ELEMENTORUM
UNIVERSÆ MATHESEOS

AUCTORE

P. ROGERIO JOSEPHO

BOSCOVICH

Societatis JESU

PUBLICO MATHESEOS PROFESSORE

TOMUS II.

CONTINENS

ALGEBRAM FINITAM.

EDITIO PRIMA VENETA

Summo labore ac diligentia ab erroribus expurgata.

VENETIIS, MDCCLVII.

APUD ANTONIUM PERLINI.

SUPERIORUM PERMISSU, AC PRIVILEGIIS.

NOVA AUCTORIS PRÆFATIO.

HUjus etiam libri, magna itidem ex parte distracti, non vero recusi, mutatur titulus, ut in primi tomi nova præfatione monui. In ea, quam superiore anno huic ipsi libro præfixeram, & quæ adhuc retinetur applicationem Algebræ ad Geometriam daturum promiseram secundo tomo. Tum enim exigebantur Elementa admodum compendiosa, quæ binis tomis includerent Mathesim puram, quorum secundus in prima parte contineret Sectiones Conicas, & quidquid ad Geometriam infinitorum, & infinitesimorum, ac ad subimiores curvas pertinet, in secunda vero parte applicationem Algebræ ad Geometriam, & totam Infinitorum Analysim compendiaria methodo pertractata. Nunc ubi ea omnia, quæ post primam Præceptoris institutionem per se ipse possit Tyro addiscere, uberius explicata requiruntur, excrescit tomorum numerus, licet rerum ordo servetur idem.

At ut iis etiam consulatur, qui minus otii habent, ad ampliora volumina percurrenda, illud curabo, ut veritates quasdam præcipuas inter se solas connectam, quæ proinde, omissis, vel in aliud tempus reservatis reliquis, cognosci possint. Id quidem præstiti in Sectionibus Conicis, & in præfatione tertii tomi proposui numeros illos paragraphorum, qui, reliquis omissis, legi possunt. Hic etiam in hisce Algebræ Elementis subimiora quædam, vel minus necessaria ommittere poterit, qui festinare debeat, aut velit. Paragraphorum, qui legi debent, numeros hic subjiciam, & ubi binis numeris puncta interseruntur, intermedii pariter omnes percurrendi sunt,

1 ... 71, 84 ... 87, 95, 101 ... 107, 110 ... 127, 143 ... 174, 186 ... 202, 204 ... 209, 220, 221, 235 ... 254, 257, 258, 263 ... 275, 281 ... 284, 287 ... 290, 306, 330 ... 332, 335, 336, 342 ...

345, 361 ... 368, 371 ; 383 ... 388, 391 ... 397, 413, 415.

In his numeris vix unquam habebitur eorum mentio, qui omittuntur, quæ si alicubi occurrit, ad ea, quæ ibi tradentur, non erit prorsus necessarium id, quod eo numero continebitur, ac ad uberiorem cognitionem facile supplebit voce Præceptor, quæ desint. Porro in his, quæ hic proposui, habentur præcipuæ algorithmi regulæ, elevatio binomii ad potentias, & ejus ope extractio radicis cujusvis, proprietates præcipuæ æquationum, resolutio æquationum primi, secundi, tertii, & quarti gradus, pro quibus solis habentur in Algebra generales regulæ. Si quærantur approximationes pro altiorum graduum æquationibus, percurratur §. quintusdecimus. Proderit autem, & sextumdecimum, omnium postremum percurrere.

PR

PRÆFATIO.

ALGEBRÆ Finitæ elementa hic tradimus sine applicatione ad Geometriam. Applicationem ejusmodi, ac infinitorum, & infinitesimorum analysim reservamus tomo secundo. Tradimus autem primo quidem totius calculi fundamenta a primis ipsis, ac simplicissimis exorsi; nimirum signorum, notarumque usum; additionem; subtractionem, multiplicationem, ac divisionem; ubi ea, quæ ad potentias, ac radices pertinent; ac prima serierum rudimenta quædam persecuti sumus, ut & nonnulla de imaginariorum valorum natura ac usu immiscuimus nec inutilia sane, nec injucunda. Tum æquationes aggressi earum naturam ac proprietates, & transformationes varias diligenter persecuti, primum quidem resolutionem æquationum primi, ac secundi gradus exposuimus; tum in æquationibus gradus tertii, & quarti multo fusius immorati profundioris investigationis specimen quoddam, & varia pluribus methodis instituta tentamina proponenda censuimus, quibus Tyro jam aliquanto exercitatior ad profundiorem analysim viam sibi muniret; quibus absolutis quod ad altiorum graduum æquationes resolvendas pertinet per radicum limites, & approximationem non ita fuse exposuimus, adhuc tamen nec omninò cursim perstriximus.

Et his quidem ipsa calculi elementa continentur. At ejusmodi usum in determinandis theorematis, & solvendis problematis, sub finem multo diligentius persecuti sumus, exemplis pluribus illustrando methodos, ex quibus uberem sane speramus Tyronis fructum. Illud unum monendum ducimus, licet omnem in eo operam collocaverimus, ut singula quàm maximè liceret, dilucidè exponeremus, adhuc tamen vivam Præceptoris vocem non utilissimam tantum, sed etiam fere necessariam plerumque fore, cum rarò admodum ejus indolis mentes producat natura, quæ in hæc velut adyta, & penetralia quædam irrumpant sine ductore.

ELE-

ELEMENTA ALGEBRÆ.

§. I.

De notatione.

1. ALGEBRA signis quibusdam utitur; & quantitates litteris exprimit.

2. Signum + significat additionem, & dicitur positivum, — subtractionem, & dicitur *negativum* = æqualitatem. Ubi vero nullum habetur signum, intelligitur positivum, quod in quantitatibus solitariis, vel initio plurium terminorum plerumque omittitur. Ex. gr. $2+3=5$ legitur *duo plus tria æquantur quinque*: $5-2=3$ legitur *quinque minus duo æquantur tribus*.

3. Signum multiplicationis est ×, divisionis lineola interposita diviso scripto supra ipsam, & divisori scripto infra. $3\times4=12$, $\frac{12}{4}=3$. Divisio etiam scribitur interpositis binis punctis, ponendo 12 : 4 pro $\frac{12}{4}$, & multiplicatio aliquando, sed raro admodum, interposito puncto, scribendo 3 . 4 pro 3 × 4. Sed cavendum ab æquivocationibus, cum eodem modo scribantur fractiones decimales post punctum.

4. Signum < significat quantitatem præcedentem esse minorem sequenti, contra signum >, esse majorem, $6<8$, $8>6$.

5 Signum ∞ significat infinitum.

6. Signum radicis est √, quæ radix si fuerit qua-

drata, fere nihil addi solet, si cubica, quarta, quinta, &c., ponitur numerus exponens radicem, ut $\sqrt[3]{}$, $\sqrt[4]{}$, $\sqrt[5]{}$ &c. $\sqrt{9} = 3$, $\sqrt[3]{8} = 2$, $\sqrt[4]{81} = 3$. Radix prima alicujus quantitatis dici potest ipsa quantitas: $\sqrt[1]{3} = 3$.

7. Quando plures quantitates in unam summam colligendæ sunt ita, ut signum præfixum afficiat simul omnes, adhibetur lineola super omnes extensa, vel parenthesis. $\overline{1+3} \times \overline{9-4}$, vel $(1+3) \times (9-4) = 4 \times 5 = 20$. $\sqrt{\overline{12+4+9}}$, vel $\sqrt{(12+4+9)} = \sqrt{25} = 5$.

8. Quando primus terminus ita continet secundum, ut tertius quartum, quæ dicitur proportio geometrica, scribitur punctis hac forma interpositis illis quantitatibus . : : . , vel : = : Esse 8 ad 4, ut 6 ad 3, scribitur 8 . 4 : : 6 . 3, vel 8 : 4 = 6 : 3. Secunda autem scribendi ratio fundatur in eo, quod si primus terminus continet secundum, ut tertius quartum, primus divisus per secundum debet æquari tertio diviso per quartum.

9. Quævis quantitatum genera litteris exprimuntur, & quidem, quæ cognitæ sunt, solent exprimi prioribus a, b, c &c., incognitæ postremis x, y, z &c. numeri indeterminati, potissimum in potentiis, & radicibus exprimi solent intermediis m, n, r. Aliqui pro incognitis, ut passim Angli, vocales adhibent, pro cognitis consonantes. Liberum est uti, quibus libet.

10. In multiplicatione facta per litteras omitti solet signum $\times$, & sola conjunctio litterarum sine signo multiplicationem significat. Sit $a = 2$, $b = 10$, $c = 4$, erit $ab = 2 \times 10 = 20$, $abc = 2 \times 10 \times 4 = 80$.

11. Si eadem quantitas aliquoties addatur sibi, sive per aliquem numerum multiplicetur, quod idem est; præfigitur numerus, qui exprimat, quoties sumitur.

$a + a$

$a + a + a + a = 4a$, & si $a = 3$; erit $4a = 4 \times 3 = 12$.

12. Si eadem quantitas a se ipsa subtrahatur, eliditur, & remanet cyphra o, ut $b - b = 0$, $a + b + c - b = a + c$.

13. Si eadem quantitas per seipsam multiplicetur, apponitur post ipsam paulo supra numerus, qui exprimat, quoties scribenda esset: $aa = a^2$, $aaa = a^3$, $aaaa = a^4$. Cavendum, ne confundatur a^2 cum $2a$. Si $a = 5$, erit $a^2 = 25$, $2a = 10$. Si $b = 2$; erit $(a + b)^2 = \overline{a+b}^2 = 7 \times 7 = 49$.

14. Hinc ille numerus suprapositus est index, seu exponens potentiæ, potestatis, seu dignitatis quantitatis ipsius, & exprimit, quot vicibus unitas per illam quantitatem multiplicetur. Unitas autem exponens primæ potentiæ signari non solet, ut etiam in multiplicatione, & divisione unitas omittitur. $1 \times a = a^1 = a$, $1 \times a \times a = a^2$, $1 \times a \times a \times a = a^3$ &c.

15. Hinc vero quævis quantitas si in exponente habeat o, exprimit unitatem, cum exprimat eam nunquam multiplicatam per illam quantitatem. Si sit $a = 5$, $b =$, adhuc erit $a^0 = 1$, $b^0 = 1$.

16. Hinc rursus si aliqua quantitas dividenda sit per se ipsam, apponitur pro exponente cyphra o, vel scribitur unitas, vel si multiplicabatur per alias quantitates, omittitur. $\frac{a}{a} = a^0 = 1$; $\frac{abc}{b} = ab^0c = ac$; $\frac{abc}{bd} = \frac{ac}{d}$; $\frac{ab}{abc} = \frac{1}{c}$.

17. Si unitas dividenda sit per aliquam quantitatem, vel per aliquam ejus potentiam, apponitur exponens potentiæ cum signo negativo; nec lineola divisoria adhibetur: $\frac{1}{a} = a^{-1}$, $\frac{1}{a^3} = a^{-3}$. Con-

tra $\frac{1}{a^{-3}} = a^3$, cum nimirum significet unitatem divisam per fractionem $\frac{1}{a^3}$. Sit $a = 10$, $b = 2$, erit

$$a^3 b^{-2} = \frac{1000}{4} = 250.$$

18. In exponentibus adhibentur etiam fractiones, & numerator fractionis significat potentiam quantitatis, ex qua radix extrahitur denominator exponentem radicis. $a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}$; $a^{\frac{3}{2}} = \sqrt{a^3}$; $a^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{a^2}$;

$a^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{a}}$; $a^{-\frac{4}{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{a^4}}$; $(a+b)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{(a+b)}$.

19. Assuescat Tyro quantitatibus maximè compositis numeros substituere, incipiendo a simplicioribus. Sit $a = 3$, $b = 2$, $c = 5$, $d = 10$, erit

$$\frac{a^2bc + bc^3}{bd + a^2} = \frac{9\times2\times5 + 2\times125}{2\times10 + 9} = \frac{90 + 250}{20 + 9} =$$

$\frac{340}{29}$. Sed $\frac{a^2bc}{bd} + \frac{bc^3}{a^2} = \frac{90}{20}\ \frac{250}{9} = 4\frac{1}{2} + 27 \cdot \frac{7}{9}$

$$= 32\frac{5}{18};\ \left(\frac{ad^2 b^{-2} + b^4 c}{bc^{-1} + a^{-1} d}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\left(\frac{\frac{300}{4} + 80}{\frac{2}{5} + \frac{10}{3}}\right)}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{620}{4} : \frac{56}{15}\right)} = \sqrt{\frac{9300}{224}} = \sqrt{41.51 \text{ \&c.}} = 6.44 \text{ \&c.}$$

§. II.

De primis operationibus calculi litteralis in quantitatibus unico termino constantibus.

20. Quomodo fiat additio, subtractio, multiplicatio, divisio quantitatum simplicium patet ex §. precedenti. Hic addendum, quod pertinet ad signa.

21. In aditione retinentur signa quantitatis utriusque, quæ additur, & cui additur. In subtractione mutatur signum quantitatis subtrahendæ tantum in oppositum. In multiplicatione, & divisione, si utriusque signa sunt conformia, nimirum utrumque simul positivum, vel utrumque simul negativum, apponitur producto signum positivum, sive difformia negativum.

22. Quod ad additionem pertinet satis patet per se. In subtractione si ab a subtrahi debeat $b-c$, subtrahendo b nimis subtrahitur. Addendum igitur illud c, quod subtrahi non debuerat, & habebitur $a-b+c$. Sic si a num. 7 subtrahi debeat $5-2=3$, fiet $7-5+2=4$. Si autem sit $b=0$, subtrahendo $-c$ ab a habebitur $a+c$.

23. Debeat autem multiplicari $a-b$ per $c-d$: Si multiplicetur per c fiet $ac-bc$: nam ac est justo majus, cum debuerit multiplicari non totum a, sed quantitas ea minor $a-b$, adeoque ab ipso ac demendum bc. At præterea $a-b$ non debuit multiplicari per totum c, sed per $c-d$. Demendum igitur a producto $ac-bc$ productum ex $a-b$ & d nimirum $ad-bd$, quo ablato, fiet $ac-bc-ad+bd$. Signa igitur conformia tum positiva, tum negativa dederunt signum positivum in ac, bd, difformia negativum in bc, ad. Sic si $7-3=4$ debeat multiplicari per $5-2=3$, fiet $5\times7-3\times5-2\times7+2\times3$, nimirum $35-15-14+6=12$. Et quidem si fiat $a=0$, $c=0$, fiunt ac, bc, $ad=0$, & $-b\times-d=+bd$, adeoque etiam solæ binæ quantitates negativæ per se invicem multiplicatæ exhibent signum positivum.

24. Por-

24. Porro tam in subtractione signi negativi, quam in multiplicatione binorum signorum negativorum, negando signum negativum, habetur positivum eo modo, quo qui negat carentiam alicujus rei, affirmat existentiam ejusdem.

25. Demum divisio est destructio multiplicationis; adeoque ut iterum multiplicando redeat idem signum, debet in divisione servari eadem lex; quæ in multiplicatione. $\frac{+8}{+2} = +4$, ne si potius ponatur -4, multiplicando deinde $+2 \times -4$ reddat -8 pro $+8$; $\frac{+8}{-2} = -4$, ne si ponatur potius $+4$, deinde $-2 \times +4$ redeat -8; $\frac{-8}{+2} = -4$, ne si ponatur potius $+4$; deinde $+2 \times +4$ reddat $+8$; $\frac{-8}{-2} = +4$; ne si ponatur potius -4, deinde -2×-4 reddat $+8$.

26. Hinc autem infertur, quotiescunque concurrit numerus signorum negativorum par, haberi signum positivum, quotiescumque vero impar, haberi negativum. Nam bina negativa positivum reddunt, tertium negativum cum positivo binorum reddit negativum, quartum negativum cum eo negativo conjunctum dat iterum positivum, & ita porro; positiva autem signa, quæ adsint, rem nihil turbant; nam conjuncta cum negativo relinquunt negativum, cum positivo positivum.

27. Quamobrem quadratum quantitatis tam positivæ, quam negativæ erit semper positivum, $+2 \times +2 = +4$, $-2 \times -2 = +4$: at cubus quantitatis positivæ erit positivus, negativæ negativus, cum tria in hoc concurrant negativa signa, in illo nullum. Quarta potentia iterum utrobique erit positiva, & generaliter quævis potentia quantitatis cujusvis habens exponentem parem erit positiva, quævis habens imparem, existente radice positiva, erit pariter positiva, existente radice negativa, erit negativa.

28. Inde

28. Inde vero consequitur radicem secundam, quartam, sextam, &c. quantitatis negativæ esse impossibilem, cum nimirum quæcunque radix possibilis sive positiva sit, sive negativa, exhibeat semper quamvis potentiam parem positivam. Ejusmodi radices exponentis paris quantitatum negativarum dicuntur idcirco quantitates imaginariæ. Sic $\sqrt{-1}$ est quantitas imaginaria, non realis.

29. Porro in solutione problematum si devenitur ad quantitates imaginarias, signum est admodum manifestum vel problema esse impossibile, vel in ejus solutione adhibitam esse methodum, quæ aliquid impossibile requirat, prorsus ut ubi devenitur in argumentatione quavis ad absurdum. Adhuc tamen frequens occurrit usus ipsarum quantitatum imaginariarum, quia ubi ipsum problema possibile est, & impossibilitas involvitur inter solvendum, sæpe impossibilitas ipsa deinde tollitur, ac eliditur pars illa impossibilis. Sic summa binarum quantitatum, quæ ex imaginariis, & realibus sunt mixtæ realis esse potest, ut quantitatum $3+\sqrt{-1}$, & $8-\sqrt{-1}$ summa est realis, nimirum 11, & differentia, nimirum 5. Ac potest quantitatum mixtarum ex realibus, & imaginariis esse realis non solum summa, & differentia, ut hic, sed & productum, & potentia aliqua: quod in potentia patet, cum quadratum ipsius $\sqrt{-1}$ sit $=-1$ ex ipsa radicis notione: de multiplicatione, & potentia tertia patebit infra.

30. Infertur autem etiam illud, quantitatis cujusvis radices secundas esse binas, alteram positivam, alteram negativam. Sic $\sqrt{4}=\pm 2$, nimirum vel positivum, vel negativum signum adhiberi potest, & radix quadrata semper ambigui valoris erit, quod attinet ad signum; ac idcirco ubi in solutionibus problematum obvenerit, semper binas exhibebit solutiones, cum utraque radix æquè idem quadratum habeat.

31. At radix exponentis imparis erit semper determinati valoris, positivi si quantitas sit positiva, negativi, si negativa, nec nisi una radix realis ejusmodi habebi-

tur,

tur, cum quævis quantitas realis utcunque paulo minor, vel major potentiam generare debeat omnino minorem, vel majorem. Plures tamen imaginarios valores habere poterunt etiam radices gradus imparis, ut videbimus infra, cum quantitates compositæ ex realibus & imaginariis possint aliquando imaginarietatem destruere elevatæ ad potentiam imparem. Sed de eo ubi de compositarum quantitatum potentiis.

32. Jam vero si quantitates componantur ex numeris præfixis, & quantitatibus litteralibus prorsus similibus, summantur, vel subtrahuntur soli numeri, adscriptis summæ, vel differentiæ numerorum quantitatibus illis ipsis: & id quidem patet ex eo, quod idem est multiplicare unam quantitatem per aliam, ac eam multiplicare per omnes ejus partes alias post alias. $2a + 3a = 5a$, $5a - 2a = 3a$, $2a - 5a = -3a$.

33. Si quantitates litterales sint dissimiles, adhibetur signum $+$, vel $-$ sine ulla reductione. $3ab - 5cd$ reduci non potest ad expressionem simpliciorem. Sed si adsit aliqua littera communis, ea potest seorsum poni, summatis, vel subductis reliquis per modum numerorum. $ac + bc = (a + b)\, c$, $abcd - abfg = (cd - fg)\, ab$.

34. Si quantitates componuntur ex numeris, & litteris quibuscumque, multiplicantur, & dividuntur seorsum numeri, & seorsum quantitates litterales. $3ac \times 5ab = 15a^2bc$; $\frac{6a^2bc}{2a^2c} = 3b$; $\frac{10a^2b}{6a^2c} = \frac{5b}{3c}$. Patet ex eo, quod quocunque ordine per se invicem multiplicentur aliquæ quantitates, productum simul omnium semper est idem.

35. Fractiones reducuntur ad eundem denominatorem, tum summantur, vel subtrahuntur prorsus, ut in Arithmetica, multiplicando tam denominatorem, quam numeratorem cujuslibet per denominatorem reliquorum; $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} + \frac{e}{f} = \frac{adf}{bdf} + \frac{bcf}{bdf} + \frac{bde}{bdf} = \frac{adf + bcf + bde}{bdf}$.

36. Fractiones multiplicantur, ac dividuntur prorsus ut in Arithmetica, multiplicando in primo casu nume-

rato-

ratores per se, & denominatores per se; in secundo multiplicando numeratorem divisi per denominatorem divisoris, & viceversa denominatorem illius per numeratorem hujus, nempe multiplicando divisum per divisorem inversum. $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$, $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}$.

37. Pro quantitatibus habentibus exponentem quantitatis habentur hi quatuor canones, qui profluunt ex ratione notandi potentias expositas §. 1, ac ex operationibus arithmeticis: 1. In multiplicatione earum quantitatum summantur exponentes: 2. In divisione subtrahitur exponens divisoris ab exponente divisi: 3. In elevatione ad novam potentiam multiplicatur exponens præcedentis per exponentem novæ: 4. In extractione radicum dividitur exponens præcedentis per exponentem novæ. $a^2 \times a^3 = a^5$, quia $aa \times aaa = aaaaa$, & generaliter $a^m \times a^n = a^{m+n}$ $\frac{a^5}{a^2} = a^3$, quia $\frac{aaaaa}{aa} = aaa$; $\frac{a^2}{a^5} = a^{2-5} = a^{-3}$, quia $\frac{aa}{aaaaa} = \frac{1}{aaa}$; generaliter vero $\frac{a^m}{a^n} = a^{n-m}$; $(a^3)^2 = a^{2 \times 3} = a^6$, quia $(a^3)^2 = a^3 \times a^3 = a^6$; $\sqrt{a^6} = a^{\frac{6}{2}} = a^3$, quia $\sqrt{a^6} = \sqrt{(a^3 \times a^3)} = a^3$.

38. Hinc vero ope reductionis fractionum eruuntur plura circa quantitates radicales: sunt autem hujusmodi.

39. Si ex radice extrahenda sit radix, multiplicantur exponentes. $\sqrt[3]{\sqrt[4]{a}} = \sqrt[12]{a}$: quia $\sqrt[4]{a} = a^{\frac{1}{4}}$, ac extrahendo radicem tertiam debet dividi per 3 exponens $\frac{1}{4}$ (per num. 37), qui ita divisus evadit $\frac{1}{12}$ (per n. 36), adeo-

adeoque $\sqrt[3]{a^{\frac{1}{4}}} = a^{\frac{1}{12}}$.

40. Inde autem eruitur, radicem quartam cujusvis quantitatis habere quatuor valores, quorum bini sunt semper imaginarii, & bini alii reales, vel imaginarii, prout quantitas fuerit positiva, vel negativa. Nam $\sqrt[4]{a} = \sqrt[2]{\sqrt[2]{a}}$, adeoque ob valorem radicis secundae ambiguum, habebuntur valores quatuor $+\sqrt[2]{-\sqrt[2]{a}}$, $-\sqrt[2]{-\sqrt[2]{a}}$, $+\sqrt[2]{+\sqrt[2]{a}}$, $-\sqrt[2]{+\sqrt[2]{a}}$, quorum priores duo sunt semper imaginarii, posteriores autem erunt reales vel imaginarii, prout a fuerit valor positivus, vel negativus. Et eodem pacto generaliter $\sqrt[2m]{a}$, habebit duplum valorum numerum ejus, quem habet $\sqrt[m]{a}$, quorum saltem dimidium erit semper imaginarium, cum nimirum sit $\sqrt[2m]{a} = \sqrt[m]{\pm\sqrt[2]{a}}$.

41. Si exponens & radicis, & quantitatis signo radicali affectae multiplicetur per eandem quantitatem, valor manet idem; $\sqrt[2]{a^3} = \sqrt[8]{a^{12}}$, quia $\sqrt[2]{a^3} = a^{\frac{3}{2}}$, & $\frac{3}{2} = \frac{3 \times 4}{2 \times 4} = \frac{12}{8}$, cum fractionis valor non mutetur, multiplicato & numeratore, & denominatore per eandem quantitatem quamcumque. Et eadem est ratio, si uterque contra dividatur per eandem quantitatem, quo pacto reducuntur saepe radicales ipsi ad simpliciores. $\sqrt[8]{a^{12}} = \sqrt[2]{a^3}$.

42. Radices diversorum exponentium reducuntur ad eundem, si multiplicetur tam exponens alterius, quam quantitas eo radicali inclusa per exponentem radicis al-

terius.

terius. $\sqrt[2]{a^3}$, & $\sqrt[3]{a^5}$ reducuntur ad $\sqrt[6]{a^9}$, & $\sqrt[6]{a^{10}}$ quia $\sqrt[2]{a^3} = a^{\frac{3}{2}}$, $\sqrt[3]{a^5} = a^{\frac{5}{3}}$, ac reducendo $\frac{3}{2}$, $\frac{5}{3}$ ad eundem denominatorem habetur $\frac{9}{6}$, $\frac{10}{6}$ (per n. 35); adeoque $a^{\frac{3}{2}}$, & $a^{\frac{5}{3}}$ reducuntur ad $a^{\frac{9}{6}}$, & $a^{\frac{10}{6}}$.

43. Radices si ejusdem exponentis sint, & easdem quantitates includant, summantur, vel subtrahuntur, summando, vel subtrahendo quantitates præfixas: $3\sqrt[3]{b} + 5\sqrt[3]{b} = 8\sqrt[3]{b}$; $5a\sqrt[3]{bc} - 3a\sqrt[3]{bc} = 2a\sqrt[3]{bc}$; si autem diversos exponentes habeant, vel diversas quantitates sub signis, non uniuntur in unum terminum, nisi forte redactæ ad eundem exponentem etiam eandem quantitatem includant. $5\sqrt[4]{a^6 b^8} + 8\sqrt[6]{a^9 b^{12}} = 5\sqrt[2]{a^3 b^4} + 8\sqrt[2]{a^3 b^4} = 13\sqrt{a^3 b^4}$. Patet ex eo, quod radicalis terminus, ubi sub signo radicali eadem quantitas continetur tractari debet eodem modo, quo tractaretur, si certa quadam littera exprimeretur.

44. Radices si ejusdem exponentis sint, utcunque diversas quantitates includant, multiplicantur, & dividuntur, multiplicando, & dividendo quantitates ipsas; quia elevando ad eam potentiam, quam radix exprimit, invenitur eadem quantitas, quæ si signo multiplicationis conjunctæ fuissent eæ binæ radices, $\sqrt[3]{a} \times \sqrt[3]{b} = \sqrt[3]{ab}$; quia elevando utrobique ad potestatem tertiam habetur $a \times b = ab$. $\frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}} = \sqrt[3]{\frac{a}{b}}$ ob eandem rationem.

45. Inde autem eruitur, binas quantitates imaginarias invicem multiplicatas, posse efformare quantitatem

realem: $\sqrt{-2}\times\sqrt{-8}=\sqrt{16}=\pm 4$. Videtur tamen hic notandum, ubi radix imagnaria elevatur ad suam potentiam, debere retineri signum negativum tantummodo, ex ipsa nimirum notione potentiæ, & radicis. Sic quadratum quantitatis imaginariæ $\sqrt{-1}$, debet esse determinatè -1, licet $\sqrt{-1}$, si consideretur ut multiplicata per $\sqrt{-1}$, ex legibus multiplicationis reddat $\sqrt{+1}=\pm 1$. Nam $\sqrt{-1}$ ex ipsa notione radicis exprimit id, cujus quadratum est -1. Quamobrem si consideretur elevatio ad secundam potentiam, videtur valor haberi debere determinatè pro negativo, si consideretur multiplicatio, debere haberi pro ambiguo; nec mirum in quantitatis impossibilis usu exlex quidpiam occurrere, & aliud videri multiplicare quantitatem per se ipsam, aliud elevare ad secundam potentiam, quæ duo in realibus quantitatibus idem sonant.

46. Si radices diversum exponentem habeant, reducuntur ad eundem (per num. 42), tum multiplicantur, vel dividuntur. $\sqrt[2]{a}\times\sqrt[3]{b}=\sqrt[6]{a^3}\times\sqrt[6]{b^2}=\sqrt[6]{a^3b^2}$; $\frac{\sqrt[2]{a}}{\sqrt[3]{b}}=\frac{\sqrt[6]{a^3}}{\sqrt[6]{b^2}}=\sqrt[6]{\frac{a^3}{b^2}}$.

47. Hinc sit extra signum radicale habeatur aliqua quantitas, potest includi signo radicali, multiplicando quantitatem inclusam per ejus potentiam ab exponente radicis expressam, cum quantitas non radicalis concipi possit ut radix prima sui ipsius habens exponentem $=1$, & reducatur ad radicalem ejusdem exponentis. $a\sqrt[3]{b}=\sqrt[3]{a^3b}$; quia $a\sqrt[3]{b}=\sqrt[3]{a^3}\times\sqrt[3]{b}=\sqrt[3]{a^3b}$. E contra si quantitas inclusa constet binis factoribus, e quorum altero radix illa extrahi possit; illa radix extracta potest poni ante signum radicale, relicta sub eo altera. $\sqrt[3]{}$

$a^7 b = a^2 \sqrt[3]{ab}$; quia $\sqrt[3]{a^7 b} = \sqrt[3]{a^6 \times ab} = \sqrt[3]{a^6} \times \sqrt[3]{ab} = a^2 \times \sqrt[3]{ab}$; $3\sqrt{50 a^5 c^3} = 15 a^2 c \sqrt{2ac}$; quia $3\sqrt{50 a^5 c^3} = 3\sqrt{25 a^4 c^2 \times 2ac} = 3\sqrt{25 a^4 c^2} \times \sqrt{2ac}$ (per num. 44) $= 3 \times 5 a^2 c \times \sqrt{2ac} = 15 a^2 c \sqrt{2ac}$.

48. Inde autem quævis radix imaginaria potest reduci ad hanc formam $a\sqrt[2m]{-1}$; ubi a est valor realis. Si enim sit $\sqrt[2m]{-b}$; & $-b$ exprimat quancunque quantitatem negativam, posito $a^{2m} = b$; erit $\sqrt[2m]{-b} = \sqrt[2m]{-a^{2m}} = \sqrt[2m]{a^{2m} \times -1} = a\sqrt[2m]{-1}$.

§ III.

De iisdem operationibus in quantitatibus constantibus pluribus terminis.

49. In additione plurium quantitatum similes singulis adduntur ita, ut si signa sint conformia, addantur numeri præfixi, qui dicuntur coefficientes numerici: si sint difformia subtrahatur numerus minor a majore, & apponatur signum numeri majoris: reliqui termini adjungantur cum suis signis. Proderit tamen similium alias sub aliis scribere, ut facilius colligatur summa.

50. Debeant addi hæ summæ, $8a^2 + 3ab - 4cd + 6ad$; $7a^2 + 4fg - 2ab - 8ad$. Scribantur hoc pacto:

$$8\ a^2 = 3\ ab - 4\ cd + 6\ ad$$
$$7\ a^2 - 2\ ab \qquad - 8\ ad + 4\ fg\ ;$$

$$15\ a^2 + ab - 4\ cd - 2\ ad + 4\ fg$$

51. In ſubtractione accipiantur omnes quantitates ſubtrahendæ, tanquam ſi haberent ſignum contrarium ei quod habent, & fiat ſumma cum legibus jam præſcriptis. Sic earumdem quantitatum differentia erit.

$$a^2 + 5\ ab - 4\ cd + 14\ ad - 4\ fg$$

52. In multiplicatione ſcribenda altera quantitas ſub altera, tum tota prima quantitas multiplicanda per unum e terminis ſecundæ, ſcribendo productum in una linea, deinde tota prima quantitas per aliam, & ita porro, ſcribendo ſingula producta in ſingulis lineis, ac notando ſimiles terminos diverſorum ejuſmodi productorum alios ſub aliis: demum omnium linearum colligenda ſumma.

53. In proximè ſequenti exemplo prima & ſecunda linea continent quantitates, quæ per ſe invicem multiplicantur, tertia primam multiplicatam per $3\ a^2$, quarta eandem multiplicatam per $4\ ab$, quinta eandem per $2\ c$, ſexta ſummam tertiæ, quartæ, & quintæ.

54. Omnium verò hujuſmodi operationum patet ratio ex eo, quod hìc ſumma, ſubtractio, multiplicatio fiant per partes, juxta methodum propoſitam pro quantitatibus ſimplicibus §. 2.

$$3a^2 + 3ab - c$$
$$2a^2 - 4ab + 2c$$

$$\begin{array}{l} 6a^4 + 9a^3b - 3a^2c \\ \quad - 8a^3b \qquad\qquad - 12a^2b^2 + 4abc \\ \qquad\quad + 4a^2c \qquad\qquad + 6abc - 2c^2 \\ \hline 6a^4 + a^3b + a^2c - 12a^2b^2 + 10abc - 2c^2 \end{array}$$

55. Possunt autem ope solius etiam summæ, subtractionis, multiplicationis plurima theoremata facile demonstrari. Est theorema, cujus usus sæpissimè occurrit. Productum sub summa, & differentia quantitatum æquatur differentiæ quadratorum ipsarum quantitatum. Sic ex. gr. numerorum 7, & 3 summa est 10, differentia 4, quorum productum 40; quadrata autem sunt 49, & 9; quorum differentia pariter 40. Generaliter autem patet sola multiplicatione summæ $a+b$ quantitatum a, & b, ac differentiæ earundem $a-b$. Facta enim multiplicatione habebitur $a^2 - b^2$.

56. Eodem autem pacto plurima alia demonstrantur, ac fere omnia theoremata libri II. Euclidis, ut patebit in Applicatione Algebræ ad Geometriam atque hoc ipsum congruit cum quinta, & sexta propositione ejus libri, ad quas facile traducitur.

57. In divisione cavendum, ut tam quantitas dividenda, quam divisa ordinentur secundum potestates cujusdam litteræ ita, ut termini eandem illius litteræ potestatem continentes scribantur alii sub aliis, & pro unico termino considerentur: tum primus terminus dividitur per primum, & notatur quotus ut in Arithmetica: multiplicatur totus divisus per hunc quotum: subtrahitur hoc productum à diviso: notatur residuum, cui adduntur reliqui termini quantitatis divi-

dendæ, & iteratur operatio eodem ordine uſque in finem.

$6a^4 + a^3 b - 12a^2 b^2$	$2a^2 + 3ab$	Diviſor
$+ 4a^3 c + 6a^2 bc$	$3a^2 - 4ab + 2ac$	Quotus

$$6a^4 + 9a^3 b$$

$$-8a^3 b - 12a^2 b^2$$

$$+4a^3 c + 6a^2 bc$$

$$-8a^3 b - 12a^2 b^2$$

$$+4a^3 c + 6a^2 bc$$

$$+4a^3 c + 6abc$$

$$0 \qquad 0$$

58. Prima, & ſecunda linea diviſi continent diviſum ordinatum, per potentias litteræ a, ubi ſecundus & tertius terminus habent binas partes. Diviſor pariter ordinatur per potentias ipſius a. Dividendo $6a^4$ per $2a^2$ oritur $3a^2$ primus terminus quoti. Tertia linea continet diviſorem ductum in $3a^2$, quarta, & quinta reſiduum: dividentdo $-8a^3 b$ per $2a^2$ oritur $-4ab$ ſecundus terminus quoti; ſexta linea continet diviſorem ductum in $4ab$, ſeptima reſiduum; dividendo $4a^3 c$ per $2a^2$, oritur $2ac$ poſtremus terminus quoti: linea octava continet diviſorem ductum in $2ac$.

59. Si in quantitate dividenda deſint termini interme-

medii continentes potentias ejus litteræ intermedias, solent apponi stellulæ eorum loco.

$$
\begin{array}{l|l}
x^4 * - 2a^2 x^2 * + a^4 & x - a \\
\cline{2-2}
\underline{x^4 - ax^3} & x^3 + ax^2 - a^2 x - a^3 \\
\quad + ax^3 - 2a^2 x^2 & \\
\quad \underline{+ ax^3 - a^2 x^2} & \\
\qquad - a^2 x^2 & \\
\qquad \underline{- a^2 x^2 + a^3 x} & \\
\qquad\quad - a^3 x + a^4 & \\
\qquad\quad \underline{- a^3 x + a^4} & \\
\qquad\qquad 0 \quad 0 &
\end{array}
$$

60. Divisionis ratio patet ex eo, quod fiat per partes prorsus ut in Arithmetica, subtrahendo semper e diviso productum ex parte quoti inventa, & divisore; Si nihil superest ex divisione, ut in exemplis allatis, divisio est perfecta, & quotus accuratus. Si quid superfit, apponenda fractio, cujus numerator residuum, denominator est divisor ipse.

$$
\begin{array}{l|l}
x^3 + 3ax^2 + 3a^2 x + 2a^3 & x + a \\
\cline{2-2}
\underline{x^3 + ax^2} & x^2 + 2ax + a^2 + \dfrac{a^3}{x + a} \\
\quad + 2ax^2 + 3a^2 x & \\
\quad \underline{+ 2ax^2 + 2a^2 x} & \\
\qquad + a^2 x + 2a^3 & \\
\qquad \underline{a^2 x + a^3} & \\
\qquad\quad + a^3 &
\end{array}
$$

 61.

61. Quoniam in fine remanet a^3 apposita est quoto fractio $\frac{a^3}{x+a}$

62. Potest autem etiam divisio continuari per seriem infinitam, ut in arithmetica, concipiendo semper residuo additum o, ut in sequenti exemplo.

$$x^3+3ax^2+3a^2x+2a^3 \quad \Big| \quad \frac{x+a}{x^2+2ax+a^2+\frac{a^3}{x}-\frac{a^4}{x^2}\ \&c}$$

$$\underline{x^3+a\,x^2}$$

$$+2\,a\,x^2+3\,a^2\,x$$

$$\underline{+2\,a\,x^2+2\,a^2\,x}$$

$$+a^2\,x+2\,a^3$$

$$\underline{+a^2\,x+a^3}$$

$$+a^3$$

$$\underline{+a^3+\frac{a^4}{x}}$$

$$-\frac{a^4}{x}$$

$$\underline{-\frac{a^4}{x}-\frac{a^5}{x^2}}$$

$$+\frac{a^5}{x^2}$$

63. Hinc

63. Hinc, ut e poſteriore exemplo patet; ſemper poteſt reduci in ſeriem quandam infinitam quæcunque fractio, ſive quotus proveniens ex quantitate quacunque ſimplici diviſa per quantitatem compoſitam ex quotcunque terminis. Conſideretur autem ſeries orta ex fractione $\frac{a}{b+c}$; in qua ſi c exprimat quantitates quotcumque, caſus hic ſimpliciſſimus extendetur ad denominatores utcumque compoſitos, quorum primum terminum exprimat b, reliquos omnes c.

$$b + c \quad \text{Diviſor}$$

$$\text{Diviſus} \quad a \qquad \frac{a}{b} - \frac{ac}{b^2} + \frac{ac^2}{b^3} \ \&c. \quad \text{Quotus}$$

$$a + \frac{ac}{b}$$

$$- \frac{ac}{b}$$

$$- \frac{ac}{b} - \frac{ac^2}{b^2}$$

$$+ \frac{ac^2}{b^2}$$

64. In hac ſerie termini progrediuntur ſemper in progreſſione geometrica, & ſemper decreſcunt, vel creſcunt, vel eandem quantitatem conſervant, prout primus terminus binomii b fuerit major, vel minor, vel æqualis ſecundo c. In primo caſu ſeries dicitur convergens, & ad verum quotientis valorem ſemper accedit magis in infinitum, ac eo citius convergit, quo fractio $\frac{c}{b}$ fuerit minor. In

ſecun-

secundo dicitur divergens, ac semper magis recedit, in tertio parallela, ac semper æquè distat a vero valore. Res patebit in Numeris.

65. Fractio $\frac{a}{b+c}$ sit $=\frac{1}{3}$, & $a=1$, $b=2$, $c=1$. Substitutis his valoribus in quoto numer. 63, erit $\frac{1}{3}=\frac{1}{2+1}=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{8}-\frac{1}{16}$ &c. Primi duo termini simul continent $\frac{1}{4}$, tres primi $\frac{3}{8}$, quatuor primi $\frac{5}{16}$, qui quidem valores semper propius accedunt ad $\frac{1}{3}$ & quidem si signa alternantur, ut hic, semper ubi additur alterius signi terminus, exceditur verus valor, ubi additur terminus signi oppositi, ab eo deficitur. Porro mutato valore b, & c, eadem, fractio potest redigi in seriem adhuc magis convergentem, ut si fiat $b=4$, $c=-1$, quo casu erit $\frac{1}{3}=\frac{1}{4-1}=\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{64}$ &c., in qua serie priores tres termini efficiunt $\frac{21}{64}$, quod ad $\frac{1}{3}$ accedit multo magis, quam $\frac{5}{16}$. Generaliter autem, quo fuerit b major respectu c, eo series erit magis convergens.

66. Si autem fiat $\frac{1}{3}=\frac{1}{1+2}$, habebitur $a=1$, $b=1$, $c=2$, & series $1-2+4-8$ &c., quæ semper a vero valore recedit magis, & est divergens.

67. Si demum fiat $\frac{1}{2}=\frac{1}{1+1}$, habebitur series parallela $1-1+1-1$ &c.

68. P. Guido Grandi summus cæteroquin Geometra inde deduxit summam infinitarum nullitatum esse $=\frac{1}{2}$, quia $1-1=0$, iterum $1-1=0$, & ita porro $0+0+0$ &c. $=\frac{1}{2}$. Ad eodem jure liceret

ret dicere $-1+1=0$, $-1+1=0$ &c. adeoque $\frac{1}{2}=1+0+0$ &c., & proinde $\frac{1}{2}=1.\frac{1}{2}$ Sed series divergentes, & parallelæ verum valorem non exhibent, nec ad ipsum accedunt.

69. Licet autem series divergentes, & parallelæ verum valorem non exhibeant, adhuc usui esse possunt, tum quia in parallelis, cum æque distent hinc inde, & signa alternent, unius termini dimidium exhibet valorem verum, divergentes autem si e finita quantitate oriuntur, sæpe mutari possunt in convergentes; tum quia plurimæ series summari possunt, ut eæ omnes, quarum termini progrediuntur in progressione geometrica. Est enim in iis, quemadmodum in progressionibus demonstravimus Arith. c.3.n.9, ut differentia primi termini a secundo ad primum, ita hic ad totam seriem, quæ quidem summa in progressionibus divergentibus, & parallelis non exhibebit valorem ipsius seriei, sed indicabit unde orta sit. Sic in superiore serie divergente $1-2+4-8$ &c., si fiat, ut $1-(-2)=1+=3.1::1.\frac{1}{3}$ habebitur fractio $\frac{1}{3}$, unde eas series profecta est.

70. Porro serierum usus in sublimiore Mathesi frequentissimus est. Aliquis earum usus nobis etiam hic paulo infra occurret.

71. An aliqua formula algebraica divisorem aliquem habeat, & quos habeat divisores, non ita facile determinatur in quantitatibus aliquanto plus compositis. In simplicioribus primo aspectu divisores simpliciores facile deprehenduntur. Illud autem generaliter in omni quantitatum genere habetur, nimirum si inveniantur omnes divisores, aliorum multiplicatione non compositi, etiam productum ex binis quibusvis, vel ex ternis, vel ex quaternis, & ita porro, fore divisorem quantitatis ejusdem; productum autem ex omnibus exhibere quantitatem ipsam. Id autem patet ex eo, quod quocunque ordine eæ quantitates multiplicentur, debent de-

mum

mum idem illud productum exhibere, ut diximus Arithm. cap. 1. num. 18, & in Appendice n. 125.

72. Quantitatis $abcd + bcde$ sunt divisores non compositi ex aliis b, c, d, $a + e$; idcirco sunt etiam bc, bd, $ab + be$, cd, $ac + ce$, $ad + de$ composita ex binis, & bcd, $abc + bce$, $abd + bde$, $acd + cde$ composita ex ternis, & ipsa quantitas $abcd + bcde$ composita ex omnibus simul.

73. Pro inventione divisorum in quantitatibus magis compositis, methodum eo magis implexam, quo quantitates magis compositæ sunt, & quo divisores quæruntur pluribus constantes terminis, exhibuit sine demonstratione Nevvtonus in Arithmetica Universali, quam a pluribus demonstratam Tyro, cum aliquanto magis profecerit facile inveniet, si libuerit. Simplicissimi casus specimen aliquod hic exhibebimus usui futurum infra.

74. Sit formula quædam, quæ contineat plures unius tantummodo litteræ potentias numeris conjunctas integris ita, ut altissima potestas nullum numerum præfixum habeat, quemadmodum est $x^3 - 2x^2 - 13x + 20$; & quæratur, an habeat aliquem divisorem unius dimensionis, adeoque hujus formæ $x+a$; exprimente a aliquem numerum.

75. Ponantur pro x alii post alios plures termini progressionis arithmeticæ decrescentis per unitatem, inter quos sit 0; ut 1, 0, — 1. Colligantur diversi valores totius formulæ respondentes his diversis positionibus: adscribantur iis omnes eorum divisores: inter divisores respondentes diversis positionibus, qui omnes tam ut positivi, quam ut negativi considerandi sunt, cum tam positive, quam negative accepti eandem quantitatem possint semper dividere, quæratur aliqua progressio arithmetica decrescens per unitatem, cujus singuli termini sumantur inter divisores respondentes singulis positionibus: ejus progressionis terminus respondens positioni $x = 0$ sumatur pro a; & per $x + a$ tentetur

divi-

divisio, ac si non succedat per ullum a ita inventum; erit impossibilis ejus formæ divisor, qui si possibilis sit, invenietur omnino.

76. In casu formulæ $x^3 - 2x^2 - 13x + 20$, posito 1 pro x, habetur $1 - 2 - 13 + 20 = 6$: posito $x = 0$, habetur $0 - 0 - 0 + 20 = 20$: posito $x = -1$, habetur $-1 - 2 + 13 + 20 = 30$. Ordinentur hi numeri cum suis divisoribus, ut infra, ubi prima columna continet terminos progressionis arithmeticæ positos, pro x, secunda valores formulæ inde provenientes, quibus respondent ad latus omnes ipsorum divisores.

1	6	1, 2, 3, 6
0	20	1, 2, 4, 5, 10, 20
-1	30	1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30

77. Considerando divisores ipsos occurrunt tres progressiones decrescentes per unitatem, 3, 2, 1; -1, -2, -3; -3, -4, -5, quarum primi termini respondent primæ positioni, secundi secundæ, tertii tertiæ. Assumptis harum progressionum terminis, qui respondent positioni $x = 0$, ac sunt $+2$, -2, -4, tentanda divisio per $x + 2$, $x - 2$, $x - 4$. Priores duæ non succedunt, succedit tertia, existente quoto $x^2 + 2x - 5$. Quare unicum ejus formæ divisorem $x - 4$ habet proposita quantitas.

78. Demonstratio methodi hinc petitur. Si formula quævis composita ex potentiis quantitatis x & numeris multiplicetur per $x + a$, & pariat aliam formulam, in qua pro x substituatur quivis numerus; valor totius hujus formulæ debebit habere inter suos factores valorem $x + a$. Ac proinde si pro x ponantur successivè diversi numeri alii aliis unitate minores, debet hic factor $x + a$ decrescere per illam unitatem, per quam decrescit x. Porro ubi ponitur $x = 0$, factor ille $x + a$ erit

$+ a$

$= a$. Quare valor quæsitus a, debet inveniri, si habetur ullus, inter divisores respondentes positioni $x=0$; sed præterea debent inter præcedentium positionum divisores inveniri numeri eodem valore a unitate majores; ac inter divisores sequentium debent inveniri minores pariter unitate; nimirum valor ille debet esse in progressione arithmetica decrescente per unitatem; & excurrente per omnium positionum divisores. Debet autem esse inter divisores integros non fractos; nam, ut demonstrabimus infra; nulla quantitas algebraica haberi potest; quæ multiplicata per $x + a$, existente a numero fracto, formulam exhibeat omni fractione carentem, adeoque quæsitus numerus a non potest esse numerus fractus.

79. Ubi plures obveniunt divisores, ut hic, quin tententur tot divisiones, eæ, quæ evadunt inutiles, sæpe admodum facile excluduntur, assumpto pro x alio aliquo termino progressionis illius, ut hic facto $x=2$, quo casu habetur valor formulæ $8-8-26+20=-6$. Inter hujus divisores debet adesse terminus præcedens progressionem arithmeticam inventam inter cæterarum positionum divisores usui futuram. Porro progressionum $3, 2, 1; -1, -2, -3; -3, -4, -5$ termini præcedentes sunt $4, 0, -2$, quorum priores bini non adsunt inter divisores hujus novi valoris inventi, nimirum numeri 6, tertius autem adest. Quare priores binæ usui esse non possunt, & relinquitur illa sola, quam vidimus exhibere quæsitum valorem $a=-4$.

80. An binæ quantitates communem habeant divisorem minus difficulter invenitur eadem ratione, quam pro numeris docuimus in Appendice Primæ partis num. 145. Dividitur nempe altera per alteram: tum si quod sit residuum, dividitur per ipsum divisor, & per novum residuum divisor novus, atque ita porro, donec nullum residuum habeatur: ultimus autem divisor, erit divisor communis maximus. Demonstrationem ibidem dedimus num. 146. & 147.

81. Sæpe tamen in formulis Algebraicis, ut divisor

possit

possit dividi per residuum, oportet primos eorum terminos ita præparare, ut alter per alterum accuratè dividi possit sine fractione. Id autem fit notando, qui factores primi termini divisoris novi non habentur in primo termino novi divisi, & si per eorum aliquem dividi potest totus divisor, dividatur is totus per eum; sin minus, multiplicetur totus divisus per eos omnes, per quos dividi non potuerit divisor, quod etiam observandum erit quotiescumque nova quoti pars quæritur in ejusdem divisionis continuatione. Eo enim pacto divisio semper fiet sine fractione. Quod autem ea multiplicatio aut divisio communis divisoris inventionem non turbet satis constat ex iisdem theorematis, ex quibus methodum pro numeris derivavimus citato loco. Nec verò ullum erit periculum, ne auferatur aliquis communis divisor dum divisor totus dividitur per factorem non communem etiam diviso, vel addatur dum divisus totus multiplicatur per factorem non communem toti divisori. Res exemplo patebit magis.

82. Sint binæ formulæ $2x^3 + 8x^2 + 2x - 12$ & $5x^2 + 9x - 18$. Primus terminus primæ $2x^3$ non potest accuratè dividi per primum secundæ $5x^2$, cum inter factores illius desit 5, nec per ipsum 5 dividi potest tota secunda quantitas. Multiplicetur igitur per 5 tota prima, ac habebitur tertia $10x^3 + 40x^2 + 10x - 60$, & idem erit quærere divisorem communem primæ, & secundæ, ac quærere divisorem communem hujus tertiæ, & secundæ. Divisa autem tertia per secundam, quotus est $2x$; residuum $22x^2 + 46x - 60$, quod pariter in primo termino $22x$ non habet illum factorem 5, ut continuari possit divisio; idcirco ducendum totum residuum in 5, unde habetur $110x^2 + 230x - 300$, tum idem dividendum per illud $5x^2 + 9x - 18$, & provenit quotus 22, ac resi-

residuum $32x + 96$. Per hoc residuum dividendus esset ille divisor $5x^2 + 9x - 18$; sed quia primus ejus terminus $5x^2$, non habet inter factores 32, aut ullum divisorem ipsius 32 & totum illud residuum $32x + 96$ dividi potest per 32, remanente $x + 3$, dividatur $5x^2 + 9x - 18$ per $x + 3$, & quoniam divisio succedit, existente quoto $5x - 6$; divisor ipse $x + 3$, est communis divisor maximus quantitatum propositarum; Et quidem si per ipsum dividatur $2x^3 + 8x^2 + 2x - 12$, habetur $2x^2 + 2x - 4$, & si per ipsum dividatur $5x^2 + 9x - 18$, habetur $5x - 6$.

83. Porro invento communi divisore, fractiones possunt simpliciores reddi, dividendo numeratorem, & denominatorem per divisorem communem, si quem habent. Sic dividendo utrobique per communem hunc divisorem $x + 3$ fiet fractio.

$$\frac{2x^3 + 8x^2 + 2x - 12}{5x^2 + 9x - 18} = \frac{2x^2 + 2x - 4}{5x - 6}.$$

§. IV.

De potentiis, quantitatum constantium pluribus terminis.

84. Potentiæ eruuntur continua multiplicatione per radicem, quarum natura facilius cognoscitur, si multiplicentur per se invicem quantitates $x + a$, $x + b$, $x + c$, $x + d$ &c. Hujusmodi multiplicatio sic procedit.

$$\begin{array}{l} x+a \\ x+b \\ \hline x^2+ax+ab \\ \quad +bx \\ \qquad x+c \\ \hline x^3+ax^2+abx+abc \\ \quad +bx^2+acx \\ \quad +cx^2+bcx \\ \qquad x+d \\ \hline x^4+ax^3+abx^2+abcx+abcd \\ \quad +bx^3+acx^2+abdx \\ \quad +cx^3+bcx^2+acdx \\ \quad +dx^3+adx^2+bcdx \\ \qquad\quad +bdx^2 \\ \qquad\quad +cdx^2 \end{array}$$

85. Patet autem ex hujusmodi multiplicatione primum terminum debere esse primam illam quantitatem x elevatam ad eam potentiam, quæ exprimit numerum quantitatum multiplicatarum per se invicem, quæ quantitas in sequentibus terminis aderit elevata ad potentias inferiores. In secundo autem termino haberi cum ea summam illorum terminorum, a, b, c, d &c., in tertio summam productorum ex omnibus binariis, in quarto ex omnibus ternariis, in quinto ex omnibus quaternariis, & ita porro, ac semper in postremo productum ex omnibus.

86. Si jam omnes termini b, c, d &c. concipiantur

æquales eidem a, habebitur $x + a$ per se continuo multiplicatum, sive habebuntur potentiæ, binomii $x + a$; productum autem ex binario quovis erit a^2, ex ternario a^3, ex quaternario a^4, & ita porro: Quare eo valore substituto, quadratum binomii $x + a$ erit $x^2 + 2ax + a^2$, cubus $x^3 + 3ax^2 + 3a^2x + a^3$ quarta potestas $x^4 + 4ax^3 + 6a^2x^2 + 4a^3x + a^4$, & ita porro reliquæ potentiæ erui possunt.

87. In iis omnibus potentiis primus terminus erit solum eadem potentia potentiæ quantitatis x, postremus solum eadem potentia secundæ quantitatis a, in reliquis utraque quantitas habebitur ita, ut prioris potestas perpetuo decrescat per unitatem, posterioris crescat. Præterea autem habebuntur numeri, quos etiam vocant uncias, qui facile inveniuntur generaliter, si consideretur in secundo termino debere præfigi numerum ipsorum terminorum a, b, c, d &c., in tertio numerum binariorum, quæ ex iis constare possunt, in quarto omnium ternariorum, & ita porro. Si enim ii numeri generaliter inveniantur, invenientur illæ unciæ numericæ.

88. Jam vero si $x + a$ elevari debeat ad quamvis potentiam m, patet assumi debere litteras illas a, b, c, d &c. numero m, adeoque uncia secundi termini erit m, sive $\frac{m}{1}$, quod idem est.

89. Si autem assumatur quivis numerus terminorum m, semper quicumque ex iis cum quovis alio præter se constituit binarium, adeoque constituit binaria $m - 1$; cumque ipsi termini sint numero m, habebunt binaria $m \times (m - 1)$. Sed eo pacto quodvis binarium bis obveniet, ut binarium ab, & ba, cum nimirum conjungitur a cum b, & b cum a. Quare ad habendum numerum binariorum non similium oportet sumere

mere $\frac{m \cdot (m-1)}{2}$, sive $\frac{m}{1} \times \frac{m-1}{2}$, & erit uncia tertii termini.

90. Quodvis binarium potest constituere ternarium cum quovis termino præter illos duos, ex quibus constat; nimirum ternaria $m-2$. Quare ternariorum numerus habebitur, si numerus binariorum multiplicetur per $m-2$. Sed quodvis ternarium ter prodibit idem, cum nimirum quivis e tribus terminis conjungitur cum reliquorum binario. Ac proinde numerus ternariorum dissimilium habebitur, si numerus binariorum multiplicetur per $\frac{m-2}{3}$, eritque $\frac{m}{1} \times \frac{m-1}{2} \times \frac{m-2}{3}$; quæ erit uncia quarti termini.

91. Eodem pacto numerus quaternariorum erit $\frac{m}{1} \times \frac{m-1}{2} \times \frac{m-2}{3} \times \frac{m-3}{4}$; & ita porro. Quare formula generalis pro elevando binomio ad quamvis potentiam m, erit

$$\overline{x+a}^m = x^m + \frac{m}{1} a x^{m-1} + \frac{m}{1} \times \frac{m-1}{2} \times a^2 x^{m-2}$$
$$+ \frac{m}{1} \times \frac{m-1}{2} \times \frac{m-2}{3} \times a^3 x^{m-3} \text{ \&c.}$$

92. Hic autem primo obiter notari potest, haberi hic admodum facile, quot binaria vel ternaria, quæ dicimus *ambi*, *terni*, aut aliæ ejusmodi combinationes habeantur in dato numero. Pro binariis factum ex binis postremis dividendum per factum ex binis primis, pro ternariis assumenda sunt facta ex ternis, & ita porro. In numero 90 habentur binaria $\frac{90 \times 89}{1 \times 2} = 4005$; ternaria $\frac{90 \times 89 \times 88}{1 \times 2 \times 3} =$ 117480; quinaria $\frac{90 \times 89 \times 88 \times 87 \times 86}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5} =$ 43949268. Sed hæc ad rem præsentem minus pertinent.

93. Notandæ sunt deinde plures potentiarum proprietates, & ipsius formulæ generalis indoles. Ea formula semper abrumpitur in potentia m post numerum terminorum $m + 1$. Nam uncia secundi termini habet m, tertii uncia addit $m - 1$, quarti

simus

$m - 2$, & ita porro. Quare terminus $m + 2$: habebit $m - m = 0$, & sequentes omnes multiplicabuntur pariter per 0, & proinde evanescent. Adeoque quævis potentia habebit terminos $m + 1$.

Sic si pro m ponatur 2, uncia prima erit $\frac{2}{1}$, secunda $\frac{2}{1} \times \frac{2-1}{2} = \frac{2}{1} \times \frac{1}{2} = 1$ tertia $\frac{2}{1} \times \frac{2-1}{2} \times \frac{2-2}{3}$, sive $\frac{2}{1} \times \frac{1}{2} \times \frac{0}{3} = 0$. At si sit $m = 3$, solum in quarta uncia $\frac{3}{1} \times \frac{3-1}{2} \times \frac{3-2}{3} \times \frac{3-3}{4}$ incipit adesse $3 - 3 = 0$. Formula igitur in quadrato abrumpitur post tertium terminum, in cubo post quartum, & quadratum habet tres, tertia potentia, seu cubus quatuor terminos, & ita porro.

94. Primus cujusvis potentiæ m terminus erit semper x^m, postremus a^m & unciæ eorum, qui præcedunt postremum, erunt eædem, ac eorum, qui sequuntur primum in eadem ab iis distantia. Sic in quinta potentia uncia termini penultimi erit $\frac{5 \times 4 \times 3 \times 2}{1 \times 2 \times 3 \times 4} = \frac{5}{1}$ eadem quæ secundi: ante penultima $\frac{5 \times 4 \times 3}{2 \times 2 \times 3} = \frac{5 \times 4}{1 \times 2}$ eadem, quæ tertii, & ita porro.

95. Quadratum autem binomii $x^2 + 2ax + a^2$ continebit quadratum primi termini, bina producta ex primo, & secundo, ac quadratum secundi. Cu-

bus

bus $x^3 + 3ax^2 + 3a^2x + a^3$; continebit cubum primi termini, triplum productum ex quadrato primi & ſecundo, triplum productum ex primo & quadrato ſecundi, ac cubum ſecundi; & ita porro ejuſmodi canones pro reliquis potentiis erui poſſunt.

96. Notandum præterea cubum quantitatis mixtæ ex reali, & imaginaria poſſe evadere realem. Quantitatis $\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$ cubus evadit $=+1$. Nam cubus $-1 = -1$, tria quadrata $-1 = +3$ ducta in $\sqrt{-3}$ ſunt $= 3\sqrt{-3}$, quadratum $\sqrt{-3} = -3$, adeoque tria ejuſmodi quadrata ducta in -1 ſunt $= +9$, cubus $\sqrt{-3} = -3\sqrt{-3}$. Quare cubus $-1+\sqrt{-3} = -1+3\sqrt{-3}+9-3\sqrt{-3} = 8$, & cubus $\frac{-1+\sqrt{-3}}{2} = \frac{8}{8} = 1$. Ac ſimili pacto cubus $\frac{-1-\sqrt{3}}{2} = \frac{-1-3\sqrt{-3}+9+3\sqrt{-3}}{8} = \frac{8}{8} = 1$. Generaliter autem cubus $\frac{a(-1\pm\sqrt{-3})}{2}$ eſt a^3.

97. Inde vero eruitur cubi cujuſvis a^3 haberi radicem tertiam realem a; & præterea binas alias radices imaginarias $\frac{a(-1+\sqrt{-3})}{2}$; $\frac{a(-1-\sqrt{-3})}{2}$. Quare etiam $\sqrt[6]{a^6}$, habebit ſex radices, quarum binæ reales, quatuor imaginariæ; erit enim $=\sqrt[3]{\sqrt[2]{a^6}} = \sqrt[3]{\pm a^3}$; ac $\sqrt[3]{a^3}$; & $\sqrt[3]{-a^3}$

 habe-

habebunt singulæ singulas radices reales & binas imaginarias.

98. Si autem elevandum sit trinomium ad quamvis potentiam m, patet id fieri posse per eandem formulam $x + a$, dummodo primus e tribus terminis ponatur loco x, & reliqui duo loco a, eorum quadratum loco a^2 cubus loco a^3, & ita porro. Eodem pacto ad quadrinomia, & quævis polynomia progredi licet, ac series etiam quævis infinita elevari pariter poterit ad potentiam indefinitam m, dummodo primus ejus terminus ponatur pro x, ac reliqui omnes pro a. Adest etiam methodus generalis elevandi infinitinomium, quod certa lege progrediatur, ad potentiam indefinitam m, inveniendo statim quemlibet terminum, sed hæc Tyronibus abunde est indicasse.

99. Illud unum addi potest, formulam generalem, qua binomium elevatur ad quamvis potentiam m, & quam demonstravimus, pro casu quovis, in quo m sit numerus integer, & positivus, habere locum etiam si exponens potestatis sit numerus negativus, quo casu, ut vidimus, exprimitur divisio, vel in quo m sit numerus fractus, quo casu exprimuntur radices. Demonstratio tamen accurata ejus applicationis est multo operosior, quam ut hic videatur inserenda. Tyroni sufficiet exemplum potentiæ cujusvis habentis exponentem integrum, & positivum ex quo rite demonstrato, per analogiam quandam transibit ad reliquos casus.

100. Et quidem, quod pertinet ad exponentem negativum, ex applicatione formulæ $\overline{x+a}^{\,m} = x^{m} + \frac{m}{1} a x^{m-1} + \frac{m}{1} \times \frac{m-1}{2} \times a^2 x^{m-2}$ &c., oritur etiam quotus illius fractionis $\frac{a}{b+c}$, quem §. 3. num. 63. eruimus per seriem $\frac{a}{b} - \frac{ac}{b^2} +$

ac2

$\frac{ac^2}{b^3}$ &c. Nam $\frac{1}{b+c} = \overline{b+c}^{\,-1}$. Quare si in formula $\overline{x+a}^{\,m}$ ponatur $x=b$, $a=c$, $m=-1$, erit $\frac{m}{1} = -1$, $\frac{m}{1} \times \frac{m-1}{2} = \frac{-1}{1} \times \frac{-2}{2} = +1$, $\frac{m}{1} \times \frac{m-1}{2} \times \frac{m-2}{3} = \frac{-1}{1} \times \frac{-2}{2} \times \frac{-3}{3} = -1$, & ita porro, ac proinde $\overline{b+c}^{\,-1} = b^{-1} - b^{-2}c + b^{-3}c^2$ &c., sive $\frac{1}{b+c} = \frac{1}{b} - \frac{c}{b^2} + \frac{c^2}{b^3}$ & demum $\frac{a}{b+c} = \frac{a}{b} - \frac{ac}{b^2} + \frac{ac^2}{b^3}$, & ita porro prorsus ut supra per divisionem actualem fuerat inventum. Applicationis autem ad exponentes fractos usum præstantissimum videbimus binis sequentibus §§.

§. V.

De radicibus earundem.

101. Extractio radicum oritur a consideratione potentiarum. Ordiemur a radice quadrata. Ordinata quantitate proposita secundum potentias cujuspiam litteræ, extrahatur radix quadrata ex primo termino, & scribatur e regione ipsius, ac ejus radicis quadratum subtrahatur e quantitate proposita, tum per duplum radicis jam inventæ diviso primo termino residui quantitatis propositæ, & scripto quoto prope radicem jam inventam pro secundo ipsius radicis termino, multiplicetur is quotus per se, tum per duplum radicis antea inventæ, & subtrahatur id productum a residuo illo quantitatis propositæ. Primus terminus novi residui dividatur per duplum primi termini radicis jam inventæ, scribatur novus quotus in radice ipsa, ducatur in se, tum in duplum radicis totius prius in-

ventæ, fiat subtractio, ut prius, & ita porro peragatur semper donec vel nihil supersit, vel per seriem quandam abeatur in infinitum.

102. Sit extrahenda radix quadrata e quantitate $y^4 + 2by^3 + b^2 y^2 + 2cy + c^2$: Ordinata quantitate operatio instituetur, ut hic infra.

$$
\begin{array}{l|l}
y^4 + 2by^3 + b^2 y^2 + 2bcy + c^2 & y^2 + by + c \\
y^4 \qquad\qquad + 2cy^2 & \\
\hline
\quad + 2by^3 + b^2 y^2 + 2bcy + c^2 & \\
\qquad\qquad + 2cy^2 & \\
\quad + 2by^3 + b^2 y^2 & \\
\hline
\qquad\qquad + 2cy^2 + 2bcy + c^2 & \\
\qquad\qquad + 2cy^2 + 2bcy + c^2 & \\
\hline
\qquad\qquad\quad 0 \qquad\quad 0 \quad 0 &
\end{array}
$$

103. Nimirum extracta radice ab y^4 habetur y^2; cujus quadrato y subtracto a quantitate proposita; primus residui terminus est $2by^3$, quo diviso per $2y^2$ habetur by, quod si ducatur in $2y^2$, & in se, fit $2by^3 + b^2 y^2$; quo subtracto primus terminus residui $2cy^2$ divisus per $2y$ relinquit $+c$, & eo ducto in $2y^2 + 2by$, & in se, ac facta subtractione nihil superest. Quamobrem radix quæsita est ipsa illa quantitas $y^2 + by + c$.

104. In sequenti autem exemplo progredi licet in infinitum. Verum hæc series, quæ oritur ex extractione radicis plurimum differt ab illa, quæ ex divisione oritur. Illa enim terminos habet in geometrica progressione dispositos, ac proinde facile summari potest: In hac progressionis lex cito turbatur.

$$y^2 + b^2 \quad \Big| \quad y + \frac{b^2}{2y} - \frac{b^4}{8y^3} + \frac{b^6}{16y^5} - \frac{5b^8}{128y^7}$$

$$\underline{y^2 \qquad\qquad}$$

$$+ b^2$$

$$\underline{+ b^2 + \frac{b^4}{4y^2}}$$

$$-\frac{b^4}{4y^2}$$

$$\underline{-\frac{b^4}{4y^2} - \frac{b^6}{8y^4} + \frac{b^8}{64y^6}}$$

$$+\frac{b^6}{8y^4} - \frac{b^8}{64y^6}$$

$$\underline{+\frac{b^6}{8y^4} + \frac{b^8}{16y^6} - \frac{b^{10}}{64y^8} + \frac{b^{12}}{256y^{10}}}$$

$$-\frac{5b^8}{64y^6} + \frac{b^{10}}{64y^8} \text{ \&c.}$$

105. Demonstratio methodi pendet a formula quadrati $\overline{x+a}^2 = x^2 + 2ax + a^2$. Inventa enim aliqua radicis parte, quæ dicatur x, & subtracto ejus quadrato, ad inveniendam aliam a, primus terminus residui dividendus est per $2x$, cum debeat deinde posse subtrahi $2ax + a^2$. Ea secunda pars inventa ducenda est in $2x$ & in se, ut habeatur illud ipsum $2ax + a^2$ subtrahendum, quo nimirum subtracto post subtractum quadratum x^2 primæ partis, subtractum jam est quadratum totius summæ $x+a$. Eodem autem pacto progressus fit habendo semper pro x totam radicis partem jam inventam, & pro a novum terminum quæsitum, ac si nihil supersit, detracto quadrato radicis inventæ, oportet ipsa quantitas inventa sit radix quadrata quantitatis propositæ accurata, secus ad eam in infinitum acceditur, ubi residui termini in infinitum decrescant, & series satis convergat.

106. Hinc autem facile fit gradus ad extractionem radicis cubicæ considerata formula $\overline{x+a}^3 = x^3 + 3ax^2 + 3a^2x + a^3$. Nimirum extracta radice ex primo termino, & subtracto cubo, dividendus est primus residui terminus per triplum quadratum prioris partis, nempe ob $3ax^2$ adhibendum pro inveniendo a, dividendus est per $3x^2$. Tum novus terminus ducendus in triplum quadratum radicis jam inventæ, deinde ejus quadratum in triplam ejusmodi radicem, ac demum faciendus ejus cubus, & tota hæc summa subtrahenda: nimirum oportet subtrahere $3ax^2 + 3a^2x + a^3$. Generaliter autem pro radice m dividendus est primus terminus residui per potentiam $m - 1$ primi termini radicis jam inventæ ductam in m; ac si tota radix prius inventa dicatur x, ac nova pars exhibita ab eo quoto dicatur a, subtrahendum erit

m
$-$
1

$\frac{m}{1} ax^{m-1} + \frac{m}{1} \times \frac{m-1}{2} \times a^2 x^{m-2} + \frac{m}{1} \times \frac{m-1}{2} \times \frac{m-2}{3} \times a^3 x^{m-3}$ &c. Exhibebimus exemplum radicis cubicæ tantummodo.

$$
\begin{array}{l}
\underline{\big|\,y^2+by+c} \\
y^6+3by^5+3b^2y^4+b^3y^3+3b^2cy^2+3bc^2y+c^3 \\
\qquad\qquad\quad +3cy^4+6bcy^3+3c^2y^2 \\
\underline{y^6} \\
\quad +3by^5+3b^2y^4+b^3y^3+3b^2cy^2+3bc^2y+c^3 \\
\qquad\qquad\quad +3cy^4+6bcy^3+3c^2y^2 \\
\underline{\quad +3by^5+3b^2y^4+b^3y^3\qquad\qquad} \\
\qquad\qquad\quad +3cy^4+6bcy^3+3b^2cy^2+3bc^2y+c^3 \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad +3c^2y^2 \\
\qquad\qquad\quad +3cy^4+6bcy^3+3b^2cy^2+3bc^2y+c^3 \\
\underline{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad +3c^2y^2\qquad\qquad\qquad} \\
\qquad\qquad\quad 0 \qquad\quad 0 \qquad\quad 0 \qquad\quad 0 \qquad 0
\end{array}
$$

107. Radix cubica termini y^6 est y^2, cujus cubo subtracto, primus terminus residui est $3\ by^5$. Is divisus per triplum quadratum y^2, sive per $3y^4$ exhibet $+\ by$ pro secundo radicis termino. Triplum quadratum ipsius y^2 ductum in by, est $3\,by^5$, triplum y^2 ductum

ctum in quadratum by est $3b^2 y^4$, cubus by est $b^3 y^3$. Quare subtrahendum $3by^5 + 3b^2 y^4 + b^3 y^3$. Primus terminus novi residui est $3cy^4$, radicis jam inventæ $y^2 + by$ quadratum habet pro primo termino y^4; ac diviso illo $3cy^4$ per hujus triplum $3y^4$, remanet c pro postremo radicis quæsitæ termino. Triplum quadratum radicis $y^2 + by$ ductum in c est $3cy^4 + 6bcy^3 + 3b^2 cy^2$, triplum ipsius $y^2 + by$ ductum in c^2 est $3c^2 y^2 + 3bc^2 y$, ac ejus cubus c^3 quibus subtractis nullum jam habetur residuum.

108. Ubi autem residuum aliquod semper supersit; potest continuari series in infinitum. Potest autem, ut supra monuimus, adhiberi etiam series illa generalis binomii elevati ad potentiam m, in qua facto $m = \frac{n}{r}$, pro $\overline{x+a}^{m} = x^m + \frac{m}{1} \times ax^{m-1} + \frac{m}{1} \times \frac{m-1}{2} \times a^2 x^{m-2}$ &c. habebitur $\overline{x+a}^{\frac{n}{r}} = x^{\frac{n}{r}} + \frac{n}{r} ax^{\frac{n-r}{r}} + \frac{n}{r} \times \frac{n-r}{2r} \times a^2 x^{\frac{n-2r}{r}}$ &c.

109. Ejus formulæ ope, si ex quavis quantitate eruenda sit radix quæcunque, tertia, quarta, quævis, primus ejus terminus ponatur pro x, summa reliquorum omnium pro a, 1 pro n, 3, 4 vel quivis alius radicis exponens pro r, & habebitur series exprimens eam radicem, quæ series nunquam abrumpi poterit, si $\frac{n}{r}$ sit fractio; ipsum enim r non metietur illum numerum n; adeoque nullus terminus seriei $n-r$, $n-2r$, $n-3r$ &c. poterit esse $= 0$.

§. VI.

§ VI.

De applicatione earundem formularum ad extractionem radicum in numeris.

110. Radices in numeris extrahi possunt fere eodem pacto, quo eas in calculo litterali eruimus. Quæritur radix per partes. Inventa una parte, & subtracta ejus potentia, ad inveniendam partem novam instituitur divisio, in radice secunda per duplam ipsam radicem, in tertia per triplum ejus quadratum, & generaliter dicta parte jam inventa x, invenienda a, radicis exponente m, fit divisio residui per mx^{m-1} ad inveniendum a, tum efformatur per multiplicationem, in radice quadrata $2ax+a^2$ in cubica $3ax^2+3a^2x+a^3$, generaliter $\frac{m}{1}\times ax^{m-1}+\frac{m}{1}\times\frac{m-1}{2}\times a^2x^{m-2}$ &c. .... $+a^m$. Sed natura numerorum se per decades excedentium quædam suppeditat ad faciliorem partium se succedentium inventionem, qua subtractiones illæ fieri possint, ita ut nihil supersit in fine, ubi radix accurata extrahi potest, supersit autem quantitas in infinitum decrescens, ubi non potest, & semper ad verum valorem accedatur, quantum licet. Sed methodus ipsa exemplis illustrabitur magis, quam præceptis.

111. In primis incipiendo a puncto distinguente numeros integros a fractionibus decimalibus, & procedendo retrorsum dividatur numerus propositus in classes quasdam, quarum singulæ contineant tot notas, quot unitates habet exponens radicis, in radice quadrata binas, in cubica ternas, & ita porro; primæ autem classi relinquantur, quæ supersunt, quotcunque fuerint, vel eodem numero, vel infra ipsum. Radix quæsita continebit totidem notas integrorum, quot fuerint eorum

rum classes. Si è num. 143877824. extrahenda sit radix quadrata, dividendus erit in classes hoc pacto 1; 43, 87, 78, 24. & debebit habere ipsa radix notas quinque: si extrahenda sit radix quinta, dividendus erit in classes hoc pacto 1438; 77824., & debebit radix ipsa habere notas duas. Fractiones autem decimales eodem pacto in classes dividuntur, incipiendo a puncto, & progrediendo a notis superioribus ad inferiores. Numerus 143877. 824 pro radice quadrata dividendus esset sic 14, 38, 77. 82, 4, pro tertia sic 143, 877. 824; & haberet in radice secunda integrorum notas tres, in tertia duas: classes autem decimalium adjectis cyphris quotcunque in infinitum continuari possunt.

112. Demonstratio petitur ex eo, quod quævis potentia m unitatis conjunctæ cum quotcunque cyphris, multiplicat ipsum numerum cyphrarum per m. Potentia tertia numeri 100 habentis cyphras duas est 1000000; quæ habet cyphras $2 \times 3 = 6$. Hinc incipiendo a quadrato, quadratum numeri 10 est 100, numeri 100 est 10000, numeri 1000 est 1000000. Quare numerorum inter 0 & 10 unica nota constantium quadrata continentur inter 0 & 100, adeoque constant minus quam tribus notis, numerorum inter 10 & 100 constantium binis notis quadrata continentur inter 100 & 10000; adeoque constant notis pluribus quam binis, & paucioribus quam quinque, & ita porro. Numerorum autem inter 0 & 10 cubi sunt inter 0 & 1000, numerorum inter 10, & 100 cubi sunt inter 1000 & 1000000, adeoque pro quovis notarum numero m cubus debet habere numerum notarum, qui divisus per ternas notas in classes, reddat numerum classium m, & eadem est demonstratio pro altioribus potentiis, quæ non difficulter transfertur ad fractiones decimales; cum quadratum $\frac{1}{10}$ sit $\frac{1}{100}$ cubus $\frac{1}{1000}$, quadratum $\frac{1}{100}$ sit $\frac{1}{10000}$, cubus $\frac{1}{1000000}$ & ita porro.

113. Jam ad ipsas radices extrahendas habeantur præ

maniminibus potentiæ numerorum unica nota constantium; quæ habentur in tabella sequenti, quæ continuari potest quantum libet.

I.	II.	III.	IV.	V.
1	1	1	1	1
2	4	8	16	32
3	9	27	81	243
4	16	64	256	1024
5	25	125	625	3125
6	36	216	1296	7776
7	49	343	2401	16807
8	64	512	4096	32768
9	81	729	6561	59049

114. Sit jam extrahenda radix quadrata numeri 178929. Eo diviso in classes continentes binas notas, prima classis, quæ hic binas continet (poterat autem continere etiam unicam) est 17. Accipiatur ejus radix proxime minor, quoniam accuratam non habet, quæ si adesset, assumi deberet, ac est 4, quæ nimirum erit prima nota radicis quæsitæ: Notetur, ejusque quadratum 16 subtrahatur a prima ipsa classe 17, ac prope residuum 1 scribatur classis secunda 89, ut fiat 189.

115. Secunda nota debet esse ejusmodi, ut ex ipso residuo aucto 189 detrahi possit ejus quadratum, ac duplum

duplum productum ex ipsa & prima parte, nimirum ut dicta prima parte x, nota nova a, detrahi possit $2\,a$

$x + a^2$. Porro ex ipsa decadica numerorum natura unitates contentæ in parte præcedenti sunt decies majores unitatibus contentis in nota nova adjicienda, & ad homogeneitatem reducuntur, si parti præcedenti addatur cyphra 0. Quare debebit posse subtrahi productum ex nota nova, & duplo partis jam inventæ auctæ cyphra 0, ac ipsius notæ novæ quadratum. Quæratur igitur quoties duplum radicis jam inventæ, & auctæ cyphra 0, nimirum hic 80 contineatur in residuo illo aucto nova classe, nimirum in 189, ita tamen, ut supersit pro quadrato ipsius numeri vicium, ut hic continetur bis, ac remanet 29, quod sufficit pro 4, quadrato numeri vicium 2. Numerus hic 2, hoc pacto inventus, erit secunda nota radicis quæsitæ. Ducatur in duplum primæ partis inventæ, & auctæ cyphra 0, nimirum in 80, & habebitur 160, assumatur ejus quadratum 4, ac summa utriusque 164 dematur ab illo residuo 189, ut habeatur novum residuum 25, prope quod notetur postrema classis 29, ut fiat 2529.

116. Eodem pacto sequens nota invenietur quærendo quoties duplum partis jam inventæ 42, & auctæ cyphra, nimirum 840 contineatur in novo residuo 2529 ita tamen, ut supersit pro quadrato hujus numeri vicium, ut hic continetur ter, ac supersunt 9, quod sufficit pro quadrato numeri 3. Hic numerus, hoc pacto inventus, erit nova nota radicis quæsitæ, quo ducto in duplum illud 840, unde provenit 2520, ac assumpto 9 quadrato ipsius 3, dematur 2520 + 9, sive 2529 a residuo illo aucto nova classe, quod cum pariter fuerit 2529 ita, ut nihil supersit, nec aliæ classes reliquæ sint; radix inventa 423 est accurata radix numeri propositi.

117. Si autem aliquod residuum superesset, & aliæ adessent classes, continuanda esset operatio, investigando

do semper; quoties duplum partis jam inventæ auctum cyphra o contineatur in residuo aucto nova classe ita tamen, ut supersit pro quadrato ipsius numeri vicium; tum summa producti ex numero ipso vicium, & parte radicis jam inventa, ac quadrati numeri ejusdem detrahenda a residuo ipso aucto illa nova classe; & si aliquod residuum haberetur demum, ubi classis nulla superest, adjectis binis cyphris ipsi residuo, sive binis decimalibus, si decimales fractiones adfuissent in numero proposito; progressus fieret ad decimales fractiones radici addendas.

118. Methodus universa innititur formulæ $\overline{x+a}^2 = x^2 + 2ax + a^2$; & decadicæ numerorum naturæ, redacta semper parte jam inventa ad homogeneitatem cum invenienda per additionem cyphræ o. Sed ipsa hæc numerorum, quibus utimur, natura decadica, ut diximus compendia quædam suppeditat.

119. In primis cyphræ adjectio omitti potest, & res eodem redibit, si quæratur quoties duplum partis radicis jam inventæ contineatur in residuo aucto nova classe, sed mulctato postrema nota, ita tamen, ut quod superest conjunctum cum nota omissa sufficiat pro quadrato notæ quæsitæ. Idem enim est quærere quoties 80 contineatur in 189, & videre an residuum 29 sufficiat pro 4 quadrato numeri vicium 2, ac quærere quoties 8 contineatur in 18, & videre, an residuum 2 conjunctum cum nota 9, sive idem illud 29 sufficiat pro quadrato 2. Satis igitur erit semper supra partem radicis jam inventam scribere ejus duplum, & residuum auctum nova classe, sed mulctatum postrema nota, dividere per hoc duplum, ita tamen, ut residuum habitum pro decadibus, & conjunctum cum nota omissa sufficiat pro quadrato numeri vicium: ac pariter satis erit ipsum numerum vicium ducere primum in se, tum in illud duplum, & productum ex utroque simul conjuncto subtrahere, cum idem sit ducere 2 in 80+2, ac ducere in 82.

120. Demum ubi jam plures radicis notæ inventæ sunt, nimis prolixa, & molesta est investigatio numeri vicium, quo ejus duplum continetur in illo residuo ita, ut supersit pro quadrato novæ notæ. Plerumque autem cum nova illa nota partem contineat ex ipsa numerorum natura multo minorem parte jam inventa, quod superest in illa investigatione numeri vicium sufficit etiam pro quadrato notæ novæ. Quare satius est in investigando, quoties illud duplum contineatur in illo residuo mulctato illa postrema nota, conferre primas illius binas notas tantummodo cum primis binis, vel ternis hujus, prout in hoc habebuntur totidem notæ, quot in illo, vel plures, nec quidquam cogitare de reliquis, ac de quadrato novæ notæ. Si enim forte residuum non suffecerit, patebit id ipsum ex eo, quod productum ex nota nova in se, & in duplum illud erit majus residuo ipso, a quo subtrahi deberet, & eo casu assumenda erit nota nova unitate minor, & iteranda multiplicatio. Satius enim erit aliquando oprationem iterare, quod raro eveniet, quam semper molestam illam residuorum investigationem instituere.

121. Atque hinc quidem patent, quæcunque in Arithmetica proposuimus pro praxi extrahendæ radicis quadratæ, quorum singulorum rationem hinc deprompţam facile admodum Tyroni Præceptor indicabit, quam nimirum ibi omiseramus reservatam in hunc locum.

122. Pro radice cubica methodus est admodum similis, & innititur iisdem principiis. Extrahenda ea sit e numero 143877824. Eo diviso in classes per ternas notas, incipiendo a fine, prima classis, quæ poterat etiam continere unicam notam, vel binas, continet notas tres 143. Quæratur hujus radix cubica proxime minor, cum accurata non adsit, eritque 5, quæ erit prima nota radicis quæsitæ. Hujus cubus 125 subtrahatur a prima classe 143, & prope residuum 18 scribatur secunda classis 877, ac habebitur 18877.

123. Addita jam parti inventæ 5 cyphra 0, fiat ejus qua-

quadratum 2500, quod triplicetur, quæraturque, quot vicibus hoc triplum quadratum 7500 ingrediatur in illud residuum auctum 18877 comparando pariter primas notas tantum. Hìc habebitur 2, quæ erit sequens radicis nota, si modo triplum quadratum partis inventæ & auctæ cyphra o ductum in ipsam notam novam, cum triplo hujus quadrato ducto in ipsam primam partem, ac una cum ejusdem notæ cubo, nimirum illud $3\,a$

$x^2 + 3\,a^2\,x + a^3$, non fuerit majus residuo, quo casu minuenda esset unitate nota inventa, donec deveniretur ad ejusmodi trium quantitatum summam non majorem residuo ipso. In exemplo adducto ducatur illud triplum quadratum 7500 in hanc notam 2, & habebitur 15000, tum triplum hujus quadratum 12 in primam partem radicis 50, & habebitur 600, ac demum capiatur ejus cubus 8 e tabella, & colligatur summa horum trium numerorum $15000 + 600 + 8 = 15608$; & quoniam hæc summa non est major illo residuo aucto 18877; nota hæc nova adscribatur radici jam inventæ 5, & hæc summa detrahatur ab illo residuo, ac habebitur 3269, cui adscripta classe sequenti 824, novum residuum auctum jam erit 3269824.

124. Iterum addita toti parti jam inventæ 52 cyphra o, factoque ejus quadrato 270400, quæratur quoties ejus triplum 811200 ingrediatur residuum novum auctum 3269824, & comparando solas priores notas invenitur 4. Ducto 4 in illud triplum quadratum 811200 habetur 3244800: ejusdem 4 triplum quadratum 48 ducatur in partem radicis jam inventam auctam cyphra 520, & habebitur 24960, capiatur demum 64 cubus ipsius 4, & quoniam eorum trium numerorum summa 3269824 non est major residuo illo, quod pariter erat 3269824, ipsa illa nota 4 erit adscribenda radici. Cum vero è subtractione ejus summæ a residuo nihil supersit & nulla alia adsit classis deprimenda; ipse numerus 524 est accurata radix cubica numeri propositi. Si quid superesset liceret ternis adjectis cyphris progredi ad no-

tas decimales per approximationem eadem semper methodo.

125. Pro altioribus radicibus methodus est prorsus eadem, sed pro quinta ex: gr:, diviso numero in classes constantes quinis notis, extracta radice vera, vel proximè minore primæ classis, subtracta quinta potentia, & adscripta sequenti classe prope residuum, oporteret partis inventæ, & auctæ cyphra 0 efformare quartam potentiam, tum per quartæ potentiæ quintuplum dividere residuum illud auctum, & cum formula quintæ potentiæ $x+a$ sit $x^5+5ax^4+10a^2x^3+10a^3x^2+5a^4x+a^5$, oporteret quintuplum quartæ potentiæ partis jam inventæ, & auctæ cyphra ducere in notam novam, decuplum tertiæ potentiæ illius in secundam hujus, decuplum secundæ illius in tertiam hujus, quintuplum illius in quartam hujus, ac assumere quintam hujus potentiam, & summam horum quinque numerorum detrahere ab illo residuo aucto, si liceret; & ita generaliter pro divisore ad inveniendam novam notam radicis m adhibere oportet mx^{m-1}, dicta x parte jam inventa, tum detrahere $\frac{m}{1}ax^{m-1}+\frac{m}{1}\times\frac{m-1}{2}\times a^2 x^{m-2}$ &c. .... $+a^m$, dicta a nota inventa.

126. Porro in divisione adhibetur tantummodo $m x^{m-1}$, quia eo pacto residuum omnium sufficiet pro subtractione primi termini max^{m-1}. Is autem est multo major reliquis omnibus simul sumptis, potissimum ubi jam x constat pluribus notis, ac ex ipsa decadica numerorum natura pluribus vicibus superat ipsum a, ut in radice quadrata monuimus. Quamobrem plerumque, quod supererit primo termino, sufficiet pro reliquis; ac si forte non suffecerit, id ipsum indicabitur ab illa summa subtrahenda, quæ ipso residuo major obveniet, & remedium notæ minuendæ est admodum in promptu.

127. Ubi

127. Ubi exponens radicis est numerus divisibilis in duos factores, satius est extrahere prius radicem expositam ab altero, tum ex ea radice jam extracta extrahere radicem ab altero expositam. Sic si radix quarta extrahenda sit, satius est extrahere prius radicem secundam, tum ex ea iterum secundam: si sextam oporteat extrahere, satius est extrahere prius tertiam, tum ex ea secundam.

128. Hę quidem methodi ad radicem omnino perducunt vel accuratam si adsit, vel proximam: at quo plures notæ jam inventæ sunt, & quo altiores radices oportet extrahere, eo magis crescit labor in immensum. Multo expeditiores habentur methodi, & quæ multo citius convergunt, sed innituntur altioribus fundamentis. Unam hic addemus, quę profluit ex formula binomii $x+a$ elevati ad potentiam indefinitam, & translati ad potentias fractionarias, sive ad radices.

129. Formula erat $x^m + \frac{m}{1} a x^{m-1} + \frac{m}{1} \times \frac{m-1}{2} \times a^2 x^{m-2} \times \frac{m}{1} \times \frac{m-1}{2} \times \frac{m-2}{3} \times a^3 x^{m-3}$ &c. In ea patet, quemvis terminum sequentem componi ex precedenti, adjecto uncię numericę uno ex terminis seriei $\frac{m}{1}$, $\frac{m-1}{2}$, $\frac{m-2}{3}$ &c., adjecta exponenti a unitate, & ablata ab exponente x. Secundus terminus continet primum ductum in $\frac{m}{1} \times \frac{a}{x}$ tertius secundum ductum in $\frac{m-1}{2} \times \frac{a}{x}$, & ita porro.

130. Hinc si ponatur P pro x, PQ pro a, adeoque Q pro $\frac{a}{x}$ totus primus terminus dicatur A, secundus B, tertius C &c., habebitur sequens formula.

$$\overline{P+PQ}^{m} = P^{m} + \frac{m}{1} AQ + \frac{m-1}{2} BQ + \frac{m-2}{3} \times CQ$$

&c.

&c. Posito autem $\frac{1}{r}$ pro m habebitur $\overline{P+PQ}^{\frac{1}{r}} = P^{\frac{1}{r}}$ $+\frac{1}{r}AQ+\frac{1-r}{2r}BQ+\frac{1-2r}{3r}CQ$ &c.

131. Hæc formula applicabitur numeris ita, ut assumatur aliqua potentia accurata ejus exponentis, cujus radix quæritur, proxima numero proposito; quæ dicatur P: ea subtracta a numero proposito, residuum dicatur PQ, quod erit positivum, vel negativum, prout potentia assumpta fuerit minor, vel major numero proposito: ipso autem residuo PQ diviso per potentiam assumptam P, habebitur valor Q pariter positivus, vel negativus, qui eo erit minor, quo potentia assumpta fuerit propior numero proposito. Jam vero in ipsa formula primus terminus $P^{\frac{1}{r}}$ erit cognitus, radix nimirum potentiæ assumptæ, adeoque dabitur A. Quare secundus terminus jam habebitur habito r, A, Q, qui terminus cum sit B, habebitur ejus ope tertius, & ita porro: & siquidem valor Q fuerit satis exiguus, series citissime converget, terminis perpetuo plurimum decrescentibus.

132. Ad inveniendam autem potentiam proximam numero dato, satis est quærere aliquot radicis notas accuratas, & ad usus, qui solent occurrere, satis est invenire binas, quæ præcedenti methodo admodum facile inveniuntur, tum radicis ita inventæ efformare potentiam, quæ proposito numero erit satis proxima.

133. Quoniam autem valor Q vix unquam habebitur accuratus, & fractiones minores contemnendæ sunt, cavendum, ut in eo assumantur tot notæ decimalium, quot notæ accuratæ tum integrorum, tum decimalium requirantur in radice, ne in multiplicatione ipsius Q per A in termino seriei secundo error notarum contemptarum plus æquo ascendat multiplicatus & ipse per A,

as

ac una nota addatur præterea; ne errores collecti ex fine singulorum terminorum seriei ad sedem adhuc superiorem assurgant; quod satis erit ad id cavendum; ubi non plures, quam decem termini assumi debeant, qui semper assumendi erunt multo pauciores; si valor Q fuerit satis exiguus. In ipsis autem multiplicationibus labor contrahetur mirum in modum; si eæ decimalium notæ quæ deinde rejiciendæ sunt in producto; negligantur jam prius inter multiplicandum; quo pacto posteriores termini semper multo facilius definientur.

134. Methodus autem, multo magis manifesta fiet exemplis. Pro radice cubica substituendum est 3 pro r; ac ob $\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$; $\frac{8}{12}=\frac{2}{3}$ series erit $\overline{P+PQ}^{\frac{1}{3}} = P^{\frac{1}{3}} + \frac{1}{3} AQ - \frac{1}{3} BQ - \frac{5}{9} CQ - \frac{2}{3} DQ - \frac{11}{15} EQ$ &c.

135. Proponatur numerus 74394516, cujus quæratur radix accurata per 6 notas. Primæ classis 74 radix cubica proximè minor est 4, cujus cubo 64 inde ablato, relinquitur 10, & adjecta sequenti classe 394, fit 10494. Numeri autem 4 aucti cyphra o quadratum est 1600, ejusque triplum 4800, per quod diviso 10394, habetur 2. Assumantur igitur 42 pro primis notis, & adjecta cyphra una ob sequentem classem, numeri 420 cubus 74088000 fit P, quo ablato a numero proposito 74394516, relinquetur 306516 pro PQ, eoque diviso per P, habebitur Q = 0. 0041372, ubi assumendæ sunt notæ decimales septem, cum quærantur sex notæ accuratè in radice.

136. Jam vero erit $A = P^{\frac{1}{3}} = 420$. $B = \frac{1}{3} AQ = \frac{1}{3} \times 420 \times 0.0041372 = 0.57921$; $C = -\frac{1}{3} BQ = -\frac{1}{3} \times 0.57921 \times 0.0041372 = -0.00080$; unde facile patet fore $D = 0.00000$; ac proinde radix quesita $= A + B + C = 420.$

C 4 +0.

tis 0. 57921 — 0 00080 = 420 . 57841, in qua tamen radice priores tantum sex notę pro certo accuratis haberi possunt.

137. Si pro primo valore $P^{\frac{1}{3}}$ assumptus fuisset numerus 430. vero major, obvenisset valor Q negativus, quo casu omnes termini post primum negativi evadunt, ut patebit in hoc ipso exemplo, ubi tamen ob numerum 430. aliquanto remotiorem a vero, valor Q obvenit aliquanto major, & series convergit serius. Invenietur tamen radix quęsita post plures seriei terminos omnino congruens cum priore.

138. Erit autem $A = P^{\frac{1}{3}}\ 430$, P cubus ejus numeri $= 79507000$, $P\ Q = 74394516 - 79507000 = -5112484$, $Q = \frac{-5112484}{79507000} = -0{,}0643023$, $B = \frac{1}{3} AQ = \frac{1}{3} \times 430 \times -0.0643023 = -9.21666$, $C = -\frac{1}{3} BQ = -\frac{1}{3} \times -9{,}21666 \times -0.0643023 = -0.19755$ $D = -\frac{5}{9} CQ = -\frac{5}{9} \times -0.19755 \times -0.0643023 = -0.00705$, $E = -\frac{2}{3} DQ = -\frac{2}{3} \times -0.00706 \times -0.0643023 = -0.00030$; $F = -\frac{11}{15} EQ = -\frac{11}{15} \times -0{,}00030 \times -0.0643023 = -0.00001$. Quare radix quęsita 430. — 9. 21666 — 0. 19755 — 0. 00706 — 0. 00030 — 0. 00001 = 420. 57842, quę cum prius inventa 420 57841 usque ad priores quatuor decimalium notas prorsus convenit, & in quinta nota unitate tantum differt.

139. Quod si quis velit plures notas certas, satius esset invenire prius methodo indicata pauciorem

nota-

notarum numerum certum, tum radicis jam satis approximatę cubum iterum dicere P, & novo Q invento, qui esset admodum exiguus, haberetur series convergentissima, ac paulo diligentius ipsam seriei naturam contemplantibus patebit, si radix assumpta $P^{\frac{1}{3}}$ fit accurata per numerum notarum b, debere in valore Q post punctum prodire saltem numerum cyphrarum $b - 1$, & totidem saltem notas certas additu-ros singulos terminos seriei novos. Sic in priori exemplo, ubi pro radice assumptus fuerat numerus 420, in quo omnes tres notę erant accuratę, valor Q prodiit 0. 0041 &c. habens post punctum binas cyphras, in posteriore, in quo radix assumpta 430 solam primam accuratam habuit, & secundam accurate quam proximam, in valore Q = 0. 06 &c. vix unica post punctum cyphra est habita.

140. Ut methodus restituti calculi exemplo illustretur, quæratur ejusdem numeri radix accurrata per notas 20. Assumpto pro radice, sive pro valore $A = P^{\frac{1}{3}}$ numero jam invento 430 . 578, erit P = 74394298 . 738940552. Eo numero ablato a 74394516, relinquetur PQ = 217 . 261059448, & hoc diviso per P, evadit Q = 0. 0000029203993 1995498, ubi post punctum obvenerunt cyphræ 5 idcirco, quod in radice assumpta 430. 578 sex notæ accuratæ sunt; notæ vero decimalium assumptæ sunt 21, cum radix quæratur accurata per notas 20. Singulis autem terminis saltem quinas determinantibus notas, quatuor tantum termini quæsitam radicem exhibebunt. Erit enim $A = P^{\frac{1}{3}} = 420. 578$, $B = \frac{1}{3} AQ =$ 0. 0004094185684 00287, $C = -\frac{1}{3} BQ = -$ 0. 0000000003985 55236, $D = -\frac{5}{9} CQ = +$

0. 0000000000000000646, ubi cum pateat valorem sequentem debere addere saltem quinque alias cyphras; negligendus omnino est; & radix quæsita A + B + C + D erit = 420. 5784094181698444 0, omissa nimirum postrema minus certa; quæ esset 5; quæ omitti potest; vel ejus loco in præcedenti nota addi unitas; ut pro 40 fiat 41; quod semper fit; ubi prima e contemptis decimalium notis superat 5; cum ea unitate addita, committatur error minor; quam si sequens major 5 penitus omittatur.

141. In sublimioribus potentiis methodus est prorsus eadem dummodo in serie $\overline{P + PQ}^{\frac{1}{r}} = P^{\frac{1}{r}} + \frac{1}{r} AQ$ &c. ponatur pro r exponens radicis; nec quidquam operosior est methodus pro iis; quam pro inferioribus.

142. Hac methodo radix accurata; si qua sit, immediate non obtinetur. At indicabunt eam ipsi numeri radicis proxime; vel enim in fine coibunt multæ cyphræ cum admodum exigua fractione, vel multæ notæ *999* &c.; ac licebit efformare eam potentiam numeri; qui præcedit cyphras; vel qui præcedit notas illas novenarii, qui quidem numerus in postrema nota eas præcedente augendus est unitate; & siquidem ea fuerit accurata radix; potentia ipsa prodibit æqualis numero dato: ut si radix accurata esset 452; methodus exhiberet vel 451. 000 &c. cum aliqua nota post plures cyphras, vel 451; *9999* &c.

§. VII.

De generalibus æquationum proprietatibus.

143. Æquatio dicitur aggregatum terminorum habens interpositum signum æqualitatis, & ad æquationem devenitur exponendo conditiones problematum; ac ex solutione æquationum continentium quantitates incognitas mixtas cum cognitis, pendet solutio problematum ipsorum, e quibus profluxerunt. Si quæratur numerus, cujus triplum cum quarta ejus parte efficiat 26, posito numero quæsito $=x$, habebitur æquatio $3x + \frac{1}{4}x = 26$; vel si quærantur duo numeri, quorum summa 12, differentia 4, positis x & y pro binis numeris quæsitis habebuntur binæ æquationes $x + y = 12$, $x - y = 4$. Sed etiam ubi nullæ incognitæ quantitates adsunt, æquatio haberi potest, ut $8 + 4 = 12$.

144. Bina æquationis membra dicuntur binæ ejus partes hinc inde a signo æquationis positæ. Potest autem esse membrum æquationis etiam cyphra 0, cum nimirum in altero membro quantitates positivæ, & negativæ se mutuo destruunt. Sic $8 + 4 - 12 = 0$.

145. Ex natura æqualitatis patet, utrique membro addi, vel demi posse quantitatem eandem, vel binas quantitates æquales alteri alteram: itidem utrumque membrum multiplicari posse, vel dividi per eandem quantitatem, vel per binas æquales salva æqualitate. Inde autem eruuntur pro quavis æquatione sequentia theoremata.

146. Quicunque terminus ex altero æquationis membro transferri potest in alterum, mutato signo, salva æqualitate.

147. Si enim terminus erat in altero membro positivus, & utrinque auferatur, in illo priore elisus destruetur, in posteriore apparebit negativus: si autem sit nega-

negativus, & utrique addatur, ubi aderat, jam elisus evanescet, ubi non aderat, jam habebitur cum signo positivo.

148. Sit $8 + 4 = 12$; erit $8 = 12 - 4$; ablato enim utrinque 4, fit $8 + 4 - 4 = 12 - 4$.

149. Sit $8 = 12 - 4$; erit $8 + 4 = 12$; addito enim utrobique 4, fit $8 + 4 = 12 - 4 + 4$.

150. Ea translatio termini dicitur transpositio. In una e superioribus æquationibus erat $x + y = 12$, in altera $x - y = 4$: erit transponendo in illa $x = 12 - y$, in hac $x = 4 + y$.

151. Inde autem deducitur in quavis æquatione posse mutari omnia signa omnium terminorum, salva æqualitate. Si enim omnes termini ex altero membro transferantur in alterum, & viceversa, mutantur omnia terminorum omnium signa.

152. Si quis terminus per aliquam quantitatem multiplicatur, possunt omnes alii per eam dividi, & ea in illo termino omitti: & si erat divisus, possunt reliqui per eam multiplicari, & ea ibi pariter omitti.

153. Nam dividendo utrunque membrum per eam quantitatem in primo casu, & multiplicando in secundo, is terminus remanebit multiplicatus simul, & divisus per eandem, quæ proinde elidetur; reliqui autem termini, qui per eam non multiplicabantur, nec dividebantur, jam dividentur in primo casu, multiplicabuntur in secundo.

154. Sit $2 \times 2 + 8 = 14$: erit $2 + \frac{8}{2} = \frac{14}{2}$;

quia erit $\frac{2 \times 2}{2} + \frac{8}{2} = \frac{14}{2}$.

155. Sit $\frac{8}{4} + 3 = 5$: erit $8 + 3 \times 4 = 5 \times 4$;

quia erit $\frac{8 \times 4}{4} + 3 \times 4 = 5 \times 4$.

156.

156. Utrumque membrum poterit ad quamvis poteſtatem elevari, vel ex utroque quævis radix erui ſalva æqualitate.

157. Patet ex eo, quod quantitatum æqualium, & potentiæ, & radices ejusdem exponentis æquales eſſe debent, cum illæ fiant per multiplicationem æqualium, hæ iterum ad eas potentias elevatæ illas reſtituant.

158. Sit $\sqrt{25} = 2 + 3$: erit $25 = \overline{2 + 3}^{2}$ & viceverſa.

159. Ope horum theorematum poteſt quævis æquatio liberari ab omnibus fractionibus, multiplicando nimirum omnes terminos per productum ex omnibus denominatoribus.

160. In æquatione $\frac{8}{2} + \frac{25}{5} = 9$, multiplicando per 2×5, fit $5 \times 8 + 2 \times 25 = 2 \times 5 \times 9$; ſive $40 + 50 = 90$.

161. Quod ſi aliqui e denominatoribus communes diviſores habeant, ii poſſunt in ea multiplicatione non repeti, ſed accipi ſemel tantum.

162. In æquatione $\frac{a}{bc} + \frac{d}{bf} = \frac{g}{fh}$; ſatis erit multiplicare per $bcfh$, & habebitur $afh + cdh = bcg$.

163. Si quævis quantitas, vel quantitatis cujuſvis potentia quævis ſit in aliquo termino æquationis, vel in pluribus, non vero in omnibus, utcunque multiplicata, vel diviſa per alias quantitates; poteſt ea relinqui ſola in altero membro ſine ullo multiplicante; ſive, quod idem eſt, poteſt haberi ejus valor per alios valores æquationis ipſius. Liberata enim a fractionibus quantitate, omnes termini, in quibus ea adeſt, poſſunt per tranſportationem collocari in altero æquationis membro, reliquis omnibus collocatis in altero, tum hoc ſecundum membrum dividi per aggregatum omnium quantitatum eam multiplicantium in membro priore.

164. Sit

164. Sit æquatio $by^5 - \frac{c^5 x^2}{p} = \frac{mx^2 y^4}{q} + \frac{x^2 y^5}{r}$, in qua quæratur valor y^5 per alius ejus æquationis valores. Multiplicando per pqr, erit $bpqry^5 - c^5 qrx^2 = mprx^2 y^4 + pqx^2 y^5$, & transponendo $bpqry^5 - pqx^2 y^5 = mprx^5 y^2 + c^5 qrx^2$; ac dividendo per $bpqr - pqx^2$ fit demum $y^5 = \frac{mprx^2 y^4 + c^5 qrx^2}{bpqr - pqx^2}$

165. Hoc artificio poteſt ſemper ſolvi quodvis problema, quod exprimatur per unicam æquationem continentem unicam incognitam, eamque poſt demptas omnes fractiones, in quarum denominatore ea forte eſſet, elevatam ad eandem ubique potentiam: quod quamvis ad ſolutionem æquationum pertineat, tamen hìc præmittimus, ut fructum aliquem laboris jam capiat Tyro, & ad ulteriora feſtinet alacrior.

166. In æquatione propoſita num. 143. $3x + \frac{1}{4}x = 26$, multiplicando per 4, fit $12x + x = 104$; adeoque $x = \frac{104}{12+1} = \frac{104}{13} = 8$. Numerus autem 8 problemati omnino ſatisfacit; nam ejus triplum 24 cum quarta ipſius parte 2 efficit 26.

167. Si quæratur numerus, cujus quadrans cum binis trientibus æquetur numero 132 per ipſum diviſo; eo facto $= x$, erit $\frac{1}{4}x + \frac{2}{3}x = \frac{132}{x}$, & multiplicando per $3 \times 4 \times x$, fit $3x^2 + 8x^2 = 1584$.

1584 ; ac proinde $x^2 = \frac{1584}{3+8} = \frac{1584}{11} = 144$, adeoque extrahendo utrinque radicem $x = \pm \sqrt{144} = \pm 12$. Satisfacit igitur quęstioni tam $+ 12$, quam $- 12$. Et quidem est $\frac{1}{4} \times 12 + \frac{2}{3} \times 12 = 3 + 8$, & $\frac{132}{12} = 11$. Pariter $\frac{1}{4} \times -12 + \frac{2}{3} \times -12 = -3 - 8$, ac $\frac{132}{-12} = -11$.

168. Eodem artificio e binis æquationibus continentibus quantitatem aliquam utcunque permixtam cum aliis, & elevatam ad quascunque potentias integrum exponentem habentes, potest ea quantitas eliminari, efformando tertiam æquationem, quæ ea prorsus careat.

169. Si in altera æquatione liberata a fractionibus eam quantitatem forte habentibus in denominatore, ipsa quantitas ad eandem, ubicunque adest, potentiam elevatur, id facile præstabitur capiendo ejus valorem in ea æquatione, & substituendo in alia.

170. In exemplo adducto num. 143 erat $x + y = 12$, $x - y = 4$. In priore capiendo valorem x erit $x = 12 - y$, quo substituto in posteriore erit $12 - y - y = 4$, sive $12 - 2y = 4$: unde etiam profluit ejus problematis solutio ; jam enim valor y invenietur, cum transponendo debeat esse $12 - 4 = 2y$, sive $8 = 2y$, & dividendo per 2 fiat $4 = y$; unde ob $x = 12 - y$ fit $x = 12 - 4 = 8$. Ac proinde 8, & 4 sunt ii duo numeri, quorum summa 12, differentia 4.

171. Si sint æquationes $ax^2 + \frac{by^3}{x} = x^2 y$; & $m x^2 + nxy - a^3$ in priore multiplicando per x habetur $ax^3 + by^3 = x^3 y$ adeoque $ax^3 - x^3 y = -by^3$

$= - by^3$, & $x^3 = \frac{-by^3}{a-y}$; ac demum $x = y\sqrt[3]{\frac{-b}{a-y}}$. Hoc valore substituto in secunda æquatione fieret $my^2\sqrt[3]{\frac{b^2}{a^2-2ay+y^2}} + ny^2\sqrt[3]{\frac{-b}{a-y}} = a^3$

172. Si autem ea quantitas ad plures dimensiones utrobique assurgit, eliminari poterit operosiore methodo, sed iisdem principiis innixo. Inveniatur in utraque valor maximæ potestatis illius incognitæ, qui in utraque fuerit ejusdem exponentis; bini ii valores erunt æquales inter se, & habebitur nova æquatio, quę eandem quantitatem continebit minus elevatam. In hac autem nova ęquatione invento pariter valore maximę potentię, ea, & totum alterum membrum poterunt multiplicari per eandem illam quantitatem, & hoc pacto invenietur novus valor potentię illius prioris; qui ęquatus alteri ex pręcedentibus, reddet aliam ęquationem continentem eandem quantitatem elevatam ad minorem potentiam: ut si binę illę ęquationes habebant quartam potentiam quantitatis eliminandę, jam habebuntur binę æquationes, in quibus non assurget ultra tertiam. Si autem erant inęquales potentię, ut altera quarta, altera secunda, poterit hęc posterior multiplicari tota per illam quantitatem ita, ut evadat ejusdem quantitatis eadem potentia maxima in utraque æquatione. Eodem autem pacto e binis novis ęquationibus potest deveniri ad alias binas continentes potentiam adhuc minorem, & ita porro, donec deveniatur ad duas continentes solam primam potentiam, cujus bini valores æquati inter se exhibebunt ęquationem prorsus carentem illa quantitate.

173. Sint æquationes $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$;

$= 0$; $ex^3 + fx^2 + gxh = 0$, e quibus eliminare oporteat x. Quoniam utraque habet x^3 pro maxima potentia, capiatur in utraque ejus valor, eritque in prima $x^3 = \frac{-bx^2 - cx - d}{a}$, in secunda $x^3 = -\frac{fx^2\ gx - h -}{e}$. Quare erit $-\frac{bx^2 - cx - d}{a} = -\frac{fx^2 - gx - h}{e}$, sive multiplicando per ae, & mutando omnia signa, erit $ebx^2 + ecx + ed = afx^2 + agx + ah$. In hac æquatione jam habetur tantum x^2, cujus valor haberi potest, cum transponendo fit $ebx^2 - afx^2 = agx - ecx + ah - ed$, ac dividendo per $eb - af$, fiet $x^2 = \frac{agx - ecx + ah - ed}{eb - af}$. Multiplicando autem per x utrobique, erit $x^3 = \frac{agx^2 - ecx^2 + ahx - edx}{eb - af}$: erat $x^3 = \frac{-bx^2 - cx - d}{a}$ igitur erit $\frac{agx^2 - ecx^2 + ahx - edx}{eb - af} = \frac{-bx^2 - cx - d}{a}$. Quare jam habentur binæ æquationes continentes potentiam x secunda non superiorem Eadem methodo ex iis devenietur ad binas continentes primam tantum, ac demum ad equationem ipsum x non continentem. Ac eodem pacto e binis continentibus potentiam decimam deveniretur ad binas non excedentes nonam, tum ad alias binas non excedentes octavam; & ita porro usque ad binas continentes primam tantummodo; & ad unicam eo prorsus carentem.

174. Si autem fuissent æquationes $ax^4 + bx^5 + cx^2 + dx + e = 0$ & $fx^2 + gx + h = 0$ poterat hæc secunda multiplicari per x^2, & haberetur $fx^4 + gx^3 + hx^2 = 0$, ex quibus deveniretur ad binas non excedentes potentiam tertiam, tum ad binas non excedentes secundam, & ita porro.

175. Methodus quidem est plerumque ita operosa; crescente terminorum numero; ut formulæ evadant penitus intractabiles; facile tamen patet generalem esse, & si debitus adhibeatur labor, debere semper omnino succedere. Patebit autem pluribus in locis, quanto usui id esse possit; interea alios ex illis iisdem theorematis colligamus fructus pertinentes ad expoliendam æquationem, nimirum ad methodos, quibus liberari ea possit ab irrationalitate, seu terminis radicalibus.

176. Potest aliquando æquatio liberari ab irrationalitate; sive a radicalibus per multiplicationem, & divisionem.

177. In æquatione $b\sqrt{ax} + \frac{c}{\sqrt{ax}} = d\sqrt{ax}$; Multiplicando per $\sqrt{ax}$ habetur $abx + c = adx$; vel dividendo per $\sqrt{ax}$ habetur $b + \frac{c}{ax} = d$.

178. In æquatione $b\sqrt[3]{ax^2} + \frac{c}{\sqrt[3]{a^5}\,x} = d\sqrt[3]{a^7 x^5}$ multiplicando per $\sqrt[3]{a^5 x}$, habetur $b\sqrt[3]{a^6 x^3} + c = d\sqrt[3]{a^{12} x^5}$, sive $a^2 bx + c = a^4 dx^2$, vel dividen-

do

ideo per $\sqrt[3]{ax^2}$ fit $b + \sqrt[3]{a^6 x^2}^{\,c} = d\sqrt[3]{a^6 x^3}$; five $b + \frac{c}{a^2 x} = a^2 x$.

179. Elevando ad eamdem potentiam idem membrum, id potest præstari solum, quotiescunque in æquatione bini tantum termini habebuntur cum suis radicalibus singuli, vel bini radicales cum quotcumque terminis rationalibus, dummodo alter e radicalibus sit radicis quadratæ, vel tres tantum radicis quadratæ, cum quotcumque rationalibus, vel quatuor radicis quadratæ sine ullis aliis terminis.

180. Sit enim $a\sqrt[m]{x} - b\sqrt[n]{y} = o$; erit transponendo $a\sqrt[m]{x} = a\sqrt[n]{y}$; & elevando ad potentiam m utrunque membrum erit $a^m x = b^m \sqrt[n]{y^m}$; ac elevando utrunque ad potentiam n, fiet $a^{mn} x^n = b^{mn} y^m$.

181. Sit $a\sqrt[m]{x} - b\sqrt{y} + c = o$ exprimente c summam terminorum quotcumqqe rationalium; relicto $a\sqrt[m]{x}$ ex altera parte, fiet $a\sqrt[m]{x} = b\sqrt{y} = c$, & elevando utrobique ad potentiam m, in secundo membro remanebit numerus terminorum $m + 1$, in quibus tamen omnes potentiæ pares termini $b\sqrt{y}$ erunt liberæ ab irrationalitate, omnes autem potentiæ impares habebunt quantitates rationales multiplicatas per $\sqrt{y}$; ut si $m = 5$, elevando ad quintam potentiam utrumque terminum, erit $a^5 x = b^5 \sqrt{y^5} - 5\, b^4 c \sqrt{y^4} + 10\, b^3 c^2 \sqrt{y^3} - 10\, b^2 c^3 \sqrt{y^2} + 5\, b\, c^4 \sqrt{y} - c^5$, five $a^5 x =$

$b^5 y^2 \sqrt{y} - 5 b^4 c y^2 + 10 b^3 c^2 y \sqrt{y} - 10 b^2 c^3 y + 5 b c^4 \sqrt{y} - c^5$. Jam vero transpositis terminis omnibus in quibus non adest $\sqrt{y}$, fiet $a^5 x + 5 b^4 c y^2 + 10 b^2 c^3 y + c^5 = b^5 y^2 \sqrt{y} + 10 b^3 c^2 y \sqrt{y} + 5 b c^4 \sqrt{y} = (b^5 y^2 + 10 b^3 c^2 y + 5 b c^4) \sqrt{y}$, adeoque demum quadrando, evanescet irrationalitas.

182. Sit $a \sqrt{x} + b \sqrt{y} + c \sqrt{z} + d = 0$. Relinquantur bini radicales in uno membro, & habebitur $a \sqrt{x} + b \sqrt{y} = - c \sqrt{z} - d$, & quadrando $a^2 x + b^2 y + 2 ab \sqrt{xy} = c^2 z + d^2 + 2 cd \sqrt{z}$, ac proinde casus redactus est ad praecedentem.

183. Sit $a \sqrt{x} + b \sqrt{y} + c \sqrt{z} + d \sqrt{u} = 0$, erit $a \sqrt{x} + b \sqrt{y} = - c \sqrt{z} - d \sqrt{u}$, adeoque quadrando $a^2 x + b^2 y + 2 ab \sqrt{xy} = c^2 z + d^2 u + 2 cd \sqrt{uz}$, casu iterum ad binos radicales redacto.

184. Porro in his omnibus casibus valores illi a, b, c, d possunt exprimere quoscumque, & quotcunque terminos rationales, per quos multiplicentur illi radicales. In cæteris autem elevando ad potentias, numerus radicalium, vel manet idem, vel crescit. Quare ad liberandam æquationem ab ipsis radicalibus recurrendum ad aliam methodum generalem, quæ pendet a methodo jam exposita a num. 172. eliminandi quantitatem quamvis, e binis æquationibus, in quibus adsit. Nimirum quævis radix ponatur æqualis quantitati expressæ per novam literam, qua substituta in illa æquatione, habebitur nova æquatio continens novas illas quantitates, sed carens radicalibus terminis. Porro habebuntur etiam tot aliæ æquationes, quot novi valores assumpti sunt, in quibus singulis per eleva-

tio-

tionem ad eandem potentiam vitabitur irrationalitas; Earum autem ope, & præcedentis æquationis, eliminati poterunt illi novi valores assumpti, alii post alios, reducendo numerum æquationum ad pauciores, donec unica tandem relinquatur æquatio continens illos valores solum, quos continebat prima æquatio proposita.

185. Sit $\sqrt[3]{x} + \sqrt{y} = \sqrt[4]{z} + b$. Ponatur $\sqrt[3]{x} = p$, $\sqrt{y} = q$, $\sqrt[4]{z} = r$, & habebuntur quatuor æquationes $p + q = r + b$, $x = p^3$, $y = q^2$, $z = r^4$ Ope primæ & secundæ potest eliminari p, & jam habebuntur tres æquationes, in quibus p non aderit. Ope hujus novæ, & illius tertiæ $y = q^2$ poterit eliminari q, & jam habebuntur duæ, in quibus nec aderit p, nec q. Ope hujus novæ, & illius quartæ $z = r^4$, poterit eliminari r, & jam habebitur æquatio, in qua nec aderit p, nec q, nec r, sed illæ solæ quantitates, quæ aderant in æquatione proposita: radicales autem termini penitus deerunt omnes; Hæc autem methodus admodum operosa est; sed satis patet esse generalissimam.

§. VIII.

De variis æquationum generibus.

186. Æquatio dicitur indeterminata, quæ habet plures incognitas quantitates, determinata, quæ unicam; quia illa infinitas numero solutiones habet, hæc vel unicam, vel determinatum earum numerum. Nimirum infiniti numero valores sunt, qui pro incognitis illis quantitatibus substituti illas verificant, unicus vel determinatus eorum numerus has.

187. Æquatio $x + y = 12$ dicitur indeterminata,

æquatio $3x + \frac{1}{4}x = 20$, vel æquatio $x^2 + 8 = 6x$ determinata. In illa enim prima, si ponatur $x = 1$, $y = 11$, vel $x = 2$, $y = 10$, vel $x = -1$, $y = +13$, & ita porro, semper verificatur $x + y = 12$ ita, ut infiniti sint valores, qui pro x & y positi in ea æquatione verificent ipsam: in secunda autem solus ille numerus 8 inventus num. 166 equationi satisfacit, in tertia vero tam numerus 2, quam 3, cum sit $2 \times 2 + 8 = 6 \times 2$, & $4 \times 4 + 8 = 6 \times 4$ sive $4 + 8 = 12$, & $16 + 8 = 24$, nec ullus numerus pro x positus eas equationes verificabit.

188. Si alicuius problematis conditiones omnes exprimantur per plures equationes, ita tamen, ut tot habeantur incognitę quot æquationes; poterit semper deveniri ad unicam equationem, quę unicam incognitam habeat. Nam si sint ex. gr. 10 æquationes, & totidem incognitæ, poterit conferendo primam cum secunda eliminari methodo exposita num. 172. una ex iis incognitis, inveniendo novam æquationem, quę illa careat, tum idem prętari poterit conferendo primam cum tertia, & ita porro, ac habebuntur jam novem equationes cum novem incognitis: eę eodem artificio poterunt reduci ad octo cum octo incognitis, & ita porro, donec deveniatur ad unicam cum unica incognita.

189. Hinc si habeantur tot equationes, quot incognitę, problema dicitur determinatum, & unicam, vel finitas numero solutiones habere potest. Si fuerint plures incognitę quam equationes, problema dicitur indeterminatum, & admittit infinitas. Si autem plures fuerint equationes, quam incognitę, dicitur plusquam determinatum, & nisi casu contingat, ut determinatis incognitis per totidem aequationes, reliquae verificentur problema ipsum erit impossibile.

190. Inventi sunt num. 170. bini numeri 8, & 4, quorum summa, 12, differentia 4, ope binarum aequationum $x + y = 12$, $x - y = 4$ habentium binas

nas incognitas. Unicam autem aequationem $x+y=12$ cum binis incognitis habere infinitas solutiones vidimus num. 187. Si demum habeantur binę equationes $3x+\frac{1}{4}x=26$, & $4x+\frac{1}{3}x=33$, utraque verificatur facto $x=8$. Sed si secunda ęquatio esset $4x+\frac{1}{8}x=66$, ambę simul per eundem valorem x verificari non possent, cum ex prima eruatur $x=8$ (per num. 166.), in secunda multiplicando per 8 fiat $32x+x=528$, sive $x=\frac{528}{32+1}=\frac{528}{33}=16$; adęoque diversos incognitę valores requirant.

191. Æquatio determinata dicitur ejus gradus, ad quem assurgit exponens maximę potestatis quantitatis incognitę, ubi ex ęquatione ipsa tollitur irrationalitas, aut fractio continens sub signo radicali, vel in denominatore fractionis ipsam illam quantitatem incognitam. Æquatio $2x^2+4x^3-37=\frac{5}{2}x$ est gradus tertii, quia maxima potentia quantitatis incognitę x est illud x^3. Æquatio $x^2\,10+\frac{10}{x}=27$ non est gradus secundi, licet videatur habere tantum x^2 & x, sed tertii, quia sublata fractione illa in cujus denominatore erat x, fit $x^3+10=27x$. Pariter in ęquatione $2x-3=\sqrt{3x}$, quę videretur esse gradus primi, sublato radicali, habebitur quadrando utrobique, $4x^2-12x+9=3x$, ac proinde ęquatio ęvadit gradus secundi.

192. Fractiones, quę denominatorem cognitum habeant, nihil turbant ęquationis gradum; si vero adsint quantitates radicales continentes sub signo radicali

quantitates cognitas, pariter æquationis gradus, quod pertinet ad methodum, qua ipsa æquatio solvenda est; & valor incognitę quantitatis inveniendus, nihil turbatur. At eo casu æquatio ipsa, si ejus natura spectetur, pertinet ad altiorem gradum, nec in sua sede esse dicitur. Æquatio $x^2 + \frac{2}{3} x - 12 = 0$ est secundi gradus: at æquatio $x^2 - 2x\sqrt{3} + 4 = 0$, licet eodem tractetur modo, quo ęquationes secundi gradus, adhuc tamen altiorem sedem habet, ad quam reducitur eliminato illo radicali, Transponendo nimirum fit $x^2 + 4 = 2x\sqrt{3}$, & quadrando $x^4 + 8x^2 + 16 = 12x^2$, quę est ęquatio gradus quarti.

193. Contra vero si ęquatio quędam altior dividi possit in duas irrationalitate carentes, ex quarum multiplicatione ea constet, divisione ipsa deprimitur ad sedem inferiorem. Æquatio $x^3 - 10x^2 + 34x - 40 = 0$, dividi potest per $x - 4 = 0$, & prodit $x^2 - 6x + 10 = 0$. Illa igitur, quę erat gradus tertii, ejusmodi divisione redacta est ad duas alteram gradus primi, alteram secundi; adeoque ad sedem inferiorem depressa est. Utrum autem aliqua ęquatio deprimi possit ad sedem inferiorem, an in ea, quam pręsefert, necessario maneat; id pendet a methodo inveniendi divisores omnes formulę datę, de qua egimus §. 3, cum pendeat ab eo, utrum dividi possit ęquatio ipsa per aliam gradus inferioris irrationalitate carentem.

194. Valor quantitatis incognitę, qui positus pro ipsa incognita verificat ęquationem, dicitur radix æquationis ipsius: ac proinde an aliqua quantitas sit radix ęquationis cujuspiam, cognoscitur facile substituendo eum valorem pro incognita. Porro si radix est positivi valoris, dicitur radix vera, si negativi, appellari solet radix falsa, quanquam etiam ipsa sit verè

ejus

ejus æquationis radix. In æquatione $3x + \frac{1}{4}x = 26$; radix est 8, in æquatione $x^2 + 8 = 6x$ radices sunt tam 2, quam 4, omnes positivæ, quia iis numeris positis pro x verificatur æquatio, ut vidimus. In æquatione $x^2 - 3x = 10$ radices sunt $+5$, & -2, quæ positæ pro x ipsam verificant, cum sit $5 \times 5 - 3 \times 5 = 10$, & $-2 \times -2 - 3 \times -2 = 10$, sive $25 - 15 = 10$, & $4 + 6 = 10$.

195. Aliquando aliquot vel etiam omnes radices sunt impossibiles; ac eæ quæ possibiles sunt reales dicuntur, quæ impossibiles, dicuntur imaginariæ. Unum e casibus, in quibus, omnes impossibiles sunt, patet fore eum, in quo æquatio nullam contineat potentiam incognitæ imparem, ac termini omnes ad alterum æquationis membrum transpositi positivi sint, ac unus ex iis incognita careat, ut $x^4 + 2x^2 4 + 6 = 0$. Quovis enim valore substituto pro x, omnes termini erunt positivi, adeoque se mutuo destruere non poterunt, & substituto etiam o pro x, reliqui evanescent, ac relinquetur ille cognitus, qui non potest esse $= 0$. In æquatione vero $x^3 - 2x + 4 = 0$ substituendo -2, $1 + \gamma - 1$; $+ 1 - \gamma - 1$ æquationi satisfit. Quare eæ sunt æquationis radices, & prima quidem realis est, reliquæ imaginariæ.

196. Æquatio vero per hujusmodi transpositionem ordinatur, & ad debitam formam redigitur, quam acquirit, cum omnes ejus termini in unum membrum conjiciuntur, & fiunt $= 0$, ac in eo ordinantur secundum potentias ipsius incognitę ita, ut maxima potentia primum locum habeat, & sit cum signo positivo, ac per nullam aliam quantitatem multiplicetur: potentiæ autem inferiores alię aliis succedant, & si eadem potentia per plures quantitates cognitas multiplicetur, omnia ejusmodi producta ad unicum terminum pertinere censeantur, scribanturque aliæ sub aliis; ac proinde

forma

forma æquationis ordinatæ est in æquatione ex. gr. gradus tertii $x^3 + px^2 + qx + r = 0$, ubi p, q, r exprimunt quantitates quascunque cognitas positivas, vel negativas, vel quantitatum cognitarum aggregata quævis. Ac illæ quantitates p, q, quæ multiplicant potentias incognitæ, dicuntur coefficientes. In æquatione $x^3 + 2x^2 - 6x - 10 = 0$, coefficiens secundi termini est 2, tertii -6, ac in ea collata cum illa generali expressione est $p = 2$, $q = -6$, $r = -10$. In æquatione $x^3 - x^2 + 3x - 10 = 0$, est $p = -1$, $q = 3$, $r = -10$. In æquatione

$$x^3 + \frac{a^2}{2b}x^2 + \frac{a^3}{4f}x + c^3 = 0$$
$$\quad - 3\frac{bc}{d}x^2 \qquad - \frac{2a^3d}{f}$$
$$\qquad\qquad + 8abc$$

est $p = \frac{a^2}{2b} - \frac{3bc}{d}$, $q = \frac{a^3}{4f}$, $r = c^3 - \frac{2a^3d}{f} + 8abc$.

Plurimum autem Tyroni proderit formulas generales contemplari, ac exerceri in comparatione homogeneorum, & substitutione valorum, quos casus particulares exhibent pro formularum generalium valoribus.

197. Si desit aliqua incognitæ potentia post maximam, adhuc tamen in numerandis terminis consideratur tanquam si adesset, & ejus coefficiens esset $= 0$. In æquatione $x^3 - 3x - 3 = 0$, $-3x$ non est secundus terminus, sed tertius, ac secundus deest, & si ea conferatur cum generali illa, erit $p = 0$, $q = -3$, $r = -3$.

198. Æquatio ordinatur, & ad debitam formam reducitur ope theorematum expositorum superiore §. a num. 145. Fractiones nimirum tolluntur per multiplicationem, ac radicalia uno e pluribus methodis ibi expositis, collocantur termini omnes in eodem membro

per transpositionem, liberatur primus terminus a coefficiente per divisionem. Æquatio $\frac{16}{x^2+2x}+x=8$ ad debitam formam reducetur, multiplicando prius per x^2+2x, & habebitur $16+2x^3+4x^2=8x^2+16x$; tum transponendo, ac simul ordinando secundum potentias ipsius x, fiet $2x^3+4x^2-16x+16=0$, sive $2x^3-4x^2-16x+16=0$, ac dividendo per 2,
$$\begin{array}{l} 2x^3+4x^2-16x+16=0 \\ -8x^2 \end{array}$$
fiet $x^3-2x^2-8x+8=0$.

199. Hoc autem pacto divisio adhibita ad liberandum a coefficiente primum terminum, sępe fractiones inducet in coefficientes, quę hac methodo evitari non poterunt. Si ęquatio fuisset $\frac{7}{x^2+3x}+2x=5$, multiplicando per x^2+3x, fieret $7+2x^3+6x^2=5x^2+15x$, ac transponendo & ordinando $2x^3+x^2-15x+7=0$, & dividendo per 2 demum $x^3+\frac{1}{2}x^2-\frac{15}{2}x+\frac{7}{2}=0$. Eę tamen fractiones tolli poterunt alia methodo quam trademus.

§ IX.

De solutione æquationum determinatarum primi, & secundi gradus.

200. Antequam ęquationum determitarum naturam, & generales proprietates consideremus, trademus hic quę pertinent ad solutionem ęquationum primi, & secundi gradus, quę nimirum ex iis, quę hactenus vidimus abunde haberi potest, & ad ea ipsa, quę deinde dicturi sumus, viam sternit.

201. Porro solutionem equationum gradus primi vidimus

dimus etiam num. 166. Eæ solvuntur sola ferme equationis ordinatione. Quævis enim æquatio primi gradus ordinata reducitur ad hanc forma $x+p=0$, adeoque erit $x=-p$.

202. Æquatio $\frac{1}{4}x=26-3x$ reducitur multiplicando per 4 ad hanc $x=104-12x$, & transponendo ad hanc $13x-104=0$, ac dividendo per 13 ad hanc $x-8=0$, ubi $p=-8$, adeoque $-p=8$, & proinde $x=8$.

203. Patet radicem $-p$ æquationis primi gradus fore positivam, vel negativam, prout in formula $x+p=0$ terminus p fuerit negativus, vel positivus.

204. Patet etiam æquationem gradus cujusvis, in qua desint omnes termini præter primum, & ultimum, reduci posse ad æquationem primi gradus, & solvi eadem methodo, quod etiam præstitimus num. 167. Si enim fuerit $x^m+p=0$, facto $x^m=y$, erit $y+p=0$, $y=-p$, $x=\sqrt[m]{y}=\sqrt[m]{-p}$.

205. Æquationes secundi gradus ordinatæ solvuntur per extractionem radicis. Earum formula generalis est $x^2+px+q=0$. Si in ea fuerit $p=0$, sive si careat secundo termino, & sit $x^2+q=0$, solvitur methodo jam exposita, reducendo prius ad formam æquationis primi gradus, vel immediate transponendo fit $x^2=-q$, & $x=\pm\sqrt{-q}$.

206. Patet autem ibi haberi binas radices alteram positivam, alteram negativam, reales ambas, vel ambas imaginarias, prout valor q fuerit negativus, vel positivus.

207. In æquatione $x^2-4=0$ est $x^2=4$, & $x=\pm 2$, ubi cum sit $q=-4$, ambæ radices sunt reales: & in æquatione $x^2+4=0$ fit $x^2=-4$, & $x=\pm\sqrt{-4}=\pm 2\sqrt{-1}$ ambæ imaginariæ.

208. Si

208. Si autem non sit $p=0$, sed æquatio affecta sit secundo termino, transponatur tertius terminus cognitus q, eritque $x^2+px=-q$. Quoniam in primo membro habetur x^2 quadratum quantitatis incognitæ x, & px productum ex p, & x, adeoque duplum productum ex $\frac{1}{2}p$ & x; si addatur utrique membro quadratum dimidii coefficientis p, sive $\frac{1}{4}p^2$ complebitur in primo membro quadratum, ac habebitur $x^2+px+\frac{1}{4}p^2=\frac{1}{4}p^2-q$, ubi ipsum primum membrum erit necessario quadratum binomii $x+\frac{1}{2}p$, & secundum membrum erit totum cognitum. Extrahendo igitur utrobique radices, erit $x+\frac{1}{2}p=\pm\sqrt{(\frac{1}{4}pp-q)}$ac transponendo fiet $x=-\frac{1}{2}p\pm\sqrt{(\frac{1}{4}pp-q)}$. Nimirum habebuntur binæ radices $-\frac{1}{2}p+\sqrt{(\frac{1}{4}pp-q)}$ & $-\frac{1}{2}p-\sqrt{(\frac{1}{4}pp-q)}$.

209. In æquatione illa $x^2+8=6x$, quæ ordinata evadit $x^2-6x+8=0$, est $p=-6$, $q=8$. Hinc $-\frac{1}{2}p\pm\sqrt{(\frac{1}{4}pp-q)}=+3\pm\sqrt{(9-8)}=+3\pm\sqrt{1}=3\pm1$, nimirum binæ radices sunt $3+1=4$, & $3-1=2$.

210. Considerando autem illam formulam generalem $x=-\frac{1}{2}p\pm\sqrt{(\frac{1}{4}pp-q)}$ multa quæ ad radices hujusmodi pertinent, facile deprehendentur.

211. In primis si valor q fuerit negativus, valor $-q$ erit

q erit positivus; & $\surd(\frac{1}{4}pp - q)$ erit semper valor realis, & semper major quam $\frac{1}{2}p$, ac sive p fuerit valor positivus, sive negativus, erit $-\frac{1}{2}p + \surd(\frac{1}{4}pp - q)$ valor positivus $-\frac{1}{2}p - (\surd\frac{1}{4}pp - q)$ valor negativus. Quare quotiescumque tertius terminus fuerit positivus, semper habebuntur binæ radices reales, & quidem altera positiva, altera negativa. In æquatione $x^2 - 6x - 16$ binæ radices altera positiva, altera negativa erunt $+8$, & -2.

212. Si fuerit $q = 0$, erit $\surd(\frac{1}{4}pp - q) = \surd\frac{1}{4}pp = \frac{1}{2}p$; nimirum altera radix $-\frac{1}{2}p - \frac{1}{2}p = -p$ altera $-\frac{1}{2}p + \frac{1}{2}p = 0$. Quare si desit ultimus terminus, erit altera radix realis æqualis coefficienti secundi termini accepti cum signo contrario, altera $= 0$. In æquatione $x^2 - 6x = 0$; erit $x = 6$; & $x = 0$.

213. Si valor q fuerit positivus, sed adhuc minor quam $\frac{1}{4}pp$, $\surd(\frac{1}{2}pp - q)$ adhuc erit valor realis, sed minor $\frac{1}{2}p$; nimirum binæ radices erunt ambæ reales, sed erunt positivæ, vel negativæ, prout $-\frac{1}{2}p$ fuerit valor positivus, vel negativus, nimirum prout valor p fuerit negativus, vel positivus. Quare si tertius terminus fuerit positivus, sed adhuc minor quadrato dimidii coefficientis secundi termini, ambæ radices erunt reales, & ambæ positivæ, vel ambæ negativæ, prout coefficiens secundi termini fuerit contra negativus, vel positivus. In æquatione $x^2 - 6x + 5$, radices erunt

5 & 1;

5 & 1; in æquatione $x^2 + 6x + 5 = 0$, erunt -5 & -1.

214. Si valor q fuerit positivus, & jam æqualis $\frac{1}{4}pp$, erit $\sqrt{(\frac{1}{4}pp - q)} = 0$, adeoque binæ radices $-\frac{1}{2}p + \sqrt{(\frac{1}{4}pp - q)}$ & $-\frac{1}{2}p - \sqrt{(\frac{1}{4}pp - q)}$, ambæ reducentur ad $-\frac{1}{2}p$, eruntque inter se æquales. Quare si tertius terminus fuerit positivus, & æqualis quadrato coefficientis secundi termini, ambæ radices erunt reales; sed æquales erunt inter se, nimirum æquales dimidio coefficienti secundi termini accepto cum signo contrario. In æquatione $x^2 - 6x + 9 = 0$ radices erunt $+3$, & iterum $+3$.

215. Si demum valor q fuerit positivus, sed jam major quam $\frac{1}{4}pp$, erit $\frac{1}{4}pp - q$ valor negativus ac proinde $\sqrt{(\frac{1}{4}pp - q)}$ valor imaginarius. Quare si tertius terminus fuerit positivus, & major quadrato coefficientis secundi termini, erunt ambæ radices imaginariæ, & problema impossibile. In æquatione $x^2 - 6x + 10 = 0$ radices erunt $+3 \pm \sqrt{-1}$.

216. Præterea conferendo hasce binas radices $-\frac{1}{2}p + \sqrt{(\frac{1}{4}pp - q)}$, & $-\frac{1}{2}p - \sqrt{(\frac{1}{4}pp - q)}$, patet, earum summam fore $-p$, & earum productum fore $\frac{1}{4}pp - \frac{1}{4}pp + q = q$. Quare summa binarum radicum erit semper æqualis coefficienti secundi termini accepto cum signo contrario, productum vero tertio termino; ac si radices accipiantur cum signo contrario ei, quod habent, earum summa erit jam æqualis illi coefficienti accepto cum suo signo, productum au-

tem

tem postremo termino adhuc æquale erit. Patebit id in omnibus superiorum æquationum exemplis, ut in prima $x^2 - 6x - 16 = 0$, cujus radices $+8$, & -2, ac mutatis earum signis, habetur -8, $+2$, quarum summa -6, productum -16.

217. Discat Tyro e formulis generalibus ad omnes casus particulares applicatis eruere theoremata, & solutionum generalium vim intimius perspicere. Porro postremam hanc proprietatem, ut nimirum coefficiens secundi termini sit summa radicum acceptarum cum signo contrario, ultimus autem terminus sit earum productum, videbimus infra generalem esse omnibus omnium graduum æquationibus, quod ipsum etiam in superiore solutione æquationum primi gradus patet, ubi in æquatione $x + p = 0$, adeoque $x = -p$ valor radicis $-p$ mutato signo fit $+p$ ac est coefficiens secundi termini, qui ibi est totus secundus, & ultimus terminus.

218. Ex iis, quæ demonstrata sunt, eruitur alia quoque proprietas, quæ quidem generalis est omnibus omnium graduum æquationibus, sed inductione sola patet, nec huc usque, quo sciamus, ab ullo est demonstrata, quod nimirum tot habeantur radices positivæ, quot habentur mutationes signorum in terminis sibi succedentibus, tot autem negativæ, quot habentur continuationes. Ex: gr: æquatio $x^2 - 6x + 8 = 0$, in qua primus terminus habet (per num. 209) signum positivum, secundus signum negativum, tertius iterum positivum, adeoque signum bis mutatur, habet binas radices positivas $+2$, & $+4$, æquatio $x^2 + 6x + 8 = 0$, in qua signum bis continuatur, radices -2, & -4 ambas negativas, æquatio $x^2 - 6x - 16 = 0$, in qua prius transitur a signo positivo ad negativum, tum signum continuatur, habet (per num. 216) radices $+8$, -2 alteram positivam alteram negativam. Porro ostensum est (num. 211), quotiescunque tertius terminus est negativus, alteram

teram

teram radicem semper esse positivam, alteram negativam, quo quidem casu necessario habetur una mutatio, & una continuatio signi; nam si secundus terminus sit positivus, transitur a primo positivo ad secundum positivum continuando, tum ab eo positivo ad tertium negativum, mutando. Si autem sit negativus, primum habetur mutatio, tum continuatio. Quoties autem ultimus terminus est positivus, ostensum est num. 213 ambas radices esse positivas, vel negativas, prout secundus terminus fuerit negativus, vel positivus, sive prout binæ habebuntur mutationes, vel binæ continuationes. Patet eadem regula & in primo gradu; nam in æquatione $x + p = 0$ valor $x = -p$ erit positivus, si p habet valorem negativum contrarium signo primi termini, contra negativus, si idem sit signum. Quare hæc regula in æquationibus primi, & secundi gradus hic demonstratur.

219. Patet etiam ex iis, quæ demonstrata sunt, num. 211, 212, 213, in æquatione secundi gradus radicem unicam imaginariam esse non posse, sed vel neutram esse, vel ambas. Hęc etiam est generalis proprietas æquationum omnium quorumcumque graduum, ut nimirum radicum imaginariarum numerus par tantum esse possit, ac ejus proprietatis ratio inferius patebit.

220. Ad formam æquationis secundi gradus reducuntur æquationes omnes, quæ habent tres tantum terminos, in quorum postremo deest incognita, in primo autem ea assurgit ad potentiam duplam ejus quam habet in secundo, quæ nimirum habet hanc formam $x^{2m} + px^m + q = o$. Nam posito $y = x^m$, fiet $y^2 + py + q = 0$, adeoque $y = -\frac{1}{2}p \pm \sqrt{\frac{1}{4}pp - q}$, & $x = \sqrt[m]{y} = \sqrt[m]{-\frac{1}{2}p \pm \sqrt{(\frac{1}{4}pp - q.)}}$

221. Sit æquatio $x^4 - 6x^2 + 1 = 0$. Erit $p = -6$,

$q = 1$, $m = 2$, adeoque $x = \pm\sqrt{3 \pm \sqrt{(9-1)}} = \pm\sqrt{3 \pm \sqrt{(8)}}$. quin immo quoniam binomium $3 \pm \sqrt{8}$ est quadratum binomii $1 \pm \sqrt{2}$, cujus nimirum quadratum est $1 \pm 2\sqrt{2} + 2 = 3 \pm 2\sqrt{2} = 3 \pm \sqrt{8}$, erit $x = \pm 1 \pm \sqrt{2}$, & æquatio proposita habebit hasce quatuor radices $1 + \sqrt{2}$, $1 - \sqrt{2}$, $-1 + \sqrt{2}$, $-1 - \sqrt{2}$.

222. Porro an ex binomio hujus formæ $m \pm \sqrt{n}$ extrahi possit radix quadrata, ut hic ex binomio $\sqrt{3} \pm \sqrt{8}$ extrahitur, id ipsum deprehendi potest ope hujusmodi æquationum gradus quarti resolutarum more æquationum gradus secundi, eruendo nimirum earum ope formulas quasdam generales, quæ licet prima fronte videantur implicatiores ipso binomio proposito, adhuc tamen semper ad radicem quæsitam perducunt, quotiescunque ea habetur, sive constet binis terminis irrationalibus, sive altero rationali, altero irrationali; sunt autem satis aptæ ad indicandam Tyroni Algebraicarum solutionum vim multiplicitate radicum omnes problematis partes complectentium.

223. Capiatur formula binomii $x + y$ habentis pro quadrato $x^2 + 2yx + y^2$. Id quadratum ponatur æquale binomio proposito $m + \sqrt{n}$ ita, ut pars illa $x^2 + y^2$, quæ rationalis esse debet etiam in casu, quo x & y radicalem quantitatem contineant, ponatur æqualis parti rationali m, reliquum $2yx$ ponatur $= \sqrt{n}$. Habebuntur binæ æquationes $x^2 + y^2 = m$, $2yx = \sqrt{n}$, & in posteriore quadrando erit $4y^2 x^2 = n$, ac si libeat, eliminato valore y, quærere valorem x, dividendo per $x4^2$ erit $y^2 = \frac{n}{4x^2}$, quo valore substituto in priore

æqua-

æquatione, fiet $x^2 + \frac{n}{4} x^2 = m$, five multiplicando per x^2 fiet $x^4 + \frac{1}{4} n = m x^2$; vel $x^4 - m x^2 + \frac{1}{4} n = 0$; unde methodo jam expofita infertur $x^2 = \frac{1}{2} m \pm \sqrt{\frac{1}{4} m^2 - \frac{1}{4} n} = \frac{1}{2} m \pm \frac{1}{2} \sqrt{m^2 - n} = \frac{m \pm \sqrt{m^2 - n}}{2}$. Hinc autem habentur demum quatuor valores $x = \pm \sqrt{\frac{m \pm \surd (m^2 - n)}{2}}$, combinato utrolibet figno radicis includentis cum utrolibet radicis inclufæ.

224. Inde vero ope æquationis $x^2 + y^2 = m$, adeoque $y^2 = m - x^2$ infertur valor $y^2 = m - \frac{m \pm \sqrt{mm - n}}{2}$. Cumque fit $m = \frac{2m}{2}$; erit $y^2 = \frac{2m - m \mp \sqrt{mm - n}}{2} = \frac{m \mp \sqrt{mm - n}}{2}$ qui valor eft idem prorfus cum valore $x^2 = \frac{m \pm \sqrt{(m^2 - n)}}{2}$ cum hoc folo difcrimine, quod fignum termini radicalis $\surd (mm - n)$ debet in valore y^2 fumi contrarium ei, quod habetur in valore x^2 ita, ut radix illa quæfita $x + y$ fit $\pm \sqrt{\frac{m \pm \surd (mm - n)}{2}} \pm \sqrt{\frac{m \mp \surd (mm - n)}{2}}$, ac figna omnia radicum ambiguarum liceat combinare, ut libuerit, fed radicis inclufæ fignum femper debeat in altero e binis terminis effe contrarium ei, quod habet in altero.

 225. Si-

225. Sine hujusmodi conditione haberentur 16 diversi valores ejus binomii, nam primus terminus seorsum consideratus habet quatuor diversos valores, ut vidimus, ac secundus pariter quatuor, & liceret quemvis e prioribus quatuor combinare cum quovis e posterioribus, adeoque pro quolibet ex ipsis quatuor valoribus prioris haberentur quatuor diversæ radices. Sed octo ex iis haberent in utroque termino idem signum radicis inclusæ. Quoniam enim tam in primo termino, quam in secundo bini valores habent signum radicis inclusæ positivum, bini autem negativum, singuli ex primis quatuor combinati cum binis e quatuor posterioribus habebunt signum idem in radice inclusa, & bini contrarium, adeoque octo valores erunt cum eodem ejusmodi signo, & ad præsentis problematis solutionem non pertinebunt, octo autem alii erunt cum diverso, & radicem quæsitam exhibebunt, qui invenientur combinando quemvis e quatuor valoribus primi termini cum binis secundi, signo contrario affectis, eruntque

$$+\sqrt{\frac{m+\sqrt{(mm-n)}}{2}}\;+\sqrt{\frac{m-\sqrt{(mm-n)}}{2}},$$

$$+\sqrt{\frac{m+\sqrt{(mm-n)}}{2}}\;-\sqrt{\frac{m-\sqrt{(mm-n)}}{2}};$$

$$-\sqrt{\frac{m+\sqrt{(mm-n)}}{2}}\;+\sqrt{\frac{m-\sqrt{(mm-n)}}{2}},$$

$$-\sqrt{\frac{m+\sqrt{(mm-n)}}{2}}\;-\sqrt{\frac{m-\sqrt{(mm-n)}}{2}},$$

$$+\sqrt{\frac{m-\sqrt{(mm-n)}}{2}}\;+\sqrt{\frac{-m+\sqrt{(mm-n)}}{2}},$$

$+\sqrt{m}$

$$+\sqrt{\frac{m-\sqrt{(mm-n)}}{2}} \qquad -\sqrt{\frac{m+\sqrt{(mm-n)}}{2}};$$

$$-\sqrt{\frac{m-\sqrt{(mm-n)}}{2}} \qquad +\sqrt{\frac{m+\sqrt{(mm-n)}}{2}};$$

$$-\sqrt{\frac{m-\sqrt{(mm-n)}}{2}} \qquad -\sqrt{\frac{m+\sqrt{(mm-n)}}{2}}.$$

226. Porro ex his ipsis octo radicibus prima est eadem prorsus, ac quinta cum hoc solo discrimine, quod qui terminus in altera ponitur primo loco, in altera ponitur secundo: secunda pariter est eadem, ac septima, tertia eadem, ac sexta; quarta eadem, ac octava. Quare jam reducuntur ad solas primas quatuor; & earum quævis exhibet radicem binomii $m + \sqrt{n}$ cum hoc discrimine, quod cum ob valorem ambiguum ipsius $\sqrt{n}$, id binomium binos valores habeat, $m + \sqrt{n}$, m, $-\sqrt{n}$; prima & quarta exhibent radicem binomii $m + \sqrt{n}$; secunda, & tertia binomii $m - \sqrt{n}$; quarta autem est ipsa prima negativè accepta, & tertia ipsa secunda pariter negativè accepta. Hoc pacto e 16 valoribus, quos contineret formula $\sqrt{\frac{m-\sqrt{(mm-n)}}{2}}$ $+\sqrt{\frac{m-\sqrt{(mm-n)}}{2}}$. Habita ratione ambiguitatis signorum, octo excluduntur ab ipsa problematis natura, & pertinent ad aliud problema, reliqui octo reducuntur ad quatuor, quorum bini exhibent radicem positivam, & negativam binomii $m + \sqrt{n}$, bini alii radicem pariter positivam, & negativam binomii $m - \sqrt{n}$.

227. Reliqui octo valores pertinerent ad proble-

ma, cujus binæ æquationes essent $x^2 + \frac{n}{y^2} = m$, & $x^2 - y^2 = o$, ex quarum posteriore haberetur $y^2 = x^2$, & $y = \pm x$, ac substituto valore y^2 in prima, fieret $x^2 + \frac{n}{x^2} = m$, & $x^4 - mx^2 + n = o$, ut prius, cum iisdem quatuor valoribus pro x: valores verò y essent iidem, ac valores x ita, ut radicis inclusæ signum deberet in utroqne idem assumi, ac variari posset signum radicis includentis, vel retineri idem: quod quidem si variaretur, fieret $x + y = o$, si maneret, fieret $x + y = 2x$, adeoque ex iisdem octo valoribus quatuor evanescunt, ut $+ \sqrt{\frac{m + \sqrt{(mm - n)}}{2}} - \sqrt{\frac{m \sqrt{(mm - n)}}{2}}$, quatuor alii reducuntur ad unicum terminum, ut $+ \frac{\sqrt{m + \sqrt{(mm - n)}}}{2} + \frac{2\sqrt{m + \sqrt{(mm - n)}}}{2}$, quod reducitur ad $\sqrt{\frac{m + \sqrt{mm - n}}{2}}$ vel $\sqrt{2m + 2\sqrt{(mm - n)}}$. Sed ea huc non pertinent.

228. Porro ut jam applicetur ejusmodi formula $\sqrt{\frac{m + \sqrt{(mm - n)}}{2}} \pm \sqrt{\frac{m - \sqrt{(mm - n)}}{2}}$ ad extractionem radicis ex binomio $m + \sqrt{n}$, substituantur pro m, & n valores sui, & quotiescunque binomium illud habebit radicem extrahibilem, $mm - n$ erit quadratum radicem pariter extrahibilem habens, qua extracta, reducetur formula ad binas radices simplices, & quidem si radix quæsita alterum terminum rationalem habuerit, ex earum altera radix extrahi poterit, secus ex neutra. In binis autem radicis inventæ terminis signum idem adhibendum erit, vel

vel bina contraria, prout propositi binomii bini termini fuerint cum eodem signo, vel cum oppositis.

229. In casu proposito habebatur $3 + \surd 8$. Est igitur $m = 3$, $n = 8$, $mm - n = 9 - 8 = 1$, unde radix extrahi potest. Erit radix quæsita $\surd \frac{3 + \surd (9 - 8)}{2} + \surd \frac{3 - \surd (9 - 8)}{2} = \surd \frac{(3 + 1)}{2} + \surd \frac{(3 - 1)}{2} = \surd 2 + \surd 1 = \surd 2 + 1$, & ob ambiguitatem signi $\surd 2$, habebuntur quatuor valores $+ \surd 2 + 1$, $- \surd 2 - 1$, $+ \surd 2 - 1$, $- \surd 2 + 1$, quarum priores duæ exhibent radicem binomii $3 + \surd 8$, posteriores radicem binomii $3 - \surd 8$. In hoc autem casu alter terminus radicis quæsitæ est rationalis, alter irrationalis.

230. Si fuisset propositum $7 + \surd 40$, haberetur $m = 7$, $n = 40$, $mm - n = 49 - 40 = 9$, unde pariter radix extrahi potest. Radix igitur quæsita esset $\surd \frac{7 + \surd 9}{2} + \surd \frac{7 - \surd 9}{2} = \surd \frac{(7 + 3)}{2} + \surd \frac{(7 - 3)}{2} = \surd 5 + \surd 2$, neutro termino rationali. At ipsius $\surd 5 + \surd 2$ quadratum est $5 + 2 \surd 10 + 2$, sive $7 + \surd 40$ ipsum illud binomium propositum.

231. Si vero fuisset propositum $5 + \surd 8$, esset $m = 5$, $n = 8$, $mm - n = 25 - 8 = 17$, unde cum radix non possit extrahi, consequitur ex ipso illo binomio $5 + \surd 8$ non posse radicem extrahi.

232. Poterit aliquando binomium hujus forme radicem habere, quæ hac methodo non innotescat; sed ad aliam prius formam reducendum erit, & sub hac forma ipsa radicem non habebit. Id autem contingere poterit, cum radicalis terminus binomii propositi radicem habebit extrahibilem.

233. Si proponatur $6 + \surd 9$, erit $m = 6$, n

F 4 $= 9$

$= 9$; $mm - n = 36 - 9 = 27$, unde radix extrahi non poteſt. Et tamen $6 + \sqrt{9} = 6 \pm 3$ habet binos valores 9, & 3, ex quorum priore extrahitur radix rationalis $+ 3$, poſterior habet radicem ſimplicem $\sqrt{3}$. At hæ radices extrahuntur ex illo binomio ad aliam formam redacto; & ſi binomium per extractionem radicis e ſecundo termino ad aliam formam reduci non poterit, ut nunquam revera poterit, cum ſecundus ipſe terminus erit verè irrationalis, nunquam accidet; ut extrahi poſſit e binomio radix, & hac methodo radix ipſa non inveniatur.

234. Supereſt notandum poſtremo loco, utrumque radicis terminum, nimirum tam $\sqrt{\frac{m+\sqrt{(mm-n)}}{2}}$, quam $\sqrt{\frac{m-\sqrt{(mm-n)}}{2}}$ proveniſſe in ſolo illo valore $x = \sqrt{\frac{m \pm \sqrt{(mm-n)}}{2}}$. Id autem contigit, quia ad ipſum problema, & ad æquationes illas $x^2 + y^2 = m$, $2xy = \sqrt{n}$ prorſus indifferenter ſe habebant x, & y ita, ut ſi pro quærendo valore x, quæſitus fuiſſet valor y, eadem prorſus æquatio debuiſſet obvenire pro y, quæ obvenit pro x. Si enim facto $4x^2 y^2 = n$; libuiſſet eliminare potius x, obveniſſet $x^2 = \frac{n}{4y^2}$, & $\frac{n}{4y^2} + y^2 = m$, ſive $y^4 - my^2 + \frac{1}{4}n = 0$ eadem prorſus æquatio, quæ prius, pro x; ac proinde idem debet eſſe valor x, ac y. Sed quoniam ubi alter ex altero eruitur, mutatur ſignum radicis incluſæ; id ſi in altero aſſumitur poſitivum, in altero negativum aſſumendum erit. Semper autem in ejuſmodi caſibus æquatio ſimul exhibebit valorem utriuſque termini, ut hic exhibuit. Sic ſi quærantur bini numeri, quorum ſumma 5, productum

ctum 8, & alter dicatur x, alter y, erit $x + y = 6$, $x y = 8$, & patet, utrunque indifferenter se habere ad hasce æquationes ita, ut altero substituto alterius loco, eadem prorsus æquatio oriri debeat. Hinc si eliminetur y, erit $y = \frac{8}{x}$ adeoque $x + \frac{8}{x} = 6$, $x^2 + 8 = 6x$, $x^2\ \ 6x + 8 = 0$; $x = 3 \pm \surd(9 - 8) = 3 \pm 1$; adeoque $x = 4$, vel $x = 2$. E prima autem ęquatione erat $y = 6 - x$; quare $y = 6 - 3 \mp \surd(9 - 8) = 3 \mp \surd 1 = 3 \mp 1$; nimirum $y = 2$, vel $= 4$. Numeri quęsiti sunt 4, & 2, quos simul in valore ipso x exhibuit æquatio ita, ut posito $x = 4$, sit $y = 2$, & viceversa.

§. X.

De natura, & variis proprietatibus æquationum determinatarum.

235. ÆQuationes determinatæ graduum superiorum oriuntur ex multiplicatione æquationum graduum inferiorum, ac si plures æquationes primi gradus inter se multiplicentur, patebit ipsa æquationum altiorum natura. Sint æquationes $x + a = 0$, $x + b = 0$, $x + c = 0$ &c., quarum radices (per num. 201) sunt $- a$, $- b$, $-$ &c. Si eæ multiplicentur inter se, orietur ex binis æquatio secundi gradus $x^2 + ax + ab = 0$, ex ternis tertii
$$\begin{array}{l} + bx \end{array}$$

$$\begin{array}{llll} x^3 & + a x^2 & + abx & \\ & + b x^2 & + acd & + abc = 0 \\ & + x c^2 & + bcx & \end{array}$$

; & ita porro ex numero m æquationum gradus primi orietur æquatio gradus m, quod patet in hujusmodi productis exhibitis numer. 84. Generaliter autem patet ex binis æquationibus gradus m, & n, provenire æquationem gradus $(m + n)$. Prima enim incipit per x^m, secunda da per x^n, & in iis terminis multiplicatis, nova æquatio (per num. 37) incipiet per x^{m+n}.

236. Si consideretur productum ex iis æquationibus simplicibus patebit, (per num. 85) coefficientem secundi termini esse summam illorum valorum a, b, c, d, &c., coefficientem tertii esse summam productorum e binis, coefficientem quarti summam productorum e ternis, & ita porro, ac demum coefficientem postremi, esse productum simul ex omnibus. Porro quivis ex iis valoribus acceptus cum signo contrario est radix æquationis compositæ. Nam tota æquatio evadit $(x+a) \times (x+b) \times (x+c) \times (x+d)$ &c. $= 0$. Si autem pro x ponatur, exempli gratia, $-b$, erit profecto $x+b=0$, adeoque etiam $x+b$ ductum in $(x+a) \times (x+c) \times (x+d)$ &c. fiet $= 0$, nimirum posito $-b$ pro x æquatio verificabitur, adeoque $-b$ est ejusdem æquationis radix (per num. 194), & eadem est demonstratio pro reliquis.

237. Inde autem infertur primo loco æquationem habere tot radices, quot exprimit exponens gradus, ad quem assurgit, nimirum æquationem secundi gradus duas, tertii tres, & ita porro; quanquam aliquæ ex iis poterunt esse imaginariæ, sive impossibiles. Si enim in æquatione orta ex binis $x+a=0$, $x+b=0$, nimirum $x^2 + ax + bx + ab = 0$, sit $a = h - g\sqrt{-1}$, $b = h + g\sqrt{-1}$, iis valoribus substitutis, æquatio erit $x^2 + 2hx + h^2 + g^2 = 0$, quę nullum valorem imaginarium præsefert, & tamen habet binas radices prorsus imaginarias ob illud $\sqrt{-1}$.

238. Æquatio $x^2 - 6x + 8 = 0$ habet (per num.

num. 209) binas radices $+2$, $+4$, reales, æquatio $x^2 - 6x + 10 = 0$ (per num. 215) binas imaginarias $+3 + \sqrt{-1}$, & $+3 - \sqrt{-1}$, æquatio $x^3 - 3x^2 - x + 3 = 0$ habebit tres radices -1, $+1$, $+3$, ut constabit ponendo quamvis ex iis pro x.

239. Generaliter autem æquatio composita ex quibusvis, & quotcunque æquationibus habebit pro radicibus radices omnes easdem, quas habent componentes. Nam si quis valor positus pro x in una e componentibus efficit ut ea evanescat facta $= 0$, idem positus pro x in composita efficiet pariter, ut ea evadat $= 0$; quidquid enim ex ea positione proveniat in aliis factoribus, si unus ex iis evadit $= 0$, productum debet pariter esse $= 0$, cum nihilum multiplicatum per quancunque quantitatem adhuc remaneat nihilum.

240. Æquationis $x^2 - 6x + 8 = 0$ radices (per num. 209) sunt $+2$ & $+4$, æquationis $x^3 - 3x^2 - x + 3 = 0$ sunt (per num. 238) -1 $+1$ $+3$. Ex earum multiplicatione oritur æquatio $x^5 - 9x^4 + 25x^3 - 15x^2 - 26 + 24 = 0$, atque hujus radices sunt $+2$, $+4$, -1, $+1$ $+3$, ut patebit hos valores substituendo pro x.

241. Hinc autem, ut fructum aliquem jam capiat Tyro, facile est invenire problemata, quæ solvantur tantummodo per datas quasdam quantitates. Si quæratur problema aliquod, quod solvatur tantummodo per numeros 4, & 2, fiat $x = 4$, adeoque $x - 4 = 0$, & pariter $x = 2$, adeoque $x - 2 = 0$: multiplicentur æquationes $x - 4 = 0$, $x - 2 = 0$, & fiat æquatio $x^2 - 6x + 8 = 0$, sive transponendo $x^2 + 8 = 6x$. Quæratur igitur, qui sit is numerus, cujus quadrato si addatur 8, fiet ejus sextuplum: & nullis aliis

numetis

numeris id conveniet præter illos duos 4, & 2. Eodem autem pacto multiplicatis pluribus æquationibus simplicibus habentibus pro radice numeros quoscumque invenientur problemata solvenda per eosdem eruta ex æquationibus earum multiplicatione ortis.

242. Eruitur secundo loco, coefficientem secundi termini esse summam radicum omnium acceptarum cum signis contrariis, coefficientem tertii summam productorum omnium e binis, coefficientem quarti summam productorum e ternis; ac postremum terminum esse productum ex omnibus simul, ut patet ex iis, quæ dicta sunt. Inde autem consequitur, si radices omnes assumantur cum suis signis, summam omnium æquari coefficienti secundi termini accepto cum signo contrario, summam productorum e binis coefficienti tertii accepto cum suo signo, summam productorum ex ternis coefficienti quarti accepto cum signo contrario, & ita porro; productum autem ex omnibus postremo accepto cum suo signo, vel cum contrario, prout æquatio fuerit gradus paris, vel imparis: quia nimirum mutato signorum producentium numero impari, mutatur signum producti, mutato numero signorum pari, manet (per num. 26).

243. Id locum habere in æquationibus secundi gradus ostendimus num. 216. Æquationis tertii gradus $x^3 - 3x^2 - x + 3 = 0$ radices (per num. 238) sunt $-1 + 1 + 3$, eædem acceptæ cum signo contrario sunt $+1$, -1, -3: Harum summa $= -3$; summa productorum ex binis $(-1 \times +1) + (-1 \times -3) + (+1 \times -3) = -1 + 3 - 3 = -1$, productum ex omnibus $+1 \times -1 \times -3 = 3$, & -3, -1, $+3$ sunt coefficiens secundi termini, coefficiens tertii, ac ultimus terminus. Contra vero $-1 + 1 + 3 = 3$, $(-1 \times +1) + (-1 \times +3) + (1 \times 3) = -1 - 3 + 3 = -1$. $-1 \times +1 \times +3 = -3$, quare 3, -1, -3 respondent illis -3, -1, $+3$ ita, ut signum secundi maneat, reliquorum mutetur.

244.

244. Hinc vero si radices æquationis aliæ sint positivæ, aliæ negativæ, & se mutuo destruant, deerit secundus terminus, & viceversa; ac idem dicendum de productis ex multiplicatione binarum, ternarum &c. acceptarum cum signis contrariis. Nam si ea summa evanescat, coefficiens fit $= 0$, & terminus deest, ac si terminus deest, coefficiens est $= 0$, & illa summa evanescit.

245. In æquatione $x^3 - 7x + 6 = 0$ radices sunt $+1$, $+2$, -3, ut substitutio ostendet: est autem $1 + 2 - 3 = 0$.

246. Si autem aliquot æquationis radices fuerint $= 0$, deerunt totidem termini ultimi æquationis, & si aliquot ultimi equationis termini desint, totidem radices erunt $= 0$. Nam postremus terminus cum sit productum ex omnibus radicibus cum contrario signo acceptis, erit $= 0$, si aliqua e radicibus sit $= 0$; coefficiens penultimi termini debet esse summa productorum omnium, quę habentur, ubi assumuntur omnes radices pręter unam, antepenultimi, ubi omnes pręter duas, & ita porro. Quare illa omnia producta habebunt aliquem factorem $= 0$, si plusquam una radix sit $= 0$, hæc, si plusquam duę, & ita porro. Contra ultimus terminus non potest esse $= 0$, nisi aliquis e factoribus sit $= 0$; ac eo casu in productis pertinentibus ad coefficientem penultimi termini, ea, quæ habebunt illam radicem $= 0$, erunt omnia $= 0$, & remanebit productum ex omnibus radicibus præter illam, quod non poterit evanescere, nisi inter eas radices etiam aliqua alia sit $= 0$, & pariter in antepenultimo cum factis $= 0$ iis omnibus productis, quæ ingreditur utralibet ex iis binis radicibus, remaneat tantummodo productum ex reliquis; ut id ipsum desit, debet alia ex iis radicibus, pariter priores duas, esse $= 0$, & ita porro.

247. In æquatione $x^5 - 3x^4 - x^3 + 3x^2 = 0$ carente binis postremis terminis radices sunt -1,

$+1$

$+1, +3. 0, 0$, ut patebit substituendo; & multiplicatis $x+1=0$, $x-1=0$, $x-3=0$, $x-0=0$, $x-0=0$, redit ea æquatio.

248. Quod si in æquatione quavis mutentur signa radicum omnium, mutabuntur tantummodo alterna terminorum signa. Nam summa earum cum signo contrario acceptarum erit eadem sed signum ejus tantummodo mutabitur; producta autem ex binis, ternis &c. manebunt pariter eadem; sed in productis ex numero pari earundem, mutato signo omnium, signum producti manet, in productis ex numero impari mutatur, ut patet nam in quovis producto si mutetur signum unius factoris, mutatur signum producti, quare si mutetur etiam signum secundi, redit in priorem valorem; si tertii iterum mutatur, & ita porro. Ac proinde signum secundi termini mutabitur, tertii manebit, quarti mutabitur, & ita porro.

249. Æquationis $x^3-3x^2-x+3=0$ radices sunt -1, $+1$, $+3$ (per num. 238) Mutentur signa alternorum terminorum, & fiet æquatio $x^3+3x^2-x+3=0$, cujus radices sunt $+1$, -1, -3, ut patebit substituendo. In æquatione $x^3-7x+6=0$ radices sunt $+1$, $+2$, -3: mutatis alternis signis fit æquatio x^3-7x-6, nam $-7x$ est terminus tertius non secundus, qui in ea deest ob coefficientem $=0$; & radices jam sunt $-1-2+3$, ut pariter patebit substituendo.

250. Præterea eruitur, si omnes radices sint negativæ, omnium terminorum signa fore positiva, si omnes sint positivæ, alterna fore positiva, & negativa. Nam in primo casu radices assumptæ cum signo contrario erunt omnes positivæ, adeoque omnia producta positiva; in secundo omnes negativæ, adeoque producta ex numero pari earundem positiva, producta ex numero impari negativa.

251. In æquatione $x^3 + 7x^2 + 14x + 8 = 0$ radices sunt -1, -2, -4; at in æquatione $x^3 - 7x^2$, $+ 14x - 8 = 0$ radices sunt $+1$, $+2$, $+4$, ut patebit substituendo.

252. Monuimus num. 218., generaliter esse omnium æquationum proprietatem, ut tot habeantur radices negativæ, quot habentur in terminis se ordine suo excipientibus continuationes signorum, tot positivæ, quot habentur mutationes: sed id nondum generaliter demonstrari potuisse, quod sciamus, & sola inductione deprehendi. Porro illud hic addendum tantummodo, regulam generalem esse, ubi omnes radices reales sint; nam imaginariæ plerumque possunt haberi, ut libet, pro negativis, vel positivis, immo revera nec positivæ sunt, nec negativæ, sed impossibiles.

253. In æquatione $x^3 - 3x^2 - x + 3 = 0$ in qua sunt binæ mutationes signorum in transitu a primo termino ad secundum, & tertio ad quartum, ac una continuatio a secundo ad tertium, binæ radices $+1$, $+3$ sunt positivæ, & tertia -1 negativa.

254. Hæc ex illa genesi deducuntur pertinentia ad quamvis æquationem determinatam rite ordinatam, & redactam ad formam debitam, ut & alia multa deduci possent, quæ minoris sunt usus. At si præterea æquatio omni fractione careat, alias habet proprietates non omittendas.

255. In primis ejusmodi æquatio nullam habet radicem realem, & rationalem vere fractionariam, quod facile demonstratur, ope hujus theorematis satis manifesti: Fractio, in qua numerator per denominatorem dividi non potest, ut potest in fractione $\frac{8}{4}$, quæ reducitur ad 2, conjuncta cum alia quantitate non potest evadere quantitas integra, nisi etiam illa alia cum qua conjungitur sit fractio eundem denominato-

rem

rem habens. Sit fractio $\frac{8}{3}$, vel $2\frac{2}{3}$ ad hoc ut conjuncta cum alio numero contineat numerum integrum; debet in illo alio numero adesse $\frac{1}{3}$, quod cum priore fractione $\frac{2}{3}$ unitatem compleat, adeoque si conjugatur ex: gr: cum $5\frac{1}{3} = \frac{16}{3}$, fiet $\frac{8}{3} + \frac{16}{3} = 2\frac{2}{3} + 5\frac{1}{3} = 8$!

253. Multiplicetur jam æquatio $x^{m} + ax^{m-1} + bx^{m-2}$ &c. . . . $+ d = 0$ per æquationem $x + \frac{n}{r} = 0$: fiet æquatio $x^{m+1} + ax^{m} + bx^{m-1}$ &c. . . . $+ \frac{n}{r}x^{m} + \frac{an}{r}x^{m-1} + \frac{dn}{r} = 0$. Porro ut coefficiens secundi termini $a + \frac{n}{r}$ sit quantitas integra, debet a habere eundem denominatorem r. Erit igitur a æqualis cuipiam valori $\frac{p}{r}$. Quare $\frac{an}{r} = \frac{pn}{r^2}$. Hinc ad hoc, ut coefficiens tertii termini $b + \frac{an}{r}$, sive $b + \frac{np}{rr}$ sit valor integer, oportebit b habeat denominatorem rr, & sit æqualis alicui valori $\frac{q}{r^2}$. Eodem pacto æquationis $x^{m} + ax^{m-1} + bx^{m-2}$ &c. . . . $+ d$, coefficiens quarti termini debebit habere denominatorem r^3, quinti r^4, postremi r^m. Erit igitur d æqualis alicui valori $\frac{z}{r^m}$, & postremus terminus $\frac{dn}{r}$

novæ

novæ æquationis erit $\frac{nz}{r^{m+1}}$ fractionarius. Ac proinde si æquatio multiplicetur per æquationem primi gradus habentem radicem fractionariam, non potest evitari in æquatione inde orta fractio, cum eo ipso, quod ita disponantur coefficientes, ut in præcedentibus evitetur fractio, in postremo termino evitari non possit. Quare si æquatio composita nullam fractionem continet, nulla ejus radix rationalis fractionaria erit.

257. Generaliter autem est verum, si qua fractio adest in altera ex binis æquationibus, semper aliquam fore etiam in æquatione composita, sed demonstratio generalis est multo operosior. Hinc vero in æquationibus ab omni fractione liberis, si qua radix realis, & rationalis habetur, ea debet esse inter divisores integros ultimi termini, quorum si nullus æquationi satisfacit, tuto concludi potest, nullam radicem ejusmodi æquationis esse rationalem. Nam ultimus terminus coalescit ex multiplicatione omnium radicum cum signo contrario acceptarum, & quivis numerus, qui est divisor cum uno signo, est etiam cum opposito.

258. In æquatione $x^3 - 3x^2 - x + 3 = 0$, ultimus terminus 3 habet divisores tantummodo $+1$, -1 $+3$, -3, qui si substituantur pro x, satisfaciunt omnes præter ultimum. Quare omnes tres ejus radices facile eruuntur. In æquatione $x^3 - 3x^2 + 4x - 2 = 0$, divisores ultimi termini sunt $+1$, -1, $+2$, -2, quibus substitutis, primus satisfacit, cum fiat $1 - 3 + 4 - 2 = 0$, reliquorum autem nullus. Quare ea æquatio habet radicem rationalem unicam $+1$.

259. Et hac quidem methodo radices rationales, si quæ sunt, admodum facile inveniuntur, ubi postremus terminus non ita multos divisores habet. Si autem plures habeat; adhuc non ita difficulter deprehen-

dentur radices rationales; si quæ sint, inveniendo omnes divisores unius dimensionis; methodo exposita num. 74. Nam æquatio, quę habeat pro radice valorem quemvis $-a$, debet posse dividi per æquationem primi gradus $x + a = 0$; cum ex ea componatur.

260. In ęquatione $x^3 - 2x^2 - 13x + 20 = 0$, postremus terminus, 20 nimis multos divisores habet $+1$, -1; $+2$, -2; $+4$, -4; $+5$; -5; $+10$; -10; $+20$; -20; quos omnes per substitutionem experiri infinitum esset. Ejus divisor ea methodo num. 75 invenitur unicus $x - 4 = 0$. Quare unica ejus radix rationalis est $+4$.

261. Et quidem si ęquatio $x^3 - 3x^2 + 4x - 2 = 0$ dividatur per $x - 1 = 0$, habetur $x^2 - 2x + 2 = 0$, cujus radices methodo numeri 208 sunt $1 \pm \sqrt{-1}$ ambę imaginarię; si autem æquatio $x^3 - 2x^2 - 13x + 20 = 0$ dividatur per $x - 4 = 0$; oritur ęquatio $x^2 + 2x - 5 = 0$, cujus radices eadem methodo sunt $-1 \pm \sqrt{6}$ ambę irrationales.

262. Jam vero ad transformationes quasdam, quæ haberi possunt per substitutiones in omnibus æquationibus ordinatis, & debitam formam redactis, ac summo sæpe usui sunt, faciendus gradus.

§. XI.

De transformationibus quibusdam earundem æquationum.

263. In quavis æquatione determinata radices adhuc incognitæ poterunt multiplicari, vel dividi, augeri, vel minui, ut libuerit.

264. Sit æquatio quævis $x^m + px^{m-1} + qx^{m-2} + rx^{m-3}$ &c. . . . $+ t = 0$, cujus radices multiplicare oporteat per a. Ponatur $ax = y$, adeo-

adeoque $x = \frac{y}{a}$; & hoc valore substituto, erit $\frac{y^m}{a^m} + \frac{py^{m-1}}{a^{m-1}} + \frac{qy^{m-2}}{a^{m-2}}$ &c. ... $+ t = 0$; ac multiplicando per a^m; fiet $y^m + apy^{m-1} + a^2qy^{m-2}$ &c. ... $+ a^m t = 0$. Hæc æquatio habet eosdem prorsus coefficientes, quos prior sed multiplicatos per terminos hujus progressionis geometricæ 1, a, a^2, a^3 &c.; ejus autem radices omnes sunt æquales radicibus æquationis præcedentis multiplicatis per a: Quod si fiat $a = \frac{1}{b}$, radices dividentur per b, & singuli coefficientes erunt multiplicati per terminos progressionis $\frac{1}{b}$, $\frac{1}{b^2}$, $\frac{1}{b^3}$; sive divisi per terminos progressionis 1, b, b^2, b^3 &c.

265. Inde eruitur hoc theorema: Si singuli termini æquationis ordinatæ multiplicentur, vel dividantur per singulos terminos cujusvis progressionis geometricæ incipientis ab unitate, omnes radices æquationis multiplicabuntur vel dividentur, per secundum ejusdem progressionis terminum:

266. Æquationis $x^3 - 3x^2 - x + 3 = 0$ radices (per num. 248) sunt -1, $+1$, $+3$. Ducatur in terminos progressionis 1, 3, 9, 27; & fiet æquatio $x^3 - 9x^2 - 9x + 81 = 0$, cujus radices erunt illæ eædem multiplicatæ per 3, sive -3, $+3$, $+9$, ut patebit substituendo hos valores pro x. Contra æquationis $x^3 - 9x^2 - 9x + 81 = 0$ divisis singulis terminis per eosdem terminos 1, 3, 9, 27

redibit æquatio prior $x^3 - 3x^2 - x + 3 = 0$, cujus radices æquabuntur radicibus ipsius diversis per 3.

267. Cavendum tamen, si desit aliquis terminus æquationis; ne perturbetur ordo terminorum progressionis geometricæ respondentium terminis ipsius equationis, sed ii termini progressionis, qui respondent terminis æquationis vacantibus, omittantur.

268. Æquatio $x^3 - 7x + 6 = 0$ caret secundo termino, si eę, quæ per num. 245 sunt ejus radices, $+1$, $+2$, -3 multiplicandæ sint per 2, oportet in progressione 1, 2, 4, 8, omittere secundum terminum & fiet $x^3 - 28x + 48 = 0$, æquatio habens pro radicibus $+2$, $+4$, -6, ut patebit substitutione.

269. Ope hujus theorematis facile ęquatio quęvis liberari potest ab omnibus coefficientium fractionibus. Nimirum multiplicentur singuli termini ęquationis propositę per progressionem geometricam, cujus secundus terminus sit productum ex omnibus omnium ejusmodi fractionum denominatoribus, & patet singulos coefficientium numeratores post ejusmodi multiplicationem debere posse dividi per suos illos denominatores.

270. Sit æquatio $x^3 + \frac{3}{4}x^2 - \frac{2}{5}x + 6 = 0$. Si assumatur progressio 1, 4×5, $4 \times 4 \times 5 \times 5$, $4 \times 4 \times 4 \times 5 \times 5 \times 5$, sive 1, 20, 400, 8000, fiet $x^3 + \frac{3 \times 4 \times 5}{4}x^2 - \frac{2 \times 4 \times 4 \times 5 \times 5}{5}x + 6 \times 4 \times 4 \times 4 \times 5 \times 5 \times 5 = 0$, sive $x^3 + 3 \times 5\, x^2 - 2 \times 4 \times 4 \times 5\, x + 6 \times 4 \times 4 \times 4 \times 5 \times 5 \times 5 = 0$, sive $x^3 + 15x^2 - 160x + 48000 = 0$, æquatio libera ab omnibus coefficientium fractionibus.

271. Porro si denominatores illi aliquos communes divisores habeant, non erit necessarium eos repetere, sed satis est ut secundum assumendę progressionis ter-

terminum ingrediantur omnes non communes e factoribus denominatorum omnium, communibus præterea semel tantum adjectis.

272. In æquatione $x^3 + \frac{3}{10}x^2 - \frac{7}{6}x + 8 = 0$, quoniam $10 = 2 \times 5$, & $6 = 2 \times 3$, satis est adhibere $2 \times 5 \times 3$, & fiet $x^3 + \frac{3 \times 2 \times 5 \times 3}{2 \times 5}x^2 - \frac{7 \times 2 \times 2 \times 5 \times 5 \times 3 \times 3}{2 \times 3}x + 8 \times 2 \times 2 \times 2 \times 5 \times 5 \times 5 \times 3 \times 3 \times 3$ $= 0$, sive $x^3 + 3 \times 3x^2 - 7 \times 2 \times 5 \times 5 \times 3$ $x + 8 \times 2 \times 2 \times 2 \times 5 \times 5 \times 3 \times 3 \times 3 = 0$, nimirum $x^3 + 9x^2 - 1050x^2 + 2166000 = 0$.

273. Cavendum tamen novę equationis radices, ubi inventæ fuerint, dividendas esse per illum secundum progressionis terminum, ut habeantur radices equationis datę. Possunt autem in his casibus tolli fractiones etiam methodo exposita num. 159, multiplicando omnes æquationis terminos per factum ex omnibus denominatoribus; sed eo pacto primus terminus haberet, ut notavimus num. 199. suum coefficientem, quo equatio rite ordinata, & ad debitam formam redacta, carere debet.

274. In æquatione $x^3 + \frac{3}{4}x^2 - \frac{2}{5}x + 6 = 0$, multiplicando per $4 \times 5 = 20$, fit $4 \times 5x^3 + \frac{3 \times 4 \times 5}{4}x^2 \frac{2 \times 4 \times 5}{5}x + 6 \times 4 \times 5 = 0$, sive $20x^3 + 15x^2\ 8x + 120 = 0$, ubi æquatio est libera a fractionibus, sed si liberetur primus terminus a coefficiente dividendo per 20, fit $x^3 + \frac{15}{20}$

$\frac{15}{20}x^2 - \frac{8}{20}x + \frac{120}{20} = 0$, sive iterum $x^3 + \frac{3}{4}x^2 - \frac{2}{5}x + 6 = 0$.

275. Hac methodo potest aliquando liberari æquatio a radicalibus occurrentibus inter coefficeentium factores, cum nimirum assumpto quodam radicali pro primo progressionis termino, radicales æquationis multiplicatione, vel divisione eliduntur, vel complentur, ut radix extrahi possit.

276. In æquatione $x^3 + 4x^2\sqrt{2} - 6x - \frac{8}{\sqrt{2}} = 0$, assumpta progressione $1, \sqrt{2}, 2, 2\sqrt{2}$ fit multiplicando $x^3 + 4 \times 2x^2 - 12x - 16 = 0$, sive $x^3 + 8x^2 - 12x - 16 = 0$, & dividendo $x^3 + 4x^2 - 3x - \frac{8}{4} = 0$, sive $x^3 + 4x^2 - 3x - 2 = 0$.

277. Hac pariter methodo licet sæpe ultimum terminum minuere, ita ut pauciores habeat divisores, quorum ope methodo numeri 257 investigentur radices rationales. Dividendo nimirum terminos æquationis, per terminos progressionis geometricæ res succedet quotiescunque dividi possint omnes, & non incurratur in fractiones.

278. Sit æquatio $x^3 - 6x^2 - 4x + 24 = 0$, cujus postremus terminus 24, habet pro divisoribus numeros, 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24, tam positive, quam negative sumptos. Dividantur singuli termini per terminos progressionis 1, 2, 4, 8, & fiet æquatio $x^3 - 3x^2 - x + 3 = 0$ habens solos quatuor postremi termini divisores $+1$, -1, $+3$, -3, quorum priores tres æquationi satisfaciunt, ut notavimus num. 258. Quare etiam æquationis $x^3 - 6x^2 - 4x + 24 = 0$ radices habebuntur iis multiplicatis per 2, eruntque

$+2$,

$+2$, -2, $+6$, qui soli inter tot illos divisores satisfacient questioni.

279. Potest etiam inverti tota equatio ita, ut postremus terminus fiat primus, penultimus fiat secundus & ita porro, dividendo unitatem per æquationis radicem, posito nimirum $x = \frac{1}{y}$. tum ablata fractione habente y pro denominatore.

280. In æquatione $x^3 - 6x^2 - 4x + 24 = 0$ cujus radices sunt $+2$, -2, $+6$ (per num. 278) posito $x = \frac{1}{y}$, fit $\frac{1}{y^3} - \frac{6}{y^2} - \frac{4}{y} + 24 = 0$, ac multiplicando per y^3 fit $1 - 6y - 4y^2 + 24y^3 = 0$, sive ordinando, ac dividendo per 24, fit $y^3 - \frac{4}{24}y^2 - \frac{6}{24}y + \frac{1}{24} = 0$, cujus equationis radices sunt $+\frac{1}{2}$ $-\frac{1}{2}$ $+\frac{1}{6}$, ut patebit substituendo.

281. Eo autem pacto radix maxima evadit minima, & viceversa, sed signum non mutant. Potest autem obtineri, ut maxima mutetur in minimam, & minima in maximam etiam augendo, vel minuendo radicem adhuc incognitam, idque ita, ut etiam mutetur signum e negativo in positivum, vel viceversa; atque alia etiam multa, & admodum utilia eodem incremento, vel decremento radicum obtinentur. Id autem prestatur ponendo $x = y + h$, ubi valor y evadit minor, vel major, quam x, prout h fuerit valoris positivi vel negativi.

282. Sit æquatio $x^3 + px^2 + qx + r = 0$ posito $x = y + h$, & substituto $\overline{y+h}^3$ pro x^3, $\overline{y+h}^2$ pro x^2, $y+h$ pro x, habebitur sequens equatio.

$$\begin{array}{llll} y^3 + 3hy^2 & + 3h^2y & + h^3 & = 0. \\ + py^2 & + 2hpy & + h^2p & \\ & + qy & + hq & \\ & & + r & \end{array}$$

283. Si æquatione $x^3 - 3x^2 - x + 3 = 0$, cujus radices (per num. 258) sunt -1, $+1$, $+3$; libeat augere singulas radices per numerum 2, ponatur -3 pro p, -1 pro q, $+3$ pro r, & -2 pro h, collecta singulorum coefficientium summa, habebitur æquatio $y^3 - 9y^2 + 23y - 15 = 0$, cujus radices erunt $-1+2$; $+1+2$, $+3$, $+2$; sive 1, 3, 5, ut patebit substituendo eos valores pro y.

284. Si autem ita magnus assumatur valor h, ut augendo radicem, omnia terminorum signa alternentur, jam omnes radices negativæ mutabuntur in positivas, ac maxima negativa jam evadet minima positiva, vel si minuendo, omnia signa evadant positiva; omnes radices positivæ mutabuntur in negativas, & maxima positiva evadet minima negativa; ac si omnibus signis continuatis omnes in primo casu fuissent negagativæ, vel omnibus alternatis, omnes in secundo positivæ, minima etiam utrobique in maximam mutaretur; ut patet, & facile est exempla assumere, & rem experiri.

285. Licebit eo pacto, etiam limites, intra quos radix aliqua continetur deprehendere. Nam si substitutis diversis valoribus pro h, accedat una ex alternationibus signorum in primo casu, vel una e continuationibus in secundo; una e radicibus mutabitur ibi e negativa in positivam, hic e positiva in negativam. Quare inter binos ejusmodi valores h, inter quorum substitutiones illa mutatio facta est, debet consistere aliqua radix, quæ nimirum altero ex illis elisa non fuerat, altero eliditur, & signum contrarium accipit.

286. In æquatione $x^3 + 2x^2 - x + 6 = 0$, habentur binæ alternationes signorum in transitu a secundo termino ad tertium, & a tertio ad quartum, & una continuatio in transitu a primo ad secundum: facto $x + 2 = y$, sive $x = y - 2$, habetur æquatio $y^3 - 4y^2 + 3y + 8 = 0$, in qua pariter binæ sunt alternationes, & una continuatio. Quare nulla radix adhuc e negati-

va migravit in positivam. Facto autem $x = y - 4$ habetur $y^3 - 10y^2 + 31y - 22 = 0$, ubi jam omnes sunt alternationes signorum; adeoque radix negativa migravit in positivam; quæ proinde, si realis est, debet consistere inter -2, & -4, cum $x + 2$ manserit negativi valoris, $x + 4$ migraverit in positivum. Et quidem patebit substitutione, ejus æquationis radicem esse -3.

287. Licebit præterea ex quavis æquatione admodum facile eliminare secundum terminum. Si enim ita assumatur valor ille arbitrarius h, ut sit $3h + p = 0$, sive $3h = -p$, & $h = -\frac{1}{3}p$, secundus terminus omnino evanescet; & quoniam generaliter in quavis æquatione $x^m + px^{m-1}$ &c. $= 0$ facto $y + h = x$, haberi debet post substitutionem $y^m \begin{matrix} + mhy^{m-1} \\ + py^{m-1} \end{matrix}$ &c. $= 0$, patet generaliter eliminari secundum terminum, si fiat $mh + p = 0$, adeoque $h = -\frac{1}{m}p$; & habebitur hic canon generalis pro eliminando secundo termino æquationis ipsius. Assumatur nova incognita, cui addatur coefficiens secundi termini, divisus per numerum, qui exprimit gradum æquationis, cum signo opposito ei, quem habebat ipse coefficiens, & facta substitutione, evanescet secundus terminus.

288. Juxta hunc canonem in æquatione $x^3 - 3x^2 - 2x + 5 = 0$, facto $y + 1 = x$, evanescet secundus terminus, ut patebit ipsa substitutione.

$$\begin{array}{rl} y^3 + 3y^2 + 3y + 1 &= x^3 \\ -3y^2 - 6y - 3 &= -3x^2 \\ -2y - 2 &= -2x \\ +5 &= +5 \\ \hline y^3 \quad * \quad -5y + 1 &= 0 \end{array}$$

289. Quod, si coefficiens secundi termini dividi non possit per exponentem illum; adhuc tamen possunt fractiones evitari, multiplicando prius juxta num. 265 terminos æquationis ipsius, per terminos progressionis geometricæ incipientis ab unitate, cujus progressionis secundus terminus sit ille exponens: ut si æquatio sit $x^3 - 2x^2 + 4x - 8 = 0$, potest multiplicari per 1, 3, 9, 27, & habebitur $x^3 - 6x^2 + 36x - 216 = 0$, & jam 6 poterit dividi per 3, ac assumi $y + 2 = x$.

290. Ipsa secundi termini elisione potest resolvi quævis æquatio secundi gradus, & formula generali provenit eadem prorsus, quam num. 208 invenimus. Sit enim æquatio $x^2 + px + q = 0$, facto $y - \frac{1}{2}pp = x$, & facta substitutione invenietur $y^2 - \frac{1}{4}pp + q = 0$.

$$\begin{array}{rl} y^2 - py + \frac{1}{4}pp &- x^2 \\ + py - \frac{1}{2}pp &= + px \\ + q &= + q \\ \hline y^2 \quad * \quad - \frac{1}{4}pp &= 0 \\ - q & \\ \hline \end{array}$$

291. Ac proinde erit $y^2 = \frac{1}{4}pp - q$, & $y = + \sqrt{}$

($\frac{1}{4}pp$

$(\frac{1}{4}pp - q)$, ac $x = y - \frac{1}{2}p = -\frac{1}{2}p + \sqrt{(\frac{1}{4}pp - q)}$.

292. Ut autem positione $y + h = x$ in æquatione $x^3 + px^2 + qx + r = 0$ eliminavimus num. 287. secundum æquationis terminum per æquationem primi gradus $3h + p = 0$, adeoque $h = -\frac{1}{3}p$, sic posset eliminari tertius, ponendo in formula numeri 282, $h^2 + \frac{2}{3}ph + \frac{1}{3}q = 0$, sed resolvenda esset æquatio secundi gradus ad inveniendum valorem h, qui esset $= -\frac{1}{3}p \pm \sqrt{(\frac{1}{9}p^2 - \frac{1}{3}q)}$ & res succederet, quoties vel valor q non esset positivus, vel ejus triens non esset major quam $\frac{1}{9}p^2$, ne nimirum radix evaderet imaginaria, juxta num. 215.

293. Generaliter autem in omni equationum genere facile demonstratur, quartum terminum eliminari posse per æquationem gradus tertii, quintum per equationem quarti, & ita porro. Postremi vero termini eliminatio restituit æquationem non solum ejusdem gradus cum ea, e qua eliminari debet quod inde consequitur, sed eandem prorsus cum ipsa. Sic in casu præsenti ad eliminandum postremum terminum oporteret in ipsa formula numeri 282 ponere $h^3 + ph^2 + qh + r = 0$, quæ æquatio ab æquatione $x^3 + px^2 + qx + r = 0$ differt solo nomine incognitæ, quæ ibi dicitur h, hic x.

294. Potest quidem tolli penultimus terminus per solam æquationem primi gradus, antepenultimus per equationem secundi, & ita porro, invertendo prius æquationis terminos methodo tradita hoc ipso §. ita, ut primus terminus evaderet ultimus, & viceversa. In æquatione $x^3 + px^2 + q$

$+qx+r=0$, posito $x=\frac{1}{y}$; fit $\frac{1}{y^3}+\frac{p}{y^2}+\frac{q}{y}+$ $r=0$, sive multiplicando per y^3; $1+py+qy^2+ry^3=0$; & ordinando, ac dividendo per r fit $y^3+\frac{q}{r}y^2+\frac{p}{r}y+\frac{1}{r}=0$. In hac æquatione posito $\frac{q}{3r}=y$ tollitur secundus terminus, qui prius fuerat penultimus: & eodem artificio tolluntur postremi per easdem æquationes, per quas tolluntur primi.

295. Cæterum si liceret postremum terminum eliminare, dividendo deinde totam æquationem per x, ea deprimeretur ad gradum inferiorem, ac sensim liceret æquationes quorumcumque graduum reducere ad primum gradum, ac resolvere. Pariter si liceret terminos simul omnes intermedios tollere ope æquationum inferiorum, resolverentur æquationes utcumque altæ. Nam ablatis terminis omnibus intermediis, relinqueretur $x^m+q=0$, adeoque $x^m=-q$ & $x=\sqrt[m]{-q}$; illa autem inferior resolveretur per aliam inferiorem eodem pacto, donec deveniretur ad æquationem gradus primi. Sed methodus tollendi omnes terminos intermedios simul per æquationes inferiores, æquatione proposita huc usque non est inventa, ac methodus, quam tradidimus, unicum tantummodo eliminat, & si nova ejusmodi substitutione tentetur eliminatio novi termini, redit statim is, qui eliminatus fuerat, nec nisi in casu aliquo particulari quorundam coefficientium determinatorum potest hujusmodi methodis eliminari plusquam unicus terminus manente eodem æquationis gradu.

296. Potest tamen iterata hac substitutione in æquationibus tertii gradus post eliminatum secundum terminum, factis positionibus aliis quibusdam, deveniri ad æquationem quandam, quæ licet sit gradus sexti, æquivaleat æquationi gradus secundi, ac resolvatur ipsa, &

ejus

ejus ope resolvatur æquatio proposita gradus tertii. Sed de his in sequenti §.

§. XII.

De æquationibus tertii gradus.

297. ÆQuationum tertii gradus investigationem proponemus fusiorem aliquanto, profundioremque, quod eam Tyroni jam aliquanto provectiori ad exercendam analysim utilissimam esse arbitremur. Agemus autem primum de generalibus quibusdam ejus proprietatibus, tum de depressione quarundam æquationum ad gradum inferiorem, ac deinde de radicum adhuc incognitarum proprietatibus quibusdam in æquatione a secundo termino liberata, & relatione radicis maximæ, vel, ubi binæ imaginariæ sunt, radicis unicæ ad quantitates cognitas æquationem ingredientes, ubi se sponte offerent solutio æquationum habentium binas radices æquales, limites radicum æquationum omnium habentium radices inæquales, & indicium, quo nosse liceat, an omnes radices sint reales, an binæ imaginariæ. Tum progrediemur ad solutionem æquationis carentis etiam tertio termino, deinde ad solutionem æquationis eodem affectæ, ubi inventa generali trium radicum expressione proponemus varios methodos liberandi eandem ab imaginarietate, quæ se realium etiam radicum expressioni immiscet, ac inveniendi per approximationem radices ipsas, quibus expositis, proponemus reductionem æquationum quarundam gradus noni ad tertium, ac ea utemur ad inveniendam radicem cubicam binomii constantis parte rationali, & parte irrationali.

298. In primis æquatio tertii gradus potest habere omnes tres radices reales, vel unam realem, & duas imaginarias. Componi enim potest e binis, altera gradus primi, quæ semper radicem realem habet, altera gradus secundi, quæ binas vel reales habere potest, vel imaginarias.

299. Æqua-

299. Æquatio $x^3 - 6x^2 + 3x + 20 = 0$ componitur ex multiplicatione æquationis primi $x - 4 = 0$ habentis radicem realem 4; & æquationis secundi $x^2 - 2x - 5 = 0$ habentis binas radices reales $1 + \sqrt{6}$, $1 - \sqrt{6}$. Quare habet etiam ipsa tres radices reales, 4, $1 + \sqrt{6}$, $1 - \sqrt{6}$. At æquatio $x^3 - 6x^2 + 13x - 20 = 0$ componitur ex eadem primi $x - 4 = 0$, & ex alia secundi $x^2 - 2x + 5 = 0$ habente binas radices imaginarias $1 + \sqrt{-4}$, $1 - \sqrt{-4}$. Quare & ipsa habet binas radices imaginarias $1 + \sqrt{-4}$, $1 - \sqrt{-4}$, & unam realem 4.

300. Quotiescunque autem binæ radices erunt imaginariæ, radix realis habebit signum contrarium signo postremi termini. Nam æquatio secundi gradus, ut habeat binas radices imaginarias, debet habere postremum suum terminum positivum. Productum igitur omnium trium radicum habebit signum conforme signo radicis realis; cui producto cum æquetur postremus terminus æquationis tertii gradus acceptus cum signo contrario juxta §. 10, habebit is postremus terminus signum contrarium signo radicis realis.

301. Æquatio $x^3 - 6x^2 + 13x - 20 = 0$ composita (per num. 299) ex binis $x - 4 = 0$, $x^2 - 2x + 5 = 0$ habet, ut ibi vidimus, radicem unicam realem 4 positivam, & ejus postremus terminus $- 20$ habet signum negativum. Æquatio $x^3 + 2x^2 - 3x + 20 = 0$ composita ex binis $x + 4 = 0$, $x^2 - 2x + 5 = 0$ habet unicam radicem realem illius prioris $- 4$ negativam, & ejus postremus terminus $+ 20$ habet signum positivum.

302. Quod pertinet ad depressionem æquationum tertii gradus, eæ, quæ componuntur ex inferioribus irrationalitate carentibus, in hoc, ut in quovis alio gradu, per divisionem deprimi possunt ad gradum inferiorem,

rem, ut monuimus num. 193. Sed cum superiores æquationes deprimi possint etiam per divisores plurium dimensionum; æquationes gradus tertii, si possunt deprimi, debent habere etiam divisorem dimensionis simplicis ejus formæ $x+a$, de ejus inventione egimus §. 3. Nam æquationes quarti gradus componi possunt ex binis secundi; at æquationes gradus tertii vel componuntur ex tribus æquationibus gradus primi, vel ex binis altera primi, altera secundi. Quare si nullus divisor invenitur in æquationibus numericis gradus tertii carentibus irrationalitate, & fractione methodo numeri 75, sive si nullam habent rationalem radicem inventam methodo numeri 259, in propria sede omnino sunt, & deprimi non possunt.

303. Æquatio $x^3-6x^2+3x+20=0$ dividi potest per $x-4$ (per num. 299.) prodeunte quoto $x^2-2x-5=0$. Quare resolvitur in duas $x-4=0$, $x^2-2x-5=0$, & habet ex prima radicem $x=4$, e secunda binas radices $x=1+\sqrt{6}$, $x=1-\sqrt{6}$. At æquatio $x^3-6x^2+3x+3=0$ deprimi non potest; cum e quatuor divisoribus postremi termini 1, -1, 3, -3 nullus æquationi satisfaciat.

304. Ad æquationes, quæ per divisionem deprimi possunt, pertinet casus, in quo ultimus terminus desit: tunc enim (per num. 246) una e radicibus debet esse $=0$, & æquatio deprimitur ad secundum gradum, dividendo per x.

305. Si sit $x^3+px^2+qx=0$, dividendo per x erit $x^2+px+q=0$, ut si sit $x^3-2x^2-5x=0$, erit $x^2-2x-5=0$, cujus æquationis radices cum sint $x=1\pm\sqrt{6}$, æquatio proposita habebit tres radices $x=0$, $x=1+\sqrt{6}$, $x=1-\sqrt{6}$.

306. Ut autem progrediamur ad methodos generales resolvendi æquationes tertii gradus, sive eæ deprimi possint,

sint, sive non possint; in primis methodo numeri 287. auferatur secundus terminus, si eo æquatio proposita non careat, & reducetur ad hanc formam $x^3 + qx + r = 0$, in qua contemplanda nonnihil immorabimur.

307. In æquatione ejus formæ quævis e tribus radicibus debet æquari reliquarum summæ cum signo contrario acceptæ, quod est commune æquationibus omnibus secundo termino carentibus, in quibus nimirum summa omnium radicum $= 0$ juxta num. 244. Quare binæ ex iis debent esse negativæ, & una positiva, vel binæ positivæ, & una negativa, cum sine signorum oppositione illa elisio haberi non possit, & bina signa per tres radices distribui non possint, nisi ita, ut una habeat alterum, alterum autem reliquæ binæ. Illa autem, quæ habebit signum contrarium signo reliquarum, debebit esse major singulis, a quibus nimirum cum eodem signo in unam summam coalescentibus eliditur, adeoque erit omnium maxima. Quamobrem ipsa maxima radix habebit signum contrarium signo postremi termini r, cum nimirum reliquarum productum signum conforme habentium debeat semper esse positivum, adeoque productum omnium, sive postremus terminus r cum signo contrario acceptus debeat sequi signum radicis maximæ. Quod si binæ radices fuerint imaginariæ, radix illa unica realis habenda erit pro maxima, cum productum positivum imaginariarum ostendat, eas habendas esse pro simul negativis, vel simul positivis, & argumento inde deducto ostensum sit num. 300, radicem realem habere signum contrarium signo postremi termini.

308. Æquatio $x^3 - 28x + 48 = 0$ habet pro radicibus $+2$, $+4$, -6, ut patebit substituendo. Est autem $2 + 4 = 6$, $2 - 6 = -4$, $4 - 6 = -2$; nimirum summa binarum quarumcunque cum signo contrario accepta æquatur tertiæ. Sunt vero binæ positivæ $+2$, $+4$, & una negativa -6, atque hæc solitaria est omnium maxima, & habet signum contrarium signo postremi termini $+48$. Exemplum æquationis habentis binas radices imagi-

imaginarias, & signum radicis realis contrarium signo postremi termini dedimus num. 301.

309. Quod si in æquatione tertii gradus carente secundo termino binæ radices habentes signum conforme fuerint æquales inter se; singulæ æquabuntur dimidio radicis maximæ cum signo contrario acceptæ, cum nimirum ambæ simul ipsi toti æquales esse debeant. Et quoniam illa tertia radix debet esse realis, ac radicis realis dimidium reale est; patet, binas radices imaginarias in hujusmodi æquationibus nunquam fore inter se æquales.

310. In casu autem binarum radicum æqualium coefficiens tertii termini debet continere tres quadrantes quadrati radicis maximæ, & habere signum negativum, postremus autem terminus continebit quadrantem cubi radicis maximæ. Si enim radix maxima dicatur $2a$, erit ejus quadratum $4aa$, & cubus $8aa$. Porro singulæ e radicibus minoribus erunt $= -a$. Productum earum erit aa, quod ob signa earum conformia erit semper positivum; productum autem maximæ cum utralibet erit $-2aa$, quod ob contrarietatem signorum habebit semper signum negativum. Quare summa productorum, quæ equatur coefficienti tertii termini, erit $-2aa$, $-2aa$, $+aa = -3aa$, semper negativa, & equalis tribus quadrantibus quadrati $4aa$ radicis maxime. Productum autem omnium simul erit $aa \times 2a = 2a^3$ quadrans cubi $8a^3$.

311. In eodem casu binarum radicum equalium erit cubus tertie partis coefficientis tertii termini acceptus cum signo contrario equalis quadrato dimidii postremi termini, sive $-\frac{1}{27}q^3 = \frac{1}{4}rr$. Est enim (per num. 310) ille coefficiens $-3aa$; ac postremus terminus $2a^3$. Quare $\frac{1}{3}q = -aa$, $\frac{1}{2}r = a^3$, ac proinde illius cubus $= -a^6$, hujus quadratum $= a^6$.

312. Quare si in equatione tertii gradus carente secundo termino; fuerit $-\frac{1}{27}q^3 = \frac{1}{4}rr$; sive $\frac{1}{4}rr + \frac{1}{27}q^3 = 0$; æquatio habebit binas radices minores inter se equales, & invenietur radix maxima sumendo vel $\sqrt{(-\frac{4}{3}q} = 2\sqrt{)} - \frac{1}{3}q$, vel $\sqrt[3]{(-4r)}$, ac præmittendo signum contrarium signo postremi termini r; minores vero radices invenientur sumendo dimidium maximæ cum signo contrario.

313 In æquatione $x^3 - 12x + 16 = 0$ est $q = -12$, $r = 16$. Quare $\frac{1}{3}q = -4$, $\frac{1}{2}r = 8$, $\frac{1}{4}rr + \frac{1}{27}q^3 = 64 - 64 = 0$: Ea igitur æquatio habet binas radices minores æquales. Radix maxima eruta e formula $2\sqrt{(-\frac{1}{3}q)} = 2\sqrt{4} = 2 \times \pm 2$, erit -4 præfixo signo negativo, quod est contrarium signo postremi termini $+16$, & eadem eruitur ex formula $\sqrt[3]{(-4r)} = \sqrt[3]{(-4 \times 16)} = \sqrt[3]{(-64)} = -4$. Reliquæ autem erunt $+2$, $+2$. Eas vero esse ejus æquationis radices, patebit substituendo, vel multiplicando per se invicem $x + 4 = 0$, $x - 2 = 0$, $x - 2 = 0$. Patent igitur in hac equatione quecunque diximus de casu binarum radicum equalium, & usus eorundem ad inveniendas ejusmodi equationum radices.

314. Quod si bine radices signum conforme habentes fuerint inequales, sed reales; adhuc coefficiens tertii termini semper erit negativus, postremus terminus opponetur signo radicis maxime, & quadratum radicis maxime erit minus quatuor trientibus illius, majus autem ipso accepto cum signo contrario, cubus vero major quadruplo postremo termino, sive erit radix maxima minor quam $\sqrt{(-\frac{4}{3}q)}$,

$\frac{4}{3} q$), major tamen, quam $\sqrt{-q}$, & major quam $\sqrt[3]{(-4r)}$.

315. Si enim sint radices minores $-a+b$, $-a-b$, quarum summa cum sit $-2a$, erit radix maxima $2a$, illarum productum erit $aa-bb$, producta maximæ cum singulis $-2aa+2ab$, $-2aa-2ab$, ac proinde productorum summa $aa-bb-4aa=-3aa-bb$, productum autem omnium $2a(aa-bb)=2a^3-2abb$. Quare erit $q=-3aa-bb$, qui ob quadrata aa, bb realium quantitatum semper positiva, erit valor semper negativus; at $r=-2a(aa-bb)$, erit valor semper contrarius valori a, nam ob radicem $-a-b$ minorem maxima $2a$ negative accepta, debet esse b minor quam a, adeoque $aa-bb$ valor semper positivus, & $2a(aa-bb)$ ejusdem signi cum a, ac $-2a(aa-bb)$ signi oppositi, quod quidem etiam num. 307 demonstratum fuerat, nimirum postremum terminum sequi signum oppositum signo radicis maximæ. Cum vero sit $-\frac{1}{3}q=aa+\frac{1}{3}bb$, erit $-\frac{4}{3}q=4aa+\frac{4}{3}bb$, quo valore est minus quadratum radicis maximæ $4aa$. Sed ob bb minorem aa, erit $3aa+bb$, sive $-q$ minus, quam $4aa$, nimirum quadratum idem $4aa$ majus coefficiente q accepto cum signo contrario. Demum valor $r=-2a(aa-bb)$ erit minor, quam $2a^3$ ob $aa-bb$ minorem, quam aa, adeoque $4r$ minus, quam $8a^3$ cubus radicis maximæ.

316. Quod si binæ illæ radices fuerint imaginariæ, coefficiens tertii termini poterit esse vel positivus, vel negativus; & si negativus fuerit, quadratum radicis realis erit majus quatuor ejus trientibus, cubus vero ejusdem minor quadruplo postremi termini accepti cum signo contrario.

317. Nam in casu radicum imaginariarum erit b radix quantitatis negativæ, adeoque bb quantitas negativa, &

$-bb$ positiva: ac proinde tertii termini coefficiens $q = -3aa - bb$ vel reducetur ad quantitatem positivam, si terminus positivus $-bb$ eliserit negativum $-3aa$, vel eo existente minore, manebit quantitas negativa, minor tamen, quam $3aa$, sive minor, quam tres quadrantes quadrati $4aa$ radicis maximæ. At $aa - bb$ erit quantitas positiva ob aa semper positivum, & $-bb$ pariter positivum in hoc casu, ac erit major quam aa, adeoque $2a \times (aa - bb)$ sive $-r$ erit quantitas major, quam $2a^3$, sive major, quam quadrans cubi $8a^3$ radicis ejusdem.

318. Porro hinc infertur quantitatem illam $\frac{1}{4}rr + \frac{1}{27}q^3$ quæ in casu binarum radicum æqualium num. 312 fuerat $= 0$, in casu binarum radicum imaginariarum fore semper positivam, in casu omnium realium negativam. Nam demonstratum est num. 315. in casu radicum omnium realium facta radice maxima $= 2a$ fore $4a^2$ minorem, quam $-\frac{4}{3}q$, & $8a^3$ majorem quam $4r$. Quare erit a^2 minor quam $-\frac{1}{3}q$, & a^3 major, quam $\frac{1}{2}r$, ac proinde ibi cubando, hic quadrando, erit a^6 minor, quam $-\frac{1}{27}q^3$ & idem a^6 major quam $\frac{1}{4}rr$, ac proinde $-\frac{1}{27}q^3$ major, quam $\frac{1}{4}rr$, & existente q in eo casu semper negativo, erit $\frac{1}{4}rr + \frac{1}{27}q^3$, quantitas negativa. In casu autem binarum radicum imaginariarum, si q est valoris negativi prorsus contrarium accidet, cum demonstratum sit num. 317, esse $4a^2$ majorem quam $-\frac{4}{3}q$, & $8a^3$ minorem, quam $4r$. Quod si q fuerit valoris positivi, patet $\frac{1}{4}$

$rr + \frac{1}{27}$

$rr + \frac{1}{27}q^3$ fore quantitatem penitus positivam.

319. Hoc theorema magno deinde futurum usui sic etiam immediate demonstratur. Capiatur æquatio secundi gradus $x^2 + 2ax + aa - 3c = 0$, cujus radices cum sint $-a + \sqrt{-3c} \ldots -a - \sqrt{3c}$, ea continebit binas radices reales, vel binas imaginarias prout c fuerit valoris negativi, vel positivi, nimirum prout $-3c$ fuerit e contrario valoris positivi, vel negativi. Ea, ut efficiat æquationem tertii gradus carentem secundo termino, debet duci in æquationem $x - 2a = 0$, ac exurget æquatio tertii gradus

$$\begin{aligned} x^3 &- 3aax - 2a^3 = 0. \\ &- 3cx + 6ac \end{aligned}$$

In hac æquatione erit $q = -3aa - 3c$, $r = -2a^3 + 6ac$; ac proinde $\frac{1}{3}q = -aa - c$, $\frac{1}{2}r = -a^3 + 3ac$, $\frac{1}{27}q^3 = -a^6 - 3a^4c - 3a^2c^2 - c^3$, & $\frac{1}{4}rr = a^6 - 6a^4c + 9a^2c^2$. Quare $\frac{1}{4}rr + \frac{1}{27}q^3 = -9a^4c + 6a^2c^2 - c^3 = -c \times (9a^4 - 6a^2c + c^2) = -c(3a^2 - c)^2$, qui valor, ob quadratum $(3a^2 - c)^2$ semper positivum, erit positivus, vel negativus, prout e contrario valor c fuerit negativus, vel positivus, sive prout binæ æquationis radices imaginariæ fuerint; vel omnes reales.

320. Ut in exemplis numericis ab hoc postremo sumamus exordium, in æquatione $x^3 - 30x + 36 = 0$, quæratur, an omnes radices sint reales, an binæ imaginariæ. In ea est $r = 36$, $\frac{1}{2}r = 18$, $q = -30$, $\frac{1}{3}q = -10$, $\frac{1}{4}rr + \frac{1}{27}q^3 = 324 - 1000 = -676$. Cum

igitur ea quantitas sit negativa, omnes ejus æquationis radices reales sunt. At in æquatione $x^3 + 3x - 14 = 0$ ex eo ipso, quod tertius terminus sit positivus, constat, binas radices esse imaginarias. Quod si esset $x^3 - 3x - 14 = 0$, esset $\frac{1}{2}r = -7$, $\frac{1}{3}q = -1$, $\frac{1}{4}rr + \frac{1}{27}q^3 = 49 - 1 = 48$, quæ quantitas cum sit positiva, infertur, adhuc binas ejus radices esse imaginarias.

321. Jam vero primæ æquationis $x^3 - 30x + 36 = 0$ radix maxima debet esse minor quam $2\sqrt{(-\frac{1}{3}q)}$ & major, quam $\sqrt{-q}$, ut etiam major, quam $\sqrt[3]{4r}$: nimirum debet esse minor, quam $2\sqrt{10}$, sive, quam $\sqrt{40}$, & major, quam $\sqrt{30}$, qui sunt limites satis arcti, ut pariter debet esse major, quam $\sqrt[3]{36}$. Hinc cum reliquæ radices debeant esse minores ipsa maxima, quævis ejus æquationis radix debet esse minor, quam $\sqrt{40}$, quod, ubi ope divisorum postremi termini 36 quæritur an ulla habeatur radix rationalis, excluderet 36, 12, 9, & relinqueret tentandos tantum 6, 4, 3, 2, 1. Sed si radix ipsa maxima forte sit rationalis, ea conclusa inter limites $\sqrt{40}$, $\sqrt{30}$, alia esse non potest nisi 6, & ea ipsa cum signo negativo ob postremum terminum $+36$ positivum. Et quidem substituto -6 equationi satisfit, ac ea divisa per $x + 6$ relinquit $x^2 - 6x + 6 = 0$, cujus radices $3 + \sqrt{3}$, $3 - \sqrt{3}$. Quare propositę ęquationis radices omnes reales sunt -6, $3 + \sqrt{3}$, $3 - \sqrt{3}$, quarum prima illa maxima est. Ejus autem quadratum 36 & est minus; quam $-\frac{4}{3}q$ sive quam 40, & est majus, quam $-q$, sive quam 30, ac pariter ejus cubus 216 major, quam $4r$, sive quam 144.

322. Secundæ autem æquationis $x^3 + 3x - 14 = 0$ radix realis unica debet esse minor, quam $\sqrt[3]{4r}$, nimirum minor, quam $\sqrt[3]{-56}$, adeoque adhuc minor, quam $\sqrt[3]{64}$, nimirum minor, quam 4. Quare cum ea, si rationalis est, debeat esse inter divisores postremi termini 14, & ob -14 negativum, debeat esse positiva, vel erit 1, vel 2. Hæc secunda satisfacit æquationi, ac, instituta divisione per $x - 2$, invenitur $x^2 + 2x + 7 = 0$, cujus radices imaginariæ $-1 \pm \sqrt{-6}$: radicis autem 2 cubus 8 minor est, quam $4r = 56$.

323. Demum in tertia æquatione $x^3 - 3x - 14 = 0$ radix unica realis debet non solum esse minor quam $\sqrt[3]{4r}$, sive quam $\sqrt[3]{56}$, sed etiam major quam $2\sqrt{(-\frac{1}{3}q)}$, sive quam $2\sqrt{1}$, vel quam 2. Quare debet esse minor, quam 4, major quam 2, adeoque non potest esse nisi ± 3, qui numerus cum non habeatur inter divisores postremi termini 14, ea æquatio rationalem radicem non habet, nec potest deprimi per divisionem.

324. His perspectis progrediamur ad casum; in quo in formula generali $x^3 + qx + r = 0$, elimito secundo termino, desit etiam tertius, ac existente $q = 0$ reducatur ad formam $x^3 + r = 0$. Hujusmodi æquatio resolvetur methodo exposita num. 165 vel 204; erit enim $x^3 = -r$, & $x = \sqrt[3]{-r}$. Hæc autem expressio continebit tres valores, unum realem, cum (per num. 31) unica sit radix realis cubica, & binas imaginarias ejus formæ, quam invenimus num. 97, nimirum si ponatur $r = -a^3$, erit $x^3 = a^3$ & tres valores erunt $x = a$, $x = a \times$

$\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$, $x = a \times \frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$.)

325. Hujusmodi autem binæ radices imaginariæ ex ipsa æquatione $x^3 - a^3 = 0$ facile deducuntur; ac simul colligitur nullas alias haberi præter eas tres tertias radices. Cum enim ex ea æquatione eruatur $x^3 = a^3$, & $x = a$, si ea ipsa dividatur per $x - a$, prodit æquatio $x^2 + ax + a^2 = 0$, qua resoluta (per num. 228) habetur $x = -\frac{1}{2}a \pm \sqrt{(\frac{1}{4}aa - aa)} = -\frac{1}{2}a \pm \sqrt{(-\frac{3}{4}aa)} = -\frac{1}{2}a \pm \frac{1}{2}a\sqrt{-3} = a \times (\frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2})$. Quare si est $x^3 = a^3$, adeoque $x^3 - a^3 = 0$, debet x habere unum ex iis tribus valoribus.

326. Si sit $a = 1$, erunt tres unitatis radices tertiæ 1, $\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$, $\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$, ac quantitatis cujusvis radices tertiæ habebuntur, si ejus radix realis ducatur in hosce tres valores. Numeri 64 radices tertiæ erunt 4×1, $4 \times \frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$, $4 \times \frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$.

327. Porro harum etiam imaginariarum radicum usus nobis jam occurret in resolutione æquationum affectarum tertio termino, ac proinde non erit abs re eas considerare diligentius.

328. In primis singularum e radicibus 1, $\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$, $\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$ cubus erit 1, ut de prima patet, de reliquis videbimus §. 4, Deinde binarum imaginariarum summa est -1,

cum sit $\frac{-2}{2}$, productum autem est 1; cum sit $\frac{1+\sqrt{-3}-\sqrt{-3}+3}{4}=\frac{1+3}{4}=\frac{4}{4}$. Id autem patet etiam ex eo, quod eæ radices oriantur ex æquatione $x^2+ax+aa=0$, sive posito 1 pro a, $x^2+x+1=0$, cujus coefficiens secundi termini, sive summa radicum cum contrario signo acceptarum est 1, & postremus terminus, sive earum productum pariter 1.

329. Hinc consequitur binas illas radices imaginarias non esse habendas pro æqualibus illi reali 1; cum earum summa sit ipsi æqualis, quæ quidem nec haberi debent pro æqualibus inter se, cum earum altera sit summa quantitatum $-\frac{1}{2}$, $+\frac{1}{2}\sqrt{-3}$, altera earundem differentia, ut supra etiam generaliter demonstravimus num. 309, in æquatione tertii gradus carente secundo termino binas radices imaginarias non posse esse inter se æquales. Ambæ autem habendæ erunt pro negativis, cum earum productum positivum 1 ostendat, utramque habere idem signum, & summa earum negativa -1 oriri non possit e binis quantitatibus positivis. Ac ea pariter omnia cum antea demonstratis apprime congruunt.

330. Jam vero ut exhibeamus generalem solutionem in formula $x^3+qx+r=0$, ponatur $z+u=x$, & facta substitutione habebitur.

$$\begin{array}{llll} z^3+3uz^2 & +3u^2z+u^3 & = x^3 \\ +qz & +qu & = qx \\ & +r & = r \end{array}$$

331. Ibi cum binæ novæ quantitates z, & u introdu-

troductæ sint, ut summa omnis sit $= 0$, licebit in binas partes summam dividere, & positis singulis $= 0$ derivare binas æquationes, quæ illas novas incognitas determinent. Ponatur igitur $z^3 + r + u^3 = 0$, & $3uz^2 + 3u^2z + qz + qu = 0$. In hac secunda æquatione dividendo per $z + u$, habebitur $3uz + q = 0$, ac $u = -\frac{q}{3z}$ adeoque $u^3 = -\frac{q^3}{27z^3}$. Eo autem valore substituto in prima æquatione, fiet $z^3 + r - \frac{q^3}{27z^3} = 0$, sive $z^6 + rz^3 - \frac{1}{17}q^3 = 0$; qua æquatione resoluta ob z^6 & z^3 more æquationum gradus secundi methodo numeri 220, erit $z^3 = -\frac{1}{2}r \pm \sqrt{(\frac{1}{4}rr + \frac{1}{27}q^3)}$ adeoque $z = \sqrt[3]{-\frac{1}{2}r \pm \sqrt{(\frac{1}{4}rr + \frac{1}{27}q^3)}}$.

332. Invento valore z, invenire licet valorem u, vel ope æquationis $z^3 + r + u^3 = 0$, vel ope æquationis $3uz + q = 0$. Ex prima fit $u^3 = -r - z^3 = -r + \frac{1}{2}r \mp \sqrt{(\frac{1}{4}rr + \frac{1}{27}q^3)} = -\frac{1}{2}r \mp \sqrt{(\frac{1}{4}rr + \frac{1}{27}q^3)}$, ac $u = \sqrt[3]{-\frac{1}{2}r \mp \sqrt{(\frac{1}{4}rr + \frac{1}{27}q^3)}}$ ita, ut si pro z assumatur valor positivus in radice inclusa, & $z = \sqrt[3]{-\frac{1}{2}r + \sqrt{(\frac{1}{4}rr + \frac{2}{27}q^3)}}$ pro u debeat idem assumi negativus, & $u =$

$\sqrt[3]{-}$

$\sqrt[3]{-\frac{1}{2}r-\sqrt{(\frac{1}{4}rr+\frac{1}{27}q^3)}}$, contra vero si pro z assumatur $\sqrt[3]{-\frac{1}{2}r-\sqrt{(\frac{1}{4}rr+\frac{1}{27}q^3)}}$ obveniat $u=\sqrt[3]{-\frac{1}{2}r+\sqrt{(\frac{1}{4}rr+\frac{1}{27}q^3)}}$. Quamobrem valor $x=z+u$ erit $\sqrt[3]{-\frac{1}{2}r+\sqrt{(\frac{1}{4}rr+\frac{1}{27}q^3)}}+\sqrt[3]{-\frac{1}{2}r-\sqrt{(\frac{1}{4}rr+\frac{1}{27}q^3)}}$, vel $\sqrt[3]{-\frac{1}{2}r-\sqrt{(\frac{1}{4}rr+\frac{1}{27}q^3)}}+\sqrt[3]{-\frac{1}{2}\pm\sqrt{(\frac{1}{4}rr+\frac{1}{27}q^3)}}$ quod eodem redit, cum solum binorum terminorum mutetur ordo, & summa sit prorsus eadem, ipsis terminis iisdem existentibus utrobique.

333. Ope æquationis $3uz+q=0$ obvenisset valor $u=\frac{-q}{3z}=\frac{-q}{3\sqrt[3]{-\frac{1}{2}r+\sqrt{(\frac{1}{4}rr+\frac{1}{27}q^3)}}}$; qui magis implexus est, sed eodem reducitur. Nam si multiplicentur invicem $\sqrt[3]{-\frac{1}{2}r+\sqrt{(\frac{1}{4}rr+\frac{1}{27}q^3)}}$, & $\sqrt[3]{-\frac{1}{2}r-\sqrt{(\frac{1}{4}rr+\frac{1}{27}q^3)}}$; habetur $\sqrt[3]{(\frac{1}{4}rr-\frac{1}{4}rr-\frac{1}{27}q^3)}=\sqrt[3]{(-\frac{1}{27}q^3)}=-\frac{1}{3}q$: ac proinde si $-\frac{1}{3}q$ dividatur per eorum valorum alterum, prodit alter, & $\frac{-q}{3\sqrt[3]{-\frac{1}{2}r\pm\sqrt{(\frac{1}{4}rr+\frac{1}{27}q^3)}}}$ est

est idem, ac $\sqrt[3]{-\frac{1}{2}r \mp \sqrt{(\frac{1}{4}rr + \frac{1}{27}.q^3)}}$.

334. Potuisset ope æquationum $z^3 + r + u^3 = 0$, & $3uz + q = 0$ erui prius valor u, tum ex eo deduci valor z; & quoniam eas æquationes ii bini valores u, & z prorsus eodem modo ingrediuntur; idem valor prodiisset pro u, qui prodiit pro z, & viceversa. Fuisset nimirum e secunda æquatione $z^3 = \frac{-q^3}{27u^3}$, ac inde in prima $\frac{-q^3}{27u^3} + r + u^3 = 0$, sive $u^6 + ru^3 - \frac{1}{27}q^3 = 0$; $u = \sqrt[3]{-\frac{1}{2}r \pm \sqrt{(\frac{1}{4}rr + \frac{1}{27}q^3)}}$, & eadem prorsus methodo $z = \sqrt[3]{-\frac{1}{2}r \mp \sqrt{(\frac{1}{4}rr + \frac{1}{27}q^3)}}$. Idcirco autem, uterlibet valorum z, & u quæratur, provenit simul valor utriusque, & si alter deinde cum signo positivo assumitur, alter negativum habebit, ac viceversa, quod etiam supra notavimus num. 234. in casu prorsus simili.

335. Jam vero formula $\sqrt[3]{-\frac{1}{2}r + \sqrt{(\frac{1}{4}rr + \frac{1}{27}q^3)}} + \sqrt[3]{-r - \frac{1}{2}\sqrt{(\frac{1}{4}rr + \frac{1}{27}q^3)}}$ in illa radice inclusa $\sqrt{(\frac{1}{4}rr + \frac{1}{27}q^3)}$ imaginarietatem involvet, quotiescunque valor q fuerit negativus, & $\frac{1}{27}q^3$ majus quam $\frac{1}{4}r^2$ nimirum quotiesunque tertius terminus æquationis fuerit negativus, & cubus ejus trientis major quadrato dimidii postremi termini: in cæteris autem casibus omnibus formula ab imaginarietate libera erit (Nam $\frac{1}{4}rr$ cum sit quadratum quan-

ti 1atitatis realis, erit semper valoris positivi, ac proinde $\frac{1}{4}rr + \frac{1}{27}q^3$ non potest esse valoris negativi, nisi sit valoris negativi q, & $\frac{1}{27}q^3$ superet $\frac{1}{4}rr$.

336. Porro imaginarietas illa habebitur, quotiescunque omnes tres æquationis radices reales erunt, & eadem excludetur, quotiescunque una radix erit realis, & binæ imaginariæ. Nam num. 318 ostendimus, quantitatem $\frac{1}{4}rr + \frac{1}{27}q^3$ fore negativam, quotiescumque omnes æquationis radices reales erunt, positivam, quotiescunque binæ fuerint imaginariæ.

337. Considerando autem eamdem formulam $\sqrt[3]{-\frac{1}{2}r + \sqrt{(\frac{1}{4}rr + \frac{1}{27}q^3)}} + \sqrt[3]{-\frac{1}{2}r - \sqrt{(\frac{1}{4}rr + \frac{1}{27}q^3)}}$ ea, quæ quidem prima fronte videtur continere valorem unicum; potest habere valores 9 diversos. Si enim $-\frac{1}{2}r + \sqrt{(\frac{1}{4}rr + \frac{1}{27}q^3)}$ dicatur c; $\sqrt[3]{-\frac{1}{2}r + \sqrt{(\frac{1}{4}rr + \frac{1}{27}q^3)}}$ habebit (per n. 326) hosce tres diversos valores, c, sive $c \times 1$, $c \times \frac{-1+\gamma-3}{2}$, $c \times \frac{-1-\gamma-3}{2}$, & pariter si $-\frac{1}{2}r - \sqrt{(\frac{1}{4}rr + \frac{1}{27}q^3)}$ dicatur e, secundus formulæ terminus habebit quemvis ex hisce tribus valoribus, e, $e \times \frac{-1+\gamma-3}{2}$, $e \times \frac{-1-\gamma-3}{2}$

Quare si singuli e prioribus tribus valoribus conjungantur cum quovis e tribus posterioribus, orientur 9 diversæ combinationes. Sed tres tantum ex iis 9 valoribus formulæ ad præsentem quæstionem pertinent, & exhibent ternas æquationis radices, nimi-

nimirum $c+e$, $c\times\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}+e\times\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$, $c\times\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}+e\times\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$: Nam ex vi æquationis $3uz+q=0$, sive $uz=-\frac{1}{3}q$, binarum radicis partium u, & z productum debet esse $-\frac{1}{3}q$, adeoque semper idem: Assumptis igitur valoribus c & e habentibus formam realem, e cæteris ii solum una conjugi possunt, qui invicem multiplicati exhibeant ce. Porro cum ex tribus radicibus 1, $\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$, $\frac{-1-\sqrt{3}}{2}$ solum prima in se ducta, & secunda, ac tertia invicem multiplicatæ efficiant 1, ut patebit multiplicanti, eæ solum conjungi possunt ita, ut vel adhibeatur unitas cum utroque valore c & e; vel ponatur prima e binis imaginariis cum c, & secunda cum e, vel viceversa secunda cum c, & prima cum e.

338. Porro binomii hujus formæ $m+\sqrt{n}$, quam nimirum formam habet $-\frac{1}{2}r\pm\sqrt{(\frac{1}{4}rr+\frac{1}{27}q^3)}$, radix cubica extrahi quandoque potest habens formam eandem ita, ut radicalis termini signum in radice sit idem, ac in cubo. Nam si fiat cubus quantitatis $a\pm\sqrt{b}$ habebitur (per n. 99) $a^3\pm3a^2\sqrt{b}+3ab\pm b\sqrt{b}=a^3\pm3ab+\sqrt{(3a^2+b)^2 b}$, ubi si a^3+3ab dicatur m, $(3a^2+b)^2 b$ dicatur n, habebitur $m\pm\sqrt{n}$, formæ ejusdem cum $a\pm\sqrt{b}$. Sic binomii $1+\sqrt{2}$ cubus est $1+3\sqrt{2}+3\times2+2\sqrt{2}=7+5\sqrt{2}=7+\sqrt{50}$, binomii $1-\sqrt{2}$ cubus $1-3\sqrt{2}+3\times2-2\sqrt{2}=7-5\sqrt{2}=7-\sqrt{50}$. Quare si

radix

radix cubica valoris $-\frac{1}{2}r+\sqrt{(\frac{1}{4}rr+\frac{1}{27}q^3)}$ dicatur $m+\sqrt{n}$, adeoque radix cubica valoris $-\frac{1}{2}r-\sqrt{(\frac{1}{4}rr+\frac{1}{27}q^3)}=m-\sqrt{n}$; tres illæ radices æquationis propositæ reducentur ad simpliciorem expressionem, erit enim $c=m+\sqrt{n}$, $e=m-\sqrt{n}$. Quare $c+e=2m$. Deinde $c\times\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}=(m+\sqrt{n})\times\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}=\frac{-m+m\sqrt{-3}-\sqrt{n}+\sqrt{-3n}}{2}$ & $e\times\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}=(m-\sqrt{n})\times\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}=\frac{-m-m\sqrt{-3}+\sqrt{n}+\sqrt{-3n}}{2}$, quorum summa evadit $\frac{-2m+2\sqrt{-3n}}{2}=-m+\sqrt{-3n}$. Demum eodem pacto $c\times\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}=(m+\sqrt{n})\times\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}=\frac{-m-m\sqrt{-3}-\sqrt{n}-\sqrt{-3n}}{2}$; & $e\times\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}=(m-\sqrt{n})\times\frac{-2+\sqrt{-3}}{2}=\frac{-m+m\sqrt{-3}+\sqrt{n}-\sqrt{-3n}}{2}$, quorum summa $\frac{-2m-2\sqrt{-3n}}{2}=m-\sqrt{-3n}$:

339. Igitur tres radices æquationis propositæ erunt $2m$, $-m+\sqrt{-3n}$, $-m-\sqrt{-3n}$, ubi patet, primam radicem fore semper realem elisa imaginarietate, quæ forte involveretur in illo $\sqrt{n}$, reliquas fore imaginarias, ubi n fuerit valoris positivi, reales, ubi negativi, & cum valor n debeat habere idem signum, ac illud $\frac{1}{4}rr+\frac{1}{27}q^3$, unde ortum ducit, patet tres radices

dices fore reales, vel unam realem, & binas imaginarias, prout in valore $\sqrt{(\frac{1}{4}rr + \frac{1}{27}q^3)}$ involvetur imaginarietas, vel excludetur, quod supra alia methodo generaliter demonstravimus.

340. Quod si $\frac{1}{4}rr + \frac{1}{27}q^3$ fuerit $= 0$, in eo casu etiam $\sqrt{n}$ erit $= 0$, nam binomii $a + \sqrt{0}$ cubus est $a^3 + \sqrt{0}$ & binomii $a - \sqrt{0}$ pariter $a^3 - \sqrt{0}$. Quare in eo casu tres radices sunt $2m$, $-m$, $-m$, nimirum is casus pertinet ad binas radices minores æquales ut supra demonstravimus.

341. Porro ex iis omnibus, quæ demonstrata sunt consequitur, imaginarietatem illam valoris $\sqrt{(\frac{1}{4}rr + \frac{1}{27}q^3)}$ non indicare impossibilitatem radicis, cum in eo ipso casu, in quo ejusmodi imaginarietas habetur, omnes tres radices reales sint, & ipsa imaginarietas binorum terminorum elidatur, ac se mutuo destruat, sed impossibilem esse suppositionem illam, quæ num. 331 fit ad formulam inveniendam. Nimirum in illa æquatione $z^6 + rz^3 - \frac{1}{27}q^3 = 0$ impossibilitas latet. Nam in casu, in quo q est quantitas negativa, & $\frac{1}{27}q^3$ major, quam $\frac{1}{4}rr$, nulla quantitas est possibilis, cujus quadratum una cum ipsa ducta in r æquetur $\frac{1}{27}q^3$, quod ad illam equationem requiritur. Ac proinde licet x habeat valorem realem, fieri non potest ut dividatur in duas partes z, & u cum iis conditionibus, ex quibus oriatur æquatio $z^6 + rz^3 - \frac{1}{27}q^3 = 0$.

342. Impossibilitas autem, ac imaginarietas in methodo, qua radicis formula invenitur, omnino involvi

debet,

debet, quotiescunque omnes tres radices æquales sunt; & id quidem continget omnino, quotiescunque investigatur formula exprimens radicem cujuscunque æquationis habentis exponentem imparem, & plusquam unam radicem realem. Cum enim, ubi plures radices habet æquatio, quævis radix eodem prorsus pacto respiciat æquationem, & ejus conditiones impleat, nulla formula eruta ex solis iis, quæ æquatio ipsa suppeditat, poterit exhibere potius unam, quam aliam. Nam ex ipsis Logicę elementis, immo ex rectæ rationis usu constat, ex antecedenti prorsus indifferenti ad plures conclusiones, non posse unam potius deduci, quam aliam. Quare si fieri potest, ut aliquam radicem formula exprimat, debet omnes simul exprimere.

343. Jam vero cum in quavis æquatione imaginariarum radicum numerus par esse debeat, ut monuimus num. 219, & in æquatione gradus imparis numerus omnium radicum impar (per num. 237); omnino consequitur in ęquatione gradus inparis realium radicum numerum non posse non esse imparem.

344. At nulla formula algebraica realibus terminis constans potest exprimere numerum radicum imparem unitate majorem. Nam si nullos radicales terminos involvat, valorem unicum præbebit, si habebat radicales exponentis imparis, ipsi unicum valorem realem habere possunt (per num. 26), licet habere possint plures imaginarios juxta n. 97. Quare ipsi etiam algebraicam formulam ad unicum valorem determinant. Radicales autem exponentis paris semper vel binos habebunt valores reales singuli, vel nullos, quod ex num. 40. facile deducitur. Quamobrem hujusmodi radicales termini possunt exhibere parem numerum valorum realium formulæ, imparem omnino non possunt. Ac proinde si qua formula impossibilitate carens exhiberet radicem realem æquationis imparis habentis plures radices reales, id præstaret; quod fieri non potest; adeoque, qui in æquatione tertii gradus habente omnes radices reales formulam imaginarietate carentem quærit, is profecto oleum, & operam perdit.

345. Ut tota resolutionis ratio, in numericis equationibus evadat multo magis manifesta, sit equatio $y^3 - 6y^2 + 3y + 20 = 0$. Posito $x + 2 = y$ ad eliminandum secundum terminum, & facta substitutione erit $x^3 - 9x + 10 = 0$. Ea æquatione comparata cum generali $x^3 + qx + r = 0$, erit $q = -9$, $r = 10$, $-\frac{1}{2}r = -5$, $\frac{1}{3}q = -3$, $\frac{1}{4}rr + \frac{1}{27}q^3 = 25 - 27 = -2$. Quare $x = \sqrt[3]{(-5 + \sqrt{-2})} + \sqrt[3]{(-5 - \sqrt{-2})}$; ubi cum in $\sqrt{-2}$ involvatur imaginarietas, omnes tres æquationis radices reales sunt. Porro binomii $-5 + \sqrt{-2}$ radix cubica est $1 + \sqrt{-2}$, cum hujus cubus sit $1 + 3\sqrt{-2} + 3 \times -2 - 2 \times \sqrt{-2} = -5 + \sqrt{-2}$, adeoque binomii $-5 - \sqrt{-2}$ radix cubica $1 - \sqrt{-2}$. Erit igitur $m = 1$, $n = -2$, & proinde $2m = 2$, $-m + \sqrt{-3n} = -1 + \sqrt{6}$, $-m - \sqrt{-3n} = -1 - \sqrt{6}$.

346. Quare tres radices æquationis $x^3 - 9x + 10 = 0$ omnes reales sunt $+2$, $-1 + \sqrt{6}$, $-1 - \sqrt{6}$. Et quidem si ea ipsa dividatur per $x - 2$, habebitur $x^2 + 2x - 5 = 0$, cujus radices sunt $-1 \pm \sqrt{6}$. Cum vero sit $x + 2 = y$, tres radices æquationis propositæ $y^3 - 6y^2 + 3y + 20 = 0$ erunt 4, $1 + \sqrt{6}$, $1 - \sqrt{6}$, quæ quidem si dividatur per $y - 4$, habetur $y^2 - 2y - 5 = 0$, cujus radices sunt $y = 1 \pm \sqrt{6}$.

347. Quod si proponatur æquatio $x^3 + 3x - 14 = 0$, erit $q = 3$, $r = -14$, ac proinde $\frac{1}{3}q = 1$, $-\frac{1}{2}r = 7$, $\frac{1}{4}rr + \frac{1}{27}q^3 = 49 + 1 = 50$. Quare $x =$

$\sqrt[3]{(7}$

$\sqrt[3]{(7+\sqrt{50})}+\sqrt[3]{(7-\sqrt{50})}$, ubi cum $\sqrt{50}$ imaginarietatem non involvat, una erit radix realis, & binæ imaginariæ. Porro cum $7+\sqrt{50}$ sit cubus binomii $1+\sqrt{2}$, & $7-\sqrt{50}$ binomii $1-\sqrt{2}$, ut vidimus, erit $m=1$, $n=2$, adeoque $2m=2$, $-m+\sqrt{-3n}=-1+\sqrt{-6}$, $-m-\sqrt{-3n}=1-\sqrt{-6}$. Quare tres radices æquationis $x^3+3x-14=0$ erunt 2, $-1+\sqrt{-6}$, $-1-\sqrt{-6}$ prima realis, reliquæ binæ imaginariæ. Et quidem si ipsa æquatio dividatur per $x-2$, habetur $x^2+2x+7=0$, cujus radices sunt $x=-1\pm\sqrt{-6}$.

348. Atque hoc solum pacto generalis haberi posset solutio æquationum gradus tertii, quæ niminum radicales cubicos semper involvunt, & in iis ipsis valores imaginarios; si nimirum imaginarietas ipsa in realium radicum expressionibus elidatur imaginarietate alia; quod quidem contingeret, si liceret semper quantitatis $-\frac{1}{2}r\pm\sqrt{(\frac{1}{4}rr+\frac{1}{27}q^3)}$ invenire radicem cubicam formæ $m\pm\sqrt{n}$. Verum id quidem raro admodum licebit. Et quidem quotiescunque æquatio tertii gradus in propria sede fuerit ita, ut per divisionem deprimi non possit ad inferiorem gradum, licebit nunquam. Nam quotiescunque illius formæ radix cubica invenietur, erit m quantitas rationalis, adeoque prima e radicibus $2m$ pariter rationalis, & divisio instituta per $x-2m$ debebit succedere. Sæpe autem illa radicis cubicæ extractio haberi non poterit, licet æquatio proposita rationales radices habuerit, & deprimi possit. Quare ad alias methodos recurrendum in ejusmodi casibus.

349. Potest autem semper imaginarietas tolli, & radix cubica, quæ ad illam formam reducatur, extrahi per series infinitas ope formulæ binomii ad potentiam indefinitam elevati, quam tradidimus num. 91, & ad radicum extractionem applicavimus num. 130. Formu-

la radicis cubicæ binomii $x+a$ erat num. 91 hujusmodi $(x+a)^{\frac{1}{3}} = x^{\frac{1}{3}} + \frac{1}{3} a x^{\frac{-2}{3}} + \frac{1}{3} \times \frac{-2}{6} a^2 x^{\frac{-5}{3}}$

$+ \frac{1}{3} \times \frac{-2}{0} \times \frac{-5}{9} a^3 x^{\frac{-8}{3}} + \frac{1}{3} \times \frac{-2}{6} \times \frac{-5}{6} \times$

$\frac{-8}{12} \times a^4 x^{\frac{-11}{3}}$ &c. binomia autem, ex quibus radix cubica extrahenda erat, sunt $-\frac{1}{2} r + \sqrt{(\frac{1}{4} rr + \frac{1}{27} q^3)}$, $-\frac{1}{2} r - \sqrt{(\frac{1}{4} rr + \frac{1}{27} q^3)}$. Ponatur $-\frac{1}{2} r = f^3$, $\sqrt{(\frac{1}{4} rr + \frac{1}{27} q^3)} = g$, eritque $g^2 = \frac{1}{4} rr + \frac{1}{27} q^3$ quantitas semper realis, ac patet, ipsius g potentias pares fore semper reales, licet in casu trium radicum realium potentiæ impares imaginariæ sint. Jam vero posito f^3 pro x, & primo quidem g, tum $-g$ pro a, habebuntur sequentes binæ series.

$$(f^3 + g)^{\frac{1}{3}} = f + \frac{1}{3} g f^{-2} + \frac{1}{3} \times \frac{-2}{6} g^2 f^{-5} + \frac{1}{3} \times \frac{-2}{6} \times \frac{-5}{9} g^3 f^{-8} + \frac{1}{3} \times \frac{-2}{6} \times \frac{-5}{9} \times \frac{-8}{12} g^4 f^{-11} \text{ \&c.}$$

$$(f^3 - g)^{\frac{1}{3}} = f - \frac{1}{3} g f^{-2} + \frac{1}{3} \times \frac{-2}{6} g^2 f^{-5}$$

—

$-\frac{1}{3}\times\frac{-2}{6}\times\frac{-5}{9}g^3 f^{-8} + \frac{1}{3}\times\frac{-2}{6}\times\frac{-5}{9}\times$

$\frac{-8}{12}g^4 f^{-11}$ &c.

350. In hisce seriebus primus terminus, tertius, quintus &c., qui continebunt potentias pares valoris g, carebunt & irrationalitate, & imaginarietate, eruntque utrobique cum iisdem signis; at termini secundus, quartus, sextus &c., qui continebunt potentias ejusdem impares habebunt & irrationalitatem, & in casu trium radicum realium imaginarietatem, ac erunt in altera cum uno signo in altera cum opposito. Continebit autem quivis ex iis terminis quantitatem rationalem, & realem ductam in prima serie in g, in secunda in $-g$, sive in illa in $\sqrt{(\frac{1}{4}rr + \frac{1}{27}q^3)}$, in hac in $-\sqrt{}$ $(\frac{1}{4}rr + \frac{1}{27}q^3)$. Nam quævis potentia impar quantitatis g, est potentia ejus par, adeoque rationalis, & realis, ducta in ipsam, ut $g^7 = g^6 \times g$. Quare & summa horum terminorum continebit quantitatem realem, & rationalem ductam in eandem radicem g cum signo ibi positivo, hic negativo. Igitur prior summa poterit fieri $= m$, & posterior $= \sqrt{n}$, ac $\sqrt{-3n} = \sqrt{-3}\times\sqrt{n}$, erit posterior summa ducta in $\sqrt{-3}$. Erit igitur.

$$m = f + \frac{1}{3}\times\frac{-2}{6}g^2 f^{-5} + \frac{1}{3}\times\frac{-2}{6}\times\frac{-5}{9}\times$$

$$\frac{-8}{12}g^4 f^{-11} \text{ \&c.}$$

$$\sqrt{-3n} = \frac{1}{3}gf^{-2}\sqrt{-3} + \frac{1}{3}\times\frac{-2}{6}\times\frac{-5}{6}\times g^3$$

I 3 f^{-8}

$f^{-8}\sqrt{-3}$ &c.

351. Porro in utraque serie patet terminum sequentem semper superaddere praecedenti binos terminos seriei $\frac{1}{3}, \frac{-2}{6}, \frac{-5}{9}, \frac{-8}{12}$ &c, ac $g^2 f^{-6} = \frac{g^2}{f^6}$. Quare si primus terminus dicatur A, secundus B, tertius C, &c., ac $\frac{g^2}{f^6}$ dicatur Q; habebitur $m = f + \frac{1}{3}$

$$\times \frac{-2}{6} AQ + \frac{-5}{9} \times \frac{-8}{12} BQ + \frac{-11}{15} \times \frac{-14}{18} CQ. \text{ \&c.}$$

$$\sqrt{-3}\, n = \frac{1}{3} g f^{-2} \sqrt{-3} + \frac{-2}{6} \times \frac{-5}{9} AQ + \frac{-8}{12} \times \frac{-11}{15} \times BQ + \frac{-14}{18} \times \frac{-17}{21} CQ \text{ \&c.}$$

352. Est autem $f = \sqrt[3]{-\frac{1}{2} r}$, $\frac{1}{3} g f^{-2} \sqrt{-3}$

$$= \frac{\sqrt{-3}\, g^2}{3f^2} = \frac{\sqrt{\left(\frac{-3}{4} rr + \frac{-3}{27} q^3\right)}}{3 \sqrt[3]{\frac{1}{4} rr}}, \quad \frac{g^2}{f^6} =$$

$$\frac{\frac{1}{4} rr + \frac{1}{27} q^3}{\frac{1}{4} rr} = 1 + \frac{4 q^3}{27 rr}.$$ Igitur datis r, & q, datur primus utriusque seriei terminus, & per eum reliqui omnes, ac prima quidem series carebit semper omni imaginarietate, secunda autem carebit, si $\frac{1}{4} rr + \frac{1}{27} q^3$ fuerit quantitas negativa, quae nimirum

ducta

ducta in -3 evadet positiva, at eam involvet, si ea fuerit quantitas positiva: nimirum carebit in casu trium radicum realium, eam involvet in casu binarum imaginariarum.

353. Quare habebuntur tres radices $2m$, $-m+\gamma-3n$, $-m-\gamma-3n$ per series infinitas, quarum prima semper carebit imaginarietate, reliquæ duæ ea carebunt, vel eam involvent, prout illæ ipsæ radices reales erunt, vel imaginariæ.

354. Hæ series erunt convergentes, & poterunt exhibere valores radicum veris proximos, quotiescunque Q fuerit quantitas unitate minor: sed ut usui esse possint, & series satis convergant, debebit esse multo minor. Cum vero sit $Q = 1 + \frac{4q^3}{27rr}$, debebit esse q quantitas negativa; nam si positiva sit, addetur unitati terminus positivus. Præterea $\frac{1}{27}q^3$ debebit esse, vel minor quam $\frac{1}{4}rr$, vel non duplo major; nam si fuerit duplo major, vel plusquam duplo, fractio $\frac{4q^3}{27rr}$ erit æqualis vel major binario; adeoque, ablata positiva unitate, erit Q æqualis unitati, vel major ipsa. Quo autem magis ad æqualitatem accedent $\frac{1}{27}q^3$, & $\frac{1}{4}rr$, eo citius converget series, quia ejus fractionis valor eo magis ad unitatem accedet, & vel ipsa ablata ab unitate, vel unitate ab ipsa, relinquetur pro Q quantitas positiva, vel negativa tanto minor.

355. Quod si ea fractio $\frac{4q^3}{27rr}$ fuerit æqualis unitati,

& valor q negativus, erit $1 + \frac{4q^3}{27rr}$, sive $Q = 0$. Eo casu erit $\frac{1}{4}rr = \frac{1}{27}q^3$, adeoque $\frac{1}{4}rr + \frac{1}{27}q^3 = 0$, nimirum valor $g = 0$. Quare omnes termini secundæ seriei, & omnes termini primæ, præter unicum f erunt $= 0$. Erit igitur $m = f = \sqrt[3]{-2r}$; & $\sqrt{(-3n)} = 0$. Quare tres radices erunt $2f$, $-f$, $-f$; nimirum binæ radices minores erunt inter se æquales, quod per num. 312 debet contingere, ubi $\frac{1}{4}rr + \frac{1}{27}q^3 = 0$.

356. Sit æquatio $x^3 - 9x + 10 = 0$, eadem quæ num. 345. Erit Q unitate minor, & series satis converget: erat enim $\frac{1}{27}q^3 = -27$, $\frac{1}{4}r^2 = 25$. Quare

$$\frac{4q^3}{27rr} = \frac{-27}{25},\ \&\ Q = 1 - \frac{27}{25} = \frac{-2}{25} = -0.08.$$ Primus autem primæ seriei terminus erit $f = \sqrt[3]{-\frac{1}{2}r} = \sqrt[3]{-5} = -1.709975947$, primus secundæ $\frac{1}{3}gf^{-2}\sqrt{-3}$, ob $g = \sqrt{(\frac{1}{4}rr + \frac{1}{27}q^3)} = \sqrt{-2}$, & $f^2 = \sqrt[3]{25}$, erit $= \frac{\sqrt{-2}\times\sqrt{-3}}{3\sqrt[3]{25}}$

$$= \frac{\sqrt{6}}{3\sqrt[3]{25}} = \frac{2.44948974278}{3\times 2.92401773931} = 0-27923790268.$$

Ex his autem termini reliqui, & ipsarum serierum valores inveniuntur, quos hic apponimus usque ad nonam decimalium notam.

Pro

Pro prima serie *m*.

$$A = f = -1.709975947$$

$$B = \frac{1}{3} \times \frac{-2}{6} A\,Q = -0.015199786$$

$$C = \frac{-5}{9} \times \frac{-8}{12} B\,Q = +0.000450364$$

$$D = \frac{-11}{15} \times \frac{-14}{18} C\,Q = -0.000020550$$

$$E = \frac{-17}{21} \times \frac{-20}{24} D\,Q = +0.000001169$$

$$F = \frac{-23}{27} \times \frac{-26}{30} E\,Q = -0.000000065$$

$$G = \frac{-29}{33} \times \frac{-32}{36} F\,Q = +0.000000004$$

Summa negativorum	=	-1.725196349
Summa positivorum	=	$+0.000451478$
Valor seriei *m*	=	-1.724744871

Pro

Pro secunda serie $\sqrt{-3n}$.

$$A = \frac{1}{3}\, 8f^{\,-2} \sqrt{-3} = +\,0.279237903$$

$$B = \frac{-2}{6} \times \frac{-5}{9} AQ = -\,0.004136858$$

$$C = \frac{-8}{12} \times \frac{-11}{15} BQ = +\,0.000161797$$

$$D = \frac{-14}{18} \times \frac{-17}{21} CQ = -\,0.000008150$$

$$E = \frac{-20}{24} \times \frac{-23}{27} DQ = +\,0.000000463$$

$$F = \frac{-26}{30} \times \frac{-29}{33} EQ = -\,0.000000028$$

$$G = \frac{-32}{36} \times \frac{-35}{39} FQ = +\,0.000000002$$

Summa positivorum $= +\,0.279400165$

Summa negativorum $= -\,0.004145036$

Valor seriei $\sqrt{-3n} = +\,0.275255129$

357. Inde autem valores eruuntur trium equationis radicum, $2m = -\,3.449489742$, $-m + \sqrt{-3n} = +\,1.724744871 + 0.275255129 = +\,2.000000000$, $-m - \sqrt{-3n} = +\,1.724744871 - 0.275255129 = +\,1.449489742$. Porro inveneramus num. 346 tres radices $2, -1 + \sqrt{6}, -, 1 - \sqrt{6}$, sive cum sit $\sqrt{6} = 2.449489743$, tres radices erant 2, 1.449489743, -3.449489743, que cum hic inventis ita conveniunt, ut so-

ſolum habeatur deſcrimen unius unitatis in poſtrema decimalium ſede radicum irrationalium ortum ex contemptu decimalium inferiorum in multiplicationibus diviſionibus, ac ſummis tot terminorum.

358. Notandum autem, radicem illam 2, quę prius obvenerat ſub forma $2m$ primo loco, hìc obveniſſe ſub forma $-m+\sqrt{-3}\,n$ ſecundo loco, ob diverſam nimirum rationem extrahendi radicem cubicam ex illo binomio.

359. Notandum preterea, quod ſupra etiam innuimus, & hìc exemplo hoc oſtendiſſe, & monuiſſe ſit ſatis, illam cyphrarum multitudinem poſt 2 ſatis indicare, haberi hìc radicem accuratam rationalem 2, quo numero ſubſtituto pro x, cum æquatio verificetur, patet deinde, revera eam ipſam eſſe accuratam ęquationis radicem. Idem indicium haberetur, ſi poſt tot cyphras obveniſſet 1, vel ſi ſeries exhibuiſſet valorem 1.9999 &c. Poſſet enim diſcrimen unitatis in poſtrema nota provenire ex ulterioribus decimalibus contemptis, immo & plurium unitatum defectus poſt plures notas 9, vel exceſſus poſt plures cyphras 0, indicium nequaquam turbaret ob eandem cauſam. Et hoc ſane pacto omne ſerierum genus verum valorem approximantium, indicat ipſum valorem verum ubi accuratus habetur, ut monuimus num. 142.

360. Si aſſumeremus exemplum æquationis $x^3 + 3x - 14 = 6$, in qua $q = 3$, quantitas poſitiva, haberemus $\frac{1}{27}q^3 = +1$, cumque ſit $\frac{1}{2}r = -7$, eſſet $\frac{1}{4}rr = 49$, & $Q = 1 + \frac{4q^3}{27rr} = 1 + \frac{1}{49}$, qui valor cum ſit unitate major, ſeries divergit. Si eſſet $x^3 - 3x - 14 = 0$, eſſet $\frac{1}{27}q^3 = -1$, adeoque $Q = 1 - \frac{1}{49} = \frac{48}{49}$. Eo caſu ſeries convergeret, ſed ita lentè, ut immenſus terminorum numerus

merus requiratur ad valorem aliquantisper approximandum. Quamobrem hæc methodus paucos admodum casus complectitur, cum excludat omnino eos omnes, in quibus tertius terminus est positivus: tum ex iis, qui negativum habent, excludat eos omnes, in quibus $\frac{1}{27}q^3$ duplo, vel plusquam duplo excedit valorem $\frac{1}{4}rr$. Inter eos autem casus, qui relinquuntur, & seriem convergentem exhibent, nulli usui esse potest, nisi $\frac{1}{27}q^3$ ad $\frac{1}{4}rr$ ita accedat, ut fractio $\frac{4q^3}{27rr}$ ab unitate parum admodum discrepet, ut nimirum ejus differentia ab unitate, quæ exhibet valorem Q, saltem ad decimam unitatis partem deprimatur.

361. Et quidem in casu unicæ radicis realis, in quo $\sqrt{(\frac{1}{4}rr + \frac{1}{27}q^3)}$ imaginarietatem non involvit, potest illa unica radix inveniri per formulam $\sqrt[3]{-\frac{1}{2}r + \sqrt{(\frac{1}{4}rr + \frac{1}{27}q^3)}} + \sqrt[3]{-\frac{1}{2}r - \sqrt{(\frac{1}{4}rr + \frac{1}{27}q^3)}}$ substitutis numeris & extracta una radice quadrata, ac binis cubicis. Ita in æquatione illa ipsa $x^3 + 3x - 14 = 0$, cujus radicem realem num. 347 invenimus $= 2$, liceret eandem invenire substitutis in ea formula numeris nimirum 7 pro $-\frac{1}{2}r$, 49 pro $\frac{1}{4}rr$, 1 pro $\frac{1}{27}q^3$. Haberetur enim $x = \sqrt[3]{7 + \sqrt{50}} + \sqrt[3]{7 - \sqrt{50}}$ $= \sqrt[3]{7 + 7.071067812} + \sqrt[3]{7 - 7.071067812} =$ $\sqrt[3]{14.071067812} + \sqrt[3]{-0.071067812} =$

2.

2. 414213563 — 0. 414213563 = 2.

362. Cum vero casus trium radicum realium nec solvi possit hac formula imaginarietatem involvente, nec saltem generaliter illa radicis extractione vel per finitum binomium, vel per infinitam seriem, quæ imaginarietatem elidat; idcirco appellari solet casus irreducibilis. At non desunt methodi, quibus ipse [illegible]n irreducibilis casus reducatur, & inveniantur æ[illegible]tionis radices. Proferemus unam, quæ quidem semper immediate maximam exhibet, ac ope ipsius maximæ reliquas duas, & valoris limites statim præbet, ac satis c[illegible]nvergit, eoque magis, quo q respectu r est major.

363. In formula generali $x^3 + qx + r = 0$, fiat transponendo $x^3 = -qx - r$, tum dividendo per x, erit $x^2 = -q - \frac{r}{x}$, adeoque $x = \sqrt{\left(-q - \frac{r}{x}\right)}$. Assumatur jam pro x quivis numerus, cum signo contrario signo ipsius r, & fractio $\frac{r}{x}$ erit negativa, adeoque $-\frac{r}{x}$ positiva; cumque etiam $-q$ in casu irreducibili sit (per num. 314) quantitas positiva; erit $-q - \frac{r}{x}$ valoris positivi. Extracta radice ex $-q - \frac{r}{x}$ habebitur novus valor x, qui erit major vero, si assumptus ille fuerit minor, & viceversa. Si enim pro x asumatur valor minor vero, obveniet fractio $-\frac{r}{x}$ major vero, adeoque summa $-q - \frac{r}{x}$ major vero, & ejus radix vero minor, & eadem esset demonstratio oppositi. Porro novus hic valor obveniet adhuc vero propior, errore in extractione radicis decrescente, & hoc novo valore adhibito, invenietur valor tertius adhuc propior, & ita porro.

364.

364. In æquatione $x^3 - 9x + 10 = 0$; qua toties usi sumus, & quæ habet tres radices reales, erit $x = \sqrt{(9 - \frac{10}{x})}$.

Ponatur 1.° $x = -1$; erit $\frac{-10}{x} = 10$; $\sqrt{(9 - \frac{10}{x})} = \sqrt{9 + 10} = \sqrt{19} = -4.4$

Ponatur 2.° $x = -4.4$, erit $\frac{-10}{x} = 2.27$, $\sqrt{(9 - \frac{10}{x})} = \sqrt{11.27} = -3.35$

Ponatur 3.° $x = -3.35$, erit $\frac{-10}{x} = 2,985$ $\sqrt{(9 - \frac{10}{x})} = \sqrt{(11.985)} = -3.462$

Ponatur 4.° $x = -3.462$, erit $\frac{-10}{x} = 2.8885$, $\sqrt{(9 - \frac{10}{x})} = \sqrt{(11.8885)} = -3.4479$

Ponatur 5.° $x = -3.4479$, erit $\frac{-10}{x} = 2.9003$, $\sqrt{(9 - \frac{10}{x})} = \sqrt{(11.9003)} = -3.44968$

365. Hoc pacto liceret progredi, & cum radicem maximam hujus æquationis invenerimus num. 266 — 3.44949, jam post quintam operationem ab ea recedimus tantum per $\frac{19}{100000}$. Porro in prima operatione habemus limites -1, & -4.4, in secunda multo arctiores 4.4, & -3.35, in tertia adhuc multo arctiores -3.35, & -3.462, in quarta adhuc etiam arctiores -3.462, & -3.4479, in quinta pariter arctiores -3.4479, -3.44968. In singulis autem operationibus augendus est notarum decimalium numerus, ut binæ vel ternæ habeantur notæ, ultra eas, in quibus jam præcedentes limites consen-

ſentiunt; nam plures initio aſſumere, cum valor aſſumptus adhuc a vera radice nimis diſtat, res eſſet laboris irriti.

366. Radix hoc pacto inventa erit ſemper radix maxima (per num. 314); erit enim ea, quæ habebit ſignum contrarium ſigno poſtremi termini. Poterit autem eadem methodus adhiberi, etiam in caſu reducibili quotieſcumque q eſt valoris negativi; & poterit quandoque ſi ſit valoris poſitivi, dummodo $\frac{r}{x}$ ipſum ſuperet, & $\sqrt{\left(-q-\frac{r}{x}\right)}$ non evadat valor negativus. Poſſent pariter & minores radices æquationis irreducibilis hoc pacto aliquando inveniri aſſumendo pro x ſignum conforme ipſi r, dummodo valor $-\frac{r}{x}$, qui tum erit negativus, non ſuperet poſitivum $-q$. Sed in caſu æquationis reducibilis, radix illa unica realis facilius invenitur per formulam $\sqrt[3]{-\frac{1}{2}r+\sqrt{\left(\frac{1}{4}rr+\frac{1}{27}q^3\right)}}$; & binæ radices minores æquationis irreducibilis facilius, inventa maxima, invenientur ſequenti methodo, quę, inventa quavis e tribus radicibus, ſemper exhibebit tertiam admodum facile.

367. Sit nimirum radix inventa $=a$, & reliquarum ſumma (per num. 307) debebit eſſe $-a$, cum omnium ſumma ſit $=0$; cumque omnium productum per (num. 242) ſit $-r$, erit reliquarum productum $\frac{-r}{a}$. Quare æquatio ſecundi gradus illas continens erit $x^2+ax-\frac{r}{a}=0$; adeoque $x=-\frac{1}{2}a+\sqrt{\left(\frac{1}{4}aa+\frac{r}{a}\right)}$.

368. In æquatione $x^3-9x+10=0$, invenimus radicem maximam $a=-3.44968$, hinc erit

$-\frac{1}{2}a = 1,72484$, erat autem $r = 10$, ac proinde

$$\sqrt{\left(\frac{1}{4}aa - \frac{r}{a}\right)} = \sqrt{(2.97507\ \&c. - 2.89882)} =$$

$\sqrt{(0.07625)}\ 0.2761$. Quare reliquę binæ radices $1\ 7248 \pm 0.2753$, erunt $2,0009$, & 1.4487, quę e veris $2.$, & 1.449489 &c., sive 1.4495 inventis num. 357, in quarta aut tertia decimalium nota differunt, quia nempe in quarta differebat a vera radix illa a ad eas inveniendas assumpta. Nam si æquatio habuisset radices accuratas, & accurata radix assumeretur pro a, reliquæ etiam binæ necessario accuratę obvenirent.

369. Si vero liberet e postrema methodo, qua radice maximam invenimus, derivare seriem infinitam alterius formæ, exprimentem valorem radicis x, satis esse perpetuo pro x substituere valorem $\sqrt{\left(-q - \frac{r}{x}\right)}$. Haberetur enim $x = \sqrt{\left(-q - \frac{r}{x}\right)} =$

$$\sqrt{-q-\frac{r}{\sqrt{-q-\frac{r}{x}}}} = \sqrt{-q-\frac{r}{\sqrt{-q-\frac{r}{\sqrt{-q-\frac{r}{\sqrt{-q-r\ \&c.}}}}}}}$$

370. Posset & alia series derivari, in qua per extractionem radicis cubicæ sine periculo imaginarietatis deveniretur ad valorem vero proximum, ponendo nimirum $x^3 = -r - qx$, adeoque $x = \sqrt[3]{(-r-qx)} = \sqrt[3]{-r-q\sqrt[3]{-r-q\sqrt[3]{-r-q\ \&c.}}}$ Sed extractio illa radicis cubicæ est nimis operosa. Habentur autem aliæ methodi multo magis convergentes inveniendi in quovis æquationum genere radices veris proximas, ubi eæ semel innotescant a veris diffe-

ſcrepantes minus quam decima ſui parte, de quibus infra. Quare ſatius eſt methodo, quam poſtremo loco adhibuimus invenire radicis maximæ limites ſatis arctos, iterata bis vel ter operatione, quod ob paucitatem notarum fit admodum facile, tum iis methodis ad verum valorem propius accedere. Preterea æquationis tertii gradus irreducibilis radices admodum facile inveniuntur ope tabulæ ſinuum trigonometricæ, cum pertineat is caſus ad anguli triſectionem, de quo in applicatione algebræ ad Geometriam.

371. Fusè expoſitis iis, que pertinent ad æquationem gradus tertii, facile patet earum ope haberi etiam reſolutionem æquationum altiorum, in quibus adſint ſoli quatuor termini, ac poſtremus incognita careat, primus habeat ejus potentiam triplam tertii, ſecundus duplam ejusdem; quæ proinde habeat hanc formam $x^{3m} + px^{2m} + qx^{m} + r = 0$. Poſito enim $x^{m} = y$, habebitur $y^3 + py^2 + qy + r = 0$, ubi inventis valoribus y, erit $x = \sqrt[m]{y}$.

372. Hujuſmodi æquationis noni gradus redactæ ad tertium ut aliquis habeatur uſus, ea utemur ad inveſtigandam radicem cubicam binomii illius formæ $m + \sqrt{n}$, qua prius uſi ſumus. Inveſtigatio autem erit ſimilis illi, quam num. 222 adhibuimus ad inveniendam ſimilis binomii radicem quadratam, ubi obvenit æquatio gradus quarti, deprimenda ad ſecundum.

373. Aſſumatur formula cubi binomii $x + z$, nimirum (per num. 99) $x^3 + 3x^2z + 3z^2x + z^3$, quæ ponatur $= m + \sqrt{n}$. Si autem in binomio quæſito fuerit x pars rationalis, & z irrationalis, primus, & tertius cubi terminus carebunt irrationalitate, quam ſecundus, & quartus involvent. Ponatur

igitur $x^3 + 3z^2 x = m$; & $3x^2 z + z^3 = \sqrt{n}$.

374. Ut ope harum æquationum eliminetur z, capiatur in secunda valor $z^3 = -3x^2 z + \sqrt{n}$, in prima vero $z^2 = \frac{m - x^3}{3x}$ quo ducto in z erit iterum $z^3 = \frac{mz - x^3 z}{3x}$. Quare equatis hisce binis valoribus, erit $-3x^2 z + \sqrt{n} = \frac{mz - x^3 z}{3x}$, sive $-9x^3 z + 3x\sqrt{n} = mz - x^3 z$, vel $3x\sqrt{n} = mz + 8x^3 z$; ac proinde $\frac{3x\sqrt{n}}{m + 8x^3} = z$. Quoniam habebatur $z^2 = \frac{m - x^3}{3x}$, & hic quadrando habetur $\frac{9nx^2}{(m+8x^3)^2} = z^2$; æquatis hisce valoribus jam habebitur $\frac{m - x^3}{3x} = \frac{9nx^2}{(m+8x^3)^2}$ sive $(m - x^3)(m + 8x^3)^2 = 27nx^3$; que æquatio facta multiplicatione, & ordinatis terminis, evadit $64x^9 - 48mx^6 \begin{matrix} -15m^2 \\ +27nx^3 \end{matrix} x^3 - m^3 = 0$.

375. Porro ea reducitur ad tertium gradum, & liberatur simul a coefficiente primi termini, si ponatur $x^3 = \frac{1}{8}y$, erit enim $\frac{1}{8}y^3 - \frac{3}{4}my^2 + \frac{27n - 15m^2}{8}y - m^3 = 0$, & multiplicando per 8 fiet $y^3 - 6my^2 + (27n - 15m^2)y - 8m^3 = 0$. Qua equatione resoluta habebitur y: & proinde x

de $x = \frac{1}{2}\sqrt[3]{y}$ cumque inventum fuerit $z^2 = \frac{m - x^3}{3x}$, invenietur $z = \sqrt{\frac{(m - x^3)}{3x}}$.

376. Sed admodum facile hujus æquationis ope obtinebitur intentum, si consideretur, valorem x debere esse rationalem; acproinde & $y = 8x^3$ rationalis esse debebit. Quamobrem satis erit quærere, an ea æquatio habeat radicem rationalem; & quidem ejusmodi investigatio facilior evadet, cum, ut x sit valor rationalis, debeat y habere præterea radicem cubicam rationalem, adeoque inter divisores postremi termini $8m^3$ quærendi erunt ii soli, qui habere possint radicem cubicam. Radix igitur cubica divisorum tentandorum debet inveniri inter divisores radicis cubicæ postremi termini $8m^3$; nimirum debet esse divisor quantitatis $2m$: Quin immo quoniam si binomium fractione careat etiam x carere debet fractione, adeoque x^3, sive $\frac{1}{8}y$, fractione carere debet; divisor, qui quæstioni possit satisfacere, debet posse dividi per 8, adeoque ejus radix cubica per 2: Quare soli divisores valoris m considerandi sunt, & radix illa rationalis æquationis inventæ quærenda inter cubos divisorum m ductos in 8, quorum si nullus satisfaciat, illa radix cubica ex proposito binomio extrahi non poterit

377. Atque eo pacto divisorum postremi termini numerus in immensum minuitur, qui adhuc etiam dimidiari potest si $\sqrt{n}$ fuerit valor realis. Eo enim casu erit realis etiam valor z, qui inde nascitur. Quare z^2 erit valor positivus, acproinde in æquatione $x^3 + 3z^2 x = m$ primum membrum erit positivum, vel negativum, prout x fuerit positivum, vel negativum. Debet autem id membrum habere idem signum, ac secundum

m. Igitur erit x ejusdem signi cum m, & ii divisores adhibendi sunt tantum cum signo conformi ipsi m.

378. Sit binomium, quo num. 338 usi sumus, $7 + \sqrt{50}$. Erit $m = 7$, $n = 50$, quibus valoribus substitutis æquatio numeri 375 evadit $y^3 - 42y^2 + 615y - 2744 = 0$. Porro m habet solos divisores 1, & 7, quorum cubi 1, & 343 ducti in 8 exhibent 8, & 2744, qui soli cum signo positivo conformi ipsi m, adhibendi sunt inter tam multos postremi termini divisores. Et quidem substituto 8 æquationi satisfit, quę dividitur per $y - 8$. Erit igitur $y = 8$, $x = \frac{1}{2}\sqrt[3]{y} = 1$, $z = \sqrt{(\frac{m-x^3}{3x})} = \sqrt{(\frac{7-1}{3})} = \sqrt{2}$. Radix igitur quæsita $1 + \sqrt{2}$, ut ibidem inveneramus.

379. Si autem sit alterum binomium ibidem adhibitum $-5 + \sqrt{-2}$, erit $m = -5$, $n = -2$. Quare eadem æquatio evadit $y^3 + 30y^2 - 429y + 1000 = 0$. Porro m habet solos divisores 1, & 5, quorum cubi 1, & 125 multiplicati per 8 exhibent 8, & 1000. Quare hi tantum inter tot divisores numeri 1000 adhibendi sunt, sed cum utroque signo ob valorem n negativum. Satisfacit autem ęquationi hic pariter 8, & ea dividi potest per $y-8$. Igitur hic etiam est $y = 8$, $x = \frac{1}{2}\sqrt[3]{y} = \frac{2}{2} = 1$. At $z = \sqrt{(\frac{m-x^3}{3x})} = \sqrt{(\frac{-5-1}{3})} = \sqrt{-2}$. Radix igitur quęsita erit $1 + \sqrt{-2}$, ut pariter ibidem inveneramus.

380. At si proponatur $2 + \sqrt{3}$, erit $m = 2$, $n = 3$. Quare æquatio erit $y^3 - 12y^2 - 21y - 64 = 0$. Porro m habet tantum divisores 1, & 2, quorum cubi 1,

& 8

& 8 ducti in 7, exhibent 8, & 64 adhibendos cum signo positivo conformi valori m. Neuter autem ex hisce divisoribus satisfacit. Quare binomium illud $2 + \sqrt{3}$ radicem cubicam extrahibilem non habet.

381. Ceterum quod valor x debeat esse inter divisores valoris m, patet etiam ex eo; quod positum fuerit num. 373. $x^3 + 3xz^2 = m$, adeoque est $m = x \times (x^2 + 3z^2)$; & proinde debet posse dividi per x.

382. Atque hoc quidem pacto ea omnia, quę initio hujus §. proposueramus abunde pręstitimus. Jam æquationes quarti gradus aggrediemur, quæ pendent ab æquationibus tertii, in quibus tamen minus immorabimur.

§. XIII.

De resolutione æquationum gradus quarti.

383. Æquationes quarti gradus posse componi ex quatuor æquationibus primi, vel ex binis secundi, vel ex una tertii, & una primi, patet ex num. 235. Quare poterunt habere omnes radices reales, vel binas reales, & binas imaginarias, quas nimirum habeat illa æquatio tertii, vel altera ex iis secundi; vel etiam omnes imaginarias, quas nimirum habeant ambæ æquationes secundi. Hinc etiam, eas posse aliquando deprimi per divisionem, ut cæteras omnes, patet ex num. 193. Easdem, si careant postremo termino, habere unam radicem $= 0$, & deprimi divisione per x, patet ex num. 247. Si careant terminis omnibus intermediis, & reducantur ad formulam $x^4 + t = 0$ resolvi more æquationum primi gradus, patet ex n. 204 ubi ostendimus fore $x^4 = -t$, $x = \sqrt[4]{-t}$, sive (per num. 40) $+\sqrt{\pm\sqrt{-t}}$; ubi habebuntur quatuor valores bini semper imaginarii, & bini alii reales vel imaginarii, prout valor t fuerit negativus, vel po-

 siti-

sitivus, & proinde $-t$ positivus, vel negativus. Si careat & secundo, & quarto termino simul, ac reducatur ad formam $x^4 + qx^2 + t = 0$, resolvi more æquationum secundi gradus; patet ex num. 220. Demum posse semper liberari a secundo termino, assumendo $y - \frac{1}{4}p = x$ patet ex num. 287. Reliquum igitur est, ut agamus de resolutione æquationis ad hanc formam redactæ $x^4 + qx^2 + rx + t = 0$.

384. Porro ut eam resolvamus, licebit concipere, eandem componi ex binis æquationibus secundi gradus, quarum tamen altera habere debet coefficientem secundi termini æqualem coefficienti alterius; cum enim desit secundus terminus æquationis propositæ, summa ejus radicum est $= 0$ (per num. 244). Coefficientes autem secundorum terminorum in æquationibus assumendis continebunt (per num. 242) summas binarum. Quare cum altera ex iis summis debeat alteram elidere, alter ex iis coefficientibus debebit æquari alteri accepto cum signo contrario.

385. Sint igitur binæ æquationes assumendæ $x^2 + ux + m = 0$, $x^2 - ux + n = 0$, in quibus oportet determinare valores u, m, n.

386. Multiplicatis iis inter se oritur æquatio

$$\begin{array}{llll} x^4 & -u^2 x^2 & -mux & +mn = 0, \\ & +m x^2 & +nux & \\ & +n x^2 & & \end{array}$$

quæ comparata cum illa generali $x^4 + qx^2 + rx + t = 0$ exhibebit sequentes tres æquationes $-u^2 + m + n = q$, $-mu + nu = r$, $mn = t$, quarum ope eliminatis m, & n invenietur æquatio pro u.

387. In tertia enim erit $n = \frac{t}{m}$, quo valore substituto, prima mutatur in hanc quartam $-u^2$
$+m$

$+ m + \frac{t}{m} = q$, sive in hanc quintam $-u^2 m + m^3 + t = qm$: secunda vero in hanc sextam $-mu + \frac{tu}{m} = r$, vel in hac septimam $-m^2 u + tu = rm$. Ex hac eruitur $tu - rm = m^2 u$, sive $\frac{tu - rm}{u} = m^2$, quo valore substituto in quinta, habetur $-u^2 m + \frac{tu - rm}{u} + t = qm$, ubi multiplicando per u, ac transponendo, ut erui possit valor m, fiet $2tu = u^3 m^3 + qum + rm$, ac ex ea hæc octava $m = \frac{2tu}{u^3 + qu + r}$. Hoc demum valore m substituto in quarta, habetur æquatio nona continens solam incognitam u: $-u^2 + \frac{2tu}{u^3 + qu + r} + \frac{u^3 + qu}{2u} = q$. Ex ea vero, multiplicando per $2u\,(u^3 + qu + r)$ transponendo terminos primi membri, ac inter ordinandum elidendo eos, qui se mutuo destruunt, obtinebitur æquatio sexti gradus, $u^6 + 2qu^4 + \begin{matrix} q^2 u^2 \\ -4tu^2 \end{matrix} - r^2 = 0$, quæ facto $u^2 = y$, reducitur ad hanc tertii $y^3 + 2qy^2 + \begin{matrix} q^2 y \\ -4ty \end{matrix} - r^2 = 0$.

388. In hac æquatione invenientur methodo §. præcedentis tres valores y, quorum saltem unus erit realis (per num. 298, 219). Cumque sit $u = \pm\sqrt{y}$ invenientur sex valores u, quorum saltem bini reales erunt; tum ope ipsius u, & octavæ æquationis $m =$

$\frac{2tu}{u^3 + qu + r}$ invenientur totidem valores m, ac demum ope hujus, & æquationis $n = \frac{t}{m}$ erutæ ex tertia invenientur totidem valores n; qui tamen nec erunt necessarii. Nam sex illi valores u, & m exhibebunt sex æquationes $x^2 + ux + m = 0$, quæ continebunt omnes æquationes secundi gradus, quæ possunt fieri assumendo binas ex 4 radicibus æquationis propositę quarti gradus, quę nimirum sunt sex, cum (per num. 92) sex binaria haberi possint in quatuor quantitatibus; ac proinde assumptis omnibus valoribus u, & m, eædem illæ 6 æquationes orientur ex æquatione $x^2 + ux + m = 0$, quę orirentur assumptis omnibus valoribus u, & n ex ęquatione $x^2 - ux + n = 0$. Quin immo bini tantum valores u prodeuntes ex unico valore y exhibebunt binas ęquationes continentes illas omnes quatuor radices, ad quas inveniendas resolventę erunt binę æquationes secundi gradus prodeuntes ex substitutione binorum valorum u, & m respondentium eidem valori y in ęquatione $x^2 + ux + m = 0$.

389. Porro, cum ęquatio tertii gradus necessario exhibeat saltem unum valorem y realem; patet semper binas æquationes secundi gradus inveniri debere, nec methodum ad eas inveniendas adhibitam quidquam impossibile assumere, ut methodus, qua tertii gradus ęquatio resolvebatur, assumpsit juxta num. 341, & si forte radices imaginarias habuerit æquatio quarti gradus, eę continebuntur in illis æquationibus secundi gradus, nec poterunt esse nisi vel binæ, vel omnes quatuor.

390. Quod si ęquatio quarti gradus poterit deprimi ad sedem inferiorem per divisionem in duas secundi gradus irrationalitate carentes, debebunt haberi saltem bini valores u rationales; adeoque saltem unus valor y ita rationalis, ut & radicem habeat. Quare cum æqua-

tionis

tionis tertii gradus inventę postremus terminus sit r^2; oportebit (per num. 242) ejusmodi valorem y esse inter divisores ipsius r^2 habentes radicem, & proinde valorem u inter divisores ipsius r, quorum si nullus ad secundam potentiam elevatus exhibeat radicem rationalem ęquationis tertii gradus, ęquatio illa gradus quarti dividi non poterit in duas secundi irrationalitate carentes. An autem deprimi possit per ęquationem primi ope divisores hujus formę $x + a$, id patebit methodo numeri 75. Quare jam habemus methodum agnoscendi semper an ęquatio quarti gradus in propria sede sit, an possit deprimi.

391. Sit æquatio $z^4 \quad 8z^3 + 9z^2 + 38z - 40 = 0$. Posito $x + 2 = z$ juxta num. 287, & facta substitutione, erit $x^4 - 15x^2 + 10x + 24 = 0$ æquatio carens secundo termino. In ea $q = -15$, $r = 10$, $t = 24$. Quare æquatio illa gradus tertii $y^3 + 2qy^2 \begin{matrix} + q^2 y \\ - 4ty \end{matrix} - r^2 = 0$ reducitur ad hanc

$y^3 - 30y^2 + 129y - 100 = 0$. Si hæc habeat radices rationales, quæ usui esse possint, quærendę sunt inter divisores quadratos numeri $100 = r^2$ nimirum inter quadrata divisorum numeri $10 = r$ nulla habita signorum ratione, cum quadrata debeant esse semper positiva. Porro numerus 10 habet divisores 1, 2, 5, 10, quorum quadrata 1, 4, 25, 100. Ex his satisfaciunt æquationi priores tres 1, 4, 25, Habet igitur y tres valores 1, 4, 25, adeoque u sex: 1, -1, 2, -2, 5, -5.

392. Et quidem invento primo valore $y = 1$ æquationis tertii gradus, reliqui inveniuntur etiam divisa autem per $y - 1$, unde provenit $y^2 - 29y + 100 = 0$, & $y = \frac{29}{2} \pm \sqrt{(\frac{841}{4} - 100)} = \frac{29}{2} \pm$

V

$\sqrt{\frac{(841-400)}{4}} = \frac{29}{2} \pm \frac{\sqrt{411}}{4} = \frac{29}{2} \pm \frac{21}{2}$: inde vero eruuntur bini valores $y = \frac{50}{2} = 25$, & $y = \frac{8}{2} = 4$.

393. Habitis 6 valoribus u, inveniuntur sex valores m per formulam $m = \frac{2tu}{u^3 + qu + r}$, & sex valores n per formulam $n = \frac{t}{m}$, in quibus $t = 24$ $q = -15$, $r = 10$, ut vidimus.

Sit $u = 1$, erit $m = \frac{48}{-4} = -12$; $n = \frac{24}{-12} = -2$

Sit $u = -1$, erit $m = \frac{-48}{24} = -2$; $n = \frac{24}{-2} = -12$

Sit $u = 2$, erit $m = \frac{96}{-12} = -8$; $n = \frac{24}{-8} = -3$

Sit $u = -2$, erit $m = \frac{-96}{32} = -3$; $n = \frac{24}{-3} = -8$

Sit $u = 5$, erit $m = \frac{240}{60} = 4$; $n = \frac{24}{4} = 6$

Sit $u = -5$, erit $m = \frac{-240}{-40} = 6$; $n = \frac{24}{6} = 4$

394. Sex igitur æquationes eruentur ē formula

x^2

$x^2 + ux + m = 0$, & sex e formula $x^2 - ux + n = 0$. Eas hic apponemus cum radicibus inde erutis.

E formula $x^2 + ux + m = 0$

Posito $u = 1$; $x^2 + x - 12 = 0$; $x = \begin{cases} +3 \\ -4 \end{cases}$

Posito $u = -1$; $x^2 - x - 2 = 0$; $x = \begin{cases} +2 \\ -1 \end{cases}$

Posito $u = 2$; $x^2 + 2x - 8 = 0$; $x = \begin{cases} +2 \\ -4 \end{cases}$

Posito $u = -2$; $x^2 - 2x - 3 = 0$; $x = \begin{cases} +3 \\ -1 \end{cases}$

Posito $u = 5$; $x^2 + 5x + 4 = 0$; $x = \begin{cases} -1 \\ -4 \end{cases}$

Posito $u = -5$; $x^2 - 5x + 6 = 0$; $x = \begin{cases} +3 \\ +2 \end{cases}$

E formula $x^2 - ux + n = 0$

Posito $u = 1$; $x^2 - x - 2 = 0$; $x = \begin{cases} +2 \\ -1 \end{cases}$

Posito $u = -1$; $x^2 + x - 12 = 0$; $x = \begin{cases} +3 \\ -4 \end{cases}$

Posito $u = 2$; $x^2 - 2x - 3 = 0$; $x = \begin{cases} +3 \\ -1 \end{cases}$

Posito $u = -2$; $x^2 + 2x - 8 = 0$; $x = \begin{cases} +2 \\ -4 \end{cases}$

Posito $u = 5$; $x^2 - 5x + 6 = 0$; $x = \begin{cases} +3 \\ +2 \end{cases}$

Posito $u = -5$; $x^2 + 5x + 4 = 0$; $x = \begin{cases} -1 \\ -4 \end{cases}$

395. Atque hic in primis patet illud, quod supra monuimus num. 388, æquationes provenientes e secunda formula, esse prorsus easdem, ac provenientes

e prima ita, ut, quam exhibet prima, adhibito altero e binis valoribus u ortis ab eodem valore y, exhibeat secunda adhibito altero.

396. Deinde patet, quodvis æquationum binarium, sive earum, quas exhibent binæ formulæ adhibito uno e valoribus u, sive earum, quas exhibet eadem formula adhibitis binis ejusmodi valoribus derivatis ab eodem valore y, exhibere easdem quatuor radices, 3, $-$ 4, 2, $-$ 1, quas esse radices æquationis propositæ $x^4 - 15x^2 + 10x + 24 = 0$, patebit substituenti. Atque idcirco quodvis binarium pariet ope multiplicationis hanc æquationem eandem, quod pariter patebit multiplicanti.

397. Inde vero facile invenientur radices æquationis propositæ $z^4 - 8z^3 + 9z^2 + 38z - 40 = 0$. Cum enim sit $z = x + 2$ illæ quatuor radices seu quatuor valores z habebuntur, si radicibus 3, $-$ 4, 2, $-$ 1 addatur 2, eruntque 5, $-$ 2, 4, 1, quod substitutione patebit.

398. Sed immorandum nonnihil in contemplanda resolutione illius æquationis $x^4 - 15x^2 + 10x + 24 = 0$. In sex æquationibus inventis, patet, haberi omnes sex combinationes illarum quatuor radicum 3, $-$ 4, 2, $-$ 1. Nam in prima provenlente ex prima formula habetur prima, & secunda, prima & tertia habetur in sexta, prima & quarta in quarta, secunda & tertia in tertia, secunda, & quarta in quinta, tertia & quarta in secunda. Id autem necessario debuit contingere. Nam valores, u, m, n determinati sunt ex hac conditione tantummodo quod æquatio $x^2 + ux + m$ contineat binas e quatuor radicibus æquationis $x^4 - 15x^2 + 10x + 24 = 0$, ac æquatio $x^2 - ux + n = 0$ alias binas. Cum igitur quodcunque binarium eandem prorsus relationem habeat ad æquationem illam gradus quarti; non potest unum potius utravis ex iis æquationibus secundi

gra-

gradus exhibere, quam aliud, sed utralibet debet necessario exhibere quodvis binarium; cumque in quaternario contineantur sex binaria, patet, in utravis ex iis æquationibus debere contineri sex æquationes, & easdem sex in altera, quod aliter fieri non potest nisi ope sex valorum singularum e quantitatibus assumptis u, m, n.

399. Inde autem consequitur, æquationem, qua ex sola notitia æquationis illius quarti gradus comparata cum ea, quam binæ assumptæ generant, determinari possit quævis ex iis tribus quantitatibus assumptis, debere assurgere ad sextum gradum, ut ad eum pertigit æquatio eruta pro u. Atque hinc etiam patebit, quanti usus fuerit eliminare prius secundum terminum, tum quærere valorem u potius quam m, vel n. Eliminato secundo termino assumendæ fuerunt æquationes, in quarum altera valor u esset æqualis alterius valori accepto cum signo contrario; nam is cum exprimat coefficientem secundi termini, exprimit summam binarum radicum cum signo contrario acceptarum; cumque ob eliminatum secundum terminum summa omnium debeat esse $= 0$; binarum quarumque summa debet esse æqualis summæ reliquarum cum signo contrario acceptæ. Quare e sex valoribus u, terni debent esse replicati cum sola signorum differentia, & valores u^2 debent proinde esse tres tantum. Idcirco in æquatione eruta pro u debent alterni termini deesse, relictis solis potentiis u paribus ita, ut posito $y = u^2$ æquatio deprimatur ad tertium gradum, quod quidem contigit. At si non eliminato secundo termino tentetur determinatio equationum secundi gradus componentium equationem quarti, eæ debebunt habere coefficientem diversum secundi termini, & esse $x^2 + ux + m = 0$, $x^2 + zx + n = 0$, ac si æquatio inde orta comparetur cum æquatione $x^4 + px^3 + qx + r = 0$, debebit pro u exhibere sex diversos valores ita, ut etiam u^2 sex

sex diversos valores habeat, & proinde equatio inde orta non careret omnibus terminis potestatum imparium, nec ad tertium gradum reduci posset, nisi ejusmodi novis substitutionibus; quæ sex diversos valores redigerent ad tres. Pariter si eliminato secundo termino queratur æquatio pro m, vel n invenietur æquatio gradus sexti non deprimibilis sine novis admodum molestis substitutionibus, que demum eo reciderent, ut valor u^2 immediatè determinaretur.

400. Patebit facile oriri ejusmodi æquationem sexti gradus pro m; si ex illis tribus æquationibus numeri 386, nimirum $-u^2+m+n=q$, $-mu+nu=r$, $mn=t$, eliminentur potius n, & u. Facto enim in tertia $n=\frac{t}{m}$; secunda evaderet $-mu+\frac{tu}{m}=r$; sive $-mmu+tu=mr$, & $u=\frac{mr}{-mm+t}$ Hisce valoribus n, & u substitutis in prima, esset $\frac{-m^2\, r^2}{(-mm+t)^2}+m+\frac{t}{m}=q$, in qua multiplicando per $m\,(-mm+t)^2$, sive per $m(m^4-2\,m^2\,t+t^2)$, ordinatis terminis haberetur æquatio

$$m^6-q\,m^5-t\,m^4\begin{matrix}-r^2\,m^3\\+2\,t\,q\,m^3\end{matrix}-t^2\,m^2-q\,t^2\,m+t^3=0,$$

ac simili prorsus modo erueretur æquatio pro n, quin eadem prorsus evaderet; sex valoribus existentibus utrobique prorsus iisdem, ut eruitur etiam ex num. 388; & 395.

401. Hujusmodi autem equatio reduceretur ad priorem formam, substituto pro m valore illo $\frac{2\,tu}{u^3+qu+r}$ numeri 387, ut æquatio quoque prodiens ante eliminationem secundi termini substitutione alia, quæ eidem elimi-

eliminationi æquivaleret, eodem reduci posset, sed ista fusius persequi infinitum esset, ac Tyroni harum meditationum cupidiori, & vividioris ingenii facile insinuabit Præceptor. Illud tantum notabimus determinato valore u; valorem m admodum facile determinari per æquationem $m = \frac{2tu}{u^3 + qu + r}$, cum contra valore m determinato, valor u inde erui non possit, nisi per æquationem tertii gradus hujusmodi $mu^3 + mqu + mr = 2tu$, sive $u^3 + \frac{mq - 2t}{m} u + r = 0$, quod iterum demonstrat æquationem pro u potius, quam pro m, vel n investigandam fuisse.

402. Præterea illud etiam non omittendum, nullam adesse spem, ut ejusmodi methodo altiorum graduum radices inveniantur; ut nec pro tertio gradu potuit adhiberi. Si enim ad resolutionem tertii gradus assumerentur æquationes $x^2 + ux + m = 0$, & $x - u = 0$, valor u exprimeret quamvis e tribus radicibus cum signo contrario acceptis in posteriore, vel binarum quarumvis summam in præcedenti, & valor m productum pariter e binis quibusvis. Quamobrem cum tres diversæ radices sint, & tria diversa trium radicum binaria (per num. 92) debet tam pro valore u, quam pro m deveniri iterum ad æquationem gradus tertii; atque id ipsum constabit comparanti æquationem inde ortam cum æquatione $x^3 + qx + r = 0$. Si autem quinti gradus equatio reducatur per binas $x^3 + ux^2 + mx + l = 0$, $x^2 - ux + n = 0$, quoniam continet u binaria radicum cum signis contrariis acceptarum in secunda, ternaria in prima (per num. 242), & quinque radicum tam binaria, quam ternaria sunt decem (per num. 92) ad decimum saltem gradum assurgeret equatio pro u: in sexto au-

tem gradu per æquationes $x^3 + ux^2 + mx + l = 0$, $x^3 - ux^2 + nx + h = 0$, continente u sex radicum ternaria, quę sunt 20, ad vigesimum gradum ascenderetur, licet is ob ternaria positiva aliis totidem negativis cum signo contrario acceptis æqualia reduceretur ad decimum, deficientibus potentiis imparibus, ut supra in gradu quarto; per ęquationes vero $x^4 + ux^3 + mx^2 + lx + h = 0$, $x^2 - ux + n = 0$, continente u binaria in posteriore, quaternaria in priore, quæ in 6 radicibus sunt 15, haberetur gradus decimus quintus. Ac eodem pacto in superioribus multo altius ascenderetur, ac gradus ille, qui resolvendus erat transcenderetur.

403. Cæterum, ut ad æquationes quarti gradus regrediamur, adhibuimus exemplum, in quo omnes quatuor radices erant reales, & rationales, & idcirco etiam ęquatio illa subsidiaria gradus tertii habuit omnes tres radices reales, & rationales. At plures alii casus, haberi possunt, qui reducuntur ad sequentes. In primis quotiescunque omnes quatuor radices fuerint reales in æquatione quarti gradus; omnes tres radices in æquatione tertii erunt pariter reales. Et si illæ contineantur binis ęquationibus secundi gradus irrationalitate carentibus, quarum altera contineat binas radices irrationales, altera vero vel rationales, vel irrationales, ęquatio tertii gradus habebit unicam tantum radicem rationalem quæ sit quadratum. Quod si illa ęquatio quarti gradus componetur e binis secundi irrationalitate carentibus, quarum altera contineat radices imaginarias, utcunque altera vel imaginarias contineat, vel reales, atque has vel rationales, vel irrationales, æquatio tertii gradus habebit unam e radicibus realem, & rationalem, quę sit quadratum, reliquas imaginarias vel negativas quarum deinde radices quadratę imaginarię sint. In omnibus casibus huc usque expositis æquatio quarti deprimi potest divisione facta per ęquationem secundi. Quod si ea vel deprimi possit solum per divisionem

primi

primi gradus, vel nullo modo; æquatio tertii gradus nullam habebit radicem rationalem, saltem, quæ sit quadratum, habebit autem reales omnes, & positivas, si omnes æquationis quarti gradus reales fuerint, quarum si binæ fuerint reales, & binæ imaginarię, habebit saltem unam realem, & positivam.

404. Fundamentum horum omnium theorematum in eo est situm, quod bini valores u, sive unicus valor y debent continere summas binarum radicum cum signis contrariis acceptarum, seu coefficientes secundorum terminorum binarum æquationum secundi gradus, in quas illa quarti resolvitur. Porro summæ radicum realium semper reales sunt, & rationalium rationales. Irrationalium, & imaginariarum quæ oriuntur ab iisdem æquationibus secundi gradus irrationalitate carentibus reales sunt, & rationales, sed si irrationalis orta ex una conjungatur cum rationali, vel cum irrationali orta ex alia, summa erit irrationalis, si vero imaginaria orta ex una conjungatur, cum reali, vel cum imaginaria orta ex alia, summa pariter est imaginaria. Quod si æquatio proposita deprimi non possit ad duas secundi gradus irrationalitate carentes; valor u & y rationalis nequaquam erit. Infinitum esset singula exemplis illustrare. Facile erit exempla desumere multiplicando per se invicem ęquationes plures secundi, vel primi gradus; & in his, ac in superioribus illis, quæ ad altiorum ęquationum reductionem pertinent, habet Præceptor uberem sane campum, in quo Tyronem cupidum, & satis otii nactum exercere possit. Pauca delibabimus.

405. Sit æquatio $x^4 - 8x^2 + 4x + 3 = 0$. Conferendo eam cum æquatione $x^4 + qx^2 + rx + t = 0$. Erit $q = -8$, $r = 4$, $t = 3$. Quare $y^3 + 2qy^2 + q^2 y - 4ty - rr = 0$, quę erat æquatio tertii gradus num. 387, erit $y^3 - 16y^2 + 52y - 16 = 0$, in qua divisores,

qui usui esse possint, sunt quadrata divisorum num. $4 = r$. Is habet divisores 1, 2, 4, quorum quadrata 1, 4, 16. Horum secundum tantum nimirum 4 satisfacit, ac divisa ea æquatione per $y - 4$, habetur $y^2 - 12y + 4 = 0$, cujus binæ radices $6 \pm \sqrt{32}$ ambæ reales sed irrationales. Quare tres valores y sunt 4, $6 + \sqrt{32}$, $6 - \sqrt{32}$, & sex valores u sunt 2, -2, $\sqrt{6 + \sqrt{32}}$, $-\sqrt{6 + \sqrt{32}}$, $\sqrt{6 - \sqrt{32}}$, $-\sqrt{6 - \sqrt{32}}$, vel quoniam methodo exposita num. 223 extrahitur radix ex binomio $6 \pm \sqrt{32}$, & est $2 \pm \sqrt{2}$, sex valores u erunt 2, -2, $2 + \sqrt{2}$, $-2 - \sqrt{2}$, $2 - \sqrt{2}$, $-2 + \sqrt{2}$.

406. Adhibito primo tantum valore y, ex $u = 2$ fiet $m = \frac{2tu}{u^3 + qu + r} = \frac{12}{8 - 16 + 4} = \frac{12}{-4} = -3$, ex $u = -2$ erit $m = \frac{-12}{-8 + 16 + 4} = \frac{-12}{12} = -1$. Quare binæ æquationes, in quas resolvitur æquatio proposita, sunt $x^2 + 2x - 3 = 0$, $x^2 - 2x - 1 = 0$, quæ quidem multiplicatæ per se invicem illam pariunt. Porro prioris radices sunt 1, & -3, posterioris $1 + \sqrt{2}$, $1 - \sqrt{2}$. Si cum signis contrariis accipiantur prima cum secunda, prima cum tertia, prima cum quarta, secunda cum tertia, secunda cum quarta, tertia cum quarta, habentur 2, $-2 - \sqrt{2}$, $-2 + \sqrt{2}$, $2 - \sqrt{2}$, $2 + \sqrt{2}$, -2, ubi redeunt illi ipsi sex valores u, licet diverso ordine. Primus autem, & postremus sunt rationales, & pertinent ad illas binas equationes irrationalitate carentes; reliqui cum irrationalitatem contineant, eandem inducunt in valorem u, & y. Ceterum si quatuor æquationes primi gradus $x + 2 = 0$, $x - 2 = 0$, $x - 2 - \sqrt{2} = 0$, $x - 2 + \sqrt{2} = 0$, $x + 2 - \sqrt{2} = 0$, $x + 2 + \sqrt{2} = 0$, quocunque ordine mul-

multiplicentur inter se, semper parient illam gradus quarti, & si ad sex binaria reducantur, singula parient æquationes singulas gradus secundi, & in singulis continebuntur singuli ex illis 6 valoribus u, ac ex valoribus m inveniendis per u.

407. In sequenti exemplo assumemus æquationem resolubilem in binas irrationalitate carentes; quarum utraque contineat radices imaginarias, & tamen unus e valoribus si erit realis rationalis, ac quadratus, habens binos valores u reales, & rationales. Sit æquatio $x^4 + x^2 + 2x + 6 = 0$. Erit $q = 1$, $r = 2$, $t = 6$. Quare æquatio $y^3 + 2qy^2 \begin{smallmatrix} + q^2 y \\ - 4ty \end{smallmatrix} - rr = 0$, erit $y^3 + 2y^2 - 23y - 4 = 0$, in qua divisores, qui usui esse possint, sunt quadrata divisorum numeri $2 = r$. Is habet divisores 1, 2, quorum quadrata 1, 4. Horum secundum tantum satisfacit nimirum 4. & divisa ea æquatione per $y - 4$, habetur $y^2 + 6y + 1 = 0$, cujus binæ radices $-3 \pm \sqrt{8}$, ambæ negativæ, licet reales, ex quibus nimirum valores u proveniunt imaginarii $\pm \sqrt{(-3 \pm \sqrt{8})}$, vel quoniam ex $-3 \pm \sqrt{8}$ potest extrahi radix, quæ est $\sqrt{-2} \pm \sqrt{-1}$, sex valores u erunt 2, -2, $\sqrt{-2} + \sqrt{-1}$, $-\sqrt{-2} + \sqrt{-1}$, $\sqrt{-2} - \sqrt{-1}$, $-\sqrt{-2} - \sqrt{-1}$.

408. Adhibito primo tantum valore y, ex $u = 2$ erit $m = \frac{2tu}{u^3 + qu + r} = \frac{24}{8 + 2 + 2} = \frac{24}{12} = 2$, ex $u = -2$ erit $m = \frac{-24}{-8 - 2 + 2} = \frac{-24}{-8} = 3$. Quare binæ æquationes, in quas resolvitur æquatio proposita sunt $x^2 + 2x + 2 = 0$, $x^2 - 2x + 3 = 0$,

$= 0$, quæ quidem multiplicatæ per se invicem illam pariunt. Porro prioris radices sunt $-1 + \sqrt{-1}$, $-\sqrt{-1} - 1$, posterioris $1 + \sqrt{-2}$, $1 - \sqrt{-2}$. Si cum signis contrariis accipiantur binaria eodem ordine, quo supra num. 406, habentur 2, $-\sqrt{-1} - \sqrt{-2}$, $-\sqrt{-1} + \sqrt{-2}$; $\sqrt{-1} - \sqrt{-2}$, $\sqrt{-1} + \sqrt{-2}$, -2, ubi redeunt illi ipsi sex valores u, licet diverso ordine. Primus autem, & postremus sunt reales, & rationales & pertinent ad illas binas æquationes imaginarietate carentes, & irrationalitate. Reliqui cum imaginarietatem contineant, eandem inducunt in valorem u, licet in valorem y non inducant. Cæterum si quatuor æquationes primi gradus ortæ ex hisce radicibus utcumque multiplicentur, reddent eandem illam æquationem gradus quarti, & distributæ in binaria exhibentia sex æquationes gradus secundi, habebuntur in singulis singuli valores u & singuli m derivandi ex u.

409 Atque ut specimen aliquod habeatur binarum æquationum secundi gradus, quæ oriantur ex aliis binariis continentibus quantitates imaginarias, ductis in se invicem $x + 1 - \sqrt{-1} = 0$, $x - 1 - \sqrt{-2} = 0$, oritur æquatio

$$\begin{array}{llll} x^2 & - x\sqrt{-1} & -1 & = 0 \\ & - x\sqrt{-2} & + \sqrt{-1} & \\ & & - \sqrt{-2} & \\ & & + \sqrt{2} & \end{array}$$

ductis autem $x + 1 + \sqrt{-1} = 0$; $x - 1 + \sqrt{-2} = 0$, oritur æquatio.

$$\begin{array}{llll} x^2 & + x\sqrt{-1} & -1 & = 0 \\ & + x\sqrt{-2} & - \sqrt{-1} & \\ & & + \sqrt{-2} & \\ + \sqrt{2} & + \sqrt{2} & & \end{array}$$

His

His autem invicem multiplicatis, & elisis terminis, qui se destruunt; redit illa ipsa æquatio proposita gradus quarti $x^4 + x^2 + 2x + 6 = 0$.

410. Notari autem potest generaliter illud, æquationem quarti gradus, quæ postremum terminum negativum habeat, non posse habere omnes radices imaginarias. Nam æquationes secundi gradus, quæ imaginarias quantitates contineant, debent habere postremum terminum positivum (per num. 215); ac proinde si ambæ eæ, ex quibus oritur equatio quarti, habeant radices imaginarias; habebunt ambæ postremos terminos positivos, ex quorum multiplicatione postremus terminus quartæ orietur positivus etiam ipse. Quamobrem si equatio quarti gradus negativum habeat postremum terminum, jam statim constabit, saltem binas haberi radices reales, quod sequenti §. generaliter demonstrabimus de omnibus æquationibus gradus paris, ut & de gradu impare ostendimus semper saltem unam haberi radicem realem.

411. Contra vero si æquatio illa tertii gradus, quę exhibet valorem y, non alternet omnia signa terminorum; manifestum erit (per num. 250), haberi radices imaginarias in æquatione gradus quarti; & si omnia signa continuet, nullo alternato, constabit omnes radices imaginarias esse. Nam ibi demonstravimus omnia signa alternari, ubi omnes radices reales, & positivę sunt; omnia continuari, ubi omnes negativę. Quare si non omnia alternantur, non omnes valores y, erunt reales, & positivi, quod requiritur ad hoc, ut omnes valores u reales sint. Si autem omnes continuantur, nullus habebitur realis, & positivus valor y, adeoque nullus realis u; quanquam poterunt omnes radices esse imaginarię alternatis etiam signis, cum possint valores u, & m esse reales, & adhuc æquationes secundi gradus continere valores imaginarios.

412. In primo exemplo, in quo num. 391 omnes radices æquationis quarti gradus reales erant, inveni-

mus $y^3 - 30\,y^2 + 129\,y - 100 = 0$, ubi omnia signa alternantur. Idem in secundo contigit eadem de causa num. 405, ubi pariter & radices omnes æquationis quarti gradus reales fuerunt, & æquatio $y^3 - 16\,y^2 + 52\,y - 16 = 0$ omnia signa alternavit in postremo demum exemplo, num. 407 omnes radices imaginariæ erant, & æquatio tertii gradus $y^3 + 2\,y^2 - 23\,y - 4 = 0$ habuit unam alternationem signorum, & binas continuationes, quia binos invenimus valores u, & m reales, qui binas deberunt secundi gradus æquationes imaginarietate carentes, in quas æquatio quarti resoluta est, licet illæ ipsæ equationes secundi gradus continuerint radices imaginarias.

413. In exemplis huc usque adhibitis semper æquatio quarti gradus per divisionem deprimi potuit ad binas secundi. Addemus exemplum unicum, in quo ea depressio haberi non potest, ubi proinde per approximationem eruendus erit valor saltem unicus radicis æquationis gradus tertii, quæ per approximationem exhibeat coefficientes secundorum terminorum, & binos postremos terminos æquationum gradus secundi. Ejusmodi æquatio erit $x^4 + 3\,x^2 - 2\,x - 3 = 0$. In ea erit $q = 3$ $r = -2$, $t = -3$. Quare æquatio $y^3 + 2\,q\,y^2 + q^2\,y - rr = 0$ erit $y^3 + 6\,y^2 + 21\,y - 4 = 0$.
$- 4\,t\,y$.
In hac cum non omnia signa alternentur, jam constat (per num. 412), non omnes propositæ æquationis quarti gradus radices reales esse, ut ex termino postremo -3 negativo constat (per num. 410), saltem binas esse reales; ac proinde binæ reales erunt, & binæ imaginariæ.

414. Jam vero si æquatio illa tertii gradus habet radices, quæ usui esse possint ad resolvendam æquationem quarti accurate in duas secundi, eæ debent esse inter quadrata divisorum numeri $2 = r$. Is numerus habet divi-

divisores tantum 1, & 2, quorum quadrata 1, & 4 ac neutrum satisfacit. Proposita igitur æquatio quarti gradus deprimi non potest per divisorem duarum dimensionum, sive secundi gradus. Cumque ejusdem æquationis quarti gradus postremus 3 habeat divisores tantum 1, —1, 3, —3, quorum nullus æquationi satisfacit, ea nec per divisorem simplicem formæ $x + a$ deprimi potest ad binas æquationes alteram tertii gradus, alteram primi. Quamobrem quærenda irrationalis expressio valoris y realis, & approximatione utendum ad habenda elementa u, & m binarum æquationum secundi gradus in numeris.

415. In ipsa igitur æquatione $y^3 + 6y^2 + 21y - 4 = 0$, ponatur $z - 2 = y$ ad eliminandum secundum terminum, & proveniet $z^3 + 9z - 30 = 0$. Hæc æquatio ob tertium terminum $+ 9z$ positivum, habet binas radices imaginarias (per n. 316, 317), & tertia realis, quæ (per n. 300) debet habere signum contrarium signo postremi termini $- 30$, est positiva, nimirum

$$\sqrt[3]{15 + \sqrt{(225 + 27)}} + \sqrt[3]{15 - \sqrt{(225 + 27)}}$$
$$= \sqrt[3]{15 + \sqrt{(252)}} + \sqrt[3]{15 - \sqrt{(252)}} =$$
$$\sqrt[3]{15 + 15.874508} + \sqrt[3]{15 - 15.874508}$$
$$= \sqrt[3]{30.874508} + \sqrt[3]{-0.874508}$$
$$3.13713601 - 0.95628624 = 2.18084977.$$

Quare $y = z - 2$ erit $= 0.18084977$, & $u = \pm\sqrt{y} = \pm 0.42526435$. Cumque sit $m = \frac{2tu}{u^3 + qu + r}$ erunt bini valores m alter $+ 3.9419033$ alter $- 0.7610536$. Quare binæ æquationes secundi gradus erunt $x^2 + 0.42526435x + 3.9419033 = 0$, & $x^2 - 0.42526435x - 0.7610536 = 0$, quæ quidem invicem multiplicatę ; contemptis ulterioribus decimalibus , exhibent $x^4 + 2.\ 99999993\ x^2 - 1.\ 99999991\ x - 2.\ 99999969 = 0$, ſive quam proxime propoſitam ęquationem $x^4 + 3x^2 - 2x - 3 = 0$. Porro prima earum ęquationum ſecundi gradus habet binas radices imaginarias $x = - 2\ 21263217 \pm \sqrt{0.\ 0452124 - 3.\ 9419033}$, ſive $= - 0.27263277 \pm \sqrt{- 3.\ 8967909}$, ſecunda vero habet binas radices reales $x = 0:\ 21263217 \pm \sqrt{0.\ 0452124 + 0.\ 7610536} = 0\ .\ 21263217 \pm \sqrt{8062660} = 0\ 21263217 \pm 0:\ 8979231}$, nimirum $x = 1.\ 1105553$, & $x = - 0.\ 6852909$.

416. Atque hoc quidem pacto ęquatio quarti gradus reſolvitur in binas ſecundi ; ex quibus orta concipitur, comparando terminos homogeneos , & deveniendo ad æquationem gradus ſexti , quę deprimitur ad tertium , ac reſoluta exhibet quęſitos valores. Adeſt autem alia methodus, qua devenitur immediate ad ęquationem gradus tertii exhibentem valores pro binis æquationibus ſecundi continentibus radices propoſitę ęquationis gradus quarti . Hæc autem methodus utitur proprietate illa quadrati , quam num. 95 demonſtravimus , quod nimirum cujuſvis binomii quadratum tribus terminis conſtet , in quibus productum extremorum ęquetur quadrato dimidii termini intermedii , cujus etiam inverſa propoſitio eſt vera ; nam ſi in trinomio productum extremorum æquetur quadrato dimidii termini intermedii , erit id trinomium quadratum , cujus radix habebitur, ſi capiantur extremorum terminorum radices , & uniantur cum eodem ſigno, vel cum oppoſitis , prout terminus ille intermedius habuerit ſignum poſitivum , vel negativum. Ea autem inverſa propoſitio ſic facile demonſtratur . In trinomio $a \pm b + c$ ſit $ac = \frac{1}{4}bb$, oportet demonſtrare eſſe $a \pm b + c$,

$= (\sqrt{a} \pm \sqrt{c})^2$. Erit autem nam $(\sqrt{a} \pm \sqrt{c})^2 = a \pm 2\sqrt{ac} + c$. Sed ob $ac = \frac{1}{4}bb$ est $4ac = bb$, & $\pm 2\sqrt{ac} = \pm b$. Igitur $(\sqrt{a} \pm \sqrt{c})^2 = a \pm b + c$: Q. E. D.

417. Ac notandum ob ambiguitatem signorum in radicibus habentibus exponentem parem, radicem trinomii $a + b + c$ fore tam $\sqrt{a} + \sqrt{c}$, quam $-\sqrt{a} - \sqrt{c}$; trinomii vero $a - b + c$, fore tam $+\sqrt{a} - \sqrt{c}$, quam $-\sqrt{a} + \sqrt{c}$. Quod si e valoribus a, & c, uterque, vel etiam alter negativus fuerit, patet radicem illam debere continere valores imaginarios. Sed nisi b fuerit valor imaginarius, a, & c debebunt esse valoris vel simul positivi, vel simul negativi, cum nimirum ex hypothesi eorum productum debeat æquari quadrato $\frac{1}{4}bb$ ubique positivo.

418. Sit igitur æquatio libera a secundo termino $x^4 + qx^2 + rx + t = 0$. Transponendo erit $x^4 = -qx^2 - rx - t$. Fiat quadratum binomii $x^2 + y$, nimirum $x^4 + 2yx^2 + y^2$, & addito utrinque $2yx^2 + y^2$, erit

$$x^4 + 2yx^2 + y^2 = \begin{array}{l} -qx^2 - rx - t \\ +2yx^2 \qquad\quad + y^2 \end{array}$$

In hac æquatione primum membrum est quadratum habens pro radice $x^2 + y$: Secundum vero membrum fiet quadratum, si ita assumatur illa arbitraria y, ut productum extremorum æquetur quadrato dimidii intermedii termini: Ponendum igitur $(-qx^2 + 2yx^2) \times (-t + y^2) = \frac{1}{4}rrxx$; sive dividendo utrinque per x^2, erit $(-q + 2y) \times (-t + y^2) = \frac{1}{4}rr$. Facta au-

tem

tem multiplicatione habetur $+ qt - qy^2 = 2ty$ $+ 2y^3 = \frac{1}{4} rr$, & transponendo, ordinando, ac dividendo per 2 erit

$$y^3 - \frac{1}{2} qy^2 - ty \begin{array}{l} + \frac{1}{2} qt \\ - \frac{1}{8} rr \end{array} = 0.$$

Invento valore y in hac æquatione secundum illud membrum $-qx^2 - rx - t$, habebit pro radice

$$\pm x \sqrt{\begin{array}{c} +2yx^2 \\ (-q+2y) \end{array}} \pm \sqrt{\begin{array}{c} +y^2 \\ (-t+y^2) \end{array}},$$

assumptis signis difformibus, vel conformibus, prout r fuerit valoris positivi vel negativi, adeoque e contrario terminus intermedius $-rx$ negativus, vel positivus. Tum vero habebitur $x^2 + y = \pm x\sqrt{(-q+2y)} \pm \sqrt{(-t+y^2)}$. Nimirum posito $\sqrt{(q+2y)} = n$ & $\sqrt{(-t+y^2)} = m$ habebuntur binæ æquationes secundi gradus $x^2 - ux \begin{array}{l} -m \\ +y \end{array} = 0$, & $x^2 + ux \begin{array}{l} +m \\ +y \end{array} = 0$, si r fuerit valoris negativi, ac $x^2 - ux \begin{array}{l} +m \\ +y \end{array} = 0$, & $x^2 + ux \begin{array}{l} -m \\ +y \end{array} = 0$, si r fuerit valoris positivi, ac patet hic etiam tria binaria æquationum secundi gradus obtineri posse, cum æquatio tertii gradus exhibere possit ternos valores y, & eorum singuli binas exhibeant æquationes secundi gradus.

419. Sit æquatio $x^4 - 15x^2 + 10x + 24 = 0$, quam adhibuimus num. 391. In ea erit $q = -15$, $r = 10$, $t = 24$. Quare æquatio subsidiaria gradus

tertii

tertii $y^3 - \frac{2}{2} qy^2 - ty + \frac{1}{2} qt = 0$ fiet $y^3 + \frac{15}{2} y^2$
$$- \frac{1}{8} rr$$
$- 24 y - \frac{385}{2} = 0$, quæ si multiplicetur per progressionem 1, 2, 4, 8, evadet $y^3 + 15 y^2\ 96\ y - 1540 = 0$, quę habet omnes tres radices rationales 10, − 11, − 14. Quare prioris radices harum dimidiæ erunt 5, − 5.5, − 7. Assumptis pro y hisce valoribus invenientur $u = \sqrt{(-q + 2y)}$, & $m = \sqrt{(-t + y^2)}$, ac æquationes $x^2 \underset{+y}{-ux} + m = 0$, & $x^2 + ux \underset{+y}{-m} = 0$ retento eodem signo in u & m, ob valorem r positivum = 10. Erunt autem.

ex	valores u, & m	Æquationes	radices
$y = 5$	$(u = 5)$	$x^2 - 5x + 6 = 0$	$+3$, $+2$
	$(m = 1)$	$x^2 + 5x + 4 = 0$	-1, -4
$y = -5.5$	$(u = 2)$	$x^2 - 2x - 3 = 0$	$+3$, -1
	$(m = 2.5)$	$x^2 + 2x - 8 = 0$	$+2$, -4
$y = -7$	$(u - 1)$	$x^2 - x - 2 = 0$	$+2$, -1
	$(m = 5)$	$x^2 + x - 12 = 0$	$+3$, -4

420. Hoc pacto redeunt illæ eædem sex æquationes ortæ ex illis iisdem sex binariis earundem quatuor radicum, quas priore methodo inveneramus num. 394. Ubi vero ęquatio tertii gradus rationales radices non habeat, recurrendum ad approximationem, ut in postremo exemplo prioris methodi.

421. Atque hic notandum, ubi ex $x^4 \underset{+y}{+ 2y}\ x^2$

$+ y^2 = - q x^2 - r x - t$ extrahitur radix, tam
$+ 2 y x^2 \quad + y^2$
primum membrum quam secundum; binas radices habere: nimirum primi membri radix est tam $x^2 + y$, quam $- x^2 - y$, ut secundi est $+ x\sqrt{(-q + 2y)} + \sqrt{(-t + y^2)}$; & $- x\sqrt{(-q + 2y)} - \sqrt{(-t + y^2)}$; unde prima fronte videri posset quatuor diversas æquationes profluere, combinata utravis e prioribus binis cum utralibet e posterioribus. Sed cum idem sit combinare positivam prioris membri, cum positiva posterioris, ac illius negativam, cum hujus negativa, & pariter idem illius positivam cum hujus negativa, ac illius negativam cum hujus positiva; illæ quatuor reducuntur ad binas a nobis adhibitas, quas exhibet una tantum e radicibus prioris membri combinata cum utravis e radicibus posterioris. Nimirum eadem prorsus æquatio est $x^2 + y = x\sqrt{(-q + 2y)} + \sqrt{(-t + y^2)}$, ac $- x^2 - y = - x\sqrt{(-q + 2y)} - \sqrt{(-t + y^2)}$; & pariter eadem $x^2 + y = - x\sqrt{(q - y2)} - \sqrt{(-t + y^2)}$; ac $- x^2 - y = x\sqrt{(-q + 2y)} + \sqrt{(-t + y^2)}$; quod ipsum notari potest ubi num. 206 resolvuntur generaliter æquationes secundi gradus.

422. Pariter notari potest etiam illud. Hac methodo uti licet etiam ante eliminatum secundum terminum. Sit æquatio $x^4 + p x^3 + q x^2 + r x + t = 0$, sive $x^4 + p x^3 = - q x^2 - r x - t$. Assumatur $x^2 + \frac{1}{2} p x + y$, & facto ejus quadrato x^4

$+ p$

$+ px^3 + (\frac{1}{4}pp + 2y)x^2 + pxy + y^2$, erit $=$ $(-q + \frac{1}{4}pp + 2y)x^2 + (-r + py)x +$ $(y^2 - t)$, ubi facto $(-q + \frac{1}{4}pp + 2y) \times (y^2 - t)$ $= (\frac{-r + py}{2})^2$ haberetur æquatio magis quidem implexa, sed adhuc tertii gradus pro y, cujus valore invento, jam binæ æquationes forent $x^2 +$ $\frac{1}{2}px + y = \pm \sqrt{(-q + \frac{1}{4}pp + 2y)} \pm \sqrt{(y^2 - t)}$ adhibito utrobique in secundo membro signo eodem, vel signis mutatis prout $-r + p$ fuerit valor positivus, vel negativus. Sed præstat secundum terminum tollere, ut habeantur reliqua minus implexa.

423. Demum notetur hic etiam eodem artificio resolvi æquationes $x^{4m} + px^{3m} + qx^{2m} + rx^{m} + t$ $= 0$, quicunque fuerit valor m, cum facto $y = x^m$ reducatur ad $x^4 + px^3 + qx^2 + rx + t = 0$.

§. XIV.

De radicum limitibus, & mutationibus valoris formulæ orti ex diversis substitutionibus factis pro quantitate incognita: ubi de methodo investigandi maxima, & minima.

424. EXposita resolutione æquationum gradus tertii & quarti, transeundum esset ad æquationes altiorum graduum. At nulla adhuc generalis methodus inventa est, qua altiorum graduum æquationes resolvi possint inveniendo formulam, quæ valorem radi-

[cum

cum exhibeat. Methodum adhibitam pro æquationibus gradus quarti non posse ad altiores gradus traduci ostendimus superiore §. Quasdam per divisiones deprimi ad gradum inferiorem ostendimus num. 74, quæ quidem si deprimantur ita ut quartum jam non excedant gradum, resolvuntur methodis traditis huc usque. Eas quæ habeant hanc formam $x^{m} + p = 0$; $x^{2m} + px^{m} + q = 0$; $x^{3m} + px^{2m} + qx^{m} + r = 0$, $x^{4m} + px^{3m} + qx^{2m} + rx^{m} + t = 0$, reduci ad primum, secundum, tertium, quartum gradum ponendo $x^{m} = y$, tum resolvi vidimus num. 204, 220, 371, 423, in quibus inventa algebraica expressione valoris y, invenitur etiam expressio valoris $x = \sqrt[m]{y}$. In reliquis omnibus approximatione utendum.

425. Ut autem vero quamproximas radices eruamus; tradendæ sunt methodi, quibus ad eas liceat utcumque accedere, quæ potissimum sunt binæ: altera qua limites radicum investigantur; altera, qua diversis valoribus substitutis pro x, investigatur valor primi membri æquationis, qui debet evadere $= 0$, accurate, vel proximè; ut valor ille substitutus possit congruere accuratè vel proximè cum radice ipsa. Agemus igitur hic de limitibus radicum & de effectu substitutionum in formulis algebraicis, ex qua consideratione pandetur nobis aditus ad æquationum resolutionem, & interea alii quoque satis uberes profluent fructus, potissimum pro quæstionibus de maximis, & minimis.

426. Sæpe limites aliqui inveniuntur considerando coefficientes ipsos, quod in æquationibus gradus tertii præstitimus num. 364. Sed ii raro admodum solent esse satis arcti, nec semel inventi possunt arctiores reddi. Ut igitur ad alias methodos progrediamur, investigari limites possunt etiam demendo aliquid in altero æquationis membro, ut in altero minus remaneat, quo artificio di-

dividendo deinde, ac radices extrahendo, quandoque uterque limes invenitur, quandoque unicus, ac limitis jam inventi substitutione pro incognita sæpe ad radicem magis acceditur. Ne autem hujus methodi præcepta sine ulla necessitate multiplicentur, ostendemus, quo pacto positivarum radicum limites investigari possint, quæ pro negativis etiam eundem habebit usum, si negativæ juxta num. 249. mutentur in positivas, mutatis nimirum alternorum æquationis ad debitam redactæ formam terminorum signis.

427. Termini omnes negativi in alterum membrum per transpositionem mutentur ita; ut fiant positivi. Tum si alterum membrum constet unico termino incognitam continente, alterum pluribus, quorum aliquis contineat potentiam incognitæ superiorem ea, quæ habetur in priore membro, & aliquis inferiorum (inferiori autem potentię nomine intelligimus etiam potentiam o, seu terminum cognitum, quem incognita non ingreditur); semper inveniri poterit uterque limes, omittendo in membro plures terminos continente reliquos omnes pręter unicum, primo quidem continentem potentiam incognitę altiorem, tum inferiorem; quo pacto id membrum manebit reliquo minus, ac dividendo per incognitam quoties licet, manebit in primo casu quædam potentia incognitæ minor quantitate cognita; in secundo quędam quantitas cognita minor quadam potentia incognitæ, & inde nullo negotio uterque eruetur limes.

428. Sit æquatio $x^5 + 2x^4 - 10x^3 + 2x^2 + 4 = 0$. Transponendo terminum negativum habetur $x^5 + 2x^4 + 2x^2 + 4 = 10x^3$. Quoniam in secundo membro habetur unicus terminus incognitam continens, & in eo potestas incognitę minor est, quam in prioribus binis primi membri & major quam in binis postremis ejusdem, bini poterunt inveniri limites tam vero minores, quam majores. Retento enim solo primo termino primi membri habetur $x^5 < 10$

$x^3\ x^2 < 10$, $x < \sqrt{10}$, sive $x < 3.2$, ubi pro radice numeri 10, quæ versatur inter 3. 1, 3. 2 assumpsimus 3. 2, ut nimirum valor x, qui debuit esse $< \sqrt{10}$ sit certo minor, quam 3. 2, ac semper imposterum in hac limitum investigatione, ubi occurrent arithmeticæ operationes, in quibus verus valor obtineri non possit, vel, licet possit, negligantur inferiores fractiones, assumemus valorem proximum, vel minorem, vel majorem vero ita, ut membrum, quod debuit remanere majus, vel minus, multo etiam majus, vel multo minus remaneat. Retento autem solo secundo termino erit $2x^4 < 10x^3$, $2x > 10$, $x < 5$, qui limes est priore remotior. At retento solo tertio erit $2x^2 < 10x^3$, $2 < 10x$, $\frac{1}{5} < x$, sive $x > \frac{1}{5}$, vel $x > 0.2$: retento autem solo quarto fit $4 < 10x^3$ $x^3 > \frac{4}{10}$, $x > \sqrt[3]{0.4}$, $x > 0.7$, qui limes priore est propior. Includitur igitur radix positiva quævis hujus æquationis, inter 0. 7, ac 3. 2.

429. Si æquatio fuisset $x^5 - 2x^4 - 10x^3 - 2x^2 - 4 = 0$, & quæsiti fuissent limites radicum negativarum, mutatis signis alternorum terminorum quorum penultimus hic deest, haberetur $x^5 + 2x^4 - 10x^3 + 2x^2 + 4 = 0$, nimirum illa ipsa prior æquatio, in qua positive radices versantur inter 0. 7, 3. 2, adeoque propositæ æquationis radices negativæ inter $-0, 7$, $-3. 2$.

430. Si in altero membro habeatur post transpositionem unicus terminus continens potentiam incognitæ minimam omnium, quæ habentur in altero, vel omnium maximam, semper inveniri poterit eadem methodo limes in priore casu minor vero, in posteriore major.

Sit

Sit æquatio $x^5 + 3x^3 + 2x^2 - 64 = 0$, Transposito termino negativo erit $x^5 + 3x^3 + 2x^2 = 64$. Retento solo tertio termino primi membri, erit $2x^2 < 64$, $x^2 < 32$, $x < \sqrt{32}$, $x < 5.7$. Retento solo secundo; erit $3x^3 < 64$, $x^3 < 21.4$, $x < \sqrt[3]{21.4}$, $x < 2.8$. Retento solo primo erit $x^5 < 64$; $x < \sqrt[5]{64}$, $x < 2.3$, qui tertius limes est omnium proximus vero valori, cum sit omnium minimus. Ac eodem modo si æquatio fuisset $x^7 + 3x^5 + 2x^4 - 64x^2 = 0$, transponendo obvenisset $x^7 + 3x^5 + 2x^4 = 64x^2$, & dividendo per x^2 fuisset $x^5 + 3x^3 + 2x^2 = 64$, ut prius. Quod si sit $x^5 - x^4 - 2x^3 - 243 = 0$, erit $x^5 = x^4 + 2x^3 + 243$, adeoque $x^5 > 243$, $x > \sqrt[5]{243}$, $x > 3$, vel $x^5 > 2x^3$, $x^2 > 2$, $x > 1.4$, vel $x^5 > x^4$, $x > 1$ quorum limitum proximus est 3, qui omnium est maximus.

431. Ex limite in primo casu majore; in secundo minore potest sæpe erui alter in illo minor in hoc major dividendo in primo ipso casu terminos membri continentis potentias superiores incognitæ per incognitam, ac terminum ea jam carentem in altero membro per limitem majorem vero jam inventum: quo pacto membrum continens incognitam jam erit minus; & continebit præterea terminum cognitum, quo sublato utrinque, & replicata divisione, deveniri quandoque poterit ad unicum terminum continentem incognitam & majorem cognito. In secundo vero casu idem præstabitur quandoque substituendo in termino continente potentiam maximam valorem limitis inventi vero mino-

 ris

ris pro incognita ita, ut deprimatur ad potentiam primi termini alterius membri, tum subtrahendo utrinque terminum ipsum primum, ac iterum deprimendo eadem substitutione eandem illam potentiam maximam, & subtrahendo, donec deveniatur ad solum terminum cognitum in eo membro, quod prius plures continebat terminos. Res autem exemplis patebit magis.

432. In æquatione $x^5 + 3x^3 + 2x^2 = 64$ inventus est num. 430. limes vero major 2. 3. Si dividatur primum membrum per x^2 secundum per 2. 3 $\times$ 2. 3 fiet $x^3 + 3x + 2 > 12$. Quare $x^3 + 3x > 10$ & iterum dividendo hinc per x, inde per 2. 3, erit $x^2 + 3 > 4.\ 3$, adeoque $x^2 > 1.\ 3$, ac proinde $x > \sqrt{1.\ 3}$. $x > 1.\ 1$. Versatur igitur valor radicis positivæ inter 1. 1, ac 2. 3. At in æquatione $x^5 = x^4 + 2x^3 + 243$ limes vero minor erat ibidem 3. Eo posito pro x in primo membro erit $3x^4 < x^4 + 2x^3 + 243$, adeoque dempto utrinque x^4 fiet $2x^4 < 2x^3 + 243$. Iterum posito 3 pro x in primo membro, fiet $6x^3 < 2x^3 + 243$, ac dempto $2x^3$ fit $4x^3 < 243$, $x^3 < 60.75$, $x < 4$. Quare radicis positivæ valor versatur inter 3, & 4.

433. Id tamen non semper succedit. Sic si in priore æquatione fuisset $x^5 + 3x^3 + 16x^2 = 64$, limes major omnium proximus haberetur ex $16x^2 < 64$ $x^2 < 4$, $x < 2$. Divisione autem facta hinc per x^2 inde per 4 fuisset $x^3 + 3x + 16 > 16$, ac dempto utrinque 16 relinqueretur $x^3 + 3x > 0$, unde jam nihil ultra erui potest. In æquatione autem posteriore si fuisset $x^5 = 3x^4 + 4x^3 + 8$, limes vero

ro minor proximus erueretur ex $x^5 > 3x^4$, sive $x > 3$, quo valore substituto pro x in primo membro fuisset $3x^4 < 3x^4 + 4x^3 + 8$, & dempto $3x^4$ utrinque, $0 < 4x^3 + 8$, unde pariter nihil eruitur.

434. Si facta transpositione in utroque membro plures habeantur termini, hæc methodus inveniendi limites non potest succedere. Relicto enim in altero membro unico termino, qui minor erit, quam totum alterum membrum, oporteret & in altero membro omittere omnes terminos præter unicum, sed jam non constaret utrum membrum esset majus. Si sit $x^4 + 2x^3 = 10x + 7$, fieri potest $x^4 < 10x + 7$, vel $x^4 + 2x^3 > 10x$, $x^3 + 2x^2 > 10$. sed inde ulterius progredi non licet subtrahendo quidpiam in primo etiam membro, quod posset remanere vel æquale, vel majus vel minus.

435. Etiam quando uterque limes invenitur, raro admodum ii limites erunt inter se proximi. Quotiescunque enim plures habebuntur radices positivæ vel plures negativæ, earum singulæ, iisdem limitibus contineri debebunt; ac proinde limites ipsi non possunt minus distare a se invicem, quam radix maxima a minima. Adhuc tamen usui esse poterunt, ubi radices rationales investigantur, nam eæ debent versari inter postremi termini divisores juxta num. 236, qui si multi sint, labor inventis limitibus, plurimum contrahetur omissis nimirum iis omnibus, qui extra limites ipsos jacent. Sic pro æquatione $x^5 + 3x^3 + 2x^2 - 64 = 0$, inventi sunt num. 432. limites radicum positivarum 1, 1, & 2. 3. Quare si ulla habetur rationalis radix positiva inter tot divisores numeri 64, potest esse solum 2. Et quidem ea ipsa est radix, & æquationem verificat.

436. Nonnunquam radices etiam imaginariæ depre-

M 2 hen-

hendentur ope limitum si nimirum is limes, qui valore radicis debet esse major, sit minor eo, qui debet esse minor, quod fieri omnino non potest: Si æquatio sit $x^5 + 3x^3 - 2x^2 + 64 = 0$; facta transpositione erit $x^5 + 3x^3 + 64 = 2x^2$. Quare $x^5 < 2x^2$, $x^3 < 2$, $x < \sqrt[3]{2}$; $x > 1 . 3$, Rursus $64 < 2x^2$, $32 < x^2$, $x > \sqrt{32}$, $x > 5 . 5$. Igitur valor radicis positivæ deberet esse minor quam 1 . 3; & major quam 5 . 5, quod fieri omnino non potest. Nulla igitur haberi potest ejus æquationis positiva radix. Cum vero ob continuationem signorum interruptam in terminis $+ 3x^3 - 2x^2$, non omnes radices ejus æquationis negativæ esse possint per n. 218, & radix positiva nulla sit possibilis, oportet imaginarias aliquas radices habeat æquatio.

437. Quamobrem immediatè invenitur limes vero minor, potest etiam semper magis ad valorem radicis vero minorem accedi, substituendo in terminis omissis valorem jam inventum pro incognita, quo pacto jam minus omittetur, & perpetuo iterata substitutione nonnunquam eo artificio ad radicem minimam acceditur quamproximè. In æquatione $x^5 = x^4 + 2x^3 + 243$ neglectis num. 430, prioribus binis terminis secundi membri, inventum fuerat $x > 3$. Substituto hoc valore pro x in iis, erit $x^5 > 81 + 54 + 243$, $x^5 > 378$, adeoque $x > 3 . 2$, qui limes radici est propior. Si rursum ponatur in terminis $x^4 + 2x^3$, hic novus limes pro x, accessus restituto calculo fiet major, & ita porro liceret progredi in infinitum.

438. Verum hæ methodi investigandi radicum limites, & per eos radices ipsas nec generales sunt, quin immo multo plures casus excludunt, quam includunt juxta num. 434, & raro admodum satis accedunt. Ut

igitur ad aliam progredi liceat, quę per substitutiones rem conficit, præmittenda sunt quædam, quæ pertinent ad mutationes varias, quas subit formula primi membri æquationis substitutis aliis, atquę aliis valoribus pro x, quæ utilissima sunt non ad hanc solum investigationem, ut supra innuimus, sed ad nexus omnes inter quantitates a se mutuo pendentes, & ad problemata, quæ dicimus *de maximis, & minimis*, in quibus nimirum investigatur, ubi unam quantitas quępiam perpetuo variabilis ad maximum aliquem, vel minimum valorem deveniat.

439. Sępe binæ quantitates variabiles ita a se invicem pendent, ut altera mutata mutetur & altera. In motu æquabili pendęt spatium percursum a solo tempore: duplo nimirum, vel triplo tempore duplum, vel triplum spatium conficitur. Porro hic nexus, vel potest esse ejusmodi, ut altera quantitas perpetuo crescat, altera perpetuo crescente, ac mutetur accurate in ratione simplici directa alterius, quod in superiore exemplo contingit, vel ut mutetur in aliqua ratione ipsius multiplicata directa, quemadmodum in Geometria globorum superficies sunt in duplicata, moles autem in triplicata radiorum ratione, vel fieri potest e contrario, ut, altera crescente perpetuo, altera perpetuo decrescat, ut si quantitas quævis in plures partes dividitur, magnitudo singularum partium decrescit in ratione reciproca simplici numeri partium, qui quo major est, eo singulæ partes minores fiunt, ac in Nevvtoni theoria gravitas decrescit in ratione reciproca duplicata distantiarum a se invicem, eo nimirum est minor, quo distantiarum quadrata majora sunt.

440. At sępe etiam contingit, ut altera perpetuo crescente, altera perpetuo crescat per aliquod intervallum, tum incipiat decrescere, vel viceversa primo decrescat tum incipiat crescere, ac in primo casu ad maximum quoddam, in secundo deveniat ad minimum. Sic dum grave fune pendulum oscillat, celeritas augetur perpetuo usque ad mediam oscillationem, tum perpetuo mi-

fluitur, umbrarum vero longitudo orto sole, ac procedente die decrescit, ac facta minima in meridie deinde crescit usque ad solis occasum. Quandoque autem altera quantitate perpetuo crescente altera decrescit ita, ut alicubi etiam evadat $=0$; tum in negativam abeat, ac semper magis recedat a 0 crescens ex parte negativa, tum iterum minuatur, & transeat per 0 abiens in positivam; idque per multas vices; cujusmodi exempla nusquam melius haberi possunt, quam in Geometria, ubi si curva quæpiam linea se pluribus flexibus contorqueat, ejus distantia a recta quavis transversim ducta jam augetur, jam minuitur, jam evadit nulla, ubi nimirum ab illa recta secatur, vel tangitur, jam directionem mutat ad partem oppositam jacens. Idem autem & in algebraicis formulis videre est, in quibus si præter quantitates quasdam constantes, & invariabiles, concipiatur una quæpiam, quæ perpetuo varietur, varietur perpetuo formulæ valor, & mutationes subit, quas jam considerabimus.

441. Sit quævis formula algebraica, ut $ax^m + bx^{m-1} + cx^{m-2}$ &c. continens quantitatem x, quæ concipiatur perpetuo mutata, & quantitates quascunque a, b, c &c. quæ concipiantur costantes. Mutato valore x, qui concipiatur initio quidem negativus maximus tum perpetua additione decrescat ex parte negativa, fiat 0, transiens in positivum, ac deinde crescat ex parte positiva in immensum, formulæ illius valor perpetuo mutabitur. In ea mutatione leges hujusmodi omnino observantur.

442. Primo quidem si valoris x mutatio sit continua sive fiat per omnes magnitudinis gradus sine saltu, etiam mutatio valoris formulæ erit continua, & transibit sine saltu per omnes magnitudinis gradus. Nimirum si ex bini valoribus x proveniant bini valores formulæ, semper valor quicunque intermedius inter illos binos valores formulæ ipsius orietur a quodam intermedio valore x. Si enim quantitatis x incrementum

con-

concipiatur minui ultra quoscunque determinatos limites, cujuscunque etiam ejus potentiæ; adeoque & cujusvis aggregati quotcumque potentiarum incrementum, vel decrementum minuetur pariter ultra quoscumque limites, ac proinde illa crescente incrementis non interruptis, crescit hoc etiam eodem pacto.

443. Hinc si in mutatione continua valor formulæ abeat e positivo in negativum, vel viceversa; id duplici tantum modo poterit contingere, nimirum vel transeundo per o, vel transeundo per infinitum, & positiva cum negativis nectuntur quodammodo in nihilo, & in infinito, ac imminuto vel aucto in infinitum valori positivo succedit crescens vel decrescens per omnes magnitudinis gradus valor negativus, quotiescumque ille in negativum convertitur; ac viceversa. Sit formula $4-x$. Ea, existente x positivo, & minore quam 4, erit positiva; crescente autem x decrescet, donec facto $x=4$, fiat $=0$, tum adhuc aucto x evadet negativa. At $\frac{8}{4-x}$, est pariter positivi valoris, donec $x<4$; sed perpetuo crescit, aucto x, ita, ut accedente x ad 4 ultra quoscunque limites, crescat contra ultra quoscunque limites 8; nam existente $x=2$, erit ejus valor $\frac{8}{2}=4$, existente $x=3$, vel $=3.9$, vel $=3.99$, & ita porro, evadit $=\frac{8}{1}$, $\frac{8}{0.1}$, $\frac{8}{0.01}$ &c. sive 8, 80, 800 &c. Facto $x=4$, evadit $=\frac{8}{0}$ valoris infiniti, tum aucto x mutatur in negativum; cum nimirum existente $x=5$, jam fit $=\frac{8}{-1}=-8$. In primo casu abit valor positivus in negativum transeundo per o, in secundo transeundo per infinitum. Et quicumque valor formulæ utcumque parvus in primo casu, vel utcumque magnus in secundo concipiatur, vel positivus, vel negativus, facile invenietur valor x minor, vel major quam 4, qui eum pariat.

M 4 444. In

444. In iis casibus post appulsum ad o, vel ad infinitum, transcenditur, ac transcurritur is veluti limes interjacens inter positivas, & negativas magnitudines. At nonnunquam valor formulæ ab appulsu ad o, vel ad infinitum retro regreditur, sive eo adveniat ex parte positiva, sive ex parte negativa. Sit formula $16 - 8x + x^2$, nimirum quadratum binomii $4 - x$. Posito x positivo minore quam 4 valor ejus formulæ erit positivus, qui decrescet donec fiat $x = 4$, ibi evadet $= 0$, tum aucto x non mutabitur in negativum, sed retro cursum ex parte positiva reflectet iterum positivus, & auctus. Facto enim $x = 2$, erit valor ejus formulæ $16 - 16 + 4 = 4$ facto $x = 3$, fiet $16 - 24 + 9 = 1$, facto $x = 3.9$, fiet $16 - 31.2 + 15.21 = 0.01$, facto $x = 4$. fiat $16 - 32 + 16 = 0$, facto $x = 4.1$, fiet $16 - 32.8 + 16.81 = 0.01$, facto $x = 5$, fiet $16 - 40 + 25 = 1$, & ita porro. Quod si sit $\frac{8}{16 - 8x + x^2}$, existente x minore, quam 4, erit valoris positivi, crescente x crescet ultra quoscumque limites, facto $x = 4$, evadet valoris infiniti, tum aucto x, incipiet decrescere, sed ex parte positiva. Assumptis enim pro x valoribus 2, 3, 3.9, 4, 4.1, 5, 6, evadet $\frac{8}{4}$, $\frac{8}{1}$, $\frac{8}{0.01}$, $\frac{8}{0}$, $\frac{8}{0.01}$, $\frac{8}{4}$, sive 2, 8, 800, infinitum, 800, 8, 2.

Eodem autem pacto formula $-x^2 + 8x - 16$ semper negativa accederet ad o, fieret $= 0$, facto $x = 4$, tum retro regrederetur ab ipso appulsu ad o, & $\frac{8}{-x^2 + 8x - 16}$ semper valoris negativi abiret in infinitum, facto $x = 4$, tum ex infinito regrederetur pariter ex parte negativa.

445. Aliquando autem formulæ valor decrescens incipiet iterum crescere, aliquando vero crescens antequam

quam in infinitum abeat, incipiet decreſcere, & in primo caſu habebit minimum quoddam ibi, ubi decrementum mutat in incrementum, in ſecundo maximum ibi, ubi mutat incrementum in decrementum. Sit formula $x^2 - 8x + 20$: ea ſi fiat x vel negativum valoris cujuslibet, vel poſitivum, ſemper erit valoris poſitivi. Sed dum x minor quam 4 augetur, decreſcet perpetuo, & fiet minima, facto $x = 4$, tum iterum creſcet. Eſt enim $= x^2 - 8x + 16 + 4$, & $x^2 + 8x + 16$ eſt quadratum valoris $x - 4$, vel $4 - x$, quod ſemper eſt poſitivi valoris, majus vel minus, prout x magis, vel minus diſtat a 4, ac facto $x = 4$, evadit $= 0$: Quamobrem etiam addito 4 illi quadrato, habebitur valor ſemper poſitivus, qui evadet minimus, ubi fiet $x = 4$, & illud quadratum $= 0$. Contra formula $\frac{8}{x^2 - 8x + 20}$ erit quidem ſemper poſitivi valoris, at accedente x ad 4, creſcet, facto $x = 4$ evadet maxima; tum decreſcret. Quod ſi fuiſſet $-x^2 + 8x - 20$, vel $\frac{8}{-x^2 + 8x - 20}$, valor in utroque caſu ſemper negativus aſſequeretur in primo minimum quiddam in ſecundo maximum facto $x = 4$.

446. Sæpe plures etiam habentur appulſus ad o cum tranſitu vel ſine ipſo, & plures regreſſus, ac mutationes incrementi in decrementum, vel viceverſa cum maximis, vel minimis valoribus, quæ quidem in formulis primi membri æquationum ordinatarum facile perſpici poſſunt. In illis etiam in appulſu valoris x ad radicem quampiam fit tota formula $= 0$, ac niſi forte ibidem habeatur radicum æqualium numerus par, fit ſemper tranſitus per o a valore poſitivo ad negativum, vel viceverſa, ubi autem habetur numerus par radicum æqualium, fit regreſſus a o ſine tranſitu, ac inter binas

quaſ-

quasvis radices reales inæquales necessario habetur maximum quoddam, ac plerumque & minimum exhibetur a radicibus imaginariis; quæ ut paulo intimius perspici possint, notanda sunt prius quædam pertinentia ad ipsos valores ejusmodi formularum.

447. In primis si æquatio sit rite ordinata, & coefficientes finitos habeat, valor primi membri numquam poterit evadere infinitus existente x valoris finiti; sed vel erit $= 0$, vel finitæ magitudinis. Nam in æquatione rite ordinata nullus terminus dividetur per incognitam illam; adeoque quivis terminus continet quantitatem cognitam finitam vel numquam, vel aliquot vicibus multiplicatam per valorem x; qui cum finitus sit, erit finitus etiam quivis terminus, adeoque aggregatum quoque omnium finitum erit, nisi forte positivis, ac negativis terminis se mutuo destruentibus, evanescat, & fiat $= 0$. Quamobrem si assumptis binis valoribus pro x, valor formulę primi membri prodeat ex altero positivus, ex altero negativus; inter utrumque valorem assumptum pro x, continebitur realis aliqua radix æquationis, qua nimirum assumpta pro x, fiet formula ipsa $= 0$. Nam e negativo in positivum valorem ea formula transire non potest, nisi transeat vel per 0, vel per infinitum (per num. 443). Non potest autem transire per infinitum. Transibit igitur per 0.

448. Si concipiatur valor x auctus in immensum, terminus qui continebit potentiam superiorem ipsius quamcumque, erit in immensum major quovis termino, qui continebit inferiorem: contra eo in immensum imminuto, erit in immensum minor: & accipi potest valor x ita magnus, vel ita parvus, ut terminus superiorem ipsius potentiam continens ad terminum continentem potentiam inferiorem habeat rationem utcumque magnam in primo casu vel parvam in secundo; quicumque sint coefficientes finiti ipsorum terminorum. Sit enim prior terminus ax^{m+n}, posterior bx^{m}, ra-

tio

tio data 1 ad r. Erit $ax^{m+n} : bx^m :: x^n : \frac{b}{a}$, cum & productum extremorum, & productum mediorum sit bx^{m+n}. Ponatur $t^n = r$, $c^n = \frac{b}{a}$; & sumatur $x = \frac{c}{t}$, eritque $x^n = \frac{c^n}{t^n} = \frac{c^n}{r}$: Quare ratio x^n ad $\frac{b}{a}$, sive x^n ad c^n erit eadem, ac $\frac{c^n}{r}$ ad c^n, sive c^n ad $r c^n$, vel 1 ad r, quod succedet, utcunque quantitas r sit parva, vel magna, qua decrescente, vel crescente in immensum decrescet, vel crescet t^n; adeoque contra crescet, vel decrescet $\frac{c}{t}$ sive x.

449. Quamobrem si fuerint quotcumque termini continentes diversas potentias incognitæ x cum coëfficientibus in se determinatis, nec infinitis, nec $= 0$, & mutato valore x, non mutatis; poterit assumi valor x ita magnus, ut terminus quivis superiorem potentiam continens sit in immensum major summa omnium continentium potentias inferiores, vel ita parvus ut terminus quivis continens potentiam inferiorem sit pariter in immensum major summa omnium continentium potentias superiores, ac in primo casu adhuc aucto, in secundo imminuto valore x in immensum; augebitur adhuc magis in immensum illius termini ratio ad aggregatum omnium reliquorum. Si enim numerus terminorum sit p, & sit ratio quædam utcumque magna 1 ad q, fiat vero $r = pq$; poterit sumi valor x ita magnus, vel ita parvus, ut terminus continens in primo casu potentiam superiorem x, in secundo inferiorem, habeat ad quemvis e reliquis rationem majorem, quam sit 1 ad r (per num. 448.), sive 1 ad pq. Quare diviso illo termino in numerum partium æqualium p, quævis ex iis habebit ad quemvis e reliquis terminis ratio-

rationem majorem, quam sit 1 ad q, adeoque & is totus terminus ad reliquorum omnium summam: ac patet ex ipso num. 448, eam rationem adhuc in immensum crescere aucto in primo casu valore x, imminuto in secundo.

450. Hinc si in primo membro æquationis cujusvis ordinatæ ponatur pro x valor satis magnus negativus, valor ipsius primi membri erit negativus in æquationibus gradus imparis, positivus in æquationibus gradus paris; ac si ponatur valor positivus satis magnus: semper valor totius formulæ erit positivus. Nam primus terminus æquationis ordinatæ semper & signum positivum habet, & continet maximam potentiam x, eamque elevatam ad eum gradum, qui equationem denominat. Quare & id signum habet, quod illa incognitæ x potestas, & excedit reliquorum omnium summam; cumque negativarum quantitatum potentiæ impares negativæ sint, pares vero positivæ, positivarum vero omnes positivæ; posito pro x valore negativo, erit valoris negativi in æquationibus gradus imparis, positivi in equationibus gradus paris, posito autem valore positivo, erit positivi in omnibus, adeoque idem & toti formulę accidet.

451. Inde autem consequitur quamvis æquationem gradus imparis debere habere saltem unam radicem realem. Nam posito satis magno valore negativo pro x, prodit valor totius formulæ negativus, posito valore satis magno positivo, prodit positivus, adeoque (per num. 447) habebitur radix aliqua realis intermedia inter eos valores.

452. Tum vero eruitur illud, numerum radicum realium in æquatione gradus imparis debere esse imparem, in æquationibus gradus paris non posse esse nisi parem. Si enim cujuspiam æquationis incognita sit x, & radix quædam realis r, ac dividatur illa equatio per $x-r$, divisio debebit esse accurata sine ullo residuo, & quotus erit nova æquatio gradus unitate minoris, & continens reliquas omnes radices, quod quidem constat ex

ipsa

ipsa genesi æquationum altiorum, quæ nimirum componuntur multiplicatione omnium æquationum primi gradus continentium radices singulas, juxta n. 235, accuratius autem demonstratur dividendo æquationem generalem $x^m + ax^{m-1} + bx^{m-2}$ &c. .. $+ px + q = 0$ per $x - r$. Proveniet enim ex ejusmodi divisione sequens quotus post numerum operationum m;

$$\begin{array}{llllll} x^{m-1} & + rx^{m-2} & + r^2 x^{m-3} & \&c. & + r^{m-1} & = 0 \\ & + a & + ar & & + ar^{m-2} & \\ & & + b & & + br^{m-3} & \\ & & & & \&c. & \\ & & & & + p & \end{array}$$

ac diligentius perpendenti ipsam divisionis seriem satis patebit, postremum residuum fore $r^m + ar^{m-1} + br^{m-2}$ &c. .. $+ pr + q$, quod quidem erit $= 0$. Cum enim r sit radix æquationis propositæ $x^m + ax^{m-1} + bx^{m-2}$ &c. .. $+ px + q = 0$, posito r pro x debet formula primi membri evadere $= 0$, nimirum illa ipsa $r^m + ar^{m-1} + br^{m-2}$ &c. .. $+ pr + q$, quæ pro residuo remanserat, debet esse $= 0$. Hinc divisa æquatione impari per æquationem simplicem, quæ contineat illam radicem realem, quam habet, orietur æquatio gradus paris continens reliquas, quæ si iterum habeat unam rudicem realem, divisa per æquationem simplicem continentem ejusmodi radicem restituet æquationem imparem, habentem necessario saltem unam radicem realem. Adeoque illa proposita æquatio gradus imparis, quæ debet habere unam radicem realem, si habet & secundam, debet habere & tertiam, ac eodem argumento si habet quartam debet habere quintam, & ita porro; ac simul patet æquationem gradus paris, si habet radicem realem unam, debere habere & secundam, si habet tertiam, debere habere & quartam, ac ita porro; ac proinde æquationem quamvis gradus imparis debere habere numerum radicum rea-

lium

lium imparem, gradus vero paris non posse habere nisi parem.

453. Atque hinc demum fit manifestum illud, quod num. 219. proposuimus, nimirum radicum imaginariarum numerum non posse esse nisi parem. Cum enim æquatio gradus imparis habeat radicum numerum imparem, paris parem, & realium radicum numerus in illis non possit esse nisi impar, in his par; radicum imaginariarum numerus reliquus non poterit esse nisi par in utrisque.

454. Concipiatur jam æquatio, quæ habeat omnes radices reales, & inæquales, in quibus valor formulæ transeat per o. Si ea sit gradus imparis, posito pro x valore negativo satis magno, valor formulæ erit pariter satis magnus & negativus, tum perpetuo decrescet, donec in appulsu valoris ad primam radicem fiat $= 0$, & migret in positivum, qui deinde crescet, tum alicubi necessario debebit mutare incrementa in decrementa, cum debeat redire ad o in appulsu ad secundam radicem, ubi migrabit iterum in negativum, ac crescet ex parte negativa, tum decrescet, ut in tertia radice fiat $= 0$, & ita porro, ac si æquatio sit gradus paris valor initio positivus migrabit in negativum, tum in positivum, & ita porro.

455. Exemplum haberi potest in æquatione $x^5 - 7x^4 - 7x^3 + 79x^2 + 6x - 72 = 0$, cujus radices reales sunt $-3, -1, 1, 4, 6$. In ea si ponatur pro x quivis numerus negativus major, quam -3, valor formulæ erit negativus posito $x = -3$, ille valor fit $= 0$, tum transit in positivum ac posito pro x valore -2.9, vel -2.5, vel -2, vel -1.5, vel quovis alio numero medio inter -3, & -1, semper idem valor est positivus, qui quidem prius crescit, tum decrescit, & facto $x = -1$ fit iterum $= 0$ tum inter -1, & 1 est negativus, ab 1. ad 4 positivus a 4 ad 6 negativus, post 6 semper deinde positivus, quod Tyroni substituenti numeros facile patebit.

456. Quod si binarum radicum valores ad se mutuo accedant, minuitur intervallum illud, in quo valor primi membri transiens per o in prima crescit, tum decrescit, & iterum appellit ad o in secunda; ac coeuntibus binis radicibus ita, ut jam æquatio habeat binas radices æquales, illud intervallum prorsus eliditur, & valor formulæ in appulsu ad binas radices reales non transit per o; sed ab ipso o regreditur. Sic si æquatio sit $x^5 - 5x^4 - 9x^3 + 53x^2 + 8x - 48 = 0$, quæ componitur ex æquationibus $x + 3 = 0$, $x + 1 = 0$, $x - 1 = 0$, $x - 4 = 0$, $x - 4 = 0$, adeoque habet radices -3, -1, 1, 4, 4, quarum binæ postremæ æquales sunt, valor formulæ a valore $x = -3$ ad -1 erit positivus, a valore -1 ad 1 negativus, a -1 ad 4 positivus, tum in ipso quidem $x = 4$, erit $= 0$, sed postea iterum erit positivus, ut patebit substituenti.

457. At si sumatur æquatio cujus radices -3, -1, 4, 4, 4, nimirum $x^5 - 8x^4 + 3x^3 + 92x^2 - 112x - 192 = 0$, composita ex æquationibus $x + 3 = 0$, $x + 1 = 0$, $x - 4 = 0$, $x - 4 = 0$, $x - 4 = 0$; in ipsa valor formulæ a -3 ad -1 erit positivus, a -1 ad 4 negativus, eliso jam illo intervallo ab 1 ad 4, in quo iterum positivus erat, & post 4 erit positivus, adeoque in illa radice triplice 4 valor formulæ transibit per o, & mutabit signum. Verum si æquatio sit potius $x^5 - 13x^4 + 48x^3 + 32x^2 - 512x + 768 = 0$; cujus radices -3, $+4$, $+4$, $+4$, $+4$, valor formulæ ante $x = -3$ negativus, a -3 ad 4 positivus esset, eliso etiam illo intervallo a -1 ad 4 in quo negativus erat, ac post $x = 4$ pariter positivus, adeoque appellet quidem ad o, sed non transibit; atque eodem pacto semper patebit in numero radicum æqualium impare haberi transitum, in pari regressum.

458. Binæ radices postquam æquales evaserunt, pos-

sunt

sunt abire in imaginarias cum nimirum valor formulæ, qui factis binis radicibus æqualibus, regrediebatur ab ipso o, non pertingit ad o, sed regreditur, sive incipit iterum crescere, ante quam deveniat ad ipsum o. Id patebit in æquatione $x^5 - 5x^4 - 8x^3 + 58x^2 + 7x - 51 = 0$, quæ componitur ex æquationibus $x + 3 = 0$, $x + 1 = 0$, $x - 1 = 0$, $x^2 - 8x + 17 = 0$, adeoque habet radices -3, -1, $+1$, $4 + \sqrt{-1}$, $4 - \sqrt{-1}$. In ea valor primi membri est negativus, ante quam fiat $x = -3$, a -3 ad -1 positivus, a -1 ad 1 negativus, qui deinde initio crescit, tum decrescit, & antequam fiat $= 0$ incipit iterum crescere, ac crescit deinde in infinitum, ut substituenti patebit.

459. Hinc vero quotiescumque habetur minimum quoddam in valore formulæ primi membri ita, ut is a decrescendo transeat ad crescendum ante appulsum ad o, semper habebuntur binæ saltem radices imaginariæ. Aliquando tamen etiam illud intervallum inter valorem x, in quo formula primi membri incipit decrescere, & valorem, in quo sine appulsu ad o incipit iterum crescere, eliditur, & æquatio binas radices imaginarias continet sine minimo valore, sive quin valor formulæ incipiat ibi prius decrescere, tum crescere. Id patebit in æquatione $x^5 - 3x^4 - 9x^3 + 33x^2 + 8x - 30 = 0$, quæ componitur ex æquationibus $x + 3 = 0$, $x + 1 = 0$, $x^2 - 6x + 20 = 0$, adeoque habet radices -3, -1, 1, $2 + \sqrt{-1}$, $2 - \sqrt{-1}$. Ejus formula est negativa usque ad $x = -3$, positiva ad -1, negativa ad 1, tum deinde semper positiva, ut pariter substituenti patebit.

460. Porro ipsi valores, in quibus formula transit a crescendo ad decrescendum, vel viceversa, inveniri possunt, considerando incrementa, vel decrementa valorum formulæ orta ex perpetuo incremento valoris incognitæ,

quod

quod summo erit usui & ad æquationum naturam penitius cognoscendam, ac inveniendas radices, & ad solvendas generaliter quæstiones omnes *de maximis, & minimis*, quotiescumque id, cujus quæritur maximum quoddam, vel minimum, algebraica formula exprimi potest.

461. Sit formula $x^m + ax^n + bx^r$ &c. ejus formæ, quam habet primum membrum æquationis ritè ordinatę, in qua concipiatur x crescere per quantitatem quandam y. Omnes illi termini, qui continent x, mutabuntur, & si in singulis ponatur $x + y$ pro x, habebitur nova formula, ex qua si dematur illa prior $x^m + ax^n + bx^r$ &c. habebitur incrementum, vel decrementum formulę ipsius ortum ex illo incremento y incognitę x, quod incrementum, vel decrementum generali vocabulo dicemus differentiam, ut ille valor y dicetur pariter differentia incognitæ x, quę nimirum differentiæ exhibent excessum, vel defectum secundi valoris incognitę $x + y$ respectu primi x, & formul ortę a secundo respectu ortę a primo.

462. Jam vero si quivis ex illis terminis formulę dicatur px^t, posito $x + y$ pro x, habebitur in eo (per num. 91) $px^t + tpx^{t-1}y + \frac{t\times(t-1)}{1\times2}px^{t-2}y^2 + \frac{t\times(t-1)\times(t-2)}{1\times2\times3}\times px^{t-3}y^3$ &c. Quare dempto px^t remanebit pro differentia illius termini formulę ipsius $t.px^{t-1}y + \frac{t\times(t-1)}{1\times2}px^{t-2}y^2 + \frac{t\times(t-1)\times(t-2)}{1\times2\times3}\times px^{t-3}y^3$ &c.

463. Dicatur jam summa omnium terminorum tpx^{t-1} provenientium ex omnibus terminis propositæ formulæ $= P$, summa omnium $t \times (t-1) \times px^{t-2} = Q$, omnium $t \times (t-1) \times (t-2)\, px^{t-3} = R$, & ita porro, & hæc differentia formulę erit $Py + \frac{Qy^2}{1 \times 2} + \frac{Ry^3}{1 \times 2 \times 3}$ &c., ac valorum P, Q, R derivatio ex ipsa formula proposita, ac ex se invicem statim patet. Nam tpx^{t-1} derivatur ex px^t, ducendo ipsum terminum in t, exponentem variabilis x, & dividendo per x, tum $t \times (t-1)\, px^{t-2}$ ex præcedenti tpx^{t-1} ducendo ipsum in $t-1$ exponentem ipsius variabilis x, & iterum dividendo per x, & pariter $t \times (t-1) \times (t-2)\, px^{t-3}$ derivatur ex præcedenti $t \times (t-1)\, px^{t-2}$, ducendo ipsum in $t-2$ exponentem variabilis x, & iterum dividendo per x. Ac eodem prorsus modo quivis hujusmodi terminus sequens derivatur ex præcedenti, ducendo ipsum in exponentem variabilis, & dividendo per ipsam variabilem.

464. Quamobrem si omnes termini formulæ propositæ ducantur in exponentem, quem variabilis x habet in eo termino & dividantur per x; formula, quæ inde orietur, & quam idcirco appellabimus primo derivatam, exhibebit illum valorem P. E formula P eadem prorsus lege derivabitur secundo formula Q, ex hoc tertio formula R, & ita porro, in qua derivatione terminus ille, qui in præcedenti formula carebat ipsa variabili, adeoque habebat variabilis exponentem o, evanescet, ductus nimirum in ipsum o, quo pacto decrescet termi-

norum

norum numerus inter derivandum, ac continua illa divisione per variabilem, factis tot derivationibus, quot exprimit exponens potentiæ altissimæ ipsius illius variabilis, in postrema deerit variabilis ipsa, ac nova formula derivata ex ea evadet $= 0$.

465. Sit ex: gr: formula $x^4 - 16x^3 + 88x^2 - 192x + 128$, quæ dicatur A. Formula primo derivata erit juxta canonem numeri præcedentis $4x^3 - 48x^2 + 176x - 192$; quæ erit $= P$: Formula secundo derivata erit $12x^2 - 96x + 176$, quæ erit $= Q$. Formula tertio derivata erit $24x - 96$, quæ erit $= R$. Formula quarto derivata erit 24, quæ erit $= S$, ex qua eadem lege derivaretur 0, cum nihil jam superfit præter terminum 24, sive $24x^0$, qui ductus in exponentem 0, evadit $= 0$. Porro si formula illa P primo derivata ducatur in y, secundo derivata Q in $\frac{y^2}{1 \times 2}$, tertio derivata R in $\frac{y^3}{1 \times 2 \times 3}$, quarto derivata S in $\frac{y^4}{1 \times 2 \times 3 \times 4}$, habebitur differentia formulæ propositæ A orta ex differentia y addita variabili x. Ac si Tyro in eadem formula substituet ubique $x + y$ pro x, tum alibi ipsi formulæ addet formulas illas derivatas, & eo pacto multiplicatas, sive $Py + \frac{Qy^2}{1 \times 2} + \frac{Ry^3}{1 \times 2 \times 3} + \frac{Sy^4}{1 \times 2 \times 3 \times 4}$; inveniet utrobique eamdem prorsus summam.

466. Concipiatur jam quivis determinatus valor quantitatis x; cui addatur incrementum y, quod illo stante concipiatur imminutum in immensum. Valores quidem P, Q, R &c. qui non pendent ab ipso valore y, non mutabuntur, ac nisi forte ejusmodi fuerit valor x, ut

formula P sit $= 0$, omnes termini $\frac{Qy^2}{1 \times 2}$, $\frac{Ry^3}{1 \times 2 \times 3}$ &c., erunt in immensum minores primo termino Py, (per num. 448) & tota formula $Py + \frac{Qy^2}{1 \times 2} + \frac{Ry^3}{1 \times 2 \times 3}$ &c. habebit idem signum, quod primus ejus terminus Py, ac habebit valorem quamproximum valori ipsius, qui proinde prout fuerit conformis vel difformis valori formulę propositæ A, ipsa formula ex additione illa facta valori x suscipiet incrementum, vel decrementum. Quod si forte fuerit $P = 0$, sed non fuerit $Q = 0$, tum primo termino seriei illius evanescente; posterioribus respectu secundi imminutis in immensum; secundus $\frac{Qy^2}{1 \times 2}$ exprimet quamproximè differentiam totius formulæ propositæ, prout fuerit valor Q positivus, vel negativus. Ac pariter si fuerit & $P = 0$, & $Q = 0$, sed non $R = 0$, idem præstabit tertius terminus $\frac{Ry^3}{1 \times 2 \times 3}$, & ita porro.

467. Hinc autem primo consequitur illud, cujuscunque magnitudinis assumatur x, dummodo non congruat cum valore radicis cujuspiam æquationis ortæ ex formula primo derivata posita $= 0$; sive æquationis $P = 0$; imminuto y in immensum, differentiam totius formulæ propositæ forę quamproxime, ut ipsum incrementum y, & habituram ad ipsum rationem finitam. Nam in eo casu, posito illo valore pro x, non verificabitur æquatio, sive non erit $P = 0$, adeoque differentia formulæ propositæ erit quamproximè Py: nimirum ob P non mutatam mutata y, erit ut y, & erit ad y, ut P ad 1, cum sit $P . 1 : : Py . y$. Si autem assumatur pro x valor radicis æquationis $P = 0$, sed non æquationis $Q = 0$, erit differentia formulę propositæ quam-

quamproximè in duplicata ratione incrementi y, ac si is valor fuerit radicis communis æquationibus $P = o$, & $Q = o$, sed non $R = o$, erit illa quamproximè in ratione triplicata hujus, erit enim in illo casu quamproxime $\frac{Qy^2}{1 \times 2}$, in hoc $\frac{Ry^3}{1 \times 2 \times 3}$, sive ob $\frac{Q}{1 \times 2}$ vel $\frac{R}{1 \times 2 \times 3}$ constantem variata sola y; ut y^2, vel y^3 & ita porro.

468. Deinde eruitur illud, quotiescumque formula proposita devenit ad aliquod maximum, vel minimum, debere esse $P = o$. Nam ubi formula ipsa devenit ad aliquod maximum, transit a crescendo ad decrescendum, ubi minimum aliquod assequitur, transit a decrescendo ad crescendum. Quare antequam deveniat ad maximum, utcunque parum ab eo distet, si y minuatur etiam infra illam distantiam, debet habere incrementum, transgresso maximo decrementum, contra vero ubi ad minimum devenit. Porro generaliter extra eos casus, in quibus x habeat valorem cujuspiam radicis æquationis $P = o$, quorum casuum numerus non potest esse major numero radicum ejus æquationis, utique determinato; formula proposita semper habet incrementum, vel decrementum, prout P habet signum conforme, vel difforme ipsius signo. Igitur in ipso appulsu formulæ, ad aliquod maximum, vel minimum, debet valor P transire e positivo in negativum, vel viceversa, quod juxta num. 443, fieri non potest; nisi ibidem fiat $= o$, cum ibi ex natura formulæ propositæ, quæ hic ponitur (per num. 461.) ejus formæ quam habet primum membrum æquationis ordinatæ, & ex natura derivationis expositæ num. 464, non possit transire per infinitum juxta num. 447.

469. Nomine autem minimi, hic intelligimus etiam illos casus, in quibus, ubi decrescendo appulerit ad o inde regreditur ex eadem parte, non vero illos, in quibus transgreditur ipsum valorem o, ac transit e positivo in negativum, vel viceversa, cum ii transitus fiant

per detractionem continuam, vel per additionem; ac proinde decrementa ibi quodammodo non mutentur in incrementa, vel viceversa, sed veluti continuentur.

470. Hinc si alicubi formula proposita devenit ad maximum aliquod, vel minimum, id detegi pote-? ponendo $P = 0$, sive derivando ex ea æquationem hac lege, ut quivis terminus multiplicetur per exponentem variabilis x, & dividatur per x, ac formula derivata ponatur $= 0$. Nam inter radices ejus æquationis necessario continebuntur omnes illi valores, ad quos, ubi appulerit x, maximum aliquod habet vel minimum.

471. Proponatur numerus 8 ita secandus in binas partes, ut si a quarta potentia differentiæ inter partem alteram, & dimidium numerum, dematur octupla secunda potentia differentiæ inter partem alteram, & idem dimidium, residuum sit maximum vel minimum. Sit pars altera x, erit altera $8 - x$. illius differentia a dimidio erit $x - 4$, hujus $8 - x - 4 = 4 - x$. Prioris quarta potentia $x^4 - 16x^3 + 96x^2 - 256x + 256$, posterioris potentia secunda erit $16 - 8x + x^2$, adeoque ejus octuplum $128 - 64x + 8x^2$, quo ablato a priore habetur $x^4 - 16x^3 + 88x^2 - 192x + 128$ formula exprimens quantitatem propositam.

472. Ducantur singuli termini in suos exponentes quantitatis x, ac dividantur per x, ut prima derivatione numeri 465. & oritur æquatio $4x^3 - 48x^2 + 176x - 192 = 0$, sive dividendo per 4, habetur $x^3 - 12x^2 + 44x - 48 = 0$, cujus radices 2, 4, 6, ut substituenti patebit. Porro si pro x assumatur quivis valor negativus, qui sensim minuatur, tum fiat 0, deinde summantur partes positivæ crescentes adhuc tamen minores, quam 2, valor formulæ initio positivus perpetuo decrescet tum transibit per 0 abiens in negativum crescentem, donec evadat maximus, ubi pars $x = 2$, deinde decrescet, donec facto $x = 4$, evadat $= 0$,

ac

ac deinde crescente x iterum recedat a o ex eadem parte negativa crescens, donec fiat $x = 6$, ubi iterum fiat maximus, ac deinde decrescet perpetuo, ac transgresso o abibit in positivum, & perpetuo crescet, adeoque bina maxima habentur, facto $x = 2$, & $x = 6$, ac unum minimum facto $x = 4$, ubi ab ipso o regreditur ex eadem parte, quod, si Tyroni libuerit, numeris substitutis, labore sane improbo, omnino innotescet.

473. Et quidem si liberet illos etiam deprehendere valores x, in quibus proposita formula transit per o, satis esset ipsam ponere $= 0$, ac resolvere aequationem inde ortam $x^4 - 16x^3 + 88x^2 - 192x + 128 = 0$, quae componitur ex hisce binis $x^2 - 8x + 16 = 0$, $x^2 - 8x + 8 = 0$, ac proinde radices sunt 4, 4, aequales, cum in iis formula regrediatur a o sine transitu, posterioris vero $4 \pm \sqrt{8}$, sive proxime 1 . 17, 6 . 83, in quibus fit ipse transitus. Sed ea huc non pertinent.

474. Et hic quidem radices omnes aequationis derivatae exhibuerunt maximum quoddam, vel minimum. At non semper omnes aequationis derivatae radices maximum quoddam, vel minimum exhibent. Mutato nonnihil problemate investigetur maximum, vel minimum residuum, ubi ex illa quarta potentia auferatur illa eadem secunda potentia assumpta 16 vicibus, & octupla secunda potentia partis prioris. Ab $x^4 - 16x^3 + 96x^2 - 256x + 256$ auferendum erit $16x^2 - 128x + 256$, & $8x^2$, adeoque obveniet $x^4 - 16x^3 + 72x^2 - 128x$. Aequatio inde derivata erit $4x^3 - 48x^2 + 144x - 128 = 0$, sive $x^3 - 12x^2 + 36x - 32 = 0$, cujus radices 2, 2, 8. At priores binae nec maximum quid exhibent, nec minimum. Nam valor formulae, seu quantitatis propositae, qui facta x negativa satis magna, tum decrescente, & tran-

feunte in positivam; initio est positivus, & magnus; decrescit, ac transgressus o; & factus negativus ante, quam fiat $x = 2$, pergit deinde crescere ante & post appulsum ad 2, donec facto $x = 8$ fiet maximus ex parte negativa, nimirum $- 512$; tum adhuc aucto x, & altera parte jam facta negativa, decrescit; ac iterum transiens per o abit in positivum, & perpetuo crescit.

475. Atque ex hoc, & pluribus aliis ejusmodi exemplis patet, quandoque in errorem inducere methodum, quę pro inveniendis maximis, vel minimis, in hujusmodi formulis plerumque pręscribi solet; qua nimirum præscribitur ut ex ipsa formula derivetur ęquatio methodo exposita; & æquationis radices assumantur pro maximorum, & minimorum determinatione, quod quidem etiam in differentiali calculo fieri solet, cujus methodus eodem redit. Pręscribi enim solet, ut quantitatis quæsitæ differentia infinitesima quæ nimirum concipitur infinite parva, ponatur $= o$. Differentiam autem infinite parvam quantitatis cujusvis designant prępfixa characteristica d quantitati ipsi, adeoque ipsis est dx, quod hic nobis y, & contemnunt penitus infinitesimas altiorum potestatum respectu inferiorum, adeoque contemptis penitus iis, quæ nos diximus

$$\frac{y^2}{1 \times 2}, \quad \frac{Ry^3}{1 \times 2 \times 3} \ \&c. \text{ respectu } Py,$$

sumunt pro differentia formulæ propositæ Pdx, & ea facta $= o$ eruunt æquationem illam nostram eandem $P = o$.

476. At in eo hallucinantur plerique ex iis, qui rem paulo altius non perpendunt, quod admodum manifestum fit in superiori exemplo, ubi, ut in aliis plerisque, æquationis derivatæ radices nec maximum, nec minimum exhibent, saltem aliquæ, & licet nullum in ejusmodi formulis haberi possit maximum, vel minimum, ut demonstravimus quin id contineatur inter radices æquationis derivatę; adhuc tamen non semper e contrario omnes ęę radices maximum exhibent, vel minimum, nec abs re

erit

erit erroris fontem aperire cum potissimum & generalem exhibere possimus canonem, ex quo innotescat; utrum æquationis derivatæ radix quæpiam maximum aliquid exhibeat, vel minimum, nec-ne; quin immo & illud quod ea methodus non docet; & plerumque omittitur, nimirum an habeatur potius maximum, an minimum, atque id ipsum ortum ex consideratione generali æquationum, ac omnino connexum cum earum resolutione per approximationem, quàm hìc persequimur.

477. Illa autem regula inveniendi maxima, vel minima innititur huic discursui. Dum quantitas crescit, ejus differentia est positiva, dum decrescit negativa. Quare ubi illa sit maxima, hæc evadit $= 0$. Porro contemptis omnibus terminis $\frac{Qy^2}{1 \times 2}$ $\frac{Ry^3}{1 \times 2 \times 3}$ &c.; sive $\frac{Qdx^2}{1 \times 2}$, $\frac{Rdx^3}{1 \times 2 \times 3}$; respectu primi Py, sive Pdx, ipse solus terminus Py haberi potest pro differentia. Igitur ipse ponendus est $= 0$: & in valoribus ex hac positione resultantibus differentia erit semper $= 0$, adeoque habebitur aliquod maximum, vel minimum. In hoc discursu committitur paralogismus in eo quod termini posteriores contemnantur respectu termini, Py etiam quando ipse est $= 0$. Ubi P non est $= 0$, debet esse quantitas in se determinata, respectu cujus cum y infinities minor concipiatur, omnes termini $\frac{Qy^2}{1 \times 2}$, $\frac{Ry^3}{1 \times 2 \times 3}$ &c. sunt infinities minores, & iis contemptis solus terminus Py considerari potest pro integra differentia, & quæ contemnuntur sunt infinities minora iis, respectu quorum contemnuntur. At ubi fit

$P =$

$P = o$, reliqui termini $\frac{Q\,y^2}{1 \times 2}$, $\frac{R\,y^3}{1 \times 2 \times 3}$ &c. non solum non sunt infinities minores primo illo Py, sed nisi forte sit & $Q = o$, & $R = o$ &c., sunt infinities majores, cum ipsi sint aliquid, ac Py sit $= o$, ac proinde posito $Py = o$, non evadit $= o$ differentia ipsa, sed remanet aliquid, & idcirco ex ea positione provenire possunt valores, qui nullum maximum, aut minimum exhibeant, sed ubi adhuc quantitas proposita pergat crescere, vel decrescere.

478. Et quidem si sumatur quivis valor x determinatus, tum ei addatur differentia y, quæ concipiatur in immensum exigua, nunquam differentia formulæ poterit esse $= o$; sed si valor x sit utcunque parum minor eo, qui exhibet maximum positivum, vel minimum negativum, erit positiva, si congruat cum illo, vel sit utcunque parum major erit negativa, contra vero ubi exhibetur minimum positivum, vel maximum negativum. Semper enim inter illum valorem assumptum pro x, & illum qui exhibet maximum, vel minimum, infiniti alii intercedunt, quibus respondent valores formulæ majores, vel minores. Atque idem patet ex eo, quod si valor x utcumque determinetur, ac utcumque minuatur in immensum y, valores P, Q, R &c. vel sunt aliquid determinatum, & immensum majus ipso y, vel $= o$. Hinc primus ex iis qui non est $= o$, exhibet terminum in immensum majorem posterioribus omnibus, a quibus proinde elidi non potest, nec tota series $Py + \frac{Q\,y^2}{1 \times 2} + \frac{R\,y^3}{1 \times 2 \times 3}$ &c. potest in eo casu esse $= o$. At saltem postremum ex iis terminis non potest esse $= o$, nam in derivatione valorum P, Q, R &c. devenitur demum ad terminum prorsus carentem variabili x, qui nimirum oritur ex primo formulæ termino x^m post derivationes m juxta num. 464.

479. So-

479. Solum illud erui potest, ibi, ubi valor x eruitur ex positione $P = 0$, differentiam formulæ esse in immensum minorem, quam alibi. Nam ubi non est $P = 0$, ipsa quamproxime est Py, & habet ad y rationem finitam, juxta num. 467, ubi autem est $P = 0$, nisi sit & $Q = 0$, ipsa est quamproxime $\frac{Q\,y^2}{1 \times 2}$, vel si sit & $Q = 0$, erit quamproxime $\frac{R\,y^3}{1 \times 2 \times 3}$ & ita porro, qui termini sunt in immensum minores termino Py non habente $P = 0$, quicunque in se determinati valores sint P, Q, R &c. Quamobrem positio illa $P = 0$ non indicat locum, ubi differentia hoc modo considerata transeat a positiva, in negativam, vel viceversa, & fiat $= 0$, sed solum ubi in immensum decrescat. Porro ea revera nusquam fit $= 0$, cum nulla sit quantitas x in se determinata ita proxima exhibenti maximum, vel minimum, ut alia propior non habeatur, adeoque, ut alia non habeatur, ipsa major, vel minor, ante quam incrementa mutentur in decrementa, vel viceversa.

480. Alio pacto potest differentia considerari ita, ut evadat $= 0$, sed adhuc positio illa $P = 0$ eum locum non determinat. Si nimirum concipiatur valor x perpetuo variatus, & y constans, dum x accedit ad valorem exhibentem maximum, vel minimum ita, ut ab eo minus distet, quam pro quantitate y, formula orta ex solo x, evadit alicubi æqualis formulæ ortæ ex $x + y$, ac tota series exhibens differentiam formulæ nimirum $Py + \frac{Q\,y^2}{1 \times 2} + \frac{R\,y^3}{1 \times 2 \times 3}$ &c. evadit $= 0$. Sed is locus non eruitur posito solum $Py = 0$. sive $P = 0$. Eo enim casu, valore x accedente in immensum ad locum maximi

ximi, vel minimi, a quo ponitur distare minus, quam pro quantitate y, & in quo evadit $=$ o juxta numer. 470, ipse valor P in immensum decrescit, & reliqui respectu ipsius non possunt contemni, nec si forte uspiam tota series est $=$ o, etiam ipse est ibidem $=$ o. Posita solum tota serie $=$ o, & habita y pro quantitate data, inveniretur æquatio, cujus radices exhiberent eos valores x in quibus differentia formulę orta ex additione illâ y evanescit, qui valores plerumque exhiberentur eo propiores valori exhibenti maximum; vel minimum, quo ipsa quantitas y esset minor, vel major: sed methodus esset satis implexa.

481. Ex hisce omnibus evidenter patet casus maximi, & minimi, non posse determinate erui ex suppositione differentię $=$ o, & contemptu altiorum potestatum quantitatis illius y adjectæ methodo communi, facta $P = $ o, sed solum ope discursus, quem inivimus num. 468, per illam positionem $P =$ o obtineri æquationem, cujus radicibus contineri debeat quodvis maximum, vel minimum, si ullum adsit. Quando autem id habeatur, quando vero non habeatur hoc pacto determinabimus ex consideratione naturæ æquationum, de qua hic agimus.

482. In primis formula primi membri cujusvis æquationis non potest habere plura maxima, & minima, quam exprimat exponens ejus gradus imminutus unitate, nimirum si fuerit gradus m, non potest habere plura, quam $m-1$. Nam dicatur ea formula primi membri ejus æquationis A, & æquatio $P = $ o primo derivata ex ipsa erit gradus unitate minoris sive $m-1$ (per num. 464), adeoque non poterit continere radices plures quam $m-1$ (per num. 237); cumque omnia maxima, vel minima valoris A iis radicibus contineri debeant (per num. 470), eorum numerus non potest esse major, quam $m-1$.

483. Quotiescunque autem æquatio quæpiam habuerit omnes radices reales, inæquales, æquatio inde primo derivata habebit etiam ipsa omnes radices reales, &

ínæinæquales, quarum singulæ exhibebunt singula maxima valoris A, & nulla ex iis congruet cum radicibus ejusdem. Nam inter binas quasvis proximas radices inæquales æquationis $A = 0$ continentur singula maxima valoris A (per numer. 454). Quare habetur unum inter primam, & secundam; alterum inter secundam & tertiam, & ita porro; adeoque si radices sunt m, habentur saltem ejusmodi maxima $m - 1$: immo, cum plura haberi non possint, erunt omnino $m - 1$. Singula autem ex iis debent esse inter radices binas æquationis $A = 0$, quæ ponuntur omnes inæquales; ac proinde valores x in iis debent esse inter se inæquales, & diversi a radicibus æquationis $A = 0$. Debent autem contineri inter radices æquationis $P = 0$ (per num. 470.). Illa igitur debet habere radicum realium, & inæqualium numerum $m - 1$, cumque sit gradus $m - 1$, nullas alias radices habere potest nec reales, nec imaginarias præter illas.

484. Coeant jam binæ radices æquationis $A = 0$, & fiant æquales. Jam illud maximum, quod erat inter ipsas fit ibidem minimum, & $= 0$, juxta n. 469. nimirum in ipso appulsu ad 0 valor formulæ A regreditur, ac proinde ille ipse valor x debet haberi inter radices æquationis $P = 0$, cujus illa radix, quæ interjacebat inter binas congruentes æquationis $A = 0$, jam congruet cum illis, quæ si evadant imaginariæ juxta num. 458, illa radix æquationis $P = 0$, adhuc remanet realis, & formula A ibi habet minimum quoddam, donec fiat æqualis alteri sibi proximæ, ac in imaginarias ambæ abeant, eliso intervallo inter minimum illud, & maximum sibi proximum juxta n. 459. Ac si aliæ binæ radices æquationis $A = 0$ adhuc coeant, patet eodem pacto alteram ex iis fore communem æquationi $P = 0$.

485. Inde deducitur, quotiescumque æquatio $A = 0$ habebit radices binas tantum alicubi æquales, earum unam habituram æquationem quoque $P = 0$. Ac similis prorsus argumento si tres radices æquationis $A = 0$

coeant

coeant, binæ æquationis $P = 0$, quæ iis interjacebant congruent cum iis, & inter se: ac generaliter si æquatio $A = 0$ habuerit numerum radicum æqualium n, æquatio $P = 0$, habebit earumdem radicum numerum $n - 1$.

486. Quoniam autem eodem prorsus pacto derivatur formula Q ex P, quo P ex A, quarum radicum æquatio $P = 0$ habebit numerum $n - 1$, earundem $Q = 0$ habebit $n - 2$, & ita porro.

487. Inde autem, si innotuerit aliqua radix æquationis cujuspiam, facile erit deprehendere, an solitaria sit, an multiplex. Quivis terminus ipsius ducatur in suum exponentem valoris x, & dividatur per x, ac si posito in formula sic derivata eodem valore pro x, ea non evanescat; omnino illa radix solitaria erat, si evanuerit, illa erat saltem duplex, & quotuplex fuerit facile invenietur derivando eadem lege formulas e formulis donec deveniatur ad aliquam, quæ non evanescat. Quot enim derivationes factæ fuerint usque ad formulam non evanescentem, tot radices ejusmodi æquales habebit proposita æquatio.

488. Æquationis $x^5 - 5x^4 - 9x^3 + 53x^2 + 8x - 48 = 0$ est radix 1, quo valore posito pro x, ejus primum membrum evanescit. Derivatur ex ea $5x^4 - 20x^3 - 27x^2 + 106x + 8$, in qua posito 1 pro x habetur $+ 72$. Quare radix 1 est ibi solitaria. Ejus radix est etiam 4, quo valore posito pro x in æquatione derivata, ea etiam evanescit. Sed derivando iterum novam habetur $20x^3 - 60x^2 - 54x + 106$, in qua posito 4 pro x habetur 210. Igitur binas radices æquales 4 habet proposita æquatio, & binas tantum. Et quidem num. 456 vidimus ejus radices esse $+ 3$; $\surd$ 1, 1, 4, 4.

489. At in æquatione $x^5 \; 13x^4 + 48x^3 - 32x^2 - 512x + 768 = 0$, cujus radices (per num. 457) sunt

sunt -3, $+4$, $+4$, $+4$, $+4$, derivando sequentes formulas alias ex aliis $5x^4 - 52x^3 + 144x^2 - 64x - 512$, $20x^3 - 156x^2 + 288x - 64$; $60x^2 - 312x + 288$, tam in ejus primo membro, quam in harum singulis posito 4 pro x, habetur 0, at derivata alia ex hac postrema nimirum $120x - 312$; & posito 4 pro x ea non evanescit, unde colligitur quatuor esse ejus radices æquales 4.

490. Hinc autem pro illis quæstionibus de maximis, & minimis, de quibus supra egimus, eruitur hæc regula generalis. E formula proposita derivetur alia formula lege toties exposita, qua posita $= 0$, inveniantur radices ejus equationis. Quævis ex iis radicibus exhibebit maximum quoddam vel minimum, si solitaria fuerit, vel earum æqualium numerum imparem habuerit æquatio primo derivata. Sive, quod eodem redit, prima æquatione derivata deriventur ex ea eadem lege formule aliæ ex aliis, donec deveniatur ad aliquam, que posita pro x radice aliqua ejusdem æquationis non evanescat. Si enim computato ipso primo membro æquationis derivatæ numerus formularum evanescentium ex illa positione fuerit impar, ea radix exhibebit aliquod maximum, vel minimum; si par nullum maximum, vel minimum exhibebit.

491. Hujus canonis demonstratio hinc petitur. Posito pro x valore quovis utcumque parum remoto ab illo, in quo habetur maximum, vel minimum, (quo posito formula P primo derivata evanesceret, cum nimirum illa sit radix æquationis $P = 0$) ipsum P non est $= 0$; adeoque est valoris cujusdam in se determinati. Quare si assumatur y in immensum exigua, valor Py erit in immensum major sequentibus omnibus $\frac{Qy^2}{1 \times 2}$; $\frac{Ry^3}{1 \times 2 \times 3}$ &c., & tota differentia formule erit positiva, vel negativa, prout ipse valor P fuerit posi-

positivus, vel negativus. Si igitur valor P in appulsu x ad radicem quampiam æquationis $P = o$, mutatur e positivo in negativum, vel e negativo in positivum ac transit per o, tota differentia formulę propositæ mutabit ibidem signum, adeoque incrementum mutabitur in decrementum, vel viceversa, & habebitur aliquod maximum, vel minimum, secus si valor P regrediatur a o, & maneat positivus, ut prius, vel negativus. Transibit autem valor P per o, vel regredietur prout numerus earum radicum æqualium in æquatione $P = o$ fuerit impar vel par juxta num. 446. Igitur habebitur maximum, aut minimum, vel non habebitur, prout numerus illarum radicum æqualium in æquatione $P = o$ fuerit impar, vel par, quod prorsus congruit cum regula tradita.

492. An autem ibi habeatur maximum an minimum facilè deducitur ex valore illius formulæ, quæ inter perpetuò derivatas prima incipit non evanescere posito in ea pro x valore radicis inventę æquationis $P = o$. Si nimirum posito pro x valore invento tam in formula proposita, quam in illa primo non evanescente, valores utriusque habuerint signa conformia, habebitur minimum, si difformia maximum. Quod si formula proposita evanescat, ac fiat $= o$, habebitur semper illud minimum, de quo egimus num. 469. Hujus etiam regulę demonstratio est admodum explicata. Nam ubi est $P = o$, sed non $Q = o$, differentia totius formulæ erit quamproximè $\dfrac{Q\,y^2}{1 \times 2}$, ac ejusdem signi cum ipso Q. Ubi & $Q = o$, sed non $R = o$, erit quamproximè $\dfrac{R\,y^3}{1 \times 2 \times 3}$, & ejusdem signi cum R, ac ita porrò. Adeoque accedente y ad x, accedet ad formulam propositam A quantitas ejusdem signi cum illa formula, quæ prima non evanescit post derivationem. Porro si

ipsi

ipsi accedat quantitas ejusdem signi, ea ibi incipit crescere, & proinde devenerat ad quoddam minimum, si vero accedat quantitas signi contrarii, incipit decrescere, adeoque devenerat ad maximum. Ubi autem regreditur a o, minimum quoddam habet in ipso o. Patet igitur tradita regula.

493. Regularum exempla haberi possunt in formulis propositis num. 471, & 474. Prior, quæ hic dicetur *A*, fuerat $x^4 - 16x^3 + 88x^2 - 192x + 128$. Formula *P* inde derivata num. 472, erat $4x^3 - 48x^2 + 176x - 192$, qua posita $= 0$ habitæ sunt æquationis provenientis radices 2, 4, 6, quarum nulla cum sociam habeat sibi æqualem, patet jam inde singulas ex iis exhibere aliquod maximum vel minimum. Si autem singulæ tantum erutæ fuissent, adhuc idem pateret; nam derivando iterum haberetur formula $Q = 12x^2 - 96x + 176$, quæ nulla ex iis radicibus posita pro *x* evanescit. Ac proinde cum unica formula derivata evanescat in singulis radicibus singulæ exhibent maximum aliquod vel minimum. Porro posito 2 pro *x* in ipsa formula proposita, ea evadit $= -16$, eodem posito in formula *Q* habetur 32. Signa difformia sunt, adeoque maximum exhibent, quod ibi habetur facto $x = 2$. Posito vero 4 pro *x*, *A* evanescit, adeoque ibi habetur minimum in ipso o. Posito demum 6, in *A* habetur -16, in *Q* habetur 32. Signa iterum difformia iterum exhibent maximum.

494. Posterior formula posita num. 474, quæ hic erit *A*, erat $x^4 - 16x^3 + 72x^2 - 128x$. Formula *P* inde derivata erat $4x^3 - 48x^2 + 144x - 128$, qua posita $= 0$, habitæ sunt æquationis provenientis radices 2, 2, 8, quarum prima cum duplex sit, jam inde eruitur, ea nec maximum aliquod exhiberi, nec minimum: contra infertur radicem solitariam 8 exhi-

bere alterum ex iis: ac si singulæ radices erutę fuissent, innotuisset idem derivando ex P formulam $Q = 12x^2 - 96x + 144$, in qua, cum posito 2 pro x habeatur 0, at iterum ex Q derivando $R = 24x - 96$; & pariter ponendo 2 pro x, formula non evanescat, sed fiat -48, binæ evanescentiæ ostendunt, nullum adesse maximum aut minimum. At cum in $Q = 12x^2 - 96x + 144$ posito 8 pro x, formula non evanescat, sed evadat 144, exhibetur ibi maximum, vel minimum, ubi unicam nimirum evanescentiam. Cum vero posito 8 in ipsa formula A habeatur -512, at in formula Q, quæ prima non evanescit, habeatur 144, signa difformia maximum exhibent.

495. Quod si formula esset $x^5 - 10x^4 + 30x^3 - 40x^2 + 25x - 2$, quę hic erit A; æquatio $P = 0$ erit $5x^4 - 40x^3 + 90x^2 - 80x + 25 = 0$ sive $x^4 - 8x^3 + 18x^2 - 16x + 5 = 0$, cujus radices 1, 1, 1, 5, & quidem derivata inde $Q = 20x^3 - 120x^2 + 180x - 80$, & $R = 60x^2 - 240x + 180$, ac $S = 120x - 240$ & posito 1 pro x evanescit & P, & Q, & R non autem S, posito vero 5 evanescit sola P, adeoque evanescentiæ numero impari docent utroque valore maximum aliquod exhiberi, vel minimum. Cumque posito 1 pro x in A habeatur 4, in S habeatur -228, signa difformia ostendunt maximum, & cum posito 5 pro x in A habeatur -252, in Q vero 180, signa pariter difformia indicant maximum.

496. Atque hoc quidem pacto in formulis omnibus ejus formæ, quam habet primum membrum æquationis rite ordinatæ semper admodum facile inveniuntur maxima & minima. Pro aliis, in quibus divisores adsunt continentes variabilem quantitatem, vel radicales termini, res adhuc facile procedit, sed requiritur methodus

eorum

eorum terminorum differentias eruendi, de qua potius agemus ibi, ubi infinitesimalis calculi primam partem, quam differentialem dicunt, exponemus. Hæc abunde sunt hoc loco occasione considerandi variationes, quas subit primum æquationis membrum ex diversis substitutionibus, ut & finiti calculi vis appareat, & ad infinitesimalem sternatur via, & errorum quorumdam communium origo pateat, ac vitetur periculum.

497. Interea, quod ad primum pertinet cujusvis æquationis membrum, illud ex dictis patet, quo sequenti §. utemur ad radices eruendas: nimirum positis pro x diversis valoribus, diversos admodum prodire valores primi membri, eosque jam crescere, jam minui: at si differentiæ valorum positorum pro x sint satis exiguæ, differentias valorum totius formulæ generaliter extra paucos casus maximorum illorum, vel minimorum fore proxime proportionales differentiis valoris x, eoque propiores huic proportioni, quo illæ minores extiterint. Atque id quidem semper contingere prope radices solitarias, prope autem eas radices, quarum plures æquales sunt, differentias fore in ratione admodum diversa: nimirum differentias a valore o, qui habetur in ipsis radicibus; sive valores totos formularum fore in duplicata differentiarum valoris assumpti pro x a vero radicis valore, ubi radices binæ æquales fuerint, in triplicata ubi tres; & ita porro, quæ omnia ex supra demonstratis satis patent, & usui futura sunt.

§. XV.

De resolutione æquationum omnium, ubi de regula falsæ positionis.

948. Ubi binæ quantitates inter se ita connexæ sunt, ut prima facile determinetur per secundam, secunda multo difficilius per primam, si quæratur valor secundæ respondens dato cuipiam valori primæ; adhiberi solet methodus falsæ positionis, ponendo nimirum va-

rios valores pro secunda assumptos ad arbitrium, & determinando valores primæ ex iis resultantes, inter quos si inveniatur valor datus, quod raro admodum continget casu mere fortuito, valor positus pro secunda quantitate erit valor verus, sed cum plerumque valor quantitatis primæ proveniat diversus a dato, idcirco valor ille positus pro secunda quantitate est valor falsus. Verum ab uno, vel pluribus ejusmodi valoribus per falsas illas positiones inventis inveniri potest plerumque, qui valor pro secunda quantitate poni debeat, ut valor primæ congruat cum vero, & methodus, quæ docet usum valorum ex falsis illis positionibus provenientium ad inveniendos valores veros dicitur regula falsæ positionis.

499. Quotiescumque prima quantitas est accurate in ratione secundæ, vel directa, vel indirecta, problema solvitur per unicam falsam positionem. Sit valor datus primæ quantitatis m, valor quæsitus secundæ ipsi respondens x, posito autem pro hac secunda a, obveniat valor primæ p. Fiat in primo casu $p.m::a.x$, in secunda $m.p::a.x$, & innotescet quæsitus valor x, ut patet. Exhibebimus exemplum primi casus tantummodo, ex quo & secundus facile innotescet.

500. Debeat summa 1295 aureorum ita dividi in partes tres ut secunda sit dupla primæ, tertia dupla secundæ. Data summa dividenda, non ita facile statim innotescunt partes, at contra data prima parte, admodum facile innotesceret summa, ejus enim duplum exhibet secundam, hujus duplum tertiam, & habitis partibus habetur summa. Pars autem prima, & summa directe proportionales sunt. In eadem enim ratione augentur vel minuuntur partes reliquæ, ac summa, in qua augetur ipsa pars prima. Summa igitur, & pars prima sunt illæ binæ quantitates ita inter se connexæ, ut si data prima, quæratur secunda, per simplicem regulam falsæ positionis innotescat. Ponatur partem primam esse aureorum 5 erit secunda 10, tertia 20, adeoque summa 35. Fiat igitur ut 35 ad datam summam 1295, ita ille numerus

merus falso positus 5, ad quæsitum, & habebitur $\frac{5 \times 1295}{35}$ $= 185$. Et quidem si prima pars sit 185, erit secunda 370, tertia 740, summa erit 1295 nimirum numerus ille datus.

501. Si pro prima parte positus fuisset unus aureus, sola divisione res facilius confecta fuisset, haberetur enim pars secunda 2, tertia 4, summa 7, & factis ut 7 ad 1, ita 1295 ad quartum, prodiisset 185 sola divisione numeri dati 1295 per 7. Per denominationem autem algebraicam sine falsa positione, res eodem prorsus modo conficeretur. Facta enim parte prima x secunda fuisset $2x$, tertia $4x$, summa $7x$, qua posita $= 1295$, esset $x = \frac{1295}{7} = 185$.

502. Quod si earum quantitatum altera esset in aliqua ratione multiplicata vel submultiplicata alterius, eodem pacto liceret progredi: sed pro valore primæ quantitatis invento per falsam positionem, & dato, adhibendæ essent illæ potestates, vel radices eorum, quæ datæ illi proportioni respondeant. Concipiamus vim magnetis cujusdam trahentis esse in ratione reciproca triplicata distantiarum adeoque distantias in ratione reciproca subtriplicata virium, & quæratur in qua distantia ejus vis trahens datam massam æquivalere debeat unciis 64. Facile erit assumpta quavis distantia experiundo invenire vim. Inveniatur in distantia palmorum 6 vis unciarum 8. Fiat ut $\sqrt[3]{64}$, ad $\sqrt[3]{8}$, sive ut 4 ad 2, ita distantia data 6 ad quæsitam 3, in qua nimirum habebitur vis illa unciarum 64, ut patet.

503. At si e binis illis quantitatibus non sit altera in ratione directa alterius, vel simplici, vel utcumque multiplicata, sit autem incrementum, vel decrementum unius in ratione incrementi, vel decrementi alterius, sive differentia illius; ut differentia hujus, problema per dupli-

cem falsam positionem solvitur immediate. Bini valores positi pro secunda quantitate sint a, b, quæsitus x, valores primæ provenientes e positionibus sint p, q, valor datus respondens x sit m. Fiat ut $q-p$ ad $m-p$, ita $b-a$ ad valorem quemdam r, qui additus valori a exhibebit quæsitum valorem x. Erit enim ob differentias proportionales $q-p.m-p::b-a.x-a$, & ob rationem initam, $q-p.m-p::b-a.r$. Quare cum in utraque proportione priores tres termini sint iidem, erit & $x-a=r$, $x=a+r$.

504. Quærantur bini numeri, quorum detur summa 12, & differentia 4. Assumpto primo ad arbitrium & addito 4, habetur summa, quæ si congruat cum 12, inventus est valor quæsitus. Sin minus, assumpto secundo valore pro primo numero, & iterum addito 4, habetur secundus, & summa, quæ tamen non erit ad priorem, ut hic posterior valor assumptus ad illum priorem, ob illud 4 utrique additum. Incrementa enim vel decrementa summarum proportionalia erunt semper incrementis, vel decrementis partium assumptarum; cum nimirum numerus ille constans 4 adjectus incrementa ipsa, ac decrementa non turbet. Solvetur igitur Problema per duplicem falsam positionem. Ponatur pro primo numero 1, secundus erit 5, summa 6, quæ distat a 12. Ponatur pro eodem 3, secundus erit 7, summa 10, quæ adhuc distat a 12. Erit hic $a=1$, $b=3$, $p=6$, $q=10$, $m=12$. Fiet igitur $10-6.12-6::3-1.r=\frac{2\times 6}{4}=\frac{12}{4}=3$. Quare quæsitus numerus $x=1+3=4$. Et quidem alter erit $4+4=8$, adeoque summa 12: & numerorum 4, ac 8 summa est 12, differentia 4, ut oportebat.

505. Quod si computetur solus error, quo conditio proveniens ab assumpto valore distat a conditione proposita, paulo simplicior evadet solutio. Posito enim primo errore p, secundo q, quæretur error nullus, adeoque m erit $=0$, & proportio $q-p.0-p::b-a.r$,

quan-

quantitatem addendam valori assumpto a, sive ut $q-p$ ad p ita $b-a$ ad quantitatem demendam. Sic in casu proposito summa 6 inventa in prima positione 1 distabat a summa proposita 12 per 6, in secunda positione 3 summa 10 distabat per 2. Erit igitur $2-6.6::3-1$. $\frac{2\times6}{-4}=\frac{12}{-4}=-3$, quo numero ablato ab 1 habetur $1+3=4$, ut prius.

506. Atque hoc pacto licebit tentare solutionem problematum etiam, in quibus non innotescat, an differentiæ sint accuratæ proportionales, ac nonnunquam res succedet. Sint binæ nummorum summæ ejusmodi, ut si e prima majore bini transferantur in secundam, evadant æquales: si contra bini e secunda transferantur in primam, hæc evadat illius dupla. Assumatur pro summa minore 4, in quam si transferatur 2 fiet 6, cui æqualis jam erit summa major, quam igitur oportuit esse 8. At e minore translato in hanc 2, illa fiet 2, hæc 10, quæ per secundam conditionem debuit esse 4. Igitur proposita positio 4 distat a conditione proposita per 6. Assumpto pro prima summa 6, oportet eodem discursu secunda sit 10, ut nimirum translato 2 hinc illuc, evadant pares. Translato autem 2 ex 6 in 10, illa fit 4, hæc 12, quæ per secundam conditionem debuit esse 8, errore existente 4. Erit igitur hic $p=6$, $q=4$, $a=4$, $b=6$, adeoque $4-6.6::6-4$. $\frac{2\times6}{-2}=\frac{24}{-2}=-6$, & proinde valor quæsitus primæ summæ $a-r=4+6=10$. Et quidem posito 10 pro minore summa, major debet esse 14, ut translato inde huc 2, fiant ambæ 12. Translato autem 2 e summa 10 in summam 14, erit illa 8, hæc 16 illius dupla, ut oportebat.

507. Hi casus reducuntur multo facilius per positiones algebraicas, & semper exhibent æquationem primi gradus. Primus casus solvitur ut num. 501. Posito nimirum numero majore x, minore y, erit $x+y=12$, $x-y=4$,

$=4$, adeoque $x=12-y$, & $=4+y$, quare $12-y=4+y$, $12-4=2y$, $8=2y$, $\frac{8}{2}=y=4$., & $x=12-4=8$. Secundus solvitur posita summa majore x, minore y; habetur enim $x-2=y+2$, & $x+2=2\times(y-2)=2y-4$. Ex prima $x=y+4$, ex secunda $x=2y-6$. Quare $2y-6=y+4$; & $y-6=4$; $y=10$, ac $x=10+4=14$.

508. Et quidem si formula determinans alteram quantitatem per alteram, contineat unicum terminum habentem alteram; semper erit locus falsæ positioni unicæ, si præterea contineat terminum constantem, & ab illius mutatione non pendentem; locus erit positioni duplici: Si enim posita secunda quantitate x; formula fuerit $\frac{mx}{n}$ mutato x, mutabitur $\frac{mx}{n}$ in ratione eadem: Quod si formula fuerit $\frac{mx}{n}+p$, tum quidem ipsa non erit ut x, sed ejus differentia erit, ut differentia x, cum mutata ipsa x, non mutetur p, quod constat etiam ex §. superiore, num. 465. Posita enim y pro differentia x; formula derivata ex $\frac{mx}{n}+p$ erit $\frac{my}{n}$, quæ ob m, n constantes, erit ut y. At si formula contineat etiam x^2, & sit px^2+qx+r, ejus differentia erit per eumdem numerum $2pxy+\frac{q}{1\times 2}$, quæ proinde non erit ut y, ob terminum q constantem. Quare unica simplex falsa positio solum adhiberi potest, ubi esse debet $\frac{mx}{n}$ æquale

quan-

quantitati datæ, vel nihilo; duplex, ubi $\frac{mx}{n} + p$, nimirum ubi æquatio primum gradum non excedit.

509. In reliquis casibus, in quibus nec quantitas prima secundæ proportionalis est, nec illius differentia differentiæ hujus, adhuc plerumque cum successu adhibetur duplicis falsæ positionis regula, si jam valores positi a vero valore quæsito parum admodum distent. Ut enim superiore §. vidimus num. 467, omnium formularum utcumque ad altissimas æquationes rite ordinatas pertinentium differentiæ exiguæ sunt quam proxime, ut differentiæ x generaliter, extra paucos illos determinatos casus, in quibus x accedit ad radices æquationis primo derivatæ ex ipsa formula, quibus casibus etiam omnia maxima, ac minima ejusdem formulæ continentur. Ac idem pariter in reliquis omnibus formulis unicam variabilem quantitatem continentibus locum habet, ut nimirum generaliter aucta, vel imminuta variabili illa quantitate per differentias satis exiguas, differentiæ quoque totius formulæ iisdem illis differentiis proportionales sint, præter casus quosdam, in quibus differentia formulæ infinities magis decrescit vel crescit, quam alibi, ac vel transit e positiva in negativam, & maximum quoddam, aut minimum exhibet, vel ex eadem nihili, aut infiniti parte retro regreditur.

510. Hinc in omni tabularum genere hac fere methodo utimur, ut in Astronomia, in Trigonometria, ac in logarithmorum tabulis. Computati sunt ex. gr. logarithmi pro numeris integris: logarithmi pro numeris continentibus fractiones quoque præter numeros integros inveniuntur ex hac suppositione, quod differentiæ logarithmorum exiguæ differentiis numerorum sint proportionales saltem proxime, & inventis in tabula logarithmis numeri proxime majoris, & proxime minoris dato, per regulam cum hac prorsus duplici falsa positione congruentem logarithmus numeri propositi invenitur parte 1. hujus tomi, Arithm. c. 3. num. 35.

511.

511. In iis autem casibus, in quibus ex secunda quantitate assumpta ad arbitrium potest inveniri prima, sed earum differentiæ non sunt inter se proportionales, si data prima quæratur secunda ipsi respondens, adhibita regula duplicis falsæ positionis, generaliter extra casus illos anomalos adhuc magis ad quæsitum valorem acceditur, dummodo positiones non sint inter se nimis remotæ, & assumpta jam nova hac positione, ac calculo restituto, licet ad valorem ipsum quæsitum accedere in infinitum.

512. Jam vero in quavis formula primi membri æquationis cujusvis incognitæ quæritur valor x ejusmodi, ut formula tota fiat $= 0$, ac posito quovis valore pro x admodum facile eruitur valor formulæ, sed contra dato quovis valore formulæ admodum difficulter, sive nullo artificio adhuc cognito, definiri potest valor x. Igitur ad inveniendum valorem x vero proximum quantum libet, adhiberi poterit methodus duplicis falsæ positionis, dummodo jam ad verum valorem x, sive radicis quæsitæ satis proxime deventum fuerit, & prope eam radicem differentiæ exiguæ ipsius formulæ sint proxime proportionales differentiis valoris ipsius x. Id autem per n. 467, & 485 superioris §. semper continget extra casus, in quibus æquatio plures radices æquales habeat. Quare in ejusmodi casibus tradita methodo licebit uti, & si primus valor positus pro x dicatur a, secundus b, primus valor formulæ p, secundus q, ac fiat $q-p.p::b-a.r$, erit valor x vero propior $= a-r$ juxta num. 505. At primum ostendendum erit, quo pacto satis accedi possit ad valorem radicis, & discerni, an ibi plures habeantur radices æquales, an unica, sive an ibi exiguæ differentiæ formulæ differentiis x proxime proportionales sint, an secus.

513. Porro generalis methodus, qua ad radices certo accedatur nulla adhuc, quod sciamus inventa est: at plures falsas positiones instituendo, ac adhibendo binas quasque paulo aliter ac superius, fere semper intentum obtinebitur demum, ac omnino semper, vel ad radicem realem solitariam devenietur, vel ad plures reales æquales,

vel incidetur in binas saltem radices imaginarias. Ubi vero incident radices reales solitariæ, satis cito deinde accedetur ad eas multo magis methodo superiore: ubi plures æquales obvenerint, lentius quidem, adhuc tamen in infinitum, si libeat, accedetur ad eas hac methodo, quam hic tradituri sumus, eas nimirum includendo limitibus quibusdam, & limites ipsos arctando semper magis.

514. Positis binis valoribus pro x, obvenient bini valores formulæ. Si ipsi habuerint signa contraria, existente altero positivo altero negativo, necessario inter binos valores positos continebitur radix aliqua realis æquationis juxta num. 447. Ponatur pro x valor medius arithmetice proportioaalis inter binos positos, & obveniet valor formulæ, cujus signum congruet necessario cum signo alterius e valoribus primo inventis, & opponetur alteri. Assumatur iterum valor x medius arithmetice inter valorem postremo loco assumptum, & illum e præcedentibus, qui valorem formulæ exhibuit habentem signum contrarium signo valoris exhibiti ab eodem. Tum eadem methodo semper assumatur valor medius inter postremo assumptum, & præcedentem, ex qua valor formulæ profluxit oppositus, ac binorum quidem valorum x differentia semper duplo minor fiet, & inter eos semper radix quædam continebitur, ad quam ipsi accedent semper magis, cum semper magis accedant ad se invicem. Cavendum tamen dum valores assumpti pro x adhuc satis inter se distant in assumendis mediis arithmetice proportionalibus contemnendas esse decimalium fractiones inferiores; quæ calculum implicatiorem redderent sine fructu.

515. Facilioris calculi gratia assumemus æquationem gradus tertii carentem secundo termino $x^3 - 30x + 36 = 0$, methodus autem est eadem pro æquationibus omnibus. Tota formula $x^3 - 30x + 36$ dicatur A, & posito $x = 3$ erit $A = -27$, posito $x = 7$, erit $A = 169$. Cum igitur obvenerint pro A signa contraria, habetur

omni-

omnino aliqua radix intermedia, ad quam accedetur calculo inito juxta sequentem tabellam continentem sex cellulas.

x : A		x : A		x : A	
1		2		3	
3.	: -27.	3.	: -27	4.	: -20
5.	: 11.	4.	: -20	4.5	: -7.875
7.	: 169.	5.	: 11	5.	: 11.
4		5		6	
4.5	: -7.875	4.7	: -1.177	4.7.	: -1.177
4.7	: -1.177	4.8	: 2.592	4.75	: 0.67 1875
5.	: 11.	5.	: 11	4.8	: 2.592

In prima habentur bini valores 3, & 7 primo positi pro x, ex quibus obvenerunt bini valores $A - 27$, & 169 oppositi, ac in medio 5 medius arithmeticus inter illos, ex quo provenit $A = 11$, habens signum oppositum signo valoris -27 provenientis ex positione $x = 3$. Hinc in secunda cellula valores x, 3, & 5 medium arithmeticum 4 secum habent, cujus valor $A - 20$ est contrarius valori 11 orti ex positione 5. Idcirco in tertia ponitur 4.5 valor x medius arithmeticus inter 4, & 5. Eodem pacto in quarta ponendus erat valor 4.75 medius inter 4.5, & 5. Sed contempta illa fractione centesima 5, positus fuit 4.7, & in quinta pro 4.85 positus fuit 4.8. Liceret autem eodem pacto progredi, & semper radix illa intra arctiores limites concluderetur.

516. Porro cum æquatio proposita $x^3 - 30x + 36 = 0$ componatur e binis $x + 6 = 0$, $x^2 - 6x + 6 = 0$; habet radices -6, $3 - \sqrt{3}$; $3 + \sqrt{3}$, atque hæc postrema est $3 + 1.7320508756$. Patet igitur, radicem 4.75 ab ipsa jam distare minus, quam 18 millesimis partibus unitatis, sive minus quam $\frac{1}{251}$ parte radicis ipsius, posse au-

tem

tem lente quidem, sed tamen omnino tuto deveniri ad distantiam utcumque exiguam.

517. Considerando autem valores A satis patebit eorum differentias multum initio distare a ratione differentiarum valorum x, ac ad eam deinde satis accedere. Nam si in superiore tabella in quavis positione subtrahatur primus valor tam x, quam A a secundo, secundus a tertio, differentiæ valorum x in prima positione erunt 2, ac 2 æquales, differentiæ vero valorum A erunt 38, 158 adeo inæquales, & inæqualitas multo etiam major potuisset obvenire, si positiones primæ fuissent remotiores a vero valore. At in postrema positione differentiæ x erunt 0. 05, 0. 05 pariter æquales, differentiæ vero valorum A erunt 1. 848875, 1. 920.125, quæ ab æqualitate vix distant $\frac{1}{25}$ sui parte. Quamobrem hic jam uti licebit regula duplicis falsæ positionis exposita num. 503, qua multo citius ad verum valorem accedetur.

518. Sed in adhibenda duplici falsa positione, ne calculus fractionum plus æquo excrescat sine fructu, satis erit in valoribus A retinere e fractionibus decimalibus, unam, aut alteram ultra eum limitem, intra quem præcedentium trium positionum differentiæ erant inter se proportionales, qui limes, ubi valorum x differentiæ sunt æquales inter se facile primo intuitu perspicitur, ut hic, ubi existentibus differentiis x in postrema positione æqualibus, differentiæ valorum A erant inter se fere æquales in prioribus binis notis 1. 8, 1. 9; generaliter vero deprehendi potest factis, ut prior e differentiis x ad posteriorem, ita prior e differentiis A ad valorem, qui collatus cum posteriore differentia valorum A exhibebit limitem quæsitum, nimirum eum, usque ad quem ii bini valores inter se collati congruent. Sed jam exemplis illustrabitur methodus. In restituendo vero calculo, ubi substituto valore novo x invenitur valor novus A, satis erit assumere (priores binas ejus notas post cyphras o s

nam

nam ipse ejus valor obvenisset omnino $=0$, si differentiæ fuissent proportionales inter se.

519. Sumptis pro x valoribus 4. 7, & 4. 75, qui juxta num. 503 erunt a, & b, proveniunt pro A valores -1.18, 0.67, qui erunt p, & q. Erit autem A ille valor datus m, qui nimirum debet oriri ex nova positione $=0$. Quare cum in hoc casu fieri debeat juxta num. 505. $q-p.b-a::p.r$, & sumi pro x valor $a-r$; erit ut 1.85 ad 0.05, ita -1.18 ad -0.0318, adeoque $x=4.7+0.0318=4.7318$ qui valor a vero radicis valore 4.73205 &c. invento num. 516 minus differt quam per $\frac{3}{10000}$. Restituendo autem calculo posito hoc valore pro x in primo æquationis membro, nimirum $x^3-30x+36$, habetur $A=-0.0093$. E prioribus autem seligendo valorem positum pro x huic propiorem 4.75, ex quo obvenerat $A=0.67$, erit jam $a=4.7318$, $b=4.75$, $p=-0.0093$, $q=0.67$, adeoque erit ut 0.6793 ad 0.0182, ita -0.0093 ad $-0.0002492=r$, adeoque $x=4.7318+0.0002492=4.7320492$, qui ad verum valorem 4.7320508 &c. jam multo propius accedit, cum ab eo differat minus quam per $\frac{2}{1000000}$. Eademque methodo liceret progredi in infinitum, & multo citius, quam priore methodo ad verum radicis valorem accederetur.

520. Atque hoc quidem pacto, satis liquet, in quavis æquatione impari gradus cujusvis semper inveniri posse valorem unius saltem radicis realis vero utcumque proximum. Assumpto enim pro x valore positivo satis magno, in iis obveniet valor A positivus, assumpto valore negativo obveniet negativus. Quin immo, quoniam posito pro x valore 0, relinquitur pro A valor ultimi termini, evanescentibus reliquis omnibus, si is est positivus, ponendus erit pro x valor negativus, ac ali-

augendus semper donec evadat valor A negativus, si vero idem valor postremi termini negativus fuerit, ponendus erit pro x valor positivus, augendusque donec valor A positivus fiat, quod omnino continget. In æquatione $x^3 - 30x + 36 = 0$, proposita num. 515. posito $x = 0$, fit $A = 36$. Ponatur $x = -5$, & erit $A = 61$ valoris adhuc positivi. Sed aucto x, & facto $= -10$, habetur $A = -664$, cum signo opposito; unde constat realem aliquam radicem haberi inter -5, & -10, & quidem per num. 516 habetur -6.

521. Hactenus diximus quo pacto ad verum radicis realis valorem liceat accedere, ubi e binis positionibus factis pro x obveniunt bini valores A cum signis contrariis. Quod si eorum valorum signa evaserint conformia; ponatur pro x valor tertius arithmetice proportionalis post binos præcedentes incipiendo ab eo, qui exhibuit valorem A majorem; si valores priores fuerint inæquales, vel si fuerint æquales, incipiendo ab utrolibet, ac si trium valorum A medius non fuerit altero extremorum minor, altero non major, ponatur iterum pro x valor tertius arithmetice proportionalis post secundum, & tertium e præcedentibus tribus, atque ita perpetuo assumantur novi valores pro x, donec demum vel novus valor A sit $= 0$, vel idem habeat signum contrarium signis priorum, vel medius trium valorum A sit altero extremorum minor altero non major. Id autem necessario continget: nam adjecta valori x perpetuo, vel perpetuo ablata quantitate quadam constanti, nimirum illo præcedentium valorum intervallo, valor A ex dem. in superiori §. debet ita mutari, ut demum in infinitum excrescat, ac interea vel appellet ad o, congruente valore posito pro x cum radice aliqua, ac transibit per ipsum o, vel inde regredietur, prout ibi fuerit radicum cum eo valore congruentium numerus impar, vel par, vel etiam ante appulsum ad o retro cursum reflectet. Quamobrem si priores valores fuerint inæquales, ac tertius obvenerit utroque minor (nam si obvenerit secundo

lo æqualis, vel major, jam ſecundus ipſe erit priore illo minor, tertio hoc novo vel æqualis, vel minor, adeoque non major), iteratis poſitionibus debebit demum creſcere, & præcedentes valores ſuperare, ac interea poterit & fieri $=0$, & tranſire, ac mutare ſignum.

522. Quod ſi deveniatur ad valorem $A=0$, jam habebitur una æquationis radix realis, ſi deveniatur ad ſignum valoris A contrarium, invenietur radix ſuperiore methodo, ſi deveniatur ad ejuſmodi tres valores A, quorum medius altero extremorum ſit minor, altero non major, inter extremos e tribus valoribus poſitis pro x habebuntur ſemper vel binæ ſaltem radices reales, vel binæ imaginariæ. Dum enim valor A pergendo ab extremo majore ad medium decreſcit, tum ad alterum extremum ejuſdem valoris eſt, vel iterum major; id fieri non poteſt niſi alicubi decrementa deſinant, & mutentur in incrementa, ac interea valor ille poteſt vel ſaltem bis tranſire per o, exhibendo binas radices reales inæquales, vel regredi ante appulſum ad o, & habere aliquod minimum, quod (per num. 458.) ſecum trahit binas ſaltem radices imaginarias.

523. Porro in caſu, in quo medius trium valorum A ſit altero extremorum minor, altero non major, valor extremus A, qui medio eſt major dicatur p, medius q, alter extremus ipſi q æqualis, vel eo major r, valores autem poſiti pro x, ex quibus ii orti ſunt, dicantur a, b, c, ac aſſumatur pro x valor $\frac{a+b}{2}$ medius arithmetice proportionalis inter a, & b, & ſi novus valor A obvenerit minor, vel æqualis valori q, jam binæ illæ radices reales vel imaginariæ jacebunt inter a, & b, erit enim is valor A minor p, & non major q; ſi vero obvenerit major ipſo q, aſſumatur pro x valor $\frac{b+c}{2}$ medius arithmetice inter b, & c, & ſi is exhibuerit valorem A non minorem valore q, jam valor q erit præceden-

cedente minor, hoc novo non major, adeoque inter $\frac{a+b}{2}$, & $\frac{b+c}{2}$ jacebunt radices illæ, si vero exhibuerit valorem A minorem valore q, exhibebit profecto minorem etiam valore r, æquali vel majore q, adeoque jam hic novus valor A erit utroque extremorum minor, & radices illæ erunt inter b, ac $\frac{b+c}{2}$. In quovis autem ex iis tribus casibus, limites radicum illarum duplo arctiores fiunt, ut patet. Quare restituto in infinitum calculo, possunt arctiores reddi in infinitum.

524. Et quidem si valor A alicubi intra eos limites transit per o, & radices exhibet reales, ac inæquales, necessario devenietur hac methodo ad binas saltem earum radicum; nam ubi distantia valoris x novi a præcedenti evaserit minor, quam sit distantia radicum illarum inæqualium, medius novus ipse valor x, vel incidet in ipsum radicis alterius valorem, vel versabitur inter illas, & valorem A exhibebit habentem signum oppositum, signo præcedentium. Si vero valor A appellit ad o, & inde regreditur, & secum trahit numerum radicum æqualium parem, nusquam quidem mutabitur signum valoris A in novis positionibus; adhuc tamen ipse valor decrescet in infinitum, & fiet in immensum minor, quam sit distantia ipsorum valorum x. Nam ibi in ipso o valor A habebit minimum quoddam, & differentiæ reliquorum valorum a minimo illo erunt ipsi reliqui valores toti, differentia autem valorum x a valore radicis exhibente $A=o$, erit minor, quam distantia valorum, quibus ipse includitur, & (per n. 479.) differentiæ valorum A respectu differentiarum valorum x ibi in infinitum decrescent. Si demum valor A ante appulsum ad o regreditur, & minimum aliquod habet, ac radices imaginarias denotat, incipient quidem differentiæ valorum A fieri in immensum minores differentiis valorum x, & interea totus valor A distabit a o

ita, ut statim manifesto apparere debeat, minimum ejus valorem distare ab ipso o, ac possit ad ipsum illum valorem minimum accedi quantum libet.

525. Infinitum esset exemplis illustrare singula ex iis, quæ diximus: illustrabimus præcipua capita. In eadem superiore æquatione proposita num. 515, nimirum $x^3 - 30x + 36 = 0$, posito $x = 0$ fit $A = 36$, posito $x = 5$ fit $A = 11$; qui valores habent signa conformia. Ponatur pro x valor 10 tertius post 0, qui exhibuit valorem $A = 36$ majorem; & 5, qui exhibuit 11 minorem. Habebitur $A = 736$, & trium valorum A; 36; 11; 736 medius 11 est priore minor, secundo non major, cum sit pariter minor. Quare inter 0; & 10 habentur vel binæ saltem radices reales inæquales, vel binæ æquales; vel binæ imaginariæ. Et quidem habentur binæ reales, nimirum $3 - \sqrt{3}$, $3 + \sqrt{3}$, ut eodem num. 156 ostendimus.

526. Dicatur jam $a = 10$, $b = 5$, $c = 0$, eritque $p = 736$, $q = 11$, $r = 36$. Posito pro x valore $\frac{a+b}{2} = 7.5$, habetur $A = 232.875$, qui valor est major valore medio $q = 11$. Quare ponendus $x = \frac{b+c}{2} = 2.5$, eritque $A = -23.375$; unde ob signum contrarium signis prioribus jam constat haberi saltem binas radices reales inæquales, alteram inter 5, & 2.5, alteram inter 2.5, & 0, & quidem $3 + \sqrt{3}$ est $= 4.73$ &c., & $3 - \sqrt{3} = 1.26$ &c.

527. Quod si æquatio sit $x^3 - 27x + 54 = 0$, quæ componitur ex æquationibus $x - 3 = 0$, $x - 3 = 0$, $x + 6 = 0$, & ponatur $x = 15$, erit $A = 3024$. posito $x = 10$ fit $A = 784$ valoris itidem positivi quare assumpto pro x valore 5 tertio post 15, & 10, habetur $A = 44$, valoris adhuc positivi, & medius ille valor A 784 minor

minor est quidem extremo 3024, sed major extremo 44. Quare assumendus est pro x valor o tertius post 10, & 5, & fit $A = 54$ valoris quidem positivi, sed ita, ut trium valorum 784, 44, 54 medius utroque extremo sit minor. Hinc inter valores 10, & o habentur saltem binæ radices vel reales inæquales, vel reales æquales, vel imaginariæ, & quidem habentur binæ reales æquales 3, 3.

528. Sint $a = 10$, $b = 5$, $c = 0$, $p = 784$, $q = 44$, $r = 54$, & posito pro x $\frac{a+b}{2} = \frac{15}{2} = 7.5$, fit $A = 273.375$, valoris positivi, & minor quidem valore $p = 784$, major tamen valore $q = 44$: Quare posito $x = \frac{b+c}{2} = 2.5$, fit $A = 2.125$, qui valor est minor tam valore $q = 44$, quam $r = 54$: unde colligitur illas radices contineri inter 5, & o limites jam duplo propiores: Erunt igitur jam $a = 5$, $b = 2.5$, $c = 0$, $p = 44$, $q = 2.125$, $r = 54$. Posito $x = \frac{a+b}{2} = 3.75$, vel, omissa postrema nota, 3.7 habetur $A = 4.753$, qui quidem valor est major medio illo $q = 2.125$. Quare ponendum $x = \frac{b+c}{2} = 1.25$, vel 1.2, unde fit $A = 23.328$, qui valor pariter est major medio illo $q = 2.125$. Quare illæ binæ radices versantur inter limites hosce novos duplo arctiores 3.7, 1.2. Eodem autem pacto factis $a = 3.7$, $b = 2.5$, $c = 1.2$, $p = 4.753$, $q = 2.125$, $r = 23.328$, ponendum erit $x = \frac{a+b}{2} = 3.1$, unde oritur $A = 0.091$, qui valor cum sit minor tam valore $p = 4.753$, quam valore $q = 2.125$, constat jam illas radices contineri inter 3.7, & 2.5, ac novi valores a, b, c essent 3.7, 3.1, 2.5, novi p, q, r,

 essent

essent 4. 753, 0. 091, 2. 125, quorum ope progredi liceret ad limites adhuc arctiores.

529. Porro ob ipsum valorem A usque adeo imminutum satis jam tuto licet conjectari ipsum convergere ad 0, & numerum radicum æqualium parem hic contineri, quas etiam cum constet non nisi binas esse posse, cum æquatio gradus tertii plures quam tres habere radices non possit, multo etiam citius ad eas licebit accedere ex eo, quod valores A debeant esse (per n. 497) in duplicata ratione distantiarum valorum x a valore radicis, adeoque ipsæ distantiæ valorum x in ratione subduplicata valorum A. Nimirum oportebit dividere intervallum valorum 3. 7, 2. 5, sive 1. 2 in ratione subduplicata 4. 752, 2. 125, sive in ratione 4. 753, 3. 161, ac prior terminus subtrahendus erit a 3. 7. Factis autem ut 4. 753 + 3. 161 = 7. 914 ad 4 753 ita 1. 2 ad quartum, prodit 0. 721, adeoque novus valor x = 3. 7 — 0. 721 = 2. 979, qui valor illo 3. 1 ad verum valorem x, nimirum 3, adhuc multo magis convergit. Si vero haberentur radices æquales quatuor, adhibere oporteret rationem subquadruplicatam. si 6 subsextuplicatam &c., & inde fere etiam discerni posset an radices æquales sint binæ, an 4, an 6 &c., videndo, an definito novo valore radicis ope rationis subduplicatæ, an ope subquadruplicatæ, &c., novus valor A obveniat minor, sive propior vero valori 0, quod ipsum accidit etiam in iis casibus, in quibus habentur signa valorum A opposita, in quibus nimirum si fuerint tres radices æquales, vel 5, vel 7, adhiberi debet ratio subtriplicata, subquintuplicata, subseptuplicata, pro methodo adhibita n. 519, & seqq.

530. Quod si æquatio fuerit $x^3 - 16x + 120 = 0$, quæ componitur ex binis $x + 6 = 0$, $x^2 - 6x + 20 = 0$, adeoque habeat radicem realem -6, & binas imaginarias $3 + (\sqrt{-11})$, $3 - (\sqrt{11})$, posito $x = 2$ habetur $A = 96$, posito eodem $= 6$ habetur $A = 240$. Quare assumpto tertio arithmetico post 6, & 2, sive

— 2,

-2, habetur $A = 144$, adeoque valor medius 96 est minor utroque extremo; & inter 6 ac -2 æquatio habet vel binas radices reales inæquales, vel binas reales æquales, vel existentibus binis imaginariis valor A retro regreditur, & minimum quoddam habet. Et quidem habet minimum, ubi $x = \sqrt{\frac{16}{3}}$ sive $4\sqrt{\frac{1}{3}}$. Nam æquatio inde primo derivata methodo numeri 464 est $3x^2 - 16 = 0$, sive $x^2 - \frac{16}{3} = 0$, $x^2 = \frac{16}{3}$, $x = \pm\sqrt{\frac{16}{3}}$, quæ quidem radices cum inæquales sint earum utralibet exhibetur vel maximum aliquod vel minimum (per num. 490). Si autem derivetur secundo formula $6x$ ex formula $3x^2 - 16$ primo derivata, & substituatur $-\sqrt{\frac{16}{3}}$ pro x tam in formula proposita $x^3 - 16x + 120$, quam in formula $6x$, obveniunt valores $-\frac{16}{3}\sqrt{\frac{16}{3}} + 16\sqrt{\frac{16}{3}} + 120 = \frac{32}{3}\sqrt{\frac{16}{3}} + 120$, & $-6\sqrt{\frac{16}{3}}$ cum signis difformibus; at posito $\sqrt{\frac{16}{3}}$, obveniunt $\frac{16}{3}\sqrt{\frac{16}{3}} - 16\sqrt{\frac{16}{3}} + 120 = -\frac{32}{3}\sqrt{\frac{16}{3}} + 120 = -24.6336$ &c. $+ 120 = 95.3664$ &c., & $6\sqrt{\frac{16}{3}}$ cum signis conformibus; adeoque priore illo exhibetur maximum (per num. 492.) hoc posteriore minimum.

531. Porro jam valores a, b, c erunt $6.2, -2$; valores p, q, r erunt 240, 96, 144, & assumpto $\frac{a+b}{2} = 4$, habetur A 120, qui valor cum sit minor quidem extremo $p = 240$, sed major medio $q = 96$, as-

sumi debet $\frac{b+c}{2}=0$, unde pariter profluit $A=120$, qui valor cum sit pariter major illo valore $q=96$, ita ut e tribus valoribus A 120, 96, 120, medius extremorum utroque sit minor; jacebunt illæ binæ radices, vel minimus valor A habetur inter limites 4, 0, duplo arctiores, & novi valores a, b, c erunt 4, 2, 0; novi p, q, r erunt 120, 96, 120, assumptoque $\frac{a+b}{2}=3$ oritur $A=99$, major valore $p=96$, posito vero $\frac{b+c}{2}=1$, oritur $A=105$ pariter major medio $q=96$. Quare jam erunt eædem radices, vel valor minimus erit inter valores 1, & 3, atque eodem pacto liceret a valorem illum 2. 82 &c., in quo habetur illud minimum accedere quantum libet; sed cum jam differentiæ valorum fiant satis exiguæ, valor autem ipse sit satis magnus, tres enim postremi valores A sunt 99, 96, 105, satis tuto licet conjicere posteriores differentias totum valorem A non elisuras, adeoque non reales, sed imaginarias radices contineri hisce limitibus, quod ulterius pergenti multo evidentius fieret manifestum.

532. Atque hoc quidem pacto satis liquet, in quavis æquatione omnino semper deveniri ad unam radicem realem, vel ad binas reales inæquales, vel ad binas reales æquales, vel ad minimum exhibens radices imaginarias. Et quidem ubi omnes radices sint reales invenientur semper hac methodo radices omnes. Inventa enim quamproximè una reali, quæ dicatur f, & divisa æquatione per $x-f$, divisio debebit succedere quamproximè, ita ut postremum residuum sit quam libuerit exiguum, æquatio vero ex divisione proveniens continebit omnes illas reliquas radices reales, ac proinde in hac pariter invenire licebit saltem unam radicem rea-

lem,

lem, nimirum prioris alteram, & ita porro, donec omnes inventæ sint.

533. Verum plerumque diversis positionibus adhibitis in prima ipsa æquatione proposita detegentur omnes transitus a signo positivo ad negativum circa omnes radices; quod omnino semper continget, si binæ radices non fuerint satis proxime inter se, & e consideratione valorum *A*, Analysta exercitatus loca ipsa transituum facilè subodorabit. Idem erit subterfugium, ubi æquatio habeat radices imaginarias mixtas realibus, & in eas impingat methodus tradita. Mutatis enim positionibus fere semper invenientur ejusmodi valores *A*, ex quibus liceat conjicere loca, in quibus mutantur signa, vel in quibus in ipso appulsu ad o devenitur ad minimum quoddam.

534. Ubi superiore methodo ad aliquam radicem satis proximè deventum fuerit, calculus ob decimalium fractionum numerum, plus æquo molestus accidet potissimum in altioribus æquationibus habentibus plures terminos, & accessus ad verum valorem est semper admodum lentus. Habetur autem methodus admodum expedita, qua, invento semel valore non nimis remoto, citissimè ad maximè proximum devenitur, ac plerumque, ubi nimirum altioris gradus æquationes anteriorum terminorum coefficientes non habeant plus æquo ingentes, satis erit, si valor inventus a vero non distet magis, quam decima sui parte, & ubi coefficientes illi multo majores sint, methodus aliquanto minus converget, nisi aliquanto propior vero assumatur valor. Methodus autem innititur iis, quæ num. 466 demonstravimus, de contemptu terminorum superiores potentias continentium quantitatum exiguarum, respectu terminorum continentium inferiores, atque est hujusmodi.

535. Valor proximus vero inventus dicatur a, valor verus x sit $a+z$, eritque z quantitas exigua respectu a. Substituantur pro x, x^2, x^3 &c. valores sui, & æquatio transformabitur in aliam continentem quantitatem z ele-

z elevatam ad eamdem maximam potentiam, ad quam fuerat elevata incognita x; adeoque ejusdem gradus cum præcedenti. Sed in ea omissis omnibus terminis, qui continent potentias superiores quantitatis z præter primam, reducetur ad æquationem gradus primi exhibentem valorem z vero proximum, quo addito valori a, & restituto calculo, vocando a novum valorem radicis inventum, z novam adhuc minorem differentiam a vera radice, fiet accessus in infinitum. Quod si relinquantur etiam termini continentes z^2, habebitur æquatio gradus secundi resolvenda adhuc admodum facile, & valor z erit multo propior vero. Termini autem, qui retineri debent, admodum facile deprehenduntur ex formula generali binomii elevati ad quamvis potentiam: Si enim terminus fuerit hx^m, pro eo satis erit ponere in prima methodo $ha^m + mha^{m-1}z$, in secunda $ha^m + mha^{m-1}z + \frac{m \times (m-1)}{1 \times 2} a^{m-2} z^2$.

536. Æquationis $x^3 - 30x + 36 = 0$, cujus radix (per num. 516) 4. 73205080756 &c., in tertia cellula numeri 515 invenimus radicem 4. 5 mediam inter 4, & 5, adeoque jam constabat, ibi eam a vera abludere minus, quam in ratione 0. 5 ad 4, vel 5, sive decima circiter vel minus etiam quam decima sui parte. $a + z$ ponatur pro x dicendo $a = 4.5$, & habebitur in prima methodo

$$\begin{array}{ll} a^3 + 3a^2 z & = 0 \\ -30a - 30z & \\ +36 & \end{array}$$

adeoque $z = \dfrac{a^3 - 30a + 36}{-3a^2 + 30}$, sive ponendo 4. 5 pro a, habetur $z = \dfrac{-7.875}{-30.75} = 0.25$. Quare fit $x = 4.5 + 0.$

$5 + 0.25 = 4.75$, quæ jam a vera differt $\frac{2}{100}$. At iterum facto $a = 4.75$ & restituto calculo haberetur $z = \frac{0.671875}{-37.6875} = -0.01782$, adeoque $x = 4.75 - 0.01782 = 4.73218$, qui valor a vero 4.7320 differt per $\frac{2}{10000}$, atque ita porro continua calculi restitutione multo citius ad verum valorem convergitur, quam superioribus methodis.

537. Quod si libeat etiam secundam potentiam z retinere, facta substitutione habebitur

$$\left.\begin{matrix} a^3 + 3a^2z + 3az^2 \\ -30a - 30z \\ +36 \end{matrix}\right\} = 0;$$

Adeoque $z^2 + \frac{a^2 - 10}{a} z + \frac{a^3 - 30a + 36}{3a} = 0$: Quare $z = \frac{-a^2 + 10}{2a} \pm \sqrt{\left(\frac{a^2 - 10}{2a}\right)^2 - \frac{a^3 - 30a + 36}{3a}}$; ubi posito primo quidem 4.5 pro a, habetur $z = -1.139 \pm 1.371$, nimirum assumpto signo positivo $z = 0.232$, adeoque $x = 4.5 + 0.232 = 4.732$, qui valor a vero 4.73205 &c. nonnisi in quinta decimalium nota differt. Restituto autem calculo, & posito 4.73 pro a, fit $z = -1.30791754 + 1.30996835 = 0.00205081$, adeoque $x = a + z = 4.73205081$, qui valor a vero valore 4.73205080 differt solum per $\frac{1}{100000000}$, ita ut ubi in prima positione notæ accuratæ fuerant tantum tres, jam sit octo, ac pariter nova substitutione iterum notarum accuratarum numerus fere triplicaretur, quod cujus compendii sit satis patet.

538. Et quidem eadem methodus aptari potest etiam simplici radicum extractioni. Si nimirum quæratur radix

dix m numeri c, quæ dicatur x erit $x^m = c$, $x^m - c =$ o, ac si innotescat jam radix proxima; quæ dicatur a, & ponatur $a + z = x$, erit $-c + a^m + m a^{m-1}$ $z =$ o adeoque $z = \frac{a^m - c}{-m a^{m-1}}$ vel si retineatur secunda potentia quantitatis z, erit $-c + a^m + m a^{m-1}$ $z + \frac{m \times (m-1)}{1 \times 2} a^{m-2} z^2 =$ o, adeoque $z^2 +$

$$\frac{2a}{m-1} z + \frac{2a^m - 2c}{m \times (m-1) \times a^{m-2}} = \text{o}, \ \& \ z = -\frac{a}{m-1} \pm \sqrt{\frac{a^2}{(m-1)^2} + \frac{2a^m - 2c}{m \times (m-1)\, a^{m-2}}}$$

In quibus formulis, si substituantur numeri patebit, quam cito ad verum radicis quæsitæ valorem liceat accedere.

§. XVI.

De solutione problematum, & demonstratione theorematum.

539. MUltà, quæ ad solutiones problematum, vel theorematum demonstrationes pertinent, jam diximus inter ipsa exempla, quibus præcepta illustravimus. Addemus hic nonnulla, quæ hujusmodi investigationibus prodesse possint. in primis cavendum illud, quod utrique, & plurimum prodest, & vero etiam omninò necessarium est, nimirum ut rite algebraico veluti sermone enuncientur ea, quæ sermone communi proponuntur.

540. Quantitates designari litteris æqualitatem signo $=$, additione sino $+$, detractionem signo $-$, jam initio diximus. Hinc cum summa quantitatum sit id

quod ex additione provenit, differentia vero e subductione unius termini ab alio; summa exprimitur signo + interjecto binis quibusvis quantitatibus, differentia signo —. Problema hoc pacto enuncietur sermone vulgari. Quæro duos numeros, quorum summa sit 10, differentia 4: patet idem algebraicè enunciari hoc pacto $x + y = 10$, $x - y = 4$. Atque eodem modo expressiones potentiarum, & radicum, producti ex multiplicatione, vel divisione, & alia ejusmodi, quæ in ipsa denominatione diximus, algebraico sermoni exercendo necessaria sunt.

541. Ad solutionem problematum omnino necessarium est, ut ad æquationes deveniatur, quod plerumque etiam in theorematum demonstratione contingit. Ac fere, ubi ad æquationes rite deventum est, res est perfecta. Et quidem in superiore exemplo ipsa problematis enunciatione ad æquationem est deventum, quod semper contingit in problematis numericis, ubi æqualitas sola investigetur quærenda. At sæpe artificio aliquo opus est, ut ad æquationem deveniatur, quod in geometria potissimum contingit, ubi a linearum positione potissimum res pendet, & triangulorum similitudo, æqualitas quadrati basis cum quadratis laterum in triangulo rectangulo, atque alia ejusmodi in subsidium vocantur, & eorum ope ad æquationes devenitur. Pro numericis problematis, vel theorematis proferemus casus quosdam, qui frequentius occurrant.

542. Si inter conditiones propositas habeatur illud, ut quatuor termini sint inter se proportionales; inde statim eruitur æquatio faciendo nimirum productum extremorum æquale producto mediorum. At si sint tres continue proportionales, debet quadratum medii æquari producto extremorum, & habetur æquatio eam conditionem exprimens. Quærantur bini numeri medii proportionales inter 12 & 2, quorum primus sit medius continue proportionalis inter secundum, & 9. Exprimetur prima conditio ponendo $xy = 2 \times 12$, sive $xy = 24$, secunda ponendo $x^2 = 9y$, ex quibus æquationibus

mibus facile deducitur quæsitos numeros esse 6, & 4;

543. Quod si quantitas quædam x sit prima e binis mediis continue proportionalibus inter a, & b erit $x^3 = a^2 b$, si prima e ternis erit $x^4 = a^3 b$, si prima e mediis numero $m-1$, erit $x^m = a^{m-1} b$. Nam (per n. 27. c. 2. Arithm.) si in progressione quadam geometrica post primum terminum a, fuerit numerus terminorum m, quorum primus x, postremus b; adeoque numerus intervallorum m, numerus autem terminorum mediorum $m-1$, erit a ad b in ratione multiplicata per m rationis a ad x, adeoque $a : b :: a^m . x^m$; & $a x^m = a^m b$, sive $x^m = a^{m-1} b$.

544. Atque hinc eruitur illud: si x debeat esse n:sima e mediis $m-1$ inter a&b, fore $x^m = a^{m-n} b^n$. Nam si prima dicatur y, erunt mediæ $n-1$ inter a & x, adeoque $y^n = a^{n-1} x$: at erunt $m-1$ inter a & b, adeoque $y^m = a^{m-1} b$. In priore evehendo utrumque terminum ad potentiam m habetur $y^{mn} = a^{mn-m} x^m$, in posteriore elevando utrumque ad potentiam n habetur $y^{mn} = a^{mn-n} b^n$. Quare erit $a^{mn-m} x^m = a^{mn-n} b^n$, & $x^m = a^{mn-n-mn+m} b^n$ sive $x^m = a^{m-n} b^n$.

545. Pariter propositi vel problematis, vel theorematis conditiones rite expendendæ sunt, ut ex iis eruantur æqualitates inter summas, vel differentias quan-

titatum

citatum quarundam, vel proportionalitates inter totas quantitates, vel earum summas, vel differentias, ex quibus deinde æquationes profluant.

546. Sit dolium continens 20. mensuras vini, ex quo extrahi debeat vase quodam mensurarum earundem numerus quidam pluribus exhaustionibus, tum post singulas exhaustiones infundi 4 mensuræ vini, & reliquum aqua ad eandem altitudinem impleri ita, ut post datum quemdam exhaustionum, & repletionum numerum, tantundem vini contineatur in dolio, quantum aquæ.

547. Ad solvendum hoc problema rite perpendere oportet conditiones ipsius. In dolio post singulas repletiones habetur permixtum vinum cum aqua ita, ut in nova exhaustione e mixto illo eruantur mensuræ quædam, quarum numerus cum sit incognitus, nec illud quidem constat, quantum vini dematur inde, quantum aquæ. Constat tamen in vase ipso rationem vini ad aquam esse eandem, quam in dolio, adeoque, & quantitas vini in dolio ad quantitatem vini in vase, quæ nimirum extrahitur erit in eadem ratione, in qua est quantitas aquæ in dolio ad ejus quantitatem in vase, sive quantitas totius mixti in dolio ad quantitatem in vase, nimirum ut dolii capacitas ad capacitatem vasis.

548. Hoc pacto proportio quædam inventa est, quę ad solutionem problematis viam sternet. Si enim numerus mensurarum in vase dicatur x. Post primam exhaustionem, erit numerus munsurarum vini in dolio $20-x$, tum post repletionem primam $20-x+4$, sive $24-x$: Post secundam vero exhaustionem vinum reliquum habebitur, si fiat ut capacitas dolii ad capacitatem vasis, ita vinum quod habebatur ante ejusmodi exhaustionem ad vinum extractum in ipsa, nimirum ut 20 ad x ita

$24-x$ ad $\dfrac{24x-x^2}{20}$. Erit igitur residuum vinum

in

in dolio $24 - x - \frac{24x - x^2}{20}$. Huic residuo additis 4 habetur post secundam repletionem $28 - x - \frac{24x - x^2}{20}$. Eodem pacto si fiat, ut 20 ad x ita $28 - x - \frac{24x - x^2}{20}$ ad $\frac{28x - x^2}{20} - \frac{24x^2 - x^3}{20 \times 20}$ habetur vinum in tertia exhaustione demptum, adeoque residuum erit $28 - x - \frac{24x - x^2}{20} - \frac{28x - x^2}{20} + \frac{24x^2 - x^3}{20 \times 20}$, & additis 4, erit residuum post tertiam repletionem $32 - x - \frac{24x - x^2}{20} - \frac{28x - x^2}{20} + \frac{24x^2 - x^3}{20 \times 20}$.

549. Patet jam ope illius proportionis haberi posse post quemvis exhaustionum, & repletionum numerum algebraicam expressionem quantitatis vini in dolio. Sed ejusdem quantitatis expressio habetur ex altera conditione, quod nimirum tantundem habeatur vini, quantum aquæ; unde fit, ut quantitas vini debeat esse mensurarum 10. Si igitur istæ binæ expressiones ponantur æquales, habetur æquatio, ex cujus solutione pendet solutio problematis, quæ erit ejusdem gradus, quem exprimit exhaustionum, & repletionum numerus.

550. Si exhaustiones, & repletiones debeant esse binæ, habebitur $28 - x - \frac{24x - x^2}{20} = 10$

sive

five $18 - x - \frac{24x - x^2}{20} = 0$, & $360 - 20x - 24x + x^2 = 0$, $x^2 - 44x + 360 = 0$, $x = 22 \pm \sqrt{124}$, five proximè $x = 22 \pm 11$. Nimirum five vas illud contineat paulo minus quam menfuras 11, five paulo plus quam 33, problemati fatisfiet.

551. Atque hic confiderando conditiones problematis inventa eft proportio, cujus ope deventum eft ad valorem quemdam, qui æquatus alteri æquationem exhibuit. Id fæpe fit cum fucceffu potiffimum in Geometria, ubi ab binos ejufdem lineæ valores devenitur, qui æquati exhibent æquationem. Cavendum tamen illud, ut diverfi illi valores ex diverfis conditionibus deriventur. Si enim ex eadem tantum conditione diverfa via deveniatur ad binos valores, ii licet primo afpectu diverfi videantur, eamdem re ipfa etiam algebraice continebunt formulam, & æquationem præbebunt fruftraneam, in qua nimirum demum fiet $0 = 0$.

552. In fuperiore exemplo, invento valore $28 - x - \frac{24x - x^2}{20}$ vini refidui poft fecundam repletionem, inftituat quis hunc alium difcurfum. Poft primam exhauftionem nihil aquæ relinquitur, habetur autem vacuum x, quod impletur menfuris vini 4, aquæ vero $x - 4$. Quare poft primam repletionem habetur aquæ $x - 4$. Si fiat ut 20 ad x ita $x - 4$ ad $\frac{x^2 - 4x}{20}$, habebitur quantitas aquæ ablata in fecunda exauftione. Quare poft fecundam exhauftionem

erit quantitas aquæ $x - 4 - \frac{x^2 - 4x}{20}$: Additur autem in secunda repletione pariter aquæ $x - 4$. Erit igitur quantitas aquæ post secundam repletionem $2x - 8 - \frac{x^2 - 4x}{20}$. Vini autem quantitas habebitur si a mensuris 20 dematur hæc quantitas aquæ; erit igitur quantitas vini $20 - 2x + 8 + \frac{x^2 - 4x}{20}$, sive $28 - 2x + \frac{x^2 - 4x}{20}$.

553. Si jam hunc secundum valorem vini æquet illi prius invento, habebit $28 - 2x + \frac{x^2 - 4x}{20} = 28 - x - \frac{24x - x^2}{20}$, sive auferendo utrinque $28 - x$, & multiplicando per 20; fiet $-20x + x^2 - 4x = -24x + x^2$, nimirum transponendo, $0 = 0$. Quod inde obvenit, quia bini illi valores $28 - 2x + \frac{x^2 - 4x}{20}$, & $28 - x - \frac{24x - x^2}{20}$ eruti sunt ex eadem conditione modi, quo vinum extrahitur, ac infunditur, & idcirco algebraice quoque eundem continent valo-

rem

rem, cum nimirum idem sit $-\frac{24x - x^2}{20}$, ac $+\frac{x^2 - 24x}{20}$, sive $\frac{x^2 - 4x}{20} - x$, adeoque etiam $28 - x - \frac{24x - x^2}{20}$ idem ac $28 - 2x + \frac{x^2 - 4x}{20}$, altera autem conditio, quod post secundam exhaustionem debeant manere 10 vini mensuræ, fuerat penitus prætermissa.

554. Poterat ad eandem æquationem deveniri etiam æquando quantitatem aquæ inventam post secundam repletionem mensuris 10, quo pacto fuisset $2x - 8 - \frac{x^2 - 4x}{20} = 10$, sive multiplicando per 20, $40x - 160 - x^2 + 4x = 200$, vel transponendo $x^2 - 44x + 360 = 0$, ut prius: poterat etiam æquari quantitas aquæ quantitate vini, ac fuisset $2x - 8 - \frac{x^2 - 4x}{20} = 28 - x - \frac{x24 - x^2}{20}$, sive $40x - 160 - x^2 + 4x = 560 - 20x - 24x + x^2$, ac transponendo $2x^2 - 88x + 720 = 0$, vel dividendo per 2 iterum $x^2 - 44x + 360 = 0$. Unde patet ea eadem equationem ex iisdem conditionibus deveniri pluribus viis.

555. Sæpe autem ad æquationes devenitur inveniendo algebraice partes quantitatis cujuspiam, & ipsam totam, ac summam partium æquando toti; sæpe inveniendo valores quatuor quantitatum proportionalium geometricè, ac æquando productum extremorum pro-

ducto mediorum, & aliæ in aliis casibus industriæ adhibentur; in quibus potissimum ingenii vis proditur; nec generales regulæ tradi possunt eruendi ex datis conditionibus æquationes. Nihil autem magis Tyroni proderit; quam si plurima problemata sibi a præceptore proponenda curet; ac in eorum solutione se exerceat, & ab ipso præceptore accipiat solutiones ipsas, si marte suo nequaquam invenerit; vel problemata ab auctoribus passim proposita conetur ad æquationes deducere.

556. Nonnunquam ad æquationes eruendas oportebit ex aliis quoque facultatibus notitias habere quaspiam, ex quibus datorum, atque quæsitorum connexio pendeat. Sint bina gravia, quorum primum secundo altius sit pedibus 360, ac ad idem planum horizontale debeant ita descendere, ut primum illud impendat duplum ejus temporis, quod impendit secundum, & præterea minuta secunda horaria tria. Quæratur altitudo, & tempus.

557. Ad solvendum hoc problema oportet nosse hæc duo ex Mechanica. Primo, gravia libere descendentia singulis secundis percurrere pedes 15 quamproxime, secundo spatia libere descendendo percursa esse ut quadrata temporum, quibus percurruntur.

558. Dicatur jam x tempus, quod impendit secundum grave, computatum in minutis secundis, eritque tempus, quod impendit primum $= 2x + 3$, ac pariter si altitudo secundi computata in pedibus dicatur y, erit altitudo primi $y + 360$. Jam vero erit ut quadratum unius secundi ad quadratum temporis x, ita pedes 15 ad spatium y, sive $1 . x^2 :: 15 . y$. Pariter ut 1 ad quadratum temporis $2x + 3$ ita pedes 15 ad $y + 360$, sive $1 . 4x^2 + 12x + 9 :: 15 . y + 360$. Ex prima proportione habetur $y = 15x^2$, ex secunda $y + 360 = 60x^2 + 180x + 135$, adeoque in hac secunda $y = 60x^2 + 180x - 225$,

quo

quo valore y comparato cum priore, habetur $60x^2 + 180x - 225 = 15x^2$; sive $45x^2 + 180x - 225 = 0$, vel $x^2 + 4x - 5 = 0$, nimirum $x = -2 \pm \sqrt{9}$; unde inferuntur bini valores x, nimirum 1, & -5; ac ope eorum in æquatione $y = 15x^2$ habentur bini valores y, nimirum 15, & 375.

559. Notetur autem hic illud; in problematis mere numericis radicem quamcumque satisfacere quæstioni dummodo negativi numeri rite tractentur; & eorum additio fiat subtrahendo. At in aliis problematis, plerumque negativæ radices quæstioni vulgari sermone propositæ nequaquam satisfaciunt; satisfacient tamen semper quæstioni ipsi propositæ aliis terminis, & nonnihil immutatæ; sive parti cuipiam quæstionis ipsius, de qua sæpe ne cogitaveramus quidem, & pluralitate radicum Algebra monet quodammodo, & alloquitur ejus idiomatis gnarum; ac ostendit partem illam problematis ipsius, quam non animadverterat Analysta. Ejus exempla multo frequentius occurrunt in Geometria; ubi si positivæ quantitates versus certam plagam assumantur, negativæ exprimunt plagam oppositam. Occurrunt tamen exempla ubique, dummodo ubi negativi valores obveniunt, pro anticipatione accipiatur posticipatio, pro excessu defectus pro progressu regressus, pro lucro debitum contractum, pro vi propellente vis retrahens, & alia ejusmodi.

560. In casu nostro valor $x = 1$ satisfacit quæstioni. Et primum grave tempore secundorum $2x + 3 = 5$ percurrit pedes $y + 360 = 15 + 360 = 375$, secundum tempore secundi 1 pedes 15. Et quidem est, ut 1 ad $5 \times 5 = 25$; ita 15 ad 375, ut oportebat. At valor $x = -5$ quæstioni, ut est proposita, nequaquam satisfacit: Primum enim deberet in descensu per altitudinem $375 + 360 = 735$ impendere tempus $2x + 3 = -10 + 3 = -7$; secundum in descensu per altitudinem 375 impendere tempus -5. Verum quo dato tempus negativum impendi possit omnino non ap-

paret. Si autem pro negativis temporibus -7, & -5 sumantur positivi 7, & 5, habebuntur quidem spatia 735, 375 percursa temporibus 7 & 5, cum ex solutione problematis debeat esse $1.15 :: -7\times-7.735$, & $1.15 :: -5\times-5.375$; ac -7×-7 fit $=7\times7$, & $-5\times-5=5\times5$. Verum tempus secundorum 7 non excedit duplum temporis secundorum 5, per 3 secunda; sed ab eo deficit. Quare negativus ille valor, mutatis omnium temporum signis, quae mutatio aequationem non mutat, cum sola temporum quadrata ingrediantur conditiones exhibentes aequationem ipsam; exhibet solutionem problematis, quo quaeratur, ut primum grave impendat minus quam duplum temporis impensi a secundo, existente defectu secundorum trium, quo pacto solus excessus in defectum mutatus est. Ac eodem pacto licebit semper analyticum sermonem interpretari, & videre, cui problemati negativi valores aptari possint; quod aliquando primo intuitu apparebit, aliquando difficilius detegetur.

561. In theorematum demonstratione partier quandoque res erit per se manifesta, saepe tamen longiore ambitu opus erit, & artificio aliquo, ac ingenii vi, qua quod in theoremate proponitur, algebraice rite expressum ita tractetur, ut veritas in eo enunciata, quae plerumquae aequalitatem aliquam involvit, deprehendatur.

562. Si proponatur hujusmodi theoruma. Quadratum binomii continet bina quadrata binorum terminorum, & duplum eorundem productum. Id nullo negotio demonstratur. Satis est binomium $a+b$ ducere in se ipsum, & habetur $a^2+2ab+b^2$, quod statim illius ipsius theorematis veritatem exhibet.

563. At si proponatur hoc aliud: Si quantitas quaedam secetur bifariam, & non bifariam, bina quadrata partium inaequalium aequabuntur binis quadratis aequalium una cum binis quadratis differentiae partis aequalis & utriusvis inaequalium, hoc theorema longiore ambitu indigebit. Sic enim utralibet e binis partibus aequalibus

libus dicatur a, partium inæqualium major m, minor n, erit differentia illa $m - a$; cujus quadratum $mm - 2am + aa$, ejusque duplum $2mm - 4am + 2aa$, cui si addantur bina quadrata partium æqualium sive $2aa$, fiet $2mm - 4am + 4aa$. Porro cum sit $m + n = 2a$ erit $n = 2a - m$, adeoque $nn = 4aa - 4am + mm$, & quadrata partium inæqualium $nn + mm = 4aa - 4am + 2mm$. Cum igitur eadem quantitas inventa sit tam capiendo bina quadrata differentiæ illius, una cum binis quadratis, partium æqualium, quam capiendo bina quadrata inæqualium, patet theorematis veritas.

564. Atque hoc pacto ope æquationis cujusdam devenitur etiam ad demonstrationes theorematum, inveniendo æquales eidem cupiam quantitati terminos illos, quorum æqualitas in ipso theoremate enunciatur. Quin immo si theorema sit falsum, deprehenditur ejus falsitas. Sic in superiore theoremate si enunciatum fuisset bina quadrata partium inæqualium æquari binis quadratis illius differentiæ & ternis quadratis partis æqualis, falsitas deprehensa fuisset: quia debuisset esse $4aa - 4am + 2mm - 4am + 5aa$, sive $o = aa$, quod est absurdum, si ipsa quantitas $2a$ non sit $= o$.

565. Sæpe autem a ratione denominandi pendet facilitas major, vel minor demonstrandi. Sic hoc ipsum postremum theorema multo expeditius demonstraretur, si partium inæqualium major diceretur $a + b$, adeoque minor $a - b$. Nam prioris quadratum esset $aa + 2ab + bb$, posterioris $aa - 2ab + bb$, adeoque eorum summa $2aa + 2bb$ æqualis binis quadratis partium æqualium a, & binis differentiæ b.

566. Ratio tamen denominandi potissimum in solutione problematum diligenter est perpendenda; sæpe enim multo faciliorem solutionem exhibet denominatio rite instituta. Atque in primis, sæpe liberat ab æquationum multiplicitate. Si quærantur tres numeri continue proportionales, ita, ut summa primi ac secundi sit $= 6$, summa vero extremorum cum duplo secundi sit 18, & ii nu-

ii numeri dicantur x, y, z, habebuntur tres æquationes. Prima ex proportione $x . y :: y . z$, erit $xz = y^2$ secunda ex secunda conditione $x + y = 6$, tertia ex tertia $x + 2y + z = 18$, ex quibus ad unicam deveniretur methodo exposita num. 168. Sed evitari possunt plures æquationes sola conditionum consideratione. Si enim primus numerus dicatur x, is ablatus a summa 6 relinquet secundum $= 6 - x$. Factis autem $x . 6 - x :: 6 - x . \frac{36 - 12x + x^2}{x}$, hic erit tertius numerus. Erit autem ex postrema conditione $x + \frac{36 - 12x + x^2}{x} + 12 - 2x = 18$, quæ est unica æquatio, & reducta exhibet $\frac{36 - 12x + x^2}{x} - x = 6$, vel $36 - 12x + x^2 - x^2 = 6x$, sive $36 = 18x$, vel demum $x = 2$, quo invento invenitur secundus $= 6 - x = 6 - 2 = 4$, & tertius $= \frac{16}{2} = 8$.

567. Aliquando ex ipsa denominatione, vel ex electione incognitæ retinendæ in equatione, eliminatis ceteris, pendet etiam æquationis gradus, qui potest fieri depressior. Sit hujusmodi problema: invenire duos numeros, quorum secundus sit medius inter primum & 8, duplum autem quadratum secundi una cum triplo primo efficiat 38. Si primus numerus dicatur x, secundus y, erit $y^2 = 8x$, & $2y^2 + 3x = 38$. Si eliminetur y, erit in prima æquatione $2y^2 = 16x$, quo substituto in secunda, fit æquatio primi gradus $16x + 3x = 38$, sive $19x = 38$, $x = 2$. At si eliminetur x, habetur in prima $x = \frac{y^2}{8}$, adeoque secunda evadit æquatio gradus

secun-

secundi, $2y^2 + \frac{3}{8} y^2 = 38$, sive $16y^2 + 3y^2 = 304$, vel $19y^2 = 304$, ac $y^2 = 16$, vel $y = 4$.

568. Porro ubi solutionem æquationum gradus quarti reduximus ad solutionem æquationum gradus tertii, ostendimus num. 387, & 389. e tribus illis assumptis u, m, n, eliminatis m, & n obvenire equationem gradus sexti carentem alternis terminis, adeoque æquivalentem equationi gradus tertii, cum contineat solum u^6, u^4, u^2; si autem retineatur m, vel n, obvenire æquationem gradus sexti cum omnibus terminis intermediis, ac id ipsum ante æquationis derivationem deprehendi ex eo, quod e sex valoribus u, bini quique solo signo differre debeant, adeoque valores u^2 sint solum tres, dum valores m, vel n omnes etiam magnitudine inæquales sunt. Tanti interest considerare, quæ incognita ad equationem finalem sit adhibenda.

569. Diximus (num. 189.) in problematum consideratione, si tot sint conditiones, ex quibus equationes derivari possunt, quot incognitæ, problema esse determinatum, si plures, plusquam determinatum, si pauciores indeterminatum. Aliquando tamen plures ejusmodi conditiones possunt eamdem prorsus æquationem prebere, & tunc licet tot sint conditiones ejusmodi, quot incognite, problema erit indeterminatum. Querantur bini numeri medii geometrice proportionales inter 2, & 12, ac inter 1, & 24: Dicantur x, & y, ac ex prima conditione erit $xy = 2 \times 12$, ex secunda $xy = 1 \times 24$, nimirum ex utraque $xy = 24$, adeoque assumpto quovis numero pro x, & facto $y = \frac{24}{x}$, satisfit utrique conditioni, ac utraque exhibente eamdem æquationem problema remanet indeterminatum.

570. Quandoque autem potest æquivalere problemati, plusquam determinato, licet tot incognitæ sint, quot æquationes, quæ nimirum inter se pugnent. Ut si que-

rantur bini numeri medii geometricè proportionales inter 2, & 12, ac inter 4, & 16. Prima conditio requireret $xy=24$, secunda $xy=64$; quod fieri non potest, cum non possit esse $24=64$.

571. In problematis indeterminatis infinitæ solutiones inveniri possunt, ponendo in æquatione finali, quæ remanet, eliminatis tot aliis incognitis, quot aliæ æquationes habebantur, & retinet adhuc plures incognitas; pro singulis incognitis, dempta unica, valores quos libuerit. Fiet enim æquatio determinata, quæ exhibebit valores incognitæ relictæ, qui conjuncti cum reliquarum arbitrariis solvent problema. Quærantur quatuor numeri ita, ut summa primi bis, ac secundi semel accepta sit 6, summa omnium 20. Si dicantur x, y, z, u, erit $2x+y=6$; $x+y+z+u=20$. Ex prima $y=6-2x$, quo valore substituto in secunda, habetur $x+6-2x+z+u=20$, sive $z+u-x=14$. Ponantur pro z, & u quicunque valores, ut 7, & 8, & erit $15-x=14$, sive $1=x$, adeoque $y=6-2=4$. Quare numeri 1, 4, 7, 8 satisfaciunt quæstioni. At si ponantur 10, & 12 pro z, & u, erit $22-x=14$, $x=8$; $y=6-16=-10$, ac proinde numeri 8, -10, 10, 12 pariter quæstioni satisfaciunt, & quicunque alii numeri in hac finali æquatione ponantur pro z, & u, semper problema solvitur.

572. Ubi in æquatione finali cognitæ illæ ad eumdem gradum non assurgunt præstabit plerumque substituere valores arbitrarios pro iis incognitis, quæ assurgunt ad gradus altiores, ut remaneat æquatio resolvenda gradus infimi, adeoque minus difficulter resolvi possit. Sit æquatio $2x^3yz^2-10x^2z+8xyz+16y=0$. Si valores arbitrarii substituantur pro y, & z, relinquitur æquatio gradus tertii ob illud x^3; si pro x, & y, relinquitur æquatio gradus 2 ob illud x^2, si demum pro x, & z, relinquitur æquatio gradus primi, cum y primam dimensionem non excedat.

573. Præ-

573. Præstabit tam aliquando altiores gradus retinere, ut nimirum tuto ad aliquam solutionem deveniatur. Nam quotiescumque æquatio, quæ post substitutionem remanet, est gradus imparis; aliqua saltem habetur radix realis (per num. 219); si autem sit gradus paris, potest omnes radices habere imaginarias, quo casu per illam substitutionem æquatio non solvitur. Sit æquatio $x^3 y^2 - 6x^2 y^2 - 4x^2 y + 29xy + 22x - 96 = 0$. In ea si pro x ponatur 1, fiet $y^2 - 6y^2 - 4y + 29y + 22 - 96 = 0$, quæ reducta evadit $5y^2 - 25y + 74 = 0$, sive $y^2 - 5y + 14.8 = 0$, ac proinde $y = 2.5 \pm \sqrt{(6.25 - 14.8)}$, quæ sunt radices imaginariæ. Posito quoque $x = 2$, habetur $8y^2 - 24y^2 - 16y + 58y + 44 - 96$, quæ æquatio reducitur ad hanc $16y^2 - 42y + 52 = 0$ sive $y^2 - \frac{21}{8}y + 3.\frac{1}{4} = 0$, cujus radices $\frac{21}{16} \pm \sqrt{\frac{441}{256} - 3.\frac{1}{4}}$, sive $\frac{21}{16} \pm \sqrt{1.\frac{185}{256} - 3.\frac{1}{4}}$ pariter imaginariæ. Quamobrem plures substitutiones instituendæ sunt, donec casu incidatur in illas, quæ exibeant radices reales. At quovis valore substituto pro y, prodit æquatio gradus tertii, quæ semper habet aliquam radicem realem. Sic si pro y ponatur 2, æquatio evadit $4x^3 - 24x^2 - 8x^2 + 58x + 22x - 96 = 0$, sive $4x^3 - 32x^2 + 80x - 96 = 0$, vel $x^3 - 8x^2 + 20x - 24 = 0$, quæ, cum, posito $z + \frac{8}{3} = x$, mutetur in hanc $z^3 - 1.\frac{1}{3}z - 8.\frac{16}{27} = 0$, habet (per n. 335. & 336.) binas quidem radices imaginarias, sed unam realem.

574. Quando autem potestas maxima omnium inco-

gni-

gnitarum aſcendit ad gradum parem, fieri poteſt, ut problema ſit prorſus impoſſibile, & ſubſtituto quovis valore pro quavis ex incognitis, adhuc numquam deveniri poſſit ad ſolutionem problematis. Atque id omnino ſemper eveniet, cum primum membrum habuerit ſimplicia incognitarum quadrata poſitivis ſignis affecta una cum cognitis quibuſvis poſitivis, ut in æquatione $x^2 + y^2 + a = 0$, in qua, ſi a ſit quantitas poſitiva, & pro x, ac y, ponantur valores quicumque vel poſitivi, vel negativi ſemper $x^2 + y^2$ erit & ipſa poſitiva quantitas, adeoque $x^2 + y^2 + a$ non poteſt eſſe $= 0$. Quin etiam ſi nulla quantitas cognita adſit, ut in æquatione $x^2 + y^2 = 0$, vel $x^2 + y^2 + z^2 = 0$, niſi omnes incognitæ ponantur $= 0$, æquationi non ſatisfiet.

575. Idem continget ſemper etiam, ubi habeantur quadrata binomiorum, vel polinomiorum quorumcumque, dummodo inter ea adſit vel quantitas poſitiva cognita, vel quadratum ſimplex incognitæ, præfixo ſemper quadratis poſitivo ſigno. Nam quadrata illa ſemper poſitiva erunt, & evaneſcere non poterit eorum ſumma, niſi ſingula ex iis fiant $= 0$, quod evenire non poterit, ſi unum ex iis ſit ſimplex, niſi illa ipſa quantitas, cujus eſt id quadratum, fiat $= 0$, & ſi omnia quadrata evaneſcant, quantitas autem cognita poſitiva præterea adſit, adhuc totum non evaneſcit. Sit æquatio $x^2 + 2xy + y^2 + z^2 \; y^2 = 0$. Tranſpoſito postremo termino, fieret $x^2 + 2xy + y^2 = -z^2 \; y^2$ ſive extractis radicibus $x + y = \sqrt{-z^2 \; y^2}$, ubi quicumque valores ſubſtituantur pro y, z, vel poſitivi, vel negativi, ſemper $\sqrt{-z^2 \; y^2}$ erit valor imaginarius, adeoque nulli erunt valores earum quantitatum, qui conjungi poſſint cum aliquo valore x ita, ut proble-

ma

ma fiat possibile, nisi fiat $z=0$, quo casu facto etiam $x^2+2xy+y^2=0$, haberetur $x+y=0$ & $x=-y$. Sed si æquatio sit $x^2+2xy+y^2+z^2y^2+a$, ne hoc quidem artificio satisfiet, cum evanescentibus reliquis, non possit evanescere a.

576. Quin immo licet gradus incognitæ cujuspiam sit impar, adhuc tamen contingere poterit, ut nulli numeri problemati satisfaciant, nisi illa quantitate posita $=0$, si nimirum ea incognita inveniatur in terminis omnibus æquationis, ac ubi ad minimam potentiam assurgit, sit gradus pariter imparis. Divisa enim æquatione per eum ejus incognitæ gradum, relinquetur æquatio gradus paris. Si æquatio sit $x^5+2x^4y+y^2x^3+z^2y^2x^3+ax^3=0$, ea divisa per x^3, habebitur æquatio $x^2+2xy+y^2+z^2y^2+a=0$, impossibilis per numerum precedentem. Quare & equatio $x^5+2x^4y+y^2x^3+z^2y^2x^3+ax^3=0$, impossibilis erit, quicumque enim numeri substituantur pro x,z,y, semper equatio proveniet composita ex binis $x^3=0$, $x^2+2xy+y^2+z^2y^2+a=0$, adeoque habebit tres radices $=0$, & binas imaginarias.

577. Æquationibus indeterminatis exprimitur nexus quidam inter quantinates illas incognitas, quæ possunt considerari ut indeterminatæ quantitates inter se ita connexæ, ut magnitudo unius a cæterarum magnitudine pendeat; ac is nexus etiam ubi æquatio binis tantummodo constat incognitis, est multo generalior eo, quem expressimus §. XIV, cum sæpissimè ita possint esse permixtæ quantitates illæ, ut nullo artificio separari possint, nec ulla formula inveniri data per alteram, qua exprimatur alterius valor, ut ibi; quod quidem contingit, ubi ad altiores gradus elevetur utraque; nam si ad secundum tantummodo elevetur altera, semper conside-

rata

rata altera tanquam cognita, ope methodi æquationum secundi gradus invenitur alterius valor, ut num. 575. in æquatione $x^2 + 2xy + y^2 + z^2 y^2 + a = 0$ invenimus $x = -y \pm \sqrt{-z^2 y^2 - a}$. Quin immo etiam si altera sit elevata ad gradum tertium, vel quartum, inveniri possunt formulæ, quæ ejus valorem exhibeant per reliquas; licet fieri possit, ut incidatur in quantitates imaginarias etiam, ubi ea quantitas realis est, adhibendo nimirum formulas, quæ proveniunt ex resolutione æquationum eorum graduum, ut docuimus §. XII, & XIII.

578. Plurima demonstrari possunt circa hujusmodi quantitatum nexus, & incrementa, ac decrementa earundem, ac circa limites valorum alterius quantitatis, qui alteram realem exhibeant, vel qui exhibeant datum numerum earumdem realium sibi respondentium ubi in equationibus altioribus plures radices haberi possunt: & quidem, ubi binæ tantummodo indeterminatæ sunt, vel tres, nexus idem exprimitur, & vero ipsis etiam oculis subjicitur in Geometria, in priore casu lineis, in posteriore superficiebus, ac omnium curvarum, quas algebraicas dicunt, natura ab hujusmodi æquationibus pendet, ut natura altiorum quarumdam, quas dicunt transcendentes, pendet ab æquationibus quibusdam omnem finitam algebram transcendentibus, & involventibus quantitates infinitesimales. Ac de illis quidem agemus in applicatione Algebræ ad Geometriam, de his in calculo infinitesimali.

579. Interea ostendemus methodum, qua inveniri possint limites omnium substitutionum reddentium problema possibile, ubi una incognita assurgit ad secundum gradum tantummodo. Tractata hac sola ut incognita, inveniatur ejus valor methodo, qua resolvuntur equationes gradus secundi. Is valor continebit quantitatem signo radicali affectam, quæ quantitas, prout fuerit positiva, vel negativa, problema erit possibile, vel impossibile. Et primo quidem non habeat ea quantitas ullum divi-

sorem

orem continentem quantitatem incognitam, ac ponatur $= 0$. Æquationis ex hac positione resultantis inveniantur radices omnes, ac eæ, quæ non habent alias ita sibi æquales, ut æqualium numerus ibi sit par, dicantur radices primi generis, reliquæ, si quæ sint, dicantur secundi. Radices primi generis erunt quæsiti limites, cum in iis tantum primum ejus æquationis membrum, sive quantitas illa signo radicali inclusa debeat transire per 0, adeoque mutari e positiva in negativam, vel viceversa. Substituta nimirum quavis e radicibus primi generis, quantitas illa signo radicali inclusa debet esse $= 0$, substituta quavis interjecta inter eam, & proximè sequentem ejusdem generis, debet esse valoris vel semper positivi, vel semper negativi: inter illam sequentem, & aliam ejusdem generis, quæ ipsam proximè consequitur, valor debet esse oppositus, & ita porro. Solum si inter binas ejusmodi radices inveniatur radix aliqua secundi generis, ea substituta, habebitur non quantitas ejusdem signi, cum reliquis, quæ iisdem limitibus includuntur, sed $= 0$. Quare substituto valore cujusvis radicis utriuslibet generis, problema erit possibile; substituto autem unico valore non congruente cum radice ulla, si quantitas illa obvenerit negativa, innotescet problema esse impossibile ibi, & in omnibus aliis positionibus usque ad limitem proximum: si positiva, possibile, ac inde jam constabit, quid inter binos quosque primi generis limites proximos contineatur, cum in singulis debeat possibilitas mutari in impossibilitatem, vel viceversa.

580. Sit æquatio $y^3 - 11y^2 + x^2 + 2xy + 59y + 20x + 72 = 0$. Erit $x^2 + (2y + 20)x + (y^3 - 11y^2 + 59y + 72) = 0$. Quare $x = -(y + 10) \pm \sqrt{((y^2 + 20y + 100) - (y^3 - 11y^2 + 59y + 72))}$ cujus terminus irrationalis non continet ullum divisorem habentem y. Eo posito $= 0$, fiet $y^2 + 20y + 100 = y^3$
$- 11$

$- 11y^2 + 59y + 72$, five $y^3 - 12y^2 + 39y - 28 = 0$. Hæc æquatio componitur ex hisce tribus $y - 1 = 0$, $y - 4 =$, $y - 7 = 0$; adeoque habet radices reales 1, 4, 7, omnes inæquales: Hæ igitur erunt limites quæsiti. Ponatur pro y valor quivis non congruens cum iis radicibus in quantitate affecta signo radicali; nimirum in $y^2 + 20y + 100 - (y^3 - 11y^2 + 59y + 72)$; commodissimum autem erit substituere o, & habetur $100 - 72$ valor positivus. Quare facta pro y quavis substitutione numeri cujusvis negativi, vel minoris quam 1, problema erit possibile; posito quovis medio inter 1 & 4 erit impossibile, posito quovis inter 4 & 7 erit iterum possibile; posito vero quovis majore quam 7, erit iterum impossibile, ac positus etiam 1, 4, 7 possibile erit. Et quidem si ponatur $y = 2$, habebitur $4 + 40 + 100 - (8 - 44 + 118 + 72) = 144 - 154 = - 10$ quantitas negativa, quod ostendit facto $y = 2$ problema esse impossibile cum debeat esse $x = -(2 + 10) \pm \sqrt{-10}$. Atque eodem modo licebit aliis substitutionibus factis in eodem exemplo canonis veritatem experiri.

581. At si terminus irrationalis habeat divisores continentes incognitam, reducatur tota ad eundem denominatorem, tum ponatur $= 0$ tam formula numeratoris, quam formula denominatoris ac binarum æquationum radices primi generis omnes erunt limites, & si quæ fuerint radices communes tam numeratori, quam denominatori, ita, ut eorum numerus in utraque æquatione simul sit impar, adhuc erunt limites, secus si par. Nam sive numerator, sive denominator signum mutet, mutabit ipsum quotus quantitatem exhibens. Mutabit autem signum numerator in suis radicibus primi generis, denominator in suis. Igitur si hæ communes utrique non fuerint, mutabit quotus in singulis. Si autem radicum communium numerus in uno fuerit impar in altero par, nimirum in utroque simul impar, mutabit ibi signum ille, non hic, adeoque mutabit & quotus:

si in

si in utroque seorsum sumpto fuerit impar, vel in utroque par, adeoque in utroque simul par; mutabit signum in primo casu uterque, in secundo neuter; adeoque signum quoti manebit in utroque casu.

582. Sit æquatio $x^2y + 2xy^2 + 3x^2 + 35y^2 + 26xy + 60x + 121y + 328 = 0$. Erit $(y+3)x^2 + (2y^2 + 26y + 60)x + (35y^2 + 121y + 328) = 0$; sive $x^2 + (2y + 20)x + (35y + 16 + \frac{280}{y+3}) = 0$; adeoque $x = -(y+10) \pm \surd((y^2 + 20y + 100) - (35y + 16 + \frac{280}{y+3}))$. Si quantitas irrationalis reducatur ad eumdem denominatorem multiplicando per $y+3$, fiet, $(\frac{y^3 + 23y^2 + 160y + 300}{y+3}) + (\frac{35y^2 + 121y + 328}{y+3})$, sive $\frac{y^3 - 12y^2 + 39y - 28}{y+3}$. Ex numeratore posito $= 0$ habetur æquatio $y^3 - 12y^2 + 39y - 28 = 0$, cujus radices, ut num. 580, sunt 1, 4, 7: ex denominatore æquatio $y+3 = 0$, cujus radix unica -3. Quare limites sunt -3, 1, 4, 7. Posito autem $y = 0$ in quantitate irrationali $\frac{y^3 - 12y^2 + 39y - 28}{y+3}$, habetur $\frac{-28}{3}$ valor negativus. Quare substitutiones valo-

rum

rum existentium inter -3, & 1 reddunt problema impossibile, negativorum ante -3, & positivorum inter 1, & 4 possibile, inter 4, & 7 impossibile, post 7 possibile.

583. Illud hic notandum tantummodo, si substituatur valor radicis cujusvis ortæ ex numeratore, non communis denominatori, vel contra; valorem quantitatis irrationalis evadere $= 0$, vel infinitum. Nam fiet in primo casu numerator $= 0$, denominator quantitas finita, in secundo numerator quantitas finita, denominator $= 0$. Sic in superiore exemplo si ponatur 1 pro y in formula $\dfrac{y^3 - 12y^2 + 39y - 28}{y + 3}$, habetur $\dfrac{0}{4}$, si ponatur -3, habetur $\dfrac{-280}{0}$,

584. At si ponatur valor radicis communis tam numeratori quam denominatori, valor erit $= 0$, finitus vel infinitus, prout numerus radicum ejus valoris fuerit in numeratore major, æqualis, vel minor, quam in denominatore, & in eo casu, in quo is valor finitus est, invenietur hoc pacto. Deriventur tam ex numeratore, quam ex denominatore aliæ ex aliis formulæ methodo exposita (num. 464.), donec deveniatur ad formulas ex illa positione non evanescentes, & valor fractionis erit is, quem exhibebit fractio habens valores ita provenientes in iis formulis in numeratore, & denominatore. Atque hæc quidem regula generalis est omnibus fractionibus algebraicis continentibus indeterminatam quantitatem tam in numeratore, quam in denominatore, & carentibus terminis radicalibus, indeterminatam ipsam involventibus, qui substituto valore aliquo pro indeterminata eadem, simul evanescant. Ratio autem methodi in eo sita est, quod si ponatur pro ipsa indeterminata radix illa aucta quantitate in immensum exigua; differentia formulæ, sive hic, ubi sub-

substituta radice, formula proposita evanescit, valor formulæ ipsius exhibetur quam proximè a formula, quæ inter derivatas prima non evanescit ducta in incrementum illud radicis, vel ejus quadratum vel cubum, & divisa per 1, vel 1×2, vel $1\times2\times3$ prout fuerit primo, vel secundo, vel tertio derivata, & ita porro juxta nu. 467. Ubi vero plures sunt radices æquales, ibi serius devenitur ad formulam non evanescentem, adeoque si numerus radicum æqualium fuerit major in numeratore, devenietur in eo ad formulam non evanescentem serius, quam in denominatore, & potestas incrementi radicis, in quam ducetur formula primo non evanescens orta ex numeratore, erit altior, quam in denominatore, & valorem ipsius reddet infinities minorem: contra vero si numerus radicum in numeratore fuerit minor. Si autem æqualis fuerit radicum æqualium numerus utrobique, devenietur utrobique simul ad formulam non evanescentem, & utrobique potestas incrementi radicis, in quam ea ducitur, & numerus, per quem dividetur, erit inde prorsus; ac proinde satis erit solas formulas derivatas dividere alteram per alteram, quo præstito habebitur quam proximè valor fractionis ortus ex substitutione valoris in immensum proximi valori radicis; adeoque habebitur accurate valor ortus ex substitutione ipsius radicis.

585. Sit fractio $\dfrac{y^4 - 7y^3 + 18y^2 - 20y + 8}{y^3 - y^2 - y8 + 12}$

Posito 2 pro y, utraque evadit $= 0$. Facto numeratore $= 0$, oritur æquatio $y^4 - 7y^3 + 18y^2 - 20y + 8 = 0$, composita ex æquationibus $y - 2 = 0$, $y - 2 = 0$, $y - 2 = 0$, $y - 1 = 0$, adeoque habens tres radices equales $= 2$, facto $= 0$ denominatore, oritur $y^3 - y^2 - 8y + 12 = 0$ composita ex $y - = 0$, $y - 2 = 0$, $y + 3 = 0$, adeoque habens binas radices æquales $= 2$, & ex numeratore derivatur formula $4y^3 - 21y^2 + 36y - 20$, ex denominatore $3y^2 - 2y - 8$, quarum utraque, posito 2 pro y, evanescit: secundò autem derivata erit ibi $12y^2 - 42y + 36$ pariter evanescens, hìc $6y - 2$ non evanescens, ac ibi quidem solum tertio derivata $24y - 42$ non evanescit. Hinc ea fractio, posito 2 pro y, fit $= 0$.

586. At si fractio sit $\dfrac{y^4 - 9y^3 + 4y^2 + 36y - 32}{y^3 - y^2 - 8y + 12}$, cujus & numerator, & denominator evanescit, posito 2 pro y, æquatio proveniens ex numeratore facto $= 0$, componitur ex æquationibus $y - 2 = 0$, $y - 8 = 0$, $y + 2 = 0$, $y - 1 = 0$, adeoque habet unicam radicem $= 2$, at æquatio orta ex denominatore componitur ex æquationibus $y - 2 = 0$, $y - 2 = 0$, $y + 3 = 0$, & formula ex numeratore primo derivata $4y^3 - 27y^2 + 8y + 36$ non evanescit, ex denominatore vero primo derivata $3y^2 - 2y\,8 -$ evanescit, ac solum secundo derivata $6y -$ non evanescit. Ejus igitur fractionis valor est infinitus.

587. Si demum fractio sit $\dfrac{y^4 + 4y^3 + 3y^2 + 4y - 4}{y^3 - y^2\,8y + 12}$, æquatio orta ex numeratore habet radices 2, 2, 1 $-$ 1; orta vero ex denominatore habet 2, 2, $-$ 3, adeoque in utraque idem est earum radicum numerus, & derivatis ex illo $4y^3 - 12y^2 + 6y + 4$, & $12y^2 - 24y + 6$, ex hoc $3y^2 - 2y - 8$, & $6y - 2$, prima evanescit utrobique, secunda ibi evadit 6, hìc 10; adeoque valor ejus fractionis est $= \dfrac{6}{10}$.

588. Si

588. Si autem formula radicales terminos habeat, methodus quidem est eadem, sed oportet radicalium ipsorum differentias nosse, quod in calculo differentiali docebimus. Hæc de fractionibus habentibus numeratores, & denominatores evanescentes dicta sufficeerint, occasione accepta a limitibus possibilitatis æquationum indeterminatarum, in quibus limitibus præcipua præcepta exemplis quoque illustravimus; nam singula persequi, ac illustrare exemplis, & infinitum esset, & exigui fructus. Ad alia ulteriora properabimus.

589. In problematis indeterminatis, ut etiam in determinatis, plerumque problema haberi potest pro soluto, ubi ad æquationem deventum sit. At potissimum in problematis numericis, si inter conditiones habeatur, ut excludatur irrationalitas, vel fractio, post inventam æquationem cætera exhibentem, quæ fere admodum facile invenitur, multo longiore ambitu opus est, & sæpe nullo artificio problema solvi potest. Id autem contingit quia iisdem algebraicis litteris eodem prorsus modo rationales, & irrationales, integræ, & fractæ, positivæ ac negativę quantitates exprimuntur. Adeoque eæ conditiones immediate exprimi non possunt. Exhibebimus exempla aliquot.

590. Quærantur bini numeri quadrati, quorum differentia æquetur numero dato. Si datus numerus dicatur a, quæsiti x, & y, habebitur $x-y=a$. In hujusmodi æquatione si pro y substituatur quivis numerus quadratus, erit $x=a+y$, adeoque valor quidem x obtinetur per ejusmodi æquationem; sed non habetur conditio, ut x sit numerus quadratus, & sic fiat $x^2-y^2=a$ adeoque $x^2=a+y^2$; habetur quidem & $x=\sqrt{a+y^2}$; sed habetur per formulam, quæ non statim constat, quo pacto ab irrationalitate liberari possit. Solvetur autem problema hoc artificio. Dicatur radix primi numeri quæsiti $x+y$ secundi $x-y$. Illius quadratum est $x^2+2xy+y^2$; hujus $x^2-2xy+y^2$

 Qua-

Quare eorum differentia erit $4xy$, ea posita $= a$ fiet $x = \frac{a}{4y}$. Hic jam irrationalitas evitatur, & assumpto pro y, quovis numero integro, vel fracto, habebitur x, & ejus ope $x + y$, & $x - y$.

391. Sit numerus propositus $a = 40$, capiatur $y = 10$ erit $\frac{a}{4y} = \frac{40}{40} = 1 = x$. Quare $x + y = 11$, $x y - = - 9$, cujus quadratum cum sit idem ac quadratum 9, quaesiti numeri erunt quadrata numerorum 11 & 9. Et quidem illius quadratum est 121, hujus 81, quorum differentia $= 40$. Si autem pro y assumatur 2 erit, $\frac{a}{4y} = \frac{40}{8} = 5$, adeoque $x + y = 7$, $x - y = 3$, & quadrati numeri 49, ac 9 quorum differentia 40. Si pro y ponatur 3, erit $\frac{a}{4y} = \frac{10}{3}$, adeoque $x + y = \frac{10}{3} + 3 = \frac{19}{3}$, $x - y = \frac{10}{3} - 3 = \frac{1}{3}$, quorum quadrata $\frac{361}{9}$ & $\frac{1}{9}$, ac eorum differentia $\frac{360}{9} = 40$.

392. Patet autem, si integri praeterea numeri requirantur, oportere ut numerus datus a, sit divisibilis per 4, tum ut quoti $\frac{a}{4}$ sumatur divisor aliquis pro y, quod quidem formula illa exhibere non potuit, quae numeri a divisores nequaquam exprimit. Porro cum in superiore exemplo sit $\frac{a}{4} = 10$, & numerus 10 habeat

divi-

divisores tantummodo 1, 2, 5, 10, patet integros numeros haberi non posse, nisi pro y assumatur quipiam ex iis.

593. In illa etiam formula $\sqrt{a+y^2}$ potuisset evitari irrationalitas hoc artificio. Ponatur $y = z - \frac{a}{4z}$, & erit $y^2 = z^2 - \frac{a}{2} + \frac{a^2}{16z^2}$. Quare $a + y^2 = z^2 + \frac{a}{2} + \frac{a^2}{16z^2}$, cujus radix $z + \frac{a}{4y}$. Assumatur igitur pro z valor quivis, tum pro x valor $z + \frac{a}{4z}$, pro y valor $z - \frac{a}{4z}$, & erit factum. Si fiat $z = 10$, erit $z + \frac{a}{4z} = 11$, $z - \frac{a}{4z} = 9$, si assumatur $z=2$, erit $z + \frac{a}{4z} = 7$, $z - \frac{a}{4z} = -3$ adeoque quadrati numeri quęsiti in priore casu 121 & 81, in posteriore 49, & 9, ut prius.

594. At si quęrantur bini numeri quadrati, quorum summa æquetur numero dato, æquatio erit $x^2 + y^2 = a$, sive $x = \sqrt{a - y^2}$, quę nullo artificio reducitur. Priore methodo pro differentia adhibito, posita radice prioris $x + y$ habentur quadrata $x^2 + 2xy + y^2$, & $x^2 - 2xy + y^2$; quorum summa $2x^2 + 2y^2$ si fiat $= a$, erit $x^2 + y^2 = \frac{1}{2}a$, ac redit illud idem, quod vitabatur. Si autem fiat $y = z + \frac{a}{4z}$, fit $a - y^2 = -z^2 + \frac{a}{2}$

$= -\frac{a^2}{16 z^2} = -\left(z - \frac{a}{az}\right)^2$, quadratum nimirum negativo signo affectum, cujus radix imaginaria.

595. Quod si numerus datus sit quadratus, adeoque $x^2 + y^2 = a^2$ $x^2 = a^2 - y^2$, $x = \sqrt{a^2 - y^2}$, possent quidem evitari signa negativa, posito $z + \frac{y^2}{4z} = a$, unde haberetur $a^2 - y^2 = z^2 - \frac{y^2}{2} + \frac{y^4}{16zz}$, & $x = \sqrt{a^2 - y^2} = z - \frac{y^2}{4z}$. Sed ex æquatione $z + \frac{y^2}{4z} = a$ haberetur $4z^2 + y^2 = 4az$, ac $z^2 - az = -\frac{1}{4} y^2$, $z^2 - az + \frac{1}{4} a^2 = \frac{1}{4} a^2 - \frac{1}{4} y^2$, $z - \frac{1}{2} a = \sqrt{\frac{1}{4} a^2 - \frac{1}{4} y^2} = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 - y^2}$ quod questionem eodem reducit, unde discesserat; nec ullo artificio obtinetur intentum.

596. Solum si querantur bina quadrata, quorum summa sit numerus quadratus, infinite solutiones haberi poterunt. Assumpto enim quovis numero quadrato u^2, inveniantur, per num. 590, alii bini x^2 y^2, quorum differentia equetur huic, & erit $x^2 - y^2 = u^2$, adeoque $x^2 = u^2 + y^2$, quod querebatur.

597. Plurima hujusmodi problemata proponi possunt, quæ ad numerorum potestates, & potestatum summas, vel differentias pertinent, in quibus curandum diversarum substitutionum ope, ut vel ipse potentiæ eli-

mi-

minentur, vel acquirantur formulę, quæ radices habeant extrahibiles. Sed exempla allata ad quandam methodi ideam sint satis.

598. Plurium indeterminatarum æquationum ope determinata quoque problemata solvuntur, ut diximus num. 188, ubi tot sunt æquationes, quot incognitæ quantitates. Plures methodi ab hoc artificio pendent, ut ex: gr: methodus, quam vocant alligationis in Arithmetica. Habeat quis binas massas compositas ex auro simul, & argento, ita, ut quavis libra primę massę contineantur uncię auri numero a, argenti numero b, in secunda unciæ auri numero d, argenti numero e. Queratur quot unciæ pro singulis libris singularum massarum sumendę sint, ut fiat nova massa, in qua pro quavis libra contineantur auri uncię l, argenti m.

599. Dicatur numerus unciarum primę massę x, secundę y, numerus unciarum unius librę, sive $12 = t$. Erit ut libra t ad partem assumptam x, ita numerus a, unciarum auri contentarum in prima massa, ad numerum contentarum in massa nova, & pariter, ut libra t ad partem secundę massę y, ita numerus d, unciarum auri contentarum in secunda massa, ad numerum earumdem in nova, qui bini numeri unciarum auri analyticè inventi debent poni equales numero illi dato l unciarum ejusdem, quę debent haberi in nova massa. Eo pacto obtinetur una æquatio. Eodem modo ope unciarum argenti obtinetur secunda, ac earum ope inveniuntur quęsiti valores x, & y, & solvitur problema. En calculi specimen.

Pro quavis libra $= t$.

	auri	argenti
est in massa 1.ª	a.	b.
in 2.ª	d	e.
debet esse in 3.ª	l	m.

Erit

Erit $t . x :: a . \frac{ax}{t}$ $\qquad$ $t . x :: b . \frac{bx}{t}$

$t . y :: d . \frac{dy}{t}$ $\qquad$ $t . y :: e . \frac{ey}{t}$

$$\frac{ax}{t} + \frac{dy}{t} = l \qquad \frac{bx}{t} + \frac{ey}{t} = m$$

$$ax + dy = tl \qquad bx + ey = tm$$

$$ax = tl - dy \qquad bx = tm - ey$$

$$x = \frac{tl - dy}{a} \qquad x = \frac{tm - ey}{b}$$

$$\frac{tl - dy}{a} = \frac{tm - ey}{b}$$

$$btl - bdy = atm - aey$$

$$aey - bdy = atm - btl$$

$$y = t \times \frac{am - bl}{ae - bd}$$

600. Invento y, jam habetur & x in formula $\frac{tl - dy}{a}$, vel $\frac{tm - ey}{b}$. Sed formula inventa pro y admodum facile aptatur ipsi x, si notetur, quod erant a, & b respectu x, esse d, & e respectu y, adeoque si in illa formula ponantur hi valores pro illis, & illi pro his habebitur $x = t \times \frac{dm - el}{db - ae}$.

601. Sint exempli gratia in prima massa unciæ auri 10, argenti 2. In secunda auri 4, argenti 8, debeant esse in tertia auri 9 argenti 3. Distribuantur numeri ut supra,

Pro

Pro quavis libra

	auri	argenti
erat in massa 1.	10.	2
in 2.	4.	8
debet esse in 3.	9.	3

Capiendum ex 1.ª $x = 12 \times \frac{4 \times 3 - 8 \times 9}{4 \times 2 - 10 \times 8} = 12 \times \frac{12 - 72}{8 - 80} = 10$

ex 2.ª $y = 12 \times \frac{10 \times 3 - 2 \times 9}{10 \times 8 - 2 \times 4} = 12 \times \frac{30 - 18}{80 - 8} = 2$

602. Patet autem in parte primæ massæ fore auri uncias $\frac{10 \times 10}{12} = \frac{100}{12}$, argenti $\frac{10 \times 2}{12} = \frac{20}{12}$, in parte secundæ, auri $\frac{2 \times 4}{12} = \frac{8}{12}$, argenti $\frac{2 \times 8}{12} = \frac{16}{12}$ adeoque fore in massa nova auri $\frac{108}{12} = 9$, argenti $\frac{36}{12} = 3$, ut oportebat.

603. Quin immo canon etiam generalis erui potest hoc pacto. Quæris quid debeas capere ex una massa? Pone in prima linea numeros auri, & argenti pertinentes ad alteram, in secunda numeros pertinentes ad illam ipsam, in tertia numeros pertinentes ad novam. Duc primum numerum primæ lineæ in secundum tertiæ, & secundum primæ in primum tertiæ, ac hoc productum subduc ab illo, & residuum serva pro fractionis cujusdam numeratore. Duc primum primæ in secundum secundæ, & secundum primæ, in primum secundæ, & hoc productum subduc ab illo, ac residuum sume pro denominatore. Fractionem ejusmodi duc in 12, & habebis intentum. Patet enim id ipsum factum esse in formula $y = t \times \frac{am - bl}{ae - bd}$.

604. At

604. At hic sæpe illud accidet, quod supra monueramus, ut negativi valores problema evertant. Si in prima massa sint auri unciæ 10, argenti 2, in secunda auri 9, argenti 3, & in tertia debeant esse auri 8 argenti 4; obveniet quidem $y = 12 \times \frac{40-16}{12} = 24$, positivi valoris, at $x = 12 \times \frac{36-24}{18-30} = -12$, negativi, quorum utrumque ostendit problema, ut proponitur, esse impossibile, cum nimirum ex 12 unciis accipi non possint 24; nec negativus numerus unciarum addi, nisi subtrahendo. Ostendit autem ejusmodi solutio, ad obtinendum quod proponitur opportere assumere 24 uncias secundæ massæ, & ex iis demere 12 uncias massæ similis primæ, quæ, quod tamen obtineri non potest, cum ex secunda massa non possit demi pars primæ similis metallorum ibi permixtorum. Id autem semper continget, ubi ratio auri ad argentum in nova massa fuerit aut major, aut minor, quam in utraque ex datis. Nam debet esse intermedia.

605. Similis est methodus, si plura simul permixta sint metalla in singulis massis, & totidem requirantur massæ datæ, quot metalla permiscentur: ac totidem æquationes obtinentur, adeoque calculus evadit multo operosior. Plures aliæ methodi eodem artificio deteguntur, & canones pro iis eruuntur generales, ut interpolationis methodus, ac methodus reversionis serierum, & aliæ plures, de quibus agemus, ubi de seriebus. Interea notetur & illud ex generali problematum solutione oriri theoremata, ac canones generales, si ultima illa solutionis conclusio ex algebraico sermone in vulgarem transferatur, uti factum est num. 603.

606. Atque hæc quidem Tyroni abunde sunt, qui si se in his diligenter exercuerit, haud difficulter sublimiora per se ipse vel inveniet, vel apud Auctores passim occurrentia intelliget.

EXPLICIT TOMI I. PARS II.

IN-

INDEX.

PARAGRAPHORUM.