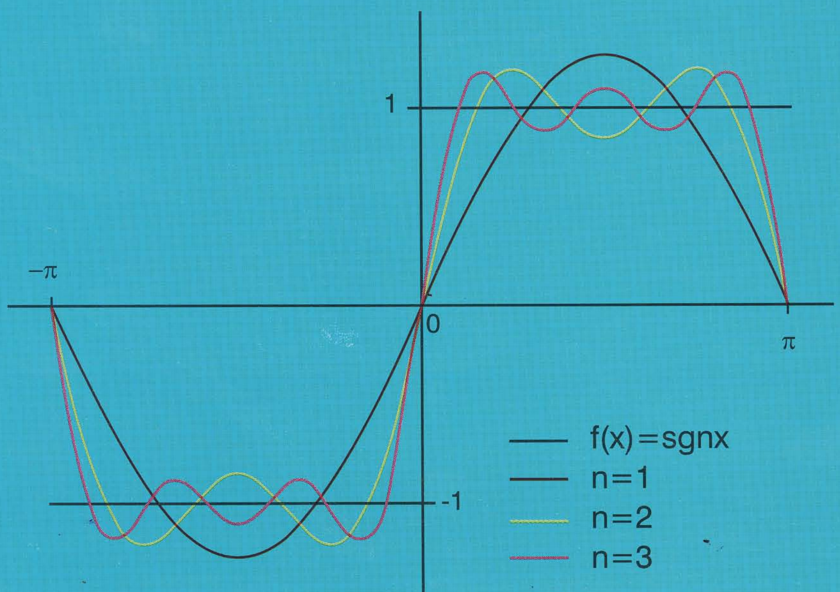
teorija i zadaci

D. Kuzmanović, A. Sedmak,
I. Obradović, D. Nikolić

MATEMATIČKA FIZIKA



Rudarsko-geološki fakultet
Beograd 2003

Predgovor

Udžbenik "Matematička fizika" nastao je na osnovu udžbenika "Metode matematičke fizike" dodavanjem poglavlja o **parcijalnim jednačinama prvog reda**. Upotpunjen je i velikim brojem zadataka, kako bi se lakše razumela izložena teorija.

Ova dorada dovela je do promene u sastavu grupe autora. Treba istaknuti da su oni delovi knjige "Metode matematičke fizike", autora koji su učestvovali u pripremi ovog izdanja, malo izmenjeni u želji da tekst bude jasniji i čitljiviji.

Sa posebnim zadovoljstvom ističem nesebičnu pomoć prof. Jova Jarića, koji je pročitao većinu zadataka, a čije su primedbe uticale na njihovu bolju formulaciju, kao i na neka elegantnija rešenja. Njegove primedbe i sugestije su uticale i na izmene prvobitnog teksta.

Zahvalnost dugujemo i studentima Goranu Runjevcu i Jeleni Ninkov, koji su ukazali na greške u nekim od zadataka.

Stoga navodimo predgovor knjige "Metode matematičke fizike", pri čemu smo u tom tekstu promenili samo imena ljudi koji su se angažovali oko ove knjige.

Predgovor udžbenika "Metode matematičke fizike"

Kako je i zašto nastala ova knjiga?

Materijal između ovih korica nastao je kao želja da se predavanja koja sam držao studentima Geofizike, Rudarsko-geološkog fakulteta Univerziteta u Beogradu, u periodu od 1991. do 1995. godine, pretoče u udžbenik.

Knjiga nije standardnog tipa ni po sadržaju ni po stilu. Sva poglavlja pojedinačno su obrađena i u drugim knjigama na našem jeziku, ali koliko je meni poznato, u nas ne postoji još neka knjiga sa ovakvim sadržajem.

Uobičajen naslov za ovakav sadržaj je "Jednačine matematičke fizike". Međutim, ova materija predaje se pod nazivom "Metode matematičke fizike", pa je on uzet i za naslov knjige.

Mnoštvo je knjiga sa istim naslovom u stranoj literaturi, iako one nemaju isti sadržaj. Zajedničko za sve su uglavnom Teorija polja i Parcijalne diferencijalne jednačine drugog reda.

Što se stila tiče, želja autora bila je da se svi pojmovi matematički korektno definišu, ali gde god su izvođenja i dokazi teorema i stavova bili složeniji čitaoce smo upućivali na knjige u kojima su oni dati. Nismo želeli da opterećujemo one čitaoce koji bi želeli samo da primene odgovarajuće stavove ili teoreme.

O poglavljima

Poglavlje 1. je podsećanje na pojmove iz više matematike koji se koriste u daljem tekstu. Poglavlja 2, 3, 4, 5. napisana su prema planu i programu predmeta "Metode matematičke fizike" koji slušaju studenti Geofizike, Rudarsko-geološkog fakulteta, kojima je ovaj udžbenik i namenjen.

Ova poglavlja obradili smo Ivan Obradović i ja, dok sam zadatake pripremio i uradio sa Dobricom Nikolićem.

Poslednje 6. poglavlje prirodan je nastavak 5-tog poglavlja. Naime, sve je više praktičnih problema koji se svode na parcijalne diferencijalne jednačine čija rešenja ne mogu da se dobiju u zatvorenom obliku. Njihova rešenja nalazimo primenom numeričkih metoda, pa su ona, zadnjih decenija, njihov neodvojiv deo. Ovo poglavlje obradio je Aleksandar Sedmak.

Oblasti obrađene u ovoj knjizi izučavaju se na tehničkim fakultetima, i na fakultetima prirodnih nauka. Nadamo se da ovaj udžbenik može da bude od koristi kako studentima tih fakulteta tako i stručnjacima iz prakse.

Kvalitetu knjige doprineli su

Prof. Jovo Jarić pročitao je pojedine delove teksta i dao je korisne primedbe i sugestije. Već smo napomenuli da je pomogao i pri formulaciji zadataka i nekim rešenjima. Međutim, ne treba zaboraviti ni prof. Miloša Miličića, prof. Predraga Cvetkovića i prof. Aleksandra Stojanovića, čije su sugestije i saveti bili od koristi u prethodnoj knjizi, a čije delove nismo menjali.

Prof. Velimir Simonović, prof. Aleksandar Ivić, redovni član SANU, prof. Branislav Glavatović i prof. Arpad Takači, koji su izvršili recenziju ove knjige i dali korisne sugestije.

Gospođe Jovanka Cvetković i Ljiljana Kuzmanović, izvršile su korekturu teksta.

Gospođa Jelena Knežević i gospođice Ivana Vasiljević i Aleksandra Tomašević, uradile su grafičku obradu. Gospodin Nenad Pantić je pomogao oko izrade korica.

Svima njima autori duguju zahvalnost.

Raduje nas postojanje ljudi privrženih nauci bez čije finansijske pomoći mnoge knjige ne bi ugledale svetlost dana. Jedan od tih je i gospodin Miloš Matijaš, direktor firme "BeoTeleProm", koji je u više navrata pomogao autoru ovih redova, kome se toplo zahvaljujemo.

Svesni da do grešaka i propusta uvek dolazi, naravno nenamerno, bićemo zahvalni svakom koji nam na njih ukaže. Podrazumeva se da je moja odgovornost ipak najveća.

U Beogradu, novembra 2003. god. D. Kuzmanović

Sadržaj

Glava 1

Vektorska algebra i analiza

Uvod

U prostoru oko nas susrećemo se sa raznim pojavama. Da bismo ih opisali, definišemo pojmove koji ih karakterišu. Međutim, primećeno je da i različite pojave mogu, matematički, da se opišu na isti način, odnosno mogu da budu elementi istog skupa, u kome važe određena matematička pravila. Tako veličine kao: dužina, površina, zapremina, masa, temperatura, pritisak, naelektrisanje su primeri veličina koje su određene samo jednim brojem (brojem jedinica pogodno izabrane merne skale, na primer: $3m$, $0.5m^2$, $10°C$, $1bar$, $110V$, itd.). Ovakve veličine zovemo **skalari**. Izbor skale je stvar dogovora i zavisi od praktičnih problema (potrebe prakse).

Za razliku od ovih veličina, srećemo se i sa takvim (fizičkim) veličinama za čije je definisanje potrebno poznavanje tri podatka (parametra). Kao primer za ovakve veličine navedimo: pomeranje tačke, brzina, ubrzanje, sila itd. Ove veličine karakterišu se pravcem, smerom i intenzitetom, a zovemo ih **vektori**.

Pored ovih postoje i takve veličine za čije je definisanje potrebno poznavanje više od tri parametra. Tako, stanje napona u tački tela određeno je sa devet nezavisnih podataka (komponenti). Ovakve veličine, ako podležu odgovarajućim zakonima, zovemo **tenzori**.

U ovom poglavlju proučićemo vektore. Međutim, pre nego što definišemo vektore i odgovarajuće operacije, definisaćemo koordinatni sistem, jer će nam kasnije biti potreban za pogodniji rad sa vektorima.

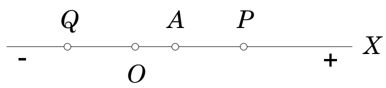
1.1 Koordinatni sistem

Da bismo odredili položaj geometrijskih objekata, potrebno je da definišemo referentni sistem u odnosu na koji se oni posmatraju.

Osnovna ideja (Dekart) [1] je da se svakoj tački u n–dimenzionom prostoru jednoznačno pridruži uređena n–torka brojeva.

Tako, u realnom jednodimenzionalnom prostoru (koji je geometrijski predstavljen pravom) svakoj tački pridružuje se jedan realan broj, čija apsolutna vrednost predstavlja rastojanje (opšti pojam "rastojanje" definisaćemo kasnije) od unapred zadate tačke, recimo O, koju zovemo koordinatni početak. Pored koordinatnog početka potrebno je odrediti i jedinično rastojanje (rastojanje sa kojim poredimo kasnije posmatrana rastojanja). Zbog toga izaberimo neku tačku A i rastojanje $\overline{OA}$ proglasimo za jedinično. Neka je P neka proizvoljna tačka, tada broj x, koji pridružujemo tački P, definišemo na sledeći način

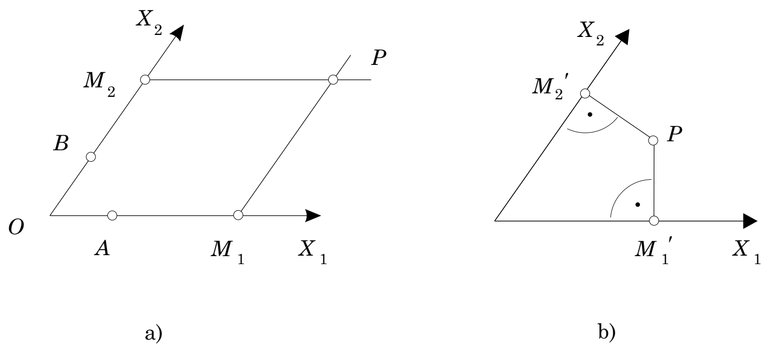
$$|x| = \frac{\overline{OP}}{\overline{OA}}. \tag{1.1}$$



Slika 1.1:

Uzima se po dogovoru da je $x > 0$, odnosno znak (+), ako je tačka desno u odnosu na O (u našem primeru tačka P na slici 1.1), a $x < 0$, odnosno (−), ako je levo (u našem slučaju tačka Q na slici 1.1). Na ovaj način određuje se smer "kretanja" tačke, pa tako dobijamo orijentisanu pravu koju nazivamo **osa**. Ovu orijentaciju označavaćemo strelicom, koja pokazuje smer u kojem brojevi rastu.

U realnom dvodimenzionalnom prostoru imali bismo uređen par realnih brojeva kojima odgovaraju dve linije X_1 i X_2 koje se seku u tački O (sl. 1.2). Ovu tačku zovemo koordinatni početak.



Slika 1.2:

[1] René Descartes (latinsko ime Renatus Cartesius) (1596-1650), francuski filozof i matematičar. Uveo je analitičku geometriju. Njegov osnovni rad *Géométrie* pojavio se 1637, kao dodatak njegovom delu *Discours de la méthode*.

I u ovom slučaju potrebno je definisati jedinično rastojanje, za svaku osu posebno, što znači da ta rastojanja ne moraju nužno da budu jednaka.

Par ovakvih osa, sa jediničnim rastojanjima $\overline{OA}$ i $\overline{OB}$, predstavljaju ose koordinatnog sistema u ravni.

Svakoj tački P u ravni pridružujemo uređen par realnih brojeva $(x_1,\, x_2)$, koje nazivamo koordinatama te tačke, a određujemo ih na sledeći način. Prava, koja prolazi kroz tačku P, a paralelna je sa X_2–osom, seče osu X_1 u tački M_1, a prava paralelna sa X_1–osom, seče osu X_2 u tački M_2 (sl. 1.2a). Koordinate x_1 i x_2 definišu se sa

$$|x_1| = \frac{\overline{OM_1}}{\overline{OA}},$$
$$|x_2| = \frac{\overline{OM_2}}{\overline{OB}},$$

pri čemu se znak x_1 i x_2 određuju kao i u jenodimenzionom prostoru.

Ovim postupkom možemo svakoj tački P iz ravni jednoznačno (u odnosu na date koordinatne ose) da pridružimo uređen par brojeva $(x_1,\, x_2)$, čime smo definisali koordinatni sistem dvodimenzionalnog prostora.

Ovaj postupak možemo da uopštimo i primenimo na n–dimenzionalni prostor $(n > 2)$.

Ukoliko je ugao između pravolinijskih osa $90°$, tada takav koordinatni sistem zovemo pravougli Dekartov koordinatni sistem.

Napomenimo da prethodno opisan postupak pridruživanja uređenog para brojeva nekoj tački nije jedini koji se koristi. Naime, moguće je iz tačke P povući i pravce koji su upravni na odgovarajuće ose (sl. 1.2b) i tako dobiti tačke M_1' i M_2'. U tom slučaju tačka P ima koordinate x_1' i x_2', definisane sa

$$|x_1'| = \frac{\overline{OM'_1}}{\overline{OA}},$$
$$|x_2'| = \frac{\overline{OM'_2}}{\overline{OB}}.$$

U specijalnom slučaju Dekartovog koordinatnog sistema parovi brojeva $(x_1,\, x_2)$ i $(x_1',\, x_2')$ se poklapaju. Pored ovih primera pridruživanja mogući su i drugi, ali se, iz praktičnih razloga, koriste ova dva postupka.

U prethodnim definicijama koristili smo pojam rastojanje koji do sada nismo definisali. Napomenimo da u zavisnosti od izraza kojim definišemo rastojanje između dve tačke razlikujemo (u matematičkom smislu) razne prostore. Tako na primer, rastojanje između dve tačke A, sa Dekartovim koordinatama $(a_1,\, a_2)$ i B, sa Dekartovim koordinatama $(b_1,\, b_2)$, može da se zada izrazom

$$d_{AB} = \sqrt{\sum_{i=1}^{2} (b_i - a_i)^2} \equiv \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}. \tag{1.2}$$

U n–dimenzionalnom prostoru ovo rastojanje dato je izrazom

$$d_{AB} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (b_i - a_i)^2}. \tag{1.3}$$

1.2 Vektorska algebra

Prethodno smo se podsetili kako se konstruiše koordinatni sistem u nama "bliskom" dvodimenzionom prostoru, gde se Pitagorina [2] formula (1.3) koristi da bismo merili rastojanje između dve tačke. Ako se u takvom prostoru, iz tačke A pređe u novi položaj B, pomeranje iz A (početna tačka) u B (krajnja tačka) može da se predstavi orijentisanom duži $\overrightarrow{AB}$ (sl. 1.3).

1.2.1 Definicija vektora

Orijentisana duž zove se **vektor**. Ovaj pojam potiče od latinske reči *vector* –nosač, ili od *vehere, vectum* – nositi, pomerati. Njena dužina određuje **intenzitet** vektora. Ovako definisan vektor predstavlja geometrijski pojam, za razliku od prethodne definicije (pomeranje) koja je vektoru dala fizički smisao.

Uobičajeno je u literaturi da se vektor označava jednim slovom masno štampanim (**a**) [3] ili sa $\overrightarrow{AB}$ (A je početna, a B je krajnja tačka), kada je bitno da se naglasi početna i krajnja tačka. Mi ćemo, u ovoj knjizi, da koristimo ravnopravno obe oznake.

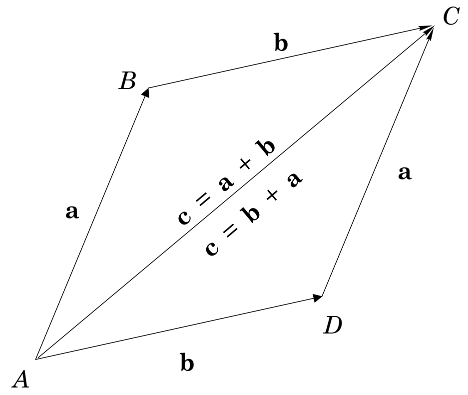
1.2.2 Sabiranje vektora

Posmatrajmo pomeranje iz položaja A u C. Do tačke C možemo da dođemo direktno ili preko položaja B. Ova operacija može da se označi sledećom relacijom (sl. 1.3)

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} \tag{1.4}$$

[2] $\Pi\upsilon\vartheta\alpha\gamma o\varrho\alpha\varsigma$, grčki filozof i matematičar. Rođen oko 570, a umro oko 497. god. pre nove ere. Smatra se osnivačem teorijske matematike, egzaktnih istraživanja u fizici (akustika).

[3] Masno slovo je uobičajeno u štampanim materijalima, dok, zbog nemogućnosti, pri pisanju rukom, koristimo oznaku sa strelicom iznad veličine, na primer $\vec{a}$, umesto **a**. Međutim, u slučaju kada je vektor određen početnom, recimo A, i krajnjom tačkom, recimo B, nužno je koristiti oznaku $\overrightarrow{AB}$.

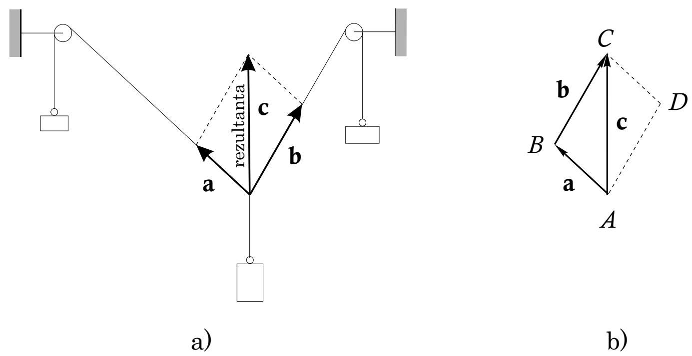


Slika 1.3:

Ako je $\overrightarrow{AB} = \mathbf{a}$, $\overrightarrow{BC} = \mathbf{b}$, $\overrightarrow{AC} = \mathbf{c}$, prethodna operacija može da se prikaže na jedan od načina:

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{c} \quad \text{ili} \quad \vec{a} + \vec{b} = \vec{c} \quad \text{ili} \quad \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}. \tag{1.5}$$

Pravilo za slaganje vektora, prvi je formulisao Stevinus [4] 1586. god., proučavajući zakone slaganja sila (sl. 1.41.4).



a) b)

Slika 1.4:

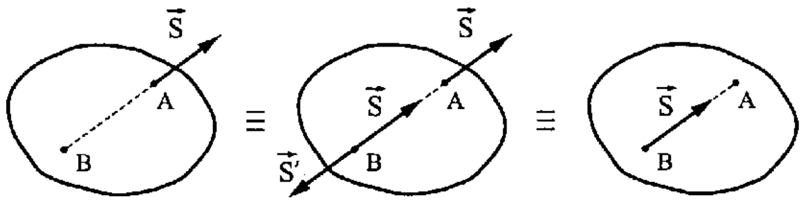
Ovo pravilo je u literaturi poznato kao **zakon paralelograma** za sabiranje, jer je, vidi sl. 1.3 i sl. 1.4, zbir vektora **a** i **b** predstavljen dijagonalom paralelograma $ABCD$. Sabiranje vektora je, dakle, **binarna operacija** nad skupom vektora $\mathbb{V}$, kojom se vektorima $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{V}$ jednoznačno dodeljuje vektor **c**.

[4] Stevin Simon - Stevinus (1548-1620), holandski matematičar i fizičar. Jedan je od prvih koji se u istraživanjima služio eksperimentima. Prvi je izveo zakon o ravnoteži sila na strmoj ravni i formulisao pravilo o paralelogramu sila. Značajni radovi su mu iz mehanike fluida.

Činjenica da mnoge veličine u fizici mogu da se predstave orijentisanim dužima, koje se sabiraju po zakonu paralelograma, nameće potrebu da ih bolje proučimo. Dakle, uvođenjem vektora vršimo geometrizaciju fizičkih veličina.

Napomenimo da u fizici postoje situacije gde je potrebno da nametnemo ograničenja na početnu tačku ili položaj linije – nosača posmatranog vektora. Navedimo dva primera.

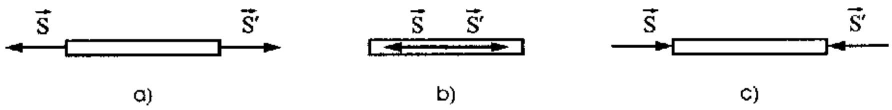
Posmatrajmo neko kruto telo. Jedan od aksioma statike glasi: dva sistema sila su statički ekvivalentna, ako se jedan od drugog razlikuju za ravnotežni sistem sila.



Slika 1.5: Pomeranje sile - kruto telo

Važna posledica ovog aksioma je: napadna tačka sile koja deluje na kruto telo može da se pomera duž napadne linije sile. Naime, ako u tački B (pripada napadnoj liniji sile) dodamo ravnotežni sistem $(\vec{S}', \vec{S})$ (sl. 1.5), pa uklonimo ravnotežni sistem ($\vec{S}'$ – napadna tačka $B, \vec{S}$ – napadna tačka A), tada ostaje opet sila $\vec{S}$, ali sa napadnom tačkom B.

Međutim, ako se telo posmatra kao deformabilno, nije svejedno u kojoj tački tela će sila da deluje.



Slika 1.6: Pomeranje sile - deformabilno telo

Na primer, na sl. 1.6*a* štap je napregnut na zatezanje, štap se izdužuje. Ako se napadne tačke obe sile pomere, recimo, na sredinu štapa, sl. 1.6*b*, štap neće biti napregnut. Konačno, ako se sile dovedu na suprotne krajeve štapa, taj štap će biti napregnut na pritisak, sl. 1.6*c* štap se skraćuje. Dakle, sa stanovišta stanja kretanja ili mirovanja štapa, sasvim je svejedno da li na njega deluju sile kao na slikama 1.6. Sva tri slučaja su međusobno ekvivalentna. Ali, sa stanovišta određivanja unutrašnih sila u pojedinim presecima tog štapa, razlika je suštinska.

Razlikujemo sledeće vektore:

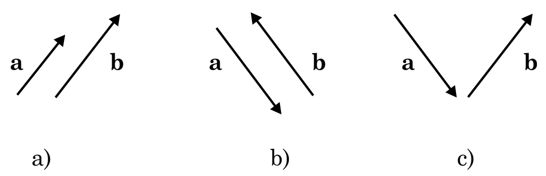
- **slobodni** (pomeraju se paralelno sami sebi, a ne menjaju se; kao primer za ovu vrstu vektora je moment sprega, vektor translacije),
- **klizeći** ili vektor vezan za pravu (pri pomeranju duž nosača –prave ne menjaja se; na primer sila koja deluju na kruto telo) i
- **vezani** za tačku (na primer zapreminske sile).

Napomenimo da će kasnije definisane operacije da važe samo za slobodne vektore, ako se drugačije ne naglasi.

Polazeći od ideje vektora kao pomeranja tačaka, zaključujemo da su dva vektora jednaka ako su orijentisane duži, koje ih predstavljaju, jednake po dužini (jednaki intenziteti), njihovi pravci paralelni, a smerovi isti. Ovo ćemo da označavamo sa

$$\mathbf{a}=\mathbf{b}. \tag{1.6}$$

Na sl. 1.7 prikazani su parovi koji nisu jednaki, jer se razlikuju po intenzitetu (sl. 1.7a), smeru (sl. 1.7b) ili pravcu (sl. 1.7c).



Slika 1.7:

Dužinu (intenzitet) vektora **a** označićemo sa $|\mathbf{a}|$ ili kraće a.

Nula vektor je vektor kome odgovara nulto pomeranje (vektor čiji se početak i vrh poklapaju), a označavaćemo ga sa **0**. Za svaki vektor **a** važi

$$\mathbf{a}+\mathbf{0}=\mathbf{0}+\mathbf{a}=\mathbf{a}. \tag{1.7}$$

Intenzitet nula vektora je jednak nuli, a pravac je proizvoljan (neodređen).

Dva vektora istog pravaca i intenziteta, a suprotnih smerova zovu se **suprotni** vektori. Suprotan vektor vektoru **a** označavaćemo sa –**a**. Za njih važi

$$\mathbf{a}+(-\mathbf{a})=\mathbf{0}. \tag{1.8}$$

Svaki vektor, čiji je intenzitet jednak jedinici, tj.

$$|\mathbf{a}|=1 \tag{1.9}$$

naziva se **jedinični vektor**.

Na osnovu geometrijskih osobina orijentisanih duži zaključujemo da je:

$$\mathbf{a}+\mathbf{b}=\mathbf{b}+\mathbf{a} \quad (\textit{komutativnost}) \tag{I}$$

$$(\mathbf{a}+\mathbf{b})+\mathbf{c}=\mathbf{a}+(\mathbf{b}+\mathbf{c}) \quad (\textit{asocijativnost}) \tag{II}$$

Napomenimo još i to da je operacija sabiranja (+) vektora unutrašnja[5] binarna operacija, tj.:

$$\text{ako} \quad \mathbf{a},\mathbf{b}\in\mathbb{V} \quad \text{tada i} \quad \mathbf{a}+\mathbf{b}\in\mathbb{V}, \quad \text{gde je } \mathbb{V} \text{ skup vektora.} \tag{III}$$

Na osnovu prethodnih definicija i osobina možemo kratko da konstatujemo da za operaciju sabiranja vektora važi:

[5]Pod unutrašnjom operacijom podrazumevamo operaciju kojom se elementima iz jednog skupa pridružuje element iz istog skupa.

a) operacija je komutativna (I),

b) operacija je asocijativna (II),

c) operacija je unutrašnja (III),

d) operacija ima nula (neutralni) element, $\mathbf{0} \in \mathbb{V}$ (1.7),

e) svaki element $\mathbf{a} \in \mathbb{V}$ ima suprotan ili simetričan element $-\mathbf{a} \in \mathbb{V}$ za koji je

$$\mathbf{a}+(-\mathbf{a})=(-\mathbf{a})+\mathbf{a}=\mathbf{0}. \tag{1.10}$$

Za neki skup $\mathbb{V}$, čiji elementi, u odnosu na neku operaciju, imaju osobine od a) do e), kažemo da obrazuje komutativnu ili Abelovu [6] grupu, ili drugim rečima skup $\mathbb{V}$ ima strukturu komutativne ili Abelove grupe. Dakle, na osnovu prethodne definicije, možemo da kažemo da **skup vektora** $\mathbb{V}$, u odnosu na sabiranje, **obrazuje komutativnu ili Abelovu grupu.**

Definišimo sada još neke operacije sa vektorima.

1.2.3 Množenje vektora realnim brojem (skalarom)

Definicija.

Neka je $\mathbf{a}$ neki vektor, a α neki realan broj. Tada se sa $\alpha\mathbf{a}(\equiv \mathbf{a}\alpha)$ definiše novi vektor na sledeći način:

- vektor $\alpha\mathbf{a}$ ima pravac vektora $\mathbf{a}$,
- ako je $\mathbf{a} \neq 0$ i $\alpha > 0$, $\alpha\mathbf{a}$ ima smer vektora $\mathbf{a}$,
- ako je $\mathbf{a} \neq 0$ i $\alpha < 0$, $\alpha\mathbf{a}$ ima smer suprotan vektoru $\mathbf{a}$,
- intenzitet vektora $\alpha\mathbf{a}$ je $|\alpha\mathbf{a}| = |\alpha||\mathbf{a}|$ ($\mathbf{a}= \mathbf{0}$ ili $\alpha = 0$ (ili oba), tada je $\alpha\mathbf{a} = \mathbf{0}$).

Kažemo da je vektor $\alpha\mathbf{a}$ dobijen **množenjem** vektora $\mathbf{a}$ skalarom α.

Ovim smo definisali operaciju množenja vektora realnim brojem (skalarom).

Jedinični vektor, koji ima isti pravac i smer kao neki vektor $\mathbf{a}$, obeležićemo sa $\mathbf{e}_a$. Svaki vektor možemo da predstavimo, primenjujući operaciju množenja vektora skalarom, kao proizvod njegovog intenziteta i njegovog jediničnog vektora

$$\mathbf{a} = |\mathbf{a}|\mathbf{e}_a. \tag{1.11}$$

[6] Niels Henrik Abel (1802-1829), norveški matematičar. Prvi je dao dokaz o nerešivosti opšte algebarske jednačine 5. stepena. Veliki njegov doprinos je u teoriji eliptičkih funkcija i teoriji redova. Postavio je temelje opšte teorije Abelovih integrala.

Za operaciju množenja vektora skalarom važi:

$$\alpha\mathbf{a} \in \mathbb{V}, \tag{IIIa}$$
$$(\alpha_1 + \alpha_2)\mathbf{a} = \alpha_1\mathbf{a} + \alpha_2\mathbf{a} \tag{IV}$$
$$\alpha(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \alpha\mathbf{a} + \alpha\mathbf{b} \tag{V}$$
$$\alpha_1(\alpha_2\mathbf{a}) = (\alpha_1\alpha_2)\mathbf{a}, \tag{VI}$$

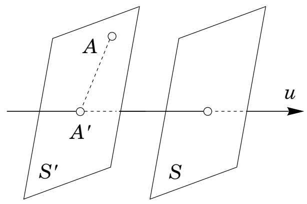
za svaki realan broj α_1 i α_2 i za sve vektore **a**, **b**$\in \mathbb{V}$.

Osobine (IV–VI) poznate su i kao **osobine linearnosti skupa** $\mathbb{V}$.

1.2.4 Projekcija na osu i na ravan

Projekcija tačke na osu

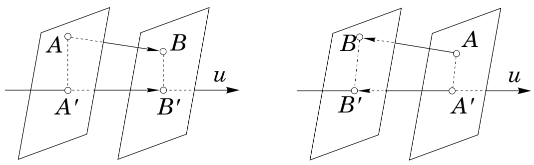
Posmatrajmo osu u određenu jediničnim vektorom **u**, neku tačku A, koja ne leži na toj osi i ravan S (sl. 1.8), koja nije paralelna sa osom. Konstruišimo ravan S' tako da prolazi kroz tačku A, a paralelna je sa ravni S. Prodor ose u kroz ravan S', tačka A', predstavlja **projekciju tačke** A na osu u uzetu paralelno sa ravni S. Ako je ravan S normalna na osu, tada odgovarajuću projekciju zovemo **normalna** ili **ortogonalna**.



Slika 1.8:

Projekcija vektora na osu

Neka je vektor određen početnom A i krajnjom tačkom B. Projektovanjem te dve tačke (sl. 1.9) dobijaju se tačke A' i B', odnosno vektor $\overrightarrow{A'B'}$.



Slika 1.9:

Projekcija vektora na osu je skalar koji se naziva **algebarska vrednost projekcije** ili kraće **projekcija**. Dakle, projekcija vektora na osu je skalar. Algebarska vrednost projekcije vektora $\overrightarrow{AB}$ označava se sa $\overline{A'B'}$, a definisana je sa:

$$\overline{A'B'} = \begin{cases} +\left|\overrightarrow{A'B'}\right|, & \text{ako vektor } \overrightarrow{A'B'} \text{ ima isti smer kao i osa } u, \\ -\left|\overrightarrow{A'B'}\right|, & \text{ako vektor } \overrightarrow{A'B'} \text{ ima suprotan smer od ose } u. \end{cases}$$

Ako sa α označimo ugao između vektora $\overrightarrow{AB}$ i vektora $\mathbf{u}$ ose u, tada je

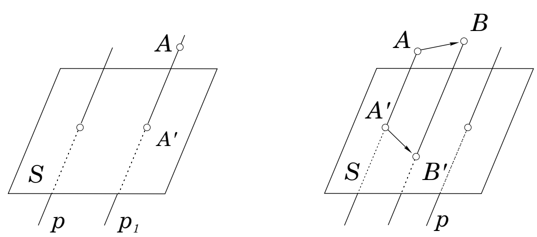
$$\overline{A'B'} = \mathrm{proj}_{\mathbf{u}}\overrightarrow{AB} = |\overrightarrow{AB}| \cos\alpha.$$

Napomenimo da važi sledeći **stav**: projekcija (algebarska vrednost projekcije) zbira vektora, na proizvoljnu osu, jednaka je zbiru projekcija vektora sabiraka, na tu osu.

Projekcija tačke i vektora na ravan

Da bismo projektovali tačku (A) na ravan (S), potrebno je prvo da se izabere neka prava (p) u odnosu na koju ćemo da izvedemo projektovanje. Presek (A') ravni (S) i prave (p_1), $(p \parallel p_1)$, kojoj pripada tačka (A), naziva se **projekcija tačke** A **na ravan** (S) **u pravcu prave** (p) (sl. 1.10). Ako je prava (p) normalna na ravan (S), tada odgovarajuću projekciju nazivamo **normalna** (ortogonalana).

Projekciju vektora, na ravan, dobijamo projektovanjem njegove početne i krajnje tačke (sl. 1.10).



Slika 1.10:

Dakle, projekcija vektora na ravan je vektor.

1.2.5 Skalarni (unutrašnji) proizvod dva vektora

Definicija.

Skalarni proizvod dva vektora **a** i **b**, koji ćemo simbolički da označavamo $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$ (čita se "a tačka b") ili $(\mathbf{a}\ \mathbf{b})$, je realan broj određen sa: $|\mathbf{a}|\cdot|\mathbf{b}|\cdot\cos(\mathbf{a},\mathbf{b})$, tj.

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = |\mathbf{a}|\cdot|\mathbf{b}|\cdot\cos\gamma, \tag{1.12}$$

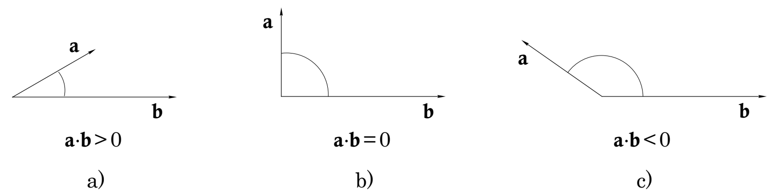
gde je γ ugao između vektora **a** i **b**.

Iz same definicije sledi da je skalarni proizvod jednak **projekciji** vektora **a** na pravac vektora **b**, pomnoženoj intenzitetom (dužinom) vektora **b**, tj. $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = |\mathbf{b}|\cdot \mathrm{proj}_{\mathbf{b}}\mathbf{a}$. Analogno, $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = |\mathbf{a}|\cdot \mathrm{proj}_{\mathbf{a}}\mathbf{b}$, što sledi iz komutativnosti skalarnog proizvoda i parnosti funkcije $\cos\gamma$.

U mehanici (fizici) skalarni proizvod ima sledeći fizički smisao. Ako sa **S** označimo silu koja deluje na neku tačku M, a sa d**r** elementarno pomeranje te tačke, tada veličina dA, definisana relacijom

$$\mathrm{d}A = \mathbf{S}\cdot\mathrm{d}\mathbf{r}$$

predstavlja elementarni rad sile **S** na pomeranju d**r**.



Slika 1.11:

Znak skalarnog proizvoda zavisi od ugla između vektora. Tako, proizvod je pozitivan, ako je ugao između vektora oštar, nula, ako su vektori ortogonalni (prav ugao) i negativan, ako je ugao tup (između $\pi/2 < \gamma < \pi$) (sl. 1.11).

Polazeći od ove defincije možemo da odredimo: intenzitet vektora i uslov pod kojim su dva vektora ortogonalna.

Naime, u specijalnom slučaju, kada je $\mathbf{a} = \mathbf{b}$, sledi da je $\gamma = 0$ i, prema (1.12),

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{a} = |\mathbf{a}|\cdot|\mathbf{a}|\cdot\cos(\mathbf{a},\mathbf{a}) = |\mathbf{a}|\cdot|\mathbf{a}| = |\mathbf{a}|^2 \Rightarrow \quad |\mathbf{a}| = \sqrt{\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}}. \tag{1.13}$$

Dakle, iz definicije skalarnog proizvoda neposredno sledi da je kvadrat intenziteta vektora jednak skalarnom proizvodu vektora sa samim sobom.

Iz definicije skalarnog proizvoda, takođe sledi da je ugao γ između dva vektora

$$\cos\gamma = \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{a}|\cdot|\mathbf{b}|} \quad \Rightarrow \quad \gamma = \arccos\frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{a}|\cdot|\mathbf{b}|}, \tag{1.14}$$

pa za $|\mathbf{a}| \neq 0$ i $|\mathbf{b}| \neq 0$ sledi da su dva vektora ortogonalna akko [7] je $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=0$.

Iz prethodnih definicija i osobina realnih brojeva slede naredne osobine koje se nazivaju i *metrička svojstva linearnog vektorskog prostora*:

- skalarni proizvod proizvoljnog vektora sa samim sobom je nenegativan

$$\mathbf{a}\cdot \mathbf{a} = |\mathbf{a}|^2 > 0, \text{ i} \tag{VII}$$
$$\mathbf{a}\cdot \mathbf{a} = 0, \quad \text{ako je} \quad \mathbf{a} = \mathbf{0},$$
$$(\text{pozitivno} - \text{definitan})$$

- skalarni proizvod je komutativan

$$\mathbf{a}\cdot \mathbf{b} = \mathbf{b}\cdot \mathbf{a}, \tag{VIII}$$
$$(\text{simetrija})$$

- skalarni proizvod je distributivan u odnosu na sabiranje

$$\mathbf{a}\cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a}\cdot \mathbf{b} + \mathbf{a}\cdot \mathbf{c}, \tag{IX}$$

- skalarni proizvod je asocijativan u odnosu na množenje skalarom

$$\alpha(\mathbf{a}\cdot \mathbf{b}) = (\alpha\mathbf{a})\cdot \mathbf{b} = \mathbf{a}\cdot (\alpha\mathbf{b}), \quad \text{gde je } \alpha \text{ realan broj.} \tag{X}$$

Navedimo još neke osobine, koje slede iz definicije skalarnog proizvoda:

$$|\mathbf{a}\cdot \mathbf{b}| \leq |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}|\,, \tag{1.15}$$

(Švarcova nejednakost) [8]

$$|\mathbf{a} + \mathbf{b}| \leq |\mathbf{a}| + |\mathbf{b}|\,, \tag{1.16}$$
$$(\text{nejednakost trougla})$$

$$|\mathbf{a} + \mathbf{b}|^2 + |\mathbf{a} - \mathbf{b}|^2 = 2(|\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2). \tag{1.17}$$
$$(\text{jednakost paralelograma})$$

Realni afini prostor $\mathbb{V}$ ili realni vektorski prostor u kojem je definisan skalarni proizvod vektora sa osobinama (VII)–(X) zove se **realni Euklidski [9] prostor**.

Ovako definisan pojam Euklidskog prostora poslužio je za definisanje opštijeg pojma Euklidskog prostora.

Skup $\mathbb{E}$, čiji su elementi proizvoljne prirode, nad kojim su aksiomatski definisane:

---

[7] akko je skraćenica za "ako i samo ako" (potreban i dovoljan uslov).

[8] Hermann Amadeus Schwarz (1843-1921), nemački matematičar, poznat po svom radu u kompleksnoj analizi (komforno preslikavanje), diferencijalnoj geometriji i računu varijacija.

[9] $E\upsilon\kappa\lambda\varepsilon\iota\delta\eta\varsigma$, rođen je oko 330 pre nove ere, a umro oko 275. god. p.n.e. Jedan je od najvećih grčkih matematičara starog veka. Jedan je od osnivača i središnja ličnost matematičke škole u Aleksandriji. Napisao je nekoliko dela iz geometrije, optike i astronomije. Najvažnije njegovo delo su *Elementi* ($\Sigma\tau o\iota\chi\varepsilon\tilde{\iota}\alpha$).

1) operacija sabiranja sa svojstvima (I)–(III),

2) operacija množenja elementa skupa $\mathbb{E}$ sa elementima jednog polja $\mathbb{R}$, sa svojstvima (IV)–(VI) i

3) operacija množenja sa svojstvima (VII)–(X),

zove se **Euklidski prostor na polju** $\mathbb{R}$. Definišimo sada i ortonormirani skup vektora.

Definicija.

Za skup od tri vektora (u 3–D Euklidskom prostoru) $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ kažemo da je ortogonalni normiran skup ili kraće **ortonormiran skup**, ako je zadovoljen uslov:

$$\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \qquad i, j = 1, 2, 3. \tag{1.18}$$

Prethodna definicija važi i u n-dimenzionalnom Euklidskom prostoru E_n, pri čemu indeksi i i j, u relaciji (1.18), uzimaju vrednosti $i, j = 1, 2, \ldots, n$.

Veličina δ_{ij}, definisana prethodnom relacijom, naziva se u literaturi Kronekerov[10] delta simbol.

1.2.6 Vektorski (spoljašnji) proizvod dva vektora

Definicija.

Vektorski proizvod dva vektora **a** i **b** u E_3 je vektor **c** koji je određen sledećim uslovima:

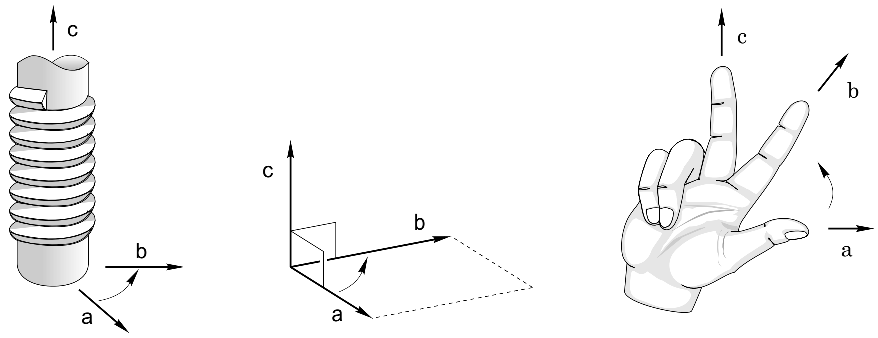
i) **c** je upravan istovremeno na **a** i **b**, odnosno ima **pravac** normale na ravan u kojoj leže vektori **a** i **b**;

ii) **smer** je određen pravilom desne ruke (ili desnog zavrtnja). Naime, ako palac desne ruke usmerimo u pravcu **a**, a kažiprst usmerimo u pravcu **b**, pa zatim zaokrenemo vektor **a** za oštar ugao (u pozitivnom smeru) da se poklopi sa **b**, tada će vrh srednjeg prsta pokazivati smer vektorskog proizvoda (videti slike 1.12a, 1.12b i 1.12c);

iii) **intenzitet** vektora **c** određen je relacijom:

$$|\mathbf{c}| = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \sin\alpha, \quad \alpha = \angle(\mathbf{a}, \mathbf{b}). \tag{1.19}$$

[10] Leopold Kronecker (1823-1891). Nemački matematičar, čiji je značajan doprinos u algebri, teoriji grupa i teoriji brojeva.



Slika 1.12: Pravilo desnog zavrtnja (a), odnosno desne ruke (c)

Ovi uslovi jednoznačno određuju vektor **c**.

Vektorski proizvod simbolički označavamo sa:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{c}, \tag{1.20}$$

a čitamo "a krst b".

U mehanici (fizici) vektorski proizvod ima sledeći fizički smisao. Posmatrajmo okretanje nekog tela oko fiksne tačke. Ovo okretanje (rotacija) je posledica delovanja momenta. Moment sile **S** za tačku definisan je relacijom

$$\mathbf{M}_O^S = \mathbf{r} \times \mathbf{S},$$

gde je **r**- vektor položaja napadne tačke sile u odnosu na momentnu tačku O.

Napomenimo da za vektorski proizvod:

- *važi distributivnost*, u odnosu na sabiranje:

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) + (\mathbf{a} \times \mathbf{c}) \tag{1.21}$$

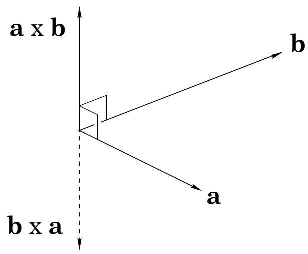
$$(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = (\mathbf{a} \times \mathbf{c}) + (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \tag{1.22}$$

- *ne važi komutativnost*, jer je (sl. 1.13)

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a} \quad \textit{(antikomutativnost)} \tag{1.23}$$

- *ne važi asocijativnost*, jer je, u opštem slučaju

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \neq (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c}. \tag{1.24}$$



Slika 1.13:

Iz definicije vektorskog proizvoda sledi da je vektorski proizvod dva vektora istog pravca jednak nuli, tj.

$$\mathbf{a} \times \alpha\mathbf{a} = \mathbf{0}.$$

Napred data definicija vektora, sa odgovarajućim operacijama, je "geometrijska" definicija. Naime, iz svega napred izloženog sledi da su definisani vektori i operacije nad njima nezavisni od izbora koordinatnog sistema. U nastavku ćemo da posmatramo vektore "algebarski", definišući njihove komponente u odnosu na dati koordinatni sistem.

U praksi se često koristi proizvod tri vektora

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \times \mathbf{c} = \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}),$$

koji se naziva **mešoviti proizvod**. Ovako definisan proizvod je skalar. Dobija se tako što se prvo vektorski pomnože vektori $\mathbf{b}$ i $\mathbf{c}$, a zatim se ovako dobijeni vektor skalarno pomnoži sa $\mathbf{a}$. U literaturi koristi se i oznaka $[\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}]$ za ovako definisani proizvod.

Za mešoviti proizvod važi osobina **kružne permutacije**, naime

$$[\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}] = [\mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{a}] = [\mathbf{c}, \mathbf{a}, \mathbf{b}].$$

1.2.7 **Recipročni** (konjugovani) **sistem vektora**

Definicija.

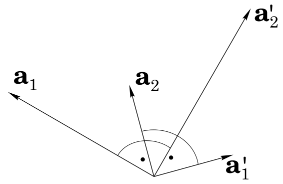
Za dva skupa vektora $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ i $\mathbf{a}_1^{'}, \ldots, \mathbf{a}_n^{'}$ kažemo da predstavljaju **recipročni** ili **konjugovani** sistem, ako je njihov skalarni proizvod dat relacijom

$$\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{a}_j' = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \qquad i, j = 1, \ldots, n, \tag{1.25}$$

što može da se predstavi tabelarno (za $n = 3$)

	$\mathbf{a}'_1$	$\mathbf{a}'_2$	$\mathbf{a}'_3$
$\mathbf{a}_1$	1	0	0
$\mathbf{a}_2$	0	1	0
$\mathbf{a}_3$	0	0	1

ili slikom, za $n = 2$ (sl. 1.14).



Slika 1.14: Recipročni vektori

1.2.8 Linearna zavisnost vektora. Dimenzija prostora

Uvedimo sada pojam linearna zavisnost skupa vektora $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \cdots, \mathbf{a}_n$.

Definicija.

Vektori $\mathbf{a}_1, \cdots, \mathbf{a}_n$ su **linearno zavisni** ako postoje brojevi $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$, od kojih je bar jedan različit od nule, takvi da važi relacija

$$\alpha_1\mathbf{a}_1 + \alpha_2\mathbf{a}_2 + \cdots + \alpha_n\mathbf{a}_n = 0. \tag{1.26}$$

Suprotno, vektori su **linearno nezavisni**, ako relacija (1.26) važi samo kada je

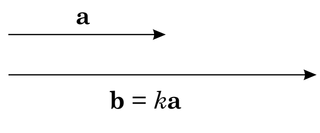
$$\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0, \tag{1.27}$$

Definicija.

Vektorski prostor je n–**dimenzionalan**, ako u njemu postoji n linearno nezavisnih vektora, a svaki sistem od $n+1$ vektora je linearno zavisan.

Pokažimo ovo na nekoliko primera.

Posmatrajmo dva vektora $\mathbf{a}$ i $\mathbf{b}$ istog pravca i istih ili suprotnih smerova (sl. 1.15)



Slika 1.15: Kolinearni vektori

Tada postoji (realan) broj $k \neq 0$ takav da je:

$$\mathbf{b} = k\mathbf{a}, \tag{1.28}$$

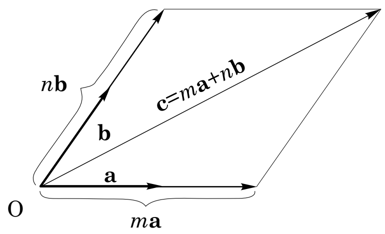
a vektore $\mathbf{a}$ i $\mathbf{b}$ nazivamo **kolinearni** vektori.

Ako stavimo da je $k = -\frac{\alpha}{\beta}$, tada relacija (1.28) može da se predstavi u obliku:

$$\alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b} = 0. \tag{1.29}$$

Odavde zaključujemo da su dva kolinearna (ili paralelna) vektora linearno zavisna, jer su α i β različiti od nule. Dakle, možemo da kažemo da svi vektori $k\mathbf{a}$, za proizvoljno i realno k i $\mathbf{a} \neq 0$, formiraju jednodimenzionalni (1–D) realni linearni vektorski prostor. Razlog za uvođenje ovakve terminologije sledi iz činjenice da svakoj tački na osi može da se pridruži vektor položaja[11] $k\mathbf{a}$ i obrnuto, svakom vektoru, iz ovog skupa, odgovara jedna tačka na osi (jednoznačna korespondencija).

Posmatrajmo sada dva nekolinearna vektora $\mathbf{a}$ i $\mathbf{b}$. Predstavimo ih orijentisanim dužima, sa zajedničkim početkom O (sl. 1.16).



Slika 1.16: Nekolinearni vektori

Proizvoljan vektor $\mathbf{c}$, koji leži u ravni vektora $\mathbf{a}$ i $\mathbf{b}$, može da se predstavi u obliku

$$\mathbf{c} = m\mathbf{a} + n\mathbf{b}. \tag{1.30}$$

Ova relacija sledi iz pravila o sabiranju vektora i iz definicije množenja vektora skalarom. Iz relacije (1.30), slično kao u slučaju (1.28) i (1.29), uzimajući:

$$m = -\frac{\alpha}{\gamma}, \quad n = -\frac{\beta}{\gamma}, \tag{1.31}$$

dobijamo

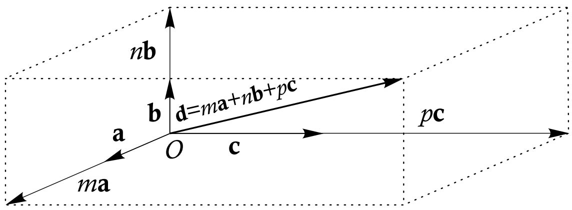
$$\alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b} + \gamma\mathbf{c} = 0, \tag{1.32}$$

što predstavlja uslov linearne zavisnosti skupa od tri vektora, jer nisu sve konstante jednake nuli. Na ovaj način možemo svaku tačku u ravni da odredimo nekim vektorom položaja $\mathbf{c}$, tj. kombinacijom vektora $m\mathbf{a} + n\mathbf{b}$, gde su $\mathbf{a}$ i $\mathbf{b}$ dva linearno nezavisna vektora, a m i n odgovarajući realni brojevi. Zato možemo da kažemo

[11] Vektor položaja tačke A je vektor $\mathbf{r}_A = \overrightarrow{OA}$, čiji je početak u koordinatnom početku O, a kraj u tački A.

da kombinacija $m\mathbf{a} + n\mathbf{b}$ definiše dvodimenzionalni (2–D) realni linearni vektorski prostor. Vidimo da je u 2–D linearnom vektorskom prostoru skup od tri vektora uvek linearno zavisan.

Posmatrajmo sada tri nekomplanarna[12] vektora **a**, **b** i **c**, koji polaze iz zajedničkog početka O (sl. 1.17).



Slika 1.17:

Kao i u prethodnim slučajevima, možemo svaki naredni vektor **d** da predstavimo relacijom

$$\mathbf{d} = m\mathbf{a} + n\mathbf{b} + p\mathbf{c}, \tag{1.33}$$

odakle sledi da između četiri vektora **a**, **b**, **c** i **d** uvek postoji netrivijalna relacija oblika

$$\alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b} + \gamma\mathbf{c} + \delta\mathbf{d} = 0. \tag{1.34}$$

Dakle, relacija (1.33), za skup svih realnih brojeva m, n, i p, određuje trodimenzionalni realni linearni vektorski prostor. Možemo da zamislimo da krajnja tačka vektora **d** "prebriše" sve tačke 3–D prostora, kada parametri m, n, i p uzimaju sve vrednosti iz skupa realnih brojeva. Znači da je u 3–D linearnom vektorskom prostoru svaki skup od četiri vektora linearno zavisan. Iskoristićemo ovu vezu između broja linearno nezavisnih vektora sa dimenzijom prostora da bismo postavili koncept dimenzionalnosti linearnog trodimenzionalnog vektorskog prostora, uz napomenu da se koncept lako može da uopšti na n – dimenzionalni vektorski prostor.

Vektore **a**, **b** i **c**, u (1.32), zvaćemo **bazni vektori**, a sabirke $m\mathbf{a}$, $n\mathbf{b}$ i $p\mathbf{c}$ **komponente vektora d**. Brojeve m, n i p zvaćemo kratko **koordinata**[13] u odnosu na bazne vektore **a**, **b** i **c**.

Kad jednom odredimo skup baznih vektora, tada je svaki vektor jednoznačno određen trojkom (u 3–D) koordinata.

Skup od tri međusobno ortogonalna vektora u 3–D prostoru je linearno nezavisan[14]. Ako izaberimo za bazne vektore jedinične ortogonalne vektore $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ i $\mathbf{e}_3$,

[12] Vektori su komplanarni ako su svi paralelni jednoj ravni.

[13] Napomenimo da u prostorima u kojima nije definisan skalarni proizvod, kao što je afini prostor, nema smisla govoriti o pojmovima koji se preko njega definišu, kao što su intenzitet i ugao između dva vektora. U literaturi je uobičajeno da se ove veličine, koje smo nazvali koordinate, nazivaju i afine koordinate, čime se ističe priroda tog (afinog) prostora.

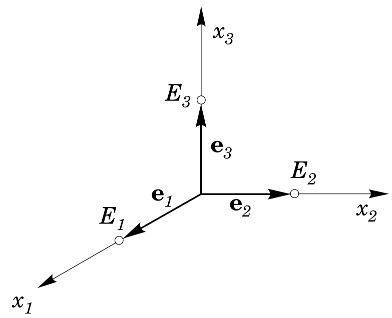
[14] Posmatrajmo skup od tri međusobno ortogonalna vektora, za koji je $\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{a}_j = A_{ij}\delta_{ij}$ (ne sabirati po i, j), gde je $A_{ij} = |\mathbf{a}_i| \cdot |\mathbf{a}_j|$. Pođimo od toga da je linearna kombinacija ovih vek-

tada svaki (sledeći) vektor, recimo $\mathbf{x}$, možemo da predstavimo relacijom

$$\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + x_3\mathbf{e}_3. \tag{1.35}$$

Tačka u 3–D prostoru je geometrijski objekat (ne zavisi od koordinatnog sistema). Ako uvedemo koordinatni sistem, možemo da je jednoznačno odredimo sa uređenom trojkom brojeva (x_1, x_2, x_3), čije elemente zovemo **koordinate vektora** (u daljem tekstu kratko **koordinate**) $\mathbf{x}$. Za vektore $\mathbf{e}_i$, i=1,2,3, kažemo da formiraju bazu (osnovu) ili koordinatni sistem (sl. 1.18). Ove vektore ($\mathbf{e}_i$) zovemo (kao što smo ranije rekli) bazni vektori. Vrhovi (krajnje tačke) E_i baznih vektora $\mathbf{e}_i$ (i=1,2,3) imaju koordinate:

$$\begin{aligned} E_1 &: \quad (1,0,0), \\ E_2 &: \quad (0,1,0), \\ E_3 &: \quad (0,0,1), \end{aligned} \tag{1.36}$$



Slika 1.18:

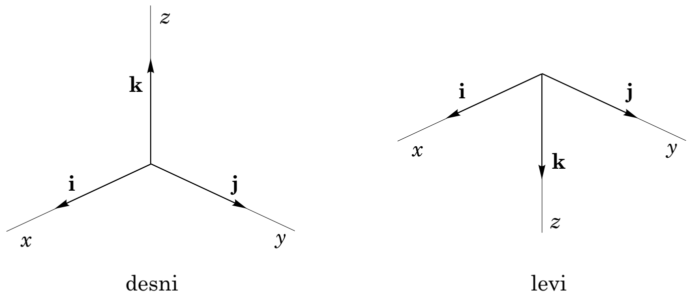
Naime, ranije smo definisali vektor geometrijski, korišćenjem orijentisane duži. Uvodeći koordinatni sistem, vektor možemo da opišemo algebarski.

Već smo rekli da se pravougli, pravolinijski koordinatni sistem zove Dekartov koordinatni sistem. Uobičajeno je da ose Dekartovog koordinatnog sistema umesto x_1, x_2 i x_3 označavamo sa x, y i z, respektivno, a odgovarajuće bazne vektore $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ i $\mathbf{e}_3$ sa $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ i $\mathbf{k}$, respektivno. Napomenimo da se koriste levi i desni koordinatni sistem, mada desni češće (sl. 1.19).

tora $\sum_{i=1}^{3}\lambda_i\mathbf{a}_i = 0$. Množeći skalarno poslednju relaciju sa $\mathbf{a}_j$ ($j = 1,2,3$), a prema uslovu ortogonalnosti, dobijamo

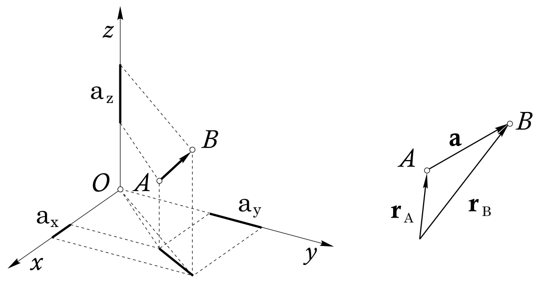
$$\sum_{i=1}^{3}\lambda_i\mathbf{a}_i\cdot\mathbf{a}_j = \sum_{i=1}^{3}\lambda_i(\mathbf{a}_i\cdot\mathbf{a}_j) = \sum_{i=1}^{3}\lambda_i A_{ij}\delta_{ij} = \lambda_j A_{jj} = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_j = 0,$$

što predstavlja uslov linearne nezavisnosti za posmatrane vektore.



Slika 1.19:

Posmatrajmo sada proizvoljan vektor $\mathbf{a}$, predstavljen orijentisanom duži $\overrightarrow{AB}$, pri čemu je A početak, a B kraj duži AB (sl. 1.20).



Slika 1.20:

Neka su koordinate tačaka A (x_A, y_A, z_A) i B (x_B, y_B, z_B), a $\mathbf{r}_A$ i $\mathbf{r}_B$ vektori položaja ovih tačaka, tada je:

$$\overrightarrow{AB} = \mathbf{a} = \mathbf{r}_B - \mathbf{r}_A \quad \Rightarrow$$
$$a_x = x_B - x_A, \; a_y = y_B - y_A \; \text{ i } \; a_z = z_B - z_A \tag{1.37}$$

gde su a_x, a_y i a_z merni brojevi vektora $\mathbf{a}$ u odnosu na koordinatni sistem, što kratko označavamo, radi jednostavnosti, sa

$$\mathbf{a} = [a_x,\, a_y,\, a_z] \tag{1.38}$$

umesto sa

$$\mathbf{a} = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k}.$$

Izrazimo sada ranije definisane pojmove preko odgovarajućih mernih brojeva.

Intenzitet vektora $\mathbf{a}$, po definiciji je rastojanje između tačaka A i B, što u Euklidskom prostoru, prema (1.3), može da se predstavi relacijom

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2} = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \tag{1.39}$$

Ako za početak vektora izaberemo koordinatni početak, tada su koordinate vrha vektora jednake mernim brojevima vektora. Napred je već rečeno da se ovako konstruisan vektor zove **vektor položaja** i obično se označava sa **r**.

Iz (1.37) takođe vidimo da merni brojevi a_x, a_y, a_z vektora **a** ne zavise od izbora početne tačke za **a**, jer ako vektor **a** pomerimo, duž pravca AB, tada se menjaju koordinate tačke A i B za istu vrednost, pa njihova razlika ostaje ista. Dakle, ako je dat fiksni Dekartov koordinatni sistem tada je svaki vektor jednoznačno određen uređenom trojkom brojeva (koordinatama).

Na ovaj način možemo da definišemo i nula vektor **0** kao vektor čije su koordinate $[0, 0, 0]$.

Za dva vektora $\mathbf{a}$=$[a_x,\, a_y,\, a_z]$ i $\mathbf{b}$=$[b_x,\, b_y,\, b_z]$ kažemo da su jednaka akko su odgovarajuće koordinate jednake. Naime, vektorska jednačina:

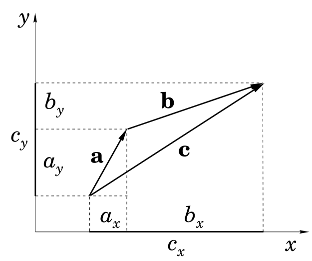
$$\mathbf{a} = \mathbf{b} \tag{1.40}$$

ekvivalentna je trima skalarnim jednačinama:

$$a_x = b_x, \quad a_y = b_y, \quad a_z = b_z. \tag{1.41}$$

Vektorski zbir, preko koordinata, možemo da odredimo na sledeći način (sl. 1.19.):

$$\mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{b} = [a_x + b_x,\, a_y + b_y,\, a_z + b_z] = [c_x,\, c_y,\, c_z] \tag{1.42}$$



Slika 1.21:

Množenje vektora skalarom

$$\alpha\mathbf{a} = [\alpha a_x,\, \alpha a_y,\, \alpha a_z] \tag{1.43}$$

Skalarni proizvod

$$\mathbf{a}\cdot \mathbf{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z \tag{1.44}$$

jer je:

$$\mathbf{e}_i\cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j. \end{cases} \tag{1.45}$$

Ovo sledi iz pretpostavke da su bazni vektori ortonormirani.

Vektorski proizvod

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}. \tag{1.46}$$

Vektorski proizvod može da se predstavi simboličkom determinantom, kao što je pokazano u zadatku 1.3, na str. 56. Naime, ovako predstavljen vektorski proizvod $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ jednak je izrazu koji se dobija razvijanjem gornje determinante po prvoj vrsti.

Mešoviti proizvod

$$\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}. \tag{1.47}$$

Napomenimo da je mešoviti proizvod jednak nuli, ako su ova tri vektora komplanarna, tj. linearno zavisna. Specijalno, ako je $\mathbf{a}$ kolinearno recimo sa $\mathbf{b}$ tada je $\mathbf{a} = \lambda\mathbf{b}$, pa zamenom u (1.47) dobijamo

$$\mathbf{a}\cdot(\lambda\mathbf{a}\times\mathbf{c}) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ \lambda a_x & \lambda a_y & \lambda a_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ a_x & a_y & a_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = 0.$$

Ovde smo iskoristili osobine determinante:

- determinanta se množi nekim brojem tako što se elementi jedne vrste ili kolone množe tim brojem i

- vrednost determinante je jednaka nuli ako su bilo koje dve vrste ili kolone jednake.

Na sličan način bismo dobili i u slučaju kolinearnosti vektora $\mathbf{a}$ i $\mathbf{c}$.

1.3 Aritmetički model linearnog vektorskog prostora

Korišćenje "običnih" vektora u trodimenzionalnom prostoru da bi prikazali fizičke veličine, kao što su: vektor položaja, brzina, ubrzanje, sila itd, nam je blisko. Sada definišimo apstraktni **linearni vektorski prostor** pomoću dobro poznatih osobina takvih vektora.

Definicija.

Neka je $\mathbb{X}$ neprazan skup čije elemente $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}, \dots,$ nazivamo vektori i neka je T skup svih realnih (kompleksnih) brojeva, čije elemente $\alpha, \beta, \dots,$ nazivamo skalari. Par $(\mathbb{X}, T)$ obrazuje **linearni vektorski prostor** ili kraće vektorski prostor (realni ili kompleksni, što zavisi od skupa skalara T), sa sledećom algebarskom strukturom:

i) svakom uređenom paru $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ vektora iz $\mathbb{X}$ odgovara treći vektor iz $\mathbb{X}$, koji zovemo njegov zbir, a označavamo sa $\mathbf{x} + \mathbf{y}$. Operaciju, koja uređenom paru $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ pridružuje vektor $\mathbf{x} + \mathbf{y}$ nazivamo **sabiranje vektora**.

ii) Svakom vektoru $\mathbf{x} \in \mathbb{X}$ i svakom skalaru $\alpha \in T$ odgovara vektor iz $\mathbb{X}$, koji zovemo proizvod vektora $\mathbf{x}$ skalarom α, a označavamo sa $\alpha\mathbf{x}$. Operaciju koja vektoru $\mathbf{x}$ iz $\mathbb{X}$ i skalaru α pridružuje vektor $\alpha\mathbf{x}$ nazivamo **množenje vektora skalarom**.

Operacije sabiranja vektora i množenja vektora skalarom imaju sledeće osobine:

1° sabiranje je komutativno

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{y} + \mathbf{x}, \tag{1.48}$$

2° sabiranje je asocijativno

$$(\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \mathbf{z} = \mathbf{x} + (\mathbf{y} + \mathbf{z}), \tag{1.49}$$

3° u $\mathbb{X}$ postoji nula vektor $\mathbf{0}$, takav da je

$$\mathbf{x} + \mathbf{0} = \mathbf{x}, \quad \text{za svako}\, \mathbf{x} \in \mathbb{X}, \tag{1.50}$$

4° svakom vektoru $\mathbf{x} \in \mathbb{X}$ odgovara u $\mathbb{X}$ simetričan vektor, koji označavamo sa $-\mathbf{x}$, takav da je

$$\mathbf{x} + (-\mathbf{x}) = \mathbf{0}. \tag{1.51}$$

Množenje skalarom je distributivno:

5° u odnosu na sabiranje vektora

$$\alpha(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \alpha\mathbf{x} + \alpha\mathbf{y}, \tag{1.52}$$

6° i u odnosu na sabiranje skalara

$$(\alpha + \beta)\mathbf{x} = \alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{x}, \tag{1.53}$$

7° množenje skalarom je asocijativno

$$\alpha(\beta\mathbf{x}) = (\alpha\beta)\mathbf{x}, \tag{1.54}$$

8° množenje vektora skalarom 1 ostavlja sve vektore nepromenjene, tj.

$$1\mathbf{x} = \mathbf{x}, \quad \text{gde} \quad 1 \in T. \tag{1.55}$$

Definicija.

Vektorski prostor $(\mathbb{X}, T)$ je **normiran** ako postoji nenegativna funkcija $\|\mathbf{x}\|$, definisana za svako $\mathbf{x} \in \mathbb{X}$, koja ima sledeće osobine:

$$\|\mathbf{0}\| = 0 \quad \text{i} \quad \|\mathbf{x}\| > 0, \quad \text{za} \quad \mathbf{x} \neq \mathbf{0}, \tag{1.56}$$

$$\|\lambda\mathbf{x}\| = |\lambda| \cdot \|\mathbf{x}\|, \quad \text{za svako} \quad \lambda \in T, \tag{1.57}$$

$$\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\| \quad \text{(pravilo trougla)}. \tag{1.58}$$

Ovu funkciju nazivamo **norma** od $\mathbf{x}$.

Definicija.

Neka je $\mathbb{X}$ skup čije ćemo elemente označavati sa $\mathbf{x}$,$\mathbf{y}$.... Ako svakom uređenom paru ($\mathbf{x}$,$\mathbf{y}$) iz $\mathbb{X}$ pridružimo realan broj $d(\mathbf{x},\mathbf{y})$, koji ima osobine:

$$0 \leq d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) < +\infty, \tag{1.59}$$

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{y}, \tag{1.60}$$

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = d(\mathbf{y}, \mathbf{x}), \tag{1.61}$$

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq d(\mathbf{x}, \mathbf{z}) + d(\mathbf{z}, \mathbf{y}), \tag{1.62}$$

kažemo da je skup $\mathbb{X}$ snabdeven metrikom d. Skup $\mathbb{X}$ snabdeven metrikom d zovemo **metrički prostor**. Njegove elemente zovemo tačkama, a $d(\mathbf{x},\mathbf{y})$ **rastojanjem** između tačaka $\mathbf{x}$ i $\mathbf{y}$. Metrički prostor je, dakle, par $(\mathbb{X}, d)$.

U normiranom vektorskom prostoru metrika se uvodi sa:

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|. \tag{1.63}$$

Označimo sa $\mathbb{R}^n$ skup čije su tačke uređene n–torke realnih (kompleksnih) brojeva i uvedimo metriku u ovaj prostor sa:

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}. \tag{1.64}$$

Prostor $\mathbb{R}^n$ zovemo Euklidski (realni ili kompleksni) metrički prostor, a ovako definisano d zadovoljava uslove (1.59)–(1.62).

Uvedimo sada pojam linearnog operatora. Posmatrajmo linearnu vektorsku funkciju, vektorske promenljive, kojom se svakom vektoru $\mathbf{x}$ pridružuje vektor $A(\mathbf{x})$, a za koju važi

$$A(\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y}) = \alpha A(\mathbf{x}) + \beta A(\mathbf{y}), \tag{1.65}$$

gde su α i β skalari, a $\mathbf{x}$ i $\mathbf{y}$ vektori. Ovako definisana funkcija zove se **linearni operator**.

Linearni operator je potpuno određen ako znamo vektore $A(\mathbf{e}_i)$, gde vektori $\mathbf{e}_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ čine skup baznih vektora. Vektore $A(\mathbf{e}_i)$ možemo da izrazimo preko baznih vektora $\mathbf{e}_i$

$$A(\mathbf{e}_i) = \sum_{j=1}^{n} A_{ji}\mathbf{e}_j, \tag{1.66}$$

gde je A_{ji} j–ta komponenta vektora $A(\mathbf{e}_i)$. Posmatrajmo sada proizvoljan vektor $\mathbf{x}$, a $A(\mathbf{x})$ označimo sa $\mathbf{y}$, tj. $A(\mathbf{x}) = \mathbf{y}$, tada možemo da uspostavimo sledeće relacije, koristeći (1.65) i (1.66). Izrazimo prvo $\mathbf{y}$ preko baznih vektora

$$\mathbf{y} = \sum_{j=1}^{n} y_j\mathbf{e}_j.$$

Kako je:

$$\begin{aligned}\mathbf{y} = A(\mathbf{x}) = A\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\mathbf{e}_i\right) &= \\ = \sum_{i=1}^{n} x_i A(\mathbf{e}_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{j=1}^{n} A_{ji}\mathbf{e}_j &= \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n} A_{ji}x_i\right)\mathbf{e}_j,\end{aligned} \tag{1.67}$$

to sledi da su koordinate vektora $\mathbf{x}$ i $\mathbf{y}$ povezane relacijom

$$y_j = \sum_{i=1}^{n} A_{ji}x_i. \tag{1.68}$$

Možemo sve ovo, takođe, da predstavimo i na sledeći način. Recimo da smo vezu između vektora $\mathbf{x}$ i $\mathbf{y}$ uspostavili preko linearnog operatora A primenjenog na $\mathbf{x}$. Simbolički ovo možemo da označimo sa:[15]

$$\mathbf{y} = A\mathbf{x}. \tag{1.69}$$

Brojeve A_{ji} zovemo komponente linearnog operatora A (ili vektorske funkcije A) u koordinatnom sistemu $\mathbf{e}_i$. Specijalno, iz (1.66) sledi da je A_{ji} j–ta komponenta vektora $A\mathbf{e}_i$.

[15]Napomenimo da se, u slučaju linearnog operatora A, ravnopravno koristi i oznaka $A\mathbf{x}$.

Kao i vektori, linearni operatori često imaju fizički smisao, koji je nezavisan od posebnog koordinatnog sistema i može da se opiše bez referentnog koordinatnog sistema. Simbolički to može da se predstavi na sledeći način.

Operacije **sabiranje** i **množenje** linearnih operatora i **množenje linearnog operatora skalarom** mogu da se definišu relacijama:

$$(A+B)\mathbf{x} = A\mathbf{x} + B\mathbf{x} \tag{1.70}$$

$$(AB)\mathbf{x} = A(B\mathbf{x}) \tag{1.71}$$

$$(\lambda A)\mathbf{x} = \lambda(A\mathbf{x}), \tag{1.72}$$

za svako $\mathbf{x} \in \mathbb{X}$, gde $\mathbb{X}$ predstavlja vektorski prostor.

U opštem slučaju je $AB \neq BA$. Ako su ovi proizvodi jednaki, tada kažemo da je "množenje" komutativno.

Definišemo i operatore: nula (0) i identički operator (I), relacijama

$$0\mathbf{x} = 0 \quad \text{i} \quad I\mathbf{x} = \mathbf{x}, \tag{1.73}$$

za svaki vektor $\mathbf{x}$ iz posmatranog prostora.

Dva operatora su jednaka ako važi

$$A\mathbf{x} = B\mathbf{x} \tag{1.74}$$

za svaki vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{X}$.

Konačno, ako postoji operator A^{-1} sa osobinom

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I, \tag{1.75}$$

tada taj operator $\left(A^{-1}\right)$ zovemo **inverzni** operator operatora A. Za operatore koji imaju inverzne operatore kažemo da su **nesingularni**.

1.4 Vektorska analiza

1.4.1 Vektorska funkcija

Neka je T skup realnih (kompleksnih) brojeva (skalara), a $\mathbb{V}$ skup vektora.

Definicija.

Ako svakoj vrednosti $t \in T$, po nekom zakonu odgovara jedna određena vrednost vektora $\mathbf{v} \in \mathbb{V}$, tada kažemo da je **v vektorska funkcija** skalarnog argumenta t i kratko pišemo

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}(t). \tag{1.76}$$

Vektorsku funkciju možemo da definišemo i na drugi način:
vektorskom funkcijom $\mathbf{v}(t)$ jednog skalarnog argumenta t nazivamo jednoznačno preslikavanje skupa realnih (kompleksnih) brojeva (skalara) T na skup vektora $\mathbb{V}$, prema određenom zakonu

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}(t). \tag{1.77}$$

Skup realnih (kompleksnih) brojeva (skalara) T predstavlja **oblast definisanosti** funkcije $\mathbf{v}(t)$.

Kako je, prema (1.38), $\mathbf{v}$=$[v_1, v_2, v_3]$ (u 3–D), to se jednoznačno preslikavanje skupa T na skup $\mathbb{V}$ svodi na preslikavanje prvog skupa na drugi skup preko tri skalarne funkcije, koje predstavljaju projekcije vektorske funkcije $\mathbf{v}(t)$ na koordinatne ose

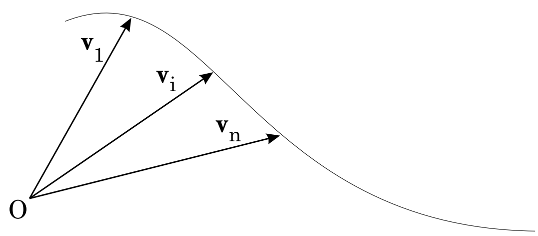
$$\mathbf{v}(t) = [v_1(t), v_2(t), v_3(t)]. \tag{1.78}$$

Na osnovu ovoga, analiza vektorskih funkcija jednog skalarnog argumenta svodi se na analizu tri (u 3–D) skalarne funkcije–projekcije vektora $\mathbf{v}(t)$ na ose odgovarajućeg koordinatnog sistema.

1.4.2 Hodograf vektorske funkcije

Definicija.

Hodograf vektorske funkcije $\mathbf{v}$=$\mathbf{v}(t)$ je geometrijsko mesto krajnjih tačaka vektora $\mathbf{v}$ za sve moguće vrednosti t, pri čemu se počeci ovih vektora nalaze u jednoj fiksnoj tački, recimo O, koju zovemo **pol hodografa**.



Slika 1.22: Hodograf vektorske funkcije

U slučaju kada vektorska funkcija predstavlja vektor položaja (u 3–D), tada hodograf ove vektorske funkcije predstavlja krivu u prostoru (3–D). Vektorska jednačina ove krive se označava sa

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t). \tag{1.79}$$

Njoj odgovaraju tri skalarne (parametarske) jednačine:

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t), \tag{1.80}$$

koje predstavljaju jednačinu krive u prostoru, u parametarskom obliku.

1.4.3 Granični procesi. Neprekidnost

Osnovni pojmovi u vektorskoj analizi, kao što su *konvergencija* i *neprekidnost*, mogu da se uvedu na sledeći način.

Definicija.

Za niz vektora $\mathbf{a}_n$, $n = 1, 2, \ldots$, kažemo da **konvergira** ako postoji vektor $\mathbf{a}$ takav da je

$$\lim_{n\to\infty} |\mathbf{a}_n - \mathbf{a}| = 0. \tag{1.81}$$

Vektor $\mathbf{a}$ zovemo **granični vektor** niza $\mathbf{a}_n$ i pišemo

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{a}_n = \mathbf{a}. \tag{1.82}$$

Ako uvedemo neki koordinatni sistem, tada za niz vektora $\mathbf{a}_n$ kažemo da konvergira ka $\mathbf{a}$ akko tri niza (u 3-D) komponenti tog vektora konvergiraju ka odgovarajućim komponentama vektora $\mathbf{a}$.

Definicija.

Za vektorsku funkciju $\mathbf{v}(t)$ kaže se da ima za **graničnu vrednost** vektor $\mathbf{l}$, kada argument t teži ka t_0, ako se za unapred dati broj $\varepsilon > 0$ može odrediti neki broj $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, takav da je za svako t, za koje je

$$|t - t_0| < \delta, \tag{1.83}$$

zadovoljena relacija

$$|\mathbf{v}(t) - \mathbf{l}| < \varepsilon. \tag{1.84}$$

Simbolički ovo označavamo sa:

$$\lim_{t\to t_0} \mathbf{v}(t) = \mathbf{l} \quad \text{ili} \quad \mathbf{v}(t) \to \mathbf{l} \quad \text{kada} \quad t \to t_0. \tag{1.85}$$

Definicija.

Vektorska funkcija $\mathbf{v}(t)$ je **neprekidna** u tački $t = t_0$, ako:

1° je definisana u tački $t = t_0$,

2° ima graničnu vrednost kada $t \to t_0$,

3° važi

$$\lim_{t \to t_0} \mathbf{v}(t) = \mathbf{v}(t_0). \tag{1.86}$$

Neka su $\mathbf{v}(t)$ i $\mathbf{v}(t + \Delta t)$ vrednosti vektorske funkcije $\mathbf{v}$ za vrednosti argumenata t i $t + \Delta t$ (Δt je priraštaj argumenta). Razliku

$$\mathbf{v}(t + \Delta t) - \mathbf{v}(t) = \Delta \mathbf{v}(t) \tag{1.87}$$

zovemo **geometrijski priraštaj** funkcije $\mathbf{v}(t)$. Predstavimo ovo na hodografu funkcije $\mathbf{v}(t)$, slika 1.23. Geometrijski priraštaj prikazan je vektorom $\overrightarrow{AB}$.

Možemo da damo još jednu definiciju neprekidnosti.

Definicija.

Vektorska funkcija $\mathbf{v}(t)$ je neprekidna za datu vrednost argumenta t, ako njen geometrijski priraštaj $\Delta \mathbf{v}$ teži nuli, kada priraštaj argumenta teži nuli, tj. kada je

$$\lim_{\Delta t \to 0} |\Delta \mathbf{v}(t)| = 0. \tag{1.88}$$

Kako je $\mathbf{v}(t) = [v_1(t), v_2(t), v_3(t)]$, to je potreban i dovoljan uslov neprekidnosti funkcije $\mathbf{v}(t)$ u tački t da projekcije $v_i(t)$ ovog vektora budu neprekidne funkcije u toj tački, tj. da je:

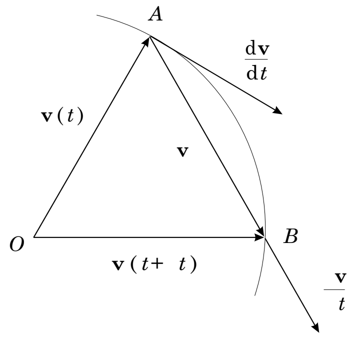
$$\lim_{\Delta t \to 0} \Delta v_i(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{\Delta t \to 0} [v_i(t + \Delta t) - v_i(t)] = 0, \quad i = 1, 2, 3. \tag{1.89}$$

Odavde neposredno sledi i neprekidnost funkcije $|\mathbf{v}(t)|$, tj.

$$|\Delta \mathbf{v}(t)| = \sqrt{(\Delta v_1(t))^2 + (\Delta v_2(t))^2 + (\Delta v_3(t))^2} \to 0. \tag{1.90}$$

1.4.4 Izvod vektorske funkcije jedne skalarne promenljive

Posmatrajmo sada neku (proizvoljnu) vrednost skalara t i odgovarajuću vrednost vektora $\mathbf{v}(t)$. Ovaj vektor predstavljen je, na slici 1.23, orijentisanom duži $\overrightarrow{OA}$.



Slika 1.23: Priraštaj vektorske funkcije

Povećajmo sada vrednost skalara t za vrednost Δt. Vektor koji odgovara vrednosti skalara $t + \Delta t$ označimo sa $\mathbf{v}(t + \Delta t)$. Na slici 1.23 ovaj vektor predstavljen je orijentisanom duži $\overrightarrow{OB}$. Promena vektora $\mathbf{v}(t)$, koja odgovara priraštaju skalara t za Δt, data je razlikom

$$\Delta \mathbf{v} = \mathbf{v}(t + \Delta t) - \mathbf{v}(t). \tag{1.91}$$

Sa slike 1.23 vidimo da je ova razlika, geometrijski priraštaj, predstavljena orijentisanom duži $\overrightarrow{AB}(=\Delta \mathbf{v})$.

Posmatrajmo sada vektor $\frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t}$, koji predstavlja srednju promenu veličine $\mathbf{v}$ u odnosu na parametar t. Ovako definisani vektor ima isti pravac kao i vektor $\Delta \mathbf{v}$ (Δt je skalar). Smer je isti, ako je $\Delta t > 0$, a suprotan, ako je $\Delta t < 0$.

Definicija.

Veličina definisana relacijom

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t} \tag{1.92}$$

zove se **izvod vektora v** (običan izvod, za razliku od izvoda u pravcu, koji će biti definisan kasnije) u odnosu na promenu skalara t, ako taj limes postoji. Ovu veličinu kratko označavamo sa $\mathbf{v}'$.

Simbolički izvod označavamo sa $\frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t}$, tako da je

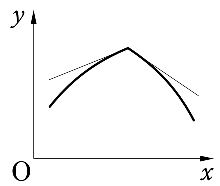
$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t}. \tag{1.93}$$

Definicija.

Za vektorsku funkciju kažemo da je **diferencijabilna** u tački t, ako postoji prvi izvod u toj tački, tj. postoji

$$\mathbf{v}^{'} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t}. \tag{1.94}$$

Funkcija koja je diferencijabilna je i neprekidna. Obrnuto ne važi (vidi primer na sl. 1.24).



Slika 1.24: Grafički primer neprekidne nediferencijabilne funkcije.

1.4.5 Osobine izvoda

Navedimo neke osobine izvoda:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathbf{a}+\mathbf{b}) = \frac{\mathrm{d}\mathbf{a}}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}\mathbf{b}}{\mathrm{d}t}, \tag{1.95}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m\mathbf{a}) = m\frac{\mathrm{d}\mathbf{a}}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}\mathbf{a}, \quad m = m(t), \tag{1.96}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathbf{a}\cdot \mathbf{b}) = \frac{\mathrm{d}\mathbf{a}}{\mathrm{d}t}\cdot \mathbf{b} + \mathbf{a}\cdot \frac{\mathrm{d}\mathbf{b}}{\mathrm{d}t}, \tag{1.97}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathbf{a}\times \mathbf{b}) = \frac{\mathrm{d}\mathbf{a}}{\mathrm{d}t}\times \mathbf{b} + \mathbf{a}\times \frac{\mathrm{d}\mathbf{b}}{\mathrm{d}t}. \tag{1.98}$$

1.4.6 Diferencijal vektorske funkcije

Pretpostavimo da geometrijski priraštaj vektorske funkcije $\mathbf{v}(t)$ može da se predstavi u obliku:

$$\Delta \mathbf{v} = \mathbf{v}(t+\Delta t) - \mathbf{v}(t) = \mathbf{L}(t)\Delta t + \boldsymbol{\varepsilon}(\Delta t), \tag{1.99}$$

pri čemu je $\boldsymbol{\varepsilon}(\Delta t)$, kada $\Delta t \to 0$, vektorska infinitezimala višeg reda u odnosu na Δt, tj.:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\boldsymbol{\varepsilon}(\Delta t)}{\Delta t} = \mathbf{0}. \tag{1.100}$$

Definicija.

Diferencijal vektorske funkcije $\mathbf{v}(t)$ je linearni deo priraštaja argumenta $\mathbf{L}(t)\Delta t$, u njenom geometrijskom priraštaju. Simbolički ga označavamo sa

$$\mathrm{d}\mathbf{v} = \mathbf{L}(t)\Delta t. \tag{1.101}$$

Za dovoljno male vrednosti priraštaja promenljive $\Delta t = \mathrm{d}t$, možemo sa diferencijalom da aproksimiramo geometrijski priraštaj funkcije $\mathbf{v}(t)$, tj.

$$\mathbf{v}(t+\Delta t) - \mathbf{v}(t) \approx \mathbf{L}(t)\Delta t, \tag{1.102}$$

odnosno

$$\mathbf{v}(t+\Delta t) - \mathbf{v}(t) \approx \mathrm{d}\mathbf{v}. \tag{1.103}$$

Iz (1.99) sada sledi

$$\frac{\mathbf{v}(t+\Delta t) - \mathbf{v}(t)}{\Delta t} = \mathbf{L}(t) + \frac{\varepsilon(\Delta t)}{\Delta t}, \tag{1.104}$$

odnosno, prema (1.100) i (1.93), dobijamo

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathbf{v}(t+\Delta t) - \mathbf{v}(t)}{\Delta t} = \mathbf{L}(t) = \frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{v}'. \tag{1.105}$$

Sada (1.101) postaje

$$\mathrm{d}\mathbf{v} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t} \cdot \Delta t = \mathbf{v}' \cdot \mathrm{d}t. \tag{1.106}$$

Za dobijanje poslednje relacije (1.106) iskoristili smo definiciju izvoda (1.92) i pretpostavku da je $\Delta t = \mathrm{d}t$.

Dakle, diferencijal $\mathrm{d}\mathbf{v}$ je vektor čiji je pravac pravac tangente na hodograf.

1.4.7 Izvodi i diferencijali višeg reda

Kako je izvod vektorske funkcije takođe vektorska funkcija (iste promenljive), to možemo da nađemo izvode ove funkcije, pa dobijamo za drugi izvod

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathbf{v}') = \frac{\mathrm{d}^2\mathbf{v}}{\mathrm{d}t^2} = \mathbf{v}''. \tag{1.107}$$

Na ovaj način možemo da dobijemo i više izvode. Kao je po definiciji $\mathbf{v}^{(\mathbf{0})} = \mathbf{v}$, to za n–ti izvod dobijamo

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}^{n-1}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t^{n-1}}\right) = \frac{\mathrm{d}^n\mathbf{v}}{\mathrm{d}t^n} = \mathbf{v}^{(n)}, \tag{1.108}$$

pri čemu ova relacija važi za svako $n \in \mathbb{N}$.

n–ti diferencijal vektorske funkcije je, prema analogiji sa (1.106), proizvod n–tog izvoda i n–tog stepena diferencijala $\mathrm{d}t$, tj.

$$\mathrm{d}^n\mathbf{v} = \mathbf{v}^{(n)}\,\mathrm{d}t^n. \tag{1.109}$$

1.4.8 Parcijalni izvod vektorske funkcije više nezavisno promenljivih

Posmatrajmo sada vektorsku funkciju $\mathbf{v}$, koja zavisi od n skalarnih promenljivih t_i, $i = 1, 2, \cdots, n$, tj.

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}(t_1, t_2, \cdots, t_n) = \mathbf{v}(T). \tag{1.110}$$

T možemo da shvatimo kao tačku u n–dimenzionom prostoru, čije su koordinate t_i $(i = 1, 2, \cdots, n)$.

Nađimo sada priraštaj ove funkcije, ako se menja samo jedna od promenljivih, recimo k, a ostale promenljive su "zamrznute", tj. smatramo ih konstantnim. Priraštaj funkcije je

$$\mathbf{v}(t_1, \cdots, t_k + \Delta t_k, \cdots, t_n) - \mathbf{v}(t_1, \cdots, t_k, \cdots, t_n). \tag{1.111}$$

Definicija.

Granična vrednost

$$\lim_{\Delta t_k \to 0} \frac{\mathbf{v}(t_1, \cdots, t_k + \Delta t_k, \cdots, t_n) - \mathbf{v}(t_1, \cdots, t_k, \cdots, t_n)}{\Delta t_k} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t_k} \tag{1.112}$$

zove se **parcijalni izvod** vektorske funkcije $\mathbf{v}$, po promenljivoj t_k, ako ovaj postoji.

Kako je ova veličina takođe vektorska funkcija, istih promenljivih, to možemo da definišemo i više parcijalne izvode, na primer:

$$\frac{\partial^2 \mathbf{v}}{\partial t_i^2}, \quad \frac{\partial^2 \mathbf{v}}{\partial t_i \partial t_j}, \quad \frac{\partial^3 \mathbf{v}}{\partial t_i^3}, \quad \frac{\partial^3 \mathbf{v}}{\partial t_i^2 \partial t_j}, \quad \frac{\partial^3 \mathbf{v}}{\partial t_i \partial t_j \partial t_k}, \cdots \tag{1.113}$$

1.4.9 Diferencijal vektorske funkcije od n skalarnih promenljivih

Posmatrajmo vektorsku funkciju

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}(T), \tag{1.114}$$

tačku $T(t_1, t_2, \cdots, t_n)$ i neku drugu tačku $A(a_1, a_2, \cdots, a_n)$. Tačke A i T pripadaju n–dimenzionom Euklidskom prostoru E^n. Priraštaj funkcije $\mathbf{v}$ je

$$\Delta \mathbf{v} = \mathbf{v}(T) - \mathbf{v}(A) = \mathbf{v}(t_1, t_2, \cdots, t_n) - \mathbf{v}(a_1, a_2, \cdots, a_n). \tag{1.115}$$

Definicija.

Funkcija $\mathbf{v}$=$\mathbf{v}(T)$ je **diferencijabilna** funkcija u tački A, ako njen priraštaj može da se prikaže u obliku

$$\Delta \mathbf{v} = [\mathbf{p}_1(T)\,(t_1 - a_1) + \cdots + \mathbf{p}_n(T)\,(t_n - a_n)] + \boldsymbol{\omega}(T)\cdot\,\varrho(T, A), \tag{1.116}$$

gde je $\varrho(T, A)$ rastojanje između tačaka T i A (u Euklidskom prostoru)

$$\varrho = \sqrt{(t_1 - a_1)^2 + (t_2 - a_2)^2 + \cdots + (t_n - a_n)^2}, \tag{1.117}$$

a $\boldsymbol{\omega}(T)$ predstavlja neprekidnu funkciju u tački A, u kojoj je

$$\lim_{T \to A} \boldsymbol{\omega}(T) = \boldsymbol{\omega}(A) = 0. \tag{1.118}$$

Definicija.

Diferencijal vektorske funkcije $\mathbf{v}(T)$, u tački A, je linearni deo u odnosu na priraštaj promenljivih $\Delta t_i = t_i - a_i$, u izrazu za priraštaj funkcije $\Delta \mathbf{v}$, tj.

$$\mathrm{d}\mathbf{v}(T, A) = \mathbf{p}_1\,(t_1 - a_1) + \cdots + \mathbf{p}_n\,(t_n - a_n)\,. \tag{1.119}$$

Ako fiksiramo sve promenljive, osim k-te

$$(a_1 = t_1, \cdots, a_{k-1} = t_{k-1}, a_{k+1} = t_{k+1}, \cdots, a_n = t_n),$$

tada za rastojanje ϱ dobijamo

$$\varrho(T, A) = \sqrt{(t_k - a_k)^2} = |t_k - a_k|, \tag{1.120}$$

pa priraštaj funkcije ima oblik:

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{v} = \mathbf{v}(a_1, \cdots, a_{k-1}, t_k, a_{k+1}, \cdots, a_n) - \mathbf{v}(a_1, a_2 \cdots, a_n) = \\ \mathbf{p}_k(t_k - a_k) + \boldsymbol{\omega}(T)\cdot\,|t_k - a_k|. \end{aligned} \tag{1.121}$$

Iz poslednje relacije, uvodeći oznaku $t_k - a_k = \Delta t_k$, sledi

$$\frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t_k} = \mathbf{p}_k \pm \boldsymbol{\omega}(T). \tag{1.122}$$

pa dobijamo

$$\lim_{\Delta t_k \to 0} \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t_k} = \mathbf{p}_k \pm \lim_{T \to A} \boldsymbol{\omega}(T), \tag{1.123}$$

odnosno

$$\mathbf{p}_k = \left.\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t_k}\right|_{T=A}. \tag{1.124}$$

Sada možemo da napišemo i izraz za diferencijal (1.119) u jednom od oblika

$$\mathrm{d}\mathbf{v}(T,A)=\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t_1}(t_1-a_1)+\cdots+\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t_n}(t_n-a_n) \tag{1.125}$$

ili, ako je $t_i - a_i = \Delta t_i$, za $i = 1, 2, \ldots, n$

$$\mathrm{d}\mathbf{v}(T,A)=\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t_1}\Delta t_1+\cdots+\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t_n}\Delta t_n \tag{1.126}$$

ili, za $\Delta t_i = \mathrm{d}t_i$

$$\mathrm{d}\mathbf{v}(T,A)=\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t_1}\mathrm{d}t_1+\cdots+\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t_n}\mathrm{d}t_n. \tag{1.127}$$

Izraz (1.127) naziva se **totalni diferencijal** funkcije $\mathbf{v}$, a izraz

$$\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t_i}\mathrm{d}t_i \quad (i=1,2,\cdots,n) \tag{1.128}$$

parcijalni diferencijal.

1.5 Integracija

1.5.1 Neodređeni integral vektorske funkcije

U prethodnom poglavlju definisali smo operaciju diferenciranja vektorske funkcije. Dakle, ako imamo neku vektorsku funkciju, recimo $\mathbf{a}$, tada, prema definiciji (1.92), možemo da nađemo njen izvod. Međutim, često je potrebno obrnuto: ako imamo izvod neke vektorske funkcije da nađemo samu funkciju. U tom cilju definisaćemo sledeće pojmove.

Neka je $\mathbf{a}(t)$ neprekidna vektorska funkcija skalarnog argumenta t.

Definicija.

Primitivna funkcija funkcije $\mathbf{a}(t)$ je funkcija $\mathbf{b}(t)$ čiji je izvod

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{b}}{\mathrm{d}t}=\mathbf{a}. \tag{1.129}$$

Međutim, kako je izvod konstantnog vektora jednak nuli, tj.

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{c}}{\mathrm{d}t}=\mathbf{0}, \tag{1.130}$$

to, ako je $\mathbf{b}(t)$ jedna primitivna funkcija neprekidne funkcije $\mathbf{a}(t)$, imamo neograničen skup primitivnih funkcija od kojih se svaka, iz posmatranog skupa, razlikuje od $\mathbf{b}(t)$ samo za vektorsku konstantu $\mathbf{c}$, tj.

$$\frac{\mathrm{d}(\mathbf{b}+\mathbf{c})}{\mathrm{d}t}=\mathbf{a}. \tag{1.131}$$

Definicija.

Neodređeni integral vektorske funkcije $\mathbf{a}$ je skup svih njenih primitivnih funkcija, a obeležavamo ga sa

$$\int \mathbf{a}\,\mathrm{d}t = \mathbf{b} + \mathbf{c}. \tag{1.132}$$

Kako $\mathbf{a}$ možemo da predstavimo relacijom

$$\mathbf{a} = a_x\,\mathbf{i} + a_y\,\mathbf{j} + a_z\,\mathbf{k}, \tag{1.133}$$

to se neodređeni integral vektorske funkcije svodi na neodređene integrale skalarnih funkcija

$$\int \mathbf{a}\,\mathrm{d}t = \left(\int a_x\,\mathrm{d}t\right)\mathbf{i} + \left(\int a_y\,\mathrm{d}t\right)\mathbf{j} + \left(\int a_z\,\mathrm{d}t\right)\mathbf{k}. \tag{1.134}$$

1.5.2 Određeni integral

Neka je $\mathbf{a}$ ograničena funkcija parametra t, na intervalu $(t_A,\, t_B)$. Podelimo sada ovaj interval, na proizvoljan način, na konačan broj delova

$$\Delta t_i = t_i - t_{i-1} \tag{1.135}$$

tačkama

$$t_A = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = t_B. \tag{1.136}$$

Formirajmo sada zbir (sumu) (koji se često zove integralna suma)

$$\mathbf{I} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{a}(\tau_i)(t_i - t_{i-1}), \tag{1.137}$$

gde $\tau_i \in (t_{i-1},\, t_i)$.

Definicija.

Ako postoji granična vrednost zbira $\mathbf{I}$, kada n neograničeno raste, pri čemu najveći od delova Δt_i teži nuli, i to za proizvoljnu podelu intervala $(t_0,\, t_n)$, tada se ta granična vrednost naziva **određeni integral** (u Rimanovom smislu) funkcije $\mathbf{a}$

$$\lim_{max|\Delta t_i| \to 0} \sum_{i=1}^{n} \mathbf{a}(\tau_i)\Delta t_i = \int_{t_A}^{t_B} \mathbf{a}\,\mathrm{d}t. \tag{1.138}$$

Napomenimo da pored Rimanovog [16] postoje i Stieltjesov, Lebegov i drugi integrali.

Prema Njutn[17]– Lajbnicovoj[18] relaciji je

$$\int_{t_A}^{t_B} \mathbf{a}\,\mathrm{d}t = \mathbf{b}\,\Big|_{t_A}^{t_B} = \mathbf{b}(t_B) - \mathbf{b}(t_A), \tag{1.139}$$

ako je $\mathbf{b}$ primitivna funkcija funkcije $\mathbf{a}$.

1.5.3 Krivolinijski integral vektorske funkcije

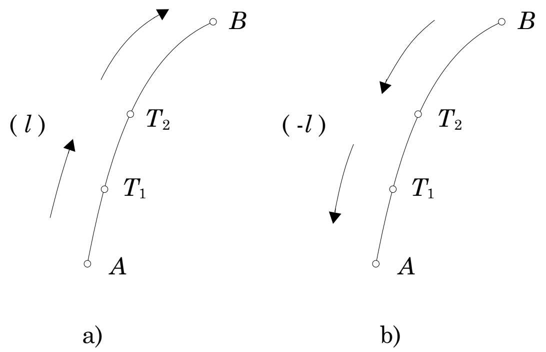
Prethodno definisane integrale možemo da shvatimo kao integraciju čija je oblast integracije prava linija ili jedan njen deo. Međutim, slično kao i kod skalarnih funkcija i u slučaju vektorskih funkcija, prirodno uopštenje je proširenje integracije na krive linije, površi, zapremine.

Orijentacija krive

Posmatrajmo ograničenu krivu u prostoru, zadatu vektorskom jednačinom:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t), \quad t \in [t_A,\, t_B]. \tag{1.140}$$

Orijentisati krivu znači odrediti koja je od dve posmatrane proizvoljne tačke, sa krive, prethodna, a koja sledi.



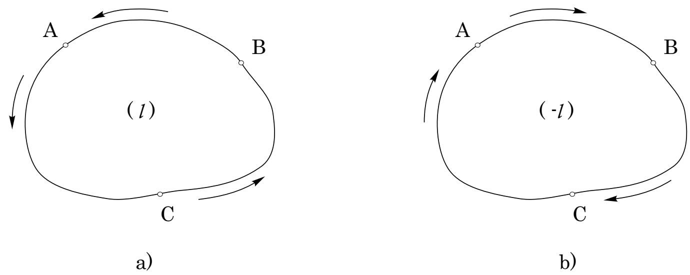
Slika 1.25: Orijentacija krivih

[16] Bernhard Riemann (1826-1866), veliki nemački matematičar. Dao je značajne doprinose u geometriji, analizi, teoriji diferencijalnih jednačina i teoriji brojeva.

[17] Newton, Sir Isaac (1642–1727), veliki engleski fizičar i matematičar. Zajedno sa Lajbnicom (nezavisno jedan od drugog) uveo diferencijalni i integralni račun. Postavio mnoge osnovne zakone u fizici i metode istraživanja problema u fizici, korišćenjem matematičke analize. Njegova knjiga *Mathematical Principles of Natural Philosophy, 1687. god.* predstavlja izuzetan doprinos klasičnoj mehanici. Njegov rad je od velike važnosti i za matematiku i za fiziku.

[18] Leibniz, Gottfried Wilhelm (1646–1716), nemački matematičar i filozof. Zajedno sa Njutnom, uveo diferencijalni i integralni račun.

Da bismo to uradili, posmatrajmo dve različite tačke, T_1 i T_2 sa krive l. Ove tačke određene su vrednostima parametra t_1 i t_2 $(t_1 < t_2)$ i možemo da smatramo da je tačka T_1 prethodna, a T_2 sledeća. Tada imamo jednu orijentaciju (sl. 1.25a). Međutim, možemo da posmatramo i obrnuto, da je T_2 prethodna, a T_1 sledeća $(t_2 < t_1)$, pa imamo drugu orijentaciju (sl. 1.25b). Orijentacija zatvorene krive, za koju je $\mathbf{r}(t_A) = \mathbf{r}(t_B)$, što znači da se tačke A i B, koje odgovaraju vrednostima parametra t_A i t_B, respektivno, poklapaju, određuje se posmatrajući tri tačke sa zatvorene krive i vršimo orijentaciju na jedan od dva prikazana načina na slikama 1.26. Redosled ABC je jedna orijentacija, a redosled ACB druga, suprotna orijentacija.



Slika 1.26: Orijentacija zatvorenih krivih

Podela orijentisane krive

Pod podelom orijentisane krive podrazumevamo podelu pri kojoj su tačke podele krive $(l = AB)$

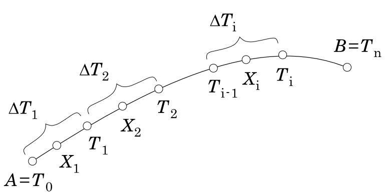
$$A = T_0, T_1, \ldots, T_n = B \tag{1.141}$$

numerisane u poretku po kome slede jedna za drugom (sl. 1.27), odnosno odgovaraju vrednostima parametra

$$t_0, t_1, \ldots, t_n, \tag{1.142}$$

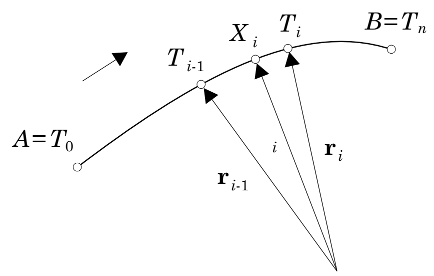
pri čemu je za usvojenu orijentaciju

$$t_A = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = t_B. \tag{1.143}$$



Slika 1.27: Podela orijentisane krive

Posmatrajmo sada neku ograničenu funkciju $\varphi(\mathbf{r}) = \varphi(X) = \varphi(x, y, z)$, gde je $X = X(x, y, z)$ tačka čiji je vektor položaja $\mathbf{r}$. Funkcija φ može da bude skalarna ili vektorska. Orijentisani luk AB podeljen je tačkama $T_0, T_1, \ldots, T_n$ na intervale $\Delta T_i = (T_{i-1}, T_i)$, $i = 1, \ldots, n$. Neka se tačka X_i, čiji je vektor položaja $\boldsymbol{\rho}_i$ nalazi u intervalu ΔT_i, tj. $X_i \in \Delta T_i$. Napomenimo da u ovom slučaju i–označava i–tu tačku, a ne komponentu vektora.



Slika 1.28:

Obrazujmo sada proizvod

$$\varphi(\boldsymbol{\rho}_i) \circ (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_{i-1}) = \varphi(\boldsymbol{\rho}_i) \circ \Delta\mathbf{r}_i = \varphi(X_i) \circ \Delta\mathbf{r}_i, \tag{1.144}$$

gde je $\mathbf{r}_i = \mathbf{r}(t_i)$ – vektor položaja tačke T_i. Ovaj proizvod može da bude vektor ili skalar, što zavisi od prirode funkcije φ i značenja kružić–proizvoda (skalarni ili vektorski proizvod).

Posmatrajmo sada zbir (integralnu sumu)

$$I = \sum_{i=1}^{n} \varphi(X_i) \circ \Delta\mathbf{r}_i. \tag{1.145}$$

Definicija.

Ako postoji granična vrednost ove sume, kada najveći modul $|\Delta\mathbf{r}_i|$ teži nuli, tada tu vrednost nazivamo **krivolinijski integral** i pišemo

$$\lim_{max|\Delta\mathbf{r}_i|\to 0} \sum_{i=1}^{n} \varphi(X_i) \circ \Delta\mathbf{r}_i = \int_l \varphi(\mathbf{r}) \circ \mathrm{d}\mathbf{r}. \tag{1.146}$$

U zavisnosti od prirode funkcije φ i značenja kružić–proizvoda razlikovaćemo tri slučaja:

- ako je $\varphi(\mathbf{r})$ skalarna funkcija, tada $\circ$ predstavlja množenje vektora skalarom, a krivolinijiski integral je vektorska veličina,

- ako je $\varphi(\mathbf{r})$ vektorska funkcija, a tačka $\circ$ predstavlja skalarni proizvod, tada je krivolinijski integral skalarna funkcija,

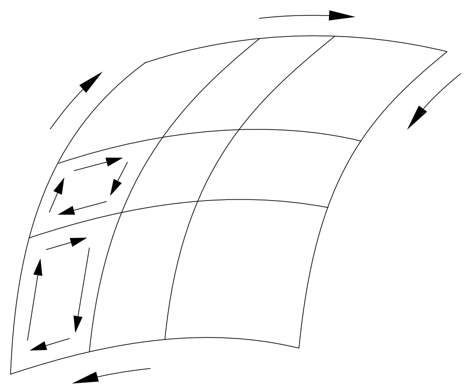
- ako je $\varphi(\mathbf{r})$ vektorska funkcija, a tačka $\circ$ predstavlja vektorski proizvod, tada je krivolinijski integral vektorska funkcija.

1.5.4 Površinski integral

Orijentacija površi

Definicija.

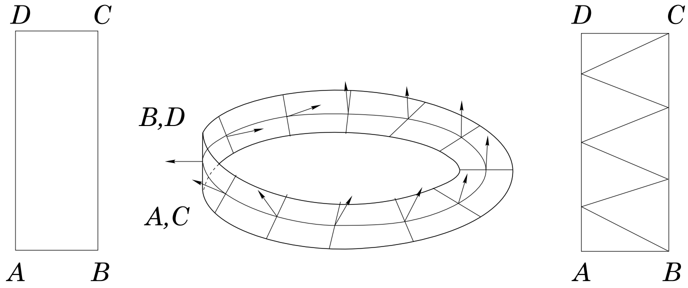
Površ S naziva se **orijentisanom** (dvostranom) (sl. 1.29), ako je moguće ostvariti takvu njenu podelu i orijentaciju njenih pojedinih delova da je na svakom od lukova zajedničkim za dva različita dela, utvrđen međusobno suprotan smer. Ako se ni pri kakvoj podeli ne može da uspostavi ovakva orijentacija delova površi, tada se površ naziva **neorijentisana** (jednostrana) (sl. 1.30).



Slika 1.29: Orijentisana površ

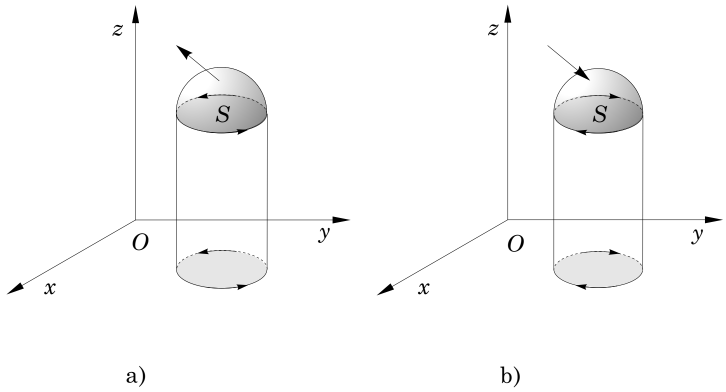
Kao primer neorijentisane površi navedimo Mebijus [19] –ov list. Dobija se tako što se pravougaona traka $ABCD$ spoji tako da se spoje tačke: A sa C i B sa D, kao što je prikazano na sl. 1.30. Ako se izvrši triangulacija (podela na trouglove) trake ABCD i izvršimo orijentaciju dobijenih trouglova (sl 1.30c), tada pri sastavljanju Mebijusovog lista duž granične linije na sastavu strana AD i BC dobiće se ista, a ne suprotne orijentacije, što je po definiciji jednostrana površ.

[19] Möbius, August Ferdinand (1790–1868), nemački matematičar. Poznat po svojim radovima iz teorije površi, projektivne geometrije i mehanike, kao i teorije brojeva.



Slika 1.30: Mebijusov list

Dakle, iz same definicije orijentisane površi, sledi da orijentisana površ S ima dve različite strane. Naime, ako u proizvoljnoj tački površi uočimo normalu, tada se na ovom pravcu mogu razlikovati dva smera: smer naviše, ako normala gradi oštar ugao, i smer naniže, ako normala gradi tup ugao sa osom Oz (sl. 1.31)



Slika 1.31: Orijentisana površ

Za gornju stranu dela površi S možemo uslovno da odaberemo smer naviše, a za donju, smer naniže, pa se zbog toga u prvom slučaju kaže i spoljna normala.

Ako je površ zadata jednačinom $z = f(x, y)$, onda je kosinus ugla, koji normala gradi sa pozitivnim delom Oz-ose, jednak:

$$\cos\gamma = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{1 + f_x'^2 + f_y'^2}} & -\text{za gornju stranu} \\ -\dfrac{1}{\sqrt{1 + f_x'^2 + f_y'^2}} & -\text{za donju stranu,} \end{cases} \tag{1.147}$$

gde je

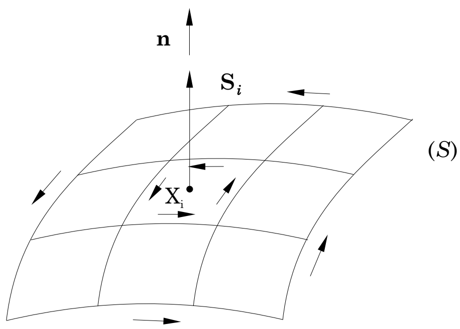
$$f_x' = \frac{\partial f}{\partial x}, \quad f_y' = \frac{\partial f}{\partial y}.$$

Vektorski površinski integrali

Neka je $\varphi(\mathbf{r}) = \varphi(X) = \varphi(x, y, z)$ neprekidna skalarna ili vektorska funkcija tačke $X(x, y, z)$, odnosno vektora položaja $\mathbf{r}$, ove tačke. Podelimo površ S na konačan broj delova ΔS_i, $i = 1, 2, \ldots, n$. Površinu jednog dela ΔS_i možemo da predstavimo u vektorskom obliku, odnosno kao vektor čiji je intenzitet jednak površini ΔS_i

$$\Delta \mathbf{S}_i = \Delta S_i \mathbf{n}, \tag{1.148}$$

gde je $\mathbf{n}$ – jedinični vektor normale na površ u proizvoljnoj tački X_i koja pripada ΔS_i.



Slika 1.32:

Formirajmo sada integralnu sumu

$$I = \sum_{i=1}^{n} \varphi(X_i) \circ \Delta \mathbf{S}_i, \tag{1.149}$$

gde $X_i \in \Delta S_i$.

Ova suma može da bude skalarna ili vektorska veličina, što zavisi od prirode funkcije φ i značenja kružić–proizvoda (skalarni ili vektorski proizvod).

Definicija.

Graničnu vrednost sume I, kada najveći modul $|\Delta S_i|$ teži nuli, zovemo **vektorski površinski integral** i označavamo je sa

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \varphi(X_i) \circ \Delta \mathbf{S}_i = \iint_S \varphi(X) \circ \mathrm{d}\mathbf{S}, \tag{1.150}$$

ako ona postoji.

Analiza

Neka je φ vektorska funkcija, predstavljena na jedan od načina

$$\varphi(X) \equiv \mathbf{v} = v_x\mathrm{i} + v_y\mathrm{j} + v_z\mathrm{k} = [v_x, v_y, v_z], \tag{1.151}$$

a kružić-proizvod predstavlja skalarni proizvod. Dalje, jedinični vektor normale može da se predstavi u obliku

$$\mathbf{n} = \cos\alpha\mathbf{i} + \cos\beta\mathbf{j} + \cos\gamma\mathbf{k} = [\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma], \tag{1.152}$$

gde su α, β i γ uglovi koje vektor $\mathbf{n}$ zaklapa sa koordinatnim osama Ox, Oy i Oz, respektivno. Sada integral možemo da predstavimo u obliku:

$$\begin{aligned}&\iint\limits_S \varphi(X)\cdot\, \mathrm{d}\mathbf{S} = \iint\limits_S \mathbf{v}\cdot\, \mathrm{d}\mathbf{S} = \iint\limits_S \mathbf{v}\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{d}S = \\ &\iint\limits_S (v_x\cos\alpha + v_y\cos\beta + v_z\cos\gamma)\,\mathrm{d}S.\end{aligned} \tag{1.153}$$

S druge strane, neka je jednačina površi S

$$z = f(x, y), \tag{1.154}$$

tada je:

$$\begin{aligned}\iint\limits_S v_z\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \iint\limits_{D_{xy}} v_z \frac{\pm 1}{\sqrt{1 + f_x'^2 + f_y'^2}}\cdot \left(\pm\sqrt{1 + f_x'^2 + f_y'^2}\right)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \\ &= \iint\limits_S v_z\cos\gamma\,\mathrm{d}S,\end{aligned} \tag{1.155}$$

gde je D_{xy} projekcija površi S na ravan Oxy, a γ ugao između normale $\mathbf{n}$ i z–ose. Znak $\pm$ uzimamo pri integraciji po gornjoj–donjoj površi. Slično dobijamo i za preostala dva integrala:

$$\iint\limits_S v_y\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x = \iint\limits_S v_y\cos\beta\,\mathrm{d}S, \tag{1.156}$$

$$\iint\limits_S v_x\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iint\limits_S v_x\cos\alpha\,\mathrm{d}S. \tag{1.157}$$

Zamenom ovih relacija (1.155)-(1.157) u (1.153), dobijamo:

$$\begin{aligned}&\iint\limits_S v_x\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z + v_y\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x + v_z\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \\ &\iint\limits_S (v_x\cos\alpha + v_y\cos\beta + v_z\cos\gamma)\,\mathrm{d}S,\end{aligned}$$

vezu između površinskog integrala po koordinatama i po površi.

1.6 Zadaci

Zad. 1.1. Dokazati:

a) komutativnost zbira vektora,

b) asocijativnost zbira vektora,

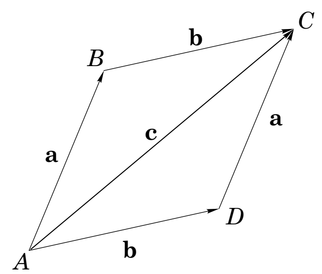
c) distributivnost množenja vektora skalarom u odnosu na sabiranje skalara,

d) distributivnost množenja vektora skalarom u odnosu na sabiranje vektora i

e) asocijativnost množenja vektora skalarom.

Dokaz.

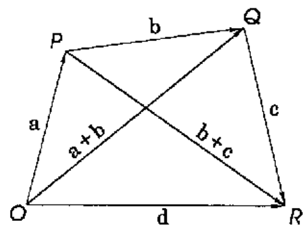
a) Posmatrajmo dva vektora **a** i **b** (sl. 1.33). Zajednička tačka B je tačka u kojoj se završava vektor **a**, a počinje vektor **b**. Koristeći pravilo paralelograma za sabiranje vektora, dobijamo vektor **c**, koji počinje u tački A, a završava se u tački C, **c**=**a**+**b**. Pomerimo translatorno vektor **b** tako da mu je početak u tački A i vektor **a**, tako da mu je početak u tački D, koja je kraj (vrh) vektora **b**. Sa slike je očigledno: $AB+BC=AC$ i $AD+DC=AC$, odnosno **a**+**b**=**c** i **b**+**a**= **c** i odatle sledi komutativnost zbira vektora **a**+**b**=**b**+**a**. Na slici se jasno vidi paralelogram $ABCD$ sa dijagonalom AC. Zato se pravilo sabiranja vektora naziva pravilo paralelograma.



Slika 1.33:

b) Posmatrajmo vektore **a**,**b** i **c** (sl. 1.34). Saberimo **a** i **b** ($OP+PQ=OQ$), a zatim dobijenom zbiru dodati vektor **c** ($OQ+QR=OR$), tako dobijamo vektor **d**. Saberimo sada prvo vektore **b** i **c** ($PQ+QR=PR$), pa tako dobijenom vektoru (zbiru) dodajmo vektor **a** ($OP+PR=OR$). Vidimo da smo ponovo dobili vektor **d**, čime je pokazana asocijativnost vektorskog zbira

$$(\mathbf{a}+\mathbf{b})+\mathbf{c}=\mathbf{a}+(\mathbf{b}+\mathbf{c})=\mathbf{d}.$$



Slika 1.34:

c)
$$(\alpha+\beta)\mathbf{a}=\alpha\mathbf{a}+\beta\mathbf{a}.$$

d)
$$\alpha(\mathbf{a}+\mathbf{b})=\alpha\mathbf{a}+\alpha\mathbf{b}.$$

e)
$$(\alpha\cdot\beta)\mathbf{a}=\alpha(\beta\mathbf{a}).$$

♡

Zad. 1.2. Dokazati da je:

a)
$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}=|\mathbf{a}|^2>0, \quad \text{sem ako je} \quad \mathbf{a}=\mathbf{0}.$$

b)
$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=\mathbf{b}\cdot\mathbf{a}.$$

c)
$$\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}+\mathbf{c})=\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}+\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}.$$

d)
$$\alpha(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})=(\alpha\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}),$$

gde je α realan broj.

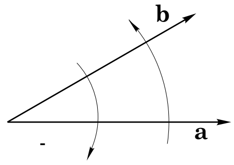
Dokaz.

a) Za $\mathbf{a}=0$ očigledno je $\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}=0$. Neka je $\mathbf{a}\neq 0$, tada je bar jedan od a_x, a_y ili a_z različit od nule. Dakle važi

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}=|\mathbf{a}|^2=a_x^2+a_y^2+a_z^2>0.$$

b)

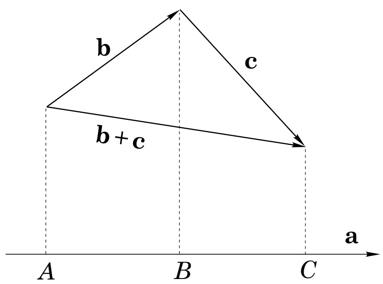
$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = |\mathbf{a}|\cdot|\mathbf{b}|\cos\theta = |\mathbf{b}|\cdot|\mathbf{a}|\cos(-\theta) = \mathbf{b}\cdot\mathbf{a}$$



Slika 1.35:

što dokazuje komutativnost skalarnog proizvoda (sl. 1.35). Ovde smo iskoristili parnost cos funkcije, tj. $\cos\theta = \cos(-\theta)$

c) Neka je $\mathbf{e}_a$ jedinični vektor na pravcu vektora $\mathbf{a}$. Projekcija vektora $(\mathbf{b}+\mathbf{c})$ na vektor $\mathbf{a}$ jednak je zbiru projekcija vektora $\mathbf{b}$ i projekcije vektora $\mathbf{c}$ na vektor $\mathbf{a}$ (videti sl. 1.36)



Slika 1.36:

$$(\mathbf{b}+\mathbf{c})\cdot\mathbf{e_a} = \mathbf{b}\cdot\mathbf{e_a} + \mathbf{c}\cdot\mathbf{e_a} \,\Bigg|\, \cdot|\mathbf{a}|$$

$$\begin{gathered}(\mathbf{b}+\mathbf{c})\cdot\mathbf{e_a}\cdot|\mathbf{a}| = \mathbf{b}\cdot\mathbf{e_a}\cdot|\mathbf{a}| + \mathbf{c}\cdot\mathbf{e_a}\cdot|\mathbf{a}| = \\ = (\mathbf{b}+\mathbf{c})\cdot\mathbf{a} = \mathbf{b}\cdot\mathbf{a} + \mathbf{c}\cdot\mathbf{a} \quad \Rightarrow \\ \mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}+\mathbf{c}) = \mathbf{a}\cdot\mathbf{b} + \mathbf{a}\cdot\mathbf{c}.\end{gathered}$$

d)

$$\alpha(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}) = \alpha(a\cdot b\cos\theta) = \alpha a\cdot b\cos\theta = (\alpha a)\cdot b\cos\theta = (\alpha\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}).$$

Napomenimo da smo koristili (i koristićemo i u buduće) oznaku $|\mathbf{a}| = a$ za intenzitet vektora **a** (slično za ostale vektore).

♡

Zad. 1.3. Dokazati da je

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}.$$

Dokaz.

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \times \mathbf{b} &= (a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k}) \times (b_x\mathbf{i} + b_y\mathbf{j} + b_z\mathbf{k}) = \\ &= a_xb_x\mathbf{i} \times \mathbf{i} + a_xb_y\mathbf{i} \times \mathbf{j} + a_xb_z\mathbf{i} \times \mathbf{k} + a_yb_x\mathbf{j} \times \mathbf{i} + a_yb_y\mathbf{j} \times \mathbf{j} + a_yb_z\mathbf{j} \times \mathbf{k} + \\ &+ a_zb_x\mathbf{k} \times \mathbf{i} + a_zb_y\mathbf{k} \times \mathbf{j} + a_zb_z\mathbf{k} \times \mathbf{k} = \\ &= (a_yb_z - a_zb_y)\mathbf{i} + (a_zb_x - a_xb_z)\mathbf{j} + (a_xb_y - a_yb_x)\mathbf{k} = \\ &= \text{determinanta}. \end{aligned}$$

Napomenimo da je ovo simbolička determinanta. Naime, determinanta je skalarna vrednost, a u ovom slučaju dobijamo vektorsku vrednost. Osobine determinante važe i za ovu "determinantu".

♡

Zad. 1.4. Dokazati:

a) da vektorski proizvod nije komutativan

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a},$$

b) distributivnost vektorskog proizvoda u odnosu na sabiranje vektora

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) + (\mathbf{a} \times \mathbf{c}),$$

c) distributivnost vektorskog proizvoda u odnosu na sabiranje vektora

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = (\mathbf{a} \times \mathbf{c}) + (\mathbf{b} \times \mathbf{c}),$$

d) važi relacija

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\,\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\,\mathbf{c},$$

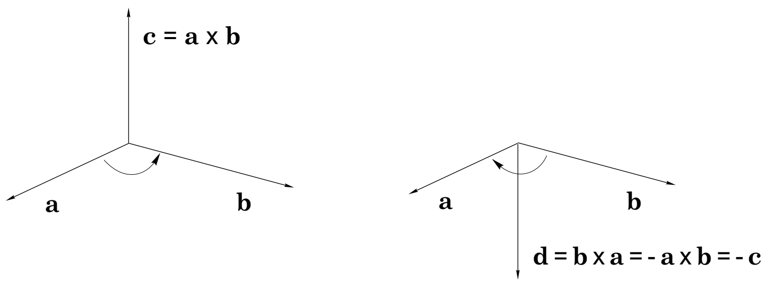
e)

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \neq (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c}.$$

Dokaz.

a) Vektor $\mathbf{a}\times\mathbf{b} = \mathbf{c}$ ima intenzitet $ab\sin\theta$ i smer koji određuje desno orijentisani sistem vektora (sl. 1.37).

Vektor $\mathbf{b}\times\mathbf{a} = \mathbf{d}$ ima intenzitet $ba\sin\theta$ i smer koji određuje desno orijentisani sistem vektora (sl. 1.37).



Slika 1.37:

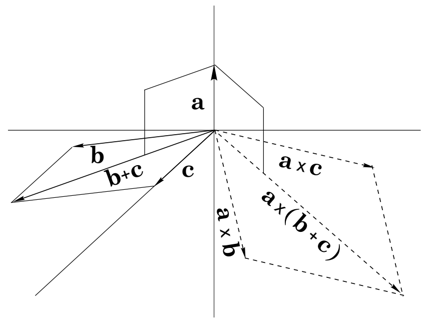
Pošto $\mathbf{c}$ ima isti intenzitet i pravac kao i vektor $\mathbf{d}$, a suprotan smer, onda je

$$\mathbf{c} = -\mathbf{d} \quad \text{odnosno} \quad \mathbf{a}\times\mathbf{b} = -\mathbf{b}\times\mathbf{a}.$$

Dakle, vektorski proizvod nije komutativna operacija.

b) i c)

Prvo ćemo dokazati distributivnost za slučaj kada je $\mathbf{a}$ normalan na ravan koju obrazuju vektori $\mathbf{b}$ i $\mathbf{c}$ (sl. 1.38).



Slika 1.38:

Pošto je $\mathbf{a}$ normalan na $\mathbf{b}$, onda je vektor $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ normalan na ravan koju obrazuju $\mathbf{a}$ i $\mathbf{b}$ i ima intenzitet $a\cdot b\sin 90^\circ = ab$. Isti vektor se dobije kada se $\mathbf{b}$ pomnoži sa $\mathbf{a}$ i zarotira za 90°, kao na slici iznad.

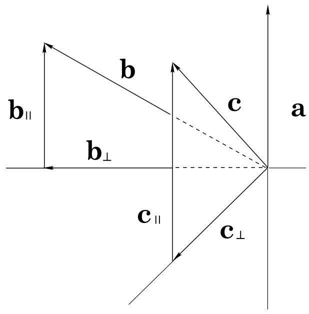
Slično, vektor $\mathbf{a}\times\mathbf{c}$ se dobije kada se vektor $\mathbf{c}$ pomnoži sa $\mathbf{a}$ i zarotira za $90°$, kao na slici 1.38.

Na sličan način, $\mathbf{a}\times(\mathbf{b}+\mathbf{c})$ je vektor dobijen kada se $\mathbf{b}+\mathbf{c}$ pomnoži vektorski sa $\mathbf{a}$ i zarotira za $90°$, kao što je prikazano na slici 1.38.

Pošto je $\mathbf{a}\times(\mathbf{b}+\mathbf{c})$ dijagonala paralelograma sa stranicama $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ i $\mathbf{a}\times\mathbf{c}$, važi

$$\mathbf{a}\times(\mathbf{b}+\mathbf{c}) = \mathbf{a}\times\mathbf{b}+\mathbf{a}\times\mathbf{c}.$$

U drugom delu dokaza pretpostavimo da vektori $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ i $\mathbf{c}$ mogu da imaju bilo koju orijentaciju u prostoru (sl. 1.39).



Slika 1.39:

Razložimo vektore $\mathbf{b}$ i $\mathbf{c}$ na dve komponente, jednu koja je paralelna vektoru $\mathbf{a}$ i drugu koja je normalna na $\mathbf{a}$. Vektorski proizvod komponenti normalnih na vektor $\mathbf{a}$ i vektora $\mathbf{a}$ dat je u prvom delu dokaza, a vektorski proizvod komponenti paralelnih sa vektorom $\mathbf{a}$ i vektora $\mathbf{a}$ jednak je nuli.

d) Kako je

$$\mathbf{a} = a_x\mathbf{i}+a_y\mathbf{j}+a_z\mathbf{k},\quad \mathbf{b} = b_x\mathbf{i}+b_y\mathbf{j}+b_z\mathbf{k},\quad \mathbf{c} = c_x\mathbf{i}+c_y\mathbf{j}+c_z\mathbf{k}$$

to je

$$\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) = (a_x\mathbf{i}+a_y\mathbf{j}+a_z\mathbf{k})\times\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ b_x & b_y & b_z\\ c_x & c_y & c_z\end{vmatrix} =$$

$$= (a_x\mathbf{i}+a_y\mathbf{j}+a_z\mathbf{k})\times[(b_yc_z-b_zc_y)\mathbf{i}+(b_zc_x-b_xc_z)\mathbf{j}+(b_xc_y-b_xc_z)\mathbf{k}] =$$

$$= \begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ (b_yc_z-b_zc_y) & (b_zc_x-b_xc_z) & (b_xc_y-b_yc_z)\end{vmatrix} =$$

$$= (a_yb_xc_y-a_yb_yc_x-a_zb_zc_x+a_zb_xc_z)\mathbf{i}+$$

$$+(a_zb_yc_z-a_zb_zc_y-a_xb_xc_y+a_xb_yc_x)\mathbf{j}+$$

$$+(a_xb_zc_x-a_xb_xc_z-a_yb_yc_z+a_yb_zc_y)\mathbf{k}.$$

Grupišući članove uz b_x, b_y, b_z, i uz c_x,c_y, b_z dobijamo:

$$\begin{aligned}
&b_x(a_yc_y + a_zc_z)\mathbf{i} - c_x(a_yb_y + a_zb_z)\mathbf{i}+\\
&+b_y(a_xc_x + a_zc_z)\mathbf{j} - c_y(a_xb_x + a_zb_z)\mathbf{j}+\\
&+b_z(a_xc_x + a_yc_y)\mathbf{k} - c_z(a_xb_x + a_yb_y)\mathbf{k}
\end{aligned}$$

Ako prethodnom izrazu dodamo i oduzmeno članove $a_xb_xc_x\mathbf{i}$, $a_yb_yc_y\mathbf{j}$ i $a_zb_zc_z\mathbf{k}$, dobijamo

$$\begin{aligned}
&b_x(a_yc_y + a_zc_z)\mathbf{i} - c_x(a_yb_y + a_zb_z)\mathbf{i} + a_xb_xc_x\mathbf{i} - a_xb_xc_x\mathbf{i}+\\
&+b_y(a_xc_x + a_zc_z)\mathbf{j} - c_y(a_xb_x + a_zb_z)\mathbf{j} + a_yb_yc_y\mathbf{j} - a_yb_yc_y\mathbf{j}+\\
&+b_z(a_xc_x + a_yc_y)\mathbf{k} - c_z(a_xb_x + a_yb_y)\mathbf{k} + a_zb_zc_z\mathbf{k} - a_zb_zc_z\mathbf{k},
\end{aligned}$$

odnosno

$$\begin{aligned}
\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) =& b_x(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})\mathbf{i} - c_x(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\mathbf{i}+\\
&+ b_y(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})\mathbf{j} - c_y(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\mathbf{j}+\\
&b_z(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})\mathbf{k} - c_z(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\mathbf{k}.
\end{aligned}$$

Izvlačeći zajedničke članove i iskoristivši (1.44), na str. 30, dolazi se do tražene relacije

$$\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}). \tag{1.158}$$

e) Na osnovu antikomutativnosti vektorskog proizvoda (1.23), sledi:

$$\begin{aligned}
(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times\mathbf{c} = -\mathbf{c}\times(\mathbf{a}\times\mathbf{b}) &= \mathbf{a}(-\mathbf{c}\cdot\mathbf{b}) - \mathbf{b}(-\mathbf{c}\cdot\mathbf{a}) =\\
&= \mathbf{b}(\mathbf{c}\cdot\mathbf{a}) - \mathbf{a}(\mathbf{c}\cdot\mathbf{b}).
\end{aligned} \tag{1.159}$$

Iz (1.158) i (1.159) sledi da za vektorski proizvod ne važi zakon asocijativnosti

$$\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) \neq (\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times\mathbf{c}.$$

♡

Zad. 1.5. Pokazati da je $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})\times(\mathbf{c}\times\mathbf{a}) = (\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}\times\mathbf{c})^2$

Rešenje.

Koristeći prethodan zadatak

$$\mathbf{x}\times(\mathbf{c}\times\mathbf{a}) = \mathbf{c}(\mathbf{x}\cdot\mathbf{a}) - \mathbf{a}(\mathbf{x}\cdot\mathbf{c})$$

ako je $\mathbf{x} = \mathbf{b}\times\mathbf{c}$

$$(\mathbf{b}\times\mathbf{c})\times(\mathbf{c}\times\mathbf{a}) = \mathbf{c}(\mathbf{b}\times\mathbf{c}\cdot\mathbf{a}) - \mathbf{a}(\mathbf{b}\times\mathbf{c}\cdot\mathbf{c}) = \mathbf{c}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}\times\mathbf{c}) - \mathbf{a}(\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}\times\mathbf{c}) = \mathbf{c}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}\times\mathbf{c})$$

$$(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})\times(\mathbf{c}\times\mathbf{a}) = (\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{c}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}\times\mathbf{c}) = (\mathbf{a}\times\mathbf{b}\cdot\mathbf{c})(\mathbf{a}\times\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}) = (\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}\times\mathbf{c})^2.$$

♡

Zad. 1.6. Pokazati da je

$$(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times(\mathbf{c}\times\mathbf{d}) = \mathbf{c}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}\times\mathbf{d}) - \mathbf{d}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}\times\mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}\times\mathbf{d}) - \mathbf{a}(\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}\times\mathbf{d})$$

Rešenje.

Iz $\mathbf{x}\times(\mathbf{c}\times\mathbf{d}) = \mathbf{c}(\mathbf{x}\cdot\mathbf{d}) - \mathbf{d}(\mathbf{x}\cdot\mathbf{c})$ uzevši da je $\mathbf{x} = \mathbf{a}\times\mathbf{b}$, sledi

$$(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times(\mathbf{c}\times\mathbf{d}) = \mathbf{c}(\mathbf{a}\times\mathbf{b}\cdot\mathbf{d}) - \mathbf{d}(\mathbf{a}\times\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}) = \mathbf{c}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}\times\mathbf{d}) - \mathbf{d}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}\times\mathbf{c}).$$

A iz $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times\mathbf{y} = \mathbf{b}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{y}) - \mathbf{a}(\mathbf{b}\cdot\mathbf{y})$ uzevši da je $\mathbf{y} = \mathbf{c}\times\mathbf{d}$, dobija se

$$(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times(\mathbf{c}\times\mathbf{d}) = \mathbf{b}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}\times\mathbf{d}) - \mathbf{a}(\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}\times\mathbf{d}).$$

♡

Zad. 1.7. Pokazati da važi jednakost

$$[\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}]\,\mathbf{d} + [\mathbf{a},\mathbf{c},\mathbf{d}]\,\mathbf{b} - [\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{d}]\,\mathbf{c} - [\mathbf{b},\mathbf{c},\mathbf{d}]\,\mathbf{a} = 0.$$

Rešenje.

Posmatrajmo prvo vektorski proizvod dva vektorska proizvoda

$$(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times(\mathbf{c}\times\mathbf{d})\,.$$

Ovim proizvodom određen je vektor koji je normalan na vektore: $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ i $\mathbf{c}\times\mathbf{d}$ i zbog toga leži u ravni vektora $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ i u ravni vektora $\mathbf{c}$, $\mathbf{d}$, odakle sledi da on može da se predstavi na dva načina:

$$(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times(\mathbf{c}\times\mathbf{d}) = [\mathbf{a},\mathbf{c},\mathbf{d}]\,\mathbf{b} - [\mathbf{b},\mathbf{c},\mathbf{d}]\,\mathbf{a},$$
$$(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times(\mathbf{c}\times\mathbf{d}) = [\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{d}]\,\mathbf{c} - [\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}]\,\mathbf{d}.$$

Oduzimajući ove jednačine, dobijamo

$$[\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}]\,\mathbf{d} + [\mathbf{a},\mathbf{c},\mathbf{d}]\,\mathbf{b} - [\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{d}]\,\mathbf{c} - [\mathbf{b},\mathbf{c},\mathbf{d}]\,\mathbf{a} = 0,$$

što je trebalo i pokazati.

♡

Zad. 1.8. Dokazati da su tri ortogonalna vektora u 3–D prostoru linearno nezavisna.

Dokaz.

Recimo da su vektori **n**, **m**, **p** uzajamno ortogonalni, odnosno da važi: $\mathbf{n}\cdot\mathbf{m} = 0$, $\mathbf{n}\cdot\mathbf{p} = 0$ i $\mathbf{m}\cdot\mathbf{p} = 0$. Pošto je prostor trodimenzionalan ne postoji neki četvrti vektor koji bi sa ova tri bio uzajamno ortogonalan.

Po definiciji, vektori su linearno nezavisni ako važi:

$$\alpha\mathbf{n} + \beta\mathbf{m} + \gamma\mathbf{p} = 0 \Rightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0.$$

Odavde sledi:

$$\begin{aligned}
\alpha\mathbf{n} + \beta\mathbf{m} + \gamma\mathbf{p} = 0/\cdot\mathbf{n} \Rightarrow &\quad \alpha\mathbf{n}\cdot\mathbf{n} + \beta\mathbf{m}\cdot\mathbf{n} + \gamma\mathbf{p}\cdot\mathbf{n} = 0 \Rightarrow \\
\Rightarrow &\quad \alpha|\mathbf{n}|^2 + 0 + 0 = 0 \Rightarrow \underline{\alpha = 0}, \\
\alpha\mathbf{n} + \beta\mathbf{m} + \gamma\mathbf{p} = 0/\cdot\mathbf{m} \Rightarrow &\quad \alpha\mathbf{n}\cdot\mathbf{m} + \beta\mathbf{m}\cdot\mathbf{m} + \gamma\mathbf{p}\cdot\mathbf{m} = 0 \Rightarrow \\
\Rightarrow &\quad 0 + \beta|\mathbf{m}|^2 + 0 = 0 \Rightarrow \underline{\beta = 0}, \\
\alpha\mathbf{n} + \beta\mathbf{m} + \gamma\mathbf{p} = 0/\cdot\mathbf{p} \Rightarrow &\quad \alpha\mathbf{n}\cdot\mathbf{p} + \beta\mathbf{m}\cdot\mathbf{p} + \gamma\mathbf{p}\cdot\mathbf{p} = 0 \Rightarrow \\
\Rightarrow &\quad 0 + 0 + \gamma|\mathbf{p}|^2 = 0 \Rightarrow \underline{\gamma = 0}.
\end{aligned}$$

♡

Zad. 1.9. Dati geometrijsku interpretaciju vektorskog proizvoda.

Odgovor.

a) Površina paralelograma, konstruisana nad vektorima **a** i **b** (sl. 1.40), je

$$P = |\mathbf{b}|\cdot h = |\mathbf{b}|\cdot|\mathbf{a}|\sin\theta,$$

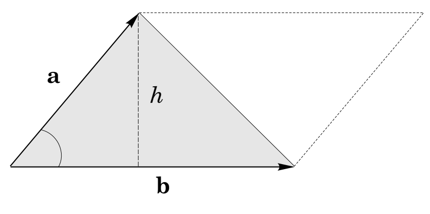
odnosno

$$P = |\mathbf{a}\times\mathbf{b}|.$$

Dakle, intenzitet vektorskog proizvoda dva vektora jednak je površini paralelograma koju obrazuju ta dva vektora.

b) Površina trougla čije su dve stranice vektori **a** i **b** jednaka je polovini intenziteta njihovog vektorskog proizvoda (sl. 1.40).

$$P_\Delta = \frac{1}{2}|\mathbf{a}\times\mathbf{b}|.$$



Slika 1.40: Površina trougla

♡

Zad. 1.10. Dati geometrijsku interpretaciju mešovitog proizvoda $\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})$.

Odgovor.

Posmatrajmo paralelopiped (sl. 1.41) konstruisan nad vektorima **a**, **b** i **c**. Njegova zapremina je $V = h\cdot P$, gde je h – visina, a P – površina osnove. Kako je osnova paralelogram konstruisan nad vektorima **b** i **c**, to je prema prethodnom zadatku

$$P = |\mathbf{b}\times\mathbf{c}|.$$

Neka je **n** jedinični vektor koji ima pravac normale na ravan osnove (koja je određena vektorima **b** i **c**). Visina paralelograma, koja odgovara osnovi nad vektorima **b** i **c**, jednaka je

$$h = \mathbf{a}\cdot\mathbf{n} \qquad (\mathbf{a}\cdot\mathbf{n} = a\cdot 1\cos\alpha, \quad \text{gde je}\,\alpha\,\text{ugao između vektora}\,\mathbf{a}\,\text{i}\,\mathbf{n}),$$

pa je

$$V = h\cdot P = \mathbf{a}\cdot\mathbf{n}|\mathbf{b}\times\mathbf{c}|.$$

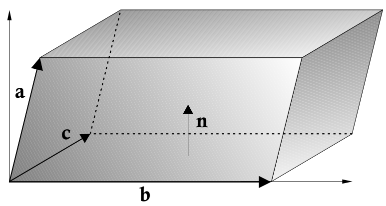
Kako je

$$\mathbf{b}\times\mathbf{c} = \mathbf{n}|\mathbf{b}\times\mathbf{c}|$$

to konačno dobijamo

$$V = |\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})|. \tag{1.160}$$

Tako je modul mešovitog proizvoda jednak zapremini paralelopipeda koji obrazuju ta tri vektora (jednak je modulu, jer zapremina ne može da bude negativna).



Slika 1.41: Zapremina paralelopipeda

♡

Zad. 1.11. Dokazati da iz $\mathbf{a}$=$\mathbf{b}$ $\Leftrightarrow a_x = b_x, \quad a_y = b_y, \quad a_z = b_z.$

♡

Zad. 1.12. Dokazati da je

$$\alpha\mathbf{a} = [\alpha a_x,\, \alpha a_y,\, \alpha a_z]\,.$$

Dokaz.

$$\alpha\mathbf{a} = \alpha(a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k}) = \alpha a_x\mathbf{i} + \alpha a_y\mathbf{j} + \alpha a_z\mathbf{k}.$$

♡

Zad. 1.13. Dokazati da je

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z.$$

Dokaz.

$$\begin{aligned}\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = &(a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k})\cdot(b_x\mathbf{i} + b_y\mathbf{j} + b_z\mathbf{k}) = \\ &= a_xb_x\mathbf{i}\cdot\mathbf{i} + a_xb_y\mathbf{i}\cdot\mathbf{j} + a_xb_z\mathbf{i}\cdot\mathbf{k} + a_yb_x\mathbf{j}\cdot\mathbf{i} + a_yb_y\mathbf{j}\cdot\mathbf{j} + a_yb_z\mathbf{j}\cdot\mathbf{k} + \\ &+ a_zb_x\mathbf{k}\cdot\mathbf{i} + a_zb_y\mathbf{k}\cdot\mathbf{j} + a_zb_z\mathbf{k}\cdot\mathbf{k} = \\ &= a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z.\end{aligned}$$

♡

Zad. 1.14. Dokazati da je

$$\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}.$$

Dokaz.

Kako je

$$\begin{aligned}\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) &= (a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k})\cdot((b_yc_z - b_zc_y)\mathbf{i} + (b_zc_x - b_xc_z)\mathbf{j} + (b_xc_y - b_yc_x)\mathbf{k}) = \\ &= a_x(b_yc_z - b_zc_y) + a_y(b_zc_x - b_xc_z) + a_z(b_xc_y - b_yc_x) = \textit{determinanta}.\end{aligned}$$

Pri dokazivanju iskoristili smo:

$$\mathbf{i}\times\mathbf{i} = \mathbf{0},\quad \mathbf{i}\times\mathbf{j} = \mathbf{k},\quad \mathbf{i}\times\mathbf{k} = -\mathbf{j},\quad \mathbf{j}\times\mathbf{j} = \mathbf{0},\quad \mathbf{j}\times\mathbf{k} = \mathbf{i},\quad \mathbf{j}\times\mathbf{i} = -\mathbf{k},$$
$$\mathbf{k}\times\mathbf{k} = \mathbf{0},\quad \mathbf{k}\times\mathbf{i} = \mathbf{j},\quad \mathbf{k}\times\mathbf{j} = -\mathbf{i}.$$

♡

Zad. 1.15. Dokazati da je

$$|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = \sqrt{(\mathbf{a} \cdot \mathbf{a})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{b}) - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2}.$$

Dokaz.

Kako je kvadrat intenziteta vektorskog proizvoda, prema definiciji (1.19), jednak

$$|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|^2 = |\mathbf{a}|^2 |\mathbf{b}|^2 \sin^2 \gamma,$$

a skalarni proizvod vektora $\mathbf{a}$ i $\mathbf{b}$, prema definiciji (1.12), je:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos \gamma \quad \text{i} \quad |\mathbf{a}| |\mathbf{a}| = |\mathbf{a}|^2,$$

to konačno dobijamo:

$$|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|^2 = |\mathbf{a}|^2 |\mathbf{b}|^2 \sin^2 \gamma = |\mathbf{a}|^2 |\mathbf{b}|^2 \left(1 - \cos^2 \gamma\right) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{a})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{b}) - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2.$$

♡

Zad. 1.16. Dokazati da svi vektori, koji linearno zavise od vektora $\mathbf{a}_1$ i $\mathbf{a}_2$, leže u ravni OM_1M_2, ako tačka O predstavlja početak, a M_1 i M_2 krajeve vektora $\mathbf{a}_1$ i $\mathbf{a}_2$.

Dokaz.

Dva proizvoljna skalara α i β definišu vektor $\mathbf{a}$ koji je linearna kombinacija vektora $\mathbf{a}_1$ i $\mathbf{a}_2$.

$$\mathbf{a} = \alpha \mathbf{a_1} + \beta \mathbf{a_2}.$$

Uzećemo vektor $\mathbf{b}$ koji je normalan na ravan OM_1M_2. Pošto $\mathbf{a}_1$ i $\mathbf{a}_2$ leže u toj ravni sledi da $\mathbf{b} \cdot \mathbf{a}_1 = 0$ i $\mathbf{b} \cdot \mathbf{a}_2 = 0$. Posmatrajmo sada sledeći skalarni proizvod:

$$\mathbf{b} \cdot \mathbf{a} = \mathbf{b} \cdot (\alpha \mathbf{a}_1 + \beta \mathbf{a}_2) = \mathbf{b} \cdot \alpha \mathbf{a}_1 + \mathbf{b} \cdot \beta \mathbf{a}_2 = \alpha \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}_1 + \beta \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}_2 = \alpha 0 + \beta 0 = 0.$$

Kako je i on jednak nuli, to znači da je vektor $\mathbf{b}$ normalan i na vektor $\mathbf{a}$ i da prema tome vektor $\mathbf{a}$ leži u ravni OM_1M_2.

♡

Zad. 1.17. Dokazati da su bilo koja četiri vektora u 3–D prostoru linearno zavisni.

♡

Zad. 1.18. Pokazati da je $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \times \mathbf{c} = \mathbf{0}$ potreban i dovoljan uslov da vektori $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ i $\mathbf{c}$ leže u jednoj ravni (da su komplanarni).

Dokaz.

Uslov je potreban. Ako su $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ i $\mathbf{c}$ u jednoj ravni, tada je zapremina paralelopipeda koji oni obrazuju jednaka nuli. Iz toga sledi da je $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}\times\mathbf{c} = \mathbf{0}$ (videti zadatak 1.10 na str. 62).

Uslov je dovoljan. Ako je $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}\times\mathbf{c} = \mathbf{0}$ tada je zapremina paralelopipeda koji obrazuju ova tri vektora jednaka nuli pa iz toga sledi da oni leže u jednoj ravni tj. da su komplanarni.

$\heartsuit$

Zad. 1.19. Neka je $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}\times\mathbf{c} \neq 0$ i: $\mathbf{a}' = \dfrac{\mathbf{b}\times\mathbf{c}}{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}\times\mathbf{c}}$ $\quad \mathbf{b}' = \dfrac{\mathbf{c}\times\mathbf{a}}{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}\times\mathbf{c}}$ $\quad \mathbf{c}' = \dfrac{\mathbf{a}\times\mathbf{b}}{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}\times\mathbf{c}}$.
Pokazati da je:

a) $\mathbf{a}'\cdot\mathbf{a} = \mathbf{b}'\cdot\mathbf{b} = \mathbf{c}'\cdot\mathbf{c} = 1$,

b) $\mathbf{a}'\cdot\mathbf{b} = \mathbf{a}'\cdot\mathbf{c} = 0, \quad \mathbf{b}'\cdot\mathbf{a} = \mathbf{b}'\cdot\mathbf{c} = 0, \quad \mathbf{c}'\cdot\mathbf{a} = \mathbf{c}'\cdot\mathbf{b} = 0$,

c) $\mathbf{a}'\cdot\mathbf{b}'\times\mathbf{c}' = \dfrac{1}{V}$, ako je $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}\times\mathbf{c} = V$.

d) $\mathbf{a}'$, $\mathbf{b}'$ i $\mathbf{c}'$ nisu komplanarni, jer $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ i $\mathbf{c}$ nisu komplanarni (uslov zadatka).

Rešenje.

a)

$$\mathbf{a}'\cdot\mathbf{a} = \mathbf{a}\cdot\mathbf{a}' = \mathbf{a}\cdot\frac{\mathbf{b}\times\mathbf{c}}{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}\times\mathbf{c}} = \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}\times\mathbf{c}}{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}\times\mathbf{c}} = 1.$$

$$\mathbf{b}'\cdot\mathbf{b} = \mathbf{b}\cdot\mathbf{b}' = \mathbf{b}\cdot\frac{\mathbf{c}\times\mathbf{a}}{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}\times\mathbf{c}} = \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}\times\mathbf{c}}{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}\times\mathbf{c}} = 1.$$

$$\mathbf{c}'\cdot\mathbf{c} = \mathbf{c}\cdot\mathbf{c}' = \mathbf{c}\cdot\frac{\mathbf{a}\times\mathbf{b}}{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}\times\mathbf{c}} = \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}\times\mathbf{c}}{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}\times\mathbf{c}} = 1.$$

b)

$$\mathbf{a}'\cdot\mathbf{b} = \mathbf{b}\cdot\mathbf{a}' = \mathbf{b}\cdot\frac{\mathbf{b}\times\mathbf{c}}{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}\times\mathbf{c}} = \frac{\mathbf{b}\cdot\mathbf{b}\times\mathbf{c}}{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}\times\mathbf{c}} = \frac{\mathbf{c}\cdot\mathbf{b}\times\mathbf{b}}{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}\times\mathbf{c}} = 0,$$

$$\mathbf{a}'\cdot\mathbf{c} = \mathbf{c}\cdot\mathbf{a}' = \frac{\mathbf{c}\cdot\mathbf{b}\times\mathbf{c}}{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}\times\mathbf{c}} = \mathbf{c}\cdot\frac{\mathbf{b}\times\mathbf{c}}{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}\times\mathbf{c}} = \frac{\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}\times\mathbf{c}}{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}\times\mathbf{c}} = 0.$$

Isto se može pokazati i za preostale vektorske proizvode.

Isti rezultat sledi i iz činjenice da vektor $\mathbf{a}'$ ima pravac vektorskog proizvoda $\mathbf{b}\times\mathbf{c}$ pa je normalan na ravan koju obrazuju ta dva vektora $\mathbf{a}'\cdot(\alpha\mathbf{b} + \beta\mathbf{c}) = 0$.

Napomenimo, da prema definiciji (1.25), skupovi vektora $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ i $\{\mathbf{a}', \mathbf{b}', \mathbf{c}'\}$ čine recipročni ili konjugovani sistem vektora.

c) Kako je, prema pretpostavci

$$\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) = V,$$

to je

$$\mathbf{a}'\cdot(\mathbf{b}'\times\mathbf{c}') = \frac{\mathbf{b}\times\mathbf{c}}{\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})}\cdot\left(\frac{\mathbf{c}\times\mathbf{a}}{\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})}\times\frac{\mathbf{a}\times\mathbf{b}}{\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})}\right) =$$
$$= \frac{1}{V^3}(\mathbf{b}\times\mathbf{c})\cdot[(\mathbf{c}\times\mathbf{a})\times(\mathbf{a}\times\mathbf{b})].$$

Koristeći osobinu trostrukog proizvoda (zad. 1.4d, str. 56) dobijamo:

$$\mathbf{a}'\cdot(\mathbf{b}'\times\mathbf{c}') = \frac{1}{V^3}(\mathbf{b}\times\mathbf{c})\cdot\{[(\mathbf{c}\times\mathbf{a})\cdot\mathbf{b}]\mathbf{a} - [(\mathbf{c}\times\mathbf{a})\cdot\mathbf{a}]\mathbf{c}\} =$$
$$= \frac{1}{V^3}(\mathbf{b}\times\mathbf{c})\cdot[(\mathbf{b}\times\mathbf{c})\cdot\mathbf{a}]\mathbf{a} = \frac{1}{V^3}[(\mathbf{b}\times\mathbf{c})\cdot\mathbf{a}]^2 = \frac{1}{V^3}V^2 = \frac{1}{V}.$$

d) Vektori $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ i $\mathbf{c}$ nisu komplanarni, jer je njihov mešoviti proizvod različit od nule, pa je i njegova recipročna vrednost različita od nule. Kako, prema prethodnom zadatku (1.19c, str. 65), ova recipročna vrednost predstavlja mešoviti proizvod vektora $\mathbf{a}'$, $\mathbf{b}'$ i $\mathbf{c}'$, to su i ovi vektori nekomplanarni (videti zadatak 1.18, str. 64).

♡

Zad. 1.20. Dokazati da vektori jednog sistema mogu jednoznačno da se odrede pomoću vektora recipročnog sistema vektora i da su te veze recipročne.

Dokaz.

Neka su $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ i $\mathbf{c}$ linearno nezavisni vektori u 3-D prostoru, pa proizvoljni vektor u ovom prostoru može da se predstavi kao njihova linearna kombinacija

$$\mathbf{d} = \alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b} + \gamma\mathbf{c}.$$

Koeficijente α, β i γ možemo da odredimo na sledeći način. Skalarnim množenjem prethodne relacije vektorom $\mathbf{b}\times\mathbf{c}$ dobijamo

$$\mathbf{d}\cdot\mathbf{b}\times\mathbf{c} = \alpha\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}\times\mathbf{c},$$

jer je $\mathbf{b}\cdot\mathbf{b}\times\mathbf{c}$ i $\mathbf{c}\cdot\mathbf{b}\times\mathbf{c}$ jednako nuli, kao mešoviti proizvod komplanarnih vektora. Ako uvedemo oznaku

$$V = \mathbf{a}\cdot\mathbf{b}\times\mathbf{c},$$

tada je

$$\alpha = \frac{\mathbf{d}\cdot\mathbf{b}\times\mathbf{c}}{V}.$$

Na isti način pokazuje se da je:

$$\beta = \frac{\mathbf{d}\cdot\mathbf{c}\times\mathbf{a}}{V}, \quad \gamma = \frac{\mathbf{d}\cdot\mathbf{a}\times\mathbf{b}}{V}.$$

Konačno dobijamo da je

$$\mathbf{d} = \frac{(\mathbf{d} \cdot \mathbf{b} \times \mathbf{c})}{V}\mathbf{a} + \frac{(\mathbf{d} \cdot \mathbf{c} \times \mathbf{a})}{V}\mathbf{b} + \frac{(\mathbf{d} \cdot \mathbf{a} \times \mathbf{b})}{V}\mathbf{c}.$$

Na osnovu prethodnog zadatka, uvodeći recipročne vektore istim relacijama, dobijamo

$$\mathbf{d} = (\mathbf{d} \cdot \mathbf{a}')\,\mathbf{a} + (\mathbf{d} \cdot \mathbf{b}')\,\mathbf{b} + (\mathbf{d} \cdot \mathbf{c}')\,\mathbf{c}.$$

♡

Zad. 1.21. Odrediti vektor $\mathbf{r}$ kada su poznati njegovi skalarni proizvodi ($a_i = \mathbf{r} \cdot \mathbf{A}_i$) sa data tri nekomplanarna vektora $\mathbf{A}_i$ ($i = 1, 2, 3$).

Rešenje.

Sa

$$\mathbf{A}'_1 = \frac{\mathbf{A}_2 \times \mathbf{A}_3}{V}, \quad \mathbf{A}'_2 = \frac{\mathbf{A}_3 \times \mathbf{A}_1}{V}, \quad \mathbf{A}'_3 = \frac{\mathbf{A}_1 \times \mathbf{A}_2}{V}. \tag{1.161}$$

određen je sistem recipročnih vektora $\mathbf{A'_i}$ ($i = 1, 2, 3$), gde je $V = \mathbf{A_1} \cdot \mathbf{A_2} \times \mathbf{A_3}$. Koristeći Gibsovu[20] formulu razložimo vektor $\mathbf{r}$ u pravcu tri nekomplanarna vektora $\mathbf{A}'_i$

$$\mathbf{r} = (\mathbf{r} \cdot \mathbf{A}_1)\,\mathbf{A}'_1 + (\mathbf{r} \cdot \mathbf{A}_2)\,\mathbf{A}'_2 + (\mathbf{r} \cdot \mathbf{A}_3)\,\mathbf{A}'_3 = \sum_{i=1}^{3} (\mathbf{r} \cdot \mathbf{A}_i)\,\mathbf{A}'_i.$$

Kako je prema uslovu zadatka $a_i = \mathbf{r} \cdot \mathbf{A_i}$ to prethodna relacija postaje

$$\mathbf{r} = \sum_{i=1}^{3} a_i \mathbf{A}'_i.$$

Koristeći vezu između recipročnih vektora (1.161) konačno dobijamo

$$\mathbf{r} = \frac{a_1\,(\mathbf{A}_2 \times \mathbf{A}_3) + a_2\,(\mathbf{A}_3 \times \mathbf{A}_1) + a_3\,(\mathbf{A}_1 \times \mathbf{A}_2)}{V}.$$

♡

Zad. 1.22. Ako su $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ i $\mathbf{c}$ nekomplanarni vektori i ako je $\alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b} + \gamma\mathbf{c} = 0$, tada sledi da je $\alpha = \beta = \gamma = 0$.

Dokaz.

[20] Josiah Willard Gibbs (1836-1903). Američki matematičar, jedan od osnivača vektorske analize, matematičke termodinamike i statističke mehanike (Elementary Principles in Statistical Mechanics, 1902). Njegov rad bio je od velike važnaosti u razvoju vektorske analize i matematičke fizike.

Pretpostavimo da je $\alpha \neq 0$. Tada iz $\alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b} + \gamma\mathbf{c} = 0$ sledi da je $\alpha\mathbf{a} = -\beta\mathbf{b} - \gamma\mathbf{c}$, odnosno $\mathbf{a} = -\frac{\beta}{\alpha}\mathbf{b} - \frac{\gamma}{\alpha}\mathbf{c}$. Ali to onda znači da vektor $\mathbf{a}$ leži u ravni koju obrazuju vektori $\mathbf{b}$ i $\mathbf{c}$ što je u suprotnosti sa početnom pretpostavkom da su vektori nekomplanarni. Zato je $\alpha = 0$. Analogno se dokazuje i da je $\beta = 0$ i $\gamma = 0$.

♡

Zad. 1.23. Dokazati da dva konjugovana sistema vektora predstavljaju dva nekomplanarna sistema iste orijentacije.

♡

Zad. 1.24. Ako su $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$ diferencijabilne funkcije skalara u, dokazati da je:

a)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}(\mathbf{A}\cdot \mathbf{B}) = \mathbf{A}\cdot \frac{\mathrm{d}\mathbf{B}}{\mathrm{d}u} + \frac{\mathrm{d}\mathbf{A}}{\mathrm{d}u}\cdot \mathbf{B},$$

b)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}(\mathbf{A}\times \mathbf{B}) = \mathbf{A}\times \frac{\mathrm{d}\mathbf{B}}{\mathrm{d}u} + \frac{\mathrm{d}\mathbf{A}}{\mathrm{d}u}\times \mathbf{B}.$$

<u>*Dokaz.*</u>

a)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}(\mathbf{A}\cdot \mathbf{B}) = \lim_{\Delta u\to 0}\frac{(\mathbf{A}+\Delta\mathbf{A})\cdot(\mathbf{B}+\Delta\mathbf{B}) - \mathbf{A}\cdot\mathbf{B}}{\Delta u} =$$
$$\lim_{\Delta u\to 0}\frac{\mathbf{A}\cdot\Delta\mathbf{B} + \Delta\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} + \Delta\mathbf{A}\cdot\Delta\mathbf{B}}{\Delta u} = \lim_{\Delta u\to 0}\left(\mathbf{A}\cdot\frac{\Delta\mathbf{B}}{\Delta u} + \frac{\Delta\mathbf{A}}{\Delta u}\cdot\mathbf{B} + \frac{\Delta\mathbf{A}\cdot\Delta\mathbf{B}}{\Delta u}\right) =$$
$$= \mathbf{A}\cdot \frac{\mathrm{d}\mathbf{B}}{\mathrm{d}u} + \frac{\mathrm{d}\mathbf{A}}{\mathrm{d}u}\cdot \mathbf{B},$$

pri čemu je iskorišćeno da je $\lim_{\Delta u\to 0}\left(\Delta\mathbf{A}\cdot\Delta\mathbf{B}\right)/\Delta u = 0$.

b)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}(\mathbf{A}\times \mathbf{B}) = \lim_{\Delta u\to 0}\frac{(\mathbf{A}+\Delta\mathbf{A})\times(\mathbf{B}+\Delta\mathbf{B}) - \mathbf{A}\times\mathbf{B}}{\Delta u} =$$
$$\lim_{\Delta u\to 0}\frac{\mathbf{A}\times\Delta\mathbf{B} + \Delta\mathbf{A}\times\mathbf{B} + \Delta\mathbf{A}\times\Delta\mathbf{B}}{\Delta u} = \lim_{\Delta u\to 0}\left(\mathbf{A}\times\frac{\Delta\mathbf{B}}{\Delta u} + \frac{\Delta\mathbf{A}}{\Delta u}\times\mathbf{B} + \frac{\Delta\mathbf{A}\times\Delta\mathbf{B}}{\Delta u}\right) =$$
$$= \mathbf{A}\times \frac{\mathrm{d}\mathbf{B}}{\mathrm{d}u} + \frac{\mathrm{d}\mathbf{A}}{\mathrm{d}u}\times \mathbf{B},$$

pri čemu je iskorišćeno da je $\lim_{\Delta u\to 0}\left(\Delta\mathbf{A}\times\Delta\mathbf{B}\right)/\Delta u = 0$.

♡

Zad. 1.25. Ako vektorska funkcija $\mathbf{A}$ ima konstantan intenzitet ($|\mathbf{A}|$ ne zavisi od promenljive t, a komponente A_x, A_y i A_z su funkcije od t) pokazati da su $\mathbf{A}$ i $\frac{\mathrm{d}\mathbf{A}}{\mathrm{d}t}$ ortogonalni pod uslovom da je $\left|\frac{\mathrm{d}\mathbf{A}}{\mathrm{d}t}\right| \neq 0$.

<u>*Rešenje.*</u>

Pošto $\mathbf{A}$ ima konstantan intenzitet onda je i $\mathbf{A}\cdot\mathbf{A} = const$. Tada je $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}) = \mathbf{A}\cdot\frac{\mathrm{d}\mathbf{A}}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}\mathbf{A}}{\mathrm{d}t}\cdot\mathbf{A} = 2\mathbf{A}\cdot\frac{\mathrm{d}\mathbf{A}}{\mathrm{d}t} = 0$. Iz toga sledi da su $\mathbf{A}$ i $\frac{\mathrm{d}\mathbf{A}}{\mathrm{d}t}$ ortogonalni pod uslovom da je $\left|\frac{\mathrm{d}\mathbf{A}}{\mathrm{d}t}\right| \neq 0$.

♡

Zad. 1.26. Pokazati da je $\mathbf{A}\cdot\frac{\mathrm{d}\mathbf{A}}{\mathrm{d}t} = A\cdot\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t}$, gde je A skalarna funkcija $A = |\mathbf{A}|$.

<u>*Rešenje.*</u>

Pošto je $\mathbf{A}\cdot\mathbf{A} = A^2$, onda je $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(A^2)$, pa dobijamo

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}) = \mathbf{A}\cdot\frac{\mathrm{d}\mathbf{A}}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}\mathbf{A}}{\mathrm{d}t}\cdot\mathbf{A} = 2\mathbf{A}\cdot\frac{\mathrm{d}\mathbf{A}}{\mathrm{d}t}.$$

Sa druge strane, pošto je

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(A^2) = 2A\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t}$$

to iz poslednje dve relacije sledi

$$\mathbf{A}\cdot\frac{\mathrm{d}\mathbf{A}}{\mathrm{d}t} = A\cdot\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t}.$$

♡

Zad. 1.27. Ako $\mathbf{F}$ zavisi od x, y, z, t gde x, y, z zavise od t dokazati da je

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{F}}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial\mathbf{F}}{\partial t} + \frac{\partial\mathbf{F}}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial\mathbf{F}}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial\mathbf{F}}{\partial z}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}.$$

<u>*Dokaz.*</u>

Pretpostavimo da je

$$\mathbf{F} = F_1(x, y, z, t)\mathbf{i} + F_2(x, y, z, t)\mathbf{j} + F_3(x, y, z, t)\mathbf{k}.$$

Tada je

$$\begin{gathered}
\mathrm{d}\mathbf{F} = \mathrm{d}F_1\mathbf{i} + \mathrm{d}F_2\mathbf{j} + \mathrm{d}F_3\mathbf{k} = \\
\left[\frac{\partial F_1}{\partial t}\mathrm{d}t + \frac{\partial F_1}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial F_1}{\partial y}\mathrm{d}y + \frac{\partial F_1}{\partial z}\mathrm{d}z\right]\mathbf{i} + \\
\left[\frac{\partial F_2}{\partial t}\mathrm{d}t + \frac{\partial F_2}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial F_2}{\partial y}\mathrm{d}y + \frac{\partial F_2}{\partial z}\mathrm{d}z\right]\mathbf{j} + \\
\left[\frac{\partial F_3}{\partial t}\mathrm{d}t + \frac{\partial F_3}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial F_3}{\partial y}\mathrm{d}y + \frac{\partial F_3}{\partial z}\mathrm{d}z\right]\mathbf{k} = \\
\left(\frac{\partial F_1}{\partial t}\mathbf{i} + \frac{\partial F_2}{\partial t}\mathbf{j} + \frac{\partial F_3}{\partial t}\mathbf{k}\right)\mathrm{d}t + \left(\frac{\partial F_1}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial F_2}{\partial x}\mathbf{j} + \frac{\partial F_3}{\partial x}\mathbf{k}\right)\mathrm{d}x + \\
\left(\frac{\partial F_1}{\partial y}\mathbf{i} + \frac{\partial F_2}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial F_3}{\partial y}\mathbf{k}\right)\mathrm{d}y + \left(\frac{\partial F_1}{\partial z}\mathbf{i} + \frac{\partial F_2}{\partial z}\mathbf{j} + \frac{\partial F_3}{\partial z}\mathbf{k}\right)\mathrm{d}z = \\
\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial t}\mathrm{d}t + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial y}\mathrm{d}y + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial z}\mathrm{d}z,
\end{gathered}$$

pa dobijamo

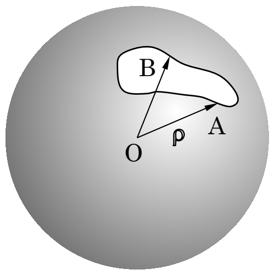
$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{F}}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial z}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}.$$

♡

Zad. 1.28. Naći izvod vektora konstantnog intenziteta.

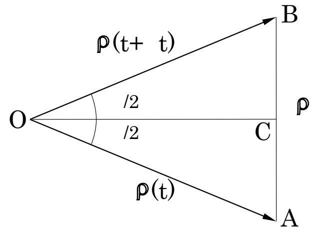
Rešenje.

Posmatrajmo vektorsku funkciju $\boldsymbol{\varrho}$ skalarnog argumenta t, pri čemu je $|\boldsymbol{\varrho}| = \varrho$ =const. Hodograf ovog vektora je kriva koja leži na sfere poluprečnika ϱ (sl. 1.42).



Slika 1.42:

Kako je $\varrho = const.$ to je $\boldsymbol{\varrho}(t+\Delta t) = \boldsymbol{\varrho}(t)$, odakle sledi da je $\triangle OAB$ jednakokraki (sl. 1.43).



Slika 1.43:

Izvod vektorske funkcije je vektor koji možemo da prikažemo, kao svaki vekor, preko njegovog intenziteta i jediničnog vektora pravca

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\varrho}}{\mathrm{d}t} = \left|\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\varrho}}{\mathrm{d}t}\right| \cdot \mathbf{p}.$$

Odredimo prvo njegov intenzitet

$$\begin{aligned}\left|\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\varrho}}{\mathrm{d}t}\right| &= \lim_{\Delta t\to 0}\left|\frac{\Delta\boldsymbol{\varrho}}{\Delta t}\right| = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{|\Delta\boldsymbol{\varrho}|}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\overline{AB}}{\Delta t} = \\ &= \lim_{\Delta t\to 0}\frac{2\varrho\sin(\Delta\varphi/2)}{\Delta t} = 2\varrho\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\sin(\Delta\varphi/2)}{\Delta\varphi/2}\frac{\Delta\varphi}{2\Delta t} = \\ &= \varrho\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\sin(\Delta\varphi/2)}{\Delta\varphi/2}\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\varphi}{2\Delta t} = \\ &= \varrho\dot{\varphi}.\end{aligned}$$

Ovde smo iskoristili činjenicu da pri $\Delta t \to 0$ i $\Delta\varphi \to 0$, tj. $\lim_{\Delta t\to 0}\dfrac{\sin(\Delta\varphi/2)}{\Delta\varphi/2} = 1$. Ovde smo tačkom iznad veličine označili izvod po vremenu t, što je uobičajeno u mehanici. Dalje, kako je $\boldsymbol{\varrho}^2 = \boldsymbol{\varrho}\cdot\boldsymbol{\varrho} = \varrho^2 = \text{const.}$, to diferenciranjem po t dobijamo

$$2\dot{\boldsymbol{\varrho}}\cdot\boldsymbol{\varrho} = 0,$$

odakle zaključujemo da su vektori $\boldsymbol{\varrho}$ i $\dot{\boldsymbol{\varrho}}$ ortogonalni. Konačno za izvod vektora konstantnog intenziteta dobijamo

$$\dot{\boldsymbol{\varrho}} = |\dot{\boldsymbol{\varrho}}|\mathbf{p} = \varrho\dot{\varphi}\mathbf{p} = \varrho\omega\mathbf{p},$$

gde je $\boldsymbol{\varrho}\perp\mathbf{p}$, a $\boldsymbol{\omega} = \dot{\boldsymbol{\varphi}}$ ugaona brzina, veličina koja karakteriše promenu pravca ovog vektora.

Imajući na umu da vektorski proizvod dva vektora daje ortogonalan vektor, to je

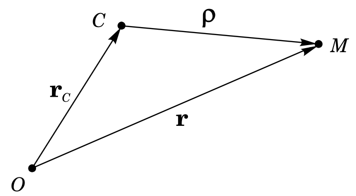
$$\dot{\boldsymbol{\varrho}} = \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\varrho}.$$

Kako je intenzitet vekorskog proizvoda $= |\dot{\boldsymbol{\varrho}}| = \omega\cdot\varrho\cdot\sin(\boldsymbol{\omega},\boldsymbol{\varrho}) = \omega\cdot\varrho$, to sledi da je $\sin(\boldsymbol{\omega},\boldsymbol{\varrho}) = 1 \Rightarrow \angle(\boldsymbol{\omega},\boldsymbol{\varrho}) = \pi/2$, tj. vektori $\boldsymbol{\varrho},\boldsymbol{\omega}$ i $\dot{\boldsymbol{\varrho}}$ su međusomno ortogonalni. ♡

Zad. 1.29. Predstaviti brzinu tačke krutog tela pri njegovoj rotaciji oko nepomične tačke.

Rešenje.

Posmatrajmo proizvoljnu tačku tela M, čiji je vektor položaja $\mathbf{r}$. Telo se okreće oko nepomične tačke C, čiji je vektor položaja $\mathbf{r}_C$ konstantan. Ako vektor $\overrightarrow{CM}$ označimo sa $\boldsymbol{\varrho}$, tada je (vidi sliku 1.44)



Slika 1.44: Položaj tačke krutog tela

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_c + \boldsymbol{\varrho} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{v} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}_c}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\varrho}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\varrho}}{\mathrm{d}t}.$$

Ovde smo iskoristili činjenicu da je vektor $\mathbf{r}_C$ konstantan (tačka C ne menja svoj položaj), pa je njegov izvod jednak nuli.

Pošto je telo kruto [21], to je intenzitet vektora $|\boldsymbol{\varrho}|$ =const, pa je, prema prethodnom zadatku

$$\mathbf{v} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\varrho}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\varrho} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ x & y & z \end{vmatrix} = \mathbf{i}\,(\omega_y z - \omega_z y) + \mathbf{j}\,(\omega_z x - \omega_x z) + \mathbf{k}\,(\omega_x y - \omega_y x)\,.$$

Ovde smo sa $\boldsymbol{\omega}$ označili ugaonu brzinu tela.

♡

Zad. 1.30. Dokazati Frene-Sere [22] -ove formule:

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}\mathbf{t}}{\mathrm{d}s} &= \frac{1}{\varrho}\mathbf{n} = (k_1\mathbf{n})\,, \\ \frac{\mathrm{d}\mathbf{n}}{\mathrm{d}s} &= -k_1\mathbf{t} + k_2\mathbf{b} = -\frac{1}{\varrho}\mathbf{t} + \frac{1}{T}\mathbf{b}, \\ \frac{\mathrm{d}\mathbf{b}}{\mathrm{d}s} &= -k_2\mathbf{n} = -\frac{1}{T}\mathbf{n}, \end{aligned} \tag{1.162}$$

gde su: $\mathbf{t}$, $\mathbf{n}$ i $\mathbf{b}$ jedinični vektori prirodnog trijedra, ϱ - poluprečnik krivine, a T - poluprečnik torzije.

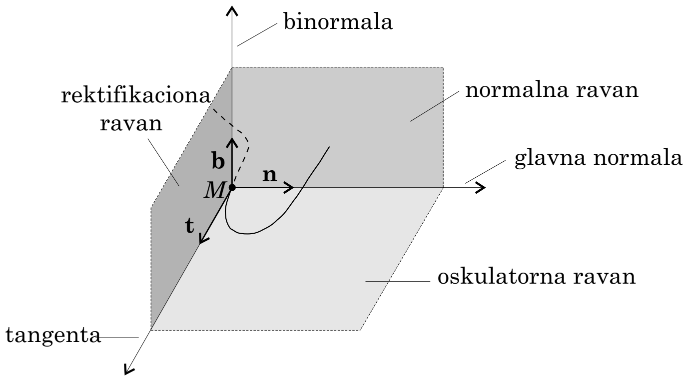
[21] Pod pojmom kruto telo podrazumevamo da rastojanje između bilo koje dve tačke tela, tokom kretanja, ostaje nepromenjeno, tj. $|\overrightarrow{CM}| = const.$

[22] Jean-Frédéric Frenet (1816-1900) i Joseph Alfred Serret (1819-1885), francuski matematičari.

Rešenje.

Posmatrajmo prirodni trijedar koji čine jedinični vektori: tangente $\mathbf{t}$, glavne normale $\mathbf{n}$ i binormale $\mathbf{b}$ (videti sliku 1.45). Ova tri vektora formiraju desni trijedar, pa je:

$$\begin{aligned}\mathbf{t}\times\mathbf{n}&=\mathbf{b},\\ \mathbf{n}\times\mathbf{b}&=\mathbf{t},\\ \mathbf{b}\times\mathbf{t}&=\mathbf{n}.\end{aligned}$$



Slika 1.45: Prirodni trijedar

Prostornu krivu možemo da predstavimo relacijom

$$\mathbf{r}=\mathbf{r}(s)=x(s)\mathbf{i}+y(s)\mathbf{j}+z(s)\mathbf{k}, \tag{1.163}$$

gde je $\mathbf{r}$ – vektor položaja proizvoljne tačke krive, s – luk krive, a $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ i $\mathbf{k}$ jedinični vektori x, y i z ose, respektivno. Tada je

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}s}&=\mathbf{t},\\ \frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}}{\mathrm{d}s^2}&=\frac{\mathrm{d}\mathbf{t}}{\mathrm{d}s}=\frac{1}{\varrho}\mathbf{n},\end{aligned} \tag{1.164}$$

gde je $1/\varrho=k_1$ – prva krivina (fleksija).

Kako je

$$\begin{aligned}\mathbf{b}=\mathbf{t}\times\mathbf{n}\quad\Rightarrow\quad\frac{\mathrm{d}\mathbf{b}}{\mathrm{d}s}&=\frac{\mathrm{d}\mathbf{t}}{\mathrm{d}s}\times\mathbf{n}+\mathbf{t}\times\frac{\mathrm{d}\mathbf{n}}{\mathrm{d}s}\quad\Rightarrow\\ \frac{\mathrm{d}\mathbf{b}}{\mathrm{d}s}&=\mathbf{t}\times\frac{\mathrm{d}\mathbf{n}}{\mathrm{d}s},\end{aligned} \tag{1.165}$$

jer je

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{t}}{\mathrm{d}s}=\frac{1}{\varrho}\mathbf{n},$$

pa su vektori $\dfrac{\mathrm{d}\mathbf{t}}{\mathrm{d}s}$ i $\mathbf{n}$ kolinearni, a njihov vektorski proizvod jednak nuli.

Kako je $\mathbf{b}\cdot\mathbf{b}=\mathbf{1}$, dobijamo

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{b}}{\mathrm{d}s}\cdot\mathbf{b}=0. \tag{1.166}$$

Iz (1.165) i (1.166) sledi da je $\dfrac{\mathrm{d}\mathbf{b}}{\mathrm{d}s}$ (vektor torzije) upravan i na $\mathbf{t}$ i na $\mathbf{b}$, pa odatle sledi da je ovaj vektor kolinearan sa glavnom normalom $\mathbf{n}$, tj.

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{b}}{\mathrm{d}s}=-k_2\mathbf{n}. \tag{1.167}$$

Napomenimo da je $k_2<0$, ako su vektori $\mathbf{k}_2$ i $\mathbf{n}$ istog smera, kada $\mathrm{d}s>0$, a $k_2>0$, ako su ovi vektori suprotnog smera. k_2 – zove se torzija krive (1.163).

Kako je $\mathbf{n}\cdot\mathbf{b}=0$ to sledi da je

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{n}}{\mathrm{d}s}\cdot\mathbf{b}+\mathbf{n}\cdot\frac{\mathrm{d}\mathbf{b}}{\mathrm{d}s}=0 \quad\Rightarrow$$
$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{n}}{\mathrm{d}s}\cdot\mathbf{b}=-\mathbf{n}\cdot\frac{\mathrm{d}\mathbf{b}}{\mathrm{d}s}=-\mathbf{n}(-k_2\mathbf{n})=k_2.$$

Diferenciranjem $\mathbf{n}$, dobijamo

$$\mathbf{n}=\mathbf{b}\times\mathbf{t}\left|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\right. \quad\Rightarrow$$

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\mathbf{n}}{\mathrm{d}s}&=\frac{\mathrm{d}\mathbf{b}}{\mathrm{d}s}\times\mathbf{t}+\mathbf{b}\times\frac{\mathrm{d}\mathbf{t}}{\mathrm{d}s}=\\ -k_2\mathbf{n}\times\mathbf{t}+\mathbf{b}\times\frac{1}{\varrho}\mathbf{n}&=k_2\mathbf{b}+\frac{1}{\varrho}(-\mathbf{t}).\end{aligned} \tag{1.168}$$

Relacije (1.164), (1.167) i (1.168) predstavljaju tzv. Frene-Sere-ove formule:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\mathbf{t}}{\mathrm{d}s}&=\frac{1}{\varrho}\mathbf{n}\ (k_1\mathbf{n}),\\ \frac{\mathrm{d}\mathbf{n}}{\mathrm{d}s}&=-k_1\mathbf{t}+k_2\mathbf{b}=-\frac{1}{\varrho}\mathbf{t}+\frac{1}{T}\mathbf{b},\\ \frac{\mathrm{d}\mathbf{b}}{\mathrm{d}s}&=-k_2\mathbf{n}=-\frac{1}{T}\mathbf{n}.\end{aligned} \tag{1.169}$$

♡

Zad. 1.31. Dokazati da je poluprečnik krivine krive date parametarskim jednačinama: $x=x(s)$, $y=y(s)$, $z=z(s)$, dat sa

$$\varrho=\left[\left(\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}s^2}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}s^2}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}s^2}\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}}. \tag{1.170}$$

Dokaz.

Kako je vektor položaja bilo koje tačke na krivoj

$$\mathbf{r} = x(s)\mathbf{i} + y(s)\mathbf{j} + z(s)\mathbf{k},$$

to je

$$\mathbf{t} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{d}x(s)}{\mathrm{d}s}\mathbf{i} + \frac{\mathrm{d}y(s)}{\mathrm{d}s}\mathbf{j} + \frac{\mathrm{d}z(s)}{\mathrm{d}s}\mathbf{k}$$

i

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{t}}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}s^2}\mathbf{i} + \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}s^2}\mathbf{j} + \frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}s^2}\mathbf{k}.$$

Kako je $\dfrac{\mathrm{d}\mathbf{t}}{\mathrm{d}s} = k\mathbf{n}$ tada je

$$k = \left|\frac{\mathrm{d}\mathbf{t}}{\mathrm{d}s}\right| = \sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}s^2}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}s^2}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}s^2}\right)^2}$$

i traženi rezultat je $\varrho = \dfrac{1}{k}$.

♡

Glava 2

Teorija polja

U matematičkoj teoriji polja [1] ne izučava se fizički smisao neke veličine koja je zadata u datom polju. Izučavaju se samo opšta svojstva polja koja se kasnije, u fizici i drugim oblastima, primenjuje na konkretna fizička polja. Konkretna polja izučavaju se u različitim delovima fizike, dok će se u ovoj knjizi navesti samo neki primeri da bi (ilustrovali) pomogli u razumevanju izložene teorije.

2.1 Skalarno polje

Posmatrajmo skup D tačaka n–dimenzionalnog Euklidskog prostora E^n. Ako se svakoj tački $M(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in D$, prema određenom zakonu, dodeli (korespondira) jedan broj (realan ili kompleksan) y, tada kažemo da je određena (definisana) skalarna (realna ili kompleksna) funkcija y od n nezavisno promenljivih i pišemo:

$$y = f(M) \quad \text{ili} \quad y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n). \tag{2.1}$$

Koordinate $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ tačke M zovemo **nezavisno promenljive**, a skup D **oblast definisanosti** (domen) funkcije tačke f.

Međutim, u fizici i nekim prirodnim naukama, kao i u tehnici, koristi se pojam "polje" da označi deo prostora (oblast) u kome se posmatra ("oseća") neka fizička pojava. Dakle, pod pojmom " **skalarno polje**", matematički govoreći, podrazumevamo oblast definisanosti skalarne funkcije. U daljem tekstu koristićemo pojam "polje" umesto "domen", pa prethodno možemo da izrazimo i na sledeći način: ako funkcija f pridružuje svakoj tački iz D skalar (realni ili kompleksni broj), tada kažemo da je **skalarno polje** dato u D.

Napomenimo da vrednost funkcije zavisi samo od tačaka u prostoru, a ne i od posebno izabranog koordinatnog sistema. Treba, dakle, imati stalno na umu da vrednost funkcije f u bilo kojoj tački $M \in D$ ne zavisi od posebno izabranog

[1] U matematici se pojam "polje" koristi i za algebarsku strukturu koju čine skup i dve operacije sa određenim osobinama, kao što je na primer skup realnih brojeva sa operacijama sabiranje i množenje.

koordinatnog sistema. Međutim, njen funkcionalni oblik zavisi od koordinatnog sistema. Da bismo istakli tu činjenicu, takođe je uobičajeno označavanje $f(M)$ umesto $f(x_1, \ldots, x_n)$, što je i iskorišćeno pri pisanju relacije (2.1). Kada je funkcija izražena preko koordinata, kažemo da je data u analitičkom obliku.

Kao primere skalarnih polja navedimo sledeće: *temperatura, masa, gustina mase, električno naelektrisanje, pritisak*, itd.

Kako jedna od promenljivih može da bude i vreme t, to ćemo ono polje koje ne zavisi (eksplicitno) od vremena nazivati **stacionarno polje**.

Definicija.

Geometrijsko mesto tačaka u kojima funkcija $f(M) = f(x_1, x_2, x_3)$ ima konstantnu vrednost C:

$$f(M) = f(x_1, x_2, x_3) = C, \tag{2.2}$$

zovemo **ekviskalarna površ** skalarnog polja.

Definicija.

Geometrijsko mesto tačaka u kojima funkcija $f(M) = f(x_1, x_2)$ ima konstantnu vrednost C:

$$f(M) = f(x_1, x_2) = C, \tag{2.3}$$

zovemo **ekviskalarna linija** skalarnog polja.

2.1.1 Izvod funkcije u pravcu. Gradijent

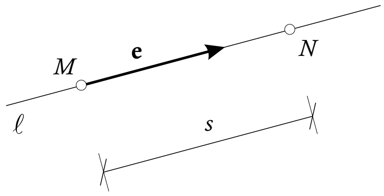
Primena matematičke analize na proučavanje skalarnog polja $f(M)$ omogućava da se opišu njegove lokalne osobine, tj. promene $f(M)$ pri prelasku od tačke M u njoj blisku tačku N.

Posmatrajmo neko skalarno polje zadato funkcijom $f(x, y, z) = f(M)$, u odnosu na pravougli Dekartov koordinatni sistem. Poznato je da prvi parcijalni izvod skalarne funkcije f predstavlja brzinu njene promene u pravcima koordinatnih osa. Međutim, neprirodno je ograničiti se samo na ta tri (u 3–D prostoru) pravca. Proširenje te ideje na promenu u bilo kom pravcu dovodi do uvođenja pojma: izvod (skalarne) funkcije u pravcu.

Da bismo našli ovaj izvod, posmatrajmo neku tačku M prostora i pravac, kroz ovu tačku, određen jediničnim vektorom $\mathbf{e}$. Neka se na ovom pravcu ℓ nalazi tačka N, pri čemu je rastojanje između M i N označeno sa Δs (sl. 2.1)

$$\overrightarrow{MN} = \Delta s \mathbf{e}. \tag{2.4}$$

Razliku Δf funkcije f u tačkama M i N označimo sa $\Delta f = f(N) - f(M)$.



Slika 2.1:

Definicija.

Ako limes:

$$\lim_{\Delta s \to 0} \frac{f(N) - f(M)}{\Delta s} = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta s}, \tag{2.5}$$

postoji, tad ga zovemo **izvod** funkcije f, u tački M, **u pravcu e**, i označavamo sa

$$D_{\mathbf{e}} f = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}s}.$$

Jasno je da on predstavlja brzinu promene funkcije f, u tački M, u pravcu $\mathbf{e}$. Obe oznake, $D_{\mathbf{e}} f$ ili $\mathrm{d}f/\mathrm{d}s$, su uobičajene, mada je $D_{\mathbf{e}} f$ pogodnija, jer ukazuje na pravac promene.

Izvod funkcije u pravcu, kao što se vidi iz definicije (2.5), ne zavisi od izbora koordinatnog sistema. Međutim, da bismo izračunali konkretne vrednosti tih izvoda, posmatraćemo ih u odnosu na, recimo Dekartov pravougli koordinatni sistem i predstavićemo $f(M)$ kao funkciju $f(x, y, z)$. U tom cilju potražićemo promenu funkcije f pri prelasku iz tačke $M(x, y, z)$, koja pripada tom polju, u blisku tačku $N(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z)$ istog polja, a na pravcu $\mathbf{e}$. Dalje, na osnovu definicije parcijalnog izvoda skalarne funkcije, recimo po x, imamo:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y, z) - f(x, y, z)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f_x}{\Delta x}, \tag{2.6}$$

odakle, za diferencijabilnu funkciju, možemo da napišemo:

$$\Delta f_x = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \Delta x + \delta_x \cdot \Delta x, \quad \text{gde} \quad \delta_x \to 0 \quad \text{kada} \quad \Delta x \to 0. \tag{2.7}$$

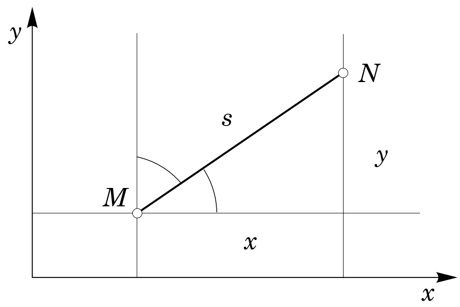
Na isti način dobijamo i za preostala dva priraštaja Δf_y i Δf_z, pa ukupan priraštaj funkcije f možemo da napišemo u obliku:

$$\begin{aligned} \Delta f &= f(N) - f(M) = \\ &= \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \Delta y + \frac{\partial f}{\partial z} \cdot \Delta z + \delta_x \cdot \Delta x + \delta_y \cdot \Delta y + \delta_z \cdot \Delta z. \end{aligned} \tag{2.8}$$

Dalje, u pravouglim Dekartovim koordinatama je

$$\Delta s = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}. \tag{2.9}$$

Uzmimo sada da $\Delta s \to 0$, akko $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$ i $\Delta z \to 0$. Prema slici 2.2,



Slika 2.2:

vidimo da je:

$$\frac{\Delta x}{\Delta s} = \cos\alpha, \quad \frac{\Delta y}{\Delta s} = \cos\beta, \quad \text{i po analogiji} \quad \frac{\Delta z}{\Delta s} = \cos\gamma, \tag{2.10}$$

gde su α, β i γ uglovi koje vektor $\overrightarrow{MN}$ zaklapa sa pozitivnim smerovima koordinatnih osa x, y i z, respektivno.

Dakle, izvod skalarne funkcije f u pravcu $\mathbf{e}$, može da se predstavi i na sledeći način

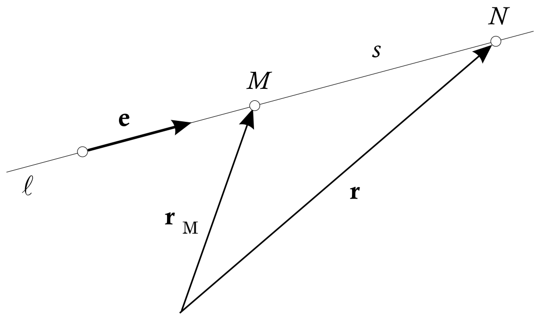
$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}s} &= \lim_{\Delta s\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta s} = \lim_{\Delta s\to 0}\frac{\dfrac{\partial f}{\partial x}\cdot\Delta x + \dfrac{\partial f}{\partial y}\cdot\Delta y + \dfrac{\partial f}{\partial z}\cdot\Delta z + \delta_x\cdot\Delta x + \delta_y\cdot\Delta y + \delta_z\cdot\Delta z}{\Delta s}\\ &= \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\cos\alpha + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\cos\beta + \frac{\partial f}{\partial z}\cdot\cos\gamma +\\ &+ \cos\alpha\lim_{\Delta s\to 0}\delta_x + \cos\beta\lim_{\Delta s\to 0}\delta_y + \cos\gamma\lim_{\Delta s\to 0}\delta_z =\\ &= \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\cos\alpha + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\cos\beta + \frac{\partial f}{\partial z}\cdot\cos\gamma.\end{aligned} \tag{2.11}$$

Do izvoda u pravcu može da se dođe i na sledeći način. Posmatrajmo funkciju $f(x, yz)$ definisanu u okolini tačke $M(a, b, c)$, koja leži na pravcu ℓ. Neka je ovaj pravac određen jediničnim vektorom $\mathbf{e}$, a $\mathbf{r}_M$ i $\mathbf{r}$ su vektori položaja tačaka M i $N \in \ell$, respektivno, i (sl. 2.3)

$$\Delta s = \overline{MN}, \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}_M + \Delta s\cdot\mathbf{e},$$

onda je

$$x = a + \Delta s\cdot\cos\alpha, \quad y = b + \Delta s\cdot\cos\beta, \quad z = c + \Delta s\cdot\cos\gamma. \tag{2.12}$$



Slika 2.3:

Tada za izvod u pravcu $\mathbf{e}$ imamo

$$\begin{aligned}D_{\mathbf{e}}f = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}s} &= \lim_{N\to M}\frac{f(N)-f(M)}{\Delta s} = \\ &= \lim_{\Delta s\to 0}\frac{f(\mathbf{r})-f(\mathbf{r}_M)}{\Delta s} = \\ &= \lim_{\Delta s\to 0}\frac{f(\mathbf{r}_M+\Delta s\mathbf{e})-f(\mathbf{r}_M)}{\Delta s}.\end{aligned}$$

Razvijajući u red funkciju $f(N)$, u okolini tačke $M(a,b,c)$ i koristeći (2.12), dobijamo:

$$\begin{aligned}f(N) &= f(x,y,z) = f(a+\Delta s\cdot\cos\alpha,\ b+\Delta s\cdot\cos\beta,\ c+\Delta s\cdot\cos\gamma) = \qquad (2.13)\\ &= f(M)+\frac{1}{1!}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\bigg|_M\cdot\cos\alpha+\frac{\partial f}{\partial y}\bigg|_M\cdot\cos\beta+\frac{\partial f}{\partial z}\bigg|_M\cdot\cos\gamma\right)\cdot\Delta s+\delta(N)\cdot\Delta s,\end{aligned}$$

pri čemu je $\lim_{N\to M}\delta(N)=0$, odakle sledi:

$$\begin{aligned}&\frac{f(N)-f(M)}{\Delta s} = \qquad (2.14)\\ &\qquad = \frac{\partial f}{\partial x}\bigg|_M\cdot\cos\alpha+\frac{\partial f}{\partial y}\bigg|_M\cdot\cos\beta+\frac{\partial f}{\partial z}\bigg|_M\cdot\cos\gamma+\delta(N),\end{aligned}$$

odnosno:

$$\begin{aligned}D_{\mathbf{e}}f = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}s} &= \lim_{\Delta s\to 0}\frac{f(N)-f(M)}{\Delta s} = \frac{\partial f}{\partial x}\bigg|_M\cdot\cos\alpha+\frac{\partial f}{\partial y}\bigg|_M\cdot\cos\beta+\frac{\partial f}{\partial z}\bigg|_M\cdot\cos\gamma = \\ &= f_x\cdot\cos\alpha+f_y\cdot\cos\beta+f_z\cdot\cos\gamma. \qquad (2.15)\end{aligned}$$

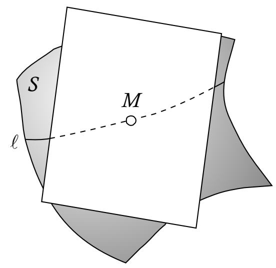
Dakle, isto kao i relacija (2.11).

Kako kroz neku tačku prolazi beskonačno pravaca, to možemo da nađemo beskonačan broj izvoda u tim pravcima. Međutim, ako posmatramo neki koordinatni sistem, recimo pravougli Dekartov, možemo bilo koji od tih izvoda da izrazimo preko prvih parcijalnih izvoda funkcije f u tački M i na sledeći način. Neka je tačka M određena vektorom položaja $\mathbf{r}_M$ i pretpostavimo da je $\mathbf{e}$ jedinični vektor. Neka kroz tačku M prolazi linija ℓ, koju možemo da predstavimo u sledećem obliku:

$$\mathbf{r}(s) = x(s)\,\mathbf{i} + y(s)\,\mathbf{j} + z(s)\,\mathbf{k} = \mathbf{r}_M + s\mathbf{e} \quad (s \geq 0,\ |\mathbf{e}| = 1), \tag{2.16}$$

gde je $\mathbf{r}(s)$ vektor položaja, koji zavisi od parametra s (dužina luka).

Posmatrajmo izvod funkcije f duž krive ℓ, tada je $D_{\mathbf{e}} f = \dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}s}$ izvod funkcije $f[x(s), y(s), z(s)]$ koji zavisi od dužine luka s.



Slika 2.4:

Prema tome, pretpostavljajući da f ima neprekidne prve parcijalne izvode, a primenom pravila o izvodu složene funkcije, dobijamo:

$$\begin{aligned} D_{\mathbf{e}} f = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}s} &= \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s} + \frac{\partial f}{\partial z}\cdot\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}s} = \\ &= \frac{\partial f}{\partial x}\cdot x' + \frac{\partial f}{\partial x}\cdot y' + \frac{\partial f}{\partial x}\cdot z', \end{aligned} \tag{2.17}$$

gde $(')$ označava izvod po parametru s.

Diferencirajući vektorsku funkciju $\mathbf{r}(s)$, iz (2.16) dobijamo [2] :

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}s} = \mathbf{t} = x'\,\mathbf{i} + y'\,\mathbf{j} + z'\,\mathbf{k} = \mathbf{e}. \tag{2.18}$$

Dakle, u ovom slučaju $\mathbf{e}$ ima pravac tangente.

[2] Neka je kriva ℓ data u parametarskom obliku

$$\mathbf{r}(s) = x(s)\mathbf{i} + y(s)\mathbf{j} + z(s)\mathbf{k},$$

gde luk krive s predstavlja parametar. Tada je

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}\mathbf{i} + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}\mathbf{j} + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}\mathbf{k} = \mathbf{t},$$

gde je $\mathbf{t}$ vektor pravca tangente u tački na krivoj ℓ, jediničnog intenziteta, jer je

$$\left|\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}s}\right| = |\mathbf{t}| = \sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}s}\right)^2} = \sqrt{\frac{\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2}{\mathrm{d}s^2}} = 1.$$

Imajući na umu skalarni proizvod i relaciju (2.18), izraz (2.17) može da se prikaže u obliku

$$\begin{aligned}D_{\mathbf{e}}\, f &= \left(\frac{\partial f}{\partial x}\cdot \mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot \mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\cdot \mathbf{k}\right)(x'\,\mathbf{i} + y'\,\mathbf{j} + z'\,\mathbf{k}) = \\ &= \left(\frac{\partial f}{\partial x}\cdot \mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot \mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\cdot \mathbf{k}\right)\mathbf{e},\end{aligned}$$

što navodi da uvedemo sledeći vektor.

Definicija.

Vektor određen relacijom

$$\operatorname{grad} f = \frac{\partial f}{\partial x}\,\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\,\mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\,\mathbf{k}. \tag{2.19}$$

naziva se **gradijent** skalarne funkcije f.

Kako je gradijent skalarne funkcije vektorska veličina, to je za ovaj vektor:

$$\text{intenzitet: } |\operatorname{grad} f| = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}, \tag{2.20}$$

$$\text{pravac: } \cos\alpha = \frac{\partial f/\partial x}{|\operatorname{grad} f|},\ \cos\beta = \frac{\partial f/\partial y}{|\operatorname{grad} f|},\ \cos\gamma = \frac{\partial f/\partial z}{|\operatorname{grad} f|}. \tag{2.21}$$

Sada možemo izvod u pravcu da predstavimo u obliku

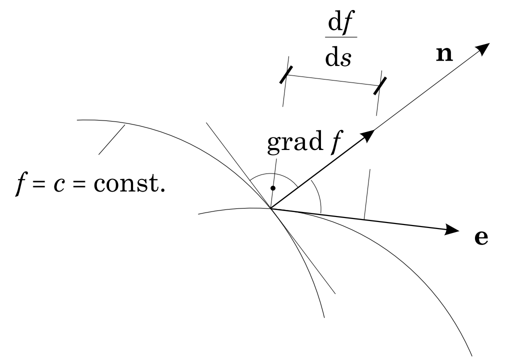
$$D_{\mathbf{e}}\, f = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}s} = \mathbf{e}\cdot \operatorname{grad} f. \tag{2.22}$$

Geometrijski smisao ovog proizvoda je projekcija gradijenta na pravac određen vektorom $\mathbf{e}$, tj.

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}s} = \operatorname{proj}_{\mathbf{e}} \operatorname{grad} f = |\operatorname{grad} f|\cdot \cos\varphi, \tag{2.23}$$

gde je φ ugao između grad$f$ i $\mathbf{e}$.

Iz ove definicije sledi da je $\mathrm{d}f/\mathrm{d}s$ maksimalno kada je $\cos\varphi = 1 \Rightarrow \varphi = 0$. Dakle, skalarno polje najbrže se menja u pravcu gradijenta, tj. gradijent određuje pravac u kome se skalarno polje najbrže menja.



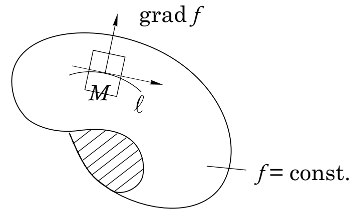
Slika 2.5:

U specijalnom slučaju, kada se izvod traži u pravcu $+Ox$ ose, tade je **e=i**, dobijamo:

$$D_{\mathbf{i}}\, f = \mathbf{i}\cdot \operatorname{grad} f = \mathbf{i}\cdot \left(\frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\mathbf{k} \right) = \frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i}\cdot \mathbf{i} = \frac{\partial f}{\partial x}. \tag{2.24}$$

Teorema 1 *Neka je $f(M) = f(x, y, z)$ skalarna funkcija, čiji su prvi parcijalni izvodi neprekidne funkcije. Tada postoji vektor* grad f *čiji intenzitet i pravac ne zavise od izbora koordinatnog sistema u prostoru. Ako u tački M* grad f *nije jednak nuli, tada on ima pravac maksimalnog povećanja funkcije f u tački M.*

Ovu teoremu ćemo da dokažemo kasnije.



Slika 2.6:

Teorema 2 *Neka je gradijent funkcije $u = f(x, y, z)$, u tački M različit od nule. Tada je on upravan*[3] *na svaku liniju ℓ, koja prolazi kroz tačku M, a leži u ekviskalarnoj površi $f = const$.*

[3]Pod "upravan na liniju u tački M" podrazumevamo da je upravan na tangentnu ravan, koja prolazi kroz M.

<u>*Dokaz.*</u>

Posmatrajmo liniju ℓ, koja prolazi kroz tačku M, a leži na površi $f = const.$ (sl. 2.6). Kako funkcija ne menja svoju vrednost, kada se tačka kreće duž krive ℓ (jer leži na $f = const.$), to je
$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}s} = 0.$$
Kako je, s druge strane, izvod funkcije duž luka ℓ (2.23)

$$D_{\mathbf{e}}f = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}s} = \mathbf{e}\cdot \mathrm{grad}f = |\mathrm{grad}f|\cdot \cos(\mathrm{grad}f, \mathbf{e}) = 0,$$

to, uz pretpostavku da je $\mathrm{grad}f \neq 0$, dobijamo $\cos\varphi = 0$ (sl. 2.5). Dakle, kako je $\mathbf{e}$ jedinični vektor tangente linije ℓ, sledi da je gradijent upravan na ekviskalarnu površ.

Izvod funkcije f **u pravcu tangente** $\mathbf{t}$ ($\mathbf{t}$ je jedinični vektor tangente na krivu C, u tački M) je, prema (2.23):

$$D_{\mathbf{t}}f = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}s} = \mathbf{t}\cdot \mathrm{grad}\, f = \tag{2.25}$$
$$\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}\cdot \mathbf{i} + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}\cdot \mathbf{j} + \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}s}\cdot \mathbf{k}\right)\cdot \left(\frac{\partial f}{\partial x}\cdot \mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot \mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\cdot \mathbf{k}\right) = \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}s}\cdot \mathrm{grad}\, f.$$

Odavde dobijamo:
$$\mathrm{d}f = \mathrm{d}\mathbf{r}\cdot \mathrm{grad}\, f. \tag{2.26}$$
Dakle, kada je skalarna funkcija diferencijabilna, tada je njen totalni diferencijal jednak skalarnom proizvodu gradijenta funkcije i diferencijala vektora položaja. Ovo nam ukazuje na jedan od načina kako da izračunamo gradijent funkcije. Naime, kada diferencijal funkcije može da se predstavi kao skalarni proizvod dva vektora, od kojih je jedan $\mathrm{d}\mathbf{r}$, tada je drugi činilac jednak gradijentu funkcije.

2.1.2 Parcijalni gradijent skalarne funkcije

Posmatrajmo neku skalarnu funkciju f koja zavisi od dva vektora $\mathbf{u}$ i $\mathbf{v}$:

$$f = f(\mathbf{u}, \mathbf{v}), \tag{2.27}$$

pri čemu ova dva vektora možemo da predstavimo, u odnosu na Dekartov koordinatni sistem, u obliku:

$$\mathbf{u} = u_1\mathbf{e}_1 + u_2\mathbf{e}_2 + u_3\mathbf{e}_3,$$
$$\mathbf{v} = v_1\mathbf{e}_1 + v_2\mathbf{e}_2 + v_3\mathbf{e}_3.$$

Polje ove funkcije određeno je tačkama U i V, koje predstavljaju krajeve vektora $\mathbf{u}$ i $\mathbf{v}$. Ovde smo koristili oznake: $\mathbf{e}_1 = \mathbf{i}$, $\mathbf{e}_2 = \mathbf{j}$ i $\mathbf{e}_3 = \mathbf{k}$, koje su pogodne zbog skraćenog pisanja.

Pretpostavimo da je vektor **v** konstantan i potražimo gradijent ovako dobijene funkcije, prema (2.19)

$$\mathrm{grad}_{\mathbf{u}}\, f(\mathbf{u},\ \mathbf{v}) = \frac{\partial f}{\partial u_1}\mathbf{e}_1 + \frac{\partial f}{\partial u_2}\mathbf{e}_2 + \frac{\partial f}{\partial u_3}\mathbf{e}_3, \tag{2.28}$$

koji se zove **parcijalni** (delimični) **gradijent** skalarne funkcije f, po vektoru **u**.

Na sličan način definišemo parcijalni gradijent i po drugom vektoru. Takođe, ovu definiciju možemo da proširimo i na proizvoljan, ali konačan, broj vektora. U tom slučaju bi se uzeli za konstantne svi vektori, osim jednog.

2.1.3 Osobine gradijenta

a) grad $C = 0\,(C = const.)$,

b) grad $(U+V)$=grad U+grad V, gde je $U = U(M)$, $V = V(M)$,

c) grad $(U\cdot V)$=$V\cdot$grad U+$U\cdot$ grad V,

d) grad (CU)=C grad U, C=const.,

e) grad (U/V)=$(1/V^2)(V\cdot$grad U-$U\cdot$ grad $V)$,

f) grad $f(U) = f'_U\cdot$grad U.

Na osnovu ovih osobina vidimo da važi:

$$\mathrm{grad}\,(C_1U_1 + C_2U_2) = C_1\mathrm{grad}\,U_1 + C_2\mathrm{grad}\,U_2. \tag{2.29}$$

Operatore koji imaju ovu osobinu, zovemo **linearni operator**. Dakle, gradijent je linearan operator.

Dokaz.

a)

$$\mathrm{grad}C = \left(\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k}\right)C = \frac{\partial C}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial C}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial C}{\partial z}\mathbf{k} = 0 + 0 + 0 = 0.$$

b)

$$\begin{aligned}
\mathrm{grad}(U+V) &= \\
&= \left(\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k}\right)(U+V) = \\
&= \frac{\partial(U+V)}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial(U+V)}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial(U+V)}{\partial z}\mathbf{k} = \\
&= \frac{\partial U}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\mathbf{k} + \frac{\partial V}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial V}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial V}{\partial z}\mathbf{k} = \\
&= \left(\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k}\right)U + \left(\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k}\right)V = \\
&= \mathrm{grad}U + \mathrm{grad}V.
\end{aligned}$$

c)

$$
\begin{aligned}
\operatorname{grad}(U\cdot V) &= \\
&= \left(\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k}\right)(U\cdot V) = \\
&= \frac{\partial (U\cdot V)}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial (U\cdot V)}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial (U\cdot V)}{\partial z}\mathbf{k} = \\
&= \frac{\partial U}{\partial x}\mathbf{i}\cdot V + U\cdot\frac{\partial V}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\mathbf{j}\cdot V + U\cdot\frac{\partial V}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\mathbf{k}\cdot V + U\cdot\frac{\partial V}{\partial z}\mathbf{k} = \\
&= \left(\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k}\right)U\cdot V + U\cdot\left(\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k}\right)V = \\
&= \operatorname{grad}U\cdot V + U\cdot\operatorname{grad}V.
\end{aligned}
$$

Za vežbu pokazati da važe i preostale tri osobina gradijenta.

2.1.4 Nabla operator ili Hamiltonov operator

Uvodeći diferencijalni operator, koji nazivamo "nabla" [4] ili Hamiltonov [5], definisan sa

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k}, \tag{2.30}$$

gradijent funkcije f može da se predstavi u obliku

$$\operatorname{grad} f = \nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\mathbf{k}. \tag{2.31}$$

Oznaka ∇f, za gradijent, koristi se veoma često u tehnici.

Osobine nabla operatora ∇

Neka su f i g skalarne funkcije, a $\mathbf{a}$ i $\mathbf{b}$ vektorske funkcije, tada osobine nabla operatora možemo da izrazimo na sledeći način:

a) $\nabla(f\cdot g) = g\,\nabla f + f\,\nabla g$,

b) $\nabla\cdot(f\mathbf{a}) = (\nabla f)\cdot\mathbf{a} + f\,(\nabla\cdot\mathbf{a})$,

c) $\nabla\times(f\mathbf{a}) = (\nabla f)\times\mathbf{a} + f\,(\nabla\times\mathbf{a})$,

d) $\nabla\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{b}) = (\nabla\times\mathbf{a})\cdot\mathbf{b} - \mathbf{a}\cdot(\nabla\times\mathbf{b})$,

e) $\nabla(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}) = \mathbf{a}\times(\nabla\times\mathbf{b}) + \mathbf{b}\times(\nabla\times\mathbf{a}) + (\mathbf{a}\cdot\nabla)\mathbf{b} + (\mathbf{b}\cdot\nabla)\mathbf{a}$.[6]

f) $\nabla\times(\mathbf{a}\times\mathbf{b}) = (\mathbf{b}\cdot\nabla)\mathbf{a} - \mathbf{b}(\nabla\cdot\mathbf{a}) - (\mathbf{a}\cdot\nabla)\mathbf{b} + \mathbf{a}(\nabla\cdot\mathbf{b})$.

[4] Po hebrejskom slovu ∇ koje se koristi kao oznaka za ovaj operator.

[5] William Rowan Hamilton (1805-1865), irski matematičar, poznat po svom radu u dinamici.

[6] Napomenimo da je $\mathbf{a}\cdot\nabla = a_x\frac{\partial}{\partial x} + a_y\frac{\partial}{\partial y} + a_z\frac{\partial}{\partial z}$

2.1.5 Laplasov ili delta operator

Definišimo sada operator, skalarne prirode, na sledeći način:

$$\begin{aligned}
\nabla\cdot\nabla = \nabla^2 = & \\
&= \left(\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k}\right)\cdot\left(\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k}\right) = \\
&= \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \Delta.
\end{aligned} \tag{2.32}$$

Simbol Δ-"delta", zovemo **Laplasov operator** [7] ili Laplasijan.

2.2 Vektorsko polje

2.2.1 Vektorska funkcija. Vektorsko polje

Neka se svakoj tački M, oblasti $\mathcal{D}$, po određenom zakonu, dodeli jedna vrednost nekog vektora $\mathbf{v}$, tada kažemo da je definisana vektorska funkcija $\mathbf{v}$=$\mathbf{v}(M)$. Skup $\mathcal{D}$, kome pripadaju vrednosti argumenta naziva se oblast definisanosti funkcije ili **vektorsko polje** ove funkcije. Dakle, vektorsko polje je oblast definisanosti vektorske funkcije.

Međutim, kako je svaka tačka M određena vektorom položaja $\mathbf{r}$, to prethodna definicija može da se da i u obliku:

> ako se svakoj vrednosti vektora položaja $\mathbf{r}\in\mathbb{V}$, gde je $\mathbb{V}$ trodimenzionalni vektorski prostor, čiji su bazni vektori $\mathbf{e}_i$ $(i = 1, 2, 3)$, po određenom zakonu, dodeli jedna vrednost nekog vektora $\mathbf{v}$, kažemo da je definisana vektorska funkcija argumenta $\mathbf{r}$:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{r}) = v_1\mathbf{e}_1 + v_2\mathbf{e}_2 + v_3\mathbf{e}_3. \tag{2.33}$$

Ovde smo vektor položaja izrazili preko komponenti, u odnosu na neki koordinatni sistem, pa tako predstavili i samu funkciju.

Kako je, u odnosu na pravougli Dekartov koordinatni sistem:

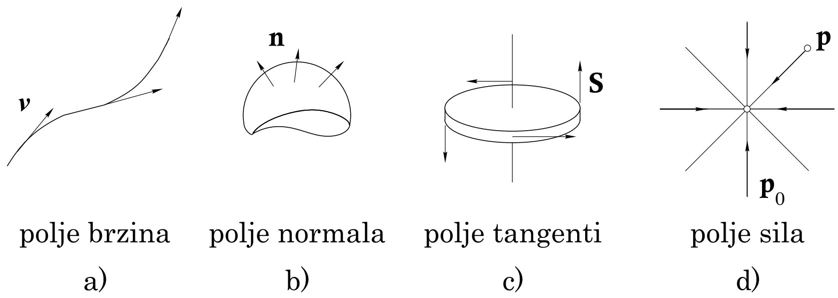
$$v_1 = v_1(x, y, z) \quad v_2 = v_2(x, y, z) \quad v_3 = v_3(x, y, z) \tag{2.34}$$

to svaka od ovih relacija definiše po jedno skalarno polje. Dakle, proučavanje vektorskih polja se svodi na proučavanje tri (ako je trodimenzioni prostor u kome posmatramo) skalarna polja.

[7] Pierre Simon Marquis De Laplace (1749-1827), veliki francuski matematičar. Postavio je osnove teorije potencijala i dao je veliki doprinos u mehanici, astronomiji, kao i u oblasti specijalnih funkcija i teoriji verovatnoće. Interesantno je napomenuti da je njegov učenik bio i Napoleon Bonaparta, jednu godinu.

Kao primere navedimo: *polje sile Zemljine teže, polje brzina pokretnog fluida, gradijent skalarne funkcije* itd. Kao primer možemo da uzmemo i bilo koju analitički zadatu vektorsku funkciju, kakva je na primer $\mathbf{v}= xy\mathbf{i}-2yz\mathbf{j}+x\mathbf{k}$, čija oblast definisanosti predstavlja vektorsko polje.

Neki tipični primeri vektorskih polja prikazani su na slikama 2.7a,b,c,d.

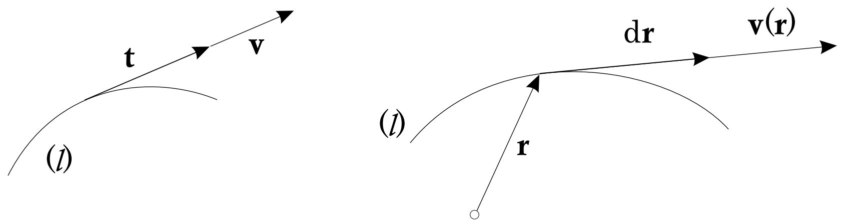


Slika 2.7: Primeri vektorskih polja

Ako vektorsko polje ne zavisi od vremena zovemo ga stacionarno vektorsko polje.

Definicija.

Vektorskom linijom ℓ naziva se geometrijsko mesto tačaka vektorskog polja u kojima vektorska funkcija $\mathbf{v}(M)$ ima pravac tangente na ovu liniju, u datim tačkama, tj. linija kod koje se u svakoj tački pravac vektora poklapa sa pravcem tangente krive u toj tački.



Slika 2.8: Vektorska linija

Iz definicije vektorske linije, kako su vektor tangente $\mathbf{t}$ odnosno $\mathrm{d}\mathbf{r}$ i vektor $\mathbf{v}$ kolinearni, sledi jednačina ove linije

$$\mathrm{d}\mathbf{r} \times \mathbf{v} = 0, \tag{2.35}$$

ili, na osnovu (1.28), u obliku (vidi sl. 2.8)

$$\mathrm{d}\mathbf{r} = \mathbf{v}\cdot \mathrm{d}t, \quad \text{gde je } t \text{ parametar.} \tag{2.36}$$

U pravouglom Dekartovom koordinatnom sistemu (2.36) postaje

$$\mathrm{d}x\mathbf{i} + \mathrm{d}y\mathbf{j} + \mathrm{d}z\mathbf{k} = (v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} + v_3\mathbf{k})\cdot \mathrm{d}t. \tag{2.37}$$

Kako su **i**, **j** i **k** linearno nezavisni, iz poslednje relacije konačno dobijamo

$$\frac{\mathrm{d}x}{v_1} = \frac{\mathrm{d}y}{v_2} = \frac{\mathrm{d}z}{v_3} = \mathrm{d}t. \tag{2.38}$$

Ova relacija predstavlja diferencijalnu jednačinu vektorske linije.

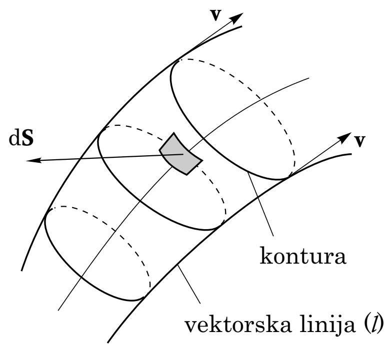
Izvod vektorske funkcije u pravcu slično se definiše kao izvod skalarne funkcije

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{d}v_1}{\mathrm{d}s}\,\mathbf{i} + \frac{\mathrm{d}v_2}{\mathrm{d}s}\,\mathbf{j} + \frac{\mathrm{d}v_3}{\mathrm{d}s}\,\mathbf{k}, \tag{2.39}$$

pri čemu je:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}v_1}{\mathrm{d}s} &= \frac{\partial v_1}{\partial x}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} + \frac{\partial v_1}{\partial y}\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s} + \frac{\partial v_1}{\partial z}\cdot\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}s},\\
\frac{\mathrm{d}v_2}{\mathrm{d}s} &= \frac{\partial v_2}{\partial x}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} + \frac{\partial v_2}{\partial y}\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s} + \frac{\partial v_2}{\partial z}\cdot\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}s},\\
\frac{\mathrm{d}v_3}{\mathrm{d}s} &= \frac{\partial v_3}{\partial x}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} + \frac{\partial v_3}{\partial y}\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s} + \frac{\partial v_3}{\partial z}\cdot\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}s}.
\end{aligned} \tag{2.40}$$

Uočimo u vektorskom polju **v** neku orijentisanu zatvorenu krivu, koju zovemo kontura. Kroz svaku tačku ove konture prolazi po jedna vektorska linija (ℓ).



Slika 2.9: Vektorska površ

Definicija.

Geometrijsko mesto vektorskih linija, koje prolaze kroz tačke jedne konture u vektorskom polju **v**, predstavlja površ koja se naziva **solenoid** (tuba ili vektorska površ ili vektorska cev), vidi sl. 2.9.

Da bismo napisali jednačinu ove površi, označimo sa S površinu omotača ove cevi, a sa d**S** vektorski element ove površi. Prema definiciji solenoida [8] sledi da je vektorski

[8] Solenoid - od grčke reči $\sigma\omega\lambda\eta\nu$ - cev.

površinski element upravan na vektor $\mathbf{v}$, pa je

$$\mathbf{v}\cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = 0. \tag{2.41}$$

Pema tome, ako je S ukupna površina omotača, onda je

$$\int_S \mathbf{v}\cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = 0. \tag{2.42}$$

2.2.2 Divergencija i rotor

Posmatrajmo diferencijabilnu vektorsku funkciju $\mathbf{v}$, koju možemo da predstavimo, u odnosu na pravougli Dekartov koordinatni sistem, u obliku

$$\mathbf{v} = v_x\mathbf{i} + v_y\mathbf{j} + v_z\mathbf{k}. \tag{2.43}$$

Definicija.

Skalarnu funkciju, određenu relacijom

$$\operatorname{div}\mathbf{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \tag{2.44}$$

zovemo **divergencija** vektorske funkcije $\mathbf{v}$ ili divergencija vektorskog polja definisanog sa $\mathbf{v}$.

Pogodnija oznaka za divergenciju je već definisan nabla operator ∇, preko koga možemo da izrazimo divergenciju u obliku:

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}\mathbf{v} &= \nabla\cdot\mathbf{v} = \\
&= \left(\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k}\right)\cdot(v_x\mathbf{i} + v_y\mathbf{j} + v_z\mathbf{k}) = \\
&= \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}\right).
\end{aligned} \tag{2.45}$$

Teorema 3 *Vrednost* $\operatorname{div}\mathbf{v}$ *zavisi samo od tačaka u prostoru (i naravno od vrednosti funkcije* $\mathbf{v}$*), ali ne i od izbora koordinatnog sistema.*

Napomenimo da je moguće definisati divergenciju tako da se vidi da ne zavisi od izbora koordinatnog sistema, što ćemo kasnije i uraditi.

Definicija.

Vektorska funkcija, definisana sa:

$$\operatorname{rot}\mathbf{v} = \nabla \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix} = \tag{2.46}$$

$$= \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right)\mathbf{k}$$

zove se **rotor** vektorske funkcije $\mathbf{v}$ ili rotor vektorskog polja, definisanog funkcijom $\mathbf{v}$.

Teorema 4 *Intenzitet i pravac vektora* $\operatorname{rot}\mathbf{v}$ *ne zavisi od posebno izabranog Dekartovog koordinatnog sistema.*

Ovo tvrđenje dokazaćemo kasnije.

2.2.3 Klasifikacija vektorskih polja

Definicija.

Vektorsko polje u čijim je svim tačkama:

$$\operatorname{rot}\mathbf{v} = 0, \quad \operatorname{div}\mathbf{v} \neq 0, \tag{2.47}$$

zove se **potencijalno** ili bezvrtložno ili laminarno.

Definicija.

Vektorsko polje u čijim je svim tačkama:

$$\operatorname{rot}\mathbf{v} \neq 0, \quad \operatorname{div}\mathbf{v} = 0, \tag{2.48}$$

zove se solenoidno ili **vrtložno**.

Definicija.

Vektorsko polje u čijim je svim tačkama:

$$\operatorname{rot}\mathbf{v} = 0, \quad \operatorname{div}\mathbf{v} = 0, \tag{2.49}$$

zove se **Laplasovo polje**.

Definicija.

Vektorsko polje u čijim je svim tačkama:

$$\operatorname{rot}\mathbf{v} \neq 0, \quad \operatorname{div}\mathbf{v} \neq 0, \tag{2.50}$$

zove se **složeno polje**.

Napomenimo da proučavanje složenog polja može da se svede na jedno potencijalno i jedno solenoidno.

Napišimo neko složeno polje u obliku

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2, \tag{2.51}$$

tako da je:

$$\operatorname{rot}\mathbf{v}_1 = 0, \quad \operatorname{div}\mathbf{v}_1 \neq 0, \tag{2.52}$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{v}_2 \neq 0, \quad \operatorname{div}\mathbf{v}_2 = 0. \tag{2.53}$$

Dalje, kako je:

$$\operatorname{div}\mathbf{v} = \operatorname{div}(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) = \operatorname{div}\mathbf{v}_1 + \operatorname{div}\mathbf{v}_2 = \operatorname{div}\mathbf{v}_1 \neq 0, \tag{2.54}$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{v} = \operatorname{rot}(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) = \operatorname{rot}\mathbf{v}_1 + \operatorname{rot}\mathbf{v}_2 = \operatorname{rot}\mathbf{v}_2 \neq 0. \tag{2.55}$$

to smo dokazali prethodno tvrđenje.

2.2.4 Potencijal

Pretpostavimo da vektorsku funkciju $\mathbf{v}$ možemo da predstavimo kao gradijent neke skalarne funkcije položaja $\varphi(\mathbf{r})$, tj.

$$\mathbf{v} = \operatorname{grad}\varphi. \tag{2.56}$$

Ovako određenu skalarnu funkciju φ zovemo **potencijal** vektorskog polja $\mathbf{v}$.

Teorema 5 *Polje vektorske funkcije* $\mathbf{v}$=grad φ *je potencijalno polje.*

Dokaz.

Kako je, po pretpostavci:

$$\mathbf{v} = \operatorname{grad}\varphi \quad \Rightarrow \quad v_x = \frac{\partial\varphi}{\partial x}, \quad v_y = \frac{\partial\varphi}{\partial y}, \quad v_z = \frac{\partial\varphi}{\partial z}, \tag{2.57}$$

to odavde sledi:

$$\frac{\partial v_z}{\partial y} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial z\,\partial y}, \quad \frac{\partial v_y}{\partial z} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial z\,\partial y}, \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} = 0. \tag{2.58}$$

Na sličan način dobijamo i:

$$\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} = 0 \quad \text{i} \quad \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} = 0. \tag{2.59}$$

Na osnovu ovih relacija dobijamo da je rot $\mathbf{v}= 0$, jer je:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{v} &= \\ &= \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \mathbf{k} = \\ &= 0. \end{aligned} \tag{2.60}$$

Kako je, u opštem slučaju, i:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{v} &= \\ &= \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \\ &\neq 0 \end{aligned} \tag{2.61}$$

to je teorema dokazana.

2.2.5 Primeri potencijalnih polja

Polje vektora položaja

Posmatrajmo vektorsko polje $\mathbf{v} = \mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$.

Kako je $\dfrac{\partial v_x}{\partial x} = \dfrac{\partial v_y}{\partial y} = \dfrac{\partial v_z}{\partial z} = 1$ to odavde sledi da je $\operatorname{div}\mathbf{v} = 3 \neq 0$.

Dalje, kako je

$$\operatorname{rot}\mathbf{v} = \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \mathbf{k} = 0, \tag{2.62}$$

to zaključujemo da je vektorsko polje $\mathbf{v} = \mathbf{r}$ potencijalno.

Potencijalne sile

Ako postoji takva skalarna funkcija U da sila $\mathbf{S}$ može da se predstavi u obliku:

$$\mathbf{S} = \operatorname{grad} U, \tag{2.63}$$

tada kažemo da je sila **konzervativna** i da postoji **potencijal sile** U. Na primer, posmatrajmo silu gravitacije:

$$\mathbf{S} = -\gamma \frac{m \cdot m_0}{R^2} \mathbf{r}, \quad \mathbf{r} = \frac{\mathbf{R}}{|\mathbf{R}|}, \tag{2.64}$$

gde su: m i m_0 – mase koje se privlače, γ – gravitaciona konstanta, a $\mathbf{R}$ – vektor položaja jedne materijalne tačke u odnosu na drugu, R – intenzitet vektora položaja.

Potencijal ove sile dat je izrazom (videti (2.98)):

$$U = \gamma \frac{m_0}{R}. \tag{2.65}$$

Stacionarno elektrostatičko polje

U elektrodinamici problem određivanja jačina električnog i magnetnog polja može da se svede na određivanje potencijala. Pođimo od Maksvelovih [9] jednačina za elektromagnetno polje u vakuumu:

$$\mathrm{div}\mathbf{E} = \frac{1}{\varepsilon_o}\varrho, \quad \mathrm{div}\mathbf{B} = 0, \quad \mathrm{rot}\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad \mathrm{rot}\mathbf{B} = \mu_o\mathbf{j} + \varepsilon_o\mu_o\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t},$$

gde su $\mathbf{E}(x,y,z,t)$ i $\mathbf{B}(x,y,z,t)$ – jačina električnog i indukcija magnetnog polja respektivno, ε_0 – dielektrična konstanta u vakuumu, μ_0 – magnetna permeabilnost (propustljivost) vakuuma, a $\varrho(x,y,z,t)$ i $\mathbf{j}(x,y,z,t)$ – gustina naelektrisanja i gustina struje, respektivno.

Pogledajmo drugu i treću jednačinu (koje se u literaturi nazivaju bezizvorne jednačine, jer u njima ne figurišu gustina naelektrisanja i gustina struje, koje karakterišu izvore polja). Pošto je divergencija rotora, ma kog vektora, identički jednaka nuli (vidi (2.71), str. 100), možemo napisati da je

$$\mathbf{B} = \mathrm{rot}\mathbf{A} \quad \mathrm{div}\mathbf{B} = \mathrm{div}(\mathrm{rot}\mathbf{A}) = 0,$$

gde je $\mathbf{A} = \mathbf{A}(x,y,z,t)$. Kada to zamenimo u treću Maksvelovu jednačinu, dobijamo

$$\mathrm{rot}\mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\mathrm{rot}\mathbf{A} = \mathrm{rot}\left(-\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\right). \tag{2.66}$$

Kako je rotor gradijenta ma koje skalarne funkcije identički jednak nuli (vidi (2.69), str. 100), veličine $\mathbf{E}$ i $\dfrac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$ mogu da se razlikuju za gradijent neke skalarne funkcije Φ, gde je $\Phi = \Phi(x,y,z,t)$. Tako je

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \mathrm{grad}\Phi.$$

Vektorska funkcija $\mathbf{A}(x,y,z,t)$ i skalarna funkcija $\Phi(x,y,z,t)$ zovu se **vektorski** i **skalarni potencijal**, respektivno.

[9] Maxwell James Clark (1831-1879), britanski fizičar. Istraživao je u mnogim oblastima fizike, a najznačajnija dela su iz elektromagnetskih pojava. Postavio je četiri jednačine u kojima je izložen princip po kome promene u električnom polju izazivaju promene u magnetskom polju i obrnuto. Formulisao je zakon raspodele brzine molekula u gasu. Smatra se jednim od osnivača kinetičke teorije gasova, uz L. Boltzmanna i R. Clausiusa.

Da bismo videli fizički smisao skalarnog potencijala, pretpostavimo da je elektromagnetno polje stacionarno, tj. da se ne menja tokom vremena. Tada je $\dfrac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}=0$, pa je

$$\mathbf{E} = -\mathrm{grad}\boldsymbol{\Phi}. \tag{2.67}$$

Skalarnim množenjem vektorom pomeraja d$\mathbf{r}$ dobijamo

$$\mathbf{E}\cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = -\mathrm{grad}\Phi \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = -\frac{\partial \Phi}{\partial x}\mathrm{d}x - \frac{\partial \Phi}{\partial y}\mathrm{d}y - \frac{\partial \Phi}{\partial z}\mathrm{d}z = -\mathrm{d}\Phi,$$

pa integracijom po nekom putu od beskonačnosti do tačke prostora u kojoj posmatramo polje, dobijamo

$$\Phi(x,y,z) = -\int_{\infty}^{(x,y,z)} \mathbf{E}\cdot\, \mathrm{d}\mathbf{r}.$$

Tako za stacionarno elektromagnetno polje skalarni potencijal predstavlja rad koji neka spoljašnja sila treba da izvrši nasuprot električnog polja da bi se jedinično naelektrisanje istog znaka kao i izvor polja dovelo iz beskonačnosti u posmatranu tačku (x, y, z). Uzima se da je vrednost skalarnog potencijala u beskonačnosti jednaka nuli.

Naravno, u slučaju vremenski promenljivog polja ovakav zaključak više ne važi.

Sam vektorski potencijal $\mathbf{A}(x, y, z)$ nema neposredni fizički smisao, dok njegov linijski integral po nekoj zatvorenoj konturi L ima. Naime, kako je

$$\int_L \mathbf{A}\cdot\, \mathrm{d}\mathbf{l} = \iint_S \mathrm{rot}\mathbf{A}\cdot\, \mathrm{d}\mathbf{S} = \iint_S \mathbf{B}\cdot\, \mathrm{d}\mathbf{S},$$

to je cirkulacija vektora vektorskog potencijala, po ma kakvoj zatvorenoj konturi, jednaka magnetnom fluksu kroz ma koju površ oivičenu tom konturom, što važi u najopštijem slučaju.

Kalibraciona ili gradijentna invarijantnost elektromagnetnog polja

Napomenimo da funkcije skalarnog i vektorskog potencijala za dato elektromagnetno polje nisu jednoznačne. To je posledica toga što se oni javljaju samo u obliku svojih izvoda, pa su određeni samo sa tačnošću do izraza koji se skraćuju pri operacijama u navedenim obrascima.

Za vežbu pokazati da se Maksvelove jednačine ne menjaju (invarijantne su) ako se $\mathbf{A}$ i Φ promene na sledeći način:

$$\Phi_o = \Phi - \frac{\partial f}{\partial t}; \quad \mathbf{A}_o = \mathbf{A} + \mathrm{grad}f,$$

gde je $f = f(x, y, z, t)$ neka funkcija promenljivih x, y, z, t.

Pošto Maksvelove jednačine određuju vrednosti $\mathbf{E}$ i $\mathbf{B}$ to znači da se za jedno elektromagnetno polje može definisati čitava familija vektorskih i skalarnih potencijala koji zadovoljavaju jednakosti (2.66) i (2.67). Najjednostavnije fizičko objašnjenje (uprošćeno za stacionarni slučaj) je primer elektrostatičkog polja gde nam gradijentna invarijantnost (nepromenljivost) daje slobodu da izaberemo referentni nivo (nivo na kome je potencijalna energija jednaka nuli) u odnosu na koji računamo potencijalnu energiju i potencijal. To znači da se u definiciji potencijala ne mora uzeti da probno naelektrisanje dolazi iz beskonačnosti već iz neke tačke prostora koja tako postaje referentni (nulti) nivo. Bez obzira kako definišemo referentni nivo, jačina elektrostatičkog polja je nepromenjena.

$$\mathbf{E} = \text{grad}(\Phi + \phi) = \text{grad}\Phi \quad \phi = const.$$

Ovde je ϕ praktično potencijal našeg izabranog referentnog nivoa u odnosu na beskonačnost.

Jednačine elektromagnetnog potencijala

Posmatraćemo šta se dobija kada skalarni i vektorski potencijal elektromagnetnog polja uvrstimo u Maksvelove jednačine za vakuum, u kojima figurišu izvori polja (gustina struje $\mathbf{j}$ i gustina naelektrisanja ρ).

$$\begin{aligned}
\text{rot}\mathbf{B} &= \mu_o \mathbf{j} + \varepsilon_o \mu_o \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \\
\text{rotrot}\mathbf{A} &= \mu_o \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial t}\left(-\text{grad}\Phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\right)\varepsilon_o \mu_o, \\
-\Delta \mathbf{A} + \text{graddiv}\mathbf{A} &= \mu_o \mathbf{j} - \left(\text{grad}\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2}\right)\varepsilon_o \mu_o, \\
\Delta \mathbf{A} - \varepsilon_o \mu_o \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} &= -\mu_o \mathbf{j} + \text{grad}\left(\text{div}\mathbf{A} + \varepsilon_o \mu_o \frac{\partial \Phi}{\partial t}\right).
\end{aligned}$$

Zahvaljujući gradijentnoj invarijantnosti potencijala, $\mathbf{A}(x, y, z, t)$ i $\Phi(x, y, z, t)$ mogu da se odaberu tako da zadovoljavaju izraz

$$\text{div}\mathbf{A} + \varepsilon_o \mu_o \frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0,$$

pa je

$$\Delta \mathbf{A} - \varepsilon_o \mu_o \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial \mathbf{t}^2} = -\mu_o \mathbf{j}.$$

S druge strane je:

$$\begin{aligned}
\text{div}\mathbf{E} &= \frac{1}{\varepsilon_o}\rho, \\
\text{div}\left(-\text{grad}\Phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\right) &= \frac{1}{\varepsilon_o}\rho, \\
\Delta \Phi + \frac{\partial}{\partial t}(\text{div}\mathbf{A}) &= -\frac{1}{\varepsilon_o}\rho.
\end{aligned}$$

Kako je div$\mathbf{A} = -\varepsilon_o\mu_o\dfrac{\partial\Phi}{\partial t}$ to je

$$\Delta\Phi - \varepsilon_o\mu_o\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} = -\frac{1}{\varepsilon_o}\rho.$$

Tako smo umesto četiri Maksvelove parcijalne diferencijalne jednačine koje su spregnute, u kojima su nepoznati $\mathbf{E}$ i $\mathbf{B}$, dobili četiri raspregnute jednačine, koje su lakše za rešavanje, u kojima su nepoznate veličine $\mathbf{A}$ i Φ.

Neke osobine divergencije

a) div($c\mathbf{a}$)=$c\cdot$div $\mathbf{a}$, c=const.

b) div($\mathbf{a}$+$\mathbf{b}$)=div $\mathbf{a}$+div $\mathbf{b}$,

c) div($u\mathbf{a}$)=$u\cdot$div $\mathbf{a}$+$\mathbf{a}\cdot$grad u, gde je u skalarna funkcija.

Dokaz.

Ovde ćemo da dokažemo samo osobinu c), a osobine a) i b), kao lakše, ostavljamo čitaocu za vežbu.

Kako je:

$$u\mathbf{a} = u\,a_x\mathbf{i} + u\,a_y\mathbf{j} + u\,a_z\mathbf{k} = (u\,a_x)\mathbf{i} + (u\,a_y)\mathbf{j} + (u\,a_z)\mathbf{k},$$

to je:

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}(u\mathbf{a}) &= \frac{\partial}{\partial x}(ua_x) + \frac{\partial}{\partial y}(ua_y) + \frac{\partial}{\partial z}(ua_z) = \\
&= u\cdot\frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x}\cdot a_x + u\cdot\frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial y}\cdot a_y + u\cdot\frac{\partial a_z}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial z}\cdot a_z = \\
&= u\left(\frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}\right) + \frac{\partial u}{\partial x}\cdot a_x + \frac{\partial u}{\partial y}\cdot a_y + \frac{\partial u}{\partial z}\cdot a_z = \\
&= u\cdot\operatorname{div}\mathbf{a} + \mathbf{a}\cdot\operatorname{grad}u,
\end{aligned}$$

čime je prethodna osobina dokazana.

Neke osobine rotora

a) rot $\mathbf{c}$=0, ako je $\mathbf{c}=\overrightarrow{\text{const}}$.

b) rot ($c\,\mathbf{a}$)=c rot $\mathbf{a}$, c =const.,

c) rot ($\mathbf{a}$+$\mathbf{b}$)=rot $\mathbf{a}$+rot $\mathbf{b}$,

d) rot ($u\,\mathbf{a}$)=u rot $\mathbf{a}$+ $\mathbf{a}\times$grad u, gde je u skalarna funkcija.

2.2.6 Kratak pregled uvedenih pojmova

		vektorske operacije I vrste		vektorske operacije II vrste
u – skalarna funkcija	$\rightarrow$	grad u – vektor	$\rightarrow$	$\begin{cases} \operatorname{div}(\operatorname{grad} u) \\ \operatorname{rot}(\operatorname{grad} u) \end{cases}$
$\mathbf{a}$ – vektorska funkcija	$\rightarrow$	div $\mathbf{a}$ – skalar	$\rightarrow$	$\operatorname{grad}(\operatorname{div}\mathbf{a})$
		rot $\mathbf{a}$ – vektor	$\rightarrow$	$\begin{cases} \operatorname{div}(\operatorname{rot}\mathbf{a}) \\ \operatorname{rot}(\operatorname{rot}\mathbf{a}) \end{cases}$

Operacije višeg reda

Neka je $u = u(x, y, z)$ skalarno polje, tada je:

$$\operatorname{grad} u = \frac{\partial u}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\mathbf{k} = u'_x\mathbf{i} + u'_y\mathbf{j} + u'_z\mathbf{k}.$$

Izračunajmo sada vektorske veličine II vrste:

a)

$$\begin{aligned} \operatorname{div}\operatorname{grad} u &= \\ &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right) = \\ &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \nabla u \quad - \quad \text{je skalar.} \end{aligned} \tag{2.68}$$

b)

$$\operatorname{rot}(\operatorname{grad} u) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \end{vmatrix} =$$

$$= \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial y}\right)\mathbf{i} - \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial x}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} - \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right)\mathbf{k}.$$

Kako je, za neprekidne funkcije:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} &= \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial y}, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} &= \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial x}, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \end{aligned}$$

to konačno dobijamo

$$\operatorname{rot}(\operatorname{grad} u) \equiv 0. \tag{2.69}$$

c)

$$\begin{aligned}
\operatorname{grad}(\operatorname{div}\mathbf{v}) = & \\
&= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}+\frac{\partial v_z}{\partial z}\right)\mathbf{i}+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}+\frac{\partial v_z}{\partial z}\right)\mathbf{j}+\\
&+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}+\frac{\partial v_z}{\partial z}\right)\mathbf{k}=\\
&=\left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v_y}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 v_z}{\partial x\partial z}\right)\mathbf{i}+\left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial y\partial x}+\frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v_z}{\partial y\partial z}\right)\mathbf{j}+\\
&+\left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial z\partial x}+\frac{\partial^2 v_y}{\partial z\partial y}+\frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2}\right)\mathbf{k}.
\end{aligned}$$

d)

$$\operatorname{div}(\operatorname{rot}\mathbf{v}) = ?$$

Neka je

$$\mathbf{v} = v_x\,\mathbf{i} + v_y\,\mathbf{j} + v_z\,\mathbf{k},$$

odakle, prema definiciji (2.46) na str. 92, za $\operatorname{rot}\mathbf{v}$ dobijamo:

$$\begin{aligned}
\operatorname{rot}\mathbf{v} = \left(\frac{\partial v_z}{\partial y}-\frac{\partial v_y}{\partial z}\right)\mathbf{i}+\left(\frac{\partial v_x}{\partial z}-\frac{\partial v_z}{\partial x}\right)\mathbf{j}+\left(\frac{\partial v_y}{\partial x}-\frac{\partial v_x}{\partial y}\right)\mathbf{k} \Rightarrow&\\
\Rightarrow \operatorname{rot}\mathbf{v} = a_1\,\mathbf{i}+a_2\,\mathbf{j}+a_3\,\mathbf{k}\equiv\mathbf{a},&
\end{aligned} \tag{2.70}$$

gde smo uveli sledeće oznake:

$$\left(\frac{\partial v_z}{\partial y}-\frac{\partial v_y}{\partial z}\right)\equiv a_1,\left(\frac{\partial v_x}{\partial z}-\frac{\partial v_z}{\partial x}\right)\equiv a_2,\left(\frac{\partial v_y}{\partial x}-\frac{\partial v_x}{\partial y}\right)\equiv a_3.$$

Dalje, kako je

$$\operatorname{div}\mathbf{a} = \frac{\partial a_1}{\partial x}+\frac{\partial a_2}{\partial y}+\frac{\partial a_3}{\partial z},$$

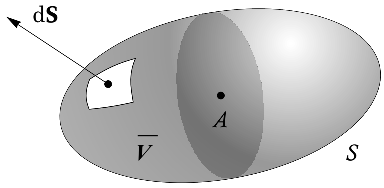
to konačno dobijamo:

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}(\operatorname{rot}\mathbf{v}) = & \\
&=\left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2 v_y}{\partial x\partial z}\right)+\left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial y\partial z}-\frac{\partial^2 v_z}{\partial x\partial y}\right)+\left(\frac{\partial^2 v_y}{\partial x\partial z}-\frac{\partial^2 v_x}{\partial y\partial z}\right)\\
&\equiv 0.
\end{aligned} \tag{2.71}$$

2.2.7 Prostorno diferenciranje

Postupak uopštavanja izvoda u pravcu, naziva se **prostorno diferenciranje**, a rezultat do koga ovaj postupak dovodi naziva se **prostorni izvod**.

Posmatrajmo neku funkciju $\varphi(\mathbf{r})$ koja može da bude skalarna ili vektorska funkcija položaja.



Slika 2.10:

Uočimo u polju ove funkcije neku tačku A i jednu oblast $\overline{V}$ (deo prostora) ograničenu zatvorenom orijentisanom površi S, tako da $A \in \overline{V}$. Neka je

$$\mathrm{mes}\overline{V} = V \tag{2.72}$$

merni broj zapremine ove oblasti, a d$\mathbf{S}$ vektorski površinski element na zatvorenoj orijentisanoj površi S. Pretpostavimo dalje, da je φ integrabilna funkcija na površi S, tj. postoji integral po zatvorenoj površi S

$$I = \iint_S \varphi(\mathbf{r}) \circ \mathrm{d}\mathbf{S}. \tag{2.73}$$

Ovaj integral može da bude skalarna ili vektorska funkcija veličine V, oblasti $\overline{V}$, koju ograničava zatvorena površ S.

Posmatrajmo sada veličinu I/V i pustimo da se površina "steže" oko fiksne tačke A, tj. neka $V \to 0$. Sada se postavlja pitanje postojanja i određivanja granične vrednosti količnika I/V.

Definicija.

Prostornim izvodom funkcije $\varphi(\mathbf{r})$ nazivamo graničnu vrednost

$$\lim_{V\to 0} \frac{\iint_S \varphi(\mathbf{r}) \circ \mathrm{d}\mathbf{S}}{V}, \tag{2.74}$$

ako ona postoji.

Ako je $\varphi(\mathbf{r})$ skalarna funkcija položaja, tada je $\varphi(\mathbf{r}) \circ \mathrm{d}\mathbf{S}$ vektor, pa je i prostorni izvod vektor, koji označavamo sa

$$\nabla\varphi(\mathbf{r}) = \lim_{V\to 0} \frac{\iint_S \varphi(\mathbf{r})\, \mathrm{d}\mathbf{S}}{V}. \tag{2.75}$$

Može da se dokaže da ova veličina predstavlja već definisani **gradijent**

$$\operatorname{grad}\varphi = \nabla\varphi(\mathbf{r}) = \lim_{V\to 0}\frac{\iint_S \varphi(\mathbf{r})\,\mathrm{d}\mathbf{S}}{V}. \tag{2.76}$$

Ako je $\varphi(\mathbf{r})$ vektorska funkcija položaja

$$\varphi(\mathbf{r}) \equiv \mathbf{v}(\mathbf{r}), \tag{2.77}$$

tada, prema kružić–proizvodu, razlikujemo dva slučaja.

U prvom, gde kružić–proizvod predstavlja skalarni proizvod, proizvod $\mathbf{v}\circ\mathrm{d}\mathbf{S}$ predstavlja skalar, pa je i prostorni izvod skalar, označen sa

$$\nabla\mathbf{v} = \operatorname{div}\mathbf{v} = \lim_{V\to 0}\frac{\iint_S \mathbf{v}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S}}{V} \tag{2.78}$$

koji zovemo **divergencija**.

U drugom slučaju, gde kružić–proizvod predstavlja vektorski proizvod, proizvod $\mathbf{v}\times\mathrm{d}\mathbf{S}$ predstavlja vektor, pa je odgovarajući prostorni izvod vektor, koji označavamo sa:

$$\nabla\times\mathbf{v} = \operatorname{rot}\mathbf{v} = \lim_{V\to 0}\frac{\iint_S \mathbf{v}\times\mathrm{d}\mathbf{S}}{V} \tag{2.79}$$

i definiše veličinu koju zovemo **rotor**.

Iz prethodnih definicija: *gradijenta*, *divergencije* i *rotora*, sledi njihova nezavisnost od izbora koordinatnog sistema, što smo napomenuli pri njihovoj definiciji u prethodnom poglavlju.

Divergencija i rotor vektorske funkcije konstantnog pravca

Od posebnog je interesa nalaženje izraza za divergenciju vektorske funkcije konstantnog pravca. Posmatrajmo takav jedan vektor $\mathbf{c}$

$$\mathbf{c} = c\,\mathbf{c}_0, \quad \text{gde je } \mathbf{c}_0 \text{ jedinični vektor konstantnog pravca.} \tag{2.80}$$

Dalje, po definiciji je:

$$\operatorname{div}\mathbf{c} = \lim_{V\to 0}\frac{\iint_S \mathbf{c}\,\mathrm{d}\mathbf{S}}{V} = \lim_{V\to 0}\frac{\iint_S c\,\mathrm{d}\mathbf{S}}{V}\cdot\mathbf{c}_0 = \operatorname{grad}c\cdot\mathbf{c}_0. \tag{2.81}$$

Koristeći ovu relaciju možemo da napišemo analitički izraz za divergenciju u pravouglom koordinatnom sistemu.

Posmatrajmo neku vektorsku funkciju, izraženu na jedan od načina [10]

$$\mathbf{v} = v_x\mathbf{i} + v_y\mathbf{j} + v_z\mathbf{k} = v_1\mathbf{e}_1 + v_2\mathbf{e}_2 + v_3\mathbf{e}_3 = \sum_{i=1}^{3} v_i\mathbf{e}_i = v_i\mathbf{e}_i. \tag{2.82}$$

[10] Napomenimo da smo pri pisanju ovog izraza koristili konvenciju o sabiranju, prema kojoj je $\sum_{i=1}^{3} v_i\mathbf{e}_i \equiv v_i\mathbf{e}_i$, odnosno vrši se sabiranje po ponovljenim indeksima.

Prema gornjoj relaciji imamo:

$$\begin{aligned}\operatorname{div}\mathbf{v} &= \operatorname{div}(v_x\mathbf{i}) + \operatorname{div}(v_y\mathbf{j}) + \operatorname{div}(v_z\mathbf{k}) = \\ &= \mathbf{i}\cdot\operatorname{grad}v_x + \mathbf{j}\cdot\operatorname{grad}v_y + \mathbf{k}\cdot\operatorname{grad}v_z = \\ &= \sum_{i=1}^{3}\mathbf{e}_i\cdot\operatorname{grad}v_i \equiv \mathbf{e}_i\cdot\operatorname{grad}v_i.\end{aligned} \tag{2.83}$$

Kako je

$$\operatorname{grad}v_i = \frac{\partial v_i}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial v_i}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial v_i}{\partial z}\mathbf{k}, \quad i = x, y, z \tag{2.84}$$

to konačno dobijamo

$$\operatorname{div}\mathbf{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}. \tag{2.85}$$

Dakle, isti izraz kao i u prethodnom poglavlju za pravougle Dekartove koordinate.

I u slučaju rotora korisno je izračunati ga za vektor konstantnog pravca:

$$\mathbf{c} = c\,\mathbf{c}_0, \quad c = |\mathbf{c}|, \quad \mathbf{c}_0 = \overrightarrow{\text{const.}} \tag{2.86}$$

Iz definicije rotora dobijamo:

$$\operatorname{rot}\mathbf{c} = \lim_{V\to 0}\frac{\iint_S \mathrm{d}\mathbf{S}\times\mathbf{c}}{V} = \lim_{V\to 0}\frac{\iint_S c\mathrm{d}\mathbf{S}}{V}\times\mathbf{c}_0 = \operatorname{grad}c\times\mathbf{c}_0. \tag{2.87}$$

Ako ovo primenimo na neku vektorsku funkciju

$$\mathbf{a} = a_x\,\mathbf{i} + a_y\,\mathbf{j} + a_z\,\mathbf{k}, \tag{2.88}$$

dobijamo:

$$\begin{aligned}\operatorname{rot}\mathbf{a} &= \begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ a_x & a_y & a_z\end{vmatrix} = \\ &= (\operatorname{grad}a_x\times\mathbf{i}) + (\operatorname{grad}a_y\times\mathbf{j}) + (\operatorname{grad}a_z\times\mathbf{k}) = \\ &= \left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}\right)\mathbf{k},\end{aligned} \tag{2.89}$$

dakle isto kao i u prethodnom poglavlju, za Dekartove koordinate.

2.2.8 Integralne teoreme

U ovom delu navešćemo nekoliko teorema (Stoksova [11], Grinova [12], Gausova [13]) koje se veoma često koriste u integralnom računu i njegovoj primeni. [14]

Stoksova teorema

Ako su projekcije $v_x(x,y,z)$, $v_y(x,y,z)$ i $v_z(x,y,z)$, neke vektorske funkcije $\mathbf{v}(\mathbf{r})$, neprekidne, kao i njihovi odgovarajući parcijalni izvodi, na površi S, koja je zatvorena prostornom krivom C, tada je

$$\oint_C \mathbf{v}\,\mathrm{d}\mathbf{r} = \iint_S (\nabla \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n}\,\mathrm{d}S \left(= \iint_S (\nabla \times \mathbf{v}) \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = \iint_S \operatorname{rot}\mathbf{v}\cdot \mathrm{d}\mathbf{S} \right), \tag{2.90}$$

gde je $\mathbf{n}$ jedinični vektor normale na posmatranu površ.

Grinova teorema

Ako za skalarnu funkciju Φ postoji linijski integral po zatvorenoj liniji C i ako je gradΦ neprekidna funkcija, u toj oblasti S ograničenoj krivom C, tada je:

$$\oint_C \Phi\,\mathrm{d}\mathbf{r} = \iint_S (\mathbf{n} \times \nabla\Phi)\,\mathrm{d}S \left(= \iint_S \mathrm{d}\mathbf{S} \times \nabla\Phi \right). \tag{2.91}$$

Gausova teorema

Ako za vektorsku funkciju $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ postoji površinski integral po zatvorenoj površi S, koja predstavlja granicu oblasti V, i ako je $\operatorname{div}\mathbf{v}$ neprekidna funkcija, u toj oblasti, tada je

$$\iiint_V \nabla\cdot \mathbf{v}\,\mathrm{d}V = \iint_S \mathbf{v}\cdot \mathbf{n}\,\mathrm{d}S \left(= \iint_S \mathbf{v}\cdot \mathrm{d}\mathbf{S} \right). \tag{2.92}$$

Ova teorema poznata je i kao teorema o divergenciji ili teorema Gaus– Ostrogradskog [15].

[11] Stokes, George Gabriel (1819–1903), irski matematičar i fizičar. Poznat je po svojim prilozima teoriji beskonačnih redova kao i prilozima u mehanici fluida (Navier-Stokes-ove jednačine), geodeziji i optici.

[12] Green, George (1793-1841), engleski matematičar. Njegov rad odnosi se na teoriju potencijala u vezi da elekticitetom i magnetizmom, zatim na oscilacije, talase i teoriju elastičnosti.

[13] Gauss, Carl Friedrich (1777–1855), veliki nemački matematičar. Njegov rad je od osnovne važnosti u algebri, teoriji brojeva, diferencijalnim jednačinama, diferencijalnoj geometriji, neeuklidskoj geometriji, kompleksnoj analizi, astronomiji, geodeziji, elektromagnetizmu i teorijskoj mehanici.

[14] Dokaz ovih teorema, zbog ograničenog prostora, nije dat, a zbog njihove važnosti navodimo ih.

[15] Остроградский, Михаил Васильевич (1801-1862). Poznati ruski matematičar i mehaničar.

Teorema o srednjoj vrednosti

1. Ako je $f(x, y)$ neprekidna funkcija, na zatvorenoj i ograničenoj oblasti σ u x, y ravni, tada postoji bar jedna tačka $(x_o, y_o) \in \sigma$ takva da je $\iint\limits_{\sigma} f(x, y)\,\mathrm{d}\sigma = f(x_o, y_o) \cdot P$, gde je P površina oblasti σ.
2. Ako je $f(x, y, z)$ neprekidna funkcija, na zatvorenoj i ograničenoj oblasti σ u prostoru, tada postoji bar jedna tačka $(x_o, y_o, z_o) \in \sigma$ takva da je

$$\iiint\limits_{\sigma} f(x, y, z)\,\mathrm{d}\sigma = f(x_o, y_o, z_o) \cdot V, \tag{2.93}$$

gde je V zapremina oblasti σ.

2.3 Primeri nekih polja od interesa za fiziku i tehniku

Navedimo neke primere potencijalnih polja koja su od posebnog interesa u raznim oblastima fizike i tehnike.

Privlačenje dve tačke u polju gravitacione sile

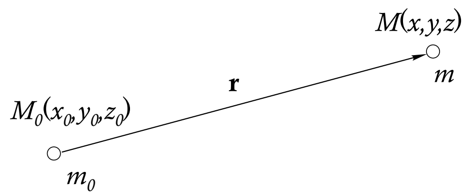
Njutnova sila gravitacije definisana je izrazom

$$\mathbf{F} = -\gamma \frac{m\, m_0}{r^2} \mathbf{r}_0, \tag{2.94}$$

gde su m i m_0 mase koje se privlače, a γ je univerzalna gravitaciona konstanta.

U gornjoj relaciji uveli smo sledeće oznake (sl. 2.11):

$$\mathbf{r}_0 = \frac{\mathbf{r}}{r}, \quad \text{gde je} \quad \mathbf{r} = \overrightarrow{M_0 M}. \tag{2.95}$$



Slika 2.11:

Pitanje je da li postoji potencijal za ovako definisanu silu? Kako su mase m i m_0, kao i γ konstantne veličine, to možemo da ih zamenimo jednom konstantom, recimo c, pa silu možemo da prikažemo u obliku

$$\mathbf{F} = -\frac{c}{r^2} \mathbf{r}_0. \tag{2.96}$$

Ranije smo pokazali (vidi str. 93) da ako postoji skalarna funkcija U, takva da je $\mathbf{F} = \mathrm{grad}U$, tada je vektorsko polje $\mathbf{F}$ potencijalno. Dakle treba naći skalarnu funkciju $U = U(r)$. Kako je

$$\mathrm{grad}U = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}r}\mathbf{r}_0 \quad \mathrm{i} \quad \mathbf{F} = -\frac{c}{r^2}\mathbf{r}_0$$

to iz uslova $\mathbf{F} = \mathrm{grad}U$ dobijamo

$$\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}r} = -\frac{c}{r^2} \quad \text{odnosno} \quad \mathrm{d}U = -\frac{c}{r^2}\mathrm{d}r$$

odakle sledi

$$U = \frac{2c}{r} + c_1.$$

Dakle, na osnovu svega, zaključujemo da gravitaciona sila, definisana sa (2.94), može da se predstavi sa

$$\mathbf{F} = \mathrm{grad}U, \tag{2.97}$$

tj. sila je potencijalna, a njen potencijal je određen izrazom

$$U = \frac{C}{r}. \tag{2.98}$$

Ovaj potencijal u literaturi poznat je i kao **Njutnov potencijal**. Ovde smo uzeli da je $2c = C$ i $c_1 = const. = 0$, što ne umanjuje opštost prethodno izvedenog izraza.

Pokazano je da je $\nabla(1/r) = 0$. Dakle potencijal U zadovoljava Laplasovu jednačinu

$$\Delta U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0. \tag{2.99}$$

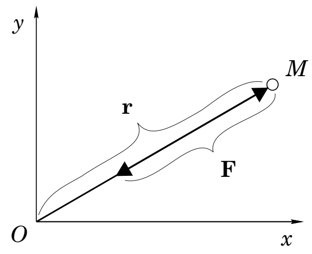
Funkcije koje zadovoljavaju Laplasovu jednačinu zovemo **harmonijske funkcije**. Dakle Njutnov potencijal je harmonijska funkcija.

Ravanski zadatak. Logaritamski potencijal

Posmatrajmo sada silu u ravni kojom neka tačka O privlači materijalnu tačku M. Pretpostavimo da je ova sila privlačenja data izrazom

$$\mathbf{F} = -\frac{2c}{r}\frac{\mathbf{r}}{r} \tag{2.100}$$

gde je $r = |\mathbf{r}|$ intenzitet vektora položaja $\mathbf{r}$.



Slika 2.12:

Ponovo se postavlja pitanje postojanja potencijala U za ovako definisanu silu. Slično kao i u prethodnom slučaju polazimo od:

$$\begin{aligned} X &= \frac{\partial U}{\partial x} = -\frac{2c}{r^2}\,x, \\ Y &= \frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{2c}{r^2}\,y. \end{aligned} \tag{2.101}$$

Odavde dobijamo

$$U = -2c\int \frac{x}{r^2}\,dx + f(y).$$

Dalje, kako je

$$r^2 = x^2 + y^2, \quad \text{odakle sledi} \quad 2x\,\mathrm{d}x = 2r\,\mathrm{d}r,$$

dobijamo za potencijal U

$$U = -2c\ln r + f(y).$$

Dalje, nađimo sada parcijalni izvod po y:

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y}(-2c\ln r) + \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}y} = \\ &= -2c\frac{\partial}{\partial r}(\ln r)\frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}y} = -2c\,\frac{y}{r^2} + \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}y}. \end{aligned} \tag{2.102}$$

Dakle, prema (2.101) (uslov za Y), zaključujemo da je $\frac{df}{dy} = const.$ I ovde ćemo da uzmemo da je ova konstanta jednaka 0, pa dobijamo za potencijal

$$U = -2c\ln r. \tag{2.103}$$

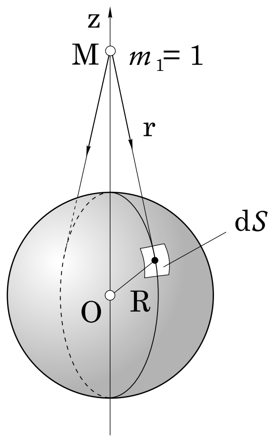
Napomenimo da u slučaju kada više tačaka privlači jednu tačku, za potencijal imamo:

$$\begin{aligned} U = U(x,y,z) &= \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i}{r_i} = \\ &= \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i}{\sqrt{(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2 + (z-z_i)^2}}. \end{aligned}$$

Njutnova sila kojom homogena sferna ljuska privlači materijalnu tačku

Posmatrajmo sada homogenu sfernu ljusku, poluprečnika R, koja privlači materijalnu tačku (sl. 2.13). Prvo odredimo silu kojom beskonačno mali deo sfere ($\mathrm{d}S$) privlači posmatranu tačku

$$\mathrm{d}\mathbf{F} = \frac{k^2 m_1 \mathrm{d}m_2}{r^2}\frac{\mathbf{r}}{r}. \tag{2.104}$$



Slika 2.13:

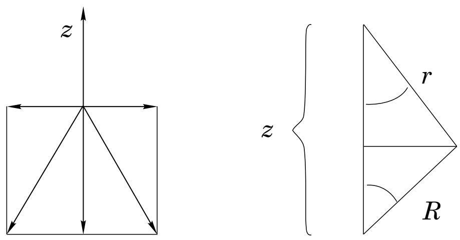
Kako je: $\mathrm{d}m_2 = \varrho \mathrm{d}V = \varrho \cdot d \cdot \mathrm{d}S$, za jediničnu debljinu $d = 1$ dobijamo $\mathrm{d}m_2 = \varrho \mathrm{d}S$. Kroz posmatranu tačku M i centar sfere O uvek možemo da postavimo jednu pravu. Neka u našem slučaju to bude z – osa, tj. $\overline{OM} = z$. Dalje, označimo sa r – rastojanje između tačke M i središta površine $\mathrm{d}S$ (tačke u kojoj deluje sila privlačenja). Ovo rastojanje je, prema slici (primena kosinusne teoreme)

$$r^2 = R^2 + z^2 - 2\,z\,R\,\cos\theta. \tag{2.105}$$

Sada za intenzitet sile dobijamo

$$\mathrm{d}F = \frac{k^2 m_1 \varrho \mathrm{d}S}{R^2 + z^2 - 2\,z\,R\,\cos\theta}. \tag{2.106}$$

Projektujući ovu silu na z – osu, a vodeći računa o simetriji, zapažamo da se projekcije na normalan pravac, upravno na z, poništavaju, pa treba voditi računa samo o Z – projekciji (videti sl. 2.14)



Slika 2.14:

$$\mathrm{d}Z = -\mathrm{d}F \cdot \cos\beta. \tag{2.107}$$

Dalje, iz relacije: $z = r\,\cos\beta + R\,\cos\theta$ (vidi sliku 2.14), dobijamo

$$\cos\beta = \frac{z - R\,cos\theta}{r}, \tag{2.108}$$

tako da konačno dobijamo za projekciju elementarne sile $\mathrm{d}F$ na z − osu

$$\begin{aligned} \mathrm{d}Z &= -\frac{k^2 m_1 \varrho \mathrm{d}S}{R^2 + z^2 - 2\,z\,R\,\cos\theta} \cdot \frac{z - R\,\cos\theta}{r} = \\ &= -\frac{k^2 m_1 \varrho dS(z - R\,\cos\theta)}{\left(R^2 + z^2 - 2z\,R\,\cos\theta\right)^{3/2}}. \end{aligned} \tag{2.109}$$

Sada ukupnu silu dobijamo integraljenjem gornjeg izraza po celoj sferi S

$$Z = -\int_S \frac{k^2 m_1 \varrho (z - R \cdot \cos\theta)}{(R^2 + z^2 - 2R\,z\cos\theta)^{3/2}}\,\mathrm{d}S. \tag{2.110}$$

Izrazimo sada elementarnu površinu $\mathrm{d}S$ u sfernim koordinatama

$$\mathrm{d}S = R^2 \sin\theta\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta, \tag{2.111}$$

pa dobijamo izraz

$$Z = k^2 m_1 \varrho R^2 \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \frac{(R\,\cos\theta - z) \cdot \sin\theta\,\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta}{(R^2 + z^2 - 2R\,z\,\cos\theta)^{3/2}}. \tag{2.112}$$

Dalje, kako je: $r^2 = R^2 + z^2 - 2R\,z\,\cos\theta$, pri čemu su R− kao poluprečnik, i z− kao rastojanje između nepokretne tačke M i centra sfere, konstantna rastojanja, to dobijamo da je: $r\,\mathrm{d}r = R\,z\,\sin\theta\,\mathrm{d}\theta$, odnosno

$$R\,\cos\theta - z = -\frac{r^2 + z^2 - R^2}{2z}, \tag{2.113}$$

pa je:

$$\int_0^\pi \frac{(R\cos\theta - z)\sin\theta\,\mathrm{d}\theta}{(R^2+z^2-2Rz\cos\theta)^{3/2}} = -\frac{1}{2Rz^2}\int_{|z-R|}^{z+R}\left(1+\frac{z^2-R^2}{r^2}\right)\mathrm{d}r = \tag{2.114}$$
$$= -\frac{1}{2Rz^2}\left[r - \frac{z^2-R^2}{r}\right]_{|z-R|}^{z+R}.$$

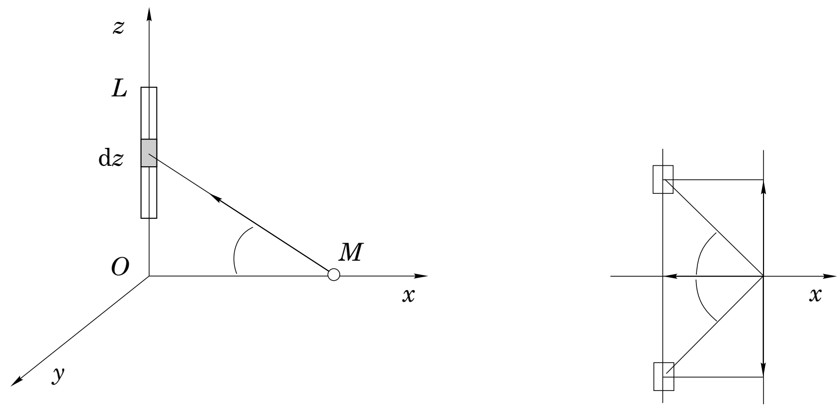
Analizirajmo sada ovaj rezultat. Kako za $\theta = 0 \;\Rightarrow\; r = |z-R|$, to treba razlikovati dva slučaja. **Prvi**, kada je **tačka van sfere** tada je $z > R$, pa je $|z-R| = z - R$, odakle sledi da je:

$$Z = -\frac{k^2\, m_1\, 4\pi\, R^2\rho}{z^2} = -\frac{k^2 m_1 m_2}{z^2}. \tag{2.115}$$

Ovde smo iskoristili da je zapremina sfere, jedinične debljine: $V = 4\pi R^2 \cdot d = 4\pi R^2$, gde je d – debljina koja je jednaka 1, pa je masa $m_2 = \varrho V = 4\pi\,\varrho\,R^2$. I **drugi** slučaj, kada je **tačka u unutrašnosti** sfere. U ovom slučaju je $z < R$, pa je $|z-R| = R - z$, odakle sledi da je $Z = 0$.

Privlačenje tačke od strane linijskog tela

Odredimo potencijal homogene prave L, koja se poklapa sa z – osom. Kako posmatrana tačka M i data prava L određuju jednu ravan, uzmimo da je to xOz ravan, videti sl. 2.15.



Slika 2.15:

Prvo odredimo silu kojom prava privlači tačku. Elementarna sila je:

$$|\mathrm{d}\mathbf{F}| = k\frac{\mathrm{d}z}{r^2} = k\frac{\mathrm{d}z}{x^2+z^2}. \tag{2.116}$$

Napomenimo da smo pošli od uslova da je sila proporcionalna masama, a obrnuto proporcionalana kvadratu rastojanja. Međutim, kako je $\mathrm{d}m = \varrho \mathrm{d}V = \varrho P\,\mathrm{d}z$

i $P = 1$, to smo dobili da sila zavisi od dz, dok smo sve ostale konstante označili jednim slovom – k. Dalje, slično kao i u prethodnom primeru, zbog simetričnosti projekcija, videti sl. 2.15, ponovo je potrebno odrediti samo X – projekciju

$$\mathrm{d}X = \mathrm{d}F\,\cos\alpha = -k\frac{\mathrm{d}z}{r^2}\cdot\frac{x}{r}. \tag{2.117}$$

Ukupna projekcija je

$$X = -\int_{-\infty}^{+\infty} k\frac{x}{r}\cdot\frac{\mathrm{d}z}{r^2}. \tag{2.118}$$

Dalje, kako je

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{z}{x} \quad \Rightarrow z = x\,\mathrm{tg}\alpha \quad \Rightarrow \mathrm{d}z = \frac{x}{\cos^2\alpha}d\alpha, \quad x = const, \tag{2.119}$$

i

$$r^3 = (x^2+z^2)^{3/2} = x^3(1+\mathrm{tg}^2\alpha)^{3/2} = \frac{x^3}{\cos^3\alpha}, \tag{2.120}$$

to za X dobijamo

$$X = -k\int_{+\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}} x\cdot\frac{\cos^3\alpha}{x^3}\frac{x}{\cos^2\alpha}\,\mathrm{d}\alpha. \tag{2.121}$$

Kako je $x = const$, to dobijamo

$$X = -k\frac{1}{x}\int_{+\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}} \cos\alpha\,\mathrm{d}\alpha = -\frac{2k}{x}. \tag{2.122}$$

Sada možemo da potražimo potencijal. Ako postoji potencijal U, on mora da zadovoljava relaciju

$$X = \frac{\partial U}{\partial x} = -\frac{2k}{x}, \tag{2.123}$$

odakle konačno dobijamo:

$$U = -2k\ln x \quad \text{ili} \quad U = 2k\ln\frac{1}{x}. \tag{2.124}$$

Teorema 6 *Proizvoljno vektorsko polje* $\mathbf{F}$*, jednoznačno, neprekidno i ograničeno, može da se razloži na zbir potencijalnog i bezvrtložnog vektorskog polja u obliku:*

$$\mathbf{F} = -\nabla U + \nabla\times\mathbf{A},$$

pri čemu je $\nabla\cdot\mathbf{A} = 0$.

Skalarnu funkciju U – nazivamo **skalarni potencijal**, a vektorsku $\mathbf{A}$ – **vektorski potencijal** vektorskog polja $\mathbf{F}$.

Ova teorema poznata je u literaturi kao teorema Helmholca. [16] Teoremu smo naveli zbog njene važnosti. Međutim, kako je dokaz relativno složen, nećemo da ga izložimo, već čitaoca upućujemo na reference: [4] (str. 79), [29] (str. 50).

[16] Hermann von Helmholtc (1821–1894), nemački fizičar. Poznat je po veoma važnim radovima iz oblasti termodinamike, hidrodinamike i akustike.

2.4 Generalisane koordinate

Položaj tačke u trodimenzionom Euklidskom prostoru određuje se, u odnosu na jednu unapred određenu tačku O, koju zovemo pol ili koordinatni početak, pomoću *vektora položaja* $\mathbf{r}$. U odnosu na Dekartov pravougli sistem koordinata $Oxyz$, sa početkom u polu O, položaj tačke se određuje *koordinatama tačke* (x, y, z). Ortogonalne projekcije kraja vektora položaja na ose ovog koordinatnog sistema poklapaju se sa koordinatama tačke, pa se koordinate vektora položaja $\mathbf{r}$ poklapaju sa ovim koordinatama x, y, z:

$$\mathbf{r} = \{x, y, z\} \quad \text{ili} \quad \mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}. \tag{2.125}$$

Međutim, položaj tačke u prostoru može da se odredi i pomoću neka tri međusobno nezavisna parametra q^1, q^2, q^3 (ovde 1,2 i 3 nisu eksponenti već oznake parametara !!!), ili kraće q^i (i=1,2,3). Kada se parametru q^i daju sve moguće vrednosti, a svakoj tački prostora odgovara jedan i samo jedan uređen skup od tri broja (q^1, q^2, q^3) i obrnuto, svakom skupu od tri broja (q^1, q^2, q^3) odgovara jedna i samo jedna tačka u prostoru (trodimenzionom), tada se *parametri* q^i nazivaju **opšte** ili **generalisane** koordinate tačke. Sada vektor položaja možemo da izrazimo i preko generalisanih koordinata:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(q^1, q^2, q^3), \quad \text{ili kraće} \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}(q^i). \tag{2.126}$$

Dekartove koordinate ovog vektora možemo da izrazimo u obliku:

$$\begin{aligned} x &= x(q^i), \\ y &= y(q^i), \\ z &= z(q^i). \end{aligned} \tag{2.127}$$

Iz zahteva za obostranom jednoznačnošću između tačaka u prostoru i koordinata q^i sledi da svakoj tački sa koordinatama (x, y, z) *moraju da odgovaraju* tri broja q^i, tako da je:

$$q^i = q^i(x, y, z), \qquad \frac{\partial(q^1, q^2, q^3)}{\partial(x, y, z)} \neq 0. \tag{2.128}$$

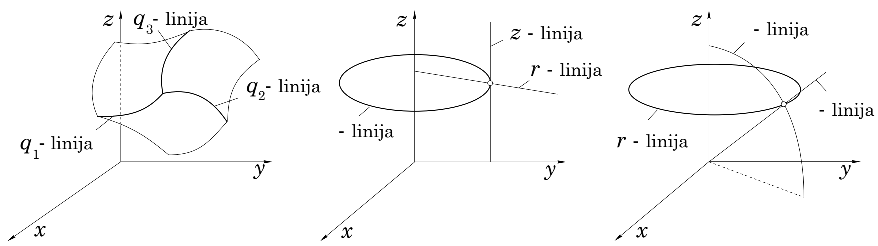
Dakle, jednačine (2.127) uvek zadovoljavaju uslove potrebne da mogu da se reše po q^i.

Skup jednačina (2.127) i (2.128) predstavljaju jednačine koordinatne transformacije. Ove transformacije su uzajamno recipročne – inverzne. Definišimo sada kordinatne linije i koordinatne površi.

Definicija.

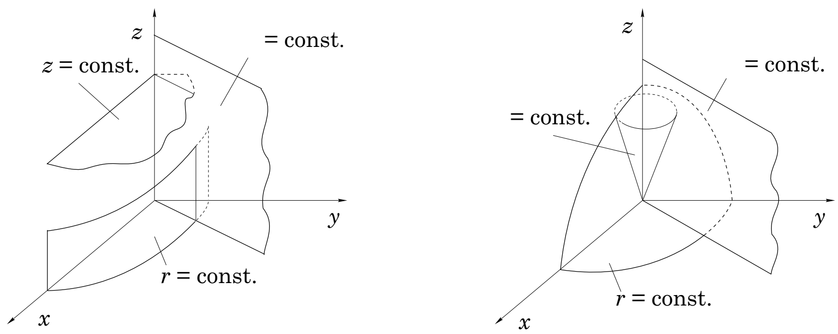
Kordinatne linije –predstavljaju geometrijsko mesto tačaka koje se dobija ako su dve koordinate konstantne, a treća se menja.

Koordinatne linije mogu da budu prave ili krive i u zavisnosti od toga govorimo o pravolinijskim ili krivolinijskim koordinatnim sistemima (slika 2.16).



Slika 2.16: Koordinatne linije

> *Definicija.*
>
> **Kordinatne površi** – predstavljaju geometrijsko mesto tačaka koje se dobija ako se menjaju dve koordinate, a treća je konstantna.



Slika 2.17: Koordinatne površi

Svakoj tački prostora odgovaraju tri koordinatne površi, tj. tačka predstavlja presek tri koordinatne površi. Koordinatna linija se nalazi u preseku dve koordinatne površi (slika 2.17). Kako kroz svaku tačku prolaze po tri ovakve, u opštem slučaju krive linije, to one obrazuju krivolinijski sistem koordinata.

U svakoj tački prostora mogu da se na koordinatne linije, u **toj tački**, povuku tangente, orijentisane prema smeru u kome rastu vrednosti q^i.

Bazni vektori ovog sistema koordinata su njihovi tangentni vektori. Napomenimo da u slučaju krivolinijskog sistema koordinata bazni vektori se menjaju od tačke do tačke, za razliku od pravolinijskih koordinatnih sistema.

Koordinatni sistemi, u odnosu na koje se određuje položaj tačaka u prostoru, zovu se i sistemi referencije. Prema obliku koordinatne linije imamo:

- pravolinijske (slika 2.18) i

- krivolinijske koordinate (slika 2.16).

Ako su koordinatne površi, odnosno koordinatne linije međusobno upravne u svim tačkama prostora, imamo **ortogonalan** (pravougli) sistem koordinata. Specijalno u slučaju Dekartovog koordinatnog sistema položaj tačke prostora određen je vektorom položaja

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}. \tag{2.129}$$

Očigledno je da je:

$$\mathbf{i} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x}, \quad \mathbf{j} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y}, \quad \mathbf{k} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z}. \tag{2.130}$$

Dakle, jedinični vektori (ortovi) **i**, **j** i **k** mogu da se dobiju kao parcijalni izvodi vektora položaja po koordinati tačke.

U slučaju generalisanih koordinata položaj iste tačke je određen istim vektorom položaja **r**, ali izraženog u odnosu na krivolinijske koordinate q^i (vidi 2.126). Onda su bazni vektori tog sistema koordinata određeni (kao i u slučaju Dekartovih koordinata (2.130)) sa

$$\mathbf{g}_i = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^i}, \quad (i = 1, 2, 3). \tag{2.131}$$

Dakle, vektori $\mathbf{g}_i$ su **osnovni** (bazni) **vektori** sistema generalisanih koordinata q^i i u pravcu su tangente na koordinatne linije. Da su oni bazni vektori zaključuje se na osnovu njihove linearne nezavisnosti.

Uočimo da su indeksi kojima se obeležavaju bazni vektori $\mathbf{g}_i$ i $\mathbf{e}_i$ na donjem mestu.

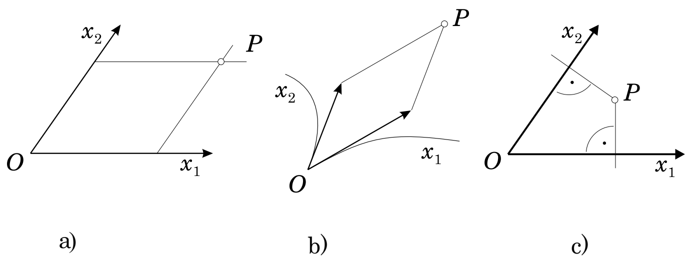
Ako koordinate osnovnih vektora izrazimo u odnosu na Dekartove pravougle koordinate, intenziteti ovih vektora su određeni izrazima:

$$|\mathbf{g}_i| = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q^i}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q^i}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q^i}\right)^2} \equiv h_i, \quad (i = 1, 2, 3), \tag{2.132}$$

veličine h_i zovemo **Lameovi** [17] ili metrički **koeficijenti**.

Ako sa $\mathbf{e}_i$ označimo jedinični vektor u pravcu ovih vektora, imamo:

$$\mathbf{e}_i = \frac{\mathbf{g}_i}{|\mathbf{g}_i|} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{g}_i = h_i \mathbf{e}_i. \tag{2.133}$$



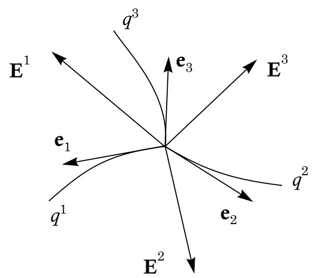
Slika 2.18: Kosougle koordinatne linije

[17] Gabriel Lamé (1795-1870), francuski matematičar i inženjer. Dao je veliki doprinos u analitičkoj geometriji i analitičkoj mehanici, kao i u teoriji elastičnosti i teoriji provođenja toplote.

Pored ovog skupa jedniničnih vektora možemo da posmatramo i skup vektora gradq^i, koji su u pravcu normale na koordinatne površi, a definisani su sa

$$\mathbf{E}^i = \frac{\nabla q^i}{|\nabla q^i|}. \tag{2.134}$$

Vektor $\mathbf{E}^i$ je dakle jedinični vektor normale koordinatne površi. Dakle, u svakoj tački prostora imamo dva skupa jediničnih vektora: $\mathbf{e}_i$– jedinični vektori u pravcu tangente i $\mathbf{E}^i$– jedinični vektor normale na koordinatnu površ (sl. 2.19). Ova dva skupa se poklapaju akko je sistem koordinata ortogonalan.



Slika 2.19:

Posmatrajmo proizvoljan vektor $\mathbf{v}$ i predstavimo ga preko ova dva sistema:

$$\begin{aligned}\mathbf{v} &= \\ &= v^1\mathbf{e}_1 + v^2\mathbf{e}_2 + v^3\mathbf{e}_3 = \sum_{i=1}^{3} v^i\mathbf{e}_i \\ &= V_1\mathbf{E}^1 + V_2\mathbf{E}^2 + V_3\mathbf{E}^3 = \sum_{i=1}^{3} V_i\mathbf{E}^i.\end{aligned} \tag{2.135}$$

Takođe, vektor možemo da predstavimo i preko osnovnih vektora $\mathbf{g}_i = \dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^i}$:

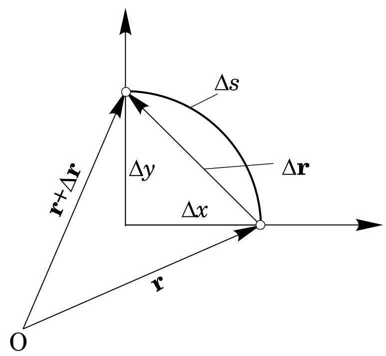
$$\begin{aligned}\mathbf{v} &= \\ &= \sum_{i=1}^{3} c^i\mathbf{g}_i = \sum_{i=1}^{3} c^i\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^i} = c^1\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^1} + c^2\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^2} + c^3\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^3} \\ &= \sum_{i=1}^{3} C_i\nabla q^i = C_1\nabla q^1 + C_2\nabla q^2 + C_3\nabla q^3.\end{aligned} \tag{2.136}$$

Koordinate dobijene razlaganjem vektora na ove načine zovemo:
c^i – **kontravarijantne** i
C_i – **kovarijantne**, respektivno.

2.4.1 Element luka i zapremine

Dužinu elementa luka (sl. 2.20) određujemo relacijom:

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}\mathbf{r} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r}. \tag{2.137}$$



Slika 2.20: Element luka

Diferencijal ovog vektora možemo da izrazimo na jedan od sledećih načina (u zavisnosti da li su Dekartove ili neke druge - generalisane koordinate):

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\mathbf{r} &= \\ &= \mathrm{d}x\mathbf{i} + \mathrm{d}y\mathbf{j} + \mathrm{d}z\mathbf{k} = \\ &= \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^i}\mathrm{d}q^i = \sum_{i=1}^{3} \mathbf{g}_i \mathrm{d}q^i = \\ &= \sum_{i=1}^{3} h_i \mathbf{e}_i \mathrm{d}q^i. \end{aligned} \tag{2.138}$$

Ako Dekartove koordinate umesto sa x, y i z označimo sa x^1, x^2 i x^3, respektivno, to za element luka (preko Dekartovih koordinata) dobijamo:

$$\mathrm{d}s^2 = \sum_{i,j=1}^{3} \delta_{ij} \mathrm{d}x^i \mathrm{d}x^j = \sum_{i=1}^{3} \mathrm{d}x^i \mathrm{d}x^i \tag{2.139}$$

gde je δ_{ij} – Kronekerov delta simbol. Dalje, prema (2.127), izračunavamo $\mathrm{d}x^i$:

$$x^i = x^i(q^j) \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}x^i = \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial x^i}{\partial q^j}\mathrm{d}q^j, \tag{2.140}$$

pa dobijamo za element luka:

$$\begin{aligned}
ds^2 &= \sum_{i,j}^{3} \delta_{ij} \mathrm{d}x^i \mathrm{d}x^j = \\
&= \sum_{i,j=1}^{3} \sum_{k,l=1}^{3} \delta_{ij} \frac{\partial x^i}{\partial q^k} \cdot \frac{\partial x^j}{\partial q^l} \mathrm{d}q^k \mathrm{d}q^l = \\
&= \sum_{k,l=1}^{3} \left(\sum_{i,j=1}^{3} \delta_{ij} \frac{\partial x^i}{\partial q^k} \cdot \frac{\partial x^j}{\partial q^l} \right) \mathrm{d}q^k \mathrm{d}q^l = \\
&= \sum_{k,l=1}^{3} g_{kl} \mathrm{d}q^k \mathrm{d}q^l.
\end{aligned} \tag{2.141}$$

S druge strane, iz (2.138) sledi

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}\mathbf{r} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = \sum_{k,l=1}^{3} \mathbf{g}_k \cdot \mathbf{g}_l \mathrm{d}q^k \mathrm{d}q^l. \tag{2.142}$$

Poredeći (2.142) i (2.141) zaključujemo da je $\mathbf{g}_k \cdot \mathbf{g}_l = g_{kl}$.

Definicija.

Veličine g_{kl}, definisane relacijama:

$$g_{kl} = \mathbf{g}_k \cdot \mathbf{g}_l = \sum_{i,j=1}^{3} \delta_{ij} \frac{\partial x^i}{\partial q^k} \cdot \frac{\partial x^j}{\partial q^l} \tag{2.143}$$

zovemo **osnovni metrički tenzor** ili osnovni tenzor prostora.

Napomenimo da je $g_{ij} = h_i^2 \delta_{ij}$ za ortogonalni sistem koordinata. Naime u tom slučaju imamo

$$\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij}, \tag{2.144}$$

ili u razvijenom obliku

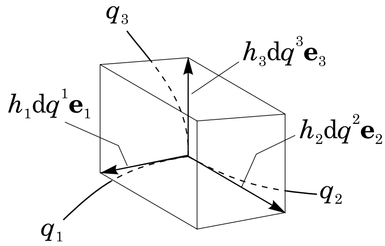
$$\begin{aligned}
\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_1 = 0, \\
\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_3 = 1,
\end{aligned} \tag{2.145}$$

tako da za ortogonalni sistem koordinata, za element luka, dobijamo:

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}s^2 &= \mathrm{d}\mathbf{r} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = \\
&= \sum_{i,j=1}^{3} h_i dq^i h_j dq^j \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \sum_{i,j=1}^{3} \delta_{ij} h_i dq^i h_j dq^j = \\
&= \sum_{i=1}^{3} \left(h_i dq^i\right)^2.
\end{aligned} \tag{2.146}$$

Na kraju napišimo izraz za elementarnu zapreminu (sl. 2.21), preko generalisanih ortogonalnih koordinata:

$$\begin{aligned}\mathrm{d}V &= \left|\left(h_1 dq^1 \mathbf{e}_1\right) \cdot \left(h_2 dq^2 \mathbf{e}_2\right) \times \left(h_3 dq^3 \mathbf{e}_3\right)\right| = \\ &= h_1 h_2 h_3 dq^1 dq^2 dq^3 \left(\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3\right) = h_1 h_2 h_3 dq^1 dq^2 dq^3.\end{aligned} \tag{2.147}$$



Slika 2.21: Element zapremine

2.4.2 Gradijent, divergencija, rotor i Laplasijan - izraženi preko generalisanih koordinata

Gradijent proizvoljne funkcije U, izražen u generalisanim koordinatama je:

$$\begin{aligned}\mathrm{grad}U = \nabla U &= \\ &= \frac{1}{h_1} \cdot \frac{\partial U}{\partial q^1} \mathbf{e}_1 + \frac{1}{h_2} \cdot \frac{\partial U}{\partial q^2} \mathbf{e}_2 + \frac{1}{h_3} \cdot \frac{\partial U}{\partial q^3} \mathbf{e}_3 = \\ &= \sum_{i=1}^{3} \frac{1}{h_i} \cdot \frac{\partial U}{\partial q^i} \mathbf{e}_i.\end{aligned} \tag{2.148}$$

Divergencija je data izrazom

$$\begin{aligned}\mathrm{div}\mathbf{A} &= \nabla \cdot \mathbf{A} = \\ &= \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial q^1} \left(h_2 h_3 A_1\right) + \frac{\partial}{\partial q^2} \left(h_3 h_1 A_2\right) + \frac{\partial}{\partial q^3} \left(h_1 h_2 A_3\right)\right].\end{aligned} \tag{2.149}$$

Rotor je dat izrazom

$$\mathrm{rot}\mathbf{A} = \nabla \times \mathbf{A} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \cdot \begin{vmatrix} h_1 \mathbf{e}_1 & h_2 \mathbf{e}_2 & h_3 \mathbf{e}_3 \\ \dfrac{\partial}{\partial q^1} & \dfrac{\partial}{\partial q^2} & \dfrac{\partial}{\partial q^3} \\ h_1 A_1 & h_2 A_2 & h_3 A_3 \end{vmatrix}. \tag{2.150}$$

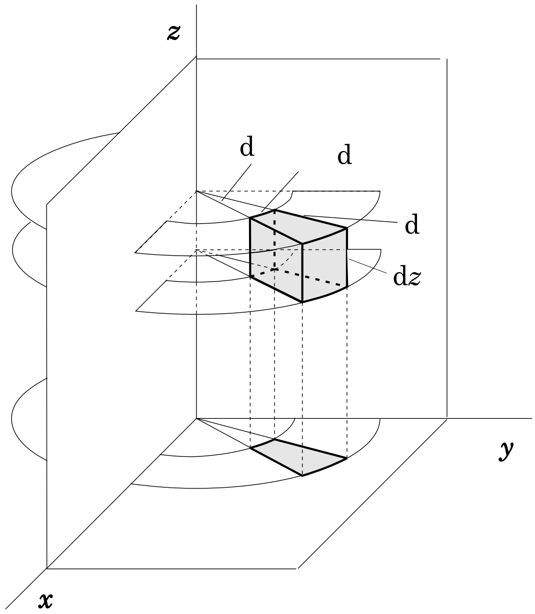
Na kraju izrazimo Laplasijan ($\Delta = \nabla^2$) u odnosu na generalisane koordinate

$$\begin{aligned}\Delta U &= \\ &= \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial q^1} \left(\frac{h_2 h_3}{h_1} \cdot \frac{\partial U}{\partial q^1}\right) + \frac{\partial}{\partial q^2} \left(\frac{h_3 h_1}{h_2} \cdot \frac{\partial U}{\partial q^2}\right) + \frac{\partial}{\partial q^3} \left(\frac{h_1 h_2}{h_3} \cdot \frac{\partial U}{\partial q^3}\right)\right].\end{aligned} \tag{2.151}$$

2.5 Posebni koordinatni sistemi

1. CILINDRIČNI (ϱ, φ, z)

Veza između Dekartovih i cilindričnih koordinata data je sa (sl. 2.22):



Slika 2.22:

$$x = \varrho\cos\varphi, \quad y = \varrho\sin\varphi, \quad z = z,$$
$$\text{gde je} \quad \varrho > 0, \quad 0 \le \varphi < 2\pi, \quad -\infty < z < +\infty.$$

Pokažimo sada na primeru ovih koordinata kako se određuju Lameovi koeficijenti. Izračunajmo prvo diferencijale $\mathrm{d}x, \mathrm{d}y, \mathrm{d}z$ preko novih koordinata:

$$\begin{aligned}
dx &= \cos\varphi\, d\varrho + (-\sin\varphi)\,\varrho d\varphi,\\
dy &= \sin\varphi\, d\varrho + \cos\varphi\,\varrho d\varphi,\\
dz &= dz.
\end{aligned}$$

Zatim izračunamo element luka:

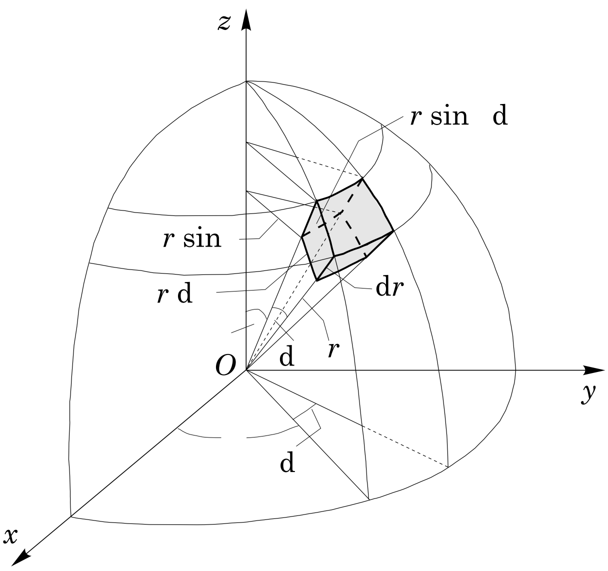
$$\begin{aligned}
\mathrm{d}s^2 &= \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2 =\\
&= \mathrm{d}\varrho^2 + \varrho^2\mathrm{d}\varphi^2 + \mathrm{d}z^2,
\end{aligned} \tag{2.152}$$

pa poredeći sa (2.141) zaključujemo da je:

$$h_\varrho = 1 \quad h_\varphi = \varrho \quad h_z = 1.$$

2. SFERNI (r, θ, φ)

U ovom slučaju veza između ovih koordinata je, prema sl. 2.23:



Slika 2.23:

$$x = r\,\sin\theta\,\cos\varphi, \quad y = r\,\sin\theta\,\sin\varphi, \quad z = r\,\cos\theta,$$
$$\text{gde je} \quad r > 0, \quad 0 \le \varphi < 2\pi, \quad 0 < \theta < \pi.$$

Na sličan način kao i u prethodnom slučaju dobijamo:

$$h_r = 1 \quad h_\varphi = r\,\sin\theta \quad h_\theta = r.$$

3. PARABOLIČNO-CILINDRIČNE $(u,\, v,\, z)$

$$x = \frac{1}{2}\left(u^2 - v^2\right), \quad y = uv, \quad z = z$$
$$\text{gde je} \quad -\infty < u < \infty, \quad v \ge 0, \quad -\infty < z < \infty$$
$$h_u = h_v = \sqrt{u^2 + v^2}, \quad h_z = 1,$$

dok je veza sa cilindričnim kordinatama data relacijama:

$$u = \sqrt{2\varrho}\,\cos\frac{\varphi}{2},\; v = \sqrt{2\varrho}\,\sin\frac{\varphi}{2},\; z = z.$$

4. PARABOLOIDNE $(u,\, v,\, \varphi)$

$$x = u\,v\,\cos\varphi, \quad y = u\,v\,\sin\varphi, \quad z = \frac{1}{2}\left(u^2 - v^2\right)$$
$$\text{gde je} \quad u \geq 0, \quad v \geq 0, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi$$
$$\text{i} \quad h_u = h_v = \sqrt{u^2 + v^2}, \quad h_\varphi = u\,v.$$

5. ELIPTIČKO-CILINDRIČNE $(u,\, v,\, z)$

$$x = a\,\mathrm{ch}\,u\,\cos\,v, \quad y = a\,\mathrm{sh}\,u\,\sin\,v, \quad z = z$$
$$\text{gde je} \quad u \geq 0, \quad 0 \leq v < 2\pi, \quad -\infty < z < \infty$$
$$\text{i} \quad h_u = h_v = a\sqrt{\mathrm{sh}^2 u + \sin^2 v}, \quad h_z = 1.$$

6. SFEROIDNE $(\xi,\, \eta,\, \varphi)$

a)

$$x = a\,\mathrm{sh}\,\xi\,\sin\eta\,\cos\varphi, \quad y = a\,\mathrm{sh}\,\xi\,\sin\eta\,\sin\varphi,$$
$$z = a\,\mathrm{ch}\,\xi\,\cos\eta$$
$$\text{gde je} \quad \xi \geq 0, \quad 0 \leq \eta \leq \pi, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi$$
$$\text{i} \quad h_\xi = h_\eta = a\sqrt{\mathrm{sh}^2\xi + \sin^2\eta}, \quad h_\varphi = a\,\mathrm{sh}\xi\,\sin\eta.$$

b)

$$x = a\,\mathrm{ch}\,\xi\,\cos\eta\,\cos\varphi, \quad y = a\,\mathrm{ch}\,\xi\,\cos\eta\,\sin\varphi,$$
$$z = a\,\mathrm{sh}\,\xi\,\sin\eta$$
$$\text{gde je} \quad \xi \geq 0, \quad -\frac{\pi}{2} \leq \eta \leq \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi$$
$$\text{i} \quad h_\xi = h_\eta = a\sqrt{\mathrm{sh}^2\xi + \sin^2\eta}, \quad h_\varphi = a\,\mathrm{ch}\xi\,\cos\eta.$$

7. ELIPSOIDALNE $(\alpha,\, \beta,\, \varphi)$

$$x = c\,\sin\beta\,\cos\varphi, \quad y = c\,\sin\alpha\,\sin\beta\,\sin\varphi, \quad z = c\,\mathrm{ch}\,\alpha\,\cos\beta$$
$$\text{gde su:}$$
$$0 \leq \alpha < \infty, \quad 0 \leq \beta \leq \pi, \quad -\pi < \varphi \leq \pi$$
$$\text{a Lameovi koeficijenti su:}$$
$$h_\alpha = h_\beta = c\sqrt{\mathrm{sh}^2 + \sin^2\beta}, \quad h_\varphi = c\,\mathrm{sh}\alpha\,\sin\beta.$$

8. ELIPSOIDNE $(\lambda,\, \mu,\, \nu)$

$$\begin{aligned}
\frac{x^2}{a^2-\lambda}+\frac{y^2}{b^2-\lambda}+\frac{z^2}{c^2-\lambda}&=1 \qquad \lambda<c^2<b^2<a^2\\
\frac{x^2}{a^2-\mu}+\frac{y^2}{b^2-\mu}+\frac{z^2}{c^2-\mu}&=1 \qquad c^2<\mu<b^2<a^2\\
\frac{x^2}{a^2-\nu}+\frac{y^2}{b^2-\nu}+\frac{z^2}{c^2-\nu}&=1 \qquad c^2<b^2<\nu<a^2,
\end{aligned}$$

pri čemu su:

$$\begin{aligned}
h_\lambda&=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{(\mu-\lambda)\,(\nu-\lambda)}{(a^2-\lambda)\,(b^2-\lambda)\,(c^2-\lambda)}}\\
h_\mu&=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{(\nu-\mu)\,(\lambda-\mu)}{(a^2-\mu)\,(b^2-\mu)\,(c^2-\mu)}}\\
h_\nu&=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{(\lambda-\nu)\,(\mu-\nu)}{(a^2-\nu)\,(b^2-\nu)\,(c^2-\nu)}}.
\end{aligned}$$

9. BIPOLARNE – ravanske $(u,\, v,\, z)$

$$\begin{gathered}
x^2+(y-a\cot u)^2=a^2\csc^2 u,\\
(x-a\coth v)^2+y^2=a^2\operatorname{csch}^2 v, \quad z=z\\
\text{ili}\quad x=\frac{a\,\mathrm{sh}\,v}{\mathrm{ch}\,v-\cos\,u},\quad y=\frac{a\,\sin\,u}{\mathrm{ch}\,v-\cos\,u},\quad z=z\\
\text{gde je}\quad 0\le u<2\pi,\quad -\infty<v<\infty,\quad -\infty<z<\infty.
\end{gathered}$$

Za Lameove koeficijente dobijamo:

$$h_u=h_v=\frac{a}{\mathrm{ch}\,v-\cos\,u},\qquad h_z=1.$$

10. BIPOLARNE – bisferične $(u,\, v,\, \varphi)$

$$\begin{gathered}
x=\frac{c\,\sin u\,\cos\varphi}{\mathrm{ch}v-\cos u},\quad y=\frac{c\,\sin u\,\sin\varphi}{\mathrm{ch}v-\cos u},\quad z=\frac{c\,\mathrm{sh}v}{\mathrm{ch}v-\cos u}\\
h_u=h_v=\frac{c}{\mathrm{ch}v-\cos u},\quad h_\varphi=\frac{c\,\sin u}{\mathrm{ch}v-\cos u}.
\end{gathered}$$

11. ELIPTIČKE $(\lambda,\, \mu,\, z)$

$$x = c\,\lambda\,\mu, \quad y = c\sqrt{(\lambda^2-1)\,(1-\mu^2)}, \quad z = z$$

Lameovi (metrički) koeficijenti su:

$$h_\lambda = c\sqrt{\frac{\lambda^2-\mu^2}{\lambda^2-1}}, \quad h_\mu = c\sqrt{\frac{\lambda^2-\mu^2}{1-\mu^2}}, \quad h_z = 1.$$

12. TOROIDALNE $(\alpha,\, \beta,\, \varphi)$

$$x = \frac{c\,\mathrm{sh}\alpha\,\cos\varphi}{\mathrm{ch}\alpha - \cos\beta}, \quad y = \frac{c\,\mathrm{sh}\alpha\,\sin\varphi}{\mathrm{ch}\alpha - \cos\beta}, \quad z = \frac{c\,\sin\beta}{\mathrm{ch}\alpha - \cos\beta}$$

gde je: $0 \le \alpha < \infty, \quad -\pi < \beta \le \pi, \quad -\pi < \varphi \le \pi$

dok su Lameovi koeficijenti:

$$h_\alpha = h_\beta = \frac{c}{\mathrm{ch}\alpha - \cos\beta}, \quad h_\varphi = \frac{c\,\mathrm{sh}\alpha}{\mathrm{ch}\alpha - \cos\beta}.$$

14. SFEROIDALNE – a $(\lambda,\, \mu,\, \varphi)$

a)

$$x = c\lambda\mu, \quad y = c\sqrt{(\lambda^2-1)\,(1-\mu^2)}\cos\varphi, \quad z = c\sqrt{(\lambda^2-1)\,(1-\mu^2)}\sin\varphi,$$

gde je: $\lambda \le 1, \quad -1 \le \mu \le 1, \quad 0 \le \varphi \le 2\pi$

gde su Lameovi koeficijenti:

$$h_\lambda = c\sqrt{\frac{\lambda^2-\mu^2}{\lambda^2-1}}, \quad h_\mu = c\sqrt{\frac{\lambda^2-\mu^2}{1-\mu^2}}, \quad h_\varphi = c\sqrt{(\lambda^2-1)\,(1-\mu^2)}.$$

b)

$$x = c\lambda\mu\,\sin\varphi, \quad y = c\sqrt{(\lambda^2-1)\,(1-\mu^2)}, \quad z = c\lambda\mu\,\cos\varphi,$$

gde su Lameovi koeficijenti:

$$h_\lambda = c\sqrt{\frac{\lambda^2-\mu^2}{\lambda^2-1}}, \quad h_\mu = c\sqrt{\frac{\lambda^2-\mu^2}{1-\mu^2}}, \quad h_\varphi = c\lambda\mu.$$

2.6 Zadaci

2.6.1 Gradijent

Zad. 2.1. Naći gradijent sledećih funkcija:

a) $\phi = r$,

b) $\phi = \ln r$,

c) $\phi = \dfrac{1}{r}$,

gde je $\mathbf{r}$ - vektor položaja, a r - njegov intenzitet.

Rešenje.

a) Vektor položaja, izražen u odnosu na Dekartov koordinatni sistem, $\mathbf{r} = \mathbf{x} \cdot \mathbf{i} + \mathbf{y} \cdot \mathbf{j} + \mathbf{z} \cdot \mathbf{k}$, ima intenzitet $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, pa je Skalarna funkcija ϕ, izražena u odnosu na Dekartov koordinati sistem, oblika

$$\phi = r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Njen gradijent je

$$\begin{aligned}
\nabla\phi &= \frac{\partial\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{\partial z}\mathbf{k} \quad \Rightarrow \\
\nabla\phi &= \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\mathbf{i} + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\mathbf{j} + \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\mathbf{k} = \\
&= \frac{\mathbf{r}}{r} = \mathbf{r}_0.
\end{aligned}$$

b) Skalarna funkcija ϕ, izražena u odnosu na Dekartov koordinati sistem, ima oblik

$$\phi = \ln r = \frac{1}{2}\,\ln\left(x^2 + y^2 + z^2\right),$$

pa je njen gradijent

$$\begin{aligned}
\nabla\phi &= \frac{1}{2}\nabla\ln\left(x^2+y^2+z^2\right) \quad \Rightarrow \\
\nabla\phi &= \frac{1}{2}\left[\mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x}\ln(x^2+y^2+z^2) + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y}\ln(x^2+y^2+z^2) + \right. \\
&\qquad \left. + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}\ln(x^2+y^2+z^2)\right] \quad \Rightarrow \\
\nabla\phi &= \frac{1}{2}\left[\mathbf{i}\frac{2x}{x^2+y^2+z^2} + \mathbf{j}\frac{2y}{x^2+y^2+z^2} + \mathbf{k}\frac{2z}{x^2+y^2+z^2}\right] \quad \Rightarrow \\
\nabla\phi &= \frac{x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}}{x^2+y^2+z^2} = \frac{\mathbf{r}}{r^2}.
\end{aligned}$$

c) Kao i u prethodnom zadatku, prvo izrazimo $\frac{1}{r}$ u odnosu na Dekartov koordinatni sistem, pa računamo gradijent:

$$\begin{aligned}
\nabla\phi =& \nabla\frac{1}{r} = \nabla\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right) = \nabla\left[(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{1}{2}}\right] \quad \Rightarrow \\
\nabla\phi =& \mathbf{i}\left[\frac{\partial}{\partial x}(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{1}{2}}\right] + \mathbf{j}\left[\frac{\partial}{\partial y}(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{1}{2}}\right] + \\
&+ \mathbf{k}\left[\frac{\partial}{\partial z}(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{1}{2}}\right] \quad \Rightarrow
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\nabla\phi =& \mathbf{i}\left[-\frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}}\cdot 2x\right] + \mathbf{j}\left[-\frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}}\cdot 2y\right] + \\
&+ \mathbf{k}\left[-\frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}}\cdot 2z\right] \quad \Rightarrow
\end{aligned}$$

$$\nabla\phi = -\frac{x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{\mathbf{r}}{r^3}.$$

♡

Zad. 2.2. Pokazati da je $\nabla r^n = n\, r^{n-2}\,\mathbf{r}$.

Rešenje.

$$\begin{aligned}
\nabla r^n =& \nabla\sqrt{(x^2+y^2+z^2)}^n = \nabla(x^2+y^2+z^2)^{n/2} \quad \Rightarrow \\
\nabla r^n =& \mathbf{i}\left[\frac{n}{2}(x^2+y^2+z^2)^{(n/2)-1}\cdot 2x\right] + \mathbf{j}\left[\frac{n}{2}(x^2+y^2+z^2)^{(n/2)-1}\cdot 2y\right] + \\
&+ \mathbf{k}\left[\frac{n}{2}(x^2+y^2+z^2)^{(n/2)-1}\cdot 2z\right] \quad \Rightarrow \\
\nabla r^n =& n(x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k})(x^2+y^2+z^2)^{(n/2)-1} \\
\nabla r^n =& n\, r^{n-2}\,\mathbf{r}.
\end{aligned}$$

♡

Napomenimo da ovaj i prethodni zadatak mogu da se reše jednostavnije i na drugi način. Vidi zadatak 2.7 na strani 128.

Zad. 2.3. Pokazati da je grad f vektor normalan na površ koja je data funkcijom $f(x, y, z) = c$, gde je c konstanta.

Rešenje.

Neka je $\mathbf{r} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$ vektor položaja tačke $P(x, y, z)$ na toj površi. Tada $\mathrm{d}\,\mathbf{r} = \mathrm{d}x\,\mathbf{i} + \mathrm{d}y\,\mathbf{j} + \mathrm{d}z\,\mathbf{k}$ pripada tangentnoj ravni date površi u tački P. Kako je $\mathrm{d}\,f = \dfrac{\partial f}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \dfrac{\partial f}{\partial y}\,\mathrm{d}y + \dfrac{\partial f}{\partial z}\,\mathrm{d}z = \mathrm{d}(c) = 0$ ili

$$\mathrm{d}f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\mathbf{k}\right) \cdot (\mathrm{d}x\,\mathbf{i} + \mathrm{d}y\,\mathbf{j} + \mathrm{d}z\,\mathbf{k}) = 0,$$

tj. $\nabla f \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = 0$ odakle sledi da su ova dva vektora ($\mathrm{grad}\,f$ i $\mathrm{d}\mathbf{r}$) ortogonalna (normalna) jedan na drugi.

♡

Zad. 2.4. Naći jednačinu tangentne ravni površi $2xz^2 - 3xy - 4x = 7$ u tački $A(1, -1, 2)$.

Rešenje.

Jednačina ravni kroz tačku A je

$$(\mathbf{r} - \mathbf{r}_A) \cdot \mathbf{n} = 0,$$

gde je $\mathbf{n}$ je ort vektora normale te površi u tački A.

Dakle, da bi odredili jednačinu ravni potreban nam je vektor ortogonalan na tu ravan. Prema prethodnom zadatku, vektor

$$\nabla f = \nabla(2xz^2 - 3xy - 4x) = (2z^2 - 3y - 4)\,\mathbf{i} - 3x\,\mathbf{j} + 4xz\,\mathbf{k},$$

je vektor u pravcu normale na posmatranu površ. Ort ovog vektora ($\mathbf{n} = \nabla f / |\nabla f|$), u tački $A(1, -1, 2)$, je $\mathbf{n} = 7\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 8\mathbf{k}$. Jednačina tangentne ravni, u ovom slučaju, je

$$[(x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}) - (\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\,\mathbf{k})] \cdot \frac{(7\,\mathbf{i} - 3\,\mathbf{j} + 8\,\mathbf{k})}{\sqrt{122}} = 0,$$

odnosno

$$\begin{aligned} 7\,(x-1) - 3\,(y+1) + 8\,(z-2) &= 0, \\ 7x - 3y + +8z - 26 &= 0. \end{aligned}$$

♡

Zad. 2.5. Neka su T(x,y,z) i T $(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z)$ vrednosti temperature u bliskim tačkama $P(x, y, z)$ i $Q(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z)$.

a) Dati fizičku interpretaciju veličine

$$\frac{\Delta T}{\Delta s} = \frac{T(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z) - T(x, y, z)}{\Delta s}$$

gde je Δs rastojanje između tačaka P i Q.

b) Dati fizičku interpretaciju veličine $\lim\limits_{\Delta s \to 0} \dfrac{\Delta T}{\Delta s} = \dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}s}$.

c) Pokazati da je $\dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}s} = \nabla T \cdot \dfrac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}s}$.

Rešenje.

a) ΔT predstavlja priraštaj temperature pri prelasku iz tačke P u tačku Q, Δs rastojanje između tih tačaka, a njihov količnik $\dfrac{\Delta T}{\Delta s}$ predstavlja srednju vrednost promene temperature po jedinici dužine u pravcu PQ.

b) Kako je priraštaj $\Delta T = \dfrac{\partial T}{\partial x}\Delta x + \dfrac{\partial T}{\partial y}\Delta y + \dfrac{\partial T}{\partial z}\Delta z +$ infinitezimalni članovi višeg reda od $\Delta x, \Delta y, \Delta z$, to je

$$\lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta T}{\Delta s} = \lim_{\Delta s \to 0} \left(\frac{\partial T}{\partial x}\frac{\Delta x}{\Delta s} + \frac{\partial T}{\partial y}\frac{\Delta y}{\Delta s} + \frac{\partial T}{\partial z}\frac{\Delta z}{\Delta s} \right)$$

odnosno

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}s} = \frac{\partial T}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} + \frac{\partial T}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s} + \frac{\partial T}{\partial z}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}s}.$$

Dakle $\dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}s}$ predstavlja promenu temperature u tački P, a u pravcu PQ.

c)

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}s} &= \frac{\partial T}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} + \frac{\partial T}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s} + \frac{\partial T}{\partial z}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}s} = \\
&= \left(\frac{\partial T}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial T}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial T}{\partial z}\mathbf{k} \right) \cdot \left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}\mathbf{i} + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}\mathbf{j} + \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}s}\mathbf{k} \right) = \\
&= \nabla T \cdot \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}s}.
\end{aligned}$$

♡

Zad. 2.6. Naći priraštaj funkcije $\phi = x^2yz + 4xz^2$ u tački $A(1, -2, -1)$, a u pravcu vektora $\mathbf{v} = 2\,\mathbf{i} - \mathbf{j} - 2\,\mathbf{k}$.

Rešenje.

Kako je gradijent u proizvoljnoj tački

$$\nabla\phi = \nabla(x^2yz + 4xz^2) = (2xyz + 4z^2)\mathbf{i} + x^2z\mathbf{j} + (x^2y + 8xz)\mathbf{k},$$

to je u tački $A(1, -2, -1)$

$$\nabla\phi = 8\mathbf{i} - \mathbf{j} - 10\mathbf{k}.$$

Jedinični vektor u pravcu $2\mathbf{i} - \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$ je:

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} = \frac{2\mathbf{i} - \mathbf{j} - 2\mathbf{k}}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + (-2)^2}} = \frac{2}{3}\mathbf{i} - \frac{1}{3}\mathbf{j} - \frac{2}{3}\mathbf{k}.$$

Tada je traženi priraštaj u pravcu $\mathbf{v}$ (vidi str.83)

$$\nabla\phi \cdot \mathbf{n} = (8\mathbf{i} - \mathbf{j} - 10\mathbf{k}) \cdot \left(\frac{2}{3}\mathbf{i} - \frac{1}{3}\mathbf{j} - \frac{2}{3}\mathbf{k}\right) = \frac{16}{3} + \frac{1}{3} + \frac{20}{3} = \frac{37}{3}.$$

Napomenimo da je rešenje pozitivno, tj. $\dfrac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}s} > 0$, što znači da ϕ raste u tom pravcu.

♡

Zad. 2.7. Dokazati da je gradijent složene funkcije $\varphi(f)$ dat u obliku

$$\nabla\varphi(f) = \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}f}\nabla f,$$

gde je $f = f(x, y, z)$.

Dokaz.

$$\begin{aligned}\nabla\varphi &= \frac{\partial\varphi}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\mathbf{k} = \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}f}\frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}f}\frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}f}\frac{\partial f}{\partial z}\mathbf{k} = \\ &= \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}f}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{k}\right) = \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}f}\nabla f.\end{aligned}$$

Primenimo sada ovu formulu na funkciju $\varphi = \frac{1}{r}$ (vidi zad. 2.1c).

$$\nabla\varphi = \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}r}\nabla r = -\frac{1}{r^2}\nabla r.$$

Kako je (vidi zad. 2.1a, str. 124),

$$\nabla r = \frac{\mathbf{r}}{r} = \mathbf{r}_0$$

konačno dobijamo

$$\nabla\varphi = -\frac{\mathbf{r}}{r^3} = -\frac{1}{r^2}\mathbf{r}_0,$$

što je isto kao i u navedenom zadatku.

♡

Zad. 2.8. Data je skalarna funkcija $\phi = x^2yz^3$.

a) Naći pravac, koji prolazi kroz tačku $A(2,1,-1)$, u kome je priraštaj funkcije maksimalan.

b) Izračunati ovaj maksimum.

Rešenje.

a) Prema tvrđenju na strani 83, "...gradijent određuje pravac u kome se skalarno polje najbrže menja." treba izračunati gradijent funkcije ϕ u tački $A(2,1,-1)$

$$\begin{aligned}\nabla\phi =&\nabla(x^2yz^3) = 2xyz^3\mathbf{i} + x^2z^3\mathbf{j} + 3x^2yz^2\mathbf{k} =\\ =&-4\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 12\mathbf{k}.\end{aligned}$$

Dakle pravac, koji prolazi kroz A, u kome je maksimalan priraštaj funkcije je

$$\nabla\phi = -4\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 12\mathbf{k}.$$

b) Maksimalan priraštaj je

$$|\nabla\phi| = \sqrt{(-4)^2 + (-4)^2 + (12)^2} = \sqrt{176} = 4\sqrt{11}.$$

♡

Zad. 2.9. Naći ugao između površi $\phi_1 = x^2 + y^2 + z^2 = 9$ i $\phi_2 = z = x^2 + y^2 - 3$, u tački $A(2,-1,2)$.

Rešenje.

Ugao između dve površi u datoj tački je ugao koji zaklapaju njihove normale, odnosno njihovi gradijenti, u toj tački. Gradijent (normala) površi $x^2+y^2+z^2 = 9$ u tački $(2,-1,2)$ je:

$$\nabla\phi_1 = \nabla(x^2 + y^2 + z^2) = 2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} + 2z\mathbf{k} = 4\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 4\mathbf{k},$$

a gradijent (normala) na površ $z = x^2 + y^2 - 3$ u tački $(2,-1,2)$ je:

$$\nabla\phi_2 = \nabla(x^2 + y^2 - z) = 2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} - \mathbf{k} = 4\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - \mathbf{k}.$$

Skalarni proizvod ovih vektora je $(\nabla\phi_1)\cdot(\nabla\phi_2) = |\nabla\phi_1||\nabla\phi_2|\cos\theta$, pa je kosinus traženog ugla

$$\begin{aligned}\cos\theta =&\frac{(4\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 4\mathbf{k})\cdot(4\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - \mathbf{k})}{|4\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 4\mathbf{k}||4\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - \mathbf{k}|} =\\ =&\frac{16 + 4 - 4}{\sqrt{(4)^2 + (-2)^2 + (4)^2}\sqrt{(4)^2 + (-2)^2 + (-1)^2}} =\\ =&\frac{16}{6\sqrt{21}}.\end{aligned}$$

Odavde dobijamo da je $\theta = \arccos \dfrac{8}{3\sqrt{21}} = \arccos 0.5819 = 54.41°$.

♡

Zad. 2.10. Neka je R rastojanje između fiksne tačke $A(a, b, c)$ i proizvoljne tačke $P(x, y, z)$ ($R = \overline{AP}$). Pokazati da je ∇R ort vektora $\overrightarrow{AP}$.

Rešenje.

Ako su $\mathbf{r}_A$ i $\mathbf{r}_P$ vektori položaja $a\mathbf{i}+b\mathbf{j}+c\mathbf{k}$ i $x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}$ tačaka A i P respektivno, onda je

$$\mathbf{R} = \mathbf{r}_P - \mathbf{r}_A = (x-a)\mathbf{i} + (y-b)\mathbf{j} + (z-c)\mathbf{k}$$

a intenzitet ovog vektora (rastojanje $\overline{AP}$) je

$$R = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}.$$

Odavde dobijamo

$$\begin{aligned}\nabla R =& \nabla\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2} = \\ =& \frac{(x-a)\mathbf{i} + (y-b)\mathbf{j} + (z-c)\mathbf{k}}{\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}} = \frac{\mathbf{R}}{R},\end{aligned}$$

ort vektora $\mathbf{R} = \overrightarrow{AP}$.

♡

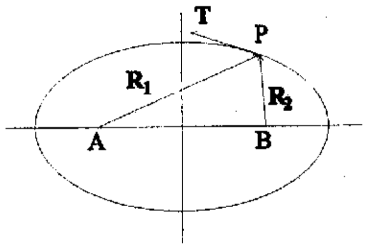
Zad. 2.11. Neka je P tačka na elipsi, a A i B su žiže te elipse. Pokazati da AP i BP grade isti ugao sa tangentom elipse u P.

Rešenje.

Neka su $\mathbf{R}_1 = \overrightarrow{AP}$ i $\mathbf{R}_2 = \overrightarrow{BP}$ vektori koji povezuju tačke A i B sa tačkom P, a $\mathbf{T}$ je ort tangente u tački P (vidi sl. 2.24).

Iz definicije elipse znamo da je zbir rastojanja od žiže do tačke P konstanta p, tj. $R_1 + R_2 = p = \text{const}$.

Znamo da je $\nabla(R_1 + R_2)$ ort normale na elipsu, pa je $[\nabla(R_1 + R_2)] \cdot \mathbf{T} = 0$ ili $\nabla R_2 \cdot \mathbf{T} = -\nabla R_1 \cdot \mathbf{T}$. Kako su ∇R_1 i ∇R_2 ortovi vektora $\mathbf{R}_1$ i $\mathbf{R}_2$ (videti prethodni zadatak 2.10, str. 130), odatle je kosinus ugla između $\mathbf{R}_2$ i $\mathbf{T}$ jednak kosinusu ugla između $\mathbf{R}_1$ i $-\mathbf{T}$. Sledi da su uglovi jednaki.



Slika 2.24: Elipsa

Napomenimo da se fizički smisao ovog rezultata može naći u optici. Naime, svetlost koja se emituje iz A reflektuje se od eliptičnog ogledala i prolazi kroz B i obrnuto.

♡

2.6.2 Divergencija

Zad. 2.12. Za vektorsku funkciju $\mathbf{A} = x^2 z\mathbf{i} + 2y^3 z^2\mathbf{j} - xy^2 z\mathbf{k}$ naći div$\mathbf{A}$ u tački (1,1,-1).

Rešenje.

$$\begin{aligned}\mathrm{div}\mathbf{A} &= \frac{\partial}{\partial x}(x^2 z) + \frac{\partial}{\partial y}(2y^2 z^3) - \frac{\partial}{\partial z}(xy^2 z) = \\ &= 2xz + 6y^2 z^2 - xy^2 = -2 + 6 - 1 = 3.\end{aligned}$$

♡

Zad. 2.13.
Za $\Phi = 3x^2 z - y^2 z^3 + 4x^3 y + 2x - 3y - 5$ naći $\nabla^2\Phi$.

Rešenja.

$$\nabla^2\Phi = 6z + 24xy - 2z^3 - 6y^2 z.$$

♡

Zad. 2.14. Za $\mathbf{A} = (3x^2y - z)\mathbf{i} + (xz^3 + y^4)\mathbf{j} - 2x^3z^2\mathbf{k}$ nači $\nabla(\nabla\cdot \mathbf{A})$ u tački (2,-1,0).

Rešenje.

$$\nabla(\nabla\cdot \mathbf{A}) = -6\mathbf{i} + 24\mathbf{j} - 32\mathbf{k}.$$

♡

Zad. 2.15.
Za $\mathbf{A} = 3xyz^2\mathbf{i} + 2xy^3\mathbf{j} - x^2yz\mathbf{k}$ i $\Phi = 3x^2 - yz$. naći:
a) $\nabla\cdot \mathbf{A}$, b) $\mathbf{A}\cdot \nabla\Phi$, c) $\nabla\cdot (\Phi\mathbf{A})$, d) $\nabla\cdot (\nabla\Phi)$, u tački (1,-1,1).

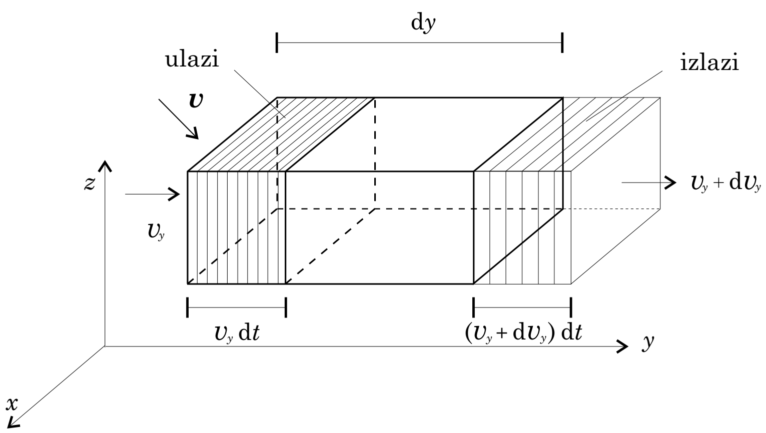
Rešenje.

a) 4, b) -15, c) 1, d) 6.

Zad. 2.16.
Pokazati da višak zapremine fluida koji istekne, u jedinici vremena iz jedinične zapremine, fluidnog prostora, predstavlja divergenciju brzine $\mathbf{v}$ fluida.

Rešenje.

Posmatrajmo strujanje fluida.



Slika 2.25: Strujanje fluida

Izračunajmo razliku protoka fluida koji uđe u elementarnu zapreminu $\mathrm{d}V = \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ i fluida koji izađe iz te zapremine, za isto vreme.
Količina fluida koja uđe u ovu zapreminu, u pravcu y - ose je

$$v_y\mathrm{d}t\mathrm{d}x\mathrm{d}z.$$

Pretpostavimo da su promene brzine v_y u pravcima x i z zanemarljive, tj. $\dfrac{\partial v_y}{\partial x} = 0$ i $\dfrac{\partial v_y}{\partial z} = 0$, zbog malih dimenzija posmatrane zapremine.

Količina zapremine koja istekne, pod istom pretpostavkom, je

$$(v_y + \mathrm{d}v_y)\,\mathrm{d}t\mathrm{d}x\mathrm{d}z,$$

pa je razlika

$$(v_y + \mathrm{d}v_y)\,\mathrm{d}t\mathrm{d}x\mathrm{d}z - v_y\mathrm{d}t\mathrm{d}x\mathrm{d}z = \mathrm{d}v_y\mathrm{d}t\mathrm{d}x\mathrm{d}z.$$

Ovu razliku možemo da predstavimo na sledeći način

$$\mathrm{d}v_y\mathrm{d}t\mathrm{d}x\mathrm{d}z = \left(\frac{\partial v_y}{\partial y}\mathrm{d}y + \frac{\partial v_y}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial v_y}{\partial z}\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}t\mathrm{d}x\mathrm{d}z = \frac{\partial v_y}{\partial y}\mathrm{d}t\mathrm{d}V.$$

Na isti način pokazuje se da su promene zapremine u pravcu x i z,

$$\mathrm{d}v_x\mathrm{d}t\mathrm{d}y\mathrm{d}z, \quad \mathrm{d}v_z\mathrm{d}t\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

respektivno. Prema tome ukupna promena jednaka je zbiru ovih promena, tj.

$$\begin{aligned}\mathrm{d}(\mathrm{d}V) &= \frac{\partial v_x}{\partial x}\mathrm{d}V\mathrm{d}t + \frac{\partial v_y}{\partial y}\mathrm{d}V\mathrm{d}t + \frac{\partial v_z}{\partial z}\mathrm{d}V\mathrm{d}t = \\ &= (\mathrm{div}\mathbf{v})\mathrm{d}V\mathrm{d}t \quad \Rightarrow \\ \mathrm{div}\mathbf{v} &= \frac{\mathrm{d}(\mathrm{d}V)}{\mathrm{d}t\mathrm{d}V}.\end{aligned}$$

Dakle, divergencija brzine fluida $\mathbf{v}$ predstavlja promenu zapremine fluida u jedinici vremena po jedinični zapremine fluidnog prostora.

♡

Zad. 2.17. Data je skalarna funkcija $\phi = 2x^3y^2z^4$.

a) Izračunati $\nabla \cdot \nabla\phi$.

b) Pokazati na ovom primeru da je $\nabla \cdot \nabla\phi = \nabla^2\phi = \triangle\phi$, gde je $\nabla^2 \equiv \triangle \equiv \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial z^2}$ tzv. Laplasov operator (izražen u odnosu na Dekartove koordiante).

Rešenje.

a) Krenućemo od definicije gradijenta

$$\begin{aligned}\nabla\phi =&\mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x}\left(2x^3y^2z^4\right) + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y}(2x^3y^2z^4) + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}(2x^3y^2z^4) = \\ =&6x^2y^2z^4\mathbf{i} + 4x^3yz^4\mathbf{j} + 8x^3y^2z^3\mathbf{k}.\end{aligned}$$

Nađimo sada divergenciju ovog vektora, tj.

$$\begin{aligned}
\nabla\cdot\nabla\phi =& \left(\mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x}+\mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y}+\mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)\cdot\left(6x^2y^2z^4\mathbf{i}+4x^3yz^4\mathbf{j}+8x^3y^2z^3\mathbf{k}\right)=\\
=&\frac{\partial}{\partial x}\left(6x^2y^2z^4\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(4x^3yz^4\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(8x^3y^2z^3\right)=\\
=&12xy^2z^4+4x^3z^4+24x^3y^2z^2.
\end{aligned}$$

b) Kako je

$$\triangle\phi=\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}=12xy^2z^4+4x^3z^4+24x^3y^2z^2,$$

to, poredeći sa rezultatom pod a), vidimo na ovom primeru da je

$$\nabla\cdot\nabla\phi=\triangle\phi=\nabla^2\phi.$$

♡

Zad. 2.18. Dokazati sledeće osobine divergencije:

a) $\nabla\cdot(\mathbf{A}+\mathbf{B})=\nabla\cdot\mathbf{A}+\nabla\cdot\mathbf{B}$

b) $\nabla\cdot(\phi\mathbf{A})=(\nabla\phi)\cdot\mathbf{A}+\phi\nabla\cdot\mathbf{A}$

Rešenje.

a) Kako je (u odnosu na Dekartov koordinatni sistem)

$$\mathbf{A}=A_1\mathbf{i}+A_2\mathbf{j}+A_3\mathbf{k}$$

i

$$\mathbf{B}=B_1\mathbf{i}+B_2\mathbf{j}+B_3\mathbf{k},$$

to je

$$\begin{aligned}
\nabla\cdot(\mathbf{A}+\mathbf{B})=&\left(\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i}+\frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j}+\frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k}\right)\cdot[(A_1+B_1)\mathbf{i}+(A_2+B_2)\mathbf{j}+(A_3+B_3)\mathbf{k}]=\\
=&\frac{\partial(A_1+B_1)}{\partial x}+\frac{\partial(A_2+B_2)}{\partial y}+\frac{\partial(A_3+B_3)}{\partial z}=\\
=&\frac{\partial A_1}{\partial x}+\frac{\partial A_2}{\partial y}+\frac{\partial A_3}{\partial z}+\frac{\partial B_1}{\partial x}+\frac{\partial B_2}{\partial y}+\frac{\partial B_3}{\partial z}=\\
=&\nabla\cdot\mathbf{A}+\nabla\cdot\mathbf{B}.
\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
\nabla\cdot(\phi\mathbf{A}) =& \nabla\cdot(\phi A_1\mathbf{i}+\phi A_2\mathbf{j}+\phi A_3\mathbf{k}) = \\
=& \frac{\partial(\phi A_1)}{\partial x}+\frac{\partial(\phi A_2)}{\partial y}+\frac{\partial(\phi A_3)}{\partial z} = \\
=& \frac{\partial\phi}{\partial x}A_1+\frac{\partial\phi}{\partial y}A_2+\frac{\partial\phi}{\partial z}A_3+\frac{\partial A_1}{\partial x}\phi+\frac{\partial A_2}{\partial y}\phi+\frac{\partial A_3}{\partial z}\phi = \\
=& \left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\mathbf{i}+\frac{\partial\phi}{\partial y}\mathbf{j}+\frac{\partial\phi}{\partial z}\mathbf{k}\right)\cdot(A_1\mathbf{i}+A_2\mathbf{j}+A_3\mathbf{k})+ \\
& \qquad +\phi\cdot\left(\frac{\partial A_1}{\partial x}+\frac{\partial A_2}{\partial y}+\frac{\partial A_3}{\partial z}\right) = \\
=& (\nabla\phi)\cdot\mathbf{A}+\phi(\nabla\cdot\mathbf{A}).
\end{aligned}$$

♡

Zad. 2.19. Pokazati da je $\nabla^2\left(\frac{1}{r}\right) = \triangle\left(\frac{1}{r}\right) = 0$, gde je $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

<u>*Rešenje.*</u>

$$\begin{aligned}
\nabla^2\left(\frac{1}{r}\right) =& \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)^{-1} = \\
=& \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

Kako je

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{1}{2}} = -x\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{3}{2}},$$

onda je

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{1}{2}} = \frac{\partial}{\partial x}(-x(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}}) = \frac{2x^2-y^2-z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}}. \tag{2.153}$$

Slično dobijamo:

$$\frac{\partial^2(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{1}{2}}}{\partial y^2} = \frac{2y^2-x^2-z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}}, \tag{2.154}$$

$$\frac{\partial^2(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{1}{2}}}{\partial z^2} = \frac{2z^2-x^2-y^2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}}. \tag{2.155}$$

Ako sada saberemo jednačine (2.153), (2.154) i (2.155) dobijamo

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right) = 0. \tag{2.156}$$

Podsetimo se da se jednačina $\nabla^2\phi = 0$ zove Laplasova jednačina, a njeno rešenje zove se harmonijska funkcija. Dakle, rešenje jednačine (2.156) $\phi = 1/r$ je harmonijska funkcija. [18]

Ovaj zadatak može da se reši i na drugi način.

Kako je

$$\nabla^2\left(\frac{1}{r}\right) = \nabla\cdot\nabla\left(\frac{1}{r}\right),$$

to iskoristivši rezultat zad. 2.1, na str. 124, dobijamo

$$\nabla\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{\mathbf{r}}{r^3}.$$

Prema zad.2.20, na str. 137, je

$$\nabla\cdot\left(\frac{\mathbf{r}}{r^3}\right) = 0,$$

čime je dokazano da je $\varphi = 1/r$ harmonijska funkcija.

♡

Zad. 2.20. Dokazati da je $\nabla\cdot\left(\frac{\mathbf{r}}{r^3}\right) = 0$.

Dokaz.

Ako stavimo da je $\phi = r^{-3}$ i $\mathbf{A} = \mathbf{r}$ zadatak se svodi na primenu prethodne osobine divergencije, pri čemu je korišćen zadatak 2.2 na str.125, za $n = -3$,:

$$\begin{aligned}\nabla\cdot(r^{-3}\mathbf{r}) &= \left(\nabla r^{-3}\right)\cdot\mathbf{r} + (r^{-3}\nabla\cdot\mathbf{r})\\ &= -\,3r^{-5}\mathbf{r}\cdot\mathbf{r} + 3r^{-3} = 0.\end{aligned}$$

♡

Zad. 2.21. Pokazati da je $\nabla\cdot(U\nabla V - V\nabla U) = U\nabla^2 V - V\nabla^2 U$.

Rešenje.

Ako pogledamo zadatak 2.18b na str.135 i stavimo da je $\phi = U$, odnosno $\mathbf{A} = \nabla V$, tada je

$$\nabla\cdot(U\nabla V) = (\nabla U)\cdot(\nabla V) + U(\nabla\cdot\nabla V) = (\nabla U)\cdot(\nabla V) + U\nabla^2 V, \qquad (2.157)$$

$$\nabla\cdot(V\nabla U) = \qquad = (\nabla V)\cdot(\nabla U) + V\nabla^2 U. \qquad (2.158)$$

[18] Napomenimo da je $\phi = 1/r$ harmonijska funkcija u prostoru E_3, dok je $y = \ln r$ harmonijska funkcija u prostoru E_2.

Relaciju (2.158) dobili smo iz (2.157) zamenom U sa V i V sa U. Oduzimanjem leve, odnosno desne strane i korišćenjem osobine divergencije (divergencija razlike je razlika divergencije), dobijamo

$$\begin{aligned}\nabla\cdot(U\nabla V)-\nabla\cdot(V\nabla U)=&\\ &=\nabla\cdot(U\nabla V-V\nabla U)=\\ &=(\nabla U)\cdot(\nabla V)+U\nabla^2 V-[(\nabla V)\cdot(\nabla U)+V\nabla^2 U]=\\ &=U\nabla^2 V-V\nabla^2 U.\end{aligned}$$

♡

Zad. 2.22. Naći konstantu a tako da vektorsko polje

$$\mathbf{V}=(x+3y)\mathbf{i}+(y-2z)\mathbf{j}+(x+az)\mathbf{k},$$

bude solenoidno.

Rešenje.

Uslov da bi vektorsko polje bilo solenoidno je: $\nabla\cdot\mathbf{V}=0$ (vidi str. 92). Kako je

$$\nabla\cdot\mathbf{V}=\frac{\partial(x+3y)}{\partial x}+\frac{\partial(y-2z)}{\partial y}+\frac{\partial(x+az)}{\partial z}=1+1+a,$$

to dati uslov daje

$$\nabla\cdot\mathbf{V}=a+2=0,$$

odnosno $a=-2$.

♡

2.6.3 Rotor

Zad. 2.23.
Za $\mathbf{A}=x^2y\mathbf{i}-2xz\mathbf{j}+2yz\mathbf{k}$ naći rot rot$\mathbf{A}$.

Rešenje.

$$\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\mathbf{A}=\nabla\times(\nabla\times\mathbf{A})=(2x+2)\mathbf{j}.$$

♡

Zad. 2.24.
Za $\mathbf{A}=2yz\mathbf{i}-x^2y\mathbf{j}+xz^2\mathbf{k}$ i $\Phi=2x^2yz^3$ naći $\mathbf{A}\times\nabla\Phi$.

Rešenje.

$$\mathbf{A}\times\nabla\Phi = -(6x^4y^2z^2+2x^3z^5)\mathbf{i}+(4x^2yz^5-12x^2y^2z^3)\mathbf{j}+(4x^2yz^4+4x^3y^2z^3)\mathbf{k}.$$

♡

Zad. 2.25.
Pokazati da vektorsko polje $\mathbf{A}=(2x^2+8xy^2z)\mathbf{i}+(3x^3y-3xy)\mathbf{j}-(4y^2z^2+2x^3z)\mathbf{k}$ nije vrtložno (rot$\mathbf{A}=0$), a da je polje $\mathbf{B}=xyz^2\mathbf{A}$ vrtložno.

♡

Zad. 2.26.
Za $\mathbf{A}=xz^2\mathbf{i}+2y\mathbf{j}-3xz\mathbf{k}$ i $\mathbf{B}=3xz\mathbf{i}+2yz\mathbf{j}-z^2\mathbf{k}$ naći $\mathbf{A}\times(\nabla\times\mathbf{B})$ u tački $(1,-1,2)$.

Rešenje.

$\mathbf{A}\times(\nabla\times\mathbf{B})=18\mathbf{i}-12\mathbf{j}+16\mathbf{k}$.

♡

Zad. 2.27.
Naći rot$\mathbf{V}$ i div$\mathbf{V}$ za vektorsko polje $\mathbf{V}=-\dfrac{\mathbf{r}}{r}=\dfrac{-x\mathbf{i}-y\mathbf{j}}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

♡

Zad. 2.28. Pokazati da je rot rot$\mathbf{A}=-\Delta\mathbf{A}+$grad div$\mathbf{A}$.

♡

Zad. 2.29.
Odrediti rotor brzine proizvoljne tačke krutog tela koje se obrće oko nepomičnog pola.

Rešenje.

Brzina tačke tela koje se obrće oko nepomičnog pola (koji ćemo, bez gubljenja u opštosti, uzeti za koordinatni početak) data je relacijom

$$\mathbf{v}=\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\varrho}=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ \omega_x & \omega_y & \omega_z\\ x & y & z\end{vmatrix}=\mathbf{i}\,(\omega_y z-\omega_z y)+\mathbf{j}\,(\omega_z x-\omega_x z)+\mathbf{k}\,(\omega_x y-\omega_y x)\,,$$

gde je $\boldsymbol{\omega}$ - ugaona brzina, a $\boldsymbol{\varrho}$ - vektor položaja tačke tela. Kako je ugaona brzina tela ista za sve tačke krutog tela, to ona ne zavisi od koordinata x, y i z, pa je

$$\frac{\partial}{\partial x}(\dot{y}) = \frac{\partial}{\partial x}(\omega_z x - \omega_x z) = \omega_z \quad \frac{\partial}{\partial y}(\dot{x}) = \frac{\partial}{\partial y}(\omega_y z - \omega_z y) = -\omega_z,$$

$$\frac{\partial}{\partial z}(\dot{x}) = \frac{\partial}{\partial z}(\omega_y z - \omega_z y) = \omega_y \quad \frac{\partial}{\partial x}(\dot{z}) = \frac{\partial}{\partial x}(\omega_x y - \omega_y x) = -\omega_y,$$

$$\frac{\partial}{\partial y}(\dot{z}) = \frac{\partial}{\partial y}(\omega_x y - \omega_y z) = \omega_x \quad \frac{\partial}{\partial z}(\dot{y}) = \frac{\partial}{\partial z}(\omega_z x - \omega_x z) = -\omega_x.$$

Onda je rotor brzine $\mathbf{v}$, prema (2.46)

$$\mathrm{rot}\mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \end{vmatrix} = \mathbf{i}\left(\frac{\partial \dot{z}}{\partial y} - \frac{\partial \dot{y}}{\partial z}\right) + \mathbf{j}\left(\frac{\partial \dot{x}}{\partial z} - \frac{\partial \dot{z}}{\partial x}\right) + \mathbf{k}\left(\frac{\partial \dot{y}}{\partial x} - \frac{\partial \dot{x}}{\partial y}\right).$$

Iz ovih relacija konačno dobijamo

$$\mathrm{rot}\mathbf{v} = \mathbf{i}[\omega_x - (-\omega_x)] + \mathbf{j}[\omega_y - (-\omega_y)] + \mathbf{k}[\omega_z - (-\omega_z)] = 2\boldsymbol{\omega}.$$

♡

Zad. 2.30. Ako je $\mathbf{V} = xz^3\mathbf{i} - 2x^2yz\mathbf{j} + 2yz^4\mathbf{k}$, naći $\nabla \times \mathbf{V}$ u tački $A(1, -1, 1)$.

Rešenje.

$$\begin{aligned}
\nabla \times \mathbf{V} &= \left(\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k}\right) \times (xz^3\mathbf{i} - 2x^2yz\mathbf{j} + 2yz^4\mathbf{k}) = \\
&= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ xz^3 & -2x^2yz & 2yz^4 \end{vmatrix} = \\
&= \left[\frac{\partial(2yz^4)}{\partial y} - \frac{\partial(-2x^2yz)}{\partial z}\right]\mathbf{i} + \left[\frac{\partial(xz^3)}{\partial z} - \frac{\partial(2yz^4)}{\partial x}\right]\mathbf{j} + \\
&\qquad + \left[\frac{\partial(-2x^2yz)}{\partial x} - \frac{\partial(xz^3)}{\partial y}\right]\mathbf{k} = \\
&= (2z^4 + 2xz)\mathbf{i} + (3xz^2)\mathbf{j} - (4xyz)\mathbf{k}.
\end{aligned}$$

Za tačku $A(1, -1, 1)$ dobijamo $\nabla \times \mathbf{V}\Big|_A = 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$.

♡

Zad. 2.31. Posmatrajmo izraz $\nabla \cdot (\mathbf{V} \times \mathbf{W})$.

a) Dokazati da je

$$\nabla \cdot (\mathbf{V} \times \mathbf{W}) = (\nabla \times \mathbf{V}) \cdot \mathbf{W} - \mathbf{V} \cdot (\nabla \times \mathbf{W}).$$

b) Naći vrednost posmatranog izraza kada je $\mathbf{W} = \mathbf{r}$ i $\nabla \times \mathbf{V} = 0$.

c) Dokazati da ako su $\mathbf{V}$ i $\mathbf{W}$ bezvrtložna (potencijalna) polja, onda je polje dobijeno njihovim vektorskim množenjem solenoidno (vrtložno).

d) Iz b) i c) sledi da je vektorsko polje vektorskog proizvoda vektora položaja i bilo kog bezvrtložnog vektorskog polja, solenoidno polje. Dokazati.

e) Vektorsko polje vektorskog proizvoda vektora položaja i konzervativne sile je uvek solenoidno polje. Dokazati.

Rešenje.

a) Kako je

$$\nabla \cdot (\mathbf{V} \times \mathbf{W}) = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ V_x & V_y & V_z \\ W_x & W_y & W_z \end{vmatrix} =$$
$$= \frac{\partial}{\partial x}(V_y W_z - V_z W_y) + \frac{\partial}{\partial y}(V_z W_x - V_x W_z) + \frac{\partial}{\partial z}(V_x W_y - V_y W_x), \tag{2.159}$$

to je, posle diferenciranja i grupisanja

$$\begin{aligned} & W_x \left(\frac{\partial V_z}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial z} \right) + W_y \left(\frac{\partial V_x}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial x} \right) + W_z \left(\frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y} \right) - \\ & -V_x \left(\frac{\partial W_z}{\partial y} - \frac{\partial W_y}{\partial z} \right) - V_y \left(\frac{\partial W_x}{\partial z} - \frac{\partial W_z}{\partial x} \right) - V_z \left(\frac{\partial W_y}{\partial x} - \frac{\partial W_x}{\partial y} \right). \end{aligned} \tag{2.160}$$

Kako je

$$\nabla \times \mathbf{V} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ V_x & V_y & V_z \end{vmatrix} =$$
$$= \mathbf{i} \left(\frac{\partial V_z}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial z} \right) + \mathbf{j} \left(\frac{\partial V_x}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial x} \right) + \mathbf{k} \left(\frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y} \right),$$

i slično za vektorsko polje $\mathbf{W}$, pa relacija (2.159), koristeći (2.160) postaje

$$\nabla \cdot (\mathbf{V} \times \mathbf{W}) = (\nabla \times \mathbf{V}) \cdot \mathbf{W} - \mathbf{V} \cdot (\nabla \times \mathbf{W}), \tag{2.161}$$

što je trebalo i dokazati.

b) Zamenivši u relaciji (2.161) $\mathbf{W}$ sa $\mathbf{r}$, dobijamo

$$\nabla \cdot (\mathbf{V} \times \mathbf{r}) = (\nabla \times \mathbf{V}) \cdot \mathbf{r} - \mathbf{V} \cdot (\nabla \times \mathbf{r}). \tag{2.162}$$

Kako je, prema uslovu zadatka $\nabla \times \mathbf{V} = 0$, a prema (2.62) $\nabla \times \mathbf{r} = 0$ (vidi str. 94), to je

$$\nabla \cdot (\mathbf{V} \times \mathbf{r}) = \mathbf{r} \cdot (\nabla \times \mathbf{V}) = 0.$$

c) Koristeći relaciju (2.161), zaključujemo da je divergencija vektorskog proizvoda jednaka nuli, jer su polja $\mathbf{V}$ i $\mathbf{W}$ bezvrtložna, tj. njihovi rotori jednaki nuli.

d) Neka je $\mathbf{v}$ bezvrtložno polje, tj. $\nabla \times \mathbf{v} = 0$. Zadatak je da se ispita vektorsko polje $\mathbf{w}$, definisano sa $\mathbf{w} = \mathbf{r} \times \mathbf{v}$.

Izračunajmo prvo gradijent ovog polja $\nabla \cdot \mathbf{w} = \nabla \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{v})$. Iskoristivši rezultat pod a), relaciju (2.62), str. 94, kao i uslov zadatka ($\nabla \times \mathbf{v} = 0$), dobijamo

$$\nabla \cdot \mathbf{w} = \nabla \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{v}) = (\nabla \times \mathbf{r}) \cdot \mathbf{v} - \mathbf{r} \cdot (\nabla \times \mathbf{v}) = 0.$$

Može se pokazati da je, u opštem slučaju, $\nabla \times \mathbf{w} \neq 0$. Pri dokazivanju koristiti osobinu nabla operatora (vidi str. 87).

Dakle, polje $\mathbf{w}$ je solenoidno (vrtložno) polje.

e) Posmatrajmo vektorsko polje $\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{S}$, gde je $\mathbf{S}$ sila, a $\mathbf{r}$ - vektor položaja. Kako je sila konzervativna, prema uslovu zadatka, tj. $\nabla \times \mathbf{S} = 0$, to je

$$\nabla \cdot \mathbf{M} = \nabla \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{S}) = (\nabla \times \mathbf{r}) \cdot \mathbf{S} - \mathbf{r} \cdot (\nabla \times \mathbf{S}) = 0.$$

♡

Zad. 2.32. Naći $\mathrm{rot}(\mathbf{r}f(r))$, ako je $f(r)$ diferencijabilna funkcija.

Rešenje.

$$\begin{aligned}
\nabla \times (\mathbf{r}f(r)) &= \nabla \times (xf(r)\mathbf{i} + yf(r)\mathbf{j} + zf(r)\mathbf{k}) = \\
&= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ xf(r) & yf(r) & zf(r) \end{vmatrix} = \\
&= \left(z\frac{\partial f}{\partial y} - y\frac{\partial f}{\partial z} \right)\mathbf{i} + \left(x\frac{\partial f}{\partial z} - z\frac{\partial f}{\partial x} \right)\mathbf{j} + \left(y\frac{\partial f}{\partial x} - x\frac{\partial f}{\partial y} \right)\mathbf{k}.
\end{aligned}$$

Izračunajmo sada parcijalne izvode funkcije f po x

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \left(\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}r} \right) \left(\frac{\partial r}{\partial x} \right) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}r} \frac{\partial}{\partial x}(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}) = f^{'}(r) \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = f^{'} \frac{x}{r},$$

gde je $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}r} \equiv f'$. Na sličan način nalazimo i preostala dva parcijalna izvoda

$$\frac{\partial f}{\partial y} = f'\,\frac{y}{r} \quad \text{i} \quad \frac{\partial f}{\partial z} = f'\,\frac{z}{r},$$

pa konačano dobijamo:

$$\nabla \times (\mathbf{r} f(r)) =$$
$$\left(z\frac{y}{r}f' - y\frac{z}{r}f'\right)\mathbf{i} + \left(x\frac{z}{r}f' - z\frac{x}{r}f'\right)\mathbf{j} + \left(y\frac{x}{r}f' - x\frac{y}{r}f'\right)\mathbf{k} = \mathbf{0}.$$

♡

Zad. 2.33. Dokazati da je $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{V}) = -\nabla^2 \mathbf{V} + \nabla(\nabla \cdot \mathbf{V})$.

<u>*Rešenje.*</u>

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{V}) = \nabla \times \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ V_1 & V_2 & V_3 \end{vmatrix} =$$

$$= \nabla \times \left[\left(\frac{\partial V_3}{\partial y} - \frac{\partial V_2}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial V_1}{\partial z} - \frac{\partial V_3}{\partial x}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial V_2}{\partial x} - \frac{\partial V_1}{\partial y}\right)\mathbf{k}\right] =$$

$$= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ \dfrac{\partial V_3}{\partial y} - \dfrac{\partial V_2}{\partial z} & \dfrac{\partial V_1}{\partial z} - \dfrac{\partial V_3}{\partial x} & \dfrac{\partial V_2}{\partial x} - \dfrac{\partial V_1}{\partial y} \end{vmatrix} =$$

$$= \left[\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial V_2}{\partial x} - \frac{\partial V_1}{\partial y}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial V_1}{\partial z} - \frac{\partial V_3}{\partial x}\right)\right]\mathbf{i} +$$
$$+ \left[\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial V_3}{\partial y} - \frac{\partial V_2}{\partial z}\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial V_2}{\partial x} - \frac{\partial V_1}{\partial y}\right)\right]\mathbf{j} +$$
$$+ \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial V_1}{\partial z} - \frac{\partial V_3}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial V_3}{\partial y} - \frac{\partial V_2}{\partial z}\right)\right]\mathbf{k} =$$

$$= \left(-\frac{\partial^2 V_1}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 V_1}{\partial z^2}\right)\mathbf{i} + \left(-\frac{\partial^2 V_2}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 V_2}{\partial x^2}\right)\mathbf{j} + \left(-\frac{\partial^2 V_3}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 V_3}{\partial y^2}\right)\mathbf{k} +$$
$$+ \left(\frac{\partial^2 V_2}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 V_3}{\partial z \partial x}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial^2 V_3}{\partial z \partial y} + \frac{\partial^2 V_1}{\partial x \partial y}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial^2 V_1}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 V_2}{\partial y \partial z}\right)\mathbf{k} =$$

$$= \left(-\frac{\partial^2 V_1}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 V_1}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 V_1}{\partial z^2}\right)\mathbf{i} + \left(-\frac{\partial^2 V_2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 V_2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 V_2}{\partial z^2}\right)\mathbf{j} +$$
$$+ \left(-\frac{\partial^2 V_3}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 V_3}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 V_3}{\partial z^2}\right)\mathbf{k} +$$
$$+ \left(\frac{\partial^2 V_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_2}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 V_3}{\partial x \partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial^2 V_1}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 V_2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_3}{\partial y \partial z}\right)\mathbf{j} +$$
$$+ \left(\frac{\partial^2 V_1}{\partial z \partial x} + \frac{\partial^2 V_2}{\partial z \partial y} + \frac{\partial^2 V_3}{\partial z^2}\right)\mathbf{k} =$$

$$= -\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)(V_1\mathbf{i} + V_2\mathbf{j} + V_3\mathbf{k}) +$$
$$+ \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial V_1}{\partial x} + \frac{\partial V_2}{\partial y} + \frac{\partial V_3}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial V_1}{\partial x} + \frac{\partial V_2}{\partial y} + \frac{\partial V_3}{\partial z}\right)\mathbf{j} +$$
$$+ \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial V_1}{\partial x} + \frac{\partial V_2}{\partial y} + \frac{\partial V_3}{\partial z}\right)\mathbf{k} =$$
$$= -\nabla^2 \mathbf{V} + \nabla\left(\frac{\partial V_1}{\partial x} + \frac{\partial V_2}{\partial y} + \frac{\partial V_3}{\partial z}\right) =$$
$$= -\nabla^2 \mathbf{V} + \nabla(\nabla \cdot \mathbf{V})$$

♡

Zad. 2.34. Pri rotaciji krutog tela oko nepomične tačke brzina proizvoljne tačka tela data je izrazom $\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$. Dokazati da je tada $\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2}\mathrm{rot}\,\mathbf{v}$.

<u>*Rešenje.*</u>

Napomenimo da pri rotaciji krutog tela ugaona brzina ne zavisi od položja tačke u telu, tj. $\frac{\partial \omega_i}{\partial x} = \frac{\partial \omega_i}{\partial y} = \frac{\partial \omega_i}{\partial z} = 0$ $(i = 1, 2, 3)$, pa je

$$\nabla \times \mathbf{v} = \nabla \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) = \nabla \times \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 \\ x & y & z \end{vmatrix} =$$

$$= \nabla \times [(\omega_2 z - \omega_3 y)\,\mathbf{i} + (\omega_3 x - \omega_1 z)\,\mathbf{j} + (\omega_1 y - \omega_2 x)\,\mathbf{k}] =$$
$$= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \omega_2 z - \omega_3 y & \omega_3 x - \omega_1 z & \omega_1 y - \omega_2 x \end{vmatrix} =$$
$$= 2(\omega_1 \mathbf{i} + \omega_2 \mathbf{j} + \omega_3 \mathbf{k}) = 2\boldsymbol{\omega}.$$

♡

Zad. 2.35. Neka je

$$\begin{aligned} \nabla\cdot\mathbf{E}&=0, &\qquad \nabla\times\mathbf{E}&=-\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t},\\ \nabla\cdot\mathbf{B}&=0, &\qquad \nabla\times\mathbf{B}&=\frac{1}{c^2}\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}. \end{aligned}\tag{2.163}$$

Dokazati da $\mathbf{E}$ i $\mathbf{B}$ zadovoljavaju jednačinu oblika $\nabla^2\mathbf{u}=a^2\dfrac{\partial^2\mathbf{u}}{\partial t^2}$, pri čemu je $\mathbf{E}$ jačina električnog polja, $\mathbf{B}$ magnetska indukcija a a konstanta.

Rešenje.

Posmatrajmo izraz $\nabla\times(\nabla\times\mathbf{E})$, koji može da se prikaže u obliku (vidi zad.2.33, str.143)

$$\nabla\times(\nabla\times\mathbf{E})=-\nabla^2\mathbf{E}+\nabla(\nabla\cdot\mathbf{E}).$$

Iskoristivši uslove zadatka (2.163) $(\nabla\cdot\mathbf{E}=0\wedge\nabla\times\mathbf{E}=-\dfrac{\partial\mathbf{B}}{\partial t})$ dobijamo

$$\nabla\times\left(-\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}\right)=-\nabla^2\mathbf{E},$$

odnosno

$$-\frac{\partial}{\partial t}(\nabla\times\mathbf{B})=-\nabla^2\mathbf{E}.$$

Ako sada iskoristimo i uslov $\nabla\times\mathbf{B}=\dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}$, konačno dobijamo, za polje $\mathbf{E}$,

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}=\nabla^2\mathbf{E}.\tag{2.164}$$

Slično, za polje $\mathbf{B}$ dobijamo

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{B}}{\partial t^2}=\nabla^2\mathbf{B}.\tag{2.165}$$

Dakle jednačine (2.164) i (2.165) mogu da se predstave u obliku

$$\nabla^2\mathbf{u}=a^2\frac{\partial^2\mathbf{u}}{\partial t^2},$$

što je i trebalo dokazati.[19]

♡

[19]Napomenimo da se ove jednačine nazivaju Maksvelove jednačine za elektromagnetsko polje.

Zad. 2.36. Neka je vektorsko polje $\mathbf{F}$ opisano relacijom $\mathbf{F} = \dfrac{-y\mathbf{i} + x\mathbf{j}}{x^2 + y^2}$. Izračunati:

a) $\nabla \times \mathbf{F}$.

b)

$$\oint \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r}$$

po bilo kojoj zatvorenoj putanji. Objasniti rezultate, ako $\mathbf{F}$ predstavlja silu.

Rešenje.

a) Krenućemo od definicije rotora

$$\nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ \dfrac{-y}{x^2+y^2} & \dfrac{x}{x^2+y^2} & 0 \end{vmatrix},$$

odakle dobijamo da je $\operatorname{rot} \mathbf{F} = \mathbf{0}$ u bilo kojoj oblasti osim u tački (0,0). Dakle, vektorsko polje $\mathbf{F}$ je laminarno. Ako $\mathbf{F}$ predstavlja silu, tada je polje sila potencijalno, a sila je konzervativna.

b) Posmatrajmo integral po zatvorenoj liniji

$$\oint \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = \oint \frac{-y\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y}{x^2 + y^2}.$$

Pogodno je preći, zbog oblika linije, na polarni koordinati sistem, koji je povezan sa Dekartovim koordinatnim sistemom relacijama

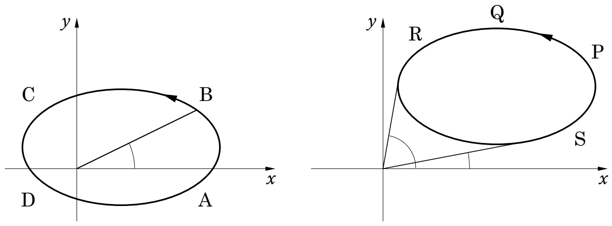
$$x = \rho\cos\varphi,$$
$$y = \rho\sin\varphi,$$

gde su (ρ, φ) polarne koordinate. Diferenciranjem dobijamo:

$$\mathrm{d}x = -\rho\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi + \mathrm{d}\rho\cos\varphi$$
$$\mathrm{d}y = \rho\cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi + \mathrm{d}\rho\sin\varphi.$$

Sada je odgovarajuća veličina, izražena u ova dva koordinatna sistema,

$$\frac{-y\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y}{x^2 + y^2} = \mathrm{d}\varphi = \mathrm{d}\left(\arctan\frac{y}{x}\right).$$



Slika 2.26:

Posmatraćemo dva slučaja:

1) kada je koordinatni početak unutar zatvorene krive i

2) kada je koordinatni početak van zatvorene krive, vidi sliku 2.26.

Prvi slučaj. Posmatrajmo zatvorenu krivu $ABCDA$ (vidi sliku) koja okružuje koordinatni početak. Pri opisivanju krive, u ovom slučaju, vrh vektora položaja polazi iz tačke A ($\mathbf{r} = \mathbf{r}_A$, $\varphi_0 = 0$), kreće se po krivoj i ponovo se vraća u polaznu tačku (kriva je zatvorena !!!). Dakle, ugao se povećao za 2π ($0 \leq \varphi \leq 2\pi$), pa je liniski integral jednak

$$\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi = 2\pi.$$

Drugi slučaj. Za zatvorenu krivu $PQRSP$ (vidi sliku 2.26) koja ne okružuje koordinatni početak, ugao se menja od $\varphi = \varphi_0$ u P do $\varphi = \varphi_0$ posle obilaska punog kruga. Liniski integral jednak je

$$\int_{\varphi_0}^{\varphi_0} \mathrm{d}\varphi = 0.$$

♡

2.6.4 Mešoviti problemi

Zad. 2.37. Dat je vektor

$$\mathbf{v} = (x + 2y + az)\mathbf{i} + (bx - 3y - z)\mathbf{j} + (4x + cy + 2z)\mathbf{k}.$$

a) Odrediti konstante a, b, c tako da je vektorsko polje potencijalno.

b) Naći skalarnu funkciju ϕ, čiji je gradijent jednak vektoru $\mathbf{v}$, a za vrednosti konstanti a, b i c određenih pod a).

Rešenje.

a) Poćićemo od definicije rotora

$$\operatorname{rot}\mathbf{v} = \nabla \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix},$$

pri čemu je $v_x = x + 2y + az$, $v_y = bx - 3y - z$, $v_z = 4x + cy + 2z$. Odavde sledi da je

$$\operatorname{rot}\mathbf{v} = (c+1)\mathbf{i} + (a-4)\mathbf{j} + (b+2)\mathbf{k}.$$

Prema uslovu zadatka vektorsko polje je potencijalno, tj. rot$\mathbf{v}$=0. Ovaj uslov je zadovoljen ako je: $a = 4, b = 2, c = -1$, pa je

$$\mathbf{v} = (x + 2y + 4z)\mathbf{i} + (2x - 3y - z)\mathbf{j} + (4x - y + 2z)\mathbf{k}.$$

b) Kako je

$$\mathbf{v} = \nabla\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial\phi}{\partial z}\mathbf{k},$$

to je prema a)

$$\frac{\partial\phi}{\partial x} = x + 2y + 4z, \tag{2.166}$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial y} = 2x - 3y - z, \tag{2.167}$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial z} = 4x - y + 2z. \tag{2.168}$$

Kako je, u ovom slučaju, rot**v** = rot gradφ = 0, ovaj sistem jednačina je integrabilan. Integraleći relaciju (2.166) po x, smatrajući y i z za konstante, dobijamo

$$\phi = \frac{x^2}{2} + 2xy + 4xz + f(y,z), \tag{2.169}$$

gde je $f(y,z)$ funkcija koja zavisi od y i z.

Zatim jednačinu (2.169) diferenciramo po y i izjednačimo sa jednačinom (2.167), pa se dobija

$$\frac{\partial\phi}{\partial y} = 2x + \frac{\partial f(y,z)}{\partial y} = 2x - 3y - z. \tag{2.170}$$

Odavde je

$$\frac{\partial f(y,z)}{\partial y} = -3y - z. \tag{2.171}$$

Ako rešimo jednačinu (2.171), smatrajući z za konstantu, dobijamo

$$f(y,z) = -\frac{3y^2}{2} - yz + g(z). \tag{2.172}$$

Zamenom jednačine (2.172) u jednačinu (2.169) dobijamo sledeći izraz za traženu funkciju

$$\phi = \frac{x^2}{2} + 2xy + 4xz + -\frac{3y^2}{2} - yz + g(z) \tag{2.173}$$

Ponovnom diferenciranjem, sada jednačine (2.173), ali sada po z, dobijamo

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = 4x - y + \frac{\partial g(z)}{\partial z}. \tag{2.174}$$

Sada desnu stranu jednačine (2.174) izjednačimo sa desnom stranom jednačine (2.168), a zatim izračunamo nepoznatu funkciju $g(z)$

$$4x - y + \frac{\partial g(z)}{\partial z} = 4x - y + 2z, \tag{2.175}$$

$$\frac{\partial g(z)}{\partial z} = 2z, \tag{2.176}$$

$$g(z) = z^2 + \text{const}. \tag{2.177}$$

Zamenom jednačine (2.177) u jednačinu (2.173) dobija se tražena skalarna funkcija

$$\phi = \frac{x^2}{2} - \frac{3y^2}{2} + z^2 + 2xy + 4xz - yz + \text{const}.$$

♡

Zad. 2.38. Pokazati da ako je skalarna funkcija $\phi(x, y, z)$ rešenje Laplasove jednačine, onda je vektorsko polje $\nabla\phi$ solenoidno i potencijalno.

Rešenje.

Prema pretpostavci zadatka ϕ zadovoljava Laplasovu jednačinu $\nabla^2\phi = 0$, tj. $\nabla \cdot (\nabla\phi) = 0$. Odavde se vidi da je $\nabla\phi$ solenoidno polje. Sa druge strane je uvek $\nabla \times (\nabla\phi) = 0$, pa je prema tome $\nabla\phi$ i potencijalno polje.

♡

Zad. 2.39. Kako proširiti pojam gradijenta i na vektorske funkcije?

Rešenje.

Izrazimo vektor $\mathbf{B}$, recimo, u odnosu na Dekartove koordinate $\mathbf{B} = B_1 \cdot \mathbf{i} + B_2 \cdot \mathbf{j} + B_3 \cdot \mathbf{k}$, pa je grad$\mathbf{B}$

$$\begin{aligned}\nabla\mathbf{B} &= \left(\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial x}\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial x}\mathbf{k}\right) \otimes (B_1\mathbf{i} + B_2\mathbf{j} + B_3\mathbf{k}) = \\ &= \left(\frac{\partial B_1}{\partial x}\mathbf{i}\otimes\mathbf{i} + \frac{\partial B_2}{\partial x}\mathbf{i}\otimes\mathbf{j} + \frac{\partial B_3}{\partial x}\mathbf{i}\otimes\mathbf{k}\right) + \\ &+ \left(\frac{\partial B_1}{\partial x}\mathbf{j}\otimes\mathbf{i} + \frac{\partial B_2}{\partial x}\mathbf{j}\otimes\mathbf{j} + \frac{\partial B_3}{\partial x}\mathbf{j}\otimes\mathbf{k}\right) + \\ &+ \left(\frac{\partial B_1}{\partial x}\mathbf{k}\otimes\mathbf{i} + \frac{\partial B_2}{\partial x}\mathbf{k}\otimes\mathbf{j} + \frac{\partial B_3}{\partial x}\mathbf{k}\otimes\mathbf{k}\right),\end{aligned}$$

gde veličine $\mathbf{i}\otimes\mathbf{i}$, $\mathbf{i}\otimes\mathbf{j}$,..., $\mathbf{k}\otimes\mathbf{k}$ predstavljaju tzv. jedinične dijade. [20]

Veličina prikazana u obliku

$$\begin{aligned}&a_{11}\mathbf{i}\otimes\mathbf{i} + a_{12}\mathbf{i}\otimes\mathbf{j} + a_{13}\mathbf{i}\otimes\mathbf{k} + \\ &+ a_{21}\mathbf{j}\otimes\mathbf{i} + a_{22}\mathbf{j}\otimes\mathbf{j} + a_{23}\mathbf{j}\otimes\mathbf{k} + \\ &+ a_{31}\mathbf{k}\otimes\mathbf{i} + a_{32}\mathbf{k}\otimes\mathbf{j} + a_{33}\mathbf{k}\otimes\mathbf{k}\end{aligned}$$

je dijada a konstante a_{11}, a_{12}, a_{13}... su njene komponente.

♡

Zad. 2.40. Neka je vektor $\mathbf{A}$ prikazan u obliku $\mathbf{A} = A_1\mathbf{i} + A_2\mathbf{j} + A_3\mathbf{k}$, a dijada $\boldsymbol{\phi}$ kao $\boldsymbol{\phi} = a_{11}\mathbf{i}\otimes\mathbf{i} + a_{12}\mathbf{i}\otimes\mathbf{j} + a_{13}\mathbf{i}\otimes\mathbf{k} + a_{21}\mathbf{j}\otimes\mathbf{i} + a_{22}\mathbf{j}\otimes\mathbf{j} + a_{23}\mathbf{j}\otimes\mathbf{k} + a_{31}\mathbf{k}\otimes\mathbf{i} + a_{32}\mathbf{k}\otimes\mathbf{j} + a_{33}\mathbf{k}\otimes\mathbf{k}$. Izračunati $\mathbf{A}\cdot\boldsymbol{\phi}$.

Rešenje.

Koristeći zakon distribucije dobijamo

$$\mathbf{A}\cdot\boldsymbol{\phi} = (A_1\mathbf{i} + A_2\mathbf{j} + A_3\mathbf{k})\cdot\boldsymbol{\phi} = A_1\mathbf{i}\cdot\boldsymbol{\phi} + A_2\mathbf{j}\cdot\boldsymbol{\phi} + A_3\mathbf{k}\cdot\boldsymbol{\phi}.$$

Izračunajmo prvo $\mathbf{i}\cdot\boldsymbol{\phi}$. Ovaj proizvod je definisan kao skalarni proizvod jediničnog vektora $\mathbf{i}$ sa svakim članom dijade $\boldsymbol{\phi}$. Tipični članovi su $\mathbf{i}\cdot a_{11}\mathbf{i}\otimes\mathbf{i}$, $\mathbf{i}\cdot a_{12}\mathbf{i}\otimes\mathbf{j}$,

[20] Uređeni par vektora ($\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$), koji označavamo sa $\mathbf{a}\otimes\mathbf{b}$ ili $\mathbf{ab}$ (stariji način označavanja), nazivamo **dijada** ili **tenzorski proizvod** ili **otvoreni proizvod** vektora $\mathbf{a}$ i $\mathbf{b}$. Dijada $\mathbf{ab}$ se definiše kao tenzor koji svakom vektoru $\mathbf{v}$ pridružuje vektor $(\mathbf{b}\cdot\mathbf{v})\mathbf{a}$, tj. $(\mathbf{a}\otimes\mathbf{b})\mathbf{v} = (\mathbf{b}\cdot\mathbf{v})\mathbf{a}$, gde tačka označava skalarni proizvod.

$\mathbf{i}\cdot a_{21}\mathbf{j}\otimes\mathbf{i}$, $\mathbf{i}\cdot a_{32}\mathbf{k}\otimes\mathbf{j}$, ... Ako ovo uzmemo u obzir, dobija se

$$\begin{aligned}
\mathbf{i}\cdot a_{11}\mathbf{i}\otimes\mathbf{i} &= a_{11}(\mathbf{i}\cdot\mathbf{i})\,\mathbf{i} = \mathbf{a_{11}i},\\
\mathbf{i}\cdot a_{12}\mathbf{i}\otimes\mathbf{j} &= a_{12}(\mathbf{i}\cdot\mathbf{i})\,\mathbf{j} = \mathbf{a_{12}j},\\
\mathbf{i}\cdot a_{21}\mathbf{j}\otimes\mathbf{i} &= a_{21}(\mathbf{i}\cdot\mathbf{j})\,\mathbf{i} = \mathbf{0},\\
\mathbf{i}\cdot a_{32}\mathbf{k}\otimes\mathbf{j} &= a_{32}(\mathbf{i}\cdot\mathbf{k})\,\mathbf{j} = \mathbf{0}.
\end{aligned}$$

Dalje imamo analognu interpretaciju za $\mathbf{j}\cdot\boldsymbol{\phi}$ i $\mathbf{k}\cdot\boldsymbol{\phi}$, pa konačno dobijamo

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}\cdot\boldsymbol{\phi} =& A_1(a_{11}\mathbf{i}+a_{12}\mathbf{j}+a_{13}\mathbf{k}) + A_2(a_{21}\mathbf{i}+a_{22}\mathbf{j}+a_{23}\mathbf{k}) +\\
&+ A_3(a_{31}\mathbf{i}+a_{32}\mathbf{j}+a_{33}\mathbf{k}) =\\
=&(A_1a_{11}+A_2a_{21}+A_3a_{31})\mathbf{i} + (A_1a_{12}+A_2a_{22}+A_3a_{32})\mathbf{j} +\\
&+ (A_1a_{13}+A_2a_{23}+A_3a_{33})\mathbf{k}.
\end{aligned}$$

Dakle, skalarni proizvod vektora i dijade $\mathbf{A}\cdot\boldsymbol{\phi}$ je vektor.

♡

Zad. 2.41. Neka su $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$ vektorske funkcije, ϕ skalarna funkcija, a ∇ operator, izraženi u odnosu na Dekartov koordinatni sistem.

a) Interpretirati simbol $\mathbf{A}\cdot\nabla$, a zatim ga primeniti na skalarnu funkciju ϕ.

b) Dati moguću definiciju $(\mathbf{A}\cdot\nabla)\mathbf{B}$.

c) Da li je moguće napisati ovaj izraz i bez zagrade $\mathbf{A}\cdot\nabla\mathbf{B}$, a da se ne promeni značenje?

Rešenje.

a) Neka je $\mathbf{A} = A_1\mathbf{i}+A_2\mathbf{j}+A_3\mathbf{k}$. Tada

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}\cdot\nabla =& (A_1\mathbf{i}+A_2\mathbf{j}+A_3\mathbf{k})\cdot\left(\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i}+\frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j}+\frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k}\right)\\
=& A_1\frac{\partial}{\partial x}+A_2\frac{\partial}{\partial y}+A_3\frac{\partial}{\partial z}
\end{aligned}$$

predstavlja operator. Primenom ovog operatora na skalarnu funkciju ϕ, dobijamo

$$(\mathbf{A}\cdot\nabla)\phi = \left(A_1\frac{\partial}{\partial x}+A_2\frac{\partial}{\partial y}+A_3\frac{\partial}{\partial z}\right)\phi = A_1\frac{\partial\phi}{\partial x}+A_2\frac{\partial\phi}{\partial y}+A_3\frac{\partial\phi}{\partial z}$$

Ovo je isti što i $\mathbf{A}\cdot(\nabla\phi)$. Dakle, kako je

$$(\mathbf{A}\cdot\nabla)\phi = \mathbf{A}\cdot(\nabla\phi),$$

to, u ovom slučaju, možemo da izostavimo zagradu, tj.

$$(\mathbf{A}\cdot\nabla)\phi = \mathbf{A}\cdot(\nabla\phi) = \mathbf{A}\cdot\nabla\phi.$$

b) Ako u a) zamenimo ϕ sa $\mathbf{B} = B_1\mathbf{i} + B_2\mathbf{j} + B_3\mathbf{k}$, dobijamo

$$
\begin{aligned}
(\mathbf{A}\cdot\nabla)\mathbf{B} &= \left(A_1\frac{\partial}{\partial x} + A_2\frac{\partial}{\partial y} + A_3\frac{\partial}{\partial z}\right)\mathbf{B} = \\
&= A_1\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial x} + A_2\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial y} + A_3\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial z} = \\
&= \left(A_1\frac{\partial B_1}{\partial x} + A_2\frac{\partial B_1}{\partial y} + A_3\frac{\partial B_1}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \\
&+ \left(A_1\frac{\partial B_2}{\partial x} + A_2\frac{\partial B_2}{\partial y} + A_3\frac{\partial B_2}{\partial z}\right)\mathbf{j} + \\
&+ \left(A_1\frac{\partial B_3}{\partial x} + A_2\frac{\partial B_3}{\partial y} + A_3\frac{\partial B_3}{\partial z}\right)\mathbf{k}.
\end{aligned}
$$

c) Iskoristimo prethodno izračunat izraz za $\nabla\mathbf{B}$ (vidi zadatak 2.39)

$$
\begin{aligned}
\mathbf{A}\cdot\nabla\mathbf{B} =&(A_1\mathbf{i} + A_2\mathbf{j} + A_3\mathbf{k})\cdot\nabla\mathbf{B} = \\
=&A_1\mathbf{i}\cdot\nabla\mathbf{B} + A_2\mathbf{j}\cdot\nabla\mathbf{B} + A_3\mathbf{k}\cdot\nabla\mathbf{B} \\
=&A_1\left(\frac{\partial B_1}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial B_2}{\partial x}\mathbf{j} + \frac{\partial B_3}{\partial x}\mathbf{k}\right) + A_2\left(\frac{\partial B_1}{\partial y}\mathbf{i} + \frac{\partial B_2}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial B_3}{\partial y}\mathbf{k}\right) + \\
&+ A_3\left(\frac{\partial B_1}{\partial z}\mathbf{i} + \frac{\partial B_2}{\partial z}\mathbf{j} + \frac{\partial B_3}{\partial z}\mathbf{k}\right).
\end{aligned}
$$

Odavde vidimo da je rezultat isti kao i pod b), tj.

$$(\mathbf{A}\cdot\nabla)\mathbf{B} = \mathbf{A}\cdot(\nabla\mathbf{B}) = \mathbf{A}\cdot\nabla\mathbf{B}.$$

Ovde smo iskoristili i rezultate zadatka 2.40.

♡

Zad. 2.42. Ako je

$$
\begin{aligned}
\mathbf{A} &= 2yz\mathbf{i} - x^2y\mathbf{j} + xz^2\mathbf{k} \\
\mathbf{B} &= x^2\mathbf{i} + yz\mathbf{j} - xy\mathbf{k} \\
\phi &= 2x^2yz^3
\end{aligned}
$$

naći:

a) $(\mathbf{A}\cdot\nabla)\phi$,

b) $\mathbf{A}\cdot\nabla\phi$,

c) $(\mathbf{B}\cdot\nabla)\mathbf{A}$,

d) $(\mathbf{A}\times\nabla)\phi$,

e) $\mathbf{A} \times \nabla\phi$.

<u>*Rešenje.*</u>

a)

$$\begin{aligned}
(\mathbf{A} \cdot \nabla)\,\phi = & \left[\left(2yz\mathbf{i} - x^2y\mathbf{j} + xz^2\mathbf{k}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k}\right)\right]\phi = \\
= & \left(2yz\frac{\partial}{\partial x} - x^2y\frac{\partial}{\partial y} + xz^2\frac{\partial}{\partial z}\right)\left(2x^2yz^3\right) = \\
= & 2yz\frac{\partial}{\partial x}\left(2x^2yz^3\right) - x^2y\frac{\partial}{\partial y}\left(2x^2yz^3\right) + xz^2\frac{\partial}{\partial z}\left(2x^2yz^3\right) = \\
= & (2yz)\left(4xyz^3\right) - \left(x^2y\right)\left(2x^2z^3\right) + \left(xz^2\right)\left(6x^2yz^2\right) = \\
= & 8xy^2z^4 - 2x^4yz^3 + 6x^3yz^4.
\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
\mathbf{A} \cdot \nabla\phi = & \left(2yz\mathbf{i} - x^2y\mathbf{j} + xz^2\mathbf{k}\right) \cdot \left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial\phi}{\partial z}\mathbf{k}\right) = \\
= & \left(2yz\mathbf{i} - x^2y\mathbf{j} + xz^2\mathbf{k}\right) \cdot \left(4xyz^3\mathbf{i} + 2x^2z^3\mathbf{j} + 6x^2yz^2\mathbf{k}\right) = \\
= & 8xy^2z^4 - 2x^4yz^3 + 6x^3yz^4
\end{aligned}$$

Rezultat je isti kao i pod a). Dakle $(\mathbf{A} \cdot \nabla)\,\phi = \mathbf{A} \cdot \nabla\phi$, kao i u zadatku 2.41, na str.151.

c)

$$\begin{aligned}
(\mathbf{B} \cdot \nabla)\,\mathbf{A} = & \left[\left(x^2\mathbf{i} + yz\mathbf{j} - xy\mathbf{k}\right) \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k}\right)\right]\mathbf{A} = \\
= & \left(x^2\frac{\partial}{\partial x} + yz\frac{\partial}{\partial y} - xy\frac{\partial}{\partial z}\right)\mathbf{A} = \\
= & \left(x^2\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial x} + yz\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial y} - xy\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial z}\right) = \\
= & x^2\left(-2xy\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}\right) + yz\left(2z\mathbf{i} - x^2yz\mathbf{j}\right) - xy\left(2y\mathbf{i} + 2xz\mathbf{k}\right) = \\
= & \left(2yz^2 - 2xy^2\right)\mathbf{i} - \left(2x^3y + x^2yz\right)\mathbf{j} + \left(x^2z^2 - 2x^2yz\right)\mathbf{k}.
\end{aligned}$$

d)

$$
\begin{aligned}
(\mathbf{A}\times\nabla)\,\phi &= \left[\left(2yz\mathbf{i}-x^2y\mathbf{j}+xz^2\mathbf{k}\right)\times\left(\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i}+\frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j}+\frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k}\right)\right]\phi = \\
&= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2yz & -x^2y & xz^2 \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \end{vmatrix}\phi = \\
&= \left[\left(-x^2y\frac{\partial}{\partial z}-xz^2\frac{\partial}{\partial y}\right)\mathbf{i}+\left(xz^2\frac{\partial}{\partial x}-2yz\frac{\partial}{\partial z}\right)\mathbf{j}+\right. \\
&\qquad \left.+\left(2yz\frac{\partial}{\partial y}+x^2y\frac{\partial}{\partial x}\right)\mathbf{k}\right]\phi = \\
&= \left(-x^2y\frac{\partial\phi}{\partial z}-xz^2\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)\mathbf{i}+\left(xz^2\frac{\partial\phi}{\partial x}-2yz\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)\mathbf{j}+ \\
&\qquad +\left(2yz\frac{\partial\phi}{\partial y}+x^2y\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)\mathbf{k} = \\
&= -\left(6x^4y^2z^2+2x^3z^5\right)\mathbf{i}+\left(4x^2yz^5-12x^2y^2z^3\right)\mathbf{j}+ \\
&\qquad +\left(4x^2yz^4+4x^3y^2z^3\right)\mathbf{k}.
\end{aligned}
$$

e)

$$
\begin{aligned}
\mathbf{A}\times\nabla\phi &= \left(2yz\mathbf{i}-x^2y\mathbf{j}+xz^2\mathbf{k}\right)\times\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\mathbf{i}+\frac{\partial\phi}{\partial y}\mathbf{j}+\frac{\partial\phi}{\partial z}\mathbf{k}\right) = \\
&= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2yz & -x^2y & xz^2 \\ \dfrac{\partial\phi}{\partial x} & \dfrac{\partial\phi}{\partial y} & \dfrac{\partial\phi}{\partial z} \end{vmatrix} = \\
&= \left(-x^2y\frac{\partial\phi}{\partial z}-xz^2\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)\mathbf{i}+\left(xz^2\frac{\partial\phi}{\partial x}-2yz\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)\mathbf{j}+ \\
&\qquad +\left(2yz\frac{\partial\phi}{\partial y}+x^2y\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)\mathbf{k} = \\
&= -\left(6x^4y^2z^2+2x^3z^5\right)\mathbf{i}+\left(4x^2yz^5-12x^2y^2z^3\right)\mathbf{j}+ \\
&\qquad +\left(4x^2yz^4+4x^3y^2z^3\right)\mathbf{k}
\end{aligned}
$$

Upoređivanjem sa d) vidimo da je $(\mathbf{A}\times\nabla)\,\phi = \mathbf{A}\times\nabla\phi$.

♡

2.6.5 Invarijanta

Zad. 2.43. Dva Dekartova koordinatna sistema xyz i $x'y'z'$, sa zajedničkim koordinatnim početkom, rotiraju jedan u odnosu na drugi. Odredi veze između koordinata proizvoljne tačke P izražene u odnosu na ova dva koordinatna sistema (koordinatne transformacije).

Rešenje.

Neka su $\mathbf{r}$ i $\mathbf{r}'$ vektori položaja tačke P u ova dva sistema. Pošto ovi koordinatni sistemi imaju isti koordinatni početak, to je $\mathbf{OA} = \mathbf{r} = \mathbf{r}'$, preko komponenti (u odnosu na koordinatne sisteme)

$$x'\mathbf{i}' + y'\mathbf{j}' + z'\mathbf{k}' = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}. \tag{2.178}$$

Ako jednačinu (2.178) pomnožimo naizmenučno sa $\mathbf{i}'$, $\mathbf{j}'$, $\mathbf{k}'$, dobijamo

$$\begin{aligned} x' =& \ell_{11}x + \ell_{12}y + \ell_{13}z, \\ y' =& \ell_{21}x + \ell_{22}y + \ell_{23}z, \\ z' =& \ell_{31}x + \ell_{32}y + \ell_{33}z, \end{aligned} \tag{2.179}$$

gde je: $\ell_{11} = \mathbf{i}' \cdot \mathbf{i}$, $\ell_{12} = \mathbf{i}' \cdot \mathbf{j}$, $\ldots$, $\ell_{33} = \mathbf{k}' \cdot \mathbf{k}$.

♡

Zad. 2.44. Dokazati da je

$$\begin{aligned} \mathbf{i}' =& \ell_{11}\mathbf{i} + \ell_{12}\mathbf{j} + \ell_{13}\mathbf{k}, \\ \mathbf{j}' =& \ell_{21}\mathbf{i} + \ell_{22}\mathbf{j} + \ell_{23}\mathbf{k}, \\ \mathbf{k}' =& \ell_{31}\mathbf{i} + \ell_{32}\mathbf{j} + \ell_{33}\mathbf{k}. \end{aligned}$$

Rešenje.

Svaki vektor $\mathbf{v}'$ u sistemu S' možemo izraziti preko ortova sistema S $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ i $\mathbf{k}$

$$\mathbf{v}' = \alpha\mathbf{i} + \beta\mathbf{j} + \gamma\mathbf{k},$$

pa to važi i za ortove sistema S', tj.

$$\begin{aligned} \mathbf{i}' &= \alpha_1\mathbf{i} + \beta_1\mathbf{j} + \gamma_1\mathbf{k}, \qquad (2.180) \\ \mathbf{j}' &= \alpha_2\mathbf{i} + \beta_2\mathbf{j} + \gamma_2\mathbf{k}, \\ \mathbf{k}' &= \alpha_3\mathbf{i} + \beta_3\mathbf{j} + \gamma_3\mathbf{k}. \end{aligned}$$

Odredimo prvo koeficijente $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$. Množenjem jednačine (2.180) naizmenično sa $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$, dobija se

$$\begin{aligned} \mathbf{i}' \cdot \mathbf{i} &= \alpha_1 = \ell_{11}, \\ \mathbf{i}' \cdot \mathbf{j} &= \beta_1 = \ell_{12}, \\ \mathbf{i}' \cdot \mathbf{k} &= \gamma_1 = \ell_{13}. \end{aligned}$$

Na ovaj način dokazali smo prvu traženu jednačinu

$$\mathbf{i}' = \ell_{11}\mathbf{i} + \ell_{12}\mathbf{j} + \ell_{13}\mathbf{k}.$$

Ostale dve se dokazuju na sličan način.

Napomenimo da, radi preglednijeg prikaza ovih relacija, ove zavisnosti mogu da se prikažu tabelarno

	$\mathbf{i}_1$	$\mathbf{j}_2$	$\mathbf{k}_3$
$\mathbf{i}'_1$	ℓ_{11}	ℓ_{12}	ℓ_{13}
$\mathbf{j}'_2$	ℓ_{21}	ℓ_{22}	ℓ_{23}
$\mathbf{k}'_3$	ℓ_{31}	ℓ_{32}	ℓ_{33}

♡

Zad. 2.45. Dokazati da je

$$\sum_{p=1}^{3} \ell_{pm}\ell_{pn} = \begin{cases} 1, & \text{za} \quad m = n, \\ 0, & \text{za} \quad m \neq n, \end{cases}$$

m i n uzimaju vrednosti $1, 2, 3$.

Rešenje.

Slično, kao u zadatku 2.44, možemo da pokažemo da je:

$$\begin{aligned} \mathbf{i} =& \ell_{11}\mathbf{i}' + \ell_{21}\mathbf{j}' + \ell_{31}\mathbf{k}', \\ \mathbf{j} =& \ell_{12}\mathbf{i}' + \ell_{22}\mathbf{j}' + \ell_{32}\mathbf{k}', \\ \mathbf{k} =& \ell_{13}\mathbf{i}' + \ell_{23}\mathbf{j}' + \ell_{33}\mathbf{k}', \end{aligned}$$

pa je:

$$\begin{aligned} \mathbf{i}\cdot\mathbf{i} =& 1 = (\ell_{11}\mathbf{i}' + \ell_{21}\mathbf{j}' + \ell_{31}\mathbf{k}') \cdot (\ell_{11}\mathbf{i}' + \ell_{21}\mathbf{j}' + \ell_{31}\mathbf{k}') = \\ =& \ell_{11}^2 + \ell_{21}^2 + \ell_{31}^2 = \sum_{p=1}^{3} \ell_{p1}\ell_{p1}, \\ \mathbf{i}\cdot\mathbf{j} =& 0 = (\ell_{11}\mathbf{i}' + \ell_{21}\mathbf{j}' + \ell_{31}\mathbf{k}') \cdot (\ell_{12}\mathbf{i}' + \ell_{22}\mathbf{j}' + \ell_{32}\mathbf{k}') = \\ =& \ell_{11}\ell_{12} + \ell_{21}\ell_{22} + \ell_{13}\ell_{32} = \sum_{p=1}^{3} \ell_{p1}\ell_{p2}, \\ \mathbf{i}\cdot\mathbf{k} =& 0 = (\ell_{11}\mathbf{i}' + \ell_{21}\mathbf{j}' + \ell_{31}\mathbf{k}') \cdot (\ell_{13}\mathbf{i}' + \ell_{23}\mathbf{j}' + \ell_{33}\mathbf{k}') = \\ =& \ell_{11}\ell_{13} + \ell_{21}\ell_{23} + \ell_{31}\ell_{33} = \sum_{p=1}^{3} \ell_{p1}\ell_{p3}. \end{aligned}$$

Dakle, za $m = 1$ dokazali smo da važi polazna relacija. Na isti nači pokazuje se tačnost relacije za $m = 2, 3$ i $n = 1, 2, 3$.

Iskoristivši Kronekerov simbol

$$\delta_{mn} = \begin{cases} 1, & \text{za} \quad m = n, \\ 0, & \text{za} \quad m \neq n, \end{cases}$$

prethodni rezultat može da se napiše u obliku

$$\sum_{p=1}^{3} \ell_{pm}\ell_{pn} = \delta_{mn}.$$

♡

Zad. 2.46. Ako je $\mathbf{v} = 2x^2\mathbf{i} - 3yz\mathbf{j} + xz^2\mathbf{k}$ i $\phi = 2z - x^3y$, naći:

a) $\mathbf{v} \cdot \nabla\phi$,

b) $\mathbf{v} \times \nabla\phi$

u tački $A(1, -1, 1)$.

Rezultati.

a) 5, b) $7\mathbf{i} - \mathbf{j} - 11\mathbf{k}$.

♡

Zad. 2.47.

Dokazati da je $\nabla f(r) = \dfrac{f'(r)\mathbf{r}}{r}$.

♡

Zad. 2.48. Ako je U diferencijabilna funkcija od x, y, i z dokazati da je

$$\nabla U \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = \mathrm{d}U.$$

♡

Zad. 2.49. Neka je F diferencijabilna skalarna funkcija od x, y, z, i t pri čemu su x, y, i z diferencijabilne funkcije od t. Dokazati da je

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial F}{\partial t} + \nabla F \cdot \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t}.$$

♡

Zad. 2.50. Ako je $\mathbf{v}$ konstantan vektor, pokazati da je $\nabla(\mathbf{r}\cdot\mathbf{v}) = \mathbf{v}$.

♡

Zad. 2.51. Ako je $\mathbf{v} = v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} + v_3\mathbf{k}$, pokazati da je

$$\mathrm{d}\mathbf{v} = (\nabla v_1 \cdot \mathrm{d}\mathbf{r})\mathbf{i} + (\nabla v_2 \cdot \mathrm{d}\mathbf{r})\mathbf{j} + (\nabla v_3 \cdot \mathrm{d}\mathbf{r})\mathbf{k}.$$

♡

Zad. 2.52. Naći priraštaj funkcije $\phi = 4xz^3 - 3x^2y^2z$ u tački $A(2,-1,2)$ u pravcu vektora $\mathbf{n} = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$.

<u>*Rezultat.*</u>

376/7.

♡

Zad. 2.53. Naći priraštaj funkcije $\varphi = 4e^{2x-y+z}$ u tački $A(1,1,-1)$ u pravcu druge tačke $B(-3,5,6)$.

<u>*Rezultat.*</u>

$-20/9$

♡

Zad. 2.54. U pravcu kojeg vektora, iz tačke $A(1,3,2)$, priraštaj funkcije $\phi = 2xz - y^2$ je najveći? Koliki je taj priraštaj?

<u>*Rezultati.*</u>

$\mathbf{v} = 4\mathbf{i} - 6\mathbf{j} + 2\mathbf{k}, \qquad 2\sqrt{14}.$

♡

Zad. 2.55. Naći ugao između površi $xy^2z = 3x + z^2$ i $3x^2 - y^2 + 2z = 1$ u tački $A(1,-2,1)$.

<u>*Rezultat.*</u>

$\arccos\dfrac{\sqrt{6}}{14}.$

♡

Zad. 2.56. Naći konstante a i b tako da površ $ax^2 - byz = (a+2)x$ bude normalna na površ $4x^2y + z^3 = 4$ u tački $M(1,-1,2)$.

Rezultat.

$a = 5/2$, $b = 1$.

♡

Zad. 2.57.

a) Funkcije $u(x, y, z)$, $v(x, y, z)$ i $w(x, y, z)$ su funkcionalno zavisne ($F(u, v, w) = 0$) akko je $\nabla u \cdot \nabla v \times \nabla w = 0$. Dokazati.

b) Izraziti $\nabla u \cdot \nabla v \times \nabla w = 0$ u obliku determinante.

c) Da li su funkcije: $u = x + y + z$, $v = x^2 + y^2 + z^2$ i $w = xy + yz + zx$ zavisne?

Rezultati.

b) $\begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{vmatrix}$,

c) Da, jer je u ovom slučaju $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2x & 2y & 2z \\ y+z & x+z & y+z \end{vmatrix} = 0$. Njihova funkcionalna zavisnost je oblika $u^2 - v - 2w = 0$.

♡

Zad. 2.58.

Ako je $\mathbf{A} = 3xyz^2\mathbf{i} + 2xy^3\mathbf{j} - x^2yz\mathbf{k}$ i $\phi = 3x^2 - yz$ naći:

a) $\nabla \cdot \mathbf{A}$,

b) $\mathbf{A} \cdot (\nabla\phi)$,

c) $\nabla \cdot (\phi\mathbf{A})$,

d) $\nabla \cdot (\nabla\phi)$, u tački (1,-1,1).

Rezultati.

a) 4, b) -15, c) 1, d) 6.

♡

Zad. 2.59.

a) Dokazati da je $\nabla^2 f(r) = \dfrac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}r^2} + \dfrac{2}{r}\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}r}$.

b) Naći $f(r)$ tako da je $\nabla^2 f(r) = 0$.

Rezultat.

b) $f(r) = A + B/r$, gde su A i B konstante.

♡

Zad. 2.60. Pokazati da vektorsko polje

$$\mathbf{A} = (2x^2 + 8xy^2 z)\mathbf{i} + (3x^3 y - 3xy)\mathbf{j} - (4y^2 z^2 + 2x^3 z)\mathbf{k}$$

nije solenoidno polje, dok $\mathbf{B} = xyz^2\mathbf{A}$ jeste.

♡

2.6.6 Integrali, integralne teoreme

Zad. 2.61. Naći površinu elipse.

Rešenje.

Površina P bilo koje ravne površi S jednaka je

$$P = \iint\limits_S \mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Neka je površ S ograničena zatvorenom krivom C, tada je prema Stoksovoj teoremi[21]

$$P = \iint\limits_S \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\oint\limits_C x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x.$$

Prelaskom na polarne koordinate $x = a\cos\theta$, $y = b\sin\theta$, dobijamo

$$P = \frac{1}{2}\oint_C xdy - ydx = \frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi}(a\cos\theta)(b\cos\theta)d\theta - (b\sin\theta)(-a\sin\theta)d\theta =$$

$$\frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi} ab(\cos^2\theta + \sin^2\theta)d\theta = \frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi} abd\theta = \pi ab.♡$$

---

[21] $\iint\limits_S \left(\dfrac{\partial Q}{\partial x} - \dfrac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \oint\limits_C P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y$. U posebnom slučaju kada je $P = 0$ i $Q = x$, dobija se $\iint\limits_S \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \oint\limits_C x\,\mathrm{d}y$. U slučaju kada je $P = -y$, a $Q = 0$, dobija se $\iint\limits_S \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = -\oint\limits_C y\,\mathrm{d}x$. Sabiranjem ovih integrala dobijamo $2S = \oint\limits_C x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x$.

Zad. 2.62. Posmatrajmo kretanje materijalne tačke (čestice) M pod dejstvom centralne sile. [22] Diferencijalna jednačina kretanja čestice M, mase m se tada može prikazati u obliku

$$m\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}}{\mathrm{d}t^2} = f(r)\,\mathbf{r}_0,$$

gde je $\mathbf{r}$ vektor položaja čestice M meren u odnosu na koordinatni početak O, $\mathbf{r}_0$ je ort vektora $\mathbf{r}$, a $f(r)$ je funkcija rastojanja tačke M do O.

a) Interpretirati fizički smisao izraza $f(r) < 0$ i $f(r) > 0$.

b) Pokazati da je $\mathbf{r} \times \dfrac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{c}$, gde je $\mathbf{c}$ konstantni vektor.

c) Dati geometrijsku i kinematičku interpretaciju rezultata pod (b).

d) Povezati prethodni rezultat sa kretanjem planeta u našem sunčevom sistemu.

Rešenje.

a) Za $f(r) < 0$, ubrzanje $\dfrac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}}{\mathrm{d}t^2}$ je vektor suprotan vektoru $\mathbf{r}$, dakle sila ima smer od M ka O, pa na česticu deluje privlačna sila iz tačke O.

Ako je $f(r) > 0$, onda sila ima smer od tačke O ka M i na česticu deluje odbojna sile iz O.

b) Pomnožimo vektorski obe strane izraza $m\dfrac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}}{\mathrm{d}t^2} = f(r)\,\mathbf{r}_0$, sa leva, vektorom $\mathbf{r}$. Dobija se

$$m\mathbf{r} \times \frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}}{\mathrm{d}t^2} = f(r)\,\mathbf{r} \times \mathbf{r}_0 = \mathbf{0},$$

jer su $\mathbf{r}$ i $\mathbf{r}_0$ kolinearni, tj. $\mathbf{r} \times \mathbf{r}_0 = \mathbf{0}$. Odavde

$$m\mathbf{r} \times \frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}}{\mathrm{d}t^2} = \mathbf{0},$$

odnosno

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\mathbf{r} \times \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t}\right) = \mathbf{0}.$$

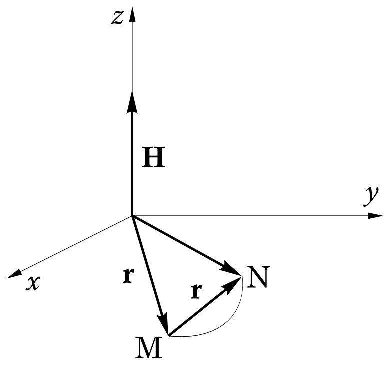
Integraljenjem se dobija

$$\mathbf{r} \times \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{c}, \tag{2.181}$$

gde je $\mathbf{c}$ konstantni vektor.

[22] Sila čiji pravac prolazi kroz fiksnu tačku O prostora (centar sile) naziva se centralna sila. Posebno važnu kategoriju centralnig sila čine one čiji intenzitet zavisi samo od rastojanja od centra.

c) U vremenskom intervalu Δt čestica se pomerila iz položaja M u N. Površina koju "prebriše" vektor položaja, u tom vremenskom intervalu, približno je jednaka polovini površine paralelograma sa stranicama $\mathbf{r}$ i $\Delta\mathbf{r}$ tj. $\frac{1}{2}\mathbf{r} \times \Delta\mathbf{r}$.



Slika 2.27:

Onda je približna površina, koju "prebriše" vektor položaja u jedinici vremena, jednaka $\frac{1}{2}\mathbf{r} \times \frac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta t}$. Odatle je trenutna promena površine po vremenu

$$\lim_{\Delta t \to 0}\left(\frac{1}{2}\mathbf{r} \times \frac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta t}\right) = \frac{1}{2}\mathbf{r} \times \mathbf{v},$$

gde je $\mathbf{v}$ trenutna brzina čestice. Veličina $\mathbf{H} = \frac{1}{2}\mathbf{r} \times \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2}\mathbf{r} \times \mathbf{v}$, naziva se sektorska brzina. Kako je sektorska brzina konstantna, u slučaju centralnih sila (vidi (2.181)), to je

$$\mathbf{H} = \frac{1}{2}\mathbf{r} \times \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{c},$$

gde je $\mathbf{c}$ vektorska konstanta. Kako je $\mathbf{r} \cdot \mathbf{H} = \mathbf{r} \cdot \left(\frac{1}{2}\mathbf{r} \times \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t}\right) = 0$ (uslov komplanarnosti) to sledi da se tačka kreće u ravni. Naime, kako je $\mathbf{H}$ konstantno to sledi da ovaj vektor ne menja svoj pravac. Međutim, ovaj vektor je upravan na ravan koju čine vektori $\mathbf{r}$ i $\mathbf{v}$, pa zaključujemo da se tačak kreće u ravni sa normalom u pravcu $\mathbf{H}$.

d) Planetu (kao što je Zemlja) privlači Sunce po Njutnovom zakonu gravitacije koji glasi: *bilo koja dva tela mase m i M se međusobno privlače silom*

$$\mathbf{F} = \frac{\gamma M m}{r^2}\mathbf{r}_0,$$

gde je r rastojanje između središta tela, a γ univerzalna gravitaciona konstanta. Neka su m i M mase planete i Sunca respektivno. Izaberimo koordinatni sistem sa početkom u O, postavljen u centru Sunca. Onda je jednačina kretanja planete pod uticajem Sunca

$$m\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{\gamma mM}{r^2}\mathbf{r}_0,$$

ili

$$\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{\gamma M}{r^2}\mathbf{r}_0.$$

Prema c) planeta se kreće oko Sunca tako da njen vektor položaja prelazi jednake površine za isto vreme. Ovaj zakon poznat je u literaturi kao drugi Keplerov zakona (zakon jednakih površina).

♡

Zad. 2.63. Pokazati da se planeta kreće oko Sunca po elipsi, pri čemu je Sunce u žiži te elipse.

Rešenje.

Kako je

$$\mathbf{r} = r\,\mathbf{r}_0,$$

to je

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{v} = r\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}_0}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\mathbf{r}_0.$$

Iz prethodnog zadatka imamo

$$\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t} = -\frac{\gamma M}{r^2}\mathbf{r}_0, \tag{2.182}$$

kao i

$$\mathbf{r}\times\mathbf{v} = 2\mathbf{H} = \mathbf{h}. \tag{2.183}$$

Onda je

$$\mathbf{h} = r\mathbf{r}_0 \times \left(r\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}_0}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\mathbf{r}_0\right) = r^2\,\mathbf{r}_0 \times \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}_0}{\mathrm{d}t}. \tag{2.184}$$

Ako jednačinu (2.182), pomnožimo, vektorski sa desna, sa $\mathbf{h}$ i koristeći (2.184) i zadatak 1.4d na str. 56, dobijamo

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t}\times\mathbf{h} &= -\frac{\gamma M}{r^2}\,\mathbf{r}_0\times\mathbf{h} = -\gamma M\,\mathbf{r}_0\times\left(\mathbf{r}_0\times\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}_0}{\mathrm{d}t}\right)\\ &= -\gamma M\left[\left(\mathbf{r}_0\cdot\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}_0}{\mathrm{d}t}\right)\mathbf{r}_0 - (\mathbf{r}_0\cdot\mathbf{r}_0)\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}_0}{\mathrm{d}t}\right] = \gamma M\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}_0}{\mathrm{d}t},\end{aligned} \tag{2.185}$$

jer je $\dfrac{\mathrm{d}\mathbf{r}_0}{\mathrm{d}t}\cdot\mathbf{r}_0 = 0$ (vidi zadatak 1.25 str. 69). Kako je $\mathbf{h}$ konstantan vektor, onda je

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t}\times\mathbf{h} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathbf{v}\times\mathbf{h}),$$

pa je, na osnovu (2.185),

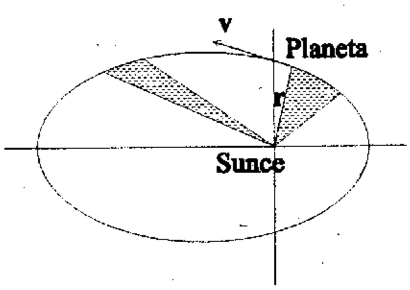
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathbf{v}\times\mathbf{h}) = \gamma M \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}_0}{\mathrm{d}t}. \tag{2.186}$$

Integracijom relacije (2.186), dobija se

$$\mathbf{v}\times\mathbf{h} = \gamma M\mathbf{r}_0 + \mathbf{p},$$

gde je $\mathbf{p}$ proizvoljan konstantni vektor. Odavde, skalarno množeći sa $\mathbf{r}$, dobijamo

$$\begin{aligned}\mathbf{r}\cdot(\mathbf{v}\times\mathbf{h}) =& \gamma M\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}_0 + \mathbf{r}\cdot\mathbf{p} = \\ =& \gamma M r + r\,\mathbf{r}_0\cdot\mathbf{p} = \gamma M r + rp\cos\theta\end{aligned}$$



Slika 2.28:

gde je θ ugao između $\mathbf{p}$ i $\mathbf{r}_0$, a p intenzitet vektora $\mathbf{p}$.

Pošto je

$$\mathbf{r}\cdot(\mathbf{v}\times\mathbf{h}) = \mathbf{r}\times\mathbf{v}\cdot\mathbf{h} = \mathbf{h}\cdot\mathbf{h} = h^2,$$

imamo $h^2 = \gamma M r + rp\cos\theta$ i

$$r = \frac{h^2}{\gamma M + p\cos\theta} = \frac{h^2/\gamma M}{1 + (p/\gamma M)\cos\theta}.$$

Ova jednačina predstavlja jednačinu elipse u odnosu na polarno cilindrični koordinatni sistem, sa početkom u žiži elipse.

♡

Zad. 2.64. Ako je $\mathbf{v} = (3x^2+6y)\,\mathbf{i} - 14yz\,\mathbf{j} + 20xz^2\,\mathbf{k}$, odredi $\int\limits_c \mathbf{v}\cdot\mathrm{d}\mathbf{r}$ od tačke $O(0,0,0)$ do $A(1,1,1)$ duž krive c koja je određena:

a) parametarskim jednačinama $x = t$, $y = t^2$, $z = t^3$,

b) linijom $OBCA$, pri čemu su delovi linije OB, BC i CA duži, a koordinate tačaka na ovoj liniji su: $O(0,0,0)$, $B(1,0,0)$, $C(1,1,0)$, $A(1,1,1)$,

c) pravom linijom koja prolazi kroz tačke $O(0,0,0)$ i $A(1,1,1)$.

Rešenje.

Za dato vektorsko polje $\mathbf{v}$ je

$$\begin{aligned}\int\limits_c \mathbf{v}\cdot \mathrm{d}\mathbf{r} &= \int\limits_c [(3x^2+6y)\,\mathbf{i} - 14yz\,\mathbf{j} + 20xz^2\,\mathbf{k}]\cdot(\mathrm{d}x\,\mathbf{i} + \mathrm{d}y\,\mathbf{j} + \mathrm{d}z\,\mathbf{k}) \\ &= \int\limits_c (3x^2+6y)\,\mathrm{d}x - 14yz\,\mathrm{d}y + 20xz^2\,\mathrm{d}z.\end{aligned}$$

a) Tačkama $O(0,0,0)$ i $A(1,1,1)$ krive c odgovaraju vrednosti parametara $t = 0$ i $t = 1$, respektivno. Onda je

$$\begin{aligned}\int\limits_c \mathbf{v}\cdot \mathrm{d}\mathbf{r} &= \int\limits_0^1 (3t^2+6t^2)\,\mathrm{d}t - 14(t^2)(t^3)\,\mathrm{d}(t^2) + 20(t)(t^3)^2\,\mathrm{d}(t^3) \\ &= \int\limits_0^1 9t^2\mathrm{d}t - 28t^6\,\mathrm{d}t + 60t^9\,\mathrm{d}t \\ &= \int\limits_0^1 (9t^2 - 28t^6 t + 60t^9)\,\mathrm{d}t \\ &= 3t^3 - 4t^7 + 6t^{10}\Big|_0^1 = 5.\end{aligned}$$

b) Kako je

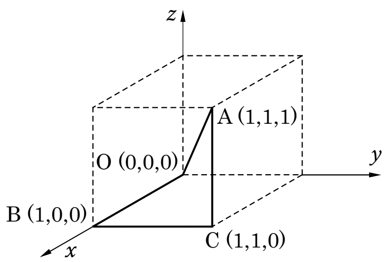
$$\int\limits_c = \int\limits_{c_1} + \int\limits_{c_2} + \int\limits_{c_3}$$

gde je $c = c_1 \cup c_2 \cup c_3$, to ćemo liniju $OBCA$ da podelimo na delove:

- duž c_1, koja spaja tačke $O(0,0,0)$ i $B(1,0,0)$, a leži na x osi, pa je $y = 0$, $z = 0$, $\mathrm{d}y = 0$, $\mathrm{d}z = 0$, a x se menja od 0 do 1;

- duž c_2, koja spaja tačke $B(1,0,0)$ i $C(1,1,0)$, a leži u ravni xy paralelno sa y osom, pa je $x = 1$, $z = 0$, $\mathrm{d}x = 0$, $\mathrm{d}z = 0$, a y se menja od 0 do 1;

- duž c_3, koja spaja tačke $C(1,1,0)$ i $A(1,1,1)$, a leži u ravni paralelnoj sa ravni yz i paralelna je sa z osom, pa je $x = 1$, $y = 1$, $\mathrm{d}x = 0$, $\mathrm{d}y = 0$, a z se menja od 0 do 1.



Slika 2.29:

Izračunajmo sada integrale po ovim delovima, tj. po c_1, c_2 i c_3. Tada je

$$I_1 = \int_{c_1} = \int_0^1 (3x^2 + 6(0))\,\mathrm{d}x - 14(0)(0)\,0 + 20x(0)^2\,0 = \int_0^1 3x^2\,\mathrm{d}x = x^3\Big|_0^1 = 1,$$

$$I_2 = \int_{c_2} = \int_0^1 (3(1)^2 + 6(y))\,0 - 14y(0)\,\mathrm{d}y + 20(1)(0)^2\,0 = 0,$$

$$I_3 = \int_{c_3} = \int_0^1 (3(1)^2 + 6(y))\,0 - 14(1)(0)\,0 + 20(1)(z)^2\,\mathrm{d}z = \int_0^1 20z^2\,\mathrm{d}z = \frac{20z^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{20}{3}.$$

Konačno, sabirajući ova tri integrala dobijamo

$$I = I_1 + I_2 + I_3 = \int_c \mathbf{v}\cdot\mathrm{d}\mathbf{r} = 1 + 0 + \frac{20}{3} = \frac{23}{3}.$$

c) Prava linija, koja prolazi kroz tačke $O(0,0,0)$ i $A(1,1,1)$, u parametarskom obliku, može da se predstavi: $x = y = z = t$. Tačkama O i A odgovaraju vrednosti parametara $t = 0$ i $t = 1$, respektivno, pa je

$$\begin{aligned}\int_c \mathbf{v}\cdot\mathrm{d}\mathbf{r} &= \int_0^1 (3t^2 + 6t)\,\mathrm{d}t - 14(t)(t)\,\mathrm{d}t + 20(t)(t)^2\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 (3t^2 + 6t - 14t^2 + 20t^3)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 (6t - 11t^2 + 20t^3)\,\mathrm{d}t = \frac{13}{3}.\end{aligned}$$

Napomenimo da ovi primeri pokazuju da vrednosti krivolinijskog integrala zavise od putanje (linije) po kojoj se integrali, a koja prolazi kroz zadate tačke.

♡

Zad. 2.65. Neka je sila $\mathbf{F} = 3xy\,\mathbf{i} - y^2\,\mathbf{j}$. Izračunati rad ove sile $\int\limits_c \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r}$ duž krive c u xy ravni, zadate jednačinom $y = 2x^2$, od tačke $O(0,0)$ do $A(1,2)$.

Rešenje.

Pošto se integracija vrši u xy ravni, onda je $\mathrm{d}\mathbf{r} = \mathrm{d}x\,\mathbf{i} + \mathrm{d}y\,\mathbf{j}$, pa je rad

$$\int\limits_c \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = \int\limits_c (3xy\,\mathbf{i} - y^2\,\mathbf{j}) \cdot (\mathrm{d}x\,\mathbf{i} + \mathrm{d}y\,\mathbf{j}) = $$
$$= \int\limits_c 3xy\,\mathrm{d}x - y^2\,\mathrm{d}y.$$

Uvedimo parametar t tako da je $x = t$. Parametarska jednačina krive c je $x = t$ i $y = 2t^2$. Tačkama $O(0,0)$ i $A(1,2)$ odgovaraju vrednosti parametra $t = 0$ i $t = 1$, respektivno. Onda je $\mathrm{d}x = \mathrm{d}t$ i $\mathrm{d}y = 4t\mathrm{d}t$, pa je

$$\int\limits_c \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = \int\limits_0^1 3(t)(2t^2)\,\mathrm{d}t - (2t^2)^2\,4t\mathrm{d}t =$$
$$= \int\limits_0^1 (6t^3 - 16t^5)\,\mathrm{d}t = -\frac{7}{6}.$$

♡

Zad. 2.66. Neka je $\mathbf{F} = \nabla\phi$, gde je ϕ jednoznačna skalarna funkcija koja ima neprekidne parcijalne izvode do drugog reda.

a) Pokazati da integral $\int\limits_c \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r}$, računat između tačaka $P_1(x_1, y_1, z_1)$ i $P_2(x_2, y_2, z_2)$, ne zavisi od izbora puta između tih tačaka.

b) Obrnuto, ako je integral $\int\limits_c \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r}$ nezavisan od puta c između bilo koje dve tačke, tada postoji funkcija ϕ takva da je $\mathbf{F} = \nabla\phi$. Dokazati.

Rešenje.

a) Označimo integral $\int\limits_c \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r}$, između tačke P_1 i P_2, sa A_{12}, tj.

$$A_{12} = \int\limits_c \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r}.$$

Prema pretpostavci je $\mathbf{F} = \nabla\phi$, pa je

$$\begin{aligned}\int\limits_c \mathbf{F}\cdot \mathrm{d}\mathbf{r} &= \int\limits_c \nabla\phi \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = \\ &= \int\limits_c \mathrm{d}\,\phi,\end{aligned}$$

gde je $\mathrm{d}\,\phi$ totalni diferencijal (vidi zad.2.48, str.157), pa je

$$A_{12} = \phi(P_2) - \phi(P_1) = \phi(x_2, y_2, z_2) - \phi(x_1, y_1, z_1).$$

Dakle, integral A_{12} zavisi od početne i krajnje tačke puta, a ne i od puta između ovih tačaka.

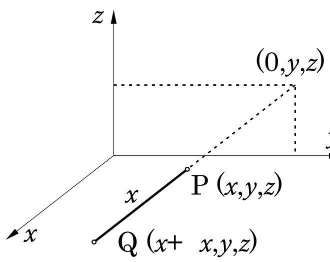
b) Neka je $\mathbf{F} = F_1\mathbf{i} + F_2\mathbf{j} + F_3\mathbf{k}$. Onda je integral duž krive c, između tačaka $P_1(x_1, y_1, z_1)$ i $P(x, y, z)$,

$$\phi(x,y,z) = \int\limits_{(x_1,y_1,z_1)}^{(x,y,z)} \mathbf{F}\cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = \int\limits_{(x_1,y_1,z_1)}^{(x,y,z)} F_1\mathrm{d}x + F_2\mathrm{d}y + F_3\mathrm{d}z.$$

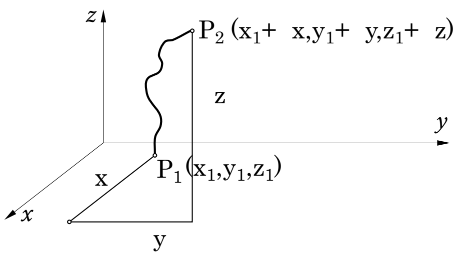
Odavde sledi da je

$$\begin{aligned}\phi(x+\Delta x, y, z) - \phi(x,y,z) &= \int\limits_{(x_1,y_1,z_1)}^{(x+\Delta x,y,z)} \mathbf{F}\cdot \mathrm{d}\mathbf{r} - \int\limits_{(x_1,y_1,z_1)}^{(x,y,z)} \mathbf{F}\cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = \\ = \int\limits_{(x,y,z)}^{(x_1,y_1,z_1)} \mathbf{F}\cdot \mathrm{d}\mathbf{r} + \int\limits_{(x_1,y_1,z_1)}^{(x+\Delta x,y,z)} \mathbf{F}\cdot \mathrm{d}\mathbf{r} &= \\ = \int\limits_{(x,y,z)}^{(x+\Delta x,y,z)} \mathbf{F}\cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = \int\limits_{(x,y,z)}^{(x+\Delta x,y,z)} F_1\mathrm{d}x + F_2\mathrm{d}y + F_3\mathrm{d}z.\end{aligned}$$

Kako poslednji integral, prema pretpostavci, ne zavisi od putanje između tačaka sa koordinatama (x, y, z) i $(x + \Delta x, y, z)$, to možemo da izaberemo za putanju pravu liniju, koja prolazi kroz ove dve tačke, pa je $\mathrm{d}y = \mathrm{d}z = 0$ (prava je paralelna sa x osom, vidi sliku 2.31). Tada je



Slika 2.30: Rad duž x ose



Slika 2.31: Rad od tačke P_1 do P_2

$$\phi(x+\Delta x, y, z) - \phi(x, y, z) = \int\limits_{(x,y,z)}^{(x+\Delta x,y,z)} F_1 \mathrm{d}x.$$

Odavde dobijamo

$$\frac{\phi(x+\Delta x, y, z) - \phi(x, y, z)}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x} \int\limits_{(x,y,z)}^{(x+\Delta x,y,z)} F_1 \mathrm{d}x. \tag{2.187}$$

Ako sada primenimo teoremu o srednjoj vrednosti na prethodni integral, dobijamo

$$\int\limits_{(x,y,z)}^{(x+\Delta x,y,z)} F_1 \mathrm{d}x = \Delta x F_1(x+\theta\Delta x, y, z), \quad 0 < \theta < 1. \tag{2.188}$$

Zamenom relacije (2.188) u (2.187), a zatim puštajući da $\Delta x \to 0$, dobijamo

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = F_1. \tag{2.189}$$

Na isti način dobijamo da je $\dfrac{\partial\phi}{\partial y} = F_2$ i $\dfrac{\partial\phi}{\partial z} = F_3$. Konačno

$$\mathbf{F} = \frac{\partial\phi}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial\phi}{\partial z}\mathbf{k} = \nabla\phi.$$

<u>Napomena.</u> Ako je $\mathbf{F}$ polje sile, tada u mehanici integral $\int\limits_c \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ predstavlja rad sile. Sile čiji rad ne zavisi od putanja, koje prolaze kroz tačake P_1 i P_2, nazivamo **konzervativne sile**, a odgovarajuće polje **konzervativno polje**.

♡

Zad. 2.67. Posmatrajmo vektorsko polje $\mathbf{F}$.

a) Neka integral $\int \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ ne zavisi od puta. Dokazati da je tada

$$\text{rot } \mathbf{F}(= \nabla \times \mathbf{F}) = \mathbf{0}.$$

b) Obrnuto, ako je $\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{0}$, dokazati da je $\mathbf{F}$ konzervativno polje.

<u>*Dokaz.*</u>

a) Ako je $\mathbf{F}$ konzervativno polje, tada je $\mathbf{F} = \nabla\phi$, prema (2.56) (vidi str. 93), pa je rot $\mathbf{F} = \mathbf{0}$ (vidi (2.69), str. 100).

b) Obrnuto, neka je $\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{0}$, onda je

$$\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} = \mathbf{0},$$

odnosno

$$\frac{\partial F_3}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial z}, \quad \frac{\partial F_1}{\partial z} = \frac{\partial F_3}{\partial x}, \quad \frac{\partial F_2}{\partial x} = \frac{\partial F_1}{\partial y}. \tag{*}$$

Iz prve od ovih jednačina sledi da je

$$F_3 = \frac{\partial\varphi}{\partial z} \quad \text{i} \quad F_2 = \frac{\partial\varphi}{\partial y}, \quad \text{gde je } \varphi = \varphi(x, y, z).$$

Drugu jednačinu možemo da napišemo u obliku

$$\frac{\partial F_1}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial\varphi}{\partial x}$$

odakle sledi

$$F_1 = \frac{\partial\varphi}{\partial x}.$$

Prema tome je

$$\mathbf{F} = F_1\mathbf{i} + F_2\mathbf{j} + F_3\mathbf{k} = \frac{\partial \phi}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial \phi}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial \phi}{\partial z}\mathbf{k} = \nabla \phi.$$

Dakle, polje $\mathbf{F}$ je konzervativno akko je rot$\mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F} = 0$.

♡

Zad. 2.68. Pokazati da je sila $\mathbf{F} = (2xy + z^3)\mathbf{i} + x^2\mathbf{j} + 3xz^2\mathbf{k}$ konzervativna i naći skalarni potencijal tog polja. Naći rad potreban da se objekat (materijalna tačka) pomeri iz tačke $P(1, -2, 1)$ u tačku $Q(3, 1, 4)$.

Rešenje.

Kako je

$$\nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ 2xy + z^3 & x^2 & 3xz^2 \end{vmatrix} = \mathbf{0}$$

sledi (vidi definiciju (2.47) na str. 92) da je sila $\mathbf{F}$ konzervativna, odnosno vektorsko polje $\mathbf{F}$ potencijalno, tj. $\mathbf{F} = \nabla \phi$ ili $\nabla \phi = (2xy + z^3)\mathbf{i} + x^2\mathbf{j} + 3xz^2\mathbf{k}$.

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = 2xy + z^3 \tag{2.190}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = x^2 \tag{2.191}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = 3xz^2. \tag{2.192}$$

Integracijom (2.190) dobija se

$$\phi = x^2 y + xz^3 + f(y, z). \tag{2.193}$$

Ako jednačinu (2.193) diferenciramo po y, dobijamo

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = x^2 + \frac{\partial f(y, z)}{\partial y}. \tag{2.194}$$

Iz jednačina (2.194) i (2.191) sledi

$$\frac{\partial f(y, z)}{\partial y} = 0. \tag{2.195}$$

Rešavanjem jednačine (2.195), dobija se

$$f(y, z) = c_1 + g(z), \tag{2.196}$$

gde je c_1 - integraciona konstanta. Iz (2.196) i (2.193) dobija se

$$\phi = x^2y + xz^3 + g(z) + c_1, \tag{2.197}$$

Diferenciranjem jednačine (2.197) po z, dobija se

$$\frac{\partial f(y,z)}{\partial z} = 3xz^2 + \frac{\partial g(z)}{\partial z}. \tag{2.198}$$

Iz jednačina (2.192) i (2.198) dobija se

$$\frac{\mathrm{d}g(z)}{\mathrm{d}z} = 0. \tag{2.199}$$

Rešavanjem jednačine (2.199) dobija se,

$$g(z) = c_2, \tag{2.200}$$

gde je c_2 - integraciona konstanta.

Zamenom $g(z)$ iz (2.200) u jednačinu (2.197) dobija se krajnje rešenje

$$\phi = x^2y + xz^3 + c,$$

gde je $c = c_1 + c_2$ proizvoljna konstanta.

Rad A sile $\mathbf{F}$ je

$$\begin{aligned} A &= \int_P^Q \mathbf{F}\cdot \mathrm{d}\mathbf{r} \\ &= \int_P^Q (2xy + z^3)\mathrm{d}x + x^2\mathrm{d}y + 3xz^2\mathrm{d}z \\ &= \int_P^Q \mathrm{d}(x^2y + xz^3) = x^2y + xz^3\Big|_{(1,-2,1)}^{(3,1,4)} = 202 \end{aligned}$$

Rad se može izračunati i kao razlika potencijala

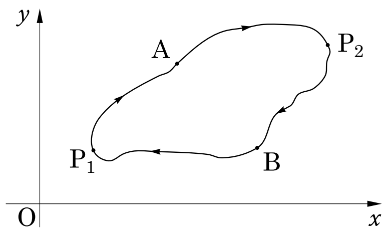
$$A = \int_P^Q \nabla\varphi\cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = \int_P^Q \mathrm{d}\varphi = \phi(Q) - \phi(P) = 201 - (-1) = 202. \tag{2.201}$$

♡

Zad. 2.69. Pokazati da ako integral $\int_{P_1}^{P_2} \mathbf{F}\cdot \mathrm{d}\mathbf{r}$ ne zavisi od puta između bilo koje dve tačke P_1 i P_2 date oblasti, onda je $\oint \mathbf{F}\cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = 0$ za zatvorenu krivu liniju i obrnuto.

Rešenje.

Neka je $P_1AP_2BP_1$ zatvorena kriva.



Slika 2.32:

Onda je

$$\begin{aligned}\oint \mathbf{F}\cdot \mathrm{d}\mathbf{r} &= \int\limits_{P_1AP_2BP_1} \mathbf{F}\cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = \\ &= \int\limits_{P_1AP_2} \mathbf{F}\cdot \mathrm{d}\mathbf{r} + \int\limits_{P_2BP_1} \mathbf{F}\cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = \\ &= \int\limits_{P_1AP_2} \mathbf{F}\cdot \mathrm{d}\mathbf{r} - \int\limits_{P_1BP_2} \mathbf{F}\cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = 0,\end{aligned}$$

jer je $\int\limits_{P_1AP_2} = \int\limits_{P_1BP_2}$ na osnovu uslova zadatka da vrednost integrala ne zavisi od puta između tačaka P_1 i P_2.

Obrnuto, ako je $\oint \mathbf{F}\cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = 0$ onda je

$$\begin{aligned}0 = \oint \mathbf{F}\cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = \int\limits_{P_1AP_2BP_1} \mathbf{F}\cdot \mathrm{d}\mathbf{r} &= \int\limits_{P_1AP_2} \mathbf{F}\cdot \mathrm{d}\mathbf{r} + \int\limits_{P_2BP_1} \mathbf{F}\cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = \\ &= \int\limits_{P_1AP_2} \mathbf{F}\cdot \mathrm{d}\mathbf{r} - \int\limits_{P_1BP_2} \mathbf{F}\cdot \mathrm{d}\mathbf{r}.\end{aligned}$$

Odatle je

$$\int\limits_{P_1AP_2} \mathbf{F}\cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = \int\limits_{P_1BP_2} \mathbf{F}\cdot \mathrm{d}\mathbf{r}.$$

♡

Zad. 2.70. Neka je $\mathbf{F} = F_1\mathbf{i} + F_2\mathbf{j} + F_3\mathbf{k}$.

a) Dokazati da je potreban i dovoljan uslov da bi $F_1\mathrm{d}x + F_2\mathrm{d}y + F_3\mathrm{d}z$ bio totalni diferencijal da je $\nabla \times \mathbf{F} (= \operatorname{rot}\mathbf{F}) = \mathbf{0}$.

b) Dokazati da je

$$(y^2z^3\cos x - 4x^3z)\mathrm{d}x + 2z^3y\sin x\mathrm{d}y + (3y^2z^2\sin x - x^4)\mathrm{d}z$$

totalni diferencijal neke finkcije ϕ. Naći tu funkciju.

Rešenje.

a) Uslov je potreban. Tada je

$$F_1\mathrm{d}x + F_2\mathrm{d}y + F_3\mathrm{d}z = \mathrm{d}\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial\phi}{\partial y}\mathrm{d}y + \frac{\partial\phi}{\partial z}\mathrm{d}z,$$

totalni diferencijal funkcije $\phi(x, y, z)$. Odavde sledi da je

$$F_1 = \frac{\partial\phi}{\partial x}, \quad F_2 = \frac{\partial\phi}{\partial y}, \quad F_3 = \frac{\partial\phi}{\partial z},$$

pa je

$$\mathbf{F} = F_1\mathbf{i} + F_2\mathbf{j} + F_3\mathbf{k} = \frac{\partial\phi}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial\phi}{\partial z}\mathbf{k} = \nabla\varphi.$$

Prema tome je (vidi (2.69), str. 100)

$$\nabla \times \mathbf{F} = \nabla \times \nabla\phi = \mathbf{0}.$$

Uslov je dovoljan. Tada uslov $\nabla \times \mathbf{F} = 0$ važi, odakle sledi $\mathbf{F} = \nabla\varphi$. Dakle

$$\mathbf{F}\cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = \nabla\varphi\cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = \mathrm{d}\varphi$$

(vidi zad.2.67 na str.170).

b) Neka je

$$\mathbf{F} = (y^2z^3\cos x - 4x^3z)\mathbf{i} + 2z^3y\sin x\mathbf{j} + (3y^2z^2\sin x - x^4)\mathbf{k}.$$

Proverom se dobija da je $\nabla \times \mathbf{F} = 0$, pa prema uslovu pod a), postoji funkcija ϕ takva da je

$$\mathrm{d}\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial\phi}{\partial y}\mathrm{d}y + \frac{\partial\phi}{\partial z}\mathrm{d}z = F_1\mathrm{d}x + F_2\mathrm{d}y + F_3\mathrm{d}z,$$

odnosno

$$(y^2z^3\cos x - 4x^3z)\mathrm{d}x + 2z^3y\sin x\,\mathrm{d}y + (3y^2z^2\sin x - x^4)\mathrm{d}z = \mathrm{d}\phi.$$

Na način kao u primeru 2.68, str.171, pokazuje se da je

$$\phi = y^2 z^3 \sin x - x^4 z + \text{const.}$$

♡

Zad. 2.71. Neka je $\mathbf{F}$ konzervativna sila, tj. $\mathbf{F} = -\nabla\phi$. Pretpostavimo da se čestica konstantne mase m kreće u tom polju. Ako su A i B bilo koje dve tačke, u tom prostoru, dokazati da je

$$\phi(A) + \frac{1}{2}mv_A^2 = \phi(B) + \frac{1}{2}mv_B^2$$

gde su v_A i v_B brzine čestice u tačkama A i B, respektivno.

Rešenje.

Prema drugom Njutnovom zakonu je

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} = m\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}}{\mathrm{d}t^2} = m\frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t}.$$

Kako je

$$\mathbf{F}\cdot\mathbf{v} = m\frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t}\cdot\mathbf{v} = \frac{m}{2}\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathbf{v})^2 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}m\mathbf{v}^2\right),$$

to integracijom, od tačke A do B, dobijamo

$$\begin{aligned}\int_A^B \mathbf{F}\cdot\mathrm{d}\mathbf{r} &= \int_A^B \mathbf{F}\cdot\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t = \int_A^B \mathbf{F}\cdot\mathbf{v}\,\mathrm{d}t = \int_A^B \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}m\mathbf{v}^2\right)\mathrm{d}t = \\ &= \int_A^B \mathrm{d}\left(\frac{1}{2}m\mathbf{v}^2\right) = \frac{m}{2}v^2\Big|_A^B = \frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_A^2. \end{aligned} \tag{2.202}$$

Kako je $\mathbf{F} = -\nabla\phi$ to je

$$\int_A^B \mathbf{F}\cdot\mathrm{d}\mathbf{r} = -\int_A^B \nabla\phi\cdot\mathrm{d}\mathbf{r} = \int_B^A \mathrm{d}\phi = \phi(A) - \phi(B). \tag{2.203}$$

Poredeći relacije (2.202) i (2.203) dobijamo

$$\begin{aligned}\phi(A) - \phi(B) &= \frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_A^2 \quad \Rightarrow \\ \phi(A) + \frac{1}{2}mv_A^2 &= \frac{1}{2}mv_B^2 + \phi(B).\end{aligned}$$

Napomenimo da se $\phi(A)$ zove i potencijalna energija u tački A, a $\frac{1}{2}mv_A^2$ je kinetička energija čestice u tački A. Rezultat pokazuje da je ukupna energija, tj. zbir kinetičke i potencijalne, u tački A jednaka ukupnoj energiji u tački B. Zakon održanja energije, u ovom obliku, važi samo za polje konzervativnih sila.

♡

Zad. 2.72. Neka je data skalarna funkcija $\phi = 2xyz^2$ i vektorsko polje $\mathbf{F} = xy\mathbf{i} - z\mathbf{j} + x^2\mathbf{k}$, a c je kriva u parametarskom obliku: $x = t^2$, $y = 2t$, $z = t^3$. Vreme se menja u intervalu $t \in [0, 1]$. Izračunaj linijske integrale:

a) $\int\limits_c \phi \mathrm{d}\mathbf{r}$,

b) $\int\limits_c \mathbf{F} \times \mathrm{d}\mathbf{r}$.

Rešenje.

a) Izrazimo ϕ preko parametra t:

$$\phi = 2xyz^2 = 2(t^2)(2t)(t^3)^2 = 4t^9.$$

Kako je

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k},$$

to je $\mathrm{d}\mathbf{r}$, izraženo preko t:

$$\mathrm{d}\mathbf{r} = \left(2t\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3t^2\mathbf{k}\right) \mathrm{d}t.$$

Onda je

$$\int\limits_c \phi \mathrm{d}\mathbf{r} = \int\limits_0^1 4t^9(2t\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3t^2\mathbf{k})\mathrm{d}t =$$

$$= \mathbf{i}\int\limits_0^1 8t^{10}\mathrm{d}t + \mathbf{j}\int\limits_0^1 8t^9\mathrm{d}t + \mathbf{k}\int\limits_0^1 12t^{11}\mathrm{d}t = \frac{8}{11}\mathbf{i} + \frac{4}{5}\mathbf{j} + \mathbf{k}.$$

b) Slično kao pod a)

$$\mathbf{F} = xy\mathbf{i} - z\mathbf{j} + x^2\mathbf{k} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{F} = 2t^3\mathbf{i} - t^3\mathbf{j} + t^4\mathbf{k}.$$

Onda je

$$\mathbf{F} \times \mathrm{d}\mathbf{r} = (2t^3\mathbf{i} - t^3\mathbf{j} + t^4\mathbf{k}) \times (2t\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3t^2\mathbf{k})\mathrm{d}t =$$

$$= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2t^3 & -t^3 & t^4 \\ 2t & 2 & 3t^2 \end{vmatrix} = [(-3t^5 - 2t^4)\mathbf{i} + (2t^5 - 6t^5)\mathbf{j} + (4t^3 + 2t^4)\mathbf{k}]\mathrm{d}t$$

$$\int\limits_c \mathbf{F} \times \mathrm{d}\mathbf{r} = \mathbf{i}\int\limits_0^1 (-3t^5 - 2t^4)\mathrm{d}t + \mathbf{j}\int\limits_0^1 (2t^5 - 6t^5)\mathrm{d}t + \mathbf{k}\int\limits_0^1 (4t^3 + 2t^4)\mathrm{d}t =$$
$$= -\frac{9}{10}\mathbf{i} - \frac{2}{3}\mathbf{j} + \frac{7}{5}\mathbf{k}.$$

♡

Zad. 2.73. Neka je dato polje sile

$$\mathbf{F} = (y^2 \cos x + z^3)\mathbf{i} + (2y \sin x - 4)\mathbf{j} + (3xz^2 + 2)\mathbf{k}.$$

a) Dokazati da je $\mathbf{F}$ konzervativna sila.

b) Naći skalarni potencijal ϕ sile $\mathbf{F}$.

c) Naći rad potreban da bi se čestica, pomerila u tom polju, od tačke $A(0, 1, -1)$ do $B(\pi/2, -1, 2)$.

Rezultati.

b) $\phi = y^2 \sin x + xz^3 - 4y + 2z + \text{const}$, c)$15 + 4\pi$.

Zad. 2.74. Dokazati da je $\mathbf{F} = r^2\mathbf{r}$ je konzervativna sila i naći skalarni potencijal.

Rezultat.

$\phi = \dfrac{r^4}{4} + \text{const}.$

Zad. 2.75. Neka je $\mathbf{E} = r\mathbf{r}$.

a) Da li postoji funkcija ϕ koja zadovoljava $\mathbf{E} = -\nabla\phi$? Ako postoji, naći je.

b) Izračunati

$$\oint\limits_c \mathbf{E} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r},$$

ako je c bilo koja jednoznačna zatvorena kriva.

Rezultati.

a) $\phi = -\dfrac{r^3}{3} + \text{const}$, b) 0.

Zad. 2.76. Pokazati da je

$$(2x \cos y + z \sin y)\, \mathrm{d}x + (xz \cos y - x^2 \sin y)\, \mathrm{d}y + x \sin y \, \mathrm{d}z,$$

totalni diferencijal. Odavde reši diferencijalnu jednačinu

$$(2x\cos y + z\sin y)\,\mathrm{d}x + (xz\cos y - x^2\sin y)\,\mathrm{d}y + x\sin y\,\mathrm{d}z = 0.$$

Rešenje.

$x^2\cos y + xz\sin y = \text{const.}$

Zad. 2.77. Neka je $\mathbf{F} = (x+2y)\mathbf{i} - 3z\mathbf{j} + x\mathbf{k}$, $\phi = 4x + 3y - 2z$, a S oblast površi $2x + y + 2z = 6$ ograničena ravnima $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$ i $y = 2$. Izračunati sledeće integrale:

a)

$$\iint\limits_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n}\,\mathrm{d}S.$$

b)

$$\iint\limits_S \phi\,\mathbf{n}\,\mathrm{d}S.$$

Rezultati.

a) 1, b) $2\mathbf{i} + \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$.

Zad. 2.78. Neka je $\mathbf{F} = (2x^2 - 3z)\mathbf{i} - 2xy\mathbf{j} - 4x\mathbf{k}$, a V zatvorena oblast ograničena ravnima $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ i $2x + 2y + z = 4$ izračunati:

a)

$$\iiint\limits_V (\nabla \cdot \mathbf{F})\mathrm{d}V,$$

b)

$$\iiint\limits_V (\nabla \times \mathbf{F})\mathrm{d}V.$$

Rezultati.

a) $8/3$, b) $\dfrac{8}{3}(\mathbf{j} - \mathbf{k})$.

Zad. 2.79. Izračunati integral

$$\int\limits_{(0,0)}^{(2,1)} (10x^4 - 2xy^3)\,\mathrm{d}x - 3x^2y^2\,\mathrm{d}y,$$

duž puta $x^4 - 6xy^3 = 4y^2$.

Rešenje.

Može da se pokaže da je $M(x,y)\,\mathrm{d}x + N(x,y)\,\mathrm{d}x$ je totalni diferencijal ako je $\dfrac{\partial M}{\partial x} = \dfrac{\partial N}{\partial y}$. [23] U ovom primeru je $M = 10x^4 - 2xy^3$ i $N = -3x^2y^2$, što zadovoljava uslov $\dfrac{\partial M}{\partial x} = \dfrac{\partial N}{\partial y}$, pa je $(10x^4 - 2xy^3)\,\mathrm{d}x - 3x^2y^2\,\mathrm{d}y$ totalni diferencijal funkcije $\varphi = 2x^5 - x^2y^3$. Odatle je

$$\begin{aligned}\int\limits_{(0,0)}^{(2,1)} (10x^4 - 2xy^3)\,\mathrm{d}x - 3x^2y^2\,\mathrm{d}y = \int\limits_{(0,0)}^{(2,1)} \mathrm{d}\varphi = \\ = \varphi \Big|_{(0,0)}^{(2,1)} = 2x^5 - x^2y^3 \Big|_{(0,0)}^{(2,1)} = 60.\end{aligned}$$

Zad. 2.80. Pokaži da je provršina ograničena prostom zatvorenom linijom C data sa

$$\frac{1}{2}\oint\limits_C x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x.$$

Rešenje.

Prema Stoksovoj teoremi (relacija (2.90), str. 104) je

$$\begin{aligned}\oint\limits_C x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x &= \iint\limits_R \left(\frac{\partial}{\partial x}(x) - \frac{\partial}{\partial y}(-y)\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\ &= 2\iint\limits_R \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 2A,\end{aligned}$$

gde je A tražena površina. Odavde je

$$A = \frac{1}{2}\oint\limits_C x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x.$$

23

$$\mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y = M(x,y)\mathrm{d}x + N(x,y)\mathrm{d}y,$$

$$N = \frac{\partial f}{\partial x}, \quad M = \frac{\partial f}{\partial y} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial N}{\partial y} \quad \text{i} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial M}{\partial x} \quad \Rightarrow$$

$$\frac{\partial N}{\partial y} = \frac{\partial M}{\partial x}.$$

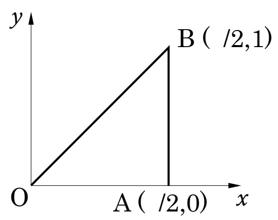
Zad. 2.81. Izračunati

$$\oint\limits_C (y - \sin x)\,\mathrm{d}x + \cos x\,\mathrm{d}y,$$

gde je C trougao, prikazan na slici 2.33:

a) direktno,

b) primenom Stoksove teoreme u ravni.



Slika 2.33: Putanja integracije

Rešenje.

a) Duž OA, $y = 0$, $\mathrm{d}y = 0$ integral je

$$\int_0^{\pi/2} (0 - \sin x)\,\mathrm{d}x + \cos x\,(0) = \int_0^{\pi/2} -\sin x\,\mathrm{d}x = \cos x\Big|_0^{\pi/2} = -1.$$

Duž AB, $x = \pi/2$, $\mathrm{d}x = 0$, integral je

$$\int_0^1 (y-1)(0) + 0\,\mathrm{d}y = 0.$$

Duž BO je: $y = \dfrac{2x}{\pi}$, $\mathrm{d}y = \dfrac{2}{\pi}\mathrm{d}x$, pa je integral

$$\int_{\pi/2}^0 \left(\frac{2x}{\pi} - \sin x\right)\mathrm{d}x + \frac{2}{\pi}\cos x\,\mathrm{d}x = \left(\frac{x^2}{\pi} + \cos x + \frac{2}{\pi}\sin x\right)\Bigg|_{\pi/2}^0 = 1 - \frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi}.$$

Prema tome, integral duž krive C je $= -1 + 0 + 1 - \dfrac{\pi}{4} - \dfrac{2}{\pi} = -\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{2}{\pi}$.

b) Prema Stoksovoj teoremi (relacija (2.90), str. 104) je

$$\oint_c M(x,y)\,\mathrm{d}x + N(x,y)\,\mathrm{d}y = \iint_R \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Kako je u našem slučaju: $M = y - \sin x$, $N = \cos x$, $\dfrac{\partial M}{\partial y} = 1$, $\dfrac{\partial N}{\partial x} = -\sin x$, to dobijamo

$$\oint_C M\,\mathrm{d}x + N\,\mathrm{d}y = \iint_R \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_R (-\sin x - 1)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y =$$

$$= \int_{x=0}^{\pi/2}\left[\int_{y=0}^{2x/\pi}(-\sin x - 1)\,\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x = \int_{x=0}^{\pi/2}(-y\sin x - y)\Big|_0^{2x/\pi}\,\mathrm{d}x$$

$$= \int_{x=0}^{\pi/2}\left(-\frac{2x}{\pi}\sin x - \frac{2x}{\pi}\right)\mathrm{d}x = -\frac{2}{\pi}(-x\cos x + \sin x) - \frac{x^2}{\pi}\Big|_0^{\pi/2} = -\frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi}.$$

Kao što vidimo rezultat je isti kao pod a).

Zad. 2.82. Dokazati da je

$$\oint_C M\,\mathrm{d}x + N\,\mathrm{d}y = 0,$$

za svaku zatvorenu krivu C u prosto povezanoj oblasti akko $\dfrac{\partial N}{\partial x} = \dfrac{\partial M}{\partial y}$ važi u čitavoj oblasti.

Dokaz.

Pretpostavimo da su M i N neprekidne funkcije koje imaju neprekidne parcijalne izvode svuda u oblast R, koja je ograničena krivom C. Onda je, prema Stoksovoj teoremi

$$\oint_C M\,\mathrm{d}x + N\,\mathrm{d}y = \iint_R (\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y})\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

Ako je $\dfrac{\partial M}{\partial y} = \dfrac{\partial N}{\partial x}$ u oblasti R tada je

$$\oint_C M\,\mathrm{d}x + N\,\mathrm{d}y = 0.$$

Obrnuto, neka je

$$\oint_C M\,\mathrm{d}x + N\,\mathrm{d}y = 0,$$

za svaku krivu C.

Pretpostavimo da postoji bar jedna tačka P iz R za koju je

$$\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \neq 0.$$

Tada je ovaj izraz različit od nule i u nekoj okolini A tačke P, zbog neprekidnosti funkcija M i N. Ako je kriva Γ granica oblasti A onda je

$$0 \neq \oint_\Gamma M\,\mathrm{d}x + N\,\mathrm{d}y = \iint_A \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

što je suprotno pretpostavci da je linijski integral jednak nuli za svaku zatvorenu krivu. Dakle sledi da je $\dfrac{\partial N}{\partial x} - \dfrac{\partial M}{\partial y} = 0$ u svim tačkama oblasti R.

Zad. 2.83. Neka je $\mathbf{F} = \dfrac{-y\mathbf{i} + x\mathbf{j}}{x^2+y^2}$.

a) Izračunati $\nabla \times \mathbf{F}$.

b) Izračunati

$$\oint \mathbf{F}\cdot \mathrm{d}\mathbf{r}$$

za bilo koju zatvorenu putanju i objasniti rezultate.

Rešenje.

a) Za zadato polje $\mathbf{F}$ je

$$\nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ \dfrac{-y}{x^2+y^2} & \dfrac{x}{x^2+y^2} & 0 \end{vmatrix} = \mathbf{0}$$

za sve tačke ravni x, y, osim u $O(0,0)$. U tački O polje $\mathbf{F}$ nije definisano.

b) Posmatrajmo integral po zatvorenoj liniji C

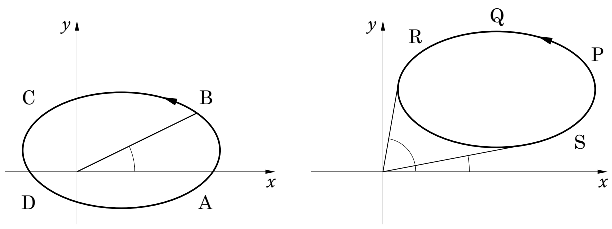
$$\oint_C \mathbf{F}\cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = \oint_C \frac{-y\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y}{x^2+y^2}.$$

Neka je $x = \rho\cos\phi$, $y = \rho\sin\phi$, gde su (ρ, ϕ) polarne koordinate. Odatle diferenciranjem dobijamo:

$$\begin{aligned} \mathrm{d}x &= -\rho\sin\phi\,\mathrm{d}\phi + \mathrm{d}\rho\cos\phi, \\ \mathrm{d}y &= \rho\cos\phi\,\mathrm{d}\phi + \mathrm{d}\rho\sin\phi, \end{aligned}$$

pa je

$$\frac{-y\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y}{x^2+y^2} = \mathrm{d}\phi = \mathrm{d}\left(\arctan\frac{y}{x}\right).$$



Slika 2.34:

Posmatraćemo dva moguća slučaja. Prvi, kada se koordinatni početak O nalazi unutar krive $ABCDA$ (vidi sliku 2.34a), i drugi, kada se tačka O nalazi van oblasti koju okružuje ova kriva (slika 2.34b). U prvom slučaju je

$$\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi = 2\pi,$$

a u drugom

$$\int_{\phi_0}^{\phi_0} \mathrm{d}\phi = 0$$

(vidi zadatak na str. 147).

Zad. 2.84. Izračunati $\iint\limits_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{d}S$, gde je $\mathbf{F} = 4xz\mathbf{i} - y^2\mathbf{j} + yz\mathbf{k}$, a S je površ kocke ograničena sa $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$, $y = 1$, $z = 0$ i $z = 1$.

Rešenje.

Koristeći Gausovu teoremu (vidi str. 104, relacija (2.92)) dobijamo

$$\iiint\limits_V \nabla\cdot\mathbf{F}\,\mathrm{d}V = \iiint\limits_V \left[\frac{\partial}{\partial x}(4xz)+\frac{\partial}{\partial y}(-y^2)+\frac{\partial}{\partial z}(yz)\right]\mathrm{d}V =$$
$$= \iiint\limits_V (4z-y)\,\mathrm{d}V = \int\limits_{x=0}^{1}\int\limits_{y=0}^{1}\int\limits_{z=0}^{1}(4z-y)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x =$$
$$= \int\limits_{x=0}^{1}\int\limits_{y=0}^{1}(2z^2-yz)\Big|_{z=0}^{1}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x =$$
$$= \int\limits_{x=0}^{1}\int\limits_{y=0}^{1}(2-y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \frac{2}{3}.$$

♡

Zad. 2.85. Izračunati

$$I = \oint\limits_c \mathbf{A}\cdot\mathrm{d}\mathbf{r},$$

gde je $\mathbf{A} = (2x-y)\mathbf{i} - yz^2\mathbf{j} - y^2z\mathbf{k}$, a c granica površi S. Površ S je gornja polovina sfere $x^2+y^2+z^2=1$:

a) direktno,

b) primenom Stoksove teoreme.

Rešenje.

a) Granica c površi S je kružnica u xy ravni, poluprečnika jedan i sa centrom u koordinatnom početku. Neka je: $x=\cos t$, $y=\sin t$, $z=0$, $0\le t\le 2\pi$, parametarska jednačina krive c, onda je

$$I = \oint\limits_c \mathbf{A}\cdot\mathrm{d}\mathbf{r} = \oint\limits_c [(2x-y)\mathrm{d}x - yz^2\mathrm{d}y - y^2z\mathrm{d}z] =$$
$$= \int\limits_0^{2\pi}(2\cos t-\sin t)(-\sin t)\mathrm{d}t = \pi.$$

b) Prema Stoksovoj teoremi je

$$\oint_c \mathbf{A} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = \iint_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot \, \mathrm{d}\mathbf{S} = I.$$

Kako je

$$\nabla \times \mathbf{A} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ 2x - y & -yz^2 & -y^2 z \end{vmatrix} = \mathbf{k},$$

to je

$$I = \iint_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot \mathbf{n} \, \mathrm{d}S = \iint_S \mathbf{k} \cdot \mathbf{n} \, \mathrm{d}S = \iint_R \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y.$$

Naime, $\mathbf{k} \cdot \mathbf{n} \, \mathrm{d}S = \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$, R je projekcija S na xy ravan. Unevši ove relacije u prethodni integral dobijamo

$$\begin{aligned} I = \int_{-1}^{1} \mathrm{d}x \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \mathrm{d}y =& 4 \int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \mathrm{d}y = \\ =& 4 \int_0^1 \sqrt{1 - x^2} \, \mathrm{d}x = \pi. \end{aligned}$$

♡

Zad. 2.86. Potreban i dovoljan uslov da je

$$\oint_C \mathbf{A} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = 0,$$

za svaku zatvorenu krivu C, je $\nabla \times \mathbf{A} = 0$. Dokazati.

Dokaz.

Uslov je dovoljan.

Tada uslov $\nabla \times \mathbf{A} = 0$ važi. Onda je (Stoksova teorema 104, relacija (2.92))

$$\oint_C \mathbf{A} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = \iint_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot \mathbf{n} \, \mathrm{d}S = 0.$$

Uslov je potreban.

Onda je

$$\oint_C \mathbf{A} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = 0, \tag{2.204}$$

za svaku zatvorenu krivu C

Dalje je, prema Stoksovoj teoremi,

$$0 = \oint_C \mathbf{A} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = \int_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot \mathbf{n}\, \mathrm{d}a$$

za svaku površ S koja prolazi kroz krivu C. Odavde sledi da mora biti

$$\nabla \times \mathbf{A} = 0.$$

♡

Zad. 2.87. Neka je: ΔS površ ograničena prostom zatvorenom krivom c, P bilo koja tačka na ΔS van krive c, $\mathbf{n}$ ort normale na ΔS u P. Pokazati da u tački P važi

$$(\mathrm{rot}\mathbf{A}) \cdot \mathbf{n} = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\oint_c \mathbf{A} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r}}{\Delta S},$$

gde je granica uzeta tako da se ΔS " steže" oko P.

Rešenje.

Prema Stoksovoj teoremi je

$$\iint_{\Delta S} (\mathrm{rot}\mathbf{A}) \cdot \mathbf{n}\, \mathrm{d}S = \oint_c \mathbf{A} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r}. \tag{2.205}$$

Prema teoremi o srednjoj vrednosti integrala, imamo

$$\iint_{\Delta S} (\mathrm{rot}\mathbf{A}) \cdot \mathbf{n}\, \mathrm{d}S = \overline{(\mathrm{rot}\mathbf{A}) \cdot \mathbf{n}}\Delta S. \tag{2.206}$$

Iz (2.205) i (2.206) sledi

$$\overline{(\mathrm{rot}\mathbf{A}) \cdot \mathbf{n}} = \frac{\oint_c \mathbf{A} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r}}{\Delta S},$$

odnosno

$$\lim_{\Delta S \to 0} \overline{(\mathrm{rot}\mathbf{A}) \cdot \mathbf{n}} = (\mathrm{rot}\mathbf{A}) \cdot \mathbf{n}|_P = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\oint_c \mathbf{A} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r}}{\Delta S},$$

što je traženi rezultat.

♡

Zad. 2.88. Ako je rot**A** definisan kao u zadatku 2.87, naći projekciju rot**A** na z osu.

Rešenje.

Neka je EFGH četvorougao paralelan sa xy ravni (vektor normale u pravcu z ose) sa centrom u tački $P(x, y, z)$ (sl. 2.35). Neka su A_x i A_y projekcije vektora **A** u tački P na ose x i y, respektivno.

Ako je c granica ovog četvorougla, onda je

$$\oint_c \mathbf{A}\cdot\mathrm{d}\mathbf{r} = \int_{EF} \mathbf{A}\cdot\mathrm{d}\mathbf{r} + \int_{FG} \mathbf{A}\cdot\mathrm{d}\mathbf{r} + \int_{GH} \mathbf{A}\cdot\mathrm{d}\mathbf{r} + \int_{HE} \mathbf{A}\cdot\mathrm{d}\mathbf{r}.$$

Vrednosti ovih integrala su:

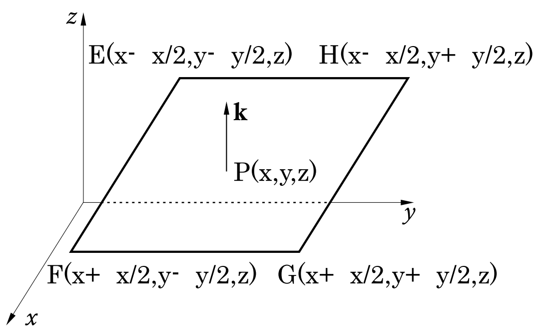
$$\int_{EF} \mathbf{A}\cdot\mathrm{d}\mathbf{r} = \left(A_x - \frac{1}{2}\frac{\partial A_x}{\partial y}\Delta y\right)\Delta x$$

$$\int_{GH} \mathbf{A}\cdot\mathrm{d}\mathbf{r} = -\left(A_x + \frac{1}{2}\frac{\partial A_x}{\partial y}\Delta y\right)\Delta x$$

$$\int_{FG} \mathbf{A}\cdot\mathrm{d}\mathbf{r} = \left(A_y + \frac{1}{2}\frac{\partial A_y}{\partial x}\Delta x\right)\Delta y$$

$$\int_{HE} \mathbf{A}\cdot\mathrm{d}\mathbf{r} = -\left(A_y - \frac{1}{2}\frac{\partial A_y}{\partial x}\Delta x\right)\Delta y.$$

gde su zanemareni članovi viših redova od Δx, odnosno Δy.



Slika 2.35:

Odavde je

$$\oint_c \mathbf{A}\cdot\mathrm{d}\mathbf{r} = \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\Delta x\Delta y.$$

Kako je $\Delta S = \Delta x \Delta y$, to je z projekcija rot$\mathbf{A}$

$$
\begin{aligned}
(\mathrm{rot}\mathbf{A}) \cdot \mathbf{k} &= \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\oint\limits_S \mathbf{A} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r}}{\Delta S} = \\
&= \lim_{\substack{\Delta y \to 0 \\ \Delta x \to 0}} \frac{\left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \Delta x \Delta y}{\Delta x \Delta y} = \\
&= \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}.
\end{aligned}
$$

♡

Zad. 2.89. Izračunati

$$\iiint\limits_V \nabla \cdot \mathbf{A} \, \mathrm{d}V,$$

gde je $\mathbf{A} = 4x\mathbf{i} - 2y^2\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$ vektorsko polje posmatrano nad oblašću V, koja je ograničena površima $x^2 + y^2 = 4$, $z = 0$ i $z = 3$:

a) direktno,

b) primenom teoreme o divrergenciji (Gausova teorema).

Rešenje.

a) Zapremina V je zapremina valjka, koja se dobija kada se cilindar $x^2 + y^2 = 4$ preseče ravnima $z = 0$ i $z = 3$, pa je integral po zapremini

$$
\begin{aligned}
I = \iiint\limits_V \nabla \cdot \mathbf{A} \, \mathrm{d}V &= \iiint\limits_V \left[\frac{\partial}{\partial x}(4x) + \frac{\partial}{\partial y}(-2y^2) + \frac{\partial}{\partial z}(z^2) \right] \mathrm{d}V = \\
&= \iiint\limits_V (4 - 4y + 2z) \, \mathrm{d}V = \\
&= \int\limits_{-2}^{2} \mathrm{d}x \int\limits_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \mathrm{d}y \int\limits_0^3 (4 - 4y + 2z) \, \mathrm{d}z = 84\pi.
\end{aligned}
$$

b) Zapreminu V ograničava površ S, koju sačinjavaju: donja baza S_1 ($z = 0$), gornja baza S_2 ($z = 3$) i omotač S_3 ($x^2 + y^2 = 4$). Primenom teoreme o divergenciji, dobijamo za površinski integral

$$I = I_1 + I_2 + I_3 = \iint\limits_S \mathbf{A}\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{d}S =$$
$$= \iint\limits_{S_1} \mathbf{A}\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{d}S_1 + \iint\limits_{S_2} \mathbf{A}\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{d}S_2 + \iint\limits_{S_3} \mathbf{A}\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{d}S_3.$$

Izračunajmo ova tri integrala.

Za S_1 $(z=0)$ je: $\mathbf{n} = -\mathbf{k}$, $\mathbf{A} = 4x\mathbf{i} - 2y^2\mathbf{j}$ i $\mathbf{A}\cdot\mathbf{n} = 0$, pa je

$$I_1 = \iint\limits_{S_1} \mathbf{A}\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{d}S_1 = 0.$$

Za S_2 $(z=3)$ je: $\mathbf{n} = \mathbf{k}$, $\mathbf{A} = 4x\mathbf{i} - 2y^2\mathbf{j} + 9\mathbf{k}$ i $\mathbf{A}\cdot\mathbf{n} = 0$, pa je

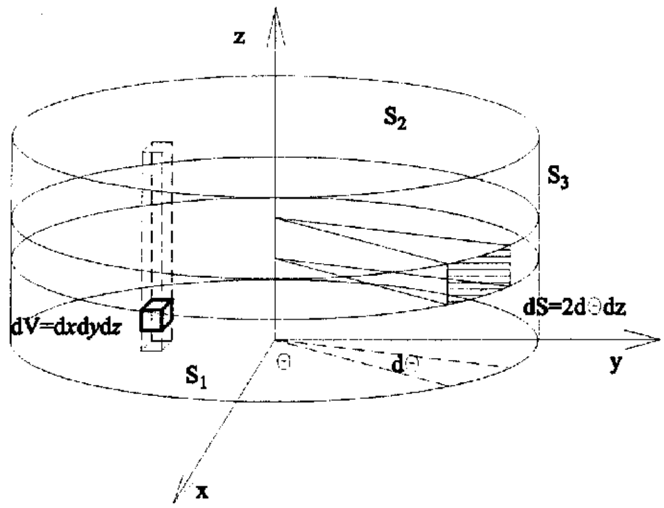
$$I_2 = \iint\limits_{S_2} \mathbf{A}\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{d}S_2 = 9\iint\limits_{S_2} \mathrm{d}S_2 = 36\pi,$$

jer je površina S_2 jednaka 4π.

Za S_3 $(x^2+y^2=4)$ ort normale je

$$\mathbf{n} = \frac{\nabla(x^2+y^2-4)}{|\nabla(x^2+y^2-4)|} = \frac{2x\mathbf{i}+2y\mathbf{j}}{\sqrt{4x^2+4y^2}} = \frac{x\mathbf{i}+y\mathbf{j}}{2}$$
$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{n} = (4x\mathbf{i} - 2y^2\mathbf{j} + z^2\mathbf{k})\cdot\left(\frac{x\mathbf{i}+y\mathbf{j}}{2}\right) = 2x^2 - y^3.$$

Sa slike 2.36 se vidi da je $x = 2\cos\theta$, $y = 2\sin\theta$, $\mathrm{d}S_3 = 2\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z$, pa je



Slika 2.36:

$$I_3 = \iint\limits_{S_3} \mathbf{A}\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{d}S_3 = \int\limits_{\theta=0}^{2\pi}\int\limits_{z=0}^{3}[2(2\cos\theta)^2 - (2\sin\theta)^3)]2\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\theta =$$

$$= \int\limits_{\theta=0}^{2\pi}(48\cos^2\theta - 48\sin^3\theta)\,\mathrm{d}\theta =$$

$$= \int\limits_{\theta=0}^{2\pi}48\cos^2\theta\,\mathrm{d}\theta = 48\pi.$$

Površinski integral po celoj površi je zbir ova tri integrala, tj.

$$I = I_1 + I_2 + I_3 = 0 + 36\pi + 48\pi = 84\pi.$$

Dakle, rezultat se slaže sa rezultatom dobijenim zapreminskim integralom, što potvrđuje teoremu o divergenciji.

♡

Zad. 2.90. Ako div$\mathbf{A}$ predstavlja divergenciju vektorskog polja $\mathbf{A}$ u tački P, pokazati da je

$$\mathrm{div}\mathbf{A} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\iint\limits_{\Delta S} \mathbf{A}\cdot \mathbf{n}\,\mathrm{d}S}{\Delta V},$$

gde je ΔV zapremina ograničena zatvorenom konturom površine ΔS, a limes se dobija "skupljanjem" ΔV oko tačke P.

Rešenje.

Polazeći od Gausove teoreme (vidi relaciju (2.92) na str. 104)

$$\iiint\limits_{\Delta V} \mathrm{div}\mathbf{A}\,\mathrm{d}V = \iint\limits_{\Delta S} \mathbf{A}\cdot \mathbf{n}\,\mathrm{d}S. \tag{2.207}$$

i teoreme o srednjoj vrednosti ((2.93), str. 105)

$$\iiint\limits_{\Delta V} \mathrm{div}\mathbf{A}\,\mathrm{d}V = \overline{\mathrm{div}\mathbf{A}} \iiint\limits_{\Delta V} \mathrm{d}V = \overline{\mathrm{div}\mathbf{A}}\,\Delta V, \tag{2.208}$$

gde je $\overline{\mathrm{div}\mathbf{A}}$ srednja vrednost div$\mathbf{A}$ unutar ΔV, dobijamo

$$\overline{\mathrm{div}\mathbf{A}} = \frac{1}{\Delta V} \iint\limits_{\Delta S} \mathbf{A}\cdot \mathbf{n}\,\mathrm{d}S.$$

Ako sada pustimo da $\Delta V \to 0$, tako da tačka P uvek ostaje unutar ΔV, tada $\overline{\mathrm{div}\mathbf{A}}$ uzima vrednost div$\mathbf{A}$ u tački P. Pa je tako

$$\mathrm{div}\mathbf{A} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\iint\limits_{\Delta S} \mathbf{A}\cdot \mathbf{n}\,\mathrm{d}S}{\Delta V}.$$

♡

Zad. 2.91. Izračunati integral

$$\iint\limits_{S} \mathbf{r} \cdot \mathbf{n}\,\mathrm{d}V,$$

gde je S zatvorena površ.

Rešenje.

Prema teoremi o divergenciji, imamo

$$\iint\limits_S \mathbf{r}\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{d}S = \iiint\limits_V \nabla\cdot\mathbf{r}\,\mathrm{d}V =$$

$$= \iiint\limits_V \left(\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k}\right)\cdot(x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k})\,\mathrm{d}V =$$

$$= \iiint\limits_V \left(\frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z}\right)\mathrm{d}V = 3\iiint\limits_V \mathrm{d}V = 3V,$$

gde je V zapremina ograničena zatvorenom površi S.

♡

Zad. 2.92. Dokazati da je

$$\iiint\limits_V \nabla\phi\,\mathrm{d}V = \iint\limits_S \phi\mathbf{n}\,\mathrm{d}S.$$

Rešenje.

Neka je $\mathbf{A} = \phi\mathbf{C}$, gde je $\mathbf{C}$ proizvoljan konstantni vektor, a ϕ skalarna funkcija. Prema teoremi o divergenciji je

$$\iiint\limits_V \nabla(\phi\mathbf{C})\,\mathrm{d}V = \iint\limits_S \phi\mathbf{C}\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{d}S.$$

Kako je (vidi zad. 2.18b na str. 135) $\nabla\cdot(\phi\mathbf{C}) = (\nabla\phi)\cdot\mathbf{C} = \mathbf{C}\cdot(\nabla\phi)$ i $\phi\mathbf{C}\cdot\mathbf{n} = \mathbf{C}\cdot(\phi\mathbf{n})$, to je

$$\iiint\limits_V \mathbf{C}\cdot\nabla\phi\,\mathrm{d}V = \iint\limits_S \mathbf{C}\cdot(\phi\mathbf{n})\,\mathrm{d}S,$$

odnosno

$$\mathbf{C}\cdot\iiint\limits_V \nabla\phi\,\mathrm{d}V = \mathbf{C}\cdot\iint\limits_S \phi\mathbf{n}\,\mathrm{d}S.$$

Odavde, kako je $\mathbf{C}$ proizvoljan konstantni vektor, konačno dobijamo

$$\iiint\limits_V \nabla\phi\,\mathrm{d}V = \iint\limits_S \phi\mathbf{n}\,\mathrm{d}S.$$

♡

Zad. 2.93. Dokazati da je

$$\iiint\limits_V \nabla \times \mathbf{B}\,\mathrm{d}V = \iint\limits_S \mathbf{n} \times \mathbf{B}\,\mathrm{d}S.$$

Rešenje.

Neka je $\mathbf{A} = \mathbf{B} \times \mathbf{C}$, gde je $\mathbf{C}$ proizvoljan konstantni vektor. Prema teoremi o divergenciji (Gausova teorema (2.92)) je

$$\iiint\limits_V \nabla \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C})\,\mathrm{d}V = \iint\limits_S (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) \cdot \mathbf{n}\,\mathrm{d}S. \tag{2.209}$$

Na osnovu osobine delta operatora (vidi str. 87) i osobine divergencije (div $\mathbf{C}$=0), dobijamo

$$\nabla \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{C} \cdot (\nabla \times \mathbf{B}). \tag{2.210}$$

S druge strane je (vidi osobinu mešovitog proizvoda na str.24)

$$(\mathbf{B} \times \mathbf{C}) \cdot \mathbf{n} = \mathbf{B} \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{n}) = (\mathbf{C} \times \mathbf{n}) \cdot \mathbf{B} = \mathbf{C} \cdot (\mathbf{n} \times \mathbf{B}). \tag{2.211}$$

Zamenom jednačina (2.210) i (2.211) u (2.209), dobijamo

$$\iiint\limits_V \mathbf{C} \cdot (\nabla \times \mathbf{B})\,\mathrm{d}V = \iint\limits_S \mathbf{C} \cdot (\mathbf{n} \times \mathbf{B})\,\mathrm{d}S.$$

Kako je $\mathbf{C}$ proizvoljan konstantan vektor, to može da izađe ispred integrala, pa se dobija

$$\mathbf{C} \cdot \iiint\limits_V \nabla \times \mathbf{B}\,\mathrm{d}V = \mathbf{C} \cdot \iint\limits_S \mathbf{n} \times \mathbf{B}\,\mathrm{d}S \quad \Rightarrow$$

$$\iiint\limits_V \nabla \times \mathbf{B}\,\mathrm{d}V = \iint\limits_S \mathbf{n} \times \mathbf{B}\,\mathrm{d}S.$$

♡

Zad. 2.94. Neka se tačka P nalazi u telu zapremine ΔV čija je spoljašnja granica ΔS. Dokazati da u tački P važi

a)

$$\nabla \phi = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\iint\limits_{\Delta S} \phi \mathbf{n}\,\mathrm{d}S}{\Delta V},$$

b)

$$\nabla \times \mathbf{A} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\iint\limits_{\Delta S} \mathbf{n} \times \mathbf{A} \, \mathrm{d}S}{\Delta V},$$

Rešenje.

a) Kako je (vidi zad. 2.92, str. 192)

$$\iiint\limits_{V} \nabla\phi \, \mathrm{d}V = \iint\limits_{\Delta S} \phi \mathbf{n} \, \mathrm{d}S,$$

to skalarnim množenjem sa $\mathbf{i}$, dobijamo

$$\iiint\limits_{V} \nabla\phi \cdot \mathbf{i} \, \mathrm{d}V = \iint\limits_{\Delta S} \phi \mathbf{n} \cdot \mathbf{i} \, \mathrm{d}S.$$

Primenom teoreme o srednjoj vrednosti dobijamo

$$\overline{\nabla\phi \cdot \mathbf{i}} = \frac{\iint\limits_{\Delta S} \phi \mathbf{n} \cdot \mathbf{i} \, \mathrm{d}S}{\Delta V},$$

gde je $\overline{\nabla\phi \cdot \mathbf{i}}$ srednja vrednost veličine $\nabla\phi \cdot \mathbf{i}$ u celoj ΔV. Uzimajući limes, kad $\Delta V \longrightarrow 0$, tako da P ostaje unutar ΔV, dobijamo

$$\nabla\phi \cdot \mathbf{i} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\iint\limits_{\Delta S} \phi \mathbf{n} \cdot \mathbf{i} \, \mathrm{d}S}{\Delta V}. \tag{2.212}$$

Na sličan način dobijamo i za:

$$\nabla\phi \cdot \mathbf{j} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\iint\limits_{\Delta S} \phi \mathbf{n} \cdot \mathbf{j} \, \mathrm{d}S}{\Delta V} \tag{2.213}$$

$$\nabla\phi \cdot \mathbf{k} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\iint\limits_{\Delta S} \phi \mathbf{n} \cdot \mathbf{k} \, \mathrm{d}S}{\Delta V}. \tag{2.214}$$

Ako pomnožimo jednačine (2.212), (2.213) i (2.214), sa $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$, respektivno, a zatim ih saberemo, koristeći

$$\nabla\phi = (\nabla\phi \cdot \mathbf{i})\mathbf{i} + (\nabla\phi \cdot \mathbf{j})\mathbf{j} + (\nabla\phi \cdot \mathbf{k})\mathbf{k}$$
$$\mathbf{n} = (\mathbf{n} \cdot \mathbf{i})\mathbf{i} + (\mathbf{n} \cdot \mathbf{j})\mathbf{j} + (\mathbf{n} \cdot \mathbf{k})\mathbf{k},$$

dobijamo

$$\nabla\phi = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\iint\limits_{\Delta S} \phi \mathbf{n} \, \mathrm{d}S}{\Delta V},$$

što je i trebalo dokazati.

b) Kako je (zadatak 2.93, str. 193)

$$\iiint\limits_V \nabla \times \mathbf{A}\, \mathrm{d}V = \iint\limits_{\Delta S} \mathbf{n} \times \mathbf{A}\, \mathrm{d}S,$$

to, slično kao u prethodnom delu zadatka, množeći skalarno sa $\mathbf{i}$ dobijamo

$$(\nabla \times \mathbf{A}) \cdot \mathbf{i} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\iint\limits_{\Delta S} (\mathbf{n} \times \mathbf{A}) \cdot \mathbf{i}\, \mathrm{d}S}{\Delta V}.$$

Slično je i za $\mathbf{j}$ i $\mathbf{k}$. Množenjem sa $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ i $\mathbf{k}$, a zatim sabiranjem, sledi

$$\nabla \times \mathbf{A} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\iint\limits_{\Delta S} \mathbf{n} \times \mathbf{A}\, \mathrm{d}S}{\Delta V}.$$

Napomenimo da ovi rezultati mogu biti uzeti kao polazne tačke za definisanje gradijenta, divergencije i rotora. Ovako definisani izrazi za gradijent, divergenciju i rotor su iskazani nezavisno od koordinatnog sistema, pa važe za svaki koordinatni sistem, odnosno oni su invarijantni u odnosu na koordinatni sistem.

♡

Zad. 2.95. Definisati operator ekvivalencije

$$\nabla \circ \equiv \lim_{\Delta V \to 0} \frac{1}{\Delta V} \iint\limits_{\Delta S} \mathrm{d}\mathbf{S} \circ,$$

gde $\circ$ označava: množenje vektora skalarom, skalarni ili vektorski proizvod, a integral se računa po zatvorenoj konturi.

Rešenje.

Ako $\circ$ označava skalarni proizvod, tada je

$$\nabla \circ \mathbf{A} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{1}{\Delta V} \iint\limits_{\Delta S} \mathrm{d}\mathbf{S} \circ \mathbf{A}$$

ili

$$\begin{aligned} \mathrm{div}\mathbf{A} &= \lim_{\Delta V \to 0} \frac{1}{\Delta V} \iint\limits_{\Delta S} \mathrm{d}\mathbf{S} \cdot \mathbf{A} = \\ &= \lim_{\Delta V \to 0} \frac{1}{\Delta V} \iint\limits_{\Delta S} \mathbf{A} \cdot \mathbf{n}\, \mathrm{d}S. \end{aligned}$$

Slično, ako označava $\circ$ vektorski proizvod, (vidi zadatak 2.90)

$$\nabla \circ \mathbf{A} = \nabla \times \mathbf{A} = \operatorname{rot} \mathbf{A} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{1}{\Delta V} \iint\limits_{\Delta S} \mathrm{d}\mathbf{S} \times \mathbf{A} =$$

$$= \lim_{\Delta V \to 0} \frac{1}{\Delta V} \iint\limits_{\Delta S} \mathbf{n} \times \mathbf{A} \, \mathrm{d}S.$$

Konačno, ako $\circ$ označava množenje vektora skalarom ϕ, dobijamo

$$\nabla \circ \phi = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{1}{\Delta V} \iint\limits_{\Delta S} \mathrm{d}\mathbf{S} \circ \phi,$$

ili,

$$\nabla \phi = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{1}{\Delta V} \iint\limits_{\Delta S} \phi \, \mathrm{d}\mathbf{S}.$$

(vidi zadatak 2.94a).

♡

Zad. 2.96. Neka je: S zatvorena površ, V prostor oivičen površi S, a $\mathbf{r}$ vektor položaja neke tačke (x, y, z) u odnosu na koordinatni početak O. Pokazati da je integral:

$$I = \iint\limits_{S} \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}}{r^3} \, \mathrm{d}S$$

a) $I = 0$, ako O leži izvan površi S,

b) $I = 4\pi$ ako O leži unutar površi S.

Rešenje.

a) Primenom teoreme o divergenciji dobija se

$$\iint\limits_{S} \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}}{r^3} \, \mathrm{d}S = \iiint\limits_{V} \nabla \cdot \frac{\mathbf{r}}{r^3} \, \mathrm{d}V.$$

Kako je $\nabla \cdot \dfrac{\mathbf{r}}{r^3} = 0$ (zadatak 2.20 na str. 137) to je

$$\iint\limits_{S} \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}}{r^3} \, \mathrm{d}S = 0.$$

b) Ako je O unutar S, okružimo O sferom s poluprečnika a. Neka τ označava oblast ograničenu sa S i s. Prema teoremi o divergenciji je:

$$\iint\limits_{S+s} \frac{\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}}{r^3}\,\mathrm{d}S = \iint\limits_{S} \frac{\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}}{r^3}\,\mathrm{d}S + \iint\limits_{s} \frac{\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}}{r^3}\,\mathrm{d}S =$$

$$= \iiint\limits_{\tau} \nabla\cdot\frac{\mathbf{r}}{r^3}\,\mathrm{d}V = 0,$$

jer je $r \neq 0$ u τ. Odavde sledi

$$\iint\limits_{S} \frac{\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}}{r^3}\,\mathrm{d}S = -\iint\limits_{s} \frac{\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}}{r^3}\,\mathrm{d}S.$$

Za sferu s je: $r = a$, $\mathbf{n} = -\dfrac{\mathbf{r}}{a}$, pa dobijamo:

$$\frac{\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}}{r^3} = \frac{-\frac{\mathbf{r}}{a}\cdot\mathbf{r}}{r^3} = -\frac{\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}}{a^4} = -\frac{a^2}{a^4} = -\frac{1}{a^2}$$

i

$$\iint\limits_{S} \frac{\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}}{r^3}\,\mathrm{d}S = -\iint\limits_{s} \frac{\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}}{r^3}\,\mathrm{d}S = \iint\limits_{s} \frac{1}{a^2}\,\mathrm{d}S =$$

$$= \frac{1}{a^2}\iint\limits_{s} \mathrm{d}S = \frac{4\pi a^2}{a^2} = 4\pi.$$

♡

2.6.7 Razni zadaci

Zad. 2.97. Izračunati

$$\oint\limits_{c} (3x+4y)\mathrm{d}x + (2x-3y)\mathrm{d}y,$$

gde je c krug poluprečnika dva, sa centrom u koordinatnom početku.

Rezultat.

$-8\pi.$

♡

Zad. 2.98. Izračunati integral

$$\oint_c (x^2 - 2xy)\mathrm{d}x + (x^2 y + 3)\mathrm{d}y,$$

ako je granica oblasti definisana presekom linija $y^2 = 2x$ i $x = 2$:

a) direktno,

b) koristeći Grinovu teoremu.

<u>*Rezultat.*</u>

128/5. ♡

Zad. 2.99. Izračunati integral

$$\int_c (6xy - y^2)\mathrm{d}x + (3x^2 - 2xy)\mathrm{d}y,$$

duž cikloide c: $x = \theta - \sin\theta$, $y = 1 - \cos\theta$, od tačke $A(0,0)$ do $B(\pi, 2)$.

<u>*Rezultat.*</u>

$6\pi^2 - 4\pi$.

♡

Zad. 2.100. Pokazati da je površina

$$A = \iint_R \mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

pri transformaciji $x = x(u,v)$ i $y = y(u,v)$, data sa

$$A = \iint_R J\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v, \qquad \text{gde je } J = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \equiv \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial u} \\ \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix},$$

J - Jakobijan transformacije.

♡

Zad. 2.101. Izračunati

$$\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{d}S,$$

gde je $\mathbf{F} = 2xy\mathbf{i} + yz^2\mathbf{j} + xz\mathbf{k}$, a S:

a) paralelopiped ograničen sa: $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x = 2$, $y = 1$ i $z = 3$,

b) površ koja ograničava oblast datu sa: $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $y = 3$ i $x + 2z = 6$.

<u>*Rezultati.*</u>

a) 30, b) 351/2.

♡

Zad. 2.102. Neka je $\mathbf{H} = \operatorname{rot}\mathbf{A}$, dokazati da je

$$\iint_S \mathbf{H}\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{d}S = 0,$$

za zatvorenu površ S.

♡

Zad. 2.103. Dokazati da je

$$\iiint_V \frac{\mathrm{d}V}{r^2} = \iint_S \frac{\mathbf{r}\cdot\mathbf{n}}{r^2}\mathrm{d}S.$$

♡

Zad. 2.104. Dokazati da je

$$\iint_S r^5\mathbf{n}\,\mathrm{d}S = \iiint_V 5r^3\mathbf{r}\mathrm{d}V.$$

♡

Zad. 2.105. Dokazati da je

$$\iint_S \mathbf{n}\,\mathrm{d}S = 0,$$

za bilo koju površ S.

♡

Zad. 2.106. Izračunati

$$\iint_S (\nabla\times\mathbf{A})\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{d}S,$$

gde je $\mathbf{A} = (x^2 + y - 4)\mathbf{i} + 3xy\mathbf{j} + (2xz + z^2)\mathbf{k}$, a S:

a) polusfera $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ iznad xy ravni,

b) paraboloid $z = 4 - (x^2 + y^2)$ iznad xy ravni.

Rezultati.

a) -16π, b) -4π.

♡

Zad. 2.107. Potencijal $\phi(P)$, u tački $P(x, y, z)$, u sistemu čestica naelektrisanja $q_1, q_2, ..., q_n$ sa vektorima položaja $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, ..., \mathbf{r}_n$ dat je formulom

$$\phi = \sum_{m=1}^{n} \frac{q_m}{r_m}.$$

Dokazati Gausov zakon

$$\iint\limits_S \mathbf{E} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = 4\pi Q,$$

gde je $\mathbf{E} = -\nabla\phi$ jačina električnog polja, S je površ koja obuhvata sve čestice i $Q = \sum_{m=1}^{n} q_m$ je ukupno naelektrisanje obuhvaćeno sa S.

♡

Zad. 2.108. Neka je oblast V ograničena sa S, ρ gustina fluida, $\phi(P)$ potencijal u tački P definsan sa

$$\phi = \iiint\limits_V \frac{\rho \mathrm{d}V}{r}.$$

Dokazati da je:

a)

$$\iint\limits_S \mathbf{E} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = 4\pi \iiint\limits_V \rho \mathrm{d}V,$$

gde je $\mathbf{E} = -\nabla\phi$

b)

$$\nabla^2\phi = -4\pi\rho \quad \text{(Poasonova jednčina)},$$

u tački P gde se nalazi fluid, i

$$\nabla^2\phi = 0 \quad \text{(Laplasova jednčina)},$$

gde se ne nalazi fluid.

♡

2.6.8 Generalisani ortogonalni sistemi

Krivolinijske koordinate

Zad. 2.109. Odrediti koordinatne površi i koordinatne linije za:

a) cilindrične i

b) sferne koordinate.

Rešenje.

a) Cilindrični koordinatni sistem (ρ, φ, z).
Koordinatne površi su:

$\rho = c_1$ koaksialni cilindri, sa centrom osnove na z osi,

$\varphi = c_2$ ravni koje prolaze kroz z osu,

$z = c_3$ ravni normalne na z osu.

Koordinatne linije su:

presek površi $\rho = c_1$ i $\varphi = c_2$, određuje prave linije (z- osa),

presek površi $\rho = c_1$ i $z = c_3$, određuje kružnice,

presek površi $\varphi = c_2$ i $z = c_3$, određuje prave linije ($\rho > 0$).

b) Sferni koordinatni sistem (r, θ, φ).
Koordinatne površi su:

$r = c_1$ koncentrične sfere, sa centrom na z osi,

$\theta = c_2$ konus, sa temenom u koordinatnom početku,

$\varphi = c_3$ ravni, koje prolaze kroz z osu.

Koordinatne linije su:

presek površi $r = c_1$ i $\theta = c_2$, daje kružnice,

presek površi $r = c_1$ i $\varphi = c_3$, daje polu-kružnice,

presek površi $\varphi = c_3$ i $\theta = c_2$, daje linije ($r > 0$).

♡

Zad. 2.110. Izraziti cilindrične koordinate preko Dekartovih koordinata.

Rešenje.

Napišimo transformacije koje Dekartove koordinate izražava preko cilindričnih koordinata

$$x = \rho\cos\varphi \tag{2.215}$$
$$y = \rho\sin\varphi \tag{2.216}$$
$$z = z. \tag{2.217}$$

Ako prvo kvadriramo pa saberemo jednačine (2.215) i (2.216), dobija se $\rho^2(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) = x^2+y^2$, odnosno $\rho = \sqrt{x^2+y^2}$. Ovde smo iskoristili osnovnu trigonometrijsku identičnost $\cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1$ i činjenicu da je ρ, po definiciji (rastojanje), pozitivno.

Deljenjem jednačina (2.216) i (2.215) dobija se $\frac{y}{x} = \frac{\rho\sin\varphi}{\rho\cos\varphi} = \tan\varphi$, odnosno $\varphi = \arctan\frac{y}{x}$.

Odavde slede transformacije:

$$\rho = \sqrt{x^2+y^2}$$
$$\varphi = \arctan\frac{y}{x}$$
$$z = z.$$

♡

Zad. 2.111. Pokazati da je cilindrični koordinatni sistem ortogonalan.

Rešenje.

Vektor položaja je

$$\mathbf{r} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k} = \rho\cos\varphi\,\mathbf{i} + \rho\sin\varphi\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}.$$

Tangentni vektori, koji odgovaraju koordinatama ρ, φ, z određeni su sa: $\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\rho}$, $\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\varphi}$ i $\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial z}$, tj.:

$$\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\rho} = \cos\varphi\,\mathbf{i} + \sin\varphi\,\mathbf{j},$$
$$\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\varphi} = -\rho\sin\varphi\,\mathbf{i} + \rho\cos\varphi\,\mathbf{j},$$
$$\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial z} = \mathbf{k}.$$

Odgovarajući ortovi su:

$$\begin{aligned}
\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_\rho &= \frac{\partial\,\mathbf{r}/\partial\rho}{|\partial\,\mathbf{r}/\partial\rho|} = \frac{\cos\varphi\,\mathbf{i} + \sin\varphi\,\mathbf{j}}{\sqrt{\cos^2\varphi + \sin^2\varphi}} = \cos\varphi\,\mathbf{i} + \sin\varphi\,\mathbf{j},\\
\mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_\varphi &= \frac{\partial\,\mathbf{r}/\partial\varphi}{|\partial\,\mathbf{r}/\partial\varphi|} = \frac{-\rho\sin\varphi\,\mathbf{i} + \rho\cos\varphi\,\mathbf{j}}{\sqrt{\rho^2\cos^2\varphi + \rho^2\sin^2\varphi}} = -\sin\varphi\,\mathbf{i} + \cos\varphi\,\mathbf{j},\\
\mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_z &= \frac{\partial\,\mathbf{r}/\partial z}{|\partial\,\mathbf{r}/\partial z|} = \mathbf{k}.
\end{aligned} \tag{2.218}$$

pa je

$$\begin{aligned}
\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2 &= (\cos\varphi\,\mathbf{i} + \sin\varphi\,\mathbf{j}) \cdot (-\sin\varphi\,\mathbf{i} + \cos\varphi\,\mathbf{j}) = 0,\\
\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_3 &= (\cos\varphi\,\mathbf{i} + \sin\varphi\,\mathbf{j}) \cdot \mathbf{k} = 0,\\
\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_3 &= (-\sin\varphi\,\mathbf{i} + \cos\varphi\,\mathbf{j}) \cdot \mathbf{k} = 0.
\end{aligned}$$

Odavde se vidi da su ortovi normalni jedan na drugi, tj. sistem je ortogonalan.

♡

Zad. 2.112. Predstaviti vektor $\mathbf{A} = z\,\mathbf{i} - 2x\,\mathbf{j} + y\,\mathbf{k}$ u cilindričnim koordinatama. Odrediti A_ρ, A_φ i A_z (projekcije ovog vektora na ose ρ, φ i z).

Rešenje.

Vektor $\mathbf{A}$ izražen je u odnosu na bazu $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ i $\mathbf{k}$. Da bismo ga prikazali u odnosu na cilindrične koordinate potrebno je ortove $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ i $\mathbf{k}$ izraziti preko baze $\mathbf{e}_\varrho$, $\mathbf{e}_\varphi$ i $\mathbf{e}_z$. Ove veze date su u prethodnom zadatku (2.218):

$$\begin{aligned}
\mathbf{e}_\rho &= \cos\varphi\,\mathbf{i} + \sin\varphi\,\mathbf{j},\\
\mathbf{e}_\varphi &= -\sin\varphi\,\mathbf{i} + \cos\varphi\,\mathbf{j},\\
\mathbf{e}_z &= \mathbf{k},
\end{aligned}$$

odakle dobijamo:

$$\begin{aligned}
\mathbf{i} &= \cos\varphi\,\mathbf{e}_\rho - \sin\varphi\,\mathbf{e}_\varphi,\\
\mathbf{j} &= \sin\varphi\,\mathbf{e}_\rho + \cos\varphi\,\mathbf{e}_\varphi,\\
\mathbf{k} &= \mathbf{e}_z.
\end{aligned} \tag{2.219}$$

Prema definiciji je:

$$\begin{aligned}
A_\rho &= \mathbf{A}\cdot\mathbf{e}_\rho,\\
A_\varphi &= \mathbf{A}\cdot\mathbf{e}_\varphi,\\
A_z &= \mathbf{A}\cdot\mathbf{e}_z.
\end{aligned} \tag{2.220}$$

Zamenom (2.219) u izrazu za vektor $\mathbf{A}$, imajući na umu (2.220), dobijamo

$$\begin{aligned}\mathbf{A} &= z\,\mathbf{i} - 2x\,\mathbf{j} + y\,\mathbf{k}\\ &= z(\cos\varphi\,\mathbf{e}_\rho - \sin\varphi\,\mathbf{e}_\varphi) - 2\rho\cos\varphi(\sin\varphi\,\mathbf{e}_\rho + \cos\varphi\,\mathbf{e}_\varphi) + \rho\sin\varphi\,\mathbf{e}_z\\ &= (z\cos\varphi - 2\rho\cos\varphi\sin\varphi)\,\mathbf{e}_\rho - (z\sin\varphi + 2\rho\cos^2\varphi)\,\mathbf{e}_\varphi + \rho\sin\varphi\,\mathbf{e}_z,\end{aligned}$$

odnosno:

$$\begin{aligned}A_\rho &= z\cos\varphi - 2\rho\cos\varphi\sin\varphi,\\ A_\varphi &= z\sin\varphi + 2\rho\cos^2\varphi,\\ A_z &= \rho\sin\varphi.\end{aligned}$$

♡

Zad. 2.113. Dokazati da je $\dfrac{\mathrm{d}\,\mathbf{e}_\rho}{\mathrm{d}t} = \dot\varphi\,\mathbf{e}_\varphi$, $\dfrac{\mathrm{d}\,\mathbf{e}_\varphi}{\mathrm{d}t} = -\dot\varphi\,\mathbf{e}_\rho$, gde je $\dot{()} = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$.

Rešenje.

U zadatku 2.111, na str.203 (vidi (2.218)) pokazano je da je:

$$\begin{aligned}\mathbf{e}_\rho &= \cos\varphi\,\mathbf{i} + \sin\varphi\,\mathbf{j},\\ \mathbf{e}_\varphi &= -\sin\varphi\,\mathbf{i} + \cos\varphi\,\mathbf{j},\\ \mathbf{e}_z &= \mathbf{k}.\end{aligned}$$

Odavde se diferenciranjem dobija:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\,\mathbf{e}_\rho}{\mathrm{d}t} &= -\sin\varphi\,\dot\varphi\,\mathbf{i} + \cos\varphi\,\dot\varphi\,\mathbf{j} = (-\sin\varphi\,\mathbf{i} + \cos\varphi\,\mathbf{j})\dot\varphi = \dot\varphi\,\mathbf{e}_\varphi,\\ \frac{\mathrm{d}\,\mathbf{e}_\varphi}{\mathrm{d}t} &= \cos\varphi\,\dot\varphi\,\mathbf{i} + \sin\varphi\dot\varphi\,\mathbf{j} \quad = (\cos\varphi\,\mathbf{i} + \sin\varphi\,\mathbf{j})\dot\varphi \quad = -\dot\varphi\,\mathbf{e}_\rho,\end{aligned}$$

što je trebalo dokazati.

♡

Zad. 2.114. Izraziti brzinu $\mathbf{v}$ i ubrzanje $\mathbf{a}$ čestice u cilindričnim koordinatama.

Rešenje.

Vektor položaja je $\mathbf{r} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$, a brzina i ubrzanje su, po definiciji,

$$\mathbf{v} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t} = \dot x\,\mathbf{i} + \dot y\,\mathbf{j} + \dot z\,\mathbf{k},$$

odnosno

$$\mathbf{a} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t} = \ddot x\,\mathbf{i} + \ddot y\,\mathbf{j} + \ddot z\,\mathbf{k}.$$

Izrazimo vektor položaja u cilindričnim koordinatama:

$$\begin{aligned}\mathbf{r} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k} &= (\rho\cos\varphi)(\cos\varphi\,\mathbf{e}_\rho - \sin\varphi\,\mathbf{e}_\varphi) \\ &\quad + (\rho\sin\varphi)(\sin\varphi\,\mathbf{e}_\rho + \cos\varphi\,\mathbf{e}_\varphi) + z\,\mathbf{e}_z \\ &= \rho\,\mathbf{e}_\rho + z\,\mathbf{e}_z .\end{aligned}$$

Diferenciranjem po vremenu dobijamo

$$\begin{aligned}\mathbf{v} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t} &= \frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t}\,\mathbf{e}_\rho + \rho\frac{\mathrm{d}\,\mathbf{e}_\rho}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\,\mathbf{e}_z \\ &= \dot\rho\,\mathbf{e}_\rho + \rho\dot\varphi\,\mathbf{e}_\varphi + \dot z\,\mathbf{e}_z .\end{aligned}$$

Ako diferenciramo još jednom, dobija se ubrzanje

$$\begin{aligned}\mathbf{a} = \frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}}{\mathrm{d}t^2} &= \frac{d}{\mathrm{d}t}(\dot\rho\,\mathbf{e}_\rho + \rho\dot\varphi\,\mathbf{e}_\varphi + \dot z\,\mathbf{e}_z) \\ &= \dot\rho\frac{\mathrm{d}\,\mathbf{e}_\rho}{\mathrm{d}t} + \ddot\rho\,\mathbf{e}_\rho + \rho\dot\varphi\frac{\mathrm{d}\,\mathbf{e}_\varphi}{\mathrm{d}t} + \rho\ddot\varphi\,\mathbf{e}_\varphi + \dot\rho\dot\varphi\,\mathbf{e}_\varphi + \ddot z\,\mathbf{e}_z \\ &= \dot\rho\dot\varphi\,\mathbf{e}_\rho + \ddot\rho\,\mathbf{e}_\rho + \rho\dot\varphi(-\dot\varphi\,\mathbf{e}_\rho) + \rho\ddot\varphi\,\mathbf{e}_\varphi + \dot\rho\dot\varphi\,\mathbf{e}_\varphi + \ddot z\,\mathbf{e}_z \\ &= (\ddot\rho - \rho\ddot\varphi^2)\,\mathbf{e}_\rho + (\rho\ddot\varphi + 2\dot\rho\dot\varphi)\,\mathbf{e}_\varphi + \ddot z\,\mathbf{e}_z .\end{aligned}$$

♡

Zad. 2.115. Naći infinitezimalni deo luka u cilindričnim koordinatama i odrediti odgovarajuće Lameove koeficijente.

Rešenje.

Kako je:

$$\begin{aligned} x &= \rho\cos\varphi \\ y &= \rho\sin\varphi \\ z &= z, \end{aligned}$$

i

$$\begin{aligned} \mathrm{d}x &= -\rho\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi + \cos\varphi\,\mathrm{d}\rho, \\ \mathrm{d}y &= \rho\cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi + \sin\varphi\,\mathrm{d}\rho, \\ \mathrm{d}z &= \mathrm{d}z, \end{aligned}$$

to je

$$\begin{aligned}(\mathrm{d}s)^2 &= \mathrm{d}x^{\,2} + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2 \\ &= (-\rho\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi + \cos\varphi\,\mathrm{d}\rho)^2 + (\rho\cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi + \sin\varphi\,\mathrm{d}\rho)^2 + (\mathrm{d}z)^2 \\ &= (\mathrm{d}\rho)^2 + \rho^2(\mathrm{d}\varphi)^2 + (\mathrm{d}z)^2 = h_1^2(\mathrm{d}\rho)^2 + h_2^2(\mathrm{d}\varphi)^2 + h_3^2(\mathrm{d}z)^2 .\end{aligned}$$

Odavde, poredeći sa (2.146) str. 117, dobijamo za Lameove koeficijente: $h_1 = h_\rho = 1$, $h_2 = h_\varphi = \rho$ i $h_3 = h_z = 1$.

♡

Zad. 2.116. Naći element luka u

a) sfernim i

b) paraboličnim koordinatama

i odredi odgovarajuće Lameove koeficijente.

Rešenje.

a) Veze između Dekartovih i sfernih koordinata (r, θ, φ) su:

$$x = r\sin\theta\cos\varphi,$$
$$y = r\sin\theta\sin\varphi,$$
$$z = r\cos\theta.$$

Diferenciranjem dobijamo:

$$\mathrm{d}x = -r\sin\theta\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi + r\cos\theta\cos\varphi\,\mathrm{d}\theta + \sin\theta\cos\varphi\,\mathrm{d}r,$$
$$\mathrm{d}y = r\sin\theta\cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi + r\cos\theta\sin\varphi\,\mathrm{d}\theta + \sin\theta\sin\varphi\,\mathrm{d}r,$$
$$\mathrm{d}z = -r\sin\theta\,\mathrm{d}\theta + \cos\theta\,\mathrm{d}r,$$

pa je kvadrat elementa luka

$$(\mathrm{d}s)^2 = \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2 = (\mathrm{d}r)^2 + r^2(\mathrm{d}\theta)^2 + r^2\sin^2\theta(\mathrm{d}\varphi)^2.$$

Odavde dobijamo za Lameove koeficijente: $h_1 = h_r = 1$, $h_2 = h_\theta = r$ i $h_3 = h_\varphi = r\sin\theta$.

b) Veze između Dekartovih i paraboličnih koordinata (u, v, z) su

$$x = \frac{1}{2}(u^2 - v^2),$$
$$y = uv,$$
$$z = z.$$

Diferenciranjem dobijamo:

$$\mathrm{d}x = u\,\mathrm{d}u - v\,\mathrm{d}v,$$
$$\mathrm{d}y = u\,\mathrm{d}v + v\,\mathrm{d}u,$$
$$\mathrm{d}z = \mathrm{d}z.$$

Kvadrat elementa luka je

$$(\mathrm{d}s)^2 = \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2 = (u^2+v^2)(\mathrm{d}u)^2 + (u^2+v^2)(\mathrm{d}v)^2 + (\mathrm{d}z)^2,$$

pa su Lameovi koeficijenti $h_1 = h_u = \sqrt{u^2+v^2}$, $h_2 = h_v = \sqrt{u^2+v^2}$ i $h_3 = h_z = 1$.

♡

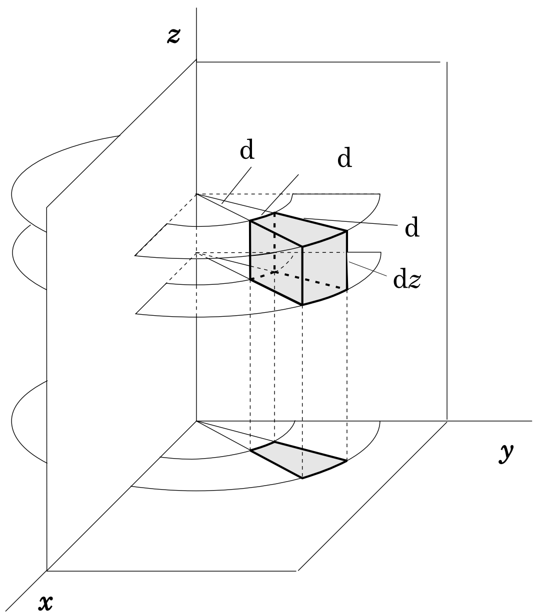
Zad. 2.117. Odrediti infinitezimalni deo zapremine $\mathrm{d}V$ u:

a) cilindričnim,

b) sfernim koordinatama.

Rešenje.

a) Sa slike 2.37



Slika 2.37: Cilindrične koordinate

vidimo da su stranice osenčenog tela: $\rho\,\mathrm{d}\varphi$, $\mathrm{d}\rho$ i $\mathrm{d}z$. S obzirom da je sistem cilindričnih koordinata ortogonalan, to je elementarna zapremina $\mathrm{d}V =$

$ds_1 ds_2 ds_3$ (vidi str. 118, relacija (2.147)). Kako su dužine stranica:

$$
\begin{aligned}
ds_1 &= h_1\, du^1 = 1 \cdot (d\rho) = d\rho, \\
ds_2 &= h_2\, du^2 = \rho \cdot (d\varphi) = \rho\, d\varphi, \\
ds_3 &= h_3\, du^3 = 1 \cdot (dz) = dz,
\end{aligned}
$$

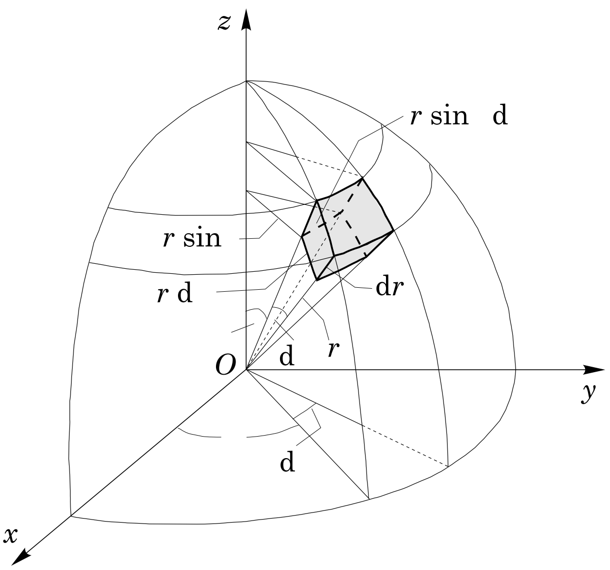
to je zapremina

$$dV = h_1 h_2 h_3\, du^1\, du^2\, du^3 \quad \Rightarrow$$

odnosno

$$dV = 1 \cdot \rho \cdot 1\, d\rho\, d\varphi\, dz = \rho\, d\rho\, d\varphi\, dz.$$

b) Sa slike 2.38



Slika 2.38: Sferene koordinate

vidimo da su ivice osenčenog tela dr, $rd\theta$ i $r \sin\theta d\varphi$. S obzirom da je sistem sfernih koordinata ortogonalan, to je elementarna zapremina $dV = ds_1 ds_2 ds_3$. Kako su dužine stranica:

$$
\begin{aligned}
ds_1 &= h_1\, du^1 = 1 \cdot (dr) = dr, \\
ds_2 &= h_2\, du^2 = r \cdot (d\theta) = r\, d\theta, \\
ds_3 &= h_3\, du^3 = r \sin\theta \cdot (d\varphi) = r \sin\theta\, d\varphi,
\end{aligned}
$$

to je zapremina

$$dV = h_1 h_2 h_3\, du^1\, du^2\, du^3,$$

odnosno

$$\mathrm{d}V = 1 \cdot r \cdot r \sin\theta \,\mathrm{d}r \,\mathrm{d}\varphi \,\mathrm{d}\varphi = r^2 \sin\theta \,\mathrm{d}r \,\mathrm{d}\varphi \,\mathrm{d}\varphi.$$

♡

Zad. 2.118. Naći Lameove koeficijente i zapreminski element $\mathrm{d}V$ u sferoidalnim koordinatama.

Rešenje.

Veza između ova dva koordinatna sistema je:

$$\begin{aligned} x &= a\mathrm{ch}\,\xi \cos\eta \cos\varphi, \\ y &= a\mathrm{ch}\,\xi \cos\eta \sin\varphi, \\ z &= a\mathrm{sh}\,\xi \sin\eta. \end{aligned} \tag{2.221}$$

Postupak određivanja Lameovih koeficijenata i izračunavanje zapreminskog elementa je isti kao i za prethodno posmatrane koordinatne sisteme: izračunavanje $\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}y$, $\mathrm{d}z$, zatim određivanje $\mathrm{d}s$ i Lameovih koeficijenata i na kraju određivanje elementa zapremine.

Diferenciranjem (2.221) dobijamo

$$\begin{aligned} \mathrm{d}x &= -a\mathrm{ch}\,\xi \cos\eta \sin\varphi \,\mathrm{d}\varphi - a\mathrm{ch}\,\xi \sin\eta \cos\varphi \,\mathrm{d}\eta + a\mathrm{sh}\,\xi \cos\eta \cos\varphi \,\mathrm{d}\xi, \\ \mathrm{d}y &= a\mathrm{ch}\,\xi \cos\eta \cos\varphi \,\mathrm{d}\varphi - a\mathrm{ch}\,\xi \sin\eta \sin\varphi \,\mathrm{d}\eta + a\mathrm{sh}\,\xi \cos\eta \sin\varphi \,\mathrm{d}\xi, \\ \mathrm{d}z &= a\mathrm{sh}\,\xi \cos\eta \,\mathrm{d}\eta + a\mathrm{ch}\,\xi \sin\eta \,\mathrm{d}\xi. \end{aligned}$$

Kvadrat elementa luka je

$$\begin{aligned} (\mathrm{d}s)^2 =& \mathrm{d}x^{\,2} + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2 = a^2(\mathrm{sh}^{\,2}\xi + \sin^2\eta)(\mathrm{d}\xi)^2 \\ &+ a^2(\mathrm{sh}^{\,2}\xi + \sin^2\eta)(\mathrm{d}\eta)^2 + a\mathrm{ch}^{\,2}\xi \cos^2\eta (\mathrm{d}\varphi)^2. \quad \Rightarrow \end{aligned}$$

Lameovi koeficijenti su

$$\begin{aligned} h_1 &= h_\xi = a\sqrt{\mathrm{sh}^{\,2}\xi + \sin^2\eta}, \\ h_2 &= h_\eta = a\sqrt{\mathrm{sh}^{\,2}\xi + \sin^2\eta}, \\ h_3 &= h_\varphi = a\mathrm{ch}\,\xi \cos\eta. \end{aligned}$$

Elementarna zapremine je

$$\begin{aligned} \mathrm{d}V =& \left(a\sqrt{\mathrm{sh}^{\,2}\xi + \sin^2\eta}\right)\left(a\sqrt{\mathrm{sh}^{\,2}\xi + \sin^2\eta}\right)(a\mathrm{ch}\,\xi \cos\eta)\,\mathrm{d}\varphi \,\mathrm{d}\eta \,\mathrm{d}\xi = \\ &= a^3\left(\mathrm{sh}^{\,2}\xi + \sin^2\eta\right)\mathrm{d}\varphi \,\mathrm{d}\eta \,\mathrm{d}\xi. \end{aligned}$$

♡

Zad. 2.119. Izraziti elementarnu površinu u odnosu na generalisane koordinate.

Rešenje.

Pokazali smo da se diferencijal vektora položaja, u generalisanim ortogonalnim koordinatama, može prikazati u obliku (vidi relaciju (2.138) na str. 116)

$$\mathrm{d}\mathbf{r} = h_1 \mathrm{d}u^1 \mathbf{e}_1 + h_2 \mathrm{d}u^2 \mathbf{e}_2 + h_3 \mathrm{d}u^3 \mathbf{e}_3 = \sum_{i=1}^{3} h_i \mathrm{d}u^i \mathbf{e}_i .$$

Specijalno, duž koordinatne linije u^1 koordinate u^2 i u^3 su konstante, pa je $\mathrm{d}\mathbf{r} = h_1 \mathrm{d}u^1 \mathbf{e}_1$. Dužina elementa luka $\mathrm{d}s_1$, duž u^1 koordinatne linije u tački P, je

$$\mathrm{d}s_1 = h_1 \mathrm{d}u^1 .$$

Slično dobijamo izraze za $\mathrm{d}s_2$ i $\mathrm{d}s_3$ duž koordinatnih linija u^2 i u^3, respektivno.

Kako se površina može izraziti preko vektorskog proizvoda (vidi zad. 1.9 na str. 61), to je površina koju obrazuju dužine $\mathrm{d}s_1$ i $\mathrm{d}s_2$ data sa

$$\begin{aligned} \mathrm{d}A_1 &= \left|(h_2 \mathrm{d}u^2 \mathbf{e}_2) \times (h_3 \mathrm{d}u^3 \mathbf{e}_3)\right| = \\ &= h_2 h_3 \mathrm{d}u^2 \mathrm{d}u^3 \left|\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3\right| = h_2 h_3 \mathrm{d}u^2 \mathrm{d}u^3 \left|\mathbf{e}_1\right| = \\ &= h_2 h_3 \mathrm{d}u^2 \mathrm{d}u^3 . \end{aligned}$$

Slično dobijamo i za ostale dve površine:

$$\begin{aligned} \mathrm{d}A_2 &= h_3 h_1 \mathrm{d}u^3 \mathrm{d}u^1 , \\ \mathrm{d}A_3 &= h_1 h_2 \mathrm{d}u^1 \mathrm{d}u^2 , \end{aligned}$$

ili kraće zapisano

$$\mathrm{d}A_i = \sum_{j,k=1}^{3} e_{ijk} h_j h_k \mathrm{d}u^j \mathrm{d}u^k ,$$

gde je e_{ijk} – tenzor alternacije, definisan sa

$$e_{ijk} = \begin{cases} e_{123} = +1; \\ +1, \text{ ako je } ijk \text{ parna permutacija indeksa 1,2,3,} \\ -1, \text{ ako je } ijk \text{ neparna permutacija indeksa 1,2,3,} \\ \quad 0, \text{ u ostalim slučajevima.} \end{cases}$$

♡

Zad. 2.120. Neka su u^1, u^2 i u^3 generalisane ortogonalne koordinate. Dokazati da je Jakobijan transformacije, koji simbolički označavamo na jedan od načina:

$$J = \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u^1,u^2,u^3)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u^1} & \dfrac{\partial y}{\partial u^1} & \dfrac{\partial z}{\partial u^1} \\ \dfrac{\partial x}{\partial u^2} & \dfrac{\partial y}{\partial u^2} & \dfrac{\partial z}{\partial u^3} \\ \dfrac{\partial x}{\partial u^3} & \dfrac{\partial y}{\partial u^3} & \dfrac{\partial z}{\partial u^3} \end{vmatrix}$$

jednak

$$J = \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u^1,u^2,u^3)} = h_1\, h_2\, h_3.$$

Rešenje.

Ako umesto Dekartovih koordinata x, y i z uvedemo nove promenljive u^1, u^2 i u^3, relacijama:

$$\begin{aligned} x &= x(u^1,u^2,u^3), \\ y &= y(u^1,u^2,u^3), \\ z &= z(u^1,u^2,u^3), \end{aligned}$$

gde su $x(u^i)$, $y(u^i)$ i $z(u^i)$, neprekidne i diferencijabilne funkcije po promenljivim u^i, $i = 1,2,3$, u nekoj oblasit V, onda su totalni diferencijali:

$$\begin{aligned} \mathrm{d}x &= \frac{\partial x}{\partial u^1}\mathrm{d}u^1 + \frac{\partial x}{\partial u^2}\mathrm{d}u^2 + \frac{\partial x}{\partial u^3}\mathrm{d}u^3, \\ \mathrm{d}y &= \frac{\partial y}{\partial u^1}\mathrm{d}u^1 + \frac{\partial y}{\partial u^2}\mathrm{d}u^2 + \frac{\partial y}{\partial u^3}\mathrm{d}u^3, \\ \mathrm{d}z &= \frac{\partial z}{\partial u^1}\mathrm{d}u^1 + \frac{\partial z}{\partial u^2}\mathrm{d}u^2 + \frac{\partial z}{\partial u^3}\mathrm{d}u^3, \end{aligned}$$

ili u matričnom obliku

$$\begin{bmatrix} \mathrm{d}x \\ \mathrm{d}y \\ \mathrm{d}z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u^1} & \dfrac{\partial x}{\partial u^2} & \dfrac{\partial x}{\partial u^3} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u^1} & \dfrac{\partial y}{\partial u^2} & \dfrac{\partial y}{\partial u^3} \\ \dfrac{\partial z}{\partial u^1} & \dfrac{\partial z}{\partial u^2} & \dfrac{\partial z}{\partial u^3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{d}u^1 \\ \mathrm{d}u^2 \\ \mathrm{d}u^3 \end{bmatrix}.$$

Kvadratna matrica

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u^1} & \dfrac{\partial x}{\partial u^2} & \dfrac{\partial x}{\partial u^3} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u^1} & \dfrac{\partial y}{\partial u^2} & \dfrac{\partial y}{\partial u^3} \\ \dfrac{\partial z}{\partial u^1} & \dfrac{\partial z}{\partial u^2} & \dfrac{\partial z}{\partial u^3} \end{bmatrix}$$

je matrica transformacije promenljivih. Njena determinanta je tzv. funkcionalna determinanta ili Jakobijan, a simbolički se označava sa

$$J = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u^1, u^2, u^3)}.$$

Elementi ove determinante mogu da se povežu sa tangentnim baznim vektorima koordinatnih osa:

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^i} = \frac{\partial}{\partial u^i}(x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}) = \frac{\partial x}{\partial u^i}\mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial u^i}\mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial u^i}\mathbf{k}.$$

Kako mešoviti proizvod može da se prikaže pomoću formalne determinante (vidi zad. 1.14, str. 63), to je funkcionalna determinanta jednaka mešovitom proizvodu

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u^1} & \frac{\partial y}{\partial u^1} & \frac{\partial z}{\partial u^1} \\ \frac{\partial x}{\partial u^2} & \frac{\partial y}{\partial u^2} & \frac{\partial z}{\partial u^2} \\ \frac{\partial x}{\partial u^3} & \frac{\partial y}{\partial u^3} & \frac{\partial z}{\partial u^3} \end{vmatrix} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^1} \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^2} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^3} \right). \tag{2.222}$$

Ovi vektori mogu da se izraze preko Lameovih koeficijenata h_i i ortova $\mathbf{e}_i$ (vidi str. 114, jed. (2.133)), pa je vrednost determinante (2.222)

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u^1} & \frac{\partial y}{\partial u^1} & \frac{\partial z}{\partial u^1} \\ \frac{\partial x}{\partial u^2} & \frac{\partial y}{\partial u^2} & \frac{\partial z}{\partial u^2} \\ \frac{\partial x}{\partial u^3} & \frac{\partial y}{\partial u^3} & \frac{\partial z}{\partial u^3} \end{vmatrix} = h_1\mathbf{e}_1 \cdot (h_2\mathbf{e}_2 \times h_3\mathbf{e}_3) = h_1\, h_2\, h_3\, \mathbf{e}_1 \cdot (\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3)\,.$$

Kako su $\mathbf{e}_i$ ortonormirani vektori to je $\mathbf{e}_1 \cdot (\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3) = 1$, pa konačno dobijamo

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u^1} & \frac{\partial y}{\partial u^1} & \frac{\partial z}{\partial u^1} \\ \frac{\partial x}{\partial u^2} & \frac{\partial y}{\partial u^2} & \frac{\partial z}{\partial u^2} \\ \frac{\partial x}{\partial u^3} & \frac{\partial y}{\partial u^3} & \frac{\partial z}{\partial u^3} \end{vmatrix} = h_1\, h_2\, h_3.$$

Napomena. Ako je Jakobijan identički jednak nuli tada su $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^1}$, $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^2}$ i $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^3}$ komplanarni vektori, tj. leže u jednoj ravni i linearno su zavisni. Dakle, u tom slučaju x, y i z nisu nezavisne, tj. postoji funkcija oblika $F(x, y, z) = 0$. Važi i obrnuto. Prema tome $J \neq 0$ je potreban i dovoljan uslov da bi postojala koordinatna transformacija oblika:

$$x = x(u^1, u^2, u^3),$$
$$y = y(u^1, u^2, u^3),$$
$$z = z(u^1, u^2, u^3)$$

i njoj inverzna

$$u^i = u^i(x, y, z), \qquad i = 1, 2, 3.$$

♡

Zad. 2.121. Neka su u^1, u^2 i u^3 generalisane krivolinijske koordinate. Dokazati da su $\dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^1}$, $\dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^2}$, $\dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^3}$ i ∇u^1, ∇u^2, ∇u^3 recipročni vektori.

Rešenje.

Da bi vektori bili recipročni, potrebno je i dovoljno da je

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^p} \cdot \nabla u^q = \begin{cases} 1, & \text{za} \quad p = q, \\ 0, & \text{za} \quad p \neq q, \end{cases} \quad p, q = 1, 2, 3.$$

U ovom slučaju je

$$\mathrm{d}\mathbf{r} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^1}\mathrm{d}u^1 + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^2}\mathrm{d}u^2 + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^3}\mathrm{d}u^3,$$

pa se, skalarnim množenjem sa ∇u^1, dobija

$$\nabla u_1 \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = \mathrm{d}u_1 = \left(\nabla u_1 \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_1}\right)\mathrm{d}u_1 + \left(\nabla u_1 \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_2}\right)\mathrm{d}u_2 + \left(\nabla u_1 \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_3}\right)\mathrm{d}u_3,$$

odnosno

$$\nabla u^1 \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^1} = 1, \qquad \nabla u^1 \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^2} = 0, \qquad \nabla u^1 \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^3} = 0.$$

Slično se pokazuje da je

$$\nabla u^2 \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^p} = \delta_{2p} \quad \text{i} \quad \nabla u^3 \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^p} = \delta_{3p}.$$

♡

Zad. 2.122. Dokazati da je

$$\left[\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^1} \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^2} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^3}\right)\right] \left[\nabla u^1 \cdot \left(\nabla u^2 \times \nabla u^3\right)\right] = 1.$$

Rešenje.

U prethodnom zadatku smo dokazali da su $\dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^1}, \dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^2}, \dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^3}$ i $\nabla u^1, \nabla u^2, \nabla u^3$ recipročni vektori.

Označimo odgovarajuće Jakobijane sa:

$$J = \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u^1,u^2,u^3)} \quad \text{i} \quad j = \frac{\partial(u^1,u^2,u^3)}{\partial(x,y,z)},$$

koji su jednaki odgovarajućim mešovitim proizvodima (vidi zad. 2.120, str. 212):

$$J = \left| \left[\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^1} \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^2} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^3} \right) \right] \right|,$$
$$j = \left| \left[\nabla u^1 \cdot \left(\nabla u^2 \times \nabla u^3 \right) \right] \right|.$$

Dalje, prema teoremi koja kaže da mešovit proizvod tri vektora daje zapreminu, a mešovit proizvod recipročnih vektora daje recipročnu zapreminu (vidi zad. 1.19c, na str. 65), dobijamo

$$\nabla u^1 \cdot \left(\nabla u^2 \times \nabla u^3 \right) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial u^1}{\partial x} & \dfrac{\partial u^1}{\partial y} & \dfrac{\partial u^1}{\partial z} \\ \dfrac{\partial u^2}{\partial x} & \dfrac{\partial u^2}{\partial y} & \dfrac{\partial u^3}{\partial z} \\ \dfrac{\partial u^3}{\partial x} & \dfrac{\partial u^3}{\partial y} & \dfrac{\partial u^3}{\partial z} \end{vmatrix} = j$$

i

$$\frac{1}{\mathrm{d}V}\mathrm{d}V = j \cdot J = 1,$$

odnosno

$$\left[\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^1} \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^2} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^3} \right) \right] \left[\nabla u^1 \cdot \left(\nabla u^2 \times \nabla u^3 \right) \right] = 1,$$

što je trebalo i dokazati.

♡

Zad. 2.123. Dokazati da kvadrat elementa luka, u generalisanim koordinatama može da se predstavi izrazom

$$\mathrm{d}s^2 = \sum_{p=1}^{3} \sum_{q=1}^{3} g_{pq} \mathrm{d}u^p \, \mathrm{d}u^q.$$

Rešenje.

Imamo

$$\mathrm{d}\mathbf{r} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^1}\mathrm{d}u^1 + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^2}\mathrm{d}u^2 + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^3}\mathrm{d}u^3 = \boldsymbol{\alpha}_1 \mathrm{d}u^1 + \boldsymbol{\alpha}_2 \mathrm{d}u^2 + \boldsymbol{\alpha}_3 \mathrm{d}u^3,$$

pa je

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}\mathbf{r}\cdot\mathrm{d}\mathbf{r} =& \boldsymbol{\alpha}_1\cdot\boldsymbol{\alpha}_1(\mathrm{d}u^1)^2 + \boldsymbol{\alpha}_1\cdot\boldsymbol{\alpha}_2\mathrm{d}u^1\mathrm{d}u^2 + \boldsymbol{\alpha}_1\cdot\boldsymbol{\alpha}_3\mathrm{d}u^1\mathrm{d}u^3\\
&+\boldsymbol{\alpha}_2\cdot\boldsymbol{\alpha}_1\mathrm{d}u^2\mathrm{d}u^1 + \boldsymbol{\alpha}_2\cdot\boldsymbol{\alpha}_2(\mathrm{d}u^2)^2 + \boldsymbol{\alpha}_2\cdot\boldsymbol{\alpha}_3\mathrm{d}u^2\mathrm{d}u^3\\
&+\boldsymbol{\alpha}_3\cdot\boldsymbol{\alpha}_1\mathrm{d}u^3\mathrm{d}u^1 + \boldsymbol{\alpha}_3\cdot\boldsymbol{\alpha}_2\mathrm{d}u^3\mathrm{d}u^2 + \boldsymbol{\alpha}_3\cdot\boldsymbol{\alpha}_3(\mathrm{d}u^3)^2\\
&=\sum_{p=1}^{3}\sum_{q=1}^{3} g_{pq}\mathrm{d}u^p\,\mathrm{d}u^q \qquad\qquad \text{gde je } g_{pq} = \boldsymbol{\alpha}_p\cdot\boldsymbol{\alpha}_q.
\end{aligned}$$

Ovaj izraz naziva se *fundamentalna kvadratna forma* ili *metrička forma*. Veličine g_{pq} se nazivaju *metrički koeficijenti* i oni su simetrični ($g_{pq} = g_{qp}$). Ako je $g_{pq} = 0$ za $p \neq q$ onda je koordinatni sistem ortogonlan. Tada je $g_{11} = h_1^2$, $g_{22} = h_2^2$, $g_{33} = h_3^2$.

♡

2.6.9 Gradijent, divergencija i rotor u generalisanim ortogonalnim koordinatama

Zad. 2.124. Odredi $\nabla\phi$ u ortogonalnim generalisanim koordinatama.

Rešenje.

Neka je

$$\nabla\phi = f_1\mathbf{e}_1 + f_2\mathbf{e}_2 + f_3\mathbf{e}_3, \tag{2.223}$$

gde su f_i, $i = 1, 2, 3$ jednoznačno određene funkcije od u^i. Kako je

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\mathbf{r} =& \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial u^1}\mathrm{d}u^1 + \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial u^2}\mathrm{d}u^2 + \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial u^3}\mathrm{d}u^3 =\\
=& h_1\mathbf{e}_1\mathrm{d}u^1 + h_2\mathbf{e}_2\mathrm{d}u^2 + h_3\mathbf{e}_3\mathrm{d}u^3,
\end{aligned}$$

onda je (vidi str. 85, (2.26))

$$\mathrm{d}\phi = \nabla\phi\cdot\mathrm{d}\mathbf{r} = h_1f_1\mathrm{d}u^1 + h_2f_2\mathrm{d}u^2 + h_3f_3\mathrm{d}u^3. \tag{2.224}$$

S druge strane, totalni diferencijal skalarne funkcije $\phi(u^i)$ je

$$\mathrm{d}\phi = \frac{\partial\phi}{\partial u^1}\mathrm{d}u^1 + \frac{\partial\phi}{\partial u^2}\mathrm{d}u^2 + \frac{\partial\phi}{\partial u^3}\mathrm{d}u^3. \tag{2.225}$$

Iz (2.224) i (2.225) sledi

$$f_1 = \frac{1}{h_1}\frac{\partial\phi}{\partial u^1}, \qquad f_2 = \frac{1}{h_2}\frac{\partial\phi}{\partial u^2}, \qquad f_3 = \frac{1}{h_3}\frac{\partial\phi}{\partial u^3}. \tag{2.226}$$

Smenom veličina (2.226) u (2.223) dobijamo

$$\begin{aligned}\nabla\phi &= \frac{\mathbf{e}_1}{h_1}\frac{\partial\phi}{\partial u^1} + \frac{\mathbf{e}_2}{h_2}\frac{\partial\phi}{\partial u^2} + \frac{\mathbf{e}_3}{h_3}\frac{\partial\phi}{\partial u^3} = \\ &= \left(\frac{\mathbf{e}_1}{h_1}\frac{\partial}{\partial u^1} + \frac{\mathbf{e}_2}{h_2}\frac{\partial}{\partial u^2} + \frac{\mathbf{e}_3}{h_3}\frac{\partial}{\partial u^3}\right)\phi.\end{aligned}$$

Dakle, ∇ operator, u ortogonalnim generalisanim koordinatama je

$$\nabla \equiv \frac{\mathbf{e}_1}{h_1}\frac{\partial}{\partial u^1} + \frac{\mathbf{e}_2}{h_2}\frac{\partial}{\partial u^2} + \frac{\mathbf{e}_3}{h_3}\frac{\partial}{\partial u^3}.$$

♡

Zad. 2.125. Neka su u^1, u^2 i u^3 orotogonalne koordinate. Dokazati da je:

a) $|\nabla u_p| = h_p^{-1}$,

b) $\mathbf{e}_p = \mathbf{E}_p, \qquad p = 1, 2, 3.$

Rešenje.

a) Stavljajući da je $\phi = u^1$ u relacijama na strani 216, dobijamo $\nabla u^1 = \dfrac{\mathbf{e}_1}{h_1}$. Intenzitet ovog vektora je $\left|\nabla u^1\right| = \dfrac{|\mathbf{e}_1|}{h_1} = h_1^{-1}$, jer je $|\mathbf{e}_1| = 1$. Ponavljanjem postupka za $\phi = u^2$ i $\phi = u^3$ dobijamo:

$$\begin{aligned}\left|\nabla u^2\right| &= \frac{|\mathbf{e}_2|}{h_2} = h_2^{-1} \\ \left|\nabla u^3\right| &= \frac{|\mathbf{e}_3|}{h_3} = h_3^{-1},\end{aligned}$$

ili sažeto napisano

$$|\nabla u^p| = h_p^{-1}, \qquad p = 1, 2, 3.$$

b) Po definiciji je $\mathbf{E}_p = \dfrac{\nabla u^p}{|\nabla u^p|}$. Iskoristivši rezultat ovog zadatka pod a) dobijamo da je

$$\mathbf{E}_p = h_p \nabla u^p = \mathbf{e}_p,$$

što je trebalo dokazati.

♡

Zad. 2.126. Dokazati da je $\mathbf{e}_1 = h_2 h_3 \nabla u^2 \times \nabla u^3$ i slično za $\mathbf{e}_2$ i $\mathbf{e}_3$, gde su u^1, u^2 i u^3 orotogonalne koordinate.

Rešenje.

Iz prethodnog zadatka imamo da je

$$\nabla u^1 = \frac{\mathbf{e}_1}{h_1}, \qquad \nabla u^2 = \frac{\mathbf{e}_2}{h_2}, \qquad \nabla u^3 = \frac{\mathbf{e}_3}{h_3},$$

pa je

$$\nabla u^2 \times \nabla u^3 = \frac{\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3}{h_2 h_3} = \frac{\mathbf{e}_1}{h_2 h_3} \qquad \text{i} \qquad \mathbf{e}_1 = h_2 h_3 \nabla u^2 \times \nabla u^3.$$

Na isti način dobijamo i za preostala dva vektora:

$$\mathbf{e}_2 = h_3 h_1 \nabla u^3 \times \nabla u^1 \qquad \text{i} \qquad \mathbf{e}_3 = h_1 h_2 \nabla u^1 \times \nabla u^2,$$

što je i trebalo dokazati.

♡

Zad. 2.127. Pokazati da za ortogonalne generalisane kooordinate važi:

$$\text{a)} \qquad \nabla \cdot (A_1 \mathbf{e}_1) = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \frac{\partial}{\partial u^1}(A_1 h_2 h_3)$$

$$\text{b)} \qquad \nabla \times (A_1 \mathbf{e}_1) = \frac{\mathbf{e}_2}{h_3 h_1} \frac{\partial}{\partial u^3}(A_1 h_1) - \frac{\mathbf{e}_3}{h_1 h_2} \frac{\partial}{\partial u^2}(A_1 h_1),$$

kao i analogne relacije za vektore $A_2 \mathbf{e}_2$ i $A_3 \mathbf{e}_3$, gde je $\mathbf{A} = \sum_i A_i \mathbf{e}_i$.

Rešenje.

a) Iskoristivši izraze za $\mathbf{e}_i$, iz zadatka 2.126, str. 217, dobijamo:

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot (A_1 \mathbf{e}_1) =& \nabla \cdot (A_1 h_2 h_3 \nabla u^2 \times \nabla u^3) = \\
=& \nabla (A_1 h_2 h_3) \cdot \nabla u^2 \times \nabla u^3 + A_1 h_2 h_3 \nabla \cdot (\nabla u^2 \times \nabla u^3) = \\
=& \nabla (A_1 h_2 h_3) \cdot \frac{\mathbf{e}_2}{h_2} \times \frac{\mathbf{e}_3}{h_3} + 0 = \nabla (A_1 h_2 h_3) \cdot \frac{\mathbf{e}_1}{h_2 h_3} = \\
=& \left[\frac{\mathbf{e}_1}{h_1} \frac{\partial}{\partial u_1}(A_1 h_2 h_3) + \frac{\mathbf{e}_2}{h_2} \frac{\partial}{\partial u^2}(A_1 h_2 h_3) + \frac{\mathbf{e}_3}{h_3} \frac{\partial}{\partial u^3}(A_1 h_2 h_3) \right] \cdot \frac{\mathbf{e}_1}{h_2 h_3} = \\
=& \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \frac{\partial}{\partial u^1}(A_1 h_2 h_3).
\end{aligned}$$

Na sličan način dobijamo da je

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot (A_2 \mathbf{e}_2) =& \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \frac{\partial}{\partial u_2}(A_2 h_3 h_1), \\
\nabla \cdot (A_3 \mathbf{e}_3) =& \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \frac{\partial}{\partial u_3}(A_3 h_1 h_2).
\end{aligned}$$

b) Iskoristivši izraze za $\mathbf{e}_i$, iz zadatka 2.126, dobijamo:

$$\begin{aligned}
\nabla\times(A_1\mathbf{e}_1) =& \nabla\times(A_1h_1\nabla u^1) = \\
=& \nabla(A_1h_1)\times\nabla u^1 + A_1h_1\nabla\times\nabla u^1 = \\
=& \nabla(A_1h_1)\times\frac{\mathbf{e}_1}{h_1} + 0 = \\
=& \left[\frac{\mathbf{e}_1}{h_1}\frac{\partial}{\partial u^1}(A_1h_1) + \frac{\mathbf{e}_2}{h_2}\frac{\partial}{\partial u^2}(A_1h_1) + \frac{\mathbf{e}_3}{h_3}\frac{\partial}{\partial u^3}(A_1h_1)\right]\times\frac{\mathbf{e}_1}{h_1} = \\
=& \frac{\mathbf{e}_2}{h_3h_1}\frac{\partial}{\partial u^3}(A_1h_1) - \frac{\mathbf{e}_3}{h_1h_2}\frac{\partial}{\partial u^2}(A_1h_1).
\end{aligned}$$

Na sličan način dobijamo i

$$\begin{aligned}
\nabla\times(A_2\mathbf{e}_2) =& \frac{\mathbf{e}_3}{h_1h_2}\frac{\partial}{\partial u^1}(A_2h_2) - \frac{\mathbf{e}_1}{h_2h_3}\frac{\partial}{\partial u^3}(A_2h_2), \\
\nabla\times(A_3\mathbf{e}_3) =& \frac{\mathbf{e}_1}{h_2h_3}\frac{\partial}{\partial u^2}(A_3h_3) - \frac{\mathbf{e}_2}{h_3h_1}\frac{\partial}{\partial u^1}(A_3h_3).
\end{aligned}$$

♡

Zad. 2.128. Izraziti rot $\mathbf{A}(=\nabla\times\mathbf{A})$ u ortogonalnim generalisanim koordinatama.

Rešenje.

Kako je $\mathbf{A} = \sum_i A_i\mathbf{e}_i$, iskoristivši rezultate prethodnog zadatka 2.127, dobijamo

$$\begin{aligned}
\nabla\times\mathbf{A} =& \nabla\times(A_1\mathbf{e}_1 + A_2\mathbf{e}_2 + A_3\mathbf{e}_3) = \\
=& \nabla\times(A_1\mathbf{e}_1) + \nabla\times(A_2\mathbf{e}_2) + \nabla\times(A_3\mathbf{e}_3) = \\
=& \frac{\mathbf{e}_2}{h_3h_1}\frac{\partial}{\partial u^3}(A_1h_1) - \frac{\mathbf{e}_3}{h_1h_2}\frac{\partial}{\partial u^2}(A_1h_1) + \\
& + \frac{\mathbf{e}_3}{h_1h_2}\frac{\partial}{\partial u^1}(A_2h_2) - \frac{\mathbf{e}_1}{h_2h_3}\frac{\partial}{\partial u^3}(A_2h_2) + \\
& + \frac{\mathbf{e}_1}{h_2h_3}\frac{\partial}{\partial u^2}(A_3h_3) - \frac{\mathbf{e}_2}{h_3h_1}\frac{\partial}{\partial u^1}(A_3h_3) = \\
=& \frac{\mathbf{e}_1}{h_2h_3}\left[\frac{\partial}{\partial u^2}(A_3h_3) - \frac{\partial}{\partial u^3}(A_2h_2)\right] + \frac{\mathbf{e}_2}{h_3h_1}\left[\frac{\partial}{\partial u^3}(A_1h_1) - \frac{\partial}{\partial u^1}(A_3h_3)\right] + \\
& + \frac{\mathbf{e}_3}{h_1h_2}\left[\frac{\partial}{\partial u^1}(A_2h_2) - \frac{\partial}{\partial u^2}(A_1h_1)\right] = \\
=& \frac{h_1\mathbf{e}_1}{h_1h_2h_3}\left[\frac{\partial}{\partial u^2}(A_3h_3) - \frac{\partial}{\partial u^3}(A_2h_2)\right] + \frac{h_2\mathbf{e}_2}{h_3h_1h_2}\left[\frac{\partial}{\partial u^3}(A_1h_1) - \frac{\partial}{\partial u^1}(A_3h_3)\right] + \\
& + \frac{h_3\mathbf{e}_3}{h_1h_2h_3}\left[\frac{\partial}{\partial u^1}(A_2h_2) - \frac{\partial}{\partial u^2}(A_1h_1)\right],
\end{aligned}$$

pa se rot$\mathbf{A}$ može napisati u obliku

$$\nabla \times \mathbf{A} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \begin{vmatrix} h_1\mathbf{e}_1 & h_2\mathbf{e}_2 & h_3\mathbf{e}_3 \\ \dfrac{\partial}{\partial u^1} & \dfrac{\partial}{\partial u^2} & \dfrac{\partial}{\partial u^3} \\ A_1 h_1 & A_2 h_2 & A_3 h_3 \end{vmatrix}.$$

♡

Zad. 2.129. Izračunati $\nabla^2\psi$ u ortogonalnim generalisanim koordinatama, gde je ψ skalarna funkcija.

Rešenje.

Prema zadatku 2.124, na str. 216, imamo

$$\nabla\psi = \frac{\mathbf{e}_1}{h_1}\frac{\partial\psi}{\partial u^1} + \frac{\mathbf{e}_2}{h_2}\frac{\partial\psi}{\partial u^2} + \frac{\mathbf{e}_3}{h_3}\frac{\partial\psi}{\partial u^3}.$$

Neka je $\mathbf{A} = \nabla\psi$ onda je $A_1 = \dfrac{1}{h_1}\dfrac{\partial\psi}{\partial u^1}$, $A_2 = \dfrac{1}{h_2}\dfrac{\partial\psi}{\partial u^2}$, $A_3 = \dfrac{1}{h_3}\dfrac{\partial\psi}{\partial u^3}$, pa se zadatak svodi na zadatak 2.127a, na str. 219.

$$\begin{aligned}\nabla\cdot\mathbf{A} &= \nabla\cdot\nabla\psi = \nabla^2\psi \\ &= \frac{1}{h_1h_2h_3}\left[\frac{\partial}{\partial u^1}\left(\frac{h_2h_3}{h_1}\frac{\partial\psi}{\partial u^1}\right) + \frac{\partial}{\partial u^2}\left(\frac{h_3h_1}{h_2}\frac{\partial\psi}{\partial u^2}\right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial}{\partial u^3}\left(\frac{h_1h_2}{h_3}\frac{\partial\psi}{\partial u^3}\right)\right].\end{aligned}$$

♡

Zad. 2.130. Izračunaj u cilindričnim koordinatama:
a) $\nabla\Phi$, b) $\nabla\cdot\mathbf{A}$, c) $\nabla\times\mathbf{A}$, d) $\nabla^2\Phi$.

Rešenje.

Za cilindrične koordinate (ρ, ϕ, z) je:

$$\begin{aligned} &u^1 = \rho, && u^2 = \phi, && u^3 = z; \\ &\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_\rho, && \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_\phi, && \mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_z; \\ &h_1 = h_\rho = 1, && h_2 = h_\phi = \rho, && h_3 = h_z = 1, \end{aligned}$$

pa je $\mathbf{A} = A_\rho\mathbf{e}_1 + A_\phi\mathbf{e}_2 + A_z\mathbf{e}_3$.

a)

$$\begin{aligned}\nabla\Phi =&\frac{1}{h_1}\frac{\partial\Phi}{\partial u^1}\mathbf{e}_1+\frac{1}{h_2}\frac{\partial\Phi}{\partial u^2}\mathbf{e}_2+\frac{1}{h_3}\frac{\partial\Phi}{\partial u^3}\mathbf{e}_3=\\ =&\frac{1}{1}\frac{\partial\Phi}{\partial\rho}\mathbf{e}_\rho+\frac{1}{\rho}\frac{\partial\Phi}{\partial\phi}\mathbf{e}_\phi+\frac{1}{1}\frac{\partial\Phi}{\partial z}\mathbf{e}_z=\\ =&\frac{\partial\Phi}{\partial\rho}\mathbf{e}_\rho+\frac{1}{\rho}\frac{\partial\Phi}{\partial\phi}\mathbf{e}_\phi+\frac{\partial\Phi}{\partial z}\mathbf{e}_z.\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}\nabla\cdot\mathbf{A} =&\frac{1}{h_1h_2h_3}\left[\frac{\partial}{\partial u^1}(A_1h_2h_3)+\frac{\partial}{\partial u^2}(A_2h_3h_1)+\frac{\partial}{\partial u^3}(A_3h_1h_2)\right]=\\ =&\frac{1}{(1)(\rho)(1)}\left[\frac{\partial}{\partial\rho}((\rho)(1)A_\rho)+\frac{\partial}{\partial\phi}((1)(1)A_\phi)+\frac{\partial}{\partial z}((1)(\rho)A_z)\right]=\\ =&\frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho A_\rho)+\frac{\partial A_\phi}{\partial\phi}+\frac{\partial}{\partial z}(\rho A_z)\right].\end{aligned}$$

c)

$$\nabla\times\mathbf{A}=\frac{1}{h_1h_2h_3}\begin{vmatrix} h_1\mathbf{e}_1 & h_2\mathbf{e}_2 & h_3\mathbf{e}_3\\ \dfrac{\partial}{\partial u^1} & \dfrac{\partial}{\partial u^2} & \dfrac{\partial}{\partial u^3}\\ A_1h_1 & A_2h_2 & A_3h_3\end{vmatrix}=\frac{1}{\rho}\begin{vmatrix} \mathbf{e}_\rho & \rho\mathbf{e}_\phi & \mathbf{e}_z\\ \dfrac{\partial}{\partial\rho} & \dfrac{\partial}{\partial\phi} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ A_\rho & \rho A_\phi & A_z\end{vmatrix}=$$

$$=\frac{1}{\rho}\left[\left(\frac{\partial A_z}{\partial\phi}-\frac{\partial}{\partial z}(\rho A_\phi)\right)\mathbf{e}_\rho+\left(\rho\frac{\partial A_\rho}{\partial z}-\rho\frac{\partial A_z}{\partial\rho}\right)\mathbf{e}_\phi+\left(\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho A_\phi)-\frac{\partial A_\rho}{\partial\phi}\right)\mathbf{e}_z\right].$$

♡

Zad. 2.131. Napisati Laplasovu jednačinu u paraboličnim koordinatama.

Rešenje.

Za parabolične koordinate (ρ,ϕ,z) je:

$u^1=u,\qquad u^2=v,\qquad u^3=z;$

$\mathbf{e}_1=\mathbf{e}_u,\qquad \mathbf{e}_2=\mathbf{e}_v,\qquad \mathbf{e}_3=\mathbf{e}_z;$

$h_1=h_u=\sqrt{u^2+v^2},\qquad h_2=h_v=\sqrt{u^2+v^2},\qquad h_3=h_z=1.$

Onda je

$$\begin{aligned}\nabla^2\psi =&\frac{1}{u^2+v^2}\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial\psi}{\partial u}\right)+\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial\psi}{\partial v}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left((u^2+v^2)\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)\right]=\\ =&\frac{1}{u^2+v^2}\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial u^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial v^2}\right)+\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}.\end{aligned}$$

i Laplasova jednačina je $\nabla^2\psi = 0$, odnosno

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial u^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial v^2} + (u^2+v^2)\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} = 0.$$

♡

2.6.10 Površi u ortogonalnim generalisanim koordinatama

Zad. 2.132. Pokazati da se kvadrat elementa dužine luka, krive $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$ koja leži u ravni, može napisati u obliku

$$\mathrm{d}s^2 = E\,\mathrm{d}u^2 + 2F\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v + G\,\mathrm{d}v^2.$$

Rešenje.

Kako je

$$\mathrm{d}\mathbf{r} = \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial u}\mathrm{d}u + \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial v}\mathrm{d}v,$$

to je

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\,s^2 =& \mathrm{d}\mathbf{r}\cdot\mathrm{d}\mathbf{r} = \\ =& \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial u}\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial u}\mathrm{d}u^2 + 2\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial u}\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial v}\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v + \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial v}\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial v}\mathrm{d}v^2 = \\ =& E\,\mathrm{d}u^2 + 2F\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v + G\,\mathrm{d}v^2,\end{aligned}$$

gde je:

$$E = \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial u}\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial u} \quad F = \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial u}\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial v} \quad G = \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial v}\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial v}.$$

♡

Zad. 2.133. Pokazati da element površi, definisane relacijom $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$, može da se napiše u obliku

$$\mathrm{d}\,S = \sqrt{E\,G - F^2}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v.$$

Rešenje.

Element površi dat je sa

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\,S =& \left|\left(\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial u}\mathrm{d}u\right)\times\left(\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial v}\mathrm{d}v\right)\right| = \left|\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial u}\times\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial v}\right|\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = \\ =& \sqrt{\left(\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial u}\times\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial v}\right)\cdot\left(\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial u}\times\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial v}\right)}\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v.\end{aligned}$$

Potkorena veličina je

$$\left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}\cdot\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}\right)\left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\cdot\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\right)-\left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}\cdot\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\right)\left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\cdot\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}\right)=EG-F,$$

što je i traženi rezultat.

♡

Napomena. Ovu ideju možemo da demonstriramo posmatrajući vektorski proizvod, odakle dobijamo:

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b}=ab\sin\alpha\mathbf{n}\quad\Rightarrow$$

$$\begin{aligned}|\mathbf{a}\times\mathbf{b}|^2=a^2b^2\sin^2\alpha=a^2b^2(1-\cos^2\alpha)&=\\ &=a^2b^2-(ab\cos\alpha)^2=a^2b^2-(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})^2=\\ &=(\mathbf{a}\cdot\mathbf{a})(\mathbf{b}\cdot\mathbf{b})-(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})^2=\\ &=\begin{vmatrix}\mathbf{a}\cdot\mathbf{a} & \mathbf{a}\cdot\mathbf{b}\\ \mathbf{b}\cdot\mathbf{a} & \mathbf{b}\cdot\mathbf{b}\end{vmatrix}\quad\Rightarrow\end{aligned}$$

$$|\mathbf{a}\times\mathbf{b}|=\sqrt{a^2b^2-(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})^2}.$$

2.6.11 Generalisani sistemi

Zad. 2.134. Neka je $\mathbf{A}$ vektor i neka su dva ortogonalna krivolinijska koordinatna sistema (u^1,u^2,u^3) i $(\overline{u}^1,\overline{u}^2,\overline{u}^3)$. Naći vezu između kontravarijanatnih komponenti ovog vektora u ta dva koordinatna sistema.

Rešenje.

Pretpostavimo da su koordinatne transformacije između Dekartovog pravouglog sistema i sistema (u^1,u^2,u^3) odnosno $(\overline{u}^1,\overline{u}^2,\overline{u}^3)$, date sa:

$$\begin{cases} x=x_1(u^1,u^2,u^3), & y=y_1(u^1,u^2,u^3), & z=z_1(u^1,u^2,u^3)\\ x=x_2(\overline{u}^1,\overline{u}^2,\overline{u}^3), & y=y_2(\overline{u}^1,\overline{u}^2,\overline{u}^3), & z=z_2(\overline{u}^1,\overline{u}^2,\overline{u}^3).\end{cases}\tag{2.227}$$

Tada postoji direktna transformacija pomoću koje se prelazi iz sistema (u^1,u^2,u^3) u sistem $(\overline{u}^1,\overline{u}^2,\overline{u}^3)$ definisana sa:

$$u^1=u^1(\overline{u}^1,\overline{u}^2,\overline{u}^3),\qquad u^2=u^2(\overline{u}^1,\overline{u}^2,\overline{u}^3),\qquad u^3=u^3(\overline{u}^1,\overline{u}^2,\overline{u}^3),\tag{2.228}$$

i obrnuto. Na osnovu prvih jednačina imamo:

$$\mathrm{d}\mathbf{r}=\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^1}\mathrm{d}u^1+\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^2}\mathrm{d}u^2+\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^3}\mathrm{d}u^3=\boldsymbol{\alpha}_1\mathrm{d}u^1+\boldsymbol{\alpha}_2\mathrm{d}u^2+\boldsymbol{\alpha}_3\mathrm{d}u^3,$$

odnosno

$$\mathrm{d}\mathbf{r}=\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \overline{u}^1}\mathrm{d}\overline{u}^1+\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \overline{u}^2}\mathrm{d}\overline{u}^2+\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \overline{u}^3}\mathrm{d}\overline{u}^3=\overline{\boldsymbol{\alpha}}_1\mathrm{d}\overline{u}^1+\overline{\boldsymbol{\alpha}}_2\mathrm{d}\overline{u}^2+\overline{\boldsymbol{\alpha}}_3\mathrm{d}\overline{u}^3.$$

Izjednačavanjem desne strane dobijamo

$$\boldsymbol{\alpha}_1 \mathrm{d}u^1 + \boldsymbol{\alpha}_2 \mathrm{d}u^2 + \boldsymbol{\alpha}_3 \mathrm{d}u^3 = \overline{\boldsymbol{\alpha}}_1 \mathrm{d}\overline{u}^1 + \overline{\boldsymbol{\alpha}}_2 \mathrm{d}\overline{u}^2 + \overline{\boldsymbol{\alpha}}_3 \mathrm{d}\overline{u}^3. \tag{2.229}$$

Iz (2.228) sledi da je

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}u^1 =& \frac{\partial u^1}{\partial \overline{u}^1}\mathrm{d}\overline{u}^1 + \frac{\partial u^1}{\partial \overline{u}^2}\mathrm{d}\overline{u}^2 + \frac{\partial u^1}{\partial \overline{u}^3}\mathrm{d}\overline{u}^3\\
\mathrm{d}u^2 =& \frac{\partial u^2}{\partial \overline{u}^1}\mathrm{d}\overline{u}^1 + \frac{\partial u^2}{\partial \overline{u}^2}\mathrm{d}\overline{u}^2 + \frac{\partial u^2}{\partial \overline{u}^3}\mathrm{d}\overline{u}^3\\
\mathrm{d}u^3 =& \frac{\partial u^3}{\partial \overline{u}^1}\mathrm{d}\overline{u}^1 + \frac{\partial u^3}{\partial \overline{u}^2}\mathrm{d}\overline{u}^2 + \frac{\partial u^3}{\partial \overline{u}^3}\mathrm{d}\overline{u}^3.
\end{aligned}$$

Zamenom u jednačinu (2.229) i izjednačavanjem koeficijenata uz $\mathrm{d}\overline{u}^1$, $\mathrm{d}\overline{u}^2$ i $\mathrm{d}\overline{u}^3$, dobija se:

$$\begin{cases}
\overline{\boldsymbol{\alpha}}_1 = \boldsymbol{\alpha}_1 \dfrac{\partial u^1}{\partial \overline{u}^1} + \boldsymbol{\alpha}_2 \dfrac{\partial u^2}{\partial \overline{u}^1} + \boldsymbol{\alpha}_3 \dfrac{\partial u^3}{\partial \overline{u}^1},\\
\overline{\boldsymbol{\alpha}}_2 = \boldsymbol{\alpha}_1 \dfrac{\partial u^1}{\partial \overline{u}^2} + \boldsymbol{\alpha}_2 \dfrac{\partial u^2}{\partial \overline{u}^2} + \boldsymbol{\alpha}_3 \dfrac{\partial u^3}{\partial \overline{u}^2},\\
\overline{\boldsymbol{\alpha}}_3 = \boldsymbol{\alpha}_1 \dfrac{\partial u^1}{\partial \overline{u}^3} + \boldsymbol{\alpha}_2 \dfrac{\partial u^2}{\partial \overline{u}^3} + \boldsymbol{\alpha}_3 \dfrac{\partial u^3}{\partial \overline{u}^3}.
\end{cases} \tag{2.230}$$

Sada se $\mathbf{A}$ može izraziti u ta dva sistema

$$\mathbf{A} = C^1\boldsymbol{\alpha}_1 + C^2\boldsymbol{\alpha}_2 + C^3\boldsymbol{\alpha}_3 = \overline{C}^1\overline{\boldsymbol{\alpha}}_1 + \overline{C}^2\overline{\boldsymbol{\alpha}}_2 + \overline{C}^3\overline{\boldsymbol{\alpha}}_3, \tag{2.231}$$

gde su (C^1, C^2, C^3) i $(\overline{C}^1, \overline{C}^2, \overline{C}^3)$ kontavarijantne komponente vektora $\mathbf{A}$ u ta dva sistema. Zamenom jednačine (2.230) u jednačinu (2.231) dobija se

$$\begin{aligned}
&C^1\boldsymbol{\alpha}_1 + C^2\boldsymbol{\alpha}_2 + C^3\boldsymbol{\alpha}_3 = \overline{C}^1\overline{\boldsymbol{\alpha}}_1 + \overline{C}^2\overline{\boldsymbol{\alpha}}_2 + \overline{C}^3\overline{\boldsymbol{\alpha}}_3 =\\
&= \left(\overline{C}^1\frac{\partial u^1}{\partial \overline{u}^1} + \overline{C}^2\frac{\partial u^1}{\partial \overline{u}^2} + \overline{C}^3\frac{\partial u^1}{\partial \overline{u}^3}\right)\boldsymbol{\alpha}_1 + \left(\overline{C}^1\frac{\partial u^2}{\partial \overline{u}^1} + \overline{C}^2\frac{\partial u^2}{\partial \overline{u}^2} + \overline{C}^3\frac{\partial u^2}{\partial \overline{u}^3}\right)\boldsymbol{\alpha}_2+\\
&\quad + \left(\overline{C}^1\frac{\partial u^3}{\partial \overline{u}^1} + \overline{C}^2\frac{\partial u^3}{\partial \overline{u}^2} + \overline{C}^3\frac{\partial u^3}{\partial \overline{u}^3}\right)\boldsymbol{\alpha}_3,
\end{aligned}$$

ondosno

$$\begin{cases}
C^1 = \overline{C}^1\dfrac{\partial u^1}{\partial \overline{u}^1} + \overline{C}^2\dfrac{\partial u^1}{\partial \overline{u}^2} + \overline{C}^3\dfrac{\partial u^1}{\partial \overline{u}^3},\\
C^2 = \overline{C}^1\dfrac{\partial u^2}{\partial \overline{u}^1} + \overline{C}^2\dfrac{\partial u^2}{\partial \overline{u}^2} + \overline{C}^3\dfrac{\partial u^2}{\partial \overline{u}^3},\\
C^3 = \overline{C}^1\dfrac{\partial u^3}{\partial \overline{u}^1} + \overline{C}^2\dfrac{\partial u^3}{\partial \overline{u}^2} + \overline{C}^3\dfrac{\partial u^3}{\partial \overline{u}^3},
\end{cases} \tag{2.232}$$

ili kraće napisano

$$C^p = \overline{C}^1\frac{\partial u^p}{\partial \overline{u}^1} + \overline{C}^2\frac{\partial u^p}{\partial \overline{u}^2} + \overline{C}^3\frac{\partial u^p}{\partial \overline{u}^3}, \qquad p = 1, 2, 3, \tag{2.233}$$

odnosno

$$C^p = \sum_{q=1}^{3} \overline{C}^q \frac{\partial u^p}{\partial \overline{u}^q}, \qquad p = 1, 2, 3. \tag{2.234}$$

Na isti način se može dobiti da je:

$$\overline{C}^p = \sum_{q=1}^{3} C^q \frac{\partial \overline{u}^p}{\partial u^q}, \qquad p = 1, 2, 3. \tag{2.235}$$

Definicija.

Ako se sistem C^i, pri koordinatnoj transformaciji $\overline{u}^i = \overline{u}^i(u^j)$, transformiše po zakonu (2.235), onda se kaže da taj sistem definiše **kontravarijantni tenzor prvog reda**.

Sa geometrijskog stanovišta C^i određuje kontravarijantne koordinate vektora $\mathbf{C}$ u odnosu na bazu koordinatnog sistema u^i, tj.

$$\mathbf{C} = C^i \mathbf{g}_i.$$

Zbog toga se često u literaturi C^i naziva **kontravarijantin vektor**.

♡

Zad. 2.135. Odrediti kako se transformše, pri koordinatnoj transformaciji, kovarijantni tenzor (kovarijantne koordinate vektora).

Rešenje.

Napišimo kovarijantne komponente vektora $\mathbf{A}$ u sistemu (u^1, u^2, u^3) i $(\overline{u}^1, \overline{u}^2, \overline{u}^3)$

$$\mathbf{A} = c_1 \nabla u^1 + c_2 \nabla u^2 + c_3 \nabla u^3 = \overline{c}_1 \nabla \overline{u}^1 + \overline{c}_2 \nabla \overline{u}^2 + \overline{c}_3 \nabla \overline{u}^3. \tag{2.236}$$

Kako je $\overline{u}^p = \overline{u}^p(u^1, u^2, u^3)$, gde je $p = 1, 2, 3$, to je:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \overline{u}^p}{\partial x} = \dfrac{\partial \overline{u}^p}{\partial u^1}\dfrac{\partial u^1}{\partial x} + \dfrac{\partial \overline{u}^p}{\partial u^2}\dfrac{\partial u^2}{\partial x} + \dfrac{\partial \overline{u}^p}{\partial u^3}\dfrac{\partial u^3}{\partial x}, \\ \dfrac{\partial \overline{u}^p}{\partial y} = \dfrac{\partial \overline{u}^p}{\partial u^1}\dfrac{\partial u^1}{\partial y} + \dfrac{\partial \overline{u}^p}{\partial u^2}\dfrac{\partial u^2}{\partial y} + \dfrac{\partial \overline{u}^p}{\partial u^3}\dfrac{\partial u^3}{\partial y}, \\ \dfrac{\partial \overline{u}^p}{\partial z} = \dfrac{\partial \overline{u}^p}{\partial u^1}\dfrac{\partial u^1}{\partial z} + \dfrac{\partial \overline{u}^p}{\partial u^2}\dfrac{\partial u^2}{\partial z} + \dfrac{\partial \overline{u}^p}{\partial u^3}\dfrac{\partial u^3}{\partial z}. \end{cases} \tag{2.237}$$

Takođe

$$\begin{aligned} c_1 \nabla u^1 + c_2 \nabla u^2 + c_3 \nabla u^3 = &\left(c_1 \frac{\partial u^1}{\partial x} + c_2 \frac{\partial u^2}{\partial x} + c_3 \frac{\partial u^3}{\partial x} \right) \mathbf{i} + \\ + \left(c_1 \frac{\partial u^1}{\partial y} + c_2 \frac{\partial u^2}{\partial y} + c_3 \frac{\partial u^3}{\partial y} \right) \mathbf{j} &+ \left(c_1 \frac{\partial u^1}{\partial z} + c_2 \frac{\partial u^2}{\partial z} + c_3 \frac{\partial u^3}{\partial z} \right) \mathbf{k}, \end{aligned} \tag{2.238}$$

odnosno

$$
\begin{aligned}
\overline{c}_1 \nabla \overline{u}^1 + \overline{c}_2 \nabla \overline{u}^2 + \overline{c}_3 \nabla \overline{u}^3 = \left(\overline{c}_1 \frac{\partial \overline{u}^1}{\partial x} + \overline{c}_2 \frac{\partial \overline{u}^2}{\partial x} + \overline{c}_3 \frac{\partial \overline{u}^3}{\partial x} \right) \mathbf{i} + \\
+ \left(\overline{c}_1 \frac{\partial \overline{u}^1}{\partial y} + \overline{c}_2 \frac{\partial \overline{u}^2}{\partial y} + \overline{c}_3 \frac{\partial \overline{u}^3}{\partial y} \right) \mathbf{j} + \left(\overline{c}_1 \frac{\partial \overline{u}^1}{\partial z} + \overline{c}_2 \frac{\partial \overline{u}^2}{\partial z} + \overline{c}_3 \frac{\partial \overline{u}^3}{\partial z} \right) \mathbf{k}.
\end{aligned}
\tag{2.239}
$$

Izjednačavanjem koeficijenata uz $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ dobija se

$$
\begin{cases}
c_1 \dfrac{\partial u^1}{\partial x} + c_2 \dfrac{\partial u^2}{\partial x} + c_3 \dfrac{\partial u^3}{\partial x} = \overline{c}_1 \dfrac{\partial \overline{u}^1}{\partial x} + \overline{c}_2 \dfrac{\partial \overline{u}^2}{\partial x} + \overline{c}_3 \dfrac{\partial \overline{u}^3}{\partial x}, \\
c_1 \dfrac{\partial u^1}{\partial y} + c_2 \dfrac{\partial u^2}{\partial y} + c_3 \dfrac{\partial u^3}{\partial y} = \overline{c}_1 \dfrac{\partial \overline{u}^1}{\partial y} + \overline{c}_2 \dfrac{\partial \overline{u}^2}{\partial y} + \overline{c}_3 \dfrac{\partial \overline{u}^3}{\partial y}, \\
c_1 \dfrac{\partial u^1}{\partial z} + c_2 \dfrac{\partial u^2}{\partial z} + c_3 \dfrac{\partial u^3}{\partial z} = \overline{c}_1 \dfrac{\partial \overline{u}^1}{\partial z} + \overline{c}_2 \dfrac{\partial \overline{u}^2}{\partial z} + \overline{c}_3 \dfrac{\partial \overline{u}^3}{\partial z}.
\end{cases}
\tag{2.240}
$$

Iz jednačina (2.237) i (2.240), izjednačavanjem koeficijenata, dobija se

$$
\begin{cases}
c_1 = \overline{c}_1 \dfrac{\partial \overline{u}^1}{\partial u^1} + \overline{c}_2 \dfrac{\partial \overline{u}^2}{\partial u^1} + \overline{c}_3 \dfrac{\partial \overline{u}^3}{\partial u^1}, \\
c_2 = \overline{c}_1 \dfrac{\partial \overline{u}^1}{\partial u^2} + \overline{c}_2 \dfrac{\partial \overline{u}^2}{\partial u^2} + \overline{c}_3 \dfrac{\partial \overline{u}^3}{\partial u^2}, \\
c_3 = \overline{c}_1 \dfrac{\partial \overline{u}^1}{\partial u^3} + \overline{c}_2 \dfrac{\partial \overline{u}^2}{\partial u^3} + \overline{c}_3 \dfrac{\partial \overline{u}^3}{\partial u^3},
\end{cases}
\tag{2.241}
$$

što možemo napisati

$$
c_p = \overline{c}_1 \frac{\partial \overline{u}^1}{\partial u^p} + \overline{c}_2 \frac{\partial \overline{u}^2}{\partial u^p} + \overline{c}_3 \frac{\partial \overline{u}^3}{\partial u^p},
\tag{2.242}
$$

ili

$$
c_p = \sum_{q=1}^{3} \overline{c}_q \frac{\partial \overline{u}^q}{\partial u^p} \qquad p = 1, 2, 3.
\tag{2.243}
$$

I analogno

$$
\overline{c}_p = \sum_{q=1}^{3} c_q \frac{\partial u^q}{\partial \overline{u}^p} \qquad p = 1, 2, 3.
\tag{2.244}
$$

Definicija.

Ako se sistem c_i, pri koordinatnoj transformaciji $\overline{u}^i = \overline{u}^i(u^j)$, transformiše po zakonu (2.244), onda se kaže da taj sistem definiše **kovarijantni tenzor prvog reda**.

♡

Zad. 2.136. Neka su (u^1, u^2, u^3) generalisane koordinate.

a) Pokazati da za njih važi

$$g = \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^1} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^2} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^3} \right)^2,$$

gde su g_{pq} metrički koeficijenti uz $\mathrm{d}u^p \mathrm{d}u^q$, u izrazu za $\mathrm{d}s^2$ (vidi zadatak 2.123 na str. 215).

b) Pokazati da je zapreminski element u generalisanim ortogonalnim koordinatama jednak $\sqrt{g}\,\mathrm{d}u^1\,\mathrm{d}u^2\,\mathrm{d}u^3$.

Rešenje.

a) Kako je

$$g_{pq} = \boldsymbol{\alpha}_p \cdot \boldsymbol{\alpha}_q = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^p} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^q} = \frac{\partial x}{\partial u^p} \frac{\partial x}{\partial u^q} + \frac{\partial y}{\partial u^p} \frac{\partial y}{\partial u^q} + \frac{\partial z}{\partial u^p} \frac{\partial z}{\partial u^q} \qquad p, q = 1, 2, 3,$$

koristeći teoremu o množenju determinanti

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_1A_1 + a_2A_2 + a_3A_3 & a_1B_1 + a_2B_2 + a_3B_3 & a_1C_1 + a_2C_2 + a_3C_3 \\ b_1A_1 + b_2A_2 + b_3A_3 & b_1B_1 + b_2B_2 + b_3B_3 & b_1C_1 + b_2C_2 + b_3C_3 \\ c_1A_1 + c_2A_2 + c_3A_3 & c_1B_1 + c_2B_2 + c_3B_3 & c_1C_1 + c_2C_2 + c_3C_3 \end{vmatrix}$$

imamo

$$\left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^1} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^2} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^3} \right)^2 = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u^1} & \frac{\partial y}{\partial u^1} & \frac{\partial z}{\partial u^1} \\ \frac{\partial x}{\partial u^2} & \frac{\partial y}{\partial u^2} & \frac{\partial z}{\partial u^2} \\ \frac{\partial x}{\partial u^3} & \frac{\partial y}{\partial u^3} & \frac{\partial z}{\partial u^3} \end{vmatrix}^2 =$$

$$= \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u^1} & \frac{\partial y}{\partial u^1} & \frac{\partial z}{\partial u^1} \\ \frac{\partial x}{\partial u^2} & \frac{\partial y}{\partial u^2} & \frac{\partial z}{\partial u^2} \\ \frac{\partial x}{\partial u^3} & \frac{\partial y}{\partial u^3} & \frac{\partial z}{\partial u^3} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u^1} & \frac{\partial y}{\partial u^1} & \frac{\partial z}{\partial u^1} \\ \frac{\partial x}{\partial u^2} & \frac{\partial y}{\partial u^2} & \frac{\partial z}{\partial u^2} \\ \frac{\partial x}{\partial u^3} & \frac{\partial y}{\partial u^3} & \frac{\partial z}{\partial u^3} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{vmatrix}.$$

b) Zapreminski element dat je izrazom

$$\mathrm{d}V = \left| \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^1} \mathrm{d}u^1 \right) \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^2} \mathrm{d}u^2 \right) \times \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^3} \mathrm{d}u^3 \right) \right| = \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^1} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^2} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^3} \right| \mathrm{d}u^1 \mathrm{d}u^2 \mathrm{d}u^3$$
$$= \sqrt{g}\, \mathrm{d}u^1\, \mathrm{d}\, u^2 \mathrm{d}u^3.$$

Treba uočiti da je $\sqrt{g}$ apsolutna vrednost Jakobijana.

♡

2.6.12 Raznovrsni problemi

Zad. 2.137. Izraziti sledeće površi u sfernim koordinatama:

a) sfera $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ c) paraboloid $z = x^2 + y^2$
b) kupa $z^2 = 3(x^2 + y^2)$ d) površ $z = 0$ e) površ $y = x$.

Rezultat.

a) $r = 3$, b) $\theta = \pi/6$, c) $r \sin^2 \theta = \cos \theta$, d) $\theta = \pi/2$,
e) ravan $y = x$ sastoji se iz dve poluravni $\phi = \pi/4$ i $\phi = 5\pi/4$.

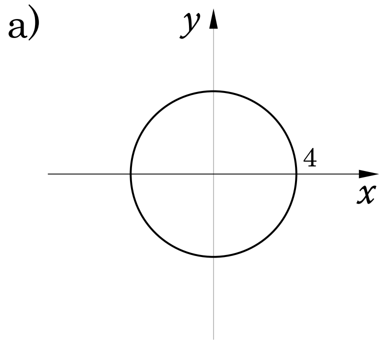
♡

Zad. 2.138. Ako su ρ, ϕ, z cilindrične koordinate, nacrtati svaki od sledećih primera i napisati njihove jednačine u pravouglim koordinatama:

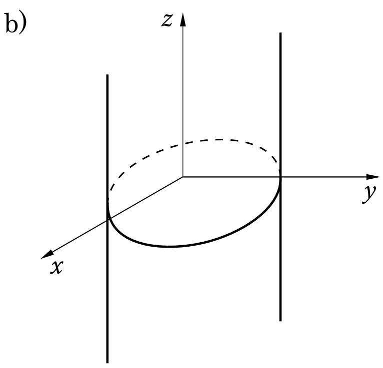
a) $\rho = 4, z = 0$ b) $\rho = 4$
c) $\phi = \pi/2$ d) $\phi = \pi/3, z = 1$.

Rezultat.

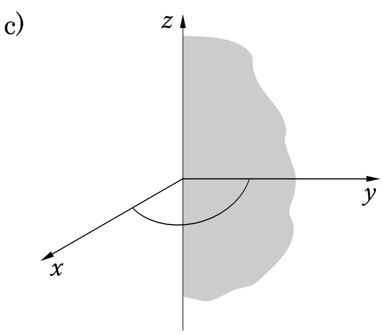
a) Krug u z ravni $x^2 + y^2 = 16, z = 0$, b) Cilindar $x^2 + y^2 = 16$, $z = z$.
c) yz ravan gde je $y \geq 0$, d) Prava linija $y = \sqrt{3}x, z = 1$ gde je $y \geq 0, x \geq 0$.



Slika 2.39:

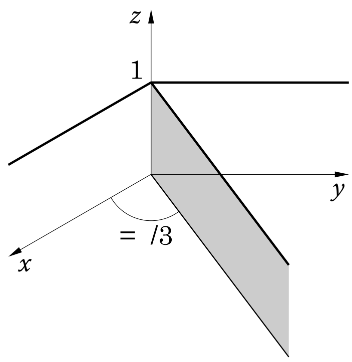


Slika 2.40:



Slika 2.41:

d)



Slika 2.42:

♡

Zad. 2.139. Za sferni koordinatni sistem naći:

a) ortove $\mathbf{e}_r$, $\mathbf{e}_\theta$, $\mathbf{e}_\phi$ u zavisnosti od $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$,

b) ortove Dekartovog koordinatnog sistema $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ u zavisnosti od $\mathbf{e}_r$, $\mathbf{e}_\theta$, $\mathbf{e}_\phi$.

Rezultat.

$$
\begin{aligned}
\text{a)}\quad & \mathbf{e}_r = \sin\theta\cos\phi\,\mathbf{i} + \sin\theta\sin\phi\,\mathbf{j} + \cos\theta\,\mathbf{k},\\
& \mathbf{e}_\theta = \cos\theta\cos\phi\,\mathbf{i} + \cos\theta\sin\phi\,\mathbf{j} - \sin\theta\,\mathbf{k},\\
& \mathbf{e}_\phi = -\sin\phi\,\mathbf{i} + \cos\phi\,\mathbf{j},\\
\text{b)}\quad & \mathbf{i} = \sin\theta\cos\phi\,\mathbf{e}_r + \cos\theta\cos\phi\,\mathbf{e}_\theta - \sin\phi\,\mathbf{e}_\phi,\\
& \mathbf{j} = \sin\theta\sin\phi\,\mathbf{e}_r + \cos\theta\sin\phi\,\mathbf{e}_\theta + \cos\phi\,\mathbf{e}_\phi,\\
& \mathbf{k} = \cos\theta\,\mathbf{e}_r - \sin\theta\,\mathbf{e}_\theta.
\end{aligned}
$$

♡

Zad. 2.140. Izraziti vektor $\mathbf{A} = 2y\mathbf{i} - z\mathbf{j} + 3x\mathbf{k}$ u sfernim koordinatama i odrediti A_ρ, A_ϕ, A_z.

Rezultat.

$$
\begin{aligned}
\mathbf{A} &= A_r\mathbf{e}_r + A_\theta\mathbf{e}_\theta + A_\phi\mathbf{e}_\phi, \qquad \text{gde je} \\
A_r &= 2r\sin^2\theta\sin\phi\cos\phi - r\sin\theta\cos\theta\sin\phi + 3r\sin\theta\cos\theta\cos\phi, \\
A_\theta &= 2r\sin\theta\cos\theta\sin\phi\cos\phi - r\cos^2\theta\sin\phi - 3r^2\sin^2\theta\cos\phi, \\
A_\phi &= -2r\sin\theta\sin^2\phi - r\cos\theta\cos\phi.
\end{aligned}
$$

♡

Zad. 2.141. Dokazati da su sledeći koordinatni sistemi ortogonalni:

a) parabolički cilindrični,

b) eliptično cilindrični i

c) sferoidni.

♡

Zad. 2.142. Krivolinijski koordinatni sistem je ortogonalan akko je $g_{pq} = 0$, za $p \neq q$. Dokazati.

♡

Zad. 2.143. Naći Jakobijan $J = \dfrac{\partial(x, y, z)}{\partial(u_1, u_2, u_3)}$ za sledeće krivolinijske sisteme:

a) cilindrični,

b) sferni,

c) parabolički cilindrični

d) eliptično cilindrični i

e) sferoidni.

Rezultati.

a) ρ, b) $r^2\sin\theta$, c) $u^2 + v^2$,
d) $a^2(\mathrm{sh}^2 u + \sin^2 v)$, e) $a^3(\mathrm{sh}^2\xi + sin^2\eta)\mathrm{sh}\,\xi\sin\eta$

♡

Zad. 2.144. Izračunati $\int_V \sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, gde je V oblast ograničena površima $z = x^2 + y^2$ i $z = 8 - (x^2 + y^2)$.

Rezultat.

$$\frac{256\pi}{15}$$

♡

Zad. 2.145.

a) Opisati koordinatne površi i koordinatne linije za sistem

$$x^2 + y^2 = 2u_1 \cos u_2, \quad xy = u_1 \sin u_2, \quad z = u_3.$$

b) Pokazati da je sistem ortogonalan.

c) Izračunati Jakobijan transformacije.

d) Pokazati da su u_1 i u_2 povezane sa cilindričnim koordinatama ρ i φ i naći te veze.

Rezultati.

c) $\dfrac{1}{2}$, d) $u_1 = \frac{1}{2}\rho^2, u_2 = 2\phi$

♡

Zad. 2.146. Naći $\dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_1}$, $\dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_2}$, $\dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_3}$, ∇u_1, ∇u_2, i ∇u_3 u

a) cilindričnim,

b) sfernim i

c) paraboličko cilindričnim koordinatama.

Pokazati da je $\mathbf{e}_1 = \mathbf{E}_1$, $\mathbf{e}_2 = \mathbf{E}_2$ i $\mathbf{e}_3 = \mathbf{E}_3$ za ove sisteme.

Rezultat.

a)
$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \rho} &= \cos\phi\mathbf{i} + \sin\phi\mathbf{j}, & \nabla\rho &= \frac{x\mathbf{i} + y\mathbf{j}}{\sqrt{x^2+y^2}} = \cos\phi\mathbf{i} + \sin\phi\mathbf{j},\\
\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \phi} &= -\rho\sin\phi\mathbf{i} + \rho\cos\phi\mathbf{j}, & \nabla\phi &= \frac{-\sin\phi\mathbf{i} + \cos\phi\mathbf{j}}{\rho},\\
\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z} &= \mathbf{k}, & \nabla z &= \mathbf{k}
\end{aligned}$$

b) $\dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial r} = \sin\theta\cos\phi\mathbf{i} + \sin\theta\sin\phi\mathbf{j} + \cos\theta\mathbf{k}$

$\dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} = r\cos\theta\cos\phi\mathbf{i} + r\cos\theta\sin\phi\mathbf{j} - r\sin\theta\mathbf{k}$

$\dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial \phi} = -r\sin\theta\sin\phi\mathbf{i} + r\sin\theta\cos\phi\mathbf{j}$

$\nabla r = \dfrac{x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \sin\theta\cos\phi\mathbf{i} + \sin\theta\sin\phi\mathbf{j} + \cos\theta\mathbf{k}$

$\nabla\theta = \dfrac{xz\mathbf{i} + yz\mathbf{j} - \sqrt{x^2+y^2}\mathbf{k}}{(x^2+y^2+z^2)\sqrt{x^2+y^2}} = \dfrac{\cos\theta\cos\phi\mathbf{i} + \cos\theta\sin\phi\mathbf{j} - \sin\theta\mathbf{k}}{r}$

$\nabla\phi = \dfrac{-y\mathbf{i} + x\mathbf{j}}{x^2+y^2} = \dfrac{-\sin\phi + \cos\phi}{r\sin\theta}$

c) $\dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} = u\mathbf{i} + v\mathbf{j}, \qquad \nabla u = \dfrac{u\mathbf{i} + v\mathbf{j}}{u^2+v^2}$

$\dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = -v\mathbf{i} + u\mathbf{j}, \qquad \nabla v = \dfrac{-v\mathbf{i} + u\mathbf{j}}{u^2+v^2},$

$\dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial z} = \mathbf{k}, \qquad \nabla z = \mathbf{k}.$

♡

Zad. 2.147. Izraziti jednačinu $\dfrac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2\phi}{\partial y^2} = \phi$ u eliptičko cilindričnim koordinatama.

Rezultat.

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial u^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial v^2} = a^2(\operatorname{sh}^2 u + \sin^2 v)\phi$$

♡

Zad. 2.148. Izraziti Šredingerovu jednačinu (kvantna mehanika)

$$\nabla^2\psi + \frac{8\pi^2 m}{h}(e - v(x,y,z)) = 0.$$

u paraboličko cilindričnim koordinatama, gde su m, h i E konstante.

Rezultat.

$$\frac{1}{u^2+v^2}\left[\frac{\partial^2\psi}{\partial u^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial v^2}\right] + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} + \frac{8\pi^2 m}{h^2}\left(E - W(u,v,z)\right)\psi = 0,$$

gde je $W(u,v,z) = V(x,y,z)$.

♡

Zad. 2.149. Izraziti jednačinu $\dfrac{\partial U}{\partial t} = \kappa\nabla^2 U$ u sfernim koordinatama ako U ne zavisi od:
a) φ, b) φ i θ, c) r i t, d) φ, θ i t.

<u>*Rezultat.*</u>

a) $\dfrac{\partial U}{\partial t} = \kappa\left[\dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r^2\dfrac{\partial U}{\partial r}\right) + \dfrac{1}{r^2\sin\theta}\dfrac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\dfrac{\partial U}{\partial\theta}\right)\right]$ b) $\dfrac{\partial U}{\partial t} = \kappa\left[\dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r^2\dfrac{\partial U}{\partial r}\right)\right]$

c) $\sin\theta\dfrac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\dfrac{\partial U}{\partial\theta}\right) + \dfrac{\partial^2 U}{\partial\phi^2} = 0$ d) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\dfrac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}r}\right) = 0.$

♡

Zad. 2.150. Dokazati da u bilo kom krivolinijskom koordinatnom sistemu važi $\operatorname{div}\operatorname{rot}\mathbf{A} = 0$ i $\operatorname{rot}\operatorname{grad}\phi = 0$.

♡

Zad. 2.151.

a) Ako je $x = 3u_1 + u_2 - u_3, y = u_1 + 2u_2 + 2u_3, z = 2u_1 - u_2 - u_3$, naći zapreminu kvadra ograničenog sa $x = 0, x = 15,\ y = 0, y = 10,\ z = 0, z = 5$.

b) Dovesti u vezu odnos ovih zapremina sa Jakobijanom transformacije.

<u>*Rezultati.*</u>

a) 750,75; b) Jakobijan=10.

♡

Zad. 2.152. Neka su (x,y,z) i (u_1,u_2,u_3) koordinate iste tačke u dva sistema.

a) Da li je sistem ortogonalan ako je $x = 3u_1 + u_2 - u_3$, $y = u_1 + 2u_2 + 2u_3$, $z = 2u_1 - u_2 - u_3$?

b) Naći $\mathrm{d}s^2$ i g za taj sistem.

<u>*Rezultati.*</u>

a) Ne. b) $\mathrm{d}s^2 = 14\mathrm{d}u_1^2 + 6\mathrm{d}u_2^2 + 6\mathrm{d}u_1\mathrm{d}u_2 - 6\mathrm{d}u_1\mathrm{d}u_3 + 8\mathrm{d}u_2\mathrm{d}u_3$.

♡

Glava 3

Rešavanje diferencijalnih jednačina pomoću redova. Specijalne funkcije. Ortogonalne funkcije

3.1 Funkcionalni redovi. Potencijalni redovi

Neka su date realne funkcije $f_0(x), f_1(x), \cdots, f_k(x), \cdots$, definisane za $\forall x \in [a,b] \subset \mathbb{R}$, gde je $\mathbb{R}$ - skup realnih brojeva.

Definicija.

Beskonačan zbir funkcija

$$f_0(x) + f_1(x) + \cdots + f_k(x) + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x), \tag{3.1}$$

čiji su članovi funkcije $f_k(x)$ definisane za $\forall x \in [a,b]$, nazivamo **funkcionalnim redom** (beskonačan funkcionalan red).

Definicija.

Delimični zbir (parcijalna suma) funkcionalnog reda (3.1) je zbir oblika

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k(x), \quad (n - \text{pozitivan ceo broj}). \tag{3.2}$$

Definicija.

Red (3.1) je **konvergentan**, za neko $x = x_1 \in [a, b]$ ako je

$$\lim_{n\to\infty} S_n(x_1) = S(x_1) \neq \pm\infty. \tag{3.3}$$

Ako ne postoji ovaj limes, tada kažemo da je red **divergentan**.

Ako je red (3.1) konvergentan za sve vrednosti promenljivih $x \in [a, b]$, onda suma reda predstavlja neku funkciju $f(x)$, za $x \in [a, b]$, i može da se predstavi u obliku

$$f(x) = S_n(x) + R_n(x), \tag{3.4}$$

gde je S_n - delimičan zbir, a $R_n(x)$ - ostatak. Tada je

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} S_n(x), \quad \lim_{n\to\infty} R_n(x) = \lim_{n\to\infty} [f(x) - S_n(x)] = 0, \tag{3.5}$$

ili

$$|f - S_n| = |R_n(x)| < \varepsilon$$

za svako

$$n \geq N(\varepsilon, x) \quad \text{i za} \quad \forall x \in [a, b].$$

Definicija.

Za red

$$\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$$

kažemo da je **apsolutno konvergentan** za neko $x = x_1 \in [a, b]$, ako je red

$$\sum_{k=0}^{\infty} |\, f_k(x_1) \,|$$

konvergentan.

Definicija.

Red (3.1) **uniformno konvergira** u intervalu $[a, b]$, ako proizvoljno malom $\varepsilon > 0$ odgovara pozitivni broj $N(\varepsilon)$, koji ne zavisi od x tako da je

$$|R_n(x)| < \varepsilon \quad \text{za} \quad \forall n \geq N(\varepsilon) \quad \text{i} \quad \forall x \in [a, b].$$

Napomenimo da konvergentan red ne mora da bude i uniformno konvergentan, u istom intervalu.

Osobine uniformno konvergentnih redova

1° Ako su članovi uniformno konvergentnog (beskonačnog) reda neprekidne funkcije, nezavisno promenljive $x \in [a, b]$, onda je i njihov zbir neprekidna funkcija od x, u istom intervalu.

2° Ako su članovi uniformno konvergentnog reda neprekidne funkcije, nezavisno promenljive $x \in [a, b]$, onda je integral njihovog zbira jednak zbiru integrala, tj.

$$\int_a^b f \,\mathrm{d}x = \int_a^b \left[\sum_{k=0}^{\infty} f_k\right] \mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{\infty} \int_a^b f_k \,\mathrm{d}x, \quad \text{za} \, \forall x \in [a, b]. \tag{3.6}$$

3° Neka članovi konvergentnog reda, u intervalu $[a, b]$, imaju neprekidne izvode (u istom intervalu). Ako red izvoda uniformno konvergira, za $x \in [a, b]$, tada će i polazni red biti uniformno konvergentan, u istom intervalu, i može da se diferencira član po član, tj.

$$f' = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \sum_{k=0}^{\infty} f_k = \sum_{k=0}^{\infty} f_k^{'}, \quad \text{za} \, \forall x \in [a, b]. \tag{3.7}$$

Potencijalni red

Definicija.

Red oblika

$$\sum_{m=0}^{\infty} a_m (x - x_0)^m = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \cdots, \tag{3.8}$$

zove se **potencijalni** (ceo ili stepeni) **red**. Konstante a_0, a_1, ..., zovu se **koeficijenti reda**, a konstanta x_0 **centar**.

Pretpostavlja se da konstante i promenljiva x pripadaju skupu realnih brojeva (ako se drugačije ne naglasi). Napomenimo da je potencijalni red funkcionalni red kod koga je $f_k(x) = a_k(x - x_0)^k$.

U specijalnom slučaju, kada je $x_0 = 0$, potencijalni red ima oblik

$$\sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots \tag{3.9}$$

Teorema 7 (I Abelova teorema) *Ako je red* (3.9) *konvergentan za $x = a$, on je i apsolutno konvergentan, za sve vrednosti x za koje je $|x| < |a|$.*

Definicija.

Za svaki potencijalni red (3.9) postoji jedan nenegativan broj R (uključujući i $+\infty$), takav da je red apsolutno konvergentan za $\forall x \in (-R,\, R)$, tj. za $|x| < R$, a divergentan za $\forall x$ izvan ovog intervala. Ovako definisan broj R zove se **poluprečnik konvergencije**, a interval $(-R,\, R)$ **interval konvergencije**.

Operacije sa potencijalnim redovima

1° Svaki potencijalni red, konvergentan za $x \in (-R, R)$, može da se integrali u intervalu $[0, x]$, gde je $|x| < R$ i tada je integral zbira jednak zbiru integrala, tj.

$$\int\limits_0^x f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^x \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k\right) \mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\int\limits_0^x a_k x^k\,\mathrm{d}x\right), \quad \text{za}\,|x| < R. \tag{3.10}$$

2° Svaki potencijalni red, konvergentan za $x \in (-R, R)$, može da se diferencira u intevalu $[0, x]$, gde je $|x| < R$ i tada je izvod zbira jednak zbiru izvoda, tj.

$$f'(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathrm{d}(a_k x^k)}{\mathrm{d}x}, \quad \text{za } |x| < R. \tag{3.11}$$

3° Sabiranjem (oduzimanjem) dva potencijalna konvergentna reda dobija se potencijalni konvergentni red, čiji poluprečnik konvergencije nije manji od manjeg poluprečnika konvergencije datih redova. Naime, neka su

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k, \quad |x| < R, \\ g(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k, \quad |x| < R', \quad R' \le R, \end{aligned} \tag{3.12}$$

potencijalni redovi, tada njihov zbir (razlika) predstavlja potencijalni red oblika

$$f(x) \pm g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (a_k \pm b_k)\, x^k, \tag{3.13}$$

konvergentan u intervalu $(-R',\, R')$.

4° Množenjem dva potencijalna konvergentna reda dobija se potencijalni konvergentni red, čiji poluprečnik konvergencije nije manji od manjeg poluprečnika konvergencije datih redova. Naime, neka su

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k, \quad |x| < R, \\
g(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k, \quad |x| < R', \quad R' \leq R,
\end{aligned}
\tag{3.14}
$$

potencijalni redovi, tada njihov proizvod predstavlja potencijalni red oblika

$$
f(x)\cdot g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (a_0\cdot b_k + a_1\cdot b_{k-1} + \cdots + a_k\cdot b_0)\, x^k, \tag{3.15}
$$

konvergentan u intervalu $(-R',\, R')$.

Teorema 8 *Ako potencijalni red ima pozitivan poluprečnik konvergencije ($R > 0$), a njegov zbir je identički jednak nuli, tada su svi koeficijenti tog reda jednaki nuli.*

Definicija.

Za funkciju $f(x)$ kažemo da je **analitička**, u tački $x = x_0$, ako može da se predstavi potencijalnim redom, po $(x - x_0)$, sa poluprečnikom konvergencije $R > 0$.

3.2 Rešavanje diferencijalnih jednačina pomoću redova

Poznato je, iz matematičke analize, da homogena linearna diferencijalna jednačina sa konstantnim koeficijentima može da se reši metodama algebre, a rešenja su elementarne funkcije. Na primer, posmatrajmo homogenu linearnu diferencijalnu jednačinu drugog reda sa konstantnim koeficijentima:

$$
ay'' + by' + cy = 0, \tag{3.16}
$$

gde su a, b, c konstante, a $y = y(x)$. Pretpostavlja se da je njeno rešenje oblika

$$
y = C\, e^{\alpha x}, \tag{3.17}
$$

gde su α i C konstante. Konstanta α određuje se iz uslova da pretpostavljeno rešenje identički zadovoljava polaznu jednačinu. Ovaj uslov, zamenom (3.17) u (3.16), svodi se na algebarsku (kvadratnu) jednačinu

$$
a\alpha^2 + b\alpha + c = 0, \tag{3.18}
$$

koja ima dva rešenja (α_1, α_2). Ova su rešenja, u opštem slučaju, kompleksni brojevi. Konačno rešenje polazne jednačine je (dobijeno primenom principa superpozicije)

$$y = C_1 e^{\alpha_1 x} + C_2 e^{\alpha_2 x}. \tag{3.19}$$

U praksi, češći su slučajevi kada koeficijenti jednačine (3.16) nisu konstantni, već zavise od x. Pored toga jednačine su i nehomogene, što još više otežava njihovo rešavanje. Rešenja ovih diferencijalnih jednačina su često funkcije koje nisu elementarne. U ovom poglavlju biće navedene neke od njih (najčešće korišćene).

3.2.1 Korišćenje potencijalnog reda pri rešavanju diferencijalnih jednačina

Potencijalni redovi najčešće se koriste za rešavanje diferencijalnih jednačina kada rešenje ne možemo da dobijemo u zatvorenom obliku. Ova metoda je prirodna i relativno prosta. Sastoji se u tome da se sve funkcije, koje se pojavljuju u posmatranoj diferencijalnoj jednačini, razviju u potencijalni red po $x - x_0$ (vidi (3.8)), ili specijalno po x (x_0=0). Zatim se pretpostavi rešenje u obliku potencijalnog reda

$$y = \sum_{m=0}^{\infty} a_m (x - x_0)^m,$$

nađu se odgovarajući izvodi i zamene u polaznu jednačinu. Na kraju se, izjednačavanjem koeficijenata uz iste stepene od x, dobijaju nepoznati koeficijenti a_m, i na taj način dobijamo rešenje (u obliku reda).

Ovu tehniku ćemo da demonstriramo na primerima Ležandrove [1] i Beselove[2] jednačine. Međutim, pre nego što to uradimo, navedimo jednu teoremu od značaja za rešavanje pomenutih jednačina.

Teorema 9 *Ako su funkcije p, q i r, u diferencijalnoj jednačini*

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x) \tag{3.20}$$

analitičke u tački $x = x_0$, *tada je svako rešenje ove jednačine* (3.20) *analitičko u tački* $x = x_0$ *i može da se predstavi potencijalnim redom po* $(x - x_0)$, *sa radijusom konvergencije* $R > 0$.

Napomena. U primeni ove teoreme važno je napisati jednačinu u obliku (3.20), tj. koeficijent uz najviši izvod jednak je 1.

Na kraju napomenimo da je ovaj metod od praktične važnosti zbog mogućnosti izračunavanja numeričkih vrednosti.

---

[1] Adrien Marie Legendre (1752-1833), francuski matematičar. Dao je veliki doprinos u oblasti specijalnih funkcija, eliptičkih integrala, teoriji brojeva i varijacionom računu. Njegova knjiga *Éléments de géométrie* (1794) bila je veoma poznata i imala je 12 izdanja u periodu kraćem od 30 godina.

[2] Fridrich Wilhelm Bessel (1784-1846), nemački astronom i matematičar. Njegov rad o Beselovim funkcijama pojavio se 1826. god.

3.3 Ležandrova jednačina. Ležandrova funkcija. Ležandrovi polinomi

Definicija.

Diferencijalna jednačina oblika

$$(1-x^2)y^{''} - 2xy' + k(k+1)y = 0, \tag{3.21}$$

gde je k neki poznati realni broj, poznata je u literaturi kao **Ležandrova jednačina**. Svako rešenje jednačine (3.21) zove se **Ležandrova funkcija**.

Ova jednačina se pojavljuje u brojnim problemima fizike, kao i pri rešavanju parcijalnih diferencijalnih jednačina.

Prema prethodnoj napomeni koeficijent uz $y^{''}$ treba da je jednak 1, pa se deobom sa $(1-x^2)$ dobija

$$y^{''} - \frac{2x}{1-x^2}y' + \frac{k(k+1)}{1-x^2}y = 0. \tag{3.22}$$

Kako su uslovi Teoreme 9 ispunjeni

$$\left(p = -\frac{2x}{1-x^2},\ q = \frac{k(k+1)}{1-x^2},\ r = 0\right),$$

tj. odgovarajući koeficijenti (p, q, r) su analitičke funkcije u $x = 0$, to rešenje može da se predstavi potencijalnim redom

$$y = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i. \tag{3.23}$$

Koeficijente a_i određujemo iz uslova da ovo rešenje identički zadovoljava polaznu jednačinu. Zamenom ovako pretpostavljenog rešenja u polaznu jednačinu, dobijamo

$$\left(1-x^2\right)\sum_{i=2}^{\infty} i(i-1)a_i x^{i-2} - 2x\sum_{i=1}^{\infty} i a_i x^{i-1} + k(k+1)\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i = 0, \tag{3.24}$$

odnosno

$$\sum_{i=2}^{\infty} i(i-1)a_i x^{i-2} - \sum_{i=2}^{\infty} i(i-1)a_i x^{i} - 2\sum_{i=1}^{\infty} i a_i x^i + k(k+1)\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i = 0. \tag{3.25}$$

U razvijenom obliku ova relacija može da se predstavi na sledeći način

$$\begin{gathered}
2\cdot 1\cdot a_2 + 3\cdot 2\cdot a_3\cdot x + 4\cdot 3\cdot a_4\cdot x^2 + \cdots + (s+2)(s+1)a_{s+2}\cdot x^s + \cdots \\
-2\cdot 1\cdot a_2\cdot x^2 - \cdots - s(s-1)a_s x^s - \cdots \\
-2\cdot 1\cdot a_1\cdot x - 2\cdot 2\cdot a_2\cdot x^2 - \cdots - 2\cdot s\cdot a_s\cdot x^s - \cdots \\
k(k+1)a_0 + k(k+1)a_1\cdot x + k(k+1)a_2\cdot x^2 + \cdots + k(k+1)\cdot a_s\cdot x^s + \cdots = 0.
\end{gathered}$$

Iz uslova da ovo mora da bude identitet, prema Teoremi 8, dobijamo:

$$\begin{aligned} 2a_2 + k(k+1)a_0 = 0, &\quad \text{koeficijent uz } x^0 \\ 6a_3 + [-2 + k(k+1)]a_1 = 0, &\quad \text{koeficijent uz } x^1 \\ (s+2)(s+1)a_{s+2} + [-s(s-1) - 2s + k(k+1)]a_s = 0, &\quad \text{koeficijent uz } x^s. \end{aligned}$$

Iz poslednje relacije dobijamo tzv. rekurentne formule za određivanje koeficijenata a_i:

$$a_{s+2} = -\frac{(k-s)(k+s+1)}{(s+2)(s+1)} a_s, \quad s = 0, 1, 2, \ldots \tag{3.26}$$

Iz ovih relacija vidi se da su određeni svi koeficijenti, sem a_0 i a_1 koji ostaju proizvoljni. Dakle, svi ostali koeficijenti mogu da se izraze preko ova dva. Tako je, na primer:

$$\begin{aligned} a_2 &= -\frac{k(k+1)}{2\cdot 1} a_0 = -\frac{k(k+1)}{2!} a_0 \\ a_3 &= -\frac{(k-1)(k+2)}{3\cdot 2} a_1 = -\frac{(k-1)(k+2)}{3!} a_1 \\ a_4 &= -\frac{(k-2)(k+3)}{4\cdot 3} a_2 = \frac{(k-2)k(k+1)(k+3)}{4!} a_0 \\ a_5 &= -\frac{(k-3)(k+4)}{5\cdot 4} a_3 = \frac{(k-3)(k-1)(k+2)(k+4)}{5!} a_1 \end{aligned}$$

itd.

Iz ovih primera vidimo da se parni koeficijenti mogu izraziti preko a_0, a neparni preko a_1, pa se polazno rešenje može predstaviti u obliku

$$y = a_0 y_1(x) + a_1 y_2(x), \tag{3.27}$$

gde je:

$$y_1(x) = 1 - \frac{k(k+1)}{2!} x^2 + \frac{(k-2)k(k+1)(k+3)}{4!} x^4 + \cdots$$

$$y_2(x) = x - \frac{(k-1)(k+2)}{3!} x^3 + \frac{(k-3)(k-1)(k+2)(k+4)}{5!} x^5 + \cdots$$

Ovaj red konvergira za $|x| < 1$.

Napomenimo da kako y_1 sadrži samo parne stepene, a y_2 samo neparne, to njihov količnik nije konstantan. Odatle sledi da y_1 i y_2 nisu proporcionalni, tj. ove funkcije su linearno nezavisne. Dakle, funkcija $y = a_0 y_1 + a_1 y_2$ predstavlja opšte rešenje polazne jednačine (Ležandrova jednačina) u intervalu $-1 < x < 1$.

Ležandrovi polinomi

Posmatrajući strukturu koeficijenata a_{s+2} (3.26), pri čemu je $s = 0, 1, 2, \ldots$, vidimo da ako je u polaznoj jednačini k ceo broj, tada neki od koeficijenata a_{s+2} mogu da budu jednaki nuli. Recimo, za $k = s$ imamo $a_{k+2} = a_{k+4} = \cdots = 0$. Ako je k paran broj, tada se y_1 redukuje na polinom stepena k. Ako je k neparan broj, tada se y_2 redukuje na polinom k-tog stepena.

Iz (3.26) sledi da je

$$a_s = -\frac{(s+1)(s+2)}{(k-s)(k+s+1)} a_{s+2}, \quad s \leq k-2. \tag{3.28}$$

Iz ove relacije mogu da se odrede svi koeficijenti, koji su različiti od nule, preko a_k, koeficijenta uz najveći stepen polinoma po x. Ovaj koeficijent je proizvoljan. Pogodno ga je definisati relacijom

$$a_k = \begin{cases} 1, & k = 0, \\ \dfrac{(2k)!}{2^k (k!)^2} = \dfrac{1\cdot 3\cdot 5 \cdots (2k-1)}{k!}, & k = 1, 2, \ldots \end{cases} \tag{3.29}$$

Za ovako definisano a_k, iz (3.28) dobijamo:

$$\begin{aligned} a_{k-2} &= -\frac{k(k-1)}{2(2k-1)} a_k = -\frac{k(k-1)(2k)!}{2(2k-1)2^k (k!)^2} = \\ &= -\frac{(2k-2)!}{2^k (k-1)!(k-2)!} \\ &\vdots \qquad\qquad \vdots \\ a_{k-2m} &= (-1)^m \frac{(2k-2m)!}{2^k m!(k-m)!(k-2m)!}. \end{aligned}$$

Definicija.

Polinom definisan relacijom

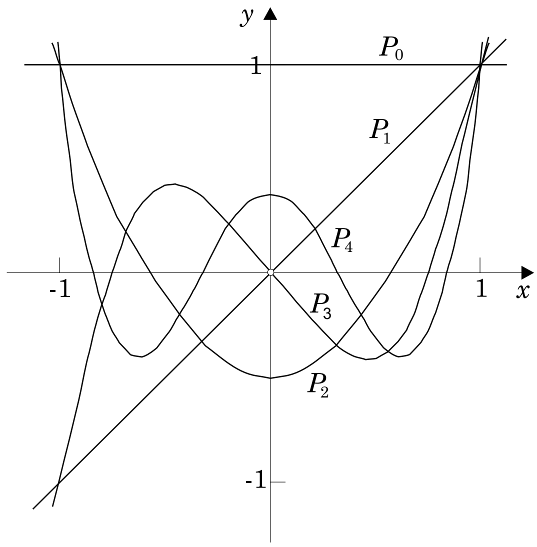
$$P_k(x) = \sum_{m=0}^{M} (-1)^m \frac{(2k-2m)!}{2^k m!(k-m)!(k-2m)!} x^{k-2m} \tag{3.30}$$

zove se **Ležandrov polinom** k-tog stepena, gde je $M = k/2$ ili $(k-1)/2$, ceo broj.

Ovaj polinom predstavlja rešenje Ležandrove diferencijalne jednačine (3.21). Ispišimo nekoliko ovih polinoma:

$$\begin{aligned} P_0 &= 1; & P_1 &= x \\ P_2 &= \frac{1}{2}(3x^2 - 1); & P_3 &= \frac{1}{2}(5x^3 - 3x) \\ P_4 &= \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3); & P_5 &= \frac{1}{8}(63x^5 - 70x^3 + 15x). \end{aligned}$$

Njihovi grafici prikazani su na sl. 3.1.



Slika 3.1: Ležandrovi polinomi

Polazeći od binomne formule, primenjene na $(x^2-1)^n$, i diferencirajući taj izraz n puta, član po član, dobijamo tzv. Rodrigov [3] obrazac

$$P_k(x) = \frac{1}{2^k k!}\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k}\left[\left(x^2-1\right)^k\right]. \tag{3.31}$$

Kao primer korišćenja Ležandrovih polinoma u geofizici navedimo geomagnetski potencijal [47]. Naime, za izračunavanje magnetskog potencijala na Zemljinoj površi koristi se funkcija oblika

$$U = R\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\left[g_o^m\cos(m\lambda) + h_o^m\sin(m\lambda)\right]P_n^m\left[\cos\Theta\right],$$

pri čemu je: R – poluprečnik Zemlje, g_o^m i h_o^m koeficijenti koji zavise od osnovnih karakteristika magnetskog polja, a P_n^m Ležandrovi polinomi (vidi zad. 3.12, str. 285).

[3] Olinde Rodrigues (1794-1851), francuski matematičar i ekonomist.

3.4 Beselova jednačina. Beselove funkcije

Navedimo prvo neke pojmove i teoreme koje ćemo koristiti pri rešavanju Beselove jednačine.

Posmatrajmo linearnu diferencijalnu jednačinu n-tog reda

$$a_0(x)y^{(n)} + \cdots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = 0. \tag{3.32}$$

Definicija.

Tačka x_0, u kojoj je ispunjen uslov $a_0(x_0) = 0$, zove se **singularna tačka**.

Definicija.

Za tačku x_0 kažemo da je **regularno singularna tačka**, posmatrane diferencijalne jednačine, ako ova jednačina može da se predstavi u okolini tačke x_0, u obliku

$$(x - x_0)^n y^{(n)} + b_1(x)(x - x_0)^{(n-1)} y^{(n-1)} + \cdots + b_n(x)y = 0, \tag{3.33}$$

gde su $b_i(x)$, $i = 1, 2, \dots, n$, analitičke funkcije u tački x_0.

Kako ćemo se kasnije ograničiti samo na diferencijalne jednačine drugog reda, to posmatrajmo jednačinu

$$L(y) \equiv (x - x_0)^2 y'' + b(x)(x - x_0)y' + c(x)y = 0. \tag{3.34}$$

Ne gubeći u opštosti, a radi jednostavnijeg pisanja, pretpostavićemo da je $x_0 = 0$ [4], pa dobijamo

$$L(y) \equiv x^2 y'' + b(x)xy' + c(x)y = 0. \tag{3.35}$$

Za $b(x)$ i $c(x)$ pretpostavljamo da su analitičke funkcije u x, tj. pretpostavlja se da postoji takav broj $R > 0$ da one mogu da se predstave potencijalnim redovima:

$$b(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k, \quad c(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k, \tag{3.36}$$

koji konvergiraju na intervalu $|x| < R$.

Rešenje ćemo da potražimo u obliku tzv. uopštenog potencijalnog reda

$$y(x) = x^{\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k, \quad a_0 \neq 0, \ x > 0. \tag{3.37}$$

[4] Praktično, mogli smo da uvedemo novu promenljivu $\overline{x} = x - x_0$ i na taj način bismo formalno imali istu jednačinu, kao za $x_0 = 0$.

Teorema 10 (Frobenius-ov metod) [5] *Svaka diferencijalna jednačina oblika*

$$y'' + \frac{b(x)}{x}y' + \frac{c(x)}{x^2}y = 0, \tag{3.38}$$

gde su funkcije $b(x)$ i $c(x)$ analitičke u tački $x = 0$, ima rešenje oblika

$$y(x) = x^{\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k, \quad a_0 \neq 0, \tag{3.39}$$

pri čemu λ može da bude bilo koji broj (realan ili kompleksan). λ se bira tako da $a_0 \neq 0$.

Zamenivši pretpostavljeno rešenje u polaznu jednačinu, uz uslov da je $a_0 \neq 0$ i $k = 0$, dobijamo jednačinu za određivanje λ

$$\lambda(\lambda - 1) + b(0)\lambda + c(0) = 0. \tag{3.40}$$

Ova jednačina poznata je kao **indeksna jednačina** diferencijalne jednačine (3.38). Preko λ i a_0 sada mogu da se odrede i ostali koeficijenti a_k, pa možemo da napišemo formalno rešenje polazne jednačine u obliku

$$y(x, \lambda) = a_0 x^{\lambda} + x^{\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} a_k(\lambda) x^k. \tag{3.41}$$

Za rešenje smo rekli da je formalno, jer još nismo dokazali konvergenciju ovog reda. Dokaz može da se nađe u mnogim knjigama iz ove oblasti. Videti na primer u [40].

Teorema 11 *Posmatrajmo diferencijalnu jednačinu oblika*

$$x^2 y'' + xb(x)y' + c(x)y = 0, \tag{3.42}$$

i pretpostavimo da su $b(x)$ i $c(x)$ analitičke funkcije, u tački $x = 0$. Ako su redovi, kojima mogu da se zamene ove funkcije, konvergentni za $|x| < R$, a λ_i ($Re\lambda_1 > Re\lambda_2$, $i = 1, 2$) rešenja indeksne jednačine:

$$\lambda(\lambda - 1) + b(0)\lambda + c(0) = 0, \tag{3.43}$$

tada:

a) diferencijalna jednačina (3.42) ima dva linearno nezavisna rešenja

$$y_i(x) = |x|^{\lambda_i} \sum_{k=0}^{\infty} a_k^{(i)} x^k, \quad a_0^{(i)} = 1, \; i = 1, 2, \tag{3.44}$$

ako su λ_1 i λ_2 različiti, a njihova razlika $\lambda_1 - \lambda_2$ nije ceo pozitivan broj. Odgovarajući redovi (y_i) su konvergentni za $0 < |x| < R$.

[5] Georg Frobenius (1849-1917), nemački matematičar, čiji je značajan doprinos u teoriji matrica i grupa.

b) *Diferencijalna jednačina* (3.42) *ima dva rešenja oblika*

$$y_1(x) = |x|^{\lambda_1} \sum_{k=0}^{\infty} a_k^{(1)} x^k = |x|^{\lambda_1} r_1(x),$$
$$y_2(x) = |x|^{\lambda_1+1} \sum_{k=0}^{\infty} a_k^{(2)} x^k + cy_1(x) \cdot \log|x| = |x|^{\lambda_1} r_2(x) + cy_1(x) \cdot \log|x|,$$

ako je $\lambda_1 = \lambda_2$. *Odgovarajući potencijalni redovi* $r_1(x)$ *i* $r_2(x)$ *su konvergentni za* $0 < |x| < R$ *i* $r_1(0) \neq 0$.

c) *Diferencijalna jednačina* (3.42) *ima dva rešenja oblika*

$$y_1(x) = |x|^{\lambda_1} q_1(x),$$
$$y_2(x) = |x|^{\lambda_2} q_2(x) + cy_1(x) \cdot \log|x| = |x|^{\lambda_1} r_2(x) + cy_1(x) \cdot \log|x|,$$

ako je razlika $\lambda_1 - \lambda_2$ *ceo pozitivan broj. Potencijalni redovi* $q_1(x)$ *i* $q_2(x)$ *su konvergentni za* $0 < |x| < R$ *i* $q_i(0) \neq 0$. c *je konstanta, koja može da bude i jednaka nuli.*

3.4.1 Beselova jednačina

Jedna od važnijih jednačina u primeni matematike je tzv. **Beselova** ili **cilindrična jednačina**

$$L(y) \equiv x^2 y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0, \tag{3.45}$$

gde je ν konstanta (Re$\nu > 0$).

Ova jednačina javlja se u problemima oscilacija, elektrostatičkih polja, provođenju toplote, itd. Nadalje ćemo da pretpostavimo da je ν realan parametar.

Demonstrirajmo na ovoj jednačini prethodno opisan postupak.

Prvo, zapažamo da je regularni singularitet u tački $x = 0$. Zatim, indeksna jednačina

$$\lambda(\lambda - 1) + 1 \cdot \lambda + (0 - \nu^2) = 0$$

u ovom slučaju je kvadratna jednačina

$$\lambda^2 - \nu^2 = 0, \tag{3.46}$$

čija su rešenja

$$\lambda_1 = \nu, \quad \lambda_2 = -\nu. \tag{3.47}$$

Pretpostavimo prvo da je $\nu = 0$, odakle sledi da je $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. Prema Teoremi 11 b), str.247, za ovaj slučaj imamo da su rešenja:

$$y_1(x) = |x|^0 r_1(x)$$
$$y_2(x) = |x|^{0+1} r_2(x) + y_1(x) \log x,$$

odnosno, ako posmatramo slučaj za $x > 0$

$$\begin{aligned} y_1(x) &= r_1(x) \\ y_2(x) &= x r_2(x) + y_1(x) \log|x|. \end{aligned}$$

Prema pretpostavkama, $r_i(x)$ su analitičke funkcije za $x = 0$, pa možemo da ih predstavimo u obliku reda, koji konvergira za sve konačne vrednosti x. Prvo odredimo r_1

$$r_1(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k, \quad a_0 \neq 0 \tag{3.48}$$

i izračunajmo $L(r_1)$. Kako je

$$r_1'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1} \quad \text{i} \quad r_1''(x) = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) a_k x^{k-2}, \tag{3.49}$$

to je

$$L(r_1) \equiv x^2 \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) a_k x^{k-2} + x \sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1} + x^2 \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = 0, \tag{3.50}$$

kao jedno od rešenja (y_1 je rešenje) polazne jednačine.

Sređujući prethodnu relaciju dobijamo:

$$\begin{aligned} & a_1 x + a_0 x^2 + a_1 x^3 + \sum_{k=2}^{\infty} \left[k(k-1) a_k x^k + k a_k x^k + a_k x^{k+2} \right] = \\ & = a_1 x + \sum_{k=2}^{\infty} \left[k(k-1) a_k x^k + k a_k x^k \right] + a_0 x^2 + a_1 x^3 + \sum_{k=2}^{\infty} a_k x^{k+2} = \\ & = a_1 x + \sum_{k=2}^{\infty} \left[k(k-1) a_k x^k + k a_k x^k + a_{k-2} x^k \right] = \qquad (3.51) \\ & = a_1 x + \sum_{k=2}^{\infty} \left\{ \left[k(k-1) + k \right] a_k + a_{k-2} \right\} x^k = 0. \end{aligned}$$

Da bi ova relacija bila identički zadovoljena, potrebno je da koeficijenti uz sve stepene budu jednaki nuli. Iz ovog uslova sledi

$$a_1 = 0, \quad \left(k^2 - k + k\right) a_k + a_{k-2} = 0,$$

odnosno

$$a_1 = 0, \quad a_k = -\frac{a_{k-2}}{k^2}, \quad \text{za } k = 2, 3, \ldots \tag{3.52}$$

Iz poslednje relacije vidimo da se svi parni koeficijenti ($k = 2s + 2$, $s = 0, 1, 2, \ldots$) izražavaju preko a_0, a neparni ($k = 2s + 1$) preko a_1. Kako je dobijeno da je $a_1 = 0$, to su i svi neparni koeficijenti jednaki 0.

Za parne koeficijente dobijamo

$$a_0 \neq 0,\ a_2 = -\frac{a_0}{4},\ a_4 = -\frac{a_2}{16} = -\frac{1}{16}\left(-\frac{a_0}{4}\right) = \frac{1}{4\cdot 16}\cdot a_0, \tag{3.53}$$

itd.

Produžujući ovaj postupak dobijamo sledeće relacije:

$$\begin{aligned} a_{2s+1} &= 0, \\ a_{2s} &= \left[\frac{(-1)^s}{(s!)^2\cdot 2^{2s}}\right] a_0. \end{aligned} \tag{3.54}$$

Ako uzmemo da je $a_0 = 1$, red r_1 ima oblik

$$r_1(x) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s}{(s!)^2 2^{2s}} x^{2s}, \tag{3.55}$$

koji konvergira za svako konačno x.

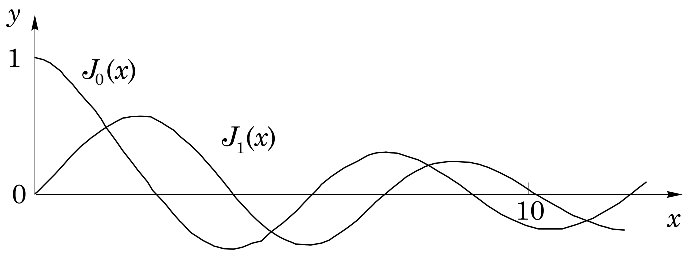
Definicija.

Funkcija definisana relacijom

$$J_0(x) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s}{(s!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2s} \tag{3.56}$$

zove se **Beselova funkcija prve vrste nultog reda**.

Dakle, $r_1 = J_0$ predstavlja prvo partikularno rešenje diferencijalne jednačine (3.45).



Slika 3.2: Beselove funkcije prve vrste

Drugo partikularno rešenje, prema Teoremi 11, str.246, tražimo u obliku [6]

$$y_2(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k + J_0 \log x, \quad \text{gde je } b_0 = 0. \tag{3.57}$$

Kao i kod traženja prvog partikularnog rešenja, nađimo prvo

$$\begin{aligned} L(y_2) &= x^2 y_2'' + x y_2' + x^2 y_2 = \\ &= b_1 x + 2^2 b_2 x^2 + \sum_{k=3}^{\infty} \left(k^2 b_k + b_{k-2}\right) x^k + 2x J_0' + L(J_0) \log x. \end{aligned} \tag{3.58}$$

Kako su y_2 i J_0 rešenja polazne diferencijalne jednačine ($L(y_2) = 0$, $L(J_0) = 0$), to dobijamo

$$2 \sum_{s=1}^{\infty} \frac{(-1)^s 2s}{(s!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2s} + \sum_{k=3}^{\infty} \left(k^2 b_k + b_{k-2}\right) x^k + 2^2 b_2 x^2 + b_1 x = 0. \tag{3.59}$$

Odavde sledi:

za <u>neparne koeficijente</u>:

$$(2s+1)^2 b_{2s+1} = -b_{2s-1}, \quad s = 1, 2, \ldots,$$

a kako je $b_1 = 0$, to su neparni koeficijenti

$$b_{2s+1} = 0, \quad s = 0, 1, 2, \ldots \tag{3.60}$$

Za <u>parne koeficijente</u> dobijamo

$$(2s)^2 b_{2s} + b_{2s-2} = \frac{(-1)^{s+1} s}{2^{2s-2} (s!)^2}, \quad s = 2, 3, \ldots \tag{3.61}$$

Može da se pokaže da se iz poslednje relacije dobija

$$b_{2s} = \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{s}\right) \frac{(-1)^{s-1}}{2^{2s} (s!)^2}, \quad s = 1, 2, \ldots \tag{3.62}$$

Na ovaj način određeno je i drugo partikularno rešenje jednačine (3.45)

$$y_2 = J_0 \log x - \sum_{s=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{s}\right) \frac{(-1)^s}{(s!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2s}. \tag{3.63}$$

---

[6] Napomenimo da smo za prvi deo rešenja imali

$$\begin{aligned} x r_2 &= x \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^{k+1}, \ k+1 = s \quad \Rightarrow \\ &= \sum_{s=1}^{\infty} c_{s-1} x^s, \quad \text{smenom } c_{s-1} = b_s \\ &= \sum_{s=1}^{\infty} b_s x^s = \sum_{s=0}^{\infty} b_s x^s, \ \text{za } s = 0, \, b_0 = 0. \end{aligned}$$

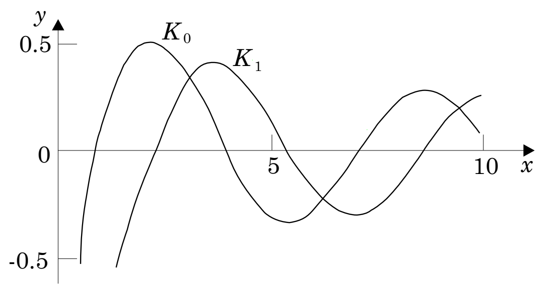
Definicija.

Funkcija definisana relacijom

$$K_0 = J_0 \log x - \sum_{s=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{s}\right) \frac{(-1)^s}{(s!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2s} \tag{3.64}$$

zove se **Beselova funkcija druge vrste, nultog reda**.

Ova funkcija poznata je u literaturi i kao Nojmanova[7] ili Makdonaldova funkcija nultog reda.



Slika 3.3: Beselove funkcije druge vrste

Na kraju, rezimirajmo. Za $\nu = 0$, Beselova jednačina (3.45) ima dva linearno nezavisna rešenja

$$y_1 = J_0, \quad y_2 = K_0, \tag{3.65}$$

odnosno, za ovaj slučaj rešenje pomenute jednačine je

$$y = aJ_0 + bK_0, \tag{3.66}$$

gde su a i b proizvoljne konstante.

Pri rešavanju indeksne jednačine, koja odgovara Beselovoj jednačini (3.45), pretpostavili smo da je $\nu = 0$. Posmatrajmo sada slučaj kada je $\nu \neq 0$. U ovom slučaju je $\lambda_1 \neq \lambda_2$ i

$$\lambda_1 - \lambda_2 = 2\nu. \tag{3.67}$$

Kako smo pretpostavili da je ν realan parametar, to ova razlika može da bude ili ceo broj ili ne.

Posmatrajmo prvo slučaj kada 2ν nije ceo broj. Prema Teoremi 11 a), za ovaj slučaj, imamo dva linearno nezavisna rešenja oblika

$$y_i = |x|^{\lambda_i} \sum_{k=0}^{\infty} a_k^{(i)} x^k, \quad i = 1, 2. \tag{3.68}$$

[7]Carl Neumann (1832-1925), nemački matematičar i fizičar.

Nađimo prvo y_1, uz pretpostavku da je $x > 0$, za $\lambda_1 = \nu$

$$y_1 = x^\nu \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k, \quad a_0 \neq 0, \tag{3.69}$$

pri čemu je ovaj red konvergentan za svako konačno x.

Kao i u prethodnom slučaju, iz uslova

$$L(y_1) = (\nu+1)a_1 x^{\nu+1} + x^\nu \sum_{k=2}^{\infty} \left[(k+\nu)^2 a_k + a_{k-2}\right] x^k = 0, \tag{3.70}$$

može da se dobije

$$\begin{aligned} a_{2s+1} &= 0, \quad s = 0, 1, 2, \ldots \\ a_{2s} &= \frac{(-1)^s a_0}{2^{2s} s!(\nu+1)(\nu+2)\cdots(\nu+s)}. \end{aligned} \tag{3.71}$$

Partikularno rešenje je oblika

$$y_1(x) = a_0 x^\nu + a_0 x^\nu \sum_{s=1}^{\infty} \frac{(-1)^s}{s!(\nu+1)(\nu+2)\cdots(\nu+s)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2s}. \tag{3.72}$$

Pogodno je za a_0 izabrati vrednost (da bi se ova relacija povezala sa jednom drugom specijalnom funkcijom)

$$a_0 = \frac{1}{2^\nu \Gamma(\nu+1)}, \tag{3.73}$$

gde je Γ tzv. gama funkcija. [8] Za ovako izabrano a_0, y_1 postaje

$$y_1 = \left(\frac{x}{2}\right)^\nu \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s}{s!\Gamma(s+\nu+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2s}. \tag{3.74}$$

Definicija.

Funkcija $J_\nu(x)$, definisana relacijom

$$J_\nu = \left(\frac{x}{2}\right)^\nu \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s}{s!\Gamma(s+\nu+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2s}. \tag{3.75}$$

zove se **Beselova funkcija prve vrste**, **reda** ν.

[8] O Γ funkciji biće više reči kasnije. Ovde ćemo da navedemo samo njenu definiciju, kao i neke osobine, zbog lakšeg praćenja.

$$\Gamma(\nu) = \int_0^\infty x^{\nu-1} e^{-x}\,\mathrm{d}x, \text{ za } \nu > 0.$$

Za ovako definisanu funkciju važi

$$\Gamma(\nu+1) = \nu\Gamma(\nu), \quad \Gamma(1) = 1, \quad \Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}.$$

Kako $\lambda_1 - \lambda_2$ nije ceo broj, to se drugo partikularno rešenje traži u obliku

$$y_2 = x^{\lambda_2} \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k = x^{-\nu} \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k. \tag{3.76}$$

U ovom slučaju, istim postupkom, dobijamo

$$y_2 = J_{-\nu}(x), \tag{3.77}$$

gde je $J_{-\nu}$ Beselova funkcija, definisana izrazom

$$J_{-\nu} = \left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s}{s!\Gamma(s-\nu+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2s}. \tag{3.78}$$

Ostao je još jedan slučaj i to kada je ν ceo pozitivan broj, recimo $\nu = n$, gde je n prirodan broj. U ovom slučaju za prvo partikularno rešenje dobijamo (videti Teoremu 11, str.246)

$$y_1 = J_n(x), \tag{3.79}$$

a za drugo

$$y_2 = x^n \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k + C J_n(x) \log x. \tag{3.80}$$

Kao i u prethodnim slučajevima, iz jednačine $L(y_2) = 0$ mogu da se odrede koeficijenti b_k, posle čega se dobija

$$\begin{aligned} y_2(x) = b_0 x^{-n} + b_0 x^{-n} \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{2^{2j} j!(n-1)\cdots(n-j)} x^{2j} - \frac{Ck_0}{2} s_n x^n - \\ - \frac{C}{2} \sum_{i=1}^{\infty} k_{2i} \left(s_i + s_{i+n}\right) x^{n+2i} + C J_n(x) \log x. \end{aligned} \tag{3.81}$$

U prethodnoj relaciji je

$$\begin{aligned} s_m &= 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{m}, \\ k_{2i} &= \frac{(-1)^i}{2^{2i+n} i!(i+n)!}, \quad C = -\frac{b_0}{2^{n-1}(n-1)!}. \end{aligned} \tag{3.82}$$

U specijalnom slučaju, ako uzmemo da je $C = 1$, za b_0 dobijamo

$$b_0 = -2^{n-1}(n-1)!, \tag{3.83}$$

pa je y_2

$$y_2 = -\frac{1}{2}\left(\frac{x}{2}\right)^{-n}\sum_{j=0}^{n-1}\frac{(n-j-1)!}{j!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2j} - \tag{3.84}$$
$$-\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)\frac{1}{n!}\left(\frac{x}{2}\right)^{n} + J_n(x)\log x -$$
$$-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{2}\right)^{n}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{(-1)^i}{i!(i+n)!}\left[\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{i}\right)+\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{i+n}\right)\right]\left(\frac{x}{2}\right)^{2i}.$$

Definicija.

Funkcija K_n definisana relacijom

$$\begin{aligned} K_n(x) = &-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{2}\right)^{-n}\sum_{j=0}^{n-1}\frac{(n-j-1)!}{j!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2j} - \\ &-\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)\frac{1}{n!}\left(\frac{x}{2}\right)^{n} + J_n(x)\log x - \\ &-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{2}\right)^{n}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{(-1)^i}{i!(i+n)!}\times \\ &\times\left[\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{i}\right)+\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{i+n}\right)\right]\left(\frac{x}{2}\right)^{2i}. \end{aligned} \tag{3.85}$$

zove se **Beselova funkcija druge vrste** n-tog **reda**.

Neke Beselove funkcije

Napišimo sada izraze za neke Beselove funkcije:

$$J_0(x) = 1 - \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^4}{2^2\cdot 4^2} - \frac{x^6}{2^2\cdot 4^2\cdot 6^2} + \dots \tag{3.86}$$

$$J_1(x) = \frac{x}{2}\left(1 - \frac{x^2}{2\cdot 2^2} + \frac{x^4}{2\cdot 4^2\cdot 6} - \frac{x^6}{2\cdot 4^2\cdot 6^2\cdot 8} + \dots\right) \tag{3.87}$$

Odredimo sada funkcije $J_{n+1/2}$, gde je n ceo broj. Prvo, iz (3.75), odredimo $J_{1/2}$ i $J_{-1/2}$:

$$J_{1/2}(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\frac{1}{2}}}{k!\Gamma(\frac{3}{2}+k)}. \tag{3.88}$$

Dalje, kako je prema (3.121) i (3.133):

$$\Gamma(\tfrac{3}{2}+k) = \frac{1\cdot 3\cdot 5\dots(2k+1)}{2^{k+1}}\Gamma(\tfrac{1}{2}) = \frac{1\cdot 3\cdot 5\dots(2k+1)}{2^{k+1}}\sqrt{\pi}, \tag{3.89}$$

to zamenom u (3.88) dobijamo:

$$J_{1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi\cdot x}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \cdot x^{2k+1}}{(2k+1)!}. \tag{3.90}$$

Kako ova suma predstavlja razvoj u red funkcije $\sin x$, to konačno dobijamo:

$$J_{1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi\cdot x}} \sin x. \tag{3.91}$$

Na sličan način dobjamo i za $J_{-1/2}$:

$$J_{-1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi\cdot x}} \cos x. \tag{3.92}$$

Sada, prema (3.104), možemo da izračunamo i:

$$\begin{aligned}
J_{3/2}(x) &= \sqrt{\frac{2}{\pi\cdot x}} \left(-\cos x + \frac{\sin x}{x}\right) = \\
&= \sqrt{\frac{2}{\pi\cdot x}} \left[\sin(x-\pi/2) + \frac{1}{x}\cos(x-\pi/2)\right], \\
J_{5/2}(x) &= \sqrt{\frac{2}{\pi\cdot x}} \left\{-\sin x + \frac{3}{x}\left[\sin(x-\pi/2) + \frac{1}{x}\cos(x-\pi/2)\right]\right\} = \\
&= \sqrt{\frac{2}{\pi\cdot x}} \left[\left(1-\frac{3}{x^2}\right)\sin(x-\pi) + \frac{3}{x}\cos(x-\pi)\right].
\end{aligned} \tag{3.93}$$

Poslednju relaciju možemo da uopštimo za izračunavanje Beselovih funkcija oblika $J_{n+1/2}$:

$$J_{n+1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi\cdot x}} \left[P_n\left(\frac{1}{x}\right)\sin\left(x-\frac{n\pi}{2}\right) + Q_n\left(\frac{1}{x}\right)\cos\left(x-\frac{n\pi}{2}\right)\right] \tag{3.94}$$

gde su P_n i Q_n polinomi od $1/x$.

Iz poslednje relacije vidimo da Beselove funkcije $J_{n+1/2}$ možemo da aproksimiramo izrazom:

$$J_\nu(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi\cdot x}} \left[\cos\left(x-\frac{\nu\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right) + O(x^{-1})\right], \quad x>0. \tag{3.95}$$

Ova asimptotska relacija važi ne samo za $\nu = n+1/2$ već i za svako ν.

Za Beselove funkcije postoje tablice iz kojih mogu da se pročitaju njene vrednosti u pojedinim tačkama.

3.4.2 Veberove funkcije

Nađimo sada opšte rešenje Beselove jednačine. Radi toga uvedimo novu funkciju definisanu sa:

$$Y_\nu(x) = \frac{J_\nu(x)\cos\nu\pi - J_{-\nu}(x)}{\sin\nu\pi}. \tag{3.96}$$

Može da se pokaže da je i ova funkcija rešenje polazne jednačine (3.45), jer je linearna kombinacija rešenja (princip superpozicije), u slučaju da je n ceo broj. Tada je desna strana neodređen izraz $0/0$. Iz ovog izraza, uz primenom Lopitalovog pravila, može da se dobije, za ν ceo broj ($\nu = n$):

$$Y_n(x) = \frac{2}{\pi} J_n(x) \ln\frac{x}{2} - \frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(n-k-1)!}{k!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k-n} - \tag{3.97}$$

$$-\frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\left(\frac{x}{2}\right)^{2k-n}}{k!(k+n)!}\left[\frac{\Gamma'(k+1)}{\Gamma(k+1)} + \frac{\Gamma'(n+k+1)}{\Gamma(n+k+1)}\right].$$

Funkciju Y_n – nazivamo Veberova [9] funkcija. Veberova funkcija je rešenje Beselove jednačine u slučaju kada je ν ceo broj ($\nu = n$).

Specijalno, za $n = 0$ dobijamo:

$$Y_0(x) = \frac{2}{\pi} J_0(x) \ln\frac{x}{2} - \frac{2}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\left(\frac{x}{2}\right)^{2k}}{(k!)^2}\frac{\Gamma'(k+1)}{\Gamma(k+1)}. \tag{3.98}$$

Funkcije J_ν i Y_ν su linearno nezavisne i za svako ν (celo ili ne) obrazuju fundamentalno rešenje polazne jednačine. Opšte rešenje možemo, sada, da predstavimo u obliku:

$$y = C_1\, J_\nu(x) + C_2\, Y_\nu(x), \tag{3.99}$$

gde su $C_i\ (i = 1, 2)$ proizvoljne konstante.

Napišimo sada neke rekurentne formule za Beselove i Veberovu funkciju:

$$J_\nu'(x) = J_{\nu-1}(x) - \frac{\nu}{x} J_\nu(x), \tag{3.100}$$

$$Y_\nu'(x) = Y_{\nu-1}(x) - \frac{\nu}{x} Y_\nu(x), \tag{3.101}$$

$$J_\nu'(x) = -J_{\nu+1}(x) + \frac{\nu}{x} J_\nu(x), \tag{3.102}$$

$$Y_\nu'(x) = -Y_{\nu+1}(x) + \frac{\nu}{x} Y_\nu(x), \tag{3.103}$$

$$J_{\nu+1}(x) = \frac{2\nu}{x} J_\nu(x) - J_{\nu-1}(x), \tag{3.104}$$

$$Y_{\nu+1}(x) = \frac{2\nu}{x} Y_\nu(x) - Y_{\nu-1}(x). \tag{3.105}$$

[9] Heinrich Weber (1842-1913), nemački matematičar

Ove formule se mogu proveriti diferenciranjem Beselove i Veberove funkcije. Pokažimo to na primeru (3.100):

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(x^\nu J_\nu(x)\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k 2(\nu+k)x^{2\nu+2k-1}}{2^{\nu+2k}k!\Gamma(\nu+k+1)} \tag{3.106}$$

Dalje, kako je $\Gamma(\nu+k+1) = (\nu+k)\Gamma(\nu+k)$, dobijamo:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(x^\nu J_\nu(x)\right) = x^\nu \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu-1}}{k!\Gamma(\nu-1+k+1)}, \tag{3.107}$$

pa prema (3.75):

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(x^\nu J_\nu(x)\right) = x^\nu J_{\nu-1}. \tag{3.108}$$

Sa druge strane

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(x^\nu J_\nu(x)\right) = \nu x^{\nu-1} J_\nu(x) + x^\nu J'_\nu(x). \tag{3.109}$$

Odavde sledi

$$x^\nu J_{\nu-1} = \nu x^{\nu-1} J_\nu(x) + x^\nu J'_\nu(x),$$

odnosno deljenjem sa x^ν dobija se (3.100).

3.5 Neke druge specijalne funkcije

Skoro bez izuzetka, najčešće korišćene specijalne funkcije su trigonometrijske (Furijeovi redovi), hiporboličke, Beselove i Ležandrove funkcije. Međutim, ima nekoliko klasičnih problema u fizici i tehnici, čije rešavanje nameće uvođene nekih drugih funkcija. U ovom poglavlju samo ćemo da navedemo grupu tih funkcija, bez ulaženja u detalje i analizu njihovih osobina.

3.5.1 Hermitovi polinomi

Funkcija, koju označavamo sa $\mathrm{He}_n(x)$, a predstavlja rešenje diferencijalne jednačine

$$y'' - xy' + ny = 0, \tag{3.110}$$

data je izrazom

$$\mathrm{He}_n(x) = x^n - \frac{n!}{2!(n-2)!}x^{n-2} + 1\cdot 3\frac{n!}{4!(n-4)!}x^{n-4} - 1\cdot 3\cdot 5\frac{n!}{6!(n-6)!}x^{n-6} + \cdots \tag{3.111}$$

Ovako definisane funkcije zovemo **Hermitovi polinomi** [10].

Ovi polinomi mogu da se predstave i relacijom

$$\mathrm{He}_n(x) = (-1)^n e^{x^2/2}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left(e^{-x^2/2}\right), \quad n = 0, 1, \ldots \tag{3.112}$$

[10] Charles Hermite (1822-1901), francuski matematičar, poznat po svojim radovima iz algebre i teorije brojeva.

Neke rekurentne formule

$$\begin{aligned}\mathrm{He}_{n+1}(x) &= x\mathrm{He}_n(x) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\mathrm{He}_n(x),\\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\mathrm{He}_n(x) &= n\mathrm{He}_{n-1}(x).\end{aligned} \tag{3.113}$$

Jedna veza između eksponencijalne i Hermitove funkcije

$$e^{tx-t^2/2} = \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{He}_n(x)\frac{t^n}{n!}. \tag{3.114}$$

Integralna reprezentacija

$$\mathrm{He}_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}(x+it)^n\, e^{-t^2/2}\,\mathrm{d}t, \quad i=\sqrt{-1}. \tag{3.115}$$

Napomenimo da se u literaturi često i jednačina oblika

$$y'' - 2xy' + 2ny = 0$$

naziva Hermitova diferencijalna jednačina, čije je rešenje dato sa

$$\mathrm{H}_n^*(x) = (-1)^n e^{x^2}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left(e^{-x^2}\right), \quad n=0,1,\ldots$$

3.5.2 Lagerovi polinomi

Rešenje diferencijalne jednačine

$$xy'' + (\alpha+1-x)y' + ny = 0 \tag{3.116}$$

je funkcija oblika

$$Ln^{(\alpha)}(x) = \frac{e^x x^{-\alpha}}{n!}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left(e^{-x}x^{n+\alpha}\right), \quad n=0,1,\ldots, \tag{3.117}$$

koju zovemo **Lagerov polinom** [11] (funkcija).

[11] Edmond Laguerre (1834-1886), francuski matematičar, poznat po radovima iz geometrije i teorije beskonačnih redova.

3.6 Specijalne funkcije koje nisu posledica Frobeniusove metode

U ovom delu navešćemo nekoliko specijalnih funkcija koje se javljaju u problemima fizike i matematike, a nisu posledica rešavanja diferencijalnih jednačina pomoću redova.

3.6.1 Gama funkcija (faktorijel funkcija)

Definicija.

Γ – funkcija definiše se sledećom relacijom:

$$\Gamma(n) = \int_0^\infty e^{-x}\cdot x^{n-1}\,\mathrm{d}x, \tag{3.118}$$

gde je n – realan, pozitivan broj ($n > 0$). Ovaj uslov je potreban zbog konvergencije integrala, po gornjoj granici.

Ova funkcija poznata je i kao **Ojlerov integral druge vrste**. U posebnom slučaju, ako je $n = 1$, imamo:

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-x}\,\mathrm{d}x = 1. \tag{3.119}$$

Parcijalnom integracijom, iz (3.118) dobijamo:

$$\Gamma(n) = \left[-e^{-x}\,x^{n-1}\right]_0^\infty + (n-1)\int_0^\infty e^{-x}\,x^{n-2}\,\mathrm{d}x, \tag{3.120}$$

i ako je $n > 1$, dobijamo:

$$\Gamma(n) = (n-1)\cdot\Gamma(n-1). \tag{3.121}$$

Zamenom n sa $n+1$, dobijamo ($n = 1, 2, \dots$):

$$\Gamma(n+1) = n\cdot\Gamma(n) = n\cdot(n-1)\cdot\Gamma(n-1) = \cdots = n! \tag{3.122}$$

Dalje, ako zamenimo x sa x^2 u (3.118), dobijamo:

$$\Gamma(n) = \int_0^\infty e^{-x^2}\cdot x^{2n-2}\,\mathrm{d}(x^2) = 2\int_0^\infty e^{-x^2}\,x^{2n-1}\,\mathrm{d}x. \tag{3.123}$$

U posebnom slučaju, ako je $n = 1/2$, iz prethodne relacije dobijamo

$$\Gamma(1/2) = 2\int_0^\infty e^{-x^2}\,\mathrm{d}x. \tag{3.124}$$

Integral:

$$\int_0^{\pi/2} \cos^m \tau\cdot \sin^n \tau\,\mathrm{d}\tau, \tag{3.125}$$

može da se izrazi preko Γ – funkcije.

Da bismo to pokazali, pođimo od integrala:

$$u = \int_0^\infty\int_0^\infty e^{-x^2-y^2}\cdot x^{2m-1}\cdot y^{2n-1}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y. \tag{3.126}$$

Ovaj dvostruki integral možemo da predstavimo kao proizvod dva jednostruka:

$$u = \int_0^\infty e^{-x^2}\cdot x^{2m-1}\,\mathrm{d}x\cdot \int_0^\infty e^{-y^2}\cdot y^{2n-1}\,\mathrm{d}y = \frac{1}{4}\Gamma(m)\cdot\Gamma(n). \tag{3.127}$$

S druge strane, ako pređemo na polarne koordinate

$$(x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi,\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y = r\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi),$$

integral (3.126) postaje:

$$\begin{aligned} u &= \int_0^{\pi/2}\int_0^\infty e^{-r^2}(r\ \cos\varphi)^{2m-1}\cdot(r\ \sin\varphi)^{2n-1}\,r\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi = \\ &= \int_0^\infty e^{-r^2} r^{2(m+n)-1}\,\mathrm{d}r \int_0^{\pi/2} (\cos\varphi)^{2m-1}\cdot(\sin\varphi)^{2n-1}\,\mathrm{d}\varphi = \\ &= \frac{1}{2}\Gamma(m+n)\int_0^{\pi/2}(\cos\varphi)^{2m-1}\cdot(\sin\varphi)^{2n-1}\,\mathrm{d}\varphi \end{aligned} \tag{3.128}$$

Iz (3.127) i (3.128) dobijamo:

$$u = \frac{1}{4}\Gamma(m)\Gamma(n) = \frac{1}{2}\Gamma(m+n)\int_0^{\pi/2}(\cos\varphi)^{2m-1}\cdot(\sin\varphi)^{2n-1}\,\mathrm{d}\varphi, \tag{3.129}$$

odnosno:

$$\int_0^{\pi/2} (\cos\varphi)^{2m-1} \cdot (\sin\varphi)^{2n-1}\, \mathrm{d}\varphi = \frac{1}{2}\frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}. \tag{3.130}$$

Uvedimo sada smene:

$$\begin{aligned} 2m-1 = m' \quad &\Rightarrow \quad m = \frac{m'+1}{2}, \\ 2n-1 = n' \quad &\Rightarrow \quad n = \frac{n'+1}{2}, \end{aligned} \tag{3.131}$$

pa integral (3.130) postaje:

$$\int_0^{\pi/2} (\cos\varphi)^{m'} (\sin\varphi)^{n'}\, \mathrm{d}\varphi = \frac{1}{2}\frac{\Gamma\left(\dfrac{m'+1}{2}\right)\cdot\Gamma\left(\dfrac{n'+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\dfrac{m'+n'+2}{2}\right)}. \tag{3.132}$$

Napomenimo da je $m' > -1$ i $n' > -1$, što sledi iz uslova da je $m > 0$ i $n > 0$.

U specijalnom slučaju, kada je $m' = n' = 0$, dobijamo:

$$\int_0^{\pi/2} \mathrm{d}\varphi = \frac{1}{2}\frac{[\Gamma(1/2)]^2}{\Gamma(1)} \quad \Rightarrow \quad \frac{\pi}{2} = \frac{[\Gamma(1/2)]^2}{2} \quad \Rightarrow \quad \underline{\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}}. \tag{3.133}$$

Dalje, iz (3.121), dobijamo:

$$\Gamma(3/2) = \frac{1}{2}\Gamma(1/2) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}, \quad \Gamma(5/2) = \frac{1\cdot 3}{2^2}\sqrt{\pi}, \quad \Gamma(7/2) = \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2^3}\sqrt{\pi}, \tag{3.134}$$

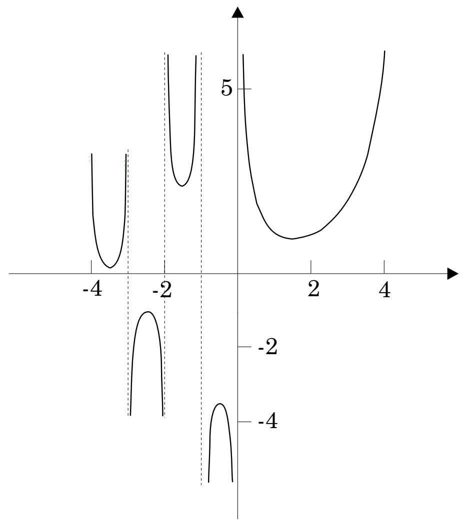
itd.

Iz (3.122) sledi:

$$\Gamma(n) = \frac{\Gamma(n+1)}{n}, \tag{3.135}$$

odakle $\Gamma(n) \to \infty$, kada $n \to +0$.

Γ – funkcija može da se proširi na osnovu (3.135) i za $n < 0$ u koracima najpre za $(-1, 0)$, zatim $(-2, -1)$ itd. Ovako proširena funkcija predstavljena je grafički na sl. 3.4.



Slika 3.4: Γ funkcija

3.6.2 Beta funkcija

Definicija.

Beta funkciju definišemo sledećom relacijom:

$$B(m,n) = \int_0^1 x^{m-1} \cdot (1-x)^{n-1}\,\mathrm{d}x \tag{3.136}$$

za svako $m > 0$ i $n > 0$. Ovaj uslov je potreban zbog konvergencije integrala.

Funkcija (3.136) poznata je i kao **Ojlerov integral prve vrste**. Beta funkcija može da se poveže sa Γ – funkcijom, polazeći od (3.136) i uvodeći smenu $x = \cos^2\varphi$, pa dobijamo (prema 3.130):

$$B(m,n) = 2\int_0^{\pi/2} (\cos\varphi)^{2m-1}(\sin\varphi)^{2n-1}\,\mathrm{d}\varphi = \frac{\Gamma(m)\cdot\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)} = B(m,n). \tag{3.137}$$

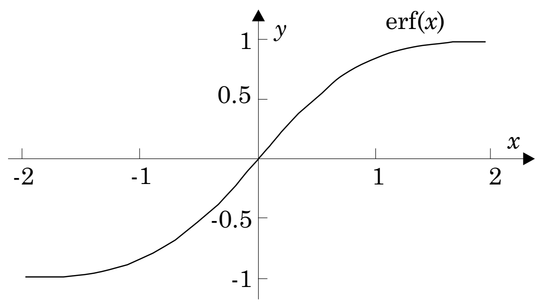
3.6.3 Funkcija greške

Definicija.

Integral oblika

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2}\, \mathrm{d}t \tag{3.138}$$

definiše funkciju koju zovemo **funkcija greške**.



Slika 3.5: Funkcija greške

Ova funkcija može da se predstavi i u obliku reda

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)k!}. \tag{3.139}$$

Pored ove funkcije koristi se i erfc funkcija ili **komplementarna funkcija greške**, definisana relacijom

$$\operatorname{erfc}(x) = 1 - \operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^{\infty} e^{-t^2}\, \mathrm{d}t. \tag{3.140}$$

Iz same definicije ovih funkcija i (3.124) i (3.133) neposredno sledi

$$\operatorname{erf}(\infty) = 1 \quad \text{i} \quad \operatorname{erfc}(0) = 1. \tag{3.141}$$

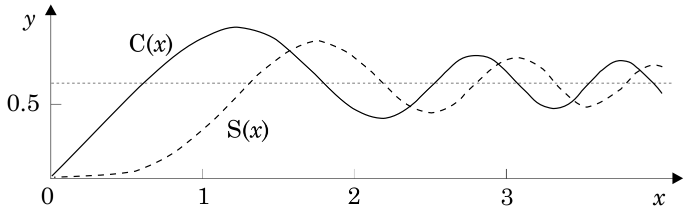
U nekim problemima fizike javlja se i funkcija oblika

$$\frac{1}{1+i} \operatorname{erf}\left(\frac{1+i}{2} x\sqrt{\pi}\right) = \mathrm{C}(x) + i\mathrm{S}(x), \quad i = \sqrt{-1}. \tag{3.142}$$

U prethodnoj formuli javljaju se funkcije $\mathrm{C}(x)$ i $\mathrm{S}(x)$, definisane relacijama:

$$\begin{aligned} \mathrm{C}(x) &= \int_0^x \cos\frac{\pi t^2}{2}\,\mathrm{d}t, \\ \mathrm{S}(x) &= \int_0^x \sin\frac{\pi t^2}{2}\,\mathrm{d}t, \end{aligned} \tag{3.143}$$

koje nazivamo **Frenelovi integrali**.[12]



Slika 3.6: Frenelovi integrali

3.6.4 Eksponencijalni integral

Integral dat relacijom

$$-\mathrm{Ei}(-x) = \int_x^\infty \frac{e^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t \tag{3.144}$$

definiše tzv. **eksponencijalni integral**. Ova funkcija takođe se javlja u mnogim problemima fizike.

Za male vrednosti x ovaj integral može da se aproksimira relacijom

$$-\mathrm{Ei}(x) \approx -\gamma - \ln x, \tag{3.145}$$

gde je γ konstanta, data relacijom (3.148).

Ako x zamenimo sa iy, eksponencijalni integral može da se predstavi u obliku

$$\mathrm{Ei}(iy) = \mathrm{Ci}(y) + i\mathrm{Si}(y) + i\frac{\pi}{2}, \tag{3.146}$$

pri čemu smo uveli dve nove funkcije $\mathrm{Ci}(y)$ i $\mathrm{Si}(y)$, definisane izrazima

$$\begin{aligned} \mathrm{Ci}(y) &= -\int_y^\infty \frac{\cos t}{t}\,\mathrm{d}t = \gamma + \ln y - \int_0^y \frac{1-\cos t}{t}\,\mathrm{d}t, \\ \mathrm{Si}(y) &= \int_0^y \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2} - \int_y^\infty \frac{1-\sin t}{t}\,\mathrm{d}t. \end{aligned} \tag{3.147}$$

[12] Augustin Fresnel (1788-1827), francuski fizičar, poznat po svojim radovima iz optike.

Ove funkcije zovemo: $\mathrm{Ci}(y)$ – **kosinus integral** i $\mathrm{Si}(y)$ – **sinus integral**. U prethodnim relacijama javljala se jedna konstanta γ koja je u literaturi poznata i kao Ojlerova konstanta. Može da se predstavi izrazom

$$\gamma = \lim_{m\to\infty}\left(\sum_{l=1}^{m}\frac{1}{l} - \ln m\right) \approx 0,577215. \tag{3.148}$$

3.6.5 Eliptički integrali i funkcije

Postoji više vrsta eliptičkih integrala. Na ovom mestu daćemo dva:

Definicija.

Funkcija definisana relacijom

$$K(k,t) = \int_0^t \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} \tag{3.149}$$

zove se **eliptički integral prve vrste**.

Definicija.

Funkcija definisana relacijom

$$E(k,t) = \int_0^t \sqrt{\frac{1-k^2x^2}{1-x^2}}\,\mathrm{d}x \tag{3.150}$$

zove se **eliptički integral druge vrste**.

3.7 Ortogonalne i normirane funkcije

Posmatrajmo skup integrabilnih funkcija za $x \in [a, b]$, $(a < b)$

$$f_1(x),\ f_2(x), \ldots,\ f_n(x), \ldots \tag{3.151}$$

Definicija.

Za skup funkcija (3.151) kaže se da je **ortogonalan** u intervalu $[a, b]$, ako je

$$(f_m,\ f_n) \overset{def}{\equiv} \int_a^b f_m(x)\, f_n(x)\, \mathrm{d}x = 0, \quad \text{za } \forall\ m \neq n,\ \ n, m = 1, 2, \ldots \tag{3.152}$$

pri čemu funkcije $f_n(x)$, $n = 1, 2, \ldots$, nisu identički jednake nuli u posmatranom intervalu.

Kako su $f_n(x)$ integrabilne funkcije, a a i b konstante, to očigledno postoji i integral

$$\int_a^b f_n^2(x)\, \mathrm{d}x = I_n > 0,$$

pri čemu je I_n konstantno.

Definicija.

Nenegativan kvadratni koren

$$\sqrt{(f_n,\ f_n)} = \sqrt{\int_a^b f_n^2(x)\, \mathrm{d}x} = \sqrt{I_n} \tag{3.153}$$

naziva se **norma** funkcije $f_n(x)$ i označava se sa

$$\|f_n\| = \sqrt{I_n}, \quad \text{tj.} \quad \|f_n\| = \sqrt{(f_n,\ f_n)} = \sqrt{\int_a^b f_n^2(x)\, \mathrm{d}x}. \tag{3.154}$$

Definicija.

Skup funkcija f_n (3.151), čija je norma jednaka jedinici, tj.

$$\|f_n\| = \sqrt{\int\limits_a^b f_n^2(x)\,\mathrm{d}x} = 1 \tag{3.155}$$

nazivamo **normiran** skup funkcija.

Definicija.

Skup funkcija f_n (3.151) koji je istovremeno ortogonalan i normiran, tj.

$$(f_m,\, f_n) = \int\limits_a^b f_m(x) f_n(x)\,\mathrm{d}x = \delta_{mn} \tag{3.156}$$

nazivamo **ortonormiran** skup funkcija, na intervalu $x \in [a, b]$.

U prethodnoj relaciji δ_{ij} predstavlja Kronekerov delta simbol.

Neki skupovi funkcija, bitni za primenu, nisu ortogonalni, ali poseduju takvu osobinu da je

$$\int\limits_a^b p(x) f_m(x) f_n(x)\,\mathrm{d}x = 0, \quad \text{za } m \neq n. \tag{3.157}$$

U ovom slučaju kažemo da je skup funkcija f_n (3.151) **ortogonalan u odnosu na težinsku funkciju** $p(x)$, na intervalu $x \in [a, b]$.

U ovom slučaju norma se definiše izrazom

$$\|f_n\| = \sqrt{\int\limits_a^b p(x) f_n^2(x)\,\mathrm{d}x}. \tag{3.158}$$

Ako je u ovom slučaju norma jednaka jedinici, tada je odgovarajući skup funkcija **ortonormiran u odnosu na** $p(x)$, na posmatranom intervalu.

3.7.1 Redovi ortogonalnih funkcija

Pomoću skupova ortogonalnih funkcija uvodi se na jednostavan način jedan značajan tip funkcionalnih redova. Naime, neka je $g_1(x), g_2(x), \ldots$, dati skup ortogonalnih funkcija na intervalu $a \leq x \leq b$ i neka je $f(x)$ data funkcija koja na ovom intervalu može da se predstavi konvergentnim redom:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n g_n(x) \tag{3.159}$$

onda se ovaj red naziva **generalisan Furijeov red**[13] funkcije $f(x)$, a njegovi koeficijenti $a_1, a_2, \ldots$, **Furijeovi koeficijenti** funkcije $f(x)$ u odnosu na dati skup ortogonalnih funkcija. S obzirom na ortogonalnost funkcija g_i, Furijeovi koeficijenti mogu da se odrede relativno jednostavno. Množenjem leve i desne strane jednakosti (3.159) sa $g_m(x)$, a zatim integraljenjem od a do b (uz pretpostavku da je integracija član po član moguća), dobijamo:

$$(f, g_m) = \int_a^b f g_m dx = \int_a^b \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n g_n \right) g_m dx = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \left(\int_a^b g_n g_m dx \right) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n (g_n, g_m)$$

Za $n = m$ dobija se $(g_m, g_m) = \|g_m\|^2$, dok je za $n \neq m$, zbog ortogonalnosti funkcija g_i, $(g_n, g_m) = 0$. Prema tome, formula za Furijeove koeficijente je:

$$a_n = \frac{(f, g_n)}{\|g_n\|^2} = \frac{1}{\|g_n\|^2} \int_a^b f(x) g_n(x) dx, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

3.7.2 Kompletnost ortonormiranih funkcija

U praksi često se koriste ortonormirani skupovi koji sadrže "dovoljan broj" funkcija koji omogućava da se generalisanim Furijeovim redovima ovih funkcija predstave široke klase funkcija, na primer, sve neprekidne funkcije na intervalu $a \leq x \leq b$.

Definicija.

Niz funkcija $f_n(x)$ je **konvergentan po normi** i konvergira ka funkciji f ako je

$$\lim_{n \to \infty} \|f_n - f\| = 0, \tag{3.160}$$

odnosno, ako je (uz izostavljanje kvadratnog korena kod norme):

$$\lim_{n \to \infty} \int_a^b [f_n(x) - f(x)]^2 dx = 0.$$

Konvergencija po normi naziva se i srednjekvadratnom konvergencijom ili srednjom konvergencijom. Shodno ovoj definiciji red (3.159) konvergira (po normi) ka funkciji f ako je

$$\lim_{n \to \infty} \int_a^b [s_n(x) - f(x)]^2 dx = 0,$$

[13] O Furijeovim redovima biće detaljnije reči u narednom poglavlju.

gde je $s_n(x)$ parcijalna suma reda (3.159) :

$$s_n(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k g_k(x).$$

Definicija.

Skup ortonormiranih funkcija $g_1, g_2, \ldots$ je **kompletan** u skupu funkcija S na intervalu $a \leq x \leq b$, ako bilo koja funkcija f iz S može sa proizvoljnom tačnošću da se aproksimira linearnom kombinacijom $a_1 g_1 + a_2 g_2 + \cdots + a_n g_n$. To znači da za svako $\varepsilon > 0$ mogu da se nađu konstante $a_1, a_2, \ldots, a_n$ takve da je za dovoljno veliko n:

$$\|f - (a_1 g_1 + a_2 g_2 + ... + a_n g_n)\| < \varepsilon.$$

Može da se pokaže da su skupovi Ležandrovih polinoma i Beselovih funkcija kompletni u skupu neprekidnih realnih funkcija na odgovarajućim intervalima.

3.7.3 Šturm-Liuvilov problem

U tehnici, različiti važni ortogonalni skupovi funkcija nastaju kao rešenje linearne diferencijalne jednačine drugog reda, čiji oblik može da se predstavi relacijom

$$[r(x)y']' + [q(x) + \lambda p(x)]\, y = 0, \tag{3.161}$$

na nekom intervalu $a \leq x \leq b$, pri čemu su zadovoljeni granični uslovi oblika:

$$\begin{array}{ll} a) & k_1\, y(a) + k_2\, y'(a) = 0, \\ b) & l_1\, y(b) + l_2\, y'(b) = 0. \end{array} \tag{3.162}$$

Ovde je λ- parametar, a k_i odnosno l_i $(i = 1, 2)$ date (poznate) realne konstante, koje nisu istovremeno jednake nuli.

Jednačina (3.161) zove se **Šturm** [14] − **Liuvilova** [15] **jednačina**. Može da se pokaže da Ležandrova, Beselova i neke druge jednačine mogu da se predstave u ovom obliku.

Problem rešavanja diferencijalne jednačine (3.161) sa graničnim uslovima (3.162), zove se **Šturm-Liuvilov problem**.

[14] Jacques Charles Francois Sturm (1803-1855), francuski matematičar, švajcarskog porekla. Dao je značajan doprinos u algebri, a poznat je po tome što je prvi izračunao brzinu prostiranja zvuka u vodi.

[15] Joseph Liouville (1809-1882), francuski matematičar. Dao je veliki doprinos u različitim oblastima matematike, a posebno je poznat njegov rad u kompleksnoj analizi, specijalnim funkcijama, diferencijalnoj geometriji i teoriji brojeva.

Glavne vrednosti. Glavne funkcije

Iz relacija (3.161) i (3.162) vidi se, da za svako λ, imamo trivijalno rešenje $y \equiv 0$, tj. $y(x) = 0$ za $\forall x$ iz posmatranog intervala.

Definicija.

Vrednosti λ, za koje problem (3.161), (3.162) ima netrivijalno rešenje ($y \not\equiv 0$), ako takav broj postoji, zove se **glavna vrednost** problema.

Definicija.

Netrivijalno rešenje, problema (3.161), (3.162), koje odgovara glavnoj vrednosti λ zove se **glavna funkcija**.

Neke osobine, prethodno uvedenih pojmova, daćemo u obliku dve (sledeće) teoreme.

Teorema 12 *Pretpostavimo da su funkcije p, q, r i r', u jednačini (3.161), realne i neprekidne na intervalu $a \leq x \leq b$. Neka su $y_m(x)$ i $y_n(x)$ glavne funkcije Šturm-Liuvilovog problema (3.161), (3.162), koje odgovaraju različitim glavnim vrednostima λ_m i λ_n, respektivno. Tada su y_m i y_n ortogonalne funkcije, na posmatranom intervalu, u odnosu na težišnu funkciju p.*

Dokaz. Kako su y_m i y_n rešenja posmatranog problema to one zadovoljavaju relacije:

$$(ry_m')' + (q + \lambda_m p)y_m = 0,$$
$$(ry_n')' + (q + \lambda_n p)y_n = 0.$$

Pomnožimo prvu relaciju sa y_n, drugu sa $-y_m$, a zatim ih saberimo, pa dobijamo

$$(\lambda_m - \lambda_n)\, p y_m y_n = y_m\,(ry_n')' - y_n\,(ry_m')' = [(ry_n')\, y_m - (ry_m')\, y_n]'. \tag{3.163}$$

Ovaj izraz predstavlja neprekidnu funkciju, u intervalu $a \leq x \leq b$, jer su r i r' neprekidne funkcije prema početnoj pretpostavci, a y_m i y_n kao rešenja početnog problema. Dakle, možemo da integralimo posmatrani izraz (3.163). Ova integracija daje

$$\begin{aligned}(\lambda_m - \lambda_n) \int_a^b p y_m y_n \,\mathrm{d}y &= [r\,(y_n' y_m - y_m' y_n)]\Big|_a^b = \\ &= r(b)\,[y_n'(b) y_m(b) - y_m'(b) y_n(b)] - r(a)\,[y_n'(a) y_m(a) - y_m'(a) y_n(a)]\,.\end{aligned} \tag{3.164}$$

Analizirajmo sada izraz sa leve strane jednakosti (3.164) i u tu svrhu posmatrajmo granične uslove (3.162):

$$k_1 y_m(a) + k_2 y_m'(a) = 0, \tag{3.165}$$
$$k_1 y_n(a) + k_2 y_n'(a) = 0. \tag{3.166}$$

Množeći prvu jednačinu sa y_n, a drugu sa y_m, a zatim oduzimajući, dobijamo

$$k_2\left[y_m(a)y_n'(a) - y_n(a)y_m'(a)\right] = 0. \tag{3.167}$$

Uz pretpostavku da je $k_2 \neq 0$ dobijamo da je

$$y_m(a)y_n'(a) - y_n(a)y_m'(a) = 0. \tag{3.168}$$

Na sličan način može da se pokaže da je i

$$y_m(b)y_n'(b) - y_n(b)y_m'(b) = 0, \tag{3.169}$$

za $l_2 \neq 0$. Na osnovu ovih relacija zaključujemo da je

$$\int\limits_a^b p y_m y_n \,\mathrm{d}y = 0, \quad \text{za } m \neq n. \tag{3.170}$$

Ovim smo dokazali teoremu za $k_2 \neq 0$ i $l_2 \neq 0$.

Posmatrajmo ponovo uslove (3.165) i (3.166). Množeći prvi uslov sa y_n', drugi da y_m', a zatim oduzimajući dobijamo, za $k_1 \neq 0$

$$y_m(a)y_n'(a) - y_n(a)y_m'(a) = 0. \tag{3.171}$$

Na sličan način dobijamo i za $l_1 \neq 0$

$$y_m(b)y_n'(b) - y_n(b)y_m'(b) = 0. \tag{3.172}$$

Na ovaj način dokazali smo teoremu i za ovaj slučaj, pa je, s obzirom da k_1 i k_2, odnosno l_1 i l_2 ne mogu istovremeno da budu jednaki nuli, teorema dokazana u celosti.

Teorema 13 *Ako Šturm-Liuvilov problem (3.161), (3.162) zadovoljava uslove prethodne teoreme i ako je $p \neq 0$ na celom intervalu $a \leq x \leq b$, tada su sve glavne vrednosti problema realne.*

Dokaz. Pretpostavimo suprotno, tj. neka je $\lambda = \alpha + i\beta$ glavna vrednost problema, a odgovarajuća glavna funkcija oblika

$$y(x) = u(x) + iv(x).$$

U ovim izrazima α, β su realne konstante, a u i v realne funkcije.

Zamenom ovih vrednosti u jednačinu (3.161) dobijamo

$$(ru' + irv')' + (q + \alpha p + i\beta p)(u + iv) = 0.$$

Da bi ova kompleksna jednačina bila zadovoljena, potrebno je da istovremeno i realni i imaginarni njeni delovi budu jednaki nuli, tj.

$$(ru')' + (q + \alpha p)\,u - \beta p v = 0,$$
$$(rv')' + (q + \alpha p)\,v + \beta p u = 0.$$

Ako pomnožimo prvu jednačinu sa v, drugu sa $-u$, pa zatim ih saberemo, dobijamo

$$\begin{aligned}-\beta\left(u^2+v^2\right)p &= u(rv')' - v(ru')' = \\ &= \left[(rv')u - (ru')v\right]'.\end{aligned}$$

Izraz u uglastoj zagradi je neprekidna funkcija na intervalu $a \leq x \leq b$ (videti dokaz prethodne teoreme), pa integracijom, vodeći računa o graničnim uslovima (kao i kod prethodne teoreme), dobijamo

$$-\beta\int_a^b \left(u^2+v^2\right)p\,\mathrm{d}x = \left[r\left(uv' - vu'\right)\right]\Big|_a^b = 0.$$

Kako je y glavna funkcija to je $y \not\equiv 0$. Dalje, kako su y i p neprekidne funkcije, pri čemu je $p > 0$ ili $p < 0$ na intervalu $a \leq x \leq b$, a $y^2 = u^2 + v^2 \not\equiv 0$, to sledi da je integral na levoj strani poslednje jednakosti različit od nule. Odavde sledi da β mora da bude jednako 0, tj. $\beta = 0$. Kao je $\lambda = \alpha + i\beta$ i $\beta = 0$, to sledi da je $\lambda = \alpha$. Dakle λ je realan broj. Ovim je teorema dokazana.

3.8 Zadaci

Zad. 3.1. Dokazati da je skup funkcija

$$1,\ \sin x,\ \sin 2x,\ \ldots, \sin nx, \ldots, \tag{3.173}$$

ortogonalan.

Dokaz.

Pri dokazivanju koristićemo poznate relacije iz trigonometrije:

$$\begin{aligned}\sin\alpha\cdot\sin\beta &= \frac{1}{2}\left(\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)\right), \\ \cos\alpha\cdot\cos\beta &= \frac{1}{2}\left(\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)\right), \\ \sin\alpha\cdot\cos\beta &= \frac{1}{2}\left(\sin(\alpha-\beta) + \sin(\alpha+\beta)\right).\end{aligned}$$

Može se lako pokazati da su vrednosti sledećih integrala:

$$\int_{-\ell}^{\ell} \sin\frac{k\pi x}{\ell}\cdot\sin\frac{m\pi x}{\ell}\,\mathrm{d}x = \begin{cases} 0, & k\neq m,\\ \ell, & k=m\neq 0,\\ 0, & k=m=0\end{cases}$$

$$\int_{-\ell}^{\ell} \cos\frac{k\pi x}{\ell}\cdot\cos\frac{m\pi x}{\ell}\,\mathrm{d}x = \begin{cases} 0, & k\neq m,\\ \ell, & k=m\neq 0,\\ 2\ell, & k=m=0\end{cases}$$

$$\int_{-\ell}^{\ell} \cos\frac{k\pi x}{\ell}\cdot\sin\frac{m\pi x}{\ell}\,\mathrm{d}x = 0$$

Pokažimo to samo na prvom primeru. Za $x\in[-\ell,\ell]$, ako je $k\neq m$

$$\begin{aligned}
\int_{-\ell}^{\ell} \sin\frac{k\pi x}{\ell}\cdot\sin\frac{m\pi x}{\ell}\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\int_{-\ell}^{\ell}\left[\cos\frac{(k-m)\pi x}{\ell} - \cos\frac{(k+m)\pi x}{\ell}\right]\mathrm{d}x = \\
&= \frac{1}{2}\int_{-\ell}^{\ell}\cos\frac{(k-m)\pi x}{\ell}\,\mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int_{-\ell}^{\ell}\cos\frac{(k+m)\pi x}{\ell}\,\mathrm{d}x = \\
&= \frac{1}{2}\frac{\ell}{(k-m)\pi}\sin\frac{(k-m)\pi x}{\ell}\bigg|_{-\ell}^{\ell} - \frac{1}{2}\frac{\ell}{(k+m)\pi}\sin\frac{(k+m)\pi x}{\ell}\bigg|_{-\ell}^{\ell} = \\
&= \frac{\ell}{2(k-m)\pi}\sin\frac{(k-m)\pi}{\ell}2\ell - \frac{\ell}{2(k+m)\pi}\sin\frac{(k+m)\pi}{\ell}2\ell = \\
&= \frac{\ell}{2(k-m)\pi}\sin 2(k-m)\pi - \frac{\ell}{2(k+m)\pi}\sin 2(k+m)\pi = \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Kada je $k=m$ prethodni integral postaje

$$\begin{aligned}
\int_{-\ell}^{\ell} \sin\frac{k\pi x}{\ell}\cdot\sin\frac{k\pi x}{\ell}\,\mathrm{d}x &= \int_{-\ell}^{\ell}\frac{1-\cos\frac{2k\pi x}{\ell}}{2}\,\mathrm{d}x = \\
&= \left(\frac{x}{2} - \frac{\ell}{4k\pi}\sin\frac{2k\pi x}{\ell}\right)\bigg|_{-\ell}^{\ell} = \ell.
\end{aligned}$$

Vidimo da ovaj skup nije normiran, jer je $\ell\neq 1$.

♡

Zad. 3.2. Skup funkcija

$$1,\ \cos x,\ \sin x,\ \cos 2x,\ \sin 2x,\ \ldots,\ \cos nx,\ \sin nx,\ldots, \tag{3.174}$$

je ortogonalan, za $x \in [-\ell, \ell]$.

Dokaz.

Kao i u prethodnom slučaju može da se pokaže da važi uslov ortogonalnosti (3.152), str. 266.

♡

Zad. 3.3. Ležandrovi polinomi

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n} \left[\left(x^2 - 1\right)^n \right],$$

su ortogonalni u intervalu $x \in [-1, +1]$.

Dokaz.

Da bismo ovo dokazali, pođimo od diferencijalne jednačine koju ovi polinomi zadovoljavaju

$$\left(1 - x^2\right) y^{''} - 2xy' + n(n+1)y = 0.$$

Ona može da se napiše i u obliku, pogodnijem za dalji rad,

$$\left[\left(1 - x^2\right) y^{'} \right]^{'} + n(n+1)y = 0.$$

Neka su rešenja ove diferencijalne jednačine polinomi $P_n(x)$ i $P_m(x)$, tada oni zadovoljavaju jednačine:

$$\left[\left(1 - x^2\right) P_n^{'} \right]^{'} + n(n+1)P_n = 0,$$
$$\left[\left(1 - x^2\right) P_m^{'} \right]^{'} + m(m+1)P_m = 0.$$

Množeći prvu jednačinu sa $P_m(x)$, a drugu sa $P_n(x)$, dobijamo:

$$P_m \left[\left(1 - x^2\right) P_n^{'} \right]^{'} + n(n+1)P_n P_m = 0,$$
$$P_n \left[\left(1 - x^2\right) P_m^{'} \right]^{'} + m(m+1)P_m P_n = 0.$$

Njihovim oduzimanjem dobijamo

$$[n(n+1) - m(m+1)]\, P_m P_n + P_m \left[\left(1 - x^2\right) P_n^{'} \right]^{'} - P_n \left[\left(1 - x^2\right) P_m^{'} \right]^{'} = 0.$$

Uočimo prvo da je

$$
\begin{aligned}
& P_m \left[\left(1-x^2\right) P_n^{'}\right]^{'} - P_n \left[\left(1-x^2\right) P_m^{'}\right]^{'} = \\
& \quad = \left[P_m \left(1-x^2\right) P_n^{'}\right]^{'} - P_m^{'} \left(1-x^2\right) P_n^{'} - \left[P_n \left(1-x^2\right) P_m^{'}\right]^{'} + P_n^{'} \left(1-x^2\right) P_m^{'} = \\
& \quad = \left[P_n \left(1-x^2\right) P_m^{'} - P_m \left(1-x^2\right) P_n^{'}\right]^{'} - \left(1-x^2\right) \left(P_n^{'} P_m^{'} - P_m^{'} P_n^{'}\right) = \\
& \quad = \left[P_n \left(1-x^2\right) P_m^{'} - P_m \left(1-x^2\right) P_n^{'}\right]^{'}.
\end{aligned}
$$

Dakle, prethodna relacija može da se napiše u obliku

$$
[n(n+1) - m(m+1)]\, P_m P_n + \left[\left(1-x^2\right)\left(P_n P_m^{'} - P_m P_n^{'}\right)\right]^{'} = 0.
$$

Ako sada ovu relaciju integralimo, od -1 do $+1$, dobijamo

$$
\begin{aligned}
& [n(n+1) - m(m+1)] \int_{-1}^{+1} P_m(x) P_n(x)\, \mathrm{d}x + \\
& \qquad + \int_{-1}^{+1} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \left[\left(1-x^2\right)\left(P_n P_m^{'} - P_m P_n^{'}\right)\right] \mathrm{d}x = 0, \quad \text{za } n \neq m.
\end{aligned}
$$

Kako je

$$
\int_{-1}^{+1} \mathrm{d}\left[\left(1-x^2\right)\left(P_n P_m{'} - P_m P_n^{'}\right)\right] = \left(1-x^2\right)\left(P_n P_m^{'} - P_m P_n^{'}\right)\Big|_{-1}^{+1} = 0,
$$

jer je, za $x = -1$ i $x = +1$, $1 - x^2 = 0$, a $P_n(x)$, $P_n^{'}(x)$, $P_m(x)$ i $P_m^{'}(x)$ su ograničene funkcije, odakle sledi da je $P_n(\pm 1) < \infty$, $P_m(\pm 1) < \infty$, $P_n^{'}(\pm 1) < \infty$ i $P_m^{'}(\pm 1) < \infty$, dobijamo, pošto je $[n(n+1) - m(m+1)] \neq 0$,

$$
\int_{-1}^{+1} P_m(x) P_n(x)\, \mathrm{d}x = 0, \quad \text{za } n \neq m,
$$

što predstavlja uslov normalnosti.

Za normu dobijamo

$$
\|P_n(x)\|^2 = \frac{1}{\left(2^n n!\right)^2} \int_{-1}^{+1} \left[\frac{\mathrm{d}^n u_n(x)}{\mathrm{d}x^n}\right]^2 \mathrm{d}x,
$$

gde je

$$
u_n(x) = \left(x^2 - 1\right)^n,
$$

pri čemu je

$$u_n(\pm 1) = u_n'(\pm 1) = \cdots = u_n^{(n-1)}(\pm 1) = 0.$$

Prethodni integral, primenom parcijalne integracije, postaje

$$\int_{-1}^{+1} \left[\frac{\mathrm{d}^n u_n(x)}{\mathrm{d}x^n}\right]\left[\frac{\mathrm{d}^n u_n(x)}{\mathrm{d}x^n}\right] \mathrm{d}x =$$

$$= \quad u_n^{(n)}(x)\cdot u_n^{(n-1)}(x)\Big|_{-1}^{+1} + (-1)\int_{-1}^{+1}\left[\frac{\mathrm{d}^{n-1} u_n(x)}{\mathrm{d}x^{n-1}}\right]\left[\frac{\mathrm{d}^{n+1} u_n(x)}{\mathrm{d}x^{n+1}}\right] \mathrm{d}x \quad \Rightarrow$$

$$\int_{-1}^{+1} \left[\frac{\mathrm{d}^n u_n(x)}{\mathrm{d}x^n}\right]\left[\frac{\mathrm{d}^n u_n(x)}{\mathrm{d}x^n}\right] \mathrm{d}x = (-1)^n \int_{-1}^{+1} u_n(x)\frac{\mathrm{d}^{2n} u_n(x)}{\mathrm{d}x^{2n}}.$$

Kako je

$$u_n = \left(x^2-1\right)^n = x^{2n} + \binom{n}{1}\left(x^2\right)^{n-1}(-1) + \binom{n}{2}\left(x^2\right)^{n-2}(-1)^2 + \cdots$$

to za izvod, pod integralom, dobijamo

$$\frac{\mathrm{d}^{2n}}{\mathrm{d}x^{2n}}\left(u_n\right) = \frac{\mathrm{d}^{2n}}{\mathrm{d}x^{2n}}\left(x^{2n}\right) = 2n(2n-1)\cdots 2\cdot 1 = (2n)!.$$

Kvadrat norme može sada da se predstavi u obliku

$$\left\|P_n(x)\right\|^2 = \frac{1}{\left(2^n n!\right)^2}(2n)!(-1)^n \int_{-1}^{+1} u_n \,\mathrm{d}x.$$

Međutim, kako je

$$u_n = \left(x^2-1\right)^n = (-1)^n\left(1-x^2\right)^n,$$

to prethodan izraz može da se napiše u obliku

$$\left\|P_n(x)\right\|^2 = \frac{1}{\left(2^n n!\right)^2}(2n)! \int_{-1}^{+1} \left(1-x^2\right)^n \mathrm{d}x.$$

Integral, koji se ovde javlja, može više puta parcijalno da se integrali, pa dobijamo

$$\int_{-1}^{+1}(1-x)^n(1+x)^n \, \mathrm{d}x =$$

$$= (1-x)^n \left. \frac{(1+x)^{n+1}}{n+1}\right|_{-1}^{+1} + \frac{n}{n+1}\int_{-1}^{+1}(1-x)^{n-1}(1+x)^{n+1} \, \mathrm{d}x =$$

$$= \frac{n}{n+1}\int_{-1}^{+1}(1-x)^{n-2}(n-1)\frac{(1+x)^{n+2}}{n+2} \, \mathrm{d}x =$$

$$= \frac{n}{n+1}\frac{n-1}{n+2}\int_{-1}^{+1}(1-x)^{n-2}(1+x)^{n+2} \, \mathrm{d}x = \cdots =$$

$$= \frac{n}{n+1}\frac{n-1}{n+2}\cdots\frac{1}{2n}\int_{-1}^{+1}(1+x)^{2n} \, \mathrm{d}x = \frac{n(n-1)\cdots 1}{(n+1)(n+2)\cdots(2n)}\int_{-1}^{+1}(1+x)^{2n} \, \mathrm{d}x.$$

Kako je

$$\int_{-1}^{+1}(1+x)^{2n} \, \mathrm{d}x = \left.\frac{(1+x)^{2n+1}}{2n+1}\right|_{-1}^{+1} = \frac{2^{2n+1}}{2n+1},$$

to konačno, za kvadrat norme, dobijamo

$$\|P_n(x)\|^2 = \frac{1}{(2^n n!)^2}(2n)!\frac{n!1\cdot 2\cdots n}{1\cdot 2\cdots n\cdot (n+1)\cdots(2n)}\frac{2\cdot 2^{2n}}{2n+1} = \frac{2}{2n+1}.$$

Ovim smo pokazali da su Ležandrovi polinomi ortogonalni, ali ne i normirani.

♡

Zad. 3.4. Dokazati da za svako fiksirano $n = 0, 1, \ldots$, Beselove funkcije $J_n(\lambda_{1n}x)$, $J_n(\lambda_{2n}x)$, $\ldots$, formiraju skup ortogonalnih funkcija, na intervalu $0 \leq x \leq R$, u odnosu na težinsku funkciju $p(x) = x$, tj. da je

$$\int_0^R xJ_n(\lambda_{kn}x)\,J_n(\lambda_{mn}x) \, \mathrm{d}x = \begin{cases} 0, & m \neq k, \\ \dfrac{R^2}{2}J_{n+1}^2(\lambda_{mn}R), & m = k. \end{cases} \tag{3.175}$$

♡

Zad. 3.5. Dokazati da je

$$\int_{-\infty}^{+\infty} He_m(x)He_n(x)e^{-x^2/2}\,\mathrm{d}x = \begin{cases} 0, & n \neq m, \\ n!\sqrt{2\pi}, & n = m, \end{cases} \tag{3.176}$$

tj. Hermitove funkcije čine skup ortogonalnih funkcija, u odnosu na težinsku funkciju $p(x) = e^{-x^2/2}$.

♡

Zad. 3.6. Dokazati da Lagerove funkcije zadovoljavaju jednakosti:

a)

$$\int_0^{\infty} L_m^{\alpha}(x)L_n^{\alpha}(x)e^{-x}\,\mathrm{d}x = \delta_{mn}, \tag{3.177}$$

b)

$$\int_0^{\infty} L_m^{\alpha}(x)L_n^{\alpha}(x)e^{-x}x^{\alpha}\,\mathrm{d}x = \begin{cases} 0, & n \neq m, \\ \dfrac{(n+\alpha)!}{n!}, & n = m. \end{cases} \tag{3.178}$$

♡

Ležandrovi polinomi

Zad. 3.7. Dokazati da funkcija $G(x,t) = (1-2xt+t^2)^{-\frac{1}{2}}$ generiše Ležandrove polinome tj.

$$G(x,t) = \left(1-2xt+t^2\right)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^n.$$

Dokaz.

Posmatrana funkcija $G(x,t)$ ima dva singulariteta, a to su dve nule polinoma $1-2xt+t^2$:

$$t_{1,2} = x \pm i\sqrt{1-x^2}.$$

Kako je moduo oba rešenja $|t_1| = |t_2| = 1$, zaključujemo da se funkcija može razviti u Tejlorov red u okolini tačke $t = 0$, jer red konvergira u krugu $|t| < 1$.

Ako je $\left|2xt - t^2\right| < 1$, imamo razvoj

$$\begin{aligned}
(1-2xt+t^2)^{-\frac{1}{2}} &= \left[1-(2xt-t^2)\right]^{-\frac{1}{2}} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\binom{-1/2}{k}(2xt-t^2)^k \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}(2xt-t^2)^k \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(2k)!}{2^{2k}\,k!\,k!}(2xt-t^2)^k.
\end{aligned} \tag{3.179}$$

Ako je ispunjen uslov

$$|t|\,(2\,|x|+|t|) < 1, \tag{3.180}$$

možemo proizvoljno grupisati članove u relaciji (3.179).

Koeficijent u relaciji (3.179) uz t^n određuje se izjednačavanjem sa koeficijentom uz t^n u razvoju

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{(2k)!}{2^{2k}\,k!\,k!}(2xt-t^2)^k,$$

odnosno

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{(2n-2k)!}{2^{2n-2k}\,(n-k)!\,(n-k)!}(2xt-t^2)^{n-k}, \tag{3.181}$$

jer je

$$\sum_{k=0}^{n}f(k) = \sum_{k=0}^{n}f(n-k).$$

Iz (3.181) dobija se traženi koeficijent uz t^n u obliku:

$$\sum_{k=0}^{[n/2]}(-1)^k\frac{(2n-2k)!}{2^{2n-2k}\,(n-k)!\,(n-k)!}\binom{n-k}{k}(2x)^{n-2k},$$

odnosno

$$\sum_{k=0}^{[n/2]}(-1)^k\frac{(2n-2k)!}{2^{n}\,(n-k)!\,(n-k)!}\binom{n-k}{k}x^{n-2k},$$

pri čemu k uzima vrednosti od $k=0$ do $k=[n/2]$, jer je binomni koeficijent $\binom{n-k}{k}$ za $k>[n/2]$ jednak nuli. Iz toga sledi da je

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{[n/2]}(-1)^k\frac{(2n-2k)!}{2^{n}\,(n-k)!\,(n-k)!}\binom{n-k}{k}x^{n-2k}. \tag{3.182}$$

Ovaj dokaz smo izveli pod pretpostavkom da je $-1 \le x \le 1$. Funkcija

$$G(x,t) = (1-2xt+t^2)^{-\frac{1}{2}} \tag{3.183}$$

naziva se *generatrisa* Ležandrovog polinoma.

♡

Zad. 3.8. Dokazati Boneovu (*Bonnet*) rekurentnu formulu

$$(n+1)P_{n+1}(x) - (2n+1)xP_n(x) + nP_{n-1}(x) = 0, \tag{3.184}$$

ako je *Ležandrov polinom* $P_n(x)$ izražen preko funkcije $G(x,t)$:

$$G(x,t) = \frac{1}{\sqrt{1-2xt-t^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^n.$$

Dokaz.

Ako pođemo od

$$G(x,t) = \frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^n, \tag{3.185}$$

i zatim diferenciramo i levu i desnu stranu po t, dobija se jednakost,

$$-\frac{1}{2}\frac{-2x+2t}{\sqrt{(1-2xt+t^2)^3}} = \sum_{n=1}^{\infty} P_n(x)nt^{n-1},$$

a odatle je

$$\frac{x-t}{1-2xt+t^2}\,\frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}} = \sum_{n=1}^{\infty} P_n(x)nt^{n-1}.$$

Na osnovu (3.185), a posle množenja sa $1-2xt+t^2$, dobija se

$$(x-t)\sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^n = (1-2xt+t^2)\sum_{n=1}^{\infty} P_n(x)nt^{n-1},$$

odnosno

$$x\sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^n - \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^{n+1} =$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} P_n(x)nt^{n-1} - 2x\sum_{n=1}^{\infty} P_n(x)nt^n + \sum_{n=1}^{\infty} P_n(x)nt^{n+1}.$$

Svodimo sve stepene pod sumama na t^n

$$x\sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^n - \sum_{n=1}^{\infty} P_{n-1}(x)t^n =$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} P_{n+1}(x)(n+1)t^n - 2x\sum_{n=1}^{\infty} P_n(x)nt^n + \sum_{n=2}^{\infty} P_{n-1}(x)(n-1)t^n.$$

Izdvajanjem članova sume za $n = 0$ i $n = 1$ dobijamo

$$xP_0 + xP_1t + x\sum_{n=2}^{\infty}P_n(x)t^n - P_0t - \sum_{n=2}^{\infty}P_{n-1}(x)t^n =$$
$$= P_1 + 2P_2t + \sum_{n=2}^{\infty}(n+1)P_{n+1}(x)t^n - 2xP_1t - 2x\sum_{n=2}^{\infty}nP_n(x)t^n +$$
$$+ \sum_{n=2}^{\infty}(n-1)P_{n-1}(x)t^n,$$

odnosno

$$xP_0 + 3xP_1t - P_0t - P_1 - 2P_2t =$$
$$= \sum_{n=2}^{\infty}(n+1)P_{n+1}(x)t^n - x\sum_{n=2}^{\infty}(2n+1)P_n(x)t^n + \sum_{n=2}^{\infty}nP_{n-1}(x)t^n.$$

Kako su prva tri Ležandrova polinoma [35]

$$\begin{aligned} P_0(x) &= 1, \\ P_1(x) &= x, \\ P_2(x) &= \frac{1}{2}(3x^2 - 1), \end{aligned}$$

to je

$$xP_0 + 3xP_1t - P_0t - P_1 - 2P_2t = x + 3x^2t - t - x - (3x^2 - 1)t = 0,$$

pa je odatle

$$\sum_{n=2}^{\infty}(n+1)P_{n+1}(x)t^n - x\sum_{n=2}^{\infty}(2n+1)P_n(x)t^n + \sum_{n=2}^{\infty}nP_{n-1}(x)t^n = 0.$$

Grupišući uz t^n dobija se

$$\sum_{n=2}^{\infty}[(n+1)P_{n+1}(x) - (2n+1)xP_n(x) + nP_{n-1}(x)]t^n = 0.$$

odakle sledi

$$(n+1)P_{n+1}(x) - (2n+1)xP_n(x) + nP_{n-1}(x) = 0.$$

♡

Zad. 3.9. Dokazati Kristofelovu (*Christoffel*) rekurentnu formulu

$$P'_{n+1}(x) - P'_{n-1}(x) = (2n+1)P_n(x), \tag{3.186}$$

ako je *Ležandrov polinom* $P_n(x)$ definisan razvojem

$$G(x,t) = \frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^n.$$

<u>*Dokaz.*</u>

Ako pođemo od

$$G(x,t) = \frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^n,$$

a zatim diferenciramo i levu i desnu stranu po x, dobija se

$$t(1-2xt+t^2)^{-3/2} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n'(x)t^n.$$

Ako u ovoj relaciji izraz $(1-2xt+t^2)^{-1/2}$ zamenimo sumom iz (3.185), pa pomnožimo obe strane sa $(1-2xt+t^2)$, dobija se

$$\begin{aligned} t\sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^n &= (1-2xt+t^2)\sum_{n=0}^{\infty} P_n'(x)t^n, \\ \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^{n+1} &= \sum_{n=0}^{\infty} P_n'(x)t^n - 2x\sum_{n=0}^{\infty} P_n'(x)t^{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} P_n'(x)t^{n+2} \end{aligned}$$

Zatim sve svodimo na sume po t^{n+1} i dobijamo

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^{n+1} = \sum_{n=-1}^{\infty} P_{n+1}'(x)t^{n+1} - 2x\sum_{n=0}^{\infty} P_n'(x)t^{n+1} + \sum_{n=1}^{\infty} P_{n-1}'(x)t^{n+1}$$

Pošto sume počinju od različitih vrednosti n, izdvojićemo sabirke za $n=-1$ i $n=0$, pa dobijamo

$$\begin{aligned} P_0t + \sum_{n=1}^{\infty} P_n(x)t^{n+1} = P_0' + P_1't + \sum_{n=1}^{\infty} P_{n+1}'(x)t^{n+1} - 2xP_0't - 2x\sum_{n=1}^{\infty} P_n'(x)t^{n+1} \\ + \sum_{n=1}^{\infty} P_{n-1}'(x)t^{n+1}. \end{aligned}$$

Zamenom Ležandrovog polinoma $P_0 = 1$ i izvoda Ležandrovih polinoma $P_0^{'} = 0$ i $P_1^{'} = 1$, dobijamo

$$\begin{aligned} t + \sum_{n=1}^{\infty} P_n(x)t^{n+1} &= 0 + t + \sum_{n=1}^{\infty} P_{n+1}'(x)t^{n+1} - 0 - 2x\sum_{n=1}^{\infty} P_n'(x)t^{n+1} \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} P_{n-1}'(x)t^{n+1}. \end{aligned}$$

Odatle, grupisanjem uz t^{n+1} sledi

$$P_n(x) = P'_{n+1}(x) - 2xP'_n(x) + P'_{n-1}(x). \tag{3.187}$$

Dalje se, diferenciranjem Boneove formule (jednačine 3.184) po x, dobija

$$(n+1)P'_{n+1}(x) - (2n+1)xP'_n(x) - (2n+1)P_n(x) + nP'_{n-1}(x) = 0. \tag{3.188}$$

Eliminacijom P'_n iz jednačina (3.187) u jednačinu (3.188) dobija se tražena jednakost

$$P'_{n+1}(x) - P'_{n-1}(x) = (2n+1)P_n(x).$$

♡

Zad. 3.10. Dokazati da Ležandrovi polinomi zadovoljavaju Ležandrovu diferencijalnu jednačinu

$$(x^2-1)y^{''} + 2xy^{'} - n(n+1)y = 0.$$

Dokaz.

Ako pođemo od

$$G(x,t) = \frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^n,$$

a zatim diferenciramo i levu i desnu stranu po x, dobija se

$$t(1-2xt+t^2)^{-3/2} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n^{'}(x)t^n.$$

Diferenciramo po t polazne jednačine, dobija se

$$(x-t)(1-2xt+t^2)^{-3/2} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)nt^{n-1}.$$

Eliminacijom $(1-2xt+t^2)^{-3/2}$, iz ove dve jednačine, dobija se

$$(x-t)\sum_{n=0}^{\infty} P_n^{'}(x)t^n = t\sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)nt^{n-1},$$

odnosno

$$x\sum_{n=0}^{\infty} P_n^{'}(x)t^n - \sum_{n=0}^{\infty} P_n^{'}(x)t^{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)nt^n,$$

ili

$$x\sum_{n=0}^{\infty} P_n^{'}(x)t^n - \sum_{n=1}^{\infty} P_{n-1}^{'}(x)t^n = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)nt^n.$$

Odatle se, izjednačavanjem koeficijenata uz t^n, dobija

$$xP_n^{'}(x) - P_{n-1}^{'}(x) = nP_n(x). \tag{3.189}$$

Diferenciranjem Boneove formule (jednačine 3.184) dobijamo

$$(n+1)P_{n+1}^{'}(x) - (2n+1)xP_n^{'}(x) + nP_{n-1}^{'}(x) = (2n+1)P_n(x).$$

Posle eliminacije $P_{n-1}^{'}(x)$ iz prethodne dve jednačine dobija se

$$P_{n+1}^{'}(x) - xP_n^{'}(x) = (n+1)P_n(x),$$

odnosno, zamenom $n+1$ sa n,

$$P_n^{'}(x) - xP_{n-1}^{'}(x) = nP_{n-1}(x).$$

Ponovnom eliminacijom $P_{n-1}^{'}(x)$ iz poslednje jednačine i jednačine (3.189) dobija se

$$(x^2-1)P_n^{'}(x) - nxP_n(x) + nP_{n-1}(x) = 0.$$

Diferenciranjem ove jednakosti dobijamo

$$(x^2-1)P_n^{''}(x) + (2-n)xP_n^{'}(x) - nP_n(x) + nP_{n-1}^{'}(x) = 0.$$

Ako se ponovo eliminiše $P_{n-1}^{'}(x)$ iz prethodne jednačine i jednačine (3.189), konačno se dobija

$$(x^2-1)P_n^{''}(x) + 2xP_n^{'}(x) - n(n+1)P_n(x) = 0,$$

što je i trebalo dokazati.

♡

Zad. 3.11. Dokazati ortogonalnost Ležandrovih polinoma polazeći od Rodrigove formule za Ležandrove polinome

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(x^2-1)^n$$

(videti [35]).

<u>*Dokaz.*</u>

Treba dokazati da je

$$I_{mn} = \int\limits_{-1}^{1} P_m(x)P_n(x)\mathrm{d}x = 0, \qquad \text{za } m \neq n.$$

Polazeći od Rodrigove formule

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(x^2-1)^n, \tag{3.190}$$

za integral I_{mn} dobijamo

$$I_{mn} = \int_{-1}^{1} P_m(x)P_n(x)\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{1}{2^{n+m}n!m!}\int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(x^2-1)^n \frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}x^m}(x^2-1)^m \mathrm{d}x.$$

Pretpostavimo da je $m < n$. Parcijalnom integracijom dobijamo

$$I_{mn} = \frac{1}{2^{m+n}m!n!}\left[\frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}x^m}(x^2-1)^m \frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}x^{n-1}}(x^2-1)^n\Big|_{-1}^{1} - \right.$$

$$\left. - \int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}^{m+1}}{\mathrm{d}x^{m+1}}(x^2-1)^{m+1} \frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}x^{n-1}}(x^2-1)^n \mathrm{d}x\right] =$$

$$= \frac{-1}{2^{m+n}m!n!}\int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}^{m+1}}{\mathrm{d}x^{m+1}}(x^2-1)^{m+1} \frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}x^{n-1}}(x^2-1)^n \mathrm{d}x.$$

Ako još $n-1$ put ponovimo parcijalnu integraciju dobijamo

$$I_{mn} = \frac{(-1)^n}{2^{m+n}m!n!}\int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}^{m+n}}{\mathrm{d}x^{m+n}}(x^2-1)^m (x^2-1)^n \mathrm{d}x.$$

Kako je, prema pretpostavci $m < n$, to je $m+n > 2m$, a kako je $(x^2-1)^m$ polinom stepena $2m$ sledi

$$\frac{\mathrm{d}^{m+n}}{\mathrm{d}x^{m+n}}(x^2-1)^m \equiv 0,$$

odnosno

$$I_{mn} \left(= \int_{-1}^{1} P_m(x)P_n(x)\mathrm{d}x \right) = 0 \qquad \text{za } m \neq n,$$

pa su, dakle, polinomi ortogonalni.

♡

Zad. 3.12. Pokazati da za Ležandrove polinome važi jednakost

$$P_n(\cos\theta) = \sum_{k=0}^{n} \binom{-1/2}{n}\binom{-1/2}{n-k}\cos{(2k-n)\theta}.$$

Rešenje.

Pođimo od generatrise Ležandrovih polinoma

$$G(x,t) = (1-2xt+t^2)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^n.$$

Kako je

$$2\cos\theta = \cos\theta + i\sin\theta + \cos\theta - i\sin\theta = e^{i\theta} + e^{-i\theta},$$

a $e^{i\theta}\cdot e^{-i\theta} = 1$, to je

$$1-2t\cos\theta + t^2 = 1 - t(e^{i\theta}+e^{-i\theta}) + t^2 e^{i\theta}\cdot e^{-i\theta} = (1-te^{i\theta})(1-te^{-i\theta}).$$

Ako sada u izraz $(1-2xt+t^2)^{-\frac{1}{2}}$ uvedemo smenu $x = \cos\theta$ dobijamo

$$(1-2t\cos\theta+t^2)^{-\frac{1}{2}} = (1-te^{i\theta})^{-1/2}(1-te^{-i\theta})^{-1/2}.$$

Za $|t| < 1$ važe razvoji:

$$(1-te^{i\theta})^{-1/2} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \binom{-1/2}{n} e^{in\theta}t^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n,$$

$$(1-te^{-i\theta})^{-1/2} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \binom{-1/2}{n} e^{-in\theta}t^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n t^n,$$

pa odatle sledi da je

$$(1-2xt+t^2)^{-\frac{1}{2}} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n t^n\right).$$

Koeficijenti uz t^n u ovom razvoju se mogu predstaviti sumom

$$\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{2n} \binom{-1/2}{n}\binom{-1/2}{n-k} e^{(2k-n)i\theta}.$$

Na taj način dobijamo

$$(1-2t\cos\theta+t^2)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} t^n \sum_{k=0}^{n} \binom{-1/2}{n}\binom{-1/2}{n-k} e^{(2k-n)i\theta}.$$

Upoređivanjem realnih koeficijanata uz t^n, iz prethodne i početne jednačine, za $x = \cos\theta$, dobijamo

$$P_n(\cos\theta) = \mathrm{Re}\left[\sum_{k=0}^{n} \binom{-1/2}{n}\binom{-1/2}{n-k} e^{(2k-n)i\theta}\right] =$$
$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{-1/2}{n}\binom{-1/2}{n-k} \cos(2k-n)\theta. \tag{3.191}$$

Ova jednačina može da se prikaže i u obliku

$$P_n(\cos\theta) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}\frac{(2n-2k-1)!!}{(2n-2k)!!}\cos(n-2k)\theta.$$

U praksi se češće koriste posebni oblici formule (3.191) za n parno

$$P_n(\cos\theta) = \binom{-1/2}{n}^2 + 2\sum_{k=0}^{\frac{n}{2}-1}\binom{-1/2}{n}\binom{-1/2}{n-k}\cos(2k-n)\theta,$$

odnosno n neparno:

$$P_n(\cos\theta) = -2\sum_{k=0}^{\frac{n-1}{2}}\binom{-1/2}{n}\binom{-1/2}{n-k}\cos(2k-n)\theta.$$

♡

Lagerovi polinomi

Zad. 3.13. Dokazati da su Lagerovi polinomi rešenja Lagerove diferencijalne jednačine

$$xy'' + (1-x)y' + ny = 0.$$

Dokaz.

Lagerovi polinomi se generišu iz funkcije

$$G(x,t) = \frac{1}{1-t}e^{-\frac{xt}{1-t}} = \sum_{n=0}^{\infty} L_n(x)\frac{t^n}{n!}. \tag{3.192}$$

Ako levu i desnu stranu ove jednačine prvo diferenciramo po t, a zatim pomnožimo sa $1-t^2$, dobijamo

$$e^{-\frac{xt}{1-t}} - \frac{x}{1-t}e^{-\frac{xt}{1-t}} = (1-t^2)\sum_{n=1}^{\infty} L_n(x)\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}.$$

Dalje se, primenom (3.192), dobija

$$(1-t)\sum_{n=0}^{\infty} L_n(x)\frac{t^n}{n!} - x\sum_{n=0}^{\infty} L_n(x)\frac{t^n}{n!} = (1-t^2)\sum_{n=1}^{\infty} L_n(x)\frac{t^{n-1}}{(n-1)!},$$

a odatle, izjednačavanjem koeficijenata uz t^n, sledi rekurentna relacija

$$L_{n+1}(x) + (x-2n-1)L_n(x) + n^2L_{n-1}(x) = 0. \tag{3.193}$$

Ako jednačinu (3.192) sada diferenciramo po x dobija se

$$-\frac{t}{(1-t)^2}e^{-\frac{xt}{1-t}} = \sum_{n=0}^{\infty} L_n'(x)\frac{t^n}{n!}.$$

Koristeći (3.192) dobijamo

$$t\sum_{n=0}^{\infty} L_n(x)\frac{t^n}{n!} + (1-t)\sum_{n=0}^{\infty} L_n'(x)\frac{t^n}{n!} = 0.$$

Izjednačavanjem koeficijenata uz t^n dobija se rekurentna formula

$$nL_{n-1}(x) + L_n'(x) - nL_{n-1}'(x) = 0. \tag{3.194}$$

Ako dva Diferenciranjem dva puta po x jednačine (3.193), dobija se

$$L_{n+1}''(x) + (x-2n-1)L_n''(x) + 2L_n'(x) + n^2L_{n-1}''(x) = 0.$$

Dalje, zamenom n sa $n+1$, sledi

$$L_{n+2}''(x) + (x-2n-3)L_{n+1}''(x) + 2L_{n+1}' + (n+1)^2L_n''(x) = 0. \tag{3.195}$$

Iz (3.194) sledi

$$L_n'(x) = nL_{n-1}'(x) - nL_{n-1}(x),$$

a zatim diferenciranjem po x

$$L_n''(x) = nL_{n-1}''(x) - nL_{n-1}'(x).$$

Ako sada izvršimo zamenu n sa $n+1$ i $n+2$ respektivno, dobija se

$$L_{n+1}'(x) = (n+1)L_n'(x) - (n+1)L_n(x) \tag{3.196}$$
$$L_{n+1}''(x) = (n+1)L_n''(x) - (n+1)L_n'(x), \tag{3.197}$$
$$L_{n+2}''(x) = (n+2)L_{n+1}''(x) - (n+2)L_{n+1}'(x). \tag{3.198}$$

Zamenom $L_{n+1}'(x)$ iz (3.196) i $L_{n+1}''(x)$ iz (3.197) u (3.198), dobija se

$$\begin{aligned} L_{n+2}''(x) &= (n+2)\{(n+1)[L_n''(x) - L_n'(x)] - (n+1)[L_n'(x) - L_n(x)]\} = \\ &= (n+1)(n+2)L_n''(x) - 2(n+1)(n+2)L_n'(x) + (n+1)(n+2)L_n(x). \end{aligned}$$

Korišćenjem dobijenih rezultata, relacija (3.195) može se svesti na oblik

$$xL_n''(x) + (1-x)L_n'(x) + nL_n(x) = 0,$$

pa zaključujemo da je Lagerov polinom $L_n(x)$ partikularno rešenje Lagerove diferencijalne jednačine.

♡

Hermitovi polinomi

Zad. 3.14. Dokazati rekurentnu formulu

$$2xH_n(x) - 2nH_{n-1}(x) = H_{n+1}(x),$$

znajući da funkcija, koja generiše Hermitove polinome $H_n(x)$, ima oblik

$$G(x,t) = e^{2xt-t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} H_n(x)\frac{t^n}{n!}.$$

Dokaz.

Krenimo od jednačine

$$G(x,t) = e^{2xt-t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} H_n(x)\frac{t^n}{n!}.$$

Ako je diferenciramo po t dobija se

$$(2x-2t)e^{2xt-t^2} = \sum_{n=1}^{\infty} H_n(x)n\frac{t^{n-1}}{n!},$$

odakle je

$$\begin{aligned}
&(2x-2t)\sum_{n=0}^{\infty} H_n(x)\frac{t^n}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} H_n(x)\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}\\
&2x\sum_{n=0}^{\infty} H_n(x)\frac{t^n}{n!} - 2\sum_{n=0}^{\infty} H_n(x)\frac{t^{n+1}}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} H_{n+1}(x)\frac{t^n}{n!}\\
&2x\sum_{n=0}^{\infty} H_n(x)\frac{t^n}{n!} - 2\sum_{n=0}^{\infty} H_n(x)(n+1)\frac{t^{n+1}}{(n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} H_{n+1}(x)\frac{t^n}{n!}\\
&2x\sum_{n=0}^{\infty} H_n(x)\frac{t^n}{n!} - 2\sum_{n=1}^{\infty} H_{n-1}(x)n\frac{t^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} H_{n+1}(x)\frac{t^n}{n!}.
\end{aligned}$$

Izjednačavanjem koeficijenata uz t^n dobija se

$$2xH_n(x) - 2nH_{n-1}(x) = H_{n+1}(x).$$

♡

Beselovi polinomi

Zad. 3.15. Dokazati

$$\frac{1}{2}(J_{n-1}(z) - J_{n+1}(z)) = J_n'(z),$$

znajući da Beselove polinome $J_n(z)$ generiše funkcija:

$$G(z,t) = e^{\frac{z}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(z)t^n. \tag{3.199}$$

<u>*Dokaz.*</u>

Deferenciranjem jednačine (3.199) po z dobija se

$$\frac{1}{2}\left(t - \frac{1}{t}\right) e^{\frac{z}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n'(z)t^n,$$

odnosno

$$\frac{1}{2}\left(t - \frac{1}{t}\right) \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(z)t^n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n'(z)t^n$$

ili

$$\frac{1}{2}\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(z)t^{n+1} - \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(z)t^{n-1}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n'(z)t^n.$$

Sve sume svodimo na t^n, pa se, kako n uzima vrednosti od $-\infty$ do ∞, dobija

$$\frac{1}{2}\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} J_{n-1}(z)t^n - \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_{n+1}(z)t^n\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n'(z)t^n.$$

Izjednačavanjem koeficijenata uz t^n dobijamo

$$\frac{1}{2}(J_{n-1}(z) - J_{n+1}(z)) = J_n'(z).$$

♡

Zad. 3.16.

Dokazati sledeće identitete:

$$J_{n-1}(z) = \frac{n}{z}J_n(z) + J_n'(z),$$
$$J_{n+1}(z) = \frac{n}{z}J_n(z) - J_n'(z),$$

polazeći od toga da se Besselova funkcija može prikazati redom

$$J_n(z) = \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r \frac{(z/2)^{n+2r}}{r!(n+r)!}. \tag{3.200}$$

<u>*Dokaz.*</u>

Diferenciranjem (3.200) po z dobijamo

$$J_n'(z) = \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r \frac{(n+2r)\, z^{n+2r-1}}{2^{n+2r} r!(n+r)!}. \tag{3.201}$$

Ako sada jednačinu (3.200) pomnožimo sa $\frac{n}{z}$, a zatim saberemo sa jednačinom (3.201), dobija se

$$\frac{n}{z} J_n(z) + J_n'(z) = \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r \frac{(2n+2r)\, z^{n+2r-1}}{2^{n+2r} r!(n+r)!}.$$

Desna strana ove jednačine je

$$\sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r \frac{2(n+r)\, z^{n+2r-1}}{2^{n+2r} r!(n+r)!} = \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r \frac{z^{n+2r-1}}{2^{n+2r-1} r!(n+r-1)!} = J_{n-1}(z),$$

čime je dokazana prva jednakost.

Da bismo dokazali drugu jednakost, jednačinu (3.200) najpre pomnožimo sa $\frac{n}{z}$, a zatim r zamenimo sa $r+1$, što daje

$$\frac{n}{z} J_n(z) = \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r \frac{n z^{n+2r-1}}{2^{n+2r} r!(n+r)!} = \tag{3.202}$$

$$= \sum_{r=-1}^{\infty} (-1)^{r+1} \frac{n z^{n+2r+1}}{2 \cdot 2^{n+2r+1} (r+1)!(n+r+1)!}. \tag{3.203}$$

Ako i u jednačini (3.201) zamenimo r sa $r+1$ dobija se

$$J_n'(z) = \sum_{r=-1}^{\infty} (-1)^{r+1} \frac{(n+2r+2) z^{n+2r+1}}{2 \cdot 2^{n+2r+1} (r+1)!(n+r+1)!}. \tag{3.204}$$

Oduzimanjem jednačine (3.204) od jednačine (3.203) dobija se

$$\begin{aligned}
\frac{n}{z}J_n(z) - J_n'(z) = &\sum_{r=-1}^{\infty}(-1)^{r+1}\frac{nz^{n+2r+1}}{2\cdot 2^{n+2r+1}(r+1)!(n+r+1)!} - \\
&- \sum_{r=-1}^{\infty}(-1)^{r+1}\frac{(n+2r+2)z^{n+2r+1}}{2\cdot 2^{n+2r+1}(r+1)!(n+r+1)!} = \\
&= \sum_{r=0}^{\infty}(-1)^{r+1}\frac{nz^{n+2r+1}}{2\cdot 2^{n+2r+1}(r+1)!(n+r+1)!} + (-1)^0\frac{nz^{n-1}}{2^n 0!n!} - \\
&- \sum_{r=0}^{\infty}(-1)^{r+1}\frac{(n+2r+2)z^{n+2r+1}}{2\cdot 2^{n+2r+1}(r+1)!(n+r+1)!} - (-1)^0\frac{nz^{n-1}}{2^n 0!n!}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{r=0}^{\infty}(-1)^{r+1}\frac{(-2r-2)z^{n+2r+1}}{2\cdot 2^{n+2r+1}(r+1)!(n+r+1)!} = \\
&= \sum_{r=0}^{\infty}(-1)^{r}\frac{z^{n+2r+1}}{2^{n+2r+1}r!(n+r+1)!} = J_{n+1}(z),
\end{aligned}$$

što je trebalo dokazati.

♡

Glava 4

Furijeov trigonometrijski red. Furijeov integral

4.1 Periodične funkcije

U prirodnim naukama i tehnici često se susrećemo sa procesima kao što su: rotacije pojedinih delova mašina (Vatov regulator, klackalica motora, ...), oscilacije (klatno sata,...). Dakle, ovi procesi se vremenom ponavljaju, tj. periodični su. Ovakvi procesi matematički opisuju se periodičnim funkcijama.

Definicija.

Funkcija jedne promenljive $f(x)$ je **periodična**, ako postoji takva konstanta $T \neq 0$, da je

$$f(x+T) = f(x), \qquad \text{za } \forall x. \tag{4.1}$$

Konstanta T naziva se **perioda** funkcije $f(x)$.

Teorema 14 *Ako je $f(x)$ periodična funkcija sa periodom T, tada je njen period i nT, gde je n – ceo broj.*

Dokaz.

Iskoristimo definiciju periodičnosti, za T i dobijamo

$$f(x+nT) = f[x+(n-1)T+T] = f[x+(n-1)T] = f[x+(n-2)T+T] = f[x+(n-2)T] = \cdots = f(x+T) = f(x). \tag{4.2}$$

Ovim je prethodna teorema dokazana.

Najmanju konstantu T ($T > 0$), za koju važi (4.1) zovemo i **osnovni** (primitivni) **period** funkcije $f(x)$, a nT multipl osnovnog perioda (višestruki period).

Napomena 1. Dovoljno je ispitati (i nacrtati) periodičnu funkciju samo na intervalu dužine T (recimo od 0 do T). Preostale delove funkcije dobijamo tako što ovaj deo translatorno pomerimo levo (za $-T$, $-2T$,...) ili desno (za T, $2T$,...)

Napomena 2. Ako su funkcije f i g periodične sa periodima T_f i T_g, i ako je $T_f/T_g = p/q$, tada je $T^* = qT_f = pT_g$ period i za jednu i za drugu funkciju, tj. $f(x) = f(x+T^*)$ i $g(x) = g(x+T^*)$.

U fizici najprostiji periodični proces opisuje se funkcijom

$$x(t) = A\sin(\omega t + \varphi), \qquad -\infty < t < \infty, \tag{4.3}$$

koju zovemo **harmonik**. Naziv potiče od harmonijskih oscilacija, koje se opisuju ovakvim funkcijama.

4.1.1 Osobine periodičnih funkcija

Iz definicije periodičnih funkcija slede osobine:

a) inverzna funkcija periodične funkcije je višeznačna funkcija.

b) Izvod periodične funkcije je periodična funkcija.

c) Ako je periodična funkcija $f(x)$, sa periodom T, integrabilna, tada je [1]

$$\int_a^{a+T} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^T f(x)\,\mathrm{d}x. \tag{4.4}$$

d) Primitivna funkcija periodične funkcije ne mora da bude periodična funkcija.

[1]
$$\int_a^{a+T} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^T f(x)\,\mathrm{d}x + \int_T^{a+T} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^T f(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^T f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Ovde smo iskoristili da je

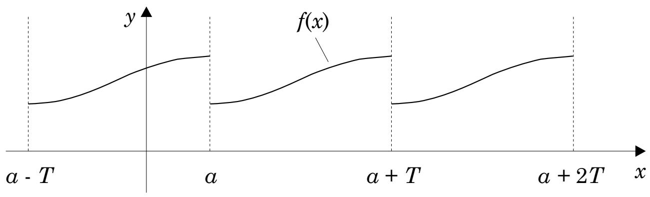
$$\int_T^{a+T} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_T^{a+T} f(x-T)\,\mathrm{d}x.$$

Uvodeći smenu $x - T = \bar{x} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}x = \mathrm{d}\bar{x}$ i imajući na umu da se i granica menjaju: za $x_1 = T$ i $x_2 = a + T$ za novu promenljivu dobijamo $\bar{x}_1 = 0$ i $\bar{x}_2 = a$. Konačno dobijamo

$$\int_T^{a+T} f(x-T)\,\mathrm{d}x = \int_0^a f(\bar{x})\,\mathrm{d}\bar{x}.$$

4.1.2 Proširenje neperiodičnih funkcija

Posmatrajmo proizvoljnu neperiodičnu funkciju $f(x)$, definisanu na intervalu $a \leq x \leq a+T$. Konstruišimo sada periodičnu funkciju $F(x)$, sa periodom T, koja se poklapa sa funkcijom $f(x)$ na intevalu $a \leq x \leq a+T$. Grafik nove funkcije dobija se tako što ćemo funkciju $f(x)$ translatorno pomerati duž x - ose, levo i desno za $\pm T, \pm 2T, \ldots, \pm nT, \ldots$ (videti sliku 4.1).



Slika 4.1: Proširenje neperiodične funkcije

4.1.3 Zbir (superpozicija) harmonika

Posmatrajmo niz harmonika

$$A_k \sin\left(\frac{2\pi k}{T}x + \varphi_k\right), \qquad k = 1, 2, \ldots, \; -\infty < x < \infty, \; T > 0. \tag{4.5}$$

Period k-tog harmonika je [2]

$$T_k = \frac{T}{k}. \tag{4.6}$$

Zbir (superpozicija) konačnog broja harmonika je funkcija oblika

$$f_N(x) = A_0 + \sum_{k=1}^{N} A_k \sin\left(\frac{2\pi k}{T}x + \varphi_k\right). \tag{4.7}$$

Ova funkcija je periodična sa periodom T (videti napomenu 2).

Kada $N \to \infty$ dobijamo beskonačni red, tj. funkciju

$$f(x) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin\left(\frac{2\pi k}{T}x + \varphi_k\right), \tag{4.8}$$

[2]

$$\sin\left[\frac{2\pi k}{T}\left(x + \frac{T}{k}\right) + \varphi_k\right] = \sin\left[\frac{2\pi k}{T}x + \varphi_k + 2\pi\right] = \sin\left(\frac{2\pi k}{T}x + \varphi_k\right),$$

$$\begin{aligned}\sin\left[\frac{2\pi k}{T}(x+T) + \varphi_k\right] &= \sin\left[\frac{2\pi k}{T}x + \varphi_k + \frac{2\pi k}{T}T\right] = \\ &= \sin\left(\frac{2\pi k}{T}x + \varphi_k + 2\pi k\right) = \sin\left(\frac{2\pi k}{T}x + \varphi_k\right).\end{aligned}$$

koja je takođe periodična sa periodom T.

Poznato je, iz trigonometrije, da je $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha$. Primenom ove relacije na prethodne redove, dobijamo

$$f_N(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{N}\left(a_k\cos\frac{k\pi x}{\ell} + b_k\sin\frac{k\pi x}{\ell}\right) \tag{4.9}$$

i

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cos\frac{k\pi x}{\ell} + b_k\sin\frac{k\pi x}{\ell}\right) \tag{4.10}$$

Ovde smo uveli sledeće smene

$$\frac{a_0}{2} = A_0, \quad a_k = A_k\sin\varphi_k, \quad b_k = A_k\cos\varphi_k, \quad 2\ell = T.$$

Ovako definisane funkcije f_N i f su periodične sa periodom 2ℓ. Red (4.10) naziva se **trigonometrijski red**. Posmatrajući red (4.10) nameće se pitanje: da li je moguće neku funkciju $f(x)$ predstaviti trigonometrijskim redom ? Odgovor na ovo pitanje je i cilj ovog poglavlja.

Prvo uspostavimo veze između koeficijenata a_n i b_n i same funkcije $f(x)$. Ako red **uniformno konvergira** tada možemo da integralimo član po član, pa dobijamo:

$$\int_{-\ell}^{\ell} f(x)\,\mathrm{d}x = a_0\ell + \sum_{k=1}^{\infty}\left[a_k\int_{-\ell}^{\ell}\cos\frac{k\pi x}{\ell} + b_k\int_{-\ell}^{\ell}\sin\frac{k\pi x}{\ell}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{a_0}{2} = \frac{1}{2\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(x)\mathrm{d}x. \tag{4.11}$$

Množeći relaciju (4.10) sa $\cos\dfrac{m\pi x}{\ell}$ i $\sin\dfrac{m\pi x}{\ell}$, respektivno i integraleći od $-\ell$ do ℓ, dobijamo:

$$a_m = \frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(x)\,\cos\frac{m\pi x}{\ell}\,\mathrm{d}x; \quad b_m = \frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(x)\,\sin\frac{m\pi x}{\ell}\,\mathrm{d}x. \tag{4.12}$$

Videli smo kako polazeći od trigonometrijskog reda nalazimo vezu između neke funkcije i odgovarajućeg njenog razvoja u red, odnosno našli smo vezu između koeficijenata i funkcije.

Ovako određeni kodeficijenti a_k i b_k zovu se Ojlerovi [3] koeficijenti Furijeovog [4] reda funkcije $f(x)$.

[3]Leonhard Euler (1707-1783), poznati švajcarski matematičar. Dao je prilog gotovo svim oblastima matematike i njenim primenama u problemima fizike. Treba posebno istaći njegov doprinos u oblasti diferencijalnih i diferencnih jednačina, Furijeovim redovima, specijalnim funkcijama, kompleksnoj analizi, varijacionom računu, mehanici i hidrodinamici.

[4]Jean-Baptiste Joseph Fourier (1768-1830), francuski fizičar i matematičar. Utemeljio je Furijeove redove u svom glavnom radu *Théorie analytique de la chaleur*.

Međutim, na ovaj način nismo utvrdili da li Furijeov red funkcije $f(x)$, sa ovako određenim koeficijentima a_k i b_k, konvergira ka funkciji $f(x)$. Dakle, svakoj integrabilnoj funkciji $f(x)$, na intervalu $[-\ell, \ell]$, možemo da korespondiramo trigonometrijski red

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos \frac{k\pi x}{\ell} + b_k \sin \frac{k\pi x}{\ell} \right), \tag{4.13}$$

pri čemu su koeficijenti a_k i b_k određeni izrazima (4.12). Znak " $\sim$ " se u ovom slučaju koristi da bi smo naznačili da još nije određena konvergencija posmatranog reda funkcija. Kad se dokaže njegova konvergencija (odnosno uslovi koje treba da zadovoljava neka funkcija $f(x)$), tada znak " $\sim$ " može da se zameni sa "=".

4.2 Osnovna teorema o konvergenciji Furijeovog reda

Pre nego što formulišemo ovu teoremu, definišimo neke pojmove koje ćemo da koristimo u toj formulaciji.

Delimično glatke funkcije

Definicija.

Za funkciju $f(x)$ kažemo da je **delimično neprekidna** na intervalu $[a, b]$, ako je neprekidna u svim tačkama intervala, sem u konačnom broju tačaka, u kojima ima prekide prve vrste.

Definicija.

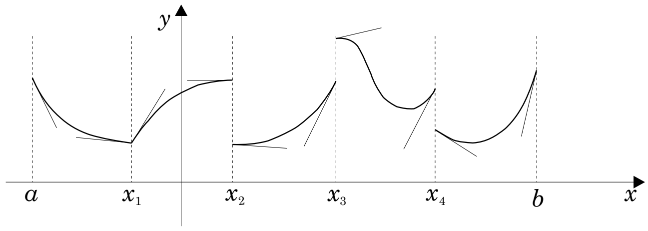
Za delimično neprekidnu funkciju $f(x)$, definisanu na intervalu $[a, b]$, kažemo da je **delimično glatka**, ako postoji njen prvi izvod $f'(x)$ i taj izvod je neprekidna funkcija u svim tačkama intervala $[a, b]$, sem u konačnom broju tačaka, u kojima levi i desni limesi

$$f'(x+0) = \lim_{t \to +0} f'(x+t), \quad f'(x-0) = \lim_{t \to +0} f'(x-t), \tag{4.14}$$

postoje. Takođe, pretpostavlja se da konačni limesi $f'(a+0)$ i $f'(b-0)$ postoje u krajnjim tačkama intervala $[a, b]$.

Napomenimo da se pored termina "delimično" koristi i termin "deo po deo".

Prikažimo na jednom primeru delimično glatku funkciju (grafički).



Slika 4.2: Delimično glatka funkcija

Zapažamo da ova funkcija u tačkama $x_1, \ldots, x_4$ ima tangente, ali tangente sa leve i desne strane nisu jednake. Dakle, funkcija je glatka u intervalima $(a, x_1) \cup (x_1, x_2) \cup (x_2, x_3) \cup (x_3, x_4)$.

Osnovna teorema o konvergenciji Furijeovog reda

Teorema 15 *Ako je $f(x)$ periodična funkcija, sa periodom 2ℓ i delimičmo glatka na intervalu $x \in [-\ell, \ell]$, tada je Furijeov red funkcije $f(x)$* (4.10)*, sa koeficijentima definisanim relacijama* (4.12) *konvergentan.*

Zbir ovog reda

$$s(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos \frac{k\pi x}{\ell} + b_k \sin \frac{k\pi x}{\ell} \right) \tag{4.15}$$

je:

a) $s(x_o) = f(x_o)$, ako je $f(x)$ neprekidna u tački $x_o \in [-\ell, \ell]$,

b) $s(x_o) = \dfrac{f(x_o + 0) + f(x_o - 0)}{2}$ u tačkama u kojima funkcija $f(x)$ ima prekide (skokove).

c) Na krajevima intervala važi

$$s(-\ell) = s(\ell) = \frac{f(-\ell + 0) + f(\ell - 0)}{2}.$$

Uslovi pod kojima dati red konvergira u literaturi su poznati kao Dirihleovi [5] uslovi.

Dokaz ove teoreme nije težak, ali zahteva dosta prostora, pa iz tog razloga nećemo da ga izložimo. Čitaoce, željne znanja, upućujemo na knjige [12] i [38].

Napomena 1. Kako je za neprekidnu funkciju $f(x - 0) = f(x + 0) = f(x)$, odnosno

$$\frac{f(x + 0) + f(x - 0)}{2} = \frac{2f(x)}{2} = f(x),$$

[5] Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805-1859), nemački matematičar. Postao je poznat po svom važnom istraživanju u oblasti Furijeovih redova i teoriji brojeva.

to se tačke a) i b) mogu jednostavno zameniti sa

$$s(x) = \frac{f(x+0)+f(x-0)}{2},$$

za sve tačke $x \in [-\ell, \ell]$.

Napomena 2. U slučaju da je potrebno da se razvije u red neka funkcija $\varphi(x)$, koja nije periodična, ali ispunjava sve ostale uslove, iz prethodne teoreme, tada postupamo na sledeći način. Potraži se periodična funkcija $f(x)$, sa periodom 2ℓ, koja može da se razvije u Furijeov red, a koja se poklapa sa polaznom funkcijom $\varphi(x)$ u intervalu $(-\ell, \ell)$, tj.

$$f(x) = \varphi(x), \quad \text{za} \quad x \in (-\ell, \ell),$$

van tog intervala one se razlikuju. Ovo može da se obezbedi proširenjem neperiodičnih funkcija, kao što je ranije opisano.

4.2.1 Razvijanje u Furijeov red parnih i neparnih funkcija. Furijeov sinus i kosinus red

Podsetimo se da su funkcije za koje važi:

$$\begin{array}{lll} f(-x) = f(x) & \text{za} \, \forall x \in [-\ell, \ell] & \text{parna funkcija,} \\ f(-x) = -f(x) & \text{za} \, \forall x \in [-\ell, \ell] & \text{neparna funkcija.} \end{array}$$

Osobine parnih/neparnih funkcija

a) Ako je funkcija parna, tada je

$$\int_{-\ell}^{\ell} f(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_{0}^{\ell} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

b) Ako je funkcija neparna, tada je

$$\int_{-\ell}^{\ell} f(x)\,\mathrm{d}x = 0.$$

c) Proizvod parnih funkcija $p(x) = f(x)\cdot g(x)$ je parna funkcija

$$p(-x) = f(-x)\cdot g(-x) = f(x)\cdot g(x) = p(x).$$

d) Proizvod neparnih funkcija je parna funkcija

$$p(-x) = f(-x)\cdot g(-x) = (-1)f(x)\cdot(-1)g(x) = f(x)\cdot g(x) = p(x).$$

d) Proizvod parne $f(x)$ i neparne funkcije $g(x)$ je neparna funkcija

$$p(-x) = f(-x)\cdot g(-x) = f(x)\cdot(-1)g(x) = -f(x)\cdot g(x) = -p(x).$$

Ove osobine koriste se pri izračunavanju koeficijenata Furijeovog reda a_k i b_k, kada je $f(x)$ parna ili neparna funkcija. Naime, kako se pod integralom (4.12) javlja proizvod $f(x)$ i $\sin x$ (sin je neparna funkcija), ili $\cos x$ (cos je parna funkcija), to, u zavisnosti od $f(x)$ i osobina a)-d), mogu neki koeficijenti da budu jednaki nuli.

Furijeov cos **red i Furijeov** sin **red**

Neka je $f(x)$ parna funkcija. Tada je $p(x) = f(x)\cos x$ parna funkcija, a $q(x) = f(x)\sin x$ neparna funkcija. Koristeći osobine ovih funkcija, za Furijeove koeficijente dobijamo:

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} f(x)\,\mathrm{d}x,\\
a_k &= \frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(x)\cos\frac{k\pi x}{\ell}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} f(x)\cos\frac{k\pi x}{\ell}\,\mathrm{d}x, \qquad (4.16)\\
b_k &= \frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(x)\sin\frac{k\pi x}{\ell}\,\mathrm{d}x = 0.
\end{aligned}$$

U ovom specijalnom slučaju Furijeov red ima oblik

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\frac{k\pi}{\ell}x. \qquad (4.17)$$

Tada kažemo da je funkcija razvijena u Furijeov red po kosinusu ili kraće **Furijeov kosinus red**, pri čemu su koeficijenti a_k određeni relacijama (4.16).

Neka je $f(x)$ neparna funkcija. Tada je $p(x) = f(x)\cos x$ neparna funkcija, a $q(x) = f(x)\sin x$ parna funkcija. Koristeći osobine ovih funkcija, za Furijeove koeficijente dobijamo:

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(x)\,\mathrm{d}x = 0,\\
a_k &= \frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(x)\cos\frac{k\pi x}{\ell}\,\mathrm{d}x = 0,\\
b_k &= \frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(x)\sin\frac{k\pi x}{\ell}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} f(x)\sin\frac{k\pi x}{\ell}\,\mathrm{d}x. \qquad (4.18)
\end{aligned}$$

U ovom specijalnom slučaju Furijeov red ima oblik

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin\frac{k\pi}{\ell}x. \qquad (4.19)$$

Tada kažemo da je funkcija razvijena u Furijeov red po sinusu ili kraće **Furijeov sinus red**, pri čemu su koeficijenti b_k određeni relacijama (4.18).

Teorema 16 *Proizvoljnu funkciju $f(x)$, definisanu na intervalu $[-\ell, \ell]$, možemo da predstavimo kao zbir jedne parne i jedne neparne funkcije, u istom intervalu.*

Dokaz. Funkciju $f(x)$ možemo da predstavimo u obliku

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x) + \frac{1}{2}f(-x) - \frac{1}{2}f(-x) = \\ &= \frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2}f(-x) - \frac{1}{2}f(-x) = \\ &= \frac{f(x)+f(-x)}{2} + \frac{f(x)-f(-x)}{2}. \end{aligned}$$

Uvedimo smene

$$f_1(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{2} \quad \text{i} \quad f_2(x) = \frac{f(x)-f(-x)}{2},$$

pa je $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$. Dalje, pokažimo da su funkcije f_1 i f_2 parna ondosno neparna, respektivno.

Kako je

$$\begin{aligned} f_1(-x) &= \frac{1}{2}\left[f(-x) + f(-(-x))\right] = \frac{1}{2}\left[f(x) + f(-x)\right] = f_1(x), \\ f_2(-x) &= \frac{1}{2}\left[f(-x) - f(-(-x))\right] = -\frac{1}{2}\left[f(x) + f(-x)\right] = -f_2(x), \end{aligned}$$

to zaključujemo da je f_1 parna, a f_2 neparna funkcija. Na taj način smo dokazali prethodnu teoremu.

Na osnovu prethodne teoreme zaključujemo da uvek možemo da primenimo, ali samo na delove, tzv. Furijeovu sinus i kosinus transformaciju.

4.2.2 Razvijanje funkcija u Furijeov red, na intervalu $(-\pi, \pi)$

U ovom specijalnom slučaju je $\ell = \pi$, pa dobijamo da je:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos kx + b_k \sin kx\right),$$

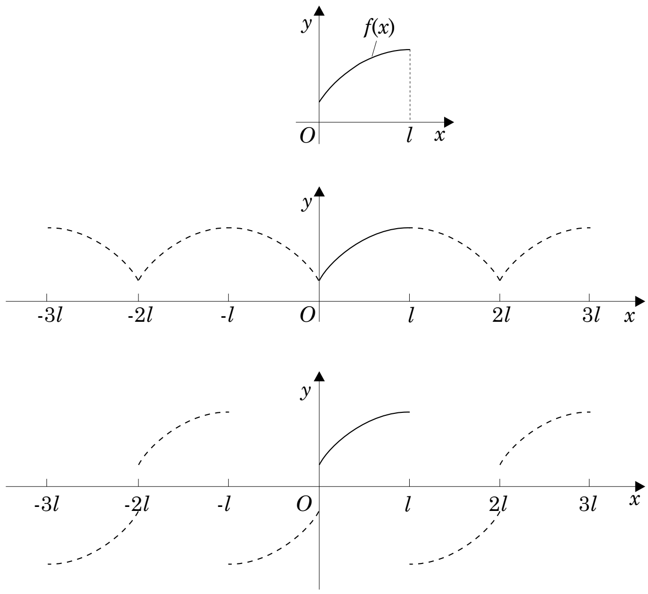
gde su koeficijenti određeni izrazima:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x, \\ a_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx\,\mathrm{d}x, \\ b_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx\,\mathrm{d}x. \end{aligned} \tag{4.20}$$

4.2.3 Razvijanje funkcija u Furijeov red, na intervalu $(0, \ell)$. Produženje poluintervala

U raznim problemima fizike i tehnike javlja se potreba da se u Furijeov red razvije funkcija u nekom konačnom intervalu, recimo $(0, \ell)$. To može da se postigne tako što ćemo izvršiti translaciju koordinatnog sistema (odnosno uvesti smenu) za $\ell/2$, pa zatim, za, u opštem slučaju neprekidnu funkciju $f(x)$, izvršiti produženje, kako je to ranije objašnjeno (ℓ izabrati za period).

Drugi način, koji je praktičniji, sastoji se u sledećem. Uzeti da je period 2ℓ i proširiti polaznu funkciju na interval $(-\ell, 0)$. Tada, pošto je funkcija data samo na intervalu $(0, \ell)$, možemo da izvršimo njeno proširenje na interval $(-\ell, 0)$, tako da je njeno proširenje parna ili neparna funkcija. Ovaj postupak demonstriran je na slici 4.3.



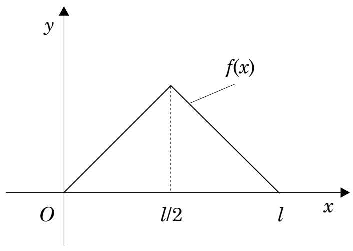
Slika 4.3: Produženje neperiodične funkcije

Ovakvo proširenje je pogodno, jer u ovim slučajevima razvijanje funkcije u Furijeov red svodi se na Furijeov sinus ili kosinus red (zbog parnosti ili neparnosti proširene funkcije), a zadržavamo se samo u intervalu u kome je polazna funkcija definisana.

Primer. Razviti u Furijeov red funkciju

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2k}{\ell}x, & 0 < x < \dfrac{\ell}{2}, \\ \\ \dfrac{2k}{\ell}(\ell - x), & \dfrac{\ell}{2} < x < \ell. \end{cases}$$

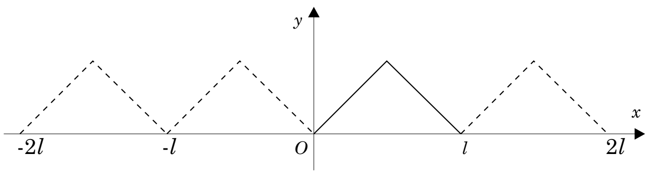
Rešenje. Prvo skicirajmo datu funkciju.



Slika 4.4:

Prema uslovima teoreme o konvergentnosti Furijeovog reda, potrebno je da je funkcija periodična. Zbog toga ćemo da izvršimo produženje polazne funkcije i to na: a) parnu i b) neparnu periodičnu funkciju.

a) Prvo skicirajmo ovako proširenu funkciju, prema uputstvu datom ranije.



Slika 4.5:

U ovom slučaju (parna funkcija), prema (4.16), dobijamo:

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{\ell}\left[\frac{2k}{\ell}\int_0^{\ell/2} x\,\mathrm{d}x + \frac{2k}{\ell}\int_{\ell/2}^{\ell} (\ell - x)\,\mathrm{d}x\right],$$

$$a_n = \frac{2}{\ell}\left[\frac{2k}{\ell}\int_0^{\ell/2} x\cos\frac{n\pi}{\ell}x\,\mathrm{d}x + \frac{2k}{\ell}\int_{\ell/2}^{\ell} (\ell - x)\cos\frac{n\pi}{\ell}x\,\mathrm{d}x\right],$$

$$b_n = 0.$$

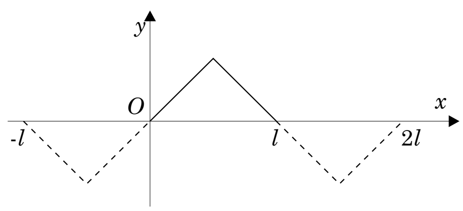
Integracijom dobijamo za koeficijente Furijeovog reda:

$$\frac{a_0}{2} = \frac{k}{2},$$
$$a_n = \frac{4k}{n^2\pi^2}\left(2\cos\frac{n\pi}{2} - \cos n\pi - 1\right),$$
$$b_n = 0.$$

Analizirajući gornje izraze vidimo da su različiti od nule ($a_n \neq 0$) samo članovi $n = 2, 6, 10, 14, \ldots$, pa Furijeov red polazne parno proširene funkcije ima oblik

$$f(x) = \frac{k}{2} - \frac{16k}{\pi^2}\left(\frac{1}{2^2}\cos\frac{2\pi}{\ell}x + \frac{1}{6^2}\cos\frac{6\pi}{\ell}x + \ldots\right).$$

b) Skicirajmo sada neparno proširenje.



Slika 4.6:

U ovom slučaju (neparna funkcija), prema (4.18), dobijamo:

$$a_n = 0,$$
$$b_n = \frac{2}{\ell}\left[\frac{2k}{\ell}\int_0^{\ell/2} x\sin\frac{n\pi}{\ell}x\,\mathrm{d}x + \frac{2k}{\ell}\int_{\ell/2}^{\ell}(\ell - x)\sin\frac{n\pi}{\ell}x\,\mathrm{d}x\right].$$

Odavde, parcijalnom integracijom, dobijamo

$$b_n = \frac{8k}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{2}.$$

Konačno, Furijeov red, za neparno proširenje, dobija oblik

$$f(x) = \frac{8k}{\pi^2}\left(\frac{1}{1^2}\sin\frac{\pi}{\ell}x - \frac{1}{3^2}\sin\frac{3\pi}{\ell}x + \frac{1}{5^2}\sin\frac{5\pi}{\ell}x - \ldots\right).$$

4.2.4 Aproksimacija funkcije trigonometrijskim polinomom. Srednja kvadratna greška

Neka je data periodična dunkcija $f(x)$, periode 2π, koja može da se predstavi Furijeovim redom. Aproksimirajmo posmatranu funkciju trigonometrijskim polinomom

N-tog reda

$$f(x) \approx \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{N} (\alpha_k \cos kx + \beta_k \sin kx) \equiv P_N(x). \tag{4.21}$$

Koeficijenti ovog polinoma, α_k i β_k, su za sada neodređeni. Možemo da ih izrazimo na više načina. Međutim, jasno je da nas interesuje onaj oblik za koji imamo najbolju aproksimaciju, tj. najmanju grešku aproksimacije, pri fiksiranom N.

U tom cilju, prvo definišimo grešku aproksimacije. I grešku možemo da definišemo na više načina. Najprirodnije je definisati je izrazom

$$|f(x) - P_N(x)| = \Delta_N, \quad \text{za } x \in [-\ell, \ell].$$

Međutim, u postavljenom zadatku, pogodnije je da se greška definiše preko integrala i to u obliku

$$\Delta_N = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - P_N(x)]^2 \, \mathrm{d}x. \tag{4.22}$$

Ovako definisano Δ_N zove se **srednja kvadratna greška**. Postavljeni zadatak se sastoji u tome da, za fiksno N, odredimo oblik koeficijenata α_k i β_k, polinoma (4.21), tako da Δ_N bude minimalno.

Posmatrajmo prvo podintegralnu funkciju. Kako je $(f - P_N)^2 = f^2 - 2fP_N + P_N^2$, to iz (4.22) dobijamo

$$\Delta_N = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - P_N(x)]^2 \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left[f^2 - 2fP_N + P_N^2\right] \mathrm{d}x. \tag{4.23}$$

Dalje, kako po pretpostavci, funkciju $f(x)$ možemo da predstavimo konvergentnim Furijeovim redom, to za $\int fP_N \, \mathrm{d}x$ dobijamo

$$\int_{-\pi}^{\pi} f\, P_N \, \mathrm{d}x =$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \left[\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)\right] \cdot \left[\frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{N} (\alpha_k \cos kx + \beta_k \sin kx)\right] \mathrm{d}x =$$

$$= \pi \left[\frac{a_0 \alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{N} (a_k \alpha_k + b_k \beta_k)\right]. \tag{4.24}$$

Ovde smo iskoristili da je $\int \cos kx \, \mathrm{d}x = 0$, $\int \sin kx \, \mathrm{d}x = 0$ i $\int \sin kx \cos kx \, \mathrm{d}x = 0$.

Na sličan način dobijamo i za $\int P_N^2 \, \mathrm{d}x$

$$\int_{-\pi}^{\pi} P_N^2 \, \mathrm{d}x = \pi \left[\frac{\alpha_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{N} \left(\alpha_k^2 + \beta_k^2\right)\right]. \tag{4.25}$$

Iz poslednje dve relacije (4.24) i (4.25), dobijamo

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left[P_N^2 - 2fP_N\right]\,\mathrm{d}x = \pi\left\{\frac{(\alpha_0-a_0)^2}{2} + \sum_{k=1}^{N}\left[(\alpha_k-a_k)^2 + (\beta_k-b_k)^2\right]\right\} - $$
$$- \pi\left[\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{N}\left(a_k^2+b_k^2\right)\right], \tag{4.26}$$

pri čemu smo iskoristili sledeće veze:

$$(\alpha_k-a_k)^2 = \alpha_k^2 - 2\alpha_k a_k + a_k^2, \qquad \alpha_k^2 - 2a_k\alpha_k = (\alpha_k-a_k)^2 - a_k^2$$
$$(\beta_k-b_k)^2 = \beta_k^2 - 2\beta_k b_k + b_k^2, \qquad \beta_k^2 - 2b_k\beta_k = (\beta_k-b_k)^2 - b_k^2.$$

Ako sada zamenimo (4.26) u (4.23), dobijamo

$$2\Delta_N = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f^2\,\mathrm{d}x - \left[\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{N}\left(a_k^2+b_k^2\right)\right] + \tag{4.27}$$
$$+\left\{\frac{(\alpha_0-a_0)^2}{2} + \sum_{k=1}^{N}\left[(\alpha_k-a_k)^2 + (\beta_k-b_k)^2\right]\right\}.$$

Kako je zadatak da se odrede koeficijenti α_k i β_k, tako da Δ_N bude minimalno, to iz (4.27) zaključujemo da treba da važi

$$\frac{(\alpha_0-a_0)^2}{2} + \sum_{k=1}^{N}\left[(\alpha_k-a_k)^2 + (\beta_k-b_k)^2\right] = 0. \tag{4.28}$$

Jasno je da bi se ovaj član stalno povećavao (zbir kvadrata), sa porastom N, pa bi na taj način i sama greška rasla. Iz tog razloga smo uzeli da je jednak nuli.

Iz relacija (5.72) dobijamo za tražene koeficijente:

$$\alpha_0 = a_0, \qquad \alpha_k = a_k, \qquad \beta_k = b_k. \tag{4.29}$$

Odavde zaključujemo da je najbolja srednjekvadratna aproksimacija, za integrabilnu, periodičnu funkciju $f(x)$, za $x \in [-\pi,\pi]$, data trigonometrijskim polinomom $P_N(x)$ čiji su koeficijent Furijeovi koeficijenti funkcije $f(x)$.

Neke posledice

Zapazimo da je greška

$$\Delta_N = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left[f(x) - P_N(x)\right]^2\,\mathrm{d}x$$

nenegativna, jer je podintegralna funkcija kvadrat realne funkcije. Odatle sledi, prema (4.27) i (5.72), da je

$$2\Delta_N = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,\mathrm{d}x - \left[\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{N}\left(a_k^2 + b_k^2\right)\right] \geq 0,$$

odnosno

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,\mathrm{d}x \geq \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{N}\left(a_k^2 + b_k^2\right), \quad \text{za } N = 0, 1, \ldots, \tag{4.30}$$

Ovaj izraz (4.30) poznat je u literaturi kao **Beselova nejednakost**. Dalje, zapazimo da leva strana nejednakosti ne zavisi od N. Odatle sledi da pri $N \to \infty$ desna strana ostaje ograničena, a to znači da je red kvadrata Furijeovih koeficijenata

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k^2 + b_k^2\right)$$

konvergentan.

Kao posledica ove konvergencije je

$$\lim_{k\to\infty} a_k = 0, \quad \lim_{k\to\infty} b_k = 0,$$

tj.

$$\lim_{k\to\infty} a_k = 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{k\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\,\mathrm{d}x = 0, \tag{4.31}$$

$$\lim_{k\to\infty} b_k = 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{k\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\,\mathrm{d}x = 0. \tag{4.32}$$

Dakle, Furijeovi koeficijenti ograničene i integrabilne funkcije teže nuli, kad $k \to \infty$.

Relacije (4.31) i (4.32) poznate su u literaturi kao **Rimanova teorema**.

Ako $\Delta_N \to 0$, kada $N \to \infty$, tada nejednakost (4.30) postaje

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,\mathrm{d}x = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k^2 + b_k^2\right). \tag{4.33}$$

Pokažimo sada kako se prethodne relacije mogu proširiti na proizvoljan (ali konačan) period $(-\ell, \ell)$.

Posmatrajmo neku periodičnu funkciju $\varphi(t)$, sa periodom $(-\pi, \pi)$, tj. $\varphi(t) = \varphi(t+2\pi)$, i neku periodičnu funkciju $f(x)$, sa periodom $(-\ell, \ell)$, tj. $f(x) = f(x+2\ell)$. Uvedimo sada smenu $x = \dfrac{\ell}{\pi}t$, pri čemu je

$$f(x) = f\left(\frac{\ell}{\pi}t\right) = \varphi(t).$$

Prema prethodnim smenama imamo

$$\varphi(t+2\pi) = f\left[\frac{\ell}{\pi}(t+2\pi)\right] = f\left(\frac{\ell}{\pi}t + 2\ell\right) = f(x+2\ell) = f(x) = \varphi(t).$$

Dalje, za trigonometrijske redove je

$$\varphi(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kt + b_k \sin kt)$$

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k \cos\frac{k\pi}{\ell}x + b_k \sin\frac{k\pi}{\ell}x\right),$$

gde su odgovarajući koeficijenti, recimo a_k

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(t)\cos kt\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(x)\cos\frac{k\pi}{\ell}x\,\mathrm{d}x.$$

Ovde smo izvršili smenu granica integracije, jer je:

$$\text{za} \quad t_1 = -\pi \quad x_1 = \frac{\ell}{\pi}(-\pi) = -\ell$$

$$\text{a za} \quad t_2 = \pi \quad x_2 = \frac{\ell}{\pi}(\pi) = \ell,$$

$$\text{a diferencijal} \quad \mathrm{d}t = \frac{\pi}{\ell}\mathrm{d}x, \quad \text{odnosno} \quad \frac{1}{\pi}\mathrm{d}t = \frac{1}{\ell}\mathrm{d}x.$$

Dakle, pokazali smo za koeficijente a_k kako se izračunavaju za proizvoljan period. Na sličan način dobijamo i izraz za b_k.

Lako može da se pokaže da relacija (4.33) važi i za proizvoljan period 2ℓ, tj.

$$\frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f^2(x)\,\mathrm{d}x = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k^2 + b_k^2\right). \tag{4.34}$$

Ova relacija (4.34) poznata je kao Parsevalova [6] identičnost Furijeovog reda.

Napomenimo, da u slučaju da je funkcija periodična na intervalu (a,b), tada, kao i u prethodnom slučaju, dobijamo (za period $b-a$)

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\frac{2\pi k}{b-a}(x-a) + b_k \sin\frac{2\pi k}{b-a}(x-a),$$

$$a_k = \frac{2}{b-a}\int_a^b f(x)\cos\frac{2\pi k}{b-a}(x-a)\,\mathrm{d}x,$$

$$b_k = \frac{2}{b-a}\int_a^b f(x)\sin\frac{2\pi k}{b-a}(x-a)\,\mathrm{d}x.$$

[6] Marie Antoine Parseval (1755-1836), poznati francuski matematičar.

4.2.5 Kompleksan oblik Furijeovog reda

Ako iskoristimo Ojlerove formule za kompleksne brojeve:

$$\cos\frac{k\pi x}{\ell} = \frac{e^{\frac{k\pi x}{\ell}i} + e^{-\frac{k\pi x}{\ell}i}}{2}, \qquad \sin\frac{k\pi x}{\ell} = \frac{e^{\frac{k\pi x}{\ell}i} - e^{-\frac{k\pi x}{\ell}i}}{2i},$$

Furijeov red funkcije $f(x)$ možemo da napišemo u obliku

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_k - b_k i}{2}e^{\frac{k\pi x}{\ell}i} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_k + b_k i}{2}e^{-\frac{k\pi x}{\ell}i} = \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{-\infty}^{-1}\frac{a_k + b_k i}{2}e^{\frac{k\pi x}{\ell}i} + \sum_{1}^{\infty}\frac{a_k - b_k i}{2}e^{\frac{k\pi x}{\ell}i} = \\ &= \sum_{-\infty}^{\infty} c_k e^{\frac{k\pi x}{\ell}i}. \end{aligned}$$

Ovde je

$$c_k = \begin{cases} \dfrac{a_k - b_k i}{2} & k > 0, \\[2ex] \dfrac{a_0}{2} & k = 0, \\[2ex] \dfrac{a_k + b_k i}{2} & k < 0, \end{cases}$$

pri čemu c_k može da se odredi relacijom

$$c_k = \frac{1}{2\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(x)e^{\frac{-k\pi x}{\ell}i}\,\mathrm{d}x.$$

4.2.6 Furijeov integral

Predstavljanje funkcije Furijeovim redom se veoma koristi u mnogim problemima matematičke fizike, ali važi samo za periodične funkcije. Pokazali smo kako neka funkcija, definisana u konačnom intervalu (a, b) može da se proširi tako da dobijemo periodičnu parnu ili neparnu funkciju. Međutim, česti su problemi u kojima se javljaju funkcije definisane u intervalu $(-\infty, \infty)$, a nisu periodične. Tu klasu funkcija ne možemo da proširimo na periodične funkcije, na opisani način. Postavlja se pitanje: da li je moguće proširiti Furijeovu ideju i na takve funkcije?

Posmatrajmo neku funkciju $f(x)$, koja je delimično glatka funkcija u intervalu $[-\ell, \ell]$. Njen Furijeov red (4.10) je oblika

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cos\frac{k\pi}{\ell}x + b_k\sin\frac{k\pi}{\ell}x\right), \tag{4.35}$$

pri čemu su koeficijenti a_k i b_k određeni relacijama (4.12)

$$a_k = \frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(t)\cos\frac{k\pi}{\ell}t\,\mathrm{d}t, \quad b_k = \frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(t)\sin\frac{k\pi}{\ell}t\,\mathrm{d}t, \ k = 0,1,2,\ldots \tag{4.36}$$

Zamenom (4.36) u (4.35), a s obzirom da je

$$\cos\frac{k\pi}{\ell}x\cos\frac{k\pi}{\ell}t + \sin\frac{k\pi}{\ell}x\sin\frac{k\pi}{\ell}t = \cos\frac{k\pi}{\ell}(x-t),$$

dobijamo

$$f(x) = \frac{1}{2\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(t)\,\mathrm{d}t + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(t)\cos\frac{k\pi}{\ell}(t-x)\,\mathrm{d}t. \tag{4.37}$$

Prethodno postavljeno pitanje svodi se na pitanje: čemu teže ovi integrali kada $\ell \to \infty$?

Pretpostavimo da je funkcija $f(x)$ apsolutno integrabilna u intervalu $(-\ell, \ell)$, tj.

$$\int_{-\ell}^{\ell} |f(t)|\,\mathrm{d}t < M, \quad \text{gde je } M \text{ konačan broj.}$$

Koristeći ovaj uslov, dobijamo

$$\lim_{\ell\to\infty}\left|\frac{1}{2\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(t)\,\mathrm{d}t\right| \le \lim_{\ell\to\infty}\frac{1}{2\ell}\int_{-\ell}^{\ell}|f(t)|\,\mathrm{d}t < \lim_{\ell\to\infty}\frac{1}{2\ell}M = 0. \tag{4.38}$$

Iskoristivši (5.299), relacija (4.37) postaje

$$f(x) = \lim_{\ell\to\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(t)\cos\frac{k\pi}{\ell}(t-x)\,\mathrm{d}t. \tag{4.39}$$

Uvedimo smenu

$$\alpha_k = \frac{k\pi}{\ell}, \quad k = 0,1,2,\ldots$$

pri čemu je

$$\Delta\alpha_k = \alpha_{k+1} - \alpha_k = \frac{(k+1)\pi}{\ell} - \frac{k\pi}{\ell} = \frac{\pi}{\ell} \tag{4.40}$$

i

$$\frac{1}{\ell} = \frac{\Delta\alpha_k}{\pi}. \tag{4.41}$$

Iz smene se vidi da se novo uvedena promenljiva α_k menja u intervalu $(0, +\infty)$.

Koristeći ove smene, relacija (4.39) dobija oblik

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \lim_{\ell\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \Delta\alpha_k \int_{-\ell}^{\ell} f(t) \cos\alpha_k(t-x)\,\mathrm{d}t, \tag{4.42}$$

odnosno, kada pređemo na graničnu vrednost

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \mathrm{d}\alpha \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos\alpha(t-x)\,\mathrm{d}t. \tag{4.43}$$

Relacija (4.43) poznata je u literaturi kao **Furijeova formula**, a odgovarajući integral kao **Furijeov integral**.

Teorema 17 *Neka je funkcija $f(x)$:*

- *deo po deo (delimično) glatka u svakom konačnom intervalu i*

- *apsolutno integrabilna u intervalu $(-\infty, \infty)$.*

Tada funkcija $f(x)$može da se zameni Furijeovim integralom (4.43) *za svako x, sem u tačkama prekida prve vrste x_o, u kojima vrednost funkcije $f(x_o)$ treba zameniti sa*

$$\frac{f(x_o-0)+f(x_o+0)}{2}.$$

Furijeovu formulu možemo da predstavimo i relacijom

$$f(x) = \int_0^{\infty} [A(\lambda)\,\cos\lambda x + B(\lambda)\,\sin\lambda x]\,\mathrm{d}\lambda, \tag{4.44}$$

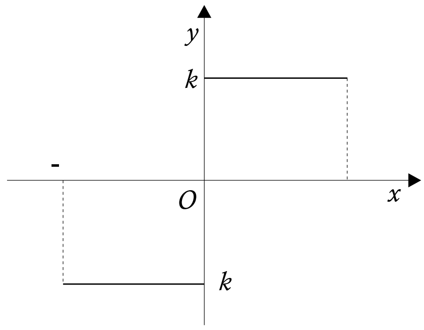
gde je:

$$A(\lambda) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\cos\lambda x\,\mathrm{d}x,$$

$$B(\lambda) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\sin\lambda x\,\mathrm{d}x.$$

4.3 Zadaci

Zad. 4.1. Razviti u Furijeov red funkciju $f(x)$ prikazanu na slici



Slika 4.7:

u intervalu $(-\pi,\pi)$. Njen analitički oblik je

$$f(x)=\begin{cases} -k, & \text{za} \quad -\pi<x<0 \\ k & \text{za} \quad 0<x<\pi \end{cases} \qquad f(x+2\pi)=f(x). \tag{4.45}$$

Rešenje.

Iz (4.11) sledi da je $a_0=0$, a iz (4.12) dobijamo

$$\begin{aligned} a_n=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x = \\ \frac{1}{\pi}\left[\int\limits_{-\pi}^{0}(-k)\cos nx\,\mathrm{d}x+\int_0^{\pi}k\cos nx\,\mathrm{d}x\right] = \\ =\frac{1}{\pi}\left[-k\frac{\sin nx}{n}\Big|_{-\pi}^{0}+k\frac{\sin nx}{n}\Big|_{0}^{\pi}\right]=0, \end{aligned} \tag{4.46}$$

jer je $\sin nx=0$ u $-\pi$, 0 i π, za svako $n=1,2,\ldots,$.[7]

Na isti način iz (4.12) dobijamo

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}(-k)\sin nx\,\mathrm{d}x+\int_0^{\pi}k\sin nx\,\mathrm{d}x\right]= \\ &= \frac{1}{\pi}\left[k\frac{\cos nx}{n}\Big|_{-\pi}^{0}-k\frac{\cos nx}{n}\Big|_{0}^{\pi}\right]. \end{aligned} \tag{4.47}$$

Kako je $\cos(-\alpha)=\cos\alpha$ i $\cos 0=1$, to konačno dobijamo

$$b_n=\frac{k}{n\pi}\left[\cos 0-\cos n\pi-\cos n\pi+\cos 0\right]=\frac{2k}{n\pi}(1-\cos n\pi).$$

[7]Napomenimo da ovaj rezultat može da se dobije direktno, jer je posmatrana funkcija neparna.

$$\cos n\pi = \begin{cases} -1 & \text{za neparno}\, n \\ \ \ 1 & \text{za parne vrednosti}\, n. \end{cases}.$$

Tako Furijeovi koeficijenti b_n za zadatu funkciju imaju sledeće vrednosti

$$b_1 = \frac{4k}{\pi}, \quad b_2 = 0, \quad b_3 = \frac{4k}{3\pi}, \quad b_4 = 0, \quad b_5 = \frac{4k}{5\pi}, \dots,$$

odnosno

$$b_n = \begin{cases} \dfrac{4k}{n\pi}, & \text{za } n \text{ neparno}, \\ 0, & \text{za } n \text{ parno}. \end{cases}$$

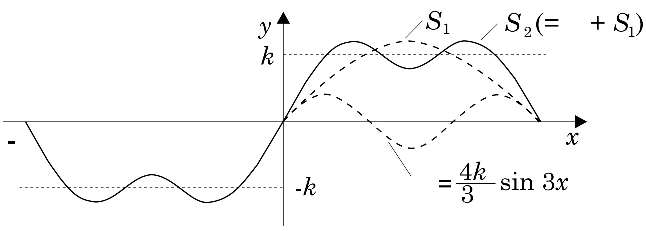
Pošto su a_n jednaki nuli odgovarajući Furijeov red je

$$\frac{4k}{\pi}\left(\sin x + \frac{1}{3}\sin 3x + \dots\right). \tag{4.48}$$

Parcijalne sume su

$$S_1 = \frac{4k}{\pi}\sin x, \quad S_2 = \frac{4k}{\pi}(\sin x + \frac{1}{3}\sin 3x) \quad \text{itd.}$$

Grafici parcijalnih suma su dati na slici ispod i na njima se vidi kako red konvergira i kako mu je suma jednaka zadatoj funkciji $f(x)$. U tačkama $x = 0$ i $x = \pi$, tačkama diskontinuiteta $f(x)$, sve parcijalne sume imaju vrednost nula, što je aritmetička sredina vrednosti $-k$ i k.



Slika 4.8:

♡

Zad. 4.2. Razviti u Furijeov red funkciju $f(x) = x$ u intervalu $(-\pi, \pi)$.

Rešenje.

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx) \quad x \in (-\pi, \pi).$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x dx = \frac{1}{\pi}\frac{1}{2}x^2\Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{2\pi}(\pi^2 - \pi^2) = 0.$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x \cos nx \,\mathrm{d}x.$$

Uvodeći smenu

$$nx = y \quad \Rightarrow \quad x = \frac{1}{n}y \quad dx = \frac{1}{n}dy$$

dobijamo

$$a_n = \frac{1}{\pi n^2}\int_{-n\pi}^{n\pi} y \cos y dy.$$

Parcijalnom integracijom

$$y = u, du = dy, \cos y dy = dv, v = \sin y$$

dobijamo

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{n^2\pi}\left(y \sin y\Big|_{-n\pi}^{n\pi} - \int_{-n\pi}^{n\pi} \sin y dy\right) = \\
&= \frac{1}{n^2\pi}\left(n\pi \sin n\pi - n\pi \sin(-n\pi) + \cos y\Big|_{-n\pi}^{n\pi}\right) = \\
&= \frac{1}{n^2\pi}(\cos n\pi - \cos(-n\pi)) = \frac{1}{n^2\pi}(\cos n\pi - \cos n\pi) = 0.
\end{aligned}$$

Za b_n, na sličan način dobijamo

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x \sin nx dx = \frac{1}{n^2\pi}\int_{-n\pi}^{n\pi} y \sin y dy = \\
&= \frac{1}{n^2\pi}\left(-y \cos y\Big|_{-n\pi}^{n\pi} + \int_{-n\pi}^{n\pi} \cos y dy\right) = \\
&= \frac{1}{n^2\pi}\left(-n\pi \cos n\pi - n\pi \cos(-n\pi) + \sin y\Big|_{-n\pi}^{n\pi}\right) = \\
&= \frac{1}{n^2\pi}\left(-2n\pi \cos n\pi + \sin n\pi + \sin n\pi\right) = \frac{1}{n^2\pi}(-2n\pi(-1)^n) = \frac{2}{n}(-1)^{n+1}.
\end{aligned}$$

$$f(x) = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin nx. \tag{4.49}$$

Napomena. Funkcija $f(x) = x$ je neparna funkcija i u razvoju u red javljaju se samo oni koeficijenti koji stoje uz neparnu sinusnu funkciju.

♡

Zad. 4.3. Razviti u Furijeov red funkciju $f(x) = |x|$ u intervalu $(-\pi, \pi)$.

Rešenje.

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |x|\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} x dx = \frac{2}{\pi}\frac{1}{2}x^2\Big|_0^{\pi} = \pi,$$

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |x|\cos nx\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} x\cos nx\,\mathrm{d}x = \frac{2}{n^2\pi}\int_0^{n\pi} y\cos y\mathrm{d}y = \\
&= (y = u, \mathrm{d}u = \mathrm{d}y, \cos y\mathrm{d}y = \mathrm{d}v, v = \sin y) = \\
&= \frac{2}{n^2\pi}\left(y\sin y\Big|_0^{\pi} - \int_0^{n\pi} \sin y\mathrm{d}y \right) = \\
&= \frac{2}{n^2\pi}\cos y\Big|_0^{n\pi} = \frac{2}{n^2\pi}\left((-1)^n - 1\right) = \\
&= \begin{cases} 0 & \text{za parno}\, n, \\ -\dfrac{4}{n^2\pi} & \text{za neparno}\, n. \end{cases}
\end{aligned}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |x|\sin nx\mathrm{d}x = 0.$$

Dakle, Furijeov red funkcije $f(x) = |x|$ je

$$f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}\cos(2n+1)x.$$

♡

Razviti u Furijeov red, na naznačenim intervalima, sledeće funkcije:

Zad. 4.4.

$$f(x) = \begin{cases} ax, & -\pi < x \leq 0, \\ bx, & 0 < x < \pi. \end{cases}$$

<u>*Rešenje.*</u>

$$f(x) = \frac{\pi(b-a)}{4} + \frac{2(a-b)}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos(2k+1)x}{(2k+1)^2} + (a+b) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} \sin kx}{k}.$$

♡

Zad. 4.5. Razviti u Furijeov red funkciju $f(x) = \cos ax$ u intervalu $(-\pi, \pi)$, $(a \neq \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{3}{2}, \dots)$.

<u>*Rezultat.*</u>

$$f(x) = \frac{2 \sin \pi a}{\pi} \left[\frac{1}{2a} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{a \cos nx}{n^2 - a^2} \right].$$

♡

Zad. 4.6. Razviti u Furijeov red funkciju $f(x) = \sin ax$ u intervalu $(-\pi, \pi)$, $(a \neq 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$

<u>*Rezultat.*</u>

$$f(x) = \frac{2 \sin \pi a}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} n \sin nx}{n^2 - a^2}.$$

♡

Zad. 4.7. Razviti u Furijeov red funkciju $f(x) = \operatorname{sh} ax$ u intervalu $(-\pi, \pi)$.

<u>*Rezultat.*</u>

$$f(x) = \frac{2 \operatorname{sh} \pi a}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} n \sin nx}{n^2 + a^2}.$$

♡

Zad. 4.8. Razviti u Furijeov red funkciju $f(x) = \operatorname{ch} ax$ u intervalu $(-\pi, \pi)$.

Rezultat.

$$f(x) = \frac{2\text{sh}\, a\pi}{\pi}\left[\frac{1}{2a} + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{a\cos nx}{a^2+n^2}\right].$$

♡

Zad. 4.9. Razviti u Furijeov red funkciju $f(x) = e^{ax}$ u intervalu $(-l, l)$.

Rezultat.

$$f(x) = 2\text{sh}(al)\cdot\left[\frac{1}{2al} + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{al\cos nx - \pi n \sin nx}{(al)^2+(\pi n)^2}\right].$$

♡

Zad. 4.10. Razviti u Furijeov red funkciju $f(x) = x\sin x$ u intervalu $(-\pi, \pi)$.

Rezultat.

$$f(x) = 1 - \frac{1}{2}\cos x + 2\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2-1}\cos nx.$$

♡

Zad. 4.11. Razviti u Furijeov red funkciju $f(x) = x\cos x$ u intervalu $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

Rezultat.

$$f(x) = \frac{16}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}n}{(4n^2-1)^2}\sin 2nx.$$

♡

Zad. 4.12. Razviti u Furijeov red funkciju $f(x) = x(\pi - x)$ u intervalu $[0, \pi)$, $f(x) = f(x+\pi)$.

Rezultat.

$$f(x) = \frac{\pi^2}{6} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2nx}{n^2}.$$

♡

Zad. 4.13. Razviti u Furijeov red funkciju $f(x) = \frac{\pi - x}{2}$ u intervalu $(0, 2\pi)$.

<u>*Rezultat.*</u>

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}.$$

♡

Zad. 4.14. Razviti u Furijeov red funkciju

$$f(x) = \begin{cases} A & 0 < x < l, \\ 0 & l < x < 2l, \end{cases}$$

u intervalu $(0, 2l)$, gde je A konstanta.

<u>*Rezultat.*</u>

$$f(x) = \frac{A}{2} + \frac{2A}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+1} \sin \frac{(2k+1)\pi x}{l}.$$

♡

Zad. 4.15. Razviti u Furijeov red funkciju $f(x) = \pi^2 - x^2$ u intervalu $(-\pi, \pi)$.

<u>*Rezultat.*</u>

$$f(x) = \frac{2}{3}\pi^2 + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} \cos nx.$$

♡

Glava 5

Parcijalne diferencijalne jednačine

Parcijalne diferencijalne jednačine (PDJ) javljaju se u različitim problemima fizike, geometrije i tehnike [1] i to u slučajevima kada funkcija, koja opisuje dati proces ili pojavu, zavisi od dve ili više nezavisnih promenljivih. Napomenimo da samo prostiji problemi mogu da se opišu običnim diferencijalnim jednačinama. Problemi u oblasti mehanike fluida, mehanike čvrstog tela, prostiranja toplote, elektromagnetizma itd., opisuju se parcijalnim diferencijalnim jednačinama.

Teorija parcijalnih diferecijalnih jednačina jedan je od najlepših primera uzajamne povezanosti matematike sa drugim naučnim oblastima. Rešavanje ovih jednačina predstavlja ne samo formalni matematički interes nego i uslov spoznavanja procesa u prirodnim i drugim naukama. Dakle, gledano očima matematičara, rešenje jednačina predstavlja broj ili funkciju. Gledano očima fizičara ili biologa, rešenje opisuje neki proces, dakle ima fizički smisao.

Za parcijalne diferencijalne jednačine drugog reda ne postoje opšte metode za rešavanje, za razliku od običnih diferencijalnih jednačina i parcijalnih diferencijalnih jednačina prvog reda, sa jednom nepoznatom funkcijom. [2] Razlog leži pre svega u činjenici da su se parcijalne diferencijalne jednačine drugog reda pojavile u okviru matematičke fizike i mehanike gotovo u samom početku stvaranja matematičke analize (pre više od dva veka). Sem toga, rešenja ovih jednačina morala su da zadovolje i početne i granične uslove, pa su ona (rešenja) tražena od problema do problema. Ovako postavljeni problemi privukli su pažnju matematičara, ali su oni tražili rešenja pojedinačnih jednačina nezavisno od opštih metoda za rešavanje, koje nisu bile dovoljno razvijene. Međutim, interesantno je da razvitak nauke ni u novije vreme nije doneo opšte metode za rešavanje parcijalnih jednačina drugog reda. Treba naglasiti da poslednjih decenija veoma napredovale približne (numeričke)

[1] U poslednje vreme javljaju se i u drugim oblastima nauke, recimo medicini za matematičko opisivanje rada pojedinih organa.

[2] Rešavanje ovih jednačina svodi se na integraljenje običnih diferencijalnih jednačina.

metode za rešavanje PDJ.

U ovom poglavlju biće razmatrane neke od važnijih parcijalnih diferencijalnih jednačina u tehnici. Izvešćemo neke od njih i pokazati jednu od metoda za njihovo rešavanje (Furijeova metoda razdvajanja promenljivih). Kako se rešavanje jedne parcijalne jednačine može da iskomplikuje, promenom početnih ili graničnih uslova, to se često pribegava numeričkim metodama pri njihovom rešavanju. Neke od numeričkih metoda biće prikazane u sledećem poglavlju.

5.1 Definicije i oznake

Definicija.

Neka je u – funkcija promenljivih $x_1, x_2, \ldots, x_n$ čiji su svi parcijalni izvodi, do m-tog reda zaključno, neprekidni na posmatranoj oblasti $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Bilo koja relacija između promenljivih x_i $(i = 1, \ldots, n)$, funkcije u i njenih parcijalnih izvoda:

$$F\left(x_1, x_2, \ldots, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_n}, \ldots, \frac{\partial^m u}{\partial x_1^m}, \ldots, \frac{\partial^m u}{\partial x_n^m}\right) = 0, \tag{5.1}$$

naziva se **parcijalna diferencijalna jednačina**.

Ako je najviši izvod u (5.1) reda m $(m \leq n)$, tada se data jednačina naziva: **parcijalna diferencijalna jednačina reda** m**.**

Definicija.

Bilo koja funkcija u, promenljivih $x_1, x_2, \ldots, x_k$, čiji parcijalni izvodi potrebnog reda postoje, a koja zajedno sa svojim parcijalnim izvodima identički zadovoljava jednačinu (5.1), **naziva se rešenje parcijalne diferencijalne jednačine** (5.1).

Definicija.

Opšte rešenje jednačine (5.1) je rešenje koje sadrži onoliko proizvoljnih nezavisnih funkcija, koliki je red jednačine.

Definicija.

Partikularno rešenje se dobija iz opšteg rešenja zadavanjem konkretnog oblika (izraza) za proizvoljne funkcije.

Primer 1.

Posmatrajmo diferencijalnu jednačinu

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 2x - y.$$

Ova jednačina je parcijalna jednačina drugog reda, čije je opšte rešenje

$$u = x^2 y - \frac{1}{2} x y^2 + F(x) + G(y).$$

U specijalnom slučaju, kada je $F(x) = 2\sin x$, $G(y) = 3y^4 - 5$, dobija se partikularno rešenje

$$u = x^2 y - \frac{1}{2} x y^2 + 2\sin x + 3y^4 - 5.$$

Pri rešavanju parcijalnih diferencijalnih jednačina često se nameću posebni uslovi, koje rešenje treba da zadovolji. Ovi uslovi mogu da budu početni ili granični (konturni). Oni će kasnije biti detaljnije razmotreni.

Monžeove oznake

Posmatraćemo uglavnom parcijalne jednačine drugog reda u kojima nepoznata funkcija u zavisi od dve promenljive x i y. U tom slučaju koristićemo sledeće oznake, takozvane Monžeove[3]:

$$\begin{aligned} p = u_x = \frac{\partial u}{\partial x}; \quad q = u_y = \frac{\partial u}{\partial y} \\ r = u_{xx} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}; \quad s = u_{xy} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}; \quad t = u_{yy} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \end{aligned} \tag{5.2}$$

Koristeći ove oznake opšta parcijalna diferencijalna jednačina prvog reda može da se napiše u obliku:

$$F(x, y, u, p, q) = 0, \tag{5.3}$$

a opšta parcijalna diferencijalna jednačina drugog reda:

$$F(x, y, u, p, q, r, s, t) = 0. \tag{5.4}$$

[3] Gaspard Monge, comte de Péluse, 1746-1818, francuski matematičar, osnivač École polytechnique i jedan od tvoraca École normale. Dao je novi pristup infinitezimalnoj geometriji. Autor je nove metode geometrijske integracije. Dobio je i značajne rezultate u analitičkoj geometriji u prostoru.

5.2 Formiranje parcijalnih diferencijalnih jednačina

Parcijalne diferencijalne jednačine formiraju se na jedan od sledećih načina:

- eliminacijom promenljivih funkcija,
- eliminacijom konstanti i
- matematičkim opisom problema (u geometriji, mehanici, fizici, tehnici).

Prikažimo ovo na nekoliko primera.

Primer 1. Neka su $f_1(\xi)$ i $f_2(\eta)$ proizvoljne diferencijabilne funkcije, pri čemu je $\xi = y + ax$, a $\eta = y - ax$. Odrediti parcijalnu diferencijalnu jednačinu čije rešenje zadovoljava jednačinu

$$z = f_1(\xi) + f_2(\eta).$$

Rešenje. Koristeći Monžeove oznake, dobijamo

$$p = \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial x} = \frac{\partial f_1}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x} = a\frac{\mathrm{d}f_1}{\mathrm{d}\xi} - a\frac{\mathrm{d}f_2}{\mathrm{d}\eta} = a\left(f_1' - f_2'\right),$$
$$q = \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial f_1}{\partial y} + \frac{\partial f_2}{\partial y} = \frac{\partial f_1}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial f_2}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{\mathrm{d}f_1}{\mathrm{d}\xi} + \frac{\mathrm{d}f_2}{\mathrm{d}\eta} = f_1' + f_2',$$

$$r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}(p) = a\left(\frac{\partial f_1'}{\partial x} - \frac{\partial f_2'}{\partial x}\right) = a\left(\frac{\mathrm{d}f_1'}{\mathrm{d}\xi}\frac{\partial \xi}{\partial x} - \frac{\mathrm{d}f_2'}{\mathrm{d}\eta}\frac{\partial \eta}{\partial x}\right) = \tag{5.5}$$
$$= a^2\left(f_1'' + f_2''\right), \tag{5.6}$$
$$t = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}(q) = \frac{\partial f_1'}{\partial y} + \frac{\partial f_2'}{\partial y} = \frac{\mathrm{d}f_1'}{\mathrm{d}\xi}\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\mathrm{d}f_2'}{\mathrm{d}\eta}\frac{\partial \eta}{\partial y} = \tag{5.7}$$
$$= f_1'' + f_2''. \tag{5.8}$$

Iz (5.6) i (5.8) dobija se tražena parcijalna diferencijalna jednačina

$$r - a^2 t = 0.$$

Primer 2. Neka je data funkcija u obliku

$$z = a^2x^2 + 2abxy + b^2y^2 + cx + dy + e,$$

gde su a, b, c, d i e proizvoljne konstante. Napisati diferencijalnu jednačinu koju zadovoljava ova funkcija.

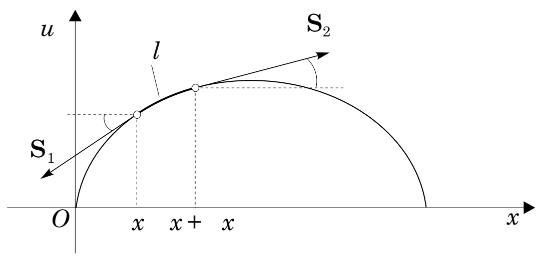
Rešenje. Polazeći od Monžeovih oznaka, dobijamo

$$p = \frac{\partial z}{\partial x} = 2a^2x + 2aby + c, \quad q = \frac{\partial z}{\partial y} = 2b^2y + 2abx + d,$$
$$r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}(p) = 2a^2, \quad s = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}(q) = \frac{\partial}{\partial y}(p) = 2ab,$$
$$t = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}(q) = 2b^2.$$

Iz poslednjih relacija dobijamo traženu jednačinu

$$rt - s^2 = 0.$$

Primer 3. Odrediti diferencijalnu jednačinu žice koja treperi (sl. 5.1).



Slika 5.1:

Rešenje. Pretpostavimo sledeće:

- masa žice je konstantna po jedinici dužine (homogena žica),
- težina žice se zanemaruje (sila teže je zanemarljiva u odnosu na sile koje se javljaju u žici),
- pomeranje tačaka žice u je malo u poređenju sa njenom dužinom, pa može da se smatra da tačke imaju samo vertikalno pomeranje. Ugibi i nagibi u svakoj tački su, takođe, mali.

Polazimo od Njutnovog zakona

$$m\mathbf{a} = \sum_i \mathbf{S}_i,$$

gde je: m - masa, $\mathbf{a}$ - ubrzanje, $\mathbf{S}_i$ - sile koje deluju na posmatranu tačku.

Projekcije ove vektorske jednačine (u ovom primeru imamo dve sile, pa je $i = 1, 2$), na ose Dekartovog pravouglog koordinatnog sistema x i y su:

$$ma_x = -S_1 \cos\alpha + S_2 \cos\beta = 0 \quad \Rightarrow \quad S_1 \cos\alpha = S_2 \cos\beta \equiv S, \quad \Rightarrow$$
$$\cos\alpha = \frac{S}{S_1}, \quad \cos\beta = \frac{S}{S_2}, \tag{5.9}$$

gde smo iskoristili pretpostavku da nema kretanja u pravcu x-ose ($a_x = 0$).

$$ma_u = -S_1 \sin\alpha + S_2 \sin\beta \quad \Rightarrow \quad S_2 \sin\beta - S_1 \sin\alpha = \varrho V \frac{\partial^2 u}{\partial t^2},$$

gde je $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ projekcija ubrzanja a_u, a $u = u(x,t)$. Kako je $m = \varrho V$, a $V = \Delta\ell \cdot P$, gde je ϱ – gustina, $\Delta\ell$ – dužina, a P – površina poprečnog preseka posmatrane žice i ako pretpostavimo da je P jedinična površina, deobom druge jednačine sa S, dobijamo

$$\frac{S_2}{S} \sin\beta - \frac{S_1}{S} \sin\alpha = \varrho \frac{\Delta\ell}{S} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}.$$

Iskoristivši (5.9), dobijamo

$$\mathrm{tg}\beta - \mathrm{tg}\alpha = \varrho \frac{\Delta\ell}{S} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}. \tag{5.10}$$

Kako je

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_x = \mathrm{tg}\alpha \quad \text{i} \quad \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x+\Delta x} = \mathrm{tg}\beta,$$

a $\Delta\ell \approx \Delta x$, to dobijamo

$$\frac{\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x+\Delta x} - \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_x}{\Delta x} = \frac{\varrho}{S} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}.$$

Posmatrajmo sada graničnu vrednost, kada $\Delta x \to 0$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x} \left(\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x+\Delta x} - \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_x \right) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\varrho}{S} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}.$$

Kako leva strana predstavlja drugi parcijalni izvod po x (po definiciji), a sa desne strane funkcija pod limesom ne zavisi od Δx, konačno dobijamo

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \tag{5.11}$$

gde je $c^2 = \varrho/S$. Relacija (5.11) predstavlja takozvanu jednodimenzionalnu talasnu jednačinu.

Primer 4.

Naći diferencijalnu jednačinu familije sfera, poluprečnika r, čiji centri leže u ravni $x = y$.

Rešenje.

Jednačina ove familije sfera je

$$(x-a)^2 + (y-a)^2 + (z-b)^2 = R^2. \tag{5.12}$$

Posmatrajući z kao funkciju od x, y, diferenciranjem relacije (5.12), po x, odnosno y dobijamo:

$$2(x-a)+2(z-b)\frac{\partial z}{\partial x}=0, \quad 2(y-a)+2(z-b)\frac{\partial z}{\partial y}=0,$$

ili

$$(x-a)+(z-b)p=0, \quad (y-a)+(z-b)q=0.$$

Uvedimo oznaku $z-b=-m$. Tada je $x-a=pm$, a $y-a=qm$. Smenom u jednačinu (5.12) dobijamo

$$m^2(p^2+q^2+1)=R^2. \tag{5.13}$$

Kako je $(x-y)=(p-q)m$, sledi da je $m=\dfrac{x-y}{p-q}$. Dalje, zamenivši ovako dobijeno m u (5.13), dobijamo

$$\left(\frac{x-y}{p-q}\right)^2(p^2+q^2+1)=R^2,$$

odnosno, traženu parcijalnu diferencijalnu jednačinu

$$(x-y)^2(p^2+q^2+1)=R^2(p-q)^2.$$

Primer 5. Odrediti jednačinu membrane koja osciluje.

Rešenje.
Navedimo prvo fizičke uslove (ograničenja) pod kojim se izvodi tražena jednačina:

1° posmatra se elastična membrana [4], čija je gustina[5] konstantna.

2° Membrana se deformiše tako da je njena granica fiksirana za xy – ravan. Pri takvoj deformaciji napon u membrani T [6] je isti u svim tačkama i pravcima i ne menja se tokom vremena.

3° Ugib membrane $u(x,y,t)$ (pomeranje tačaka membrane u pravcu z – ose) je mali u odnosu na dimenzije membrane.

4° Nagibi [7] membrane u svakoj tački su mali.

Zamislimo da smo isekli delić membrane ΔP (vidi sliku 5.2). Ovaj deo ostaje u istom stanju, kao i pre isecanja, ako se uticaj odstranjenog dela zameni odgovarajućim silama.

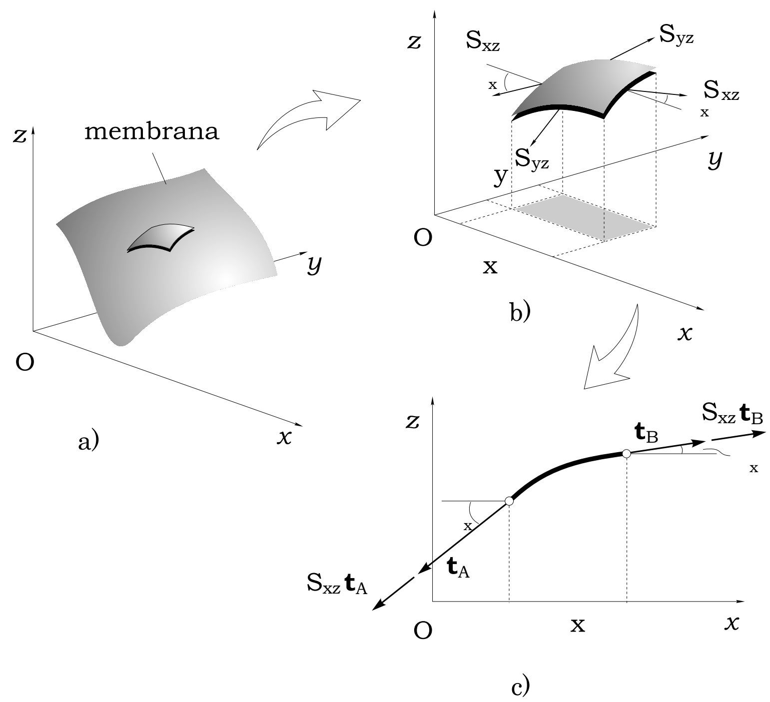
---

[4] Membrana se definiše kao materijalna površ, tj. geometrijska površ kojoj se pripisuje neprekidno raspoređena masa.

[5] Masa po jedinici površine membrane. Ako je gustina konstantna, tada takvu membranu nazivamo – homogena membrana.

[6] Sila po jedinici dužine membrane.

[7] Ugao koji zaklapa neki tangentni pravac u tački membrane sa svojom projekcijom na xy – ravan.



Slika 5.2: Membrana

Projekcije ovih sila na xz odnosno yz ravan, izražene preko napona T, mogu da se izraze u obliku

$$S_{xz} = T\cdot \Delta\, y, \quad \text{odnosno} \quad S_{yz} = T\cdot \Delta\, x.$$

Projekcija jednačine kretanja ($\Delta m\mathbf{a} = \sum_i \mathbf{S}_i$) na pravac z:

$$\Delta m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = S_{xz}\left(\sin\beta_x - \sin\alpha_x\right) + S_{yz}\left(\sin\beta_y - \sin\alpha_y\right) \tag{5.14}$$

gde je $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ – projekcija ubrzanja na z – osu, a $\Delta m = \varrho \Delta x \Delta y$.

Kako i u ovom slučaju, kao i u slučaju žice koja treperi (prema pretpostavci 4°), imamo da je:

$$\sin\beta_x \approx \operatorname{tg}\beta_x = \frac{\partial u(x+\Delta x,\, y)}{\partial x}, \quad \sin\alpha_x \approx \operatorname{tg}\alpha_x = \frac{\partial u(x,\, y)}{\partial x}$$

odnosno

$$\sin\beta_y \approx \operatorname{tg}\beta_y = \frac{\partial u(x,\, y+\Delta y)}{\partial y}, \quad \sin\alpha_y \approx \operatorname{tg}\alpha_y = \frac{\partial u(x,\, y)}{\partial y},$$

pa su odgovarajuće projekcije ovih sila na z – osu

$$T\Delta y(\sin_x\beta - \sin_x\alpha) \approx T\Delta y(\operatorname{tg}_x\beta - \operatorname{tg}_x\alpha) = T\Delta y\left[\frac{\partial u(x+\Delta x, y)}{\partial x} - \frac{\partial u(x,y)}{\partial x}\right] \approx$$
$$\approx T\Delta x\Delta y\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + O_1(\Delta x, \Delta y),$$

pri čemu je

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} O_1 = 0.$$

Na sličan način dobijamo i za drugu silu

$$T\Delta x(\sin_y\beta - \sin_y\alpha) \approx T\Delta y(\operatorname{tg}_x\beta - \operatorname{tg}_y\alpha) = T\Delta x\left[\frac{\partial u(x, y+\Delta y)}{\partial y} - \frac{\partial u(x,y)}{\partial y}\right] \approx$$
$$\approx T\Delta x\Delta y\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + O_2(\Delta x, \Delta y),$$

pri čemu je

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} O_2 = 0.$$

Uz ova ograničenja jednačina (5.14) postaje

$$\varrho\Delta x\Delta y\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T\left(\frac{\Delta u_x}{\Delta x} + \frac{\Delta u_y}{\Delta y}\right)\Delta x\Delta y + O_1 + O_2.$$

Posmatrajmo sada granični proces, kada $\Delta x \to 0$ i $\Delta y \to 0$. Tada dobijamo

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{T}{\varrho}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right).$$

Na ovaj način dobijamo parcijalnu diferencijalnu jednačinu za membranu koja osciluje

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\Delta u, \tag{5.15}$$

gde $\frac{T}{\varrho} = c^2$, a operator Δ – Delta operator. [8]

Napomenimo da ovako uvedena konstanta c ima dimenziju brzine, a sama jednačina poznata je i kao **talasna jednačina**. Za razliku od jednačine (5.11), koja je takozvana jednodimenzionalna, ova je dvodimenzionalna, jer funkcija u zavisi od tri promenljive, od kojih su dve koordinate x i y, a treća promenljiva je vreme t.

[8] Oznaka Δ (čita se "delta") koristi se za Delta operator, ali i kao oznaka za priraštaj neke promenljive veličine, recimo $\Delta x = x_2 - x_1$. Nadamo se da do zabune neće da dođe.

5.3 Linearne i kvazilinearne parcijalne diferencijalne jednačine prvog reda

Linearna parcijalna diferencijalna jednačina prvog reda je jednačina oblika

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + bu + c = 0, \tag{5.16}$$

gde je $u = u(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ nepoznata funkcija, a koeficijenti a_i, b i c, u opštem slučaju, su funkcije oblika

$$\begin{aligned} a_i &= a_i\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right), \quad i = 1, \ldots, n, \\ b &= b\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right), \\ c &= c\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right). \end{aligned}$$

Kvazilinearna parcijalna diferencijalna jednačina prvog reda je oblika

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + b = 0. \tag{5.17}$$

U ovom slučju koeficijenti uz odgovarajuće izvode su funkcije oblika

$$\begin{aligned} a_i &= a_i\left(x_1, x_2, \ldots, x_n, u\right), \quad i = 1, \ldots, n, \\ b &= b\left(x_1, x_2, \ldots, x_n, u\right). \end{aligned}$$

Dakle, jednačina je linearna po prvim izvodima, ali može da bude nelinearna po nepoznatoj funkciji u.

5.3.1 O rešenjima parcijalnih diferencijalnih jednačina

Integraliti (rešiti) jednačinu (5.16), odnosno (5.17), znači naći sve funkcije $u(x_1, \ldots, x_n)$ koje, zajedno sa svojim parcijalnim izvodima, identički zadovoljavaju polaznu jednačinu, za proizvoljne vrednosti nezavisno promenljivih $x_1, \ldots, x_n$.

Rešenje jednačina (5.16), odnosno (5.17), zove se i **integralna površ** (ako se radi o funkciji sa dve promenljive).

Potpuno, opšte, singularno, mešovito i partikularno rešenje. Košijev problem

Integrali (rešenja) parcijalnih jednačina mogu da zavise od:

- proizvoljnih konstanti (potpuno rešenje ili potpuni integral), ili
- proizvoljnih funkcija (opšte rešenje ili opšti integral), ili
- istovremeno i od proizvoljnih konstanti i od proizvoljnih funkcija (mešovito rešenje ili mešoviti integral).

Pored ovih rešenja javljaju se i:

- partikularno rešenje, koje se dobija iz potpunog zamenom početnih uslova i
- singularno rešenje ili singularni integral. [9]

Košijev problem

Pod pojmom **Košijev problem**, u teoriji parcijalnih jednačina prvog reda, podrazumeva se određivanje onog opšteg rešenja koje prolazi kroz neku, unapred zadatu, krivu. Na primer, naći ono rešenje parcijalne jednačine

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \psi(x, y, f),$$

koje za $x = x_0$ postaje $f = \varphi(y)$.

Dakle, zadatak je da se nađe ona površ $(f(x, y))$ koja prolazi kroz datu krivu liniju $(\varphi(y))$, u ravni paralelnoj ravni yOz $(x = x_0)$.

5.3.2 Opšta metoda za integraciju linearnih parcijalnih jednačina prvog reda. Prvi integral

U ovom paragrafu pokazaćemo vezu između linearnih parcijalnih jednačina prvog reda i sistema običnih diferencijalnih jednačina oblika

$$\frac{\mathrm{d}y_i}{\mathrm{d}x} = f_i(x, y_1, \ldots, y_n), \quad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{5.18}$$

gde je x – nezavisna promenljiva, a $y_i = y_i(x)$ nepoznate funkcije promenljive x.

Pretpostavimo da su funkcije f_i $(i = 1, \ldots, n)$, koje zavise od $n + 1$ nezavisno promenljive $x, y_1, \ldots, y_n$, diferencijabilne u nekoj zatvorenoj oblasti D, prostora R^{n+1}. U teoriji običnih diferencijalnih jednačina dokazuje se (videti, na primer, [42]), da pod navedenim pretpostavkama, kroz datu tačku $M_0(x_0, y_1^0, \ldots, y_n^0)$, iz oblasti D, prolazi samo jedna integralna kriva sistema (5.18), tj. postoji jednoznačno određen skup funkcija $y_i(x)$ koji predstavlja rešenje polaznog sistema (5.18), a zadovoljava uslove $y_i(x_0) = y_i^0$, $i = 1, \ldots, n$.

Prvi integral sistema (5.18) je svaka funkcija

$$\psi(x, y_1, \ldots, y_n)$$

koja se identički ne svodi na konstantu kada se y_i zameni nekim skupom rešenja sistema (5.18). Uobičajeno je da se funkcija oblika

$$\psi(x, y_1, \ldots, y_n) = c \tag{5.19}$$

zove prvi integral. c – je proizvoljna konstanta.

[9] O ovom i ostalim rešenjima biće kasnije više reči.

Teorema 18 *Potreban i dovoljan uslov da bi funkcija $\psi(x, y_1, \ldots, y_n) = c$ bila prvi integral sistema (5.18) je da zadovoljava linearnu parcijalnu jednačinu prvog reda*

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} + \sum_{i=1}^{n} f_i(x, y_1, \ldots, y_n) \frac{\partial \psi}{\partial y_i} = 0. \tag{5.20}$$

Dokaz.

Uslov je potreban. Pretpostavimo da je funkcija $\psi(x, y_1, \ldots, y_n)$ prvi integral sistema (5.18). Tada se ova funkcija, za skup y_i koji predstavlja rešenja polaznog sistema (5.18), svodi na konstantu, odnosno

$$\psi(x, y_1, \ldots, y_n) = c. \tag{5.21}$$

Kako je $c-$ konstanta, to je totalni diferencijal ove funkcije

$$\mathrm{d}\psi = \frac{\partial \psi}{\partial x} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \psi}{\partial y_i} \frac{\mathrm{d}y_i}{\mathrm{d}x} = 0, \tag{5.22}$$

odnosno, iskoristivši relacije (5.18),

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \psi}{\partial y_i} f_i(x, y_1, \ldots, y_n) = 0. \tag{5.23}$$

Dakle, uslov je potreban.

Uslov je dovoljan. Ako funkcija ψ zadovoljava parcijalnu jednačinu (5.23), tada ona zadovoljava i jednačinu (5.22), što znači da predstavlja prvi integral polaznog sistema (5.18), pod uslovom da funkcije y_i, $i = 1, \ldots, n$, predstavljaju jedan skup rešenja datog sistema. ♡

Ovim smo dokazali datu teoremu.

Napomenimo da ako su funkcije ψ_i $(i = 1, \ldots, m)$ m prvih integrala, polaznog sistema, tada je prvi integral i svaka diferencijabilna funkcija oblika

$$F(\psi_1, \ldots, \psi_m).$$

5.3.3 Simetričan oblik sistema običnih diferencijalnih jed.

Posmatrajmo sistem običnih diferencijalnih jednačina (5.18)

$$\frac{\mathrm{d}y_i}{\mathrm{d}x} = f_i(x, y_1, \ldots, y_n), \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{5.24}$$

Ovaj sistem možemo, rešivši ga po $\mathrm{d}x$, da napišemo u obliku

$$\frac{\mathrm{d}x}{1} = \frac{\mathrm{d}y_1}{f_1} = \cdots = \frac{\mathrm{d}y_n}{f_n}. \tag{5.25}$$

Ako sada uvedemo smene

$$x = x_1,\ y_1 = x_2, \ldots,\ y_n = x_{n+1},$$

a relacije (5.25) podelimo nekom funkcijom X_1, pri čemu ona nije identički nula u posmatranoj oblasti D, dobijamo

$$\frac{\mathrm{d}x_1}{X_1} = \frac{\mathrm{d}x_2}{X_2} = \cdots = \frac{\mathrm{d}x_{n+1}}{X_{n+1}} \tag{5.26}$$

takozvani **simetričan oblik** sistema obične diferencijalne jednačine (5.24). Ovde smo uveli smene

$$X_{i+1} = f_i X_1, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Tačke $M_0(x_1^0, \ldots, x_{n+1}^0)$ u kojima je $X_i(M_0) = 0$ zovu se **singularne tačke** sistema (5.26).
Napomenimo da je u tim tačkama narušena jednoznačnost rešenja, pa te tačke ne treba da se uzimaju za početne uslove.

5.3.4 Opšte rešenje linearne homogene parcijalne jednačine prvog reda

Posmatrajmo linearnu homogenu parcijalnu jednačinu prvog reda oblika

$$L[u] \equiv \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial u}{\partial x_i} = 0. \tag{5.27}$$

Koeficijenti $a_i = a_i(x_1, \ldots, x_n)$ su, po pretpostavci, diferencijabilne funkcije u nekoj oblasti D $n-$ dimenzionalnog prostora i ne anuliraju se istovremeno u tački $M_0(x_1^0, \ldots, x_n^0)$.

Kao što smo prethodno pokazali, ovoj parcijalnoj jednačini možemo da pridružimo sistem običnih diferencijalnih jednačina, u simetričnom obilku

$$\frac{\mathrm{d}x_1}{a_1} = \frac{\mathrm{d}x_2}{a_2} = \cdots = \frac{\mathrm{d}x_n}{a_n}. \tag{5.28}$$

Prema prethodnoj teoremi prvi integrali $\psi_i = c_i$ sistema (5.28) su rešenja parcijalne jednačine (5.27). Dakle, rešavanje polazne parcijalne jednačine (5.27) svodi se na rešavanje sistema (5.28), odnosno traženje prvih integrala.

Iz sistema (5.28) možemo da odredimo $n-1$ uzajamno nezavisnih prvih integrala

$$\psi_i(x_1, \ldots, x_n) = c_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, n-1, \tag{5.29}$$

gde su c_i proizvoljne konstante.

Već smo napomenuli da ako su ψ_i $(i = 1, \ldots, (n-1))$ prvi integrali, tada je prvi integral i svaka diferencijabila funkcija

$$F(\psi_1, \ldots, \psi_{n-1}).$$

Dakle, F predstavlja opšte rešenje parcijalne jednačine (5.27). To možemo lako i da pokažemo.

Pretpostavimo da je opšte rešenje jednačine (5.27) oblika

$$u = F(\psi_1, \ldots, \psi_{n-1}),$$

gde je F proizvoljna funkcija, a $\psi_i = c_i$ $(i = 1, \ldots, n-1)$ prvi integrali sistema (5.28). Tada je

$$\begin{aligned}
L[F] = a_1 &\left(\frac{\partial F}{\partial \psi_1} \frac{\partial \psi_1}{\partial x_1} + \cdots + \frac{\partial F}{\partial \psi_{n-1}} \frac{\partial \psi_{n-1}}{\partial x_1} \right) + \\
&+ a_2 \left(\frac{\partial F}{\partial \psi_2} \frac{\partial \psi_2}{\partial x_2} + \cdots + \frac{\partial F}{\partial \psi_{n-1}} \frac{\partial \psi_{n-1}}{\partial x_2} \right) + \cdots + \\
&+ a_n \left(\frac{\partial F}{\partial \psi_n} \frac{\partial \psi_n}{\partial x_n} \right) = \\
&= \frac{\partial F}{\partial \psi_1} \left(\underbrace{a_1 \frac{\partial \psi_1}{\partial x_1} + \cdots + a_n \frac{\partial \psi_1}{\partial x_n}}_{L[\psi_1]} \right) + \cdots + \\
&+ \frac{\partial F}{\partial \psi_{n-1}} \left(\underbrace{X_1 \frac{\partial \psi_{n-1}}{\partial x_1} + \cdots + a_n \frac{\partial \psi_{n-1}}{\partial x_n}}_{L[\psi_{n-1}]} \right) = 0,
\end{aligned} \tag{5.30}$$

što je i trebalo da se dokaže.

5.3.5 Opšte rešenje linearne nehomogene parcijalne jednačine prvog reda

Rešenje nehomogene parcijalne jednačine prvog reda može da se dobije na sličan način.

Posmatrajmo nehomogenu parcijalnu jednačinu prvog reda

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial u}{\partial x_i} = b, \tag{5.31}$$

gde je u nepoznata neprekidna funkcija promenljivih x_i, $i = 1, \ldots, n$. Veličine a_i i b su po pretpostavci, funkcije oblika $a_i = a_i(x_1, \ldots, x_n)$ i $b = b(x_1, \ldots, x_n, u)$.

Potražimo opšte rešenje u obliku

$$v(x_1, \ldots, x_n, u) = 0. \tag{5.32}$$

Diferenciranjem dobijamo

$$\frac{\partial v}{\partial x_i} + \frac{\partial v}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x_i} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial u}{\partial x_i} = -\frac{\dfrac{\partial v}{\partial x_i}}{\dfrac{\partial v}{\partial u}}. \tag{5.33}$$

Zamenjujući $\dfrac{\partial u}{\partial x_i}$, iz (5.33) u (5.31), dobijamo

$$a_1\left(-\frac{\dfrac{\partial v}{\partial x_1}}{\dfrac{\partial v}{\partial u}}\right)+\cdots+a_n\left(-\frac{\dfrac{\partial v}{\partial x_n}}{\dfrac{\partial v}{\partial u}}\right)=b,$$

odnosno, množeći sa $-\dfrac{\partial v}{\partial u}$,

$$a_1\frac{\partial v}{\partial x_1}+\cdots+a_n\frac{\partial v}{\partial x_n}=-b\frac{\partial v}{\partial u},$$

ili u obliku

$$a_1\frac{\partial v}{\partial x_1}+\cdots+a_n\frac{\partial v}{\partial x_n}+b\frac{\partial v}{\partial u}=0. \tag{5.34}$$

Ovaj izraz predstavlja homogenu diferencijalnu jednačinu prvog reda. Dakle, svako rešenje jednačine (5.34), koje sadrži promenljivu u izjednačeno sa 0, daje rešenje jednačine (5.31) u obliku (5.32).

Ovoj jednačini odgovara sistem običnih jednačina

$$\frac{\mathrm{d}x_1}{a_1}=\cdots=\frac{\mathrm{d}x_n}{a_n}=\frac{\mathrm{d}u}{b}. \tag{5.35}$$

Prvi integrali su oblika

$$\begin{aligned}\psi_0(x_1,\ldots,x_n,u)&=c_0,\\ &\cdots\\ \psi_{n-1}(x_1,\ldots,x_n,u)&=c_{n-1}.\end{aligned} \tag{5.36}$$

Opšti integral je oblika

$$F(\psi_0,\ldots,\psi_{n-1})=0, \tag{5.37}$$

gde je F diferencijabilna funkcija svojih argumenata.

5.3.6 Pfafova jednačina

Pfafova jednačina je jednačina oblika

$$P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z=0, \tag{5.38}$$

gde je $z=z(x,y)$ nepoznata funkcija, a P, Q i R su date neprekidno diferencijabilne funkcije

$$\begin{aligned}P&=P(x,y,z),\\ Q&=Q(x,y,z),\\ R&=R(x,y,z),\end{aligned}$$

u 3–dimenzionalnom prostoru $\mathbb{R}^3$. Jednačina (5.38) može relativno lako da se integrali u dva slučaja:

1° kada leva strana predstavlja potpuni diferencijal neke funkcije, označimo je sa u, i

2° kada postoji takva funkcija (integracioni faktor) kojom treba pomnožiti Pfafovu jednačinu da bi dobili totalni diferencijal.

U prvom slučaju, posmatrajmo neku funkciju $u(x, y, z)$, čiji je potpuni diferencijal

$$\mathrm{d}u = \frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}y + \frac{\partial u}{\partial z}\mathrm{d}z.$$

Poredeći sa (5.38), da bi bila potpuni diferencijal, dobijamo uslove

$$\frac{\partial u}{\partial x} = P, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = Q, \qquad \frac{\partial u}{\partial z} = R. \tag{5.39}$$

Ako je u dva puta neprekidno diferencijabilna funkcija ($u \in C^2(D)$), tada je

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial y}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z}. \tag{5.40}$$

Iz (5.39) i (5.40) dobijamo

$$\frac{\partial}{\partial x}(Q) = \frac{\partial}{\partial y}(P), \quad \frac{\partial}{\partial y}(R) = \frac{\partial}{\partial z}(Q), \quad \frac{\partial}{\partial z}(P) = \frac{\partial}{\partial x}(R), \tag{5.41}$$

uslove integrabilnosti polazne jednačine (5.38). Dakle, u ovom slučaju, jednačina (5.38) može da se napiše kao

$$\mathrm{d}u = P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z = 0 \tag{5.42}$$

odakle, integracijom, dobijamo implicitno rešenje polazne jednačine

$$u(x, y, z) = \int_{x_0}^{x} P\mathrm{d}x + \int_{y_0}^{y} Q\mathrm{d}y + \int_{z_0}^{z} R\mathrm{d}z = c, \tag{5.43}$$

gde je c – proizvoljna konstanta.

U drugom slučaju, pretpostavimo da postoji funkcija $v(x, y, z)$, takva da je $\mathrm{d}u$, definisano relacijom

$$\mathrm{d}u = vP\mathrm{d}x + vQ\mathrm{d}y + vR\mathrm{d}z = 0$$

potpuni diferencijal.

Potražimo sada uslove koje treba da zadovoljavaju funkcije P, Q i R da bi postojala funkcija v, kao i relaciju iz koje bismo mogli da odredimo ovu funkciju (v).

Slično kao i u prethodnom slučaju, imamo uslove

$$\frac{\partial u}{\partial x} = vP, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = vQ, \qquad \frac{\partial u}{\partial z} = vR, \tag{5.44}$$

odnosno

$$\frac{\partial}{\partial x}(vQ) = \frac{\partial}{\partial y}(vP), \quad \frac{\partial}{\partial y}(vR) = \frac{\partial}{\partial z}(vQ), \quad \frac{\partial}{\partial z}(vP) = \frac{\partial}{\partial x}(vR),$$

odakle dobijamo

$$Q\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial Q}{\partial x} = v\frac{\partial P}{\partial y} + P\frac{\partial v}{\partial y} \quad \Rightarrow \quad v\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) = P\frac{\partial v}{\partial y} - Q\frac{\partial v}{\partial x},$$

$$R\frac{\partial v}{\partial y} + v\frac{\partial R}{\partial y} = v\frac{\partial Q}{\partial z} + Q\frac{\partial v}{\partial z} \quad \Rightarrow \quad v\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) = Q\frac{\partial v}{\partial z} - R\frac{\partial v}{\partial y},$$

$$P\frac{\partial v}{\partial z} + v\frac{\partial P}{\partial z} = v\frac{\partial R}{\partial x} + R\frac{\partial v}{\partial x} \quad \Rightarrow \quad v\left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) = R\frac{\partial v}{\partial x} - P\frac{\partial v}{\partial z}.$$

Ove jednačine predstavljaju linearne parcijalne jednačine prvog reda. Kao što smo ranije pokazali, njima možemo jednoznačno da dodelimo sledeće sisteme običnih diferencijalnih jednačina, pa <u>iz prve sledi</u>

$$\frac{\mathrm{d}x}{-Q} = \frac{\mathrm{d}y}{P} = \frac{\mathrm{d}v}{v\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)} \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}v}{v} = \frac{\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}}{-Q}\mathrm{d}x = \frac{\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}}{P}\mathrm{d}y. \tag{5.45}$$

Slično dobijamo <u>iz druge</u>

$$\frac{\mathrm{d}v}{v} = \frac{\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}}{-R}\mathrm{d}y = \frac{\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}}{Q}\mathrm{d}z, \tag{5.46}$$

<u>i treće</u>

$$\frac{\mathrm{d}v}{v} = \frac{\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}}{R}\mathrm{d}x = \frac{\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}}{-P}\mathrm{d}z. \tag{5.47}$$

Odavde sledi, pošto sa leve strane imamo istu funkciju, da su koeficijenti uz odgovarajuće diferencijale jednaki, tj.:

$$\frac{-\frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial y}}{Q} = \frac{\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}}{R},$$

$$\frac{\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}}{P} = \frac{\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}}{-R},$$

$$\frac{\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}}{Q} = \frac{\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}}{-P}.$$

Odavde dobijamo:

$$Q\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)=R\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right),$$
$$R\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)=P\left(\frac{\partial Q}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial y}\right),$$
$$P\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)=Q\left(\frac{\partial R}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial z}\right).$$

Sabirajući leve odnosno desne strane ovih relacija, dobijamo

$$P\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)+Q\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)+R\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)=$$
$$P\left(\frac{\partial Q}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial y}\right)+Q\left(\frac{\partial R}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial z}\right)+R\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right).$$

Iz poslednje relacije dobijamo izraz

$$P\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)+Q\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)+R\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)=0, \tag{5.48}$$

koji predstavlja uslov integrabilnosti. Dakle, postoji takva funkcija v, kojom treba da se pomnoži (5.38), da bi tada mogla da se napiše u obliku potpunog diferencijala

$$\mathrm{d}u=v\,(P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z)=0.$$

Uslov integrabilnosti Pfafove jednačine (5.48) može da se predstavi i u pogodnijem obliku. Naime, izrazi uz P, Q i R, u jednačini (5.48), predstavljaju komponente rotora nekog vektora $\mathbf{v}=P\mathbf{i}+Q\mathbf{j}+R\mathbf{k}$ (videti definiciju (2.46), str. 92). Sam izraz (5.48) sada predstavlja skalarni proizvod (videti (1.44), str. 30)

$$\mathbf{v}\cdot\operatorname{rot}\mathbf{v}=0. \tag{5.49}$$

Napomena. Kako P, Q i R nisu identički jednaki nuli (da je tako imali bismo identitet 0=0), to je ovaj uslov (5.49) zadovoljen, ili kada je $\operatorname{rot}\mathbf{v}=0$, ili kada su vektori $\mathbf{v}$ i $\operatorname{rot}\mathbf{v}$ ortogonalni.
Napomena. Ako su zadovoljeni uslovi integrabilnosti (5.49), tada funkcija v može da se odredi iz jedne od tri jednačine (5.45) – (5.47).

Navedimo sada jedan postupak za određivanje rešenja jednačine (5.38), kada je uslov (5.49) ispunjen, a $\operatorname{rot}\mathbf{v}\neq 0$.

Pretpostavimo da je jedna promenljiva, recimo z, konstantna. Tada posmatrana jednačina postaje

$$P(x,y,z)\mathrm{d}x+Q(x,y,z)\mathrm{d}y=0, \tag{5.50}$$

dakle obična diferencijalna jednačina, u kojoj z ima ulogu parametra. Rešenje ove jednačine je neka funkcija oblika

$$u(x,y,z)=c(z). \tag{5.51}$$

Proizvoljna "konstanta" je funkcija parametra z. $c(z)$ biramo tako da bude zadovoljena jednačina (5.38).

Diferenciranjem jednačine (5.51) dobijamo

$$\frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}y + \frac{\partial u}{\partial z}\mathrm{d}z - \frac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}z}\mathrm{d}z = 0,$$

odnosno

$$\frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}y + \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}z}\right)\mathrm{d}z = 0. \tag{5.52}$$

Koeficijenti uz (5.52) i (5.38) moraju da budu proporcionalni, pa dobijamo

$$\frac{\frac{\partial u}{\partial x}}{P} = \frac{\frac{\partial u}{\partial y}}{Q} = \frac{\frac{\partial u}{\partial z} - c'}{R}.$$

Iz ovog sistema jednačina može da se odredi c', recimo iz

$$\frac{\frac{\partial u}{\partial x}}{P} = \frac{\frac{\partial u}{\partial z} - c'}{R}. \tag{5.53}$$

Naime, može da se pokaže da ako su zadovoljeni uslovi $\mathbf{v}\cdot \operatorname{rot}\mathbf{v} = 0$ i $\operatorname{rot}\mathbf{v} \neq 0$ ($\mathbf{v} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}$), jednačina (5.53) zavisi samo od: z, $c'(z)$ i $u(x, y, z) = c(z)$.

5.3.7 Nelinearne parcijalne diferencijalne jednačine prvog reda. Lagranž-Šarpijev metod

Nelinearna parcijalna diferencijalna jednačina prvog reda (sa dve promenljive) je jednačina oblika

$$f(x, y, z, p, q) = 0, \tag{5.54}$$

gde je: $z = z(x, y)$ – nepoznata funkcija (dve nezavisno promenljive x, y), $p = \dfrac{\partial z}{\partial x}$ i $q = \dfrac{\partial z}{\partial y}$. Za funkciju f, kao i za njene parcijalne izvode, pretpostavlja se da su neprekidne funkcije po svim argumentima, do potrebnog reda.

Kao što smo već rekli, imamo tri tipa rešenja: potpuno, singularno i opšte.

Potpuno i singularno rešenje. Pretpostavimo da jednačinu (5.54) možemo da dobijemo eliminacijom dve proizvoljne konstante (parametri), recimo a i b, iz funkcije

$$g(x, y, z, a, b) = 0. \tag{5.55}$$

Tada funkciju g zovemo **potpuno rešenje** (integral) parcijalne jednačine (5.54).

Napomena. Geometrijski, ovako definisano potpuno rešenje predstavlja dvoparametarsku familiju površi, koja može ili ne da ima obvojnicu. Obvojnica tih površi takođe je rešenje jednačine (5.54) i zovemo ga **singularno rešenje**. Obvojnicu nalazimo (ako ona postoji !) eliminacijom konstanti a i b iz sistema jednačina

$$g=0, \quad \frac{\partial g}{\partial a}=0, \quad \frac{\partial g}{\partial b}=0. \tag{5.56}$$

Ako iz ovih jednačina, eliminisanjem konstanti a i b, dobijemo neku funkciju

$$h(x,y,z)=0, \tag{5.57}$$

koja zadovoljava polaznu jednačinu (5.54), tada $h(x,y,z)$ nazivamo **singularno rešenje** (integral).

Ako funkcija $h(x,y,z)$ može da se predstavi u obliku proizvoda

$$h(x,y,z)=\xi(x,y,z)\cdot\eta(x,y,z), \tag{5.58}$$

pri čemu $\xi=0$ zadovoljava jednačinu (5.54), dok $\eta=0$ ne zadovoljava, tada je $\xi=0$ singularno rešenje.

Singularno rešenje može da se dobije iz parcijalne jednačine eliminacijom p i q iz sistema

$$f=0, \quad \frac{\partial f}{\partial p}=0, \quad \frac{\partial f}{\partial q}=0.$$

Opšte rešenje. Ako parametri a i b nisu nezavisni, tj. ako je, recimo, $b=b(a)$, tada je obvojnica površi definisana relacijom

$$g(x,y,z,a,b(a))=0, \quad \frac{\partial g}{\partial a}+\frac{\partial g}{\partial b}\frac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}a}=0. \tag{5.59}$$

Ovakvo rešenje nazivamo **opšte rešenje** (pšti integral).

Napomena. Ako je poznato jedno potpuno rešenje jednačine (5.54) iz njega može da se dobije opšte i singularno rešenje (ako postoji) i to samo diferenciranjem i eliminacijom odgovarajućih parametara. Demonstrirajmo ovu tvrdnju.

Pretpostavimo da je potpuni integral jednačine (5.54) funkcija (5.55)

$$g(x,y,z,a,b)=0. \tag{5.60}$$

Neka su parametri a i b funkcije od x i y. Tada, diferencirajući (5.60) prvo po x, pa po y, dobijamo:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial g}{\partial x}+\frac{\partial g}{\partial z}p+\frac{\partial g}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial x}+\frac{\partial g}{\partial b}\frac{\partial b}{\partial x}=0,\\
&\frac{\partial g}{\partial y}+\frac{\partial g}{\partial z}q+\frac{\partial g}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial y}+\frac{\partial g}{\partial b}\frac{\partial b}{\partial y}=0.
\end{aligned} \tag{5.61}$$

Parametre a i b određujemo iz uslova:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial g}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial x}+\frac{\partial g}{\partial b}\frac{\partial b}{\partial x}=0,\\
&\frac{\partial g}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial y}+\frac{\partial g}{\partial b}\frac{\partial b}{\partial y}=0.
\end{aligned} \tag{5.62}$$

Iz ovog homogenog sistema jednačina možemo da izračunamo $\dfrac{\partial g}{\partial a}$ i $\dfrac{\partial g}{\partial b}$. Tada imamo dva različita slučaja: determinanta sistema je različita od nule, ili je jednaka nuli.

U prvom slučaju, pošto je

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial a}{\partial x} & \dfrac{\partial b}{\partial x} \\ \dfrac{\partial a}{\partial y} & \dfrac{\partial b}{\partial y} \end{vmatrix} \neq 0,$$

sistem ima samo trivijalna rešenja

$$\frac{\partial g}{\partial a} = \frac{\partial g}{\partial b} = 0. \tag{5.63}$$

Iz ovih jednačina izračunavamo a i b kao funkcije od x i y i dobijamo

$$g = g(x, y, z, a(x, y), b(x, y)),$$

što predstavlja singularno rešenje.

U drugom slučaju determinanta sistema je jednaka nuli

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial a}{\partial x} & \dfrac{\partial b}{\partial x} \\ \dfrac{\partial a}{\partial y} & \dfrac{\partial b}{\partial y} \end{vmatrix} = 0,$$

odakle slede dve mogućnosti:

1° ili je

$$\frac{\partial a}{\partial x} = \frac{\partial b}{\partial x} = \frac{\partial a}{\partial y} = \frac{\partial b}{\partial y} = 0,$$

pa dobijamo da su a i b konstante, odnosno funkcija $g(x, y, z, a, b)$ je **potpuno rešenje**,

ili je

2° $b = \varphi(a)$, gde je φ – proizvoljna funkcija. U ovom slučaju je

$$\frac{\partial g}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial b}\frac{\partial b}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial x} = \left(\frac{\partial g}{\partial a} + \frac{\partial g}{\partial b}\frac{\partial b}{\partial a}\right)\frac{\partial a}{\partial x} = 0,$$

odnosno, pod uslovom da je $\dfrac{\partial a}{\partial x} \neq 0$,

$$\frac{\partial g}{\partial a} + \frac{\partial g}{\partial b}\varphi'(a) = 0, \tag{5.64}$$

našta se svode obe jednačine (5.39). Iz (5.64) možemo da izrazimo $a = \psi(x, y)$, pa dobijamo

$$b = \varphi(\psi(x, y)) = \mu(x, y).$$

čime dobijamo **opšte rešenje**.

Kao što može da se zaključi iz prethodnog izlaganja, i singularno i opšte rešenje (ako postoje ova rešenja), mogu da se dobiju iz potpunog rešenja parcijalne diferencijalne jednačine prvog reda. Zbog toga osnovni zadatak je da se nađe potpuno rešenje. Ono može da se nađe primenom Lagranž – Šarpijeve[10] metode.

Lagranž – Šarpijeva metoda

Posmatrajmo opštu parcijalnu jednačinu prvog reda (sa dve nezavisno promenljive x i y)

$$f(x, y, z, p, q) = 0. \tag{5.65}$$

Osnovna ideja Lagranž – Šarpija, u nalaženju potpunog rešenja, je nalaženje funkcije

$$g(x, y, z, p, q) = c_1 \tag{5.66}$$

koja je funkcionalno nezavisna od f, a c_1 je proizvoljna konstanta. Funkcija g treba da bude takva da iz sistema parcijalnih jednačina

$$f = 0, \qquad g = c_1 \tag{5.67}$$

mogu da se izračunaju p i q, tj.

$$p = \varphi(x, y, z, c_1), \qquad q = \psi(x, y, z, c_1). \tag{5.68}$$

Iz pretpostavke da iz (5.67) možemo da odredimo p i q sledi da je

$$D_{pq} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial p} & \dfrac{\partial f}{\partial q} \\ \dfrac{\partial g}{\partial p} & \dfrac{\partial g}{\partial q} \end{vmatrix} \neq 0. \tag{5.69}$$

Dalje, kako je $z = z(x, y)$, to njen diferencijal

$$\mathrm{d}z = \frac{\partial z}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial z}{\partial y}\mathrm{d}y = p\mathrm{d}x + q\mathrm{d}y \tag{5.70}$$

predstavlja Pfafovu jednačinu

$$\varphi(x, y, z, c_1)\mathrm{d}x + \psi(x, y, z, c_1)\mathrm{d}y - \mathrm{d}z = 0. \tag{5.71}$$

[10] Charpit

Da bi ova jednačina mogla da se integrali, tj. da se svede na potpuni diferencijal, potrebno je da bude zadovoljen uslov integrabilnosti (5.48), koji se u ovom slučaju svodi na ($P = p$, $Q = q$, $R = -1$)

$$\left(\frac{\partial p}{\partial y} + q\frac{\partial p}{\partial z}\right) - \left(\frac{\partial q}{\partial x} + p\frac{\partial q}{\partial z}\right) = 0. \tag{5.72}$$

Integracijom jednačine (5.71), javlja se još jedna proizvoljna konstanta i konačno dobijamo potpuno rešenje oblika

$$v = v(x, y, z, c_1, c_2).$$

Nađimo sada relacije i ograničenja iz kojih bismo mogli da odredimo funkciju g. Definišimo prethodno neke pojmove.

> *Definicija.*
>
> Za dve funkcije f i g kažemo da su u **involuciji** ako je $[f, g] = 0$.

Ovde uvedena oznaka $[f, g]$ određena je izrazom

$$[f, g] = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial p} & \dfrac{\partial f}{\partial x} + p\dfrac{\partial f}{\partial z} \\ \dfrac{\partial g}{\partial p} & \dfrac{\partial g}{\partial x} + p\dfrac{\partial g}{\partial z} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial q} & \dfrac{\partial f}{\partial y} + q\dfrac{\partial f}{\partial z} \\ \dfrac{\partial g}{\partial q} & \dfrac{\partial g}{\partial y} + q\dfrac{\partial g}{\partial z} \end{vmatrix}. \tag{5.73}$$

Izraz (5.73) poznat je u literaturi kao **Majerova**[11] **zagrada** .

Specijalno, ako funkcije f i g ne zavise eksplicitno od z, tj. $\dfrac{\partial f}{\partial z} = \dfrac{\partial g}{\partial z} = 0$, Majerova zagrada svodi se na

$$(f, g) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial p} & \dfrac{\partial f}{\partial x} \\ \dfrac{\partial g}{\partial p} & \dfrac{\partial g}{\partial x} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial q} & \dfrac{\partial f}{\partial y} \\ \dfrac{\partial g}{\partial q} & \dfrac{\partial g}{\partial y} \end{vmatrix}. \tag{5.74}$$

Izraz (f, g), definisan relacijom (5.74) poznat je u literaturi kao **Puasonova zagrada**.[12]

Teorema 19 *Funkcije p i q, određene jednačinama (5.68) čine potpuni diferencijal (5.71) akko su funkcije f i g u involuciji.*

Dokaz. *Uslov je potreban.* Da bi relacija (5.71) bila potpuni diferencijal moraju da budu zadovoljeni uslovi (5.72)

$$\left(\frac{\partial p}{\partial y} + q\frac{\partial p}{\partial z}\right) - \left(\frac{\partial q}{\partial x} + p\frac{\partial q}{\partial z}\right) = 0. \tag{5.75}$$

[11] Mayer

[12] Denis Poisson (1781-1840), francuski matematičar. Bavio se racionalnom mehanikom, računom verovatnoće i matematičkom fizikom. Postavio je osnove magnetizma.

Dalje, diferenciranjem funkcija f i g po x i y, respektivno, dobijamo:

$$\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial z}p+\frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial x}=0, \tag{5.76}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial z}p+\frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial y}=0, \tag{5.77}$$

$$\frac{\partial g}{\partial x}+\frac{\partial g}{\partial z}p+\frac{\partial g}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\partial g}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial x}=0, \tag{5.78}$$

$$\frac{\partial g}{\partial y}+\frac{\partial g}{\partial z}p+\frac{\partial g}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial y}+\frac{\partial g}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial y}=0. \tag{5.79}$$

Množeći (5.76) sa $\dfrac{\partial g}{\partial p}$, (5.77) sa $\dfrac{\partial g}{\partial q}$, (5.78) sa $-\dfrac{\partial f}{\partial p}$, (5.79) sa $-\dfrac{\partial f}{\partial q}$, a zatim sabirajući, dobijamo

$$[f,g]+D_{pq}\left[\left(\frac{\partial p}{\partial y}+q\frac{\partial p}{\partial z}\right)-\left(\frac{\partial q}{\partial x}+p\frac{\partial q}{\partial z}\right)\right]=0. \tag{5.80}$$

Kako je, prema uslovu (5.75), drugi sabirak jednak nuli, to sledi da je

$$[f,g]=0,$$

dakle, funkcije f i g su u involuciji.
Uslov je dovoljan. Ako su funkcije f i g u involuciji, tada je $[f,g]=0$, pa iz (5.80) sledi da je zadovoljen uslov (5.75). Dakle, teorema je dokazana.

♡

Postavili smo zadatak da nađemo uslove koje treba da zadovolji funkcija $g=c_1$, tako da iz sistema

$$f=0, \qquad g=c_1$$

možemo da odredimo veličine p i q, ali tako da izraz

$$p\mathrm{d}x+q\mathrm{d}y-\mathrm{d}z=0$$

bude potpuni diferencijal neke funkcije v ($\mathrm{d}v=p\mathrm{d}x+q\mathrm{d}y-\mathrm{d}z$). Na osnovu prethodne teoreme vidimo da funkcije f i g moraju da budu u involuciji, tj.

$$[f,g]=0.$$

Koristeći definiciju (5.73), ovaj uslov, u razvijenom obliku, svodi se na:

$$\begin{aligned}&\frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial g}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial q}\frac{\partial g}{\partial y}+\left(\frac{\partial f}{\partial p}p+\frac{\partial f}{\partial q}q\right)\frac{\partial g}{\partial z}-\\&-\left(\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial z}p\right)\frac{\partial g}{\partial p}-\left(\frac{\partial f}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial z}q\right)\frac{\partial g}{\partial q}=0.\end{aligned} \tag{5.81}$$

Poslednji izraz predstavlja linearnu parcijalnu jednačinu prvog reda, po nepoznatoj funkciji g. Kao što smo ranije pokazali, rešavanje ove jednačine svodi se na rešavanje sistema običnih jednačina

$$\frac{\mathrm{d}x}{\dfrac{\partial f}{\partial p}} = \frac{\mathrm{d}y}{\dfrac{\partial f}{\partial q}} = \frac{\mathrm{d}z}{\dfrac{\partial f}{\partial p}p + \dfrac{\partial f}{\partial q}q} = \frac{\mathrm{d}p}{-\dfrac{\partial f}{\partial x} - \dfrac{\partial f}{\partial z}p} = \frac{\mathrm{d}q}{-\dfrac{\partial f}{\partial y} - \dfrac{\partial f}{\partial z}q},$$

ili, ako uvedemo oznake:

$$f_x = \frac{\partial f}{\partial x}, \quad f_y = \frac{\partial f}{\partial y}, \quad f_z = \frac{\partial f}{\partial z}, \quad f_p = \frac{\partial f}{\partial p}, \quad f_q = \frac{\partial f}{\partial q},$$

prethodni izraz može da se zapiše u obliku

$$\frac{\mathrm{d}x}{f_p} = \frac{\mathrm{d}y}{f_q} = \frac{\mathrm{d}z}{pf_p + qf_q} = \frac{\mathrm{d}p}{-f_x - pf_z} = \frac{\mathrm{d}q}{-f_y - qf_z}. \tag{5.82}$$

Ovaj sistem daje kao jedan prvi integral $f(x, y, z, p, q) = 0$. Dakle, treba naći bar još jedan prvi integral istog sistema, da bismo odredili veličine p i q i dobili potpuni diferencijal (5.71).

5.4 Linearne parcijalne diferencijalne jednačine drugog reda

Linearna nehomogena parcijalna diferencijalna jednačina drugog reda je jednačina oblika:

$$L(u) \equiv \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + bu = c \tag{5.83}$$

gde L – označava linearni operator, $u = u(x_1, \ldots, x_n)$ je nepoznata funkcija, a koeficijenti su funkcije oblika:

$$\begin{aligned} a_{ij} = a_{ij}(x_1, \ldots, x_n); \quad a_i = a_i(x_1, \ldots, x_n);\\ b = b(x_1, \ldots, x_n); \quad c = c(x_1, \ldots, x_n), \quad \text{pri čemu je} \quad a_{ij} = a_{ji}. \end{aligned} \tag{5.84}$$

Napomenimo da pretpostavka o simetričnosti koeficijenata a_{ij} nije ograničenje, jer je za neprekidne funkcije $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_i}$.

Linearna homogena parcijalna diferencijalna jednačina drugog reda je jednačina oblika:

$$L(u) \equiv \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + bu = 0. \tag{5.85}$$

Ove jednačine u skraćenom obliku zapisujemo kao:

$$L(u) = c, \quad \text{odnosno} \quad L(u) = 0. \tag{5.86}$$

5.4.1 Neke osobine homogenih linearnih parcijalnih jednačina drugog reda

Osobina 1.

Ako su $u_i(x_1, x_2)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ rešenja homogene jednačine (5.85), onda je i njihova proizvoljna linearna kombinacija:

$$u = \sum_{i=1}^{m} C_i u_i(x_1, x_2), \tag{5.87}$$

gde su C_i – proizvoljne konstante, takođe rešenja homogene jednačine (5.85).

Dokaz:

$$L(u) = L\left(\sum_{i=1}^{n} C_i u_i\right) = \sum_{i=1}^{n} L\left(C_i u_i\right) = \sum_{i=1}^{n} C_i L(u_i) = 0. \tag{5.88}$$

Ako su $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ rešenje polazne jednačine (5.85), a $C_1, C_2, \ldots, C_n, \cdots$ konstante, tada je funkcija u data beskonačnim redom

$$u = \sum_{i=1}^{\infty} C_i u_i, \quad \text{na } \Omega \tag{5.89}$$

takođe rešenje jednačine (5.85). Razumljivo uz uslov da je red na desnoj strani jednačine (5.89), a takođe i redovi koji se dobijaju formalnim diferenciranjem član po član zaključno sa svim mogućim izvodima drugog reda, konvergentan na Ω.

Za ovako dobijeno rešenje u kaže se da je dobijeno **superpozicijom iz** rešenja u_i.

Osobina 2.

Ako je $u_o(x_1, x_2, \alpha_1, \alpha_2)$ rešenje jednačine (5.85), gde su α_i - parametri nezavisni od x_i, tada su rešenja i sledeće funkcija:

$$u = \int C(\alpha_1)\cdot u_o\left(x_1, x_2, \alpha_1\right)\, \mathrm{d}\alpha_1, \tag{5.90}$$

$$u = \iint C(\alpha_1, \alpha_2)\cdot u_o\left(x_1, x_2, \alpha_1, \alpha_2\right)\, \mathrm{d}\alpha_1 \mathrm{d}\alpha_2, \tag{5.91}$$

gde su $C(\alpha_1)$ i $C(\alpha_1, \alpha_2)$ proizvoljne funkcije, a pretpostavljeno je da se gornji integrali mogu diferencirati.

Za ovo rešenje, dobijeno iz rešenja u_o, kažemo da je dobijeno **pomoću integracije**, po parametru α_1, odnosno po parametrima α_1, α_2.

Pod pretpostavkom da su a_{ij}, a_i i b – konstante, imamo sledeće osobine:

Osobina 3.

Ako je $u_1(x_1, x_2)$ neko rešenje jednačine (5.85), tada je i funkcija:

$$u = u_1 \left(x_1 - \alpha_1,\, x_2 - \alpha_2 \right) \tag{5.92}$$

takođe rešenje ove jednačine.

Ova osobina može da se dokaže uvođenjem smene:

$$x_i = \xi_i + \alpha_i,$$

u diferencijalnu jednačinu (5.85).

Za ovaj slučaj kažemo da je rešenje dobijeno iz rešenja u_1 – **pomeranjem argumenata**.

Osobina 4.

Kombinovanjem poslednje dve osobine dobijamo da su rešenja i:

$$u = \int C(\alpha_1)\, u_1 \left(x_1 - \alpha_1, x_2 \right)\, \mathrm{d}\alpha_1, \tag{5.93}$$

$$u = \iint C(\alpha_1, \alpha_2)\, u_1 \left(x_1 - \alpha_1, x_2 - \alpha_2 \right)\, \mathrm{d}\alpha_1 \mathrm{d}\alpha_2. \tag{5.94}$$

Za ovako dobijena rešenja kaže se da su dobijena **konvolucijom** ili kao rezultanta funkcija C i u_1.

Osobina 5.

Ako jednačina (5.85), sa realnim konstantnim koeficijentima, ima kompleksno rešenja oblika:

$$u = P(x_1, x_2) + i \cdot Q(x_1, x_2), \tag{5.95}$$

gde su P i Q realne funkcije, a $i = \sqrt{-1}$ imaginarna jedinica, tada su rešenja i same funkcije P i Q.

Dokaz:

$$L(u) = L(P + iQ) = L(P) + iL(Q) = 0 \quad \Rightarrow \quad L(P) = 0 \wedge L(Q) = 0. \tag{5.96}$$

Ovim je dokazana osobina 5.

5.4.2 Klasifikacija linearnih parcijalnih jednačina drugog reda sa dve promenljive

Pri proučavanju parcijanih jednačina postavlja se pitanje da li je moguće, uvodeći odgovarajuće transformacije, uprostiti polaznu jednačinu.

U ovom poglavlju uzećemo, radi jednostavnosti, da je $n = 2$, tj. nepoznata funkcija je oblika $u = u(x_1, x_2)$.

Posmatrajmo sada homogenu parcijalnu diferencijalnu jednačinu:

$$L(u) = 0, \tag{5.97}$$

koju ćemo da transformišimo uvodeći nove promenljive ξ_1 i ξ_2:

$$\xi_i = \xi_i(x_1, x_2), \quad J\left(\frac{\xi_1, \xi_2}{x_1, x_2}\right) \equiv \begin{vmatrix} \dfrac{\partial \xi_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial \xi_1}{\partial x_2} \\ \dfrac{\partial \xi_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial \xi_2}{\partial x_2} \end{vmatrix} \neq 0, \quad i = 1, 2. \tag{5.98}$$

gde je J Jakobijeva[13] funkcionalna determinanta ili Jakobijan. Veza između novih i starih izvoda data je sledećim relacijama:

$$\frac{\partial u}{\partial x_j} = \sum_{i=1}^{n(=2)} \frac{\partial u}{\partial \xi_i} \frac{\partial \xi_i}{\partial x_j}, \quad j = 1, 2 \tag{5.99}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_k \partial x_l} = \sum_{i,j=1}^{n(=2)} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi_i \partial \xi_j} \frac{\partial \xi_i}{\partial x_k} \frac{\partial \xi_j}{\partial x_l} + \frac{\partial u}{\partial \xi_i} \frac{\partial^2 \xi_i}{\partial x_k \partial x_l} \right), \quad \begin{matrix} k = l = 1, \\ k = 1,\, l = 2 \\ k = l = 2 \end{matrix} \tag{5.100}$$

Sada transformisana jednačina (5.85) postaje:

$$\bar{L} \equiv \sum_{i,j=1}^{n(=2)} \bar{a}_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi_i \partial \xi_j} + \sum_{i=1}^{n(=2)} \bar{a}_i \frac{\partial u}{\partial \xi_i} + \bar{b} u = 0. \tag{5.101}$$

Veza između novih i starih koeficijenata data je relacijama:

$$\bar{a}_{kl} = \sum_{i,j=1}^{n(=2)} a_{ij} \frac{\partial \xi_k}{\partial x_i} \frac{\partial \xi_l}{\partial x_j}, \quad \bar{a}_k = \sum_{i=1}^{n(=2)} a_i \frac{\partial \xi_k}{\partial x_i} + \sum_{i,j=1}^{n(=2)} a_{ij} \frac{\partial^2 \xi_k}{\partial x_i \partial x_j}. \tag{5.102}$$

Opštiji oblik jednačine (5.85) je jednačina linearna samo po drugim izvodima:

$$\sum_{i,j=1}^{n(=2)} a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + b = 0, \tag{5.103}$$

[13] Carl Gustav Jacobi 1804-1851, nemački matematičar. Autor značajnih radova iz analize, posebno iz teorije eliptičkih funkcija.

gde su koeficijenti b i a_{ij} funkcije oblika:

$$b = b(x_1, x_2, u, \partial u/\partial x_1, \partial u/\partial x_2); \quad a_{ij} = a_{ij}(x_1, x_2). \tag{5.104}$$

Transformisani oblik je:

$$\sum_{i,j=1}^{n(=2)} \bar{a}_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi_i \partial \xi_j} + \bar{b} = 0. \tag{5.105}$$

Nove promenljive biramo tako da transformisana jednačina bude što jednostavnija, recimo da su neki od koeficijenata $\bar{a}_{ij}$ jednaki nuli. U tom cilju, a s obzirom na veze između novih i starih koeficijenata (5.102), posmatramo sledeću parcijalnu jednačinu prvog reda:

$$\sum_{i,j=1}^{n(=2)} a_{ij} \frac{\partial z}{\partial x_i} \frac{\partial z}{\partial x_j} = 0, \tag{5.106}$$

koja, s obzirom da je $a_{12} = a_{21}$, može da se predstavi i kao sledeći skup od dve linearne parcijalne jednačine:

$$\frac{\partial z}{\partial x_1} = \frac{-a_{12} \mp \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}}{a_{11}} \frac{\partial z}{\partial x_2}. \tag{5.107}$$

Ovim jednačinama odgovara sistem običnih diferencijalnih jednačina:

$$\frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}x_1} = \frac{-a_{12} \mp \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}}{a_{11}}, \tag{5.108}$$

ili

$$a_{22} \cdot \mathrm{d}x_1^2 - 2a_{12} \cdot \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2 + a_{11} \cdot \mathrm{d}x_2^2 = 0. \tag{5.109}$$

Jednačine (5.108), odnosno (5.109), zovemo **karakteristične jednačine** parcijalne diferencijalne jednačine (5.103).

Klasifikacija

U nekoj oblasti S, u kojoj su definisani koeficijenti a_{ij} i b, uočimo tačku $M(x_1, x_2)$ za koju je ispunjen uslov:

1° diskriminanta $D \equiv a_{12}^2 - a_{11} \cdot a_{22} > 0$, tj. jednačina (5.109) ima dva realna i različita rešenja. U ovom slučaju za jednačinu (5.103) kažemo da je **hiperboličnog tipa** u tački M;

2° ako je diskrimanta $D < 0$, tada odgovarajuća jednačina ima konjugovano kompleksna rešenja, a za jednačinu kažemo da je **eliptičnog tipa** u tački M;

3° ako je diskrimanta $D = 0$, tada odgovarajuća jednačina ima dvostruko realno rešenje, a za jednačinu kažemo da je **paraboličnog tipa** u tački M.

Napomenimo da je tip jednačine (5.103), u nekoj oblasti S ili nekoj njenoj tački M, invarijantan u odnosu na transformaciju:

$$\xi_i = \xi_i\left(x_1, x_2\right), \quad J \neq 0. \tag{5.110}$$

Naime, polazeći od relacija (5.102), može da se dobije:

$$\bar{D} = D \cdot J^2. \tag{5.111}$$

Ovde je $\bar{D} \equiv \bar{a}_{12}^2 - \bar{a}_{11} \cdot \bar{a}_{22}$, pa su diskriminante (nove-stare) istog znaka.

5.4.3 Svođenje na kanonski oblik

Svođenje na kanonski oblik hiperbolične jednačine

U ovom slučaju je $D > 0$, odakle dobijamo dva rešenja karakteristične jednačine:

$$\xi_i\left(x_1, x_2\right) = C_i, \quad (i = 1, 2), \tag{5.112}$$

gde su C_i – proizvoljne konstante. Transformacije biramo u obliku

$$\xi_i = \xi_i\left(x_1, x_2\right), \quad (i = 1, 2), \tag{5.113}$$

pa je za ovaj slučaj:

$$\bar{a}_{11} = \bar{a}_{22} = 0. \tag{5.114}$$

Transformisana jednačina (5.105) postaje:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi_1 \partial \xi_2} = F\left(\xi_1, \xi_2, u, \partial u/\partial \xi_1, \partial u/\partial \xi_2\right), \tag{5.115}$$

gde je $F = -\dfrac{\bar{b}}{2\bar{a}_{12}}$. Ovo je **kanonski oblik** jednačine hiperboličnog tipa.

Smenom:

$$\xi_1 = u_1 + v, \quad \xi_2 = u_1 - v, \tag{5.116}$$

dobija se još jedan kanonski oblik:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial u_1^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial v^2} = F_1 \equiv 4 \cdot F. \tag{5.117}$$

Svođenje na kanonski oblik parabolične jednačine

U ovom slučaju je $D = 0$, pa imamo samo jedno realno rešenje karakteristične jednačine:

$$\xi_1\left(x_1, x_2\right) = C_1, \quad \text{gde je } C_1 \quad \text{proizvoljna konstanta}, \tag{5.118}$$

a transformacije biramo u obliku:

$$\xi_1 = \xi_1\left(x_1, x_2\right), \quad \xi_2 = \varphi\left(x_1, x_2\right), \tag{5.119}$$

gde je φ – proizvoljna funkcija nezavisna od ξ_1.

U ovom slučaju imamo:

$$\bar{a}_{11} = \bar{a}_{12} = 0, \quad \bar{a}_{22} \neq 0, \tag{5.120}$$

pa dobijamo **kanonski oblik** jednačine paraboličnog tipa:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi_2^2} = F = -\frac{\bar{b}}{\bar{a}_{22}}. \tag{5.121}$$

Svođenje na kanonski oblik eliptične jednačine

Kako je $D < 0$, to su rešenja karakteristične jednačine konjugovano kompleksna, pa imamo:

$$\xi_1 = C_1, \quad \xi_2 \equiv \xi_1^* = C_2, \tag{5.122}$$

gde su ξ_1 i ξ_1^* konjugovano kompleksne funkcije, tj.:

$$\xi_1 = v + iw, \quad \xi_1^* = v - iw. \tag{5.123}$$

Kako je u ovom slučaju:

$$\bar{a}_{11} = \bar{a}_{22}, \quad \bar{a}_{12} = 0, \tag{5.124}$$

to dobijamo za **kanonski oblik**:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial v^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial w^2} = F = -\frac{\bar{b}}{\bar{a}_{22}}. \tag{5.125}$$

Kanonski oblik linearnih jednačina drugog reda sa konstantnim koeficijentima

Posmatrajmo jednačinu oblika:

$$a_{11}u_{xx} + 2a_{12}u_{xy} + a_{22}u_{yy} + b_1 u_x + b_2 u_y + cu + f(x, y) = 0, \tag{5.126}$$

gde su a_{11}, a_{12}, a_{22}, b_1, b_2 i c konstante.

Kao što je ranije pokazano, ova jednačina može da se transformiše u jedan od oblika:

eliptični tip:

$$u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} + b_1 u_\xi + b_2 u_\eta + cu + f = 0, \tag{5.127}$$

hiperbolični tip:

$$u_{\xi\xi} - u_{\eta\eta} + b_1 u_\xi + b_2 u_\eta + cu + f = 0, \tag{5.128}$$

ili

$$u_{\xi\eta} + b_1 u_\xi + b_2 u_\eta + cu + f = 0, \tag{5.129}$$

parabolični tip:

$$u_{\xi\xi} + b_1 u_\xi + b_2 u_\eta + cu + f = 0. \tag{5.130}$$

Za dalja uprošćenja uvedimo, umesto nepoznate funkcije u, novu v, definisanu relacijom:

$$u = e^{\lambda\xi+\mu\eta}\cdot v, \tag{5.131}$$

gde su λ i μ neodređene konstante, koje kasnije biramo tako da transformisan oblik bude što jednostavniji.

Iz (5.131) slede relacije:

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} \equiv u_\xi = e^{\lambda\xi+\mu\eta}\cdot \left(v_\xi + \lambda\cdot v\right), \tag{5.132}$$

$$u_\eta = e^{\lambda\xi+\mu\eta}\cdot \left(v_\eta + \mu\cdot v\right), \tag{5.133}$$

$$u_{\xi\xi} = e^{\lambda\xi+\mu\eta}\cdot \left(v_{\xi\xi} + 2\lambda\cdot v_\xi + \lambda^2\cdot v\right), \tag{5.134}$$

$$u_{\xi\eta} = e^{\lambda\xi+\mu\eta}\cdot \left(v_{\xi\eta} + \lambda\cdot v_\eta + \mu\cdot v_\xi + \lambda\mu\cdot v\right), \tag{5.135}$$

$$u_{\eta\eta} = e^{\lambda\xi+\mu\eta}\cdot \left(v_{\eta\eta} + 2\mu\cdot v_\eta + \mu^2\cdot v\right), \tag{5.136}$$

pa, za eliptični tip jednačine, dobijamo:

$$\begin{aligned} v_{\xi\xi} + v_{\eta\eta} + (b_1 + 2\lambda)\, v_\xi + (b_2 + 2\mu)\, v_\eta + \\ + \left(\lambda^2 + \mu^2 + b_1\lambda + b_2\mu + c\right) v + f_1 = 0. \end{aligned} \tag{5.137}$$

Odredimo sada koeficijente λ i μ tako da članovi u prve dve zagrade iščeznu:

$$\lambda = -\frac{1}{2}b_1 \quad \mu = -\frac{1}{2}b_2, \tag{5.138}$$

pa dobijamo iz (5.137):

$$v_{\xi\xi} + v_{\eta\eta} + \gamma\cdot v + f_1 = 0 \tag{5.139}$$

za eliptični tip.

U prethodnoj relaciji označili smo sa:

$$\gamma = \lambda^2 + \mu^2 + b_1\lambda + b_2\mu + c, \quad f_1 = f\cdot e^{-\lambda\xi-\mu\eta}. \tag{5.140}$$

Na sličan način dobijamo i za preostala dva slučaja:

- hiperbolični:

$$v_{\xi\eta} + \gamma\cdot v + f_1 = 0, \tag{5.141}$$

ili

$$v_{\xi\xi} - v_{\eta\eta} + \gamma\cdot v + f_1 = 0, \tag{5.142}$$

- parabolični:

$$v_{\xi\xi} + b_2\cdot v_\eta + f_1 = 0. \tag{5.143}$$

Klasifikacija linearnih parcijalnih jednačina drugog reda sa n promenljivih

Prethodno je pokazano kako se vrši klasifikacija linearnih parcijalnih jednačina drugog reda sa dve promenljive. U ovom odeljku uopštićemo ovaj postupak na n promenljivih.

Posmatrajmo kvadratnu formu

$$\Phi \equiv \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^{\circ} y_i y_j, \tag{5.144}$$

gde su a_{ij}° konstantni koeficijenti, koji odgovaraju koeficijentima a_{ij} iz diferencijalne jednačine (5.83), u tački $M_0(x_1^{\circ}, \ldots, x_n^{\circ})$.

U linearnoj algebri pokazuje se da za kvadratnu formu (5.144) uvek može da se izabere linearna transformacija:

$$y_i = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ik} \eta_k, \tag{5.145}$$

gde su α_{ik} – realni brojevi, tako da se kvadratna forma svodi na kanonski oblik[14]:

$$\Phi = \sum_{i=1}^{n} A_i \eta_i^2, \tag{5.146}$$

gde su A_i realni brojevi.

Diferencijalnu jednačinu (5.83) u tački M_0 nazivamo:

1° jednačinom **eliptičnog tipa**, ako su svi koeficijenti A_i istog znaka;

2° jednačinom **hiperboličnog tipa** ili **normalno-hiperboličnog tipa**, ako je $n-1$ koeficijenata A_i istog znaka, a jedan suprotnog znaka;

3° jednačinom **ultra hiperboličnog tipa**, ako je m koeficijenata A_i istog znaka, a $n-m$ suprotnog znaka, za $m > 1$ i $n - m > 1$;

4° jednačinom **paraboličnog tipa**, ako je bar jedan od koeficijanata A_i jednak nuli.

5.4.4 Primeri klasifikacije nekih jednačina matematičke fizike

Navedimo primere najčešće korišćenih parcijalnih diferencijalnih jednačina.

Primer 1. **Jednačina oscilovanja u ravni (talasna jednačina)**

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \lambda^2 u = 0, \tag{5.147}$$

[14] Kanonski ili dijagonalni oblik. Ovaj drugi pojam uobičajeniji je u linearnoj algebri.

odnosno u prostoru:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} + \lambda^2 u = 0 \tag{5.148}$$

je, prema 2° i $u = u(x_1, x_2, x_3)$, hiperboličnog tipa.

Primer 2. **Jednačina provođenja toplote**

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} = a^2 \frac{\partial u}{\partial t} \tag{5.149}$$

je, prema 4° i $u = u(x_1, x_2, x_3, t)$, paraboličnog tipa.

Primer 3. **Laplasova jednačina**

$$\Delta u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} = 0 \tag{5.150}$$

je, prema 1° i $u = u(x_1, x_2, x_3)$, eliptičnog tipa.

5.5 Jedan formalan postupak za rešavanje linearnih jednačina sa konstantnim koeficijentima (sa dve promenljive)

Posmatrajmo jednačinu oblika:

$$a_{11}u_{xx} + 2\,a_{12}\,u_{xy} + a_{22}u_{yy} + b_1u_x + b_2u_y + cu = 0. \tag{5.151}$$

Dalje, pretpostavimo da postoji rešenje oblika:

$$u = C\cdot e^{\alpha x + \beta y}, \tag{5.152}$$

gde su α i β za sada neodređene konstante.

Pošto je u, prema pretpostavci, rešenje, to ova funkcija mora identički da zadovolji polaznu jednačinu, pa diferenciranjem (5.152), zatim zamenom dobijenih izvoda u (5.151) i deljenjem sa u, dobijamo:

$$a_{11}\alpha^2 + 2a_{12}\alpha\cdot\beta + a_{22}\beta^2 + 2b_1\alpha + 2b_2\beta + c = 0. \tag{5.153}$$

Kako imamo dve proizvoljne konstante pretpostavimo za α da je ceo broj, tj.:

$$\alpha = k \quad (k = 0, 1, \dots). \tag{5.154}$$

Iz (5.153) sada dobijamo za β:

$$\beta = ak + b \pm \sqrt{ck^2 + dk + f}, \tag{5.155}$$

gde su a, b, c, d i f – konstante koje zavise od a_{ij}, b_i i c. Kako je k ceo broj, to je podkorena veličina različita od nule, pa dobijamo, za svako k, dva rešenja:

$$C_k \cdot e^{kx+(ak+b+\sqrt{ck^2+dk+f})y}, \quad D_k \cdot e^{kx+(ak+b-\sqrt{ck^2+dk+f})y}. \tag{5.156}$$

Ako su C_k i D_k konstante, za rešenje dobijamo:

$$u = \sum_{k=0}^{\infty} C_k \cdot e^{kx+(ak+b+\sqrt{ck^2+dk+f})y} + \sum_{k=0}^{\infty} D_k \cdot e^{kx+(ak+b-\sqrt{ck^2+dk+f})y}. \tag{5.157}$$

Napomenimo da ovaj zbir treba shvatiti simbolično, jer se ne vrši ispitivanje konvergencije redova koji se ovde javljaju.

U zavisnosti od potkorene veličine razlikujemo dva slučaja:

$$a) \quad d^2 = 4cf; \tag{5.158}$$

$$b) \quad d^2 \neq 4cf. \tag{5.159}$$

U prvom slučaju potkorena veličina potpun je kvadrat:

$$ck^2 + dk + f = (mk+n)^2, \tag{5.160}$$

pa dobijamo:

$$u = \sum_{k=0}^{\infty} C_k \cdot e^{[kx+(a+m)ky+(b+n)y]} + \sum_{k=0}^{\infty} D_k \cdot e^{[kx+(a-m)ky+(b-n)y]}, \tag{5.161}$$

odnosno:

$$u = e^{(b+n)y} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} C_k \cdot e^{[kx+(a+m)ky]} + e^{(b-n)y} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} D_k \cdot e^{[kx+(a-m)ky]}. \tag{5.162}$$

5.6 Metoda razdvajanja promenljivih

Metoda razdvajanja promenljivih (Furijeov metod) je jedna od najčešće korišćenih za rešavanje parcijalnih diferencijalnih jednačina, koje zadovoljavaju date početne i/ili granične (konturne) uslove.

Furijeov metod može da se primeni na jednačine oblika:

$$a_{11}u_{xx} + a_{22}u_{yy} + b_1u_x + b_2u_y + [F(x) + G(y)]u = 0, \tag{5.163}$$

uz početne uslove:

$$u(x,0) = f(x), \quad u_y(x,0) = g(x) \tag{5.164}$$

i granične uslove:

$$au(0,y) + bu_x(0,y) = 0, \quad cu(l,y) + du_x(l,y) = 0, \tag{5.165}$$

gde su f i g date funkcije, a a, b, c i d poznate konstante.

Pretpostavimo da je rešenje oblika:

$$u(x,y) = X(x)\cdot Y(y). \tag{5.166}$$

Nađimo sada odgovarajuće izvode:

$$u_x = X'\cdot Y, \quad u_y = Y'\cdot X, \tag{5.167}$$

$$u_{xx} = \frac{\mathrm{d}^2 X}{\mathrm{d}x^2}\cdot Y(y) \equiv X''\cdot Y, \quad u_{yy} = \frac{\mathrm{d}^2 Y}{\mathrm{d}y^2}\cdot X(x) \equiv Y''\cdot X \tag{5.168}$$

i zamenimo ih u polaznu jednačinu (5.163):

$$a_{11}\cdot X''\cdot Y + a_{22}\cdot X\cdot Y'' + b_1\cdot X'\cdot Y + b_2\cdot X\cdot Y' + [F(x)+G(y)]X\,Y = 0.$$

Odavde, deleći sa XY, dobijamo:

$$a_{11}\frac{X''}{X} + a_{22}\frac{Y''}{Y} + b_1\frac{X'}{X} + b_2\frac{Y'}{Y} + F(x) + G(y) = 0, \tag{5.169}$$

odnosno:

$$a_{11}\frac{X''}{X} + b_1\frac{X'}{X} + F(x) = -a_{22}\frac{Y''}{Y} - b_2\frac{Y'}{Y} - G(y). \tag{5.170}$$

Kako je leva strana jednačine (5.170) funkcija samo od x, a desna strana funkcija samo od y, to znači da su ovi izrazi konstante, odnosno

$$a_{11}\frac{X''}{X} + b_1\frac{X'}{X} + F(x) = -a_{22}\frac{Y''}{Y} - b_2\frac{Y'}{Y} - G(y) = -\lambda = const. \tag{5.171}$$

Pored ovog, moraju da budu zadovoljeni početni uslovi:

$$u(x,0) = X(x)\cdot Y(0) = f(x), \quad u_y(x,0) = X(x)\cdot Y'(0) = g(x) \tag{5.172}$$

kao i granični uslovi:

$$aX(0)Y(y) + bX'(0)Y(y) = 0 \quad \Rightarrow \quad aX(0) + b\,X'(0) = 0, \tag{5.173}$$

$$cX(l)Y(y) + dX'(l)Y(y) = 0 \quad \Rightarrow \quad cX(l) + d\,X'(l) = 0. \tag{5.174}$$

Sada se data jednačina razlaže na dve obične diferencijalne jednačine drugog reda:

$$a_{11}X'' + b_1X' + F(x)\,X = -\lambda\,X \quad \Rightarrow$$

$$a_{11}X'' + b_1X' + (F+\lambda)\,X = 0, \tag{5.175}$$

$$a_{22}Y'' + b_2Y' + G(y)\,Y = +\lambda\,Y \quad \Rightarrow$$

$$a_{22}Y'' + b_2Y' + (G-\lambda)\,Y = 0. \tag{5.176}$$

Može da se pokaže, primenom Šturm – Liuvilove teorije, da postoji beskonačno mnogo takozvanih **sopstvenih vrednosti** $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$, za koje postoje netrivijalna rešenja (trivijalna rešenja bi bila $X \equiv 0$, $Y \equiv 0$) jednačina (5.175) i (5.176). Neka su X_n $(n = 1, 2, \dots)$ rešenja jednačine (5.175), za $\lambda = \lambda_n$. Rešenje jednačine (5.176) može da se predstavi u obliku:

$$Y_n(y) = A_n\overline{Y}_n(y) + B_n\overline{\overline{Y}}_n(y), \tag{5.177}$$

gde su A_n i B_n proizvoljne konstante, a $\overline{Y}_n$ i $\overline{\overline{Y}}_n$ linearno nezavisna partikularna rešenja jednačine (5.176), za $\lambda = \lambda_n$. Ove funkcije određujemo iz uslova:

$$\overline{Y}_n(0) = 1; \quad \overline{Y}'_n(0) = 0; \quad \overline{\overline{Y}}_n(0) = 0; \quad \overline{\overline{Y}}'_n(0) = 1. \tag{5.178}$$

Primenivši princip superpozicije dobijamo:

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x)\left[A_n\overline{Y}_n(y) + B_n\overline{\overline{Y}}_n(y)\right]. \tag{5.179}$$

Ovo rešenje mora još da zadovolji i uslove:

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n X_n(x) = f(x) \quad \sum_{n=1}^{\infty} B_n X_n(x) = g(x), \tag{5.180}$$

čime je problem sveden na razvijanje funkcija f i g u red po sopstvenim funkcijama X_n.

Rešavanje jednačina hiperboličnog i paraboličnog tipa Furijeovom metodom

Rešavanje jednačina primenom Furijeove metode prikazaćemo na primerima.

Primer 1.

Naći ono rešenje jednačine:

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad 0 \le x \le l, \tag{5.181}$$

koje zadovoljava granične:

$$u(0,t) = 0, \quad u(l,t) = 0, \tag{5.182}$$

i početne uslove:

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad u_t(x,0) = \psi(x). \tag{5.183}$$

Rešenje.

Uočimo da je, prema 2°, ovo jednačina hiperboličnog tipa.
Prema Furijeovoj metodi, potražimo rešenje u obliku:

$$u(x,t) = X(x)\cdot T(t). \tag{5.184}$$

Sada datu jednačinu (5.181) možemo da napišemo u obliku:

$$X''\cdot T = \frac{1}{a^2}T''\cdot X \quad \Rightarrow \quad \frac{X''}{X} = \frac{1}{a^2}\frac{T''}{T} = -\lambda, \tag{5.185}$$

odakle sledi:

$$X'' + \lambda\cdot X = 0 \quad \wedge \quad T'' + a^2\cdot \lambda T = 0, \tag{5.186}$$

($X(x) \not\equiv 0 \wedge T(t) \not\equiv 0$, jer rešenja nisu trivijalna).

Granični uslovi (5.182) se svode na:

$$u(0,t) = X(0)\cdot T(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{X(0) = 0}, \tag{5.187}$$

$$u(l,t) = X(l)\cdot T(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{X(l) = 0}. \tag{5.188}$$

Na ovaj način traženje funkcije $X(x)$ dovodi do zadatka o **sopstvenim vrednostima**:

naći vrednosti λ pri kojima dobijamo netrivijalno rešenje zadatka:

$$X'' + \lambda\cdot X = 0, \quad X(0) = X(l) = 0, \tag{5.189}$$

kao i odgovarajuća rešenja.

Vrednosti λ koje dobijamo na ovaj način nazivamo **sopstvene vrednosti**, a rešenja $X(x)$ – **sopstvene funkcije**. Ovo je Šturm-Liuvilov zadatak.

Diskusija.

λ može da bude negativno ($\lambda < 0$), nula ($\lambda = 0$) ili pozitivno ($\lambda > 0$), pa posmatrajmo ta tri slučaja:

1° $\lambda < 0$

$$X(x) = C_1 e^{\sqrt{-\lambda}\cdot x} + C_2 e^{-\sqrt{-\lambda}\cdot x}, \tag{5.190}$$

$$X(0) = C_1 + C_2 = 0, \quad X(l) = C_1 e^{\alpha} + C_2 e^{-\alpha} = 0,$$

$$(\alpha = l\sqrt{-\lambda}) \quad \Rightarrow$$

$$C_1 = -C_2 \quad \text{i} \quad C_1\left(e^{\alpha} - e^{-\alpha}\right) = 0 \quad \Rightarrow$$

$$C_1 = C_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad X(x) \equiv 0. \tag{5.191}$$

Dakle, u ovom slučaju imamo samo trivijalno rešenje. Kako nas ono ne interesuje, to ćemo da razmatramo sledeće slučajeve.

2° $\lambda = 0$

$$X(x) = C_1 x + C_2, \tag{5.192}$$

$$X(0) = (C_1 x + C_2)\big|_{x=0} = C_2 = 0,$$

$$X(l) = C_1 l = 0 \quad \Rightarrow \quad C_1 = C_2 = 0 \quad \Rightarrow$$

$$X(x) \equiv 0. \tag{5.193}$$

Dakle, i u ovom slučaju imamo samo trivijalno rešenje.

3° $\lambda > 0$

$$X(x) = C_1 \cos\sqrt{\lambda}\,x + C_2 \sin\sqrt{\lambda}\,x, \tag{5.194}$$

$$X(0) = C_1 = 0,$$

$$X(l) = C_2 \sin\sqrt{\lambda}\,l = 0 \quad \Rightarrow \tag{5.195}$$

ako je $C_2 \neq 0$ (netrivijalno rešenje), tada mora da bude:

$$\sin\sqrt{\lambda}\,l = 0 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{\lambda} = \frac{\pi\,n}{l} = \sqrt{\lambda_n}, \tag{5.196}$$

pa je **netrivijalno rešenje** oblika:

$$X_n(x) = C_n \cdot \sin\frac{\pi\,n}{l}x. \tag{5.197}$$

Za $T(t)$ sada dobijamo $\left(\text{za } \lambda = \lambda_n = \left(\frac{\pi\,n}{l}\right)^2\right)$:

$$T_n(t) = A_n \cos\left(\frac{\pi\,n}{l}at\right) + B_n \sin\left(\frac{\pi\,n}{l}at\right). \tag{5.198}$$

Dakle, netrivijalno rešenje našeg zadatka je funkcija:

$$\begin{aligned} u_n(x,t) &= X_n(x)\cdot T_n(t) = \\ &= \left[A_n \cos\left(\frac{\pi\,n}{l}at\right) + B_n \sin\left(\frac{\pi\,n}{l}at\right)\right] \sin\frac{\pi\,n}{l}x. \end{aligned} \tag{5.199}$$

Prema principu superpozicije rešenje je i funkcija:

$$\begin{aligned} u &= \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t) = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left[A_n \cos\left(\frac{\pi\,n}{l}at\right) + B_n \sin\left(\frac{\pi\,n}{l}at\right)\right] \sin\frac{\pi\,n}{l}x. \end{aligned} \tag{5.200}$$

Konstante određujemo iz početnih uslova:

$$u(x,0) = \varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\frac{\pi\,n}{l}x, \tag{5.201}$$

$$u_t(x,0) = \psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left.\frac{\partial u_n}{\partial t}\right|_{t=0} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi\,n}{l} a\,B_n \sin\frac{\pi\,n}{l}x. \tag{5.202}$$

Dakle, problem se sveo na razvijanje poznatih funkcija $\varphi(x)$ i $\psi(x)$ u Furijeov red.

Primer 2.

Naći ono rešenje jednačine:

$$a^2 u_{xx} = u_t, \quad 0 \le x \le l, \quad 0 \le t \le T, \tag{5.203}$$

koje zadovoljava početne:

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad 0 \le x \le l, \tag{5.204}$$

i granične uslove:

$$u(0,t) = 0, \quad u(l,t) = 0 \quad 0 \le t \le T. \tag{5.205}$$

Rešenje.

Prvo zapazimo da je, prema 4°, ova jednačina paraboličnog tipa.
Rešenje ćemo da potražimo u obliku:

$$u(x,t) = X(x) \cdot T(t) \quad \Rightarrow \tag{5.206}$$

$$u_t = X \cdot T', \quad u_x = X' \cdot T, \quad u_{xx} = X'' \cdot T, \tag{5.207}$$

pri čemu je: $X \not\equiv 0$ i $T \not\equiv 0$, jer tražimo netrivijalno rešenje. Zamenom (5.206) u jednačinu (5.203) dobijamo:

$$a^2 X'' T = X T', \quad \text{odnosno}$$

$$\frac{X''}{X} = \frac{1}{a^2} \frac{T'}{T} = -\lambda. \tag{5.208}$$

Dakle, polazna jednačina (5.203) se sada razlaže na dve obične diferencijalne jednačine:

$$X'' + \lambda X = 0 \quad \wedge \quad T' + a^2 \lambda T = 0, \tag{5.209}$$

odakle dobijamo, kao i u prethodnom slučaju, za $X(x)$:

$$X_n(x) = \bar{C}_n \sin \frac{\pi n}{l} x, \tag{5.210}$$

dok za $T(t)$ dobijamo:

$$T_n(t) = \bar{\bar{C}}_n e^{-a^2 \lambda_n t}, \tag{5.211}$$

gde je $\bar{\bar{C}}_n$ za sada neodređeno.

Prema tome, za u_n dobijamo:

$$u_n = C_n e^{-a^2 \lambda_n t} \sin \frac{\pi n}{l} x, \quad (C_n = \bar{C}_n \bar{\bar{C}}_n). \tag{5.212}$$

Konačno, prema principu superpozicije, za $u(x,t)$ dobijamo:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-a^2 \lambda_n t} \sin \frac{\pi n}{l} x. \tag{5.213}$$

Za određivanje konstanti C_n treba iskoristiti početne uslove (5.204), iz kojih dobijamo:

$$u(x,0) = \varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin \frac{\pi n}{l} x. \tag{5.214}$$

Ponovo smo sveli problem na razvijanje poznatih funkcija u Furijeov red:

$$C_n = \frac{2}{l} \int\limits_0^l \varphi(\xi) \sin\left(\frac{\pi n}{l}\xi\right) \,\mathrm{d}\xi. \tag{5.215}$$

Ovim smo rešili postavljeni zadatak.

Rešavanje jednačine eliptičnog tipa Furijeovom metodom

Primer 1.

Posmatrajmo Laplasovu jednačinu u sfernim koordinatama, gde je $u = u(r, \varphi, \theta)$:

$$\Delta u = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta \frac{\partial u}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0. \tag{5.216}$$

U slučaju sferne simetrije, tj. ako je $u = u(r)$, imamo:

$$\frac{\partial u}{\partial \theta} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial \varphi} = 0 \quad \text{i} \quad \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}r}, \tag{5.217}$$

pa Laplasova jednačina postaje:

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r}\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2 \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}r}\right) = 0 \quad \Rightarrow \tag{5.218}$$

$$u = -\frac{C_1}{r} + C_2, \tag{5.219}$$

gde su C_1 i C_2 proizvoljne konstante. Uzmimo, na primer, da je $C_1 = -1$, a $C_2 = 0$, pa dobijamo:

$$u_o = \frac{1}{r} \tag{5.220}$$

osnovno rešenje Laplasove jednačine u prostoru. Napomenimo da funkcija u_o zadovoljava Laplasovu jednačinu svuda sem u tački $r = 0$.

Primer 2.

Posmatrajmo sada Laplasovu jednačinu u cilindričnim koordinatama $u = u(\varrho, \varphi, z)$:

$$\Delta u = \frac{1}{\varrho}\frac{\partial}{\partial \varrho}\left(\varrho \frac{\partial u}{\partial \varrho}\right) + \frac{1}{\varrho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0. \tag{5.221}$$

U slučaju da u ne zavisi od φ i z, tj. $u = u(\varrho)$, dobijamo:

$$\Delta u = \frac{1}{\varrho}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varrho}\left(\varrho\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\varrho}\right) = 0, \tag{5.222}$$

pa je:

$$\varrho\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\varrho} = C_1 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}u = \frac{C_1}{\varrho}\,\mathrm{d}\varrho \quad \Rightarrow \quad u = C_1 \ln\varrho + C_2. \tag{5.223}$$

Konstante C_1 i C_2 su proizvoljne, pa ako uzmemo da su: $C_1 = -1$ i $C_2 = 0$, dobijamo:

$$u_o = u_o(\varrho) = \ln\frac{1}{\varrho}. \tag{5.224}$$

Ova funkcija često se naziva i **osnovno rešenje Laplasove jednačine u ravni** (za dve nezavisne promenljive). Funkcija u_o zadovoljava Laplasovu jednačinu svuda (u ravni), sem u tački $\varrho = 0$.

5.7 Grinove formule

Pođimo od formule Ostrogradskog (2.92):

$$\iiint\limits_V \mathrm{div}\mathbf{a}\,\mathrm{d}V = \iint\limits_S \mathbf{a}\,\mathrm{d}\mathbf{S} = \iint\limits_S a_n\,\mathrm{d}S, \tag{5.225}$$

gde je:

$$\begin{aligned} \mathrm{div}\mathbf{a} &= \mathrm{div}(a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k}),\\ \mathbf{a}\cdot\mathbf{n} &= a_n, \quad \mathrm{d}\mathbf{S} = dS\cdot\mathbf{n},\\ a_n &= a_x\cdot\cos\alpha + a_y\cdot\cos\beta + a_z\cdot\cos\gamma,\\ \alpha = \angle(\mathbf{n},\mathbf{i}), &\quad \beta = \angle(\mathbf{n},\mathbf{j}), \quad \gamma = \angle(\mathbf{n},\mathbf{k}), \end{aligned} \tag{5.226}$$

$\mathbf{n}$ – je spoljašnja normala zatvorene površi S, koja ograničava prostor V, a a_x, a_y i a_z su proizvoljne diferencijabilne funkcije. Ovde indeksi x, y, z označavaju projekcije odgovarajućih veličina na x, y i z ose, respektivno. Ne treba da se poistovete sa izvodima (u ovom slučaju) !!!.

Uvedimo sada nove skalarne funkcije $u(x, y, z)$ i $v(x, y, z)$, koje su neprekidne i čiji su prvi izvodi na granici S i drugi izvodi unutar oblasti V, neprekidni.

Stavimo sada:

$$a_x = u\cdot\frac{\partial v}{\partial x}, \quad a_y = u\cdot\frac{\partial v}{\partial y}, \quad a_z = u\cdot\frac{\partial v}{\partial z}, \quad \text{tj.} \quad \mathbf{a} = u\cdot\mathrm{grad}v, \tag{5.227}$$

pa relaciju (5.225) možemo da napišemo u obliku:

$$\iiint\limits_V \operatorname{div}(u\cdot \operatorname{grad} v)\,\mathrm{d}V = \iint\limits_S u\cdot \operatorname{grad} v\cdot\, \mathrm{d}\mathbf{S} \quad \Rightarrow$$

$$\iiint\limits_V (\operatorname{grad} u\cdot \operatorname{grad} v + u\cdot \operatorname{div}\operatorname{grad} v)\,\mathrm{d}V = \iint\limits_S u\cdot \operatorname{grad} v\cdot \mathbf{n}\cdot\, \mathrm{d}S \quad \Rightarrow$$

$$\iiint\limits_V u\cdot \Delta v\,\mathrm{d}V = \iint\limits_S u\cdot \operatorname{grad} v\cdot \mathbf{n}\cdot \mathrm{d}S - \iiint\limits_V \operatorname{grad} u\cdot \operatorname{grad} v\cdot\, \mathrm{d}V \tag{5.228}$$

Odavde sledi **prva Grinova formula**:

$$\iiint\limits_V u\cdot \Delta v\,\mathrm{d}V = \iint\limits_S u\cdot \frac{\partial v}{\partial n}\,\mathrm{d}S - \iiint\limits_V \nabla u\cdot \nabla v\,\mathrm{d}V. \tag{5.229}$$

Uzmimo sada da je $\mathbf{a} = v\cdot \operatorname{grad} u$, pa dobijamo na sličan način:

$$\iiint\limits_V v\cdot \Delta u\,\mathrm{d}V = \iint\limits_S v\cdot \frac{\partial u}{\partial n}\,\mathrm{d}S - \iiint\limits_V \nabla v\cdot \nabla u\,\mathrm{d}V. \tag{5.230}$$

Oduzimajući od (5.229) jednačinu (5.230) dobijamo:

$$\iiint\limits_V (u\cdot \Delta v - v\cdot \Delta u)\,\mathrm{d}V = \iint\limits_S \left(u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n}\right)\mathrm{d}S. \tag{5.231}$$

drugu Grinovu formulu.

Napomenimo da se relacija:

$$\Delta u = f(x,y,z) \tag{5.232}$$

zove Puasonova jednačina, pri čemu je nepoznata funkcija u, dok je f poznato. Jednačina oblika:

$$\Delta u = 0 \tag{5.233}$$

kao što je već rečeno, zove se Laplasova jednačina. Svaka neprekidna funkcija $u = u(x,y,z)$, koja zadovoljava Laplasovu jednačinu (5.233), naziva se **harmonijska funkcija**. Napomenimo da se pretpostavlja da su i njeni prvi i drugi izvod (koji se javljaju u izrazu (5.233)) takođe neprekidne funkcije.

Navedimo sada neke teoreme, koje ćemo da koristimo u daljem izvođenju:

Teorema 20 *Ako je S zatvorena površ i ako su u i v harmonijske funkcije, tada je:*

$$\iint\limits_S (u\cdot \operatorname{grad}\mathrm{v})\,\mathrm{d}\mathbf{S} = \iint\limits_{\mathrm{S}} (\mathrm{v}\cdot \operatorname{grad}\mathrm{u})\,\mathrm{d}\mathbf{S}, \tag{5.234}$$

ili drugačije napisano:

$$\iint\limits_{S} u\cdot \frac{\partial v}{\partial n}\,\mathrm{dS} = \iint\limits_{\mathrm{S}} \mathrm{v}\cdot \frac{\partial \mathrm{u}}{\partial \mathrm{n}}\,\mathrm{dS}. \tag{5.235}$$

<u>Dokaz:</u>

Po pretpostavci u i v su harmonijske funkcije, tj. $\Delta u = 0$, $\Delta v = 0$, pa iz (5.231) neposredno sledi tvrđenje (5.235).

Teorema 21 *Ako je S zatvorena površ, koja ograničava deo prostora V, a U harmonijska funkcija, tada je:*

$$\iiint\limits_{V} \left[\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2\right] \mathrm{dV} = \iint\limits_{\mathrm{S}} \mathrm{U}\cdot \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial \mathrm{n}}\,\mathrm{dS}. \tag{5.236}$$

<u>Dokaz:</u>

Primenimo drugu Grinovu formulu (5.231), uzevši da je $u = U^2$ i $v \equiv 1$. Prvo izračunajmo laplasijan:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2U\frac{\partial U}{\partial x} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + 2\cdot U\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}. \tag{5.237}$$

Na sličan način dobijamo i:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 2\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2 + 2\cdot U\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 2\left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2 + 2\cdot U\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}, \tag{5.238}$$

pa je:

$$\Delta u = 2\,U\cdot \Delta U + 2\left[\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2\right]. \tag{5.239}$$

Ako sada iskoristimo pretpostavku da je U harmonijska funkcija, tj. $\Delta U = 0$, tada iz (5.239), za Δu, dobijamo:

$$\Delta u = 2\left[\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2\right]. \tag{5.240}$$

Konačno, uvrstivši (5.240) i $v = 1$ u (5.231), dobijamo:

$$\iiint\limits_{V} \left[\frac{\partial U}{\partial x}^2 + \frac{\partial U}{\partial y}^2 + \frac{\partial U}{\partial z}^2\right] \mathrm{d}V = \iint\limits_{S} U\frac{\partial U}{\partial n}\,\mathrm{d}S, \tag{5.241}$$

što je i trebalo dokazati.

Pri rešavanju diferencijalnih parcijalnih jednačina zahteva se i da rešenje zadovolji određene uslove, tz. **konturne uslove** [15], zbog toga što se znaju vrednosti neke funkcije na površi S (konturi - granici), a tražimo ih u unutrašnjosti V. U zavisnosti od tih uslova razlikujemo sledeće zadatke:

prvi konturni zadatak ili Dirihleov[16] zadatak.

Ako je poznata vrednost funkcije $u(x,y,z)$ na granici S, tj. $u(x,y,z) = f_1$, na S, odrediti njenu vrednost u unutrašnjosti oblasti V. f_1 je poznata funkcija.

Drugi konturni zadatak ili Nojmanov[17] zadatak.

Ako je poznat izvod funkcije $u(x,y,z)$ na površi S, tj. $\dfrac{\partial u}{\partial n} = f_2$ na S, odrediti vrednost ove funkcije. Funkcija f_2 je poznata.

Treći konturni zadatak ili mešoviti konturni zadatak.

Ovaj zadatak je kombinacija prethodna dva. Naime, ako su poznate vrednosti neke funkcije $u(x,y,z)$ i njenog izvoda na konturi S, naći njenu vrednosti unutar oblasti V, tj.:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_S + h\,(u - f_3) = 0. \tag{5.242}$$

Dirihleov problem

Naći ono rešenje Laplasove jednačine $\Delta u = 0$, koje zadovoljava unapred zadat uslov:

$$u(x,y,z) = f(x,y,z) \quad \text{na konturi} \quad S, \tag{5.243}$$

ili kraće napisano:

$$u|_S = f. \tag{5.244}$$

U slučaju dve promenljive, recimo x, y, S je prosta zatvorena kriva, koja nema singulariteta.

Napomenimo da ovaj problem može da ima samo jedno rešenje.

Da bismo rešili ovaj zadatak posmatrajmo neku proizvoljnu tačku $A(a,b,c)$ oblasti V, koja se nalazi unutar podoblasti Σ:

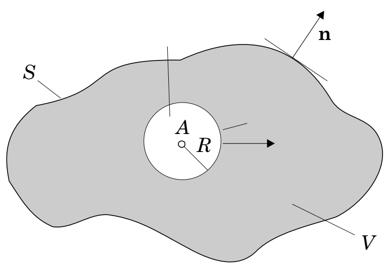
$$\sum = \left\{x,y,z| \quad (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 \le R^2\right\} \tag{5.245}$$

R je tako određeno da je $\Sigma \subset V$. Označimo granicu oblasti Σ sa σ.

[15] U literaturi se često ovi uslovi zovu i "granični uslovi",

[16] Peter Gustav Lejeune-Dirichlet (1805-1859), nemački matematičar. Autor značajnih radova iz analize, teorije brojeva i algebarskih struktura. Dokazao je konvergenciju Furijeovih redova i formulisao opšte uslove pod kojim funkcija može da se izrazi u obliku trigonometrijskog reda.

[17] Carl Gottfried Neumann (1832-1925), nemački matematičar. Poznat po definisanju ovog zadatka.



Slika 5.3:

Neka su u i v dve **harmonijske funkcije** u oblasti V. Na osnovu druge Grinove formule (5.231) i Teoreme 18 (5.235), dobijamo:

$$\iint\limits_{S\cup\sigma} u\frac{\partial v}{\partial n}\,\mathrm{d}S - \iint\limits_{S\cup\sigma} v\frac{\partial u}{\partial n}\,\mathrm{d}S = 0. \tag{5.246}$$

Videli smo da je funkcija:

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}} \tag{5.247}$$

harmonijska, pa uzmimo da je $v = 1/r$. Za ovako izabrano v relacija (5.246) postaje:

$$\iint\limits_{S\cup\sigma} \left(-u\frac{1}{r^2} - \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial n}\right)\mathrm{d}S = 0, \tag{5.248}$$

odnosno:

$$\iint\limits_{S} \left(-u\frac{1}{r^2} - \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial n}\right)\mathrm{d}S + \iint\limits_{\sigma} \left(-u\frac{1}{r^2} - \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial n}\right)\mathrm{d}S = 0. \tag{5.249}$$

Kako je σ sfera sa jednačinom granice $r = R$, dobijamo:

$$\iint\limits_{S} \left(-u\frac{1}{r^2} - \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial n}\right)\mathrm{d}S = \frac{1}{R^2}\iint\limits_{\sigma} u\,\mathrm{d}S + \frac{1}{R}\iint\limits_{\sigma}\frac{\partial u}{\partial n}\,\mathrm{d}S. \tag{5.250}$$

Integrale, na desnoj strani prethodne jednačine, možemo da predstavimo na sledeći način:

$$\frac{1}{R^2}\iint\limits_{\sigma} u\,\mathrm{d}S = \frac{1}{R^2}\,4\pi\,R^2\,u^* = 4\pi u^*, \tag{5.251}$$

gde je u^* – srednja vrednost funkcije u na površi σ, (ona je poznata, ne zavisi od S i može da izađe ispred integrala), ($4\pi R^2$ je σ – površina, tj. površina sfere) i:

$$\frac{1}{R}\iint\limits_{\sigma}\frac{\partial u}{\partial n}\,\mathrm{d}S = \frac{1}{R}4\pi R^2\left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)^*, \tag{5.252}$$

gde je $\left(\dfrac{\partial u}{\partial n}\right)^*$ - srednja vrednost izvoda na sferi.

Dalje, kako je:

$$\lim_{R\to 0} u^* = u(A), \quad \lim_{R\to 0} 4\pi R \left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)^* = 0, \tag{5.253}$$

$$\left[\iint_\sigma \mathrm{d}S = 4\pi R^2, \quad \lim_{(x,y,z)\to A} u(x,y,z) = u(A),\right.$$

$$\left.\lim_{(x,y,z)\to A} \iint_\sigma u(x,y,z)\,\mathrm{d}S = u(A)\iint_\sigma \mathrm{d}S = u(A)4\pi R^2,\right]$$

i na površi S: $u|_S = f$, dobijamo, iz (5.250):

$$4\pi u(A) = -\iint_S \left(\frac{f}{r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial n}\right) \mathrm{d}S. \tag{5.254}$$

Konačno, kako je:

$$\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{1}{r^2} \tag{5.255}$$

dobijamo:

$$u(a,b,c) = \frac{1}{4\pi}\iint_S \left[f\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right) - \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial n}\right] \mathrm{d}S. \tag{5.256}$$

Ova relacija nam, za sada, ne daje rešenje problema, jer se pod integralom javlja nepoznata veličina $\partial u/\partial n$.

Napomenimo da smo na sličan način mogli da rešimo i zadatak kada funkcija zavisi od dve promenljive, recimo x, y. U ovom slučaju bismo površinu zamenili linijom l, ali tako da umesto $\sigma = 4\pi R^2$ stavimo $l = 2\pi R$.

Rešimo sada prethodni zadatak (Dirihleov problem) u dva specijalna slučaja, kada je oblast Σ:

- krug i
- sfera.

Dirihleov problem za krug

Zadatak je da se odredi funkcija u, koja unutar kruga $K = \{(x,y)|\, x^2 + y^2 = R^2\}$ zadovoljava Laplasovu jednačinu $\Delta u = 0$.

Zbog prirode problema pogodnije je koristiti polarne koordinate (r, φ), u kojima Laplasova jednačina ima oblik:

$$r\frac{\partial u}{\partial r} + r^2\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0. \tag{5.257}$$

Rešenje potražimo u obliku:

$$u = R(r) \cdot F(\varphi), \tag{5.258}$$

pa jednačina (5.257) postaje:

$$\left(r^2 R'' + r \cdot R'\right) F + R \cdot F'' = 0, \tag{5.259}$$

odnosno:

$$\frac{r^2 \cdot R'' + r \cdot R'}{R} = -\frac{F''}{F} = k^2, \tag{5.260}$$

gde je k – konstanta.

Razmotrićemo dva slučaja: $k \neq 0$ i $k = 0$.
Za $k \neq 0$ dobijamo:

$$r^2 R'' + r \cdot R' - R \cdot k^2 = 0 \quad \text{- Ojlerova jednačina i} \tag{5.261}$$

$$F'' + k^2 F = 0 \quad \text{- dif. jed. sa const. koeficijentima.} \tag{5.262}$$

Rešenja ovih jednačina su:

$$R(r) = C_1\, r^k + C_2\, r^{-k}, \quad F(\varphi) = C_3 \cos(k\varphi) + C_4 \sin(k\varphi), \tag{5.263}$$

gde su C_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ proizvoljne konstante.
Za $k = 0$ dobijamo:

$$r\, R'' + R' = 0,$$
$$F'' = 0.$$

Uz smenu $R' = f(r)$, za prvu jednačinu, dobijamo: $df/dr = -f/r$ ili

$$\ln f = -\ln r + \ln C_1 \quad \Rightarrow \quad r\, f = C_1 = r\, \frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r} \quad \Rightarrow \tag{5.264}$$

$$R = C_1\, \ln r + C_2. \tag{5.265}$$

Za drugu jednačinu dobijamo: $F = C_3 \cdot \varphi + C_4$.
Dakle, rešenje polazne jednačine je:
za $k \neq 0$

$$u = \left(C_1\, r^k + C_2\, r^{-k}\right) \cdot \left(C_3 \cos(k\varphi) + C_4 \sin(k\varphi)\right) \tag{5.266}$$

za $k = 0$

$$u = (C_1 \ln r + C_2) \cdot (C_3 \varphi + C_4). \tag{5.267}$$

Konstante određujemo iz uslova da rešenje zadovoljava granične uslove. Naime, rekli smo da funkcija u na kružnoj konturi ima neku zadatu vrednost. Međutim, kako posle obilaska oko kruga ponovo stižemo u istu tačku, to rešenje mora da bude periodično sa periodom 2π. To praktično znači da k mora da bude ceo broj

$\pm 1, \pm 2, \ldots$, a $C_3 = 0$ u (5.267). Ista rešenja bismo dobili i kada bismo uzeli da je k prirodan broj, tj. $k = 1, 2, \ldots, n$, pa konačno dobijamo:

$$u_0 = u|_{k=0} = C_4 \left(C_1 \ln r + C_2\right), \tag{5.268}$$

$$u_n = u|_{k=n} = \left(C_n\, r^n + D_n\, r^{-n}\right) \left(a_n \cos(n\varphi) + b_n \sin(n\varphi)\right), \quad n = 1, 2, \ldots \tag{5.269}$$

Dalje, funkcija u mora da bude neprekidna, po pretpostavci, u svim tačkama oblasti unutar K, pa i u tački $r = 0$. Međutim, kako funkcije $\ln r$ i r^{-n} nisu definisane u toj tački, sledi da su koeficijenti uz njih jednaki nuli ($C_1 = D_n = 0$), pa rešenje dobija oblik:

$$u_0(r,\varphi) = \frac{a_0}{2}; \quad u_n(r,\varphi) = r^n \left(a_n \cos(n\varphi) + b_n \sin(n\varphi)\right). \tag{5.270}$$

Primenjujući princip superpozicije, za u dobijamo:

$$u(r,\varphi) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} r^n \left(a_n \cos(n\varphi) + b_n \sin(n\varphi)\right). \tag{5.271}$$

Još nismo iskoristili uslov na granici K.

Neka je $u(R,\varphi) = u|_{r=R} = f(\varphi)$, gde je f poznata funkcija. Iz (5.271) dobijamo:

$$f(\varphi) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} R^n \left(a_n \cos(n\varphi) + b_n \sin(n\varphi)\right). \tag{5.272}$$

Dakle, treba poznatu funkciju razviti u Furijeov red, pa je:

$$a_n = \frac{1}{\pi R^n} \int_{-\pi}^{+\pi} f(t) \cos(nt)\, \mathrm{d}t, \quad b_n = \frac{1}{\pi R^n} \int_{-\pi}^{+\pi} f(t) \sin(nt)\, \mathrm{d}t. \tag{5.273}$$

Zamenom ovih vrednosti u (5.271) dobijamo:

$$u(r,\varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(t)\, \mathrm{d}t + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{r^n}{R^n} f(t) \cos n(t-\varphi)\, \mathrm{d}t, \tag{5.274}$$

ili

$$u(r,\varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \left[1 + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{r}{R}\right)^n \cos n(t-\varphi)\right] f(t)\, \mathrm{d}t. \tag{5.275}$$

Međutim, kako je:

$$1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} c^n \cos(n\varphi) = \frac{1-c^2}{c^2 - 2c\cos\varphi + 1}, \quad 0 \le c \le 1, \tag{5.276}$$

to konačno dobijamo rešenje polaznog Dirihleovog problema za krug:

$$u(r,\varphi) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{+\pi} f(t)\frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2\,r\,R\cos(t-\varphi) + r^2}\,\mathrm{d}t. \tag{5.277}$$

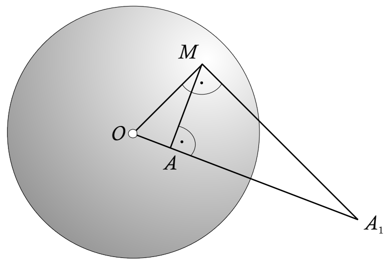
Ova relacija poznata je u literaturi i kao Puasonov integral.

Dirihleov problem za sferu

U ovom slučaju zadatak se svodi na traženje funkcije u, koja zadovolja Laplasovu jednačinu $\Delta u = 0$, a čija je vrednost na sferi S poznata ($u|_S = f$).

Posmatrajmo sada sferu S, poluprečnika R, i tačke: $A(a, b, c)$, koja se nalazi u unutrašnjosti sfere i $A_1(a_1, b_1, c_1)$, koja je van sfere.

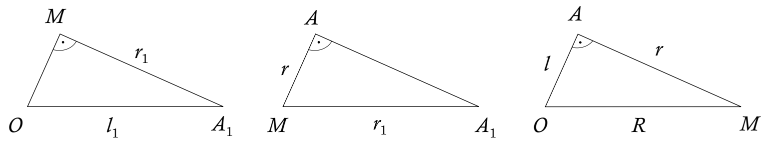
Neka je O – centar sfere, a tačka $M(x, y, z) \in S$ (sl. 5.4).



Slika 5.4:

Uvedimo sledeće oznake:

$$\overline{AM} = r, \quad \overline{A_1M} = r_1, \quad \overline{OA} = l, \quad \overline{OA_1} = l_1 \tag{5.278}$$



Slika 5.5:

Iz sličnosti trouglova (sl. 5.5) sledi proporcionalnost stranica:

$$\frac{r}{r_1} = \frac{l}{R} = \frac{R}{l_1} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{r_1} = \frac{l}{R}\frac{1}{r}. \tag{5.279}$$

Kako je $1/r$ harmonijska funkcija u oblasti ograničenoj sferom S, to možemo da primenimo jednačinu (5.256):

$$u(a,b,c) = \frac{1}{4\pi}\iint\limits_S \left[f\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right) - \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial n}\right]\mathrm{d}S. \tag{5.280}$$

Prema (5.279) i drugoj Grinovoj formuli (5.231) imamo:

$$\iint\limits_S \left[u \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r_1}\right) - \frac{1}{r_1}\frac{\partial u}{\partial n} \right] \mathrm{d}S = 0. \tag{5.281}$$

Dalje, prema uslovu zadatka, imamo da je $u = f$ za $M(x, y, z) \in S$, pa dobijamo:

$$\iint\limits_S \left[f \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r_1}\right) - \frac{1}{r_1}\frac{\partial u}{\partial n} \right] \mathrm{d}S = 0 \Bigg| \cdot \frac{R}{4\pi l} \quad \Rightarrow$$

$$\frac{R}{4\pi l}\iint\limits_S \left[f \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r_1}\right) - \frac{1}{r_1}\frac{\partial u}{\partial n} \right] \mathrm{d}S = 0. \tag{5.282}$$

Napomenimo da ovu relaciju nismo mogli da primenimo na funkciju $1/r$, jer ona nije definisana u tački $A(a, b, c)$, unutar oblasti S, dok funkcija $1/r_1$ nije definisana u tački $A_1(a_1, b_1, c_1)$, a to je van posmatrane oblasti.

Konačno, iz (5.282) i (5.280), koristeći (5.279), dobijamo:

$$u(a, b, c) = \frac{1}{4\pi}\iint\limits_S \left[f \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right) - \frac{R}{l} f \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r_1}\right) \right] \mathrm{d}S \quad \Rightarrow \tag{5.283}$$

$$u(a, b, c) = \frac{1}{4\pi}\iint\limits_S f \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r} - \frac{R}{l}\frac{1}{r_1}\right) \mathrm{d}S$$

rešenje Dirihleovog problema za sferu.

Definišimo sada funkciju G relacijom:

$$G = G(x, y, z, a, b, c) = \frac{1}{r} - \frac{R}{l}\frac{1}{r_1} = \tag{5.284}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}} - \frac{R}{l}\frac{1}{\sqrt{(x-a_1)^2 + (y-b_1)^2 + (z-c_1)^2}}$$

sa sledećim osobinama:

- G je harmonijska funkcija u odnosu na tačku $M(x, y, z)$, unutar sfere S, osim u tački $A(a, b, c)$;
- G je harmonijska funkcija u odnosu na tačku $A(a, b, c)$, unutar sfere S, osim u tački $M(x, y, z)$;
- funkcija $G - 1/r$ je harmonijska funkcija u svim tačkama unutar oblasti S;
- G se anulira na sferi S.

Funkciju G, ovako definisanu, nazivamo Grinova funkcija u odnosu na tačku $A(a,b,c)$, sfere S.

Posmatrajmo sada neku poznatu funkciju $H(x,y,z,a,b,c)$, fiksnu tačku $A(a,b,c)$ iz oblasti V i proizvoljnu tačku te oblasti $M(x,y,z)$ (H je funkcija od A i M).

Pretpostavimo da ova funkcija ima i sledeće osobine:

1° harmonijska je u odnosu na tačku $M(x,y,z)$;

2° harmonijska je u odnosu na tačku $A(a,b,c)$;

3° na površi S ima vrednost $1/r$, gde je $r = \overline{AM}$.

Neka je u rešenje Dirihleovog problema, tada je, prema (5.231):

$$\iint\limits_S \left(u\frac{\partial H}{\partial n} - H\frac{\partial u}{\partial n}\right) \mathrm{d}S = 0, \tag{5.285}$$

pa prema 3° dobijamo:

$$\iint\limits_S \left(f\frac{\partial H}{\partial n} - \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial n}\right) \mathrm{d}S = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\frac{1}{4\pi}\iint\limits_S f\frac{\partial H}{\partial n}\,\mathrm{d}S = \frac{1}{4\pi}\iint\limits_S \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial n}\,\mathrm{d}S. \tag{5.286}$$

Dalje, kako je prema (5.256), za "rešenje" Dirihleovog problema:

$$u(a,b,c) = \frac{1}{4\pi}\iint\limits_S \left(f\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right) - \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial n}\right) \mathrm{d}S \quad \Rightarrow$$

$$u(a,b,c) = \frac{1}{4\pi}\iint\limits_S \left(f\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right) - \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial n}\right) \mathrm{d}S \quad \Rightarrow$$

$$u(a,b,c) = \frac{1}{4\pi}\iint\limits_S f\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r} - H\right) \mathrm{d}S \tag{5.287}$$

Dakle, ova relacija (5.287) daje rešenje Dirihleovog problema, ako je poznata funkcija H.

Funkcija definisana sa:

$$G = H - \frac{1}{r} \tag{5.288}$$

naziva se **Grinova funkcija** za oblast V, u odnosu na tačku $A(a,b,c)$. Oblast je ograničena sa površi S.

Na osnovu definicije ove funkcije i prethodnih pretpostavki zaključujemo:

1° G je harmonijska funkcija u oblasti V, u odnosu na tačku $M(x,y,z)$, sem u tački $A(a,b,c)$;

2° G je harmonijska funkcija u oblasti V, u odnosu na tačku $A(a,b,c)$, sem u tački $M(x,y,z)$;

3° funkcija $G - 1/r$ je harmonijska u svim tačkama oblasti V;

4° na površi S funkcija G se anulira.

Nojmanov problem u ravni

Neka je u ravni data oblast P, ograničena krivom ℓ, a na ℓ je definisana funkcija $f(s)$, $s \in \ell$.

Nojmanov problem se sastoji u sledećem:

naći funkciju u, koja je u oblasti P harmonijska, a čiji je izvod u pravcu normale $\partial u/\partial n$ poznata funkcija f na konturi ℓ, tj.:

$$\frac{\partial u}{\partial n} = f(s), \quad s \in \ell. \tag{5.289}$$

Teorema 22 *Da bi postojalo rešenje Nojmanovog problema, potrebno je da se integral funkcije f anulira na konturi ℓ.*

Dokaz:

Pošto je u harmonijska funkcija, to je:

$$\iint\limits_S \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) \mathrm{d}x \cdot \mathrm{d}y = 0. \tag{5.290}$$

Dalje, prema Grinovoj formuli (5.231), a za $v = 1$, imamo, i to za slučaj u ravni

$$\iint\limits_S \Delta u \, \mathrm{d}S = \int\limits_\ell \frac{\partial u}{\partial n} \, \mathrm{d}l = \int\limits_\ell f \, \mathrm{d}l = 0. \tag{5.291}$$

Teorema 23 *Dva rešenja Nojmanovog problema mogu da se razlikuju samo za proizvljnu konstantu.*

Dokaz:

Dokažimo ovu teoremu za slučaj kada je $f(s) = 0$.

Pretpostavimo da je $f(s) = 0$. Tada je $u = 0$ rešenje odgovarajućeg Nojmanovog problema. Neka je v neko drugo rešenje istog problema. Kako je v harmonijska funkcija, imamo:

$$\iint\limits_S v \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0. \tag{5.292}$$

Međutim, kako je:

$$\iint\limits_S v\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int\limits_\ell v\frac{\partial v}{\partial x}\,\mathrm{d}y - \iint\limits_S \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{5.293}$$

i

$$\iint\limits_S v\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int\limits_\ell v\frac{\partial v}{\partial y}\,\mathrm{d}x - \iint\limits_S \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y, \tag{5.294}$$

to sabirajući prethodne relacije dobijamo:

$$\begin{aligned}\iint\limits_S v\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int\limits_\ell v\frac{\partial v}{\partial n}\,\mathrm{d}s -& \\ -\iint\limits_S \left[\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y.&\end{aligned} \tag{5.295}$$

Kako je, prema pretpostavci, $\Delta v = 0$ i $\dfrac{\partial v}{\partial n} = 0$, to je:

$$\iint\limits_S \left[\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0, \tag{5.296}$$

odakle, zbog neprekidnosti izvoda $\partial v/\partial x$ i $\partial v/\partial y$, sledi:

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad \Rightarrow \quad v = \text{const.} \tag{5.297}$$

Ovim je teorema dokazana.

5.8 Zadaci

Zad. 5.1. Naći opšte rešenje jednačine

$$\frac{\partial f}{\partial x}(= f_x) = 0, \quad \text{gde je } \ f = f(x,y).$$

Rešenje.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0 \quad \Rightarrow \quad f = f(y),$$

gde je f proizvoljna diferencijabilna funkcija po promenljivoj y.

♡

Zad. 5.2. Naći opšte rešenje jednačine [18]

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0.$$

Rešenje.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right) = 0, \\ \text{ili} \\ \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right) = 0, \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial y} = \varphi(y) \quad \Rightarrow \quad f = \int \varphi(y)\, \mathrm{d}y + \psi(x), \\ \text{ili} \\ \dfrac{\partial f}{\partial x} = \phi(x) \quad \Rightarrow \quad f = \int \phi(x)\, \mathrm{d}x + \gamma(y). \end{cases} \Rightarrow$$

Dakle, opšte rešenje je funkcija oblika

$$f = \varphi(x) + \psi(y),$$

gde su φ i ψ proizvoljne diferencijabilne funkcije po x i y, respektivno.

♡

Zad. 5.3. Naći opšte rešenje jednačine

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = 0.$$

Rešenje.

Ovoj PDJ pridružuje se sistem jednačina oblika

$$\frac{\mathrm{d}x}{x} = \frac{\mathrm{d}y}{y}.$$

Rečeno je da je rešenje

$$\psi_i = C_i, \quad i = 1, \ldots, n-1, \text{ gde je } n \text{ broj nezavisnih promenljivih,}$$

[18] Data jednačine je parcijalna jednačina drugog reda. Međutim, jednostavnom smenom ($\partial f/\partial y = \varphi(y)$ ili $\partial f/\partial x = \phi(x)$) svodi se na jednačinu prvog reda, pa se zato nalazi na ovom mestu.

a ψ_i su prvi integrali. U ovom slučaju je $n = 2$, pa imamo samo jedan prvi integral

$$\ln y = \ln x + \ln c_1 \quad \Rightarrow \quad \ln y = \ln c_1 x \quad \Rightarrow \quad y = c_1 x \quad \Rightarrow \quad \frac{y}{x} = c_1, \quad c_1 > 0.$$

Dakle, opšte rešenje je oblika

$$f = f\left(\frac{y}{x}\right),$$

gde je f proizvoljna diferencijabilna funkcija u odnosu na y/x.

♡

Zad. 5.4. Naći rešenje parcijalne diferencijalne jednačine

$$(x+1)\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} + (z-1)\frac{\partial f}{\partial z} = 0.$$

Rešenje.

Datoj parcijalnoj jednačini pridružujeno sistem jednačina

$$\frac{\mathrm{d}x}{x+1} = \frac{\mathrm{d}y}{y} = \frac{\mathrm{d}z}{z-1},$$

gde je $n = 3$, pa prvih integrala imamo $n - 1 = 2$. Prvi integrali su (iz prvog para jednačina)

$$\ln(x+1) + \ln c_1 = \ln y \quad \Rightarrow \quad c_1 = \frac{y}{x+1} \text{ ili } C_1 = \frac{x+1}{y},$$

odnosno (iz drugog para jednačina)

$$\ln y = \ln(z-1) + \ln c_2 \quad \Rightarrow \quad c_2 = \frac{y}{z-1} \text{ ili } C_2 = \frac{z-1}{y}, \quad c_1 > 0,\ c_2 > 0.$$

Konačno dobijamo opšte rešenje

$$f = f\left(\frac{y}{x+1}, \frac{y}{z-1}\right) \text{ ili } g = g\left(\frac{x+1}{y}, \frac{z-1}{y}\right),$$

gde su f i g proizvoljne diferencijabilne funkcije po odgovarajućim promenljivim. Napomenimo da su funkcije f i g rešenja našeg problema i bilo koju od ovih funkcija zovemo opšte rešenje.

♡

Zad. 5.5. Naći ono rešenje diferencijalne jednačine

$$\sqrt{x}\frac{\partial u}{\partial x} + \sqrt{y}\frac{\partial u}{\partial y} + \sqrt{z}\frac{\partial u}{\partial z} = 0,$$

koje za $x = 1$ postaje $u = y - z$.

Rešenje.

Ovo je tzv. Košijev problem. Prvo nalazimo opšte rešenje. Polaznoj jednačini odgovara sistem

$$\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}} = \frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{y}} = \frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{z}},$$

koji ima dva prva integrala

$$\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}} = \frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{y}} \quad \Rightarrow \quad \sqrt{x} - \sqrt{y} = c_1 = \psi_1$$

i, slično, drugi prvi integral

$$\sqrt{x} - \sqrt{z} = c_2 = \psi_2.$$

Nađimo sada Košijevo rešenje (Košijev integral). Prema teoriji je

$$\psi_i(x_1, \dots, x_n) = c_i, \quad i = 1, \dots, n-1$$

$$\left.\begin{array}{l} \psi_1(x_0, y, z) = \bar{\psi}_1 \\ \psi_2(x_0, y, z) = \bar{\psi}_2 \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} y = \lambda_2(\bar{\psi}_1, \bar{\psi}_2), \\ z = \lambda_3(\bar{\psi}_1, \bar{\psi}_2) \end{array}$$

rešenje jednačine $F[z] = 0$, koje zadovoljava uslov

$$z(x_0, y) = \varphi(y), \quad u = \varphi\left[\lambda_2(\psi_1, \psi_2), \lambda_3(\psi_1, \psi_2)\right]$$

. U našem slučaju je

$$\begin{aligned} -\sqrt{x} + \sqrt{y} = \psi_1(x, y, z) \quad &\Rightarrow \quad \psi_1(1, y, z) = -1 + \sqrt{y} = \bar{\psi}_1 \quad \Rightarrow \\ y = \left(1 + \bar{\psi}_1\right)^2 &= \lambda_2, \\ -\sqrt{x} + \sqrt{z} = \psi_2(x, y, z) \quad &\Rightarrow \quad \psi_2(1, y, z) = -1 + \sqrt{z} = \bar{\psi}_2 \quad \Rightarrow \\ z = \left(1 + \bar{\psi}_2\right)^2 &= \lambda_3, \end{aligned}$$

$$u = \varphi(\lambda_2, \lambda_3) = \varphi\left[\left(1 + \sqrt{y} - \sqrt{x}\right)^2 - \left(1 + \sqrt{z} - \sqrt{x}\right)^2\right].$$

Kako je

$$u(1, y, z) = \varphi(y - x) = y - x,$$

to konačno dobijamo

$$u = \left(1 + \sqrt{y} - \sqrt{x}\right)^2 - \left(1 + \sqrt{z} - \sqrt{x}\right)^2.$$

♡

Zad. 5.6. Naći ono rešenje $z = z(x,y)$ jednačine

$$y\frac{\partial z}{\partial x} - x\frac{\partial z}{\partial y} = 0,$$

koje zadovoljava uslov

$$z(x,0) = x^2.$$

Rešenje.

Ovaj zadatak je Košijev problem.

Nađimo prvo potpuno rešenje. Posmatrana jednačina je homogena linearna parcijalna jednačina prvog reda. Njoj pridružujemo sistem običnih jednačina

$$\frac{\mathrm{d}x}{y} = \frac{\mathrm{d}y}{-x} = \frac{\mathrm{d}z}{0}.$$

Iz ovog sistema dobijamo dva prva integrala

$$\frac{\mathrm{d}x}{y} = \frac{\mathrm{d}y}{-x} \quad \Rightarrow \quad -\int x\,\mathrm{d}x = \int y\,\mathrm{d}y \quad \Rightarrow$$

$$x^2 + y^2 = c_1$$

i, zbog $\mathrm{d}z/0$, drugi prvi integral

$$z = c_2,$$

gde su c_1 i c_2 proizvoljne konstante. Kao što smo rekli, ako su prvi integrali $\psi_1 = c_1$ i $\psi_2 = c_2$, tada je i svaka diferencijabilna funkcija $F(\psi_1,\psi_2) = 0$ takođe prvi integral. U ovom zadatku to znači da je rešenje (opšte rešenje)

$$z = F\left(x^2 + y^2\right),$$

gde je $F \in C^1$.

Košijev integral (rešenje Košijevog zadatka) se dobija iz uslova

$$z(x,0) = F(x^2) = x^2 \quad \Rightarrow \quad F(x) = x,$$

pa konačno dobijamo Košijev integral

$$z(x,y) = x^2 + y^2.$$

♡

Zad. 5.7. Rešiti jednačinu

$$\left(1 + \sqrt{z - x - y}\right)\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = 2.$$

Rešenje.

Pridružen sistem običnih jednačina je u ovom slučaju

$$\frac{\mathrm{d}x}{(1+\sqrt{z-x-y})}=\frac{\mathrm{d}y}{1}=\frac{\mathrm{d}z}{2}.$$

Iz osobina proporcija sledi

$$\frac{-\mathrm{d}x}{-(1+\sqrt{z-x-y})}=\frac{-\mathrm{d}y}{-1}=\frac{\mathrm{d}z}{2}=\frac{\mathrm{d}z-\mathrm{d}x-\mathrm{d}y}{2-1-1-\sqrt{z-x-y}}$$

odakle dobijamo

$$\frac{-\mathrm{d}x}{-(1+\sqrt{z-x-y})}=\frac{-\mathrm{d}y}{-1}=\frac{\mathrm{d}z}{2}=\frac{\mathrm{d}(z-x-y)}{-\sqrt{z-x-y}}.$$

Prvi integrali se dobijaju iz

$$\frac{\mathrm{d}y}{1}=\frac{\mathrm{d}z}{2}\quad\Rightarrow\quad 2y=z+c_o$$

i

$$\frac{\mathrm{d}y}{1}=\frac{\mathrm{d}(z-x-y)}{-\sqrt{z-x-y}}\quad\Rightarrow\quad y=-2\sqrt{z-x-y}+c_1,$$

odnosno

$$y+2\sqrt{z-x-y}=c_1,$$

pa je opšte rešenje

$$f\left(2y-z,\,y+2\sqrt{z-x-y}\right)=0.$$

f je proizvoljna diferencijabilna funkcija po odgovarajućim argumentima.
Napomenimo[19] da je rešenje i funkcija $z=x+y$. Naime, kako je $\dfrac{\partial z}{\partial x}=1$ i $\dfrac{\partial z}{\partial y}=1$, vidi se da i ova funkcija z zadovoljava polaznu parcijalnu jednačinu. Ovo rešenje je takozvano **singularno rešenje**.

♡

Zad. 5.8. Odrediti integracioni faktor $v=v(x,y)$ da bi izraz

$$\left(2x^3y-y^2\right)\,\mathrm{d}x-\left(2x^4+xy\right)\,\mathrm{d}y=0$$

bio potpuni diferencijal, a zatim integraliti.

Rešenje.

Uslov integrabilnosti (5.48), u ovom slučaju ($R=0$), svodi se na linearnu parcijalnu jednačinu

$$v\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)=P\frac{\partial v}{\partial y}-Q\frac{\partial v}{\partial x},$$

[19] Na ovo rešenje skrenuo je pažnju prof. Arpad Takači.

kojoj pridružujemo sistem običnih jednačina

$$\frac{\mathrm{d}x}{-Q} = \frac{\mathrm{d}y}{P} = \frac{\mathrm{d}v}{v(Q_x - P_y)}. \tag{5.298}$$

U našem slučaju je: $P = 2x^3y - y^2$, $Q = -2x^4 - xy$, odakle dobijamo: $P_y = 2x^3 - 2y$ i $Q_x = -8x^3 - y$, odnosno

$$Q_x - P_y = -10x^3 + y. \tag{5.299}$$

Sada (5.298) može da se napiše u obliku

$$\frac{\mathrm{d}v}{v} = \frac{Q_x - P_y}{-Q}\mathrm{d}x = \frac{Q_x - P_y}{P}\mathrm{d}y,$$

odnosno, kad zamenimo (5.299)

$$\frac{\mathrm{d}v}{v} = \frac{-10x^3 + y}{2x^4 + xy}\mathrm{d}x = \frac{-10x^3 + y}{2x^3y - y^2}\mathrm{d}y. \tag{5.300}$$

Odredimo prvo naznačene količnike:

$$\big(2x^4 + xy\big) : \big(-10x^3 + y\big) = -\frac{1}{5}x + \frac{6/5xy}{-10x^3 + y}, \tag{5.301}$$

$$\big(2x^3y - y^2\big) : \big(-10x^3 + y\big) = -\frac{1}{5}y - \frac{4/5y^2}{-10x^3 + y}. \tag{5.302}$$

Analizirajmo prvo ostatke deljenja u relacijama (5.301) i (5.302). vidimo da će, ako ostatak u (5.301) pomnožimo sa $4y$, a ostatak u (5.302) sa $6x$ oni postaju jednaki, po apsolutnoj vrednosti. Zatim, ako imamo na umu da je

$$\frac{\mathrm{d}x}{a} = \frac{\mathrm{d}y}{b} = \frac{\mathrm{d}x + \mathrm{d}y}{a + b},$$

možemo da podesimo kombinovanjem da eliminišemo ostatke. Ako to uradimo, dobijamo

$$\frac{\mathrm{d}v}{v} = \frac{4y\,\mathrm{d}x}{-4/5xy + (24/5xy^2)/(-10x^3 + y)} = \frac{6x\,\mathrm{d}y}{-6/5xy - (24/5xy^2)/(-10x^3 + y)} =$$
$$= \frac{4y\,\mathrm{d}x + 6x\,\mathrm{d}y}{-10/5xy} \quad \Rightarrow$$

$$\frac{\mathrm{d}v}{v} = -2\frac{\mathrm{d}x}{x} - 3\frac{\mathrm{d}y}{y} \quad \Rightarrow \quad \ln v = \ln x^{-2} + \ln y^{-3} + \ln c = \ln cx^{-2}y^{-3} \quad \Rightarrow$$

$$v = cx^{-2}y^{-3}.$$

Pošto ovo važi za proizvoljnu konstantu c ($c > 0$), uzećemo da je $c = 1$, tj.

$$v = x^{-2}y^{-3}.$$

Dakle, izraz

$$x^{-2}y^{-3}\left(2x^3y-y^2\right)\,\mathrm{d}x - x^{-2}y^{-3}\left(2x^4+xy\right)\,\mathrm{d}y = 0$$

predstavlja potpuni diferencijal neke funkcije u, tj.

$$\mathrm{d}u = x^{-2}y^{-3}\left(2x^3y-y^2\right)\,\mathrm{d}x - x^{-2}y^{-3}\left(2x^4+xy\right)\,\mathrm{d}y = 0. \tag{5.303}$$

Odavde dobijamo

$$\begin{aligned} u &= \int\limits_{x_0}^{x}\left(2xy^{-2}-x^{-2}y^{-1}\right)\,\mathrm{d}x - \int\limits_{y_0}^{y}\left(2x^2y^{-3}+x^{-1}y^{-2}\right)\,\mathrm{d}y = \\ &= \left(x^2y^{-2}+y^{-1}x^{-1}\right)\Big|_{x_0}^{x} - \left(-x^2y^{-2}-y^{-1}x^{-1}\right)\Big|_{y_0}^{y} = \\ &= 2x^2y^{-2}+2x^{-}y^{-1}+c. \end{aligned}$$

Provera.

$$\mathrm{d}u = \frac{\partial u}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial u}{\partial y}\,\mathrm{d}y = \left(4xy^{-2}-2x^{-2}y^{-1}\right)\mathrm{d}x + \left(-4x^2y^{-3}-2x^{-1}y^{-2}\right)\mathrm{d}y,$$

a ovo je, prema (5.303) jednako nuli, tj.

$$\mathrm{d}u = 0.$$

♡

Zad. 5.9. Odrediti potpuno rešenje i singularno rešenje (ako postoji) za jednčinu

$$z = xp + yq + pq.$$

Rešenje.

Ovo je nelinearna parcijalna diferencijalna jednačina. Rešićemo je primenom Lagranž–Šarpiovog metoda. Iskoristićemo uslove (5.82). U našem slučaju, kako je $f = xp + yq + pq - z = 0$, je:

$$\frac{\partial f}{\partial p} = x + q \quad \frac{\partial f}{\partial q} = y + p \quad \frac{\partial f}{\partial x} = p \quad \frac{\partial f}{\partial y} = q \quad \frac{\partial f}{\partial z} = -1$$

pa jednačina (5.82) postaje

$$\frac{\mathrm{d}x}{x+q} = \frac{\mathrm{d}y}{y+p} = \frac{\mathrm{d}z}{xp+yq+pq} = \frac{\mathrm{d}p}{-p+p} = \frac{\mathrm{d}q}{-q+q}$$

odnosno

$$\frac{\mathrm{d}x}{x+q} = \frac{\mathrm{d}y}{y+p} = \frac{\mathrm{d}z}{z} = \frac{\mathrm{d}p}{0} = \frac{\mathrm{d}q}{0}$$

odakle dobijamo prva dva integrala

$$p = const. = a \quad \text{i} \quad q = const. = b.$$

Zamenom u polaznu jednačinu dobijamo potpuno rešenje

$$z = ax + by + ab.$$

Potražimo sada singularno rešenje. Ako postoji dobija se iz sistema jednačina (5.56). U našem slučaju je:

$$g = ax + by + ab - z = 0, \quad \frac{\partial g}{\partial a} = x + b \quad \text{i} \quad \frac{\partial g}{\partial b} = -y + a$$

odakle dobijamo

$$b = -x \quad \text{i} \quad a = y.$$

Dakle, postoji singularno rešenje

$$xy + z = 0.$$

♡

Za grupu zadataka, koja sledi bez teksta, odrediti tip parcijalne jednačine i zatim je svesti na kanonski oblik:

Zad. 5.10.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2\sin x \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \cos^2 x \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \cos x \frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

Rešenje.

Diskriminanta karakteristične jednačine, pošto je $a_{12} = -\sin x$, $a_{11} = 1$ i $a_{22} = -\cos^2 x$, je

$$D = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = \sin^2 x + \cos^2 x = 1 > 0$$

pozitivna u celoj ravni x, y. Dakle, posmatrana jednačina je **hiperboličkog tipa** u celoj x, y ravni.

Ima dve realne karakteristike, koje se dobijaju rešavanjem karakterističke jednačine

$$a_{11}\mathrm{d}y^2 - 2a_{12}\mathrm{d}x\mathrm{d}y + a_{22}\mathrm{d}x^2 = 0,$$

koja u ovom slučju ima oblik

$$\mathrm{d}y^2 + 2\sin x\mathrm{d}x\mathrm{d}y - \cos^2 x\mathrm{d}x^2 = 0,$$

odakle dobijamo

$$(y')^2 + 2\sin x\, y' - cos^2 x = 0 \quad \Rightarrow$$

$$y'_{1,2} = \frac{-2\sin x \pm \sqrt{4\sin^2 x + 4\cos^2 x}}{2} = -\sin x \pm 1.$$

Karakteristike su:

$$y_1^{'} = -\sin x + 1 \quad \Rightarrow \quad y = x + \cos x + c_1 \quad \text{odnosno}$$
$$y_2^{'} = -\sin x + 1 \quad \Rightarrow \quad y = -x + \cos x + c_2.$$

Smene su:

$$c_1 = y - x - \cos x = \xi \quad \text{i}$$
$$c_2 = y + x - \cos x = \eta.$$

Odgovarajući parcijalni izvodi, potrebni za računanje novih koeficijenata, su:

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = -1 + \sin x, \quad \frac{\partial \xi}{\partial y} = 1, \quad \frac{\partial \eta}{\partial x} = 1 + \sin x, \quad \frac{\partial \eta}{\partial y} = 1,$$
$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \cos x, \quad \frac{\partial^2 \xi}{\partial x \partial y} = 0, \quad \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} = 0,$$
$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} = \cos x, \quad \frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial y} = 0, \quad \frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} = 0.$$

Provera Jakobijana

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \xi}{\partial y} \\ \frac{\partial \eta}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 + \sin x & 1 \\ 1 + \sin x & 1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0.$$

Izračunavanje novih koeficijenata:

$$\bar{a}_{11} = a_{11} \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 + 2a_{12} \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \xi}{\partial y} + a_{22} \left(\frac{\partial \xi}{\partial y} \right)^2 =$$
$$= (-1 + \sin x)^2 + 2(-\sin x)(-1 + \sin x) + (-\cos^2 x) = 0,$$

$$\bar{a}_{22} = a_{11} \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 + 2a_{12} \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial y} + a_{22} \left(\frac{\partial \eta}{\partial y} \right)^2 =$$
$$= (1 + \sin x)^2 + 2(-\sin x)(1 + \sin x) + (-\cos^2 x) = 0,$$

$$\bar{a}_{12} = a_{11} \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} + a_{12} \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial y} + a_{21} \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial x} + a_{22} \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial y} =$$
$$= (-1 + \sin x)(1 + \sin x) + (-\sin x) \left[(-1 + \sin x) + (1 + \sin x) \right] + (-\cos^2 x) = -2.$$

Kako je $a_1 = 0$ i $a_2 = -\cos x$, to dobijamo:

$$\bar{a}_1 = a_1 \frac{\partial \xi}{\partial x} + a_2 \frac{\partial \xi}{\partial y} + a_{11} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + 2a_{12} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x \partial y} + a_{22} \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} =$$
$$= (-\cos x) + \cos x =$$
$$= 0,$$

$$\begin{aligned}\bar{a}_2 &= a_1\frac{\partial \eta}{\partial x} + a_2\frac{\partial \eta}{\partial y} + a_{11}\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + 2a_{12}\frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial y} + a_{22}\frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} = \\ &= (-\cos x) + \cos x = \\ &= 0.\end{aligned}$$

Kako je $b = 0$ to je i $\bar{b} = 0$, pa transformisana jednačina konačno dobija oblik, kada $u(x, y) \to v(\xi, \eta)$

$$\bar{a}_{12}\frac{\partial^2 v}{\partial \xi \partial \eta} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial^2 v}{\partial \xi \partial \eta} = 0.$$

♡

Zad. 5.11.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2\cos x\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - (3 + \sin^2 x)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - y\frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

Rešenje.

Stari koeficijenti:

$$a_{11} = 1, \quad a_{12} = -\cos x, \quad a_{22} = -(3 + \sin^2 x), \quad a_1 = 0, \quad a_2 = -y.$$

Diskriminanta

$$D = \cos^2 x + 3 + \sin^2 x = 4 > 0.$$

Kako je diskriminanta veća od nule u celoj ravni x, y, to je ova jednačina **hiperboličkog tipa** u celoj ravni x, y.

Pošto je $D > 0$ to imamo dve realne karakteristike.

Karakteristična jednačina, u ovom slučaju, ima oblik

$$\mathrm{d}y^2 + 2\cos x \mathrm{d}x\mathrm{d}y - (3 + \sin^2 x)\mathrm{d}x^2 = 0 \quad \Rightarrow$$

$$y'_{1,2} = \frac{-2\cos x \pm \sqrt{4\cos^2 x + 4(3 + \sin^2 x)}}{2} = -\cos x \pm 2.$$

Karakteristike su:

$$\begin{aligned} y &= -\sin x + 2x + c_1, \\ y &= -\sin x - 2x + c_2. \end{aligned}$$

Smene:

$$\begin{aligned} c_1 &= \xi = y - 2x + \sin x, \\ c_2 &= \eta = y + 2x + \sin x. \end{aligned}$$

Odgovarajući parcijalni izvodi:

$$\frac{\partial\xi}{\partial x} = -2+\cos x, \quad \frac{\partial\xi}{\partial y} = 1, \quad \frac{\partial\eta}{\partial x} = 2+\cos x, \quad \frac{\partial\eta}{\partial y} = 1,$$
$$\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2} = -\sin x, \quad \frac{\partial^2\xi}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^2\xi}{\partial x\partial y} = 0,$$
$$\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2} = -\sin x, \quad \frac{\partial^2\xi}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^2\xi}{\partial x\partial y} = 0.$$

Provera Jakobijana

$$J = \begin{vmatrix} -2+\cos x & 1 \\ 2+\cos x & 1 \end{vmatrix} = -4 \neq 0.$$

Izračunavanje novih koeficijenata:

$$\begin{aligned}\bar{a}_{11} &= a_{11}\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)^2 + 2a_{12}\frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial\xi}{\partial y} + a_{22}\left(\frac{\partial\xi}{\partial y}\right)^2 = \\ &= (-2+\cos x)^2 + 2(-\cos x)(-2+\cos x) + (-3-\sin^2 x) = 1-(\cos^2 x+\sin^2 x) = \\ &= 0,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bar{a}_{22} &= a_{11}\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)^2 + 2a_{12}\frac{\partial\eta}{\partial x}\frac{\partial\eta}{\partial y} + a_{22}\left(\frac{\partial\eta}{\partial y}\right)^2 = \\ &= (2+\cos x)^2 + 2(-\cos x)(2+\cos x) + (-3-\sin^2 x) = 1-(\cos^2 x+\sin^2 x) = \\ &= 0,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bar{a}_{12} &= a_{11}\frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial\eta}{\partial x} + a_{12}\left(\frac{\partial\xi}{\partial y}\frac{\partial\eta}{\partial x} + \frac{\partial\xi}{\partial y}\frac{\partial\eta}{\partial x}\right) + a_{22}\frac{\partial\xi}{\partial y}\frac{\partial\eta}{\partial y} = \\ &= (-2+\cos x)(2+\cos x) + (-\cos x)(-2+\cos x+2+\cos x) + (-3-\sin^2 x) = \\ &= -8.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bar{a}_1 &= a_1\frac{\partial\xi}{\partial x} + a_2\frac{\partial\xi}{\partial y} + a_{11}\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2\xi}{\partial x\partial y} + a_{22}\frac{\partial^2\xi}{\partial y^2} = \\ &= -y-\sin x.\end{aligned}$$

Iz transformacija

$$\begin{aligned}\xi &= y+\sin x-2x, \\ \eta &= y+\sin x+2x,\end{aligned}$$

sledi da je $y+\sin x = 1/2(\xi+\eta)$, pa je

$$\bar{a}_1 = \frac{1}{2}(\xi+\eta).$$

$$\bar{a}_2 = a_1 \frac{\partial \eta}{\partial x} + a_2 \frac{\partial \eta}{\partial y} + a_{11} \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial y} + a_{22} \frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} = -y - \sin x =$$
$$= \frac{1}{2}(\xi + \eta).$$

Transformisana parcijalna jednačina $u(x, y) \to v(\xi, \eta)$ je sada oblika

$$\bar{a}_{11} \frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} + 2\bar{a}_{12} \frac{\partial^2 v}{\partial \xi \partial \eta} + \bar{a}_{22} \frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2} + \bar{a}_1 \frac{\partial v}{\partial \xi} + \bar{a}_2 \frac{\partial v}{\partial \eta} + \bar{b} v + \bar{c} =$$
$$-2 \cdot 8 \frac{\partial^2 v}{\partial \xi \partial \eta} - \frac{1}{2}(\xi + \eta) \left(\frac{\partial v}{\partial \xi} + \frac{\partial v}{\partial \eta} \right) = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{1}{32}(\xi + \eta) \left(\frac{\partial v}{\partial \xi} + \frac{\partial v}{\partial \eta} \right) = 0.$$

♡

Zad. 5.12.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 6 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 10 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial u}{\partial x} + 3 \frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

Rešenje.

$$a_{11} = 1, \quad a_{12} = 3, \quad a_{22} = 10, \quad a_1 = 1, \quad a_2 = 3$$
$$D = a_{12}^2 - a_{11} a_{22} = 9 - 10 = -1 < 0.$$

Kako je $D < 0$ u celoj ravni xy, to je jednačina **eliptičkog tipa**.

Karakteristična jednačina

$$a_{11}(y')^2 - 2a_{12}(y') + a_{22} = 0 \quad \Rightarrow \quad (y')_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 40}}{2} = 3 \pm i.$$

Imamo dva rešenja – konjugovano kompleksna.

Karakteristike:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 3 \pm i \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \mathrm{d}y = (3 + i)\mathrm{d}x & \Rightarrow \quad y = (3 + i)x + c_1 \\ \mathrm{d}y = (3 - i)\mathrm{d}x & \Rightarrow \quad y = (3 - i)x + c_2. \end{cases}$$

Transformacije (realni i imaginarni deo karakteristika)

$$\xi = y - 3x,$$
$$\eta = -x.$$

Parcijalni izvodi

$$\frac{\partial\xi}{\partial x} = -3, \quad \frac{\partial\xi}{\partial y} = 1, \quad \frac{\partial\eta}{\partial x} = -1, \quad \frac{\partial\eta}{\partial y} = 0,$$
$$\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial^2\xi}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^2\xi}{\partial x\partial y} = 0,$$
$$\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial^2\eta}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^2\eta}{\partial x\partial y} = 0.$$

Jakobijan

$$J = \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$$

Izračunavanje novih koeficijenata

$$\begin{aligned}\bar{a}_{11} &= a_{11}\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)^2 + 2a_{12}\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\xi}{\partial y}\right) + a_{22}\left(\frac{\partial\xi}{\partial y}\right)^2 = \\ &= (-3)^2 + 2(3)(-3) + 10 = \\ &= 1,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bar{a}_{22} &= a_{11}\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)^2 + 2a_{12}\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\eta}{\partial y}\right) + a_{22}\left(\frac{\partial\eta}{\partial y}\right)^2 = \\ &= (-1)^2 + 2(3)(-1)0 + 0 = \\ &= 1,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bar{a}_{12} &= a_{11}\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\right) + a_{12}\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial\eta}{\partial y} + \frac{\partial\xi}{\partial y}\frac{\partial\eta}{\partial x}\right) + a_{22}\frac{\partial\xi}{\partial y}\frac{\partial\eta}{\partial y} = \\ &= (-3)(-1) + 3[(-3)0 + 1(-1)] + 10\cdot 0 = 3 - 3 \\ &= 0,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bar{a}_1 &= a_1\frac{\partial\xi}{\partial x} + a_2\frac{\partial\xi}{\partial y} + a_{11}\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2} + 2a_{12}\frac{\partial^2\xi}{\partial x\partial y} + a_{22}\frac{\partial^2\xi}{\partial y^2} = \\ &= 1(-3) + 3\cdot 1 = 0,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bar{a}_2 &= a_1\frac{\partial\eta}{\partial x} + a_2\frac{\partial\eta}{\partial y} + a_{11}\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2} + 2a_{12}\frac{\partial^2\eta}{\partial x\partial y} + a_{22}\frac{\partial^2\eta}{\partial y^2} = \\ &= 1(-1) + 3\cdot 0 = -1.\end{aligned}$$

Transformisana jednačina $u(x,y) \to v(\xi,\eta)$

$$\bar{a}_{11}\frac{\partial^2 v}{\partial\xi^2} + 2\bar{a}_{12}\frac{\partial^2 v}{\partial\xi\partial\eta} + \bar{a}_{22}\frac{\partial^2 v}{\partial\eta^2} + \bar{a}_1\frac{\partial v}{\partial\xi} + \bar{a}_2\frac{\partial v}{\partial\eta} + \bar{b}v + \bar{c} = 0 \quad \Rightarrow$$

dobija oblik

$$\frac{\partial v}{\partial \xi} + \frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2} - \frac{\partial v}{\partial \eta} = 0.$$

♡

Zad. 5.13.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad x \neq 0.$$

Rešenje.

$$a_{11} = 1, \quad a_{12} = 0, \quad a_{22} = x^2, \quad a_1 = 0, \quad a_2 = 0$$
$$D = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = -x^2 < 0.$$

Kako je $D < 0$ u celoj ravni xy, sem u tački $x = 0$, ali ova tačka je isključena, to je jednačina **eliptičkog tipa**.

Karakteristična jednačina

$$a_{11}(y')^2 - 2a_{12}(y') + a_{22} = 0 \quad \Rightarrow \quad (y')_{1,2} = \pm xi.$$

Imamo dva rešenja – konjugovano kompleksna.

Karakteristike:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \pm xi \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \mathrm{d}y = xi\mathrm{d}x & \Rightarrow \quad y = \frac{1}{2}xi + c_1, \\ \mathrm{d}y = -xi\mathrm{d}x & \Rightarrow \quad y = -\frac{1}{2}xi + c_2. \end{cases}$$

Transformacije (realni i imaginarni deo karakteristika)

$$\xi = y,$$
$$\eta = \frac{1}{2}x.$$

Parcijalni izvodi

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \xi}{\partial y} = 1, \quad \frac{\partial \eta}{\partial x} = x, \quad \frac{\partial \eta}{\partial y} = 0,$$
$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 \xi}{\partial x \partial y} = 0,$$
$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} = 1, \quad \frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial y} = 0.$$

Jakobijan

$$J = \begin{vmatrix} -x & 1 \\ x & 0 \end{vmatrix} = -x \neq 0,$$

jer je $x = 0$ isključeno.

Izračunavanje novih koeficijenata

$$\bar{a}_{11} = a_{11}\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)^2 + 2a_{12}\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\xi}{\partial y}\right) + a_{22}\left(\frac{\partial\xi}{\partial y}\right)^2 =$$
$$= (0)^2 + 2(0)(-x) + x^2 = x^2,$$

$$\bar{a}_{22} = a_{11}\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)^2 + 2a_{12}\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\eta}{\partial y}\right) + a_{22}\left(\frac{\partial\eta}{\partial y}\right)^2 =$$
$$= (x)^2 + 2(0)(x)0 + x^2(0)^2 = x^2,$$

$$\bar{a}_{12} = a_{11}\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\right) + a_{12}\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial\eta}{\partial y} + \frac{\partial\xi}{\partial y}\frac{\partial\eta}{\partial x}\right) + a_{22}\frac{\partial\xi}{\partial y}\frac{\partial\eta}{\partial y} = 0,$$

$$\bar{a}_1 = a_1\frac{\partial\xi}{\partial x} + a_2\frac{\partial\xi}{\partial y} + a_{11}\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2} + 2a_{12}\frac{\partial^2\xi}{\partial x\partial y} + a_{22}\frac{\partial^2\xi}{\partial y^2} = 0,$$

$$\bar{a}_2 = a_1\frac{\partial\eta}{\partial x} + a_2\frac{\partial\eta}{\partial y} + a_{11}\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2} + 2a_{12}\frac{\partial^2\eta}{\partial x\partial y} + a_{22}\frac{\partial^2\eta}{\partial y^2} =$$
$$= 1(1) = 1.$$

Transformisana jednačina $u(x,y) \to v(\xi,\eta)$

$$\bar{a}_{11}\frac{\partial^2 v}{\partial\xi^2} + 2\bar{a}_{12}\frac{\partial^2 v}{\partial\xi\partial\eta} + \bar{a}_{22}\frac{\partial^2 v}{\partial\eta^2} + \bar{a}_1\frac{\partial v}{\partial\xi} + \bar{a}_2\frac{\partial v}{\partial\eta} + \bar{b}v + \bar{c} = 0 \quad \Rightarrow$$

dobija oblik

$$\frac{\partial v}{\partial\xi} + \frac{\partial^2 v}{\partial\eta^2} + \frac{1}{2\eta}\frac{\partial v}{\partial\eta} = 0,$$

gde smo iskoristili da je $x^2 = 2\eta$.

♡

Zad. 5.14.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 3\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + 2u = 0.$$

Rešenje.

$$a_{11} = 1, \quad a_{12} = -1, \quad a_{22} = 1, \quad a_1 = 3, \quad a_2 = 1,$$

$$D = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 1 - 1 = 0.$$

Kako je $D = 0$ u celoj ravni xy, to je jednačina **paraboličnog tipa**.

Karakteristična jednačina

$$a_{11}(y')^2 - 2a_{12}(y') + a_{22} = 0 \quad \Rightarrow \quad (y')^2 + 2(y') + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad (y')_{1,2} = -1.$$

Ima samo jedno rešenje – jedna karakteristika.

Karakteristike:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -1 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}y = -\mathrm{d}x \quad \Rightarrow \quad y = -x + c_1.$$

Transformacije

$$\begin{aligned} \xi &= x + y, \\ \eta &= \eta(x, y) = y. \end{aligned}$$

Kako je η proizvoljna funkcija, biramo je tako da bude što jednostavnija za dalje, ali da Jakobijan ne bude =0.

Parcijalni izvodi

$$\begin{gathered} \frac{\partial \xi}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial \xi}{\partial y} = 1, \quad \frac{\partial \eta}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \eta}{\partial y} = 1, \\ \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 \xi}{\partial x \partial y} = 0, \\ \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial y} = 0. \end{gathered}$$

Jakobijan

$$J = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$$

Izračunavanje novih koeficijenata

$$\begin{aligned} \bar{a}_{11} &= a_{11}\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2 + 2a_{12}\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right) + a_{22}\left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)^2 = \\ &= 1(1)^2 + 2(-1)(1) + 1^2 = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{a}_{22} &= a_{11}\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2 + 2a_{12}\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right) + a_{22}\left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)^2 = \\ &= (0)^2 - 2(0)(1) + 1^2 = 1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{a}_{12} &= a_{11}\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right) + a_{12}\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \xi}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial x}\right) + a_{22}\frac{\partial \xi}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial y} = \\ &= 1(0) + (-1)(1) + 1 = 0, \end{aligned}$$

$$\bar{a}_1 = a_1\frac{\partial\xi}{\partial x} + a_2\frac{\partial\xi}{\partial y} + a_{11}\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2} + 2a_{12}\frac{\partial^2\xi}{\partial x\partial y} + a_{22}\frac{\partial^2\xi}{\partial y^2} =$$
$$= 3\cdot 1 + 1\cdot 1 = 4,$$

$$\bar{a}_2 = a_1\frac{\partial\eta}{\partial x} + a_2\frac{\partial\eta}{\partial y} + a_{11}\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2} + 2a_{12}\frac{\partial^2\eta}{\partial x\partial y} + a_{22}\frac{\partial^2\eta}{\partial y^2} =$$
$$= 0 + 1 + 0 + 0 + 0 = 1.$$

Transformisana jednačina $u(x,y) \to v(\xi,\eta)$

$$\bar{a}_{11}\frac{\partial^2 v}{\partial\xi^2} + 2\bar{a}_{12}\frac{\partial^2 v}{\partial\xi\partial\eta} + \bar{a}_{22}\frac{\partial^2 v}{\partial\eta^2} + \bar{a}_1\frac{\partial v}{\partial\xi} + \bar{a}_2\frac{\partial v}{\partial\eta} + \bar{b}v + \bar{c} = 0 \quad\Rightarrow$$

dobija oblik

$$\frac{\partial^2 v}{\partial\eta^2} + 4\frac{\partial v}{\partial\xi} + \frac{\partial v}{\partial\eta} + 2v = 0.$$

♡

Zad. 5.15.

$$\sin^2 x\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2y\sin x\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} + y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

Rešenje.

$$a_{11} = \sin^2 x, \quad a_{12} = -y\sin x, \quad a_{22} = y^2, \quad a_1 = 0, \quad a_2 = 0$$
$$D = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = y^2\sin^2 x - (\sin^2 x)y^2 = 0.$$

Kako je $D = 0$ u celoj ravni xy, to je jednačina **paraboličnog tipa**.

Karakteristična jednačina

$$a_{11}(y')^2 - 2a_{12}(y') + a_{22} = 0 \quad\Rightarrow\quad (y')^2 - 2(-y\sin x)(y') + y^2 = 0 \quad\Rightarrow$$
$$(y')_{1,2} = -\frac{y}{\sin x}.$$

Ima samo jedno rešenje – jedna karakteristika.

Karakteristike:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{y}{\sin x} \quad\Rightarrow\quad \frac{\mathrm{d}y}{y} = -\frac{\mathrm{d}x}{\sin x} \quad\Rightarrow\quad y\mathrm{tg}\,\frac{x}{2} = c_1.$$

Ovde smo iskoristili

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sin x} = \int\frac{1}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}\,\mathrm{d}x = \int\frac{\sin^2\frac{x}{2} + \cos^2\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}\,\mathrm{d}x =$$
$$= \ln\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}.$$

Transformacije

$$\xi = y \mathrm{tg}\,\frac{x}{2},$$
$$\eta = \eta(x,y) = y.$$

Napomenimo da pošto je η proizvoljna funkcija, biramo je tako da bude što jednostavnija za dalji rad, ali da Jakobijan ne bude jednak 0. Najprostije bi bilo da je $\eta = const.$, međutim, tada je $J = 0$. Sledeće bi bile $\eta = x$ ili $\eta = y$. Mi smo uzeli ovu poslednju.

Parcijalni izvodi

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{1}{2} y \cos^{-2}\frac{x}{2}, \quad \frac{\partial \xi}{\partial y} = \mathrm{tg}\,\frac{x}{2}, \quad \frac{\partial \eta}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \eta}{\partial y} = 1,$$
$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \frac{1}{2} y \cos^{-3}\frac{x}{2}\sin\frac{x}{2}, \quad \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 \xi}{\partial x \partial y} = \frac{1}{2}\cos^{-2}\frac{x}{2},$$
$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial y} = 0.$$

Jakobijan

$$J = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} y \cos^{-2} & \mathrm{tg}\,\frac{x}{2} \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} y \cos^{-2} \neq 0.$$

Izračunavanje novih koeficijenata

$$\begin{aligned} \bar{a}_{11} &= a_{11}\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2 + 2a_{12}\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right) + a_{22}\left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)^2 = \\ &= \sin^2 x \left(\frac{1}{2} y \cos^{-2}\right)^2 + 2(-y\sin x)\frac{1}{2} y \cos^{-2}\mathrm{tg}\,\frac{x}{2} + y^2 \mathrm{tg}^{\,2}\frac{x}{2} = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{a}_{22} &= a_{11}\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2 + 2a_{12}\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right) + a_{22}\left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)^2 = \\ &= 0 + 0 + y^2 = \\ &= y^2 = \eta^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{a}_{12} &= a_{11}\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right) + a_{12}\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \xi}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial x}\right) + a_{22}\frac{\partial \xi}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial y} = \\ &= -y\sin x \frac{1}{2} y \cos^{-2}\frac{1}{2} + y^2 \mathrm{tg}\,\frac{1}{2} = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{a}_1 &= a_1 \frac{\partial \xi}{\partial x} + a_2 \frac{\partial \xi}{\partial y} + a_{11}\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + 2a_{12}\frac{\partial^2 \xi}{\partial x \partial y} + a_{22}\frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} = \\ &= \sin^2 x \left(\frac{1}{2} y \cos^{-3}\frac{1}{2}\sin\frac{1}{2}\right) + 2(-y\sin x)\frac{1}{2}\cos^{-2}\frac{1}{2} = \\ &= -2y\mathrm{tg}\,\frac{1}{2}\cos^2\frac{1}{2} = -2y\mathrm{tg}\,\frac{1}{2}\frac{1}{1+\mathrm{tg}^{\,2}\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Kako je (iz transformacija)

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}=\frac{\xi}{\eta},$$

to za $\bar{a}_1$ dobijamo

$$\bar{a}_1=-2\xi\frac{\eta^2}{\xi^2+\eta^2}. \tag{5.304}$$

$$\begin{aligned}\bar{a}_2&=a_1\frac{\partial\eta}{\partial x}+a_2\frac{\partial\eta}{\partial y}+a_{11}\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2}+2a_{12}\frac{\partial^2\eta}{\partial x\partial y}+a_{22}\frac{\partial^2\eta}{\partial y^2}=\\&=0+0+0+0+0=0.\end{aligned}$$

Transformisana jednačina $u(x,y)\to v(\xi,\eta)$

$$\bar{a}_{11}\frac{\partial^2 v}{\partial\xi^2}+2\bar{a}_{12}\frac{\partial^2 v}{\partial\xi\partial\eta}+\bar{a}_{22}\frac{\partial^2 v}{\partial\eta^2}+\bar{a}_1\frac{\partial v}{\partial\xi}+\bar{a}_2\frac{\partial v}{\partial\eta}+\bar{b}v+\bar{c}=0\quad\Rightarrow$$

dobija oblik

$$\frac{\partial^2 v}{\partial\eta^2}-\frac{2\xi}{\xi^2+\eta^2}\frac{\partial v}{\partial\xi}=0.$$

♡

Zad. 5.16.

Kao karakterističan primer parcijalne diferencijalne jednačine drugog reda, koja se svodi na Beselovu jednačinu, posmatrajmo jednačinu:

$$\Delta u+k^2u=0, \tag{5.305}$$

na krug ili unutar kruga (dve promenljive) ili, na cilindru ili unutar cilindra (tri promenljive). Nađimo njeno rešenje.

Rešenje.

Preko polarnih koordinata (dve promenljive: r,φ) jednačinu (5.305) možemo da napišemo u obliku:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}+k^2u=0. \tag{5.306}$$

Pretpostavimo, dalje, da rešenje u može da se predstavi u obliku:

$$u=R(r)\cdot\Phi(\varphi), \tag{5.307}$$

pa se jednačina (5.306) razlaže na dve obične diferencijalne jednačine:

$$\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}\right)+\left(-\frac{\lambda}{r^2}+k^2\right)R=0, \tag{5.308}$$

$$\Phi''+\lambda\Phi=0, \tag{5.309}$$

kao što smo ranije pokazali, jednačina (5.309) daje zavisnost $\lambda = n^2$. Uvedimo sada smenu $x = kr$, pa jednačina (5.308) postaje Beselova jednačina:

$$\frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x\,y') + \left(1 - \frac{n^2}{x^2}\right) y = 0, \tag{5.310}$$

$$R(r) = y(x) = y(kr). \tag{5.311}$$

U slučaju radijalne simetrije ($n = 0$) ona se svodi na Beselovu jednačinu nultog reda:

$$y'' + \frac{1}{x}y' + y = 0. \tag{5.312}$$

♡

Zad. 5.17.

Naći ono rešenje jednačine:

$$u_{tt} = a^2 u_{xx},$$

koje zadovoljava granične:

$$u(0,t) = 0, \quad u(l,t) = 0, \quad 0 \le x \le 1$$

i početne uslove:

$$u(x,0) = x, \quad u_t(x,0) = 0.$$

Rešenje.

Rešenje jednačine je oblika:

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[A_n \cos\left(\frac{\pi\, n}{l} at\right) + B_n \sin\left(\frac{\pi\, n}{l} at\right)\right] \sin\frac{\pi\, n}{l}x.$$

gde je

$$\begin{aligned}
A_n &= \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x)\cdot \sin\frac{n\pi x}{l}\cdot \mathrm{d}x = \frac{2}{l}\int_0^l x\cdot \sin\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x = \\
&= \frac{2}{l}\int_0^{n\pi} \frac{l}{n\pi}\cdot t\sin t\cdot \frac{l}{n\pi}\mathrm{d}t = \frac{2l}{n^2\pi^2}\int_0^{n\pi} t\sin t\mathrm{d}t = \\
&= \frac{2l}{n^2\pi^2}\left(\sin t - t\cdot \cos t\right)\Big|_0^{n\pi} = \frac{2l}{n^2\pi^2}\left(\sin n\pi - n\pi\cdot \cos n\pi - \sin 0 + 0\cdot \cos 0\right) = \\
&= \frac{2l}{n^2\pi^2}\cdot n\pi\cdot (-1)^{n+1} = \frac{2l}{n\pi}\cdot (-1)^{n+1}.
\end{aligned}$$

Traženi koeficijenti su oblika:

$$A_n = \frac{2l}{n\pi}\cdot(-1)^{n+1},$$

$$B_n = \frac{2}{\pi an}\int_0^l \psi(x)\cdot\sin\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi an}\int_0^l 0\cdot\sin\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x = 0.$$

Rešenje date parcijalne diferencijalne jednačine je oblika:

$$u(x,t) = \frac{2l}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\cos\frac{an\pi t}{l}\cdot\sin\frac{n\pi x}{l}.$$

♡

Zad. 5.18.

Naći ono rešenje jednačine:

$$u_{tt} = a^2 u_{xx},$$

koje zadovoljava granične:

$$u(0,t) = 0, \quad u(l,t) = 0, \quad 0 \le x \le l$$

i početne uslove:

$$u(x,0) = \pi - x, \quad u_t(x,0) = 0.$$

Rešenje.

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n}\left[1 + (-1)^{n+1}\left(1 - \frac{l}{\pi}\right)\right]\cos\frac{an\pi t}{l}\cdot\sin\frac{n\pi x}{l}.$$

♡

Zad. 5.19.

Naći ono rešenje jednačine:

$$u_{tt} = a^2 u_{xx},$$

koje zadovoljava granične:

$$u(0,t) = 0, \quad u(l,t) = 0, \quad 0 \le x \le l$$

i početne uslove:

$$u(x,0) = x + a, \quad u_t(x,0) = 0, \quad \text{gde je } a = const.$$

Rešenje.

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\pi} \left[(-1)^{n+1}(l+a) + a\right] \cos \frac{an\pi t}{l} \cdot \sin \frac{n\pi x}{l}.$$

♡

Zad. 5.20.
Naći ono rešenje jednačine:

$$u_{tt} = a^2 u_{xx},$$

koje zadovoljava granične:

$$u(0,t) = 0, \quad u(\ell,t) = 0, \quad 0 \le x \le \ell$$

i početne uslove:

$$u(x,0) = \begin{cases} \dfrac{h}{x_0} x, & 0 \le x \le x_0, \\[2ex] \dfrac{h(\ell - x)}{\ell - x_0}, & x_0 \le x \le \ell \end{cases}$$
$$u_t(\ell,t) = 0, \quad 0 \le x \le \ell.$$

Rešenje.

$$u(x,t) = \frac{2h\ell^2}{\pi^2 x_0(\ell - x_0)} \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{n\pi x_0}{\ell} \sin \frac{n\pi x}{\ell} \cos \frac{n\pi a t}{\ell}.$$

♡

Zad. 5.21.
Naći ono rešenje jednačine:

$$a^2 u_{xx} = u_t, \quad 0 < x < l, \quad 0 \le t, \tag{5.313}$$

koje zadovoljava početne:

$$u(x,0) = \varphi(x) = \begin{cases} x, & 0 \le x \le \frac{l}{2}; \\[2ex] l - x, & \frac{l}{2} \le x \le l \end{cases} \tag{5.314}$$

i granične uslove:

$$u(0,t) = 0, \quad u(l,t) = 0 \quad 0 \le t. \tag{5.315}$$

Rešenje.

$$C_n = \frac{2}{l}\left(\int\limits_0^{\frac{l}{2}} x \sin\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x + \int\limits_{\frac{l}{2}}^{l}(l-x)\sin\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x\right). \tag{5.316}$$

Za parne vrednosti n konstanta C_n je jednaka nuli, a za neparne

$$B_n = \begin{cases} \dfrac{4l}{n^2\pi^2}, & \text{za } n = 1, 5, 9, \ldots \\ -\dfrac{4l}{n^2\pi^2}, & \text{za } n = 3, 7, 11, \ldots \end{cases} \tag{5.317}$$

pa je konačno rešenje

$$u(x,t) = \frac{4l}{\pi^2}\left[\sin\frac{\pi x}{l}e^{-(\frac{a\pi}{l})^2 t} - \frac{1}{9}\sin\frac{3\pi x}{l}e^{-(\frac{3a\pi}{l})^2 t} + \ldots\right]. \tag{5.318}$$

♡

Zad. 5.22.

Naći pomeranja tačaka kružne membrane.

Rešenje.

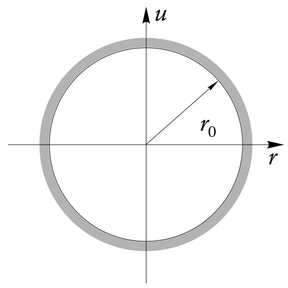
U ovom slučaju Delta operator izrazićemo preko polarnih koordinata, pa je jednačina (5.15)

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0. \tag{5.319}$$

Nepoznata funkcija u je $u = u(r,\varphi,t)$. U slučaju radijalne simetrije u ne zavisi od φ, pa je $u = u(r,t)$. Za ovaj slučaj polazna jednačina (5.15) dobija oblik

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}\right). \tag{5.320}$$

Pretpostavimo da je membrana fiksirana po obodu (iz čega slede granični uslovi), tj.



Slika 5.6: Kružna membrana

$$u(r_O, t) = 0, \quad \text{za } t \geq 0. \tag{5.321}$$

Ovde je r_O poluprečnik kružne membrane. Pored ovog pretpostavimo da je:
– početna vrednost pomeranja (početni uslov)

$$u(r, 0) = f(r) \quad \text{i} \tag{5.322}$$

– početna brzina (drugi početni uslov, koji se odnosi na izvod promenljive)

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = g(r). \tag{5.323}$$

Primenimo sada metod razdvajanja promenljivih, polazeći od pretpostavke da je

$$u(r, t) = R(r)T(t). \tag{5.324}$$

Pod ovom pretpostavkom polazna jednačina (5.320) rastavlja se na dve obične diferencijalne jednačine:

$$R^{''} + \frac{1}{r}R^{'} + k^2 R = 0, \tag{5.325}$$

$$\ddot{T} + c^2 k^2 G = 0, \tag{5.326}$$

gde je k konstanta, za sada neodređena. U prethodnim relacijama tačka iznad promenljive označava njen izvod po vremenu t, a $'$ izvod po promenljivoj r. Uveli smo i novu konstantu $\lambda^2 = c^2 k^2$.

Posmatrajmo sada prvu jednačinu. Uvedimo smenu $s = kr$ (s je nova promenljiva), pri čemu je

$$R^{'} = \frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}r} = k\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}s}, \tag{5.327}$$

$$R^{''} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(k\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}s}\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(k\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}s}\right)\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}r} = k^2\frac{\mathrm{d}^2R}{\mathrm{d}s^2}. \tag{5.328}$$

Zamenom ovih relacija u jednačinu (5.325) dobijamo

$$\frac{\mathrm{d}^2R}{\mathrm{d}s^2}+\frac{1}{s}\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}s}+R=0. \tag{5.329}$$

Ova jednačina predstavlja Beselovu jednačinu (3.45) (za $\nu=0$), čije je opšte rešenje (3.99)

$$R=C_1J_0(s)+C_2Y_0(s). \tag{5.330}$$

Ovde je J_0 Beselova funkcija prve vrste nultog reda, a Y_0 Beselova funkcija druge vrste nultog reda.

Kako je pomeranje tačaka membrane u uvek konačno, $Y_0\to\infty$ kada $s\to 0$ $\Rightarrow$ $C_2=0$. Jasno je da je $C_1\neq 0$, inače bi bilo $R\equiv 0$, što bi bilo trivijalno rešenje. Uzećemo, bez gubljenja u opštosti, da je $C_1=1$, odakle dobijamo

$$R=J_0(s)=J_0(kr). \tag{5.331}$$

Na granici $r=r_0$ imamo

$$u(r_0,t)=R(r_0)\cdot T(t)=0 \quad\Rightarrow\quad R(r_0)=0 \quad\Rightarrow\quad J_0(kr_0)=0. \tag{5.332}$$

Beselova funkcija J_0 ima beskonačno mnogo realnih korena $(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n,\ldots)$, pa iz jednačine $J_0(kr_0)=0$ sledi

$$\alpha_m=kr_0 \quad\Rightarrow\quad k=\frac{\alpha_m}{r_0}=k_m,\quad m=1,2,\ldots \tag{5.333}$$

Sada, zamenom ove relacije, dobijamo

$$R_m(r)=J_0(k_mr)=J_0\left(\frac{\alpha_m}{r_0}r\right). \tag{5.334}$$

Kako je

$$\lambda^2=c^2k^2=c^2k_m^2=\lambda_m^2, \tag{5.335}$$

to jednačina (5.326) postaje

$$\ddot{T}+\lambda_m^2T=0 \quad\Rightarrow\quad T_m(t)=a_m\cos\lambda_mt+b_m\sin\lambda_mt, \tag{5.336}$$

odakle dobijamo

$$u_m=T_m(t)R_m(r)=(a_m\cos\lambda_mt+b_m\sin\lambda_mt)\,J_0\left(\frac{\alpha_m}{r_0}r\right). \tag{5.337}$$

Odavde dobijamo za rešenje u

$$u=\sum_{m=1}^{\infty}u_m=\sum_{m=1}^{\infty}(a_m\cos\lambda_mt+b_m\sin\lambda_mt)\,J_0\left(\frac{\alpha_m}{r_0}r\right). \tag{5.338}$$

Potrebno je da se odrede još i konstante a_m i b_m. Za njihovo određivanje ostali su još neiskorišćeni početni uslovi. Iz prvog uslova (5.322) dobijamo

$$u(r,0) = \sum_{m=1}^{\infty} a_m J_0\left(\frac{\alpha_m}{r_0} r\right) = f(r), \tag{5.339}$$

odakle možemo da odredimo koeficijente a_m kao koeficijente Furije-Beselovog reda, koji predstavlja razvoj poznate funkcije $f(r)$, pa dobijamo

$$a_m = \frac{2}{r_0^2 J_1^2(\alpha_m)} \int_0^{r_0} r\, f(r) J_0\left(\frac{\alpha_m}{r_0} r\right) \mathrm{d}r, \quad m = 1, 2, \ldots \tag{5.340}$$

Na sličan način dobijamo i koeficijente b_m iz preostalog uslova (5.323)

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = g(r). \tag{5.341}$$

♡

Zad. 5.23.

Električni potencijal tačkastog izvora u homogenoj izotropnoj sredini zadovoljava Laplasovu jednačinu, koja u cilindričnom koordinatnom sistemu ima oblik

$$\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial r} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0.$$

Rešiti ovu jednačinu, uz dva granična uslova:
- konstantnost potencijala duž graničnih ravni sredine i
- konstantnost strujnog fluksa u pravcu upravnom na graničnu ravan.

Rešenje.

I u ovom slučaju rešenje potražimo metodom razdvajanja promenljivih

$$U = R(r)Z(z).$$

Zamenom u polaznu jednačinu dobijamo dve obične diferencijalne jednačine:

$$\begin{aligned} \frac{R''}{R} + \frac{1}{r}\frac{R'}{R} &= -m^2, \\ \frac{Z''}{Z} &= m^2, \end{aligned} \tag{5.342}$$

pri čemu je m^2 neka konstanta. Druga jednačina je homogena diferencijalna jednačina drugog reda sa konstantnim koeficijentima, čije je rešenje

$$Z(z) = C_1 e^{-mz} + C_2 e^{+mz}.$$

Prva jednačina je specijalni oblik Beselove jednačine nultog reda, čija su rešenja Beselove funkcije prve i druge vreste, nultog reda. Beselove funkcije druge vrste ne odgovaraju prirodi električnog potencijala tačkastog izvora, koji teži nuli u beskonačnosti, pa će traženo rešenje ove jednačine biti oblika

$$R(r) = J_0(mr).$$

Konačno rešenje je

$$U(r,z) = \left[C_1 e^{-mz} + C_2 e^{+mz}\right] J_0(mr). \tag{5.343}$$

Pošto konstanta m ne može da uzme sve vrednosti, a s obzirom na činjenicu da je u izrazu (5.342) uvedena kao m^2, potrebno je posmatrati njenu promenu u intervalu $(0,\infty)$, pa će se najopštiji oblik rešenja (5.343) dobiti integraljenjem po parametru m

$$U(r,z) = \int\limits_0^\infty \left[C_1 e^{-mz} + C_2 e^{+mz}\right] J_0(mr)\,\mathrm{d}m.$$

Za određivanje konstanit C_i koriste se napred navedeni granični uslovi.

$\heartsuit$

Zad. 5.24. Odrediti pomeranja tačaka pravougaone membrane.

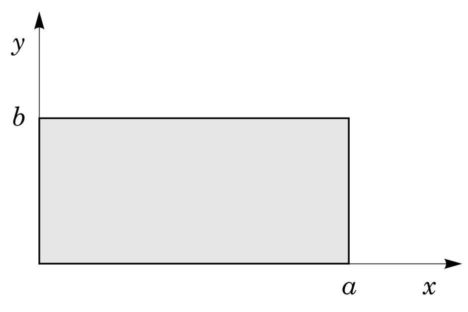
Rešenje.

U ovom slučaju polaznu jednačinu (5.15) predstavimo u Dekartovim koordinatama, pa je

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right), \tag{5.344}$$

uz granične

$$u = 0, \quad \text{(na granicama membrane za } \forall t \geq 0) \tag{5.345}$$



Slika 5.7: Pravougaona membrana

i početne uslove

$$u(x,y,0) = f(x,y), \tag{5.346}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = g(x,y). \tag{5.347}$$

I u ovom slučaju potražićemo rešenje primenom Furijeove metode

$$u(x,y,t) = F(x,y)T(t), \tag{5.348}$$

pa se jednačina (5.344) razdvaja na dve:

$$\frac{1}{c^2}\frac{\ddot{T}}{T} = \frac{1}{F}\left(F_{xx} + F_{yy}\right) = -\nu^2 \quad \Rightarrow$$

$$\ddot{T} + \lambda^2 T = 0 \quad \text{i} \tag{5.349}$$

$$F_{xx} + F_{yy} + \nu^2 F = 0. \tag{5.350}$$

Ovde smo uveli oznaku $c^2\nu^2 = \lambda^2$. Dalje, pretpostavimo da se i jednačina (5.350) može predstaviti u obliku

$$F(x,y) = X(x)Y(y). \tag{5.351}$$

Uz ovu pretpostavku, jednačina (5.350) postaje

$$Y(y)X_{xx}(x) + X(x)Y_{yy}(y) + \nu^2 XY = 0 \quad \Rightarrow \tag{5.352}$$

$$\frac{1}{X}\frac{\mathrm{d}^2X}{\mathrm{d}x^2} = -\frac{1}{Y}\left(\frac{\mathrm{d}^2Y}{\mathrm{d}y^2} + \nu^2 Y\right) = -k^2. \tag{5.353}$$

Odavde dobijamo

$$\frac{\mathrm{d}^2X}{\mathrm{d}x^2} + k^2 X = 0, \tag{5.354}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2Y}{\mathrm{d}y^2} + (\nu^2 - k^2)Y = 0. \tag{5.355}$$

Rešanja ovog sistema su

$$X'' + k^2 X = 0 \quad \Rightarrow \quad X = A\cos kx + B\sin kx, \tag{5.356}$$

$$Y'' + p^2 Y = 0 \quad \Rightarrow \quad Y = C\cos py + D\sin py. \tag{5.357}$$

Granični uslovi (5.346) postaju

$$\begin{aligned}
u(x,y,t) &= X(x)Y(y)T(t) \quad \Rightarrow \\
u|_{x=0} &= X(0)Y(y)T(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad X(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad A = 0, \\
u|_{x=a} &= X(a)Y(y)T(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad X(a) = 0 \quad \Rightarrow \quad B\sin kt = 0 \quad \Rightarrow \\
&\Rightarrow \quad k_m a = m\pi, \\
u|_{y=0} &= X(x)Y(0)T(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad Y(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad C = 0, \\
u|_{y=b} &= X(x)Y(b)T(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad Y(b) = 0 \quad \Rightarrow \quad D\sin pt = 0 \quad \Rightarrow \\
&\Rightarrow \quad p_n b = n\pi.
\end{aligned}$$

Bez gubljenja u opštosti možemo da uzmemo da je $B = 1$ i $D = 1$, pa dobijamo

$$X(x) = \sin\frac{m\pi x}{a} \quad \wedge \quad Y(y) = \sin\frac{n\pi y}{b}. \tag{5.358}$$

Sada, za funkciju F dobijamo

$$F_{mn} = \sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}. \tag{5.359}$$

Kako je

$$p^2 = \nu^2 - k^2, \quad \lambda = c\nu = c\sqrt{p^2 + k^2} \quad \Rightarrow$$

$$\lambda_{mn} c\sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2} = c\pi\sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2} \quad \Rightarrow$$

$$\lambda_{mn} = c\pi\sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2}. \tag{5.360}$$

Sada je rešenje jednačine (5.349)

$$T_{mn}(t) = B_{mn}\cos\lambda_{mn}t + B^*_{mn}\sin\lambda_{mn}t, \tag{5.361}$$

pa za $u_{mn}(x, y, t)$ dobijamo

$$u_{mn}(x, y, t) = (B_{mn}\cos\lambda_{mn}t + B^*_{mn}\sin\lambda_{mn}t)\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}, \tag{5.362}$$

odnosno, za ukupno rešenje u

$$u(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}(B_{mn}\cos\lambda_{mn}t + B^*_{mn}\sin\lambda_{mn}t)\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}. \tag{5.363}$$

Dakle, rešenje je dobijeno u obliku dvostrukog Furijeovog reda. Koeficijente određujemo iz početnih uslova (5.346) i (5.347)

$$u(x, y, 0) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} B_{mn}\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b} = f(x, y). \tag{5.364}$$

Ako uvedemo smenu

$$K_m(y) = \sum_{n=1}^{\infty} B_{mn}\sin\frac{n\pi y}{b}, \tag{5.365}$$

dobijamo

$$f(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} K_m(y)\sin\frac{m\pi x}{a}, \tag{5.366}$$

pa za fiksirano y dobijamo

$$K_m(y) = \frac{2}{a}\int_0^a f(x, y)\sin\frac{m\pi x}{a}\,\mathrm{d}x. \tag{5.367}$$

Dakle imamo

$$B_{mn} = \frac{2}{b} \int_0^b K_m(y) \sin \frac{n\pi y}{b} \, \mathrm{d}y, \tag{5.368}$$

pa dobijamo generalisanu Furijeovu formulu

$$B_{mn} = \frac{4}{ab} \int_0^b \int_0^a f(x,y) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \, \mathrm{d}x \mathrm{d}y. \tag{5.369}$$

Iz drugog uslova nalazimo

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} B_{mn}^* \lambda_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} = g(x,y) \quad \Rightarrow \tag{5.370}$$

$$B_{mn}^* = \frac{4}{ab} \int_0^b \int_0^a g(x,y) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \, \mathrm{d}x \mathrm{d}y. \tag{5.371}$$

♡

Zad. 5.25. Rešiti talasnu jednačinu

$$\Delta\psi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0, \tag{5.372}$$

pri čemu je nepoznata funkcija ψ funkcija skupa promenljivih $(\mathbf{r}, t)$, a $\mathbf{r} = \mathbf{r}(r, \varphi, \theta)$. r, φ i θ su sferne koordinate, t je vreme, a c konstanta.

Rešenje.

Rešenje potražimo primenom metode razdvajanja promenljivih, pretpostavivši da je ono oblika

$$\psi(\mathbf{r}, t) = P(\mathbf{r}) \cdot T(t). \tag{5.373}$$

Polazeći od (5.373), jednačina (5.372) postaje

$$T \cdot \Delta P - \frac{1}{c^2} P \cdot \ddot{T} = 0,$$

odnosno

$$\frac{\Delta P}{P} = \frac{1}{c^2} \frac{\ddot{T}}{T}.$$

Kako je leva strana funkcija samo od $\mathbf{r}$, a desna od t, to zaključujemo da ovi izrazi moraju da budu konstantni, tj.

$$\frac{\Delta P}{P} = \frac{1}{c^2} \frac{\ddot{T}}{T} = -k^2. \tag{5.374}$$

Dakle, polazna parcijalna diferencijalna jednačina (5.372), primenom ove metode, razdvaja se na dve diferencijalne jednačine (5.374):

$$\ddot{T} + \omega^2 T = 0, \quad (\omega = kc), \tag{5.375}$$

$$\Delta P + k^2 P = 0. \tag{5.376}$$

Rešenje prve jednačine (5.375) (diferencijalna jednačina drugog reda sa konstantnim koeficijentima) je oblika

$$T = C_1 \sin \omega t + C_2 \cos \omega t. \tag{5.377}$$

Posmatrajmo sada jednačinu (5.376). Kako smo pretpostavili da je $\mathbf{r}$ funkcija sfernih koordinata, to ova jednačina može da se prikaže u obliku (videti oblik Delta operatora u sfernim koordinatama)

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial P}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\frac{\partial P}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 P}{\partial \varphi^2} + k^2 P = 0. \tag{5.378}$$

Pri rešavanju ove parcijalne diferencijalne jednačine ponovo primenimo metodu razdvajanja promenljivih, tj. pretpostavimo da je tražena funkcija P funkcija oblika

$$P = R(r)\cdot \Theta(\theta)\cdot \Phi(\varphi). \tag{5.379}$$

Zamenom (5.379) u (5.378) i deljenjem sa $R\Theta\Phi$ dobijamo

$$\frac{1}{r^2 R}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}\right) + \frac{1}{r^2\Theta \sin\theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\sin\theta\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}\theta}\right) + \frac{1}{r^2\Phi\sin^2\theta}\frac{\mathrm{d}^2\Phi}{\mathrm{d}\varphi^2} + k^2 = 0. \tag{5.380}$$

Ako pomnožimo ovu jednačinu sa $r^2\sin^2\theta$, zapažamo da član $\frac{1}{\Phi}\frac{\mathrm{d}^2\Phi}{\mathrm{d}\varphi^2}$ zavisi samo od φ, dok preostali članovi zavise od r i θ. Na osnovu ovog, kao i u prethodnom sličnom slučaju, zaključujemo da je:

$$\frac{1}{\Phi}\frac{\mathrm{d}^2\Phi}{\mathrm{d}\varphi^2} = -m^2, \tag{5.381}$$

$$-\frac{\sin^2\theta}{R}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(\varrho^2\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}\right) - \frac{\sin\theta}{\Theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\sin\theta\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}\theta}\right) - k^2 r^2\sin^2\theta = -m^2, \tag{5.382}$$

gde je m konstanta.

Iz (5.381) sledi da je funkcija Φ oblika

$$\Phi = C_3 \sin m\varphi + C_4 \cos m\varphi. \tag{5.383}$$

Zamenom (5.383) u (5.380) dobijamo

$$\frac{1}{r^2 R}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}\right) + \frac{1}{r^2\Theta \sin\theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\sin\theta\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}(-m^2) + k^2 = 0.$$

Pomnoživši poslednju relaciju sa r^2 dobijamo dva sabirka, jedan je funkcija samo od r, a drugi samo od θ

$$\left[\frac{1}{R}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}\right)+k^2r^2\right]+\left[\frac{1}{\Theta\sin\theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\sin\theta\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}\theta}\right)-\frac{m^2}{\sin^2\theta}\right]=0.$$

Ova jednačina se sada razdvaja na dve obične diferncijalne jednačine:

$$\frac{1}{\Theta\sin\theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\sin\theta\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}\theta}\right)-\frac{m^2}{\sin^2\theta}=const.=-l(l+1) \tag{5.384}$$

$$\frac{1}{R}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}\right)+k^2r^2=const.=l(l+1). \tag{5.385}$$

Prva jednačina (5.384), ako uvedemo smenu $\cos\theta=z$, svodi se na Ležandrovu jednačinu (3.21)

$$(1-z^2)\frac{\mathrm{d}^2\Theta}{\mathrm{d}z^2}-2z\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}z}+\left[l(l+1)-\frac{m^2}{1-z^2}\right]\Theta=0,$$

čije je rešenje oblika

$$\Theta=C_5P_l^m(z)+C_6Q_l^m(z). \tag{5.386}$$

Druga jednačina (5.385), uvodeći novu funkciju $u=R\sqrt{r}$, postaje

$$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}r^2}+\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}r}+\left[k^2-\frac{(l+1/2)^2}{r^2}\right]u=0,$$

a to je Beselova jednačina (3.45), čije je rešenje oblika

$$u=R\sqrt{r}=C_7J_{l+1/2}(kr)+C_8Y_{l+1/2}(kr). \tag{5.387}$$

Na osnovu (5.386), (5.383) i (5.387) možemo da napišemo rešenje polazne jednačine(5.372)

$$\begin{aligned}\psi&=(C_1\sin\omega t+C_2\cos\omega t)\cdot(C_3\sin m\varphi+C_4\cos m\varphi)\cdot\\&\cdot\left[C_5P_l^m(\cos\theta)+C_6Q_l^m(\cos\theta)\right]\cdot\frac{1}{\sqrt{r}}\left[C_7J_{l+1/2}(kr)+C_8Y_{l+1/2}(kr)\right].\end{aligned} \tag{5.388}$$

Konstante C_i, $(i=1,2,\ldots,8)$ određuju se iz početnih i graničnih uslova.

5.9 Dodatak

Pri rešavanju parcijalnih diferencijalnih jednačina drugog reda od posebnog značaja je oblik funkcije $f(r)$, gde je $r^2=x_ix_i$, $i=1,2,\ldots,n$, $n>1$, koja zadovoljava Laplasovu jednačinu[20] :

$$\Delta f(r)=0,\quad \text{ili}\quad \delta_{ij}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}=0.$$

[20] Izvođenje ovog uopštenja predložio je i uradio prof. J. Jarić.

Kako je

$$\frac{\partial r}{\partial x_i} = \frac{x_i}{r}, \quad \frac{\partial^2 r}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\delta_{ij}}{r} - \frac{x_i x_j}{r^2},$$

tada je

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x_i} &= f^{'}(r)\frac{\partial r}{\partial x_i} = f^{'}(r)\frac{x_i}{r}, \\
\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} &= f^{''}\frac{x_i x_j}{r^2} + \frac{f^{'}}{r}\left[\delta_{ij} - \frac{x_i x_j}{r^2}\right], \\
f^{'}(r) &= \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}r}; \quad f^{''}(r) = \frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}r^2} \quad \Rightarrow \\
\Delta f &= f^{''}(r) + \frac{n-1}{r}f^{'}(r) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}f^{'}}{f^{\prime}} = \frac{-n+1}{r}\mathrm{d}r \quad \Rightarrow \\
f^{'}(r) &= C\,r^{1-n}, \quad C = \text{const.} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}f = \frac{C}{r^{n-1}}\mathrm{d}r.
\end{aligned}$$

Analiza

Razlikovaćemo dva slučaja:
1) za $n = 2$

$$\mathrm{d}f = C\frac{\mathrm{d}r}{r} \Rightarrow f = C\ln r + D,$$

i
2) za $n > 2$

$$f = \frac{C}{2-n}r^{2-n} + D.$$

Napomenimo da se u ovom dodatku koristila konvencija o sabiranju po ponovljenim indeksima.

Glava 6

Numeričke metode. Konačne razlike i konačni elementi

6.1 Metoda konačnih razlika

Osnovna ideja metode konačnih razlika je u zameni izvoda posmatrane funkcije njihovim približnim vrednostima. U realizaciji te ideje uvode se tačke, odnosno mreža čvorova, u kojima se rešenje traži.

Osnovnu ideju metode konačnih razlika i njenu realizaciju prikazaćemo na primerima rešavanja paraboličnih, hiperboličnih i eliptičnih parcijalnih diferencijalnih jednačina.

6.1.1 Metoda konačnih razlika za parabolične parcijalne diferencijalne jednačine

Mreža u ravni xt je skup tačaka $(x_n, t_j) = (x_0+nh, t_0+jk)$, gde su n i j celi brojevi, (x_0, t_0) referentna tačka, a (x_n, t_j) se zovu tačke mreže ili čvorovi. Pozitivni brojevi h i k su koraci x i t mreže u x i t pravcu, redom. Ako su h i k konstante mreža je uniformna, a ako je $h = k$ onda je mreža kvadratna. Ako se koristi kompaktna oznaka

$$u_{nj} = u(x_n, t_j) \tag{6.1}$$

može da se piše

$$u_t(x_n, t_j) = \frac{u_{n,j+1} - u_{nj}}{k} + O(k) \tag{6.2}$$

$$u_{xx}(x_n, t_j) = \frac{u_{n+1,j} - 2u_{nj} + u_{n-1,j}}{h^2} + O(h^2) \equiv \frac{\delta_x^2 u_{nj}}{h^2} + O(h^2) \tag{6.3}$$

gde je uveden diferencni operator razlike δ_x^2 analogno diferencijalnom operatoru $\partial^2/\partial x^2$. Jednačina (6.2) je dvonivoska (po t), jer uključuje samo dve uzastopne j vrednosti.

Neka je oblast Ω u ravni xt pokrivena mrežom (x_n, t_j). Ako se svi izvodi u parcijalnoj diferencijalnoj jednačini

$$L[u] = f \quad (x, t) \in \Omega \tag{6.4}$$

zamene njihovim konačnim razlikama dobija se jednačina konačnih razlika

$$D[U_{nj}] = f_{nj} \quad (x_n, t_j) \in \Omega \tag{6.5}$$

Kažemo da je jednačina (6.4) diskretizovana da bi se dobio oblik (6.5) čije rešenje U_{nj} približno predstavlja nepoznatu $u(x, t)$ u čvorovima mreže (x_n, t_j).

6.1.2 Konzistentnost i konvergencija

Da bi se diskretizacijom dobila dobra aproksimacija, rešenje jednačine (6.4) treba što približnije da zadovolji jednačinu (6.5), kada su h i k dovoljno mali. Pod lokalnom greškom zaokrugljavanja se podrazumeva razlika

$$T_{nj} = D[u_{nj}] - f_{nj}. \tag{6.6}$$

Jednačina konačnih razlika (6.5) je konzistentna sa parcijalnom diferencijalnom jednačinom (6.4) ako je

$$\lim_{k,h \to 0} T_{nj} = 0. \tag{6.7}$$

Osim konzistentnosti, potrebno je da se tačnost približnog rešenja povećava kada $h, k \to 0$. Ako je U_{nj} tačno rešenje jednačine (6.5), a u_{nj} rešenje (6.4) u tački (x_n, t_j), greška diskretizacije je definisana kao razlika $U_{nj} - u_{nj}$. Za metodu konačnih razlika se kaže da je konvergentna ako je

$$\lim_{h,k \to 0} |U_{nj} - u_{nj}| = 0 \quad (x_n, t_j) \in \Omega. \tag{6.8}$$

6.1.3 Stabilnost

Neka je U_{nj} rešenje jednačine (6.5), sa početnim vrednostima U_{n0} i nekim graničnim vrednostima. Neka je V_{nj} rešenje sistema jednačina konačnih razlika, koji se razlikuje od (6.5) samo u početnim vrednostima, tj. važi $V_{n0} \equiv U_{n0} + E_{n0}$, gde je E_{n0} "greška", odnosno početna razlika (poremećaj). Može se pokazati da E_{n0} propagira, sa rastućim j, prema homogenoj parcijalnoj diferencijalnoj jednačini, sa zadanim homogenim graničnim uslovima:

$$D[E_{nj}] = 0.$$

Kada se jednačina konačnih razlika (6.5) primeni da bi se približno odredilo $u(x, T)$ za fiksno $T = t_o + jk$, jasno je da $h, k \to 0$ zahteva da $j \to \infty$. Takođe, ako se jednačina konačnih razlika (6.5) primeni za fiksnu mrežu da bi se približno odredilo $u(x_n, t_j)$ za rastuće t_j, opet se dobija da $j \to \infty$. Za parcijalne diferencijalne jednačine sa ograničenim rešenjem, kaže se da je rešenje jednačine konačnih razlika (6.5) stabilno ako je E_{nj} uniformno ograničeno po n kada $j \to \infty$, tj. da važi

$$|E_{nj}| < M \quad (j > J) \tag{6.9}$$

gde je M proizvoljna konstanta, a J pozitivan ceo broj. Ako su h i k funkcionalno zavisni da bi važilo (6.9), onda je rešenje jednačine konačnih razlika uslovno stabilno. Stabilnost rešenja jednačine konačnih razlika po pravilu znači i njegovu konvergentnost.

Definišimo i matrični kriterijum stabilnosti. U tom cilju razmatramo granični problem sa početnim uslovom sa N čvorova u x pravcu i definišemo vektor-kolonu grešaka na nivou j, $\mathbf{E}_j = (E_{1j}, \ldots, E_{Nj})^T$. Za dvonivosku metodu konačnih razlika greške na nivoima j i $j+1$ su povezane izrazom

$$\mathbf{E}_{j+1} = \mathbf{C}\mathbf{E}_j, \tag{6.10}$$

gde je $\mathbf{C}$ matrica reda $N \times N$. Neka $\rho(\mathbf{C})$, spektralni radijus matrice $\mathbf{C}$, označava najveću sopstvenu vrednost matrice $\mathbf{C}$. U tom slučaju može se formulisati matrični kriterijum stabilnosti:

> *dvonivoska metoda konačnih razlika za granični problem sa početnim uslovom sa ograničenim rešenjem je (matrično) stabilna, ako je* $\rho(\mathbf{C}) \leq 1$.

Matrični kriterijum je neophodan uslov za stabilnost dvonivoske metode konačnih razlika, a postaje i dovoljan uslov ako je $\mathbf{C}$ simetrična ili skoro simetrična matrica, u kojoj su sve sopstvene vrednosti realne.

6.1.4 Parabolične jednačine - primena na jednačini difuzije

Jednodimenzionalna jednačina difuzije

$$u_t = a^2 u_{xx} \tag{6.11}$$

se koristi kao tipična parabolična parcijalna diferencijalna jednačina za koju ćemo izvesti odgovarajuću jednačinu konačnih razlika. Za mrežu $(x_n, t_j) = (nh, jk)$ postoje više mogućih jednačina konačnih razlika, a ovde se navode tri najčešće korišćene dvonivoske jednačine, čije se rešenje, koje se zna u koraku j, eksplicitno ili implicitno koristi za novo rešenje u koraku $j+1$:

1) eksplicitna metoda ("razlika unapred")

$$\frac{U_{n,j+1} - U_{nj}}{k} = a^2 \frac{U_{n+1,j} - 2U_{nj} + U_{n-1,j}}{h^2} \tag{6.12}$$

ili skraćeno

$$U_{n,j+1} = (1 + r\delta_x^2)U_{nj} \quad (r = a^2k/h^2);$$

2) implicitna metoda razlika ("razlika unazad")

$$\frac{U_{n,j+1} - U_{nj}}{k} = a^2 \frac{U_{n+1,j+1} - 2U_{n,j+1} + U_{n-1,j+1}}{h^2} \tag{6.13}$$

ili skraćeno

$$(1 - r\delta_x^2)U_{n,j+1} = U_{nj} \quad (r = a^2k/h^2);$$

3) implicitna (Krenk - Nikolson-ova)[1]

$$\frac{U_{n,j+1} - U_{nj}}{k} = \frac{a^2}{2} \frac{\delta_x^2 U_{nj} + \delta_x^2 U_{n,j+1}}{h^2} \tag{6.14}$$

ili skraćeno

$$(1 - \frac{r}{2}\delta_x^2)U_{n,j+1} = (1 + \frac{r}{2}\delta_x^2)U_{nj}.$$

Implicitne metode su bezuslovno stabilne sa lokalnim greškama zaokrugljavanja $O(k + h^2)$ za metodu razlike unazad i $O(k^2 + h^2)$ za metodu Krank - Nikolsonove, dok je eksplicitna metoda uslovno stabilna ($r \leq 1/2$) i ima lokalnu grešku zaokrugljavanja $O(k + h^2)$.

Za dvodimenzionalnu jednačinu difuzije

$$u_t = a^2(u_{xx} + u_{yy}) \tag{6.15}$$

mreža je $(x_m, y_n, t_j) = (mh, nh, jk)$ i $U_{mnj} \approx u_{mnj} = u(x_m, y_n, t_j)$. Jednačine, analogno prethodnim, su:

$$U_{mn,j+1} = [1 + r(\delta_x^2 + \delta_y^2)]U_{mnj} \tag{6.16}$$

$$[1 - r(\delta_x^2 + \delta_y^2)]U_{mn,j+1} = U_{mnj} \tag{6.17}$$

$$[1 - \frac{r}{2}(\delta_x^2 + \delta_y^2)]U_{mn,j+1} = [1 + \frac{r}{2}(\delta_x^2 + \delta_y^2)]U_{mnj} \tag{6.18}$$

Lokalne greške zaokrugljavanja i stabilnost su iste kao u slučaju jednodimenzionalne jednačine difuzije, s tim da je eksplicitna metoda stabilna za $r \leq 1/4$.

Pod uslovom da je stabilna, eksplicitna metoda ima značajnu prednost nad implicitnom metodom, jer direktno daje rešenje korak-po-korak. Implicitne metode, iako bezuslovno stabilne, zahtevaju inverziju odgovarajućih matrica u svakom vremenskom koraku, odnosno rešavanje odgovarajućih sistema jednačina, što zahteva znatno veći kompjuterski kapacitet.

[1] Crank-Nicolson

6.1.5 Eksplicitna metoda konačnih razlika

Sada ćemo detaljnijom analizom pokazati da važe izrazi dati za eksplicitnu metodu konačnih razlika, uključujući procenu greške i uslova stabilnosti. U tom cilju ćemo napisati izraze za u_t i u_{xx} dobijene razvojem funkcije $u(x,t)$ u Tejlorov [2] red:

$$u(x,t+k) = u(x,t) + u_t(x,t)k + u_{tt}(x,\tilde{t})\frac{k^2}{2}, \tag{6.19}$$

odnosno

$$u_{n,j+1} = u_{nj} + u_t(x_n,t_j)k + u_{tt}(x_n,\tilde{t}_j)\frac{k^2}{2}, \tag{6.20}$$

odakle sledi

$$u_t(x_n,t_j) = \frac{u_{n,j+1} - u_{nj}}{k} - u_{tt}(x_n,\tilde{t}_j)\frac{k}{2} \tag{6.21}$$

gde je $u_{tt}(\tilde{x}_n,\tilde{t}_j)\frac{k}{2} = O(k)$ lokalna greška zaokrugljavanja.

Izraz za u_{xx} se takođe dobija razvojem funkcije $u(x,t)$ u Tejlorov red:

$$\begin{aligned} u(x+h,t) = u(x,t) + u_x(x,t)h + u_{xx}(x,t)\frac{h^2}{2} + \\ + u_{xxx}(x,t)\frac{h^3}{6} + u_{xxxx}(\tilde{x},t)\frac{h^4}{24} \end{aligned} \tag{6.22}$$

gde je $x < \tilde{x} < x+h$; odnosno

$$\begin{aligned} u(x-h,t) = u(x,t) - u_x(x,t)h + u_{xx}(x,t)\frac{h^2}{2} - \\ - u_{xxx}(x,t)\frac{h^3}{6} + u_{xxxx}(\bar{x},t)\frac{h^4}{24} \end{aligned} \tag{6.23}$$

gde je $x - h < \bar{x} < x$. Sabiranjem se dobija:

$$u_{n+1,j} + u_{n-1,j} = 2u_{n,j} + h^2 u_{xx}(x_n,t_j) + \frac{h^4}{24}[u_{xxxx}(\tilde{x},t) + u_{xxxx}(\bar{x},t)]$$

odakle sledi:

$$\begin{aligned} u_{xx}(x_n,t_j) &= \frac{u_{n+1,j} - 2u_{nj} + u_{n-1,j}}{h^2} + \frac{h^2}{12}u_{xxxx}(\hat{x},t) = \\ &= \frac{\delta_x^2 u_{nj}}{h^2} + O(h^2) \end{aligned} \tag{6.24}$$

[2] Taylor Brook (1685-1731), engleski matematičar. Glavno delo mu je "Methodus incrementorum directa et inversa" iz 1715. U njemu daje formulu za razvoj funkcije $f(x)$ za vrednost $(x+h)$ blisku vrednosti x. U ovom radu bavio se i singularnim rešenjima diferencijalnih jednačina, a dao je i jedan od prvih zadataka matematičke fizike: određivanje oscilovanja žice koja treperi. Razvoj funkcije u red koristio je i u metodama za numeričko rešavanje jednačina višeg reda.

gde je $\bar{x} < \hat{x} < \tilde{x}$. Time je ujedno i pokazano da je lokalna greška zaokrugljavanja $O(k+h^2)$. Sada se može pokazati da je lokalna greška zaokrugljavanja $O(k^2+h^2)$ ako je $k = h^2/6a^2$, gde je a koeficijent difuzije. U tom cilju pišemo sledeći izraz:

$$(u_t - a^2 u_{xx})_{nj} = \frac{u_{n,j+1} - u_{nj}}{k} - a^2 \frac{\delta_x^2 u_{nj}}{h^2} - \frac{k}{2} u_{tt}(x_n, \bar{t_j}) + a^2 \frac{h^2}{12} u_{xxxx}(\bar{x_n}, t_j) \tag{6.25}$$

gde je $t_j < \bar{t_j} < t_{j+1}$ i $x_{n-1} < \bar{x_n} < x_{n+1}$. Greška rešenja je

$$T_{nj} = \frac{k}{2} u_{tt}(x_n, \bar{t_j}) - a^2 \frac{h^2}{12} u_{xxxx}(\bar{x_n}, t_j) = O(k+h^2) \tag{6.26}$$

ako su u_{tt} i u_{xxxx} ograničeni. Primenom izraza za Tejlorov red i uslova $(u_t - a^2 u_{xx})_{nj} = 0$ dobija se

$$\frac{u_{n,j+1} - u_{nj}}{k} - a^2 \frac{\delta_x^2 u_{nj}}{h^2} = \left[\frac{k}{2} u_{tt} - a^2 \frac{h^2}{12} u_{xxxx}\right]_{nj} + O(k^2) + O(h^4) \tag{6.27}$$

jer je $u_t = a^2 u_{xx}$, $u_{tt} = a^2 u_{xxt} = a^2 (u_t)_{xx} = a^2 (a^2 u_{xx})_{xx} = a^4 u_{xxxx}$, što pokazuje da se $\left[\frac{k}{2} u_{tt} - a^2 \frac{h^2}{12} u_{xxxx}\right]_{nj}$ može pisati kao

$$\left(\frac{k}{2} a^4 - a^2 \frac{h^2}{12}\right) u_{xxxx}(x_n, t_j), \tag{6.28}$$

što je 0 za $k = h^2/6a^2$.

Sada ćemo da primenimo matrični kriterijum stabilnosti da bismo pokazali da je eksplicitna metoda stabilna akko $r \leq 1/2$. Kao primer ćemo da koristimo granični problem:

$$\begin{aligned} u_t = a^2 u_{xx} & \quad 0 < x < 1, \quad t > 0 \\ u(x,0) = f(x) & \quad 0 < x < 1 \\ u(0,t) = u(1,t) = 0 & \quad t > 0 \end{aligned} \tag{6.29}$$

Neka je $(x_n, t_j) = (nh, jk) \quad (n = 0, 1, \ldots, N; j = 0, 1, 2 \ldots)$ sa $Nh = 1$, i neka je vektor-kolona $\mathbf{U}_j$ definisan kao

$$\mathbf{U}_j = [U_{1j}, \ldots, U_{N-1,j}]^T.$$

Eksplicitna metoda se može izraziti u matričnom obliku kao:

$$\mathbf{U}_{j+1} = \mathbf{C}\mathbf{U}_j \quad (j = 0, 1, 2, \ldots), \tag{6.30}$$

gde je $\mathbf{U}_0 = [f_1, f_2, \ldots, f_{N-1}]^T$, a $\mathbf{C}$ tridijagonalna kvadratna matrica reda $N-1$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1-2r & r & \ldots & \ldots & \ldots & 0 \\ r & 1-2r & r & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & r & 1-2r & r & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & r \\ \ldots & 0 & \ldots & \ldots & r & 1-2r \end{bmatrix}$$

Pretpostavimo da je u vremenskom koraku j uvedena greška E_{nj} u x_n $(n = 1, \ldots, N-1)$, tako da rešenje jednačine (6.30) postaje $\mathbf{U}_j + \mathbf{E}_j$, gde je $\mathbf{E}_j$ vektor-kolona čija je n-ta kolona komponenta E_{nj}. Tada važi

$$\mathbf{U}_{j+1} + \mathbf{E}_{j+1} = \mathbf{C}\mathbf{U}_j + \mathbf{C}\mathbf{E}_j \quad \text{ili} \quad \mathbf{E}_{j+1} = \mathbf{C}\mathbf{E}_j \tag{6.31}$$

odnosno posle m koraka

$$\mathbf{E}_{j+m} = \mathbf{C}^m \mathbf{E}_j \tag{6.32}$$

Neka su $\lambda_1, \ldots, \lambda_{N-1}$ i $\mathbf{V}_1, \ldots, \mathbf{V}_{N-1}$ sopstvene vrednosti i pridruženi linearno nezavisni sopstveni vektori simetrične matrice $\mathbf{C}$. Ako se $\mathbf{E}_j$ napiše kao linearna kombinacija $\mathbf{V}_k$:

$$\mathbf{E}_j = \sum_{k=1}^{N-1} a_k \mathbf{V}_k \tag{6.33}$$

i ako se iskoristi

$$\mathbf{C}\mathbf{V}_k = \lambda_k \mathbf{V}_k \tag{6.34}$$

dobija se

$$\mathbf{E}_{j+m} = \sum_{k=1}^{N-1} \lambda_k^m a_k \mathbf{V}_k \tag{6.35}$$

Jednačina (6.35) pokazuje da greška E_{nj} ostaje ograničena akko je $|\lambda_k| \leq 1$ za $k = 1, \ldots, N-1$. Znajući da su sopstvene vrednosti realne simetrične trougaone matrice $N \times N$ sve u intervalu $(p - |2q|, p + |2q|)$, gde je $p = 1 - 2r$, $q = r$ dobija se

$$\lambda_{max} \approx (1 - 2r) + |2r| = 1, \tag{6.36}$$

$$\lambda_{min} \approx (1 - 2r) - |2r| = 1 - 4r, \tag{6.37}$$

odakle sledi $1 - 4r \geq -1$, tj. $r \leq 1/2$.

6.1.6 Program

Jednostavnost metode konačnih razlika ćemo ilustrovati računarskim programom kojim je rešen problem

$$u_t = u_{xx} \quad 0 < x < 1 \quad t > 0, \tag{6.38}$$

$$u(x,0) = 100\sin(\pi x) \quad 0 < x < 1, \tag{6.39}$$

$$u(0,t) = u(1,t) = 0 \quad t > 0. \tag{6.40}$$

Za $t = 0,5$ rezultat ćemo uporediti sa tačnim rešenjem: $u = 100e^{-\pi^2 t}\sin(\pi\, x)$. Primena eksplicitne metode se svodi na korišćenje izraza (6.12), dok je za primenu implicitnih metoda neophodna dodatna analiza. Ako uvedemo težinski faktor W, možemo da napišemo:

$$U_{n,j+1} - U_{nj} = r[(1 - W)\delta_x^2 U_{nj} + W\delta_x^2 U_{n,j+1}] \tag{6.41}$$

što se svodi na metodu unazad za $W = 1$, a na metodu Krank-Nikolsonove za $W = 0,5$. Ubacivanjem konturnih i početnih uslova u (6.41) dobijamo tridijagonalni sistem jednačina:

$$\begin{bmatrix} 1+2Wr & -Wr & 0 & 0 & 0 \\ -Wr & 1+2Wr & -Wr & 0 & 0 \\ 0 & -Wr & 1+2Wr & -Wr & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & -Wr & 1+2Wr & -Wr \\ 0 & 0 & 0 & -Wr & 1+2Wr \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{1,j+1} \\ U_{2,j+1} \\ U_{3,j+1} \\ \dots \\ U_{N-2,j+1} \\ U_{N-1,j+1} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \\ \dots \\ D_{N-2} \\ D_{N-1} \end{bmatrix} \tag{6.42}$$

gde je

$$D_n = U_{nj} + (1-W) r \delta_x^2 U_{nj} \quad (n = 2, 3, \dots, N-2), \tag{6.43}$$

$$D_1 = U_{1j} + (1-W) r \delta_x^2 U_{1j} + WrU_{0,j+1}, \tag{6.44}$$

$$D_{N-1} = U_{N-1,j} + (1-W) r \delta_x^2 U_{N-1,j} + WrU_{N,j+1}. \tag{6.45}$$

Programi za implicitnu i eksplicitnu metodu su dati u daljem tekstu, kao i odgovarajući rezultati. Kod eksplicitne metode korišćeno je deset koraka, a parametar r je 1/6, odnosno 1/2, dok je kod implicitne metode $W = 0,5$ odnosno $W = 1$, parametar $r = 1/2$, a broj koraka takođe 10.

Rezultati pokazuju najbolje slaganje za $r = 1/6$, kod eksplicitne metode.

$W = .50$			$W = 1.00$		
$N = 10$	$VK = .005000$		$N = 10$	$VK = .005000$	
$T = .50$	NUMERICKI	TAČNO	$T = .50$	NUMERICKI	TAČNO
$Z = .0$	.000000	.000000	$Z = .0$	.000000	.000000
$Z = .1$	.231190	.222242	$Z = .1$	.259880	.222242
$Z = .2$	.439749	.422730	$Z = .2$	.494321	.422730
$Z = .3$	.605263	.581837	$Z = .3$	.680375	.581837
$Z = .4$	.711529	.683991	$Z = .4$	.799828	.683991
$Z = .5$	.748146	.719190	$Z = .5$	.840989	.719190
$Z = .6$	.711529	.683991	$Z = .6$	.799828	.683991
$Z = .7$	.605263	.581837	$Z = .7$	.680375	.581837
$Z = .8$	.439749	.422729	$Z = .8$	.494321	.422729
$Z = .9$	.231190	.222242	$Z = .9$	.259880	.222242
$Z = 1.0$	.000000	.000000	$Z = 1.0$	.000000	.000000

```
      PROGRAM i1djd
      DIMENSION a(101) , b(101) , c(101) , d(101) , u(0:101)
      OPEN (1,FILE='ULAZ')
      OPEN (2,FILE='IZLAZ')
      pi = 4.*atan(1.)
      READ (1,99005) n , vk , w
      DO 100 i = 0 , n
         h = 1./n
         z = i*h
         u(i) = 100.*sin(pi*z)
 100  CONTINUE
      l = n - 1
 200  DO 300 i = 1 , l
         a(i) = -w*vk*n*n
         b(i) = 1. + 2.*w*vk*n*n
         c(i) = -w*vk*n*n
         d(i) = u(i) + (1-w)*vk*n*n*(u(i+1)-2*u(i)+u(i-1))
 300  CONTINUE
      CALL tridi(a,b,c,d,l)
      t = t + vk
      DO 400 i = 1 , n - 1
         u(i) = d(i)
 400  CONTINUE
      u(0) = 0.
      u(n) = 0.
      IF ( abs(0.5-t).GT.vk/2 ) GOTO 200
      WRITE (2,99001) w
      WRITE (2,99002) n , vk
      WRITE (2,99003) t
      DO 500 i = 0 , n
         h = 1./n
         z = i*h
         WRITE (2,99004) z , u(i) , 100.*exp(-pi*pi*t)*sin(pi*z)
 500  CONTINUE
      STOP
99001 FORMAT ('W=',F5.2)
99002 FORMAT ('N=',I5,T18,'VK=',F10.6)
99003 FORMAT ('T=',F5.2,T18,'NUMERICKI',T35,'TACNO',)
99004 FORMAT ('Z=',F4.1,T13,F13.6,T30,F13.6)
99005 FORMAT (I5,F15.6,F5.2)
      END

      SUBROUTINE tridi(a,b,c,d,l)
      DIMENSION a(101) , b(101) , c(101) , d(101)
      DO 100 i = 2 , l
```

```
         rt = -a(i)/b(i-1)
         b(i) = b(i) + rt*c(i-1)
         d(i) = d(i) + rt*d(i-1)
100   CONTINUE
      d(l) = d(l)/b(l)
      DO 200 i = l - 1 , 1 , -1
         d(i) = (d(i)-c(i)*d(i+1))/b(i)
200   CONTINUE
      RETURN
      END
```

$N = 10$	$VK = .001667$		$N = 10$	$VK = .005000$	
$T = .50$	NUMERICKI	TAČNO	$T = .50$	NUMERICKI	TAČNO
$Z = .0$	.000000	.000000	$Z = .0$	.000000	.000000
$Z = .1$	.222040	.222022	$Z = .1$	.204463	.222241
$Z = .2$	.422346	.422311	$Z = .2$	.388912	.422728
$Z = .3$	.581309	.581261	$Z = .3$	.535292	.581835
$Z = .4$	.683370	.683314	$Z = .4$	.629273	.683989
$Z = .5$	.718537	.718479	$Z = .5$	.661657	.719188
$Z = .6$	.683370	.683314	$Z = .6$	.629273	.683989
$Z = .7$	.581309	.581261	$Z = .7$	.535292	.581835
$Z = .8$	.422346	.422311	$Z = .8$	.388912	.422728
$Z = .9$	.222040	.222022	$Z = .9$	.204463	.222241
$Z = 1.0$	.000000	.000000	$Z = 1.0$	.000000	.000000

```
      PROGRAM e1djd
      DIMENSION u(0:101) , v(0:101)
      OPEN (1,FILE='ULAZ')
      OPEN (2,FILE='IZLAZ')
      pi = 4.*atan(1.)
      READ (1,99004) n , vk
      DO 100 i = 0 , n
         h = 1./n
         z = i*h
         v(i) = 100.*sin(pi*z)
100   CONTINUE
200   DO 300 i = 1 , n - 1
         u(i) = v(i) + vk*n*n*(v(i+1)-2*v(i)+v(i-1))
300   CONTINUE
      t = t + vk
      u(0) = 0.
      u(n) = 0.
      DO 400 i = 1 , n + 1
         v(i-1) = u(i-1)
```

```
 400  CONTINUE
      IF ( abs(0.5-t).GT.vk/2 ) GOTO 200
      WRITE (2,99001) n , vk
      WRITE (2,99002) t
      DO 500 i = 0 , n
         h = 1./n
         z = i*h
         WRITE (2,99003) z , u(i) , 100.*exp(-pi*pi*t)*sin(pi*z)
 500  CONTINUE
      STOP
99001 FORMAT ('N=',I5,T18,'VK=',F10.6)
99002 FORMAT ('T=',F5.2,T18,'NUMERICKI',T35,'TACNO',/)
99003 FORMAT ('Z=',F4.1,T13,F13.6,T30,F13.6)
99004 FORMAT (I5,F15.6)
      END
```

6.1.7 Primena metode konačnih razlika na hiperbolične parcijalne diferencijalne jednačine - jednodimenzionalna talasna jednačina

Razmotrimo talasnu jednodimenzionalnu jednačinu kao tipičnog predstavnika hiperbolične parcijalne diferencijalne jednačine:

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} \tag{6.46}$$

neka je $(x_n, t_j) = (nh, jk)$ $(n, j = 0, 1, 2...)$ i $s = k/h$. Koristićemo sledeće jednačine:

$$\frac{U_{n,j+1} - 2U_{nj} + U_{n,j-1}}{k^2} = c^2 \frac{U_{n+1,j} - 2U_{nj} + U_{n-1,j}}{h^2} \tag{6.47}$$

tj.

$$\delta_t^2 U_{nj} = c^2 s^2 \delta_x^2 U_{nj}$$

za eksplicitnu metodu;

$$\delta_t^2 U_{nj} = c^2 s^2 \frac{\delta_x^2 U_{n,j+1} + \delta_x^2 U_{n,j-1}}{2} \tag{6.48}$$

tj.

$$-c^2 s^2 U_{n-1,j+1} + (2 + 2c^2 s^2) U_{n,j+1} - c^2 s^2 U_{n+1,j+1} = 4U_{nj} - 2U_{n,j-1} + c^2 s^2 \delta_x^2 U_{nj}$$

za implicitnu metodu.

Pri tome su lokalne greške zaokrugljavanja u oba slučaja $O(k^2 + h^2)$; eksplicitna metoda je uslovno stabilna akko $c^2 s^2 \leq 1$, a implicitna je bezuslovno stabilna. Treba obratiti pažnju na uslove $u(x, 0) = f(x)$ i $u_t(x, 0) = g(x)$, koji za razliku od prethodnih, obuhvataju i $u_t(x, 0)$, i zadaju se u skladu sa principom da greška koja se pri tome uvodi ne bude veća od lokalne greške zaokrugljavanja, koja je u ovom slučaju $O(k^2 + h^2)$. Očigledno je taj uslov zadovoljen kod $U_{n0} = f(x_n)$, jer je greška jednaka 0. Što se tiče U_{n1}, pretpostavićemo da je f sadržano u c^2 i da (6.47) važi za $t = 0$, pa ćemo primeniti Tejlorovu teoremu

$$u(x_n, t_1) = u(x_n, 0) + k u_t(x_n, 0) + \frac{k^2}{2} u_{tt}(x_n, 0) + O(k^3) = \tag{6.49}$$

$$= u(x_n, 0) + k g(x_n) + \frac{k^2}{2} c^2 f''(x_n) + O(k^3) = u(x_n, 0) + k g(x_n) + \tag{6.50}$$

$$+ \frac{k^2 c^2}{2} [f(x_{n-1}) - 2f(x_n) + f(x_{n+1})] + O(k^2 h^2 + k^3) \tag{6.51}$$

gde je u poslednjem koraku $f''(x_n)$ aproksimirano preko konačne razlike drugog reda, vidi (6.49). Sada se vidi da je izraz

$$g(x_n) = \frac{U_{n1} - U_{n0}}{k} - \frac{kc^2}{2h^2} [f(x_{n-1}) - 2f(x_n) + f(x_{n+1})] \tag{6.52}$$

zadovoljen tačnim rešenjem u sa greškom $O(h^2 + k^2)$; drugim rečima ako izraz (6.48) određuje U_{n1} dobija se greška reda većeg od $O(k^2 + h^2)$.

6.1.8 Primena metode konačnih razlika na eliptične parcijalne diferencijalne jednačine

Kod linearnog eliptičnog konturnog problema, ako se svi izvodi zamene njihovim konačnim razlikama, dobija se sistem linearnih algebarskih jednačina, kao kod Dirihleovog problema nad domenom $\Omega \quad (0 < x < l; 0 < y < l)$:

$$u_{xx} + u_{yy} = f(x, y) \tag{6.53}$$

sa graničnim uslovom

$$u = g(x, y) \qquad \text{na granici} \quad S. \tag{6.54}$$

Ako se izabere korak mreže $h = l/4$, dobija se mreža

$$(x_m, y_m) = (mh, nh) \quad (m, n = 0, 1, 2, 3, 4). \tag{6.55}$$

Korišćenjem centralnih razlika dobija se

$$\frac{U_{m+1,n} - 2U_{mn} + U_{m-1,n}}{h^2} + \frac{U_{m,n+1} - 2U_{mn} + U_{m,n-1}}{h^2} = f_{mn}, \tag{6.56}$$

gde je $f_{mn} = f(x_m, y_n)$, a $U_{mn} = g_{mn}$ za $m, n = 0$ ili 4. U tom slučaju se dobija:

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \\ U_6 \\ U_7 \\ U_8 \\ U_9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \\ B_4 \\ B_5 \\ B_6 \\ B_7 \\ B_8 \\ B_9 \end{bmatrix} \tag{6.57}$$

gde je za $g = 0$, $B_j = -h^2 f_j$. Na osnovu ovog primera vidi se da se za opšti 2D, linearni, eliptični konturni problem dobija sistem linearnih algebarskih jednačina:

$$\mathbf{AU} = \mathbf{B} \tag{6.58}$$

pri čemu važi sledeće:

(1) dimenzije vektora **U** i **B** odgovaraju broju čvorova u kojima se traži rešenje.

(2) Vektor **B** je određen konturnim uslovima i članovima parcijalne diferencijalne jednačine koji ne zavise od u.

(3) Matrica **A** je kvadratna i sadrži najviše 5 članova po redu ili koloni koji nisu 0. Sa fiksnim Ω, red matrice **A** je opadajuća funkcija koraka mreže h (korak veći, mreža grublja, red **A** manji). Stoga su sopstvene vrednosti matrice **A** (potrebne za iterativno rešavanje sistema linearnih algebarskih jednačina) zavisne funkcije od h.

(4) Ako konturni problem ima jedinstveno rešenje, a h je dovoljno malo, $\mathbf{A}$ je nesingularna matrica, pa sistem linearnih algebarskih jednačina ima jedno rešenje.

Greška zaokrugljavanja u slučaju da se centralnim razlikama aproksimira Laplasijan, $u_{xx} + u_{yy}$ na pravougaonoj mreži, $(x_m, y_n) = (mh, nk)$, možemo da izrazimo kao (ako su u_{xxxx} i u_{yyyy} ograničeni):

$$-\frac{h^2}{12} U_{xxxx}(\tilde{x}, y_n) - \frac{k^2}{12} U_{yyyy}(x_m, \tilde{y}) = O(h^2 + k^2) \tag{6.59}$$

Odatle sledi da ako rešenje konturnog problema za Puasonovu jednačinu ima izvode četvrtog reda $\equiv 0$, kao što je u slučaju $u = xy$, onda je rešenje konačnih razlika tačno.

6.1.9 Nojmanov problem

Razmotrimo sada Nojmanov problem:

$$u_{xx} + u_{yy} = f(x, y) \quad \text{na domenu} \quad \Omega \tag{6.60}$$

i

$$\frac{\partial u}{\partial n} = g(x, y) \quad \text{na granici} \quad S, \tag{6.61}$$

gde je Ω pravougaonik $0 < x < a$, $0 < y < b$. Čvorove mreže ćemo izabrati tako da bude $Mh = a$ i $Nh = b$. Na osnovu (6.61) sledi

$$-U_{m-1,n} - U_{m,n-1} + 4U_{mn} - U_{m+1,n} - U_{m,n+1} = -h^2 f_{mn}, \tag{6.62}$$

pri čemu je greška zaokrugljavanja $O(h^2)$, $m = 0, 1, \ldots, M$ i $n = 0, 1, \ldots, N$, a $f(x, y)$ je definisana i na S. Osnovna karakteristika pri rešavanju Nojmanovog problema je predstavljanje izvoda $\frac{\partial u}{\partial n}$ centralnim razlikama uvođenjem primarnih čvorova (sl. 6.1) koji nisu u čvorovima mreže (domena):

$$U_{M+1,n} - U_{M-1,n} = 2hg_{Mn} \quad (n = 1, 2 \ldots N-1) \tag{6.63}$$

$$U_{m,N+1} - U_{m,N-1} = 2hg_{mN} \quad (m = 1, 2 \ldots M-1) \tag{6.64}$$

$$U_{-1,n} - U_{1n} = 2hg_{0n} \quad (n = 1, 2 \ldots N-1) \tag{6.65}$$

$$U_{m,-1} - U_{m1} = 2hg_{m0} \quad (m = 1, 2 \ldots M-1). \tag{6.66}$$

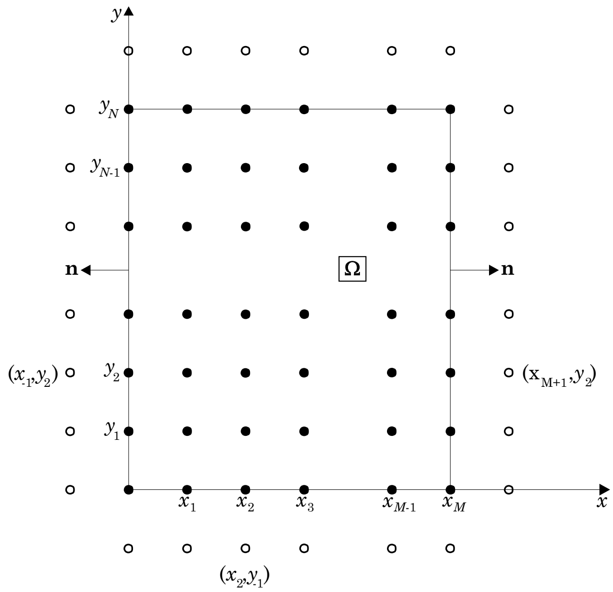
U čvorovima mreže, gde je normala neodređena, uzećemo srednju vrednost dve najbliže okolne normale, što daje još četiri granična uslova:

$$U_{-1,0} + U_{0,-1} = U_{10} + U_{01} + 4hg_{00}, \tag{6.67}$$

$$U_{M,-1} + U_{M+1,0} = U_{M1} + U_{M-1,0} + 4hg_{M0}, \tag{6.68}$$

$$U_{M+1,N} + U_{M,N+1} = U_{M-1,N} + U_{M,N-1} + 4hg_{MN}, \tag{6.69}$$

$$U_{0,N+1} + U_{-1,N} = U_{0,N-1} + U_{1,N} + 4hg_{0N}. \tag{6.70}$$



Slika 6.1:

Ako sada uzmemo $n = N = 2$ i $g = 0$ možemo da rešimo sistem linearnih algebarskih jednačina $\mathbf{AU} = \mathbf{B}$, koji obuhvata jednačine (6.63 - 6.70) i glasi:

$$\begin{bmatrix} 4 & -2 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 4 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 4 & -2 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -2 & 4 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 4 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \\ U_6 \\ U_7 \\ U_8 \\ U_9 \end{bmatrix} = -h^2 \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \\ f_6 \\ f_7 \\ f_8 \\ f_9 \end{bmatrix} \quad (6.71)$$

Pošto je suma članova matrice u svakom redu 0, jedinični vektor kolona $\mathbf{C} = [1, 1, \ldots, 1]^T$ zadovoljava $\mathbf{AC} = \mathbf{0}$. Prema tome jednačina $\mathbf{AU} = \mathbf{0}$ ima rešenje osim nultog, pa je matrica $\mathbf{A}$ singularna, što znači da Nojmanov problem možda nema rešenja, a može da ih ima i beskonačno mnogo, oblika $\mathbf{U} = \mathbf{U}^* + \alpha\mathbf{C}$. Deljenjem I, III, VII i IX reda matrice $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$ sa 2, i množenjem V reda sa 2 dobija se nov sistem linearnih algebarskih jednačina $\mathbf{A}'\mathbf{U} = \mathbf{B}'$:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 4 & -2 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -2 & 8 & -2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -2 & 4 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \\ U_6 \\ U_7 \\ U_8 \\ U_9 \end{bmatrix} = -h^2 \begin{bmatrix} f_1/2 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ 2f_5 \\ f_6 \\ f_7 \\ f_8 \\ f_9/2 \end{bmatrix}. \tag{6.72}$$

Kako u ovom sistemu linearnih algebarskih jednačina važi $\mathbf{A}' = \mathbf{A}'^T$ i $\mathbf{A}'\mathbf{C} = 0$, pa ako rešenje $\mathbf{U}$ postoji, važi

$$\mathbf{B}'\mathbf{C} = (\mathbf{A}'\mathbf{U})^T\mathbf{C} = \mathbf{U}^T(\mathbf{A}'\mathbf{C}) = 0, \tag{6.73}$$

što znači da je suma članova $\mathbf{B}'$ nula. Ovaj uslov je ekvivalentan uslovu

$$\int_\Omega f(x,y)dxdy = 0, \tag{6.74}$$

ako se integral računa trapeznim pravilom u devet uvedenih čvornih tačaka (sl. 6.1). Prema tome, ovaj uslov ($\int_\Omega f d\Omega = \int_S g ds = 0$) je dovoljan za postojanje (nejedinstvenog) rešenja sistema $\mathbf{A}'\mathbf{U} = \mathbf{B}'$.

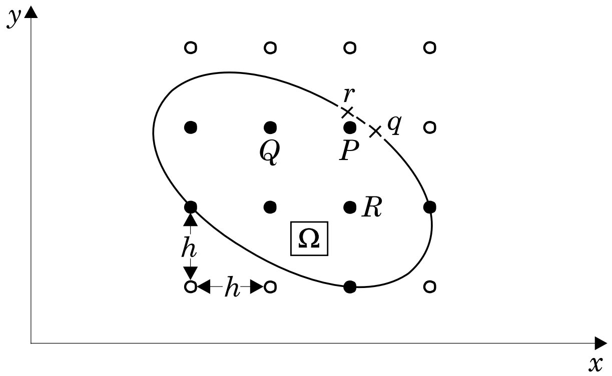
6.1.10 Krivolinijske granice

Sada ćemo pokazati kako se primenjuju konačne razlike na problem

$$u_{xx} + u_{yy} = f(x,y) \quad \text{nad} \quad \Omega \tag{6.75}$$

$$u = g(x,y) \qquad \text{na} \quad S \tag{6.76}$$

u slučaju da je S krivolinijska granica domena Ω. U svakom čvoru mreže u Ω, koji je okružen sa četiri čvora koja su takođe unutar Ω, primenjuju se uobičajeni izrazi metoda konačnih razlika. Razmotrimo sada one čvorove kod kojih je bar jedan susedni čvor nije u Ω, npr. $P = (x_m, y_n)$ sl. 6.2.



Slika 6.2:

Koordinate tačaka r i q na konturi S, koje se dobijaju na horizontali i vertikali povučenoj iz tačke P, su $(x_m + \alpha h, y_n)$ i $(x_m, y_n + \beta h)$, redom, gde su $0 < \alpha, \beta < 1$. Pošto je u poznato na S, znaju se i $u(r)$ i $u(q)$. Razvojem u Tejlorov red dobija se:

$$u(q) = u(P) + \alpha h u_x(P) + \frac{\alpha h^2}{2} u_{xx}(P) + O(h^3), \tag{6.77}$$

$$u(Q) = u(P) - h u_x(P) + \frac{h^2}{2} u_{xx}(P) + O(h^3). \tag{6.78}$$

Sabiranjem se dobija:

$$u_{xx}(P) = \frac{\alpha u(Q) - (1+\alpha)u(P) + u(q)}{h^2 \alpha(\alpha+1)/2} + O(h). \tag{6.79}$$

Analogno tome dobija se:

$$u_{yy}(P) = \frac{\beta u(R) - (1+\beta)u(P) + u(r)}{h^2 \beta(\beta+1)/2} + O(h). \tag{6.80}$$

Sabiranjem se dobija aproksimacija reda $O(h)$ Puasonove jednačine u P:

$$\frac{U(Q)}{\alpha+1} + \frac{U(R)}{\beta+1} - \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}\right) U(P) + \frac{U(q)}{\alpha(\alpha+1)} + \frac{U(r)}{\beta(\beta+1)} = \frac{h^2}{2} f(P). \tag{6.81}$$

Na osnovu izvedenog izraza može se rešiti problem

$$u_{xx} + u_{yy} = 0 \quad na \quad x^2 + y^2 < 1 \quad y > 0, \tag{6.82}$$

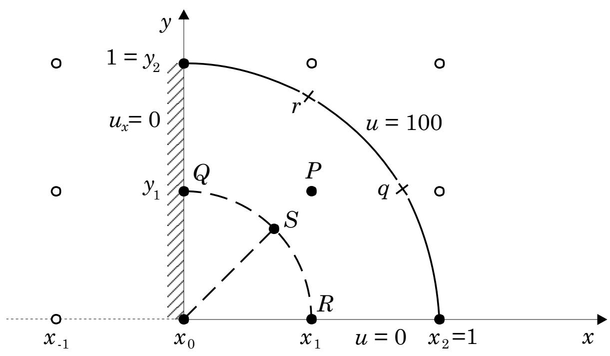
$$u(x,y) = 100 \quad x^2 + y^2 = 1 \quad y > 0, \tag{6.83}$$

$$u(x,y) = 0 \quad y = 0 \quad -1 < x < 1, \tag{6.84}$$

kvadratnom mrežom sa $h = 0,5$. Zahvaljujući simetriji oko y ose, problem se svodi sa tri na dve nepoznate, jer se domen sa polukruga svodi na četvrtinu kruga, sl. 6.3.

Na osnovu graničnih uslova dobija se

$$U_{00} = 0\ , U_{10} = 0\ , U_{02} = 100\ , U(q) = 100\ , U(r) = 100\ , U_{11} = U_{-1,1}.$$



Slika 6.3:

Jedini čvorovi mreže gde treba aproksimirati rešenje su $P(x_1, y_1)$ i $Q(x_0, y_1)$, što se postiže jednačinom konačnih razlika u Q:

$$U_{11} + 100 - 4U_{01} + U_{-1,1} + 0 = 0$$

Uzimajući u obzir granične uslove, dobija se

$$2U_{01} - U_{11} = 50.$$

Kordinate q i r su $(\sqrt{3}h, h)$ i $(h, h\sqrt{3}) \Rightarrow \alpha = \beta = \sqrt{3} - 1$, pa se dobija

$$\frac{U_{01}}{\sqrt{3}} + \frac{U_{10}}{\sqrt{3}} - \frac{2U_{11}}{\sqrt{3}-1} + \frac{U(q)}{3-\sqrt{3}} + \frac{U(r)}{3-\sqrt{3}} = 0,$$

odakle sledi

$$(1 - \sqrt{3})U_{01} + 2\sqrt{3}U_{11} = 200.$$

Rešavanjem prethodnog sistema jednačina, dobija se

$$U_{01} \equiv U(Q) = \frac{100(2+\sqrt{3})}{1+3\sqrt{3}},$$
$$U_{11} \equiv U(P) = \frac{50(7+\sqrt{3})}{1+3\sqrt{3}}.$$

6.2 Metoda konačnih elemenata – jednodimenzionalni problem

Metoda konačnih elemenata je opšta tehnika dobijanja približnih rešenja graničnih problema. U okviru ove metode domen rešenja deli se na konačni broj jednostavnih subdomena, koje zovemo konačni elementi, a korišćenjem varijacionog principa dobija se približno rešenje u skupu konačnih elemenata. Zahvaljujući ovako opštem pristupu, metoda konačnih elemenata je doživela veliki uspeh u rešavanju gotovo svih problema tehnike i matematičke fizike.

U ovoj knjizi osnovni koncept metode konačnih elemenata će biti prvo prikazan i analiziran na primeru jednodimenzionalnog graničnog problema eliptičnog tipa. Iako prednosti i primena metode konačnih elemenata dolaze do izražaja kod višedimenzionalnih graničnih problema, ipak se sve njene osobine mogu jednostavno analizirati na primeru jednodimenzionalnog graničnog problema. Primena metode konačnih elemenata na hiperbolične i parabolične probleme će biti data u konciznoj formi, za iste jednačine kao u slučaju metode konačnih razlika.

6.2.1 Primena metode konačnih elemenata na jednodimenzionalni eliptični granični problem

Veliki broj fizičkih problema može da se predstavi preko dve funkcije čije vrednosti treba da se odrede, koje ćemo zvati promenljivom stanja u i fluksom P. Ove dve funkcije su povezane **konstitutivnom jednačinom** koja sadrži sve potrebne podatke o materijalu u kome se proces odvija. Konstitutivne jednačine su po pravilu različiti zakoni fizike, ali su uglavnom istog matematičkog oblika. Karakterističan primer, koji ćemo koristiti kao tipičnu jednodimenzionalnu jednačinu eliptičnog graničnog problema je elastično naponsko stanje štapa, gde je u pomerenje, P napon, a

$$P(z) = -k(z)\frac{du(z)}{dz} \tag{6.85}$$

konstitutivna jednačina (Hukov[3] zakon). Dalje, $e(z) = du/dz$ je deformacija, dok je z koordinata duž ose štapa, a k modul materijala (Jangov [4] modul). Jednačina (6.85) pokazuje da neuniformnost promenljive stanja izaziva pojavu fluksa (napona P), odnosno da je fluks proizveden u nekoj tački domena proporcionalan brzini promene promenljive stanja (u). Proporcionalnost je određena modulom materijala k, koji može da se menja od tačke do tačke. Diferencijalna jednačina problema je, u stvari, zakon održanja za odgovarajuću veličinu. Prema zakonu održanja ukupni fluks koji ulazi u svaki subdomen jednak je nuli, odnosno fluks se održava. Fluks može da uđe u deo tela na dva načina, kao unutrašnji izvor, definisan funkcijom f,

[3]Hooke Robert (1635-1703), engleski mehaničar, fizičar, astronom i prirodnjak. Poznat po svojim polemikama sa Njutnom. Ove polemike doprinele su razvoju optike. Model elastičnog tela nosi ime po ovom naučniku (Hukovo telo).

[4]Young Thomas (1773-1829), britanski fizičar i egiptolog. Poznat po radovima iz optike. Takođe je značajan njegov rad u oblasti kapilarnih pojava, ako i u elastičnosti. Zanimljivo je da je sarađivao i na dešifrovanju egipatskih hieroglifa na kamenu iz Rozete.

ili kroz spoljnu granicu. Za različite fizičke probleme značenje veličina u, P, k i f je dato u tabeli 6.1. Za problem koji ovde razmatramo f je zapreminska sila.

Fizički problem	Princip održanja	Promenljiva stanja u	Fluks σ	Materijalni moduli k	Izvori f	Konstitutivne jednačine $\sigma = -ku'$
Deformacija elastičnog štapa	Ravnoteža sila	Pomeranje	Napon	Jangov modul	Zapreminske sile	Hukov zakon
Toplotna provodljivost u štapu	Održanje energije	Temperatura	Toplotni fluks	Termo provodljivost	Toplotni izvor	Furijeov zakon
Tečenje fluida	Zakon količine kretanja	Brzina	Napon smicanja	Viskoznost	Zapreminske sile	Stoksov zakon
Elektrostatika	Održanje električnog fluksa	Električni potencijal	Električni fluks	Dielektrična propustljivost	Naelektrisanje	Kulonov zakon
Proticanje kroz poroznu sredinu	Održanje mase	Hidraulični pritisak	Brzina proticanja	Propustljivost	Izvor fluida	Darsijev zakon

Tabela 6.1

Promenljiva stanja u (pomeranje) mora da bude neprekidna funkcija po z, a takođe i da ima zadatu vrednost na granici domena, tj. u dve krajnje tačke kod jednodimenzionalnog problema.

Definišimo sada jednodimenzionalno telo (štap) na domenu $0 < z < l$, sl. 6.4. Neka je štap napravljen od dva materijala, jednog na $0 < z < z_1$, i drugog na $z_1 < z < l$, sl. 6.4. U tački z_1 modul materijala k ima jednostavan prekid, ali je neprekidan levo i desno od nje. Raspodela (funkcija) unutrašnjih izvora $f(z)$ takođe ima prekid u tački z_2, sl. 6.4, gde deluje koncentrisan izvor jačine $\hat{f}$, predstavljen Dirakovom delta funkcijom, kao i u tački $z = z_3$ u kojoj imamo jednostavan prekid u raspodeli izvora. Prema tome podela štapa na četiri subdomena Ω_i, $1 = 1, 2, 3, 4$ i 5 čvorova $z_j = 0, 1, 2, 3, 4$ je prirodna, jer su sve veličine unutar subdomena neprekidne, a prekidi tih veličina su u čvorovima.

Pozabavimo se sada nekim osnovnim pojmovima matematičke fizike:

(1) fluks mora da se održi u svakoj tački tela (štapa).

Neka je $\bar{z}$ proizvoljna tačka u nekom subdomenu i unutar oblasti $a < \bar{z} < b$, sl. 6.4b. Fluksevi na granicama ove oblasti su označeni na sl. 6.4b strelicama, a oblast sadrži i unutrašnje izvore jačine $f(z)$. Prema zakonu održanja je

$$P(b) - P(a) = \int_a^b f(z)\,\mathrm{d}z. \tag{6.86}$$

(2) Fluks je neprekidan u svim tačkama subdomena.

Granična vrednost izraza (2) kada $a \to \bar{z}^-$ i $b \to \bar{z}^+$ (granice a i b se sažimaju u tački $\bar{z}$), glasi

$$\lim_{b\to\bar{z}^+} P(b) - \lim_{a\to\bar{z}^-} P(a) = 0, \tag{6.87}$$

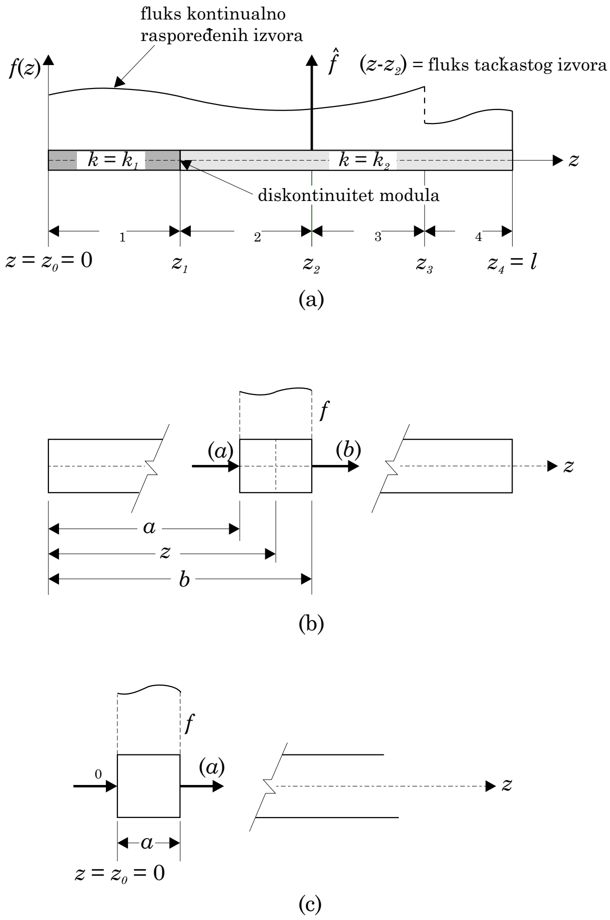
jer je $f(z)$ ograničena funkcija unutar oblasti $a < z < b$. Ako se uvede pojam funkcije skoka u $\bar{z}$

$$[|\,P(\bar{z})\,|] = \lim_{b\to\bar{z}^+} P(b) - \lim_{a\to\bar{z}^-} P(a) \tag{6.88}$$

možemo da pišemo

$$[|\,P(\bar{z})\,|] = 0, \tag{6.89}$$

čime se kaže da je, ako nema skoka, fluks neprekidan u svim tačkama unutar subdomena Ω_i, $i = 1, 2, 3, 4$.



Slika 6.4:

(3) Jednačina problema je obična diferencijalna jednačina drugog reda.

Pošto je $f(z)$ u (2) neprekidna, to je prema teoremi o srednjoj vrednosti integrala $\int\limits_a^b f(z)\,\mathrm{d}z = (b-a)f(\xi)$, gde je $a < \xi < b$, a $f(\xi)$ srednja vrednost $f(z)$ u intervalu (a, b). Sledi da je

$$P(b) - P(a) = (b-a)f(\xi), \tag{6.90}$$

odnosno

$$\lim_{\substack{\to\bar{z}^- \\ b\to\bar{z}^+}} \frac{P(b)-P(a)}{b-a} = \lim_{\substack{\to\bar{z}^- \\ b\to\bar{z}^+}} f(\xi).$$

Kako je $f(z)$ neprekidna to je

$$\lim_{\substack{\to\bar{z}^- \\ b\to\bar{z}^+}} f(\xi) = f(\bar{z}),$$

a takođe i

$$\lim_{\substack{\to\bar{z}^- \\ b\to\bar{z}^+}} \frac{P(b)-P(a)}{b-a} = \frac{\mathrm{d}P(\bar{z})}{\mathrm{d}z},$$

pa sledi jednačina balansa

$$\frac{\mathrm{d}P(z)}{\mathrm{d}z} = f(z). \tag{6.91}$$

Zamenom konstitutivne jednačine (6.85) u jednačinu balansa (6.91) dobijamo običnu diferencijalnu jednačinu posmatranog jednodimenzionalnog eliptičnog graničnog problema:

$$-\frac{d}{dz}\left[k(z)\frac{\mathrm{d}u(z)}{\mathrm{d}z}\right] = f(z). \tag{6.92}$$

U tačkama gde je materijalni modul k neprekidan, jednačina (6.92) može da se napiše kao linearna diferencijalna jednačina drugog reda

$$-k(z)\frac{\mathrm{d}^2u(z)}{\mathrm{d}z^2} - \frac{\mathrm{d}k(z)}{\mathrm{d}z}\frac{\mathrm{d}u(z)}{\mathrm{d}z} = f(z). \tag{6.93}$$

(4) Razmotrimo sada čvorove gde postoje prekidi, počevši od $z = z_3$. Pokazali smo da skok fluksa ne postoji:

$$[|\, P(z_3)\, |] = 0 \quad z = z_3. \tag{6.94}$$

S obzirom na prekid integranda ovde ne može da se primeni teorema o srednjoj vrednosti; ku' je neprekidno u z_3, ali je $(ku')'$ nedefinisano. Prema tome u $z = z_3$ nemamo diferencijalnu jednačinu!

U tački (čvoru) $z = z_1$ gde je f neprekidno, ali je k prekidno, uslov nultog skoka fluksa takođe važi, $[|\, P(z_1)\, |] = 0$. Jednačina (6.91) je zadovoljena, ali kako $k(z)$ nije diferencijabilno u z_1 jednačina (6.92) se ne može transformisati u (6.93).

(5) U tački $z = z_2$, gde deluje koncentrisana sila $f = \hat{f}\delta(z - z_2)$, jednačina balansa fluksa za oblast oko z_2 glasi

$$P(b) - P(a) = \int_a^b f(z)dz = \int_a^b \bar{f}(z)dz = \int_a^b \hat{f}\delta(z - z_2)dz \tag{6.95}$$

gde je $\bar{f}$ glatki deo od f. Na isti način kao u prethodnom slučaju dobijamo nehomogen uslov skoka (limes integrala po $\bar{f}$ je 0):

$$[|\, P(z_2)\, |] = \hat{f} \quad \text{za} \quad z = z_2 \tag{6.96}$$

gde $\hat{f}$ ne zavisi od a i b. Upravo zbog toga ne možemo da dobijemo diferencijalnu jednačinu u $z = z_2$.

(6) Konačno, razmotrimo granične uslove, odnosno uslove u tačkama $z = z_0$ i $z = z_4$. Realno, svi fizički sistemi moraju da imaju međudejstvo sa okolinom, što je obično uključeno u jednačine sistema zadavanjem vrednosti fluksa ili promenljive

stanja na granicama tela. Prema tome, u opštem slučaju, približno modeliranje okoline tela je neophodno da bi se definisali granični uslovi.

Na sl. 6.4c., prikazana je mala oblast štapa koji sadrži levu granicu, gde je fluks definisan kao P_0. Fluks u ovoj oblasti je održan ako je

$$P(a) - P(0) = \int_0^a f(z)dz, \tag{6.97}$$

jer se u graničnom slučaju, kada $a \to 0$, dobija $P(0) = P_0$. Kada definišemo fluks u graničnim tačkama, moramo da imamo u vidu da je neophodno znati pravac brzine promene pomeranja u tim tačkama, da bi se znalo da li fluks ulazi ili izlazi iz tela. Drugim rečima definišemo

$$-k(0)(-\frac{du(0)}{dz}) = P_0, \tag{6.98}$$

$$-k(l)\frac{du(l)}{dz} = P_l, \tag{6.99}$$

gde su $du(0)/dz$ i $du(l)/dz$ očigledno izvodi sa jedne strane.

U mnogim slučajevima fluks na granici je poznat, pa jednačine (6.98) i (6.99) postaju granični uslovi. Za jednačine drugog reda kao što je jednačina (6.93), granični uslovi (6.98) i (6.99), koji sadrže prvi izvod nepoznate u zovu se **prirodni granični uslovi**. U nekim drugim slučajevima za granični fluks se pretpostavlja da je proporcionalan razlici vrednosti promenljive stanja na granici i njene vrednosti na nekom rastojanju u okolini, što zahteva uprošćenu konstitutivnu jednačinu za okolinu. Npr. za $z = z_0 = 0$ ovaj uslov je oblika

$$P_0 = p_0[u(0) - u_0], \tag{6.100}$$

gde je p_0 poznata konstanta koja zavisi od modula materijala okoline, a u_0 poznata vrednost promenljive stanja okoline. Zamenom jednačine (6.100) u (6.98) dobija se

$$k(0)\frac{du(0)}{dz} = p_0[u(0) - u_0]. \tag{6.101}$$

Kako se ovde opet pojavljuje $u'(0)$ (6.101) je takođe vrsta prirodnih graničnih uslova za jednačinu (6.92).

Izbor graničnih uslova u nekom graničnom problemu je, naravno, uslovljen njegovom fizičkom prirodom. Za elastične deformacije štapa izbor se svodi na:

- esencijalne granične uslove, kojima je zadana vrednost pomeranja u na granici,

- prirodne granični uslove, kojima je zadana: (a) vrednost napona na granici, jednačina (6.98) i (6.99) ili (b) linearna kombinacija napona i pomeranja na granici, jednačina (6.101).

Treba uočiti da u slučaju kada problem zahteva granični uslov po naponu (fluksu) na obe granice, onda zadata vrednost napona granice mora da zadovolji uslov globalnog održanja:

$$P_l + P_0 = \int_0^l f(z)dz. \tag{6.102}$$

Sada možemo da formulišemo opšti fizički problem:

$$-\frac{d}{dz}\left[k(z)\frac{du(z)}{dz}\right] = f(z) \quad z \in \Omega_i, \quad i = 1, 2, 3, 4, \tag{6.103}$$

sa uslovima skoka u tačkama prekida

$$[|\, P(z_1)\, |] = 0, \quad [|\, P(z_2)\, |] = \hat{f} \quad i \quad [|\, P(z_3)\, |] = 0 \tag{6.104}$$

i graničnim uslovima

$$\begin{array}{lll} u(z) = u_0 \quad \text{ili } u_l & \text{za} & z = 0 \text{ ili } z = l \\ P(z) = -P_0 & \text{za} & z = 0 \\ P(z) = P_l & \text{za} & z = l \\ P(z) - p_0 u(z) = -p_0 u_0 & \text{za} & z = 0 \\ P(z) - p_l u(z) = -p_l u_l & \text{za} & z = l. \end{array} \tag{6.105}$$

6.2.2 Varijaciona formulacija

Klasično predstavljanje graničnog problema jednačinama (6.103)-(6.105) zahteva regularnost rešenja koja je za većinu problema suviše jaka. Osim toga, sama jednačina (6.103) nije zadovoljena u tačkama prekida z_1, z_2, z_3, pa je za praktične potrebe numeričkog rešavanja sasvim dovoljno primeniti slabije uslove za funkciju u i njene izvode. Takva formulacija problema zove se slaba ili varijaciona, a važi i u slučaju neglatkih podataka i rešenja. Naravno, ako postoji glatko ("klasično") rešenje problema, ono je istovremeno i rešenje slabog problema. Prema tome, ne gubi se ništa, a dobija se mogućnost rešavanja neregularnih problema, koji su najčešći u praksi. Osim toga, treba imati u vidu da je čak i regularne probleme, naročito ako su vrlo složeni, često jednostavnije opisati neregularnim matematičkim modelom.

Varijaciona formulacija polazi od zahteva da se nađe funkcija v takva da su diferencijalna jednačina (6.103) i granični uslovi (6.105) zadovoljeni u smislu ponderisanih srednjih vrednosti:

$$\int_0^l -(ku')'v\,\mathrm{d}z = \int_0^l fv\,\mathrm{d}z \tag{6.106}$$

$$\int_0^l -(ku')'v\,\mathrm{d}z = \int_0^l -(ku'v)'\,\mathrm{d}z + \int_0^l ku'v'\,\mathrm{d}z = \tag{6.107}$$

$$-\,ku'v\Big|_0^l + \int_0^l ku'v'\,\mathrm{d}z.$$

U izrazu (6.106) v je težinska funkcija od z koja se dovoljno dobro ponaša da bi integrali u (6.106) imali konačnu vrednost. Skup svih težinskih funkcija označićemo sa H. Sada dajemo kompaktnu formulaciju problema:

$$\int_0^l [(ku')' + f]v\,\mathrm{d}z = 0 \quad \text{za} \quad v \in H, \tag{6.108}$$

$$u(0) = u_0 \quad u(l) = u_l. \tag{6.109}$$

Ako su u i v dovoljno glatke funkcije (bar u subdomenima), parcijalnom integracijom dobijamo:

$$\int_0^l -(ku')'vdz = \int_0^l ku'v'dz - ku'v\Big|_0^l. \tag{6.110}$$

Imajući u vidu konstitutivnu jednačinu (6.85), možemo ku' da zamenimo sa P, a zamenom (6.110) u (6.108) dobija se

$$\int_0^l ku'v'\,\mathrm{d}z = Pv\Big|_0^l + \int_0^l fv\,\mathrm{d}z. \tag{6.111}$$

Rešenje u pripada skupu $\tilde{H}$, koji zovemo klasa probnih funkcija. Funkcije ove klase obavezno zadovoljavaju esencijalne granične uslove, a prirodni granični uslov se automatski pojavljuju u varijacionoj formulaciji ovog problema. Treba imati u vidu da su težinske funkcije jednake nuli u tačkama gde su zadati esencijalni granični uslovi.

S obzirom da se funkcije u i v pojavljuju u jednačini (6.111) možemo da ih biramo iz iste klase dopustivih funkcija

$$H = \tilde{H} = H^1. \tag{6.112}$$

Pošto v može da bude ma koja iz skupa dopustivih funkcija, razmotrićemo varijantu da bude $u = v (= w)$. Radi jednostavnosti razmatraćemo slučaj k =const. Očigledno je da H^1 predstavlja klasu funkcija w, gde "1" označava da svi njeni članovi imaju izvode reda 1, čiji su kvadrati integrabilni u $0 < z < l$:

$$\int_0^l (w')^2\,\mathrm{d}z < \infty. \tag{6.113}$$

6.2.3 Galerkinov postupak

Polazimo od slabe (varijacione) formulacije (6.111) koja važi za sve funkcije $v \in H^1$. Pored već pomenutih, H^1 ima i sledeće osobine:

- H^1 je linearni prostor funkcija,
- H^1 je beskonačno dimenzionalan.

Pod pojmom "linearni prostor" podrazumevamo da je linearna kombinacija funkcija iz H^1 takođe funkcija iz H^1. Znači, ako su v_1 i v_2 težinske funkcije, onda je i $\alpha v_1 + \beta v_2$ težinska funkcija. Pod pojmom "beskonačno dimenzionalan" podrazumevamo da je za određivanje funkcije v u prostoru neophodno odrediti beskonačno mnogo parametara.

Pretpostavićemo da je dat beskonačni skup funkcija $\phi_1(z), \phi_2(z)\ldots$ u H^1, sa osobinom da svaka težinska funkcija u H^1 može da se izrazi kao linearna kombinacija funkcija $\phi_i(z)$

$$v(z) = \sum_{i=1}^{\infty} \beta_i \phi_i(z), \tag{6.114}$$

gde su β_i konstante, a red (6.114) konvergira u "H^1 smislu". Skup funkcija P_i koje to zadovoljavaju obezbeđuje bazu H^1, pa se takve funkcije zovu **bazne funkcije**. Ako umesto beskonačnog uzmemo konačan broj članova reda N, dobijamo aproksimaciju v_N funkcije v

$$v_N(z) = \sum_{i=1}^{N} \beta_i \phi_i(z). \tag{6.115}$$

Ako je v_N dato izrazom (6.115), onda v_N konvergira ka v u "H^1 smislu", ako je

$$\lim_{N\to\infty} \int_0^l (v' - v'_N)^2 \,\mathrm{d}z = 0. \tag{6.116}$$

N baznih funkcija $\{\phi_1, \phi_2 \ldots \phi_N\}$ definiše N – dimenzionalni potprostor $H^{(N)}$ prostora H^1, jer je svaka funkcija ϕ_i, $i = 1, \ldots, N$ član H^1. Takođe, pretpostavljamo da su funkcije ϕ_i linearno nezavisne. U tom slučaju formulišemo Galerkinov [5] postupak kao traženje približnog rešenja jednačine (6.111) u konačno-dimenzionalnom potprostoru $H^{(N)}$ prostora H^1 dopustivih funkcija (umesto u celom prostoru H^1). Znači, umesto da razmatramo beskonačno-dimenzionalni problem (6.111), tražićemo približno rešenje oblika

$$u_N(z) = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \phi_i(z) \quad \phi_i(z) \in H^{(N)}, \tag{6.117}$$

[5] Галеркин, Борис Григорьевич (1871-1945), ruski naučnik. Njegovi radovi doprineli su razvoju teorije elastičnosti.

koje zadovoljava (6.111) ako se H^1 zameni sa $H^{(N)}$, a α_i su stepeni slobode aproksimacije. Sada možemo da formulišemo varijacionu postavku približnog problema: naći funkciju $u_N \in H^{(N)}$ tako da važi

$$\int_0^l k u_N' v_N' \,\mathrm{d}z = P v_N \Big|_0^l + \int_0^l f v_N \,\mathrm{d}z \quad \text{za sve} \quad v_N \in H^{(N)}. \tag{6.118}$$

Zamenom (6.115) i (6.117) u (6.118) dobija se

$$\int_0^l k \left(\sum_{i=1}^N \beta_i \phi_i \right)' \left(\sum_{j=1}^N \alpha_j \phi_j \right)' \mathrm{d}z = P \sum_{i=1}^N (\beta_i \phi_i) \Big|_0^l + \int_0^l f \sum_{i=1}^N \beta_i \phi_i \,\mathrm{d}z, \tag{6.119}$$

odnosno

$$\sum_{i=1}^N \beta_i \left(\sum_1^N \int_0^l k \phi_i' \phi_j' \,\mathrm{d}z \alpha_j - P\phi_i \Big|_0^l - \int_0^l f \phi_i \,\mathrm{d}z \right) = 0, \quad \text{za} \,\forall \beta_i, \tag{6.120}$$

za proizvoljno β_i.

U sažetom obliku ovaj izraz može da se predstavi na sledeći način

$$\sum_{i=1}^N \beta_i \left(\sum_{j=1}^N K_{ij} \alpha_j - F_i \right) = 0, \tag{6.121}$$

gde je

$$K_{ij} = \int_0^l k \phi_i' \phi_j' \,\mathrm{d}z \tag{6.122}$$

$$F_i = P\phi_i \Big|_0^l + \int_0^l f \phi_i \,\mathrm{d}z. \tag{6.123}$$

K_{ij} je **matrica krutosti** problema za bazne funkcije ϕ_i, reda $N \times N$, a F_i je **vektor opterećenja** za iste bazne funkcije, reda N. Pošto su vrednosti β_i proizvoljne, da bi jednačina (6.121) bila zadovoljena mora da važi

$$\sum_{j=1}^N K_{ij} \alpha_j = F_i \quad i = 1, 2, \ldots, N. \tag{6.124}$$

Pošto smo funkcije ϕ_i izabrali da budu nezavisne, to su i jednačine (6.124) nezavisne, pa je matrica K_{ij} invertibilna, i koeficijenti α_j postaju

$$\alpha_j = \sum_{i=1}^N (K)_{ij}{}^{-1} F_i. \tag{6.125}$$

Kada su dobijeni koeficijenti α_j poznato je i približno rešenje u_N na osnovu jednačine (6.117). Prema tome, Galerkinov metod je vrlo moćna alatka, ali samo ako postoji (sistematska) tehnika konstruisanja baznih funkcija ϕ_i. Stoga je veliku primenu Galerkinov postupak dobio tek uvođenjem metode konačnih elemenata, kao što će biti pokazano u daljem tekstu.

6.2.4 Bazne funkcije konačnih elemenata

Postoje značajne teškoće pri izboru baznih funkcija, jer osim da su članovi prostora H_0^1 nezavisni, ništa drugo se ne zna. Situacija se komplikuje sa povećanjem broja dimenzija graničnog problema, jer se pri tome znatno usložnjavaju granični uslovi. Ako se još ima u vidu zavisnost rešenja i uslovljenost konačnog elementa, od izabranih ϕ_i, onda je jasno da je za praktičnu primenu Galerkinovog postupka izbor baznih funkcija od presudnog značaja. Da bismo pokazali kako se dolazi do baznih funkcija razmotrićemo homogenu diferencijalnu jednačinu

$$(ku')' = 0 \quad z \in \Omega_i \quad \Omega_i = [-h/2, h/2], \tag{6.126}$$

Tačno rešenje jednačine (6.126) je

$$ku + C_1 z + C_0 = 0. \tag{6.127}$$

Ako uvedemo granične uslove

$$u = u_i \quad \text{za} \quad z = -h/2 \tag{6.128}$$

$$u = u_{i+1} \quad \text{za} \quad z = h/2, \tag{6.129}$$

dobijamo za konstante C_1 i C_0:

$$C_1 = -\frac{k}{h}(u_{i+1} - u_i) \tag{6.130}$$

$$C_0 = -\frac{k}{2}(u_i + u_{i+1}), \tag{6.131}$$

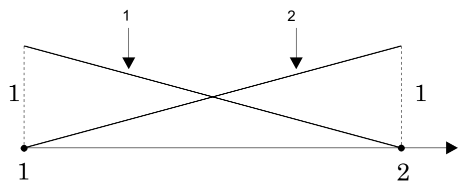
pa je tačno rešenje:

$$u = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{2z}{h}\right) u_{i+1} + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{2z}{h}\right) u_i \tag{6.132}$$

Ako sada uvedemo bezdimenzionalnu koordinatu $\xi = \dfrac{2z}{h}$ (za $z = -h/2$, $\xi = -1$; $z = h/2$, $\xi = 1$) sledi:

$$u = \left[\begin{array}{cc} \frac{1}{2}(1-\xi) & \frac{1}{2}(1+\xi) \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} u_i \\ u_{i+1} \end{array}\right]. \tag{6.133}$$

Ako uvedemo oznake $\psi_1 = \frac{1}{2}(1-\xi)$ i $\psi_2 = \frac{1}{2}(1+\xi)$ i nazovemo ih **interpolacijskim funkcijama** elemenata, možemo da uočimo da one definišu linearnu interpolaciju pomeranja u (promenljiva stanja) između čvorova i i $i+1$ sistema, odnosno 1 i 2 elementa, sl. 6.5. Lako je uočljivo da ove funkcije imaju vrednost 1 na jednom kraju, a 0 na drugom.



Slika 6.5:

Takođe, jasno je da su ove funkcije linearno nezavisne i da su neprekidne na granicama elemenata. Ovo drugo sledi iz činjenice da dve bazne funkcije, konstruisane iz dva susedna odsečka interpolacijske funkcije u čvoru, imaju ordinatu 1 u odgovarajućem čvoru.

Posmatrajmo sada nehomogenu diferencijalnu jednačinu sa konstantnim članom:

$$(ku')' = C_2. \tag{6.134}$$

Ova jednačina fizički odgovara problemu elastičnog naponskog stanja sa konstantnom zapreminskom silom.

Tačno rešenje jednačine (6.134) je

$$ku + \frac{1}{2}C_2 z^2 + C_1 z + C_0 = 0. \tag{6.135}$$

Formalno možemo smatrati da je C_2 nepoznata, a da je zadana, osim graničnih vrednosti, još i vrednost pomeranja u u nekoj tački intervala, recimo sredini. Granični uslov stoga glase:

$$u = u_{i-1} \quad \text{za} \quad z = -h/2 \tag{6.136}$$

$$u = u_i \quad \text{za} \quad z = 0 \tag{6.137}$$

$$u = u_{i+1} \quad \text{za} \quad z = h/2. \tag{6.138}$$

Zamenom graničnih uslova (6.136)-(6.138) u jednačinu (6.135) i rešavanjem po C_0, C_1 i C_2 dobija se

$$C_0 = -ku_i, \tag{6.139}$$

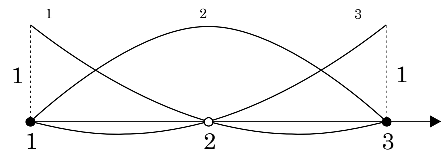
$$C_1 = -\frac{k}{h}(u_{i+1} - u_{i-1}), \tag{6.140}$$

$$C_2 = -(\frac{2}{h})^2 k(u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}). \tag{6.141}$$

Zamenom (6.139)-(6.141) u (6.135) dobija se, uz uvođenje $\xi = 2z/h$

$$u = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}\xi(1-\xi) & (1-\xi)(1+\xi) & \frac{1}{2}\xi(1+\xi) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_{i-1} \\ u_i \\ u_{i+1} \end{bmatrix}. \tag{6.142}$$

Sada možemo da uvedemo $\psi_1 = -\frac{1}{2}\xi(1-\xi)$, $\psi_2 = (1-\xi)(1+\xi)$ i $\psi_3 = \frac{1}{2}\xi(1+\xi)$, tj. kvadratne interpolacijske funkcije, sl. 6.6.

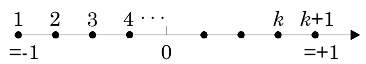


Slika 6.6:

Na isti način moguće je uvesti i interpolacijske funkcije viših redova, odnosno u opštem slučaju može se primeniti Lagranžova interpolacija na intervalu $[-1, 1]$, gde smo usvojili bezdimenzionalni koordinatni sistem $\xi = 2z/h$ u slučaju da su svi elementi iste dužine h. U opštem slučaju bezdimenzionalna koordinata ξ se uvodi izrazom

$$\xi = \frac{2z - (z_{k+1} + z_1)}{z_{k+1} - z_1} \tag{6.143}$$

u skladu sa oznakama na sl. 6.7.



Slika 6.7:

U opštem slučaju i-ta Lagranžova interpolacijska funkcija k-tog stepena glasi:

$$\psi_i(\xi) = \frac{(\xi-\xi_1)(\xi-\xi_2)\dots(\xi-\xi_{i-1})(\xi-\xi_{i+1})\dots(\xi-\xi_{k+1})}{(\xi_i-\xi_1)(\xi_i-\xi_2)\dots(\xi_i-\xi_{i-1})(\xi_i-\xi_{i+1})\dots(\xi_i-\xi_{k+1})}. \tag{6.144}$$

Očigledno je da važi

$$\psi_i(\xi_j) = \begin{cases} 1 & \text{za} \quad i = j \\ 0 & \text{za} \quad i \neq j \end{cases}, \tag{6.145}$$

odakle sledi da su funkcije ψ_i linearno nezavisne. Ovih $k+1$ funkcija definišu bazu skupa svih polinoma k-tog i nižeg stepena, pa kažemo da je baza ψ_i kompletna, što znači da bilo koji polinom stepena k (ili nižeg) može da se predstavi Lagranžovim interpolacijskim funkcijama na jedinstveni način. Drugim rečima, Lagranžove interpolacijske funkcije mogu da se upotrebe kao bazne funkcije konačnog elementa.

Primer:

za $k = 1$ $(\xi_1 = -1, \xi_2 = 1)$

$$\psi_1 = \frac{\xi - \xi_2}{\xi_1 - \xi_2} = \frac{1}{2}(1 - \xi) \tag{6.146}$$

$$\psi_2 = \frac{\xi - \xi_1}{\xi_2 - \xi_1} = \frac{1}{2}(1 + \xi), \tag{6.147}$$

za $k = 2$ $(\xi_1 = -1, \xi_2 = 0, \xi_3 = 1)$

$$\psi_1 = \frac{(\xi - \xi_2)(\xi - \xi_3)}{(\xi_1 - \xi_2)(\xi_1 - \xi_3)} = \frac{\xi(\xi - 1)}{-1(-2)} = \frac{1}{2}\xi(\xi - 1) \tag{6.148}$$

$$\psi_2 = \frac{(\xi - \xi_1)(\xi - \xi_3)}{(\xi_2 - \xi_1)(\xi_2 - \xi_3)} = \frac{(\xi + 1)(\xi - 1)}{1(-1)} = (1 - \xi^2) \tag{6.149}$$

$$\psi_3 = \frac{(\xi - \xi_1)(\xi - \xi_2)}{(\xi_3 - \xi_1)(\xi_3 - \xi_2)} = \frac{(\xi + 1)\xi}{2 \cdot 1} = \frac{1}{2}\xi(1 + \xi). \tag{6.150}$$

6.2.5 Greška interpolacije

Greška Lagranžove linearne interpolacije može da se odredi kao razlika vrednosti funkcije koju interpoliramo g i Lagranžove interpolacijske funkcije g_h:

$$E = g - g_h. \tag{6.151}$$

Posmatrajmo proizvoljni element $\Omega_e(z)$ određen u mreži sa $z_i < z < z_{i+1}$ i razvijmo grešku E u Tejlorov red unutar elementa u okolini proizvoljne tačke $\bar{z}$:

$$E(z) = E(\bar{z}) + E'(\bar{z})(z - \bar{z}) + \frac{1}{2}E''(\zeta)(z - \bar{z})^2, \tag{6.152}$$

gde je $\zeta \in [z, \bar{z}]$. Pri tome je $E(z_i) = E(z_{i+1}) = 0$. Izaberimo sada $\bar{z}$ kao tačku gde je greška maksimalna, tako da važi $E'(\bar{z}) = 0$

$$E(z) = E(\bar{z}) + \frac{1}{2}E''(\zeta)(z - \bar{z})^2. \tag{6.153}$$

Sada za z uzmemo onu graničnu tačku koja je bliža $\bar{z}$, npr. z_i:

$$E(z_i) = E(\bar{z}) + \frac{1}{2}E''(\zeta)(z_i - \bar{z})^2 = 0, \tag{6.154}$$

odakle sledi apsolutna vrednost greške

$$|E(\bar{z})| = \frac{1}{2}\left|E''(\zeta)\right|(z_i - \bar{z})^2. \tag{6.155}$$

Kako je $z_{i+1} - z_i = h$, biće $|z - \bar{z}| \leq h/2$, pa sledi

$$|E(\bar{z})| \leq \frac{h^2}{8}\left|E''(\zeta)\right|. \tag{6.156}$$

Pošto je u pitanju linearna interpolacija za drugi izvod se dobija:

$$E'' = g'' - g_h'' = g'', \tag{6.157}$$

pa se zamenom u (6.156) i traženjem maksimuma po svim elementima dobija:

$$\max |E(z)| \leq \frac{h^2}{8} \max |g''(z)|. \tag{6.158}$$

Pošto je drugi izvod funkcije g ograničen, $g'' \leq c \leq \infty$, dobija se konačno

$$\|E||_\infty = \max |E(z)| \leq Ch^2, \tag{6.159}$$

gde je C konstanta nezavisna od h. Analognim postupkom se u slučaju Lagranžove interpolacije k-tog stepena dobija

$$\|E||_\infty \leq Ch^{k+1}. \tag{6.160}$$

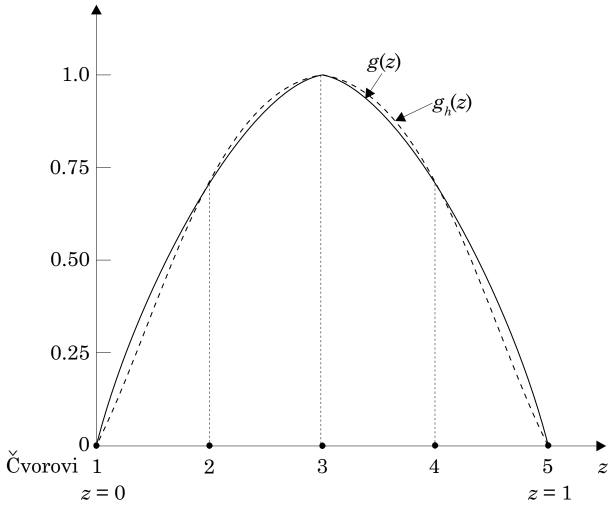
Pošto u opštem slučaju Tejlorov red sadrži članove svih stepena do k, neophodno je da interpolant, a takođe i interpolacijske funkcije svakog elementa, mogu da predstave svaki od tih članova. Na primer, ako interpolacijske funkcije sadrže nezavisne članove proporcionalne z^0 (const), $z^2, z^3, \ldots, z^k$, ali ne sadrže član proporcionalan z^1, greška će biti proporcionalna h, umesto h^{k+1}. Ako nedostaju konstante u interpolacijskim funkcijama, konvergencija izostaje. Prema tome, veoma je bitno da skup interpolacijskih funkcija sadrži kompletne polinome.

Pri određivanju greške pretpostavili smo da funkcija g ima (neprekidne) izvode reda $\leq k$. Ako međutim, funkcija g ima izvode samo do reda s, $0 < s < k$, ma koliki da je stepen interpolacije k, samo prvih s članova interpolacijskog polinoma će učestvovati u približnom predstavljanju g, pa je umesto izraza (6.160) greška definisana izrazom

$$\max |g(z) - g_h(z)| \leq Ch^s. \tag{6.161}$$

Jasno je da greška ne može da se smanji povećanjem stepena interpolacijske funkcije, ali još uvek može smanjivanjem koraka mreže h.

Konačno, dajemo primer interpolacije konačnih elemenata; za funkciju $g(h) = \sin(\pi x)$ na intervalu $0 \leq z \leq 1$, pomoću dva kvadratna elementa, sl. 6.8. Čvorovi su $z = 0; 0,25; 0,5; 0,75; 1$, a vrednosti funkcije u čvorovima $g(z) = 0; 0,707; 1; 0,707; 0$, tako da je interpolant $g_h(z) = 0,707\phi_2(z) + \phi_3(z) + 0,707\phi_4(z)$.



Slika 6.8:

Da bismo procenili grešku, uočimo da je $\max|g''(z)| \leq \pi^2$, pa je

$$|g(z) - g_h(z)| \leq Ch^3, \quad \text{gde je} \quad C = \pi^2/48.$$

6.2.6 Aproksimacija konačnim elementima

Sada možemo da podelimo domen Ω na određen broj subdomena Ω_e dužine h_e ($\sum h_e = l$), koje ćemo da zovemo konačni elementi, kao npr. na sl. 6.8. Pretpostavimo da je koncentrisani izvor u f, prikazan na sl. 6.4, smešten u $z = \bar{z}$ ($= z_2$ na sl. 6.4). Tada fluks $P = ku'$ ima skok $[|\, P\, |] = \hat{f}$ u $\bar{z}$. S druge strane, funkcije oblika elementa imaju neprekidne izvode pa ne mogu da obuhvate takav skok. Stoga mrežu konačnih elemenata treba konstruisati tako da svi diskontinuiteti (prekidi, skokovi) budu uvek u čvorovima. Tada članovi kao što je $\hat{f} v_h(\bar{z})$, koji predstavljaju skok, ne ulaze u lokalne jednačine koje opisuju (približno) ponašanje unutar elementa.

Razmotrimo sada izbor funkcija oblika ψ_i^e. Teorijska razmatranja omogućavaju primenu funkcija oblika bilo kog stepena, uz porast tačnosti rešenja kod većeg stepena funkcije. Međutim, praktični razlozi nas upućuju na korišćenje linearnih ili kvadratnih elemenata, jer se time izbegavaju komplikacije u formulaciji konačnih elemenata.

6.2.7 Određivanje matrica konačnog elementa i matrica sistema konačnih elemenata

Za svaki konačni element (subdomen) Ω_i između čvorova S_1 i S_2 važi

$$\int_{S_1}^{S_2} ku'v' \, dz = \int_{S_1}^{S_2} \bar{f} v \, dz + P(S_1)v(S_1) - P(S_2)v(S_2), \tag{6.162}$$

gde je $P(S_i)$ fluks u čvorovima S_1, S_2, koji je prirodni granični uslov.

Razmotrimo tipični konačni element Ω_e sa čvorovima S_1^e i S_2^e. Varijaciona formulacija jednačine (6.162) za konačne elemente Ω_e, nezavisno od graničnih uslova u $z = 0$ i $z = l$ glasi

$$\int_{S_1^e}^{S_2^e} k(u_h^e)'(v_h^e)'\,\mathrm{d}z = \int_{S_1^e}^{S_2^e} \bar{f} v_h^e\,\mathrm{d}z + P(S_1^e)v_h^e(S_1^e) - P(S_2^e)v_h^e(S_2^e), \tag{6.163}$$

gde su u_h^e i v_h^e ograničenja za u_h i v_h u Ω_e. Vrednosti fluksa $P(S_1^e)$ i $P(S_2^e)$ su tačne, a ne približne, i predstavljaju prirodne granične uslove u čvorovima S_1^e i S_2^e.

Treba napomenuti da je jednačina (6.163) data za globalnu z koordinatu, a ne za lokalnu ξ koordinatu kako se inače radi, da bi se lakše pratio proces nastanka globalne matrice krutosti i vektor opterećenja. Inače se matrice krutosti i vektor opterećenja određuju u lokalnom koordinatnom sistemu, a zatim transformacijom koordinata prevode u globalni koordinatni sistem, zajednički za sve konačne elemente.

Uočimo da je u_h^e oblika

$$u_h^e(z) = \sum_{j=1}^{N_e} u_j^e \psi_j^e(z), \tag{6.164}$$

gde je N_e broj čvorova u konačnom elementu Ω_e, ψ_j^e funkcija oblika, a u_j^e vrednost u_h^e u $z = z_j^e$

$$u_j^e = u_h^e(z_j^e) \quad j = 1, \ldots, N_e. \tag{6.165}$$

Zamenom (6.164) u (6.163), i $v_h^e = \psi_i^e$ dobijamo sistem linearnih algebarskih jednačina oblika:

$$\sum_{j=1}^{N_e} k_{ij}^e u_j^e = f_i^e + P(S_1^e)\psi_i^e(S_1^e) - P(S_2^e)\psi_2^e(S_2^e), \tag{6.166}$$

gde je k_{ij}^e matrica krutosti, a f_i^e vektor opterećenja konačnog elementa Ω_e:

$$k_{ij}^e = \int_{S_1^e}^{S_2^e} k(\psi_i^e)'(\psi_j^e)'\,\mathrm{d}z \tag{6.167}$$

$$f_i^e = \int_{S_1^e}^{S_2^e} \bar{f}\psi_i^e\,\mathrm{d}z. \tag{6.168}$$

U praktičnoj primeni integrali (6.167) se ne određuju analitički, već numerički, sa dovoljnom tačnošću. Vektor opterećenja f_i^e se po pravilu određuje pomoću interpolanta, a ne samog f; npr. ako je $\bar{f}$ neprekidni deo f (nema koncentrisanih sila) i ako je

$$f_h^e(z) = \sum_{i=1}^{N_e} \bar{f}(z_i^e)\psi_i^e(z). \tag{6.169}$$

Onda, umesto (6.168) koristimo

$$f_i^e = \int_{S_1^e}^{S_1^e} f_h^e \psi_i^e \,\mathrm{d}z. \tag{6.170}$$

Na taj način može da se odredi vektor opterećenja na osnovu čvornih vrednosti.

Pošto smo odredili potrebne matrice i jednačine konačnih elemenata, sada je potrebno formirati globalne jednačine sistema konačnih elemenata, koji predstavljaju telo koje razmatramo.

Usvojićemo linearne funkcije oblika, odnosno konačni element sa dva čvora, za koje važe sledeće jednačine:

$$\begin{aligned} k_{11}^e u_1^e + k_{12}^e u_2^e &= f_1^e + P(S_1^e) \\ k_{21}^e u_1^e + k_{22}^e u_2^e &= f_2^e - P(S_2^e), \end{aligned} \tag{6.171}$$

gde su 1 i 2 indeksi čvornih tačaka konačnog elementa, a $P(S_1^e)$ i $P(S_2^e)$ vrednosti fluksa napona $P = ku'$ u čvorovima. Kada se ove jednačine primenjuju na druge konačne elemente, indekse treba menjati u skladu sa oznakama čvorova u mreži. Na primer, ako je konačni element između čvorova 6 i 7 u mreži, onda u_1^e postaje u_6, u_2^e postaje u_7, $P(S_1^e)$ je vrednost ku' kada se približavamo čvoru 6 zdesna, a $P(S_2^e)$ kada se približavamo čvoru 7 sleva.

Razmotrimo sada mrežu od četiri elementa štapa sa po dva čvora, sl. 6.4, odnosno ukupno pet čvorova. Globalna matrica krutosti će biti reda 5×5, a jednačine koje su potrebne za njeno formiranje, osim već napisane jednačine (6.171) su:

$$\text{drugi konačni element} \quad \begin{cases} k_{11}^2 u_2 + k_{12}^2 u_3 = f_1^2 + P(z_1^+) \\ k_{21}^2 u_2 + k_{22}^2 u_3 = f_2^2 - P(z_2^-) \end{cases} \tag{6.172}$$

$$\text{treći konačni element} \quad \begin{cases} k_{11}^3 u_3 + k_{12}^3 u_4 = f_1^3 + P(z_2^+) \\ k_{21}^3 u_3 + k_{22}^3 u_4 = f_2^3 - P(z_3^-) \end{cases} \tag{6.173}$$

$$\text{četvrti konačni element} \quad \begin{cases} k_{11}^4 u_4 + k_{12}^4 u_5 = f_1^4 + P(z_3^+) \\ k_{21}^4 u_4 + k_{22}^4 u_5 = f_2^4 - P(z_4^-) \end{cases}, \tag{6.174}$$

što daje sledeću matričnu jednačinu

$$\begin{bmatrix} k_{11}^1 & k_{12}^1 & 0 & 0 & 0 \\ k_{21}^1 & k_{22}^1 + k_{11}^2 & k_{12}^2 & 0 & 0 \\ 0 & k_{21}^2 & k_{22}^2 + k_{11}^3 & k_{12}^3 & 0 \\ 0 & 0 & k_{21}^3 & k_{22}^3 + k_{11}^4 & k_{12}^4 \\ 0 & 0 & 0 & k_{21}^4 & k_{22}^4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} f_1^1 + P(0) \\ f_2^1 + f_1^2 + [|\, P(z_1) \,|] \\ f_2^2 + f_1^3 + [|\, P(z_2) \,|] \\ f_3^2 + f_4^1 + [|\, P(z_3) \,|] \\ f_4^2 - P(z_4 = l) \end{bmatrix} \tag{6.175}$$

Ostaje još da se ugrade granični uslovi po pomeranjima, jer su granični uslov po naponu sastavni deo jednačine konačnih elemenata. Ako je na primer, zadano $u(0) = u_0$ i $u(l) = u_l$ onda jednačina (6.175) ima dva nepoznata pomeranja manje, odnosno glasi

$$\begin{bmatrix} k_{21}^1 & k_{22}^1 + k_{11}^2 & k_{12}^2 & 0 & 0 \\ 0 & k_{21}^2 & k_{22}^2 + k_{11}^3 & k_{12}^3 & 0 \\ 0 & 0 & k_{21}^3 & k_{22}^3 + k_{11}^4 & k_{12}^4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = \\ = \begin{bmatrix} f_1^2 + f_2^1 \\ f_2^2 + f_1^3 + \hat{f} \\ f_3^2 + f_4^1 \end{bmatrix} \tag{6.176}$$

uz dve pomoćne jednačine:

$$\begin{aligned} k_{11}^1 u_1 + k_{12}^1 u_2 = f_1^1 + P(0) \Rightarrow P(0) = k_{11}^1 u_1 + k_{12}^1 u_2 - f_1^1 \\ k_{21}^4 u_4 + k_{22}^4 u_5 = f_4^2 - P(l) \Rightarrow P(l) = -k_{21}^4 u_4 - k_{22}^4 u_5 + f_4^2, \end{aligned} \tag{6.177}$$

u kojima su nepoznate $P(0)$ i $P(l)$.

6.2.8 Primena metode konačnih elemenata na parabolične i hiperbolične parcijalne diferencijalne jednačine

Razmotrimo sada vremenski zavisne probleme, odnosno parabolične i hiperbolične parcijalne diferencijalne jednačine. Radi jednostavnosti, ponovo ćemo razmatrati samo jednu prostornu promenljivu. Uvođenjem vremenske zavisnosti za promenljivu stanja dobija se zakon balansa oblika

$$\frac{\partial}{\partial z} P(z,t) - f(z,t) + \frac{\partial}{\partial t} G(z,t) = 0 \quad 0 < z < l \quad t > 0, \tag{6.178}$$

gde je P fluks, f gustina raspodeljenih unutrašnjih izvora, a G veličina koja se "održava" u procesu. Na primer, ako je u pitanju održanje (balans) energije, $\frac{\partial G}{\partial t}$ može da predstavlja brzinu promene entropije po jedinici dužine i stepenu temperature, u kom slučaju je povezana sa promenljivom stanja (temperatura) jednačinom stanja

$$\frac{\partial G(z,t)}{\partial t} = C(z,t) \frac{\partial u(z,t)}{\partial t}, \tag{6.179}$$

gde je $C(z,t)$ svojstvo materijala - specifična toplota. Ako je na primer, (6.178) zakon balansa količine kretanja u deformabilnom telu, a u polje pomeranja, onda je G količina kretanja u z u trenutku t

$$G(z,t) = \rho(z) \frac{\partial u(z,t)}{\partial t}; \quad \frac{\partial G(z,t)}{\partial t} = \rho(z) \frac{\partial^2 u(z,t)}{\partial t^2}, \tag{6.180}$$

gde je $\rho(z)$ gustina mase u z. Za fluks P važi jednačina stanja

$$P(z,t) = -k(z) \frac{\partial u(z,t)}{\partial z} \tag{6.181}$$

gde je $|k(z)| \geq k_0 = const > 0$ za $\forall z \in [0, l]$. Pri tome se usvaja konvencija da je k pozitivno kod prenosa toplote, a negativno kod problema elastičnosti.

Korišćenjem (6.179), (6.180) i (6.181) da bi se eliminisalo G iz (6.178) dobijamo dva tipa parcijalnih diferencijalnih jednačina, jednu paraboličnu

$$C(z,t)\frac{\partial u(z,t)}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial z}\left[k(z)\frac{\partial u(z,t)}{\partial z}\right] - f(z,t) = 0 \quad 0 < z < l \quad t > 0, \tag{6.182}$$

koja važi za jednačinu stanja (6.179) i odnosi se na problem provođenja toplote, i drugu hiperboličnu

$$\rho(z)\frac{\partial^2 u(z,t)}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial z}\left[k(z)\frac{\partial u(z,t)}{\partial z}\right] - f(z,t) = 0 \quad 0 < z < l \quad t > 0. \tag{6.183}$$

Prvo ćemo da analiziramo primenu metode konačnih elemenata na paraboličnu parcijalnu diferencijalnu jednačinu (6.182). Radi jednostavnosti pretpostavićemo da je $C(z)$ nezavisno od t, pa važi $C(z) \geq c_0 > 0$ za $\forall z$, gde je c_0 pozitivna konstanta.

Osim graničnih uslova, koje definišemo u jednostavnom obliku

$$u(0,t) = u(l,t) = 0 \quad t \geq 0,$$

potrebno je još definisati i početne uslove

$$u(z,0) = \tilde{u}(z) \quad 0 < z < l,$$

gde je $\tilde{u}(z)$ glatka funkcija od z. Konačno, ako vreme ograničimo na $0 \leq t \leq T$ možemo da formulišemo granični problem

$$\begin{aligned} C(z)\frac{\partial u(z,t)}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial z}\left[k(z)\frac{\partial u(z,t)}{\partial z}\right] &= f(z,t) \quad 0 \leq z \leq l \quad 0 < t \leq T \\ u(0,t) = u(l,t) &= 0 \quad 0 \leq t \leq T \\ u(z,0) &= \tilde{u}(z) \quad 0 < z < l. \end{aligned} \tag{6.184}$$

Od mnogih načina varijacione formulacije problema (6.184), ovde ćemo primeniti jedan od najjednostavnijih. U tom cilju ćemo da izaberemo proizvoljnu glatku funkciju $v = v(z)$, nezavisnu od t, kojom množimo jednačinu (6.182), i posle parcijalne integracije (vidi (6.110)), dobijamo:

$$\int_0^l \left[C(z)\frac{\partial u(z,t)}{\partial t}v(z) + k(z)\frac{\partial U(z,t)}{\partial z}\frac{\partial v(z)}{\partial z}\right] \mathrm{d}z - \int_0^l f(z,t)v(z)\,\mathrm{d}z = 0. \tag{6.185}$$

Jednačina (6.185) važi za $\forall v(z) \in H_0^1(0,l)$, a treba naći njeno rešenje $u = u(z,t) \in H_0^1(0,l)$ za $0 \leq t \leq T$. $H_0^1(0,l)$ je uobičajeni prostor dopuštenih funkcija sa kvadratno-integralnim izvodima za $0 < z < l$ koji su 0 za $z = 0$ i $z = l$.

Postupak rešavanja jednačine (6.185) je analogan već opisanom postupku, uz jednu bitnu razliku: čvorne vrednosti približnog rešenja u_h su nepoznate funkcije vremena. Stoga pišemo:

$$u_h(z,t) = \sum_{j=1}^{N} u_j(t)\phi_j(z), \tag{6.186}$$

gde su $\phi_j(z)$ bazne funkcije koje definišu prostor H^h, $u_j(t)$ vrednost u_h u čvoru z_j i trenutku t

$$u_h(z_j,t) = \sum_{i=1}^{N} u_i(t)\phi_i(z_j) = u_j(t). \tag{6.187}$$

Galerkinov postupak primenjen na jednačinu (6.185) daje sistem N običnih diferencijalnih jednačina sa N nepoznatih funkcija $u_j(t)$

$$\begin{gathered}\mathbf{C}\frac{d\mathbf{U}(t)}{dt} + \mathbf{K}\mathbf{U}(t) = \mathbf{f}(t) \quad 0 < t \leq T \\ \mathbf{U}(0) = \hat{\mathbf{U}},\end{gathered} \tag{6.188}$$

gde su

$$\begin{aligned} C_{ij} &= \int_0^l C(z)\phi_i(z)\phi_j(z)\,\mathrm{d}z \\ K_{ij} &= \int_0^l K(z)\frac{d\phi_i(z)}{dz}\frac{d\phi_j(z)}{dz}\,\mathrm{d}z \\ f_i(t) &= \int_0^l f(z,t)\phi_i(z)\,\mathrm{d}z. \end{aligned} \tag{6.189}$$

Vektor $\mathbf{U}$, reda $N \times 1$, čvornih vrednosti $N_j(t)$ i $\tilde{\mathbf{U}}$ su interpolirane vrednosti od $\tilde{U}$ (tj. $N \times 1$ vektor čvornih vrednosti $\tilde{U}(z)$). $\mathbf{C}$ je matrica toplotnog kapaciteta, $\mathbf{K}$ uobičajena matrica provodnosti stacionarnog problema, a $\mathbf{f}$ vektor opterećenja, vremenski zavisan. Matrice $\mathbf{C}$ i $\mathbf{K}$ su retke, sa uzanom trakom, simetrične i invertibilne, a dobijaju se na već opisan način.

Primenom metode konačnih elemenata dobili smo dakle sistem običnih diferencijalnih jednačina. Pošto nismo diskretizovali u_h u vremenu, jednačina (6.188) je diskretizovana samo u prostoru. Da bismo dobili punu diskretizaciju, neophodno je uvesti pretpostavku o ponašanju $\mathbf{U}(t)$ u vremenu. Uobičajeni postupci za to su eksplicitni i implicitni, kao kod metode konačnih razlika.

Kod eksplicitnog postupka vremenski domen $0 \leq t \leq T$ delimo u M jednakih intervala dužine $\Delta t = T/M$, i koristimo jednačinu

$$\frac{d\mathbf{U}(n\Delta t)}{dt} \approx \frac{\mathbf{U}^{n+1} - \mathbf{U}^n}{\Delta t}, \quad \mathbf{U}^n = \mathbf{U}(n\Delta t) \tag{6.190}$$

da bismo odredili prvi izvod promenljive stanja u intervalu od $t = n\Delta t$ do $(n+1)\Delta t$, koja zamenom u (6.188) daje:

$$\mathbf{U}^{(n+1)} = (\mathbf{I} - \Delta t\mathbf{C}^{-1}\mathbf{K})\mathbf{U}^n + \Delta t\mathbf{C}^{-1}\mathbf{f}^n. \tag{6.191}$$

Prema tome, na osnovu poznatog $\mathbf{U}^0$ dobija se $\mathbf{U}^1$, zatim $\mathbf{U}^2$ i tako redom. Kao i kod metode konačnih razlika, eksplicitna vremenska integracija je uslovno stabilna, što zahteva ograničene, što manje vrednosti Δt, proporcionalne koraku mreže h.

Kod implicitnih metoda, umesto (6.190) za prvi izvod se koriste jednačine

$$\frac{d\mathbf{U}[(n+1)\Delta t]}{dt} \approx \frac{\mathbf{U}^{n+1} - \mathbf{U}^n}{\Delta t}, \quad \text{ili} \quad \frac{d\mathbf{U}[(n+1/2)\Delta t]}{dt} \approx \frac{\mathbf{U}^{n+1} - \mathbf{U}^n}{\Delta t} \tag{6.192}$$

što daje bezuslovno stabilno rešenje kada se zameni u (6.188).

Hiperbolična parcijalna diferencijalna jednačina (6.183) zahteva komplikovanije početne uslove, koji uključuju i prve izvode, jer jednačina ima drugi izvod po vremenu

$$u(z,0) = \tilde{u}(z) \quad \text{i} \quad \frac{\partial u(z,0)}{\partial t} = \hat{g}(z) \quad 0 < z < l. \tag{6.193}$$

Za granični uslov ponovo uzimamo jednostavan oblik, kao u (6.184). Množenjem (6.182) sa $v(z)$ i integraljenjem po z dobijamo:

$$\int_0^l \left[\rho(z)\frac{\partial^2 u(z,t)}{\partial t^2} v(z)\,\mathrm{d}z - \frac{\partial}{\partial z}\left[k(z)\frac{\partial u(z,t)}{\partial z}\right] v(z) - f(z,t)v(z)\right] \mathrm{d}z = 0 \tag{6.194}$$

odakle sledi

$$\begin{aligned} \int_0^l \rho(z)\frac{\partial^2 u(z,t)}{\partial t^2} v(z)\,\mathrm{d}z + \int_0^l k(z)\frac{\partial u(z,t)}{\partial z}\frac{\partial v(z)}{\partial z}\,\mathrm{d}z - \int_0^l f(z,t)v(z)\,\mathrm{d}z = \\ -k(l)\frac{\partial u(l,t)}{\partial z} v(l) + k(0)\frac{\partial u(0,t)}{\partial z} v(0) \quad \text{za} \quad \forall v \in H_0^1(0,l). \end{aligned} \tag{6.195}$$

Ako uvedemo $u_h(z,t)$ na isti način, jednačine (6.186) i (6.187), dobijamo

$$\begin{aligned} \mathbf{C}\frac{d^2\mathbf{U}(t)}{dt^2} + \mathbf{K}\mathbf{U}(t) = \mathbf{f}(t) \\ \mathbf{U}(0) = \tilde{U} \quad d\mathbf{U}(0)/dt = \tilde{g} \end{aligned} \tag{6.196}$$

gde je

$$\mathbf{C}_{ij} = \int_0^l \rho(z)\phi_i(z)\phi_j(z)\,\mathrm{d}z \tag{6.197}$$

matrica masa, a matrica krutosti K_{ij} i vektor sila f_i su istog oblika kao u (6.188). Jednačinu (6.196) takođe rešavamo eksplicitnim ili implicitnim metodama. Kod eksplicitne metode, drugi izvod po vremenu predstavljamo kao

$$\frac{d^2\mathbf{U}(n\Delta t)}{\mathrm{d}t^2} \approx \frac{\mathbf{U}^{n+1} - 2\mathbf{U}^n + \mathbf{U}^{n-1}}{\Delta t^2}, \tag{6.198}$$

što daje

$$\mathbf{C}(\mathbf{U}^{n+1} - 2\mathbf{U}^n + \mathbf{U}^{n-1}) = (-\mathbf{K}\mathbf{U}^n + \mathbf{f}^n)\Delta t^2. \tag{6.199}$$

Potrebno je znati $\mathbf{U}^0$ i $\mathbf{U}^1 = \mathbf{U}^0 + \Delta t\frac{\partial \mathbf{U}^0}{\partial t}$ da bi se izračunalo $\mathbf{U}^2$ iz jednačine (6.199), a zatim redom $\mathbf{U}^3$ na osnovu $\mathbf{U}^1$ i $\mathbf{U}^2$... Rešenje je uslovno stabilno.

6.3 Poređenje metode konačnih elemenata i metode konačnih razlika

Kao primer za poređenje metode konačnih elemenata i metode konačnih razlika, uzećemo jednačinu slobodnih oscilacija grede:

$$EI\frac{\partial^4\Omega}{\partial x^4}+m\frac{\partial^2\Omega}{\partial t^2}=0, \tag{6.200}$$

koju ćemo, u cilju tačnog rešavanja, transformisati smenom $\Omega(x,t)=W(x)e^{i\omega t}$, u sledeći oblik

$$\frac{d^4W}{dx^4}-\lambda W=0 \tag{6.201}$$

gde je m jedinična masa po jedinici dužine, ω sopstvena frekvencija, E modul elastičnosti, I moment inercije,

$$\lambda=\frac{m\omega^2}{EI}=\beta^4. \tag{6.202}$$

Opšte rešenje jednačine (6.200) je:

$$W(x)=C_1\sin(\beta x)+C_2\cos(\beta x)+C_3\sinh(\beta x)+C_4\cosh(\beta x). \tag{6.203}$$

Konstante C_1 - C_4 se odredjuju iz graničnih uslova:

$$\begin{aligned} W(0)=W(L)=0\\ \frac{dW}{dx}(0)=\frac{dW}{dx}(L)=0 \end{aligned} \tag{6.204}$$

što daje četiri homogene jednačine sa četiri nepoznate. Da bi postojalo netrivijalno rešenje, matrica ovog sistema mora da bude jednaka nuli, odakle sledi frekventna jednačina:

$$\cos(\beta L)\cosh(\beta L)=1, \tag{6.205}$$

koja ima beskonačno mnogo rešenja. Zamenom njenih rešenja po β, dobija se $\omega_n^2=\frac{\beta_n^4 EI}{m}$, odnosno

$$\omega_n=\beta_n^2\sqrt{\frac{EI}{m}}=\frac{(\beta_n L)^2}{L^2}\sqrt{\frac{EI}{m}}, \tag{6.206}$$

gde su $\beta_1 L=4,73$ i $\beta_2 L=7,85$, odnosno $\omega_1=\frac{21,4}{L^2}\sqrt{\frac{EI}{m}}$; $\omega_2=\frac{61,6}{L^2}\sqrt{\frac{EI}{m}}$.

6.3.1 Približno analitičko rešenje

Pretpostavićemo rešenje jednačine (6.201) u obliku

$$W(x)=\sum_{i=1}^{n}C_i f_i(x), \tag{6.207}$$

gde su c_i konstante, a $f_i(x)$ funkcije koje zadovoljavaju granične uslove. Kako ovo rešenje nije tačno, ono ne zadovoljava jednačinu (6.201), pa će se njegovom zamenom u jednačinu dobiti ostatak, R. Vrednosti konstanti c_i se dobijaju iz uslova

$$\int_{x=0}^{L} f_i R dx = 0 \quad i = 1, 2, \ldots, n \tag{6.208}$$

što daje sistem homogenih linearnih algebarskih jednačina po nepoznatim C_i, čijim rešavanjem se dobija približno rešenje. Na primer, ako pretpostavimo

$$W(x) = C_1 f_1(x) + C_2 f_2(x) \tag{6.209}$$

gde je $f_1(x) = \cos(\frac{2\pi x}{L}) - 1$ i $f_2(x) = \cos(\frac{4\pi x}{L}) - 1$, zamenom u jednačinu (6.201) dobija se

$$R = C_1 \left[(\frac{2\pi}{L})^4 - \beta^4 \right] \cos(\frac{2\pi x}{L}) + C_1 \beta^4 + C_2 \left[(\frac{4\pi}{L})^4 - \beta^4 \right] \cos \frac{4\pi x}{L} + C_2 \beta^4 \tag{6.210}$$

Primenom uslova (6.208) dobija se

$$\int\limits_{x=0}^{L} \left(\cos \frac{2\pi x}{L} - 1 \right) \left[C_1 \left\{ \left(\frac{2\pi}{L} \right)^4 - \beta^4 \right\} \cos \frac{2\pi x}{L} + C_1 \beta^4 + \right. \tag{6.211}$$

$$\left. + C_2 \left\{ \left(\frac{4\pi}{L} \right)^4 - \beta^4 \right\} \cos \frac{4\pi x}{L} + C_2 \beta^4 \right] \mathrm{d}x = 0$$

i

$$\int\limits_{x=0}^{L} \left(\cos \frac{4\pi x}{L} - 1 \right) \left[C_1 \left\{ \left(\frac{2\pi}{L} \right)^4 - \beta^4 \right\} \cos \frac{2\pi x}{L} + C_1 \beta^4 + \right. \tag{6.212}$$

$$\left. + C_2 \left\{ \left(\frac{4\pi}{L} \right)^4 - \beta^4 \right\} \cos \frac{4\pi x}{L} + C_2 \beta^4 \right] \mathrm{d}x = 0.$$

tj.

$$C_1 \left[\frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{2\pi}{L} \right)^4 - \beta^4 \right\} - \beta^4 \right] - C_2 \beta^4 = 0, \tag{6.213}$$

i

$$-C_1 \beta^4 + C_2 \left[\frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{4\pi}{L} \right)^4 - \beta^4 \right\} - \beta^4 \right] = 0. \tag{6.214}$$

Da bi postojalo netrivijalno rešenje sistema jednačina (6.213) i (6.214), njegova determinanta mora da bude jednaka 0, odakle sledi

$$\beta_1 L = 4,74 \tag{6.215}$$

$$\beta_2 L = 11,14 \tag{6.216}$$

odnosno

$$\omega_1 = \frac{22,48}{L^2}\sqrt{\frac{EI}{m}} \tag{6.217}$$

$$\omega_2 = \frac{124,1}{L^2}\sqrt{\frac{EI}{m}}. \tag{6.218}$$

6.3.2 Rešenje metodom konačnih razlika

Metoda konačnih razlika zahteva približne izraze za izvode, što se dobija razvojem u Tejlorov red:

$$f(x+\Delta x) = f(x) + \frac{df}{dx}\Delta x + \frac{d^2f}{dx^2}\frac{(\Delta x)^2}{2} + \frac{d^3f}{dx^3}\frac{(\Delta x)^3}{6} + \frac{d^4f}{dx^4}\frac{(\Delta x)^4}{24} \tag{6.219}$$

$$f(x-\Delta x) = f(x) + \frac{df}{dx}\Delta x - \frac{d^2f}{dx^2}\frac{(\Delta x)^2}{2} + \frac{d^3f}{dx^3}\frac{(\Delta x)^3}{6} - \frac{d^4f}{dx^4}\frac{(\Delta x)^4}{24}. \tag{6.220}$$

Uzimanjem u obzir prva dva člana i oduzimanjem jednačina (6.219) i (6.220) dobija se

$$\left.\frac{df}{dx}\right|_x \approx \frac{f(x+\Delta x) - f(x-\Delta x)}{2\Delta x}. \tag{6.221}$$

Uzimanjem u obzir prva tri člana i sabiranjem jednačina (6.219) i (6.220), dobija se

$$\left.\frac{d^2f}{dx^2}\right|_x = \frac{f(x+\Delta x) - 2f(x) + f(x-\Delta x)}{(\Delta x)^2} \tag{6.222}$$

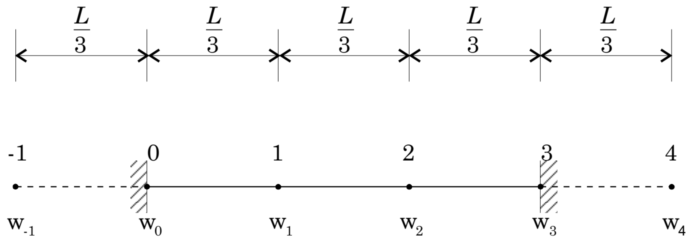
Ako se sada umesto $f(x)$ u jednačinu (6.222) stavi $\left.\frac{d^2f}{dx^2}\right|_x$ dobija se

$$\left.\frac{d^4f}{dx^4}\right|_x = \frac{\left.\frac{d^2f}{dx^2}\right|_{x+\Delta x} - 2\left.\frac{d^2f}{dx^2}\right|_x + \left.\frac{d^2f}{dx^2}\right|_{x-\Delta x}}{(\Delta x)^2} \tag{6.223}$$

Zamenom (6.222) u desnu stranu jednačine (6.223) dobija se

$$\begin{aligned}\left.\frac{d^4f}{dx^4}\right| \approx \frac{1}{(\Delta x)^2}\Bigg[&\frac{f(x+2\Delta x) - 2f(x+\Delta x) + f(x)}{(\Delta x)^2} - \\ &- 2\frac{f(x+\Delta x) - 2f(x) + f(x-\Delta x)}{(\Delta x)^2} + \\ &+ \frac{f(x) - 2f(x-\Delta x) + f(x-2\Delta x)}{(\Delta x)^2}\Bigg]\end{aligned} \tag{6.224}$$

Sada se metoda konačnih razlika može primeniti na rešavanje jednačine (6.201) tako što se uvode čvorovi kao na slici 6.9, uključujući hipotetične čvorove (-1) i (4). Za čvor (1) i (2) se dobija



Slika 6.9:

$$W_{-1} - 4W_0 + 6W_1 - 4W_2 + W_3 = \beta_1^4 W_1 \tag{6.225}$$

$$W_0 - 4W_1 + 6W_2 - 4W_3 - W_4 = \beta_1^4 W_2 \tag{6.226}$$

gde je $\beta_1 = \frac{L}{3}\beta$.

Granični uslovi su: $W_0 = W_3 = 0$ i $\frac{dW}{dx} = 0$ u čvorovima (0) i (3) tj. $W_{-1} = W_1$ i $W_2 = W_4$. Zamenom graničnih uslova u (6.225) i (6.226) dobija se sistem homogenih linearnih algebarskih jednačina sa dve nepoznate, W_1 i W_2

$$7W_1 - 4W_2 = \beta_1^4 W_1 \tag{6.227}$$

$$-4W_2 + 7W_2 = \beta_1^4 W_2 \tag{6.228}$$

čijim rešavanjem se dobijaju vrednosti

$$\omega_1 = \frac{15,59}{L^2}\sqrt{\frac{EI}{m}} \qquad \left\{ \begin{array}{c} W_1 \\ W_2 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} 1 \\ 1 \end{array} \right\} \tag{6.229}$$

$$\omega_2 = \frac{29,85}{L^2}\sqrt{\frac{EI}{m}} \qquad \left\{ \begin{array}{c} W_1 \\ W_2 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} 1 \\ -1 \end{array} \right\} \tag{6.230}$$

Tačnost rešenja se može povećati uvođenjem novih čvorova.

6.3.3 Rešenje metodom konačnih elemenata

Gredu delimo na odgovarajući broj subdomena (konačnih elemenata), u ovom slučaju na dva konačna elementa, za koju uvodimo sledeću interpolaciju (kubnu)

$$\Omega(x) = W_1^{(e)}(2\xi^3 - 3\xi^2 + 1) + W_3^{(e)}(3\xi^2 - 2\xi^3) + \\ + lW_2^{(e)}(\xi^3 - 2\xi^2 + \xi) + lW_4^{(e)}(\xi^3 - \xi^2), \tag{6.231}$$

gde je $\xi = x/l$, x podužna koordinata, l dužina elementa, slika 6.10.

Za potencijalnu (statičku) i kinetičku energiju elementa dobija se

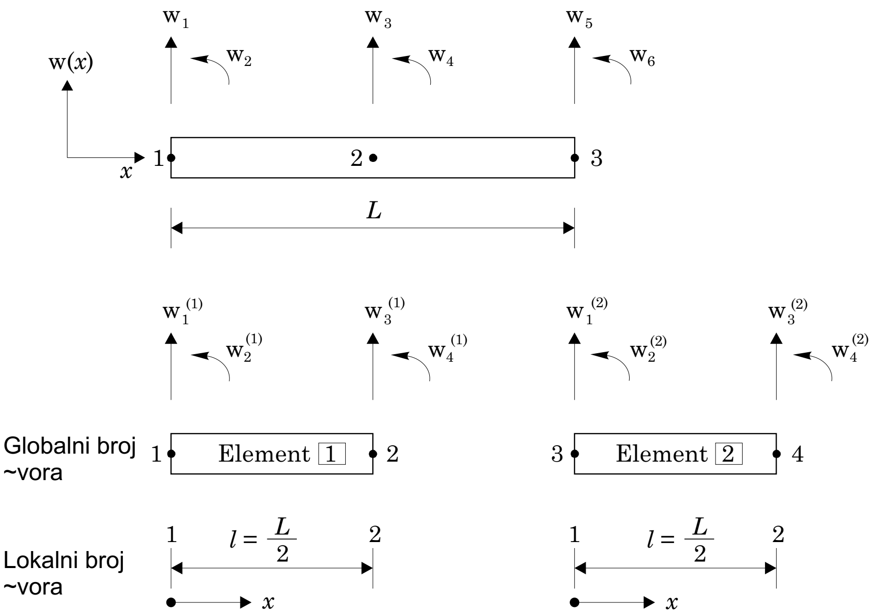
$$\Pi^{(e)} = \frac{1}{2}\int_0^l EI\left(\frac{\partial^2\omega}{\partial x^2}\right)^2 dx = \frac{1}{2}\vec{W}^{(e)^T}[K^{(e)}]\vec{W}^{(e)} \tag{6.232}$$

$$T^{(e)} = \frac{1}{2}\int_0^l \rho A(\frac{\partial\omega}{\partial x})^2 dx = \frac{1}{2}\dot{\vec{W}}^{(e)^T}[M^{(e)}]\dot{\vec{W}}^{(e)} \tag{6.233}$$

gde je ρ gustina, A površina poprečnog preseka, a "˙" izvod po vremenu. Zamenom (6.231) u (6.232) i (6.233) dobijaju se matrica krutosti $[K^{(e)}]$ i matrica masa $[M^{(e)}]$:

$$[K^{(e)}] = \frac{2EI}{l^3}\begin{bmatrix} 6 & 3l & -6 & 3l \\ 3l & 2l^2 & -3l & l^2 \\ -6 & -3l & 6 & -3l \\ 3l & l^2 & -3l & 2l^2 \end{bmatrix} \tag{6.234}$$

$$[M^{(e)}] = \frac{\varrho AI}{420}\begin{bmatrix} 156 & 22l & 54 & -13l \\ 22l & 4l^2 & 13l & -3l^2 \\ 54 & 13l & 156 & -22l \\ -13l & -3l^2 & -22l & 4l^2 \end{bmatrix} \tag{6.235}$$



Slika 6.10:

Ako se jednačine konačnih elemenata slože prema sl. 6.10, dobija se globalna matrica krutosti:

$$[K] = \frac{2EI}{l^3}$$

$$\begin{array}{cccccc} W_1 & W_2 & W_3 & W_4 & W_5 & W_6 \end{array}$$
$$\begin{bmatrix} 6 & 3l & -6 & 3l & 0 & 0 \\ 3l & 2l^2 & -3l & l^2 & 0 & 0 \\ -6 & -3l & 6+6 & -3l+3l & -6 & 3l \\ 3l & l^2 & -3l+3l & 2l^2+2l^2 & -3l & l^2 \\ 0 & 0 & -6 & -3l & 6 & -3l \\ 0 & 0 & 3l & l^2 & -3l & 2l^2 \end{bmatrix}$$

gde su

$$\begin{aligned}
W_1 &= W_1^{(1)}\\
W_2 &= W_2^{(1)}\\
W_3 &= W_3^{(1)} = W_1^{(2)}\\
W_4 &= W_4^{(1)} = W_2^{(2)}\\
W_5 &= W_3^{(2)}\\
W_6 &= W_4^{(2)}
\end{aligned}$$

kod koje možemo da izbacimo redove i kolone vezane za W_1, W_2, W_5 i W_6, jer su oni zbog graničnih uslova jednaki nuli, pa se dobija

$$[K] = \frac{2EI}{l^3}\begin{bmatrix} 12 & 0 \\ 0 & 4l^2 \end{bmatrix} = \frac{16EI}{l^3}\begin{bmatrix} 12 & 0 \\ 0 & l^2 \end{bmatrix} \tag{6.236}$$

Na isti način se dobija globalna matrica mase:

$$[M] = \frac{\rho Al}{420}\begin{bmatrix} 156 & 0 \\ 0 & l^2 \end{bmatrix} \tag{6.237}$$

Ako rešimo problem sopstvenih vrednosti

$$[K]\vec{W} = \lambda[M]\vec{W} \tag{6.238}$$

gde je $\vec{W} = \begin{Bmatrix} W_3 \\ W_4 \end{Bmatrix}$ vektor sopstvenih vrednosti, a λ sopstvena vrednost, dobijamo dve prirodne frekvencije

$$\omega_1 = \frac{22,7}{L^2}\sqrt{\frac{EI}{m}}; \quad \omega_2 = \frac{82,0}{L^2}\sqrt{\frac{EI}{m}}. \tag{6.239}$$

Poređenjem koeficijenata u gornjim izrazima dobijenih analitički i numerički (metoda konačnih razlika i metode konačnih elemenata, tabela 6.2) sa tačnim rezultatima, može da se zaključi da je na nivou ovako jednostavnog modeliranja najefikasnija metoda konačnih elemenata.

Tabela 6.2. Poređenje rezultata

tačni	analitički	MKR	MKE
21,46	22,48	15,59	22,7
61,6	124,1	29,85	82,0

6.4 Metoda konačnih elemenata – dvodimenzionalni problem

6.4.1 Uvod

Kao što je u prethodnom poglavlju pokazano, osnovni koraci u primeni metode konačnih elemenata su:

1. varijaciona formulacija problema, uz identifikaciju odgovarajućeg prostora dopustivih funkcija H;
2. definisanje mreže konačnih elemenata i polinoma u delovima koje uspostavljaju konačno dimenzioni prostor u H;
3. uspostavljanje aproksimacije varijacionog problema graničnih vrednosti u potprostoru konačnih elemenata H^h unutar H, što obuhvata izračunavanje matrica elemenata i definisanje sistema linearnih algebarskih jednačina po nepoznatim čvornim vrednostima približnog rešenja;
4. rešenje sistema linearnih algebarskih jednačina, pri čemu je od velike koristi simetrija i nulti članovi;
5. ispitivanje svojstva rešenja, i po mogućnosti, određivanje greške rešenja.

Ovi koraci u osnovi važe i za granične probleme u dve i tri dimenzije. S obzirom na značajnu praktičnu primenu u ovom poglavlju ćemo prikazati sve bitne jednačine konačnih elemenata za dvodimenzionalne granične probleme, odnosno parcijalne diferencijalne jednačine koje treba zadovoljiti na dvodimenzionalnom domenu Ω, čija je granica u opštem slučaju krivolinijska. Umesto linijskih, konačni elemenati su sada jednostavnih dvodimenzionalnih oblika, trougaoni ili četvorougaoni, a mreža konačnih elemenata u opštem slučaju aproksimira domen problema Ω. Prirodna sposobnost ovakvih konačnih elemenata da predstave domen bilo kakvog oblika bez ikakvog dodatnog napora je ključna prednost metode konačnih elemenata u njenoj praktičnoj primeni.

U ovom poglavlju ćemo da analiziramo probleme u kojima je nepoznata skalarna funkcija u funkcija položaja, kao što je, na primer, problem provođenja toplote (u je temperatura), protoka kroz poroznu sredinu (u je gradijent pritiska) ili poprečnog ugiba elastične membrane (u je ugib).

6.4.2 Fizičke osnove problema

Neka se domen $\bar{\Omega}$ problema sastoji od unutrašnjosti Ω i granice $\partial\Omega$. Za domen $\bar{\Omega}$ pretpostavljamo da je konačan i da ima dovoljno glatku granicu (jedinična normala $\mathbf{n}$ na granicu je kontinualna funkcija položaja duž granice, sem u ugaonim tačkama). U opštem slučaju granica može da se definiše parametarskim jednačinama $x = x(s)$ i $y = y(s)$, gde je s dužina luka na $\partial\Omega$, merena od neke referentne tačke. Vrednosti neke funkcije g na granici označavamo sa $g(s) \equiv g(x(s), y(s))$, $s \in \partial\Omega$.

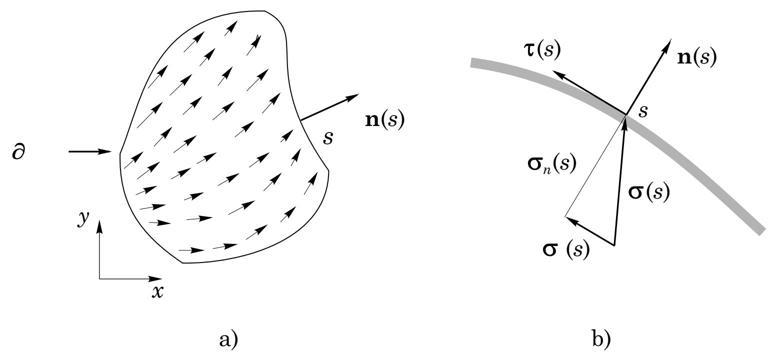
Za promenljivu stanja $u(x,y)$ osnovni zahtev je da bude glatka funkcija u Ω, u skladu sa konkretnim problemom i funkcijama $x(s)$ i $y(s)$ koje definišu $\partial\Omega$, odnosno onoliko glatka koliko nam je potrebno.

Fizička osnova problema zasniva se na brzini promene skalarnog polja u u odnosu na njegov položaj u Ω, što je definisano vektorskom funkcijom ∇u, koju zovemo gradijent:

$$\nabla u(x,y) = \frac{\partial u(x,y)}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial u(x,y)}{\partial y}\mathbf{j}, \tag{6.240}$$

gde su $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ jedinični vektori x i y ose, respektivno. Gradijent definiše ukupnu brzinu promene skalarnog polja u tački (x,y) u bilo kom pravcu. Ako je $\mathbf{t}$ jedinični vektor pod uglom θ u odnosu na x osu, pa važi $\mathbf{t} = \cos\theta\mathbf{i} + \sin\theta\mathbf{j}$, onda se brzina promene skalarnog polja u tački (x,y) u pravcu $\mathbf{t}$ definiše kao:

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\mathbf{t}} = \nabla u \cdot \mathbf{t} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\theta + \frac{\partial u}{\partial y}\sin\theta. \tag{6.241}$$

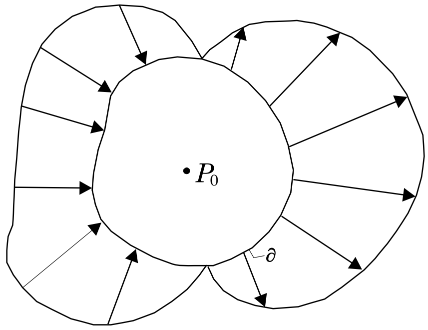


Slika 6.11:

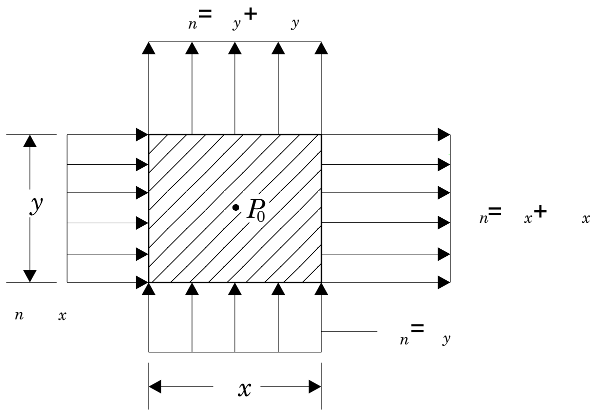
Druga fizička veličina koja nas interesuje je fluks $\boldsymbol{\sigma}$, koji predstavlja vektorsko polje. Fluks $\boldsymbol{\sigma}$ je predstavljen strelicama u $\bar{\Omega}$, odnosno vektorom $\boldsymbol{\sigma}(s)$ u tački s na granici $\partial\Omega$, sl. 6.11. Fluks koji prolazi kroz granicu $\partial\Omega$ u tački s je definisan komponentom:

$$\sigma_n(s) = \boldsymbol{\sigma}(s) \cdot \mathbf{n}(s), \tag{6.242}$$

gde je $\mathbf{n}(s)$ normala na granicu $\partial\Omega$ u tački s, sl. 6.11b. Komponenta duž tangente $\boldsymbol{\tau}(s)$ data je kao $\boldsymbol{\sigma}(s) \cdot \boldsymbol{\tau}(s)$, sl. 6.11b.



a)



b)

Slika 6.12:

Razmotrimo proizvoljnu potoblast ω, u kojoj se nalazi tačka $P_0(x_0, y_0)$. Na sl. 6.12a je prikazana raspodela $\sigma_n(s)$ duž granice $\partial\omega$, a ukupni fluks koji prolazi kroz granicu je dat izrazom:

$$\Sigma_\omega \equiv \int\limits_{\partial\omega} \sigma_n(s)\,\mathrm{d}s \tag{6.243}$$

Ako podelimo Σ_ω sa površinom podoblasti A_ω dobijamo prosečnu vrednost fluksa $\boldsymbol{\sigma}$ koji ulazi u ω po jedinici površine. Granična vrednost tog količnika kada ω opada, a pri tom sadrži tačku P_0 zove se divergencija fluksa u tački P_0, što označavamo sa $\mathrm{div}\boldsymbol{\sigma}(x_0, y_0)$. Ako usvojimo da je ω kvadratna podoblast sa P_0, sl. 6.12b, dobijamo $\Sigma_\omega = \Delta\sigma_x\Delta y + \Delta\sigma_y\Delta x$, pa je na osnovu teoreme o srednjoj vrednosti:

$$\mathrm{div}\boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial\sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial\sigma_y}{\partial y} \quad (= \nabla\cdot\boldsymbol{\sigma})\,. \tag{6.244}$$

Time smo definisali gustinu neto fluksa u tački po jedinici površine, pa je ukupni fluks u Ω dat kao:

$$\mathbf{\Sigma} = \int\limits_{\Omega} \nabla\cdot \boldsymbol{\sigma}\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y, \tag{6.245}$$

pod uslovom da su Ω i $\boldsymbol{\sigma}$ dovoljno glatki. Na osnovu (6.242), (6.243) i (6.245) sledi:

$$\int\limits_{\Omega} \nabla\cdot \boldsymbol{\sigma}\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int\limits_{\partial\Omega} \boldsymbol{\sigma}\cdot \mathbf{n}\, \mathrm{d}s, \tag{6.246}$$

što je Gausova teorema o divergenciji, koja važi i za bilo koje drugo tenzorsko polje.

6.4.3 Dvodimenzionalni eliptični granični problem

Da bismo formulisali dvodimenzionalni eliptični granični problem koristićemo linearne konstitutivne jednačine i zakone održanja. Drugim rečima, fluks je u svakoj tački proporcionalan gradijentu promenljive stanja, tj. nepoznate u:

$$\boldsymbol{\sigma}(x, y) = -k(x, y)\nabla u(x, y), \tag{6.247}$$

gde je $k(x, y)$ modul materijala (koeficijent ili svojstvo) za koji pretpostavljamo da važi $|k(x, y)| > k_0 (= \text{const.}) > 0$.

Zakon održanja (balansa) kaže da je u svakom delu domena neto fluks kroz granicu tog dela jednak ukupnoj veličini fluksa koji proizvode unutrašnji izvori.

Primenimo sada zakon održanja na deo materijala ω, koji okružuje tačku P_0, u kome su svojstva glatka. Ako sa f obeležimo izvor po jedinici površine, dobijamo:

$$\int\limits_{\partial\omega} \boldsymbol{\sigma}\cdot \mathbf{n}\, \mathrm{d}s = \int\limits_{\omega} f\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y. \tag{6.248}$$

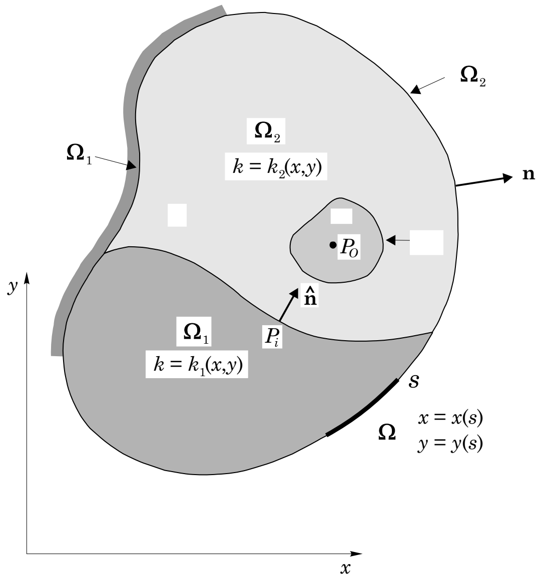
Primenom teoreme o divergenciji dobija se

$$\int\limits_{\omega} (\nabla\cdot \boldsymbol{\sigma} - f)\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0 \tag{6.249}$$

za sve podoblasti ω u Ω. Pošto je ω proizvoljna oblast u kojoj su $\nabla\cdot \boldsymbol{\sigma}$ i f glatke, podintegralna funkcija u (6.249) je nula za sve tačke unutar ω:

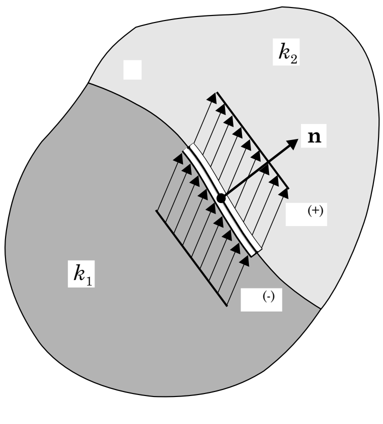
$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}(x, y) - f(x, y) = 0, \tag{6.250}$$

što predstavlja lokalni oblik zakona održanja.



Slika 6.13:

Zakon održanja menja oblik na međupovršima i granicama, kao što može da se vidi iz sledeće analize. Ako pretpostavima da je telo $\bar{\Omega}$ sastavljeno od dva različita materijala, jedan u podoblasti Ω_1 i drugi u Ω_2, sl. 6.13, možemo da zaključimo da je modul materijala k zadan glatkom funkcijom (tj. const.) k_1 i k_2. Krivu, koja definiše granicu između Ω_1 i Ω_2, označimo sa Γ, a sa $\partial\Omega_1$ i $\partial\Omega_2$ su označeni delovi $\partial\Omega$, odnosno granice na kojima su zadani granični uslovi, i to zadana vrednost $u = \hat{u}$ na $\partial\Omega_1$ (esencijalni granični uslovi), odnosno prirodni granični uslovi na $\partial\Omega_2$, koji će da budu definisani kasnije.



Slika 6.14:

Razmotrimo tačku P_i na Γ, sl. 6.13, odnosno traku materijala koji sadrži tačku P_i, sl. 6.14. Pretpostavimo da je ova traka dovoljno uzana da se fluks kroz njene krajeve, kao i izvor (proporcionalan površini) mogu zanemariti u odnosu na neto fluks kroz njene ivice. Kada debljina sloja teži nuli, zakon održanja glasi:

$$\mathbf{\Sigma} = \int_{s_1}^{s_2} (-\boldsymbol{\sigma}^{(-)} \cdot \mathbf{n} + \boldsymbol{\sigma}^{(+)} \cdot \mathbf{n}) \, \mathrm{d}s = 0, \tag{6.251}$$

gde su s_1 i s_2 krajevi trake. Pošto je oblast integracije proizvoljna, lokalni zakon održanja u tačkama na granici Γ se svodi na skok $\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \sigma_n$ po Γ:

$$[| \, \sigma_n(s) \, |] = \sigma_n^{(+)}(s) - \sigma_n^{(-)}(s) = 0, \quad s \in \Gamma. \tag{6.252}$$

Sada ćemo da razmotrimo granične uslove na $\partial\Omega_2$, odnosno oblast koja sadrži tipičnu graničnu tačku P_b, sl. 6.15. Pretpostavićemo da je normalni fluks $\hat{\sigma}(s)$ kroz okolni materijal neposredno uz granicu proporcionalan razlici vrednosti $u(s)$ na granici i zadanoj vrednosti $\hat{u}(s)$ u spoljnoj sredini:

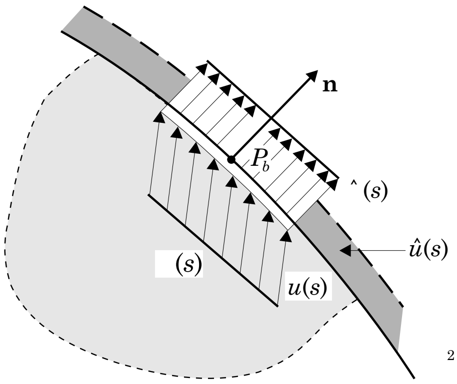
$$\hat{\sigma}(s) \equiv p(s)[u(s) - \hat{u}(s)].$$

Ravnoteža fluksa u traci koja sadrži P_b daje

$$\sigma_n(s) \equiv \boldsymbol{\sigma}(s) \cdot \mathbf{n}(s) = \hat{\sigma}(s), \quad s \in \partial\Omega_2. \tag{6.253}$$

pa važi

$$\sigma_n(s) \equiv p(s)[u(s) - \hat{u}(s)]. \tag{6.254}$$



Slika 6.15:

Ako se sada pomoću konstitutivne jednačine (6.247) eliminiše σ i σ_n iz (6.250) - (6.254) moguće je matematički formulisati granični problem:

1. granice $\partial\Omega_1$, $\partial\Omega_2$ i međugranica Γ su definisane parametarskim jednačinama: $x = x(s)$, $y = y(s)$, $s \in \partial\Omega$ ili $s \in \Gamma$;

2. raspodela izvora je definisana kao $f = f(x, y)$ u Ω_i, $i = 1, 2$;
3. koeficijenti materijala su $k_i = k_i(x, y)$ za $(x, y) \in \Omega_i$, $i = 1, 2$;
4. zadana je promenljiva stanja $\hat{u}(s)$ za $s \in \partial\Omega_i$;
5. vrednost graničnih koeficijenata je $p(s)$ i $\hat{u}(s)$ na $\partial\Omega_2$ ili je zadano $\hat{\sigma}(s)$ za $s \in \partial\Omega_2$.

Za ovako formulisan problem treba naći funkciju $u = u(x, y)$ koja zadovoljava:

1. parcijalnu diferencijalnu jednačinu u unutrašnjim tačkama glatkih subdomena Ω_1 i Ω_2
$$-\nabla\cdot k(x, y)\nabla u(x, y) - f(x, y) = 0 \quad \text{za} \quad (x, y) \in \Omega_i; \tag{6.255}$$
2. uslov skoka u čvorovima na međugranici Γ
$$[|\, k\nabla u\cdot \mathbf{n}\, |] = 0 \quad s \in \Gamma; \tag{6.256}$$
3. esencijalne granične uslove na $\partial\Omega_1$
$$u(s) = \hat{u}(s) \quad s \in \partial\Omega_1; \tag{6.257}$$
4. prirodne granične uslove na $\partial\Omega_2$
$$-k(s)\frac{\partial u(s)}{\partial n} = \hat{\sigma}(s) \quad s \in \partial\Omega_2. \tag{6.258}$$

6.5 Varijaciona formulacija graničnog problema

Kao i ranije, jednačinu (6.255) ćemo pomnožiti dovoljno glatkom težinskom funkcijom v i integraliti po svakom domenu u kome je dobijeni izraz gladak:

$$\int_{\Omega_1} [-\nabla\cdot (k\nabla u) - f]v \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \int_{\Omega_2} [-\nabla\cdot (k\nabla u) - f]v \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0. \tag{6.259}$$

Dvodimenzionalna parcijalna integracija potrebna je da bi se prvi članovi u oba integrala sveli na prve izvode. Primenom pravila o izvodu proizvoda dobija se:

$$\begin{aligned} \nabla\cdot (vk\nabla u) &= k\nabla u\cdot \nabla v + v\nabla\cdot (k\nabla u) \\ v\nabla \cdot (k\nabla u) &= \nabla \cdot vk\nabla u - k\nabla u \cdot \nabla v, \end{aligned} \tag{6.260}$$

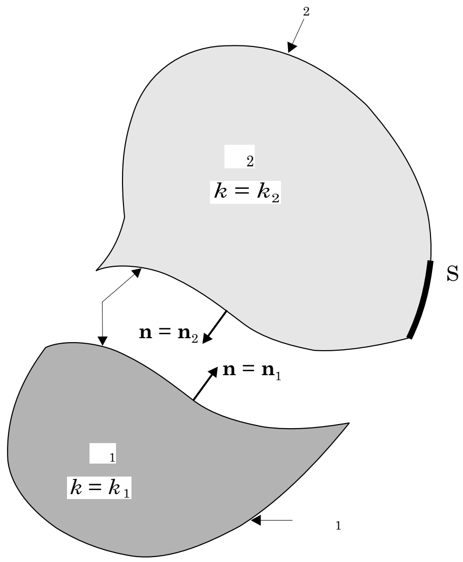
što zamenom (6.260) u (6.259) daje

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega_1} (k\nabla u\cdot \nabla v + buv - fv)\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y + \int_{\Omega_2} (k\nabla u\cdot \nabla v + buv - fv)\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y - \\ &\quad - \int_{\Omega_1} \nabla\cdot (vk\nabla u)\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y - \int_{\Omega_2} \nabla\cdot (vk\nabla u)\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0. \end{aligned} \tag{6.261}$$

Dva poslednja integrala u (6.261) mogu da se transformišu u linijske integrale korišćenjem teoreme o divergenciji, pa dobijamo

$$
\begin{aligned}
-\int\limits_{\Omega_1} \nabla\cdot(vk\nabla u)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y - \int\limits_{\Omega_2} \nabla\cdot(vk\nabla u)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \\
= \int\limits_{\partial(\Omega_1)} k\frac{\partial u}{\partial n} v\,\mathrm{d}s - \int\limits_{\partial(\Omega_2)} k\frac{\partial u}{\partial n} v\,\mathrm{d}s,&
\end{aligned}
\tag{6.262}
$$

gde su $\partial(\Omega_1)$ i $\partial(\Omega_2)$ granice subdomena Ω_1 i Ω_2, pravac integracije pozitivan matematički pravac, i $\partial u/\partial n = -\nabla u\cdot \mathbf{n}$.



Slika 6.16:

Na sl. 6.16, granica svakog domena je podeljena na dva dela - delovi $\partial(\Omega_i)$ koji se ne podudaraju sa Γ su označeni kao $\partial(\Omega_i) - \Gamma$, $i = 1, 2$. U skladu sa tim, linijski integrali u (6.262) se razdvajaju na sledeći način:

$$
\begin{aligned}
&-\int\limits_{\partial(\Omega_1)-\Gamma} k\frac{\partial u}{\partial n} v\,\mathrm{d}s - \int\limits_{\partial(\Omega_2)-\Gamma} k\frac{\partial u}{\partial n} v\,\mathrm{d}s + \\
&+\int\limits_{\Gamma} \left(-k\frac{\partial u}{\partial n}\right)_1 v\,\mathrm{d}s + \int\limits_{\Gamma} \left(-k\frac{\partial u}{\partial n}\right)_2 v\,\mathrm{d}s,
\end{aligned}
\tag{6.263}
$$

gde oznaka $(-k\dfrac{\partial u}{\partial n})_i$ ukazuje da $-k\dfrac{\partial u}{\partial n}$ treba odrediti u oblasti Ω_i. Uzimajući u obzir znak normale za poslednja dva integrala u (6.263) dobija se:

$$\int\limits_{\Gamma} \left[-k^{(+)} \frac{\partial u^{(+)}}{\partial n} + k^{(-)} \frac{\partial u^{(-)}}{\partial n} \right] v \, \mathrm{d}s. \tag{6.264}$$

Podintegralna funkcija u (6.264) jednaka je $v\,[|\,\sigma_n(s)\,|]$, što je prema (6.250) nula, pa je i integral (6.264) takođe jednak nuli.

Prva dva integrala u (6.263) mogu da se transformišu u jedan integral po čitavoj granici $\partial\Omega$. Osim toga, podintegralne funkcije u prva dva integrala u (6.261) sadrže najviše prve izvode po u i v, pa se mogu transformisati u jedan integral po celom domenu Ω, ako su funkcije u i v dovoljno glatke:

$$\int\limits_{\Omega} (k\nabla u \cdot \nabla v - fv)\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y - \int\limits_{\partial\Omega} k \frac{\partial u}{\partial n} v \, \mathrm{d}s = 0. \tag{6.265}$$

Zamena prirodnih graničnih uslova (6.258) u linijski integral daje

$$\int\limits_{\Omega} (k\nabla u \cdot \nabla v - fv)\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y + \int\limits_{\partial\Omega} \hat{\sigma} v \, \mathrm{d}s = 0, \tag{6.266}$$

što važi za sve dopustive težinske funkcije v.

Ako su podaci za rešenje u dovoljno glatki, rešenje jednačine (6.266) je takođe rešenje jednačine (6.258). Obrnuto, svako rešenje jednačine (6.258) je automatski rešenje jednačine (6.266).

Ostaje važno pitanje određivanja odgovarajuće klase dopustivih funkcija za problem (6.266). Uočimo da su površinski integrali u (6.266) definisani ako su funkcije u i v i njihovi parcijalni izvodi dovoljno glatki da budu kvadratno integrabilni po Ω:

$$\int\limits_{\Omega} \left[\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + v^2 \right] \mathrm{d}x\mathrm{d}y < \infty. \tag{6.267}$$

Takvu klasu funkcija ćemo označavati sa $H^1(\Omega)$ gde se 1 odnosi na "kvadratnu integrabilnost" prvog izvoda, a Ω na domen na kome su funkcije definisane.

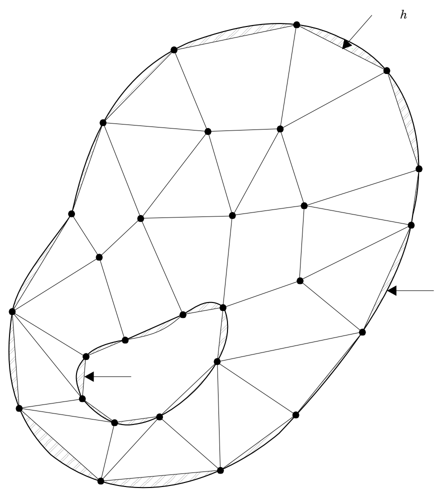
Kao u slučaju jednodimenzionalnog problema, prirodni granični uslovi su sastavni deo jednačine problema (6.266), a javljaju se u članu $\int\limits_{\partial\Omega_2} \hat{\sigma} v \, \mathrm{d}s$. Esencijalni granični uslovi se uzimaju u obzir preko definicije klasa dopustivih funkcija. Kao težinske funkcije biramo one funkcije v iz $H^1(\Omega)$ koje su jednake 0 na $\partial\Omega_1$, a rešenje u mora da bude funkcija u $H^1(\Omega)$ za koju važi $u = \hat{u}$ na $\partial\Omega_1$.

Varijaciona formulacija graničnog problema glasi: naći funkciju $u \in H^1(\Omega)$ takvu da je $u = \hat{u}$ na $\partial\Omega_1$ i (6.267) važi za $\forall v \in H^1(\Omega)$ tako da je $v = 0$ na $\partial\Omega_1$. Prema tome, osim već navedenog svojstva varijacione formulacije (vidi tekst posle jednačine (6.266), važi sledeće:

- ograničenja nametnuta varijacionom formulacijom su slabija od ograničenja koja važe za jednačinu (6.258);
- uslov skoka (6.256) ne zahteva dodatna razmatranja u varijacionoj formulaciji.

6.6 Interpolacija konačnim elementima

Ovo poglavlje je direktno uopštenje odgovarajućeg poglavlja iz analize jednodimenzionalnog problema, ali sa značajnim razlikama u nekim bitnim pojedinostima. Pre svega, kod jednodimenzionalnog problema mreža konačnih elemenata se jednostavno definiše podelom linijskog domena na linijske subdomene, uvođenjem čvornih tačka u svim diskontinuitetima. Kod dvodimenzionih problema diskretizacija problema nije tako jednostavna. U osnovi i dalje težimo da predstavimo približno rešenje u_h i težinske funkcije v_h polinomima definisanim na geometrijski jednostavnim subdomenima neke oblasti Ω_h koja se nalazi u ravni x, y. Pri tome diskretizacija tela treba da bude dovoljno opšta da modelira nepravilne domene, ali da sadrži elemente dovoljno jednostavne za račun. U tom cilju najpogodniji oblici su trougao i četvorougao, sl. 6.17. Ako je granica domena $\partial\Omega$ krivolinijska, sl. 6.17, mreža pravolinijskih elemenata očigledno uvodi grešku diskretizacije, jer postoji razlika domena Ω i diskretizovanog domena (mreže konačnih elemenata) Ω_h.



Slika 6.17:

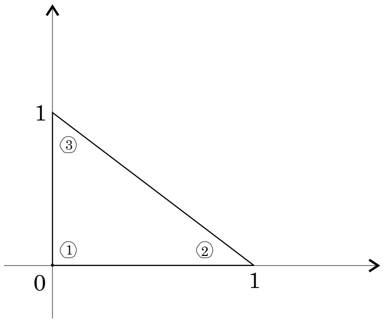
Videli smo da kod jednodimenzionalnih problema promenljiva stanja na jediničnom dužinskom elementu može da se prikaže linearnom

$$u = u_0 + u_1\xi,$$

ili kvadratnom funkcijom

$$u = u_0 + u_1\xi + u_2\xi^2.$$

Po analogiji, u dvodimenzionalnom domenu možemo da uvedemo kanonski trougao.



Slika 6.18:

Slično, kao što se u jednodimenzionalnom domenu jedinična kanonska duž preslikava u realnu duž proizvoljne dužine, tako se u dvodimenzionalnom domenu jedinični pravougli trougao preslikava u realni trougaoni element proizvoljnog oblika i veličine.

Osim jednostavnog računanja, konačni element oblika trougla uvodimo i zbog prirodnog slaganja broja čvorova i stepena polinoma kojim predstavljamo približno (aproksimativno) rešenje. Naime, linearna funkcija u dvodimenzionom prostoru je oblika:

$$v_h = a_1 + a_2\xi + a_3\eta \tag{6.268}$$

sa tri konstante (a_i, $i = 1, 2, 3$). Da bismo odredili ove tri konstante, potrebne su tri nezavisne vrednosti v_h, tj. konačni element treba da ima tri čvora. Šta više, kod dva susedna elementa neprekidnost funkcije na zajedničkoj strani se postiže uslovom da linearne funkcije elemenata imaju iste vrednosti u zajedničkim čvorovima.

Slično tome linearna funkcija

$$v_h = a_1 + a_2\xi + a_2\eta + a_3\xi\eta \tag{6.269}$$

ima četiri konstante, pa joj odgovara četvorougao sa četiri čvora, a kvadratna funkcija

$$v_h = a_1 + a_2\xi + a_3\eta + a_4\xi^2 + a_5\xi\eta + a_6\eta^2 \tag{6.270}$$

ima šest konstanti, pa joj odgovara trougao sa šest čvorova (tri u temenima i tri u sredini strana).

U skladu sa opisom iz prethodnog poglavlja, definišemo sada interpolaciju g_h funkcije g u obliku:

$$g_h(\xi, \eta) = g_i\phi_i(\xi, \eta) \quad (\xi, \eta) \in \Omega_h \tag{6.271}$$

gde su ϕ_i, $i = 1, \cdots, N$ bazne funkcije definisane na Ω_h kao:

$$\phi_i(\xi_j, \eta_j) = \begin{cases} 1, & \text{za} \quad i = j \\ 0, & \text{za} \quad i \neq j \end{cases} \tag{6.272}$$

gde su (ξ_j, η_j) čvorovi mreže konačnih elemenata, što znači da važi:

$$g_h(\xi_j, \eta_j) = g_j \quad j = 1, 2, \cdots, N. \tag{6.273}$$

Prema tome, stavljajući $g_j = g(\xi_j, \eta_j)$, g_j postaje jednako vrednosti funkcije g u čvorovima, odnosno njena interpolacija. Pri tome treba ispuniti dva zahteva:

1. definicija lokalnih interpolacionih funkcija ψ_i^e svakog elementa mora da bude takva da se njihovim uklapanjem u mrežu konačnih elemenata dobijaju bazne funkcije koje zadovoljavaju (6.272);

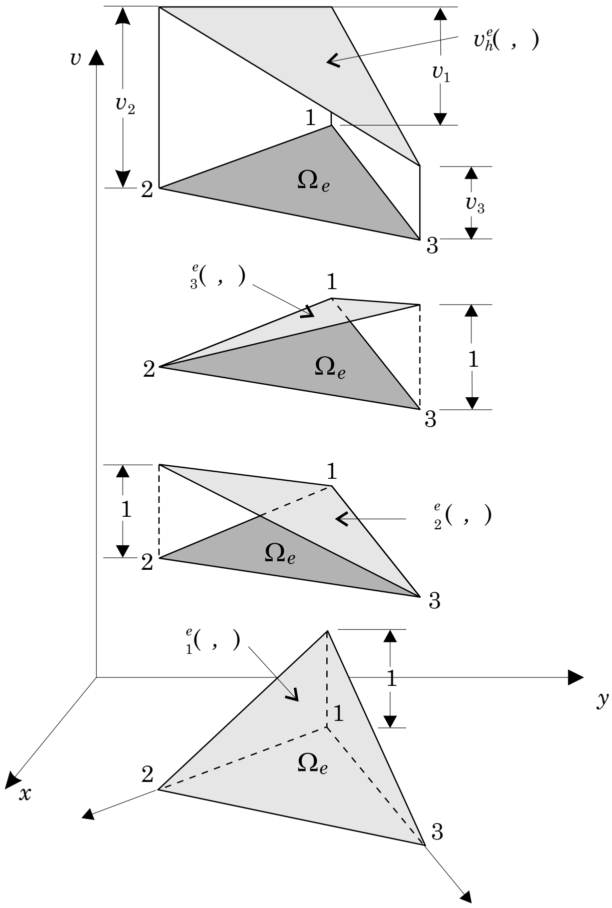
2. bazne funkcije ϕ_i treba da su kvadratno-integrabilne, kao i njihovi parcijalni izvodi:
$$\int\limits_{\Omega_h} \left[\left(\frac{\partial \phi_i}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi_i}{\partial y} \right)^2 + \phi_i^2 \right] \mathrm{d}x\mathrm{d}y < \infty. \tag{6.274}$$

Ovaj zahtev je ispunjen ako su funkcije ϕ_i kontinualne duž granica među elementima.

6.6.1 Interpolacija unutar trouglova

Kako linearna funkcija
$$v_h(\xi, \eta) = a_1 + a_2\xi + a_3\eta \tag{6.275}$$
određuje ravnu površ, linearna interpolacija unutar trougla aproksimira datu glatku funkciju (površ) v sa ravni (6.275) unutar proizvoljnog elementa Ω_e.

Pretpostavimo da se Ω_h sastoji od E trougaonih elemenata i da važi linearna interpolacija
$$v_h^e(\xi, \eta) = a_1 + a_2\xi + a_3\eta. \tag{6.276}$$
Za čvorove trougla važi (sl. 6.18)
$$\begin{aligned} v_1 &= v_h^e(\xi_1, \eta_1) = a_1 \\ v_2 &= v_h^e(\xi_2, \eta_2) = a_1 + a_2 \\ v_3 &= v_h^e(\xi_3, \eta_3) = a_1 + a_3 \end{aligned} \tag{6.277}$$
gde su (ξ_i, η_i) koordinate čvorova. Rešavanjem ovog sistema linearnih algebarskih jednačina po a_1, a_2 i a_3 dobija se:
$$\begin{aligned} a_1 &= v_1, \\ a_2 &= v_2 - v_1, \\ a_3 &= v_3 - v_1, \end{aligned} \tag{6.278}$$
Zamenom izraza (6.278) u (6.276) dobija se:
$$v_h^e(\xi, \eta) = v_1\psi_1^e(\xi, \eta) + v_2\psi_2^e(\xi, \eta) + v_3\psi_3^e(\xi, \eta), \tag{6.279}$$
gde su $\psi_i^e(\xi, \eta)$ funkcije oblika elementa:
$$\begin{aligned} \psi_1^e(\xi, \eta) &= 1 - \xi - \eta, \\ \psi_2^e(\xi, \eta) &= \xi, \\ \psi_3^e(\xi, \eta) &= \eta. \end{aligned} \tag{6.280}$$



Slika 6.19:

Ove linearne funkcije su predstavljene na sl. 6.19, i za njih važi:

$$\psi_i^e(\xi_j, \eta_j) = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j. \end{cases} \tag{6.281}$$

Napomenimo još da izraz (6.279) može da se napiše u kondenzovanom obliku

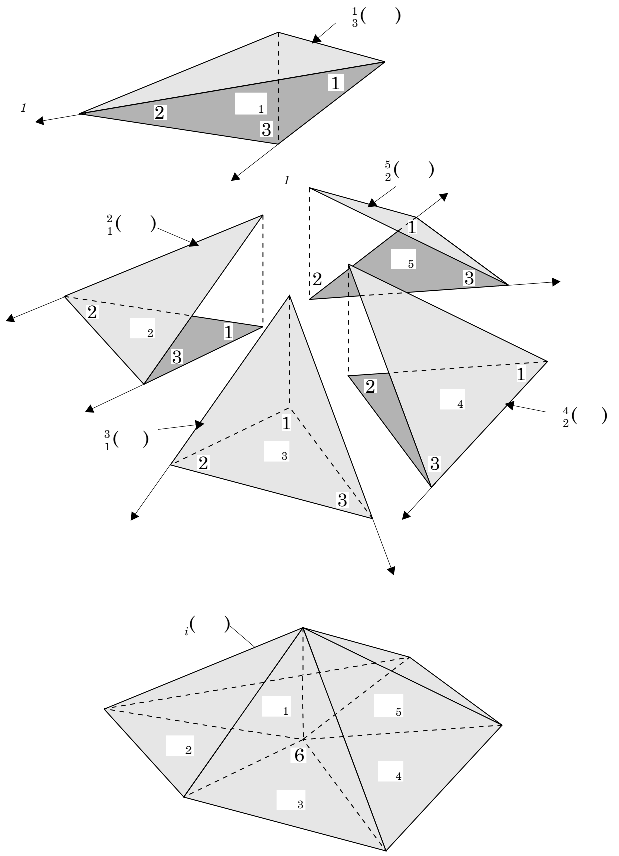
$$v_h^e(\xi, \eta) = v_i \psi_i^e(\xi, \eta), \tag{6.282}$$

korišćenjem ranije pomenute konvencije o sabiranju po istim (ponovljenim) indeksima. Primetimo, takođe, da je izraz (6.282) opštiji, pošto može da se koristi za elemente sa proizvoljnim brojem interpolacionih funkcija, ψ_i^e, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Sada ćemo da odredimo "globalne" bazne funkcije $\phi_i(\xi, \eta)$ koje se dobijaju "slaganjem" funkcija oblika ψ_i^e u "piramidu", sl. 6.10. Na isti način na koji se promenljiva stanja v prikazuje interpolacionim funkcijama ψ_i (6.282), predstavićemo i Dekartove koordinate:

$$
\begin{aligned}
x(\xi,\eta) &= x_i\psi_i(\xi,\eta),\\
y(\xi,\eta) &= y_i\psi_i(\xi,\eta),
\end{aligned}
\tag{6.283}
$$

gde su x_i i y_i Dekartove koordinate i-tog čvora.



Slika 6.20:

Jasno je da ϕ_i zadovoljavaju uslov (6.281) i da su kontinualne po međugranicama elemenata, tj. na Ω_h; njihovi prvi parcijalni izvodi su step funkcije, pa su i njihovi kvadrati integrabilni. Prema tome, ovakve bazne funkcije su odgovarajući izbor za primenu na aproksimaciju konačnih elemenata.

6.6.2 Greška interpolacije

Pretpostavimo da je glatka funkcija g interpolirana funkcijom g_h, koja sadrži kompletne polinome stepena k. Ako su parcijalni izvodi funkcije g reda $k+1$ ograničeni u Ω_e, za grešku interpolacije važi:

$$\|g - g_h\|_{\infty,\Omega_e} = \max |g(x,y) - g_h(x,y)| < Ch_e^{k+1}, \tag{6.284}$$

gde je C pozitivna konstanta, a h_e "prečnik" Ω_e, tj. najveće rastojanje bilo koje dve tačke elemenata. Slično tome,

$$\left\|\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial g_h}{\partial x}\right\|_{\infty,\Omega_e} \leq C_1 h_e^k \quad \text{i} \quad \left\|\frac{\partial g}{\partial y} - \frac{\partial g_h}{\partial y}\right\|_{\infty,\Omega_e} \leq C_2 h_e^k. \tag{6.285}$$

H^1 norma u dve dimenzije je definisana izrazom:

$$\|g\|_1^2 = \int_\Omega \left[g^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2\right] \mathrm{d}x\mathrm{d}y. \tag{6.286}$$

Ako pretpostavimo da je $\Omega_h = \Omega$ i da je h najveći "prečnik" svih elemenata, dobija se (za dovoljno regularne mreže):

$$\|g - g_h\|_1 \leq C_3 h^k \tag{6.287}$$

za dovoljno malo h. Pri tome je neophodno da g_h sadrži kompletan polinom reda k.

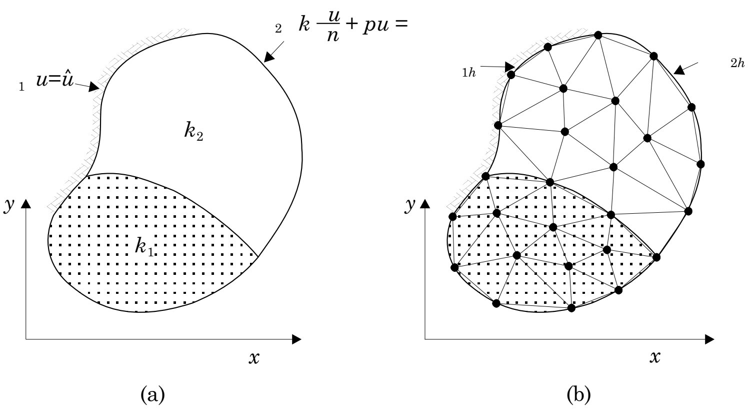
6.7 Aproksimacije konačnim elementima

Neka je $H^1(\Omega)$ klasa funkcija koje zadovoljavaju (6.267) i definisane su na celom domenu Ω. Problem je da se odredi funkcija u iz $H^1(\Omega)$ takva da je $u = \hat{u}$ na granici $\partial\Omega_1$ i da je zadovoljena jednačina:

$$\int_\Omega k\nabla u \cdot \nabla v \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \int_{\partial\Omega_2} \hat{\sigma} v \,\mathrm{d}s - \int_\Omega f v \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0 \tag{6.288}$$

za $\forall v \in H^1(\Omega)$ tako da je $v = 0$ na $\partial\Omega_1$ i $\gamma = p\hat{u}$.

Približno rešenje jednačine (6.288) zahteva zamenu domena Ω domenom Ω_h koji je, u stvari, mreža konačnih elemenata (sa N čvorova i E elemenata) i definisanje N dimenzionalnog potprostora H^h u $H^1(\Omega_h)$ uvođenjem globalnih baznih funkcija ϕ_i, $i = 1, \cdots, N$ i nekog od konačnih elemenata. Kako su funkcije oblika neprekidne duž svakog elementa, one ne mogu da modeliraju skokove, kao, na primer, skok u svojstvu materijala. Stoga se mreža konačnih elemenata postavlja tako da čvorovi i ivice elemenata odgovaraju linijama na kojima postoji skok modula materijala, sl. 6.21.



Slika 6.21:

Težinsku funkciju sada možemo da posmatramo unutar svakog pojedinačnog elementa

$$v_h(\xi,\eta) = v_i\phi_i(\xi,\eta) \tag{6.289}$$

gde je v_i vrednost težinske funkcije u i-tom čvoru. U opštem slučaju Dirihleova funkcija $\hat{u}$ data na $\partial\Omega_1$ je približno predstavljena interpolacijom $\hat{u}_h(s) = \hat{u}_i\phi_i(s)$, pri čemu se sabira po svim čvorovima aproksimacije $\partial\Omega_{1h}$ (od $\partial\Omega_1$). Približno rešenje funkcije u_h u H^h:

$$u_h(\xi,\eta) = u_i\phi_i(\xi,\eta) \tag{6.290}$$

tako da je $u_i = \hat{u}_i$ u čvorovima na $\partial\Omega_{1h}$ i da važi:

$$\int\limits_{\Omega_h} k\nabla u\cdot\nabla v\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \int\limits_{\partial\Omega_{2h}} \hat{\sigma}v_h\,\mathrm{d}s - \int\limits_{\Omega_h} fv_h\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0 \tag{6.291}$$

za $\forall v_h \in H^h$ tako da je $v_h = 0$ na $\partial\Omega_{1h}$, tj. aproksimacije $\partial\Omega_1$.

Zamenom (6.289) i (6.290) u (6.291) dobija se:

$$K_{ij}u_j = F_i \quad i,j = 1,2,\cdots,N \tag{6.292}$$

gde su K_{ij} članovi matrice krutosti:

$$K_{ij} = \int\limits_{\Omega_h} k\nabla\phi_i\cdot\nabla\phi_j\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{6.293}$$

dok su F_i komponente vektora sila opterećenja

$$F_i = \int\limits_{\Omega_h} f\phi_i\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y - \int\limits_{\partial\Omega_{2h}} \hat{\sigma}\phi_i\,\mathrm{d}s. \tag{6.294}$$

Sada treba modifikovati jednačinu (6.291) da bi se ubacili Dirihleovi uslovi i rešio rezultujući sistem nepoznatih čvornih vrednosti u_j, čime se određuje aproksimacija konačnih elemenata rešenja u jednačine (6.288).

Potrebno je sada naglasiti sličnosti u odnosu na rešavanje jednodimenzionalnog problema:

1. matrica krutosti $\mathbf{K}$ je retka, jer globalne bazne funkcije ϕ_i i ϕ_j i njihovi izvodi nisu 0 samo kad postoji element koji sadrži oba čvora i i j.

2. U analiziranom slučaju $\mathbf{K}$ je simetrična matrica (jer je operator u (6.250) samoadjungovan) i ima oblik trake ako su čvorovi numerisani po redu. Sve to omogućava efikasno rešavanje sistema linearnih algebarskih jednačina (6.292).

3. Svi integrali u (6.293) i (6.294) mogu da se izračunaju kao suma doprinosa svih elemenata u mreži, za koji tačno rešenje graničnog problema zadovoljava jednačinu:

$$\int\limits_{\Omega_e} k\nabla u\cdot\nabla v\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y - \int\limits_{\Omega_e} fv\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \int\limits_{\partial\Omega_e} \hat{\sigma}_n v\,\mathrm{d}s = 0 \tag{6.295}$$

za svako dopušteno v, gde je $\hat{\sigma}_n$ normalna komponenta fluksa na granici elementa. Neka u_h^e i v_h^e označavaju ograničenja aproksimacije u_h i v_h na Ω_e. Tada je lokalna aproksimacija varijacionog graničnog problema na Ω_e oblika:

$$\int\limits_{\Omega_e} k\nabla u_h\cdot\nabla v_h\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y - \int\limits_{\Omega_e} fv_h\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \int\limits_{\partial\Omega_e} \hat{\sigma}_n v_h\,\mathrm{d}s = 0, \tag{6.296}$$

gde je $\hat{\sigma}_n$ stvarni (tačni) fluks kroz $\partial\Omega_e$ koji se, iako nije dat kao podatak u polaznom problemu, ipak pojavljuje kao prirodni granični uslov na Ω_e. Kako je $v_h = 0$ na $\partial\Omega_{1h}$, neće biti doprinosa poslednjem integralu u (6.295) od elemenata čije se strane podudaraju sa $\partial\Omega_{1h}$. Pošto su u_h^e i v_h^e oblika:

$$u_h^e(\xi,\eta) = u_i^e\psi_i^e(\xi,\eta) \quad v_h^e(\xi,\eta) = v_i^e\psi_i^e(\xi,\eta), \quad i = 1,\ldots,N_e \tag{6.297}$$

gde su ψ_i^e lokalne funkcije oblika za Ω_e, a N_e broj čvorova u Ω_e, jednačina (6.295) postaje linearni sistem:

$$k_{ij}^e u_j^e = f_i^e - \sigma_i^e, \quad i,j = 1,2,\ldots,N_e \tag{6.298}$$

gde su

$$k_{ij}^e = \int\limits_{\Omega_e} k\nabla\psi_i^e\cdot\nabla\psi_j^e\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{6.299}$$

$$f_i^e = \int\limits_{\Omega_e} f\psi_i^e\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{6.300}$$

komponente matrice krutosti i vektora opterećenja elementa Ω_e, dok je

$$\sigma_i^e = \int_{\Omega_e} \sigma_n \psi_i^e \, \mathrm{d}s \tag{6.301}$$

vektor fluksa elementa.

Formalno, globalni sistem jednačina (6.292) se dobija sumiranjem (6.298) po svim elementima u mreži, pri čemu se članovi matrica i vektora (6.299), (6.300) i (6.301) smeštaju na odgovarajuća mesta u globalnoj matrici sistema. Tako se na primer članovi matrice krutosti elementa Ω_e smeštaju u one kolone i vrste u globalnoj matrici sistema, koje odgovaraju čvorovima tog elementa. Stoga se za prve članove u izrazima (6.293) i (6.294) dobija:

$$\sum_{e=1}^{E} \int_{\Omega_e} k\nabla\phi_i \cdot \nabla\phi_j \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \sum_{e=1}^{E} K_{ij}^e \tag{6.302}$$

$$\sum_{e=1}^{E} \int_{\Omega_e} f\phi_i \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \sum_{e=1}^{E} F_i^e \quad i,j = 1,2,\cdots,N, \tag{6.303}$$

gde je N dimenzija globalne matrice sistema, odnosno:

$$\sum_{e=1}^{E} (K_{ij}^e u_j - F_i^e + \Sigma_i^e) = 0, \quad i = 1,\cdots,N. \tag{6.304}$$

Treba uočiti da doprinosi od graničnih uslova matrici K_{ij} i vektoru F_i dolaze preko člana Σ_i^e, koji može da se napiše u obliku:

$$\sum_{e=1}^{E} \Sigma_i^e = S_i^{(0)} + S_i^{(1)} + S_i^{(2)} \tag{6.305}$$

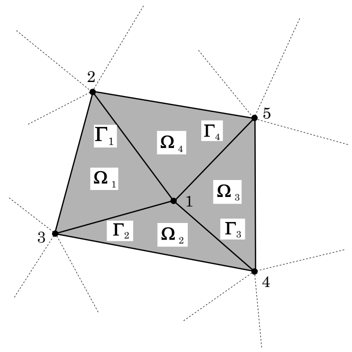
gde su

$$S_i^{(0)} = \sum_{e=1}^{E} \int_{\partial\Omega_e - \partial\Omega_h} \sigma_n \phi_i \, \mathrm{d}s, \tag{6.306}$$

$$S_i^{(1)} = \int_{\partial\Omega_{1h}} \sigma_n \phi_i \, \mathrm{d}s \tag{6.307}$$

$$S_i^{(2)} = \int_{\partial\Omega_{2h}} \sigma_n \phi_i \, \mathrm{d}s. \tag{6.308}$$

Simbol $\partial\Omega_e - \partial\Omega_h$ označava deo granice $\partial\Omega_e$ koji ne obuhvata $\partial\Omega_h$ (tj. deo $\partial\Omega_e$ koji se odnosi na zajedničke granice elementa), pa je član $S_i^{(0)}$ vektor definisan samo u unutrašnjim čvorovima.



Slika 6.22:

U cilju detaljnijeg tumačenja, sl. 6.22, analiziraćemo četiri unutrašnja elementa sa zajedničkim čvorom 1, za koje važi:

$$
\begin{aligned}
S_1^{(0)} &= \sum_{e=1}^{4} \int\limits_{\partial\Omega_e} \sigma_n \phi_i \,\mathrm{d}s = \\
&= \int\limits_{\Gamma_1} [|\,\sigma_n\,|]\,\phi_i \,\mathrm{d}s + \int\limits_{\Gamma_2} [|\,\sigma_n\,|]\,\phi_i \,\mathrm{d}s + \int\limits_{\Gamma_3} [|\,\sigma_n\,|]\,\phi_i \,\mathrm{d}s + \int\limits_{\Gamma_4} [|\,\sigma_n\,|]\,\phi_i \,\mathrm{d}s.
\end{aligned}
$$

Na osnovu zakona održanja, $[|\,\sigma_n\,|]$ je nula kroz međupovrš gde nema tačkastih ili linijskih izvora, pa za glatko f važi:

$$S_1^{(0)} = 0. \tag{6.309}$$

S druge strane, ako funkcija izvora f sadrži izvore u tački ili na liniji, onda skok $[|\,\sigma\,|]_n$ predstavlja jednačinu izvora i nije jednak nuli. Ako je izvor u tački onda striktno gledano varijaciona formulacija nije primenljiva. Stoga se uvodi pretpostavka da je f oblika:

$$f(x, y) = \bar{f}(x, y) + \hat{f}\delta(x - x_i, y - y_i) \tag{6.310}$$

gde je $\bar{f}$ gladak (integrabilni) deo od f, a $\hat{f}\delta(x - x_i, y - y_i)$ označava izvor u tački $(x_i, y_i) \in \Omega_h$ jačine f. Kao u slučaju jednodimenzionalnog problema, čvorovi mreže Ω_h se postavljaju u tačke dejstva izvora, jer tada se u integralima (6.295) i (6.300) pojavljuje samo glatki deo f:

$$S_1^{(0)} = \sum_{e=1}^{4} \int\limits_{\partial\Omega_e} \sigma_n \phi_1 \,\mathrm{d}s = \sum_{m=1}^{4} \int\limits_{\Gamma_m} [|\,\sigma_n\,|]\,\phi_1 \,\mathrm{d}s. \tag{6.311}$$

Prisustvo bazne funkcije ϕ_1 ukazuje na činjenicu da $S_1^{(0)}$ predstavlja težinsko osrednjavanje ovih skokova u unutrašnjem čvoru 1. Ako uravnotežimo (figurativno) skokove fluksa različitog od nule sa izvorom u tački $\hat{f}$, dobijamo:

$$S_1^{(0)} = \hat{f} \tag{6.312}$$

kad važi (6.310). Treba uočiti da izvor u tački kod dvodimenzionalnog problema daje singularno rešenje.

Prema esencijalnim graničnim uslovima, vrednosti u_h su zadane u čvorovima na $\partial\Omega_{1h}$. Kako se σ_n ne zna na $\partial\Omega_{1h}$, $S_i^{(1)}$ ne može tu da se zada. Međutim, ako se znaju sva čvorna pomeranja $u_1, u_2, \cdots, u_N$, može da se odredi aproksimacija za $S_i^{(1)}$ direktno iz (6.307).

Na granici $\partial\Omega_{2h}$ su zadani prirodni granični uslovi, pa važi:

$$\sigma_n(s) = \hat{\sigma}(s), \tag{6.313}$$

pa je približno

$$S_i^{(2)} \cong \sum_{i=1}^{N} \int\limits_{\partial\Omega_{2h}} \hat{\sigma}\phi_i \,\mathrm{d}s. \tag{6.314}$$

Oznaka $\partial\Omega_{2h}^e$ odnosi se na deo $\partial\Omega_e$ koji preseca $\partial\Omega_{2h}$. Sada dolazimo do sistema linearnih algebarskih jednačina oblika:

$$K_{ij}u_j = F_i - S_i^{(2)}, \quad i, j = 1, 2, \ldots, N, \tag{6.315}$$

gde je

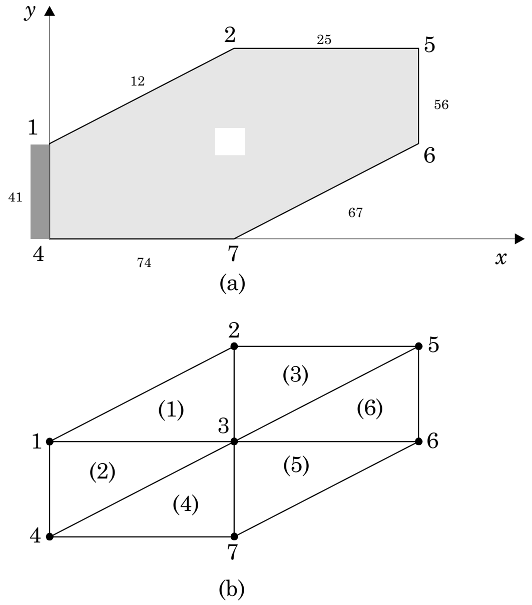
$$\begin{aligned} K_{ij} &= \sum_{e=1}^{E} K_{ij}^e \\ F_i &= \sum_{e=1}^{E} F_i^e. \end{aligned} \tag{6.316}$$

Ilustracija primene metode konačnih elemenata na rešavanje dvodimenzionalnih problema

Neka je zadan problem:

$$\begin{array}{ll} -\Delta u(x,y) = f(x,y) & \text{na } \Omega \\ u = 0 & \text{na } \Gamma_{41}, \\ \dfrac{\partial u}{\partial n} = 0 & \text{na } \Gamma_{12}, \Gamma_{25}, \Gamma_{67} \text{ i } \Gamma_{74} \\ \dfrac{\partial u}{\partial n} + \beta u = \gamma & \text{na } \Gamma_{56}, \end{array} \tag{6.317}$$

gde je Ω poligonalni domen, sl. 6.23a, a $\Gamma_{41}, \Gamma_{12} \cdots \Gamma_{74}$ delovi granice. U ovom slučaju je $\partial\Omega_1 = \Gamma_{41}$, a $\partial\Omega_2 = \Gamma_{12} \cup \Gamma_{25} \cup \Gamma_{56} \cup \Gamma_{67} \cup \Gamma_{74}$. Analiza problema se sastoji u sledećem:



Slika 6.23:

1. delimo domen na šest trougaonih elemenata sa sedam čvorova, sl. 6.23b, unutar kojih definišemo linearnu aproksimaciju u_h rešenja u jednačine (6.317). Pri tome je $\partial\Omega_1 = \partial\Omega_{1h}$ i $\partial\Omega_2 = \partial\Omega_{2h}$, jer je granica domena pravolinijska i stoga identična sa granicom mreže konačnih elemenata.

2. Zatim korišćenjem (6.299) i (6.300) izračunavamo K^e i f^e, $e = 1, 2, \cdots, 6$:

$$K^1 = \begin{bmatrix} K_{11}^1 & K_{12}^1 & K_{13}^1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ K_{21}^1 & K_{22}^1 & K_{23}^1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ K_{31}^1 & K_{32}^1 & K_{33}^1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad F^1 = \begin{bmatrix} f_1^1 \\ f_2^1 \\ f_3^1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$K^2 = \begin{bmatrix} K_{11}^2 & 0 & K_{12}^2 & K_{13}^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ K_{21}^2 & 0 & K_{22}^2 & K_{23}^2 & 0 & 0 & 0 \\ K_{31}^2 & 0 & K_{32}^2 & K_{33}^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad F^2 = \begin{bmatrix} f_1^2 \\ 0 \\ f_2^2 \\ f_3^2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{6.318}$$

$$K^6 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K_{11}^6 & 0 & K_{12}^6 & K_{13}^6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K_{21}^6 & 0 & K_{22}^6 & K_{23}^6 & 0 \\ 0 & 0 & K_{31}^6 & 0 & K_{32}^6 & K_{33}^6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad F^6 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ f_1^6 \\ 0 \\ f_2^6 \\ f_3^6 \\ 0 \end{bmatrix}$$

3. Uspostavljamo globalne jednačine sistema:

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & K_{14} & 0 & 0 & 0 \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} & 0 & K_{25} & 0 & 0 \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} & K_{34} & K_{35} & K_{36} & K_{37} \\ K_{41} & 0 & K_{43} & K_{44} & 0 & 0 & K_{47} \\ 0 & K_{52} & K_{53} & 0 & \tilde{K}_{55} & \tilde{K}_{56} & 0 \\ 0 & 0 & K_{63} & 0 & \tilde{K}_{65} & \tilde{K}_{66} & K_{67} \\ 0 & 0 & K_{73} & K_{74} & 0 & K_{76} & K_{77} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \\ u_7 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \\ \tilde{F}_5 \\ \tilde{F}_6 \\ F_7 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \Sigma_1 \\ 0 \\ 0 \\ \Sigma_4 \\ \Sigma_5 \\ \Sigma_6 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{6.319}$$

gde je $F_1 = f_1^1 + f_1^2$; $F_2 = f_2^1 + f_2^3 \cdots$, a Σ_i definisano na osnovu (6.305). Članovi sa $\sim$ će biti modifikovani kada se uzmu u obzir prirodni granični uslovi na Γ_{56}.

4. Kako su nehomogeni granični uslovi zadani samo na segmentu koji spaja čvorovove 5 i 6, γ i P su oblika:

$$\boldsymbol{\gamma} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \gamma_5 \\ \gamma_6 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & P_{55} & P_{56} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & P_{65} & P_{66} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \tag{6.320}$$

pa sistem linearnih algebarskih jednačina (6.319) postaje

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & K_{14} & 0 & 0 & 0 \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} & 0 & K_{25} & 0 & 0 \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} & K_{34} & K_{35} & K_{36} & K_{37} \\ K_{41} & 0 & K_{43} & K_{44} & 0 & 0 & K_{47} \\ 0 & K_{52} & K_{53} & 0 & K_{55} & K_{56} & 0 \\ 0 & 0 & K_{63} & 0 & K_{65} & K_{66} & K_{67} \\ 0 & 0 & K_{73} & K_{74} & 0 & K_{76} & K_{77} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \\ u_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 - \Sigma_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 - \Sigma_4 \\ F_5 \\ F_6 \\ F_7 \end{bmatrix} \tag{6.321}$$

gde je $K_{55} = \tilde{K}_{55} + P_{55}$, $K_{56} = \tilde{K}_{56} + P_{56}$, $F_5 = \tilde{K}_5 + \gamma_5$.

5. Sada ubacujemo esencijalne granične uslove $u_1 = u_4 = 0$, čime se sistem linearnih algebarskih jednačina (6.321) svodi na sistem linearnih algebarskih jednačina sa pet nepoznatih:

$$\begin{bmatrix} K_{22} & K_{23} & K_{25} & 0 & 0 \\ K_{32} & K_{33} & K_{34} & K_{36} & K_{37} \\ K_{52} & K_{53} & K_{55} & K_{56} & 0 \\ 0 & K_{63} & K_{65} & K_{66} & K_{67} \\ 0 & K_{73} & 0 & K_{76} & K_{77} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \\ u_5 \\ u_6 \\ u_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_2 \\ F_3 \\ F_5 \\ F_6 \\ F_7 \end{bmatrix} \tag{6.322}$$

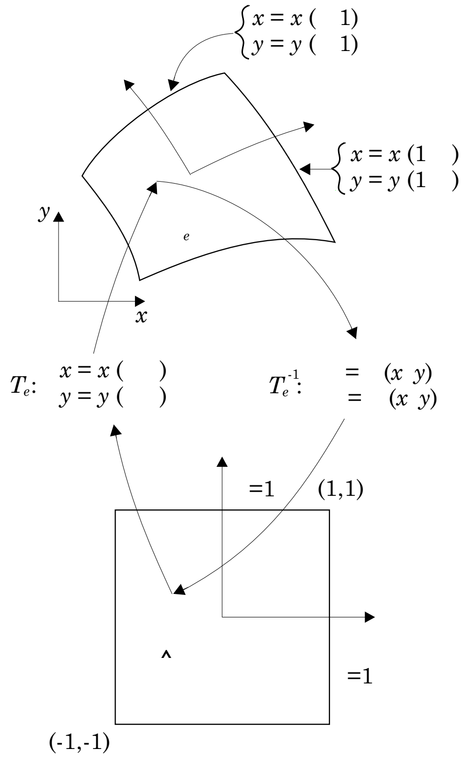
koji rešavamo po nepoznatim promeranjima u_2, u_3, u_5, u_6 i u_7. Preostale dve jednačine koristimo da odredimo približne vrednosti flukseva Σ_1 i Σ_4:

$$\begin{aligned} -\Sigma_1 &= K_{12}u_2 + K_{13}u_3 + K_{14}u_4 - F_1, \\ -\Sigma_4 &= K_{43}u_3 + K_{47}u_7 - F_4. \end{aligned} \tag{6.323}$$

Ostale karakteristike rešenja mogu da se odrede na osnovu poznatog kompletnog u_h, jednačina (6.290).

6.7.1 Određivanje matrica konačnih elemenata

Prvi korak je definisanje mreže konačnih elemenata, a zatim određivanje potrebnih matrica. Treba imati u vidu da je određivanje potrebnih matrica i vektora vrlo komplikovano ako se koristi globalni koordinatni sistem (x, y), sl. 6.24, i da bi svaki konačni element pri tome zahtevao zasebno određivanje granica interpolacije. Stoga se matrice i vektori određuju u lokalnom koordinatnom sistemu (ξ, η), a potom transformacijom koordinata $(\xi, \eta \rightarrow x, y)$ prebacuju u globalni koordinatni sistem. Time je omogućena jedinstvena procedura za sve konačnih elemenata i drastično olakšan posao.



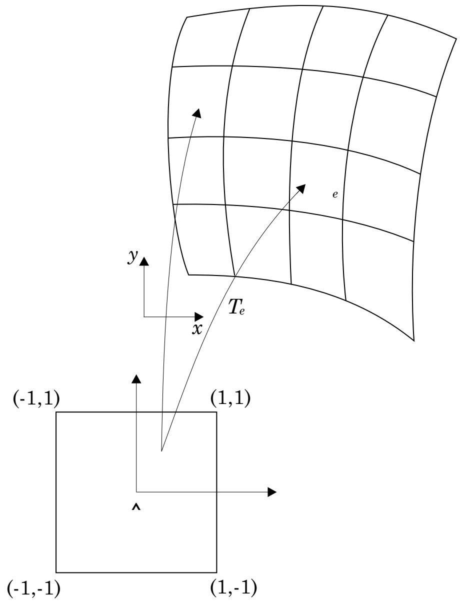
Slika 6.24:

Transformacije lokalno-globalno

Uvedimo pojam "master" elementa Ω, jednostavnog oblika za čije koordinate važi $-1 \le \xi \le 1$ i $-1 \le \eta \le 1$. U tom slučaju transformacija koordinata glasi:

$$\begin{aligned} x &= x(\xi, \eta) \\ y &= y(\xi, \eta). \end{aligned} \tag{6.324}$$

Osnovna ideja uvođenja "master" elementa može da se tumači kao generisanje mreže konačnih elemenata nizom transformacija $[T_e]$ oblika (6.324), sl. 6.25.



Slika 6.25:

U tom cilju pretpostavljamo da su funkcije x i y neprekidno diferencijabilne po ξ i η, pa važi:

$$\mathrm{d}x = \frac{\partial x}{\partial \xi}\mathrm{d}\xi + \frac{\partial x}{\partial \eta}\mathrm{d}\eta \quad \mathrm{d}y = \frac{\partial y}{\partial \xi}\mathrm{d}\xi + \frac{\partial y}{\partial \eta}\mathrm{d}\eta \tag{6.325}$$

odnosno u matričnom obliku:

$$\begin{bmatrix} \mathrm{d}x \\ \mathrm{d}y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial \xi} & \dfrac{\partial x}{\partial \eta} \\ \dfrac{\partial y}{\partial \xi} & \dfrac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{d}\xi \\ \mathrm{d}\eta \end{bmatrix} \tag{6.326}$$

Matrica parcijalnih izvoda reda 2×2 zove se Jakobijan transformacije i obeležava sa $\mathbf{J}$. Da bi važila inverzna transformacija, očigledno mora da bude $|\mathbf{J}| \neq 0$. U tom slučaju važi:

$$\begin{bmatrix} \mathrm{d}\xi \\ \mathrm{d}\eta \end{bmatrix} = \mathbf{J}^{-1} \begin{bmatrix} \mathrm{d}x \\ \mathrm{d}y \end{bmatrix} = \frac{1}{|\mathbf{J}|} \begin{bmatrix} \dfrac{\partial y}{\partial \eta} & \dfrac{\partial x}{\partial \eta} \\ -\dfrac{\partial y}{\partial \xi} & \dfrac{\partial x}{\partial \xi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{d}x \\ \mathrm{d}y \end{bmatrix}, \tag{6.327}$$

pa

$$\begin{aligned} \xi &= \xi(x, y) \\ \eta &= \eta(x, y) \end{aligned} \tag{6.328}$$

definiše inverznu transformaciju. Imajući u vidu izraz analogan (6.326)

$$\begin{bmatrix} \mathrm{d}\xi \\ \mathrm{d}\eta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial \xi}{\partial x} & \dfrac{\partial \xi}{\partial y} \\ \dfrac{\partial \eta}{\partial x} & \dfrac{\partial \eta}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{d}x \\ \mathrm{d}y \end{bmatrix} \tag{6.329}$$

jasno je da važi

$$\begin{aligned} \frac{\partial \xi}{\partial x} &= \frac{1}{|\mathbf{J}|}\frac{\partial y}{\partial \eta}, \quad \frac{\partial \xi}{\partial y} = -\frac{1}{|\mathbf{J}|}\frac{\partial x}{\partial \eta}, \\ \frac{\partial \eta}{\partial x} &= -\frac{1}{|\mathbf{J}|}\frac{\partial y}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{1}{|\mathbf{J}|}\frac{\partial x}{\partial \xi}. \end{aligned} \tag{6.330}$$

Sada možemo da definišemo uslove koje treba da ispuni neka funkcija da bi bila funkcija transformacije:

1. unutar svakog elementa, funkcije $\xi = \xi(x, y)$ i $\eta = \eta(x, y)$ moraju da budu invertibilne i kontinualno diferencijabilne da bi mogla da se primeni relacija (6.330);

2. mreža generisana nizom transformacija $[T_e]$ ne sme da ima preklapanja elemenata ni prazan prostor između njih;

3. svaka transformacija mora lako da se izvede na osnovu geometrije elementa;

4. funkcije $x(\xi, \eta)$ i $y(\xi, \eta)$ treba da budu matematički jednostavne.

Ove uslove ispunjavaju funkcije oblika konačnih elemenata, pa je prirodno koristiti upravo njih kao funkcije transformacije:

$$\begin{aligned} x &= x_i \psi_i(\xi, \eta) \\ y &= y_i \psi_i(\xi, \eta), \end{aligned} \tag{6.331}$$

gde su (x_i, y_i) koordinate čvorne tačke i, M broj čvorova u elementu. Sada važi:

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{1}{|\mathbf{J}|} y_j \frac{\partial \psi_j}{\partial \eta}, \quad \frac{\partial \xi}{\partial y} = -\frac{1}{|\mathbf{J}|} x_j \frac{\partial \psi_j}{\partial \eta}, \tag{6.332}$$

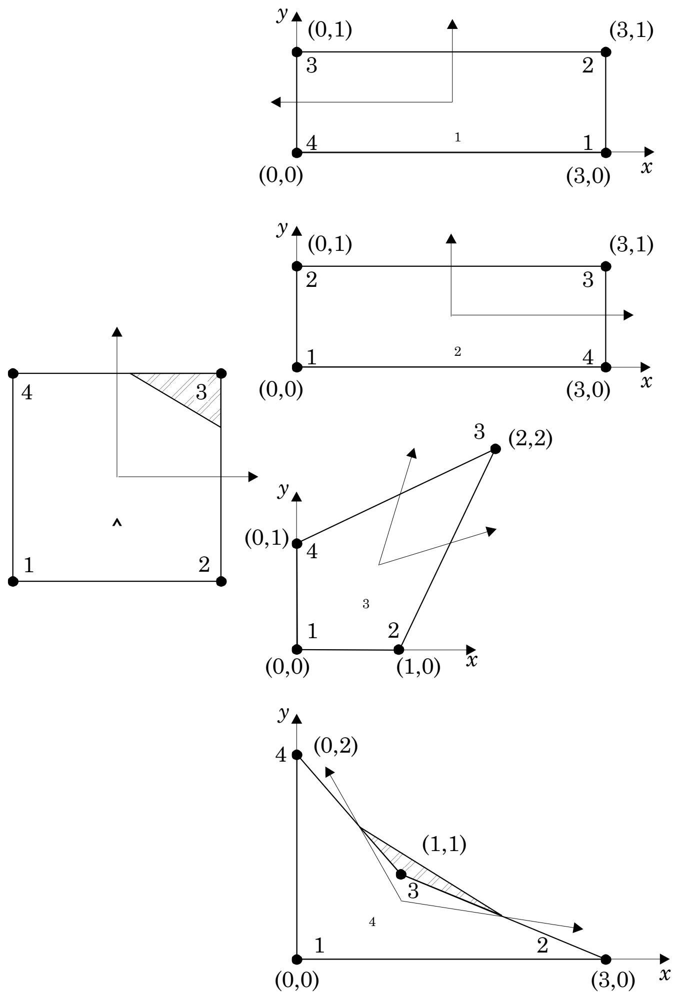
$$\frac{\partial \eta}{\partial x} = -\frac{1}{|\mathbf{J}|} y_j \frac{\partial \psi_j}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{1}{|\mathbf{J}|} x_j \frac{\partial \psi_j}{\partial \xi}, \tag{6.333}$$

$$|\mathbf{J}| = \left\{ x_i \frac{\partial \psi_i}{\partial \xi} \right\} \left\{ y_j \frac{\partial \psi_j}{\partial \eta} \right\} - \left\{ x_i \frac{\partial \psi_i}{\partial \eta} \right\} \left\{ y_j \frac{\partial \psi_j}{\partial \xi} \right\}. \tag{6.334}$$

Kao primer za ilustraciju poslužiće četvoročvorni "master" element $\hat{\Omega}$ i četiri konačna elemenata, $e = 1, 2, 3, 4$ dobijena transformacijom (6.331). Funkcije oblika su:

$$\begin{aligned} \psi_1(\xi,\eta) &= \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta) \qquad \psi_2(\xi,\eta) = \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta) \\ \psi_3(\xi,\eta) &= \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta) \qquad \psi_4(\xi,\eta) = \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta). \end{aligned} \tag{6.335}$$

Transformacijom u element broj Ω_1; sl. 6.26



Slika 6.26:

$$(x_i, y_i) = \{(3,0), (3,1), (0,1), (0,0)\} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} x &= 3\psi_1 + 3\psi_2 = \frac{3}{2}(1-\eta) \\ y &= \psi_2 + \psi_3 = \frac{1}{2}(1+\xi). \end{aligned} \tag{6.336}$$

Kako je $|\mathbf{J}| > 0$ to je transformacija invertibilna. Radi se, u stvari, o jednostavnom (linearnom) širenju i skupljanju odgovarajućih stranica elementa, sl. 6.26.

Transformacijom u element broj Ω_2 na isti način daje $|\mathbf{J}| = -\frac{3}{4}$. Treba uočiti da je jedina razlika u odnosu na element Ω_1 u numeraciji čvorova - ovde je numeracija u negativnom matematičkom smeru, što treba izbegavati.

Transformacijom u element Ω_3, sl. 6.26:

$$(x_i, y_i) = \{(0,0), (1,0), (2,2), (0,1)\} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} x &= \psi_2 + 2\psi_3 = \frac{1}{4}(3 + 3\xi + \eta + \xi\eta) \\ y &= 2\psi_3 + \psi_4 = \frac{1}{4}(3 + \xi + 3\eta + \xi\eta) \\ |\mathbf{J}| &= \frac{1}{2} + \frac{1}{8}\xi + \frac{1}{8}\eta. \end{aligned}$$

S obzirom da je $|\mathbf{J}| > 0$ za $\xi, \eta \in (-1, 1)$ to je ova transformacija invertibilna. Vrednost $|\mathbf{J}|$ je najmanje kod čvora 1 a najveće kod čvora 3, ukazujući na relativno izduženje različitih delova $\hat{\Omega}$ transformacijom T_3.

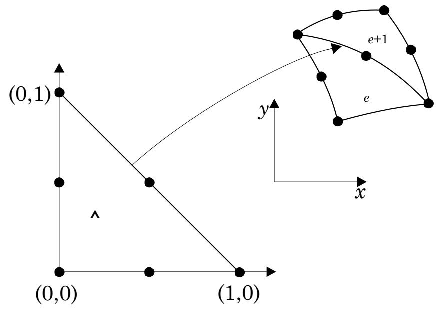
Transformacijom elementa Ω_4, sl. 6.26:

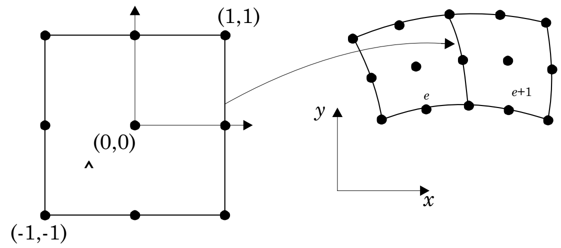
$$(x_i, y_i) = \{(0,0), (3,0), (1,1), (0,2)\} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} x &= 3\psi_2 + \psi_3 \\ y &= \psi_3 + 2\psi_4 \\ |\mathbf{J}| &= \frac{1}{8}(5 - 3\xi - 4\eta) \end{aligned} \tag{6.337}$$

što nije veće od nule za $\forall \xi, \eta \in (-1, 1)$ - na primer za $3\xi = 5 - 4\eta \quad |\mathbf{J}| = 0$, ispod te linije je veće od nule, a iznad manje od nule! Oblast iznad linije $3\xi = 5 - 4\eta$ je transformisana izvan Ω_4, pa je očigledno element Ω_4 neprihvatljiv. Takođe je očigledno da je problem u uglu kod čvora 3 koji je veći od π. Može se pokazati da je funkcija transformacije (6.331) integrabilna ako su uglovi četvorougla $< \pi$.

Za kvadratne funkcije oblika (na primer osmočvornih konačnih elemenata) ograničenja, osim navedenih, odnose se i na čvorove koji nisu u temenima elementa (sl. 6.27). Naime, da bi se održala invertibilnost funkcije transformacije neophodno je da ovi čvorovi budu u sredini strana, odnosno elementa (ako postoji unutrašnji čvor).





Slika 6.27:

6.7.2 Izračunavanje matrica konačnih elemenata

Sada možemo da izračunamo sve potrebne matrice i vektore konačnih elemenata:

$$k_{ij}^e = \int\limits_{\Omega^e} \nabla\psi_i^e \cdot \nabla\psi_j^e \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y, \tag{6.338}$$

$$f_i^e = \int\limits_{\Omega^e} f\psi_i^e \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y, \tag{6.339}$$

$$s_i^e = \int\limits_{\Omega^e} \hat{\sigma}\psi_i^e \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y. \tag{6.340}$$

Gradijent interpolacione funkcije možemo da napišemo u obliku

$$\nabla\psi_i(\xi,\eta) = u_i \frac{\partial\psi_i}{\partial\xi^\alpha}\mathbf{g}^\alpha, \quad \alpha = 1,2, \tag{6.341}$$

gde je $\xi^1 \equiv \xi$ i $\xi^2 \equiv \eta$, a $\mathbf{g}^\alpha$ **kontravarijantni bazni vektori** koordinatnih sistema elemenata ξ^α. U daljem tekstu ćemo parcijalne izvode interpolacijskih funkcija da označavamo u skraćenom obliku

$$\psi_{i\alpha} = \frac{\partial\psi_i}{\partial\xi^\alpha}. \tag{6.342}$$

Zamenom ovako dobijenih izraza za gradijente interpolacijskih funkcija u (6.338)-(6.340), imajući takođe u vidu da je element površine

$$\mathrm{d}x\mathrm{d}y = J\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta, \tag{6.343}$$

dobićemo

$$k_{ij}^e = \int\limits_{\Omega^e} \psi_{i\alpha}^e k g^{\alpha\beta} \psi_{j\beta}^e J \mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta. \tag{6.344}$$

Ovde je formalno

$$g^{\alpha\beta} = \mathbf{g}^\alpha \cdot \mathbf{g}^\beta. \tag{6.345}$$

Praktično, $g^{\alpha\beta}$ izračunavamo inverzijom izraza

$$g_{\alpha\beta} = \delta_{kl} z_\alpha^k z_\beta^l, \quad k,l = 1,2 \tag{6.346}$$

gde je

$$z_\alpha^k = \frac{\partial z^k}{\partial \xi^\alpha}, \tag{6.347}$$

dok su

$$z^1 = x, \quad z^2 = y \tag{6.348}$$

Dekartove koordinate.

Imajući u vidu (6.331) očigledno je $z_\alpha^k = z_i^k \xi_{i\alpha}$. Matrica izraza $g_{\alpha\beta}$ je za posmatrani dvodimenzionalni slučaj

$$[g_{\alpha\beta}] = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix} \tag{6.349}$$

gde je

$$\begin{aligned} g_{11} &= \left(z_1^1\right)^2 + \left(z_1^2\right)^2 \\ g_{12} &= g_{21} = z_1^1 z_1^2 + z_1^2 z_2^2 \\ g_{22} &= \left(z_2^1\right)^2 + \left(z_2^2\right)^2. \end{aligned} \tag{6.350}$$

Inverzna matrica biće po definiciji

$$\left[g^{\alpha\beta}\right] = \left[g_{\alpha\beta}\right]^{-1} = \frac{1}{|g_{\alpha\beta}|} \begin{bmatrix} g_{11} & -g_{12} \\ -g_{21} & g_{22} \end{bmatrix}. \tag{6.351}$$

Lako je pokazati da je determinanta matrice $g_{\alpha\beta}$

$$|g_{\alpha\beta}| = g_{11}g_{22} - g_{12}^2 = \left(z_1^2 z_2^2 - z_2^1 z_1^1\right)^2 = J^2. \tag{6.352}$$

Sada članovi matrice krutosti možemo da napišemo u obliku

$$k_{ij}^e = \int\limits_{\Omega^e} \frac{k}{J} \left[\psi_{i1}^e \; \psi_{i2}^e\right] \begin{bmatrix} g_{11}^e & -g_{12}^e \\ -g_{21}^e & g_{22}^e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_{j1}^e \\ \psi_{j2}^e \end{bmatrix} \mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta. \tag{6.353}$$

Osnovni problem kod integracije ovog izraza je pojava relativno složene funkcije - Jakobijana u imenitelju, zbog čega se najčešće pribegava numeričkoj kvadraturi.

U opštem slučaju se izraz za numeričku integraciju definiše određivanjem koordinata (ξ_t, η_t) izvesnog broja N_t **integracionih tačaka** u domenu u kojim se integral izračunava, kao i veličina w_t koje zovemo **težinska funkcija integracije** $(t = 1, 2, \ldots, N_t)$. Tako, ako izraz $G(\xi, \eta)$ treba da integralimo po oblasti Ω_e, koristićemo relaciju

$$\int\limits_{\Omega_e} G(\xi,\eta)\,\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta = \sum_{t=1}^{N_t} \hat{G}(\xi,\eta) w_t + E,$$

gde je E greška integracije.

Ako je integrand $G(\xi, \eta)$ polinom, red integracije treba da bude dovoljno visok da bi integracija bila tačna. Na primer, ako Gausovom kvadraturom integralimo linearnu funkciju na kanonskom trouglu, integracija će da bude tačna pri korišćenju pravila jedne tačke (ξ_1, η_1) u težištu, uz $w_1 = \frac{1}{2}$.

Što se tiče izraza (6.339) njega je očigledno jednostavnije izračunati od (6.338), pa to ostavljamo za vežbu.

Izraz (6.340) je integral na granici i njegovo izračunavanje je nešto složenije. Izračunavamo ga na onim konturama elementa $\partial\Omega^e_{2h}$ oblasti Ω^e na kojima su zadati prirodni granični uslovi. Prikazaćemo ovo računanje na ivici ξ =const. kanonskog elementa, koji treba preslikati na $\partial\Omega^e_{2h}$.

U posmatranom slučaju $g_{\alpha\beta}$ svodi se na g_{22}

$$g_{22} = \left(\frac{\partial z^1}{\partial \xi^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial z^2}{\partial \xi^2}\right)^2,$$

što je ujedno i "determinanta" izraza $g_{\alpha\beta}$. Kao što smo videli, Jakobijan je jednak korenu determinante

$$J = \left[\left(\frac{\partial x}{\partial \eta}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \eta}\right)^2\right]^{1/2},$$

pa je integral od interesa

$$s_i^e = \int\limits_{\partial\Omega^e_{2h}} \hat{\sigma}\psi_i^e \left[\left(\frac{\partial x}{\partial \eta}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \eta}\right)^2\right]^{1/2} \mathrm{d}\eta.$$

Uobičajeno je da se i ovi integrali izračunavaju numeričkom integracijom.

6.8 Program za rešavanje eliptičnih dvodimenzionalnih problema metodom konačnih elemenata

6.8.1 Uvodne napomene

U ovom odeljku biće prikazan program kojim se realizuje metod konačnih elemenata. Program je načinjen od gotovih potprograma (nebitno prepravljenih) i rešenja niza zadataka iz reference [5].

Definišimo prvo zadatak koji bi trebalo rešiti:

U unutrašnjim tačkama oblasti $\Omega \subset R^2$ treba odrediti realnu funkciju $u(x, y)$ koja zadovoljava linearnu parcijalnu diferencijalnu jednačinu

$$-\nabla \cdot (k\nabla u) + bu = f. \tag{6.354}$$

Napomenimo da je ova diferencijalna jednačina nešto opštija od (6.255). Razlika se odnosi na član bu. Uvođenje ovog člana omogućuje da se analiziraju problemi kao što je kontinualno oslonjena membrana, ili hemijske reakcije zavisne od temperature.

U tačkama jednog dela granice Ω ($\partial\Omega_1$) funkcija u može imati poznate vrednosti (esencijalni granični uslovi)

$$u = \hat{u},$$

a u tačkama drugog dela granice ($\partial\Omega_2$) može imati poznate vrednosti izvoda funkcije u pravcu normale na granicu (prirodni granični uslovi)

$$-k\frac{\partial u}{\partial n} = pu - \gamma.$$

Ovaj oblik prirodnog graničnog uslova je takođe nešto širi od (6.258), i omogućuje analizu problema kod kojih izvod u pravcu normale zavisi od vrednosti funkcije u na granicama.

Oblast Ω može da bude podeljena na više podoblasti tako da u svakoj od njih k, b i f mogu imati različite vrednosti. k i b su konstantne na podoblastima. Za f ćemo pretpostaviti da ima sledeću strukturu:

$$f(x, y) = \bar{f} + \hat{f}\delta(x - x_i, y - y_i)$$

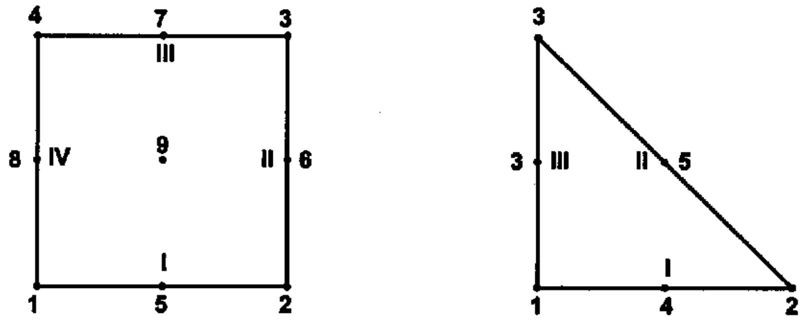
gde su $\bar{f}$ i $\hat{f}$ konstante.

Iako dozvoljavamo da oblast Ω bude podeljena na podoblasti, skok veličine $\nabla u \cdot n$ mora da bude jednak nuli u svim tačkama granica između pojedinih podoblasti.

Ovako definisan zadatak prevodi se u varijacioni oblik kao što je to prikazano u prethodnim poglavljima. Posle konačno–elementne aproksimacije prevodi se u sistem linearnih algebarskih jednačina po nepoznatim vrednostima tražene funkcije u u čvornim tačkama.

Ovde će biti korišćeni trougaoni izoparametarski elementi sa šest čvorova i četvorougaoni izoparametarski elementi sa devet čvorova. Opišimo detaljnije ove elemente i konvencije u vezi sa njima kojih se treba držati da bi program ispravno radio.

Na sledećoj slici prikazani su ovi elementi u parametarskoj (ξ, η) ravni i standardna numeracija čvorova i strana u svakom od njih.



Slika 6.28:

Bazne funkcije za četvorougaoni element u parametarskoj ravni su:

$$
\begin{array}{ll}
\psi_1 = \frac{1}{4}(\xi^2 - \xi)(\eta^2 - \eta) & \psi_5 = \frac{1}{2}(1 - \xi^2)(\eta^2 - \eta) \\
\psi_2 = \frac{1}{4}(\xi^2 + \xi)(\eta^2 - \eta) & \psi_6 = \frac{1}{2}(\xi^2 + \xi)(1 - \eta^2) \\
\psi_3 = \frac{1}{4}(\xi^2 + \xi)(\eta^2 + \eta) & \psi_7 = \frac{1}{2}(1 - \xi^2)(\eta^2 + \eta) \\
\psi_4 = \frac{1}{4}(\xi^2 - \xi)(\eta^2 + \eta) & \psi_8 = \frac{1}{2}(\xi^2 - \xi)(1 - \eta^2) \\
\psi_9 = (1 - \xi^2)(1 - \eta^2) &
\end{array}
$$

Bazne funkcije za trougaoni element u parametarskoj ravni su:

$$
\begin{array}{ll}
\psi_1 = 2\zeta(\zeta - 0.5) & \psi_4 = 4\zeta\xi \\
\psi_2 = 2\xi(\xi - 0.5) & \psi_5 = 4\xi\eta \\
\psi_3 = 2\eta(\eta - 0.5) & \psi_6 = 4\eta\zeta \\
\zeta = 1 - \xi - \eta &
\end{array}
$$

6.8.2 Struktura potprograma

Program se sastoji od tri osnovne celine: pretprocesora, procesora i postprocesora. Potprogrami koji sačinjavaju pretprocesor učitavaju ulazne podatke (iz ulazne datoteke sa imenom "fem.in") koji definišu zadatak i na osnovu njih generišu sve veličine koje su potrebne. Procesor, zatim, formira matricu i vektor sistema i na kraju rešava dobijeni sistem jednačina. Postprocesor prikazuje dobijene rezultate. Svi relevantni ulazni i izlazni podaci upisuju se u izlaznu datoteku "fem.out".

Prikažimo sada neke važnije promenljive u programu.

- MAXN - maksimalni broj čvorova koji program dopušta.
- MAXE - maksimalni broj elemenata.
- MAXM - maksimalni broj podoblasti na koje je oblast Ω podeljena.
- MAXBCE - maksimalni broj tačaka u kojima je zadata funkcija $\hat{u}$.
- MAXBCN - maksimalni broj strana elemenata na granici oblasti Ω na kojima je zadata promena funkcije u u pravcu normale.
- MAXPT - maximalni broj tačaka u kojima f ima singularitet tipa δ funkcije.
- MAXBAND - maksimalna poluširina trake oko dijagonale matrice sistema u kojoj su skoncentrisane vrednosti različite od nule.

Sve ove veličine treba zadati u programu (zavisno od raspoložive radne memorije računara) pre prevođenja programa.

Opišimo, ukratko, sve potprograme koji se pojavljuju u programu.

- SETINT postavlja sve veličine potrebne za numerićku integraciju Gausovim metodom po površi ili po liniji.
- PREP je pretprocesor. Svaki niz ulaznih podataka za neki zadatak počinje kratkim tekstom kojim ga identifikuje. Ako je taj tekst samo reč "end", rad programa se završava.
- RNODE čita iz ulazne datoteke ("fem.in") podatke koji se odnose na čvorove kojima prekrivamo oblast Ω. Na osnovu podataka o koordinatama početne i krajnje tačke i broja čvorova, potprogram sam generiše podatke o svim čvorovima između. U svim potprogramima pretprocesora, generisani podaci se upisuju u izlaznu datoteku "fem.out".
- RELEM čita podatke na osnovu kojih automatski generiše nizove elemenata koji prekrivaju aproksimaciju oblasti Ω.Kako su elementi koje koristimo izoparametarski a bazne funkcije bikvadratne to elementi mogu biti i krivolinijski četvorougaonici ili trouglovi.
- RMAT učitava vrednosti k, b i f za svaku podoblast oblasti Ω.

- RBC čita podatke o singularitetima funkcije f, o esencijalnim i prirodnim graničnim uslovima.
- PROC je procesorski potprogram.
- FORMKF generiše članove matrice K i vektora F ne uzimajući granične uslove u obzir.
- ELEM izračunava elemente matrice K_e (dimenzija 9 x 9 ili 6 x 6) i vektora F_e koji se dobijaju od elementa e.
- SHAPE2 računa vrednosti svih baznih funkcija u parametarskoj ravni i njihovih parcijalnih izvoda po ξ i η.
- GETMAT vraća vrednosti konstanti k, b i $\bar{f}$ na osnovu rednog broja podoblasti oblasti Ω.
- ASSMB sabira elemente matrice K_e i vektora F_e sa odgovarajućima u matrici K i vektoru F.
- APLYBC menja elemente matrice K i vektora F u skladu sa podacima o singularitetima funkcije f, esencijalnim i prirodnim graničnim uslovima. Napomenimo da se esencijalni uslovi nameću ne promenom dimenzija matrice K već "kaznenom" metodom.
- BCINT računa integrale po granici na kojoj su zadati prirodni granični uslovi.
- SHAPE1 daje vrednosti jednodimenzionih baznih funkcija i njihovih izvoda.
- SOLVE rešava sistem jednačina $Ku = F$.
- TRIB vrši triangularizaciju simetrične kvadratne matrice zadate preko svojih od nule različitih članova koji se nalaze na dijagonali i iznad nje.
- RHSB na osnovu triangularizovane matrice K i vektora F određuje elemente traženog vektora u.
- POST upisuje u izlaznu datoteku podatke o čvorovima i dobijenim približnim vrednostima funkcije u u njima.

Opišimo sada format ulazne datoteke "fem.in". Da bi se lakše razlikovale različite skupine podataka svaku od njih **obavezno** počinjemo jednom linijom ispunjenom nekim proizvoljnim znakom (na primer '-' ili '*'). Osim prve, sve grupe podataka počinju redom u kojem se nalazi samo jedan ceo broj koji označava koliko redova podataka iz te grupe sledi. Svi podaci se zadaju u slobodnom formatu. U ulaznoj datoteci mogu biti dati podaci za više različitih zadataka.

1. grupa podataka je tekst (od maksimalno 80 znakova) kojim se na neki način kratko identifikuje zadatak koji treba rešiti. Poslednji zadatak u datoteci na ovom mestu obavezno ima "end" ili "END".

2. grupa podataka se sastoji od onoliko redova koliko linija čvorova želimo da generišemo. U svakom redu se nalazi sledećih sedam podataka:
   - redni broj prvog čvora (integer)
   - broj čvorova u liniji (integer)
   - razlika između svakog sledećeg i prethodnog čvora u nizu (integer)
   - x koordinata prvog čvora (float)
   - y koordinata prvog čvora (float)
   - x koordinata poslednjeg čvora (float)
   - y koordinata poslednjeg čvora (float)
3. grupa podataka sadrži podatke na osnovu kojih se mogu na osnovu već generisanih čvorova automatski generisati nizovi elemenata.
   - broj elemenata u nizu (integer)
   - razlika između rednih brojeva odgovarajućih čvorova koji pripadaju susednim elementima u nizu (integer)
   - broj čvorova u svakom elementu (6 ili 9) (integer)
   - redni broj podoblasti kojoj pripadaju elementi niza (integer)
   - 6 ili 9 rednih brojeva (integeri) prvog elementa u nizu (obratiti pažnju na standardni raspored čvorova u elementu).
4. grupa su podaci o vrednostima konstanti k, b i $\bar{f}$
   - vrednost konstante k (float)
   - vrednost konstante b (float)
   - vrednost konstante $\bar{f}$ (float)
5. grupa su podaci o eventualnim singularitetima funkcije f.
   - broj čvora u kojem se nalazi singularitet (integer)
   - vrednost $\hat{f}$ (float)
6. grupa su podaci o esencijalnim graničnim uslovima. Istu vrednost funkcije $\hat{u}$ je moguće zadati na celoj liniji čvorova.
   - redni broj prvog čvora u nizu (integer)
   - broj čvorova u nizu (integer)
   - razlika između susednih čvorova u nizu (integer)
   - vrednost $\hat{u}$ (float)
7. grupa podataka zadaje prirodne granične uslove. Ovi se uslovi, takođe, mogu zadati na čitavom nizu elemenata uz granicu.

- redni broj prvog elementa u nizu (integer)
- broj elemenata u nizu (integer)
- razlika između rednih brojeva susednih elemenata (integer)
- redni broj strane koja se nalazi na granici oblasti (obratiti pažnju na standardno numerisanje strana u okviru jednog elementa) (integer)
- vrednost p (float)
- vrednost γ (float)

6.8.3 Primeri

Prikažimo sada tri test primera korišćenja programa FEM.

1. primer. Rešićemo jednačinu $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 4$ na kvadratu 2×2. Svi granični uslovi će biti prirodni, sem što ćemo u tački $(0,0)$ zadati da je vrednost nepoznate funkcije u jednaka nuli. Prirodni granični uslovi su tako izabrani da je rešenje problema tačno $u = x^2 + y^2$.

   Ulazna datoteka glasi:

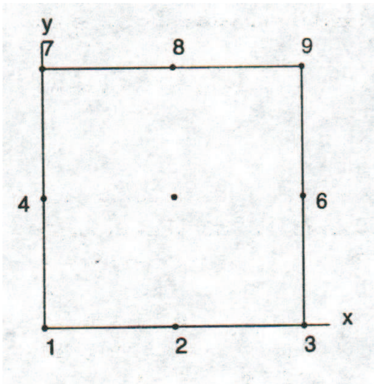
```
-----------------------------------------------------------
Test primer br. 1: Jednacina Lap(u)=4. Resenje: u=x^2+y^2.
-----------------------------------------------------------
3
 1 3 1 0. 0.   2. 0.
 4 3 1 0. 1.   2. 1.
 7 3 1 0. 2.   2. 2.
-----------------------------------------------------------
1
1 0 9 1  1 3 9 7 2 6 8 4 5
-----------------------------------------------------------
1
-1. 0. 4.
-----------------------------------------------------------
0
-----------------------------------------------------------
1
1 1 0 0.
-----------------------------------------------------------
4
1 1 0 1 0.   0.
1 1 0 2 0.  -4.
1 1 0 3 0.  -4.
1 1 0 4 0.   0.
```

```
-------------------------------------------------------------
end
-------------------------------------------------------------
```

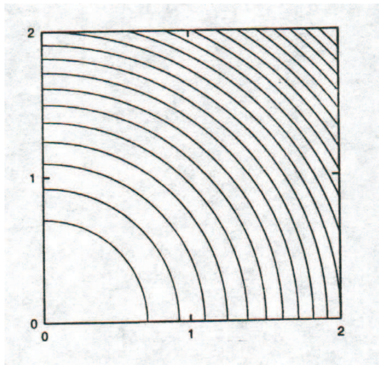
Posle puštanja programa u rad, formira se datoteka "fem.out":

```
Test primer br. 1: Jednacina Lap(u)=4. Resenje: u=x^2+y^2.
 node no   x-coordinate    y-coordinate

     1          .0000           .0000
     2         1.0000           .0000
     3         2.0000           .0000
     4          .0000          1.0000
     5         1.0000          1.0000
     6         2.0000          1.0000
     7          .0000          2.0000
     8         1.0000          2.0000
     9         2.0000          2.0000

 elem no  ne    mat          node numbers

   1      9     1        1   3   9   7   2   6   8   4   5

 mat no            k              b             f

  1             -1.0000          .0000         4.0000

 node no              essent. value

   1                   .0000

 element no  side          p       gamma

     1       1          .0000      .0000
     1       2          .0000    -4.0000
     1       3          .0000    -4.0000
     1       4          .0000      .0000


   node            x              y              u
 -----------------------------------------------------
    1            .000           .000          0.000
    2           1.000           .000          1.000
    3           2.000           .000          4.000
    4            .000          1.000          1.000
    5           1.000          1.000          2.000
    6           2.000          1.000          5.000
    7            .000          2.000          4.000
    8           1.000          2.000          5.000
    9           2.000          2.000          8.000
```

Vidimo da su dobijene vrednosti funkcije u tačne u svim tačkama oblasti koja je prekrivena samo jednim elementom. To je, naravno, zato što su bazne funkcije bikvadratne, a tačno rešenje je kvadratna funkcija po x i y. Slike 6.29 i 6.30 prikazuju raspored čvorova u oblasti i linije konstantnih vrednosti funkcije u.



Slika 6.29:



Slika 6.30:

2. primer. Torzija pravog uklještenog štapa proizvoljnog poprečnog preseka se određuje rešavanjem jednačine

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = -2G\theta.$$

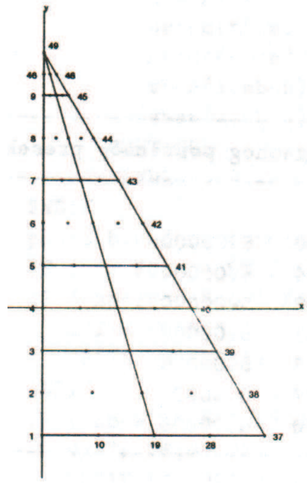
Φ je funkcija Prandtla[6] , G je moduo smicanja a θ ugao torzije na jedinicu dužine štapa. $\Phi(x, y)$ je funkcija položaja tačke poprečnog preseka štapa i u tačkama njegovog ruba mora imati vrednost jednaku nuli (esencijalni granični uslov). Rešićemo zadatak torzije štapa poprečnog preseka u obliku jednakostraničnog trougla visine 9 dužinskih jedinica. Izabraćemo G i θ tako da je $G\theta = 1$. Zbog simetričnosti zadatka, dovoljno je za oblast Ω izabrati jednu polovinu poprečnog preseka. Na granici ovakve oblasti koja se poklapa sa visinom jednakostraničnog trougla, izvod Prandtlove funkcije u pravcu normale, mora biti jednak nuli.

[6]Prandtl Ludwig (1875-1953), nemački naučnik. Bavio se mehanikom fluida. Poznat po brojnim radovima iz obstrujavanja fluida oko prepreke i određivanju supersoničnih, stacionarnih i neturbolentnih strujanja.

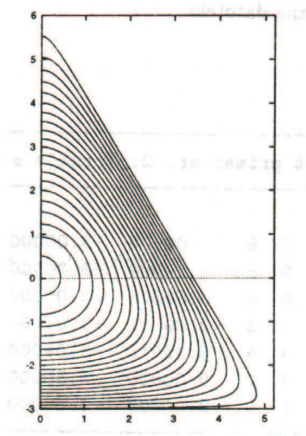
Ulazna datoteka:

```
------------------------------------------------------------
Test primer br. 2: Torzija stapa trougaonog poprecnog preseka.
------------------------------------------------------------
7
 1  9  5    .00000  -3.00000   0.00000   5.00000
 2  9  5   1.29904  -3.00000   0.14434   5.00000
 3  9  5   2.59808  -3.00000   0.28868   5.00000
 4  9  5   3.89711  -3.00000   0.43301   5.00000
 5  9  5   5.19615  -3.00000   0.57735   5.00000
46  3  1   0.00000   5.50000   0.28867   5.50000
49  1  0   0.00000   6.00000   0.00000   6.00000
------------------------------------------------------------
4
4  10  9  1   1  3 13 11  2  8 12  6  7
4  10  9  1   3  5 15 13  4 10 14  8  9
1   0  6  1  41 43 49 42 47 46
1   0  6  1  43 45 49 44 48 47
------------------------------------------------------------
1
1.0  0.0  2.0
------------------------------------------------------------
0
------------------------------------------------------------
4
 1  4  1  0.0
 5  9  5  0.0
48  1  0  0.0
49  1  0  0.0
------------------------------------------------------------
2
1    4     1     4     0.0 0.0
9    1     0     3     0.0 0.0
------------------------------------------------------------
end
------------------------------------------------------------
```

Na slici 6.31 prikazana je podela oblasti na konačne elemente. Slika 6.32 prikazuje linije konstantnih vrednosti funkcije Φ.



Slika 6.31:

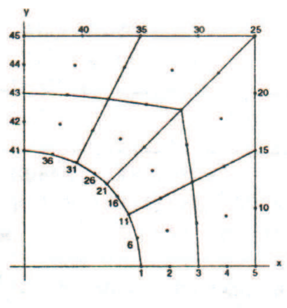


Slika 6.32:

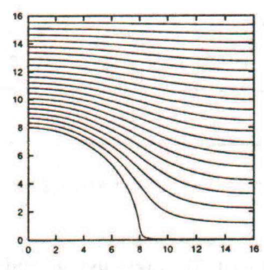
3. primer. Ravansko strujanje nestišljivog fluida prikazaćemo na primeru opstrujavanja cilindra poluprečnika $8cm$ koji se nalazi na sredini između dve paralelne ploče na rastojanju od $32cm$. Rešićemo Laplasovu diferencijalnu jednačinu

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} = 0$$

gde je $\Psi(x, y)$ strujna funkcija. Zbog simetričnosti oblasti i oko x i oko y ose oblast Ω se može izabrati da bude kvadrat stranice $16cm$ iz kojeg je izbačena četvrtina kruga poluprečnika $8cm$. Duž između čvorova 1 i 5 (vidi 6.33) i četvrtinu kruga (na kojoj leže i čvorovi 21 i 41) smatraćemo za nultu strujnicu, tj. liniju u čijim tačkama funkcija Ψ ima vrednost nula. I duž sa čvorovima 25, 35 i 45 je strujna linija i na njoj ćemo zadati da je $\Psi = 10$. Na slici 6.34 se vidi dobijena strujna slika.



Slika 6.33:



Slika 6.34:

Ulazna datoteka za ovaj primer je

```
-------------------------------------------------------------
Test primer br. 3: Odredjivanje strujne funkcije.
-------------------------------------------------------------
9
1  5 1 8.       0.      16.     0.
6  5 1 7.761    1.941   16.     4.
11 5 1 7.155    3.578   16.     8.
16 5 1 6.4      4.8     16.     12.
21 5 1 5.656    5.656   16.     16.
26 5 1 4.8      6.4     12.     16.
31 5 1 3.578    7.155   8.      16.
36 5 1 1.941    7.761   4.      16.
41 5 1 0.       8.      0.      16.
-------------------------------------------------------------
2
4 10 9 1         1 3 13 11 2 8 12 6 7
4 10 9 1         3 5 15 13 4 10 14 8 9
-------------------------------------------------------------
1
-1. 0. 0.
-------------------------------------------------------------
0
-------------------------------------------------------------
3
1  5 1  0.
6  8 5  0.
25 5 5 10.
-------------------------------------------------------------
2
5 2 1 2 0. 0.
4 2 4 4 0. 0.
-------------------------------------------------------------
end
-------------------------------------------------------------
```

Najzad, prikažimo i fortranski tekst celog programa FEM.

```
      PROGRAM fem
      PARAMETER (maxn=400,maxe=100,maxm=5,maxbce=70,maxbcn=40,maxpt=10,
     &           maxband=25)
      CHARACTER title*80
      COMMON /ctitl / title
      COMMON /ccon  / nnode , nelem , nmat , nbce , nbcn , npoint ,
```

```
     &                nband
      COMMON /cnode / x(2,maxn) , u(maxn)
      COMMON /celem / ne(maxe) , mat(maxe) , nodes(9,maxe)
      COMMON /cmatl / prop(3,maxm)
      COMMON /cbc   / nodbc(maxbce) , vbce(maxbce) , nelbc(maxbcn) ,
     &                nside(maxbcn) , vbcn(2,maxbcn) , npt(maxpt) ,
     &                vpt(maxpt)
      COMMON /cmatrx/ gk(maxn,maxband) , gf(maxn)
      COMMON /cint1 / etaq(3) , ww(3)
      COMMON /cint2 / xiq(2,9) , xit(2,7) , wq(9) , wt(7)
c
c
      OPEN (UNIT=5,FILE='fem.in')
      OPEN (UNIT=6,FILE='fem.out')
      CALL setint
 100  CALL prep
      CALL proc
      CALL post
      GOTO 100
      END

      SUBROUTINE setint
      COMMON /cint1 / etaq(3) , ww(3)
      COMMON /cint2 / xiq(2,9) , xit(2,7) , wq(9) , wt(7)
c     nine point quadrature rule for quadrilaterals
      sq35 = sqrt(3./5.)
      wq(1) = 25./81.
      wq(2) = 40./81.
      wq(3) = 25./81.
      wq(4) = 40./81.
      wq(5) = 64./81.
      wq(6) = 40./81.
      wq(7) = 25./81.
      wq(8) = 40./81.
      wq(9) = 25./81.
      xiq(1,1) = -sq35
      xiq(2,1) = -sq35
      xiq(1,2) = 0.
      xiq(2,2) = -sq35
      xiq(1,3) = sq35
      xiq(2,3) = -sq35
      xiq(1,4) = -sq35
      xiq(2,4) = 0.
      xiq(1,5) = 0.
      xiq(2,5) = 0.
```

```
      xiq(1,6) = sq35
      xiq(2,6) = 0.
      xiq(1,7) = -sq35
      xiq(2,7) = sq35
      xiq(1,8) = 0.
      xiq(2,8) = sq35
      xiq(1,9) = sq35
      xiq(2,9) = sq35
c     seven point rule for triangulars
      sq15 = sqrt(15.0)
      a = (155.0+sq15)/2400.0
      b = (155.0-sq15)/2400.0
      wt(1) = 9.0/80.0
      wt(2) = a
      wt(3) = a
      wt(4) = a
      wt(5) = b
      wt(6) = b
      wt(7) = b
      a = (6.0+sq15)/21.0
      b = (6.0-sq15)/21.0
      c = (9.0+2.0*sq15)/21.0
      d = (9.0-2.0*sq15)/21.0
      xit(1,1) = 1.0/3.0
      xit(2,1) = 1.0/3.0
      xit(1,2) = a
      xit(2,2) = d
      xit(1,3) = d
      xit(2,3) = a
      xit(1,4) = a
      xit(2,4) = a
      xit(1,5) = b
      xit(2,5) = c
      xit(1,6) = c
      xit(2,6) = b
      xit(1,7) = b
      xit(2,7) = b
c     tri point rule for line segment [-1,+1]
      etaq(1) = -sq35
      etaq(2) = 0.
      etaq(3) = sq35
      ww(1) = 5./9.
      ww(2) = 8./9.
      ww(3) = 5./9.
      RETURN
```

```
      END

      SUBROUTINE prep
      CHARACTER title*80
      COMMON /ctitl / title
      READ (5,*)
      READ (5,99001) title
      IF ( title.EQ.'end' .OR. title.EQ.'END' ) THEN
         CLOSE (6)
         CLOSE (5)
         STOP
      ENDIF
      PRINT *
      PRINT * , 'reading problem data ...'
      WRITE (6,*)
      WRITE (6,99001) title
      CALL rnode
      CALL relem
      CALL rmat
      CALL rbc
      RETURN
99001 FORMAT (A80)
      END

      SUBROUTINE rnode
      PARAMETER (maxn=400,maxe=100,maxm=5,maxbce=70,maxbcn=40,maxpt=10,
     &           maxband=25)
      COMMON /ccon  / nnode , nelem , nmat , nbce , nbcn , npoint ,
     &                nband
      COMMON /cnode / x(2,maxn) , u(maxn)
      READ (5,*)
      READ (5,*) nrec
      IF ( nrec.LT.1 ) STOP 'number of node records less than 1'
      nnode = 0
      DO 100 irec = 1 , nrec
         READ (5,*) n1 , num , inc , x1 , y1 , xn , yn
         num1 = num - 1
         xnum = float(num1)
         x(1,n1) = x1
         x(2,n1) = y1
         nnode = nnode + 1
         IF ( num.NE.1 ) THEN
            dx = (xn-x1)/xnum
            dy = (yn-y1)/xnum
            DO 20 n = 1 , num1
```

```
              xn = float(n)
              in = n1 + n*inc
              IF ( in.GT.maxn ) STOP 'number of nodes grater than maxn'
              x(1,in) = x1 + xn*dx
              x(2,in) = y1 + xn*dy
              nnode = nnode + 1
 20         CONTINUE
         ENDIF
 100  CONTINUE
c     print nodal point coordinates
      WRITE (6,99001)
      DO 200 n = 1 , nnode
         WRITE (6,99002) n , x(1,n) , x(2,n)
 200  CONTINUE
      RETURN
99001 FORMAT (' node no   x-coordinate    y-coordinate   '/)
99002 FORMAT (I7,2F16.4)
      END

      SUBROUTINE relem
      PARAMETER (maxn=400,maxe=100,maxm=5,maxbce=70,maxbcn=40,maxpt=10,
     &          maxband=25)
      COMMON /ccon  / nnode , nelem , nmat , nbce , nbcn , npoint ,
     &               nband
      COMMON /celem / ne(maxe) , mat(maxe) , nodes(9,maxe)
      DIMENSION node(9)
c     read element data
      READ (5,*)
      READ (5,*) nrec
      IF ( nrec.LT.1 ) STOP 'number of element records less than 1'
      nel = 0
      nband = 0
      DO 200 irec = 1 , nrec
         READ (5,*) num , inc , nee , mate , (node(i),i=1,nee)
         nmin = maxn + 1
         nmax = 0
         DO 50 i = 1 , nee
            nmin = min(nmin,node(i))
            nmax = max(nmax,node(i))
 50      CONTINUE
         nband = max(nband,nmax-nmin) + 1
         IF ( nband.GT.maxband ) STOP 'band width too big'
         n1 = nel + 1
         nel = nel + num
         IF ( nel.GT.maxe ) STOP 'number of elements greater than nelem'
```

```
         DO 100 n = n1 , nel
            ninc = (n-n1)*inc
            DO 60 m = 1 , nee
               nodes(m,n) = node(m) + ninc
 60         CONTINUE
            ne(n) = nee
            mat(n) = mate
 100     CONTINUE
 200  CONTINUE
      nelem = nel
c     print element definitions and find band width
      WRITE (6,99001)
      DO 300 n = 1 , nelem
         nen = ne(n)
         WRITE (6,99002) n , nen , mat(n) , (nodes(i,n),i=1,nen)
 300  CONTINUE
      RETURN
99001 FORMAT (/' elem no  ne    mat',10X,'node numbers'/)
99002 FORMAT (I5,I7,I6,5X,9I4)
      END

      SUBROUTINE rmat
      PARAMETER (maxn=400,maxe=100,maxm=5,maxbce=70,maxbcn=40,maxpt=10,
     &           maxband=25)
      COMMON /ccon  / nnode , nelem , nmat , nbce , nbcn , npoint ,
     &                nband
      COMMON /cmatl / prop(3,maxm)
      WRITE (6,99001)
      READ (5,*)
      READ (5,*) nmat
      IF ( nmat.LT.1 .OR. nmat.GT.maxm ) THEN
         PRINT * , 'error in rmat, nmat=' , nmat
         STOP
      ENDIF
      DO 100 i = 1 , nmat
         READ (5,*) (prop(j,i),j=1,3)
         WRITE (6,99002) i , (prop(j,i),j=1,3)
 100  CONTINUE
      RETURN
99001 FORMAT (/' mat no           k              b              f'/)
99002 FORMAT (I4,5X,3F15.4)
      END

      SUBROUTINE rbc
      PARAMETER (maxn=400,maxe=100,maxm=5,maxbce=70,maxbcn=40,maxpt=10,
```

```
     &           maxband=25)
      COMMON /ccon  / nnode , nelem , nmat , nbce , nbcn , npoint ,
     &                nband
      COMMON /cbc   / nodbc(maxbce) , vbce(maxbce) , nelbc(maxbcn) ,
     &                nside(maxbcn) , vbcn(2,maxbcn) , npt(maxpt) ,
     &                vpt(maxpt)
c     read point loads
      ir = 0
      READ (5,*)
      READ (5,*) nrec
      npoint = nrec
      IF ( nrec.NE.0 ) THEN
         ir = ir + 1
         DO 50 i = 1 , nrec
            READ (5,*) n , v
            npt(i) = n
            vpt(i) = v
 50      CONTINUE
      ENDIF
c     read essential boundary condition data
      READ (5,*)
      READ (5,*) nrec
      nbce = 0
      IF ( nrec.NE.0 ) THEN
         ir = ir + 1
         DO 100 j = 1 , nrec
            READ (5,*) n1 , num , inc , v
            DO 60 i = 1 , num
               nbce = nbce + 1
               n = n1 + (i-1)*inc
               nodbc(nbce) = n
               vbce(nbce) = v
 60         CONTINUE
 100     CONTINUE
      ENDIF
c     read natural boundary condition data
      READ (5,*)
      READ (5,*) nrec
      nbcn = 0
      IF ( nrec.NE.0 ) THEN
         ir = ir + 1
         DO 150 j = 1 , nrec
            READ (5,*) n1 , num , inc , ns , p , v
            DO 120 i = 1 , num
               nbcn = nbcn + 1
```

```
            n = n1 + (i-1)*inc
            nelbc(nbcn) = n
            nside(nbcn) = ns
            vbcn(1,nbcn) = p
            vbcn(2,nbcn) = v
 120     CONTINUE
 150   CONTINUE
      ENDIF
c     print boundary condition data
      IF ( ir.EQ.0 ) STOP 'no boundary value data'
      IF ( npoint.NE.0 ) THEN
         WRITE (6,99001)
         WRITE (6,99002) (npt(i),vpt(i),i=1,npoint)
      ENDIF
      IF ( nbce.NE.0 ) THEN
         WRITE (6,99003)
         WRITE (6,99004) (nodbc(i),vbce(i),i=1,nbce)
      ENDIF
      IF ( nbcn.NE.0 ) THEN
         WRITE (6,99005)
         WRITE (6,99006) (nelbc(i),nside(i),vbcn(1,i),vbcn(2,i),i=1,
     &                   nbcn)
      ENDIF
      RETURN
99001 FORMAT (/' node no             point load'/)
99002 FORMAT (I5,10X,F15.4)
99003 FORMAT (/' node no              essent. value'/)
99004 FORMAT (I5,10X,F15.4)
99005 FORMAT (/' element no  side         p       gamma'/)
99006 FORMAT (I7,7X,I1,5X,2F10.4)
      END

      SUBROUTINE proc
      CALL formkf
      CALL aplybc
      CALL solve
      RETURN
      END

      SUBROUTINE formkf
      PARAMETER (maxn=400,maxe=100,maxm=5,maxbce=70,maxbcn=40,maxpt=10,
     &           maxband=25)
      COMMON /ccon  / nnode , nelem , nmat , nbce , nbcn , npoint ,
     &                nband
      COMMON /cnode / x(2,maxn) , u(maxn)
```

```
      COMMON /celem / ne(maxe) , mat(maxe) , nodes(9,maxe)
      COMMON /cmatrx/ gk(maxn,maxband) , gf(maxn)
      COMMON /cint2 / xiq(2,9) , xit(2,7) , wq(9) , wt(7)
      DIMENSION ek(9,9) , ef(9) , xx(2,9) , nod(9)
      PRINT * , 'forming elements...'
      DO 100 i = 1 , maxn
         gf(i) = 0.
         DO 50 j = 1 , maxband
            gk(i,j) = 0.
 50      CONTINUE
 100  CONTINUE
      DO 200 i = 1 , nelem
         mati = mat(i)
         nei = ne(i)
         DO 150 k = 1 , nei
            k1 = nodes(k,i)
            nod(k) = k1
            DO 120 j = 1 , 2
               xx(j,k) = x(j,k1)
 120        CONTINUE
 150     CONTINUE
         PRINT * , 'element : ' , i
c        nine point integration rule for 9-node quadrilaterals
         IF ( nei.EQ.9 ) CALL elem(xx,nei,ek,ef,9,xiq,wq,mati)
c        seven point integration rule for 6-node traiangulars
         IF ( nei.EQ.6 ) CALL elem(xx,nei,ek,ef,7,xit,wt,mati)
         CALL assmb(ek,ef,nei,nod)
 200  CONTINUE
      WRITE (6,*)
      RETURN
      END

      SUBROUTINE elem(x,n,ek,ef,nl,xi,w,mat)
      DIMENSION x(2,n) , ek(n,n) , ef(n) , xi(2,nl) , w(nl)
      DIMENSION dpsix(9) , dpsiy(9) , dxds(2,2) , dsdx(2,2)
      DIMENSION psi(9) , dpsi(9,2)
c     initilaze element arrays
      DO 100 i = 1 , n
         ef(i) = 0.
         DO 50 j = 1 , n
            ek(i,j) = 0.
 50      CONTINUE
 100  CONTINUE
      CALL getmat(xk,xb,xf,mat)
c     begin integration point loop
```

```
      DO 300 l = 1 , nl
         CALL shape2(xi(1,l),xi(2,l),n,psi,dpsi)
c        calculate dxds
         DO 150 i = 1 , 2
            DO 120 j = 1 , 2
               dxds(i,j) = 0.
               DO 110 k = 1 , n
                  dxds(i,j) = dxds(i,j) + dpsi(k,j)*x(i,k)
 110           CONTINUE
 120        CONTINUE
 150     CONTINUE
c        calculate dsdx
         detj = dxds(1,1)*dxds(2,2) - dxds(1,2)*dxds(2,1)
         IF ( detj.LE.0. ) GOTO 500
         dsdx(1,1) = dxds(2,2)/detj
         dsdx(2,2) = dxds(1,1)/detj
         dsdx(1,2) = -dxds(1,2)/detj
         dsdx(2,1) = -dxds(2,1)/detj
c        calculate d(psi)/dx
         DO 200 i = 1 , n
            dpsix(i) = dpsi(i,1)*dsdx(1,1) + dpsi(i,2)*dsdx(2,1)
            dpsiy(i) = dpsi(i,1)*dsdx(1,2) + dpsi(i,2)*dsdx(2,2)
 200     CONTINUE
c        accumulate integration point value of integrals
         fac = detj*w(l)
         DO 250 i = 1 , n
            ef(i) = ef(i) + xf*psi(i)*fac
            DO 220 j = i , n
               ek(i,j) = ek(i,j)
     &                  + fac*(xk*(dpsix(i)*dpsix(j)+dpsiy(i)*dpsiy(j)
     &                 )+xb*psi(i)*psi(j))
 220        CONTINUE
 250     CONTINUE
 300  CONTINUE
c     calculate lower symmetric part of ek
      DO 400 i = 1 , n
         DO 350 j = 1 , i
            ek(i,j) = ek(j,i)
 350     CONTINUE
 400  CONTINUE
c     print '(9f8.4)',((ek(i,j),j=1,n),i=1,n)
      RETURN
 500  WRITE (6,99001) detj , x
      STOP
99001 FORMAT (' bad jacobian ',E10.3/9E10.3/9E10.3)
```

```
END

SUBROUTINE shape2(ski,eta,n,psi,dpsi)
DIMENSION psi(9) , dpsi(9,2)
IF ( n.EQ.6 ) THEN
   zet = 1. - ski - eta
   psi(1) = 2.*zet*(zet-0.5)
   psi(2) = 2.*ski*(ski-0.5)
   psi(3) = 2.*eta*(eta-0.5)
   psi(4) = 4.*zet*ski
   psi(5) = 4.*ski*eta
   psi(6) = 4.*eta*zet
   dpsi(1,1) = 1. - 4.*zet
   dpsi(1,2) = 1. - 4.*zet
   dpsi(2,1) = 4.*ski - 1.
   dpsi(2,2) = 0.
   dpsi(3,1) = 0.
   dpsi(3,2) = 4.*eta - 1.
   dpsi(4,1) = 4.*(zet-ski)
   dpsi(4,2) = -4.*ski
   dpsi(5,1) = 4.*eta
   dpsi(5,2) = 4.*ski
   dpsi(6,1) = -4.*eta
   dpsi(6,2) = 4.*(zet-eta)
   RETURN
ENDIF
ski2 = ski*ski
eta2 = eta*eta
ski2m = ski2 - ski
eta2m = eta2 - eta
ski2p = ski2 + ski
eta2p = eta2 + eta
psi(1) = ski2m*eta2m/4.
psi(2) = ski2p*eta2m/4.
psi(3) = ski2p*eta2p/4.
psi(4) = ski2m*eta2p/4.
psi(5) = (1.-ski2)*eta2m/2.
psi(6) = ski2p*(1.-eta2)/2.
psi(7) = (1.-ski2)*eta2p/2.
psi(8) = ski2m*(1.-eta2)/2.
psi(9) = (1.-ski2)*(1.-eta2)
dpsi(1,1) = (2.*ski-1.)*eta2m/4.
dpsi(1,2) = ski2m*(2.*eta-1.)/4.
dpsi(2,1) = (2.*ski+1.)*eta2m/4.
dpsi(2,2) = ski2p*(2.*eta-1.)/4.
```

```
      dpsi(3,1) = (2.*ski+1.)*eta2p/4.
      dpsi(3,2) = ski2p*(2.*eta+1.)/4.
      dpsi(4,1) = (2.*ski-1.)*eta2p/4.
      dpsi(4,2) = ski2m*(2.*eta+1.)/4.
      dpsi(5,1) = -ski*eta2m
      dpsi(5,2) = (1.-ski2)*(2.*eta-1.)/2.
      dpsi(6,1) = (2.*ski+1.)*(1.-eta2)/2.
      dpsi(6,2) = -ski2p*eta
      dpsi(7,1) = -ski*eta2p
      dpsi(7,2) = (1-ski2)*(2.*eta+1.)/2.
      dpsi(8,1) = (2.*ski-1.)*(1.-eta2)/2.
      dpsi(8,2) = -ski2m*eta
      dpsi(9,1) = -2.*ski*(1.-eta2)
      dpsi(9,2) = -2.*(1.-ski2)*eta
      RETURN
      END

      SUBROUTINE getmat(xk,xb,xf,mat)
      PARAMETER (maxn=400,maxe=100,maxm=5,maxbce=70,maxbcn=40,maxpt=10,
     &           maxband=25)
      COMMON /cmatl / prop(3,maxm)
      xk = prop(1,mat)
      xb = prop(2,mat)
      xf = prop(3,mat)
      RETURN
      END

      SUBROUTINE assmb(ek,ef,n,node)
      PARAMETER (maxn=400,maxe=100,maxm=5,maxbce=70,maxbcn=40,maxpt=10,
     &           maxband=25)
      COMMON /cmatrx/ gk(maxn,maxband) , gf(maxn)
      DIMENSION ek(n,n) , ef(n) , node(n)
      DO 100 i = 1 , n
         ig = node(i)
c        assemble global vector gf
         gf(ig) = gf(ig) + ef(i)
         DO 50 j = 1 , n
c           assemble global stiffnes matrix gk
            jg = node(j) - ig + 1
            IF ( jg.GT.0 ) gk(ig,jg) = gk(ig,jg) + ek(i,j)
 50      CONTINUE
 100  CONTINUE
      RETURN
      END
```

```
      SUBROUTINE aplybc
      PARAMETER (maxn=400,maxe=100,maxm=5,maxbce=70,maxbcn=40,maxpt=10,
     &           maxband=25)
      COMMON /ccon  / nnode , nelem , nmat , nbce , nbcn , npoint ,
     &                nband
      COMMON /cnode / x(2,maxn) , u(maxn)
      COMMON /celem / ne(maxe) , mat(maxe) , nodes(9,maxe)
      COMMON /cbc   / nodbc(maxbce) , vbce(maxbce) , nelbc(maxbcn) ,
     &                nside(maxbcn) , vbcn(2,maxbcn) , npt(maxpt) ,
     &                vpt(maxpt)
      COMMON /cmatrx/ gk(maxn,maxband) , gf(maxn)
      DIMENSION nod(3) , xbc(2,3) , pe(3,3) , game(3)
      PRINT * , 'applying boundary conditions ...'
c     applay point loads
      IF ( npoint.NE.0 ) THEN
         DO 50 i = 1 , npoint
            n = npt(i)
            gf(n) = gf(n) + vpt(i)
 50      CONTINUE
      ENDIF
c     applay essential boundary conditions
      IF ( nbce.NE.0 ) THEN
         big = 1.E30
         DO 100 i = 1 , nbce
            n = nodbc(i)
            gk(n,1) = big
            gf(n) = big*vbce(i)
 100     CONTINUE
      ENDIF
c     applay natural boundary condition
      IF ( nbcn.NE.0 ) THEN
         DO 150 i = 1 , nbcn
c        pick out nodes on side of element
            nel = nelbc(i)
            ns = nside(i)
            nc = 4
            IF ( ne(nel).EQ.6 ) nc = 3
            nod(1) = ns
            nod(2) = ns + nc
            nod(3) = ns + 1
            IF ( ns.EQ.nc ) nod(3) = 1
c        pick out nodal coordinates
            DO 120 j = 1 , 3
               nj = nod(j)
               nod(j) = nodes(nj,nel)
```

```
            nj = nod(j)
            xbc(1,j) = x(1,nj)
            xbc(2,j) = x(2,nj)
 120      CONTINUE
c       call bcint to calculate boundary integrals pe and game
          CALL bcint(vbcn(1,i),vbcn(2,i),xbc,pe,game)
c       call assmb to add pe to gk and game to gf
          CALL assmb(pe,game,3,nod)
 150    CONTINUE
      ENDIF
      RETURN
      END

      SUBROUTINE bcint(v1,v2,x,pe,game)
      COMMON /cint1 / etaq(3) , ww(3)
      DIMENSION theta(3) , dtheta(3)
      DIMENSION x(2,3) , pe(3,3) , game(3)
      DO 100 i = 1 , 3
         game(i) = 0.
         DO 50 j = 1 , 3
            pe(i,j) = 0.
 50      CONTINUE
 100  CONTINUE
      DO 200 k = 1 , 3
         CALL shape1(etaq(k),theta,dtheta)
         x1 = x(1,1)*dtheta(1) + x(1,2)*dtheta(2) + x(1,3)*dtheta(3)
         y1 = x(2,1)*dtheta(1) + x(2,2)*dtheta(2) + x(2,3)*dtheta(3)
         sjac = sqrt(x1*x1+y1*y1)
         fac = ww(k)*sjac
         DO 150 i = 1 , 3
            game(i) = game(i) + v2*theta(i)*fac
            DO 120 j = 1 , 3
               pe(i,j) = pe(i,j) + v1*theta(i)*theta(j)*fac
 120        CONTINUE
 150     CONTINUE
 200  CONTINUE
      RETURN
      END

      SUBROUTINE shape1(eta,theta,dtheta)
      DIMENSION theta(3) , dtheta(3)
      eta2 = eta*eta
      theta(1) = (eta2-eta)/2.
      theta(2) = 1. - eta2
      theta(3) = (eta2+eta)/2.
```

```
      dtheta(1) = eta - 0.5
      dtheta(2) = -2.*eta
      dtheta(3) = eta + 0.5
      RETURN
      END

      SUBROUTINE solve
      PARAMETER (maxn=400,maxe=100,maxm=5,maxbce=70,maxbcn=40,maxpt=10,
     &           maxband=25)
      COMMON /ccon  / nnode , nelem , nmat , nbce , nbcn , npoint ,
     &                nband
      COMMON /cnode / x(2,maxn) , u(maxn)
      COMMON /cmatrx/ gk(maxn,maxband) , gf(maxn)
      PRINT * , 'solving equations ...'
      CALL trib(gk,nnode,nband,maxn,maxband)
      CALL rhsb(gk,u,gf,nnode,nband,maxn,maxband)
      RETURN
      END

      SUBROUTINE trib(a,n,ib,l1,l2)
      DIMENSION a(l1,l2)
c     this subroutine triangularizes a banded and symmetric matrix a
c     only the upper half-band of matrix is stored
c     storage is in the form of a rectangular array l1 x l2
c     the half-band width is ib
c     the number of equations is n
      DO 100 i = 2 , n
         m1 = min0(ib-1,n-i+1)
         DO 50 j = 1 , m1
            sum = 0.0
            k1 = min0(i-1,ib-j)
            DO 20 k = 1 , k1
               sum = sum + a(i-k,k+1)*a(i-k,j+k)/a(i-k,1)
 20         CONTINUE
            a(i,j) = a(i,j) - sum
 50      CONTINUE
 100  CONTINUE
      RETURN
      END

      SUBROUTINE rhsb(a,x,b,n,ib,l1,l2)
      DIMENSION a(l1,l2) , x(1) , b(1)
c     for the linear sytem a*x=b with the matrix a
c     triangularized by routine trib
c     this routine performs the forward substitution
```

```
c     into b and back substitution into x
c     the half-band width of a is ib
c     the number of equations is n
      np1 = n + 1
      DO 100 i = 2 , n
         sum = 0.0
         k1 = min0(ib-1,i-1)
         DO 50 k = 1 , k1
            sum = sum + a(i-k,k+1)/a(i-k,1)*b(i-k)
 50      CONTINUE
         b(i) = b(i) - sum
 100  CONTINUE
c     begin back-substitution
      x(n) = b(n)/a(n,1)
      DO 200 k = 2 , n
         i = np1 - k
         j1 = i + 1
         j2 = min0(n,i+ib-1)
         sum = 0.0
         DO 150 j = j1 , j2
            mm = j - j1 + 2
            sum = sum + x(j)*a(i,mm)
 150     CONTINUE
         x(i) = (b(i)-sum)/a(i,1)
 200  CONTINUE
      RETURN
      END

      SUBROUTINE post
      PARAMETER (maxn=400,maxe=100,maxm=5,maxbce=70,maxbcn=40,maxpt=10,
     &           maxband=25)
      COMMON /ccon  / nnode , nelem , nmat , nbce , nbcn , npoint ,
     &                nband
      COMMON /cnode / x(2,maxn) , u(maxn)
      PRINT * , 'writing solutions ... '
      WRITE (6,*)
      WRITE (6,*) '   node           x              y              u '
      WRITE (6,*)
     &         ' -----------------------------------------------------'
      DO 100 i = 1 , nnode
         WRITE (6,99001) i , x(1,i) , x(2,i) , u(i)
 100  CONTINUE
99001 FORMAT (2X,I4,1X,3F15.3)
      END
```

Bibliografija

[1] Andrews, L.C., Shivamoggi, B.K., "*Integral Transforms for Engineers and Applied Mathematicians*", Macmillan Publishing Company, New York, (1988).

[2] Apsen, B., "*Repititorij više matematike II*", Tehnička knjiga, Zagreb, (1968).

[3] Apsen, B., "*Repititorij više matematike III*", Tehnička knjiga, Zagreb, (1968).

[4] Arfken, G., "*Mathematical Methods for Physicists*", Third Editions, Academic Press, Inc., Orlando, San Diego, New York, (1985).

[5] Ayres, F., "*Theory and problems of Differential Equations*", Schaum's Outline Series, Schaum Publishing, Co., New York, (1952).

[6] Becker, E.B., Carey, G.F., Oden, J.T., "*Finite Elements - An Introduction*", Prentice Hall, Vol.1, (1981).

[7] Bertolino, M., "*Diferencijalne jednačine*", Naučna knjiga, Beograd, (1980).

[8] Bertolino, M., "*Matematika II*", Treće izdanje, Naučna knjiga, Beograd, (1969).

[9] Boas, M.L., "*Mathematical Methods in the Physical Sciences*", Second Edition, John Wiley & Sons, New York, Chichester, Brisbane, Toronto, Singapore, (1983).

[10] Bowman, F., "*Introduction to Bessel Functions*", Dover Publications Inc., New York, (1958).

[11] Boyce, W.E., DiPrima, R.C., "*Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems*", Fourth Edition, John Wiley & Sons, New York, Chichester, Brisbane, Toronto, Singapore, (1986).

[12] Bronson, R., "*Modern Introductory Differential Equations*", Schaum's Outline Series, McGraw-Hill, Inc., New York, (1973).

[13] Budak, B.M., Fomin, S.V., "*Multiple Integrals, Field Theory and Series*", Mir publishers, Moscow, (1973).

[14] Будак, Б.М., Самарский А.А. Тихонов, А.Н., *"Сборник задач по математической физики"*, Государственное издательство технико-теоретической литературы, Москва, (1956).

[15] Caunt, G.W., "*An Introduction to the Infinitesimal Calculus*", Oxford, At the Clarendon Press, (1946).

[16] Collins, R.E., "*Mathematical Methods for Physicists and Engineers*", Reinhold Book Corporation, (1968).

[17] Duchateau, P., Zachmann, D.W., "*Partial Differential Equations*", Schaum's Outline Series, McGraw-Hill, Inc., New York, (1986).

[18] Годунов, С.К., *"Уравнения математической физики"*, Издательство "Наука", Главная редакция физико-математической литературы, Москва, (1979).

[19] Гольдфайн, И.А., *"Векторный анализ и теория поля"*, Издательство "Наука", Главная редакция физико-математической литературы, Москва, (1968).

[20] Hay, G.E., "*Vector and Tensor Analysis*", Dover Publications, Inc., New York, (1953).

[21] Jarić, J. "*Mehanika kontinuuma*", Građevinska knjiga, Beograd, (1988).

[22] Kellogg, O.D., "*Foundations of Potential Theory*", Dover Publications Inc., New York, (1953).

[23] Кошляков, Н.С., Глинер, Э. Б., Смирнов, М.М., *"Уравнения в частных производных математической физики"*, Москва, "Высшая школа", 1970.

[24] Kreyszig, E., "*Advanced Engineering Mathematics*", sixth edition, John Wiley & Sons Inc., New York, Chichester, Brisbane, Toronto, Singapore, (1988).

[25] Кудраявцев, Я.,И., *"Теория поля и ее применение в геофизике"*, "Недра", Ленинград, (1988).

[26] Landau L., Lifšic, E., "*Teorija polja*", Naučna knjiga, Beograd, (1952).

[27] Kuzmanović, D., Obradović, I., Sedamak, A., Berković, M., Milošević, D., "*Metode matematičke fizike*", Rudarsko-geološki fakultet, Beograd, (1997).

[28] Лебедев, Н.Н., *"Специальные функции и их приложения"*, Государственное издательство физико-математической литературы, Москва, (1963).

[29] Ли Цзун-дао, *"Математические методы в физике"*, Издательство "Мир", Москва, (1965). Prevod knjige: T.D. Lee, "Mathematical Methods of Physics", Columbia University, New York.

[30] Маделунг, Э., *"Математический аппарат физики"*, Государственное издательство физико-математической литературы, Москва, (1960). Prevod knjige: Madelung E., "Die mathematischen hilfsmittel des physikers", Berlin, Springer-verlag, (1957).

[31] Mamuzić, Z.P., "*Izabrana poglavlja iz oblasti običnih i parcijalnih diferencijalnih jednačina*", Naučna knjiga, Beograd, (1973).

[32] Mathews, J., and Walker, R.L., "*Mathematical Methods of Physics*", W.A. Benjamin, Inc., New York, Amsterdam, (1964).

[33] Miličić P., Uščumlić M., *Zbirka zadataka iz više matematike II*, Građevinska knjiga, Beograd, I izdanje, (1971).

[34] Mihajlović, B., "*Elementi vektorske analize, diferencijalne geometrije i teorije polja*", III izdanje, Zavod za izdavanje uždbenika Socijalističke republike Srbije, Beograd (1968). Matematička biblioteka 15.

[35] Mitrinović, D.S., Đoković, D.Ž., "*Specijalne funkcije*", Građevinska knjiga, Beograd, (1964).

[36] Mitrinović, D.S., Kečkić, J.D., "*Jednačine matematičke fizike*", Građevinska knjiga, Beograd, (1972).

[37] Очан, Ю.С., *"Методы математической физики"*, Москва, "Высшая школа", (1965).

[38] Очан, Ю.С., *"Сборник задач по методам математической физики"*, Москва, "Высшая школа", (1973).

[39] Pap E., "*Parcijalne diferencijalne jednačine*", II izdanje, Građevinska knjiga, Beograd, (1987).

[40] Pap E., Takači, A., Takači, Đ., Kovačević, D., "*Zbirka zadataka iz parcijalnih diferencijalnih jednačina*", Građevinska knjiga, Beograd, (1989).

[41] Pap E., Takači, A., Takači, Đ., "*Partial Differential Equations through Examples and Exercises*", Kluwer Acadamic Publishers, Dordrecht, The Netherlands, (1997).

[42] Pejović, T., "*Matematička analiza III*", četvrto izdanje, Građevinska knjiga, Beograd, (1967).

[43] Pejović, T., "*Matematička analiza IV*", četvrto izdanje, Građevinska knjiga, Beograd, (1965).

[44] Pejović, T., "*Matematička analiza V*", treće izdanje, Građevinska knjiga, Beograd, (1962).

[45] Rao, S.S., "*The Finite Element Method in Engineering*", Pregamon Press, (1989).

[46] Rašajski, B., "*Teorija običnih diferencijalnih jednačina*", Zavod za izdavanje uždbenika Socijalističke republike Srbije, Beograd (1970).

[47] Saltikov, N., "*Teorija parcijalnih jednačina drugog reda*", Naučna knjiga, Beograd, (1952).

[48] Sokolnikoff, I.S., "*Tensor Analysis*", Second Edition, John Wiley & Sons, Inc., New York, London, Sydney, (1964).

[49] Sommerfeld, A., "*Partial Differential Equations in Physics*", New York, (1949).

[50] Spiegel, M.R., "*Vector Analysis and an Introduction to Tensor Analysis*", Schaum Publishing Co., New York, (1959).

[51] Spiegel, M.R., "*Laplace Transforms*", Schaum's Outline Series, McGraw-Hill, Inc., New York, (1965).

[52] Spiegel, M.R., "*Advanced Mathematics for Engineers & Scientists*", Schaum's Outline Series, McGraw-Hill, Inc., New York, (1971).

[53] Stefanović, D., "*Geometrijske metode istraživanja*", Zavod za geološka, hidrogeološka, geofizička i geotehnička istraživanja, Geofizički institut, knjiga 19, Beograd, (1978).

[54] Stipanić, "*Matematika I*", Zavod za izdavanje uždbenika Socijalističke republike Srbije, Beograd (1965).

[55] Schwartz, L., "*Méthodes mathématiques pour les sciences physiques*", Hermann, Paris, (1965).

[56] Тихонов, А.Н., Самарский А.А., *"Уравнения математической физики"*, Издательство "Наука", Главная редакция физико-математической литературы, Москва, (1972).

[57] Владимиров, В.С., *"Уравнения математической физики"*, Издательство "Наука", Главная редакция физико-математической литературы, Москва, (1976).

[58] Vujić, S., Ivić, A., "*Matematičke metode u rudarstvu i geologiji*", Rudarsko-geološki fakultet Univerziteta u Beogradu, Beograd, (1991).

Indeks