\varphi$. Tada imamo

$$\oint_{\Gamma_n}\frac{d\lambda}{d^2(\lambda)} = O\Big(\int_0^{\varphi_n}\frac{r_n}{d_n^2}\,d\varphi\Big) + O\Big(\int_{\varphi_n}^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{r_n\sin^2\varphi}\Big) =$$

$$O\Big(\frac{r_n\varphi_n}{d_n^2}\Big) + O\Big(\frac{1}{r_n\varphi_n}\Big).$$

Izaberimo $\varphi_n = \frac{d_n}{r_n}$. Konačno dobijamo sljedeće

$$\sum_{k=1}^{k_n}(\mu_k-\lambda_k) = (L_0^{1-q}g, L_0^q f) + o(1) + O\Big(\frac{1}{d_n}\Big).$$

Kada se pusti da n teži ka ∞ onda $d_n\to\infty$, te se dobija formula (5.7) (u slučaju r=1, tj. u slučaju jednodimenzione perturbacije). Time je završen dokaz u slučaju $r=1$.

tačka 10. <u>ZAVRŠETAK DOKAZA TEOREME (OPŠTI SLUČAJ).</u>

Mi smo u prethodnim tačkama vidjeli da osnovni momenat prilikom dokazivanja teoreme u slučaju jednodimenzione perturbacije jeste: izdvajanje u izvjesnom smislu glavnog po λ sabirka traga razlike rezolventi operatora L i L_o. Bilo je pokazano sljedeće

$$Sp(R_\lambda - R_{o\lambda}) = -\frac{1}{\lambda^2}\mathcal{A} + F(\lambda),$$

gdje je funkcija $F(\lambda)$ dozvoljavala ocjene takve da je integrisanje funkcije $\lambda F(\lambda)$ po sistemu rastućih kontura Γ_n davalo beskonačno malu veličinu kad $n\to\infty$. Pri tome je upravo veličina $\mathcal{A}$ davala odgovor u formuli za regularizovani trag. Prirodno je da se slična procedura može sprovesti i u slučaju konačno-dimenzione perturbacije. Teškoće koje se pri tome pojavljuju su čisto tehničkog karaktera. Prosta analiza relacije (5.14) pokazuje da glavni sabirak traga razlike rezolventi operatora L i L_o ima oblik

$$-\frac{1}{\lambda^2}\sum_{j=1}^{r}(L_o^{1-q_j} g_j, L_o^{q_j} f_j).$$

Takođe se nije teško uvjeriti da ocjene ostatka koje se pri tome pojavljuju zadržavaju isti oblik kao i odgovarajuće ocjene kod jednodimenzione perturbacije.

U ovom dokazu koristi se i sljedeća činjenica, koja se odnosi na trag konačno-dimenzionog operatora: ako je

$$Bx = \sum_{j=1}^{r}(Ax, a_j)b_j,$$

gdje su vektori $a_1,\dots,a_r$ međusobno linearno nezavisni i gdje su vektori $b_1,\dots,b_r$ međusobno linearno nezavisni (A pozitivan), onda je

$$SpB=\sum_{j=1}^{r} (Ab_j,a_j).$$

Iz toga slijedi dokaz teoreme u opštem slučaju. Dokaz osnovne teoreme 5.1. je završen.

tačka 11. PRIMJER IZ OBIČNIH DIFERENCIJALNIH OPERATORA.

U ovom primjeru neperturbirani operator L_o biće obični diferencijalni operator (npr. Šturm-Liuvilov).

Treba uočiti sljedeće: u slučaju da je L_o samokonjugovani eliptički operator, ocjena $N(\lambda)= O(\lambda^p)$, $0<p<1$, označava da je red diferencijalnog operatora (ovdje: dva) veći od dimenzije oblasti u kojoj on dejstvuje (ovdje: jedan). Već je rečeno da ovaj uslov obezbjeđuje prisustvo na realnoj osi zona, čija dužina teži ka beskonačnosti, slobodnih od spektra operatora L_o.

Uvođenje konstanti q_j u formulaciju teoreme uslovljeno je sljedećim razlogom. Ova teorema će se primjenjivati za dobijanje formula za trag diferencijalnih operatora. Oblast definisanosti takvih operatora zadaje se izvjesnim sistemom graničnih formi. Poznato je da prilikom opisivanja stepena takvih operatora može da nestane jedan dio tog sistema graničnih uslova, v. o tome npr. rad [37]. Ta okolnost omogućuje da se bilo oslabe, bilo dodaju novi uslovi na perturbaciju, pod kojima važi osnovna formula (5.7) za trag.

Ponovimo i osnovne činjenice, koje se odnose na definiciju operatora L_o^q, gdje je L_o samokonjugovani operator, a q - realni broj, v. o tome npr. u knjizi [21]. Označimo sa E_λ - spektralnu familiju projektora operatora L_o. Vektor $x\in\mathcal{H}$ pripada $\mathcal{D}(L_o^q)$

ako i samo ako je konvergentan integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\lambda|^{2q} \, d\|E_\lambda x\|^2$$

i tada je

$$L_o^q x = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda^q \, dE_\lambda x.$$

Primjer 1. Neka je L_o - samokonjugovani obični linearni diferencijalni operator (reda većeg od jedan) na konačnom odsječku $[a,b]$, zadat običnim diferencijalnim izrazom. Razmotrimo operator

$$Lu = L_o u + u(x_o)h(x),$$

gdje $h(x) \in \mathcal{D}(L_o^2)$, a $x_o \in (a,b)$. Tada je

$$\sum_n (\mu_n - \lambda_n) = h(x_o),$$

gdje su sa $\mu_1, \mu_2, \ldots$ numerisane sve svojstvene vrijednosti operatora L, a sa $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ sve svojstvene vrijednosti operatora L_o (oba puta: sa uračunavanjem algebarske višestrukosti), koje su (oba puta) numerisane sa rastućim realnim djelovima.

Podrazumijeva se da su za L_o ispunjeni uslovi osnovne teoreme 5.1.

Sve činjenice o samokonjugovanim običnim diferencijalnim operatorima (tipa L_o) o kojima je ovdje riječ mogu se pročitati npr. u knjizi [21].

Dokaz. Sravnićemo sa oznakama teoreme 5.1, i to slučaj jednodimenzione perturbacije, očigledno. Prije svega, $g(x) = h(x)$. Još treba definisati $f(x)$. Na tu funkciju nisu nametnuti uslovi glatkosti, jer $f \in \mathcal{D}(L_o^0) = \mathcal{H}$. Označimo sa $G(x,y)$ Grinovu funkciju tog operatora L_o. Tada treba staviti

$$f(x) = \overline{G(x_o, x)}$$

i iskoristiti svojstva te Grinove funkcije da bi se pokazalo da je

$(L_o u, f) = u(x_o)$.

Time je završen dokaz, svodenjem na osnovnu teoremu.

tačka 12. DVA PRIMJERA IZ DIFERENCIJALNIH OPERATORA S PARCIJALNIM IZVODIMA.

Asimptotika svojstvenih vrijednosti i ponašanje funkcije raspodjele $N(\lambda)$ tih vrijednosti kad $\lambda \to \infty$ za operatore zadate diferencijalnim izrazima sa parcijalnim izvodima (uključujući, naravno, i eliptičke operatore) detaljno je proučena, veliki je broj radova u kojima se proučavaju ta pitanja. Navodimo, primjera radi, radove [2] i [11].

Primjer 2. Neka je L_o - samokonjugovani eliptički operator reda m (broj m je paran), zadat u ograničenoj oblasti $\Omega \subset R^n$. Neka je K - neka mnogostrukost u Ω, dimenzije manje od n. Dalje, neka je $h(\xi)$ - izvjesna glatka funkcija na K. Pretpostavimo da je $m > n$. Razmotrimo operator

$$Lu = L_o u + \int_K h(\xi) u(\xi) d\xi \cdot g(x),$$

gdje $g(x) \in \mathcal{D}(L_o^2)$. Tada je

$$\sum_n (\mu_n - \lambda_n) = \int_K h(\xi) g(\xi) d\xi.$$

U dokazu se takođe koristi Grinova funkcija operatora L_o. Dokaz je sličan dokazu za prethodni primjer 1.

Primjer 3. Neka je L_o - operator iz prethodnog primjera 2. Razmotrimo operator

$$Lu = L_o u + \int_\Omega K(x,y)(L_o u(y)) dy,$$

gdje je jezgro $K(x,y)$ degenerisano, to jest

$$K(x,y) = \sum_{j=1}^{r} P_j(x) Q_j(y),$$

pri čemu je sistem $\{P_1,\ldots,P_r\}$ (kao i $\{Q_1,\ldots,Q_r\}$) sastavljen od međusobno linearno nezavisnih funkcija. Konačno, neka $P_j(x) \in \mathcal{D}(L_o^2)$. Tada je

$$\sum_n (\mu_n - \lambda_n) = \sum_{j=1}^{r} \int_\Omega (L_o P_j(x)) Q_j(x)\,dx.$$

<u>Dokaz.</u> Direktno se svodi na osnovnu teoremu 5.1, ako se stavi $g_j(x)=P_j(x)$ i $f_j(x)=\overline{Q_j(x)}$.

ЛITERATURA.

[1] Адамян В.М., Павлов Б.С., Формула следов для диссипативных операторов, Вестник ЛГУ, сер. математика, . вып. 2 (1979), 5-9.

[2] Боймaтов К.Х., Спектральная асимптотика дифференциальных и псевдодифференциальнных операторов, I , Труды семинара им. И.Г. Петровского, вып. 7 (1981), 50-100.

[3] Буслаев В.С., Формулы следов для оператора Шредингера в трехмерном пространстве, ДАН СССР, т. 143, н 5 (1962), 1067 - 1070.

[4] Гельфанд И.М., Левитан Б.М., Об одном простом тождестве для собственных значении дифференциального оператора второго порядка, ДАН СССР, т. 88(1953), 593-596.

[5] Гохберг И.Ц., Крейн М.Г., Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве, "Наука", Москва, 1965, 448 стр.

[6] Данфорд Н., Шварц Дж.Т., Линейные операторы, ч. III , Спектральные операторы, "Мир", Москва, 1974, 664 стр.

[7] Дубровский В.В., Садовничий В.А., Неограниченые возмущения спектральных операторов, в кн. Проблемы мат. физики и вычислительной математики, "Наука", Москва, 1977, 137-144.

[8] Като Т., Теория возмущений линейных операторов, "Мир" Москва, 1972, 740 стр.

[9] Келдыш М.В., О полноте собственных функций некоторых классов несамосопряженных линейных операторов, Успехи математических наук, т. 26, н 4 (1971), 15-41.

[10] Кесельман Г.М,,О безусловной сходимости разложений по собственным функциям некоторых дифференциальных операторов Изв. вузов СССР, Математика, н 2 (1964), 82-93.

[11] Костюченко А.Г., Асимптотическое поведение собственных значений эллиптических операторов, ДАН СССР, т. 158, н 1 (1964), 41-44.

[12] Крейн М.Г., О формуле следов в теории возмущений, Математический сборник, т. 33, вып. 3 (1953), 597-626.

[13] Лидский В.Б., Несамосопряженные операторы, имеющие след, ДАН СССР, т. 125 (1959), 485-488.

[14] Лидский В.Б., Садовничий В.А., Регуляризованные суммы корней одного класса целых функций, Функциональный анализ и его приложения, т. 1, н 2 (1967), 52-59.

[15] Лидский В.Б., Садовничий В.А., Асимптотические формулй для корней одного класса целых функций, Математический сборник, т. 75 (117), н 4 (1968), 558-566.

[16] Лидский В.Б., Садовничий В.А., Регуляризованные суммы корней одного класса целых функций, ДАН СССР, т. 176, н 2 (1969), 259-262.

[17] Мартинович М., Об одной краевой задаче для функционально-дифференциального уравнения, Дифференциальные уравнения, т. 18, н 2 (1982), 239-245.

[18] Мартинович М., Дзета-функция и формулы следов для одной краевой задачи с функционально-дифференциальным уравнением, Дифференциальные уравнения, т. 18, н 3 (1982), 537-540.

[19] Мартинович М., Теорема о разложении и базисность собственных функций одного дифференциально-функционального оператора второго порядка, Вестник МГУ, сер. мат.-мех, (в печаты).

[20] Михайлов В.П., О базисах Рисса в $L^2(0,1)$, ДАН СССР, т. 144, н 5 (1962), 981-984.

[21] Наймарк М.А., Линейные дифференциальные операторы, "Наука", Москва, 1969, 528 стр.

[22] Пикула М., Мартинович М., О регуляризованных следах краевой задаче для функционально-дифференциального уравнения с отклоняющимся аргументом, Radovi matematički , V. 2, н 1 (1986), 3-12.

[23] Садовничий В.А., Теория операторов, изд. Московского университета, Москва, 1979, 296 стр.

[24] Садовничий В.А., Дубровский В.В., О некоторых соотношениях для собственных чисел дискретных операторов. Формулы следов для дифференциальных операторов в частных производных, Дифференциальные уравнения, т. 13, н 11 (1977), 2033-2042.

[25] Садовничий В.А., Дубровский В.В., Любишкин В.А., Следы дискретных операторов, ДАН СССР, т. 264, н 4 (1982), 830-832.

[26] Садовничий В.А., Любишкин В.А., Регуляризованые суммы корней одного класса целых функций экспоненциального типа, ДАН СССР, т. 256, н 4 (1981), 794-798.

[27] Садовничий В.А., Любишкин В.А., Регуляризованные следы дискретных операторов, ДАН СССР, т. 261, н 2 (1981), 290-293.

[28] Садовничий В.А., Любишкин В.А., О некоторых вопросах теории возмущений линейных операторов, Дифференциальные уравнения, т. 17, н 10 (1981), 1911-1914.

[29] Садовничий В.А., Любишкин В.А., Мартинович М., Конечномерные возмущения дискретных операторов и формулы следов, ДАН СССР, (в печаты).

[30] Фаддеев Л.Д., О выражении для следа разности двух сингулярных дифференциальных операторов типа Штурма-Лиувилля, ДАН СССР, т. 115, н 5 (1957), 878-881.

[31] Хромов А.П., Конечномерные возмущения вольтерровых операторов, ДАН СССР, т. 209, н 2 (1973), 309-311.

[32] Хромов А.П., Теоремы равносходимости для интегро--дифференциальных и интегральных операторов, Математический сборник, т. 114 (156), н 3 (1981), 378-405.

[33] Эрдейи А., Высшие трансцедентные функции, т. 1, "Наука", Москва, 1973.

[34] Bellman R., Cooke K.L., Differential-difference equations, Academic press, New York, 1963.

[35] Horn J., Vernerdung asymptotischer Darstellung zur Untergenchung der Integrale eine specialen linearen Differentialgleichung II, Mathematische Annalen, v. 49 (1897), 473-496.

[36] Krall A.M., Differential-boundary operators, Trans. Amer. Math. Soc., v. 154 (1971), 429-458.

[37] Seeley R., Norms and domains of the complex powers A_B^z, Amer. J. Math., v. 93, N 2 (1971), 299-309.

SADRŽAJ.