U N I V E R Z I T E T   U   B E O G R A D U

P R I R O D N O - M A T E M A T I Č K I   F A K U L T E T

Miloje D. Rajović

ADAMAROVI PROIZVODI I NEKE PROCENE TEJLOROVIH KOEFICIJENATA U H^p , B^p, D^p PROSTORIMA

DOKTORSKA DISERTACIJA

BEOGRAD, 1985.

U V O D

U teoriji funkcija kompleksne promenljive do sredine ovog veka tretirane su, globalno gledajući, dve grupe problema: tzv. unutrašnji problemi, koji se odnose na utvrdjivanje svojstava pojedinih funkcija unutar oblasti njihove definisanosti, i tzv. granični problemi, koji se odnose na utvrdjivanje ponašanja pojedinih funkcija kompleksne promenljive na rubu oblasti njihove egzistencije. S obzirom da se analitičke funkcije predstavljaju raznim stepenim redovima (Taylor-ovim, Laurent-ovim, i dr.), ispitivanja mnogih svojstava analitičkih funkcija polazila su od koeficijenata njihovog Taylor-ovog reda ili drugog reda kojim su te funkcije predstavljene.

Sredinom ovog veka počelo je u kompleksnoj analizi korišćenje metoda funkcionalne analize. Nastalo je intezivno proučavanje pojedinih klasa analitičkih funkcija, odnosno prostora analitičkih funkcija. Najvećih istraživanja je bilo i ostalo u vezi sa proučavanjem Hardijevih prostora, koji se kratko nazivaju H^p - prostorima. Ovi prostori čine jednu duboku vezu izmedju realne analize i kompleksne analize. Problematika H^p - prostora je povezana sa proučavanjem harmonijskih, subharmonijskihianalitičkih funkcija.

Poznato je da $H^p \subset H^q$ ako je $0 < q < p$, i da su prostori H^p, $p \geqslant 1$, Banahovi prostori, a H^p, $0 < p < 1$, F - - prostori. Pored prostora H^p, uvedeni su i ispitivani tzv.

B^p prostori. Napomenimo da $H^p \subset B^p$, $0 < p < 1$. Nedavno su uvedeni tzv. D^p prostori.

Predmet ovog mog rada je proučavanje Adamarovih proizvoda čiji elementi pripadaju prostorima H^p, B^p, D^p, kao i utvrdjivanje nekoliko karakteristika Taylor-ovih koeficijenata Lipschitz-ovih prostora analitičkih funkcija

Posebnu oblast, danas, u ispitivanju raznih svojstava elemenata ovih prostora i drugih analitičkih funkcija predstavljaju tzv. množitelji i Adamarovi (J.Hadamard) proizvodi. Naime, ako su poznata svojstva komponenata - analitičkih funkcija

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \quad ; \quad g(z)=\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$$

postavlja se, prirodno, pitanje kakva su odgovarajuća svojstva Adamarovog proizvoda

$$(f \odot g)(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n z^n$$

Kad je reč o utvrdjivanju karakteristika Taylor-vih koeficijenata Lipschitz-ovih prostora, u ovom radu date su odgovarajuće procene Taylor-ovih koeficijenata elemenata prostora $H(p,q,\varphi)$, tj. analitičkih funkcija za koje je

$$\int_0^1 [\varphi(1-r) M_p(r,f)]^q \frac{dr}{1-r} < +\infty$$

gde je φ skoro rastuća funkcija na $(0,1]$.

U prvoj glavi ovog rada navedeni su najpre karakteristike i bitna svojstva H^p, B^p i D^p prostora.

Pri tom su date definicione relacije skupova elemenata ovih prostora, kao i njihovih medjusobnih odnosa. Uz to je dato integralno predstavljanje Adamarovog proizvoda, kao i ostale relacije neophodne za rezultate navedene i dobijene u glavi II i glavi III.

U drugoj glavi najpre je navedeno nekoliko glavnih rezultata koji se odnose na Adamarove proizvode čiji elementi pripadaju prostoru H^p, $p > 1$, odnosno prostoru D^p, $p > 1$, i $p = 1$ i $p = \infty$.

Zatim izlažem svoje rezultate koji su sadržani u: teoremi 2.5, koja se odnosi na Adamarov proizvod funkcija $f(z) \in H^p$, $p > 1$, i $g(z) \in D^q$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$; teoremi 2.6, koja se odnosi na Adamarov proizvod funkcija $f(z) \in B^p$, $0 < p < 1$, i $g(z) \in A$; teoremi 2.7, koja se odnosi na Adamarov proizvod funkcija $f(z) \in D^\infty$ i $g(z) \in H^p$, $1 < p < \infty$ teoremi 2.8 koja se odnosi na Adamarov proizvod funkcija $f(z) \in H^p$, $0 < p < 1$, i $g(z) \in A$; teoremi 2.9, koja se odnosi na Adamarov proizvod funkcija $f(z) \in H^p$, $\frac{1}{n+1} < p < \frac{1}{n}$ $(n=1,2,3\ldots)$ i $g(z) \in A$; teoremi 2.10, koja se odnosi na Adamarov proizvod funkcija $f(z) \in H^p$, $p = \frac{1}{n+1}$ $(n=1,2,\ldots)$ i $g(z) \in A$. U svim ovim teoremama dokazao sam da Adamarov proizvod $(f \circ g)(z) \in H^\infty$.

U trećoj glavi tretiram nekoliko rezultata koji se odnose na L^p – ponašanje integralnih sredina analitičkih funkcija i procenu Tejlorovih koeficijenata elemenata prostora $H(p,q,\varphi)$, gde je φ skoro rastuća funkcija na intervalu $(0,1]$. S tim u vezi dokazao sam teoreme 3.14, 3.15, 3.16 i 3.17.

Na kraju je navedena bibliografija korišćenih radova; pri tome su redni brojevi radova koji su neposredno vezani za sadržaj ove disertacije označeni zvezdicom.

U proučavanje problematike za koju je vezan i ovaj rad dragoceni su mi bili saveti i pomoć prof. V.Dajovića, kome i ovom prilikom izražavam svoju iskrenu zahvalnost.

G L A V A I

O OSNOVNIM SVOJSTVIMA H^p, B^p I D^p PROSTORA

Kao što je u Uvodu rečeno, u teoriji funkcija kompleksne promenljive razlikuju se dve vrste problema: takozvani granični problemi i unutrašnji problemi. Granični problemi odnose se na utvrdjivanje raznih svojstava pojedinih analitičkih funkcija ili utvrdjivanje raznih svojstava na skupovima tačaka koje pripadaju granici odgovarajuće oblasti definisanosti ovih analitičkih funkcija, odnosno klase analitičkih funkcija. Unutrašnji problemi odnose se na utvrdjivanje svojstava ovih funkcija na skupovima tačaka koje pripadaju njihovoj oblasti definisanosti, na primer, interpolacija na pojedinim nizovima tačaka unutar oblasti definisanosti za pojedine klase funkcija pod odredjenim uslovima.

1. U toku poslednjih pedeset godina velika pažnja je posvećena tzv. H^p prostorima i utvrdjena su mnoga kako unutrašnja tako i granična svojstva, pojedinih funkcija koje pripadaju bilo prostoru H^p, $0 < p < 1$, ili H^p za $p=1$, ili H^p za $p > 2$, a posebno skupu H^{∞} ograničenih funkcija u jediničnom krugu.

Za pojedine klase analitičkih funkcija utvrdjena su granična svojstva. Na primer, još 1906. godine, je P.Fatou, u svojoj doktorskoj disertaciji, utvrdio da svaka ograničena analitička funkcija unutar jediničnog kruga ima na rubu jediničnog kruga skoro svugde odredjene granične vrednosti. Taj skup funkcija je docnije nazvan prostorom H^{∞}. Znatne priloge ispitivanju funkcija koje pripadaju prostoru H^p dali su, počev od druge decenije ovog veka: G.Hardy, J.Littlewood, I.Privalov, F. i M.Riesz, V.Smirnov, G.Szegö, G.Fihtengoljc, P.Duren, i mnogi drugi matematičari. U poslednjih trideset pet godina, posmatranje H^p prostora kao linearnih vektorskih prostora i korišćenje u mnogome metoda funkcionalne analize, podstaklo je veće interesovanje za H^p prostore, pa su tako rešeni mnogi problemi u vezi s njima.

2. Pored prostora H^p, treba istaći i prostor B^p, $0 < p < 1$, koji je u tesnoj vezi sa prostorom H^p, $0 < p < 1$; $H^p \subset B^p$.

Napomenimo da je najpre bila posvećena veća pažnja prostorima H^p, $1 \leqslant p \leqslant \infty$. Ovi prostori su Banahovi prostori. Medjutim, prostor H^p, $0 < p < 1$, nije Banahov prostor.

Pre pet godina uvode se tzv. D^p prostori, $0 < p \leqslant \infty$, koji su takodje u odredjenom odnosu sa H^p.

Za funkciju f analitičku u jediničnom krugu kaže se da pripada prostoru H^p, $0 < p \leqslant \infty$, ako je veličina

$$(1.1) \quad M_p(r,f) = \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^p d\theta \right\}^{1/p},$$

$$(1.2) \quad M_{\infty}(r,f) = \max |f(re^{i\theta})|, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$$

ograničena kada $r \to 1$.

H^{∞} je prostor svih ograničenih funkcija u jediničnom krugu.

Napomena 11. Za funkciju $f(z) \in H^p$, $p > 1$, njen realni deo $Re(f) = \mathcal{U}(r,f)$ može se predstaviti Poisson-ovim integralom:

$$(1.3) \quad \mathcal{U}(r,\varphi) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P(\theta) \frac{1-r^2}{1-2r\cos(\theta-\varphi)+r^2}\, d\varphi$$

$$P(\theta) \in L^p, \ p>1$$

Za funkciju f analitičku u jediničnom krugu kaže se da pripada prostoru B^p, $0 < p < 1$, ako je veličina

$$(1.4) \quad \int_0^1 (1-r)^{\frac{1}{p}-2} M_1(r,f)\, dr < \infty$$

3. Navedimo sada sledeće dve definicije, koje se odnose na funkcije koje pripadaju prostoru D^p, i to u slučaju kada je $0 < p < \infty$ i u slučaju kada je $p = \infty$.

Definicija 1.1. Funkcija $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$, analitička u jediničnom krugu pripada prostoru D^p, $0 < p < \infty$, ako je

$$(1.5) \quad \|f\|^p = \|f\|^p_{D^p} = \int_0^1 [A(r,f)]^{p/2} dr < \infty,$$

gde je

$$A(r) = A(r,f) = \iint_{|z|<r} |f'(z)|^2 dx\,dy = \pi \sum_{n=1}^{\infty} n|a_n|^2 r^{2n}$$

Definicija 1.2. Funkcija $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$, analitička u jediničnom krugu, pripada prostoru D^{∞} ako je

$$(1.6) \quad \|f\|^2_{D^{\infty}} = A(1,f) = \pi \sum_{n=1}^{\infty} n|a_n|^2 < \infty$$

Napomena 12. Kao što je poznato [40] :

$H^p \subset D^p$, $0 < p \leq 2$, a $D^p \subset H^p$, $2 \leq p < \infty$. Ako je $p \neq 2$, inkluzije su prave. Za prostore H^{∞} i D^{∞} važi:

$$H^{\infty} \setminus D^{\infty} \neq \emptyset \quad \text{i} \quad D^{\infty} \setminus H^{\infty} \neq \emptyset$$

4. Predstavljanje linearnog funkcionala. Poznato je da svaki ograničen linearni funkcional φ u H^p, $1 < p < \infty$, ima jedinstvenu reprezentaciju

$$(1.7) \quad \varphi(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(e^{i\theta})g(e^{-i\theta})d\theta ,$$

gde je $g \in H^q, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

Navedimo teoremu koja predstavlja proširenje ovog rezultata za $p < 1$ [23] :

Neka $\varphi \in (H^p)^*$, $0 < p < 1$; tada egzistira jedinstvena funkcija $g \in A$ takva da je

$$(1.7') \quad \varphi(f) = \lim_{r\to 1} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(e^{i\theta})g(e^{-i\theta})d\theta$$

Ako je $\frac{1}{n+1} < p < \frac{1}{n}$ $(n=1,2\ldots)$, tada $g^{(n-1)} \in \Lambda_\alpha$, gde je $\alpha = \frac{1}{p} - n$. Obrnuto, za svaku funkciju g, sa $g^{(n-1)} \in \Lambda_\alpha$, postoji granična vrednost (1.7') za sve $f \in H^p$ i definiše funkcional $\varphi \in (H^p)^*$. U slučaju da je $p = \frac{1}{n+1}$, $g^{(n-1)} \in \Lambda_*$; i obrnuto, svaka funkcija g za koju je $g^{(n-1)} \in \Lambda_*$ definiše pomoću (1.7) ograničeni linearni funkcional na H^p.

U relaciji (1.7'), $\Lambda_\alpha (0 < \alpha \leqslant 1)$ je Lipschitz-ova klasa funkcija.

Za funkciju F kažemo da pripada Lipschitz-ovoj klasi $\Lambda_\alpha (0 < \alpha \leqslant 1)$ ako je $\omega(h,F) = O(h^\alpha)$ kada $h \to 0$, a klasi λ_α ako je $\omega(h,F) = o(h^\alpha)$.

Dalje, za neprekidnu funkciju F kaže se da pripada klasi Λ_* ako je

$$F(t+h) - 2F(t) + F(t-h) = O(h)$$

uniformno po t, a klasi λ_* ako se umesto O(h) može staviti o(h).

Neka A označava klasu funkija f(z) analitičkih u krugu $|z| < 1$ a neprekidnih na krugu $|z| \leqslant 1$. Za analitičku funkciju f(z) kažemo da $f \in \Lambda$ $(\lambda_\alpha, \Lambda_*, \lambda_*)$ ako $f \in A$, a ograničena funkcija

$$F(\theta)=f(e^{i\theta}) \in \Lambda_\alpha (\lambda_\alpha, \Lambda_*, \lambda_*)$$

Adamarov (J.Hadamard) proizvod. Adamarov proizvod je kompozicija funkcija

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \ ; \ g(z)=\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$$

koje su analitičke, na primer, u jediničnom krugu $(|z|<1)$:

(1.8) $(f \circ g)(z)= \sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n z^n$

Ako su poznata neka svojstva komponenata $f(z)= \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ i $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ ovog Adamarovog proizvoda $(f \circ g)(z)$, tada se na osnovu toga utvrdjuju odgovarajuća svojstva ovog proizvoda.

Vrlo često se pri proučavanju Adamarovog proizvoda koristi [14] relacija:

(1.9) $\alpha_0 b_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n z^n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} U(r,\varphi) g(\underline{z}) d\varphi, \ r<1$

gde je $\underline{z}=re^{i(\theta-\varphi)}$, dok je

(1.1o) $U(r,\varphi) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n(\alpha_n \cos n\varphi - \beta_n \sin n\varphi)$

realni deo funkcije $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ analitičke u jediničnom krugu $|z| < 1$, a $g(z)=\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ je takodje analitička funkcija u tom krugu.

S tim u vezi se, radi procene integrala na desnoj strani jednakosti (1.9), koristi Hölder-ova nejednakost:

$$\left|\int_0^{2\pi} u(r,\varphi) g(z)\, d\varphi\right| \leq \left(\int_0^{2\pi} |u(r,\varphi)|^p d\varphi\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\int_0^{2\pi} |g(z)|^q d\varphi\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1.$$

Napomena 1.3. Realni deo funkcije $f(z) \in H^p$, $p > 1$, može se predstaviti pomoću Poisson-ovog integrala

$$u(re^{i\varphi}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P(\theta) \frac{1-r^2}{1-2r\cos(\theta-\varphi)+r^2}\, d\theta,$$

gde funkcija $P(\theta) \in L^p$, $p > 1$.

5. Inverzija Adamarovog proizvoda karakteriše se na sledeći način:

Ako je poznato jedno svojstvo, može biti i globalno, jedne analitičke funkcije (na primer, u jediničnom krugu - recimo da pripada jednoj klasi, prostoru analitičkih funkcija), a poznato je takodje odgovarajuće svojstvo Adamarovog proizvoda ove funkcije $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, treba naći odgovarajuće svojstvo druge komponente ovog Adamarovog proizvoda

$$(f\circ g)(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n z^n,$$

gde je $g(z)=\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$, druga komponenta ovog proizvoda.

Na primer, teoremi V.Dajovića [16] koja se odnosi na Adamarov proizvod:

Ako $f(z) \in H^p$, a $g(z) \in H^q$, gde je $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, tada

Adamarov proizvod
$$(f \circ g)(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n z^n \in H^{\infty},$$

inverzna je sledeća teorema R.A.Whiteman-a:

Teorema 1.1. Ako $f(z) \in H^p$, a Adamarov proizvod $(f \circ g)(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n z^n \in H^{\infty}$, tada $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n \in H^q$, ako su Taylor-ovi koeficijenti (a_n) pozitivni i zadovoljavaju uslov

$$(G) \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 - \frac{h}{n} - \frac{A(n)}{n^{\lambda}}, \quad \lambda > 1$$

gde je $A(n)$ ograničeno, h realan broj i $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$; p i q mogu zameniti mesta.

Navedimo još i inverznu teoremu J.Caveny-a [42]:

Teorema 1.2. Neka je $g(z)$ analitička funkcija u jediničnom krugu, $1 < q < \infty$ i $p = \frac{q}{q-1}$; tada $g \in H^q$ ako i samo ako $f \circ g \in H^{\infty}$ za svako $f \in H^p$.

6. Na kraju istaknimo nekoliko činjenica koje se odnose na problematiku L^p-ponašanja integralnih sredina analitičkih funkcija. Značajan prilog u vezi sa ovim je rad M.Mateljevića i M.Pavlovića "L^p-ponašanje integralnih sredina analitičkih funkcija" [57].

U daljem koristićemo i sledeće rezultate:

Teorema 1.3. (Hardy-Littlewood, I). Ako je $q \leqslant 2$, tada $f \in H(2,q,\alpha)$ implicira

$$\left\{(n+1)^{-\alpha+\frac{1}{2}-\frac{1}{q}} \cdot a_n\right\}_{n=0}^{\infty} \in \ell^q \tag{1.11}$$

Ako je $q \geqslant 2$, tada (1.11) implicira $f \in H(2,q,\alpha)$. [V.81].

Napomenimo da su Askey i Boas dokazali sledeći jači rezultat:

Teorema 1.4. Funkcija $f \in H(2,q,\alpha)$ ako i samo ako

$$\left\{(n+1)^{-\alpha-\frac{1}{q}} \|S_n\|_2\right\}_{n=0}^{\infty} \in \ell^q,$$

gde je

$$S_n(z) = S_n f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$$

Istaknimo i jednu teoremu M.Mateljevića i M.Pavlovića [57]

Teorema 1.5. Neka je

$$I_0 = \{0\}, \quad I_n = \{k : 2^{n-1} \leqslant k < 2^n\}, \ (n = 1,2,\dots)$$

i

$$\Delta_n(z) - \Delta_n f(z) = \sum_{k \in I_n} a_k z^k$$

Tada $f \in H(2,q,\alpha)$ ako i samo ako

$$\left\{2^{-n\alpha} \|\Delta_n\|_2\right\}_{n=0}^{\infty} \in \ell^q$$

Prva implikacija teoreme (HL,I) je neposredno posledica nejednakosti

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} |b_n| r^n\right)^{\beta} \leqslant (1-r)^{1-\beta} \sum_{n=0}^{\infty} |b_n|^{\beta} r^n, \quad 0 < \beta \leqslant 1$$

i može se koristiti za dokazivanje sledećih rezultata Hardy-a i Littlewood-a:

Teorema 1.6. (Hardy - Littlewood, II). Ako $f \in H^p$, $p \leqslant 2$, tada je

$$\sum (n+1)^{p-2} \cdot |a_n|^p < \infty .$$

Teorema 1.7. (hardy - Littlewood, III). Neka je $p < q \leqslant \infty$, $s \geqslant p$; tada je

$$H^p \subset H(q, s, \frac{1}{p} - \frac{1}{q}).$$

G L A V A II

OGRANIČENI ADAMAROVI PROIZVODI ELEMENATA PROSTORA H^p, B^p, D^p

1. Ovde najpre navodimo nekoliko glavnih rezultata koji se odnose na Adamarove proizvode čiji elementi pripadaju prostoru H^p, $p > 1$, odnosno prostoru D^p, $p > 1$, a zatim izlažem svoje rezultate u vezi sa Adamarovim proizvodima. Na prvom mestu navodim sledeću teoremu V.Dajovića, koju je dokazao još 1956. godine i u vezi s kojom se dalje razvilo više radova naših i stranih autora.

Naime, reč je o sledećoj teoremi [14] :

<u>Teorema 21</u>. Adamarov proizvod

$$(2.1)\quad (f \circ g)(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k b_k z^k \in H^{\infty},$$

ako funkcija

$$(2.2)\quad f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k \in H^p, \quad 1 < p,$$

i funkcija

$$(2.3)\quad g(z) = \sum^{\infty} b_k z^k \in H^q,$$

gde je $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

Dokaz ove teoreme autor je izveo koristeći najpre predstavljanje realnog dela funkcije f(z) Poissonovim integralom, a potom je Adamarov proizvod predstavio integralom.

Najzad na kraju koristeći dva puta Hölder-ovu nejednakost dobija dokaz tvrdjenja teoreme. - Naime,

(2.4) $$u(r,\varphi)=\frac{1}{2\pi}\int^{2\pi} P(\theta)\frac{1-r^2}{1-2r\cos(\theta-\varphi)+r^2}d\theta,$$

gde $P(\theta)\in L^p$, $p>1$. Dalje, Adamarov proizvod $(f\circ g)(z)$, s tačnošću do jedne aditivne konstante, jednak je funkciji

(2.5) $$\alpha_0 b_0+\sum^{\infty} a_K b_K z^K=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} u(r,\varphi)g(z)d\varphi,\ r<1$$

gde je $z=re^{i(\theta-\varphi)}$. Koristeći svojstvo integrala (2.4) i primenjujući dva puta Hölder-ovu nejednakost, polazeći od desne strane relacije (2.5) dokazuje se da je integral na desnoj strani relacije (2.5) ograničen, a prema tome, s obzirom na relaciju (2.5), i Adamarov proizvod $(f\circ g)(z)\in H^\infty$.

M.Jevtić je u svom radu "Neka svojstva novih Adamarovih proizvoda analitičkih funkcija" [42] dokazao da Adamarov proizvod $h(z)=(f\circ g)(z)=\sum_{K=1}^{\infty} a_K b_K z^K$

gde je $f(z)=\sum^{\infty} a_K z^K$, $g(z)=\sum_{K=1}^{\infty} b_K z^K$

zadržava svojstva neprekidnosti ako $f\in D^p$, $g\in D^q$, $1\leq p\leq\infty$ $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$.

U tom radu definisani su prostori D^p, $0<p<\infty$, koji u sebi sadrže prostor D, kao što je navedeno u glavi I. Inače, još ranije je utvrdjen niz svojstava prostora $D=D^\infty$ analitičkih funkcija u jediničnom krugu sa ograničenim Dirichlet-ovim integralom.

Prostori D^p, $0 < p < \infty$, kao što je istaknuto u prvoj glavi, mogu se uporediti (u odnosu na inkluziju) sa Hardy-evim prostorom H^p, $0 < p < \infty$. Naime, $H^p \subset D^p$ ako je $0 < p \leq 2$, a $D^p \subset H^p$ ako je $2 \leq p < \infty$.

Dokazano je, kao i u slučaju Hardy-evih prostora, da je prostor D^p Banahov ako je $1 \leq p < \infty$, a D^p je F-prostor ako je $0 < p < 1$. M.Jevtić je u prethodno navedenom radu [42] dokazao sledeće dve teoreme:

Teorema 2.2 Neka je $h(z) = (f \odot g)(z) = \sum^{\infty} a_n b_n z^n$

Adamarov proizvod funkcija

$$f(z) = \sum^{\infty} a_n z^n \in D^p \quad i \quad g(z) = \sum^{\infty} b_n z^n \in D^q$$

gde je $1 < p < \infty$, a $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Tada:

(a) postoji konstanta C koja ne zavisi od elemenata f i g, takva da $h(z) \leq C \|f\|_{D^p} \cdot \|g\|_{D^q}$;

(b) funkcija h(z) je neprekidna na jediničnom disku $\overline{U}$;

(c) $$(f,g) = \lim_{\rho \to 1} \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n \rho^n = \lim_{\rho \to 1} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\rho e^{it}) g(e^{-it}) dt$$

postoji za svaki par elemenata $f \in D^p$, $g \in D^q$.

Teorema 2.3. Neka je

$$f(z) = \sum^{\infty} a_n z^n \in D^1, \quad g(z) = \sum^{\infty} b_n z^n \in D^{\infty}, \ i$$

$$h(z) = (f \odot g)(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n z^n$$

Adamarov proizvod funkcija f i g. Tada:

(a') postoji konstanta C koja ne zavisi od elemenata f i g, takva da je

$$|h(z)| \leq C \|f\|_{D^1} \cdot \|g\|_{D^{\infty}};$$

(b′) Funkcija h(z) je neprekidna na jediničnom disku $\bar{U}$;

(c′) $(f,g)=\lim_{\varrho\to 1}\sum_{n=1}^{\infty}a_n b_n \varrho^n=\lim_{\varrho\to 1}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\varrho e^{it})g(\varrho e^{-it})dt$

postoji za svaki par elemenata $f\in D^1$, $g\in D^\infty$.

Dokazi prethodnih dveju teorema baziraju se na slede-ćim dvema lemama, koje je dokazao M. Jevtić:

<u>Lema 2.1.</u> Neka je $f_\varrho(z)=f(\varrho z)$, $0\leqslant\varrho<1$. Ako $f\in D^p$, $1\leqslant p<\infty$, onda je $\lim_{\varrho\to 1} f_\varrho=f\in D^p$.

<u>Lema 2.2.</u> Neka je $f_\xi(z)=f(\xi z)$, $\xi\in U$, gde je U jedinični disk. Ako $f\in D^p$, $1\leqslant p<\infty$, onda $\|f_{\xi_1}-f_{\xi_2}\|\to 0$ ako $|\xi_1-\xi_2|\to 0$, $\xi_1,\xi_2\in U$.

Prethodne dve leme se mogu uopštiti. Naime,

<u>Lema 2.1′.</u> Neka je $f_\varrho(z)=f(\varrho z)$, $0\leqslant\varrho<1$. Ako $f\in D^p$, $0<p<\infty$, onda je $\lim_{\varrho\to 1} f_\varrho=f\in D^p$.

Lema 2.2′. Neka je $f_\xi(z)=f(\xi z)$, $\xi\in U$. Ako $f\in D^p$, $0<p<\infty$, onda $\|f_{\xi_1}-f_{\xi_2}\|\longrightarrow 0$ ako $|\xi_1-\xi_2|\to 0$, $\xi_1,\xi_2\in U$

Zaista, dokazi leme 2.1′. i leme 2.2′. ostaju formalno isti kao i dokazi leme 2.1. i leme 2.2, a opštiji su zato što važe za $0<p<\infty$, a ne samo za $1\leqslant p<\infty$.

<u>Dokaz leme 2.1′</u>. Neka je $\varepsilon>0$. Postoji $r_0=r_0(\varepsilon)$ tako da je

$$\int_{r_0}^{1}[A(r,f)]^{p/2}dr<\frac{\varepsilon^p}{2} \tag{2.6}$$

Kako je $A(r,f_\varrho-f)\leqslant A(r,f)$, to je

$$\int_{r_0}^{1}[A(r,f_\varrho-f)]^{p/2}dr<\frac{\varepsilon^p}{2} \tag{2.7}$$

Pošto je funkcija A(r,f) monotona, to je

$$\int_{0}^{r_0}[A(r,f_\varrho-f)]^{p/2}dr\leqslant[A(r_0,f_\varrho-f)]^{p/2}. \tag{2.8}$$

S obzirom da je $\varrho f'(\varrho z) \to f'(z)$, kad $\varrho \to 1$, uniformno na $|z| \leqslant r_0$, to je

(2.9) $[A(r_0, f_\varrho - f)]^{p/2} < \frac{\varepsilon^p}{2}$

ako je $\varrho_0(\varepsilon) < \varrho < 1$.

Na osnovu relacija (2.6), (2.7), (2.8) i (2.9) imamo

$$\|f_\varrho - f\|^p = \int_0^{r_0} [A(r, f_\varrho - f)]^{p/2} dr + \int_{r_0}^1 [A(r, f_\varrho - f)]^{p/2} dr < \varepsilon^p$$

za $\varrho_0 < \varrho < 1$, to jest $\lim_{\varrho \to 1} f_\varrho = f$, $f \in D^p$, $0 < p < \infty$

Dokaz leme 2.2'. Neka $f \in D^p$. Tada $f_\xi \in D^p$, $\xi \in \mathcal{U}$. Postoji $0 < r_0 < 1$ tako da je

$$\int_{r_0}^1 [A(r, f)]^{p/2} dr < \frac{\varepsilon^p}{2^{p+1}}$$

Kako je

(2.10) $\int_{r_0}^1 [A(r, f_{\xi_1})]^{p/2} dr < \frac{\varepsilon^p}{2^{p+1}}$

i

(2.11) $\int_{r_0}^1 [A(r, f_{\xi_2})]^{p/2} dr < \frac{\varepsilon^p}{2^{p+1}}$,

to koristeći Hölder-ovu nejednakost i nejednakost

(2.12) $(a+b)^p \leqslant 2^{p-1}(a^p+b^p)$, $0 < p < \infty$, $b \geqslant 0$,

dobijamo

(2.13) $\int_{r_0}^1 [A(r, f_{\xi_1} - f_{\xi_2})]^{p/2} dr \leqslant 2^{p-1} \left[\int_{r_0}^1 [A(r, f_{\xi_1})]^{p/2} + \int_{r_0}^1 [A(r, f_{\xi_2})]^{p/2} dr \right] < \frac{\varepsilon^p}{2}$

Ako $|\xi_1 - \xi_2| \to 0$, onda, na krugu $|z| \leq r_0$, $|\xi_1 f(\xi_1 z) -$
$- \xi_2 f(\xi_2 z)| \to 0$ uniformno po z, pa je

$$(2.14) \quad \int^{r_0} [A(r, f_{\xi_1} - f_{\xi_2})]^{p/2} dr < \frac{\varepsilon}{2}^p$$

ako je $|\xi_1 - \xi_2| < \delta(\varepsilon)$

Na osnovu (2.13) i (2.14) imamo $\|f_{\xi_1} - f_{\xi_2}\| < \varepsilon$ ako je $|\xi_1 - \xi_2| < \delta(\varepsilon)$. Prema tome, važi

Teorema 2.4. Neka je

$$h(z) = (f \circ g)(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n z^n$$

Adamarov proizvod funkcija

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n \in D^p \quad i \quad g(z) = \sum^{\infty} b_n z^n \in D^q$$

$$0 < p < \infty, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Tada:

(a) postoji konstanta C koja ne zavisi od elemenata f i g, tako da je $|h(z)| \leq C \|f\|_{D^p} \|g\|_{D^q}$;

(b) funkcija h(z) je neprekidna na $\bar{\mathcal{U}}$;

(c) $$(f, g) = \lim_{\rho \to 1} \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n \rho^n = \lim_{\rho \to 1} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\rho e^{it}) g(e^{-it}) dt,$$

postoji za svaki par elemenata $f \in D^p$, $g \in D^q$.

2. Sada ću formulisati i dokazati nekoliko novih teorema koje se odnose na Adamarove proizvode.

Teorema 2.5. Ako su komponente Adamrovog proizvoda $(f \circ g)(z)$ funkcija

$$(2.14) \quad f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \in H^p, \ p > 1$$

i

$$(2.15) \quad g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n \in D^q,$$

gde je $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, i funkcija g takva da je linearni funkcional (2.16) $\varphi(h)=\lim_{r\to 1}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(re^{i\theta})g(e^{-i\theta})\,d\theta$

ograničen na H^p, tada Adamarov proizvod

$$(2.17)\quad (f\Theta g)(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n z^n \in H^{\infty}$$

Dokaz. Neka je $u(r,\varphi)=\operatorname{Re} g(z)$. Kako je

$$(2.18)\quad u(r,\varphi)=\frac{\alpha_0}{2}+\sum_{n=0}^{\infty}(\alpha_n\cos n\varphi-\beta_n\sin n\varphi)\,r^n,\quad r<1$$

i

$$(2.19)\quad f(re^{i(\theta-\varphi)})=\sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n e^{in(\theta-\varphi)}\qquad r<1$$

te je

$$(2.20)\quad \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} u(r,\varphi)f(re^{i(\theta-\varphi)})\,d\varphi=\alpha_0 a_0+\sum_{n=1}^{\infty} a_n c_n z^n$$

S obzirom na (2.16) $g(e^{-i\theta})\in L^q$.

Otuda

$$\sup_{0\le r<1}\int_0^{2\pi}|u(r,\varphi)|^q d\varphi\le\int_0^{2\pi}|g(e^{i\varphi})|\,d\varphi .$$

Primenjujući Holderovu nejednakost, imamo

$$(2.21)\quad \left|\int_0^{2\pi} u(r,\varphi)f(re^{i(\theta-\varphi)})\,d\varphi\right|\le\left[\int_0^{2\pi}|u(r,\varphi)|^q d\varphi\right]^{\frac{1}{q}}\left[\int_0^{2\pi}|f(re^{i(\theta-\varphi)})|^p d\varphi\right]^{\frac{1}{p}}$$
$$\le \|f\|_{H^q}\cdot\|g\|_p$$

Prema tome je i desna strana relacije (2.20) po modulu ograničena sa $\|f\|_{H^q}\|g\|_p$.

Otuda Adamarov proizvod

$(f\Theta g)(z)\in H^{\infty}$.

Teorema 2.6. Ako su komponente Adamarovog proizvoda $(f\odot g)(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n z^n$ funkcije

(2.22) $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \in B^p$, $0<p<1$

i

(2.23) $g(z)=\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n \in A$, i g takva da je linearni funkcional

(2.24) $$\varphi(h)=\lim_{r\to 1}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} h(re^{i\theta})\, g(re^{-i\theta})\, d\theta$$

ograničen na B^p, tada Adamarov proizvod

(2.25) $$(f\odot g)(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n z^n \in H^{\infty}.$$

Dokaz. Kako je sa (2.24) definisan ograničen linearni funkcional na B^p, $0<p<1$, to je $\|\varphi\|<\infty$ i

(2.26) $$|\varphi|\leq \|\varphi\|\cdot\|h\|_p,\quad h\in B^p.$$

S druge strane, za $|z|<1$, imamo

(2.27) $$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(ze^{i\varphi})g(e^{-i\varphi})\,d\varphi=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\Big(\sum_{n=0}^{\infty}a_n(ze^{i\varphi})^n\Big)g(e^{-i\varphi})\,d\varphi=$$
$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sum_{n=0}^{\infty}a_n z^n e^{in\varphi}g(e^{-i\varphi})=\sum_{n=0}^{\infty}\Big(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(e^{-i\varphi})e^{in\varphi}d\varphi\Big)a_n z^n=$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}a_n b_n z^n.$$

Ako $f\in H^p$, $0<p<1$, s obzirom na (2.24), (2.26) i (2.27), imamo

$$\lim |f\odot g(re^{i\theta})|\leq\|\varphi\|,\ \text{za sve}\ \theta\in[0,2\pi].$$

Dakle, prema uopštenom principu maksimuma Adamarov proizvod

$$(f \odot g)\,(z) \in H^{\infty}\,.$$

<u>Teorema 2.7</u>. Neka su komponente Adamarovog proizvoda

$$(2.28) \qquad (f \odot g)(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n z^n$$

funkcije

$$(2.29) \qquad f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \in D^{\infty}, \quad g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n \in H^p, \quad 1 < p \leq \infty$$

tada Adamarov proizvod $(f \odot g)(z) \in H^{\infty}$.

<u>Dokaz</u>. Neka je $u(r, \varphi) = \mathrm{Re}\, g(z)$. Možemo, kao u dokazu teoreme 2.5 pisati

$$(2.30) \qquad \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} u(r,\varphi) \cdot f(re^{i(\theta-\varphi)})\, d\varphi = d_0 a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n z^n$$

Kako je $g \in H^p$, $1 < p \leq \infty$, to je

$$(2.31) \qquad \int_0^{2\pi} |u(r,\varphi)|^p d\varphi \leq \int_0^{2\pi} |g(e^{i\varphi})|^p d\varphi\,.$$

Dalje, $f \in D^{\infty}$ te i $f \in H^q$, $0 < q < \infty$.

Dakle,

$$(2.32) \qquad f \in H^q, \text{ gde je } \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

S obzirom na (2.3o) i (2.31) i Helderovu nejednakost, imamo

$$(2.33) \left| \int_0^{2\pi} u(r,\varphi) f(re^{i(\theta-\varphi)}) d\varphi \right| \leq \left\{ \int_0^{2\pi} |u(r,\varphi)|^p d\varphi \right\}^{\frac{1}{p}} \left\{ \int_0^{2\pi} |f(re^{i(\theta-\varphi)})|^q d\varphi \right\}^{\frac{1}{q}}$$

$$\leq \|g\|_p \|f\|_q\,.$$

Iz (2.31), (2.32) i (2.30) sledi da Adamarov proizvod

$(f\Theta g)(z) \leq \|f\|_q \|g\|$ za sve z za koje je $|z| <$,

tj.

$$(f\Theta g)(z) \in H^{\infty} .$$

<u>Teorema 2.8.</u> Neka je $g \in A$ takva funkcija da je linearni funkcional

$$(2.34) \quad \varphi(h) = \lim_{r\to 1_-} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} h(re^{i\varphi})\, g(e^{-i\varphi})\, d\varphi, \qquad h \in$$

ograničen na H^p, $0 < p < 1$. Ako je $f \in H^p$, $0 < p < 1$, tada Adamarov proizvod

$$(f\Theta g)(z) \in H^{\infty} .$$

<u>Dokaz.</u> Kako je sa (2.34) definisan ograničen linearni funkcional na H^p, $0 < p < 1$, to je $\|\varphi\| < \infty$ i

$$(2.35) \quad |\varphi| \leq \|\varphi\| \cdot \|h\|_p , \quad h \in H^p .$$

S druge strane, za $|z|<1$, imamo

$$(2.36) \quad \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(ze^{i\varphi})\, g(e^{-i\varphi})\, d\varphi = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \Big(\sum_{n=0}^{\infty} a_n (ze^{i\varphi})^n g(e^{-i\varphi})\Big) d\varphi =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n e^{in\varphi} g(e^{-i\varphi}) = \sum_{n=0}^{\infty} \Big(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(e^{-i\varphi})\, e^{in\varphi} d\varphi\Big) a_n z^n =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n z^n$$

Kako $f \in H^p$, $0 < p < 1$, s obzirom na (2.34), (2.35) i (2.36), imamo

$$\lim_{r\to 1} |f \odot g(re^{i\theta})| \le \text{[illegible]}, \quad \text{za sve } \theta \in [0, 2\pi].$$

Dakle, prema uopštenom principu maksimuma Adamarov proizvod

$$(f \odot g)(z) \in H^{\infty}.$$

<u>Teorema 2.9.</u> Ako su komponente Adamarovog proizvoda $(f \odot g)(z)$ funkcije

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \in H^p, \quad \frac{1}{n+1} < p < \frac{1}{n} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

i

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n \in A,$$

pri čemu $g^{(n-1)} \in \Lambda_{\alpha}$, gde je $\alpha = \frac{1}{p} - n$ onda Adamarov proizvod

$$(f \odot g)(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n z^n \in H^{\infty}$$

<u>Dokaz</u>. Kako je $g^{(n-1)} \in \Lambda_{\alpha}$, s obzirom na teoremu 1 [23], linearni funkcional

$$\varphi(h) = \lim_{r\to 1_-} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h(re^{i\theta}) g(e^{-i\theta})\, d\theta$$

je ograničen na H^p. Dalje se dokaz izvodi kao u teoremi 2.8.

<u>Teorema 2.1o</u>. Ako su komponente Adamarovog proizvoda

$(f\Theta g)(z)$ funkcije

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \in H^{p}, \quad p = [illegible]$$ [illegible]

i

$$g(z)=\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n \in H [illegible]$$

pri čemu $g^{(n-1)}(z) \in \Lambda_*$, tada

Adamarov proizvod

$$(f\Theta g)(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n z^n \in H^{\infty} .$$

<u>Dokaz</u>. Kako je $g^{(n-1)} \in \Lambda_*$, s obzirom na teoremu 1 [23] , linearni funkcional

$$\varphi(h) = \lim_{r\to 1_-} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} h(re^{i\theta})\, g(e^{-i\theta})\, d\theta$$

je ograničen na H^p. Dalje se dokaz izvodi kao u teoremi 2.8.

GLAVA III

O TAYLOR-OVIM KOEFICIJENTIMA LIPSCHITZ-OVIH PROSTORA ANALITIČKIH FUNKCIJA

1. U ovoj glavi tretiramo nekoliko rezultata koji se odnose na L^p - ponašanje integralnih sredina analitičkih funkcija. Navešćemo najpre nekoliko potrebnih oznaka kao i nekoliko rezultata koje su dobili M.Mateljević i M.Pavlović.

Ako je $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ analitička funkcija na otvorenom jediničnom disku i p,q,r,α su brojevi koji zadovoljavaju uslove: $0<p,\ q\leqslant\infty$, $0<r<1$, $0<\alpha<\infty$, sa φ označavamo nenegativnu rastuću funkciju definisanu na intervalu $(0,1]$ za koju je

(3.1) $\varphi(tr)\leqslant ct^{\alpha}\varphi(r), \quad 0<t<1,$

(3.2) $\varphi(tr)\geqslant c^{-1}t^{\beta}\varphi(r), \quad 0<t<1,$

gde su C i β pozitivni realni brojevi i $\beta\geqslant\alpha>0$.

Koristićemo uobičajene oznake za integralne sredine od f:

$$M_p^p(r,f)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(re^{it})|^p dt, \quad p<\infty$$

$$M_\infty(r,f)=\sup_{0<t\leqslant 2\pi}|f(re^{it})|,$$

obično se piše

$$\|f\|_p=\sup_{0<r<1} M_p(r,f).$$

Sa $X=H(p,q,\varphi)$ označavamo klasu funkcija f za koje

$F \in L^q(0,1)$, gde je

$$F(r)=(1-r)^{-1/q}\varphi(1-r)\,M_p(r,f),$$

a $L^q(0,1)$ je običan Lebesque-ov prostor. Norma na X je data sa

$$\|f\|_X = \|F\|_{L^q}.$$

Ako je $\varphi(r)=r^\alpha$, pišemo $H(p,q,\alpha)$ umesto $H(p,q,\varphi)$. Više o osobinama $H(p,q,\alpha)$ može se naći u [27].

Kako je $M_2^2(r,f)=\sum |a_n|^2 r^{2n}$, različiti rezultati koji se odnose na L^p- ponašanje stepenih redova s pozitivnim koeficijentima mogu se izraziti terminima za prostore $H(2,q,\alpha)$.

U glavi I navedeno je nekoliko teorema koje se kasnije koriste. Sada ćemo dati pregled još nekih važnih teorema, u vezi sa narednim izlaganjem.

Za pozitivnu funkciju ψ, definisanu na intervalu $(0,1]$, sa $H_\Delta(p,q;\psi)$ označavamo prostor svih funkcija f, za koje je

$$\lambda=\{\psi(2^{-n})\|\Delta_n\|_p\}_{n=0}^{\infty}\in \ell^q$$

Norma na $Y=H_\Delta(p,q,\psi)$ definiše se sa $\|f\|_Y=\|\lambda\|_{\ell^q}$

Za $\psi(r)=r^\beta$, gde je β realan broj, pišemo $H_\Delta(p,q,\beta)=H_\Delta(p,q,\psi)$.

M.Mateljević i M.Pavlović su dokazali sledeću značajnu teoremu

<u>Teorema 3.1.</u>

(a) $H_\Delta(p,q,\varphi)\subset H(p,q,\varphi)$

(b) $H(p,q,\varphi)=H_\Delta(p,q,\varphi)$, $1<p<\infty$.

(c) $H(1,2,\varphi) \subset H_\Delta(p,q,\varphi)$, $p<1$

(d) Ako je $p \leqslant 1$ ili $p=\infty$, inkluzija (a) je tačna.

Svaka inkluzija preslikavana $\mathcal{U}$ (a), (b), (c) je neprekidna, što znači da za $X=H(p,q,\varphi)$, $Y=H_\Delta(p,q,\varphi)$, $1<q<\infty$, imamo $C^{-1}\|f\|_X \leqslant \|f\|_Y \leqslant C\|f\|_X$,

gde je C pozitivna konstanta koja zavisi samo od p,q,α, β, φ i ψ i nije ista u svakom pojavljivanju.

Posledica ove teoreme je teorema Hardy-littlewood-a, III

Isti autori su dokazali sledeće teoreme:

Teorema 3.2. Funkcija $f \in H(p,q,\varphi)$ ako i samo ako

(3.3) $\left\{\varphi\left(\frac{1}{n+1}\right)(n+1)^{-1/2}\|\sigma_n\|_p\right\}_{n=0}^{\infty} \in \ell^q$,

gde je $\sigma_n(z)=\sigma_n f(z)=\sum\limits^{n}\left(1-\frac{k}{n+1}\right)a_k z^k$, ; $1\leqslant p\leqslant\infty$.

Teorema 3.3. $f \in H(p,q,\varphi)$ ako i samo ako

(3.4) $\left\{\varphi\left(\frac{1}{n+1}\right)(n+1)^{-1/q}\cdot\|S_n\|_p\right\}_{n=0}^{\infty} \in \ell^q$

Kóristeći teoremu 3.2 i relaciju (3.2) dobijamo da

$$\left\{\varphi\left(\frac{1}{n+1}\right)(n+1)^{-1/q}\|\sigma_n\|_p\right\}_{n=0}^{\infty} \in \ell^q,$$

čime je uopštena teorema Askey-a i Boas-a.

Posledica teoreme 3.1 je sledeća teorema:

Teorema 3.4. Ako $f \in H(2,q,\varphi)$, tada za skoro svaki izbor znakova $\{\varepsilon_n\}$, funkcija

$$g(z)=\sum \varepsilon_n a_n z^n \in H(p,q,\varphi)$$

za svako $p<\infty$.

M.Mateljević i M.Pavlović su dalje pokazali da je prostor $H(p,q,\varphi)$, $1<p<\infty$, izomorfan prostor $\ell(p,q)$ svih nizova $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ za koje

$$\left\{\left(\sum |b_k|^p\right)^{1/p}\right\}_{n=n}^{\infty} \in \ell^q$$

Norma na $\ell(p,q)$ definiše se na uobičajeni način [44]. Autori su našli da je $\ell(p,p) = l^p$. Uopštili su rezultate koje su dobili Lindenstrauss i Pelczynski [48], tj. sledeću teoremu:

Teorema 3.5. $H(p,p,\frac{1}{p})$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$ je izomorfan sa l^p – uopštili su tako da ona ne važi za $p=1$ i $p=\infty$. Njihov rezultat glasi:

Teorema 3.6. Ako je $1 < p < \infty$ i $U(f)=\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$, gde je

$$b_k = \varphi(2^{-n}) \cdot 2^{-n/p}. \Delta_n(e_n^k), k\in I_n,$$

tada je U izomorfizam od $H(p,q,\varphi)$ na $\ell(p,q)$.

Za dobijanje ovog rezultata potrebna je sledeća lema [81]:

Lema 3.1. Neka je $e_n=\exp(2\pi i/2^{n-1})$, $n \geqslant 0$, i $1< p<\infty$. Tada je

$$C^{-1}\|\Delta_n\|_p \leqslant 2^{-n}\Big(\sum_{k\in I_n}|\Delta_n(e_n^k)|^p\Big)^{1/p} \leqslant C\|\Delta_n\|_p$$

Pomoću teoreme 3.1. utvrdjuje se veza izmedju nekih klasičnih nejednakosti u odnosu na H^p prostore.

Hardy i Littlewood su dokazali sledeću teoremu:

Teorema 3.7. (HL,IV) Ako je $p \leqslant 2 \leqslant q < \infty$ i $f(0)=0$, tada je

$$\int_0^1 (1-r)M_p^2(r,f')dr \leqslant C\|f\|_p^2,$$

$$\|f\|_2^2 \leqslant C\int_0^1 (1-r)M_q^2(r,f')dr.$$

Littlewood i Paley [81] su dobili sledeći rezultat:

<u>Teorema 3.8. (LP)</u> Neka $1 < p \leqslant 2 \leqslant q < \infty$. Tada

$$\sum_{n=0}^{\infty} \|\Delta_n f\|_p^2 \leqslant C \|f\|_p^2 \quad , \quad \|f\|_q^2 \leqslant C \sum_{n=0}^{\infty} \|\Delta_n f\|_q^2 .$$

Sledd [81] je pokazao da se teorema (LP) može suziti na sledeći način:

<u>Teorema 3.9 (S)</u>. Ako je $1 < p \leqslant 2 \leqslant q < \infty$, tada je

$$(3.5) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \|\Delta_n f\|_p^2 \leqslant C \int_0^1 (1-r) M_p^2(r, f') \, dr$$

i

$$(3.6) \quad \int_0^1 (1-r) M_q^2(r, f') \, dr \leqslant C \sum_{n=1}^{\infty} \|\Delta_n f\|_q^2 .$$

M.Mateljević i M.Pavlović su dokazali da su uslovi $p \leqslant 2$ i $q \geqslant 2$ suvišni. Naime, oni su dokazali sledeću teoremu:

<u>Teorema 3.10</u>. Neka je $X = H(p,q,\varphi)$, $Y = H_\Delta(p,q,\psi)$ i $Z = H(1,q,\varphi)$, gde je $\psi(r) = \varphi(r) r^{-\beta}$. Tada je:

$\|f^{[\beta]}\|_X \leqslant C \|f\|_Y$, za svako p;

$\|f\|_Y \leqslant C \|f^{[\beta]}\|_X$, za $1 < p < \infty$;

$\|f\|_Y \leqslant C \|f^{[\beta]}\|_Z$, za $p < 1$,

gde je

$$f^{[\beta]}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n+\beta+1)}{n!} a_n z^n, \quad \beta \geqslant 0$$

Za dokaz ove teoreme korišćena je sledeća:

<u>Lema 3.2</u>. Ako je $h(z) = \sum_{k=m}^{n} a_k z^k$, $0 \leqslant m \leqslant n$, tada je

$$\|h\|_p r^n \leqslant M_p(r,h) \leqslant \|h\|_p r^m$$

Kombinujući teoremu 3.1 (b) i teoremu 3.3 sa teoremom (HL, III) dobija se

Teorema 3.11. Neka je $p<\infty$ i $q>\max\{1,p\}$. Tada je

$$(3.7)\qquad \sum_{n=0}^{\infty} 2^{n(p/2-1)} \|\Delta_n\|_q^p \leq C\|f\|_q^p$$

i

$$(3.8)\qquad \sum (n+1)^{p/2-2} \|S_n\|_q^p \leq C\|f\|_p^p$$

U slučaju $p\geq 2$ nejednakost (3.7) je slabija od nejednakosti

$$\sum_{n=0}^{\infty} \|\Delta_n\|_p^p \leq C\|f\|_p^p, \quad 2\leq p<\infty ,$$

Ovo je poznati rezultat Littlewood-a i Paley-a [81] i može se izvesti iz nejednakosti

$$(3.9)\qquad \int_0^1 (1-r)^{p-1} M_p^p(r,f')\,dr \leq C\|f\|_p^p, \quad 2\leq p<\infty ,$$

koristeći teoremu 3.10. Nejednakost (3.9) je takodje rezultat Littlewood-a i Paley-a [81] . Lako se dokazuje da dual od $H_\Delta(p,q,\beta)$ za $1<p$, $q<\infty$, je $H_\Delta(p',q',-\beta)$, gde su p' i q' konjugovani indexi za p i q. Sparivanje je dato sa

$$(f,g)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n$$

Pomoću dualnosti i nejednakosti (3.7) može se dokazati da je

$$(3.10)\qquad \|f\|_p^p \leq C\sum^{\infty} 2^{n(p/2-1)} \|\Delta_n\|_q^p, \quad 1<q<p<\infty .$$

Direktna posledica od (3.10) je sledeći rezultat Flett-a [27] :

Posledica 3.1. Neka je $1<q<p<\infty$. Tada je

$$\|f\|_p^p \leq C\int_0^1 (1-r)^{-p/q+p} M_q^p(r,f^{[1]})\,dr$$

Iz teoreme 3.3. i posledice 3.1. sledi da je

(3.11) $$\|f\|_p^p \leqslant C\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)^{p/q-p-2}\|S_n\|_q^p,\quad 1<q<p<\infty .$$

Za q=2, iz (3.8) i (3.11) dobijamo sledeće rezultate Holland-a i Twomey-a [39] :

Posledica 3.2. Neka je $A_n=\sum_{k=0}^{n}(k+1)|a_k|^2$. Tada je

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)^{-2}A_n^{p/2}\leqslant C\|f\|_p^p,\quad za \quad p\leqslant 2,$$

i

$$\|f\|_p^p\leqslant C\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)^{-2}A_n^{p/2}\quad za \quad 2\leqslant p<\infty .$$

Napomena 3.1. Brojne nejednakosti, uključujući i (c,1) sredine, mogu se dokazati ako koristimo teoremu 3.2 i rezultate Hardy-Littlewood-a i Littlewood-a i Paley-a.

Tako je nejednakost

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)^{p-2}\|\sigma_n\|_1^p\leqslant C\|f\|_p^p,\quad p<1,$$

posledica teoreme (HL, III) i teoreme 3.2.

Dokaz teoreme 3.1. zasniva se na L^p- ponašanju funkcija

$$F_1(r)=(1-r)^{-1/2}\cdot\varphi(1-r)\ \sup\{\lambda_n r^{2^n}: n\geqslant 0\}$$

i

$$F_2(r)=(1-r)^{-1/2}\cdot\varphi(1-r)\sum_{n=0}^{\infty}\lambda_n r^{2^n},$$

gde je $\{\lambda_n\}$ niz nenegativnih realnih brojeva.

Teorema 3.12. Ako je $F=F_1$ ili $F=F_2$, tada

$$C^{-1}\|F\|_{L^2}\leqslant\|[\varphi(2^{-n})\lambda_n]\|_{\ell^2}\leqslant\|F\|_{L^2}.$$

Za dokaz ove teoreme koriste se sledeće leme, čiji se dokazi mogu naći u [57] :

Lemma 3.3. Neka je $\psi(r) = \varphi(r)^{2} r^{-\varepsilon}$, gde je $q < \infty$, $q\alpha - \varepsilon > -1$ i α zadovoljava uslov (3.1). Tada je

$$C^{-1} x^{-1} \psi\left(\frac{1}{x}\right) \leqslant \int_0^1 \psi(1-r) r^{x-1} dr \leqslant C x^{-1} \psi\left(\frac{1}{x}\right), \quad x \geqslant 1.$$

Lema 3.4. Ako je $\psi(r) = \varphi(r) r^{-\varepsilon}, -\varepsilon \leq \alpha$; α zadovoljava uslov (3.1), tada je

$$C^{-1} \psi\left(\frac{1}{x}\right) \leqslant \sup_r \psi(1-r) \cdot r^{x-1} \leqslant C \psi\left(\frac{1}{x}\right), \quad x \geqslant 1$$

Pored ovih lema koriste se i procene:

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2^{n\beta} r^{2^n} \leqslant C r (1-r)^{-\beta}, \quad \beta > 0. \tag{3.12}$$

Za dokaz tvrdjenja (a), (b), (c) teoreme 3.1. potrebne su sledeće tri leme:

Lema 3.5. $M_p^s(r,f) \leqslant |a_0|^s + \sum_{n=0}^{\infty} \|\Delta_{n+1}\|_p^s r^{2^n \cdot s}$, gde je $s = \min\{p, 1\}$.

Lema 3.6. Ako je $1 < p < \infty$, tada je

$$\|\Delta_n\|_p r^{2^n} \leqslant C M_p(r,f), \quad n \geqslant 0$$

Lema 3.7. Ako je $p < 1$, tada je

$$\|\Delta_n\|_p r^{2^n} \leqslant C M_1(r,f).$$

Dokazi ovih lema mogu se naći u [81]. U stvari, tvrdjenja (a), (b) i (c) teoreme 3.1. su jednostavne posledice teoreme 3.12 i lema 3.5, 3.6. i 3.7.

Tvrdjenje (d) teoreme 3.1. je posledica sledećeg jačeg rezultata:

Teorema 3.13. Neka je $p \leqslant 1$ i $\psi(r) = \varphi(r) \cdot r^{\frac{1}{p}-1}$. Tada je

$$H(p,q,\varphi) \not\subset H_\Delta(1,\infty,\psi)$$

Za dokazivanje teoreme 3.2 potrebne su sledeće leme:

Lema 3.8. Ako je $1 \leqslant p \leqslant \infty$ i $k = 0, 1, \ldots$, tada je

$$\|\sigma_k\|_p r^k \leqslant M_p(r,f) \leqslant (1-r)^2 \sum_{n=0}^{\infty} \|\sigma_n\|_p (n+1) r^n.$$

Lema 3.9. Neka je $1 \leq p \leq \infty$, $0 \leq k < n$. Tada je

$$(n-k+1)\|\sigma_k\|_p \leq (n+1)\|\sigma_n\|_p .$$

Lema 3.10. Neka je $\{x_n\}$ monotoni niz nenegativnih realnih brojeva i

$$F(r)=(1-r)^{4-1/q}\varphi(1-r)\sum^{\infty} x_n r^n .$$

Tada $F \in L^q(0,1)$ ako i samo ako

$$\left\{\varphi\left(\frac{1}{n+1}\right)(n+1)^{-3-1/q} x_n\right\}_{n=0}^{\infty} \in l^q$$

Dokazi ovih lema mogu se naći u [57].

2. Koristeći metode M.Mateljevića i M.Pavlovića proširujem neke rezultate (od teoreme 3.14 do teoreme 3.17) koji se odnose na Taylor-ove koeficijente.

Kažemo da je φ, pozitivna realna funkcija definisana na $(0,1]$, skoro rastuća ako postoji konstanta C takva da je

$$\varphi(x) \leq C\varphi(y)$$

za svako $0 < x \leq y \leq 1$.

$H(p,q,\varphi)$ je prostor analitičkih funkcija f za koje je

$$(3.13)\qquad \int_0^1 [\varphi(1-r)M_p(r,f)]^q \frac{dr}{1-r} < +\infty ,$$

gde je φ skoro rastuća funkcija na $(0,1]$.

Za $q=\infty$ izraz (3.13) ima uobičajeno značenje:

$$(3.14)\qquad \sup_{0<r<1} \varphi(1-r)\, M_p(r,f) < +\infty .$$

Za $\varphi(\varrho) = \varrho^{\alpha}$ $(\alpha > 0)$ dobijamo Lipschitz-ovu klasu $H(-\alpha\,;\,p,q)$ koju je uveo Flett [26].

M.Mateljević i M.Pavlović razmatraju prostore $H(p,q,\varphi)$, gde je φ funkcija definisana na $(0,1]$, takva da je $K(\varrho) = 1/\varphi(1/\varrho)$ 0 - pravilno promenljiva funkcija u bekonačnosti (V.[37]).

M.Mateljević i M.Pavlović su našli koeficijent-množitelj iz $H(p,q,\varphi)$ u l^s u sledećim slučajevima:

1. $p \geqslant 2$; 2. $1 < p < 2, s \geqslant p$; 3. $p=1$, $s \geqslant 1$, 4. $p < 1$, $s \geqslant q$.

Neke specijalne slučajeve ovog rezultata dobili su P. Ahern i M.Jevtić [1] . Oni su našli množitelje iz $H(p,q,\alpha)$ u l^s u slučajevima $p \geqslant 2$, $s \geqslant 1$ i $p=1$, $s \geqslant 1$. O množiteljima V. [20].

Niz $\{\lambda_n\}$ $(n \geqslant 1)$ naziva se lakunarnim ako i samo ako je

$$\frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n} \geqslant q > 1 .$$

Neka je $\lambda = \{\lambda_n\}$ lakunarni niz i φ skoro rastuća funkcija na $(0,1]$. Sa $l^{\lambda}_{\varphi}(p,q)$ označavamo prostor nizova $\alpha = \{\alpha_k\}$ koji zadovoljavaju uslov

$$(3.15) \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \{\varphi(\frac{1}{n+1})[\sum_{k=\lambda_{n-1}}^{\lambda_n} |\alpha_k|^p]^{1/p}\}^q < +\infty .$$

U slučaju $\varphi(x) \equiv 1$ i $\lambda_n = 2^n$ $(n \geqslant 0)$ ove prostore je razmatrao C.N. Kellogg [44] i koristio oznaku $l(p,q)$. Ako je $\lambda_n = 2^n$, $(n \geqslant 0)$, mi koristimo oznaku $l_{\varphi}(p,q)$ umesto $l^{\lambda}_{\varphi}(p,q)$

<u>Teorema 3.14</u>. Ako je φ skoro rastuća funkcija na $(0,1]$ $1 \leqslant p \leqslant 2$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p} = 1$, $0 < q \leqslant +\infty$, tada

$$f \in H(p,q,\varphi) \Rightarrow \{a_k\} \in l^{\lambda}_{\varphi}(p',q).$$

<u>Dokaz</u>. Neka je $r_n = 1 - \frac{1}{\lambda_n}$, gde je $\lambda = \{\lambda_n\}$ lakunarni niz. Tada je

$$(3.16) \quad f \in H(p,q,\varphi) \Longrightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{r_n}^{r_{n+1}} \psi(r)\,dr < +\infty ,$$

gde je

$$\psi(r) = [\varphi(1-r)\, M_p(r,f)]^q (1-r)^{-1}.$$

Kako je φ skoro rastuća funkcija na $(0,1]$, imamo da je

$$\varphi(1-r) \geq C\varphi(1-r_{n+1}) = C\varphi\left(\frac{1}{\lambda_{n+1}}\right), \quad r < r_{n+1}.$$

Dalje,

$$\psi(r) \geq c\left[\varphi\left(\frac{1}{\lambda_{n+1}}\right) M_p(r_n, f)\right]^2 \lambda_n, \quad r_n \leq r \leq r_{n+1}.$$

S obzirom da je

$$r_{n+1} - r_n = \frac{1}{\lambda_n} - \frac{1}{\lambda_{n+1}} \geq \frac{1}{\lambda_n}\left(1 - \frac{1}{2}\right),$$

to je

$$(3.17) \qquad \int_{r_n}^{r_{n+1}} \psi(r)\,dr \geq c\left[\varphi\left(\frac{1}{\lambda_{n+1}}\right)\right] M_p(r_n, f)\Big]^2.$$

Na osnovu Hausdorff-Young-ove nejednakosti imamo

$$(3.18) \qquad M_p(r_n, f) \geq \left\{\sum_{k=0}^{+\infty} |a_k \cdot r_n^k|^{p'}\right\}^{1/p'}$$

$$\geq \left\{\sum_{k=\lambda_{n-1}}^{\lambda_n} |a_k|^{p'} \cdot r_n^{kp'}\right\}^{1/p'}$$

$$\geq C\left\{\sum_{k=\lambda_{n-1}}^{\lambda_n} |a_k|^{p'}\right\}^{1/p'}$$

Kombinujući realacije (3.16), (3.17) i (3.18) dobijamo rezultat sadržan u teoremi.

Napomena 3.2. U slučaju p=1, nejednakost (3.18) treba shvatiti kao

$$(3.19) \qquad M_1(r_n, f) \geq \sup_{0 \leq k \leq +\infty} |a_k r_n^k|$$

$$\geq \sup_{\lambda_n \leq k \leq \lambda_{n+1}} |a_k r_n^k|$$

$$\geq C \cdot \sup_{\lambda_n \leq k \leq \lambda_{n+1}} |a_k|$$

Dokaz teoreme 3.14 pokazuje da važi

Teorema 3.15. Pod pretpostavkama teoreme 3.14,

$$f \in H(p,q,\varphi) \Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} \left[\varphi\left(\frac{1}{\lambda_{n+1}}\right)\right] \cdot \left(\sum_{k=0}^{\lambda_n} |a_k|^{p'}\right)^{\frac{1}{p'}}\Big]^q < +\infty .$$

Ako je $\lambda_n = 2^n (n \geq 0)$, dobijamo sledeću posledicu:

Posledica 3.3. Neka su ispunjeni uslovi teoreme 3.14. Tada $f \in H(p,q,\varphi)$ povlači svaki od sledeća dva uslova:

$$(3.20) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \left[\varphi(2^{-n-1})\left(\sum_{k=0}^{2^n} |a_k|^{p'}\right)^{1/p'}\right]^q < +\infty$$

$$(3.21) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left[\varphi(2^{-n-1})\left(\sum_{k=2^{n-1}}^{2^n} |a_k|^{p'}\right)^{1/p'}\right]^q < +\infty$$

Da bismo dobili neke rezultate o ponašanju koeficijenata, potrebna nam je sledeća lema:

Lema 3.11. Neka je φ skoro rastuća funkcija na (o,1] i $\{a_k\}$ nenegativni, neopadajući niz. Tada

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \varphi\left(\frac{1}{k}\right) < +\infty \Longrightarrow k \cdot a_k \varphi\left(\frac{1}{2k}\right) \to 0$$

Dokaz. Kako je $\sum_{k=1}^{\infty} a_k \varphi\left(\frac{1}{k}\right) < +\infty$, to za svako $\varepsilon > 0$, $\exists N = N(\varepsilon)$ tako da je za $n \geq N$

$$c a_n \varphi\left(\frac{1}{2n}\right) \cdot n \leq \sum_{k=n}^{2n} a_k \varphi\left(\frac{1}{k}\right) \leq \varepsilon .$$

Postupajući kao u dokazu teoreme 3.14, sa $r_n = 1 - \frac{1}{n}$, $(n \geq 1)$ dokazujemo sledeći rezultat:

Teorema 3.16. Neka su ispunjeni uslovi teoreme 3.14. Tada

$$f \in H(p,q,\varphi) \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} \left\{\varphi\left(\frac{1}{n+1}\right)\left[\sum_{k=0}^{n} |a_k|^{p'}\right]^{1/p'}\right\}^q < +\infty .$$

Kombinujući lemu 3.11 i teoremu 3.16. dobija se

Posledica 3.4. Ako su ispunjeni uslovi teoreme 3.12 tada

$$f \in H(p,q,\varphi) \Rightarrow \varphi\left(\frac{1}{2(n+1)}\right) a_n \to 0$$

U prvoj glavi smo uveli prostor D^p. To je prostor analitičkih funkcija f, za koje je $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-2} S_n^{p/2} < +\infty$, gde je $S_n = \sum_{k=1}^{n} k|a_k|^2$.

Za te funkcije pokazaću da važi sledeća teorema:

Teorema 3.17. Ako $f \in D^p$, tada $|a_n| = o(n^{\frac{2}{p}-1})$, $0 < p < +\infty$.

Dokaz. Neka je $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n \in D^p$, $0 < p < +\infty$. Tada s obzirom na dobro poznatu Pringsheim-ovu lemu, imamo

$$n(n^{-2} S_n^{p/2}) \to 0.$$

Otuda,

$$n^{-1} [n|a_n|^2]^{p/2} \to 0,$$

to jest

$$|a_n| = o(n^{\frac{2}{p}-1}).$$

Napomena 3.3. Ova teorema se može dokazati i pomoću posledice 3.4.

B I B L I O G R A F I J A

1* Ahern, P. and Jevtić M.: *Duality and multipliers for mixed norm spaces.* Mich. Math. J. 30(1983), 53-64.

2 Ahlfors, V.L.: *Complex Analysis,* 2-nd ed. McGraw-Hill, New York 1966.

3 Aljančić, S. and Arandjelović D.: *O-regularly varying functions.* Publ. de l'Inst. Math 22(1977), 5-22.

4 Aljančić, S.: *Uvod u realnu i funkcionalnu analizu.* Beograd 1968.

5 Anderson, S.M.: *A note on Lipschitz spaces.* Math. Z. 150 (1976), 39-43.

6 Anderson, S.M. and Shields, A.L.: *Coefficients multipliers of Bloch functions.* Trans. Amer. Math. Soc. 224(1976), 225-265.

7* Askey, R.: *L^p-behavior of power series with positive coefficients.* Proc. Amer. Math. Soc. 19(1968), 303-305.

8* Askey, R. and Boas, R.P., Jr.: *Some integrability theorems for power series with positive coefficients.* Math. Essays dedicated to A.S.Macintyre (Ohio University Press, 1970).

9. Bary, N.K.: *Trigonometric series.* Moscow 1961.

10 Benedeck, A. and Panzone, R.: *The spaces L^p with mixed norms.* Duke Math. J. 28(1961), 301-324.

11* Bennett, G., Stegenga, D. A. and Timoney, R.M.: *Coefficients of Bloch and Lipschitz functions.* Illinois J. Math. 25(1981), 520-531.

12* Caveny, J.: Bounded Hadamard products of H^p functions. Duke Math. J. 33(1966), 389-394.

13 Caveny, J.: Absolute convergence factore for H^p spaces. Canad. J. Math. 21(1969), 187-197.

14* Dajović, V.: Sur l'existence des valeurs limites de la résulltante des fonctions appartenant à la classe H_δ, $\delta>1$, Bulletin de la Soc. math. phys. de la R.P. de Serbie, vol. VIII,1-2(1956).

15* Dajović, V.: Nekoliko stavova o graničnim vrednostima rezultante funkcija klase $H_\delta(0<\delta<1)$ i još nekih klasa analitičkih funkcija. Vesnik Društva mat. i fiz. NRS, 1-2,1955,21-37.

16* Dajović, V.: O graničnom ponašanju rezultante nekih klasa analitičkih funkcija. Vesnik Društva mat. i fiz. NRS,8,3-4,147-156,1956.

17* Dajović, V.: Sur l'existence des valeurs limites de la résultante d'une fonction minimale de clase $H^p(p>0)$, et d'une fonction de la clase $H^{p_1}(p_1>1)$.Časopis t 2(16), 1962.

18* Dajović, V.: Existence des valeurs limites du produit d'Hadamrd $f(z)\odot g(z)$, $f(z)\in B^p(0<p<1)$, $g(z)\in A$. Mat. vesnik 13(28), 1976, 389-392.

19 Dunford, N. and Schwartz, J.T.: Linear Operators, Part I. Intercience, New York 1958.

20* Duren, P.L.: Theory of H^p spaces. Academic Press, 1970.

21* Duren, P.L. and Shields, A.L.: Properties of $H^p(0<p<1)$ and its containing Banach space. Trans. Amer. Math. Soc. 141(1969), 255-265.

22* Duren, P.L. and Shields, A.L.: Coefficient-multipliers of H^p and B^pspaces. Pacific J. math. 32(1970), 69-78.

23* *Duren, P.L., Romberg, B.W. and Shields, A.L.: Linear functionals on H^p spaces with $0<p<1$. J.fur Math. 238(1969), 32-60.*

24 *Evgrafov, M.A.: Analitičeskie funkcii. Moskva 1968.*

25* *Fatou, P.: Series trigonometriques et series de Taylor. Acta Mathematica, XXX (1960).*

26* *Flett, T.M.: Lipschitz spaces of functions on the circle and the disc. J. Math. Anal. Appl. 39(1972), 125-158.*

27* *Flett, T.M.: The dual of an inequality of Hardy and Littlewood and some related inequalities, J.Math. Anal. Appl. 38(1972), 746-765.*

28* *Gandry, G.I.: H^p multipliers and inequalities of Hardy and Littlewood. J.Aust.Math. Soc. 10(1969),23-32.*

29* *Gofman, K.: Banahovi prostranstva analitičeskih funkcij. Moskva 1963.*

30* *Goluzin, G.M.: Geometric Theory of Functions of a Complex Variable. Moscow 1966.*

31 *Gurvic, A., Kurant, R.: Teorija funkciji. Nauka, Moskva 1968.*

32* *Hadamard, J.: Un theoreme sur les series antieres. Acta mathematica, XXII, 1899.*

33* *Hardy, G.H. and Littlewood, J.E.: Elementary theorems concerning power series with positive cofficients and moment constants of positive functions. J. fur Math. 157,(1927),141-158.*

34* *Hardy. G.H., and Littlewood, J.E.: Notes on the theory of series XX: Generalizations of a theorem of Paley. Quart. J. Math. Oxford, Ser.8(1937), 161-171.*

35* *Hardy, G.H., and Littlewood, J.E.: Some properties of fractional integrals. Math. Z. 34(1932), 403-439.*

36* *Hardy, G.H., Littlewood, J.E. and Polya,G.: Intequalities. Cambridge Univ. Press, New York 1952.*

37* *Hedlund, J.H.: Multipliers of H^p spaces. J. Math. Mech. 18(1969), 1067-1074.*

38* *Hedlund, J.H.: Multipliers of H^1 and Hankel matrices. Proc. Amer. Math. Soc. 22(1969), 20-23.*

39* *Holland, F. and Twomey, J.B.: On Hardy Classes and the area function. J. London Math. Soc. 17(1978), 275-283.*

40* *Holland, F. and Twomey, J.B.: Conditions for membership of Hardy spaces. Aspects of Contemporary Complex Analysis (edited by D.A. Brannan and J.G. Clunie). Academic Press, New York 1980,p.p. 425-433.*

41* *Jevtić, M.: Sur la dérivée de la fonction atomique, C.R., Paris, Ser. A., t.292, 1981, 201-203.*

42* *Jevtić, M.: Neka svojstva novih Adamarovih proizvoda analitičkih funkcija, Mat. vesnik, sv.2, 1980.*

43* *Jevtič, M.: O koefficientah Teulora elementov prostranstva D^p. Mat. Vesnik, sv. 3, 1980.*

44* *Kellogg, C.N.: An extension of the Hansdorff-Young theorem. Mich. Math. J. 18(1971), 121-127.*

45 *Kisliakov, S.V.: Fourier coefficients of boundary volues of analitic functions on the dise and the bidise. Trudy Math. Inst. Steklov 155(1981), 77-91.*

46 *Köthe, G.: Topologische lineare Räume. Springer, Berlin 1960.*

47 *Laguerre, E.: Sur la théorie des équations numériques. Journal de Liouville, t.IX (1883).*

48* *Lindenstrauss, J. and Pelczynski, A.: Contributions to the theory of the classical Banach spaces. J. Funct. Anal. 8(1971), 225-249.*

49* *Littlewood, J.E. and Paley, R.E.A.C.: Theorems on Fourier series and power series, II. Proc. London Math. Soc. 42(1936), 52-89.*

50* *Littlewood, J.E.: Lectures on the theory of functions. Oxford Univ. Press, London and New York, 1944.*

51* *Livingston, A.E.: The space H^p $(0<p<1)$ is not normable. Pacific J. Math. 3(1953), 613-616.*

52* *Livingston, A.E.: Some properties of fractional integrals, II. Math. Z. 34(1932), 403-439.*

53* *Lizorkin, P.I.: Generalized Hölder spaces $B^{(r)}_{p,\theta}$ and their relations with Sobolev spaces L^r_p, Sibir. Math. J.9(1968), 1127-1152 (In Russian).*

54* *Mateljević, M. and Pavlović, M.: L^p-behavior of power series with positive coefficients and Hardy spaces, Proc. Amer. Math. Soc.(to appear).*

55* *Mateljević, M. and Pavlović, M.: Multipliers of Lipschitz spaces (to appear).*

56* *Mateljević, M. and Pavlović, M.: On the integral means of derivates of the atomic function (to appear).*

57* *Mateljević, M. and Pavlović, M.: L^p-behavior of the integral means of analytic functions. Studia Math. 77(1983), 223-241.*

58 *Muramatu, I.: On the dual of Besov spaces. Publ. Res. Inst. Math. Sci. Kyoto Univ. 12(1976), 123-140.*

59 *Natanson, I.P.:Theory of Functions of Real Variable. Unger, New York, 1955 and 1960.*

60 *Nevanlinna, R.: Eindentige analytische Functionen. Berlin, 1936.*

61 *Noonan, J.W. and Thomas, D.K.: The integral means of regular functions. J.London Math. Soc. 9(1975),557-560.*

62* *Paley, R.E.A.C.: On the lacunary coefficients of power series. Ann. of Math. 34(1933), 615-616.*

63 *Petrovich, M.: Equations algebrigues et transcedentes de racines réelles. Bull. Soc. Math. France, t.XLI (1916).*

64 *Privalov, I.I.: Boundary Properties of Analytic Functions. Moscow 1941.*

65* *Riesz, F.: Über die Randoerte einer analytischen Function. Math. Z.B.17(1923).*

66 *Romberg, B.W.: The H^p spaces with $0<p<1$ (Ph. D. thesis). Univ. of Rochester, 1960.*

67 *Rudin, W.: Analytic functions of class H^p. Lectures on Functions of a Complex Variable, Ann Arbor 1955, 387-397.*

68 *Rudin, W.: Real and Complex Analysis. McGraw-Hill, New York 1964.*

69 *Shapiro, J.: Thesis. Univ. of Michigan, 1969.*

70 *Shields, A.L. and Wiliams, D.L.: Bounded projections, duality and multipliers in spaces of analitic functions. Trans. Amer. Math. Soc. 162(1971), 287-302.*

71* *Sledd, W.T.: Some inequalitities related to the Hausdorff-Young theorem. Proc. Amer. Math. Soc 42(1974), 535-540.*

72 *Smirnov, V., Sur les valeurs limites des fonctions réguliêrss a l'intérieur d'un cercle. Žurnal Leningr. Fiz.-Mat. opščestva, t.2,2(1928).*

73 *Taibleson, M.H.: On the theory of Lipschitz spaces of distributions on Euclidean n-spaces II. Translatior invariant operators, duality and interpolation. J. Math. Mech., 14(1965), 821-839.*

74 *Vostrecov, B., O suščestvovanii graničnih značenij i ob integralnom predstavlenij funkcij, analitičeskih v jediničnom kruge, DAN, LX V, N 1(1969).*

75 *Walters, S.S.: The space H^p with $0 < p < 1$, Proc. Amer. Math. Soc. 1(1950), 800-805.*

76 *Walters, S.S.: Remarks on the space B^p. Pacific J. Math. 1(1951), 455-471.*

77* *Watanabe, H.: Some properties of functions in Bergman space A^p. Proceedings of the Faculty of Science, Tokay University, 1979.*

78 *Wels, J.H.: Some results concerning multipliers of H^p. J.London Math. Soc. 2(1970), 449-556.*

79* *Whiteman, R.A.: A converse form of Dajovitchs theorem. Duke Math. Jour., v.31(p.p.321-324), 1964.*

80 *Yosida, K.: Functional Analysis. Berlin 1965.*

81* *Zugmund, A.: Trigonometric series I, II. Cambridge University Press, 1959.*

S A D R Ž A J