МАТЕМАТИЧКИ ИНСТИТУТ

Историја математичких и механичких наука
Књига 6

ПРИЛОЗИ О МАТЕМАТИЧКИМ НАУКАМА КОД СРБА

- Двадесети век -

БЕОГРАД
1992

МАТЕМАТИЧКИ ИНСТИТУТ

Историја математичких и механичких наука
Књига 6

ПРИЛОЗИ О МАТЕМАТИЧКИМ НАУКАМА КОД СРБА

- Двадесети век -

БЕОГРАД
1992

ИСТОРИЈА НАУКА је све присутнија у делу савременог научника као неопходни источник у упознавању одређених резултата научне прошлости. Из ових разлога је Математички институт у Београду покренуо едицију

ИСТОРИЈА МАТЕМАТИЧКИХ И МЕХАНИЧКИХ НАУКА
HISTORY OF MATHEMATICAL AND MECHANICAL SCIENCES

Задатак ове едиције је да научним апаратом историје наука упозна читаоце са резултатима из историје математике и механике.

*

Ова публикација није периодична.

*

Рукописе опремљене за штампу слати на адресу: Математички институт, Кнеза Михаила 35, 11001 Београд, пошт. фах 367.

Manuscripts should be addressed to: Matematički institut, Kneza Mihaila 35, 11001 Beograd, p.p. 367, Yugoslavia

Издаје: Математички институт: Кнеза Михаила 35, 11001 Београд, п.п. 367

КЊИГА 6 (1992)

MATHEMATICAL INSTITUTE

History of Mathematical and Mechanical Sciences

Book 6

CONTRIBUTIONS ABOUT MATHEMATICAL SCIENCES WITH SERBS

– Twentieth century –

BELGRADE

1992

МАТЕМАТИЧКИ ИНСТИТУТ

Историја математичких и механичких наука
Књига 6

ПРИЛОЗИ О МАТЕМАТИЧКИМ НАУКАМА КОД СРБА

– Двадесети век –

БЕОГРАД
1992

На 176. седници Научног већа Математичког института од 27. маја 1992. године донета је одлука да се ова публикација објави.

*

Ову публикацију је уредио
др Драган Трифуновић
проф. унив.

*

Технички уредник др Драган Трифуновић; Лектор мр Ивана Трифуновић; Текст обрадио у TEX-у др Мирко Јанц.

Тираж: 200

CIP – Каталогизација у публикацији
Народна библиотека Србије, Београд

51(497.11)(082)

ПРИЛОЗИ о математичким наукама код Срба: двадесети век / !уредио Драган Трифуновић!. - Београд: Математички институт, 1992 (:). - 197 стр. : илустр. ; 24 см. - (Историја математичких и механичких наука; књ. 6)

На спор. насл. стр. : Contributions about Mathematical Sciences with Serbs. - Tiraž 200. - Библиографија уз сваки рад. - Summaries.

ISBN 86-80593-14-1

1. Трифуновић, Драган

ПК: а. Математика-Србија-20в.-Зборници
б. Математичари-Србија-20в.-Зборници

929:51

Академик
др ВОЈИСЛАВ Г. АВАКУМОВИЋ
1910–1990

Member of Academy
dr VOJISLAV G. AVAKUMOVIĆ
1910–1990

„Наша судбина на земљи сва је у борби против квара, смрти и нестајања, а човек је дужан да истраје у тој борби и онда кад је потпуно безизгледна.“

Иво Андрић
На Дрини ћуприја, Београд 1945.

САДРЖАЈ — CONTENTS

Математички институт — Београд
Историја мат. и мех. наука 6 (1992)
Mathematical Institute — Belgrade
History of Math. and Mech. Sc. 6 (1992)

Војислав МАРИЋ

О ДЕЛУ ВОЈИСЛАВА Г. АВАКУМОВИЋА

Први рад Војислава Авакумовића (1910–1990) појавио се 1935. када је имао 25 година, последњи 1956. када је има 46. Укупно је објавио 39 радова. Од тога бар пет резултата су репродуковани у познатим монографијама и нашли своје место у историји математике. Сви радови, осим два, су из области класичне анализе, прецизније: Тауберових теорема односно диференцијалних једначина.

Авакумовић никад није био на школовању на великим универзитетима у свету. Научни скупови на којима је учествовао могу се избројати на прсте једне руке. Имао је само свој таленат, беспримерну креативну енергију и, у младим данима, Јована Карамату (1902–1967) поред себе.

Поменутих пет резултата ћемо овде приказати:

1. Тауберове теореме у комплексној области

У четири рада од 1937–1940. (међу којима је и докторска дисертација ([7], [10], [11], [12]) Авакумовић се бавио Тауберовим теоремама за Лапласову трансформацију

$$I(s) = s\int_0^\infty e^{-su}A(u)\,du,$$

користећи њене особине у комплексној s равни. Финални облик резултата дат је у [12], где се види једна од карактеристика Авакумовићевих радова: тежња ка најопштијем могућем резултату.

Како је данас та проблематика скоро исцрпена и како је тај део класичне анализе окончан низом значајних резултата, поменућемо основне појмове који се сада већ ређе срећу. Утолико пре што су у тој проблематици, у доба њеног цветања — пре више од пола века, дали значајне резултате — према наводима светске математичке литературе — два наша математичара Карамата и Авакумовић.

Нека је $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = s$. Ако ставимо

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \qquad 0 < x < 1, \tag{1.1}$$

тада, као што је показао још Абел, $f(x) \to s$, кад $x \to 1-0$. Другим речима, из конвергенције реда $\sum a_n$ ка збиру s следи његова Абелова збирљивост ка истом збиру. Обрнуто не мора важити, јер је на пример ред $1-2+3-\ldots$ Абел-збирљив али није конвергентан. Аустријски математичар Таубер (A. Tauber) је међутим показао 1897. године да уз допунски услов $na_n \to 0$, $n \to \infty$, из Абелове збирљивости следи конвергенција реда. Литлвуд (Littlewood) је заменио Тауберов услов много општијим и 1910. године доказао став који гласи:

Ако је ред $\sum a_n$ Абел збирљив и важи услов

$$n|a_n| < M < \infty, \tag{1.2}$$

тада је тај ред конвергентан.

Такве, инверзне теореме су Харди (Hardy) и Литлвуд назвали тауберовским (Tauberian) и тако овековечили име тог, иначе скоро безначајног математичара, који, будући геометричар, друге радове из анализе није ни писао. Његов рад је међутим послужио као повод за хиљаде других радова, штавише многих значајних математичара.

Доказ Литлвудовог резултата остао је веома компликован упркос напорима многих математичара (Ландау (Landau), Харди, Шур (Schur), итд.) све док Карамата 1930. године није изазвао изненађење својим новим поступком који је свео доказ на једну страну и омогућио многе нове резултате и примене. Тако је Карамата увео код нас ту, онда врло актуелну проблематику, и природно је да се за њу заинтересовао његов први ученик Авакумовић. Они су обојица формулисали своје резултате помоћу Лапласове трансформације која као специјалне случајеве садржи не само Тејлорове редове већ и многе друге.

Ако ставимо $A(u) = \sum_{n<u} a_n$, $A(0) = 0$, анд је $A(u)$ степенаста функција са скоком величине a_n за $u = n$, а $A(yu)$, $y > 0$, је таква са скоком a_n за $u = n/y$. Отуда имамо

$$\int_0^\infty e^{-u} dA(yu) = \sum_{n=0}^\infty e^{-n/y} a_n = f(e^{-1/y}), \qquad y > 0,$$

где је $f(x)$ дато обрасцем (1.1).

Парцијална интеграција уз коришћење услова (1.2) даје

$$\int_0^\infty A(yu) e^{-u}\, du = f(e^{-1/y}) \to 0, \qquad y \to \infty.$$

Услов (1.2) може се пресликати у општији

$$|A(\theta u) - s(u)| < \varepsilon, \tag{1.3}$$

који важи за θ довољно блиско јединици и за довољно велико u. Поред тога лако је показати да је $A(u)$ ограничено. На тај начин може се формулисати општа Литлвудова теорема:

Нека је $A(u)$ ограничено и задовољава услове (1.3). *Тада из*

$$\int_0^\infty A(yu)e^{-u}\,du = o(1), \qquad y \to \infty \tag{1.4}$$

следи

$$A(u) = o(1), \qquad u \to \infty. \tag{1.5}$$

Сада можемо формулисати поменути Авакумовићев став који гласи.

T$_1$. *Нека је D_k конвексна област у s равни чији руб у $s = 0$ има додир $k-1$ реда $(k > 1)$ са имагинарном осом. Ако је*

$$|I(s)| \le M, \qquad s \in D_k,$$

$$\lim_{\delta\to 0} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin yt}{t} I(\delta + s)\,dt = A + o(1), \qquad \text{кад } y \to \infty$$

при чему је $s = |t|^k + iat$, $s \in D_k$, и

$$\lim_{u\to\infty} \inf \min_{u \le u' \le \varepsilon u^{1/k}} \{A(u') - A(u)\} = -\omega(\varepsilon) \to 0, \qquad \varepsilon \to +0,$$

тада је

$$A(u) = A + o(1), \qquad u \to \infty.$$

То је основни резултат тезе (1938) саопштен (са применама и последицама) на Балканском конгресу математичара у Букурешту 1937. године. Теорема садржи као два гранична случаја $k = 1$ и $k = \infty$ резултате Литлвуда и М. Риса (M. Riesz).

За неспецијалисту није лако видети пуни садржај и домет горњег става. Но, из једне његове варијанте следи овај резултат.

T$_2$. *Нека је $A(u)$ неопадајућа функција и*

$$|I(s) - s^\beta e^{s^{-\alpha}}| \le M, \qquad s \in D_k,\ \alpha > 0,\ \beta < 0,$$

тада је

$$A(u) \sim c_1 u^{c_2} \exp(c_3 u^{c_4}), \qquad u \to \infty$$

где су $c_i(\alpha, \beta)$ тачно израчунати.

Тај се став сада може упоредити са Икехарином (Ikehara), одн. Винеровом (Wiener) Тауберовом теоремом где $I(s)$ има пол првог реда (посматра се $I(s) - A/(s-1)$, а закључује $A(u) \sim Ae^u$), а овде есенцијални сингуларитет. Док из Икехариног резултата следи став о распореду простих бројева, из Авакумовићевог следи резултат Хардија и Рамануџана (Ramanujan)

$$p_n \sim \frac{1}{4\sqrt{3}n} e^{\pi\sqrt{\frac{2n}{3}}}, \qquad n \to \infty,$$

где је p_n број различитих разлагања броја n на (исте или различите) позитивне целе сабирке. Одатле се између осталог види не само домет става већ још једна особина Авакумовића као математичара и снага и храброст да се нападну тешки проблеми и да се иде на велики резултат. Познато нам је да је идеја теореме $\mathbf{T}_1$ — да се приближавање имагинарној оси врши у области чији руб има додир $k-1$ реда са y осом у $s = 0$, Авакумовић желео да користи за критичну праву $\operatorname{Re} s = \frac{1}{2}$ Римановом (Riemann) хипотезом у мислима или бар у сновима. Авакумовић је имао 30 година када се тај рад појавио и он је тада већ сазрео као математичар који потпуно влада методама анализе у тој области. Идеје из тог рада није никада сасвим напустио — објавио је још неколико радова о Тауберовим теоремама за Лапласове трансформације ([14]–[18]).

Те идеје су омогућиле и специфичну теорему тог типа ([24]) која ће се користити за диференцијалне једначине у следећем периоду његовог рада. Једну једноставнију верзију теореме $\mathbf{T}_2$ унео је Деч (Doetsch) у целости у своју познату монографију *Theorie und Anwendung der Laplaceschen Transformation*, Dover Publ. N.Y. 1993 [illegible]
[illegible] 7, 10, 11 и 22

2. R-O класа

Године 1933. Карамата је проширио поменути Литлвудов резултат уводећи у услов конвергенције (1.3) погодну функцију $\rho(t)$, да би он постао

$$(2.1) \qquad \liminf_{t\to\infty} \min_{t\le t'\le\lambda t} \left\{ \frac{\rho(t')A(t') - \rho(t)A(t)}{\rho(t)} \right\} > -m(\lambda), \qquad \lambda \to 1+0.$$

При томе $\rho(t)$ задовољава одређене услове који се могу заменити једноставним захтевима да $\rho(t)$ буде Караматина регуларно промењива функција.

Авакумовић је ([1], [2]) услов (1.1) заменио са

$$\frac{\rho(t')A(t') - \rho(t)A(t)}{\rho(t)} > -m(\lambda), \qquad t < t' < \lambda t$$

а за $\rho(t)$ претпоставио да задовољава услов

$$(2.4) \qquad 0 < m \le \frac{\rho(t')}{\rho(t)} \le M, \qquad \text{за све } 0 < t \le t' \le \lambda t.$$

Тада из (1.4) следи (1.5) али у оба обрасца је $o(1)$ замењено са $O(1)$ (то је тзв. O-инверзни став одакле се онда изводи o-инверзни став).

Тако је дефиницијом (2.4) рођена R-O класа која уопштава Караматину класу регуларно промењивих функција. У чему је генерализација лепо се види из каноничне репрезентације функција R-O класе

$$\rho(x) = \exp\left\{ \eta(x) + \int_a^x \frac{\varepsilon(t)}{t}\,dt \right\},$$

где су $\eta(x)$ и $\varepsilon(x)$ ограничене на (a,∞), док код Караматине класе $\eta(x) \to C$, $\varepsilon(x) \to 0$, $x \to \infty$.

Каква је била даља судбина тог резултата?

Авакумовић није ишао много даље од дефиниције, али је Карамата одмах видео о чему се ради и у истом броју Рада ЈАЗУ где је објављен рад [2], следила је *Примедба на претходни рад В. Г. Авакумовића*, где су доказане основне особине класе. Вреди приметити да је наслов интониран тако да се првенствено истакне улога и приоритет Авакумовића а не аутора. Следио је низ радова — Матушевска, Бојанић-Сенета, Hahn-Resznik, па лепи резултати С. Аљанчића и Д. Аранђеловића. Коначно, по једно поглавље монографије N.H. Bingham, C.M. Goldie, J.L. Teugels, *Regular Variation*, Cambridge Univ. Press 1987, као и Сенетине књиге са сличним насловом (1976) посвећена су тој класи. Напоменимо још да су независно од свега претходног Н.К. Бари и С.Б. Стечкин 1956. године у другом контексту и другачијом дефиницијом увели R-O класу и доказали неке њене особине.

3. О простим делитељима у артиметичкој прогресији

Полазећи од једног проблема из славне књиге: G. Polya, G. Szegő, *Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis*, која је одиграла јединствену улогу у развитку математичке анализе у Београду, Авакумовић је проучавао број чланова аритметичке прогресије $dn-1$, који немају прости делитељ истог облика. Он је показао да за $d = 2,3,4,6$ сваки члан има прости делитељ истог облика док за све остале $d \in \mathrm{N}$ постоји бесконачно много чланова који немају простих делитеља истог облика. Идући корак даље, он је показао да за $d = 5$ и $x \to \infty$ важи $A_5(x) \sim Ax(\log x)^{-1/4}$. Овде је са $A_d(x)$ обележен број бројева поменутог облика који нису већи од x и немају простих делитеља истог облика ([8]).

Оригиналност његових замисли дошла је до изражаја већ и у том почетном раду који је доцније (1956) H. H. Ostman унео у своју монографију *Additive Zahlentheorie II*, Springer-Verlag, 1956. Резултати из [8]

4. Спектрална теорија елиптичних диференцијалних једначина

Мале осцилације $u(P)$ ограниченог k-димензионалног континуума — области G са рубом S описане су граничним задатком

$$\begin{aligned} \Delta u + \lambda u &= 0, & P \in G \\ u &= 0, & P \in S, \end{aligned} \tag{4.1}$$

где је Δ Лапласов оператор.

Један од проблема важних за примену и интересантних у чисто математичком погледу је и понашање сопствених функција $\varphi_n(P)$ проблема (3.1).

Карлеман (Carleman) је 1934. године дао нов поступак којим су он и доцније Минакшисундарам (Minakshisundaram) доказали да за $\lambda \to \infty$ важи

$$E_\lambda = \sum_{\lambda_n \le \lambda} \varphi^2(P) \sim C_k \lambda^{k/2}, \tag{4.2}$$

где је $C_k = 1/(2\pi)^k \Gamma(k/2+1)$; λ_n је n-та сопствена вредност од (4.1). Метод се састоји од процене (преко Гринове (Green) функције од (4.1) разлике)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(P)\varphi_n(Q)e^{-\lambda_n t} - \frac{1}{(2\sqrt{2\pi})} e^{-r_{PQ}^2/nt}.$$

(где је r_{PQ} растојање од P до фиксне тачке Q, а умањилац је фундаментално решење једначине за спровођење топлоте), и примене једне Тауберове теореме Харди-Литлвуда за Стилтјесову (Stieltjes) трансформацију.

Године 1952. Авакумовић је ([32]) проценио функцију

$$A(u,P,Q) = \sum_{\lambda_n \le u} \varphi_n(P)\varphi_n(Q) - \frac{1}{(2r_{PQ})^{k/2}} J_{k/2}(r_{PQ}\sqrt{u})u^{k/4}, \tag{4.3}$$

где је J Беселова функција, и применио своју Тауберову теорему ([24]) на $A(u,P,P)$ да би добио уместо (4.2) за $\lambda \to \infty$

$$E = C_k \lambda^{k/2} + O(\lambda^{(k-1)/2}),$$

и резултат се не може побољшати у погледу степена у O-члану, што је показано контрапримером. Та Тауберова теорема гласи

T$_3$. *Нека је $A(u)$ ограничене варијације у сваком коначном размаку. Тада из*

$$t\int_0^\infty e^{-tu}A(u)\,du = O(e^{-a/t}) \qquad \text{за } t \to +0 \text{ и неко } a > 0$$

и услова

$$A(v) - A(u) > -mu^{(k-1)/2}, \qquad m > 0$$

за

$$u \le v \le u + \sqrt{u},$$

следи

$$A(u) = O(u^{(k-1)/2}), \qquad \text{за } u \to \infty.$$

Поента поступка је у томе што је процена у разлици коју је Авакумовић посматрао — експоненцијална по λ што је теорема **T**$_3$ омогућила да се по први пут искористи.

Рад је одмах имао великог одјека. Већ 1958. године Titchmarch га је репродуковао у познатој монографији *Eigenfunction Expansions*. Надовезали су се радови (тезе) Р. Бојанића и В. Вучковића, и целе групе Карлеманових наследника у Лунду. Уследили су позиви из Лунда и разних

Oxford Univ. Press, 1958
[illegible] [32]

немачких универзитета — Гетингена на првом месту, што је Авакумовића чинило поносним. Он је коначно и остао на Универзитету у Марбургу до краја живота, створивши низ ученика који су даље развијали ову проблематику (Eberhard, Brünnig, Brübach, ...). Сам Авакумовић доказао је још неке резултате о збирљивости редова по $\varphi_n(P)$ ([38], [39]), што је знатно унапредио М. Маравић са својом сарајевском групом млађих сарадника.

5. Томас-Фермијева једначина

Томас-Фермијев (Thomas-Fermi) славни модел атома (1927) приближно описује основно стање атома великог редног броја. Метод се састоји у томе да се распоред честица (електрона) око језгра описује не таласном функцијом, већ густином електронског гаса $\rho(r)$ око језгра, за коју се статистичким путем показује да важи $\rho(r) = C_1(V - C_2)^{3/2}$, где је V потенцијал гаса. Ако се то уврсти у Пуасонову (Poisson) једначину $\Delta V = 4\pi\rho(r)$, пређе на поларне координате и бездимензиону форму, добија се Томас-Фермијев сингуларни гранични задатак

$$y'' = x^{-1/2}y^{3/2}, \qquad y(0) = 1, \quad y(\infty) = 0.$$

Одмах је доказано да је $y(x) \sim 144x^{-3}$, $x \to \infty$. Авакумовић је, бавећи се прво проблемом егзистенције и јединствености, ([20]) доказао овај став ([21]):

Ако је за $x \to \infty$, $f(x) \sim \rho(x)$, где је $\rho(x)$ Карамата регуларно променљива функција, тада за (јединствено) решење проблема

$$y'' = f(x)y^{\lambda}, \qquad \lambda > 1, \quad y(0) = 1, \quad y(\infty) = 0,$$

важи за $x \to \infty$:

$$y(x) \sim \left\{\frac{(1+\lambda+\nu)(2+\nu)}{(1-\lambda)^2}\right\}^{1/(\lambda-1)} (x^2\rho(x))^{1/(\lambda-1)}.$$

Тиме су Караматине функције по први пут уведене у теорију диференцијалних једначина. Резултат је био незапажен дуже времена, налазећи се на граници две области. Но, онда је почело коришћење теорије таквих функција за проучавање асимптотике решења неких класа линеарних и нелинеарних једначина (В. Марић, М. Томић, З. Радашин, S. Taliafero, E. Omey, J. L. Geluk) и неки од тих резултата на челу са поменутим Авакумовићевим доспели су на странице наведене Bingham-ове књиге.

6. Епилог

Авакумовићеви резултати не бледе временом и живе и у савременој математичкој активности. Он је непогрешиво бирао актуелне и тешке проблеме. Полазио је од радова великих математичара Карамате, Хардија, Литлвуда, Винера, Вејла (Weyl), Карлемана. Његов помало охоли поглед увек је био далеко изнад нивоа у којем се обављају празне генерализације. Радови му обилују разноврсним, оригиналним и понекад и неочекиваним идејама. И сам Карамата је био импресиониран његовим резултатима о сопственим функцијама, изразивши нам то једном приликом без устручавања овим речима: „Он је мене претекао“. Што се тиче начина доказивања, а нарочито експозиције, ти радови често чине супротност Караматиној кристалној јасноћи и елеганцији, и нису лаки за читање. Цитирамо опет његовог учитеља — Карамату: „Авакумовић ради као маљем. Понекад се чак стиче утисак да је мало с висине гледао на читаоце остављајући им претежак задатак да продру кроз његове замисли“.

Начин рада му је био својеврстан; феноменалне моћи концентрације, проводио је бескрајне сате у раду — у младим данима у празном дућану у приземљу властите куће сам се опасним псом дресираним за борбе паса, као да се желео и физички одвојити од свакодневнице. То је трајало док је могао да издржи, а онда је долазио период опуштања и неактивности. Време за рад односно одмор или оброке смењивало се у ритму без икаквог споља видљивог смисла и реда — нарочито не грађанског реда. Уопште, он се грозио свега „грађанског“, како је говорио. А то је за њега значило: обичног, сивог и без чежње за непознатим. Насупрот томе, живот и математика у деловима који су га привлачили били су индивидуална романтична авантура, понекад с беомским призвуком, понекад помало херојска, са ироничном дистанцом према обичности — све дакле са аутентичном хемингвејевском нотом, који му је и био омиљени писац. Свему томе треба додати и једну — на изглед нелогично умешану — аристократску и некако горду ритерску црту, стечену култом своје старе значајне српске породице.

Када се у 21. години суочио са суровим, за такав менталитет неодољивим чаром Северне Триглавске стене, одмах је — доцније у математици — желео да учини нешто што је ново и што је тешко, да пронађе нови смер успона — негде између два класична: Словенског и Немачког. То га је скоро стајало живота, али и вољом провиђења, учинило математичарем. „То сте Ви“ рекао је Јоже Чоп, легенда словеначког алпинизма, нашавши га, после дугих сати трагања спасилачке екипе, изломљеног у бездану, „знао сам да ћете једног дана пасти“!

И на то — као и на све чега се у животу латио, његова снажна индивидуалност ударила је јединствен печат.

Растајући се релативно рано од математике, Авакумовић је, враћајући се младости, *сликао аквареле*. Пријатељи су сматрали да их треба представити изложбом, али би оцена стручњака требало да одреди њихову вредност. Но, једна уметничка црта тих слика је видљива: оне носе у себи поетичност једног света који лаик неће наћи у самом мотиву — врту око куће.

Живећи у Немачкој, у мирној академској сигурности уваженог професора, изражавао је жељу (и писцу ових редова), још док је смрт била врло далека, да буде сахрањен у породичној гробници на Чератском гробљу у Карловцима. Супруга му је испунила жељу и његов пепео почива на обронку Фрушке горе, а дело му је уткано у дело „Југословенске школе“ — назив који су помало британци ласкаво смислили Bingham, Goldie и Teugels у предговору своје значајне књиге.

А то је била само једна мала група у Београду која се, упркос злом времену створеном од људи приземних амбиција и без морала, борила занесено да допринесе култури свог народа и светској математици колико су јој снаге дозвољавале.

Vojislav MARIĆ

ON THE MATHEMATICAL WORK OF V.G. AVAKUMOVIĆ

The following selection of results of V.G. Avakumović (1910–1990) is reviewed with some comments:

1° Tauberian theorems in the complex domain (Cf. G. Doetch, *Handbuch der Laplace-Transformation I–III*, Verlag Birkhäuser, Basel 1950).

2° *Regularly bounded functions* (Cf. N.H. Bingham, C.M. Goldie and J.L. Teugels, *Regular Variation*, Cambridge University Press, 1987).

3° *Prime divisors in an aritmethic progression* (Cf. H.H. Ostman, *Additive Zahlentheorie II*, Springer Verlag, 1956).

4° *Spectral theory of elliptic differential equations* (Cf. E.C. Titchmarch, *Eigenfunction Expansions II*, Oxford at the Clarendon Press, 1958).

5° *Thomas-Fermi equation* (Cf. N.H. Bingham et al. *loc. cit.*).

dr VOJISLAV S. MARIĆ
Fruškogorska 47
21000 Novi Sad

Резултати из 1 и 2
E. Seneta, Regular variation, Springer-Verlag, 1976
Такође у Bingham...
У Bingham.. су резултати из 2°.

ОБЈАВЉЕНИ РАДОВИ ВОЈИСЛАВА Г. АВАКУМОВИЋА

1. *Sur une extension de la condition de convergence des théorèmes inverses de sommabilité.* C.R. 200 (1935), 1515–1517.
2. *O jednom O-inverznom stavu.* Rad JAZU 79 (1936), 169–186.
3. *Über einen O-Inversionssatz.* Bull. Int. Acad. Yugoslave Sci. Beaux Arts 29/30 (1936), 107–117.
4. *Über einige Taubersche Sätze deren Asymptotik von Exponentialcharakter ist I.* Math. Z. 41 (1936), 345–356. (Са Ј. Караматом)
5. *Über Laplacesche Integrale deren Wachstum von iteriertem Exponentialcharakter ist.* Bull. Acad. Serbe Sci. Ser. Mat. Fiz. 3 (1936), 173–181.
6. *Über einen Satz von V. Ramaswami.* Rev. Math. Union Interbalk. 1 (1936), 139–140.
7. *Théorèmes relatifs aux intégrales des Laplace sur leur frontier de convergence.* C.R. 204 (1937), 224–225.
8. *Über die Anzahl der Zahlen* $\equiv -1 \pmod{d}$ *die keinen Primteiler derselben Form haben.* Publ. Math. Univ. Belgrade 6/7 (1938), 48–60.
9. *Sur l'inversion d'un procédé de sommabilité avec application.* C.R. 207 (1938), 766–768.
10. *О понашању Laplace-ових интеграла на рубу области конвергенције.* Докторска дисертација, Београд 1938.
11. *Über das Verhalten Laplacescher Integrale an der Konvergenzgrenze mit neuem Beweis eines Satzes von Hardy-Ramanujan über das asymptotische Verhalten der Zerfällungskoefizienten.* C.R. du 2me Conger. interbalk. des Math. Bull. Math. Soc. Roum. Sci. 40 (1938), 101–106.
12. *Neuer Beweis eines Satzes von G. H. Hardy und S. Ramanujan über das asymptotische Verhalten der Zerfällungskoeffizienten.* Amer. J. Math. 62 (1940), 877–880.
13. *Über das verhalten Dirichletscher Reihen am Rande des Konvergenzegebietes.* Math. Z. 46 (1940), 650–664.

14. *Bemerkungen über Laplacesche Integrale, deren Wachstum vom Exponentialcharakter ist I.* Math. Z. 46 (1940), 62–66.

15. *Bemerkungen über Laplacesche Integrale, deren Wachstum vom Exponentialcharakter ist II.* Math. Z. 46 (1940), 67–69.

16. *Bemerkungen über Laplacesche Integrale deren Wachstum vom Exponentialcharakter ist III.* Math. Z. 47 (1940), 141–152.

17. *O uslovu konvergencije O-inverznog stava Laplaceove transformacije.* Rad JAZU 74 (1941), 143–156.

18. *Über die Konvergenzbedingung der Inversionssätze der Laplaceschen Transformation.* Bull. Int. Acad. Croate Cl. Sci. Math. Nat. 34 (1941), 49–57.

19. *О егзистенцији интеграла диференцијалних једначина другог реда који пролази кроз две унапред дате тачке.* Глас САН 191 (1948), 53–66.

20. *О диференцијалним једначинама Thomas-Fermi-ева типа. Егзистенција интеграла.* Глас САН 191 (1948), 163–181.

21. *Sur l'equation différentielle de Thomas-Fermi.* Publ. Inst. Math. Beograd 1 (1947), 101–113.

22. *Contribution à la théorie des intégrales de Laplace.* Publ. Inst. Math. Beograd 2 (1948), 91–107.

23. *Sur l'équation différentielle de Thomas-Fermi (Deuxième partie).* Publ. Inst. Math. Beograd 2 (1948), 223–235.

24. *Bemerkung über einen Satz des Herrn T. Carleman.* Math. Z. 53 (1950), 53–58.

25. *Sur le problème aux limite des equations différentielles du second ordre non linéaires.* Bull. de l'Acad. Serbe des Sci. N.S.V (1952), 183–187.

26. *Одређивање најбољих граница извода када су познате извесне особине функције и осталих извода.* Глас САН Одељење прир. мат. наука 198 (1950), 197–210. (Са С. Аљанчићем)

27. *Sur la meilleure limite de la dérivée d'une fonction assujettie à des conditions supplémentaires.* Pub. Inst. Math. Beograd 3 (1950), 235–242. (Са С. Аљанчићем)

28. *Einige Sätze über Laplacesche Integrale.* Publ. Inst. Math. Beograd 3 (1950), 287–304.

29. *Ein Lückensatz für Dirichletsche Reihen.* Proc. of the Int. math. Congres, Amsterdam, 1954, 1–2.

30. *Сферне криве.* Зборник радова САН 1 (1951), 101–108.

31. *Сукцесивна апроксимација и нуле интеграла диференцијалних једначина другог реда.* Зборник радова САН 1 (1951), 1–14.

32. *Über die Eigenfunktionen der Schwingungsgleichung.* Publ. Inst. Math. Beograd 4 (1952), 95–96.

33. *Über die Randwertaufgabe zweiter Ordnung.* Publ. Inst. Math. Beograd 4 (1952), 1–8.

34. *О теменима затворене криве.* Зборник радова САН 3 (1953), 147–152.

35. *О егзистенцији решења граничног задатка нелинеарне диференцијалне једначине другог реда.* Зборник Матице Српске. Сер. Прир. наука VI (1954).

36. *A note on a question set by P. Erdős and L. K. Hua.* Publ. Inst. Math. Beograd 6 (1954), 47–56.

37. *Remark on Fatou-Riesz's theorem.* Publ. Inst. Math. Beograd 8 (1955), 85–92.

38. *Über die Eigenwerte der Schwingungsgleichung.* Math. Scand. 4 (1956), 161–173.

39. *Über die Eigenfunktionen auf geschlossenen Riemannschen Mannigfaltigkeiten.* Math. Z. 65 (1956), 327–344.

Саставио
В. МАРИЋ

PUBLISHED PAPERS OF VOJISLAV G. AVAKUMOVIĆ

A survey of the 39 published papers of Vojislav G. Avakumović, member of the Serbian Academy of Sciences and Arts, in the period from 1935 to 1956 is given. The survey is collected and edited by Vojislav Marić, member of the Academy.

Математички институт — Београд
Историја мат. и мех. наука 6 (1992)
Mathematical Institute — Belgrade
History of Math. and Mech. Sc. 6 (1992)

Радивој КАШАНИН

О МАТЕМАТИЦИ*

1. Појам броја спада у најосновније појмове, међу оне који су били човеку својствени од почетка онога што се зове људска свест. Али само човеку; никакви веродостојни експерименти нису показали да животиње знају бројати, а још мање да знају рачунати. Две службе су вршили првобитно бројеви, а то врше и данас: пребројавање и уређивање. И најпримитивнији човек, у прошлости и садашњости, тако их је употребљавао и употребљава. На питање: „Колико?" - одговара се један, два, три итд.; то су кардинални (главни) бројеви. На питање: „Који по реду?" - каже се први, други, трећи, итд.; то су ординални (редни) бројеви.

Свакако је био дуг пут док се до тих појмова дошло. Основна служба кардиналних бројева је да се њима означи количина неких предмета, да би се видело где их има више или мање, да би се ствари међу људима разделиле. Првобитно су се две гомиле предмета међу собом упоређивале узимајући по један предмет из једне и друге; још и данас деца тако деле јабуке: „Мени једна, теби једна." Основа за то је способност човека да предмет везује с предметом, да прави парове.

Но, не могу се тако упоређивати две гомиле које су далеко једна од друге. Зато се прави други корак у људском сазнању: и једна и друга се упоређује с трећом која се може преносити, као репрезентант, с места на место. Репрезентант мора бити увек при руци, па је зато као репрезентант најзгоднија рука. Тако се дошло, служећи се прстима, до десетног (декадног) бројевног система. За веће гомиле употребљавани су и бројнији репрезентанти, на пример каменчићи. Дуго су ови били у употреби код старих Римљана, па је од латинске речи calculus, што значи каменчи, и постала реч калкулус — рачун, и остала до данас.

Трећи корак је да се за репрезентанта не узимају предмети који се носе, већ да се створе симболи — знаци — који се памте. Код оних старих народа од којих су остали писмени трагови постоје знаци и за бројеве, но врло примитивни и за рачунање непрактични, чак и код Грка, који

*Ово је необјављен рукопис академика Радивоја Кашанина (1892–1989) написан око 1968. године (Архив САНУ, Заоставштина Р. Кашанина).

су бројеве означавали словима, и код Римљана, који су имали помешане ознаке, остале и до данас у употреби. Феничани, изразито трговачки народ, имали су много савршенији систем.

Основна служба ординалних бројева је да се помоћу њих, кад се предмети неке гомиле поређају један поред другог, маркира место сваког појединог (нумерација). За њих се употребљавају исти симболи и исти рачун као и за кардиналне бројеве, јер важи основно правило: нумера последњег предмета уређене гомиле је кардинални број исте гомиле.

Са старим египатским, грчким и римским бројевима тешко је било рачунати; само су ретки специјалисти могли водити и савлалђивати рачуне. А потреба за рачунањем бивала је све већа због трговине, поморства, грађења, премеравања, пореза, плата, пописа становништва, итд. Поред целих бројева уведени су, због деоба, и разломци, с којима је још теже ишло. Мора се човек дивити како су у време старих Египћана, Грка и Римљана људи уопште савлађивали рачуне, и то с успехом и у теорији и у пракси.

2. Упоредо с развијањем рачуна у пракси, почели су се појединци бавити и размишљањем о самим бројевима, тражећи међу њима везе, правилности и законитости. Почела се развијати наука о бројевима. Грци су нам и ту оставили велико наслеђе. Између осталог, Питагора је у шестом веку пре нове ере увео ирационалне бројеве, на основи геометријске теореме која и данас носи његово име. На бројеве се већ почело гледати као на самосталне објекте, које саме по себи треба изучавати, тражећи међу њима разне законитости и везе, интересантне не само за практичне рачуне, већ и саме по себи. Као и у свакој науци која се на основи претходних искуством и праксом добивених сазнања тек рађа, било је и овде лутања и мистике. Бројевима су се често приписивале мистичне особине (*кабалистика*), пренете нарочито из Вавилона. Неке су остале и до дданас у животу код сујеверног света (на пример, број тринаест).

У петом и четвртом веку пре нове ере, нарочито у школама Платона и Аристотела, и под њиховим утицајем, наука о бројевима много се ценила — и као наука, и као средство у пракси, и као васпитно средство. Велики инжењер, математичар и физичар Архимед, из трећег века пре нове ере, због својих радова и рачуна достојан је и данас дивљења које му је од давнина указивано. Његово прорачунавање обима и површине круга и параболе, површине и запремине лопте, тежишта, механички и хидромеханички радови заслужују да се и данас читају.

Заједно с науком о бројевима, а можда и раније, појавила се и наука о облицима — геометрија. И она је постала из практичних разлога, као резултат непосредних опажања и експеримената извршених ради практичних циљева. И име, које је и данас у употреби, то казује: оно значи премеравање земље.

Геометрија се рано почела стварати у старом Египту, где је сваке године после поплаве Нила требало поново парцелисати земљиште. Хиљадугодишњим искуством стечена сазнања бележена су у Египту, даље развијана и усавршавана, али тек кад су дошла до Грка, систематски су сређивана, и почела се формирати геометрија као наука. Развитак других наука, нарочито астрономије, давао је томе јаког подстрека.

Врхунац је достигла геометрија у Александријској школи, где је Еуклид, у трећем веку пре нове ере, написао своје чувене *Елементе*. По својој концепцији, композицији, излагању и дубини — то је јединствено дело старе грчке науке, које је кроз векове било образац логичког расуђивања, недостижни идеал многих научника и философа све до најновијег доба. Доживело је досад неких хиљаду шест стотина издања; само *Библија* има више.

Грци су више постигли у геометрији него у аритметици; и односе међу бројевима објашњавали су геометријски.

3. После пропасти античких држава бачена је у заброав и антична култура, па и математика. Столећа су прошла док су се нови народи толико уздигли да су могли уопште схватити резултате постигнуте неколико векова раније, да би их после, кад су услови за то били створени, не само усвојили, већ и до неслућених размера превазишли.

Но, баш у то глуво доба европске науке стигла је у Европу, преко Арапа, једна велика реформа из Индије: такозване арапске цифре, које данас сви употребљавамо. Није важност те реформе у самим знацима; могу се, напослетку, измислити и неки други — лепши или ружнији. Важност је у начину писања бројева, наиме у томе што вредност једне цифре не зависи само од те цифре, већ и од места на ком стоји: друго значи двојка као последња цифра, а друго као претпоследња у броју, ова десет пута више вреди. То је, у основи, постигнуто на тај начин што се поред уобичајених девет знакова (за бројеве од један до девет) увео и десети знак — данашња нула, помоћу које се осталим цифрама одређује такозвана месна вредност. Индуси су место нуле писали тачку.

Овај начин писања бројева усвојили су од седмог века и Арабљани, па су га у својим освајачким походима донели, заједно с многим другим постигнућима античке науке, у Шпанију, одакле се од десетог века почео постепено ширити и у осталу Европу. Ишло је то врло споро. Рачунање уопште, а нарочито по новом начину са арапским цифрама, била је врло ретка и врло цењена специјалност. Но, постепено и све брже пут је крчен. тражили су то свакидашњи послови: трговина, занатство, поморство, грађевинарство, војна техника. Проналазак штампарије у петнаестом веку коначно је фиксирао облик и употребу арапских цифара.

Ипак, још у шеснаестом веку, кад је пријатељ Лутеров Меланхтон објавио да ће на универзитету држати предавања из аритметике, ниједан се студент није јавио ни дошао. У идућем семестру је опет позвао студенте да дођу на та предавања, обећавајући им да ће лако научити сабирање, одузимање и множење, а ко се мало потруди — научиће чак и дељење. Међутим, деветнаест столећа пре тога Платон је над врата своје школе ставио натпис да нико у њу не улази ко не зна математику, јер је ова сазнање оног што је вечно.

Индуски начин писања бројева, то јест, у крајњој линији, увођење нуле, спада сигурно у највећа и најкориснија достигнућа. Људи су се на њега још од најранијег детињства тако навикли да о њему ништа не мисле и схватају га као сасвим природну ствар, као и сваку другу с којом су одрасли, као што је говор и писање. Може бити да је то баш најбољи знак величине његове.

4. Са Новим веком долази и нова етапа у развоју математике, као уосталом и у другим културним делатностима, условљеним ондашњим животом и друштвеним поретком. Откриће Новог света, развој привреде и школа ослобађали су духове. Трагало се за новим, а у исти мах се откопавало и истраживало старо, античко.

Шеснаести век је у математици пун резултата. Поред осталог, бројевни систем је проширен: уводе се, уз позитивне, и негативни бројеви. Виет уводи обележавање математичких величина словима, и тиме отвара нову еру у математици. Тек је сад било могуће доносити општа правила и закључке о бројевима и рачунским операцијама. Тиме је било омогућено да Декарт, у седамнаестом веку, створи аналитичку геометрију. Насупрот Грцима, који су радили геометријски, па чак и аритметику и алгебру често објашњавали геометријски, Декарт је, у својој аналитичкој геометрији, геометријске појмове заменио аритметичким и алгебарским, и тако геометрију подвргао такозваној математичкој анализи. Тиме је изашао на светлост и појам функције, који од тог доба доминира целом математиком.

После таквих претходника дошло је херојско доба математике: у седамнаестом веку Њутн и Лајбниц створили су диференцијални и интегрални рачун. Као кад се отвори богат мајдан, а у рукама се налази сав потребан алат, потекли су резултати. Почела су се решавати једно за другим питања из математике, механике, астрономије, небеске механике, геодезије, која се раније нису ни постављала, а камо ли решавала. Математика је у осамнаестом веку, у доба Даламбера, Лапласа и Лагранжа, постала предмет разговора чак и по салонима; и кад се у Француској рекло „наука“, подразумевала се под тиме математика, а кад се у Енглеској рекло (и данас још каже) „рачун“, подразумевао се при том диференцијални и интегрални рачун.

У деветнаестом веку тај се развој још појачао, обухватајући све већи и већи број стручњака у свим народима. Развој овај је био у два правца. С једне стране, ишло се у ширину, стварањем све више и све разноврснијих математичких грана и дисциплина; нема више полихистора у математици. С друге стране, ишло се у дубину, пречишћавањем и прецизирањем математичких појмова.

Нагли развитак физике и технике у деветнаестом и двадесетом веку стављао је математици увек нове и нове проблеме. Често су проблеми технике, да се и не говори о физици, били повод за најтежа и најсуптилнија математичка разматрања. Зато се више не може строго делити теоријска математика од примењене, ни рећи где једна престаје, а друга почиње. На најтеоретскију и најапстрактнију математичку анализу може се наићи и при прорачунавању оптерећења греда и плоча, као и у теорији релативитета.

У пречишћавању и прецизирању математичких појмова радило се много у целом деветнаестом веку и првој поливини двадесетог. Многе раније заблуде, које су нарочито разни метафизичари унели, отклоњене су. Ако се пође од појма природних бројева (један, два, три, итд.), све се остало може логички беспрекорно фундирати. Само, како логички фундирати ове бројеве, којима се и најпримитивнији човек служи? Изгледа да је то теже него решавати најкомпликованије диференцијалне једначине, иако су ти бројеви почетак. Може бити, баш зато.

5. У време старих Египћана и Грка маематичари су своје рукописе слали на чување у државне и владарске ризнице и библиотеке, где су их преписивали они који су се за то интересовали. Данас се математичке књиге штампају у хиљадама примерака и налазе се по целом свету, не само у библиотекама, већ и у приватним рукама. Још у осамнаестом веку број математичара, нарочито оних с извесним гласом и реномеом, био је врло мали, сви су се они међусобно знали и били у живој личној преписци. Данас их у појединим државама има више него што их је пре било на целом свету; одржавају се међународни и покрајински конгреси математичара са стотинама и стотинама учесника; постоје покрајинска, национална и интернационална удружења математичара; врло је жива измена разних публикација и између најудаљенијих крајева и места. А број тих публикација — књига, збирки, часописа — још од друге половине деветнаестог века непрестано расте и расте, и једва се може прегледати.

Овој распрострањености математике и математичара није узрок само математика као наука за себе, која би се бавила само неким својим специфичним проблемима, већ и њена примена у другим наукама и у пракси, а та се примена данас тако проширила како се раније ни наслућивало. Оба та импулса подједнако данас доминирају као непресушно врело у развоју математике: с једне стране, постављају се проблеми као резултат и даља изградња саме математике као науке; с друге стране, у свим оним наукама и струкама које математику примењују наилази се на математички формулисане проблеме, које треба прво математички решити, да би се добивени резултати потом практично протумачили и употребили.

6. Елементарна рачуница је потребна у свакидашњем животу поје-

дицу као и говор и хлеб. Има неписмених људи, али сваки душевно здрав човек зна бројати и бар сабирати, чак и онај који је глувонем. Никаква администрација ни финансирање не може се замислити без математике, почевши од рачунице па до најкомпликованијих питања рачуна вероватноће и математичке статистике. За плате и порезе, за осигурања и пензије, при изучавању кретања популације, рађања и умирања, при израчунавању рашћења дрвећа у шуми, за анализу цена и предвиђање њихова пада или успона, за растурање топовских и пушчаних метака — потребно је толико математике колико и за кинетичку теорију гасова, за кретање молекула, за кретање звезда у звезданим јатима и галаксијама, и томе слично.

Премеравање земљишта био је повод да се у старо доба створи специјална математичка дисциплина — геометрија. Но, проучавање облика Земље развило се у току времена у засебну науку — геодезију, која је дала многе проблеме математици, а ова их општије решила него што су геодети и захтевали. Данас се геодезија не може ни замислити без најфиније математичке апаратуре.

Астрономија је увек била, и данас је, извор многих математичких проблема, и обрнуто, без данашње математике не би било ни данашње астрономије. Што су се астрономски инструменти све више усавршавали о откривали људима нове светове, и математички апарат се морао све више и више усавршавати. Друкче су астрономи рачунали кад су могли мерити само минуте, а друкче рачунају сад кад мере хиљадите делове секунде. Обрнуто, усавршенији математички апарат дао је астрономима могућност да рачунским путем унапред добивају резултате које својим инструментима нису могли опазити.

Теоријска и небеска механика су данас еминентно математичке науке. Полазећи од неколико основних, опажањима и експериментима добивених резултата, целокупан склоп тих наука изводи се дедуктивним математичким путем. Обрнуто, проблеми тих наука дали су, и дају и данас, математици хране још и за будуће генерације.

Иако је основа физике увек било и остаје искуство, њени принципи и закони формулишу се математички. И класична и модерна физика служе се данас таквим математичким апаратом да га једва специјалисти математичари савлађују. Што се толико развила полидимензионална нееуклидска геометрија и створили у тим областима нови појмови и нова симболика, један од главних повода је теорија релативитета. Због физике су данас многе класичне гране математике занемарене, а нове постале и развиле се.

И хемија се увелико математизирала, нарочито физичка хемија, настала између класичне физике и класичне хемије. Кристалографија у минералогији мора данас за дубље проучавање кристала употребљавати математичке појмове, чак и врло апстрактне.

Инфилтрира се математика и у биолошке науке. С обзиром на данашње стање ових наука, овде углавном преовлашују статистичке методе.

Данас техника није више вештина и занат, већ наука. Без солидне спреме из математике, механике и физике не може данас инжењер бити ни на најобичнијем инжењерском послу. Сваки његов посао тражи своју математику. Не може се данас поставити граница која би делила ону математику коју инжењер треба да зна од оне која му није потребна; коликогод од математике зна, све ће моћи употребити. Са развитком индустријализације и саобраћаја, са подизањем стандарда живота, са страшним усавршавањем ратне технике — иде упоредо и стављање све већих и већих захтева инжењеру. Кад изађе из школе и оде у праксу, непрестано ће се морати усавршавати у оним дисциплинама којима се посветио, а из којих је у школи добио само основна знања, — ако хоће да буде инежњер, а не административни службеник.

7. Двоструки је значај математике у свим струкама и наукама у којима се она данас примењује: прво, њоме се на прецизан и недвосмислен начин формулишу закони и односи међу стварима и појавама; друго, њоме се могу појаве и дејства предвиђати. Кад конструктор, после дугог срачунавања, конструише авион спреман за лет, то значи да је, на основи познатих и математичких формулисаних закона, математички предвидео да ће авион заиста и летети. И први пилот који на тај авион седне верује у то, и полази на лет; свесно или несвесно, и он се ослања на математику.

Наравно, не треба од математике у примени тражити немогуће. И поред свих теорија вероватноће и статистичких метода, никоме се не може математички предвидети колико ће дуго он лично живети. Али, осигуравајуће друштво може ослањајући се на математику, са довољном тачношћу предвидети колико ће из колектива осигураника у току наредне године умрети и колику ће суму корисницима исплатити.

Математика је као неки добар и снажан жрвањ. Све што се у тај жрвањ убаци, он самеље. Само, што ће из њега изаћи, то зависи од тога шта се у њега убацило; ако се успе кукуруз, неће потећи бело брашно. Теже је проблем математички формулисати, него већ формулисан решавати. Као што кажу Французи: „Проблем добро постављен већ је тим самим упола решен“. А проблеме у наукама које се математиком служе не постављају математичари, већ они који на тим наукама раде.

8. Кад се у пракси неки рачуни изводе, на крају увек дође да се у добивене математичке изразе ставе место општих бројева посебни, тј. долази се до нумеричких рачуна. Због тога је од велике важности, нарочито за оне који математику примењују, да знају добро, практично и брзо изводити нумеричке рачуне. Ови, због своје важности, чине сад већ засебну грану математике, познату обично под именом практичне математичке анализе. У њој се учи како треба нумеричке рачуне изводити и описују се средства која служе за олакшање таквих рачуна.

Као таква средства одувек су служиле разне нумеричке таблице, нарочито логаритамске таблице. Од деветнаестог века почиње шира употреба и машина за рачунање, иако је идеја о њима поникла још у седамнаестом веку. Данас, као најновије, конструисане су електронске машине које омогућавају да се и најкомпликованији нумерички рачуни изводе и тачно и брзо; за што су некад били потребни месеци, па и године, може се на њима завршити за неколико дана, па и минута. Њихово усавршавање је у току, нису још у широкој употреби, али се од њих за практичне рачуне очекује много.

Само, треба имати на уму да машина не може мислити (мада је често зову „електронски мозак"). Она ради оно на што је навију; а мисле и навијају је људи. Многи, међутим, толико обожавају машине да их хоће да поставе изнад људи. Вероватно зато што од људи хоће да направе послушне роботе.

9. Развијена данас тако да нема човека који би је могао целокупну савладати и знати, јасно је да се математика морала обазрети да и своју сопствену кућу мало уреди. Решавајући — некад с успехом, некад без успеха — своје и туђе проблеме, и нове и оне остале од давнина, математика је нагомилала толико нових појмова, дефиниција и операција да и нема изглед јединствене науке. На први поглед се чини да су неке њене дисциплине међу собом неповезане, а неке повезане тек кончићем тањим од паучине.

Једно од битних обележја данашње математике, као науке за себе, јесте тенденција да се њени разни делови обједине на тај начин што ће се многи, на први поглед тако разнородни појмови схватити као специјални случајеви неког појма, и што ће се разне операције са специјалним величинама схватити само као специјални случајеви једне општије операције с општијим величинама. Тада би многе, данас диспаратне гране математике биле само спецификације једне општије дисциплине.

Што мање оваквих општих дисциплина, тим унификованија целокупна математика. Рад на томе је у току, али су тешкоће велике; ту се непрестано преплићу две науке: математика и логика. Има у тим расправљањима много застрањивања и аберација, као што их има свугде где се расправља о општим и основним појмовима и стварима.

Често се чује како се, бавећи се математиком, учимо логичком мишљењу, тј. учимо специфичне методе те специјалне науке, њен језик и њено писмо, да бисмо се разазнали у њој и применили је на решавање конкретних проблема — уколико се ово последње може и кад се може. А што се тиче логичког мишљења уопште, пре ће бити обрнуто: ко не уме логички мислити, тај се не може бавити математиком, али исто тако ни којом другом науком.

10. Без појма броја не може се замислити човек ни на најнижем ступњу свог развитка. Од овог примитивног појма, који је потребан само за бројање и мерење, па до изучавања бројева и науке о бројевима —

до математике — далек је пут. На овом, вишем ступњу тражи се од бројева нешто више, а не само пребројавање и мерење предмета да би се они могли поделити: у бројевима се тражи и налази израз законитости односа и поретка ствари, па онда и односи и законитости међу самим бројевима, помоћу којих се испитују односи међу стварима. „Чиме се бави математика, ако не односима и поретком", каже Аристотел. У Новом веку ова улога броја је одржана, али критичније. Данас је у наукама јасно где се бројеви могу употребити, а где не; где се помоћу њих могу дати закони, а где не. Упоредо с тим, и због тога, развија се и сама наука о бројевима, често без обзира да ли су коме у тај мах потребни ти резултати или не.

Једни мисле да је математика само рачунање, нумеричко рачунање. И при помисли на то пред очима им се створе стубови и колоне цифара, логаритамске таблице од неколико десетина, па и стотина страна, грешке које се при рачуну чине и умор који се при томе осећа. Математичар је тим људима калкулатор који је стекао извесну виртуозност. Међутим, рачунање је само један део математике; без рачунања нема математике, али само рачунање још није математика. По томе мислити о математици значило би исто као кад би неко, говорећи о лепој књижевности, мислио на досаду око преписивања неког дела. Другима је математика множина формула и теорема, које неки понекад за нешто и употребе, а остали их уче зато што је тако у програму. Слично би могао мислити о енглеској литератури онај који зна латиницу, али не уме енглески ни да чита, још мање да говори. — Трећима је математика страшна збирка задатака и проблема, поређаних без везе, смисла и циља. Исто то мисли дете — почетник који учи стран језик на реченицама из вежбанке и граматичким правилима.

Математика је засебно писмо, засебан језик, засебна наука. Ко не зна енглески, Шекспир му је у оригиналу неразумљив и непотребан. Да би се Шекспир у оригиналу разумео и да би се у њему уживало, треба проћи дуг пут озбиљног рада; кад се он пређе, уживање је савршено. Исто тако је и у математици. Кад се савлада њено писмо и њен језик, она отвара врата нових погледа: кроз њу се ствари јасније виде и међусобно везују.

11. Ниједна наука није непопуларнија од математике, науке о бројевима и геометријским облицима, иако се они појављују одмах на граници несвесног и свесног, одмах на почетку мишљења и размишљања, одмах при постајању човека. Тој чудној појави, непопуларности математике, главни је узрок то што је у математици дилетантизам мање могућ него ма у којој другој науци. Дилетантизам је врло примамљив; математика се, међутим, не може учити из брошура. „Нема краљевског пута у геометрији" — прича се да је одговорио Еуклид краљу Птолемеју Филаделфу, кад је овај зажелео да на неки лак начин дође до геометријских знања.

Дилетанте треба разликовати од аматера; ови су благородни, корисни и сваке пажње и похвале достојни људи. Аматер песник крије своје стихове и чита их најужем кругу својих пријатеља; дилетант песник засипа све редакције листова својим стиховима и огорчен је што се не штампају. Аматер сликар своје слике веша у свом стану; дилетант сликар прави непрестано изложбе и љут је што нема публике. Аматер за своје слабости и неуспехе налази кривицу у себи, дилетант увек у другима. Дилетант не зна Конфучијеву изреку, коју стручњаци и аматери врло поштују: „Право је знање знати шта знаш и знати шта не знаш.“

Што се у једној струци, свеједно каквој, више употребљава обичан језик којим свако говори, тим је већа могућност за дилетанте: говорећи опште познате речи, имају импресију да знају и саму ствар. У таквим струкама је сваки човек по мало дилетант; зато су оне популарне. Математика има свој засебан језик и своје засебно писмо; њих прво треба научити, а за то је потребан истрајан и смишљен рад. Но, ко то научи, тај већ није дилетант: може се бавити математиком и као науком и као средством при изучавању других наука; ако није баш прави стручњак, бар је аматер. Ако ништа друго, бар зна да је боље прочитати једну добру књигу него написати две рђаве. Тешко је са онима који тај језик и то писмо не доуче, а уобразе да су их научили; но, ређи су него у другим струкама, и брзо се примете. Мада спорије, примећују се они и у другим струкама. Јер, „све се може измислити, осим талента; и све се може сакрити, сем незнања.“

Има и стручњака који оду странпутицом. То су уски специјалисти, који у једном исувише скученом подручју своје струке достигну перверзну виртуозност у разним специјалним и непотребним детаљима и чињеницама, а не осећају своју науку и струку као целину, не виде њену везу са осталим наукама и струкама и преливање у ове, нити знају њен положај и значај међу осталим манифестацијама људског духа, о којима редовно немају ни појма. Они раде као роботи: хоризонт им је врло узак, а душа пуста.

Radivoj KAŠANIN

ON MATHEMATICS

By using historical facts, as well as modern achievements of the science, the author exposes his contemplations about mathematics and mathematicians. He argues against limited specialization and appeals for a broad mathematical culture that a mathematician should have. Applications of mathematics are treated as fields that need a scientific acknowledgement. Very interesting are also his reflections about mathematics as the most unpopular science.

Математички институт — Београд
Историја мат. и мех. наука 6 (1992)
Mathematical Institute — Belgrade
History of Math. and Mech. Sc. 6 (1992)

Милош РАДОЈЧИЋ

МАТЕМАТИКА ПРЕ ГРКА — ЕГИПАТ*

Реч је о најстаријим епохама историје, о најстаријим културама које су нам, услед великих успеха историјских наука, васкрсле из многовековног заборава. То су на првоме месту културе *Египта* и *Месопотамије*. Археолошка откопавања дала су нам многе писане споменике, многе листове папируса из Египта и глинене плоче на каквим се писало у Месопотамији. Међу тим налазима има и нешто списа које можемо назвати математичким списима. На основу њих знамо сада нешто, доста мало, па ипак толико да видимо главне обрисе математике тих древних времена. Видимо шта је од математике најпре дохватила људска мисао. Сва математика, кроз многе векове трајања тих старих култура састоји се, такорећи, само из елементарних одломака аритметике и геометрије.

Још нема никаквих теорија, нити дужих низова закључака, јер на своме извору математика није дедуктивна, већ претежно индуктивна наука. Математичко, тј. логичко извођење, доказивање, је тек у зачецима. Математика је у најужој вези са својим применама. Она још уопште није засебна наука. Засебних наука у оно доба још, такорећи, нема. Учени људи оног времена, а то беху свештеници, жреци разних божанстава, носе у себи целокупну ученост сједињену. Још ју је могао носити један човек, још се науке нису почеле гранати. Тако и математика није нешто одвојено, него у јединству са грађевинарством, земљомерством, економијом, трговином итд. Она ниче из животних потреба.

Јасно видимо како животне потребе условљавају појаву математичких проблема и метода њеног решавања. То нам је напоменуо још *Херодот*, грчки историчар из 5. века пре Христа, рекавши да геометрија потиче из Египта, од потребе свештеника да брзо и сигурно мере после поплаве

*Ово је уводни део из познате, а већ заборављене рукописне књиге професора Милоша Радојчића (1903–1975) *Општа математика* из 1950. године. Она је служила студентима филозофије као уџбеник. Њима је М. Радојчић предавао више година историју и филозофију математике. — О професору Радојчићу погледати: Д. Адамовић, Д. Лопандић: *Др Милош Радојчић*, Математички весник 13 (18), 1976, 245–252; М. Томић: *Милош Радојчић*, Годишњак САНУ за 1975. годину, 194–196; Р. Дацић: *О делу Милоша Радојчића*, Ист. мат. и мех. наука, књ. 2, Београд, 1989, 39–64.

Нила, кад вода однесе међашне знаке, границе земљишта. Исто то видимо и из археолошког материјала. Математички списи Египта и Месопотамије су практични „приручници“, „саветници“, о томе како се мери земља, како трасира или гради канал, како поставља темељ храму, зида пирамида, рачуна количина рада или величина зараде, како утврђује положај звезда на небу итд. То казују египатски папируси — њих имамо сразмерно мало, јер је то слаб материјал, изложен труљењу, а долина Нила бива влажна од поплава; то казују и глинене плоче с клинастим писмом, нађене у Месопотамији — њих има више: читаве библиотеке су откривене и у њима доста математичког садржаја. Отуда Вавилонску математику познајемо боље од египатске.

Упоредимо ли математику ових земаља, видимо да је отприлике на истој висини. Разумљиво, јер ма колико да су свештеници чували своја знања као тајну, вековима, — тајне су се којим било путем сазнавале и математичко знање је постајало опште, свих оних који су културно стојали на одговарајућој висини. Дакле, то у што ћемо загледати можда није својствено ни само тим двема областима древности, него мање више и другим земљама око њих, па и подаље од њих где је култура достигла исту висину.

Египат

Доскора нам је главни извор био тзв. Рајндов папирус (папирус Rhind) у Британском музеју. На њему пише неки свештеник Ахмес више од хиљаду година пре Христа, а преписује са још старијег папируса који потиче из времена око 1750. година пре Христа. Рукопис претставља заправо збирку проблема из аритметике и геометрије.

Реч је ту нпр. о свођењу обичних разломака — али не ма каквих, него облика $\frac{2}{2n+1}$ на разломке облика $\frac{1}{m}$, тј. којима је бројитељ 1. Као да су им се разломци где бројитељ није 1 чинили нећим тако сложеним, да их треба некако раставити на разломке где је бројитељ 1. О томе доноси тај папирус дугу табелу, за бројеве мање од 50. Нпр.

$$\frac{2}{3}=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}, \qquad \frac{2}{29}=\frac{1}{24}+\frac{1}{58}+\frac{1}{174}+\frac{1}{232}.$$

Сматрали су дакле потребним, да разломке облика $\frac{2}{2n+1}$ своде на збир разломака облика $\frac{1}{m}$. Зашто? Пре свега зато што нису пронашли погодну методу за писање разломака. Разломак $\frac{1}{m}$ бележили су стављањем цртице изнад знака којим су бележили цели број m, тј. $\overline{m}$ им је значило $\frac{1}{m}$. Исто тако $\overline{\overline{m}}$ је значило $\frac{2}{m}$. Као да се уопште нису сетили да разломак $\frac{n}{m}$ обележе тиме што ће бројеве n и m ставити нпр. један изнад другога! Нама је то данас врло јасно и природно. Али с тим најпростијим елементима ишло је по правилу најтеже, док су се пронашли. Тако је аритметика чекала вековима на погодно писање разломака да би се могло правилно развити рачунање с разломцима.

Приметимо да су код разломака $\frac{2}{2n+1}$ имениоци непарни; парни имениоци се и не помињу. Значи, да су Египћани добро знали да се разломак облика $\frac{2}{2n}$, тј. са парним имениоцем, може лако упростити дељењем бројиоца и имениоца са 2, и добити место њега $\frac{1}{n}$.

Ево уосталом каквим су се знацима служили Египћани за писање бројева (в. таблицу).

Откуд ти знаци? $\cap$ означава гомилу, ρ увијено уже којим се мере даљине, ваљда растојање од Египта до Месеца? Дуговечност жабе повод је, свакако, последњем знаку. Према томе број 1025 писао се овако

$$\begin{matrix} \cap\,|\,|\,| \\ \cap\,|\,| \end{matrix}$$

Но, у египатској аритметици има и нечег што је приближује већ алгебри: решавање неких једначина. Тако је нпр. типичан овај проблем (изнећемо га прво речима отприлике као у оригиналу): „Гомила — њена седмина, њено цело, то је 19“, затим се речима, исто тако нејасно, скраћено, излаже решавање и резултат. У нашем примеру то значи: тражи се колика је нека непозната гомила, тј. множина, кад њена седмина и она сама дају заједно 19. Дакле, како бисмо данас писали, поставља се једначина

$$\frac{x}{7} + x = 19.$$

Ми бисмо је решили овако: $\frac{8}{7}x = 19$, дакле $x = \frac{19\cdot 7}{8} = 16\frac{5}{8}$. И Ахмес има тачан резултат, само што уместо $16\frac{5}{8}$ пише: „16 и $\frac{1}{2}$ и $\frac{1}{8}$“.[1] Постоји у самом њиховом скраћеном изражавању већ и некаква математичка симболика у зачећу. Тако се сабирање означава ногама које корачају („иду напред“), једнакост знаком , непозната или како они кажу „гомила“ или „множина“ засебним знаком којим се означава реч за гомилу.

[1]При решавању линеарне и квадратне једначине Египћани су користили „методу лажног решења“. У основи ове методе крије се добро познавање сразмере (пропорције). Метода је садржана у следећем.

Треба решити једначину $f(x) = C$ ($C = \text{const}$). Нека је $x = x_1$ једно реално лажно решење, те је $f(x_1) \neq C$ и нека буде $f(x_1) = C_1$. Тада из сразмере $x : x_1 = C : C_1$ налазимо тачно решење у облику

$$x = \frac{C}{C_1}x_1.$$

У случају примера које излаже професор М. Радојчић $\frac{x}{7} + x = 19$, нека је лажно решење $x_1 = 7$, те је

$$\frac{7}{7} + 7 = 8 \neq 19,$$

а тачно решење је

$$x = \frac{19}{8}\cdot 7 = 16\frac{5}{8}.$$

(Примедба уредника)

Пређимо на геометрију. По једном наводу, рекао је познати грчки филозоф *Демокритос* (око 420. пре н.е.): „У конструисању линија при изношењу доказа није ме нико престигао, чак ни такозвани харпедонапти Египта". Према тим речима Демокрит би самоуверено тврдио да је у геометрији у којој се износе докази и при томе конструишу линије (дакле пре свега праве и кругови) вештији од грчких геометара оног времена, па „чак и од харпедонапта Египта". Одатле би требало закључити међу осталим да је у оно доба постојало мишљење у Грчкој, да су извесни људи у Египту знали геометрију као науку у којој се изводе конструкције и докази, боље и од самих Грка, које сматрамо творцима те науке. Ти људи у Египту се зову харпедонапти, што значи „затезачи ужета", тј. људи који затежу уже, наравно у сврху мерења; дакле то су геометри.

Уже можемо уопште сматрати најстаријим инструментом за мерење (хијероглиф броја 100). У старим семитским језицима та веза између геометрије и ужета је очигледна. На старим рељефима види се свечан чин полагања темеља храма и који се састоји у томе што се по забијању првог колца у земљу визира звезда Северњача и у правцу те звезде затегне мерно уже, које ће обележити један од четири главна зида. По мишљењу Кантора, (једног од значајних математичара и историчара математике с краја прошлог и почетка овог века) посао затезача ужета, а то чињаше при полагању темеља храма фараона, није само затезање у једном правцу, него обележавање и правца ка истоку, управног на правац ка северу. По претпоставци Кантора то се радило на основу тзв. Питагорина става о правоуглом троуглу на следећи начин. На мерном конопцу (ужету) обележена су чворовима редом растојања која се међу собом односе као бројеви 3, 4 и 5 (сл. 1). Држећи средњу дуж затегнуту у правцу севера и спојивши крајеве конопа, добијамо правоугли троугао, дакле и правац управан на правац ка северу, тј. још један од четири главних зидова.

Овај поступак оснива се на особитом својству бројева 3, 4, и 5 да три дужи којима су величине сразмерне тим бројевима могу саставити правоугли троугао. Заиста, по *Питагорину правилу* треба да је за три стране a, b, c правоуглог троугла $a^2 + b^2 = c^2$, а то збиља испуњавају бројеви 3, 4, 5, јер је $3^2 + 4^2 = 5^2$.

Заиста, старим Египћанима је било познато Питагорино правило, макар само што се тиче извесних бројева као што су 3, 4, 5. Вероватно да се нису удаљавали од целих бројева.

Овим поводом можемо проговорити коју реч о бројевима као што су 3, 4, 5. Такве целе, природне бројеве називамо *питагорејским* бројевима.

Из елементарне теорије бројева знамо како можемо доћи до таквих бројева, колико их год хоћемо: Ставимо

$$(a^2 + b^2)^2 = a^4 + 2a^2b^2 + b^4, \qquad (a^2 - b^2)^2 = a^4 - 2a^2b^2 + b^4.$$

Одатле, одузимањем добијамо

$$(a^2 + b^2)^2 - (a^2 - b^2)^2 = 4a^2b^2 = (2ab)^2,$$

дакле

$$(a^2 - b^2)^2 + (2ab)^2 = (a^2 + b^2)^2.$$

Ако у тај образац ставимо $a = 1$, $b = 2$ добијамо: $3^2 + 4^2 = 5^2$. Ако ставимо $a = 3$, $b = 5$ добијамо: $16^2 + 30^2 = 34^2$.

Таквим бројевима, бар оним првим: 3, 4, 5, Египћани су поклањали нарочиту пажњу. У особини, да ти цели бројеви граде правоугли троугао, гледали су они неку тајанствену хармонију, и стога су ваљда волели да у храмовима и пирамидама граде одаје тако да се три њихове димензије: висина ширина, дужина односе као ти бројеви.

У Рајндову папирусу налазимо и образац за површину круга („округлог поља"). Као што знамо, ако r означава полупречник, површина круга је дана обрасцем $P = \pi r^2$ или, ако је d пречник, тј. $r = d/2$, обрасцем

$$P = \frac{\pi}{4} d^2.$$

Тај образац познат је у папирусу, само што нису познавали тачну вредност броја π који има бескрајно много децимала (тако да га ни ми не познајемо нити можемо познавати до краја, него само на онолико децимала колико зажелимо да израчунамо). Египћани још нису имали појма о таквим, тзв. ирационалним бројевима. Отуда су за $\frac{\pi}{4}$ давали нетачну, али ипак доста приближну вредност, коју ћемо ми означити грчким словом κ:

$$\kappa = \frac{64}{81} = \frac{8^2}{9^2} = 0{,}79012\ldots, \qquad P = kd^2.$$

(Потсећамо: Цели бројеви и разломци називају се *рационалним бројевима* (нпр. 256, $3\frac{2}{17}$, $\frac{212}{1237}$). Засад помињемо само позитивне рационалне и ирационалне бројеве, јер негативни бројеви јављају се у историји много касније. Разломци писани помоћу разломачке црте називају се *обичним разломцима*. Можемо их писати и као тзв. *децималне разломке* које добивамо делењем бројитеља именитељем. Општа је особина рационалних бројева, да писани у облику децималног броја, имају или коначан број децимала, или бескрајан број децимала, или се те децимале понављају у једнаким групама, тзв. периодама. Нпр.

$$\frac{141}{55} = 2{,}563636363\ldots \qquad \text{(краће писано } 2{,}5\dot{6}\dot{3}\text{)}.$$

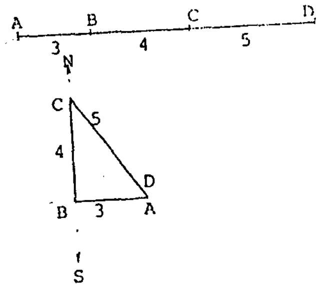
Такви децимални разломци називају се *периодичним разломцима*.

Ако децималан број има бескрајно много децимала а није периодичан, он није рационалан број. Тако нпр.

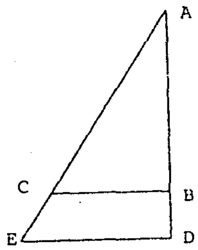
$$\sqrt{2} = 1{,}4142\ldots, \qquad \pi = 3{,}14159\ldots$$

нису периодични децимални бројеви — дакле нису рационални бројеви. Те бројеве називамо *ирационалним бројевима*. Сви рационални и ирационални бројеви заједно називају се *реалним бројевима*, за разлику од *имагинарних*, о којима ћемо говорити касније.

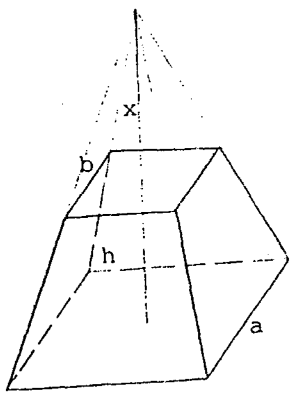
1	𓏺	50	𓎊
2	𓏻	60	𓎋
3	𓏼	70	𓎌
4	𓏽	80	𓎍
5	𓏾	90	𓎎
6	𓏿	100	𓍢
7	𓐀	200	𓍣
8	𓐁	400	𓍥
9	𓐂	500	𓍦
10	𓎆	1000	𓆼
11	𓎆𓏺	10000	𓂭
15	𓎆𓏾	10^5	𓆐
20	𓎇	10^6	𓁨
30	𓎈	10^7	𓍶
40	𓎉		



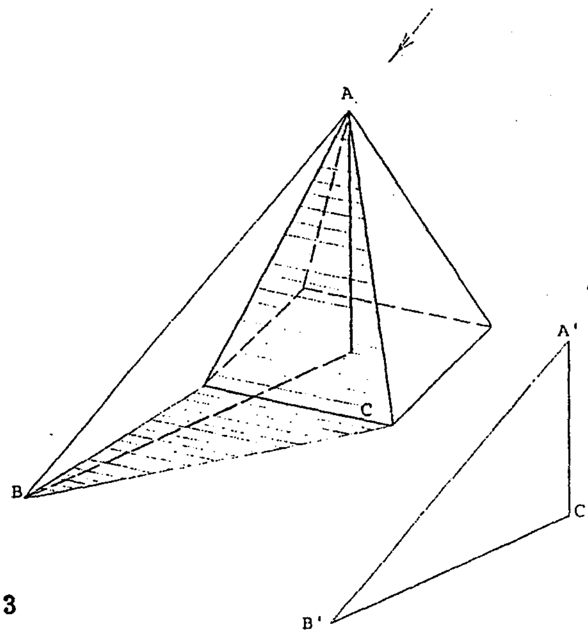
1



2



4



3

Египћани, који су једва проучавали разломке, нису, наравно, имали ни појма о ирационалним бројевима и тако су, тражећи број $\frac{\pi}{4}$ који даје површину круга (или пак обим круга) тражили тај број у области рационалних бројева, и нашли су вредност κ, која заиста није много далека од тачније вредности броја $\frac{\pi}{4}$. Имамо:

$$\kappa = 0{,}79012\ldots \quad \text{и} \quad \frac{\pi}{4} = 0{,}78539\ldots,$$

дакле $\kappa - \frac{\pi}{4} = 0{,}0047\ldots$, а то је мање од пет хиљадитих.

Из Риндова папируса видимо да су Египћани тада већ знали за геометријске пропорције или сразмере, за пропорционалност страна двају сличних правоуглих троуглова. ABC и ADE су два слична правоугла троугла. У папирусу се на известан начин утврђује да је (сл. 2)

$$\frac{AB}{BC} = \frac{AD}{DE}.$$

На основу таквих пропорција могли су нпр. при грађењу пирамида израчунавати димензије које нису непосредно мерљиве, помоћу оних које су могли измерити. Стари Грци су се хвалили да је њихов познати философ, један од „седам мудраца", Талес, боравећи у Египту пронашао како да помоћу управног штапа израчуна висину пирамиде, и да је тиме задивио самог фараона: Измерио је дужину штапа $A'C'$ и његове сенке $B'C'$, затим дужину BC, сенке пирамиде, и отуд на основу поменуте пропорције, висину AC саме пирамиде (сл. 3). Тачније ће бити да је Талес, учећи се у Египту, то научио од учених свештеника, који су имали и математичке папирусе као што је овај Риндов.

Напредак у нашем познавању математике старог Египта донело је одгонетање тзв. *Московског математичког папируса*, што је извршио В. В. Струве (објављено год. 1930). Старост папируса је око 1850. год пре н.е., дакле је, шта више, старији од Рајндова. По закључцима Струвеа тај нам папирус открива да је „почетак научног посматрања математичких питања, не у Грчкој, него у Египту". Заиста, видимо да египатска математика није била онолика, скоро искључиво индуктивна, емпиријска, као што се у науци раније мислило. Постоји доказ, логика, геометријска конструкција којом се омогућује доказ неког става геометрије. Тиме је египатска математика постала у нашим очима сличнија и математици старе вавилонске културе.

Према московском папирусу Египћани су нпр. знали образац за површину правоугаоника:

$$P = a \cdot b,$$

(правоугаоник су називали „плоча"); па образац за површину троугла:

$$P = \frac{a \cdot h}{2},$$

(наравно, овако ми данас пишемо те обрасце, а они су описивали речима); па образац за површину лопте (по њиховом називу „љуска јајета“):

$$P = 4\pi r^2 \approx 4\kappa d^2$$

и за површину полулопте (ту површину они су назвали „корпа“, дакле видимо како немају апстрактних геометријских назива, него се служе изразима из свакодневног живота; отуд, из конкретног живота израшћују временом научни појмови):

$$P \approx 2\kappa d^2.$$

Још нас више зачуђује кад видимо да су имали и тачан образац за запремину зарубљене пирамиде! Реч је о правилној, четвоространој зарубљеној пирамиди. Њену запремину ми можемо лако израчунати. Ако је величина странице на доњој основици a, на горњој основици b, а висина зарубљене пирамиде h (сл. 4) означимо висину целе пирамиде са $h + x$, тако да је y висина оне пирамиде коју треба отсећи да би се добила зарубљена. Запремина велике и те мале пирамиде је:

$$V_1 = \frac{1}{3}a^2(h+x), \qquad V_2 = \frac{1}{3}b^2x.$$

Али $(x+h) : x = a : b$, тј. $x = hb/(a-b)$, дакле је запремина зарубљене пирамиде:

$$V = V_1 - V_2 = \frac{1}{3}a^2(h+x) - \frac{1}{3}b^2x = \frac{1}{3}a^2\left(h + \frac{hb}{a-b}\right) - \frac{1}{3}b^2\frac{hb}{a-b},$$

тј.

$$V = \frac{1}{3}h(a^2 + ab + b^2).$$

До тог истог обрасца дошли су Египћани. Како? Да ли оваквим или сличним извођењем? Може бити. Тако помишља Струве. Могли су и геометријским путем разлажући зарубљену пирамиду на делове: на пирамиде и тетраедре (дакле опет пирамиде), чије су запремине морали знати (свакако, под претпоставком да су знали чињеницу да све пирамиде које имају једнаке основице и једнаке висине имају и једнаке запремине). Како год узели, Египћани су знали за извођење, доказивање математичких ставова. Знали су, свакако, за једноставна логичка извођења вероватно и за методу геометријске конструкције у сврху доказа.

Напоменимо да нпр. за површину „корпе“ не стоји у московском папирусу $2\kappa d^2$, него, ако то што тамо стоји изразимо својим математичким знацима, пише:

$$P = \left[\left(2d - \frac{2}{9}d\right) - \frac{1}{9}\left(2d - \frac{2}{9}d\right)\right]d.$$

Разуме се, отуд је

$$P = \left(2d - \frac{2}{9}d\right)\left(1 - \frac{1}{9}\right)d = 2\left(1 - \frac{1}{9}\right)^2 d^2 = 2\cdot\frac{8^2}{9^2}d^2 = 2\kappa d^2.$$

Отуд можемо закључити и како је тачно гласио њихов образац за површину круга, што ми написасмо у облику κd^2. Гласио је свакако:

$$P = \left[\left(d - \frac{1}{9}d\right) - \frac{1}{9}\left(d - \frac{1}{9}d\right)\right]d.^{2}$$

Московски папирус садржи и многе аритметичке задатке. Задаци се изричу онако како већ видесмо у Риндову папирусу: речима, кратко, па се и решавају речима. Ево нпр. како гласи 25. задатак:

„Облик израчунавања једне гомиле, рачунате двапут заједно, са још једном гомилом достижући 9."

„Које је име те гомиле? Рачунај збир те једне гомиле заједно са те две".

„Настаје 3. Рачунај са те три, да би добио 9. Настаје трипут."

„Гле! име је 3. Тачно си нашао!".

То значи, данашњим знацима: треба решити једначину $2x + x = 9$. Сабирајући, на левој страни добија се $x + 2x = 3x$, дакле је $9 : 3 = 3 = x$.

У једном другом примеру имамо једначину $1\frac{1}{2}x + 4 = 10$, па се одузме 4 обема странама и добије $1\frac{1}{2}x = 6$, а отуд $x = 4$.

Задаци су често из области грађења лађе, или из економских проблема. Нпр.: Неки радник мора да однесе известан број хлебова из пекаре у стовариште. Место у већим корпама треба да носи у мањим: место у „5-хлебовним" у „4-хлебовним". Колико већи рад изврши?

Из свега тога можемо извести овај закључак. Још у математици нема општих метода, нити систематски изложених области, тј. теорија. Логичко резоновање налазимо већ на извесној висини но још не као општу методу, која се систематски спроводи, него тек у одломцима, у појединим

---

[2]Египћани су за вредност површине круга $P_0 = \left(\frac{8}{9}d\right)^2$, дошли сукцесивним смањивањем површине квадрата, као што је приказано на слици.

Прво. Ако је $P_0 = P_k$, тада је $P_0 = d^2$, те је $\pi = 4$.

Друго. Ако површину квадрата смањимо за четири квадрата ознаке A_1, чија је страница $d/6$, тада је површина круга

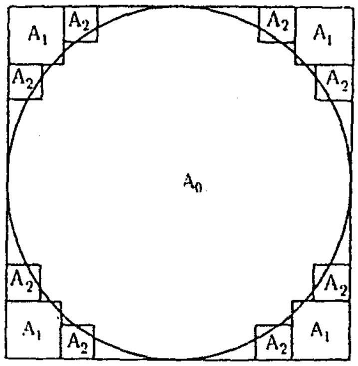
$$P_0 = d^2 - 4\left(\frac{d}{6}\right)^2 = \frac{8}{9}d^2.$$

Одавде следи да је $\pi = 3{,}555$.

Треће. Ако површину квадрата даље смањимо за осам квадрата ознаке A_2, чија је страница $d/9$, тада је површина круга

$$P_0 = \frac{8}{9}d^2 - 8\left(\frac{d}{9}\right)^2 = \left(\frac{8}{9}\right)^2 d^2.$$

Одавде следи да је $\pi = 4\left(\frac{8}{9}\right)^2 = 3{,}1605$, а то је она вредност коју су Египћани користили и коју наводи професор Милош Радојчић. (Примедба уредника)



задацима. Резоновање је ту тек да би потпомагало непосредној очигледности, тамо где она сама није довољна, где интуиција престаје. Дакле, дедуктивна метода ступа на снагу понегде, да потпомогне. Јер, старим Египћанима није још стало до чистоте које било научне методе. Њима стоје пред очима практични проблеми, који за њих имају вредности само уколико се примењују у земљомерству, грађевинарству, економији, или пак у склопу религијских схватања. Но ипак, морамо говорити о изразитим почецима дедуктивне методе. Известан успех и историјски значај египатске математике нађосмо у аритметици: у проширењу рачунања од целих бројева (што припада, без сумње, преисторији) на разломљене бројеве, тј. рационални бројеви улазе у математику.

Miloš RADOJČIĆ

MATHEMATICS BEFORE THE ANCIENT GREEKS — EGYPT

Analyzing the Rhind parchment and Moscow papyrus the author presents the problems of algebra and geometry treated by old Egyptians. The paper was written in 1950, when the author taught history and philosophy of mathematics at the University of Belgrade.

Математички институт — Београд
Историја мат. и мех. наука 6 (1992)
Mathematical Institute — Belgrade
History of Math. and Mech. Sc. 6 (1992)

Богољуб СТАНКОВИЋ

ЈАН МИКУСИЊСКИ (1913–1987) ЈЕДАН ОД ТВОРАЦА ТЕОРИЈЕ УОПШТЕНИХ ФУНКЦИЈА

У последњих 40 година Јан Микусињски (Jan Mikusiński), пољски математичар, је знатно утицао на развој математичке мисли и уграђивао носеће карике у разне области савремене математике. Напоменимо само неке. У теорији мере и интеграла незаобилазан је његов прилаз Лебеговом (Lebesgue) и Бохнеровом (Bochner) интегралу [25] који је отворио пут за дефиницију интеграла у далеко општијим просторима (види на пример [35]). Последњих 20 година изграђивана је теорија конвергентних структура као незамењив математички апарат за поједине просторе; структура која је сиромашнија од структуре тополошког простора. Подстицај за ову структуру су два типа конвергенције које је Микусињски увео у поље оператора $\mathcal{M}$. И сам је дао значајан допринос развоју конвергентних структура. О конвергентним структурама види на пример [3] део III. Његова дијагонална теорема [24] је даље разрађена од више математичара и добила знатно општији облик тако да је израсла у „општу технику доказивања", примењивана је при доказу врло општих теорема функционалне анализе (види [2]). Међутим, код свих оних који користе математичке моделе и чије математичко образовање не задире у посебне математичке теорије, још дуго ће Микусињски остати познат и поштован пре свега по *Операторском рачуну* [26]. Исто тако, у историји математике његови резултати и идеје добиће највише места у делу који се односи на уопштене функције. Њима ће и овде бити посвећена посебна пажња. Пре тога даћемо најбитније биографске податке о Микусињском.

Родио се 3. априла 1913. године у Станиславову (Stanisławow). Основну, средњу школу и Универзитет завршио је у Познању (Poznań). Дипломирао је на универзитету у Познању 1937. и ту се одмах и запослио као асистент и радио до избијања Другог светског рата. У току ратног периода боравио је у Закопане (Zakopane) и Кракову (Kraków). За време немачке окупације био је два пута хапшен, учествовао је у раду тајног универзитета у Кракову и у семинару Т. Важевског (T. Ważewski) који су били организовани као вид отпора окупацији. Докторат филозофије стекао је 1945. на Јагјелоњском (Jagiellońskim) универзитету. Као професор радио је у Познању, Вроцлаву (Wrocław) и Варшави (Warszava). Од 1960. године живео је у Катовицама (Katowice) и од оснивања Математичког института Пољске академије наука (1966) ради у њему. Дописни члан Пољске академије наука постао је 1965. године, а 1971. изабран је за редовног члана. Скупштина Српске академије наука и уметности у Београду изабрала га је 22. маја 1975. за иностраног члана.

Објавио је 152 научна рада, од који су два изашла посмртно, као и 29 књига и монографија. Комплетан библиографски списак налази се у [3]. Група математичара која живи и ради у Новом Саду (Б. Станковић, М. Скенџић, Д. Деспотовић, О. Хаџић, М. Будимчевић, Е. Пап, С. Пилиповић, А. Такачи, и Ђ. Такачи) успешно је сарађивала са математичарима окупљеним око Ј. Микусињског и одељења Пољске академије наука у Катовицама, више од 25 година.

Да би се оценио допринос Микусињског теорији уопштених функција, треба сагледати шта се у математици дешавало пре његове појаве, шта су његове идеје и резултати донели новог и какав је његов утицај на даљи развој теорије уопштених функција и њиховој примени.

У време када је Микусињски почео своју научну каријеру веома актуелно се постављао проблем „слабих решења" математичких модела. Сваки математички модел операцијама које садржи врши ограничења на појаве које се могу њиме описати. Ако је појава описана парцијалном диференцијалном једначином, она се мора одвијати довољно правилно да би постојали парцијални изводи функције која представља ток те појаве. Међутим, показало се да често природна решења не могу задовољавати тако строге услове, па су корисници математичких модела, код њиховог решавања све више уводили операције које су у класичној математици биле недопустиве (Диракова (Dirac) δ-„функција" и операције са њоме, Хевисајдов (Heaviside) рачун, ...). Лапласова (Laplace) трансформација која се развила у моћан математички апарат (види G. Doetsch [12]) донела је математичку потврду исправности Хевисајдовог рачуна, али је унела ограничење на раст функција на које се примењује. Покушаји да се остане у границама класичне анализе и задовоље потребе за „проширеним, слабим, решењима" није дало задовољавајуће резултате (види на пример [20]). Прве систематичне идеје о „уопштеном изводу" могу се наћи код С. Л. Собољева (С. Л. Соболев). Л. Шварц (L. Schwartz) је у својим књигама [31] развио теорију једне класе уопштених функција — дистрибуција. Дистрибуције чине векторски простор $\mathcal{D}'$ непрекидних функционела над простором $\mathcal{D}$ основних функција које су глатке и имају компактне носаче у $\mathbb{R}^n$. Но, теорија дистрибуција је везана за познавање врло сложеног математичког апарата, векторско тополошких простора, доступног, у том времену, само уском броју математичара-истраживача.

Поред Шварца, јавили су се и други математичари са својим варијантама уопштених функција тражећи што приступачније и једноставније путеве. Неки су полазили од потреба корисника математичког апарата [18], уводили их аксиоматски [32], користили се карактеристичним особинама дистрибуција [14], … . После Шварца најкомплетнију разраду дали су Гељфанд (Гельфанд) и Шилов (Шилов), полазећи од посебно уведених векторско тополошких простора. Ј. Микусињски [22] је, пак, увео уопштене функције чисто алгебарски. Конструисао је поље оператора $\mathcal{M}$. Важна карактеристика његовог пута је што је за коришћење тако уведених уопштених функција довољно основно знање из математике које има сваки дипломирани инжењер.

Поред тога, још 1948. године Микусињски [23] је указао да се и Шварцова теорија може конструисати на једноставнији начин, преко низова непрекидних функција. Те резултате је касније разрађивао са Р. Сикорским (Sikorski) и П. Антошиком (P. Antosik), што је резултирало познатом монографијом [1].

Заједно са својим сином, Пјотром (Piotr) увео је Бомијане [27]. Назив Бомијани је по америчком математичару Т. К. Boehme-у. Бомијани обухватају већи број до тада познатих класа уопштених функција (дистрибуције, обе класе ултра дистрибуција, поље $\mathcal{M}$, …). И Бомијане може да користи свако ко има знање основних курсева математике на техничким факултетима.

Данас је круг оних који користе теорију дистрибуција, међу корисницима математичког апарата, знатно шири, а математичар истраживач у анализи не може без тога појма. Остајући у структури векторско тополошких простора теорија уопштених функција даље се развијала преко ултра дистрибуција [16] и хиперфункција [30] и била примењива на линеарне парцијалне диференцијалне једначине коначног или бесконачног реда. Тек проширивањем простора дистрибуција на алгебру Коломбоа (Colombeau) [9] свака парцијална диференцијална једначина са коефицијентима у C^∞ добила је решење, а могло се прићи и решавању нелинеарних проблема. Е. Розингер (Rosinger) [29] је даље проширио алгебру Коломбоа. И његов приступ је као и код Микусињског, пре свега алгебарски. И Розингерова теорија и Сатоове хиперфункције су таквог облика да су приступачне само уском броју стручњака. Данас је доста радова чији је циљ тражење једноставнијег приступа њиховим резултатима.

Посебно ћемо се задржати на операторима Микусињског као потпуно оригиналном прилазу уопштеним функцијама, а који је наишао на најшири одјек код корисника математичког апарата из разних области науке.

Основа за изградњу поља оператора Микусињског је Тичмаршова (Titchmarsh) теорема. Нека је $\mathcal{C}$ скуп комплексних непрекидних функција реалне променљиве, дефинисане над $[0,\infty)$. Тичмаршова теорема тврди: *Ако је за f и g конволуција $(f{*}g)(t) = \int_0^t f(t-u)g(u)\,du$, $t \in [0,\infty)$ једнака нули, тада је f или g једнако нули.* $\mathcal{C}$ са операцијом сабирања и конволуцијом је комутативни прстен без делиоца нуле и може се проширити на поље $\mathcal{M}$ оператора Микусињског. Елементи поља $\mathcal{M}$ су класе еквиваленције парова $(f,g) \equiv f/g$, где су f и g из $\mathcal{C}$; $(f,g) = (u,v) \iff f * v = u * g$. Поље

$\mathcal{M}$ садржи, у смислу изоморфизма, поље комплексних бројева, прстен $\mathcal{C}$, операторе диференцирања, интеграљења, транслације, ...

У $\mathcal{M}$ су дефинисане и две конвергентне структуре. Конвергентна структура I: Низ $(a_n) \subset \mathcal{M}$ конвергира ка $a \in \mathcal{M}$ ако постоји $f \neq 0$, $f \in \mathcal{C}$ тако да $a_n * f \in \mathcal{C}$, $n \in \mathbf{N}$ и $(a_n * f)(x)$ конвергира униформно над $[0, w]$ ка $a * f$ за свако $w \in \mathbf{R}_+$, када $n \to \infty$. Конвергентна структура II: Низ $(a_n) \in \mathcal{M}$ конвергира ка $a \in \mathcal{M}$ ако постоји низ $(f_n) \subset \mathcal{C}$, $f_n \neq 0$, тако да $f_n * a_n \in \mathcal{C}$ и $(f_n * a_n)(x)$ и $f_n(x)$ конвергирају униформно над $[0, w]$ ка $a * f$ односно ка f када $n \to \infty$ за свако $w \in \mathbf{R}_+$. За класу конвергенције I доказано је да није тополошка [6] (не постоји топологија за коју би се конвергентни низови поклапали са конвергентним низовима у класи конвергенције I).

Као што се види, $\mathcal{M}$ има богату алгебарску структуру (поље), али сиромашну тополошку структуру (конвергентна класа). Предзнање за коришћење поља $\mathcal{M}$ се може добити у сваком основном курсу математике на универзитету.

Последњих 40 година рађено је интензивно на изградњи теорије оператора Микусињског и на могућностима њихове примене. И наша новосадска група има удео у том послу. У прегледном чланку [8] цитирано је 47 наших радова. Данас се може већ јасно и објективно сагледати место Микусињсковог пута у теорији уопштених функција, могућности његове теорије, као и мане.

Главна предност оператора Микусињског је њихова приступачност и једноставност. Богата алгебарска структура омогућава једноставно решавање разноврсних математичких модела без ограничења на правилност промена или раст решења. Обе унутрашње операције су непрекидне у односу на конвергентну класу.

Главни недостаци: Теорија оператора Микусињског изграђена је за функције једне промењиве. Може се изградити и за више промењивих (види на пример [21]), али се губи у једноставности. Функције дефинисане и различите од нуле у интервалу $(-\infty, w)$, $w \in \mathbf{R}$, нису у $\mathcal{M}$. Поље $\mathcal{M}$ није алгебарски затворено [28]. У $\mathcal{M}$ немамо операцију која би уопштавала обично множење функција.

Како се ове карактеристике оператора Микусињског одражавају при решавању математичких модела, илустроваћемо на два случаја.

Математички модел који садржи оператор извода, транслације, конволуције преводи се једноставно у модел у $\mathcal{M}$ у коме фигуришу само унутрашње операције поља $\mathcal{M}$. Тада се лако решава. Тешкоћа се може јавити само због алгебарске незатворености поља $\mathcal{M}$.

Математички модел у коме фигурише непозната функција $U(t, x)$, $(t, x) \in [a, \infty) \times D$, где је $a \in \mathbf{R}$, а D област у $\mathbf{R}$, а који је линеаран по парцијалним изводима и у којем се јављају још и оператори транслације и конволуције по првој промењивој као и множење са непрекидним функцијама a_i, дефинисаних над D, преводи се у линеарну диференцијалну једначину у скупу пресликавања $D \to \mathcal{M}$ (диференцијална једначина оператора) са коефицијентима непрекидним функцијама над D. Теорија линеарних диференцијалних једначина оператора је врло слична теорији обичних диференцијалних једначина за нумеричке функције. Када се нађе решење у $\mathcal{M}$ посебан проблем је да се протумачи његово значење, јер су елементи $\mathcal{M}$ апстрактне величине.

Ако су за полазну парцијалну диференцијалну једначину дати и неки накнадни услови, тада то морају бити или почетни или рубни за област облика $D_1 \times [0, \infty)$, где је $D_1 \subset D$ и оне се преводе у $\mathcal{M}$ у почетни или рубни услов.

О областима у којима се примењују оператори Микусињског види [26] и [15].

Према Камињском (Kamiński) Микусињски је своје прве идеје о пољу $\mathcal{M}$ изнео на тајном ратном семинару Т. Важевског за време окупације Пољске 1943. године (види [15]). Његова књига *Operational Calculus* [26] доживела је више издања; прво — 1953. године. Штампана је на 6 језика: пољском, руском, немачком, енглеском, мађарском и јапанском. Интересантан је податак који наводи Х. Коматсу (H. Komatsu) [17]. Јапанско издање књиге *Operational Calculus* изашло је 1963. године и до данас продато је више од 20 000 примерака, а јапанско Друштво математичара броји мање од 5 000 чланова. То показује да су купци књиге пре свега корисници математичког апарата из других области науке. Он наводи и као интересантну чињеницу да је књига дошла у време када је аутомобилска индустрија почела да се нагло развија у Јапану. Да ли је то само случајна коинциденција?

Било је покушаја да се конструкцијом изоморфних поља пољу $\mathcal{M}$ добију једноставнији прилази (види на пример [4] и [11]), али пракса их није прихватила. На разним видовима операторског рачуна, изграђеним од других аутора ([5], [10], [19], [37], ...) јасно се види утицај поља $\mathcal{M}$ и ниједан од њих није тако широко прихваћен као операторски рачун Микусињског.

Као што смо већ навели, Ј. Микусињски је заједно са П. Микусињским [27] проширио поље оператора са Бомијанима. У том правцу радило је више математичара, навешћемо само радове Бомија [7] и Саса (Szász) [36]. Неоспоран је утицај Микусињског и на оне математичаре који су тражили такву теорију уопштених функција која ће моћи да се примени и на нелинеарне проблеме. Најуочљивије је то код Розингера [29].

Била би то непотпуна слика о Микусињском када би говорили само о његовим резултатима, а не и о његовом методу рада. О карактеристикама његовог прилаза математичким проблемима, обради и начину тражења решења већ сам писао [34]. Ипак мораћу нешто поновити и овде.

Главна карактеристика његовог рада у математици је јасно дефинисање циља истраживања и економија у коришћењу математичког апарата. Када утврди проблем који жели да решава, тражи прави кључ за њега. Затим инсистира на најкраћем путу решавања, користећи најједноставнији математички апарат. Најзад, повезује проблем, решење и метод решавања са оним што је познато. То је и разлог што се он у више наврата враћао већ урађеном и решеном; није био задовољан било са економијом мишљења, коришћеним математичким апаратом или једноставношћу доказа. Био је задовољан тек када је и за најкомпликованије проблеме све изгледало веома једноставно. Такви његови напори омогућавали су и другим математичарима да начине даље кораке у решавању математичких модела и у разради нових теорија. У већ поменутом раду [34] илустровао сам то на његовим радовима о апроксимацији транслацијом (shift approximation).

Може се закључити да ће идеје и резултати Микусињског остати у историји математике као трајан допринос њеном развоју, да ће његов операторски рачун још дуго служити при решавању математичких модела, да ће све то скупа бити и даље подстицај новим идејама и резултатима, а да ће истовремено служити као пример економије мишљења и коришћења претходних резултата.

ЛИТЕРАТУРА

[1] P. Antosik, J. Mikusiński and R. Sikorski, *Theory of Distributions, The Sequential Approach*, Elsevier and PWN, Amsterdam-Warszawa 1973.

[2] P. Antosik and C. Swartz, *Matrix Methods in Analysis*, Lecture Notes in Math. 1113, Springer Verlag, 1985.

[3] P. Antosik and A. Kamiński, *Generalized Functions and Convergence World Scientific*, Singapore 1990.

[4] L. Berg, *Asymptotische Auffassung der Operatorenrechnung*, Studia Math. XXI (1962), 215–229.

[5] R. Bittner, *Operational calculus in linear spaces*, Studia Math. XX (1961), 1–18.

[6] T. Boehme, On Mikusiński operators, Studia Math. XXXIII (1969), 127–140.

[7] T. Boehme, *Two theorems on the differentiation of regular convolution quotients*, in: *Generalized Functions, Convergence Structures and Their Applications*, edited by B. Stanković, E. Pap, S. Pilipović and V. S. Vladimirov, Plenum Press, New York and London, 1987, 125–131.

[8] Yu. A. Brichkov, A. P. Prudnikov and V. S. Shishov, *Operational Calculus*, Results in science and in technics, T. 16, Moscow 1979, 99–148. (in Russian).

[9] I. Dimovski, *Convolutional Calculus*, Publ. House of the Bulg. Acad. Sci. Sofia 1982.

[10] J. F. Colombeau, *New Generalized functions and Multiplication of Distributions*, North Holland, Amsterdam 1984.

[11] V. A. Ditkin and A. P. Prudnikov, *Integral Transforms and Operational Calculus*, Pergamon Press, New York 1965.

[12] G. Doetsch, *Handbuch der Laplace-Transformation*, Birkhäuser Verlag, Basel **1950**. T. I, II, III.

[13] J. M. Gelfand and G. E. Shilov, *Generalized Functions*, Fizmatgiz, Moscow **1958**. T. I, II (in Russian).

[14] I. Halperin, *Introduction to the Theory of Distributions*, University of Toronto Press, Toronto **1952**.

[15] A. Kaminski, *Life and work of professor Jan Mikusiński*, in: *Generalized Functions and Convergence*, World Scientific, Singapore **1990**, 3–20.

[16] H. Komatsu, *Ultradistributions I*, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sec. IA, 20 (**1973**), 25–105.

[17] H. Komatsu, *Operational calculus and Japan*, in: *Generalized Functions and Convergence*, World Scientific, Singapore **1990**, 59–70.

[18] J. Korevaar, *Distributions defined from the point of view of applied Mathematics, I-V*, Neder. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A 58, Indag. Math. 17, 368–378, 379–389, 483–493, 494–503, 663–674.

[19] G. L. Krabbe, *Operational Calculus*, Springer Verlag **1970**.

[20] J. Leray, *Sur le mouvement d'un liquide visqueux emplissant l'espace*, Acta Math. 63 (**1934**), 193–248.

[21] W. Meiske, *Über einen zweidimensionalen Operatorkalkül und dessen Anwendung zur Lösung linearer partieller Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten*, Diss., Humbolt Univ., Berlin **1970**.

[22] J. Mikusiński, *L'anneau algebrique et ses applications dans l'analyse fonctionnelle, I and II*, Ann. Univ. Mariae Curie-Skłodowska Sect. A 2 (**1947**), 1–48 and A 3 (**1949**), 1–84.

[23] J. Mikusiński, *Sur la méthode de généralisation de Laurent Schwartz et sur la convergence faible*, Fund. Math. 35 (**1948**), 235–239.

[24] J. Mikusiński and J. K. Books, *On some theorems in functional analysis*, Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Sci. Math. Astronom. Phys. 18 (**1970**), 151–155.

[25] J. Mikusiński, *The Bochner Integral*, Birkhäuser Verlag, Basel **1978**.

[26] J. Mikusiński, *Operational Calculus, I and II*, (with K. Boehme), Pergamon Press, Oxford **1983** and **1987**.

[27] J. Mikusiński and P. Mikusiński, *Quotients de suites et leurs applications dans l'analyse fonctionnelle*, C.R. Acad. Sci. Paris Sér I Math. 293 (**1981**), 463–464.

[28] C. Ryll-Nardzewski, *Sur le corps des operateurs de Mikusiński*, Studia Math. XIV (**1954**), 247–248.

[29] E. E. Rosinger, *Non-Linear Partial Differential Equations, An Algelbraic View of Generalized Solutions*, North Holand, Mathematics Studies 164, **1990**.

[30] M. Sato, *Theory of hyperfunctions, I*, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sec. I, 8 (**1959**), 139–193.

[31] L. Schwartz, *Théorie des Distributions*, Hermann, Paris **1950–1951**, I and II.

[32] J. Sebastião e Silva, *Sur une construction axiomatique de la théorie de distributions*, Revista Fac. Ciencias Lisboa, A 4 (**1955**), 79–186.

[33] L. L. Soboleff, *Méthode nouvelle à résoudre le problème de Cauchy pour les equations linéaires hyperboliques normales*, Math. Sb. 1 (43) (1936), 39–72.

[34] B. Stanković, *In memory of professor Jan Mikusiński*, in: *Generalized Functions and Convergence*, World Scientific, Singapore, 1990, 42–43.

[35] R. A. Struble, *Integrals of operator-valued functions*, Internat. J. Math. & Math. Sci. Vol. 11, No. 2 (1988), 221–230.

[36] A. Szász, *Convolution Multipliers and Distributions*, Pacific J. Math. 60 (1975), 367–375.

[37] K. Yosida, *Operational Calculus — A Theory of Hyperfunctions*, Springer-Verlag, 1984.

Bogoljub STANKOVIĆ

JAN MIKUSIŃSKI (1913–1987) ONE OF THE CREATORS OF THE THEORY OF GENERALIZED FUNCTIONS*

In the last 40 years Polish mathematician Jan Mikusiński has performed a substantial influence to the development of mathematics. His interests ranged widely and included, first of all, the theory of measure and integration, convergence structures, diagonal theorem and its applications, algebraic approach in operational calculus and the elementary theory of Schwartz's distributions. In the history of mathematics he is registered as one of the creators of the theory of generalized functions.

J. Mikusiński was born at Stanisławow on April 3, 1913 and died on July 27, 1987 in Katowice. He completed his secondary education and university studies in Poznań. His scientific career started in 1937 at the University of Poznań. During the war (1939–1945) he lived in Zakopane and in Cracow. Two times was arested by the Nazis.

After the war, in 1945, he gained his Ph. D. at the Jagiellonian University. He was professor at the universities of Lublin, Wroclaw and Warszawa. In 1960 J. Mikusiński moved to Katowice and was head of the center which became a part of the Institute of Mathematics of the Polish Academy of Sciences. In 1971 he was appointed full member of the Polish Academy of Sciences and in 1975 member of the Serbian Academy of Sciences. More than 20 years he was the manager of a productive collaboration with the mathematicians, working in the Institute of Mathematics of the University of Novi Sad. He published 152 papers. His book *Operational Calculus* has been published in Polish, English, Russian, German, Hungarian and Japanese.

dr BOGOLJUB STANKOVIĆ
Dušana Vasiljeva 13
21000 Novi Sad

*This research was supported by Science Fund of Serbia, grant number 0401A, through Matematički institut.

Математички институт — Београд
Историја мат. и мех. наука 6 (1992)
Mathematical Institute — Belgrade
History of Math. and Mech. Sc. 6 (1992)

Иван ГУТМАН

ИСТОРИЈА ПРИМЕНЕ МАТЕМАТИКЕ У ХЕМИЈИ

Увод

Бавећи се теоријском и математичком хемијом током више од две деценије аутор овог чланка имао је прилику да понешто сазна и о историји примене математике у хемији. Аутор, међутим, никада није истраживао историју науке на начин како то чине професионални историчари и на начин који ова значајна проблематика заслужује. Због тога овај чланак нема амбицију да пружи свеобухватан, исцрпан и на изворним документима заснован приказ теме наведене у наслову. Уместо тога, излажемо историју примене математике у хемији онакву какву је аутор познаје, наглашавајући оне епизоде које су, по ауторовој процени, од нарочитог значаја.

Говорећи о примени математике у једној одређеној природно-научној дисциплини морамо пре свега ограничити област нашег интересовања. Нас, разуме се, неће занимати обично бројање и једноставне рачунске операције без којих се не може замислити било каква делатност у егзактним наукама. Нећемо се обазирати ни на математичке аспекте оних знања која се у хемији сматрају споредним (на пример, статистичка обрада мерних резултата или законитости преноса топлоте у хемијским реакторима). У овом раду бавићемо се искључиво оним математичким објектима који служе или су служили за описивање основних хемијских категорија. Као што је познато, најважнији основни појмови хемије су: хемијски елеменат, једињење, атом, молекул, хемијска веза, хемијска реакција.

На крају, ограничићемо се на развитак матемтичке хемије до краја XIX века, остављајући разраду оних значајних достигнућа која су се догодила у нашем несрећном XX веку за неку другу прилику.

Почеци

Хемија као посебна дисциплина у (условно речено) систему природних наука настала је негде у првим вековима наше ере у Грчкој, Египту и другим источним провинцијама Римског царства, касније Византије.

Та епоха је карактеристична по бујању разних филозофских, мистичних и религиозних учења, а нарочито по успону хришћанства. Учени, науци склони људи тога времена познавали су и комбиновали та разна знања и „знања". Хемија се већ у тој својој најранијој етапи контаминирала елементима астрологије, магије и веровања у натприродни значај неких бројева.

Из тог периода потиче, на пример, схватање да има 7 планета и 7 метала, и да планете и метали кореспондирају једни другима и утичу једни на друге. Једна до данас сачувана успомена на то веровање су називи дана у недељи — којих такође има 7. На пример: Saturday (енгл.) = субота ↔ Сатурн ↔ олово, mercredi (фр.) = среда ↔ Меркур ↔ жива.

Магични бројеви срећу се и у радовима много познијег датума. Један од највећих хемичара раног Средњег века Jabir ibn Hayyan (Џабир ибн Хајан, у западној европи познат под именом Гебер или Џебер), који је живео крајем VIII и почетком IX века, придавао је велики значај бројевима 1, 3, 5, 8 (чији збир је 17) и 28. У својој *Књизи о вагама* он тврди да се све на свету покорава броју 17. На пример, метали имају по 17 „потенција" или како бисмо ми данас рекли: квалитета или особина. Он такође сматра да постоје четири елементарна квалитета, сваки са по четири степена (означених са 1, 3, 5 и 8) и са по седам нијанси, укупно $4 \times 4 \times 7 = 4 \times 28 = 112$. Нема сумње да је Џабир своје бројеве преузео из магичног квадрата

$$\begin{matrix} 4 & 9 & 2 \\ 3 & 5 & 7 \\ 8 & 1 & 6 \end{matrix}$$

који је, иначе, био познат већ неоплатоничарима и који су средњевековни мистичари веома уважавали.

Ако још кажемо да је Џабир сваком слову арапског писма придружио по један број, па онда из бројчане вредности арапског имена појединих метала закључивао о њиховим хемијским особинама, биће нам јасан научни ниво овакве хемијске аритметике.

Математика алхемије

Релативно примитивне идеје најраније грчко-египатске хемије подигнуте су на знатно виши и теоријски боље артикулисани ниво у такозваном алхемијском периоду, а који је трајао безмало хиљаду година. Основна поставка алхемије је да метали (а и друге супстанце које ми данас убрајамо међу хемијске елементе) представљају сложена тела састављена од неколико компоненти. Ове компоненте било би заједничке свим металима, с тим да би у различитим металима биле присутне у различитим пропорцијама. Непосредна последица ове теорије је могућност трансмутације — претварања једног метала у други. Из разумљивих разлога, алхемичаре је првенствено занимала трансмутација јефтиних неплеменитих метала у злато. (Напоменимо, узгред, да су наведена алхемијска схватања доживела потпуну, како експерименталну тако и теоријску потврду у савременој науци.)

Током многих векова алхемичари нису никако успевали да експериментално реализују трансмутацију. Због тога су они чинили све могуће напоре да пронађу средство — такозвани камен мудрости или филозофски камен — чијим посредством би могли остварити свој циљ. Будући да је природа камена мудрости била потпуно неизвесна, вековна потрага за њим представља можда највећу странпутицу у историји људске мисли. Међу небројеним покушајима да се открије камен мудрости било је и таквих који су експлицитно примењивали одређене математичке поступке. Тако, на пример, Михаел Мајер (Michael Maier) у својој књизи *Atalanta Fugiens* (*Аталанта у бекству*), штампаној 1618. године наводи следећи „алгоритам“: *Опиши кружницу око мушког и женског, затим квадрат, око тога троугао; направи [још једну] кружницу и имаћеш филозофски камен.* Овај текст је у књизи илустрован сликом алхемичара који држи велики шестар и помоћу њега изводи одговарајућу геометријску конструкцију. Поред њега на земљи леже и два друга математичка инструмента — угломер и лењир.

Да не би било забуне: мушко и женско у жаргону алхемије означавају два супротна принципа, рецимо метал (живу) и неметал (сумпор). Наведене геометријске операције симболизују разне лабораторијске поступке у чије тумачење овде не можемо да улазимо.

У књизи *Viridiarum Chymicum* (*Хемијски врт*) коју је Данијел Штолцијус (Daniel Stolcius) објавио 1624. године, ребис — двополно биће које симболизује сједињеност двају супротних хемијских принципа — приказан је са шестаром у угломером у руци, како стоји на кругу у који су уписани правилни троугао и квадрат.

Из ових примера видимо да су геометријска знања била распрострањена међу алхемичарима и да су их они користили у својим мистично-симболичним разматрањима хемијских поступака. Математика је и у алхемији била „примењивана“ у магијске сврхе и, наравно, није нимало допринела напретку научне мисли.

Математика у раном периоду научне хемије

За почетак научне хемије традиционално се прихвата година 1661. када је британски научник Роберт Бојл (Robert Boyle) објавио своју књигу *The Sceptical Chemist* (*Скептични хемичар*). Бојлова главна заслуга је да је хемију конципирао као чисто емпиријску науку, прихватајући само оне чињенице које се могу експериментално установити. Радикално одбацивши ранија мистична и догматска схватања алхемије, он је веома допринео прецизној формулацији основних појмова хемије. Његова дефиниција хемијског елемента — наиме да је то супстанца која се експериментално не може раставити на једноставније састојке — сузбила је идеју трансмутације за следећих 250 година.

Напуштањем алхемијског мистицизма хемија је за извесно време остала без математике. То је, посматрано с данашње тачке гледишта, био значајан корак напред. Наиме у хемији XVII и XVIII века нису били познати никакви закони за чију формулацију и разраду би био потребан иоле сложенији математички формализам. Свака употреба математике у то време била би у ствари њена злоупотреба и деградирала би хемију на њен преднаучни ниво.

Математика се у научну хемију почела постепено враћати тек у XIX веку, паралелно с великим открићима о атомско-молекулској структури материје. Године 1786. изрекао је Кант свој чувени негативни суд о хемији. Он гласи: *Тврдим да се у свакој грани природних наука садржи само онолико стварне науке колико у њој има математике .... Хемија се, стога, мора избацити из оквира такозваних природних наука.* Иако се ми с Кантовим закључком можемо и не сложити, он речито говори о нивоу математизације хемије у XVIII веку.

Математичка хемија Михаила Ломоносова

Један пионирски, потпуно усамљен и данас готово заборављен покушај увођења математичког начина мишљења у хемију је кратак чланак *Elementa Chimiae Mathematicae* (*Елементи математичке хемије*) руског полихистора Михаила Васиљевича Ломоносова. Чланак је, на латинском језику, написан 1741. године и нађен је у облику недовршеног рукописа у Ломоносовљевој заоставштини. То је, по свему судећи, предговор некој књизи о (теоријској?) хемији коју је Ломоносов имао намеру да напише. Можда је то уџбеник *Увод у праву физичку хемију* који је он објавио 1752. године али у који наведени текст није укључен.

Ломоносов је покушао да хемију изложи на строго формалан начин, као дедуктивни, на аксиомима заснован, систем знања. Као инспирација за то несумњиво су послужили *Математички принципи природне филозофије* Исака Њутна (Isaac Newton) и велики успеси оновремене теоријске механике. На несрећу, Ломоносов је пожурио за добрих сто година, и покушао је аксиоматизовати хемију у време када још нису били откривени ни најосновнији квантитативни хемијски закони. Лавоазије (Lavoisier) се, примера ради, родио тек две године касније — 1743. Иако се не може оспоравати дубокоумност и далековидост неких Ломоносовљевих теза, његов рад је еклатантан пример за стерилност и контрапродуктивност превремене математизације једне природне науке.

Колико је Ломоносов био испред свога времена види се и по томе што је термин „математичка хемија“, који је он лично сковао, ушао у ширу употребу тек у седамдесетим годинама нашег века. Теорема 1 из његових *Елемената* представља прву теорему икада формулисану и „доказану“ у хемији. Она гласи:

Theorema I. *Verus Chymicus debet esse theoreticus et practicus.* (*Прави хемичар треба да буде и теоретичар и практичар.*)

Наводимо и доказ ове теореме.

Demonstratio. Хемичар треба да докаже све што се говори у хемији. Но то што доказује он мора прво сазнати то јест стећи историјска знања о променама сложеног тела, и, као последица тога, мора бити практичар. Ово — као прво. Он треба да буде у стању да доказује оно што је сазнао, то јест да му да објашњење, а то претпоставља филозофско знање. Из тога следује да прави хемичар треба да буде и теоретичар. Ово — као друго.

Наводимо још неколико поучних ставова из истог дела.

Corollarium II. *Они који се баве само праксом, нису прави хемичари.*

Corollarium III. *Нити они, који се заносе само спекулацијама не могу се убројати у праве хемичаре.*

Corollarium V. *Зато, ко хоће да дубље проникне у хемијске истине, потребно је да изучава механику.*

Corollarium VI. *А како знање механике претпоставља знање чисте математике, то онај који стреми блиском изучавању хемије треба да буде упућен и у математику.*

Структурне формуле — први прави математички модел у хемији

Откриће структурних формула није дело једног човека и није настало у једном кратком временском периоду. Оно се постепено формирало око средине XIX века. Овде не можемо улазити у компликоване историјске појединости и навешћемо само најважније податке. Пре тога, неколико речи о самом концепту хемијске структуре.

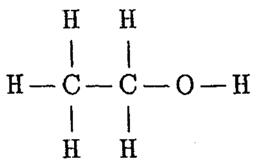
Учење о атомистичкој грађи материје, иако настало још у античким временима, шире је прихваћено од стране хемичара тек на самом почетку XIX века. Тада је, наиме, енглески хемичар Далтон пружио прве експерименталне доказе у прилог атомске теорије. Убрзо после тога постало је јасно да се атоми групишу у одређене веће целине, које су назване молекулима. Дуго се сматрало да је свако хемијско једињење састављено од одговарајућих молекула, да бисмо данас знали да нека једињења јесу, а нека нису изграђена од молекула. (На пример, не постоје молекули кухињске соли $NaCl$ али постоје молекули воде H_2O или алкохола C_2H_5OH.)

Молекули су агрегати састављени од извесног, тачно одређеног броја атома. Оно што атоме у молекулу држи на окупу назива се хемијска веза. Хемијско искуство сакупљено током дужег периода времена, а нарочито у првој половини XIX века, указивало је на то да хемијске везе постоје само између појединих парова атома, а да се за друге парове атома у молекулу може тврдити да нису хемијски повезани. На језику математике то би значило да је хемијска веза једна бинарна релација међу атомима и та релација је симетрична.

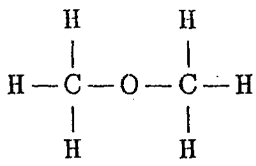
Из разлога описаних у претходним одељцима, хемичари прве половине XIX века по правилу нису били упућени у математику. Због тога се теорија хемијске структуре формирала прилично споро и то као резултат интелектуалног напора већег броја аутора.

Још у XVIII веку су Шкотланђани Кален (Cullen, 1758), Енглез Блек (Black, око 1760) и Ирац Хигинс (Higgins, 1789) користили дијаграме за представљање гравитационих сила, за које су веровали да делују међу атомима у молекулу. Идеју да молекули имају „структуру“, то јест да је постојање односно непостојање хемијских веза између парова атома једно перманентно и карактеристично својство молекула, први је изнео Рус Бутлеров (1861). Британац Купер (Couper) је 1858. године хемијску везу приказивао линијом између симбола одговарајућих атома. Један други Британац, Крум Браун (Crum Brown, 1864) молекулску структуру приказује дијаграмима који су већ доста слични данашњим хемијским формулама. У радовима Енглеза Едварда Франкланда (Edward Frankland, 1866), а нарочито Немца Аугуста Кекулеа (August Kekulé, око 1867. и касније), постављене су правилне структурне формуле за мноштво тада познатих хемијских једињења. Формуле какве је употребио Кекуле користимо и данас; заинтересовани читалац их може наћи на стотине у ма ком уџбенику органске хемије.

Примера ради наводимо структурне формуле I и II које представљају обични алкохол (тачније: етанол) одн. диметилетар:



I

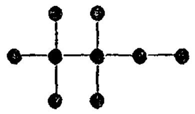


II

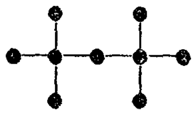
Сви раније набројани научници, а и они који нису поменути, били су хемичари и нису своје структурне формуле доводили у везу с било каквим математичким објектима.

Први који је увидео да структурне формуле у хемији имају дубоки и нетривијални математички садржај био је, изгледа, британски математичар Артур Кејли (Arthur Cayley). Он је 1874. године дефинисао тзв. плерограме и кенограме (или како бисмо их ми данас назвали — графове) директно инспирисан хемијским структурним формулама. Године 1878. британско-амерички математичар Џејмс Џозеф Силвестер (James Joseph Sylvester) проучава тзв. хемикографове.

Савремено образованог математичара не би требало посебно убеђивати у то да су структурне формуле у хемији (које представљају симетричне бинарне релације између атома у молекулу) и графови у математици (који представљају симетричне бинарне релације између неких апстрактних елемената) у најужем сродству. Као илустрацију овога наводимо два графа са по девет чворова које треба упоредити са хемијским формулама I и II. На језику данашње математичке хемије, III и IV су молекулски графови етанола (I) и диметилетра (II).



III



IV

О истраживањима која представљају математичку разраду концепта структурних формула говоримо у следећем одељку.

Хемијско порекло графова

Познато је да се као почетак теорије графова сматра објављивање рада Леонарда Ојлера (Leonhard Euler) *Solutio Problematis ad Geometriam Situs Pertinentis* (*Решење једног проблема у вези са геометријом положаја*). То је било 1736. године. Међутим, назив „граф" није био употребљен све до 1878. године.

Као што смо већ рекли, у седамдесетим годинама прошлог века неколико истакнутих математичара заинтересовало се за структурне формуле које су се петнаестак година раније појавиле у хемији. Међу њима треба пре свега да буду споменути Кејли, Силвестер и Вилијем Кингдон Клифорд (William Kingdon Clifford).

Кејли је 1874. године у часопису *Philosophical Magasine* објавио рад *On the Mathematical Theory of Isomers* (*О математичкој теорији изомера*) који се може сматрати првим озбиљним хемијско-математичким истраживањем. У њему су концепције хемијске структуре преведене на језик математике. Оно што ми данас називамо „молекулски граф" Кејли означава као „плерограм". Молекулски граф из којег су одстрањени чворови степена један, који је данас познат под именом „скелетни граф", Кејли означава именом „кенограм". Доказао је да између плерограма и кенограма постоји обострано једнозначна кореспонденција.

Наставак Кејлијевог рада бави се пребројавањем изомера, односно одређивањем броја неизоморфних плерограма са задатим бројем чворова одређеног степена (опширније о томе у следећем одељку).

За молекулске графове су се затим заинтересовали и неки други математичари. Клифорд је око 1875. доказао елементарни резултат да угљоводоници формуле C_nH_{2n+2} морају бити ациклични, а да угљоводоник формуле $C_nH_{2n+2-2c}$ садржи c независних циклуса (или како хемичари кажу: c прстенова).

За нову хемијску математику нарочито се загрејао Силвестер, који је у фебруару 1878. године у часопису *Nature* објавио крaћи чланак под насловом *Chemistry and Algebra* (*Хемија и алгебра*). Затим следи реченица: *Every invariant and covariant thus becomes expressible by a graph precisely identical with a Kekuléan diagram or chemicograph.* (*Свака инваријанта и коваријанта се на тај начин може изразити помоћу једног графа који је прецизно идентичан са Кекулеовим дијаграмом или хемикографом.*)

У наведеној реченици реч „граф" је употребљена по први пут у истом значењу које она има и данас.

Према томе израз „граф" потиче од Силвестера и представља скраћицу за „хемијски граф", а то је исто што и „структурна формула". Према томе „граф" је хемијског порекла.

Силвестер се у више својих радова бавио молекулским графовима и инсистирао је на аналогији између њих и извесних алгебарских израза. Тај правац истраживања је, међутим, био бесплодан и убрзо је потпуно напуштен. Оно што је задржало вредност до данашњих дана је неизмерно Силвестерово одушевљење открићем постојања дубљих математичких садржаја у хемијским појмовима. Он је 1874. и 1878. написао следеће: *Што више студирам [хемију] то сам више импресиониран хармонијом која постоји између хемијских и алгебарских теорија.*

* * *

Хемија има исти стимулативни и сугестивни утицај на алгебраисту као и посета Краљевској Академији. ... Заиста, изгледа ми као да постоји егзактна хомологија између сликарства и поезије с једне, и модерне хемије и модерне алгебре с друге стране. У поезији и алгебри ми чисте идеје изражавамо помоћу језика, у сликарству и хемији идеје су умотане у материју.

Историја пребројавања изомера

Изомерија је појава да више различитих молекула имају исти састав, наиме садрже исти број атома исте врсте. Јасно је да се такви молекули морају разликовати по својој структури. Пример изомера су I и II, који оба садрже по два атома угљеника, шест атома водоника и један кисеоников атом. Њима одговарају неизоморфни графови III и IV, оба са по два чвора степена 4, шест чворова степена 1 и једним чвором степена 2.

Одмах по откривању структурних формула одређен је број изомера неких једноставнијих молекула. То је омогућило да се предвиди постојање неких, у то време, непознатих једињења. Експериментална потврда ових предвиђања био је велики тријумф структурне теорије.

У почетку је ово пребројавање изомера вршено без икаквог система, обичном „методом пробања". Јасно је да овакав приступ није могао да се примени код иоле већих молекула. На пример, док угљоводоника формуле $C_{10}H_{22}$ има само 75, дотле број изомера формуле $C_{50}H_{102}$ износи астрономских 1177436517469532 70.

Године 1857. Кејли се, изгледа по наговору свог пријатеља Силвестера, бавио пребројавањем коренских стабала. Он је тај проблем елегантно решио тако што је пронашао формулу (1) помоћу које се може рекурзивно одредити A_n, број неизоморфних коренских стабала са n чворова, $n = 1, 2, 3, \ldots$.

$$\sum_n A_n x^n = \prod_n (1 - x^n)^{-A_n}. \tag{1}$$

По свему судећи, Силвестер и Кејли су већ тада имали на уму пребројавање хемијских изомера. Касније (1874) Кејли је пребројао и стабла без корена. У свом раније помињаном чланку из 1874. године Кејли експлицитно говори о хемијским изомерима, да би се следећих година њиховим пребројавањем бавио у низу радова објављених како у математичким тако и у хемијским часописима. Кејли је 1875. предложио једну систематску методу за одређивање броја изомерних алкана C_nH_{2n+2}, али ни тада ни касније није успео да пронађе компактно решење овог проблема. Он је својом методом израчунао број изомера за $n \leq 11$. Неки од тако добивених резултата били су, међутим, погрешни и 1880. године их је кориговао немачки хемичар Херман (Herman).

Још пре Кејлија пребројавањем изомера помоћу комбинаторне математике бавио се Рус Флавицки (Флавицкий, 1871). Он је, одређујући број изомерних алкохола, открио неке опште правилности, на пример да је број примарних алкохола са n угљеникових атома једнак укупном броју алкохола са $n - 1$ угљеникових атома.

Ипак, до потпуног решења проблема пребројавања изомера било је још веома далеко. До краја XIX века на том тешком подручју опробала су се још тројица научника: Шиф (Schiff, 1875. и касније), Херман (1880. и касније), те наш Сима Лозанић (1897. и касније).

Тек у тридесетим годинама нашег века решавање проблема пребројавања хемијских изомера битно се померило с мртве тачке. Тада су амерички хемичари Хинзе и Блер (Henze и Blair, 1931) пронашли рекурзивну методу за одређивање броја алкана C_nH_{2n+2} као и других врста хемијских једињења. Само коју годину касније мађарско-амерички математичар Џорџ Поја (George Pólya, 1937. и касније) разрадио је општу теорију за одређивање броја произвољних комбинаторних објеката одређеног типа. Пребројавање изомера постаје сада специјални случај Појине теорије.

Појин рад *Kombinatorische Anzahlbestimmung für Gruppen, Graphen und chemische Verbindungen* (*Комбинаторне методе за пребројавање група, графова и хемијских једињења*) објављен 1937. године у часопису *Acta Mathematica* један је од камена темељаца модерне комбинаторике. Он такође представља један од најзначајнијих достигнућа у математичкој хемији свих времена.

Будући да се у овом чланку бавимо историјом а не савременим стањем математичке хемије, читаоце заинтересоване за новије резултате на подручју пребројавања изомера упућујемо на цитирану литературу.

Физичка хемија

Од када су се хемија и физика конституисале у релативно одвојене и самосталне науке, стално су се јављали научници који су у својим хемијским истраживањима примењивали било експерименталне било теоријске методе физике. Бројни, веома значајни резултати постигнути на том граничном подручју довели су до тога да се током XIX века све више и све одређеније говори о физичкој хемији као посебној грани науке.

Као куриозитет наводимо да термин „физичка хемија" по свему судећи такође потиче од Ломоносова. Он је око 1750. предавао „физичку хемију" студентима Петербуршке академије наука, а 1752. је написао уџбеник *Увод у праву физичку хемију*. У тој књизи дао је, и са данашње тачке гледишта прихватљиву, дефиницију физичке хемије као *„науке која објашњава, на основу поставки и искуства физике, узроке оног што се дешва у хемијским операцијама у сложеним телима"*.

У физичку хемију традиционално спадају термодинамика, кинетичка теорија гасова, теорија раствора, електрохемија, спектрохемија, хемијска кинетика и многе друге, за разумевање хемијских појава веома важне, научне дисциплине. Овде намерно нисмо поменули бројне области истраживања које су у физичку хемију уведене у XX веку.

Као формални тренутак настанка физичке хемије као самосталне науке често се узима година 1887. када су хемичар Оствалд (Ostwald), физичар Арениjус (Arrhenius) и вант Хоф (van't Hoff), за кога се већ тада говорило да је физикохемичар, основали *Zeitschrift für Physikalische Chemie* (*Часопис за физичку хемију*).

Физикохемичари су, разуме се, примењивали математички апарат физике, а добро је познато да је овај апарат у XIX веку био већ изузетно добро развијен. Историја примене математике у физичкој хемији није тема овог чланка, а њена иоле опширнија разрада захтевала би посебну и веома обимну студију. Изузетно, у следећем одељку у најкраћим цртама излажемо неке математичке аспекте хемијске кинетике.

Хемијска кинетика — диференцијалне једначине у хемији

Све до тридесетих година XX века, када се у хемију умешала квантна физика, диференцијални рачун није налазио неке значајније хемијске примене. Један изузетак представљало је проучавање временског одигравања хемијских реакција. Научна област која се бави таквом проблематиком назива се хемијска кинетика.

Основни појам хемијске кинетике је брзина хемијске реакције. Она се дефинише као извод концентрације посматраног једињења по времену.

Концентрација се у хемијској кинетици схвата као функција чија је независно променљива време. Један од главних задатака хемијске кинетике је налажење ове функције.

Основни закон хемијске кинетике је тзв. закон о дејству маса или Гулдберг-Вагеов закон. Њега су открили два Норвежанина — Като Максимилијан Гулдберг (Cato Maximilian Guldberg) и Петер Ваге (Peter Vage), (норвешки изговори су у ствари: Güldberg и Voge). Ова два научника су 1867. године формулисали закон према којем је брзина хемијске реакције сразмерна производу концентрације реактаната.

На пример, ако се одиграва хемијска реакција

$$2X \longrightarrow Y, \tag{2}$$

чији је механизам

$$X \longrightarrow Z, \tag{2a}$$

$$X \longrightarrow Y \longrightarrow Z, \tag{2b}$$

онда је у фази (2a) реактант супстанца X док су у фази (2b) реактанти супстанце X и Z. Означимо ли са $x = x(t)$, $y = y(t)$ и $z = z(t)$ концентрације супстанци X, Y, одн. Z, онда применом Гулдберг-Вагеовог закона добивамо

$$\frac{dx}{dt} = -k_a x - k_b x z, \tag{3a}$$

$$\frac{dy}{dt} = k_b x z, \tag{3b}$$

$$\frac{dz}{dt} = k_a x - k_b x z, \tag{3c}$$

где су k_a и k_b позитивне константе. Као што смо већ рекли, x, y и z се у хемијској кинетици сматрају функцијама времена (t). Ове функције се сада могу одредити из диференцијалних једначина (3).

Закон о дејству маса био је за разне појединачне хемијске реакције познат и пре 1867. Гулдберг и Ваге су, међутим, били први који су га изрекли у општем облику.

За нас је значајно да је Гулдберг био хемичар а Ваге математичар. Због тога је закон о дејству маса један од невеликог броја фундаменталних открића у хемији насталих у директној сарадњи хемичара и математичара. У XIX веку и раније других случајева такве сарадње готово и нема. Тек у наше време тимски рад математичара, хемичара и других професија постаје нешто чешћа пракса. Спомињемо узгред да су Гулдберг и Ваге били у сродству по тазбини.

Закон о дејству маса омогућава да се временски ток хемијских реакција опише системом диференцијалних једначина. осим у ретким изузецима, ове диференцијалне једначине су нелинеарне. због тога њихово решавање није нимало лак задатак и у хемијској кинетици је одувек било посла за добре математичаре. Пажњу нарочито привлаче случајеви у којима се добивају осцилаторна решења, бифуркације, нестабилности и сл.

Многи математичари су се огледали у проблемима хемијске кинетике, међу њима и наш Михаило Петровић. Ипак, не би се могло рећи да је хемијска кинетика иницирала нека иоле значајнија открића у теорији диференцијалних једначина. Ни теорија диференцијалних једначина није довела до неких спектакуларних резултата у хемијској кинетици.

Двадесети век

Ограничили смо се да историју примене математике у хемији пратимо само до краја XIX века. Ипак, у најкраћим цртама скицираћемо шта се у тој области догађало у XX веку.

Тачно 1900. године Макс Планк (Max Planck) је увео у науку концепцију кванта. Убрзо се показало да се квантном теоријом могу објаснити неки од најфундаменталнијих хемијских феномена (периодни систем елемената, ковалентна хемијска веза), те описати за хемију тако значајни објекти као што су атоми и молекули. Са квантном теоријом у хемију је продро и њен математички апарат (Хилбертови простори, линеарни оператори, матрице, групе и њихове репрезентације и много друго). хемичари све више бивају принуђени да се баве математиком, па се јавља и једна нова група специјалиста — математички хемичари.

Негде од седамдесетих година оформљује се математичка хемија као посебна дисциплина у оквиру теоријске хемије и као посебна интердисциплинарна наука на граници хемије и математике.

Многи истакнути математичари ангажују се у решавању хемијских проблема. Скоро као правило, хемијски проблеми служе као мотивација за далекосежне математичке генерализације.

Све у свему, XX век карактерише све дубља математизација хемије са мноштвом примера сарадње математичара и хемичара. По речима Дениса Рувреја (Denis Rouvray, 1987), првог уредника часописа *Journal of Mathematical Chemistry*: *Математика и хемија су одлични партнери.*

Напомена уредника. На рад славног Ломоносова *Елементи математичке хемије* из 1741. године [9] скренуо је пажњу проф. др Драган Трифуновић. До ове информације, ова чињеница у делу Михаила Ломоносова није аутору овог рада била позната.

ЛИТЕРАТУРА

[1] A. T. Balaban, *Enumeration of Isomers*, у књизи: D. Bonchev, D. H. Rouvray (Eds.), *Chemical Graph Theory. Introduction and Fundamentals*, Gordon & Breach, New York **1991**, 177–234.

[2] N.L. Biggs, E.K. Lloyd, R.J. Wilson, *Graph Theory 1736-1936*, Clarendon Press, Oxford **1976**.

[3] М. Джуа, *История химии*, Мир, Москва **1975**.

[4] I. Gutman, *O odnosu hemije i matematike*, Dijalektika 9 (2) (**1974**), 57–62.

[5] I. Gutman, *Počeci teorijske hemije na tlu Jugoslavije. Istraživanja Sime Lozanića o izomeriji parafina*, Dijalektika 12 (2) (**1977**), 121–132.

[6] I. Gutman, *Još o odnosu hemije i matematike*, Dijalektika 17 (**1982**), 99–107.

[7] I. Gutman, O.E. Polansky, *Mathematical Concepts in Organic Chemistry*, Springer-Verlag, Berlin **1986**.

[8] E.J. Holmyard, *Alchemy*, Penguin, Harmondsworth **1968**.

[9] М.В. Ломоносов, *Полное собрание сочинений*, АН СССР, Москва **1950**, том 1, 66–83.

[10] S. Neufeldt, *Chronologie Chemie 1800-1970*, Verlag Chemie, Weinheim **1977**.

[11] J. Read, *Prelude to Chemistry. An Outline of Alchemy Its Literature and Relationships*, MacMillan, New York **1937**.

[12] С. Рибникар, М. Шушић, *Физичка хемија — прва интердисциплинарна наука*, у књизи: *Осамдесет година физичке хемије на Београдском Универзитету 1908-1988*, ПМФ Београд, Београд **1988**, 7–16.

[13] D.H. Rouvray, *The Pioneers of Isomer Enumeration*, Endeavour 34 (**1975**), 28–33.

[14] D.H. Rouvray, *Sir Arthur Cayley — Mathematician/Chemist*, Chem. Britain 13 (**1977**), 52–57.

[15] D.H. Rouvray, *The Origins of Chemical Graph Theory*, у књизи: D. Bonchev, D. H. Rouvray (Eds.), *Chemical Graph Theory. Introduction and Fundamentals*, Gordon & Breach, New York **1991**, 1–39.

Ivan GUTMAN

HISTORY OF THE APPLICATION OF MATHEMATICS IN CHEMISTRY

The article gives a brief survey of the history of the usage of mathematics in conceiving the basic notions of chemistry.

Ancient scholars and alchemists believed that the basic (al)chemical facts are connected with certain properties of natural numbers and that certain such numbers (e.g. 7, 17) determine the structure of chemical substances. Medieval alchemists used quite sophisticated mathematical tools, first of all — geometrical constructions.

In the early period of scientific chemistry (until the end of the 18th century) there was hardly any usage of mathematics. Lomonosov's *Elements of Mathematical Chemistry* from 1741 is an isolated exception, which had little influence on the development of science. Nevertheless, Lomonosov's work is described in due detail.

The structural formulas of organic molecules (discovered in the middle of the 19th century) were very soon recognized as possessing a genuine mathematical

content. The early history of graph theory owes much to chemistry. The 19th century interplay between chemistry and graph theory is described in full detail.

The discovery of the law of mass action (about 1867) is briefly presented, by this differential equations found their first nontrivial chemical applications.

The article does not consider (but only briefly sketches) the extensive mathematization of chemistry in the 20th century.

dr IVAN GUTMAN
Pošt. fah 60
18000 Kragujevac

Математички институт — Београд
Историја мат. и мех. наука 6 (1992)
Mathematical Institute — Belgrade
History of Math. and Mech. Sc. 6 (1992)

Драган ТРИФУНОВИЋ

ПРИЛОГ ИСТОРИЈИ ЈЕДНОГА ПРОБЛЕМА ТЕОРИЈЕ ФУНКЦИЈА

У историји математике новијих времена код Срба, неоспорно, биће забележено и пријатељство између знаменитог српског математичара Михаила Петровића (1868–1943) и краљевића Ђорђа (1907–1972), старијег сина краља Петра I Карађорђевића (1844–1921) и престолонаследника до 1909. године.[1]

Петровић је био професор математике на Српском двору (од 1. септембра 1903) и као такав упознавао је младог Краљевића са резултатима математичких наука. Сем тога, изгледа доста основано распрострањено мишљење да су њихови односи обухватили и оне личне везе које стварају чврсто пријатељство.

На основу архивске грађе и историјских извора, као и свог вишегодишњег познанства са Ђорђем Карађорђевићем, аутор овог чланка утврдио је и „елементе стручности" у поменутом пријатељству. Краљевић се није бавио науком у ужем смислу. Али, науку је пратио и био је веома информисан о многим областима науке и показивао живо интересовање за њих. Оваква расположења краљевића Ђорђа директно су утицала и на самог професора Петровића.

Године 1911. краљевић Ђорђе је замолио свог професора да постави један математички проблем за Анри Поенкареа (1854–1912). Петровић је изабрао следеће питање, бар на први поглед доста једноставно: „Колики је број коначних асимтотних вредности којима тежи једна цела функција $F(z)$ када независно променљива z бескрајно расте у разним правцима у својој равни што полазе из координатног почетка?"

Тако је дошло до писма краљевић Ђорђа професору Поенкареу од 3. марта 1911. Овде доносимо у потпуности препис овог писма.[2]

---

[1] О Михаилу Петровићу видети подробније у [4, 5], а о Краљевићу Ђорђу у [6], као и аутобиографску књигу [7].

[2] Концепт писма: Архив Савезног секретаријата за иностране послове у Београду: исто објављено у књизи [6].

Belgrade le 3, III 911,

Monsieur le Professeur,

En ayant appris, en amateurs, quelques éléments de la théorie des fonctions qui m'interresse vivement et de plus en plus et en ayant rencontré une question sur laquelle je n'ai pu trouver nulle part des renseignements précis. Veuillez bien éxcuser la liberté que je prends en m'adressant directement au Maître pour m'éclaircir sur les résultats acquis par les recherches modernes relative à la question. La question est la suivante:

Quel est la moindre des valeurs limites que puisse avoir une fonction entière $F(z)$ lorsque la variable z augmente indéfiniment suivant différents rayons vecteurs dans son plan.

En vous priant d'éxcuser mes importunités, je Vous prie Monsieur le Professeur d'agréer l'éxpression de ma respectueuse reconnaissance.

G(eorges)[3]

Зашто је краљевић Ђорђе тражио овај проблем и поставио га знаменитом Поенкареу? Да ли је овим гестом желео да провери своје мишљење о знању свог професора Петровића, или је била по среди жеља да и професор Поенкаре сазна да и српски краљевић залази у тајне математичких наука? За сада, не знамо тачан одговор.

Поенкаре је одговорио Краљевићу Ђорђу. Према једном доцнијем писму, одговор је стигао у Београд сигурно пре 12. марта 1911. Веома брз одговор са решењем проблема на релацији Београд-Париз! Поенкареово писмо дуго је стајало код Михаила Петровића. Ово оригинално писмо до данас није пронађено, али зато је његов *битан* садржај наведен у раду Михаила Петровића публикованом у Српској краљевској академији [1]. У уводном делу овог рада Петровић вели: „Решење питања данас је познато, као и његова веза са разним другим питањима из теорије целих функција. Али до пре извесног броја година сам проблем није у томе облику експлицитно ни постављан, ни решаван. Држим да ће бити од историјског интереса да овде саопштим један до сада нигде необјављен резултат Henri Poincaré-a, који се односи директно на питање о броју могућих асимтотних вредности једне целе функције. Он је садржан у једноме његовом приватном писму од марта 1911. г. које се налази код мене у оригиналу“ [1, стр. 87].

[3]Београд, 3. март 1911. Господине Професоре, Научивши као аматер, неке елементе теорије функција, која ме живо и све више интересује, наишао сам на једно питање о коме нигде нисам могао наћи прецизна обавештења. Најлепше Вас молим да ме извините због слободе коју сам себи дао тиме што сам се непосредно обратио *Мајстору* да бих стекао јаснију слику о резултатима добијеним у савременим истраживањима у вези са овим питањем. — Само питање је следеће: Колики је број граничних вредности које би могла имати цела функција $F(z)$ кад променљива z бесконачно расте преко различитих радијус вектора у својој равни? — Молећи Вас да ми опростите што Вам овим досађујем, молим Вас, Господине Професоре, да примите изразе моје захвалности пуне поштовања, Ђ(орђе)

У дословном препису, поштујући тадању симболику и начин излагања, овде износимо оригинално Поенкарево решење које је Петровић изнео у [1].

„Могућно је конструисати једну целу функцију $F(z)$ која тежи у напред датим границама

(1) $$A_1, A_2, \dots, A_n$$

(произвољно изабраним и чији је број онолико велики колико се хоће), кад z бескрајно расте у правцима које дефинишу у напред дати аргументи

(2) $$\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n.$$

У томе циљу уочимо познату Mittag-Leffler-ову трансценденту

(3) $$E_\alpha(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)},$$

а која има ове познате аналитичке особине:

1° Кад је аргуменат променљиве z једнак нули, т.ј. кад је z реалан позитиван број, функција (3) има реалну позитвну вредност и тежи граници $+\infty$ кад z бескрајно расти;

2° Кад аргуменат променљиве z лежи између

(4) $$\frac{\alpha\pi}{2} \quad \text{и} \quad 2\pi - \frac{\alpha\pi}{2},$$

функција (3) тежи нули кад z бескрајно расти.

Функција

(5) $$\Phi(z) = e^{-E_\alpha(z)},$$

представља, дакле, једну целу функцију која тежи нули кад z бескрајно расти са аргументом 0, а која тежи јединици кад z расти са ма којим аргументом што лежи између граница (4).

Посматрајмо сада функцију

(6) $$F(z) = \sum_{m=1}^{m=n} A_m - \sum_{m=1}^{m=n} A_m \Phi(ze^{-i\phi_m}),$$

претпоставивиши да је број α изабран довољно мали да би број $-\alpha\pi/2$ био мањи од разлике два ма која од аргумената (2).

Тада, кад z бескрајно расти са аргументом ϕ_j, сви изрази

(7) $$\Phi(ze^{-i\phi_m})$$

теже јединици осим израза

(8) $$\Phi(ze^{-i\phi_j}),$$

који тежи нули.

Belgrade le 3.III.911.

Monsieur le Professeur,

En ayant appris, en amateur, quelques éléments de la théorie des fonctions qui m'intéresse vivement et de plus en plus, et en ayant rencontré une question sur laquelle je n'ai pu trouver nulle part les renseignements précis. Veuillez bien excuser la liberté que je prends en m'adressant directement au Maître pour m'éclaircir sur les résultats acquis par les recherches modernes relatifs à la question.

La question est la suivante:

Quel est le nombre de valeurs limites que puisse avoir une fonction entière $F(z)$ lorsque la variable z augmente indéfiniment suivant différents rayons vecteurs dans son plan.

En vous priant d'excuser mes importunités, je vous prie Monsieur le Professeur d'agréer l'expression de ma respectueuse reconnaissance.

G

Аутограф писма краљевића Ђорђа Карађорђевића професору Анри Поенкареу (3. март 1911)

Престолонаследник њ. к. височанство
ЂОРЂЕ КАРАЂОРЂЕВИЋ (1887–1972)
из времена када је професору Поенкареу
упутио проблем из теорије функција

Дакле: функција $F(z)$ тежи граници A_j кад z расти у правцу који је дефинисан аргументом ϕ_j. Учинивши да је узастопце $j = 1, 2, \dots, n$, $F(z)$ ће редом тежити границама (1). Број тих граничних вредности може, дакле, бити онолики колики се хоће" [1, стр. 87–9].

Петровић је ово Поенкареово излагање завршио констатацијом да је „Данас (је) познат велики број функција које имају горњу особину. Али држим да треба сачувати од заборава пример те врсте, који је дао H. Poincaré" [1, стр. 89].

Напред изложеном Поенкареовом решењу Петровић је дописао свој прилог. Наиме, Петровић је узео целу функцију са општим коефицијентом a_k

$$F(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots$$

и представио функцију $\Phi(z)$ из (5) у облику

$$\Phi(z) = b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + \cdots$$

Ако се, краткоће ради, стави да су коефицијенти у Mittag-Leffler-овој функцији (3)

$$\lambda_n = -\frac{1}{\Gamma(\alpha n + 1)},$$

тада се коефицијенти могу одредити из рекурзивне везе

$$nb_n + \lambda_1 b_{n-1} + 2\lambda_2 b_{n-2} + \cdots + (n-1)\lambda_{n-1} b_1 + n\lambda_n b_0 = 0.$$

Општи коефицијент a_k функције $f(z)$ биће тада

$$a_k = \left[A_1 e^{-ki\phi_1} + A_2 e^{-ki\phi_2} + \cdots + A_n e^{-ki\phi_n} \right] b_k,$$

где $A_1, A_2, \dots, A_n$ и $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n$ имају горња значења.

Краљевић Ђорђе је непосредно одговорио и захвалио професору Поенкареу на љубазности и решењу проблема.[4]

La couronne Belgrade le 12.III.911.
Palais de Belgrade

Monsieur le Professeur,

Le voue suis tres reconnaissant de l'amabilité que Vous avez eu de Vous occuper de la question que je me suis permis de de $F(z)$ pour les arguments

$$\phi_1, \phi_2, \phi_3, \dots .$$

M'est-il permis de Vous demander eucore une bonté?

Le possède Votre portrait ci-joint; puis-je Vous priée de vouloir bien y poser Votre Signature et de me le renvoyer?

[4]Захваљујем професору Pierre Dugac-у (Париз) који ми је уступио ово писмо и дао своју сагласност да га објавим.

Академик
др МИХАИЛО ПЕТРОВИЋ
(1868–1943.)

из времена преписке принца Ђорђа са професором Поенкареом. (У машну професора М. Петровића уденута је дијамантска игла, дар краља Петра I)

Académicien
HENRI POINCARÉ
(1854–1912.)

велики пријатељ српске науке и учитељ наших државних питомаца.

Veuillez, Monsieur le Professeur, excuser mes importunités et agréez l'éxpression de ma respectueuse reconnaissance

Georges"[5]

Приметимо на крају, да је о наведеном Поенкареовом резултату писао Јован Карамата [2] и да је исти резултат регистрован у Revue sémestrielle [3]. И у нашој књизи [5] изложили смо основне чињенице о овом случају.

ЛИТЕРАТУРА

[1] *М. Петровић*: Прилог историји једнога проблема теорије функција (Contribution à l'historie d'un problème de la théorie des fonctions), Глас 134 (1929), 87–90.

[2] *J. Karamata*: FdM, B.55 (**1929**), S. 18.

[3] Revue sémestrielle 36 (**1932**).

[4] Notice sur les travaux scientifiques de Michel Petrovitch, Paris **1922**, p. IX + 152.

[5] *Д. Трифуновић*: Летопис живота и рада Михаила Петровића (Chronique de la vie et de l'oeuvre de Michel Petrovitch), Београд, **1969**. стр. 629.

[6] *Д. Трифуновић*: Михаило Петровић-Алас, Горњи Милановац **1982**, стр. 160.

[7] *Ђ. Карађорђевић*: Истина о моме животу, Београд **1969**, стр. 494 + (4).

Dragan TRIFUNOVIĆ

A CONTRIBUTION TO THE HISTORY OF A PROBLEM IN THE THEORY OF FUNCTIONS

In the paper we give Poincaré's solution to a problem from 1911. posed by prince Đorđe Karađorđević (1887–1972) through professor Mihailo Petrović (1868–1943): "To what number of finite asymptotical values an entire function $F(z)$ tends when the indefinite variable z tends to infinity in various directions from the origin?*

dr DRAGAN TRIFUNOVIĆ, 11000 Beograd, Ustanička 65/I

---

[5]Круна — Двор у Београду, 12. март 1911. Господине Професоре, Ја са Вам врло захвалан због љубазности коју сте ми указали да се бавите питањем што сам дозволио себи да Вам поставим и што сте ми дали објашњење о броју вредности A_j функције $F(z)$ за аргументе $\phi_1, \phi_2, \phi_3, \ldots$. — Да ли ми је дозвољено да Вас замолим за још једну доброту? Ја имам Ваш овде приложени портрет; могу ли Вас замолити да изволите ставити свој потпис на ту слику и да ми је вратите. — Дозволите, Господине Професоре, да Вас замолим за извињење због мог досађивања и да примите изразе моје дубоке захвалности. — Ђорђе.

*This research was supported by Science Fund of Serbia, grant number 0401A, through Matematički institut

Математички институт — Београд
Историја мат. и мех. наука 6 (1992)
Mathematical Institute — Belgrade
History of Math. and Mech. Sc. 6 (1992)

Милош ЧАНАК

О НЕКИМ РАДОВИМА СТАНИМИРА ФЕМПЛА

Професора Станимира Фемпла (1903–1986) сећамо се као свестраног математичког истраживача, уметника, хуманисте, филозофа-теолога, антропозофа и човека необично широке културе, образовања и поља интересовања. Аутор ових редова не осећа се спремним, нити компетентним, да проучи цео његов животни и стваралачки опус, па ће се овде задржати само на два сегмента из широког поља његовог рада, на теорију неаналитичких функција комплексне променљиве и на антропозофској математици.

Теорија аналитичких функција комплексне променљиве је веома развијена дисциплина са дугим и разноврсним историјским развојем, која најпре дефинише аналитичку комплексну функцију $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$, а затим испитује и утврђује велики број њених особина и својстава. Нека од најважнијих су, као што је познато, следећа:

1. Аналитичка функција $f(z)$ у тачки a има извод $f'(z)$ у смислу комплексне анализе у некој околини U тачке a. Услов комплексне диференцијабилности може се даље представити у облику једначина Cauchy-Riemann-а

$$u'_x = v'_y, \qquad u'_y = -v'_x. \tag{1}$$

2. Аналитичка функција $f(z)$ задовољава најпростију комплексну диференцијалну једначину

$$f'_{\bar z} = 0. \tag{2}$$

3. Аналитичка функција $f(z)$ задовољава Cauchy-јеву интегралну формулу

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{f(t)\,dt}{t-z} = \begin{cases} f(z), & z \in D^+ \\ 0, & z \in D^- \end{cases} \tag{3}$$

где је L проста глатка затворена контура која дели комплексну раван на унутрашњу област D^+ и спољашњу област D^-.

Професор универзитета
др СТАНИМИР ФЕМПЛ
1903–1986

4. Аналитичку функцију $f(z)$ у тачки z_0 могуће је развити у конвергентан потенцијалан ред

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n, \tag{4}$$

у некој околини тачке z_0.

5. Ако је функција $f(z)$ аналитичка у тачки z_0 и $f'(z_0) \neq 0$, тада она реализује конформно пресликавање у тој тачки.

6. Векторско поље аналитичке функције је истовремено потенцијално и соленоидално, дакле Laplace-ово поље.

На основу ових особина могуће је у шест праваца развити једну теорију неаналитичких функција уопштавајући сваку од наведених особина. Познати истраживачи из теорије неаналитичких функција тако су у суштини и поступали, уводећи на наведени начин разне класе неаналитичких функција као што су Σ-моногене, p- и (p,q)-аналитичке функције, уопштене аналитичке функције у смислу Векуе, полианалитичке и метааналитичке функције и др.

Станимир Фемпл је публиковао око десетак радова из теорије неаналитичких функција. Он је пре свега осетио потребу да у том мноштву разних класа неаналитичких функција уведе неки ред, систем и класификацију. То му је успело у раду [1]. Он је увео једну природну, геометријску класификацију неаналитичких функција, разликујући четири типа векторског поља, која могу да им одговарају и то: Laplace-ово, соленоидално, потенцијално и сложено. При томе се векторско поље описује и Билимовићевим вектором одступања неаналитичке функције од аналитичности

$$\vec{B} = \operatorname{grad} u + \vec{k} \times \operatorname{grad} v = (u'_x - v'_y)\vec{i} + (u'_y + v'_x)\vec{j}. \tag{5}$$

Ова класификација се показала веома целисходном и може имати великог значаја у будућности приликом увођења и дефинисања нових класа неаналитичких функција (види нпр. [2]). Њена реализација доводи до неких интересантних нелинеарних парцијалних диференцијалних једначина, чија су решења неочекивано једноставна и на најбољи начин репрезентују и описују поједине типове векторских поља. Показује се нпр. да је за p-аналитичке функције дефинисане системом једначина

$$u'_x = \frac{1}{p} v'_y, \qquad u'_y = -\frac{1}{p} v'_x, \tag{6}$$

векторско поље вектора $\vec{B}$ соленоидално тада и само тада када је испуњен услов

$$2pp''_{xx} + 2pp''_{yy} - p'^2_x - p'^2_y = 0. \tag{7}$$

Третирајући овај услов као нелинеарну парцијалну једначину другог реда, налазимо њено опште решење у једноставном облику

$$p(x,y) = [c_1 h(x,y) + c_2]^2 \tag{8}$$

где је $h(x,y)$ произвољна хармонијска функција. Слична разматрања могу се извести и за друге класе неаналитичких функција. Можемо бити уверени да ће у даљем развоју теорије неаналитичких функција овај резултат и споменути рад Станимира Фемпла бити више пута цитирани.

У свом раду [3] Фемпл је разматрао елиптички систем парцијалних једначина облика

$$\begin{aligned} u'_x - v'_y + au + bv + c = 0, \\ u'_y + v'_x + av - bu + d = 0, \end{aligned} \tag{9}$$

који се може написати и у комплексном облику

$$Dw + f(x,y)w + g(x,y) = 0. \qquad (Dw = 2w'_{\bar z},\ f = a - bi,\ g = c + di). \tag{10}$$

Он је показао да опште решење комплексне диференцијалне једначине (10) има облик

$$w = \left\{ Q(z) - \frac{1}{2} \int g \exp\left[\frac{1}{2}\int f\,d\bar z\right] d\bar z \right\} \exp\left[-\frac{1}{2}\int f\,d\bar z\right], \tag{11}$$

где је $Q(z)$ произвољна аналитичка функција.

Надаље ћемо класу неаналитичких функција дефинисаних системом (9) означавати као *Фемплове уопштене аналитичке функције* или краће *F-функције*. Оне су нешто специјалније од класе V Векуиних уопштених аналитичких функција и представљају природан мост и посредник између класе $\mathcal{A}$ аналитичких функција и класе V. Разлози да се овој класи функција посвети пуна пажња и детаљно истраживање су следећи:

1° F-функције се појављују у разним проблемима механике, а специјално у теорији филтрације, торзионој теорији ротационих тела, теорији еластичних штапова и љуски, контактним проблемима теорије еластопластичности итд.

2° За разлику од Векуиних елиптичких система, чија интегрална репрезентација садржи двоструке сингуларне интеграле са језгром Cauchy-ја који су врло неприкладни за даља израчунавања, интегрална репрезентација F-функција је неупоредиво једноставнија и погоднија за рачунање и примене.

3° Функције $f = f(x,y)$ и $g = g(x,y)$ називаћемо надаље карактеристикама F-функције. Познато је (види [4]) да неку неаналитичку $(n+1)$ пута диференцијабилну функцију $W(z,\bar z)$ можемо апроксимирати комплексним полиномом облика

$$W(z,\bar z) = \sum_{k=0}^{n} (\bar z - g(z))^k \varphi_k(z), \tag{12}$$

где су коефицијенти $\varphi_k(z)$ аналитичке функције које се израчунавају по формули

$$\varphi_k(z) = \frac{\alpha_{g(z)} D^k W}{2^k\, k!}. \tag{13}$$

Међутим функцију $W(z,\bar z)$ је могуће апроксимирати и комплексним полиномом облика

$$W(z,\bar z) \approx \sum_{k=0}^{n} (\bar z - g(z))^k \cdot f_{(p,q)_k}(z,\bar z), \tag{14}$$

где су $f_{(p,q)_k}$ Фемплове функције са карактеристикама p и q, које се израчунавају по формули аналогној формули (13). Предност ове друге апроксимације је у томе што се у оцени грешке појављују величине p и q, а исте можемо бирати по вољи тако да грешка буде по вољи мала.

Даља истраживања ће свакако показати целисходност и нове могућности примене комплексних полинома (14) са Фемпловим коефицијентима (види нпр. [5]).

Rudolf Steiner, филозоф и духовни истраживач, оснивач је антропозофског филозофског правца и антропозофског погледа на свет. Ширећи своје погледе и начине расуђивања на главне фундаменталне науке, антропозофија је изнедрила и тзв. антропозофску математику. Ова математичка школа чији је један од центара на Високој школи за духовну науку у Dornach-у код Базела, данас је већ стекла знатну популарност и замах у земљама Западне Европе. Један од праваца њених интересовања је да у већ познатим елементарним математичким чињеницама налази дубљи смисао и значења као и суштинске повезаности са другим наукама, светом и човеком, да наслућује скривену духовну суштину и узвишеност ове „науке над наукама“ и да стално све више открива њен уметнички и универзални карактер.

Станимир Фемпл је био добар познавалац антропозофије и антропозофске математике, о чему сведоче и три његова рада објављена 1937. године у часопису *Упознај себе*, мада никада није робовао антропозофским догмама, већ је до краја живота сачувао самосталан начин размишљања и расуђивања.

У раду [6] Фемпл разматра учење антропозофске науке о развоју људске мисли од давних времена до данашњих дана. Док је мишљење старим цивилизацијама укључујући и античку Грчку било сликовито, имагинативно и покретно, дотле је данашње научно мишљење логичко, егзактно, развијено и материјалистичко, али на известан начин укочено и покрет се у њему изгубио. Фемпл за то наводи више математичких примера, посебно о појму бесконачно малих величина, извода и диференцијала. С тим у вези је и филозофско гледање које тврди да општи појам не постоји, да то може бити само реч која обухвата појединости.

Можемо ли створити представу о појму троугла? Не можемо, јер чим нешто у том смислу створимо, имаћемо слику само једног специјалног троугла, а ми тражимо такав, који садржи у себи све троугле. Фемпл међутим наводи Steiner-ов покушај превазилажења овог проблема. Треба нацртати један троугао и допустити свакој страни да се креће у маком правцу и по вољи мења дужину. У том случају добићемо све могуће троуглове, добићемо представу о општем троуглу. Али при томе се морају у мислима изводити покрети, мора се мисао покренути. Да би се дакле од специјалне мисли добила општа мисао, мора се специјална мисао покренути. О тој покретној мисли говори и Goethe у свом делу *Метаморфоза биљака*. Раније људско мишљење у сликама, имагинативно мишљење, садржи у себи покрет. Када се такво мишљење пресликава у разумско, у мишљење у данашањем смислу речи, тада се покрет мора зауставити, мора се тако рећи умртвити. Али зато више немамо опште мисли.

Ову тезу Фемпл даље развија кроз гентички развој бројева. Пошто је редом увео класе природних, целих, рационалних, ирационалних и реалних бројева, он се посебно задржава на ирационалним и на више начина показује како је за њихово правилно схватање потребна жива, покретна и стваралачка мисао, нпр. кретањем преко низа рационалних бројева. Насупрот томе он наводи Дедекиндов пресек као супротан пример. Уместо да се оживи појам броја, човек се не мири са реалностима духовног света и тежи да те реалности умртви, да би их пресликао у појмове. Умртвљава их тако што дефинише пресек класа и тиме зауставља покрет бројева.

Човек види птицу у лету и хоће да проучи њен лет. Убија птицу и сада има њен леш. Да ли је довољно имати леш да би се проучило летење? За Фемпла очигледно није.

У раду [7] Фемпл разматра неке поставке антропозофске науке старе цео век, које су данас потврђене од савремене физике и Ајнштајнове теорије релативности. Он уочава да се у свим манифестацијама материје, силе, брзине, дужине и енергије као и у манифестацијама времена и простора, како показује теорија релативности, запажа један карактеристичан број, „број светлости c“. Ово га асоцира на библијске речи да је већ првог дана стварања, постала светлост, као прва материјална објава „Духа Божјег“.

Бавећи се даље светлошћу, Фемпл компарира гледиште анатропозофије да је материја кондензована светлост и гледиште савремене физике да је светлост материјалног порекла. Физика дакле спушта светлост до материје, а антропозофија уздиже материју до светлости. Он на крају закључује да са релативистичког гледишта обе науке имају право, а на нама је да одлучимо хоћемо ли ствари гледати кроз призму „материје“ или кроз призму „светлости“.

У раду [8] Фемпл проналази занимљиве подударности између неких тврђења антропозофске науке и комплексних бројева. Идући од природних, целих и рационалних ка ирационалним и комплексним бројевима, подижемо се у све духовније области. За антропозофију је представа о комплексним бројевима, представа више врсте од оне о реалним бројевима, а представа о ирационалним бројевима више врсте од оне о рационалним бројевима. Неколико математичких примера које наводи, доводе га до општег закључка да комплексни бројеви представљају слику и израз света у коме живимо и који није само материјално физички, већ има и своју нематеријалну компоненту. Овај свет садржи у себи физички свет. Физички свет је специјалан случај овог универзалног света, његов реалан део. Као што се код комплексног броја мора водити рачуна и о реалном и о имагинарном делу, тако се и код сазнања о свету у коме живимо мора водити рачуна и о његовом физичком и о његовом духовном делу („Богу Божје, цару царево"). Комплексни бројеви јесу дакле израз структуре света.

Rudolf Steiner је једном говорио да се за описивање законитости духовног света тешко могу наћи погодни изрази и да на том плану постоје могућности које за овај физички план не важе. Тако је на пример рекао да у духовном свету права не мора бити најкраће растојања између две тачке, чиме је у ствари хтео да каже, да је у свету моралних закона, на којима је изграђен духовни свет, најтеже ићи праволинијски. Појам просторности постоји и на духовном плану. Али тамо не важе више исти односи и иста правила која постоје на физичком плану.

Као илустрацију за ово, Фемпл је изабрао у реалној координатној равни праву l: $y = ax$ и тачку ван ње $M(x_0, y_0)$. Према познатим формулама из аналитичке геометрије, растојање од тачке M до праве l је

$$d = \frac{|y_0 - ax_0|}{\sqrt{1 + a^2}},$$

а нека друга права l_1 нормална на праву l имаће коефицијент правца $a_1 = -1/a$. Ако међутим покушамо да формуле и правила аналитичке геометрије пренесемо у комплексну раван доћићемо до неочекиваних резултата. Права $y = ix$ биће нормална на саму себе ($a_1 = -1/a = -1/i = i$), а растојање било које тачке (x_0, y_0) до одговарајуће тачке на правој биће бесконачно велико ($d = |ix_0 - y_0|/\sqrt{i^2 + 1}$), док повезивањем тих тачака помоћу неке изломљене линије (у реалној области је такво растојање увек веће од нормалног растојања) нећемо добити бесконачно велико растојање. Одавде видимо да дуж која спаја две тачке не мора бити најкраће растојање између њих, ако само узмемо тачке и праве са једног другог не-физичког плана.

Фемпла је фасцинирала чињеница да се многи проблеми реалне анализе укључујући и примене, могу решити прелазом у комплексно подручје (комплексна интеграција, неки системи парцијалних диференцијалних једначина и др.), а долази се до реалних резултата до којих би се иначе без овог прелаза врло тешко дошло. Ову чињеницу он је упоређивао са човеком који тражи решење неког свог научног, животног или другог проблема и не може да га нађе. Одлази у сан (тј. духовну или комплексну област) и након буђења, тј. повратка у реално подручје, решење се тако рећи само од себе појављује. Ова појава је веома добро уочена и објашњена у савременој психологији и психијатрији, јер су то научне дисциплине у којима се проучавају дубљи слојеви људског бића.

Професор Станимир Фемпл је до краја живота сачувао однос дивљења и поштовања према математици, слутећи иза њених спољних, често формалних, резултата скривена дубља значења, уметничку жицу, мудрост и мистерију. А овакав његов став, потврђен радовима и целокупним његовим животним опусом са пуним правом заслужује, чак и од људи и истраживача који му нису били истомишљеници, поштовање, озбиљност и респект.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Fempl S., *Über eine Klassifikation der nichtanalytischen Funktionen*, Mathematica Balkanica, **1971**, N. 1, 88–92.

[2] Čanak M., *Eine Klassifikation der verallgemeinerten analytischen Funktionen durch die Methode des Vektorfeldes*, примљено за штампу у Revue Romaine de mathematiques pures et appliquées, Bucharest **1991**.

[3] Fempl S., *Reguläre Lösungen eines Systems partieller Differentialgleichungen*, Publ. de L'Inst. Math., t. 4 (18) **1964**, S. 115–120.

[4] Čanak M., *Über die α-Approximation einer nichtanalytischen Funktion durch ein areoläres Polynom*, ZAMM, Z. angew. Math. Mech. 69, (**1989**) N. 4, S. 71–73.

[5] Čanak M., *Über die F-analytischen Funktionen*, Vortrag auf der Internationalen Jahrestagung der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, Bielefeld 1991.

[6] Фемпл С., *Покрет као манифестација духовности*, Упознај себе, Београд **1937**, бр. 4, с. 108–115.

[7] Фемпл С., *Светлост-материја*, У.С., Београд **1937**, бр. 5, с. 151–155.

[8] Фемпл С., *Размишљања о комплексним бројевима*, У.С., Београд **1937**, бр. 11–12, стр. 316–319.

Miloš ČANAK

ON SOME PAPERS BY STANIMIR FEMPL

In this paper the author considers some Fempl's contributions in the theory of non-analityc functions and antroposophic mathematics.

Dr MILOŠ ČANAK
11000 Beograd
Brzakova 4

Математички институт — Београд
Историја мат. и мех. наука 6 (1992)
Mathematical Institute — Belgrade
History of Math. and Mech. Sc. 6 (1992)

Zoran LUČIĆ

KRATKA ISTORIJA PRAVILNIH POLIEDARA

Uvod

Budući da su tetraedar, heksaedar, oktaedar, dodekaedar i ikosaedar geometrijski likovi koji se u pravilnom ili skoro pravilnom obliku javljaju u prirodi kao kristali nekih hemijskih jedinjenja, izvesno je da su ljudima bili poznati i u praistorijsko doba. Materijalni dokazi poznavanja nekih od ovih tela, pre svega tetraedra, kocke, oktaedra, a zatim i ikosaedra, dolaze iz drevnog Egipta [**11**, str. 402]. Poznato je da se za dodekaedar na Apeninskom poluostrvu znalo i u predpitagorejsko vreme [**24**, vol. III, str. 438], a pitagorejci su svakako znali za svako od pet pravilnih tela [**2**, str. 145]. Međutim, istorija pravilnih poliedara ne počinje otkrićem pojedinih pravilnih geometrijskih tela, već saznanjem da ta pojedinačna tela imaju neka zajednička svojstva koja ih karakterišu.

U geometrijskim istraživanjima nisu od značaja razmatranja svakog od pravilnih poliedara ponaosob, ma kako bile zanimljive osobine svakog od njih, već je ključno uvođenje pojma pravilnog poliedra, a potom razmatranje zajedničkih osobina svih takvih tela kojima su sve pljosni pravilni, međusobno podudarni poligoni. U tom smislu pojam pravilnog poliedra u predhelensko vreme nije postojao, kao što se može reći da u predhelensko vreme nije bilo ni geometrije iako je bilo nekih praktičnih geometrijskih znanja. Prvi pravi geometrijski pojmovi i prvi dokazi geometrijskih teorema su tekovine grčke civilizacije.

Pravilan poliedar je jedan od geometrijskih pojmova ustanovljenih u klasičnoj Grčkoj čije je uvođenje imalo pored, Grcima veoma bliske, kosmološke i estetsku motivaciju. Od tog vremena pa do danas pravilni poliedri se proučavaju zajedno, upoređuju se jedni s drugima i razmatraju kao jedna skupina. Sa istorijskog stanovišta je zanimljivo utvrditi ko je učinio taj važan korak ka apstrakciji i generalizaciji, ko je, i kada, u geometriju uveo pojam pravilnog poliedra. Pre no što pokušamo da damo odgovor na to pitanje i pre no što istaknemo neke od značajnih trenutaka u dugotrajnoj istoriji pravilnih poliedara, skrenimo, najpre, pažnju na važno geometrijsko pitanje: kakvi su geometrijski objekti, prvo poliedri, a potom i pravilni poliedri?

Bez pretenzija na strogost koju zahteva svaka deduktivna teorija, ističemo da se u geometriji pod *poliedrom* podrazumeva prostoran geometrijski lik čiji se rub sastoji iz povezanog skupa (ne uvek konačno mnogo) poligonskih površi (ili poligona) tako raspoređenih da je svaka ivica jedne površi istovremeno ivica tačno još jedne površi. Poligonske površi (ili poligone) koje definišu poliedar zvaćemo *pljosnima* tog poliedra, a ivice i temena pljosni zvaćemo *ivicama* i *temenima* poliedra. Najjednostavniji primeri poliedara su piramide i prizme. Imajući u vidu značaj pojma dualnosti poliedara, napominjemo da ćemo dva poliedra Φ i Φ' zvati *dualnim* ako postoji bijekcija kojom se incidentna temena, ivice i pljosni poliedra Φ preslikavaju redom, na incidentne pljosni, ivice i temena poliedra Φ'. Nije teško primetiti da su heksaedar i oktaedar dualni poliedri, isto tako dodekaedar i ikosaedar, a da je tetraedar dualan sam sebi.

Neka je zadat neki poliedar Φ. Među svim izometrijama prostora izdvojićemo one koje taj poliedar ostavljaju invarijantnim, drugim rečima one koje poliedar Φ preslikavaju na sebe. Nije teško dokazati da je skup takvih izometrija (koje ćemo zvati *simetrijama* poliedra Φ) u odnosu na njihovu kompoziciju (ne uvek konačna) grupa.

Poliedar ćemo zvati *pravilnim* ako raspolaže dvema familijama simetrija takvima da simetrije jedne familije ciklično permutuju temena neke pljosni, a druge ciklično permutuju pljosni sa zajedničkim temenom. Iz definicije neposredno sledi da su pljosni pravilnog poliedra pravilni, međusobno podudarni poligoni, te da pljosni sa zajedničkim temenom pripadaju pravilnim, međusobno podudarnim rogljevima. Ako je oko svakog temena pravilnog poliedra raspoređeno q pravilnih p-uglova (poligona sa p ivica) takav poliedar ćemo označavati *Šleflijevim simbolom* $\{p,q\}$. Iz definicije dualnosti neposredno sledi da će njemu dualan poliedar imati oznaku $\{q,p\}$.

Za svaki poliedar definišemo *zastavu*, lik koji se sastoji iz jednog temena, njemu incidentne ivice i njoj incidentne pljosni. Nije teško primetiti da je grupa simetrija pravilnog poliedra *tranzitivna* na zastavama, drugim rečima za bilo koje dve zastave pravilnog poliedra postoji simetrija tog poliedra koja jednu od tih zastava preslikava na drugu. Štaviše, tranzitivnost na zastavama karakteriše pravilan poliedar, pa se stoga pravilani poliedri obično definišu zahtevom tranzitivnosti na zastavama [10, str. 12].

Platonova tela

Među svim pravilnim poliedrima istaknimo najpre one kojima su pljosni konveksne i disjunktne. Svaki unutrašnji ugao pljosni takvog poliedra sa oznakom $\{p,q\}$ biće $(p-2)\pi/p$, pa budući da je kod poliedra kome susedne pljosni ne pripadaju jednoj ravni suma q takvih ulova manja od 2π, biće $q(p-2)\pi/p < 2\pi$, tj.

$$(p-2)(q-2) < 4.$$

Dakle, $p-2$ i $q-2$ su prirodni brojevi čiji je proizvod manji od 4 pa su time određene jedine mogućnosti

$$1\cdot 1,\ 1\cdot 2,\ 2\cdot 1,\ 1\cdot 3,\ 3\cdot 1.$$

Odatle sledi da postoji najviše pet konveksnih pravilnih poliedara,

$$\{3,3\},\ \{3,4\},\ \{4,3\},\ \{3,5\},\ \{5,3\}.$$

Svaki od prethodnih poliedara se može konstruisati (pljosan po pljosan). Ako sa P obeležimo broj pljosni, sa I broj ivica, sa T broj temena, i sa g red grupe poliedra $\{p,q\}$, kombinatorne osobine prethodnih pet poliedara poznatih kao *Platonova tela* možemo izraziti sledećom tabelom:

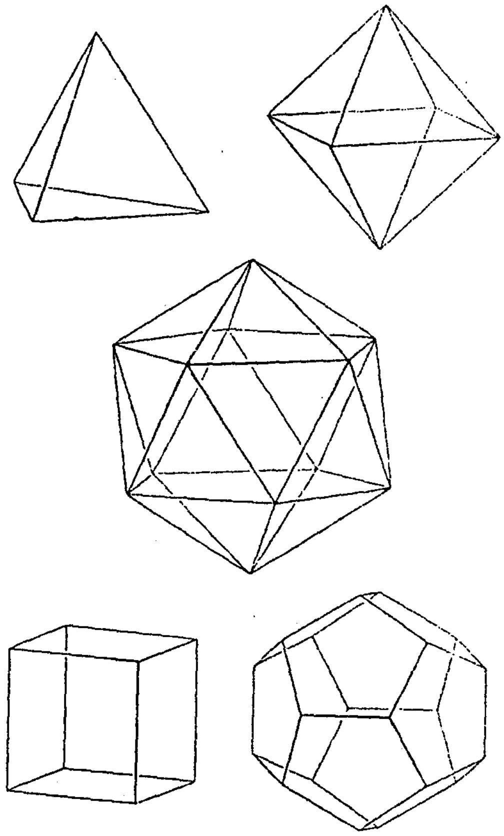
$\{p,q\}$	T	I	P	g	ime
$\{3,3\}$	4	6	4	24	pravilan tetraedar
$\{3,4\}$	6	12	8	48	pravilan oktaedar
$\{4,3\}$	8	12	6	48	pravilan heksaedar (kocka)
$\{3,5\}$	12	30	20	120	pravilan ikosaedar
$\{5,3\}$	20	30	12	120	pravilan dodekaedar

Projektovanjem ivica Platonovog tela $\{p,q\}$ iz njegovog središta na njegovu opisanu sferu dobijaju se lukovi velikih krugova te sfere koji formiraju *sfernu teselaciju* koju ćemo, takođe, obeležavati sa $\{p,q\}$. Grupa simetrija poliedra biće, razume se, i grupa simetrija odgovarajuće sferne teselacije. Kako je grupa simetrija G pravilnog poliedra generisana refleksijama [12, str. 37], ona će imati podgrupu G^+ indeksa 2, koja se sastoji samo iz rotacija [6, str. 387].

Zahvaljujući Proklu [38, str. 65] konstrukcija pet pravilnih poliedara: tetraedra, kocke, oktaedra, dodekaedra i ikosaedra (nazvanih u Proklovom delu „kosmičkim telima“, [45, str. 212]), veoma dugo je pripisivana Pitagori. Pokazalo se, međutim, da je Proklo sledio jednu od mnogih antičkih legendi koje su se odnosile na rodonačelnika pitagorejskog bratstva.

U prvoj sholiji trinaeste knjige Euklidovih *Elemenata* nepoznati autor (verovatno sledeći Geminija) navodi da je od pet takozvanih Platonovih tela tri pripisano Pitagori; to su: kocka, tetraedar (trostrana piramida) i dodekaedar, a dva, oktaedar i ikosaedar, Teetetu [45, str. 212]. Ovo tvrđenje se najverovatnije oslanja na činjenicu da je Teetet prvi pisao o pomenutim telima i da je ispitivao njihova zajednička svojstva [25, vol. I, str. 162]. Stoga se smatra da je pojam pravilnog poliedra u geometriju prvi uveo Teetet (oko −414 do −369), Sokratov sledbenik budući da je bio učenik poznatog kirenaičara Teodora, i uz svog učitelja jedan od učesnika Platonovog dijaloga koji je po njegovom imenu i dobio ime *Teetet*. Da je Teetet, kasnije učenik Platonove Akademije, pisao o pravilnim poliedrima, potkrepljuje se i činjenicom da postoji njegov prilog teoriji iracionalnih brojeva, čiji je značaj u konstrukciji Platonovih tela vidljiv i u trinaestoj knjizi Euklidovih *Elemenata* [36, 147–148].

Budući da Euklid svoju prvu knjigu *Elemenata* započinje konstrukcijom pravilnog trougla, a poslednju završava konstrukcijom pravilnog dodekaedra, postoji mišljenje da je njegova osnovna misao bila da razvije i uobliči sva geometrijska znanja nepohodna za konstrukciju i razumevanje osobina pet Platonovih tela, a ne da raspravlja o osnovima geometrije [46, str. 74].



Platonova tela

Imajući u vidu izvanrednu pravilnost Platonovih tela Grci, skloni metafizici, doveli su ih u vezu sa četirima elementima i univerzumom. U svome *Timaju* Platon piše:

> Treba sada da kažemo koja su ta četiri najlepša tela, međusobno nejednaka, pa ipak sposobna da se uzajamnim razlaganjem rađaju jedna iz drugih. Jer ako pronađemo odgovor na ovo, imaćemo pred sobom istinu o postanku zemlje i vatre kao i onih tela koja se usrazmerena nalaze između njih. Jer, nikome nećemo dati saglasnost da su vidljiva tela lepša nego ova od kojih je svako pojedinačno jedinstven rod" [37, 53e].
>
> „Postoji još jedan, peti sastav; bog ga je upotrebio za svemir, oslikavajući na njemu likove (zodijaka)" [37, 55c].

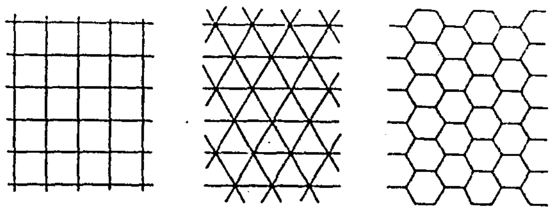
Na ovu helensku ideju nadovezao se Kepler (1571–1630) u svome delu *Harmonices Mundi* [29], i u mnogome je razvio i dopunio. Kocka oslonjena na svoju osnovu simbolizuje stabilnost pa je stoga u vezi sa Zemljom. Oktaedar koji slobodno rotira ako se pridržavaju njegova naspramna temena simbolizuje pokretljivost Vazduha. Među pravilnim poliedrima tetraedar ima najmanji, a ikosaedar najveći broj pljosni, pa stoga tetraedar označava suvoću Vatre, a ikosaedar vlažnost Vode. Na posletku, dodekaedar je nebeski simbol jer ima dvanaest pljosni koliko je i zodijačkih znakova, pa je stoga pridružen Univerzumu [**18**, str. 123–124].

Kepler je u svojoj kosmološkoj teoriji, izloženoj u ***Mysterium Cosmographicum***-u [28] i stvorenoj mnogo pre njegovih triju zakona po kojima je danas poznat, pokušao da redukuje rastojanja planeta Sunčevog sistema na metričke osobine Platonovih tela alternativno upisanih i opisanih oko nebeskih sfera [**19**, str. 558] pridruženih planetama: Saturnu, Jupiteru, Marsu, Zemlji, Veneri i Merkuru koje su odvojene redom, kockom, tetraedrom, dodekaedrom, oktaedrom o ikosaedrom. Naravno, Kepler nije ništa znao o Uranu, Neptunu i Plutonu koji su otkriveni kasnije, 1781, 1846. i 1930. godine.

Pravilne teselacije

Budući da se sfera infinitnim uvećavanjem svog poluprečnika transformiše u ravan, nameće se pitanje postojanja ravnih analogona sfernih teselacija.

Neposredno se dokazuje da su $\{4,4\}$, $\{3,6\}$ i $\{6,3\}$ jedine ***pravilne teselacije euklidske ravni***. Iako su one poznate još iz umetnosti antičkih vremena, najverovatnije je Kepler, razmišljajući o mogućim popunjavanjima euklidske ravni pravilnim poligonima, prvi ustanovio koje su njihove zajedničke osobine [8, str. 61]. Imajući u vidu njihovu jednostavnost, a i jednostavnost dokaza da mimo njih nema više pravilnih teselacija euklidske ravni, istaći ćemo samo njihov značaj u umetnosti, budući da su veoma često korišćene kao motiv u mozaicima.



{4,4} {3,6} {6,3}

Pravilne teselacije euklidske ravni

Pravilni poligoni

Šleflijevim simbolom $\{p,q\}$ označavamo pravilan poliedar kome su pljosni pravilni p-uglovi, a q takvih poligona se sustiče kod svakog temena poliedra. Središta ivica pravilnog poliedra $\{p,q\}$ koje su incidentne jednom temenu tog poliedra biće temena jednog, takođe pravilnog poligona koji ima q ivica. Taj poligon zvaćemo *temenom figurom* poliedra. Dakle, u pravilnog poliedra sve pljosni i sve temene figure su pravilni poligoni. Štaviše, pravilnost pljosni i temenih figura karakteriše pravilne poliedre, pa se na taj način pravilni poliedri u literaturi često definišu [9, str. 16].

Platonova tela i pravilne teselacije euklidske ravni, jedini pravilni poliedri o kojima je do sada bilo reči, imaju pravilne i konveksne i pljosni i temene figure. Šta će se dogoditi ako izostavimo uslov konveksnosti?

Budući da smo do sada uvek pretpostavljali konveksnost pljosni i temenih figura pravilnog poliedra $\{p,q\}$, zbog jednostavnosti nije bilo neophodno da definišemo pravilan poligon. Imajući u vidu da izostavljanje uslova konveksnosti bitno utiče na razumevanje pojma pravilnog poligona istaknimo da ćemo poligon $A_1A_2\ldots A_p$ zvati *pravilnim* ako je $A_1, A_2, \ldots, A_p$ skup slika proizvoljne tačke A ($= A_p$) u transformacijama iz ciklične grupe G generisane bilo kojom izometrijom J (u kojoj tačka A nije invarijantna), takvih da je

$$A_i = J^i(A).$$

Ako dopustimo da G bude beskonačna ciklična grupa generisana nekom izometrijom, dobijeni lik zvaćemo takođe, pravilnim poligonom.

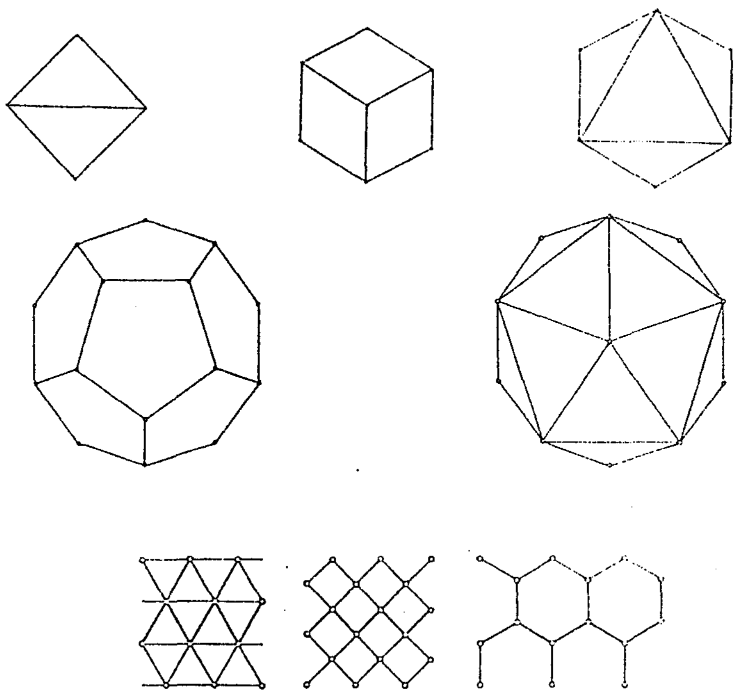
Budući da neidentička izometrija J ravni ili prostora može da bude rotacija, translacija, klizajuća refleksija, rotaciona refleksija, ili zavojno kretanje [30, poglavlja III i IV], jedini mogući pravilni poligoni su: konveksni, zvezdoliki, apeirogoni, testeroliki, antiprizmatični, prizmatični i helični poligoni [10, 21].

Primera radi, istaknimo da će ivice Platonovih tela od kojih svake dve susedne pripadaju jednoj pljosni, a nikada tri uzastopne ne pripadaju jednoj pljosni, biti ivice pravilnih antiprizmatičnih poligona. Ti poligoni poznati su u literaturi kao *Petrijevi poligoni*. Svaki Petrijev poligon tetraedra je četvorougao, kocke i oktaedra, šestougao, a ikosaedra i dodekaedra, desetougao.

Ako je J rotacija za ugao $2\pi/p$ ($p \in \mathrm{N}$), dobijeni poligon koji je pravilan i konveksan obeležavaćemo sa $\{p\}$. Ako je J rotacija za ugao $2\pi q/p$ (p i q su međusono prosti), dobijeni poligon zvaćemo *pravilnim zvezdolikim poligonom* i obeležavaćemo ga sa $\{p/q\}$. Ako je J translacija, dobijeni poligon zvaćemo *apeirogonom* i obeležavaćemo ga sa $\{\infty\}$.

Ako je J klizajuća refleksija, dobijeni poligon zvaćemo *pravilnim testerolikim poligonom* i obeležavaćemo ga sa $\{\infty^\alpha\}$, gde je α ugao između susednih ivica tog poligona. Ako je J rotaciona refleksija, u zavisnosti od toga koliki je ugao rotacije u toj rotacionoj refleksiji postoje dve mogućnosti, pa ćemo dobiti i dve vrste pravilnih poligona, *antiprizmatične* ili *prizmatične*, koje ćemo, redom, obeležavati sa $\{k^\alpha/d\}$ i $\{2.k^\alpha/d\}$. Konačno, ako je J zavojno kretanje, dobijeni poligon zvaćemo *heličnim* i obeležavaćemo ga sa $\{\infty^{\alpha,\beta}\}$, gde je α ugao među susednim ivicama tog poligona, a β ugao rotacije u tom zavojnom kretanju.

Jedan od pravilnih zvezdolikih poligona $\{5/2\}$, iz antičkih vremena poznat kao pentagram, pojavljuje se na vazama iz sedmog veka pre Hrista [25, vol. I, str. 161–162]. Služio je kao jedan od važnih simbola pitagorejskog bratstva. Nagla-

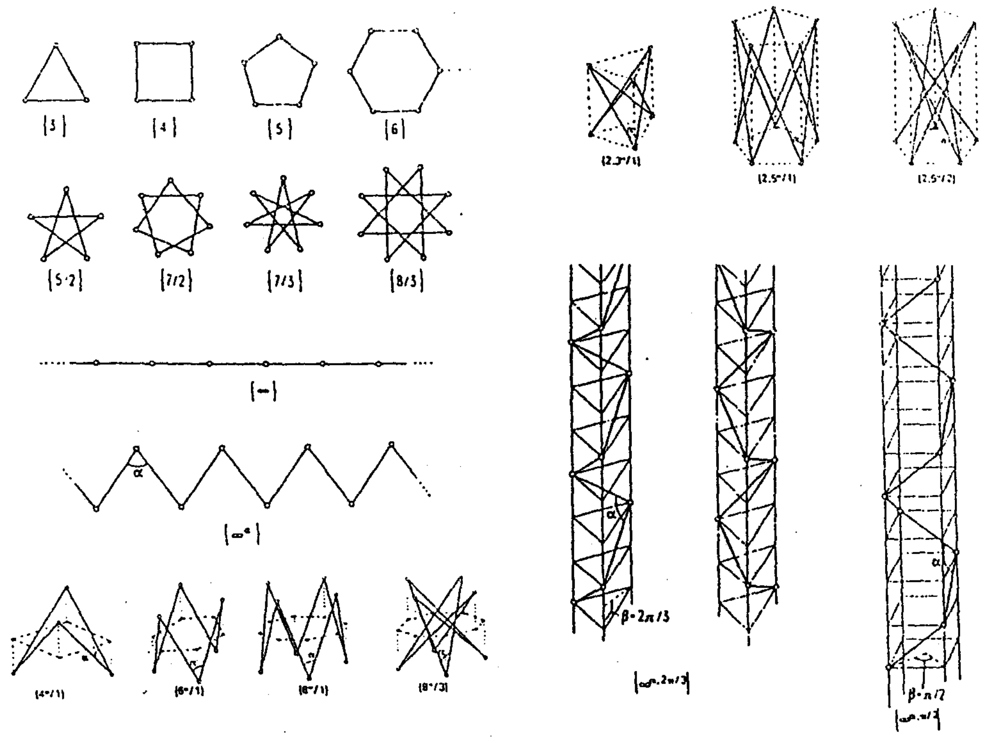


Platonova tela, pravilne teselacije i njihovi Petrijevi poligoni

simo da je sistematsko izučavanje zvezdolikih poligona započeo Englez Bredvordin već u četrnaestom veku [9, str. 114], a nastavio ga je Kepler [29].

Kepler-Poanso-ovi poliedri

Posvetimo sada pažnju pravilnim poliedrima kojima su pljosni ili temene figure zvezdoliki poligoni. Ako se produže ivice svake pljosni pravilnog dodekaedra do njihovog ponovnog presecanja dobiće se dvanaest zvezdolikih petouglova koji će sačinjavati skup pljosni novog poliedra, *malog zvezdolikog dodekaedra* čija je Šleflijeva oznaka $\{5/2, 5\}$. Temena ovog poliedra će u isto vreme biti temena jednog pravilnog ikosaedra. Dodavanjem ivica ovog ikosaedra i očuvanjem ravni koje sadrže pljosni polaznog dodekaedra dobiće se poliedar čije su pljosni pravilni konveksni petougli a temene figure zvezdoliki petougli. Time je konstruisan *veliki dodekaedar* $\{5, 5/2\}$, dualan malom zvezdolikom dodekaedru $\{5/2, 5\}$. Istim postupkom kojim je od dodekaedra dobijen mali zvezdoliki dodekaedar, od velikog dodekaedra dobija se *veliki zvezdoliki dodekaedar* $\{5/2, 3\}$, a od njega se slično konstrukciji velikog dodekaedra, izvodi konstrukcija njemu dualnog *velikog ikosaedra* $\{3, 5/2\}$. Napomenimo da je grupa simetrija svakog od Kepler-Poanso-ovih pravilnih poliedara ista kao i grupa ikosaedra, te da i za Platonova tela i za



Pravilni poligoni

Kepler-Poanso-ove pravilne poliedre važi ista formula

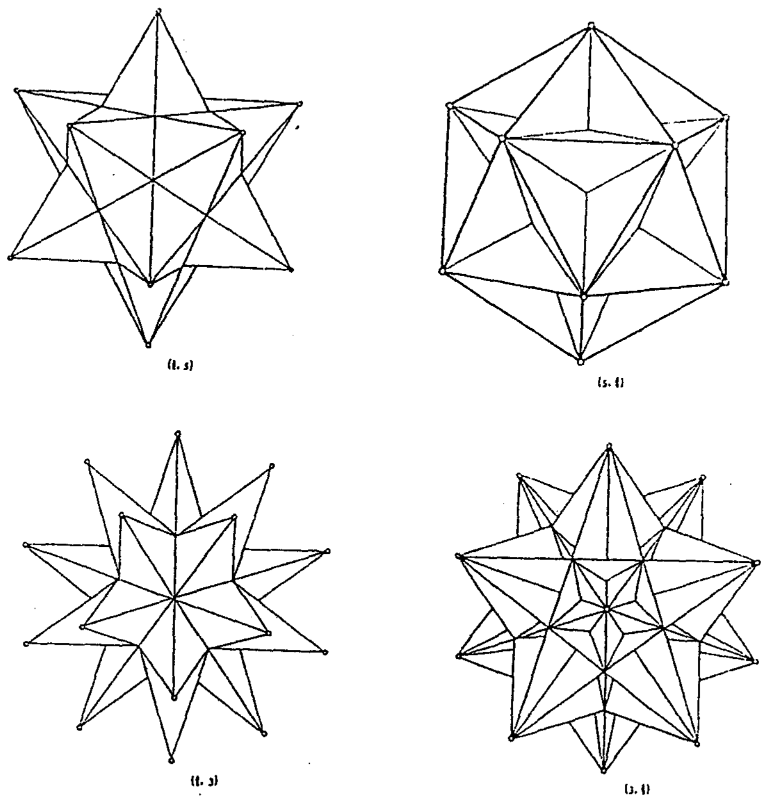
$$\cos^2(\pi/h) = \cos^2(\pi/p) + \cos^2(\pi/q)$$

kojom je karakterisan broj h ivica Petrijevog poligona za svaki od prethodnih pravilnih poliedara $\{p, q\}$ [9, str. 108].

Tabela Kepler-Poanso-ovih poliedara

$\{p,q\}$	T	I	P	Naziv poliedra	konstruisao
$\{5/2, 5\}$	12	30	12	mali zvezdoliki dodekaedar	Kepler 1619.
$\{5/2, 3\}$	20	30	12	veliki zvezdoliki dodekaedar	Kepler 1619.
$\{5.5/2\}$	12	30	12	veliki dodekaedar	Poanso 1809.
$\{3, 5/2\}$	12	30	20	veliki ikosaedar	Poanso 1809.

Dva zvezdolika poliedra $\{5/2, 5\}$ i $\{5/2, 3\}$ prvi je konstruisao Kepler 1619. godine [18]. Kepler je dopustio da pljosni pravilnog poliedra budu zvezdolike, a dva veka kasnije, 1809. godine, Poanso (1777–1859) je konstruisao još dva pravilna



Kepler-Poanso-ovi poliedri

poliedra $\{5, 5/2\}$ i $\{3, 5/2\}$ kojima su temene figure zvezdolike. Već 1813. godine, Koši (1789–1857) je, u svome radu *Recherches sur les polyèdres* [3], dokazao da svaki pravilan poliedar ima pljosni koje pripadaju ravnima pljosni nekog od Platonovih tela i zaključio da sem pomenutih pet Platonovih tela i četiriju Kepler-Poanso-ovih zvezdolikih tela, nema više pravilnih poliedara. Simbole $\{5/2, 5\}$ i $\{5, 5/2\}$ (preciznije 5/2 5 i 5 5/2) prvi je 1915. koristio Van Os [9, str. 115].

Primetimo da poliedri $\{5/2, 5\}$ i $\{5, 5/2\}$ ne zadovoljavaju Ojlerovu formulu $T - I + P = 2$, pa zato njihove površi nisu nultog roda. Stoga ih Šlefli i nije uvrstio u spisak postojećih pravilnih poliedara [1, str. 146]. Kako je kod pomenutih dvaju poliedra $T - I + P = -6$ oni će, budući da su njihove površi orijentabilne, biti roda 4 [9, str. 105], pa možemo smatrati da su površi ovih dvaju poliedara dvodimenzione rimanske površi roda 4. Ova dva poliedra se mogu apstraktno opisati na isti način pa ih stoga možemo smatrati izomorfnim na isti način na koji možemo smatrati da su izomorfni $\{5, 3\}$ i $\{5/2, 3\}$ ili $\{3, 5\}$ i $\{3, 5/2\}$ [9, str. 105–107].

Zadržimo se, kratko, na još jednom primeru poliedra koji se realizuje na površi čiji je rod veći od nule. U skladu sa definicijom datom u uvodu, kocku možemo da shvatimo kao poliedar čije su pljosni kvadrati (a ne kvadratne površi), po tri kod svakog temena. Sa druge strane, pravilni antiprizmatični šestougli koji služe kao Petrijevi poligoni kocke, mogu da se shvate kao pljosni novog poliedra kome je Šeflijeva oznaka $\{6^{\pi/2}/1, 3\}$, koji ima četiri pljosni (a ne šest kao kocka), a 12 ivica i 8 temena (isto kao kocka). Ojlerova karakteristika ovog poliedra je 0 pa se on može realizovati na torusu. Ovaj poliedar je samo jedan od najjednostavnijih primera *toroidalnih poliedara* tipa $\{6,3\}$ koji su, uz toroidalne poliedre tipa $\{4,4\}$, sistematski pobrojani u [**12**, poglavlje 8].

Interpretaciju Kepler-Poanso-ovih poliedara kao teselacija rimanskih površi prvi je predložio Du Val 1930, a izomorfizam $\{5/2,5\}$ i $\{5,5/2\}$ prvi su, nezavisno jedan od drugog, ustanovili Mebijus i Kejli [9, str. 116]. Klasifikacija pravilnih teselacija površi je sačinjena 1982. u radu [17], gde je dokazano da, ako je M proizvoljna površ Ojlerove karakteristike $\chi(M)$ i p, q, T, I, P prirodni brojevi takvi da je

$$T - I + P = \chi(M) \quad \text{i} \quad pP = 2I = qT,$$

tada

a. postoji teselacija $\{p,q\}$ na M koja se sastoji iz P p-ugaonih pljosni, I ivica i T temena od kojih je svako valence q; sem kada je M projektivna ravan, $\{p,q\} = \{3,3\}$, $T = P = 2$ i $I = 3$,

b. $\{p,q\}$ se može realizovati na površi M koja dopušta metriku konstantne krivine u odnosu na koju su ivice geodezijski lukovi jednake dužine, a unutrašnji uglovi pljosni svi $2\pi/q$.

Petri-Kokseterovi poliedri

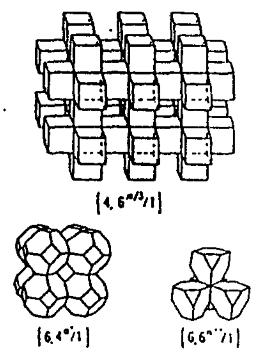
Nakon Košijevog otkrića vladalo je mišljenje da je istorija pravilnih poliedara završena. Sve do 1926. kada je, jednog dana Dž. F. Petri (1907–1972), engleski geometričar, vidno uzbuđen, saopštio svom školskom drugu i najznačajnijem geometričaru dvadesetog veka, H. S. M. Kokseteru, da je otkrio dva nova pravilna poliedra, beskonačna ali bez lažnih temena uočljivih kod Kepler-Poanso-ovih poliedara. Pljosni jednog od tih poliedara su kvadarati, po šest kod svakog temena, a drugog šestougli, po četiri kod svakog temena [5]. Pored ovih dvaju međusobno dualnih poliedara kojima su pljosni konveksne a temene figure antiprizmatične, Kokseter je dokazao da postoji još jedan sa istom osobinom, kome su pljosni šestougli, po šest kod svakog temena. Štaviše, Kokseter je dokazao da su ovo jedini mogući tzv. *Petri-Kokseterovi poliedri* [5], i označio ih sa $\{4,6\,|\,4\}$, $\{6,4\,|\,4\}$ i $\{6,6\,|\,3\}$. Koristeći se prethodno uvedenim oznakama pravilnih poligona Branko Grinbaum je, u skladu sa zahtevima Šeflijevog simbola, ove poliedre označio sa

$$\{4, 6^{6\pi/3}/1\}, \quad \{6, 4^{\alpha}/1\}, \quad \{6, 6^{\beta}/1\},$$

gde je $\alpha = \arccos 2/3$, a $\beta = \arccos 5/6$.

Pravilni poliedri u euklidskom 3-prostoru

U svome članku [21] Branko Grinbaum je načinio pokušaj klasifikacije pravilnih poliedara u euklidskom 3-prostoru. Dopustivši da pljosan i temena figura



Petri-Kokseterovi poliedri

bude svaki od pravilnih poligona, dakle konveksni poligon, zvezdoliki, apeirogon, testeroliki, antiprizmatični, prizmatični ili helični poligon, sačinio je listu od 17 individualnih pravilnih poligona u euklidskom prostoru i 12 infinitnih familija takvih poliedara, pored već poznatih i tradicionalnih pet Platonovih tela, triju ravanskih teselacija, četiriju Kepler-Poanso-ovih poliedara i triju Petri-Kokseterovih poliedara. Ove četiri klase klasičnih pravilnih poliedara on je dopunio novim četirima klasama i u njih je svrstao redom:

5. pravilne poliedre sa konačno mnogo antiprizmatičnih pljosni kojima su temene figure konveksne ili zvezdolike,
6. infinitne pravilne poliedre kojima su pljosni antiprizmatične ili prizmatične,
7. pravilne poliedre kojima su pljosni pravilni testeroliki poligoni,
8. pravilne poliedre kojima su pljosni pravilni helični poligoni.

Grinbaumova tabela pravilnih poliedara 5–8. klase

5.	6.	7.	8.
$\{4^{\pi/3}/1,3\}$	$\{4^{\alpha}/1,4\}$	$\{\infty^{\alpha},4\}$	$\{\infty^{2\pi/3,\pi/2},3\}$
$\{6^{\pi/3}/1,4\}$	$\{6^{\alpha}/1,3\}$	$\{\infty^{\alpha},3\}$	$\{\infty^{2\pi/3,2\pi/3},3\}$
$\{6^{\pi/2}/1,3\}$	$\{2.3^{\alpha}/1,6\}$	$\{\infty^{\alpha},6\}$	$\{\infty^{2\pi/3,2\pi/3},6^{\pi/3}/1\}$
$\{10^{\pi/3}/1,5\}$	$\{6^{\pi/3}/1,6\}$	$\{\infty^{\alpha(b)},4^{\alpha^*(b)}/1\}$	$\{\infty^{2\pi/3,2\pi/3},4^{\alpha^*}/1\}$
$\{6^{\pi/5}/1,5\}$	$\{4^{\pi/3}/1,6\}$	$\{\infty^{\gamma(b)},6^{\gamma^*(b)}/1\}$	$\{\infty^{2\pi/3,\pi/2},6^{\alpha^{**}}/1\}$
$\{6^{3\pi/5}/1,5/2\}$	$\{6^{\pi/2}/1,4\}$	$\{\infty^{\delta(b)},2.3^{\delta^*(b)}/1\}$	$\{\infty^{\alpha(b),\pi/2},4^{\beta^*(b)}/1\}$
$\{10^{\pi/3}/3,5/2\}$			$\{\infty^{\gamma(b),2\pi/3},6^{\gamma^*(b)}/1\}$
$\{10^{3\pi/5}/1,3\}$			$\{\infty^{\delta(b),\pi/3},2.3^{\delta^*(b)}/1\}$
$\{10^{\pi/5}/3,3\}$			

A. Dres je u svojim radovima [15] i [16] dokazao da ovoj listi nedostaje samo jedan poliedar osme klase $\{\infty^{\pi/2, 2\pi/3}, 4\}$ da bi bila kompletna. Dodajmo da je u §9 svoga članka [16] Dres dao i novu klasifikacionu shemu pravilnih poligona u n-dimenzionom euklidskom prostoru.

Pravilni poliedri u hiperboličkom 3-prostoru

Sve do otkrića Petri-Kokseterovih poledara nije imalo smisla govoriti o pravilnim poliedrima u hiperboličkom prostoru. To je stoga što svako od Platonovih i Kepler-Poanso-ovih tela ima središte invarijantno u svakoj simetriji toga tela, odakle sledi da postoji poliedar $\{p, q\}$ u hiperboličkom prostoru ako i samo ako $\{p, q\}$ postoji u euklidskom prostoru. Uz to, pravilne teselacije hiperboličke ravni umesto uslova

$$(p-2)(q-2) < 4$$

za sferu, ili

$$(p-2)(q-2) = 4$$

za euklidsku ravan, zadovoljavaju uslov

$$(p-2)(q-2) > 4$$

odakle neposredno sledi da ih ima neograničeno mnogo [2, str. 171]. Kokseter je u svome članku [7] dokazao da su jedine pravilne teselacije hiperboličke ravni kojima su pljosni ili temene figure pravilni zvezdoliki poligoni, teselacije sa Šleflijevim oznakama

$$\{m/2, m\} \quad i \quad \{m, m/2\}$$

gde je $m > 7$.

Nakon otkrića Petri-Kokseterovih poliedara prirodno se postavilo pitanje njihovih analogona u hiperboličkom prostoru. Odgovor na to pitanje dat je u radovima [20] i [27]. Lista ovih poliedara označenih Kokseterovim simbolom $\{l, m \mid n\}$ data je tabelom u kojoj su date i metričke osobine tih poliedara: a je dužina ivice, α je ivični ugao pljosni, a ψ ugao diedra susednih pljosni.

Što se tiče ostalih pravilnih poliedara u hiperboličkom 3-prostoru koji su analogni poliedrima klasa 5–8 Grinbaumove klasifikacione sheme, sačinjavanje njihive kompletne liste je još uvek otvoren geometrijski problem. Jedan predlog takve liste načinjen je u članku [27].

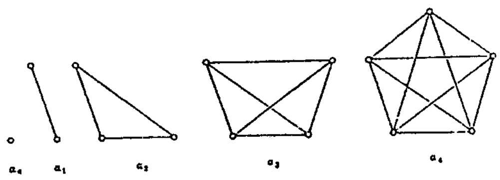
Pravilni politopi

Politop je opšti član niza: tačka, duž, poligon, poliedar, ... U prostoru bez dimenzije jedini povezani objekat je tačka, jednodimenzioni prostor ima beskonačno mnogo tačaka, a svake dve tačke su temena duži koja je jednodimenzioni analogon poligona i poliedra. Mnogi politopi mogu se konstruisati imajući u vidu prethodni opis politopa: povezivanjem jedne tačke sa drugom dobija se duž, povezivanjem treće tačke sa temenima duži dobija se trougao (najjednostavniji

Tabela Petri-Koksetcrovih poliedara u hiperboličkom 3-prostoru

Poliedar	a	α	ψ	Poliedar	a	α	ψ
{10,4 | 3}	0,34189	139°13′	97°57′	{10,8 | 3}	1,09553	119°2′	55°20′
{12,4 | 3}	0,47718	139°48′	97°42′	{12,8 | 3}	1,13735	111°51′	55°2′
{8,4 | 4}	0,63297	123°9′	107°2′	{4,8 | 4}	1,12838	74°51′	78°3′
{6,4 | 5}	0,54897	113°6′	115°52′	{6,8 | 4}	1,42904	86°18′	68°3′
{6,4 | 6}	0,69315	109°28′	120°	{8,8 | 4}	1,52857	90°	65°32′
{8,6 | 3}	0,63297	123°9′	69°18′	{4,10 | 3}	0,76720	82°19′	56°1′
{10,6 | 3}	0,76720	124°32′	68°47′	{6,10 | 3}	1,19891	93°54′	50°2′
{12,6 | 3}	0,83144	125°16′	68°32′	{8,10 | 3}	1,32622	97°35′	48°30′
{6,6 | 4}	0,96242	101°32′	80°24′	{10,10 | 3}	1,38257	99°14′	47°52′
{8,6 | 4}	1,12838	105°9′	78°3′	{[illegible],10 | 3}	1,41259	100°6′	47°33′
{4,6 | 5}	0,76720	82°19′	98°53′	{4,12 | 3}	1,23590	72°25′	51°58′
{6,6 | 5}	1,19891	93°54′	86°21′	{6,12 | 3}	1,50637	83°45′	45°37′
{4,6 | 6}	0,96242	78°28′	104°29′	{8,12 | 3}	1,59817	87°27′	43°59′
{6,6 | 6}	1,31696	90°	90°	{10,12 | 3}	1,64019	89°7′	43°18′
{6,8 | 3}	0,81791	105°57′	57°17′	{12,12 | 3}	1,66289	90°	42°56′
{8,8 | 3}	1,01481	109°28′	55°54′				

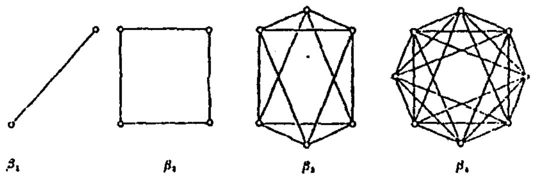
poligon), dodavanjem četvrte tačke koja ne pripada ravni tog trougla i njenim povezivanjem sa temenima trougla dobija se tetraedar, najjednostavniji poliedar. Povezivanjem temena tog tetraedra sa tačkom koja je izvan 3-prostora određenog tetraedrom dobija se najjednostavniji politop, *pentatop*. U opštem slučaju, $n+1$ tačaka koje ne pripadaju (n-1)-prostoru će biti temena politopa poznatog kao *n-dimenzioni simpleks*. On će biti pravilan ako su duži određene njegovim temenima međusobno podudarne. Obeležavaćemo ga sa α_n.



Simpleksi

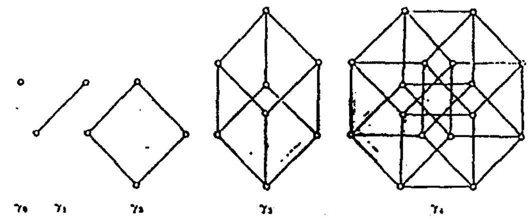
Jedno od osnovnih svojstava n-dimenzionog prostora je postojanje n međusobno upravnih pravih koje sadrže proizvoljnu tačku. Postoji $2n$ tačaka na tim pravama koje su sve na istom rastojanju od presečne tačke. One će biti temena *ukrštenog politopa* β_n kome će (n-1)-dimenzione pljosni biti pravilni simpleksi α_{n-1}. Dvodimenzioni ukršteni politop je kvadrat, a trodimenzioni, oktaedar.

Translacijom proizvoljne tačke za dati vektor određena je duž, translacijom te duži za vektor koji je istog intenziteta kao početni vektor, a upravan je na



Ukršteni politopi

dobijenoj duži, dobija se kvadrat. Translacijom kvadrata duž vektora upravnog na njegovoj ravni i intenziteta jednakog početnom vektoru, dobija se kocka. Translacijom kocke duž vektora upravnog na 3-prostoru te kocke i intenziteta jednakog početnom vektoru, dobija se 4-dimenziona kocka. n-dimenziona generalizacija poznata je kao *hiperkubus*. Usvojićemo γ_n za oznaku tog politopa.



Kocke

Mnoge osobine politopa mogu se izvesti jednostavnom analogijom. Duž ima dva temena, kvadrat oivičavaju četiri duži, kocku šest kvadrata, hiperkubus osam kocaka, itd. Međutim, intuitivni pristup n-dimenzionoj geometriji je veoma nesiguran pa se stoga sugeriše korišćenje aksiomatske ili analitičke metode. Ilustrujmo to samo jednim primerom; obim kruga je $2\pi r$, površina lopte je $4\pi r^2$, a mera 3-sfere je $2\pi^2 r^3$, što je po analogiji sasvim neočekivano.

Pojam pravilnog politopa može se u geometriju uvesti u analogiji sa pojmom pravilnog poliedra. Kako smo definisali temenu figuru poliedra možemo definisati i *temenu figuru n-dimenzionog politopa* Φ; to je $(n-1)$-dimenzioni politop kome su temena središta ivica incidentnih jednom temenu politopa Φ. Polazeći od pravilnih poligona $\{3\}$, $\{4\}$, $\{5\}, \ldots$ možemo definisati pravilan politop induktivno; politop Π ćemo zvati *pravilnim* ako su mu $(n-1)$-dimenzione pljosni pravilne i ako su mu sve temene figure pravilne. Tako su α_n, β_n i γ_n pravilni politopi kojima su pljosni, redom, α_{n-1}, α_{n-1} i γ_{n-1}, a temene figure, redom, α_{n-1}, β_{n-1} i α_{n-1}

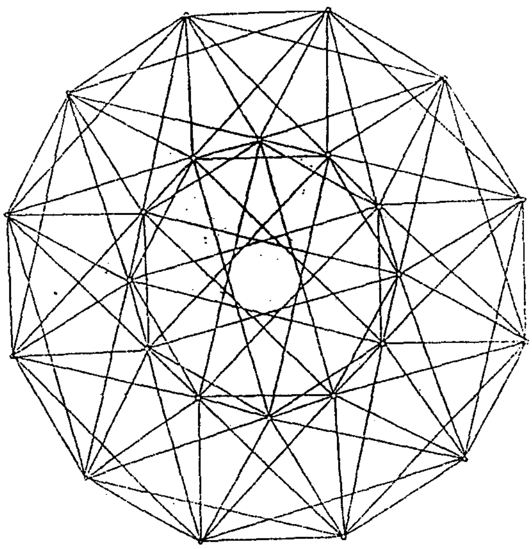
Budući da su pljosni temenih figura temene figure pljosni, pravilan 4-dimenzioni politop kome su pljosni $\{p,q\}$ ima temene figure $\{q,r\}$ pa se nameće Šleflijeva oznaka tog politopa, $\{p,q,r\}$. Analogno,

$$\{p, q, \ldots, v, w\}$$

je Šleflijeva oznaka politopa kome su pljosni $\{p,q,\ldots,v\}$, a temene figure $\{q,\ldots,v,w\}$. Dakle,

$$\alpha_n = \{3,3,\ldots,3,3\} = \{3^{n-1}\},$$
$$\beta_n = \{3,3,\ldots,3,4\} = \{3^{n-2},4\},$$
$$\gamma_n = \{4,3,\ldots,3,3\} = \{4,3^{n-2}\}.$$

Da li su prethodna tri politopa jedini pravilni politopi n-dimenzionog euklidskog prostora?



$\{3,4,3\}$

Odgovor je potvrdan ako pretpostavimo da su politopi konveksni i da je $n > 4$. Ovo sledi iz poznatog Šleflijevog kriterijuma [9, str. 135]. Za pravilne četvorodimenzione konveksne politope $\{p,q,r\}$ ovaj kriterijum se svodi na sledeću formulu

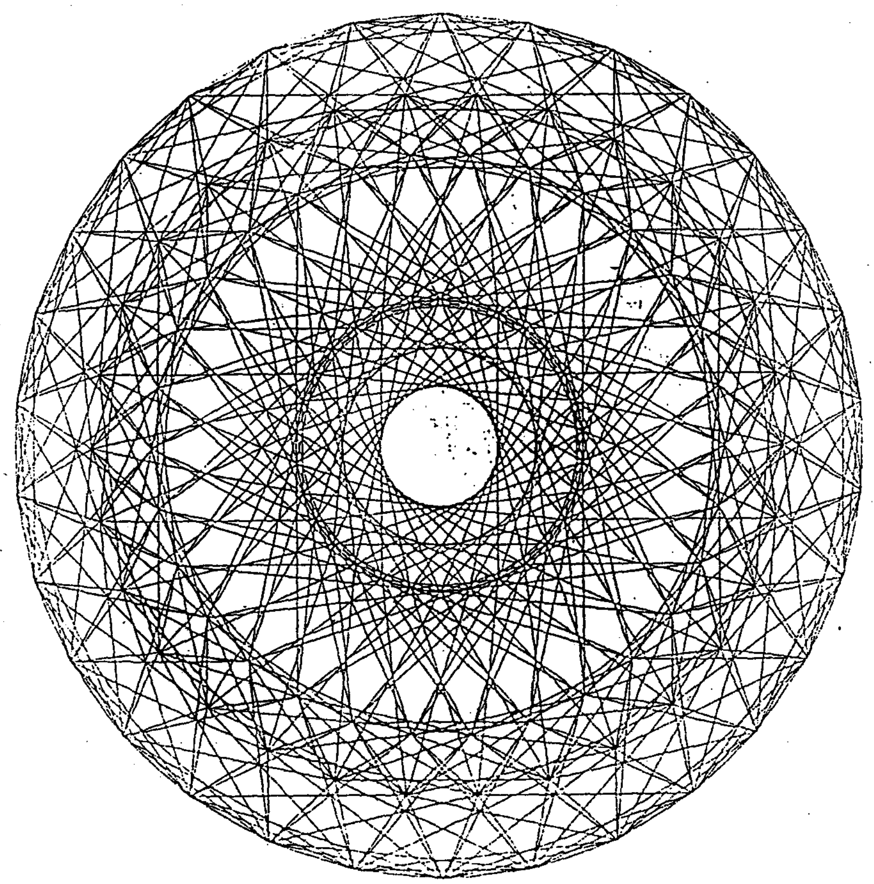
$$\sin(\pi/p)\,\sin(\pi/r) \leq \cos(\pi/q).$$

Odavde se neposredno dobija da postoji šest pravilnih konveksnih četvorodimenzionih politopa.

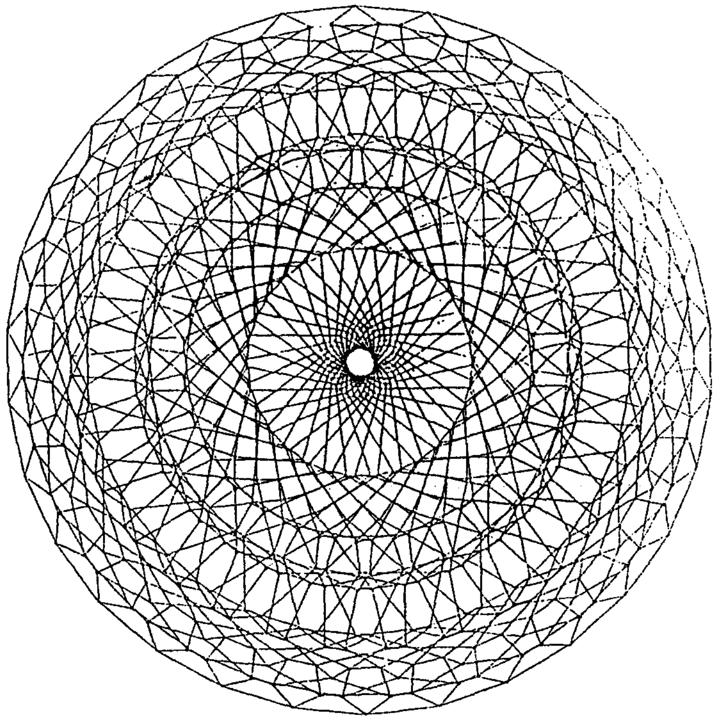
Oznake ovih politopa i njihove kombinatorne osobine (broj temena — T, broj ivica — I, broj 2-dimenzionih pljosni — P broj 3-dimenzionih pljosni (ćelija) — $\acute{C}$, red grupe simetrija — g) zadate su sledećom tabelom:

Tabela pravilnih konveksnih četvorodimenzionih politopa

$\{p,q,r\}$	T	I	P	$\acute{C}$	g	Naziv poliedra
$\{3,3,3\}$	5	10	10	5	120	5-ćelijski, pravilan simpleks
$\{3,3,4\}$	8	24	32	16	384	16-ćelijski politop
$\{4,3,3\}$	16	32	24	8	384	8-ćelijski hiperkubus
$\{3,4,3\}$	24	96	96	24	1152	24-ćelijski politop
$\{3,3,5\}$	120	720	1200	600	14400	600-ćelijski politop
$\{5,3,3\}$	600	1200	720	120	14400	120-ćelijski politop



$\{3,3,5\}$



$\{5,3,3\}$

Pomenuti Šleflijev kriterijum za 4-dimenzione politope zadovoljava i davno poznata teselacija $\{4,3,4\}$ 3-prostora čije su ćelije kocke, po četiri kod svake ivice.

Klasifikaciju pravilnih politopa načinio je Šlefli (1814–1895) pre 1853. godine, u vreme kada su, uz njega, jedino još Kejli, Grasman i Mebijus poimali mogućnost višedimenzione geometrije [9, str. 141]. Stoga njegov pionirski rad nije naišao na razumevanje savremenika tako da su samo dva fragmenta njegovog dela bila prihvaćena za publikovanje, jedan u Francuskoj [40] i jedan u Engleskoj [41, 42]. Šest godina nakon njegove smrti, 1901. godine publikovano je njegovo delo *Theorie der vielfachen Kontinuität* u memorijalnoj svesci časopisa *Schweizerische Naturforschender Gesellschaft*. Francuski i engleski apstrakti ovog rada iz 1855. i 1858. godine nisu privukli nikakvu pažnju. Skoro trideset godina nakon Šleflijevog nezapaženog otkrića, u radu koji je bio mnogo elementarniji, Stringham [44] je došao do iste klasifikacije, tako da su mnogi smatrali da se otkriće pravilnih politopa može pripisati Stringham-u. Između 1881. i 1990. ovu klasifikaciju su ponovo ustanovili mnogi matematičari nezavisno jedni od drugih [9, str. 144].

Rukovodeći se idejom klasifikacije pravilnih zvezdolikih višedimenzionih politopa koji su analogoni Kepler-Poanso-ovih pravilnih poliedara, dopustićemo da pljosni $\{p,q\}$ i temene figure $\{q,r\}$ politopa $\{p,q,r\}$ budu zvezdoliki pravilni poliedri. Budući da postoje četiri Kepler-Poanso-ova poliedra, lista mogućih pravilnih zvezdolikih 4-dimenzionih tela sastojaće se iz 14 politopa od kojih se samo 10 može konstruisati u 4-prostoru. To su

$$\{5/2,5,3\},\ \{3,5,5/2\},\ \{5,5/2,5\},\ \{5/2,3,5\},\ \{5,3,5/2\},$$
$$\{5/2,5,5/2\},\ \{5,5/2,3\},\ \{2,5/2,5\},\ \{5/2,3,3\},\ \{3,3,5/2\}.$$

Već je Šlefli znao za četiri od ovih politopa. Kompletnu listu, međutim, prvi je 1885. sačinio Hes (1843–1903) i dokazao da svaki politop sa te liste ima istu grupu simetrija kao i $\{3,3,5\}$, no u njegovom kratkom radu [26] nedostaju dokazi nekih tvrđenja značajnih za ovu klasifikaciju poput onog o podudarnosti temena pravilnog zvezdolikog 4-politopa sa temenima nekog konveksnog politopa. Kriterijum za klasifikaciju zvezdolikih politopa koji ne zavisi od rasporeda temena politopa načinio je Van Os 1915. godine [35], a još dva različita kriterijuma Kokseter u svojim *Pravilnim politopima* [9]. Iz drugog od tih kriterijuma sledi da u euklidskom n-prostoru ($n > 4$) nema ni pravilnih zvezdolikih poliedara ni pravilnih teselacija sa zvezdolikim pljosnima.

Apstraktni pravilni politopi

Kako smo već videli, pravilni politopi imaju veoma dugu istoriju. Poslednjih godina zahvaljujući Kokseterovom uticaju obnovljeni interes geometričara za ovo područje doveo je do novog uvida u geometrijsku i kombinatornu strukturu pravilnih politopa u najopštijem smislu [31, 21, 22, 15, 16, 34]. Ćelije apstraktnog politopa su obično definisane kao slike konveksnih politopa u posebnoj vrsti preslikavanja, kako je to učinjeno u radu [31]. U svome članku [22] Grinbaum je sugerisao ispitivanje politopa kojima su ćelije slike toroidalnih politopa tipa $\{4,4\}$ i $\{6,3\}$, i načinio listu mnogih primera među kojima je i jedan veoma zanimljiv apstraktan politop, koji su otkrili nezavisno jedan od drugog Kokseter i Šepard [13]. Neki složeni primeri ovakvih politopa kasnije su konstruisani u radovima [43], [4] i [47].

Potpuno kombinatorno uopštenje politopa dato je uvođenjem pojma incidenc-politopa (kako je to učinjeno u članku [14]): *Incidenc-politop* $\mathcal{P}$ dimenzije d (ili kratko *d-incidenc-politop*) je parcijalno uređen skup sa striktno monotonom rang funkcijom $dim(\cdot)$ takav da važe dole navedene osobine (I1)–(I4). Elementi ranga i nazivaju se *i-pljosni* politopa $\mathcal{P}$.

(I1) Postoji jedinstven najmanji element, pljosan F_{-1} kojoj je $\dim(F_{-1}) = -1$ i jedinstven najveći element, pljosan F_d kojoj je $\dim(F_d) = d$. Ove ćemo pljosni zvati *nepravim*.

(I2) Maksimalan totalno uređen podskup ili *zastava* politopa $\mathcal{P}$ sastoji se iz tačno $d+2$ pljosni (uključujući F_{-1} i F_d), iz svake dimenzije po jedna.

(I3) $\mathcal{P}$ je *jako zastava-povezan* u sledećem smislu: za bilo koje dve zastave Φ i Ψ postoji niz $\Phi = \Phi_0, \Phi_1, \dots, \Phi_{n-1}, \Phi_n = \Psi$ susednih zastava, što znači da je $card(\Phi_j \backslash \Phi_{j-1}) = 1$, tako da je presek $\Phi \cap \Psi$ sadržan u Φ_j za svako j.

(I4) Za svaku $(i-1)$-pljosan F i svaku $(i+1)$-pljosan G takve da je $F < G$ postoje tačno dve i-pljosni H politopa $\mathcal{P}$ takve da je $F < G < H$.

Ako su F i G pljosni incident-politopa $\mathcal{P}$ takve da je $F < G$ incident politop $G/F = \{H : F < H < G\}$, dimenzije $\dim(G) - \dim(F) - 1$, ćemo zvati *sekcijom politopa* $\mathcal{P}$. Pljosni dimenzije $0, 1, d-1$ ćemo, redom, zvati *temenima, ivicama, ćelijama*. Ako je F pljosan tada ćemo F_d/F zvati *ko-pljosni* od F, ili *temenom figurom* ako je F teme.

Zamenom „$<$" sa „$>$" svakom politopu $\mathcal{P}$ pridružujemo njemu *dualan politop* $\mathcal{P}^*$. $\mathcal{P}$ se naziva samodualnim ako je $\mathcal{P}^*$ izomorfan sa $\mathcal{P}$.

Grupa automorfizama $A(\mathcal{P})$ politopa $\mathcal{P}$ sastoji se iz onih permutacija pljosni koje čuvaju poredak. Proširena grupa $D(\mathcal{P})$ samodualnog politopa $\mathcal{P}$ je grupa svih automorfizama i permutacija koje obrću poredak pljosni. Ona sadrži $A(\mathcal{P})$ kao podgrupu indeksa 2.

Incident-politop $\mathcal{P}$ ćemo zvati pravilnim ako je $A(\mathcal{P})$ grupa tranzitivna na zastavama tog politopa. Za pravilan politop sve njegove sekcije su pravilni incident-politopi i svake dve uporedive sekcije su izomorfne.

Na prethodan način uvedeni pojam pravilnog politopa omogućio je da se na sasvim novim osnovama razvije geometrijska i kombinatorna teorija apstraktnih pravilnih politopa kojoj je u poslednje vreme posvećeno mnogo pažnje u radovima [32], [33], [34], [43], [47], [48], [49]. Time se nastavlja, već dva i po milenijuma duga, istorija pravilnih poliedara.

LITERATURA

[1] *W. W. R. Ball and H. S. M. Coxeter*, Mathematical Recreations & Essays, Twelfth ed., University of Toronto Press, **1974**.

[2] *S. Bilinski*, Homogene mreže ravnine, Rad Jugoslav. Akad. Znan. Umjet. Zagreb, **271** **(1948)**, 145–255.

[3] *A. L. Cauchy*, Recherches sur les polyèdres, Journal de l'Ecole Polyt. **9** **(1813)**, 68–86.

[4] *C. J. Colbourn, A. Ivić-Weiss*, A census of regular 3-polystroma arising from honeycombs, Discrete Math. **50** **(1984)**, 29–36.

[5] *H. S. M. Coxeter*, Regular skew polyhedra in three and four dimensions and their topological analogues, Proc. London Math. Soc. ser. 2, **43** **(1937)**, 33–62.
(Poboljšani reprint u *H. S. M. Coxeter*, Twelwe Geometric Essays, Southern Illinois University Press, Carbondale, 1968.)

[6] *H. S. M. Coxeter*, Regular and semi-regular polytopes I, Math. Z. **46** **(1940)**, 380–407.

[7] *H. S. M. Coxeter*, Regular honeycombs in hyperbolic space, Proceedings of the International Congress of Mathematicians (Vol. III), Amsterdam, **1954**.
(Poboljšani reprint u *H. S. M. Coxeter*, Twelwe Geometric Essays, Southern Illinois University Press, Carbondale, 1968.)

[8] *H. S. M. Coxeter*, Introduction to Geometry, John Wiley & Sons, Inc. 1969.

[9] *H. S. M. Coxeter*, Regular Polytopes, third ed., Dover 1973.

[10] *H. S. M. Coxeter*, Regular Complex Polytopes, Cambridge University Press, 1974.

[11] *H. S. M. Coxeter, M. S. Longuet-Higgins and J. C. P. Miller*, Uniform polyhedra, Phil. Trans. Roy. Soc. London, A **246** (**1954**), 401–450.

[12] *H. S. M. Coxeter, W. O. J. Moser*, Generators and Relations for Discrete Groups, fourth ed., Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 1980.

[13] *H. S. M. Coxeter, G. C. Shephard*, Regular 3-complexes with toroidal cells, J. Combin. Theory, **22** (**1977**), 131–138.

[14] *L. Danzer, E. Schulte*, Reguläre Inzidenzkomplexe I, Geom. Dedicata **13** (**1982**), 295–308.

[15] *A. W. M. Dress*, A combinatorial theory of Grünbaum's new regular polyhedra, Part I: Grünbaum's new regular polyhedra and their automorphism group, Aequationes Math. **23** (**1981**), 252–265.

[16] *A. W. M. Dress*, A combinatorial theory of Grünbaum's new regular polyhedra, Part II: Complete enumeration, Aequationes Math. **29** (**1985**), 222–243.

[17] *A. L. Edmonds, J. H. Ewing, R. S. Kulkarni*, Regular tessellations of surfaces and $(p,q,2)$-triangle groups, Ann. of Math. **116** (**1982**), 113–132.

[18] *J. V. Field*, Keplers star polyhedra, Vistas in Astr. **23** (**1979**), 109–141.

[19] *J. V. Field*, Kepler's cosmological theories: their agreement with observation, Q. Jl. R. Astr. Soc. **23** (**1982**), 556–568.

[20] *C. W. L. Garner*, Regular skew polyhedra in hyperbolic three-space. Can. J. Math. **19** (**1967**), 1179–1186.

[21] *B. Grünbaum*, Regular polyhedra—old and new, Aequationes Math. **16** (**1977**), 1–20.

[22] *B. Grünbaum*, Regularity of graphs, compexes and designs, in: "Problèmes combinatoire et théorie des graphes", Colloq. Int. CNRS vol **260** pp. 191–197, CNRS, Orsay **1977**.

[23] *B. Grünbaum, G. S. Shephard*, Tilings and Paterns, W. H. Freeman and Company, New York, 1987.

[24] *T. L. Heath*, The Thirteen Books of Euclid's Elements, vol. I–III (2nd ed.), Dover, 1956.

[25] *T. L. Heath*, A History of Greek Mathematics, vol. I–II, Dover, 1981.

[26] *E. Hess*, Über die regulären Polytope höherer Art, Sitzungsberichte der Gesellschaft zur Beförderung der gesammten Naturwissenschaften zu Marburg, (**1885**), 31–57.

[27] *A. Ivić-Weiss, Z. Lučić*, Regular polyhedra in hyperbolic three-space, Mitt. Mathem. Sem. Giessen, **165** (**1984**), 237– 252.

[28] *J. Kepler*, Mysterium Cosmographicum, Tübingen 1596.

[29] *J. Kepler*, Harmonices Mundi, Libri V (prevod na engleski [18]), Lincii 1619.

[30] *D. Lopandić*, Geometrija, Naučna knjiga, Beograd 1979.

[31] *P. McMullen*, Combinatorially regular polytopes, Mathematika **14** (**1967**), 142–150.

[32] *P. McMullen, E. Schulte*, Regular polytopes from twisted Coxeter groups, Math. Z., **201** (**1989**), 209–226.

[33] *P. McMullen, E. Schulte*, Regular polytopes from twisted Coxeter groups and unitary reflection groups, Adv. in Math., **82** (**1990**), 35–87.

[34] *P. McMullen, E. Schulte*, Constructions for regular polytopes, J. Comb. Theory A, **53** (**1990**), 1–28.

[35] *van Oss*, Die regelmässigen vierdimensionalen Polytope höherer Art, Verh. Kon. Akad. Wet. Amsterdam (eerste sec), **12.1** (**1915**), 1–13.

[36] *Platon*, Teetet, Naprijed, Zagreb, 1979.

[37] *Platon*, Timaj, Mladost, Beograd 1981.

[38] *Proclus*, In Primium Euclidis Elementorum Librum Commentarii, ed. Friedlein, Leipzig: B.G. Teubner **1873**.

[39] *D. M. Y. Sommerville*, Semi-regular networks of the plane in absolute geometry, Trans. Roy. Soc. Edinburgh, **41** (**1905**), 725–747, 12 plates.

[40] *L. Schläfli*, Réduction d'une intégrale multiple qui comprend l'arc du cercle et l'aire du triangle sphérique comme cas particuliers, J. de Mathématiques (1), **20** (**1855**), 359–394.

[41] *L. Schläfli*, An attempt to determine the twenty-seven lines upon a surface of the third order, and to devide such surface into species in reference to the reality of the lines upon the surface, Quart. J. Pure Appl. Math. **2** (**1858**), 110–120.

[42] *L. Schläfli*, On the multiple integral $\int^n dxdy\ldots dz$ whose limits are $p_1 = a_1x + b_1y + \ldots + h_1z$, $p_2 > 0, \ldots, p_n > 0$; and $x^2 + y^2 + \ldots + z^2 > 1$. Quart. J. Pure Appl. Math. **2** (**1858**), 269–301, **3** (**1860**), 54–68, 97–108.

[43] *E. Schulte*, Regular incidence-polytopes with euclidean or toroidal faces and vertex figures, J. Combin. Theory Ser. A **40** (**1985**), 305–330.

[44] *W. I. Stringham*, Regular figures in n-dimensional space, Amer. J. Math. **3** (**1880**), 1–14.

[45] *W. C. Waterhouse*, The discovery of the regular solids, Arch. Hist. Ex. Sci. 9 (**1972**), 212–221.

[46] *H. Weil*, Symmetry, Princeton University Press, 1952.

[47] *A. I. Weiss*, Incidence-polytopes of type $\{6,3,3\}$, Geom. Dedicata, 20 (1986), 147–155.

[48] *A. I. Weiss*, Incidence-polytopes with toroidal cells, Discrete Comput. Geom. **4** (**1989**), 55–73.

[49] *A. I. Weiss*, Some infinite families of finite incidence-polytopes, J. Combin. Theory, series A, **55** (**1990**), 60–73.

Zoran LUČIĆ

A BRIEF HISTORY OF REGULAR POLYHEDRA

Regular polyhedra have been investigated since antiquity. During the more than two millennia long history of them, there have been many changes in the points of view about them, and even in the definitions of the notions of polyhedra and of regularity. According to the usual definition, a polyhedron is said to be regular if it has regular faces and regular solid angles (or vertex figures). Restricting ourselves to a convex polyhedra, this definition admits five regular polyhedra known as five Platonic solids. Kepler drew attention to the three regular plane tilings which may be recognized as regular polyhedra with infinitely many faces. The number of regular polyhedra rise if we admit star polygons to be faces or vertex figures. It was Kepler who first stellated the dodecahedron to obtain two regular polyhedra with star-shaped faces. The possibility of star-shaped vertex figures remain unrecognized for two centuries until Poinsot discovered the reciprocals of two Kepler polyhedra. The infinite regular polyhedra with convex polygons as faces and skew polygons as vertex figures are introduced in geometry by Petrie. It was Coxeter who proved that there are precisely three such regular polyhedra. Introducing the new definition of regular polyhedron Grünbaum made a list of 17 individual regular polyhedra and 12 infinite families of such polyhedra in euclidean 3-space, besides the 5 Platonic solids, 3 planar tilings, 4 Kepler-Poinsot polyhedra and 3 Petrie-Coxeter polyhedra. Dress proved that only one polyhedron is missing in Grünbaum's list to be complete. The complete list of regular polyhedra in hyperbolic three-space analogous to the Grünbaum's list, is still unknown.

Classification of regular polytopes in the euclidean space of four or more dimensions, is due to Schläfli who discovered them in time when Cayley, Grassmann and Möbius were the only other people who had ever conceived the possibility of geometry in more than three dimensions. Schläfli also discovered four regular star-polytopes. It was Hess who first made a complete list of ten such polytopes. In the last two decades, due to Coxeter's influence, particular attention has been paid to the combinatorial properties of regular figures. As a consequence the notion of a regular polytope has been extended in several directions. Grünbaum suggested that it might be of interest to consider polytopes with toroidal maps as cells. He also introduced the notion of polystroma as a special type of partially ordered set yielding a combinatorial structure that locally behaves like a polytope. This notion provided a framework for the new approach to investigation of regular polytopes. The concept of polystroma was latter modified by Danzer to become incidence-polytope. By the newest investigations of combinatorial properties of such polytopes the two and a half millennia long history of regular polytopes continues.

dr ZORAN LUČIĆ
Matematički fakultet
Studentski trg 16/IV, p.p. 550
11001 Beograd

Математички институт — Београд
Историја мат. и мех. наука 6 (1992)
Mathematical Institute — Belgrade
History of Math. and Mech. Sc. 6 (1992)

Зоран СТОКИЋ

КРИТЕРИЈУМ ИСТИНИТОСТИ У ЊУТНОВИМ „ПРИНЦИПИМА"

Већ су Грци били закључили да је било какво ПОСМАТРАЊЕ лакше ОПИСИВАТИ него му наћи УЗРОК. Зато није чудно што је већина грчких филозофа оштро раздвајала астрономију од физике. Почев од Питагоре, задатак грчких филозофа био је у „спасавању посматрања" уз помоћ математичких хипотеза (теорија). Наиме, упркос веровању да су звезде божанског порекла, те да стога имају потпадати под ред и закон, већ је у Месопотамији запажена изразита неправилност облика линије путање планета, а која се манифестовала чудним петљама по којима су се планете кретале час брже, час спорије, час у једном, па у другом смеру (inaequalitas secunda); нешто касније су Халдејци (Вавилон) уочили неправилно померање „средњег места" — промену Сунчевог привидног пречника — и самим тим неједнакост годишњих доба (inaequalitas prima). Митолошко-астрална астрономија старијих народа код Грка је, почев од Анаксимандра, прерастала у квантитативно-математички опис „небеских појава". Грчки астрономи (Еудокс, Аристарх, Аполонијус, Хипарх, Птоломеј), који су у својим матемаичким теоријама подражавали те небеске феномене, очекивали су да ће им узрок тих феномена дати физичари (и математичари). А откривање тог узрока постало им је неопходно од онда, од када је Аристотел у својој *Физици* прокламовао да „*знати* (*заправо*) *значи познавати узрок*".

Најбољи доказ о томе да су грчки филозофи правили битну разлику између астрономије и физике неба — била би Аристархова славна књига *Хипотеза*. Нажалост, како је она изгубљена, овде ћемо се послужити Симплицијевим коментаром: „Није на астрономији да апсолутно зна шта је непокретно, а шта је покретно. Али она проверава хипотезе које се односе на покретно и непокретно, како би пронашла оне које одговарају небеским појавама.[1] Што се, пак, принципа тиче, за њих се морамо обратити физичарима."

---

[1] P. Duhem, *Ziel und Struktur der physikalischen Theorien*, Hamburg, 1978 (S. 48).

ИСТИНИТОСТ астрономских теорија извлачена је, значи, из њихових КОНСЕКВЕНЦИ, а не као у физици из РАЗУМЉИВИХ принципа. Те су се грчке поделе одржале и у средњем веку; ево шта у делу *Summa theologiae* пише Тома Аквински: „Могуће је о некој ствари говорити на два начина. Први се састоји у томе да се извесна поставка (принцип) доказује довољним разлогом. Тако се у космологији (scientia naturalis) износи довољан разлог за доказивање да је кретање неба униформно. Што се другог начина тиче, ту се не наводи никакав основ који би на задовољавајући начин доказао принцип, већ се показује да, ако се тај принцип узме као претпоставка, онда се његове консеквенце слажу са чињеницама. Тако се у астрономији употребљава хипотеза епицикла и ексцентричних кругова, јер се на основу тих хипотеза са сигурношћу могу представити опажљиве појаве небеских кретања. То, међутим, није и довољан доказни основ, јер се те појаве на основу неке друге хипотезе можда могу представити са једнаком сигурношћу."[2]

Астрономи су тада, као што показују ови цитати, са појма истине скинули вео апсолутности — она је постала релативна. За разлику од прагматике астронома, средњевековни су физичари проблему истине прилазили из угла Аристотелове метафизике. Мишљење је, уз помоћ разумљивих принципа, требало да о чињеницама пружи сигурна знања, која би ишла далеко испред посматрања.

Астрономи су тада, као што показују ови цитати, са појма истине скинули вео апсолутности — она је постала релативна. За разлику од прагматике астронома, средњевековни су физичари проблему истине прилазили из угла Аристотелове метафизике. Мишљење је, уз помоћ разумљивих принципа, требало да о чињеницама пружи сигурна знања, која би ишла далеко испред посматрања.

Ренесансни су физичари, пак, били на новој прекретници. Аристотелова метафизика, која је физику настојала да изведе из логике, постепено је била замењивана Платоновом метафизиком, која је, пак, физику желела да изведе из математике. Без обзира на битне разлике, та су два филозофска програма потекла из истог извора; наиме, и Платон и Аристотел су сматрали да је мишљење (у коме су видели одсјај Божијег ума) оно које треба да схвати право Биће, тј. да управо оно представља средство сазнања помоћу којег ће човек спознати законе природе. Платонова космологија, која се заснивала на геометријском атомизму, поново је у ренесанси оживела идеју о утемељењу природних наука на математици. „Ми не поседујемо у нашем знању ништа сигурније него што је наша математика", пише Никола Кузански у делу *De possest*... . У делу *De mente* пише да је „број — праслика појмова наше душе"; шта више, Кузански је делио Прокловоо мишљење да без математике није могуће ни знање о божанском. Зато у *Docta ignorantia* излаже да се при стварању света „Бог

[2]T. Akvinski, *Sume teologije* (I. 32, одговор на 2. разлог).

послужио аритметиком, геометријом, музиком и астрономијом, вештинама које ми сада примењујемо када истражујемо односе ствари, елемената и кретања.“[3] Зато се студирање математике почело сматрати неопходним за све оне који се желе бавити не само физиком и метафизиком, већ и историјом, правом, теологијом, уметношћу или државним пословима. Ту везу између математике и хуманистичког покрета ренесансе нарочито су изграђивали људи попут Региомонтануса, Албертија, Луке Пачолија.... „Математика је наука“, каже Пачоли, „темељ сваких степеница помоћу којих доспевамо до знања у свакој другој науци, зато што јој је особина да поседује први степен сигурности, као што филозофи кажу када тврде да су математичке науке на првом степену сигурности, а затим следе природне науке. А без познавања математичке науке немогуће је познавати било коју другу науку. У мудрости Соломоновој је записано да се све састоји од броја, тежине, мере, што значи да је све што је створено у горњем и доњем свету по својој нужности подређено броју, тежини и мери.“[4]

Али у ренесанси, која је VITA CONTEMPLATIVA заменила са VITA ACTIVA и која је после златног века грчке мисли поново оживела идеју да је истину могуће открити сопственим — људским — средствима, није царовала само математичка и логичка метафизика, већ је преко Архимедовог градитељског духа поново оживео још један вид прагматике (поред астрономске). Заправо, откако се у Европи родила идеја да је човек онај који ће постати господарем природе, изгледа да је Архимедова слава (инжењера математике) била чак већа од славе једног Еуклида и Аполонија.

Раскорак који је постојао између математичке астрономије и Архимедове статике са једне стране и логичких и математичких метафизичких принципа са друге стране — све је више био потенциран у XVI и XVII веку од стране рационалиста и емпириста. Док су се емпиристи трудили да логику и математику изведу из искуства, рационалисти су покушавали обрнуто, покушавали су да чулне утиске изведу из умних концепата (јер једино мишљење може да успоставља односе).

Лајбниц је, на пример, веровао да сазнање није ништа друго до логика.

Чврст савез између рационализма и емпиризма први је склопио Њутн у *Математичким принципима природне филозофије.* Био је то својеврсни савез између Бекона и Декарта, али и између Архимеда и Еуклида, Галилеја и Кеплера. Био је то савез између прагматичног критеријума истинитости грчке астрономије, по коме је истинитост једног става садржана у његовом обистињавању, и таутолошког критеријума истине метафизичке математике. Своју рационалну механику Њутн је конституисао помоћу термина „маса“ и „сила“, али, ти су термини метафизички (неопажљиви);

[3] K. Jaspers, *Nikolaus Cusanus*, München, 1987 (S. 81, 82, 87).

[4] L. Pacioli, *Divina proportione*, Vienna, 1889.

зато је он навео правила како се тим појмовима оперише. Показао је како се искази са тим хипотетичким појмовима даље могу трансформисати у друге ставове. А најважније је то што је Њутн своју теоријску механику начинио тако да је увек могуће, пошли ми ма од ког њеног става, одређеним трансформацијама доћи до нових ставова у којима више нема оних почетних хипотетичних метафизичких (неопажљивих) појмова, тј. до оних ставова у којима се сви преостали термини могу непосредно посматрањем потврдити или оповргнути. Тако је Њутн направио *еталон физичких теорија*, раздвајајући их оштро од метафизичких, тј. од оних теорија чије поједине ставове никако није могуће ослободити почетних хипотетичних појмова, па их је тако немогуће подвргнути провери.

Зашто је то успело тек Њутну, а не, рецимо, Декарту, Галилеју или Кеплеру? — Пре свега зато што је тек Њутн запазио да су логички и математички ставови сви одреда таутолошки, да они уопште ништа не говоре о самим предметима, већ да се само баве начином на који ми хоћемо о предметима да говоримо. Зато што се логика и математика само баве таутолошким преиначавањем оног што је речено, математичке и логичке теорије нису у стању да нам кажу ништа о чињеницама о којима се ми обавештавамо тек путем посматрања.

Њутн је приметио да промену положаја тела на небу и Земљи може описати само ако у основ своје теорије уведе неколико хипотеза: своја три принципа кретања и хипотезу о гравитационој сили. „Између сваке две материјалне тачке делује привлачна сила која је пропорционална њиховим масама и обрнуто пропорционална квадрату њиховог растојања.“ Наравно, то није била никаква апсолутна истина, била је то једна хипотеза, зато што нико не може да тврди да се баш сваке две материјалне тачке заиста тако понашају, јер нико, једноставно, није у стању да посматра све тачке. Природни закони[5] су, према томе, хипотезе[6] које ми „исказујемо пробно“ и увек ће остати хипотезе, јер их ми не можемо директно проверити. Сва провера иде посредно, путем посматрања. Тако ми из Њутнове рационалне механике можемо, на пример, дедуковати чињеницу да ће Уран одређеног дана проћи кроз одређену тачку на небу. А да ли ће се то и обистинити? Да бисмо то констатовали, ми се морамо користити методом упоређивања, тј. ми у помоћ морамо позвати посматрање. Ако

---

[5] Несрећног ли термина! — У самом појму „природни закон“ налази се један прикривени антропоморфизам (јер сваки закон подразумева законодавца). Са Хегелом („све што је стварно рационално је и све што је рационално стварно је“), номос је стављен изнад фисиса.

[6] „Феномен језика“ у потпуности је разорио идеологизирану слику физике као јединствене теорије. После радова Тарског, Хансона, Фајерабенда, Агасија ... знамо да не постоји чист опажајни језик физике. „Искуство се рађа са теоријским претпоставкама, а не пре њих.“ У извесном смислу може се тврдити да су сви термини физике теоријски. А то значи да закони нису својства природе, него својства замишљених теоријских система. Њих не треба сматрати циљем науке, то су само успутне степенице које нас заједно са другим хипотезама (принципима) унутар једне теорије воде одређеним предвиђањима.

до слагања ипак не дође, само то посматрање (експеримент) нам не говори где је у нашој теорији грешка. Да ли је грешка у хипотези гравитације, или у неком другом хипотетичком принципу који повезује основне појмове те теорије — то експеримент никако не може да нам каже. „Све у свему", пише Дием, „физичар не може никад подвргнути експерименту једну издвојену хипотезу, него само један скуп хипотеза. Кад је експеримент у нескладу са његовим предвиђањима, он га учи да бар једна хипотеза која чини тај скуп није прихватљива, те да треба бити модификована. Али, експеримент му не говори коју треба мењати."[7]

Кроз то искуство прошао је Њутн при тестирању Галилејеве „кинематске метафизике" и Кеплерове „метафизичке астрономије". Њутн није, како многи, нажалост, још и данас мисле, просто генерализовао и ујединио Галилејеве и Кеплерове законе; о томе су аргументивано писали Дием и, нешто касније, Фајерабенд и Попер.

„Галилеј тврди", пише Попер, „да се сваки бачен камен или пројектил креће по параболи осим у случају вертикалног слободног пада, када се креће с константним убрзањем по правцу. (Током читаве ове дискусије занемарујемо отпор ваздуха.) Са становишта Њутнове теорије обе ове тврдње су погрешне, и то из два различита разлога. Прва је погрешна јер путања далекометног пројектила као што је интерконтинентална ракета (избачена увис или хоризонтално) неће бити чак ни приближно парабола него елипса. Она постаје приближно парабола само ако је укупна раздаљина лета занемарљива у поређењу са полупречником Земље. На то је указао и сам Њутн у *Принципима*, као и у својој популарној верзији *The System of the World*."

„Параболичка путања није стриктно изводива из Њутнове теорије уколико јој се не дода фиктивно неистинит почетни услов (који је, узгред речено, неостварљив у Њутновој теорији јер води до апсурдних консеквенци), наиме, да је земљин полупречник бесконачан. Ако не уведемо ту претпоставку, премда се зна да је неистинита, онда увек добијамо елипсу, у супротности са Галилејевим законом према којем бисмо требали да добијемо параболу".

„До потпуно аналогне логичке ситуације долази и у вези с другим делом Галилејевог закона који тврди постојање константног убрзања. Са становишта Њутнове теорије, убрзање тела при слободном паду никада није константно: оно увек расте током пада зато што се тело све више и више приближава центру привлачења. Овај ефекат је врло применљив ако тело пада са велике висине, премда је он, наравно, занемарљив, ако је висина занемарљива у поређењу са полупречником Земље. У том случају можемо добити Галилејеву теорију из Њутнове ако поново уведемо неистиниту претпоставку да је Земљин полупречник бесконачан (или да је висина са које тело пада једнака нули)".

[7]P. Duhem, op. cit. (S. 248).

„Противречности на које сам указао нису ни у ком случају занемарљиве за далекометне пројектиле. На њих можемо применити Њутнову теорију (наравно са корекцијом отпора ваздуха), али не и Галилејеву: ова друга напросто доводи до погрешних резултата као што се лако може показати помоћу Њутнове теорије.“

„Што се тиче Кеплерових закона, ситуација је слична. Очито је да Кеплерови закони у Њутновој теорији само приближно важе — то јест стриктно не важе — ако узмемо у обзир међусобно привлачење планета. Између ове две теорије, међутим, постоји фундаментална противречност чак и ако, чинећи уступак нашим противницима, занемаримо међусобно привлачење планета. Кеплеров трећи закон, посматран из угла Њутнове динамике, не може бити ништа друго него апроксимација која је примењива на врло посебан случај: на планете чије су масе једнаке или, ако су неједнаке, занемарљиве у поређењу са масом Сунца. Будући да чак ни приближно не важи за две планете од којих је једна лагана, а друга врло тешка, јасно је да Кеплеров трећи закон противречи Њутновој теорији на потпуно исти начин као и Галилејеви закони.“

„Из Њутнове теорије следи

$$\frac{a^3}{T^2} = m_0 + m_1, \tag{1}$$

где је a средње растојање између два тела, а T је време пуне револуције. Међутим, Кеплеров сопствени трећи закон тврди да је

$$\frac{a^3}{T^2} = \text{const}, \tag{2}$$

то ће рећи иста константа за све планете Сунчевог система. Јасно је да тај закон добијамо из (1) само под претпоставком да је $m_0 + m_1 = \text{const}$; а будући да је $m_0 = \text{const}$ за наш Сунчев систем, добићемо (2) из (1) уколико претпоставимо да је m_1 исто за све планете; или ако је та чињеница неистинита (као што заиста и јесте), уколико претпоставимо да су масе свих планета једнаке нули у поређењу са масом Сунца (тако да можемо ставити $m_1 = 0$ за све планете). Али m_1 није само строго говорећи неистинито, него је и неоствариво са становишта Њутнове теорије (тело са масом једнаком нули не би се више покоравало Њутновом закону кретања).“[8]

Све ово показује да не постоји никакав дедуктивни нити индуктивни ланац који би водио од једне теорије до друге, чак и више од тога, не постоји никакав директан ланац који би водио од експеримента до теорије. Искуство увек настаје заједно са теријским претпоставкама, а не никако пре њих. Наука је „ирационалнија“, стално нас упозорава Фајерабенд,

[8] K. Popper, *Objective Knowledge: An Evolutionary Approach*, Oxford, 1973 (*The Aim of Science*).

„него што њена методолошка слика то показује". И зато одвајање науке од не-науке, одвајање науке од њене историје и филозофије, не води напред већ назад, „ка њеном потпуном уништењу".[9]

Само они који уопште нису били упознати са историјом и филозофијом претходних векова могу наивно да мисле како је Њутн спокојно седео у својој собици у Вулздорпу, или касније у Кембрицу, те је, читајући Галилејеву „Динамику?" и Кеплерову „астрономију", размишљао само о томе како да их генерализује. Њутнови принципи, историјски посматрано, нису настајали као директна надградња над Галилејевом и Кеплеровом физиком; Њутн је имао сасвим друге мотиве, штавише, они уопште и нису били научне природе.

Владајућа филозофска и научна мисао готово целе Европе у XVII веку била је картезијанска филозофија. Она се званично предавала у високошколским установама. Оно са чиме се Њутнова мисао сукобила још у школским данима није била „већ застарела" Галилејева механика[10], већ је то била Декартова физика, из које је потпуно било избачено привлачење и празан простор, била је то „имагинарна физика" вртлога, коју су Хајгенс и Лајбниц покушавали да на разноразне начине побољшају, учине истинитом. Њутн се још у школи сусрео и са Декартовом идејом да о човеку и космосу говори уз помоћ само два основна елемента: простирања и кретања. Ка том првом — почетном и најважније — отпору, отпору према Декартовој идеји да „простор није ништа", није Њутна водила брига о физици или астрономији, већ пре свега брига о — теологији. Та прва искра, која је Њутна касније одвела до једне рационалне физике, била је једна ирационална мисао о Божијем „присуству" у свету. Наиме, Декарт је, успостављајући идентичност између простора и материје, из материје потпуно избацио духовност. Покушаји да разреши овај теолошки спор[11] водили су Њутна ка идеји да је Декарт „побркао просторност са празним простором", а та је теолошка и метафизичка грешка проузроковала у картезијанској физици немогућност кретања пројектила и планета.

О свему овоме сведочи мало позната Њутнова расправа из хидростатике. За њу се претпоставља да је настала у периоду између 1666. и 1670. године (и свакако је први Њутнов рад). „Уместо да напише расправу о хидростатици", обавештава нас Коаре, „Њутн је написао филозофски оглед!" У њему Њутн полемише са свим фундаменталним идејама Декартове филозофије (што значи да их је добро проучио), као што је идеја да је свет „неограничен", али не и „безграничан", затим идеја о релативном кретању ... .

---

[9] P. Fajerabend, *Protiv metode*, Sarajevo, 1987. (st. 169).

[10] Била је застарела нарочито због Галилејевог накарадног схватања у астрономији.

[11] Мисао која је Њутна мучила од његове ране младости била је: да ли Бог покреће тела у простору својом вољом на исти онај начин на који и ми покрећемо своје тело по заповести своје воље?

И касније, када је писао *Принципе*, Њутн се поново обрачунавао са Декартовом ***Филозофијом природе***. Тачније, он је увео у физику нове критеријуме истинитости. Унутрашњост његове рационалне механике била је више математичка него Декартова; тј. Њутн се задовољио да унутар теорије сви ставови буду међусобно повезани математичким критеријумом истинитости, али је зато вези своје теорије и спољњег света наметнуо прагматични критеријум истинитости грчких астронома.[12]

Само је генијалност могла направити такав корак. Ми ни данас не можемо — нити ћемо било када моћи — да реконструишемо ту генијалност; ми не можемо знати како је направљен тај велики корак. А то зато што је и тренутак стварања у науци једнак чину стварања у уметности, он је непоновљив, он се не може научити. Оно што ми можемо пратити јесте то да је Њутн асимиловао сва претходна знања, затим их је реорганизовао (како? — то је та тајна!), уз жељу да примени нови критеријум истинитости — и као резултат је настала — математичка физика. И тек сада када је она настала, са свим својим новим теоријским терминима, ми је можемо само формално поредити са претходним теоријама. Кажем формално зато што те претходне теорије имају сасвим друге основне теоријске термине. Тако на пример израз „инерција" први уводи Кеплер и даје му значење „отпор према промени"; али како је за Кеплера кретање промена, реч „инерција" у тој „физици" треба читати: „отпор према кретању". Код Њутна, пак, кретање је стање, а промена је убрзање. Слично се може показти и за остале основне теоријске појмове механике, као што су сила и маса.

Zoran STOKIĆ

A CRITERION OF TRUTHFULNESS IN NEWTON'S "PRINCIPIA"

The essay is an attempt to demonstrate that Newton's major book, ***Philosphiae Naturalis Principia Mathematica***, i.e., the book in which Newton introduced into the philosophy of nature new criteria of truthfulness, resulted from his controversy with Descartes' ***Philosophy of Nature***. It has been shown that it was a specific union between the pragmatic criterion of truthfulness of the Greek astronomy (according to which the truthfulness of an assumption is contained in its accomplishment) and the tautologic criterion of truthfulness of metaphysical mathematics.

mr ZORAN STOKIĆ
Mašinski fakultet
11000 Beograd
ul. 27. marta br. 80

[12] Усвајајући мишљење грчких астронома Њутн у првом издању Принципа из 1687. своје принципе (законе) назива хипотезама.

Математички институт — Београд
Историја мат. и мех. наука 6 (1992)
Mathematical Institute — Belgrade
History of Math. and Mech. Sc. 6 (1992)

Драган ТРИФУНОВИЋ

ДОПРИНОС ДАНИЛА МИХЊЕВИЋА ПАРЦИЈАЛНИМ ДИФЕРЕНЦИЈАЛНИМ ЈЕДНАЧИНАМА

Садржај: Научна делатност. Одјек ван земље. Наука заборавља. Руска научна емиграција. Порекло и школовање. Николај Пушин. Студије. Професор гимназије. Математички институт. Докторат и Српска краљевска академија. Други научни рад. Руски научни институт. Епилог.

Научна делатност

У реферативним часописима за математику у периоду 1932–1940. године, као и у гласилима Српске краљевске академије[1] и Париске академије наука[2] забележена је научна делатност математичара Данила Михњевића (1890–1979). Установили смо седам Михњевићевих научних јединица које се односе на парцијалне диференцијалне једначине првог реда са једном непознатом функцијом и применама функционалних група Софус Лија у интеграцији истих.[3] Данило Михњевић је објавио следеће научне радове:

Д$_1$ *Structure des équations aux dérivées partielles du premier ordre à une fonction inconnue*, Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences (Paris), t.

---

[1] *Глас* првог разреда (А. Математичке науке) излази од 1886. године, а Bulletin de l'Académie des Sciences mathématiques et naturelles (A. Sciences mathématiques et physiques) излази од 1932. године.

[2] Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences (Paris) излази од 1795. године.

[3] Познати норвешки математичар Sophus M. Lie (1842–1899), дугогодишњи професор многих математичких дисциплина на Лајпцишком универзитету. — Приметимо да је наш математичар Коста Стојановић (1867–1921), који је из политичких разлога прекинуо рад на Београдском универзитету (1908. г), боравио у Лајпцигу извесно време у току 1897. године на специјализацији код професора Лија. У једном писму пријатељу и рођаку Паји Димитријевићу од 9. фебруара 1897, Коста Стојановић је описао извесне карактеристике овог значајног математичара. О овоме погледати: Д. Трифуновић, *Моделовање у делу Михаила Петровића*, Нови Сад 1976, стр. 306 или Д. Трифуновић, *Коста Стојановић — претходник и савремених математичке феноменологије Михаила Петровића*, Дијалектика 14 (1979), 3–4, 209–226.

197 (**1933**), pp. 893–895. (Séance du 23. octobre 1933, présentée par Henri Villat)[4]

Д$_2$ *Структура парцијалних једначина са датим интегралима карактеристика*, Српска краљевска академија, Глас CLXV, Први разред, А. Математичке науке, књ. 81, Београд **1935**, стр. 231–320. (Примљено на скупу Академије природних наука од 25. децембра 1934. према реферату Михаила Петровића и Николе Салтикова)[5]

Д$_3$ *Formation des équations aux dérivees partielles du premier ordre au moyen d'integrales données des caractéristiques*, Academie Royale Serbe, Bulletin de l'Académie des Sciences mathématiques et physiques № 2, Belgrade **1935**, pp. 207–238. (Présenté à séance de l'Académie des Sciences naturelles du 8. IV 1935)

Д$_4$ *Структура парцијалних једначина првог реда са једном непознатом функцијом*, Београд **1935**, стр. 96; in 8°. (Примљено за докторски испит на седници Филозофског факултета Униврзитета у Београду од 12. децембра 1933. према реферату чланова испитне комисије: др Михаило Петровић, проф. унив., др Никола Салтиков, проф. унив. и др Тадија Пејовић, ванр. проф. унив.)

Д$_5$ *Groupes fonctionneles et leurs applications*, Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences (Paris), t. 200 (**1935**), pp. 2053–2055. (Séance du 17. juin 1935; presentée par Henri Vallat)

Д$_6$ *Састављање нормалног система парцијалних једначина првога реда са једном непознатом функцијом помоћу датих интеграла карактеристика*, Српска краљевска академија, Глас CLXXIII, Први разред, А. Математичке науке, књ. 85, Београд **1936**, стр. 119–142. (Примљено на скупу Академије природних наука 4. маја 1936. према реферату академика Богдана Гавриловића и Николе Салтикова)

Д$_7$ *Formation du système normal des équations aux dérivées partielles du premier ordre au moyen d'intégrales donnés des caracteristiques*, Académie Royale Serbe, Bulletin de l'Académie des sciences mathématiques et naturrelles, A. Sciences mathématiques et physiques № 3, Belgrade **1936**, pp. 149–159. (Présenté à séance de l'Académie des Sciences naturelles du 4. V 1936)

Поред овога, Михњевић је знатно доцније 1958. године објавио и један стручни рад из тригонометрије:

---

[4]Професор Анри Вила (Henri Villat) био је управник Института за механику, добро познат по својим радовима из хидродинамике. Био је уредник чувене едиције *Mémorial des Sciences Mathématiques* по узору на коју су касније у многим земљама покренуте едиције математичких монографија, а у исто време налазио се на месту главног уредника часописа *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, који је век раније основао Лиувил (Liouville) и на чијем је челу дуго био чувени математичар Камиј Жордан (Camille Jordan).

[5]У ово време професор Никола Салтиков (1866–1961) био је дописни члан Српске краљевске академије (од 12. фебруара 1934). Н. Салтиков је постао редовни члан 2. марта 1946.

Д$_8$ *Grafik sinusoide pomoću grafika argumenta*, Matematičko-fizički list 8 (1957/ 58), 2, 45–48.

Детаљнијом анализом ових радова откривамо чињеницу, да се Михњевићеви научни прилози налазе само у радовима Д$_2$ и Д$_6$, те академик Миодраг Томић у потпуности има право када и он исказује сличан суд о обиму Михњевићеве делатности.[6] Поред овога, приметно је да је у пуној верзији рад са ознаком Д$_2$ поновљен у Михњевићевој докторској дисертацији Д$_4$.

Искажимо сада једно запажање које је карактеристично код свих почетника у Београдској математичкој школи. След објављивања научних радова указује нам и на сам поступак — метод како се код нас у Београду, око Српске краљевске академије формирао један научни резултат у математици са свим атрибутима које наука тражи: да је тај резултат тачан, оригиналан, тј. да чини нов допринос науци и да, евентуално, отвара нова питања за даљи развитак науке. У чему је ствар? Београдска математичка школа и поред јаке групе математичара изузетних резултата светског гласа,[7] жељу математичара да објави рад и да тим радом уђе на велика врата науке, испуњавала је на следећи начин. *Прво.* Било је потребно у најесенцијалнијем облику изложити своје резултате (максимално на 2 стране). *Друго.* Овај текст шаље се Париској академији наука на расправу, приказивање и објављивање у записницима седница те Академије.[8] Тако се поступило са Михњевићевом жељом да ради у науци, односно првим научним радом из 1933. године у ознаци Д$_1$. *Треће.* После ових дејствија и битне чињенице да нико није ставио негативан приговор у реферативном часопису (Fdm, Zbl и др) и да је приказ у Паризу био без примедби и приговора, нашем жељнику науке се отварају простори у гласилима Српске краљевске академије. Тако је Михњевић објавио детаљно своје резултате у Гласу Српске краљевске академије, а у раду који код нас носи ознаку Д$_2$. Како се овај рад штампа ћирилицом без кратког садржаја на страном језику, то се рад Д$_2$ понавља превођењем на страни језик и објављивањем у Bulletin-у Српске краљевске академије. Код Михњевића то је рад са ознаком Д$_3$.

После оваквог следа саопштавања научној јавности својих резултата, кандидат, овде смо га назвали жељником научног рада, може да приступи

---

[6]Видети нешто доцније о овој оцени професора Миодрага Томића.

[7]Наведимо имена математичара Београдске математичке школе 30-тих година када је Данило Михњевић кретао у науку. *Теоријска математика*: Михаило Петровић (1868–1943), Богдан Гавриловић (1864–1947), Никола Салтиков (1866–1961), Јован карамата (1902–1967), Милош Радојчић (1903–1975), Тадија Пејовић (1892–1982), Радивој Кашанин (1892–1989) и Драгослав С. Митриновић (1908); *Примењена математика*: Милутин Миланковић (1879–1958), Антон Д. Билимовић (1879–1970), Коста Стојановић (1867–1921), Вјечеслав Жардецки (1896–1962), Татомир П. Анђелић; *Историја и филозофија математике*: Бранислав Петронијевић (1875–1954), Владимир Вујић (1894–1953), Радош Митровић.

[8]Мисли се на часопис наведен под 2.

и изради докторске дисертације. Ово је Михњевић такође урадио, а то је рад у ознаци **Д**$_4$.

Овакав поступак провере ваљаности резултата код младих почетника у математици, запазили смо и код других математичара, редовито свих који су прошли Београдску математичку школу, те ово није само случај са Данилом Михњевићем. Рецимо, исти редослед у првим научним радовима закључно са докторском дисертацијом утврдили смо и код младог Јована Карамате:

1° Париска академија наука
2° Српска краљевска академија (Глас)
3° Докторска дисертација.[9]

О овоме професор Миодраг Томић пише: „Две кратке забелешке из те (Караматине — пр. пр. Д.Т.) тезе, објављене у Париској академији, наишле су на похвалу великог француског математичара Ж. Адамара.[10] У преписци Михаила Петровића која је недавно пронађена налази се једно његово писмо из Париза упућено Миланковићу у коме каже: „Уверио сам се да је не само изглагање већ и идеја Караматине тезе била добра." То је Петровић закључио из мишљења француских математичара ...[11] Наредне године, у нашој књизи објавили смо у целости ово важно писмо:[12]

Париз, 26. маја 1926.

Драги колега,

Шаљем Вам овај исечак о релативитету, који ће Вас интересовати. Можда сте то већ видели у Comptes rendus. — Шаљем вам и један егземплар Note de Karamata, из које се може видети да му је *и идеја у тези одиста била добра.* — Ја ћу, остати овде још 3-4 недеље, па онда идем у Лион где имам и посла, а где ће бити и Конгрес на коме ћу учествовати. - Поздравите много наше колеге и примите са госпођом и Васком срдачан поздрав од

Вашег Мих. Петровића
203 Boul. d'Raspail (Paris 14)

Одјек ван земље

О математичару Данилу Михњевићу код нас је веома мало писано, па и никако. У кругу добро обавештених математичара била је позната

---

[9]Погледати библиографију објављених радова академика Јована Карамате у књизи: Српска академија наука и уметности, Посебна издања, књ. CDXXIII, *Споменица*, књ. 37, Београд, 1968.

[10]Познати француски математичар, пријатељ српских математичара Jacques Hadamard (1865-1963).

[11]М. Томић у наведеној књизи под 9, стр. 7.

[12]Д. Трифуновић, *Летопис живота и рада Михаила Петровића*, САНУ, Београд 1969, стр. 356. Писмо се налази у архиву САНУ, Заоставштина академика Мулутина Миланковића, бр. 10.131, кут. 9.

једино чињеница, да је између два рата живео и радио један Рус по презимену Михњевић који је код академика Николе Н. Салтикова докторирао из области парцијалних диференцијалних једначина. То је било све. Југословенске публикације које дају систематски преглед знања, енциклопедије и речници не садрже одредницу о математичару Михњевићу! У преводном, и са пуно пропуста, лексикону о математичарима — Михњевић није обрађен.[13] Једино је академик Миодраг Томић у веома доброј синтези о математичким наукама у делу Српске академије наука и уметности навео Михњевићеве резултате. „И по проблемима и методама, пише М. Томић, Данило Михњевић је ђак професора Салтикова. Са два рада он је допунио неке празнине у проблему тзв. карактеристика линеарних парцијалних диференцијалних једначина“.[14]

Поред овога, у нашој књизи из 1969. године напоменули смо неколико чињеница о докторској дисертацији Данила Михњевића, као и самом времену настанка овог научног рада.[15]

У светској науци, Михњевићев научни рад је забележен. Прегледали смо само један реферативан часопис и утврдили следеће.[16] У Fdm 59 (1933), 1, 463, дато је обавештење о Михњевићевом првом раду у Париској академији наука, код нас у ознаци $Д_1$. Берлински математичар Пич (Dr H. Pietsch) у Fdm 61 (1935), 2, 1247, нотирао је Михњевићеве радове означене са $Д_2$ и $Д_3$. Ово је исто урађено и за Михњевићев рад $Д_5$ у Fdm 61 (1935), 1, 506.

Немачки математичар Бајер (Dr O. Baier, Stuttgart) у Fdm 62 (1936), 2, 1286–1287 упознаје научну јавност са Михњевићевим $Д_6$ и $Д_7$. Без шире анализе и неких критичких запажања за ова да Михњевићева рада Бајер констатује: „Zu den Funktionen $F_j(x_i, p_i)$, $j = 1, 2, \ldots, m$ wird ein System von Differentialgleichungen

$$F_i(x_i, p_i) = 0, \tag{1}$$

gesucht, so dass die f_j die Integrale der Charakteristiken des Sistems (1) sind. — Die notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür sowie das System (1) werden angegeben.“

Најопширније о Михњевићевом раду у области парцијалних диференцијалних једначина писао је чешки математичар Пинл (Dr M. Pinl, Praha). У Fdm 61 (1935), 1, 505–506, он излаже Михњевићев рад објављен у

[13] *Putevima razvitka matematike*, „Vuk Karadžić“, Beograd 1988, str. 424 (Izbor, prevod i novi tekstovi dr Ernest Stipanić).

[14] М. Томић, *Математичке науке*, САНУ и развој науке и уметности у Срба 1, Београд 1989, стр. 13–34, (30).

[15] Видети белешку под 12.

[16] То je Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik (скраћеница FdM). У време Михњевићевог бављења науком било је и других реферативних часописа као Zentralblatt für Mathematik und ihre Grenzgebiete (излази и данас) или Revue sémestrielle des publications mathématiques (не излази више).

Bulletin-у Српске краљевске академије, односно рад под ознаком $Д_3$, а што важи и за ћирилични облик у Гласу, тј. $Д_2$.

Да не бисмо препричавали овај приказ, ми га овде у целости доносимо у фототипском облику.

Професор Никола Салтиков се на више места користио и наводио Михњевићеве објављене резултате $Д_1$–$Д_7$. Била би сигурно добра студија о односу међу овим резултатима. Напоменимо, да су радови академика Салтикова објављени у периоду 1934–1936. године први радови у којима се цитирају Михњевићеви резултати.[17]

Наука заборавља

У нашој науци запажено је неколико случајева научењака који данас стоје на маргинама историје наука. То су личности које су прилично урадиле, а људска судбина пре свега, некако одвела их је на другу страну пута српске науке. Њихово дело и живот отишли су у заборав и то веома брзо. Код многих научника заборав је неминован, али дужност и обавеза историје науке је да ове личности обради и њихово дело преда историји у оном обиму и оцени које заслужују.

Рецимо, о филозофу — математичару Радиши Митровићу (период између два рата) нико није ни покушавао да пише и оцени његово дело. Довољно је поменути да је професор Митровић објавио једну научну расправу у Српској краљевској академији,[18] више научних студија[19] и докторирао у Паризу 1937. године на Декарту,[20] па схватити оправданост нашег подухвата у сређивању грађе о оваквим прегаоцима.

Исти је случај и са математичарем и филозофом Владимиром Вујићем, математичарем Ђорђем Николићем и другима. Неоспорно, овим радом о Данилу Михњевићу почињемо и покушавамо да отргнемо од заборава ове људе и покренемо жељу за проучавањем њиховог дела и

[17]Погледати следеће радове Николе Салтикова у Српској краљевској академији: Bulletin A, № 3, као и Глас CLXXIII, Први разред, књ. 85. Ближе податке о научном раду Н. Салтикова погледати у Годишњаку САН, књ. XLII, 1933, 227–229, књ. LIII, 1946, 133–153; М. Томић, Опроштајни говор, Гласник САНУ, књ. XIII, св. 2, Београд 1961, 69–70; и тамо даље.

[18]Радиша Митровић, *Основни принцип аналитичких функција* (филозофска студија), Српска краљевска академија, Глас CLXIX, Други разред, књ. 87, Београд 1936, стр. 211–222. Овај рад, у нешто измењеном садржају објављен је и на француском језику: R. Mitrovitch, *Principe fondamental des fonctions analytiques*, Académie royale de Serbie, Bulletin de l'Académie des Lettres C, № 3, Belgrade 1939, pp. 43–48.

[19]Рецимо, Р. Митровић, *Из филозофије математике*, Београд 1939, стр. 16. (Ову је студију Митровић датирао као професор женске реалне гимназије у Сарајеву); Р. Митровић, *Из теорије сазнања*, Живот и рад 27 (1939), св. 16–18,. стр. 18–24 (постоји сепарат); Р. Митровић, *Филозофија и политички живот*, Просветни гласник, књ. LIX, св. 1–2, Београд 1943, стр. 48–52, итд.

[20]R. Mitrovitch, *La Théorie des sciences chez Descartes d'après sa géometrie*, Librairie Croville Morant, Paris 1937, p. 98.

D. Michnevitch. Formation des équations aux dérivées partielles du premier ordre au moyen d'intégrales donnés des caractéristiques. Bull. Acad. Serbe A 2, 207-238.

Eine r-gliedrige Funktionengruppe besteht bekanntlich aus dem Inbegriff aller Funktionen der r unabhängigen Funktionen $f_1, \ldots, f_r$ der Veränderlichen $x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n$, deren Klammerausdrücke (f_μ, f_ν), $(\mu, \nu = 1, \ldots, r)$ sich als Funktion von $f_1, \ldots, f_r$ allein darstellen lassen. Dann gilt der Satz: **Jede Funktionengruppe der Ordnung** r

$$f_1, f_2, \ldots, f_r \quad (r \leqq 2n-1, f_i = f_i(x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n))$$

enthält höchstens n unabhängige in Involution liegende Funktionen. **Ferner:** Die Maximalzahl μ ausgezeichneter Funktionen, erzeugt von der Funktionengruppe

$$(*) \qquad f_1, f_2, \ldots, f_{n+\varrho} \quad (1 \leqq \varrho < n)$$

der Variablen $x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n$ ist durch die Zahl $n - \varrho$ der Terme

$$\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_{n-\varrho}$$

der Polargruppe von (*) gegeben ($n - \varrho$ unabhängige Lösungen von $(f_i, f) = 0$, $i = 1, \ldots, n + \varrho$). Handelt es sich allgemeiner um Funktionengruppen

$$(**) \qquad f_1, f_2, \ldots, f_r \quad (r \leqq 2n + 1)$$

in $2n + 1$ Veränderlichen

$$x_1, x_2, \ldots, x_n, z, p_1, \ldots, p_n,$$

so gilt der Satz: Eine Funktionengruppe (**) der $2n + 1$ Veränderlichen x, z, p kann höchstens $n + 1$ unabhängige in Involution liegende Funktionen erzeugen. Die Bestimmung der ausgezeichneten Funktionen einer Gruppe (sie liegen bekanntlich mit allen Funktionen der Gruppe in Involution) erfordert die Integration des partiellen Systems

$$(***) \qquad [f_i, f] = \sum_{\sigma=1}^{r} H_{i\sigma} \frac{\partial f}{\partial f_\sigma} = 0, \quad \sum_{\sigma=1}^{r} H_\sigma \frac{\partial f}{\partial f_\sigma} = 0.$$

Seine Diskussion bestimmt im wesentlichen das Verhalten der schiefsymmetrischen Matrix $\| H_{i\sigma} \|$. Verf. formuliert alle in Frage kommenden Fälle (insbesondere solche gerader bzw. ungerader Ordnung) und gewinnt dadurch eine Reihe von Kriterien für die Existenz ausgezeichneter Funktionen in der Gruppe (Kapitel I). Mit Hilfe der so gewonnenen Resultate beginnt Verf. im zweiten Kapitel seiner Untersuchung die Bestimmung der Form einer partiellen Differentialgleichung erster Ordnung mit vorgeschriebenen Integralfunktionen im System der Charakteristikengleichungen bzw. vorgeschriebenen Charakteristikendifferentialgleichungen (vgl. dazu *D. Michnevitch*, C. R. 197 (1933), 893-895; F. d. M. 59_1, 463. *Lacroix*, Traité du calcul différentiel, t. II, Paris 1914. *N. Saltykow*, Etude bibliographique sur le Mémoire de Charpit, Bull. Sc. math. (2) 54 (1930) 255-264; F. d. M. 56_1, 20. *G. Darboux*, Leçons sur la théorie générale des surfaces, t. III. *N. Saltykow*, Sur l'existence des intégrales de S. Lie, Atti Congresso Roma 2, (1909), 77-86; Méthodes classiques d'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre, Paris. 1931; Méthodes modernes d'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre, Paris, 1935. F. d. M. 40, 419; 57_1, 541; 61_{II}). Handelt es sich um eine vorgegebene Funktion f_1, so ergibt sich die Bestimmung der „charakteristischen" Funktion F für

$$F(x_1, \ldots, x_n, p_1, p_2, \ldots, p_n) = 0$$

aus den $2n - 1$ unabhängigen Integralen $f_1, u_1, u_2, \ldots, u_{2n-2}$ von

$$(f_1, f) = 0$$

in der Form

$$F \equiv \varphi(f_1, u_1, \ldots, u_{2n-2}) \qquad (\varphi \text{ willkürliche Funktion}).$$

Sind n Funktionen $f_1, f_2, \ldots, f_n$ vorgegeben, so ist F vermöge

$$F \equiv \varphi(f_1, \ldots, f_n)$$

gegeben, allgemeiner vermöge

$$F \equiv \varphi(f_1, f_2, \ldots, f_\nu, u_1, u_2, \ldots, u_{2n-\nu}),$$

wenn ν unabhängige Funktionen vorliegen (alle Funktionen f liegen dabei nach Voraussetzung paarweise in Involution). Während in diesen Fällen stets eine charakteristische Funktion F existiert, gilt für die unabhängigen Funktionen

$$(****) \qquad f_1, f_2, \ldots, f_{2n-1}$$

der Satz: Die Definition einer charakteristischen Funktion F (als willkürliche Funktion der ausgezeichneten Funktion) ist dann und nur dann möglich, wenn die Funktionen (****) eine Funktionengruppe bilden. Für $\nu < 2n - 1$ unabhängige Funktionen $f_1, f_2, \ldots, f_\nu$, die eine Funktionengruppe bilden, existiert F immer, bilden sie jedoch auch keine Gruppe von kleinerer Ordnung als $2n$, so niemals. Dabei enthält in diesem Kapitel die Gleichung $F = 0$ die unbekannte Funktion nach Voraussetzung nicht explizit. Davon befreit sich Verf. im dritten Kapitel und führt die Bestimmung charakteristischer Funktionen $F(x_1, \ldots, x_n, z, p_1, \ldots, p_n)$ in allen allgemeineren oder spezielleren Fällen durch. Auch im Falle vorgeschriebener Charakteristikendifferentialgleichungen (viertes Kapitel) behandelt Verf. alle vorhandenen Möglichkeiten, zunächst den Fall von $2n - 1$ (gewöhnlichen) Differentialgleichungen

$$\frac{dx_1}{X_1} = \frac{dx_2}{X_2} = \cdots = \frac{dx_n}{X_n} = -\frac{dp_1}{P_1} = \cdots = -\frac{dp_n}{P_n},$$

sodann allgemeiner den Fall eines Systems der Form

$$\frac{dx_1}{X_1} = \frac{dx_2}{X_2} = \cdots = \frac{dx_{\alpha+1}}{X_{\alpha+1}} = -\frac{dp_1}{P_1} = \cdots = -\frac{dp_\beta}{P_\beta} \, (\alpha + \beta = \nu \leqq (2n-1)).$$

Pinl.

живота. А, у свеобухватној студији о развитку математичких наука у српском народу биће неоспорно присутно и дело ових научењака.

Руска научна емиграција

О животу и делу Данила Михњевића ваљало би и даље трагати, нарочито за периодом до 1919. године када је једно време радио под новом бољшевичком влашћу у Русији. Корисно је проучити и присуство Михњевићево у *Београдској математичкој школи* између два рата. Михњевићева преписка са знаменитим Николом Салтиковим обухвата око 160 писама и открива нам многе појединости о сарадњи ова два математичара, као и неке појаве у средини у којој је преписка настала.[21] Михњевићева преписка са другим математичарима, као што су професор Боривој Рашајски, др Часлав Ђаја и др. посебно је занимљива. Илустрације ради, овде доносимо два писма професора Салтикова упућена Данилу Михњевићу. Прво писмо указује на пријатељске односе, а друго писмо доказује да је у науци Михњевића све ишло преко професора Салтикова.

1) Господину
Д. Михњевићу, професору гимназије
Крагујевац

26-XI-1930

Драги Данило Николајевић,

Журим да вас известим да ће професор Миланковић отпутовати 30. овог новембра у Далмацију на 10–15 дана. Стога ваш долазак у децембру не би био разуман, јер не бисте могли да видите професора.

Поздрав Н. Салтиков

2) Bruxelles, 7/2 1936.

Многопоштовани Данило Николајевић,

Ваш чланак сам добио пред сам одлазак и стога сам решио да га одложим. За мене би то био велики напор, а и за Вас горе кад би у њему било пропуста. Боље је сачекати.

Али француског чланка који сте обећали да ми пошаљете овамо нема те нема, а он ми је веома потребан! Молим Вас да га пошаљете што хитније.

Желим вам све најбоље Н. Салтиков

Крајем друге деценије нашег века велики број руских интелектуалаца напустио је своја вековна огњишта бежећи од нове власти. Каква драма

---

[21] Ову преписку је прегледао аутор ових редова. Она се налази у породичној архиви Михњевићевог сина, Ђорђа Михњевића (Зрењанин, Коче Коларова 53).

Професор
др ДАНИЛО Н. МИХЊЕВИЋ
1890–1979.

Академик
др НИКОЛА Н. САЛТИКОВ
1866–1961.

Др Никола Салтиков

и судбина! У то недоба, они су се расули широм Европе тражећи нову отаџбину, своју нову ватру. Наша земља је благонаклоно, па чак и организовано, прихватила знатан број тих људи. Рецимо, у Београду је радио *Руско-југословенски одбор* за прихватање емиграната. Према неким истраживањима претпоставља се да је у Краљевину СХС стигло око 70 хиљада Руса и других народа, а задржало се између два рата око 30 хиљада. Међу овим људима највише је било интелектуалаца, официра, инжењера, лекара, професора, музичара, правника, свештеника, учитеља вештина, ...[22] Међу овим интелектуалцима било је и више математичара, па и неколико веома угледних математичара-научника.

Поменута студија о развитку математике код нас[23] сигурно ће изложити и удео руских математичара у овом развитку. Наведимо неколико имена ових математичара, које је наш свет звао „руски емигранти".

Николај Михаиловић Бубнов (1858–1943), као ректор Великоруског универзитета Светог Владимира у Кијеву дошао је у нашу земљу 1920. и на новооснованом Универзитету у Љубљани изабран је за редовног професора.[24] Најбољи познавалац математичког дела папе Силвестера Другог (Gerbert, Silvestrus II, 940–1003), неуморни истраживач Ватиканског архива и библиотеке, Бубнов је до данас остао највеће светско име у области историје броја.[25]

Антон Димитријевић Билимовић (1879–1970) као ректор Универзитета у Одеси дошао је у нашу земљу 1919. и на Универзитету у Београду изабран за редовног професора. Билимовић је светско име у теоријској механици[26] и оснивач је београдске школе механике (принципи механи-

[22] О овоме погледати студију В. Кастратовић-Ристић, *Руски професори на Београдском универзитету (1919-1925)*, Идеје и покрети на београдском универзитету од оснивања до данас, књ. 2, Београд 1989, стр. 51–55.

[23] Аутор овог прилога довршава обимно дело *Развитак математичких наука у српском народу — Важнији догађаји и портрети*, која ће, вероватно, бити објављена у наредне две године.

[24] Универзитет у Београду, и Србија уопште, много је допринела и помогла да сиромашан словеначки народ добије Универзитет у Љубљани после првог светског рата (основан 1919). Исти је случај и са Словенском академијом знаности и уметности уочи друго светског рата, тачније 1937. године.

[25] У библиотеци САЗУ (Љубљана) чува се потпуна и обимна научна заоставштина Н. М. Бубнова. Писац ових редова радио је на делимичном упознавању са овим рукописним благом о историји броја, које се налази у нашој земљи и ево, већ пола века стоји непроучено. О овоме видети *Извештај о раду у 1972. години*, Математички институт, Београд 1972, стр. 72–73.

[26] У најновијој књизи из историје механике о Билимовићевом делу се дају детаљна тумачења са доказима. Овде је посебно изложено Билимовићево оригинално дело у развитку нехолономне механике и уопштавању принципа механике (*История механики в России*, АН УССР, Киев 1987).

ке).[27] Имао је већи број ученика међу којима се највише истицао професор др Растко Стојановић (1926–1972).

Сигурно да неће изостати ни *Петар Музен* који је 1938. године докторирао математичке науке на Универзитету у Београду и који је после другог светског рата отишао у Сједињене Америчке Државе и у НАСИ био један од директора департмана за теоријску механику.[28] *Вјечеслав Жардецки* (1896–1962) веома савесно, са пуно оригиналног материјала, предавао је између два рата математичку (теоријску) физику на Филозофском факултету у Београду. Професор др Вјечеслав Жардецки написао је прву књигу (уџбеник) код нас из ове области.[29] Извршиће се анализа научног дела *Константина Павловића Орлова* (1908–1985), а нарочито његове заблуде о примени бројевних спектара у нумеричкој анализи, Неће бити заборављени *Ј. Хлитчијев* (1886–1963), *К. Вороњец* (1902–1974) и др.

Порекло и школовање

Данило Михњевић је рођен 23. априла 1890. у Саратову, лепом граду на Волги са пуно зеленила и благом климом.[30] Име Данило (Даніиль) добио је као дете које је рођено дању,[31] а има значење и божијег судије. Михњевићев вршњак Иља Григоревић Еренбург окарактерисао је њихову годину рођења 1890/91. као годину глади и великих тешкоћа у Русији. Еренбург је једној групи Француза 1953. године рекао: „Господо, ја сам рођен далеке 1891. године када је код вас била највећа берба грожђа, а у мојој земљи највећа забележена глад.“ Данилов отац Николај Осиповић био је високо образован човек. Као син веома богатог хазјајинавелепоседника, Михњевићев отац имао је титулу племића (дворянин).[32]

---

[27] Код нас је недозвољено напуштено дело академика Антона Билимовића. Непознато је зашто није обележена његова стогодишњица рођења и тако пропуштена прилика да се среди његово научно дело. Можда су за ово стање криви његови ученици, којима је професор Билимовић све пружио, а они му окренули леђа. Једино је Српска академија наука и уметности издала комеморативну брошуру о Билимовићу као статутарну обавезу према сваком преминулом члану (САНУ, Посебна издања, књ. CDXLVI, Споменица књ. 52, Београд 1971). Математички институт у Београду посмртно је издао Билимовићев рукопис о Аполонијевим круговима (А. Билимовић, *Десет Аполонијевих задатака о додиру кругова*, Београд 1977, стр. 54). Том приликом аутор овог рада је захтевао да се на овој књизи стави текст који указује на стогодишњицу Билимовићевог рођења: „Ову књигу издаје Математички институт поводом стогодишњице рођења академика Антона Билимовића 1879–1970.“

[28] М. Музен, *О базама непрекидних функција* (докторска дисертација), Српска краљевска академија, Глас CLXXVIII, Први разред, књ. 88, Београд 1939, стр. 87–126. О Петру Музену погледати нашу књигу Д. Трифуновић, *Летопис живота и рада Михаила Петровића*, САНУ, Београд 1969.

[29] В. Жардецки, *Основи теоријске физике*, Београд 1941, стр. XII+400.

[30] До краја 1918. године датуми у овом раду су по старом календару.

[31] О овоме видети М. Грковић, *Речник личних имена*, Београд 1977.

[32] Према крштеници Данила Михњевића која је издата 28.12.1894. (Архив породице).

Николај Осиповић био је по струци грађевински инжењер, саобраћајног смера. Учесник је у пројектоању неколико железничких пруга, а био је и извођач радова. На овом послу упознао је нашег знаменитог градитеља железница Кирила Савића (1870–1957) који је многа своја знања уградио у железничке путеве Русије. На жалост, ово познанство је трајало веома кратко.[33] Данилов отац је типичан руски интелектуалац последње деценије прошлог века чији су родитељи као велепоседници на стотине врста добре руске земље, све „улагали у школу свога сина". Када је Данилушка пошао у основну школу у Саратову, изгубио је оца. На дужности главног инжењера градње железничке пруге недалеко од Москве погинуо је Николај Осиповић Михњевић. Данилушка је задржао у успомени свог оца као крупног човека, лепе спољашњости и милог осмеха.

Данилова мајка Варвара Абрамовна имала је такође титулу племкиње (дворянка).[34] По пореклу је била Јеврејка, а радила је као професор музике. У Саратову, у музичкој школи предавала је клавир. Обожавала је Франца Листа и знатно утицала на средину својим образовањем. Варвара је била млада, паметна жена интелектуалка, достојна свог мужа, лепог изгледа, нимало застарелих погледа на свет, тип жене какве је описивао Чехов и нешто пре, и Тургењев. Од мајке Варваре, Данилушка је наследио љубав према музици. Доцније, музика је стално била присутна. Уживао је у слушању добрих дела. Имао је своју колекцију плоча оперских дела и редовито их је преслушавао. Варвара је умрла млада, када је Данилушка завршио основну школу у Саратову 1900. године.

Малог Данила Михњевића узимају код себе на имање баба и деда по оцу. Баба Марија Петровна и деда Осип брину о унуку и школују га. То су била тешка времена када је Русијом често владала глад. Деда Осип заједно са писцем Лавом Н. Толстојем (1828–1910) организује помоћ гладним кућама тулске губерније. По доласку у нову отаџбину, Краљевину Срба, Хрвата и Словенаца Данило Михњевић је често говорио, да је његов деда Осип изгледао као да је изишао из Гогољевог романа *Мртве душе*. У свом деди видео је Данилушка многе особине и ћуди Гогољевог Чичикова.

Суседство и пријатељство са Толстојем остало је трајно присутно у животу Данилушке. У Михњевићевој заоставштини наишли смо на више слика Лава Толстоја, његове књиге и записане мисли. У Харкову, где је живео све до напуштања своје отаџбине, Михњевић је љубоморно чувао две математичке књиге које је написао Лав Толстој: *Арифметика* (1888) и *Руководства для учителя* (1889). Ове уџбенике Толстој је публиковао

[33]Грађевински инжењер Кирило Савић, професор Техничког факултета у Београду радио је у Русији од 1895. до 1922. године на разним пословима саобраћајне технике, као професор, стручњак у Министарству и извођач радова на главнијим железничким пругама у правцу Кавказа, Владивостока и др. Писац и састављач многих експертиза, елабората и књига, Кирило Савић је посебно задужио руске железнице.

[34]Исто као под 32; титулу добила по мужу.

за потребе своје народне школе у Јасној Пољани, у којој је више година предавао основе математике. Када смо добили могућност да прегледамо заоставштину професора Михњевића, обрадовали смо се пронађеном једном математичком проблему којег је поставио лично Лав Толстој. Овај проблем гласи: „Косцы должны выкосить два луга. Начав с утра косить большой луг, они после полудня разделились; одна половина осталась на первом лугу и к вечеру его докосила, а другая перешла косить на второй луг площадью вдвое меньше первого. Сколько было косцов, если известно, что в течение следующего дня оставшуюся часть работы выполнил один косец?" У преводу Толстојев проблем овако изгледа: „Косци треба да покосе две ливаде. Почели су ујутро да косе већу ливаду и после поднева поделили су се: једна половина остала је на првој ливади и увече је завршила косидбу, а друга половина прешла је на другу ливаду два пута мање површине од прве. Колико је било косаца ако је познато, да је у следећем дану остали део ливаде довршио један косац?" У познатој Глејзеровој историји математике нашили смо на оригинално Толстојево решење овог проблема:[35] „На первом лугу косцы проработали $\frac{1}{2}$ дня — вся бригада и $\frac{1}{2}$ дня — половина бригады, что составляет $\frac{3}{4}$ рабочего дня. На втором лугу в первый день работала $\frac{1}{2}$ бригады в течение $\frac{1}{2}$ дня, т.е. затрачено $\frac{1}{4}$ рабочего дня целой бригады. Так как по площади второй луг в 2 раза меньше первого, то, для того, чтобы выкосить его, вся бригада должна была бы работать $\frac{3}{8}$ дня. Следовательно, на второй день на меньшем лугу останется $\frac{3}{8} - \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$ часть работы всей бригады за день. А так как эту работу выполнил один косец, значит, вся бригада состояла из 8 косцов."

Данилов дед одлучује да унук настави школовање у Харкову. Похађа IV потпуну гимназију у Харкову од 1900. до 1909. године коју завршава 2. јуна 1909. са одличним успехом на испиту зрелости. Михњевић је у гимназији показивао интересовање за природне науке, а посебно за математику. Математику је учио из добрих уџбеника са европском репутацијом. Рецимо, елементарну математику је учио по преведеном уџбенику Емила Борела[36] (Одеса, 1905), алгебру и аритметику такође по Борелу и уџбенику Глагољова (Москва, 1906), тригонометрију од Јегунова и Јановића (Москва, 1908) аналитичку геометрију по Александрову итд. Према изгледу руског издања Борелових књига, једноставно је закључити да је руска јавност, а посебно гимназијалци, била упозната са веома повољном оценом Феликса Клајна[37] о високом квалитету наведених Борелових књига. Тако је 1911. године наш математичар-педагог Филип Филиповић (1878–1938) изложио један део ове Клајнове оцене: „Ја бих

[35] Г. И. Глейзер, *История математики в школе*, IV–VI классы, Москва 1981, стр. 191–2.

[36] Познати француски математичар Emile Borel (1871–1952), школски друг нашег Михаила Петровића (1868–1943) са студија математике у Паризу (1889–1894).

[37] Знаменити немачки математичар Felix Klein (1849–1925).

желео да вас наговорим да упознате нови уџбеник за наставу аритметике, *Курс алгебре* од Борела. Ви бисте тада видели да нове идеје не остају само у програмима.

„Уз то је аутор, — наставља Ф. Клајн, — сам тај Емил Борел кога ви добро знате као аутора истакнутих апстрактних дела из математике. Треба рећи да у Француској представници више наука поклањају много пажње школи коју они настоје да држе на нивоу савременог знања“.[38] У ствари, почетком овог века у Императорској Русији радиле су различите перменентне комисије за наставу. Наведимо један пример по Н. Салтикову.[39] „Највећи је утисак имао сверуски конгрес средњошколских наставника математике, који је одржан у Москви крајем 1913. и почетком 1914. године, где се скупило више од хиљаде чланова.“

„Ту су била претресана сва питања предавања математичких наука као и спремања наставника. За проучавање тих радова био је изабран нарочити одбор, тако звани одбор „трију градова“ од по два представника из Петрограда, Москве и Харкова. Овај одбор је стално радио у Петрограду у „Сољаној Городке“ уз сарадњу великог броја математичара, па је штампао две свеске својих радова. Али, због светског рата и револуције овај рад је био прекинут“ — завршава професор Салтиков.

Даље, у овом раду, професор Салтиков наводи да је он био члан овог одбора, а да је председник овог одбора, З. А. Макшев, умро 1. марта 1935.

Значи, Данило Михњевић је учио гимназију у Харкову (1900–1909), која је у потпуности била заснована на принципима савремене науке. По казивању породице, Михњевић је рано био наклоњен математици и испољио таленат. Још у основној школи Данилушка је био најбољи и најбржи у раду на сцјотах (рачунаљка) са знањем да постављени алгоритам сажме како би био још бржи у рачуну. Утицај наставника математике у Харковској гимназији, а такође и пресудна околина очевих књига из технике и математике у кући у Саратову, Харкову и на дединој дачи, — изнудили су опредељење, избор науке, студије.

Николај Пушин

Из Михњевићевог родног Саратова био је и др Николај Пушин (1875–1947), професор Техничког факултета у Београду. Дошао је у Југославију 1920. године из Петрограда, где је предавао на Електротехничком институту. У првим годинама њиховог живота у новој отаџбини

---

[38] Ф. Филипович, *Техническое и коммерческое образование*, Педагогический журналь 8 (1911). Узето из *Сабраних дела* Филипа Филиповића, књ. 2, Београд 1987, стр. 498.

[39] Н. Салтиков, *Спремање наставника математике за средњу школу*, Математички весник 3 (1935), Удружење студената математике у Београду, 49–52.

Михњевић и Пушин се нису познавали, нису знали једно за друго. Доцније, 30-тих година настало је познанство са пуно дана у сети и болу, причама о Волги, Саратову.

По струци физико-хемичар и угледан професор на техници, Пушин је у Српској краљевској академији објављивао своје научне расправе.[40] После другог светског рата др Никола Пушин је изабран за дописног члана Академије природних наука Српске академије наука (29. март 1947). Супротно Данилу Михњевићу који је запао у тривијалност средње школе, професор Пушин је активно учествовао у научном животу Београда.[41]

Студије

С јесени 1909. године Михњевић се уписао на Харковски универзитет, на Физичко-математички факултет (Физическо-Математический факультет Императорскаго Харьковскаго Университета). Овако опредељење се и очекивало. Сина инжењера, који је стасавао окружен књигама одличне библиотеке свог оца, рано је освојила математика. Михњевић је редовно похађао предавања, полагао семинаре, колоквијуме, ригорозе, као и финалне испите. Апсолвирао је 27. октобра 1914. на одељењу чисте и примењене математике истог факултета (Отдѣль чистой и прикладной математики). Ратно време и нередовне прилике одложило је Михњевићев завршетак студија, тако да Михњевића апсолвента математике позивају у војску 1. августа 1915. Да није дошло до катастрофе и хаоса октобра 1917. године, Михњевић је могао створити и завидну војну каријеру у својој земљи. Наиме, после избијања рата, као студента апсолвента Михњевића налазимо у *Кијевској војној академији* инжењерског смера као ђака-питомца. У овој војној школи провео је око годину дана, тачније од 1. августа 1915. до 15. марта 1916. Као питомац са одличним успехом убрзо је произведен у чин потпоручника (15. јун 1916). Било му је двадесет и шест година. Учесник је првог светског рата. Као енергичан, изуетно строг и способан „инжењерац" био је на више различитих места ратишта упућиван да командује инжењерском четом.

Као жељник науке и рада без већих и крутих обавеза, а што је у војсци било немогуће обезбедити, тражи да скине униформу и заврши факултет. У јеку бурних догађаја ова се Михњевићева жеља уважава и демобилизацијом 20. јануара 1918. млади Михњевић прекида своје службовање у војсци.

[40]Наведимо неколико научних радова професора Николе Пушина објављених у Српској академији наука: *Адијабатично охлађивање воде и температура њезине највеће густине у зависности од притиска*, Глас CXVI, 1925, 41–59 (са И. В. Гребеншчиковим); *Адиабатичко охлађивање неких органских субстанција у зависности од притиска*, Глас CXVI, 1925, 61–73 (са И. В. Гребеншчиковим); *О облику криве топљења при високим притисцима*, Глас CXXVII, 1927, 159–169.

[41]Годишњак САН за 1946. годину, стр. 24.

Михњевић је добро упознао страхоте рата и немилост новог света. Михњевић је у трену дознао да је нада и вера садржана само у памети и култури великана Русије, у човеку интелектуалцу.

Данило Михњевић мислио је тада исто онако, као препаметна Светлана Велмар-Јанковић описујући београдске улице у једном другом, сличном недобу код нас, када наглашава да„... осим духовних и етичких вредности, оних у човеку, нема никаквих других које одолевају разарању и огњу".[42] А нешто раније, средином 1944. године, Милутин Миланковић (1879–1958) је слично писао сликару Паји Јовановићу (1859–1957): „... морамо се запитати да ли нам очински дом неће бити раскопан, а име и лице угашено. Сада дођосмо до тужног сазнања да смо ми само мали један народ, боље рећи једно племе, окружено и угрожено свим својим суседима. Да ли ћемо моћи опстати као самосталан народ у независној држави? Да ли ћемо бити способни да се политички, економски и културно одржимо као национална индивидуа?

Размишљајући о томе, сада сам тек јасно увидео да је у нашем потпуном расулу, када су наши политичари упропастили оно што смо вековима стварали, — преко потреба да спасавамо наш културни капитал. Њега су створили наши велики синови. Они су показали до које се висине уздигнуте способности наше расе, они ће служити за углед и подстрек млађим нараштајима."[43] Након бурне 1917. године млади Михњевић скупља снагу и вољу да учи и тако, најзад, средином 1918. године диплимирао је математику на Харковском универзитету.

Харковски универзитет на којем је Данило Михњевић студирао, основан је 1805. године, а настао је од Харковског колегијума. На овом универзитету од самог почетка предавао је физику, механику и сродне предмете (рецимо метеорологију) др Атанасије Стојковић[44] (1773–1832), наш познати научник с почетка деветнестог века. Он је био и први ректор Харковског универзитета и оснивач катедре за физику из које ће доцније да се издвоји чувена катедра механике. Да ли је Данило Михњевић за време студија или доцније у Југославији чуо, дознао чињеницу да је у Харкову са физиком, механиком и сл. кренуло са ученим Србином Атанасијем Стојковићем, који је 1799. године на Универзитету у Гетингену у истој групи са великим Гаусом[45] докторирао физлозофске науке?[46]

---

[42] Светлана Велмар-Јанковић, *Дорћол*, Београд 1986, стр. 215.

[43] Из писма од 24. јула 1944; заоставштина академика Милутина Миланковића, Архив САНУ, бр. 10.131, кутија 9.

[44] Најпре погледати студију Јована Радоњића, *Атанасије Стојковић (1773–1832)*, САН, Глас CCXII, Београд 1953, и тамо даље.

[45] Знаменити немачки научник, пре свега математичар Friedrich Carl Gauss, 1777–1855.

[46] О школовању Атанасија Стојковића погледати расправу Ристе Ковијанића, *Атанасије Стојковић на студијама*, Настава мат. и физ. 4 (1952), стр. 47–56.

Такође, нисмо утврдили да ли је професор Салтиков нешто ближе знао о Атанасију Стојковићу, о његовим објављеним радовима и књигама, а посебно о умозритељној физици (1809. г), међу првим теоријским физикама у Европи.[47]

На студијама у Харкову Данило Михњевић је запамтио професора Николу Н. Салтикова као изузетног предавача и научника којег су сви ценили и поштовали. И до студента Данилушке је дошла вест, да је Н. Салтиков био најбољи ученик чувеног А. М. Љапунова (1857–1918). Пошто је завршио своје студије на Универзитету у Харкову 1895 (?) године, Салтиков је задржан на предлог професора А. М. Љапунова, К. А. Андрејева (1955–1923) и В. А. Стеклова (1863–1926) да се спрема за научнички позив и професора универзитета. По одласку професора Љапунова у Петроград, катедру механике преузео је Никола Салтиков од 1906. до 1917. године. предавао је рационалну механику, диференцијалне једначине механике и више различитих курсева. Студенте Михњевићеве генерације највише је узбуђивао курс професора Салтикова *Механичке основе лета аероплана*, вероватно међу првим таквим течајевима у Европи. Сала је увек била пуна. Михњевић никада није заборавио и Семинар професора Салтикова из историје математике, као и саму наклоност професора према млађем жељнику знања.[48]

Судбина је одредила, да професор Никола Салтиков буде кључна личност у животу и делу Данила Н. Михњевића, а што се у овом раду и потврђује.

Професор гимназије

Михњевић је волео школу, наставнички позив, био је предан и пожртвован васпитач. Достојанствено је носио дневник и са његовим уласком у учионицу на час, ушла је у ђачке мисли сва математика тог трена. Био је строг и правичан професор. Све генерације гимназијалаца Подгорице, Јагодине, Крагујевца, Панчева и Зрењанина запамтиле су добра предавања из математике професора Михњевића писана прилично грубим рукописом.[49] Михњевић је за њих остао професор ведрог духа и строгих начела, васпитач који се доста кретао у ђачком друштву и ван школе. Тако је често водио своје ученике женске гимназије у Крагујевцу на разна такмичења (рецитације, хор, спортска надметања и др.).

---

[47] А. Стойкович, *Начальныя основанія умозрительной и опытной физики*, ВЪ Харьковѣ Университетской типографіи, 1809, стр. V+VI+X+211+450.

[48] Код нас је о животу и делу професора Николе Салтикова недозвољено мало писано. У последње време извесни резултати Николе Салтикова се реафирмишу и детаљно проучава његов ранији период до 1918. год. Ово највише потврђује последња објављена историја механике: *История механики в России*, Киев 1987, стр. 248, 252–282, 375.

[49] Супротно другим Русима који су имали редовито леп, исписан рукопис, Данило Михњевић је прилично „ружно“ писао, са нечитким обликом речи које се тешко, па и никако, читају.

Наступања школског хора за професора Михњевића била су редовито празник. Захтевао је од хора дисциплину, рад, достојанствени изглед у интерпретацији и одређени „патос“ који музика тражи. Трудио се наш јунак да овакве племените датуме школе забележи и у дневној штампи,[50] како би остао белег поколењима који ће у летопису женске гимназије у Крагујевцу све до прве године другог рата, — запазити и акције једне средње школе коју је професор Михњевић тако волео, као да је поникла у његовом народу у Саратову или у Харкову.

Михњевић је као разредни старешина био широка срца, добрих савета и прекора „који живот значе“. Увек је био на становишту да школа мора сарађивати са породицом и да ово двојство мора уродити плодом.[51] Колико је сати и дана провео на излетима, екскурзијама у причи са својим ученицима и у жељи да их саветује и учи бољем сутра.

Из неколико аутобиографија које је Михњевић писао за потребе школских власти, као и за конкурс за предавача на Вишој педагошкој академији у Зрењанину (1957), можемо тачно реконструисати његово службовање од доласка у Југославију, па све до пензионисања (31. августа 1953). Поред ових извора, користили смо се и персоналним листом професора Михњевића, а који се уредно водио у Министарству просвете.

После скидања униформе и дипломирања на Харковом универзитету, Михњевић је кренуо да ради, да предаје математику у школама у Харкову и околини. Тако дознајемо да је Михњевић најпре био суплент у трговачкој школи у варшици Олшани 20 км удаљеној од Харкова. Нешто доцније, скраја 1918. године добио је премештај, на бази избора за предавача математике на учитељском институту у граду Белгороду.[52] Овде је јунак наше приче радио све до бега од бољшевика.

Крајем 1919. године са већом групом избеглица из Русије стигао је Данило Михњевић у своју нову отаџбину Краљевину Срба, Хрвата и Словенаца. Било му је 29 година и као млад суплент математике тешкоће је могао да понесе. Југославија се опорављала од рата, владала је немаштина, беда, глад и очај за изгубљенима. На сваком кораку ратни инвалиди и изгубљени у беспућу. Српски народ ушао је у своју нову отаџбину са великим губицима, народ је скоро преполовљен.

Све су ово добро знале придошле избеглице. Југословенски одбор прихвата руске избеглице, обезбеђује им елементарну заштиту и сигурност, док не стигне распоред за нова радна места, нов живот. Тако је Данило Михњевић чекао скоро пола године да би од Одбора добио распоред за рад. Тада, и доцније, међу овим емигранитима, нарочито

---

[50] Овде посебно мислимо на крагујевачки дневни лист „Глас Шумадије“ за период после 1931. године.

[51] Д. Михњевић, *Сарадња дома и школе*, Крагујевац, Глас Шумадије 50 (1932), стр. 3.

[52] Данило Михњевић је тврдио да ова учитељска школа има ранг више педагошке школе у Југославији.

међу инелектуалцима, кружио је глас да су у овим најтежим тренуцима за избеглице највише учинили краљ Александар I (1888–1934), патријарх Варнава (1880–1937), професор Алексндар Белић (1876–1960) и други. Неоспорно, да су придошли интелектуалци из Русије добро дошли. Обнови и изградњи земље били су потребни стручњаци. Данило Михњевић је дошао у Подгорицу. Како код себе није имао сведоџбе, дипломе и друго, а изјавио да је наставник математике, то је „29. јула 1920. постављен за привременог предметног учитеља под уговором“ у гимназију у Подгорици. Михњевић је у овој школи предавао математику, махом у нижим разредима гимназије. Много доцније, у Зрењанину говорио је да су му ђаци у Подгорици били доцније, познати црногорски политичари Блажо Јовановић, Митар Бакић и др.

У Подгорици Михњевић се задржао само две године. највише је бринуо како Министарству просвете и црквених послова да докаже да је завршио Физико-математички факултет у Харкову. На новој дужности у гимназији у Јагодини Михњевић и даље предаје математику. Из Јагодине успоставља ближе контакте са својим професором са Харковског универзитета и очевим познаником са студија Николајем Х. Салтиковом, сада професором Филозофског факултета у Београду. Ово је уједно било и довољно да Михњевић замоли професора Салтикова да посведочи да је завршио студије у Харкову. Тако је дошло до сведоџбе издате 12. децембра 1923. Ево, дословног преписа:

Консультантъ по учебнымъ д.
при Россійской Миссіи въ Белградѣ
12. децембра 1923. год.
№ 2071 г. Белград

СВЕДОЏБА

На основу поднетих докумената (дупликата сведоџбе п. бр. 3990 од 6. априла 1915. год. издатог Императорским Харковским Универзитетом, уверење п. бр. 653 од 18. октобра 1919. г. издатог Директором Белградског Учитељског Института и исказа сведока (сведочили су професори Београдског Универзитета С. Куљбакин и Н. Салтиков) овим се тврди, да је Данило Н. Михњевић заиста свршио Математичко одељење Физико-математичког факултета Императорског харковског Универзитета и 1916–1917. ш. године положио је дипломске испите при харковском Универзитету, после чега је био стални наставник Белгорадског Учитељског Института.

Ова је сведоџба издата ради представке Министарству Просвете Краљевине СХС.

Консултант за школске послове
Професор А. Добропољски с.р.
Секретар Б. Соколов с.р.

Ето, тако је и формално Данило Михњевић постао суплент за математику у јагодинској гимназији са дипломом завршеног факултета.

Од 3. новембра 1925. године Данила Михњевића налазимо на дужности суплента за математику Женске гимназије у Крагујевцу. Почетком 30-тих, тачније 6. октобра 1930. Филозофски факултет је нострификовао Михњевићеву сведоџбу као званичну диплому о завршеном Филозофском факултету Универзитета у Београду. Убрзо, 23–25. марта 1931. у Београду Михњевић је положио и професорски испит.

Занимљиво је, да се Михњевић није огледао у писању школских књига. Као спреман средњошколски наставник, строгог критеријума са научним атрибутима које му је донео докторат наука (1934) и објављени радови у Српској краљевској академији и Париској академији наука, — није прихватио изазов у писању школских уџбеника. Да ли се плашио многих кривина и замки које ова врста литературе доноси? Можда је Михњевић и конкурисао и желео ову утакмицу, али га је Просветни савет одбијао? Ово не знамо тачно, података о томе нема, а архиве су на местима која се односе на овај период прилично проређене.

Једним радом после Другог рата (1958) у Математичко-физичком листу (**Д$_8$**) Михњевић је показао да располаже знањима из методике математике. У педагогији математике коју је неговао професор запазили смо неуобичајен поступак у прилажењу новој наставној јединици. Наиме, новом објекту наставе не прилази одмах теоријом (теореме, докази, последице, ...), већ поступком који математику доводи у положај „природне науке“. Најпре се искаже „једна прича“ о објекту и тиме исприча сав садржај о објекту; објект се илуструје са неколико очигледних примера; уради се неколико задатака и на крају искаже теорема о објекту са доказом. Овај „обрнут“ методички поступак показао се веома добрим, а што смо у процесу саме наставе и лично проверили. Бивши Михњевићеви ученици оставили су записе о методама свог професора.

Крагујевачка женска гимназија стално ће памтити Данила Михњевића, а и сам професор своју школу у којој је све најбоље у животу постигао. Положио је професорски испит (1931), одбранио је докторску дисертацију (1934), а 1938. године склопио је брак са својом колегиницом из исте школе Бранком Омчикус (1909–1980), професором географије. Пореклом из Книна, а по мајци из породице Бубало из Конавла, унела је мир у кућу Данила Михњевића.

Од доласка у Крагујевац (1925), Михњевић је редовито проводио летњи распуст на мору, у Макарској. Народ га је убрзо заволео, те Михњевића 1929. године бирају за почасног грађанина Макарске.

Са ових летовања Михњевић се и јавно оглашавао у дневним листовима. Туристички, са пуно смисла и битним запажањима описао је важније градове на јадранској обали (Шибеник, Сплит, Трогир, ...),[53] као и читаве пределе, рецимо, од Макарске до Омиша.[54] На један леп начин овим текстовима је Михњевић приближио крагујевчанима Јадранско море и његове лепоте.

Избио је Други рат. Школе су поново кренуле са радом. Бранка Михњевић одлази у Београд да полаже професорски испит. У међувремену настаје у Крагујевцу позната драма, масакр, када је седам хиљада крагујевчана, махом мушкараца, ученика, стрељано. За време рације и одвођења људи и ђака на стрељање, професор Михњевић је био на часу у женској гимназији. Ова школа била је поштеђена одмазде, вероватно што је женска гимназија. Доживео је Михњевић душевни слом. Супруга му, без његове сагласности, тражи премештај из Крагујевца и решењем од 29. октобра 1941. они прелазе у Панчево за професоре гимназије.

О овом догађају у поменутој аутобиографији Михњевић је записао: „За време масовног стрељања у Крагујевцу октобра 1941. год. жена ми је полагала професорски испит у Београду и пошто је чула за трагичан догађај, без саветовања са мном, издејствовала је у Министарству просвете да будем премештен у Панчевачку гимназију."

Против воље Михњевићевих окупационе власти преместиле су их 26. марта 1943. у Петровград (данашњи Зрењанин). Овде је Михњевић радио до 31. августа 1953. када одлази у пензију. Последње године рада у зрењанинској гимназији Михњевић је посветио највише свом сину Ђорђу (рођен 1947. г.). Све до смрти (1979) професор Михњевић је живео у љубави са младим математичарима у Зрењанину и био активан у њиховим жељама.

У заоставштини Данила Михњевића наишли смо на повезане комплете часописа Matematičko-fizički list за ученике средњих школа који излази у Загребу. По казивању родбине, уживао је Михњевић у решавању постављених проблема и задатака у овом часопису. Са редакцијом часописа у Загребу водио је преписку и слао им своје проблеме/задатке за објављивање, као и сама решења.

Потпуно слободан, без обавеза, као пензионисани професор средње школе радио је на неколико проблема из елементарних садржаја математике, комбинаторике, механизама и функција. Успели смо утврдити да је од ових жеља успео само један рад да објави у поменутом часопису ($Д_8$): *График синусоиде помоћу графика аргумента* (Matematičko-fizički list 8 (1957/58), 2, 45–48). Овде Михњевић ни једне речи није рекао о сложеној функцији, као производу пресликавања $(f \circ g)(x) = g(f(x))$, односно функцији $y = g(f(x))$, где су посредне функције $u = f(x)$, $y = g(u)$, при чему

---

[53] Нпр. Д. Михњевић: *Са нашег Јадрана — Трогир*, Крагујевац, Глас Шумадије 22 (1931), 2; Д. Михњевић, *Са нашег Јадрана — Шибеник*, Крагујевац, Глас Шумадије 23 (1931), 3.

[54] Д. Михњевић, *Са нашег Јадрана — од Макарске до Омиша*, Крагујевац, Глас Шумадије 20 (1932), 6.

је $V(f(x)) \subseteq D(g(u))$. Садржај његовог рада је пример сложене функције $y = A \sin f(x)$, те се очекивало да нешто општије наведе о сложеној функцији. Једноставно, Михњевић одмах прелази на задатке и црта графике функција за случајеве када је $A = 1$ и $f(x) = 2x$; $A = 3$ и $f(x) = 3x + 2$; $A = 1$ и $f(x) = x^2$.

Данас је овај Михњевићев чланак тешко и тужно читати и преплитати у мислима чињеницу, да ово пише један доктор математичких наука који је далеке 1934. године докторирао на Београдској математичкој школи. Ово је пример великог пада, а уједно показатељ судбине и заблуде једног изгубљеног научника. Тај Данилушка са далеке и велике Волге којег је Лав Толстој обогатио љубављу према рачуну, који је у Београдској математичкој школи између два рата добио и имао све услове да се развије и постигне угледне резултате у парцијалним диференцијалним једначинама, — зашао у једну заплашујућу тривијалност и себе довео на чудна уживања решавањем елементарних задатака за средњу школу. Енигматика, зар не!

Овај чланак Данила Михњевића узимамо као писани доказ промашаја свега оног што је наш доброћудни и добронаколни Никола Салтиков са Михаилом Петровићем и Милутином Миланковићем учинио за овог математичара.

Зар, Михњевић није могао да овој теми приђе са становишта како доликује научнику београдске средине, барем приближно онако, како је то радио академик Јован Карамата — који нас је учио да добро и веома спретно скицирамо графике функција.[55] Михњевић је побегао од овога и пришао најелементаринијем облику репрезентације знања о графику сложене функције.

Математички институт

Велико је питање зашто Михњевић није напустио средњу школу и прешао на универзитет и потпуно се предао науци? Више разлога је наведено, посве породичних, као: добио је сина у старијим годинама и њему се у потпуности посветио; даље, услови нежење, самачког живота до 1938. године нису погодовали Михњевићу за потпуно предавање науци (!).

Мала научна средина између два рата, без самосталних научних института (рецимо, математички), мало радних места на универзитету, све је то кочило да многи приону на посао. Без обзира, ово није разлог малом учинку Данила Михњевића. И за професора др Драгослава С. Митриновића важиле су исте (не)прилике, па је он знатно урадио у науци, баш као професор средње школе, штампајући велики број јаких научних

---

[55] Јован Карамата, *Елементарна математичка анализа*, Београд 1948 (скрипта).

радова у публикацијама Српске краљевске академије, Париске академије наука и др.[56]

После другог рата када се шире простори на Универзитету у Београду и отварају научни институти био је последњи тренутак да Михњевић крене на Универзитет. До овога опет није дошло. Године су чиниле своје, као и престанак рада у науци још 1936. године, а пристизали су и млађи. Изузетак је био Константан П. Орлов као „старији" руски емигрант који је добио шансу у већ зрелим годинама на групи за математику на Природно-математичком факултету у Београду (!?)

Салтиков је за Михњевића био кључни човек. Од њега је све потицало и према њему се све сливало. После рата, у бујању струке, професор Н. Салтиков позива Михњевића да ради у Математичком институту Српске академије наука. У породичној архиви наишли смо на следећи телеграм:

> Варшавска 38 Београд
> Професор Михњевић Гимназија Зрењанин
> 18 Бгд 11616 п12 8 нов. 1947
> Да ли пристајете радити у Математичком институту
> Академије — Салтиков

Михњевић, коме је тада било 57 година и коме се родио син Ђорђе (1947), одбио је да пређе из Зрењанина у Београд и да ради у Математичком института. У ово време управник Математичког института био је академик Антон Д. Билимовић, а чланови: Милутин Миланковић, Војислав В. Мишковић, Јован Карамата, Иван Арновљевић, Никола Салтиков, Радивој Кашанин, Милош Радојчић, Татомир П. Анђелић, Војислав Авакумовић, Миодраг Томић, ...

Два дана пре доспећа наведеног телеграма, у Математичком институту на 20. седници одржаној 6. новембра 1947. др Константин П. Орлов одржао је научно саопштење *О интегралима једне парцијалне једначине*, из области којом се бавио и Данило Михњевић.[57]

Све у свему, са своја два резултата у математици (**Д**$_2$, **Д**$_6$) Данило Михњевић није смео да се упушта у „веће окршаје" у математици у друштву математичара које смо горе навели. Сам је ово Данилушка закључио, био је искрен према себи и са једним породичним мотивом нашао спољашње оправдање, за свет. У души, само је он знао праву истину. Ова тајна истина била је стално присутна и тражила је потврду, доказ. Било шта, ма какав успех значио је много у побеђивању те унутрашње аждаје. Хтео је конкурсом (1957) да дође за професора математике на Вишој педагошкој школи у Зрењанину. Како је већ имао 67

[56] Видети библиографију објављених радова професора др Драгослава С. Митриновића у часопису Публикације Електротехничког факултета Универзитета у Београду 180 (1967), 1–36.

[57] М. П. Чавчић, *Саопштења научних резултата у Математичком институту 1946–1961*, Београд 1988, стр. 19.

година, хтео је Михњевић да доврши своју математику и да тако затвори круг — такмичарску стазу на истом месту са којег је почео далеке 1918. године у Вишој педагошкој академији у Белгороду, недалеко од Харкова. Није изабран за професора Више педагошке школе у Зрењанину и то је дефинитивно ставило пункту на све тајне које је Михњевић у души носио. А када се живот овог математичара угасио (1979), он је понео са собом неповратну чињеницу — тајну да је на поменутој такмичарској стази на циљу постигао слаб резултат. Можда је имао слаб залет, а можда је Никола Салтиков био само фарса, заблуда да се нешто додатно постигне на такмичарској стази. Можда.

Докторат и Српска краљевска академија

Чим је Париска академија наука на основу онога што је изложио професор Анри Вила (Henri Villat) 23. октобра 1933. дала позитивну оцену о Михњевићевом раду и објавила га ($Д_1$), то је за Београд био знак да је Михњевић на добром путу у науци. Убрзо, Михњевић је пријавио докторат на Филозофском факултету у Београду, тако да је 22. децембра 1933. на овом факултету овај рад ($Д_1$) са ширим исказима и доказима прихваћен за докторски испит. Одлука је донета према реферату и оцени чланова испитне комисије професора Михаила Петровића, Николе Салтикова и Тадије Пејовића.[58]

С пролећа наредне године Михњевић је 21. марта 1934. полагао докторски испит на Филозофском факултету у Београду. Под називом *Нови доктор филозофије*, у дневној штампи је забележено: „21. прошлог месеца у старој згради Универзитета, пред дупке пуном двораном, г. Данило Михњевић, професор овдашње Женске гимназије одбранио је са одличним успехом своју докторску тезу из области више математике: „Структура парцијалних једначина“. Теза г. Михњевића оцењена је са оценом 10, а са истом оценом оцењен је и његов усмени одговор.

Испитну комисију сачињавали су: Декан Филозофског факултета др Владимир Ћоровић и професори универзитета г.г. др Михаило Петровић, др Никола Салтиков и др Тадија Пејовић. Поред тога испиту је био присутан и начелник Министарства просвете г. Шеварлић.

Уредништво најсрдачније честита г. др Михњевићу.“[59]

На Универзитету у Београду био је статутарни ред, да кандидат који одбрани докторску дисертацију пред одређеном комисијом, може бити промовисан у доктора наука са уручивањем дипломе само онда, ако Универзитету достави 100 (сто) примерака прописно одштампане докторске дисертације. Значи, пред Михњевићем стајао је проблем штампања докторске дисертације. Како је поступио Михњевић? Штампање је код нас одувек било скупо и требало је некако ове тешкоће ублажити. Редовито

---

[58] Подаци са насловне стране Михњевићеве докторске дисертације ($Д_4$).

[59] Јавно мњење, Крагујевац, 7. април 1934.

код свих доктората из математичких наука у оквиру Београдске математичке школе, па према томе и у случају Михњевићеве тезе, поступило се на следећи начин. Кандидат пријави своју докторску тезу у целости или само њен део Српској краљевској академији као научну расправу. Академија прихвати ову расправу за објављивање у Гласу, а сепарати овог рада користе се за израду обавезних сто примерака дисертације за Универзитет ради промоције.[60] Ако је само делимично објављена дисертација, тада кандидат допуњује сепарат новим материјалом из своје дисертације. Овај случај није био код Михњевићевог рада. Тако, из једног писма академика Милутина Миланковића дознајемо ове чињенице.

Господин
Данило Михњевић
Макарска (Poste Restante)

Драги Михњевићу, 29. VII 1935.

Ви ћете од Академије добити бесплатно 50 сепарата Вашег рада. Ако желите да мењате слог, т.ј. да додајете још шта, то се гледе тог морате споразумети са штампаријом и са њом тај засебан посао обрачунати. Академија неће имати ништа против тога, ако у тима сепаратима гдегод споменете да сте радњу Академску надопунили и проширили.

Како сам у добивеној коректури нашао још доста грешака, то сам ја послао штампарији на исправак, тражећи да ми се пре штампања врати на ревизију. Ви ми дотле јавите шта мислите чинити, да бих могао штампарији наредити штампање чланка да се тај посао не би задржавао на штету Академијиних публикација.

Са срдачним поздравом

Миланковић[61]

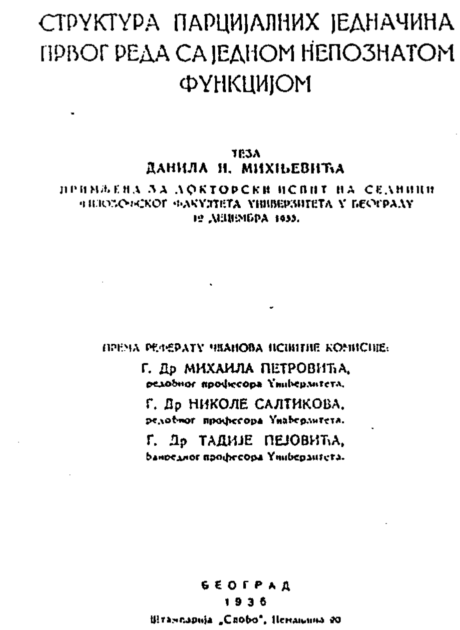
Како је то било лепо време достојанства, великих брига за сваки детаљ и „ситницу“ да под крилом Српске краљевске академије буде све што ваљаније, тако да један Миланковић, поред свог обимног и веома важног научног рада води бригу о штампању Михњевићевог рада у Гласу, докторске дисертације и вођења коректура.

Михњевић је очигледно брзо реаговао, тако да наредне недеље Миланковић пише:

---

[60] У овом поступку, међу докторима математике у Београду до другог рата, једино је др Сима М. Марковић ван Српске краљевске академије саопштавао своје научне резултате и одштампао своју докторску дисертацију (!)

[61] Породични архив, преписка.



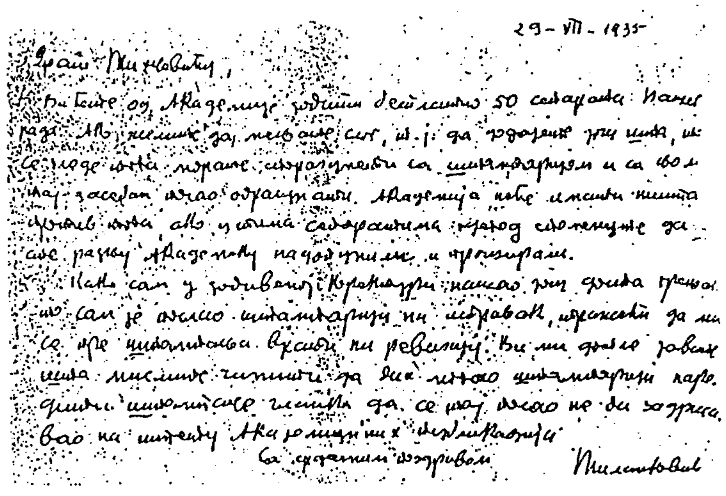
СТРУКТУРА ПАРЦИЈАЛНИХ ЈЕДНАЧИНА ПРВОГ РЕДА СА ЈЕДНОМ НЕПОЗНАТОМ ФУНКЦИЈОМ

ТЕЗА
ДАНИЛА Н. МИХЊЕВИЋА
ПРИМЉЕНА ЗА ДОКТОРСКИ ИСПИТ НА СЕДНИЦИ ФИЛОЗОФСКОГ ФАКУЛТЕТА УНИВЕРЗИТЕТА У БЕОГРАДУ
12 ДЕЦЕМБРА 1935.

ПРЕМА РЕФЕРАТУ ЧЛАНОВА ИСПИТНЕ КОМИСИЈЕ:
Г. Др МИХАИЛА ПЕТРОВИЋА, редовног професора Универзитета.
Г. Др НИКОЛЕ САЛТИКОВА, редовног професора Универзитета.
Г. Др ТАДИЈЕ ПЕЈОВИЋА, ванредног професора Универзитета.

БЕОГРАД
1936
Штампарија „Слово", Немањина 20

Насловна страна докторске дисертације Данила Михњевића



29 – VII – 1935

Драги Михњевићу,

Ви ћете од Академије добити [illegible] 50 сепарата Вашег рада. Ако желите [illegible], т. ј. да [illegible] још [illegible], то се [illegible] мора споразумети са штампаријом и са њом [illegible] засебан [illegible] обрачунати. Академија неће имати ништа против тога, ако уз [illegible] сепаратима [illegible] [illegible] на рачун Академије [illegible] и [illegible].

Како сам у [illegible] написао још [illegible] то сам је однео штампарији на исправку, мислећи да ми се пре штампања врати на ревизију. Ви ми [illegible] шта мислите чинити да би [illegible] штампарији [illegible] штампање [illegible] да се мој рад не би [illegible] на штету Академијиних публикација.

Са срдачним поздравом Миланковић

Аутограф писма Милутина Миланковића из 1935. године Данилу Михњевићу

Господин
Данило Михњевић
Макарска (Poste Restante)

Драги Михњевићу,

Саопштио сам штампарији „Слово“ ово:

Од приложеног рада г. Михњевића могу се начинити, сем оних за Академију, засебни, раширени, сепарати који иду на трошак г. Михњевића.

Дао сам дозволу за штампање првог табака.

Са срдачним поздравом

5-VIII-1935. Миланковић[62]

Шта је то Михњевић урадио и тако дошао до одштампане дисертације? Једноставним упоређивањем текстова из Гласа CLXV $Д_2$ и одштампане дисертације ($Д_4$) закључили смо да су то два истоветна рада: ($Д_2$) $\equiv$ ($Д_4$). Михњевић није ништа мењао у својој расправи објављеној у Српској краљевској академији ($Д_2$), те је интегрално цео слог тог рада искористио за штампање докторске дисертације. При овоме, Михњевић је променио наслов расправе ($Д_2$), тако да дисертација носи назив *Структура парцијалних једначина првог реда са једном непознатом функцијом*. Свакако, овако припремљеном слогу дисертације, Михњевић је придодао предговор на две стране. Како је овај предговор у Михњевићевој дисертацији важан за историју проблема, то га овде доносимо у целости.

СТРУКТУРА ПАРЦИЈАЛНИХ ЈЕДНАЧИНА ПРВОГ РЕДА СА ЈЕДНОМ НЕПОЗНАТОМ ФУНКЦИЈОМ.

Предговор.

Као што је познато, теорија парцијалних једначина првог реда поникла је од оних специјалних облика тих једначина, које су интегралили Даламбер и Ајлер.

Касније Лагранж је први систематизирао различите Ајлерове примере и груписао их је, поред линеарних једначина, у једанаест различитих облика.[63] Затим Шарпи[64] је пронашао неколико специјалних облика опште парцијалне једначине првог реда са једном непознатом функцијом двеју независно промењљивих, које се могу проинтегралити.

После овога створила се радовима низа математичара општа теорија парцијалних једначина једне непознате функције од више независно промењљивих.

[62] Исто.

[63] N. Saltykow, *Méthodes classiques d'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre*, Paris 1931, Chap. I, p. 4–8.

[64] N. Saltykow, *Etude bibliographique sur le Mémoire inédit de Charpit*, Bull. des sciences math. 1930.

Али заједно с тим су се ставила и обрнута питања. Наиме, тражиле су се и такве парцијалне једначине које би претпостављале услове одређене извесним облицима геометријског или аналитичког проблема.

У поменута обрнута питања може се убројити и низ проблема постављених од Монжа и С. Ли-а. Дарбу и Гурса, пак, су тражили оне површине, које ће имати геодезичке линије одређене интегралима специјалног облика. Н. Салтиков саставио је општи облик свих парцијалних једначина које допуштају интеграле С. Ли-а задате одређене класе.[65]

Циљ овога рада је решавање општег задатка о изналажењу општег облика свих парцијалних једначина првог реда са једном непознатом функцијом, које ће допуштати између својих интеграла карактеристика унапред задате функције.

Напомињемо да су извесни резултати добивени у овом раду били делимично објављени у Comptes-rendus Париске Академије Наука у седници од 23. октобра 1933. г. у CLXV Гласу Српске Краљевске Академије и у њеном Bulletin-у № 2; такође су саопштени у Руском Научном Институту у седници математичко-техничког одсека 28-XII-1934. године.

Октобар 1935.

Крагујевац.

После испуњења обавезе према Универзитету, Данило Михњевић је 24. октобра 1935. промовисан за доктора филозофије Универзитета у Београду.

Као што је познато Михњевић је у ово време сарадње са Српском краљевском академијом био професор математике у Женској гимназији у Крагујевцу. Ова чињеница није сметала Академији која је редовито допуштала сарадњу и отварала просторе својих гласила. За Академију једини услов био је да спис има вредне научне резултате. Свакако, да Михњевићев случај није био усамљен, и пре, и после њега, било је гимназијских професора који су сарађивали са Српском краљевском академијом и штампали своје научне резултате у њеним публикацијама. Довољно је поменути објављене радове професора др Драгослава С. Митриновића,[66] или професора др Константина Орлова — па се уверити у овај манир Српске краљевске академије.

Погледајмо шта је Данило Михњевић урадио у свом првом научном раду ($Д_1$ или $Д_2$ или $Д_3$) односно у докторској дисертацији ($Д_4$)?

После успешно одбрањене докторске дисертације Михњевић је упутио своје резултате Српској краљевској академији са молбом да буду објављени у Гласу. Овај рад Михњевић је доставио Академији посредством професора Николе Салтикова, тако да се на скупу Академије природних наука (АПН) од 23. априла 1934. одлучује да ову расправу прегледају академици Михаило Петровић и Никола А. Салтиков. У записнику са

[65] Исто као под 65 и 66.

[66] Исто као под 58.

овог скупа АПН[67] дословно стоји да је назив овог Михњевићевог списа *Допуне ка теорији функционалних група* што је потпуно другачији наслов од одштампаног списа у Гласу CLXV ($Д_2$).

После осам месеци (!) уочи Нове 1935. године у АПН (25. децембра 1934)[68], академици Михаило Петровић и Никола Салтиков реферисали су позитивно о Михњевићевом спису. У записнику са овог скупа стоји: „Прочитан је реферат г.г. Мих. Петровића и Н. Салтикова о расправи г. Данила Михњевића *Допуне теорији функционалних група.* Одлучено је да се расправа штампа у Гласу Првог разреда, али с тим да писац по могућности што више скрати француски текст.[69]

Овде се мисли на франсуски текст исте Михњевићеве расправе који ће бити објављен у Bulletin-у А СКА ради упознавања стране научне јавности ($Д_3$).

Приметимо да је овај Михњевићев резултат наведен и у Извештају СКА за 1934. годину као резултат научног радника ван састава СКА.[70]

Нисмо успели пронаћи рукопис рецензије овог Михњевићевог списка. Верујемо, да је рецензију писао и саставио Никола Салтиков, а да је Михаило Петровић само потписао и летимично погледао сам спис и Салтиковљев реферат. То је била пракса у научном раду која је и до данас задржана.

У време Михњевићеве појаве у СКА у 30-тим годинама, у Академији природних наука били су следећи математичари: Михаило Петровић (1868–1934), Богдан Гавриловић (1864–1947), Никола Салтиков (1864–1961), Антон Билимовић (1879–1970), Милутин Миланковић (1879–1958) за механику и Војислав В. Мишковић (1892–1976) за астрономију. Ако овој групи чланова Академије природних наука наведемо и већ старије академике: Јована Жујовића (1856–1936), Живојина Ђорђевића (1872–1957), Петра С. Павловића (1864–1938), као и Ивана Ђају (1884–1957), — можемо устнаовити да је завидан скуп саслушао научне резултате Данила Михњевића, упознао их и одлучио да се штампају у гласилима Академије.

Експозиторности ради, Михњевић је изнео неколико битних историјских чињеница о резултатима Бертрана,[71] Јакобија[72] и Софус Лија у теорији функционалних група испитујући интеграле површина у задатку трију тела. На крају овог дела Михњевић је посматрао функционалну групу реда већег од n и доказао следећу теорему.

---

[67]Годишњак СКА, књ. XLIII, стр. 22.

[68]У $Д_2$ наведен је 24. децембар 1934. као датум када је примљен рад.

[69]Годишњак СКА, књ. XLIII, стр. 32.

[70]Исто.

[71]Француски математичар Joseph Louis F. Bertrand (1822–1900).

[72]Немачки математичар Karl Gustav Jacobi (1804–1851).

Теорема. *Максималан број различитих изузетних функција, које може садржати у себи једна функционална група*

(1) $$f_1, f_2, f_3, \ldots, f_{n+\rho}, \qquad 1 \leq \rho \leq n$$

промењљивих

(2) $$x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n$$

једнак је $\mu = n - \rho$, *односно, једнак је броју чланова у реципрочној групи за посматрану групу* (1).

Свакако да се ова теорема за случај $\rho = 1$ своди на теорему Гурса.[73] Ову теорему је Михњевић доказао помоћу Лијеве теорије о поларним (реципрочним) групама.

Једноставно је уочити и следеће две последице ове теореме:

1° *Функционална група* $(2n-1)$*-ог реда има само једну изузетну функцију, што произлази из веза* $n + \rho = 2n - 1$, $\rho = n - 1$.

2° *Ако је* $\rho = n$, $n + \rho = 2n$, *тада ће број изузетних функција бити* $\mu = n - n = 0$. *Према томе, ниједна функционална група* $2n$*-ог реда промењљивих* (2) *нема изузетну функцију.*

После овога, Михњевић расправља два случаја о броју интеграла: потпун број интеграла и непотпун систем интеграла карактеристика. Занимљиво је да се у овом делу излагања, Михњевић користи резултатима из магистарског рада професора Николе Салтикова који је брањен и објављен 1899. године.[74] То су теореме младог Николе Салтикова које се односе на састављање система од m обичних диференцијалних једначина када је познато исто толико, m различитих партикуларних интеграла. При излагању горе наведена два случаја, где је Михњевић потпуно оригиналан, често се позива на књигу Богдана Гавриловића *Теорија детерминаната* (Београд 1899) у смислу потреба поједностављивања добијених релација и других исказа.

Михњевићева анализа парцијалних једначина са задатим диференцијалним једначинама карактеристика заснована је на истраживањима

---

[73]E. Goursat, *Leçons sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre*, Paris 1891, p. 313. Познати француски математичар Edouard Jean Baptiste Goursat (1858–1936).

[74]Н. Н. Салтыковъ, *Объ интегрированiи уравненiй съ частными производными перваго порядка одной неизвѣстной функцiи*, Харьков 1899, стр. 22.

професора Салтикова, а која су генералисала Шарпијев[75] случај.[76] А, шта је допринео овоме сам Михњевић? Он је решавао једначину

$$p_1 + \sum_{j=2}^{n} p_j x_j = \Phi(x_1, p_2, p_3, \dots, p_n),$$

где је Φ једна произвољна функција. Овим је Михњевић показао, да ова једначина представља генерализацију, за ма који број променљивих, првог од познатих Шарпијевих случајева, под претпоставком да тражена парцијална једначина не зависи експлицитно од непознате функције.

По нашем мишљењу најјачи део Михњевићевог рада је одређивање максималног броја изузетних функција функционалне групе од непарног броја променљивих. Овде је Михњевић изнео и неколико својих оригиналних резултата из детерминаната. Тако је показао нов доказ теореме: „Ако је косо симетрична детерминанта парног реда једнака нули, онда су и сви њени минори једнаки нули.“[77]

Да би изложио функционалне групе интеграла са неколико оригиналних теорема, Михњевић је најпре анализао потпун број интеграла у инволуцији, и непотпун систем интеграла у инволуцији.

Као што смо напред навели, Михњевић се при крају овог рада ($Д_2$) доста задржао на генерализацији Шарпијевих случајева, а чиме се бавио и професор Никола Салтиков. Ова чињеница, тј. преносна релација:

ШАРПИ — САЛТИКОВ — МИХЊЕВИЋ

највише је и утицала да се Данилушки отворе врата науке. Ово је потврдио понајвише члан института Анри Вила када је Михњевићеве резултате 1933. године приказао на седници Париске академије наука.

Други научни рад

После свих догађаја око објављивања првог научног рада ($Д_1$, $Д_2$, $Д_3$), одбране и штампања докторске дисертације ($Д_4$), Михњевић је при крају 1935. године спремио још једно саопштење за Глас Српске краљевске академије ($Д_6$). Овај рад директно се надовезује на Михњевићево

[75] Француски математичар Пол Шарпи (Paul Charpit) поднео је 1784. године париској Академији своју изузетну расправу о свођењу нелинеарних парцијалних једначина првог реда на линеарне парцијалне једначине са једном непознатом више. Овај рад није објављен, а Шарпи је, као веома млад, већ 1785. године умро. О несвакидашњем таленту младог Шарпија сведочи Лакроа (Lacroix) у свом *Трактату о диференцијалном и интегралном рачуну* (*Traité du calcul différentiel et du calcul intégral*, T. II, 2ᵉ éd., Paris 1814): La mort enleva ce jeune homme au moment où ses talents donnaient des grandes ésperances (Смрт јеуграбила овог младог човека у тренутку када је његов таленат тако много обећавао).

[76] N. Saltykow, исто као под 66.

[77] $Д_2$; стр. 273.

претходно саопштење (Д$_2$) и докторску дисертацију (Д$_4$). Наиме, Михњевић је тада показао нову, своју методу за састављање једне парцијалне једначине првог реда са једном непознатом функцијом помоћу унапред датих интеграла карактеристика. Сада, у овом новом раду (Д$_6$) Михњевић проширује ову методу на састављање нормалног система парцијалних једначина првог реда са једном непознатом функцијом. Код овог преношења проблема на систем једначина, Михњевић се ограничио само на системе чије карактеристичне функције не зависе експлицитно од непознате функције.

На скупу Академије природних наука од 16. децембра 1935. одлучено је „да овај спис Данила Михњевића под насловом *Састављање нормалних система парцијалних једначина првог реда са једном непознатом функцијом* прегледају академици Богдан Гавриловић и Никола Салтиков.[78] На наредном скупу исте академије од 4. маја 1936. прочитана је рецензија о овом Михњевићевом спису. Оцена је била позитивна и одлучено је било да се расправа објави у наредном броју Гласа.[79]

Формирање нормалног система парцијалних једначина првог реда са једном непознатом функцијом помоћу датих интеграла карактеристика, Михњевић је поступно излагао. Прво је посматрао један интеграл f_1 са четири промењиве x, y, p, q, па је тражио одговарајући нормални систем двеју парцијалних једначина

$$F_i(x, y, p, q) = 0, \qquad i = 1, 2. \tag{1}$$

За други случај, када су задата два интеграла f_1 и f_2 који се налазе у инволуцији, добија се једноставно нормални систем једначина

$$F_i \equiv \psi_i(f_1, f_2) = 0, \qquad i = 1, 2 \tag{2}$$

јер инволуциона група интеграла f_1, f_2 садржи у себи максималан број чланова у инволуцији. Овде су ψ_i и две различите произвољне функције. — Михњевић је даље наставио да проучава наредне случаеве када интеграли јесу/нису у инволуцији, (не) чине функционалну групу, да би исказао три важне теореме.

Теорема 1. *Ако је дата само једна функција f_1 промењљивих (x, y, p, q), тада увек постоји одговарајући нормални систем двеју парцијалних једначина* (1).

Теорема 2. *Ако су дате две различите функције f_1, f_2 промењљивих (x, y, p, q), онда одговарајући систем* (1) *постоји само у том случају, када се дате функције налазе у инволуцији. Карактеристичне функције тог система јесу тада произвољне функције од датих функција f_1, f_2.*

---

[78] Годишњак СКА, књ. XLIV, стр. 30.

[79] Исто, стр. 26, 228. Приметимо, да је у одштампаном раду (Д$_6$) проширен наслов Михњевићевог списа.

Теорема 3. *Ако су дате две различите функције промењљивих* (x, y, p, q) *које или чине неинволуциону групу, или уопште не чине групу, или су дате три функције промењљивих* (x, y, p, q), *онда је задатак састављања одговарајућег система* (1) *немогућ.*

Неоспорно, да из последње теореме следи, да услов инволуције не само што је довољан, већ је и потребан за постојање одговарајућег нормалног система (1).

Даљим, веома концизним разматрањем, а редовитим ослањањима на претходне теореме и свој рад (Д$_2$), Михњевић долази до општег закључка.

Теорема 4. *Ако је дато* m $(=2n)$ *различитих функција промењљивих*

$$x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, p_1, p_2, p_3, \dots, p_n \tag{3}$$

које чине или производе функционалну групу $n+\rho$*-тог реда*

$$f_1, f_2, f_3, \dots, f_{n+\rho} \tag{4}$$

одговарајући нормални систем $n-\rho$ *сагласних парцијалних једначина*

$$F_i(x_1, x_2, \dots, x_n, p_1, p_2, \dots, p_n) = 0 \qquad (i = 1, 2, 3, \dots, n-\rho) \tag{5}$$

постоји само у том случају, када посматрана функционална група садржи у себи $n-\rho$ *изузетних функција. Ове изузетне функције представљају тада карактеристичне функције траженог нормалног система парцијалних једначина.*

Дакако, ова теорема 4 има више карактер закључка. У другом делу рада, Михњевић се бави случајевима када је непотпун број интеграла карактеристика као и случај са више решења када је дат непотпун систем интерала карактеристика.

Сумирајући своја излагања о потребним и довољним условима за састављање нормалног система парцијалних једначина првога реда са једном непознатом функцијом, Михњевић је исказао и доказао још четири теореме.

Теорема 5. *Скуп* m $(=2n)$ *различитих функција промењљивх* (3), *које чине или производе функционалну групу* $n-\rho$*-ог реда без ијedне изузетне функције представља непотпуни број интеграла карактеристика нормалног система* $s>\rho$ *сагласних парцијалних једначина* (5) $(i=1,2,\dots,s;\ s<n-\rho)$ *само онда, када је испуњен услов* $n+\rho \geq 2s$.

Теорема 6. *Скуп* m $(=2n)$ *различитих функција промењљивих* (3), *које чине или производе функционалну групу* $n+\rho$*-ог реда без ијedне изузетне функције представља непотпуни систем интеграла карактеристика нормалног система* s $(s<n-\rho)$ *сагласних парцијалних једначина трећег реда* (5) $(i=1,2,\dots,s;\ s<n-\rho)$ *само онда, када је испуњен услов* $n-\rho \geq 2s$.

Теорема 7. *Да би скуп* m $(=2n)$ *различитих функција промењивих* (3), *које чине или производе функционалну групу* $n-\rho$*-ог реда са* μ *изузетних функција, представљао непотпуни систем интеграла карактеристика нормалног система* $s+\mu$ $(s>\rho)$ *сагласних парцијалних једначина, зато је потребно и довољно да је испуњен услов* $n+\rho \geq 2s+\mu$.

Теорема 8. *Да би скуп* m $(=2n)$ *различитих функција промењивих* (3), *које чине или производе функционалну групу* $n+\rho$*-тог реда са* μ *изузетних функција, представљао непотпуни систем интеграла карактеристика нормалног система* $s+\mu$ *сагласних парцијалних једначина првог реда, зато је потребно и довољно да је испуњен услов* $n-\rho \geq 2s+\mu$.

Приметимо да теорема 5 има следећу последицу: *Ако је* $s \leq \rho$, *онда функционалној групи*

$$f_1, f_2, f_3, \ldots, f_{n-\rho}$$

увек одговара нормални систем (5) *за* $i=1,2,3,\ldots,s$ *и* $s<n-\rho$.

А, из теореме 7 произилази следећа последица: *Ако је* $s \leq \rho$, *онда функционалној групи* $n-\rho$*-ог реда са* μ *изузетних функција увек одговара нормални систем* $s+\mu$ *сагласних парцијалних једначина.*

На крају наведимо, да се ових осам теорема Данила Михњевића налази у раду штампаном у Париској академији наука ($Д_5$) и у Bulletin-у А Српске краљевске академије ($Д_7$).

Као меру ваљаности напред наведених Михњевићевих теорема можемо узети повољан приказ овог рада у Паризу ($Д_5$), као и коришћење овог Михњевићевог рада од стране самог професора Николе Салтикова.

Руски научни институт

У Београду је између два рата радио Руски научни институт (Русскій Научный Институтъ в БѢлградѢ). Великим ангажовањем академика Александра Белића овај Институт је радио у једном делу зграде Српске краљевске академије, улаз из Јакшићеве улице.[80] Руски научни институт био је у „маломе“ нека врста академије наука научника избеглица из Русије. У Институту су одржавана веома значајна и успела научна саопштења (предавања). Она су се штампала у посебном часопису „Записки Русского научнаго института в Белграде“ који је у периоду 1930–1941. године изашао у 17 свезака. У овом часопису угледних руских интелектуалаца у Београду објављене су познате студије Т. Локота, П. Струвеа, В. Фармаковског, Н. Абакумова, Е. Соловскае, Н. Пио-Улског, Н. Салтикова и др.[81]

---

[80] У ово време Српска краљевска академија је била смештена и радила у једној приземној згради у улици Бранковој бр. 15.

[81] Посебно наводимо обележавање Прве стогодишњице Менделејева (1834–1934) у Руском научном институту у Београду студијом др Николе Пушина (*Записки*, 10 (1935), 1–42).

Поред ове делатности Институт је имао и добру библиотеку. Развојем овог Института јачала је и наука у нашем народу. Ово се добро знало, те је Институту увек указивана одговарајућа помоћ. Априла 1933. директним ангажовањем краља Александра I Руски научни институт напушта зграду Српске краљевске академије и сели се у „Руски дом императора Николаја II“, у ул. Краљице Наталије број 33. Нови, бољи услови рада овог Института много су значили за даљи развој науке у Београду.[82]

Делатност Руског научног института није могла да мимоиђе Данила Михњевића. Већ као средовечан човек, математичар са докторском титулом Универзитета у Београду који ради у Крагујевцу у Женској гимназији, — Данило Михњевић учествује у раду Руског института.[83] Какав мелем за рањену душу! Каква срећа и блаженство духовног живота у окриљу другог народа! Михњевић и други интелектуалци јавно су ово истицали. Тако је крајем 1934. године, тачније 28. децембра саопштио резултате из своје докторске дисертације коју је успешно одбранио 21. марта исте године. Ово је итекако нашем јунаку погодовало. Имао је и осећај да је код својих, као да је у далеком Харкову. Међу папирима овог Института наишли смо на објаву предавања за децембар 1938. године из које дознајемо да је Михњевић 16. децембра 1938. одржао јавно предавање *Интеграљење једне класе парцијалних једначина првог реда.* По изгледу и садржају ове објаве лако је закључити да је Михњевић своје предавање одржао на руском језику.

Садржај овог Михњевићевог предавања није нам познат. Верујемо, да је из своје студије ($Д_6$) узео један случај одређивања нормалног система парцијалних једначина, јер поменути рад ($Д_6$) не садржи ниједан конкретан пример. Нисмо успели утврдити, да ли је Михњевић ово предавање негде објавио. Вероватно није, а и рат је убрзо избио у Југославији. У списку објављених радова, који је лично Михњевић саставио за потребе конкурса за професора математике на Вишој педагошкој школи у Зрењанину (1957), није наведено ово предавање у Руском научном институту.

Није утврђено да ли је професор Михњевић одржао још неко предавање у Руском научном институту. Верујемо, да наведено Михњевићево предавање није било једино, као и ни његова експозиција о докторској дисертацији.

[82]Овај Руски дом је доскорашњи „Дом совјетске културе“ у Београду, у истој улици и истој згради: ул. Народног фронта бр. 33.

[83]Консултована докторска дисертација Остоје Ђурића, *Књижевна и књижевно-издавачка делатност руске интелигенције у Србији између два светска рата*, Београд 1987.

Епилог

Михњевић је у струци доста урадио. Извео је 33 генерације гимназијалаца (Подгорица, Јагодина, Крагујевац, Панчево и Зрењанин), у Српској и Париској академији наука објавио је седам оригиналних прилога у научној области — парцијалне диференцијалне једначине, обезбедио присутност својих метода у настави математике у нашим школама и др. У Београдској математичкој школи, чији је био учесник и стваралац, у српској науци и школству остаће име ДАНИЛА НИКОЛАЈЕВИЋА МИХЊЕВИЋА, нашег Данилушке са Волге, вазда записано и присутно. Хвала му што је помагао српском народу у тешким данима живота и наша велика благонаклоност према његовом труду, да се том истом српском народу захвали.

Dragan TRIFUNOVIĆ

CONTRIBUTION OF DANILO MIHNJEVIĆ
TO THE THEORY OF PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS

In this paper the intelectual biography of the mathematician doctor Danilo Mihnjević (1890–1979) as well as an analysis of his scientific papers is given. Under influence of professor Nikola N. Saltykov (1864–1961) Mihnjević was working in the theory of partial differential equations and earned his doctorate in the same field in Belgrade in 1934. The bad luck of an intelectual forced to flee from Russia in 1919 did its bit. He remained to the end on the post of a high school teacher and was not willing to work in a scientific institute or on the University.

In the paper are also described the circles in which Mihnjević lived and worked.

dr DRAGAN TRIFUNOVIĆ
11000 Beograd
Ustanička 65/I

This research was supported by Science Fund of Serbia, grant number 0401/A, through Matematički institut.

Математички институт — Београд
Историја мат. и мех. наука 6 (1992)
Mathematical Institute — Belgrade
History of Math. and Mech. Sc. 6 (1992)

Александар С. ТРИФОНИ

ДОПРИНОС МАТЕМАТИЧАРА РАЗВОЈУ КРИПТОГРАФИЈЕ

Увод

Потреба за споразумевањем међу људима стара је, безмало колико и сам човек. Многи облици споразумевања постојали су пре појаве писма. У настојању да омогуће бржу и лакшу размену информација, људи су непрекидно усавршавали облике споразумевања. Први сукоби међу народима условили су појаву прикривања садржаја информација ради чувања њихове тајности и својих намера. Тако су се почели развијати поступци који су имали за циљ да у размени информација прикрију њихов садржај и онемогуће непозване да до њих дођу.

Начин да се једно писано саопштење (информација, порука) прикрије, учини неразумљивим свакоме коме није намењено, и обрнуто, да се пронађу методи за њихово решавање, предмет је *криптографије*. Потиче од речи *kriptos* — скривен, тајан и *grafein* — писати. Према томе, криптографија је дисциплина чији је циљ истраживање и проучавање поступака за тајно писање.

Снажан развој ратне технике није оставио ни криптографију по страни. Развијали су се нови системи за пренос, поред писаних информација, говора, слике и података. Упоредо су се остваривале и нове могућности да се и оне учине, као и писани текст, неразумљиве за свакога коме нису намењени. Ту се долази до могућности да се говор трансформише у неразумљиву композицију тонова, или слика у неразумљив „пејзаж“. Појам криптографије се тако проширује и на тај начин долази до општег појма тајног споразумевања или заштите тајности свих облика информација који се назива *криптологија*.

Колико је криптологија или криптографија омогућила да се сачувају тајне, толико је учинила да и саму себе сакрије и сачува. Тако да ни данас немамо опште познату и признату теорију криптологије, као што постоје теорије других наука. Вео тајности, који је увек покривао криптолошка истраживања, оставио је свој дубоки траг. Настојања појединих људи да скину тај вео није увек наилазио на пуно разумевање оних који су били моћни да спрече њено популарисање и проучавање у ширим размерама. Зато је мало познато колико је математика учествовала и допринела развоју криптографије и криптологије као науке иако су за њих везана имена као што су Viet, Cardano, Wallis и многа друга. Криптологија је и математику обогатила новим садржајима и тиме јој вратила дуг за сопствени развој.

Развитак криптологије уопште везан је за све већу потребу увођења математичког апарата. Свака шифра представља функционалну везу између текста поруке, чији се садржај жели сачувати у тајности и онога у шта се он трансформише. Према томе, у тој узајамној спрези, јављају се и одговарајуће математичке правилности. Тако настаје очигледна повезаност криптологије с математичким расуђивањем и методама.

Теорија вероватноће, математичка статистика, теорија информација, алгебра и друге математичке дисциплине утичу посредно или непосредно на утемељавање криптологије у научну дисциплину. Савремене тенденције у њеном развоју, појава шифровања говора, слике и података, поред математичких метода, захтева примену физике, електронике, лингвистике и других научних дисциплина, што криптологију чини мултидисциплинарном.

Савремено изграђивање теорије криптологије у којој математика игра доминантну улогу, захтева да се шифра дефинише на следећи начин.

Нека је P скуп свих могућних порука (информација, података), T_i нека трансформација која пресликава елементе скупа P у неки скуп $\check{S}$ а T_i^{-1} инверзна трансформација која једнозначно пресликава елементе скупа $\check{S}$ у елементе скупа P. Трансформација T_i зове се ***шифра***, а елементи скупа $\check{S}$ ***шифрати***. Инверзна трансформација T_i^{-1} пресликава шифрат у поруку.

Према томе, шифровање, односно дешифровање порука може се уведеном симболиком дефинисати релацијама:

$$\check{S} = T_i P, \qquad \text{односно} \qquad P = T_i^{-1}\check{S}.$$

Из дате дефиниције следи да скуп $\check{S}$ нема мање елемената од скупа P. То значи, да се једна порука може трансформисати (пресликати) у више шифрата, али обрнуто не важи, тј. један шифрат може се трансформисати само у једну поруку. Тим је одређено да се шифром увек може једнозначно добити порука.

Трансформације T_i треба одабирати тако да се без познавања трансформације T_i и инверзне трансформације T_i^{-1} не може доћи до текста поруке или не може доћи бар лако. Одавде се закључује да све шифре не пружају подједнак степен заштите тајности порука, нити су све у стању да одоле знатижељнима да докуче тајне које оне крију. Иако нема строго егзактне мере за одређивање квалитета шифре, постоје методе за његово одређивање. Под тим се подразумева колико је шифра способна да заштити тајност порука.

Испитивање квалитета шифара с једне, и одређивање метода за њихово решавање — „пробијање“, с друге стране, предмет је посебне области криптологије, назване криптоанализа.

Могућност утврђивања квалитета шифара дозвољава постојање поступака да се дође до садржаја шифроване поруке и без познавања трансформације којом је она шифрована. Овакви поступци називају се декриптирање и треба их разликовати од појма дешифровање који означава поступак инверзан шифровању, тј. да се од шифрата дође до поруке користећи инверзну трансформацију.

Одређене шифре поседују карактеристичне особине тако да их из практичних, а и теоријских разлога сврставамо у одговарајуће скупине. Такве скупине одређују један шири појам који се назива шифарски систем. Шифарски системи не одређују било какву систематску поделу шифара [2].

Подела шифара лако се изводи из основне дефиниције шифре. Њу одређује врста трансформације. Тако се, уопште, разликују две врсте трансформација. Једна којом се елементи порука премештају и друга којом се замењују истим или неким другим елементима. Шифра може бити и сложена, тако да учествују обе врсте трансформација.

Шифре образоване од трансформација којима се слова поруке премештају називају се премештајне или транспозицијске. Конструишу се у облику разних таблица. Без обзира на облик таблице, свакој шифри премештања одговара једна одређена пермутација. На пример, реч KRIPTOGRAFIJA се пермутацијом

$$\begin{pmatrix} 3 & 9 & 6 & 13 & 4 & 12 & 7 & 2 & 11 & 1 & 10 & 8 & 5 \\ K & R & I & P & T & O & G & R & A & F & I & J & A \end{pmatrix},$$

трансформише у шифрат FRKTAIGJRIAOP.

Шифре образоване од трансформација којима се слова поруке замењују неким другим словима или посебно уведеним знацима називају се шифре замењивања или субституцијске шифре. Свака од њих такође представља једну или више унапред одређених пермутација. На пример, пермутацијом

$$\begin{pmatrix} A & B & C & D & E & F & G & H & I & J & K & L & M & N & O & P & Q & R & S & T & U & V & W & X & Y & Z \\ G & P & V & H & Y & Q & I & A & F & R & J & S & E & N & T & K & B & W & D & U & L & Z & X & M & C & O \end{pmatrix}^{1}$$

се порука POVERLJIVA PORUKA, трансформише у шифрат KTZYWSRFZG KTWLJG.

Према броју трансформација које се користе у поступку шифровања, све шифре замењивања деле се на моналфабетске и полиалфабетске.

[1]Уобичајено је да се при шифровању, односно састављању трансформација користи интернационални алфабет.

1. Почетак криптографије

Колико је стара шифра? Вероватно колико и само писмо! Археолози тврде да се првобитно писмо састојало из низа цртежа који су имали симболична значења. Међутим, они су убрзо изгубили свој формални значај, изузев хијероглифа старих Астека и Египћана. Може се и свако писмо сматрати шифром у том смислу што коришћени знаци немају значења сама по себи. Они изражавају одређену смисао тек пошто се протумаче по унапред утврђеним, договореним правилима између онога ко пише и онога ко чита. За сваког ко не познаје знаке неког језика, све што је на том језику написано представља тајну. Њу може да реши онда када савлада писмо тог језика. Истраживања у овом правцу предмет су палеографије и не треба их подвести под криптографију.

Из древних цивилизација нема писаних података о свесном коришћењу криптографских поступака иако се у другим документима спомињу разни знаци и писања која су имала за циљ да збуне или опомену некога. Не може се рећи да су такви облици представљали поступке свесног сакривања тајне.

Прва права, осмишљена шифра, коришћена да се свесно сакрије садржај тајне поруке, јесте *Скитале*. Према сведочанствима истакнутих историчара-филозофа Херодота (око 484– око 425. год. пре н.е.) и Плутарха (око 45– око 120. год. н.е.) старим Грцима дугујемо проналазак првог познатог система шифровања.

Плутарх пише да се шифра Скитале користила још у доба Ликурга у IX веку пре н.е. али се са сигурношћу тврди да су се за време Лизандроса око 400. године пре н.е. Лицедемоњани служили шифром Скитале да непријатељ не би успео дознати њихове намере.

Први моменат дружења криптографије и математике није настао као последица стварања нових сисема за шифровање већ да се пронађу поступци њиховог „пробијања" и долажења до садржаја шифрованих порука. Уочене правилности јављања слова у језику у погледу њиховог распореда у речима и учесталости понављања били су први знак да ту особину имају и њихови шифарски еквиваленти у шифрованим текстовима. Ово време које обухвата VIII и IX век н.е. може се узети и као почетак статистичког проучавања језика. У то време арапски народи освајају огромна светска пространства, али и намећу нам науку, културу и уопште цивилизацију. Математика у арапским земљама цвета тако да у тој области науке узимају примат. Из те математике потиче и сама реч шифра. Тај период у историји криптографије означава и почетак рада на криптоанализи. Та част припала је арапским народима.

2. Криптографија западне цивилизације

2.1. *Роџер Бекон*

У земљама западне Европе криптографија се јавља почетком средњег века. Продор науке и културе на запад и политичке прилике тога доба условили су брзо ширење и развој криптографије. Политичари и црква ангажују највеће умове за стварање н ових шифарских система. Поред тога, ништа мање се нису бавили и криптоанализом, јер је сплеткарењима на дворовима добро дошло сазнавање туђих тајни.

Част је криптографије што међу великанима може споменути име Роџера Бејкона (Roger Bacon (1214–1294)) једног од највећих научника средњег века. Учећи и радећи на оксфордском и париском универзитету, свестран научник писао је о астрономији, оптици, календару, географији, алхемији, криптографији. Између свих његових бројних радова налази се и једна епистола *Secret Works of Art and the Nullity of Magic* (*Тајна уметничка дела и ништавност магије*) у којој се описује седам начина како се може сачувати тајна, а да је не могу прочитати други људи. Ово дело издато средином XIII века могло би се сматрати и првим радом о шифрама који је написао неко ко се бавио и математиком. Не може се тврдити, међутим, да оно има било какве везе са математиком.

2.2. *Леон Батиста Алберти*

Прекретница у развоју криптографије настаје студиозним проучавањем језика, које започиње италијански научник Leon Battista Alberti (1404–1472). Зато се њему и његовом раду мора посветити посебно поглавље у историји криптографије.

Природњак, бавећи се проучавањем тајнама природе Алберти је задужио човечанство радовима из области архитектуре, математике, физике и многих других области. Као изузетан научник тога доба, доспео је у Ватикан, где је постављен за папског секретара за шифру.

Нећемо се случајно задржати на опису рада овог научника. Идеје које он разрађује и предлаже су по концепцијама о шифрама далеко превазилазиле све дотадашње. Са њима Алберти стоји испред својих савременика. Тако дубоком и студиозном познавању ствари и данас се дивимо. Написао је *Расправу о шифри*, дело које се може сматрати првим правим научним радом о шифри.[2]

Расправа је писана у периоду 1466–1470. године, а по налогу Датоа, секретара у Ватикану за време Павла II (1464–1471). Дато је познавао сву генијалност Албертија те му је ставио до знања да се почне бавити и проучавањем шифара, Ватикану итекако неопходне. Може се рећи да је пронађен прави човек! Начин на који је Алберти почео остваривати овај задатак и данас служи као путоказ онима који почињу рад на стварању шифара, а посебно, који желе да се баве декриптирањем.

[2] У преводу *Расправа о шифри*. Италијански превод налази се у Албертијевом делу *Opere Morali* коју је превео C. Bartoli 1568. године. Рукопис се чува у архивама Ватикана, Кјође (Chioggia) и Венеције.

Изложићемо неколико идеја онако како их је Алберти у својој расправи дао. У уводном делу говори о основној дефиницији шифре, дајући претходно основне појмове које обрађује криптографија, односно шта је предмет саме расправе: „Заиста, у расправи се отвара и одређује пут да би се открило оно што су други желели сакрити. Осим тога пружа ти се начин, као што ћеш видети, да апсолутно сакријеш оно што желиш да држиш у тајности... “.

Своје прво излагање Алберти почиње дефиницијом шифре. Она је једноставна, и садржи право значење те речи: „То је начин писања са заменама које конвенционално означавају оно што су кореспонденти утврдили између себе са циљем да их други не могу разумети... да остане недокучив и најпажљивијим проучавањима и најоштроумнијим истраживачима“.

Алберти је био први човек који је почео истраживање језика не са фонетске стране већ статистичком анализом јављања броја слова у речима и текстовима уопште. Ево како он описује оно што је запазио у језику: „Разматрао сам како се понашају слова у тексту и која је разлика између њих. Могао бих о томе говорити дуго, али, укратко речено, разлика између слогова произилази из распореда и броја слова, и тако се долази до читавих речи које су различите и по фонетској вредности и по значењу. Прво ћемо говорити о броју и о ономе што је везано за бројчане односе... “. Ова *Расправа о шифри* може се сматрати и првим радом лингвистичке статистике.[3]

Колико је Алберти снажан у анализи језика, која треба да послужи као основа за стварање добрих шифара у којима се неће осећати утицај језика, да се не би користио као могућност за декриптирање, толико је проницљив и нов у предлагању шифре. Уноси револуционарно откриће на тај начин што проналази шифру којом се неутралишу све наведене карактеристике језика. Предлажући своју шифру он каже: „Тврдим да најоштроумнији и највештији умови свих људи, целокупно истраживање најинтелигентнијих, било каква способност, вештина, напор остаће узалудни... “.[4]

Шифра се реализује преко два концентрична колута направљена од бронзаних плочица. Већи колут је непокретан, а мањи покретан. Овим се прецизира који се колут окреће у односу на други. Слова алфабета, која су уписана у непокретном колуту, чине алфабет отвореног текста, а слова која се налазе уписана у покретном колуту, алфабет шифарских замена. Операција шифровања врши се тако што се утврди положај покретног колута према непокретном, а затим слова поруке очитана са непокретног

---

[3]Проћиће читавих пет векова да би Албертијева расуђивања о језику послужила Фуксу, Манделъброту, Маркову и другим научницима да развију нову грану статистике, тзв. статистичку лингвистику.

[4]Делови су преведени из [3].

колута замењују словима која се на покретном колуту налазе непосредно испод њих.

Завршавајући овај дивни део о развоју криптографије без претеривања се може рећи да је Алберти највећи ум који историја криптографије може да забележи. Било која област науке има по једног таквог човека. Алберти је то за криптографију. Свим његовим следбеницима остало је само да наставе дело које ће их довести до стварања апсолутно тајне шифре. С правом се може рећи да је овај велики хуманиста криптографију подигао на трон науке.

После Албертија, природно, јавља се читава плејада конструктора нових шифара. Револуционарну новину у криптографији уводи 1553. године Беласо, капелан цркве светог Петра у Риму. Проналази шифру са кључем за шифровање и тиме, као и његов претходник, ствара нови систем замењивања назван полиалфабетски.

Многи научници тога времена бавили су се проблемима криптографије. Међу њима, без сумње, треба поменути истакнутог напуљског физичара Г. Б. Порту (1535–1615). Написао је изванредно дело о криптографији, објављено 1563. године које доживљава шест издања. С правом га називају оцем модерне криптографије.[5]

Порта, као и његови претходници, учинили су много да Италији дугујемо за процват криптографије. Овај период обухвата раздобље које ће трајати све до почетка XVIII века када се поново јавља стагнација криптографије.

2.3. *Ђироламо Кардано*

Криптографија XV и XVI века очигледно није патила, или не бар у толикој мери као данас, да се проналасци у овој области чувају као највеће државне тајне. Како иначе објаснити да су се велике идеје тако брзо шириле, прихватале и иновирале, јер је мало вероватно да су настајале независно једна од друге и да је свака од њих била оригинална творевина аутора. У таквим околностима је живео и радио милански лекар и математичар Ђироламо Кардано (Girolamo Cardano (1501–1576)). Бавио се поред медицине и математике свим и свачим. Имао је несавладиву жељу да га се што више људи сећа и после његове смрти. С обзиром на огроман опус његовог дела није се преварио. Објавио је 131 књигу, а за собом је оставио и још 111 необјављених чланака. Жеља да буде присутан на свим пољима довела га је и до криптографије, у оно време врло популарне и уносне. Зато је свој таленат и разноврсност искористио да и у криптографији остави трага.

Своја запажања, препоруке и предлоге нових поступака шифровања изложио је у две књиге које по садржају нису искључиво намењене

---

[5]Giovanni Battista Porta, *De Furtivis literarum nati-vulgo de ziferis*, Napoli, 1563.

криптографији, већ популарисању наука уопште. У првој *De Subtilitate*, објављеној 1547. године, као и другој *De Rerum Varietate*, објављеној 1557. године, описује и класификира тадашње шифарске системе. Поред тога даје и поуке са основним правилима декриптирања.

Иако је Кардано живео и радио у времену када су у моди биле полиалфабетске шифре у криптографији, много је познатији по једном другом систему шифровања. Измислио је шифру система транспозиције која је по њему добила име Карданова решетка.[6]

Своја математичка расуђивања користио је у криптографији да би одредио број могућних алфабета шифарских замена. Већ тада је тврдио да за алфабет са 27 слова има толико могућних комбинација да би била потребна бројка са 28 цифара (погрешио је за једну цифру, јер $27! = 1{,}0889 \times 10^{28}$). Несумњиво да му је логика математике, посебно алгебре, много помогла да разјасни неке непознанице криптографије и да дâ оно што га је у њој прославило.

3. Криптографија ван граница Италије

3.1. *Вижнерова таблица*

Ако се говори о развоју криптографије немогуће је не споменути радове немачког опата Јоханеса Тритема (Johannes Trithemius (1462–1516)) човека који је после Албертија направио други велики корак у усавршавању полиалфабетских шифара. Без обзира што не припада математичарима, морамо се задржати на ономе што је дао да би се добио континуитет развоја криптографије. Писао је о разним стварима, али је за криптографију значајан по томе што је његова *Polygraphiae* прва штампана књига о криптографији. Штампање ове књиге завршено је 1518. године, две године након смрти аутора.

Тритем је творац и једне шифре у облику таблице чију ће идеју касније искористити француски дипломата Вижнер (Blaise de Vigenere (1525–1596)). То је најдуже и највише коришћена шифра у историји криптографије. Са разним варијантама ове шифре, које су правили следбеници Вижнера и данас се користимо. Ово је прва потпуна полиалфабетска шифра у којој свако слово може, у зависности од кључа, добити било које слово за шифарску замену.

Вижнерова таблица је о облику квадрата. Изнад таблице налази се исписан интернационални алфабет отвореног текста. Испод њега налазе се 26 алфабета шифарских замена. Поређани су тако да је први исписан абецедним редом, а сваки наредни померен је за једно слово улево. Сваки алфабет шифарских замена означен је са леве стране таблице једним словом алфабета. То је алфабет кључа. На овај начин се добија да сваком слову алфабета отвореног текста, према слову кључа, одговара

[6] Опис решетке и поступак шифровања-дешифровања објашњени у [4] и [5].

Алфабет отвореног текста

Алфабет кључа

	ABCDEFGHIJKLMNOPQRSTUVWXYZ
A	ABCDEFGHIJKLMNOPQRSTUVWXYZ
B	BCDEFGHIJKLMNOPQRSTUVWXYZA
C	CDEFGHIJKLMNOPQRSTUVWXYZAB
D	DEFGHIJKLMNOPQRSTUVWXYZABC
E	EFGHIJKLMNOPQRSTUVWXYZABCD
F	FGHIJKLMNOPQRSTUVWXYZABCDE
G	GHIJKLMNOPQRSTUVWXYZABCDEF
H	HIJKLMNOPQRSTUVWXYZABCDEFG
I	IJKLMNOPQRSTUVWXYZABCDEFGH
J	JKLMNOPQRSTUVWXYZABCDEFGHI
K	KLMNOPQRSTUVWXYZABCDEFGHIJ
L	LMNOPQRSTUVWXYZABCDEFGHIJK
M	MNOPQRSTUVWXYZABCDEFGHIJKL
N	NOPQRSTUVWXYZABCDEFGHIJKLM
O	OPQRSTUVWXYZABCDEFGHIJKLMN
P	PQRSTUVWXYZABCDEFGHIJKLMNO
Q	QRSTUVWXYZABCDEFGHIJKLMNOP
R	RSTUVWXYZABCDEFGHIJKLMNOPQ
S	STUVWXYZABCDEFGHIJKLMNOPQR
T	TUVWXYZABCDEFGHIJKLMNOPQRS
U	UVWXYZABCDEFGHIJKLMNOPQRST
V	VWXYZABCDEFGHIJKLMNOPQRSTU
W	WXYZABCDEFGHIJKLMNOPQRSTUV
X	XYZABCDEFGHIJKLMNOPQRSTUVW
Y	YZABCDEFGHIJKLMNOPQRSTUVWX
Z	ZABCDEFGHIJKLMNOPQRSTUVWXY

Алфабети шифарских замена

Вижнерова таблица

по једно слово као шифарска замена. Шифровање и дешифровање врши се по принципу координата. Слово кључа одређује ред, а слово отвореног текста стубац поља из кога се очитава шифарска замена.[7]

3.2. *Криптографија Француске и François Viet*

У свим земљама западне Европе криптографија се брзо развијала.

[7] Вижнерова шифра је леп пример којим се може показати потпуно математизирање једне шифре. Ова шифра у алгебарском смислу представља мултипликативну (Келијеву) таблицу према операцији сабирање по мод. 26, када се између слова алфабета и низа природних бројева укључујући и нулу, уведе кореспонденција, тако да се сваком слову додели природним редом број. Може се показати да скуп $\mathcal{A} = \{A, B, \ldots, Z\}$ са уведеном операцијом сабирање по мод. 26 представља комутативну групу.

Шифре тога времена носе печат италијанске школе криптографије која је у то време имала примат. На дворовима свих земаља било је толико интрига да се стално морало радити на усавршавању шифара не би ли се са њима успеле оне сакрити. Како су дворови имали сву власт они су такође желели и да дознају тајне других па су за ту сврху ангажовали, у то време, највеће умове науке да им декриптирају ухваћене поруке. Међу њима се својим умећем истиче Франсоа Вијет (François Viet (1540–1603)).

Вијет, правник, бавио се математиком из хобија што не умањује његов допринос, посебно у алгебри. Као правник напредује у државној администрацији и у 49. години живота долази на положај саветника парламента (високог суда) у Туру (Tours) и до части тајног крунског саветника. За ово, можда може да захвали и криптографији која му је вероватно помогла да се пење у државној хијерархији. Он је, наиме, већ 1588. године декриптирао неке шпанске шифроване депеше. Тако се прочуо и краљ Анри IV га је зато и богато наградио.

Колико је криптографија помогла Виету да се у државној администрацији подигне доста високо, толико му је можда дошла и главе. Наиме и поред великих успеха које је имао на пољу декриптирања његова самоувереност и таштина довели су до тога да му је један дипломата, који је успео да се спријатељи сњим, извукао поверљиве информације о томе да декриптира шпанске и немачке шифроване поруке. За то је сазнао Филип II и обавестио Папу како Французи, читају његова писма, јер се служе црном магијом, како је то црква приписивала онима које се баве криптографијом. То је било довољно да се сруши и такав човек какав је био Виет.

3.3. *Џон Валис — оснивач енглеске криптоанализе*

Слично као што је француски двор ангажовао Вијета, то чини и енглески, са својим до тада највећим математичарем Џоном Валисом (John Wallis (1616–1703)). За време пуританске револуције ангажују га да одгонетне једну шифровану поруку. Пошто је успешно одгонетнуо поруку, Валиса је ово сазнање, да проналази нешто ново, толико заинтересовало за криптоанализу и њене методе да јој се предао свим својим жаром. Тако се родио оснивач енглеске криптоанализе. Успеси које је Валис постизао у криптоанализи, нарочито за време грађанског рата 1643. године, када је декриптирао неколико порука, које му је послао краљ Карло I, донели су му место жупника цркве Светог Габријела у Лондону, а затим секретара Парламента у Вестминстеру. захваљујући криптографији, све више напредује, како на административном, тако и научном пољу. И даље се бави декриптирањем и постиже све више успеха, а то му доноси 1649. године катедру геометрије на универзитету у Оксфорду. На овај начин је криптоанализа платила дуг математици дарујући јој изузетног човека да и у математици настави свој плодоносни рад.

Рад на криптоанализи Валис наставља и поред тога што је у међувремену обогаћивао математику низом открића као што су: *Аритметика бесконачних величина* (*Aritmetica infinitorum*, 1655), рад на прерастању алгебре у анализу и др.

Иако се о успесима декриптера не прича јавно, име *Валис* није могло, а да не пређе границе Енглеске. Преко Хановерског кнеза замољен је да преговара, ништа мање него са највећим немачким математичарем Лајбницом (Gottfried Willhelm Leibnitz (1646–1716)) о томе да прими на школовање неколико Немаца које би научио вештини декриптирања. Избегавајући овај посао, а на Лајбницово инсистирање, на крају је рекао да то не може урадити док краљ не дозволи да његово знање пређе границе Енглеске. На овај начин у историју криптографије уписујемо и једно од највећих имена математике. Нема, међутим података да се и Лајбниц непосредно бавио криптографијом.

Енглеску криптоанализу Валис је задужио још једним значајним радом. Као сваки добар педагог није дозволио да после његове смрти 28. јуна 1703. године Енглеска остане без добрих декриптера. Зато се још за живота побринуо да овој вештини научи свога унука Blencowen-a. Преносечи ова знања с колена на колено Валиси су овим пословима владали више од сто година.

3.4. *Даљи развој енглеске криптографије*

Ланац енглеских математичара који су се бавили криптографијом наставио је Чарлс Бебиџ (Charles Babbage (1792–1870)), професор математике универзитета у Кембриџу. То је први човек који је увео математичке поступке у криптографију. Користио се алгебром тако што је уводио само њему познате формуле за декриптирање. Тиме је унео још једну неизвесност, а за следећа поколења истраживања да ли је тачно оно што је радио и какав је пут којим је долазио до решења? Није објављивао оно што је писао па се зато не може ни проценити његов математички допринос развоју криптографије.

Интерес за криптографију Бебиџу се вероватно јавио када је истраживао јављање слова у текстовима. Ово му је касније послужило за један од његових многобројних хобија. Забављао се декриптирајући криптограме објављиване у малим огласима дневних листова. То је била мода тога времена па су се и љубавни састанци заказивали шифровано. У аутобиографији *Цртице из живота једног филозофа* (*Passages from the Life of a Philosopher*), Бебиџ пише и о криптографији, односно колико се њоме бави „трошећи више времена него што она заслужује“.

Знатно садржајнији, оригиналнији и значајнији за развој криптографије био је Чарлс Витстон (Charles Wheatston (1802–1875)), такође „свештар“ наука. Овај истакнути британски физичар познат је као проналазач шифре тзв. биграмског замењивања. Интересантно је да шифра није коришћена за његова живота ни у војсци ни дипломатији Британије. Посебно добре карактеристике те шифре омогућиле су њену примену знатно касније, у мери коју она то и заслужује.[8] Шифра не носи назив по њеном проналазачу, већ по имену лорда Лајон Плејфер (Lyon Playfair (1818–1898)), који је ту шифру око 1890. године препоручио британском Министарству иностраних послова, тако да и данас носи његово име.

Поред већ споменуте Плејферове шифре Витстон је конструисао и једну справу за шифровање коју је назвао *Cryptograpf.* На светској изложби у Паризу 1867. године изложио је ову справу, а њена једноставност, аутоматичност и за лаике добра криптографска сигурност привукла је пажњу посетилаца.

4. Криптографија у Америци

4.1 *Шифра уједначене фреквенције Бенџамина Франклина*

Нећемо се овде дуже задржавати на томе како је настала криптографија са супротне стране Атланског океана у Америци. Циљеви и потребе за тајним дописивањем исти су као и код Европљана, а и методе се нису ни у чему разликовале што је доказ да је пренета из Европе. Допринос америчких криптолога, као што ће се видети, није ништа мање значајан од осталих. Шта више у најновијој историји постигли су такве резултате да су преузели примат као што су то некада имали Италијани.

Међу истакнутим америчким математичарима и физичарима чије име треба да уђе у историју криптографије је и Бенџамин Франклин (Benjamin Franklin (1706–1790)). Један је од оних криптолога који је сматрао да је неутралисање неједнаких фреквенција јављања слова, односно њихових шифарских замена, довољно да би шифра била сигурна. Сматрао је да се тиме избија из руку основно оружје декриптера којим се разбијају моноалфабетске шифре. Ова идеја не потиче од њега, јер се још почетком XVI века јављала једна таква шифра којом се постиже делимично неутралисање разлика у фреквенцијама јављања шифарских замена. Међутим, значајан је по томе што је 1781. године дошао на оригиналну идеју да направи шифру уједначене фреквенције јављања шифарских замена, тзв. хомофонску шифру. То су шифре у којима се фреквентнијим словима додељује по више различити шифарских замена. Према томе, при шифровању слова би се замењивала неком од шифарских замена придодатих словима. Тиме је постигао да се све шифарске замене јављају подједнак број пута, јер су и додељиване према тексту који с обзиром на дужину даје већ стабилну фреквенцију слова. Другим речима, свако слово је добило онолико различитих шифарских замена колико је његово релативно јављање у тексту. На тај начин је постигнута равномешрна расподела фреквенција

[8] Детаљна студија о биграмским шифрама може се наћи у књизи: V. M. Boversa, *Practical Cryptaanalysis*, Vol. I, *Digraphic Substitution.*

слова у шифратима. Није међутим, имао у виду и остале особине јављања слова о којима је још Алберти писао. Без обзира на ову слабост, за коју и многи после њега нису знали, Франклин је учинио крупан корак у усавршавању шифара, а својом оригиналном идејом обогатио ризницу криптографије.

4.2. *Алгебарски поступци шифровања*

Усавршавање шифара довело је још једног талентованог математичара у окриље криптографије. То је Американац Лестер Хил (Lester S. Hill (1891–1961)), један из плејаде оних криптолога који су овој науци дали математичко, тачније алгебарско обележје, а следбеницима надахнуће за даљи рад.

Лестер Хил, асистент математике на Хантер Колеџу (Hunter College) у Њујорку објавио је 1929. године у часопису *American Mathematical Monthly*, расправу *Cryptography in an Algebraic Alphabet* (*Криптографија заснована на алгебарском алфабету*). Докторирао је математику на Универзитету Јејл (Yale), а предавао на Универзитетима Монтане (Montana) и Мејна (Maine). Хил је врло оригинално увео алгебру у криптографију. Једноставно, за шифровање слова користио је систем линеарних једначина облика $y_i = a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\cdots+a_{in}x_n \pmod{26}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, где су y_i шифарске замене за слова поруке x_i којима су додељене бројне вредности према некој унапред одређеној трансформацији, а a_{ij}, $j = 1, 2, \ldots, n$ такође унапред одређене бројне вредности. Поступак шифровања сводио се на решавање система од n линеарних једначина са n непознатих. Разумљиво да је шифровање утолико сложеније уколико је n веће па се зато обично своди на што мање n (на пример 3 или 4). Поступак дешифровања одређен је системом једначина облика $x_i = b_{i1}y_1 + b_{i2}y_2 + \cdots + b_{in}y_n \pmod{26}$ где су b_{ij} такође унапред одређене бројне вредности. Да би овај поступак поједноставио уместо једначина Хил је увео матрице па је тако и систем добио име матричко шифровање.

Значај Хилових радова је у томе што је после њега све више математичара почело да се интересује за проблеме криптографије што ће постепено довести до њене потпуне математизације.

5. Декриптерска делатност

Трагајући за оним декриптерима који су највише допринели развоју метода криптоанализе долазимо до двојице, који нису били професионални математичари, али чија имена и радове не можемо мимоићи. Први је немачки официр Фридрих Касиски (Friedrich Kasiski (1805–1881)) који 1863. године објављује књигу од 95 страница *Die Geheimschriften und die Dechiffrir-kunst* (*Тајна писма и уметности декриптирања*). Ова књига, мала по обиму, епохална по садржају, даје одговор на оно што је декриптере мучило 300 година. Све је то описано на око 70 страница књиге.

Сажето, овај поступак декриптирања састоји се у томе да се из криптограма групишу шифарске замене према знацима кључа и одреде њихове дистрибуције фреквенција из којих се затим одређују отворена значења за шифарске замене. Метод је општи и важи за све полиалфабетске шифре. То је оно што су сви прижељкивали од када је створена Вижнерова шифра.

Други знаменити човек је холандски научник широког спектра Аугуст Керхофс (Auguste Kerckhoffs (1835–1903)). Изузетно образован и знатижељан непрекидно је трагао за новим стварима. Дошао је до криптографије и подарио јој 1883. године дело *La Cryptographie militaire* (*Војна криптографија*). У овој бриљатној књизи описао је општи метод декриптирања полиалфабетских шифара независно од дужине или структуре кључа за шифровање. Једини услов је да се поседују два или више криптограма шифрована истим кључем за шифровање.

Увиђајући користи од декриптирања многе земље уводе организовану декриптерску службу. Министарства војске и иностраних послова стварају посебне бирое, обично у оквиру одељења обавештајних служби. Њихов задатак је хватање, прикупљање и декриптирање тајних порука других земаља. Тако је у оквиру британске обавештајне службе (Intelligence Service) отворен посебан криптографски одсек којим је руководио чувени енглески математичар Алфред Јуинг (Alfred Ewing). Одсек је носио назив „40 O.B.“[9]

Свакако највећи успех енглеске „собе 40“ је декриптирање *Цимермановог телеграма*, чији је садржај приморао Америку да Немачкој објави рат. То је било 2. априла 1917. године. Наследници Валиса добро су обавили посао.

Јуинг се није дуго задржао на челу ове организације, јер му је већ 1916. године понуђен положај ректора универзитета у Единбургу, да би га следеће године и прихватио.

Двадесет година касније уочи и за време другог светског рата у добро организованој групи смештеној у месту Блечлију недалеко од Лондона, одвијала се операција названа УЛТРА. Задатак ове групе је био „разбијање“ шифре реализованој у чувеној немачкој машини ЕНИГМА. Група је била образована од талентованих математичара Тимана, Александера, Кнокса и Тјуринга којим се касније придружују још двојица пољских математичара Марјан Рајевски и Хенрик Зигалски.

Иако није потпуно расветљена улога Алана Тјуринга у овој најчувенијој тајни другог светског рата, познато је да је његово знање и генијалност у конструкцији рачунских машина баш овде до шло до изражаја. Овај ћутљив, детињаст, неконвенционалан и неконформистичан човек био је задужен да конструише рачунску машину која ће опонашати ЕНИГМУ. И успео је у томе. Ништа мања заслуга није ни осталих математичара ове групе. О њиховом раду и успеху данас би се могао написати роман.

---

[9]Room 40 old Building — соба 40 у старој згради.

Хиљадама километара далеко од Блечлија, на пацифичкој обали одигравала се слична драма. Личности су друге, а међу њима једна изузетна — Виљем Фридман (William Friedman). Ангажован од Министарства рата 1921. године почиње професионалну каријеру криптолога у којој ће остати све до одласка у пензију 1955. године. Иако је радио и на непосредном декриптирању, нарочито јапанских шифара, права вредност његовог рада, као последица истанчаног смисла за анализу, је постепено рађање научних метода на којима ће се темељити сав даљи рад у криптоанализи. Написао је осам монографија од којих је осма, објављена у Паризу 1922. године под насловом *The Index of Coincidence and Its Applications in Cryptography* (*Индекс коинциденције и његова примена у криптографији*).

Ова књига у многоме већ указује да је правац којим ће се кретати криптоанализа, коришћење статистичких метода.

Непосредно после објављивања монографије Фридман усавршава овај метод и назива га „kappa test“. Овим су декриптери добили оно што су некад интуитивно решавали. Уместо да решавање заснивају према неком осећају и од случаја до случаја, сада су добили поуздану рачунску методу.

Други велики Фридманов допринос криптографији је у томе што је умео да одабере сараднике који ће успешно наставити његово научно дело. Већ на самом почетку свог деловања у Служби везе он ангажује младе математичаре, међу којима су били Френк Роулит (Frank Rowlet), Соломон Кулбек (Solomon Kullback) и Ејбрахам Синков (Abraham Sinkov). Убрзо ће се показати да је и овде направио прави избор, јер ови гимназијски професори математике из Њујорка, касније доктори математичких наука, заједно са својим избирачем створиће нову криптографију са темељима од једне чврсте науке каква је математика.

Фридман је своју криптолошку каријеру наставио у НСА у којој је од 1952. године када је његова служба прешла у ову агенцију.[10] У њој је имао звање главног техничког саветника. Делатност ове организације је мање више позната. Ипак мало ко може да замисли какав научни потенцијал запошљава. Међу њима има на стотине врсних математичара. Навешћемо само нека од тих имена: Howard T. Engstrom, доктор математичких наука са Универзитета Yale, где је у периоду 1926–1941. био његов професор, а до доласка у НСА потпредседник компаније Remington Rand Inc.; Louis W. Tordella, доктор математичких наука са Универзитета Illinois, специјалиста за алгебру, теорију бројева и теорију скупова. Пре доласка у НСА био је професор на Loyal University у Чикагу. Howard H. Campaigne, доктор математичких наука, специјалиста за статистику и тзв. хипер-скупове. Од 1957. године директор уреда за истраживање и

[10]NSA — National Security Agency. Основна 1952. године као засебна организација Министарства одбране САД. Извршно је тело за обављање одређених специјалних техничких послова везаних за обавештајну делатност САД.

развој који представља круну криптологије САД. Walter Jacobs, доктор математичких наука, специјалиста за статистику.

Не би било поштено не споменути немачку групу математичара у којој су се, у оквиру њиховог криптографског бироа Pers Z, истицали доктори математичких наука Вернер Кунце (Dr. Werner Kunze), Готфрид Кете (Dr. Gottfried Köthe), после рата ректор универзитета у Хајделбергу и Ханс Рорбах (Dr Hans Rohrbach), касније уредник чувеног научног часописа *Journal für die reine und angewandte Mathematik*. Ови искусни математичари пришли су раду који је водио ка потпуној математизацији криптографије. Колико су у томе успели сведочи рад Ханса Рорбаха *Mathematische und Maschinische Methode in der Kryptologie* (*Математичке и машинске методе у криптологији*). Садржај овога рада и услови под којима је написан заслужују пажњу да буду детаљније обрађени.

У историји криптографије два човека су направила прекретнице у њеном развоју: Алберти (L. B. Alberti) и Шенон (C. E. Shannon). Са првим смо почели, а са другим ћемо завршити овај приказ који би могао да носи и наслов *Криптографија од Албертија до Шенона*.

Свој истраживачки рад Шенон је почео у чувеном Institute for Advanced Study (Институт за развојне студије) Универзитета Принстон (Princeton). У овом институту се задржао само годину дана да би се затим запослио у фирми American Telephone & Telegraph Company (ATT), односно њеном научноистраживачком одељењу Bell Telephone Laboratories. Овде га затиче рат. Како су ратне потребе захтевале нове проналаске, како у заштити тајности командовања, тако и у преносу информација уопште, то се у овом тренутку „прави човек нашао на правом месту". Упоредо радећи на оба задатка открива читав низ теоријских чињеница. Све то објављује у два рада: *A Mathematical Theory of Communication* (*Математичка теорија комуникација*) и *Communication Theory of Secrecy Systems* (*Теорија комуникација тајних система*). Радови су објављени 1948. и 1949. године у стручном часопису Bell System Technical Journal који је припадао Bell Laboratories. У ствари, завршени су још за време рата 1944. године, али нису објављени, јер су имали карактер тајних докумената. Настављајући свој плодоносан научноистраживачки рад Шенон од 1956. године ради као професор на Massachusetts Institute of Technology.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Юшкевич, А.: *История математики в средние века*, ГИФМЛ, Москва, 1961.

[2] Kahn, D.: *Šifranti protiv špijuna*, prevod s engleskog, knj. 1–4, Centar za informacije i publicitet, Zagreb, 1979. Наслов оригинала: *The Codebreakers*, Macmillan Publ. Co, New York, 1976.

[3] gen Sacco, L.: *Un primato italiano la crittografia nei secoli XV e XVI*, Istituto storico e di cultura dell'Arma del genio, Roma, 1958.

[4] gen Sacco, L.: *Manuale di crittografia*, 3ª ed., Istituto Poligrafico dello Stato, Roma, 1947.

[5] Way, P.: *Codes and Ciphers*, Aldus Books, London, 1977.

[6] Жељковић, J.: *Теорија информација са применама у криптографији*, ВИЗ, Београд, 1979.

[7] Pratt, F.: *Histoire de la cryptographie*, Paris, 1940.

Aleksandar TRIFONI

CONTRIBUTION OF THE MATHEMATICIANS TO THE EVOLUTION OF CRYPTOLOGY

Cryptology from its beginning draw the attention of many scientists, writers and statesmen. Among them there were renowned mathematicians, who devoted to the cryptology their time and effort, some from curiosity, and others as professionals. About that it was written only a little, often due to incomprehensible reasons. Because of that, when one speaks or writes about the life of mathematicians, there are no data if they contributed, and in what degree, to the development of cryptography, now by right considered as a scientific discipline. Anyway, mathematicians have greatest merits for its development. The author wanted here to fill this gap and activate investigations, which may be difficult, but anyway worth the efforts.

In the paper we give a survey of the development of cryptology from its beginnings to the World War II. We present it from the fifteenth century from the works of Italian scientist L. B. Alberti up to C. Shannon who during the World War II gave foundations for the complete mathematization of cryptology. Parallel to the development of new mathematical disciplines the cryptology had its evolution by introducing of mathematical methods in the analysis and creation of ciphers. The author also presents some examples of ciphers that contributed to the development of cryptology, and that were invented by renowned mathematicians.

dr ALEKSANDAR TRIFONI
11000 Beograd — SSNO

Математички институт — Београд
Историја мат. и мех. наука 6 (1992)
Mathematical Institute — Belgrade
History of Math. and Mech. Sc. 6 (1992)

Бранислав ЧАБРИЋ

ТРАЈАЊЕ ТРАГАЊА ЗА ТРИСЕКЦИЈОМ УГЛА

Стари грчки математичари много су се бавили конструктивним геометријским задацима. Они су многе проблеме које ми данас решавамо алгебарски решавали чисто геометријски, а при конструкцији су дозвољавали себи само упоребу лењира (нескалираног) и шестара. Порекло овог услова је у томе што су они сматрали праву и круг као савршене линије. Зато су већ у њихово време били уочени неки конструктивни задаци који се на тај начин не могу решити. Неки од тих задатака су временом постали чувени, а један од њих је проблем трисекције угла. Проблем трисекције угла се састоји у томе да се само помоћу шестара и лењира подели дати произвољни угао на три једнака дела. Тај проблем нема решења, тј. није могуће наћи поступак за поделу произвољног угла на три једнака дела само помоћу шестара и лењира. Али то је доказано тек у прошлом веку (P. Wentzell 1837). Дотле су, међутим, не само многи чувени математичари, него и многи слаби познаваоци математике покушавали да га реше, ови последњи често и зато што су за решење расписиване велике награде. Сада се пак математичари не баве више тим проблемом. Њиме се баве још неки пут само људи који не знају математику, па им се чини да могу наћи решење и за оно што је нерешиво. Извести, међутим, трисекцију угла другим инструментима, који цртају друге сложеније алгебарске криве линије, могуће је. Шестаром и лењиром задатак се, за произвољни угао, може решити само приближно, и то по жељи великом тачношћу [1].

Овај чувени проблем, који је од вајкада занимао и математичаре од заната и лаике, занимаће и убудуће бар оне који не знају тачно у чему се они састоје, али знају толико да је то нешто око чега су се ломила многа копља, па је ипак посао остао несвршен. Први појам о тим проблемима бар привидно је приступачан свакоме, па и ономе који једва има прве, основне, геометријске и рачунске појмове. И та је привидна приступачност и чинила да су о њима мислили и највише расправљали баш они који су за то најмање позвани, и чиниће да тако буде и у будућности. Прави смисао проблема јасно је само онима који су довољно упућени у питања математичке анализе, а такви се сигурно неће више њима бавити.

У историји париске Академије наука од 1775. год. налази се записана одлука Академије, да више неће улазити у испитивање решења проблема квадратуре круга, трисекције угла и удвајања коцке, која би јој била поднета ма од чије стране. У објави, Академија одлучно пориче да је у Академији резервисана знатна сума новца за награду срећном проналазачу решења једног од тих проблема, стоји од речи до речи ово: „Стално се проносе гласови да је француска влада одредила велику награду ономе који реши једно од горњих питања. Верујући у те лажне вести, маса људи лишена сваког математичког знања, одаје се таквим беспредметним пословима, запуштајући своје праве послове и своје породичне бриге. Њихова упорност прелази у лудило, које је утолико теже за лечење што су проналазачи, који немају појма о правом смислу проблема, и који су неспособни да разумеју ни о чему се ради, убеђени да их Провиђење нарочито одредило да траже и нађу решење проблема и да они за своје успехе у томе имају да захвале једној врсти инспирације која не наилази на праве научнике“ [2].

Прво научно откриће и велико разочарење, нашег великог научника светског гласа Милутина Миланковића било је управо решење проблема трисекција угла. Наиме, после матуре (јуни 1896), а пре одласка на студије грађевинске технике, октобра месеца у Беч, имао је доста времена. То време искористио је да посети рођаке и пријатеље породице Миланковић у Београду. Том приликом набавио је и свеску LI „Гласа Српске краљевске академије“ која је те године изашла из штампе. У тој свесци „Гласа“ нашао је опширну расправу (72 странице) академика Љубомира Клерића *Тракториограф и конструисање Лудолфовог броја π и основице „е“ природних логаритама.* У том раду је било на коректан начин показано да се класични проблем ректификације (одн. квадратуре) круга, истина *само употребом шестара и лењира не може решити*, али се другим инструментима, његовим тракториографом који црта трактрисе, трансцендентне криве, то може постићи. Миланковић каже у својим *Успоменама* [3]: „Већ сам тај наслов ме живо заинтересовао, јер сам, и са уским знањем средњошколске математике, могао да схватим о чему се у тој расправи ради, тим пре што ме је мој професор Варићак лично обавестио о нечем што није сматрао интересантним за остале моје другове“. То обавештење се односило на три чувена стара проблема, и то су поред квадратуре круга, трисекција угла и удвостручење коцке. Било је већ доказано да се ниједан од ових проблема не може решити само шестаром и лењиром, тј. да се не може никако свести само на цртање правих линија и кругова. Клерић је показао да се за проблем квадратуре круга то може постићи цртањем трактрисе. На Миланковића је то начинило велики утисак — чак и само упознавање са једним новим инструментом, јер он до тада осим шестара и лењира друге није познавао. Стога је себи поставио задатак да на неки сличан начин реши трисекцију угла „која је лакши проблем“ како он каже. Он је размишљајући о томе у својој башти на дрвеној клупи „која је тог дана била орендисана и имала глатку белу површину“ нацртао решење траженог проблема. Међутим, несрећа је била у томе што је тај проблем већ био решен, што он, наравно није знао. Миланковић је проблем трисекције угла решио у истом оном смислу у којем је Клерић решио проблем квадратуре круга — помоћу криве која се зове конхоида [3].

Међу бројним теоремама у геометрији троугла посебно је занимљива Морлејева (Morley) теорема. Прво по очигледности чињенице коју саопштава (не и доказа!) и још више по времену када је откривена, зашта је вероватно разлог немогућност трисекције угла помоћу шестара и лењира. Први пут се за њу сазнало у прошлом веку, када је о свим могућим „значајним“ тачкама, линијама и круговима, а углавном све било познато. Теорема тврди да ако се у ма ком троуглу конструишу полуправе које сваки од углова деле на три једнака дела, онда ће три пресечене тачке одговарајућих парова полуправих бити темена једнакостраничног троугла. Џон Рикард (John Rickard) из Велике Британије је 1977. године посматрао пресеке не само унутрашњих, већ и спољашњих углова троугла. При томе је уочио да постоји 27 начина како да се образују тројке пресечених тачака парова полуправих и доказао је да се у 18 од тих случајева добија једнакостраничан троугао [4]!

Потребне су детаљне анализе приликом одређивања смисла и домета неког проблема и резултата. Већ споменуто питање квадратуре круга довело је до појма трансцендентног броја и до веома значајне теорије трансцедентних бројева. А то је изгледало као задатак, који је са гледишта своје формулације наивнији од многих средњошколских задатака. Има толико незаобилазних резултата да је очиглендо да би наука битно другачије изгледала да није њих. Далеко од тога да се ово може рећи за све резултате, што ипак не значи њихову деградацију. Ако је резултат тривијалан, ни то само по себи не значи да се до њега врло лако дошло. Може се до тривијалног доћи и после веома тешких спекулација, а прост поступак до кога се дошло у прави час може довести до нечег значајног. И у математици временска дистанца у многим случајевима омогућава коначан суд. Нешто што је изгледало врло важно и сложено пређе у неку од скромнијих категорија. Нешто на изглед тривијално оправда се неким касније уоченим посебним осветљењем. Има и манипулација, које су ипак реткост, да се на свестан и систематски начин безначајни искази заодевају у вишу научну форму.

У елементарној геометрији не постоји алгоритам којим би се, у општем случају, могло одредити који се конструктивни задатак може решити помоћу лењира и шестара, а који не; одговор на ово питање добија се применом аналитичке геометрије, уз теорију алгебарских једначина. Анализирајући елементарне конструкције, лако је увидети да се сваки конструктивни проблем може свести на одређивање тражених тачака, полазећи од датих тачака у фигури. Свака нова тачка у процесу конструкције добија се било у пресеку две праве, било у пресеку праве и круга, или у пресеку два круга. Праве у аналитичкој геометрији представљају се линеарним једначинама облика

$$ax + by + c = 0, \tag{1}$$

а кругови једначинама другог степена облика

$$x^2 + y^2 + dx + ey + f = 0. \tag{2}$$

Према томе, проналажење координата нових тачака своди се на решавање система од две једначине, од којих је свака било типа (1), било типа (2) [5]. Аналитичким решавањем проблема трисекције угла добија се (позната) тригонометријска једначина

$$\cos\alpha = 4\cos^3\frac{\alpha}{3} - 3\cos\frac{\alpha}{3}$$

која супституцијом

$$\cos\alpha = a \qquad \text{и} \qquad \cos\frac{\alpha}{3} = x,$$

прелази у алгебарску једначину

$$4x^3 - 3x - a = 0. \tag{3}$$

Може се показати да се ова кубна једначина за произвољну вредност a, тј. угла α не може разложити на систем од две једначине, типа (1) и (2). То значи да није могуће помоћу шестара и лењира поделити угао на три једнака дела. Када је угао $\alpha = 90°/2^n$, где је $n = 1, 2, \ldots$, једначина (3) се може разложити на једначине типа (1) и (2), тј. трисекција се може извршити помоћу шестара и лењира [6, 7].

Поставља се питање да ли се у ту сврху могу конструисати неки други погодни инструменти. Тражећи одговор на ово питање дошло се до конструисања посебних прибора, названих трисекторима [8, 9]. На слици 1 приказан је оригиналан трисектор који сам конструисао. Састоји се од плоче у облику четвртине круга полупречника R, која је постављена (на зиду) тако да се правац CB_0 поклапа са вертикалом. Полуга a је обртна око тачке C и може да се фиксира у тачки B тако да заклапа задати угао α са вертикалом CB_0. Полуга b дужине R и масе m, може да се обрће око тачке B без трења. Полуга c дужине $2R$ и масе m може да се обрће око тачке C без трења. Ова полуга има уздужни прорез дуж кога може да клизи чиода A без трења. Када се полуга a постави под углом α у односу на вертикалу CB_0 и чиода полуге b у прорез полуге c, систем полуга b и c ће заузети равнотежни положај у коме имају минимум потенцијалне енергије. Може се рачунски показати да ће у равнотеженом положају полуга c заклапати угао $\frac{1}{3}\alpha$ са вертикалом, при чему је α угао који полуга a заклапа са вертикалом и унапред се задаје. Овако конструисан трисектор може да дели углове до 90°.

Доказ да је рад инструмента исправан. Тежиште полуге b (T_b), слика 2, налази се на растојању $\frac{1}{2}R$ од тачке B, док тежиште полуге c (T_c) на растојању R од тачке C. Потенцијална енергија, у пољу силе земљине теже, полуга b и c у односу на положај када слободно (вертикално) висе дата је изразом

$$U_{bc} = mgh_{T_b} + mgh_{T_c}, \tag{4}$$

где је

$$h_{T_b} = \frac{R}{2}(1-\cos\beta), \qquad h_{T_c} = R(1-\cos\gamma). \tag{5}$$

Пошто је троугао ABC једнакокраки, следи да је

$$\alpha - \gamma = \beta + \gamma, \qquad \text{тј.} \qquad \beta = \alpha - 2\gamma. \tag{6}$$

Заменом релације (5) и (6) у (4) добијамо

$$U_{bc} = mg\frac{R}{2}[1-\cos(\alpha-2\gamma)] + mgR(1-\cos\gamma),$$

где је g убрзање силе земљине теже, а α угао који делимо на три једнака дела. Положај стабилне равнотеже полуга b и c налазимо из услова минимума потенцијалне енергије тј.

$$\frac{\partial U_{bc}}{\partial\gamma} = 0 \qquad \text{и} \qquad \frac{\partial^2 U_{bc}}{\partial\gamma^2} > 0,$$

одакле следи

$$\sin(\alpha-2\gamma) - \sin\gamma = 0, \tag{7}$$

$$2\cos(\alpha-2\gamma) + \cos\gamma > 0. \tag{8}$$

Из једначине (7) налазимо да је $\gamma = \frac{1}{3}\alpha$. Заменом овог решења у (8) види се да је ова неједнакост задовољена, што значи да у положају стабилне равнотеже полуга c заклапа угао $\gamma = \frac{1}{3}\alpha$ са вертикалом.

Пријатна ми је дужност да захвалим проф. др Драгану Трифуновићу, руководиоцу сталног Семинара за историју математичких и механичких наука, Математичког института у Београду, за подстицај, подршку и детаљно упућивање на драгоцену литературу.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Calandreau, E., *Célèbres Problèmes Mathématiques*, Изд. Albin Michel, Paris (1949), стр. 299.

[2] Петровић, М., *Квадратура круга и трисекција угла пред париском академијом наука*, Српски књижевни гласник, књ. 24, бр. 5 (1928), стр. 368.

[3] Миланковић, М., *Успомене, доживљаји и сазнања. Детињство и младост (1879–1909)*, Изд. САНУ, Београд (1979), стр. 156.

[4] Крстић, С., *XIX интернационална математичка олимпијада*, Мат. физ. лист, XXVIII, бр. 1 (1977/78), стр. 5.

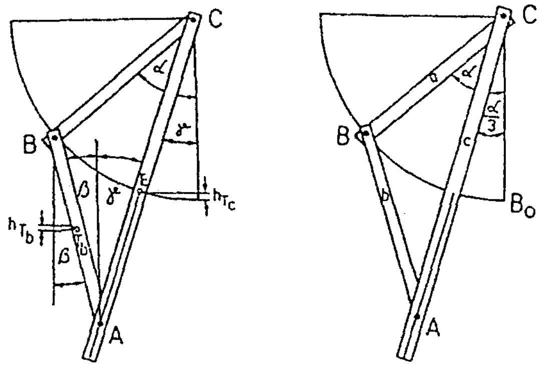
[5] Cofman, J., *Rešavanje odabranih konstruktivnih zadataka pomoću lenjira i šestara*, Zavod za fiz. i mat., Univ. u N. Sadu (1964), стр. 9.

[6] Klein, F., *Famous Problems and other Monographs*, Chelsea Publ. Comp., New York (1980), стр. 13.

[7] Кутузов, Б. В., *Геометрия*, Изд. Учпедгиз., Москва (1955), стр. 67.

[8] Čabrić, B., *Mechanical device for angle division into three equal sections*, Math. Educ. (Japan), LXXI, No. 5, 33 (1989).

[9] Čabrić, B., *A device for angle trisectioning*, Arkhimedes (Finska), 1, 24 (1991).



Branislav ČABRIĆ

LASTING OF SEARCH FOR ANGLE TRISECTION

Among numerous problems which arose in mathematics in the course of its historical development there were such famous ones which for centuries were the subject of interest of professional mathematicians and also of numerous amateur mathematicians. These problems are: the squaring of the circle, the trisection of an angle and the duplication of the cube; they had been formulated by the ancient Greek mathematicians already in the fourth century before Christ. The paper contains some interesting details relating to the history of the angle trisection presented at. the Parisian Academy of Science as well as some details on the first scientific discovery by our great scientist Milutin Milanković, which is in fact the solution of the problem of the trisection of an angle. On the basis of the angle trisection a theorem in the field of the geometry of an triangle has been recently discovered. Analytical solution of the problem of the trisection of an angle gives a cubic equation which means that the angle trisection cannot be solved with ruler and compasses only. In addition, an original trisector constructed by the author of this paper is also described.

dr BRANISLAV ČABRIĆ
Prirodno-matematički fakultet, p.p. 60
34000 Kragujevac

Математички институт — Београд
Историја мат. и мех. наука 6 (1992)
Mathematical Institute — Belgrade
History of Math. and Mech. Sc. 6 (1992)

Радомир ЂОРЂЕВИЋ

О АДАМАРОВИМ СХВАТАЊИМА ПРИРОДЕ СТВАРАЛАЧКОГ ПОСТУПКА У МАТЕМАТИЦИ

> *Ништа није важније него видети изворе проналажења који су по мом мишљењу интересантнији од проналазака самих.*
>
> **Лајбниц**

Жак Адамар (Hadamard, 1865–1963) је истакнути француски математичар чије интересовање је умногоме прелазило границе науке којој се посветио. У тежњи да разјасни потпуније извесне проблеме управо из области математике он се позабавио и питањима која су, како се то често каже, гранична, која имају своје различите стране због чега се изучавају у оквиру више научних дисциплина.

Пре него што укажемо на природу проблема о којима је речваља подсетити на неке податке из живота и рада Адамара, о коме се код нас није готово ни писало.[1]

Жак Соломон Адамар родио се у Версају. Рано је испољио способности за рад у више области. При упису у Политехничку школу имао је више поена него било ко од ранијих кандидата. Одмах по завршетку школовања у Политехничкој и Вишој школи започео је истраживање, и био је запажен по низу резултата. Одбранио је докторску дисертацију *Оглед о проучавању функција датих њиховим развојем у Тејлоров ред*, 1892. године. Настављајући истраживања 1896. године дошао је до истог резултата једновремено али независно од белгијског математичара Де ла Вале Пусена (Charles de la Vallée Poussin, 1866–1962) по коме је постао највише познат. Реч је о доказу асимптотског закона дистрибуције простих бројева. Од 1897. године професор је математике, од 1900. године предаје на Париском универзитету. Предавао је касније и у Политехничкој школи, у Колежу де Франс (Collège de France) аналитичку и небеску механику. За члана Француске академије изабран је 1912. године. У I

[1] Колико ми је познато, код нас је једино проф. др Ђуро Курепа писао о овом математичару. Упор. Ђуро Курепа, *Prva stogodišnjica matematičara Jacques-a Hadamarda*, Математички весник 3 (18), св. 1, 1966.

светском рату изгубио је два сина, али упркос таквом ударцу успео је да избегне изазове шовинизма према Немцима, који је био захватио и неке француске научнике тога времена, чак и такве као што је био Пијер Дијем. Са Борелом развија неке Поенкареове идеје, касније Канторове, као и Борел, Лебег и Бер. Сви они воде дискусију о Зермеловим аксиомима од 1904. до 1914. године. У Политехничкој школи је шеф Катедре од 1912. године до 1936. године, а у Колеж де Франс организовао је Математички семинар који је допринео развоју математичких истраживања. Бавио се дуго парцијалним и диференцијалним једначинама, проблемима из области функционалне анализе и теорије скупова. Дела *Геометрија у равни* и *Геометрија у простору* настала током држања наставе имала су више издања. Године 1940. када су Немци окупирали Француску, Адамар је био принуђен да емигрира у САД због својих ставова, као и због јеврејског порекла. После рата враћа се у домовину; у доба хладног рата залаже се за међународни мир. Умро је у Паризу.

Адамар се није бавио само проблемима математике него се интересовао и за сам поступак долажења до резултата у математици и науци уопште. На то његово интересовање не може се гледати као на нешто узгредно, случајно у његовом раду. Подстицај за то био је свакако један чланак његовог учитеља Анри Поенкареа (Poincaré, 1854–1912) под насловом *Математичко стваралаштво*. Треба подсетити да се тим кругом проблема као и разним проблемима у вези са обележјима научног метода у то доба и касније баве и неки други француски научници и филозофи чији се резултати некако занемарују или превиђају у англо-саксонској литератури после II светског рата — оној која је посвећена проблемима тзв. раста знања и чинилаца који тај раст условљавају. Да споменем овде само Дијема, касније Делакроа, Л. Кеноа, доцније Анри Ле Шателијеа, научника који су радили у разним областима, као и неки филозофи.

Жак Адамар се бавио проблемима стваралачког процеса, обележјима, чиниоцима тог процеса још пре II светског рата. Прве резултате својих истраживања он је изнео у саопштењу на Симпозијуму о проблему инвенције[2] који је одржан 1937. године у Паризу. У споменутом саопштењу као и у дискусији на том скупу он се осврнуо на стваралачки пут легендарног француског математичара Евариста Галуа (Galois, 1811–1831). Избор није случајан; Галуа је заиста такав стваралац који је побуђивао оправдано интересовање. Он је одавно привлачио пажњу не само историчара науке него и свих оних који су хтели да проникну у путеве и чиниоце стваралачког процеса. Живео је да подсетим, само двадесет година, а почео је да ствара већ од своје шеснаесте године. Неке од својих радова слао је Академији наука али му није успело да заинтересује научнике, ауторитете у математици оног времена (Коши и др.) за проблеме којима

[2] *L'invention*, Neuvième semaine internationale de synthèse, ed. Alcan, Paris, 1938. Учесници на овом скупу, истакнути научници који су радили у разним областима расправљали су о путевима развоја научних знања, чиниоцима, претпоставкама итд.

се бавио. Ноћ уочи двобоја у којем је погинуо посветио је разјашњавању својих нових идеја. На маргинама папира са забелешкама напоменуо је у више наврата да „нема времена“ за доказивање својих ставова. После петнаестак година научници су се заинтересовали за његове рукописе и увидели да је Галуа запазио многе нове проблеме па и области којима се до тада математичари нису бавили.

После истраживања, рекао бих феномена Галуа, Адамар је приступио истраживањима карактеристика стваралачког поступка у математици и науци уопште испитујући стваралачки пут бројних математичара, не само француских. Резултате истраживања он је изнео најпре у предавањима које је држао у емиграцији, у САД 1943–1944. године у *Слободној школи високих истраживања* у Њујорку, па се због тога његово дело најпре појавило на енглеском језику (*An Essay on the Psychology in the Mathematical Field*), а тек десетак година после тога с малим изменама на француском језику (*Essai sur la Psychologie de l'invention dans le domaine mathématique*).[3] Заиста је велики број проблема о којима Адамар расправља у овој књизи. Прво што пада у очи је наслов књиге који није сасвим одговарајући. На основу многобројних података из историје наука, пре свега података о стваралаштву математичара, на основу проучавања живота и рада многих научника Адамар настоји да утврди обележја, путеве карактеристичне облике, логичке форме стварања, као и улогу интуиције у стварању у математици и науци уопште. Књига није, ни оубичајени приказ нити је само оглед из области психологије математичког стварања, као што се насловом то назначава. По ширини спектра проблема и, што је још важније, по начину разматрања Адамарова излагања превазилазе оквире назначене насловом, и то није било случајно. Историја науке и психологија стваралачког поступка у математици само су две области од бројних које су неопходне да би се могла објаснити природа математичког стваралаштва, природа процеса сазнања уопште да би се могло одговорити на бројна питања у вези са оним што се обично означава као научни метод. Резултати до којих долази Адамар знатно превазилазе споменуте области и од значаја су и у гносеологији, у логици и теорији сазнања уопште. Ако се зна да је и сам аутор овог дела Адамар истакнути стваралац који је у тежњи да одговори на разна питања у вези са стваралачким поступком и методом у науци уопште, изводио и извесне анкете обраћајући се истакнутим, научницима онда је јасно да су његови резултати релевантни и за филозофска разматрања, пре свега као значајан извор о одговарајућој стваралачкој пракси. Ако још подсетимо на чињеницу да су тек после тога уследила интензивнија истраживања стваралачког мишљења из различитих перспектива, биће

[3]Ово дело сматра се већ класичним и превођено је и на друге језике. Руски превод из 1970. године садржи и прилоге: Анкета о методи рада математичара, објављена у часопису *Enseignement Mathématique*, 1902, 1904; Разлика међу умовима: Поглед на основу морала; Трећи чланак Анри Поенкареа *Математичко стваралаштво*, као и поговор Ј. Погребиског.

јасно да Адамарова расправа спада у оне пионирског карактера. Доцније када су започела кибернетичка и хеуристичка истраживања видело се да је најпре потребно потпуније испитати стваралачке облике и могућности тзв. природног интелекта управо као што је то чинио Адамар.

Проблематика којом се Адамар бавио у емиграцији у САД није, дакле, била с подручја једне па ни две научне дисциплине, а начин на који је он пришао тим проблемима и успешно их разматрао, није био монодисциплинаран. Већ у предговору Адамар се бави важним разјашњењем значења појмова откриће и проналазак. Колумбо је пронашао Америку, која је постојала, али није била позната Европљанима. Бенџамин Франклин открио је громобран, који раније није постојао. Даље, он расправља о видовима стваралаштва, научном и уметничком, о специфичностима и заједничким основама. Свим тим питањима он се бави ослањајући се не само на резултате природних наука него и на резултате многих друштвених наука, понајвише на резултате психологије као и филозофије. Он се бави посебно антрополошким претпоставкама сазнања, природом мишљења као психичког процеса.

Како треба гледати на откриће, проналазак? Да ли више као на израз спонтаности или неке случајности (не у смислу да свако може да открије нешто, него само онај који се дуго бавио одређеним питањем) – или само као на плод систематског рада, као на израз логички вођеног поступка, дакле, као на нешто до чега се долази постепено преко одговарајућих ступњева. Он указује на различита, врло често сасвим супротна схватања као што су она Никола, Суриоа и Полана у којима су се показале и извесне крајности у приступима и покушајима решавања тих проблема.

Али када се изучава пажљиво стваралачка пракса из разних наука, уметности, онда се многа питања постављају сасвим друкчије, па и контроверзе око природе научних открића мењају карактер. Више се не поставља питање: или случајност или планиран систематски рад, нити се тим путем трага за одговорима на питање у вези са природом и основним чиниоцима открића и проналазака у науци и техници, као и природом novum-а уопште. На тим новим путевима изчезавају антиномијски одговори и утврђују се ступњеви и домети, спонтаности или пак припремљености који су претходили открићима или проналасцима; тако се не може никада говорити о потпуно случајним резултатима нити о таквим резултатима који су уследили после унапред знаних ступњева који су прелажени да би се дошло до нечега што се очекивало баш у том облику. Или, једноставније речено, може се говорити само о ступњу непосредности или посредности у проналажењу или откривању, или у стваралачком чину у уметности и стварању уопште. Било којој страни да се приклонимо у дискусијама о томе неопходно је да утврдимо основу и одговарајуће механизме који омогућују нове идеје, теореме, композиције, проналаске, скице итд. Адамар с правом и то у време када је пријем психоанализе био још релативно спор, и када се неке од главних њених тековина нису још знале довољно, расправља о улози подсвести и о везама те сфере са оном свесном, или о систему унутар којег су ове сфере подсистеми у одговарајућој вези, где поједини елементи временом прелазе из једне од наведених сфера у другу. Адамар се даље бави разматрањем природе и структуре, ступњевима истраживања у науци уопште. Од избора проблема преко фазе тзв. инкубације до ступња избора између различитих хипотеза принципа теорија итд. Бави се затим чиниоцима који утичу на истраживача у тим фазама, особито оним естетске природе, који изгледају као нерелевантни у том процесу, али је одавно познато да они имају одговарајућу улогу. У припремној фази логичке операције имају изразиту улогу али је пре тога тај процес подстакнут „бљеском“ неке идеје, неким „озарењем“. Ту се онда поставља питање шта је на почетку? Само питање је унеколико неадекватно. Различити су „почеци“, некад је реч о изразито рационалним, док у другим случајевима изразиту улогу имају споменути „бљесци“ или „озарења“. И током истраживања смењују се изразитија деловања једних или других чинилаца, једна више обележавају једну фазу друга другу фазу. Разуме се у утврђивању контекста тих чинилаца и веза међу њима, не треба се увек ослањати само на материјал који потиче од самих научника чији стваралачки рад прослеђујемо, на њихова сведочанства. Анализе те врсте треба да се темеље и на осталој разноврсној документацији. Тек када се имају у виду, или кад се размотре околности из ширег контекста може се рачунати на могућност разјашњења бар неких од најзначајнијих проблема у вези са микроанатомијом стваралачког поступка, маколико да је то тешко због тога што је реч о непоновљивим стањима и процесима.

Интересовање Адамара за материјал из стваралачке праксе научника било је толико велико да је он извео једну анкету међу математичарима и неким другим истакнутим научницима и у току II светског рата, 1943–1944. године, али због ондашњих прилика бројни научници нису могли да буду анкетирани. Једно од главних питања које га је интересовало било је питање *како* они мисле, *како* доспевају до резултата најчешће: да ли су преовлађујуће речи, или неки знаци, слике, нејасни ликови који се даље разјашњавају, како се развија мисаона активност, или како би рекао Анри Валон, какав је пут од мисли до чина, ако узмемо да је чин онај завршни резултат, откриће, проналазак који помера видике у мањој или већој мери. То би било, наравно, само метафорично представљање овог задатка. Материјал из Адамарових анкета био је необично богат и није се могао објаснити у потпуности на основу дотадашњих општих концепција или теорија о стваралачком поступку у науци и уметности. Постављала су се бројна питања, нека на сасвим нов начин. И Адамар је спремно и смело расправљао о тим проблемима од којих су многи били нови и за психологију. Једно од питања којим се позабавио било је питање да ли се може маштовитост „васпитавати“, развијати? Из анкета се видело да су ликови, често нејасни били ти преко којих се научник ближио неком важном резултату. Адамар се приклонио ставу да је могуће и свет фантазије подстицати јер је и ту реч о једној врсти динамичког система где се стичу токови свести и подсвести, и у тим комбинацијама настају значајне научне идеје. У оно доба поступци подстицања маште и стваралаштва замишљани су као све веће дисциплиновање ума, тј. као систематски рад према неком плану, дуг, упоран; тако се на нивоу подсвести такође врши нека организација елемената која у неком тренутку постиже комплементарност са напорима из свесне, логичке сфере или плана. Индикативни материјал подстакао је Адамара и на покушај типологије умова, пре свега математичких умова. И он је ту издвојио два главна типа: логички и интуитивни, али не инсистирајући на некој строгој граници међу њима.[4] Реч је ту више о превлађујућем својству које се манифестује у стваралачком раду научника: интуитивни „бљесак" или формални поступци. Ова својства су иначе у нераскидивој вези, и Адамар сматра да су једна претпоставка за друга, и да није реч о превлађивању једних само на почетним ступњевима истраживачке авантуре, него се та „игра" наставља и на свим каснијим ступњевима. У изразито интуитивне умове он с правом убраја људе као што су Ферма, Галуа, Риман, анализирајући њихов рад подробно. Из тих анализа постају јаснији не само путеви стварања ових математичара, него и многа обележја интуитивних продора као претпоставке интуиције, њена улога у процесу сазнања па и природа процеса сазнања уопште.

Адамарова схватања на која је овде указано укратко заслужују пажњу као значајан покушај да се испита природа процеса научног стварања још у време када се та питања нису истраживала систематски и подробније. Значајна је даље околност што Адамарова расправа није била оптерећена ондашњим владајућим концепцијама, што је овај истраживач тежио да самостално расправља и то на начин који би се могао означити као интердисциплинаран у доба када такав приступ није био карактеристичан као у годинама које су потом уследиле. Многобројни подаци које је овај аутор прикупио могу бити предмет расправа и данас на основу сазнања до којих се дошло у најновијим истраживањима, многи од тих података индикативни су и могу се објашњавати знатно потпуније но што је то у своје време могао Жак Адамар. У сваком случају расправе о том кругу проблема данас су још актуелније па су Адамарова схватања још једна прилика за дискусије о природи стварања у математици и науци уопште.

Напомена уредника. Аутор овог рада није математичар, већ доктор филозофских наука.

[4] Као на пример Пјер Дијем који је чак сматрао да је интуитивност као највиши квалитет у стварању карактеристика француских умова, док немачки предњаче у логици која је по њему више ствар дисциплине. Адамар се осврће критички на овакве ставове откривајући њихов националистички и шовинистички смисао.

Radomir ĐORĐEVIĆ

ON HADAMARD'S IDEAS ABOUT THE NATURE OF THE CREATIVE PROCEDURE IN MATHEMATICS

The paper deals briefly with Hadamard's ideas about the nature of creative procedure in science, first of all in mathematics. The prominent mathematician who left significant contributions in mathematics, Hadamard carried out research in the field of the very creative procedure. Having been stimulated by Poincaré's ideas, Hadamard firs investigated the specificity of the creative procedure of the legendary mathematicians, he tried to explain the nature of creative procedure in science in general. The important fact is that Hadamard conducted the surveys among the scientists taking into account all circumstances covering the time when they obtained the significant results. On the basis of such research work, he tried to identify the major factors in scientific creation, the role of subconscious courses and the relationship of these courses toward the conscious intentions, the nature of intuition and the role of logic, as well as toward the various types of intellects in science.

Hadamard's research belongs to the pioneer attempt of modern interdisciplinary research. After Lapšin, Hadamard is by all means the most significant scientist in the field, not only because of the material he collected, but because he as well tried to explain the material on the basis of the appropriate scientific concepts.

Dr RADOMIR ĐORĐEVIĆ
Fizički fakultet, p.p. 550
11001 Beograd

Математички институт — Београд
Историја мат. и мех. наука 6 (1992)
Mathematical Institute — Belgrade
History of Math. and Mech. Sc. 6 (1992)

Малиша Р. ЖИЖОВИЋ

МАТЕМАТИЧКА БИБЛИОТЕКА ПРОФЕСОРА СТАНИМИРА ФЕМПЛА ЛЕГАТ ТЕХНИЧКОМ ФАКУЛТЕТУ У ЧАЧКУ

Почетком 1987. године, на предлог господина др Драгана Трифуновића редовног професора Шумарског факултета у Београду, супруга почившег редовног професора Електротехничког факултета у Београду у пензији Станимира Фемпла (1903–1986) госпођа Зора Фемпл је предала на поклон легат-његову **МАТЕМАТИЧКУ БИБЛИОТЕКУ** Техничком факултету у Чачку. Наставно-научно веће и Савет Техничког факултета у Чачку су одредили комисије за преузимање и пријем легата.

Библиотека је почетком априла 1987. године пренета у Чачак и комисија за пријем је почела са радом. Рад комисије се може поделити у две етапе. У првој етапи су све књиге прегледане, утврђено је њихово стање и садржај, и извршено је одређивање посебно вредних књига. У другој етапи је извршен попис књига а потом и њихово обележавање, с тим што је свака књига поред уобичајених печата Библиотеке Техничког факултета у Чачку обележена и једним за ову сврху специјално израђеним печатом (видети слику у прилогу — о обележавању једне од књига)

За коначно уношење књига у књижни фонд Библиотеке Техничког факултета било је потребно одредити им и вредност. Како је у библиотеци-легату било доста старих и по мишљењу не само чланова комисије и за нашу културу уопште јако вредних књига, то је се комисија обратила за стручну помоћ Градској библиотеци у Чачку и Универзитетској библиотеци у Крагујевцу. Међутим, и поред помоћи стручњака из ових установа тај посао није био, због специфичности књига, успешно окончан. Књигама је дата вредност тек уз помоћ библиотекара Математичког института у Београду господина Илије Братића.

После свих ових, напред поменутих радњи на евиденцији књига оне су остављене на чување у посебном одељку библиотеке.

Употреба ових књига је прописана са посебним условима, без могућности изношења ових књига из библиотеке Техничког факултета.

О садржају библиотеке-легата

Библиотека се састоји од 414 пописних јединица. Од овог броја око половине су књиге а остата су часописи, годишњаци и сепарати, скрипте и забелешке.

У оквиру овог кратког приказа овде ћу напоменути да немачких књига има укупно 86, а од тога 19 је штампано пре 1900. године а 18 од 1900. до 1914. године. Ове немачке књиге, штампане пре првог светског рата, су у нашим библиотекама веома ретке а исто се вероватно може рећи и за још 47 немачких књига штампаних у периоду од 1914. до 1941. године. Остале књиге на немачком језику као и књиге на руском и француском (има их десетак) су из послератног периода. На нашем језику у овој библиотеци се налази 99 књига. Међу њима се налазе и неке врло значајне књиге.

Овде ћу набројити оне које су најзначајније:

Алгебарска анализа, књига друга, Димитрије Нешић, Београд 1883. год.

Основе рачуна вероватноће и теорија најмањих квадрата, М. Ј. Андоновић, Београд 1886. год.

Аналитичка геометрија, тачка, права, круг, Богдан Гавриловић, Београд 1896. год.

Теорија детерминаната, Богдан Гавриловић, Београд 1899. год.

Фигуративни полигони диференцијалних једначина првог реда и њихова веза са особинама интеграла, теза, Младен Т. Берић, Београд 1913. год.

Поред ових, могли би набројати и низ других књига које су ретке у нашим библиотекама. На пример, значајно је истаћи да се у овој библиотеци налази књига Милутина Миланковића *Kanon der Erdbestrahlung* чије је штампање завршавано у Београду у почетку априла 1941. године и чије је скоро цело издање страдало у бомбардовању Београда шестог априла 1941. године.

Напоменимо да се у овој библиотеци налази велики број сепарата многих наших математичара, нпр. ту је педесетак сепарата Михаила Петровића, ту су поједини сепарати Љубомира Клерића, Димитрија Нешића, Милутина Миланковића, Косте Карамате, Јована Карамате, ... као и бројни сепарати данашњих математичара.

Наравно ту су и сви сепарати власника библиотеке покојног професора Станимира Фемпла.

Значајно је направити осврт и на области које покривају књиге из ове библиотеке: Ту су књиге из области рада професора Фемпла — специјалних функција али исто тако и књиге из других области анализе, затим алгебре, геометрије, астрономије, ..., па средњошколски уџбеници математике из разних периода — почевши од оних који су издати у прошлом веку у Београду и Загребу, преко међуратних до неких послератних.

Напоменућу такође да се међу сепаратима налази и велики број примерака из области којима се покојни професор Фемпл није бавио али са

ФИГУРАТИВНИ ПОЛИГОНИ

ДИФЕРЕНЦИЈАЛНИХ ЈЕДНАЧИНА ПРВОГ РЕДА

И ЊИХОВА ВЕЗА СА ОСОБИНАМА ИНТЕГРАЛА

ТЕЗА

МЛАДЕНА Т. БЕРИЋА

ПРИМЉЕНА ЗА

ДОКТОРСКИ ИСПИТ

НА СЕДНИЦИ

ФИЛОЗОФСКОГ ФАКУЛТЕТА УНИВЕРЗИТЕТА У БЕОГРАДУ

ОД 11. МАЈА 1912. ГОДИНЕ ПРЕМА РЕФЕРАТУ ЧЛАНОВА ИСПИТНОГ ОДБОРА

Г. Г. Д-РА МИХАИЛА ПЕТРОВИЋА РЕД. ПРОФ. УНИВЕР.
Д-РА МИЛУТИНА МИЛАНКОВИЋА ВАНР. ПРОФ. УНИВЕР.

У БЕОГРАДУ
ШТАМПАНО У ДРЖАВНОЈ ШТАМПАРИЈИ КРАЉЕВИНЕ СРБИЈЕ
1913.

ПРЕДАВАЊА НА ВЕЛИКОЈ ШКОЛИ

ОСНОВЕ РАЧУНА ВЕРОВАТНОЋЕ

И

ТЕОРИЈА НАЈМАЊИХ КВАДРАТА

ОД

М. Ј. АНДОНОВИЋА

ПРОФЕСОРА НИЖЕ И ВИШЕ ГЕОДЕЗИЈЕ.

У БЕОГРАДУ
ШТАМПАНО У КРАЉЕВСКО-СРПСКОЈ ДРЖАВНОЈ ШТАМПАРИЈИ
1886.

ауторима са којима је био у вези, било да је пратио њихов рад и развој, било да је једноставно са њима пријатељевао.

Неколико речи о значају легата

Наравно да није потребно посебно истицати значај једне овакве библиотеке за један релативно млад факултет. Свакоме је јасно да се већина књига из ове библиотеке не може набавити у редовној продаји, а да се такође ретко могу срести и у антикварницама (неке вероватно никад). Чак и када се нека од њих појави у некој антикварници она буде откупљена од неког колекционара, јер факултетске библиотеке скоро свих факултета, а такав је случај и са Техничким факултетом у Чачку, углавном купују нова издања. То је свакако оправдано са гледишта тренутног развитка науке, али није са гледишта културне и историјске улоге библиотека, јер набавка и поседовање старих књига (за које најчешће нема довољно новца, а рекао бих ни ентузијазма и времена да се трага за њима) чини једну библиотеку значајном за историју једне области, а ако и шире посматрамо значајном и за културу нашег народа.

После овог увода могу изнети мишљење да је ова библиотека, легат породице покојног професора Станимира Фемпла, значајна не само за Технички факултет у Чачку већ и за целокупну српску културу, јер, знајући да су две најзначајније библиотеке које су могле поседовати књиге из легата, изгореле у другом светском рату — Народна библиотека Србије 1941. године, а библиотека Математичког семинара Филозофског факултета 1944. године, вероватно је један број, специјално немачких књига, штампаних пре првог светског рата уникатан у српским библиотекама.

Имајући у виду све ове чињенице Савет Техничког факултета у Чачку је за учињени легат госпођи Зори Фемпл и господину професору Драгану Трифуновићу доделио захвалнице. И овај мој напис има за циљ да им у име садашњих генерација које користе библиотеку Техничког факултета у Чачку, а још више будућих генерација, изрази захвалност за њихову доброту.

На крају констатација да би библиотеке факултета требало да за овакве поклоне библиотеке-легате имају место, како због очувања библиотечких целина појединих научних радника и повећања свог књижног фонда, тако и због поновног враћања традицији легата у српској култури.

Mališa R. ŽIŽOVIĆ

MATHEMATICAL LIBRARY OF PROFESSOR STANIMIR FEMPL LEGACY TO THE TECHNICAL FACULTY IN ČAČAK

We expose the history of legacy of the private mathematical library of the late professor Stanimir Fempl (1903–1986) to the Technical Faculty in Čačak. The contents of the library is also described.

dr MALIŠA ŽIŽOVIĆ, Tehnički fakultet, 18000 Čačak

Математички институт — Београд
Историја мат. и мех. наука 6 (1992)
Mathematical Institute — Belgrade
History of Math. and Mech. Sc. 6 (1992)

Драган ТРИФУНОВИЋ

СТАЛНИ СЕМИНАР МАТЕМАТИЧКОГ ИНСТИТУТА

Од првих дана постојања (мај 1946) Математички институт је нашао и снаге и вољу као истраживањима на пољу историје математике, механике и астрономије. Поменимо овом приликом добре и веома корисне радове из историје математике Јована Кармате (1902–1987) о резултатима Михаила Петровића, Богдана Гавриловића (1864–1947) о диференцијалним једначинама Пол Пенлевеа, Николе Салтикова (1866–1961) о Марину Геталдићу, Декарту, Поенкареу, Антона Билимовића (1879–1970) о Галилеју и др. Свакако, да је у овој области најбитније, што је Математички институт веома рано почео да објављује класичне списе из математичких наука у критичком облику. Тако је Математички институт још далеке 1949. године (до 1957) издао Еуклидове *Елементе* у преводу и са коментарима професора Антона Билимовића. Списи, као што су Хилбертови *Основе геометрије* из 1957. године и Лобачевскова *Геометријска испитивања из теорије паралелних линија* из 1951. године у преводу и са коментарима професора Бранислава Петронијевића (1875–1954), показали су у нашој среди, да се без проучавања класика не може кретати напред у многим гранама математике.

У оваквом трајном опредељењу, а највише из културолошких становишта које поседује и има математика и механика, у децембру 1981. Научно веће математичког института у Београду донело је одлуку о оснивању, тј. покретању рада сталног Семинара за историју математичких и механичких наука. За руководиоца Семинара постављен је др Драган Трифуновић, ред. проф. Универзитета. Прва седница Семинара одржана је 16. децембра 1981. године.

Потпун редослед саопштења на семинару

У хронолошком редоследу овде излажемо наслове свих тема које су саопштене на семинару, а то значи: редни број седнице, име аутора, назив саопштења, датум одржавања седнице и напомена по потреби.

1. *Д. Трифуновић*: Библиографија српске математичке књиге (16.12.1981)
*2. *Д. Трифуновић*: Порекло бинарног система бројева (6.1.1982)
3. *Т. Анђелић*: Једна погрешна употреба појма материје (17.1.1982)
4. *Д. Витас*: Терминологија у рачунарству (24.2.1982)
*5. *Т. Анђелић*: Развитак механичких наука код Срба (17.3.1982)
6. *Ђ. Курепа*: Нека запажања о мојој докторској дисертацији (24.3.1982)
*7. *Д. Трифуновић*: Појава графостатике у нашој науци (31.3.1982)
8. *Т. Анђелић*: Разговор о књизи мемоара Милутина Миланковића (14.4.1982)
9. *Д. Трифуновић*: Нека питања терминологије (21.4.1982)
*10. *Д. Трифуновић*: Прилог методологији историје математике (28.4.1982)
11. *Д. Цветковић*: Теорија графова од Ојлера до данас (19.5.1982)
12. *Р. Ђорђевић*: Математичар Сима М. Марковић — његова епистемолошка и методолошка схватања (26.5.1982)
13. *Д. Трифуновић*: Прилог методологији историје математике — II (9.6.1982)
14. *Д. Трифуновић*: Теорија релативности код Срба (16.6.1982)
*15. *Д. Трифуновић*: Прилози проучавању историје математичке симболике — I (23.6.1982)
16. *Д. Трифуновић*: Класични списи и поновљена издања (6.10.1982)
*17. *Т. Анђелић*: Клуб математичара између два рата (13.10.1982)
*18. *Д. Трифуновић*: Математичар Димитрије Нешић (20.10.1982)
19. Слободне теме (27.10.1982)
20. *М. Мужијевић*: Био-библиографија Милутина Миланковића (3.11.1982)
21. *С. Милић*: О Лајбницовој монадологији (10.11.1982)
*22. *В. Вујичић*: Механичке науке новијег времена код нас (17.11.1982)
23. *Р. Дацић*: О делу Милоша Радојчића (24.11.1982) — одложено
24. *Р. Дацић*: О делу Милоша Радојчића (1.12.1982)
*25. *Р. Ђорђевић*: О методолошким схватањима Косте Стојановића (8.12.1982)
26. *С. Милић*: О Лајбницовој монадологији (15.12.1982) — наставак
27. *М. Стојаковић*: Алгебра Ал-Хваризма (22.12.1982)

Знаком (*) обележавамо саопштење са Семинара које је објављено — штампано.

28. *Д. Трифуновић*: Поменик наших математичара (29.12.1982)
29. *Т. Анђелић*: Живот и дело Антона Билимовића (2.3.1982)
30. *Н. Пантић*: Научни скуп о Миланковићевој теорији у САД (9.3.1983)
31. *М. Леко*: Поводом јубилеја академика Татомира П. Анђелића (16.3.1983)
32. *З. Херков*: Од система римских мјера до средњеевропског система старих мјера (23.3.1983)
*33. *Д. Трифуновић*: Скица за студију о Љубомиру Клерићу (30.3.1983)
34. *Ђ. Курепа*: О једном основном ставу комбинаторне математике (6.4.1984)
35. *Р. Живаљевић*: Инфинитезимале у радовима савремене математике (13.4.1983)
36. *Е. Стипанић*: Приказ књиге Жарка Дедића „Историја наука код Хрвата" (20.4.1983)
37. *М. Цекић*: Лајбницова монадологија и математика (27.4.1983)
38. *Т. Анђелић*: Моја сећања на Брану Петронијевића (4.5.1983)
39. *Д. Трифуновић, Д. Адамовић, С. Милић*: Разговори о математици у делу Бранислава Петронијевића (22.5.1983)
40. *Т. Анђелић*: Проблем трију тела у делу Бране Петронијевића (18.5.1983)
*41. *А. Стојковић*: Над изворима о Браниславу Петронијевићу (25.5.1983)
42. *М. Леко*: Петронијевићево виђење закона централног кретања (1.6.1983)
*43. *Р. Дацић*: Негација негације у Марксовим математичким рукописима (8.6.1983)
44. *Д. Трифуновић*: Смесице из историје математике (21.9.1983)
45. *Д. Адамовић, С. Милић*: Математика у делу Бранислава Петронијевића (28.9.1983)
46. *Љ. Протић*: Бројни размаци Михаила Петровића и веза са интервалном математиком (5.10.1983)
*47. *Ђ. Карапанџић*: О животу и делу Николе Н. Салтикова (19.10.1983)
*48. *Р. Дацић*: Неке допуне о делу Милоша Радојчића (26.10.1983)
49. *Ђ. Курепа*: Једно размишљање о мојој првој написаној радњи (2.11.1983)
*50. *Т. Анђелић*: Моја прва математичка расправа (9.11.1983)
51. Свечана академија поводом 200-годишњице од смрти Леонарда Ојлера (1707–1783) (11.11.1983)

52. Слободне теме (23.11.1983)
53. *Д. Трифуновић*: Студијски боравак у Москви (11.1.1984)
54. *Д. Трифуновић*: Историја механике на МГУ у Москви (18.1.1984)
55. *Д. Трифуновић*: О најновијој књизи Т. П. Анђелић „Увод у астродинамику" (25.1.1984)
56. *Р. Ђорђевић*: Коареово тумачење Њутнових методолошких схватања (22.2.1984)
57. *Д. Трифуновић*: О неким појавама у нашој историји наука (29.2.1984)
*58. *С. Прешић*: О једној историјској чињеници у развитку појма реалног броја (7.3.1984)
*59. *М. Марковић*: Појам научног закона (14.3.1984)
60. *Ђ. Курепа*: Живот и дело Анри Поенкареа — Поводом 130-годишњице од рођења (21.3.1984)
61. *С. Вујошевић*: Поводом 30-годишњице смрти Тјуринга (A. M. Turing, 1912–1954) (28.3.1984)
*62. *Б. Поповић*: Потреба проучавања пракибернетске стране дела Михаила Петровића (4.4.1984)
63. *Р. Ђорђевић*: О појму хипотезе у науци (11.4.1984)
64. *М. Цекић*: Принцип економије мишљења у науци (18.4.1984)
65. Слободне теме 825.4.1984)
*66. *Љ. Трговчевић*: Научници Србије и стварање Југословенске државе (9.5.1984)
67. *С. Фемпл*: Студије математике на Београдском универзитету између два рата (16.5.1984)
68. *Д. Адамовић*: Уводно предавање о научном раду Јована Карамате (23.5.1984)
69. *М. Божић*: Квантна логика (30.5.1984.)
*70. *С. Прешић*: Проблем постојања у математици (6.6.1984)
*71. *Д. Трифуновић, Д. Адамовић*: О једној светогорској математичкој расправи (13.6.1984)
*72. *С. Фемпл*: Прорачуни у Миланковићевој теорији (3.10.1984)
73. *Н. Пантић*: Најновија инострана дела о Милутину Миланковићу (10.10.1984)
74. *Д. Трифуновић*: Једно другачије гледање на личност Милутина Миланковића (17.10.1984)
75. *Т. Анђелић*: Живот и дело Ивана Арновљевића (24.10.1984)
76. *Д. Витас*: Историја аутоматског управљања (31.10.1984)
77. *Б. Павловић*: Филозофија природе без математике (7.11.1984) — одложено

78. *Д. Адамовић*: Научно дело Јована Карамате — наставак (14.11.1984)
79. Разговор о научном делу Јована Карамате (21.11.1984)
*80. *Д. Трифуновић, Д. Адамовић*: О једној светогорској математичкој расправи (28.11.1984) — поновљено
81. *Д. Трифуновић*: Једно запажање о Диофантовој „Аритметици" (5.12.1984)
82. *Р. Ђорђевић*: Интуиција у математици (12.12.1984)
83. *А. Стојковић*: Карактер појмова (19.12.1984)
*84. *Р. Димитрић*: Математика, апстракција и реалност (26.12.1984)
85. *Д. Трифуновић*: Једно другачије гледање на личност Милутина Миланковића (9.1.1985) — наставак
86. *С. Књазев-Адамовић*: Марксистичке критике теорије одраза (16.1.1985)
87. *Д. Трифуновић*: Историја математике у Бугарској (13.2.1985) — Студијски боравак у Софији по позиву
88. *З. Шами*: Саопштење поводом 320-годишњице од смрти П. Ферма (20.2.1985)
89. Казивања о животу и раду проф. др. Тадије Ж. Пејовића (27.2.1985)
*90. *Т. Анђелић*: Личност Алберта Ајнштајна и неке њене особености (6.3.1985) — Годишњице Ајнштајна
91. *Ђ. Курепа*: Сусрет са Ајнштајном (13.3.1985)
92. *И. Лукачевић*: О теорији релативности и неким њеним модификацијама (20.3.1985)
93. *С. Борн*: О Алберту Ајнштајну лично (27.3.1985) — одложено
94. *Ж. Мијаиловић*: Џорџ Бул и Булова алгебра (3.4.1985) — Поводом 170-годишњице рођења G. Boole-а (1815–1864)
*95. *Д. Трифуновић*: О једном резултату Анри Поенкареа у теорији функција (10.4.1985)
96. *Т. Анђелић*: Развитак појма вектора код нас и у свету (17.4.1985)
97. *Д. Адамовић*: Продукти једнаки збиру својих чинилаца (24.4.1985) — одложено
98. *Ж. Митровић*: Развој интервалне математике (8.5.1985)
99. *С. Прешић*: Настанак и развитак математичке логике код нас (15.5.1985)
100. *Д. Трифуновић*: О будућој књизи „Математика у српском народу" (22.5.1985)
101. *Б. Боричић*: Из историје аксиоме избора (29.5.1985)

102. *Г. Бабић*: О старим математичким методама — Метода лажног решења (5.6.1985)
*103. *В. Андрић*: Марксов матурски рад из математике (12.6.1985)
104. *Д. Трифуновић*: Кинеска математика (чињенице и анализе) (19.6.1985)
*105. *Б. Јовановић*: Рачунска флуидична диода Николе Тесле (2.10.1985)
106. Разговор са проф. др. Ђуром Курепом о нашој математици између два рата и после II светског рата (9.10.1985)
107. *Ч. Станојевић*: Далекосежни облици Питагорине теореме у савременој анализи (16.10.1985)
108. *Д. Трифуновић*: Ђорђе Станојевић, професор и ректор Универзитета у Београду (23.10.1985)
*109. *М. Првановић*: Настанак и развитак нееуклидске геометрије (30.10.1985)
110. *В. Милошевић*: Настанак и развитак теорије вероватноће (6.11.1985)
111. Посета музејима града Београда (13.11.1985)
112. Разговор са академиком Татомиром П. Анђелићем о нашој математици између два рата и после II светског рата (20.11.1985)
113. Разговор са проф. др. Драгославом С. Митриновићем о нашој математици између два рата и после II светског рата (27.11.1985)
114. *С. Јаблан*: Геометрија у преднаучном периоду математике (4.12.1985)
115. *Д. Трифуновић*: Појам броја у преднаучном периоду (11.12.1985)
116. *Б. Глигорић*: Развој теорије механизма и машина у нашој земљи (18.12.1985)
117. Слободне теме (25.12.1985)
118. *Д. Трифуновић*: Методе истраживања у старој математици (8.1.1986)
*119. *М. Чанак*: Неки проблеми математичке теорије музике (15.1.1986)
*120. *А. Стојковић*: Физлозофија математичких наука код Срба (22.1.1986)
121. Стотридесет година од смрти Н.И. Лобачевског (1792–1856) (20.1.1986)
122. *Б. Вуличевић*: О једном алгоритму за дељење (5.2.1986)
*123. *А. Трифони*: Развитак критпографије и удео математичара у том развитку (12.2.1986)
124. Разговор са проф. др. Станимиром Фемплом о нашој математици измешу два рата и после II светског рата (19.2.1986)

125. *С. Вујошевић*: Универзални математички објекти (26.2.1986)

*126. *М. Перовић*: Ерлангенски програм Феликса Клајна и његов утицај на развој математике (5.3.1986) — одложено.

127. *М. Ушћумлић*: Један поглед на развитак кибернетике (12.3.1986)

128. *С. Ћетковић*: Синтеза, уопштење и решење неких старих проблема (19.3.1986)

129. Обележавање 150-годишњице рођења математичара Димитрија Нешића (1836–1904) (26.3.1986)

130. Слободне теме (29.3.1986)

*131. *Д. Трифуновић*: Математика код Вука (2.4.1986)

132. *В. Милошевић*: Милан Андоновић, писац првог српског уџбеника из теорије вероватноће (9.4.1986)

133. *М. Ушћумлић*: Један поглед на развитак кибернетике — II (16.4.1986)

*134. *Р. Ђорђевић*: Елементи Адамарове филозофије математике (23.4.1986)

135. *П. Миличић*: Историја једног функционала (30.4.1986)

136. *М. Цекић*: Галилејево заснивање математичке природне науке (7.5.1986)

*137. *М. Перовић*: Ерлангенски програм Феликса Клајна и његов утицај на развој математике (14.5.1986)

138. *Д. Гостушки*: Уметност и математика (21.5.1986) — одложено

139. *М. Чанак*: Питагора — оснивач математичке теорије музике (28.5.1986)

140. *Д. Трифуновић*: Прво саопштење о математичким наукама у Византији и средњевековној Србији (4.6.1986)

141. *Д. Адамовић*: О једном резултату у IX књизи Еуклидових „Елемената“ (11.6.1986)

142. *Д. Трифуновић*: Поменик о Еудоксу (18.6.1986)

143. *Д. Трифуновић*: Смесице из наше историје математике (25.6.1986)

144. Слободне теме (3.9.1986)

145. *Б. Вуличевић*: О методи regula-falsi (10.9.1986)

*146. *А. Трифони*: Допринос Михаила Петровића криптографији (17.9.1986)

147. *М. Чанак*: О геометрији контра-простора и примени у другим наукама (24.9.1986)

*148. *З. Мамузић*: О књизи „Теорија скупова“ од професора Ђ. Курепе (поводом 35-годишњице од излажења ове књиге) 1.10.1986)

149. *В. Девиде*: Стара и ново у матматици (8.10.1986) — одложено

150. *М. Ушћумлић*: Појединости из живота и рада Норберта Винера I (15.10.1986)
151. *С. Ћетковић*: О својствима функције $^nP(x)$ (22.10.1986)
152. *С. Поповић*: Доприноси Владимира Варићака теорији релативности (29.10.1986) — одложено

*153. *Д. Трифуновић*: Математичко дело Симе Марковића (5.11.1986)

*154. *А. Стојковић*: О Сими Марковићу као епистемологу (12.11.1986)

155. *Д. Пешић*: Друштвено-политички погледи на свет Симе Марковића (19.11.1986) — одложено
156. *М. Марић*: Развитак појма линије (26.11.1986)
157. *А. Николић*: Лајбницов бинарни запис реалног броја (3.12.1986)
158. *С. Поповић*: Миланковићеви радови о теорији релативности (10.12.1986)
159. *С. Ћетковић*: Уопштење и једноставно решење старог проблема (17.12.1986)
160. *С. Богдановић*: Појава и развитак семигрупа у Југославији (24.12.1986) — одложено
161. *В. МИлошевић*: Из аксиоматизације теорије вероватноће (1.4.1987)
162. *Д. Трифуновић*: Прва објављена историја математике у Југославији (8.4.1987)
163. *С. Кнјазев-Адамовић*: Хегел и логика (15.4.1987)
164. *И. Лазаревић*: Развој појма сплајна (22.4.1987)
165. *Д. Трифуновић*: Поводом 220-годишњице од прве математичке књиге код Срба (29.4.1987)
166. *Д. Трифуновић*: Математика 17. века (6.5.1987)
167. *Ђ. Курепа*: Декарт и његов аналитички метод (поводом 350-годишњице Декартове „Геометрије“) (13.5.1987)

*168. *М. Леко*: Нека запажања о Њутновим законима механике (поводом 300-годишњице Њутнових „Принципија“) (20.5.1987)

169. *Б. Чекелија*: Пети постулат у делима наших математичара (27.5.1987)
170. Настава историје математике (3.6.1987)
171. *Љ. Вуковић*: Диофантова „Аритметика“ (10.6.1987)

*172. *Д. Трифуновић*: Живот и дело Косте Стојановића (поводом 120-годишњице рођења научника 1867–1921) (17.6.1987)

173. Смесице из историје математике (2.9.1987)
174. *Д. Трифуновић*: Са студијског боравка у Чехословачкој (9.9.1987)
175. *Д. Трифуновић*: Прилог једном истраживању професора Драгољуба Марковића (16.9.1987) — одложено

176. *Б. Трбуховић*: О неким резултатима математике у праисторији (23.9.1987) — одложено
177. *С. Драговић*: Логика Љубомира Недића (30.9.1987)
178. *С. Прешић*: Математичка логика код нас (7.10.1987)
179. *С. Кнежев-Адамовић*: Хегел и логика — II део (14.10.1987)
180. *М. Арсенијевић*: Синкатегорематски и категорематски појам бесконачности кроз историју математике (21.10.1987)
181. *Ђ. Курепа*: Математика у делу Руђера Бошковића (28.10.1987)
182. *Б. Аничин*: Закон централног кретања код Њутна — Силе сталног кретања (4.11.1987)
183. *Б. Аничин*: Закон централног кретања код Њутна — Полигоналне путање (11.11.1987)
184. *Д. Трифуновић*: Степена функција код Њутна (18.11.1987) — одложено
185. *М. Дејић*: Математика у религиозним књигама (25.11.1987)
186. *Д. Трифуновић*: Казивање о нашим првим математичарима I (6.4.1988)
187. *Д. Трифуновић*: Казивања о нашим првим математичарима II (13.4.1988)
188. *Д. Трифуновић*: Студијски боравак у Чехословачкој (20.4.1988)
189. *Д. Трифуновић*: Карактеристике Београдске математичке школе — појам посрбљавања (27.4.1988)
190. Договор о теми „Математика у српском народу" (4.5.1988)
191. *М. Чанак*: Увод у математичку теорију музике (11.5.1988)
192. *М. Дејић*: Математика у религиозним књигама II (18.5.1988)
193. *Ђ. Курепа*: Једна заостала студија о Универзитету у Београду (25.5.1988)
194. *Т. Анђелић*: Физичко дело Манојла Јанковића из 1787. године (1.6.1988)
195. *М. Ушћумлић*: Норберт Винер, живот и дело (8.6.1988)
196. *Д. Трифуновић*: Како укључити историју математике у наставу (15.6.1988)
197. *Т. Анђелић*: О звању асистента код нас (14.9.1988)
198. *Д. Трифуновић*: Нешто непознато о Михаилу Петровићу (21.9.1988)
199. *Д. Адамовић*: *Seminaire de philosophie et mathématiques, Paris* (28.9.1988)
200. *Д. Трифуновић*: О једној најновијој филозофској књизи (5.10.1988)
*201. *С. Јаблан*: Историјат теорије антисиметрије (12.10.1988)

202. Обележавање 85-годишњице живота и рада академика Татомира Анђелића (19.10.1988)
203. *М. Ушћумлић*: Норберт Винер — II део (26.10.1988) — одложено
204. *Д. Трифуновић*: Нека запажања о изложби из историје наука у Галерији САНУ (6.12.1988)
205. *В. Андрић*: Математика у делу Аврама Мразовића 813.12.1988)
206. *М. Чанак*: Неки правци историјског развоја верижних разломака (20.12.1988)
207. *Б. Павловић*: Конгрес математичара и природњака у Београду 1904. године (27.12.1988)
*208. *Д. Трифуновић*: Епистолије Милутина Миланковића (10.1.1989)
209. Програм о делу „Математика у српском народу" (17.1.1989)
210. *Д. Трифуновић*: Приказ књиге „Путевима развитка математике" (7.2.1989)
*211. *Д. Трифуновић*: Корени наше науке (14.2.1989)
212. *Д. Трифуновић*: Прилози научној биографији Н. Н. Салтикова (21.1.1989)
213. *Д. Адамовић*: О двема иностраним књигама које излажу теорију Јована Карамате о регуларним променљивим (28.2.1989)
214. *Ђ. Курепа*: Реч о Кошију (Поводом 200-годишњице рођења A. L. Cauchy-a, 1789–1857) (7.3.1989)
*215. *Р. Ђорђевић*: Нека Адамарова схватања у математици (14.3.1989)
216. Реч о Картану (Поводом 120-годишњице É. Cartan-a, 1869–1951) (21.3.1989) — одложено
217. Гост семинара (28.3.1989)
218. *Д. Трифуновић*: Упознавање са Адамаром (4.4.1989)
219. *Д. Трифуновић*: Наставници математике на Математичком факултету у Београду од 1838. до 1947. године (11.4.1989)
220. *А. Трифони*: Тјуринг и разбијање немачке шифарске машине (18.4.19879)
221. *Р. Жарковић*: Марин Геталдић, реститутор Аполонијевог дела „О додирима" (25.4.1989)
222. *Б. Зарић*: Математика на Вишој педагошкој школи у Београду (9.5.1989)
*223. *В. Трбуховић*: Геометрија у преднаучним периоду (16.5.1989)
*224. *Р. Пешић*: Економско-математички списи Косте Стојановића (23.5.1989)
*225. *З. Стокић*: Принцип најмањег дејства (Поводом 200-годишњице Лагранжевог дела (30.5.1989)

226. *Д. Трифуновић*: Математика у српској библиографији — књиге (1868—1944) у издању Народне библиотеке Србије (6.6.1989)
227. *Д. Трифуновић*: Математика у српском народу — критички осврт на ТВ серију под истим насловом (13.6.1989)
228. *Б. Бајшански*: Караматина мера регуларности конвергенције и тест конвергенције Фуријеових редова (20.6.1989)
229. *К. Старчевић*: Списи Архимеда у нашем преводу (27.6.1989)
230. Разговор о раду Семинара и програм рада (26.9.1989)
231. *Д. Трифуновић*: Ћирилични и латинични запис броја — порекло нуле (3.10.1989)
232. *Д. Трифуновић*: Упознавање са делом Херона Александријског (10.10.1989)
233. *Д. Трифуновић*: Смесице из историје математике (17.10.1989)
234. *Д. Адамовић*: О књизи „Историјски списи из математике и механике" (24.10.1989)
235. Разговор о књизи С. Јаблан „Geometry in the Pre-scientific Period", Beograd 1989 (31.10.1989)

*236. *Д. Трифуновић*: Математика и поезија (7.11.1989)

237. *И. Лазаревић*: О математичкој структури спектра сликарских боја (14.11.1989)

*238. *С. Јаблан*: Колорна симетрија (21.11.1989)

*239. *М. Чанак*: О једном проблему математичке теорије музике (28.11.1989)

240. *З. Стокић*: Хамилтон — ирски Њутн (5.12.1989)
241. *М. Томић, Т.П. Анђелић*: Српска академија наука и уметности и развој науке у Срба (12.12.1989)
242. *Р. Ђорђевић*: Поенкареова филозофија математике и науке уопште (19.12.1989)

*243. *Д. Трифуновић*: Рабош — универзално средство (рачунар) народне рачунице (26.12.1989)

244. *Ђ. Вукомановић*: Генеза појмова (ефективне) израчунљивости — историјски паралелизам с развојем модерних рачунара (9.1.1990)

*245. *З. Шикић*: Природни логаритми (16.1.1990)

*246. *Б. Павковић*: О животу и делу проф. др. Станка Билинског (23.1.1990)

247. *М. Божић*: Друго саопштење из филозофије и историје математике (30.1.1990)
248. *З. Стокић*: Став Михаила Ђурића према Петронијевићевој филозофији (20.2.1990)

249. Историја математике код Срба (О моралу судионика у овој ТВ-серији) (27.2.1990)
250. *С. Прешић*: Програмски језици и математика (6.3.1990) — није одржано
251. *Р. Ђорђевић*: Клајново схватање филозофије математике (13.3.1990)
*252. *Р. Жарковић*: Место Марина Геталдића у реституцији Аполонијевог дела о додирима (20.3.1990)
*253. *Д. Трифуновић*: Епистолије Тесле, Пупина и Миланковића (27.3.1990)
254. *Д. Трифуновић*: 1934. година у нашој математици (3.4.1990)
255. Резервисан термин (10.4.1990)
256. *В. Милошевић*: Увођење пробабилистичких метода у физици (17.11.1990)
257. *Н. Пантић*: Миланковићеви циклуси (24.4.1990)
258. Расправа о последњем броју часописа „Дијалектика" (8.5.1990)
*259. *В. Поповић*: Делски проблем (15.5.1990)
260. *З. Стокић*: Природни и вештачки језици (22.5.1990)
261. *С. Драговић*: Број у делу Бране Петронијевића (29.5.1990)
*262. *Д. Трифуновић*: Живот и дела Данила Н. Михњевића (5.6.1990)
263. *Д. Трифуновић*: Наука (математика) у делу српских надреалиста (122.6.1990)
264. *З. Шикић*: Стварање нове геометрије (19.6.1990) — није одржано
265. Договор о раду и разна обавештења (25.9.1990)
266. *Д. Трифуновић*: Учени Срби у науци Русије 18. и 19. века (2.10.1990)
267. Феликс Клајн и његова предавања о математици 19. века (9.10.1990)
*268. *З. Мамузић*: Пета интернационална конференција „Топологија и њене примене" (16.10.1990)
269. *Д. Трифуновић*: Поема о математичару Петру Живковићу (23.10.1990)
*270. *З. Лучић*: Историја правилних полиедара (30.10.1990)
271. *Ђ. Курепа*: Мој боравак у Кини и Јапану (6.11.1990)
272. *Д. Трифуновић*: Математика и физичка реалност у српској науци (13.11.1990)
273. Комеморативна седница поводом смрти професора Ернета Стипанића (20.11.1990)
*274. *Д. Трифуновић*: Недељко Кошанин у кругу српских интелектуалаца (27.11.1990)
275. *З. Стокић*: Утемељење математике и физике (4.12.1990)

276. *В. Милошевић*: Поенкареово дело у науци (11.12.1990) — није одржано

*277. *М. Чанак*: О неким радовима професора Станимира Фемпла (18.12.1990)

278. *М. Чанак*: Математика у делу J. C. Баха (25.12.1990)

279. *Б. Чабрић*: Настанак, покушај и нови прилази решавању проблема трисекције угла (8.1.1991)

*280. *М. Томић, В. Марић*: Комеморативна седница поводом смрти академика Војислава Авакумовића (15.1.1991)

*281. *Д. Трифуновић*: Кинематички механизам монаха Лазара из 1404. године (22.1.1991)

282. *Д. Трифуновић*: Математика у Византији, у средњевековној Србији (наставак) 19.2.1991)

283. *К. Старчевић*: О Архимедовим методама интеграције (26.2.1991)

284. *J. Рајковић*: Последњи светски скуп из историје наука (5.3.1991)

285. *Д. Адамовић*: Прво саопштење о Богдану Гавриловићу (12.3.1991)

286. *В. Бабовић*: Једна неочекивана асоцијација на Тригов 25. проблем (19.3.1991) — није одржано

287. *С. Јаблан*: Maskay-еве групе (26.3.1991)

288. *В. Мудрински*: Утисци и рад на Универзитету у Алжиру (2.4.1991)

289. *Д. Трифуновић*: Једно виђење наше астрономије од 1766. до 1975. године (9.4.1991)

290. *З. Стокић*: Утемељење математике и физике III (16.4.1991)

*291. *И. Гутман*: Историја примене математике у хемији (23.4.1991)

292. *Д. Адамовић*: Друго саопштење о Богдану Гавриловићу (30.4.1991)

293. *В. Трбуховић*: Најстарије мелиорације као хидро-механички проблеми (7.5.1991)

294. *Р. Жарковић*: Коста Стојановић, Геометрија 19. века (14.5.1991)

295. *М. Чанак*: Развитак теорије неаналитичких функција комплексне промењљиве, I део (21.5.1991)

296. *М. Чанак*: Исто, II део (28.5.1991)

297. *Д. Трифуновић*: Борел код Срба (поводом 120-годишњице рођења Емила Борела, 1871–1956) (4.6.1991)

298. Резервисано време за госта (11.6.1991)

299. *Д. Трифуновић*: Нехолономни кинематички рачунари (18.6.1991)

300. Обележавање 300-те седнице и 10-годишњице рада Семинара (25.6.1991) — није одржано

301. *Д. Трифуновић*: Једно критичко мишљење о Музеју науке и технике Србије (5.11.1991)

302. *Д. Трифуновић*: Београдска математичка школа у времену окупације (13.4.1941 - 15.10.1944) (12.11.1991)
303. *З. Стокић*: Утемељење математике и физике IV (19.11.1991)
304. *Б. Чабрић*: Прво научно откриће, велико разочарење Милутина Миланковића (26.11.1991)
305. *М. Чанак*: Ојлер и математичка теорија музике (3.12.1991)
306. *Д. Адамовић*: Приказ последње књиге нашег Семинара (10.12.1991)
207. *З. Стокић*: Утемељење математике и физике V (17.12.1991)
308. *Љ. Протић*: Бертолинови радови у диференцијалним једначинама (поводом 10-годишњице од смрти проф. др Милорада Бертолина) (24.12.1991)
309. *Љ. Тодоровић*: Број у старој Грчкој (31.12.1991) — одложено
310. *Д. Трифуновић*: Популаризација математике (7.1.1992)
311. *Д. Трифуновић*: Применљивост математике (14.1.1992)
312. *Д. Адамовић*: Математички рад Богдана Гавриловића (21.1.1992)
313. *К. Старчевић*: Историјски аспекти математичке терминологије (11.2.1992)
314. *И. Гутман*: Њутн — алхемичар (18.2.1992)
315. *Б. Поповић*: Делски проблем (25.2.1992) — одложено
316. Расправа о пројекту „Математика у српском народу — догађаји и портрети“ (3.3.1992)

*317. *Б. Станковић*: Јан Микусињски (1913–1987) — један од твораца теорије уопштених функција (10.3.1992)

318. *Н. Јанковић*: Живот и дело др Ђорђа Николића (17.3.1992)

*319. *Д. Трифуновић*: Нешто о квадратном корену (24.3.1992)

320. *Д. Адамовић*: Приказ књиге „Раст знања“ од З. Стокића (31.3.1992)
321. *Р. Ђорђевић*: Књига о Гаспару Монжу (7.4.1992)
322. *Ђ. Курепа*: Дело Николе И. Лобачевског (поводом 200-годишњице од рођења научниковог) (14.4.1992)
323. *М. Чанак*: О појму извода разломљеног реда (21.4.1992)
324. Обележавање 85-годишњице академика др Ђуре Р. Курепе (28.4.1992)
325. *Д. Трифуновић*: Нацрт за интелектуалну биографију академика др Војислава Г. Авакумовића (5.5.1992)

Очигледно, Семинар за историју математичких и механичких наука је стални семинар Математичког института у Београду који перманентно сваког уторника ради већ 12. годину.

Од 16. децембра 1981. када је саопштен први рад на првој седници семинара, па до 5. маја 1992. године одржано је 325 седница Семинара за историју математичких и механичких наука.

Аутори

На Семинару за историју математичких и механичких наука излагало је своје радове укупно 92 аутора чија имена доносимо у азбучном следу са бројем одржаних саопштења на Семинару у загради. Међу овим ауторима било је 12 академика, 46 професора универзитета, 9 асистената и доцената универзитета, 7 постдипломаца из историје математике и 11 других научних радника.

Александар Николић (1)
Александар Трифони (3)
Андрија Стојковић (4)
Богдан Бајшански (1)
Богољуб Станковић (1)
Божидар Поповић (3)
Божидар Аничин (2)
Борис Павковић (1)
Борис Чекелија (1)
Бранимир Јовановић (1)
Бранислав Боричић (1)
Бранислав Чабрић (1)
Бранко Вулићевић (2)
Бранко Глигорић (1)
Бранко (†) Павловић ()
Будислав Зарић (1)
В. Бабовић (1)
Вељко Вујичић (1)
Владимир Девиде (1)
Владимир Мудрински (1)
Владислав Милошевић (5)
Војислав Андрић (2)
Војислав Марић (1)
Војислав Трбуховић (3)
Гордана Бабић (1)
Десанка Пешић (1)
Драган Трифуновић (82)
Драгослав Митриновић (1)
Драгош Цветковић (1)
Драгутин Гостушки (1)
Душан Адамовић (16)
Душан Витас (2)
Ђорђе Вукомановић (1)
Ђорђе Карапанџић (1)
Ђуро Курепа (11)
Ернест Стипанић (1)
Жарко Мијаиловић (1)
Жарко Митровић (1)
Звонимир Шикић (2)
Златко Мамузић (2)
Златко Херков (1)
Зоран Лучић (1)
Зоран Стокић (8)
Зоран Шами (1)
Иван Гутман (2)
Илија Лазаревић (2)
Илија Лукачевић (1)
Југослав Рајковић (1)
Коста Старчевић (3)
Љубинка Трговчевић (1)
Љубомир Вуковић (1)
Љубомир Протић (2)
Љуба Тодоровић (1)
Марко Леко (3)
Милан Божић (2)
Милева Првановић (1)
Милица Мужијевић (1)
Милош Арсенијевић (1)
Милош Чанак (12)
Мирко Дејић (2)
Мирко (†) Стојаковић (1)
Миодраг Мадић (1)
Миодраг Перовић (1)
Миодраг Томић (2)

Миодраг Цекић (3)
Михаило Марковић (1)
Момчило Ушћумлић (5)
Ненад Јанковић (1)
Никола Пантић (3)
Павле Миличић (1)
Раде Дацић (4)
Раде Живаљевић (1)
Радмила Жарковић (3)
Радмило Пешић (1)
Радомир Ђорђевић (10)
Радослав Димитрић (1)
С. Борн (1)
Светлана Књазев (3)
Светозар Милић (4)
Симон Драговић (2)
Симон Ћетковић (3)
Славик Јаблан (4)
Славиша Прешић (5)
Слободан Вујошевић (2)
Слободан Поповић (2)
Стојан Богдановић (1)
Татомир Анђелић (14)
Часлав Станојевић (1)

Аутори на Семинару су махом из Београда, а било их је из Новог Сада, Крагујевца, Ниша, Подгорице, Загреба, Зрењанина, Панчева, Бања Луке, Ваљева, Осијека, као и из Сједињених америчких држава.

Историјске годишњице

Као што је то уобичајено у делатности историчара наука, Семинар је обележио неколико важних годишњица у општој као и у националној историји математике.

1. 200-годишњица од смрти Леонарда Ојлера (1707–1783)
2. 40-годишњица од смрти Михаила Петровића (1868–1943)
3. 130-годишњица од рођења Анри Поенкареа (1854–1912)
4. 30-годишњица од смрти А. Тјуринга (1912–1954)
5. 320-годишњица од смрти П. Ферма (1601–1665)
6. 80-годишњица од настанка специјалне теорије релативности и 30-годишњица од смрти Алберта Ајнштајна (1879–1955)
7. 80-годишњица рођења академика др Татомира Анђелића (1803–1983)
8. 170-годишњица од рођења Џ. Була (1815–1864).
9. 100-годишњица од првог доктората математичких наука код Срба (1885–1985)
10. 130-годишњица од смрти Н. И. Лобачевског (1792–1856)
11. 150-годишњица од рођења Димитрија Нешића (1836–1904)
12. 200-годишњица од рођења Вука Караџића (1787–1864)
13. 35-годишњица књиге Ђ. Курепе „Теорија скупова“
14. 220-годишњица од прве математичке књиге код Срба
15. 350-годишњица Декартове „Геометрије“ (1637–1987)
16. 300-годишњица Њутнових „Принципија“
17. 120-годишњица рођења Косте Стојановића (1867–1921)

18. 150-годишњица Универзитета у Београду (1838–1988)
19. 200-годишњица од рођења А. Кошија (1789–1857)
20. 120-годишњица од рођења Е. Картана (1869–1951)
21. 80-годишњица рођења професора др Станка Билинског
22. Комеморативна седница поводом смрти професора др Ернеста Стипанића
23. Комеморативна седница поводом смрти академика др Војислава Г. Авакумовића (1910–1990)
24. 120-годишњица од рођења Емила Борела (1871–1956)
25. 10-годишњица од смрти професора др Милорада Бертолина
26. 200-годишњица од рођења Николе И. Лобачевског
27. 85-годишњица од рођења академика Ђуре Р. Курепе

Класификација саопштења

Изложених 325 саопштења на Семинару могла би се детаљније класификовати у оквиру историје и филозофије математике и механике. Ово смо избегли и сва саопштења сврстали у четири опште групе: историја математике, историја механике, филозофија математике и механике и опште теме.

У класификацији смо навели само редни број саопштења који у горњем попису свих саопштења позива на основне податке.

Историја математике

1, 2, 4, 6, 10, 11, 13, 15, 18, 21, 23, 24, 26, 27, 28, 34, 35, 39, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 58, 60, 61, 62, 68, 69, 70, 71, 72, 78, 79, 80, 81, 84, 88, 89, 94, 95, 97, 98, 99, 101, 102, 103, 104, 105, 107, 109, 110, 114, 115, 118, 121, 122, 123, 125, 126, 127, 128, 129, 131, 132, 133, 135, 137, 140, 141, 142, 143, 145, 146, 147, 148, 149, 150, 151, 153, 156, 157, 159, 160, 161, 162, 164, 165, 166, 167, 169, 170, 171, 172, 175, 176, 177, 178, 181, 184, 185, 186, 187, 189, 192, 195, 196, 198, 201, 103, 105, 106, 211, 212, 213, 214, 218, 219, 220, 221, 222, 223, 226, 228, 229, 231, 232, 233, 238, 241, 243, 244, 245, 246, 252, 253, 254, 256, 259, 262, 264, 266, 267, 269, 270, 272, 276, 277, 279, 280, 282, 283, 285, 287, 291, 292, 293, 294, 295, 296, 297, 302, 309, 310, 312, 313, 315, 317, 319, 322, 3223, 325.

Историја механике

3, 5, 7, 14, 20, 22, 29, 33, 40, 42, 55, 75, 76, 90, 92, 93, 96, 116, 152, 158, 168, 182, 183, 194, 225, 232, 240, 260, 281, 286, 289, 299, 304, 314, 318.

Филозофија математике и механике

12, 25, 37, 41, 43, 56, 59, 63, 64, 77, 82, 83, 86, 120, 134, 136, 154, 163, 179, 180, 200, 215, 242, 247, 248, 251, 261, 275, 290, 303, 307, 321.

Опште теме

8, 9, 16, 17, 19, 30, 31, 32, 36, 38, 41, 44, 52, 53, 54, 57, 65, 66, 67, 73, 74, 85, 89, 91, 100, 106, 108, 11, 112, 113, 117, 119, 124, 13o, 138, 139, 144, 155, 173, 174, 188, 190, 191, 193, 197, 199, 202, 204, 207, 208, 209, 210, 217, 224, 227, 230, 234, 235, 236, 237, 239, 249, 250, 255, 257, 258, 263, 265, 268, 271, 273, 274, 278, 284, 288, 298, 300, 301, 305, 306, 308, 311, 316, 320, 324.

Учесници у раду семинара

Као стални семинар Математичког института, Семинар за историју математичких и механичких наука спада у ред веома посећених. За ово време на 325 седница Семинара било је укупно 5642 учесника. У просеку око 20 учесника по седници. Било је седница Семинара и са по 40 до 60 учесника, као и седница са 10 до 15 ученика.

Учесници Семинара су махом професори универзитета са београдских, крагујевачких и новосадских факултета, неколико академика и других научних радника. Запажено је присуство млађих сталних посетилаца Семинара. То су махом постдипломци, специјалисти из историје математике и други. На Семинар редовно долазе и четири пензионисана професора универзитета.

Остале делатности

Неоспоран је закључак, да је у делатности овог сталног семинара Математичког института уложен огроман труд.

Поред исказаних резултата, Семинар је покренуо и неколико важних делатности за нашу науку. Ево тих потхвата које је Научно веће Математичког института прихватило и одобрило.

1° Математички институ је добио својство оснивача *Вукове задужбине* и биће му трајно уклесно име на стубу ове Задужбине.

2° У оквиру посебне теме у Семинару се ради на обимном делу *Математика у Српском народу* које ће у обиму двеју књига бити објављено до пред крај овог века.

3° У оквиру Математичког института Семинар издаје сталну серију *Историја математичких и механичких наука* у којој се објављују саопштења са Семинара. До сада је објављено пет књига и један сепарат:

Књига 1: А. Т. Григорьян, Б. Н. Фрадлин: *Научное наследие школы Г. К. Суслова по аналитической механике и её развитие в исследованиях югославских учёных* (Београд 1977)

Књига 2: *Историјски списи из математике и механике* (Београд 1989)

Књига 3: Slavik Jablan: *Geometry in the Pre-scientific Period. Ornament Today* (Belgrade 1989)

Књига 4: *Присутна прошлост* (Београд 1991)
Књига 5: Zoran Stokić: *Rast znanja* (Beograd 1991)
Сепарат: *Радивој Кашанин 1892–1989* (Београд 1991)

Редакциони одбор ове серије чине:

др *Душан Адамовић*, проф. унив.
др *Марко Леко*, проф. унив.
др *Светозар Милић*, проф. унив.
др *Драган Трифуновић*, проф. унив.

Главни и одговорни уредник ове серије је др *Драган Трифуновић*, уједно руководилац сталног Семинара за историју математичких и механичких наука у Математичком институту САНУ.

Dragan TRIFUNOVIĆ

PERMANENT SEMINAR OF THE MATHEMATICAL INSTITUTE

In the paper we describe the work of the *Seminar for the history of mathematical and mechanical sciences* in the last 12 years. There were 325 communications done by 92 authors and there were published 6 books containing these communications.*

dr DRAGAN TRIFUNOVIĆ
11000 Beograd
Ustanička 65/I

*This research was supported by Science Fund of Serbia, grant number 0401/A, through Matematički institut.