PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET UNIVERZITETA U BEOGRADU

M i l o š   M. L a b a n

N E K I   G E O M E T R I J S K I   P R O B L E M I
H I L B E R T O V I H   P R O S T O R A

- doktorska disertacija -

Beograd, 1980.g.

Spisak ispravki

Str.VIII: Poslednji pasus se briše i umesto njega treba da stoji: "Autor se posebno zahvaljuje članu komisije profesoru dr Pavlu Miličiću,na ukazanim primedbama,izuzetnoj pažnji i trudu.Ovim putem autor takodje želi da izrazi svoju zahvalnost docentu dr Ivanu Lackoviću,članu komisije,za učinjene primedbe i trud, kao i docentu dr Dragomiru Lopandiću za pokazano razumevanje i uloženi trud."

Str.25: U definiciji 0.1. prva rečenica se briše i umesto nje treba da stoji:"Skup $\{x_0,x_1,x_2,\dots\}$ od najviše prebrojivo mnogo vektora prostora H' izomorfnog Hilbertovom prostoru H,nazivamo beskonačno-dimenzioni simpleks i obeležavamo ga sa $\mathcal{S}(x_0,x_1,x_2,\dots)$ ako je x_1-x_0 , x_2-x_0 ,... bezuslovni potpuni bazis prostora H'."

Str.25: U iskazu leme 0.1. na kraju treba da stoji:"odgovarajućeg podprostora."

Str.29: Na kraju definicije 0.5. umesto izraza u zagradi treba da stoji:" $i\neq j$ "

Str.32: U definiciji 2.1. na kraju prve rečenice,umesto "ima tačno n elemenata" treba da stoji:" i $x_{j_1(n)},\dots,x_{j_n(n)}$ su medjusobno različiti."

Str.33: U relaciji (1) dokaza teoreme 2.2. na levoj strani jednakosti treba da stoji: " $\|x_0' - x_n\|^2$ "

Str.35: U predposlednjoj rečenici dokaza teoreme 2.2. treba da stoji:" $S'\neq S$."

Str.52: Na prvoj polovini stranice umesto reči "dobar" treba da stoji:"kvazi-pravilan"

Str.66: U iskazu teorema 1.1.,1.2. i 1.3. briše se prva po redu reč "simpleksa"

Str.68: Teorema 1.4. treba da glasi:"Kvadrat rastojanja tačke O od pljosni $\Pi(x_{j_1},x_{j_2},\dots)$ je

1° jednak $1 \Big/ \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{\lambda_{j_i}^2}$ ako je pljosan dimenzije m-1 ,

2° jednak $\lim_{m\to\infty} \Big(1 \Big/ \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{\lambda_{j_i}^2} \Big)$ ako je pljosan beskonačno-dimenziona."

Str.68: U dokazu teoreme 1.4. umesto "za harmonisku sredinu" treba da stoji:"sa druge strane"

Str.99-112: U iskazima teorema 1.1.-2.2. reči "bilo koja" treba izbaciti,drugim rečima iskazi ovih teorema treba da počinju sa: "Neka je M tačka Hilbertovog prostora..."

Sadržaj

Predgovor

1. Rad ima šest glava koje su obeležene rimskim brojevima. Svaka glava se sastoji iz više tačaka koje su označene arapskim brojevima. Tekst je napisan u obliku lema, teorema i dokaza, a sa jedino najnužnijim, tkz. "slobodnim" tekstom, u nameri da izlaganje bude što jasnije i matematički strožije. Svaki iskaz ima numeraciju, tako da, naprimer, teorema 1.2.(III), znači kod referisanja-druga teorema, prve tačke, treće glave. Ako se citira teorema iste glave, oznaka glave je izostavljena. Relacije u okviru dokaza koje se citiraju, označene su arapskim brojevima, počev od (1), za svaki dokaz posebno, i referišu se, naprimer: "Relacija (2) iz dokaza teoreme 2.1.(IV)".

2. Sada ćemo dati kraći prikaz rada, koji pre treba smatrati opštim uvodom, nego vernim pregledom važnijih rezultata, s obzirom na obimnost materijala u čitavom radu. Inače, svaka glava posebno, ima svoj uvodni deo - tačku 0.

Pojam simpleksa kao osnovne konveksne strukture je danas jedno od veoma aktuelnih matematičkih oblasti. O tome svedoči niz veoma eminentnih autora koji ovom pitanju pristupaju sa geometriske tačke gledišta (Pogorelov [7]), ili sa stnovišta konveksnosti (Blaschke [4], Eggleston [10], Rockafellar [28]), ili sa pozicija problema pakovanja i prekrivanja (Fejes Toth [11], Rogers [29]). Simpleks igra vrlo važnu ulogu i u matematičkim metodama optimizacije koje imaju veliku primenu u tehnici. Medjutim, ovo se sve odnosi pre svega na simpleks u konačno-dimenzionim prostorima, dok je proučavanje simpleksa u beskonačno-dimenzionim prostorima tek u povoju.To je i inspirisalo autora da se orijentiše na proučavanje nekih vrsta simpleksa u Hilbertovom prostoru,kao prirodnom produženju pojma Euklidskog prostora.No,Hilbertov prostor radja jedan poseban problem koji kvalitativno otežava rad u odnosu na postojeći geometriski aparat.To je beskonačnost i sa njom povezano pitanje konvergencije.Ovo doprinosi da mnoga,skoro trivijalna pitanja Euklidskog prostora,postaju pravi problemi u Hilbertovom prostoru,i da beskonačno-dimenzioni simpleks dobija neko novo svojstvo,dotad nepoznato u konačno-dimenzionom slučaju.Zato se autor i opredelio za aparat funkcionalne analize kao najpodesniji za proučavanje ovog pojma. U ostalom,rešavanje geometriskih problema nije nepoznato u funkcionalnoj analizi (Amir-Moéz [3]).

Sasvim je razumljivo,da zbog rasprostranjenosti ove problematike,nije umesno citirati neke izvore koji su odredjivali visine,ortocentar,težište,centar i poluprečnik opisane sfere itd.,simpleksa u R^n ,ali ilustracije radi,od domaćih autora time su se bavili i prof. Devidé [8], i prof. Volenec [34] .Autor se zato i odlučio za sopstveni model ove problematike u I glavi,koji je smatrao za najpodesniji uvod u sličnu problematiku Hilbertovog prostora H .Prva glava sadrži u tom smislu obradjen pravilan simpleks u R^n .Pri tome se autor opredelio za definiciju simpleksa kao odredjenog skupa vektora (definicija 0.1.(I)), smatrajući da je najpodesnija za prelaz iz R^n u H ,dok se zatvoreni konveksni omotač tog skupa naziva <u>telo simpleksa</u>. Umesto u geometriji tako uobičajenog aparata koji se sastoji iz preslikavanja i podudarnosti kao načina za opisivanje geometriskih svojstava,autor se odlučio za funkcionalnoj analizi bliže,odredjivanje nekog karakterističnog ortonormiranog sistema u odnosu na datu strukturu,u čijim bi se terminima opisivala data struktura.Pri tome se podrazumeva da identičnu geometrisku osobinu izražavamo invarijantom u odnosu na te sisteme.Dakle,bavimo se konkretnim izračunavanjima dobijajući konkretne rezultate za težište,visine,itd.Ovde je glavna pažnja posvećena pojmu zapremine,tj. n-dimenzione Lebegove mere u R^n ,kojim se bavi tačka 4.To je problem koji je daleko od toga da je rešen (Coxeter [6],Fejes Toth [11],Rogers [30]).Autor, kao svoj originalan prilog,počev od 13.str. pa do kraja ove glave,daje izlaganje čiji je krajnji rezultat prilično stroga gornja granica za Lebegovu meru,a koja je jednaka lebegovoj n-meri za slučajeve n=1,2 i 3.Hipoteza je autora da je odgovarajuća nejednakost za proizvoljno n -takodje jednakost.S tim u vezi,uvodi se u tu svrhu koristan medjupojam - "volus".Najznačajnije teoreme ovde su teoreme 4.2.(I),4.3.(I) i 4.5.(I).

Počev od druge glave,uključujući i nju,dalji tekst se bavi isključivo beskonačno-dimenzionim simpleksom i sadrži samo originalne rezultate autora;naravno,uz retke izuzetke zanemarljivo malog procenta opšte poznatih rezultata,koji su lako prepoznatljivi,pa je očigledno nepotrebno podvlačiti njihovu neoriginalnost.

U glavi II,tačka 0.,daju se osnovne definicije vezane za opšti slučaj beskonačno-dimenzionog simpleksa u Hilbertovom prostoru,a koje važe i za preostali deo rada. Glavni rezultat je tu teorema 0.1.(II),kojom je okarakterisano telo tog simpleksa i predstavlja originalan doprinos.Dalji tekst druge glave bavi se isključivo pravilnim simpleksom,ugledajući se na pristup dat glavom I. Tačka 1. tretira odredjivanje karakterističnog ortonormiranog sistema u čijim se terminima dalje radi.Samim tim je rešeno i pitanje egzistencije ove strukture u Hilbert-ovom prostoru.Tačke 2. i 3. razmatraju težište,opisanu i upisane sfere.Tačka 4. je konstruisana po ugledu na istu tačku prve glave.I ovde figurira pojam volusa.Glavna teorema je 4.2.(II),a rezultat da je produženje Lebegove mere iz R^n u H tela beskonačno-dimenzionog simpleksa jednako nuli,tj. da je mera tela beskonačno-dimenzionog simpleksa u odnosu na meru odgovarajuće beskonačno-dimenzione kocke - nula.Pri tome se dokaz izvodi nezavisno od rezultata u R^n .

Glava III je uvod u razradu opštije teorije o beskonačno-dimenzionom simpleksu,dobijene slabljenjem nekih uslova koji važe za pravilan.Dalji tekst rada se bavi samo ovakvim tipom simpleksa.Tačka 0. sadrži nekoliko teorema o zatvorenim linealima temena simpleksa,čija je direktna primena na odredjivanje pljosni simpleksa u tački 1..Tačka 2.,pored visine tretira i produženje ideje sa pojmom volus,kao veličine srazmerne sa proizvodom dužine svih ivica,i dokazuje da je uvek jednak nuli.U tački 3. je dat potreban i dovoljan uslov da ovaj simpleks ima opisanu sferu i u tom slučaju se ona i odredjuje.

Četvrta glava se bavi isključivo problemom upisanih sfera konačno-dimenzionog simpleksa.Tačka 1. sadrži rezultate pri hipotezi da je centar upisane sfere tačka O , pri čemu se dokazuje da je centar tačka O ako i samo ako je simpleks pravilan.U tački 2. data je karakterizacija svih simpleksa koji imaju upisanu sferu koja dodiruje sve ivice,pri čemu je glavni rezultat teorema 2.6.(IV). Tačka 3. tretira upisane sfere reda većeg od jedan (one koje dodiruju pljosni iste dimenzije),a najveća pažnja se,pored ostalog,posvećuje tačkama dodira.U tački 4. se razmatra niz takvih upisanih sfera,i sa tim u vezi daje dovoljan uslov da niz centara i poluprečnika tih sfera teži O ,odnosno nuli,kada konačno-dimenzione pljosni koje se dodiruju prelaze u beskonačno-dimenzione,a koje inače i sadrže tačku O .Samim tim je pokazana i jedna invarijatnost osobine upisane sfere u odnosu na konačno ili beskonačno-dimenzione delove ovog tela.

U petoj glavi se tretiraju projekcije tačke na pljosni simpleksa.Pri tome se posebna pažnja posvećuje zatvorenom linealu tih projekcija,problemu koga skoro da i nema u konačno-dimenzionom slučaju,a koji je ovde vrlo značajan,s obzirom da predstavlja jedan od načina za opisivanje prostornog rasporeda i odnosa strukture koju razmatramo.Tačka 1. sadrži teoremu 1.7.(V) kojom je odredjen ovaj lineal ortogonalnih projekcija na beskonačno-dimenzione pljosni u terminima tačke koja se projektuje. U tački 2. uvodi se pojam kotežišne projekcije kao pogodne i po sebi delotvorne aproksimacije ortogonalne projekcije na konačno-dimenzione pljosni.Pri tome je teoremom 2.8.(V) eksplicitno i u potpunosti odredjen zatvoreni lineal ovih projekcija na sve pljosni iste konačne dimenzije.Tačka 3. razmatra granične vrednosti kotežišnih projekcija kada sva ili samo neka temena kojima je odredjena pljosan,pustimo da teže beskonačnosti.Ovo je svakako interesantno pitanje,s obzirom da sva temena treba da budu ravnopravna.Tačka 4. sadrži neke analogne rezultate za ortogonalne projekcije na konačno-dimenzione pljosni, koji se dobijaju na bazi već odredjenih za kotežišne projekcije.

Šesta glava se bavi nekim aspektima medjusobnog odnosa prave i ravni na jednoj strani i beskonačno-dimenzionog simpleksa na drugoj.Tačka 1. razmatra presek prave i pljosni simpleksa,pri čemu su posebno interesantni rezultati kada bar jedan od vektora kojim je odredjena prava ima beskonačno mnogo koordinata različitih od nule (teorema 1.8.(VI) i 1.10.(VI)).Isto se posmatra i u tački 2. za konačno-dimenzionu ravan (teorema 2.1.(VI) i 2.2.(VI)).U tački 3. tretira se projektovanje temena simpleksa na pravu,i s tim u vezi pokazuje da zbir kvadrata rastojanja temena od prave - divergira (teorema 3.7.(VI)).

3. Autor ovim putem želi da izrazi najdublju zahvalnost mentoru,docentu dr Aleksandru Torgaševu,na korisnim sugestijama u toku izrade ovog rada.Doc. Torgašev je takodje uložio veliki trud da pročita rad još dok je bio u rukopisu, i da svojim blagovremenim primedbama doprinese brzom okončanju tehničke obrade ove disertacije.

Autor se posebno zahvaljuje i članovima komisije,docentu dr Dragomiru Lopandiću,čiji je djak bio na studijama i kome zbog toga ostaje zauvek zahvalan,i prof.dr Pavlu Miličiću na ukazanoj pažnji i trudu.

Beograd, Miloš Laban

19.maj 1980.g.

I Pravilni n-dimenzioni simpleks prostora izomorfnog n-dimenzionom Euklidskom prostoru

0. Uvod

U ovoj glavi bavićemo se osobinama pravilnog n-dimenzionog simpleksa koje su od posebnog interesa za uopštenje na beskonačan slučaj. A to su: Težište, centar i poluprečnik opisane sfere, centar i poluprečnici upisanih sfera, visine i zapremina.

<u>Definicija 0.1</u>: Skup $\{x_0,x_1,\dots,x_n\}$ od n+1 vektora prostora R'_n izomorfnog Euklidskom prostoru R_n nazivamo n-dimenzioni simpleks i obeležavamo ga sa

$$\mathcal{J}(x_0,x_1,\dots,x_n)$$

ako je sistem $x_1-x_0,\dots,x_n-x_0$ bazis prostora R'_n. Tačke $x_0,x_1,\dots,x_n$ zovemo tada temena simpleksa $\mathcal{J}(x_0,x_1,\dots,x_n)$. □

<u>Lema 0.1</u>: Ako je $\{x_0,x_1,\dots,x_n\}$ n-dimenzioni simpleks, onda je $\{x_i,\dots,x_{i+k}\}$ $(0\leq i\leq n-1\ ;\ 1\leq k\leq n-i)$ k-dimenzioni simpleks.

<u>Dokaz</u>: Ako je $\{x_0,x_1,\dots,x_n\}$ n-dimenzioni simpleks u prostoru R'_n, onda su vektori $x_{i+1}-x_i\ ,\dots,\ x_{i+k}-x_i$ linearno nezavisni, različiti od nule i ima ih $\underline{k}$, pa generišu prostor izomorfan prostoru R_k. □

<u>Definicija 0.2</u>: Ako je $\mathcal{J}(x_0,x_1,\dots,x_n)$ n-dimenzioni simpleks onda k-dimenzioni simpleks $\mathcal{J}(x_i,\dots,x_{i+k})$ $(0\leq i\leq n-1\ ;\ 1\leq k\leq n-i)$ nazivamo podsimpleks od $\mathcal{J}(x_0,x_1,\dots,x_n)$.

<u>Definicija 0.3</u>: Pod pravilnim n-dimenzionim simpleksom

ivice λ $(\lambda > 0)$ podrazumevamo n-dimenzioni simpleks $\mathcal{T}(x_o,x_1,\ldots,x_n)$ koji zadovoljava uslov

$$\|x_i - x_j\| = \lambda \quad (i>j \;;\; i=1,\ldots,n \;;\; j=0,1,\ldots,n-1) \;.\square$$

Definicija 0.4: Neka je $\mathcal{T}(x_o,x_1,\ldots,x_n)$ n-dimenzioni simpleks.Tada skup tačaka

$$\left\{t_ox_o+t_1x_1+\ldots+t_nx_n \;\middle|\; t_o+t_1+\ldots+t_n=1 \;;\; t_o,t_1,\ldots,t_n \geqslant 0\right\}$$

nazivamo telo simpleksa $\mathcal{T}(x_o,x_1,\ldots,x_n)$.$\square$

Lema 0.2: Telo podsimpleksa nekog n-dimenzionog simpleksa je podskup tela tog simpleksa.

Dokaz: Tvrdjenje je neposredna posledica predhodnih definicija.$\square$

U daljem tekstu ove glave,bavićemo se isključivo pravilnim simpleksom,i to tako što ćemo radi jednostavnosti rezultate izvoditi samo za simpleks $\mathcal{T}(0,x_1,\ldots,x_n)$. Pri tome ćemo dokaze izvoditi samo za slučaj simpleksa ivice 1 ,a zaključke za simpleks ivice λ,kad god je to potrebno,izvoditi na osnovu sličnosti,ako je to moguće.

Istaknimo,konačno,u vidu leme rezultat koji ćemo dalje vrlo često koristiti.

Lema 0.3: Ako je $\mathcal{T}(0,x_1,\ldots,x_n)$ pravilan simpleks ivice 1 ,onda je

$$\langle x_i,x_j\rangle = \frac{1}{2} \quad (i \neq j) \;.$$

Dokaz: Iz definicije 0.3. sledi

$$\|x_i\| = \|x_i - 0\| = 1 \quad (i=1,\ldots,n)$$

i

$$\|x_i - x_j\|^2 = 1 \quad (i \neq j \;;\; i,j=1,\ldots,n)$$

odakle je

$$\|x_i\|^2 + \|x_j\|^2 - 2\langle x_i,x_j\rangle = 1$$

pa imamo tvrdjenje.$\square$

1. Karakteristični ortonormirani sistem

Za dalji rad i ispunjenje postavljenih zadataka neophodno je formiranje nekog pogodnog ortonormiranog sistema. Ovaj rezultat izkazaćemo sledećom teoremom

Teorema 1.1: Postoji ortonormirani sistem Euklidskog prostora R_n, takav da su za pravilni n-dimenzioni simpleks ivice 1 $\mathcal{S}(0,x_1,\dots,x_n)$ ispunjene relacije

$$(1)\quad \begin{cases} x_1=\delta_1 e_1 \\ x_2=\gamma_1 e_1+\delta_2 e_2 \\ \vdots \\ x_n=\gamma_1 e_1+\gamma_2 e_2+\dots+\gamma_{n-1}e_{n-1}+\delta_n e_n \end{cases}$$

gde su $\gamma_1,\dots,\gamma_{n-1},\delta_1,\dots,\delta_n$ realni brojevi.

Dokaz: Neka $\mathcal{L}(y_1,\dots,y_k)$ označava lineal vektora $y_1,\dots,y_k$. Ortonormirani sistem $e_1,e_2,\dots,e_n$ formirajmo na sledeći način:

Neka je $e_1=x_1$. Vektor e_2 odredjujemo iz uslova da je $e_2\perp e_1$ i $e_2\in\mathcal{L}(x_1,x_2)$, što znači da postoje koeficijenti α_{11},α_{21} i α_{22} takvi da je

$$x_1=\alpha_{11}e_1 \qquad (\alpha_{11}=1)$$
$$x_2=\alpha_{21}e_1+\alpha_{22}e_2$$

Dalje, vektor e_3 odredjujemo iz uslova da je $e_3\perp e_1$, $e_3\perp e_2$ i $e_3\in\mathcal{L}(x_1,x_2,x_3)$ pa sledi da je

$$x_3=\alpha_{31}e_1+\alpha_{32}e_2+\alpha_{33}e_3$$

itd. Poslednji vektor e_n odredjujemo iz uslova da je $e_n\perp e_1$, $e_n\perp e_2$, $e_n\perp e_{n-1}$ i $e_n\in\mathcal{L}(x_1,x_2,\dots,x_n)$ odakle dobijamo

$$x_n=\alpha_{n1}e_1+\alpha_{n2}e_2+\dots+\alpha_{nn}e_n \quad .$$

Dakle imamo sistem

$$
(2)\quad \begin{cases} x_1=\alpha_{11}e_1 \\ x_2=\alpha_{21}e_1+\alpha_{22}e_2 \\ x_3=\alpha_{31}e_1+\alpha_{32}e_2+\alpha_{33}e_3 \\ \vdots \\ x_n=\alpha_{n1}e_1+\alpha_{n2}e_2+\dots+\alpha_{nn}e_n \end{cases}
$$

Sada se iz (2) za $(2\leq k\leq n)$ množenjem k-te jednačine skalarno sa e_1 dobija

$$\langle x_k,e_1\rangle=\alpha_{k1}\langle e_1,e_1\rangle+\alpha_{k2}\langle e_2,e_1\rangle+\dots+\alpha_{kk}\langle e_k,e_1\rangle$$

odakle, obzirom na način formiranja sistema $e_1,\dots,e_n$ sledi

$$\langle e_2,e_1\rangle=\dots=\langle e_k,e_1\rangle=0$$

odnosno

$$\langle x_k,e_1\rangle=\alpha_{k1}\langle e_1,e_1\rangle \quad .$$

Kako je na osnovu leme 0.3.

$$\langle x_k,e_1\rangle=\langle x_k,x_1\rangle=\frac{1}{2}$$

i $\langle e_1,e_1\rangle=\|e_1\|^2=1$, to je

$$(3)\qquad \alpha_{k1}=\frac{1}{2}\qquad (2\leq k\leq n)\quad ,$$

što znači da je prvi koeficijent u svim jednačinama sistema (2), počev od druge, isti, pa ga obeležimo sa $\gamma_1=\frac{1}{2}$.

Dalje, za svako <u>m</u> $(3\leq m\leq n)$ se iz (2) množenjem k-te jednačine $(m\leq k\leq n)$ sa e_{m-1} dobija

$$\langle x_k,e_{m-1}\rangle=\alpha_{k1}\langle e_1,e_{m-1}\rangle+\dots+\alpha_{k\,m-1}\langle e_{m-1},e_{m-1}\rangle+ \\ +\dots+\alpha_{kk}\langle e_k,e_{m-1}\rangle$$

odakle je

$$\langle x_k,e_{m-1}\rangle=\alpha_{k\,m-1}\langle e_{m-1},e_{m-1}\rangle$$

odnosno

$$\alpha_{k\,m-1}=\langle x_k,e_{m-1}\rangle$$

Kako iz (m-1)-prve jednačine sistema (2) sledi

$$e_{m-1} = \frac{1}{\alpha_{m-1\ m-1}} \left(x_{m-1} - \alpha_{m-1\ 1} e_1 - \dots - \alpha_{m-1 m-2} e_{m-2} \right)$$

to imamo

$$\alpha_{k\ m-1} = \langle x_k, e_{m-1} \rangle = \frac{1}{\alpha_{m-1\ m-1}} \left(\langle x_k, x_{m-1} \rangle - \alpha_{m-1\ 1} \langle x_k, e_1 \rangle - \dots - \alpha_{m-1\ m-2} \langle x_k, e_{m-2} \rangle \right)$$

Medjutim,iz sistema (2) takodje sledüje da je

$$\langle x_k, e_1 \rangle = \alpha_{k1} \quad , \dots , \quad \langle x_k, e_{m-2} \rangle = \alpha_{k\ m-2}$$

što znači da je

$$(4) \quad \alpha_{k\ m-1} = \frac{1}{\alpha_{m-1\ m-1}} \left(\frac{1}{2} - \alpha_{m-1\ 1} \alpha_{k1} - \dots - \alpha_{m-1\ m-2} \alpha_{k\ m-2} \right)$$

Dokažimo,sada,matematičkom indukcijom po <u>m</u> da je tačan iskaz

$$(5) \qquad \alpha_{k\ m-1} = \gamma_{m-1}$$

Iskaz (5) je tačan za $m=2$,pošto predstavlja relaciju (3) .Predpostavimo sada da je relacija (5) tačna za sve $r < m-1$ $(r \geq 2)$ pa pokažimo da je tačna i za $r=m-1$. Zaista,iz induktivne predpostavke proizilazi

$$\alpha_{m-1\ 1} = \alpha_{k1} = \gamma_1$$

$$\vdots$$

$$\alpha_{m-1\ m-2} = \alpha_{k\ m-2} = \gamma_{m-2}$$

pa (4) postaje

$$\alpha_{k\ m-1} = \frac{1}{\alpha_{m-1\ m-1}} \left(\frac{1}{2} - \gamma_1^2 - \dots - \gamma_{m-2}^2 \right)$$

Stavimo li sada da je $\gamma_{m-1} = \frac{1}{\alpha_{m-1\ m-1}} \left(\frac{1}{2} - \gamma_1^2 - \dots - \gamma_{m-2}^2 \right)$

dobijamo $\alpha_{k\ m-1} = \gamma_{m-1}$. Time je dokazano da

(5) važi za svako m $(2\leq m\leq n-1)$.

Stavljajući, dalje,

$$\delta_1 = \alpha_{11} \quad , \quad \delta_2 = \alpha_{22} \; ,\ldots, \; \delta_n = \alpha_{nn}$$

s obzirom na relaciju (5), dobijamo iz sistema (2) sistem (1), čime je teorema u potpunosti dokazana.□

Odredimo sada bliže koeficijente γ_k i δ_k iz predhodne teoreme.

Teorema 1.2: Za koeficijente γ_k $(1\leq k\leq n-1)$ i δ_k $(1\leq k\leq n)$ iz iskaza predhodne teoreme, važi da je

$$\gamma_k = \pm \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{k}\sqrt{k+1}} \quad , \quad \delta_k = \pm \frac{\sqrt{k+1}}{\sqrt{2}\sqrt{k}}$$

gde se γ_k i δ_k uzimaju uvek istog znaka.

Dokaz: Podjimo od činjenice da je ortogonalna projekcija temena x_n na podsimpleks $\mathcal{S}(0,x_1,\ldots,x_{n-1})$ njegovo težište, s obzirom na simetriju koja postoji prema definiciji pravilnog n-dimenzionog simpleksa. Kako je na osnovu (1) (teorema 1.1.)

$$x_n = \gamma_1 e_1 +\ldots+ \gamma_{n-1}e_{n-1}+ \delta_n e_n$$

i kako je e_n ortogonalno na $\mathcal{L}(0,x_1,\ldots,x_{n-1})$ a $\gamma_1 e_1+\ldots+ \gamma_{n-1}e_{n-1}\in \mathcal{L}(0,x_1,\ldots,x_{n-1})$, to znači da je

$$\gamma_1 e_1+\ldots+\gamma_{n-1}e_{n-1} = \frac{0 + x_1 +\ldots+ x_{n-1}}{n}$$

odnosno

$$x_n = \frac{x_1 +\ldots+ x_n}{n} + \delta_n e_n$$

S obzirom na (1) (teorema 1.1.) imamo da je dalje

$$x_n = \frac{1}{n}\Big[\delta_1 e_1 + (\gamma_1 e_1 + \delta_2 e_2) +\ldots+ (\gamma_1 e_1+\ldots+\gamma_{n-2}e_{n-2}+ \delta_{n-1}e_{n-1}) + \delta_n e_n =$$

$$= \frac{\delta_1+(n-2)\gamma_1}{n}e_1+ \frac{\delta_2+(n-3)\gamma_2}{n}e_2+\ldots+\frac{\delta_{n-2}+\gamma_{n-2}}{n}e_{n-2}+ \frac{\delta_{n-1}}{n}e_{n-1}+\delta_n e_n$$

pa se uporedjivanjem sa relacijom

(1) $x_n = \gamma_1 e_1 + \gamma_2 e_2 + \ldots + \gamma_{n-1} e_{n-1} + \delta_n e_n$

dobija izjednačavanjem koeficijenta uz e_{n-1}

(2) $$\frac{\delta_{n-1}}{n} = \gamma_{n-1}$$

Dalje,iz (1) sledi

$$\|x_n\|^2 = \gamma_1^2 + \ldots + \gamma_{n-1}^2 + \delta_n^2$$

pa pošto važi $\|x_n\| = 1$,to imamo

(3) $$\delta_n^2 = 1 - \gamma_1^2 - \ldots - \gamma_{n-1}^2$$

Na isti način se iz

$$x_{n-1} = \gamma_1 e_1 + \ldots + \gamma_{n-2} e_{n-2} + \delta_{n-1} e_{n-1}$$

dobija

$$\delta_{n-1}^2 = 1 - \gamma_1^2 - \ldots - \gamma_{n-2}^2$$

te smenom u (3) imamo

(4) $$\delta_n^2 = \delta_{n-1}^2 - \gamma_{n-1}^2 \quad .$$

Iz (4),s obzirom na relaciju (2) sledi sada

(5) $$\delta_n^2 = \frac{n^2-1}{n^2}\delta_{n-1}^2$$

Jasno je dalje,da polazeći od pravilnog (n-1)-dimenzionog simpleksa ivice 1 dobijamo relaciju

$$\delta_{n-1}^2 = \frac{(n-1)^2-1}{(n-1)^2}\delta_{n-2}^2$$

itd.Dakle,relacija (5) važi za svako $\underline{n}$ .Otuda imamo

$$\delta_n^2 = \frac{n^2-1}{n^2}\cdot\frac{(n-1)^2-1}{(n-1)^2}\cdots\frac{3^2-1}{3^2}\cdot\frac{2^2-1}{2^2}\delta_1^2 = \frac{(n+1)(n-1)}{n\cdot n}\cdot$$

$$\frac{n(n-2)}{(n-1)(n-1)}\cdots\frac{4\cdot 2}{3\cdot 3}\cdot\frac{3\cdot 1}{2\cdot 2}\cdot 1 = \frac{n+1}{2n}$$

odakle je $$\delta_n = \pm\frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{2}\sqrt{n}}$$

Sada je iz (2)

$$\gamma_n = \frac{\delta_n}{n+1} = \pm \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{2}\sqrt{n}\,(n+1)} = \pm \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{n}\sqrt{n+1}}$$

gde se γ_n i δ_n uzimaju uvek istog znaka.

S obzirom na to kako je formiran sistem (1) (teorema 1.1.), jasno je da se posmatranjem k-dimenzionog pravilnog simpleksa ivice 1 - $\mathcal{J}(0,x_1,\dots,x_k)$ $(1\leq k<n)$ dobijaju rezultati dati u iskazu teoreme.Time je i teorema u potpunosti dokazana.

Ne smanjujući opštost,a radi jednostavnijeg rada,koristićemo ubuduće samo onaj ortonormirani sistem $e_1,\dots,e_n$ kod koga su svi koeficijenti γ_k i δ_k pozitivni.

2. Težište,centar i poluprečnik opisane sfere

Teorema 2.1: Težište S_n pravilnog n-dimenzionog simpleksa ivice 1 $\mathcal{J}(0,x_1,\dots,x_n)$ odredjeno je vektorom

$$x_{on} = \gamma_1 e_1 + \dots + \gamma_n e_n$$

i pripada telu simpleksa $\mathcal{J}(0,x_1,\dots,x_n)$.

Dokaz: Prema definiciji težišta skupa tačaka u R_n imamo

$$x_{on} = \frac{0 + x_1 + \dots + x_n}{n+1}$$

pa s obzirom na definiciju 0.4. S_n pripada telu simpleksa $\mathcal{J}(0,x_1,\dots,x_n)$.

Dalje,na osnovu (1) (teorema 1.1.) sledi

$$x_{on} = \frac{x_1 + \dots + x_n}{n+1} = \frac{\delta_1+(n-1)\gamma_1}{n+1}e_1 + \frac{\delta_2+(n-2)\gamma_2}{n+1}e_2 + \dots +$$

$$+ \frac{\delta_{n-1} + \gamma_{n-1}}{n+1}e_{n-1} + \frac{\delta_n}{n+1}e_n$$

Kako je za $(1\leq k\leq n)$ s obzirom na teoremu 1.2.

$$\frac{\delta_k + (n-k)\gamma_k}{n+1} = \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{k}\sqrt{k+1}} = \gamma_k$$

to je

$$x_{on} = \gamma_1 e_1 + \gamma_2 e_2 + \dots + \gamma_{n-1} e_{n-1} + \gamma_n e_n \quad . \square$$

Teorema 2.2: Centar opisane sfere pravilnog n-dimenzionog simpleksa ivice 1 $\mathcal{S}(0,x_1,\dots,x_n)$ je tačka S_n, a poluprečnik $\mathcal{R}_n = \sqrt{\frac{n}{2(n+1)}}$.

Dokaz: Prema definiciji centra opisane sfere imamo da je to tačka odredjena nekim vektorom y_o koji zadovoljava uslov

$$\|y_o - 0\| = \|y_o - x_1\| = \dots = \|y_o - x_n\| = \mathcal{R}_n \quad .$$

Pokažimo sada da je $x_{on}=y_o$ .Zaista, relacija

$$\|x_{on} - x_k\| = \|x_{on}\| \qquad (1 \leqslant k \leqslant n)$$

je ekvivalentna sa relacijom

$$\langle x_{on}, x_k \rangle = \frac{1}{2}$$

a ova sledi na osnovu teoreme 1.2. i teoreme 2.1 jer je

$$\langle x_{on}, x_k \rangle = \gamma_1^2 + \dots + \gamma_{k-1}^2 + \gamma_k \delta_k = 1 - \delta_k^2 + \frac{\delta_k^2}{k+1} \quad .$$

Dakle S_n je centar opisane sfere,dok je poluprečnik

$$\mathcal{R}_n = \|x_{on}\| = \sqrt{\gamma_1^2 + \dots + \gamma_n^2} = \sqrt{1 - \delta_{n+1}^2} = \sqrt{\frac{n}{2(n+1)}} \quad . \square$$

3. Upisane sfere

Definicija 3.1: Kažemo da n-dimenzioni simpleks ima upisanu sferu reda k $(k<n)$,ako postoji tačka S_{kn} tela sipleksa koja je podjednako udaljena od svih k-dimenzionih pljosni datog simpleksa i pri čemu rastojanje r_{kn} od proizvoljne k-dimenzione pljosni zovemo poluprečnik upisane sfere reda k. $\square$

Teorema 3.1: Centar upisane sfere reda k pravilnog n-dimenzionog simpleksa ivice 1 $\mathcal{S}(0,x_1,\dots,x_n)$ je tačka S_n a poluprečnik $r_{kn} = \sqrt{\frac{n-k}{2(k+1)(n+1)}}$.

Dokaz: Udaljenje tačke S_n od k-dimenzione pljosni $\Pi(0,x_1,\dots,x_k)$ odredjene temenima $0,x_1,\dots,x_k$ jeste

$$r'_{kn} = \min_{y\in\Pi(0,x_1,\dots,x_k)} \| x_{on} - y \|$$

No,kako je pljosan $\Pi(0,x_1,\dots,x_k)$ generisana vektorima $e_1,\dots,e_k$,zbog načina kako je konstruisan karakteristični ortonormirani sistem,to se vektor y može predstaviti u obliku

$$y = t_1e_1 +\dots+ t_ke_k$$

pa je

$$r'_{kn} = \min_{t_1,\dots,t_k\in R} \sqrt{(\gamma_1-t_1)^2+\dots+(\gamma_k-t_k)^2+\gamma^2_{k+1}+\dots+\gamma^2_n} \quad .$$

Odavde je jasno da minimum nastupa za $t_1=\gamma_1$,..., $t_k=\gamma_k$, tj.

(1) $$y = \gamma_1e_1 +\dots+ \gamma_ke_k$$

i

$$r'_{kn} = \sqrt{\gamma^2_{k+1} +\dots+ \gamma^2_n} = \sqrt{\frac{n-k}{2(k+1)(n+1)}} \quad .$$

Dalje,zbog simetrije,očigledno je da ćemo dobiti isti rezultat za r''_{kn} ako umesto pljosni $\Pi(0,x_1,\dots,x_k)$ uzmemo bilo koju drugu k-dimenzionu pljosan (jednostavno prenumerišemo vektore koji je odredjuju).Prema tome, $r_{kn}=r'_{kn}$ a S_n je centar upisane sfere reda k. $\square$

<u>Teorema 3.2</u>: Upisana sfera reda <u>k</u> pravilnog n-dimenzionog simpleksa ivice 1 $\mathcal{S}(0,x_1,\dots,x_n)$ sadrži centre opisanih sfera k-dimenzionih podsimpleksa.

<u>Dokaz</u>: S obzirom na relaciju (1) (dokaz teoreme 3.1.), upisana sfera reda <u>k</u> sadrži tačku

$$\gamma_1e_1 +\dots+ \gamma_ke_k \quad .$$

Kako je prema teoremi 2.1. težište S_k pravilnog k-dimenzionog simpleksa ivice 1 $\mathcal{S}(0,x_1,\dots,x_k)$ odredjeno vektorom

$$x_{ok} = \gamma_1e_1+\dots+ \gamma_ke_k$$

to S_k pripada upisanoj sferi reda $\underline{k}$ simpleksa $\mathcal{S}(0,x_1,\ldots,x_n)$ .Kako je prema teoremi 2.2. S_k centar opisane sfere simpleksa $\mathcal{S}(0,x_1,\ldots,x_k)$,to imamo da upisana sfera reda $\underline{k}$ simpleksa $\mathcal{S}(0,x_1,\ldots,x_n)$ sadrži centar opisane sfere podsimpleksa $\mathcal{S}(0,x_1,\ldots,x_k)$. Jasno je sada,da posmatrajući proizvoljan k-dimenzioni podsimpleks datog simpleksa $\mathcal{S}(0,x_1,\ldots,x_n)$ i izvršujući odgovarajuću prenumeraciju vektora $0,x_1,\ldots,x_n$,dobijamo isti rezultat kao i za podsimpleks $\mathcal{S}(0,x_1,\ldots,x_k)$. Time je i dokazana teorema. □

Na osnovu teoreme 2.2. i teoreme 3.1. imamo

<u>Posledica 3.1</u>: Upisana sfera reda 0 pravilnog n-dimenzionog simpleksa ivice 1 je opisana sfera. □

4. <u>Visine i zapremina</u>

<u>Definicija 4.1</u>: Visina n-dimenzionog simpleksa je duž koja spaja teme sa ortogonalnom projekcijom tog temena na naspramnu (n-1)-dimenzionu pljosan.

<u>Lema 4.1</u>: Ortogonalna projekcija temena na naspramnu (n-1)-dimenzionu pljosan pravilnog n-dimenzionog simpleksa ivice 1 $\mathcal{S}(0,x_1,\ldots,x_n)$ je težište naspramnog (n-1)-dimenzionog podsimpleksa.

<u>Dokaz</u>: Zbog simetrije,dovoljno je dokazati da je lema tačna za teme x_n .Kako iz teoreme 2.1. sledi da je tačka

$$x_{o\ n-1} = \gamma_1 e_1 + \ldots + \gamma_{n-1} e_{n-1}$$

težište podsimpleksa $\mathcal{S}(0,x_1,\ldots,x_{n-1})$ i da pripada telu tog podsimpleksa,to ona pripada i pljosni odredjenoj temenima $0,x_1,\ldots,x_{n-1}$.Sa druge strane imamo

$$\langle x_n - x_{o\ n-1}\ ,\ x_{o\ n-1}\rangle = \langle \gamma_1 e_1 + \ldots + \gamma_{n-1} e_{n-1} + \delta_n e_n - \gamma_1 e_1 -$$

$-\ldots-\delta_{n-1}e_{n-1}\ ,\ \delta_1 e_1+\ldots+\delta_{n-1}e_{n-1}\rangle = 0$

pa je tačka $x_{o\ n-1}$ i ortogonalna projekcija temena x_n na naspramnu pljosan. □

Teorema 4.1: Sve visine pravilnog n-dimenzionog simpleksa ivice 1 $\mathcal{S}(0,x_1,\ldots,x_n)$ su jednake dužine

$$\delta_n = \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{2}\sqrt{n}}$$

i seku se u tački S_n ,ortocentru simpleksa,pri čemu ih S_n deli u odnosu $n:1$.

Dokaz: S obzirom na simetriju,jasno je da su sve visine medjusobno jednake,i da je dovoljno izračunati onu koja odgovara temenu x_n .Dakle,

$$\| x_n - x_{o\ n-1}\| = \| \delta_n e_n\| = \delta_n = \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{2}\sqrt{n}} \quad .$$

Takodje ne smanjujući opštost,dovoljno je pokazati da tačka S_n pripada duži koja spaja teme x_n i tačku S_{n-1}, težište podsimpleksa $\mathcal{S}(0,x_1,\ldots,x_{n-1})$,i da je deli u datom odnosu.Kako je

$$\frac{1}{n+1}x_n + (1-\frac{1}{n+1})x_{o\ n-1} = \frac{1}{n+1}(\delta_1 e_1+\ldots+\delta_{n-1}e_{n-1}+$$

$$+\delta_n e_n) + (1-\frac{1}{n+1})(\delta_1 e_1+\ldots+\delta_{n-1}e_{n-1}) = \delta_1 e_1+\ldots+$$

$$+\delta_{n-1}e_{n-1} + \frac{\delta_n}{n+1}e_n = \delta_1 e_1+\ldots+\delta_{n-1}e_{n-1}+\delta_n e_n = x_{on}$$

to znači da S_n pripada visini koja odgovara temenu x_n i deli je u odnosu

$$\frac{1-\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n+1}} = \frac{n}{1}$$

čime je teorema u potpunosti dokazana. □

U želji da dobijemo što prirodniji način za odredjivanje zapremine (Lebegove mere) pravilnog n-dimenzionog simpleksa,pošli smo od činjenice da je površina jednakostraničnog trougla proizvod bazisa (stranice),visine i neke stalne konstante.Takodje je i zapremina jednakoivične piramide proizvod površine bazisa (jednakostraničnog trougla) ,visine i neke stalne konstante.Rekurzivni postupak baziran na ovoj ideji ne samo da dovodi,kao što se vidi u daljem tekstu,do vrlo upotrebljive nejednakosti,već i sasvim prirodno vodi u beskonačno-dimenzioni slučaj.Medjutim,da ne bi došli u sukob sa konvencionalnom terminologijom,uvešćemo,saglasno gore navedenim idejama,pojam koji ćemo nazvati "volus"*).Shodno tome, imamo prvo

Lema 4.2: Neka je $\mathcal{S}(0,x_1,\dots,x_n)$ pravilan n-dimenzioni simpleks ivice 1 .Tada je $\mathcal{S}(\,{}^k_m0\,,\,{}^k_mx_1,\dots,{}^k_mx_n\,)$,
gde je

$$ {}^k_m0 = 0 + \frac{x_1 - 0}{m}\,k $$

$$ {}^k_mx_i = x_i + \frac{x_1 - x_i}{m}\,k \qquad (1\leq i\leq n) $$

($m,k\in N$; $m>k$) , takodje pravilan n-dimenzioni simpleks ivice $\frac{m-k}{m}$.

Dokaz: Kako je

$$ \left\| {}^k_mx_i - {}^k_m0 \right\| = \left\| x_i + \frac{x_1-x_i}{m}k - \frac{x_1}{m}k \right\| = (1-\frac{k}{m})\|x_i\| = \frac{m-k}{m} $$

i za $i\neq j$

$$ \left\| {}^k_mx_i - {}^k_mx_j \right\| = (1-\frac{k}{m})\left\| x_i - x_j \right\| = \frac{m-k}{m} $$

to imamo tvrdjenje. □

Definicija 4.2: Skup $\mathcal{B}\subset R_n$ nazivamo n-dimenzioni simpleks-valjak visine $\underline{h}$ i bazisa $\mathcal{S}_{n-1}$,ako se sastoji

---

*) "Volus" je kovanica od reči "volumen" i "simpleks".

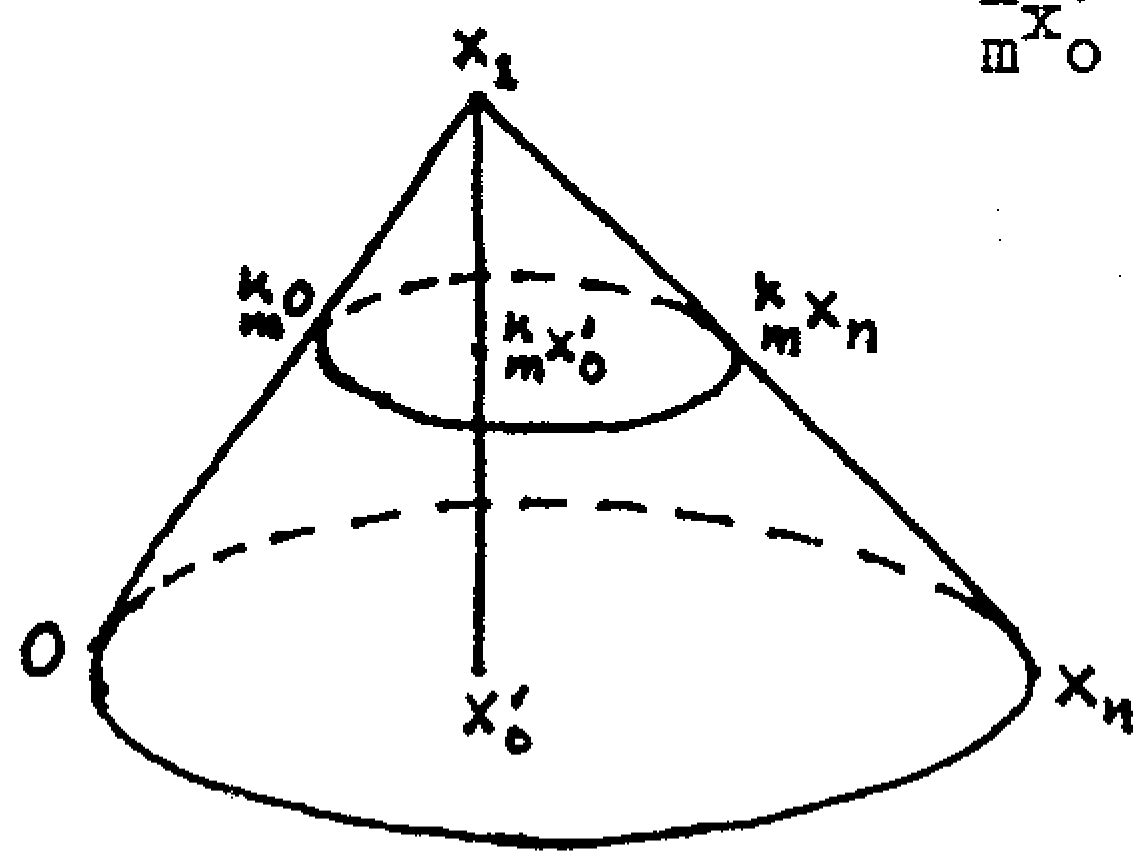
samo iz tačaka koje pripadaju dužima dužine h ,ortogonalnim na pravilan (n-1)-dimenzioni simpleks $\mathcal{S}_{n-1}$, koje se nalaze sa iste strane $\mathcal{S}_{n-1}$ i čiji jedan kraj pripada telu $\mathcal{S}_{n-1}$. □

<u>Teorema 4.2</u>: Neka je ${}^{k}_{m}x_o'$ težište simpleksa $\mathcal{S}({}^{k}_{m}0 , {}^{k}_{m}x_2 ,\dots, {}^{k}_{m}x_n)$ a ${}^{k}_{m}\mathcal{B}_n$ n-dimenzioni simpleks-valjak čiji je bazis simpleks $\mathcal{S}({}^{k}_{m}0, {}^{k}_{m}x_2,\dots, {}^{k}_{m}x_n)$ a visina $\dfrac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{2}\sqrt{n}\cdot m}$ i pri tome je ${}^{k}_{m}\mathcal{B}_n$ sa one strane bazisa sa koje je ${}^{k+1}_{m}x_o'$. Tada je skup

$$\left\{ {}^{k}_{m}\mathcal{B}_n \;\middle|\; k=0,1,\dots,m-1 \right\}$$

prekrivač tela pravilnog n-dimenzionog simpleksa ivice 1 $\mathcal{S}(0,x_1,\dots,x_n)$.

<u>Dokaz</u>: Pokažimo da je



$${}^{k}_{m}x_o' = x_o' + \frac{x_1 - x_o'}{m}\cdot k$$

gde je

$$x_o' = \frac{0+x_2+\dots+x_n}{n}$$

težište simpleksa $\mathcal{S}(0,x_2,\dots,x_n)$.

Zaista,

$${}^{k}_{m}x_o' = \frac{{}^{k}_{m}0+{}^{k}_{m}x_2+\dots+{}^{k}_{m}x_n}{n} = \frac{0+x_2+\dots+x_n}{n} +$$

$$+ \frac{\dfrac{nx_1}{n} - \dfrac{0+x_2+\dots+x_n}{n}}{m}\cdot k = x_o' + \frac{x_1 - x_o'}{m}\cdot k$$

Kako je,prema tome,

$$(1) \qquad {}^{k+1}_{m}x_o' - {}^{k}_{m}x_o' = \frac{x_1 - x_o'}{m}$$

to je

(2) $\left\| {}^{k+1}_{m}x'_o - {}^{k}_{m}x'_o \right\| = \frac{1}{m} \left\| x_1 - x'_o \right\| = \frac{1}{m} \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{2}\sqrt{n}}$

jer je prema teoremi 4.1. $x_1 - x'_o$ ortogonalno na pljosan $\Pi(0,x_2,\ldots,x_n)$ i $\| x_1 - x'_o \| = \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{2}\sqrt{n}}$ .Dalje je

$$ {}^{k}_{m}x_1 = x_1 + \frac{x_1 - x_1}{m} \cdot k = x_1 $$

pa na osnovu leme 4.2. sledi da je $x_1 - {}^{k}_{m}x'_o$ ortogonalno na pljosan $\Pi({}^{k}_{m}0, {}^{k}_{m}x_2, \ldots, {}^{k}_{m}x_n)$ .Otuda,s obzirom na (1) sledi da sve tačke odredjene vektorima ${}^{k}_{m}x'_o$ $(k=0,1,\ldots,m)$ pripadaju duži čiji su krajevi odredjeni vektorima x_1 i x'_o .Isto tako,imamo dalje da je ${}^{k+1}_{m}x'_o - {}^{k}_{m}x'_o$ ortogonalno na pljosan $\Pi({}^{k}_{m}0, {}^{k}_{m}x_2, \ldots, {}^{k}_{m}x_n)$ pa s obzirom na (2) tačka odredjena vektorom ${}^{k+1}_{m}x'_o$ $(k=0,1,\ldots,m-1)$ pripada ${}^{k}_{m}\mathcal{B}_n$ .Samim tim i tačka $x_1 = {}^{m}_{m}x'_o$ pripada ${}^{m-1}_{m}\mathcal{B}_n$ .Neka je

$$ y = t_1x_1 + \ldots + t_nx_n $$

$(t_1 + \ldots + t_n \leqslant 1 \ ; \ t_1, \ldots, t_n \geqslant 0)$ proizvoljna tačka tela simpleksa $\mathcal{S}(0,x_1,\ldots,x_n)$ i

$$ z = s_2x_2 + \ldots + s_nx_n $$

tačka pljosni $\Pi(0,x_2,\ldots,x_n)$ takva da je $y-z$ ortogonalno na $\Pi(0,x_2,\ldots,x_n)$ .Pošto je $x_1 - x'_o$,kao što smo već videli,ortogonalno na pljosan $\Pi(0,x_2,\ldots,x_n)$, a vektori $x_1,\ldots,x_n$ su linearno nezavisni i generišu prostor R_n sledi da mora postojati realan broj $\underline{r}$ takav da važi

(3) $$ y - z = r(x_1 - x'_o) $$

odnosno

$$ t_1x_1 + \ldots + t_nx_n - s_2x_2 - \ldots - s_nx_n = rx_1 - \frac{r}{n}x_2 - \ldots - \frac{r}{n}x_n $$

odakle imamo

$$(4)\begin{cases} r = t_1 \\ s_2 = t_2 + \frac{r}{n} = t_2 + \frac{t_1}{n} \geqslant 0 \\ \vdots \\ s_n = t_n + \frac{r}{n} = t_n + \frac{t_1}{n} \geqslant 0 \quad . \end{cases}$$

Kako je

$$(5) \quad s_2+\ldots+s_n = (t_2+\frac{t_1}{n})+\ldots+(t_n+\frac{t_1}{n}) = t_1+\ldots+t_n \leqslant 1$$

to iz (4) i (5) zaključujemo da $\underline{z}$ pripada telu simpleksa $\mathcal{S}(0,x_2,\ldots,x_n)$ .Isto tako,iz (3) i (4) sledi

$$(6) \qquad y - z = t_1(x_1 - x_o') \quad .$$

Kako je $0 \leqslant t_1 \leqslant 1$ mora da postoji neko $\underline{k}$ $(k=0,\ldots,m-1)$ takvo da je $t_1 \in \left[\frac{k}{m} , \frac{k+1}{m}\right]$ .Neka je dalje

$$\tfrac{k}{m}z = s_o' \cdot \tfrac{k}{m}0 + s_2' \cdot \tfrac{k}{m}x_2 + \ldots + s_n' \cdot \tfrac{k}{m}x_n$$

tačka pljosni $\Pi(\tfrac{k}{m}0,\tfrac{k}{m}x_2,\ldots,\tfrac{k}{m}x_n)$ takva da je $\tfrac{k}{m}z - z$ ortogonalno na tu pljosan.Tada,s obzirom da je $x_1 - x_o'$ ortogonalan na pljosan $\Pi(\tfrac{k}{m}0,\tfrac{k}{m}x_2,\ldots,\tfrac{k}{m}x_n)$ prema teoremi 4.1.,i vektori $\tfrac{k}{m}x_2-\tfrac{k}{m}0,\ldots,\tfrac{k}{m}x_n-\tfrac{k}{m}0,x_1-x_o'$ generišu prostor R_n ,mora da postoji realan broj r' takav da važi

$$(7) \qquad \tfrac{k}{m}z - z = r'(x_1 - x_o')$$

odnosno

$$s_o' \cdot \tfrac{k}{m}0 + s_2' \cdot \tfrac{k}{m}x_2 + \ldots + s_n' \cdot \tfrac{k}{m}x_n - s_2x_2 - \ldots - s_nx_n = r'x_1 - \frac{r'}{n}x_2 - \ldots - \frac{r'}{n}x_n$$

odakle je izjednačavanjem koeficijenata uz $x_1,\ldots,x_n$

$$(8)\begin{cases} \dfrac{s_o'+s_2'+\ldots+s_n'}{m}\,k = r' \\ s_2' = \dfrac{s_2 - \frac{r'}{n}}{1-\frac{k}{m}} = \dfrac{t_2 + \frac{t_1}{n} - \frac{r'}{n}}{1-\frac{k}{m}} \\ \vdots \\ s_n' = \dfrac{s_n - \frac{r'}{n}}{1-\frac{k}{m}} = \dfrac{t_n + \frac{t_1}{n} - \frac{r'}{n}}{1-\frac{k}{m}} \end{cases}$$

Kako za $s_o'+s_2'+\ldots+s_n' = 1$ imamo iz prve jednačine sistema (8)

$$r' = \frac{k}{m}$$

a s obzirom na predpostavku da je $t_1 \geqslant \frac{k}{m}$ iz ostalih jednačina sistema (8) dobijamo

$$s_i' = \frac{t_i + \frac{t_1}{n} - \frac{r'}{n}}{1-\frac{k}{m}} \geqslant \frac{t_i + \frac{k}{mn} - \frac{k}{mn}}{1-\frac{k}{m}} = \frac{t_i}{1-\frac{k}{m}} \geqslant 0$$

$$(2 \leqslant i \leqslant n)$$

i

$$s_2'+\ldots+s_n' = \frac{t_2+\ldots+t_n - \frac{n-1}{n}r'}{1-\frac{k}{m}} = \frac{t_2+\ldots+t_n - \frac{n-1}{n}\frac{k}{m}}{1-\frac{k}{m}} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1 - t_1 - \frac{n-1}{n}\frac{k}{m}}{1-\frac{k}{m}} \leqslant \frac{1 - \frac{k}{m} - \frac{n-1}{n}\frac{k}{m}}{1-\frac{k}{m}} \leqslant \frac{1-\frac{k}{m}}{1-\frac{k}{m}} = 1$$

to je i

$$s_o' = 1 - (s_2' + \ldots + s_n') \geqslant 0$$

pa tačka ${}^k_m z$ pripada telu simpleksa $\mathcal{J}({}^k_m 0, {}^k_m x_2, \ldots, {}^k_m x_n)$.

Sada je iz (6) i (7)

$$y - {}^k_m z = (y - z) - ({}^k_m z - z) = (t_1 - r')(x_1 - x_o')$$

odnosno

$$y - {}^k_m z = (t_1 - \frac{k}{m})(x_1 - x_o')$$

pa je $y - {}^k_m z$ ortogonalno na telo simpleksa $\mathcal{J}({}^k_m 0, {}^k_m x_2, \ldots, {}^k_m x_n)$ .Isto tako je

$$\| y - \tfrac{k}{m}z \| = (t_1 - \tfrac{k}{m})\cdot \| x_1 - x_0' \| \leq (\tfrac{k+1}{m} - \tfrac{k}{m})\cdot \| x_1 - x_0' \| = \\ = \tfrac{1}{m} \| x_1 - x_0' \|$$

pa prema tome tačka $\underline{y}$ pripada n-dimenzionom simpleks-valjku ${}^{k}_{m}\mathcal{B}_n$. Pošto smo za proizvoljnu tačku $\underline{y}$ tela simpleksa $\mathcal{S}(0,x_1,\dots,x_n)$ pokazali da postoji valjak ${}^{k}_{m}\mathcal{B}_n$ koji je sadrži, to sledi da skup

$$\left\{ {}^{k}_{m}\mathcal{B}_n \;\middle|\; k=0,1,\dots,m-1 \right\}$$

predstavlja prekrivač tela simpleksa $\mathcal{S}(0,x_1,\dots,x_n)$.

Time je teorema u potpunosti dokazana. □

<u>Definicija 4.3</u>: Svaku funkciju

$$v_n : \mathcal{P}(R_n) \to R$$

gde je $\mathcal{P}(R_n)$ partitivan skup prostora R_n , nazivamo <u>volus</u> u odnosu na ortonormirani bazis $e_1,\dots,e_n$, ako su ispunjeni sledeći uslovi:

1° Postoji konstanta c_n , koja zavisi samo od $\underline{n}$, takva da je slika tela pravilnog n-dimenzionog simpleksa ivice λ jednaka $c_n \cdot \lambda^n$.

2°

$$v_n({}^{k}_{m}\mathcal{B}_n) = \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{2}\sqrt{n}\cdot m}\, v_{n-1}({}^{k}_{m}\mathcal{S}_n)$$

gde je ${}^{k}_{m}\mathcal{S}_n$ telo bazisa od ${}^{k}_{m}\mathcal{B}_n$.

3° Slika tela pravilnog n-dimenzionog simpleksa ivice 1 $\mathcal{S}(0,x_1,\dots,x_n)$ je

$$\inf_{m \in N} \sum_{k=0}^{m-1} v_n({}^{k}_{m}\mathcal{B}_n) \quad . \square$$

<u>Teorema 4.3</u>: Volus tela pravilnog n-dimenzionog simpleksa ivice 1 je

$$V_n = \frac{\sqrt{n+1}}{n!\,(\sqrt{2}\,)^n} \quad .$$

<u>Dokaz</u>: Dokaz ćemo izvesti matematičkom indukcijom po $\underline{n}$.

Za n=1 i n=2 iskaz je očigledno tačan, pošto se tu volus poklapa sa dužinom, odnosno površinom. Predpostavimo da je iskaz tačan za n-1 pa dokažimo da je tačan i za n .

Dakle, neka je volus tela pravilnog (n-1)-dimenzionog simpleksa ivice 1 jednak

$$V_{n-1} = \frac{\sqrt{n}}{(n-1)!(\sqrt{2})^{n-1}} .$$

Kako je prema delu 1^{o} definicije 4.3. volus tela pravilnog (n-1)-dimenzionog simpleksa ivice 1 jednak

$$c_{n-1}\cdot 1^{n-1}$$

to je dakle

(1) $$c_{n-1} = \frac{\sqrt{n}}{(n-1)!(\sqrt{2})^{n-1}}$$

Sada je na osnovu leme 4.2.

$$v_{n-1}(\tfrac{k}{m}\mathcal{J}_n) = c_{n-1}(\tfrac{m-k}{m})^{n-1}$$

pa iz dela 2^{o} definicije 4.3. sledi

$$v_n(\tfrac{k}{m}\mathcal{B}_n) = \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{2}\sqrt{n}\cdot m}c_{n-1}(\tfrac{m-k}{m})^{n-1} = (c_{n-1}\cdot\frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{2}\sqrt{n}})\cdot\frac{1}{m}(\tfrac{m-k}{m})^{n-1} .$$

Pokažimo sada da postoji

$$\lim_{m\to\infty}\sum_{k=0}^{m-1} v_n(\tfrac{k}{m}\mathcal{B}_n)$$

i izračunajmo ga. Dakle,

(2) $$\lim_{m\to\infty}\sum_{k=0}^{m-1} v_n(\tfrac{k}{m}\mathcal{B}_n) = c_{n-1}\frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{2}\sqrt{n}}\cdot \lim_{m\to\infty}\frac{1^{n-1}+2^{n-1}+\ldots+m^{n-1}}{m^n} .$$

Nije teško videti da važi

(3) $$\lim_{m\to\infty}\frac{1^{n-1}+2^{n-1}+\ldots+m^{n-1}}{m^n} = \frac{1}{n} .$$

Dokaz se može izvesti indukcijom po n . Zaista, (3) je očigledno ispunjeno za n=1 i n=2 .Predpostavimo da je (3) tačno za sve $n\leq k$,pa dokažimo da je tačan i za $n=k+1$. Ako označimo sa $S_k=1^k+2^k+\ldots+m^k$ onda imamo

$$1^{k+1}+2^{k+1}+\ldots+(m+1)^{k+1} = 1^{k+1} + (1+1)^{k+1} + (2+1)^{k+1} +$$
$$+\ldots+ (m+1)^{k+1} = 1 + S_{k+1} + \binom{k+1}{1}S_k + \binom{k+1}{2}S_{k-1} +\ldots+$$
$$+ \binom{k+1}{k+1}S_0$$

Odavde je

$$\frac{(m+1)^{k+1}}{m^{k+1}} = \frac{1}{m^{k+1}} + \binom{k+1}{1}\frac{S_k}{m^{k+1}} + \binom{k+1}{2}\frac{1}{m}\cdot\frac{S_{k-1}}{m^k} +\ldots+$$
$$+ \binom{k+1}{k+1}\frac{1}{m^k}\cdot\frac{S_0}{m}$$

pa kad pustimo da m teži beskonačnosti,s obzirom na induktivnu predpostavku,sledi

$$1 = 0 + (k+1)\lim_{m\to\infty}\frac{S_k}{m^{k+1}} + \binom{k+1}{2}0\cdot\frac{1}{k} +\ldots+ \binom{k+1}{k+1}0\cdot\frac{1}{1}$$

odakle dobijamo (3) za $n=k+1$ .Time je (3) dokazana. Sada je iz (2),na osnovu (3), i (1),

$$(4)\qquad \lim_{m\to\infty}\sum_{k=0}^{m-1} v_n\left({}^{k}_{m}\mathcal{B}_n \right) = \frac{\sqrt{n}}{(n-1)!(\sqrt{2}\,)^{n-1}}\cdot\frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{2}\sqrt{n}}\cdot\frac{1}{n} =$$
$$= \frac{\sqrt{n+1}}{n!(\sqrt{2}\,)^n} .$$

Kako je,dalje,

$$1^k+2^k+\ldots+m^k > \int_0^m x^k dx = \frac{m^{k+1}}{k+1}$$

to je

$$\frac{S_k}{m^{k+1}} > \frac{1}{k+1}$$

pa je,s obzirom na (3),

$$\inf_{m\in N}\frac{S_{n-1}}{m^n} = \lim_{m\to\infty}\frac{S_{n-1}}{m^n}$$

što znači da iz (4) imamo

$$\inf_{m\in N} \sum_{k=0}^{m-1} v_n\left({}^{k}_{m}\mathcal{B}_n \right) = \lim_{m\to\infty} \sum_{k=0}^{m-1} v_n\left({}^{k}_{m}\mathcal{B}_n \right) .$$

Odavde je, s obzirom na deo 3^o definicije 4.3. i (4)

$$V_n = \inf_{m\in N} \sum_{k=0}^{m-1} v_n\left({}^{k}_{m}\mathcal{B}_n\right) = \frac{\sqrt{n+1}}{n!(\sqrt{2})^n} . \square$$

Primedba 4.1: Ističemo da je

$V_1 = \frac{\sqrt{1+1}}{1!(\sqrt{2})^1} = 1$ – dužina duži dužine 1 ,

$V_2 = \frac{\sqrt{2+1}}{2!(\sqrt{2})^2} = \frac{\sqrt{3}}{4}$ – površina jednakostraničnog trougla stranice jednake 1 ,

$V_3 = \frac{\sqrt{3+1}}{3!(\sqrt{2})^3} = \frac{1}{6\sqrt{2}}$ – zapremina jednakoivične piramide ivice 1 .

Teorema 4.4: Volus tela pravilnog n-dimenzionog simpleksa ivice λ je

$${}^{\lambda}V_n = \frac{\sqrt{n+1}}{n!(\sqrt{2})^n}\lambda^n .$$

Dokaz: Pošto je na osnovu teoreme 4.3.

$$V_n = \frac{\sqrt{n+1}}{n!(\sqrt{2})^n}\cdot 1^n$$

to je s obzirom na deo 1^o definicije 4.3.

$$c_n = \frac{\sqrt{n+1}}{n!(\sqrt{2})^n}$$

pa je

$${}^{\lambda}V_n = c_n\lambda^n$$

odakle sledi tvrdjenje. $\square$

Teorema 4.5: Volus tela pravilnog n-dimenzionog simpleksa, veći je ili jednak n-dimenzionoj Lebegovoj meri $\mathcal{M}_n$ tog skupa.

Dokaz: Dokaz ćemo izvesti matematičkom indukcijom po n .

Na osnovu primedbe 4.1. i teoreme 4.4. tvrdjenje očigledno važi za n=1,n=2 i n=3 .Predpostavimo da je tvrdjenje tačno za n-1 ,pa dokažimo da je tačno i za n .
Kako je ${}^{k}_{m}\mathcal{J}_n$ telo pravilnog (n-1)-dimenzionog simleksa,to je prema induktivnoj predpostavci

$$v_{n-1}({}^{k}_{m}\mathcal{J}_n) \geqslant \mathcal{M}_{n-1}({}^{k}_{m}\mathcal{J}_n)$$

pa je

$$(1) \qquad v_{n-1}({}^{k}_{m}\mathcal{J}_n) \geqslant \inf \sum_{s=1}^{+\infty} \mathcal{M}_{n-1}({}^{k}_{m}I_s)$$

gde je $\left\{ {}^{k}_{m}I_s \,\middle|\, s=1,2,\dots \right\}$ prekrivač ${}^{k}_{m}\mathcal{J}_n$ intervalima iz $\Pi({}^{k}_{m}0,{}^{k}_{m}x_2,\dots,{}^{k}_{m}x_n)$ .Označimo sa ${}^{k}_{m}I'_s$ skup svih tačaka iz R_n ,čije je rastojanje od $\Pi({}^{k}_{m}0,{}^{k}_{m}x_2,\dots,{}^{k}_{m}x_n)$ manje ili jednako visini simpleks-valjka ${}^{k}_{m}\mathcal{B}_n$,čija ortogonalna projekcija na $\Pi({}^{k}_{m}0,{}^{k}_{m}x_2,\dots,{}^{k}_{m}x_n)$ pripada ${}^{k}_{m}I_s$,i koje se nalaze sa one strane $\Pi({}^{k}_{m}0,{}^{k}_{m}x_2,\dots,{}^{k}_{m}x_n)$ sa koje je i ${}^{k}_{m}\mathcal{B}_n$.
Jasno je sada da su ${}^{k}_{m}I'_s$ intervali u R_n i da je

$$(2) \qquad \mathcal{M}_n({}^{k}_{m}I'_s) = \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{2}\sqrt{n}\cdot m}\mathcal{M}_{n-1}({}^{k}_{m}I_s)$$

Kako je,očigledno, $\left\{ {}^{k}_{m}I'_s \,\middle|\, s=1,2,\dots \right\}$ jedno pokrivanje intervalima skupa ${}^{k}_{m}\mathcal{B}_n$ koji je zatvoren skup u R_n pa postoji $\mathcal{M}_n({}^{k}_{m}\mathcal{B}_n)$,to na osnovu (2) imamo

$$\mathcal{M}_n({}^{k}_{m}\mathcal{B}_n) \leqslant \inf \sum_{s=1}^{+\infty} \mathcal{M}_n({}^{k}_{m}I'_s) = \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{2}\sqrt{n}\cdot m} \inf \sum_{s=1}^{+\infty}\mathcal{M}_{n-1}({}^{k}_{m}I_s)$$

odakle je s obzirom na (1)

$$\mathcal{M}_n({}^k_m\mathcal{B}_n) \leq \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{2}\sqrt{n \cdot m}} v_{n-1}({}^k_m\mathcal{S}_n) \quad .$$

Odavde,na osnovu dela 2^o definicije 4.3. sledi

$$(3) \qquad \mathcal{M}_n({}^k_m\mathcal{B}_n) \leq v_n({}^k_m\mathcal{B}_n) \quad .$$

Označimo sada sa $\underline{T}$ telo simpleksa $\mathcal{S}(0,x_1,\dots,x_n)$.
Na osnovu teoreme 4.2. je

$$T \subseteq \bigcup_{k=0}^{m-1} {}^k_m\mathcal{B}_n$$

pa je

$$(4) \qquad \mathcal{M}_n(T) \leq \sum_{k=0}^{m-1} \mathcal{M}_n({}^k_m\mathcal{B}_n)$$

pošto je T zatvoren skup u R_n pa je $\mathcal{M}_n$-merljiv.
Iz (4) je s obzirom na (3)

$$\mathcal{M}_n(T) \leq \sum_{k=0}^{m-1} v_n({}^k_m\mathcal{B}_n)$$

odakle je

$$\mathcal{M}_n(T) \leq \inf_{m \in N} \sum_{k=0}^{m-1} v_n({}^k_m\mathcal{B}_n)$$

pa je na osnovu dela 3^o definicije 4.3.

$$\mathcal{M}_n(T) \leq v_n(T)$$

odnosno

$$(5) \qquad \mathcal{M}_n(T)\cdot\lambda^n \leq v_n(T)\cdot\lambda^n \qquad (\lambda > 0) \; .$$

Kako je,zbog sličnosti, $\mathcal{M}_n(T)\cdot\lambda^n$ n-dimenziona Lebegova mera tela T_λ pravilnog n-dimenzionog simpleksa ivice λ ,a prema delu 1^o definicije 4.3. $v_n(T)\cdot\lambda^n$ je volus T_λ ,iz (5) sledi da tvrdjenje važi i za $\underline{n}$ .Time je tvrdjenje teoreme pokazano principom matematičke indukcije. □

Na osnovu teoreme 4.4 i teoreme 4.5. imamo

<u>Teorema 4.6</u>: Lebegova n-dimenziona mera tela pravilnog n-dimenzionog simpleksa ivice λ <u>ograničena je odozgo</u> sa

$$\frac{\sqrt{n+1}}{n!(\sqrt{2})^n}\lambda^n \quad . \square$$

II Pravilni beskonačno-dimenzioni simpleks prostora izomorfnog Hilbertovom prostoru

0. Uvod

Ovaj deo rada sadrži generalizacije pojedinih osobina n-dimenzionog slučaja iz prve glave,ali uradjenih nezavisno od njihovog konačno-dimenzionog značenja.Pri tome se ukazuje na vezu izmedju n-dimenzionog i beskonačno-dimenzionog slučaja,kao posledice već dobijenih tvrdjenja.Isto tako,ističu se neke osobine pravilnog beskonačno-dimenzionog simpleksa koje su karakteristične za njega.

Definicija 0.1: Skup $\{x_0,x_1,x_2,\dots\}$ od beskonačno mnogo vektora prostora H' izomorfnog Hilbertovom prostoru H ,nazivamo beskonačno-dimenzioni simpleks i obeležavamo ga sa $\mathcal{S}(x_0,x_1,x_2,\dots)$ ako je sistem x_1-x_0, x_2-x_0 ,... sistem linearno nezavisnih vektora različitih od nule koji generišu prostor H'.Tačke odredjene vektorima $x_0,x_1,x_2,\dots$ zovemo tada temena simpleksa $\mathcal{S}(x_0,x_1,x_2,\dots)$.

Lema 0.1: Neka je (x_{i_k}) $(k=1,2,\dots)$ podniz niza (x_j) $(j=0,1,2,\dots)$ .Ako je skup $\{x_0,x_1,x_2,\dots\}$ beskonačno-dimenzioni simpleks,onda je i skup $\{x_{i_1},x_{i_2},\dots\}$ takodje beskonačno-dimenzioni simpleks.

Dokaz: Ako postoji neko k_0 tako da je $x_{i_{k_0}}=x_0$, onda je tvrdjenje direktna posledica definicije 0.1. Predpostavimo zato da je

$$x_{i_k}\neq x_0 \qquad (k=1,2,\dots) \quad .$$

Kako je

(1) $x_{i_k} - x_{i_1} = (x_{i_k} - x_o) - (x_{i_1} - x_o)$ $(k=2,3,\ldots)$

to je

$$\sum_k \varphi_k(x_{i_k}-x_{i_1}) = \sum_k \varphi_k(x_{i_k}-x_o) + (-\sum_k \varphi_k)(x_{i_1}-x_o)$$

odakle sledi da su vektori $x_{i_2}-x_{i_1}, x_{i_3}-x_{i_1}, \ldots$ linearno nezavisni,pošto su $x_{i_1}-x_o, x_{i_2}-x_o, \ldots$ linearno nezavisni na osnovu definicije 0.1.Dalje,vektori $x_{i_2}-x_{i_1}, x_{i_3}-x_{i_1}, \ldots$ su različiti od nule zbog (1),ako je $\{x_o,x_1,x_2,\ldots\}$ beskonačno-dimenzioni simpleks,pa zato $x_{i_2}-x_{i_1}, x_{i_3}-x_{i_1}, \ldots$ generišu neki prostor H'' izomorfan Hilbertovom prostoru H . □

Definicija 0.2: Ako je $\{x_o,x_1,x_2,\ldots\}$ beskonačno-dimenzioni simpleks i

$$\{x_{i_1},x_{i_2},\ldots\} \subseteq \{x_o,x_1,x_2,\ldots\}$$

konačno ili beskonačno-dimenzioni simpleks,onda kažemo da je $\mathcal{S}(x_{i_1},x_{i_2},\ldots)$ podsimpleks simpleksa $\mathcal{S}(x_o, x_1,x_2,\ldots)$. □

Definicija 0.3: Neka je $\{x_{j_1},x_{j_2},\ldots\}$ konačan ili beskonačan podskup beskonačno-dimenzionog simpleksa $\{x_o,x_1,x_2,\ldots\}$ .Tada skup svih tačaka

$$\Pi(x_{j_1},x_{j_2},\ldots) \stackrel{def}{=} x_{j_1} + \mathcal{L}(x_{j_2}-x_{j_1},\ldots)$$

nazivamo pljosan simpleksa $\mathcal{S}(x_o,x_1,x_2,\ldots)$ koja je odredjena temenima $x_{j_1},x_{j_2},\ldots$,gde smo sa

$\overline{\mathcal{L}}(x_{j_2}-x_{j_1},\dots)$ označili zatvoreni lineal vektora $x_{j_2}-x_{j_1},\dots$. □

Teorema 0.1: Neka je $\mathcal{S}(x_o,x_1,x_2,\dots)$ beskonačno-dimenzioni simpleks i

$$A=\left\{\sum_{n=0}^{+\infty}t_nx_n \;\middle|\; \sum_{n=0}^{+\infty}t_n=1\ ;\ t_o,t_1,t_2,\dots\geqslant 0,\ \sum_{n=0}^{+\infty}t_nx_n \text{ konvergira}\right\}$$

$$B=\left\{\sum_{n=0}^{k}t_{i_k}x_{i_k} \;\middle|\; \sum_{n=0}^{k}t_{i_k}=1\ ;\ t_{i_o},\dots,t_{i_k}\geqslant 0\ ;\ \{x_{i_o},\dots,x_{i_k}\}\subset\{x_o,x_1,x_2,\dots\}\right\}.$$

Tada je

$$\overline{A}=\overline{B}\quad ,$$

gde crta iznad označava zatvaranje skupa.

Dokaz: Neka je $y\in\overline{A}$ .Tada postoji niz (y_j) $(j=1,2,\dots)$ vektora iz A takav da je

$$\lim_{j\to\infty}y_j=y$$

gde je

$$y_j=\sum_{n=0}^{+\infty}{}^{j}t_nx_n\quad ;\ \sum_{n=0}^{+\infty}{}^{j}t_n=1\quad ;\ {}^{j}t_o,{}^{j}t_1,{}^{j}t_2,\dots\geqslant 0\ .$$

Neka je

$$y_j'=\sum_{n=0}^{j-1}{}^{j}t_nx_n+\Big(1-\sum_{n=0}^{j-1}{}^{j}t_n\Big)x_j\quad (j=2,3,\dots)\ .$$

Lako je videti da je $y_j'\in B$ $(j=2,3,\dots)$ .Kako je

$$\|y_j'-y_j\|=\Big\|\Big(1-\sum_{n=0}^{j}{}^{j}t_n\Big)x_j-\sum_{n=j+1}^{+\infty}{}^{j}t_nx_n\Big\|\leqslant$$

$$\leqslant\Big(1-\sum_{n=0}^{j}{}^{j}t_n\Big)\|x_j\|+\Big\|\sum_{n=j+1}^{+\infty}{}^{j}t_nx_n\Big\|$$

i

$$\lim_{j\to\infty} \left(1 - \sum_{n=0}^{j} {}^{j}t_n \right) = 0 \quad ,$$

pošto je $\sum_{n=0}^{+\infty} {}^{j}t_n = 1$, a

$$\lim_{j\to\infty} \left\| \sum_{n=j+1}^{+\infty} {}^{j}t_n x_n \right\| = 0$$

jer je $\sum_{n=0}^{+\infty} {}^{j}t_n x_n = y_j$,pa je

$$\lim_{j\to\infty} \left\| y_j' - y_j \right\| = 0 \ .$$

Odavde,s obzirom da je

$$y_j' = y_j + (y_j' - y_j)$$

sledi

$$\lim_{j\to\infty} y_j' = \lim_{j\to\infty} y_j = y$$

pa je prema tome $y \in \overline{B}$ .Dakle $\overline{A} \subseteq \overline{B}$.

Neka je sada $z \in \overline{B}$ .Tada postoji niz (z_j) $(j=1,2,\ldots)$ vektora iz B takvih da je

$$\lim_{j\to\infty} z_j = z \quad ,$$

gde je

$$z_j = \sum_{n=0}^{k_j} {}^{j}p_n {}^{j}x_n \quad ; \quad \sum_{n=0}^{k_j} {}^{j}p_n = 1 \ ; \ {}^{j}p_o,\ldots,{}^{j}p_{k_j} \geqslant 0 \ ;$$

$\left\{ {}^{j}x_o,\ldots,{}^{j}x_{k_j} \right\} \subset \left\{ x_o,x_1,x_2,\ldots \right\}$. Stavimo

$$z_j' = \sum_{n=0}^{+\infty} {}^{j}p_n' x_n$$

gde je

$$ {}^{j}p_n' = \begin{cases} {}^{j}p_i \ , & x_n = {}^{j}x_i \\ 0 \ , & x_n \notin \left\{ {}^{j}x_o,\ldots,{}^{j}x_{k_j} \right\} \end{cases}$$

Jasno je da je $z'_j \in A$ $(j=1,2,\ldots)$. Kako je $z'_j = z_j$, to znači da je

$$\lim_{j\to\infty} z'_j = \lim_{j\to\infty} z_j = z$$

pa je $z \in \overline{A}$. Dakle važi i $\overline{B} \subseteq \overline{A}$, čime je teorema u potpunosti dokazana. □

<u>Definicija 0.4</u>: Neka je $\mathcal{S}(x_o,x_1,x_2,\ldots)$ beskonačno-dimenzioni simpleks i

$$A = \left\{ \sum_{n=0}^{+\infty} t_n x_n \;\middle|\; \sum_{n=0}^{+\infty} t_n = 1 \;;\; t_o,t_1,t_2,\ldots \geqslant 0 \;;\; \sum_{n=0}^{+\infty} t_n x_n \text{ konvergira} \right\}.$$

Tada skup svih tačaka odredjenih vektorima skupa $\overline{A}$, zovemo telo simpleksa $\mathcal{S}(x_o,x_1,x_2,\ldots)$. □

Kao neposrednu posledicu ove definicije, leme 0.1. i teoreme 0.1. imamo

<u>Lema 0.2</u>: Telo podsimpleksa nekog beskonačno-dimenzionog simpleksa je podskup tela tog beskonačno-dimenzionog simpleksa. □

<u>Definicija 0.5</u>: Pod pravilnim beskonačno-dimenzionim simpleksom ivice λ $(\lambda > 0)$ podrazumevamo beskonačno-dimenzioni simpleks $\mathcal{S}(x_o,x_1,x_2,\ldots)$ koji zadovoljava uslov

$$\|x_i - x_j\| = \lambda \qquad (\, i > j \;;\; i=1,2,\ldots \;;\; j=0,1,2,\ldots) \,. \square$$

U daljem tekstu ove glave bavićemo se isključivo pravilnim simpleksom, i to tako što ćemo radi jednostavnosti, rezultate izvoditi samo za simpleks $\mathcal{S}(0,x_1,x_2,\ldots)$. Pri tome ćemo dokaze izvoditi samo za slučaj simpleksa ivice 1, a zaključke za simpleks ivice λ, kad god je to potrebno, izvoditi na osnovu sličnosti, ako je to moguće.

Pokažimo,na kraju,u vidu leme rezultat koji ćemo dalje vrlo često upotrebljavati.

Lema 0.3: Ako je $\mathcal{S}(0,x_1,x_2,\ldots)$ pravilan beskonačno-dimenzioni simpleks ivice 1 ,onda je

$$\langle x_i,x_j\rangle = \frac{1}{2} \quad (i \neq j).$$

Dokaz: Dokazuje se isto kao lema 0.3.(I) .□

1. Karakteristični ortonormirani sistem

Kao i u tački 1. predhodne glave,uvešćemo ortonormirani sistem Hilbertovog prostora u kome je definisan beskonačno-dimenzioni simpleks ivice 1 $\mathcal{S}(0,x_1,x_2,\ldots)$, polazeći od sistema $x_1,x_2,\ldots$ i oslanjajući se na rezultate iz glave I kad god je to moguće.

Teorema 1.1: Postoji ortonormirani sistem $e_1,e_2,\ldots$ Hilbertovog prostora u kome je definisan pravilni beskonačno-dimenzioni simpleks ivice 1 $\mathcal{S}(0,x_1,x_2,\ldots)$,takav da su ispunjene relacije

$$(1)\quad \begin{cases} x_1 = \delta_1 e_1 \\ x_2 = \gamma_1 e_1 + \delta_2 e_2 \\ \quad\vdots \\ x_n = \gamma_1 e_1 + \gamma_2 e_2 + \ldots + \gamma_{n-1} e_{n-1} + \delta_n e_n \\ \quad\vdots \end{cases}$$

gde su $\gamma_1, \gamma_2,\ldots$ i $\delta_1, \delta_2,\ldots$ realni brojevi.

Dokaz: Ortonormirani sistem $e_1,e_2,\ldots$ formirajmo na sledeći način:

Neka je $e_1=x_1$ .Vektor e_2 odredjujemo iz uslova da je $e_2 \perp e_1$ i $e_2 \in \mathcal{L}(x_1,x_2)$ što znači da postoje koeficijenti α_{11}, α_{21} i α_{22} takvi da je

$$x_1 = \alpha_{11} e_1 \qquad (\alpha_{11} = 1)$$

$$x_2 = \alpha_{21} e_1 + \alpha_{22} e_2$$

itd.,kao u dokazu teoreme 1.1.(I) ,pri čemu postupak neograničeno produžujemo.Na taj način dobijamo sistem

$$(2)\begin{cases} x_1 = \alpha_{11} e_1 \\ x_2 = \alpha_{21} e_1 + \alpha_{22} e_2 \\ \vdots \\ x_n = \alpha_{n1} e_1 + \alpha_{n2} e_2 + \ldots + \alpha_{nn} e_n \\ \vdots \end{cases}$$

Dokaz će biti završen,ako pokažemo da postoji niz brojeva $\gamma_1, \gamma_2, \ldots$ i niz brojeva $\delta_1, \delta_2, \ldots$,takvi da proizvoljna jednačina sistema (1) ima traženi oblik.Dakle pokažimo matematičkom indukcijom po $\underline{n}$ da važi

$$(3) \ (\alpha_{n1} = \gamma_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_{n\ n-1} = \gamma_{n-1} \wedge \alpha_{nn} = \delta_n \ )$$

$$(n=1,2,\ldots)$$

gde su γ_n i δ_n $(n=1,2,\ldots)$ brojno jednaki onima koji se javljaju u iskazu teoreme 1.2.(I).Zaista,(3) očigledno važi za $n=1$ .Predpostavimo da je (3) tačno za sve $k \leq n$ .Kako na osnovu teoreme 1.1.(I) i teoreme 1.2. (I) zaključujemo da se koeficijenti δ_k $(1 \leq k \leq n)$ i γ_k $(1 \leq k \leq n-1)$ neće promeniti ako skupu vektora $x_1, \ldots, x_n$ dodamo vektor x_{n+1} i da će (3) važiti i za $k=n+1$, to znači da (3) važi za sve $k \leq n+1$ .Prema tome (3) je tačno za svako $\underline{n}$ .Sada smenom koeficijenata u (2) na osnovu (3) dobijamo (1).$\square$

Dokazujući predhodnu teoremu,uzgred smo pokazali da važi

Teorema 1.2: Za koeficijente γ_k i δ_k $(k \geq 1)$ iz iskaza predhodne teoreme, važi da je

$$\gamma_k = \pm \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{k}\sqrt{k+1}} \quad , \quad \delta_k = \pm \frac{\sqrt{k+1}}{\sqrt{2}\sqrt{k}}$$

gde se γ_k i δ_k uzimaju uvek istog znaka. □

2. Težište, centar i poluprečnik opisane sfere

Definicija 2.1: Kažemo da beskonačno-dimenzioni simpleks $\mathcal{S}(x_0, x_1, x_2, \dots)$ ima težište, ako postoji

$$y = \lim_{n\to\infty} \frac{x_{j_1(n)} + \dots + x_{j_n(n)}}{n} ,$$

gde $\{x_{j_1(n)}, \dots, x_{j_n(n)}\} \subset \{x_0, x_1, x_2, \dots\}$ ima tačno n elemenata. Pri tome tačku odredjenu vektorom y zovemo težište simpleksa $\mathcal{S}(x_0, x_1, x_2, \dots)$. □

Teorema 2.1: Tačka S odredjena vektorom

$$x_0 = \sum_{n=1}^{+\infty} \gamma_n e_n$$

je podjednako udaljena od svih temena pravilnog beskonačno-dimenzionog simpleksa ivice 1 $\mathcal{S}(0, x_1, x_2, \dots)$.

Dokaz: Pre svega, vektor x_0 postoji, jer je

$$\| x_0 \|^2 = \sum_{n=1}^{+\infty} \gamma_n^2 = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2n(n+1)} = \frac{1}{2} \quad , \text{ pa je}$$

$$(1) \qquad \| x_0 \| = \frac{1}{\sqrt{2}} < +\infty$$

Dalje je

$$\| x_0 - x_n \|^2 = \left\| \sum_{k=1}^{+\infty} \gamma_k e_k - \gamma_1 e_1 - \dots - \gamma_{n-1} e_{n-1} - \delta_n e_n \right\|^2 =$$

$$= (\gamma_n - (n+1)\gamma_n)^2 + \frac{1}{2} - \sum_{k=1}^{n} \gamma_k^2 = \frac{n}{2(n+1)} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) ,$$

odakle je

$$\| x_o - x_n \| = \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad (n \geq 1) \quad ,$$

pa s obzirom na (1), imamo

$$(2) \quad \frac{1}{\sqrt{2}} = \| x_o - 0 \| = \| x_o - x_1 \| = \| x_o - x_2 \| = \ldots$$

čime je dokazana teorema. □

Teorema 2.2: Tačka S iz iskaza teoreme 2.1. je jedinstvena.

Dokaz: Predpostavimo da postoji neka druga tačka S' različita od S ,koja ima osobinu da je podjednako udaljena od temena tog istog beskonačno-dimenzionog simpleksa.Neka je S' odredjena vektorom

$$x_o' = \sum_{n=1}^{+\infty} \gamma_n' e_n \quad .$$

Kako je

$$(1) \quad \| x_n' - x_n \|^2 = \| x_o' - x_o \|^2 + 2 \langle x_o' - x_o , x_o - x_n \rangle + \\ + \| x_o - x_n \|^2 \quad (n \geq 1) \ ,$$

i pošto su $\| x_o' - x_n \|^2$ i $\| x_o - x_n \|^2$ konstante nezavisne od n po predpostavci,a $\| x_o' - x_o \|^2$,očigledno,konstanta takodje nezavisna od n ,to mora biti

$$\langle x_o' - x_o \ , \ x_o - x_n \rangle$$

konstanta isto tako nezavisna od n .No,imamo

$$(2) \quad \langle x_o' - x_o \ , \ x_o - x_n \rangle = \langle \sum_{k=1}^{+\infty} (\gamma_k' - \gamma_k) e_k \ , \\ , (\gamma_n - \delta_n) e_n + \sum_{k=n+1}^{+\infty} \gamma_k e_k \rangle = - \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2}\sqrt{n+1}} (\gamma_n' - \gamma_n) + \\ + \sum_{k=n+1}^{+\infty} (\gamma_k' - \gamma_k) \cdot \gamma_k \quad .$$

Kako vektor $x_o' - x_o$ postoji,to konvergira red

$$\sum_{k=1}^{+\infty}(\gamma_k' - \gamma_k)^2 = \|x_0' - x_0\|^2$$,pa otuda sledi

(3) $$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2}\sqrt{n+1}}(\gamma_n' - \gamma_n) = \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot 0 = 0 \; .$$

Sa druge strane,pošto vektori x_0' i x_0 postoje,konvergira red $\sum_{k=1}^{+\infty}(\gamma_k' - \gamma_k)\cdot\gamma_k = \langle x_0' - x_0 \, , \, x_0\rangle$,

što znači da mu ostatak teži nuli,odnosno

(4) $$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=n+1}^{+\infty}(\gamma_k' - \gamma_k)\cdot\gamma_k = 0 \; .$$

Ako u relaciji (2) pustimo sada da $\underline{n}$ teži beskonačnosti,imaćemo s obzirom na (3) i (4)

(5) $$\lim_{n\to\infty}\langle x_0' - x_0 \, , \, x_0 - x_n\rangle = 0 \; .$$

No,kako je $\langle x_0' - x_0, x_0 - x_n\rangle$ konstanta u odnosu na $\underline{n}$, dobijamo iz (5)

(6) $$\langle x_0' - x_0 \, , \, x_0 - x_n\rangle = 0 \qquad (n\geq 1) \; .$$

Dalje,s obzirom na predpostavku,možemo staviti

$\|x_0' - x_n\|^2 = a \quad (n\geq 1)$, $\|x_0' - x_0\|^2 = b$ i

$\|x_0 - x_n\|^2 = c \quad (n\geq 1)$,gde su $\underline{a}$,$\underline{b}$ i $\underline{c}$ konstante.

Na osnovu (6) iz (1) sledi

(7) $$a = b + c \; .$$

Kako je,po predpostavci,sada

$$\|x_0'\| = \|x_0' - 0\| = \|x_0' - x_1\| = a$$

i

$$\|x_0\| = \|x_0 - 0\| = \|x_0 - x_1\| = c \quad ,$$

to imamo iz

$$\|x_0'\|^2 = \|x_0' - x_0\|^2 + \|x_0\|^2 + 2\langle x_0' - x_0, x_0\rangle$$

$$a = b + c + 2\langle x_0' - x_0 \, , \, x_0 \rangle$$

odakle,s obzirom na (7),dobijamo

$$\langle x_0' - x_0 \, , \, x_0 \rangle = 0 \quad . \tag{8}$$

Pošto sistem vektora $x_1, x_2, \dots$,prema definiciji simpleksa $\mathcal{S}(0, x_1, x_2, \dots)$,generiše neki Hilbertov prostor H ,to znači da i sistem vektora $x_0, x_0 - x_1, x_0 - x_2, \dots$ takodje generiše H .Medjutim,iz (6) i (8) sledi da je $x_0' - x_0$ ortogonalan na sistem $x_0, x_0 - x_1, x_0 - x_2, \dots$, pa dakle mora biti

$$x_0' - x_0 = 0 \quad ,$$

odnosno $x_0' = x_0$ .Time dolazimo u kontradikciju sa predpostavkom da je $S' = S$ .Prema tome,ta predpostavka nije tačna,pa teorema važi.$\square$

Neposredna posledica teoreme 2.1. i teoreme 2.2. je

Teorema 2.3: Tačka S je centar jedine opisane sfere pravilnog beskonačno-dimenzionog simpleksa ivice 1 $\mathcal{S}(0, x_1, x_2, \dots)$,čiji je poluprečnik $\mathcal{R} = \frac{1}{\sqrt{2}}$.$\square$

Primedba 2.1: Važi

$$\lim_{n \to \infty} \mathcal{R}_n = \lim_{n \to \infty} \sqrt{\frac{n}{2(n+1)}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \mathcal{R}$$

gde je $\mathcal{R}_n$ poluprečnik opisane sfere pravilnog n-dimenzionog simpleksa ivice 1 (Videti teoremu 2.2.(I)).

Teorema 2.4: Tačka S je podjednako udaljena od težišta svakog od n-dimenzionih podsimpleksa,za fiksirano n , i to rastojanje iznosi $\frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{n+1}}$.

Dokaz: Iz same definicije pravilnog beskonačno-dimenzionog simpleksa,sledi da je i svaki njegov n-dimenzioni podsimpleks pravilan n-dimenzioni simpleks ivice 1 .

Dakle, uzmimo proizvoljni n-dimenzioni podsimpleks $\mathcal{S}(x_{j_1(n+1)},\dots,x_{j_{n+1}(n+1)})$ simpleksa $\mathcal{S}(0,x_1,x_2,\dots)$.

Poredjajmo, zatim, vektore $0,x_1,x_2,\dots$ u drugi niz

(1) $\qquad 0',x_1',x_2',\dots$

gde je $0' = x_{j_1(n+1)}$, ..., $x_n' = x_{j_{n+1}(n+1)}$, a preostale vektore iz niza $0,x_1,x_2,\dots$ redjajmo onim redom koji su imali u nizu $0,x_1,x_2,\dots$. Kako je S, prema teoremi 2.2. jedinstvena tačka u prostoru H koja je podjednako udaljena od svih temena simpleksa $\mathcal{S}(0,x_1,x_2,\dots)$, jasno je da će S zadržati isti položaj u prostoru H, bez obzira na to kako mi poredjamo vektore $0,x_1,x_2,\dots$.

Isto tako i vektor

$$x_o' = \sum_{k=1}^{+\infty} \gamma_k e_k'$$

ima brojno iste koeficijente γ_k u odnosu na novi karakteristični ortonormirani sistem $e_1',e_2',\dots$ dobijen iz (1). Kako je, dalje, prema teoremi 2.1.(I) težište S_n' simpleksa $\mathcal{S}(0',x_1',\dots,x_n')$ odredjeno vektorom

$$x_{on}' = \gamma_1 e_1' + \dots + \gamma_n e_n' \quad ,$$

to je rastojanje izmedju tačke S i težišta S_n' simpleksa $\mathcal{S}(x_{j_1(n+1)},\dots,x_{j_{n+1}(n+1)})$ dato izrazom

$$\| x_o' - x_{on}' \| = \left\| \sum_{k=1}^{+\infty} \gamma_k e_k' - \gamma_1 e_1' - \dots - \gamma_n e_n' \right\| = \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)} = \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{n+1}}$$

i ne zavisi od toga koji n-dimenzioni podsimpleks posmatramo. □

<u>Teorema 2.5</u>: Težište pravilnog beskonačno-dimenzionog simpleksa ivice 1 $\mathcal{S}(0,x_1,x_2,\dots)$ je tačka S.

Dokaz: Prema definiciji 2.1., S će biti težište, ako je

$$(1) \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{x_{j_1(n+1)} + \dots + x_{j_{n+1}(n+1)}}{n+1} = x_o \quad ,$$

gde je $\mathcal{S}(x_{j_1(n+1)}, \dots, x_{j_{n+1}(n+1)})$ podsimpleks simpleksa $\mathcal{S}(0, x_1, x_2, \dots)$. Kako, prema teoremi 2.4., imamo

$$\left\| \frac{x_{j_1(n+1)} + \dots + x_{j_{n+1}(n+1)}}{n+1} - x_o \right\| = \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{n+1}} \quad ,$$

pošto vektor $\dfrac{x_{j_1(n+1)} + \dots + x_{j_{n+1}(n+1)}}{n+1}$ odredjuje težište podsimpleksa $\mathcal{S}(x_{j_1(n+1)}, \dots, x_{j_{n+1}(n+1)})$, to je

$$\lim_{n\to\infty} \left\| \frac{x_{j_1(n+1)} + \dots + x_{j_{n+1}(n+1)}}{n+1} - x_o \right\| = 0 \quad ,$$

odakle sledi (1).

Primedba 2.2: Iz teoreme 2.4. i teoreme 2.5. proizilazi da je

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S$$

tj. da niz težišta (centara opisanih sfera) pravilnih n-dimenzionih simpleksa ivice 1 konvergira ka težištu (centru opisane sfere) pravilnog beskonačno-dimenzionog simpleksa ivice 1.

3. Upisane sfere

Definicija 3.1: Kažemo da beskonačno-dimenzioni simpleks ima upisanu sferu reda k, ako postoji tačka $S_{k\infty}$ tela simpleksa koja je podjednako udaljena od svih k-dimenzionih pljosni datog simpleksa, i pri čemu rastojanje $r_{k\infty}$ od proizvoljne k-dimenzione pljosni zovemo poluprečnik upisane sfere reda $\underline{k}$.

Ostale vrste upisanih sfera, koje bi dodirivale beskonačno-dimenzione pljosni konačne ili beskonačne kodimenzije, nema smisla definisati, pošto se zbog naredne teoreme sve svode na tačku S . Naime,

<u>Teorema 3.1</u>: Tačka S pripada preseku svih beskonačno-dimenzionih pljosni pravilnog beskonačno-dimenzionog simpleksa ivice 1 $\mathcal{J}(0,x_1,x_2,\dots)$.

<u>Dokaz</u>: Uočimo proizvoljnu beskonačno-dimenzionu pljosan $\Pi(y_1,y_2,\dots)$ simpleksa $\mathcal{J}(0,x_1,x_2,\dots)$. Ne smanjujući opštost, ako $0\in\{y_1,y_2,\dots\}$ predpostavimo da je $y_1=0$. Ako, pak, $0\notin\{y_1,y_2,\dots\}$, poredjajmo vektore $0,x_1,x_2,\dots$ u nov niz $0',x_1',x_2',\dots$, pri čemu je $0'=y_1$, dok preostale vektore iz niza $0,x_1,x_2,\dots$ redjamo onim redom kojim se nalaze u tom nizu. Dakle, ne smanjujući opštost, možemo posmatrati beskonačno-dimenzionu pljosan $\Pi(0,y_2,y_3,\dots)$. Kako je S centar opisane sfere simpleksa $\mathcal{J}(0,x_1,x_2,\dots)$, to je S centar opisane sfere i njegovog podsimpleksa $\mathcal{J}(0,y_2,y_3,\dots)$. Samim tim S je težište simpleksa $\mathcal{J}(0,y_2,y_3,\dots)$, pa važi

$$(1)\qquad \lim_{n\to\infty}\frac{y_2+y_3+\dots+y_{n+1}}{n}=x_0$$

Pošto je, prema definiciji pljosni,

$$\Pi(0,y_2,y_3,\dots)=0+\overline{\mathcal{L}}(y_2-0,y_3-0,\dots)=$$
$$=\overline{\mathcal{L}}(y_2,y_3,\dots)$$

to iz (1) sledi da je $x_0\in\Pi(0,y_2,y_3,\dots)$, čime je teorema dokazana. $\square$

<u>Teorema 3.2</u>: Tačka S je centar upisane sfere reda $\underline{k}$, a $r_{k\infty}=\dfrac{1}{\sqrt{2}\sqrt{k+1}}$.

Dokaz: Uzmimo proizvoljni k-dimenzioni podsimpleks $\mathcal{S}(x_{j_1},\dots,x_{j_{k+1}})$ .Na isti način kao u dokazu teoreme 2.4. ,formirajmo ortonormirani sistem $e_1',e_2',\dots$ .Neka je x_o' vektor koji odredjuje težište simpleksa $\mathcal{S}(x_{j_1},\dots,x_{j_{k+1}})$ .Tada je

$$x_o' = \sum_{n=1}^{k} \gamma_n e_n'$$

i

$$x_o' \in \Pi(x_{j_1},\dots,x_{j_{k+1}})$$,zbog teoreme 2.1.(I).

Kako je

$$x_o - x_o' = \sum_{n=1}^{+\infty} \gamma_n e_n' - \sum_{n=1}^{k} \gamma_n e_n' = \sum_{n=k+1}^{+\infty} \gamma_n e_n' ,$$

to znači da je vektor $x_o - x_o'$ ortogonalan na $\Pi(x_{j_1},\dots,x_{j_{k+1}})$,s obzirom da je

$$\Pi(x_{j_1},\dots,x_{j_{k+1}}) = \overline{\mathcal{L}}(e_1',\dots,e_k')$$ .Otuda je,

na osnovu teoreme 2.4., $\| x_o - x_o' \| = \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{k+1}}$ rastojanje tačke S od k-dimenzione pljosni $\Pi(x_{j_1},\dots,x_{j_{k+1}})$. □

Primedba 3.1: Važi

$$\lim_{n\to\infty} r_{kn} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{n-k}{2(k+1)(n+1)}} = r_{k\infty} .$$ □

4. Visine i zapremina

Definicija 4.1: Visina beskonačno-dimenzionog simpleksa je duž koja spaja teme sa ortogonalnom projekcijom tog temena na naspramnu beskonačno-dimenzionu pljosan kodimenzije 1 .

Teorema 4.1: Sve visine pravilnog beskonačno-dimenzionog simpleksa ivice 1 $\mathcal{S}(0,x_1,x_2,\ldots)$ su jednake dužine $\frac{1}{\sqrt{2}}$ i seku se u tački S ,ortocentru simpleksa,koji je njihovo podnožje.

Dokaz: Ne smanjujući opštost,možemo posmatrati visinu koja odgovara temenu x_1 .

Na osnovu leme 0.3. je

$$(1) \qquad \langle x_1 , x_n \rangle = \frac{1}{2} \quad (n \geq 2) .$$

Kako je S centar opisane sfere,imamo

$$\| x_o - x_n \|^2 = \frac{1}{2} \quad (n \geq 2) ,$$

odakle,s obzirom da je

$$\| x_o \|^2 = \frac{1}{2}$$

dobijamo

$$(2) \qquad \langle x_o , x_n \rangle = \frac{1}{2} \quad (n \geq 2) .$$

Sada iz (1) i (2) sledi

$$\langle x_1 - x_o , x_n \rangle = \langle x_1 , x_n \rangle - \langle x_o , x_n \rangle = 0 \quad (n \geq 2) ,$$

pa pošto $x_2,x_3,\ldots$ generišu pljosan $\Pi(0,x_2,x_3,\ldots)$, to znači da je vektor $x_1 - x_o$ na nju ortogonalan. Kako iz teoreme 3.1. imamo da S pripada pljosni $\Pi(0,x_2,x_3,\ldots)$,to je S podnožje visine koja odgovara temenu x_1 ,a dužina visine je

$$\| x_1 - x_o \| = \frac{1}{\sqrt{2}} .$$

Analogno se pokazuje za ostala temena simpleksa. S obzirom da je,dakle,tačka S zajednička svim visinama, S je ortocentar. □

Primedba 4.1: Imamo

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{2}\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

gde je $\frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{2}\sqrt{n}}$ dužina visine pravilnog n-dimenzionog simpleksa ivice 1 (videti teoremu 4.1.(I)) a $\frac{1}{\sqrt{2}}$

dužina visine pravilnog beskonačno-dimenzionog simpleksa ivice 1 .Isto tako,tačka S_n ,ortocentar pravilnog n-dimenzionog simpleksa,deli visinu u odnosu n:1 (videti teoremu 4.1.(I)) tj. S_n je <u>n</u> puta bliže podnožju nego temenu,a tačka S ,ortocentar pravilnog beskonačno-dimenzionog simpleksa je podnožje visine. □

Za odredjivanje zapremine pravilnog beskonačno-dimenzionog simpleksa ivice λ ,iskoristićemo prirodnu generalizaciju pojma "volus" iz glave I na beskonačno-dimenzioni slučaj,ali definišući ga posebno za Hilbetrov prostor.Dakle,imamo prvo lemu

<u>Lema 4.1</u>: Neka je $\mathcal{S}(0,x_1,x_2,\dots)$ pravilan beskonačno-dimenzioni simpleks ivice 1 .Tada je $\mathcal{S}({}^k_m0,{}^k_mx_1,{}^k_mx_2,\dots)$, gde je

$$ {}^k_m0 = 0 + \frac{x_1 - 0}{m}\cdot k $$

$$ {}^k_mx_i = x_i + \frac{x_1 - x_i}{m}\cdot k \qquad (i=1,2,\dots) $$

($m,k\in N$; $m>k$) ,takodje pravilan beskonačno-dimenzioni simpleks ivice $\frac{m-k}{m}$.

<u>Dokaz</u>: Lema se dokazuje na isti način kao lema 4.2.(I) .

<u>Definicija 4.2</u>: Skup $\mathcal{B}\subset H$ nazivamo beskonačno-dimenzioni simpleks-valjak visine <u>h</u> i bazisa $\mathcal{S}$,ako se sastoji samo iz tačaka koje pripadaju dužima dužine h , ortogonalnim na pravilan beskonačno-dimenzioni simpleks $\mathcal{S}$ potprostora kodimenzije 1 ,koje se nalaze sa iste strane $\mathcal{S}$ i čiji jedan kraj pripada telu $\mathcal{S}$. □

<u>Teorema 4.2</u>: Neka je ${}^k_mx_0$ težište simpleksa $\mathcal{S}({}^k_m0,{}^k_mx_2,{}^k_mx_3,\dots)$ a ${}^k_m\mathcal{B}$ beskonačno-dimenzioni simpleks-valjak čiji je bazis simpleks $\mathcal{S}({}^k_m0,{}^k_mx_2,{}^k_mx_3,\dots)$

a visina $\frac{1}{\sqrt{2}\,m}$ i pri tome je ${}^{k}_{m}\mathcal{B}$ sa one strane baziza sa koje je ${}^{k+1}_{m}x_0$ .Tada je skup

$$\left\{ {}^{k}_{m}\mathcal{B} \;\middle|\; k=0,1,\dots,m-1 \right\}$$

prekrivač tela pravilnog beskonačno-dimenzionog simpleksa ivice 1 $\mathcal{J}(0,x_1,x_2,\dots)$.

Dokaz: Kako je,prema definiciji težišta,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{{}^{k}_{m}x_1+\dots+{}^{k}_{m}x_n}{n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{x_1+\dots+x_n}{n} + \frac{x_1 - \frac{x_1+\dots+x_n}{n}}{m}k \right) ,$$

a pošto je prema teoremi 2.5.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_1+\dots+x_n}{n} = x_0 \quad ,$$

to je

$${}^{k}_{m}x_0 = x_0 + \frac{x_1 - x_0}{m}k \quad .$$

Zato je

(1) $${}^{k+1}_{m}x_0 - {}^{k}_{m}x_0 = \frac{x_1 - x_0}{m}$$

i

(2) $$\left\| {}^{k+1}_{m}x_0 - {}^{k}_{m}x_0 \right\| = \frac{1}{m} \left\| x_1 - x_0 \right\| = \frac{1}{\sqrt{2}\,m}$$

jer je prema teoremi 4.1. $x_1 - x_0$ ortogonalan na pljosan $\Pi(0,x_2,x_3,\dots)$ i $\|x_1 - x_0\| = \frac{1}{\sqrt{2}}$ .Dalje je

$${}^{k}_{m}x_1 = x_1 + \frac{x_1 - x_1}{m}k = x_1$$

pa na osnovu leme 4.1. i teoreme 4.1. sledi da je $x_1 - {}^{k}_{m}x_0$ ortogonalno na pljosan $\Pi({}^{k}_{m}0,{}^{k}_{m}x_2,{}^{k}_{m}x_3,\dots)$. Otuda,s obzirom na (1),imamo da sve tačke ${}^{k}_{m}x_0$ pripadaju duži čiji su krajevi tačke x_1 i x_0 .Isto tako imamo dalje da je ${}^{k+1}_{m}x_0 - {}^{k}_{m}x_0$ ortogonalan na pljosan

$\Pi({}^k_m0, {}^k_m x_2, {}^k_m x_3, \dots)$,pa s obzirom na (2) ,tačka ${}^{k+1}_{m}x_o$ $(k=0,1,\dots,m-1)$ pripada ${}^k_m\mathcal{B}$ .Samim tim i tačka $x_1 = {}^m_m x_o$ pripada ${}^{m-1}_{m}\mathcal{B}$ .Neka je sada

$$y = t_1x_1 + t_2x_2 + \dots \quad (t_1 + t_2 + \dots \leq 1 \ ; \quad t_1, t_2, \dots \geq 0)$$

proizvoljna tačka tela simpleksa $\mathcal{J}(0, x_1, x_2, \dots)$ .Kako je onda

$$y_n = t_1x_1 + \dots + t_nx_n \quad (n=2,3,\dots)$$

tačka tela pravilnog n-dimenzionog simpleksa $\mathcal{J}(0, x_1, \dots, x_n)$,to shodno dokazu teoreme 4.2.(I) ,postoji za svako m $(m>0)$ neko k $(k=0,\dots,m-1)$ i tačka

$${}^k_m z_n = s_o' \cdot {}^k_m 0 + s_2' \cdot {}^k_m x_2 + \dots + s_n' \cdot {}^k_m x_n$$

koja pripada telu pravilnog (n-1)-dimenzionog simpleksa ivice $\frac{m-k}{m}$ $\mathcal{J}({}^k_m0, {}^k_m x_2, \dots, {}^k_m x_n)$,takva da je $y_n - {}^k_m z_n$ ortogonalan na pljosan $\Pi({}^k_m0, {}^k_m x_2, \dots, {}^k_m x_n)$ i

$$\| y_n - {}^k_m z_n \| \leq \frac{\| x_1 - x_o' \|}{m} \tag{3}$$

Pokažimo prvo da je

$$\lim_{n\to\infty} y_n = y \quad . \tag{4}$$

Zaista,kako je

$$y = t_1x_1 + t_2x_2 + t_3x_3 + \dots = (\delta_1 t_1 + \gamma_1(t_2 + t_3 + \dots))e_1 + \\ + (\delta_2 t_2 + \gamma_2(t_3 + t_4 + \dots))e_2 + \dots$$

i

$$\delta_1 t_1 + \gamma_1(t_2 + t_3 + \dots) \leq \delta_1 t_1 + \gamma_1$$
$$\delta_2 t_2 + \gamma_2(t_3 + t_4 + \dots) \leq \delta_2 t_2 + \gamma_2$$
$$\vdots$$

to je $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left[\delta_n t_n + \gamma_n(t_{n+1} + t_{n+2} + \dots)\right]^2 \leq \sum_{n=1}^{+\infty} (\delta_n t_n + \gamma_n)^2 =$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n+1}{2n} \cdot t_n^2 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2n^2} \cdot t_n + \frac{1}{2} \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} t_n^2 + \sum_{n=1}^{+\infty} t_n + \frac{1}{2} \leqslant$$

$$\leqslant 1 + 1 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$$

pa važi

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=n+1}^{+\infty} \left[\delta_i t_i + \gamma_i (t_{i+1} + t_{i+2} + \ldots)\right]^2 = 0 .$$

Sada je

$$\|y - y_n\|^2 = \| t_{n+1} x_{n+1} + t_{n+2} x_{n+2} + \ldots \|^2 =$$

$$= \| (\gamma_1 (t_{n+1} + t_{n+2} + \ldots)) e_1 + \ldots + (\gamma_n (t_{n+1} + t_{n+2} + \ldots)) e_n +$$

$$+ (\delta_{n+1} t_{n+1} + \gamma_{n+1} (t_{n+2} + t_{n+3} + \ldots)) e_{n+1} + \ldots \|^2 =$$

$$= (t_{n+1} + t_{n+2} + \ldots)^2 \sum_{i=1}^{+\infty} \gamma_i^2 + \sum_{i=n+1}^{+\infty} \left[\delta_i t_i + \gamma_i (t_{i+1} + t_{i+2} + \ldots)\right]^2 ,$$

pa je

$$\lim_{n\to\infty} \|y - y_n\|^2 = 0 \cdot \frac{1}{2} + 0 = 0 ,$$

odakle dobijamo (4) .

Neka je dalje

$$\frac{k}{m} z = -(t_1 - \frac{k}{m}) x_o + s_o \cdot \frac{k}{m} 0 + s_2 \cdot \frac{k}{m} x_2 + s_3 \cdot \frac{k}{m} x_3 + \ldots$$

gde je

$$s_o = 1 - s_2 - s_3 - \ldots$$

$$s_2 = \frac{t_2}{1 - \frac{k}{m}} \geqslant 0$$

$$s_3 = \frac{t_3}{1 - \frac{k}{m}} \geqslant 0$$

$$\vdots$$

Kako imamo, zbog predpostavke da $t_1 \in \left[\frac{k}{m} , \frac{k+1}{m}\right]$,

$$s_2 + s_3 + \ldots = \frac{t_2 + t_3 + \ldots}{1 - \frac{k}{m}} \leqslant \frac{1 - t_1}{1 - \frac{k}{m}} \leqslant \frac{1 - \frac{k}{m}}{1 - \frac{k}{m}} = 1 ,$$

to je $s_o \geqslant 0$, pa tačka $s_o \cdot \frac{k}{m} 0 + s_2 \cdot \frac{k}{m} x_2 + s_3 \cdot \frac{k}{m} x_3 + \ldots$

pripada telu pravilnog beskonačno-dimenzionog simpleksa $\mathcal{Y}({}^k_m0, {}^k_m x_2, {}^k_m x_3, \dots)$ i kao takva postoji. Samim tim postoji i tačka ${}^k_m z$. Dokažimo sada da je

$$\lim_{n\to\infty} {}^k_m z_n = {}^k_m z \quad . \tag{5}$$

Zaista,

$$ {}^k_m z - {}^k_m z_n = -(t_1 - \tfrac{k}{m})x_o + (s_o - s_o')\cdot {}^k_m 0 + (s_2 - s_2')\cdot {}^k_m x_2 + $$

$$ + \dots + (s_n - s_n')\cdot {}^k_m x_n + s_{n+1}\cdot {}^k_m x_{n+1} + s_{n+2}\cdot {}^k_m x_{n+2} + \dots = $$

$$ = -(t_1 - \tfrac{k}{m})x_o + (s_o + s_2 + \dots + s_n + \dots)\cdot \frac{x_1}{m}k - (s_o' + s_2' + \dots + s_n')\cdot \frac{x_1}{m}k + $$

$$ + (1 - \tfrac{k}{m})((s_2 - s_2')x_2 + \dots + (s_n - s_n')x_n) + (1 - \tfrac{k}{m})(s_{n+1}x_{n+1} + $$

$$ + s_{n+2}x_{n+2} + \dots) = -(t_1 - \tfrac{k}{m})x_o + 1\cdot \frac{x_1}{m}k - 1\cdot \frac{x_1}{m}k + $$

$$ + (1 - \tfrac{k}{m})\left(\left(\frac{t_2}{1 - \frac{k}{m}} - \frac{t_2 + \frac{t_1 - \frac{k}{m}}{n}}{1 - \frac{k}{m}}\right)x_2 + \dots + \right. $$

$$ \left. + \left(\frac{t_n}{1 - \frac{k}{m}} - \frac{t_n + \frac{t_1 - \frac{k}{m}}{n}}{1 - \frac{k}{m}}\right)x_n\right) + (1 - \tfrac{k}{m})(s_{n+1}x_{n+1} + s_{n+2}x_{n+2} + \dots) $$

odakle je

$$ {}^k_m z - {}^k_m z_n = (t_1 - \tfrac{k}{m})\left(\frac{x_2 + \dots + x_n}{n} - x_o\right) + \tag{6}$$

$$ + (1 - \tfrac{k}{m})(s_{n+1}x_{n+1} + s_{n+2}x_{n+2} + \dots) \; . $$

S obzirom da je prema teoremi 2.5.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_2 + \dots + x_n}{n} = x_o$$

i pošto

$$\lim_{n\to\infty} (s_{n+1}x_{n+1} + s_{n+2}x_{n+2} + \dots) = \lim_{n\to\infty} ((s_2x_2 + s_3x_3 + \dots) - \tag{7}$$

$- (s_2x_2+\ldots+s_nx_n)) = 0$,

jer je $\quad s_2+s_3+\ldots \leq s_0+s_2+s_3+\ldots = 1$; $s_2,s_3,\ldots \geq 0$,

pa se (7) dokazuje za simpleks $\mathcal{J}(0,x_2,x_3,\ldots)$ kao (4) za simpleks $\mathcal{J}(0,x_1,x_2,\ldots)$,to iz (6) imamo

$$\lim_{n\to\infty} ({}^k_m z - {}^k_m z_n) = 0 \quad ,$$

odnosno (5) .

Kako sve tačke ${}^k_m z_n$ pripadaju telu beskonačno-dimenzionog simpleksa $\mathcal{J}({}^k_m 0,{}^k_m x_2,{}^k_m x_3,\ldots)$,to i ${}^k_m z$ pripada tom skupu na osnovu relacije (5) ,s obzirom da je prema definiciji 0.4. ,telo beskonačno-dimenzionog simpleksa zatvaranje skupa.

Dalje, $y_n - {}^k_m z_n$ je ortogonalan na pljosan $\Pi({}^k_m 0,{}^k_m x_2,\ldots,{}^k_m x_n)$, pa je i $y - {}^k_m z_n$ ortogonalan na pljosan $\Pi({}^k_m 0,{}^k_m x_2,\ldots,{}^k_m x_n)$, jer je

$$y = y_n + t_{n+1}x_{n+1} + t_{n+2}x_{n+2} + \ldots \quad .$$

Otuda važi da je za fiksirano $\underline{i}$ $\quad (2 \leq i \leq n)$

$$(8) \qquad \langle y - {}^k_m z_n \, , \, {}^k_m x_i - {}^k_m 0 \rangle = 0 \quad .$$

Ako sada u (8) za fiksirano $\underline{i}$ pustimo da $\underline{n}$ teži beskonačnosti,dobijamo

$$\langle y - {}^k_m z \, , \, {}^k_m x_i - {}^k_m 0 \rangle = 0 \qquad (i \geq 2) \quad ,$$

što znači da je $y - {}^k_m z$ ortogonalan na pljosan $\Pi({}^k_m 0,{}^k_m x_2,{}^k_m x_3,\ldots)$.

Konačno,

$$(y - {}^k_m z) - (y_n - {}^k_m z_n) = (y - y_n) - ({}^k_m z - {}^k_m z_n) \quad ,$$

pa s obzirom na (4) i (5) imamo

$$\lim_{n\to\infty} ((y - {}^k_m z) - (y \; - {}^k_m z_n)) = 0 + 0 = 0 \quad .$$

Odavde je

$$\lim_{n\to\infty} (y_n - \tfrac{k}{m}z_n) = y - \tfrac{k}{m}z$$

odnosno

$$\lim_{n\to\infty} \left\| y_n - \tfrac{k}{m}z_n \right\| = \left\| y - \tfrac{k}{m}z \right\| .$$

Sada je,zbog (3) ,

$$\left\| y - \tfrac{k}{m}z \right\| \leq \frac{\|x_1 - x_0\|}{m} ,$$

pošto je

$$\lim_{n\to\infty} x_0' = \lim_{n\to\infty} \frac{x_2+\ldots+x_n}{n} = x_0 .$$

Dakle,tačka y pripada beskonačno-dimenzionom simpleks-valjku ${}^{k}_{m}\mathcal{B}$ .Ovime je teorema u potpunosti dokazana. $\square$

<u>Definicija 4.3</u>: Svaku funkciju

$$v : \mathcal{P}(H) \to R$$

gde je $\mathcal{P}(H)$ partitivan skup prostora H ,nazivamo <u>volus</u> u odnosu na ortonormirani bazis $e_1, e_2, \ldots$,ako su ispunjeni sledeći uslovi:

1° Postoji konstanta c takva da je slika tela pravilnog beskonačno-dimenzionog simpleksa ivice λ jednaka

$$\lim_{n\to+\infty} c\cdot\lambda^n .$$

2°

$$v({}^{k}_{m}\mathcal{B}) = \frac{1}{\sqrt{2}\cdot m} v({}^{k}_{m}\mathcal{T}) ,$$

gde smo sa ${}^{k}_{m}\mathcal{T}$ označili telo bazisa ${}^{k}_{m}\mathcal{B}$.

3° Slika tela pravilnog beskonačno-dimenzionog simpleksa ivice 1 $\mathcal{T}(0,x_1,x_2,\ldots)$ je

$$\inf_{m\in N} \sum_{k=0}^{m-1} v({}^{k}_{m}\mathcal{B}) . \square$$

<u>Teorema 4.3</u>: Volus tela pravilnog beskonačno-dimenzionog

simpleksa ivice 1 je nula. Pri tome je $c=0$.

Dokaz: Na osnovu leme 4.1. svaki beskonačno-dimenzioni simpleks $\mathcal{T}({}^k_m0, {}^k_mx_2, {}^k_mx_3, \ldots)$ je pravilan i ima ivicu $\frac{m-k}{m}$. Prema delu 1° definicije 4.3. , tada je volus njegovog tela

$$v({}^k_m\mathcal{T}) = \lim_{n\to+\infty} c\left(\frac{m-k}{m}\right)^n = \begin{cases} 0 \ ; & k=1,\ldots,m-1 \\ c \ ; & k=0 \end{cases} .$$

Iz dela 2° definicije 4.3. imamo sada

$$v({}^k_m\mathcal{B}) = \frac{1}{\sqrt{2}\cdot m}\cdot 0 = 0 \quad (k=1,\ldots,m-1)$$

$$v({}^o_m\mathcal{B}) = \frac{1}{\sqrt{2}\cdot m}\cdot c \quad .$$

Kako je

$$\inf_{m\in N} \sum_{k=0}^{m-1} v({}^k_m\mathcal{B}) = \inf_{m\in N} \frac{c}{\sqrt{2}\cdot m} = 0$$

to je na osnovu dela 3° definicije 4.3. volus tela $\mathcal{T}(0,x_1,x_2,\ldots)$ nula. S druge strane, prema delu 1° definicije 4.3. , volus tela $\mathcal{T}(0,x_1,x_2,\ldots)$ je

$$\lim_{n\to\infty} c\cdot 1^n = c \quad ,$$

pa je otuda i $c=0$. $\square$

Neposredna posledica predhodne teoreme i definicije 4.3. je

Teorema 4.4: Volus tela pravilnog beskonačno-dimenzionog simpleksa ivice λ ($\lambda > 0$) je nula. $\square$

Primedba 4.2: Važi

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{n+1}}{n!(\sqrt{2})^n}\cdot\lambda^n = 0 \quad ,$$

gde je $\frac{\sqrt{n+1}}{n!(\sqrt{2})^n}\cdot\lambda^n$ volus tela pravilnog n-dimenzionog simpleksa ivice λ , a $\underline{0}$ volus tela pravilnog beskonačno-dimenzionog simpleksa ivice λ . $\square$

Ako sa $\mathcal{M}$ označimo prirodno produženje Lebegove n-dimenzione mere $\mathcal{M}_n$ sa R^n na Hilbertov prostor H, pri čemu je

$$\mathcal{M}(I) \stackrel{\text{def}}{=} \prod_{r=1}^{+\infty} \lambda_r \qquad (\lambda_1, \lambda_2, \ldots \geqslant 0)$$

gde je

$$I = \{ t_1e_1 + t_2e_2 + \ldots \mid 0 \leqslant t_1 \leqslant \lambda_1 \ ; \ 0 \leqslant t_2 \leqslant \lambda_2 \ ; \ldots \}$$

i $e_1, e_2, \ldots$ ortonormirani bazis prostora H, onda važi:

Teorema 4.5: Neka je T telo pravilnog beskonačno-dimenzionog simpleksa ivice 1 $\mathcal{J}(0, x_1, x_2, \ldots)$. Tada je

$$\mathcal{M}(T) = 0 \ .$$

Dokaz: Neka je $\mathcal{M}(T) = g$. Sada je zbog sličnosti, mera tela pravilnog beskonačno-dimenzionog simpleksa ivice jednaka

$$\text{(1)} \qquad g \prod_{r=1}^{+\infty} \lambda = \begin{cases} 0 \ , & \lambda < 1 \\ g \ , & \lambda = 1 \\ 0 \ , & \lambda > 1 \quad (g = 0) \\ +\infty, & \lambda > 1 \quad (g > 0) \end{cases} .$$

Kako je, očigledno,

$$\mathcal{M}\left(\tfrac{k}{m}\mathcal{B}\right) \leqslant \frac{1}{\sqrt{2} \cdot m} \cdot \mathcal{M}\left(\tfrac{k}{m}\mathcal{J}\right) \ ,$$

to je zbog (1)

$$\text{(2)} \qquad \mathcal{M}\left(\tfrac{k}{m}\mathcal{B}\right) = 0 \qquad (k=1, \ldots, m-1)$$

$$\text{(3)} \qquad \mathcal{M}\left(\tfrac{0}{m}\mathcal{B}\right) \leqslant \frac{g}{\sqrt{2} \cdot m} \ .$$

Kako je prema teoremi 4.2.

$$T \subseteq \bigcup_{k=0}^{m-1} \tfrac{k}{m}\mathcal{B}$$

to je i

$$\mathcal{M}(T) \leqslant \bigcup_{k=0}^{m-1} \mathcal{M}\left(\tfrac{k}{m}\mathcal{B}\right) \ ,$$

pa s obzirom na (2) i (3) imamo

$$\mu(T) \leq \frac{g}{\sqrt{2}\cdot m} \qquad (m=2,3,\dots) \quad ,$$

odnosno

$$g \leq \frac{g}{\sqrt{2}\cdot m} \qquad (m=2,3,\dots) \quad ,$$

odakle sledi $g = 0$. □

Kao direktnu posledicu teoreme 4.5. i relacije (1) iz dokaza te teoreme,dobijamo

Teorema 4.6: Neka je T_λ telo pravilnog beskonačno-dimenzionog simpleksa ivice λ .Tada je

$$\mu(T_\lambda) = 0 \quad . \square$$

Dakle,zapremina tela pravilnog beskonačno-dimenzionog simpleksa ivice λ je nula u odnosu na zapreminu beskonačno-dimenzione kocke iste ivice.Ovaj rezultat u potpunosti odgovara onom dobijenom za konačno-dimenzioni slučaj,pošto na osnovu teoreme 4.6.(I) ,zapremina tela pravilnog n-dimenzionog simpleksa ivice λ teži nuli, kada n teži beskonačnosti.

III Beskonačno-dimenzioni simpleks u Hilbertovom prostoru. Opštiji slučaj.

0. Uvod

U uvodu predhodne glave, već smo definisali najopštiji slučaj beskonačno-dimenzionog simpleksa u Hilbertovom prostoru. U želji da razmatramo opštiji slučaj od pravilnog, ali koji će istovremeno biti pogodan za rad kao geometrisko telo i dozvoljavati da mu se bliže opišu neka osnovna geometriska svojstva, pošli smo od leme:

Lema 0.1: Neka je $e_1, e_2, \ldots$ ortonormirani bazis Hilbertovog prostora H, a

$$x_i = \lambda_i e_i \quad (i=1,2,\ldots) \quad ,$$

gde je $|\lambda_i| = \lambda$. Tada je $\{x_1, x_2, \ldots\}$ pravilni beskonačno-dimenzioni simpleks ivice $\lambda\sqrt{2}$ Hilbertovog potprostora kodimenzije 1 u odnosu na H.

Dokaz: Skup $\{x_1, x_2, \ldots\}$ očigledno zadovoljava uslove definicije 0.1.(II), pa predstavlja beskonačno-dimenzioni simpleks. Kako je za $i \neq j$ $(i,j=1,2,\ldots)$

$$\|x_i - x_j\|^2 = \|\lambda_i e_i - \lambda_j e_j\|^2 = 2\cdot\lambda^2 \quad ,$$

imamo

$$\| x_i - x_j \| = \lambda\cdot\sqrt{2} \quad ,$$

pa su zadovoljeni uslovi definicije 0.5.(II), čime je lema dokazana. $\square$

Sada ćemo oslabiti uslov $|\lambda_i| = \lambda$ $(i=1,2,\ldots)$ u predhodnoj lemi, zamenjujući ga znatno opštijim

$$0 < \alpha \leq |\lambda_i| \leq \beta \qquad (i=1,2,\ldots)$$

i time dobiti željeni model. Dakle,

Definicija 0.1: Neka je $e_1, e_2, \ldots$ ortonormirani bazis Hilbertovog prostora H, i

$$x_i = \lambda_i e_i \qquad (i=1,2,\ldots) \quad ,$$

gde je $0 < \alpha \leq |\lambda_i| \leq \beta$ $(i=1,2,\ldots ; \alpha, \beta > 0$ realne konstante). Tada $\mathcal{J}(x_1, x_2, \ldots)$ zovemo dobar beskonačno-dimenzioni simpleks. □

Napomena: Primetimo odmah da iz leme 0.1. sledi da je svaki pravilan beskonačno-dimenzioni simpleks dobar. Obrnuto, naravno, ne važi. Kako se u daljem tekstu nećemo baviti opštijim slučajem od dobrog, to ćemo u daljem tekstu, radi jednostavnosti, reč dobar izostavljati i pisati samo beskonačno-dimenzioni simpleks. □

Teorema 0.1: Za svaki beskonačno-dimenzioni simpleks $\mathcal{J}(x_1, x_2, \ldots)$ ispunjena je relacija

$$\overline{\mathcal{L}}(x_{n+1} - x_n, x_{n+2} - x_n, \ldots) = \overline{\mathcal{L}}(x_n, x_{n+1}, \ldots)$$
$$(n=2,3,\ldots) .$$

Dokaz: Označimo sa $Y^{\perp}$ skup svih vektora prostora H, koji su ortogonalni na skup Y. Neka je

$$y \in \overline{\mathcal{L}}^{\perp}(x_{n+1} - x_n, x_{n+2} - x_n, \ldots)$$

proizvoljni vektor različit od nule. Važi

$$\langle y , x_i - x_n \rangle = 0 \quad (i=n+1, n+2, \ldots) ,$$

pa je

(1) $$\lambda_i \langle y , e_i \rangle = \lambda_n \langle y , e_n \rangle \quad (i=n+1, n+2, \ldots).$$

Stavimo $\varphi_j = \langle y, e_j \rangle$ $(j=1,2,\ldots)$. Iz (1) sledi

(2) $$\varphi_i = \frac{\lambda_n \cdot \varphi_n}{\lambda_i} \qquad (i=n+1, n+2, \ldots) \quad ,$$

pa s obzirom da je

$$y = \sum_{j=1}^{+\infty} \varphi_j e_j \qquad ,$$

imamo na osnovu (2)

$$\sum_{i=n}^{+\infty} \frac{\lambda_n^2\varphi_n^2}{\lambda_i^2} \leq \|y\|^2 \quad ,$$

odakle je zbog predpostavke o simpleksu

$$\lambda_n^2\varphi_n^2 \sum_{i=n}^{+\infty} \frac{1}{\beta^2} < +\infty \quad .$$

Odavde sledi $\varphi_n = 0$,pa je na osnovu (2)

$$y = \varphi_1 e_1 + \dots + \varphi_{n-1} e_{n-1} \quad .$$

Kako je

$$y = \frac{\varphi_1}{\lambda_1}\cdot\lambda_1 e_1 + \dots + \frac{\varphi_{n-1}}{\lambda_{n-1}}\cdot\lambda_{n-1} e_{n-1} =$$

$$= \frac{\varphi_1}{\lambda_1}\cdot x_1 + \dots + \frac{\varphi_{n-1}}{\lambda_{n-1}}\cdot x_{n-1} \in \mathcal{L}(x_1,\dots,x_{n-1}) \quad ,$$

to je,dakle,

$$\overline{\mathcal{L}}^{\perp}(x_{n+1}-x_n, x_{n+2}-x_n, \dots) \subseteq \mathcal{L}(x_1,\dots,x_{n-1}) \quad .$$

Pošto,očigledno,važi

$$\mathcal{L}(x_1,\dots,x_{n-1}) \subseteq \overline{\mathcal{L}}^{\perp}(x_{n+1}-x_n, x_{n+2}-x_n, \dots) \quad ,$$

imamo

$$\text{(3)} \qquad \overline{\mathcal{L}}^{\perp}(x_{n+1}-x_n, x_{n+2}-x_n, \dots) = \mathcal{L}(x_1,\dots,x_{n-1}) \quad .$$

Kako je jasno da je

$$\overline{\mathcal{L}}^{\perp}(x_n, x_{n+1}, \dots) = \mathcal{L}(x_1,\dots,x_{n-1}) \quad ,$$

to je s obzirom na (3)

$$\overline{\mathcal{L}}^{\perp}(x_{n+1}-x_n, x_{n+2}-x_n, \dots) = \overline{\mathcal{L}}^{\perp}(x_n, x_{n+1}, \dots) \quad ,$$

odnosno

$$\overline{\mathcal{L}}^{\perp\perp}(x_{n+1}-x_n, x_{n+2}-x_n, \dots) = \overline{\mathcal{L}}^{\perp\perp}(x_n, x_{n+1}, \dots) \quad ,$$

odakle sledi tvrdjenje teoreme. □

<u>Teorema 0.2</u>: Za svaki podskup $\{x_{j_1},\dots,x_{j_n}\}$ $(n \geq 2)$

beskonačno-dimenzionog simpleksa $\mathcal{S}(x_1,x_2,\dots)$ važi relacija

$$\overline{\mathcal{L}}(x_i - x_{j_1} \mid i \notin \{j_1,\dots,j_n\}) = \overline{\mathcal{L}}(\{x_{j_1}\} \cup \{x_i \mid i \notin \{j_1,\dots,j_n\}\}) .$$

<u>Dokaz</u>: Niz vektora $x_1,x_2,\dots$ poredjajmo u novi niz $x_1',x_2',\dots$,gde je

$$x_1' = x_{j_2} ,\dots, \quad x_{n-1}' = x_{j_n} , \; x_n' = x_{j_1} \quad ,$$

dok se ostali vektori redjaju onim redosledom koji su imali u nizu $x_1,x_2,\dots$ .Primenom teoreme 0.1. na simpleks $\mathcal{S}(x_1',x_2',\dots)$ imamo tvrdjenje. □

<u>Teorema 0.3</u>: Neka je $\{x_{j_1},x_{j_2},\dots\}$ beskonačan podskup beskonačno-dimenzionog simpleksa $\mathcal{S}(x_1,x_2,\dots)$, takav da je

$$\{x_1,x_2,\dots\} \setminus \{x_{j_1},x_{j_2},\dots\}$$

beskonačan skup.Tada je

$$\overline{\mathcal{L}}(x_{j_2} - x_{j_1}, x_{j_3} - x_{j_1},\dots) = \overline{\mathcal{L}}(x_{j_1},x_{j_2},\dots) .$$

<u>Dokaz</u>: Neka je $y \in \overline{\mathcal{L}}^{\perp}(x_{j_2} - x_{j_1}, x_{j_3} - x_{j_1},\dots)$ i $y = \sum_{i=1}^{+\infty} \varphi_i e_i$ .Kako je

$$\langle y , x_{j_n} - x_{j_1} \rangle = 0 \quad (n=2,3,\dots) ,$$

to je

$$\varphi_{j_n} = \frac{\lambda_{j_1} \cdot \varphi_{j_1}}{\lambda_{j_n}} \qquad (n=2,3,\dots) ,$$

odakle,slično kao u dokazu teoreme 0.1.,dobijamo

$$\varphi_{j_n} = 0 \qquad (n=1,2,\dots)$$

pa je

$$y \in \mathcal{L}(x_i \mid i \notin \{j_1,j_2,\dots\}) .$$

Odavde sledi

$$\overline{\mathcal{L}}^{\perp}(x_{j_2}-x_{j_1},x_{j_3}-x_{j_1},\dots)\subseteq\mathcal{L}(x_i\mid i\notin\{j_1,j_2,\dots\})\ .$$

Pošto je,očigledno,

$$\mathcal{L}(x_i\mid i\notin\{j_1,j_2,\dots\})\subseteq\overline{\mathcal{L}}^{\perp}(x_{j_2}-x_{j_1},x_{j_3}-x_{j_1},\dots)\quad,$$

to je

$$\overline{\mathcal{L}}^{\perp}(x_{j_2}-x_{j_1},x_{j_3}-x_{j_1},\dots)=\mathcal{L}(x_i\mid i\notin\{j_1,j_2,\dots\})\quad,$$

odakle se,na isti način kao u dokazu teoreme 0.1., dobija tvrdjenje teoreme. □

1. Pljosni i težište

Pljosan i težište beskonačno-dimenzionog simpleksa, već su odredjeni definicijom 0.3.(II),odnosno definicijom 2.1.(II) .

Teorema 1.1: Ako je $\{x_{j_1},x_{j_2},\dots\}$ beskonačan podskup beskonačno-dimenzionog simpleksa $\mathcal{S}(x_1,x_2,\dots)$,onda je pljosan $\Pi(x_{j_1},x_{j_2},\dots)$ Hilbertov podprostor prostora H generisan vektorima $x_{j_1},x_{j_2},\dots$.

Dokaz: Ako je skup $D=\{1,2,\dots\}\setminus\{j_1,j_2,\dots\}$ beskonačan,onda je na osnovu teoreme 0.3. ,

$$\overline{\mathcal{L}}(x_{j_2}-x_{j_1},\dots)=\overline{\mathcal{L}}(x_{j_1},x_{j_2},\dots)\ . \tag{1}$$

Ako je,pak,skup D konačan,onda na osnovu teoreme 0.2. imamo za skup $\{j_1\}\cup D=D'$

$$\overline{\mathcal{L}}(\,x_i-x_{j_1}\mid i\in\{1,2,\dots\}\setminus D'\,)=\overline{\mathcal{L}}(\,\{x_{j_1}\}\cup\{x_i\mid i\in\{1,2,\dots\}\setminus D'\,\}\,)\quad,$$

što s obzirom na činjenicu

$$\{1,2,\ldots\} \setminus D' = \{j_2, j_3, \ldots\} \quad ,$$

daje

$$\overline{\mathcal{L}}(x_i - x_{j_1} \mid i \in \{j_2, j_3, \ldots\}) = \overline{\mathcal{L}}(\{x_{j_1}\} \cup \{x_i \mid i \in \{j_2, j_3, \ldots\}) ,$$

odnosno opet relaciju (1) .

Na osnovu (1) je sada

$$\Pi(x_{j_1}, x_{j_2}, \ldots) = x_{j_1} + \overline{\mathcal{L}}(x_{j_1}, x_{j_2}, \ldots) = \overline{\mathcal{L}}(x_{j_1}, x_{j_2}, \ldots) .$$

Ovime je teorema u potpunosti dokazana. □

Teorema 1.2: Ako je skup $\{j_1, j_2, \ldots\} \subseteq N$ konačan, onda je

$$\Pi(x_{j_1}, x_{j_2}, \ldots) = \{ \varphi_{j_1} x_{j_1} + \varphi_{j_2} x_{j_2} + \ldots \mid \varphi_{j_1} + \varphi_{j_2} + \ldots = 1 \} .$$

Dokaz: Neka je j_k poslednji broj u datom nizu. Tada za

$$y \in x_{j_1} + \overline{\mathcal{L}}(x_{j_2} - x_{j_1}, \ldots, x_{j_k} - x_{j_1})$$

postoje realni brojevi $\varphi_{j_2}, \ldots, \varphi_{j_k}$ takvi da je

$$y = x_{j_1} + \varphi_{j_2}(x_{j_2} - x_{j_1}) + \ldots + \varphi_{j_k}(x_{j_k} - x_{j_1}) \quad ,$$

pa je

$$(1)\ y = (1 - \varphi_{j_2} - \ldots - \varphi_{j_k}) x_{j_1} + \varphi_{j_2} x_{j_2} + \ldots + \varphi_{j_k} x_{j_k} \quad .$$

Stavimo sada $\varphi_{j_1} = 1 - \varphi_{j_2} - \ldots - \varphi_{j_k}$. Iz (1) onda sledi teorema. □

Teorema 1.3: Tačka O je težište beskonačno-dimenzionog simpleksa $\mathcal{S}(x_1, x_2, \ldots)$.

Dokaz: Neka je $\{x_{j_1(n)}, \ldots, x_{j_n(n)}\} \subseteq \{x_1, x_2, \ldots\}$.

S obzirom da vektori $x_1, x_2, \ldots$ čine ortogonalan sistem, imamo

$$\left\| \frac{x_{j_1(n)}+\ldots+x_{j_n(n)}}{n} \right\|^2 = \frac{\lambda^2_{j_1(n)}+\ldots+\lambda^2_{j_n(n)}}{n^2} \leq \frac{n\beta^2}{n^2} = \frac{\beta^2}{n} ,$$

odakle sledi

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{j_1(n)}+\ldots+x_{j_n(n)}}{n} = 0 \quad . \square$$

Teorema 1.4: Tačka 0 je težište svakog beskonačno-dimenzionog podsimpleksa simpleksa $\mathcal{S}(x_1,x_2,\ldots)$.

Dokaz: Neka je simpleks $\mathcal{S}(x_{j_1},x_{j_2},\ldots)$ neki beskonačno-dimenzioni podsimpleks simpleksa $\mathcal{S}(x_1,x_2,\ldots)$. Poredjajmo vektore $x_{j_1},x_{j_2},\ldots$ u niz $x_1',x_2',\ldots$ na sledeći način:

$$x_n' \overset{\text{def}}{=\!=} x_{j_n} \qquad (n=1,2,\ldots) \quad .$$

Primenimo na simpleks $\mathcal{S}(x_1',x_2',\ldots)$ teoremu 1.3. Dobijamo tvrdjenje. $\square$

Teorema 1.5: Težište svakog n-dimenzionog podsimpleksa beskonačno-dimenzionog simpleksa $\mathcal{S}(x_1,x_2,\ldots)$,nalazi se unutar sfere čiji je poluprečnik $\frac{\beta}{\sqrt{n+1}}$.

Dokaz: Neka su $x_{j_1},\ldots,x_{j_{n+1}}$ temena proizvoljnog n-dimenzionog podsimpleksa. Tada je njegovo težište odredjeno vektorom

$$\frac{x_{j_1}+\ldots+x_{j_{n+1}}}{n+1} ,$$

pa pošto je

$$\left\| \frac{x_{j_1}+\ldots+x_{j_{n+1}}}{n+1} \right\|^2 \leq \frac{\beta^2}{n+1} ,$$

to sledi teorema. $\square$

2. Visine i volus

Pojam visine beskonačno-dimenzionog simpleksa dat je definicijom 4.1.(II) .

Teorema 2.1: Visina beskonačno-dimenzionog simpleksa $\mathcal{S}(x_1,x_2,\dots)$ koja odgovara temenu x_n $(n\geqslant 1)$ je duž koja spaja x_n sa tačkom 0 .Pri tome je dužina visine $|\lambda_n|$ a podnožje tačka 0 ,ortocentar simpleksa.

Dokaz: Kako je prema teoremi 1.1.

$$\Pi(x_1,\dots,x_{n-1},x_{n+1},\dots) = \mathcal{L}(x_1,\dots,x_{n-1},x_{n+1},\dots) ,$$

to je $x_n - 0 = x_n$ ortogonalan na pljosan $\Pi(x_1,\dots,x_{n-1},x_{n+1},\dots)$,a pošto 0 pripada toj pljosni,jer je ona Hilbertov podprostor,to sledi tvrdjenje teoreme. □

Kako smo u glavama I i II videli da se pojam zapremine,kao Lebegove mere,može dosta uspešno zameniti pojmom volusa,to ćemo i ovde nastaviti sa istom idejom.Pri tome,naravno,definicija volusa za ovaj opštiji slučaj, mora da se poklapa sa rezultatima iz glave II u slučaju da je simpleks pravilan.Dakle,

Definicija 2.1: Svaku funkciju

$$v : \mathcal{P}(H) \rightarrow R \quad ,$$

gde je $\mathcal{P}(H)$ partitivan skup prostora H ,nazivamo volus u odnosu na ortonormirani bazis $e_1,e_2,\dots$,ako su ispunjeni sledeći uslovi:

1° Ako je $\mathcal{S}(x_1,x_2,\dots)$ pravilan beskonačno-dimenzioni simpleks,onda je volus njegovog tela nula.

2° Ako je volus tela nekog beskonačno-dimenzionog podsimpleksa kodimenzije 1 ,simpleksa $\mathcal{S}(x_1,x_2,\dots)$, jednak nuli,onda je i volus tela simpleksa $\mathcal{S}(x_1,x_2,\dots)$ nula.

3° Ako je $\mathcal{S}(x_1,x_2,\dots)$ beskonačno-dimenzioni simpleks koji nije pravilan,onda postoji konstanta $c(x_1,x_2,\dots)$ takva da je volus njegovog tela

$$v(x_1,x_2,\dots) = \lim_{n\to\infty} c(x_1,x_2,\dots) \prod_{j=2}^{n} \prod_{i=1}^{j-1} \|x_i - x_j\| . \square$$

<u>Teorema 2.2</u>: Volus tela beskonačno-dimenzionog simpleksa $\mathcal{S}(x_1,x_2,\dots)$ je nula.

<u>Dokaz</u>: Ako je $c(x_1,x_2,\dots) = 0$ ili je simpleks $\mathcal{S}(x_1,x_2,\dots)$ pravilan,onda nemamo šta da dokazujemo, pošto tada iz dela 3° ,odnosno 1° ,definicije 2.1. sledi tvrdjenje teoreme.Predpostavimo,zato,da je

$$c(x_1,x_2,\dots) \neq 0$$

i da $\mathcal{S}(x_1,x_2,\dots)$ nije pravilan beskonačno-dimenzioni simpleks.

Kako $v(x_1,x_2,\dots)$ mora biti konačan broj,to znači i da beskonačni proizvod

$$M = \prod_{j=2}^{+\infty} \prod_{i=1}^{j-1} \|x_i - x_j\|$$

mora biti konačan broj.

Ako je $M = 0$,opet nemamo šta da dokazujemo,jer iz dela 3° definicije 2.1. sledi onda tvrdjenje teoreme.Predpostavimo,zato,da je $M \neq 0$.

Kako je po definiciji

$$v(x_2,x_3,\dots) = \lim_{n\to\infty} c(x_2,x_3,\dots) \prod_{j=3}^{n} \prod_{i=2}^{j-1} \|x_i - x_j\| ,$$

jer u protivnom, ako je simpleks $\mathcal{S}(x_2,x_3,\dots)$ pravilan, teorema sledi na osnovu dela 1° i 2° definicije 2.1.; to je

$$(1) \qquad v(x_2,x_3,\dots) = \lim_{n\to\infty} c(x_2,x_3,\dots)\frac{\prod_{j=2}^{n}\prod_{i=1}^{j-1}\|x_i - x_j\|}{\|x_1-x_2\|\cdot\|x_1-x_3\|\cdots\|x_1-x_n\|}$$

($\|x_1-x_2\|\cdot\|x_1-x_3\|\dots\|x_1-x_n\| \neq 0$ jer pripada proizvodu M). Ako je $c(x_2,x_3,\dots) = 0$, onda iz (1) sledi

$$(2) \qquad v(x_2,x_3,\dots) = 0 \quad ,$$

pa se, na osnovu dela 2° definicije 2.1., dobija tvrdjenje teoreme. Neka je, zato, $c(x_2,x_3,\dots) \neq 0$. U tom slučaju iz (1), s obzirom da $v(x_2,x_3,\dots)$ mora biti konačan broj i pošto je

$$\lim_{n\to\infty} c(x_2,x_3,\dots)\prod_{j=2}^{n}\prod_{i=1}^{j-1}\|x_i - x_j\| =$$

$$= \frac{c(x_2,x_3,\dots)}{c(x_1,x_2,\dots)}\cdot v(x_1,x_2,\dots)$$

takodje konačan broj, sledi

$$(3) \qquad \lim_{n\to\infty} \|x_1 - x_2\|\cdot\|x_1 - x_3\|\dots\|x_1 - x_n\| = M_1$$

je ili $+\infty$ ili konačan broj različit od nule. Ako je $M_1 = +\infty$, onda iz (1) imamo (2) odakle dobijamo tvrdjenje teoreme. Ako je $M_1 \neq 0$ konačan broj, onda iz (3) sledi da je

$$\lim_{n\to\infty} \|x_1 - x_n\| = 1$$

odnosno

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_n^2} = 1$$

što znači da postoji

$$\lim_{n\to\infty} \lambda_n^2 = K$$

i da je

$$K = 1 - \lambda_1^2 \quad .$$

Na isti način, formirajući relaciju koja je ista kao (1), samo što umesto x_1 uzimamo x_2, dobijamo da je ili

$$v(x_1, x_2, \dots) = 0$$

ili je

$$1 - \lambda_2^2 = K \quad .$$

Itd. Dakle, ako predpostavimo da je

$$v(x_1, x_2, \dots) \neq 0$$

imamo

$$K = 1 - \lambda_1^2 = 1 - \lambda_2^2 = \dots$$

odakle sledi da postoji $\lambda > 0$ tako da je

$$\lambda^2 = \lambda_1^2 = \lambda_2^2 = \dots \quad .$$

Odavde, na osnovu leme 0.1. imamo da je simpleks $\Upsilon(x_1, x_2, \dots)$ pravilan, što je u kontradikciji sa prvobitnom predpostavkom u dokazu. Prema tome, mora biti

$$v(x_1, x_2, \dots) = 0 \quad ,$$

čime je teorema u potpunosti dokazana. $\square$

3. Opisana sfera

Lema 3.1: Ako beskonačno-dimenzioni simpleks $(x_1, x_2, \dots)$ ima opisanu sferu, onda mora postojati

$$\lim_{j \to \infty} \lambda_j^2 = 2\delta$$

i red

$$\sum_{i=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\lambda_i - \frac{\delta}{\lambda_i} \right)^2$$

konvergira.

Dokaz: Neka je $\underline{z}$ vektor kojim je odredjen centar opisane sfere. Tada za bilo koji par prirodnih brojeva $i,j \geq 1$ važi

$$\|x_i - z\|^2 = \|x_j - z\|^2$$

odakle je

$$(1) \qquad \langle x_i , z\rangle - \langle x_j , z\rangle = \frac{1}{2}\lambda_i^2 - \frac{1}{2}\lambda_j^2 \quad .$$

Kako je

$$z = \sum_{j=1}^{+\infty} \langle e_j , z\rangle e_j$$

to zbog $\|z\| < +\infty$ konvergira red $\sum_{j=1}^{+\infty} \langle e_j , z\rangle^2$, pa je

$$\lim_{j\to\infty} \langle e_j , z\rangle = 0 \ .$$

Odavde je zbog $|\lambda_j| \leq \beta$

$$(2) \qquad \lim_{j\to\infty} \langle x_j , z\rangle = \lim_{j\to\infty} \lambda_j \langle e_j , z\rangle = 0 \ .$$

Iz (1) sada imamo

$$\lambda_j^2 = \lambda_i^2 - 2\langle x_i , z\rangle + 2\langle x_j , z\rangle \quad ,$$

pa ako $\underline{i}$ ostavimo konstantnim a $\underline{j}$ pustimo da teži beskonačnosti, dobijamo, s obzirom na (2),

$$(3) \qquad \lim_{j\to\infty} \lambda_j^2 = \lambda_i^2 - 2\langle x_i , z\rangle \quad .$$

Stavimo li $\delta = \frac{1}{2} \lim_{j\to\infty} \lambda_j^2$,

onda iz (3) imamo

$$\langle e_i , z\rangle = \frac{1}{2}\lambda_i - \frac{\delta}{\lambda_i}$$

odakle je

$$\sum_{i=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\lambda_i - \frac{\delta}{\lambda_i}\right)^2 = \|z\|^2 < +\infty \quad . \ \square$$

<u>Lema 3.2</u>: Ako postoji $\lim_{j\to\infty} \lambda_j^2 = 2\delta$ i red

$$\sum_{i=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\lambda_i - \frac{\delta}{\lambda_i}\right)^2$$

konvergira, onda beskonačno-dimenzioni simpleks $\mathcal{S}(x_1,x_2,\dots)$ ima opisanu sferu.

<u>Dokaz</u>: Uočimo vektor

$$z = \sum_{i=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\lambda_i - \frac{\delta}{\lambda_i}\right)e_i \quad .$$

Vektor $\underline{z}$ postoji, jer po predpostavci

$$\|z\|^2 = \sum_{i=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\lambda_i - \frac{\delta}{\lambda_i}\right)^2 < +\infty \quad .$$

Sada je

$$\langle e_i\, ,\, z\rangle = \frac{1}{2}\lambda_i - \frac{\delta}{\lambda_i}$$

pa je

$$\langle x_i\, ,\, z\rangle = \frac{1}{2}\lambda_i^2 - \delta \quad . \tag{1}$$

Isto tako je

$$\langle x_j\, ,\, z\rangle = \frac{1}{2}\lambda_j^2 - \delta \tag{2}$$

pa oduzimanjem (2) od (1) dobijamo

$$\langle x_i\, ,\, z\rangle - \langle x_j\, ,\, z\rangle = \frac{1}{2}\lambda_i^2 - \frac{1}{2}\lambda_j^2 \quad ,$$

odnosno

$$\|x_i - z\|^2 = \|x_j - z\|^2 \quad ,$$

što znači da je za bilo koji par prirodnih brojeva $i,j \geq 1$ ispunjena jednakost

$$\|x_i - z\| = \|x_j - z\| \quad .$$

Odavde zaključujemo da beskonačno-dimenzioni simpleks $\mathcal{S}(x_1,x_2,\dots)$ ima opisanu sferu čiji je centar tačka $\underline{z}$.

<u>Teorema 3.1</u>: Beskonačno-dimenzioni simpleks $\mathcal{S}(x_1,x_2,\dots)$

ima opisanu sferu, ako i samo ako postoji $\lim_{j\to\infty} \lambda_j^2 = 2\delta$

i red

$$\sum_{i=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\lambda_i - \frac{\delta}{\lambda_i} \right)^2 = \Theta$$

konvergira. Pri tome je centar opisane sfere odredjen vektorom

$$z = \sum_{i=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\lambda_i - \frac{\delta}{\lambda_i} \right) e_i \quad ,$$

a poluprečnik

$$\varrho = \sqrt{2\delta + \Theta} \quad .$$

Dokaz: Prvi deo tvrdjenja teoreme je direktna posledica leme 3.1. i leme 3.2. , dok za poluprečnik imamo

$$\varrho = \sqrt{\|x_i - z\|^2} = \sqrt{\|x_i\|^2 + \|z\|^2 - 2\langle x_i , z \rangle} =$$

$$= \sqrt{\lambda_i^2 + \Theta - 2\left(\frac{1}{2}\lambda_i^2 - \delta \right)} = \sqrt{2\delta + \Theta} \quad . \square$$

Lema 3.3: Ako beskonačno-dimenzioni simpleks $\mathcal{S}(x_1, x_2, \ldots)$ ima opisanu sferu, onda za njen poluprečnik ϱ važi relacija

$$\varrho \geq \sqrt{2\delta}$$

sa jednakošću, ako i samo ako važi relacija

(1) $$\lambda_i^2 = \lambda^2 \quad (i=1,2,\ldots) \quad ,$$

gde je $\lambda > 0$ realan broj.

Dokaz: 1° Predpostavimo da relacija (1) ne važi. Tada postoje dva prirodna broja k i m $(k,m \geq 1)$ takva da je $\lambda_k^2 \neq \lambda_m^2$. S obzirom da je $\delta = \frac{1}{2} \lim_{j\to\infty} \lambda_j^2$,

to bar jedan od izraza $\left(\frac{1}{2}\lambda_k - \frac{\delta}{\lambda_k} \right)^2$, $\left(\frac{1}{2}\lambda_m - \frac{\delta}{\lambda_m} \right)^2$

ima da bude različit od nule. Otuda je i $\Theta \neq 0$, pa je na osnovu teoreme 3.1.

$$\varrho = \sqrt{2\delta + \Theta} > \sqrt{2\delta} \quad .$$

2^o Neka važi relacija (1) .Onda je

$$\theta = \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{|\lambda_i|}\left(\frac{1}{2}\lambda_i^2 - \delta\right)^2 = 0 \quad ,$$

zbog čega je
$$\rho = \sqrt{2\delta + \theta} = \sqrt{2\delta} \quad . \square$$

Teorema 3.2: Ako beskonačno-dimenzioni simpleks $\Upsilon(x_1,x_2,\ldots)$ ima opisanu sferu,onda je centar opisane sfere tačka O ,ako i samo ako je simpleks pravilan.

Dokaz: Teorema je direktna posledica leme 0.1. i leme 3.3. $\square$

Primedba 3.1: Prema teoremi 2.3.(II) i teoremi 2.5.(II) , centar opisane sfere i težište pravilnog beskonačno-dimenzionog simpleksa je ista tačka.Isto tako,prema teoremi 1.3. tačka O je težište beskonačno-dimenzionog simpleksa $\Upsilon(x_1,x_2,\ldots)$,a prema teoremi 3.2. centar opisane sfere je tačka O ako i samo ako je simpleks $\Upsilon(x_1,x_2,\ldots)$ pravilan. $\square$

IV Upisane sfere beskonačno-dimenzionog simpleksa u Hilbertovom prostoru

0. Uvod

Pošto beskonačno-dimenzioni simpleks definisan u predhodnoj glavi predstavlja znatno opštiju strukturu u odnosu na pravilni beskonačno-dimenzioni simpleks obradjen u glavi II, to je i problem egzistencije i odredjivanja upisanih sfera znatno složeniji od onog u glavi II, pa ga otuda i izdvajamo u posebnu celinu.

1. Upisane sfere i tačka O

Teorema 1.1: Upisana sfera simpleksa koja dodiruje sve beskonačno-dimenzione pljosni kodimenzije $\underline{n}$ $(n \geqslant 1)$ beskonačno-dimenzionog simpleksa, svodi se na tačku O.

Dokaz: Iz teoreme 1.1.(III) sledi da su sve beskonačno-dimenzione pljosni kodimenzije $\underline{n}$ $(n \geqslant 1)$, Hilbertovi podprostori. Samim tim oni sadrže tačku O, koja se nalazi na rastojanju jednakom nuli od svakog od njih, pa imamo tvrdjenje. □

Teorema 1.2: Upisana sfera simpleksa koja dodiruje sve beskonačno-dimenzione pljosni beskonačne kodimenzije beskonačno-dimenzionog simpleksa, svodi se na tačku O.

Dokaz: Dokazuje se na osnovu teoreme 1.1.(III) kao i predhodna teorema. □

Kao direktnu posledicu ove dve teoreme imamo

Teorema 1.3: Upisana sfera simpleksa koja dodiruje sve beskonačno-dimenzione pljosni beskonačno-dimenzionog simpleksa, svodi se na tačku O. □

Lema 1.1: Neka je $x_{j_1\dots j_n}$ $(n\geqslant 1)$ ortogonalna projekcija tačke 0 na pljosan $\Pi(x_{j_1},\dots,x_{j_n})$ beskonačno-dimenzionog simpleksa $\mathcal{J}(x_1,x_2,\dots)$. Tada je

$$x_{j_1\dots j_n} = \rho^2_{j_1\dots j_n}\sum_{i=1}^{n}\frac{e_{j_i}}{\lambda_{j_i}} ,$$

gde je

$$\rho_{j_1\dots j_n} = \frac{1}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{\lambda^2_{j_i}}}} .$$

Dokaz: Kako je, po predpostavci, vektor $x_{j_1\dots j_n} - 0$ ortogonalan na pljosan $\Pi(x_{j_1},\dots,x_{j_n})$, to je

$$\langle x_{j_1\dots j_n} , x_{j_i} - x_{j_1\dots j_n}\rangle = 0 \quad (i=1,\dots,n) ,$$

pa je

$$(1) \qquad \langle x_{j_1\dots j_n} , e_{j_i}\rangle = \frac{\|x_{j_1\dots j_n}\|^2}{\lambda_{j_i}} \qquad (i=1,\dots,n) .$$

Pošto vektori $e_1,e_2,\dots$ čine ortonormirani bazis a $x_{j_1\dots j_n}$ kao projekcija tačke 0 na pljosan $\Pi(x_{j_1},\dots,x_{j_n})$ pripada toj pljosni pa samim tim i $\mathcal{L}(e_{j_1},\dots,e_{j_n})$, imamo na osnovu (1)

$$(2) \qquad x_{j_1\dots j_n} = \sum_{i=1}^{n}\langle x_{j_1\dots j_n} , e_{j_i}\rangle e_{j_i} = \|x_{j_1\dots j_n}\|^2\sum_{i=1}^{n}\frac{e_{j_i}}{\lambda_{j_i}}$$

Kako je uvek $\| x_{j_1\dots j_n}\| \neq 0$, jer bi u protivnom postojali realni brojevi $\varphi_{j_1},\dots,\varphi_{j_n}$ takvi da je

$$0 = x_{j_1\dots j_n} = \varphi_{j_1} e_{j_1} + \dots + \varphi_{j_n} e_{j_n}$$

i $$\varphi_{j_1} + \dots + \varphi_{j_n} = 1$$,a što je nemoguće,

s obzirom da su vektori $e_{j_1},\dots,e_{j_n}$ linearno nezavisni.Sada je iz (2)

$$\|x_{j_1\dots j_n}\|^2 = \|x_{j_1\dots j_n}\|^4 \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\lambda_{j_i}^2}$$

odakle je

$$\|x_{j_1\dots j_n}\| = \frac{1}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\lambda_{j_i}^2}}} \quad (3)$$

Stavljajući da je $\rho_{j_1\dots j_n} = \|x_{j_1\dots j_n}\|$,na osnovu (2) i (3) dobijamo tvrdjenje leme. □

<u>Teorema 1.4</u>: Kvadrat rastojanja tačke 0 od pljosni $\Pi(x_{j_1},x_{j_2},\dots)$ je harmoniska sredina kvadrata normi vektora $x_{j_1},x_{j_2},\dots$.

<u>Dokaz</u>: Ako je $\Pi(x_{j_1},x_{j_2},\dots)$ konačno-dimenziona pljosan,tvrdjenje sledi iz leme 1.1..Ako je,pak, $\Pi(x_{j_1},x_{j_2},\dots)$ beskonačno-dimenziona pljosan,onda je na osnovu teoreme 1.3. rastojanje tačke 0 od nje jednako nuli,a za harmonisku sredinu imamo

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\lambda_{j_i}^2}} = 0 \quad . \square$$

<u>Teorema 1.5</u>: Beskonačno-dimenzioni simpleks $\mathfrak{S}(x_1,x_2,\dots)$

ima upisanu sferu reda $\underline{n}$ $(n \geq 0)$ sa centrom u tački O ,ako i samo ako je on pravilan. U tom slučaju je

$$r_{n\infty} = \frac{\sqrt{2\delta}}{\sqrt{n+1}} \quad \text{,gde je} \quad \delta = \frac{1}{2} \lim_{j\to\infty} \lambda_j^2 \quad .$$

Dokaz: Za $n=0$ imamo opisanu sferu simpleksa, pa iz teoreme 3.2.(III) sledi prvi deo tvrdjenja, dok na osnovu teoreme 3.1.(III) imamo

$$r_{1\infty} = \sqrt{2\delta} = \frac{\sqrt{2\delta}}{\sqrt{0+1}} \quad .$$

Za $n>0$ je iz predpostavke da postoji upisana sfera reda $\underline{n}$ sa centrom u tački O

$$\rho_{1\ldots n\,(n+1)} = \rho_{1\ldots n\, i} \qquad (i=n+2,n+3,\ldots) \ ,$$

pa na osnovu leme 1.1. imamo

$$\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\lambda_1^2}+\ldots+\frac{1}{\lambda_n^2}+\frac{1}{\lambda_{n+1}^2}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\lambda_1^2}+\ldots+\frac{1}{\lambda_n^2}+\frac{1}{\lambda_i^2}}}$$

odakle je

$$(1) \qquad \lambda_i^2 = \lambda_{n+1}^2 \qquad (i=n+2,n+3,\ldots) \quad .$$

Takodje mora biti

$$\rho_{(n+1)(n+2)\ldots(2n+1)} = \rho_{k\,(n+2)\ldots(2n+1)} \qquad (k=1,\ldots,n) \quad ,$$

pa je

$$(2) \qquad \lambda_k^2 = \lambda_{n+1}^2 \qquad (k=1,\ldots,n) \quad .$$

Iz (1) i (2) imamo za $\delta = \frac{1}{2}\lambda_{n+1}^2$

$$\lambda_i^2 = 2\delta \qquad (i=1,2,\ldots) \quad ,$$

te je na osnovu leme 0.1.(III) simpleks pravilan. Pri tome je

$$r_{n\infty} = \rho_{1\ldots n\,(n+1)} = \frac{1}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n+1}\frac{1}{\lambda_i^2}}} = \frac{\sqrt{2\delta}}{\sqrt{n+1}} \quad .$$

Sa druge strane, ako je simpleks pravilan, onda su na osnovu leme 1.1. sva rastojanja tačke O od konačno-dimenzionih pljosni iste dimenzije $\underline{n}$ medjusobno jednaka, pa sledi da beskonačno-dimenzioni simpleks $\mathcal{S}(x_1,x_2,\ldots)$ ima upisanu sferu reda $\underline{n}$, čiji je centar tačka O. Ovime je teorema dokazana. □

Napomena: Radi veće opštosti rezultata, u narednom tekstu za centar upisane sfere, izostavićemo uslov da mora pripadati telu simpleksa. Otuda, pod terminom "upisana sfera" podrazumevaćemo od sada širi pojam, koji pored dosadašnje upisane sfere uključuje i pojam, da ga tako nazovemo, "spolja upisanih" tj. "pripisanih" sfera. □

2. Upisana sfera reda 1

Teorema 2.1: Ako beskonačno-dimenzioni simpleks $\mathcal{S}(x_1,x_2,\ldots)$ ima upisanu sferu reda 1 sa centrom u tački $S_{1\infty}$ odredjenom vektorom z_1 i poluprečnika $r_{1\infty}$, onda važi relacija

$$\lim_{j\to\infty} (\lambda_j^2 - \varphi_{ij}(\lambda_i^2 + \lambda_j^2)) = r_{1\infty}^2 - \|z_1\|^2$$

gde je $\varphi_{ij}x_i + (1-\varphi_{ij})x_j$ ortogonalna projekcija vektora z_1 na pljosan $\Pi(x_i,x_j)$ $(i<j)$ simpleksa.

Dokaz: Neka je ${}^{ij}z_1$ ortogonalna projekcija vektora z_1 na pljosan $\Pi(x_i,x_j)$. Kako je ${}^{ij}z_1 \in \Pi(x_i,x_j)$, to na osnovu teoreme 1.2.(III) postoji φ_{ij} takvo da

$$(1) \qquad {}^{ij}z_1 = \varphi_{ij}x_i + (1-\varphi_{ij})x_j$$

S obzirom na predpostavku imamo da je

$$(2) \qquad \langle z_1 - {}^{ij}z_1 \,,\, x_i - x_j \rangle = 0 \quad ,$$

(3) $$\| z_1 - {}^{ij}z_1 \| = r_{1\infty} \quad .$$

Zamenom ${}^{ij}z_1$ iz (1) u (2) dobijamo

(4) $$\langle z_1 \, , x_i - x_j \rangle = \varphi_{ij} \lambda_i^2 - (1 - \varphi_{ij}) \lambda_j^2 \qquad (i < j) \, ,$$

a zamenom ${}^{ij}z_1$ iz (1) u (3) imamo

(5) $$\|z_1\|^2 + \varphi_{ij}^2 \|x_i\|^2 + (1 - \varphi_{ij}) \cdot \|x_j\|^2 - 2 \langle z_1, x_j \rangle -$$
$$- 2\varphi_{ij} \cdot \langle z_1, x_i - x_j \rangle = r_{1\infty}^2 .$$

Množeći jednačinu (4) sa $(-2\varphi_{ij})$ i vršeći odgovarajuću zamenu u jednačini (5), dobijamo

$$\langle z_1, x_j \rangle = \frac{1}{2} \cdot (\|z_1\|^2 - r_{1\infty}^2 + \lambda_j^2 - \varphi_{ij}^2 (\lambda_i^2 + \lambda_j^2)) \quad ,$$

odnosno

(6) $$\langle z_1, e_j \rangle = \frac{1}{2 \cdot \lambda_j} (\|z_1\|^2 - r_{1\infty}^2 + \lambda_j^2 - \varphi_{ij}^2 (\lambda_i^2 + \lambda_j^2)) \qquad (i < j) \quad .$$

Kako je

(7) $$\|z_1\|^2 = \sum_{j=1}^{+\infty} \langle z_1, e_j \rangle^2 = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{+\infty} \frac{1}{4 \cdot \lambda_j^2} (\|z_1\|^2 - r_{1\infty}^2 + \lambda_j^2 - \varphi_{ij}^2 (\lambda_i^2 + \lambda_j^2))^2 + \langle z_1, e_i \rangle^2 \quad ,$$

to iz konvergencije reda na desnoj strani relacije (7), proizilazi tvrdjenje teoreme. □

<u>Teorema 2.2</u>: Ako beskonačno-dimenzioni simpleks $\Upsilon(x_1, x_2, \ldots)$ ima upisanu sferu reda 1 sa centrom u tački $S_{1\infty}$ odredjenom vektorom z_1 i poluprečnika $r_{1\infty}$, onda postoji beskonačan niz prirodnih brojeva (j_k) takav da je

$$\lim_{j_k \to \infty} \varphi_{ij_k} = c_i \quad , \quad \lim_{j_k \to \infty} c_{j_k} = \frac{1}{2} \quad ,$$

gde je $\varphi_{ij}x_i + (1-\varphi_{ij})x_j$ ortogonalna projekcija vektora z_1 na pljosan $\pi(x_i,x_j)$ $(i<j)$ simpleksa.

Dokaz: Kako je niz (λ_j^2) $(j=1,2,\ldots)$ ograničen $(\alpha^2 \leq \lambda_j^2 \leq \beta^2)$ i beskonačan,to on mora imati neku tačku nagomilavanja $\underline{b}$ .Neka je $(\lambda_{j_k}^2)$ $(k=1,2,\ldots)$ beskonačan podniz niza (λ_j^2) takav da je

$$(1) \qquad \lim_{j_k\to\infty} \lambda_{j_k}^2 = b \quad .$$

Iz relacije (4) u dokazu teoreme 2.1. imamo

$$(2) \quad \langle z_1,x_i\rangle = \langle z_1,x_{j_k}\rangle - \lambda_{j_k}^2 + \varphi_{ij_k}(\lambda_i^2 + \lambda_{j_k}^2) \qquad (i<j_k) \quad .$$

Kako je
$$\sum_{k=1}^{+\infty} \langle z_1 , x_{j_k}\rangle^2 \leq \|z_1\|^2 \quad ,$$

to je
$$(3) \qquad \lim_{j_k\to\infty} \langle z_1 , x_{j_k}\rangle = 0 \quad ,$$

pa kada u relaciji (2) pustimo da $j_k\to\infty$ dobijamo, s obzirom na (1) ,
$$(4) \qquad \langle z_1 , x_i\rangle = \lim_{j_k\to\infty} \varphi_{ij_k}(\lambda_i^2 + \lambda_{j_k}^2) - b \quad ,$$

odakle sledi da mora postojati $\lim\limits_{j_k\to\infty} \varphi_{ij_k}$,koji ćemo označiti sa c_i .Sada je iz (4)
$$(5) \qquad \langle z_1 , x_i\rangle = c_i(\lambda_i^2 + b) - b \quad ,$$

odnosno
$$\langle z_1 , x_{j_k}\rangle = c_{j_k}(\lambda_{j_k}^2 + b) - b \quad ,$$

odakle, s obzirom na (1) i (3) imamo

$$\lim_{j_k\to\infty} c_{j_k} = \frac{1}{2} \quad . \square$$

Lema 2.1: Ako beskonačno-dimenzioni simpleks $\Upsilon(x_1, x_2, \ldots)$ ima upisanu sferu reda 1 sa centrom u tački $S_{1\infty}$ odredjenom vektorom z_1 i poluprečnika $r_{1\infty}$, onda je

$$r_{1\infty}^2 - \|z_1\|^2 = \frac{1}{2}\cdot b \quad ,$$

gde je b tačka nagomilavanja niza (λ_j^2) $(j=1,2,\ldots)$.

Dokaz: Na osnovu teoreme 2.1. imamo za niz $(\lambda_{j_k}^2)$ $(k=1,2,\ldots)$ iz dokaza teoreme 2.2. da je

$$\lim_{j_k\to\infty} (\lambda_{j_k}^2 - \varphi_{ij_k}^2(\lambda_i^2 + \lambda_{j_k}^2)) = r_{1\infty}^2 - \|z_1\|^2 \quad ,$$

odnosno

$$b - c_i^2(\lambda_i^2 + b) = r_{1\infty}^2 - \|z_1\|^2 \quad ,$$

odakle, s obzirom na teoremu 2.2. dobijamo

$$\lim_{j_k\to\infty} (b - c_{j_k}^2\cdot(\lambda_{j_k}^2 + b)) = r_{1\infty}^2 - \|z_1\|^2 \quad ,$$

tj.

$$b - \frac{1}{4}\cdot(b + b) = r_{1\infty}^2 - \|z_1\|^2 \quad . \square$$

Teorema 2.3: Ako beskonačno-dimenzioni simpleks $\Upsilon(x_1, x_2, \ldots)$ ima upisanu sferu reda 1 sa centrom u tački $S_{1\infty}$ odredjenom vektorom z_1, onda postoji prirodan broj i_o takav da je

$$\langle z_1 , e_i \rangle = \frac{1}{\lambda_i}\left(-b \pm \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{b^2 + b\cdot\lambda_i^2} \right) \quad (i=1,2,\ldots) \quad ,$$

$$\langle z_1 , e_i \rangle = \frac{1}{\lambda_i}\left(-b + \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{b^2 + b\cdot\lambda_i^2} \right) \quad (i>i_o) \quad ,$$

i gde je $b = \lim_{i \to \infty} \lambda_i^2$.

Dokaz: S obzirom na lemu 2.1. iz relacije (6) u dokazu teoreme 2.1. sledi

(1) $$\langle z_1 , x_j \rangle = \frac{1}{2} \left(- \frac{1}{2}b + \lambda_j^2 - \varphi_{ij}^2 (\lambda_i^2 + \lambda_j^2) \right) .$$

Ako u (1) stavimo $j = j_k$ i pustimo da $j_k \to +\infty$,dobijamo

$$0 = - \frac{1}{2}b + b - c_i^2 (\lambda_i^2 + b) ,$$

što znači da je

(2) $$c_i^2 = \frac{b}{2(\lambda_i^2 + b)} .$$

Sada iz relacije (5) u dokazu teoreme 2.2. imamo

$$\langle z_1 , x_i \rangle = -b \pm \sqrt{\frac{b}{2(\lambda_i^2 + b)}} (\lambda_i^2 + b) ,$$

odnosno

(3) $$\langle z_1 , x_i \rangle = -b \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{b^2 + b \cdot \lambda_i^2} .$$

Pošto je $\lim_{i \to \infty} \langle z_1 , x_i \rangle = 0$ i $b \neq 0$ kao tačka nagomilavanja niza $(\lambda_{j_k}^2)$,to iz (3) sledi da mora postojati neko i_o takvo da je za $i > i_o$

$$\langle z_1 , x_i \rangle = -b + \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{b^2 + b \cdot \lambda_i^2} .$$

Odavde imamo da je $b = \lim_{i \to \infty} \lambda_i^2$,čime je teorema dokazana. □

Teorema 2.4: Ako beskonačno-dimenzioni simpleks $\mathcal{S}(x_1, x_2, \ldots)$ ima upisanu sferu reda 1 ,onda je najviše konačno mnogo vrednosti λ_i^2 različito od $b = \lim_{i \to \infty} \lambda_i^2$.

Dokaz: Iz relacije (4) u dokazu teoreme 2.1. sledi

$$(1)\qquad \varphi_{ij} = \frac{\langle z_1 , x_i \rangle - \langle z_1 , x_j \rangle + \lambda_j^2}{\lambda_i^2 + \lambda_j^2} \qquad (i<j) ,$$

dok iz relacije (6) u dokazu iste teoreme imamo,s obzirom na lemu 2.1.,

$$(2)\qquad \varphi_{ij}^2 = \frac{\lambda_j^2 - 2\langle z_1 , x_j \rangle - \frac{1}{2}b}{\lambda_i^2 + \lambda_j^2} \qquad (i<j) .$$

Ako φ_{ij} zamenimo iz (1) u (2),dobijamo

$$(3)\qquad (\langle z_1,x_i\rangle - \langle z_1,x_j\rangle)^2 + 2\cdot\lambda_j^2(\langle z_1,x_i\rangle - \langle z_1,x_j\rangle) =$$

$$= \lambda_i^2\cdot\lambda_j^2 - 2(\lambda_i^2+\lambda_j^2)\langle z_1,x_j\rangle - \tfrac{1}{2}b(\lambda_i^2+\lambda_j^2) \qquad (i<j) .$$

Stavimo li sada u (3) $i=i_o+1$,imamo,s obzirom na teoremu 2.3.

$$(4)\qquad \tfrac{1}{2}\left(\sqrt{b^2 + b\cdot\lambda_{i_o+1}^2} \mp \sqrt{b^2 + b\cdot\lambda_j^2}\right)^2 +$$

$$+ \sqrt{2}\cdot\lambda_j^2\left(\sqrt{b^2 + b\cdot\lambda_{i_o+1}^2} \mp \sqrt{b^2 + b\cdot\lambda_j^2}\right) =$$

$$= \lambda_{i_o+1}^2\cdot\lambda_j^2 - 2(\lambda_{i_o+1}^2 + \lambda_j^2)\left(-b \pm \sqrt{b^2 + b\cdot\lambda_j^2}\right) -$$

$$- \tfrac{1}{2}b(\lambda_{i_o+1}^2 + \lambda_j^2) .$$

Odavde sledi da postoji samo konačno mnogo vrednosti λ_j^2 koje zadovoljavaju (4) .Otuda je skup

$$\{\lambda_i^2 \mid i=1,2,\dots\}$$

konačan,pa s obzirom da je na osnovu teoreme 2.3.

$$\lim_{i\to\infty} \lambda_i^2 = b$$

imamo tvrdjenje teoreme. $\square$

<u>Teorema 2.5</u>: Ako beskonačno-dimenzioni simpleks $\mathcal{S}(x_1,x_2,\dots)$ ima upisanu sferu reda 1 sa centrom u

tački $S_{1\infty}$ odredjenom vektorom z_1, onda postoje prirodni brojevi $t_1,\ldots,t_s$ takvi da je

$$z_1 = \Psi_{t_1} e_{t_1} + \ldots + \Psi_{t_s} e_{t_s} \quad ,$$

$$\lambda_i^2 = b \qquad (i \notin \{t_1,\ldots,t_s\}) \quad ,$$

$$\Psi_{t_r} = \frac{1}{\lambda_{t_r}}\left(-b \pm \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{b^2 + b\cdot\lambda_{t_r}^2} \right) \quad .$$

<u>Dokaz</u>: Na osnovu teoreme 2.4., postoji prirodan broj i_o' takav da je

$$\lambda_i^2 = b \qquad (i > i_o') \quad .$$

Neka je $i_1 = \max\{i_o, i_o'\}$. Sada iz teoreme 2.3. sledi da je

$$\langle z_1 , e_i \rangle = 0 \qquad (i > i_1) \quad ,$$

pa tvrdjenje dalje sledi na osnovu teoreme 2.3. □

<u>Teorema 2.6</u>: Beskonačno-dimenzioni simpleks $\mathcal{S}(x_1,x_2,\ldots)$ ima upisanu sferu reda 1, ako i samo ako postoje prirodni brojevi $t_1,\ldots,t_s$ takvi da je

1° $\lambda_i^2 = b \qquad (i \notin \{t_1,\ldots,t_s\})$.

2° Za $t_{r_1} < t_{r_2}$ $(r_1,r_2 \in \{1,\ldots,s\})$ ispunjena jednakost

$$(*) \quad \frac{1}{2}\left(\pm\sqrt{b^2 + b\cdot\lambda_{t_{r_1}}^2} - \left(\pm\sqrt{b^2 + b\cdot\lambda_{t_{r_2}}^2}\right)\right)^2 +$$

$$+ \sqrt{2}\cdot\lambda_j^2\left(\pm\sqrt{b^2 + b\cdot\lambda_{t_{r_1}}^2} - \left(\pm\sqrt{b^2 + b\cdot\lambda_{t_{r_2}}^2}\right)\right) =$$

$$= \lambda_{t_{r_1}}^2\cdot\lambda_{t_{r_2}}^2 - 2(\lambda_{t_{r_1}}^2 + \lambda_{t_{r_2}}^2)\left(-b \pm\sqrt{b^2 + b\cdot\lambda_{t_{r_2}}^2}\right) -$$

$$- \frac{1}{2}b(\lambda_{t_{r_1}}^2 + \lambda_{t_{r_2}}^2) \quad ,$$

pri čemu se u svim relacijama (*) uvek uzima isti znak ispred $\sqrt{b^2 + b\cdot\lambda_{t_r}^2}$ za isto t_r .

Dokaz: Ne smanjujući opštost, možemo predpostaviti da je

$$\{t_1,\dots,t_s\} = \{1,\dots,s\} \quad .$$

a) Ako simpleks ima upisanu sferu reda 1 , onda 1^o sledi na osnovu teoreme 2.5. , a 2^o iz relacije (4) u dokazu teoreme 2.4. s obzirom na teoremu 2.5..

b) Neka važi 1^o i 2^o .Uočimo tačku

$$z_1 = \Upsilon_1 e_1 + \dots + \Upsilon_s e_s \quad ,$$

gde je

$$\text{(1)} \qquad \Upsilon_r = \frac{1}{\lambda_r}\left(-b \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{b^2 + b\cdot\lambda_r^2}\right) \qquad (r=1,\dots,s) \quad .$$

Pokažimo sada da je z_1 vektor kojim je odredjen centar upisane sfere reda 1 simpleksa, čiji je poluprečnik

$$r_{1\infty} = \sqrt{\frac{1}{2} b + \sum_{r=1}^{s} \Upsilon_r^2} \quad .$$

Zaista, neka je

$$^{ij}z_1 = \varphi_{ij} x_i + (1-\varphi_{ij})x_j \qquad (i<j)$$

ortogonalna projekcija tačke z_1 na pljosan $\Pi(x_i,x_j)$ $(i<j)$ .Dokažimo da važe relacije

$$\text{(2)} \qquad \langle z_1 - {}^{ij}z_1 \,,\, x_i - x_j \rangle = 0 \qquad (i<j) \; ,$$

$$\text{(3)} \qquad \| z_1 - {}^{ij}z_1 \| = r_{1\infty} \qquad (i<j) \; .$$

Razlikovaćemo tri slučaja:

1´ $i,j \in \{1,\dots,s\}$ .Relacija (2) je ekvivalentna sa

$$(\Upsilon_i - \varphi_{ij}\lambda_i)\lambda_i - (\Upsilon_j - \lambda_j + \lambda_j\varphi_{ij})\lambda_j = 0 \quad ,$$

odnosno

(4) $$\varphi_{ij} = \frac{\Upsilon_i\lambda_i - \Upsilon_j\lambda_j + \lambda_j^2}{\lambda_i^2 + \lambda_j^2} \qquad (i<j) .$$

Pokazaćemo da ovo $_{ij}$ koje zadovoljava (2), zadovoljava i (3). Pošto je (3), s obzirom da važi (2), a na osnovu relacije (6) iz dokaza teoreme 2.1., ekvivalentno sa

$$2\Upsilon_j\lambda_j = \sum_{r=1}^{s}\Upsilon_r^2 - \tfrac{1}{2}b - \sum_{r=1}^{s}\Upsilon_r^2 + \lambda_j^2 - \varphi_{ij}^2(\lambda_i^2 + \lambda_j^2) ,$$

tj.

$$\varphi_{ij}^2(\lambda_i^2 + \lambda_j^2) + 2\Upsilon_j\lambda_j + \tfrac{1}{2}b - \lambda_j^2 = 0 ,$$

odakle je, s obzirom na (3),

$$\frac{(\Upsilon_i\cdot\lambda_i - \Upsilon_j\cdot\lambda_j + \lambda_j^2)^2}{\lambda_i^2 + \lambda_j^2} + 2\Upsilon_j\cdot\lambda_j + \tfrac{1}{2}b - \lambda_j^2 = 0 ,$$

pa je

(5) $$(\Upsilon_i\cdot\lambda_i - \Upsilon_j\cdot\lambda_j)^2 + 2\lambda_j^2(\Upsilon_i\cdot\lambda_i - \Upsilon_j\cdot\lambda_j) =$$

$$= \lambda_i^2\cdot\lambda_j^2 - 2(\lambda_i^2 + \lambda_j^2)\cdot\lambda_j\cdot\Upsilon_j - \tfrac{1}{2}b(\lambda_i^2 + \lambda_j^2) ,$$

što je ekvivalentno sa (*) s obzirom na (1). Dakle važi (3).

2′ $i \in \{1,\dots,s\}$ a $j \notin \{1,\dots,s\}$. U tom slučaju je $\Upsilon_j = 0$, $\lambda_j^2 = b$, pa je iz (4)

$$\varphi_{ij} = \frac{\Upsilon_i\lambda_i + b}{\lambda_i^2 + b}$$

vrednost φ_{ij} koja zadovoljava relaciju (1). Pokažimo da ona zadovoljava i relaciju (2). Kako je (2), na osnovu (5), ekvivalentno sa

$$(\Upsilon_i\lambda_i)^2 + 2b\Upsilon_i\lambda_i + \frac{b^2}{2} - \frac{b\cdot\lambda_i^2}{2} = 0 ,$$

tj.

$$\Upsilon_i \cdot \lambda_i = -b \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{b^2 + b \cdot \lambda_i^2}$$

što je ekvivalentno sa (1), imamo da važi (3).

3' $i,j \notin \{1,\dots,s\}$. Tada je $\Upsilon_i = \Upsilon_j = 0$,

$\lambda_i^2 = \lambda_j^2 = b$, pa je (2) ekvivalentno sa $\varphi_{ij} = \frac{1}{2}$.

Dokazaćemo da je za ovu vrednost φ_{ij} zadovoljena relacija (3). Pošto je (3) ekvivalentno sa (5), koje ima oblik

$$0 = b^2 - \tfrac{1}{2}b(\ b + b\ ) \qquad ,$$

to je i (3) ispunjeno.

Dakle, pokazali smo da postoji tačka z_1, tako da važe relacije (2) i (3), pa prema tome, simpleks ima upisanu sferu reda 1. Ovime je teorema u potpunosti dokazana. □

Primedba 2.1: Nije se teško uveriti da simpleks $\mathcal{S}(-2e_1, e_2, e_3, \dots)$ ima upisanu sferu reda 1, što znači da postoji simpleks koji nije pravilan, a ima upisanu sferu reda 1. □

3. Upisana sfera reda n (n>1)

Lema 3.1: Ako beskonačno-dimenzioni simpleks $\mathcal{S}(x_1, x_2, \dots)$ ima upisanu sferu reda n $(n>1)$ sa centrom u tački S_n odredjenom vektorom z_n i poluprečnika r_n, onda važi relacija

$$\langle z_n, x_{j_1} \rangle = \frac{1}{2}\Big(\|z_n\|^2 - r_{n\infty}^2 - \sum_{k=1}^{n+1} {}^k\varphi^2(j_1,\dots,j_{n+1})\lambda_{j_k}^2\Big) + $$
$$+ {}^1\varphi(j_1,\dots,j_{n+1})\lambda_{j_1}^2 \quad ,$$

gde je $\quad {}^1\varphi(j_1,\dots,j_{n+1})x_{j_1} + \dots + {}^{n+1}\varphi(j_1,\dots,j_{n+1})x_{j_{n+1}}$

ortogonalna projekcija vektora z_n na pljosan $\Pi(x_{j_1}, \dots, x_{j_{n+1}})$.

Dokaz: Neka je $z(j_1,\dots,j_{n+1})$ ortogonalna projekcija z_n na pljosan $\Pi(x_{j_1},\dots,x_{j_{n+1}})$ .Na osnovu 1.2.(III) je

$$(1)\qquad z(j_1,\dots,j_{n+1}) = \sum_{k=1}^{n+1} {}^k\varphi(j_1,\dots,j_{n+1})x_{j_k} \quad ,$$

gde je

$$(2)\qquad \sum_{k=1}^{n+1} {}^k\varphi(j_1,\dots,j_{n+1}) = 1 \quad .$$

S obzirom na predpostavku, imamo da je

$$(3)\qquad \langle z_n - z(j_1,\dots,j_{n+1}) \, , \, x_{j_r} - x_{j_1} \rangle = 0 \qquad (r=1,\dots,n+1)$$

$$(4)\qquad \| z_n - z(j_1,\dots,j_{n+1}) \| = r_n \quad .$$

Zamenom $z(j_1,\dots,j_{n+1})$ iz (1) u (3), dobijamo

$$(5)\qquad \langle z_n, x_{j_r} \rangle = {}^r\varphi(j_1,\dots,j_{n+1})\lambda^2_{j_r} - {}^1\varphi(j_1,\dots,j_{n+1})\lambda^2_{j_1} + \langle z_n, x_{j_1} \rangle \, .$$

Zamenjujući $z(j_1,\dots,j_{n+1})$ iz (1) u (4), imamo

$$(6)\qquad \|z_n\|^2 + \sum_{k=1}^{n+1} {}^k\varphi^2(j_1,\dots,j_{n+1})\lambda^2_{j_k} - 2\sum_{k=1}^{n+1} {}^k\varphi(j_1,\dots,j_{n+1})\langle z_n, x_{j_k} \rangle = r^2_{n\infty} \quad .$$

Smenom $\langle z_n, x_{j_k} \rangle$ na osnovu (5) u relaciji (6), dobijamo

$$\|z_n\|^2 + \sum_{k=1}^{n+1} {}^k\varphi^2(j_1,\dots,j_{n+1})\lambda^2_{j_k} - 2\sum_{k=1}^{n+1} {}^k\varphi^2(j_1,\dots,j_{n+1})\lambda^2_{j_k} + 2\left({}^1\varphi(j_1,\dots,j_{n+1})\lambda^2_{j_1} - \langle z_n, x_{j_1} \rangle\right) \sum_{k=1}^{n+1} {}^k\varphi(j_1,\dots,j_{n+1}) = r^2_{n\infty} \, .$$

Odavde se, s obzirom na relaciju (2), dobija tvrdjenje leme. □

Teorema 3.1: Ako beskonačno-dimenzioni simpleks $\mathcal{S}(x_1,x_2,\dots)$ ima upisanu sferu reda n $(n>1)$ sa centrom u tački $S_{n\infty}$ odredjenom vektorom z_n i poluprečnika $r_{n\infty}$, onda važi relacija

$$\lim_{j\to\infty}\Big(\sum_{k=1}^{n} {}^{k+1}\varphi^2(j,1,\dots,n)\lambda_k^2 + ({}^{1}\varphi(j,1,\dots,n)-2)\cdot$$

$$\cdot\,{}^{1}\varphi(j,1,\dots,n)\lambda_j^2\Big) = \|z_n\|^2 - r_{n\infty}^2\ ,$$

gde je

$${}^{1}\varphi(j_1,\dots,j_{n+1})x_{j_1}+\dots+{}^{n+1}\varphi(j_1,\dots,j_{n+1})x_{j_{n+1}}$$

ortogonalna projekcija vektora z_n na pljosan $\Pi(x_{j_1},\dots,x_{j_{n+1}})$.

Dokaz: Stavimo u iskazu leme 3.1. da je

$$j=j_1\ ,\quad 1=j_2\ ,\dots,\quad n=j_n\ .$$

Tada imamo

$$(1)\ \langle z_n,x_j\rangle = \tfrac{1}{2}\Big(\|z_n\|^2 - r_{n\infty}^2 - \sum_{k=1}^{n} {}^{k+1}\varphi^2(j,1,\dots,n)\lambda_k^2\Big) +$$

$$+\,{}^{1}\varphi(j,1,\dots,n)\lambda_j^2 - \tfrac{1}{2}\cdot{}^{1}\varphi^2(j,1,\dots,n)\lambda_j^2 \qquad (j>n)\ .$$

Kako mora biti

$$\lim_{j\to\infty}\langle z_n\ ,\ x_j\rangle = 0\ ,$$

jer je red $\sum_{j=1}^{+\infty}\langle z_n,e_j\rangle^2 = \|z_n\|^2$

konvergentan, to ako u (1) pustimo da $j\to\infty$ sledi teorema. $\square$

Lema 3.2: Ako beskonačno-dimenzioni simpleks $(x_1,x_2,\dots)$ ima upisanu sferu reda n $(n>1)$ sa centrom u tački $S_{n\infty}$ koja je odredjena vektorom z_n, onda je tačno jedna od jednačina

$$(1) \quad \langle z_n - z(j_1,\dots,j_{n+1}) \; , \; x_{j_k} - z(j_1,\dots,j_{n+1}) \rangle = 0$$

$$(k=1,\dots,n+1)$$

linearna kombinacija preostalih n ,gde je $z(j_1,\dots,j_{n+1})$ ortogonalna projekcija z_n na pljosan $\Pi(x_{j_1},\dots,x_{j_{n+1}})$.

<u>Dokaz</u>: Radi jednostavnijeg izražavanja,uvedimo sledeće oznake

$$(2) \qquad z_n = \sum_{r=1}^{+\infty} \gamma_r e_r \quad , \quad z(j_1,\dots,j_{n+1}) = \sum_{s=1}^{n+1} \gamma'_{j_s} e_{j_s} \; .$$

Sistem (1) je,s obzirom na relacije (2),ekvivalentan sa sistemom

$$\langle z_n , \lambda_{j_k} e_{j_k} \rangle - \langle z(j_1,\dots,j_{n+1}), \lambda_{j_k} e_{j_k} \rangle =$$

$$= \langle \sum_{s=1}^{n+1} \gamma'_{j_s} e_{j_s} \; , \; \sum_{r=1}^{+\infty} \gamma_r e_r - \sum_{s=1}^{n+1} \gamma'_{j_s} e_{j_s} \rangle$$

$$(k=1,\dots,n+1) \quad ,$$

odnosno

$$(3) \qquad \gamma_{j_k} \cdot \lambda_{j_k} - \gamma'_{j_k} \cdot \lambda_{j_k} = \sum_{s=1}^{n+1} \gamma'_{j_s} \cdot (\gamma_{j_s} - \gamma'_{j_s})$$

$$(k=1,\dots,n+1) \quad .$$

Ako sistem (3) napišemo u razvijenom obliku,dobijamo sistem

$$(4) \left\{ \begin{array}{llll} (\gamma'_{j_1}-\lambda_{j_1})\cdot(\gamma_{j_1}-\gamma'_{j_1})+ & \gamma'_{j_2}\cdot(\gamma_{j_2}-\gamma'_{j_2})+\dots+ & \gamma'_{j_{n+1}}\cdot(\gamma_{j_{n+1}}-\gamma'_{j_{n+1}}) & = 0 \\ \gamma'_{j_1}\cdot(\gamma_{j_1}-\gamma'_{j_1})+ & (\gamma'_{j_2}-\lambda_{j_2})\cdot(\gamma_{j_2}-\gamma'_{j_2})+\dots+ & \gamma'_{j_{n+1}}\cdot(\gamma_{j_{n+1}}-\gamma'_{j_{n+1}}) & = 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ \gamma'_{j_1}\cdot(\gamma_{j_1}-\gamma'_{j_1})+ & \gamma'_{j_2}\cdot(\gamma_{j_2}-\gamma'_{j_2})+\dots+ & (\gamma'_{j_{n+1}}-\lambda_{j_{n+1}})\cdot(\gamma_{j_{n+1}}-\gamma'_{j_{n+1}}) & = 0 \end{array} \right.$$

koji je ekvivalentan sa (1) .

Smatrajući da su $(\gamma_{j_1} - \gamma'_{j_1}),\ldots,(\gamma_{j_{n+1}} - \gamma'_{j_{n+1}})$

promenljive u (4),matrica sistema (4) je

$$M_o = \begin{bmatrix} \gamma'_{j_1} - \lambda_{j_1} & \gamma'_{j_2} & \cdots & \gamma'_{j_{n+1}} \\ \gamma'_{j_1} & \gamma'_{j_2} - \lambda_{j_2} & \cdots & \gamma'_{j_{n+1}} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \gamma'_{j_1} & \gamma'_{j_2} & \cdots & \gamma'_{j_{n+1}} - \lambda_{j_{n+1}} \end{bmatrix}$$

Oduzimanjem poslednje vrste u matrici M_o od ostalih, dobijamo njoj ekvivalentnu matricu

$$M_1 = \begin{bmatrix} -\lambda_{j_1} & 0 & \cdots & 0 & \lambda_{j_{n+1}} \\ 0 & -\lambda_{j_2} & \cdots & 0 & \lambda_{j_{n+1}} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \gamma'_{j_1} & \gamma'_{j_2} & & \gamma'_{j_n} & \gamma'_{j_{n+1}} - \lambda_{j_{n+1}} \end{bmatrix}$$

Množenje prve vrste matrice M_1 sa $\gamma'_{j_1}/\lambda_{j_1}$ pa dodavanjem poslednjoj,zatim množenjem druge sa $\gamma'_{j_2}/\lambda_{j_2}$ pa dodavanjem poslednjoj,itd.,imamo matricu

$$M_2 = \begin{bmatrix} -\lambda_{j_1} & 0 \ldots & 0 & \lambda_{j_{n+1}} \\ 0 & -\lambda_{j_2} \ldots & 0 & \lambda_{j_{n+1}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 \ldots & -\lambda_{j_n} & \lambda_{j_{n+1}} \\ 0 & 0 \ldots & 0 & \gamma'_{j_{n+1}} - \lambda_{j_{n+1}}\left(1 - \dfrac{\gamma'_{j_1}}{\lambda_{j_1}} - \ldots - \dfrac{\gamma'_{j_n}}{\lambda_{j_n}}\right) \end{bmatrix}$$

koja je ekvivalentna sa matricom M_o .Matrica M_2 je ranga $\underline{n}$,jer je determinanta

$$\begin{vmatrix} -\lambda_{j_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -\lambda_{j_2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -\lambda_{j_n} \end{vmatrix} = (-1)^n \lambda_{j_1}\lambda_{j_2}\dots\lambda_{j_n}$$

različita od nule,dok je

$$\det M_2 = (-1)^n \lambda_{j_1}\dots\lambda_{j_n}(\gamma'_{j_{n+1}}-\lambda_{j_{n+1}}(1-\frac{\gamma'_{j_1}}{\lambda_{j_1}}-\dots-\frac{\gamma'_{j_n}}{\lambda_{j_n}}))=0,$$

pošto je

$$(5)\quad \gamma'_{j_{n+1}}-\lambda_{j_{n+1}}(1-\frac{\gamma'_{j_1}}{\lambda_{j_1}}-\dots-\frac{\gamma'_{j_n}}{\lambda_{j_n}}) = 0 \quad .$$

Naime, (5) je ekvivalentno sa

$$(6)\quad \frac{\gamma'_{j_1}}{\lambda_{j_1}}+\dots+\frac{\gamma'_{j_n}}{\lambda_{j_n}}+\frac{\gamma'_{j_{n+1}}}{\lambda_{j_{n+1}}} = 1 \quad ,$$

a kako $z(j_1,\dots,j_{n+1})\in \Pi(x_{j_1},\dots,x_{j_{n+1}})$ i

$$z(j_1,\dots,j_{n+1}) = \sum_{s=1}^{n+1} \frac{\gamma'_{j_s}}{\lambda_{j_s}} x_{j_s} \quad ,$$

to relacija (6) važi prema teoremi 1.2.(III) .Dakle, matrica M_o koja je ekvivalentna M_2 je takodje ranga n ,pa imamo tvrdjenje leme. □

<u>Teorema 3.2</u>: Ako beskonačno-dimenzioni simpleks $\Upsilon(x_1,x_2,\dots)$ ima upisanu sferu reda $\underline{n}$ $(n>1)$ sa centrom u tački $S_{n\infty}$ odredjenom vektorom z_n i $z(j_1,\dots,j_{n+1})$ je ortogonalna projekcija z_n na pljosan $\Pi(x_{j_1},\dots,x_{j_{n+1}})$,

onda ako z_n i $z(j_1,\ldots,j_{n+1})$ imaju samo jednu zajedničku koordinatu jednaku, tada imaju jednake i sve ostale.

Dokaz: Uvedimo iste oznake (2), kao u dokazu leme 3.2. Predpostavimo, naprimer, da je $\gamma_{j_{n+1}} = \gamma'_{j_{n+1}}$. Transformišući sistem (4) iz dokaza leme 3.2. na isti način kao i matricu M_0 u M_2, dobijamo sistem

$$\begin{cases} -\lambda_{j_1}(\gamma_{j_1}-\gamma'_{j_1}) + \lambda_{j_{n+1}}(\gamma_{j_{n+1}}-\gamma'_{j_{n+1}}) = 0 \\ -\lambda_{j_2}(\gamma_{j_2}-\gamma'_{j_2}) + \lambda_{j_{n+1}}(\gamma_{j_{n+1}}-\gamma'_{j_{n+1}}) = 0 \\ \vdots \\ (\gamma'_{j_{n+1}} - \lambda_{j_{n+1}}(1 - \frac{\gamma'_{j_1}}{\lambda_{j_1}} - \ldots - \frac{\gamma'_{j_n}}{\lambda_{j_n}}))(\gamma_{j_{n+1}}-\gamma'_{j_{n+1}}) = 0 . \end{cases}$$

Kako je na osnovu dokaza leme 3.2. zadnja jednačina suvišna, odavde sledi

$$(1)\quad \begin{cases} \lambda_{j_1}(\gamma_{j_1}-\gamma'_{j_1}) = \lambda_{j_{n+1}}(\gamma_{j_{n+1}}-\gamma'_{j_{n+1}}) \\ \lambda_{j_2}(\gamma_{j_2}-\gamma'_{j_2}) = \lambda_{j_{n+1}}(\gamma_{j_{n+1}}-\gamma'_{j_{n+1}}) \\ \vdots \\ \lambda_{j_n}(\gamma_{j_n}-\gamma'_{j_n}) = \lambda_{j_{n+1}}(\gamma_{j_{n+1}}-\gamma'_{j_{n+1}}) \end{cases} .$$

Pošto je $\gamma_{j_{n+1}} = \gamma'_{j_{n+1}}$ i $\lambda_{j_s} \neq 0$, to iz (1) dobijamo

$$\gamma_{j_s} = \gamma'_{j_s} \qquad (s=1,\ldots,n) \quad ,$$

što je i trebalo dokazati. □

Teorema 3.3: Ako beskonačno-dimenzioni simpleks $\mathcal{S}(x_1,x_2,\ldots)$ ima upisanu sferu reda $\underline{n}$ $(n>1)$ sa centrom u tački $S_{n\infty}$ odredjenom vektorom $z_n = \sum_{r=1}^{+\infty} \gamma_r e_r$ i

poluprečnikom $r_{n\infty}$, onda važi relacija

$$\langle z(j_1,\dots,j_{n+1}), x_{j_k}\rangle = \langle z_n, x_{j_k}\rangle \pm \sqrt{\frac{r_{n\infty}^2 - \sum\limits_{\substack{r=1\\ r\notin\{j_1,\dots,j_{n+1}\}}}^{+\infty} \gamma_r^2}{\frac{1}{\lambda_{j_1}^2}+\dots+\frac{1}{\lambda_{j_{n+1}}^2}}}$$

$(k=1,\dots,n+1)$

gde je $z(j_1,\dots,j_{n+1})$ ortogonalna projekcija vektora z_n na pljosan $\Pi(x_{j_1},\dots,x_{j_{n+1}})$.

Dokaz: Uvešćemo oznake (2) iz dokaza leme 3.2.. Kako je

$$\| z_n - z(j_1,\dots,j_{n+1})\| = r_{n\infty} \quad ,$$

to je

$$\Big\| \sum_{s=1}^{n+1} (\gamma_{j_s} - \gamma'_{j_s}) e_{j_s} + \sum_{\substack{r=1\\ r\notin\{j_1,\dots,j_{n+1}\}}}^{+\infty} \gamma_r e_r \Big\|^2 = r_{n\infty}^2$$

odakle je

$$(1) \qquad \sum_{s=1}^{n+1} (\gamma_{j_s} - \gamma'_{j_s})^2 = r_{n\infty}^2 - \sum_{\substack{r=1\\ r\notin\{j_1,\dots,j_{n+1}\}}}^{+\infty} \gamma_r^2 \quad .$$

Iz sistema (1) u dokazu teoreme 3.2. sledi

$$\gamma_{j_s} - \gamma'_{j_s} = \frac{\lambda_{j_{n+1}}}{\lambda_{j_s}} (\gamma_{j_{n+1}} - \gamma'_{j_{n+1}}) \qquad (s=1,\dots,n+1) \quad ,$$

pa je

$$(2) \qquad \sum_{s=1}^{n+1} (\gamma_{j_s} - \gamma'_{j_s})^2 = \lambda_{j_{n+1}}^2 (\gamma_{j_{n+1}} - \gamma'_{j_{n+1}})^2 \cdot \left(\frac{1}{\lambda_{j_1}^2} + \dots + \frac{1}{\lambda_{j_{n+1}}^2} \right) \quad .$$

Smenom (2) u (1) imamo

$$(3) \qquad (\lambda_{j_{n+1}} \cdot \gamma_{j_{n+1}} - \lambda_{j_{n+1}} \cdot \gamma'_{j_{n+1}})^2 = \frac{r^2_{n\infty} - \sum\limits_{\substack{r=1 \\ r \notin \{j_1,\dots,j_{n+1}\}}}^{+\infty} \gamma_r^2}{\frac{1}{\lambda^2_{j_1}} + \dots + \frac{1}{\lambda^2_{j_{n+1}}}} .$$

Kako je iz sistema (1) u dokazu teoreme 3.2.

$$(4) \qquad (\lambda_{j_s} \cdot \gamma_{j_s} - \lambda_{j_s} \cdot \gamma'_{j_s})^2 = (\lambda_{j_{n+1}} \cdot \gamma_{j_{n+1}} - \lambda_{j_{n+1}} \cdot \gamma'_{j_{n+1}})^2$$

$$(s=1,\dots,n+1) \quad ,$$

i pošto je

$$(5) \quad \begin{cases} \langle z_n, x_{j_s} \rangle = \lambda_{j_s} \cdot \gamma_{j_s} \\ \langle z(j_1,\dots,j_{n+1}), x_{j_s} \rangle = \lambda_{j_s} \cdot \gamma'_{j_s} \end{cases} ,$$

to iz (3),(4) i (5) sledi tvrdejenje teoreme. □

Teorema 3.4: Ako beskonačno-dimenzioni simpleks $\mathcal{J}(x_1,x_2,\dots)$ ima upisanu sferu reda n $(n>1)$ sa centrom u tački $S_{n\infty}$,odredjenom vektorom z_n ,poluprečnika $r_{n\infty}$,onda važi relacija

$$\| z(j_1,\dots,j_{n+1}) \| = \sqrt{\pm 2 \sqrt{\frac{r^2_{n\infty} - \|z_n\|^2 + \sum\limits_{s=1}^{n+1} \gamma^2_{j_s}}{\frac{1}{\lambda^2_{j_1}} + \dots + \frac{1}{\lambda^2_{j_{n+1}}}}} \pm (r^2_{n\infty} - \|z_n\|^2)}$$

gde je $z(j_1,\dots,j_{n+1})$ ortogonalna projekcija $z_n = \sum\limits_{r=1}^{+\infty} \gamma_r e_r$ na pljosan $\Pi(x_{j_1},\dots,x_{j_{n+1}})$.

Dokaz: Uz oznake (2) iz dokaza leme 3.2.,tvrdjenje leme 3.1. možemo napisati u obliku

$$\lambda_{j_1}\cdot\gamma_{j_1} = \frac{1}{2}\left(\|z_n\|^2 - r_{n\infty}^2 - \sum_{k=1}^{n+1} (\gamma'_{j_k})^2 \right) + \lambda_{j_1}\cdot\gamma'_{j_1}$$

odnosno

$$(1) \quad \lambda_{j_1}(\gamma_{j_1} - \gamma'_{j_1}) = \frac{1}{2}\left(\|z_n\|^2 - r_{n\infty}^2 - \|z(j_1,\dots,j_{n+1})\|^2 \right) .$$

S obzirom da iz teoreme 3.3. sledi

$$(2) \quad \lambda_{j_1}^2(\gamma_{j_1} - \gamma'_{j_1}) = \frac{r_{n\infty}^2 - \sum\limits_{\substack{r=1 \\ r\notin\{j_1,\dots,j_{n+1}\}}}^{+\infty} \gamma_r^2}{\frac{1}{\lambda_{j_1}^2} + \dots + \frac{1}{\lambda_{j_{n+1}}^2}} ,$$

to kvadriranjem (1) i izjednačavanjem desnih strana relacija (1) i (2) dobijamo

$$\frac{1}{4}\left(\|z_n\|^2 - r_{n\infty}^2 - \|z(j_1,\dots,j_{n+1})\|^2\right)^2 = \frac{r_{n\infty}^2 - \|z_n\|^2 + \sum\limits_{s=1}^{n+1} \gamma_{j_s}^2}{\frac{1}{\lambda_{j_1}^2} + \dots + \frac{1}{\lambda_{j_{n+1}}^2}} ,$$

odakle sledi tvrdjenje teoreme. □

4. Niz upisanih sfera reda većeg od jedan

Definicija 4.1: Ako beskonačno-dimenzioni simpleks $\mathcal{S}(x_1,x_2,\dots)$ ima za svako n $(n>1)$ upisanu sferu reda n sa centrom u tački $S_{n\infty}$, odredjenom vektorom z_n, poluprečnika $r_{n\infty}$, onda kažemo da beskonačno-dimenzioni simpleks $\mathcal{S}(x_1,x_2,\dots)$ ima niz upisanih sfera reda većeg od jedan. □

Teorema 4.1: Neka beskonačno-dimenzioni simpleks $\mathcal{S}(x_1,x_2,\dots)$ ima niz upisanih sfera reda većeg od jedan.

Ako postoji

$$\lim_{n\to\infty} \left(z(1,\dots,n+1) - z_n \right) ,$$

gde je $z(1,\dots,n+1)$ ortogonalna projekcija z_n na pljosan $\Pi(x_1,\dots,x_{n+1})$,tada je

$$\lim_{n\to\infty} (z(1,\dots,n+1) - z_n) = 0 \quad \text{i} \quad \lim_{n\to\infty} r_{n\infty} = 0 \ .$$

<u>Dokaz</u>: Ako postoji $\lim_{n\to\infty} (z(1,\dots,n+1) - z_n)$,onda postoji

$$\lim_{n\to\infty} \| z(1,\dots,n+1) - z_n \| \quad ,$$

što znači da je niz $\| z(1,\dots,n+1) - z_n \| = r_{n\infty}$ ograničen,pa postoji realan broj G ,takav da važi

$$0 \leqslant r_{n\infty} \leqslant G \qquad (n=1,2,\dots) \ .$$

Iz relacije (3) u dokazu teoreme 3.3. sledi da je

$$r^2_{n\infty} - \sum_{\substack{r=1 \\ r\notin\{j_1,\dots,j_{n+1}\}}}^{+\infty} \gamma_r^2 \geqslant 0 \quad ,$$

pa je

$$(1) \qquad 0 \leqslant r^2_{n\infty} - \sum_{\substack{r=1 \\ r\notin\{j_1,\dots,j_{n+1}\}}}^{+\infty} \gamma_r^2 \leqslant r^2_{n\infty} \leqslant G^2 \ .$$

Na osnovu teoreme 3.3. imamo

$$(2) \quad |\langle z(1,\dots,n+1) - z_n \ , \ x_k \rangle| = \sqrt{\frac{r^2_{n\infty} - \sum\limits_{r=n+2}^{+\infty} \gamma_r^2}{\frac{1}{\lambda_1^2} + \dots + \frac{1}{\lambda_{n+1}^2}}}$$

$$(k=1,\dots,n+1)$$

S obzirom na (1) i činjenicu da je $0 < \alpha \leqslant |\lambda_i|$ $(i=1,2,\dots)$, iz (2) se dobija

$$|\langle z(1,\dots,n+1) - z_n \ , \ x_k \rangle| \leqslant \sqrt{\frac{G^2}{(n+1)\frac{1}{\alpha^2}}} \quad ,$$

odnosno

$$\left|\left\langle z(1,\ldots,n+1) - z_n\ ,\ x_k\right\rangle\right| \leq \frac{G\alpha}{\sqrt{n+1}} \qquad (k=1,\ldots,n+1)\ .$$

Odavde imamo da je

$$\lim_{n\to\infty} \left\langle z(1,\ldots,n+1) - z_n\ ,\ x_k\right\rangle = 0 \qquad (k=1,2,\ldots)\ ,$$

odakle je, s obzirom da postoji $\lim\limits_{n\to\infty} (\, z(1,\ldots,n+1) - z_n\,)$,

$$(3) \qquad \left\langle \lim_{n\to\infty} (\, z(1,\ldots,n+1) - z_n\,)\ ,\ x_k\right\rangle = 0 \qquad (k=1,2,\ldots)\ .$$

Na osnovu (3) ,vektor $\lim\limits_{n\to\infty} (\, z(1,\ldots,n+1) - z_n\,)$ ima osobinu da je ortogonalan na svim vektorima ortogonalnog bazisa $x_1, x_2, \ldots$ prostora H ,pa on mora biti nula,tj.

$$\lim_{n\to\infty} (\, z(1,\ldots,n+1) - z_n\,) = 0 \quad ,$$

pa je

$$\lim_{n\to\infty} r_{n\infty} = \lim_{n\to\infty} \left\| z(1,\ldots,n+1) - z_n \right\| = 0\ . \ \square$$

Teorema 4.2: Neka beskonačno-dimenzioni simpleks $\mathcal{S}(x_1,x_2,\ldots)$ ima niz upisanih sfera reda većeg od jedan, i neka je

$$z(1,\ldots,n,n+p) = \sum_{k=1}^{n} {}^{p}\gamma_k e_k + {}^{p}\gamma_{n+p} e_{n+p} \qquad (p=1,2,\ldots)$$

ortogonalna projekcija z_n na pljosan $\Pi(x_1,\ldots,x_n,x_{n+p})$ simpleksa.Ako postoji $\lim\limits_{n\to\infty} (\, z(1,\ldots,n+1) - z_n\,)$,onda je

$$\lim_{n\to\infty} n({}^{1}\gamma_k - {}^{p}\gamma_k)^2 = 0$$

$$(k=1,2,\ldots\ ;\ p=1,2,\ldots)\ .$$

Dokaz: Iz sistema (1) u dokazu teoreme 3.2., imamo

$$(1)\qquad \gamma_r - {}^1\gamma_r = \frac{\lambda_k}{\lambda_r}(\gamma_k - {}^1\gamma_k) \qquad (r=1,\dots,n)\ ,$$

$$(2)\qquad \gamma_r - {}^p\gamma_r = \frac{\lambda_k}{\lambda_r}(\gamma_k - {}^p\gamma_k) \qquad (r=1,\dots,n)\ ,$$

pa oduzimanjem (1) od (2) dobijamo

$$(3)\qquad {}^1\gamma_r - {}^p\gamma_r = \frac{\lambda_k}{\lambda_r}({}^1\gamma_k - {}^p\gamma_k) \qquad (k=1,\dots,n\ ;\ r=1,\dots,n)\ .$$

Dalje je

$$\| z(1,\dots,n,n+1) - z(1,\dots,n,n+p)\|^2 = \sum_{r=1}^{n}({}^1\gamma_r - {}^p\gamma_r)^2 + {}^1\gamma^2_{n+1} + {}^p\gamma^2_{n+p} \qquad (k=1,\dots,n)\ ,$$

što s obzirom na (3) daje

$$(4)\qquad \| z(1,\dots,n,n+1) - z(1,\dots,n,n+p)\|^2 = \left(\frac{1}{\lambda_1^2} + \dots + \frac{1}{\lambda_n^2}\right)\lambda_k^2({}^1\gamma_k - {}^p\gamma_k)^2 + {}^1\gamma^2_{n+1} + {}^p\gamma^2_{n+p} \qquad (k=1,\dots,n)\ .$$

Iz (4), pošto važi $0<\alpha\leq|\lambda_i|\leq\beta$ $(i=1,2,\dots)$, sledi

$$(5)\qquad \| z(1,\dots,n,n+1) - z(1,\dots,n,n+p)\|^2 \geq \frac{n}{\beta^2}\alpha^2 \cdot ({}^1\gamma_k - {}^p\gamma_k)^2 + {}^1\gamma^2_{n+1} + {}^p\gamma^2_{n+p} \qquad (k=1,\dots,n\ ;\ p=1,2,\dots)\ .$$

Kako je, sa druge strane,

$$\| z(1,\dots,n,n+1) - z(1,\dots,n,n+p)\| \leq \| z(1,\dots,n,n+1) - z_n\| + \| z(1,\dots,n,n+p) - z_n\| = r_{n\infty} + r_{n\infty} = 2r_{n\infty}\ ,$$

to je

$$(6)\qquad \| z(1,\dots,n,n+1) - z(1,\dots,n,n+p) \|^2 \leq 4r_{n\infty}^2 ,$$

pa iz (5) i (6) imamo

$$(7)\qquad 4r_{n\infty}^2 \geq \frac{\alpha^2}{\beta^2} n({}^1\gamma_k - {}^p\gamma_k)^2 + {}^1\gamma_{n+1}^2 + {}^p\gamma_{n+p}^2 .$$

Kako iz predpostavke teoreme na osnovu teoreme 4.1. sledi da je

$$\lim_{n\to\infty} r_{n\infty} = 0 ,$$

to iz relacije (7) dobijamo

$$\lim_{n\to\infty} n({}^1\gamma_k - {}^p\gamma_k)^2 = 0$$

$$(k=1,2,\dots \quad ; \quad p=1,2,\dots) . \square$$

<u>Lema 4.1</u>: Neka beskonačno-dimenzioni simpleks $\mathcal{S}(x_1,x_2,\dots)$ ima niz upisanih sfera reda većeg od jedan, i neka je

$$z(1,\dots,n,n+p) = \sum_{k=1}^{n} {}^p\gamma_k e_k + {}^p\gamma_{n+p} e_{n+p} \qquad (p=1,2,\dots)$$

ortogonalna projekcija vektora z_n na pljosan $\Pi(x_1,\dots,x_n,x_{n+p})$ simpleksa. Ako postoji

$$\lim_{n\to\infty} (z(1,\dots,n+1) - z_n) ,$$

onda je

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{{}^p\gamma_k}{\lambda_k} = 1 \qquad (p=1,2,\dots) .$$

<u>Dokaz</u>: S obzirom da je

$$z(1,\dots,n,n+p) \in \Pi(x_1,\dots,x_n,x_{n+p}) ,$$

to je prema teoremi 1.2.(III)

$$(1)\qquad \sum_{k=1}^{n} \frac{{}^{p}\gamma_k}{\lambda_k} + \frac{{}^{p}\gamma_{n+p}}{\lambda_{n+p}} = 1 \quad .$$

Kako iz relacije (7) u dokazu teoreme 4.2. sledi da je

$$\lim_{n\to\infty} {}^{p}\gamma^{2}_{n+p} = 0 \quad ,$$

to je

$$\lim_{n\to\infty} \frac{{}^{p}\gamma_{n+p}}{\lambda_{n+p}} = 0 \quad ,$$

pa na osnovu (1),imamo lemu . □

Lema 4.2: Neka beskonačno-dimenzioni simpleks $\mathcal{T}(x_1,x_2,\ldots)$ ima niz upisanih sfera reda većeg od jedan,i neka je

$$z(1,\ldots,n,n+p) = \sum_{k=1}^{n} {}^{p}\gamma_k e_k + {}^{p}\gamma_{n+p} e_{n+p} \qquad (p=1,2,\ldots)$$

ortogonalna projekcija z_n na pljosan $\Pi(x_1,\ldots,x_n,x_{n+p})$ simpleksa.Ako postoji $\lim\limits_{n\to\infty} (z(1,\ldots,n+1) - z_n)$,

tada je

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ q_n\in\{1,\ldots,n\}}} {}^{1}\gamma_{q_n} = 0 \quad .$$

Dokaz: Ako u postavci teoreme 4.2. zamenimo $z(1,\ldots,n,n+p)$ sa

$$z(1,\ldots,k-1,k+1,\ldots,n,n+1,n+p)$$

dobijamo,na isti način kao što smo dobili relaciju (7) u dokazu teoreme 4.2.,relaciju

$$4r^2_{n\infty} \geqslant \frac{\alpha^2}{\beta^2}\, n({}^{1}\gamma_q - {}^{p}_{1}\gamma_q)^2 + {}^{1}\gamma^{2}_{k} + {}^{p}_{1}\gamma^{2}_{n+p} \quad ,$$

gde je

$$z(1,\ldots,k-1,k+1,\ldots,n+1,n+p) = \sum_{\substack{q=1\\ q\neq k}}^{n+1} {}^{p}_{1}\gamma_q e_q + {}^{p}_{1}\gamma_{n+p} e_{n+p}$$

($q=1,\dots,k-1,k+1,\dots,n+1$; $k=1,\dots,n$; $p=1,2,\dots$) ,

odakle sledi na osnovu teoreme 4.1. da je

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ q_n\in\{1,\dots,n\}}} {}^{1}\gamma^{2}_{q_n} = 0 \ . \ \square$$

<u>Teorema 4.3</u>: Neka beskonačno-dimenzioni simpleks $\mathcal{S}(x_1,x_2,\dots)$ ima niz upisanih sfera reda većeg od jedan, i neka za svako <u>n</u> $(n>1)$ ortogonalna projekcija $z(1,\dots,n+1)$,vektora z_n na pljosan $\Pi(x_1,\dots,x_{n+1})$, pripada telu podsimpleksa $\mathcal{S}(x_1,\dots,x_{n+1})$ .Ako postoji

$$\lim_{n\to\infty} (z(1,\dots,n+1) - z_n) \ ,$$

onda je

$$\lim_{n\to\infty} z(1,\dots,n+1) = 0 \ .$$

<u>Dokaz</u>: Neka je $z(1,\dots,n+1) = \sum_{k=1}^{n+1} {}^{1}\gamma_k(n+1)e_k$ .Kako je

$$z(1,\dots,n+1) = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{{}^{1}\gamma_k(n+1)}{\lambda_k}\cdot x_k$$

,i $z(1,\dots,n+1)$ pripada telu simpleksa $\mathcal{S}(x_1,\dots,x_{n+1})$,to prema definiciji 0.4.(I) imamo

(1) $$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{{}^{1}\gamma_k(n+1)}{\lambda_k} = 1$$

(2) $$\frac{{}^{1}\gamma_k(n+1)}{\lambda_k} \geq 0 \quad (k=1,\dots,n+1) \ .$$

S obzirom da važi $0<\alpha\leq|\lambda_i|\leq\beta$ $(i=1,2,\dots)$,na osnovu leme 4.2. dobijamo

(3) $$\lim_{\substack{n\to\infty \\ q_n\in\{1,\dots,n+1\}}} \frac{{}^{1}\gamma_{q_n}(n+1)}{\lambda_{q_n}} = 0 \ .$$

Dokažimo sada da važi relacija

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n+1} \frac{{}^1\gamma_k^2(n+1)}{\lambda_k^2} = 0 \quad . \tag{4}$$

Radi jednostavnijeg pisanja stavimo da je $n+1=m$,i neka je

$$\frac{{}^1\gamma_r(m)}{\lambda_r} = \max\left\{ \frac{{}^1\gamma_1(m)}{\lambda_1}, \dots, \frac{{}^1\gamma_m(m)}{\lambda_m} \right\} \tag{5}$$

$$(r\in\{1,\dots,m\}) \quad .$$

S obzirom na relacije (2) i (3) ,moguće je naći $\varepsilon>0$, tako da je

$$\frac{{}^1\gamma_r(m)}{\lambda_r} = \frac{1}{m^{\varepsilon}} \quad .$$

Isto tako,zbog (2) i (5),postoje nenegativni brojevi $b_2,\dots,b_m$ takvi da je

$$\frac{{}^1\gamma_s(m)}{\lambda_s} = \frac{1}{m^{\varepsilon+b_s}} \qquad (s=2,\dots,m) \quad .$$

Dalje je

$$\frac{{}^1\gamma_1^2(m)}{\lambda_1^2} + \dots + \frac{{}^1\gamma_m^2(m)}{\lambda_m^2} = \frac{1}{m^{\varepsilon}}\Big(\frac{1}{m^{\varepsilon}} + \frac{1}{m^{\varepsilon+2b_2}} + \dots + \frac{1}{m^{\varepsilon+2b_m}} \Big) \tag{6}$$

Kako je,zbog $b_s \geqslant 0$ $(s=2,\dots,m)$,

$$\frac{1}{m^{\varepsilon+2b_s}} \leqslant \frac{1}{m^{\varepsilon+b_s}} \qquad (s=2,\dots,m) \quad ,$$

to je iz (6)

$$\frac{{}^1\gamma_1^2(m)}{\lambda_1^2} + \dots + \frac{{}^1\gamma_m^2(m)}{\lambda_m^2} \leqslant \frac{1}{m^{\varepsilon}}\Big(\frac{1}{m^{\varepsilon}} + \frac{1}{m^{\varepsilon+b_2}} + \dots + \frac{1}{m^{\varepsilon+b_m}} \Big) =$$

$$= \frac{1}{m\varepsilon}\left(\frac{{}^{1}\gamma_1(m)}{\lambda_1} + \dots + \frac{{}^{1}\gamma_m(m)}{\lambda_m} \right) = \frac{1}{m\varepsilon}\cdot 1 = \frac{1}{m\varepsilon} ,$$

pa je odavde

$$\frac{{}^{1}\gamma_1^2(m)}{\lambda_1^2} + \dots + \frac{{}^{1}\gamma_m^2(m)}{\lambda_m^2} \leq \frac{1}{m\varepsilon} = \frac{{}^{1}\gamma_r(m)}{\lambda_r} ,$$

odakle,s obzirom na (3) sledi (4) .

Pošto je $0<\alpha \leq |\lambda_i| \leq \beta$ $(i=1,2,\dots)$,to je

$$\frac{1}{\beta^2}\sum_{k=1}^{n+1} {}^{1}\gamma_k^2(n+1) \leq \sum_{k=1}^{n+1} \frac{{}^{1}\gamma_k^2(n+1)}{\lambda_k^2} ,$$

pa iz (4) sledi

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n+1} {}^{1}\gamma_k^2(n+1) = 0 . \tag{7}$$

S obzirom da je

$$\| z(1,\dots,n+1) \|^2 = \sum_{k=1}^{n+1} {}^{1}\gamma_k^2(n+1) ,$$

to iz (7) imamo

$$\lim_{n\to\infty} \| z(1,\dots,n+1) \|^2 = 0 ,$$

odakle sledi tvrdjenje teoreme. $\square$

Teorema 4.4: Neka beskonačno-dimenzioni simpleks $\mathcal{S}(x_1,x_2,\dots)$ ima niz upisanih sfera reda većeg od jedan,i neka za svako $\underline{n}$ $(n>1)$,ortogonalna projekcija $z(1,\dots,n+1)$,vektora z_n na pljosan $\Pi(x_1,\dots,x_{n+1})$, pripada telu podsimpleksa $\mathcal{S}(x_1,\dots,x_{n+1})$ .Ako postoji

$$\lim_{n\to\infty} (z(1,\dots,n+1) - z_n) ,$$

tada je

$$\lim_{n\to\infty} z_n = 0 \quad \text{i} \quad \lim_{n\to\infty} r_{n\infty} = 0 .$$

Dokaz: Na osnovu teoreme 4.1. je

$$\lim_{n\to\infty} \left(z(1,\dots,n+1) - z_n \right) = 0 \quad \text{i} \quad \lim_{n\to\infty} r_{n\infty} = 0 \;,$$

dok iz teoreme 4.3. sledi $\lim\limits_{n\to\infty} z(1,\dots,n+1) = 0$,pa je i

$$\lim_{n\to\infty} z_n = 0 \;. \;\square$$

V Projekcije tačke na pljosni beskonačno-dimenzionog simpleksa u Hilbertovom prostoru

0. Uvod

U geometriji ima vrlo mnogo rezultata u kojima se pokazuje pripadnost neke tačke ili nekog skupa tačaka izvesnoj pravoj,ravni ili hiperravni u konačno-dimenzionom slučaju.Ovde ćemo se nezavisno od takvih rezultata pozabaviti izvesnim problemima tog tipa u beskonačno-dimenzionom prostoru.Naime,projekcije proizvoljne tačke prostora na delove nekog složenog geometriskog tela, mogu se uzeti kao jedan od načina opisivanja prostornog rasporeda i položaja tog tela.Pri tome,pitanje zatvorenog lineala ovih projekcija dobija znatno veći značaj u beskonačno-dimenzionom slučaju od onog koji ima u konačno-dimenzionom.Do ovoga dolazi,pre svega,zbog same prirode Hilbertovog prostora,čiji je bazis beskonačan, pa se pored ostalih javlja i problem konvergencije. Slobodnije govoreći,zatvorenim linealom izražavamo i dimenzionalnost nekog tela,tj. njegov prostorni odnos prema čitavom Hilbertovom prostoru.

U ovoj glavi,pored ortogonalnih projekcija,razmotrićemo i novouvedeni pojam kotežišnih projekcija,neke vrste aproksimacije ortogonalnih projekcija u slučaju konačno-dimenzionih pljosni.Kao što ćemo to videti u daljem tekstu,kotežišna projekcija će se pokazati ne samo kao dosta operativan matematički pojam sam po sebi, već i kao koristan medjupojam za dobijanje rezultata koji se odnose na ortogonalne projekcije.

Dakle, u narednom tekstu ove glave bavićemo se ortogonalnim i kotežišnim projekcijama, nekim njihovim zatvorenim linealima, kao i konvergencijom izvesnih nizova koji se sastoje od ovih tačaka.

1. Ortogonalne projekcije tačke na beskonačno-dimenzione pljosni

Teorema 1.1: Neka je M bilo koja tačka Hilbertovog prostora H odredjena vektorom

$$\vec{m} = \mu_1 e_1 + \mu_2 e_2 + \dots \qquad \left(\sum_{i=1}^{+\infty} \mu_i^2 < +\infty \right) ,$$

i neka su $M_1, M_2, \dots$ tim redom ortogonalne projekcije tačke M na beskonačno-dimenzione pljosni kodimenzije 1, simpleksa $\mathcal{J}(x_1, x_2, \dots)$, $\Pi(x_2, x_3, x_4, \dots)$, $\Pi(x_1, x_3, x_4, \dots)$, ... odredjene respektivno vektorima $\vec{m}_1$, $\vec{m}_2$, ... Tada je tačka M težište skupa tačaka $M_1, M_2, \dots$.

Dokaz: S obzirom da je $\vec{m}_1$ ortogonalna projekcija vektora $\vec{m}$ na pljosan $\Pi(x_2, x_3, \dots)$, to znači da je, prema teoremi 1.1.(III), $\vec{m}_1$ ortogonalna projekcija $\vec{m}$ na Hilbertov podprostor generisan vektorima $e_2, e_3, \dots$, pa je dakle

$$\| \vec{m} - \vec{m}_1 \| = \min \left\{ \| \vec{m} - y \| \;\middle|\; y = y_2 e_2 + y_3 e_3 + \dots \right\} .$$

Kako je

$$\| \vec{m} - y \|^2 = \mu_1^2 + (\mu_2 - y_2)^2 + (\mu_3 - y_3)^2 + \dots ,$$

to će $\| \vec{m} - y \|$ imati najmanju vrednost kada je $y_2 = \mu_2$, $y_3 = \mu_3, \dots$, tj.

$$\vec{m}_1 = \mu_2 e_2 + \mu_3 e_3 + \dots .$$

Slično tome dobijamo da je

$$\vec{m}_2 = \langle\mu_1 e_1 + \langle\mu_3 e_3 + \dots ,$$

$$\vec{m}_3 = \langle\mu_1 e_1 + \langle\mu_2 e_2 + \langle\mu_4 e_4 + \dots ,$$

itd.

Prema tome je

$$(1) \quad \varrho_1 \vec{m}_1 + \varrho_2 \vec{m}_2 + \dots + \varrho_k \vec{m}_k = (\varrho_1 + \dots + \varrho_k)\cdot \vec{m} - \varrho_1 \langle\mu_1 e_1 - \\ - \varrho_2 \langle\mu_2 e_2 - \dots - \varrho_k \langle\mu_k e_k .$$

Stavimo sada $\varrho_1 = \varrho_2 = \dots = \varrho_k = \frac{1}{k}$. Iz relacije (1) onda imamo

$$(2) \quad \frac{\vec{m}_1 + \vec{m}_2 + \dots + \vec{m}_k}{k} = \vec{m} - \frac{\langle\mu_1 e_1 + \langle\mu_2 e_2 + \dots + \langle\mu_k e_k}{k}$$

Kako je

$$\left\| \frac{\langle\mu_1 e_1 + \langle\mu_2 e_2 + \dots + \langle\mu_k e_k}{k} \right\|^2 = \frac{\langle\mu_1^2 + \langle\mu_2^2 + \dots + \langle\mu_k^2}{k^2} \leq \frac{\|\vec{m}\|^2}{k^2} ,$$

to je

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\langle\mu_1 e_1 + \langle\mu_2 e_2 + \dots + \langle\mu_k e_k}{k} = 0 ,$$

pa iz (2) sledi

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\vec{m}_1 + \vec{m}_2 + \dots + \vec{m}_k}{k} = \vec{m} .$$

Na isti način, za bilo koju k-torku $\vec{m}_{j_1}, \dots, \vec{m}_{j_k}$ imamo relaciju

$$\varrho_{j_1} \vec{m}_{j_1} + \dots + \varrho_{j_k} \vec{m}_{j_k} = (\varrho_{j_1} + \dots + \varrho_{j_k})\cdot \vec{m} - \varrho_{j_1} \vec{m}_{j_1} - \\ - \dots - \varrho_{j_k} \vec{m}_{j_k} ,$$

odakle dobijamo

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\vec{m}_{j_1} + \dots + \vec{m}_{j_k}}{k} = \vec{m} ,$$

čime je dokazano tvrdjenje. □

Teorema 1.2: Neka je M bilo koja tačka Hilbertovog prostora H odredjena vektorom

$$\vec{m} = \mu_1 e_1 + \mu_2 e_2 + \dots \qquad \left(\sum_{i=1}^{+\infty} \mu_i^2 < +\infty \right) ,$$

i neka su $M_1, M_2, \dots$ tim redom ortogonalne projekcije M na beskonačno-dimenzione pljosni kodimenzije 1, $\Pi(x_2, x_3, \dots)$, $\Pi(x_1, x_3, x_4, \dots)$, ... odredjene respektivno vektorima $\vec{m}_1, \vec{m}_2, \dots$. Tada je

$$\overline{\mathcal{L}}(\vec{m}_1, \vec{m}_2, \dots) = \overline{\mathcal{L}}\left\{ e_r \mid (r=1,2,\dots) \wedge \mu_r \neq 0 \right\} .$$

Dokaz: Ako u relaciji (1) iz dokaza teoreme 1.1. stavimo

$$\rho_1 = \frac{2-k}{k} , \quad \rho_2 = \dots = \rho_k = \frac{1}{k} ,$$

dobijamo

$$(1) \quad \rho_1 \vec{m}_1 + \rho_2 \vec{m}_2 + \dots + \rho_k \vec{m}_k = \frac{k-1}{k} \mu_1 e_1 + \\ + \frac{\mu_{k+1} e_{k+1} + \mu_{k+2} e_{k+2} + \dots}{k} .$$

Kako je

$$\left\| \frac{\mu_{k+1} e_{k+1} + \mu_{k+2} e_{k+2} + \dots}{k} \right\|^2 = \frac{\mu_{k+1}^2 + \mu_{k+2}^2 + \dots}{k^2} \leq \frac{\|\vec{m}\|^2}{k^2} ,$$

to je

$$\lim_{k \to \infty} \frac{\mu_{k+1} e_{k+1} + \mu_{k+2} e_{k+2} + \dots}{k} = 0$$

pa iz (1) imamo

$$(2) \qquad \lim_{k \to \infty} (\rho_1 \vec{m}_1 + \dots + \rho_k \vec{m}_k) = \mu_1 e_1 .$$

Ako predpostavimo da je $\mu_1 \neq 0$,onda je iz (2)

$$e_1 = \lim_{k \to \infty} \left(\frac{\rho_1}{\mu_1} \vec{m}_1 + \dots + \frac{\rho_k}{\mu_1} \vec{m}_k \right) ,$$

što znači da je

$$e_1 \in \overline{\mathcal{L}}(\vec{m}_1,\vec{m}_2,\ldots) \quad .$$

Na isti način kao i za e_1, možemo iz predpostavke $\mu_r \neq 0$ $(r=2,3,\ldots)$ dobiti

$$e_r \in \overline{\mathcal{L}}(\vec{m}_1,\vec{m}_2,\ldots) \quad ,$$

odakle imamo

$$(3) \qquad \overline{\mathcal{L}}\{e_r \mid (r=1,2,\ldots)\wedge \mu_r \neq 0\} \subseteq \overline{\mathcal{L}}(\vec{m}_1,\vec{m}_2,\ldots) \; .$$

Dalje, očigledno je da iz izraza za $\vec{m}_1,\vec{m}_2,\ldots$ preko $e_1,e_2,\ldots$ imamo

$$(4) \qquad \overline{\mathcal{L}}(\vec{m}_1,\vec{m}_2,\ldots) \subseteq \overline{\mathcal{L}}\{e_r \mid (r=1,2,\ldots)\wedge \mu_r \neq 0\} \quad ,$$

pa iz (3) i (4) sledi teorema. □

<u>Teorema 1.3</u>: Neka je M bilo koja tačka Hilbertovog prostora H odredjena vektorom

$$\vec{m} = \mu_1 e_1 + \mu_2 e_2 + \ldots \qquad \left(\sum_{i=1}^{+\infty} \mu_i^2 < +\infty\right) \quad .$$

Ako vektor $\vec{m}$ ima beskonačno mnogo koordinata različitih od nule, onda je zatvoreni lineal $\overline{\mathcal{L}}_n$ ortogonalnih projekcija tačke M na beskonačno-dimenzione pljosni kodimenzije n $(n>1)$ jednak

$$\overline{\mathcal{L}}\{e_r \mid (r=1,2,\ldots)\wedge \mu_r \neq 0\} \quad .$$

<u>Dokaz</u>: S obzirom da je $n>1$ istim putem kao u dokazu teoreme 1.1. dobijamo da su ortogonalne projekcije tačke M na pljosni $\Pi(x_1,x_{n+2},x_{n+3},\ldots)$ i $\Pi(x_2,x_{n+2},x_{n+3},\ldots)$ odredjene vektorima

$$\vec{m}_1' = \mu_1 e_1 + \mu_{n+2} e_{n+2} + \mu_{n+3} e_{n+3} + \ldots$$

$$\vec{m}_2' = \mu_2 e_2 + \mu_{n+2} e_{n+2} + \mu_{n+3} e_{n+3} + \ldots \quad .$$

Kako je $\vec{m}_1' \in \overline{\mathcal{L}}_n$ i $\vec{m}_2' \in \overline{\mathcal{L}}_n$, to je i

$$\mu_1 e_1 - \mu_2 e_2 = \vec{m}_1' - \vec{m}_2' \in \overline{\mathcal{L}}_n \quad .$$

Analogno tome možemo dobiti za $i \neq j$

$$(1) \qquad \mu_i e_i - \mu_j e_j \in \overline{\mathcal{L}}_n \quad .$$

Neka je

$$\{\mu_r \mid (r=1,2,\dots) \ (\mu_r \neq 0)\} = \{\mu_{j_1}, \mu_{j_2}, \dots\} \ .$$

Pošto je skup $\{\mu_{j_1} e_{j_1}, \mu_{j_2} e_{j_2}, \dots\}$ beskonačan, na osnovu teoreme 0.2.(III) i teoreme 0.3.(III) imamo da je

$$(2) \quad \overline{\mathcal{L}}(\mu_{j_2} e_{j_2} - \mu_{j_1} e_{j_1}, \mu_{j_3} e_{j_3} - \mu_{j_1} e_{j_1}, \dots) = $$

$$= \overline{\mathcal{L}}(\mu_{j_1} e_{j_1}, \mu_{j_2} e_{j_2}, \dots) \quad .$$

Kako iz (1) sledi da je

$$(3) \quad \overline{\mathcal{L}}(\mu_{j_2} e_{j_2} - \mu_{j_1} e_{j_1}, \mu_{j_3} e_{j_3} - \mu_{j_1} e_{j_1}, \dots) \subseteq \overline{\mathcal{L}}_n \quad ,$$

to iz (2) i (3) dobijamo

$$(4) \qquad \overline{\mathcal{L}}(\mu_{j_1} e_{j_1}, \mu_{j_2} e_{j_2}, \dots) \subseteq \overline{\mathcal{L}}_n \quad .$$

Pošto iz samog izraza za ortogonalne projekcije vektora $\vec{m}$ na beskonačno-dimenzione pljosni kodimenzije n sledi da je

$$(5) \qquad \overline{\mathcal{L}}_n \subseteq \overline{\mathcal{L}}(\mu_{j_1} e_{j_1}, \mu_{j_2} e_{j_2}, \dots) \quad ,$$

to iz (4) i (5) imamo

$$\overline{\mathcal{L}}_n = \overline{\mathcal{L}}(\mu_{j_1} e_{j_1}, \mu_{j_2} e_{j_2}, \dots) \ . \ \square$$

<u>Teorema 1.4</u>: Neka je M bilo koja tačka Hilbertovog prostora H odredjena vektorom

$$\vec{m} = \mu_1 e_1 + \dots + \mu_k e_k \quad .$$

Tada je zatvoreni lineal $\overline{\mathcal{L}}_n$ ortogonalnih projekcija tačke M na beskonačno-dimenzione pljosni kodimenzije

n $(n>1)$ jednak

$$\overline{\mathcal{L}}\left\{e_r \mid (r=1,\ldots,k)\wedge(\mu_r \neq 0)\right\}.$$

Dokaz: Ako je $k=1$, onda je tvrdjenje očigledno. Ako je $k>1$, na isti način kao u dokazu teoreme 1.1. dobijamo da su ortogonalne projekcije tačke M na pljosni

$\Pi(x_1,\ldots,x_k,x_{n+k+1},x_{n+k+2},\ldots)$ i

$\Pi(x_1,\ldots,x_{k-1},x_{n+k},x_{n+k+1},\ldots)$ (primetimo da je $x_{n+k}\neq x_k$ jer $n>1 \Rightarrow n+k>k$, i $\{x_1,\ldots,x_{k-1}\}$ postoji jer je $k>1$), redom vektori

$$\vec{m}_1'' = \mu_1 e_1 + \ldots + \mu_k e_k$$

$$\vec{m}_2'' = \mu_1 e_1 + \ldots + \mu_{k-1} e_{k-1},$$

pa je

$$\mu_k e_k = \vec{m}_1'' - \vec{m}_2'' \in \overline{\mathcal{L}}_n,$$

pošto $\vec{m}_1'', \vec{m}_2'' \in \overline{\mathcal{L}}_n$.

Analogno tome imamo

$$\mu_1 e_1 \in \overline{\mathcal{L}}_n, \ldots, \mu_{k-1} e_{k-1} \in \overline{\mathcal{L}}_n,$$

što znači da je

$$(1)\qquad \left\{e_r \mid (r=1,\ldots,k)\wedge(\mu_r \neq 0)\right\} \subseteq \overline{\mathcal{L}}_n.$$

Pošto iz samog izraza za ortogonalne projekcije vektora $\vec{m}$ na beskonačno-dimenzione pljosni kodimenzije n sledi da je

$$(2)\qquad \overline{\mathcal{L}}_n \subseteq \overline{\mathcal{L}}\left\{e_r \mid (r=1,\ldots,k)\wedge(\mu_r \neq 0)\right\},$$

to iz (1) i (2) dobijamo tvrdjenje teoreme. □

Teorema 1.5: Neka je M bilo koja tačka Hilbertovog prostora H odredjena vektorom

$$\vec{m} = \mu_1 e_1 + \mu_2 e_2 + \dots \quad \left(\sum_{i=1}^{+\infty} \mu_i^2 < +\infty \right) .$$

Tada je zatvoreni lineal ortogonalnih projekcija tačke M na beskonačno-dimenzione pljosni konačne kodimenzije n $(n=1,2,\dots)$ jednak

$$\overline{\mathcal{L}} \left\{ e_r \mid (r=1,2,\dots) \wedge (\mu_r \neq 0) \right\} .$$

<u>Dokaz</u>: Teorema sledi na osnovu teoreme 1.2., teoreme 1.3. i teoreme 1.4. □

<u>Teorema 1.6</u>: Neka je M bilo koja tačka Hilbertovog prostora H odredjena vektorom

$$\vec{m} = \mu_1 e_1 + \mu_2 e_2 + \dots \quad \left(\sum_{i=1}^{+\infty} \mu_i^2 < +\infty \right) .$$

Tada je zatvoreni lineal $\overline{\mathcal{L}}_\infty$ ortogonalnih projekcija tačke M na beskonačno-dimenzione pljosni beskonačne kodimenzije jednak

$$\overline{\mathcal{L}} \left\{ e_r \mid (r=1,2,\dots) \wedge (\mu_r \neq 0) \right\} .$$

<u>Dokaz</u>: Na isti način kao u dokazu teoreme 1.1. dobijamo da su ortogonalne projekcije tačke M na pljosni $\Pi(x_1, x_{k+2}, x_{k+4}, x_{k+6}, \dots)$, $\Pi(x_2, x_{k+2}, x_{k+4}, x_{k+6}, \dots)$, $\dots$, $\Pi(x_{k+1}, x_{k+2}, x_{k+4}, x_{k+6}, \dots)$, odredjene tim redom vektorima

$$\vec{m}_1''' = \mu_1 e_1 + \mu_{k+2} e_{k+2} + \mu_{k+4} e_{k+4} + \dots$$

$$\vec{m}_2''' = \mu_2 e_2 + \mu_{k+2} e_{k+2} + \mu_{k+4} e_{k+4} + \dots$$

$$\vdots$$

$$\vec{m}_{k+1}''' = \mu_{k+1} e_{k+1} + \mu_{k+2} e_{k+2} + \mu_{k+4} e_{k+4} + \dots .$$

Kako je

$$(1) \quad \frac{k}{k+1} \vec{m}_1''' - \frac{1}{k+1} \vec{m}_2''' - \dots - \frac{1}{k+1} \vec{m}_{k+1}''' =$$

$$= \frac{k}{k+1}\mu_1 e_1 - \frac{1}{k+1}(\mu_2 e_2 + \dots + \mu_{k+1} e_{k+1}) \quad ,$$

to s obzirom da je

$$\left\| \frac{\mu_2 e_2 + \dots + \mu_{k+1} e_{k+1}}{k+1} \right\|^2 = \frac{\mu_2^2 + \dots + \mu_{k+1}^2}{(k+1)^2} \leqslant \frac{\|\vec{m}\|^2}{(k+1)^2} \quad ,$$

imamo iz (1) da je

$$\lim_{k\to\infty} \left(\frac{k}{k+1}\cdot\vec{m}_1''' - \frac{1}{k+1}\cdot\vec{m}_2''' - \dots - \frac{1}{k+1}\cdot\vec{m}_{k+1}''' \right) = \mu_1 e_1 \quad ,$$

odakle je $\qquad \mu_1 e_1 \in \overline{\mathcal{L}}_\infty$.

Analogno tome, dobijamo da je za svako r $(r>1)$

$$\mu_r e_r \in \overline{\mathcal{L}}_\infty \quad ,$$

što znači da je

(2) $$\overline{\mathcal{L}}\{e_r \mid (r=1,2,\dots)\wedge(\mu_r \neq 0)\} \subseteq \overline{\mathcal{L}}_\infty \quad .$$

Kako iz samih izraza za ortogonalne projekcije vektora $\vec{m}$ na beskonačno-dimenzione pljosni beskonačne kodimenzije sledi

(3) $$\overline{\mathcal{L}}_\infty \subseteq \{e_r \mid (r=1,2,\dots)\wedge(\mu_r \neq 0)\} \quad ,$$

to iz (2) i (3) imamo tvrdjenje teoreme. □

Kao direktnu posledicu teoreme 1.5. i teoreme 1.6. dobijamo sledeću teoremu:

Teorema 1.7: Neka je M bilo koja tačka Hilbertovog prostora H odredjena vektorom

$$\vec{m} = \mu_1 e_1 + \mu_2 e_2 + \dots \qquad \left(\sum_{i=1}^{+\infty}\mu_i^2 < +\infty\right) \quad .$$

Tada je zatvoreni lineal ortogonalnih projekcija tačke M na beskonačno-dimenzione pljosni iste kodimenzije (konačne ili beskonačno) jednak

$$\overline{\mathcal{L}}\{e_r \mid (r=1,2,\dots)\wedge(\mu_r \neq 0)\} \quad .$$

2. Zatvoreni lineal kotežišnih projekcija tačke na pljosni iste konačne dimenzije

Definicija 2.1: Neka je M bilo koja tačka Hilbertovog prostora H odredjena vektorom

$$\vec{m} = \mu_1 x_1 + \dots + \mu_k x_k + \dots \qquad \left(\sum_{i=1}^{+\infty} \mu_i^2 < +\infty \right).$$

Tada tačku M'' odredjenu vektorom

$$\vec{m}'' = \left(\mu_1 + \frac{1-(\mu_1+\dots+\mu_n)}{n}\right)x_1 + \dots + \left(\mu_n + \frac{1-(\mu_1+\dots+\mu_n)}{n}\right)x_n$$

nazivamo kotežišna projekcija tačke M na pljosan $\Pi(x_1,\dots,x_n)$ simpleksa $\mathcal{J}(x_1,x_2,\dots)$. □

Teorema 2.1: Neka je M bilo koja tačka Hilbertovog prostora H odredjena vektorom

$$\vec{m} = \mu_1 x_1 + \dots + \mu_k x_k + \dots \qquad \left(\sum_{i=1}^{+\infty} \mu_i^2 < +\infty \right).$$

Tada je zatvoreni lineal ${}^{n}\overline{\mathcal{L}}$ kotežišnih projekcija tačke M na pljosni dimenzije $n-1$ $(n-1 \geq 1)$ jednak celom prostoru H ,ako postoje bar dve medjusobno različite koordinate vektora $\vec{m}$ koje su različite od $\frac{1}{1-n}$.

Dokaz: Prema predpostavci teoreme,postoje bar dve koordinate vektora $\vec{m}$ koje su različite.Neka su to,naprimer, μ_1 i μ_2 .Vektori koji odredjuju projekcije tačke M redom na pljosni $(k \geq 3)$ $\Pi(x_1,x_k,\dots,x_{k+n-2})$, $\Pi(x_2,x_k,\dots,x_{k+n-2})$, $\Pi(x_1,x_{k+1},\dots,x_{k+n-1})$, $\Pi(x_2,x_{k+1},\dots,x_{k+n-2})$ su prema definiciji 2.1.

$$(1) \quad \vec{m}_1 = \left(\mu_1 + \frac{1-(\mu_1+\mu_k+\dots+\mu_{k+n-2})}{n}\right)x_1 +$$

$$+ (\mu_k + \frac{1-(\mu_1+\mu_k+\dots+\mu_{k+n-2})}{n})x_k + \dots +$$

$$+ (\mu_{k+n-2} + \frac{1-(\mu_1+\mu_k+\dots+\mu_{k+n-2})}{n})x_{k+n-2} \quad ,$$

$$(2) \quad \vec{m}_2 = (\mu_2 + \frac{1-(\mu_2+\mu_k+\dots+\mu_{k+n-2})}{n})x_2 +$$

$$+ (\mu_k + \frac{1-(\mu_2+\mu_k+\dots+\mu_{k+n-2})}{n})x_k + \dots +$$

$$+ (\mu_{k+n-2} + \frac{1-(\mu_2+\mu_k+\dots+\mu_{k+n-2})}{n})x_{k+n-2} \quad ,$$

$$\vec{m}_3 = (\mu_1 + \frac{1-(\mu_1+\mu_{k+1}+\dots+\mu_{k+n-1})}{n})x_1 +$$

$$+ (\mu_{k+1} + \frac{1-(\mu_1+\mu_{k+1}+\dots+\mu_{k+n-1})}{n})x_{k+1} + \dots +$$

$$+ (\mu_{k+n-1} + \frac{1-(\mu_1+\mu_{k+1}+\dots+\mu_{k+n-1})}{n})x_{k+n-1} \quad ,$$

$$\vec{m}_4 = (\mu_2 + \frac{1-(\mu_2+\mu_{k+1}+\dots+\mu_{k+n-1})}{n})x_2 +$$

$$+ (\mu_{k+1} + \frac{1-(\mu_2+\mu_{k+1}+\dots+\mu_{k+n-1})}{n})x_{k+1} + \dots +$$

$$+ (\mu_{k+n-1} + \frac{1-(\mu_2+\mu_{k+1}+\dots+\mu_{k+n-1})}{n})x_{k+n-1} \quad .$$

Sada je

$$\vec{m}_1 - \vec{m}_2 = (\mu_1 + \frac{1-(\mu_1+\mu_k+\dots+\mu_{k+n-2})}{n})x_1 -$$

$$- (\mu_2 + \frac{1-(\mu_2+\mu_k+\dots+\mu_{k+n-2})}{n})x_2 +$$

$$+ \frac{\mu_2 - \mu_1}{n}(x_k + \dots + x_{k+n-2}) \quad ,$$

$$\vec{m}_3 - \vec{m}_4 = (\mu_1 + \frac{1-(\mu_1+\mu_{k+1}+\dots+\mu_{k+n-1})}{n})x_1 -$$

$$- (\mu_2 + \frac{1-(\mu_2+\mu_{k+1}+\dots+\mu_{k+n-1})}{n})x_2 +$$

$$+ \frac{\mu_1 - \mu_2}{n}(x_{k+1} + \dots + x_{k+n-1}) \quad ,$$

pa je

$$(3) \quad (\vec{m}_1 - \vec{m}_2) - (\vec{m}_3 - \vec{m}_4) = \frac{\mu_{k+n-1} - \mu_k}{n}(x_1 - x_2) +$$

$$+ \frac{\mu_2 - \mu_1}{n}(x_k - x_{k+n-1}) \quad .$$

Odavde je, s obzirom na predpostavku $\mu_1 \neq \mu_2$,

$$x_k - x_{k+n-1} = \frac{n}{\mu_2 - \mu_1}(\vec{m}_1 - \vec{m}_2 - \vec{m}_3 + \vec{m}_4 +$$

$$+ \frac{\mu_k - \mu_{k+n-1}}{n}(x_1 - x_2)) \quad ,$$

što znači da $x_k - x_{k+n-1}$ $(k \geq 3)$ pripada zatvorenom linealu kotežišnih projekcija tačke M na $(n-1)$-dimenzione pljosni simpleksa i vektora $x_1 - x_2$. Označimo ovaj zatvoreni lineal sa ${}^n\overline{\mathcal{L}}'$. Prema tome

$$x_k - x_{k+2(n-1)} = (x_k - x_{k+n-1}) + (x_{k+n-1} - x_{k+n-1+n-1})$$

takodje pripada ${}^n\overline{\mathcal{L}}'$, itd. Otuda imamo da je za $k=3$,

$$\overline{\mathcal{L}}(x_3 - x_{3+n-1}, x_3 - x_{3+2(n-1)} , x_3 - x_{3+3(n-1)} ,\dots) \subseteq {}^n\overline{\mathcal{L}}' .$$

Kako je, prema teoremi 0.2.(III) i teoremi 0.3.(III),

$$\overline{\mathcal{L}}(x_3 - x_{3+n-1} , x_3 - x_{3+2(n-1)} , x_3 - x_{3+3(n-1)} ,\dots) =$$

$$= \overline{\mathcal{L}}(x_3 , x_{3+n-1} , x_{3+2(n-1)} , x_{3+3(n-1)} ,\dots) \quad ,$$

to je

$$x_3 , x_{3+n-1}, x_{3+2(n-1)} , x_{3+3(n-1)} ,\dots \in {}^n\overline{\mathcal{L}}' .$$

Slično tome dobijamo za $k=4$

$$x_4\ ,\ x_{4+n-1}\ ,\ x_{4+2(n-1)}\ ,\ x_{4+3(n-1)}\ ,\ldots \in {}^n\overline{\mathcal{L}}'$$

itd. ,što znači da je

$$x_k \in {}^n\overline{\mathcal{L}}' \qquad (k \geq 3) \quad ,$$

odnosno

$$(4) \qquad \overline{\mathcal{L}}(x_3,x_4,\ldots) \subseteq {}^n\overline{\mathcal{L}}' \quad .$$

Iz relacije (1) sledi sada da je

$$(5) \qquad (\mu_1 + \frac{1-(\mu_1+\mu_k+\ldots+\mu_{k+n-2})}{n})x_1 = \vec{m}_1 -$$

$$- (\mu_k + \frac{1-(\mu_1+\mu_k+\ldots+\mu_{k+n-2})}{n})x_k - \ldots -$$

$$- (\mu_{k+n-2} + \frac{1-(\mu_1+\mu_k+\ldots+\mu_{k+n-2})}{n})x_{k+n-2} \in {}^n\overline{\mathcal{L}} + \overline{\mathcal{L}}(x_3,x_4,\ldots).$$

Na isti način iz relacije (2) imamo

$$(6) \qquad (\mu_2 + \frac{1-(\mu_2+\mu_k+\ldots+\mu_{k+n-2})}{n})x_2 = \vec{m}_2 -$$

$$- (\mu_k + \frac{1-(\mu_2+\mu_k+\ldots+\mu_{k+n-2})}{n})x_k - \ldots -$$

$$- (\mu_{k+n-2} + \frac{1-(\mu_2+\mu_k+\ldots+\mu_{k+n-2})}{n})x_{k+n-2} \in {}^n\overline{\mathcal{L}} + \overline{\mathcal{L}}(x_3,x_4,\ldots).$$

Kako je

$$(\mu_1 + \frac{1-(\mu_1+\mu_k+\ldots+\mu_{k+n-2})}{n}) - (\mu_2 + \frac{1-(\mu_2+\mu_k+\ldots+\mu_{k+n-2})}{n}) =$$

$$= \frac{n-1}{n}(\mu_1 - \mu_2) \neq 0 \quad ,$$

to znači da je bar jedan od koeficijenata

$$(\mu_1 + \frac{1-(\mu_1+\mu_k+\ldots+\mu_{k+n-2})}{n}) \ ,\ (\mu_2 + \frac{1-(\mu_2+\mu_k+\ldots+\mu_{k+n-2})}{n})$$

različit od nule.

Dalje, iz relacije (3) sledi

$$\frac{\mu_{k+n-1}-\mu_k}{n}(x_1-x_2) = (\vec{m}_1-\vec{m}_2)-(\vec{m}_3-\vec{m}_4)-$$
$$-\frac{\mu_2-\mu_1}{n}(x_k-x_{k+n-1}) \ ,$$

pa važi

$$(7)\qquad \frac{\mu_{k+n-1}-\mu_k}{n}(x_1-x_2)\in {}^n\overline{\mathcal{L}}+\overline{\mathcal{L}}(x_3,x_4,\dots) \ .$$

Predpostavimo sada da je za svako $k\geqslant 3$

$$\mu_{k+n-1}-\mu_k = 0 \ .$$

To znači da je za $k=3$,

$$\mu_3 = \mu_{3+n-1} = \mu_{3+2(n-1)} = \dots \ ,$$

odakle sledi $\mu_3 = 0$, zbog $\|\vec{m}\|<+\infty$. Itd. Dobijamo,

$$\mu_3 = \mu_4 = \dots = 0 \ .$$

U tom slučaju je

$$\left(\mu_1+\frac{1-(\mu_1+\mu_k+\dots+\mu_{k+n-2})}{n}\right) = \frac{n-1}{n}\mu_1+\frac{1}{n} \ ,$$

$$\left(\mu_2+\frac{1-(\mu_2+\mu_k+\dots+\mu_{k+n-2})}{n}\right) = \frac{n-1}{n}\mu_2+\frac{1}{n} \ ,$$

što s obzirom na predpostavku $\mu_1\neq\frac{1}{1-n}$, $\mu_2\neq\frac{1}{1-n}$,

daje iz relacija (5) i (6)

$$x_1,\ x_2\in {}^n\overline{\mathcal{L}}+\overline{\mathcal{L}}(x_3,x_4,\dots) \ .$$

Ako je, pak, za neko $k\geqslant 3$

$$\mu_{k+n-1}-\mu_k\neq 0 \ ,$$

onda iz relacije (7) sledi da je

$$(x_1-x_2)\in {}^n\overline{\mathcal{L}}+\overline{\mathcal{L}}(x_3,x_4,\dots) \ ,$$

što zajedno sa relacijama (5) i (6), a s obzirom na činjenicu da je bar jedan od koeficijenata

$$(\mu_1 + \frac{1-(\mu_1+\mu_k+\dots+\mu_{k+n-2})}{n}) \ , \ (\mu_2 + \frac{1-(\mu_2+\mu_k+\dots+\mu_{k+n-2})}{n})$$

različit od nule,daje

(8) $$x_1 \ , \ x_2 \in {}^n\overline{\mathcal{L}} + \overline{\mathcal{L}}(x_3,x_4,\dots) \quad .$$

Iz (8) ,pošto $x_1,x_2,x_3,x_4,\dots$ čine ortogonalan sistem, sledi

(9) $$x_1 \ , \ x_2 \in {}^n\overline{\mathcal{L}} \quad ,$$

pa je,zbog definicije ${}^n\overline{\mathcal{L}}'$,sada

$$ {}^n\overline{\mathcal{L}}' \subseteq {}^n\overline{\mathcal{L}} \quad ,$$

odakle,prema (4) imamo

(10) $$\overline{\mathcal{L}}(x_3,x_4,\dots) \subseteq {}^n\overline{\mathcal{L}} \quad .$$

Konačno,na osnovu (9) i (10) je

(11) $$\overline{\mathcal{L}}(x_1,x_2,x_3,x_4,\dots) \subseteq {}^n\overline{\mathcal{L}}$$

pa s obzirom da $x_1,x_2,\dots$ generišu ceo prostor H ,dobijamo iz (11) teoremu. □

Teorema 2.2: Neka je M bilo koja tačka Hilbertovog prostora H odredjena vektorom

$$\vec{m} = \mu_1 x_1 + \dots + \mu_k x_k + \dots \qquad \left(\sum_{i=1}^{+\infty} \mu_i^2 < +\infty \right) \quad .$$

Tada je zatvoreni lineal ${}^n\overline{\mathcal{L}}$ kotežišnih projekcija tačke M na pljosni dimenzije n-1 $(n-1 \geqslant 1)$ jednak celom prostoru H ,ako postoje bar dve medjusobno različite koordinate vektora $\vec{m}$ i treća koja je različita od nule.

Dokaz: Dokaz je identičan sa dokazom teoreme 2.1.,samo što dolazimo do zaključka da je uvek bar za jedno k $(k \geqslant 3)$,

$$\mu_{k+n-1} - \mu_k \neq 0 \quad .$$

Jer ako to ne bi bio slučaj,onda bi kao u dokazu teoreme 2.1.,dobili

$$\mu_3 = \mu_4 = \dots = 0 \quad ,$$

a to je u suprotnosti sa predpostavkom da postoji treća koordinata vektora $\vec{m}$ koja je različita od nule.Dakle, iz (7) u dokazu teoreme 2.1. imamo,prema tome,

$$(x_1 - x_2) \in {}^n\overline{\mathcal{L}} + \overline{\mathcal{L}}(x_3, x_4, \dots)$$

i dokaz dalje teče kao dokaz teoreme 2.1. □

<u>Teorema 2.3</u>: Zatvoreni lineal ${}^n\overline{\mathcal{L}}(0)$ kotežišnih projekcija tačke 0 na pljosni dimenzije $n-1$ $(n-1 \geqslant 1)$ simpleksa,jednak je celom Hilbertovom prostoru.

<u>Dokaz</u>: Iz definicije 2.1. sledi da je kotežišna projekcija tačke 0 na pljosan $\Pi(x_{j_1}, \dots, x_{j_n})$ odredjena vektorom

$$\vec{m}_{j_1 \dots j_n} = \frac{1}{n}(x_{j_1} + \dots + x_{j_n}) \quad .$$

Dakle,

$$x_1 - x_{1+n} = n(\vec{m}_{1 \dots n} - \vec{m}_{2 \dots (n+1)}) \in {}^n\overline{\mathcal{L}}(0) \quad ,$$

$$x_{1+n} - x_{1+2n} = n(\vec{m}_{(1+n) \dots 2n} - \vec{m}_{(2+n) \dots (1+2n)}) \in {}^n\overline{\mathcal{L}}(0) \quad ,$$

pa

$$x_1 - x_{1+2n} = (x_1 - x_{1+n}) + (x_{1+n} - x_{1+2n}) \in {}^n\overline{\mathcal{L}}(0) \quad .$$

Na isti način je

$$(x_1 - x_{1+3n}) \in {}^n\overline{\mathcal{L}}(0) \quad ,$$

itd. Prema tome,

$$\overline{\mathcal{L}}(x_1 - x_{1+n} , x_1 - x_{1+2n} , x_1 - x_{1+3n} , \dots) \subseteq {}^n\overline{\mathcal{L}}(0) \quad ,$$

što s obzirom na teoremu 0.2.(III) i teoremu 0.3.(III) daje

$$\overline{\mathcal{L}}(x_1 , x_{1+n} , x_{1+2n} , x_{1+3n} , \dots) \subseteq {}^n\overline{\mathcal{L}}(0) \quad ,$$

pa je $x_1 \in {}^n\overline{\mathcal{L}}(0)$ .Isto tako se dobija $x_2 \in {}^n\overline{\mathcal{L}}(0)$, itd. Dakle,

$$x_1 \, , \, x_2 \, , \ldots \in {}^n\overline{\mathcal{L}}(0) \quad ,$$

odakle sledi tvrdjenje. □

Teorema 2.4: Zatvoreni lineal ${}^n\overline{\mathcal{L}}$ kotežišnih projekcija tačke M ,odredjene vektorom

$$\vec{m} = \mu_1 x_1 + \frac{1}{1-n}\cdot x_2 \qquad (\mu_1 \neq \frac{1}{1-n} \, , \, 0 \,) \, ,$$

na pljosni dimenzije $n-1$ $(n-1 \geq 1)$,jednak je celom Hilbertovom prostoru.

Dokaz: Na isti način kao u dokazu teoreme 2.1. dobijamo

$$(1) \qquad \overline{\mathcal{L}}(x_3,x_4,\ldots) \subseteq {}^n\overline{\mathcal{L}} \quad .$$

Kako je za $k \geq 3$,

$$(\mu_1 + \frac{1-(\mu_1+\mu_k+\ldots+\mu_{k+n-2})}{n}) = \frac{n-1}{n}\mu_1 + \frac{1}{n} \neq 0 \quad ,$$

jer je $\mu_1 \neq \frac{1}{1-n}$,to iz relacije (5) u dokazu teoreme 2.1.,sledi

$$(2) \qquad x_1 \in {}^n\overline{\mathcal{L}} + \overline{\mathcal{L}}(x_3,x_4,\ldots) \quad .$$

Dalje,kotežišna projekcija tačke M na pljosan $\Pi(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ je odredjena vektorom

$$\vec{m}_5 = (\mu_1 + \frac{1-(\mu_1+\frac{1}{1-n})}{n})x_1 + (\frac{1}{1-n} + \frac{1-(\mu_1+\frac{1}{1-n})}{n})x_2 + \frac{1-(\mu_1+\frac{1}{1-n})}{n}(x_3+\ldots+x_n) \quad ,$$

pa je otuda

$$-\frac{\mu_1}{n}\cdot x_2 = \vec{m}_5 - (\mu_1 + \frac{1-(\mu_1+\frac{1}{1-n})}{n})x_1 -$$

$$- \frac{1-(\mu_1+\frac{1}{1-n})}{n}(x_3+\ldots+x_n) \quad ,$$

što znači da je, zbog predpostavke teoreme da važi $\mu_1 \neq 0$,

(3) $$x_2 \in {}^n\overline{\mathcal{L}} + \overline{\mathcal{L}}(x_3,x_4,\ldots) \quad .$$

Zbog ortogonalnosti sistema $x_1,x_2,\ldots$, sledi iz (2) i (3)

(4) $$x_1 \ , \ x_2 \in {}^n\overline{\mathcal{L}} \quad ,$$

a iz (1) , s obzirom na (4) ,

(5) $$\overline{\mathcal{L}}(x_3,x_4,\ldots) \subseteq {}^n\overline{\mathcal{L}} \quad ,$$

pa iz (4) i (5) imamo teoremu. $\square$

<u>Teorema 2.5</u>: Neka je M tačka Hilbertovog prostora H odredjena vektorom

$$\vec{m} = \mu x_1$$

i ${}^n\overline{\mathcal{L}}$ zatvoreni lineal kotežišnih projekcija tačke M na pljosni dimenzije $n-1$ $(n-1 \geq 1)$ simpleksa. Tada je ${}^n\overline{\mathcal{L}}$ ceo prostor H ako je $\mu \neq \frac{1}{1-n}$, odnosno $\overline{\mathcal{L}}(x_2,x_3,\ldots)$ ako je $\mu = \frac{1}{1-n}$.

<u>Dokaz</u>: 1° Predpostavimo da je $\mu \neq \frac{1}{1-n}$.

Na osnovu definicije 2.1., iz $x_1 \notin \{x_{j_1},\ldots,x_{j_n}\}$ sledi da je kotežišna projekcija tačke M na pljosan $\Pi(x_{j_1},\ldots,x_{j_n})$ odredjena vektorom

$$\vec{m}_{j_1\ldots j_n} = \frac{1}{n}(x_{j_1}+\ldots+x_{j_n}) \quad ,$$

pa se istim putem kao u dokazu teoreme 2.3. dobija

(1) $$\overline{\mathcal{L}}(x_2,x_3,\ldots) \subseteq {}^n\overline{\mathcal{L}} \quad .$$

S druge strane, kako je

$$\vec{m}_{1\ldots n} = (\mu + \frac{1-\mu}{n})x_1 + \frac{1-\mu}{n}(x_2 + \ldots + x_n) \quad ,$$

to je

$$(\frac{n-1}{n}\mu + \frac{1}{n})x_1 = \vec{m}_{1\ldots n} - \frac{1-\mu}{n}(x_2 + \ldots + x_n) \quad ,$$

pa s obzirom da je $\mu \neq \frac{1}{1-n}$,sledi

$$x_1 \in {}^n\overline{\mathcal{L}} + \overline{\mathcal{L}}(x_2, x_3, \ldots) \quad ,$$

odakle je prema (1)

$$x_1 \in {}^n\overline{\mathcal{L}} \quad ,$$

što zajedno sa (1) znači da je ${}^n\overline{\mathcal{L}}$ ceo Hilbertov prostor.

2^0 Predpostavimo da je $\mu = \frac{1}{1-n}$.

Isto kao u delu pod 1^0 ,dobijamo

$$\overline{\mathcal{L}}(x_2, x_3, \ldots) \subseteq {}^n\overline{\mathcal{L}} \quad . \tag{2}$$

Medjutim,kotežišne projekcije tačke M na pljosni koje sadrže x_1 imaju sada,prema definiciji 2.1.,zbog uslova $\mu = \frac{1}{1-n}$,koeficijent uz x_1 jednak nuli.Otuda nijedna od kotežišnih projekcija tačke M ne zavisi od x_1 ,pa je

$${}^n\overline{\mathcal{L}} \subseteq \overline{\mathcal{L}}(x_2, x_3, \ldots) \quad . \tag{3}$$

Iz (2) i (3) je

$${}^n\overline{\mathcal{L}} = \overline{\mathcal{L}}(x_2, x_3, \ldots) \quad ,$$

što je i trebalo dokazati. □

<u>Teorema 2.6</u>: Neka je M tačka Hilbertovog prostora H odredjena vektorom

$$\vec{m} = \mu(x_1 + x_2)$$

i ${}^n\overline{\mathcal{L}}$ zatvoreni lineal kotežišnih projekcija tačke M na pljosni dimenzije n-1 ($n-1 \geq 1$) simpleksa.Tada je

${}^{n}\overline{\mathcal{L}}$ ceo prostor H ako je $\mu \neq \frac{1}{1-n}$,odnosno

$\overline{\mathcal{L}}(x_1 + x_2\ , x_3\ , x_4\ ,\dots)$ ako je $\mu = \frac{1}{1-n}$.

Dokaz: 1° Predpostavimo da je $\mu \neq \frac{1}{1-n}$.

Kao u delu 1° dokaza teoreme 2.5. ,imamo da je

$$\overline{\mathcal{L}}(x_3,x_4,\dots) \subseteq {}^{n}\overline{\mathcal{L}} \quad .$$

Uzimajući prvo projekciju tačke M na pljosan koja sadrži x_1 a ne sadrži x_2 ,dobijamo,zbog uslova $\mu \neq \frac{1}{1-n}$,isto kao u delu 1° dokaza teoreme 2.5., da je $x_1 \in {}^{n}\overline{\mathcal{L}}$ .Uzimajući zatim projekciju tačke M na pljosan koja sadrži x_2 a ne sadrži x_1 ,analogno dobijamo $x_2 \in {}^{n}\overline{\mathcal{L}}$ .Dakle,

$$\overline{\mathcal{L}}(x_1,x_2,x_3,x_4,\dots) \subseteq {}^{n}\overline{\mathcal{L}} \quad ,$$

pa je ${}^{n}\overline{\mathcal{L}}$ ceo Hilbertov prostor.

2° Predpostavimo da je $\mu = \frac{1}{1-n}$.

Isto kao u delu 1° dobijamo

$$(1) \qquad \overline{\mathcal{L}}(x_3,x_4,\dots) \subseteq {}^{n}\overline{\mathcal{L}} \quad .$$

Uzimajući projekcije na pljosni koje sadrže samo x_1 a ne x_2 i one koje sadrže x_2 a ne sadrže x_1 , dobijamo da one ne zavise ni od x_1 ni od x_2 ,zbog uslova $\mu = \frac{1}{1-n}$ .S druge strane,uzimajući projekciju na pljosan $\Pi(x_1,x_2,x_{j_3},\dots,x_{j_n})$,imamo

$$\vec{m}_{12j_3\dots j_n} = \left(\mu + \frac{1-2\mu}{n}\right)x_1 + \left(\mu + \frac{1-2\mu}{n}\right)x_2 + \frac{1-2\mu}{n}\left(x_{j_3} + \dots + x_{j_n}\right) \quad ,$$

odakle je

$$\frac{-\frac{1}{1-n}}{n}(x_1+x_2)=\vec{m}_{12j_3\ldots j_n}-\frac{1-\frac{2}{1-n}}{n}(x_{j_3}+\ldots+x_{j_n}) \quad ,$$

pa je

$$(x_1+x_2)\in {}^n\overline{\mathcal{L}} \quad ,$$

što zajedno sa (1) daje

$$\overline{\mathcal{L}}(x_1+x_2,x_3,x_4,\ldots)\subseteq {}^n\overline{\mathcal{L}} \quad .$$

Kako je,očigledno,

$$(2) \qquad {}^n\overline{\mathcal{L}}\subseteq \overline{\mathcal{L}}(x_1+x_2,x_3,x_4,\ldots) \quad ,$$

to iz (1) i (2) sledi

$${}^n\overline{\mathcal{L}}=\overline{\mathcal{L}}(x_1+x_2,x_3,x_4,\ldots) \quad . \square$$

Teorema 2.7: Neka je M tačka Hilbertovog prostora H odredjena vektorom

$$\vec{m}=\mu(x_1+\ldots+x_k) \qquad (k\geqslant 3)$$

i ${}^n\overline{\mathcal{L}}$ zatvoreni lineal kotežišnih projekcija tačke M na pljosni dimenzije $n-1$ $(n-1\geqslant 1)$ simpleksa.Tada je ${}^n\overline{\mathcal{L}}$ ceo prostor H .

Dokaz: 1^o Predpostavimo da je $\mu\neq\frac{1}{1-n}$.

Kao u delu 1^o dokaza teoreme 2.6.,uzimajući pljosni koje ne sadrže vektore $x_1,\ldots,x_k$ dobijamo da je

$$(1) \qquad \overline{\mathcal{L}}(x_{k+1},x_{k+2},\ldots)\subseteq {}^n\overline{\mathcal{L}} \quad .$$

Zatim,koristeći uslov $\mu\neq\frac{1}{1-n}$ i uzimajući pljosni koje sadrže samo x_1 a ne sadrže $x_2,\ldots,x_k$,pljosni koje sadrže samo x_2 a ne sadrže $x_1,x_3,\ldots,x_k$ itd., imamo da $x_1\in {}^n\overline{\mathcal{L}}+\overline{\mathcal{L}}(x_{k+1},x_{k+2},\ldots)$,

$$x_2\in {}^n\overline{\mathcal{L}}+\overline{\mathcal{L}}(x_{k+1},x_{k+2},\ldots) ,\ldots, x_k\in {}^n\overline{\mathcal{L}}+\overline{\mathcal{L}}(x_{k+1},x_{k+2},\ldots) ,$$

odnosno

(2) $$\overline{\mathcal{L}}(x_1,\dots,x_k)\subseteq {}^n\overline{\mathcal{L}} \qquad ,$$

pa iz (1) i (2) sledi da je ${}^n\overline{\mathcal{L}}$ ceo prostor H .

2^o Predpostavimo da je $\mu = \frac{1}{1-n}$.

Kao u delu 1^o dobijamo

(3) $$\overline{\mathcal{L}}(x_{k+1},x_{k+2},\dots)\subseteq {}^n\overline{\mathcal{L}} \qquad .$$

Dalje,kao u delu 2^o dokaza teoreme 2.6. imamo

$$x_1+x_2\ ,\ x_1+x_3\ ,\dots,\ x_1+x_k\ ,\ x_2+x_3\ ,\dots,$$

$$,\ x_2+x_k\ ,\dots,\ x_{k-1}+x_k\in {}^n\overline{\mathcal{L}}\ .$$

Medjutim,

$$x_1-x_3 = (x_1+x_2)-(x_2+x_3)\in {}^n\overline{\mathcal{L}}\ ,$$

pa

$$x_1 = \tfrac{1}{2}((x_1+x_3)+(x_1-x_3))\in {}^n\overline{\mathcal{L}} \qquad .$$

Sada

$$x_2 = (x_1+x_2)-x_1\in {}^n\overline{\mathcal{L}} \qquad ,$$

$$\vdots$$

$$x_k = (x_1+x_k)-x_1\in {}^n\overline{\mathcal{L}} \qquad ,$$

što znači da je

(4) $$\overline{\mathcal{L}}(x_1,\dots,x_k)\subseteq {}^n\overline{\mathcal{L}} \qquad .$$

Iz (3) i (4) dobijamo da je ${}^n\overline{\mathcal{L}}$ ceo Hilbertov prostor. Kako smo u oba slučaja dobili da je ${}^n\overline{\mathcal{L}}$ ceo prostor H , time je teorema u potpunosti dokazana. □

Na osnovu teorema 2.1. , 2.2. , 2.3. , 2.4. , 2.5. , 2.6. i 2.7. imamo sledeću teoremu:

Teorema 2.8: Neka je M proizvoljna tačka Hilbertovog prostora H odredjena vektorom $\vec{m}$ i ${}^n\overline{\mathcal{L}}$ zatvoreni lineal kotežišnih projekcija tačke M na sve pljosni dimenzije $n-1$ $(n-1\geqslant 1)$ simpleksa $\mathcal{J}(x_1,x_2,\dots)$. ${}^n\overline{\mathcal{L}}$ je uvek ceo prostor H ,izuzev u sledećim slučajevima

1° $\vec{m} = \frac{1}{1-n}\cdot x_k$ $(k=1,2,\dots)$ .Tada je

$$^n\overline{\mathcal{L}} = \overline{\mathcal{L}}(\{x_1,x_2,\dots\}\setminus\{x_k\}) \ .$$

2° $\vec{m} = \frac{1}{1-n}(x_r + x_s)$ $(r<s\ ;\ r=1,2,\dots\ ;\ s=2,3,\dots)$.

Tada je

$$^n\overline{\mathcal{L}} = \overline{\mathcal{L}}(\{\{x_1,x_2,\dots\}\setminus\{x_r,x_s\}\}\cup\{x_r+x_s\}) \ . \ \square$$

3. Kotežišna projekcija tačke na konačno-dimenzione pljosni. Granične vrednosti

Teorema 3.1: Neka je M proizvoljna tačka Hilbertovog prostora H odredjena vektorom

$$\vec{m} = \sum_{k=1}^{+\infty}\mu_k x_k \qquad \left(-\infty<\sum_{k=1}\mu_k<+\infty\right) \ .$$

Tada je

$$\lim_{n\to\infty}\vec{m}_{j_1(n)\dots j_n(n)} = \vec{m} \qquad ,$$

gde je niz $(j_1(n),\dots,j_n(n))$ takav da je

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\mu^2_{j_k(n)}\lambda^2_{j_k(n)} = \sum_{k=1}^{+\infty}\mu_k^2\lambda_k^2$$

i $\vec{m}_{j_1(n)\dots j_n(n)}$ vektor kojim je odredjena kotežišna projekcija tačke M na pljosan $\Pi(x_{j_1(n)},\dots,x_{j_n(n)})$.

Dokaz: Na osnovu definicije 2.1. imamo

$$\vec{m}_{j_1(n)\dots j_n(n)} = \sum_{k=1}^{n}\left(\mu_{j_k(n)} + \frac{1-(\mu_{j_1(n)}+\dots+\mu_{j_n(n)})}{n}\right)x_{j_k(n)} \ .$$

Otuda je

$$(1)\quad \left\| \vec{m} - \vec{m}_{j_1(n)\dots j_n(n)} \right\|^2 = \frac{\left(1-(\mu_{j_1(n)}+\dots+\mu_{j_n(n)})\right)^2}{n^2} \cdot$$

$$\cdot (\lambda^2_{j_1(n)} + \dots + \lambda^2_{j_n(n)}) + \sum_{\substack{r=1 \\ r \notin \{j_1(n),\dots,j_n(n)\}}}^{+\infty} \mu_r^2 \lambda_r^2 \quad .$$

S obzirom da za simpleks $\mathcal{S}(x_1,x_2,\dots)$ važi $|\lambda_i| \leq \beta$ $(i=1,2,\dots)$,dobijamo

$$(2)\quad \frac{\left(1-(\mu_{j_1(n)}+\dots+\mu_{j_n(n)})\right)^2}{n^2} (\lambda^2_{j_1(n)} + \dots + \lambda^2_{j_n(n)}) \leq$$

$$\leq \frac{\left(1-(\mu_{j_1(n)}+\dots+\mu_{j_n(n)})\right)^2}{n} \cdot \beta^2 \quad .$$

Pošto iz predpostavke sledi $\left| \sum_{k=1}^{+\infty} \mu_k \right| < +\infty$,to je izraz u brojiocu razlomka na desnoj strani relacije (2) ograničen,pa je

$$(3)\quad \lim_{n\to\infty} \frac{\left(1-(\mu_{j_1(n)}+\dots+\mu_{j_n(n)})\right)^2}{n^2} (\lambda^2_{j_1(n)} + \dots + \lambda^2_{j_n(n)}) = 0 \; .$$

Kako je

$$\sum_{\substack{r=1 \\ r \notin \{j_1(n),\dots,j_n(n)\}}}^{+\infty} \mu_r^2 \lambda_r^2 = \sum_{k=1}^{+\infty} \mu_k^2 \mu_k^2 - \sum_{k=1}^{n} \mu^2_{j_k(n)} \lambda^2_{j_k(n)} \quad ,$$

to je s obzirom na predpostavku

$$(4)\quad \lim_{n\to\infty} \sum_{\substack{r=1 \\ r \notin \{j_1(n),\dots,j_n(n)\}}}^{+\infty} \mu_r^2 \lambda_r^2 = \sum_{k=1}^{+\infty} \mu_k^2 \lambda_k^2 - \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \mu^2_{j_k(n)} \lambda^2_{j_k(n)} = 0.$$

Ako u (1) pustimo da n teži beskonačnosti,onda zbog (3) i (4) sledi

$$\lim_{n\to\infty} \left\| \vec{m} - \vec{m}_{j_1(n)\dots j_n(n)} \right\|^2 = 0 \quad ,$$

odakle je

$$\lim_{n\to\infty} \vec{m}_{j_1(n)\dots j_n(n)} = \vec{m} \quad . \square$$

Teorema 3.2: Neka je M proizvoljna tačka Hilbertovog prostora H odredjena vektorom

$$\vec{m} = \sum_{k=1}^{+\infty} \mu_k x_k \quad .$$

Ako je $\mu_{j_1} + \dots + \mu_{j_s} = 1 \quad (s \leq n-1)$,onda je

$$\lim_{k\to\infty} \vec{m}_{j_1\dots j_s j_k \dots j_{k+n-s-1}} = \sum_{r=1}^{s} \mu_{j_r} x_{j_r} \quad ,$$

gde je $\lim_{k\to\infty} j_k = +\infty$ i $\vec{m}_{j_1\dots j_s j_k \dots j_{k+n-s-1}}$ vektor kojim je odredjena kotežišna projekcija tačke M na pljosan $\Pi(x_{j_1},\dots,x_{j_s},x_{j_k},\dots,x_{j_{k+n-s-1}})$.

Dokaz: Na osnovu definicije 2.1.,s obzirom da je

$$\mu_{j_1} + \dots + \mu_{j_s} = 1 \quad ,$$

imamo

$$(1) \quad \vec{m}_{j_1\dots j_s j_k \dots j_{k+n-s-1}} = \sum_{r=1}^{s} \left(\mu_{j_r} - \frac{\mu_{j_k} + \dots + \mu_{j_{k+n-s-1}}}{n}\right) x_{j_r} +$$
$$+ \sum_{t=0}^{n-s-1} \left(\mu_{j_{k+t}} - \frac{\mu_{j_k} + \dots + \mu_{j_{k+n-s-t}}}{n}\right) x_{j_{k+t}} \quad .$$

Pošto za simpleks $\mathcal{S}(x_1,x_2,\dots)$ važi $0 < \alpha^2 \leq \lambda_i^2$ $(i=1,2,\dots)$ i kako je $\sum_{i=1}^{+\infty} \mu_i^2 \lambda_i^2 = \|\vec{m}\|^2 < +\infty$,

dobijamo $\lim_{i\to\infty} \mu_i = 0$ .Otuda je,zbog predpostavke,

$$(2) \qquad \lim_{k\to\infty} \mu_{j_k} = 0 \quad ,$$

odnosno

$$(3)\quad \lim_{k\to\infty}(\mu_{j_k}+\ldots+\mu_{j_{n+k-s-1}}) = \lim_{k\to\infty}\mu_{j_k}+\ldots+$$

$$+\lim_{k\to\infty}\mu_{j_{n+k-s-1}} = 0 \quad .$$

Kako je iz (1)

$$(4)\quad \left\|\vec{m}_{j_1\ldots j_s j_k\ldots j_{k+n-s-1}} - \sum_{r=1}^{s}\mu_{j_r}x_{j_r}\right\|^2 =$$

$$= \frac{1}{n^2}\sum_{r=1}^{s}(\mu_{j_k}+\ldots+\mu_{j_{k+n-s-1}})^2\lambda_{j_r}^2 +$$

$$+\sum_{t=0}^{n-s-1}\left(\mu_{j_{k+t}} - \frac{\mu_{j_k}+\ldots+\mu_{j_{k+n-s-1}}}{n}\right)^2\lambda_{j_{k+t}}^2 \;,$$

to ako u (4) pustimo da k teži beskonačnosti,dobijamo, zbog (2) i (3) ,s obzirom da obe sume na desnoj strani relacije (4) imaju konačno mnogo sabiraka,da je

$$\lim_{k\to\infty}\left\|\vec{m}_{j_1\ldots j_s j_k\ldots j_{k+n-s-1}} - \sum_{r=1}^{s}\mu_{j_r}x_{j_r}\right\|^2 = 0 \quad ,$$

Otuda,pošto je $\sum_{r=1}^{s}\mu_{j_r}x_{j_r}$ konstantan vektor,sledi tvrdjenje teoreme. □

4. Ortogonalna projekcija tačke na konačno-dimenzione pljosni

Ovde ćemo dati jednu primenu rezultata dobijenih u tačkama 2. i 3. ove glave,na primeru ortogonalnih projekcija.S tim u vezi,imamo sledeću lemu:

Lema 4.1: Neka je M proizvoljna tačka Hilbertovog prostora H odredjena vektorom

$$\vec{m} = \mu_1 x_1 +\ldots+\mu_k x_k +\ldots \qquad \left(\sum_{i=1}^{+\infty}\mu_i^2 < +\infty\right) \quad .$$

Tada je

$$\vec{m}' = \left(\mu_1 + \frac{1-(\mu_1+\dots+\mu_n)}{\lambda_1^2 \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\lambda_i^2}}\right)x_1 + \dots + \left(\mu_n + \frac{1-(\mu_1+\dots+\mu_n)}{\lambda_n^2 \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\lambda_i^2}}\right)x_n$$

vektor kojim je odredjena ortogonalna projekcija tačke M na pljosan $\Pi(x_1,\dots,x_n)$ simpleksa $\mathcal{J}(x_1,x_2,\dots)$.

<u>Dokaz</u>: Neka je $\vec{m}' = \varphi_1 x_1 + \dots + \varphi_n x_n$.

S obzirom da je

$$\|\vec{m} - \vec{m}'\| = \min\left\{\|m - y\| \,\middle|\, y \in \Pi(x_1,\dots,x_n)\right\}$$

i $\varphi_1 + \dots + \varphi_n = 1$,to su $\varphi_1,\dots,\varphi_n$ vrednosti za koje funkcija

$$\|m - y\|^2 = (y_1-\mu_1)^2\lambda_1^2 + \dots + (y_n-\mu_n)^2\lambda_n^2 + \mu_{n+1}^2\lambda_{n+1}^2 + \dots$$

dostiže minimum pod uslovom $y_1+\dots+y_n = 1$.

Dakle,formirajmo funkciju

$$f(y_1,\dots,y_n) = (y_1-\mu_1)^2\lambda_1^2 + \dots + (y_n-\mu_n)^2\lambda_n^2 + \tau(y_1+\dots+y_n - 1) \quad .$$

Pošto je

$$0 = \frac{\partial f}{\partial y_s} = 2\lambda_s^2(y_s-\mu_s) + \tau \qquad (s=1,\dots,n)$$

to je

$$y_s = \mu_s - \frac{\tau}{2\lambda_s^2} \qquad (s=1,\dots,n) \quad ,$$

pa kako važi uslov

$$\mu_1 - \frac{\tau}{2\lambda_1^2} + \dots + \mu_n - \frac{\tau}{2\lambda_n^2} = 1 \quad ,\text{imamo}$$

$$\tau = \frac{2}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\lambda_i^2}}(\mu_1 + \dots + \mu_n - 1) \quad ,$$

što daje

$$y_s = \mu_s + \frac{1-(\mu_1+\dots+\mu_n)}{\lambda_s^2 \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\lambda_i^2}} \qquad (s=1,\dots,n) \quad .$$

Kako je $$\frac{\partial^2 f}{\partial y_s^2} = 2\lambda_s^2 \qquad (s=1,\dots,n) \quad ,$$

a mešoviti parcijalni izvodi drugog reda jednaki nuli, jasno je da dobijene vrednosti predstavljaju minimum funkcije $\|\vec{m} - y\|^2$,pa je otuda

$$\varphi_s = y_s \qquad (s=1,\dots,n) \quad ,$$

čime je lema pokazana. □

Primedba 4.1: U vezi definicije 2.1. i leme 4.1. imamo

$$\frac{\alpha^2}{\beta^2} \leq \frac{\lambda_j^2 \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{\lambda_i^2}}{n} \leq \frac{\beta^2}{\alpha^2} \qquad (j=1,\dots,n) \quad . \square$$

Lema 4.2: Neka je M bilo koja tačka Hilbertovog prostora H odredjena vektorom

$$\vec{m} = \mu_1 x_1 + \dots + \mu_k x_k + \dots \qquad \left(\sum_{i=1}^{+\infty} \mu_i^2 < +\infty \right) \quad .$$

Tada je

$$\|\vec{m}' - \vec{m}''\| = |1 - (\mu_1 + \dots + \mu_n)| \sqrt{\frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 - \frac{1}{\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{\lambda_i^2}}} \quad ,$$

gde je vektorom $\vec{m}'$ odredjena ortogonalna projekcija, a vektorom $\vec{m}''$ kotežišna projekcija tačke M na pljosan $\Pi(x_1,\dots,x_n)$ simpleksa $\mathcal{J}(x_1,x_2,\dots)$.

Dokaz: Stavimo $$c = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\lambda_i^2} \quad .$$

Na osnovu definicije 2.1. i leme 4.1.,imamo

$$\|\vec{m}' - \vec{m}''\|^2 = (1 - (\mu_1 + \dots + \mu_n))^2 \left(\left(\frac{1}{\lambda_1^2 \cdot c} - \frac{1}{n} \right)^2 \lambda_1^2 + \dots + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{1}{\lambda_n^2 \cdot c} - \frac{1}{n} \right)^2 \lambda_n^2 \right) = (1 - (\mu_1 + \dots + \mu_n))^2 \left(\frac{1}{c^2} \left(\frac{1}{\lambda_1^2} + \dots + \frac{1}{\lambda_n^2} \right) - \right.$$

$$-\,n\cdot\frac{2}{n}\cdot\frac{1}{c}+\frac{\lambda_1^2+\ldots+\lambda_n^2}{n^2}\Big)=(1-(\mu_1+\ldots+\mu_n))^2\Big(\frac{1}{c^2}\cdot c-\frac{2}{c}+$$

$$+\frac{\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^2}{n^2}\Big)=(1-(\mu_1+\ldots+\mu_n))^2\Big(\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^2-\frac{1}{c}\Big)\quad,$$

odakle sledi tvrdjenje. □

Teorema 4.1: Neka je M proizvoljna tačka Hilbertovog prostora H odredjena vektorom

$$\vec{m}=\mu_1 x_1+\ldots+\mu_k x_k+\ldots\qquad\Big(\sum_{i=1}^{+\infty}\mu_i^2<+\infty\Big)\ .$$

Tada je kotežišna projekcija tačke M na $(n-1)$-dimenzionu pljosan $\Pi(x_{j_1},\ldots,x_{j_n})$ $(n-1\geq 1)$, jednaka ortogonalnoj, ako i samo ako važi bar jedna od relacija

$$\mu_{j_1}+\ldots+\mu_{j_n}=1\quad,\quad\Big(\sum_{i=1}^{n}\lambda_{j_i}^2\Big)\Big(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\lambda_{j_i}^2}\Big)=n^2\ .$$

Dokaz: Tvrdjenje je neposredna posledica leme 4.2. □

Teorema 4.2: Kotežišna projekcija proizvoljne tačke Hilbertovog prostora H na konačno-dimenzionu pljosan pravilnog simpleksa $\mathcal{J}(x_1,x_2,\ldots)$ jednaka je ortogonalnoj projekciji.

Dokaz: Teorema sledi na osnovu leme 0.1.(III), leme 4.1. i leme 4.2. □

Primedba 4.2: Iz teoreme 4.2. imamo da svi rezultati u tački 2. dobijeni za kotežišne projekcije važe i za ortogonalne projekcije, ako je simpleks pravilan. □

Teorema 4.3: Neka je M proizvoljna tačka Hilbertovog prostora H odredjena vektorom

$$\vec{m}=\mu_1 x_1+\ldots+\mu_k x_k+\ldots\qquad\Big(\sum_{i=1}^{+\infty}\mu_i^2<+\infty\Big)$$

i neka je

$$y_k' = \Upsilon_{k1}\vec{m}_{k1}' + \ldots + \Upsilon_{kj_k}\vec{m}_{kj_k}' \quad ,$$

$$y_k'' = \Upsilon_{k1}\vec{m}_{k1}'' + \ldots + \Upsilon_{kj_k}\vec{m}_{kj_k}'' \quad ,$$

$$\sum_{i=1}^{j_k} |\Upsilon_{ki}| \leq \Upsilon_y \quad ,$$

gde su $\vec{m}_{k1}', \ldots, \vec{m}_{kj_k}'$ $(k=1,2,\ldots)$ vektori koji odredju-
ju ortogonalne projekcije tačke M na $(n-1)$-dimenzione pljosni,a $\vec{m}_{k1}'', \ldots, \vec{m}_{kj_k}''$ $(k=1,2,\ldots)$ vektori koji odredjuju kotežišne projekcije tačke M na te iste pljosni. Tada egzistira niz (k_i) $(i=1,2,\ldots)$ takav da

$$y' = \lim_{k_i \to \infty} y_{k_i}'$$

postoji,ako i samo ako postoji

$$y'' = \lim_{k_i \to \infty} y_{k_i}'' \quad .$$

<u>Dokaz</u>: Kako je $\sum_{i=1}^{+\infty} \mu_i^2 < +\infty$,to postoji neko $\mu > 0$ takvo da je

(1) $$|\mu_i| \leq \mu \qquad (i=1,2,\ldots) \quad .$$

Na osnovu leme 4.2. imamo sada da je za proizvoljnu $(n-1)$-dimenzionu pljosan $\Pi(x_{t_1}, \ldots, x_{t_n})$ ispunjeno

(2) $$\|\vec{m}' - \vec{m}''\| = \left| 1-(\mu_{t_1} + \ldots + \mu_{t_n}) \right| \sqrt{\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} \lambda_{t_i}^2 - \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\lambda_{t_i}^2}}} \quad ,$$

gde su $\vec{m}'$ i $\vec{m}''$ vektori koji odredjuju ortogonalnu i kotežišnu projekciju tačke M na pljosan $\Pi(x_{t_1}, \ldots, x_{t_n})$.

Iz (2), s obzirom na (1), sledi

$$(3) \qquad \|\vec{m}' - \vec{m}''\| \leq \frac{1+n\mu}{\sqrt{n}} \sqrt{\beta^2 - \alpha^2} \quad .$$

Uočimo, dalje, niz

$$v_k = \Upsilon_{k1}(\vec{m}'_{k1} - \vec{m}''_{k1}) + \ldots + \Upsilon_{kj_k}(\vec{m}'_{kj_k} - \vec{m}''_{kj_k})$$

$$(k=1,2,\ldots) \quad .$$

Kako je

$$\|v_k\| \leq |\Upsilon_{k1}| \cdot \|\vec{m}'_{k1} - \vec{m}''_{k1}\| + \ldots + |\Upsilon_{kj_k}| \cdot \|\vec{m}'_{kj_k} - \vec{m}''_{kj_k}\| \quad ,$$

to je na osnovu (3),

$$\|v_k\| \leq (|\Upsilon_{k1}| + \ldots + |\Upsilon_{kj_k}|) \frac{1+n\mu}{\sqrt{n}} \sqrt{\beta^2 - \alpha^2}$$

pa je, zbog predpostavke teoreme,

$$\|v_k\| \leq \Upsilon_y \frac{1+n\mu}{\sqrt{n}} \sqrt{\beta^2 - \alpha^2} \quad .$$

Prema tome, niz (v_k) $(k=1,2,\ldots)$ je ograničen i beskonačan, pa dakle ima neku tačku nagomilavanja v. Otuda postoji niz (v_{k_i}) $(i=1,2,\ldots)$ takav da je

$$(4) \qquad \lim_{i\to\infty} v_{k_i} = v \quad .$$

Pošto je

$$y'_{k_i} = y''_{k_i} + v_{k_i} \quad ,$$

odavde, s obzirom na (4), imamo tvrdjenje teoreme. $\square$

<u>Teorema 4.4</u>: Neka je M proizvoljna tačka Hilbertovog prostora H odredjena vektorom

$$\vec{m} = \sum_{k=1}^{+\infty} \mu_k x_k \quad \left(-\infty < \sum_{k=1} \mu_k < +\infty\right) .$$

Tada je

$$\lim_{n\to\infty} \vec{m}'_{j_1(n)\dots j_n(n)} = \vec{m} \qquad ,$$

gde je $(j_1(n),\dots,j_n(n))$ takav niz da je

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \mu^2_{j_k(n)} \lambda^2_{j_k(n)} = \sum_{k=1}^{+\infty} \mu_k^2 \lambda_k^2$$

i $\vec{m}'_{j_1(n)\dots j_n(n)}$ vektor kojim je odredjena ortogonalna projekcija tačke M na pljosan $\Pi(x_{j_1(n)},\dots,x_{j_n(n)})$.

<u>Dokaz</u>: Neka je $\vec{m}''_{j_1(n)\dots j_n(n)}$ vektor kojim je odredjena kotežišna projekcija tačke M na pljosan $\Pi(x_{j_1(n)},\dots,x_{j_n(n)})$ .Na osnovu leme 4.2. je

$$(1) \quad \left\| \vec{m}'_{j_1(n)\dots j_n(n)} - \vec{m}''_{j_1(n)\dots j_n(n)} \right\| =$$

$$= \left| 1-(\mu_{j_1(n)}+\dots+\mu_{j_n(n)}) \right| \sqrt{\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} \lambda^2_{j_i(n)} - \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\lambda^2_{j_i(n)}}}} \quad .$$

Kako je

$$0 \le \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n} \lambda^2_{j_i(n)} \le \frac{\beta^2}{n}$$

i

$$0 \le \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\lambda^2_{j_i(n)}}} \le \frac{\alpha^2}{n} \qquad ,$$

to puštajući u relaciji (1) da n teži beskonačnosti, dobijamo, s obzirom na predpostavku $\left|\sum_{k=1}^{+\infty}\mu_k\right| < +\infty$, da je

$$(2) \qquad \lim_{n\to\infty} \left\| \vec{m}'_{j_1(n)\dots j_n(n)} - \vec{m}''_{j_1(n)\dots j_n(n)} \right\| = 0 \quad .$$

Dalje je

$$(3) \qquad \vec{m}'_{j_1(n)\dots j_n(n)} = \vec{m}''_{j_1(n)\dots j_n(n)} +$$

$$+ \left(\vec{m}'_{j_1(n)\dots j_n(n)} - \vec{m}''_{j_1(n)\dots j_n(n)} \right) ,$$

pa pošto je na osnovu teoreme 3.1.

$$\lim_{n\to\infty} \vec{m}''_{j_1(n)\dots j_n(n)} = \vec{m} ,$$

to iz (3), uzimajući u obzir (2), sledi tvrdjenje teoreme. □

<u>Teorema 4.5</u>: Neka je M proizvoljna tačka Hilbertovog prostora H odredjena vektorom

$$\vec{m} = \sum_{k=1}^{+\infty} \mu_k x_k \qquad \left(\left| \sum_{k=1}^{+\infty} \mu_k \right| < +\infty \right)$$

Ako je $\mu_{j_1} + \dots + \mu_{j_s} = 1$ $(s \leq n-1)$, onda je

$$\lim_{k\to\infty} \vec{m}'_{j_1\dots j_s j_k \dots j_{k+n-s-1}} = \sum_{r=1}^{s} \mu_{j_r} x_{j_r} ,$$

gde je $\lim\limits_{k\to\infty} j_k = +\infty$, i $\vec{m}'_{j_1\dots j_s j_k \dots j_{k+n-s-1}}$ vektor kojim je odredjena ortogonalna projekcija tačke M na pljosan $\Pi(x_{j_1},\dots,x_{j_s},x_{j_k},\dots,x_{j_{k+n-s-1}})$.

<u>Dokaz</u>: Neka je $\vec{m}''_{j_1\dots j_s j_k \dots j_{k+n-s-1}}$ vektor koji odredjuje kotežišnu projekciju tačke M na pljosan $\Pi(x_{j_1},\dots,x_{j_s},x_{j_k},\dots,x_{j_{k+n-s-1}})$. Na osnovu leme 4.2., a s obzirom da je $\mu_{j_1} + \dots + \mu_{j_s} = 1$, imamo

$$\left\| \vec{m}'_{j_1\dots j_s j_k \dots j_{k+n-s-1}} - \vec{m}''_{j_1\dots j_s j_k \dots j_{k+n-s-1}} \right\| \leq$$

$$\leq \left|\mu_{j_k}+\dots+\mu_{j_{k+n-s-1}}\right| \frac{\sqrt{\beta^2-\alpha^2}}{n} .$$

Kako je, zbog uslova $\left|\sum_{k=1}^{+\infty}\mu_k\right|<+\infty$,

$$\lim_{k\to\infty}\left|\mu_{j_k}+\dots+\mu_{j_{k+n-s-1}}\right| = 0 ,$$

to je

$$\lim_{k\to\infty}\left\|\vec{m}'_{j_1\dots j_s j_k\dots j_{k+n-s-1}} - \vec{m}''_{j_1\dots j_s j_k\dots j_{k+n-s-1}}\right\| = 0 ,$$

pa se odavde, na isti način kao u dokazu teoreme 4.4., a s obzirom na teoremu 3.2., dobija tvrdjenje. □

VI Beskonačno-dimenzioni simpleks i konačno-dimenzione ravni u Hilbertovom prostoru

0. Uvod

Ova glava sadrži neke interesantnije rezultate koji se odnose na presek prave i ravni sa pljosnima simpleksa, kao i na ortogonalno projektovanje temena simpleksa na neku pravu. Radi jasnijeg izražavanja, precizirajmo sada neke davno poznate činjenice.

Definicija 0.1: Neka su $y_1,\dots,y_r$ $(r\geq 2)$ proizvoljni vektori Hilbertovog prostora H takvi da je skup

$$\{ y_2 - y_1 ,\dots, y_r - y_1 \}$$

linearno nezavisan. Tada skup tačaka

$$\mathcal{P}(y_1,\dots,y_r) = \{ \varphi_1 y_1 + \dots + \varphi_r y_r \mid \varphi_1,\dots,\varphi_r \in R\ ;\ \varphi_1 + \dots + \varphi_r = 1 \}$$

nazivamo $(r-1)$-dimenziona ravan odredjena vektorima $y_1,\dots,y_r$. □

Definicija 0.2: Konačno-dimenzionu ravan odredjenu sa dva vektora nazivamo prava. □

Neposredna posledica definicije 0.1. i definicije 0.2. je

Lema 0.1: $$\mathcal{P}(y_1,y_2) = \{ \varphi y_1 + (1-\varphi) y_2 \mid \varphi \in R \} . \ \square$$

1. Presek prave i pljosni simpleksa

Teorema 1.1: Presek prave odredjene vektorima y_1, y_2 i beskonačno-dimenzione pljosni $\Pi(x_{j_1}, x_{j_2},\dots)$ je skup

$$\left\{ \varphi y_1 + (1-\varphi)y_2 \;\middle|\; (\forall n)((\varphi\varphi_{1n} + (1-\varphi)\varphi_{2n} \neq 0) \Rightarrow \Rightarrow (n \in \{j_1, j_2, \dots\})) \right\},$$

gde je $y_1 = \varphi_{11}e_1 + \varphi_{12}e_2 + \dots$; $y_2 = \varphi_{21}e_1 + \varphi_{22}e_2 + \dots$.

Dokaz: Prema teoremi 1.1.(III) ,beskonačno-dimenziona pljosan je Hilbertov podprostor generisan vektorima $x_{j_1}, x_{j_2}, \dots$ .Dakle,tačka oblika $\varphi y_1 + (1-\varphi)y_2$ pripada Hilbertovom podprostoru generisanom vektorima $e_{j_1}, e_{j_2}, \dots$,ukoliko nema koeficijent različit od nule uz neki vektor e_n koji se ne nalazi u nizu $e_{j_1}, e_{j_2}, \dots$ .Odavde sledi tvrdjenje teoreme. □

Teorema 1.2: Presek prave odredjene vektorima y_1, y_2 i konačno-dimenzione pljosni $\Pi(x_{j_1}, \dots, x_{j_n})$ je skup

$$\left\{ \varphi y_1 + (1-\varphi)y_2 \;\middle|\; \varphi \sum_{k=1}^{n} \frac{\varphi_{1j_k}}{\lambda_{j_k}} + (1-\varphi)\sum_{k=1}^{n} \frac{\varphi_{2j_k}}{\lambda_{j_k}} = 1 \;; \quad (\forall m)(\, m \notin \{j_1, \dots, j_n\})(\varphi\varphi_{1m} + (1-\varphi)\varphi_{2m} = 0) \right\}.$$

Dokaz: Prema teoremi 1.2.(III) imamo

$$(1) \qquad \Pi(x_{j_1}, \dots, x_{j_n}) = \left\{ \varphi_{j_1}x_{j_1} + \dots + \varphi_{j_n}x_{j_n} \;\middle|\; \varphi_{j_1} + \dots + \varphi_{j_n} = 1 \right\} .$$

Ako tačka $\varphi y_1 + (1-\varphi)y_2$ pripada preseku,tada je sigurno $\varphi y_1 + (1-\varphi)y_2 \in \Pi(x_{j_1}, \dots, x_{j_n})$,a pošto je

$$(2) \qquad \varphi y_1 + (1-\varphi)y_2 = \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{\varphi\varphi_{1m} + (1-\varphi)\varphi_{2m}}{\lambda_m} x_m ,$$

to iz (1) i (2) dobijamo tvrdjenje teoreme. □

Teorema 1.3: Presek prave odredjene vektorima y_1, y_2 i tela podsimpleksa $\mathcal{S}(x_{j_1}, x_{j_2}, \dots)$ je skup

$$\Big\{ \varphi y_1 + (1-\varphi) y_2 \;\Big|\; \sum_{\substack{j_k \\ j_k \in \{j_1, j_2, \dots\}}} (\varphi \varphi_{1j_k} + (1-\varphi)\varphi_{2j_k}) \frac{1}{\lambda_{j_k}} = 1 \;;$$

$$(\forall j_k)(\, j_k \in \{j_1, j_2, \dots\})((\varphi \varphi_{1j_k} + (1-\varphi)\varphi_{2j_k}) \frac{1}{\lambda_{j_k}} \geq 0\,) \;;$$

$$(\forall m)(\, m \notin \{j_1, j_2, \dots\})(\varphi \varphi_{1m} + (1-\varphi)\varphi_{2m} = 0\,) \Big\} .$$

Dokaz: Kako je

$$\varphi y_1 + (1-\varphi) y_2 = \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{\varphi \varphi_{1m} + (1-\varphi)\varphi_{2m}}{\lambda_m} \cdot x_m ,$$

i pošto tačka koja pripada preseku mora biti oblika $\varphi y_1 + (1-\varphi) y_2$,a pri tome $\varphi y_1 + (1-\varphi) y_2$ pripada telu podsimpleksa $\mathcal{S}(x_{j_1}, x_{j_2}, \dots)$,to imamo tvrdjenje. $\square$

Teorema 1.4: Ako bar jedan od vektora y_1, y_2 ima beskonačno mnogo koordinata različitih od nule,tada presek prave odredjene vektorima y_1, y_2 i konačno-dimenzione pljosni $\Pi(x_{j_1}, \dots, x_{j_n})$ sadrži najviše jednu tačku.

Dokaz: Prema teoremi 1.2.,tačka koja pripada preseku je oblika $\varphi y_1 + (1-\varphi) y_2$,i pri tome važi relacija

$$(1) \quad (\forall m)(\, m \notin \{j_1, \dots, j_n\})(\varphi \varphi_{1m} + (1-\varphi)\varphi_{2m} = 0\,) .$$

Dalje,mora postojati neko $m_0 \notin \{j_1, \dots, j_n\}$ tako da je

$$\varphi_{1m_0} \neq \varphi_{2m_0} .$$

Zaista,ako bi za svako $m \notin \{j_1, \dots, j_n\}$ važilo $\varphi_{1m} = \varphi_{2m}$,onda bi iz relacije (1) sledilo

$$\varphi\varphi_{1m} + (1-\varphi)\varphi_{2m} = 0 \qquad ,$$

$$\varphi(\varphi_{1m} - \varphi_{2m}) + \varphi_{2m} = 0 \qquad ,$$

odakle je
$$\varphi_{2m} = 0$$

$$(\forall m)(\, m \notin \{j_1,\dots,j_n\})(\, \varphi_{1m} = \varphi_{2m} = 0\,) \quad ,$$

što protivreči predpostavci da bar jedan od vektora y_1, y_2 ima beskonačno mnogo koordinata različitih od nule. Dakle, postoji neko $m_o \notin \{j_1,\dots,j_n\}$ takvo da je $\varphi_{1m_o} \neq \varphi_{2m_o}$.

S obzirom na relaciju (1), imamo

$$\varphi\varphi_{1m_o} + (1-\varphi)\varphi_{2m_o} = 0 \qquad ,$$

odakle je

$$\varphi = \frac{\varphi_{2m_o}}{\varphi_{2m_o} - \varphi_{1m_o}} \qquad .$$

Kako se, prema tome, za φ dobija najviše jedna vrednost, to jedino tačka

$$\frac{\varphi_{2m_o}}{\varphi_{2m_o} - \varphi_{1m_o}}\, y_1 + \frac{\varphi_{1m_o}}{\varphi_{1m_o} - \varphi_{2m_o}}\, y_2$$

može pripadati preseku prave i pljosni, čime je teorema dokazana. $\square$

<u>Teorema 1.5</u>: Ako bar jedan od vektora y_1, y_2 ima beskonačno mnogo koordinata različitih od nule i ako je presek prave odredjene vektorima y_1, y_2 i konačno dimenzione pljosni $\Pi(x_{j_1},\dots,x_{j_n})$, tačka

$$\varphi y_1 + (1-\varphi) y_2 \qquad ,$$

onda su ispunjeni uslovi:

1^o $\varphi_{1m} \neq \varphi_{2m}$ za beskonačno mnogo vrednosti m .

2° $(\forall m)(\, m \notin \{j_1, \ldots, j_n\}\,)(\varphi_{1m} = \varphi_{2m} \Rightarrow \dfrac{\varphi_{2m}}{\varphi_{2m} - \varphi_{1m}} = \varphi\,)$.

3° Ili je $$\sum_{k=1}^{n} \frac{\varphi_{1j_k}}{\lambda_{j_k}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\varphi_{2j_k}}{\lambda_{j_k}} = 1 \quad ,$$

ili je
$$\frac{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\varphi_{2j_k}}{\lambda_{j_k}} - 1}{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\varphi_{2j_k} - \varphi_{1j_k}}{\lambda_{j_k}}} = 1 \quad .$$

<u>Dokaz</u>: S obzirom na teoremu 1.2.,imamo

$$(\forall m)(\, m \notin \{j_1, \ldots, j_n\}\,)(\varphi \varphi_{1m} + (1-\varphi)\varphi_{2m} = 0\,) \quad ,$$

odnosno

$$(1) \quad (\forall m)(\, m \notin \{j_1, \ldots, j_n\}\,)(\, \varphi_{2m} = \varphi(\varphi_{2m} - \varphi_{1m})) \quad ,$$

odakle je

$$(\forall m)(\, m \notin \{j_1, \ldots, j_n\}\,)(\varphi_{1m} = \varphi_{2m} \Rightarrow \varphi_{1m} = \varphi_{2m} = 0\,) \quad .$$

Dakle,ako je φ_{1m} ili φ_{2m} različito od nule,onda ne može biti $\varphi_{1m} = \varphi_{2m}$ .Jer,ako bi bilo $\varphi_{1m} = \varphi_{2m}$, onda bi bilo $\varphi_{1m} = \varphi_{2m} = 0$ .Pošto,prema predpostavci, bar jedan od vektora ima beskonačno mnogo koordinata različitih od nule,sledi 1° .

Neposredna posledica relacije (1) je 2° .

Dalje,na osnovu teoreme 1.2.,dobijamo

$$\varphi \sum_{k=1}^{n} \frac{\varphi_{1j_k}}{\lambda_{j_k}} + (1-\varphi)\sum_{k=1}^{n} \frac{\varphi_{2j_k}}{\lambda_{j_k}} = 1 \quad ,$$

pa je

$$(2) \quad \sum_{k=1}^{n} \frac{\varphi_{2j_k}}{\lambda_{j_k}} - 1 = \varphi\Big(\sum_{k=1}^{n} \frac{\varphi_{2j_k}}{\lambda_{j_k}} - \sum_{k=1}^{n} \frac{\varphi_{1j_k}}{\lambda_{j_k}}\,\Big) \quad .$$

Sada je ili

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{\varphi_{2j_k}}{\lambda_{j_k}}-\sum_{k=1}^{n}\frac{\varphi_{1j_k}}{\lambda_{j_k}}=0 \quad ,$$

što s obzirom na relaciju (2) daje prvi deo tvrdjenja 3° ,

ili je

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{\varphi_{2j_k}}{\lambda_{j_k}}-\sum_{k=1}^{n}\frac{\varphi_{1j_k}}{\lambda_{j_k}}\neq 0 \quad ,$$

što daje iz relacije (2) drugi deo tvrdjenja 3° . □

<u>Teorema 1.6</u>: Neka su y_1 i y_2 proizvoljni vektori a $\Pi(x_{j_1},\dots,x_{j_n})$ proizvoljna konačno-dimenziona pljosan.

Ako je

1° $(\forall m)(\, m\notin\{j_1,\dots,j_n\}\,)(\varphi_{1m}=\varphi_{2m}\ \Rightarrow\ \varphi_{1m}=\varphi_{2m}=0\,)$,

2° $(\forall m)(\, m\notin\{j_1,\dots,j_n\}\,)(\varphi_{1m}\neq\varphi_{2m}\ \Rightarrow\ \dfrac{\varphi_{2m}}{\varphi_{2m}-\varphi_{1m}}=\varphi\,)$,

3° ili je $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{\varphi_{1j_k}}{\lambda_{j_k}}=\sum_{k=1}^{n}\frac{\varphi_{2j_k}}{\lambda_{j_k}}=1$,ili je

$$\frac{\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{\varphi_{2j_k}}{\lambda_{j_k}}-1}{\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{\varphi_{2j_k}-\varphi_{1j_k}}{\lambda_{j_k}}}=\varphi \quad ,$$

onda tačka

$$y=\varphi y_1+(1-\varphi)y_2$$

pripada preseku prave odredjene vektorima y_1,y_2 i pljosni $\Pi(x_{j_1},\dots,x_{j_n})$.

<u>Dokaz</u>: Iz 3° sledi:

Ako je $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{\varphi_{1j_k}}{\lambda_{j_k}}=\sum_{k=1}^{n}\frac{\varphi_{2j_k}}{\lambda_{j_k}}=1$

onda $\sum_{k=1}^{n} \frac{\varphi_{2j_k}}{\lambda_{j_k}} - 1 = 0 = \varphi \cdot 0 = \varphi \cdot \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{\varphi_{1j_k}}{\lambda_{j_k}} - \sum_{k=1}^{n} \frac{\varphi_{2j_k}}{\lambda_{j_k}} \right)$,

a ako je,pak,

$$\frac{\sum_{k=1}^{n} \frac{\varphi_{2j_k}}{\lambda_{j_k}} - 1}{\sum_{k=1}^{n} \frac{\varphi_{2j_k} - \varphi_{1j_k}}{\lambda_{j_k}}} = \varphi$$

onda je

$$(1) \quad \sum_{k=1}^{n} \frac{\varphi_{2j_k}}{\lambda_{j_k}} - 1 = \varphi \cdot \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{\varphi_{2j_k}}{\lambda_{j_k}} - \sum_{k=1}^{n} \frac{\varphi_{1j_k}}{\lambda_{j_k}} \right) \quad .$$

Dakle,u oba slučaja dobijamo istu relaciju (1) ,pa otuda iz (1) imamo

$$(2) \quad \sum_{k=1}^{n} (\varphi\varphi_{1j_k} + (1-\varphi)\varphi_{2j_k}) \frac{1}{\lambda_{j_k}} = 1 \quad .$$

Iz 2° sledi

$$(3) \quad (\forall m)(\, m \notin \{j_1,\dots,j_n\}\,)(\varphi_{1m} \neq \varphi_{2m} \Rightarrow \varphi\varphi_{1m} + (1-\varphi)\varphi_{2m} = 0\,) \ ,$$

dok iz 1° dobijamo

$$(4) \quad (\forall m)(\, m \notin \{j_1,\dots,j_n\}\,)(\varphi_{1m} = \varphi_{2m} \Rightarrow \varphi\varphi_{1m} + (1-\varphi)\varphi_{2m} = \varphi \cdot 0 + (1-\varphi)0 = 0\,) \quad ,$$

pa na osnovu (3) i (4) imamo

$$(\forall m)(\, m \notin \{j_1,\dots,j_n\}\,)(\varphi\varphi_{1m} + (1-\varphi)\varphi_{2m} = 0\,) \ .$$

To znači da je

$$\varphi y_1 + (1-\varphi) y_2 = \sum_{k=1}^{n} (\varphi\varphi_{1j_k} + (1-\varphi)\varphi_{2j_k}) \frac{1}{\lambda_{j_k}} x_{j_k}$$

odakle,s obzirom na relaciju (2),a na osnovu teoreme 1.2.(III), dobijamo

$$\varphi y_1 + (1-\varphi)y_2 \in \Pi(x_{j_1},\dots,x_{j_n}) \quad .$$

Kako tačka $\varphi y_1 + (1-\varphi)y_2$ samim izrazom kojim je data pokazuje da pripada pravoj odredjenoj vektorima y_1, y_2, to $\varphi y_1 + (1-\varphi)y_2$ pripada preseku prave i pljosni, čime je dokazano tvrdjenje teoreme. $\square$

Teorema 1.7: Ako bar jedan od vektora y_1, y_2 ima beskonačno mnogo koordinata različitih od nule, tada je presek prave odredjene vektorima y_1, y_2 i konačno-dimenzione pljosni $\Pi(x_{j_1},\dots,x_{j_n})$ tačka

$$\varphi y_1 + (1-\varphi)y_2 \quad ,$$

ako i samo ako su ispunjeni uslovi:

1° $(\forall m)(\, m \notin \{j_1,\dots,j_n\})(\varphi_{1m} = \varphi_{2m} \Rightarrow \varphi_{1m} = \varphi_{2m} = 0)$.

2° $(\forall m)(\, m \notin \{j_1,\dots,j_n\})(\varphi_{1m} \neq \varphi_{2m} = \dfrac{\varphi_{2m}}{\varphi_{2m} - \varphi_{1m}} = \varphi)$.

3° Ili je $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\varphi_{1j_k}}{\lambda_{j_k}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\varphi_{2j_k}}{\lambda_{j_k}} = 1$, ili je

$$\frac{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\varphi_{2j_k}}{\lambda_{j_k}} - 1}{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\varphi_{2j_k} - \varphi_{1j_k}}{\lambda_{j_k}}} = \varphi \quad .$$

Dokaz: a) Predpostavimo da su ispunjeni uslovi $1^\circ, 2^\circ$ i 3° . Tada, prema teoremi 1.6. tačka $\varphi y_1 + (1-\varphi)y_2$ pripada preseku. Kako su u predtekstu tvrdjenja teoreme ispunjeni uslovi koje traži teorema 1.4., to presek prave i pljosni može da sadrži najviše jednu tačku, dakle $\varphi y_1 + (1-\varphi)y_2$ predstavlja presek.

b) Predpostavimo da je $\varphi y_1 + (1-\varphi)y_2$ presek.

Onda na osnovu teoreme 1.5. važe uslovi 2° i 3°. Dalje, ako ne bi važio uslov 1°, to bi značilo da postoji neko $m_o \notin \{j_1,\dots,j_n\}$ takvo da je $\varphi_{1m_o} = \varphi_{2m_o} = \varepsilon \neq 0$.

No, koordinata uz e_{m_o} vektora $\varphi y_1 + (1-\varphi)y_2$ bila bi tada

$$\varphi\varphi_{1m_o} + (1-\varphi)\varphi_{2m_o} = \varphi\varepsilon + (1-\varphi)\varepsilon = \varepsilon \neq 0 ,$$

pa

$$\varphi y_1 + (1-\varphi)y_2 \notin \Pi(x_{j_1},\dots,x_{j_n}) ,$$

što je u suprotnosti sa predpostavkom. Dakle važi uslov 1°, pa je time teorema u potpunosti dokazana. □

<u>Teorema 1.8</u>: Ako bar jedan od vektora y_1, y_2 ima beskonačno mnogo koordinata različitih od nule, onda je presek prave odredjene vektorima y_1, y_2 i svih konačno-dimenzionih pljosni sa kojima ima zajedničkih tačaka, jedna jedina tačka.

<u>Dokaz</u>: Neka posmatrana prava ima zajedničkih tačaka sa konačno-dimenzionim pljosnima $\Pi(x_{j_1},\dots,x_{j_n})$ i $\Pi(x_{i_1},\dots,x_{i_r})$. Prema teoremi 1.4. i teoremi 1.7., onda postoje brojevi φ_1 i φ_2 takvi da je

$$\varphi_1 y_1 + (1-\varphi_1)y_1$$

presek prave i pljosni $\Pi(x_{j_1},\dots,x_{j_n})$, a

$$\varphi_2 y_1 + (1-\varphi_2)y_2$$

presek prave i pljosni $\Pi(x_{i_1},\dots,x_{i_r})$. Prema teoremi 1.5., s obzirom da je $\varphi_1 y_1 + (1-\varphi_1)y_2$ presek prave i pljosni $\Pi(x_{j_1},\dots,x_{j_n})$, postoji beskonačno mnogo vrednosti m za koje važi $\varphi_{1m} \neq \varphi_{2m}$. Isto tako, važi

$$(1)\quad (\forall m)(\, m \notin \{j_1,\dots,j_n\}\,)(\,\varphi_{1m}=\varphi_{2m} \Rightarrow \frac{\varphi_{2m}}{\varphi_{2m}-\varphi_{1m}}=\varphi_1\,)\,.$$

Zatim,s obzirom da je $\varphi_2 y_1 + (1-\varphi_2)y_2$ presek prave i pljosni $\Pi(x_{i_1},\dots,x_{i_r})$,imamo

$$(2)\quad (\forall m)(\, m \notin \{i_1,\dots,i_r\}\,)(\,\varphi_{1m}=\varphi_{2m} \Rightarrow \frac{\varphi_{2m}}{\varphi_{2m}-\varphi_{1m}}=\varphi_2\,)\,.$$

Dalje,pošto postoji beskonačno mnogo vrednosti m za koje važi $\varphi_{1m}\neq\varphi_{2m}$,to postoji neko $m_o\notin\{j_1,\dots,j_n\}\cup\cup\{i_1,\dots,i_r\}$ takvo da je $\varphi_{1m_o}\neq\varphi_{2m_o}$ .Sada iz (1) dobijamo

$$\frac{\varphi_{2m_o}}{\varphi_{2m_o}-\varphi_{1m_o}}=\varphi_1 \quad ,$$

a iz relacije (2)

$$\frac{\varphi_{2m_o}}{\varphi_{2m_o}-\varphi_{1m_o}}=\varphi_2 \quad ,$$

što znači da je $\varphi_1=\varphi_2$ .Dakle

$$\varphi_1 y_1 + (1-\varphi_1)y_2 = \varphi_2 y_2 + (1-\varphi_2)y_2 \quad ,$$

pa je presek prave i sa jednom i sa drugom pljosni jedna ista tačka.Otuda i imamo tvrdjenje teoreme. □

Teorema 1.9: Ako bar jedan od vektora y_1,y_2 ima beskonačno mnogo koordinata različitih od nule,onda je presek prave odredjene vektorima y_1,y_2 i svih tela konačno-dimenzionih podsimpleksa sa kojima ima zajedničkih tačaka,jedna jedina tačka.

Dokaz: S obzirom da je telo svakog konačno-dimenzionog podsimpleksa,podskup odgovarajuće konačno-dimenzione pljosni,to je presek prave i tela konačno-dimenzionog simpleksa,podskup preseka prave i konačno-dimenzione pljosni.Kako ovaj presek može biti najviše tačka,to s obzirom na teoremu 1.8. dobijamo tvrdjenje. □

<u>Teorema 1.10</u>: Ako bar jedan od vektora y_1, y_2 ima beskonačno mnogo koordinata različitih od nule,tada je presek prave odredjene vektorima y_1, y_2 i tela konačno-dimenzionog podsimpleksa $\mathcal{J}(x_{j_1},\dots,x_{j_n})$ tačka

$$\varphi y_1 + (1-\varphi)y_2 \quad ,$$

ako i samo ako su ispunjeni uslovi:

1° $(\forall m)(\ m \notin \{j_1,\dots,j_n\})(\varphi_{1m} = \varphi_{2m} \Rightarrow \varphi_{1m} = \varphi_{2m} = 0\ )$.

2° $(\forall m)(\ m \notin \{j_1,\dots,j_n\})(\varphi_{1m} \neq \varphi_{2m} \Rightarrow \dfrac{\varphi_{2m}}{\varphi_{2m} - \varphi_{1m}} = \varphi\ )$.

3° Ili je $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\varphi_{1j_k}}{\lambda_{j_k}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\varphi_{2j_k}}{\lambda_{j_k}} = 1$,ili je

$$\frac{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\varphi_{2j_k}}{\lambda_{j_k}} - 1}{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\varphi_{2j_k} - \varphi_{1j_k}}{\lambda_{j_k}}} = \varphi \quad .$$

4° $\displaystyle (\forall k)(\ k \in \{1,\dots,n\})(\ \frac{\varphi(\varphi_{1j_k} - \varphi_{2j_k}) + \varphi_{2j_k}}{\lambda_{j_k}} \geq 0\ )$.

<u>Dokaz</u>: Prema teoremi 1.7. , 1° , 2° i 3° su potreban i dovoljan uslov da $\varphi y_1 + (1-\varphi)y_2$ bude presek prave i pljosni $\Pi(x_{j_1},\dots,x_{j_n})$ .Uslov 4° je potreban i dovoljan uslov,da tačka koja pripada pljosni $\Pi(x_{j_1},\dots,x_{j_n})$ pripada telu podsimpleksa $\mathcal{J}(x_{j_1},\dots,x_{j_n})$ .Time je teorema u potpunosti dokazana. □

2. Presek konačno-dimenzione ravni i konačno-dimenzionih pljosni simpleksa

Teorema 2.1: Neka je P presek konačno-dimenzione ravni odredjene vektorima $y_1, y_2, \dots, y_r$ i unije svih konačno-dimenzionih pljosni simpleksa. Ako bar jedan od vektora $y_1, y_2, \dots, y_r$ ima beskonačno mnogo koordinata različitih od nule, onda kroz svaku tačku y ove ravni, koja ima beskonačno mnogo koordinata različitih od nule, povučena prava u ravni može imati najviše jednu zajedničku tačku sa skupom P.

Dokaz: Ako prava nema ni jednu zajedničku tačku sa skupom P, onda nemamo šta da dokazujemo. Ako prava ima bar jednu zajedničku tačku y' sa skupom P, onda prema teoremi 1.4., y' je jedina zajednička tačka prave i skupa P, jer je prava odredjena vektorima y', y, a y po predpostavci ima beskonačno mnogo koordinata različitih od nule. Ovime je dokazano tvrdjenje. □

Teorema 2.2: Neka je P presek konačno-dimenzione ravni odredjene vektorima $y_1, y_2, \dots, y_r$ i unije svih konačno-dimenzionih pljosni simpleksa. Svaka tačka y ove ravni koja ima samo konačno mnogo koordinata različitih od nule, pripada skupu P, ako i samo ako je zbir koordinata y u odnosu na bazis $x_1, x_2, \dots$ jednak jedinici.

Dokaz: Prema predpostavci, postoji skup $\{j_1, \dots, j_n\}$ i brojevi $\varphi_{j_1}, \dots, \varphi_{j_n}$ tako da je

$$y = \varphi_{j_1} e_{j_1} + \dots + \varphi_{j_n} e_{j_n} \quad .$$

Sada je

$$(1) \qquad y = \frac{\varphi_{j_1}}{\lambda_{j_1}} \cdot x_{j_1} + \dots + \frac{\varphi_{j_n}}{\lambda_{j_n}} \cdot x_{j_n} \quad .$$

Ako je
$$\frac{\varphi_{j_1}}{\lambda_{j_1}} + \dots + \frac{\varphi_{j_n}}{\lambda_{j_n}} = 1 \quad ,$$

onda prema teoremi 1.2.(III) , $y \in \Pi(x_{j_1}, \dots, x_{j_n})$,pa pošto po predpostavci y pripada i ravni,to $y \in P$.

Ako je
$$\frac{\varphi_{j_1}}{\lambda_{j_1}} + \dots + \frac{\varphi_{j_n}}{\lambda_{j_n}} \neq 1 \quad ,$$

onda prema teoremi 1.2.(III) mora biti
$$y \notin \Pi(x_{j_1}, \dots, x_{j_n}) \quad .$$

Kako zbog relacije (1),može biti samo $y \in \Pi(x_{j_1}, \dots, x_{j_n})$ ili $y \in \Pi(x_{j_1}, \dots, x_{j_n}, x_{j_{n+1}}, \dots, x_{j_s})$,a ni ova druga relacija ne dolazi u obzir,jer zbog jedinstvenosti predstavljanja mora biti
$$y = \frac{\varphi_{j_1}}{\lambda_{j_1}} \cdot x_{j_1} + \dots + \frac{\varphi_{j_n}}{\lambda_{j_n}} \cdot x_{j_n} + 0 \cdot x_{j_{n+1}} + \dots + 0 \cdot x_{j_s} \quad ,$$

pa je
$$\frac{\varphi_{j_1}}{\lambda_{j_1}} + \dots + \frac{\varphi_{j_n}}{\lambda_{j_n}} + 0 + \dots + 0 = \frac{\varphi_{j_1}}{\lambda_{j_1}} + \dots + \frac{\varphi_{j_n}}{\lambda_{j_n}} \neq 1 \quad ,$$

odakle je zbog teoreme 1.2.(III),
$$y \notin \Pi(x_{j_1}, \dots, x_{j_n}, x_{j_{n+1}}, \dots, x_{j_s}) \ .$$

Kako iz $y \in P$ proizilazi da y mora pripadati nekoj od konačno-dimenzionih pljosni simpleksa,a pošto vidimo da to nije slučaj,znači da $y \in P$ .Time je dokazana teorema. □

3. Ortogonalne projekcije temena simpleksa na pravu

Lema 3.1: Neka je w_k ortogonalna projekcija temena x_k na pravu odredjenu vektorima y_1, y_2. Tada je

$$\|w_k - x_k\|^2 = \|y_2 - x_k\|^2 - \frac{\langle x_k - y_2, y_1 - y_2\rangle^2}{\|y_1 - y_2\|^2} .$$

Dokaz: Kako je

$$w_k = \varphi y_1 + (1-\varphi)y_2$$

i

$$\langle w_k - x_k , y_1 - y_2 \rangle = 0 \quad ,$$

to imamo

$$\langle \varphi(y_1 - y_2) + y_2 - x_k , y_1 - y_2 \rangle = 0 \quad ,$$

odakle je

(1) $$\varphi = \frac{\langle x_k - y_2, y_1 - y_2\rangle}{\|y_1 - y_2\|^2} .$$

Sada je

$$\|w_k - x_k\|^2 = \|\varphi(y_1 - y_2) + y_2 - x_k\|^2 =$$

$$= \varphi^2\|y_1 - y_2\|^2 + \|y_2 - x_k\|^2 + 2\varphi\langle y_2 - x_k, y_1 - y_2\rangle \quad ,$$

pa se smenom φ iz (1) dobija tvrdjenje. □

Teorema 3.1: Neka su w_k, w_r respektivno ortogonalne projekcije temena x_k, x_r na pravu odredjenu vektorima y_1, y_2. Onda je

$$\frac{\|w_k - x_k\|}{\|w_r - x_r\|} = \frac{f(x_k)}{f(x_r)} \quad ,$$

gde je

$$f(x) = \sqrt{\|y_2 - x\|^2 \cdot \|y_1 - y_2\|^2 - \langle y_2 - x, y_1 - y_2\rangle^2} .$$

Dokaz: Teorema je direktna posledica leme 3.1. □

Primedba 3.1: Funkcija $f(x)$ je kvadratni koren iz dopune Koši-Švarcove nejednakosti do jednakosti. □

Lema 3.2: Neka je w_k ortogonalna projekcija temena x_k

na pravu odredjenu vektorima y_1, y_2. Ako i y_1 i y_2 imaju k-tu koordinatu nula, onda je

$$\|w_k - x_k\|^2 = \lambda_k^2 + \|y_2\|^2 - \frac{\langle y_2, y_1 - y_2\rangle^2}{\|y_1 - y_2\|^2} .$$

Dokaz: Prema lemi 3.1. imamo

$$\|w_k - x_k\|^2 = \|y_2 - x_k\|^2 - \frac{\langle x_k - y_2, y_1 - y_2\rangle^2}{\|y_1 - y_2\|^2} =$$

$$= \|y_2\|^2 - 2\langle y_2, x_k\rangle + \|x_k\|^2 - \frac{(\langle x_k, y_1 - y_2\rangle - \langle y_2, y_1 - y_2\rangle)^2}{\|y_1 - y_2\|^2} ,$$

odakle je, s obzirom na predpostavku,

$$\|w_k - x_k\|^2 = \|y_2\|^2 - 2\cdot 0 + \|x_k\|^2 - \frac{(0 - \langle y_2, y_1 - y_2\rangle)^2}{\|y_1 - y_2\|^2} ,$$

pa važi tvrdjenje. □

Teorema 3.2: Neka su w_k, w_r respektivno ortogonalne projekcije temena x_k, x_r na pravu odredjenu vektorima y_1, y_2. Ako i y_1 i y_2 imaju k-tu i r-tu koordinatu nula, onda je

$$\|w_k - x_k\|^2 - \|w_r - x_r\|^2 = \lambda_k^2 - \lambda_r^2 .$$

Dokaz: Teorema je direktna posledica leme 3.2. □

Teorema 3.3: Neka je w_k ortogonalna projekcija temena x_k na pravu odredjenu vektorima y_1, y_2. Ako svaki od vektora y_1, y_2 ima samo konačno mnogo koordinata različitih od nule i

$$\|y_1\|^2 \cdot \|y_2\|^2 = \langle y_1, y_2\rangle^2 ,$$

onda red

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \|w_k - x_k\|^2$$

divergira.

<u>Dokaz</u>: Prema predpostavci, postoji broj n_o takav da je za $n > n_o$, i n-ta koordinata vektora y_1 i n-ta koordinata vektora y_2 jednaka nuli. Kako je za $p > 0$

$$\sum_{k=1}^{n_o+p} \|w_k - x_k\|^2 = \sum_{k=1}^{n_o} \|w_k - x_k\|^2 + \sum_{k=n_o+1}^{n_o+p} \|w_k - x_k\|^2 \quad ,$$

to s obzirom na lemu 3.2. imamo

$$(1) \quad \sum_{k=1}^{n_o+p} \|w_k - x_k\|^2 = \sum_{k=1}^{n_o} \|w_k - x_k\|^2 + \sum_{k=n_o+1}^{n_o+p} \lambda_k^2 + p\left(\|y_2\|^2 - \frac{\langle y_2, y_1 - y_2 \rangle^2}{\|y_1 - y_2\|^2} \right) \quad .$$

Kako je po predpostavci

$$\|y_1\|^2 \cdot \|y_2\|^2 = \langle y_1, y_2 \rangle^2 \quad ,$$

to je

$$\|y_1\|^2 \cdot \|y_2\|^2 + \|y_2\|^4 - 2\langle y_1, y_2 \rangle \|y_2\|^2 = \langle y_1, y_2 \rangle^2 + \|y_2\|^4 - 2\langle y_1, y_2 \rangle \|y_2\|^2 \quad ,$$

odnosno

$$\|y_2\|^2 (\|y_1\|^2 + \|y_2\|^2 - 2\langle y_1, y_2 \rangle) = (\langle y_1, y_2 \rangle - \langle y_2, y_2 \rangle)^2 \quad ,$$

odakle je

$$(2) \quad \|y_2\|^2 - \frac{\langle y_2, y_1 - y_2 \rangle^2}{\|y_1 - y_2\|^2} = 0 \quad .$$

Sada iz (1), s obzirom na (2), dobijamo

$$(3) \quad \sum_{k=1}^{n_o+p} \|w_k - x_k\|^2 = \sum_{k=1}^{n_o} \|w_k - x_k\|^2 + \sum_{k=n_o+1}^{n_o+p} \lambda_k^2 \geqslant$$

$$\geqslant \sum_{k=1}^{n_o} \|w_k - x_k\|^2 + p\alpha^2 \quad .$$

Kako izraz na desnoj strani nejednakosti (3) teži beskonačnosti kada $p \to +\infty$,to i niz parcijalnih suma posmatranog reda teži beskonačnosti,pa otuda imamo tvrdjenje teoreme. □

Primedba 3.2: Uslov

$$\|y_1\|^2 \cdot \|y_2\|^2 = \langle y_1, y_2 \rangle^2$$

je ekvivalentan sa

$$y_1 = ty_2 \quad (t \in R) \vee y_1 = 0 \vee y_2 = 0 \quad . \square$$

Lema 3.3: Neka je w_k ortogonalna projekcija temena x_k na pravu odredjenu vektorima y_1, y_2 .Ako svaki od vektora y_1, y_2 ima samo konačno mnogo koordinata različitih od nule i red

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \|w_k - x_k\|^2$$

konvergira,onda je

$$\lim_{k \to \infty} \lambda_k^2 = \frac{\langle y_2, y_1 - y_2 \rangle^2}{\|y_1 - y_2\|^2} - \|y_2\|^2 \quad .$$

Dokaz: Na osnovu relacije (1) u dokazu teoreme 3.3. imamo kad stavimo p

$$(1) \quad \sum_{k=1}^{+\infty} \|w_k - x_k\|^2 = \sum_{k=1}^{n_o} \|w_k - x_k\|^2 + \sum_{k=n_o+1}^{+\infty} \Big(\lambda_k^2 + \|y_2\|^2 - \frac{\langle y_2, y_1 - y_2 \rangle^2}{\|y_1 - y_2\|^2} \Big) \quad .$$

S obzirom da je,po predpostavci,red na levoj strani relacije (1) konvergentan,to iz konvergencije reda na desnoj strani sledi da opšti član mora težiti nuli,pa otuda dobijamo lemu. □

Teorema 3.4: Neka je w_k ortogonalna projekcija temena x_k na pravu odredjenu vektorima y_1, y_2. Ako svaki od vektora y_1, y_2 ima samo konačno mnogo koordinata različitih od nule,tada red

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \| w_k - x_k \|^2$$

divergira.

Dokaz: Kako važi Koši-Švarcova nejednakost

$$\langle y_2, y_1 - y_2 \rangle^2 \leqslant \|y_2\|^2 \cdot \|y_1 - y_2\|^2 \quad ,$$

to je

$$(1) \qquad \frac{\langle y_2, y_1 - y_2 \rangle^2}{\|y_1 - y_2\|^2} - \|y_2\|^2 \leqslant 0 \quad .$$

Ako red $Q = \sum_{k=1}^{+\infty} \|w_k - x_k\|^2$ konvergira,onda iz (1),s obzirom na lemu 3.3.,sledi

$$\lim_{k \to \infty} \lambda_k^2 \leqslant 0 \quad ,$$

što je nemoguće,pošto za simpleks $\mathcal{J}(x_1, x_2, \ldots)$ važi po definiciji $\lambda_k^2 \geqslant \alpha^2 > 0 \quad (k=1,2,\ldots)$.

Dakle red Q divergira. □

Teorema 3.5: Neka je w_k ortogonalna projekcija temena x_k na pravu odredjenu vektorima y_1, y_2. Ako bar jedan od vektora y_1, y_2 ima beskonačno mnogo koordinata različitih od nule,onda iz konvergencije reda

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \|w_k - x_k\|^2 \quad ,$$

sledi da mora postojati

$$\lim_{k\to\infty} \lambda_k^2 \quad .$$

Dokaz: Na osnovu leme 3.1. imamo

$$(1) \quad \sum_{k=1}^{+\infty} \|w_k - x_k\|^2 = \frac{1}{\|y_1 - y_2\|^2} \sum_{k=1}^{+\infty} (\|y_2 - x_k\|^2 \cdot \|y_1 - y_2\|^2 - $$

$$- \langle y_2 - x_k, y_1 - y_2 \rangle^2) \quad .$$

Ako red na levoj strani jednakosti (1) konvergira, onda konvergira i red na desnoj strani, pa otuda mora biti

$$(2) \lim_{k\to\infty} (\|y_2 - x_k\|^2 \cdot \|y_1 - y_2\|^2 - \langle y_2 - x_k, y_1 - y_2 \rangle^2) = 0 \ .$$

Neka je sada $y_1 = \sum_{k=1}^{+\infty} \varphi_{1k} e_k$, $y_2 = \sum_{k=1}^{+\infty} \varphi_{2k} e_k$.

Dalje imamo, na osnovu (2) ,

$$(3) \quad \lim_{k\to\infty} (\|y_1 - y_2\|^2 \cdot \|y_2\|^2 + \|y_1 - y_2\|^2 ((\varphi_{2k} - \lambda_k)^2 - $$

$$- \varphi_{2k}^2) - \langle y_2, y_1 - y_2 \rangle^2 + 2\lambda_k (\varphi_{1k} - \varphi_{2k}) \langle y_2, y_1 - y_2 \rangle - $$

$$- \lambda_k^2 (\varphi_{1k} - \varphi_{2k})^2) = 0 \ .$$

Pošto su redovi $\sum_{k=1}^{+\infty} \varphi_{1k}^2 = \|y_1\|^2$, $\sum_{k=1}^{+\infty} \varphi_{2k}^2 = \|y_2\|^2$

konvergentni, dobijamo

$$(4) \qquad \lim_{k\to\infty} \varphi_{1k} = \lim_{k\to\infty} \varphi_{2k} = 0 \quad ,$$

pa je zato

$$(5) \qquad \lim_{k\to\infty} 2\lambda_k (\varphi_{1k} - \varphi_{2k}) \langle y_2, y_1 - y_2 \rangle = 0$$

i

(6) $$\lim_{k\to\infty} \lambda_k^2(\varphi_{1k} - \varphi_{2k})^2 = 0 \quad ,$$

jer je niz (λ_k) $(k=1,2,\ldots)$ prema definiciji simpleksa $\mathcal{S}(x_1,x_2,\ldots)$ ograničen. Sada iz (3), s obzirom na (5) i (6), sledi da mora postojati

$$\lim_{k\to\infty} ((\varphi_{2k} - \lambda_k)^2 - \varphi_{2k}^2) \quad ,$$

odakle, zbog (4), mora da postoji

$$\lim_{k\to\infty} (\varphi_{2k} - \lambda_k)^2 \quad ,$$

pa opet zbog (4), mora postojati

$$\lim_{k\to\infty} \lambda_k^2 \quad ,$$

čime je teorema dokazana. $\square$

<u>Teorema 3.6</u>: Neka je w_k ortogonalna projekcija temena x_k na pravu odredjenu vektorima y_1, y_2. Ako bar jedan od vektora y_1, y_2 ima beskonačno mnogo koordinata različitih od nule, onda red $$\sum_{k=1}^{+\infty} \|w_k - x_k\|^2$$ divergira.

<u>Dokaz</u>: Na osnovu teoreme 3.5., ako red $Q = \sum_{k=1}^{+\infty} \|w_k - x_k\|^2$ konvergira, onda postoji $\lim_{k\to\infty} \lambda_k^2 = \lambda^2$. Iz relacije (3) u dokazu teoreme 3.5., sada dobijamo

$$\lim_{k\to\infty} (\|y_1 - y_2\|^2 \cdot \|y_2\|^2 + \|y_1 - y_2\|^2 \cdot \lambda_k^2 - \langle y_2, y_1 - y_2\rangle^2) = 0 \quad ,$$

odakle je

(1) $$\|y_1 - y_2\|^2 \cdot \lambda^2 = \langle y_2, y_1 - y_2\rangle^2 - \|y_2\|^2 \cdot \|y_1 - y_2\|^2 \quad .$$

Kako iz Koši-Švarcove nejednakosti sledi

$$\langle y_2, y_1 - y_2\rangle^2 - \|y_2\|^2 \cdot \|y_1 - y_2\|^2 \leqslant 0 \quad ,$$

to iz (1) dobijamo

$$\|y_1 - y_2\|^2 \cdot \lambda^2 \leqslant 0 \quad ,$$

pa je otuda

(2) $$\|y_1 - y_2\|^2 \cdot \lambda^2 = 0 \quad .$$

Medjutim,zbog $\|y_1 - y_2\| \neq 0$ (jer je prava odredjena samo u slučaju $y_1 \neq y_2$) ,imamo iz (2)

$$\lambda^2 = 0 \quad .$$

No,ovo je u suprotnosti sa definicijom simpleksa $\Upsilon(x_1, x_2, \ldots)$.Dakle,red Q nije konvergentan. □

Direktna posledica teoreme 3.4. i teoreme 3.6. je

Teorema 3.7: Neka je w_k ortogonalna projekcija temena x_k simpleksa $\Upsilon(x_1, x_2, \ldots)$ na pravu odredjenu vektorima y_1, y_2 .Tada red

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \|w_k - x_k\|^2$$

divergira. □

Literatura

Latinica:

[1] Ali M.M.: ON SOME EXTREMAL SIMPLEXES,Pacific Journ. Math.,33/1(1970),1-14.

[2] Aljančić S.: UVOD U REALNU I FUNKCIONALNU ANALIZU, Gradjevinska knjiga,Beograd,1968.

[3] Amir-Moéz A.R.: EXTREME PROPERTIES OF LINEAR TRANSFORMATIONS AND GEOMETRY IN UNITARY SPACES,Math. Ser. Nos. 2&3,Texas Tech University,Lubbock,1978.

[4] Blaschke W.: KREIS UND KUGEL,Walter de Guyter & Co, Berlin,1956.

[5] Court N.A.: THE TETRAHEDRON AND ITS ALTITUDES,Scripta Math.,14(1948),85-97.

[6] Coxeter H.S.M.: REGULAR COMPLEX POLYTOPES,Cambridge University Press,Cambridge,1974.

[7] Danzer L.,Grünbaum B. and Klee V.: HELLY'S THEOREM AND ITS RELATIVES,American Mathematical Society, Providence,1963.

[8] Devidé V.: POOPĆENJE DVAJU TEOREMA ELEMENTARNE PLANIMETRIJE NA n-DIMENZIONALNI PROSTOR,Glasnik mat.-fiz.-astron.,6/4(1951),145-151.

[9] Edwards R.E.: FUNCTIONAL ANALYSIS THEORY AND APPLICATIONS,Holt,Reinhart and Winston,New York,1965.

[10] Eggleston H.G.: CONVEXITY,Cambridge University Press, Cambridge,1963.

[11] Fejes Toth L.: LAGERUNGEN IN DER EBENE AUF DER KUGEL UND IM RAUM,Springer-Verlag,Berlin,1953.

[12] Gerber L.: SPHERES TANGENT TO ALL THE FACES OF A SIMPLEX,Journ.of Comb. Theory (A),12(1972),453-456.

[13] Gerber L.: ASSOCIATED AND PERSPECTIVE SIMPLEXES, Trans. Amer. Math. Soc.,201(1975),43-55.

[14] Gerber L.: THE ORTOCENTRIC SIMPLEX AS AN EXTREME SIMPLEX,Pacific Journ. Math.,56/1(1975),97-111.

[15] Gerber L.: ASSOCIATED AND SKEW-ORTHOCENTRIC SIMPLEXES, Trans. Amer. Math. Soc.,231/1(1977),47-63.

[16] Halmos P.R.: FINITE-DIMENSIONAL VECTOR SPACES, Springer-Verlag,New York,1974.

[17] Höllein H.: POLYTOPE IN LOKALKONVEXEN RAUMEN,Math. Annalen,229(1977),65-85.

[18] Lopandić D.,Alimpić B.: SUR QUELQUES PROPRIETES DES HYPERSPHERES INSCRITES AU SIMPLEXE n-DIMENSIONNEL, Publ. Inst. Math. Belgrade,1(15)(1961),117-121.

[19] Lopandić D.: SKRIPTA IZ EUKLIDSKE GEOMETRIJE,Beograd, 1967.

[20] Mandan S.R.: UNI- AND DEMI-ORTHOCENTRIC SIMPLEXES, Journ. Austr. Math. Soc.,23(1959),169-184.

[21] Mandan S.R.: ALTITUDES OF A SIMPLEX IN n-SPACE,Journ. Austr. Math. Soc.,2(1961/62),403-424.

[22] Mandan S.R.: ORTHOGONAL HYPERSPHERES,Acta Math. Sci. Hungarica,13(1962),25-34.

[23] Mandan S.R.: PASCAL´S THEOREM IN n-SPACE,Journ. Austr. Math. Soc.,5(1965),401-408.

[24] Mandan S.R.: ALTITUDES OF A GENERAL n-SIMPLEX,Journ. Austr. Math. Soc.,5(1965),409-415.

[25] Mandan S.R.: ORTHIC AXES OF TRIANGLES OF A SIMPLEX, Journ. Indian Math. Soc.,26(1962),13-24.

[26] Maserick R.H.: CONVEX POLYTOPES IN LINEAR SPACES, Illinois Journ. Math.,9(1965),623-635.

[27] Phelps R.R.: INFINITE-DIMENSIONAL COMPACT CONVEX

POLYTOPES,Math. Scand.,24(1969),5-26.

[28] Rockafellar R.T.: CONVEX ANALYSIS,Princeton University Press,Princeton,1970.

[29] Rogers C.A.: THE VOLUME OF A POLYHEDRON INSCRIBED IN A SHERE,Journ. London Math. Soc.,28(1953),410-416.

[30] Rogers C.A.: PACKING AND COVERING,Cambridge University Press,Cambridge,1964.

[31] Smith J.T.: METRIC GEOMETRIES OF ARBITRARY DIMENSION, Geometria Dedicata,2(1973),348-370.

[32] Smith J.T.: GENERALIZED METRIC GEOMETRIES OF ARBITRARY DIMENSION,Geometria Dedicata,2(1974),458-497.

[33] Smith J.T.: GROUP THEORETIC CHARACTERIZATION OF ELLIPTIC GEOMETRIES OF ARBITRARY DIMENSION,Math. Nachr.,67(1976),265-272.

[34] Volenec V.: ORTHOCENTRE AND FEUERBACH'S HYPERSPHERE OF AN n-SIMPLEX,Glasnik matematički,10(30)(1975), 311-320.

Ćirilica:

[35] Бурбаки Н.: ИНТЕГРИРОВАНИЕ МЕРЫ,ИНТЕГРИРОВАНИЕ МЕР, превод са францускoг,Издательство "Наука",Москва,1967.

[36] Данелич И.А.: О НОРМИРОВАННЫХ ПРОСТРАНСТВАХ,В КОТОРЫХ СПРАВЕДЛИВА ТЕОРЕМА АПОЛЛОНИЯ,Математические Заметки,Т.20,№2/1976/,247-252.

[37] Погорелов А.В.: ВНЕШНЯЯ ГЕОМЕТРИЯ ВЫПУКЛЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ, Издательство "Наука",Москва,1969.