UNIVERZITET U BEOGRADU

PRIRODNO - MATEMATIČKI FAKULTET

MILUTIN OBRADOVIĆ

PRILOG TEORIJI JEDNOLISNIH FUNKCIJA

(DOKTORSKA DISERTACIJA)

BEOGRAD, 1984.

S A D R Ž A J

U V O D

Teorija *jednolisnih funkcija* zauzima značajno mesto u teoriji funkcija kompleksne promenljive, kako raznovrsnošću i dubinom svojih rezultata, tako i mnoštvom razvijenih metoda, koje se mogu uspešno primeniti i u drugim oblastima kompleksne analize.

Prvo pitanje, koje se javlja u vezi sa proučavanjem jednolisnih konformnih preslikavanja, je pitanje o mogućnosti jednolisnog preslikavanja jedne oblasti na drugu. Poznata teorema Riemann-a (1851) predstavlja prvi značajniji rezultat koji je dao odgovor na takvo pitanje. Prvi precizniji rezultati javili su se 1907. god. (Koebe) i 1914-1916. god. (Gronwall, Bieberbach). Oni su se odnosili na klasu regularnih i jednolisnih funkcija u $|z|<1$, koje su oblika $f(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty}a_n z^n$ (klasa S), i klasu jednolisnih funkcija u $|z|>1$, oblika $g(z) = z+\sum_{n=o}^{\infty} b_n z^{-n}$ (klasa Σ). To su, uglavnom, bili razni ekstremalni problemi vezani za klase S i Σ, od kojih treba spomenuti hipotezu Bieberbach-a (1916), koja tvrdi da je za svaku funkciju $f\in S$ ispunjeno: $|a_n|\leqslant n$, $n=2,3,\ldots$ Zahvaljujući hipotezi Bieberbach-a razvile su se mnoge nove metode u teoriji jednolisnih funkcija, koje su je, sa manje ili više uspeha, samo delimično rešavale. Recimo, rezultati koji su dobijeni parametarskom metodom (Löwner, 1923) predstavljaju dobar primer rešavanja geometrijskih zadataka čisto analitičkim putem. Kasnija izučavanja jednolisnih funkcija obuhvatala su ispitivanja nekih familija funkcija, regularnih (ili meromorfnih) i jednolisnih u datim prosto povezanim ili višestruko povezanim oblastima. Istraživanja su se kretala u dva pravca: ili su se izučavale specijalne potklase klase jednolisnih funkcija, ili se težilo razvijanju opštijih metoda koje su se mogle primeniti na čitavu klasu jednolisnih funkcija.

Osnovne metode koje se primenjuju u teoriji jednolisnih funkcija su: princip površine i konturne integracije, parametarska metoda, metoda ekstremalnih metrika, varijaciona metoda, metoda simetrizacije, metoda integralnih predstavljanja, metoda subordinacije, itd. Sve ove metode su svojim rezultatima dale značajan doprinos izučavanju jednolisnih funkcija.

Teorija jednolisnih funkcija se prožima i sa drugim teorijama funkcija kompleksne promenljive. Recimo, sa teorijom H^p-prostora (naime, $S \subset H^p$ za svako $p < \frac{1}{2}$, [12]), ili teorijom kvazikonformnih preslikavanja i sl.

Rad se sastoji iz tri glave.

U prvoj glavi dati su osnovni rezultati teorije jednolisnih funkcija. Na početku se daju osnovni pojmovi i elementarna svojstva jednolisnih funkcija. Zatim slede klasični rezultati ove teorije, sa neophodnim istorijskim napomenama. Od metoda, koje su napred navedene, spominju se samo neke. Posebna pažnja posvećena je metodi subordinacije, koja se koristi u daljem izlaganju. U odeljku 1.5 navode se specijalne klase jednolisnih funkcija: zvezdolike (S^*), konveksne (K), blisko-konveksne (C), zvezdolike u odnosu na simetrične tačke ($\overline{S}^*$) i funkcije Bazilevića ($B(\alpha,\beta)$ $B(\alpha)$,$B_1(\alpha)$). Kako se o funkcijama takvog tipa uglavnom i govori u ovom radu,to je ukazano na njihova osnovna svojstva, uzajamne odnose i druge važnije rezultate. Sve navedene teoreme u ovoj glavi date su uglavnom bez dokaza, ali su komentarisani njihov značaj i posledice.

U drugoj i trećoj glavi su izloženi rezultati do kojih sam došao u svom radu.

U drugoj glavi su dati rezultati koji se odnose na subordinaciju pomoću jednolisnih funkcija. Naime, korišćenjem principa subordinacije i poznatih rezultata (Robertson, [46]), daju se dovoljni uslovi da funkcija $\underline{f}$, regularna u $|z| < 1$ i za koju je $f(o) = f'(o) - 1 = 0$, pripada klasi zvezdolikih funkcija reda α $(0 \leq \alpha < 1)$, klasi konveksnih funkcija reda α $(0 \leq \alpha < 1)$, klasi funkcija zvezdolikih u odnosu na simetrične tačke reda α $(0 \leq \alpha < \frac{1}{2})$, ili, pak, klasi funkcija $B_1(\alpha)$, $\alpha > 0$, koje su tipa Bazilevića (teoreme 2.1-2.4). Ako u teoremama 2.1, 2.2 i 2.3 izaberemo $\alpha = 0$, dobićemo ranije rezultate Robertson-a [46]. Kao posledica teoreme 2.4, dobija se jedan novi kriterijum za jednolisnost.

Treća glava se sastoji iz dva dela. U prvom delu su data uopštenja nekih rezultata u klasama S^*, K, $B(\alpha)$ i $B_1(\alpha)$. Navedimo ovde važnije rezultate. R.Singh je dokazao sledeći rezultat:

Ako $f \in S^*$ (ili $B(\alpha)$), tada i funkcija

$$F(z)^\alpha = \frac{\alpha+1}{z}\int_0^z f(t)^\alpha dt, \quad \alpha \in N,$$

takodje pripada S^* ($B(\alpha)$).

Ovaj rezultat je uopšten za proizvoljno $\alpha > 0$ (teoreme 3.1 i 3.3). Teoreme 3.1′ i 3.3′ su generalizacije teorema 3.1 i 3.3, dok su preostale teoreme, izuzev teoreme 3.7, posledice dobijenih prethodnih uopštenja i odgovarajućih rezultata Singh-a [55]. U teoremi 3.7 dat je drugačiji dokaz generalizacije rezultata Bernardi-a [5], nego što je dat u [40].

U drugom delu glave III daju se ocene realnog dela funkcije $\frac{f(z)}{z}$, gde $\underline{f}$ pripada klasi zvezdolikih funkcija reda α, $\frac{1}{2} \leq \alpha < 1$, ili klasama $B_1(1)$ i $B_1(2)$, koje su tipa Bazilevića (teoreme 3.8, 3.11 i 3.12). Takodje je dokazano da je $\mathrm{Re}(\frac{f(z)}{z})^\alpha > 0$, gde $f \in B_1(\alpha)$, $\alpha > 0$, što je takodje uopštenje rezultata Singh-a [55]. Za $0 < \alpha \leq \frac{1}{2}$ ovaj rezultat je poboljšan: $\mathrm{Re}(\frac{f(z)}{z})^\alpha > \frac{1}{2}$, gde $f \in B_1(\alpha)$ (teorema 3.10).

Napomenimo da su rezultati II i III glave publikovani u radovima [36], [37], [38] i [39].

Na kraju je dat i spisak literature koja je korišćena prilikom pisanja ovog rada.

Zahvaljujem se mentoru profesoru V. Mićiću na korisnim primedbama prilikom pisanja ove disertacije.

GLAVA I

O JEDNOLISNIM FUNKCIJAMA

1.1. DEFINICIJA JEDNOLISNIH FUNKCIJA I NJIHOVA ELEMENTARNA SVOJSTVA

Na početku ove glave navodimo definiciju jednolisnih funkcija i njihova osnovna svojstva, a zatim uvodimo odredjene oznake koje ćemo koristiti u daljem izlaganju.

Definicija 1.1. Neka je D oblast u $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Za funkciju $\underline{f}$ kažemo da je *jednolisna* u oblasti D ako i samo ako je meromorfna i obostrano jednoznačna u D.

Drugim rečima, funkcija $\underline{f}$ je jednolisna u D ako i samo ako je regularna u D, izuzev u najviše jednom polu, i ako je ispunjen uslov

$$z_1 \neq z_2 \Rightarrow f(z_1) \neq f(z_2), \quad \forall z_1, z_2 \in D.$$

Na primer, funkcije oblika

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d} \quad (a,b,c,d \in \mathbb{C},\ ad-bc \neq 0)$$

su jednolisne u $\overline{\mathbb{C}}$.

Navodimo osnovna svojstva jednolisnih funkcija pretpostavljajući pri tome da je funkcija $\underline{f}$ jednolisna u nekoj oblasti D.

(a) Ako je funkcija $\underline{g}$ jednolisna u nekoj oblasti G i $f(D) \subset G$, tada je kompozicija $g \circ f$ jednolisna u D.

(b) Poznato je iz teorije da je neka regularna funkcija jednolisna u nekoj okolini tačke z_o ako i samo ako je $f'(z_o) \neq 0$ ([1]). Dakle, za jednolisnu funkciju $\underline{f}$ imamo da je $f'(z) \neq 0$, $z \in D$.

(c) $\underline{f}$ je homeomorfno preslikavanje iz D na f(D). Prema tome, sve topološke invarijante se očuvavaju pri jednolisnim preslikavanjima. Kombinujući sa (b), zaključujemo da jednolisna preslikavanja predstavljaju konformni homeomorfizam.

(d) Ako je D_1 kompaktan podskup od D, koji ne sadrži mogući pol funkcije $\underline{f}$, tada je euklidska mera slike

$$\text{area}\, f(D_1) = \iint_{D_1} |f'(z)|^2 d\omega,$$

gde je $d\omega$ element površi.

Zahvaljujući poznatoj teoremi Riemann-a, koja kazuje da se svaka prosto povezana oblast koja ima bar dve granične tačke može jednolisno preslikati na jednični krug $|z|<1$, to se, bez umanjenja opštosti, može jedinični krug uzeti za domen jednolisnih preslikavanja. U tom smislu, uvešćemo odredjene oznake i definicije odredjenih klasa funkcija koje ćemo često koristiti.

Uvedimo oznake:

$$E = \{z : |z|<1\}, \qquad E' = \{z : |z|>1\}.$$

Neka je $f(z) = a_o + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots$ jednolisna u E. Kako je $f'(o) = a_1 \neq 0$ (prema (b)), to možemo formirati funkciju

$$f_1(z) = \frac{f(z) - a_o}{a_1} = z + a_2' z^2 + \ldots .$$

Lako se pokazuje da je funkcija $\underline{f_1}$ takodje jednolisna u E, pa se, stoga, mogu posmatrati funkcije oblika $f(z) = z + a_2 z^2 + \ldots$. Ovakvom normalizacijom $(f(o) = 0,\ f'(o) = 1)$ eliminišu se mnogi nepotrebni parametri, dok iskazivanje velikog broja rezultata dobija jednostavnu i prikladnu formu. Zbog toga, neka S označava klasu funkcija

$$f(z) = z + a_2 z^2 + \ldots$$

koje su regularne i jednolisne u E.

Na primer, funkcija Koebe-a

$$f(z) = \frac{z}{(1-z)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} nz^n, \quad z \in E,$$

pripada klasi S i u mnogim slučajevima je "ekstremalna" funkcija u S (o čemu će kasnije biti više reči). Prethodnu funkciju možemo pisati i u obliku

$$f(z) = \frac{1}{4}\left[\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^2 - 1\right],$$

pa, pošto $\frac{1+z}{1-z}$ preslikava E na poluravan $\{\mathrm{Re}\,w>0\}$, to lako zaključujemo da je $f(E) = \mathbb{C}\setminus(-\infty, -\frac{1}{4}]$. Napomenimo da i funkcije

$$\bar{\eta} f(\eta z) = \frac{z}{(1-\eta z)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} n\eta^{n-1} z^n, \quad |\eta| = 1,$$

pripadaju klasi S i da se nazivaju *rotacijama funkcije Koebe-a.*

Često je potrebno posmatrati prost povezan domen $D \subset \overline{\mathbb{C}}$, gde $\infty \in D$ (pri tome isključujemo slučaj $D = \mathbb{C}\setminus\{a\}$. U tom slučaju se za domen D uzima oblast E', dok se sa Σ označava klasa funkcija oblika

$$(1) \qquad g(z) = z + b_0 + b_1 z^{-1} + \dots, \qquad z \in E',$$

i koje su jednolisne u E'.

Ako $f(z) = z + a_2 z^2 + \dots$ pripada klasi S, tada funkcija

$$g(z) = \frac{1}{f(\frac{1}{z})} = \frac{z}{1+a_2\frac{1}{z}+\dots} = z - a_2 + \dots, \quad z \in E',$$

pripada Σ i zadovoljava $g(z) \neq 0$, pošto funkcija $\underline{f}$ nema pol. Obrnuto, ako $g \in \Sigma$ i ako $c \in \mathbb{C}\setminus g(E')$, tada funkcija

$$f(z) = \frac{1}{g(\frac{1}{z}) - c} = \frac{z}{1+(b_0-c)z+\dots} = z + (c-b_0)z^2 + \dots, \quad z \in E,$$

pripada klasi S. Prethodne relacije izmedju S i Σ se često koriste kod dokazivanja raznih tvrdjenja.

1.2. ISTORIJSKI OSVRT. KLASIČNI REZULTATI.

Prvi važniji rezultati u teoriji jednolisnih funkcija bili su dati od strane Koebe-a, 1907. godine. Oni se mogu formulisati u obliku sledeće teoreme ([10]):

TEOREMA 1.1.

(a) Postoji apsolutna konstanta $k>0$, takva da važi implikacija

$$(\forall f)\ f\in S \Rightarrow \{w: |w|<k\}\subset f(E) \quad ,$$

pri čemu je $\underline{k}$ najveći od brojeva za koje to svojstvo važi.

(b) Postoje pozitivni brojevi $m_1(r)$, $M_1(r)$, koji zavise samo od $\underline{r}$, takvi da za $f\in S$,

$$m_1(r)<|f(z)|\leqslant M_1(r) \quad ,$$

gde je $|z| = r$.

(c) Postoji broj $M(r)$, koji zavisi samo od $\underline{r}$, takav da za $f\in S$ i $|z_1|$, $|z_2|\leqslant r$ važi

$$\frac{1}{M(r)}\leqslant \left|\frac{f'(z_1)}{f'(z_2)}\right| \leqslant M(r) \quad .$$

Interesantno je napomenuti da je i naš matematičar J.Plemelj 1913. god. medju prvima objavio rezultate iz teorije jednolisnih funkcija (kako je to navedeno u [10]).

Precizniji rezultati nego što su dati u teoremi 1. pojavili su se nešto kasnije zahvaljujući jednoj teoremi Gronwall-a (1914), poznatoj pod imenom "*spoljna teorema o površini*". U osnovi te teoreme leži tzv. *princip površine* koji izražava prostu geometrijsku činjenicu da je površina neke površi u ravni nenegativna. Preciznije, imamo sledeću teoremu čiji se dokaz može naći u [17], [22], [43].

TEOREMA 1.2.

Neka $g\in\Sigma$ i ima oblik dat u (1). Tada je

$$\text{(2)} \qquad \text{area}(\mathbb{C}\setminus g(E')) = \pi\left(1-\sum_{n=1}^{\infty} n|b_n|^2\right)$$

Iz (2) se neposredno dobija sledeća posledica.

Posledica 1.1. Ako $g\in\Sigma$, tada je

$$\text{(a)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} n|b_n|^2 \leq 1 \ ;$$

(b) $|b_1|\leq 1$, gde jednakost važi ako i samo ako je $g(z) = z+b_o+e^{2i\beta}z^{-1}$ $(b_o\in\mathbb{C},\ \beta\in R)$.

Koristeći se rezultatom ove posledice i vezom izmedju klasa S i Σ, koje su date u 1.1, Bieberbach je 1916. god. došao do sledećih značajnih rezultata (uporediti sa teoremom 1.1).

TEOREMA 1.3.

Ako je $f(z) = z+a_2z^2+\ldots$ i $f\in S$, tada je $|a_2|\leq 2$. Jednakost važi ako i samo ako je f rotacija Koebe-ove funkcije.

Iz prethodne teoreme, korišćenjem činjenice

$$f\in S \Rightarrow \frac{wf}{w-f}\in S \ , \quad \text{gde } w\notin f(E) \ ,$$

dolazi se do tzv. teoreme o "$\frac{1}{4}$":

TEOREMA 1.4.

$$\bigcap_{f\in S} f(E) = \{w: |w| < \tfrac{1}{4}\}.$$

Neka $f\in S$ i neka je

$$g(\zeta) = \frac{f\left(\frac{\zeta+z}{1+\zeta\bar{z}}\right)-f(z)}{f'(z)(1-|z|^2)}$$

(ovo je tzv. transformacija Koebe-a). Tada se lako pokazuje da i $g\in S$, pa se primenom teoreme 1.3. dobija sledeća teorema.

TEOREMA 1.5.

Ako f S, tada je

$$\left|z\frac{f''(z)}{f'(z)} - \frac{2|z|^2}{1-|z|^2}\right| \leqslant \frac{4|z|}{1-|z|^2}, \quad z\in E.$$

Iz teoreme 1.5. se izvodi *Koebe-ova teorema o deformaciji:*

TEOREMA 1.6.

Ako $f\in S$ i $z\in E$, tada je

(a) $$\frac{1-|z|}{(1+|z|)^3} \leqslant |f'(z)| \leqslant \frac{1+|z|}{(1-|z|)^3};$$

(b) $$\frac{|z|}{(1+|z|)^2} \leqslant |f(z)| \leqslant \frac{|z|}{(1-|z|)^2};$$

(c) $$\frac{1-|z|}{1+|z|} \leqslant \left|z\frac{f'(z)}{f(z)}\right| \leqslant \frac{1+|z|}{1-|z|}.$$

Znak jednakosti u svim slučajevima važi ako i samo ako je $\underline{f}$ rotacija Koebe-ove funkcije.

Dokazi teorema 1.3-1.6 dati su, recimo, u [17], [43], [44], [51].

Posledica 1.2. Klasa S je kompaktan skup.

To sledi iz činjenice da je, zbog (b) iz teoreme 1.6,

$$|f(z)| \leq \frac{r}{(1-r)^2}, \quad |z| \leq r, \ f \in S,$$

tj. da je klasa S lokalno uniformno ograničena u E, pa dakle i normalna prema teoremi Montel-a. Dalje, granična funkcija lokalno uniformno konvergentnog niza jednolisnih funkcija je jednolisna funkcija ili konstanta. Druga mogućnost otpada zbog $f'(o) = 1$. Dakle, S je zatvoren, pa i kompaktan skup.

Napomena 1.1. *Hipoteza Bieberbacha* tvrdi da je za sve funkcije $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$, $z \in E$, koje su iz S, ispunjen uslov

$$|a_n| \leq n, \quad n = 2,3,\ldots,$$

tj. da je funkcija Koebe-a ekstremala u tom slučaju. Mnoge od metoda u teoriji jednolisnih funkcija su bile razvijene da bi se rešila ova hipoteza. I danas, iako nerešena, često služi kao dobra test-proba za primenljivost i efikasnost mnogih metoda.

Prvi rezultat $|a_2| \leq 2$, dokazao je sam Bieberbach 1916. god. (videti teoremu 1.3). Löwner je 1923.god. dokazao $|a_3| \leq 3$, uvodeći parametarsku metodu i diferencijalne jednačine. Koristeći se varijacionom metodom, Schaeffer i Spencer su 1943. god. dali dokaz istog tvrdjenja, dok je Jenkins dokaz izveo korišćenjem kvadratnih diferencijala (1960). Garabedian i Schiffer su ustanovili pomoću varijacione metode da je $|a_4| \leq 4$ (1955), dok su Pederson (1968) i Ozawa (1969), koristeći nejednakost Grunsky-a pokazali da je $|a_6| \leq 6$. Na kraju, Pederson i Schiffer (1972) su dokazali da je $|a_5| \leq 5$ koristeći Garabedian-Schiffer-ovu nejednakost.

Prvu ocenu za sve koeficijente dao je Littlewood (1925): $|a_n| < en$. Kasnije je (1965) bolju procenu dao Milin, $|a_n| \leqslant 1{,}243\ n$. G.FitzGerald je 1971. poboljšao rezultat Milina, ustanovivši da je $|a_n| < \sqrt{\frac{7}{6}}n < 1{,}081\ n$ za sve $n \in N$ [15]. Još bolji rezultat, $|a_n| < 1{,}0657\ n$, dobio je Horowitz 1976. god.

Hayman je pokazao ([17], 1955) da za svaku funkciju $f \in S$ postoji granična vrednost

$$\beta = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{n} \leqslant 1,$$

i gde je $\beta = 1$ samo za rotacije funkcije Koebe-a. Ova asimptotska forma hipoteze Bieberbacha kazuje da je

$$|a_n| \leqslant n \quad \text{za} \quad n > n_0(f).$$

Napomenimo da je hipoteza Bieberbacha dokazana za mnoge potklase jednolisnih funkcija, o čemu će više reči biti kasnije.

O hipotezi Bieberbacha se detaljnije može videti u [21] i [43].

1.3. OSNOVNE METODE I PRAVCI U TEORIJI JEDNOLISNIH FUNKCIJA

Osnovnim metodama savremene geometrijske teorije funkcija kompleksne promenljive smatraju se sledeće metode: princip površine i konturne integracije, parametarska metoda, metoda ekstremalnih metrika, varijaciona metoda, metoda simetrizacije, metoda integralnih predstavljanja, metoda subordinacije... Sve ove metode su se pojavile povodom raznih ekstremalnih problema koji u to vreme nisu bili rešeni. Reč je zaista o moćnim sredstvima koja su našla primenu i u teoriji jednolisnih funkcija i doveli do značajnih rezultata. Navešćemo ovde samo neke od metoda, bilo zbog toga što ih zbog njihove važnosti ne možemo zaobići, bilo zato što ćemo ih spominjati i u narednim glavama.

1. O *principu površine* bilo je reči u poglavlju 1.2 Kao što je spomenuto, prvi ga je primenio Gronwall (1914). Kasnije su taj princip koristili i drugi, medju kojima treba istaći Grunsky-a koji je korišćenjem i metode konturne integracije uspešno rešavao ekstremalne zadatke vezane za višestruko povezane oblasti. Korišćenjem takve metode, 1939. god. Grunsky je došao do sledeće nejednakosti:

Ako za funkciju $g \in \Sigma$ stavimo da je

$$\log \frac{g(z)-g(\zeta)}{z-\zeta} = -\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty} b_{kl} z^{-k}\zeta^{-l}, \quad z,\zeta \in E',$$

tada za proizvoljne $\lambda_k \in \mathbb{C}$, $k=1,2,\ldots,$ važi

$$\left|\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty} b_{kl}\lambda_k\lambda_l\right| \leq \sum_{k=1} \frac{|\lambda_k|^2}{k}.$$

Kasnije su date i odredjene generalizacije ove nejednakosti (Goluzin, Milin, FitzGerald, ...) i njihove primene. Mnogi prethodni rezultati su poboljšani (videti i nap. 1.1), a dobijeni su i novi rezultati. Nedostatak ove metode je u tome što se koeficijenti b_{kl} $(k,l=1,2,\ldots)$ veoma komplikovano izražavaju preko koeficijenta b_k, funkcije g, i što nije jednostavno da se utvrdi pod kojim uslovima važi znak jednakosti kod odgovarajućih nejednakosti. O ovoj metodi više se može naći u [22] i [43].

2. *Parametarska metoda* je uvedena od strane Löwner-a (1923). Ideja je u tome da se slika domena utopi u neprekidnu familiju oblasti i da se familija jednolisnih funkcija, koje ostvaruju preslikavanje domena na pomenutu familiju oblasti, može opisati diferencijalnom jednačinom. Osnovni rezultat teorije Löwner-a se može iskazati sledećom teoremom.

TEOREMA 1.7.

Pretpostavimo da je $t_o > 0$ i $\theta(t)$ neprekidna kompleksna funkcija od t, definisana za $0 \leq t \leq t_o$, pri čemu je $|\theta(t)| = 1$.

Neka je $w = f(z,t)$ rešenje diferencijalne jednačine

$$\frac{\partial w}{\partial t} = -w\,\frac{1+\theta(t)w}{1-\theta(t)w}\,, \quad 0 \leq t \leq t_o\,,$$

takvo da je $f(z,o) \equiv z$. Tada funkcija $e^{t_o} f(z,t_o)$ za sve t_o i $\theta(t)$ obrazuju gust podskup od S.

Metod Löwner-a se uglavnom primenjuje kod funkcija $f \in S$ kod kojih je $|f(z)| < 1$, a slika $f(E)$ je jedinični krug sa zasekom čiji jedan kraj pripada granici od E. Sam Löwner je rešio hipotezu Bieberbach-a za $n=3$, dok su dobijeni i mnogi drugi rezultati koji se odnose na precizne procene veličina vezanih za jednolisne funkcije. Na primer, ako $f \in S$, tada važi sledeća nejednakost Goluzina (teorema o rotaciji)

$$|\arg f'(z)| \leq \begin{cases} 4\arcsin|z|, & |z| \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \pi + \log\frac{|z|^2}{1-|z|^2}, & \frac{1}{\sqrt{2}} < |z| < 1 \end{cases},$$

i ova ocena je najbolja moguća ([16]).

Ovu metodu su kasnije razvijali Kufarev, Pommerenke, Goodman, Videti [2], [3], [16], [17], [41], [43].

3. Metoda *ekstremalnih metrika* je našla svoje prve primene u zadacima teorije funkcija i konformnih preslikavanja, koji nisu bili direktno vezani za centralne probleme teorije jednolisnih funkcija. U svojoj najprostijoj formi ta metoda uključuje odredjene ocene dužina nekih porodica krivih i površine oblasti kojima one pripadaju. Kao metodu jednolisnih funkcija, prvi ju je koristio Grötzsch (1938). Operišući sa karakterističnim konformnim invarijantama dvostruko povezanih oblasti i četvorouglova, on je dobio veliku većinu do tada dobijenih rezultata, ali i nove rezultate. Metoda je primenljiva kako na prosto povezane, tako i na višestruko povezane oblasti. Sledeći veliki korak učinio je Teichmüller (1939), koji je povezao ovu

metodu sa diferencijalnom geometrijom i otkrio bitnu ulogu koju pri tome imaju tzv. *kvadratni diferencijali*. Kasnije su Ahlfors i Beurling razvijali ovu metodu primenjujući je više na Riemann-ove površi i kvazikonformna preslikavanja. O svemu ovome više se može videti u [2], [10], [43].

4. *Varijaciona* metoda primenjuje se kod ekstremalnih problema za koje je, na drugi način (recimo pomoću teorije normalnih familija), ustanovljena egzistencija ekstremalne funkcije. Zatim se uvodi varijacija takve funkcije u klasi S (ili nekoj potklasi od S) i ekstremalno svojstvo funkcije dovodi do odredjenih jednačina ili nejednakosti. Može se dogoditi da se pomoću takvih karakterizacija odredi ekstremalna funkcija ili, pak, spoznaju neka njena svojstva. Nedostatak metode je često u tome što je put do iznalaženja ekstremalne funkcije dosta složen. Sa uspehom su ovu metodu razvijali i primenjivali Schiffer, Goluzin, Schaeffer, Spencer, Garabedian i dr. Metoda je pokazala dobre rezultate kod tačnih ocena modula koeficijenta u S i Σ. Više o ovoj metodi se može saznati u [16], [43].

5. Metodi *subordinacije* pomoću jednolisnih funkcija posvetićemo više pažnje.

Definicija 1.2. Neka je ϕ regularna u E, f regularna i jednolisna u E i neka je $\phi(o) = f(o)$. Ako je ispunjeno $\phi(E) \subset f(E)$, tada se funkcija ϕ naziva *subordinatom* funkcije f u krugu E. Tu činjenicu simbolički zapisujemo u obliku $\phi \prec f$.

Iz prethodne definicije imamo da je funkcija $\omega(z) = f^{-1}(\phi(z))$ regularna u E, $\omega(o) = 0$ i $|\omega(z)| \leq |z|$, $z \in E$. Otuda sledi da se skup svih funkcija ϕ, koja su subordinate date funkcije f u krugu E, odredjuju po formuli

$$\phi(z) = f(\omega(z)), \tag{2}$$

gde je $\omega(z)$ proizvoljna funkcija koja ispunjava uslove leme Schwarz-a u E, tj. $\omega(o) = 0$, $|\omega(z)| < 1$, $z \in E$.

U prethodnom smislu se pojam subordinacije prenosi i na slučaj kada $\underline{f}$ nije jednolisna u E. Zahteva se samo da $\underline{\phi}$ ispunjava uslov (2).

Pored već spomenute relacije (2), navodimo osnovne posledice ovog principa.

TEOREMA 1.8.

Neka su $\underline{\phi}$ i $\underline{f}$ regularne u E, $\underline{f}$ jednolisna u E i $\phi \prec f$. Tada je

(a) $|\phi'(o)| \leqslant |f'(o)|$;

(b) $\phi(|z| < r) \subset f(|z| < r)$ za sve $\underline{r}$, $0 < r < 1$

(princip subordinacije).

Suština primene metode subordinacije je u sledećem: ako znamo da je $\phi \prec f$ i znamo karakteristike funkcije $\underline{f}$, šta možemo zaključiti o svojstvima subordinate $\underline{\phi}$. Recimo, iz samog principa subordinacije je jasno da je

$$\max_{|z|\leqslant r} |\phi(z)| \leqslant \max_{|z|\leqslant r} |f(z)|, \text{ tj. } M_\infty(r,\phi) \leqslant M_\infty(r,f) .$$

Šta više, važi opštiji rezultat Littlewooda (dokaz se može naći u [16] i [43]):

TEOREMA 1.9.

Ako su $\underline{\phi}$ i $\underline{f}$ regularne u E i $\phi \prec f$ i pri tome je $\phi(o) = f(o) = 0$, tada je

$$M_p(r,\phi) \leqslant M_p(r,f), \quad 0 < p < \infty, \quad 0 \leqslant r < 1,$$

gde je

$$M_p(r,f) = \{\int_o^{2\pi} |f(re^{i\theta})| d\theta\}^{\frac{1}{p}} .$$

TEOREMA 1.10.

Ako su $\phi(z) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n z^n$ i $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ regularne u E i $\phi \prec f$, tada važi

$$\sum_{k=1}^{n} |b_k|^2 \leqslant \sum_{k=1}^{n} |a_k|^2 \ , \quad n=1,2,\ldots$$

Ovaj rezultat je dao Rogosinski ([11], [16], [43]). Iz teoreme imamo da $\phi \prec f$ ne povlači $|b_n| \leqslant |a_n|$; na primer $z^2 \prec z$.

Napomena 1.2. Ako $f \in S$, a $\phi(z)$ ima oblik kao u teoremi 1.9, onda *generalisana hipoteza Bieberbach-a* tvrdi da je $|b_n| \leqslant n$. I ova hipoteza je dokazana za neke potklase iz S.

TEOREMA 1.11.

Ako je $\phi(z)$ regularna u E, $\phi(o) = 0$, $f \in S$ i $\phi \prec f$, tada je

$$|\phi'(z)| \leqslant \frac{1+|z|}{(1-|z|)^3} \ , \quad |\phi(z)| \leqslant \frac{|z|}{(1-|z|)^2} \ ,$$

gde znak jednakosti važi ako i samo ako je

$$\phi(z) = \frac{\eta z}{(1-\varepsilon z)^2} \ , \quad |\eta| = |\varepsilon| = 1.$$

(Uporediti sa rezultatom tereme 1.6).

Druge pojedinosti i interesantni rezultati mogu se naći u [5], [11], [16], [21], [28], [36], [38], [41], [43], [46], [47]. O nekim primenama ove metode biće reči u glavi II.

Navodimo na kraju ovog poglavlja još jedan primer primene subordinacije, ili, bolje rečeno, tesnu vezu izmedju principa subordinacije i funkcija sa pozitivnim realnim delom. Ove funkcije imaju veoma značajnu ulogu u teoriji jednolisnih funkcija, što će se pokazati u toku daljeg izlaganja.

Označimo sa $\mathcal{P}$ klasu funkcija p koje su regularne u E i za koje je $p(o)=1$ i $\mathrm{Re}\,p(z)>0$, $z\in E$. Drugim rečima, $p\in\mathcal{P}$ ako i samo ako je

$$p \prec \frac{1+z}{1-z}\ .$$

Zahvaljujući takvom zaključku, neposredno sledi naredna teorema.

TEOREMA 1.12.

Ako je $p\in\mathcal{P}$, tada je

(a) $$\frac{1-|z|}{1+|z|} \leqslant |p(z)| \leqslant \frac{1+|z|}{1-|z|}\ ;$$

(b) $$|p'(z)| \leqslant \frac{2}{(1-|z|)^2}\ , \qquad z\in E\ ,$$

gde jednakost u oba slučaja važi ako i samo ako je

$$p(z) = \frac{1+\eta z}{1-\eta z}\ , \qquad |\eta| = 1.$$

U sledećem poglavlju videćemo da se mnoge potklase od S uspešno karakterišu preko funkcija sa pozitivnim realnim delom, pa je otuda značajno navesti i tvrdjenje sledeće teoreme.

TEOREMA 1.13.

Neka funkcija $p(z) = 1+\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n z^n \in\mathcal{P}$. Tada

(a) postoji rastuća funkcija $\gamma(t)$ $(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$ tako da je

$$p(z) = \int_0^{2\pi} \frac{1+e^{-it}z}{1-e^{-it}z}\, d\gamma(t)\ , \qquad \gamma(2\pi)-\gamma(o) = 1.$$

Obrnuto tkdj. važi.

(b) $$|c_n| \leqslant 2\ , \quad n\in N\ .$$

Dokaz ove teoreme se može naći u [43].

1.4. O NEKIM OPŠTIM KRITERIJUMIMA ZA JEDNOLISNOST

Zahvaljujući Löwner-ovoj teoriji i drugim karakterizacijama jednolisnosti pomoću diferencijalnih jednačina (Nehari 1949, [43]), dobijeni su dosta korisni kriterijumi za jednolisnost regularnih (meromorfnih) funkcija u E.

Za regularni slučaj kriterijum su dali Duren, Shapiro i Shields 1966, Becker 1972.

TEOREMA 1.14.

Neka je f regularna u E i $f'(o) \neq 0$. Ako je

$$(1-|z|^2)\left|z\frac{f''(z)}{f'(z)}\right| \leqslant 1, \qquad z\in E,$$

tada je f jednolisna u E. Obrnuto, ako je f jednolisna u E, tada je

$$(1-|z|^2)\left|\frac{f''(z)}{f'(z)}\right| < 6, \qquad z\in E.$$

Nije poznato da li je konstanta 1 u prvom uslovu najbolja moguća. U [43] je pokazano da se ona ne može zameniti brojem koji je veći od $\frac{2}{9}\sqrt{3}\pi \approx 1{,}21$.

Navodimo analogni kriterijum za klasu Σ (Becker 1973).

TEOREMA 1.15.

Ako je $g(z) = z + b_o + b_1 z^{-1} + \dots$ regularna u E' i ako je

$$(|z|^2-1)\left|z\frac{g''(z)}{g'(z)}\right| \leqslant 1, \qquad z\in E',$$

tada $g\in\Sigma$.

Za meromorfne funkcije u E odgovarajući zahtevi su nešto drugačiji. Stavimo da je

$$(3) \qquad \{f,z\} \equiv \left(\frac{f''(z)}{f'(z)}\right)' - \frac{1}{2}\left(\frac{f''(z)}{f'(z)}\right)^2$$

Izraz $\{f,z\}$ se naziva *Schwarz-ov izvod.*

TEOREMA 1.16.

Neka je $\underline{f}$ meromorfna u E i $\{f,z\}$ definisano kao u (3). Ako je

$$|\{f,z\}| \leq \frac{2}{(1-|z|^2)^2}, \qquad z\in E,$$

tada je $\underline{f}$ jednolisna u E. Obrnuto, ako je $\underline{f}$ jednolisna u E, tada je

$$|\{f,z\}| \leq \frac{6}{(1-|z|^2)^2}, \qquad z\in E.$$

U oba slučaja konstante 2 i 6 su najbolje moguće.

Dokazi ovih teorema su dati u [43].

1.5. NEKE SPECIJALNE KLASE JEDNOLISNIH FUNKCIJA

Iz prethodnog izlaganja zaključujemo da su problemi vezani za klasu S, generalno, vrlo složeni, ali su zato u potpunosti rešeni za neke potklase od S. Mnoge od tih klasa se definišu prostim geometrijskim svojstvima. Pokazuje se da i njihova analitička karakterizacija može biti data preko jednostavnih nejednakosti. Spomenućemo samo one potklase koje ćemo koristiti u narednim poglavljima.

Prethodno, označimo sa A klasu funkcija koje su regularne u E i za koje je $f(o)=0$, $f'(o)=1$, tj. koje su oblika

$$f(z) = z+a_2z^2+\dots \quad , \quad z\in E .$$

a) *Zvezdolike funkcije.*

<u>Definicija 1.3.</u> $f\in S$ se naziva *zvezdolikom* u E ako i samo ako je oblast f(E) zvezdolika u odnosu na nulu, tj. ako je

$$(w\in f(E),\ 0\leqslant t\leqslant 1)\Rightarrow tw\in f(E).$$

(Alexander, 1915).

Geometrijski posmatrano to znači da je $\arg f(re^{i\theta})$ rastući za $0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$. Klasu takvih funkcija označimo sa S^*.

Ova geometrijska definicija za S^* može biti izražena i analitičkim putem.Sledeća teorema govori o tome.

TEOREMA 1.17.

Ako $f\in A$, tada su sledeći uslovi ekvivalentni:

(a) $f\in S^*$;

(b) $F_r = f(|z|<r)$ je zvezdolika u odnosu na koordinatni početak;

(c) $\mathrm{Re}\,\frac{zf'(z)}{f(z)} > 0$, $z\in E$, tj. $\frac{zf'}{f}\in\mathcal{P}$ (videti 1.3).

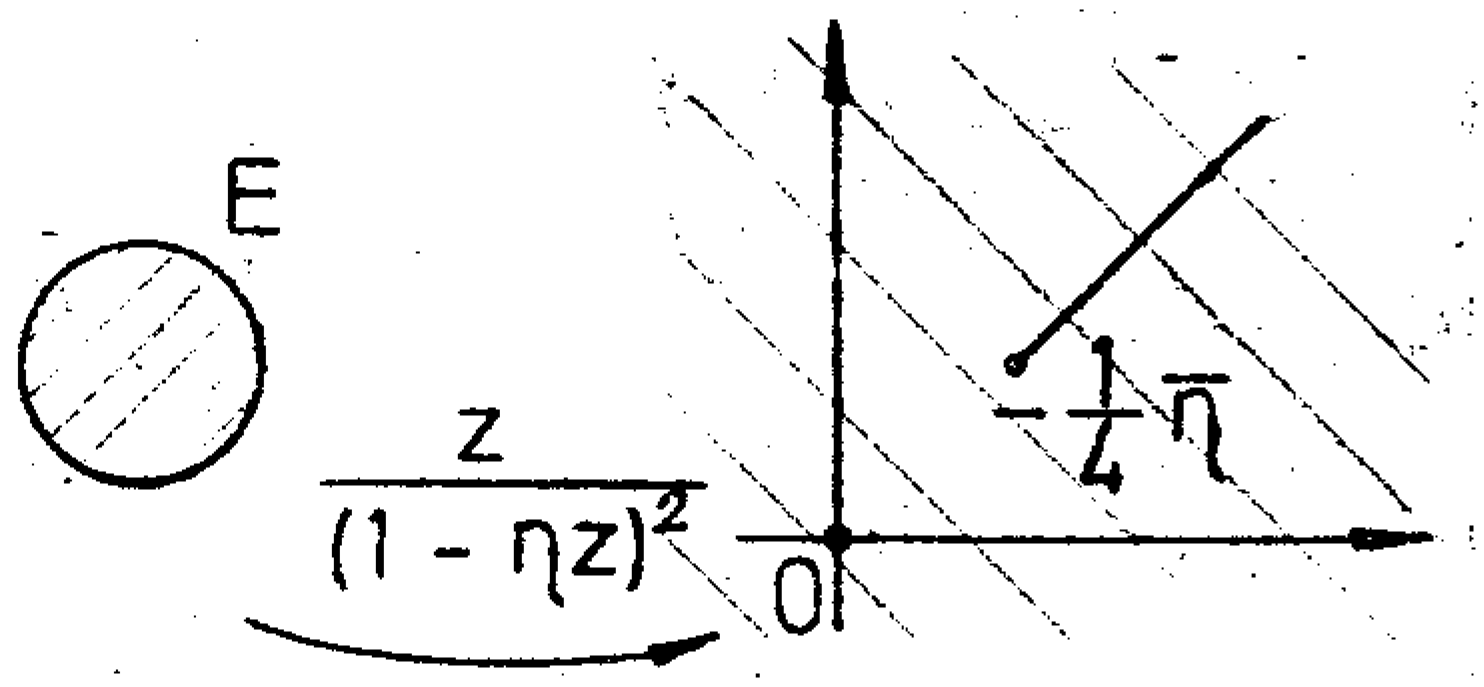
Zahvaljujući predstavljanju funkcija iz klase $\mathcal{P}$ i tvrdjenja (c) iz prethodne teoreme, imamo sledeće svojstvo.

TEOREMA 1.18.

$$f\in S^* \Leftrightarrow f(z) = ze^{-z\int_0^{2\pi}\log(1-e^{it}z)\,d\gamma(t)}, \quad z\in E,$$

gde je $\gamma(t)$ rastuća funkcija sa $\gamma(2\pi)-\gamma(o) = 1$.

Primer. Funkcije $f(z) = \frac{z}{(1-\eta z)^2}$, $|\eta| = 1$, pripadaju S^* i nazivaju se funkcijama Koebe-a (videti 1.1). One preslikavaju E na komplement poluprave sa krajevima u $-\frac{1}{4}\bar{\eta}$ i ∞ (videti sliku).



TEOREMA 1.19.

Ako je $f \in S^*$, tada je

$$|f^{(n)}(z)| \leq n! \frac{n+|z|}{(1-|z|)^{n+2}}, \quad z \in E, \quad n=0,1,2,\dots$$

Specijalno, $\quad |a_n| \leq n, \quad n=2,3,\dots$

Jednakost u oba slučaja važi za $f(z) = \frac{z}{(1-\eta z)^2}$, $|\eta| = 1$.

Dokazi prethodnih teorema se mogu naći u [43] i [51].

b) *Konveksne funkcije*

Definicija 1.4. Funkciju $f \in S$ nazivamo *konveksnom* ako i samo ako je $f(E)$ konveksna oblast (Study, 1913).

Klasu konveksnih funkcija označimo sa K.

Na primer, funkcije $\frac{z}{1-z}$ i $\log\frac{1+z}{1-z}$ su konveksne u E.

Sledeća teorema daje više informacija o prirodi konveksnih funkcija.

TEOREMA 1.20.

Ako $f \in A$, tada su sledeći uslovi ekvivalentni:

(a) $f \in K$;

(b) $F_r = f(|z| < r)$ je konveksna za svako r, $0 < r < 1$;

(c) $\operatorname{Re}\left(1+\dfrac{zf''(z)}{f'(z)}\right)>0$, $z\in E$, tj. $1+\dfrac{zf''}{f'}\in\mathcal{P}$;

(d) $zf'\in S^*$.

Navedimo i sledeće rezultate o konveksnim funkcijama.

TEOREMA 1.21.

Ako $f\in K$, tada je

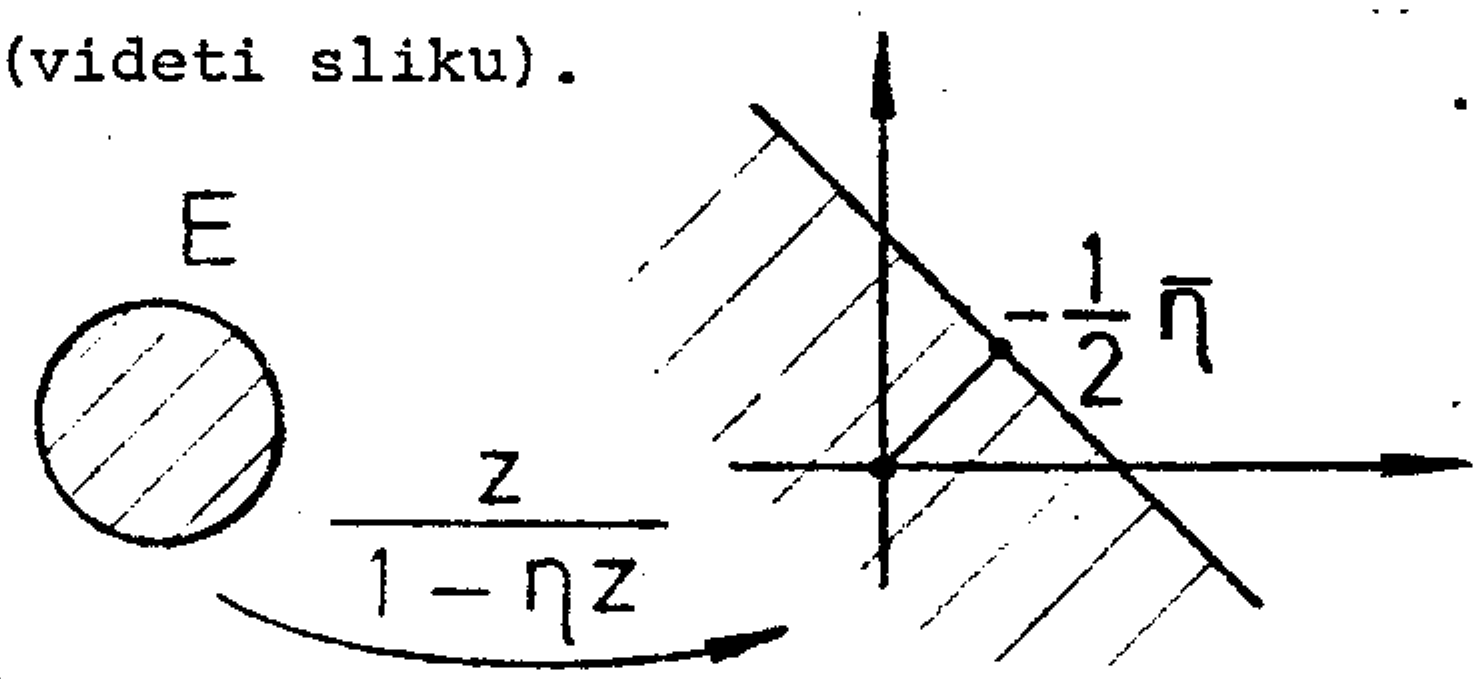
$$\operatorname{Re}\left\{\frac{zf'(z)}{f(z)-f(\zeta)}-\frac{\zeta}{z-\zeta}\right\}>\frac{1}{2}\ ,\ \text{za sve } z,\zeta\in E.$$

TEOREMA 1.22.

Ako $f\in K$, tada je

$$\operatorname{Re}\frac{zf'(z)}{f(z)}>\frac{1}{2}\quad \text{i}\quad \operatorname{Re}\frac{f(z)}{z}>\frac{1}{2}\ ,\quad z\in E\ .$$

Napomenimo i to da su ekstremne tačke preslikavanja $\dfrac{z}{1-\eta z}$, $|\eta|=1$, koja preslikavaju E u poluravni čija su rastojanja $\frac{1}{2}$ od početka (videti sliku).



Zahvaljujući prethodnoj činjenici o ekstremnim tačkama, neposredno se dobija sledeći rezultat.

TEOREMA 1.23.

Ako $f\in K$, onda je

$$|f(z)|\leq\frac{|z|}{1-|z|},\quad |f^{(n)}(z)|\leq\frac{n!}{(1-|z|)^{n+1}}\ ,\ z\in E,\quad n\geq 1.$$

Specijalno je $|a_n| \leq 1$. U svim slučajevima jednakost važi ako i samo ako je $f(z) = \frac{z}{1-\eta z}$, $|\eta| = 1$.

Dokazi napred navedenih tvrdjenja dati su, recimo u [43] i [51].

Na kraju navodimo rezultat,koji je ustvari hipoteza Pólya i Schoenberg-a (1958), a koju su dokazali Ruscheweyh i Sheil-Smal (1973, [48]).

TEOREMA 1.24.

Hadamard-ov proizvod konveksnih funkcija je konveksna funkcija, tj. $f, g \in K \Rightarrow f * g \in K$, gde je

$$(f*g)(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n z^n, \quad z \in E.$$

c) *Blisko-konveksne funkcije*

<u>Definicija 1.5.</u> Funkciju $f \in A$ nazivamo *blisko-konveksnom* ako i samo ako postoji konveksna funkcija g, tako da je

$$\mathrm{Re}\, \frac{f'(z)}{g'(z)} > 0 \ . \quad z \in E \ ,$$

ili, ekvivalentno,

$$\left|\arg \frac{f'(z)}{g'(z)}\right| < \frac{\pi}{2} \ .$$

Za ovako definisanu klasu funkcija upotrebićemo oznaku C. Ovu klasu funkcija prvi je uveo Kaplan, 1952. ([19]). Ispostavlja se da su mnoge klase jednolisnih funkcija potklase od C. Da blisko-kovenksne funkcije pripadaju i klasi S, sledi iz narednog tvrdjenja.

TEOREMA 1.25.

Neka je $\underline{f}$ regularna u G, gde je G konveksan skup. Ako je $\mathrm{Re}f'(z) > 0$, $z\in G$, tada je $\underline{f}$ jednolisna u G.

Dokaz. Pretpostavimo da za neke $z_1, z_2 \in G$, $z_1 \neq z_2$, važi $F(z_1) = F(z_2)$. Kako je G konveksan skup, to $(1-t)z_1 + tz_2 \in G$, $t\in[0,1]$, pa je

$$0 = \mathrm{Re}\,\frac{f(z_2)-f(z_1)}{z_2-z_1} = \mathrm{Re}\,\frac{1}{z_2-z_1}\int_{z_1}^{z_2} f'(z)\,dz = \int_0^1 (\mathrm{Re}f')\,dt > 0\ ,$$

što bi bila kontradikcija.

Ako sada imamo da $f\in A$ i da je $\mathrm{Re}\,\frac{f'(z)}{g'(z)} > 0$, gde $g\in K$, tada je $F = f\circ g^{-1}$ regularna u oblasti $G = g(E)$, koja je konveksan skup. Kako je $\mathrm{Re}\,F'(z) = \mathrm{Re}\,\frac{f'(z)}{g'(z)} > 0$, to prema prethodnoj teoremi dobijamo da je funkcija F jednolisna, pa dakle i funkcija $F\circ g = f$.

TEOREMA 1.26.

Važi tvrdjenje: $K\subset S^*\subset C$.

Prva inkluzija je jasna iz geometrijskih interpretacija funkcija iz klasa K i S^* (ili bolje reći iz definicije istih). $S^*\subset C$, jer za $f\in S^*$ imamo da je $\mathrm{Re}\,\frac{zf'}{f} > 0$, što bi se moglo pisati u obliku $\mathrm{Re}\,\frac{f'(z)}{g'(z)} > 0$. gde je $g(z) = \int_0^z \frac{f(\zeta)}{\zeta}\,d\zeta$ konveksna u E (što se lako pokazuje).

Specijalno birajući konveksne funkcije $\underline{g}$, možemo dobiti razne klase funkcija, kao što su Schwarz-Christoffel-ova preslikavanja i sl. (videti [19]).

Sledeća teorema daje karakterizaciju klase C, nezavisnu od funkcija $\underline{g}$ ([19]).

TEOREMA 1.27.

$$f\in C \Leftrightarrow \int_{\theta_1}^{\theta_2} \mathrm{Re}\left[1 + z\,\frac{f''(z)}{f'(z)}\right] d\theta > -\pi\,,$$

gde je $\theta_1 < \theta_2$, $z = re^{i\theta}$ i $r<1$.

Lewandowski [43] je dao geometrijsku karakterizaciju klase C.

TEOREMA 1.28.

Neka $f \in S$. Tada $f \in C$ ako i samo ako je $\mathbb{C} \setminus f(E)$ unija zatvorenih polupravih takvih da su odgovarajuće otvorene poluprave disjunktne.

Napomenimo da je za klasu C tačna hipoteza Bieberbach-a, tj. da je $|a_n| \leqslant n$, $n=2,3,\ldots$ (Reade, [45]).

Posmatraćemo sada jednu specijalnu potklasu od C.

Definicija 1.6. Za funkciju $f \in A$ kažemo da je *zvezdolika u odnosu na simetrične tačke u E* ako i samo ako je ispunjen uslov

$$\operatorname{Re} \frac{zf'(z)}{f(z)-f(-z)} > 0, \quad z \in E.$$

Klasu takvih funkcija označimo sa $\bar{S}^*$.

Sakaguchi [50] je dao drugačiju definiciju klase $\bar{S}^*$, ali je zatim pokazao da je takva definicija ekvivalentna uslovu koji je dat u ovde navedenoj definiciji. Na primer, neparne zvezdolike funkcije pripadaju klasi $\bar{S}^*$. U radu [50] je pokazano, takodje, da je $\bar{S}^* \subset C$, tj. da su funkcije zvezdolike u odnosu na simetrične tačke tkdj. jednolisne u E. Za klasu $\bar{S}^*$ važi i sledeća činjenica ([50]):

TEOREMA 1.29.

Neka $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n \in \bar{S}^*$. Tada je $|a_n| \leqslant 1$, $n \geqslant 2$, i znak jednakosti važi ako i samo ako je $f(z) = \dfrac{z}{1+\eta z}$, $|\eta| = 1$.

Generalizacija ove klase funkcija data je takodje u [50].

4. *Funkcije Bazileviča*

Oslanjajući se na diferencijalne jednačine Kufareva

$$\frac{\partial f(z,t)}{\partial t} = - f(z,t)p(f,t),$$

$$\frac{\partial f(z,t)}{\partial t} = -zf'(z,t)p(z,t),$$

gde je $p(u,t) = 1+\alpha_1(t)u+\ldots$ regularna u $|u| < 1$, koja ima pozitivan realni deo i deo po deo je neprekidna po parametru $\underline{t}$, Bazilevič [3] je došao do dosta široke klase jednolisnih funkcija koja sadrži u sebi mnoge klase jednolisnih funkcija, kao što su konveksne, zvezdolike, blisko-konveksne, itd. Tu klasu mogli bismo definisati na sledeći način:

<u>Definicija 1.7.</u> $B(\alpha,\beta,g,P)$ je klasa funkcija $f\epsilon A$ koje imaju sledeće predstavljanje

$$(4) \qquad f(z) = [(\alpha+i\beta)\int_0^z P(t)g(t)^{\alpha}t^{i\beta-1}dt]^{\frac{1}{\alpha+i\beta}}$$

gde $P\epsilon\mathcal{P}$, $g\epsilon S^*$, $\alpha,\beta\epsilon R$, $\alpha>0$, i gde su uzete glavne vrednosti u (4).

Pošto je formula (4) dosta složena, to se i generalno o ovoj klasi vrlo malo zna. Uglavnom se ispituju potklase takvih funkcija za razne vrednosti α i β.

Tako za $\beta=0$, $\alpha>0$ i $g\epsilon S^*$, imamo iz (4):

$$f(z) = [\alpha\int_0^z P(t)g(t)^{\alpha}t^{-1}dt]^{\frac{1}{\alpha}} ,$$

što je ekvivalentno s tim da $f\epsilon A$ i da je ispunjeno

$$(5) \qquad \mathrm{Re}\,\frac{zf'(z)f(z)^{\alpha-1}}{g(z)^{\alpha}} > 0 , \quad z\epsilon E.$$

Klasu funkcija $f\epsilon A$ koja zadovoljava uslov (5) označavaćemo sa

$B(\alpha)$ i nazivati je *klasom Bazileviča tipa* α, *u odnosu na funkciju* $g \in S^*$ (kao u [55]). Ako u (5) izaberemo $g(z) \equiv z$, dobićemo relaciju

$$(6) \qquad \operatorname{Re} \frac{zf'(z)f(z)^{\alpha-1}}{z^{\alpha}} > 0, \quad z \in E,$$

dok ćemo klasu funkcija $f \in A$ koje zadovoljavaju (6) označavati sa $B_1(\alpha)$.

Iz (5) i (6) je jasno da je $B(1) = C$, $B(o) = B_1(o) = S^*$ i $B_1(1) = \mathcal{P}'$, gde je $\mathcal{P}' \subset S$ i za čije je funkcije $\operatorname{Re} f'(z) > 0$, $z \in E$.

T.Sheil-Small [53] je dokazao sledeći rezultat koji je, u odredjenom smislu, analogan rezultatu (tj. karakterizaciji) Kaplana [19] (videti i teoreumu 1.27) za blisko-konveksne funkcije

TEOREMA 1.31.

Neka je f funkcija Bazileviča tipa (α,β). Tada, za svako r $(0<r<1)$ važi

$$(7) \qquad \int_{\theta_1}^{\theta_2} \left\{1 + \operatorname{Re} \frac{re^{i\theta}f''(re^{i\theta})}{f'(re^{i\theta})} + (\alpha-1)\operatorname{Re} \frac{re^{i\theta}f'(re^{i\theta})}{f(re^{i\theta})} - \right.$$

$$\left. -\beta \operatorname{Im} \frac{re^{i\theta}f'(re^{i\theta})}{f(re^{i\theta})}\right\} d\theta > -\pi,$$

za $\theta_2 > \theta_1$.

Obrnuto, ako je f regularna u E, sa $f(o) = 0$, $f(z) \neq 0$ $(0 < |z| < 1)$, $f'(z) \neq 0$ $(z \in E)$ i ako f zadovoljava uslov (7) za $0 < r < 1$, gde je $\alpha \geq 0$, $\beta \in R$, tada je f jednolisna u E i tipa je Bazileviča (α,β) za $\alpha > 0$.

J.Zamorski [61] je pokazao da je hipoteza Bieberbacha u klasi $B(\alpha)$ tačna u slučaju $\alpha = \frac{1}{n}$, gde je $n \in N$.

U svom radu [59] D.Thomas posvećuje više pažnje funkcijama Bazileviča koje su ograničene u E, dok R.London [27] razmatra poredak rasta veličine $M(r,f) = \sup|f(z)|, |z| = r$, za funkciju

$f \epsilon B(\alpha)$. Neki drugi aspekti proučavanja funkcija ovog tipa dati su u [14], [20], [30], [31], [35].

G L A V A II

SUBORDINACIJA I JEDNOLISNE FUNKCIJE

2.1. UVODNI POJMOVI I REZULTATI

O metodi subordinacije, osnovnim svojstvima i primenama, bilo je reči u poglavlju 1.3. glave I. Ova glava biće posvećena primeni principa subordinacije na neke klase jednolisnih funkcija. Preciznije, korišćenjem takvog postupka, biće dati dovoljni uslovi da funkcije $\underline{f}$, regularne u E, pripadaju odredjenim klasama jednolisnih funkcija.

U svom radu [46] Robertson je posmatrao za datu jednolisnu funkciju $\underline{f}$ u E, odgovarajuću relaciju subordinacije (videti (2) u 1.2):

$$(1) \qquad F(z,t) = f(\omega(z,t)),$$

gde funkcije $F(z,t)$ i $\omega(z,t)$ zavise od realnog parametra $\underline{t}$, i gde funkcija $\omega(z,t)$ zadovoljava uslove leme Schwarz-a. Koristeći se svojstvima funkcija iz relacije (1), Robertson je došao do metode koja je jednostavna i dosta generalna. I sam Robertson ju je uspešno primenio ([46]) u teoriji jednolisnih funkcija, kako pri dobijanju već poznatih rezultata, tako i kod dobijanja novih (recimo, odnos sredina de la Vallée Poussin-a i konveksnh funkcija, itd.).

Glavni rezultati pomenutog rada Robertsona sadržani su u sledećim dvema teoremama.

TEOREMA A_1.

Neka je

$$\omega(z,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n(t) z^n$$

regularna u E za $0 \leq t \leq 1$ i neka je

$$|\omega(z,t)| < 1 \quad \text{za} \quad z \in E, \quad 0 \leq t \leq 1 \,, \quad \omega(z,o) \equiv z \,.$$

Neka je, zatim, p pozitivan realan broj za koji postoji granična vrednost

$$\omega(z) = \lim_{t \to +o} \left\{ \frac{\omega(z,t) - z}{z t^p} \right\} \,.$$

Tada je

$$\mathrm{Re}\,\omega(z) \leq 0, \quad z \in E \,.$$

Ako je $\omega(z)$ takodje regularna u E i $\mathrm{Re}\,\omega(o) \neq 0$, tada je

$$\mathrm{Re}\,\omega(z) < 0, \quad z \in E \,.$$

Dokaz teoreme A_1 bazira na lemi Schwarz-a. Na osnovu teoreme A_1 i relacije (1), izvodi se opštija teorema.

TEOREMA A_2.

Neka $f \in S$. Za $0 \leq t \leq 1$ neka je $F(z,t)$ regularna u E, neka je $F(z,o) \equiv f(z)$ i $F(o,t) \equiv 0$. Neka je zatim, p pozitivan realan broj za koji postoji granična vrednost

$$(2) \qquad F(z) = \lim_{t \to +o} \left\{ \frac{F(z,t) - F(z,o)}{z t^p} \right\}.$$

Ako je $\quad F(z,t) \prec f(z)$ u E za $0 \leq t \leq 1$, tada je

$$\mathrm{Re} \left\{ \frac{F(z)}{f'(z)} \right\} \leq 0, \quad z \in E \,.$$

Ako je $F(z)$ takodje regularna u E i $\operatorname{Re} F(o) \neq 0$, tada je

$$(3) \qquad \operatorname{Re}\left\{\frac{F(z)}{f'(z)}\right\} < 0, \quad z\epsilon E .$$

O nekim primenama prethodne teoreme Robertsona može se videti u [5] i [57].

2.2. SUBORDINACIJA I JEDNOLISNE FUNKCIJE

Sledeći rezultati, koji se odnose na zvezdolike funkcije reda $\alpha(0 \leq \alpha < 1)$, konveksne funkcije reda $\alpha(0 \leq \alpha < 1)$, funkcije zvezdolike u odnosu na simetrične tačke reda $\alpha(0 \leq \alpha < \frac{1}{2})$ i funkcije Bazileviča iz klase $B_1(\alpha)$, $\alpha > 0$, dati su u radovima [36] i [38].

Definicija 2.1. Za funkciju $f\epsilon A$ kažemo da je *zvezdolika reda* α, $0 \leq \alpha < 1$, u E ako i samo ako je

$$(4) \qquad \operatorname{Re} \frac{zf'(z)}{f(z)} > \alpha, \quad z\epsilon E.$$

Klasu funkcija koje zadovoljavaju (4) obeležićemo sa $S^*(\alpha)$. Očigledno je da je za $0 < \alpha < 1$, $S^*(\alpha) \subset S^*$ i $S^*(o) \equiv S^*$.

Sledeća teorema daje dovoljan uslov da $f\epsilon A$ pripada i klasu $S^*(\alpha)$, $0 \leq \alpha < 1$.

TEOREMA 2.1.

Neka $f\epsilon A$ i neka funkcija

$$(5) \qquad g(z) = \frac{1}{1-\alpha}\left[f(z) - \alpha\int_0^z \frac{f(s)}{s}\,ds\right] = z + \ldots$$

pripada klasi S, za fiksirano α, $0 \leq \alpha < 1$. Ako je

$$(6) \qquad G(z,t) \equiv \frac{1}{1-\alpha}\left[(1-t)f(z) - \alpha(1-t^2)\int_0^z \frac{f(s)}{s}\,ds\right] \prec g(z), \quad z\epsilon E ,$$

za $0<t<1$, $0\leq\alpha<1$, tada $f\in S^*(\alpha)$.

Dokaz. U teoremi A_2 izaberimo $p=1$ i neka funkcija $F(z,t)$ bude funkcija $G(z,t)$ iz (6). Neposredno se proverava da je $G(z,0)\equiv g(z)$, $G(0,t)\equiv 0$. Takodje se dobija

$$G(z)=\lim_{t\to+0}\frac{G(z,t)-G(z,0)}{zt}=\lim_{t\to+0}\frac{\partial G(z,t)/\partial t}{z}=$$

$$=\frac{1}{1-\alpha}\lim_{t\to+0}\frac{-f(z)+2t\alpha\int_0^z\frac{f(s)}{s}ds}{z}=\frac{1}{1-\alpha}\left[-\frac{f(z)}{z}\right].$$

Kako iz (5) imamo

$$g'(z)=\frac{1}{1-\alpha}\left[-f'(z)-\alpha\frac{f(z)}{z}\right],$$

i kako je funkcija $G(z)$ regularna u E i $\operatorname{Re}G(0)=-\frac{1}{1-\alpha}\neq 0$, to uslov (3) iz teoreme A_2 daje

$$\operatorname{Re}\frac{G(z)}{g'(z)}<0 \Leftrightarrow \operatorname{Re}\frac{g'(z)}{G(z)}<0,\ z\in E,$$

što je u našem slučaju, na osnovu dobijenih vrednosti za g' i G, ekvivalentna sa

$$\operatorname{Re}\frac{zf'(z)}{f(z)}>\alpha,\ z\in E,$$

tj. $f\in S^*(\alpha)$.

Napomena 2.1. Ako je $\alpha=0$, tada uslov subordinacije (6) ima oblik

$$(1-t)f(z)\prec f(z),\quad 0\leq t\leq 1$$

što je dobro poznata karakteristika zvezdolikih funkcija (videti i poglavlje 1.5).

Definicija 2.2. Za funkciju $f\in A$ reći ćemo da je *konveksna reda* α, $0\leqslant\alpha<1$, u E ako i samo ako je

$$\text{(7)} \qquad \mathrm{Re}\,\left(1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right)>\alpha, \quad z\in E\,.$$

Klasu funkcija koje zadovoljavaju (7) označićemo sa $K(\alpha)$. Evidentno je $K(\alpha)\subset K$ za $0<\alpha<1$ i $K(o)\equiv K$.

Naredna teorema daje dovoljan uslov da funkcija $\underline{f}$ iz klase S pripada i klasi $K(\alpha)$.

TEOREMA 2.2.

Neka $f\in S$ i neka je

$$\text{(8)} \qquad F(z,t)\equiv\frac{1}{1-\alpha}\left[\frac{1}{2}\left(f(ze^{it})+f(ze^{-it})\right)-\alpha f((1-t^2)z)\right]\prec f(z), \quad z\in E,$$

gde je $0\leqslant t\leqslant 1$ i $0\leqslant\alpha<1$. Tada $f\in K(\alpha)$.

Dokaz. U ovom slučaju u teoremi A_2 izabraćemo $p=2$, a za funkciju $F(z,t)$ uzećemo funkciju iz (8). Tada je, očigledno, $F(z,o)\equiv f(z)$ i $F(o,t)\equiv 0$. Ako stavimo da je

$$F_1(z,t)=\frac{1}{2(1-\alpha)}\left[f(ze^{it})+f(ze^{-it})\right]$$

i

$$F_2(z,t)=\frac{\alpha}{1-\alpha}\,f((1-t^2)z),$$

tada je

$$F(z,t)=F_1(z,t)-F_2(z,t).$$

Primenom L'Hospital-ovih pravila neposredno se proverava da je

$$F(z)=\lim_{t\to+o}\frac{F(z,t)-F(z,o)}{zt^2}$$

$$= \lim_{t\to+0} \frac{F_1(z,t)-F_1(z,0)}{zt^2} - \lim_{t\to+0} \frac{F_2(z,t)-F_2(z,0)}{zt^2}$$

$$= \lim_{t\to+0} \frac{\partial^2 F_1(z,t)/\partial t^2}{2z} - \lim_{t\to+0} \frac{\partial F_2(z,t)/\partial t}{2zt}$$

$$= \frac{1}{1-\alpha}[-zf''(z) - f'(z)] + \frac{\alpha}{1-\alpha} f'(z) = \frac{1}{1-\alpha}[-zf''(z)-(1-\alpha)f'(z)] .$$

Pošto je Re $F(0) = -1 \neq 0$, to prema teoremi A_2 i uslovu (3), imamo Re $\frac{F(z)}{f'(z)} < 0$, što je u našem slučaju ekvivalentno sa

$$\text{Re } \{1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)}\} > \alpha , \quad z\in E ,$$

tj. $f\in K(\alpha)$.

<u>Napomena 2.2.</u> Za $\alpha = 0$, iz uslova subordinacije (8) imamo da je

$$\frac{1}{2} [f(ze^{it}) + f(ze^{-it})] \prec f(z)$$

dovoljan uslov da $f\in K$. To je raniji rezultat Robertsona [46].

<u>Napomena 2.3.</u> U svom radu [57] S.Singh i R.Singh su takodje dobili dovoljan uslov za $f\in S$ da bi pripadala klasi $K(\alpha)$, a koji je različit od uslova datog u teoremi 2.2.

<u>Definicija 2.3.</u> Funkciju $f\in A$ zvaćemo *zvezdolikom u odnosu na simetrične tačke reda* α, $0 \leq \alpha < \frac{1}{2}$, u E ako i samo ako je ispunjen uslov

$$\text{(9)} \qquad \text{Re } \frac{zf'(z)}{f(z)-f(-z)} > \alpha, \quad z\in E.$$

Klasu funkcija koje zadovljavaju uslove prethodne defininicije označićemo sa $\overline{S}^*(\alpha)$. Za $\alpha = 0$ dobija se klasa funkcija $\overline{S}^*$, tj. klasa funkcija zvezdolikih u odnosu na simetrične tačke u E, definisana u poglavlju 1.5.

Slično teoremama 2.1 i 2.2 i ovde dajemo dovoljan uslov za funkciju $f \in A$ da bi pripadala i klasi $\overline{S}^*(\alpha)$, $0 \leq \alpha < \frac{1}{2}$.

TEOREMA 2.3.

Neka $f \in A$ i neka je funkcija

$$(10)\qquad g(z) = \frac{1}{1-2\alpha}[f(z) - \alpha\int_0^z \frac{f(s)-f(-s)}{s}ds] = z+\dots, \quad 0 \leq \alpha < \frac{1}{2},$$

jednolisna u E. Ako je

$$(11)\qquad G(z,t) = \frac{1}{1-2\alpha}[(1-t)f(z))+tf(-z)-\alpha(1-t^2)\int_0^z \frac{f(s)-f(-s)}{s}ds],$$

gde je $0 \leq t \leq 1$, $0 \leq \alpha < \frac{1}{2}$, i ako je $G(z,t) \prec g(z)$ za svako $0 \leq t \leq 1$, tada $f \in \overline{S}^*(\alpha)$.

Dokaz. U teoremi A_2 izaberimo $p = 1$, a za funkciju $F(z,t)$ uzmimo funkciju $G(z,t)$ iz (11). Neposredno se proverava da je $G(z,o) \equiv g(z)$, $G(o,t) \equiv 0$. Takodje iz (2) i (11) dobijamo da je

$$G(z) = \lim_{t\to+0} \frac{G(z,t)-G(z,o)}{zt} = \lim_{t\to+0} \frac{\partial G(z,t)/\partial t}{z} =$$

$$= \lim_{t\to+0} \frac{1}{1-2\alpha}\cdot\frac{1}{z}[-f(z)+f(-z)+2\alpha t\int_0^z \frac{f(s)-f(-s)}{s}ds]$$

$$= -\frac{1}{1-2\alpha}\,\frac{f(z)-f(-z)}{z}.$$

Kako iz (10) imamo

$$g'(z) = \frac{1}{1-2\alpha}[f'(z) - \alpha\frac{f(z)-f(-z)}{z}]$$

i kako je $\operatorname{Re} G(o) = -\frac{2}{1-2\alpha} \neq 0$, to na osnovu teoreme A_2 (uslov (3)) dobijamo

$$\operatorname{Re} \frac{g'(z)}{G(z)} < 0 , \quad z \in E,$$

što je, prema prethodno dobijenim vrednostima za funkcije g' i G, ekvivalentno uslovu

$$\operatorname{Re} \frac{zf'(z)}{f(z)-f(-z)} > \alpha,$$

tj. funkcija f pripada klasi $\overline{S}^*(\alpha)$.

Napomena 2.4. Za $\alpha = 0$, iz tvrdjenja teoreme 2.3 dobija se da subordinantni uslov ima oblik

$$(1-t)f(z)+tf(-z) \prec f(z), \quad 0 \leq t \leq 1 ,$$

i da on povlači da funkcija $f \in \overline{S}^*$, što je rezultat koji je dat u [46].

Na kraju ove glave navodimo teoremu koja daje dovoljan uslov da funkcija $f \in A$ pripada i klasi $B_1(\alpha)$, $\alpha > 0$, tj. specijalnoj potklasi funkcija tipa Bazileviča (kao što je to definisano u poglavlju 1.5). Da podsetimo, za funkciju $f \in A$ kažemo da pripada klasi $B_1(\alpha)$, $\alpha > 0$, ako i samo ako je

$$\operatorname{Re} \frac{zf'(z)f^{\alpha-1}(z)}{z^{\alpha}} > 0, \quad z \in E .$$

TEOREMA 2.4.

Neka $f \in A$ i neka je $\alpha > 0$. Ako funkcija

$$(12) \qquad g(z) = \int_0^z \left(\frac{f(s)}{s}\right)^{1-\alpha} ds$$

pripada klasi S i ako je

$$(13) \qquad G(z,t) \equiv f((1-t)z)-f((1-t^2)z)+(1-t^2) \int_0^z \left(\frac{f(s)}{s}\right)^{1-\alpha} ds \prec g(z), \quad z \in E ,$$

i gde je $0 \leq t \leq 1$, tada $f \in B_1(\alpha)$.

Dokaz. Ako postupimo kao u dokazu prethodne teoreme, birajući i teoremi A_2, $p=1$, a za funkciju $F(z,t)$ funkciju $G(z,t)$, tada je, očigledno, $G(z,o) \equiv g(z)$ i $G(o,t) \equiv 0$. Takodje, imamo

$$G(z) = \lim_{t\to+o} \frac{G(z,t)-G(z,o)}{zt} = \lim_{t\to+o} \frac{\partial G(z,t)/\partial t}{z}$$

$$= \frac{1}{z} \lim_{t\to+o} [f'((1-t)z)(-z)-f'((1-t^2)z)(-2tz) -$$

$$- 2t \int_o^z \left(\frac{f(s)}{s}\right)^{1-\alpha} ds] = -f'(z),$$

dok je iz (13)

$$g'(z) = \left(\frac{f(z)}{z}\right)^{1-\alpha} .$$

Kako je $\mathrm{Re}\, G(o) = -f'(o) = -1 \neq 0$, to primenjujući teoremu A_2, iz (3) nalazimo da je

$$\mathrm{Re} \frac{-f'(z)}{\left(\frac{f(z)}{z}\right)^{1-\alpha}} < 0 \Leftrightarrow \mathrm{Re} \frac{zf'(z)f(z)^{\alpha-1}}{z^\alpha} > 0, \quad z \in E,$$

tj. $f \in B_1(\alpha)$.

Posledica 2.1. Neka za funkciju $f \in A$ važi

$$(14) \quad |f((1-t)z)-f((1-t^2)z)+(1-t^2)z| < 1, \quad z \in E, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1.$$

Tada je $\underline{f}$ jednolisna u E.

Dokaz. Ako u teoremi 2.4 izaberemo $\alpha = 1$, dobićemo da je odgovarajuća funkcija $\underline{g}$ iz uslova (12): $g(z) \equiv z$, zaista iz klase S, dok odgovarajući uslov (13) ima oblik

$$f((1-t)z)-f((1-t^2)z)+(1-t^2)z \prec z, \quad 0\leq t\leq 1 ,$$

što je ekvivalentno sa uslovom (14). Prema teoremi 2.4 imamo da $f\in B_1(1)$, tj. $\underline{f}$ je jednolisna u E.

Bilo bi od interesa razmatrati i druge specijalne klase jednolisnih funkcija, pogotovu one koje se mogu definisati preko izraza čiji je realni deo pozitivan. Od posebnog su interesa i funkcije koje još nisu dovoljno proučene (kao što su funkcije Bazileviča). Moguće je da se pri tome dobiju i neki novi, dosta jednostavni, kriterijumi za jednolisnost (videti posledicu 2.1).

GLAVA III

DIFERENCIJALNE NEJEDNAKOSTI I FUNKCIJE KLASE $\mathcal{P}$

3.1. UVODNI POJMOVI I REZULTATI

U ovoj glavi biće govora o diferencijalnim nejednakostima dosta opšteg tipa iż kojih proizilazi da funkcije f koje ih zadovoljavaju imaju svojstvo da je za njih $\operatorname{Re} f(z) > 0$, $z \in E$, tj. da $f \in \mathcal{P}$. Zatim se daju primene takvih nejednakosti na razne probleme u teoriji jednolisnih funkcija.

S.S.Miller je u [32] dao definicije odredjenih klasa funkcija koje generališu mnoge potklase već poznatih klasa jednolisnih funkcija (videti i [23]).

Prethodno, prema [32], navodimo odredjene definicije.

Definicija 3.1. Neka je $u = u_1 + iu_2$, $v = v_1 + iv_2$, gde u_1, u_2, $v_1, v_2 \in R$ i neka je Ψ skup funkcija $\psi(u,v)$ koje zadovoljavaju sledeće uslove:

(a) $\psi(u,v)$ je neprekidna u $D \subset \mathbb{C} \times \mathbb{C}$;

(b) $(1,0) \in D$ i $\operatorname{Re}\psi(1,0) > 0$;

(c) $\operatorname{Re}\psi(u_2 i, v_1) \leq 0$ kada $(u_2 i, v_1) \in D$ i $v_1 \leq -\frac{1}{2}(1+u_2^2)$.

Označićemo sa Φ podskup od Ψ koji zadovoljava (a),(b) i (c′) $\operatorname{Re}\psi(u_2 i, v_1) \leq 0$, kada $(u_2 i, v_1) \in D$ i $v_1 \leq 0$.

Primeri [32]. Lako se pokazuje da sledeće funkcije pripadaju Ψ.

$$\Psi_1(u,v) = u+\alpha\frac{v}{u}, \quad \alpha \in R, \quad D = (\mathbb{C}\setminus\{o\}\times\mathbb{C};$$

$$\Psi_2(u,v) = u^2+v, \quad D = \mathbb{C}\times\mathbb{C};$$

$$\Psi_3(u,v) = u+\alpha v, \quad \alpha \geqslant 0, \quad D = \mathbb{C}\times\mathbb{C};$$

$$\Psi_4(u,v) = u-\frac{v}{u^2}, \quad D = (\mathbb{C}\setminus\{o\})\times\mathbb{C};$$

$$\Psi_5(u,v) = -\ln\left(\frac{1}{2}-v\right), \quad D = \mathbb{C}\times\{(v_1,v_2)\,|\,v_1<\tfrac{1}{2}\}\ .$$

Napomenimo da funkcije $\Psi_1,\Psi_2,\Psi_3,\Psi_4$ pripadaju tkdj. i skupu Φ, dok $\Psi_5 \notin \Phi$, pa je Φ pravi podskup od Ψ.

Definicija 3.2. Neka je $p(z) = 1+p_1z+p_2z^2+\ldots$ regularna u E i neka $\Psi\in\Psi$ ima odgovarajući domen D. Označimo sa $\mathcal{P}(\Psi)$ one funkcije $\underline{p}$ koje zadovoljavaju uslove:

(a) $(p(z),\ zp'(z))\in D$;

(b) $\mathrm{Re}\,\Psi(p(z),\ zp'(z))>0, \quad z\in E.$

Napominjemo da $\mathcal{P}(\Psi)$ nije prazan skup, jer za sve $\Psi\in\Psi$ je tačno da $p(z) = 1+p_1z\in\mathcal{P}(\Psi)$ za dovoljno malo p_1, koje zavisi od $\underline{\Psi}$ (to sledi iz neprekidnosti funkcije $\underline{\Psi}$ i uslova b) iz definicije 3.1).

U vezi sa definisanim klasama funkcija, značajan je sledeći rezultat S.Millera [32].

TEOREMA B_1.

Za svaku funkciju $\Psi\in\Psi$ važi $\mathcal{P}(\Psi)\subset\mathcal{P}$.

Drugim rečima, teorema B_1 tvrdi da ako $\Psi\in\Psi$, sa odgovarajućim domenom D, i ako $(p(z),zp'(z))\in D$, tada je tačna implikacija

(1) $\mathrm{Re}\,\Psi(p(z),zp'(z))>0 \Rightarrow \mathrm{Re}\,p(z)>0, \quad z\in E.$

Kako $\Phi\subset\Psi$, to je tačna i sledeća implikacija

$$(\text{I}') \qquad \Psi \in \Phi \Rightarrow \mathcal{P}(\Psi) \subset \mathcal{P}.$$

U osnovi dokaza teoreme B_1 leži sledeća lema.

LEMA (I.S.JACK, [18]). Neka je $\underline{f}$ regularna u E i $f(o)=0$. Ako $|f|$ dostiže maksimalnu vrednost na krugu $|z|=r$ u tački z_1, tada je

$$z_1 f'(z_1) = kf(z_1) \ ,$$

gde je $k \geq 1$ realan broj.

Ako se teorema B_1 primeni na razne $\Psi \in \Psi$ dobićemo različite uslove za pripadnost funkcije $\underline{p}$ klasi $\mathcal{P}$ u obliku diferencijalnih nejednakosti. Ona ima mnoge primene kod ograničenih funkcija, kod harmonijskih funkcija i u teoriji jednolisnih funkcija ([23], [33]). Ako,recimo, stavimo $p(z) = z\frac{f'(z)}{f(z)}$ u prethodnoj teoremi, videćemo iz uslova (1) da svaka $\Psi \in \Psi$ generiše potklasu zvezdolikih funkcija, ili, pak, ako je $p(z) = \dfrac{f'(z)}{g'(z)}$, gde $g \in K$, potklasu blisko-konveksnih funkcija.

U [33] su data uopštenja teoreme B_1 u smislu da se odrede uslovi koje treba da zadovolji funkcija $h(r,s,t)$ tako da $\operatorname{Re} h(p(z), zp'(z), z^2p''(z)) > 0$ povlači da je $\operatorname{Re} p(z) > 0$, $z \in E$. Zatim su date i primene u teoriji jednolisnih funkcija, koje su u vezi sa zvezdolikim i konveksnim funkcijama. Izdvojićemo sledeću teoremu koju ćemo primeniti u narednom poglavlju. Kao što je rečeno u 1.4 postoje kriterijumi koji su u vezi sa Schwarz-ovim izvodom

$$\{f,z\} = \left(\frac{f''(z)}{f'(z)}\right)' - \frac{1}{2}\left(\frac{f''(z)}{f'(z)}\right)^2$$

i jednolisnošću. Teorema B_2 odnosi se na $\{f,z\}$ i konveksnost funkcije $\underline{f}$ (pa, dakle, i jednolisnost).

TEOREMA B_1.

Neka je $u = u_1 + iu_2$, $v = v_1 + iv_2$ i neka je $\rho(u,v)$ kompleksna funkcija koja zadovoljava uslove:

(a) $\rho(u,v)$ je neprekidna u nekom domenu $D \subset \mathbb{C} \times \mathbb{C}$;

(b) $(1,0) \in D$ i $\operatorname{Re}\rho(1,0) > 0$;

(c) $\operatorname{Re}\rho(u_2 i, v_1) \leq 0$ kada je $v_1 \leq 0$.

Neka je $f \in A$, neka je $f'(z) \neq 0$, $z \in E$ i neka

$$\left(\frac{zf''(z)}{f'(z)} + 1,\ z^2\{f,z\}\right) \in D \quad \text{kada} \quad z \in E.$$

Ako je

$$\operatorname{Re}\rho\left(z\,\frac{f''(z)}{f'(z)} + 1,\ z^2\{f,z\}\right) > 0, \quad z \in E,$$

tada je

$$\operatorname{Re}\left(z\,\frac{f''(z)}{f'(z)} + 1\right) > 0, \quad z \in E,$$

tj. $f \in K$.

U poglavljima 3.1 i 3.2 primenjivaćemo prethodno izloženo na razne probleme u teoriji jednolisnih funkcija.

3.2. UOPŠTENJA NEKIH REZULTATA U KLASAMA S^*, $B(\alpha)$ I $B_1(\alpha)$

U svom radu [55] R.Singh je dao rezultate koji se odnose na klase funkcija S^*, $B(\alpha)$ i $B_1(\alpha)$ i gde je, uglavnom, α iz skupa prirodnih brojeva. U ovom poglavlju biće pokazano da se mnogi od tih rezultata mogu generalisati na proizvoljno $\alpha > 0$. Pri tome je korišćena tehnika navedena na početku glave III. Na kraju poglavlja dajemo dokaz uopštenja rezultata Bernardi-a [6] i Libera [24], korišćenjem rezultata teoreme B_2.

TEOREMA 3.1.

Ako $f \in S^*$, tada i funkcija F definisana sa

$$F(z)^\alpha = \frac{\alpha+1}{z} \int_0^z f(t)^\alpha dt, \quad \alpha > 0, \tag{2}$$

takodje pripada klasi S^*.

Dokaz. Prema definiciji klase S* (videti 1.5), trebalo bi dokazati da je tačna implikacija

$$\operatorname{Re}\frac{zf'(z)}{f(z)}>0 \Rightarrow \operatorname{Re}\frac{zF'(z)}{F(z)}>0\ , \quad z\in E.$$

Iz (2) imamo $(zF(z)^{\alpha})'=(\alpha+1)f(z)^{\alpha}$, odakle je

$$F(z)^{\alpha-1}[F(z)+\alpha zF'(z)] = (\alpha+1)f(z)^{\alpha}$$

Ako obe strane poslednje jednakosti logaritmujemo, diferenciramo, a zatim pomnožimo sa $\underline{z}$, dobićemo

$$(3)\qquad (\alpha-1)z\,\frac{F'(z)}{F(z)}+\frac{(\alpha+1)\ \frac{zF'(z)}{F(z)}+\alpha\ \frac{z^2F''(z)}{F'(z)}}{1+\alpha\ \frac{zF'(z)}{F(z)}}=\alpha\,\frac{zf'(z)}{f(z)}\ .$$

Ako uvedemo smenu $\frac{zF'(z)}{F(z)}=p(z)$, tada je $p(o)=1$ i $zF'(z) = p(z)F(z)$, pa bi se diferenciranjem dobilo

$$zF''(z)=p'(z)F(z)+(p(z)-1)F'(z)\ ,$$

odakle je

$$(4)\qquad \frac{z^2F''(z)}{F'(z)} = zp'(z)+(p(z)-1)p(z).$$

Zamenom vrednosti $\frac{z^2F''(z)}{F'(z)}$ iz (4) u (3), dobijamo

$$p(z)+\frac{zp'(z)}{1+\alpha p(z)}=\frac{zf'(z)}{f(z)}\ ,$$

a odavde, zbog $f\in S^*$, imamo

$$(5)\qquad \operatorname{Re}[p(z)+\frac{zp'(z)}{1+p(z)}]>0,\quad z\in E.$$

Stavimo $u=p$ i $v=zp'$ i formirajmo odgovarajuću funkciju

$$\Psi(u,v) = u + \frac{v}{1+\alpha u}, \quad \alpha > 0.$$

Pri tome se lako pokazuje da $\Psi: D \to \mathbb{C}$, gde je $D = (\mathbb{C}\setminus\{-\frac{1}{\alpha}\}) \times \mathbb{C}$, da je $\Psi(u,v)$ neprekidna u D, da $(1,o) \in D$, da je $\mathrm{Re}\Psi(1,o) = 1 > 0$, dok je

$$\mathrm{Re}\Psi(u_2 i, v_1) = \frac{v_1}{1+\alpha^2 u_2^2} \leqslant 0 \quad \text{za } v_1 \leqslant 0.$$

Time su ispunjeni uslovi (a), (b) i (c′) iz definicije 3.1, te $\Psi \in \Phi$, odakle iz teoreme B_1 i (5), imamo da važi

$$\mathrm{Re}\,p(z) > 0, \; z \in E, \text{ tj. } \mathrm{Re}\frac{zF'(z)}{F(z)} > 0, \quad z \in E.$$

Dakle, $F \in S^*$.

<u>Napomena 3.1.</u> Za $\alpha \in N$ (N-skup prirodnih brojeva) dobija se rezultat R.Sing-a [55].

Može se dokazati i generalniji rezultat nego što je dat u teoremi 3.1.

TEOREMA 3.1′.

Ako su α, $c > 0$ i $f \in S^*$, tada i funkcija F definisana pomoću

$$(6) \qquad F(z)^\alpha = \frac{\alpha+c}{z^c}\int_0^z t^{c-1} f(t)^\alpha dt$$

takodje pripada S^*.

Dokaz. Ako bi se primenio postupak kao u teoremi 3.1 i stavilo $\frac{zF'(z)}{F(z)} = p(z)$, umesto relacije (5) dobila bi se relacija

$$\mathrm{Re}\left[p(z) + \frac{zp'(z)}{c+\alpha p(z)}\right] > 0, \quad z \in E,$$

dok bi odgovarajuća funkcija $\Psi(u,v)=u+\frac{v}{c+\alpha u}$ zadovoljava uslove teoreme B_1, pa bi iz iste teoreme i (7) dobili da je $\operatorname{Re} p(z)>0$, $z \in E$, tj. $\operatorname{Re}\frac{zF'(z)}{F(z)}>0$, $z \in E$, ili $F \in S^*$.

Jasno je da se zna $c=1$ dobija tvrdjenje teoreme 3.1.

Napomena 3.2. Za $\alpha \in N$, iz tvrdjenja teoreme 3.1. dobija se rezultat Singh-a dat u [55].

Napomena 3.3. Koristeći rezultat teoreme 3.1 i dokaz odgovarajućeg rezultata iz [55], dobija se sledeći rezultat:

TEOREMA 3.2.

Ako $F \in S^*$ i ako je $\alpha>0$, tada je funkcija $\underline{f}$ definisana pomoću (2) zvezdolika u

$$|z|<r_0(\alpha)=[\alpha+1-\sqrt{2(\alpha+1)}]/(\alpha-1)$$

(za $\alpha=1$ je $|z|<r_0(1)=\frac{1}{2}$). Ovaj rezultat je najbolji mogući.

Za drugi deo tvrdjenja teoreme treba uzeti funkciju $\underline{f}$ koja je odgovarajuća funkciji $F(z)=\frac{z}{(1+z)^2} \in S^*$, a to je funkcija

$$f(z)=\frac{z}{(1+z)^2}\left[\frac{\alpha+1-(\alpha-1)z}{(\alpha+1)(1+z)}\right]^{1/\alpha}$$

(kao u [55]).

Iz teoreme 3.1' sledi i generalniji rezultat nego što je u teoremi 3.2.

TEOREMA 3.2'.

Ako su α, $c>0$ i $F \in S^*$, tada je funkcija $\underline{f}$ definisana pomoću (2) zvezdolika u krugu

$$|z|<r_0(\alpha,c)=[-(\alpha+1)+\sqrt{c^2+2\alpha+1}]/(c-\alpha).$$

Taj rezultat je najbolji moguć.

Za $\underline{\alpha}$ i $\underline{c}$ iz skupa N dobija se rezultat iz [55].

TEOREMA 3.3.

Ako $f \in B(\alpha)$, $\alpha > 0$, tada i funkcija F definisana pomoću

$$(2) \qquad F(z)^{\alpha} = \frac{\alpha+1}{z} \int_0^z f(t)^{\alpha} dt$$

takodje pripada $B(\alpha)$.

Dokaz. Prema definiciji klase $B(\alpha)$ (videti 1.5), ako $f \in B(\alpha)$, $\alpha > 0$, tada postoji funkcija $g \in S^*$ takva da je ispunjen uslov

$$\operatorname{Re} \frac{zf'(z)f(z)^{\alpha-1}}{g(z)^{\alpha}} > 0 , \quad z \in E,$$

koji se može pisati i u obliku

$$(8) \qquad \operatorname{Re} \frac{zf'(z)}{f(z)} \left[\frac{f(z)}{g(z)}\right]^{\alpha} > 0, \quad z \in E.$$

Za funkciju $g \in S^*$, prema teoremi 3.1, imamo da i funkcija $G(z)$ definisana sa

$$(9) \qquad G(z)^{\alpha} = \frac{\alpha+1}{z} \int_0^z g(t)^{\alpha} dt$$

takodje pripada klasi S^*. Za tako definisane funkcije F i G dokažimo da važi relacija

$$(10) \qquad \operatorname{Re} \frac{zF'(z)}{F(z)} \left[\frac{F(z)}{G(z)}\right]^{\alpha} > 0, \quad z \in E,$$

tj. da $F \in B(\alpha)$. U tom cilju uvedimo smenu

$$(11) \qquad \frac{zF'(z)}{F(z)}\left[\frac{F(z)}{G(z)}\right]^{\alpha} = p(z).$$

Iz relacija (2) i (9), diferenciranjem dobijamo

$$(zF(z)^{\alpha})' = (\alpha+1)f^{\alpha}(z) \qquad \text{i}$$

$$(zG(z)^{\alpha})' = (\alpha+1)g^{\alpha}(z) \quad ,$$

odakle je

$$(12) \qquad \frac{1+\alpha\,\dfrac{zF'(z)}{F(z)}}{1+\alpha\,\dfrac{zG'(z)}{G(z)}}\left[\frac{F(z)}{G(z)}\right]^{\alpha} = \left[\frac{f(z)}{g(z)}\right]^{\alpha} .$$

Iz relacije $(zF'(z)^{\alpha})' = (\alpha+1)f^{\alpha}(z)$ se diferenciranjem, logaritmovanjem, pa ponovnim diferenciranjem i manjim transformacijama (kao što je množenje obeju strana sa $\underline{z}$, deoba brojioca i imenioca sa $F(z)$, itd.), dobija da je

$$(\alpha-1)\,\frac{zF'(z)}{F(z)} + \frac{(\alpha+1)\,\dfrac{zF'(z)}{F(z)} + \alpha\,\dfrac{zF''(z)}{F'(z)}\cdot\dfrac{zF'(z)}{F(z)}}{1+\alpha\,\dfrac{zF'(z)}{F(z)}} = (\alpha+1)\,\frac{zf'(z)}{f)z)} \quad ,$$

odakle je

$$(13) \qquad \frac{zF'(z)}{F(z)}\cdot\frac{2+(\alpha-1)\,\dfrac{zF'(z)}{F(z)} + \dfrac{zF''(z)}{F'(z)}}{1+\alpha\,\dfrac{zF'(z)}{F(z)}} = (\alpha+1)\,\frac{zf'(z)}{f(z)} .$$

Množenjem odgovarajućih strana relacija (12) i (13), imamo

$$(14) \qquad \frac{zF'(z)}{F(z)}\cdot\left[\frac{F(z)}{G(z)}\right]^{\alpha}\,\frac{2+(\alpha-1)\,\dfrac{zF'(z)}{F(z)} + \dfrac{zF''(z)}{F'(z)}}{1+\alpha\,\dfrac{zG'(z)}{G(z)}} =$$

$$= (\alpha+1)\,\frac{zf'(z)}{f(z)}\left[\frac{f(z)}{g(z)}\right]^{\alpha} .$$

Logaritmovanjem i diferenciranjem relacije (11), dobija se

$$1+\frac{zF''(z)}{F'(z)}+(\alpha-1)\frac{zF'(z)}{F(z)}-\alpha\frac{zG'(z)}{G(z)}=\frac{zp'(z)}{p(z)},$$

a odavde je

$$2+(\alpha-1)\frac{zF'(z)}{F(z)}+\frac{zF''(z)}{F'(z)}=1+\alpha\frac{zG'(z)}{G(z)}+\frac{zp'(z)}{p(z)}.$$

Zamenom poslednje vrednosti u relaciji (14), imamo

$$(15)\qquad p(z)+\frac{1}{1+\alpha\frac{zG'(z)}{G(z)}}zp'(z)=(\alpha+1)\frac{zf'(z)}{f(z)}\left[\frac{f(z)}{g(z)}\right]^{\alpha}.$$

Sada, zbog $f\in B(\alpha)$ i uslova (8), iz (15) imamo da je ispunjena nejednakost

$$(16)\qquad \operatorname{Re}\left[p(z)+\frac{1}{1+\alpha\frac{zG'(z)}{G(z)}}zp'(z)\right]>0,\qquad z\in E.$$

Uočimo funkciju $\Psi(u,v)=u+av$, gde $a\in\mathbb{C}$ i $\operatorname{Re} a>0$. Tada $\Psi:D\to\mathbb{C}$, gde je $D=\mathbb{C}\times\mathbb{C}$, Ψ je neprekidna na D, $(1,0)\in D$, $\operatorname{Re}\Psi(1,0)=1>0$, dok je

$$\operatorname{Re}\Psi(u_2 i,v_1)=(\operatorname{Re}a)v_1\leq 0\quad\text{za}\quad v_1\leq 0,$$

pa $\Psi(u,v)$ zadovoljava uslove (a), (b) i (c′) iz definicije 3.1, tj. $\Psi\in\Phi$.

Ako uvedemo smenu

$$a=a(z)=\frac{1}{1+\alpha\frac{zG'(z)}{G(z)}},$$

imaćemo da je, zbog $G\in S^*$ i $\alpha>0$, $\operatorname{Re}\frac{1}{a}>1$, te je $0<\operatorname{Re}a<1$. Sada iz relacije (16) i tvrdjenja teoreme B_1, imamo da je $\operatorname{Re}p(z)>0$, $z\in E$, pa je, s obzirom na (11), i relacija (10) dokazana, tj. $F\in B(\alpha)$.

Napomena 3.4. Za $\alpha \in N$ dobija se iz teoreme 3.3 rezultat R.Singh-a [55].

Napomena 3.5. Koristeći isti postupak kao kod prethodne teoreme, lako se dokazuje da važi generalniji rezultat.

TEOREMA 3.3.*

Ako su α i $c > 0$ i $f \in B(\alpha)$, tada i funkcija F, definisana pomoću (6), takodje pripada klasi $B(\alpha)$.

I ova teorema je generalizacija odgovarajuće teoreme iz [55]. Za $c = 1$, jasno, dobija se tvrdjenje teoreme 3.3.

Napomena 3.6. Sledeće teoreme su slične teoremama 3.2 i 3.2'. Naime, ovde pretpostavljamo da $F \in B(\alpha)$, $\alpha > 0$, a zatim nalazimo poluprečnik kruga u kome je funkcija $\underline{f}$ definisana pomoću (2), odnosno (6), takodje pripada klasi $B(\alpha)$.

TEOREMA 3.4.

Ako $F \in B(\alpha)$, $\alpha > 0$, tada $\underline{f}$ definisana sa (2) pripada $B(\alpha)$ za $|z| < r_0(\alpha)$, gde je veličina $r_0(\alpha)$ ista kao u teoremi 3.2. Taj rezultat je najbolji moguć.

Za $\alpha \in N$ dobija se rezultat R.Singha [55], a dokaz je, iz odredjene modifikacije, isti kao kod Livingstona [25].

Važi i generalnija forma prethodne teoreme.

TEOREMA 3.4'.

Ako je α, $c > 0$ i $F \in B(\alpha)$, tada funkcija $\underline{f}$ definisana pomoću (6) takodje pripada $B(\alpha)$ za $|z| < r_0(\alpha, c)$, gde je $r_0(\alpha, c)$ isti kao u teoremi 3.2'. Taj rezultat je najbolji moguć.

Na sličan način, važe i sledeće teoreme:

TEOREMA 3.5.

Ako $F \in B_1(\alpha)$, $\alpha > 0$, tada $\underline{f}$ definisana pomoću (2) pripada klasi $B_1(\alpha)$ za

$$|z| < r_1(\alpha) = \frac{\sqrt{\alpha^2+2\alpha+2} - 1}{\alpha+1} .$$

Taj rezultet je najbolji moguć.

Za α, $c \in N$ dobijaju se rezultati iz [55].

TEOREMA 3.6.

Ako $f \in B_1(\alpha)$, $\alpha > 0$, tada funkcija F_1 definisana sa $F_1(z)^{\alpha+\beta} = z^\beta f(z)^\alpha$ Pripada klasi $B_1(\alpha+\beta)$, za svako $\beta \geqslant 0$.

Dokaz. Iz definicije funkcije F_1, logaritmovanjem i diferenciranjem, dobijamo

$$(\alpha+\beta)\frac{F_1'(z)}{F_1(z)} = \beta\frac{1}{z} + \alpha\frac{f'(z)}{f(z)} ,$$

odakle je

$$\frac{(\alpha+\beta)\, zF_1'(z)}{F_1(z)^{1-(\alpha+\beta)} z^{\alpha+\beta}} = \beta\left[\frac{f(z)}{z}\right]^\alpha + \alpha\frac{zf'(z)}{f(z)^{1-\alpha} z^\alpha} ,$$

a odavde, zbog $f \in B_1(\alpha)$ i rezultata teoreme 3.9, imamo da $F_1 \in B_1(\alpha+\beta)$.

Za $\alpha \in N$ dobija se rezultat R.Singha [55].

Prethodno navedena uopštenja (teoreme 3.1-3.6) data su u [37].

Sledeća teorema je generalizacija rezultate Bernardi-a ([5], $\alpha = n$) i Libera ([24], $\alpha = 1$). N.Pascu je u [40] dokazao tu teoremu. Ovde dajemo drugi dokaz, oslanjajući se na teoremu B_2.

TEOREMA 3.7.

Ako $f \in K$ ($\underline{K}$ - skup konveksnih funkcija) to i funkcija

$$(17) \qquad g(z) = \frac{\alpha+1}{z^{\alpha}} \int_{0}^{z} t^{\alpha-1} f(t)\,dt$$

pripada klasi K za svako $\underline{\alpha}$ sa osobinom: $\mathrm{Re}\,\alpha > 0$.

Dokaz. Iz (17) sledi

$$(z^{\alpha} g(z))' = (\alpha+1) z^{\alpha-1} f(z) ,$$

odakle je

$$zg'(z) + \alpha g(z) = (\alpha+1) f(z) .$$

Diferenciranjem poslednje jednakosti, imamo

$$(18) \qquad (\alpha+1) g'(z) + zg''(z) = (\alpha+1) f'(z) \quad .$$

Ako jednakost (18) logaritmujemo,a zatim diferenciramo dobićemo

$$\frac{(\alpha+2) g''(z) + zg'''(z)}{(\alpha+1) g'(z) + zg''(z)} = \frac{f''(z)}{f'(z)} ,$$

ili

$$(19) \qquad \frac{(\alpha+2) z \dfrac{g''(z)}{g'(z)} + z^{2} \dfrac{g'''(z)}{g'(z)}}{(\alpha+1) + z \dfrac{g''(z)}{g'(z)}} = z \frac{f''(z)}{f'(z)} .$$

Posle odredjenih transformacija, iz (19) dobijamo

$$(20) \qquad 1 + \frac{z^{2}\{g,z\} + \frac{3}{2}\left(1+z \dfrac{g''(z)}{g'(z)}\right)^{2} + (\alpha-1)\left(1+z \dfrac{g''(z)}{g'(z)}\right) - \left(\alpha + \frac{1}{2}\right)}{\alpha + \left(1+z \dfrac{g''(z)}{g'(z)}\right)} =$$

$$= 1+z \frac{f''(z)}{f'(z)} ,$$

gde je

$$\{g,z\} = \left(\frac{g''(z)}{g'(z)}\right)' - \frac{1}{2}\left(\frac{g''(z)}{g'(z)}\right)^2 = \frac{g'''(z)}{g'(z)} - \frac{3}{2}\left(\frac{g''(z)}{g'(z)}\right)^2.$$

Kako je $f \in K \Rightarrow \operatorname{Re}\left(1+z\frac{f''(z)}{f'(z)}\right) > 0, \quad z \in E,$

to je, zbog (20)

$$\text{(21)} \qquad \operatorname{Re}\left\{\frac{z^2\{g,z\} + \frac{3}{2}\left(1+z\frac{g''(z)}{g'(z)}\right)^2 + \alpha\left(1+z\frac{g''(z)}{g'(z)}\right) - \frac{1}{2}}{\alpha + \left(1+z\frac{g''(z)}{g'(z)}\right)}\right\} > 0, \ z \in E.$$

Ako stavimo $u = 1+z\frac{g''(z)}{g'(z)}$, $v = z^2\{g,z\}$ i posmatramo funkciju

$$\rho(u,v) = \frac{v + \frac{3}{2}u^2 + \alpha u - \frac{1}{2}}{\alpha + u}$$

$$= \frac{1}{2}\left[-\alpha + 3u + \frac{\alpha^2 - 1}{\alpha + u} + \frac{2v}{\alpha + u}\right];$$

$\rho(u,v)$ je funkcija koja preslikava $D = (\mathbb{C}\setminus\{-\alpha\}) \times \mathbb{C}$ u $\mathbb{C}$, neprekidna je u D, $(1,0) \in D$, $\operatorname{Re}\rho(1,0) = 1 > 0$, dok je

$$\operatorname{Re}\rho(u_2 i, v_1) = \frac{v_1 \operatorname{Re}\alpha - \frac{1}{2}\operatorname{Re}\alpha\,(u_2^2 + 1)}{|\alpha + u_2 i|^2} \leqslant 0 \text{ za } v_1 \leqslant 0,$$

pa prema teoremi B_2 i iz (21) imamo da je

$$\operatorname{Re}\left(1 + z\frac{g''(z)}{g'(z)}\right) > 0, \quad z \in E,$$

tj. $g \in K$, čime je teorema dokazana.

Prethodna uopštenja ukazuju ne samo na mogućnosti odredjene tehnike, već i na činjenicu da se putem integrala nekih kombinacija jednolisnih funkcija (koje pripadaju odredjenim klasama) dobijaju nove jednolisne funkcije odredjene klase. Time se saznaje nešto više o prirodi samih funkcija.

3.3. OCENE REALNOG DELA FUNKCIJE $(\frac{f(z)}{z})^{\alpha}$ ZA NEKE KLASE JEDNOLISNIH FUNKCIJA

U ovom delu daju se ocene realnog dela funkcije $(\frac{f(z)}{z})^{\alpha}$, $\alpha \in R$, ili funkcije $\frac{f(z)}{z}$, za zvezdolike funkcije reda α, $\frac{1}{2} \leqslant \alpha < 1$, ili pak za funkcije klase $B_1(\alpha)$, $\alpha > 0$, (funkcije tipa Bazileviča). Neke procene su nove, druge su uopštenja već poznatih ocena ili njihova poboljšanja.

Napomenimo da iz teoreme 1.22 imamo da je za konveksne funkcije $\operatorname{Re} \frac{f(z)}{z} > \frac{1}{2}$, $z \in E$, dok je u [51] pokazano da se zatvorenje konveksnog omotača skupa K sastoji od funkcija $f \in A$ za koje je $\operatorname{Re} \frac{f(z)}{z} > \frac{1}{2}$. Zbog toga je pitanje pomenutih ocena vrlo značajno.

TEOREMA 3.8.

Neka $f \in S^*(\alpha)$, $\frac{1}{2} \leqslant \alpha < 1$. Tada je

$$\operatorname{Re} \frac{f(z)}{z} > \frac{1}{3-2\alpha} .$$

Dokaz. Ako uvedemo zamenu

$$\frac{3-2\alpha}{2(1-\alpha)} \cdot \frac{f(z)}{z} - \frac{1}{2(1-\alpha)} = p(z) , \tag{22}$$

imaćemo da je funkcija $\underline{p}$ regularna u E i $p(o) = 1$. Iz (22) možemo izraziti $\underline{f}$, odakle, posle diferenciranja, imamo

$$f'(z) = \frac{1}{3-2\alpha} + \frac{2(1-\alpha)}{3-2\alpha} (zp'(z) + p(z)) . \tag{23}$$

Sada, iz (22) i (23), dobijamo da je

$$\frac{zf'(z)}{f(z)} - \alpha = 1-\alpha + \frac{2(1-\alpha)zp'(z)}{1+2(1-\alpha)p(z)} , \tag{24}$$

i pošto je $f \in S^*(\alpha) \Rightarrow \mathrm{Re}\,\frac{zf'(z)}{f(z)} > \alpha$, $z \in E$ (videti def. 2.1), to iz (24) sledi da je

$$(25) \qquad \mathrm{Re}\left[1-\alpha+\frac{2(1-\alpha)zp'(z)}{1+2(1-\alpha)p(z)}\right] > 0, \quad z \in E.$$

Ako posmatramo funkciju

$$\Psi(u,v) = 1-\alpha+\frac{2(1-\alpha)v}{1+2(1-\alpha)u}$$

(stavljeno je $u = p(z)$, $v = zp'(z)$), tada nije teško pokazati da funkcija $\Psi(u,v)$ zadovoljava uslove (a), (b) i (c) definicije 3.1, tj. da $\Psi \in \Psi$. Zaista, u ovom slučaju je $D = (\mathbb{C}\setminus\{-\frac{1}{2(1-\alpha)}\} \times \mathbb{C}$, a takodje je $\Psi(u,v)$ neprekidna u D.

Dalje, $(1,0) \in D$, $\mathrm{Re}\Psi(1,0) = 1-\alpha > 0$, dok za sve $(u_2 i, v_1) \in D$ i takve da je $v_1 \leqslant -\frac{1}{2}(1+u_2^2)$, imamo

$$\mathrm{Re}\Psi(u_2 i, v_1) = 1-\alpha+\mathrm{Re}\,\frac{2(1-\alpha)v_1}{1+2(1-\alpha)u_2 i}$$

$$= 1-\alpha+\frac{2(1-\alpha)v_1}{1+4(1-\alpha)^2 u_2^2}$$

$$\leqslant 1-\alpha+\frac{2(1-\alpha)[-\frac{1}{2}(1+u_2^2)]}{1+4(1-\alpha)^2 u_2^2}$$

$$= \frac{(1-\alpha)(1-2\alpha)(3-2\alpha)}{1+4(1-\alpha)^2 u_2^2}\,u_2^2 \leqslant 0\,.$$

Zbog toga, iz nejednakosti (25), primenjujući teoremu B_1, imamo da je $\mathrm{Re}\,p(z) > 0$, $z \in E$, što je, s obzirom na (23), ekvivalentno sa

$$\operatorname{Re} \frac{f(z)}{z} > \frac{1}{3-2\alpha} .$$

Napomena 3.7. Za $\alpha = \frac{1}{2}$, tj. za zvezdolike funkcije reda $\frac{1}{2}$, imamo $\operatorname{Re}\frac{f(z)}{z} > \frac{1}{2}$, što je dobro poznati rezultat (Marx, Strohhöcker [33], [43]).

TEOREMA 3.9.

Neka $f \in B_1(\alpha)$, gde je $\alpha > 0$. tada je

$$\operatorname{Re} \left(\frac{f(z)}{z}\right)^{\alpha} > 0, \quad z \in E.$$

Dokaz. Ako stavimo da je $\left(\frac{f(z)}{z}\right)^{\alpha} = p(z)$, tada je funkcija p regularna u E, $p(o) = 1$, dok se logaritmovanjem i diferenciranjem dobija

$$\frac{1}{\alpha}\, zp'(z) + p(z) = \frac{zf'(z)}{f(z)} \left[\frac{f(z)}{z}\right]^{\alpha} ,$$

odakle je, zbog $f \in B_1(\alpha) \Rightarrow \operatorname{Re} \frac{zf'(z)}{f(z)}\left[\frac{f(z)}{z}\right]^{\alpha} > 0$, $z \in E$ (videti (6) iz 1.5).

$$(26) \qquad \operatorname{Re}\left[\frac{1}{\alpha}\, zp'(z) + p(z)\right] > 0, \quad z \in E.$$

Uočimo funkciju $\Psi(u,v) = \frac{1}{\alpha}\, v+u$ (stavljeno je $u = p(z)$, $v = zp'(z)$). Lako se proverava da $\Psi: \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, da je Ψ neprekidna u $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$ i da je $\operatorname{Re}\Psi(1,o) = 1 > 0$, dok je

$$\operatorname{Re}\Psi(u_2 i, v_1) = \frac{1}{\alpha}\, v_1 \leqslant 0, \text{ za } v_1 \leqslant 0 ,$$

pa je, zbog (26) i tvrdjenja teoreme B_1, tačna nejednakost

$$\operatorname{Re} p(z) > 0, \ z \in E, \ \text{tj.} \quad \operatorname{Re}\left(\frac{f(z)}{z}\right)^{\alpha} > 0, \ z \in E.$$

Napomena 3.8. Za $\alpha \in N$ dobija se rezultat R.Sing-a [55]. Može se pokazati da za $0<\alpha\leq\frac{1}{2}$ važi precizniji rezultat.

TEOREMA 3.10.

Ako je $0<\alpha\leq\frac{1}{2}$ i $f\in B_1(\alpha)$, tada je

$$\mathrm{Re}\left(\frac{f(z)}{z}\right)^{\alpha}>\frac{1}{2}, \quad z\in E.$$

Dokaz. Ustvari, trebalo bi dokazati da je tačna nejednakost

(27) $$\mathrm{Re}\left[2\left(\frac{f(z)}{z}\right)^{\alpha}-1\right]>0, \quad z\in E.$$

Ako uvodimo smenu

$$2\left(\frac{f(z)}{z}\right)^{\alpha}-1=p(z),$$

tada je $p(z)$ regularna u E i $p(o)=1$, kao i

$$\left(\frac{f(z)}{z}\right)^{\alpha}=\frac{p(z)+1}{2}.$$

Logaritmovanjem i diferenciranjem poslednjeg izraza, dobija se odgovarajuća relacija kao u teoremi 3.8:

(28) $$\mathrm{Re}\left[\frac{1}{\alpha}zp'(z)+p(z)+1\right]>0.$$

Ako, sada uočimo funkciju

$$\Psi(u,v)=\frac{1}{\alpha}v+u+1, \quad 0<\alpha\leq\frac{1}{2},$$

lako zaključujemo da je neprekidna na $\mathbb{C}\times\mathbb{C}$, da je $\mathrm{Re}\Psi(1,o)=2>0$, dok je za $0<\alpha\leq\frac{1}{2}$ i $v_1\leq-\frac{1}{2}(1+u_2^2)$:

$$\operatorname{Re}\Psi(u_2 i, v_1) = \frac{1}{\alpha}v_1 + 1 \leq -\frac{1}{2\alpha}(1+u_2^2)+1 = 1-\frac{1}{2\alpha}-\frac{1}{2\alpha}u_2^2 \leq 0,$$

te, zbog (28) i teoreme B_1, važi $\operatorname{Re}p(z)>0$, $z\in E$, tj. i nejednakost (27).

Za klasu $B_1(1)$, tj. za funkcije $f\in A$ za koje je $\operatorname{Re}f'(z)>0$, $z\in E$, važi precizniji rezultat nego što se dobija iz teoreme 3.9 za $\alpha=1$.

TEOREMA 3.11.

Tačna je sledeća implikacija

$$f\in B_1(1) \Rightarrow \operatorname{Re}\frac{f(z)}{z}>\frac{1}{3}, \quad z\in E.$$

Dokaz. Ako uvedemo smenu

$$(29) \qquad \frac{3}{2}\frac{f(z)}{z} - \frac{1}{2} = p(z),$$

tada je funkcija $\underline{p}$ regularna u E i $p(o)=1$. Iz relacije (29) možemo izraziti $\underline{f}$, pa, posle diferenciranja, imamo

$$f'(z) = \frac{1}{3}+\frac{2}{3}\,(p(z)+zp'(z)),$$

a kako je $\operatorname{Re}f'(z)>0$, $z\in E$, to je

$$(30) \qquad \operatorname{Re}\left[\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\,(p(z)+zp'(z))\right]>0, \quad z\in E.$$

Lako se pokazuje da odgovarajuća funkcija

$$\Psi(u,v) = \frac{1}{3}+\frac{2}{3}\,(u+v)$$

zadovoljava uslove (a) i (b) definicije 3.1 i da je

$$\mathrm{Re}\Psi(u_2 i, v_1) = 1+2v_1 \leqslant 1+2[-\frac{1}{2}(1+u_2^2)] = -u_2^2 \leqslant 0,$$

za sve $(u_2 i, v_1)$ za koje je $v_1 \leqslant -\frac{1}{2}(1+u_2^2)$. Otuda, primenjujući teoremu B_1, iz (30) dobijamo da je $\mathrm{Re}\,p(z) > 0$, $z \in E$, što, zbog (29), konačno daje

$$\mathrm{Re}\,\frac{f(z)}{z} > \frac{1}{3}\,,\quad z \in E.$$

Slično kao u teoremi 3.11, i za klasu $B_1(2)$, tj. za koju je $\mathrm{Re}\,\frac{f(z)f'(z)}{z} > 0$, $z \in E$ (videti 1.5) imamo sledeće tvrdjenje.

TEOREMA 3.12.

Neka $f \in B_1(2)$, tada je

$$\mathrm{Re}\,\frac{f(z)}{z} > \frac{1}{3}\,,\quad z \in E.$$

Dokaz. Ako izaberemo smenu kao u (29), i sledimo isti postupak kao kod dokaza teoreme 3.11, dobićemo da je

$$\frac{f(z)f'(z)}{z} = \frac{1}{9}\,(2p(z)+1)^2 + \frac{2}{9}\,(2p(z)+1)zp'(z). \tag{31}$$

Kako je za funkcije $f \in B_1(2)$ ispunjeno $\mathrm{Re}\,\frac{f(z)f'(z)}{z} > 0$, $z \in E$, to iz (31) imamo da je

$$\mathrm{Re}\,[\frac{1}{9}(2p(z)+1)^2 + \frac{2}{9}(2p(z)+1)zp'(z)] > 0,\quad z \in E. \tag{32}$$

U ovom slučaju odgovarajuća funkcija ima oblik

$$\Psi(u,v) = \frac{1}{9}\,(2u+1)^2 + \frac{2}{9}\,(2u+1)v.$$

Neposredno se proverava da $\Psi(u,v)$ zadovoljava uslove (a) i (b) def. 3.1, dok za sve $(u_2 i, v_1)$ za koje je $v_1 \leqslant -\frac{1}{2}\,(1+u_2^2)$, imamo

$$\mathrm{Re}\Psi(u_2 i, v_1) = -4u_2^2+1+2v_1 \leqslant 4u_2^2+1+2[-\frac{1}{2}(1+u_2^2)] = 5u_2^2 \leqslant 0.$$

Dakle, iz teoreme B_1 i (32) dobijamo da je $\mathrm{Re}p(z)>0$, $z \in E$, što je, zbog (29) ekivalentno sa

$$\mathrm{Re}\,\frac{f(z)}{z} > \frac{1}{3}\,, \quad z \in E,$$

čime je dokaz završen.

Napomenimo da su rezultati ovog poglavlja dati u [37] i [39].

Interesantno bi bilo proceniti realni deo funkcije $(\frac{f(z)}{z})^{\alpha}$ i za neke druge klase jednolisnih funkcija, kao i videti da li su procene koje su ovde date najbolje moguće. Ostaje takodje otvoreno pitanje procene realnog dela funkcije $\frac{f(z)}{z}$, gde $f \in B(\alpha)$ $(\alpha \neq 1,\ \alpha \neq 2)$.

L I T E R A T U R A

[1] L.V.Ahlfors, Complex analysis, International student edition, McGraw-Hill Kogakusha, Ltd, 1966.

[2] L.V.Ahlfors, Conformal invariants: Topics in geometric function theory, McGraw-Hill Book Comp, New York, 1973.

[3] И.Е.Базилевич, Об одном случае интегрируемости в квадратурах уравнения Лёвнера-Куфарева, Мат.Сборник, 37 (79) No 3, 1955.

[4] R.Barnard, C.Kellog, Applications of convolution operators to problems in univalent function theory, Michigan Math. J. 27, 1980, 81-94.

[5] S.Bernardi, Special classes of subordinate functions, Duke Math. J. 33, 1966, 55-67.

[6] S.Bernardi, Convex and starlike univalent functions, Trans. Amer. Math. Soc. 135, 1969, 428-446.

[7] A.Bielecki, Z.Lewandowski, Sur un théoreme concernant les fonctions univalents linéarement accessibles de M.Biernacki, Ann. Polon. Math. 12, 1962, 61-63.

[8] D.Brannan, W.Kirwan, The growth of the maximum modulus of univalent functions, Duke Math. J. 38, 1971.

[9] L.Brickman, Φ-like analytic functions, I, Bull. Amer. Math. Soc. 79, 1973, 555-558.

[10] Дж.Дженкинс, Однолистные функции и конформные отображения, Издательство инострaнной литературы, Москва, 1962. (превод са енглеског)

[11] P.L.Duren, Subordination, Complex analysis, Kentucky 1976, Springer-Verlag,..., 1977.

[12] P.L.Duren, Theory of H^p spaces, Academic Press, New York, 1970.

[13] P.Eenigenburg, F.Keogh, The Hardy class of some univalent functions and their devivatives, Michigan Math. J. 17, 1970, 335-346.

[14] P.J.Eenigenburg,..., On a subclass of Bazilevič functions, Proc. Amer. Math. Soc. 45, No 1, 1974.

[15] C.FitzGerald, Quadratic inequalities and coefficient estimates for schlicht functions, Arch. Rational Mech. Anal. 46, 1972, 356-368.

[16] Г.М.Голузин, Геометрическая теория функций комплексного переменного, "Наука", Москва, 1977.

[17] W.Hayman, Multivalent functions, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1958.

[18] I.S.Jack, Functions starlike and convex of order α, J.London Math. Soc. (2), 3, 1971, 469-474.

[19] W.Kaplan, Close-to-convex schlicht functions, Michigan Math. J. 1, 1952, 169-185.

[20] F.Keogh, S.S.Miller, On the coefficients of Bazilevič functions, Proc.Amer.Math.Soc. 30, No 3, 1971.

[21] F.Keogh, Some recent developments in the theory of univalent functions, Complex analysis, Kentucky 1976, Lecture Notes in Math. 599, Springer-Verlag,..., 1977.

[22] Н.А.Лебедев, Принцип площадей в теории однолистных функций, "Наука", Москва, 1975.

[23] Z.Levandowski, S.S.Miller, Zlotkiewitcz, Generaliting functions for some classes of univalent functions, Proc.Amer. Math. Soc. 56, 1976, 111-117.

[24] R.Libera, Some classes of regular univalent functions, Proc. Amer. Math. Soc. 16, 1965, 755-758.

[25] A.Livingston, On the radius of univalence of certain analytic functions, Proc. Amer. Math. Soc. 17, 1966. 353-357.

[26] R.R.London, D.Thomas, An area theorem for starlike functions, Proc. London Math. Soc. (3), 20, 1970, 734-748.

[27] R.R. London, On the growth of Bazilevič functions, Quart J. Math. Oxford (2), 33, 1982, 223-238.

[28] T.MacGregor, A subordination for convex functions of order α, J.London Math. Soc. (2), 9, 1975, 530-536.

[29] E.Merkes, D.J.Wright, On the univalence of a certain integral, Proc. Amer. Math. Soc. 27, No 1, 1971.

[30] S.S. Miller, The Hardy class of a Bazilevič functions and its derivative, Proc. Amer. Math. Soc. 30, No 1, 1971.

[31] S.S. Miller,..., Bazilevič functions and generalized convexity, Rev. kowm. Math. Pures et appl. tome XIX, No 2, 1974, 213-224.

[32] S.S. Miller, Differential inequalities and Caratheodory functions, Bull. of the Amer. Math. Soc. Vol 81, 1, 1975.

[33] S.S.Miller, P.T.Mocanu, Second order differential inequalities in the complex plane, Journal of mathematical analysis and appl. 65, 1978, 289-305.

[34] Z.Nehari, Conformal mapping, New York, 1952.

[35] M.Nunokawa, On Bazilevič and convex functions, Trans. Amer. Math. Soc. 143, 1969, 337-341.

[36] M.Obradović, Two applications of one Robertsons's result, Mat. vesnik 35(3), 1983, 283-287.

[37] M.Obradović, Uopštenja nekih rezultata u klasi jednolisnih funkcija, Mat.vesnik 35(4), 1983.

[38] M.Obradović, Some theorems on subordination by univalent functions, Mat.vesnik, u štampi.

[39] M.Obradović, Estimates of the real part of $\frac{f(z)}{z}$ for some classes of univalent functions, Mat.vesnik, u štampi.

[40] N.Pascu, Alpha-close-to-convex functions, Romanian-Finnish seminar on complex analysis, Lecture notes in math. 743, Springer-Verlag,..., 1979, 331-335.

[41] Chr.Pommerenke, Über die Subordination analytischer Functionen, J.Reine Angew. Math. 218, 165, 159-173.

[42] Chr.Pommeranke, On close-to-convex analytic functions, Trans. Amer. Math. Soc. 114, 1965, 176-186.

[43] Chr.Pommerenke, Univalent functions, Vandenhoeck & Rupreacht in Götingen, 1975.

[44] И.И.Привалов, Введение в теорию функций комплексного переменного, "Наука", Москва, 1977.

[45] M.O.Reade, On close-toconvex univalent functions, Michigan Math. J. 3, 1955. 59-62.

[46] M.S.Robertson, Applications of the subordination principle to univalent functions, Pacific J. Math. 11, 1961, 315-324.

[47] St.Ruscheweyh, A subordination theorem for Φ-like functions, J. London Math. Soc. (2), 13, 1976, 275-280.

[48] St. Ruseheweyh, T. Sheil-Small, Hadamard products of schlicht functions and Polya-Schoenberg Conjecture, Comm. Math. Helv. 48, 1973, 119-135.

[49] St.Ruscheweyh, New criteria for univalent functions, Proc. Amer. Math. Soc. 49, No 1, 1975.

[50] K.Sakaguchi, On a certain univalent mapping, J. Math. Soc. Japan, 11, No 1, 1959, 72-75.

[51] G.Schober, Univalent functions-selected topics, Springer-Verlag,..., 1975.

[52] T.Sheil-Small, On convex univalent functions, J. London Math. Soc. (2) 1, 1969, 483-492.

[53] T.Sheil-Small, On Bazilevič functions, Quart. J.Math. Oxford (2), 23, 1972, 135-142.

[54] H.Silverman, Univalent functions with negative coefficients, Proc. Amer. Math. Soc. 77, No 3, 1979.

[55] R.Singh, On Bazilevič functions, Proc. Amer. Math. Soc. 38, No 2, 1973.

[56] R.Singh, S.Singh, Integrals of certain univalent functions, Proc. Amer. Math. Soc. 77, No 3, 1979.

[57] S.Singh, R.Singh, Subordination by univalent functions, Proc. Amer. Math. Soc. 82, No 1, 1981, 39-47.

[58] D.R.Thomas, On starlike and close-to-convex univalent functions, J.London Math. Soc. 42, 1967, 427-435.

[59] D.R.Thomas, On Bazilevič functions, Trans. Amer. Math. Soc. 132, 1968. 353-361.

[60] H.Wilf, Subordinating factor sequences for convex maps of the unit circle, Proc. Amer. Math. Soc. 12, 1961, 689-693.

[61] J.Zamorski, On Bazilevič schlicht functions, Ann. Polon. Math. 12, 1962, 83-90.