U N I V E R Z I T E T U B E O G R A D U
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET

Mr Miloš I. Miličić

KARAKTERIZACIJA ZATVORENIH KLASA FUNKCIJA SA ZADRŽAVANJEM POMOĆU RELACIJA

– doktorska disertacija –

BEOGRAD, oktobra 1982.

SADRŽAJ

UVOD

U matematici i njenim primenama često se postavlja pitanje mogućnosti predstavljanja elemenata proizvoljnog skupa P pomoću elemenata unapred zadanog njegovog podskupa V. Drugim rečima, postavlja se pitanje kompletnosti ili potpunosti sistema V u P. Tako u teoriji funkcija algebre logike, kako klasične dvoznačne, tako i uopšte mnogoznačne, jedno od centralnih pitanja je pitanje mogućnosti izražavanja svih funkcija algebre logike pomoću datog sistema funkcija te logike u obliku superpozicije funkcija tog sistema. Za strogu definiciju operacije superpozicije koristi se pojam formule, a po suštini ona predstavlja zamenu promenljivih funkcije drugim promenljivim i zamenu promenljivih funkcije funkcijema. Pri tome prirodno se nametnulo razmatranje tzv. zatvorenih klasa funkcija u odnosu na operaciju superpozicije. U vezi s pitanjem kompletnosti ili potpunosti sistema funkcija algebre logike važnu ulogu imaju predkompletne ili maksimalne klase funkcija. Sve zatvorene klase u algebri dvoznačne logike P_2 opisao je američki matematičar E. Post i pokazao da ih ima prebrojivo mnogo. Specijalno, Post je pokazao da u P_2 postoji pet maksimalnih (predkompletnih) klasa i dao kriterijum kompletnosti sistema funkcija algebre dvoznačne logike koji glasi: Sistem funkcija algebre logike P_2 je kompletan ili potpun ako i samo ako on nije podskup ni jedne od maksimalnih klasa. Kako ovaj kriterijum važi i u k-značnoj logici P_k za $k \geqslant 3$, to je od interesa poznavanje maksimalnih klasa. Sovjetski matematičar S. V. Jablonski odredio je sve maksimalne klase u algebri 3-značne logike, ukupno 18. Kanadski matematičar I. Rosenberg okarekterisao je sve maksimalne klase u k-značnoj logici za $k \geqslant 3$.

Već za k=3, a tim pre za $k > 3$, skup svih zatvorenih klasa algebre k-značne logike ima moć kontihuuma. Ova činjenica je otežala opisivanje svih zatvorenih klasa algebre k-značne logike za $k \geqslant 3$, pa se pribeglo izučavanju nekih zajedničkih svojstava tih klasa. Naime, ispostavilo se da svaka zatvorena klasa funkcija k-značne logike ($k \geqslant 2$) predstavlja skup svih funkcija te logike koje očuvavaju neku relaciju, pri vrlo prirodnoj definiciji pojma očuvavanja. Time je stvorena mogućnost izučavanja zatvorenih klasa logičkih funkcija pomoću relacija. Opisivanje zatvorenih klasa (ili algebri Posta) pomoću relacija išlo je s rastom opštosti: od grupa permutacija skupa $E_k = \{0,1, \ldots ,k-1\}$, preko polugrupa s jediničnim elementom preslikavanja skupa E_k, do algebri Posta funkcija više promenljivih. Odgovor u prva dva slučaja dao je M. Krasner, dok su odgovor u trećem slučaju dali sovjetski matematičari V. G. Bodnarčuk, L. A. Kalužnjin, V. N. Kotov i B. A. Romov. Pri tome, centralno pitanje je kakvu strukturu predstavlja skup svih relacija invarijantnih za sve funkcije neke algebre Posta. U vezi sa postavljenim pitanjem definiše se niz operacija sa relacijama, tako da se primenom tih operacija na relacije koje su invarijantne za neke funkcije iz P_k, dobijaju takodje relacije invarijantne za te funkcije. Osnovni rezultati koji se pri tome dobijaju utvrdjuju prirodni antiizomorfizam izmedju mreže zatvorenih klasa funkcija k-značne logike (algebri Posta) i mreže zatvorenih klasa relacija (koalgebri Posta) na skupu E_k.

Klasični problem kompletnosti se poopštava posmatranjem tzv. funkcija sa zadržavanjem, tj. uredjenih parova oblika $(f(x_1,x_2, \ldots ,x_n),t)$, gde je $f(x_1,x_2, \ldots ,x_n)$ funkcija algebre k-značne logike, a t nenegativan ceo broj. U skupu funkcija sa zadržavanjem definiše se operacija tzv. sinhrone superpozicije. Od nekoliko vrsta kompletnosti naročito je izučavana tzv. kompletnost u drugom smislu. Za skup funkcija sa zadržavanjem kaže se da je kompletan u drugom smislu ako za svaku funkciju k-značne logike **f**, postoji nenegativan ceo broj **d**, tako da se par (f,d) može dobiti iz datog skupa funkcija sa zadržavanjem primenom operacije sinhrone superpozicije. Teorema Posta, koja izražava kriterijum kompletnosti pomoću maksimalnih klasa, važi i u ovom slučaju. Sovjetski matematičar V. B. Kudrjavcev odredio je sve maksimalne klase u binarnom slučaju. Ima ih prebrojivo mnogo. Japanski matematičar A. Nozaki dao je kriterijum kompletnosti za proizvoljno k.

U ovom radu data je karakterizacija zatvorenih klasa funkcija sa zadržavanjem pomoću relacija. U tu svrhu uveden je pojam tzv. vremenske relacije, kao i pojam očuvavanja vremenske relacije funkcijom sa zadržavanjem. Definisan je zatim niz operacija sa vremenskim relacijama od kojih su neke analogne operacijama sa "običnim" relacijama, dok su dve potpuno nove. Rezultati koji se pri tome dobijaju isti su kao u algebri k-značne logike, tj. dokazuje se da postoji prirodni antiizomorfizam izmedju mreže zatvorenih klasa funkcija sa zadržavanjem i mreže zatvorenih klasa vremenskih relacija na skupu E_k.

Svakom skupu S funkcija sa zadržavanjem može se pridružiti jedan spektar, tj. beskonačan niz skupova funkcija algebra k-značne logike

$$\mathcal{F} = (F_0, F_1, \ldots, F_d, \ldots \quad),$$

takav da $f \in F_d$ ako i samo ako $(f,d) \in S$ $(d=0,1,2, \ldots)$. Pojmovi zatvaranja spektra, kompletnosti spektra i maksimalnog spektra uvode se analogno istim pojmovima kod funkcija sa zadržavanjem. Pojam spektra uveo je japanski matematičar

A. Nozaki, T. Hikita i A. Nozaki dali su kriterijum za odredjivanje da li je spektar maksimalan, dok je T. Hikita dao karakterizaciju maksimalnih spektara pomoću relacija. U radu su maksimalne klase Kudrjavceva za k=2 prevedene na jezik spektara i okarakterisane pomoću relacija.

Rad se sastoji iz četiri poglavlja. U prvom su dati poznati rezultati iz zatvaranja i kompletnosti u algebri logike i uopšte k-značne logike; u drugom osnovni pojmovi i rezultati vezani za funkcije sa zadržavanjem; u trećem originalni rezultati dobijeni u vezi sa karakterizacijom zatvorenih klasa funkcija sa zadržavanjem pomoću vremenskih relacija i najzad u četvrtom karakterizacija maksimalnih spektara (za k=2) pomoću relacija.

I POGLAVLJE

ALGEBRA k-ZNAČNE LOGIKE

1. Algebra logike

Funkcije algebre logike

Neka je $U=\{u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots\}$ prebrojiva azbuka promenljivih i E_2 dvočlan skup $\{0,1\}$. Funkcija $f(u_{i_1},u_{i_2}, \ldots,u_{i_n})$, gde je $u_{i_k}\neq u_{i_\ell}$ za $k\neq\ell$, takva da $f(\alpha_1,\alpha_2, \ldots,\alpha_n) \in E_2$ kad $\alpha_i\in E_2$ $(i=1,2,\ldots,n)$, naziva se funkcija dvoznačne logike ili funkcija algebre logike ili još Boole-ova funkcija.

Sa P_2 ćemo označavati skup svih funkcija algebre logike nad azbukom U. Da bi se izbegla složenost u označavanju indeksa promenljivih, za označavanje promenljivih upotrebljavaćemo simbole x, y, z, ... sa ili bez indeksa. Tako, $f(x_1,x_2, \ldots,x_n)$ označava funkciju koja zavisi od bilo kojih argumenata $u_{i_1}, u_{i_2}, \ldots u_{i_n}$, gde je $u_{i_k} \neq u_{i_\ell}$ za $k\neq\ell$. Jasno, funkcija $f(x_1,x_2, \ldots,x_n)$ je potpuno zadana ako se znaju njena značenja za svaku n-torku značenja argumenata.

D e f i n i c j a 1.1.1. Kažemo da funkcija $f(x_1,x_2, \ldots,x_{i-1},x_i,x_{i+1}, \ldots,x_n)$ suštinski (stvarno) zavisi od promenljive x_i ako postoje dve n-torke značenja argumenata:

$$\tilde{\alpha} = (\alpha_1,\alpha_2, \ldots,\alpha_{i-1},0,\alpha_{i+1}, \ldots,\alpha_n),$$
$$\tilde{\alpha}' = (\alpha_1,\alpha_2, \ldots,\alpha_{i-1},1,\alpha_{i+1}, \ldots,\alpha_n),$$

takve da je $f(\widetilde{\alpha}) = f(\widetilde{\alpha}')$. Kažemo da je u tom slučaju promenljiva x_i suštinska za funkciju $f(x_1,x_2, \ldots,x_n)$. Promenljiva od koje funkcija ne zavisi suštinski je fiktivna promenljiva.

D e f i n i c i j a 1.1.2. Dve funkcije algebre logike su jednake ako se svaka od njih može dobiti od druge dodavanjem ili odstranjivanjem fiktivnih argumenata.

U skladu sa prethodnom definicijom možemo smatrati da su s nekom funkcijom zadane i sve funkcije jednake s njom. Isto tako, ako je $\{f_1, f_2, \ldots, f_v\}$ konačan sistem funkcija iz P_2, možemo smatrati da sve funkcije iz tog sistema zavise od istih argumenata.

Formule. Superpozicija funkcija algebre logike

Za izučavanje funkcija algebre logike potrebno je poznavanje "elementarnih" funkcija: 0, 1, x, $\bar{x}$, x_1x_2, $x_1 \vee x_2$, $x_1 \rightarrow x_2$, $x_1 \leftrightarrow x_2$, $x_1 + x_2$, $x_1 | x_2$, koje imaju značajnu ulogu u matematičkoj logici i kibernetici. Polazeći od tih funkcija mogu se razmatrati funkcije od funkcija", tj. formule nad "elementarnim" funkcijama.

Navodimo induktivnu definiciju formule nad nekim ne obavezno konačnim sistemom funkcija.

D e f i n i c j a 1.1.3. Neka je

$$V=\{f_1(x_{11},x_{12},\ldots,x_{1m_1}),\ f_2(x_{21},x_{22},\ldots,x_{2m_2}),\ \ldots\ \}$$

konačan ili prebrojiv sistem funkcija nad prebrojivom azbukom promenljivih U.

1^{c} Svaka funkcija $f_s(x_{s1},x_{s2}, \dots ,x_{sm_s})$ sistema V je formula nad sistemom funkcija V.

2^{o} Izraz

$$f_p(A_1,A_2, \dots ,A_n),$$

gde je f_p proizvoljna funkcija sistema V, a A_i $(i=1,2, \dots,n)$ je ili formula ili promenljiva iz U, je formula nad sistemom funkcija V.

Formula dobijena pomoću funkcija $f_1, f_2, \dots , f_v$ označava se sa $\mathcal{F}[f_1, f_2, \dots , f_v]$. U slučaju kad hoćemo da naglasimo da promenljive $x_1, x_2, \dots , x_n$ ulaze u formulu, pišemo $\mathcal{F}(x_1, x_2, \dots , x_n)$.

Svakoj formuli $\mathcal{F}(x_1, x_2, \dots , x_n)$ nad sistemom V može se pridružiti funkcija algebre logike. Pridruživanje funkcija formulama oslanja se na induktivnu definiciju formule.

D e f i n i c i j a 1.1.4. 1^{o} Formuli

$$\mathcal{F}_s(x_{s1},x_{s2},\dots,x_{sm_s}) = f_s(x_{s1},x_{s2},\dots,x_{sm_s}) \quad (s=1,2, \dots)$$

pridružujemo funkciju $f_s(x_{s1},x_{s2},\dots,x_{sm_s})$ $(s=1,2, \dots)$.

2^{o} Formuli

$$f_p(A_1,A_2, \dots ,A_n),$$

gde je A_i $(i=1,2,\dots,n)$ ili formula, ili promenljiva $x_{j(i)}$ iz U, a f_p funkcija iz sistema V, pridružujemo funkciju

$$f_p(g_1,g_2, \dots ,g_n),$$

gde je g_i ili funkcija pridružena formuli A_i, ili identička funkcija $f_i=x_{j(i)}$, zavisno od toga da li je A_i formula nad sistemom V ili ppomenljiva iz U.

Funkcije dobijene pomoću funkcija sistema V saglasno prethodnoj definiciji nazivaju se superpozicije funkcija sistema V, a sam proces dobijanja tih funkcija naziva se operacija superpozicije.

Ako formuli $\mathcal{F}$ pridružimo funkciju f, kažemo da formula $\mathcal{F}$ realizuje funkciju f.

Jasno, svaka funkcija

$$f_p(x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_{m_p}}),$$

gde $x_{i_j} \in U$ $(j=1,2,\ldots,m_p)$, je superpozicija funkcija sistema V. Kažemo da je funkcija $f_p(x\ ,x\ ,\ldots,x\ )$ dobijena iz funkcije $f_p(x_{p1},x_{p2},\ldots,x_{pm_p})$ zamenom promenljivih.

P r i m e r 1.1.1. Funkcija

$$f(x_3,x_5,x_5,x_1,x_2)$$

dobija se iz funkcije

$$f(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)$$

zamenom promenljivih.

Zamena promenljivih u funkciji podrazumeva zamenu starih promenljivih novim, permutaciju promenljivih i identifikaciju promenljivih.

Zatvaranje. Potpunost sistema funkcija algebre logike

D e f i n i c i j a 1.1.5. Neka je $\mathfrak{M}$ proizvoljan skup funkcija algebre logike. Skup $[\mathfrak{M}]$ naziva se zatvaranjem skupa $\mathfrak{M}$ ako i samo ako $[\mathfrak{M}]$ sadrži sve superpozicije funkcija iz $\mathfrak{M}$.

P r i m e r 1.1.2. Ako je $\mathfrak{M} = \{\bar{x}\}$, tada je $[\mathfrak{M}]= \{u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots, \bar{u}_1, \bar{u}_2, \ldots, \bar{u}_n, \ldots\}$.

Sledeća svojstva zatvaranja su očigledna:

1° $\mathfrak{M} \subseteq [\mathfrak{M}]$,

2° $[\mathfrak{M}] = [[\mathfrak{M}]]$,

3° $\mathfrak{M}_1 \subseteq \mathfrak{M}_2 \rightarrow [\mathfrak{M}_1] \subseteq [\mathfrak{M}_2]$.

D e f i n i c i j a 1.1.6. Skup $\mathfrak{M}$ funkcija algebre logike je (funkcionalno) zatvoren ako je $\mathfrak{M} = [\mathfrak{M}]$.

Zatvoren skup iz P_2 naziva se često zatvorena klasa.

P r i m e r 1.1.3. Skup $\mathfrak{M} = \{\bar{x}\}$ iz prethodnog primera nije zatvoren, jer je $\mathfrak{M} \neq [\mathfrak{M}]$.

P r i m e r 1.1.4. Skup $\mathfrak{M} = \{u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots \bar{u}_1, \bar{u}_2, \ldots, \bar{u}_n, \ldots\}$ je zatvoren na osnovu svojstva 2° zatvaranja.

Primeri trivijalnih zatvorenih klasa su skup koji sadrži sve identične funkcije oblika $f(x) = x$ i skup koji sadrži sve funkcije algebre logike.

Presek proizvoljne familije zatvorenih klasa je zatvorena klasa.

D e f i n i c i j a 1.1.7. Sistem funkcija $\mathfrak{M}$ iz P_2 naziva se (funkcionalno) kompletnim ili potpunim ako je svaka funkcija iz P_2 superpozicija funkcija iz $\mathfrak{M}$, tj. ako je

$$[\mathfrak{M}] = P_2.$$

Primeri kompletnih (potpunih) sistema u P_2 su:

1^o Sistem P_2 svih funkcija algebre logike.

2^o Sistem $\mathfrak{M} = \{\bar{x}, x_1x_2, x_1 \vee x_2\}$. Potpunost sledi iz toga što se svaka funkcija algebre logike, različita od konstante 0, može predstaviti u obliku savršene disjunktivne normalne forme i iz toga što je $0 = x\bar{x}$.

3^o Sistem $\mathfrak{M} = \{\bar{x}, x_1x_2\}$. Potpunost sledi iz toga što je $x_1 \vee x_2 = \overline{\bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2}$ i potpunosti sistema 2^o.

4^o Sistem $\mathfrak{M} = \{\bar{x}, x_1 \vee x_2\}$. Potpunost sledi iz toga što je $x_1 \cdot x_2 = \overline{\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2}$ i potpunosti sistema 2^o.

5^o Sistem $\mathfrak{M} = \{x_1 | x_2\}$. Potpunost sledi iz toga što je $\bar{x} = x|x$, $x_1 \vee x_2 = (x_1|x_1)|(x_2|x_2)$ i potpunosti sistema 4^o.

6^o Sistem $\mathfrak{M} = \{x_1 \cdot x_2, x_1 + x_2 \pmod 2, 0, 1\}$. Potpunost sledi iz toga što je $\bar{x} = x + 1$ i potpunosti sistema 3^o.

U vezi s potpunošću sistema 6^o važi sledeća teorema I. I. Žegalkina [14], [17], [18].

T e o r e m a 1.1.1. Svaka funkcija algebre logike može se na jedinstven način predstaviti u obliku polinoma po mod 2, pri čemu je stepen svake promenljive najviše 1 (što sledi iz toga što je $x x = x$).

Tvrdjenje teoreme sledi iz toga što je broj svih polinoma Žegalkina promenljivih $x_1, x_2, \ldots, x_n$, tj. polinoma oblika

$$\sum_{(i_1,\ldots,i_s)} a_{i_1\ldots i_s} x_{i_1} \ldots x_{i_s}$$

jednak 2^{2^n}. Naime, moć skupa svih podskupova $\{i_1, \ldots, i_s\}$ od $\{1,2, \ldots, n\}$ je 2^n, a osim toga $a_{i_1\ldots i_s}$ može biti 0 ili 1.

Iz navedenih primera se vidi da postoji veliki broj kompletnih sistema u P_2. Svaki od njih može se posmatrati kao skup elementarnih funkcija pomoću kojih može biti izražena (u obliku formula) svaka funkcija algebre logike. Uzimanje jednog ili drugog kompletnog sistema zavisi od prirode razmatranog problema.

U vezi sa pojmom kompletnosti postavlja se važno pitanje: kako dokazati kompletnost, odnosno nekompletnost nekog sistema?

Prvo, lako se vidi da kompletan sistem funkcija ne može biti podskup zatvorene klase, koja je različita od klase P_2 svih funkcija algebre logike i drugo, svaki nekompletan sistem funkcija može se proširiti do zatvorene klase različite od klase svih funkcija algebre logike. Za potpuno rešenje drugog pitanja neophodno je poznavanje nekih zatvorenih klasa funkcija algebre logike. Pre opisivanja tih klasa navodimo nekoliko definicija.

D e f i n i c i j a 1.1.8. (A. V. Kuznjecov). Klasa $\mathfrak{N}$ funkcija iz P_2 naziva se predkompletnom ili predpotpunom ili još maksimalnom ako je $[\mathfrak{N}] \neq P_2$ i $[\mathfrak{N} \cup \{f\}] = P_2$ za proizvoljnu funkciju $f \in P_2 \setminus \mathfrak{N}$.

Iz definicije sledi da je maksimalna klasa zatvorena.

D e f i n i c i j a 1.1.9. Kompletan sistem funkcija $\mathfrak{M}$ u P_2 je baza u P_2 ako nijedan pravi podskup od $\mathfrak{M}$ nije kompletan u P_2.

Sistemi 3°, 4° i 5° su primeri baza u P_2.

D e f i n i c i j a 1.1.10 ([14]). Sistem funkcija $\mathfrak{M}'$ iz zatvorene klase $\mathfrak{M}$ naziva se potpunim u $\mathfrak{M}$ ako je $[\mathfrak{M}'] = \mathfrak{M}$.

D e f i n i c i j a 1.1.11 ([14]). Sistem funkcija $\mathfrak{M}_1$ iz zatvorene klase $\mathfrak{M}$ naziva se maksimalnim (predpotpunim) u $\mathfrak{M}$ ako je $[\mathfrak{M}_1] \neq \mathfrak{M}$ i $[\mathfrak{M}_1 \cup \{f\}] = \mathfrak{M}$ za svaku funkciju $f \in \mathfrak{M} \setminus \mathfrak{M}_1$.

D e f i n i c i j a 1.1.12. Potpun sistem funkcija $\mathfrak{M}'$ u zatvorenoj klasi $\mathfrak{M}$ je baza u $\mathfrak{M}$ ako nijedan pravi podskup od $\mathfrak{M}'$ nije potpun u $\mathfrak{M}$.

Teorema o potpunosti (E. Post)

Razmotrimo **sada** maksimalne klase u algebri logike.

Klasu svih funkcija algebre logike koje očuvavaju nulu, tj. funkcija $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ takvih da je $f(0,0,\dots,0) = 0$, označavaćemo sa T_0 (oznaka Posta C_3). Na primer, x, x_1x_2, $x_1 \vee x_2 \in T_0$, dok 1, $\overline{x} \notin T_0$. Očigledno T_0 je zatvorena klasa. Svaki od sledećih sistema: $\mathcal{B}_1 = \{xy,\ x+y\}$, $\mathcal{B}_2 = \{x \vee y,\ x+y\}$ i $\mathcal{B}_3 = \{x \vee y,\ x \cdot \overline{y}\}$ je baza u T_0.

Klasu svih funkcija algebre logike koje očuvavaju jedinicu, tj. funkcija $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, takvih da je $f(1,1,\dots,1) = 1$, označavaćemo sa T_1 (oznaka Posta C_2). Na primer, x, x_1x_2, $x_1 + x_2 + 1 \in T_1$, dok 0, $\overline{x} \notin T_1$. Očigledno T_1 je zatvorena klasa. Primeri baze klase T_1 su $\mathcal{B}_1 = \{x \vee y,\ x+y+1\}$, $\mathcal{B}_2 = \{xy,\ x+y+1\}$, $\mathcal{B}_3 = \{xy,\ x \vee \overline{y}\}$.

D e f i n i c i j a 1.1.13. Za funkciju

$$f^*(x_1,x_2,\dots,x_n) = \overline{f}(\overline{x}_1,\overline{x}_2,\dots,\overline{x}_n)$$

kažemo da je dualna funkcija funkciji $f(x_1,x_2,\dots,x_n)$.

Na primer, dualna funkcija funkciji x_1x_2 je $x_1 \vee x_2$ i obrnuto, konstanta 1 je dualna konstanti 0 i obrnuto, funkcije x i $\overline{x}$ su dualne same sebi.

Primetimo da je $(f^*)^* = f$.

T e o r e m a 1.1.2 (princip dualnosti). Ako je funkcija $\Phi(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ jednaka superpoziciji funkcija $f_0(y_1, y_2, \ldots, y_n)$, $f_1(x_1, x_2, \ldots, x_m)$, $\ldots$, $f_n(x_1, x_2, \ldots, x_m)$, tada je njoj dualna funkcija $\Phi^*(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ jednaka superpoziciji funkcija $f_0^*(y_1, y_2, \ldots, y_n)$, $f_1^*(x_1, x_2, \ldots, x_m)$, $\ldots$, $f_n^*(x_1, x_2, \ldots, x_m)$.

Iz principa dualnosti sledi da ako je $\mathfrak{M}$ zatvorena klasa, tada je i klasa $\mathfrak{M}^*$ svih funkcija koje su dualne funkcijama iz $\mathfrak{M}$, takodje zatvorena.

P r i m e r 1.1.5. Ako je $f(x_1,x_2) = x_1\bar{x}_2 \vee \bar{x}_1x_2$, tada je $f^*(x_1,x_2) = (x_1 \vee \bar{x}_2)(\bar{x}_1 \vee x_2)$.

P r i m e r 1.1.6. Klasa T_1 sadrži sve funkcije dualne funkcijama iz klase T_0, drugim rečima klasa T_1 je dualna klasi T_0.

D e f i n i c i j a 1.1.14. Za funkciju $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ kažemo da je samodualna ako je

$$f^*(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

tj. ako je

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \bar{f}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n).$$

Primeri samodualnih funkcija su: $f(x) = x$, $f(x) = \bar{x}$, $f(x,y,z) = x+y+z$, $f(x,y,z) = xy \vee yz \vee zx$.

Ako n-torke vrednosti promenljivih $\tilde{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ i $\tilde{\alpha}' = (\bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2, \ldots, \bar{\alpha}_n)$ smatramo suprotnim, tada je jasno da samodualna funkcija na suprotnim n-torkama poprima suprotna značenja.

Klasa samodualnih funkcija obično se obeležava sa S (oznaka Posta D_3). Lako se pokazuje da je S zatvorena klasa. Jednočlan skup $\mathcal{B} = \{x\bar{y} \vee x\bar{z} \vee \bar{y}\bar{z}\}$ je baza u S.

D e f i n i c i j a 1.1.15. Za funkciju $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ kažemo da je linearna ako njen polinom Žegalkina ima oblik

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n \pmod 2.$$

Linearne funkcije su: 0, 1, x, $\bar{x}$, $x_1 + x_2$, dok konjunkcija i disjunkcija nisu linearne funkcije.

Očevidno klasa linearnih funkcija L (oznaka Posta L_1) je zatvorena. Primeri baze u L su $\mathcal{B}_1 = \{0, x + y + 1\}$ i $\mathcal{B}_2 = \{1, x + y\}$.

D e f i n i c i j a 1.1.16. Za dve n-torke vrednosti promenljivih $\tilde{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ i $\tilde{\beta} = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$ kažemo da $\tilde{\alpha}$ prethodi $\tilde{\beta}$, u oznaci $\tilde{\alpha} \preceq \tilde{\beta}$, ako je $\alpha_i \leq \beta_i$ za svako i=1,2, ..,n.

Očigledno relacija $\preceq$ je relacija delimičnog poretka.

D e f i n i c i j a 1.1.17. Za funkciju $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ kažemo da je monotona ako za sve n-torke $\tilde{\alpha}$ i $\tilde{\beta}$, takve da je $\tilde{\alpha} \preceq \tilde{\beta}$, važi $f(\tilde{\alpha}) \leq f(\tilde{\beta})$.

Primeri monotonih funkcija su: 0, 1, x_1x_2, $x_1 \vee x_2$. Funkcija $x_1 + x_2 \pmod 2$ nije monotona.

Klasa monotonih funkcija je zatvorena. Obično se obeležava sa M (oznaka Posta A_1).

D e f i n i c i j a 1.1.18. Za dve n-torke $\tilde{\alpha}$ i $\tilde{\beta}$ kažemo da su susedne po i-toj koordinati ako su oblika

$$\tilde{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{i-1}, \alpha_i, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_n),$$
$$\tilde{\beta} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{i-1}, \overline{\alpha}_i, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_n).$$

T e o r e m a 1.1.3. Da bi funkcija $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ bila nemonotona potrebno je i dovoljno da postoje susedne n-torke $\tilde{\alpha}$ i $\tilde{\beta}$, takve da je $\tilde{\alpha} \preceq \tilde{\beta}$ i $f(\tilde{\alpha}) > f(\tilde{\beta})$.

Može se pokazati da je svaka monotona funkcija ili konstanta 0 ili 1, ili se može izraziti pomoću konjunkcije i disjunkcije. Otuda i sledi da je skup $\mathcal{B} = \{xy, x \vee y, 0, 1\}$ baza klase M.

Lako je videti da su klase T_0, T_1, S, L i M pravi podskupovi od P_2 i da su dve i dve medjusobno različite.

Sada možemo formulisati teoremu koja prcizira potrebne i dovoljne uslove za to da bi proizvoljan sistem funkcija iz P_2 bio potpun (kompletan) u P_2. Teorema pripada E. Postu ([40]). Dokaz teoreme, koji ćemo ovde dati pripada A. V. Kuznjecovu ([14]).

T e o r e m a 1.1.4 (o funkcionalnoj potpunosti). Da bi sistem funkcija

$$V = \{f_1(x_{11}, x_{12}, \ldots, x_{1m_1}),\ f_2(x_{21}, x_{22}, \ldots, x_{2m_2}),\ \ldots\}$$

algebre logike P_2 bio potpun, potrebno je i dovoljno da on sadrži:

funkciju koja ne očuvava nulu,
funkciju koja ne očuvava jedinicu,
nesamodualnu funkciju,
nelinearnu funkciju i
nemonotonu funkciju,

ili, drugim rečima, da nije podskup ni jedne od zatvorenih klasa T_o, T_1, S, L i M.

D o k a z. Dokažimo da je uslov potreban. Neka je V potpun sistem funkcija algebre logike, tj. $[V] = P_2$. Pretpostavimo da neki od pet nabrojanih uslova nije ispunjen, tj. da je V podskup neke od zatvorenih klasa T_o, T_1, S, L i M. To bi značilo da je i zatvaranje od V podskup te klase, tj. da V nije potpun sistem. Dobijena protivrečnost upravo dokazuje potrebnost uslova.

Dokažimo da je uslov dovoljan. Neka V zadovoljava nabrojane uslove, drugim rečima, neka nije podskup ni jedne od navedenih klasa. Dokažimo da je V potpun sistem.

I. Pokažimo da se iz V mogu dobiti konstante 0 i 1.

Po pretpostavci u V postoje funkcije f_o, f_1, f_s, takve da $f_o \notin T_o$, $f_1 \notin T_1$, $f_s \notin S$, tj. $f_o(0, 0, \ldots, 0) = 1$, $f_1(1, 1, \ldots, 1) = 0$ i f_s je nesamodualna. Moguća su dva slučaja.

1. Ako je $f_o(1, 1, \ldots, 1) = 1$, tada identifikovanjem promenljivih u funkciji f_o, dobijamo konstantu 1, tj.

$$\varphi(x) = f_o(x, x, \ldots, x) \equiv 1.$$

Konstantu 0 dobijamo iz funkcije $f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ zamenom svake promenljive konstantom 1.

2. Ako je $f_o(1, 1, \ldots, 1) = 0$, tada identifikovanjem promenljivih u f_o, dobijamo funkciju $\overline{x}$, tj.

$$\psi(x) = f_o(x, x, \ldots, x) = \overline{x}.$$

Kako je f_s nesamodualna funkcija, to postoji n-torka $\tilde{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, takva da je

$$f_s(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = f_s(\overline{\alpha}_1, \overline{\alpha}_2, \ldots, \overline{\alpha}_n).$$

Razmotrimo funkciju

$$\theta(x) = f_s(\theta_1(x), \theta_2(x), \ldots, \theta_n(x)),$$

gde je $\theta_i(x) = x^{\alpha_i}$, tj.

$$\theta_i(x) = \begin{cases} \bar{x}, & \text{ako je } \alpha_i = 0 \\ x, & \text{ako je } \alpha_i = 1 \end{cases}$$

$(i = 1, 2, \ldots, n)$. Kako je

$$\theta(0) = f_s(\theta_1(0), \theta_2(0), \ldots, \theta_n(0)) = f_s(0^{\alpha_1}, 0^{\alpha_2}, \ldots, 0^{\alpha_n}) =$$

$$f_s(\bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2, \ldots, \bar{\alpha}_n) = f_s(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = f_s(1^{\alpha_1}, 1^{\alpha_2}, \ldots, 1^{\alpha_n}) = \theta(1),$$

tj.

$$\theta(0) = \theta(1),$$

znači da je $\theta(x)$ konstanta. Iz dobijene konstante i funkcije $\bar{x}$ dobijamo drugu konstantu.

II. Sistemu V po pretpostavci pripada nemonotona funkcija $f_m(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Saglasno teoremi 1.1.3. postoje susedne n-torke

$$\tilde{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{i-1}, 0, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_n),$$

$$\tilde{\beta} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{i-1}, 1, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_n),$$

takve da je

$$f_m(\tilde{\alpha}) > f_m(\tilde{\beta}).$$

S obzirom da imamo konstante 0 i 1 možemo obrazovati funkciju

$$\mu(x) = f_m(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{i-1}, x, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_n)$$

za koju je

$$\mu(0) > \mu(1).$$

Jasno, $\mu(x) = \bar{x}$. Znači, iz sistema V dobili smo funkciju $\bar{x}$.

III. Sistem V sadrži nelinearnu funkciju f_ℓ. U polinomu Žegalkina funkcije f postoji član koji sadrži najmanje dva činioca. Možemo smatrati da su to x_1 i x_2. Tada polinom možemo napisati u obliku

$$f_\ell(x_1,x_2, \ldots,x_n) = x_1 x_2 f_1(x_3, \ldots,x_n) + x_1 f_2(x_3, \ldots,x_n)$$
$$+ x_2 f_3(x_3,\ldots,x_n) + f_4(x_3, \ldots,x_n),$$

gde je $f_1(x_3, \ldots,x_n) \not\equiv 0$.

Kako je $f_1 \not\equiv 0$, to postoji (n-2)-torka vrednosti promenljivih $(\alpha_3, \ldots,\alpha_n)$, takva da je $f_1(\alpha_3, \ldots,\alpha_n) = 1$. Kako, osim toga imamo konstante 0 i 1, možemo konstruisati funkciju

$$\chi(x_1,x_2) = f_\ell(x_1,x_2,\alpha_3,\ldots,\alpha_n) = x_1 x_2 + \alpha x_1 + \beta x_2 + \gamma,$$

gde su α, β i γ konstante 0 ili 1.

Pošto imamo negaciju, možemo sada konstruisati funkciju

$$\phi(x_1,x_2) = \chi(x_1+\beta, x_2+\alpha) + \gamma + \alpha\beta = x_1 x_2.$$

Dobijena funkcija je, dakle, konjunkcija. Pošto konjunkcija i negacija čine potpun sistem funkcija u P_2, sledi da je i V potpun sistem u P_2. Ovim je teorema dokazana.

P o s l e d i c a 1.1.1. Svaka zatvorena klasa funkcija iz P_2, različita od P_2, sadrži se bar u jednoj od pet datih klasa.

P o s l e d i c a 1.1.2. Klase T_o, T_1, S, L i M su jedine maksimalne klase u P_2.

Američki matematičar E. Post opisao je sve zatvorene klase algebre logike. U mreži - delimično uredjenom skupu relacijom inkluzije svih zatvorenih klasa iz P_2 maksimalni elemenat je klasa svih funkcija algebre logike P_2, elementi koji mu neposredno prethode su upravo maksimalne klase T_o, T_1, S, L i M, dok su minimalni elementi: O_1 - klasa svih funkcija $f_i(x_i) = x_i$, $i = 1,2, \ldots$, O_2 - klasa svih funkcija jednakih konstanti 1 i O_3 - klasa svih funkcija jednakih konstanti O. Uopšte, elementi koji neposredno prethode nekoj zatvorenoj klasi predstavljaju maksimalne klase u toj klasi.

Navodimo neke rezultate Posta [17], [40], [41].

T e o r e m a 1.1.5. Svaka zatvorena klasa algebre logike ima konačan bazis.

T e o r e m a 1.1.6. Skup svih zatvorenih klasa algebre logike je prebrojiv.

T e o r e m a 1.1.7. Ako su $\mathfrak{M}_1$ i $\mathfrak{M}_2$ dve zatvorene klase algebre logike, takve da je $\emptyset \neq \mathfrak{M}_1 \subsetneqq \mathfrak{M}_2$, tada se $\mathfrak{M}_1$ može proširiti do maksimalne klase u $\mathfrak{M}_2$.

T e o r e m a 1.1.8. Svaka zatvorena klasa algebre logike ima najviše pet predpotpunih (maksimalnih) klasa.

Ustvari, pet maksimalnih klasa ima samo klasa svih funkcija algebre logike P_2. Klase O_1, O_2 i O_3, kao što je već ranije rečeno, nemaju maksimalnih klasa.

T e o r e m a 1.1.9. Skup $\mathfrak{N}$ je potpun u zatvorenoj klasi $\mathfrak{M}$ ako i samo ako $\mathfrak{N}$ nije podskup ni jedne od predpotpunih klasa u $\mathfrak{M}$.

D o k a z. Potrebnost. Ako bi skup $\mathfrak{N}$, potpun u zatvorenoj klasi $\mathfrak{M}$, bio podskup neke predpotpune klase u $\mathfrak{M}$, tada bi i $[\mathfrak{N}]$ bio podskup te predpotpune klasa, tj. $\mathfrak{N}$ ne bi bio potpun u $\mathfrak{M}$.

Dovoljnost. Ako skup $\mathfrak{N} \subset \mathfrak{M}$, koji nije podskup ni jedne predpotpune klase u $\mathfrak{M}$, ne bi bio potpun u $\mathfrak{M}$, tj. $[\mathfrak{N}] \neq \mathfrak{M}$ ($[\mathfrak{N}] \subset \mathfrak{M}$ i $[\mathfrak{N}] \neq \mathfrak{M}$), značilo bi da se $[\mathfrak{N}]$, a time i $\mathfrak{N}$ može proširiti do neke predpotpune klase u $\mathfrak{M}$, tj. $\mathfrak{N}$ bi bio podskup te predpotpune klase.

P o s l e d i c a 1.1.3. Iz svakog potpunog sistema $\mathfrak{N}$ u $\mathfrak{M}$ može se izdvojiti potpun u $\mathfrak{M}$ podsistem koji sadrži najviše pet funkcija.

U [17] je dato poboljšanje prethodnog rezultata. Pre nego ga formulišemo u obliku teoreme, navodimo još dve definicije.

D e f i n i c i j a 1.1.19 (Post). Funkcija $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ P_2 je

funkcija tipa α, ili α-funkcija ako je $f(x,x,\ldots,x)=$ [illegible],
funkcija tipa β, ili β-funkcija ako je $f(x,x,\ldots,x)=1$,
funkcija tipa γ, ili γ-funkcija ako je $f(x,x,\ldots,x)=0$,
funkcija tipa δ, ili δ-funkcija ako je $f(x,x,\ldots,x)=x$.

D e f i n i c i j a 1.1.20. Za funkciju $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ algebre logike kažemo da je parna ako je

$$f(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n) = f(\bar{\alpha}_1,\bar{\alpha}_2,\ldots,\bar{\alpha}_n)$$

za svaku n-torku vrednosti promenljivih $(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)$.

Skup svih funkcija tipa α označavaćemo sa A, tipa β sa B, tipa γ sa Γ, tipa δ sa Δ, parnih sa Y. Navedeni skupovi, izuzev skupa A, nisu zatvoreni.

T e o r e m a 1.1.10([17]). Iz svakog potpunog sistema $\mathfrak{N}$ u $\mathfrak{M}$ može se izdvojiti potpun u $\mathfrak{M}$ sistem $\mathfrak{N}''$ koji sadrži najviše četiri funkcije.

D o k a z. Za zatvorenu klasu $\mathfrak{M} \neq P_2$ tvrdjenje sledi iz činjenice da $\mathfrak{M}$ ima najviše četiri predpotpune klase. Neka je, zato, $\mathfrak{M} = P_2$. Po prethodnoj teoremi iz svakog potpunog sistema $\mathfrak{N}$ u P_2 može se izdvojiti podpun podsistem $\mathfrak{N}'$ koji sadrži najviše pet funkcija.

Postoje dve mogućnosti.

1.(a). $\mathfrak{N}'$ sadrži funkciju $f_1(x_1, x_2, \dots, x_n)$ tipa β. Jasno, funkcija f_1 ne očuvava nulu i nije samodualna, tj. $f_1 \notin T_0$ i $f_1 \notin S$. Kako $\mathfrak{N}$ sadrži još funkcije f_2, f_3, f_4, takve da $f_2 \notin T_1$, $f_3 \notin M$ i $f_4 \notin L$, sledi da je sistem $\mathfrak{N}'' = \{f_1, f_2, f_3, f_4\}$ potpun u P_2.

(b). $\mathfrak{N}'$ sadrži funkciju $f_1(x_1, x_2, \dots, x_n)$ tipa γ, tada $f_1 \notin T_0$ i $f_1 \notin S$. Zajedno sa funkcijama f_2, f_3 i f_4 iz $\mathfrak{N}'$, takvim da $f_2 \notin T_1$, $f_3 \notin M$ i $f_4 \notin L$, funkcija f_1 obrazuje potpun sistem u P_2.

2. $\mathfrak{N}'$ ne sadrži funkciju tipa β, niti funkciju tipa γ. Tada $\mathfrak{N}'$ mara da sadrži funkciju $f_1(x_1, x_2, \dots, x_n)$ tipa δ (inače bi sve funkcije u $\mathfrak{N}'$ bile α-funkcije, pa $\mathfrak{N}'$ ne bi bio potpun sistem u P_2). Kako $f_1 \notin T_0$, $f_1 \notin T_1$ i $f_1 \notin M$, to sistem $\mathfrak{N}'' = \{f_1, f_2, f_3\}$, gde $f_2 \notin S$ i $f_3 \notin L$ $(f_2, f_3 \in \mathfrak{N}')$, je potpun u P_2. Cvim je teorema dokazana.

P o s l e d i c a 1.1.4. Baza proizvoljne zatvorene klase algebre logike sadrži najviše četiri funkcije.

Da broj funkcija u bazi zatvorene klase ne mora biti manji, sledi, na primer, iz toga što je skup $\{0, 1, x\cdot y, x + y + z \pmod 2\}$ baza u P_2, odnosno skup $\{0, 1, x\cdot y, x \vee y\}$ baza u M.

2. Elementi k-značne logike

Neka je $U = \{u_1, u_2, \dots, u_n, \dots\}$ polazna azbuka promenljivih i E_k skup $\{0, 1, \dots, k-1\}$. Funkciju $f(u_{i_1}, u_{i_2}, \dots, u_{i_n})$, gde je $u_{i_j} \neq u_{i_k}$ za $j \neq k$, nazivamo funkcijom k-značne logike ako $f(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in E_k$ kada $\alpha_i \in E_k$ $(i = 1, 2, \dots, n)$. Kao i u dvoznačnoj logici koristićemo zapis $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ za funkciju od n promenljivih. Funkcija k-značne logike je potpuno zadana ako su tablicom date njene vrednosti za sve n-torke vrednosti promenljivih. Sa P_k ćemo označavati skup svih funkcija k-značne logike.

Navodimo nekoliko funkcija iz P_k, koje možemo smatrati "elementarnim", akoje predstavljaju izvesna poopštenja funkcija iz P_2.

1. Funkcija jedne promenljive $\overline{x} = x + 1 \pmod k$ predstavlja poopštenje negacije u smislu "cikličkog" prenosa značenja: $\overline{0} = 1$, $\overline{1} = 2$, ..., $\overline{k-1} = 0$.

2. Funkcija $Nx = k-1-x = \sim x$ predstavlja drugo poopštenje negacije u smislu "ogledalskog" preslikavanja značenja i naziva se negacija Lukaševiča.

3. Funkcija

$$\mathcal{J}_{\sigma}(x) = \begin{cases} k-1 \text{ za } x = \sigma \\ 0 \text{ za } x \neq \sigma \end{cases}$$

$(\sigma = 0, 1, \dots, k-1)$, za $\sigma \neq k-1$ takodje poopštava neka svojstva negacije.

4. Funkcija

$$j_i(x) = \begin{cases} 1 & \text{za } x = i \\ 0 & \text{za } x \neq i \end{cases}$$

$(i = 0, 1, \ldots, k-1)$, naziva se karakteristična funkcija broja i i za $i \neq k-1$ takodje predstavlja poopštenje negacije.

5. Funkcija $\min(x_1, x_2)$ predstavlja poopštenje konjunkcije.

6. Funkcija $\max(x_1, x_2)$ predstavlja poopštenje disjunkcije.

7. Funkcija $x_1 x_2 \pmod{k}$ predstavlja drugo poopštenje konjunkcije.

8. Funkcija $x_1 + x_2 \pmod{k}$ predstavlja sabiranje po modulu k.

9. Funkcija $V_k(x, y) = \max(x, y) + 1 \pmod{k}$ naziva se funkcija Webb-a, koja je analogna funkciji Sheffer-a u P_2.

Navodimo neke osobine gornjih funkcija.

$N(Nx) = x$, medjutim $\bar{\bar{x}} \neq x$ za $k \geqslant 3$.

$N\min(x_1, x_2) = \max(Nx_1, Nx_2)$, medjutim $\overline{\min(x_1, x_2)} \neq \max(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$.

Pojam suštinske i fiktivne promenljive, jednakosti dve funkcije, superpozicije sistema funkcija, zatvaranja i zatvorenog skupa, kompletnog (potpunog) sistema funkcija, baze zatvorene klase, predpotpune (maksimalne) klase, definišu se kao u algebri (dvoznačne) logike.

Navedimo sada nekoliko primera potpunih sistema u P_k.

1°. Sistem $V = P_k$ svih funkcija algebre k-značne ligike je očigledno potpun u P_k.

2^o. Sistem $V = \{0, 1, \ldots, k-1, \mathcal{J}_0(x), \mathcal{J}_1(x), \ldots, \mathcal{J}_{k-1}(x), \min(x, y), \max(x, y)\}$ je potpun u P_k. Potpunost sledi iz toga što se svaka funkcija k-značne logike može predstaviti u obliku analognom savršenoj disjunktivnoj normalnoj formi:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \bigvee_{(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)} \mathcal{J}_{\sigma_1}(x_1) \,\&\, \mathcal{J}_{\sigma_2}(x_2) \,\&\ldots\&\, \mathcal{J}_{\sigma_n}(x_n) \,\&\, f(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n),$$

gde su $\bigvee$ i $\&$ oznake za max, odnosno min.

3^o. Sistem $V = \{\bar{x}, \max(x_1, x_2)\}$ je potpun u P_k. Naime, može se pokazati da se sve funkcije sistema 2^o mogu izraziti pomoću funkcija $\bar{x}$ i $\max(x_1, x_2)$.

4^o. Sistem $V = \{V_k(x_1, x_2)\}$ je potpun. Potpunost sledi iz relacija

$$\bar{x} = V_k(x, x),$$
$$\max(x_1, x_2) = V_k(V_k(x_1, x_1), V_k(x_2, x_2))$$

i potpunosti prethodnog sistema.

Neka je dat proizvoljan sistem V funkcija iz P_k. Kako utvrditi da li je sistem V potpun ili nije? Jedan od pristupa rešenju postavljenog pitanja je algoritamski. Takav pristup podrazumeva preciziranje algoritma pomoću kojeg se može utvrditi da li je razmatrani sistem potpun ili nije. U slučaju kad je V konačan sistem, takav algoritam postoji. Naime, važi

T e o r e m a 1.2.1. Postoji algoritam za raspoznavanje potpunosti.

U dokazu teoreme koriste se tzv. selektorske funkcije (selektori).

D e f i n i c i j a 1.2.1. Funkcija $g_i^n(x_1, x_2, \dots, x_n)$ naziva se selektorska ili kratko selektor ako je

$$g_i^n(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_i \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

U nekim sledećim razmatranjima selektorske funkcije igraju suštinsku ulogu.

T e o r e m a 1.2.2. Iz svakog potpunog sistema u P_k može se izdvojiti konačan potpun u P_k sistem.

Iz poslednje teoreme sledi da praktično beskonačni potpuni sistemi u P_k ne postoje. Zbog toga ograničenje na konačne sisteme pri algoritamskom pristupu utvrdjivanja potpunosti nema suštinski karakter.

Drugi pristup rešavanju pitanja potpunosti nekog sistema sastoji se u nalaženju najmanjeg sistema zatvorenih klasa, takvih da je proizvoljan sistem potpun ako i samo ako nije podskup ni jedne od zatvorenih klasa tog sistema. Takav sistem zatvorenih klasa često se naziva kriterijumski sistem.

Neka K označava sistem (skup) svih zatvorenih klasa u P_k.

D e f i n i c i j a 1.2.2. Za podskup $\sum$ od K kažemo da predstavlja kriterijumski sistem u P_k ako je proizvoljan sistem $V \subset P_k$ potpun u P_k ako i samo ako on nije podskup ni jedne zatvorene klase iz $\sum$.

Jasno, kriterijumski sistemi zatvorenih klasa postoje. Na primer, sistem $K \setminus \{P_k\}$ predstavlja kriterijumski sistem. U algebri logike ($k = 2$) kriterijumski sistem je $\sum = \{T_0, T_1, S, L, M\}$.

Ako je $\sum$ kriterijumski sistem, ako $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2 \in \sum$ i

$\mathfrak{M}_1 \subset \mathfrak{M}_2$, tada je i $\sum \setminus \{\mathfrak{M}_1\}$ kriterijumski sistem. Zahvaljujući ovoj osobini može se konstruisati što više prostiji kriterijumski sistem.

T e o r e m a 1.2.3. Postoji u P_k kriterijumski sistem $\sum$, takav da je $|\sum| \leq 2^{k^{k^2}}$ i može se efektivno konstruisati (A. V. Kuznjecov).

Očigledno, sistem maksimalnih klasa obrazuje kriterijumski sistem u P_k.

Prethodna teorema, bez obzira što u potpunosti daje odgovor na pitanje da li je neki sistem funkcija potpun u P_k, teško se može efektivno primeniti, jer zahteva proveru dosta velikog broja uslova već za ne tako velike vrednosti za k. Tako, na primer, broj maksimalnih klasa u P_3 je 18, dok je u P_4 čak 82. Otud i potreba za drugim, efikasnijim kriterijumima potpunosti.

D e f i n i c i j a 1.2.3. Funkciju $f(x_1,x_2,\dots,x_n)$ iz P_k nazivamo suštinskom ako

(a) f suštinski zavisi bar od dva argumenta,

(b) f poprima svih k značenja iz $E_k=\{0,1, \dots ,k-1\}$.

T e o r e m a 1.2.4 (kriterijum Slupeckog). Sistem $V \subset P_k$ $(k \geqslant 3)$, koji sadrži sve funkcije jedne promenljive je potpun u P_k ako i samo ako V sadrži suštinsku funkciju $f(x_1,x_2, \dots ,x_n)$.

T e o r e m a 1.2.5 (kriterijum Jablonskog). Sistem $V \subset P_k$ $(k \geqslant 3)$, koji sadrži sve funkcije jedne promenljive, koje poprimaju najviše k-1 značenja, je potpun u P_k ako i samo ako sadrži suštinsku funkciju $f(x_1,x_2, \dots ,x_n)$.

Očigledno, kriterijum Slupeckog je posledica kriterijuma Jablonskog.

Primer sistema

$$V = \{0,\ 1,\ x,\ \overline{x},\ x_1 + x_2\}$$

pokazuje da prethodne teoreme ne važe za slučaj $k = 2$. Naime, sistem V ispunjava uslove teorema, ali nije potpun u P_2, jer je $V \subset L$.

T e o r e m a 1.2.6 (kriterijum Salomaa-a). Sistem $V \subset P_k$ ($k \geqslant 5$), koji sadrži sve funkcije jedne promenljive koje poprimaju svih k značenja (tj. sve permutacije skupa E_k), je potpun u P_k ako i samo ako sadrži suštinsku funkciju.

Konačnoznačne logike su uvedene kao poopštenja dvoznačne logike. Mnogi rezultati dvoznačne logike prenose se k-značnu ligiku. Medjutim, postoje i suštinske razlike izmedju P_k ($k \geqslant 3$) i P_2.

Prva suštinska razlika je u vezi sa bazom zatvorene klase. Već smo rekli da svaka zatvorena klasa u P_2 ima konačnu bazu. Da to nije tačno u P_k ($k \geqslant 3$), pokazuju sledeće teoreme.

T e o r e m a 1.2.7 (Janov [19]). Za svako k ($k \geqslant 3$) postoji u P_k zatvorena klasa koja nema bazu.

T e o r e m a 1.2.8 (Mučnik [19]). Za svako k ($k \geqslant 3$) postoji u P_k zatvorena klasa sa prebrojivom bazom.

Druga suštinska razlika izmedju P_k ($k \geqslant$) i P_2 je u moći skupa zatvorenih klasa. Naime, Post je pokazao da je skup svih zatvorenih klasa u P_2 prebrojiv.

Za $k \geqslant 3$ važi sledeća teorema.

T e o r e m a 1.2.9. Za svako k ($k \geqslant 3$), P_k sadrži kontinuum različitih zatvorenih klasa.

Treća suštinska razlika izmedju P_k ($k \geqslant 3$) i P_2 je u vezi s mogućnošću predstavljanja funkcija pomoću polinoma. Kao što je poznato svaka funkcija iz P_2 može se predstaviti u obliku polinoma po modulu 2. Medjutim, za $k \geqslant 3$ to uvek nije moguće. Naime, važi

T e o r e m a 1.2.10. Sistem polinoma po mod k je potpun u P_k ako i samo ako je $k = p$, gde je p prost broj.

Navedene razlike izmedju P_k za $k \geqslant 3$ i P_2 jasno ukazuju na neke osobenosti k-značne logike za $k \geqslant 3$. No, valja napomenuti da se i u P_k za $k \geqslant 3$ neka pitanja različito rešavaju zavisno od k.

3. Opisivanje zatvorenih klasa funkcija algebre k-značne logike pomoću relacija

Već smo rekli da je sve zatvorene klase u algebri logike (k=2) opisao američki matematičar E. Post, kao i da je kardinalni broj skupa svih zatvorenih klasa algebre logike, $\aleph_0$. Takodje smo rekli da je kardinalni broj skupa svih zatvorenih klasa algebre k-značne logike, $\mathfrak{C}$. Ova činjenica je znatno otežala opisivanje zatvorenih klasa algebre k-značne logike za $k \geqslant 3$, pa su izučavanja usmerena, ili na formulaciju nekih opštih stavova, ili na izučavanje zatvorenih klasa specijalnog vida. Ovde ćemo izneti neke rezultate u vezi s opisivanjem zatvorenih klasa funkcija k-značne logike pomoću relacija. Napominjemo da sva tvrdjenja do kraja poglavlja važe nezavisno od k i da će termin k-značna logika podrazumevati $k \geqslant 2$. Napomenimo i to da se zatvorena klasa (termin Jablonskog) često, u znak fundametalnih rezultata Posta u P_2, naziva algebra Posta.

Sovjetski matematičar A. I. Maljcev je pokazao da se operacija superpozicije može izraziti pomoću pet svuda definisanih operacija: $\zeta, \tau, \Delta, \nabla, *$, koje se definišu na sledeći način:

$$(\zeta f)(x_1,x_2, \dots ,x_n) = f(x_2, \dots ,x_n,x_1),$$

$$(\tau f)(x_1,x_2, \dots ,x_n) = f(x_2,x_1,x_3, \dots ,x_n),$$

$$(\Delta f)(x_1,x_2, \dots ,x_{n-1}) = f(x_1,x_1,x_2, \dots ,x_{n-1}),$$

$$(\nabla f)(x_1,x_2, \dots ,x_n,x_{n+1}) = f(x_2, \dots ,x_{n+1}),$$

$$(f*g)(x_1,x_2,\dots,x_{s+n-1})=f(g(x_1,x_2,\dots,x_s),x_{s+1},\dots,x_{s+n-1}),$$

gde su f i g proizvoljna n-mesna i s-mesna funkcija k-značne logike. Ako je f funkcija jedne promenljive, tada je po definiciji

$$\zeta f = \tau f = \Delta f = f.$$

Iz definicije datih operacija se vidi da ζ i τ obezbedjuju sve moguće permutacije argumenata funkcije, Δ predstavlja operaciju identifikovanja argumenata, ∇ je operacija pripisivanja fiktivnog argumenta, dok je $*$ binarna operacija superpozicije.

Pod algebrom Posta sada možemo podrazumevati skup funkcija k-značne logike zatvoren u odnosu na operacije ζ, τ, Δ, ∇, $*$.

Neka je $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ n-mesna funkcija k-značne logike i ρ m-arna relacija na skupu E_k, tj. $\rho \subseteq E_k^m$.

D e f i n i c i j a 1.3.1 ([5]). Kažemo da funkcija $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ očuvava relaciju ρ, ili da je ρ invarijantno za f, ako je svaku n-torku $(\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2, \ldots, \hat{\beta}_n)$ elemenata (tj. m-torki) iz ρ, $f(\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2, \ldots, \hat{\beta}_n)$ takodje iz ρ.

Pod $f(\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2, \ldots, \hat{\beta}_n)$ podrazumeva se m-torka čija je i-ta koordinata jednaka vrednosti funkcije $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ od i-tih koordinata m-torki $\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2, \ldots, \hat{\beta}_n$. Naime, ako

$\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2, \ldots, \hat{\beta}_n \in \rho$ (tj. $(\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2, \ldots, \hat{\beta}_n) \in \rho^n$), gde je

$\hat{\beta}_j = (\alpha_{1j}, \alpha_{2j}, \ldots, \alpha_{mj})$, $(j = 1, 2, \ldots, n)$ i ako je

$\tilde{\alpha}_i = (\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \ldots, \alpha_{in})$, $(i = 1, 2, \ldots, m)$, n-torka i-tih koordinata od $\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2, \ldots, \hat{\beta}_n$, tada je

$$f(\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2, \ldots, \hat{\beta}_n) = f((\alpha_{11}, \alpha_{21}, \ldots, \alpha_{m1}), (\alpha_{12}, \alpha_{22}, \ldots, \alpha_{m2}),$$

$$\ldots, (\alpha_{1n}, \alpha_{2n}, \ldots, \alpha_{mn})) = (f(\alpha_{11}, \alpha_{12}, \ldots, \alpha_{1n}), f(\alpha_{21}, \alpha_{22}, \ldots, \alpha_{2n}),$$

$$\ldots, f(\alpha_{m1}, \alpha_{m2}, \ldots, \alpha_{mn})) = (f(\tilde{\alpha}_1), f(\tilde{\alpha}_2), \ldots, f(\tilde{\alpha}_m)).$$

L e m a 1.3.1. Skup svih funkcija k-značne logike koje očuvavaju neku relaciju ρ na skupu E_k obrazuje algebru Posta.

Tvrdjenje leme sledi iz činjenice da svaka selektorska funkcija očuvava svaku relaciju na E_k i iz toga što funkcija, koja je superpozicija funkcija koje očuvavaju neku relaciju, takodje očuvava tu relaciju.

P r i m e r 1.3.1. Ako je $\rho = \{(0,0), (0,1), (1,1)\}$ data relacija na skupu $E_2 = \{0,1\}$, tada skup svih funkcija iz P_2, koje očuvavaju relaciju ρ obrazuje klasu monotonih funkcija algebre logike. Kaže se još da relacija $\rho = \{(0,0), (0,1), (1,1)\}$ potpuno karakteriše klasu monotonih funkcija na E_2 u smislu da funkcija $f \in P_2$ očuvava relaciju ρ ako i samo ako je monotona.

Kod relacija je često pogodno koristiti matrično izražavanje. Neka je ρ m-arna relacija na skupu E_k i n prirodan broj. Pod ρ-matricom tipa n podrazumeva se matrica tipa $m \times n$ s elementima iz E_k, takva da joj sve kolone pripadaju relaciji ρ. Ako je s broj elemenata relacije ρ (kaže se i širina relacije ρ), tada broj različitih ρ-matrica tipa n iznosi s^n. Sama relacija ρ širine s može se predstaviti ρ-matricom tipa s, koja, kao kolone sadrži sve m-torke iz ρ u proizvoljnom poretku. Matrično izražavanje pojednostavljuje opisivanje pojma očuvavanja. Naime, kaže se da n-mesna funkcija f očuvava m-arnu relaciju ρ, ako ona svaku ρ- matricu tipa n preslikava u neki elemenat iz ρ. Inače, slika matrice M tipa $m \times n$ pomoću n-mesne funkcije f je matrica-kolona (tipa $m \times 1$), čiji su elementi slike odgovarajućih vrsta matrice M pomoću f.

Algebra funkcija, koje očuvavaju relaciju ρ naziva se algebra polimorfizama relacije ρ i označava sa $\mathcal{P}(\rho)$.

Ako je R skup relacija na skupu E_k (može biti i beskonačan), tada algebru Posta funkcija, koje očuvavaju sve relacije iz R, označavamo sa $\mathcal{P}(R)$. Pri tome je

$$\mathcal{P}(R) = \bigcap_{\rho \in R} \mathcal{P}(\rho).$$

Ako je F skup funkcija k-značne logike, tada se skup svih relacija na E_k, koje su invarijantne za sve funkcije iz F, naziva skup invarijanti za F i označava sa $\mathcal{J}(F)$.

Ulogu selektora kod relacija igraju relacije specijalnog vida, koje se nazivaju dijagonale.

D e f i n i c i j a 1.3.2. Ako je $\sim$ relacija ekvivalencije na skupu $\{1, 2, \ldots, m\}$, tada se relacija $D(\sim)$

dužine m, koja je pridružena relaciji ekvivalencije $\sim$, takva da

$$(\alpha_1,\alpha_2, \ldots,\alpha_m)\in D(\sim)\Leftrightarrow(\forall i,j)(i\sim j\rightarrow\alpha_i = \alpha_j),$$

naziva dijagonala na E_k.

Specijalno, ako je u relaciji ekvivalencije $\sim$ svaka klasa ekvivalencije jednočlana, odgovarajuća dijagonala je Descartes-ov kub E_k^m.

Praznu relaciju smatramo dijagonalom.

Skup invarijanti nekog skupa funkcija F iz P_k nikad nije prazan, jer za proizvoljno F sadrži sve dijagonale.

Pri opisivanju algebri Posta pomoću relacija, centralno pitanje je kakvu strukturu predstavlja skup svih invarijanti te algebre. U vezi s postavljenim pitanjem definiše se niz operacija sa relacijama , takvih da se primenom tih operacija na invarijante neke algebra Posta, dobijaju takodje invarijante te algebre Posta.

M. Krasner je pomoću relacija opisao algebre Posta specijalnog vida: grupe permutacija skupa E_k i polugrupe s jediničnim elementom preslikavanja skupa E_k u sebe ([5], [23], [24], [25]).

Osnovni rezultati M. Krasnera u tom smislu mogu se formulisati u sledećem obliku.

1. Svaka grupa permutacija $\mathcal{G}$ na skupu E_k jednaznačno se karakteriše skupom svih svojih invarijanti.

2. Skup R Ω-relacija predstavlja skup svih invarijanti neke grupe permutacija na E_k ako i samo ako je zatvoren u odnosu na uvedeni niz operacija sa relacijama. (Ω-relacija na skupu E_k je svaki podskup od E_k, gde je Ω proizvoljan skup).

Za tvrdjenje pod 1. suštinsko je da je Ω skup dovoljno velike kardinalnosti ($|\Omega| \geqslant |E_k| + 1$).

Netrivijalni deo drugog tvrdjenja sastoji se u dokazivanju dovoljnosti uzetog niza operacija sa relacijama.

Skup svih invarijanti jedne grupe $\mathcal{G}$ možemo takodje razmatrati kao algebru relacija. Tada tvrdjenja 1. i 2. definišu prirodni antiizomorfizam izmedju mreže svih grupa na E_k i mreže algebri relacija na E_k.

Ako je $\mathcal{S}$ polugrupa s jedinicom preslikavanja skupa E_k u sebe, tada se rezultati 1. i 2. ponovo dobijaju, s tim što je u algebri relacija sada broj operacija manji; naime, otpada operacija komplementa. Ovo sledi iz činjenice da ako neka funkcija f jedne promenljive očuvava relaciju ϱ, tada ona ne mora da očuvava i komplement relacije ϱ. Medjutim, ako je f permutacija skupa E_k, to je tačno.

Rezultati 1. i 2. dobijaju se i u slučaju algebri funkcija više promenljivih ([5], [6]). Oni sada glase:

1. Svaka algebra Posta (sa selektorima) na konačnom skupu E_k potpuno se karakteriše skupom svih svojih konačnoarnih invarijanti.

2. Skup R relacija na E_k je skup svih invarijenti neke algebre Posta ako i samo ako je zatvoren u odnosu na niz uvedenih operacija sa relacijama. Naime, to je isti niz operacija kao kod invarijanti polugrupa s izuzetkom operacije unije, što je jasno s obzirom na činjenicu da funkcija f, ako očuvava relacije ϱ i σ, ne mora da očuvava i njihovu uniju. Medjutim, ako je f funkcija jedne promenljive, onda je to tačno.

Predstavljanje rezultata u datoj formi podrazumeva razmatranje i relacija prebrojive dužine. Medjutim, autori u [5] i [6] razmatraju samo relacije konačne dužine i operacije sa njima biraju na drugi način. To ima za posledicu da se rezultati dobijaju elegantnije nego u prethodna dva slučaja.

Algebre relacija konačne dužine definišu se simetrično Maljcevljevoj definiciji algebri Posta, tj. operacije s relacijama uzimaju se analogno Maljcevljevim operacijama sa funkcijama. Naime, operacije ζ, τ, Δ i ∇ lako se prenose na relacije, dok se za operaciju superpozicije uzima De Morganov proizvod, koji se definiše na sledeći način: ako su ρ i σ m-arna i p-arna relacija na skupu E_k, tada De Morganov proizvod relacija ρ i σ je relacija $\rho * \sigma$ dužine $m+p-2$, takva da

$$(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_{m+p-2})\in\rho*\sigma \leftrightarrow (\exists\beta\in E_k)((\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_{m-1},\beta)\in\rho \wedge (\beta,\alpha_m,\alpha_{m+1},\ldots,\alpha_{m+p-2})\in\sigma).$$

Algebra relacija konačne dužine na skupu E_k s operacijama ζ, τ, Δ, ∇ i $*$ naziva se koalgebra Posta na skupu E_k.

Analogno algebrama Posta koje sadrže sve selektore, razmatraju se samo koalgebre koje sadrže sve dijagonale.

Autori su u [5] definisali veći broj operacija sa relacijama. Iz nekih od njih dobijaju se osnovne operacije ζ, τ, Δ, ∇ i $*$,koje ulaze u definiciju koalgebri (i obrnuto, te operacije dobijaju se iz osnovnih), dok se sve mogu izraziti pomoću osnovnih. Ovde ćemo operacije sa relacijama samo nabrojati, bez definisanja. To su: 1. permutacija koordinata, 2. identifikovanje koordinata, 3. pripisivanje fiktivne koordinate, 4. superpozicija, 5. projekcija, 6. Descartes-ov proizvod, 7. pripisivanje vrste, 8. dijagonalizacija, 9. presek (konjunkcija), 10. unija (disjunkcija) i 11. komplement.

Operacije ζ i τ su specijalni slučajevi operacije 1., Δ je specijalni slučaj operacije 2., ∇ je operacija 3., $*$ je specijalan slučaj operacije 4. Operacije 5. - 9. izražavaju se pomoću operacija 1. - 4.

Lako se dokazuje sledeće svojstvo operacija 1. -9. : primenom operacija 1. -9. na invarijante neke algebre Posta, ponovo se dobijaju invarijante te algebre Posta.

Inače, sve nabrojane operacije koriste se u dokazivanju osnovnih teorema u [5], [6].

Operacije 10. i 11. razmatraju se u vezi s koalgebrama Posta koje odgovaraju algebrama Posta funkcija jedne promenljive.

D e f i n i c i j a 1.3.3 ([5]). Algebra relacija, zatvorena u odnosu na operacije 1. - 10. naziva se algebra Krasnera I vrste.

Algebra funkcija koje očuvavaju sve relacije iz neke algebre Krasnera I vrste je obavezno polugrupa s jedinicom funkcija jedne promenljive skupa E_k u sebe.

D e f i n i c i j a 1.3.4 ([5]). Algebra relacija, zatvorena u odnosu na operacije 1. - 11. naziva se algebra Krasnera ii vrste.

Algebra funkcija koje očuvavaju sve relacije iz neke algebre Krasnera II vrste je obavezno grupa permutacija skupa E_k.

Sada možemo dati prvu i drugu osnovnu teoremu iz [5] i [6].

T e o r e m a 1.3.1. Ako je $\mathcal{A}$ algebra Posta na konačnom skupu E_k i $\mathcal{Y}(\mathcal{A})$ skup svih njenih konačnoarnih invarijanti, tada svaka funkcija f, koja očuvava skup $\mathcal{Y}(\mathcal{A})$, pripada algebri $\mathcal{A}$, tj.

$$\mathcal{P}(\mathcal{J}(\mathcal{A})) = \mathcal{A}.$$

T e o r e m a 1.3.2. Ako je $\mathcal{C}$ koalgebra Posta na konačnom skupu E_k i $\mathcal{P}(\mathcal{C})$ algebra svih njenih polimorfizama, tada svaka relacija invarijantna za $\mathcal{P}(\mathcal{C})$, pripada koalgebri $\mathcal{C}$, tj.

$$\mathcal{J}(\mathcal{P}(\mathcal{C})) = \mathcal{C}.$$

Analogne teoreme važe za algebre Posta jednomesnih funkcija i njima odgovarajuće koalgebre.

Datim teoremama definiše se prirodni antiizomorfizam izmedju mreže algebri Posta (algebre funkcija na skupu E_k) i mreže koalgebri Posta (algebre relacija na E_k). Znači, algebre Posta, tj. zatvorene klase funkcija k-značne logike mogu se opisivati pomoću odgovarajućih koalgebri. Tako, rastućim (opadajućim) nizovima algebri odgovaraju opadajući (rastući) nizovi koalgebri. Specijalno, maksimalnim algebrama odgovaraju minimalne koalgebre i obrnuto.

II POGLAVLJE

FUNKCIJE SA ZADRŽAVANJEM

1. *Potpunost u skupu funkcija sa zadržavanjem*

Pitanje potpunosti (kompletnosti) kao jedno od važnih pitanja matematičke kibernetike rešava se za različite funkcionalne sisteme. Rezultati rešavanja zavise od složenosti elemenata samih sistema i operacija koje se pri tome koriste. Videli smo da se u algebri logike i uopšte k-značne logike pitanje potpunosti može rešiti efektivno, dok za neke složenije sisteme, kao na primer, za sisteme konačnih automata, to nije moguće. Ovde ćemo izneti neke poznate rezultate u vezi s reševenjem pitanja potpunosti za sisteme tzv. funkcija sa zadržavanjem, koje čine prelaz od logičkih funkcija ka automatima.

Neka je $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$ azbuka promenljivih koje uzimaju vrednosti iz skupa $E_k = \{0, 1, \ldots, k-1\}$.

D e f i n i c i j a 2.1.1. Uredjen par $(f(x_1, x_2, \ldots, x_n), t)$, gde je $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ funkcija k-značne logike, a t nenegativan ceo broj, naziva se funkcija sa zadržavanjem (kašnjenjem) ili funkcija sa parametrom.

D e f i n i c i j a 2.1.2. Dve funkcije sa zadržavanjem (f_1, t_1) i (f_2, t_2) su jednake ako je $t_1 = t_2$, a funkcije f_1 i f_2 se eventualno razlikuju samo fiktivnim argumentima.

Činjenicu da su funkcije sa zadržavanjem (f_1, t_1) i (f_2, t_2) jednake označavamo sa $(f_1, t_1) = (f_2, t_2)$.

Skup svih uredjenih parova (f, t), gde $f \in P_k$, a $t = 0, 1, 2, \ldots$, označavamo sa $\tilde{P}_k$.

Operacija tzv. sinhrone superpozicije uvodi se induktivno na sledeći način.

D e f i n i c i j a 2.1.3. 1° Ako je data funkcija sa zadržavanjem

$$(f(x_1,x_2,\ldots,x_{i-1},x_i,x_{i+1},\ldots,x_n),\ t)$$

i promenljiva x_j, tada se funkcija sa zadržavanjem

$$(f(x_1,x_2,\ldots,x_{i-1},x_j,x_{i+1},\ldots,x_n),\ t)$$

dobija iz date funkcije sa zadržavanjem operacijom sinhrone superpozicije (pravilo zamene promenljivih).

2° Ako su zadane funkcije sa zadržavanjem $(f(x_1,x_2,\ldots,x_n), t)$, $(g_1(x_1,x_2,\ldots,x_m), 0)$, $(g_2(x_1,x_2,\ldots,x_m), 0)$, $\ldots$, $(g_n(x_1,x_2,\ldots,x_m), 0)$, tada se funkcija sa zadržavanjem

$$(f(G_1, G_2, \ldots, G_n),\ t),$$

gde G_k označava ili promenljivu, ili funkciju g_k $(k = 1,2,\ldots, n)$, dobija iz datih funkcija sa zadržavanjem primenom operacije sinhrone superpozicije (pravilo zamene funkcije s nultom zadrškom u funkciji s zadrškom).

3^o Ako su zadane funkcije sa zadržavanjem $(f(x_1,x_2, \ldots, x_n), t)$, $(g_1(x_1,x_2, \ldots, x_m), t_1)$, $(g_2(x_1,x_2,\ldots, x_m),t_1)$, $\ldots$, $(g_n(x_1,x_2,\ldots, x_m), t_1)$, tada se funkcija sa zadržavanjem

$$(f(g_1, g_2, \ldots, g_n), t+t_1)$$

dobija iz datih funkcija sa zadržavanjem primenom operacije sinhrone superpozicije (pravilo zamene funkcija sa zadržavanjem u funkciji sa zadržavanjem).

Primetimo dve važne osobine operacije sinhrone superpozicije. Prvo, ako se sistem $\mathfrak{M} \subseteq \tilde{P}_k$ sastoji samo iz funkcija s nultim zadržavanjem, tada se sinhrona superpozicija funkcija iz $\mathfrak{M}$ svodi na "običnu" superpoziciju funkcija k-značne logike i drugo, ako se umesto jedne promenljive funkcije f iz para (f, t) stavi neka funkcija g sa zadržavanjem t_1, tada se umesto svake promenljive funkcije f mora staviti funkcija sa zadržavanjem t_1.

D e f i n i c i j a 2.1.4. Ako je $\mathfrak{M} \subseteq \tilde{P}_k$ dati skup funkcija sa zadržavanjem, tada se skup $[\mathfrak{M}]$ naziva zatvaranje skupa $\mathfrak{M}$ ako i samo ako $[\mathfrak{M}]$ sadrži sve funkcije sa zadržavanjem, koje se dobijaju iz $\mathfrak{M}$ primenom operacije sinhrone superpozicije konačan broj puta.

D e f i n i c i j a 2.1.5. Skup $\mathfrak{M} \subseteq \tilde{P}_k$ je zatvoren ako je $[\mathfrak{M}] = \mathfrak{M}$.

U $\tilde{P}_k$ se može razmatrati nekoliko vrsta potpunosti. Na primer, u [4] definisano je sedam vrsta potpunosti u $\tilde{P}_2$.

Ovde ćemo dati definicije dve vrste potpunosti, koje ćemo nazivati potpunost u I i potpunost u II smislu.

D e f i n i c j a 2.1.6. Skup $\mathfrak{M} \subseteq \tilde{P}_k$ je potpun u prvom smislu ako je za $\forall f \in P_k$ i $\forall t$, $t \in \{0, 1, \dots\}$, $(f, t) \in [\mathfrak{M}]$, tj. ako je $[\mathfrak{M}] = \tilde{P}_k$.

D e f i n i c i j a 2.1.7. Skup $\mathfrak{M} \subseteq \tilde{P}_k$ je potpun u drugom smislu ako za $\forall f \in P_k, \exists t \in \{0, 1, \dots\}$, tako da $(f, t) \in [\mathfrak{M}]$.

Pojam potpunosti u drugom smislu može se precizirati i na sledeći način. Izvršimo razdiobu skupa $\tilde{P}_k$ na sistem $\mathcal{U}$ podskupova $\mathcal{U}_f$, takvih da je za svaku funkciju $f \in P_k$

$$\mathcal{U}_f = \{(f, q) \mid q = 0, 1, 2, \dots\}.$$

Jasno, $\tilde{P}_k = \bigcup_{f \in P_k} \mathcal{U}_f$. Za skup $\mathfrak{M} \subseteq \tilde{P}_k$ možemo sada reći da je potpun u drugom smislu, ili u odnosu na sistem $\mathcal{U}$, ako je $[\mathfrak{M}] \cap \mathcal{U}_f \neq \emptyset$ za $\forall \mathcal{U}_f \in \mathcal{U}$.

Jasno, ako je skup $\mathfrak{M}$ funkcija sa zadržavanjem potpun u prvom smislu, on je potpun i u drugom smislu, ali obrnuto ne važi.

Naročito je izučavana potpunost u prvom i drugom smislu u $\tilde{P}_2$. Evo nekoliko rezultata V. B. Kudrjavceva.

T e o r e m a 2.1.1 ([26]). Skup funkcija sa zadržavanjem $\mathfrak{M} \subseteq \tilde{P}_2$ je potpun u prvom smislu u $\tilde{P}_2$ ako i samo ako on sadrži:

(a) podskup $\mathfrak{M}_1$ funkcija s nultim zadržavanjem, tako da je on potpun u P_2,

(b) funkciju $(f, 1)$, gde je $f \neq const.$

P r i m e r 2.1.1. Skup funkcija $\mathfrak{M} = \{(\bar{x} \cdot \bar{y}, 0), (x, 1)\}$ obrazuje potpun sistem u prvom smislu u $\tilde{P}_2$.

Iz prethodne teoreme sledi da svaki sistem funkcija sa zadržavanjem, koji je potpun u $\tilde{P}_2$, sadrži bar dve funkcije sa zadržavanjem.

T e o r e m a 2.1.2 ([26]). Skup funkcija sa zadržavanjem

$$\mathfrak{M} = \{(f_i, t_i)\}_{i \in I} \cup \{(x, t)\}$$

je potpun u drugom smislu u $\tilde{P}_2$ ako je skup $\{f_i\}_{i \in I}$ potpun u $\tilde{P}_2$, a $t | t_i$ za $\forall i \in I$.

T e o r e m a 2.1.3 ([26]). Ne postoji jednočlani potpun u drugom smislu skup u $\tilde{P}_2$.

D e f i n i c i j a 2.1.8. Skup $\mathfrak{N} \subseteq \tilde{P}_k$ je predpotpun ili maksimalan ako $\mathfrak{N}$ nije potpun i $\mathfrak{N} \cup \{(f, t)\}$ je potpun skup za proizvoljnu funkciju sa zadržavanjem $(f,t) \in \tilde{P}_k \setminus \mathfrak{N}$

T e o r e m a 2.1.4. Skup $\mathfrak{M} \subseteq \tilde{P}_k$ je potpun u $\tilde{P}_k$ (u prvom ili drugom smislu) ako i samo ako $\mathfrak{M}$ nije podskup nijedne maksimalne klase (u odnosu na potpunost u prvom, odnosno drugom smislu).

V. B. Kudrjavcev je opisao sve maksimalne klase u $\tilde{P}_2$ za potpunost u prvom i drugom smislu. Prvih je šest, dok je drugih prebrojivo mnogo.

Maksimalne klase u $\tilde{P}_2$ za potpunost u prvom smislu su:

$$1.\ \mathcal{L} = \{(f,\ 0) \mid f \in L\} \cup \{(\varphi,\ q) \mid \varphi \in P_2,\ q = 1,\ 2,\ \ldots\},$$

$$2.\ \mathcal{S} = \{(f,\ 0) \mid f \in S\} \cup \{(\varphi,\ q) \mid \varphi \in P_2,\ q = 1,\ 2,\ \ldots\},$$

$$3.\ \mathcal{M} = \{(f,\ 0) \mid f \in M\} \cup \{(\varphi,\ q) \mid \varphi \in P_2,\ q = 1,\ 2,\ \ldots\},$$

$$4.\ \mathcal{T}_0 = \{(f,\ 0) \mid f \in T_0\} \cup \{(\varphi,\ q) \mid \varphi \in P_2,\ q = 1,\ 2,\ \ldots\},$$

$$5.\ \mathcal{T}_1 = \{(f,\ 0) \mid f \in T_1\} \cup \{(\varphi,\ q) \mid \varphi \in P_2,\ q = 1,\ 2,\ \ldots\},$$

$$6.\ \mathcal{V} = \{(f,\ 0) \mid f \in P_2\} \cup \{(0,\ k) \mid k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots\} \cup$$

$$\cup \{(1,\ k) \mid k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots\} \cup \{(\varphi,\ q) \mid \varphi \in P_2,\ q = 2,\ 3,\ \ldots\}.$$

Maksimalne klase u P_2 za potpunost u drugom smislu su:

$$1.\ \tilde{L} = \{(f,\ q) \mid f \in L,\ q = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots\},$$

$$2.\ \tilde{S} = \{(f,\ q) \mid f \in S,\ q = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots\},$$

$$3.\ \tilde{M} = \{(f,\ q) \mid f \in M,\ q = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots\},$$

$$4.\ \tilde{T}_0 = \{(f,\ q) \mid f \in T_0,\ q = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots\},$$

$$5.\ \tilde{T}_1 = \{(f,\ q) \mid f \in T_1,\ q = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots\},$$

$$6.\ \tilde{C} = \{(f,\ q+1) \mid f \in B,\ q = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots\} \cup$$

$$\cup \{(\varphi,\ q+1) \mid \varphi \in \Gamma,\ q = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots\} \cup \{(\psi,\ 0) \mid \psi \in A\},$$

$$7.\ \tilde{E}_0 = \{(f,\ 0) \mid f \in B\} \cup \{(\varphi,\ 0) \mid \varphi \in A\} \cup \{(1,q) \mid q = 0,1,2,\ldots\}$$

$$\cup \{(0,\ q+1) \mid q = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots\},$$

8. $\tilde{E}_1 = \{(f, 0) \mid f \in \Gamma\} \cup \{(\mathcal{C}, 0) \mid \in A\} \cup$

$\{(1, q+1) \mid q = 0, 1, 2, \ldots\} \cup \{(0, q) \mid q = 0, 1, 2, \ldots\}$,

9. $\tilde{H} = \{(f, 0) \mid f \in S\} \cup \{(\mathcal{C}, q+1) \mid \mathcal{C} \in Y,\ q = 0,1,2,\ldots$

10. $\tilde{W}_r = \{(f, (2q+1)\cdot 2^r) \mid \bar{f} \in M,\ q = 0,1,2, \ldots\} \cup$

$\{(0, q) \mid q = 0,1,2, \ldots\} \cup \{(1, q) \mid q = 0,1,2, \ldots\} \cup$

$\{(\mathcal{C}, (2q+1)\cdot 2^s) \mid \mathcal{C} \in M,\ s = r+1, r+2, \ldots ;\ q = 0,1,2, \ldots\} \cup$

$\{(\Psi, 0) \mid \Psi \in M\}$ za svaki fiksiran nenegativan ceo broj r,

11. $\tilde{Z}_r = \{(f, (2q+1)\cdot 2^r) \mid f \in \Delta,\ q = 0,1,2, \ldots\} \cup$

$\{(\mathcal{C}, (2q+1)\cdot 2^s) \mid \mathcal{C} \in A,\ s = r+1, r+2, \ldots ;\ q = 0,1,2, \ldots\} \cup$

$\{(\Psi, 0) \mid \Psi \in A\}$ za svaki fiksiran nenegativan broj r.

Za potpunost u drugom smislu važi sledeća teorema

T e o r e m a 2.1.5 ([26]). Iz svakog potpunog u $\tilde{P}_2$ sistema u drugom smislu može se izdvojiti potpun podsistem koji sadrži najviše pet funkcija sa zadržavanjem.

Da broj funkcija sa zadržavanjem u potpunom sistemu u drugom smislu ne mora da bude manji od pet, pokazuje primer sistema $\{(x\cdot\ , 0), (x+y+z, 0), (0, 0), (1, 0), (x, 1)\}$. Naime, lako je videti da nijedan pravi podskup datog sistema nije potpun u $\tilde{P}_2$.

Na kraju ovog poglavlja pomenimo da je kriterijum potpunosti u $\tilde{P}_k$ za proizvoljno k dao japanski matematičar A. Nozaki, prethodno prevodeći funkcije sa zadržavanjem na jezik spektara.

III POGLAVLJE

PRESLIKAVANJA GALOIS-a ZA ALGEBRE FUNKCIJA SA ZADRŽAVANJEM

U ovom poglavlju daje se karakterizacija zatvorenih klasa funkcija sa zadržavanjem pomoću tzv. vremenskih relacija. U tu svrhu definiše se niz operacija sa vremenskim relacijama od kojih su neke analogne operacijama sa "običnim" relacijama, dok su dve potpuno nove. Rezultati koji se pri tome dobijaju odnose se na postojanje preslikavanja tipa Galois-a za mrežu zatvorenih klasa funkcija sa zadržavanjem.

1. Algebre funkcija sa zadržavanjem. Pojam vremenske relacije

Skup svih uredjenih parova oblika $(f(x_1,x_2,\dots,x_n),t)$, gde $f\in P_k$, a $t = 0, 1, 2, \dots$, označavaćemo sa $\tilde{P}_k$.

Operacija sinhrone superpozicije u $\tilde{P}_k$ može se izraziti pomoću operacija koje su analogne operacijama A. I. Maljceva, definisanim u skupu P_k funkcija k-značne logike.

Operacije Maljceva ζ, τ, Δ i ∇ ovde definišemo na sledeći način: neka je $(f(x_1,x_2,\dots,x_n), t)$ funkcija sa zadržavanjem, tada je

$$((\zeta f)(x_1,x_2,\dots,x_n),t) = (f(x_2,x_3,\dots,x_n,x_1),t),$$

$$((\tau f)(x_1,x_2,\dots,x_n),t) = (f(x_2,x_1,x_3,\dots,x_n),t),$$

$$((\Delta f)(x_1,x_2,\dots,x_{n-1}),t) = (f(x_1,x_1,x_2,\dots,x_{n-1}),t),$$

$$((\nabla f)(x_1,x_2,\dots,x_n,x_{n+1}),t) = (f(x_2,x_3,\dots,x_{n+1}),t).$$

Operaciju analognu binarnoj operaciji $*$ Maljceva ovde nije moguće definisati zbog već navedene osobine operacije sinhrone superpozicije da zamena jedne promenljive funkcije f iz para (f, t), funkcijom sa zadržavanjem t_1, obavezno povlači zamenu svih promenljivih funkcije f funkcijama sa zadržavanjem t_1.

Zbog toga ćemo kao petu operaciju uzeti treću operaciju iz definicije operacije sinhrone superpozicije. Naime, neka su zadane funkcije sa zadržavanjem

$$(f(x_1,x_2,\dots,x_n),t),\ (g_1(x_{11},x_{12},\dots,x_{1m_1}),t_1),$$
$$(g_2(x_{21},x_{22},\dots,x_{2m_2}),t_1),\ \dots,\ (g_n(x_{n1},x_{n2},\dots,x_{nm_n}),t_1),$$

tada je

$$(f(g_1 \times g_2 \times \dots \times g_n),\ t+t_1)=(f(g_1(x_{11},x_{12},\dots,x_{1m_1}),$$
$$g_2(x_{21},x_{22},\dots,x_{2m_2}),\dots,\ g_n(x_{n1},x_{n2},\dots,x_{nm_n})),\ t+t_1).$$

Možemo predpostaviti da su skupovi promenljivih koje se pojavljuju u funkcijama

$$g_1,\ g_2,\ \dots,\ g_n$$

disjunktni, što ima više tehnički nego suštinski karakter.

Pod algebrom funkcija sa zadržavanjem podrazumevaćemo skup funkcija sa zadržavanjem zatvoren u odnosu na operacije ζ, τ, Δ, ∇ i x.

D e f i n i c i j a 3.1.1. Neka je $N_1 = \{0\} \cup N$ skup svih prirodnih brojeva i nule i M neki skup m-arnih relacija na skupu $E_k = \{0, 1, \ldots, k-1\}$. Funkciju $R: N_1 \to M$ zvaćemo m-arnom vremenskom relacijom na E_k.

Drugim rečima, vremenska m-arna relacija R predstavlja skup sledećeg oblika

$$R = \{(i, \rho_i) \mid i \in N_1,\ \rho_i \subseteq E_k^m,\ (\forall (i_1, \rho_{i_1}), (i_2, \rho_{i_2}))(i_1 = i_2 \Rightarrow \rho_{i_1} = \rho_{i_2})\}$$

Možemo pisati i

$$R = \{(0, \rho_0), (1, \rho_1), \ldots, (i, \rho_i), \ldots\} .$$

D e f i n i c i j a 3.1.2. Kažemo da funkcija sa zadržavanjem $(f(x_1, x_2, \ldots, x_n), t)$ očuvava m-arnu vremensku relaciju R, ako za $\forall (i, \rho_i) \in R$, $\exists (j, \rho_j) \in R$, tako da je za svaku n-torku $(\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2, \ldots, \hat{\beta}_n)$ elemenata iz ρ_i, $f(\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2, \ldots, \hat{\beta}_n)$ iz ρ_j osim toga je $j = i + t$; drugim rečima, ako je

$$(*) \qquad f(\rho_i, \rho_i, \ldots, \rho_i) \subseteq \rho_j \quad \text{i} \quad j = i + t,$$

gde je

$$f(\rho_i, \rho_i, \ldots, \rho_i) = \{f(\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2, \ldots, \hat{\beta}_n) \mid (\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2, \ldots, \hat{\beta}_n) \in \rho_i^n\} .$$

U slučaju kad funkcija s zadržavanjem (f, t) zadovoljava relaciju $(*)$, kažemo da ona prevodi uredjeni par

(i, ρ_i) u uredjen par (j, ρ_j).

D e f i n i c i j a 3.1.3. Skup funkcija sa zadržavanjem $\mathcal{F}$ očuvava vremensku relaciju R ako svaka funkcija iz $\mathcal{F}$ očuvava vremensku relaciju R.

D e f i n i c i j a 3.1.4. Kažemo da skup funkcija sa zadržavanjem $\mathcal{F}$ očuvava skup vremenskih relacija $\mathcal{R}$ ako svaka funkcija iz $\mathcal{F}$ očuvava svaku relaciju iz $\mathcal{R}$.

Uvedimo sada pojam vremenske dijagonalne relacije.

D e f i n i c i j a 3.1.5. Ako je $\sim$ relacija ekvivalencije na skupu $\{1,2,\dots,m\}$, tada za vremensku relaciju

$$D(\sim) = \{(0,\rho_0), (1,\rho_1), \dots,(i,\rho_i),\dots\}$$

kažemo da je dijagonalna (ili dijagonala) u odnosu na relaciju ekvivalencije $\sim$, ako je za svako $i \in N_1$, relacija ρ_i dijagonalna u odnosu na relaciju ekvivalencije $\sim$.

Lako se proveravaju sledeća osnovna svojstva očuvavanja.

1. Svaka selektorska funkcija s nultom zadrškom očuvava svaku vremensku relaciju.

2. Svaka funkcija sa zadržavanjem očuvava svaku dijagonalnu vremensku relaciju.

L e m a 3.1.1. Ako funkcija sa zadržavanjem $(f(x_1,x_2,\dots,x_n), t)$ očuvava vremensku relaciju R, tada i funkcije $(\zeta f, t)$, $(\tau f, t)$, $(\Delta f, t)$ i $(\nabla f, t)$, koje se dobijaju iz (f, t) primenom unarnih operacija ζ, τ, Δ i ∇, takodje očuvavaju vremensku relaciju R.

D o k a z. Pokažimo da je tvrdjenje leme tačno, na primer, za funkciju $(\zeta f, t)$.

Neka $(p, \rho_p) \in R$ i neka

$$(\alpha_{1j}, \alpha_{2j}, \ldots, \alpha_{mj}) \in \rho_p \quad (j = 1, 2, \ldots, n).$$

Tada je

$$(\zeta f)((\alpha_{11}, \alpha_{21}, \ldots, \alpha_{m1}), (\alpha_{12}, \alpha_{22}, \ldots, \alpha_{m2}), \ldots, (\alpha_{1n}, \alpha_{2n}, \ldots, \alpha_{mn})) =$$

$$((\zeta f)(\alpha_{11}, \alpha_{12}, \ldots, \alpha_{1n}), (\zeta f)(\alpha_{21}, \alpha_{22}, \ldots, \alpha_{2n}), \ldots, (\zeta f)(\alpha_{m1}, \alpha_{m2}, \ldots, \alpha_{mn}))$$

$$= (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m).$$

Pošto je

$$(\zeta f)(\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \ldots, \alpha_{in}) = f(\alpha_{i2}, \alpha_{i3}, \ldots, \alpha_{in}, \alpha_{i1}) = \beta_i$$

$(i = 1, 2, \ldots, m)$ i pošto funkcija (f, t) očuvava vremensku relaciju R, to $\exists\ (p + t, \rho_{p+t}) \in R$, tako da je

$$(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m) \in \rho_{p+t},$$

a ovo upravo i znači da i funkcija $(\zeta f, t)$ par (p, ρ_p) provodi u par $(p + t, \rho_{p+t})$. Ovim je lema dokazana.

L e m a 3.1.2. Ako funkcije

$$(f(x_1, x_2, \ldots, x_n), t), \ (g_1(x_{11}, x_{12}, \ldots, x_{1m_1}), t_1),$$

$(g_2(x_{21},x_{22},\dots,x_{2m_2}),t_1)$, ..., $(g_n(x_{n1},x_{n2},\dots,x_{nm_n}),t_1)$

očuvavaju vremensku relaciju R, tada i funkcija

$$(f(g_1 \times g_2 \times \dots \times g_n),\ t+t_1)$$

očuvava relaciju R.

D o k a z. Neka je (p, ρ_p) proizvoljan uredjen par iz R. Pokažimo da u R postoji uredjeni par (q, ρ_q), takav da funkcija

$$(f(g_1 \times g_2 \times \dots \times g_n),\ t+t_1)$$

uredjen par (p, ρ_p) prevodi u uredjen par (q, ρ_q).

Neka

$$(\alpha^1_{1j_1},\alpha^2_{1j_1},\dots,\alpha^m_{1j_1}) \in \rho_p \quad (j_1 = 1,2,\ \dots,m_1),$$
$$(\alpha^1_{2j_2},\alpha^2_{2j_2},\dots,\alpha^m_{2j_2}) \in \rho_p \quad (j_2 = 1,2,\ \dots,m_2),$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$(\alpha^1_{nj_n},\alpha^2_{nj_n},\dots,\alpha^m_{nj_n}) \in \rho_p \quad (j_n = 1,2,\ \dots,m_n).$$

Stavimo

$$b^i_1 = g_1(\alpha^i_{11},\alpha^i_{12},\dots,\alpha^i_{1m_1}) \quad (i = 1,2,\ \dots,m),$$
$$b^i_2 = g_2(\alpha^i_{21},\alpha^i_{22},\dots,\alpha^i_{2m_2}) \quad (i = 1,2,\ \dots,m),$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$b^i_n = g_n(\alpha^i_{n1},\alpha^i_{n2},\dots,\alpha^i_{nm_n}) \quad (i = 1,2,\ \dots,m).$$

Kako funkcije $(g_1, t_1), (g_2, t_1), \ldots, (g_n, t_1)$ očuvavaju vremensku relaciju R, to u R postoji uredjen par $(p+t_1, \rho_{p+t_1})$, takav da je

$$(b_s^1, b_s^2, \ldots, b_s^m) \in \rho_{p+t_1} \quad (s = 1,2, \ldots, n).$$

Stavimo

$$c^r = f(b_1^r, b_2^r, \ldots, b_n^r) \quad (r = 1,2, \ldots, m).$$

Pošto funkcija $(f(x_1, x_2, \ldots, x_n), t)$ očuvava vremensku relaciju R, to $\exists\ (p+t_1+t, \rho_{p+t_1+t}) \in R$, tako da je

$$f(\rho_{p+t_1}, \rho_{p+t_1}, \ldots, \rho_{p+t_1}) \subseteq \rho_{p+t_1+t}.$$

Specijalno

$$(c^1, c^2, \ldots, c^m) \in \rho_{p+t_1+t}.$$

Jasno,

$$c^r = f(g_1(\alpha_{11}^r, \alpha_{12}^r, \ldots, \alpha_{1m_1}^r)\ g_2(\alpha_{21}^r, \alpha_{22}^r, \ldots, \alpha_{2m_2}^r), \ldots, g_n(\alpha_{n1}^r, \alpha_{n2}^r, \ldots, \alpha_{n m_n}^r$$

$(q = 1,2, \ldots, m)$, odkuda i sledi da funkcija

$$(f(g_1 \times g_2 \times \ldots \times g_n),\ t + t_1)$$

očuvava relaciju R, što je u trebalo dokazati.

Iz lema 1. i 2. sledi da skup svih funkcija sa zadržavanjem iz $\tilde{P}_k$, koje očuvavaju datu vremensku relaciju R

na E_k, obrazuje zatvorenu klasu, tj. algebru funkcija sa zadržavanjem na E_k, koju ćemo nazivati algebra polimorfizama vremenske relacije R i označavati sa $\mathcal{P}(R)$. Jasno,

$$\mathcal{P}(R) = \bigcup_{d=0}^{\infty} \left(\bigcap_{i=0}^{\infty} \mathcal{P}(\varrho_i, \varrho_{i+d} \right),$$

gde $\mathcal{P}(\varrho_i, \varrho_{i+d})$ označava skup svih funkcija sa zadržavanjem koje prevode uredjeni par (i, ϱ_i) u uredjeni par $(i+d, \varrho_{i+d})$, $(i=0,1,2, \dots ; d=0,1,2, \dots)$.

Ako je $\mathcal{R} = \{R_i\}$ neki skup vremenskih relacija na E_k, tada skup svih polimorfizama skupa $\mathcal{R}$ je algebra. Pri tome je

$$\mathcal{P}(\mathcal{R}) = \bigcap_i \mathcal{P}(R_i).$$

Neka je $\mathcal{F}$ skup funkcija sa zadržavanjem iz $\tilde{P}_k$. Skup svih vremenskih relacija na E_k koje su invarijantne za sve funkcije sa zadržavanjem iz $\mathcal{F}$, nazivaćemo skupom invarijanti za $\mathcal{F}$ i označavati sa $\mathcal{J}(\mathcal{F})$.

Skup $\mathcal{J}(\mathcal{F})$ je neprazan za bilo koji skup funkcija sa zadržavanjem $\mathcal{F}$, pošto sadrži sve vremenske dijagonale.

Skup $\mathcal{J}(\mathcal{F})$ takodje obrazuje algebru (tj. koalgebru) u odnosu na operacije sa vremenskim relacijama, koje će biti niže definisane.

Navodimo sada vremenske relacije koje potpuno karakterišu maksimalne klase V. B. Kudrjavceva za potpunost u drugom smislu.

1. Klasu

$$\tilde{L} = \{ (f, q) | f \in L, \ q = 0,1,2, \dots \}$$

potpuno karakteriše vremenska relacija

$$R_{\tilde{L}} = \{(i, \rho_L) \mid i \in N_1, \rho_L = \{(0,0,0,0),(0,0,1,1),(0,1,0,1),(0,1,1,0),(1,0,0,1),(1,0,1,0),(1,1,0,0),(1,1,1,1)\}\}$$

u smislu da svaka funkcija sa zadržavanjem (f, q) očuvava R_L ako i samo ako je iz L.

2. Klasu

$$\tilde{M} = \{(f, q) \mid f \in M, q = 0,1,2, \dots\}$$

potpuno karakteriše vremenska relacija

$$R_{\tilde{M}} = \{(i, \rho_M) \mid i \in N_1, \rho_M = \{(0,0),(0,1),(1,1)\}\}.$$

3. Klasu

$$\tilde{S} = \{(f, q) \mid f \in S, q = 0,1,2, \dots\}$$

potpuno karakteriše vremenska relacija

$$R_{\tilde{S}} = \{(i, \rho_S) \mid i \in N_1, \rho_S = \{(0,1),(1,0)\}\}.$$

4. Klasu

$$\tilde{T}_o = \{(f, q) \mid f \in T_o, q = 0,1,2, \dots\}$$

potpuno karakteriše vremenska relacija

$$R_{\tilde{T}_o} = \{(i, \rho_o) \mid i \in N_1, \rho_o = \{(0)\}\}.$$

5. Klasu

$$\tilde{T}_1 = \{(f,\ q) \mid f \in T_1,\ q = 0,1,2,\ \ldots\}$$

potpuno karakteriše vremenska relacija

$$R_{\tilde{T}_1} = \{(i,\ \varrho_1) \mid i \in N_1,\ \varrho_1 = \{(1)\}\}.$$

6. Klasu

$$\tilde{C} = \{(f, q+1) \mid f \in B,\ q = 0,1,2,\ldots\} \cup \{(\varphi, q+1) \mid \varphi \in \Gamma,\ q = 0,1,\ldots\}$$

$$\cup\ \{(\Psi,\ 0) \mid \Psi \in A\}$$

potpuno karakteriše vremenska relacija

$$R_{\tilde{C}} = \{ (0, \varrho = \{(0,1)\}), (1, \Delta = \{(0,0),(1,1)\}), (2, \Delta), \ldots \} .$$

7. Klasu

$$\tilde{E}_0 = \{(f,0) \mid f \in B\} \cup \{(\varphi,0) \mid \varphi \in A\} \cup \{(1,q) \mid q = 0,1,2,\ldots\} \cup$$

$$\cup\ \{(0, q+1) \mid q = 0,1,2,\ \ldots\}$$

potpuno karakteriše vremenska relacija

$$R_{\tilde{E}_0} = \{(0, \varrho = \{(0,1),(1,1)\}), (1,\Delta), (2,\Delta); \ldots \quad .$$

8. Klasu

$$\tilde{E}_1 = \{(f,0) \mid f \in \Gamma\} \cup \{(\varphi,0) \mid \varphi \in A\} \cup \{(1,q+1) \mid q = 0,1,2,\ldots\} \cup$$

$$\cup\ \{(0,q) \mid q = 0,1,2,\ \ldots\}$$

potpuno karakteriše vremenska relacija

$$R_{\tilde{E}_1} = \{(0, \varrho = \{(0,0),(0,1)\}), (1,\Delta), (2,\Delta), \ldots \ \} .$$

9. Klasu

$$\tilde{H} = \{(f,0) \mid f \in S\} \cup \{(\mathcal{C},q+1) \mid \mathcal{C} \in Y,\ q=0,1,2,\dots\}$$

potpuno karakteriše vremenska relacija

$$R_{\tilde{H}} = \{(0,\rho=\{(0,1),(1,0)\}),(1,\Delta),(2,\Delta),\ \dots\ \}.$$

10. Za svaki fiksiran nenegativan broj r, klasu

$$\tilde{W}_r = \{(f,(2q+1)\cdot 2^r) \mid f \in M, q=0,1,2,\dots\} \cup \{(0,q) \mid q=0,1,2,\dots\} \cup$$
$$\cup \{(1,q) \mid q=0,1,2,\dots\} \cup \{(\mathcal{C},(2q+1)\cdot 2^s) \mid \mathcal{C} \in M, s=r+1,r+2,\dots;$$
$$q=0,1,2,\dots\} \cup \{(\Psi,0) \mid \Psi \in M\}$$

potpuno karakteriše vremenska relacija

$$R_{\tilde{W}_r} = \{(i,\rho_i) \mid i \in N_1,\ \rho_i = \{(0,0),(0,1),(1,1)\} \text{ za } i=2^r\cdot(2q), q=0,1,\dots;$$
$$\rho_i = \{(0,0),(1,0),(1,1)\} \text{ za } i=2^r\cdot(2q+1), q=0,1,\dots;\ \rho_i = \Delta \text{ za}$$
$$i \neq h\cdot 2^r,\ h=0,1,2,\ \dots\}.$$

Na primer, za $r = 2$ je

$$R_{\tilde{W}_2} = \{(0,\rho),(1,\Delta),(2,\Delta),(3,\Delta),(4,\rho^{-1}),(5,\Delta),(6,\Delta),(7,\Delta),$$
$$(8,\rho),(9,\Delta),(10,\Delta),(11,\Delta),(12,\rho^{-1}),(13,\Delta),\ \dots\ \},$$

gde je $\rho = \{(0,0),(0,1),(1,1)\}$ i $\Delta = \{(0,0),(1,1)\}$.

11. Za svaki fiksiran nenegativan broj r, klasu

$$\tilde{Z}_r = \{(f,(2q+1)\cdot 2^r) \mid f \in \Delta,\ q=0,1,2,\dots\} \cup \{(\mathcal{C},(2q+1)\cdot 2^s) \mid \mathcal{C} \in A,$$
$$s=r+1,r+2,\ \dots\ ;\ q=0,1,2,\dots\} \cup \{(\Psi,0) \mid \Psi \in A\}$$

potpuno karakteriše vremenska relacija

$R_{\tilde{Z}_r}=\{(i,\rho_i)\mid i\in N_1,\ \rho_i=\{(0,1)\}$ za $i=2^r(2q)$, $q=0,1,2,\ \dots$; $\rho_i=\{(1,0)\}$ za $i=2^r(2q+1)$, $q=0,1,2,\dots$; $\rho_i=\emptyset$ za $i\neq h\cdot 2^r$, $h=0,1,2,\ \dots\}$.

Na primer, za $r=2$ je

$$R_{\tilde{Z}_2}=\{(0,\rho),(1,\emptyset),(2,\emptyset),(3,\emptyset),(4,\rho^{-1}),(5,\emptyset),(6,\emptyset),(7,\emptyset),(8,\rho),(9,\emptyset),(10,\emptyset),(11,\emptyset),(12,\rho^{-1}),(13,\emptyset),\dots\}\ ,$$

gde je $\rho=\{(0,1)\}$.

2. Operacije s vremenskim relacijama. Koalgebre

Prelazimo sada na definisanje operacija sa vremenskim relacijama. Kao u [5] i [6] razmatraćemo samo vremenske relacije konačne dužine simetrično funkcijama sa zadržavanjem od konačnog broja promenljivih. Neke operacije sa vremenskim relacijama možemo definisati simetrično već definisanim operacijama Maljceva sa funkcijama sa zadržavanjem.

Naime, operacije ζ, τ, Δ i ∇ lako se prenose na vremenske relacije. Neka je

$$R=\{(0,\rho_0),(1,\rho_1),(2,\rho_2),\dots,(i,\rho_i),\dots\}$$

data m-arna vremenska relacija, tada je

$$(1)\quad \zeta R=\{(0,\zeta\rho_0),(1,\zeta\rho_1),(2,\zeta\rho_2),\dots,(i,\zeta\rho_i),\dots\}\ ,$$

gde za svako $i\in N_1$

$$(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_m)\in\zeta\rho_i \Leftrightarrow (\alpha_2,\alpha_3,\dots,\alpha_m,\alpha_1)\in\rho_i;$$

(2) $\tau R=\{(0,\tau\rho_0),(1,\tau\rho_1),(2,\tau\rho_2),\ldots,(i,\tau\rho_i),\ldots\}$,

gde za svako $i\in N_1$

$$(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m)\in\tau\rho_i \leftrightarrow (\alpha_2,\alpha_1,\alpha_3,\ldots,\alpha_m)\in\rho_i;$$

(3) $\Delta R=\{(0,\Delta\rho_0),(1,\Delta\rho_1),(2,\Delta\rho_2),\ldots,(i,\Delta\rho_i),\ldots\}$,

gde za svako $i\in N_1$

$$(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_{m-1})\in\Delta\rho_i \leftrightarrow (\alpha_1,\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_{m-1})\in\rho_i;$$

(4) $\nabla R=\{(0,\nabla\rho_0),(1,\nabla\rho_1),(2,\nabla\rho_2),\ldots,(i,\nabla\rho_i)\ldots\}$,

gde za svako $i\in N_1$

$$(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m,\alpha_{m+1})\in\nabla\rho_i \leftrightarrow (\alpha_2,\alpha_3,\ldots,\alpha_m,\alpha_{m+1})\in\rho_i.$$

(5) De Morganov proizvod sa vremenskim relacijama definisaćemo na sledeći način. Ako su R i S m-arna i p-arna vremenska relacija na skupu E_k, tada De Morganov proizvod vremenskih relacija R i S je vremenska relacija $R*S$ dužine $m+p-2$, takva da je

$$R*S=\{(0,\rho_0*\sigma_0),(1,\rho_1*\sigma_1),(2,\rho_2*\sigma_2),\ldots,(i,\rho_i*\sigma_i),\ldots\},$$

gde za svako $i\in N_1$ $(i,\rho_i)\in R$, $(i,\sigma_i)\in S$ i

$$(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_{m+p-2})\in\rho_i*\sigma_i \leftrightarrow (\exists\beta\in E_k)((\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_{m-1},\beta)\in\rho_i$$

$$\wedge\ (\beta,\alpha_m,\alpha_{m+1},\ldots,\alpha_{m+p-2})\in\sigma_i)).$$

Uvedimo još dve operacije s vremenskim relacijama.

(6) Neka je $\{R_i\}_{i\in N_1}$ niz vremenskih m-arnih relacija na skupu S_k, takvih da je

$$R_0 = \{(0,\rho_0^{(0)}),(1,\rho_1^{(0)}),(2,\rho_2^{(0)}),(3,\rho_3^{(0)}),\ \ldots\ \}\ ,$$

$$R_1 = \{(0,\rho_0^{(1)}),(1,\rho_1^{(1)}),(2,\rho_2^{(1)}),(3,\rho_3^{(1)}),\ \ldots\ \}\ ,$$

$$R_2 = \{(0,\rho_0^{(2)}),(1,\rho_1^{(2)}),(2,\rho_2^{(2)}),(3,\rho_3^{(2)}),\ \ldots\ \}\ ,$$

....

$$R_j = \{(0,\rho_0^{(j)}),(1,\rho_1^{(j)}),(2,\rho_2^{(j)}),(3,\rho_3^{(j)}),\ \ldots\ \}\ ,$$

....

gde je

$$\rho_1^{(0)} \subseteq \rho_0^{(1)},$$

$$\rho_2^{(0)},\rho_1^{(1)} \subseteq \rho_0^{(2)},$$

$$\rho_3^{(0)},\rho_2^{(1)},\rho_1^{(2)} \subseteq \rho_0^{(3)},$$

$$\rho_4^{(0)},\rho_3^{(1)},\rho_2^{(2)},\rho_1^{(3)} \subseteq \rho_0^{(4)},$$

....

$$\rho_j^{(0)},\rho_{j-1}^{(1)},\rho_{j-2}^{(2)},\ldots,\rho_2^{(j-2)},\rho_1^{(j-1)} \subseteq \rho_0^{(j)},$$

....

Pod beskonačnom superpozicijom vremenskih relacija R_0, R_1, $R_2,\ldots,R_i,\ldots$ podrazumevaćemo vremensku relaciju

$$R = \{ (0,\rho_0),(1,\rho_1),(2,\rho_2),\ \ldots\ \}\ ,$$

gde je

$\rho_i = \rho_0^{(i)}$ za svako $i \in N_1$.

(7) Neka je $\{R_\lambda\}_{\lambda \in I}$ skup vremenskih relacija

$$R_\lambda = \{(0, \rho_0^{(\lambda)}), (1, \rho_1^{(\lambda)}), (2, \rho_2^{(\lambda)}), \dots\}$$

na skupu E_k, pri čemu skup indeksa I može biti kako konačan, tako i beskonačan (prebrojiv ili neprebrojiv). Pod presekom $\bigcap_{\lambda \in I} R_\lambda$ podrazumevamo vremensku relaciju

$$\{(0, \bigcap_{\lambda \in I} \rho_0^{(\lambda)}), (1, \bigcap_{\lambda \in I} \rho_1^{(\lambda)}), (2, \bigcap_{\lambda \in I} \rho_2^{(\lambda)}), \dots\}.$$

(8) Ako je $R = \{(0, {}_0), (1, {}_1), (2, {}_2), \dots\}$ vremenska relacija na skupu E_k i n_0 dati nenegativan ceo broj, tada za vremensku relaciju

$$R_{p_{n_0}} = \{(0, \rho_{n_0}), (1, \rho_{n_0+1}), (2, \rho_{n_0+2}), \dots\}$$

kažemo da je dobijena od R operacijom prenosa (za n_0).

Pod algebrom vremenskih relacija na skupu E_k podrazumevaćemo skup vremenskih relacija na E_k zatvoren u odnosu na definisane operacije (1) - (8). Algebru vremenskih relacija konačne dužine zvaćemo koalgebrom vremenskih relacija.

Pokažimo sada da primenom operacija (1) - (8) na invarijante neke funkcije sa zadržavanjem, takodje dobijamo invarijante te funkcije sa zadržavanjem.

L e m a 3.2.1. Ako funkcija sa zadržavanjem $(f(x_1, x_2, \dots, x_n), t)$ očuvava vremensku relaciju R, tada ona očuvava i vremenske relacije ζR, τR, ΔR, ∇R.

D o k a z. Tvrdjenje leme sledi iz toga što, ako funkcija sa zadržavanjem (f, t) prevodi uredjeni par (p, ρ_p) u uredjeni par $(p+t, \rho_{p+t})$, to ona takodje prevodi i uredjene parove $(p, \zeta\rho_p)$, $(p, \tau\rho_p)$, $(p, \Delta\rho_p)$ i $(p, \nabla\rho_p)$ redom u uredjene parove $(p+t, \zeta\rho_{p+t})$, $(p+t, \tau\rho_{p+t})$, $(p+t, \Delta\rho_{p+t})$ i $(p+t, \nabla\rho_{p+t})$.

Pokažimo da je to, na primer, tačno za operaciju .

Koristićemo matrično izražavanje. Neka $(p,\varrho'_p)\in\zeta R$ i neka je

$$M'_n = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \dots & \alpha_{mn} \end{pmatrix}$$

proizvoljna ϱ'_p- matrica tipa n. Tada u vremenskoj relaciji R postoji uredjen par (p,ϱ_p), takav da je $\zeta\varrho_p=\varrho'_p$. Odgovarajuća ϱ_p-matrica tipa n je

$$M_n = \begin{pmatrix} \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \dots & \alpha_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \dots & \alpha_{mn} \\ \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \end{pmatrix}$$

Kako funkcija sa zadržavanjem $(f(x_1,x_2,\dots,x_n),\ t)$ očuvava vremensku relaciju R, to $\exists(p+t,\varrho_{p+t})\in R$, tako da ona uredjen par (p,ϱ_p) prevodi u uredjen par $(p+t,\varrho_{p+t})$. Specijalno je

$$f\begin{pmatrix} \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \dots & \alpha_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \dots & \alpha_{mn} \\ \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_2 \\ \beta_3 \\ \vdots \\ \beta_m \\ \beta_1 \end{pmatrix}$$

tako da $[\beta_2,\beta_3,\dots,\beta_m,\beta_1]\in\varrho_{p+t}$. No, to znači i u ζR postoji uredjeni par $(p+t, \rho'_{p+t})$, takav da je $\rho'_{p+t} = \zeta\rho_{p+t}$ i

$$f\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \ldots & \alpha_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_m \end{pmatrix},$$

tako da $[\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m] \in \rho'_{p+t}$, odakle i sledi da funkcija s zadržavanjem $(f(x_1, x_2, \ldots, x_n), t)$ uredjeni par (p, ρ'_p) prevodi u uredjeni par $(p+t, \rho'_{p+t})$, što je i trebalo dokazati.

L e m a 3.2.2. Ako funkcija sa zadržavanjem (f, t) očuvava vremenske relacije R i S, tada ona očuvava i vremensku relaciju $R * S$.

D o k a z. Tvrdjenje leme sledi iz toga što, ako funkcija (f, t) prevodi uredjene parove $(p, \rho_p) \in R$ i $(p, \sigma_p) \in S$ redom u uredjene parove $(p+t, \rho_{p+t}) \in R$ i $(p+t, \sigma_{p+t}) \in S$, tada ona prevodi i uredjeni par $(p, \rho_p * \sigma_p)$ u uredjeni par $(p+t, \rho_{p+t} * \sigma_{p+t})$.

L e m a 3.2.3. Ako funkcija sa zadržavanjem (f, t) očuvava vremenske relacije $R_0, R_1, R_2, \ldots, R_j, \ldots$, tada ona očuvava i vremensku relaciju R, koja se iz datih relacija dobija primenom operacije beskonačne superpozicije.

D o k a z. Neka su vremenske relacije $R_0, R_1, R_2,$

[illegible] veličine [illegible] zadovoljava uslove [illegible] beskonačne superpozicije. Neka je R rezultat beskonačne superpozicije, tj.

$$R = \{(0, \rho_0^{(0)}), (1, \rho_0^{(1)}), (2, \rho_0^{(2)}), (3, \rho_0^{(3)}), \dots\}.$$

Neka je $(i, \rho_0^{(i)})$ proizvoljan uredjeni par iz R. Po definiciji operacije beskonačne superpozicije uredjen par $(0, \rho_0^{(i)})$ je iz vremenske relacije R_i. Pošto funkcija (f, t) očuva-va vremensku relaciju R_i, to u R_i postoji uredjen par

	R_0	R_1	R_2	R_3	R_4	R_5	R_6	
0	$\rho_0^{(0)}$	$\rho_0^{(1)}$	$\rho_0^{(2)}$	$\rho_0^{(3)}$	$\rho_0^{(4)}$	$\rho_0^{(5)}$	$\rho_0^{(6)}$	
1	$\rho_1^{(0)}$	$\rho_1^{(1)}$	$\rho_1^{(2)}$	$\rho_1^{(3)}$	$\rho_1^{(4)}$	$\rho_1^{(5)}$	$\rho_1^{(6)}$	
2	$\rho_2^{(0)}$	$\rho_2^{(1)}$	$\rho_2^{(2)}$	$\rho_2^{(3)}$	$\rho_2^{(4)}$	$\rho_2^{(5)}$	$\rho_2^{(6)}$	
3	$\rho_3^{(0)}$	$\rho_3^{(1)}$	$\rho_3^{(2)}$	$\rho_3^{(3)}$	$\rho_3^{(4)}$	$\rho_3^{(5)}$	$\rho_3^{(6)}$	
4	$\rho_4^{(0)}$	$\rho_4^{(1)}$	$\rho_4^{(2)}$	$\rho_4^{(3)}$	$\rho_4^{(4)}$	$\rho_4^{(5)}$	$\rho_4^{(6)}$	
5	$\rho_5^{(0)}$	$\rho_5^{(1)}$	$\rho_5^{(2)}$	$\rho_5^{(3)}$	$\rho_5^{(4)}$	$\rho_5^{(5)}$	$\rho_5^{(6)}$	
6	$\rho_6^{(0)}$	$\rho_6^{(1)}$	$\rho_6^{(2)}$	$\rho_6^{(3)}$	$\rho_6^{(4)}$	$\rho_6^{(5)}$	$\rho_6^{(6)}$	

$(t, \rho_t^{(i)})$, tako da funkcija (f, t) uredjeni par $(0, \rho_0^{(i)})$ prevodi u uredjeni par $(t, \rho_t^{(i)})$. No, u R postoji uredjeni par $(t+i, \rho_0^{(t+i)})$, takav da je

$$\rho_t^{(i)} \subseteq \rho_0^{(t+i)},$$

[illegible] (f, t) [illegible] $(i, \rho_0^{(i)})$ [illegible] $(i, \rho_0^{(i+1)})$. [illegible] funkcija (f, t) [illegible] što je i trebalo dokazati.

L e m a 3.2.4. Ako funkcija sa zadržavanjem (f, t) očuvava skup vremenskih relacija $\{R_\lambda\}_{\lambda \in I}$, tada ona očuvava i njihov presek $\bigcap_{\lambda \in I} R_\lambda$.

L e m a 3.2.5. Ako funkcija sa zadržavanjem (f, t) očuvava vremensku relaciju R, tada ona očuvava i vremensku relaciju $R_{p_{n_0}}$ $(n_0 = 0,1,2,3,\ldots)$, koja se od R dobija operacijom prenosa.

Tvrdjenje lema sledi iz definicije očuvavanja i operacija preseka i prenosa.

Definišimo sada operacije s vremenskim relacijama analogno operacijama s "običnim" relacijama ([5], [6]), a koje ćemo koristiti u dokazivanju osnovnih rezultata.

1. Permutacija koordinata (ili vesta). Neka je

$$R = \{(0, \rho_0), (1, \rho_1), (2, \rho_2), \ldots\}$$

m-arna vremenska relacija na skupu E_k i s permutacija skupa $\{1, 2, \ldots, m\}$

$$s = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & m \\ j_1 & j_2 & \ldots & j_m \end{pmatrix},$$

[illegible]ćemo da je vremenska relacija

$$s(R) = \{(0, s(\rho_0)), (1, s(\rho_1)), (2, s(\rho_2)), \dots\},$$

takva da je za svako $i \in N_1$

$$(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m) \in s(\rho_i) \Leftrightarrow (\alpha_{j_1}, \alpha_{j_2}, \dots, \alpha_{j_m}) \in \rho_i ,$$

dobijena iz R permutacijom koordinata ili permutacijom vrsta (kad koristimo matrično izražavanje).

Specijalno, ako su date permutacije

$$s_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & m-1 & m \\ 2 & 3 & 4 & \dots & m & 1 \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad s_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & m \\ 2 & 1 & 3 & \dots & m \end{pmatrix},$$

dobijaju se operacije ζ i τ koje smo već definisali, a koje figurišu u definiciji koalgebri. Jasno, sve permutacije koordinata mogu se izraziti pomoću ζ i τ.

2. Identifikovanje koordinata. Neka je

$$R = \{(0, \rho_0), (1, \rho_1), (2, \rho_2), \dots\}$$

m-arna vremenska relacija na skupu E_k i neka je $\{j_1, j_2, \dots, j_s\} \subseteq \{1, 2, \dots, m\}$, pri čemu je $j_1 < j_2 < \dots < j_s$. Kazaćemo da je vremenska relacija

$$\Delta_{j_1, j_2, \dots, j_s} R = \{(0, \Delta_{j_1, j_2, \dots, j_s} \rho_0), (1, \Delta_{j_1, j_2, \dots, j_s} \rho_1), \dots\}$$

dužine $m-s+1$ dobijena iz R operacijom identifikovanja koordinata, ako je za svako $i \in N_1$ relacija $\Delta_{j_1, j_2, \dots, j_s} \rho_i$ određena i sastoji se iz svih $(m-s+1)$-torki koje se dobijaju od svih onih m-torki relacije ρ_i, koje na mestima $j_1, j_2, \dots, j_s$ imaju jednake koordinate, odbacivanjem koordinada na mestima $j_2, j_3, \ldots, j_s$.

Primetimo da može biti i $\Delta_{j_1,j_2,\ldots,j_s} R = \emptyset$ u slučaju kad je $\Delta_{j_1,j_2,\ldots,j_s} \varrho_i = \emptyset$ za svako $i \in N_1$.

Ako je $k=2$, $j_1=1$, $j_2=2$, dobijamo već definisanu operaciju Δ. Sve operacije identifikovanja koordinata mogu se izraziti pomoću operacije Δ i permutacija koordinata.

3. Pripisivanje fiktivne koordinate. Neka je

$$R=\{(0,\varrho_0),(1,\varrho_1),(2,\varrho_2), \ldots \}$$

m-arna vremenska relacija na E_k. Za vremensku relaciju

$$\nabla R=\{(0,\nabla\varrho_0),(1,\nabla\varrho_1),(2,\nabla\varrho_2), \ldots \}$$

dužine $m+1$, kažemo da se dobija iz vremenske relacije R ako za svako $i \in N_1$ i svako $\alpha \in E_k$

$$(\alpha,\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m) \in \nabla\varrho_i \Leftrightarrow (\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m) \in \varrho_i .$$

Ovo je ustvari već definisana operacija ∇.

4. Superpozicija. Neka su R i S m-arna i p-arna vremenska relacija na skupu E_k i s_1 i s_2 permutacije skupova $\{1,2,\ldots,m\}$ i $\{1,2,\ldots,p\}$: .

$$s_1=\begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & i-1 & i & i+1 & \ldots & m \\ 1 & 2 & \ldots & i-1 & m & i & \ldots & m-1 \end{pmatrix}, \quad s_2=\begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & j-1 & j & j+1 & \ldots & p \\ 2 & 3 & \ldots & j & 1 & j+1 & \ldots & p \end{pmatrix}.$$

Pod superpozicijom relacija R i S po i-toj i j-toj koordinati, $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq p$, podrazumevamo relaciju $R\,{}_i\varrho_j\,S$, dužine $m+p-2$, takvu da je [illegible] je [illegible] već definisani pojam De Morgan[illegible]. Očigledno, [illegible] i [illegible] De Morgana je specijalni slučaj operacije superpozicije za $i=n$ i $j=1$. Sve superpozicije mogu se izraziti pomoću proizvoda De Morgana i permutacije koordinata.

5. Projekcija (ili brisanje vrste). Ako je

$$R=\{(0,\rho_0),(1,\rho_1),(2,\rho_2),\ \dots\ \}$$

n-arna vremenska relacija na E_k i $\{j_1,j_2,\dots,j_p\}\subseteq\{1,2,\dots,n\}$, tada pod projekcijom vremenske relacije R na koordinate $j_1,j_2,\dots,j_p$ podrazumevamo p-arnu vremensku relaciju

$$pr_{j_1,j_2,\dots,j_p}R=\{(0,pr_{j_1,j_2,\dots,j_p}\rho_0),(1,pr_{j_1,j_2,\dots,j_p}\rho_1),\dots\}$$

gde je za svako $i\in N_1$ $pr_{j_1,j_2,\dots,j_p}\rho_i$ projekcija relacije ρ_i na koordinate $j_1,j_2,\dots,j_p$. Ukoliko koristimo matrično i rešavanje, projekciji na koordinate $j_1,j_2,\dots,j_p$ odgovara odstranjivanje svih vrsta matrice relacije ρ_i s oznakama različitim od $j_1,j_2,\dots,j_p$.

Odstranjivanje i-te vrste iz R može se izraziti pomoću superpozicije $R_i\circ_i R$ i operacije identifikovanja.

6. Descartes-ov proizvod. Ako su

$$R=\{(0,\rho_0),(1,\rho_1),(2,\rho_2),\dots\ \}$$

i

$$S=\{(0,\sigma_0),(1,\sigma_1),(2,\sigma_2),\dots\ \}$$

n-arna i p-arna vremenska relacija na skupu E_k, tada pod Descartes-ovim proizvodom relacija R i S podrazumevamo [illegible] vremenska relacija

$$R \times S = \{(0, \rho_0 \times \sigma_0), (1, \rho_1 \times \sigma_1), (2, \rho_2 \times \sigma_2), \dots \},$$

gde je za svako $i \in N_1$

$$\rho_i \times \sigma_i = \{(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_p) \mid (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m) \in \rho_i \wedge (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_p) \in \sigma_i\}$$

Descartes-ov proizvod se može izraziti pomoću operacije superpozicije i operacije ∇:

$$R \times S = (\nabla R)_1 \rho_1 (\nabla S).$$

7. Pripisivanje vrste. Kažemo da se vremenska relacija dužine $m+1$

$$R^{(p)} = \{(0, \rho_0^{(p)}), (1, \rho_1^{(p)}), (2, \rho_2^{(p)}), \dots \}$$

dobija iz vremenske relacije dužine m

$$R = \{(0, \rho_0), (1, \rho_1), (2, \rho_2), \dots \}$$

pripisivanjem p-te vrste ako je za svako $i \in N_1$

$$\rho_i^{(p)} = \{(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p, \dots, \alpha_m, \alpha_p) \mid (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p, \dots, \alpha_m) \in \rho_i\}.$$

Pripisivanje p-te vrste može se izraziti pomoću operacije superpozicije relacije R i ternarne dijagonale oblika

$$D_3 = \{(0, \Lambda_3), (1, \Lambda_3), (2, \Lambda_3), \dots \},$$

gde je $\Lambda_3 = \{(\alpha, \alpha, \alpha) \mid \alpha \in E_k\}$, po p-toj i prvoj koordinati i permutacija koordinata.

8. Dijagonalizacija. Neka je

[illegible]

n-arna vremenska relacija na skupu E_k i ~ relacija ekvivalencije na skupu $\{1,2,\dots,m\}$. Kažemo da se n-arna vremenska relacija

$$\sim R = \{(0,\sim\rho),(1,\sim\rho_1),(2,\sim\rho_2),\dots\}$$

dobija od relacije R pomoću operacije dijagonalizacije ako je za svako $i \in N_1$ $\sim\rho_i$ neprazna relacija i

$$\sim\rho_i = \{(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_m) \mid (\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_m) \in \rho_i \wedge (\forall i,j)(i \sim j \Rightarrow \alpha_i = \alpha_j)\}.$$

Dijagonalizacija se može izraziti pomoću identifikovanja koordinata, pripisivanja vrste i permutacije koordinata.

9. Presek (konjunkcija). Operaciju preseka sa vremenskim relacijama definisali smo ranije i ona ulazi u definiciju koalgebri vremenskih relacija kao operacija (7). Ovde napomenimo da ako je $\{R_\lambda\}_{\lambda \in I}$ skup vremenskih relacija na skupu E_k i ako je skup indeksa I konačan skup, tada se operacija preseka može izraziti pomoću Descartes-ovog proizvoda i identifikovanja koordinata. Medjutim, ako je I beskonačan skup, to nije moguće.

Primetimo da se operacija preseka izvodi samo sa vremenskim relacijama iste dužine, što znači da ona nije svuda definisana na skupu vremenskih relacija. Medjutim, može se postići da operacija preseka bude svuda definisana na skupu vremenskih relacija. Naime, neka je R m-arna, a S p-arna vremenska relacija na skupu E_k i neka je, na primer $m<p$. Obrazujmo Descartes-ov proizvod

$$R \times E_k^{p-m},$$

[illegible]

[illegible]

Lako se dokazuje da, ako se operacije 1. – 7. primene na invarijante neke funkcije sa zadržavanjem, da se opet dobijaju invarijante te funkcije sa zadržavanjem.

3. Vremenski grafici algebri funkcija sa zadržavanjem

Neka je $\tilde{\mathcal{A}}$ neka algebra funkcija sa zadržavanjem na skupu E_k i Z skup svih zadrški funkcija iz $\tilde{\mathcal{A}}$, tj.

$$Z = \{t \mid (f, t) \in \tilde{\mathcal{A}}\}.$$

D e f i n i c i j a 3.3.1. Pod n-tim vremenskim grafikom algebre $\tilde{\mathcal{A}}$ podrazumevaćemo skup uredjenih parova

$G_n(\tilde{\mathcal{A}}) = \{(p, G_n^{(p)}) \mid p \in N_1$, dok je $G_n^{(p)}$ n-ti grafik svih funkcija od n promenljivih, koje se u algebri $\tilde{\mathcal{A}}$ pojavljuju sa zadržavanjem p$\}$.

Ako $p \notin Z$, tada je $G_n^{(p)} = \emptyset$. Podsetimo da se n-grafik $G_n^{(p)}$ zapisuje u obliku matrice s jednom vertikalnom crtom koja razdvaja n-apscisu od n-ordinate, pri čemu n-apscisu obrazuju sve n-torke skupa E_k uredjene leksikografski, dok n-ordinatu obrazuju vrednosti funkcija u tim n-torkama, tako da svakoj funkciji odgovara jedna kolona n-ordinate. Dakle,

$$G_n^{(p)} = (A_n^{(p)} | O_n^{(p)}).$$

U [illegible] i [6] opisivane su pomoću relacija [illegible] algebre-kao funkcija k-arne logike koje sadrži sve selektorske funkcije. U tom slučaju matrica levo od uspravne crte je podmatrica matrice desno od uspravne crte.

Ovde ćemo se ograničiti na opisivanje algebri funkcija sa zadržavanjem, koje sadrže sve selektorske funkcije s nultim zadrškama. Suština ovog ograničenja biće jasna kada budemo dokazivali osnovne rezultate. Dakle, ovde je $A_n^{(o)}$ podmatrica od $\mathcal{O}_n^{(o)}$, dok to za p=1,2,3,... ne mora da bude. Apscise za p=1,2,3,... imaće samo pomoćnu ulogu. Jasno: $A_n^{(o)}= A_n^{(1)}=A_n^{(2)}= \ldots$.

P r i m e r 3.3.1. Neka je $\widetilde{\mathcal{H}}$ maksimalna klasa Kudrjavceva $\widetilde{H}=\{(f,0)\mid f\in S\}\cup\{(e,q+1)\mid q=0,1,2,\ldots\}$ na $E_2=\{0,1\}$. Tada je prvi vremenski grafik algebre $\widetilde{H}$:

$$G_1(\widetilde{H})=\{(0,G_1^{(o)}),(1,G_1^{(1)}),(2,G_1^{(2)}),\ \ldots\},$$

gde je

$$G_1^{(o)}=\left(\begin{array}{c|cc}0&0&1\\1&1&0\end{array}\right)\quad \text{i}\quad G_1^{(p)}=\left(\begin{array}{c|cc}0&0&1\\1&0&1\end{array}\right)\quad \text{za } p=1,2,3,\ \ldots,$$

dok je drugi vremenski grafik algebre $\widetilde{H}$:

$$G_2(\widetilde{H})=\{(0,G_2^{(o)}),(1,G_2^{(1)}),(2,G_2^{(2)}),\ \ldots\},$$

gde je

$$G_2^{(o)}=\left(\begin{array}{cc|cccc}0&0&0&0&1&1\\0&1&0&1&0&1\\1&0&1&0&1&0\\1&1&1&1&0&0\end{array}\right)\ \text{i}\ G_2^{(p)}=\left(\begin{array}{cc|cccc}0&0&0&0&1&1\\0&1&0&1&0&1\\1&0&0&1&0&1\\1&1&0&0&1&1\end{array}\right)\quad \text{za } p=1,2,3,\ldots$$

[illegible] (n=0,1,2,...)
[illegible]

[illegible] sada neka svojstva vremenskih n-grafika.

L e m a 3.3.1. Za svako n=1,2,3, ..., n-ti vremenski grafik $G_n(\mathcal{A})$ algebre $\mathcal{A}$ je vremenska relacija dužine k^n.

Tvrdjenje leme sledi iz definicije n-tog vremenskog grafika algebre $\mathcal{A}$ funkcija sa zadržavanjem.

Napomenimo da ćemo n-ti vremenski grafik zapisivati u obliku

$$G_n(\mathcal{A})=\{(0,G_n^{(0)}),(1,G_n^{(1)}),(2,G_n^{(2)}), \dots\}$$

bez obzira što je njegov stvaran oblik

$$G_n(\mathcal{A})=\{(0,\mathcal{G}_n^{(0)}),(1,\mathcal{G}_n^{(1)}),(2,\mathcal{G}_n^{(2)}), \dots\}.$$

L e m a 3.3.2. Neka je $\mathcal{A}$ algebra funkcija sa zadržavanjem. Za svako n=1,2,3, ..., n-ti vremenski grafik $G_n(\mathcal{A})$ je invarijantan za $\mathcal{A}$.

D o k a z. Neka je $(f(x_1,x_2,\dots,x_n), t)$ proizvoljna funkcija sa zadržavanjem iz algebre $\mathcal{A}$. Pokažimo da funkcija (f, t) očuvava (čuva) vremenski grafik $G_n(\mathcal{A})$, tj. da proizvoljan uredjeni par $(q, G_n^{(q)})$ prevodi u neki par iz $G_n(\mathcal{A})$. Neka je $\hat{s}_1, \hat{s}_2, \dots, \hat{s}_\ell$ niz tačaka (k^n-torki) iz $G_n^{(q)}$ (tj. iz $\mathcal{G}_n^{(q)}$). Tada su $(f_1(x_1,x_2,\dots,x_n), q)$, $(f_2(x_1,x_2,\dots,x_n), q), \dots, (f_\ell(x_1,x_2,\dots,x_n), q)$ funkcije [illegible] q, [illegible] $\hat{s}_1, \hat{s}_2, \ldots, \hat{s}_\ell$ [illegible], funkcije (g_i, q) $(i=1,2,\ldots,\ell)$ pripadaju algebri $\tilde{\mathcal{A}}$. [illegible] funkcija (h, t), (g_1, q), (g_2, q), ..., (g_ℓ, q)

$$(h(x_1,x_2,\ldots,x_n),q+t)=(f(g_1(x_1,x_2,\ldots,x_n),g_2(x_1,x_2,\ldots,x_n),\ldots$$
$$\ldots,g_\ell(x_1,x_2,\ldots,x_n)),q+t)$$

takodje pripada algebri $\tilde{\mathcal{A}}$. S druge strane, ordinata funkcije $h(x_1,x_2,\ldots,x_n)$, koja kao jedna kolona pripada matrici $G_n^{(q+t)}$ (tj. $\mathcal{O}_n^{(q+t)}$), jednaka je upravo $f(\hat{s}_1, \hat{s}_2, \ldots, \hat{s}_\ell)$, otkuda i sledi da $f(\hat{s}_1, \hat{s}_2, \ldots, \hat{s}_\ell) \in G_n^{(q+t)}$. To upravo i znači da funkcija sa zadržavanjem $(f(x_1,x_2,\ldots,x_\ell), t)$ prevodi uredjeni par $(q, G_n^{(q)})$ u uredjeni par $(q+t, G_n^{(q+t)})$. Ovim je lema dokazana.

L e m a 3.3.3. Funkcija sa zadržavanjem od n promenljivih $(f(x_1,x_2,\ldots,x_n), t)$ pripada algebri $\tilde{\mathcal{A}}$ ako i samo ako očuvava vremenski grafik $G_n(\tilde{\mathcal{A}})$.

D o k a z. Ako $(f(x_1,x_2,\ldots,x_n), t)$ pripada algebri $\tilde{\mathcal{A}}$, to, prema prethodnoj lemi, ona očuvava n-ti vremenski grafik $G_n(\tilde{\mathcal{A}})$.

Neka funkcija $(f(x_1,x_2,\ldots,x_n), t)$ očuvava n-ti vremenski grafik $G_n(\tilde{\mathcal{A}})$. Tada ona, specijalno, par $(0, G_n^{(0)})$ prevodi u par $(t, G_n^{(t)})$, tj.

$$f(G_n^{(0)},G_n^{(0)},\ldots,G_n^{(0)}) \subseteq G_n^{(t)},$$

[illegible]

$$f(\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2, \ldots, \hat{\beta}_n) = \begin{pmatrix} f(\tilde{\alpha}_1) \\ f(\tilde{\alpha}_2) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ f(\tilde{\alpha}_{k^n}) \end{pmatrix},$$

gde su $\tilde{\alpha}_i$ $(i=1,2,\ldots,k^n)$ vrste, a $\hat{\beta}_j$ $(j=1,2,\ldots,n)$ kolone apscise $A_n^{(o)}$, pripada grafiku $G_n^{(t)}$ (tj. $\mathcal{O}_n^{(t)}$). No, $[f(\tilde{\alpha}_1), f(\tilde{\alpha}_2), \ldots, f(\tilde{\alpha}_{k^n})]$ je upravo ordinata funkcije f. Zaista, sledi da funkcija $(f(x_1,x_2,\ldots,x_n), t)$ pripada algebri $\tilde{\mathcal{A}}$. Ovim je lema dokazana.

Primetimo da smo u dokazivanju leme koristili činjenicu da algebra $\tilde{\mathcal{A}}$ sadrži sve selektore s nultim zadržavanjem.

Dolazimo na dokazivanje prve osnovne teoreme, koja tvrdi da je svaka algebra funkcija sa zadržavanjem Galois-zatvorena.

T e o r e m a 3.3.1. Neka je $\tilde{\mathcal{A}}$ algebra funkcija sa zadržavanjem na konačnom skupu E_k i $\mathcal{J}(\tilde{\mathcal{A}})$ skup svih njenih invarijanti. Tada svaka funkcija sa zadržavanjem $(f(x_1,x_2,\ldots,x_n), t)$, koja očuvava $\mathcal{J}(\tilde{\mathcal{A}})$, pripada algebri $\tilde{\mathcal{A}}$, tj.

$$\tilde{\mathcal{A}} = \mathcal{P}(\mathcal{J}(\tilde{\mathcal{A}})).$$

D o k a z. Prema lemi 3.3.2. skup $\mathcal{J}(\tilde{\mathcal{A}})$ sadrži sve vremenske grafike $G_n(\tilde{\mathcal{A}})$ $(n=1,2,3,\ldots)$. Ako neka funkcija od n promenljivih sa zadržavanjem $(f(x_1,x_2,\ldots,x_n),\, t)$ očuvava skup $\mathcal{T}(\tilde{\mathcal{A}})$, tada, ona, specijalno, mora da očuvava n-ti vremenski grafik $G_n(\tilde{\mathcal{A}})$. Prema lemi 3.3.3. to upravo znači da ona pripada algebri $\tilde{\mathcal{A}}$. Dakle,

$$\tilde{\mathcal{A}} = \mathcal{P}(\mathcal{T}(\tilde{\mathcal{A}})),$$

što je i trebalo dokazati.

L e m a 3.3.4. Svaka algebra $\tilde{\mathcal{A}}$ funkcija sa zadržavanjem može se predstaviti u obliku preseka opadajućeg niza algebri funkcija sa zadržavanjem, tj.

$$\tilde{\mathcal{A}} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \tilde{\mathcal{A}}_n,$$

gde je

$$\tilde{\mathcal{A}}_1 \supseteq \tilde{\mathcal{A}}_2 \supseteq \tilde{\mathcal{A}}_3 \supseteq \ldots,$$

pri čemu je svaka algebra $\tilde{\mathcal{A}}_n$ algebra funkcija sa zadržavanjem, koje očuvavaju jednu jedinstvenu vremensku relaciju.

D o k a z. Neka je $\tilde{\mathcal{A}}$ algebra funkcija sa zadržavanjem. Obeložimo sa $\tilde{\mathcal{A}}_n$ skup svih funkcija sa zadržavanjem koje očuvavaju n-tu vremensku relaciju $G_n(\tilde{\mathcal{A}})$. Prema lemi 3.3.2. je $\tilde{\mathcal{A}} \subseteq \tilde{\mathcal{A}}_n$ a prema lemi 3.3.3. $G_n(\tilde{\mathcal{A}}_n) = G_n(\tilde{\mathcal{A}})$. Otuda i sledi da je $\tilde{\mathcal{A}}_n \subseteq \tilde{\mathcal{A}}_s$ za $n > s$ i

$$\tilde{\mathcal{A}} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \tilde{\mathcal{A}}_n.$$

L e m a 3.3.9. Neka je $\tilde{\mathcal{A}}$ neka algebra funkcija sa zadržavanjem i

$$R = \{(0,\rho_o),(1,\rho_1),(2,\rho_2), \dots \}$$

vremenska relacija širine n (to znači da je svaka relacija ρ_i širine n, tj. broj elemenata u ρ_i je n), invarijantna za $\tilde{\mathcal{A}}$. Tada R se može dobiti iz n-tog vremenskog grafika $G_n(\tilde{\mathcal{A}})$ pomoću operacija: projekcije, permutacije i beskonačne superpozicije.

D o k a z. Neka je

$$M = \{(0,M_o),(1,M_1),(2,M_2), \dots \}$$

vremenska R-matrica, gde su M_i ρ_i-matrice $(i=0,1,2,\dots)$. Izvršimo permutaciju vrsta u matricama M_o, M_1, M_2, ... (ista permutacija za sve matrice), tako u nizu novodobijenih matrica M_o', M_1', M_2', ... vrste matrice M_o' budu leksikografski uredjene. Matrice M_i' ne moraju biti ρ_i-matrice, već neke ρ_i'-matrice, gde se relacije ρ_i' dobijaju od relacija ρ_i istom permutacijom vrsta (koordinata) pomoću koje je dobijeno M_i' od M_i $(i=0,1,2,\dots)$. Neka je

$$R' = \{(0,\rho_o'),(1,\rho_1'),(2,\rho_2'), \dots \}$$

tako dobijena vremenska relacija i neka je

$$G_n(\tilde{\mathcal{A}}) = \{(0,G_n^{(o)}),(1,G_n^{(1)}),(2,G_n^{(2)}), \dots \}$$

n-ti vremenski grafik algebre $\tilde{\mathcal{A}}$, gde je

$$G_n^{(p)} = (A_n^{(p)} | \mathcal{O}_n^{(p)}) \quad (p=0,1,2,\ldots).$$

matrica M_o' je, očigledno, podmatrica matrice $A_n^{(p)}$ $(p=0,1,2,3,\ldots)$. Kako je po predpostavci vremenska relacija R, a time i R_o' invarijantna za algebru $\tilde{\mathcal{A}}$, to, ako u $G_n(\tilde{\mathcal{A}})$, (tj. u $G_n^{(p)}$ $(p=0,1,2,\ldots)$), odstranimo sve vrste čiji su redni brojevi različiti od rednih brojeva vrsta matrice M_o', tada dobijena vremenska matrica $pr_1 G_n(\tilde{\mathcal{A}})$ ima sledeće osobine: $pr_1 A_n^{(p)} = M_o'$ $(p=0,1,2,\ldots)$; $pr_1 \mathcal{O}_n^{(p)}$ je podmatrica matrice M_p' $(p=0,1,2,\ldots)$, specijalno je $pr_1 \mathcal{O}_n^{(o)} = M_o'$, zbog toga što algebra $\tilde{\mathcal{A}}$ sadrži sve selektorske funkcije s nultim zadržavanjima. Stavimo: $pr_1 \mathcal{O}_n^{(p)} = M_p'^{(o)}$ i neka je $M_p'^{(o)}$ matrica relacije $\rho_p'^{(o)}$ $(p=0,1,2,\ldots)$. Na taj način dobijamo vremensku relaciju

$$R_o' = \{(0,\rho_o'^{(o)}),(1,\rho_1'^{(o)}),(2,\rho_2'^{(o)}),\ldots\},$$

gde je

$$\rho_o'^{(o)} = \rho_o' \quad \text{i} \quad \rho_p'^{(o)} \subseteq \rho_p' \quad \text{za } p=1,2,3,\ldots .$$

Permutacijom koordinata u vremenskoj relaciji R_o', dobijamo vremensku relaciju

$$R_o = \{(0,\rho_o^{(o)}),(1,\rho_1^{(o)}),(2,\rho_2^{(o)}),\ldots\},$$

gde je

$$\rho_o^{(o)} = \rho_o \quad \text{i} \quad \rho_p^{(o)} \subseteq \rho_p \quad \text{za } p=1,2,3,\ldots .$$

Posmatrajmo sada vremensku relaciju

$$R_{\rho_1}=\{(0,\rho_1),(1,\rho_2),(2,\rho_3),\ldots\},$$

koja se od relacije R dobija operacijom prelaza za jedan, a koja je takodje invarijantna za algebru $\tilde{\mathcal{A}}$. Neka je

$$M_{\rho_1}=\{(0,M_1),(1,M_2),(2,M_3),\ \ldots\ \}$$

vremenska matrica relacije R_{ρ_1}. Izvršimo permutaciju vrsta u matricama M_1, M_2, M_3, ... (jednu permutaciju za sve matrice), tako da u nizu novodobijenih matrica $M_1'^{(1)}$, $M_2'^{(1)}$, $M_3'^{(1)}$, ... vrste matrice $M_1'^{(1)}$ budu leksikografski uredjene. Matrice $M_i'^{(1)}$ su neke $\rho_i'^{(1)}$-matrice. Na taj način dobijamo vremensku relaciju

$$R'_{\rho_1}=\{(0,\rho_1'^{(1)}),(1,\rho_2'^{(1)}),(2,\rho_3'^{(1)}),\ldots\}.$$

Matrica $M_1'^{(1)}$ je podmatrica matrice $A_n^{(p)}$ $(p=0,1,2,\ \ldots)$. Pošto je vremenska relacija R_{p_1}, a time i R'_{p_1}, invarijantna za $\tilde{\mathcal{A}}$, to, ako u $G_n(\tilde{\mathcal{A}})$ (tj. u $G_n^{(p)}$ $(p=0,1,2,\ldots)$) odstranimo sve vrste čiji su redni brojevi različiti od rednih brojeva matrice $M_1'^{(1)}$, tada dobijena vremenska matrica $pr_2G_n(\tilde{\mathcal{A}})$ ima sledeće osobine: $pr_2A_n^{(p)}=M_1'^{(1)}$ $(p=0,1,2,\ldots)$; $pr_2\mathcal{O}_n^{(p)}$ je podmatrica matrice $M_{p+1}'^{(1)}$ $(p=0,1,2\ \ldots)$, specijalno je $pr_2\mathcal{O}_n^{(o)}=M_1'^{(1)}$. Stavimo: $pr_2\mathcal{O}_n^{(p)}=M_{1,p+1}'^{(1)}$ i neka je $M_{1,p+1}'^{(1)}$ matrica relacije $\rho_{1,p+1}'^{(1)}$ $(p=0,1,2,\ \ldots)$. Dobijamo vremensku relaciju

$$R'^{(1)}_{\rho_1}=\{(0,\rho'^{(1)}_{1,1}),(1,\rho'^{(1)}_{1,2}),(2,\rho'^{(1)}_{1,3}),\dots\} ,$$

gde je

$$\rho'^{(1)}_{1,1}=\rho'^{(1)}_{1} \quad i \quad \rho'^{(1)}_{1,p}\subseteq \rho'^{(1)}_{p} \quad za \quad p=2,3,\dots .$$

Permutacijom koordinata iz $R'^{(1)}_{\rho_1}$ dobijamo vremensku relaciju

$$R^{(1)}_{\rho_1}=\{(0,\rho^{(1)}_{1,1}),(1,\rho^{(1)}_{1,2}),(2,\rho^{(1)}_{1,3}),\dots\} ,$$

gde je

$$\rho^{(1)}_{1,1}=\rho_1 \quad i \quad \rho^{(1)}_{1,p}\subseteq \rho_p \quad za \quad p=2,3,\dots .$$

Polazeći od vremenske relacije

$$R_{\rho_q}=\{(0,\rho_q),(1,\rho_{q+1}),(2,\rho_{q+3}),(3,\rho_{q+3}),\dots\} ,$$

gde je q proizvoljan nenegativan ceo broj, na isti način možemo dobiti vremensku relaciju

$$R^{(q)}_{\rho_q}=\{(0,\rho^{(q)}_{q,q}),(1,\rho^{(q)}_{q,q+1}),(2,\rho^{(q)}_{q,q+2}),\dots\} ,$$

gde je

$$\rho^{(q)}_{q,q}=\rho_q \quad i \quad \rho^{(q)}_{q,p}\subseteq \rho_p \quad za \quad p=q+1,q+2,\dots .$$

Na opisani način dobijamo niz vremenskih relacija:

$$R^{(o)}_{\rho_o}=\{(0,\rho^{(o)}_{o}),(1,\rho^{(o)}_{1}),(2,\rho^{(o)}_{2}),\dots\} ,$$

$$R^{(1)}_{p_1}=\{(0,\rho^{(1)}_{1,1}),(1,\rho^{(1)}_{1,2}),(2,\rho^{(1)}_{1,3}),\ \ldots\ \},$$

$$R^{(2)}_{p_2}=\{(0,\rho^{(2)}_{2,2}),(1,\rho^{(2)}_{2,3}),(2,\rho^{(2)}_{2,4}),\ \ldots\ \},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$R^{(q)}_{p_q}=\{(0,\rho^{(q)}_{q,q}),(1,\rho^{(q)}_{q,q+1}),(2,\rho^{(q)}_{q,q+2}),\ \ldots\ \},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

(gde smo stavili $R_0=R^{(0)}_{p_0}$), takvih da je

$$\rho^{(0)}_0=\rho_0,$$

$$\rho^{(0)}_1\subseteq\rho^{(1)}_{1,1}=\rho_1,$$

$$\rho^{(0)}_2,\ \rho^{(1)}_{1,2}\subseteq\rho^{(2)}_{2,2}=\rho_2,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\rho^{(0)}_q,\rho^{(1)}_{1,q},\rho^{(2)}_{2,q},\ \ldots,\rho^{(q-1)}_{q-1,q}\subseteq\rho^{(q)}_{q,q}=\rho_q,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Beskonačna superpozicija niza dobijenih vremenskih relacija upravo je vremenska relacija

$$R=\{(0,\rho_0),(1,\rho_1),(2,\rho_2),\ \ldots\ \}.$$

Ovim smo dokazali da se iz vremenskog grafika $G_q(\mathcal{A})$ algebre $\mathcal{A}$ zaista može dobiti vremenska relacija R, koja je invarijantna sa $\mathcal{A}$, pomoću operacija: permutacije koordinata, projekcije i beskonačne superpozicije.

T e o r e m a 3.3.2. Ako je $\tilde{\mathcal{C}}$ koalgebra vremenskih relacija na skupu E_τ i $\mathcal{P}(\tilde{\mathcal{C}})$ algebra svih njenih polimorfizama, tada svaka vremenska relacija invarijantna na $\mathcal{P}(\tilde{\mathcal{C}})$, pripada koalgebri $\tilde{\mathcal{C}}$, tj.

$$\tilde{\mathcal{C}} = \mathcal{I}(\mathcal{P}(\tilde{\mathcal{C}})).$$

D o k a z. Neka je S vremenska relacija invarijantna za $\mathcal{P}(\tilde{\mathcal{C}})$, dokažimo da $S \in \tilde{\mathcal{C}}$.

Razmotrićemo dva slučaja: 1. kada je koalgebra $\tilde{\mathcal{C}}$ konačno-generisana i 2. kada je prebrojivo-generisana.

1. Neka je koalgebra $\tilde{\mathcal{C}}$ konačno-generisana, tj. neka postoji konačan skup $\{R_1, R_2, \ldots, R_s\}$ vremenskih relacija, takav da je

$$\tilde{\mathcal{C}} = [\{R_1, R_2, \ldots, R_s\}].$$

U ovom slučaju možemo smatrati da postoji jedna vremenska relacija R, koja generiše koalgebru $\tilde{\mathcal{C}}$, tj. da je

$$\tilde{\mathcal{C}} = [\{R\}].$$

Treba da pokažemo da se vremenska relacija S može dobiti od relacije R pomoću uvedenih operacija sa vremenskim relacijama. Medjutim, kako smo već pokazali (lema 3.3.5.) da se vremenska relacija S može dobiti iz n-tog vremenskog grafika algebre $\mathcal{X} = \mathcal{P}(\tilde{\mathcal{C}})$, to je dovoljno pokazati da se n-ti vremenski grafik algebre $\mathcal{X} = \mathcal{P}(\tilde{\mathcal{C}})$ može dobiti iz vremenske relacije R primenom datih operacija. Znači, za datu vremensku relaciju

$$R = \{(0, \rho_0), (1, \rho_1), (2, \rho_2), \ldots\}$$

treba naći sve funkcije od n promenljivih sa zadržavanjem, koje očuvavaju R. Pri tome treba imati st. lno na umu smisao pojma očuvavanja vremenske relacije funkcijom sa zadržavanjem. Naime, ako je

$$M_o = \begin{pmatrix} \alpha^{(o)}_{11} \alpha^{(o)}_{12} & \ldots & \alpha^{(o)}_{1n} \\ \alpha^{(o)}_{21} \alpha^{(o)}_{22} & \ldots & \alpha^{(o)}_{2n} \\ \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ \alpha^{(o)}_{m1} \alpha^{(o)}_{m2} & \ldots & \alpha^{(o)}_{nm} \end{pmatrix}$$

neka ρ_o-matrica tipa n, tada funkcija od n promenljivih sa zadržavanjem nula preslikava matricu M_o u jedan element iz ρ_o, funkcija sa zadržavanjem jedan u jedan element iz ρ_1, funkcija sa zadržavanjem dva u jedan element iz ρ_2 itd. Ako je

$$M_1 = \begin{pmatrix} \alpha^{(1)}_{11} \alpha^{(1)}_{12} & \ldots & \alpha^{(1)}_{1n} \\ \alpha^{(1)}_{21} \; {}^{(1)}_{22} & \ldots & \alpha^{(1)}_{2n} \\ \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ \alpha^{(1)}_{m1} \; {}^{(1)}_{m2} & \ldots & \alpha^{(1)}_{mn} \end{pmatrix}$$

neka ρ_1-matrica tipa n, tada funkcija od n promenljivih sa zadržavanjem nula preslikava matricu M_1 u neki elemenat iz ρ_1, funkcija sa zadržavanjem jedan u neki elemenat iz ρ_2, funkcija sa zadržavanjem dva u neki elemenat iz ρ_3 itd.

Postupak konstrukcije n-tog vremenskog grafika alge-b. $\tilde{\mathcal{A}} = \mathcal{P}(\tilde{\mathcal{C}})$ sličan je odgovarajućem postupku u [5] i [6] za konstrukciju n-tog grafika funkcija k-značne logike, koje očuvavaju datu relaciju na E_k.

[illegible] ρ_o [illegible] $_o$ i [illegible] su $M_o^{(1)}, M_o^{(2)}, \dots, M_o^{(\ell)}$, [illegible] je [illegible] matrice tipa n. [illegible]

$$P = \begin{pmatrix} M_o^{(1)} \\ M_o^{(2)} \\ \vdots \\ M_o^{(\ell)} \end{pmatrix}$$

koja ima $d=\ell\cdot m$ vrsta i n kolona. Obrazujmo, zatim, ℓ-ti Descartes-ov stepen relacije ρ_p $(p=0,1,2,\dots)$. Tako dobijenoj relaciji ρ_p pridružimo matricu Q_p $(p=0,1,2,\dots)$. na taj način dobijamo vremensku relaciju dužine $d=\ell m$:

$$G_n^{I}(\mathcal{R})=\{(0,(P|Q_0)),(1,(P|Q_1)),(2,(P|Q_2)),\ \dots\},$$

koja je od relacije R dobijena operacijom Descartes-ovog proizvoda.

Definišimo sada na skupu $\{1,2,\dots,d\}$ relaciju ekvivalencije $\sim$, takvu da je $i\sim j$ ako su i-ta i j-ta vrsta matrice P jednake medjusobno. Svakoj od relacija ρ_p (tj. matricama Q_p), $(p=0,1,2,\dots)$, pridružimo odgovarajuću dijagonalnu relaciju u odnosu na relaciju ekvivalencije $\sim$. Na taj način dobijamo vremensku relaciju dužine d:

$$G_n^{II}(\mathcal{R})=\{(0,(P|\sim Q_0)),(1,(P|\sim Q_1)),(2,(P|\sim Q_2)),\ \dots\}.$$

Podsetimo da je $G_n^{II}(\mathcal{R})$ dobijeno od $G_n^{I}(\mathcal{R})$ operacijom dijagonalizacije.

Iz svakog skupa jednakih vrsta u matrici P i matricama $\sim Q_p$ $(p=0,1,2,\dots)$ odbacimo sve osim prve. Dobijamo vremensku relaciju dužine $d_1 < d$:

$$G_n^{III}(\vec{\mathcal{A}}) = \{(0,(prP \mid pr(\sim Q_o))),(1,(prP \mid pr(\sim Q_1))), \dots\}.$$

$G_n^{III}(\vec{\mathcal{A}})$ je dobijeno od $G_n^{II}(\vec{\mathcal{A}})$ operacijom projekcije (izbacivanjem vrsta). $G_n^{III}(\vec{\mathcal{A}})$ već definiše sve funkcije sa zadržavanjem od n promenljivih, koje očuvavaju ρ_o, prevode ρ_o u ρ_1, prevode ρ_o u ρ_2 itd. Medjutim, poznate su samo vrednosti tih funkcija na ρ_o-dopustivim n-torkama, dok su na ostalim n-torkama vrednosti tih funkcija proizvoljne.

Pripišimo matrici prP sve n-torke koje nisu ρ_o-dopustive i istovremeno obrazujmo Descartes-ov proizvod relacije $pr(\sim Q_p)$ $(p=0,1,2,\dots)$ i univerzalne relacije dužine $k^n - d_1$. Dobijenu vremensku relaciju označimo sa $G_n^{IV}(\vec{\mathcal{A}})$. Primetimo da smo je od $G_n^{III}(\vec{\mathcal{A}})$ dobili operacijom Descartes-ovog proizvoda.

Izvršimo permutaciju vrsta u $G_n^{IV}(\vec{\mathcal{A}})$, tako da vrste apscise budu leksikografski uredjene. Tako dobijenu vremensku relaciju označimo sa

$$G_n^{(o)}(\vec{\mathcal{A}}) = \{(0,G_n^{(o),(o)}),(1,G_n^{(o),(1)}),(2,G_n^{(o),(2)}),\dots\},$$

gde $G_n^{(o),(o)}$ definiše sve funkcije algebre $\vec{\mathcal{A}}$ s nultim zadržavanjem koje očuvavaju ρ_o, $G_n^{(o),(1)}$ - sve funkcije sa zadržavanjem jedan koje prevode ρ_o u ρ_1, $G^{(o),(2)}$ - sve funkcije sa zadržavanjem dva, koje prevode ρ_o u ρ_2 itd.

Neka je sada

$$R_{\rho_1}=\{(0,\rho_1),(1,\rho_2),(2,\rho_3),\ \dots\}$$

vremenska relacija koja se od R dobija operacijom prenosa za 1. R_{ρ_1} je takodje invarijantno za algebru $\vec{\mathcal{A}}=\mathcal{P}(\vec{\mathcal{C}})$.

Ako ponovimo prethodni postupak, ali tako da u njemu ρ_0 zamenimo sa ρ_1, ρ_1 sa ρ_2, ρ_2 sa ρ_3 itd., dobićemo n-tu vremensku relaciju

$$G_n^{(1)}(\vec{\mathcal{A}})=\{(0,G_n^{(1),(o)}),(1,G_n^{(1),(1)}),(2,G_n^{(1),(2)}),\ \dots\},$$

gde $G_n^{(1),(o)}$ definiše sve funkcije algebre $\vec{\mathcal{A}}=\mathcal{P}(\vec{\mathcal{C}})$ s nultim zadržavanjem koje očuvavaju relaciju ρ_1, $G_n^{(1),(1)}$ – sve funkcije algebre $\vec{\mathcal{A}}$ sa zadržavanjem jedan koje prevode ρ_1 u ρ_2, $G_n^{(1),(2)}$ – sve funkcije sa zadržavanjem dva koje prevode ρ_1 u ρ_3 itd.

Ako je

$$R_{\rho_q}=\{(0,\rho_q),(1,\rho_{q+1}),(2,\rho_{q+2}),\ \dots\}$$

vremenska relacija koja se od R dobija operacijom prenosa za q, gde je q proizvoljan ceo nenegativan broj, i ako opisani postupak ponovimo tako da u njemu ρ_0 zamenimo sa ρ_q, ρ_1 sa ρ_{q+1}, ρ_2 sa ρ_{q+2} itd., dobićemo n-tu vremensku relaciju

$$G_n^{(q)}(\vec{\mathcal{A}})=\{(0,G_n^{(q),(o)}),(1,G_n^{(q),(1)}),(2,G_n^{(q),(2)}),\ \dots\},$$

gde $G_n^{(q),(o)}$ definiše sve funkcije algebre $\vec{\mathcal{A}}$ s nultim zadržavanjem koje očuvavaju relaciju ρ_q, $G_n^{(q),(1)}$ – sve funkcije algebre $\vec{\mathcal{A}}$ sa zadržavanjem jedan koje prevode ρ_q u [illegible] $(\dots),(2)$ [illegible] po vo- [illegible]

Očevidno da je [illegible] :

$$G_n(\tilde{\mathcal{A}}) = G_n^{(o)}(\tilde{\mathcal{A}}) \cap G_n^{(1)}(\tilde{\mathcal{A}}) \cap G_n^{(2)}(\tilde{\mathcal{A}}) \cap \dots ,$$

tj.

$$G_n(\tilde{\mathcal{A}}) = \{(0, G_n^{(o)}), (1, G_n^{(1)}), (2, G_n^{(2)}), \dots\} ,$$

gde je

$$G_n^{(p)} = G_n^{(o),(p)} \cap G_n^{(1),(p)} \cap \dots G_n^{(q),(p)} \cap \dots$$

$(p=0,1,2,\dots)$.

Ovim je teorema dokazana za slučaj kad je koalgebra konačno-generisana.

2. Neka je $\tilde{\mathcal{C}}$ beskonačno-generisana (prebrojivo ili neprebrojivo) koalgebra i neka je skup $\{R_\lambda\}_{\lambda \in I}$ skup generišućih elemenata koalgebre $\tilde{\mathcal{C}}$. Tada je

$$\tilde{\mathcal{A}} = \mathcal{P}(\tilde{\mathcal{C}}) = \bigcap_{\lambda \in I} \mathcal{P}(R_\lambda).$$

Označimo sa $\tilde{\mathcal{A}}_\lambda = \mathcal{P}(R_\lambda)$, tada je $\tilde{\mathcal{A}} = \bigcap_{\lambda \in I} \tilde{\mathcal{A}}_\lambda$.

Označimo takodje sa $\tilde{\mathcal{C}}_\lambda$ koalgebru generisanu jednom vremenskom relacijom R_λ. Očevidno je $\tilde{\mathcal{C}}_\lambda \subseteq \tilde{\mathcal{C}}$.

Iz dokaza za slučaj konačno-generisanih koalgebri (slučaj 1) sledi da

$$G_n(\tilde{\mathcal{A}}_\lambda) \in \tilde{\mathcal{C}}_\lambda .$$

To znači da je za svako $\lambda \in I$

$$G_n(\tilde{\mathcal{A}}_\lambda) \in \tilde{\mathcal{C}} . \qquad (1)$$

Takođe, imamo da je

$$G_n(\tilde{\mathcal{A}}) = \bigcap_{\lambda \in I} G_n(\tilde{\mathcal{A}}_\lambda). \qquad (2)$$

Iz (1) i (2) dobijamo (imajući u vidu da operacija preseka ulazi u operacije koalgebre $\tilde{\mathcal{C}}$ i da je $\tilde{\mathcal{C}}$ zatvoreno)

$$G_n(\tilde{\mathcal{A}}) \in \tilde{\mathcal{C}} .$$

Znači i u ovom slučaju smo dobili n-ti vremenski grafik funkcija sa zadržavanjem algebre $\tilde{\mathcal{A}}$.

Ovim je teorema u potpunosti dokazana.

4. *Algebre funkcija jedne promenljive sa zadržavanjem*

Definišimo još dve operacije sa vremenskim relacijama:

Unija (ili disjunkcija), ako su R i S dve vremenske relacije dužine m na skupu E_k:

$$R = \{(0,\rho_0),(1,\rho_1),(2,\rho_2), \ldots\}$$

i

$$S = \{(0,\sigma_0),(1,\sigma_1),(2,\sigma_2), \ldots\},$$

tada je n-arna vremenska relacija

$$R \cup S = \{(0, \rho_0 \cup \sigma_0), (1, \rho_1 \cup \sigma_1), (2, \rho_2 \cup \sigma_2), \ldots\},$$

gde je za svako $i \in \vartheta_1$

$$\rho_i \cup \sigma_i = \{(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \mid (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in \rho_i \vee (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in \sigma_i\},$$

unija (disjunkcija) vremenskih relacija R i S.

Ako je R m-arna, a S p-arna vremenska relacija, gde je, na primer, $m < p$, tada je

$$R \cup S = (R \times E_k^{p-m}) \cup S.$$

Na ovaj način se postiže da unija bude svuda definisana na skupu vremenskih relacija.

Nije teško videti da ako funkcija sa zadržavanjem od n promenljivih (f, t) čuvava vremenske relacije R i S, tada ona u opštem slučaju ne očuvava njihovu uniju $R \cup S$. Medjutim, ako je f funkcija jedne promenljive, onda je to tačno.

Komplement, ako je

$$R = \{(0, \rho_0), (1, \rho_1), (2, \rho_2), \ldots\}$$

m-arna vremenska relacija na skupu E_k, tada je m-arna vremenska relacija

$$\neg R = \{(0, \neg\rho_0), (1, \neg\rho_1), (2, \neg\rho_2), \ldots\},$$

gde je $\neg\rho_i$ $(i = 0, 1, 2, \ldots)$, negacija ili komplement od ρ_i, komplement (negacija) vremenske relacije R.

Funkcija jedne promenljive sa zadržavanjem (f(x), t), koja očuvava vremensku relaciju R, ne mora da očuvava i njen komplement $\bar{R}$, medjutim, ako je $f(x)$ permutacija skupa E_k i osim toga za svako $(p,\rho_p) \in R$ je $f(\rho_p) = \rho_{p+t}$, tj. funkcija $(f(x), t)$ prevodi uredjeni par (p,ρ_0) na uredjeni par $(p+t,\rho_{p+t})$ za svako $p=0,1,2, \ldots$, onda je to tačno.

T e o r e m a 3.4.1. Svaka koalgebra zatvorena u odnosu na ranije definisane operacije s vremenskim relacijama i operaciju unije predstavlja skup svih invarijanti neke algebre funkcija jedne promenljive sa zadržavanjem, tj. ako je $\tilde{\mathcal{L}}$ koalgebra zatvorena u odnosu i na operaciju unije, tada je

$$\tilde{\mathcal{L}} = \mathcal{I}(\mathcal{E}(\tilde{\mathcal{L}})),$$

gde $\mathcal{E}(\tilde{\mathcal{L}})$ označava skup svih funkcija jedne promenljive sa zadržavanjem, koje očuvavaju sve vremenske relacije $R_i \in \tilde{\mathcal{L}}$. (Jasno, $\mathcal{P}(\tilde{\mathcal{L}}) = \mathcal{E}(\tilde{\mathcal{L}})$).

T e o r e m a 3.4.2. Svaka koalgebra $\tilde{\mathcal{L}}$ zatvorena u odnosu i na operaciju komplementa predstavlja skup svih invarijanti (vremenskih relacija) neke algebre permutacija sa zadržavanjem, tj.

$$\tilde{\mathcal{L}} = \mathcal{I}(\mathcal{A}(\tilde{\mathcal{L}})),$$

gde $\mathcal{A}(\tilde{\mathcal{L}})$ označava skup svih permutacija sa zadržavanjem, koje očuvavaju sve vremenske relacije $R_i \in \tilde{\mathcal{L}}$. (Jasno, $\mathcal{P}(\tilde{\mathcal{L}}) = \mathcal{A}(\tilde{\mathcal{L}})$).

IV POGLAVLJE

SPEKTRI FUNKCIJA k-ZNAČNE LOGIKE

1. Karakterizacija maksimalnih spektara pomoću relacija

Neka P_k označava skup svih funkcija algebre k-značne logike.

D e f i n i c i j a 4.1.1 ([38]). Svaki beskonačan niz

$$\mathcal{F} = (F_0, F_1, \dots, F_d, \dots)$$

podskupova od P_k naziva se spektar.

Spektre ćemo označavati sa $\mathcal{F} = (F_d)_{d=0,1,2,\dots}$.

D e f i n i c i j a 4.1.2 ([38]). Ako su $\mathcal{F}=(F_d)_{d=0,1,2,\dots}$ i $\mathcal{G}=(G_d)_{d=0,1,2,\dots}$ dva spektra, tada kažemo da je spektar $\mathcal{F}$ podspektar od $\mathcal{G}$, a pišemo $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$, ako je $F_d \subseteq G_d$ za svako $d=0,1,2,\dots$.

D e f i n i c i j a 4.1.3 ([38]). Ako je $\mathcal{F}=(F_d)_{d=0,1,\dots}$

dati spektar, tada za spektar $\tilde{\mathcal{F}} = (\tilde{F}_d)_{d=0,1,2,\ldots}$ kažemo da je zatvaranje, ili $\sim$-zatvaranje spektra $\mathcal{F}$ ako je

(1) $\tilde{F}_0 = F_0$, gde je $F_0 \subseteq P_0^1$,

(2) $\tilde{F}_d = (\tilde{F}_0 \otimes (F_d \cap \tilde{F}_0)) \cup (\bigcup_{i=1}^{d-1} (\tilde{F}_i \otimes \tilde{F}_{d-i}))$ za $i=1,2,3,\ldots$,

gde je za $F, G \subseteq P_k$:

$$F \otimes G = \{ f(g_1(x_{11}, x_{12}, \ldots, x_{1m_1}), g_2(x_{21}, x_{22}, \ldots, x_{2m_2}), \ldots, g_n(x_{n1}, x_{n2}, \ldots, x_{nm_n})) \mid f \in F,\ g_i \in G \quad (i=1,2,\ldots,n) \}.$$

D e f i n i c i j a 4.1.4 ([9]). Spektar $\mathcal{F} = (F_d)_{d=0,1,\ldots}$ je zatvoren (ili $\sim$-zatvoren) ako je $\mathcal{F} = \tilde{\mathcal{F}}$.

D e f i n i c i j a 4.1.5 ([9]). Za spektar $\mathcal{F} = (F_d)_{d=0,1,2,\ldots}$ kažemo da je potpun (ili $\sim$-potpun) ako i samo ako je

$$\bigcup_{d=0}^{\infty} \tilde{F}_d = P_k.$$

D e f i n i c i j a 4.1.6 ([9]). Za spektar $\mathcal{F} = (F_d)_{d=0,1,2,\ldots}$ kažemo da je predpotpun ili maksimalan ako nije potpun, dok je svaki spektar, koji je pravi nadskup od $\mathcal{F}$, potpun.

T e o r e m a 4.1.1 ([9]). Spektar $\mathcal{F}$ je potpun ako i samo ako nije podskup nijednog maksimalnog spektra.

Iz ove teoreme sledi da je od interesa poznavanje maksimalnih spektara.

Definišemo tipove spektara prema [illegible].

D e f i n i c i j a 4.1.7. Spektar $\mathcal{F}=(F_d)_{d=0,1,2,\dots}$ je tipa (A) ako postoji maksimalna klasa M u P_k, tako da je

$$F_d = M$$

za svako $d=0,1,2,\dots$.

D e f i n i c i j a 4.1.8. Spektar $\mathcal{F}=(F_d)_{d=0,1,2,\dots}$ je tipa (B) ako postoji m-arna polirelacija $\bar{\rho}=(\rho_0,\rho_1,\dots,\rho_{p-1})$ s periodom p, tako da je

$$F_d = \bigcap_{n=0}^{p-1} F(\rho_n,\rho_{n \oplus d})$$

za svako $d=0,1,2,\dots$, gde $F(\rho_n,\rho_{n\oplus d})$ označava skup svih funkcija k-značne logike, koje prevode relaciju ρ_n u relaciju $\rho_{n\oplus d}$, a $\oplus$ sabiranje po modulu p.

D e f i n i c i j a 4.1.9. Spektar $\mathcal{F}=(F_d)_{d=0,1,2,\dots}$ je tipa (C) ako postoji m-arna relacija ρ i m-arna dijagonala Δ , tako da je

$$F_0 = F(\rho,\rho)$$

i

$$F_d = F(\rho,\Delta) \qquad (d=1,2,3,\dots).$$

Za svako fiksirano k postoji konačno mnogo spektara tipa (A) i (C), dok spektara tipa (B) ima beskonačno mnogo.

T e o r e m a 4.1.2 (11). Maksimalni spektar na skupu E_k je, ili tipa (A), ili tipa (B), gde je za m-arnu polirelaciju $\overline{\rho}$: $1 \leq m \leq k$ i $p \geqslant 2$, ili tipa (C), gde je za m-arnu relaciju ρ : $1 \leq m \leq k$.

Svakom skupu S funkcija sa zadržavanjem može se pridružiti jedan spektar $\mathcal{F}=(F_d)_{d=0,1,2,...}$ na sledeći način:

$$f \in F_d \Longleftrightarrow (f,\ d) \in S \quad (d=0,1,2,...\ ).$$

Važi, naravno, i obrnuto: svakom spektru može se pridružiti skup funkcija sa zadržavanjem. Znači, pojmovi spektra i skupa funkcija sa zadržavanjem su matematički ekvivalentni, pa se može koristiti jedan ili drugi, zavisno od željenog cilja.

Ovde ćemo maksimalnim klasama Kudrjavceva u P_2 pridružiti maksimalne spektre i okarakterisati ih pomoću relacija

I. Spektri pridruženi maksimalnim klasama $\widetilde{L}$, $\widetilde{S}$, $\widetilde{M}$, $\widetilde{T}_o$ i $\widetilde{T}_1$ su tipa (A) i, naravno, njih karakterišu relacije na E_2, koje karakterišu maksimalne klase L, S, M, T_o i T_1. Znači:

1. spektar $\mathcal{F}_L=(F_d)_{d=0,1,2,...}$, gde je $F_d = L$ za svako d=0,1,2,..., potpuno karakteriše relacija $\rho_L=\{(0,0,0,0),$ $(0,0,1,1),(0,1,0,1),(0,1,1,0),(1,0,0,1),(1,0,0,1),(1,0,1,0),$ $(1,1,0,0),(1,1,1,1)\}$;

2. spektar $\mathcal{F}_S=(F_d)_{d=0,1,2,...}$, gde je $F_d = S$ za svako d=0,1,2,..., potpuno karakteriše relacija $\rho_S = \{(0,1),$ $(1,0)\}$;

3. spektar $\mathcal{F}_M=(F_d)_{d=0,1,2,\dots}$, gde je $F_d = M$ za svako $d=0,1,2,\dots$, potpuno karakteriše relacija $\varphi_M=\{(0,0),(0,1),(1,1)\}$;

4. spektar $\mathcal{F}_0=(F_d)_{d=0,1,2,\dots}$, gde je $F_d = T_0$ za svako $d=0,1,2,\dots$, potpuno karakteriše relacija $\varphi_0=\{(0)\}$;

5. spektar $\mathcal{F}_1=(F_d)_{d=0,1,2,\dots}$, gde je $F_d = T_1$ za svako $d=0,1,2,\dots$, potpuno karakteriše relacija $\varrho_1=\{(1)\}$.

II. Spektri pridruženi maksimalnim klasama $\tilde{C}$, $\tilde{E}_0$, $\tilde{E}_1$ i $\tilde{H}$ su tipa (C).

6. Klasi $\tilde{C}$ pridružujemo spektar $\mathcal{F}_C=(F_d)_{d=0,1,2,\dots}$, gde je $F_0=A$ (skup svih α-funkcija) i $F_d=B\cup\Gamma$ (skup svih β- i γ-funkcija) za $d=1,2,3,\dots$. Kako postoji binarna relacija $\varrho=\{(0,1)\}$ i dijagonala $\Delta=\{(0,0),(1,1)\}$, takve da je

$$F_0 = A = F(\varrho,\varrho)$$

i

$$F_d = B\cup\Gamma = F(\varrho,\Delta) \quad (d=1,2,3,\dots),$$

sledi da je spektar $\mathcal{F}_C=(F_d)_{d=0,1,2,\dots}$ tipa (C).

7. Klasi $\tilde{E}_0$ pridružujemo spektar $\mathcal{F}_{E_0}=(F_d)_{d=0,1,2,\dots}$, gde je $F_0=A\cup B$ i $F_d=\{0,1\}$ za $d=1,2,3,\dots$. Pošto postoji binarna relacija $\varrho=\{(0,1),(1,1)\}$ i dijagonala $\Delta=\{(0,0),(1,1)\}$ takve da je

$$F_0 = A\cup B = F(\varrho,\varrho)$$

i

$$F_d=\{0,1\}= F(\varrho,\Delta) \quad (d=1,2,3,\dots),$$

to je spektar $\mathcal{F}_{E_o}$ zaista tipa (C).

8. Klasi $\widetilde{E}_1$ pridružujemo spektar $\mathcal{F}_{E_1}=(F_d)_{d=0,1,2,\ldots}$, gde je $F_o=A\cup\Gamma$ i $F_d=\{0,1\}$ $(d=1,2,3,\ldots)$. Dobijeni spektar je tipa (C), jer postoji binarna relacija $\rho=\{(0,0),(0,1)\}$ i dijagonala Δ, tako da je

$$F_o = A\cup\Gamma = F(\rho,\rho)$$

i

$$F_d=\{0,1\}= F(\rho,\Delta) \quad (d=1,2,3,\ldots).$$

9. Klasi $\widetilde{H}$ pridružujemo spektar $\mathcal{F}_H=(F_d)_{d=0,1,2,\ldots}$, gde je $F_o= S$ i $F_d= Y$ (skup svih parnih funkcija) za $d=1,2,\ldots$, Pridruženi spektar je tipa (C), jer postoji binarna relacija $\rho=\{(0,1),(1,0)\}$ i dijagonala Δ, tako da je

$$F_o= S = F(\rho,\rho)$$

i

$$F_d= Y = F(\rho,\Delta) \quad (d=1,2,3,\ldots).$$

III. Spektri pridruženi maksimalnim klasama $\widetilde{W}_r$ i $\widetilde{Z}_r$ $(r=0,1,2,\ldots)$ su tipa (B).

10. Klasi $\widetilde{W}_r$ pridružujemo spektar $\mathcal{F}_{W_r}=(F_d)_{d=0,1,2,\ldots}$, gde je $F_{2^r\cdot(2q)}=M$ $(q=0,1,2,\ldots)$, $F_{2^r\cdot(2q+1)}=\overline{M}=\{f\,|\,f\in P_2\wedge \overline{f}\in M\}$ $(q=0,1,2,\ldots)$ i $F_d=\{0,1\}$ $(d\neq p\cdot 2^r,\ p=0,1,2,\ldots)$. Lako je videti da postoji polirelacija $\bar{\rho}=(\rho_o,\rho_1,\ldots,\rho_{2^{r+1}-1})$, takva da je $\rho_o=\{(0,0),(0,1),(1,1)\}$, $\rho_{2^r}=\rho_o^{-1}$ i $\rho_s=\Delta$ $(s\neq 0,2^r$

pri čemu je

$$F_d = \bigcap_{n=o}^{2^{r+1}-1} F(\rho_n, \rho_{n+d}) \quad (d=0,1,2,\dots),$$

gde je $\oplus$ sabiranje po modulu 2^{r+1}, pa sledi da je dobijeni spektar tipa (B).

11. Klasi $\tilde{Z}_r$ pridružujemo spektar $\mathcal{F}_{Z_r} = (F_d)_{d=0,1,2,\dots}$, gde je $F_{2^r\cdot(2q)} = A$ $(q=0,1,2,\dots)$, $F_{2^r\cdot(2q+1)} = \Delta$ (skup svih δ-funkcija), $(q=0,1,2,\dots)$ i $F_d = \emptyset$ za $d \neq p \cdot 2^r$, $p=0,1,2,\dots$. Kako postoji polirelacija $\bar{\rho} = (\rho_o, \rho_1, \dots, \rho_{2^{r+1}-1})$, takva da je $\rho_o = \{(0,1)\}$, $\rho_{2^r} = \{(1,0)\}$ i $\rho_s = \emptyset$ za $s \neq 0,\ 2^r$, pri čemu je

$$F_d = \bigcap_{n=o}^{2^{r+1}-1} F(\rho_n, \rho_{n \oplus d}) \quad (d=0,1,2,\dots),$$

pa sledi da je dobijeni spektar tipa (B).

LITERATURA

[1] Бирюкова Л.А., Кудрявцев В.Б., О полноте функций с задержками, Проблемы кибернетики, вып. 23, Москва, „Наука", 1970., с. 5–25.

[2] Бирюкова Л.А., Вопросы *l*-полноты для функций с задержками, Проблемы кибернетики, вып. 31, Москва, „Наука", 1976., с. 53–77.

[3] Бирюкова Л.А., Кудрявцев В.Б., Некоторые задачи о полноте для функций с задержками, Иследавание операций, вып. 4, Москва, ВЦ АН СССР, 1974., с. 88–102.

[4] Блохина Г.Н., Кудрявцев В.Б., Критерий базисности групп в *k*-значной логике, Иследавание операций, вып. 4, Москва, ВЦ АН СССР, 1974., с. 103–111.

[5] Боднарчук В.Г., Калужнин Л.А., Котов В.Н., Рамов Б.А., Теория Галуа для алгебр Поста I, Кибернетика, No. 3, Киев, 1969.

[6] Боднарчук В.Г., Калужнин Л.А., Котов В.Н., Ромов Б.А., Теория Галуа для алгебр Поста II, Кибернетиуа, No. 5, Киев, 1969.

[7] Дискретная математика и математические вопросы кибернетики, под ред. С.В. Яблонского и О.Б. Лупанова, том 1, Москва, „Наука", 1974.

[8] Глушков В.М., Цейтлин Г.Е., Ющенко Е.Л., Алгебра, языки, програмирование, Киев, „Наукова думка", 1978.

[9] Hikita T. and A. Nozaki, A-completeness criterion for spectra, SIAM J. Comput., val. 6, No. 2, 1977., s. 285–297.

[10] Hikita T., Completeness criteria for delayed – logic devices.

[11] Hikita T., Completeness criterion for functions with delay defined over a domain of three elements, Proc. Japan Acad., 54, ser. A, No. 10, 1978.

[12] Яблонсеий С.В., О суперпозициях функций алгебры логики, Математ. сб., 30 (72), 1952, с. 329–348.

[13] Яблонский С.В., О функциональной полноте в трехзначном исчислении, ДАН СССР, том XCV, No. 6, 1954.

[14] Яблонский С.В., Функциональные построения в l-значной логике, Труды Математического институиа имени В.А., Стеклова ,том 51, Издательство АН СССР, 1958.

[15] Яблонский С.В., О предельных логиках, ДАН СССР, том 118, No. 4, 1958.

[16] Яблонский С.В., О некоторых свойствах счетных замкнутых классов из Р , ДАН СССР, том 124, No. 5, 1959.

[17] Яблонский С.В., Гаврилов Г.П., Кудрявцев В.Б., Функции алгебры логики и классы Поста, Москва, „Наука", 1966.

[18] Яблонский С.В., Введение в дискретную математику, Москва, „Наука", 1979.

[19] Янов Ю.И. и Мучник А.А., О существовании k-значных замкнутых классов, не имеющих конечного базиса, ДАН СССР, том 127,7, No. 1, 1959.

[20] Яновская С.А., Математическая логика и основания математики, Математика в СССР за 40 лет (1917–1957), том 1, Москва, 1959.

[21] Кобринский Н.Е. и Трахтенброт Б.А., Введение в теорию конечных автоматов, Москва, 1962.

[22] Кон П., Универсальная алгебра, Москва, „Мир", 1968.

[23] Krasner M., Généralisation et analogues de la théorie de Galois, Comptes rendus du Congres de 1945.

[24] Krasner M., Généralisation abstraite de la théorié de Galois, Calloques Internationaux du Centre National XXIV, Paris, 1950.

[25] Krasner M., Une nouvelle présentation de la théorie des groupes de permutations et ses applications a la théorie de Galois et de produit déntrelacement („wreath product") de groupes, Mathematica Balkanica, 3, 1973, p. 229–280.

[26] Кудрявцев В.Б., Теорема полноты для одного класса автоматов без обратных связей, Прдблемы кибернетики, вып. 8, Москва, 1962.

[27] Кудрявцев В.Б., Вопросы полноиы для систем автоматов, ДАН СССР, 130, 6, 1960., с. 1190––1192.

[28] Кудрявцев В.Б., Теорема полноты для одного класса автоматов без обратных связей, ДАН СССР, 132, 2, 1960., с. 272–274.

[29] Kudrjavcev V.B., Burosch G., Blochina G.N., Vollständigkeitsbedingungen für zwei algebren vom Pastschem typ, Mathematica Balkanica, 3, 1973., 281–296.

[30] Кудрявцев В.Б., О функциональной системе P_Σ, ДАН СССР, том 210, No. 3, 1973, с. 521–522.

[31] Кудрявцув В.Б., Относительно функциональной системы P_Σб Журнал вычислительной математики и математической физики, том 14, No. 1, 1974, с. 198–208.

[32] Кудрявцев В.Б., Лекции по теории конечных автоматов, Издательство Московского университета, 1976.

[33] Кудрявцев В.Б., Алешин С.В., Подколзин А.С., Элементы теории автоматов, Издательство Московского университета, 1978.

[34] Кудрявцев В.Б., Об условиях полноты для алгебр Поста, Методы и системы технической диагностики, вып. I, Издательство Саратовского унивурситета, 1980.

[35] Кудрявцев В.Б., О полноте для функциональных систем, ДАН СССР, том 257, No. 2, 1981., 274–278.

[36] Кудрявцев В.Б., О функциональных системах, Вычислительный центр АН СССР, Москва, 1981.

[37] Мальцев А.И., Итеративные алгебры и многообразия Поста, сб. „Алгебра и логика", том 5, выпуск 2, Новосибирск, „Наука", 1966., с. 5–24.

[38] Nozaki A., Réalisation des fonctions definies dans un ensemble fini a l'aide des organes élémentaires d'entrée – sortie, Proc. Japan Acad., vol. 46, 1970., 478–482.

[39] Nozaki A., Functional studies of Automata, I, II.

[40] Post E., Introduction to a general theory of elementary propositions, Amer. J. Math., 43, 1921., p. 163–185.

[41] Post E., The two – valued iterative sustems of mathematical logic, Annals of Math. Studies, v. 5, Princeton Univ. Press, Princeton – London, 1941.

[42] Rosenberg I., La structure des fonctions de plusieurs variables sur un ensemble fini, C.R. Acad. Sci. Paris, t. 260, No. 14, 1965., 3817–3819.

[43] Rosenberg I., Über die funktionale Vollständigkeit in den mehrwertigen Logiken, Rozpravy Cesk. Akad. Ved, vol 80, No. 4, Praha, 1970.

[44] Rosenberq I., Algebren und Relationen, Elektromische Informationsverarbeitung und Kybernetik, 6, 2, 1970., 115–124.

[45] Rosenberg I., A classification of universal algebras by infinitary relations, Algebra Universalis, vol. 1, 1972, 350–354.

[46] Rosenberg I., Special types of universal algebras preserving a relation, preprint Publication du Centre de Recherches Mathématiques, No. 169. Université de Montreal.

[47] Rosenberg I., Une correspondance de Galois entre les algebres universelles et les relations dans le meme univers, C.R. Acad. Sci. Paris, Ser. A–B, 280, 1975., 615–616.

[48] Rosenberg I., Completeness, closed classes and relations in multiplevalued logics, Centre de recherches mathématiques Université de Montréal.

[49] Шоломов Л.А., Основы теории дискретных логических и вычислительных устройств, Мосува, „Наука", 1980.

[50] Трахтенброт Б.А., Барздинь Я.М., Конечные автоматы, поведение и синтез, Москва, „Наука", 1970.

[51] Захарова Е.Ю., Кудрявцев В.Б., Яблонский С.В., О предполных классах в k-значных логиках, ДАН СССР, Том 186, No. 3, 1969.