TRIGONOMETRIJA

sa elementima

SFERNE TRIGONOMETRIJE

za gimnazije realke

Karljiković

BEOGRAD

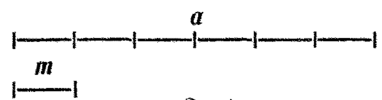
1935

УВОД

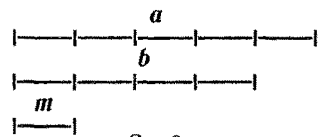
§ 1. **Размера двеју дужи.** Под *мером* једне дужи разумемо другу дуж која се садржава у првој два или више пута без остатка. Тако, дуж m (сл. 1) је мера дужи a, пошто се у a потпуно садржава 6 пута.

Под *заједничком мером* двеју дужи разумемо трећу дуж која се потпуно садржава у првој и другој дужи. Тако, дуж m (сл. 2) је заједничка мера дужи a и b, јер се она потпуно садржава у дужи a 5 пута, а у дужи b 4 пута.

Под *мерним бројевима* двеју дужи разумемо бројеве који нам показују колико се пута заједничка мера тих дужи



Сл. 1



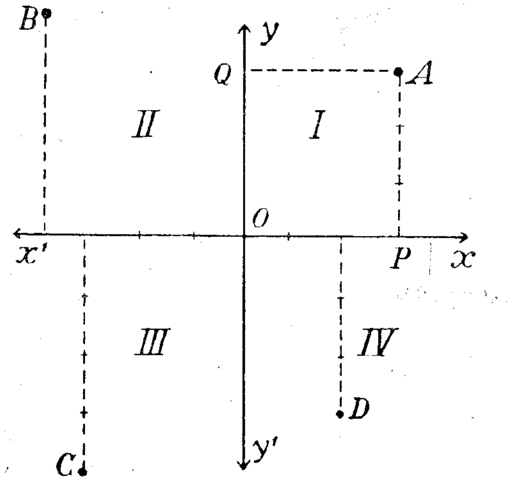
Сл. 2

садржава у једној, а колико у другој дужи. Тако, код сл. 2 мерни је број дужи a 5, а дужи b 4. *Под размером двеју дужи разумемо размеру њихових мерних бројева.* Размера дужи a и b (сл. 2) је 5:4.

Код праволиниских су слика величине страна (дијагонала, висина) дате у метрима, десиметрима, сантиметрима, милиметрима, те су: m, dm, cm и mm њихове заједничке мере, а бројне вредности страна (дијагонала, висина) јесу њихови мерни бројеви. Како су стране (дијагонале, висине) праволиниских слика дужи, то под размером двеју страна (дијагонала, висина; тетива и пречника код *криволиниских* слика) разумемо размеру њихових бројних вредности.

§ 2. **Правоугли координатни систем.** Правоугли координатни систем чине две праве сталног правца, које стоје нормално једна на другој. Она права која обично заузима хоризонталан положај, зове се *апсцисна осовина* и означава се са XX′, а права што има нормалан положај према апсцисној осовини, зове се *ординатна осовина* и означава се са УУ′. Њихов пресек О (сл. 3) зове се *координатни почетак.* Овај систем дели раван на 4 једнака дела, који се зову *квадрантима.* Као први сматра се ХОУ, као други УОХ′, трећи Х′ОУ′ и четврти У′ОХ. Мерни број отстојања ма које тачке у равни до ординатне осовине зове се *апсциса* те тачке, а мерни број њеног отстојања до апсцисне осовине *ордината.* Тако, на сл. 3 AQ или OP је апсциса, а AP ордината тачке A. Обично се апсциса означава са x а ордината са y. Апсциса и ордината неке тачке једним се именом зову *координатама* те тачке.

Положај једне тачке у равни одређен је ако су познате њене координате. Израз (x, y) претставља тачку чија је апсциса x а ордината y. Тако, (3, 5) претставља тачку чија је апсциса 3 а ордината 5. Тачка A на сл. 3 има координате (3, 3). Да бисмо одредили тачку чије су координате познате, треба најпре да пренесемо од координатног почетка њену апсцису на апсцисну осовину, а затим у крајњој тачки пренете апсцисе подижемо нормалу, на коју преносимо ординату дате тачке. Крајња тачка ординатина претставља нам тражену тачку. Међутим, у свакоме квадранту постоји по једна тачка која има истоветне координате као друге три тачке у осталим квадрантима. Стога, ако знамо само апсолутне вредности координата једне тачке, нисмо у могућности да прецизно одредимо у коме се баш квадранту налази дотична тачка. Да би се избегла забуна, координате тачака снабдевене су знацима „+“ и „—“. Утврђена је ова норма: *Све тачке изнад апсцисне осовине имају ординате позитивне а испод ње негативне, све тачке на десној страни ординатне осовине имају апсцисе позитивне а на*



Сл. 3

левој негативне. Према овоме тачке I квадранта имају обе координате позитивне, II имају ординате позитивне а апсцисе негативне, III имају обе координате негативне, а IV имају апсцисе позитивне а ординате негативне. Тако, тачка A (3, 3) налази се у I квадранту, тачка B (— 4,4) у II, тачка C (— 3, — 4) у III, а тачка D (2,—3) у IV. Све тачке на апсцисној осовини имају ординате = 0, а све тачке на ординатној осовини имају апсцисе = 0. Стога, координате координатног почетка јесу (0,0); тачка (5,0) налази се на десној страни апсцисне осовине, тачка (— 3,0) на њеној левој страни; тачка (0,6) на позитивној страни ординатне осовине; (0, — 4) на њеној доњој страни.

Отстојање неке тачке до координатног почетка зове се *радиус вектор,* или укратко *радиус,* а означава се обично са r.

Координате ма које тачке у равни и њен радиус дају правоугли троугао, у коме су координате катете а радиус хипотенуза. Ако радиус узмемо за јединицу, јасно је да ће ма која координата, као катета, имати вредност мању од јединице.

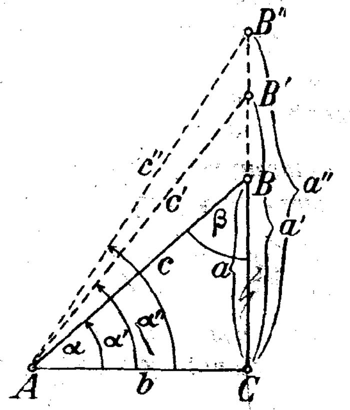
§ 3. О функцијама уопште. Ако две променљиве количине стоје у таквој вези да се мењањем вредности једне количине мења вредност и друге, онда се каже да је друга количина *функција* прве. Тако у једначини

$$y - 4x = 5$$

променљива y је функција променљиве x, јер вредност за y зависи од вредности за x. За x = 0, 1, —1, 2, —2, 3, —3,... имамо y = 5, 9, 1, 13, —3, 17, —7... Обим круга је функција полупречника, јер увећавањем полупречника увећава се и обим. Тако исто запремина лопте је функција полупречника те лопте. Код једнаког кретања пут s се сматра као функција брзине c за једно одређено време, јер је пут већи кад је брзина већа. Пут s се сматра и као функција времена t. Ширење тела се сматра као функција топлоте итд. Веза између функције и оне друге променљиве количине изражена је једном једначином. Она променљива количина којој ми дајемо различите вредности, зове се *независно - променљива,* а количина чија вредност зависи од вредности те *незазисно-променљиве,* зове се *зависно-променљива* или *функција* оне прве. Ако је дата веза између двеју променљивих количина, у теорији је свеједно коју ћемо од тих количина узети за функцију, а коју за независно-променљиву. Међутим, у пракси за функцију узимамо ону промењљиву до чије вредности лакше можемо доћи, дајући различите вредности независно-промењљивој. Тако, боље је сматрати обим круга као функцију полупречника, него обрнуто, полупречник као функцију обима, јер је много лакше множити вредност r са 2π, да би се добила вредност обима, него вредност обима делити са 2π, да бисмо добили вредност r, а и у пракси лакше и радије се мере праве но криве линије. Да је једна количина y функција друге промењљиве x, символички се означава са $y = f(x)$, а чита се „y је функција од x“.

Често се дешава да функција зависи не од једне већ од двеју или више независно-промењљивих количина. Тако, код кретања пут s сматрамо као функцију брзине c и времена t; запремину правоуглога паралелопипеда сматрамо као функцију његових димензија. *Дакле, под функцијом разумемо такву промењљиву количину чија вредност зависи од вредности једне или више промењљивих количина са којима стоји у извесној вези.*

§ 4. **Гониометриске или тригонометриске функције.** Размере страна правоуглог троугла ABC (сл. 4) јесу функције ма кога оштрог угла тога троугла, и обрнуто, можемо углове сматрати као функцију тих размера. Тако размеру $\frac{a}{b}$ сматрамо као функцију угла α, јер се вредност те размере мења када се угао α мења. Вредност ове размере се увећава када угао α расте, а смањује се када угао α опада. Та размера, која је размера између супротне и налегле катете угла α, постаје $\frac{a_1}{b}$, $\frac{a_2}{b}$, ... када угао постаје α_1, α_2 ..... Она има све већу вредност растењем угла α, јер је $\frac{a}{b} < \frac{a_1}{b} < \frac{a_2}{b}$



Сл. 4

Размеру $\frac{b}{a}$ такође можемо сматрати као функцију угла α, јер се вредност и те размере мења када се угао α мења, и то: она се смањује када угао расте, а увећава се када угао

опада. Исто тако размере: $\frac{a}{c}$, $\frac{b}{c}$, $\frac{c}{a}$ и $\frac{c}{b}$ мењају своју вредност када се угао α мења.

Од страна правоуглога троугла можемо да створимо *шест* размера, и то: три управне и три обрнуте. Пошто је свака од тих размера функција ма кога оштрог угла у правоуглом троуглу, то имамо свега шест функција које се, за разлику од осталих функција, зову *гониометриским* или *тригонометриским* функцијама. Вредност сваке од тих размера има свој нарочити назив, своје име, и то:

1. *Вредност размере између супротне катете једног угла и хипотенузе зове се* ***синус*** *(sinus) тога угла*, а означава се:

$$\sin\alpha = \frac{a}{c}, \quad \text{а} \quad \sin\beta = \frac{b}{c} \quad \text{(сл. 4).}$$

2. *Вредност размере између налегле катете једног угла и хипотенузе зове се* ***косинус*** *(cosinus) тога угла*, а означава се:

$$\cos\alpha = \frac{b}{c}, \quad \text{а} \quad \cos\beta = \frac{a}{c}.$$

3. *Вредност размере између супротне и налегле катете једног угла зове се* ***тангенс*** *(tangens) тога угла*, а означава се:

$$tg\,\alpha = \frac{a}{b}, \quad \text{а} \quad tg\,\beta = \frac{b}{a}.$$

4. *Вредност размере између налегле и супротне катете једног угла зове се* ***котангенс*** *(cotangens) тога угла*, а означава се:

$$cotg\,\alpha = \frac{b}{a}, \quad \text{и} \quad cotg\,\beta = \frac{a}{b}.$$

5. *Вредност размере између хипотенузе и налегле катете једног угла зове се* ***секанс*** *(secans) тога угла*, а означава се:

$$sec\,\alpha = \frac{c}{b}, \quad \text{а} \quad sec\,\beta = \frac{c}{a}.$$

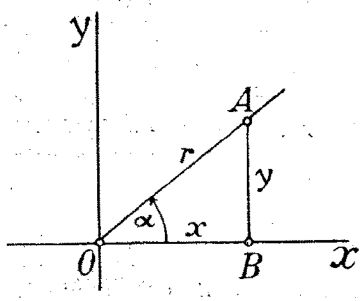
6. *Вредност размере између хипотенузе и супротне катете једног угла зове се* ***косеканс*** *(cosecans) тога угла*, а означава се:

$$cosec\,\alpha = \frac{c}{a}, \quad \text{а} \quad cosec\,\beta = \frac{c}{b}.$$

Разуме се, односи страна правоуглог троугла не мењају се ако се угао не мења, а стране се мењају. Тако, из правоуглог троугла ADC (сл. 7), који је половина равностраног троугла ABC је $sin\ 60^0 = \dfrac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{a} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2a} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Ова функција имаће исту вредност, ако страна равностраног троугла постаје $a+1$, $a+2$, $a+3$ итд. Исти је случај ма са којом функцијом угла од 60^0, ако се овај угао не мења, а страна a постаје поступно већа или мања.

Напомена. Како су катете по величини мање од хипотенузе, то *синус* и *косинус* не могу бити бројеви већи од јединице, *секанси* и *косеканси* могу бити само бројеви већи од јединице, а *тангенси* и *котангенси* могу бити ма какви бројеви, већи, мањи или једнаки јединици.

2. Како координате ма које тачке у равни x и y и њен радиус r склапају правоугли троугао (сл. 5), то гониометриске функције неког угла α, чије се теме поклапа са координатним почетком, један крак с позитивним правцем апсцисне осовине, а други крак с радиусом, јесу:



Сл. 5

$$sin\ \alpha = \frac{y}{r}, \qquad cotg\ \alpha = \frac{x}{y},$$

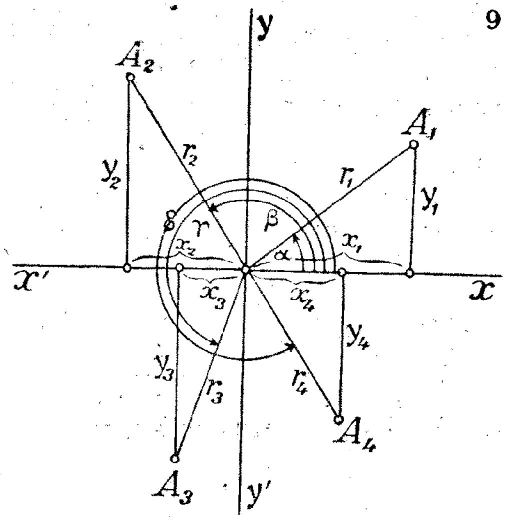
$$cos\ \alpha = \frac{x}{r}, \qquad sec\ \alpha = \frac{r}{x} \text{ и}$$

$$tg\ \alpha = \frac{y}{x}, \qquad cosec\ \alpha = \frac{r}{y}.$$

Према овоме, тригонометриске функције неког угла чије се теме поклапа са координатним почетком, почетни крак увек с позитивном страном апсцисне осовине, а потоњи с радиусом неке тачке у равни, можемо сматрати као вредности размера координата x и y и радиуса r неке тачке, и то:

1) *синус* као вредност размере између ординате y и радиуса r; 2) *косинус* као вредност размере између апсцисе x и радиуса r, 3) *тангенс* као вредност размере између ординате y и апсцисе x; 4) *котангенс* као вредност размере између апсцисе x и ординате y; 5) *секанс* као вредност размере између радиуса r и апсцисе x; и 6) *косеканс* као вредност размере између радиуса r и ординате y.

3) Пошто су координате тачака у разним квадрантима различито означене, а њихови радиуси јесу увек *позитивни*, то гониометриске функције, као вредност размера тих количина, за углове у разним квадрантима, јесу различито означене. Тако: 1) За оштри угао α (сл. 6), који припада I квадранту, јесу све функције позитивне; 2) За тупи угао β, који припада II квадранту,



Сл. 6

позитивни су само синуси и косеканси $\left(sin\ \beta = \frac{y_2}{r_2},\ cosec\ \beta = \frac{r_2}{y_2}\right)$ а остале функције су негативне $cos\ \beta = \frac{-x_2}{r_2}$, $tg\ \beta = \frac{y_2}{-x_2}$, $cotg\ \beta = \frac{-x_2}{y_2}$, $ces\ \beta = \frac{r_2}{-x_2}$; 3) За тупоиспупчени угао γ, који припада III квадранту, позитивни су само тангенси и котангенси $\left(tg\ \gamma = \frac{-y_3}{-x_3} = \frac{y^3}{x_3},\ cotg\ \gamma = \frac{-x_3}{-y_3} = \frac{x_3}{y_3}\right)$, а остале су функције негативне $\left(sin\ \gamma = \frac{-y_3}{r_3},\ cos\ \gamma = \frac{-x_3}{r_3},\ sec\ \gamma = \frac{r_3}{-x_3},\ cosec\ \gamma = \frac{r_3}{-y_3}\right)$, и 4) За оштроиспупчени угао δ, који припада IV квадранту, позитивне су само функције косинус и секанс $\left(cos\ \delta = \frac{x_4}{r_4},\ sec\ \delta = \frac{r_4}{x_4}\right)$, а остале су функције негативне $\left(sin\ \delta = \frac{-y_4}{r_4},\ tg\ \delta = \frac{-y_4}{x_4},\ cotg\ \delta = \frac{x_4}{-y_4},\ cosec\ \delta = \frac{r_4}{-y_4}\right)$.

Ради веће прегледности знакова гониометриских функција наводимо следеће табеле:

а) синус и косеканс

II	I
+	+
−	−
III	IV

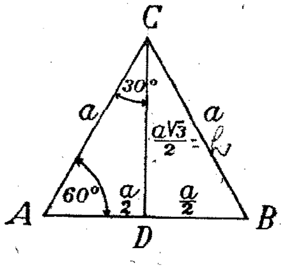
б) косинус и секанс

II	I
−	+
−	+
III	IV

в) тангенс и котангенс

II	I
−	+
+	−
III	IV

§ 5. **Израчунавање функција углова од 60^0, 30^0 и 45^0** Ради израчунавања функција углова од 60^0 и 30^0, треба да конструишемо најпре равнострани троугао, а затим да спустимо једну од његових висина.



Сл. 7

У добивеним правоуглим троугловима оштри су углови од 60^0 и 30^0. Из $\triangle$ ADC (сл. 7) имамо:

$$a)\ \sin 60^0 = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2a} = \frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$\cos 60^0 = \frac{\frac{a}{2}}{a} = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2};\ tg\, 60^0 = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{\frac{a}{2}} = \sqrt{3}$$

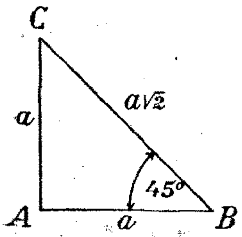
$$cotg\, 60^0 = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3};\ \sec 60^0 = \frac{a}{\frac{a}{2}} = 2;\ \cos 60^0 = \frac{a}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{2\sqrt{3}}{3};$$

$$b)\ \sin 30^0 = \frac{\frac{a}{2}}{a} = \frac{1}{2};\ \cos 30^0 = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2};\ tg\, 30^0 = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3};$$

$$cotg\, 30^0 = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{\frac{a}{2}} = \sqrt{3};\ \sec 30^0 = \frac{a}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3};\ cosec\, 30^0 = \frac{a}{\frac{a}{2}} = 2.$$

Напомена: Посматрањем вредности функција углова од 60^0 и 30^0 видимо да је $\sin 60^0 = \cos 30^0$, $\cos 60^0 = \sin 30^0$, $tg\ 60^0 = cotg\ 30^0$, $cotg\ 60^0 = tg\ 30^0$, $\sec 60^0 = cosec\ 30^0$ и $cosec\ 60^0 = \sec 30^0$.

Исти однос постоји између функција осталих комплементних углова, што ћемо доцније видети.



Сл. 8

c) Ради израчунавања функција угла од 45^0, треба да конструишемо правоугли равнокрак троугао, код кога су оштри углови по 45^0. Из $\triangle ABC$ (сл. 8) имамо:

$$\sin 45^0 = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2};\ \cos 45^0 = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$tg\ 45^0 = \frac{a}{a} = 1;\qquad cotg\ 45^0 = \frac{a}{a} = 1;$$

$$\sec 45^0 = \frac{a\sqrt{2}}{a} = \sqrt{2};\ \text{и}\ cosec\ 45^0 = \frac{a\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}.$$

§ 6. **Задатак тригонометрије и њена подела.** Тригонометрија је онај део геометрије који решава геометриске задатке рачунским путем, уз помоћ гониометриских функција. Њен је главни задатак решавање троуглова. Решити један троугао значи помоћу довољног броја датих елемената тога троугла наћи његове остале елементе. Решавање се може извршити на два начина: конструкцијом и рачунским путем. Метод конструкције није тачан, јер при решавању помоћу лењира, шестара и угломера, које справе нису потпуно тачне, и радећи руком, служећи се писаљком или кредом, добивамо непознате елементе само приближно, а никако тачно. Напротив, радећи рачунским путем израчунавамо непознате елементе тачно.

Тригонометрија се дели на: гониометрију, равну тригономентрију и сферну тригонометрију. Гониометрија испитује случајеве растења и опадања гониометриских функција, налази везу између функција истог угла и везу између функција разних углова, стварајући тиме потребан број образаца који се примењују при решавању троуглова и осталих слика. Равна тригонометрија бави се решавањем равних слика, а сферна решавањем сферних троуглова.

§ 7. **Питања и задаци за вежбу**

1) Шта је правоугли координатни систем?
2) Како се зову координатне осовине и како се означавају?
3) Шта је координатни почетак и како се означава?
4) Чиме је положај тачке у равни одређен?
5) Шта је апсциса а шта ордината неке тачке у равни, и како се означавају?
6) Шта је радиус вектор неке тачке, и како се означава?
7) Конструиши тачке чије су координате:
(0, 5), (4, 3), (5, —7), (—3, —5), (—6, 7), (0, —3), (0, 6) и (—5, 0).
8) У којим се квадрантима налазе тачке:
(5, 6), (—5, —6), (—3, 7), (3, —4), (—4, 5) и (5, —6)?
9) Ако један угао постаје обртањем позитивне стране апсцисне осовине у позитивном или негативном смислу, онда у коме се квадранту налазе углови:
50^0, -30^0, 135^0, -150^0, 200^0, -220^0, 290^0, 300^0, -350^0, 450^0, 750^0, -800^0, 1500^0, 1800^0, -2000^0 и 2400^0?
10) Шта су гониометријске функције, и како се зову?
11) Каква је промењива количина угао код гониометриских функција?

12) Какви бројеви могу бити sin и cos једног угла?
13) „ „ „ „ sec и cosec „ „
14) „ „ „ „ tg и cotg „ „

15) Који од бројева: -3, -2, -1, $0{,}50$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{3}{5}$, 1, 2, 3 могу бити вредности синуса и косинуса неког угла?

16) Који од бројева: -4, -2, $\frac{3}{5}$, $\frac{5}{3}$, 3, 5, $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{2}$ могу бити вредности секанса и косеканса неког угла?

17) Који од бројева: -5, -3, -1, 0, $\frac{3}{4}$, $-\frac{5}{6}$, $\frac{7}{5}$, 2, 4, 5 могу бити вредности тангенса и котангенса неког угла?

18) Наћи вредност свих гониометриских функција углова добивених повлачењем радиус - вектора тачака у равни, када су те тачке: 1) $x = 3$, $y = 4$; 2) $x = -3$, $y = 4$; 3) $x = -8$, $y = -6$; и 4) $x = 9$, $y = -12$.

19) Синус неког угла је $\frac{3}{4}$. Одреди ординату тачке чији радиус $r = 16$ заклапа дотични угао.

20) Косинус неког угла је $\frac{5}{6}$. Одреди апсцису тачке чији радиус $r = 12$ заклапа дотични угао.

21) Тангенс неког угла је $\frac{3}{7}$. Одреди апсцису тачке чији радиус заклапа дотични угао, ако је њена ордината $y = 15$.

22) Тангенс неког угла је 2. Одреди радиус неке тачке, који заклапа дотични угао, ако тачка има апсцису $x = 4$.

ГОНИОМЕТРИЈА

§ 8. Графичко претстављање гониометриских функција код круга полупречника r = 1

Ако се центар круга O поклапа с координатним почетком правоуглога координатнога система (сл. 9), онда координате ма које тачке на периферији круга и њен полупречник граде правоугли троугао. Ако посматрамо угао који гради полупречник ма које тачке кружне периферије с позитивном страном апсцисне осовине (α) и ако претпоставимо да је полупречник круга $r = 1$, онда је:

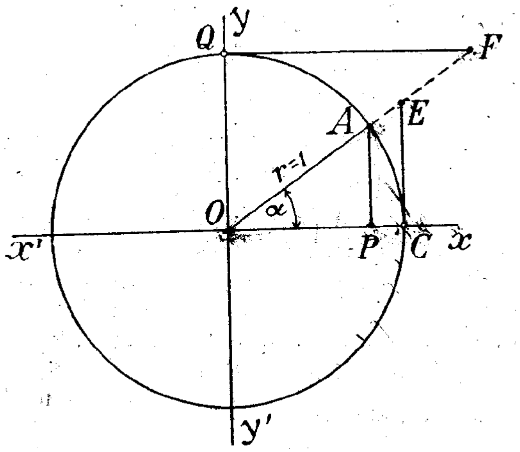
$$\sin\alpha = \frac{AP}{OA} = \frac{AP}{r} = \frac{AP}{1} = AP, \text{ a } \cos\alpha = \frac{OP}{OA} = \frac{OP}{r} = \frac{OP}{1} = OP.$$

Према овоме, ако једна тачка припада кружној периферији са полупречником $r = 1$, онда је ордината те тачке sinus, а апсциса cosinus онога угла који граде полупречник те тачке с позитивном страном апсцисне осовине.

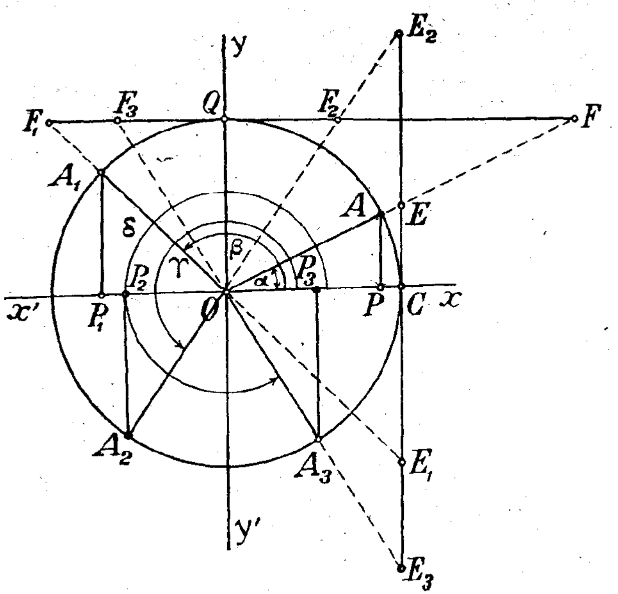
Да бисмо нашли оне дужи на кругу O (сл. 9), које претстављају остале функције угла α, служимо се сличношћу правоуглих троуглова: OAP, OEC и OFQ. Ти су троуглови слични, јер имају једнаке углове. Из сличности троуглова OAP и OEC (сл. 8) имамо: 1) $\frac{AP}{OP} = \frac{EC}{OC}$ и 2) $\frac{OA}{OP} = \frac{OE}{OC}$, а из сличности троуглова OAP и OFQ имамо: 3) $\frac{OP}{AP} = \frac{QF}{OQ}$ и 4) $\frac{OA}{AP} = \frac{OF}{OQ}$.

Стога је:

1) $tg\,\alpha = \frac{AP}{OP} = \frac{EC}{OC} = \frac{EC}{r} = \frac{EC}{1} = EC$; $cotg\,\alpha = \frac{OP}{AP} = \frac{QF}{OQ} = \frac{QF}{r} = \frac{QF}{1} = QF$; 3) $\sec\alpha = \frac{OA}{OP} = \frac{OE}{OC} = \frac{OE}{r} = \frac{OE}{1} = OE$; и 4) $cosec\,\alpha = \frac{OA}{AP} = \frac{OF}{OQ} = \frac{OF}{r} = \frac{OF}{1} = OF$, тј. *код круга са полупречником $r = 1$, под тангентом једног његовог централног угла разумемо ону тангенту која је повучена из тачке C (пресечне тачке круга с позитивном страном апсцисне осовине) до пресека с оним продуженим полупречником који гради с позитивном страном апсцисне осовине дотични угао. Котангента је тангента повучена из тачке Q (пресечне тачке круга с позитивном страном ординатне осовине) до пресека с истим полупречником. Секанта је отсечак полупречника од координатног почетка до пресека са тангентом. Косекента је отсечак полупречника од координатног почетка до пресека са котангентом.* На сл. 10 конструисане су дужи које претстављају гониометриске функције оштрог угла α, тупог β, тупоиспупченог γ и оштроиспупченог δ. Те су дужи:



Сл. 9



Сл. 10

1) $\sin\alpha = AP$,
$\cos\alpha = OP$,
$tg\,\alpha = CE$,
$cotg\,\alpha = QF$,
$\sec\alpha = OE$,
$cosec\,\alpha = OF$,

2) $\sin\beta = A_1P_1$,
$\cos\beta = -OP_1$,
$tg\,\beta = -CE_1$,
$cotg\,\beta = -QF_1$,
$\sec\beta = -OE_1$,
$cosec\,\beta = OF_1$.

3) $\sin\gamma = -A_2P_2$,
$\cos\gamma = -OP_2$,
$tg\,\gamma = CE_2$,
$cotg\,\gamma = QF_2$,
$\sec\gamma = -OE_2$,
$coses\,\gamma = -OF_2$.

4) $\sin\delta = -A_3P_3$,
$\cos\delta = OP_3$,
$tg\,\delta = -CE_3$,
$cotg\,\delta = -QF_3$,
$\sec\delta = OE_3$,
$coses\,\delta = -OF_3$.

Напомена. — Секанте и косеканте су позитивне када су отсечци полупречника у истом смислу с полупречником, а негативне су ако су отсечци полупречника у супротном смислу.

§) 9 Међусобни однос гониометриских функција истог угла

— Основни обрасци —

Однос гониометриских функција истог оштрог угла. Из $\triangle$ ABC (сл. 4) по Питагорином правилу имамо

$$a^2 + b^2 = c^2 \ldots (I)$$

Дељењем ове једначине са c^2 добијамо:

$$\left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = 1, \text{ или}$$

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \ldots (1)$$

тј. *збир квадрата синуса и косинуса истог угла* $= 1$.

2. Дељењем једначине (I) са b^2 добијемо:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2 + 1 = \left(\frac{c}{b}\right)^2, \text{ или } \left(\frac{c}{b}\right)^2 - \left(\frac{a}{b}\right)^2 = 1,$$

$$\text{или } \sec^2\alpha - tg^2\alpha = 1 \ldots (2),$$

тј. *разлика квадрата секанса и тангенса истог угла* $= 1$.

3. Дељењем једначине (I) са a^2 добијамо:

$$1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2 = \left(\frac{c}{a}\right)^2, \text{ или } \left(\frac{c}{a}\right)^2 - \left(\frac{b}{a}\right)^2 = 1, \text{ или}$$

$$cosec^2\alpha - cotg^2\alpha = 1 \ldots (3)$$

тј. *разлика квадрата косеканса и котангенса истог угла* $= 1$.

4. Како је $tg\alpha = \frac{a}{b}$ и $cotg\alpha = \frac{b}{a}$, то дељењем са c и бројитеља и именитеља ових разломака добијамо:

$$tg\alpha = \frac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{c}} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \text{ и } cotg\alpha = \frac{\frac{b}{c}}{\frac{a}{c}} = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \ldots (4),$$

тј. *тангенс једнога угла једнак је размери између синуса и косинуса тога угла, а котангенс је једнак размери између косинуса и синуса истога угла.*

5. Како је: a) $tg\,\alpha = \frac{a}{b}$ и $cotg\,\alpha = \frac{b}{a}$; b) $\sin\alpha = \frac{a}{c}$ и $cosec\,\alpha = \frac{c}{a}$; и c) $\cos\alpha = \frac{b}{c}$ и $\sec\alpha = \frac{c}{b}$, то множењем ових једначина добијамо: $tg\,\alpha \cdot cotg\,\alpha = 1$, $\sin\alpha \cdot cosec\,\alpha = 1$ и $\cos\alpha \cdot \sec\alpha = 1$. Одавде је:

$$tg\,\alpha = \frac{1}{cotg\,\alpha} \text{ и } cotg\,\alpha = \frac{1}{tg\,\alpha} \ldots (5), \quad \sin\alpha = \frac{1}{cosec\,\alpha} \text{ и}$$

$$cosec\,\alpha = \frac{1}{\sin\alpha} \ldots (6) \text{ и } \cos\alpha = \frac{1}{\sec\alpha} \text{ и } \sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha} \ldots (7), \text{ тј.}$$

a) тангенс има обрнуту вредност котангенса истог угла;
b) синус „ „ „ косеканса „ „
c) косинус „ „ „ секанса „ „

B) *Лако је доказати да су горњи обрасци под A) у важности и за остале врсте углова, што можемо увидети из сл. 10.*

Тако, a) **Тачност обрасца (1) увиђамо:**

1) За тупи угао β из троугла OA_1P_1, где је:

$A_1P_1^2 + (-OP_1)^2 = OA_1^2$ или $A_1P_1^2 + OP_1^2 = r^2$ или $\sin^2\beta + \cos^2\beta = 1$;

2) За тупоиспупчени угао γ из троугла OA_2P_2, где је:

$(-A_2P_2)^2 + (-OP_2)^2 = OA_2^2 =$ или $A_2P_2^2 + OP_2^2 = r^2$ или $\sin^2\gamma + \cos^2\gamma = 1$;

3) За оштроиспупчени угао δ из троугла OA_3P_3, где је:

$(-A_3P_3)^2 + OP_3^2 = OA_3^2$ или $A_3P_3^2 + OP_3^2 = r^2$ или $\sin^2\delta + \cos^2\delta = 1$.

b) **Тачност обрасца (2) увиђамо:**

1) За тупи угао β из троугла OCE_1, где је:

$(-OE_1)^2 - (-CE_1)^2 = OC^2$ или $OE_1^2 - CE_1^2 = r^2$ или $\sec^2\beta - tg^2\beta = 1$;

2) За тупоиспупчени угао γ из троугла OCE_2, где је:

$(-OE_2)^2 - CE_2^2 = OC^2$, или $OE_2^2 - CE_2^2 = r^2$, или $\sec^2\gamma - tg^2\gamma = 1$;

3) За оштроиспупчени угао δ из троугла OCE_3, где је:

$OE_3^2 - (-CE_3)^2 = OC^2$, или $OE_3^2 - CE_3^2 = r^2$, или $\sec^2\delta - tg^2\delta = 1$;

c) **Тачност обрасца (3) увиђамо:**

1) За тупи угао β из троугла OQF_1, где је:

$OF_1^2 - (-QF_1)^2 = OQ^2$, или $OF_1^2 - QF_1^2 = r^2$, или $cosec^2\beta - cotg^2\beta = 1$;

2) За тупоиспупчени угао γ из троугла OQE_2, где је:

$(-OF_2)^2 - QF_2^2 = OQ^2$, или $OF_2^2 - QF_2^2 = r^2$, или $cosec^2\gamma - cotg^2\gamma = 1$;

3) За оштроиспупчени угао δ из троугла OQF_3, где је:

$(-OF_3)^2 - (-QF_3)^2 = OQ^2$, или $OF_3^2 - QF_3^2 = r^2$, или $cosec^2\delta - cotg^2\delta = 1$.

d) **Тачност обрасца (4) увиђамо:**

1) За тупи угао β из сличности троуглова OA_1P_1 са троугловима OCE_1 и OQF_1, где је: $\frac{-CE_1}{OC} = \frac{A_1P_1}{-OP_1}$, или $\frac{CE_1}{r} = \frac{A_1P_1}{OP_1}$, или $CE_1 = \frac{A_1P_1}{OP_1}$, или $tg\,\beta = \frac{\sin\beta}{\cos\beta}$; а тако исто:

$$\frac{-QF_1}{OQ} = \frac{-OP_1}{A_1P_1}, \text{ или } \frac{QF_1}{r} = \frac{OP_1}{A_1P_1}, \text{ или } QF_1 = \frac{OP_1}{A_1P_1}, \text{ или } cotg\,\beta = \frac{\cos\beta}{\sin\beta};$$

2) За тупоиспупчени угао γ из сличности троугла OA_2P_2 са троугловима OCE_2 и OQF_2, где је:

$$\frac{CE_2}{OC} = \frac{-A_2P_2}{-OP_2}, \text{ или } \frac{CE_2}{r} = \frac{A_2P_2}{OP_2}, \text{ или } CE_2 = \frac{A_2P_3}{OP_2}, \text{ или } tg\,\gamma = \frac{\sin\gamma}{\cos\gamma};$$

а тако исто: $\frac{QF_2}{OQ} = \frac{-OP_2}{-A_2P_2}$, или $\frac{QF_2}{r} = \frac{OP_2}{A_2P_2}$, или $QF_2 = \frac{OP_2}{A_2P_2}$, или $cotg\,\gamma = \frac{\cos\gamma}{\sin\gamma}$;

3) За оштроиспупчени угао δ из сличности троугла OA_3P_3 са троугловима OCE_3 и OQF_3, где је:

$$\frac{-CE_3}{OC} = \frac{-A_3P_3}{OP_3}, \text{ или } \frac{CE_3}{r} = \frac{A_3P_3}{OP_3}, \text{ или } CE_3 = \frac{A_3P_3}{OP_3}, \text{ или } tg\,\delta = \frac{\sin\delta}{\cos\delta};$$

а тако исто: $\frac{-OF_3}{OQ} = \frac{OP_3}{-A_3P_3}$, или $\frac{QF_3}{r} = \frac{OP_3}{A_3P_3}$, или $QF_3 = \frac{OP_3}{A_3P_3}$, или $cotg\,\delta = \frac{\cos\delta}{\sin\delta}$.

e) **Тачност обрасца под (5)** за остале углове увиђамо на исти начин као и за оштре углове.

c) *Примена основних образаца.* — Важност горњ. основних образаца је велика, јер је њихова примена у Тригонометрији врло честа. Помоћу ових образаца можемо наћи све остале функције једног угла, ако знамо само једну, ма коју функцију тога угла, и претворити израз у коме фигуришу различите функције једног угла, у израз са само једном функцијом његовом.

Како је $\sin\alpha = \pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}$, $\cos\alpha = \pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}$, $\sec\alpha = \pm\sqrt{1+tg^2\alpha}$ и $coses\,\alpha = \pm\sqrt{1+cotg^2\alpha}$, то при израчунавању $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\sec\alpha$ и $cosec\,\alpha$ узимамо само један знак пред кореном, што зависи од угла α. Ако је угао α оштар, узимамо само позитивне знакове; ако је туп, узимамо позитивне знакове за $\sin\alpha$ и $cosec\,\alpha$, а негативне за $\cos\alpha$ и $\sec\alpha$; ако је тупоиспупчен, узимамо само негативне знакове; и најзад, ако је оштроиспупчен, узимамо негативне знакове за $\sin\alpha$ и $cosec\,\alpha$, а позитивне за $\cos\alpha$ и $\sec\alpha$.

Решени примери (узимамо да су дати углови оштри):

1) *Зна се* $\sin\alpha = \frac{12}{13}$; *наћи остале функције тога угла.*

Из обрасца (1) имамо: $\cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha} = \sqrt{1-\left(\frac{12}{13}\right)^2} = \sqrt{\frac{25}{169}} = \frac{5}{13}$;

из обрасца (4): $tg\,\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\frac{12}{13}}{\frac{5}{13}} = \frac{12}{5} = 2\frac{2}{5}$ и $cotg\,\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{5}{12}$;

из (5): $cosec\,\alpha = \frac{1}{\sin\alpha} = \frac{13}{12} = 1\frac{1}{12}$; и из (7): $\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha} = \frac{13}{5} = 2\frac{3}{5}$.

2) *Зна се* $\cos\beta = \frac{2}{3}$; *наћи остале функције тога угла.*

Из обрасца (1) имамо: $\sin\beta = \sqrt{1-\cos^2\beta} = \sqrt{1-\frac{4}{9}} = \sqrt{\frac{5}{9}} = \frac{\sqrt{5}}{3}$, па је даљи рад као код првог примера.

3) *Зна се* $tg\,\gamma = \frac{7}{24}$; *наћи остале његове функције.*

Из обрасца (5) имамо: $cotg\,\gamma = \frac{1}{tg\,\gamma} = \frac{24}{7}$; из (2): $\sec\gamma = \sqrt{1+tg^2\gamma} = \sqrt{1+\frac{49}{576}} = \sqrt{\frac{625}{576}} = \frac{25}{24}$; из (3): $cosec\,\gamma = \sqrt{1+cotg^2\gamma} = \sqrt{1+\frac{576}{49}} = \sqrt{\frac{625}{49}} = \frac{25}{7}$; из (6): $\sin\gamma = \frac{1}{cosec\,\gamma} = \frac{7}{25}$; и из (7): $\cos\gamma = \frac{1}{\sec\gamma} = \frac{24}{25}$.

4) *Зна се* $cotg\,\omega = \frac{24}{7}$; *наћи остале његове функције.*

Из обрасца (5) имамо: $tg\,\omega = \frac{1}{cotg\,\omega} = \frac{7}{24}$, па се даље ради као код трећег примера.

5) *Зна се* $cosec\ \alpha = 3\frac{4}{7}$; *наћи остале његове функције.*

Из обрасца (6) имамо: $\sin\alpha = \frac{1}{cosec\,\alpha} = \frac{7}{25}$, па је даљи рад као код првог примера.

6) *Зна се* $sec\,\varepsilon = \frac{41}{40}$; *наћи његове остале функције.* Из обрасца (7) имамо: $\cos\varepsilon = \frac{1}{sec\,\varepsilon} = \frac{40}{41}$, па је даљи рад као код другога примера.

7) *Примери за вежбу.* Наћи остале функције када је 1) $\sin\alpha = \frac{4}{5}$; 2) $cosec\,\beta = \sqrt{3}$; 3) $tg\,\gamma = \frac{3}{4}$; 4) $\cos\alpha = \frac{7}{9}$; 5) $sec\,\beta = 1\frac{4}{5}$; 6) $cotg\,\gamma = 0{,}6$; 7) $sec\,\omega = 2{,}37$.

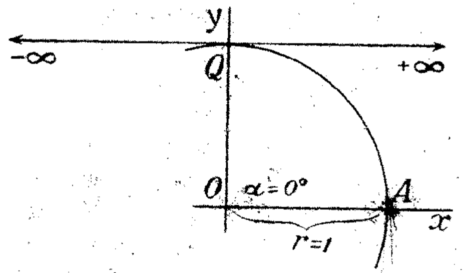
8) Претвори $sec\,\alpha - \frac{1}{\cos\alpha} + \frac{tg\,\alpha}{\sin\alpha}$ у израз у коме се налази само $\cos\alpha$;

9) Претвори $(1+\cos\alpha)(1-\cos\alpha) + tg\,\alpha\,(cotg^2\alpha - 1)$ у израз у коме се налази само $tg\,\alpha$;

10) Претвори $\frac{\cos\alpha}{\sqrt{1-\cos^2\alpha}} + \frac{tg\,\alpha\cos\alpha\sqrt{1-\sin^2\alpha}}{1-\cos^2\alpha}$ у израз у коме се налази само $cotg\,\alpha$;

11) Претвори $\cos\beta + \frac{tg\,\beta\,\cos\beta}{\sin\beta} + \frac{\sin^2\beta}{\cos\beta}$ у израз у коме се налази само $sec\,\beta$.

§ 10. Растење и опадање гониометриских функција када угао расте[1]



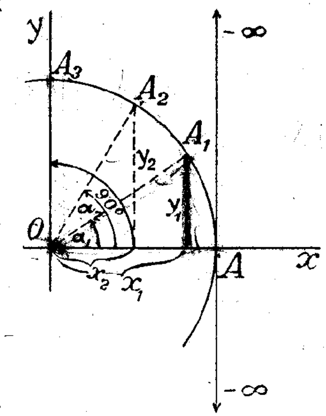
Сл. 11

1. Ако се тачка A (слика 11) налази на позитивној страни апсцисне осовине и на периферији круга са $r = 1$, онда њен полупречник гради с позитивном страном апсцисне осовине угао од 0^0. Тада је ордината тачке A једнака 0, апсциса јој се претвара у полупречник, тангента у тачку, а котангента је бесконачно велика ($\pm\infty$). Стога је:

$$\sin 0^0 = 0; \qquad tg\,0^0 = \frac{\sin 0^0}{\cos 0^0} = \frac{0}{1} = 0;$$
$$\cos 0^0 = +1; \qquad cotg\,0^0 = \frac{\cos 0^0}{\sin 0^0} = \frac{1}{0} = \pm\infty \qquad \ldots (1)$$

[1]) Како секанте и косеканте имају ретку примену, то се ове функције не испитују.

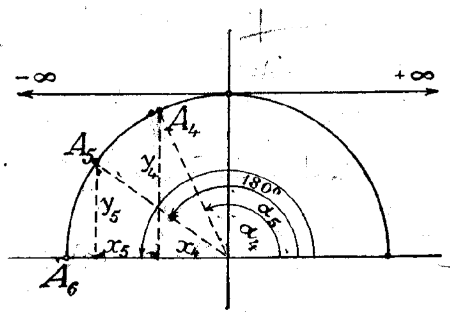
2. Ако се тачка A креће по првом квадранту периферије круга (сл. 12), полупречник свакога њенога доцнијег положаја ($A_1, A_2, \ldots.$) гради с позитивном страном апсцисне осовине све већи и већи оштар угао ($\alpha_1, \alpha_2, \ldots.$). Тада ординате доцнијих положаја ($y_1, y_2, \ldots.$) тачке A постају све веће а апсцисе опадају ($x_1, x_2, \ldots.$). У ономе моменту када угао постане 90^0, тачка A налази се на позитивној страни ординатне осовине. Тада јој се ордината претвара у полупречник, апсциса и котангента у тачку, а тангента постаје бесконачно велика ($\pm\infty$). Стога је:



Сл. 12

$$\sin 90^0 = +1; \qquad tg\,90^0 = \frac{\sin 90^0}{\cos 90^0} = \frac{1}{0} = \pm\infty;$$
$$\cos 90^0 = 0; \qquad cotg\,90^0 = \frac{\cos 90^0}{\sin 90^0} = \frac{0}{1} = 0. \qquad \ldots (2)$$

3. Кад тачка A продужи даље своје кретање по другом квадранту периферије круга (сл. 13), полупречници њених доцнијих положаја ($A_4, A_5, \ldots.$) граде с позитивном страном апсцисне осовине све веће и веће тупе углове ($\alpha_4, \alpha_5, \ldots$). Тада ординате њених доцнијих положаја постају све мање и мање ($y_4, y_5, \ldots$), а њихове апсцисе расту по апсолутној вредности али су негативне ($x_4, x_5, \ldots$). У моменту када угао постане 180^0, тачки A се налази на негативној страни апсцисне осовине. Тада јој се ор-

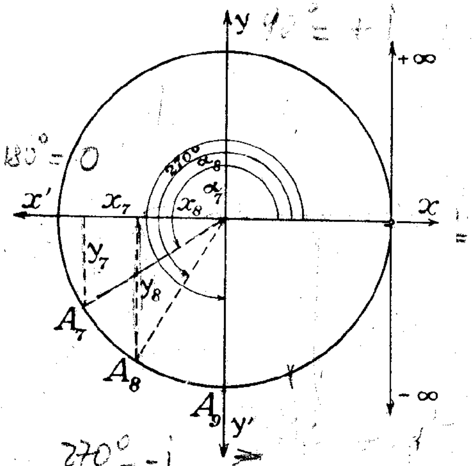


Сл. 13

дината претвара у тачку, апсциса у полупречник, тангента угла од 180⁰ у тачку, а котангента постаје бесконачно велика по апсолутној вредности ($\pm\infty$). Стога је:

$$\left.\begin{array}{ll} \sin 180^0 = 0; & \operatorname{tg} 180^0 = \dfrac{\sin 180^0}{\cos 180^0} = \dfrac{0}{-1} = 0; \\ \cos 180^0 = -1; & \operatorname{cotg} 180^0 = \dfrac{\cos 180^0}{\sin 180^0} = \dfrac{-1}{0} = \mp\infty \end{array}\right| \quad \ldots(3)$$

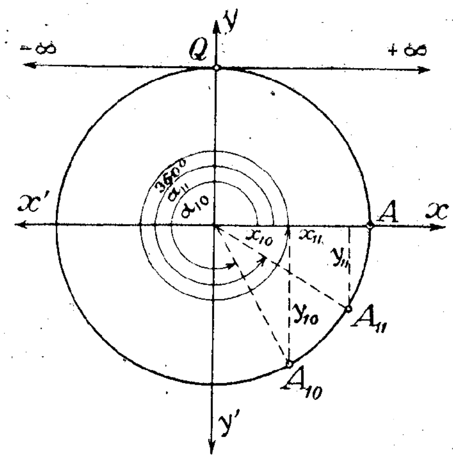
4) Када тачка A (сл. 14) продужи даље своје кретање по трећем квадранту периферије круга, полупречници њених доцнијих положаја граде с позитивном страном апсцисне осовине све веће и веће тупоиспупчене углове. Тада ординате њених доцнијих положаја постају све веће и веће по апсолутној вредности, али су негативне, а њихове апсцисе постају све мање и мање по апсолутној вредности, али су и оне негативне. У ономе моменту када угао постане 270⁰, тачка A се налази на негативној страни ординатне осовине. Тада јој се ордината претвара у полупречник, апсциса у тачку, тангента постаје по апсолутној вредности бесконачно велика ($\pm\infty$), а котангента претвара се у тачку. Стога је:



Сл. 14

$$\left.\begin{array}{ll} \sin 270^0 = -1; & \operatorname{tg} 270^0 = \dfrac{\sin 270^0}{\cos 270^0} = \dfrac{-1}{0} = \mp\infty \\ \cos 270^0 = 0; & \operatorname{cotg} 270^0 = \dfrac{\cos 270^0}{\sin 270^0} = \dfrac{0}{-1} = 0. \end{array}\right| \quad \ldots(4)$$

5) Када тачка A (сл. 15) продужи своје кретање по четвртом квандранту периферије круга, полупречници њених доцнијих положаја граде с позитивном страном апсцисне осовине све веће и веће оштроиспупчене углове. Тада ординате њених доцнијих положаја постају све мање и мање по апсолутној вредности, али су и даље негативне, а њихове апсцисе постају све веће и веће и позитивне су. У ономе моменту када угао постане пун (360⁰), тачка A се поново налази на позитивној страни апсцисне осовине (долази у



Сл. 15

свој првобитни положај). Тада јој се ордината претвара у тачку, апсциса у полупречник, тангента угла од 360⁰ претвара се у тачку, а котангента постаје бесконачно велика ($\pm\infty$). Стога је:

$$\left.\begin{array}{ll} \sin 360^0 = 0; & \operatorname{tg} 360^0 = \dfrac{\sin 360^0}{\cos 360^0} = \dfrac{0}{1} = 0; \\ \cos 360^0 = 1; & \operatorname{cotg} 360^0 = \dfrac{\cos 360^0}{\sin 360^0} = \dfrac{1}{0} = \pm\infty \end{array}\right| \quad \ldots(5)$$

6) Када упоредимо обрасце (1) и (5), видимо да функције углова од 0⁰ и 360⁰ имају једнаке вредности. Исти случај наступа када тачка А продужи и даље своје кретање по периферији круга, па дође поново у пресечне тачке кружне периферије са координатним осовинама. Тада су функције угла од 90⁰ једнаке са функцијама углова од ($n \cdot 360^0 + 90^0$), функције угла од 180⁰ са функцијама углова од ($n \cdot 360^0 + 180^0$), функције угла од 270⁰ са функцијама од ($n \cdot 360^0 + 270^0$).

7) Како једнаким луцима одговарају једнаки средишни углови, и обрнуто, то уместо да узимамо у обзир централне углове круга полупречника $r = 1$, можемо узимати њихове одговарајуће аркусе (*arcus*-и јесу лукови који припадају кругу полупречника $r = 1$). За $r = 1$, периферија круга је 2π, полукруг π, квадрант $\dfrac{\pi}{2}$, а *arcus* од $270^0 = \dfrac{3\pi}{2}$. Стога је:

$a)\ \sin 2\pi = 0, \quad b)\ \sin \dfrac{\pi}{2} = 1, \quad c)\ \sin \pi = 0, \quad d)\ \sin \dfrac{3\pi}{2} = -1,$

$\cos 2\pi = +1, \quad \cos \dfrac{\pi}{2} = 0, \quad \cos \pi = -1, \quad \cos \dfrac{3\pi}{2} = 0,$

$$tg\ 2\pi = 0, \qquad tg\frac{\pi}{2} = \pm\infty, \quad tg\,\pi = 0, \quad tg\frac{3\pi}{2} = \mp\infty.$$

$$cotg\ 2\pi = \pm\infty, \quad cotg\frac{\pi}{2} = 0, \quad cotg\,\pi = \mp\infty, \quad cotg\frac{3\pi}{2} = 0.$$

e) $sin\left(2n\pi + \frac{\pi}{2}\right) = 1, \quad f)\ sin\,(2n\pi + \pi) = sin\,(2n+1)\,\pi = 0,$

$cos\left(2n\pi + \frac{\pi}{2}\right) = 0, \quad cos\,(2n\pi + \pi) = cos\,(2n+1)\,\pi = -1,$

$tg\left(2n\pi + \frac{\pi}{2}\right) = \pm\infty, \quad tg\,(2n\pi + \pi) = tg\,(2n+1)\,\pi = 0,$

$cotg\left(2n\pi + \frac{\pi}{2}\right) = 0, \quad cotg\,(2n\pi + \pi) = cotg\,(2n+1)\,\pi = \mp\infty.$

m) $sin\left(2n\pi + \frac{3\pi}{2}\right) = sin\,\frac{4n+3}{2}\pi = -1.$

$cos\left(2n\pi + \frac{3\pi}{2}\right) = cos\,\frac{4n+3}{2}\pi = 0,$

$tg\left(2n\pi + \frac{3\pi}{2}\right) = tg\,\frac{4n+3}{2}\pi = \mp\infty,$

$cotg\left(2n\pi + \frac{3\pi}{2}\right) = cotg\,\frac{4n+3}{2}\pi = 0.$

8) Из досадањег излагања о растењу и опадању гониометриских функција, када угао расте, изводимо следећи закључак:

а) *Синуси* оштрих углова позитивни су и њихове вредности варирају од 0 до $+1$; тупих углова такође су позитивни и њихове вредности варирају од $+1$ до 0; тупоиспупчених углова јесу негативни и њихове вредности варирају од 0 до -1; оштроиспупчених углова јесу такође негативни и њихове вредности варирају од -1 до 0. Према томе, синус има максималну вредност $+1$, а минималну -1, и то прву када угао има 90^0, или $n \cdot 360^0 + 90^0$, а другу када угао има 270^0, или $n \cdot 360^0 + 270^0$.

Мењање синуса

$sin\ 90 = +1$

$sin\ (n \cdot 360^0 + 90^0) = +1$

	y	
$sin\ 180^0 = 0$, $sin\ (n \cdot 360^0 + 180^0) = 0$		$sin\ n \cdot 360^0 = 0$, $sin\ 0^0 = 0$
Синус је позитиван и опада		Синус је позитиван и расте
X_1		X
Синус је негативан и расте по апсолутној вредности		Синус је негативан и опада по апсолутној вредности.
	y_1	

$sin\ 270^0 = -1$

$sin\ (n \cdot 360^0 + 270^0) = -1$

b) Косинуси оштрих углова позитивни су и њихове вредности варирају од $+1$ до 0, тупих углова су негативни и њихове вредности варирају од 0 до -1; тупоиспупчених углова су негативни и њихове вредности варирају од -1 до 0, оштроиспупчених углова позитивни су и њихове вредности варирају од 0 до $+1$. Према томе, косинус има максималну вредност $+1$, а минималну -1, и то прву када угао има 0^0, 360^0 или $n \cdot 360^0$, а другу када угао има 180^0 или $n \cdot 360^0 + 180^0$.

Мењање косинуса

$cos\ 90^0 = 0$

$cos\ (n \cdot 360^0 + 90^0) = 0$

Косинус је негативан и расте по апсолутној вредности	Косинус је позитиван и опада
$cos\ 180^0 = -1$, $cos\ (n \cdot 360^0 + 180^0) = -1$	$cos\ 0^0 = +1$, $cos\ n \cdot 360^0 = +1$
Косинус је негативан и опада по апсолутној вредности	Косинус је позитиван и расте

$cos\ 270^0 = 0$

$cos\ (n \cdot 360^0 + 270^0) = 0$

c) *Тангенси* и *котангенси* су позитивни за оштре и тупоиспупчене углове. Њихове вредности варирају између $-\infty$ и $+\infty$, и то: тангенс има $+\infty$ вредност када угао има мало мање од 90^0 или 270^0, $n \cdot 360^0 + 90^0$, или $n \cdot 360^0 + 270^0$, а $-\infty$ вредност када угао има мало већу вредност од 90^0 или 270^0, котангенс има $+\infty$ вредност када угао тежи вредности 0^0, 360^0 или $n \cdot 360^0$, а $-\infty$ вредност када угао тежи вредности 180^0 или $n \cdot 360^0 + 180^0$.

Мењање тангенса

$tg\ 90^0 = \pm\infty$

$tg\ (n \cdot 360^0 + 90^0) = \pm\infty$

Тангенс је негативан и опада по апсолутној вредности	Тангенс је позитиван и расте
$tg\ 180^0 = 0$, $tg\ (n \cdot 360^0 + 180^0) = 0$	$tg\ 0^0 = 0$, $tg\ n \cdot 360^0 = 0$
Тангенс је позитиван и расте	Тангенс је негативан и опада по апсолутној вредности

$tg\ 270 = \mp\infty$

$tg\ (n \cdot 360^0 + 270^0) = \mp\infty$

Мењање котангенса

$cotg\ 90^0 = 0$

$cotg\ (n \cdot 360^0 + 90^0) = 0$

Котангенс је негативан и расте по апсолутној вредности	Котангенс је позитиван и опада
Котангенс је позитиван и опада	Котангенс је негативан и расте по апсолутној вредности

$cotg\ 180^0 = \mp\infty$

$cotg\ (n \cdot 360^0 + 180^0) = \mp\infty$

$cotg\ 0^0 = \pm\infty$

$cotg\ n \cdot 360^0 = \pm\infty$

$cotg\ 270^0 = 0$

$cotg\ (n \cdot 360^0 + 270^0) = 0$

9. *Примери за вежбу.* Чему су равни изрази:

1) $a\,sin\,0^0 + b\,cos\,0^0 - c\,tg\,180^0$; 2) $a\,cos\,90^0 - b\,tg\,180^0 + c\,cotg\,90^0$;

3) $a^2 sin\,90^0 + 2\,ab\,cos\,180^0 + b^2 cos\,0^0$; 4) $9\,sin\,360^0 + 5\,cotg\,0^0$;

5) $4\,sin\,0^0 + 5\,cos\,90^0 - 6\,tg\,180^0$; 6) $a\,tg\,0^0 + b\,cosec\,90^0 - c\,tg\,180^0 - d\,cotg\,90^0$;

7) $\dfrac{a\,cos\,0^0 - b\,sec\,180^0}{a\,cosec\,90^0 + b\,cosec\,270^0} + \dfrac{a\,sec\,360^0 - b\,cos\,360^0}{(a+b)\,cos\,0^0 - 2a\,sin\,180^0}$

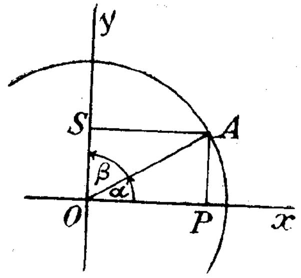
§ 11. Претварање гониометриских функција неоштрих углова у функције оштрих углова и гониометриске функције негативних углова

Ово претварање врши се помоћу образаца који нам показују међусобни однос гониометриских функција комплементних и суплементних углова и углова који се разликују за 90^0, 180^0, 360^0 и $n \cdot 360^0$.

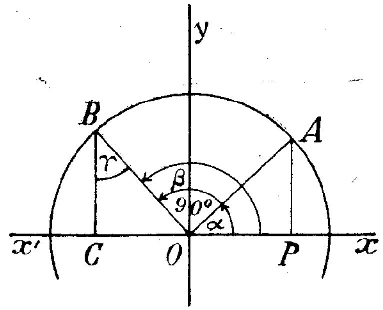
1. ***Међусобни однос функција комплементних углова.*** Из правоугаоника *OPAS* (сл. 16) имамо: $AS = OP$, $OS = AP$ и $\alpha + \beta = 90^0$. Стога је:

$$\begin{aligned} sin\beta &= sin\,(90^0 - \alpha) = AS = OP = cos\alpha, \\ cos\beta &= cos\,(90^0 - \alpha) = OS = AP = sin\alpha, \\ tg\beta &= tg\,(90^0 - \alpha) = \frac{sin\,(90^0 - \alpha)}{cos\,(90^0 - \alpha)} = \frac{cos\alpha}{sin\alpha} = cotg\alpha \\ cotg\beta &= cotg\,(90^0 - \alpha) = \frac{cos\,(90^0 - \alpha)}{sin\,(90^0 - \alpha)} = \frac{sin\alpha}{cos\alpha} = tg\alpha \end{aligned} \quad \ldots (1)$$

Из ових образаца видимо да су функције једнога угла (синус, тангенс) једнаке с кофункцијама (косинус, котангенс) другога угла.



Сл. 16



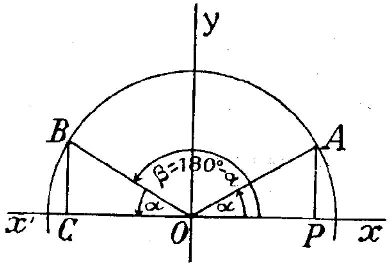
Сл. 17

Примери: 1) $sin\,50^0 = sin\,(90^0 - 40^0) = cos\,40^0$; 2) $cos\,72^0 30' = sin\,17^0 30'$; 3) $tg\,83^0 7' 45'' = cotg\,6^0 52' 15''$; 4) $cotg\,68^0 35' 52'' = tg\,21^0 24' 8''$.

2. ***Међусобни односи функција од два угла који се разликују за 90⁰.*** Овај однос добива се из подударности троуглова OBC и OAP (сл. 17). Подударни су зато што имају по једну страну и углове једнаке ($OA = OB$, $\gamma = \alpha$ пошто су им краци нормални). Из њихове подударности излази да је $BC = OP$ и $OC = AP$. Стога је:

$$\begin{aligned} sin\beta &= sin\,(90^0 + \alpha) = BC = OP = cos\alpha; \\ cos\beta &= cos\,(90^0 + \alpha) = -OC = -AP = -sin\alpha; \\ tg\beta &= tg\,(90^0 + \alpha) = \frac{sin\,(90^0 + \alpha)}{cos\,(90^0 + \alpha)} = \frac{cos\alpha}{-sin\alpha} = -\frac{cos\alpha}{sin\alpha} = -cotg\alpha, \\ cotg\beta &= cotg\,(90^0 + \alpha) = \frac{cos\,(90^0 + \alpha)}{sin\,(90^0 + \alpha)} = \frac{-sin\alpha}{cos\alpha} = -tg\alpha. \end{aligned} \quad \ldots (2)$$

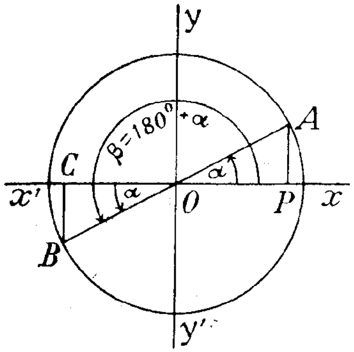
Помоћу ових образаца, функције тупих углова претварамо у функције оштрих углова. *Примери:* 1) $sin\,125^0 = sin(90^0 + 35^0) = cos 35^0$; 2) $cos 150^0 = cos(90^0 + 60^0) = -sin\,60^0$; 3) $tg\,134^0 = tg\,(90^0 + 44^0) = -cotg\,44^0$; 4) $cotg\,122^0 7' 43'' = cotg\,(90^0 + 32^0 7' 43'') = -tg\,32^0 7' 43''$.



Сл. 18

3. ***Међусобни однос функција суплементних углова.*** Овај однос добива се из подударности троуглова *OBC* и *OAP* (сл. 18). Из ове подударности излази да је $BC = AP$ и $OC = OP$. Стога је:

$$\sin\beta = \sin(180^0 - \alpha) = BC = AP = \sin\alpha,$$
$$\cos\beta = \cos(180^0 - \alpha) = -OC = -OP = -\cos\alpha,$$
$$\operatorname{tg}\beta = \operatorname{tg}(180^0 - \alpha) = \frac{\sin(180^0-\alpha)}{\cos(180^0-\alpha)} = \frac{\sin\alpha}{-\cos\alpha} = -\operatorname{tg}\alpha, \qquad \ldots(3)$$
$$\operatorname{cotg}\beta = \operatorname{cotg}(180^0 - \alpha) = \frac{\cos(180^0-\alpha)}{\sin(180^0-\alpha)} = \frac{-\cos\alpha}{\sin\alpha} = -\operatorname{cotg}\alpha$$



Сл. 19

И ови обрасци, као и обрасци под (2), служе да функције тупих углова претворимо у функције оштрих углова.

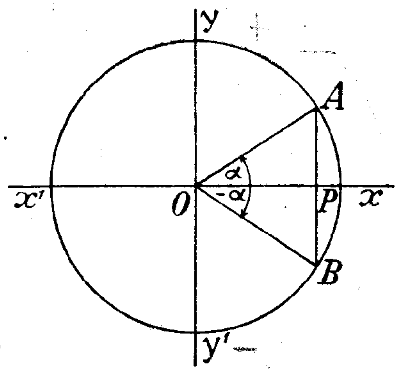
Примери: 1) $\sin 160^0 = \sin(180^0 - 20^0) = \sin 20^0$; 2) $\cos 153^0 50' = -\cos 26^0 10'$; 3) $\operatorname{tg} 136^0 = \operatorname{tg}(180^0 - 44^0) = -\operatorname{tg} 44^0$; 4) $\operatorname{cotg} 170^0 = \operatorname{cotg}(180^0 - 10^0) = -\operatorname{cotg} 10^0$.

4. ***Однос функција двају углова који се разликују за 180°.*** Из подударности троуглова OBC и OAP (сл. 19) излази да је $BC = AP$ и $OC = OP$. Стога је:

$$\sin\beta = \sin(180^0 + \alpha) = -BC = -AP = -\sin\alpha,$$
$$\cos\beta = \cos(180^0 + \alpha) = -OC = -OP = -\cos\alpha,$$
$$\operatorname{tg}\beta = \operatorname{tg}(180^0 + \alpha) = \frac{\sin(180^0+\alpha)}{\cos(180^0+\alpha)} = \frac{-\sin\alpha}{-\cos\alpha} = \operatorname{tg}\alpha, \qquad \ldots(4)$$
$$\operatorname{cotg}\beta = \operatorname{cotg}(180^0 + \alpha) = \frac{\cos(180^0+\alpha)}{\sin(180^0+\alpha)} = \frac{-\cos\alpha}{-\sin\alpha} = \operatorname{cotg}\alpha$$

Помоћу ових образаца функције тупоиспупчених углова претварамо у функције оштрих углова.

Примери: 1) $\sin 200^0 = \sin(180^0 + 20^0) = -\sin 20^0$; 2) $\cos 235^0 = \cos(180^0 + 55^0) = -\cos 55^0$; 3) $\operatorname{tg} 189^0 5' = \operatorname{tg}(180^0 + 9^0 5') = \operatorname{tg} 9^0 5'$; 4) $\operatorname{cotg} 192^0 = \operatorname{cotg}(180^0 + 12^0) = \operatorname{cotg} 12^0$.



Сл. 20

5) ***Однос функција позитивних и негативних* углова који су по апсолутним вредностима једнаки.*** Из подударности троуглова OAP и OBP (сл. 20) излази да је $BP = AP$. Стога је:

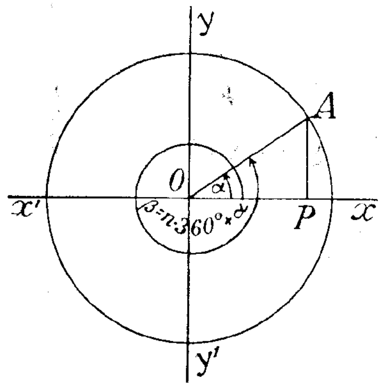
$$\sin(-\alpha) = -BP = -AP = -\sin\alpha,$$
$$\cos(-\alpha) = OP = \cos\alpha,$$
$$\operatorname{tg}(-\alpha) = \frac{\sin(-\alpha)}{\cos(-\alpha)} = \frac{-\sin\alpha}{\cos\alpha} = -\operatorname{tg}\alpha, \qquad \ldots(5)$$
$$\operatorname{cotg}(-\alpha) = \frac{\cos(-\alpha)}{\sin(-\alpha)} = \frac{\cos\alpha}{-\sin\alpha} = -\operatorname{cotg}\alpha.$$

Примери: 1) $\sin(-35^0) = -\sin 35^0$;

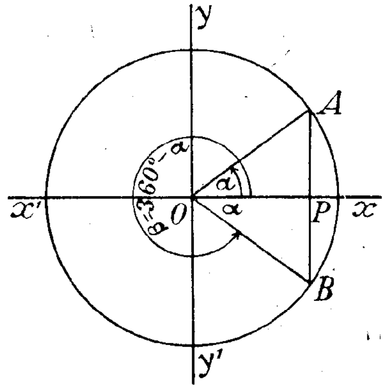
2) $\cos(-147^0) = \cos 147^0 = \cos(180^0 - 33^0) = -\cos 33^0$;

3) $\operatorname{tg}(-100^0) = -\operatorname{tg} 100^0 = -\operatorname{tg}(90^0 + 10^0) = -(-\operatorname{cotg} 10^0) = \operatorname{cotg} 10^0$; 4) $\operatorname{cotg}(-50^0) = -\operatorname{cotg} 50^0$.

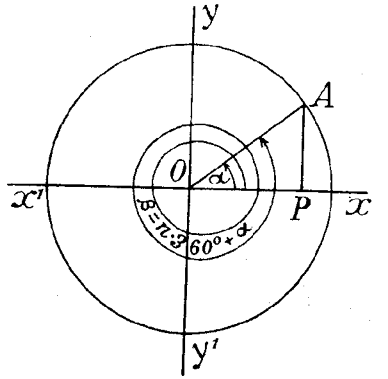
* *Позитиван* је онај угао који постаје обртањем зрака у смислу који је супротан кретању сказаљки на часовнику, а *негативан* је угао који постаје обртањем зрака у смислу кретања сказаљки на часовнику.



Сл. 21



Сл. 22



Сл. 23

6) ***Однос функција двају углова који се допуњују до 360°.*** Из подударности троуглова OAP и OBP (сл. 22) излази да је $BP = AP$. Стога је:

$$\begin{aligned}
\sin\beta &= \sin(360^0-\alpha) = -BP = -AP = -\sin\alpha,\\
\cos\beta &= \cos(360^0-\alpha) = OP = \cos\alpha,\\
tg\,\beta &= tg(360^0-\alpha) = \frac{\sin(360^0-\alpha)}{\cos(360^0-\alpha)} = \frac{-\sin\alpha}{\cos\alpha} = -tg\,\alpha,\\
cotg\,\beta &= cotg(360^0-\alpha) = \frac{\cos(360^0-\alpha)}{\sin(360^0-\alpha)} = \frac{\cos\alpha}{-\sin\alpha} = -cotg\,\alpha.
\end{aligned} \qquad \ldots(6)$$

Помоћу ових образаца функције оштроиспупчених углова претварамо у функције оштрих углова.

Примери: 1) $\sin 340^0 = \sin(360^0 - 20^0) = -\sin 20^0$; 2) $\cos 280^0 = \cos(360^0 - 80^0) = \cos 80^0 = \sin 10^0$; 3) $tg\,310^0 = tg(360^0 - 50^0) = -tg\,50^0$; 4) $cotg\,325^0 = -cotg\,35^0$.

7. ***Однос функција двају углова који се разликују за 360°*** Из сл. 21 имамо:

$$\begin{aligned}
\sin\beta &= \sin(360^0+\alpha) = AP = \sin\alpha,\\
\cos\beta &= \cos(360^0+\alpha) = OP = \cos\alpha,\\
tg\,\beta &= tg(360^0+\alpha) = \frac{AP}{OP} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = tg\,\alpha,\\
cotg\,\beta &= cotg(360^0+\alpha) = \frac{OP}{AP} = cotg\,\alpha.
\end{aligned} \qquad \ldots(7)$$

Примери: 1) $\sin 385^0 = \sin(360^0 + 25^0) = \sin 25^0$; 2) $\cos 400^0 = \cos(360^0 + 40^0) = \cos 40^0$; 3) $tg\,500^0 = tg(360^0 + 140^0) = tg\,140^0 = tg(180^0 - 40^0) = -tg\,40^0$); 4) $cotg\,600^0 = cotg(360^0 + 240^0) = cotg\,240^0 = cotg(180^0 + 60^0) = cotg\,60^0 = tg\,30^0$.

8. ***Однос функција двају углова који се разликују за n·360°.*** Из сл. 23 имамо:

$$\begin{aligned}
\sin\beta &= \sin(n\cdot 360^0+\alpha) = AP = \sin\alpha,\\
\cos\beta &= \cos(n\cdot 360^0+\alpha) = OP = \cos\alpha,\\
tg\,\beta &= tg(n\cdot 360^0+\alpha) = \frac{\sin(n\cdot 360^0+\alpha)}{\cos(n\cdot 360^0+\alpha)} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = tg\,\alpha\\
cotg\,\beta &= cotg(n\cdot 360^0+\alpha) = \frac{\cos(n\cdot 360^0+\alpha)}{\sin(n\cdot 360^0+\alpha)} = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = cotg\,\alpha.
\end{aligned} \qquad \ldots(8)$$

Помоћу образаца (7) и (8) претварамо функције углова већих од 360° у функције оштрих углова.

Примери: 1) $\sin 750^0 = \sin(2\cdot 360^0 + 30^0) = \sin 30^0$; 2) $\cos 1130^0 = \cos(3\cdot 360^0 + 50^0) = \cos 50^0 = \sin 40^0$; 3) $tg\,1463^0 = tg(4\cdot 360^0 + 23^0) = tg\,23^0$; 4) $cotg\,2000^0 = cotg(5\cdot 360^0 + 200^0) = cotg\,200^0 = cotg(180^0 + 20^0) = cotg\,20^0$. Уопште, применом образаца из овога параграфа претварамо функције неоштрих углова у функције оштрих углова. Ово је потребно урадити, јер се у логаритамским таблицама налазе само логаритми функција оштрих углова.

9. *Примери за вежбу.* Изрази функцијама оштрих углова следеће функције:

1. $\sin 128^0$; 2. $\cos 139^0$; 3. $tg\,91^0$; 4. $cotg\,163^0$; 5. $\sin 205^0$; 6. $\cos 288^0$; 7. $tg\,139^0$; 8. $cotg\,315^0$; 9. $\sin 430^0$; 10. $\cos 538^0$; 11. $tg\,620^0 35' 7''$; 12. $cotg\,726^0 40' 62''$; 13. $\sin 98^0 12' 50''$; 14. $\cos 110^0 9' 30''$; 15. $tg\,159^0 9' 30''$; 16. $\sin 1144^0 7' 50''$; 17. $\cos 1930^0 50' 20''$; 18. $tg\,1283^0 40' 50''$; 19. $cotg\,3000^0 17' 40''$; 20. $\cos 2500^0 35' 42''$;

Упростити следеће изразе: 21. $n\cdot\dfrac{\sin\alpha\; tg(180^0+\alpha)}{tg\,\alpha\;\cos(90^0-\alpha)}$;

22. $\dfrac{(a^2-b^2)\,cotg(180^0-\alpha)}{tg(90^0-\alpha)}\cdot\dfrac{(a^2+b^2)\,tg(90^0-\alpha)}{cotg(180^0-\alpha)}$;

23. $\dfrac{\sin(90^0+\alpha)\cos(90^0-\alpha)}{\cos(180^0+\alpha)} + \dfrac{\sin(180^0-\alpha)\cos(90^0+\alpha)}{\sin(180^0+\alpha)}$;

24. $\dfrac{tg(180^0+\alpha)\,\sin(90^0+\alpha)\,cotg\,\alpha}{\sin(90^0-\alpha)\,cotg(180^0+\alpha)\,tg(180^0-\alpha)}$;

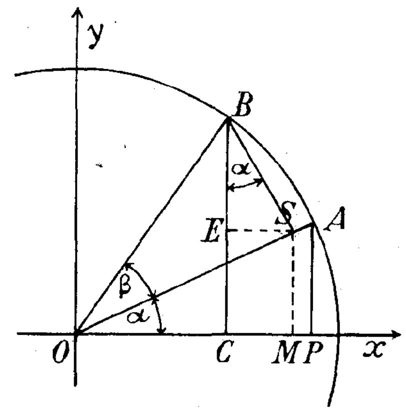
25. $\dfrac{tg(90^0+\alpha)\cos(360^0-\alpha)\cos(-\alpha)}{cotg(180^0+\alpha)\sin(360^0+\alpha)}$;

26. Доказати да је $\dfrac{cotg\,52^0\cdot cotg\,38^0}{tg\,44^0\cdot tg\,45^0} = cotg\,44^0$.

27. Наћи вредности функција углова од 120°, 135° и 150°.

§ 12. Гониометриске функције збира двају углова

Претпоставимо да углови α и β (сл. 24) дају збир који је мањи од 90° и $BS \perp OA$, $SM \perp OX$ и $SE \parallel OX$. Тада је: $AP = \sin\alpha$, $OP = \cos\alpha$, $BS = \sin\beta$ и $OS = \cos\beta$, $BC = \sin(\alpha+\beta)$ и $OC = \cos(\alpha+\beta)$. Стога је:



Сл. 24

1) $\sin(\alpha+\beta) = BC = CE + BE = MS + BE$ и

2) $\cos(\alpha+\beta) = OC = OM - CM = OM - ES$.

Да бисмо нашли, дакле, $\sin(\alpha+\beta)$ и $\cos(\alpha+\beta)$, треба да нађемо вредности количина: MS, BE, OM и ES. Ове количине налазимо из троуглова OMS и BES којима припадају. Из $\triangle OMS$ имамо:

a) $\dfrac{MS}{OS} = \sin\alpha$, а

$$MS = \sin\alpha \cdot OS = \sin\alpha \cdot \cos\beta; \text{ и } b)\ \frac{OM}{OS} = \cos\alpha,$$

а $OM = \cos\alpha \cdot OS = \cos\alpha \cos\beta$. Из $\triangle\, BES$ имамо: $c)\ \dfrac{BE}{BS} = \cos\alpha$, а $BE = \cos\alpha \cdot BS = \cos\alpha\ \sin\beta$; и $d)\ \dfrac{ES}{BS} = \sin\alpha$, а $ES = \sin\alpha \cdot BS = \sin\alpha \sin\beta$.

Заменом у једначинама (1) и (2) добијамо:

$$\boldsymbol{\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\ \cos\beta + \cos\alpha\ \sin\beta} \ \ldots\ldots (1)$$
$$\boldsymbol{\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\ \cos\beta - \sin\alpha\ \sin\beta} \ \ldots\ldots (2)$$

Обрасце за $tg\ (\alpha+\beta)$ и $cotg\ (\alpha+\beta)$ налазимо из образаца (1) и (2) уз помоћ 4-ог основног обрасца. Тако имамо

$$tg\ (\alpha+\beta) = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)} = \frac{\sin\alpha\ \cos\beta + \cos\alpha\ \sin\beta}{\cos\alpha\ \cos\beta - \sin\alpha\ \sin\beta} \text{ и}$$

$$cotg\ (\alpha+\beta) = \frac{\cos(\alpha+\beta)}{\sin(\alpha+\beta)} = \frac{\cos\alpha\ \cos\beta - \sin\alpha\ \sin\beta}{\sin\alpha\ \cos\beta + \cos\alpha\ \sin\beta}.$$

Ако поделимо и бројитељ и именитељ првог разломка са $\cos\alpha\ \cos\beta$, а другога разломка са $\sin\alpha\ \sin\beta$, добијамо:

$$\boldsymbol{tg\ (\alpha+\beta) = \frac{tg\,\alpha + tg\,\beta}{1 - tg\,\alpha\ tg\,\beta}} \ldots (3) \text{ и } \boldsymbol{cotg\ (\alpha+\beta) = \frac{cotg\,\alpha\ cotg\,\beta - 1}{cotg\,\beta + cotg\,\alpha}} \ldots (4)$$

Напомена. Обрасци за функције збира двају углова не само да важе за услов: $\alpha + \beta < 90^0$, већ и за ма какве углове α и β, о чему се можемо уверити овако:

a) Претпоставимо најпре да су углови α и β, оштри углови чији је збир већи од 90^0 и да су углови α' и β' њихови комплементни углови. Тада је $\alpha' + \beta' < 90^0$, те према горњим обрасцима имамо:

$$\sin(\alpha'+\beta') = \sin\alpha'\ \cos\beta' + \cos\alpha'\ \sin\beta';$$
$$\cos(\alpha'+\beta') = \cos\alpha'\ \cos\beta' - \sin\alpha'\ \sin\beta';$$

$$tg\ (\alpha'+\beta') = \frac{tg\,\alpha' + tg\,\beta'}{1 - tg\,\alpha'\ tg\,\beta'}, \text{ и } cotg\ (\alpha'+\beta') = \frac{cotg\,\alpha'\ cotg\,\beta' - 1}{cotg\,\beta' + cotg\,\alpha'}.$$

Заменом у овим обрасцима α' и β' са њиховим вредностима $90^0 - \alpha$ и $90^0 - \beta$ и применом образаца за међусобни однос комплементних и суплементних углова (§ 11, 1 и 3), добијамо сва четири обрасца за функције збира двају углова.

b) Ако претпоставимо да је угао α туп, а угао β оштар и ако је $\alpha = 90^0 + \alpha'$, где је α' један оштар угао, онда је:

m) $\sin(\alpha+\beta) = \sin(90^0 + \alpha' + \beta') = \cos(\alpha' + \beta) = \cos\alpha'\ \cos\beta - \sin\alpha'\ \sin\beta$ и *n)* $\cos(\alpha+\beta) = \cos(90^0 + \alpha' + \beta) = -\sin(\alpha'+\beta) = -\sin\alpha'\ \cos\beta - \cos\alpha'\ \sin\beta$. Па како је $\alpha = 90^0 + \alpha'$, или $-\alpha' = 90^0 - \alpha$, а $\sin(-\alpha') = \sin(90^0 - \alpha)$, или $-\sin\alpha' = \cos\alpha$ и $\cos(-\alpha') = \cos(90^0 - \alpha)$, или $\cos\alpha' = \sin\alpha$, то је заменом у *m)* и *n)*:

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\ \cos\beta + \cos\alpha\ \sin\beta \text{ и } \cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\ \cos\beta - \sin\alpha\ \sin\beta.$$

c) Ако претпоставимо да су углови α и β тупи, а α' и β' њихови суплементни углови, онда је према *a):*

p) $\sin(\alpha'+\beta') = \sin\alpha'\ \cos\beta' + \cos\alpha'\ \sin\beta'$ и *q)* $\cos(\alpha'+\beta') = \cos\alpha'\ \cos\beta' - \sin\alpha'\ \sin\beta'$. Заменом $\alpha' = 180^0 - \alpha$ и $\beta' = 180^0 - \beta$ у *p)* и *q)* добијамо опет: $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\ \cos\beta + \cos\alpha\ \sin\beta$ и $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\ \cos\beta - \sin\alpha\ \sin\beta$.

§ 13. Гониометриске функције разлике двају углова

Како је $\alpha = (\alpha - \beta) + \beta$, то је по обрасцима за функције збира двају углова:

a) $\sin\alpha = \sin[(\alpha-\beta) + \beta] = \sin(\alpha-\beta)\ \cos\beta + \cos(\alpha-\beta)\ \sin\beta$ и

b) $\cos\alpha = \cos[(\alpha-\beta) + \beta] = \cos(\alpha-\beta)\ \cos\beta - \sin(\alpha-\beta)\ \sin\beta$.

Да бисмо нашли, дакле, $\sin(\alpha-\beta)$ и $\cos(\alpha-\beta)$, треба да решимо једначине *a)* и *b)*, сматрајући као непознате количине $\sin(\alpha-\beta)$ и $\cos(\alpha-\beta)$, а имајући на уму да је:

$$\sin^2\beta + \cos^2\beta = 1.$$

Ако једначину *a)* помножимо са $\cos\beta$, а једначину *b)* са $-\sin\beta$, добијамо:

c) $\sin\alpha\ \cos\beta = \sin(\alpha-\beta)\ \cos^2\beta + \cos(\alpha-\beta)\ \sin\beta\ \cos\beta$ и

d) $-\cos\alpha\ \sin\beta = -\cos(\alpha-\beta)\ \sin\beta\ \cos\beta + \sin(\alpha-\beta)\sin^2\beta$.

Сабирањем ових двеју једначина добијамо:

$$\sin\alpha\ \cos\beta - \cos\alpha\ \sin\beta = \sin(\alpha-\beta)\ [\sin^2\beta + \cos^2\beta], \text{ или}$$

$$\boldsymbol{\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\ \cos\beta - \cos\alpha\ \sin\beta} \ \ldots (1)$$

Ако једначину *a)* помножимо са $\sin\beta$, а једначину *b)* са $\cos\beta$, добијамо:

e) $\sin\alpha\ \sin\beta = \sin(\alpha-\beta)\cos\beta\ \sin\beta + \cos(\alpha-\beta)\ \sin^2\beta$ и

f) $\cos\alpha\ \cos\beta = \cos(\alpha-\beta)\ \cos^2\beta - \sin(\alpha-\beta)\ \sin\beta\ \cos\beta$.

Сабирањем ових двеју једначина добијамо:

$$\boldsymbol{\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\ \cos\beta + \sin\alpha\ \sin\beta} \ \ldots (2)$$

Тада је:

$$tg\ (\alpha-\beta) = \frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha-\beta)} = \frac{\sin\alpha\ \cos\beta - \cos\alpha\ \sin\beta}{\cos\alpha\ \cos\beta + \sin\alpha\ \sin\beta} \text{ и}$$

$$cotg\ (\alpha-\beta) = \frac{\cos(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha-\beta)} = \frac{\cos\alpha\ \cos\beta + \sin\alpha\ \sin\beta}{\sin\alpha\ \cos\beta - \cos\alpha\ \sin\beta}$$

Ако поделимо и бројитељ и именитељ првога разломка са $\cos\alpha\ \cos\beta$, а другога са $\sin\alpha\ \sin\beta$, добијамо:

$$\boldsymbol{tg\ (\alpha-\beta) = \frac{tg\,\alpha - tg\,\beta}{1 + tg\,\alpha\ tg\,\beta}} \ldots (3) \text{ и } \boldsymbol{cotg\ (\alpha-\beta) = \frac{cotg\,\alpha\ cotg\,\beta + 1}{cotg\,\beta - cotg\,\alpha}} \ldots (4)$$

Напомена. Сва четири обрасца за функције разлике двају углова можемо брже и лакше добити из одговарајућих образаца за функције збира двају углова, замењујући свуда угао $+\beta$ углом $-\beta$.

Задаци за вежбу из § 11 и § 13:

1. Кад је $\sin\alpha = \dfrac{3}{4}$ и $\sin\beta = \dfrac{2}{3}$, наћи $\sin(\alpha \pm \beta)$ и $\cos(\alpha \pm \beta)$.
2. Наћи $\sin 75^0$ и $\cos 75^0$, кад се зна да је $75^0 = 45^0 + 30^0$.
3. Наћи $\sin 105^0$ и $\cos 105^0$, кад се зна да је $105^0 = 60^0 + 45^0$.
4. Кад је $tg\,\alpha = 2$ и $tg\,\beta = \dfrac{2}{3}$, наћи $tg\,(\alpha+\beta)$ и $tg\,(\alpha-\beta)$.

5. Кад је $tg\,\alpha = \sqrt{3}$ и $tg\,\beta = \frac{\sqrt{3}}{3}$, наћи $tg\,(\alpha+\beta)$ и $tg\,(\alpha-\beta)$.

6. Кад је $\sin 30^0 = \frac{1}{2}$ и $\sin 36^0 = \frac{1}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$, наћи $\sin 6^0$ и $\sin 84^0$.

7. Кад је $\sin 30^0 = \frac{1}{2}$ и $\sin 18^0 = \frac{1}{4}(\sqrt{5}-1)$, наћи $\sin 12^0$ и $\sin 48^0$.

8. Наћи: a) $\sin(\alpha+\beta+\gamma)$; b) $\cos(\alpha+\beta+\gamma)$; c) $\cos(\alpha+\beta-\gamma)$.

§ 14. Функције удвојених углова

Обрасце за функције удвојених углова изводимо из образаца за функције збира двају углова, претпостављајући да је угао β једнак углу α. Заменом у тим обрасцима угла β са углом α добијамо:

$$\sin(\alpha+\alpha) = \sin\alpha\cos\alpha + \cos\alpha\sin\alpha, \text{ или } \mathbf{\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha} \ldots (1).$$

$$\cos(\alpha+\alpha) = \cos\alpha\cos\alpha - \sin\alpha\sin\alpha, \text{ или } \mathbf{\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha} \ldots (2).$$

$$tg\,(\alpha+\alpha) = \frac{tg\,\alpha + tg\,\alpha}{1 - tg\,\alpha\, tg\,\alpha}, \quad \text{или } \mathbf{tg\,2\alpha = \frac{2\,tg\,\alpha}{1-tg^2\,\alpha}} \ldots\ldots (3).$$

$$cotg\,(\alpha+\alpha) = \frac{cotg\,\alpha\, cotg\,\alpha - 1}{cotg\,\alpha + cotg\,\alpha}, \text{ или } \mathbf{cotg\,2\alpha = \frac{cotg^2\,\alpha - 1}{2\,cotg\,\alpha}} \ldots (4).$$

Помоћу ових образаца налазимо функције удвојених углова када је позната ма која функција угла. Ако у обрасцима за функције збира двају углова заменимо угао β са 2α, 3α, 4α итд., налазимо чему су једнаке функције углова од 3α, 4α, 5α, итд.

Пример. Наћи функције угла 2α када је $\sin\alpha = \frac{3}{5}$, а угао α оштар. Употребом основних образаца најпре налазимо да је: $\cos\alpha = \frac{4}{5}$, $tg\,\alpha = \frac{3}{4}$ и $cotg\,\alpha = \frac{4}{3}$. Заменом у обрасцима за функције удвојених углова добијамо: $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha =$

$$= 2\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{4}{5} = \frac{24}{25}; \quad \cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \frac{16}{25} - \frac{9}{25} = \frac{7}{25};$$

$$tg\,2\alpha = \frac{2\,tg\,\alpha}{1-tg^2\alpha} = \frac{2\cdot\frac{3}{4}}{1-\frac{9}{16}} = 3\frac{3}{7}; \text{ и } \quad cotg\,2\alpha = \frac{cotg^2\,\alpha - 1}{2\,cotg\,\alpha} =$$

$$= \frac{\frac{16}{9}-1}{2\cdot\frac{4}{9}} = \frac{7}{24}.$$

Разуме се да бисмо могли добити вредности за $\cos 2\alpha$, $tg\,2\alpha$ и $cotg\,2\alpha$ и из вредности $\sin 2\alpha = \frac{24}{25}$ употребом основних образаца.

Напомена. На основи образаца за функције удвојених углова тачни су и следећи обрасци:

$$1)\ \sin\alpha = 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}; \quad 2)\ \cos\alpha = \cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2};$$

$$3)\ tg\,\alpha = \frac{2tg\,\frac{\alpha}{2}}{1-tg^2\frac{\alpha}{2}}; \text{ и } 4)\ cotg\,\alpha = \frac{cotg^2\frac{\alpha}{2} - 1}{2\,cotg\,\frac{\alpha}{2}}.$$

Задаци за вежбу:

1. Наћи $\sin 2\alpha$ када је $\sin\alpha = \frac{1}{2}$.
2. Наћи $\sin 2\alpha$ „ „ $\cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$.
3. Наћи $\cos 2\alpha$ „ „ $\cos\alpha = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$.
4. Наћи $\cos 2\alpha$ „ „ $\sin\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$.
5. Наћи $tg\,2\alpha$ „ „ $tg\,\alpha = 3$.
6. Наћи $cotg\,2\alpha$ „ „ $tg\,\alpha = \frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}$.
7. Наћи $cosec\,2\alpha$ „ „ $cotg\,\alpha = \frac{1}{3}$. (Bacc. — Paris).
8. Наћи $\sin\alpha$ „ „ $tg\,\frac{\alpha}{2} = 2-\sqrt{3}$. (Bacc. — Paris).
9. Наћи $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$ „ „ $tg\,\frac{\alpha}{2} = \sqrt{2}-1$. (Sorbonne).

§ 15. Функције полууглова

По првом основном обрасцу имамо:

$$1 = \sin^2\frac{\alpha}{2} + \cos^2\frac{\alpha}{2} \cdots (a),$$

а према другом обрасцу из функција удвојених углова имамо:

$$\cos\alpha = \cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2} \cdots (b).$$

Сабирањем једначина (a) и (b) добијамо:

$$1+\cos\alpha = 2\cos^2\frac{\alpha}{2}, \text{ а одавде } \mathbf{\cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}} \ldots (1)$$

$$1-\cos\alpha = 2\sin^2\frac{\alpha}{2}, \text{ а одавде } \mathbf{\sin\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}} \ldots (2)$$

Тада је:

$$\mathbf{tg\,\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}} \ldots (3) \text{ и}$$

$$\operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2}=\frac{\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}}\quad(4)$$

Напомена. Пред кореном узимамо или само позитивни или само негативни знак. То једино зависи од угла $\frac{\alpha}{2}$. Ако је $\frac{\alpha}{2}$ оштар угао, онда узимамо само позитивне знакове; ако је $\frac{\alpha}{2}$ туп, онда се узима само позитиван знак $\sin\frac{\alpha}{2}$; а за остале функције негативан; ако је тупоиспупчен, онда се за $\sin\frac{\alpha}{2}$ и $\cos\frac{\alpha}{2}$ узима негативан, а за $tg\frac{\alpha}{2}$ и $\operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2}$ позитиван знак; ако је оштроиспупчен, онда се узима за $\cos\frac{\alpha}{2}$ позитиван, а за остале функције негативан знак.

Задаци за вежбу (узми да је угао α оштар!)

1. Кад је $\cos\alpha=0{,}85742$, наћи $\sin\frac{\alpha}{2}$ и $\cos\frac{\alpha}{2}$ (са 3 дец.).
2. Кад је $\cos\alpha=0{,}4$, наћи $tg\frac{\alpha}{2}$ (са 3 дец.).
3. Кад је $\cos\alpha=\frac{\sqrt{2}}{2}$, наћи $\operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2}$.
4. Кад је $\sin 30^0=\frac{1}{2}$, наћи $\sin 15^0$ и $\cos 15^0$.
5. Кад је $tg\,\alpha=0{,}8$, наћи $tg\frac{\alpha}{2}$ и $\operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2}$.
6. Наћи $tg\,22^0 30'$ и $\sin 22^0 30'$.

§ 16. Претварање збирова и разлика гониометриских функција у производ ради њиховог логаритмовања

Претпоставимо да је $\measuredangle p+\measuredangle q=\alpha$ и $\measuredangle p-\measuredangle q=\beta$. Сабирањем и одузимањем ових двеју једначина добијамо:

$$p=\frac{\alpha+\beta}{2}\ \text{и}\ q=\frac{\alpha-\beta}{2}.\ \text{Тада је:}$$

1) $\sin\alpha+\sin\beta=\sin(p+q)+\sin(p-q)=\sin p\cos q+\cos p\sin q+$ $+\sin p\cos q-\cos p\sin q=2\sin p\cos q=\mathbf{2\sin}\frac{\alpha+\beta}{2}\mathbf{\cos}\frac{\alpha-\beta}{2}\ldots(1)$

Пример: $\sin 50^0+\sin 20^0=2\sin 35^0\cos 15^0$.

2) $\sin\alpha-\sin\beta=\sin(p+q)-\sin(p-q)=\sin p\cos q+$ $+\cos p\sin q-\sin p\cos q+\cos p\sin q=2\cos p\sin q=$

$$=\mathbf{2\cos}\frac{\alpha+\beta}{2}\mathbf{\sin}\frac{\alpha-\beta}{2}\ldots(2)$$

Пример: $\sin 80^0-\sin 50^0=2\cos 65^0\sin 15^0$.

3) $\cos\alpha+\cos\beta=\cos(p+q)+\cos(p-q)=\cos p\cos q-\sin p\sin q+$ $+\cos p\cos q+\sin p\sin q=2\cos p\cos q=\mathbf{2\cos}\frac{\alpha+\beta}{2}\mathbf{\cos}\frac{\alpha-\beta}{2}\cdots(3)$

Пример: $\cos 57^0 25'+\cos 42^0 7'=2\cos 49^0 46'\cos 7^0 39'$.

4) $\cos\alpha-\cos\beta=\cos(p+q)-\cos(p-q)=\cos p\cos q-\sin p\sin q-$ $-\cos p\cos q-\sin p\sin q=-2\sin p\sin q=\mathbf{-2\sin}\frac{\alpha+\beta}{2}\mathbf{\sin}\frac{\alpha-\beta}{2}\ (4)$

Пример: $\cos 80^0-\cos 120^0=-2\sin 100^0\cdot\sin(-20^0)=$ $=2\cos 10^0\sin 20^0$.

5) $tg\,\alpha\pm tg\,\beta=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\pm\frac{\sin\beta}{\cos\beta}=\frac{\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}=\frac{\mathbf{\sin}(\alpha\pm\beta)}{\mathbf{\cos\alpha\cos\beta}}\ (5)$

Примери: 1) $tg\,20^0+tg\,35^0=\frac{\sin 55^0}{\cos 20^0\cos 35^0}$;

2) $tg\,43^0-tg\,18^0=\frac{\sin 25^0}{\cos 43^0\cos 18^0}$.

6) $\operatorname{cotg}\alpha\pm\operatorname{cotg}\beta=\frac{\cos\alpha}{\sin\beta}\pm\frac{\cos\beta}{\sin\alpha}=\frac{\sin\beta\cos\alpha\pm\cos\beta\sin\alpha}{\sin\alpha\sin\beta}=$ $=\frac{\mathbf{\sin}(\beta\pm\alpha)}{\mathbf{\sin}\alpha\,\mathbf{\sin}\beta}\ (6)$

Примери: 1) $\operatorname{cotg}42^0+\operatorname{cotg}57^0=\frac{\sin 99^0}{\sin 42^0\sin 57^0}=\frac{\cos 9^0}{\sin 42^0\sin 57^0}$

2) $\operatorname{cotg}58^0-\operatorname{cotg}70^0=\frac{\sin 12^0}{\sin 53^0\sin 70^0}$.

7. ***Напомена.*** На основи горњих образаца претварамо у производе и следеће збирове и разлике:

a) $1+\sin\alpha=\sin 90^0+\sin\alpha=2\sin\left(45^0+\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(45^0-\frac{\alpha}{2}\right)$;

b) $1-\sin\alpha=\sin 90^0-\sin\alpha=2\cos\left(45^0+\frac{\alpha}{2}\right)\sin\left(45^0-\frac{\alpha}{2}\right)$;

c) $1+\cos\alpha=\cos 0^0+\cos\alpha=2\cos\frac{\alpha}{2}\cos\left(-\frac{\alpha}{2}\right)=2\cos^2\frac{\alpha}{2}$;

d) $1-\cos\alpha=\cos 0^0-\cos\alpha=-2\sin\frac{\alpha}{2}\sin\left(-\frac{\alpha}{2}\right)=2\sin^2\frac{\alpha}{2}$;

e) $\cos\alpha+\sin\beta=\cos\alpha+\cos(90^0-\beta)=$ $=2\cos\frac{90^0+\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta-90^0}{2}$;

f) $tg\,\alpha+\operatorname{cotg}\beta=tg\,\alpha+tg(90^0-\beta)=\frac{\sin(90^0+\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos(90^0-\beta)}=$ $=\frac{\sin(90^0+\alpha-\beta)}{\cos\alpha\sin\beta}$; $=\frac{\cos(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\sin\beta}$

g) $\underset{\smile}{tg\,\alpha+\sin\alpha}=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\sin\alpha=\frac{\sin\alpha\,(1+\cos\alpha)}{\cos\alpha}=\frac{2\sin\alpha\cos^2\frac{\alpha}{2}}{\cos\alpha}=$

$=2\;tg\,\alpha\cos^2\frac{\alpha}{2}$;

m) $\sec\alpha+\operatorname{cosec}\alpha=\frac{1}{\cos\alpha}-\frac{1}{\sin\alpha}=\frac{\sin\alpha+\cos\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha}=$

$=\frac{\sin\alpha+\sin(90^0-\alpha)}{\sin\alpha\cos\alpha}=\frac{2\sin 45^0\cos(\alpha-45^0)}{\sin\alpha\cos\alpha}$; и

n) $\sec\alpha+tg\,\alpha=\frac{1}{\cos\alpha}+\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{1+\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{\sin 90^0+\sin\alpha}{\cos\alpha}=$

$=\frac{2\sin(45^0+\frac{\alpha}{2})\cos(45^0-\frac{\alpha}{2})}{\cos\alpha}$.

8. *Задаци за вежбу*

Претворити у производе следеће збирове и разлике:

1. $\sin 40^0\,12'+\sin 26^0 7'$;
2. $\cos 32^0 18' 14''+\cos 26^0 19' 13''$;
3. $\sin 72^0-\cos 60^0$;
4. $\cos 19^0\,13'-\cos 38^0\,14'$;
5. $tg 17^0 13' 14''+tg 24^0 24' 38''$;
6. $tg\,65^0\,13'-tg\,18^0\,43'$;
7. $cotg\,18^0\,13'+cotg\,56^0\,13'\,24''$;
8. $cotg\,50^0\,18'\,14''-tg\,18^0\,27'$;
9. $tg\,(45^0+\alpha)-tg\,(45^0-\alpha)$;
10. $\sin 105^0+\sin 75^0$;
11. $\cos 15^0-\sin 15^0$;
12. $tg\,\alpha-\sin\alpha$;
13. $\sec\alpha-\operatorname{cosec}\alpha$;
14. $\sec\alpha-tg\,\alpha$;
15. $1+\sin 20^0\,32'\,44''$;
16. $1-\sin 30^0\,45'\,17''$;
17. $1+\cos 18^0\,4'\,50''$;
18. $1-\cos 64^0\,56'\,48''$;
19. $1+tg\,43^0\,9'\,6''$;
20. $1-tg\,8^0\,5'\,8''$;
21. $1+cotg\,77^0\,31'\,26''$; и
22. $1-cotg\,52^0\,15'\,24''$.

§ 17. Условни обрасци за претварање збирова и разлика гониометриских функција у производ

Ови обрасци имају врло честу примену при решавању сложенијих задатака у равној тригонометрији, те их стога овде помињемо и доказујемо. Ти обрасци, за услов $\alpha+\beta+\gamma=$ $=180^0$, јесу:

1) $\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma=4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}$;

2) $\sin\alpha+\sin\beta-\sin\gamma=4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}$;

3) $\cos\frac{\alpha}{2}+\cos\frac{\beta}{2}+\cos\frac{\gamma}{2}=4\cos\frac{\alpha+\beta}{4}\cos\frac{\alpha+\gamma}{4}\cos\frac{\beta+\gamma}{4}$;

4) $tg\alpha+tg\beta+tg\gamma=tg\alpha\,tg\beta\,tg\gamma$;

5) $cotg\frac{\alpha}{2}+cotg\frac{\beta}{2}+cotg\frac{\gamma}{2}=cotg\frac{\alpha}{2}cotg\frac{\beta}{2}cotg\frac{\gamma}{2}$; и

6) $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma+2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma=1$.

Докази условних образаца. Како је $\alpha+\beta+\gamma=180^0$, то је $\frac{\alpha+\beta}{2}=90^0-\frac{\gamma}{2}$, $\sin\frac{\alpha+\beta}{2}=\sin\left(90^0-\frac{\gamma}{2}\right)=\cos\frac{\gamma}{2}$ и $\cos\frac{\alpha+\beta}{2}=\cos\left(90^0-\frac{\gamma}{2}\right)=\sin\frac{\gamma}{2}$. Тада је:

1) $\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma=(\sin\alpha+\sin\beta)+\sin\gamma=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}+$ $+2\sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\gamma}{2}=2\cos\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}+2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}=$ $=2\cos\frac{\gamma}{2}\left(\cos\frac{\alpha-\beta}{2}+\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\right)=2\cos\frac{\gamma}{2}\;2\cos\frac{\alpha}{2}\cos\left(-\frac{\beta}{2}\right)=$ $=4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}$.

2) $\sin\alpha+\sin\beta-\sin\gamma=(\sin\alpha+\sin\beta)-\sin\gamma=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}-$ $-2\sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\gamma}{2}=2\cos\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}-2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}=$ $=2\cos\frac{\gamma}{2}\left(\cos\frac{\alpha-\beta}{2}-\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\right)=2\cos\frac{\gamma}{2}\cdot-2\sin\frac{\alpha}{2}\sin\left(-\frac{\beta}{2}\right)=$ $=4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}$.

3) Како је $\frac{\alpha}{2}=90^0-\frac{\beta+\gamma}{2}$, $\frac{\beta}{2}=90^0-\frac{\alpha+\gamma}{2}$ и $\frac{\gamma}{2}=90^0-\frac{\alpha+\beta}{2}$, то је према обрасцима за функције комплементних углова: $\cos\frac{\alpha}{2}=\sin\frac{\beta+\gamma}{2}$, $\cos\frac{\beta}{2}=\sin\frac{\alpha+\gamma}{2}$ и $\cos\frac{\gamma}{2}=\sin\frac{\alpha+\beta}{2}$. Сем овога, збир углова: $\frac{\alpha+\beta}{2}$, $\frac{\alpha+\gamma}{2}$ и $\frac{\beta+\gamma}{2}$ износи 180^0. Стога је $\cos\frac{\alpha}{2}+\cos\frac{\beta}{2}+\cos\frac{\gamma}{2}=\sin\frac{\beta+\gamma}{2}+\sin\frac{\alpha+\gamma}{2}+\sin\frac{\alpha+\beta}{2}=$ $=4\cos\frac{\beta+\gamma}{4}\cos\frac{\alpha+\gamma}{4}\cos\frac{\alpha+\beta}{4}=4\cos\frac{\alpha+\beta}{4}\cos\frac{\alpha+\gamma}{4}\cos\frac{\beta+\gamma}{4}$.

4. Како је $\alpha+\beta=180^0-\gamma$, то је $tg(\alpha+\beta)=tg(180^0-\gamma)=-tg\gamma\ldots(a)$ Међутим, према обрасцима за функције збира двају углова, имамо:

$$tg\,(\alpha+\beta)=\frac{tg\,\alpha+tg\,\beta}{1-tg\,\alpha\,tg\,\beta}\ldots(b).$$

Из једначина (a) и (b) имамо:

$$\frac{tg\,\alpha+tg\,\beta}{1-tg\,\alpha\,tg\,\beta}=-tg\,\gamma.$$

Одавде је $tg\,\alpha+tg\,\beta=-tg\,\gamma+tg\,\alpha\,tg\,\beta\,tg\,\gamma$, или

$$tg\,\alpha+tg\,\beta+tg\,\gamma=tg\,\alpha\,tg\,\beta\,tg\,\gamma.$$

5. Како је $\frac{\alpha}{2} = 90^0 - \frac{\beta+\gamma}{2}$, $\frac{\beta}{2} = 90^0 - \frac{\alpha+\gamma}{2}$ и $\frac{\gamma}{2} = 90^0 - \frac{\alpha+\beta}{2}$, то је $cotg\frac{\alpha}{2} = tg\frac{\beta+\gamma}{2}$, $cotg\frac{\beta}{2} = tg\frac{\alpha+\gamma}{2}$ и $cotg\frac{\gamma}{2} = tg\frac{\alpha+\beta}{2}$.

Па како је збир: $\frac{\beta+\gamma}{2} + \frac{\alpha+\gamma}{2} + \frac{\alpha+\beta}{2} = 180^0$, то је по претходном обрасцу:

$$cotg\,\frac{\alpha}{2} + cotg\,\frac{\beta}{2} + cotg\,\frac{\gamma}{2} = tg\,\frac{\beta+\gamma}{2} + tg\,\frac{\alpha+\gamma}{2} + tg\,\frac{\alpha+\beta}{2} =$$
$$= tg\,\frac{\beta+\gamma}{2}\,tg\,\frac{\alpha+\gamma}{2}\,tg\,\frac{\alpha+\beta}{2} = cotg\,\frac{\alpha}{2}\,cotg\,\frac{\beta}{2}\,cotg\,\frac{\gamma}{2}.$$

6) Како је $\gamma = 180^0 - (\alpha+\beta)$, то је $cos\,\gamma = cos\,[180^0 - (\alpha+\beta)] = -cos\,(\alpha+\beta) = -cos\alpha\,cos\beta + sin\alpha\,sin\beta$, или $cos\gamma + cos\alpha\,cos\beta = sin\alpha\,sin\beta$.

Степеновањем ове једначине бројем 2 добијамо:

$$cos^2\gamma + 2\,cos\alpha\,cos\beta\,cos\gamma + cos^2\alpha\,cos^2\beta = sin^2\alpha\,sin^2\beta.$$

Заменом у овој једначини $sin^2\alpha$ са $1-cos^2\alpha$ и $sin^2\beta$ са $1-cos^2\beta$ добијамо:

$$cos^2\alpha + cos^2\beta + cos^2\gamma + 2\,cos\alpha\,cos\beta\,cos\gamma = 1.$$

§ 18. Доказивање тригонометриских идентичности

Ради доказивања једне тригонометриске идентичности, испитујемо једну од њених страна. Применом гониометриских образаца старамо се да, трансформацијом појединих функција на посматраној страни, добијемо као резултат израз које је идентичан с изразом на другој страни.

I. *Решени примери:*

1. *Доказати тачност обрасца:* $sin\,2\alpha = \frac{2\,tg\,\alpha}{1+tg^2\,\alpha}$.

Узимајући у поступак његову десну страну налазимо:

$$\frac{2\,tg\,\alpha}{1+tg^2\alpha} = \frac{\frac{2sin\,\alpha}{cos\,\alpha}}{1+\frac{sin^2\alpha}{cos^2\alpha}} = \frac{\frac{2\,sin\alpha}{cos\,\alpha}}{\frac{cos^2\alpha+sin^2\alpha}{cos^2\,\alpha}} = \frac{2\,sin\alpha\,cos\,\alpha}{sin^2\alpha+cos^2\alpha} = \frac{2\,sin\,\alpha\,cos\alpha}{1} = sin\,2\,\alpha$$

2. *Доказати тачност образаца:* a) $sin\,(\alpha+\beta)\,sin\,(\alpha-\beta) = sin^2\alpha - sin^2\beta$; и b) $cos\,(\alpha+\beta)\,cos\,(\alpha-\beta) = cos^2\,\alpha - sin^2\,\beta$.

Узимајући у поступак леву страну добијамо:

a) $sin\,(\alpha+\beta)\,sin\,(\alpha-\beta) = (sin\,\alpha\,cos\,\beta + cos\,\alpha\,sin\,\beta)\,(sin\,\alpha\,cos\,\beta - cos\,\alpha\,sin\beta) = sin^2\alpha\,cos^2\beta - cos^2\alpha\,sin^2\beta = sin^2\,\alpha\,(1-sin^2\beta) - (1-sin^2\,\alpha)\,sin^2\,\beta = sin^2\,\alpha - sin^2\,\beta$.

b) $cos\,(\alpha+\beta)\,cos\,(\alpha-\beta) = (cos\,\alpha\,cos\,\beta - sin\,\alpha\,sin\,\beta)\cdot(cos\,\alpha\,cos\beta + sin\,\alpha\,sin\,\beta) = cos^2\,\alpha\,cos^2\,\beta - sin^2\,\alpha\,sin^2\,\beta = cos^2\,\alpha\,(1-sin^2\,\beta) - (1-cos^2\,\alpha)\,sin^2\,\beta = cos^2\,\alpha - sin^2\,\beta$.

3. *Доказати тачност образаца:*

a) $(cos\,\alpha + cos\,\beta)^2 + (sin\,\alpha + sin\,\beta)^2 = 4\,cos^2\,\frac{\alpha-\beta}{2}$;

b) $(cos\,\alpha - cos\,\beta)^2 + (sin\,\alpha - sin\,\beta)^2 = 4\,sin^2\,\frac{\alpha-\beta}{2}$.

Узимајући у поступак леву страну добијамо:

$$a)\ (cos\,\alpha + cos\,\beta)^2 + (sin\,\alpha + sin\beta)^2 = \left(2\,cos\,\frac{\alpha+\beta}{2}\,cos\,\frac{\alpha-\beta}{2}\right)^2 + \left(2\,sin\,\frac{\alpha+\beta}{2}\,cos\,\frac{\alpha-\beta}{2}\right)^2 = 4\,cos^2\,\frac{\alpha+\beta}{2}\,cos^2\,\frac{\alpha-\beta}{2} + 4\,sin^2\,\frac{\alpha+\beta}{2}\,cos^2\,\frac{\alpha-\beta}{2} = 4\,cos^2\,\frac{\alpha-\beta}{2}\left(cos^2\,\frac{\alpha+\beta}{2} + sin^2\,\frac{\alpha+\beta}{2}\right) = 4\,cos^2\,\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

$$b)\ (cos\,\alpha - cos\,\beta)^2 + (sin\,\alpha - sin\,\beta)^2 = \left(-2\,sin\,\frac{\alpha+\beta}{2}\,sin\,\frac{\alpha-\beta}{2}\right)^2 + \left(2\,cos\,\frac{\alpha+\beta}{2}\,sin\,\frac{\alpha-\beta}{2}\right)^2 = 4\,sin^2\,\frac{\alpha+\beta}{2}\,sin^2\,\frac{\alpha-\beta}{2} + 4\,cos^2\frac{\alpha+\beta}{2}\,sin^2\frac{\alpha-\beta}{2} = 4\,sin^2\,\frac{\alpha-\beta}{2}\left(sin^2\,\frac{\alpha+\beta}{2} + cos^2\frac{\alpha+\beta}{2}\right) = 4\,sin^2\frac{\alpha-\beta}{2}\cdot 1 = 4\,sin^2\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

II. *Примери за вежбу:*

Применом основних образаца (§ 9) доказати следеће идентичности:

1) $\frac{1+tg^2\alpha}{cotg^2\,\alpha+1} = tg^2\alpha$, 2) $\frac{cosec^2\alpha - 1}{cos\,\alpha} = cotg^2\alpha\,sec\alpha$,

3) $\frac{1-sec\,\alpha}{cos\alpha - 1} = sec\,\alpha$, 4) $\frac{cosec^2\,\alpha - 1}{sin\,\alpha} = cosec\,\alpha\,cotg^2\,\alpha$,

5) $\frac{sec\,\alpha - cos\,\alpha}{sin\,\alpha} = tg\,\alpha$, 6) $tg^2\,\alpha\,cosec\,\alpha = \frac{sec^2\,\alpha - 1}{sin\,\alpha}$,

7) $\frac{sec^2\,\alpha - 1}{cos\,\alpha} = cos\alpha\,tg^2\,\alpha$, 8) $\frac{tg\,\alpha - sin\,\alpha}{tg\,\alpha} = 1 - cos\,\alpha$,

9) $\frac{cos\,\alpha + cotg\,\alpha}{cos\,\alpha - cotg\,\alpha} = \frac{tg\,\alpha + sec\,\alpha}{tg\,\alpha - sec\,\alpha}$, 10) $\frac{sin\,\alpha + cotg\,\alpha}{tg\,\alpha + cosec\,\alpha} = sin\alpha\,cotg\,\alpha$.

Применом образаца из § 12 и 13 доказати следеће идентичности:

11) $\frac{sin\,(\alpha+\beta) - cos\,\alpha\,sin\,\beta}{cos\,(\alpha-\beta) - sin\,\alpha\,sin\,\beta} = tg\,\alpha$,

12) $\frac{\sin(\alpha-\beta)+2\cos\alpha\sin\beta}{2\cos\alpha\cos\beta-\cos(\alpha-\beta)}=tg(\alpha+\beta)$,

13) $\frac{\sin(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)}=\frac{\cos\beta+\sin\beta}{\cos\beta-\sin\beta}$,

14) $tg(\alpha\pm45^0)=\frac{tg\,\alpha\pm1}{1\mp tg\,\alpha}$.

Применом образаца за функције удвојених и полууглова (§ 14 и 15) доказати следеће идентичности:

15) $\sin 4\alpha=4\sin\alpha\cos\alpha(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)$,

16) $tg\,2\alpha=\frac{2\,cotg\,\alpha}{cotg^2\alpha-1}$, 17) $cotg\,2\alpha=\frac{1-tg^2\alpha}{2\,tg\,\alpha}$,

18) $(\sin x+\cos x)^2-2\sin^2 x=\sin 2x+\cos 2x$,

19) $\frac{\sin 3x-3\sin x}{\cos 3x+3\cos x}=-tg^3x$, 20) $tg\,3\alpha\,tg\,\alpha=\frac{tg^2 2\alpha-tg^2\alpha}{1-tg^2\alpha\,tg^2 2\alpha}$.

Применом образаца из § 16 доказати идентичности:

21) $\frac{\sin 24^0+\sin 6^0}{\cos 24^0+\cos 6^0}=tg\,15^0$, 22) $\frac{\cos 5^0-\cos 25^0}{\sin 5^0+\sin 25^0}=tg\,10^0$,

23) $\cos 15^0-\sin 15^0=\frac{\sqrt{2}}{2}$, 24) $\frac{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)}=\frac{tg\,\alpha}{tg\,\beta}$,

25) $1+tg\,\alpha=\frac{\sin(45^0+\alpha)}{\cos 45^0\cos\alpha}$, 26) $1\pm tg\,\alpha\,tg\beta=\frac{\cos(\alpha\mp\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$,

27) $tg(\alpha+45^0)+tg(\alpha-45^0)=2\,tg\,2\alpha$,

28) $\sec\alpha+cosec\,\alpha=\frac{4\sin 45^0\cos(45^0-\alpha)}{\sin 2\alpha}$,

29) $tg^2\alpha-tg^2\beta=\frac{\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)}{\cos^2\alpha\cos^2\beta}$,

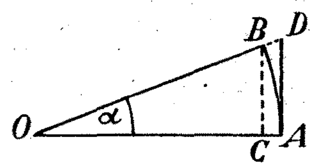
30) $\frac{tg\,\alpha}{1-tg\,\alpha}+\frac{tg\,\alpha}{1+tg\,\alpha}=tg\,2\alpha$.

§ 19. Израчунавање гониометриских функција

Користећи се разним међусобним зависностима гониометриских функција, у стању смо да израчунамо вредности ових функција за један низ углова мањих од 45°. Ове вредности, прикупљене у нарочите таблице, дају тако зване *гониометриске таблице*. Оне садрже или само вредности функција свију углова од 1′ до 45°, или само логаритме тих вредности. Бројне вредности функција углова већих од 45° не израчунавају се, а ни логаритми тих вредности, пошто је, на основу једнакости функција комплементних углова (§ 11), свака вредност једне функције угла већег од 45° једнака са вредношћу кофункције његовог комплементног угла.

Израчунавање вредности функција врши се на два начина: елементарним путем и помоћу више математике, где има згоднијих метода за лакше и тачније израчунавање ових вредности. Израчунавање енелементарном методом оснива се на принципу: *да је код круга $r=1$ разлика*

између tangens-a, sinus-a и arcus-a, кад је средишњи угао врло мали, сасвим незнатна. Заиста, из сл. 25, код које је $AD=tg\,\alpha$, $BC=\sin\alpha$ и $AB=arc\,\alpha$, видимо да је разлика између тангенса AD, аркуса AB и синуса BC утолико мања, уколико је средишњи угао α мањи. За $\alpha=1'$, разлика између количина $tg\,1'$, $\sin 1'$ и $arc\,1'$ тако је незнатна да је готово једнака нули. Зато се ове три количине, нарочито у обичном израчунавању, сматрају као једнаке, о чему се уверавамо на следећи начин. Најпре ћемо доказати *да је разлика између arcus-a и sinus-a једног оштрог угла мања од четвртине трећег степена arcus-a тога угла.* Да бисмо ово доказали, служимо се истином да је сваки лук, који има мање од 90°, мањи од његовог тангенса, тј. да је



Сл. 25

$$arc\,\frac{\alpha}{2}<tg\,\frac{\alpha}{2}.$$

Ако обе стране ове неједначине помножимо са $2\cos^2\frac{\alpha}{2}$, добијамо:

$$arc\,\alpha\cos^2\frac{\alpha}{2}<2\,tg\,\frac{\alpha}{2},\ \cos^2\frac{\alpha}{2},\ \text{или}$$

$$arc\,\alpha\left(1-\sin^2\frac{\alpha}{2}\right)<2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2},\quad \text{или}\quad arc\,\alpha-arc\,\alpha\sin^2\frac{\alpha}{2}<\sin\alpha.$$

Одавде је

$$arc\,\alpha-\sin\alpha<arc\,\alpha\sin^2\frac{\alpha}{2}\ \ldots\ (1)$$

Ако на другој страни неједначине (1) заменимо $\sin\frac{\alpha}{2}$ са *arcus*-ом од $\frac{\alpha}{2}$, онда она постаје већа. Тада је њена лева страна тим пре мања од $arc\,\alpha\left(\frac{arc\,\alpha}{2}\right)^2$ када је била мања од $arc\,\alpha\sin^2\frac{\alpha}{2}$. Стога је заиста:

$$arc\,\alpha-\sin\alpha<\frac{(arc\,\alpha)^3}{4}\ \ldots\ (2)$$

Узимајући да је $\alpha=1'$ имамо $arc\,1'=\frac{r\pi\alpha}{180^0}=\frac{1\cdot3{,}14\cdot1'}{10800'}=$ $=0{,}0002908882$. Тада према неједначини (2) имамо:

$$arc\,1'-\sin 1'<\frac{0{,}0002908882^3}{4}\ \ldots\ (3)$$

Па како је $0{,}0002908882^3<0{,}0000000001$, то је тим пре:

$$arc\,1'-\sin 1'<0{,}000000000025\ \ldots\ (4)$$

Ова нам неједначина показује да је разлика између $arc\,1'$ и $\sin 1'$ тако мала да је без велике грешке сматрамо равном нули. Стога је $arc\,1'=$ $=\sin 1'$. А како смо нашли да је $arc\,1'=0{,}0002908882$, то је и

$$\mathbf{\sin 1'=0{,}0002908882.}$$

Помоћу основних образаца налазимо из једначине:

$\sin 1'=0{,}0002908882$ и $\cos 1'$, $tg\,1'$ и $cotg\,1'$ а затим, употребом образаца за функције збира двају углова и образаца за функције удвојених углова, налазимо: $\sin 2'$, $\sin 3'$, $\sin 4'$, ... ; $\cos 2'$, $\cos 3'$,

$cos\,4'$, ... ; $tg\,2'$, $tg\,3'$, $tg\,4'$, ... ; итд. док не добијемо вредности функција свију углова закључно до 45^0.

Да бисмо одредили вредности функција углова који имају само секунде, можемо утолико пре да заменимо *arcus* угла са *sinus*-ом тога угла. Па како је $arc\,1'' = \frac{arc\,1'}{60}$, то је и

$$sin\,1'' = \frac{0{,}0002908882}{60} = 0{,}0000048481\ldots$$

Тада је: $sin\,2'' = 2 \cdot sin\,1''$, $sin\,3'' = 3 \cdot sin\,1''$, $sin\,4'' = 4 \cdot sin\,1''$ итд., а употребом основних образаца израчунавамо и остале функције углова који имају само секунде.

Како су вредности гониометриских функција понајвише ирационални бројеви, то су ове вредности утолико тачније израчунате уколико имају више децимала. Али су тада утолико више отежане математичке радње са њима. Да бисмо избегли ову тешкоћу, особито при множењу, дељењу, степеновању и кореновању, служимо се употребом логаритама. Из овога разлога, таблице у којима се налазе вредности гониометриских функција, имају мању примену од таблица у којима се налазе логаритми бројних вредности гониометриских функција.

§ 20. Логаритми гониометриских функција

(Употреба таблица Ст. Давидовића)

Под логаритмом једне гониометриске функције разумемо логаритам вредности размере коју функција претставља. Тако, под $log\,sin\,60^0$ треба да разумемо логаритам од $\frac{\sqrt{3}}{2}$, јер је $sin\,60^0 = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Стога је $log\,sin\,60^0 = log\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{log\,3}{2} - log\,2 = \frac{0{,}47712}{2} - 0{,}30103 = 0{,}23856 - 0{,}30103 = \bar{1}{,}93753$. Тако исто $log\,cos\,45^0 = log\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{log\,2}{2} - log\,2 = \bar{1}{,}84949$. Истим путем израчунали бисмо логаритам ма које гониометриске функције, ако нам је позната њена вредност. Од овога рада ослобођени смо, пошто су логаритми гониометриских функција свих оштрих углова израчунати и скупљени у нарочите таблице. Остаје нам само да се упознамо с упутством како ћемо наћи у таблицама логаритам неке функције кад нам је познат угао, и обрнуто, угао, кад нам је познат логаритам неке његове функције.

Логаритми функција свих оштрих углова налазе се у Давидовићевим таблицама од стране 30 до 119 закључно.

А) Изналажење логаритма функције када је угао познат

I случај. — *Угао има само степене и минуте.*

Ако угао има само степене и минуте, онда се логаритми његових функција налазе непосредно у таблицама, и то у колони дотичне функције наспрам минута датог угла. Ако је угао мањи од 45^0, онда се логаритам једне његове функције тражи у колони у којој је та функција горе означена, а кад је угао већи од 45^0, онда се логаритам једне функције тражи одоздо навише у колони код које је доле означена дотична функција. Ово је стога што су функције свију оштрих углова мањих од 45^0 једнаке са кофункцијама њихових комплементних углова, па и логаритми функција углова мањих од 45^0 јесу једнаки са логаритмима кофункција комплементних углова. Према томе, синусна колона, у којој се налазе логаритми синуса свију оштрих углова мањих од 45^0, у исто је време косинусна колона, и бројеви у тој колони јесу логаритми косинуса одговарајућих комплементних углова већих од 45^0; тангентна колона углова мањих од 45^0 у исто је време котангентна њихових комплементних углова; котангентна у исто време је тангентна; и косинусна у исто је време синусна.

Решени примери:

1.	*log sin*	$25^0\,38' = \bar{1}{,}63610$,	стр.	81,	ред	9	одозго;
2.	*log sin*	$72^0\,32' = \bar{1}{,}97950$,	„	64,	„	3	одоздо;
3.	*log cos*	$28^0\,54' = \bar{1}{,}94224$,	„	87,	„	25	одозго;
4.	*log cos*	$48^0\,27' = \bar{1}{,}82169$,	„	113,	„	28	одоздо;
5.	*log tg*	$44^0\,25' = \bar{1}{,}99116$,	„	118,	„	26	одозго;
6.	*log tg*	$78^0\,58' = 0{,}71000$,	„	52,	„	29	одоздо;
7.	*log cotg*	$8^0\,52' = 0{,}80688$,	„	47,	„	23	одозго;
8.	*log cotg*	$59^0\,27' = \bar{1}{,}77101$,	„	91,	„	28	одоздо.

II случај. — *Угао има степене, минуте и секунде.*

Ако дати угао има и секунде, онда, као у првом случају, налазимо најпре у таблицама логаритам функције само за степене и минуте, а за секунде израчунавамо *поправку*. Та се поправка код логаритма синуса и тангенса додаје, а код логаритма косинуса и котангенса одузима, јер су синус и тангенс већи што је угао већи, а напротив, косинус и котангенс су мањи кад је угао већи.

Поправка је производ од броја секунада и *табличне диференције* подељен са 60. Под табличном диференцијом разумемо разлику између два логаритма једне исте функције углова који се разликују само за један минут. Та таблична диференција израчуната је и налази се у колини где горе пише „d". Ове колоне са табличним диференцијама налазе се поред колона логаритама функција углова од степена и минута, и то: једна је поред синусне колоне, друга поред косинусне, а трећа је у средини између тангентне и котангентне колоне, и заједничка је за обе ове функције. Ако је таблична диференција D, број секунада S, поправка P, онда је $P = \frac{D \cdot S}{60}$.

Извођење обрасца за поправку. Ако се углови разликују за $1'$, онда се логаритми неке њихове функције разликују за D (јединица петог десетног места), а кад се углови разликују за S секунада, или $\frac{S}{60}$ минута, онда ће се логаритми те функције разликовати за P. Тада је поправка P толико пута већа од диференције D, колико су пута већи $\frac{S}{60}$ минута од $1'$, тј. $P : D = \frac{S}{60} : 1$. Одавде је $P = \frac{D \cdot S}{60}$.

Решени примери:

1. Наћи $\log \sin 28^0\ 37'\ 42''$. Најпре налазимо $\log \sin 28^0\ 37' = \bar{1},68029$ (стр. 87, ред 8 одозго). Таблична је диференција $D = 23$ (налази се поред синусне колоне с десне стране, а мало ниже од логаритма $\bar{1},68029$). Тада је поправка $P = \frac{D \cdot S}{60} = 23 \cdot \frac{42}{60} = 16$ (6 је пети а 1 четврти децимал мантисе). Стога је

$$\begin{aligned}\log \sin 28^0\ 37'\ 42'' &= \bar{1},68029 \\ &\quad + 16 \\ &= \bar{1},68045\end{aligned}$$

2. *Наћи* $\log \sin 55^0\ 27'\ 34''$.

$\log \sin 55^0\ 27' = \bar{1},91573$, стр. 9, ред 28 одоздо.

$\log \sin 55^0\ 27'\ 34'' = \frac{+5}{\bar{1},91578}$; $D = 9$; $S = 34''$, $P = \frac{9 \cdot 34}{60} = 5$.

3. *Наћи* $\log tg\ 25^0\ 7'\ 24''$.

$\log tg\ 25^0\ 7' = \bar{1},67098$, стр. 80, ред 23 одоздо.

$\log tg\ 25^0\ 7'\ 24'' = \frac{+13}{\bar{1},67111}$; $D = 33$; $S = 24''$; $P = \frac{33 \cdot 24}{60} = 13$.

4. *Наћи* $\log tg\ 73^0\ 52'\ 40''$.

$\log tg\ 73^0\ 52' = 0,53870$, стр. 62, ред 23 одозго.

$\log tg\ 73^0\ 52'\ 40'' = \frac{+32}{0,53902}$; $D = 48$; $S = 40$: $P = \frac{48 \cdot 40}{60} = 32$.

5. *Наћи* $\log \cos 37^0\ 25'\ 50''$.

$\log \cos 37^0\ 25' = \bar{1},89995$, стр. 104, ред 26 одозго.

$\log \cos 37^0\ 25'\ 50'' = \frac{-8}{\bar{1},89987}$; $D = 10$; $S = 50''$; $P = \frac{10 \cdot 50}{60} = 8$.

6. *Наћи* $\log \cos 81^0\ 20'\ 20''$.

$\log \cos 81^0\ 20' = \bar{1},17807$, стр. 47, ред 21 одоздо.

$\log \cos 81^0\ 20'\ 20'' = \frac{-28}{\bar{1},17779}$; $D = 83$; $S = 20''$; $P = \frac{83 \cdot 20}{60} = 28$.

7. *Наћи* $\log cotg\ 8^0\ 15'\ 28''$.

$\log cotg\ 8^0\ 15' = 0,83865$, стр. 46, ред 16 одозго.

$\log cotg\ 8^0\ 15'\ 28'' = \frac{-42}{0,83823}$; $D = 89$; $S = 28''$; $P = \frac{83 \cdot 28}{60} = 42$.

8. *Наћи* $\log cotg\ 70^0\ 35'\ 48''$.

$\log cotg\ 70^0\ 35' = \bar{1},54714$, стр. 68, ред 6 одоздо.

$\log cotg\ 70^0\ 35'\ 48'' = \frac{-33}{\bar{1},54681}$; $D = 41$; $S = 48''$; $P = \frac{41 \cdot 48}{60} = 33$.

В) *Изналажење угла кад је познат логаритам неке његове функције*

Да бисмо нашли угао када је познат логаритам неке његове функције, треба најпре да сравнимо дати логаритам са логаритмом исте функције угла од 45^0. Ово је потребно ради сазнања да ли је тражени угао већи или мањи од 45^0. Треба, дакле, дати логаритам да сравнимо са $\bar{1},84949$, који је број логаритам синуса и косинуса угао од 45^0, или са 0, која је логаритам тангенса и котангенса истог угла.

I случај. — Ако се зна логаритам синуса неког угла, онда, да бисмо нашли угао, треба да упоредимо дани логаритам са бројем $\bar{1},84949$. Ако је дани логаритам мањи од овога броја, значи да је тражени угао мањи од 45^0, јер мањем логаритму одговара мањи синус, а мањем синусу мањи угао. Напротив, ако је дани логаритам већи од $\bar{1},84949$, значи да је тражени угао већи од 45^0, јер већем логаритму одговара већи синус, а већем синусу већи угао. Тако, ако је $\log \sin x = \bar{1},42756$, онда је $\sin x < \sin 45^0$, јер је $\bar{1},42756 < \bar{1},84949$, па је стога $x < 45^0$. Према томе, непознати угао x треба тражити одозго наниже, а његов логаритам у колони где горе пише „*sinus*". Ако се дани логаритам налази у тој колони, онда угао x има само степене и минуте. Ако се дани логаритам не налази у колони, значи да угао x, поред степена и минута, има још и секунде. У овоме случају налазимо у синусној колони најближи мањи логаритам даном логаритму, узимамо њему одговарајуће степене и минуте, а секунде израчунавамо када разлику између данога и приближно мањега логаритма (поправку P) помножимо најпре са 60, а затим добивени производ делимо табличном диференцијом.

$$\left(\text{из } P = \frac{SP}{60} \text{ излази } S = \frac{60 \cdot P}{D}\right)$$

Пример 1. Наћи угао x чији је log sinx $= \bar{1},58924$.

Овде је $x < 45^0$, па се дани логаритам тражи у синусној колони одозго (стр. 75, ред 22).

$x = arcus$-у чији је $log\ sin\ \bar{1},58924 = 22^0\ 51'\ 10''$
прибл. мањи $\bar{1},58919$
$P = 5$

$$D = 30;\ S = \frac{5 \cdot 60}{30} = 10''.$$

Пример 2. Наћи угао y *чији је* $log\,sin\ y = \bar{1},94256$.

Овде је $y > 45^0$ па се тражи дани логаритам у синусној колони одоздо (стр. 87, ред 11).

$y = arcus$-у чији је $log\ sin\ \bar{1}\,94256 = 61^0\ 10'\ 34''$.
$-\ 52$
$P = 4$

$$D = 7; \qquad S = \frac{4.60}{7} = 34''.$$

Пример 3. Наћи z када је $sin\ z = \frac{3}{5}$.

Тада је $log\ sin\ z = log\ 3 - log\ 5 = \bar{1},77815$.

Овде је $z < 45^0$, па се тражи дани логаритам у синусној колони одозго.

$z = arcus$-у чији је $log\ sin\ \bar{1},77815 = 36^0\ 52'\ 11''$
$-\ 12$
$P = 3$

$$D = 17;\ S = \frac{4 \cdot 60}{17} = 11''.$$

Пример 4. Наћи x када је $sin\ x = -\frac{5}{6}$.

Како је овде вредност синуса негативна, значи да је угао x или тупоиспупчен или оштроиспупчен. Ако заменимо у датој једначини x са $180^0 + y$, или са $360^0 - y$, где је y један оштар угао, добијамо:

$$sin\ (180^0 + y) = -\,sin\ y = -\frac{5}{6},\ \text{а}\ sin\ y = \frac{5}{6}\ \text{и}$$

$$sin\ (360^0 - y) = -\,sin\ y = -\frac{5}{6},\ \text{а}\ sin\ y = \frac{5}{6}.$$

Тада је $log\ sin\ y = log\ 5 - log\ 6 = \bar{1},92082$.
Овде је $y > 45^0$
$y = arcus$-у чији је $log\ sin\ \bar{1},92082 = 56^0 26' 33''$
$-\ 77$
$P = 5$

$$D = 9,\ S = \frac{5 \cdot 60}{9} = 33''.$$

Стога је $x = 180^0 + y = 236^0 26' 33''$ и
$x = 360^0 - y = 303^0\ 33'\ 27''$

II случај. — Ако је дат логаритам тангенса неког угла, онда, да бисмо нашли угао, поступамо исто као у претходном случају, с том разликом што дани логаритам упоређујемо са 0, која је $log\ tg\ 45^0$, и што га тражимо у тангентној колони.

Пример 1. Наћи угао x *чији је* $log\ tg\ x = 0,52347$.

Овде је $x > 45^0$, па се тражи дани логаритам у тангентној колони одоздо (стр. 63, ред 20).

$x = arcus$-у чији је $log\ tg\ 0,52347 = 73^0\ 19'\ 20''$
$-\ 32$
$P = 15$

$$D = 46,\ S = \frac{15 \cdot 60}{46} = 20''.$$

Пример 2. Наћи угао y *чији је* $log\ tgy = \bar{1},52348$.

Како је број $\bar{1},523488$, као негативан, мањи од 0, то је $y < 45^0$ (стр. 66, ред 48 одозго).

$y = arcus$-у чији је $log\ tg\ \bar{1},52348 = 18^0\ 27'\ 31''$
$-\ 26$
$P = 22$

$$D = 42,\ S = \frac{22 \cdot 60}{42} = 31''.$$

Пример 3. Наћи угао z када је $tgz = 0,25$.

Тада је $log\ tgz = log\ 0,25 = \bar{1},39794$. Овде је $z < 45^0$.
$z = arcus$-у чији је $log\ tg\ \bar{1},39794 = 14^0\ 2'\ 10''$
$-\ 85$
$P = 9$ $\quad D = 53,\ S = \frac{9 \cdot 60}{53} = 10''$.

Пример 4. Наћи x када је $tgx = -\frac{7}{8}$.

Како је овде вредност тангенса негативна, то је угао x или туп, или оштроиспупчен. Ако у датој једначини заменимо $x = 180^0$-y, или $x = 360^0$-y, где је y један оштар угао, добијамо:

$$tg\,(180^0 - y) = -\,tgy = -\,\frac{7}{8}, \text{ а } tgy = \frac{7}{8} \text{ и } tg\,(360^0 - y) = -\,tgy = -\,\frac{7}{8}, \text{ а } tgy = \frac{7}{8}.$$ Тада је:

$log\ tg\ y = log\ 7 - log\ 8 = \bar{1},94201$. Овде је $y < 45^0$.

$$y = arcus\text{-у чији је } log\ tg\ \bar{1},94201 = 41^0\ 11'\ 10''$$
$$\underline{-97}$$
$$P = 4,\ D = 25,\ S = \frac{4 \cdot 60}{25} = 10''.$$

Стога је $x = 180^0 - y = 138^0\,48'\,50''$ и $x = 360^0 - y = 318^0\,48'\,50''$.

III случај. — Ако је дат логаритам косинуса неког угла, онда, да бисмо нашли непознати угао, упоређујемо дани логаритам са $\bar{1},84949$, који је број логаритам $cos\ 45^0$. Ако нађемо да је дани логаритам већи од овога броја, значи да је тражени угао мањи од 45^0, јер већем логаритму одговара већи косинус, а већем косинусу мањи угао. Ако нађемо да је дани логаритам мањи од $\bar{1},84949$, значи да је тражени угао већи од 45^0, јер мањем логаритму одговара мањи косинус, а мањем косинусу већи угао. Ако се дани логаритам не налази у косинусној колони, значи да тражени угао, поред степена и минута, има још и секунде. У овоме случају у колони за косинус налазимо најпре најближи већи логаритам, узимамо њему одговарајуће степене и минуте, а секунде израчунавамо када разлику између приближно већега и данога логаритма (поправку P) помножимо најпре са 60, а затим добивени производ делимо табличном диференцијом.

Пример 1. Наћи угао x чији је log cos $x = \bar{1},85424$.

Како је $\bar{1},85424 > \bar{1},84949$, то је $cos\ x > cos\ 45^0$, па је угао $x < 45^0$. Стога дани логаритам тражимо у косинусној колони одозго (стр. 118, ред 22).

$$\overset{36}{}$$
$$x = arcus\text{-у чији је } log\ cos\ \bar{1},85424 = 44^0\ 21'\ 55''.$$
$$\overline{P = 12}$$
$$D = 13,\ S = \frac{12 \cdot 60}{13} = 55''.$$

*Пример 2. Наћи угао **y** чији је log cos* $y = \bar{1},79948$.

Овде је $y > 45^0$, па се дани логаритам тражи у косинусној колони одоздо (стр. 108, ред 27 одоздо).

$$y = arcus\text{-у чији је } log\ cos\ \bar{1},79948 = 50^0\ 56'\ 7,5''.$$
$$\overline{P = 2}$$

$$D = 16,\ S = \frac{2 \cdot 60}{16} = 7,5''$$

Пример 3. Наћи угао z кад је $cos\ z = -\,\frac{7}{12}$.

У овоме случају угао z или је туп или тупоиспупчен, пошто му је вредност негативна. Ако у једначини заменимо $z = 90^0 + x$ или $z = 180^0 + x'$, где је x један оштар угао, а x' његов комплементни, онда је

$$cos\,(90^0 + x) = -\,sin\ x = -\,\frac{7}{12},\ \text{ а } sin\ x = \frac{7}{12} \text{ и}$$
$$cos\,(180^0 + x') = -\,cos\ x' = -\,sin\ x = -\,\frac{7}{12},\ \text{ а } sin\ x = \frac{7}{12}.$$

Тада је $log\ sin\ x = log\ 7 - log\ 12 = \bar{1},76592$. Овде је $x < 45^0$ (стр. 101, ред 12 одозго).

$$x = arcus\text{-у чији је } log\ sin\ x = \bar{1},76592 = 35^0\ 41'\ 7''$$
$$\underline{90}$$
$$P = 2$$
$$D = 17,\ S = \frac{2 \cdot 60}{17} = 7''.$$

Тада је $z = 90^0 + x = 90^0 + 35^0\ 41'\ 7'' = 125^0\ 41'\ 7''$.

Тупоиспупчен угао $z = 180^0 + x' = 180^0 + 54^0\ 18'\,53'' = 234^0\ 18\ 53''$.

IV случај. — Ако је дат логаритам котангенса, онда, да бисмо нашли угао, поступамо као у трећем случају, само с том разликом што дани логаритам упоређујемо са 0, која је $log\ cotg\ 45^0$ и што га тражимо у котангентној колони.

Пример 1. Наћи угао x чији је log cotg $x = 0,25734$.

Како је број $0,25734 > 0$, то је и $cotg\ x > cotg\ 45^0$. Стога је $x < 45^0$ и тражи се дани логаритам у котангентној колони одозго (стр. 87, ред 27 одозго).

$$\overset{44}{}$$
$$x = arcus\text{-у чији је } log\ cotg\ \underline{0,25734} = 28^0\ 56'\ 20'',$$
$$P = 10$$
$$D = 30,\ S = \frac{10 \cdot 60}{30} = 20''.$$

*Пример 2. Наћи угао **y** чији је log cotg* $y = \bar{1},42755$.

Како је број $\bar{1},42755 < 0$, то је $cotg\ y < cotg\ 45^0$. Стога је $y > 45^0$ (стр. 59, ред 2 одоздо).

$$y = arcus\text{-у чији је } log\ cotg\ \bar{1},42755 = 75^0\ 1'.$$

Пример 3. Наћи угао z када је $cotg\ z = -\,3\,\frac{5}{7}$.

У овом случају угао z је или туп или оштроиспупчен. Ако у једначини заменимо $z = 90^0 + x$, или $z = 360^0 - x'$, где је x један оштар угао, а x' његов комплементни, добијамо $cotg\,(90^0 + x) = -\,tg\,x = -3\,\frac{5}{7}$, а $tgx = 3\,\frac{5}{7}$ и

$cotg\,(360^0 - x') = -\,cotg\,x' = -\,tg\,x = -3\,\frac{5}{7}$, а $tg\,x = 3\,\frac{5}{7}$.

Тада је $log\ tg\ x = log\ 26 - log\ 7 = 0{,}56988$.

Овде је $x > 45^0$.

74

$x = arcus$-у чији је $log\ tg\ 0{,}56988 = 47^0\ 55'\ 54''$.

$$\begin{array}{r} -\,43 \\ \hline P = 45 \end{array}$$

$$D = 50,\ S = \frac{45 \cdot 60}{50} = 54''.$$

Тада угао $z = 90^0 + x = 90^0 + 74^0\ 55'\ 54'' = 164^0\ 55'\ 54''$ и $z = 360^0 - 15^0\ 4'\ 6'' = 344^0\ 55'\ 54''$.

c) *Задаци за вежбу.*

Наћи у логаритамским таблицама:

1. $log\ sin\ 38^0\ 7'$;
2. $log\ sin\ 51^0\ 58'\ 33''$;
3. $log\ tg\ 5^0\ 25'\ 40''$;
4. $log\ tg\ 90^0\ 27'\ 39''$;
5. $log\ cos\ 50^0\ 9'\ 47''$;
6. $log\ cos\ 39^0\ 25'\ 30''$;
7. $log\ cotg\ 8^0$ [illegible] $54''$;
8. $log\ cotg\ 53^0\ 29'\ 8''$;
9. $log\ sin\ 16$[illegible]$7'\ 30''$;
10. $log\ tg\ 200^0\ 25'\ 40''$;
11. $log\ cos\ 325^0\ 7'\ 48''$;
12. $log\ cotg\ 189^0\ 17'\ 46''$;

Наћи угао x кад је:

13. $log\ sin\ x = \bar{1}{,}64356$;
14. $log\ sin\ x = \bar{1}{,}92649$;
15. $log\ tg\ x = 0{,}87635$;
16. $log\ tg\ x = \bar{1}{,}30312$;
17. $log\ cos\ x = \bar{1}{,}10647$;
18. $log\ cos\ x = \bar{1}{,}97706$;
19. $log\ cotg\ x = 0{,}56424$;
20. $log\ cotg\ x = \bar{1}{,}89342$;

Наћи угао x када је:

21. $sin\,x = \sqrt{\frac{5}{6}}$; 22. $sec^2 x = 3$; 23. $cos\,x = 0{,}7$; 24. $tg\,x = \frac{6}{5}$;

25. $tg\,x = -\frac{17}{9}$; 26. $cos\,x = -\frac{3}{7}$; 27. $cotg\,x = -\frac{5}{7}$.

28. $sin\,x = -\sqrt{\frac{4}{11}}$; 29. $sin\,x = \sqrt{\frac{2\ cos^2\ 64^0\ 5'}{5\ sin\ 50^0\ 40' \cdot tg\ 22^0\ 11'}}$;

30. $tg\,x = \frac{3\ sin^2\ 65^0\ 18'\ 12''}{4\ tg\ 54^0\ 16'\ 12'' \cdot tg\ 18^0\ 37'}$; 31. $tg\,x = tg\ 38^0\ 24'\ 36'' + tg\ 90^0\ 19'\ 43''$; 32. $tg\,x = sin\ 12^0\ 24'\ 44'' + cos\ 12^0\ 24'\ 48''$;

32. Наћи угао чији је $sinus$ $\frac{2}{3}$ његовог $cosinus$-а; 34. Наћи вредност функције: a) $sin\ 20^0\ 36'\ 40''$; b) $tg\ 44^0\ 7'$; c) $cos\ 77^0\ 25'$.

§ 21. Гониометриске једначине*

Једначина у којој се налазе гониометриске функције непознатих углова зове се гониометриска. Решити једну гониометриску једначину значи наћи све оне вредности непознатог угла које задовољавају дотичну једначину. Према броју непознатих углова, ове једначине делимо на једначине с једном, две и више непознатих количина.

1. *Једначине с једним непознатим углом*

Метод за решавање гониометриске једначине с једним непознатим углом у томе је што се старамо да једначину тако трансформујемо употребом гониометриских образаца да у новој једначини фигурише само једна функција непознатог угла коју сматрамо као непознату количину и по којој решавамо једначину. Затим, из вредности ове функције, употребом логаритма, налазимо непознати угао.

Решени примери:

1. *Решити једначину* $5\,sinx + 4\,cosx = 5$. Када ову једначину најпре доведемо на облик $5\,sinx = 5 - 4\,cosx$, па је затим степенујемо са 2, добијамо $25\,sin^2x = 25 - 40\,cosx + 16\,cos^2x$. Заменом sin^2x са $1 - cos^2x$ добијамо:

$$41\,cos^2x - 40\,cosx = 0,\ \text{или}\ \ cosx\,(41\,cosx - 40) = 0.$$

Одавде је: 1) $cosx = 0$ и 2) $41\,cosx - 40 = 0$, а $cosx = \frac{40}{41}$.

Из (1) имамо: $x = 90^0$ и $n \cdot 360^0 + 90^0$, а из (2) употребом логаритама имамо: $x = 12^0\ 40'\ 40''$, $347^0\ 19'\ 20''$, $n \cdot 360^0 + 12^0\ 40'\ 40''$ и $n \cdot 360^0 + 347^0\ 19'\ 20''$. Обично се узимају у обзир само по два решења непознатог угла, чије су вредности мање од 360^0.

2. *Решити једначину* $secx - tgx = sinx + cosx$.

Применом основних образаца имамо: $\frac{1}{cosx} - \frac{sinx}{cosx} = sinx + cosx$, или $1 - sinx = sinx\,cosx + cos^2x$. Заменом cos^2x са $1 - sin^2x$ добијамо: $sin^2x - sinx = sinx\,cosx$, или $sinx\,(sinx - 1 - cosx) = 0$. Одавде је $sinx = 0$ и $sinx - 1 = cosx$. Подизањем на квадрат друге једначине добијамо: $sin^2x - 2\,sinx + 1 = cos^2x$, или $sin^2x - 2\,sinx + 1 = 1 - sin^2x$, или $sinx(sinx - 1) = 0$.

Одавде је: 1) $sinx = 0$ и 2) $sinx - 1 = 0$. Из (1) је $x = 0^0$, 180^0, а из (2): $x = 90^0$.

Решења већа од 360^0 нису узета у обзир.

3. *Решити једначину* $sinx + sin\,3x = sin\,2x + sin\,4x$.

Претварајући обе стране једначине у производе добијамо:

$$2\,sin\,2\,x\,cosx = 2\,sin\,3\,x\,cosx,\ \ \text{или}\ \ cosx\,(sin\,2\,x - sin\,3\,x) = 0.$$

Ако израз у загради претворимо у производ, добијамо:

$$cosx\,cos\,\frac{5x}{2}\,sin\,\frac{x}{2} = 0.$$

Одавде је: 1) $cosx = 0$, 2) $cos\,\frac{5x}{2} = 0$, 3) $sin\,\frac{x}{2} = 0$.

Из (1) је: $x = 90^0$ и 270^0; из (2): $\frac{5}{2}\,x = 90^0, 270^0, 450^0, 630^0, 810^0$, а $x = 36^0, 108^0, 180^0, 252^0, 324^0$; из (3): $\frac{x}{2} = 0^0$ и 180^0 а $x = 0^0$ и 360^0.

Решења већа од 360^0 низу узета у обзир.

---

*) За ученике реалке.

4. *Решити једначину* $a \sin(\alpha + x) = b\cos(\beta + x)$.

Применом образаца за функције збира двају углова имамо:

$a \sin\alpha \cos x + a\cos\alpha \sin x = b\cos\beta\cos x - b\sin\beta \sin x$,

или $\sin x\,(a\cos\alpha + b\sin\beta) = \cos x\,(b\cos\beta - a\sin\alpha)$, или

$$\frac{\sin x}{\cos x} = tg x = \frac{b\cos\beta - a\sin\alpha}{a\cos\alpha + b\sin\beta}$$

5. *Решити једначину* $m\sin(\alpha - x) = n\sin(\beta - x)$.

Из ова два једнака производа налазимо пропорцију:

$$\frac{\sin(\alpha-x)+\sin(\beta-x)}{\sin(\alpha-x)-\sin(\beta-x)} = \frac{n+m}{n-m}.$$

Одавде је: $$\frac{2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}-x\right)\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}-x\right)\sin\frac{\alpha-\beta}{2}} = \frac{n+m}{n-m},$$ или

$tg\left(\frac{\alpha+\beta}{2}-x\right) = \frac{n+m}{n-m}\, tg\frac{\alpha-\beta}{2}$. Из ове једначине употребом логаритама налазимо угао $\frac{\alpha+\beta}{2}-x$. Ако је $\frac{\alpha+\beta}{2}-x=\omega$, онда је $x = \frac{\alpha+\beta}{2}-\omega$.

II. *Једначине са два непозната угла*

Ако у једначинама има два непозната угла, онда методом замене изводимо једначину у којој се налази само једна функција једног непознатог угла. Често, особито када су дате једначине различитог степена, или различитих врста (ако је једна алгебарска, а друга гониометријска), потреба захтева да стране датих једначина трансформујемо у збирове, да бисмо затим згодним алгебарским путем нашли саме те функције и њихове непознате углове.

Решени примери:

1. *Решити систем:* 1. $\frac{\sin x}{\sin y} = m$. 2) $x+y=\alpha$.

Из (1), која је пропорција: $\sin x : \sin y = m : 1$ имамо:

$$\frac{\sin x+\sin y}{\sin x - \sin y} = \frac{m+1}{m-1},$$ или $$\frac{2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}}{2\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}} = \frac{m+1}{m-1}$$ или

$tg\frac{x+y}{2}\cdot cotg\frac{x-y}{2} = \frac{m+1}{m-1}$. Заменом $x+y=\alpha$ (2) имамо:

$tg\frac{\alpha}{2}\, cotg \frac{x-y}{2} = \frac{m+1}{m-1}$, или $cotg\frac{x-y}{2} = \frac{m+1}{(m-1)\,tg\frac{\alpha}{2}}$, или

$$tg\frac{x-y}{2} = \frac{(m-1)\,tg\frac{\alpha}{2}}{m+1}.$$

Из ове једначине налазимо употребом логаритама угао $\frac{x-y}{2}$ а затим $x-y$. За $x-y=\beta$ и $x+y=\alpha$, биће

$$x=\frac{\alpha+\beta}{2} \text{ и } y=\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

Напомена. Исто се тако решава систем: $\frac{\sin x}{\sin y}=m$, $x-y=\beta$.

2. *Решити систем:* 1) $\sin x \sin y = m$, 2) $x+y=\alpha$.

Како је $\cos(x-y) - \cos(x+y) = 2\sin x\sin y$, то се једначини (1) даје најпре облик $\cos(x-y)-\cos(x+y)=2m$, или $\cos(x-y) = \cos\alpha + 2m$. Из ове једначине употребом логаритама налазимо угао $(x-y)$. За

$x-y=\beta$ и $x+y=\alpha$ имамо $x=\frac{\alpha+\beta}{2}$ и $y=\frac{\alpha-\beta}{2}$.

Исто се тако решава систем: $\cos x\cos y = n$, $x+y=\alpha$, узимајући да је $\cos(x-y)+\cos(x+y) = 2\cos x\cos y$.

3. *Решити систем:* 1) $x+y=\alpha$, 2) $tgx\, tgy = m$.

Како је $tg(x+y) = \frac{tgx+tgy}{1-tgx\,tgy}$, то је $tgx+tgy = (1-tgx\,tgy)\cdot tg(x+y)$, или $tgx+tgy=(1-m)\,tg\,\alpha \cdots$ (3). Из једначине (2) и (3) налазимо најпре непознате функције tgx и tgy, а затим употребом логаритама и непознате углове x и y.

4) *Решити систем:* 1) $\sin^2x+\cos^2y=m$, 2) $\cos^2x-\sin^2y=n$.

Сабирањем и одузимањем датих једначина имамо:

$\sin^2x+\cos^2x+\cos^2y-\sin^2y=m+n$ и

$\sin^2x-\cos^2x+\cos^2y+\sin^2y=m-n$ или

(1) $1+\cos^2y-\sin^2y=m+n$ и (2) $\sin^2x-\cos^2x+1=m-n$. Па како је $\cos^2y-\sin^2y=\cos2y$, а $\sin^2x-\cos^2x=-\cos2x$, то заменом у (1) и (2) добијамо: $\cos2y=m+n-1$ и $\cos2x=n-m+1$.

Из ових једначина помоћу логаритама налазимо најпре углове $2y$ и $2x$ а затим y и x.

5. *Решити систем:* 1) $\sin2x+\sin2y=\frac{1}{2}$ и 2) $2\sin(x+y)=1$.

Ако једначину 1) доведемо најпре на облик:

$2\sin(x+y)\cos(x-y)=\frac{1}{2}$ па је поделимо другом, добијамо: $\cos(x-y) = \frac{1}{2}$. Одавде је $x-y=60^0\cdots(3)$. Па како из (2) имамо $\sin(x+y)=\frac{1}{2}$, а $x+y=150^0\cdots(4)$, онда из једначина (3) и (4) налазимо да је $x=105^0$, $y=45^0$.

6) *Наћи два угла чији је збир* α, *а збир (разлика) њихових синуса* a. Ако је први угао x а други y, онда имамо систем:

1) $x+y=\alpha$, 2) $\sin x+\sin y=a$.

Претварајући леву страну једначине (2) у производ, добијамо:

$2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}=a$, или $2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{x-y}{2}=a$.

Одавде је $\cos\frac{x-y}{2} = \frac{a}{2\sin\frac{\alpha}{2}}\cdots$ (3). Из ове једначине налазимо разлику непознатих углова. За $x-y=\beta$ и $x+y=\alpha$ биће

$$x=\frac{\alpha+\beta}{2} \text{ и } y=\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

Исто се тако поступа кад се зна: а) збир углова и разлика њихових синуса; b) разлика углова и збир (разлика) њихових синуса; c) збир (разлика) углова и збир (разлика) њихових косинуса.

7. *Наћи два угла чији је збир* α, *а збир њихових тангенса* m. Ако је први угао x а други y, онда је систем:

1) $x+y=\alpha$, 2) $tgx+tgy=m$.

Претварајући у производ леву страну једначине (2) добијамо:

$$\frac{\sin(x+y)}{\cos x \cos y} = m, \text{ или } \frac{\sin\alpha}{\cos x \cos y} = m.$$

Па како је $2\cos x \cos y = \cos(x+y) + \cos(x-y)$, то је:

$$\frac{\sin\alpha}{\cos x \cos y} = \frac{\sin\alpha}{\cos(x+y)+\cos(x-y)} = \frac{m}{2}, \text{ или } \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha + \cos(x-y)} = \frac{m}{2}$$

или $\cos(x-y) = \frac{2\sin\alpha}{m} - \cos\alpha$. Заменом $\frac{2}{m} = tg\,\varphi$ добијамо:

$$\cos(x-y) = tg\,\varphi \sin\alpha - \cos\alpha = \frac{\sin\varphi \sin\alpha - \cos\varphi\cos\alpha}{\cos\varphi} = \frac{\cos(\varphi+\alpha)}{\cos\varphi}$$

Из ове једначине употребом логаритама налазимо угао $(x-y)$. За $x-y=\beta$ и $x+y=\alpha$ налазимо најзад $x = \frac{\alpha+\beta}{2}$ и $y = \frac{\alpha-\beta}{2}$.

Исто се тако ради када се зна разлика углова и разлика њихових тангенса.

III. *Задаци за вежбу*

a) Употребом основних образаца (§ 9) решити једначине:

1) $\sin^2 x + \sin^2\alpha = 1$;
2) $\sin x = -\cos x$;
3) $\sin x \; cotg\, x = a$;
4) $tg\, x : cotg\, x = b$;
5) $a\sin^2 x + b\cos^2 x = c$;
6) $a\sin^2 x = b$;
7) $a\sin x = b\; tg\,\alpha$;
8) $a(\sin x + tg\, x) = b(tg\, x - \sin x)$;
9) $a(\sin x + tg\, x) = \frac{b(1+\cos x)}{\cos x}$;
10) $\frac{a(cotg\, x - \cos x)}{cotg\, x + \cos x} = b(1-\sin x)$.

b) Употребом образаца за функције збира и разлике двају углова (§ 12 и 13) решити једначине:

11) $\sin(x+\alpha) - \sin\alpha \cos x = \cos\alpha$; 12) $tg(x+\alpha) + tg(x-\alpha) - 2cot\, x = 0$; 13) $\cos(x-\alpha) = m\sin x - n\cos x$;
14) $\cos(\alpha-\beta)\sin(\gamma-x) = \cos(\alpha+\beta)\sin(\gamma+x)$.

c) Употребом образаца за функције удвојених и полууглова (§ 14 и 15) решити једначине:

15) $\sin x \cos x = a$;
16) $\sin(\alpha+x)\cos(\alpha+x) = b$;
17) $a\, cotg\, 2x = b(1+tg\, x)$;
18) $a(cotg\, x - tg\, x) = \frac{b\cos 2x}{1+\cos 2x}$;
19) $\sin^2 x - 2\cos^2 x + \frac{\sin 2x}{2} = 0$;
20) $a(1-\cos x) = b\sin\frac{x}{2}$;
21) $a(1-\cos x) = b tg\frac{x}{2}$;
22) $\frac{a\cos x}{1+\cos 2x} = \frac{b\sin x}{1-\cos 2x}$;
23) $\frac{a(1+\cos 2x)}{2\cos x} = \frac{b\sin 2x}{1-\cos 2x}$.

d) Употребом мешовитих образаца решити једначине:

24) $\cos x = \sin^2 x - \cos^2 x$;
25) $\cos^2\frac{x}{2} - \sec^2\frac{x}{2} = 2\sqrt{3}\,cosec^2 x$;
26) $tg\, x(1+\cos 2\alpha) = \cos 2\alpha \; tg\, 2x$;
27) $tg\frac{x}{2} = cosec\, x - \sin x$;
28) $\sin^3 x + \cos^3 x = 0$;
29) $\sin x = a\sin y,\ tg\, x = b\, tg\, y$;
30) $9\, tg\, x + tg\, y = 4$
$2\, cotg\, x + 4\, cotg\, y = 3$.

e) **Матурски задаци:**

1) $\sin 4x + \sin x = 0$ *(Sorbonne)*;
2) $\sin 2x = \cos 3x$ *(Sorbonne)*;

3) $\sin 2x + \cos 2x = \sqrt{2}\sin^2 x$ *(Toulouse)*;
4) $\sin x\; tg\, x + 2\cos x = m$ *(Saint-Cyr)*;
5) $2\sin^2 3x + \sin^2 6x = 2$ *(Sorbonne)*;
6) $\sin^4 x + \cos^4 x = \frac{2}{3}$ *(Saint-Cyr)*;
7) $\sin 5x = \sin 7x$ *(Dijon)*;
8) $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 0$ *(Sorbonne)*;
9) $\sin^2 x + 2\sin x \cos x - 2\cos^2 x = \frac{1}{2}$ *(Nancy)*;
10) $\cos 2x = \frac{1+\sqrt{3}}{2}(\cos x - \sin x)$ *(Sorbonne)*;
11) $2\sin x = \sin(45^0 - x)$ *(St. Cyr)*;
12) $\sin x + \sin y = a,\ \cos x + \cos y = b$ *(Sorbonne)*;
13) $tg\, x + cotg\, y = a,\ cotg\, x + tg\, y = b$ *(Sorbonne)*;
14) $tg\, x + tg\, y = 1,\ tg(x+y) = \frac{3}{4}$ *(Caen)*;
15) $\sin x \sin y = \frac{1}{4},\ \cos x \cos y = \frac{3}{4}$ *(Sorbonne)*;
16) $\cos x - \cos y = a,\ \cos 2x + \cos 2y = b$ *(Sorbonne)*;
17) $\sin x + \sin y = 2a\sin\alpha,\ \cos x + \cos y = 2a\cos\alpha$ *(Sorbonne)*,
18) $2\cos x \cos y = 1,\ tg\, x + tg\, y = 2$ *(Marseille)*;
19) $tg\, x + tg\, y = a,\ tg\frac{x}{2} + tg\frac{y}{2} = b$ *(Montpellier)*;
20) $\sin x + \sin y = \sin\alpha,\ \cos x + \cos y = 1 + \cos\alpha$ *(Sorbonne)*.
21) Наћи вредности за x само до 180^0, које задовољавају једначину:
$\frac{5}{3+tg\, x} + \frac{13}{2+tg\, x} = 4{,}25$ (Београд, I м. 1908).
22) $8\sin^2 x + 4\cos^2 x = \frac{13}{2}\sin 2x$ (Загреб, I м. 1932).
23) $\left.\begin{aligned}\sin x + \sin y &= 1{,}1428\\ \cos x + \cos y &= 1{,}6321\end{aligned}\right\}\ \begin{aligned}x&=?\\ y&=?\end{aligned}$ (Загреб, прив. 1932)
24) $8\sin^4 x - 14\sin^3 x\cos x - 69\sin^2 x\cos^2 x - 14\sin x\cos^3 x + 8\cos^4 x = 0$ (Загреб, II ж. 1934).
25) Два су угла неког троугла задана једначинама $4^{tgx+tgy} = 2^3$ $2^{4(tg^2x - tg^2y)} = 8$. Одредити трећи угао. (Загреб, II ж. 1932).

РАВНА ТРИГОНОМЕТРИЈА

§ 22. Решавања код правоуглога троугла*

I. Решити троугао значи помоћу извесног броја познатих елемената наћи остале његове елементе. Код овога троугла довољно је да знамо два независна елемента, па да нађемо остале. Решавање задатака код правоуглога троугла оснива се на планиметриским теоремама:

*) Решавање правоуглог троугла сами ученици понављају, пошто припада градиву из V и VI разреда.

1) *Квадрат над хипотенузом једнак је збиру квадрата над катетама;* 2) *Висина је средња пропорционала између отсечака хипотенузиних;* 3) *Катета је средња пропорционала између хипотенузе и оближњег отсечка хипотенузиног;* 4) *Површина је једнака половини производа катета, или половини производа хипотенузе и њене висине;* и уз то, још на овим двема врло важним теоремама:

Теорема 1. Свака је катета једнака производу хипотенузе и синуса супротног угла, или производу хипотенузе и косинуса налеглог угла тражене катете.

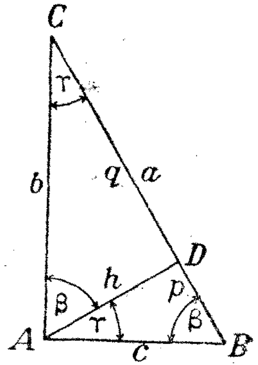
Заиста је из троугла ABC (сл. 26):

$sin\,\beta = \frac{b}{a}$, а $b = a\ sin\,\beta$;

$cos\,\gamma = \frac{b}{a}$, а $b = a\ cos\,\gamma$;

$sin\,\gamma = \frac{c}{a}$, а $c = a\ sin\,\gamma$;

$cos\,\beta = \frac{c}{a}$, а $c = a\ cos\,\beta$;



Сл. 26

Теорема 2. Свака је катета једнака производу друге катете и тангенса супротног угла, или производу друге катете и котангенса налеглог угла тражене катете.

Заиста је из троугла ABC (сл. 26):

$tg\,\beta = \frac{b}{c}$, а $b = c\,tg\,\beta$; $\quad tg\,\gamma = \frac{c}{b}$, а $c = b\,tg\,\gamma$;

$cotg\,\gamma = \frac{b}{c}$, а $b = c\,cotg\,\gamma$; $\quad cotg\,\beta = \frac{c}{b}$, а $c = b\,cotg\,\beta$.

Ако је a хипотенуза, b и c катете, p и q отсечци хипотенузини, h висина хипотенузина, P површина троугла, онда су горње теореме изражене једначинама:

1) $a^2 = b^2 + c^2$; 2) $q : h = h : p$; 3) $a : b = b : q$, или $a : c = c : p$; 4) $P = \frac{bc}{2} = \frac{ah}{2}$; 5) $b = a\ sin\,\beta = a\ cos\,\gamma$, или $c = a\ sin\,\gamma = a\ cos\,\beta$; и 6) $b = c\ tg\,\beta = c\ cotg\,\gamma$, или $c = b\ tg\,\gamma = b\ cotg\,\beta$.

Сви су задаци из правоуглог троугла у томе што су позната два од елемената: a, b, c, β или γ, h, p, q и P, а траже се остали. Од свију тих случајева решавања најглавнији су четири, и то:

Кад је позната хипотенуза и једна катета (a и b или a и c);

Кад је позната хипотенуза и један оштар угао (a и β, или a и γ);

Кад је позната катета и један оштар угао [b и β (γ); или c и β (γ)]; и

Кад су познате обе катете (b и c).

При решавању правоуглог троугла, непознате елементе израчунавамо применом горњих једначина. Из тих је једначина:

1) $b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{h^2 + q^2} = \sqrt{aq} = a \cdot sin\,\beta = a \cdot cos\,\gamma = c \cdot tg\,\beta =$
$= c \cdot cotg\,\gamma = \frac{h}{cos\,\beta} = \frac{h}{sin\,\gamma} = \frac{q}{sin\,\beta} = \frac{q}{cos\,\beta} = \frac{2P}{c}$;

2) $c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{h^2 + p^2} = \sqrt{ap} = a\,sin\,\gamma = a \cdot cos\beta = b \cdot tg\,\gamma =$
$= b \cdot cotg\beta = \frac{h}{cos\gamma} = \frac{h}{sin\,\beta} = \frac{p}{sin\,\gamma} = \frac{p}{cos\,\beta} = \frac{2P}{b}$;

3) $a = \sqrt{b^2 + c^2} = p + q = \frac{b^2}{q} = \frac{c^2}{p} = \frac{b}{sin\,\beta} = \frac{b}{cos\,\gamma} = \frac{c}{sin\,\gamma} =$
$= \frac{c}{cos\,\beta} = \frac{2P}{h}$;

4) $\boldsymbol{sin}\,\beta = \frac{b}{a} = \frac{h}{c} = \frac{q}{b}$; $\boldsymbol{cos}\,\beta = \frac{c}{a} = \frac{p}{c} = \frac{h}{b}$; $\boldsymbol{tg}\beta = \frac{b}{c} = \frac{h}{p} = \frac{q}{h}$;
$\boldsymbol{cotg}\,\beta = \frac{c}{b} = \frac{p}{h} = \frac{h}{q}$; $\beta = 90^0 - \gamma$;

5) $\boldsymbol{sin}\,\gamma = \frac{c}{a} = \frac{h}{b} = \frac{p}{c}$; $\boldsymbol{cos}\,\gamma = \frac{b}{a} = \frac{q}{b} = \frac{h}{c}$; $\boldsymbol{tg}\,\gamma = \frac{c}{b} = \frac{h}{q} = \frac{p}{h}$;
$\boldsymbol{cotg}\,\gamma = \frac{b}{a} = \frac{q}{h} = \frac{h}{p}$; $\gamma = 90^0 - \beta$;

6) $\boldsymbol{h} = \sqrt{pq} = \sqrt{c^2 - p^2} = \sqrt{b^2 - q^2} = c \cdot sin\,\beta = c \cdot cos\,\gamma = p\,tg\,\beta =$
$= p \cdot cotg\,\gamma = b \cdot sin\gamma = b \cdot cos\,\beta = q \cdot tg\,\gamma = q \cdot cotg\,\beta = \frac{2P}{a}$;

7) $\boldsymbol{p} = a - q = \frac{c^2}{a} = \sqrt{c^2 - h^2} = c \cdot sin\gamma = c \cdot cos\beta = h \cdot tg\gamma = h \cdot cotg\,\beta$;

8) $\boldsymbol{q} = a - p = \frac{b^2}{a} = \sqrt{b^2 - h^2} = b \cdot sin\,\beta = b \cdot cos\,\gamma = h \cdot tg\,\beta = h \cdot cotg\gamma$.

Који ћемо од ових начина за израчунавање непознатих елемената узети у поступак, зависи од познатих елемената у задатку.

II. Случајеви решавања код правоуглог троугла

а) Главни случајеви

Први случај. *Позната је хипотенуза $a = 125\ cm$ и катета $b = 100\ cm$; наћи остале елементе (сл. 26).*

1) $sin\,\beta = \frac{b}{a} = \frac{100}{125} = \frac{4}{5}$; $log\ sin\,\beta = \bar{1},90309$; $\beta = 53^0 7' 48''$

2) $\gamma = 90^0 - \beta = 36^0\ 52'\ 12''$.
3) $c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{(a+b)(a-b)} = \sqrt{225 \cdot 25} = 15 \cdot 5 = 75\ cm$.
4) Из $\triangle\ ADC$ имамо: $q = b \cos\gamma = 100 \cdot \cos 36^0\ 52'\ 12''$; $\log q = 1{,}90309$; $q = N\,\overline{1{,}90309} = 80\,cm$, или $q = \frac{b^2}{a} = \frac{10000}{125} = 80\ cm$.
5) $p = a - q = 45\,cm$. 6) $h = \sqrt{pq} = \sqrt{80 \cdot 45} = \sqrt{3600} = 60\ cm$, или $h = b\ \sin\gamma = 100 \cdot \sin 36^0 52'\ 12''$; $\log h = 1{,}77815$; $h = N\,\overline{1{,}77815} = 60\,cm$ 7) $P = \frac{bc}{2} = \frac{100 \cdot 75}{2} = 3750\ cm^2$.

Напомена. При израчунавању непознатих елемената препоручује се да се за те елементе нађу изрази који претстављају њихове величине, а у којима фигуришу дати елементи.

Други случај. *Позната је хипотенуза $a = 2346\ m$ и угао $\beta = 38^0\ 45'\ 17''$; наћи остале елементе* (сл. 26).

1) $\gamma = 90^0 - \beta = 51^0\ 14'43''$. 2) $b = a \sin\beta = 2346 \sin 38^0 45'\ 17''$; $\log\ b = 3{,}16689$; $b = N\,\overline{3{,}16689} = 1468{,}55$. 3) $c = a\ \cos\beta = 2346 \cos\ 38^0 45' 17''$; $\log c = 3{,}26233$; $c = N\overline{3{,}26233} = 1829{,}50\ cm$. Остале елементе израчунавамо као у првом случају.

Трећи случај. *Позната је катета $b = 847{,}3\ m$ и угао $\beta = 25^0\ 15'$; наћи остале елементе* (сл. 26.).

1) $\gamma = 90^0 - \beta = 64^0\ 45'$. 2) $c = b\ \mathrm{cotg}\,\beta = 847{,}3 \cdot \mathrm{cotg}\ 25^0\ 15'$; $\log c = \log 847{,}3 + \log\ \mathrm{cotg}\ 25^0\ 15' = 3{,}25444$; $c = N\,\overline{3{,}25444} = 1796{,}50\ m$; 3) из $b = a \sin\beta$ имамо: $a = \frac{a}{\sin\beta} = \frac{847{,}3}{\sin\ 15^0\ 15'}$; $\log a = 3{,}29905$; $a = N\,\overline{3{,}29905} = 1990{,}90\ m$.

Остале елементе израчунавамо као у првом случају.

Четврти случај. *Позната је катета $b = 839{,}45\ m$ и катета $c = 483{,}5\ m$; наћи остале елементе* (сл. 26).

1) $\mathrm{tg}\,\beta = \frac{b}{c} = \frac{839{,}45}{483{,}5}$; $\log\ \mathrm{tg}\,\beta = 0{,}23959$; $\beta = 60^0\ 3'\ 31''$.
2) $\gamma = 90^0 - \beta = 29^0\ 56'\ 29''$. 3) Из $b = a\ \sin\ \beta$ имамо: $a = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{839{,}45}{\sin 60^0\ 3'\ 31''}$; $\log a = 2{,}98585$; $a = N\,\overline{2{,}98585} = 967{,}94\ m$.

Остале елементе израчунавамо као у првом случају.

b) Споредни случајеви

1) *Дата је хипотенуза **a** и висина **h*** (сл. 26).

Ако у једничини $a = p + q$ заменимо p са $h \mathrm{cotg}\ \beta$ и q са $h \mathrm{tg}\,\beta$, добијамо $a = h(\mathrm{cotg}\,\beta + \mathrm{tg}\,\beta) = h\,[\mathrm{tg}\,(90^0 - \beta) + \mathrm{tg}\,\beta] = \frac{h\ \sin 90^0}{\cos(90^0 - \beta)\cos\beta} = \frac{h}{\sin\beta\ \cos\beta} = \frac{2\,h}{2 \sin\beta \cos\beta} = \frac{2\,h}{\sin 2\beta}$. Одавде

је $\sin 2\,\beta = \frac{2\,h}{a}$, из које једначине налазимо употребом логаритама угао β. Даљи је рад као код другог главног случаја.

2) *Дата је једна катета **b** и неналегли отсечак* (***p***) (сл.26).

Из пропорције $a : b = b : q$ или $a : b = b : (a - p)$ имамо: $a = \frac{p \pm \sqrt{p^2 + 4\,b^2}}{2}$, а узимамо у обзир решење $a > p$. Даље се ради као код првог главног случаја.

3) *Дати су отсечци **p** и **q*** (сл. 26).

Тада је хипотенуза $a = p + q$, те из пропорције $a : b = b : q$ имамо $b = \sqrt{aq} = \sqrt{(p+q)\,q}$. Даље се ради као код првог главног случаја.

4) *Дата је висина **h** и површина **P*** (сл. 26).

Из једначине $P = \frac{ah}{2}$ имамо: $a = \frac{2P}{h}$, а из пропорције $p : h = h : (a - p)$ имамо $p = \frac{a \pm \sqrt{a^2 - 4\ h^2}}{2}$, где за p узимамо вредност $< a$. Најзад, из $\mathrm{tg}\,\beta = \frac{h}{p}$, налазимо угао β, па се даље ради као код другог главног случаја.

5) *Дата је површина P и један оштар угао* (β) (сл. 26).

Тада је $\gamma = 90^0 - \beta$. Па како је $P = \frac{bc}{2}$ и $c = b\mathrm{tg}\,\gamma$, то је заменом $P = \frac{b^2 \mathrm{tg}\gamma}{2}$. Одавде је $b = \sqrt{\frac{2P}{\mathrm{tg}\gamma}}$. Даље се ради као код трећег случаја.

Напомена. Остали споредни случајеви јесу кад се зна: 6) хипотенуза a и један отсечак (p или q); 7) хипотенуза a и површина P; 8) једна катета и налегли отсечак хипотенузин (b и q, или c и p); 9) једна катета (b или c) и висина h; 10) једна катета (b или c) и површина P; 11) један отсечак (p или q) и један оштар угао (β или γ); 12) висина h и један отсечак (p или q); 13) висина h и један оштар угао (β или γ), и 14) површина P и један отсечак (p или q).

Сви ови случајеви, сем 14-ог, који се не узима у решавање, пошто наилазимо на једначину вишег степена, своде се на један од главних случајева решавања код правоуглога троугла и јесу лакши од решених случајева.

Код правоуглога троугла постоје још елементи R и r (полупречници описаног и уписаног круга), за које знамо из планиметрије да су $R = \frac{a}{2}$ и $r = \frac{P}{s}$ (s полуобим троугла), али их узимамо у обзир при израчунавању разностраних троуглова, где се r израчунава подеснијим начином.

c) Сложенији случајеви

Ти су случајеви они када је познат један од елемената правоуглог троугла и још: збир или разлика хипотенузе и једне катете, збир или разлика катета, разлика углова β и γ, разлика отсечака хипотенузиних итд. За решавање задатака са комбинованим подацима употребљавају се исти обрасци као и код простих случајева, а особито обрасци за претварање збирова и разлика гониометриских функција у производ.

1. *Решити правоугли троугао кад се зна разлика катета и један оштар угао* ($b-c=d$ и β) (сл. 26).

Како је $\gamma=90^0-\beta$ и $c=b tg\gamma$, то заменом у $b-c=d$ добијамо $b-b\,tg\gamma=d$, а одавде $b=\frac{d}{1-tg\gamma}=\frac{d}{tg45^0-tg\gamma}=$ $=\frac{d\cos 45^0\cos\gamma}{\sin(45^0-\gamma)}$, или $b=\frac{d\sqrt{2}\cos\gamma}{2\sin(45^0-\gamma)}$. Тада је $c=b\,tg\,\gamma=$ $=\frac{d\sqrt{2}\cos\gamma}{2\sin(45^0-\gamma)}\cdot tg\gamma=\frac{d\sqrt{2}\sin\gamma}{2\sin(45^0-\gamma)}$. Даљи је рад као код IV главног случаја. Исти је рад кад се зна збир катета и један оштар угао.

2. *Решити троугао кад се зна збир хипотенузе и једне катете и један оштар угао* ($a+b=m$ и β) (сл. 26).

Како је $b=a\sin\beta$, то заменом у $a+b=m$ добијамо $a+a\sin\beta=m$, а одавде $a=\frac{m}{1+\sin\beta}=\frac{m}{\sin 90^0+\sin\beta}=$

$$=\frac{m}{2\sin(45^0+\frac{\beta}{2})\cos(45^0-\frac{\beta}{2})}.$$

Тада је $b=a\sin\beta=\frac{m\sin\beta}{2\sin(45^0+\frac{\beta}{2})\cos(45^0-\frac{\beta}{2})}$.

Исто се ради кад се зна разлика хипотенузе и једне катете и један оштар угао.

3. *Решити правоугли троугао кад се зна његов обим и један оштар угао* ($a+b+c=2s$ и β) (сл. 26).

Како је $b=a\sin\beta$ и $c=a\sin\gamma$, то заменом у $a+b+c=$ $=2s$ добијамо: $a+a\sin\beta+a\sin\gamma=2s$, а одавде:

$$a=\frac{2s}{1+\sin\beta+\sin\gamma}=$$

$$=\frac{2s}{\sin 90^0+\sin\beta+\sin\gamma}=\frac{2s}{4\cos 45^0\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}}=\frac{s\sqrt{2}}{2\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}}.$$

Даљи је рад као код првог главног случаја. Исто се ради кад се зна $b+c-a=n$ и један оштао угао.

4. *Решити правоугли троугао кад је позната разлика отсечака и један оштар угао* ($p-q=d$ и β) (сл. 26).

Како је $p=h\ cotg\beta$ и $q=h\ cotg\gamma$, то заменом у $p-q=d$ добијамо: $h\,cotg\beta-h\ cotg\gamma=d$, а одавде $h=$ $=\frac{d}{cotg\beta-cotg\gamma}=\frac{d\sin\beta\sin\gamma}{\sin(\gamma-\beta)}$. Тада је $p=h\,cotg\beta=\frac{d\sin\gamma\cos\beta}{\sin(\gamma-\beta)}$, $q=h\,cotg\gamma=\frac{d\sin\beta\cos\gamma}{\sin(\gamma-\beta)}$ и $a=p+q=\frac{d(\sin\gamma\cos\beta+\cos\gamma\sin\beta)}{\sin(\gamma-\beta)}=$

$$=\frac{d\sin(\gamma+\beta)}{\sin(\gamma-\beta)}.$$

Даље се ради као код другог главног случаја.

5. *Решити троугао кад се зна разлика катета и разлика отсечака хипотенузиних* ($c-b=m$ и $p-q=n$) (сл. 26).

Из пропорција $a:b=b:q$ и $a:c=c:p$ имамо $q=\frac{b^2}{a}$ и $p=\frac{c^2}{a}$. Тада је $p-q=n=\frac{c^2-b^2}{a}=\frac{(c+b)(c-b)}{a}=\frac{(c+b)\,m}{a}=$ $=\frac{(a\sin\gamma+a\sin\beta)\,m}{a}=m(\sin\gamma+\sin\beta)$. Одавде је:

$$\frac{n}{m}=\sin\gamma+\sin\beta=2\sin\frac{\gamma+\beta}{2}\cos\frac{\gamma-\beta}{2}=2\sin 45^0\cos\frac{\gamma-\beta}{2}=$$

$\sqrt{2}\cos\frac{\gamma-\beta}{2}$. Стога је $\cos\frac{\gamma-\beta}{2}=\frac{n\sqrt{2}}{2m}$, одакле израчунавамо угао $(\gamma-\beta)$. За $\gamma-\beta=\omega$ и $\beta+\gamma=90^0$ биће $\gamma=\frac{90^0+\omega}{2}$ и $\beta=\frac{90^0-\omega}{2}$.

Даље се ради као први задатак из сложених случајева.

6. *Решити правоугли троугао кад се зна разлика отсечака хипотенузиних и висина* ($p-q=d$ и h) (сл. 26).

Како је $p=h\ cotg\beta$ и $q=h\ cotg\gamma$, то је $d=p-q=$ $=h\ (cotg\beta-cotg\gamma)=\frac{h\ \sin(\gamma-\beta)}{\sin\beta\ \sin\gamma}=\frac{2h\ \sin(\gamma-\beta)}{2\sin\beta\ \cos\beta}=$ $=\frac{2h\sin(90^0-2\beta)}{\sin 2\beta}=\frac{2h\cos 2\beta}{\sin 2\beta}=2h\ cotg\,2\beta$. Одавде је $cotg\,2\beta=$ $=\frac{d}{2h}$, или $tg\,2\beta=\frac{2h}{d}$. Када из ове једначине употребом логаритама нађемо угао β, и катету c из једначине $c=\frac{h}{\sin\beta}$, онда се овај задатак своди на трећи главни случај.

7. *Решити троугао кад се зна разлика хипотенузе и једне катете и друга катета* ($a-b=d$ и c) (сл. 26).

Како је $a=\frac{c}{\cos\beta}$ и $b=c\ tg\beta$, то заменом у $a-b=d$ добијамо: $d=\frac{c}{\cos\beta}-c\ tg\beta=\frac{c\ (1-\sin\beta)}{\cos\beta}=\frac{c\ (1-\cos\gamma)}{\sin\gamma}=$

$$=\frac{c\cdot 2\ \sin^2\frac{\gamma}{2}}{2\sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\gamma}{2}}=c\ tg\frac{\gamma}{2}.$$

Израчунавањем угла γ из ове једначине, задатак сводимо на трећи главни случај.

Исто тако се раде задаци кад се зна: *a*) збир хипотенузе и једне катете и друга катета; *b*) збир (разлика) катета и хипотенуза.

8. *Решити правоугли троугао кад се зна обим* **2s** *и висина* **h** (сл. 28).

Како је $b=\frac{h}{\sin\gamma}$, $c=\frac{h}{\sin\beta}$ и $a=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{h}{\sin\beta\sin\gamma}$, то заменом у $a+b+c=2s$ добијамо: $2s=\frac{h\ (1+\sin\beta+\sin\gamma)}{\sin\beta\ \sin\gamma}=$

$$=\frac{h\,(\sin 90^0+\sin\beta+\sin\gamma)}{\sin\beta\ \sin\gamma}=\frac{4h\cos 45^0\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}}{4\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\gamma}{2}}=\frac{h\sqrt{2}}{2\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}}=$$

$$=\frac{h\ \sqrt{2}}{\cos\frac{\beta-\gamma}{2}-\cos\frac{\beta+\gamma}{2}}=\frac{h\ \sqrt{2}}{\cos\frac{\beta-\gamma}{2}-\cos 45^0}=\frac{h\ \sqrt{2}}{\cos\frac{\beta-\gamma}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}}=$$

Одавде је $\cos\frac{\beta-\gamma}{2}=\frac{\sqrt{2}\,(h+s)}{2s}$, одакле израчунавамо угао $(\beta-\gamma)$. За $\beta-\gamma=\omega$ и $\beta+\gamma=90^0$ биће $\beta=\frac{90^0+\omega}{2}$ и $\gamma=$ $=\frac{90^0-\omega}{2}$. Најзад из једначина: $b=\frac{h}{\sin\gamma}$, $c=\frac{h}{\sin\beta}$ и $a=$ $=\frac{h}{\sin\beta\ \sin\gamma}$ налазимо стране.

9. *Решити правоугли троугао кад се зна обим* **2s** *и површина* **P** (сл. 26).

Како је $b=a\ \sin\beta$ и $c=a\ \sin\gamma$, то је $2s=a+b+c=$ $=a+a\ \sin\beta+a\ \sin\gamma=a\ (1+\sin\beta+\sin\gamma)=a\ (\sin 90^0+\sin\beta+$ $+\sin\gamma)=4a\cos 45^0\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}$, а одавде је $a=\frac{s}{\sqrt{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}}$,

Међутим је $P=\frac{b\,c}{2}=\frac{a^2\sin\beta\sin\gamma}{2}$, $a=\sqrt{\frac{2\,P}{\sin\beta\sin\gamma}}$.

Стога: $\frac{2\,P}{\sin\beta\sin\gamma}=\frac{s^2}{2\cos^2\frac{\beta}{2}\cos^2\frac{\gamma}{2}}$,

или $\frac{2\,P}{4\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\gamma}{2}}=\frac{s^2}{2\cos^2\frac{\beta}{2}\cos^2\frac{\gamma}{2}}$, или $\frac{\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}}{\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}}=\frac{s^2}{P}$.

Употребом изведених пропорција добијамо:

$\frac{\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}+\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}}{\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}-\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}}=\frac{s^2+P}{s^2-P}$, или $\frac{\cos\frac{\beta-\gamma}{2}}{\cos\frac{\beta+\gamma}{2}}=\frac{s^2+P}{s^2-P}$. Одавде је

$\cos\frac{\beta-\gamma}{2}=\frac{s^2+P}{s^2-P}\cos 45^0=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{s^2+P}{s^2-P}$. Из ове једначине налазимо угао $(\beta-\gamma)$. За $\beta-\gamma=\omega$ и $\beta+\gamma=90^0$ добијамо $\beta=\frac{90^0+\omega}{2}$ и $\gamma=\frac{90^0-\omega}{2}$. Из $a=\sqrt{\frac{2P}{\sin\beta\ \sin\gamma}}$ налазимо хипотенузу, па се задатак своди на други главни случај.

II. Задаци за вежбу

1) Решити правоугли троугао када су: a) хипотенуза 363 *m* a катета 217 *m*; b) хипотенуза 90,814 *m* a један оштар угао 50°20'30"; c) катете 290 *m* и 430 *m*; d) катета 396 *m* a један оштар угао 44°29'53".

2) Решити троугао када је хипотенуза 503,63 *m* a разлика катета 95,84 *m*.

3) Решити правоугли троугао код кога је збир катета 408 *m* a један угао 26°28'30".

4) Решити правоугли троугао код кога је: a) збир хипотенузе и једне катете 71,587 *m* a један угао 37° 19' 40"; b) разлика катета 18,5 *m* a један угао 56° 48'; c) хипотенуза 27 *m* a разлика оштрих углова 8° 26'; d) разлика хипотенузе и једне катете 42,56 *m* a један угао 40° 20'.

5) Површина правоуглог троугла је 25,76 m^2 a један оштар угао 44° 7'50"; наћи стране.

6) Израчунај углове правоуглог троугла када је размера катета 3 : 5.

7) Решити пргвоугли троугао код кога је: a) хипотенуза $a=6542{,}84\,m$ a $\beta:\gamma=7:9$; b) катета $b=320\,m$ a $\gamma:\beta=7:5$; c) хипотенуза $a=225\,m$ a размера катета $b:c=0{,}75$; d) збир катета 14, a размера катета 4 : 3; e) катета $b=120\,m$, a размера друге катете и хиптенузе 0,6; f) обим 24 *m* a површина 24 m^2; j) отсечци хипотенузини 345 *m* и 638 *m*.

8) Симетрала правог угла правоуглога троугла дели хипотенузу на два дела од 4,319 *m* и 5,238 *m*. Наћи углове тога троугла (Bacc. — Paris).

9) Катете правоуглог троугла јесу $2mn$ и m^2-n^2; наћи тангенсе полууглова оштрих углова (Bacc. — Clermont).

10) Наћи хипотенузу a и катету c кад је катета $b = 1m$, а наспрамни угао $\beta = 60^0$, и то без употребе логаритамских таблица (Васс. — Toulouse).

11) Решити правоугли троугао кад се зна полуобим s и полупречник описаног круга R (Saint-Cyr).

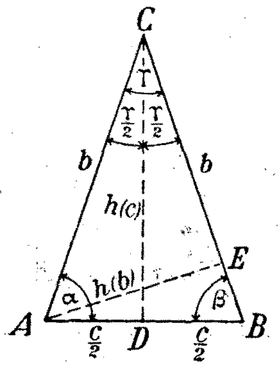
12) Стране правоуглог троугла чине геометриску прогресију. Израчунати његове углове (Карловац 1932).

13) У правоуглом троуглу је збир катета 14 cm, а средња линија веће катете је $2\sqrt{13}$; наћи његове углове и катете (Београд, I ж. 1929).

§ 23. Решавања код равнокраког троугла

Код равнокраког троугла имамо она иста решавања која смо имали код правоуглог троугла, пошто се, спуштањем основичине висине, троугао дели на два подударна правоугла троугла. И код овога троугла, као и код правоуглога, позната су увек два независна елемента, а траже се остали. Крак равнокраког троугла замењује хипотенузу, а половина основице и њена висина замењују катете.

Први случај. *Познат је крак* ***b*** *и један угао* (β); *наћи остале елементе* (сл. 27).



Сл. 27

1) $\alpha = \beta$; 2) $\gamma = 180^0 - 2\beta$, а $\frac{\gamma}{2} = 90^0 - \beta$; 3) $h_{(c)} = b\, sin\beta$; 4) $\frac{c}{2} = b\, cos\beta$, а $c = 2\, b\, cos\beta$: 5) $h_{(b)} = c\, sin\beta = 2\, b\, sin\beta\, cos\beta = b\, sin\, 2\beta = b\, sin\gamma$; и 6) $P = \frac{ch_{(c)}}{2} = \frac{b^2\, sin\, 2\beta}{2}$.

Други случај. *Позната је основица* ***c*** *и један угао* (γ); *наћи остале елементе* (сл. 27).

$$1)\ \alpha = \beta = \frac{180^0 - \gamma}{2} = 90^0 - \frac{\gamma}{2};$$

2) $h_{(c)} = \frac{c}{2}\, cotg\frac{\gamma}{2}$; 3) $h_{(b)} = c\, sin\,\beta = c\, sin\left(90^0 - \frac{\gamma}{2}\right) = c\, cos\frac{\gamma}{2}$;

4) Из $\frac{c}{2} = b\, cos\,\beta$ имамо: $b = \frac{c}{2\, cos\,\beta} = \frac{c}{2\ cos\left(90^0 - \frac{\gamma}{2}\right)} = \frac{c}{2\, sin\frac{\gamma}{2}}$; и 5) $P = \frac{c\, h_{(c)}}{2} = \frac{c^2}{4}\, cotg\,\frac{\gamma}{2}$.

Трећи случај. *Познат је крак* ***b*** *и основица* ***c****; наћи остале елементе* (сл. 27).

1) $cos\,\beta = cos\,\alpha = \frac{\frac{c}{2}}{b} = \frac{c}{2b}$; 2) $\gamma = 180^0 - 2\,\beta$; 3) $h_{(c)} = \sqrt{b^2 - \frac{c^2}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{(2b + c)(2\,b - c)}$, или $h_{(c)} = b\ sin\ \beta$, или $h_{(c)} = \frac{c}{2} tg\beta$; 4) $h_{(b)} = b\, sin\,\gamma = c\, sin\,\beta$; и 5) $P = \frac{c\, h_{(c)}}{2} = \frac{c}{4}\sqrt{(2b + c)(2b - c)}$.

Четврти случај. *Познат је крак* ***b*** *и основичина висина* $\boldsymbol{h_{(c)}}$; *наћи остале елементе* (сл. 27).

1) $sin\,\alpha = sin\,\beta = \frac{h_{(c)}}{b}$; 2) $\gamma = 180^0 - 2\,\beta$; 3) $\frac{c}{2} = \sqrt{b^2 - h^2_{(c)}}$, а $c = 2\sqrt{(b + h_{(c)})\,(b - h_{(c)})}$; 4) $h_{(b)} = b\, sin\,\gamma = c\, sin\beta = \frac{c\, h_{(c)}}{b} = \frac{2\, h_{(c)}}{b}\sqrt{(b + h_{(c)})\,(b - h_{(c)})}$; и 5) $P = \frac{c\, h_{(c)}}{2} = h_{(c)}\sqrt{(b + h_{(c)})(b - h_{(c)})}$.

Напомена. Остали случајеви решавања код равнокраког троугла своде се на један од претходна четири случаја. Елементе R и r (полупречнике описаног и уписаног круга) можемо израчунати планиметриским обрасцима: $R = \frac{b^2\ c}{4P}$ и $r = \frac{P}{s}$ (s полуобим троугла), или из општих образаца за R и r, који ће бити изведени код косоуглих троуглова.

Задаци за вежбу:

1) Решити равнокраки троугао код кога је: a) основица 505 m а угао на врху $83^0\ 25'\ 4''$; b) основица 3333 m а угао на основици $65^0\ 29'$; c) крак 79 m а угао на основици $47^0\ 25'\ 36''$; d) основица 41 m а крак 65 m.

2) Решити равнокраки троугао код кога је: a) површина 2.600 m^2 а угао на основици $82^0\ 13'\ 28''$; b) површина 1260 m^2 а основица 53 m; c) површина 178,6 m^2 а основичина висина 18,8 m; d) основица 72 m а висина крака 43,2 m; e) крак 29 m а његова висина 28,96 m; f) крак 580 m а основичина висина 140 m.

3) Решити равнокраки троугао код кога је: a) висина основичина 126 m а висина крака 62,02 m; b) основица 12 m а размера њене висине и висине крака 5 : 6; c) површина 960 m^2 а размера основице и висине 5 : 6.

4) У једном равнокраком троуглу је збир основице и њене висине два пута већи од крака; наћи његове углове.

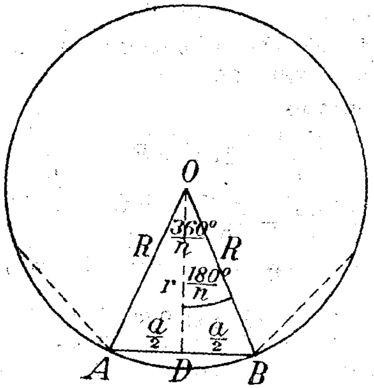
5) Решити равнокраки троугао чија је основица $\sqrt{3}\ m$ а њена висина $\frac{3}{4}\ m$.

6) Једна дијагонала ромба је 92,535 m, обим му је 842,7 m; наћи његове углове и другу дијагоналу.

7) Решити равнокраки троугао чији је обим 1682 cm а угао на врху $\gamma = 83^0\ 25'\ 41''$ (Панчево, 1926).

§ 24. Решавања код правилних многоуглова

Када центар описаног, односно уписаног круга, код правилног многоугла спојимо са његовим теменима, многоугао се дели на онолико равнокраких троуглова колики је број његових страна. Сви су ти троуглови подударни. Крак ма кога од тих троуглова је у ствари полупречник описаног круга, основица је страна правилног многоугла а висина основичина је полупречник уписаног круга у многоуглу. Угао на темену једнога од тих троуглова увек је познат и једнак $\frac{360^0}{n}$, где n значи број страна правилног многоугла.



Сл. 28

Стога се решавања код правилних многоуглова своде на решавања код равнокракога, односно правоуглога троугла. Код задатака из правилних многоуглова познат је један од елемената: a (страна), R (полупречник описаног круга), r (полупречник уписаног круга) и P (површина), а траже се остали елементи. Један је елеменат довољан зато што је увек познат број страна n, угао код средишта $\frac{360^0}{n}$ и угао правилног многоугла $\frac{(n-2)\,180^0}{n}$. Стога код правилних многоуглова имамо само четира случаја решавања, и то:

Први случај: *дата је страна* ***a*** *правилног* ***n****-тоугла; наћи полупречнике описаног и уписаног круга* ***R*** *и* ***r****, и површину* ***P*** (сл. 28).

Из правоуглог троугла BDO имамо:

1) $\frac{a}{2} = R\ sin\,\frac{180^0}{n}$, а $R = \frac{a}{2\ sin\,\frac{180^0}{n}}$;

2) $\frac{a}{2} = r\ tg\,\frac{180^0}{n}$, а $r = \frac{a}{2\ tg\,\frac{180^0}{n}}$;

3) $P = \frac{nar}{2} = \frac{na}{2}\cdot\frac{a}{2\ tg\,\frac{180^0}{n}} = \frac{na^2}{4\ tg\,\frac{180^0}{n}}$.

Бројни пример. $n = 8$, $a = 25{,}3\ cm$.

1. $R = \frac{25{,}3}{2\ sin\ 22^0\ 30'} = \frac{12{,}65}{sin\ 22^0\ 30'}$; $log\ R = 1{,}51925$;

$R = N\,\overline{1{,}51925} = 33{,}06\ cm$; 2) $r = \frac{25{,}3}{2\ tg\,22^0\,30'} = \frac{12{,}65}{tg\ 22^0\ 30'}$;

$log\ r = 1{,}48487$; $r = N\,\overline{1{,}48487} = 30{,}54\ cm$;

3) $P = \frac{8\cdot 25{,}3^2}{4\ tg\ 22^0\ 30'} = \frac{2\cdot 25{,}3^2}{tg\,22^0\ 30'}$; $log\ P = 3{,}49005$;

$P = N\,\overline{3{,}49005} = 3090{,}64\ cm^2$.

Исто тако се решава задатак кад је познат обим 0, јер је $a = \frac{0}{n}$.

Други случај. *Познат је полупречник* ***R*** *једнога круга; наћи страну уписаног правилног* ***n****-тоугла, полупречник уписаног круга у томе многоуглу и површину многоугла* (сл. 28).

Из правоуглог троугла DBO имамо:

1) $\frac{a}{2} = R\ sin\,\frac{180^0}{n}$, или $a = 2\ R\,sin\,\frac{180^0}{n}$; 2) $r = R\ cos\,\frac{180^0}{n}$;

3) $P = \frac{nar}{2} = \frac{n}{2}\cdot 2\,R\ sin\,\frac{180^0}{n}\cdot R\ cos\,\frac{180^0}{n} = \frac{n\,R^2}{2}\,sin\,\frac{360^0}{n}$.

Бројни пример. $n = 12$, $R = 15\ cm$.

1) $a = 2\,R\ sin\,\frac{180^0}{n} = 30\cdot sin\ 15^0$; $log\ a = 0{,}89012$;

$a = N\,\overline{0{,}89012} = 7{,}764\ldots = 7{,}76\ cm$;

2) $r = R\ cos\,\frac{180^0}{n} = 15\cdot cos\ 15^0$; $log\ r = 1{,}16104$;

$r = N\,\overline{1{,}16104} = 14{,}488\ldots = 14{,}49\ cm$;

3) $P = \frac{n\,R^2}{n}\,sin\,\frac{360^0}{n} = \frac{12\cdot 15^2}{2}\ sin\ 30^0 = \frac{12\cdot 15^0}{2}\cdot\frac{1}{2} = 3\cdot 225 =$

$= 675\ cm^2$; или $log\ P = 2{,}82930$, а $P = N\,\overline{2{,}82930} = 675\ cm^2$.

Трећи случај. *Познат је полупречник једног круга* ***r****; наћи страну описаног правилног* ***n****-тоугла, његову површину* ***P*** *и полупречник* ***R*** *описаног круга око тог многоугла* (сл. 28).

Из правоуглог троугла BDO имамо:

1) $\frac{a}{2} = r\,tg\,\frac{180^0}{n}$, или $a = 2\,r\,tg\,\frac{180^0}{n}$; 2) $r = R\,cos\,\frac{180^0}{n}$, а

$R = \frac{r}{cos\,\frac{180^0}{n}}$; и 3) $P = \frac{nar}{2} = \frac{nr}{2}\cdot 2\,r\ tg\,\frac{180^0}{n} = n\ r^2\ tg\ \frac{180^0}{n}$.

Бројни пример. $n = 5$, $r = 24\ cm$.

1) $a = 2\,r\ tg\,\frac{180^0}{n} = 48\cdot tg\ 12^0$; $log\ a = 1{,}00872$;

$a = N\,\overline{1{,}00872} = 10{,}202\ldots = 10{,}20\ cm$;

2) $R = \frac{r}{cos\,\frac{180^0}{n}} = \frac{24}{cos\ 12^0}$; $log\ R = 1{,}38981$;

$R = N\,\overline{1{,}38981} = 24{,}53\ cm$;

3) $P = n\, r^2\, tg \frac{180^0}{n} = 15 \cdot 24^2 \cdot tg\, 12^0$; $\quad log\ P = 3,26309$;

$P = N\overline{3,26399} = 1836,50\ cm^2$.

Четврти случај. *Позната је површина правилног n-тоугла; наћи његову страну **a** и полупречнике описаног и уписаног круга **R** и **r*** (сл. 28).

1) Из $P = \frac{n\ a^2}{4 tg \frac{180^0}{n}}$ имамо $a = 2\sqrt{\frac{P}{n} tg \frac{180^0}{n}}$;

2) Из $P = \frac{n R^2}{2} sin \frac{360^0}{n}$ је $R = \sqrt{\frac{2\ P}{n\ sin \frac{180^0}{n}}}$; и

3) Из $P = n\, r^2\, tg \frac{180^0}{n}$ је $r = \sqrt{\frac{P}{n\, tg \frac{360^0}{n}}} = \sqrt{\frac{P}{n} cotg \frac{360^0}{n}}$.

Бројни пример. $n = 10$, $P = 3000\ m^2$.

1) $a = 2\sqrt{200 \cdot tg\ 18^0}$; $\quad log\ a = 1,20743$;

$a = N\overline{1,20743} = 16,122533 = 16,123\ m$;

2) $R = \sqrt{\frac{4000}{10\ sin\ 36^0}} = \sqrt{\frac{400}{sin\ 36^0}}$; $\quad log\ R = 1,41642$;

$R = N\overline{1,41642} = 26,08668 \ldots = 26,087\ m$;

3) $r = \sqrt{200 \cdot cotg\ 18^0}$; $log\, r = 1,39463$; $r = N\overline{1,39463} = 24,81\ m$.

Задаци за вежбу

1) Наћи обим правилног 19-тоугла уписаног у кругу полупречника $3,45\ m$.

2) Страна једног правилног 7-угла је $15,7\ m$; наћи његову површину.

3) Полупречник једнога круга је $3,28\ m$; наћи обим и површину правилног 20-тоугла који је уписан у томе кругу.

4) Обим једног круга је $50\ m$; наћи обим уписаног правилног 100-угла у томе кругу.

5) Површина једног правилног 10-тоугла је $1000\ m^2$; наћи његов обим и обиме описаног и уписаног круга.

6) У којој су размери обими двају правилних 15-тоуглова, кад је један уписан а други описан око круга?

7) Површина једног правилног 25-тоугла је $40\ cm^2$. Наћи површину кружног прстена између обима описаног и уписаног круга код тога многоугла. (Ниш, м. 1930).

8) Правилан 7-угао и правилни 37-угао имају једнаке површине. Наћи разлику њихових обима, ако је полупречник описаног круга код правилног 7-угла $R = 120\ cm$. (Н. Градишка, 1931).

9) Неки правилан полигон има 54 дијагонале. Колико страна има тај полигон и колика је површина између обима описаног круга и обима полигона, ако је полупречник круга $R = 1\ m$. (Београд, I ж.).

10) Један правилан 12-тоугао има једнаку површину са правилним шестоуглом стране $a = 4$. Колики је полупречник круга уписаног у правилном 12-тоуглу? (Београд, III ж. 1925).

§ 25. Решавања код круга

Код задатака из круга имамо такође исте случајеве решавања које смо имали код равнокраког и правоуглог троугла, пошто *a)* тетива са одговарајућим полупречницима њених крајњих тачака гради равнокрак троугао и *b)* централна раздаљина тетиве је њена симетрала, симетрала средишњег угла и симетрала лука над тетивом.

При решавању задатака из круга служимо се правилима поменутим код правоуглог троугла и планиметриским обрасцима:

$$1)\ O = 2\, r\, \pi;\ 2)\ P = r^2 \pi;\ 3)\ l = \frac{r \pi \alpha}{180^0};\ 4)\ F = \frac{lr}{2} = \frac{r^2 \pi \alpha}{360^0};\ 5)\ \Delta = \frac{sd}{2},\ 6)\ f = F - \Delta,$$

где нам r значи полупречник круга, O његов обим, P површину круга, s дужину једне кружне тетиве, d централну раздаљину те тетиве, α средишњи угао над тетивом, l дужину лука над тетивом, F површину кружног исечка, Δ површину троугла над тетивом, а чије се теме налази у центру и f површину кружног отсечка над тетивом. Већина задатака из круга у томе је што су позната само два од поменутих елемената, а траже се остали. Ти су задаци кад се зна: 1) r и s; 2) s и d; 3) s и α; 4) s и Δ; 5) r и d; 6) r и α; 7) r и l; 8) r и F; 9) r и Δ; 10) d и α; 11) d и Δ; 12) l и α; 13) F и α; 14) Δ и α; и 15) l и F. Пошто је $r = \frac{O}{2\pi}$ и $r = \sqrt{\frac{P}{\pi}}$, то сматрамо да нам је познат елеменат r када су познати елементи O или P.

Као недовољне елементе за решавање сматрамо: 1) s и f; 2) s и F; 3) s и l; 4) r и f; 5) α и f; 6) l и Δ; 7) l и f; 8) F и Δ; 9) Δ и f; 10) d и l; 11) d и F; 12) d и f; 13) F и f; те је потребно да знамо још један од елемената круга поред ова два елемента.

Први случај. *Познат је полупречник **r** и тетива **s**.*

Из правоуглог троугла ACO (сл. 29) имамо:

1) $\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{\frac{s}{2}}{r}=\frac{s}{2r}$; 2) $d=\sqrt{r^2-\frac{s^2}{4}}=$

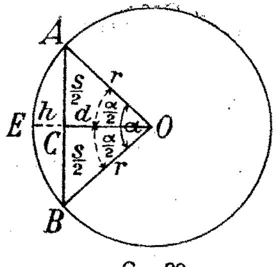
$=\sqrt{\left(r+\frac{s}{2}\right)\left(r-\frac{s}{2}\right)}$, или $d=r\cos\frac{\alpha}{2}=$

$=\frac{s}{2}\,cotg\,\frac{\alpha}{2}$; 3) $O=2r\pi$; 4) $P=r^2\pi$;

5) $l=\frac{r\pi\alpha}{180^0}$; 6) $F=\frac{r^2\pi\alpha}{360^0}$; 7) $\Delta=\frac{sd}{2}=$

$=\frac{s}{2}\sqrt{\left(r+\frac{s}{2}\right)\left(r-\frac{s}{2}\right)}$, или $\Delta=$

$=\frac{s^2}{3}\,cotg\,\frac{\alpha}{2}$; и 8) $f=F-\Delta$.



Сл. 29

Бројни пример. $s=18\ cm$, $r=13\ cm$.

1) $\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{18}{26}=\frac{9}{13}$; $\log\sin\frac{\alpha}{2}=\bar{1},84030$; $\alpha=87^0\,37'\,32''$;

2) $d=\sqrt{\left(r+\frac{s}{2}\right)\left(r-\frac{s}{2}\right)}=\sqrt{22\cdot4}=\sqrt{88}=9,38\ cm$;

3) $O=2r\pi=81,64\ cm$; 4) $P=r^2\pi=550,66\ cm^2$;

4) $l=\frac{r\pi\alpha}{180^0}=\frac{13\cdot3,14\cdot87^0\,37'\,32''}{180^0}=\frac{13\cdot3,14\cdot315452}{180\cdot60\cdot60}$;

$\log l=\log 13+\log 3,14+\log 315452-\log 180-\log 3600=$
$=1,29823$; $l=N\overline{1,29823}=19,8716\ldots=19,87\ cm$;

5) $F=\frac{r^2\pi\alpha}{360^0}=\frac{13^2\cdot3,14\cdot315452''}{(360\cdot3600)''}=\frac{13^2\cdot3,14\cdot315452}{360\cdot3600}$;

$\log F=2,11115$; $F=N\overline{2,11114}=129,16\ldots=129,16\ cm^2$;

6) $\Delta=\frac{sd}{2}=9\cdot\sqrt{22\cdot4}=18\sqrt{22}$; $\log\Delta=1,92649$;

$\Delta=N\overline{1,92649}=84,4276\ldots=84,43\ cm^2$; 7) $f=F-\Delta=$
$=129,16-84,43=44,73\ cm^2$.

Други случај. *Позната је тетива s и њена средишња раздаљина d.* Из троугла ACO имамо: 1) $tg\frac{\alpha}{2}=\frac{\frac{s}{2}}{d}=\frac{s}{2d}$;

2) $r=\sqrt{d^2+\frac{s^2}{4}}=\frac{1}{2}\sqrt{4d^2+s^2}$, или $r=\frac{s}{2\sin\frac{\alpha}{2}}$. Остале елементе израчунавамо као у првом случају.

Трећи случај. *Позната је тетива s и средишњи угао α*

Из троугла ACO имамо: 1) $d=\frac{s}{2}\,cotg\,\frac{\alpha}{2}$; и

2) $r=\frac{s}{2\sin\frac{\alpha}{2}}$

Остале елементе израчунавамо као у првом случају.

Задаци за вежбу

1) Наћи $r, d, l,$ и F кад је $s=24\ cm$ и $\Delta=300\ cm^2$.
2) Наћи s, α, l и d „ „ $r=8\ dm$ и $F=450\ dm^2$.
3) Наћи s, α, l, F и f „ „ $d=50\ cm$ и $\Delta=2000\ cm^2$.
4) Наћи s, r, d и l „ „ $\alpha=65^0\ 25'$ и $F=5715,24 cm^2$.
5) Обим једнога круга износи 40,84 m; наћи тетиву тога круга чији је централни угао $76^0\ 45'\ 14''$.
6) Два круга имају полупречнике 2 m и 1 m, а њихова је централна раздаљина 5 m; наћи угао између унутрашњих заједничких тангената.
7) Наћи угао под којим се секу два круга полупречника 527,39 m и 474,27 m, када је дужина њихове заједничке тетиве 442 m.
8) Наћи централни угао над оном тетивом која износи $\frac{2}{3}$ полупречника круга.
9) Два круга полупречника 20 m и 16 m додирују се споља. Наћи угао између централне риздаљине и спољашње заједничке тангенте.
10) Тетива једнога лука је $\frac{2}{3}$ од пречника; нађи број степена, минута и секунада тога лука.
11) Познат је полупречник круга $r=1\ m$, на који су из неке тачке у истој равнини повучене две тангенте, које између себе захватају угао од 40^0. Израчунати површину обухваћену тангентама до додирних тачака B и C и луком BC. (Београд, II м. 1908).

§ 25. Однос између страна и функција углова разностраног троугла

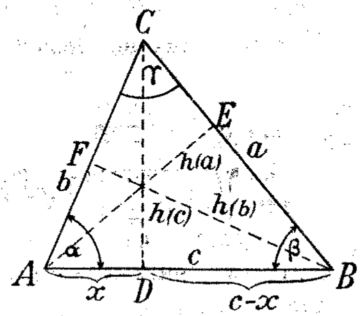
Једначине које нам дају однос између страна и функција углова једног троугла, а које примењујемо при решавању косоуглих троуглова, изводе се из следећих теорема:

1. **Синусна теорема.** *Стране једнога троугла имају се као синуси њихових супротних углова.*

Ако спустимо висине $h_{(c)}$ и $h_{(a)}$ у троуглу ABC (сл. 30), онда имамо из $\Delta\ ADC$: $h_{(c)}=b\sin\alpha$, а из $\Delta\ BDC$: $h_{(c)}=a\sin\beta$. Стога је $a\sin\beta=b\sin\alpha$, или

$a:b=\sin\alpha:\sin\beta\ \ldots.\ (1)$

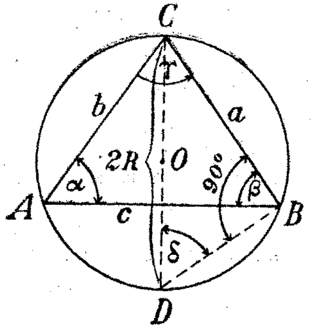
Тако исто из AEC имамо: $h_{(a)}=b\sin\gamma$, а из ABE: $h_{(a)}=c\sin\beta$. Стога је: $b\sin\gamma=c\sin\beta$, или $b:c=\sin\beta:\sin\gamma\cdots$ (2) Из пропорција (1) и (2) добијамо **продужну пропорцију**:



Сл. 30

$a : b : c = \sin\alpha : \sin\beta : \sin\gamma$, или $\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}\dots(3)$,
чиме је теорема доказана.

Из продужне пропорције (3) видимо да је количник између ма које троуглове стране и синуса њеног супротног угла сталан (константан) број, назван *троуглова константа. Ова константа је једнака пречнику описаног круга око троугла.* Заиста је из правоуглог троугла DBC (сл. 31):



Сл. 31

$\sin\delta = \frac{a}{2R}$. Ако у овој једначини угао δ заменимо углом α, јер су једнаки као периферски над истим луком, добијамо:

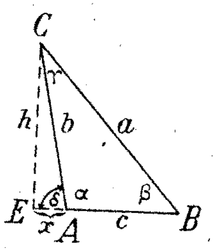
$\sin\alpha = \frac{a}{2R}$, или $\frac{a}{\sin\alpha} = 2R$. Па како је из пропорције (3):

$\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}$, то је и $\frac{b}{\sin\beta} = 2R$ и $\frac{c}{\sin\gamma} = 2R$. Стога је:

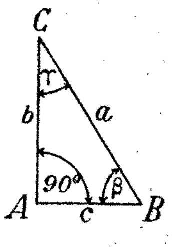
$$a = 2R\ \sin\alpha,\quad b = 2R\ \sin\beta \text{ и } c = 2R\ \sin\gamma \cdots (4)$$

Једначине под (4) дају нам могућности да израчунамо стране једнога троугла, ако знамо његове углове и полупречник описаног круга.

Напомена. Синусна теорема важи не само за оштроугле троуглове већ и за тупоугле и правоугле, о чему се уверавамо из слика 32 и 33. Тако, из $\triangle BEC$ (сл. 32) имамо: $h = a\sin\beta$, а из $\triangle AEC$: $h = b\sin\delta = b\sin(180^0 - \alpha) = b\sin\alpha$. Стога је $a\sin\beta = b\sin\alpha$, или $a : b = \sin\alpha : \sin\beta$. Исто тако из $\triangle\ ABC$ (слика 33) имамо: $b = a\sin\beta$, или $b : a = \sin\beta : 1$, или $b : a = \sin\beta : \sin 90^0$; и $c = a\ \sin\gamma$, или $c : a = \sin\gamma : 1$, или $c : a = \sin\ \gamma : \sin 90^0$.



Сл. 32



Сл. 33

Примена синусне теореме. Ову теорему примењујемо за решавање разностраног троугла, ако знамо:

1) једну страну и два угла; и

2) ако знамо две стране и угао наспрам једне од тих страна.

Помоћу троуглове константе (обрасци под 4) налазимо: 1) стране троугла, ако знамо његове углове и полупречник описаног круга; 2) полупречник описаног круга, ако знамо само једну страну и наспрамни јој угао.

$\left(R = \frac{a}{2\sin\alpha} = \frac{b}{2\sin\beta} = \frac{c}{2\sin\gamma}\right)$; и 3) углове, ако знамо стране

$\left(\sin\alpha = \frac{a}{2R},\ \sin\beta = \frac{b}{2R},\ \sin\gamma = \frac{c}{2R}\right.$, а

$$R = \frac{abc}{4P} = \frac{abc}{4\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}.$$

Први случај. *Решити троугао кад се зна једна његова страна и два угла* ($a = 356\ m$, $\alpha = 56^0 35' 40''$, $\beta = 61^0 15' 50''$).

Решење. — 1) Угао $\gamma = 180^0 - (\alpha + \beta) = 62^0\ 8'\ 30''$.

2) Из $b : a = \sin\beta : \sin\alpha$ је $b = \frac{a\sin\beta}{\sin\alpha} = \frac{356\cdot\sin 61^0 15' 40''}{\sin\ 56^0 35' 40''}$;

$\log b = \log 356 + \log\ \sin\ 61^0\ 15' 50'' - \log\ \sin\ 56^0\ 35' 40''$
$= 2{,}55145 + \bar{1}{,}94292 - \bar{1}{,}92158$
$= 2{,}55145 + 0{,}94292 - 1 - 0{,}92158 + 1 = 2{,}57279$;

$b = N\overline{2{,}57279} = 373{,}927 \ldots = 373{,}93\ m.$

3) Из $c : a = \sin\ \gamma : \sin\ \alpha$ је $c = \frac{a\cdot\sin\gamma}{\sin\alpha} = \frac{356\cdot\sin 62^0 8' 30''}{\sin 56^0 35' 40''}$;

$\log c = 2{,}57638$; $c = N\overline{2{,}57638} = 377{,}033 = 377{,}03\ m.$

4) Из $\triangle\ CDB$ (сл. 30) је $h_{(c)} = a\cdot\sin\ \beta = 356\cdot\sin\ 61^0\ 15'\ 50''$;

$\log\ h_{(c)} = 2{,}49437$; $h_{(c)} = N\overline{2{,}49437} = 312{,}157 \ldots = 312{,}16\ m.$

5) Из $\triangle\ BCF$ (сл. 30) је $h_{(b)} = a\cdot\sin\ \gamma = 356\cdot\sin\ 62^0\ 8'\ 30''$;

$\log\ h_{(b)} = 2{,}49796$; $h_{(b)} = N\overline{2{,}49796} = 314{,}746 \ldots = 314{,}75\ m.$

6) Из $\triangle\ ABE$ (сл. 30) је $h_{(a)} = c\cdot\sin\ \beta = \frac{a\ \sin\gamma}{\sin\ \alpha}\cdot\sin\ \beta =$
$= \frac{356\cdot\sin 62^0 8' 30''\cdot\sin\ 61^0 15' 50''}{\sin\ 56^0 35' 40''}$; $\log\ h_{(a)} = 2{,}51930$;

$h_{(a)} = N\overline{2{,}51930} = 330{,}60\ m.$ 7) $P = \frac{a\cdot h_{(a)}}{2} = \frac{a}{2}\cdot\frac{a\sin\beta\sin\gamma}{\sin\ x} =$
$= \frac{a^2\sin\beta\sin\gamma}{2\ \sin\ \alpha} = \frac{356^2\cdot\sin 61^0 15' 50''\ \sin 62^0 8' 30''}{2\ \sin 56^0 35' 40''}$;

$\log\ P = 4{,}76972$; $P = N\overline{4{,}76972} = 58846{,}25\ m^2.$

8) $R = \frac{a}{2\ \sin\ \alpha} = \frac{356}{2\cdot\sin\ 56^0 35' 40''}$; $\log\ R = 2{,}32884$;

$R = N\overline{2{,}32884} = 213{,}23\ m.$

Други случај. *Решити троугао кад су познате две његове стране и угао наспрам једне од тих страна* (a, b и α).

Решење. — 1) Употребом синусне теореме имамо:

$$a : b = \sin\alpha : \sin\beta, \text{ а одавде је } \sin\beta = \frac{b\cdot\sin\alpha}{a} \ldots . (1).$$

2) Угао γ налазимо затим из једначине:

$$\gamma = 180^0 - (\alpha + \beta) \ldots . (2).$$

3) Најзад страну c израчунавамо опет применом синусне теореме:

$$c : a = \sin\gamma : \sin\alpha, \text{ одакле је } c = \frac{a\cdot\sin\gamma}{\sin\alpha} \ldots . (3).$$

Па како угао β налазимо из једначине (1) помоћу функције синуса, то ћемо добити две вредности: β и β_1, од којих једна (β) претставља оштар угао, нађена помоћу таблица, а друга (β_1) претставља туп угао, нађена једначином $\beta_1 = 180^0 - \beta$, разуме се под претпоставком да је бројитељ $b\cdot\sin\alpha < a$. Ако је $b\cdot\sin\alpha > a$, задатак је немогућ, јер синус једног угла не може имати вредност већу од 1.

Да бисмо сазнали које вредности угла β задовољавају погодбе задатка, посматрамо стране a и b.

1) За $a > b$ је и $\sphericalangle\alpha > \sphericalangle\beta$, те је вредност угла β испод 90^0, тј. β је оштар угао, па био угао α туп или оштар. Према овоме, вредност β_1 је немогућа, пошто троугао не може имати два тупа угла. *У овоме случају задатак има само једно решење,* β.

2) за $a = b$ је и $\sphericalangle\alpha = \sphericalangle\beta$, те су оба угла оштра (Зашто?). Према томе и у овом случају вредност β_1 отпада, *те задатак и у овом случају има само једно решење,* β.

3) За $a < b$ је и $\sphericalangle\alpha < \sphericalangle\beta$, те угао α може бити само оштар, а угао β и оштар и туп. Према томе ове вредности β и β_1 задовољавају погодбе задатка, *те задатак у овоме случају има два решења*: β и β_1.

За овај трећи случај, друго решење за угао γ (2) биће $\gamma_1 = 180^0 - (\alpha + \beta_1)$, а друго решење за страну c (3) биће

$$c_1 = \frac{a\cdot\sin\gamma_1}{\sin\alpha}.$$

Посебни примери:

Пример I. $a = 45$ cm, $b = 53$ cm и $\alpha = 53^0\,48'$.

Како је $a < b$, то је и $\alpha < \beta$, те задатак има два решења.

а) *Прво решење:*

1) $\sin\beta = \dfrac{b\cdot\sin\alpha}{a} = \dfrac{53\cdot\sin 53^0\,48'}{45}$; $\log\sin\beta = \bar{1},97792$; а $\beta = 71^0\,53'$; 2) $\gamma = 180^0 - (\alpha + \beta) = 54^0\,19'$;

3) $c = \dfrac{a\cdot\sin\gamma}{\sin\alpha} = \dfrac{45\cdot\sin 54^0\,19'}{\sin 53^0\,48'}$; $\log c = 1,65605$;

$c = N\overline{1,65605} = 45,305 \ldots = 45,31$ cm.

Остале елементе троуглове налазимо као код првог примера за примену синусне теореме.

b) *Друго решење:*

1) $\beta_1 = 180^0 - \beta = 108^0\,7'$; 2) $\gamma_1 = 180^0 - (\alpha + \beta') = 18^0\,5'$;

3) $c' = \dfrac{a\cdot\sin\gamma_1}{\sin\alpha} = \dfrac{45\cdot\sin 18^0\,5'}{\sin 53^0\,48'}$; $\log c' = 1,23828$;

$c' = N\overline{1,23828} = 17,31$ cm.

Пример II. $a = 58$ m, $b = 41$, $\alpha = 81^0\,40'\,20''$.

Како је овде $a > b$, то је и $\sphericalangle\alpha > \sphericalangle\beta$, те за угао β узимамо у обзир само једно решење, и то оштар угао $< \alpha$.

1) $\sin\beta = \dfrac{b\sin\alpha}{a} = \dfrac{41\cdot\sin 81^0\,40'\,20''}{58}$; $\log\sin\beta = \bar{1},84475$;

$$\beta = 44^0\,22'\,55''.$$

2) $\gamma = 180^0 - (\alpha + \beta) = 53^0\,56'\,45''$.

3) $c = \dfrac{a\sin\gamma}{\sin\alpha} = \dfrac{58\cdot\sin 53^0\,56'\,45''}{\sin 81^0\,40'\,20''}$; $\log c = 1,67566$;

$$c = N\overline{1,67566} = 47,386 \ldots = 47,39\ m.$$

Пример III. $a = 52$ m, $b = 75$ m, $\alpha = 95^0\,25'$.

Како је у овом случају $b > a$, то би требало да је и $\sphericalangle\beta > \sphericalangle\alpha$, тј. и угао β треба да буде туп. Па како је ово немогуће, јер у троуглу не могу бити два тупа угла, то је овај задатак немогућан.

Пример IV. $a = 10\,cm$, $b = 58\,cm$, $\alpha = 30^0$.

И овај је задатак немогућан, јер је у овом случају $b\sin\alpha > a$, или $\sin\beta = \dfrac{b\cdot\sin\alpha}{a} > 1$, што је немогуће.

Напомена. — Могућност, немогућност и неодређеност решења овога случаја конструктивним путем позната је ученицима из планиметрије, где је увек могуће конструисати троугао, ако знамо две стране и угао наспрам веће од тих страна, а немогуће је конструисати троугао, или добијамо два решења, чиме задатак постаје неодређен, ако знамо две стране и угао наспрам мање од тих страна (Види Планиметрију, зад. 3 на стр. 65).

II. **Тангентна теорема.** *Збир двеју троуглових страна има се према њиховој разлици, као што се има тангенс полузбира према тангенсу полуразлике супротних углова.*

Ова се теорема изводи из синусне теореме применом изведених пропорција. Тако, из пропорције $a : b = \sin\alpha : \sin\beta$ имамо:

$$\frac{a+b}{a-b}=\frac{\sin\alpha+\sin\beta}{\sin\alpha-\sin\beta}=\frac{2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{3}}{2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha+\beta}{2}}=$$

$$=tg\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot cotg\frac{\alpha-\beta}{2}=\frac{tg\frac{\alpha+\beta}{2}}{tg\frac{\alpha-\beta}{2}}.$$

Тако исто је: $\dfrac{a+c}{a-c}=\dfrac{tg\frac{\alpha+\gamma}{2}}{tg\frac{\alpha-\gamma}{2}}$ и $\dfrac{b+c}{b-c}=\dfrac{tg\frac{\beta+\gamma}{2}}{tg\frac{\beta-\gamma}{2}}$.

Примена тангентне теореме. Ову теорему примењујемо за решавање троуглова, ако су познате две стране и њихов захваћени угао.

Трећи случај. Решити троугао, ако је $a=19$, $b=14\ m$ и $\gamma=43^0\,55'\,30''$.

Решење. — 1) $\alpha+\beta=180^0-\gamma=136^0\,4'\,30''$.

2) $\dfrac{a+b}{a-b}=\dfrac{tg\frac{\alpha+\beta}{2}}{tg\frac{\alpha-\beta}{2}}$, или $\dfrac{33}{5}=\dfrac{tg\,68^0\,2'\,15''}{tg\frac{\alpha-\beta}{2}}$.

Одавде је $tg\dfrac{\alpha-\beta}{2}=\dfrac{5\cdot tg\,68^0\,2'\,15''}{33}$; $log\ tg\dfrac{\alpha-\beta}{2}=\bar{1},57487$;

$\dfrac{\alpha-\beta}{2}=20^0\,35'\,33''$; $\alpha-\beta=41^0\,11'\,6'$.

Сабирањем и одузимањем једначина:

$$\alpha+\beta=136^0\ \ 4'\,30''$$
$$\alpha-\beta=\ 41^0\,11'\ \ 6''$$

добијамо: $\alpha=88^0\,37'\,48''$ и $\beta=47^0\,26'\,42''$. Најзад страну c налазимо по синусној теореми: $c:a=sin\,\gamma:sin\,\alpha$, где је:

$$c=\frac{a\cdot sin\gamma}{sin\,\alpha}=\frac{19\cdot sin\,43^0\,55'\,30''}{sin\,88^0\,37'\,48''}\ ;\ log\,c=1,12006;$$

$$c=N\overline{1,12006}=13,18\ m.$$

Остале елементе троуглове налазимо као у првом примеру за примену синусне теореме.

III. **Карнотова (косинусна) теорема.** *Квадрат ма које стране једнога троугла једнак је збиру квадрата других двеју страна смањеног за двоструки производ тих страна и косинуса захваћеног угла.*

а) *Нека је троугао ABC (сл. 30) оштроугли.* Ако пројекцију стране b на страни c означимо са x, онда пројекција стране a на страни c је $c-x$. Тада је из $\triangle\ BDC: a^2=$ $=h_{(c)}^2+(c-x)^2$, и из $\triangle\ ADC: h^2_{(c)}=b^2-x^2$. Ако у првој једначини заменимо $h^2_{(c)}$ са b^2-x^2, добијамо $a^2=b^2-x^2+$ $+(c-x)^2$, или $a^2=b^2+c^2-2\,cx\ldots(1)$. Међутим, из $\triangle\ ADC$ имамо: $x=b\cos\alpha$. Заменом у (1) добијамо:

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos\alpha\,.$$

Истим бисмо путем нашли, повлачењем висина $h_{(a)}$ и $h_{(b)}$, да је:

$$b^2=a^2+c^2-2ac\cos\beta\quad\text{и}\quad c^2=a^2+b^2-2ab\cos\gamma\,.$$

b) *Нека је троугао ABC (сл. 32) тупоугли.* Тада је из $\triangle\ BCE: a^2=h^2+(c+x)^2$, а из $\triangle\ ACE: h^2=b^2-x^2$ и $x=b\cos\delta=b\cos(180^0-\alpha)=-b\cos\alpha$. Заменом у првој једначини h^2 са b^2-x^2 а затим x са $-b\cos\alpha$ добијамо:

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos\alpha\,,$$

из које једначине видимо да косинусна теорема важи за ма коју троуглову страну без обзира да ли се та страна налази наспрам оштрог или тупог угла. Она важи и за хипотенузу правоуглог троугла, јер, ако је a хипотенуза, b и c катете, онда је

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos 90^0=b^2+c^2\,,$$

пошто је $\cos 90^0=0$.

Примена косинусне теореме. И ову теорему, као и тангентну, примењујемо при решавању троуглова, ако су познате две стране и захваћени угао. Подесна је само у случају, ако су вредности страна мали бројеви.

Пример. $b=5,6\ dm$, $c=4,9\ dm$, $\alpha=65^0\,35'$.

Тада је $a^2=5,6^2+4,9^2-2\cdot5,6\cdot4,9\cdot\cos 65^0\,35'\ldots.\ (1)$. Заменом $x=2\cdot5,6\cdot4,9\cdot\cos 65^0\,35'=54,88\cdot\cos 65^0\,35'$, биће $log\,x=log\,54,88+log\cos 65^0\,35'=1,73941+\bar{1},61634=1,35575$, а $x=N\overline{1,35575}=22,685789\ldots$ Заменом у (1) добијамо: $a^2=5,6^2+4,9^2-22,6858=32,6812$, $a=\sqrt{32,6842}=5,72\ dm$.

Угао β налазимо помоћу синусне теореме: $a:b=$ $=\sin\alpha:\sin\beta$. Одавде је $\sin\beta=\dfrac{b\cdot\sin\alpha}{a}=\dfrac{5,6\cdot\sin 65^0\,35'}{5,72}$,

$log\sin\beta=\bar{1},95010$; а $\beta=63^0\,3'\,26''$. Одавде за $\measuredangle\beta$ узимамо у обзир само решење мање од 90^0, јер је $b<a$, те и $\measuredangle\beta<\measuredangle\alpha$.

Најзад $\measuredangle\gamma=180^0-(\alpha+\beta)=51^0\,21'\,34''$.

Споредне елементе троуглове израчунавамо као код I примера за примену синусне теореме.

IV. Обрасци за израчунавање углова у троуглу

а) *Обрасци за тангенсе полууглова.*

По Карнотовој теореми имамо: $a^2 = b^2 + c^2 - 2\,bc\cos\alpha$.

Одавде је $\cos\alpha = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2\,bc}$. Па како је $tg\,\dfrac{\alpha}{2} = \sqrt{\dfrac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$ (§ 15, 3), то заменом у овом обрасцу $\cos\alpha$ са $\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2\,bc}$ добијамо: $tg\,\dfrac{\alpha}{2} = \sqrt{\dfrac{1-\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2\,bc}}{1+\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2\,bc}}} =$

$$= \sqrt{\frac{2\,bc - b^2 - c^2 + a^2}{2\,bc + b^2 + c^2 - a^2}} = \sqrt{\frac{a^2 - (b-c)^2}{(b+c)^2 - a^2}} =$$

$$= \sqrt{\frac{(a+b-c)\,(a-b+c)}{(b+c+a)\,(b+c-a)}} \quad \ldots \quad (1)$$

Ако је обим $a + b + c = 2s$, па из ове једначине одузмемо најпре $2a$, затим $2b$ и најзад $2c$, добијамо: $b + c - a = 2(s-a)$, $a + c - b = 2(s-b)$ и $a + b - c = 2(s-c)$.

Заменом у обрасцу (1) добијамо:

$$tg\,\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)\,(s-c)}{s\,(s-a)}}.$$ Истим путем налазимо:

$$tg\,\frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)\,(s-c)}{s\,(s-b)}} \text{ и } tg\,\frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)\,(s-b)}{s\,(s-c)}}.$$

b) *Обрасци за синусе и косинусе полууглова.*

И ове обрасце добијамо из образаца

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}} \text{ и } \cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}} \quad (§\ 14)$$

заменом $\cos\alpha$ са $\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2\,bc}$.

Овом заменом добијамо:

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)\,(s-c)}{bc}} \text{ и } \cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{s\,(s-a)}{bc}}.$$ Тако исто:

$$\sin\frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)\,(s-c)}{ac}},\ \cos\frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{s\,(s-b)}{ac}},$$

$$\sin\frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)\,(s-b)}{ab}} \text{ и } \cos\frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{s\,(s-c)}{ab}}.$$

c) *Обрасци за синусе углова.*

Употребом образаца за функције удвојених углова (§ 13) имамо: $\sin\alpha = 2\sin\dfrac{\alpha}{2}\cos\dfrac{\alpha}{2} = 2\sqrt{\dfrac{(s-b)\,(s-c)}{bc}}$.

$$\sqrt{\frac{s\,(s-a)}{bc}} = \frac{2}{bc}\sqrt{s\,(s-a)\,(s-b)\,(s-c)}.$$ Исто тако:

$$\sin\beta = \frac{2}{bc}\cdot\sqrt{s\,(s-a)\,(s-b)\,(s-c)} \text{ и}$$

$$\sin\gamma = \frac{2}{ab}\sqrt{s\,(s-a)\,(s-b)\,(s-c)}.$$

Па како је по Хероновом обрасцу површина $P = \sqrt{s\,(s-a)\,(s-b)\,(s-c)}$, то заменом у претходним једначинама добијамо:

$$\sin\alpha = \frac{2P}{bc},\ \sin\beta = \frac{2P}{ac} \text{ и } \sin\gamma = \frac{2P}{ab}.$$

d) *Обрасци за тангенсе полууглова када су познате стране и полупречник уписаног круга r.*

Како је $r = \dfrac{P}{s} = \sqrt{\dfrac{(s-a)\,(s-b)\,(s-c)}{s}}$, то је према обрасцима под (*a*): $tg\,\dfrac{\alpha}{2} = \sqrt{\dfrac{(s-b)\,(s-c)}{s\,(s-a)}} =$

$$= \sqrt{\frac{(s-a)\,(s-b)\,(s-c)}{s\,(s-a)^2}} = \frac{1}{s-a}\sqrt{\frac{(s-a)\,(s-b)\,(s-c)}{s}} =$$

$$= \frac{r}{s-a}.$$ Исто тако: $tg\,\dfrac{\beta}{2} = \dfrac{r}{s-b}$ и $tg\,\dfrac{\gamma}{2} = \dfrac{r}{s-c}$.

Напомена. Из ових образаца изводимо образац:

$$r = (s-a)\,tg\frac{\alpha}{2} = (s-b)\,tg\frac{\beta}{2} = (s-c)\,tg\frac{\gamma}{2},$$

који се примењује за израчунавање полупречника уписаног круга ма кога троугла, па био троугао правоугли или косоугли.

Четврти случај. *Решити троугао када су познате све три стране* (*a*, *b* и *c*).

У овоме случају примењују се обрасци за израчунавање углова у троуглу. Тако је:

$$tg\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s\,(s-a)}},\ tg\frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-c)}{s\,(s-b)}} \text{ и } tg\frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{s\,(s-c)}}.$$

Висине израчунавамо као у првом случају пошто нађемо претходно углове, или применом планиметриских образаца:

$$h_{(a)} = \frac{2}{a}\sqrt{s\,(s-a)\,(s-b)\,(s-c)},\ h_{(b)} = \frac{2}{b}\sqrt{s\,(s-a)\,(s-b)\,(s-c)}$$

$$\text{и } h_{(c)} = \frac{2}{c}\sqrt{s\,(s-a)\,(s-b)\,(s-c)}.$$

Најзад елементе *P*, *R* и *r* налазимо или као у првом случају или применом планиметриских образаца:

$$P=\sqrt{s\,(s-a)\,(s-b)\,(s-c)},\ R=\frac{abc}{4\sqrt{s\,(s-a)\,(s-b)\,(s-c)}}\quad \text{и}$$

$$r=\sqrt{\frac{(s-a)\ (s-b)\ (s-c)}{s}}.$$

Бројни пример: $a=35,\ b=39,\ c=48.$

Овде је: $2s=a+b+c=122,\quad s=61,\quad s-a=26,\quad s-b=22$ и $s-c=13.$

Тада је: 1) $tg\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{22\cdot 13}{61\cdot 26}}=\sqrt{\frac{11}{61}};\ log\ tg\ \frac{\alpha}{2}=\bar{1},62803;$

$\frac{\alpha}{2}=23^0 0'\,31'',\quad$ а $\alpha=46^0\,1'\,2''$;

2) $tg\frac{\beta}{2}=\sqrt{\frac{26\cdot 13}{61\cdot 22}}=\sqrt{\frac{169}{6\ \cdot 11}};\ \ log\ tg\frac{\beta}{2}=\bar{1},70058;\ \beta=53^0\,18';$

3) $tg\frac{\gamma}{2}=\sqrt{\frac{26\cdot 22}{61\cdot 13}}=\sqrt{\frac{44}{61}};\ \ log\ tg\ \frac{\gamma}{2}=\bar{1},92906;\ \frac{\gamma}{2}=40^0\,20'\,29''$

а $\gamma=80^0\,40'\,58''$, или $\gamma=180^0-(\alpha+\beta)=80^0\,40'\,58''$; 4) $h_{(a)}=$ $=\frac{2}{35}\sqrt{61\cdot 26\cdot 22\cdot 13};\ log\ h_{(a)}=1{,}58530;\ \ h_{(a)}=N\overline{1{,}58530}=38,49;$

5) $h_{(b)}=\frac{2}{39}\sqrt{61\cdot 26\cdot 22\cdot 13};\ \ log\ h_{(b)}=1{,}53830;\ \ h_{(b)}=N\overline{1{,}53830}=$ $=34{,}54;$ 6) $h_{(c)}=\frac{2}{48}\sqrt{61\cdot 26\cdot 22\cdot 13}=\frac{1}{24}\sqrt{61\cdot 26\cdot 22\cdot 13};$

$log\ h_{(c)}=1{,}44812;\ \ h_{(c)}=N\overline{1{,}44812}=28{,}06$;

7) $P=\sqrt{61\cdot 26\cdot 22\cdot 13};\ log\ P=2{,}82834;\ P=N\overline{2{,}82834}=673{,}50$;

8) $R=\frac{abc}{4P}=\frac{35\cdot 39\cdot 48}{4\cdot 673{,}50}=\frac{7\cdot 13\cdot 12}{44{,}9}=24{,}32;$ и

9) $r=\frac{P}{s}=\frac{673{,}50}{61}=11{,}04.$

V. **Молдвајдове једначине (Гаусови обрасци)***

1. *Код свакога се троугла збир двеју страна има према трећој, као што се има косинус полуразлике углова наспрам тих страна према синусу полуугла наспрам треће стране;* и

2. *Разлика двеју страна има се према трећој, као што се има синус полуразлике углова наспрам тих страна према косинусу полуугла наспрам треће стране.*

Гаусове обрасце изводимо из синусне теореме применом особине продужених пропорција. По синусној теореми имамо: $a:b:c=sin\alpha:sin\beta:sin\gamma.$

* Само за ученике реалке.

Одавде је: $\frac{a+b}{c}=\frac{sin\alpha+sin\beta}{sin\gamma}=\frac{2\,sin\frac{\alpha+\beta}{2}cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{2\,sin\frac{\gamma}{2}\,cos\frac{\gamma}{2}}$ . . . . (1) и

$\frac{a-b}{c}=\frac{sin\alpha-stn\beta}{sin\gamma}=\frac{2cos\frac{\alpha+\beta}{2}\,sin\frac{\alpha-\beta}{2}}{2\,sin\frac{\gamma}{2}\,cos\frac{\gamma}{2}}$ . . . (2). Па како је

$sin\frac{\alpha+\beta}{c}=sin\left(90^0-\frac{\gamma}{2}\right)=cos\frac{\gamma}{2}$ и $cos\,\frac{\alpha+\beta}{2}=cos\left(90^0-\frac{\gamma}{2}\right)=sin\ \frac{\gamma}{2},$

то заменом у (1) и (2) добијамо:

$\frac{a+b}{c}=\frac{cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{sin\frac{\gamma}{2}}$ и $\frac{a-b}{c}=\frac{sin\frac{\alpha-\beta}{2}}{cos\frac{\gamma}{2}}$. Тако исто:

$$\frac{a+c}{b}=\frac{cos\frac{\alpha-\gamma}{2}}{sin\frac{\beta}{2}},\qquad \frac{b+c}{a}=\frac{cos\frac{\beta-\gamma}{2}}{sin\frac{\alpha}{2}},$$

$$\frac{a-c}{b}=\frac{sin\frac{\alpha-\gamma}{2}}{cos\frac{\beta}{\alpha}}\quad \text{и}\quad \frac{b-c}{a}=\frac{sin\frac{\beta-\gamma}{2}}{cos\frac{\alpha}{2}}.$$

Напомена. Ови се обрасци употребљавају при решавању троуглова када су подаци комбиновани, тј. када се зна, поред извесног броја троуглових елемената, још збир или разлика двеју његових страна, збир или разлика двају његових углова итд.

VI. **Обрасци за површину троугла**

1) *Површина троугла када су познате две стране и захваћени угао.*

За $\Delta\ ABC$ (сл. 30) имамо:

$h_{(c)}=a\ sin\beta=b\ sin\alpha;\ h_{(a)}=c\ sin\beta=b\ sin\gamma;$ и $h_{(b)}=a\,sin\gamma=c\ sin\alpha.$

Заменом у $P=\frac{a\,h_{(a)}}{2}=\frac{b\,h_{(b)}}{2}=\frac{c\,h_{(c)}}{2}$ имамо:

$$\boldsymbol{P=\frac{ac}{2}\sin\beta=\frac{bc}{2}\sin\alpha=\frac{ab}{2}\sin\gamma}\ \ldots\ (1)$$

2) *Површина троугла кад је позната једна страна и два угла.*

Ако је позната страна c и углови α и β, онда је по синусној теореми $b:c=sin\beta:sin\gamma$, или $b:c=sin\beta:sin\,[180^0-(\alpha+\beta)]$, или $b : c = \sin\beta : \sin(\alpha+\beta)$. Одавде је $b = \dfrac{c \sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$.

Заменом у $P = \dfrac{bc}{2}\sin\alpha$ добијамо: $P = \dfrac{c^2 \sin\alpha \sin\beta}{2\sin(\alpha+\beta)}$.

Исто тако: $P = \dfrac{a^2 \sin\beta \sin\gamma}{2\sin(\beta+\gamma)}$ и $P = \dfrac{b^2 \sin\alpha \sin\gamma}{2\sin(\alpha+\gamma)}$ . . . . (2)

3) *Површина троугла кад су познате његове стране.*

У овоме случају употребљавамо Херонов образац:

$$P = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \quad . \; . \; . \; . \; (3)$$

4) *Површина троугла кад су познати углови и полупречник описаног круга R.*

Како је $a = 2R\sin\alpha$, $b = 2R\sin\beta$ и $c = 2R\sin\gamma$ (§ 26, 1), а из планиметрије знамо да је $P = \dfrac{abc}{4R}$, то је заменом:

$$P = 2\,R^2 \sin\alpha \sin\beta \sin\gamma \quad . \; . \; . \; . \; (4)$$

5) *Површина троугла када су познати углови и полупречник уписаног круга r.*

Како је $tg\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{r}{s-a}$, $tg\dfrac{\beta}{2} = \dfrac{r}{s-b}$ и $tg\dfrac{\gamma}{2} = \dfrac{r}{s-c}$ (§ 26, IV, д), то је одавде: $s-a = \dfrac{r}{tg\dfrac{\alpha}{2}}$, $s-b = \dfrac{r}{tg\dfrac{\beta}{2}}$ и $s-c = \dfrac{r}{tg\dfrac{\gamma}{2}}$

Множењем ових једначина добијамо:

$$(s-a)(s-b)(s-c) = \frac{r^3}{tg\frac{\alpha}{2}\, tg\frac{\beta}{2}\, tg\frac{\gamma}{2}} = r^3 \cot g\frac{\alpha}{2} \cot g\frac{\beta}{2} \cot g\frac{\gamma}{2},$$

или $s(s-a)(s-b)(s-c) = r^3 s \cot g\dfrac{\alpha}{2} \cot g\dfrac{\beta}{2} \cot g\dfrac{\gamma}{2}$.

Па како је $P = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ и $P = rs$, то из претходне једначине добијамо:

$$P = r^2 \cot g\frac{\alpha}{2} \cot g\frac{\beta}{2} \cot g\frac{\gamma}{2} \; . \; . \; . \; (5)$$

6) *Површина троугла кад је познат обим 2s и углови.* Множењем једначина

$$tg\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}, \quad tg\frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-c)}{s(s-b)}} \quad \text{и}$$

$$tg\frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{s(s-c)}}$$ (§ 26, IV, а) добијамо:

$$tg\frac{\alpha}{2} tg\frac{\beta}{2} tg\frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{s(s-a)(s-b)(s-c)}{s^3}} = \sqrt{\frac{s(s-a)(s-b)(s-c)}{s^4}} = \frac{P}{s^2}.$$

Одавде је: $P = s^2\, tg\dfrac{\alpha}{2}\, tg\dfrac{\beta}{2}\, tg\dfrac{\gamma}{2}$ . . .

Сложенији случајеви решавања код разностраног троугла

1) *Решити троугао кад се зна обим* 2s *и углови* α *и* β.

1) $\gamma = 180^0 - (\alpha+\beta)$; 2) По синусној теореми имамо: $a : b : c = \sin\alpha : \sin\beta : \sin\gamma$, а из ове пропорције добијамо: $(a+b+c) : (\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma) = a : \sin\alpha = b : \sin\beta = c : \sin\gamma$ или $2s : 4\cos\dfrac{\alpha}{2} \cos\dfrac{\beta}{2} \cos\dfrac{\gamma}{2} = a : \sin\alpha = b : \sin\beta = c : \sin\gamma$.

Одавде је: $a = \dfrac{s \cdot \sin\alpha}{2\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}} = \dfrac{2s \cdot \sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{2\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}} =$

$= \dfrac{s \cdot \sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}}$. Тако исто: $b = \dfrac{s \cdot \sin\frac{\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\gamma}{2}}$ и $c = \dfrac{s \cdot \sin\frac{\gamma}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}}$.

Површина $P = s^2\, tg\dfrac{\alpha}{2}\, tg\dfrac{\beta}{2}\, tg\dfrac{\gamma}{2}$ (§ 26, VI, 6);

$R = \dfrac{a}{2\sin\alpha} = \dfrac{s}{4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}}$; и $r = \dfrac{P}{s} = s\, tg\dfrac{\alpha}{2}\, tg\dfrac{\beta}{2}\, tg\dfrac{\gamma}{2}$.

2) *Дата је страна* **a**, *супротни јој угао* α *и збир других двеју страна* $b+c=m$.

По Гаусовим обрасцима имамо:

$$\frac{b+c}{a} = \frac{\cos\frac{\beta-\gamma}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}, \text{ или } \frac{m}{a} = \frac{\cos\frac{\beta-\gamma}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}.$$

Одавде је: $\cos\dfrac{\beta-\gamma}{2} = \dfrac{m}{a}\sin\dfrac{\alpha}{2}$. Из ове једначине, применом логаритама, налазимо угао $(\beta-\gamma)$.

За $\beta-\gamma = \omega$ и $\beta+\gamma = 180^0 - \alpha$ биће

$$\beta = \frac{180^0 - \alpha + \omega}{2} \text{ и } \gamma = \frac{180^0 - \alpha - \omega}{2}.$$

Остале елементе налазимо као у првом случају за примену синусне теореме.

3) *Дата је страна* **a**, *налегли јој угао* β *и збир других двеју страна* $b+c=m$.

По Гаусовим обрасцима имамо: $\dfrac{b+c}{a} = \dfrac{\cos\frac{\beta-\gamma}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}$, или

$$\frac{m}{a}=\frac{\cos\frac{\beta-\gamma}{2}}{\cos\frac{\beta-\gamma}{2}}.$$ Применом изведених пропорција имамо:

$$\frac{m+a}{m-a}=\frac{\cos\frac{\beta-\gamma}{2}+\cos\frac{\beta+\gamma}{2}}{\cos\frac{\beta-\gamma}{2}-\cos\frac{\beta+\gamma}{2}}=\frac{2\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}}{2\sin\frac{\beta}{2}\ \sin\frac{\gamma}{2}}=cotg\frac{\beta}{2}\,cotg\frac{\gamma}{2}\,.$$

Одавде је;

$$cotg\ \frac{\gamma}{2}=\frac{m+a}{(m-a)\,cotg\frac{\beta}{2}}\ \text{или}\ tg\frac{\gamma}{2}=\frac{m-a}{m+a}\,cotg\frac{\beta}{2}.$$

Остале елементе израчунавамо као у првом случају. Исто тако се решава задатак кад се зна: једна страна, налегли јој угао и разлика других двеју страна.

4) *Зна се страна **c**, разлика других двеју страна $a-b=d$ и разлика њихових супротних углова $\alpha-\beta=\omega$.*

По Гаусовим обрасцима имамо:

$$\frac{a-b}{c}=\frac{\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}{\cos\frac{\gamma}{2}},\ \text{или}\ \frac{d}{c}=\frac{\sin\frac{\omega}{2}}{\cos\frac{\gamma}{2}}.$$

Одавде је: $\cos\frac{\gamma}{2}=\frac{c}{d}\sin\frac{\omega}{2}$. Затим из једначина $\alpha-\beta=\omega$ и $\alpha+\beta=180^0-\gamma$ налазимо углове α и β, па даље радимо као у првом случају за примену синусне теореме.

5) *Знају се површина **P** и углови.*

Како је $P=\frac{a^2\sin\beta\ \sin\gamma}{2\sin(\beta+\gamma)}=\frac{b^2\sin\alpha\ \sin\gamma}{2\sin(\alpha+\gamma)}=\frac{c^2\sin\alpha\ \sin\beta}{2\sin(\alpha+\beta)}$

(§ 26, VI, 2), то је: $a=\sqrt{\frac{2P\sin(\beta+\gamma)}{\sin\beta\sin\gamma}}$, $b=\sqrt{\frac{2P\sin(\alpha+\gamma)}{\sin\alpha\sin\gamma}}$ и

$$c=\sqrt{\frac{2P\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha\ \sin\beta}}\,.$$

Из $P=2R^2\sin\alpha\ \sin\beta\ \sin\gamma$ (§ 26, VI, 4) имамо:

$$R=\sqrt{\frac{P}{2\sin\alpha\ \sin\beta\ \sin\gamma}}$$ и из $P=r^2\,cotg\frac{\alpha}{2}\,cotg\frac{\beta}{2}\,cotg\frac{\gamma}{2}$

(§ 26, IV, 5) имамо $r=\sqrt{P\,tg\frac{\alpha}{2}\ tg\frac{\beta}{2}\ tg\frac{\gamma}{2}}$.

6) *Знају се полупречник уписаног круга r и углови.*

Ако означимо са p и q отсечке стране a, на које је дели полупречник уписаног круга r, онда је $p=r\,cotg\frac{\beta}{2}$ и

$q=r\,cotg\frac{\gamma}{2}$. Тада је

$$a=p+q=r\left(cotg\frac{\beta}{2}+cotg\frac{\gamma}{2}\right)=\frac{r\sin\frac{\beta+\gamma}{2}}{\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}}=\frac{r\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}}$$

Исто тако: $b=\frac{r\cos\frac{\beta}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\gamma}{2}}$ и $c=\frac{r\cos\frac{\gamma}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}}$.

Остале елементе израчунавамо као у првом случају.

7. *Дат је обим $2s$, полупречник уписаног круга r и угао α.*

Како је $tg\frac{\alpha}{2}=\frac{r}{s-a}$ (§ 26, IV, d), то је $s-a=\frac{r}{tg\frac{\alpha}{2}}$.

Употребом логаритама налазимо најпре $(s-a)$. Ако је $s-a=m$, онда је $a=s-m$. Тада је $b+c=2s-a$, па се задатак даље ради као задатак под 2.

III. Задаци за вежбу

1) Решити троугао кад се зна: *a)* $a=15$, $b=14$, $c=13$; *b)* $b=130$, $c=152$, $\alpha=42^0\,50'\,22''$; *c)* $b=52{,}2$, $\alpha=40^0$, $\beta=60^0$; *d)* $a=0{,}95$, $c=0{,}72$, $\alpha=64^0\ 17'\,28''$.

2) Наћи површину троугла код кога је: *a)* $b=21{,}66\ m$, $c=36{,}94\ m$, $\alpha=65^0\,4'\,19''$; *b)* $a=105{,}31\ m$, $b=97{,}56\ m$, $c=80{,}03\ m$; *c)* $c=25{,}64\ m$, $\alpha=43^0\,28'$, $\beta=76^0\,48'$.

3) Решити троугао код кога је: *a)* $a=45\ m$, $b=30\ m$, и $P=200\ m^2$, *b)* $P=564{,}13\ m^2$, $\alpha=65^0\,18'\,12''$, $\beta=58^0\,22'\,18''$.

4) Наћи површину троугла када је: $h_{(c)}=135{,}6\ m$, $\alpha=65^0\,13'$ и $\beta=45^0\ 4'$.

5) Наћи β и γ када је $h_{(b)}=16\ m$, $b=18\ m$ и $\alpha=64^0\,12'$.

6) Решити троугао када се зна: a) $R=32{,}5\ m$, $\alpha=22^0\,37'\,12''$, $\beta=53^0\,7'\,50''$; b) $R=5$, $a=6{,}82$, $b=9{,}71$; c) $R=5{,}17$, $b=8{,}9544$ и $\alpha=54^0$.

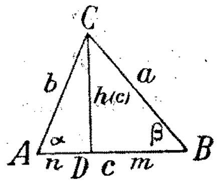
7) Решити троугао кад се зна: a) $a=1{,}732$, $b=1{,}4142$ и $\alpha-\beta=15^0$; b) $a-b=1{,}85464$, $\alpha-\beta=23^0\,28'\,34''$; $\gamma=113^0\,28'\,34''$; c) $a+b=96{,}17$, $\alpha-\beta=20^0$, $\gamma=80^0$; d) $a-b=2{,}89$, $c=8{,}7322$, $\gamma=60^0\,50'$; e) $a+b=0{,}64444$, $\alpha-\beta=95^0\,10'$, $c=0{,}22$; f) $b+c=93{,}257$, $\alpha=5^0\,18'\,21''$, $\beta=144^0\,41'\,40''$; j) $a+b=1589$, $a-b=1291$ и $\gamma=20^0\,57''$.

8) Решити троугао кад се зна: a) $R=5$, $\alpha=30^0$, $\beta=70^0$; b) $R=51{,}79$, $\alpha=117^0\,20'\,34''$, $\beta=46^0\,23'\,50''$.

9) Решити троугао кад се зна: $a+b=995{,}4$, $h_{(a)}=509{,}5$ и $\beta=60^0$.

10) Решити троугао ABC (сл. 34) кад се зна: a) a, b и $h_{(c)}$; b) b, $h_{(c)}$ и m; c) m, n и $h_{(c)}$, d) $h_{(c)}$, α и β; e) m, n и γ; f) P, a, $h_{(b)}$; j) $h_{(a)}$, $h_{(b)}$ и α.

11) Решити троугао кад је позната површина P, обим $2s$ и угао α.



Сл. 34

12) Решити троугао кад се зна a и b, а угао α два пута је већи од угла β. (Saint-Cyr).

13) Решити троугао кад се зна обим $2s$, угао α и полупречник R описаног круга. (Bacc. Lyon).

14) Решити троугао кад се зна страна a, полупречник уписаног круга r и збир s (разлика d) других двеју страна (Saint-Cyr).

15) Решити троугао кад се зна страна a, супротни јој угао α и висина $h_{(a)}$. (Sorbonne).

Решење. Како је $h_{(a)} = b \sin\gamma$, то је $b = \frac{h_{(a)}}{\sin\gamma}$. Заменом у пропорцији $b : a = \sin\beta : \sin\alpha$ добијамо $h_{(a)} : a = \sin\beta \sin\gamma : \sin\alpha$. Одавде је: $\sin\beta \sin\gamma = \frac{h_{(a)}}{a} \sin\alpha$, или $2 \sin\beta \sin\gamma = \frac{2\,h_{(a)}}{a} \sin\alpha$ .. (1). Па како је: $\cos(\beta - \gamma) - \cos(\beta + \gamma) = 2 \sin\beta \sin\gamma$, то заменом у (1) добијамо: $\cos(\beta - \gamma) - \cos(\beta + \gamma) = \frac{2h_{(a)}}{a} \sin\alpha$, или $\cos(\beta - \gamma) = \frac{2h_{(a)}}{a} \sin\alpha - \cos\alpha$ ... (2).

Ако ставимо да је $\frac{2\,h_{(a)}}{a} = \cot\varphi$, из које једначине можемо наћи помоћу логаритама угао φ, онда заменом у (2) добијамо:

$$\cos(\beta - \gamma) = \cot g\,\varphi \sin\alpha - \cos\alpha = \frac{\cos\varphi \sin\alpha - \sin\varphi \cos\alpha}{\sin\varphi} = \frac{\sin(\alpha - \varphi)}{\sin\varphi}.$$

Из ове једначине налазимо угао $(\beta - \gamma)$, а из једначина $\beta - \varphi = \omega$ и $\beta + \gamma = 180^0 - \alpha$ и углове β и γ. Остале елементе налазимо као у првом случају за примену синусне теореме.

16) Решити троугао кад се зна α, $a + b - c = s$, а угао γ је два пута већи од угла β. (Sorbonne).

17) Наћи тангенсе сва три угла једнога троугла чије су стране $3\,m$, $4\,m$ и $5\,m$. (Sorbonne).

18) У једноме троуглу дат је угао $\alpha = 60^0$ и размера $b : c = 2 + \sqrt{3}$; наћи $tg\frac{\beta - \gamma}{2}$, а затим углове β и γ. (Sorbonne).

19) У једноме троуглу је $b = \sqrt{2}$, $c = \sqrt{3}$ и $\gamma = 60^0$; наћи без употребе таблица: a, $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\sin\beta$ и $\cos\beta$. (Sorbonne).

20) Одредити углове троугла када су му стране сразмерне бројевима 2, $\sqrt{6}$ и $1 + \sqrt{3}$.

21) Решити троугао кад се зна R, α и $h_{(a)}$.

22) Решити уроугао кад се зна: a) $a + b = s$, $h_{(c)}$ и α; b) $a - b = d$, $h_{(c)}$ и α; c) $a + b - c = s$, α и β; d) $a + b = s$, R и γ; e) $a - b = d$, R и γ; f) $a - b = d$, R и $\alpha - \beta = \omega$; m) $h_{(a)} - h_{(b)} = p$, α и β.

23) Решити правоугли троугао кад се зна: a) оштри угао β и полупречник уписаног круга r; b) хипотенуза a и r; c) висина хипотенузина h и r; b) површина P и r.

24) Решити равнокраки троугао кад се зна: a) крак b и полупречник описаног круга R; b) основица c и полупрачник уписаног круга r.

25) Решити равнокраки троугао кад се зна полупречник уписаног круга r и полупречник r' спољашњо-уписаног круга, који додирује основицу и продужене краке. (Bacc. Dijon).

26) Израчунати стране и углове правоуглог троугла ABC, кад су познати полупречници $r = 8m$ и $\rho = 9m$ уписаних кругова у троуглима AMB и AMC, где је M средина хипотенузе. (Београд, I м. 1902).

27) У једном троуглу, у коме су сва три угла оштра, износи збир двеју страна $a + b = 18$, а збир њихових квадрата $a^2 + b^2 = 89$. Површина му је $19m^2$. Колике су стране и углови тог троугла? (Београд, I м. 1900).

28) Решити троугао кад је дато: $a^2 - b^2 = 19$, $2\,R = 21{,}25$ и $\gamma = 126^0\,25'\,12''$. (Београд, II м. 1929).

29) Три круга с полупречницима 1, 2 и 3m додирују се узајамно споља. Колика је површина између тих кругова. (Београд, III м. 1906).

30) У једном троуглу су стране a, $a + 1$ и $a + 2$; најмањи угао је половина највећег. Колике су стране и углови тога троугла? (Петровград, 1925).

31) У троуглу ABC дато је $c = 15m$, $b = 14m$ и $\alpha = 53^0\,7'\,48''$; израчунати ону дуж $MP \perp AB$, а која дели $\triangle$ ABC на два једнака дела. (Београд, I м. 1910).

32) Познат је полупречник $R = 5{,}275m$ описаног круга око једног троугла чија три угла чине геометриску прогресију с количником 2. Наћи стране, површину и полупречник уписаног круга. (Крагујевац, 1903).

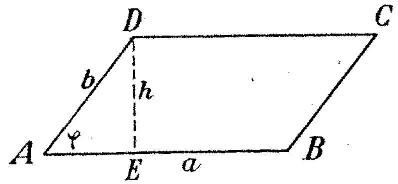
33) Решити троугао кад су познате средње линије $t(a) = 15$ dm' $t(b) = 12$ dm и угао које оне захватају $\omega = 118^0\,21'\,18''$. (Пожаревац, 1910 и 1931).

34) Два друма секу се под углом од 135^0. У том углу лежи село које је од једног друма удаљено 5 km и од другога 3 km. Колико је удаљено то село од раскршћа? (Бјеловар, 1933).

35) У троуглу ABC је угао $\gamma = 2\alpha$, $b : c = 2\sqrt{3}$; израчунати углове. (Београд, I м. 1927).

§ 28. Израчунавања код четвороуглова

1. *Познате су две стране и захваћени угао једнога паралелограма; наћи његову површину.*



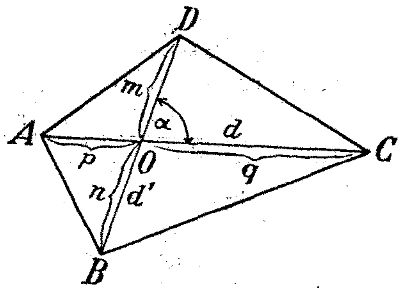
Сл. 35

Из правоуглог троугла AED (сл. 35) имамо $h = b \sin\varphi$.
Заменом у $P = ah$ добијамо:
$P = ab \sin\varphi$ .... (1)

Код квадрата је $a = b$ и $\varphi = 90^0$, те је $P = a^2$; код ромба је $a = b$, те је $P = a^2 \sin\varphi$; код правоугаоника је $\varphi = 90^0$, те је $P = ab$.

2. *Наћи површину ма каквог четвороугла када су му познате дијагонале и угао између њих.*

Нека су дијагонале четвороугла $ABCD$ (сл. 36) d и d', а угао између њих је α. Тада је његова површина:



Сл. 36

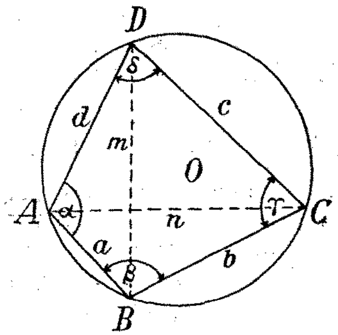
$$P = \triangle AOB + \triangle BOC + \triangle COD + \triangle DOA = \frac{pn}{2}\sin\alpha + \frac{nq}{2}\sin(180^0-\alpha) + \frac{qm}{2}\sin\alpha + \frac{mp}{2}\sin(180^0 - \alpha) = \frac{pn}{2}\sin\alpha + \frac{nq}{2}\sin\alpha +$$

$$+ \frac{qm}{2}\sin\alpha + \frac{mp}{2}\sin\alpha = \frac{\sin\alpha}{2}(pn + nq + qm + mp) =$$

$$= \frac{(p+q)(m+n)}{2}\sin\alpha, \text{ или } P = \frac{dd'}{2}\sin\alpha \; \ldots \; (2).$$

Код четвороуглова са нормалним дијагоналама је $\alpha = 90^0$, те је $P = \frac{dd'}{2}$, а код четвороуглова са једнаким дијагоналама је

$$P = \frac{d^2}{2}\sin\alpha.$$



Сл. 36

3. *Израчунавање углова тетивног четвороугла када су познате његове стране.*

Из троугла ABD (сл. 37) по Карнотовој теореми имамо:

$m^2 = a^2 + d^2 - 2ad\cos\alpha \ldots$ (1),

а из $\Delta\, BCD$: $m^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\gamma \ldots$ (2).

Из ових двеју једначина добијамо:

$$a^2 + d^2 - 2\,ad\cos\alpha = b^2 + c^2 - 2\,bc\cos\gamma \ldots (3).$$

Па како је $\gamma = 180^0 - \alpha$, а то је

$$\cos\gamma = \cos(180^0 - \alpha) = -\cos\alpha.$$

Заменом у једначини (3) и решавањем по $\cos\alpha$ добијамо:

$$\cos\alpha = \frac{a^2 + d^2 - b^2 - c^2}{2(ad + bc)} \ldots (4).$$

Тада је: $\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}} = \sqrt{\frac{1 - \frac{a^2+d^2-b^2-c^2}{2(ad+bc)}}{2}} =$

$$= \sqrt{\frac{(b+c-a+d)\,(b+c+a-d)}{4(ad+bc)}}$$

и $\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}} = \sqrt{\frac{(a+b+d-c)\,(a+c+d-b)}{4\,(ad+bc)}} \ldots$ (5)

Узимајући да је $a + b + c + d = 2s$ и одузимањем од ове једначине и с једне и с друге стране редом: $2a$, $2b$, $2c$ и $2d$ добијамо: $b + c + d - a = 2(s-a)$, $a + c + d - b = 2\,(s-b)$, $a + b + d - c = 2\,(s-c)$ и $a + b + c - d = 2\,(s-d)$.

Заменом у (5) добијамо:

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)\,(s-d)}{ad+bc}},$$

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)\,(s-c)}{ad-bc}} \text{ и } tg\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}} = \sqrt{\frac{(s-a)\,(s-d)}{(s-b)\,(s-c)}}.$$

Истим путем нашли бисмо:

$$\sin\frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)\,(s-b)}{ab+cd}},$$

$$\cos\frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{(s-c)\,(s-d)}{ab+cd}} \text{ и } tg\frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)\,(s-b)}{(s-c)\,(s-d)}};$$

$$\sin\frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)\,(s-c)}{bc+ad}},$$

$$\cos\frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)\,(s-d)}{bc+ad}} \text{ и } tg\frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)\,(s-c)}{(s-a)\,(s-d)}}; \text{ и}$$

$$\sin\frac{\delta}{2} = \sqrt{\frac{(s-c)\,(s-d)}{cd+ab}},$$

$$\cos\frac{\delta}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)\,(s-b)}{cd+ab}} \text{ и } tg\frac{\delta}{2} = \sqrt{\frac{(s-c)\,(s-d)}{(s-a)\,(s-b)}}.$$

Од наведених образаца најчешће се примењују обрасци за тангенсе полууглова, који су и најподеснији за памћење.

4. *Површина тетивног четвороугла.*

Из сл. 37 имамо: $P = \triangle\; ABD + \triangle\; ACD = \frac{ad}{2}\sin\alpha +$

$$+ \frac{bc}{2}\sin\gamma = \frac{ad}{2}\sin\alpha + \frac{bc}{2}\sin(180^0 - \alpha) = \frac{ad}{2}\sin\alpha + \frac{bc}{2}\sin\alpha =$$

$$= \frac{ad+bc}{2}\sin\alpha = \frac{ad+bc}{2}\cdot 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} = (ad+bc)\cdot\sqrt{\frac{(s-a)(s-d)}{ad+bc}}\cdot$$

$$\cdot\sqrt{\frac{(s-b)\,(s-c)}{ad+bc}}, \text{ или } P = \sqrt{(s-a)\,(s-b)\,(s-c)\,(s-d)}.$$

Овај се образац зове Брамагуптов.

5. *Израчунавање дијагонала тетивног четвороугла и полупречника круга помоћу страна.*

а) Из сл. 37 имамо: $m^2 = a^2 + d^2 - 2\,ad\cos\alpha$ (1) и $m^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\gamma = b^2 + c^2 - 2\,bc\cos(180^0 - \alpha) = b^2 + c^2 + 2bc\cos\alpha$.

Одавде је $\cos\alpha = \frac{m^2 - b^2 - c^2}{2bc}$. Заменом у (1) добијамо:

$$m^2 = \frac{(ab+cd)(ac+bd)}{bc+ab}, \text{ а } m = \sqrt{\frac{(ab+cd)(ac+bd)}{bc+ad}} \quad \ldots . (2)$$

Истим путем нашли бисмо: $n = \sqrt{\frac{(ad+bc)(ac+bd)}{ab+cd}}$ . . . . (3)

Множењем и дељењем једначина (2) и (3) добијамо оба Птоломејева правила:

$$mn = ac + bd \text{ и } \frac{m}{n} = \frac{ab+cd}{bc+ad}, \text{ тј.}$$

производ дијагонала тетивног четвороугла једнак је збиру производа супротних страна; и дијагонале тетивног четвороугла у истој су размери као збирови производа оних страна четвороугла које се стичу у крајњим тачкама дотичне дијагонале.

b) Ако $m = \sqrt{\frac{(ab+cd)(ac+bd)}{bc+ad}}$ заменимо у једначини $m = 2R\sin\alpha$ и добивену једначину решимо по R, добијамо:

$$R = \frac{1}{2\sin\alpha}\sqrt{\frac{(ab+cd)(ac+bd)}{bc+ad}} = \frac{\sqrt{\frac{(ab+cd)(ac+bd)}{bc+ad}}}{4\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}} =$$

$$= \frac{\sqrt{\frac{(ab+cd)(ac+bd)}{bc+ad}}}{4\sqrt{\frac{(s-a)(s-d)}{bc+ad}}\cdot\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc+ad}}} = \frac{\sqrt{(ab+cd)(ac+bd)(ad+bc)}}{4\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}},$$

или $R = \frac{\sqrt{(ab+cd)(ac+bd)(ad+bc)}}{4P}$.

6. Задаци за вежбу

1) Код ромбоида зна се основица $a = 1{,}36\ m$, налегли угао $\alpha = 105^0$ и дијагонала наспрам овог угла $m = 3{,}72\ m$; наћи другу страну b и другу дијагоналу n.

2) Наћи површину онога ромбоида чије су дијагонале $m = 761$ и $n = 837$, а њихов захваћени угао $\varphi = 17^0 38'$.

3) Стране једнога ромбоида јесу $a = 25\ m$ и $b = 17\ m$, а угао између њих $\alpha = 25^0 3' 17''$; наћи његову површину и дијагоналу наспрам датог угла.

4) Површина једнога правоугаоника је $P = 52\ m^2$ а страна $a = 8\ m$; наћи углове које гради дијагонала са странама.

5) Страна ромба је $a = 37\ m$ а један угао $\alpha = 28^0 5' 15''$; наћи његову површину.

6) Наћи страну ромба чија је површина $P = 800\ m^2$ а један угао 30^0.

7) Наћи углове ромба чији је обим $0 = 260\ m$ а висина $h = 56{,}86\ m$

8) Дијагонала ромбоидова $m = 15{,}67\ m$ захвата са странама ромбоида углове $\varphi = 47^0 15'$ и $\varphi' = 26^0 7'$; наћи његове стране и површину.

9) Дијагонале једнога ромбоида јесу $m = 21{,}842\ m$ и $n = 12{,}213\ m$, а угао између њих $\varphi = 66^0 59'$; наћи стране и углове.

10) Паралелне стране једнога трапеза јесу $a = 324{,}35\ m$ и $b = 208{,}15\ m$, а углови на страни a јесу $\alpha = 90^0$ и $\beta = 32^0 25'$; наћи његову површину.

11) Мања паралелна страна једнога трапеза је $b = 237\ m$ а углови на њој јесу $117^0 36'$ и $135^0 19'$; наћи његову површину када му је висина $h = 87\ m$.

12) Непаралелне стране једнога трапеза јесу $3{,}51\ m$ и $7{,}04\ m$, а када се продуже секу се под правим углом; наћи углове трапеза.

13) Паралелне стране једнога трапеза јесу $a = 16\ m$ и $b = 10\ m$, а непаралелне $c = 4\ m$ и $d = 5\ m$; наћи његове углове.

14) Дијагонале једнога трапеза јесу $m = 76{,}93\ m$, и $n = 63{,}305\ m$, а захваћени угао $\varphi = 126^0 17' 48''$; наћи његову површину.

15) Израчунати углове једнога ромба када су му дијагонале $m = 25{,}37\ m$ и $n = 28{,}15\ m$.

16) Дате су две супротне стране a и c, један угао α и полупречник r описаног круга око једног четвороугла; наћи оне друге две стране.

17) Дате су обе дијагонале m и n, угао φ између њих и полупречник r описаног круга око једног четвороугла; наћи његове углове и стране.

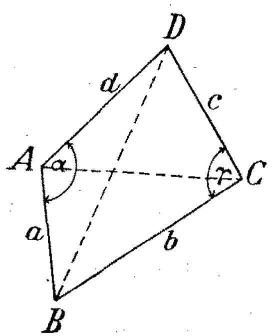
18) Дате су две узастопне стране a и b, угао β између њих и полупречник r уписаног круга једног тангентног четвороугла; наћи његове друге две стране и углове.

19) Нека су p и q две силе које дејствују на једну тачку под углом φ, а α и β нека су углови између њих и резултанте r. Када су дате три од тих шест количина, и то: 1) p, q, φ; 2) p, q, α; 3) p, r, α; 4) p, r, β; 5) p, r, φ; 6) p, α, β; 7) r, α, β; и 8) p, q, r; одредити остале три (*Паралелограм сила*).

20) Код једнога тетивног четвороугла две су суседне стране по $3\ m$ а друге две по $4\ m$; наћи површину, полупречник круга и дијагонале.

21) Решити паралелограм када се зна дијагонала m, површина P и обим O.

22) Стране једнога трапезоида јесу a, b, c и d, а збир два супротна угла је 2ω; наћи његову површину.



Сл. 38

Решење. Из $BD^2 = a^2 + d^2 - 2ad\cos\alpha$ и $BD^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\gamma$ добијамо: $a^2 + d^2 - b^2 - c^2 = 2ad\cos\alpha - 2bc\cos\gamma \ldots (1)$

Површина $P = \frac{ad}{2}\sin\alpha + \frac{bc}{2}\sin\gamma$, или

$4P = 2ad\sin\alpha + 2bc\sin\gamma \ldots . (2)$

Подизањем најпре на квадрат једначина (1) и (2), а затим сабирањем добијамо:

$16P^2 + (a^2 + d^2 - b^2 - c^2)^2 = 4a^2d^2 + 4b^2c^2 - 8abcd\cos(\alpha+\gamma) \ldots (3)$

Па како је $\cos(\alpha+\gamma) = \cos 2\omega = \cos^2\omega - \sin^2\omega = \cos^2\omega - (1 - \cos^2\omega) = 2\cos^2\omega - 1$, то заменом у (3) добијамо:

$16P^2 = (a+d+b-c)(a+d-b+c)(b+c+a-d)(b+c-a+d) - 16abcd\cos^2\omega,$

или $16\,P^2 = 16\,(s-a)\,(s-b)\,(s-c)\,(s-d) - 16\,abcd\,\cos^2\omega$, где је $a+b+c+d=2\,s$. Одавде је:

$$P=\sqrt{(s-a)\,(s-b)\,(s-c)\,(s-d)-abcd\,\cos^2\omega}\,\ldots\,(4)$$

За $\alpha+\gamma=2\,\omega=180^0$, четвороугао постаје тетиван, те се образац 4) претвара у Брамагуптов $P=\sqrt{(s-a)\,(s-b)\,(s-c)\,(s-d)}$.

23) Ромб има страну $a=2\,cm$ а један угао $\alpha=38^0\,5'\,2''$. Колика је висина оног равностраног троугла који је уписан у кругу исте површине са задатим ромбом? (Ниш, м. 1934)

24) Наћи површину трапеза, ако је позната његова средња линија $m=4{,}887$ и углови на већој паралелној страни $\alpha=72^0\,1'\,12''$, $\beta=45^0\,0'\,24''$. Овај трапез је уједно тангентан четвороугао. (Чачак, 1933).

25) Од једне праве улице полазе два права пута: први полази под углом од 30^0 лево, а други после $1^1/_4$ km под углом од 60^0 десно. На првом путу после 4 km налази се место A, а на другом путу после $2^1/_2$ km налази се место B. Колика је раздаљина од A до B? (Чачак, 1931).

26) Наћи страну и површину ромба, кад му је један угао $63^0\,15'$, а збир његових дијагонала 26,4 m. (Београд, III м. 1923).

27) Трапез чија је висина 6 dm а паралелне стране a = 10 dm и b = 4 dm преполовљен је правом која је паралелна са паралелним странама. Колика је та права и колике су непаралелне стране, кад је један угао на већој паралелној страни $\alpha=68^0\,25'\,40''$? (Београд, II м. 1921).

28) У једном четвороуглу стране се имају као 2 : 3 : 5 : 4, а збир њихових квадрата износи 486. Прве две стране чине угао од 105^0. Колике су стране, површина и углови четвороугла? (Београд, II ж. 1925).

29) Периферија круга полупречника r = 1 подељена је на четири дела у размери 1 : 2 : 3 : 4. Наћи површину тетивног четвороугла, чија су темена ове деоне тачке. (Зајечар, 1901).

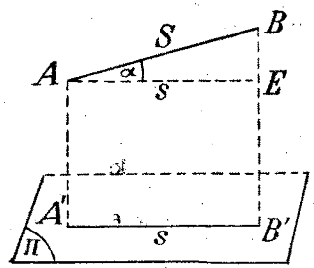
30) Два угла с полупречницима R = 12 cm и r = 4 cm додирују се споља. Одредити површину омеђену тим круговима и једном њиховом заједничком спољашњом тангентном. (Н. Градишка 1634).

§ 29. Примена тригонометрије на решавање задатака из стереометрије

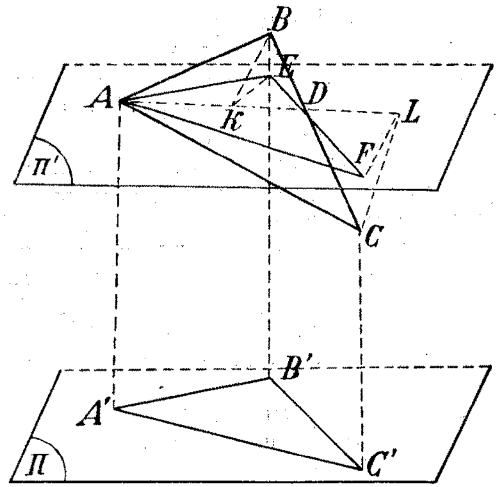
1) *Дата је дуж S у простору и њен нагибни угао α према равни П* (сл. 39); *наћи њену пројекцију s на тој равни.* Нека је $AB=S$ дата дуж. Спуштањем $AA' \perp П$ и $BB' \perp П$ добијамо пројекцију $A'B'=s$ дужи S на равни $П$. Повлачењем $AE=A'B'$ добијамо правоугли троугао ABE из кога налазимо да је: $s=S\cos\alpha$.

2) *Дат је троугао* $\boldsymbol{P}$ *и његов нагибни угао α према равни П; наћи његову пројекцију* $\boldsymbol{p}$ *на тој равни.*

Нека је ABC дани троугао P (сл. 40). Ако спустимо нормале из његових темена на раван $П$ и на раван $П'$, која је паралелна са $П$ и пролази кроз теме A, онда добијамо троуглове $A'B'C'$ и AFE као пројекције троугла ABC на равнима



Сл. 39



Сл. 40

$П$ и $П'$. Права AD, која је пресек равнине троугла ABC и равнине $П'$, дели троугао ABC на троуглове: ADB и ADC, а његову пројекцију AEF на троуглове ADE и ADF. Кад из B спустимо $BK \perp AD$ и тачку K спојимо са E, онда је угао BKE дати нагибни угао α. Стога је $KE=BK\cos\alpha$. Тада је површина троугла $ADB=\dfrac{AD\cdot BK}{2}$, и површина троугла $ADE=\dfrac{AD\cdot KE}{2}$. Заменом у овој једначини $KE=BK\cos\alpha$, добијамо: $ADE=\dfrac{AB\cdot BK}{2}\cos\alpha$, или $\Delta ADE=\Delta ADB\cdot\cos\alpha$. (1). Истим путем налазимо да је $\Delta ADF=ADC\cos\alpha$ (2)

Сабирањем једначина (1) и (2) налазимо: $\Delta ADE+\Delta ADF=(\Delta ADB+\Delta ADC)\cos\alpha$, или $\Delta AEF=\Delta ABC\cos\alpha$, или $p=P\cos\alpha$.

3) *Дат је многоугао P и његов нагибни угао α према равни П; одредити његову пројекцију p на тој равни.*

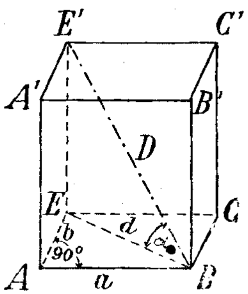
Спуштајући нормале из темена датог многоугла на раван $П$ и спајајући трагове, налазимо пројекцију p на равни $П$. Ако повучемо из два одговарајућа темена датога многоугла и његове пројекције дијагонале, онда се и дати многоугао и његова пројекција деле на троуглове. Означавајући са P_1, P_2, P_3, ... површине троуглова датог многоугла, са $p_1, p_2, p_3, \ldots$ површине одговарајућих троуглова пројекције, имамо према претходном задатку: $p_1=P_1\cos\alpha$, $p_2=P_2\cos\alpha$, $p_3=P_3\cos\alpha$,....

Сабирањем ових једначина налазимо:

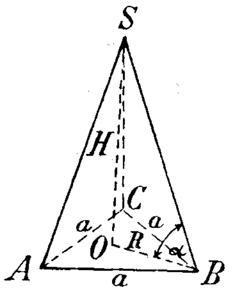
$$p_1+p_2+p_3+\cdots=(P_1+P_2+P_3+\cdots)\cos\alpha, \text{ или}$$
$$p=P\cos\alpha.$$

4) *Наћи запремину паралелопипеда кад се зна дужина* **a**, *његова дијагонала D и њен нагибни угао према базису* α (сл. 41).

Из троугла $EE'B$ имамо:
$$d=D\cos\alpha \text{ и } c=D\sin\alpha.$$
Из ΔABE имамо $b=\sqrt{d^2-a^2}$. Тада је запремина
$$V=abc=Da\sin\alpha\sqrt{d^2-a^2}.$$



Сл. 41



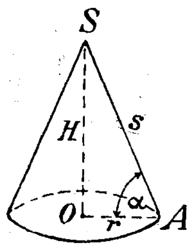
Сл. 42

5) *Наћи запремину правилне n праве тростране пирамиде, кад се зна основна ивица* **a** *и нагибни угао бочне ивице према базису* α (сл. 42).

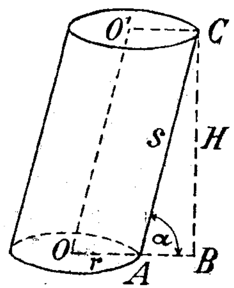
Полупречник описаног круга око базиса, као $\frac{2}{3}$ од базисне висине $h=\frac{a}{2}\sqrt{3}$, је $R=\frac{a}{3}\sqrt{3}$. Тада је из правоуглог троугла SOB висина пирамидина $H=R\,tg\alpha=\frac{a}{3}\sqrt{3}\,tg\alpha$.

Стога је
$$V=\frac{BH}{3}=\frac{\frac{a^2\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{a}{3}\sqrt{3}\,tg\alpha}{3}=\frac{a^3}{12}\,tg\alpha.$$

6) *Наћи површину и запремину праве купе стране* **s** *која је нагнута према базису под углом* α (сл. 43).



Сл. 43



Сл. 44

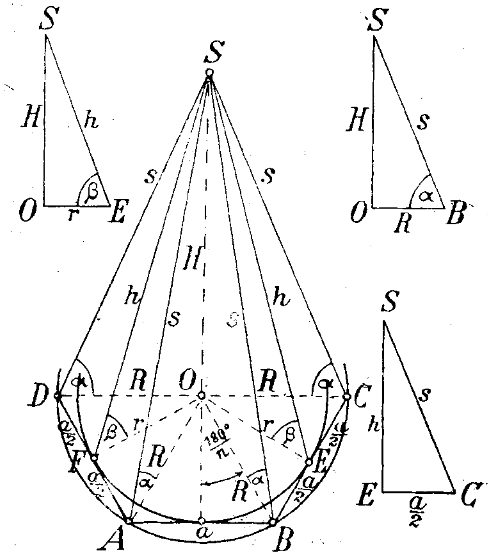
Тада је полупречник базиса $r=s\cdot\cos\alpha$, а висина купина $H=s\cdot\sin\alpha$. Стога је површина: $P=B+M=r^2\pi+rs\pi=r\pi\,(r+s)=s^2\pi\,\cos\alpha\,(\cos\alpha+1)$, или
$$P=2s^2\pi\,\cos\alpha\cdot\cos^2\frac{\alpha}{2},$$
а запремина $V=\dfrac{BH}{3}=\dfrac{r^2\pi\cdot s\cdot\sin\alpha}{3}=\dfrac{s^3\pi}{3}\cos^2\alpha\,\sin\alpha.$

7) *Наћи запремину косе облице кад се зна полупречник базиса,* **r**, *страна* **s** *и њен нагибни угао према базису* α (сл. 44).

Из правоуглог троугла ABC имамо:
$$H=s\cdot\sin\alpha.$$
Стога је запремина
$$V=BH=r^2\pi\cdot s\sin\alpha=r^2 s\,\pi\sin\alpha.$$

8) *Однос између елемената правилних и правих пирамида.*

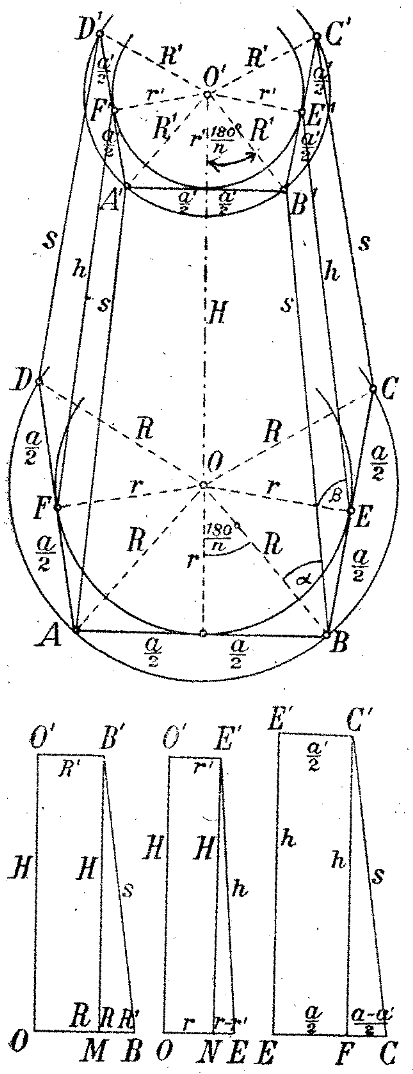
При решавању задатака код правилних и правих n-тостраних пирамида, целих или зарубљених, треба имати увек у виду релације, које нам дају однос између елемената: бочне ивице s, основне ивице a, висине пирамиде H, бочне висине h, полупречника описаног око базиса R (R_1 је полупречник описаног круга око горњег базиса зарубљене пирамиде), полупречника уписаног круга код базиса r (r_1 за горњи базис зарубљене пирамиде), угла нагиба α бочне ивице према базису и угла нагиба β бочне стране према базису.



Сл. 45

Ове релације изводимо код целе пирамиде из правоуглих троуглова: SOA (или SOB, SOC,...) и SOE (или SOF, ...), који су у пирамиди и из троугла BES, који је на бочној страни (сл. 45), а код зарубљене пирамиде из правоуглих трапеза: O^1OBB^1 (или O^1OAA^1, O^1OCC^1, ...), OO^1EE^1 (или

O^1OFF^1, . . .), који су у пирамиди, и из правоуглог трапеза BEE^1B^1, који је на боку (сл. 46)*.



Сл. 46

Код целих пирамида те су релације:

a) Из $\triangle SOB$:

1) $s^2 = H^2 + R^2$;

2) $H = s \cdot \sin\alpha = R \cdot tg\,\alpha$;

3) $R = s \cdot \cos\alpha = H \cdot cotg\,\alpha$; и

4) $s = \dfrac{H}{\sin\alpha} = \dfrac{R}{\cos\alpha}$.

b) Из $\triangle\, SOE$:

1) $h^2 = H^2 + r^2$;

2) $H = h \cdot \sin\beta = r \cdot tg\,\beta$;

3) $r = h \cdot \cos\beta = H \cdot cotg\,\beta$; и

4) $h = \dfrac{H}{\sin\beta} = \dfrac{r}{\cos\beta}$.

c) Из $\triangle$ SEC: $s^2 = h^2 + \left(\dfrac{a}{2}\right)^2$.

Код зарубљених пирамида те су релације:

a) Из трапеза O^1OBB^1 (или $\triangle\, B^1MB$):

1) $s^2 = H^2 + (R - R_1)^2$;

2) $H = s \cdot \sin\alpha = (R - R_1)\, tg\,\alpha$;

3) $R - R_1 = s \cos\alpha = H \cdot cotg\,\alpha$;

и 4) $s = \dfrac{H}{\sin\alpha} = \dfrac{R - R_1}{\cos\alpha}$.

b) Из трапеза O^1OEE^1, (или $\triangle\, E^1NE$):

1) $h^2 = H^2 + (r - r_1)^2$;

2) $H = h \sin\gamma = (r - r_1)\, tg\,\beta$;

3) $r - r_1 = h \cos\beta = H \cdot cotg\,\beta$;

и 4) $h = \dfrac{H}{\sin\beta} = \dfrac{r - r_1}{\cos\beta}$.

c) Из трапеза E^1ECC^1 (или $\triangle\, C^1PC$) $s^2 = h^2 + \left(\dfrac{a - a^1}{2}\right)^2$.

Поред ових релација треба имати у виду релације између елемената: a, R и r (a_1, R_1, r_1) код правилних многоуглова, а изведених код решавања правилних многоуглова (§ 24).

---

* Ови троуглови, односно трапези, издвојени су поред поменутих слика и нацртани у минијатури.

Задаци за вежбу из стереометрије.

1) Израчунај нагибни угао коцкине дијагонале према страни.

2) Нaђи угао између двеју страна код: *a*) правилног тетраедра, *b*) октаедра.

3) Висина базиса једног косог паралелопипеда, чији је базис ромб, је $h = 6$ *cm*. Кад је један угао базиса $\alpha = 39^0 4' 20''$, а бочна ивица $s = 25$ *cm* је нагнута према базису под углом $\beta = 66^0 2' 28''$, израчунај запремину тога паралелопипеда.

4) Нађи запремину правилне и праве 12-тостране призме чија је висина $H = 10$ *m*, а основна ивица $a = 6{,}4$ *m*.

5) Базис једне косе тростране призме је равнокрак троугао чији је угао на основици $\alpha = 72^0 4' 10''$, а висина базиса $h = 2{,}2$ *m*. Нађи запремину те призме ако јој је бочна ивица $s = 4$ *m* нагнута према базису под углом $\beta = 60^0 32' 15''$.

6) Бочна површина једне правилне и праве тростране пирамиде је $M = 63$ m^2, а свака је бочна страна нагнута према базису под углом $\alpha = 29^0 3' 51''$. Нађи запремину те пирамиде.

7) Основна ивица једне правилне и праве 15-тостране пирамиде је $a = 1$ *m*, а бочна јој је ивица нагнута према базису под углом $\alpha = 42^0\, 10'$. Нађи њену површину и запремину.

8) Основне ивице једне правилне и праве 5-тостране зарубљене пирамиде јесу $a = 5$ *m* и $a' = 3$ *m*, а бочна јој је површина $M = 160$ m^2. Нађи угао α под којим је нагнута бочна страна према доњем базису.

9) Нађи полупречник лопте уписане у правилној и правој пирамиди са квадратном основом, када је основна ивица $a = 15$ *m*, а бочна је ивица нагнута према базису под углом $\alpha = 22^0 1' 10''$.

10) У једној правој купи уписана је пирамида са квадратном основом чија је запремина $v = 10$ m^3. Нађи површину купе, ако јој је изводиља нагнута према базису под углом $\alpha = 62^0 5' 30''$.

11) Нађи површину праве купе чији је полупречник базиса $r = 23{,}7$ *m* а угао на врху њеног осног пресека $\alpha = 20^0 13' 8''$.

12) Нађи површину правог конуса чија је бочна површина $M = 7{,}2$ *m*, а угао између изводиље и висине конуса $\alpha = 56^0 11' 9''$.

13) Разлика између висине и полупречника базиса једне праве купе је $d = 4{,}35$ *cm*, а угао између изводиље и висине $\alpha = 16^0\, 12'\, 10''$. Нађи запремину те купе.

14) Нађи запремину једне праве купе када је полупречник у њој уписане лопте $R = 4{,}3$ *m*, а угао на врху њеног пресека $2\alpha = 50^0\, 7'$.

15) Доњи базис зарубљене купе два пута је већи од горњег, а, бочна јој је површина три пута већа од горњег базиса. Нађи угао између изводиље и доњег базиса.

16) Два угла базиса тростране праве призме јесу α и β, и запремина је v. Нађи запремину описане облице.

17) Базис једне призме је троугао чији су углови α, β и γ, а R је полупречник круга описаног око тог троугла. Бочне ивице јесу дужине s, а нагнуте су према базису под углом φ. Нађи запремину те призме.

18) У праве тростране пирамиде основне су ивице 10,17 и 21 *m*, а запремина 242 m^3. Израчунај бочну ивицу и њен нагибни угао према базису.

19) Запремина праве купе је V, а стране су јој нагнуте према базису под углом α; колики је омотач?

20) Колика је запремина праве зарубљене купе кад је њен омотач $134{,}34\ cm^2$, страна $7{,}9\ cm$, и нагибни угао стране према доњем базису $84^0\,28'\,30''$?

21) Полупречници базиса праве зарубљене купе јесу $R = 45\ cm$ и $r = 34\ cm$, а нагибни угао стране према доњем базису $\alpha = 50^0$. Нађи полупречник оне лопте чија је површина једнака с површином омотача ове купе.

22) Колика је површина, а колика је запремина обртног тела које постаје када се правилан осмоугао са страном a обрће око једне своје угаоне симетрале?

23) Троугао са страном a и налеглим угловима β и γ обрће се око стране c. Израчунај површину и запремину обртног тела.

24) У паралелограму $ABCD$ је $AB = 25{,}387\ m$. $AD = 14{,}275\ m$ и угао $A = 30^0\,27'\,18''$. Нађи запремину тела које гради паралелограм, кад се обрће око стране AB. (Београд, I м. 1905).

25) Крак равнокраког троугла је $5\ cm$. а угао између кракова је $44^0\,42'$. Израчунати обртну запремину тога троугла кад се он обрће око осовине која је паралелна са његовом основичином висином и додирује круг описан око троугла. (Београд, III м. 1930).

26) Око лопте полупречника $r = 3{,}4567\ m$ описана је права зарубљена купа чији је нагибни угао стране према основи $\alpha = 65^0\,25'\,10''$. Нађи површину и запремину те зарубљене купе. (Београд, III м. 1914).

27) Оса косе облице $s = 15\ cm$ нагнута је према основи под углом $\alpha = 67^0\,18'\,50''$, а висина је једнака обиму базиса. Колика је ивица коцке чија је запремина једнака запремини дате облице? (Београд, Реалка 1932).

28) Правоугли троугао, чија хипотенузина висина $h = 4\ cm$ заклапа угао $\alpha = 52^0\,42'\,15''$ са основном катетом, обрће се око осовине која пролази кроз крајњу тачку хипотенузе, а нормална је на катети. Израчунати запремину обртног тела. (Београд, Реалка 1931).

29) Омотач праве купе једнак је збиру отсечака који се добијају кад се опише круг око троугла чије су стране 24, 30 и 36 cm. Колика је тежина те купе, ако је специфична тежина њене материје 6,7, а нагибни угао стране према базису $63^0\,30'$? (Београд, I ж. 1933).

30) Равнокрак трапез, чије су паралелне стране 24 и 18 cm, а угао на већој основици $38^0\,37'\,10''$, обрће се око веће основице. Нађи површину и запремину обртног тела. (Крагујевац, ж. 1932).

31) Колика је запремина тростране призме чија је бочна ивица дугачка 20 cm, а нагнута је према базису под углом од $68^0\,9'\,19''$, ако је базис уписан у кругу полупречника 57 cm. а два су му угла $\alpha = 49^0\,4'\,28''$ и $\beta = 90^0\,5'\,41''$? (Заечар, 1934).

32) У суду, који има облик зарубљене купе са полупречником основе $r = 3\ dm$, а стране су му према основи нагнуте под углом $\alpha = 108^0\,24'\,36''$, налази се вода у висини $h = 4\ dm$. У тај суд убачена је лопта. Колики мора бити полупречник убачене лопте, када се вода подигне у суду за $2\ dm$? (В. Кикинда, 1930).

33) Нађи запремину праве зарубљене пирамиде. чији је доњи базис правилан осмоугао уписан у кругу полупречника 42 cm, а горњи је базис описан око круга полупречника 6 cm, кад је нагибни угао бочне стране према базису $42^0\,16'\,32''$. (Панчево, 1930).

33) Ромб са страном $a = 6{,}4\ dm$. обрће се око осе која пролази кроз крајњу тачку веће дијагонале, а нормална је на дијагонали. Нађи површину и запремину посталог тела, ако је страна нагнута према осовини под углом $\alpha = 58^0$. (Сарајево, Шер. 1934)

34) Полупречници обеју основа једне праве зарубљене купе дати су коренима једначина:

$$\frac{3}{4}\sqrt{x-y} = 1 + \frac{1}{\sqrt{x-y}},\ \sqrt{x+y} + \sqrt{x-y} = 6,$$

а налегли угао стране према већој основи дат је једначином $cos + sin\frac{\alpha}{2} = 1$.

Нађи површину и волумен ове купе. (Сарајево, Шер. 1932).

35) Полупречник основе једне праве купе је $r = 10\ m$. Смањи ли се полупречник ове купе на $3\ m$ (при истој висини), нагибни се угао стране према базису утростручи. Нађи волумен простора између ових двеју купа. (Сарајево, II м. 1933.)

36) Делтоид у коме су стране $a = 12$, $b = 8\ m$ и угао између њих $\gamma = 82^0\,48'$, ротира око веће дијагонале. Нађи волумен мањег конуса и површину двоструког конуса, као и волумен уписаног ваљка у већем конусу, ако је полупречник базиса ваљка $\frac{1}{2}$ полупречника конуса. (Сарајево, I. м. 1933).

37) Тупоугли троугао, чије стране $a = 2\ m$ и $b = 4m$ захватају угао од 120^0, обрће се око осе која пролази кроз теме тупог угла а стоји нормално на његовој симетрали. Да се израчуна површина и запремина обртног тела. (Ваљево, 1934).

38) У троуглу ABC, коме су углови $\beta = 42^0\,13''\,44''$ и $\gamma = 73^0\,15''\,28''$ и страна $BC = a = 12{,}6\ cm$, одаберите тачку M на страни AB и повуците паралелну MN са страном a да буде $MN = BM = x$, а N на AC. Нађите волумен ротационог тела које постаје обртањем трапеза $MBCN$ око осе која пролази кроз A паралелно са страном a. (Ср. Митровица, 1932).

39) У правој зарубљеној купи чији је $R = 18\ cm$, $r = 12\ cm$, а страна нагнута према базису за $53^0\,27'$, уписана је правилна четворострана зарубљена пирамида. Нађи површину и запремину ове пирамиде. (Смедерево, 1934).

40) У троуглу познате су стране $a = 248\ cm$, $b = 356\ cm$ и угао $\alpha = 2\,\beta$. Троугао се обрће око стране c; нађи површину и запремину ротационог тела. (Смедерево, 1932).

41) Око праве и правилне десетостране пирамиде, чија је ивица основе $a = 8{,}3185$, а висина је једнака корену једначине $1 + \sqrt{x-2} = \sqrt{x+7}$, описана је права купа. Нађи површину равностраног ваљка, чија је запремина једнака запремини те купе. (Суботица, м. 1942).

42) Ако су основне ивице тростране призме 85 cm, 61 cm и 34 cm, а обична ивица $s = 80\ cm$ затвара са базом угао $\alpha = 87^0\,44'$, колика је запремина уписане облице у овој призми? (Суботица, 1930).

43) У правој купи уписана је пирамида, чији је базис правилан шестоугао стране $a = 6\ cm$, а запремина јој је $v = 270\ cm^2$. Нађи површину купе, ако јој је страна нагнута према базису под углом од $75^0\,24,\,10''$. (Сомбор, 1934).

44) Задана је зарубљена купа којој је осовински пресек равнокрак трапез. Колики је волумен купе, ако је површина тога трапеза $p = 270$ dm^2, крак $b = 17$ dm и угао $\alpha = 62^0\,55'\,36''$? (Копривница, 1930).

45) Углови на страни $c = 10$ једнога троугла дати су једначинама $4^{tgx - tgy} = 8$, $16^{tg^2x - tg^2y} = 8$. Израчунај површину ротационог тела које постаје ротацијом тога троугла око стране c. (Госпић, 1933).

46) Правоугли троугао, код кога је збир страна $a + b + c = 24$, а збир њихових квадрата $a^2 + b^2 + c^2 = 200$, ротира око хипотенузе. Наћи волумен ротационог тела. (Госпић, 1932).

47) Страна правог конуса нагнута је према бази под углом $\alpha = 48^0\,18'\,42''$, а разлика између стране и полупречника базе је 9,684 cm. Колика је површина лопте уписане у конусу? (Сл. Брод, 1934).

48) У бази праве купе уписан јз квадрат стране $a = 63{,}145$ cm. Раван која пролази кроз теме купе и кроз страну квадрата чини троугао чији је угао на врху $2\alpha = 66^0\,51'\,42''$; колика је запремина те купе? (Сл. Брод, 1932).

49) Кружни сектор AOB, чија је површина $F = 56{,}346$ cm^2, ротира око полупречника AO. Угао $AOB = \alpha = 57^0\,15'\,28''$. Израчунати волумен ротационог тела. (Сл. Брод, 1930).

50) Наћи запремину праве купе чија је страна $s = 6$ cm, а угао на врху 2α осовинског пресека дат је једначином $\left(4^{\frac{25 \sin\alpha \cos\alpha}{4}}\right)^{\frac{1}{3}} +$

$$+ \left(4^{25 \sin 2\alpha}\right)^{\frac{1}{12}} = 20.$$

51) Коса тространа пирамида има за базу троугао са странама $b=15$ cm, $c=17$ cm и углом $\alpha = 35^0\,43'\,54''$. Њен је волумен $v = 336{,}81$ cm^3. Права која спаја тежиште базе са врхом пирамиде гради с базом угао $\omega = 40^0\,15'\,20''$. Одреди дужину те праве. (Шибеник, 1932).

52) У једне тростране пирамиде све су бочне ивице једнаке и свака износи 9 m. Углови између ивица при врху јесу: $\alpha = 28^0\,19'\,37''$, $\beta = 31^0\,15'\,25''$, $\gamma = 43^0\,16'\,24''$; наћи запремину пирамиде. (Београд, II ж. 1928).

53) Правилан полигон који има 54 дијагонале а страна му је $a = 2{,}48$ обрће се око једне угловне симетрале. Наћи површину и запремину обртног тела. (Београд, I м. 1924).

54) Једна тространа права пирамида стоји у полулопти тако да се темена базиса налазе на обиму полулоптиног базиса. Основне ивице пирамиде јесу $a = 17$ cm, $b = 10$ cm и $c = 9$ cm. Израчунати ивичне углове пирамиде и њену површину. (Београд, II ж. 1924).

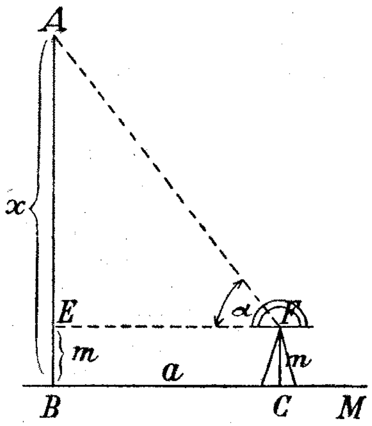
§ 30. Примена тригонометрије на решавање задатака из практичне геометрији

Применом тригонометрије у стању смо да решимо неколико задатака који имају практичан значај. Такви су задаци: мерење висина приступачних и неприступачних предмета, одређивање отстојања неприступачних тачака на земљиној по-

вршини итд. За мерење углова на земљиној површини и одређивање правца тачака у простору употребљавамо разне угломерне справе, а најчешће *теодолит*, помоћу кога можемо измерити угао са најприближнијом тачношћу.

I. Мерење висина

1) *Наћи висину једнога предмета (дрвета, куле, куће) када му је подножје приступачно а земљиште хоризонтално.*



Сл. 47

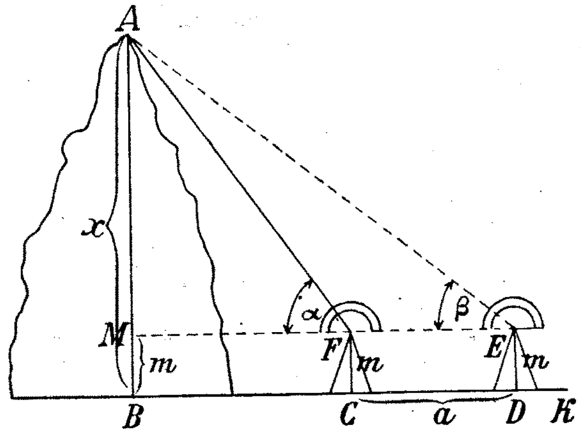
Треба на хоризонталној равни BM (сл. 47) узети на извесном отстојању a од подножја предмета тачку C. Код ове тачке треба наместити инструменат чија се висина m зна. Помоћу теодолита одређујемо угао $EFA = \alpha$, а затим из правоуглог троугла AEF имамо:

$$AE = EF\, tg\,\alpha = a\, tg\,\alpha.$$

Висина предмета AB јесте $x = AE + m$.

2) *Наћи висину предмета (куће, брда) када му је подножје неприступачно а земљиште хоризонтално.*

У овоме случају узимамо на хоризонталној равни BK (сл. 48) две тачке C и D на извесном отстојању a, тако да правац DC пролази кроз подножје B. Код C и D намешта се теодолит висине m и њиме одређујемо углове $AFM = \alpha$, и



Сл. 48

$AEM = \beta$. Тада у косоуглом троуглу AFE знамо страну $EF = a$ и сва три угла.

По синусној теореми имамо $AF : a = \sin\beta : \sin(\alpha - \beta)$, а одавде је $AF = \frac{a \sin\beta}{\sin(\alpha-\beta)} \ldots (1)$.

Како је из правоуглог троугла $AMF : AM = AF \sin\alpha$, то је, заменом у овој једначини AF са његовом вредношћу из једначине (1):

$$AM = \frac{a \sin\alpha \sin\beta}{\sin(\alpha-\beta)}.$$

Висина предмета AB јесте $x = AM + m$.

Напомена. — Ако узета база $CD = a$ не пролази кроз подножје B предмета AB, онда узимамо базу $CD = a$ ма којег правца, а у равни подножја предмета (сл. 49). Из крајњих тачака C и D визирамо A и B и налазимо углове: α, β и γ. Тада из $\triangle DBC$ имамо: $BC : a = \sin\alpha : \sin DBC$, или $BC : a = \sin\alpha : \sin(\alpha+\beta)$.

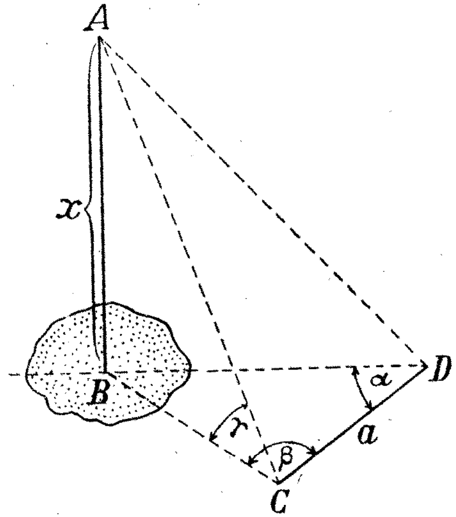
Одавде је

$$BC = \frac{a \sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}.$$

Најзад из правоуглог троугла ABC имамо

$$x = BC\, tg\gamma = \frac{a \sin\alpha\, tg\gamma}{\sin(\alpha+\beta)}.$$

Ако узета база CD не лежи у равни подножја предмета AB, онда треба да измеримо још углове ACD и ADC. Тада из $\triangle ACD$ налазимо најпре страну AC, а затим из $\triangle ABC$, помоћу страна BC, AC и угла γ, налазимо висину x.



Сл. 49

3. *Наћи висину предмета када је подножје приступачно а земљиште косо.*

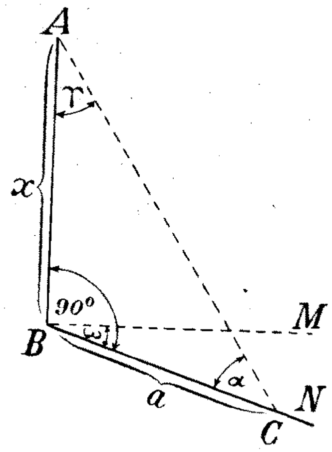
Треба претходно измерити угао ω између хоризонталне равнине BM (сл. 50) и косе BN. Затим на косој равни BN треба узети тачку C на извесном отстојању a од подножја предмета. Помоћу теодолита из C визирамо врх предмета A и налазимо угао α. Тада у косоуглом троуглу ABC знамо сва три угла и страну $BC = a$.

По синусној теореми имамо: $AB : a = \sin\alpha : \sin\gamma$, или

$x : a = \sin\alpha : \sin[180^0 - (90^0 + \omega + \alpha)]$.

Одавде је

$$x = \frac{a \sin\alpha}{\sin(90^0 + \omega + \alpha)} = \frac{a \sin\alpha}{\cos(\omega + \alpha)}.$$



Сл. 50

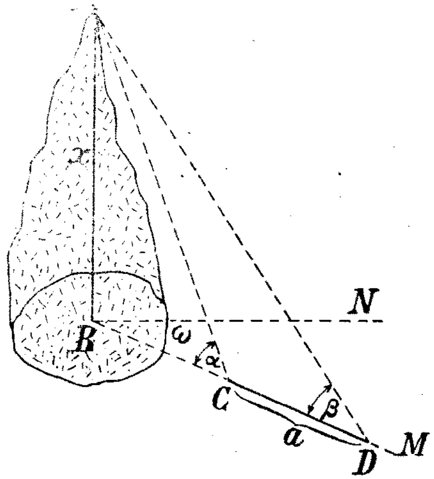
4) *Наћи висину предмета када му је подножје неприступачно а земљиште косо.*

Најпре се, као у претходном задатку, одређује угао ω између хоризонталне равнине BN и косе BM (слика 51). Затим на косој равни BM узимамо две тачке C и D чије је отстојање a. Из ових тачака визирамо врх предмета A и налазимо углове α и β. Тада у троуглу ACD знамо сва три угла и страну $CD = a$. По синусној теореми имамо:

$$AC : a = \sin\beta : \sin(\alpha - \beta).$$

Одавде је

$$AC = \frac{a \sin\beta}{\sin(\alpha-\beta)}.$$



Сл. 51

Израчунавањем стране AC имамо у троуглу ABC познате једну страну и сва три угла.

Стога је:

$$AB : AC = \sin\alpha : \sin(90^0 + \omega),$$

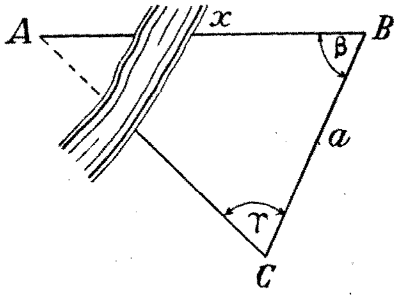
или $$x : \frac{a \sin\beta}{\sin(\alpha-\beta)} = \sin\alpha : \cos\omega.$$

Одавде је $$x = \frac{a \sin\alpha \sin\beta}{\sin(\alpha-\beta)\cos\omega}.$$

II. Мерење отстојања двају места

5) *Одредити у пољу раздаљину тачака A и B када је само једна приступачна.*

Узимамо најпре трећу тачку C (сл. 52) и меримо отстојање до приступачне тачке B. Из тачака B и C визирамо тачку A и налазимо теодолитом углове β и γ. Стога је по синусној теореми



Сл. 52

$$x : a = \sin\gamma : \sin\,[180^0 - (\beta+\gamma)], \quad \text{или}$$

$$x : a = \sin\gamma : \sin(\beta+\gamma).$$

Одавде је $x = \dfrac{a \sin\gamma}{six(\beta+\gamma)}$.

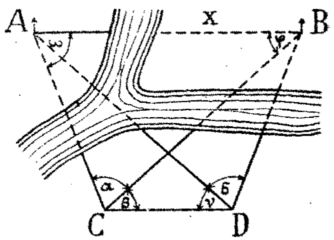
6) *Наћи отстојање двеју тачака A и B у пољу када су обе неприступачне.*

Треба најпре изабрати две тачке C и D (сл. 53) на извесном отстојању a. Из ових тачака визирамо теодолитом тачке A и B, чиме налазимо углове: α, β, γ и δ. Затим из $\Delta\, BCD$, у коме знамо једну страну и два угла, одређујемо по синусној теореми страну

$$BC = \frac{a \sin(\gamma+\delta)}{\sin(\beta+\gamma+\delta)} \quad (1).$$

Из $\Delta\, ACD$, у коме знамо такође једну страну и два угла, израчунавамо страну

$$AC = \frac{a \sin\gamma}{\sin(\alpha+\beta+\gamma)} \quad (2).$$



Сл. 53

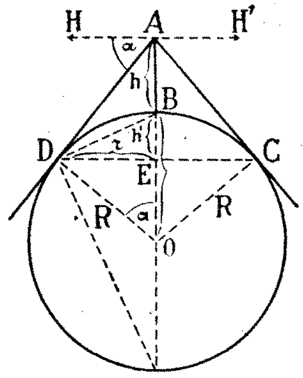
Овим израчунавањем имамо у троуглу ABC познате две стране AC и BC, и захваћени угао α.

Најзад применом тангентне теореме израчунавамо у овоме троуглу углове φ и ω, а затим помоћу синусне теореме и трећу његову страну $AB = x$.

III. Задаци из космографије

7) *Посматрач се налази на висини h над морском површином; наћи полупречник земље.*

Нека лук DBC (сл. 54) претставља морску површину. A око посматрача на висини $AB = h$ над морском површином, D додирну тачку тангентног видног зрака AD, а HH' видни хоризонат. Угао $DAH = \alpha$, који се зове *депресиони*, једнак је углу DOA, пошто су им краци нормални.



Сл. 54

Овај угао израчунава посматрач, а тако исто и висину h, помоћу инструмената. Тада је из правоуглог троугла ADO:

$DO = AO\cos\alpha$, или $R = (R+h)\cos\alpha$.

Одавде је:

$$R = \frac{h\cos\alpha}{1-\cos\alpha} = \frac{h\cos\alpha}{2\sin^2\dfrac{\alpha}{2}}.$$

8) *Наћи површину Земљине калоте која се види са висине h над морском површином, сматрајући Земљу за лопту с полупречником R.*

Из правоуглог троугла ADO (сл. 54) имамо: $R = (R+h)\cos\alpha$.

Одавде је $\cos\alpha = \dfrac{R}{R+h}$ .... (1) Из правоуглог троугла DEO имамо: $r = R\sin\alpha = R\cdot\sqrt{1-\cos^2\alpha} = R\sqrt{1-\left(\dfrac{R}{R+h}\right)^2} =$

$$= \frac{R}{R+h}\sqrt{h(2R+h)} \ldots (2)$$

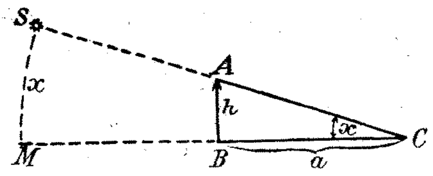
Па како је површина једне лоптине калоте $P = (r^2 + h_1^2)\pi$, где је r полупречник калотиног базиса, а h_1 висина калоте, то заменом $r = \dfrac{R}{R+h}\sqrt{h(2R+h)}$, а $h_1 = R - \sqrt{R^2 - r^2} =$

$$= R - \sqrt{R^2 - \frac{R^2 h\,(2R+h)}{(R+h)^2}} = R - \frac{R^2}{R+h} = \frac{Rh}{R+h}, \text{ добијамо:}$$

$$P = \frac{2R^2 h\pi}{R+h}.$$

9) *Наћи висину Сунца над хоризонтом помоћу сенке вертикалног предмета.*

Наћи висину Сунца над хоризонтом значи наћи колико степена има лук SM (сл. 55) небеског меридијана од не-



Сл. 55

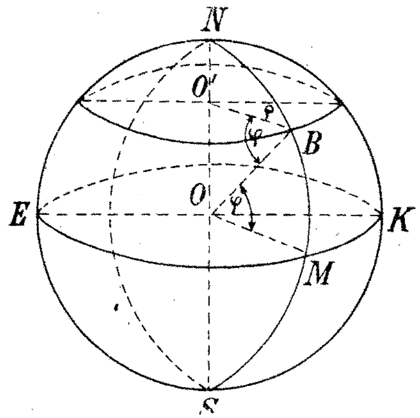
кога положаја Сунца до хоризонта. Како овај лук SM има онолико степена колико и угао SCN, или угао x правоуглог троугла ABC, који је добивен од предмета $AB = h$, његове сенке $BC = a$ и сунчанога зрака SC, то овај угао, или висину Сунца над хоризонтом, налазимо из једначине:

$$tg\, x = \frac{h}{a} \ldots (1)$$

Треба дакле измерити дужину вертикално постављеног предмета h и дужину његове сенке a, па тражену висину Сунца наћи из једначине (1).

10) *Наћи географску ширину неког места Земље помоћу висине једног вертикалног предмета и његове сенке коју баца на подне на дан равнодневице.*

Како под географском ширином једног места Земљине површине разумемо лук у степенима меридијана тог места од дотичног места до екватора, и како Сунце на дан равнодневице оптиче небесни екватор, а на подне тога дана налази се у небеском меридијану тог места, то сенка неког вертикалног предмета тада има правац меридијана дотичног места. *Тада угао Сунчеве висине јесте комплеменат са географском ширином дотичног места.* Стога, као у претходном задатку, налазимо најпре Сунчеву висину у подне за време равнодневице и комплементни угао тога угла биће географска ширина дотичног места.



Сл. 56

11) *Наћи дужину једног степена на упореднику наше земље чија је географска ширина позната.*

Нека је B (сл. 56) једна тачка упоредника O' чија је географска ширина $BM = \varphi$ позната. Како су равнине екватора O и упоредника O' паралелне, то их равнина меридијана

$NBMS$ сече тако да су им пресеци OM и $O'B$ паралелни. Стога је угао $O'BO = \varphi$. Тада је $\triangle\, OBO'$ правоугли са правим углом код O'. У овоме троуглу хипотенуза је Земљин полупречник $OB = R$, а катете су полупречник ρ упоредника и његово отстојање од екватора. Стога је

$$\rho = R\, cos\, \varphi \;.\;.\;.\;. (1)$$

Тада је обим упоредника $O' = 2\rho\pi = 2R\pi\, cos\, \varphi$, а дужина једног његовог степена јесте $\frac{O'}{360} = \frac{2R\, \pi\, cos\, \varphi}{360}$.

12) *Наћи отстојање два места A и B истог упоредника познате географске ширине кад се зна временска разлика часовника тих места.*

Ако је географска ширина упоредника φ, онда је по претходном задатку, дужина једног степена тога упоредника $\frac{2R\, \pi\, cos\, \varphi}{360}$. Услед дневног обртања Земље око њене осовине Сунце привидно прелази 360^0 за 24 часа, а за један час пређе $\frac{360^0}{24} = 15^0$. Ако се часовници места A и B разликују за n часова, онда лук AB има $n \cdot 15$ степени. Па како је дужина једног степена упоредника $\frac{2R\, \pi\, cos\, \varphi}{360}$, то дужина лука AB, тј. отстојање места A и B јесте:

$$\widehat{AM} = n\, 15 \cdot \frac{2R\, \pi\, cos\, \varphi}{360} = \frac{n R\, \pi\, cos\, \varphi}{12}$$

13) *Наћи отстојање једног небеског тела (месеца, сунца) до земљиног средишта.*

Нека тачка O (сл. 57) претставља центар Земље, EK пречник екватора, а кружна периферија меридијан места B и C на Земљиној површини одакле се посматрање врши. Ако су углови $BOK = \varphi$ и $COK = \varphi'$, географске ширине места B и C, а углови Z и Z' зенитне раздаљине небеског тела, који се углови одређују у истом тренутку од посматрача када се небеско тело налази над меридијаном места B и C, R полупречник Земље, онда се раздаљина $OS = d$ одређује из четвороугла $SBOC$ помоћу количина: R, φ, φ', Z и Z'. Ако означимо углове BSO и CSO са x и y, онда најпре одређујемо те углове помоћу њиховог збира и њихове разлике.

Њихов збир из четвороугла $SBOC$ јесте:

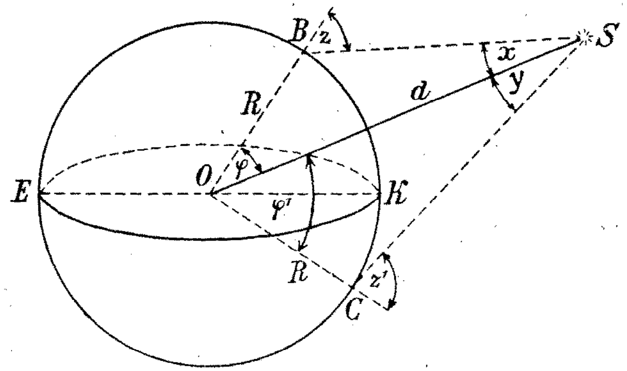
$$x + y = 360^0 - (180^0 - z) - (180^0 - z') - (\varphi + \varphi') = (z + z') - (\varphi + \varphi') \ldots (1)$$

Њихову разлику одређујемо на следећи начин: Из $\triangle\ SOB$ имамо $R : d = sinx : sin\ (180^0 - z)$, а из $\triangle\ SOC$ имамо

$$R : d = siny : sin\ (180^0 - z').$$

Упоређивањем ових двеју пропорција налазимо да је

$$sinx : sinz = siny : sinz', \text{ или } sinx : siny = sinz : sinz'.$$



Сл. 57

Применом изведених пропорција добијамо:

$$(sinx + siny) : (sinx - siny) = (sinz + sinz') : (sinz - sinz'), \text{ или}$$

$$2\,sin\frac{x+y}{2}\,cos\frac{x-y}{2} : 2cos\frac{x+y}{2}\,sin\frac{x-y}{2} = 2\,sin\frac{z+z'}{2}\,cos\frac{z-z'}{2} :$$

$$: 2cos\frac{z+z'}{2}\,sin\frac{z-z'}{2}, \text{ или } tg\frac{x+y}{2} : tg\frac{x-y}{2} = tg\frac{z+z'}{2} : tg\frac{z-z'}{2}.$$

Одавде је

$$tg\,\frac{x-y}{2} = tg\,\frac{\frac{x+y}{2}\cdot tg\frac{z-z'}{2}}{tg\frac{z+z'}{2}} = \frac{tg\,\frac{z+z'-\varphi-\varphi'}{2}\ tg\frac{z+z'}{2}}{tg\,\frac{z+z'}{2}}.$$

Из ове једначине, употребом логаритама, налазимо угао $(x - y)$. За $x - y = \omega$ и $x + y = (z + z') - (\varphi + \varphi') = \varepsilon$, налазимо да је $x = \frac{\omega + \varepsilon}{2}$ и $y = \frac{\varepsilon - \omega}{2}$.

Најзад из троугла SBO и SCO налазимо да је:

$$d = \frac{R\,sin\,z}{sinx}, \quad \text{или} \quad d = \frac{R\,sin\,z'}{siny}.$$

Бројни пример. Зенитни угао Месеца измерен у Берлину (северна географска ширина $\varphi = 52^0\,31'\,33''$) је $z = 32^0\,3'\,51''$, а зенитни угао месеца, измерен у истом тренутку на гребену Добре Наде (јужна географска ширина $\varphi' = 33^0\,56'\,3''$), је

$z' = 55^0\,42'\,48''$; наћи одстојање месеца до центра наше Земље када је њен полупречник $R = 6370{,}308\ km$.

14) *Наћи прави полупречник, површину и запремину једног небеског тела, ако се оно види са земље под углом 2α, а раздаљина тога небеског тела до земље је d.*

Како је раздаљина d хипотенуза, α један оштар угао, а полупречник r небеског тела катета правоуглог троугла (друга је катета тангента повучена са Земље на небеско тело), то је $r = d\ sin\alpha$.

Површина $P = 4r^2\pi = 4d^2\pi\ sin^2\alpha$, а запремина

$$V = \frac{4r^3\,\pi}{3} = \frac{4d^3\pi\ sin^3\alpha}{3}.$$

Бројни пример. Наћи пречник, површину и запремину месеца, кад се он види са Земље под углом $30'\,59''$ и када је његова раздаљина $d = 207188\ km$.

15) *Наћи површину једног Земљиног појаса између два упоредника чије су географске ширине φ и φ'.*

Ако означимо са ρ и ρ' полупречнике упоредника B и C чије су географске ширине φ и φ' (сл. 58), са R полупречник Земље, онда је:

$\rho = Rcos\,\varphi$ и $\rho' = Rcos\,\varphi'$, а $OB = R\ sin\,\varphi$ и $OC = R\ sin\,\varphi'$.

Тада је висина појаса $h = OB - OC = R\,(sin\,\varphi - sin\varphi') =$

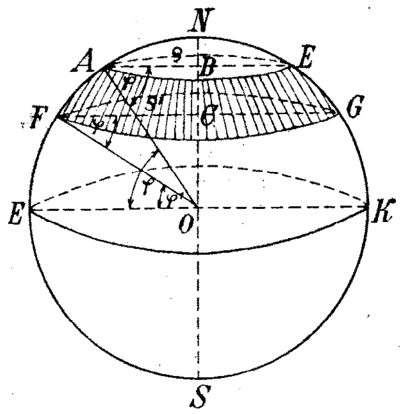
$$= 2R\,cos\,\frac{\varphi+\varphi'}{2}\,sin\,\frac{\varphi-\varphi'}{2}.$$

Стога је површина појаса

$$P = 2R\pi h =$$

$$= 2\,R\pi\cdot 2R\,cos\,\frac{\varphi+\varphi'}{2}\,sin\,\frac{\varphi-\varphi'}{2} =$$

$$= 4R^2\,\pi\,cos\,\frac{\varphi+\varphi'}{2}\,sin\,\frac{\varphi-\varphi'}{2}.$$



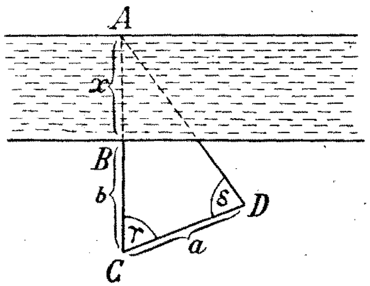
Сл. 58

Бројни пример. Наћи површину Земљиног појаса између упоредника географских ширина $\varphi = 50^0$ и $\varphi' = 40^0$, а Земљин полупречник $R = 6370\ km$.

IV. Разни практични задаци

16) *Наћи ширину реке код неког места.*

На другој обали реке изабирамо неки видан предмет А (сл. 59), а наспрам њега узимамо тачку B. За базу узимамо



Сл. 59

$CD = a$ тако да C лежи на продужењу од AB. Теодолитом меримо углове γ и δ, па из $\triangle$ ACD имамо: $AC : a = \sin\delta : \sin[180^0 - (\gamma + \delta)]$. Одавде је:

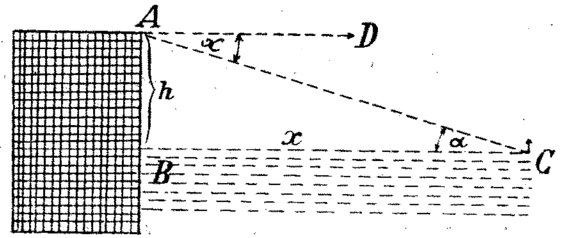
$$AC = \frac{a \sin\delta}{\sin(\gamma + \delta)}.$$

Ширина реке јесте $x = AC - b$.

17) *Наћи раздаљину лађе на морској пучини до обале висине h над морском површином.* Нека се посматрач налази у тачки A на висини $AB = h$ и види лађу у C (сл. 60). Најпре се налази угао α између видног зрака AC и хоризонтале AD. Тада отстојање BC лађе налазимо из правоуглог троугла ABC у коме знамо катету $AB = h$ и оштри угао $BCA = CAD = \alpha$.

Стога је $BC = h \,\mathrm{cotg}\, \alpha$.

Код овог задатка претпостављамо да је морска површина хоризонтална, што је допуштено само за мала отстојања.



Сл. 60

18) *Наћи висину облака помоћу његовог лика у води.* Да бисмо одредили висину облака M (сл. 61) над површином воде NP, треба да фиксирамо на облаку тачку C чији је лик тачка C'. Ако се наше око налази у тачки A за h изнад површине воде, онда визирајући тачку C и њен лик C', израчунавамо *елевациони* угао β између правца AC и хоризонтале AH и *депресиони* угао α између хоризонтале AH и правца AC' (хоризонтала AH налази се у равни ACC'). Тада углови CDN и ADB јесу једнаки као углови упадања и одбијања. А како је угао $ADB = \sphericalangle HAD$ као наизменични, то

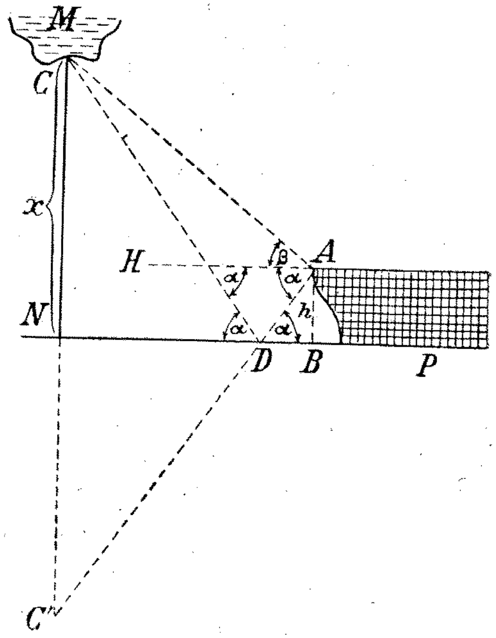
је угао $CDN = ADB = \alpha$, а угао $DCA = \alpha - \beta$. Стога је из правоуглог троугла ADB, $AD = \dfrac{h}{\sin\alpha}$.

Из троугла CAD имамо по синусној теореми: $CD : AD = \sin(\alpha + \beta) : \sin(\alpha - \beta)$, или $CD : \dfrac{h}{\sin\alpha} = \sin(\alpha + \beta) : \sin(\alpha - \beta)$.

Одавде је $CD = \dfrac{h \sin(\alpha + \beta)}{\sin\alpha \sin(\alpha - \beta)}$.

Најзад из правоуглог троугла CND имамо:

$$x = CD \sin\alpha = \frac{h \sin(\alpha + \beta)}{\sin(\alpha - \beta)}.$$



Сл. 61

V. Задаци за вежбу из практичне геометрије

1) Наћи висину једне куле чије је подножје приступачно када се она види са једног места, удаљеног од подножја 34,52 m, под углом од $56^0\ 16'\ 12''$, а висина угломера је 1,1 m.

2) Наћи висину Сунца над хоризонтом, ако вертикалан предмет 8,4 m висине баца сенку 7,67 m дужине.

3) Наћи висину једне куле чије је подножје неприступачно, ако се она види са два места међусобно удаљена 162 m под угловима $48^0\ 10'$ и $22^0\ 20'$.

4) Са једне тачке на морској обали висине 189 m над морском површином види се лађа на пучини под углом $\alpha = 2^0\ 3'\ 20''$; наћи даљину лађе од обале.

5) Са једне тачке речне обале висине 20,7 m види се наспрамна тачка на другој обали под углом $\alpha = 42^0\ 44'\ 28''$; наћи ширину реке.

6) Са једне обале реке видимо висину једног дрвета на другој обали под углом од $36^0\ 45'\ 40''$. Ако се удаљимо са обале 23,32 m, онда висину истог дрвета видимо под углом од $30^0\ 29'\ 30''$. Наћи висину дрвета и ширину реке.

7) Наћи висину једног облака над површином воде неког језера, ако посматрач који се налази на брегу висине $h = 80$ m над језерском површином види неку тачку облака под елевационим углом од 66^0, а слику те тачке види у води под депресионим углом од 58^0.

8) На једној речној обали узете су тачке A и B чије је отстојање 784 m, на супротној обали постоје тачке C и D, које се виде са A и B. Наћи отстојање CD, ако су углови $BAC = 87^0\ 25'$, $BAD = 47^0\ 32'$, $ABC = 46^0\ 34'$ и $ABD = 54^0\ 35'$. Тачке A, B, C и D налазе се у истој равни.

9) Стране тупоуглог троугла BAC, са тупим углом код B, не могу се измерити непосредно. Колика је дужина стране BC, ако је нормала AD (спуштена од A на BC) 536 m, а углови BAD и CAD јесу $15^0\ 18'$ и $27^0\ 18'$.

10) Врх громобрана дужине 1 m на једној кули види се са даљине од 100 m од подножја куле под углом од $61^0\ 46'$. Наћи висину куле.

11) Наћи полупречник Земљинога упоредника географске ширине $\varphi = 48^0\ 12'\ 30''$, кад је полупречник Земље $R = 6370\ km$. Наћи отстојање двају места тога упоредника, ако часовници тих места показују временску разлику 80 минута.

12) Наћи дужину лука Земљинога меридијана који се види са висине $h = 57\ m$, када је полупречник земље $R = 6370\ km$.

13) Колика је секундна брзина једне тачке на обиму Земљинога упоредника географске ширине $\varphi = 48^0\ 12'\ 35''$, кад је Земљин полупречник $R = 6370\ km$.

14) Под којим се углом види пречник Зорњаче кад је она удаљена од Земље 40 милиона km, а прави јој је пречник 12000 km?

15) Под којим углом φ видимо торањ од 65 m висине у раздаљини од 85 m, ако је наше око 1,6 m над површином Земље?

16) Колики је громобран на торњу од 65 m висине, кад се он види под углом од $2^0\ 50'\ 50''$ са једне тачке која је у хоризонталном правцу удаљена од подножја торња 70 m?

17) Колика је висина брда чији се врх види под угловима од $63^0\ 26'$ и $71^0\ 34'$ са крајњих тачака једне хоризонталне основице од 100 m дужине, а која пролази кроз подножје брда?

18) Наћи отстојање једног села до једне вароши чија се звонара (врх звонаре) види са села из двеју тачака удаљених између себе 80 m под угловима од $23^0\ 42'\ 28''$ и $25^0\ 17'\ 2''$.

19) Копенхаген и Москва имају готово једнаку северну географску ширину $55^0\ 43'$. Географска дужина од ферског меридијана Копенхагена је $30^0\ 14'$ а Москве $55^0\ 14'$. Наћи отстојање између Москве и Копенхагена, кад је Земљин полупречник $R = 6370\ km$.

20) Колика је разлика часовника двају места удаљених једно од другог за $l = 619\ km$, кад је за оба места географска ширина $S = 14^0\ 15'$, а полупречник Земљин $R = 6378\ km$? (Београд, I ж. 1914)

21) На колику висину треба да се уздигне аероплан, да би се могла видети толика површина колика је површина наше државе (250000 km^2), кад је полупречник Земље $R = 6370\ km$? (В. Кикинда, 1932)

22) Да се израчуна ширина реке AB, кад је у продужењу праве AB, под углом $\alpha = 48^0\ 12'\ 34''$ према њој, дата права $CD = 56\ m$ која са визираним линијама из D и A заклапа углове $CDB = 15^0\ 31'\ 49''$ и $CDA = 53^0\ 7'\ 18''$. (Ниш, 1907)

23) Са врха светионика, који је висок 40 m над морем, види се два брода, и то под депресионим угловима $\alpha = 10^0\ 35',\ 40''$ и $\beta = 12^0\ 26'\ 45''$, а догледни угао оба брода износи $\gamma = 96^0\ 22'\ 14''$. Колико су далеко у том часу оба брода међу собом? (Панчево, 1932)

24) Највећа планина на Земљи је Хималаја, чији врх лежи 8837 m изнад морске површине. Колика је депресија хоризонта, видна даљина и висина калоте која се види са тог врха, ако је полупречник Земље $R = 6371050\ m$? (Приштина, 1931)

25) Два су стуба удаљена један од другог 100 m. Из средине спојнице њихових подножја види се врх једног стуба под елевационим углом $\alpha = 49^0$, а врх другог под елевационим углом $\beta = 71^0$. Колико је жице потребно да се разапне између оба врха? (Сарајево, II м. 1929)

26) Врхови двају брегова леже у једној истој вертикалној равни са посматрачем и изгледају му издигнути над хоризонтом под угловима $9^0\ 30'$ и $18^0\ 30'$. Ако се посматрач приближи 6365 m, остајући у истој вертикалној равни и на једној хоризонтали, он тада види оба врха у истом правцу под углом од 37^0 над хоризонтом. Израчунати у метрима висине оба брега. (Ужице, 1912)

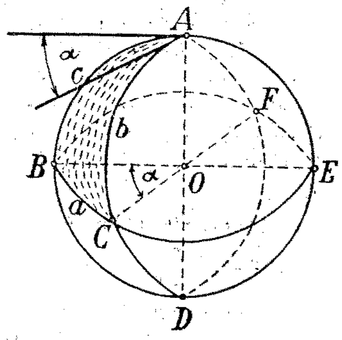
27) Са балона види се део Земљине површине под углом $2\alpha = 114^0\ 37'\ 44''$, полупречник Земљин је 6378 km; на којој је висини балон и колика је посматрана површина? (Београд, I ж. 1923)

28) Један метеор види се истовремено из два места A и B истог меридијана, и то из A под углом $82^0\ 24'\ 10''$ а из B под углом од $36^0\ 18''$ према зениту. Колико је тада отстојање метеора од површине Земље, када су места A и B удаљена за $30^0\ 40'$, а полупречник Земље је 8595 миља? (Београд, I м. 1922)

СФЕРНА ТРИГОНОМЕТРИЈА

§ 31. Сферни троуглови, њихове врсте и особине

У Стереометрији смо видели да под сферним троуглом разумемо део лоптине површине ограничен трима луцима трију главних лоптиних кругова (ABC, сл. 62). Лукови: $AB = c$, $BC = a$, $AC = b$, јесу *стране* сферног троугла. Ове стране једновремено су стране другог сферног троугла који са првим даје лоптину површину. Ако није нарочито наглашено, узимамо у посматрање онај сферни троугао који је по површини мањи од полулопте. Кругови: $ABDE$, $ACDF$ и $BCEF$ који дају сферни троугао ABC, деле лоптину површину још на седам сферних троуглова, по четири на свакој полулопти. Ови троуглови могу бити: *упоредни*, *унакрсни* и *супротни*, према томе да ли имају само заједничку страну, или само једно



Сл. 62

заједничко теме, или су темена једнога троугла супротне тачке темена другога троугла. Тако троуглови: ABC и BCD, ABC и ACE, ... јесу упоредни; троуглови: ABC и CDE, ABC и AEF, ... јесу унакрсни; троуглови: ABC и DEF, BCD и AEF, ... јесу супротни. Свака два упоредна сферна троугла дају сферни двоугао ($ABC + BCD = ABDC$), а супротни сферни троуглиi јесу једнаке површине.

Према странама и сферне троугле, као и равне, делимо на: *равностране, равнокраке* и *разностране,* а према угловима на *правоугле* и *косоугле*. Код равностраног троугла све су стране једнаке ($a = b = c$), код равнокраког су једнаке само две, а код разностраног све три стране су различите величине. Правоугли сферни троугао може имати *сва три угла* права ($A = B = C = 90^0$), или *само два,* или *само један* прав угао. Код правоуглог сферног троугла са три права угла стране су *квадранти* ($a = b = c = 90^0$), а код правоуглог сферног троугла са два права угла само су две стране квадранти (на сл. 62 b и c), а трећа страна има онолико степена колико и њен супротни угао (на сл. 62 страна a и угао A имају исти број степена α). Ова два правоугла сферна троугла не узимамо у поступак при решавању правоуглог сферног троугла, пошто су њихови елементи познати, већ само правоугли сферни троугао са једним правим углом. Код овог троугла, стране правог угла јесу *катете,* а наспрамна страна *хипотенуза.*

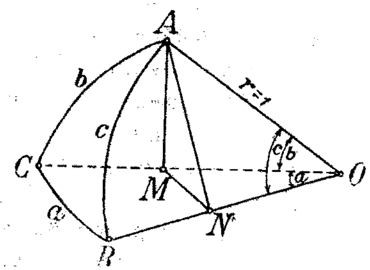
Ако темена сферног троугла ABC (сл. 62) спојимо са центром лопте O, онда добијамо сферни клин $OABC$, који је у ствари један тростран рогаљ, чије је теме у центру лопте, ивице су му полупречници лопте, ивични углови су стране, а углови рогља су углови сферног троугла. Стога између страна и углова сферног троугла постоје исти односи као код тространог рогља. Према овоме, све теореме у стереометрији, које се односе на особине, подударност и симетричност тространих рогљева, важе и за сферне троуглове.

У Стереометрији смо видели да је површина сферног троугла $\boldsymbol{P = \frac{r^2 \pi e}{180^0}}$, где је r полупречник лопте, а e, звани сферни *ексцес* или сферни *сувишак,* једнак је разлици између збира углова сферног троугла и 180^0 ($e = A + B + C - 180^0$). Запремина рогља који одговара сферном троуглу је

$$\boldsymbol{v = \frac{r^3 \pi e}{540^0} = \frac{r^2 \pi e}{180^0} \cdot \frac{r}{3} = P \cdot \frac{r}{3}}.$$

I. Решавање правоуглог сферног троугла

§ 32. **Неперово правило.** Ово правило употребљавамо при решавању правоуглог сферног троугла, а изводи се на следећи начин. Нека је ABC (сл. 63) сферни правоугли троугао, са правим углом код C, а припада лопти чији је полупречник r узет за јединицу. Тада су a и b катете а c хипотенуза тога правоуглог сферног троугла. Претпоставимо још да је овај троугао такав да су му стране и углови, осим C, мањи од 90^0. Ако његова темена спојимо са центром лопте O, добијамо тространи рогаљ $OABC$.



Сл. 63

Спуштањем нормала AM и AN на ивице OC и OB и спајањем тачака M и N, добијамо правоугле равне троугле: AMN, OAM, OAN и OMN. У првом је $\sphericalangle M = \sphericalangle C = 90^0$ а $\sphericalangle N = \sphericalangle B$. Тада је: $ON = r \cos c = \cos c$; $AN = r \sin c = \sin c$; $OM = r \cos b = \cos b$ и $AM = r \sin b = \sin b$. Стога је:

1) Из $\triangle\ OMN$: $ON = OM \cos a$, или $\boldsymbol{\cos c = \cos b \cdot \cos a}$;

2) Из $\triangle\ AMN$: $\sin N = \sin B = \frac{AM}{AN} = \frac{\sin b}{\sin c}$, или

$\boldsymbol{\sin b = \sin B \cdot \sin c}$, и слично овоме: $\boldsymbol{\sin a = \sin A \cdot \sin c}$;

3) $\cos N = \cos B = \frac{MN}{AM} = \frac{ON \cdot tg\, a}{ON\, tg\, c} = \frac{tg\, a}{tg\, c}$, или

$\boldsymbol{tg\, a = \cos B \cdot tg\, c}$, и слично овоме: $\boldsymbol{tg\, b = \cos A \cdot tg\, c}$;

4) $tg\, N = tg\, B = \frac{AM}{MN} = \frac{OM \cdot tg\, b}{OM \sin a} = \frac{tg\, b}{\sin a}$, или

$\boldsymbol{tg\, b = tg\, B \cdot \sin a}$, и слично овоме: $\boldsymbol{tg\, a = tg\, A \cdot \sin b}$;

5) Множењем једначине $tg\, A = \frac{tg\, a}{\sin b}$ и $tg\, B = \frac{tg\, b}{\sin a}$

добијамо: $tg\, A\, tg\, B = \frac{tg\, a\, tg\, b}{\sin a \sin b} = \frac{1}{\cos a \cos b}$, или, заменом

$\cos a \cos b$ са $\cos c$ (1): $tg\, A \cdot tg\, B = \frac{1}{\cos c}$,

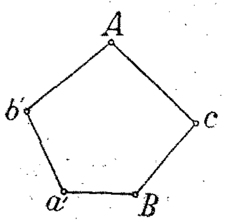
или $\boldsymbol{\cos c = \mathrm{cotg}\, A\ \mathrm{cotg}\, B}$;

$$6)\ \text{Из}\ \cos B = \frac{tg\, a}{tg\, c} = \frac{\dfrac{\sin a}{\cos a}}{\dfrac{\sin c}{\cos c}} = \frac{\sin a}{\sin c} \cdot \frac{\cos c}{\cos a},$$

заменом $\frac{\sin a}{\sin c}$ са $\sin A$ и (2) $\frac{\cos c}{\cos a}$ са $\cos b$ (1),
имамо: $\boldsymbol{\cos B = \sin A \cdot \cos b}$.

Ако у горњим обрасцима узмемо у поступак не катете a и b, већ њихове комплементе a' и b', добијамо *Неперове обрасце:*

1) $\boldsymbol{\cos c = \sin b' \cdot \sin a'}$; 2) $\boldsymbol{\cos b' = \sin B \cdot \sin c}$;
3) $\operatorname{cotg} a' = \cos B \cdot \operatorname{tg} c$, или $\boldsymbol{\cos B = \operatorname{cotg} a' \cdot \operatorname{cotg} c}$;
4) $\operatorname{cotg} a' = \operatorname{tg} A \cdot \cos b'$, или $\boldsymbol{\cos b' = \operatorname{cotg} a' \operatorname{cotg} A}$;
5) $\boldsymbol{\cos c = \operatorname{cotg} A \cdot \operatorname{cotg} B}$; и 6) $\boldsymbol{\cos B = \sin A \cdot \sin b'}$.



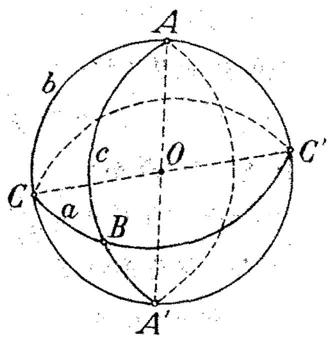
Сл. 64

Ове обрасце можемо лако упамтити, ако елементе сферног троугла ABC (сл. 63), осим угла C, поредимо по теменима једног петоугаоника, замењујући катете a и b са њиховим комплементима a' и b'. Тако Неперово правило гласи: **косинус ма ког елемента једнак је производу синуса одвојених елемената, или производу котангенса налеглих елемената.**

Напомена: Лако је увидети да Неперово правило вреди и кад су елементи сферног троугла ABC, осим C, већи од 90^0. Тако, ако су елементи b и c већи од 90^0 (сл. 65), онда је из упоредног сферног троугла $A'BC$:

1) $\cos(180^0 - c) = \cos(180^0 - b) \cos a$, или
$$\boldsymbol{\cos c = \cos b \cdot \cos a}.$$
2) $\sin a = \sin A \cdot \sin(180^0 - c)$, или $\boldsymbol{\sin a = \sin A \cdot \sin c}$;
3) $\operatorname{tg}(180^0 - b) = \cos A \cdot \operatorname{tg}(180^0 - c)$, или $\boldsymbol{\operatorname{tg} b = \cos A \cdot \operatorname{tg} c}$ итд.

Ово правило важи и кад $r \neq 1$.



Сл. 65

§ 33. Случајеви решавања правоуглог троугла

Први случај. — *Дата је хипотенуза* c *и једна катета, нпр.* $\boldsymbol{a}$; *наћи остале елементе:* b, A и B. Из $\cos c = \sin b' \sin a'$, $\cos a' = \sin c \sin A$ и $\cos B = \operatorname{cotg} a' \operatorname{cotg} c$ (сл. 64), или $\cos c = \cos b \cos a$, $\sin a = \sin c \sin A$ и $\cos B = \operatorname{tg} a \cdot \operatorname{cotg} c$ имамо:

(1) $\cos b = \frac{\cos c}{\cos a}$; 2) $\sin A = \frac{\sin a}{\sin c}$; и 3) $\cos B = \frac{\operatorname{tg} a}{\operatorname{tg} c}$.

Како за A из (2) добијамо две вредности, оштар и туп

угао, на први поглед изгледао би задатак неодређен. Међутим ова сумња отпада, јер се за A узима вредност $\gtrless 90^0$, према томе да ли је $a \gtrless 90^0$.

Бројни пример: $c = 63^0\ 29'\ 35''$, $a = 33^0\ 39'\ 15''$.

1) $\cos b = \frac{\cos c}{\cos a} = \frac{\cos 63^0 29' 35''}{\cos 33^0 39' 15''}$; $\log\cos b = \log\cos 63^0 29' 35'' -$
$- \log\cos 33^0 39' 15'' = \bar{1},64963 - \bar{1},92033 = \bar{1},72930$;
$b = arc$-у чији је $\log\cos \bar{1},72930 = 57^0\ 34'\ 36''$.

2) $\sin A = \frac{\sin a}{\sin c} = \frac{\sin 33^0 39' 15''}{\sin 63^0 29' 15''}$; $\log\sin A = \log\sin 33^0 39' 15'' -$
$- \log\sin 63^0 29' 35'' = \bar{1},74365 - \bar{1},95177 = \bar{1},79188$;
$A = arc$-у чији је $\log\sin \bar{1},79188 = 38^0\ 15'\ 45''$.

3) $\cos B = \frac{\operatorname{tg} a}{\operatorname{tg} c} = \frac{\operatorname{tg} 33^0 39' 15''}{\operatorname{tg} 63^0 29' 35''}$; $\log\cos B = \log\operatorname{tg} 33^0 39' 15'' -$
$- \log\operatorname{tg} 63^0 29' 35'' = \bar{1},82332 - 0,30213 = \bar{1},52119$;
$B = arc$-у чији је $\log\cos \bar{1},52119 - 70^0\ 36'\ 27''$.

Други случај. — *Дата је хипотенуза* c *и један налегли угао, нпр. угао* A; *наћи остале елементе:* $\boldsymbol{a}$, b и B.

Из $\cos a' = \sin A \cdot \sin c$, $\cos c = \operatorname{cotg} A \cdot \operatorname{cotg} B$ и $\cos A = \operatorname{cotg} b' \cdot \operatorname{cotg} c$ (сл. 64), или $\sin a = \sin A \cdot \sin c$, $\cos c = \operatorname{cotg} A \operatorname{cotg} B$ и $\cos A = \operatorname{tg} b \cdot \operatorname{cotg} c$ имамо:

1) $\sin a = \sin A \sin c$; 2) $\operatorname{cotg} B = \cos c \cdot \operatorname{tg} A$; и 3) $\operatorname{tg} b = \cos A \cdot \operatorname{tg} c$.

Бројни пример: $c = 63^0\ 29'\ 35''$, $A = 38^0\ 15'\ 45''$.

1) $\sin a = \sin A \cdot \sin c = \sin 38^0 15' 45'' \cdot \sin 63^0 29' 35''$; $\log\sin a = \bar{1},74365$;
$a = arc$-у чији је $\log\sin \bar{1},74365 = 33^0\ 39'\ 15''$.

2) $\operatorname{cotg} B = \cos 63^0 29' 35'' \cdot \operatorname{tg} 38^0 15' 45''$; $\log\operatorname{cotg} B = \bar{1},54653$;
$B = arc$-у чији је $\log\operatorname{cotg} \bar{1},54653 = 70^0\ 36'\ 27''$.

3) $\operatorname{tg} b = \cos 38^0 15' 45'' : \operatorname{tg} 63^0 29' 35''$; $\log\operatorname{tg} b = 0,19710$;
$b = arc$-у чији је $\log\operatorname{tg} 0,19710 = 57^0\ 34'\ 36''$.

Трећи случај. — *Дате су катете* $\boldsymbol{a}$ *и* $\boldsymbol{b}$; *наћи остале елементе:* $\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$.

Из $\cos c = \sin a' \sin b'$, $\cos b' = \operatorname{cotg} A \cdot \operatorname{cotg} a'$ и $\cos a' = \operatorname{cotg} B \operatorname{cotg} b'$ (сл. 64), или $\cos c = \cos a \cos b$, $\sin b = \operatorname{cotg} A \cdot \operatorname{tg} a$ и $\sin a = \operatorname{cotg} B \operatorname{tg} b$ имамо:

1) $\cos c = \cos a \cos b$; 2) $\operatorname{cotg} A = \sin b \cdot \operatorname{cotg} a$; и 3) $\operatorname{cotg} B = \sin a \operatorname{cotg} b$.

Бројни пример: $a = 127^0\ 56'\ 33''$, $b = 63^0\ 15'\ 48''$.

1) $\cos c = \cos a \cos b = \cos 127^0 56' 33'' \cdot \cos 62^0 15' 48'' =$
$= -\cos 52^0 3' 27'' \cdot \cos 63^0 15' 48''$, што значи да је c туп угао, пошто је вредност његовог косинуса негативна. Ако је c' његов суплементни, онда је:

$\cos c = \cos(180^0 - c') = -\cos c' = -\cos 52^0 3' 27'' \cdot \cos 63^0 15' 48''$,
или $\cos c' = \cos 52^0\ 3'\ 27'' \cdot \cos 63^0\ 15'\ 48''$.

$\log\cos c' = \log\cos 52^0\ 3'\ 27'' + \log\cos 63^0\ 15'\ 48'' = \bar{1},44189$;
$c' = arc$-у чији је $\log\cos \bar{1},44189 = 73^0\ 56'\ 28''$, а
$c = 180^0 - c' = 106^0\ 3'\ 32''$.

2) $cotg\,A = sin\,b\ \ cotg\,a = sin\ 63^0\ 15'\ 48'' \cdot cotg\ 127^0\ 56'\ 33'' = - sin\ 63^0\ 15'\ 48'' \cdot cotg\ 52^0\ 3'\ 27''$, што значи да је $A > 90^0$.

Ако је његов суплементни угао A', онда је $cotg\,A = cotg\ (180^0 - A') = - cotg\,A' = - sin\ 63^0\ 15'\ 48'' \cdot cotg\ 52'\ 3'\ 27''$, или $cotg\,A' = sin\ 63^0\ 15'\ 48'' \cdot cotg\ 52^0\ 3'\ 27''$.

$\log cotg\,A' = \log sin\ 63^0\ 15'\ 48'' + cotg\ 52^0\ 3'\ 27'' = \bar{1},95089 + \bar{1},89191 = \bar{1},84280$;

$A' = arc$-у чији је $\log cotg\ \bar{1},84280 = 55^0\ 9'$, а
$A = 180^0 - A' = 124^0\ 51'$.

3) $cotg\,B = sin\,a \cdot cotg\,b = sin\ 127^0\ 56'\ 33'' \cdot cotg\ 63^0\ 15'\ 48'' = sin\ 52^0\ 3'\ 27'' \cdot cotg\ 63^0\ 15'\ 48''$;
$\log cotg\,B = \bar{1},59909$; $B = arc$-у чији је $\log cotg\ \bar{1},59909 = 68^0\ 20'$.

Четврти случај. *Дата је једна катета, на пр. катета b и налегли угао A; наћи остале елементе: a, c и B.*

Из $cos\,B = sin\,b' \cdot sin\,A$, $cos\,A = cotg\,b' \cdot cotg\,c$ и $cos\,b' = cotg\,A\ cotg\,a'$ (сл. 64), или $cos\,B = cos\,b\ sin\,A$, $cos\,A = tg\,b\ cotg\,c$ и $sin\,b = cotg\,A \cdot tg\,a$ имамо: 1) $cos\,B = cos\,b\ sin\,A$; 2) $cotg\,c = cos\,A \cdot cotg\,b$; и 3) $tg\,a = sin\,b \cdot tg\,A$.

Бројни пример: $b = 63^0\ 15'\ 48''$, $A = 124^0\ 51'$.

1) $cos\,B = cos\,b\ sin\,A = cos\ 63^0\ 15'\ 48'' \cdot sin\ 124^0\ 51' = cos\ 63^0\ 15'\ 48'' \cdot sin\ 55^0\ 9'$; $\log cos\,B = \bar{1},56727$;
$B = arc$-у чији је $\log cos\ \bar{1},56727 = 68^0\ 20'$.

2) $cotg\,c = cos\,A \cdot cotg\,b\ cotg\,c = cos\ 124^0\ 51' \cdot cotg\ 63^0\ 16'\ 48'' = - cos\ 55^0\ 9' \cdot cotg\ 63^0\ 15'\ 48''$, што значи да је $c > 90^0$, пошто је вредност његовог котангенса негативна. Ако је c' његов суплементни, онда је $cotg\,c = cotg\ (180^0 - c') = - cotg\,c' = - cos\ 55^0\ 9' \cdot cotg\ 63^0\ 15'\ 48''$, или $cotg\,c' = cos\ 55^0\ 9' \cdot cotg\ 63^0\ 15'\ 48''$. $Log\ cotg\,c' = \bar{1},45917$; $c' = arc$-у чији је $\log cotg\ \bar{1},45917 = 73^0\ 56'\ 28''$, а $c = 180^0 - c' = 106^0\ 3'\ 32''$.

3) $tg\,a = sin\,b \cdot tg\,A = sin\ 53^0\ 15'\ 48'' \cdot tg\ 124^0\ 51' = - sin\ 63^0\ 15'\ 48'' \cdot tg\ 55^0\ 9'$, што показује да је $a > 90$. Ако је његов суплементни a', онда је $tg\,a = tg\ (180^0 - a') = - tg\,a' = - sin\ 63^0\ 15'\ 48'' \cdot tg\ 55^0\ 9'$, или $tg\,a' = sin\ 63^0\ 15'\ 48'' \cdot tg\ 55^0\ 9'$; $\log tg\,a' = 0,10809$; $a' = arc$-у чији је $\log tg\ 0,10809 = 52^0\ 3'\ 27''$, а $a = 127^0\ 56'\ 33''$.

Пети случај. *Дати су углови* ***A*** *и* ***B****; наћи остале елементе:* ***a***, ***b*** *и*

Из $cos\,c = cotg\,A \cdot cotg\,B$, $cos\,B = sin\,A \cdot sin\,b'$ и $cos\,A = sin\,B \cdot sin\,a'$ (сл. 64), или $cos\,c = cotg\,A \cdot cotg\,B$, $cos\,B = sin\,A\ cos\,b$ и $cos\,A = sin\,B\ cos\,a$ имамо:

1) $cos\,c = cotg\,A \cdot cotg\,B$; 2) $cos\,b = \frac{cos\,B}{sin\,A}$; и 3)

$$cos\,a = \frac{cos\,A}{sin\,B}.$$

Бројни пример. $A = 83^0\ 48'\ 12''$, $B = 65^0\ 55'\ 55''$.

1) $cos\,c = cotg\ 83^0\ 48'\ 12'' \cdot cotg\ 65^0\ 55'\ 55''$; $\log cos\,c = \bar{2},68580$;
$c = arc$-у чији је $\log cos\ \bar{2},68580 = 87^0\ 13'\ 11''$.

2) $cos\,b = \frac{cos\ 65^0\ 55'\ 55''}{sin\ 83^0\ 48'\ 12''}$; $\log cos\,b = \log cos\ 65^0\ 55'\ 55'' - \log sin\ 83^0\ 48'\ 12'' = \bar{1},61047 - \bar{1},99745 = \bar{1},61302$;
$b = arc$-у чији је $\log cos\ \bar{1},61302 = 65^0\ 46'\ 51''$.

3) $cos\,a = \frac{cos\ 83^0\ 48'\ 12''}{sin\ 65^0\ 55'\ 55''}$; $\log cos\,a = \bar{1},07269$;
$a = arc$-у чији је $\log cos\ \bar{1},07269 = 83^0\ 12'\ 38''$.

Шести случај. — *Дата је једна катета и њен супротни угао; нпр.* ***b*** *и* ***B****; наћи остале елементе:* ***c, A*** *и* ***a***.

Из $cos\,a' = cotg\,B \cdot cotg\,b'$, $cos\,B = sin\,b'\ sin\,A$ и $cos\,b' = sin\,B \cdot sin\,c$ (сл. 64), или $sin\,a = cotg\,B \cdot tg\,b$, $cos\,B = cos\,b \cdot sin\,A$ и $sin\,b = sin\,B \cdot sin\,c$ имамо:

1) $sin\,a = cotg\,B \cdot tg\,b$; 2) $sin\,A = \frac{cos\,B}{cos\,b}$; и 3) $sin\,c = \frac{sin\,b}{sin\,B}$.

Како непознате елементе овога задатка налазимо само помоћу синуса, а свакоме синусу одговарају два разна угла, од којих је један оштар а други туп, то овај задатак уопште има два решења. Само у извесним случајевима задатак нема ни једног решења, или има само једно решење. Задатак биће немогућ, ако дати елементи b и B нису оба једновремено већи, једнаки, или мањи од 90^0, о чему се можемо уверити из $sin\,A = \frac{cos\,B}{cos\,b}$ на следећи начин. — Угао A, као и сваки угао сферног троугла, мањи је од 180^0, те му је синус позитиван ($sin\,A > 0$). Тада и $cos\,B$ и $cos\,b$ морају бити истога знака, оба позитивна, или оба негативна. Ако су обе функције позитивне, значи да су углови B и b оштри, тј. $B < 90^0$ и $b < 90$. Ако су обе функције негативне, значи да су углови B и b тупи, тј. $B > 90^0$, и $b > 90^0$.

Задатак има само једно решење у ова два случаја: 1) Кад је $B < 90^0$, или $B + C < 180^0$, онда и $b + c < 180^0$, те од оне две вредности за c из $\sin c = \frac{\sin b}{\sin B}$ узимамо само ону за коју је $b + c < 180^0$; 2) Кад је $B > 90^0$, или $B + C > 180^0$, онда је и $b + c > 180^0$, те од оне вредности за c узимамо само ону за коју је $b + c > 180^0$.

Ако је $B = 90^0$, онда је и $b = 90^0$, те је из $\sin c = \frac{\sin b}{\sin B} = 1$, а $c = 90^0$. Тада је из 6 Неперовог обрасца и $\cos A = \cos a$, а овим и $A = a$, што значи да у правоуглом троуглу са два права угла трећа је страна једнака трећем углу. У овоме случају задатак има бесконачно много решења.

У свима осталим случајевима задатак има два решења.

Бројни пример. $b = 42^0\ 20'$, $B = 65^0\ 30'$.

1) $\sin a = \operatorname{cotg} B \cdot \operatorname{tg} b = \operatorname{cotg} 65^0\ 30' \cdot \operatorname{tg} 42^0\ 20'$; $\log \sin a = \log \operatorname{cotg} 65^0\ 30' + \log \operatorname{tg} 42^0\ 20' = \bar{1},65870 + \bar{1},95952 = \bar{1},61822$;

$a_1 = arc$-у чији је $\log \sin \bar{1},61822 = 24^0\ 31'\ 47''$,

$a_2 = 180^0 - a_1 = 155^0\ 28'\ 13''$.

2) $\sin A = \frac{\cos B}{\cos b} = \frac{\cos 65^0\ 30'}{\cos 42^0\ 20'}$; $\log \sin A = \log \cos 65^0\ 30' - \log \cos 42^0\ 20' = \bar{1},61773 - \bar{1},86879 = \bar{1},74894$;

$A_1 = arc$-у чији је $\log \sin \bar{1},74894 = 34^0\ 7'\ 22''$,

$A_2 = 180^0 - A_1 = 145^0\ 52'\ 38''$.

3) $\sin c = \frac{\sin b}{\sin B} = \frac{\sin 42^0\ 20'}{\sin 65^0\ 30'}$; $\log \sin c = \log \sin 42^0\ 20' - \log \sin 65^0\ 30' = \bar{1},82830 - \bar{1},95902 = \bar{1},86928$;

$c_1 = arc$-у чији је $\log \sin \bar{1},86928 = 47^0\ 44'\ 20''$.

$c_2 = 180^0 - c_1 = 132^0\ 15'\ 40''$.

Задаци за вежбу. Решити правоугли сферни троугао ABC, са правим углом код C, кад је:

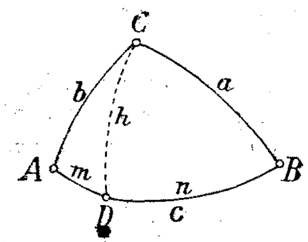
1) $a = 43^0\ 18'\ 45''$, $b = 48^0\ 15'\ 20''$;
2) $c = 70^0\ 35'\ 40''$, $B = 42^0\ 7'\ 18''$;
3) $b = 52^0\ 53'\ 54''$, $A = 78^0\ 45'\ 40''$;
4) $A = 51^0\ 17'\ 50''$, $B = 68^0\ 54'\ 25''$;
5) $c = 105^0\ 10'\ 30''$, $a = 121^0\ 48'\ 28''$;
6) $a = 54^0\ 20'\ 40''$, $A = 59^0\ 37'\ 50''$.

II. Решавање косоуглог сферног троугла*

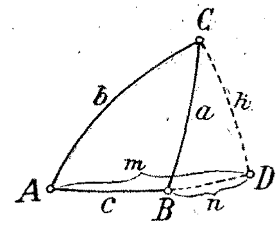
§ 34. Теореме и обрасци о косоуглом сферном троуглу

I. Синусна теорема: *У сваком сферном троуглу имају се синуси страна као што се имају синуси њихових супротних углова.* Нека је ABC (сл. 66 или 67) један косоугли сферни

* За ученике реалке.



Сл. 66



Сл. 67

троугао. Ако кроз теме C повучемо лук $CD = h$ управно на AB, а припада једном главном лоптином кругу, онда се дати сферни троугао дели на правоугле сферне троугле: ACD и BCD са правим угловима код D. Тада је по Неперовом правилу:

Из троугла ACD: $\cos h' = \sin A \cdot \sin b$, или $\sin h = \sin A \cdot \sin b$ (1), а из троугла BCD: $\cos h' = \sin B \cdot \sin a$, или $\sin h = \sin B \cdot \sin a$ (2).

Стога је: $\sin A \cdot \sin b = \sin B \cdot \sin a$ или

$$\sin a : \sin b = \sin A : \sin B \quad (I)$$

Истим путем нашли бисмо да је:

$$\sin a : \sin c = \sin A : \sin C \quad (II) \text{ и}$$

$$\sin b : \sin c = \sin B : \sin C \quad (III).$$

Из пропорција I, II и III имамо:

$$\boldsymbol{\sin a : \sin b : \sin c = \sin A : \sin B : \sin C},$$

чиме је ова теорема доказана.

Примена синусне теореме. Ова теорема примењује се *при решавању косоуглог* сферног троугла у ова два случаја: 1) *Кад су дате две стране и један угао наспрам једне од тих страна, а тражи се угао наспрам друге стране;* и 2) *Кад су дата два угла и страна наспрам једног од тих углова, а тражи се страна наспрам другог угла.* Тако, ако знамо:

1) a, b и A а тражи се B, онда је:

$\sin a : \sin b = \sin A : \sin B$, а одавде је $\sin B = \frac{\sin b \cdot \sin A}{\sin a}$.

2) A, B и a, а тражи се b, онда је:

$\sin a : \sin b = \sin A : \sin B$, а одавде је $\sin b = \frac{\sin a \sin B}{\sin A}$.

II. **Косинусна теорема:** *У сваком сферном троуглу је косинус једне стране једнак производу косинуса осталих двеју страна више производу синуса тих страна помножен косинусом захваћеног угла.*

Из правоуглог троугла BCD (сл. 66 и 67), према Неперовом правилу, имамо:

$$\cos a = \sin h' \cdot \sin n', \text{ или } \cos a = \cos h \cdot \cos n \ldots (1)$$

Па како је $n = c - m$ (сл. 66), а $n = m - c$ (сл. 67), то је у оба случаја $\cos n = \cos c \cos m + \sin c \sin m$. Заменом у (1) добијамо:

$$\cos a = \cos h \; (\cos c \cos m + \sin c \sin m \ldots (2).$$

Међутим, из правоуглог троугла ACD, према Неперовом правилу, имамо:

a) $\cos b = \sin h' \sin m'$ или $\cos b = \cos h \cos m$; и

b) $\cos A = \operatorname{cotg} m' \operatorname{cotg} b$, или $\cos A = \operatorname{tg} m \operatorname{cotg} b$ или

$$\operatorname{tg} m = \cos A \operatorname{tg} b.$$

Множењем једначине $\cos h \cos m = \cos b$ и $\operatorname{tg} m = \cos A \operatorname{tg} b$ добијамо:

$\cos h \cos m \cdot \operatorname{tg} m = \cos A \operatorname{tg} b \cos b$, или $\cos h \sin m = \cos A \sin b$.

Заменом у (2) $\cos h \cos m$ са $\cos b$ и $\cos h \sin m$ са $\sin b \cos A$ добијамо:

$$\mathbf{\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A},$$

чиме је ова теорема доказана.

Истим путем нашли бисмо да је:

$$\mathbf{\cos b = \cos a \cos c + \sin a \sin c \cos B} \text{ и}$$
$$\mathbf{\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C}.$$

Примена косинусне теореме. Ова теорема примењује се при решавању сферног троугла у ова два случаја: 1) *кад су дате две стране и захваћени угао, а тражи се трећа страна;* и 2) *да израчунамо углове троугла, ако су познате стране.* Тако, ако знамо:

1) a, b и C, онда је: $\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C$;

2) a, b и c, онда је: $\cos A = \dfrac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c}$,

$$\cos B = \frac{\cos b - \cos a \cos c}{\sin a \sin c} \text{ и } \cos C = \frac{\cos c - \cos a \cos b}{\sin a \sin b}.$$

III. **Косинусна теорема за углове гласи:** *У сваком сферном троуглу је косинус једног угла једнак негативном производу косинуса осталих углова више производу синуса тих углова помножен косинусом стране на којој се ти углови налазе.*

Ова теорема у формули је:

$$\cos A = -\cos B \cos C + \sin B \sin C \cos a,$$
$$\cos B = -\cos A \cos C + \sin A \sin C \cos b,$$
$$\cos C = -\cos A \cos B + \sin A \sin B \cos c,$$

а изводи се из косинусне теореме за стране узимајући у поступак поларни троугао троуглу ABC, чије су стране $180^0 - A$, $180^0 - B$ и $180^0 - C$, а углови: $180^0 - a$, $180^0 - b$ и $180^0 - c$. Тако, из $\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A$, имамо:

$$\cos(180^0 - A) = \cos(180^0 - B) \cos(180^0 - C) +$$
$$+ \sin(180^0 - B) \cdot \sin(180^0 - C) \cos(180^0 - a)$$

или

$$-\cos A = \cos B \cos C - \sin B \sin C \cos a, \text{ или}$$
$$\cos A = -\cos B \cos C + \sin B \sin C \cos a.$$

Ова се теорема примењује при решавању сферног троугла у ова два случаја:

1) *да нађемо трећи угао, ако су позната два угла и страна на којој се они налазе;*

2) *да нађемо стране, ако су познати углови,* јер је:

$$\cos a = \frac{\cos A + \cos B \cos C}{\sin B \sin C}, \quad \cos b = \frac{\cos B + \cos A \cos C}{\sin A \sin C} \text{ и}$$

$$\cos c = \frac{\cos C + \cos A \cos B}{\sin A \sin B}.$$

IV. **Образац за израчунавање углова помоћу страна**

Ове обрасце добијамо из образаца косинусне теореме, а у вези образаца за полууглове (§ 15). Тако из $\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A$ имамо:

$$\cos A = \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c}.$$

Стога је:

a) $$1 - \cos A = 1 - \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c} =$$

$$= \frac{\sin b \sin c + \cos b \cos c - \cos a}{\sin b \sin c} = \frac{\cos(b-c) - \cos a}{\sin b \sin c} =$$

$$= \frac{-2 \sin \dfrac{a+b-c}{2} \sin \dfrac{b-c-a}{2}}{\sin b \sin c} =$$

$$= \frac{2 \sin \dfrac{a+b-c}{2} \sin \dfrac{a+c-b}{2}}{\sin b \sin c}; \text{ и}$$

b) $$1 + \cos A = 1 + \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c} =$$

$$= \frac{\sin b \sin c - \cos b \cos c + \cos a}{\sin b \sin c} =$$

$$= \frac{\cos a - \cos(b+c)}{\sin b \sin c} = \frac{-2 \sin \dfrac{a+b+c}{2} \sin \dfrac{a-b-c}{2}}{\sin b \sin c} =$$

$$= \frac{2\sin\frac{a+b+c}{2}\,\sin\frac{b+c-a}{2}}{\sin b\,\sin c}$$

Па како је, по § 15, $1-\cos A = 2\sin^2\frac{A}{2}$ и $1+\cos A = 2\cos^2\frac{A}{2}$, то заменом у (a) и (b) добијамо:

$$\sin^2\frac{A}{2} = \frac{\sin\frac{1}{2}(a+b-c)\,\sin\frac{1}{2}(a-b+c)}{\sin b\,\sin c} \quad \text{и}$$

$$\cos^2\frac{A}{2} = \frac{\sin\frac{1}{2}(a+b+c)\,\sin\frac{1}{2}(b+c-a)}{\sin b\,\sin c}, \quad \text{или}$$

$$\sin\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{\sin\frac{1}{2}(a+b-c)\,\sin\frac{1}{2}(a-b+c)}{\sin b\,\sin c}} \quad \text{и}$$

$$\cos\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{\sin\frac{1}{2}(a+b-c)\,\sin\frac{1}{2}(b+c-a)}{\sin b\,\sin c}}.$$

Дељењем ових двеју једначина добијамо:

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{\sin\frac{1}{2}(a+b-c)\,\sin\frac{1}{2}(a-b+c)}{\sin\frac{1}{2}(a+b+c)\,\sin\frac{1}{2}(b+c-a)}}.$$

Ако заменимо $a+b+c=2s$, $a-b+c=2(s-b)$, $a+b-c=2(s-c)$ и $b+c-a=2(s-a)$, добијамо:

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{\sin(s\text{-}b)\,\sin(s\text{-}c)}{\sin s\cdot\sin(s\text{-}c)}}.$$ Слично овоме је:

$$\operatorname{tg}\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{\sin(s\text{-}a)\,\sin(s\text{-}c)}{\sin s\cdot\sin(s\text{-}b)}} \quad \text{и} \quad \operatorname{tg}\frac{C}{2} = \sqrt{\frac{\sin(s\text{-}a)\,\sin(s\text{-}b)}{\sin s\cdot\sin(s\text{-}c)}},$$

који су обрасци најподеснији за израчунавање углова сферног троугла, ако су нам познате његове стране.

V. Обрасци за израчунавање страна помоћу углова

И ове обрасце изводимо на исти начин као и обрасце под IV, само с том разликом што овде узимамо у поступак обрасце под III и што замењујемо: $A+B+C=2S$, $A+B-C=2(S\text{-}C)$, $A-B+C=2(S\text{-}B)$ и $B+C-A=2(S\text{-}A)$, чиме добијамо:

$$\left.\begin{aligned} \sin\frac{a}{2} &= \sqrt{\frac{-\cos S\,\cos(S-A)}{\sin B\,\sin C}},\\ \sin\frac{b}{2} &= \sqrt{\frac{-\cos S\,\cos(S-B)}{\sin A\,\sin C}},\\ \sin\frac{c}{2} &= \sqrt{\frac{-\cos S\,\cos(S-C)}{\sin A\,\sin B}}, \end{aligned}\right\}(a) \qquad \left.\begin{aligned} \cos\frac{a}{2} &= \sqrt{\frac{\cos(S-B)\,\cos(S-C)}{\sin B\,\sin C}}\\ \cos\frac{b}{2} &= \sqrt{\frac{\cos(S-A)\,\cos(S-C)}{\sin A\,\sin C}}\\ \cos\frac{c}{2} &= \sqrt{\frac{\cos(S-A)\,\cos(S-B)}{\sin A\,\sin B}} \end{aligned}\right\}(b)$$

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{tg}\frac{a}{2} &= \sqrt{\frac{-\cos S\,\cos(S-A)}{\cos(S-B)\,\cos(S-C)}}\\ \operatorname{tg}\frac{b}{2} &= \sqrt{\frac{-\cos S\,\cos(S-B)}{\cos(S-A)\,\cos(S-C)}}\\ \operatorname{tg}\frac{c}{2} &= \sqrt{\frac{-\cos S\,\cos(S-C)}{\cos(S-A)\,\cos(S-B)}} \end{aligned}\right\}(c)$$

VI. Гаусове једначине

Ако у једначинама:

$$\sin\frac{1}{2}(A\pm B) = \sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2} \pm \cos\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2},$$

$$\cos\frac{1}{2}(A\pm B) = \cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2} \mp \sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2},$$

заменимо $\sin\frac{A}{2}$, $\cos\frac{A}{2}$, $\sin\frac{B}{2}$ и $\cos\frac{B}{2}$ њиховим вредностима израчунатим код IV под a) и b), добијамо:

$$a)\ \sin\frac{1}{2}(A+B) = \sqrt{\frac{\sin(s-b)\,\sin(s-c)}{\sin b\,\sin c}}\cdot\sqrt{\frac{\sin s\cdot\sin(s-b)}{\sin a\,\sin c}} +$$

$$+\sqrt{\frac{\sin s\,\sin(s-a)}{\sin b\,\sin c}}\cdot\sqrt{\frac{\sin(s-a)\,\sin(s-c)}{\sin a\,\sin c}} =$$

$$= \frac{\sin(s-b)}{\sin c}\sqrt{\frac{\sin s\,\sin(s-c)}{\sin a\,\sin b}} + \frac{\sin(s-a)}{\sin c}\sqrt{\frac{\sin s\,\sin(s-c)}{\sin a\,\sin b}} =$$

$$= \frac{\sin(s-a)+\sin(s-b)}{\sin c}\cdot\sqrt{\frac{\sin s\,\sin(s-c)}{\sin a\,\sin b}} =$$

$$= \frac{2\sin\frac{2s-a-b}{2}\cos\frac{a-b}{2}}{2\sin\frac{c}{2}\cos\frac{c}{2}}\cdot\cos\frac{C}{2} =$$

$$\frac{2\sin\frac{c}{2}\cos\frac{a-b}{2}}{2\sin\frac{c}{2}\cdot\cos\frac{c}{2}}\cdot\cos\frac{C}{2} = \frac{\cos\frac{a-b}{2}}{\cos\frac{c}{2}}\cdot\cos\frac{C}{2}.$$

Истим путем нашли бисмо:

$$b)\ \sin\frac{1}{2}(A-B) = \frac{\sin\frac{a-b}{2}}{\sin\frac{c}{2}}\cdot\cos\frac{C}{2};\ c)\ \cos\frac{1}{2}(A+B) = \frac{\cos\frac{a+b}{2}}{\cos\frac{c}{2}}\cdot\sin\frac{C}{2};\ \text{и}\ d)\ \cos\frac{1}{2}(A-B) = \frac{\sin\frac{a+b}{2}}{\sin\frac{c}{2}}\cdot\sin\frac{C}{2}.$$

Гаусове једначине јесу, дакле:

a) $$\sin\frac{1}{2}(A+B)\cos\frac{c}{2}=\cos\frac{a-b}{2}\cdot\cos\frac{C}{2},$$

$$\sin\frac{1}{2}(A+C)\cos\frac{b}{2}=\cos\frac{a-c}{2}\cdot\cos\frac{B}{2},$$

$$\sin\frac{1}{2}(B+C)\cdot\cos\frac{a}{2}=\cos\frac{b-c}{2}\cdot\cos\frac{A}{2}.$$

b) $$\sin\frac{1}{2}(A-B)\cdot\sin\frac{c}{2}=\sin\frac{a-b}{2}\cdot\cos\frac{C}{2},$$

$$\sin\frac{1}{2}(A-C)\cdot\sin\frac{b}{2}=\sin\frac{a-c}{2}\cdot\cos\frac{B}{2},$$

$$\sin\frac{1}{2}(B-C)\cdot\sin\frac{a}{2}=\sin\frac{b-c}{2}\cos\frac{A}{2}.$$

c) $$\cos\frac{1}{2}(A+B)\cos\frac{c}{2}=\cos\frac{a+b}{2}\sin\frac{C}{2},$$

$$\cos\frac{1}{2}(A+C)\cos\frac{b}{2}=\cos\frac{a+c}{2}\sin\frac{B}{2},$$

$$\cos\frac{1}{2}(B+C)\cos\frac{a}{2}=\cos\frac{b+c}{2}\cdot\sin\frac{A}{2}.$$

d) $$\cos\frac{1}{2}(A-B)\sin\frac{c}{2}=\sin\frac{a+b}{2}\sin\frac{C}{2},$$

$$\cos\frac{1}{2}(A-C)\cdot\sin\frac{b}{2}=\sin\frac{a+c}{2}\sin\frac{B}{2},$$

$$\cos\frac{1}{2}(B-C)\sin\frac{a}{2}=\sin\frac{b+c}{2}\sin\frac{A}{2}.$$

VII. Неперове аналогије (једначине)

Ове једначине добијамо дељењем Гаусових једначина, и то:

a) Дељењем једначина под a) и c):

$$tg\frac{1}{2}(A+B)=\frac{\cos\frac{1}{2}(a-b)}{\cos\frac{1}{2}(a+b)}\cdot cotg\frac{C}{2},$$

$$tg\frac{1}{2}(A+C)=\frac{\cos\frac{1}{2}(a-c)}{\cos\frac{1}{2}(a+c)}cotg\frac{B}{2},$$

$$tg\frac{1}{2}(B+C)=\frac{\cos\frac{1}{2}(b-c)}{\cos\frac{1}{2}(b+c)}\cdot cotg\frac{A}{2}.$$

b) Дељењем једначина под b) и d):

$$tg\frac{1}{2}(A-B)=\frac{\sin\frac{1}{2}(a-b)}{\sin\frac{1}{2}(a+b)}\cdot cotg\frac{C}{2},$$

$$tg\frac{1}{2}(A-C)=\frac{\sin\frac{1}{2}(a-c)}{\sin\frac{1}{2}(a+c)}\cdot cotg\frac{B}{2},$$

$$tg\frac{1}{2}(B-C)=\frac{\sin\frac{1}{2}(b-c)}{\sin\frac{1}{2}(b+c)}\cdot cotg\frac{A}{2}.$$

c) Дељењем једначина под d) и c):

$$tg\frac{a+b}{2}=\frac{\cos\frac{A-B}{2}}{\cos\frac{A+B}{2}}\cdot tg\frac{c}{2},$$

$$tg\frac{a+c}{2}=\frac{\cos\frac{A-C}{2}}{\cos\frac{A+C}{2}}\cdot tg\frac{b}{2},$$

$$tg\frac{b+c}{2}=\frac{\cos\frac{B-C}{2}}{\cos\frac{B+C}{2}}\cdot tg\frac{a}{2}.$$

d) Дељењем јадначине под *b*) и *a*):

$$tg\frac{a-b}{2}=\frac{\sin\frac{A-B}{2}}{\sin\frac{A+B}{2}}\cdot tg\frac{c}{2},$$

$$tg\frac{a-c}{2}=\frac{\sin\frac{A-C}{2}}{\sin\frac{A+C}{2}}\cdot tg\frac{b}{2},$$

$$tg\frac{b-c}{2}=\frac{\sin\frac{B-C}{2}}{\sin\frac{B+C}{2}}\cdot tg\frac{a}{2}.$$

Неперове аналогије примењујемо при решавању сферних троуглова у ова два случаја:

1) Кад су дате две стране и захваћени угао (нпр. a, b и C); и

2) Кад је дата једна страна и два налегла угла (нпр. c, A и B).

У првом случају најпре израчунавамо збир и разлику осталих углова A и B применом образаца:

$$tg\frac{A+B}{2}=\frac{\cos\frac{a-b}{2}}{\cos\frac{a+b}{2}}\cdot cotg\frac{C}{2} \quad \text{и}$$

$$tg\frac{A-B}{2}=\frac{\sin\frac{a-b}{2}}{\sin\frac{a+b}{2}}\cdot cotg\frac{C}{2},$$

а затим из обрасца $tg\frac{c}{2}=\frac{\sin\frac{A+B}{2}}{\sin\frac{A-B}{2}}tg\frac{a-b}{2}$ израчунавамо и трећу страну c.

У другом случају најпре израчунавамо збир и разлику осталих страна a и b применом образаца:

$$tg\frac{a+b}{2}=\frac{\cos\frac{A-B}{2}}{\cos\frac{A+B}{2}}\cdot tg\frac{c}{2} \quad \text{и}$$

$$tg\frac{a-b}{2}=\frac{\sin\frac{A-B}{2}}{\sin\frac{A+B}{2}}\cdot tg\frac{c}{2},$$

а затим из обрасца $tg\frac{C}{2}=\frac{\sin\frac{a-b}{2}}{\sin\frac{a+b}{2}}\cdot cotg\frac{A-B}{2}$ налазимо и трећи угао C.

§ 35. Случајеви решавања косоуглог троугла

Први случај. *Дате су две стране и угао наспрам једне од тих страна* (нпр. a, b и A).

Најпре непознати угао B наспрам друге познате стране налазимо применом синусне теореме, из које је $\sin B = \frac{\sin b \sin A}{\sin a}$, а затим, трећи угао C налазимо применом Неперових једначина под a) или b), из којих је:

$$cotg\frac{C}{2}=\frac{\cos\frac{a+b}{2}}{\cos\frac{a-b}{2}}tg\frac{A-B}{2} \quad \text{или} \quad cotg\frac{C}{2}=\frac{\sin\frac{a+b}{2}}{\sin\frac{a-b}{2}}\cdot tg\frac{A-B}{2}.$$

Најзад трећу страну c налазимо опет применом Неперових једначина под c) или d), из којих је:

$$tg\frac{c}{2}=\frac{\cos\frac{A+B}{2}}{\cos\frac{A-B}{2}}\cdot tg\frac{a+b}{2}, \quad \text{или} \quad tg\frac{c}{2}=\frac{\sin\frac{A+B}{2}}{\sin\frac{A-B}{2}}tg\frac{a-b}{2}.$$

Па како угао B израчунавамо најпре помоћу синуса, а познато је да сваком синусу одговарају по две угловне вредности (оштар и туп угао), то код овог случаја можемо за B добити два решења. Оба решења узимамо у обзир само онда ако су испуњени услови: 1) ако је $a \gtrless b$, треба и $A \gtrless B$, и 2) ако је $a+b \gtreqless 180^0$, треба $A+B \gtreqless 180^0$.

Пример 1. $a = 58^0\,25'\,40''$, $b = 42^0\,19'\,35''$, $A = 68^0\,10'\,15''$.

1) Из $\sin a : \sin b = \sin A : \sin B$ имамо $\sin B = \frac{\sin b \cdot \sin A}{\sin a} =$

$= \frac{\sin 42^0\,19'\,35'' \cdot \sin 68^0\,10'\,15''}{\sin 58^0\,25'\,40''}$; $\log \sin B = \bar{1}, 86549$;

$B_1 = arc$-у чији је $\log \sin \bar{1}, 86549 = 47^0\,11'\,35''$

$B_2 = 180^0 - B_1 = 132^0\,48'\,25''$.

Друго решење B_2 не узимамо у обзир, јер је овде $a+b < 180^0$, а $A+B_2 > 180^0$.

$$2)\ cotg\frac{C}{2}=\frac{\sin\frac{a+b}{2}}{\sin\frac{a-b}{2}}tg\frac{A-B}{2}=\frac{\sin 50^0 22' 37{,}5'' \cdot tg\, 10^0 29' 29''}{\sin 8^0\,3'\,2{,}5''};$$

$\log cotg\frac{C}{2} = 0{,}00787$; $\frac{C}{2} = 44^0\,28'\,51''$, а $C = 88^0\,57'\,42''$.

$$3)\ tg\frac{c}{2}=\frac{\cos\frac{A+B}{2}}{\cos\frac{A-B}{2}}\cdot tg\frac{a+b}{2}=\frac{\cos 57^0\,40'\,55'' \cdot tg 50^0\,22'\,37{,}5''}{\cos\, 10^0\,29'\,29''}$$

$\log tg\frac{c}{2} = \bar{1}, 81837$; $\frac{c}{2} = 33^0\,17'\,36''$; $c = 66^0\,35'\,12''$.

Пример 2. $a = 129^0\,45'\,50''$, $b = 81^0\,28'\,20''$, $A = 135^0\,27'\,40''$.

1) $\sin B = \frac{\sin b \cdot \sin A}{\sin a} = \frac{\sin 81^0\,28'\,20'' \cdot \sin 135^0\,27'\,40''}{\sin 129^0\,45'\,50''} =$

$= \frac{\sin 81^0\,28'\,20'' \cdot \sin 44^0\,32'\,20''}{\sin 50^0\,14'\,10''}$; $\log \sin B = \bar{1}, 95538$;

$B_1 = 64^0\,28'\,10''$, $B_2 = 180^0 - B' = 115^0\,31'\,50''$.

Како је код овог примера $a+b>180^0$ и $A+B>180^0$ то се и друго решење узима у обзир.

а) Тада је за $B=64^0\,28'\,10''$:

$$2)\ cogt\ \frac{C}{2}=\frac{sin\frac{a+b}{2}}{sin\frac{a-b}{2}}tg\frac{A-B}{2}=\frac{sin\ 105^0\,37'\,5''\cdot tg\ 35^0\,29'\,45''}{sin\ 24^0\,8'\,45''}=$$

$$=\frac{sin\ 74^0\,22'\,55''\cdot tg\ 35^0\,29'\,45''}{sin\ 24^0\,8'\,45''};\ log\ cotg\frac{C}{2}=0,22507;$$

$$\frac{C}{2}=30^0\,46'\,35'',\ C=61^0\,33'\,10''.$$

$$3)\ tg\frac{c}{2}=\frac{cos\frac{A+B}{2}}{cos\frac{A-B}{2}}tg\frac{a+b}{2}=\frac{cos\ 99^0\,57'\,55''\cdot tg\ 105^0\,37'\,5''}{cos\ 35^0\,29'\,45''}.$$

$$=\frac{-cos\ 80^0\,2'\,5''\cdot -tg\ 74^0\,22'\,55''}{cos\ 35^0\,29'\,45''}=\frac{cos\ 80^0\,2'\,5''\cdot tg\ 74^0\,22'\,55'}{cos\ 35^0\,29'\,45''};$$

$$log\ \ tg\ \frac{c}{2}=\bar{1},88101;\ \frac{c}{2}=37^0\,14'\,51'',\ c=74^0\,29'\,42''=$$

b) За $B=115^0\,31'\,50''$ биће:

$$2)\ cotg\ \frac{C}{2}=\frac{sin\frac{a+b}{2}}{sin\frac{a-b}{2}}\cdot tg\frac{A-B}{2}=\frac{sin\ 105^0\ 37'\ 5''\cdot tg\ 9^0\ 57'\ 55''}{sin\ 24^0\,8'\,45''}=$$

$$=\frac{sin\ 74^0\,22'\,55''\cdot tg\ 9^0\,57'55''}{sin\ 24^0\,8'\,45''};\ log\ cotg\frac{C}{2}=\bar{1},\ 67665;$$

$$\frac{C}{2}=67^0\,31'\,57'';\ C=135^0\,3'\,14''.$$

$$3)\ tg\ \frac{c}{2}=\frac{cos\frac{A+B}{2}}{cos\frac{A-B}{2}}\cdot tg\ \frac{a+b}{2}=\frac{cos\ \ 125^0\,29'\,45''\cdot tg\ \ 105^0\,37'\,5''}{cos\ \ 9^0\,57'\,55''}=$$

$$=\frac{cos\ \ 54^0\,30'\,15''\cdot tg\ 74^0\,22'\,55''}{cos\ 9^0\,57'\,55''};\ log\,tg\frac{c}{2}=0,32405;$$

$$\frac{c}{2}=\ 64^0\,37'\,51'',\ \text{а}\ c=129^0\,15'\,41''.$$

Други случај. *Дата су два угла и страна наспрам једнога од тих углова* (на пр. A, B и a).

Најпре непознату страну b наспрам другог познатог угла налазимо применом синусне теореме, из које је

$$sin\ b=\frac{sin\ B}{sin\ A}\cdot sin\ a,$$

а затим трећи угао C нализимо применом Неперових једначина под *a)* или *b)*, из којих је:

$$cotg\frac{C}{2}=\frac{cos\frac{a+b}{2}}{cos\frac{a-b}{2}}\cdot tg\frac{A+B}{2},\quad \text{или}\quad cotg\frac{C}{2}=\frac{sin\frac{a+b}{2}}{sin\frac{a-b}{2}}\cdot tg\frac{A-B}{2}.$$

Најзад трећу страну c налазимо опет применом Неперових једначина под *c)* или *d)*, из којих је:

$$tg\frac{c}{2}=\frac{cos\ \frac{A+B}{2}}{cos\ \frac{A-B}{2}}\cdot tg\frac{a+b}{2}\ ,\quad \text{или}\quad tg\frac{c}{2}=\frac{sin\ \frac{A+B}{2}}{sin\ \frac{A-B}{2}}\cdot tg\frac{a-b}{2}.$$

И овде, као у првом случају, за b има уопште два решења. Да ли вреде оба решења или само једно, испитујемо као и у првом случају.

Пример 1.

$A=100^0\,25'\,40''$, $B=82^0\,35'\,10''$, $a=106^0\,15'\,20''$.

$$1.\quad sin\ b=\frac{sin\,B}{sin\,A}\cdot sin\,a=\frac{sin\ 82^0\,35'\,10''\cdot sin\ 106''\,15'\,20}{sin\ 100^0\,25'\,40''}=$$

$$=\frac{sin\ 82^0\,35'\,10''\cdot sin\ 73^0\,44'\,40''}{sin\ 79^0\,34'\,20''};\quad log\,sin\,b=\bar{1},98586;$$

$$b_1=75^0\,27'\,30'',\quad b_2=180^0-b_1=104^0\,32'\,30''.$$

Овде узимамо оба решења за b у обзир, јер су задовољени услови: 1) За $A>B$ је и $a>b$; и 2) за $A+B>180^0$ је и $a+b>180^0$.

Стога је:

а) За $b=75^0\,27'\,30''$.

$$2)\ cotg\frac{C}{2}=\frac{sin\frac{a+b}{2}}{sin\frac{a-b}{2}}\cdot tg\frac{A-B}{2}=\frac{sin\ 90^0\,51'\,25''\cdot tg\ 8^0\,55'\,15''}{sin\ 15^0\,23'\,55''}=$$

$$\frac{sin\ 89^0\,8'\,35''\cdot tg\ 8^0\,55'\,15'}{sin\ 15^0\,23'\,55''};\quad log\ cotg\frac{C}{2}=\bar{1},77165;$$

$$\frac{C}{2}=59^0\,24'\,48'',\ \text{а}\ \ C=118^0\,49'\,36''.$$

$$3)\ tg\frac{c}{2}=\frac{sin\frac{A+B}{2}}{sin\frac{A-B}{2}}\cdot tg\frac{a-b}{2}=\frac{sin\ 91^0\,30'\,25''\cdot tg\ 15^0\,23'\,55''}{sin\ 8^0\,55'\,15''}=$$

$$=\frac{sin\ 88^0\,29'\,35''\cdot tg\ 15^0\,23'\,55''}{sin\ 8^0\,55'\,15''};\quad log\ tg\frac{c}{2}=0,249932;$$

$\frac{c}{2} = 60^0\,36'\,40''$; а $c = 121^0\,13'\,20''$.

b) за $b = 104^0\,32'\,30''$.

$$2)\ cotg\frac{C}{2} = \frac{sin\frac{a+b}{2}}{sin\frac{a-b}{2}} \cdot tg\frac{A-B}{2} = \frac{sin\,105^0\,23'\,25'' \cdot tg\,8^0\,55'\,15''}{sin\,0^0\,51'\,25''} =$$

$$= \frac{sin\,74^0\,36'\,45'' \cdot tg\,8^0\,55'\,15''}{sin\,0^0\,51'\,25''}\ ; \quad log\,cotg\frac{C}{2} = 1{,}00517\ ;$$

$$\frac{C}{2} = 5^0\,38'\,37'', \quad а \quad C = 11^0\,17'\,14''.$$

$$3)\ tg\frac{c}{2} = \frac{sin\frac{A+B}{2}}{sin\frac{A-B}{2}} \cdot tg\frac{a-b}{2} = \frac{sin\,91^0\,30'25'' \cdot tg\,0^0\,51'\,25''}{sin\,8^0\,55'\,15''} =$$

$$= \frac{sin\,88^0\,29'\,35'' \cdot tg\,0^0\,51'\,25''}{sin\,8^0\,55'\,15''}\ ;$$

$$log\,tg\frac{c}{2} = \overline{2},98416; \quad \frac{c}{2} = 5^0\,80'\,20'', \quad а \quad c = 11^0\,0'\,40''.$$

Пример 2. $A = 78^0\,24'\,36''$, $B = 44^0\,53'\,18''$, $a = 21^0\,36'\,45''$.

$$1)\ sin\ b = \frac{sin\ B}{sin\ A}\ sin\ a = \frac{sin\ 44^0\,53'\,18'' \cdot sin\ 21^0\,36'\,45''}{sin\ 78^0\,24'\,36''},$$

$log\ sin\ b = \overline{1},42382$; $b_1 = 15^0\,23'\,16''$, $b_2 = 180^0 - b_1 = 164^0\,36'\,44''$.

Овде узимамо у обзир само прво решење за b_1, јер је за друго решење $A + B < 180^0$, $a + b_2 > 180^0$.

$$2)\ cotg\ \frac{C}{2} = \frac{sin\frac{a+b}{2}}{sin\frac{a-b}{2}} \cdot \frac{A-B}{2} = \frac{sin\ 18^0\,30'\,0{,}5'' \cdot tg\ 16^0\,45'\,39''}{sin\ 3^0\,6'\,44{,}5''}\ ;$$

$$log\ cotg\frac{C}{2} = 0.24547; \frac{C}{2} = 29^0\,36'\,25'', \ C = 59^0\,12'\,50''.$$

$$3)\ tg\frac{c}{2} = \frac{sin\frac{A+B}{2}}{sin\frac{A-B}{2}} \cdot tg\ \frac{a-b}{2} = \frac{sin\ 61^0\,38'\,57'' \cdot tg\ 3^0\,6'\,45''}{sin\ 16^0\,45'\,39''}\ ;$$

$$log\ \ tg\ \frac{c}{2} = \overline{1},21989; \frac{c}{2} = 9^0\,25'\,14'', \ а \ c = 18^0\,50'\,28''.$$

Трећи случај. *Дате су стране* ***a, b*** *и* ***c*** *сферног троугла; наћи углове A, B и C.*

Да би овај случај био могућ, треба да буду испуњене погодбе:

$$a + b > c, \ a + c > b, \ b + c > a \ \text{ и } \ a + b + c < 360^0.$$

Углове налазимо применом образаца претходног параграфа под IV.

Пример. $a = 110^0\,25'\,39''$, $b = 58^0\,40'\,20'$, $c = 80^0\,48'\,12''$.

Тада је: $2s = a + b + c = 249^0\,54'\,8''$; $s = 124^0\,57'\,4''$; $s - a = 14^0\,31'\,28''$; $s - b = 66^0\,16'\,44''$; и $s - c = 44^0\,8'\,55''$.

Стога је:

$$tg\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{sin\,(s-b)\,sin\,(s-c)}{sin\,s \cdot sin\,(s-a)}} = \sqrt{\frac{sin\,66^0 16' 44'' \cdot sin\,44^0 8' 52''}{sin\,124^0 57' 4'' \cdot sin\,14^0 31' 28''}} =$$

$$= \sqrt{\frac{sin\,66^0\,16'\,44'' \cdot sin\,44^0\,8'\,52''}{sin\,55^0\,2'\,56'' \cdot sin\,14^0\,31'\,28''}}\ ; \quad log\ tg\frac{A}{2} = 0{,}24583\ ;$$

$$\frac{A}{2} = 60^0\,24'\,48''\ ; \quad A = 120^0\,49'\,36''.$$

$$tg\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{sin\,(s-a)\,sin\,(s-c)}{sin\,s \cdot sin\,(s-b)}} = \sqrt{\frac{sin\,14^0\,31'\,28'' \cdot sin\,44^0\,8'\,52''}{sin\,55^0\,2'\,56'' \cdot sin\,66^0\,16'\,44''}}\ ;$$

$$log\ tg\frac{B}{2} = \overline{1},68249\ ; \quad \frac{B}{2} = 25^0\,42'\,19''\ ; \quad B = 51^0\,24'\,38''.$$

$$tg\frac{C}{2} = \sqrt{\frac{sin(s-a)sin(s-b)}{sin\,s \cdot sin\,(s-c)}} = \sqrt{\frac{sin\,14^0\,31'\,28'' \cdot sin\,66^0\,16'\,44''}{sin\,55^0\,2'\,56'' \cdot sin\,44^0\,8'\,52''}}\ ;$$

$$log\ tg\ \frac{C}{2} = \overline{1},80219\ ; \quad \frac{C}{2} = 32^0\,22'\,51''\ ; \quad C = 64^0\,45'\,42''.$$

Четврти случај. *Дати су углови сферног троугла; наћи његове стране.*

Да би био случај могућ, треба углови да испуњавају погодбу:

$$180^0 < A + B + C < 540^0.$$

Стране налазимо помоћу образаца претходног параграфа под V.

Пример. $A = 51^0\,20'\,15''$, $B = 115^0\,36'\,20''$, $C = 84^0 10' 25''$.

Тада је $2S = 251^0\,7'$; $S = 125^0\,33'\,30''$; $S - A = 74^0\,13'\,15''$; $S - B = 9^0\,57'\,10''$; $S - C = 41^0\,13'\,5''$. Стога је:

$$tg\frac{a}{2} = \sqrt{\frac{-\cos S \cos (S-A)}{cos(S-B)cos(S-C)}} = \sqrt{\frac{-cos 125^0 33' 30'' \cdot cos 74^0 13' 15''}{cos\ 9^0\,57'\,10'' \cdot cos\ 41^0\,13'\,5''}} =$$

$$= \sqrt{\frac{cos\ 54^0\,26'\,30'' \cdot cos\ 74^0\,13'\,15''}{cos\ 9^0\,57'\,10'' \cdot cos\ 41^0\,13'\,5''}}\ ;$$

$$log\ tg\ \frac{a}{2} = \overline{1},66464\ ; \quad \frac{a}{2} = 24^0\,47'\,49''\ ; \quad a = 49^0\,35'\,38''.$$

$$tg\frac{b}{2} = \sqrt{\frac{-\cos S \cdot \cos\,(S-B)}{cos\,(S-A)\,cos\,(S-C)}} = \sqrt{\frac{cos\,54^0\,26'\,30'' \cdot cos\,9^0\,57'\,10''}{cos\,74^0\,13'\,74'' \cdot cos\,41^0\,13'\,5''}}\ ;$$

$$log\ tg\ \frac{b}{2} = 0{,}22360\ ; \quad \frac{b}{2} = 59^0\,8'\,17''\ ; \quad b = 118^0\,15'\,34''.$$

$$tg\frac{c}{2} = \sqrt{\frac{-\cos S \cdot \cos\,(S-C)}{cos\,(S-A) \cdot cos\,(S-B)}} = \sqrt{\frac{cos\,54^0\,26'\,30'' \cdot cos\,41^0\,13'\,5''}{cos\,74^0\,13'\,15'' \cdot cos\,9^0\,57'\,10''}}\ ;$$

$$log\ tg\ \frac{c}{2} = 0{,}21303\ ; \quad \frac{c}{2} = 58^0\,31'\,22'\ ; \quad c = 117^0\,2'\,44''.$$

Пети случај. — *Дате су две стране и захваћени угао (нпр. a, b и C); наћи остале елементе сферног троугла.*

Решење. — Помоћу Неперових аналогија израчунавамо најпре збир и разлику углова A и B применом образаца:

$$tg\,\frac{A+B}{2}=\frac{\cos\frac{a-b}{2}}{\cos\frac{a+b}{2}}\cdot cotg\,\frac{C}{2}\quad \text{и}\quad tg\frac{A-B}{2}=\frac{\sin\frac{a-b}{2}}{\sin\frac{a+b}{2}}\,cotg\,\frac{C}{2}\,,$$

а затим из обрасца $tg\frac{c}{2}=\dfrac{\sin\frac{A+B}{2}}{\sin\frac{A-B}{2}}\cdot tg\,\frac{a-b}{2}$ налазимо и трећу страну c.

Пример. $a=100^0\,40'\,10''$, $b=62^0\,25'\,46''$, $C=56^0 18'30''$.

Тада је: $tg\,\dfrac{A+B}{2}=\dfrac{\cos 19^0\,7'\,12''\cdot cotg\,28^0\,9'\,15''}{\cos 81^0\,32'\,58''}$ и

$$tg\,\frac{A-B}{2}=\frac{\sin 19^0\,6'\,12''\cdot cotg\,28^0\,9'\,15''}{\sin 81^0\,32'\,58''}\,;$$

$$\log tg\,\frac{A+B}{2}=1{,}07968\quad \text{и}\quad \log tg\,\frac{A-B}{2}=\bar{1}{,}79252\,;$$

$\dfrac{A+B}{2}=85^0 14'30''$; и $\dfrac{A-B}{2}=31^0\,44'\,51''$; $A+B=171^0\,29'$;

$A-B=63^0\,29'\,42''$; $A=117^0\,29'\,21''$; $B=53^0\,59'\,39''$.

$tg\dfrac{c}{2}=\dfrac{\sin 85^0\,14'\,30''}{\sin 31^0\,44'\,5''}\cdot tg\,19^0\,7'\,12''$; $\log tg\,\dfrac{c}{2}=\bar{1}{,}81730$;

$\dfrac{c}{2}=33^0\,17'\,20''$; $c=53'\,34'\,40''$.

Шести случај. *Дата је једна страна и два налегла угла (на пр. c, A и B); наћи остале елементе сферног троугла.*

Решење. — Помоћу Неперових аналогија израчунавамо најпре збир и разлику осталих страна a и b применом образаца:

$$tg\,\frac{a+b}{2}=\frac{\cos\frac{A-B}{2}}{\cos\frac{A+B}{2}}\,tg\,\frac{c}{2}\quad \text{и}\quad tg\,\frac{a-b}{2}=\frac{\sin\frac{A-B}{2}}{\sin\frac{A+B}{2}}\cdot tg\,\frac{c}{2}\,,$$

а затим, из обрасца $tg\,\dfrac{C}{2}=\dfrac{\sin\frac{a-b}{2}}{\sin\frac{a+b}{2}}\cdot cotg\,\dfrac{A-B}{2}$, налазимо и трећи угао C.

Пример. $A=82^0\,15'\,40''$, $B=68^0\,45'\,50''$, $c=71^0\,18'\,36''$. Тада је:

$$tg\,\frac{a+b}{2}=\frac{\cos 6^0\,44'\,55''\cdot tg\,35^0\,39'\,18''}{\cos 75^0\,30'\,45''}\quad \text{и}$$

$$tg\,\frac{a-b}{2}=\frac{\sin 6^0\,44'\,55''\cdot tg\,35^0\,39'\,18''}{\sin 75^0\,30'\,45''}\,;$$

$$\log tg\frac{a+b}{2}=0{,}45449\quad \text{и}\quad \log tg\frac{a-b}{2}=\bar{2}{,}93987\,;$$

$\dfrac{a+b}{2}=70^0\,14'\,4{,}5''$; $\dfrac{a-b}{2}=4^0\,58'\,34{,}5''$; $a+b=140^0\,28'\,9''$;

$a-b=9^0\,57'\,9''$; $a=75^0\,12'\,39''$; $b=65^0\,15'\,30''$.

$tg\,\dfrac{C}{2}=\dfrac{\sin 4^0\,58'\,34{,}5''\cdot cotg\,6^0\,44'\,55''}{\sin 70^0\,14'\,4{,}5''}$; $\log tg\,\dfrac{C}{2}=\bar{1}{,}89139$;

$\dfrac{C}{2}=37^0\,54'\,32''$; $C=75^0\,49'\,4''$.

Задаци за вежбу

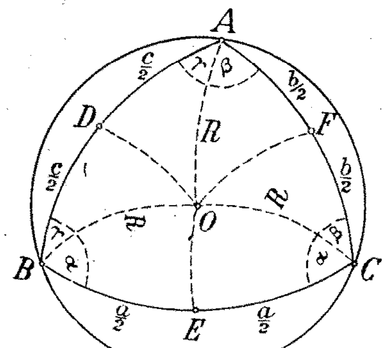
1) $a=51^0\,40'\,25''$,	2) $a=72^0\,32'\,33''$,	3) $a=92^0\,28'\,17''$,
$b=62^0\,7'\,15''$,	$b=53^0\,8'\,18''$,	$B=81^0\,7'\,14''$,
$C=81^0\,10'\,8''$.	$A=69^0\,19'\,18''$.	$C=70^0\,30'\,50''$.
4) $a=52^0\,22'\,24''$,	5) $A=81^0\,15'\,40''$,	6) $A=37^0\,35'\,40''$,
$b=81^0\,18'\,15''$,	$B=52^0\,8'\,8''$,	$B=52^0\,20'\,20''$.
$A=40^0\,23'\,25''$.	$a=36^0\,50'\,25''$.	$a=38^0\,18'\,42''$,
7) $a=70^0\,50'\,60''$.	8) $a=108^0\,6'\,6''$,	9) $A=125^0\,18'\,12''$,
$b=111^0\,8'\,16''$,	$b=62^0\,10'\,10''$	$B=49^0\,15'\,18''$.
$c=120^0\,4'\,8''$.	$c=70^0\,20'\,30''$.	$C=42^0\,35'\,40''$.

10) Решити равностран сферни троугао кад му је угао 75^0.

11) Помоћу правоуглог троугла нађите страну a и угао α косоуглог сферног троугла из страна $b=68^0\,21'\,34''$, $c=53^0\,17'\,23''$ и угла $\beta=79^0\,45'\,21''$. (Сушак, 1932).

§ 36. Примена сферне тригонометрије

I. ***Полупречник описаног круга око сферног троугла.*** Сферно средиште O споредног круга описаног око сферног троугла ABC (сл. 68) добијамо када у срединама страна (D, E и F) подигнемо сферне управне: DO, EO и FO. Ове сферне управне јесу луци од три главна лоптина круга, чије равни пролазе кроз средине страна сферног троугла и стоје управно на странама. Ако са R означимо сферни полупречник описаног круга



Сл. 68

$(R = AO = BO = CO)$, онда је из правоуглог троугла CEO, према Неперовом правилу:

$$\cos\alpha = \operatorname{cotg}\frac{a'}{2}\operatorname{cotg}R = tg\frac{a}{2}\operatorname{cotg}R, \text{ а одавде је } tg\,R = \frac{tg\,\frac{a}{2}}{\cos\alpha} \quad (1).$$

Па како је $2(\alpha+\beta+\gamma) = A+B+C = 2S$, то је $\alpha+\beta+\gamma = \frac{1}{2}(A+B+C) = S$,

а $\alpha = S-(\beta+\gamma) = S-A$ (пошто је $A = \beta+\gamma$). Заменом у (1) добијамо: $tg\,R = \frac{tg\,\frac{a}{2}}{\cos(S-A)}$. Истим путем, из осталих правоуглих троуглова на сл. 68, налазимо:

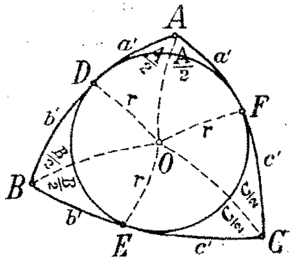
$$tg\,R = \frac{tg\,\frac{a}{2}}{\cos(S-A)} = \frac{tg\,\frac{b}{2}}{\cos(S-B)} = \frac{tg\,\frac{c}{2}}{\cos(S-C)} \quad (2).$$

Ако $tg\frac{a}{2}$, $tg\frac{b}{2}$, $tg\frac{c}{2}$ заменимо њиховим вредностима из § 32, V, под c) добијамо:

$$tg\,R = \frac{tg\,\frac{a}{2}}{\cos(S-A)} = \frac{\sqrt{\frac{-\cos S\,\cos(S-A)}{\cos(S-B)\cos(S-C)}}}{\cos(S-A)} = \sqrt{\frac{-\cos S}{\cos(S-A)\;\mathrm{coc}\,(S-B)\;\cos(S-C)}},$$

који се образац највише примењује за израчунавање сферног полупречника описаног круга, ако знамо углове сферног троугла.

II. ***Полупречник уписаног круга.*** Сферно средиште O споредног круга уписаног у сферном троуглу ABC (сл. 69) добијамо када опишемо три главна лоптина круга тако да ови кругови полове углове сферног троугла. Њихов пресек O је сферно средиште уписаног круга, а спуштене сферне управне OD, QE и OF из средишта на троуглове стране јесу сферни полупречник r уписаног круга ($r = OD = OE = OF$). Тада је, по Неперовом правилу, из правоуглог троугла AOF:



Сл. 69

$$\cos a' = \operatorname{cotg}\frac{A}{2}\cdot\operatorname{cotg}r', \text{ или } \sin a' = \operatorname{cotg}\frac{A}{2}\,tg\,r. \text{ Одавде је } tg\,r = \sin a'\cdot tg\frac{A}{2} \quad (1)$$

Па како је $2a'+2b'+2c' = a+b+c$, а $a'+b'+c' = \frac{1}{2}(a+b+c) = s$, то је $a' = s-(b'+c') = s-a$ (пошто је $a = b'+c'$).

Заменом у (1) добијамо:

$$tg\,r = \sin(s-a)\cdot tg\frac{A}{2}. \text{ Истим путем добијамо:}$$

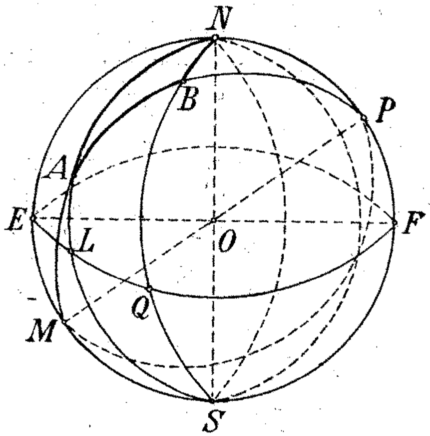
$$tg\,r = \sin(s-b)\cdot tg\frac{B}{2} \text{ и } tg\,r = \sin(s-c)\cdot tg\frac{C}{2}.$$

Ако у овим обрасцима заменимо $tg\frac{A}{2}$, $tg\frac{B}{2}$ и $tg\frac{C}{2}$ њиховим вредностима из § 32, IV, добијамо: $tg\,r = \sin(s-a)\cdot\sqrt{\frac{\sin(s-b)\sin(s-c)}{\sin s\cdot\sin(s-a)}} = \sqrt{\frac{\sin(s-a)\sin(s-b)\sin(s-c)}{\sin s}}$,

који се образац највише примењује за израчунавање полупречника уписаног круга у сферном троуглу, ако знамо његове стране.

III. Сферна раздаљина између два места на земљи

Да бисмо израчунали сферну раздаљину места A и B на земљи, треба да знамо географске ширине и географске дужине тих места. Ако су φ_1 и λ_1 географска ширина и дужина места A, φ_2 и λ_2 географска ширина и дужина места B, N и S полови земље, круг $NESF$ главни меридијан, а круг $ELQF$ екватор, кругови $NALS$ и $NBQS$ меридијани места A и B, онда је: $\varphi_1 = AL$, $\lambda_1 = EL$, $\varphi_2 = BQ$ и $\lambda_2 = EQ$, тада је тражена



Сл. 70

сферна раздаљина AB страна сферног троугла ABN у коме знамо две стране NA и NB ($NA = 90^0 - \varphi_1$ и $NB = 90^0 - \varphi_2$) и захваћени угао $N = \lambda_2 - \lambda_1$. Задатак се, дакле, своди на пети случај решавања сферног троугла из претходног параграфа.

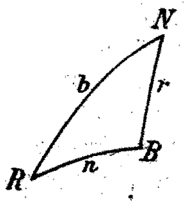
Напомена. Ако желимо да израчунамо сферну раздаљину двају места на земљи не у степенима већ у дужинској јединици (у метрима, километрима, миљама), онда примењујемо пропорцију:

$$40000000 : x = 360^0 : \sphericalangle AB, \quad \text{одакле је:}$$

$$x = \frac{40000000 \cdot \sphericalangle AB}{360^0}\, m = \frac{40000 \cdot \sphericalangle AB}{360^0}\, km,$$

где је 40000000 обим великог круга у метрима (приближно), x растојање места A и B у метрима, а $\sphericalangle AB$ растојање места (страна сферног троугла NAB у степенима).

Пример. Наћи сферну раздаљину између Рима и Беча, ако је геогр. ширина Рима $\varphi_1 = 41^0\,53'\,54''$ а Беча $\varphi_2 = 48^0\,12'\,35''$, геогр. дужина Рима $\lambda_1 = 12^0\,28'\,48''$, а Беча $\lambda_2 = 16^0\,22'\,42''$, рачунајући од гриничког меридијана.



Сл. 71

Ако сферни пол N, Рим (R) и Беч (B) дају сферни троугао NRB, онда је страна $NR = 90^0 - \varphi_1 = 48^0\,6'\,16''$, страна $NB = 90^0 - \varphi_2 = 41^0\,47'\,25''$, а угао код

$$N = \lambda_2 - \lambda_1 = 3^0\,53'\,54''.$$

Тада је:

$$tg\,\frac{B+R}{2} = \frac{\cos\frac{b-r}{2}}{\cos\frac{b+r}{2}}\, cotg\,\frac{N}{2} \text{ и } tg\,\frac{B-R}{2} = \frac{\sin\frac{b-r}{2}}{\sin\frac{b+r}{2}}\, cotg\,\frac{N}{2} \text{ или}$$

$$tg\,\frac{B+R}{2} = \frac{\cos 3^0\,9'\,25{,}5'' \cdot cotg\,1^0\,56'\,57''}{\sin 44^0\,56'\,50{,}5''} \text{ и}$$

$$tg\,\frac{B-R}{2} = \frac{\sin 3^0\,9'\,25{,}5'' \cdot cotg\,1^0\,56'\,57''}{\sin 45^0\,56'\,50{,}5''};$$

$$\log tg\,\frac{B+R}{2} = 1{,}48340 \text{ и } \log tg\,\frac{B-R}{2} = 0{,}79754;$$

$$\frac{B+R}{2} = 88^0\,7'\,6''; \frac{B-R}{2} = 80^0\,56'\,38''; \quad B+R = 176^0\,14'\,12'',$$

$$B - R = 161^0\,53'\,16''; \; B = 169^0\,3'\,44'', \; R = 7^0\,10'\,28''.$$

$$tg\,\frac{n}{2} = \frac{\sin\frac{B+R}{2}}{\sin\frac{B-R}{2}}\, tg\,\frac{b-r}{2} = \frac{\sin 88^0\,7'\,6'' \cdot tg\,3^0\,9'\,25{,}5''}{\sin 80^0\,56'\,38''}; \; \log tg\,\frac{n}{2} =$$

$= \bar{2},74682; \frac{n}{2} = 3^0\,11'\,42''; n = 6^0\,23'\,24''$. Дакле, сферна раздаљина Беч—Рим износи $6^0\,23'\,24''$, или у дужинској јединици:

$$RB = \frac{40000000 \cdot 6^0\,23'\,34''}{360^0} = \frac{40000000 \cdot 23004}{1\,296\,000} =$$

$$= 710\,000\, m = 710\, km.$$

Пример 2. Из Карловаца ($S = +\,46^0$, $\lambda = +\,16^0$) има да оде аероплан брзином од 200 km на сат према Буенос-Ајресу ($S = -\,35^0$, $\lambda = -\,58^0$). Колико дана ће трајати путовање? (Карловци, 1932).