VIŠEZNAČNA PRESLIKAVANJA

TOPOLOŠKIH PROSTORA

MIODRAG MIŠIĆ

Naučni rukovodilac pri izradi
Disertacije: Dr. M. Marjanović

BEOGRAD 1971

P R E D G O V O R

Istraživanja u Opštoj topologiji povezana sa višeznačnim preslikavanjima započeta su već dosta davno , ali su tek poslednjih desetak godina , sa radovima V.I.Ponomareva, ponovo postala aktuelna. Odredjivanje klasa višeznačnih preslikavanja pri kojima se čuvaju različite topološke invarijante, istraživanje svojstava odredjenih klasa višeznačnih preslikavanja fiksiranih klasa topoloških prostora predstavljaju , svakako , neke od osnovnih problema teorije višeznačnih preslikavanja topoloških prostora.
Uvidjajući značaj koji ovi i drugi problemi povezani sa višeznačnim preslikavanjima imaju za dalji razvoj Opšte topologije Dr. M. Marjanović mi je predložio da ti problemi budu predmet moje Doktorske disertacije.
Od neprocenjive vrednosti bila mi je pomoć Dr. M. Marjanovića, kako u razgovorima o pojedinim otvorenim pitanjima i problemima teorije višeznačnih preslikavanja topoloških prostora, tako i u izboru literature.
Posebno mi je zadovoljstvo da se Dr. M. Marjanoviću mogu najtoplije da zahvalim.
Profesoru Dr. Đ. Kurepi, šefu Katedre za matematiku Prirodno - matematičkog fakulteta u Beogradu, srdačno se zahvaljujem na pomoći i podršci prilikom izrade ove Disertacije.

Kragujevac, juni 1971 g.

Miodrag Mišić

VIŠEZNAČNA PRESLIKAVANJA TOPOLOŠKIH PROSTORA

UVOD. Kao i u drugim matematičkim disciplinama, tako i u topologiji, osnovna sredstva istraživanja su funkcije ili preslikavanja. Ali uz svako preslikavanje nekog skupa ili topološkog prostora u drugi često je neophodno posmatrati i inverzno preslikavanje datog preslikavanja. No za mnoga preslikavanja njima inverzna preslikavanja ne postoje, jer nisu jednoznačno odredjena. Takva preslikavanja čija inverzna preslikavanja nisu jednoznačna, ne samo u topologiji, već i u ostalim oblastima matematike prirodno se pojavljuju. Tako su u teoriji kompleksnih funkcija poznati odavno primeri važnih višeznačnih funkcija, kao na primer funkcije $w = \mathrm{Ln}\, z$. U vezi s tim treba spomenuti i Riemann-ove površi tih funkcija koje se dobijaju pri odredjivanju odvojenih grana višeznačnih funkcija.

Zato se i interesovanje za višeznačna preslikavanja vrlo rano pojavilo, jer se uvodjenjem takvih preslikavanja obogaćuje instrumentarij za istraživanja. Istovremeno, uvodjenje višeznačnih preslikavanja omogućuje da se za sva višeznačna preslikavanja posmatraju i njima odredjena kopreslikavanja koja su takodje višeznačna, a odgovaraju inverznim preslikavanjima u slučaju jednoznačnih preslikavanja. Time se ostvaruje simetrija izmedju preslikavanja i kopreslikavanja i ona omogućuje da se sve definicije i mnoga tvrdjenja koja se odnose na višeznačna preslikavanja prenesu i na kopreslikavanja. Osim toga, sve definicije i tvrdjenja koja važe za višeznačna preslikavanja, takodje važe i za jednoznačna preslikavanja, jer se ova mogu shvatiti kao poseban slučaj višeznačnih preslikavanja. Ali na taj se način dobijaju ne samo poznati rezultati, koji se odnose na jednoznačna preslikavanja, već i novi.

Prva istraživanja u topologiji koja se odnose na višeznačna preslikavanja učinjena su od H.Hahn-a i C.Kuratowskog 1/ od kojih potiču i prve definicije neprekidnosti višeznačnih preslikavanja. Od tada su višeznačna preslikavanja istraživana i korišćena u opštoj topologiji od mnogih autora od kojih će se pomenuti: G.Bouligand /Ens. Math.1932, 14/; S.Banach i S.Mazur /Über Meheredentlige, stetige Abbildungen, Studia Mathematcae, vol.6, 1936, 174-178/; A. D. Walace /Fixed point for trees, Bul. of Amer. Math. Soc.vol. 47, 1941, 757; Ciclic Invariance under multivalued maps, Bul. of Amer. Math. Soc. vol. 55, 1949, 57/; S.Kakutani /A generalisation of Brower's fixed point Theorem, Duke Math. J. vol.8, 1941, 57/; S.Eilenberg i D.Montgomery /Fixed point Theorem for multivalued Transformation, Amer, Math. J. vol 68, 1946, 214/; G.Choquet /Convergences, Ann. Univ.Grenoble, 1947, t. 23, 57/; L.Ratner /Multivalued Transformation, Univ. of California, 1949/; C.Berge /Mémorial Sc. Math. 138; Espaces topologiques, fonctions multivoques, Dunod,1959; G.T. Whyburn /Continuity of multifunctions, Proc.Nat. Acad. Sci. USA, vol. 54, 1965, №6/; R.E.Smithson /Some general properties of multivalued functions, Pacific J.Math.vol 15, 1965, №2, 681/; W.L.Strother /Continuous miltivalued functions, Boll. da Soc. de S.Pãulo, 10, 1958, 87/; E. Michael /A. theorem on semi-continuos set valued functions, Duke Math. J. 26, №4, 1959, 647/; A. Arhangelskij /Ob odnom klase prostranstv soderžaščim vse metričeskie i vse lokaljno bikompaktnie prostranstva, Mat. sb. 67,/1o9/, 1, 1965, 55-88/ i drugi.

1/ H.Hahn: Reelle Funtionen I, Leipzig, 1932,
C.Kuratowski: Fund. Math. 18, 1932, p.148.

Ipak, posebno značajno mesto u istraživanjima u opštoj topologiji koja su povezana sa višeznačnim preslikavanjima ima V.I. Ponomarev / [1], [2] i O prodolženiji mnogoznačnih otobraženij..., Mat. sb. 1960, 52 /94/, №3/.

Istraživanja u opštoj topologiji koja su u vezi sa višeznačnim preslikavanjima grupisana su oko nekih osnovnih problema, kao na primer:

odredjivanja fiksnih skupova tačaka višeznačnih preslikavanja;

odredjivanja klasa višeznačnih preslikavanja koja čuvaju pojedine invarijante topoloških prostora;

istraživanja svojstava višeznačnih preslikavanja za date klase topoloških prostora, itd.

Najopštije govoreći, ova teza pretstavlja istraživanja višeznačnih preslikavanja pri kojima se čuvaju neka odredjena svojstva topoloških prostora i istraživanje osobina izvesnih klasa višeznačnih preslikavanja izmedju odredjenih klasa topoloških prostora. Inače, sva preslikavanja koja se ovde razmatraju imaju svojstvo da tačke preslikavaju u zatvorene skupove.

Rezultati koji su dobijeni izloženi su u pet odeljaka - paragrafa, od kojih je prvi uvodni i daje najvažnije, više ili manje poznate, informacije o elementarnim svojstvima višeznačnih preslikavanja i najvažnije definicije sa njima u vezi.

1. OSNOVNE DEFINICIJE I FORMALNA SVOJSTVA VIŠEZNAČNIH PRESLIKAVANJA

Ovaj odeljak sadrži osnovne definicije i činjenice o formalnim svojstvima višeznačnih preslikavanja koje će se dalje često koristiti, obično ne navodeći ih eksplicitno. Isto tako, ovde su date najvažnije definicije različitih tipova neprekidnosti višeznačnih preslikavanja, kao i njihovi ekvivalenti. Dokazi u ovom odeljku nisu, po pravilu, dati, izuzev, ako nisu novi.

Definicija 1.1. Neka su X i Y proizvoljni skupovi. Ako je svakom elementu $x \in X$ pridružen odredjeni, neprazni podskup $Fx \subset Y$, tada je pridruživanjem $x \longrightarrow Fx$, za svako $x \in X$, odredjeno jednoznačno preslikavanje

$$F : X \longrightarrow P(Y),$$

gde je sa $P(Y)$ označen partitivni skup skupa Y.
Jednoznačno preslikavanje $F : X \longrightarrow P(Y)$ zvaće se <u>višeznačno preslikavanje</u> ili <u>transformacija</u> skupa X u skup Y, a podskup Fx <u>slika elementa</u> $x \in X$ pri preslikavanju F.
Skup X zvaće se <u>domen</u> /oblast definisanosti/ preslikavanja F, a skup $\{y : \exists x \in X;\ y \in Fx \subset Y\}$ <u>kodomen</u> /oblast vrednosti/ istog preslikavanja. Ako je kodomen preslikavanja F jedank skupu Y, reći će se da je F preslikavanje skupa X <u>na</u> skup Y.

Uobičajeno je da se višeznačno preslikavanje $F : X \longrightarrow P(Y)$ označava i sa $F : X \longrightarrow Y$. Medjutim, ova oznaka ne ukazuje ni sa čim da je F višeznačno preslikavanje. Zato će se uzeti da oznaka $F : X \longrightarrow P(Y)$ bude <u>standardno obeležavanje</u> za višeznačna preslikavanja i time će biti istaknuto da se elementi skupa X preslikavaju u podskupove skupa Y.

Ipak, ukoliko, to ne dovodi do zabune, koristiće se često i tradicionalna oznaka $F : X \longrightarrow Y$ za višezna-

čno preslikavanje.
Prethodnom definicijom nije odredjeno šta je slika proizvoljnog skupa $A \subset X$ pri preslikavanju F. Ali definisanjem slike svakog podskupa A skupa X pri preslikavanju F biće odredjeno jednoznačno preslikavanje:

$$P(F) : P(X) \longrightarrow P(Y)$$

partitivnog skupa P(X) u partitivni skup P(Y).

Pre nego što se odredi slika skupa $A \subset X$, pri višeznačnom preslikavanju F, pogodno je uvesti jednoznačno preslikavanje

$$\hat{F} : \hat{X}_1 \longrightarrow P(Y)$$

koji odgovara svakom višeznačnom preslikavanju $F : X \longrightarrow P(Y)$.

Preslikavanje $\hat{F}$ će se uvesti uslovom da dijagram preslikavanja

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, dashed, "F"] \arrow[d, dashed, "i"'] & P(Y) \\ \hat{X}_1 \arrow[ur, dashed, "\hat{F}"'] & \end{tikzcd}$$

bude komutativan, tj. da za svako $x \in X$ bude

$(\hat{F} \circ i)\{x\} = Fx$. Pri tome je $\underline{i}$ - identičko preslikavanje skupa X na $\hat{X}_1 \subset P(X)$, tj. takvo preslikavanje da je, za svako $x \in X$,

$$i(x) = \{x\} \in \hat{X}_1.$$

Iz uslova komutativnosti dijagrama se dobija

$$\hat{F}\{x\} = Fx, \qquad /2/$$

te je preslikavanje $\hat{F}$ potpuno odredjeno.

<u>Definicija 1.2.</u> Preslikavanje $\hat{F} : \hat{X}_1 \longrightarrow P(Y)$, odredjeno uslovom/2/ zvaće se <u>prvo jednoznačno preslikavanje</u> koje odgovara višeznačnom preslikavanju F.

Narednom definicijom biće odredjena slika proizvoljnog skupa $A \subset X$ pri preslikavanju F, a istovremeno i jedno produženje preslikavanja $\hat{F}$ sa skupa $\hat{X}_1$ na čitav partitivni skup P(X) /skupa X/.

<u>Definicija 1.3.</u> Neka je $F : X \longrightarrow P(Y)$ višeznačno preslikavanje skupa X u skup Y i $A \subset X$ proizvoljan, neprazan skup. Tada će se skup

$$P(F)A = \{y : \exists x \in A;\ y \in Fx\} \in P(Y) \qquad /3/$$

nazvati <u>/velika/ slika skupa A</u> pri preslikavanju F.

Jednakošću /3/ definisano je za svako višeznačno preslikavanje F jednoznačno preslikavanje

$$P(F) : P(X) \longrightarrow P(Y).$$

Prema jednakosti /3/ za svaki jednočlani podskup $\{x\}$ skupa X dobija se

$P(F)\{x\} = \{y : y \in Fx\}$, a pošto je i

$Fx = \{y : y \in Fx\}$, sledi da je

$$P(F)\{x\} = Fx = \hat{F}\{x\}. \qquad /4/$$

Na taj način je preslikavanje P(F) jedno produženje preslikavanja $\hat{F}$, tj.

$$P(F)/\hat{X}_1 = \hat{F}.$$

<u>Napomena.</u> Ponegde se u literaturi preslikavanje P(F) obeležava sa F^1, a ako to ne izaziva nejasnoće i istim slovom F kao i polazno višeznačno preslikavanje. Na isti način će se i ovde postupiti, te će se, jednostavno, za svaki skup $A \subset X$, pisati FA umesto P(F)A, a takodje i Fx umesto $\hat{F}\{x\} = P(F)\{x\}$.

Inače, kao što će se videti /teorema 1.2./, preslikavanje P(F) odredjeno jednakošću /3/ čuva teoretsko skupovna svojstva partitivnih skupova, te zbog toga i ima poseban značaj.

Dalje je neophodna sledeća propozicija, koja daje u drugim terminima sliku skupa A pri preslikavanju F.

<u>Propozicija 1.1.</u> Neka je $F : X \longrightarrow P(Y)$ višeznačno preslikavanje skupa X u skup Y. Tada je za svaki skup $A \subset X$

$$FA = \bigcup \{ Fx : x \in A \}. \qquad /5/$$

Dokaz je očigledan.

Pomoću prvogjednoznačnog preslikavanja $F : X \longrightarrow P(Y)$ koje odgovara višeznačnom preslikavanju moguće je odrediti još i sledeće jednoznačno preslikavanje

$P(\hat{F}) : P(X) \longrightarrow P(Y)$, ako se za svaki skup $A \in P(X)$

stavi

$$P(\hat{F})A = \{ \hat{F}\{x\} : \hat{F}\{x\} \in P(Y),\ x \in A \} \in P^2(Y) . \qquad /6/$$

<u>Definicija 1.4.</u> Preslikavanje $P(\hat{F}) : P(X) \longrightarrow P^2(Y)$ odredjeno jednakošću /6/ zvaće se <u>hiperpreslikavanje</u> koje odgovara višeznačnom preslikavanju F.

Odnos hiperpreslikavanja $P(\hat{F})$ /koje će se dalje obeležavati jednostavno sa $\bar{F}$/, višeznačnog preslikavanja $F : X \longrightarrow P(Y)$ i prvog jednozačnog preslikavanja F vidi se iz sledećeg dijagrama preslikavanja

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "F"] \arrow[d, dashed, "i_X"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & P(Y) \\
\hat{X} \subset P(X) \arrow[ur, dashed, "\hat{F}"] \arrow[r, dashed, "\bar{F} \equiv P(\hat{F})"'] & P^2(Y) \arrow[u, dashed, "u \equiv \bigcup"']
\end{tikzcd}$$

koji je komutativan po trouglovima i u celini. Napomenuće se najpre da su i_x i i_p identička preslikavanja. Tada je gornji trougao preslikavanja komutativan prema definiciji 1.2., a donji prema definiciji 1.4., jer je, za $\{x\} \in \hat{X}_1$

$$P(\hat{F})\{x\} \;/\!\equiv\; \bar{F}\{x\} \;/\!=\; \hat{F}\{x\} = i_p(\hat{F}\{x\}) = (i_p \circ \hat{F})\{x\} .$$

Za svako $x \in X$, je dalje:

$$(\bar{F} \circ i_x)\, x = \bar{F}\{x\} = i_p\,(\hat{F}\{x\}) = i_p\,(Fx) = (i_p \circ F)\, x ,$$

pa je dokazano da čitav prethodni dijagram preslikavanja komutativan.

Odnos izmedju preslikavanja $P(F)$ i $P(\hat{F})$ se može videti iz narednog dijagrama preslikavanja

$$\begin{tikzcd}
\hat{X}_1 \arrow[rr, "\hat{F}"] \arrow[d, dashed, "i^1"'] & & P(Y) \\
P(X) \arrow[rr, "\bar{F} = P(\hat{F})"'] \arrow[urr, dashed, "P(F)"] & & \mathcal{P}(Y) \arrow[u, dashed, "u \equiv U"']
\end{tikzcd}$$

koji je komutativan. U ovom dijagramu je i^1 inkluzija, a preslikavanje $u : \mathcal{P}(Y) \longrightarrow P(Y)$ je unija skupova, kojom se svakoj familiji skupova $\mathcal{A} \in \mathcal{P}(Y)$ pridružuje telo te familije $|\mathcal{A}|$, tj. $|\mathcal{A}| = u(\mathcal{A}) = \bigcup\{A : A \in \mathcal{A}\}$. Gornji trougao preslikavanja je komutativan, jer je za svako $x \in X$: $P(F) \circ i^1\{x\} = P(F)\{x\} = \hat{F}\{x\}$, prema jednakosti /4/ definicije 1.3. Za skup $A \in P(X)$, prema definiciji 1.2. i jednakosti /4/ iz definicije 1.3. dobija se

$$P(\hat{F})A = \{\hat{F}\{x\} : x \in A\} = \{Fx : x \in A\} .$$ Na osnovu propozicije 1.1. biće:

$u \circ P(\hat{F})A = u\{Fx : x \in A\} = \cup\{Fx : x \in A\} = FA \in P(Y)$
i budući da je $FA = P(F)A$, dokazana je jednakost

$u \circ P(F)A = P(F)A$, tj. komutativnost donjeg trougla.

Najzad, za $\{x\} \in \hat{X}_1$, će biti:

$u \circ P(\hat{F}) \circ i^1\{x\} = u \circ P(\hat{F})\{x\} = u \circ \hat{F}\{x\} = \hat{F}\{x\}$, pa je dokazana komutativnost čitavog dijagrama.

Sledeća teorema ima opšti karakter i pokazuje da je produženje $P(F)/\equiv F/$, proizvoljnog višeznačnog preslikavanja $F : X \longrightarrow P(Y)$ odredjeno definicijom 1.3., uvedeno na prirodan način i da se njime čuva teoretsko-skupovna struktura partitivnih skupova.

<u>Teorema 1.2</u>. Za svako jednoznačno preslikavanje $G : P(X) \longrightarrow P(Y)$ partitivnog skupa $P(X)$ u partitivni skup $P(Y)$ sledeći iskazi su ekvivalentni.

a/ Za svaki neprazan skup $A \in P(X)$ je

$$GA = \cup\{Gx : x \in A\}.$$

b/ Za svaku nepraznu familiju $\mathcal{A} = \{A : A \subset X\}$ podskupova skupa X je

$$G(\cup\{A : A \in \mathcal{A}\}) = \cup\{GA : A \in \mathcal{A}\}.$$

<u>Dokaz</u>. Neka važi tvrdjenje a/. Tada je prema njemu

$$G(\cup\{A : A \in \mathcal{A}\}) = \cup\{G\{x\} : x \in \cup\{A : A \in \mathcal{A}\}\}.$$

Pošto je dalje očigledno

$$\cup\{G\{x\} : x \in \cup\{A : A \in \mathcal{A}\}\} = \cup\{\cup\{G\{x\} : x \in A\} : A \in \mathcal{A}\}$$, ponovo je prema uslovu a/

$$\cup\{\cup\{G\{x\} : x \in A\} : A \in \mathcal{A}\} = \cup\{GA : A \in \mathcal{A}\}$$ i time

je dokazano da iz tvrdjenja a/ proizilazi tvrdjenje b/.

Obrnuto, neka važi uslov b/. Budući da je svaki neprazan skup A X unija svojih jednočlanih podskupova, tj. $A = \bigcup \{\{x\} : x \in A\}$ biće prema uslovu b/

$$GA = G\,(\bigcup\{\{x\} : x \in A\}) = \bigcup\{G\,\{x\} : x \in A\} \quad \text{i}$$

dokazano je da tvrdjenje b/ implicira tvrdjenje a/.

U daljem tekstu će se operacija komplementiranja, bez obzira u odnosu na koji se skup vrši obeležavati sa C. Treba napomenuti da se ova operacija može shvatiti i kao jednoznačno preslikavanje

$$C : P(X) \longrightarrow P(X)$$

partitivnog skupa P(X) na sebe, a odredjeno je uslovom da je za svaki skup $A \in P(X)$

$$CA = X \setminus A.$$

Neka je $G : P(X) \longrightarrow P(Y)$ proizvoljno /jednoznačno/ preslikavanje partitivnog skupa P(X) u partitivni skup P(Y), Tada je pomoću preslikavanja G moguće uvek moguće odrediti preslikavanje

$$G^{*} : P(X) \longrightarrow P(Y)$$

zahtevom da sledeći dijagram preslikavanja

$$\begin{tikzcd}
P(X) \arrow[r, dashed, "G^{*}"] \arrow[d, dashed, "C"'] & P(Y) \arrow[d, dashed, "C"] \\
P(X) \arrow[r, dashed, "G"'] & P(Y)
\end{tikzcd}$$

bude komutativan. Za svaki skup $A \in P\,X$, iz uslova komutativnosti:

$C \circ G^{*} A = G \circ CA$ sledi da je

$G^{*} A = C \circ G \circ CA.$ /*/

Ako je $G = P(F) : P(X) \longrightarrow P(Y)$, gde je $F : X \longrightarrow P(Y)$ višeznačno preslikavanje, biće odredjeno jednakošću /*/ jednoznačno preslikavanje

$F^{\#} : P(X) \longrightarrow P(Y)$, i za svaki skup $A \in P(X)$ je

$F^{\#} A = C \circ F \circ CA.$ /$\ast\ast$/

Definicija 1.5. Preslikavanje $F^{\#} : P(X) \longrightarrow P(Y)$ odredjeno jednakošću /$\ast\ast$/ zvaće se malo /direktno/ preslikavanje preslikavanja F, a skup $F^{\#}A$ mala /direktna/ slika skupa A pri preslikavanju F.

Posledica definicije 1.5. Za svaki skup $A \subset X$ je $F^{\#}A \subset FA$, /ako je $F : X \longrightarrow Y$ preslikavanje na/.

Dokaz. Budući da je $F^{\#}A = C \circ F \circ CA$, dovoljno je dokazati inkluziju $CFA \subset FCA$. Neka $y \in CFA$, tada $y \notin FA$, tj. za svako $x \in A$, $y \notin Fx$. Budući da je $y \in Y = FX$, sledi da postoji $x_0 \in X$ da $y \in Fx_0$. No $x_0 \notin A$, tj. $x_0 \in CA$, dakle $y \in Fx_0 \subset FCA$ i time je dokaz završen.

Napomena. Navedena inkluzija opravdava uvedeni naziv za preslikavanje $F^{\#}$.

Definicija 1.6. Neka je $F : X \longrightarrow P(Y)$ višeznačno preslikavanje skupa X na skup Y. Višeznačno preslikavanje

$F' : Y \longrightarrow P(X)$ skupa Y na skup X nazvaće se kopreslikavanje preslikavanja F, ako se svakom elementu $y \in Y$, pridruži skup $F'y = \{x : y \in Fx\} \in P(X)$.

Skup

$$P(F')B = \{ x : \exists\, y \in B;\ y \in Fx \} \in P(X) \qquad /7/$$

koji se može pridružiti svakom nepraznom skupu $B \subset Y$ tada će se zvati /velika/ koslika skupa B pri preslikavanju F.

Jednakošću /7/ je na isti način kao i jednakošću /3/, višeznačnim preslikavanjem F odredjeno jednoznačno preslikavanje

$P(F')$: $P(Y) \longrightarrow P(X)$, koje ima svojstvo da je za svaki jednočlani podskup $\{y\}$ skupa Y

$$P(F')\{y\} = \{x : x \in Fx\} = F'y. \qquad /8/$$

Na taj način se preslikavanje $P(F')$ može shvatiti i kao produženje preslikavanja $\hat{F}'$: $\hat{Y}_1 \longrightarrow P(X)$ /odredjenog kopreslikavanjem F' : $Y' \longrightarrow P(X)$, analogno kao i preslikavanje $\hat{F}$ definicijom 1.2./.

Preslikavanje $P(F')$ često se obeležava sa F^{-1}, a zbog jednakosti /8/ ovo preslikavanje će se, takodje, obeležavati slovom kao i kopreslikavanje F' i pisati $F'B$ umesto $P(F')B$. Treba ovde napomenuti da se koslika $F'B$ skupa $B \subset Y$ odredjena jednakošću /7/ može, kao i slika FA skupa $A \subset X$, dobiti i na sledeći način

$$F'B = \bigcup\{F'y : y \in B\}. \qquad /7'/$$

<u>Posledice definicije 1.6.</u>

a/ Neka je $F : X \longrightarrow P(Y)$ višeznačno preslikavanje skupa X na skup Y. Tada je za svaki skup $A \subset X$

$$FA = \{y : F'y \cap A \neq \emptyset\} \qquad /9/$$

i za svaki skup $B \subset Y$

$$F'B = \{x : Fx \cap B \neq \emptyset\}. \qquad /10/$$

<u>Dokaz.</u> Dokazaće se jednakost /9/; jednakost /10/ se dokazuje na isti način. Neka $y \in FA$; tada postoji $x \in A$ da $y \in Fx$.

Ali tada $x \in F'y$, tj. $x \in F'y \cap A$, pa je $F'y \cap A \neq \emptyset$ i $y \in \{y : F'y \cap A \neq \emptyset\}$. Obrnuto, ako je $F'y \cap A \neq \emptyset$, postoji $x \in F'y \cap A$, tj. $y \in Fx$ i zato $y \in F\,A$. Time je dokazana inkluzija $FA \supset \{y : F'y \cap A \neq \emptyset\}$ i jednakost /9/.

b/ Ako su A i A_1 podskupovi skupa X i $A_1 \subset A$, tada sledi da je $FA_1 \subset FA$. Isto tako, ako su B i B_1 podskupovi skupa Y i ako je $B_1 \subset B$ sledi da je $FB_1 \subset FB$. Dokaz sledi neposredno iz definicije 1.6. i propozicije 1.1.

c/ Za svako višeznačno preslikavanje F uvek je $F\emptyset \neq \emptyset$.

Zaista, kako ni za koji element $y \in Y$ nije $F'y \cap \emptyset \neq \emptyset$, prema /9/ sledi $F'\emptyset = \emptyset$.

Na isti način kao što produženje F /$\equiv P(F)$ / višeznačnog preslikavanja F odredjuje malo preslikavanje $F^{\#}$, tako je i produženjem F' /$\equiv P(F')$/ kopreslikavanja F' odredjeno preslikavanje $F^{b}: P(Y) \longrightarrow P(X)$ koje će se zvati <u>malo kopreslikavanje</u> preslikavanja F.

Ako se u dijagramu preslikavanja iz definicije 1.5. preslikavanje F zameni njegovim kopreslikavanjem F' /i promeni smer strelica/ dobija se dijagram preslikavanja

$$\begin{tikzcd}
P(X) \arrow[d, dashed, "C"'] & P(Y) \arrow[l, "F^{b}"'] \arrow[d, dashed, "C"] \\
P(X) & P(Y) \arrow[l, "F'"]
\end{tikzcd} .$$

Uslovom da ovaj dijagram bude komutativan odredjeno je preslikavanje

$$F^{b}: P(Y) \longrightarrow P(X).$$

Tada je za svaki skup $B \in P(Y)$

$$C \circ F^{b} B = F^{\natural} \circ C\, B \quad \text{i zato}$$

$$F^{b} B = C \circ F^{\natural} \circ C\, B. \tag{11}$$

Skup $F^{b}B \subset X$ zvaće se <u>mala koslika</u> skupa B pri preslikavanju F.

<u>Propozicija 1.3.</u> Neka je $F : X \longrightarrow P(Y)$ višeznačno preslikavanje skupa X na skup Y. Tada je za svaki skup $A \subset X$

$$F^{\#}A = \{ y : F' y \subset A \} \tag{12}$$

i za svaki skup $B \subset Y$ je

$$F^{b} B = \{ x : Fx \subset B \}. \tag{12'}$$

<u>Dokaz</u>. Dovoljno je dokazati samo jednu od jednakosti /12/ ili /12'/, jer se druga, dualna, na isti način dokazuje. Neka $y \in F^{\#}A = C \circ F \circ C\, A$; pokazaće se da $F'y \subset A$. Ako bi postojala tačka $x \in F'y \setminus A$, tj. $x \in CA$, tada bi $y \in FCA$, suprotno pretpostavci da $y \in CFCA$. Sledi da mora biti $F'y \subset A$. Obrnuto, ako za neko $y \in Y$ važi inkluzija $F'y \subset A$, tada ni za koje $x \in CA$, ne može biti $y \in Fx$, budući da je $F'y = \{ x : y \in Fx \}$. Sledi da $y \notin FCA$, tj. $y \in C \circ F \circ CA = F^{\#}A$, i propozicija je dokazana.

<u>Propozicija 1.4.</u> Neka je $F : X \longrightarrow P(Y)$ višeznačno preslikavanje skupa X <u>na</u> skup Y. Tada važi

$$(F')' = F.$$

Dokaz. Neka $y \in (F')'x$, tada $x \in F'y$, te $y \in Fx$ i dokazana je inkluzija $(F')'x \subset Fx$. Obrnuto, ako $y \in Fx$, biće $x \in F'y$ i dalje $y \in (F')'x$, tj. $Fx \subset (F')'x$ i propozicija dokazana.

Definicija 1.7. Za višeznačno preslikavanje $F : X \longrightarrow P(Y)$ reći će se da je injektivno, ako za $x, x' \in X$ iz $x \neq x'$ sledi $Fx \cap Fx' = \emptyset$.

Višeznačno preslikavanje F je polujednoznačno /semiunivoko/, ako za $x, x' \in X$ iz

$$Fx \cap Fx' \neq \emptyset \quad \text{sledi } Fx = Fx'.$$ [1]

Posledice definicije 1.7. Svako jednoznačno ili injektivno preslikavanje je polujednoznačno.

Ako je višeznačno preslikavanje F injektivno, tada je njegovo kopreslikavanje F' jednoznačno. Ako je F jednoznačno preslikavanje, tada je kopreslikavanje F' injektivno.

Ako je preslikavanje F polujednoznačno, tada je i njegovo kopreslikavanje F' takodje polujednoznačno.

Propozicija 1.5. Neka je $F : X \longrightarrow P(Y)$ višeznačno preslikavanje skupa X na skup Y.

a/ Za svaki skup $A \subset X$, komplement slike skupa A sadržan je u slici komplimenta skupa A, tj.

$$C \cdot F\,A \subset F \cdot CA$$

b/ Ako je F injektivno preslikavanje, tada je i samo tada, za svaki skup $A \subset X$

$$C \cdot FA = F \cdot CA.$$

---
1) V.: C.Berge [1]

Dokaz. Inkluzija $CFA \subset FCA$ je /ekvivalentna inkluziji $FA \supset CFCA = F^{*}A$, koja je/ već dokazana.

b/ Neka je F injektivno preslikavanje; da se dokaže jednakost $CFA = FCA$, dovoljno je dokazati inkluziju $CFA \supset FCA$ ili njoj ekvivalentnu $FA \subset F^{*}A$. Ako bi postojalo $y \in FA \setminus F^{*}A$, tada postoji $x \in A : y \in Fx$. Budući da $y \notin F^{*}A$, nije $F'y \subset A$, tj. $F'y \cap CA \neq \emptyset$, pa postoji $x' \in CA \cap F'y$, tj. $x' \in CA$ i $y \in Fx'$. Ali tada je $x \neq x'$, i $y \in Fx \cap Fx' \neq \emptyset$, suprotno pretpostavci da je preslikavanje F injektivno. Sledi da važi inkluzija $FA \subset F^{*}A$.

Obrnuto, neka važi inkluzija $CFA \supset FCA$, i neka su $x, x' \in X$ i $x \neq x'$. Tada $x' \in Cx$ i prema inkluziji biće $Fx' \subset FCx \subset CFx$, tj. $Fx \cap Fx' = \emptyset$, pa je preslikavanje F injektivno.

Posledice propozicije 1.5.

a/ Neka je $F : X \longrightarrow P(Y)$ višeznačno preslikavanje. Tada je $FA = F^{*}A$ za svaki skup $A \subset X$, ako i samo ako je preslikavanje F injektivno.

b/ Za svako kopreslikavanje F' preslikavanja F uvek važi $F'B = F^{\flat}B$, za svaki skup $B \subset Y$, ako i samo ako je F jednoznačno preslikavanje.

Sledeća teorema daje važne relacije o višeznačnim preslikavanjima. One se mogu izdvojiti u parove, tako da se svaka relacija u jednom paru može dobiti iz druge iz istog para ako se F zameni sa F' i F^{*} sa $F^{\flat}$ i obrnuto, a istovremeno se umesto skupa $A \subset X$ stavlja $B \subset Y$ i obrnuto.

Teorema 1.6. Neka je $F : X \longrightarrow P(Y)$ proizvoljno višeznačno preslikavanje skupa X na skup Y. Tada važe sledeće dualne relacije:

Za bilo koja dva podskupa A i A_1 iz X i B i B_1 iz Y, iz

/1/
$$A \cap A_1 = \emptyset \text{ sledi } FA \cap F^{\#}A_1 = \emptyset, \text{ i iz}$$
$$B \cap B_1 = \emptyset \text{ sledi } F'B \cap F^{b}B_1 = \emptyset.$$ [1]

Za bilo koji podskup $A \subset X$, ili $B \subset Y$ je [2]

/2/
$$F^{b}F^{\#}A \subset F'F^{\#}A \subset A \subset F^{b}FA \subset F'FA \quad \text{i}$$
$$F^{\#}F^{b}B \subset F\,F^{b}B \subset B \subset F^{\#}F'B \subset F\,F'B.$$

/3/
$$FA = C \circ F^{\#} \circ CA \quad \text{i}$$
$$F'B = C \circ F^{b} \circ CB.$$

Ako su $\mathcal{A} = \{A : A \subset X\}$ i $\mathcal{B} = \{B : B \subset Y\}$ proizvoljne familije skupova iz X, odnosno iz Y, tada će biti

/4/
$$F(\cup\{A : A \in \mathcal{A}\}) = \cup\{FA : A \in \mathcal{A}\},$$
$$F(\cup\{B : B \in \mathcal{B}\}) = \cup\{F'B : B \in \mathcal{B}\}.$$

/5/
$$F^{\#}(\cap\{A : A \in \mathcal{A}\}) = \cap\{F^{\#}A : A \in \mathcal{A}\},$$
$$F^{b}(\cap\{B : B \in \mathcal{B}\}) = \cap\{F^{b}B : B \in \mathcal{B}\}.$$

/6/
$$F(\cap\{A : A \in \mathcal{A}\}) \subset \cap\{FA : A \in \mathcal{A}\},$$
$$F'(\cap\{B : B \in \mathcal{B}\}) \subset \cap\{F'B : B \in \mathcal{B}\}.$$

/7/
$$F^{\#}(\cup\{A : A \in \mathcal{A}\}) \supset \cup\{F^{\#}A : A \in \mathcal{A}\},$$
$$F^{b}(\cup\{B : B \in \mathcal{B}\}) \supset \cup\{F^{b}B : B \in \mathcal{B}\}.$$

---

1) Treba napomenuti da iz $FA \cap F^{\#}A_1 = \emptyset$ ne sledi $A \cap A_1 = \emptyset$, kao što to prosti primeri pokazuju.

2) V.: V.I. Ponomarev [1], p. 516.

Posledice teoreme 1.6.

a/ Višeznačno preslikavanje $F : X \longrightarrow P(Y)$ je injektivno, ako i samo ako je za svaku familiju $\mathcal{A}=\{A : A\subset X\}$ podskupova iz X:

/4'/ $F(\cap\{A : A\in\mathcal{A}\})=\cap\{FA : A\in\mathcal{A}\}$ ili ekvivalentno.

/7'/ $F^{*}(\cup\{A : A\in\mathcal{A}\})=\cup\{F^{*}A : A\in\mathcal{A}\}$.

Dokaz. Prema posledici a/ propozicije 1.5. biće $FA=F^{*}A$ ako i samo ako je F injektivno preslikavanje, a prema /5/ je dalje

$$F(\cap\{A : A\in\mathcal{A}\})=F^{*}(\cap\{A : A\in\mathcal{A}\})=\cap\{F^{*}A : A\in\mathcal{A}\}=\cap\{FA : A\in\mathcal{A}\} .$$

Slično je

$$F^{*}(\cup\{A : A\in\mathcal{A}\})=F(\cup\{A : A\in\mathcal{A}\})=\cup\{FA : A\in\mathcal{A}\}=\cup\{F^{*}A : A\in\mathcal{A}\}.$$

b/ Ako je preslikavanje F injektivno, tada je i samo tada za svaki skup $A\subset X$

$$A=F'FA.$$

Dokaz. Prema /2/ je

$F'F^{*}A\subset A\subset F'FA$, a prema posledici /a/ propozicije 1.5. je $F^{*}A=FA$, te sledi

$$F'FA\subset A\subset F'FA.$$

c/ Ako je preslikavanje F <u>jednoznačno</u>, tada je kopreslikavanje F' injektivno, pa prema prethodnoj posledici za svaki sku $B \subset Y$ biće

$$B = F\,F'B.$$

d/ Za svako višeznačno preslikavanje $F : X \longrightarrow P(Y)$ i proizvoljan skup $A \subset X$ će biti

$F^{\#}A = \bigcup\{Fx : Fx = \bar{F}x \in \mathfrak{M}_A\}$, gde je $\mathfrak{M}_A = \bar{F}X \setminus \bar{F}(X \setminus A) \subset P(Y)$ i slično, za svaki skup $B \subset Y$ je

$F^{b}B = \bigcup\{F'y : F'y = \bar{F}'y \in \mathfrak{M}_B\}$, gde je $\mathfrak{M}_B = \bar{F}'Y \setminus \bar{F}'(Y \setminus B) \subset P(X)$, a $\bar{F}' : Y \longrightarrow P(X)$ jednoznačno preslikavanje koje odgovara kopreslikavanju F' preslikavanja F.

<u>Dokaz</u>. Budući da iz $A \cap (X \setminus A) = \emptyset$ sledi /1/

$F^{\#}A \cap F\,(X \setminus A) = \emptyset$, ako $y \in F^{\#}A$, tada i samo tada $y \notin F(X \setminus A)$, tj. $y \notin Fx = \bar{F}x$, ni za koje $x \in X \setminus A$, te sledi da $y \in Fx = \bar{F}x$, ako i samo ako

$$\bar{F}x \in \mathfrak{M}_A = \bar{F}\,X \setminus \bar{F}(X \setminus A)\ .$$

e/ Ako je $A \subset X$ i $B \subset Y$, tada je i samo tada

$$A \cap F'B = \emptyset \text{ kada je } FA \cap B = \emptyset$$

<u>Dokaz</u>. Iz $A \cap F'B = \emptyset$ sledi $FA \cap F^{\#}\,F'B = \emptyset$, a budući da je $B \subset F^{\#}\,F'B$ dobija se $FA \cap B = \emptyset$.

Obrnuto, ako je

$FA \cap B = \emptyset$ sledi $F^{b}FA \cap F'B = \emptyset$ i pošto je $A \subset F^{b}FA$, odmah proizilazi da je $A \cap F'B = \emptyset$.

f/ Za svaki skup $A \subset X$ i svaki skup $B \subset Y$ je

$$FF^{\flat}FA = FA \quad \text{i} \quad F'F^{\#}F'B = F'B.$$

<u>Dokaz</u>. Prema /2/ iz prethodne teoréme je

$$FF^{\flat}(FA) \subset FA \quad \text{i} \quad A \subset F^{\flat}FA.$$

Iz druge od ovih dveju inkluzija proizilazi

$FA \subset FF^{\flat}FA$, pa je dokazana prva jednakost /e/.

Druga se na isti način dokazuje.

<u>Propozicija 1.7</u>. Višeznačno preslikavanje $F : X \dashrightarrow P(Y)$ skupa X na skup Y je <u>polujednoznačno</u>, ako i samo ako je $FF'F = F$, ili ekvivalentno

$$F'FF' = F.$$

Tada je, takodje, za svaki inverzan[1]) skup $A \subset X$

$$F'FA = A \quad \text{i za svaki direktan skup } B \subset Y$$

$$FF'B = B.^{2)}$$

<u>Definicija 1.8</u>. Neka je $F : X \dashrightarrow P(Y)$ višeznačno preslikavanje skupa X na skup Y. Tada se skup $\mathcal{Z}_F = \{(x,y) : x \in X, y \in Fx \subset Y\} \subset X \times Y$ zove <u>grafik /graf/ preslikavanja F</u>.

---

1) Skup A je <u>inverzan</u> u odnosu na preslikavanje F, ako je $A = F'B$, za neki skup B, a skup B je <u>direktan</u>, ako je $B = FA$ za neki skup A.

2) V.: G.T, Whyburn, Continuity of multifunctions, Proc. Acod. Sci. USA, vol. 54, 1965. №6.

Budući da je graf Z_F preslikavanja F podskup Dekartovog proizvoda $X \times Y$, restrikcije projekcija

$\pi_X : X \times Y \longrightarrow Y$, gde je $\pi_X(x, y) = x$ i

$\pi_Y : X\ Y$ ——— Y, gde je $\pi_Y(x, y) = y$, za

$(x,y) \in X \times Y$, odredjuju redom preslikavanja

$p_x : Z_F \longrightarrow X$ i

$p_y : Z_F \longrightarrow Y$ i pri tome je, za svako $x \in X$;

$Fx = p_y \circ p_x^{-1}(x)$ i za svako $y \in Y$,

$F\,y = p_x \circ p^{-1}(y)$.

<u>Propozicija 1.8.</u> Neka je $F_1 : X \longrightarrow P(Y)$ višeznačno preslikavanje skupa X na skup Y, a $F_2 : Y \longrightarrow P(Z)$ višeznačno preslikavanje skupa Y na skup Z.

Tada je $F_2 \circ F_1 : X \longrightarrow P(Z)$ višeznačno preslikavanje skupa X na skup Z i

a/ $(F_2 \circ F_1)' = F_1' F_2' : Z \longrightarrow P(X)$

preslikavanje preslikavanja $F_2 \circ F_1$.

b/ Za svaki skup $A \subset X$ je

$(F_2 \circ F_1)^{\#} A = F_2^{\#} \circ F_1^{\#} A$, a za svaki skup $C \subset Z$ je

$(F_2 \circ F_1)^{b} C = F_1^{b} \circ F_2^{b}\, C$.

<u>Dokaz.</u> a/ Neka $x \in (F_2 \circ F_1)'z$; tada $z \in F_2 \circ F_1\, x$ i postoji $y \in F_1\, x$ da $z \in F_2 y$. Ali ako $y \in F_1\, x$, tada $x \in F_1' y$ i

$y \in F_2'z$. Dalje je $F_1' y \subset F_1'(F_2'z) = F_1' \circ F_2'z$, te $x \in F_1' \circ F_2'z$ i dokazana je inkluzija

$$(F_2 \circ F_1)'z \subset F_1' \circ F_2'z .$$

Obrnuto, ako $x \in F_1' \circ F_2'z = F_1'(F_2'z)$, postoji $y \in F_2'z$ da $x \in F_1' y$. Odavde se dalje dobija da $z \in F_2 y$ i $y \in F_1 x$ i zato $z \in F_2 y \subset F_2(F_1 x) = (F_2 \circ F_1) x$, te je inkluzija $F_1' \circ F_2'z \subset (F_2 \circ F_1)'z$ i jednakost dokazana.

b/ Dokazaće se prva od dualnih jednakosti ; dokaz druge ide na isti način, jer je $F^b = (F')^{\#}$.

Neka je $A \subset X$ proizvoljan skup, tada je $(F_2 \circ F_1)^{\#} A = C \circ (F_2 \circ F_1) \circ CA = CF_2 \circ F_1 \circ CA = C \circ F_2 (F_1 \circ CA) = C \circ F_2 \circ C \circ C \circ F_1 \circ CA =$

$$= (C \circ F_2 \circ C) \circ (C \circ F_1 \circ C) A = F_2^{\#} \circ F_1^{\#} A.$$

Napomena. U vezi sa nazivima kopreslikavanje i malo kopreslikavanje treba primetiti sledeće:

Preslikavanje F', koje se ovde naziva kopreslikavanje datog preslikavanja F, a kod nekih autora inverzno preslikavanje preslikavanja F, očigledno nema sve osobine koje obično imaju inverzna preslikavanja; napr. u opštem slučaju ne važi $FF'y = x$. Ovo svojstvo bitno karakteriše inverzna preslikavanja /jednoznačnih x preslikavanja/. Zato se ovde termin "inverzno preslikavanje" zadržava samo za jednoznačna preslikavanja i samo u tom slučaju kopreslikavanje datog preslikavanja je inverzno preslikavanje.

Termini mala slika skupa A i mala koslika skupa B uvedeni su zbog toga što je, za svaki skup $A \subset X$, $F^{\#}A \subset FA$ u $F^bB \subset F'B$, za svaki skup $B \subset Y$, a dati su prema V.I.Ponomarevu /1/.

Napomenuće se još da se kopreslikavanje F' zove kod C.Berge-a lower invers /inverse inférieur/ i obeležava sa F^-, a preslikavanje F^b zove upper invers /inverse supérieur/ i obeležava sa F^+. Oznake F', $F^\#$ i F^b uveo je V.I. Ponomarev u [1] .

Definicije neprekidnosti višeznačnih preslikavanja i veza sa hipertopologijama za datu topologiju

Definicija 1.9. Višeznačno preslikavanje $F : X \longrightarrow P(Y)$ topološkog prostora X na topološki prostor Y je zatvoreno /otvoreno/, ako je za svaki zatvoreni /otvoreni/ skup $A \subset X$, velika slika $FA \subset Y$ zatvoreni /otvoreni/ skup u Y.

Zbog relacija 1.6. /3/, ako je F zatvoreno /otvoreno/ preslikavanje, tada je preslikavanje $F^\#$ otvoreno /zatvoreno/ i obrnuto.

Propozicija 1.8.

a/ Višeznačno preslikavanje $F : X \longrightarrow P(Y)$ je zatvoreno, ako i samo ako je $\overline{FA} \subset F\overline{A}$ za svaki skup $A \subset X$.

b/ Višeznačno preslikavanje F je otvoreno ako i samo ako je $\overline{F^\# A} \subset F^\# \overline{A}$ za svaki skup $A \subset X$, ili ako i samo ako je $F'\overline{B} \subset \overline{F'B}$ za svaki skup $B \subset Y$.

Definicija 1.10.

a/ Višeznačno preslikavanje $F : X \longrightarrow P(Y)$ topološkog prostora X na topološki prostor Y je poluneprekidno odozgo ako je kopreslikavanje F' preslikavanja F - zatvoreno, ili ekvivalentno, ako je malo kopreslikavanje F^b preslikavanja F - otvoreno.

b/ Višeznačno preslikavanje F je <u>semineprekidno odozdo</u>, ako je kopreslikavanje F' preslikavanja F - otvoreno, ili ekvivalentno, ako je malo kopreslikavanje F^b preslikavanja F - zatvoreno.

c/ Višeznačno preslikavanje F je <u>neprekidno</u>, ako je semineprekidno odozgo i semineprekidno odozdo, ili ekvivalentno, ako su kopreslikavanje F' i malo preslikavanje F^b preslikavanja F napovremeno otvoreno - zatvorena preslikavanja.

Sledeća propozicija daje ekvivalente prethodnim definicijama semineprekidnosti i lako se dokazuje.

<u>Propozicija 1.9</u>

a/ Višeznačno preslikavanje $F : X \longrightarrow P(Y)$ je <u>semineprekidno odozgo</u>, ako i samo ako za svaku tačku $x \in X$ i svaku otvorenu u Y okolinu V skupa Fx, postoji otvorena u X okolina U tačke x, takva da je $F\,U \subset V$.

b/ Višeznačno preslikavanje F je <u>semineprekidno odozdo</u>, ako i samo ako za svaku tačku $x \in X$ i svaki otvoreni u Y skup V takav da je $Fx \cap V \neq \emptyset$, postoji otvorena u X okolina U tačke <u>x</u>, takva da je, za svako $x' \in U$, $Fx' \cap V \neq \emptyset$.

Pomenuće se još dve poznate i često korišćene.

<u>Definicija 1.11.</u>

a/ Višeznačno preslikavanje $F : X \longrightarrow P(Y)$ je <u>X - /bi/ kompaktno</u>, /<u>Y- /bi/ kompaktno/</u>, ako je, za svako $y \in Y$, skup $F'y$ /bi/ kompaktan/ za svako $x \in X$, skup Fx - /bi/ kompaktan/.

b/ Višeznačno preslikavanje F je <u>savršeno</u>, ako je semineprekidno odozgo, zatvoreno i X i Y - bikompaktno.
{ V.: V.I Ponomarev[1], p. 517. }

U vezi sa ovom definicijom važni su sledeći rezultati koji najvećim delom potiču od J.M.Smirnova, koji se daju u sledećoj

Teoremi 1.10. Neka su X i Y topološki prostori i $F : X \longrightarrow P(Y)$ višeznačno preslikavanje. Tada je /a/ preslikavanje F semineprekidno odozgo i Y - bikompaktno, ako i samo ako je preslikavanje p_x - savršeno;/b/ preslikavanje F je zatvoreno i X - bikompaktno ako i samo ako je preslikavanje p_y savršeno; /c/ preslikavanje F je savršeno, ako i samo ako su preslikavanja p_x i p_y savršena.

Definicija 1.12./hiperprostora $\varkappa E$, λE i ψE/.
Neka je E proizvoljni topološki prostor. Sa 2^E će se obeležiti kolekcija svih zatvorenih nepraznih skupova $G \subset E$. Na skupu 2^E od značaja su sledeći hipertopologije:

Hipertopologija $\varkappa E$, čiju otvorenu bazu čine sve kolekcije $2^U = \{G : G \in 2^E, G \subset U\} = \langle U \rangle$, gde je U otvoreni skup prostora E.

Hipertopologija λE, čiju zatvorenu podbazu čine sve kolekcije $2^{E \setminus U} = \{G : G \in 2^E, G \cap U \neq \emptyset\} = \langle E \setminus U \rangle$, gde je U otvoreni skup prostora E.

Hipertopologija ψE /konačna topologija, eksponencijalna topologija/ čiju otvorenu podbazu čine sve kolekcije $2^U = \langle U \rangle$ i $2^E \setminus 2^{E \setminus U} \{G : G \in 2^E, G \cap U \neq \emptyset\} = \rangle U \langle$, gde je U otvoreni skup prostora E.

Potrebno je naglasiti da je relativna topologija koju svaka od hipertoplogija $\varkappa E$, λE i ψE inducira na skupu $\hat{E}_1 = \{\{x\} : x \in E\}$ homeomorfna sa prvobitnom topologijom na E, pa se zato često skupovi E i $\hat{E}_1$ kao i njihove topolo-

*) C.J.Borges: A study of multivalued functions, Pacific J. of Math. vol. 23. №3, 1967, p. 453. /Theorem 2,6/.

gije identificiraju. Tako je na pr. skup $\langle U\rangle \cap \hat{E}_1 = \hat{U} = \{\{x\} : x \in U\}$ otvoren u relativnoj $\varkappa$ topologiji na $\hat{E}_1$ i slika je otvorenog skupa U pri identičnom preslikavanju

$$i : E \longrightarrow \hat{E}_1 \text{ odredjenom uslovom}$$

$$i(x) = \{x\} \in P(E).$$

{V.: C. Kuratovski[1], p.183, V.I.Ponomarev[2], p.191.}

<u>Napomena</u>. Dalje će se posmatrati samo ona višeznačna preslikavanja $F : X \longrightarrow P(Y)$ topološkog prostora X na topološki prostor Y, pri kojima je slika $Fx \subset Y$ svake tačke $x \in X$ <u>zatvoreni</u> skup u Y. Takodje će se uzimati da su topološki prostori X i Y T_1 - prostori. Ako je preslikavanje F neprekidno, tada je koslika $F'y$ svake tačke $y \in Y$ - zatvoren u X skup.

Na osnovu prethodnih definicija moguće je obe semineprekidnosti i neprekidnost višeznačnih preslikavanja $F : X \longrightarrow P(Y)$ izraziti u terminime koji sadrže jednoznačno preslikavanje

$\overline{F} : \hat{X}_1 \longrightarrow 2^Y$ koje se svakom višeznačnom preslikavanju F može korespondirati prema definiciji 1.4.

Pri tome se uzima da je skup $\hat{X}_1$ topologiziran relativnom topologijom koju na njemu induciraju svaka od topologija $\varkappa$, λ i ψ na 2^X. Ova topologija je homeomorfna prvobitnoj topologiji na X.

<u>Propozicija 1.11.</u>

a/ Višeznačno preslikavanje $F : X \longrightarrow P Y$ je <u>semineprekidno odozgo</u>, ako i samo ako je odgovarajuće jednoznačno preslikavanje $\overline{F} : \hat{X}_1 \longrightarrow \varkappa Y$ neprekidno /u uobičajenom smislu/.

b/ Višeznačno preslikavanje F je semineprekidno odozdo, ako i samo ako je odgovarajuće jednoznačno preslikavanje $\overline{F} : \hat{X}_1 \longrightarrow \lambda Y$ neprekidno.

c/ Višeznačno preslikavanje F je neprekidno, ako i samo ako je preslikavanje $\overline{F} : \hat{X}_1 \longrightarrow \psi Y$ neprekidno.

Dokazaće se ekvivalentnost navedenih iskaza sa odgovarajućim definicijama 1.10.

a/ Ako je neprekidno jednoznačno preslikavanje $\overline{F} : X_1 \longrightarrow Y$, tada je za svaki otvoreni skup $V \subset Y$, skup $\langle V \rangle$ element otvorene baze prostora $\varkappa Y$, pa je otvoren u $\hat{X}_1$ iskup.

$$\overline{F}^{-1}(\langle V \rangle) = \{\{x\} : x \in X, \overline{F}\{x\} = Fx \subset V\} \subset \hat{X}_1.$$

No budući da su prostori X i $\hat{X}_1$ homeomorfni, pri homeoformizmu $i : X \longrightarrow \hat{X}_1$, gde je i - identično preslikavanje: $i(x) = \{x\}$, biće

$$i^{-1}(\overline{F}^{-1}(\langle V \rangle)) = F^b V$$

otvoren skup u X. Tako je preslikavanje F^b otvoreno, pa je preslikavanje F semineprekidno odozgo. Obrnuto, neka je $F : X \longrightarrow P(Y)$ semineprekidno odozgo, $x \in X_1$ - proizvoljna tačka, a V otvoreni skup prostora Y za koju je $\overline{F}\{x\} \in \langle V \rangle$, tj. $Fx \subset V$. Tada, pošto je $F^b V$ otvoren u X skup, biće otvoren i skup $\overline{F}^{-1}(\langle V \rangle) = i(F^b V)$ i preslikavanje $\overline{F}$ je neprekidno.

b/ Neka je neprekidno jednoznačno preslikavanje $F : \hat{X}_1 \longrightarrow \lambda Y$. Tada je za svaki otvoreni skup $V \subset Y$, skup $\rangle V \langle$ element otvorene podbaze u toplogiji prostora λY, pa je otvoren i skup $\overline{F}^{-1}(\rangle U \langle) = \{\{x\} : x \in X, \overline{F}\{x\} \in \rangle V \langle\}$. Budući da je $\overline{F}\{x\} \in \rangle V \langle$ ekvivalentno uslovu da je $Fx \cap V \neq \emptyset$, to je

$$i^{-1}(\overline{F}^{-1}(2^Y \setminus 2^{Y \setminus V})) = \{x : Fx \cap V \neq \emptyset\} = F' V$$

i zato je otvoren i skup $F'V$, tj. kopreslikavanje F'je otvoreno, dakle, preslikavanje F je <u>semineprekidno odozdo</u>. Obrnuto, ako se pretpostavi da je preslikavanje F semineprekidno odozdo, tada je za svaki otvoreni skup $V \subset Y$, otvoreni i skup $>V<$ koji je element podbaze topologije hiperprostora λY. Pošto je, takodje, $i(F'V) = \bar{F}^{-1}(>V<)$ i skup $F'V$ otvoren, otvoren je i skup $\bar{F}^{-1}(>V<)$, tj. preslikavanje $\bar{F}$ je neprekidno.

{V.: J. Kelley: General Topology, th.1.(c) p.86.}

c/ Na kraju, neka je $\bar{F}: \hat{X}_1 \longrightarrow \psi Y$ neprekidno preslikavanje. Tada su za svaki otvoreni skup $V \subset Y$, otvoreni u $\hat{X}_1$ i skupovi $\bar{F}^{-1}(>V<)$ i $\bar{F}^{-1}(<V>)$, jer su $>V< = 2^Y \setminus 2^{Y \setminus V}$ i $<V> = 2^V$ elementi otvorene podbaze prostora ψY.

Kako je $i^{-1}(\bar{F}^{-1}(>V<)) = F'V$ i $i^{-1}(\bar{F}^{-1}(<V>)) = F^bV$ biće i ovi skupovi otvoreni, pa je na taj način preslikavanje F - neprekidno.

Ako je, obrnuto, preslikavanje F neprekidno, biće za svaki otvoreni skup $V \subset Y$, otvoreni skupovi $F'V$ i F^bV. Pošto je

$$i(F'V) = \bar{F}^{-1}(>V<) \quad i \quad i(F^bV) = \bar{F}^{-1}(<V>)$$

i ovi su skupovi otvoreni u $\hat{X}_1$. Sledi da je preslikavanje $\bar{F}$ neprekidno.

Osnovne definicije semineprekidnosti, neprekidnosti, zatvorenosti i otvorenosti preslikavanja i njihovih kopreslikavanja, kao i formule koje su sa njima u vezi pregledno su date sledećom tabelom. Pri tome su iskazi o preslikavanjima F, F', $F^{\#}$, F^b kao i odgovarajuće formule u prvoj tabeli u /1/, /2/, /3/ i /4/ ekvivalentne.

2. SKORO-JEDNOZNAČNA /VIŠEZNAČNA/ I S-PRESLIKAVANJA

Skoro-jednoznačna preslikavanja uveo je V.I Ponomarev u [1] p.534. Ona se, ukratko rečeno, odlikuju svojstvom da je mala koslika bilo kojeg otvorenog skupa pri takvim preslikavanjima neprazan skup.

Druge osobine takvih preslikavanja /koja su još i s obe strane silno neprekidna/ daje teorema 2.1.

Inače, jedan deo ove teoreme čini sadržaj tri leme V.I. Ponomareva, koje tek zajedno, u ovoj teoremi, dobijaju puni značaj za klasu skoro-jednoznačnih preslikavanja.

Dalje se u ovom paragrafu definišu S-preslikavanja /koja su na izvestan način generalizacija s-preslikavanja J.M. Smirnova/ i pokazuje da se pri višeznačnim Sy-preslikavanjima koja su semineprekidna odozdo čuva separabilnost, /propozicija 2.3./, a ako su s obe strane neprekidna i skoro-jednoznačna, čuva se prva aksioma prebrojivosti, tačkasto prebrojiva i prebrojiva topološka baza /propozicija 2.4./. U drugom delu ovog paragrafa koji je takodje posvećen ispitivanjima svojstava višeznačnih preslikavanja koja su semineprekidna odozgo i zatvorena, osnovna je teorema 2.5. Tom se teoremom pokazuje da su osobine pomenutih preslikavanja zavisne od topoloških prostora izmedju kojih uspostavljaju vezu.

U slučaju kada se višeznačna semineprekidna odozgo i zatvorena preslikavanja svode na jednoznačna, teorema 2.5. daje rezultat K.Morita i S.Hanai /[1] , lema 1, p.10/.

<u>Definicija 2.1.</u> Višeznačno preslikavanje $F : X \dashrightarrow Y$ topološkog prostora X na topološki prostor Y je <u>skoro-jednoznačno</u> preslikavanje, ako je za svaki otvoreni skup $V \subset Y$, njegova mala, koslika $F^{b}V$ neprazan skup.

Drugačije se uslov da preslikavanje bude skoro-jednoznačno može iskazati i ovako. Višeznačno preslikavanje F je skoro-jednoznačno, ako je skup $\bar{F}X = \{\bar{F}x : x \in X\}$ svuda gust u $\varkappa Y$.

Ekvivalentnost oba ova iskaza proizlazi neposredno iz definicije $\varkappa$-topologije za prostor Y i definicije jednoznačnog preslikavanja $\bar{F} : X \longrightarrow Y$ koje se svakom višeznačnom preslikavanju može pridružiti.

Napomena. Kako je svaki T_1-prostor Y svuda gust podprostor u hiperprostoru $\varkappa Y$, biće svako jednoznačno preslikavanje $f : X \longrightarrow Y$ topološkog prostora X na T_1-prostor Y skoro-jednoznačno, jer je $fX = \bar{f}X \subset Y$. Tako su skoro-jednoznačna preslikavanja prirodno uopštenje jednoznačnih preslikavanja.

Za klasu skoro-jednoznačnih preslikavanja osnovni značaj ima sledeća

Teorema 2.1.

Neka je $F : X \longrightarrow Y$ višeznačno preslikavanje prostora X na regularan prostor Y.

a/ Ako je preslikavanje F semineprekidno odozdo, zatvoreno i skoro-jednoznačno, tada je za svaku tačku $y \in Y$ i svaku njenu okolinu $V \subset Y$

$$F^b V \cap F' y \neq \emptyset.$$

b/ Ako je preslikavanje F još i X-bikompaktno, tada postoji podskup $X_0 = \bigcup\{F^b y : y \in Y\} \subset X$, takav da je restrikcija $F/X = F_0 : X_0 \longrightarrow Y$ preslikavanja F na podskupu X_0, jednoznačno, neprekidno preslikavanje podprostora X na Y.

Dokaz. a/ Prvi deo teoreme je sadržan u dve leme V.I.Ponoma-

[illegible] [1] , ali će se ovde dati prostoji dokaz. Ako bi za ne- [illegible] okolinu V_o tačke y bilo

$F^bV_o \cap F'y = \emptyset$, tada bi, zbog regularnosti pro- [illegible]ora Y, postojala okolina V_1 tačke y da $y \in V_1 \subset \overline{V}_1 \subset V_o$. [illegible] tada bi takodje bilo

$F^b\overline{V}_1 \cap F'y = \emptyset$. Budući da je F semineprekidno [illegible]ozdo, skup $F^b\overline{V}_1$ je zatvoren u X pa je skup $U = X \setminus F^b\overline{V}_1$ [illegible]voren i očigledno $F'y \subset U$. Pošto je preslikavanje F zatvo- [illegible]no, tj. F' je semineprekidno odozgo, postoji otvorena okoli- [illegible] V_2 tačke y da $F'V_2 \subset U = X \setminus F^b\overline{V}_1$. Odavde sledi da je $V_2 \cap F^bV_1 = \emptyset$, jer je $F^bV_1 \subset F^b\overline{V}_1$. Ali skup $V = V_2 \cap V_1$ je [illegible]olina tačke y i pošto je $V \subset V_2$ biće $F'V \subset F'V_2$ i slično [illegible] $V \subset V_1$ će se dobiti $F^bV \subset F^bV_1$. Zbog toga iz $F'V_2 \cap F^bV_1 =$ se dobija $F'V \cap F^bV = \emptyset$.

Sa druge je strane $F^bV \subset F'V$, i pošto je preslika- [illegible]nje F skoro jednoznačno, mora biti $F^bV \neq \emptyset$, pa se dobija [illegible] $V \cap F^bV = F^bV \neq \emptyset$. Dobijena je tako protivrečnost, te sle- [illegible] da mora biti $F^bV \cap F'y \neq \emptyset$.

b/ Neka je $\mathcal{V} = \{V\}$ sistem zatvorenih okolina tač- [illegible] y. Takav sistem postoji, jer je Y T_1-regularni prostor, [illegible] je $y = \cap\{V : V \in \mathcal{V}\}$. Tada je $F^by = F^b(\cap V) = \cap F^bV \neq \emptyset$, [illegible] je familija $\{X_V : X_V = F^bV \cap F'y ; V \in \mathcal{V}\}$ sadržana u bikom- [illegible]ktnom podprostoru $F'y \subset X$ i ima osobinu konačnog preseka, [illegible]dući da je F skoro-jednoznačno preslikavanje. Tada je sva- tačka $x \in F^by$ očigledno tačka jednoznačnosti preslikava- [illegible] F, pa se može uzeti da je $X_o = \cup\{F^by : y \in Y\}$.

Za svako $x \in F^by$, očigledno je $Fx = y$, pa je re- [illegible]kcija F_o preslikavanja F na X_o jednoznačno preslikavanje. [illegible] toga, budući da je F semineprekidno odozdo, a prostor Y

T_1-prostor i, za svako $y \in Y$, $F^b y \subset F y$, to je $F^b y$ zatvoren bikompaktan podskup.

Dokazaće se još jednakost

$$/a/ \qquad \overset{-1}{F_o} V = F'V \cap X_o \ , \text{ za } V \subset Y.$$

Pošto je za $y \neq y'$ uvek $F^b y \cap F'y' = \emptyset$ i, za svako $y \in Y$, $F^b y \subset F'y$, to je $\overset{-1}{F_o} V = \cup \{F^b y : y \in V\}$. Zato ako $x \in \overset{-1}{F_o} V$, postoji $y \in Y$ da $x \in F^b y \subset F'y$, te je $x \in F'y \cap X_o \subset F'V \cap X_o$ i dokazana je inkluzija

$$\overset{-1}{F_o} V \subset F'V \cap X_o .$$

Obrnuto, ako $x \in F'V \cap X_o$, tada postoji $y \in V$ da $x \in F'y$. Ali, budući da $x \in X_o$, to $x \in F'y \cap X_o = F^b y$, tj. $x \in \cup\{F^b y: y \in V\} = \overset{-1}{F_o} V$, pa je dokazana inkluzija

$$F'V \cap X_o = \overset{-1}{F_o} V \quad \text{i potrebna jednakost.}$$

Na osnovu dobijene jednakosti /a/ sledi da je preslikavanje F_o neprekidno, jer je preslikavanje F seminеprekidno odozdo i za svaki otvoreni skup $V \subset Y$ otvoren je skup $F'V$, dakle i skup $\overset{-1}{F_o} V$.

Svojstva topoloških prostora koja su u vezi sa topološkim bazama i lokalnim topološkim bazama čuvaju se i pri višeznačnim preslikavanjima koja su iz klase skoro-jednoznačnih preslikavanja, kao što će se iz sledećih propozicija videti.

<u>Propozicija 2.2.</u> Neka je $F : X \longrightarrow Y$ višeznačno, s obe strane neprekidno i skoro-jednoznačno preslikavanje prostora X sa prvom aksiomom prebrojivosti na regularan prostor Y.

Ako za svako $y \in Y$, skup $F'y$ sadrži svuda gust prebrojiv skup Ay, tada i prostor Y zadovoljava prvi aksiom prebrojivosti.

Dokaz. Pošto je preslikavanje F semineprekidno odozdo, zatvoreno i skoro-jednoznačno, a prostor Y regularan, biće prema teoremi 2.1. /a/ za svako $y \in Y$ i svaku okolinu H tačke y, $F'y \cap F^bH \neq \emptyset$. No skup $F^bH \subset X$ je otvoren, jer je preslikavanje F seminеprekidno odozgo, pa postoji tačka $x \in F'y \cap F^bH$, koja pripada prebrojivom, svuda gustom skupu $Ay \subset F'y$. Takodje postoji okolina $U_i \in \mathcal{U}(x_i)$ iz prebrojive otvorene lokalne baze tačke x_i, takva da je $x_i \in U_i \subset F^bH$. Odavde sledi da $y \in Fx_i \subset FU_i \subset FF^bH \subset H$. Skup FU_i je otvoren, jer je preslikavanje F otvoreno i okolina je tačke y. Zbog toga se za prebrojivu lokalnu bazu prostora Y u tački y, može uzeti familija $\{FU_i : U_i \in \mathcal{U}(x_i), x_i \in Ay\}$, što znači da prostor Y zadovoljava prvi aksiom prebrojivosti.

Jednoznačno preslikavanje $f : X \longrightarrow Y$ koje ima svojstvo da inverzna slika $f^{-1}y$, svake tačke $y \in Y$, ima u svojoj relativnoj topologiji prebrojivu bazu, zove se, po J. M. Smirnovu, s-preslikavanje.

{ J.M.Smirnov [1], p.255 }

No, ako podprostor $F'y \subset X$ ima prebrojivu topološku bazu u svojoj relativnoj topologiji, on je separabilan, takodje, u svojoj relativnoj topologiji.

Prirodno je definiciju J.M.Smirnova proširiti i na višeznačna preslikavanja. No, to će se ovde učiniti u sledećem smislu.

Definicija 2.2.

Višeznačno preslikavanje $F : X \longrightarrow Y$ topološkog prostora X na topološki prostor Y je S_X-preslikavanje /S_y-preslikavanje/ ako je, za svako $y \in Y$, $F'y$-separabilan podprostor prostora X,

/za svako $x \in X$, Fx - separabilan podprostor prostora Y/.

Koristeći ovako uvedena S-preslikavanja moguće je pokazati da se i pri višeznačnim preslikavanjima čuva separabilnost topoloških prostora, kao što to pokazuje sledeća

Propozicija 2.3.

Neka je topološki prostor X separabilan, a preslikavanje $F : X \longrightarrow Y$ semineprekidno odozdo i S_y-preslikavanje prostora X na prostor Y. Tada je i prostor Y separabilan.

Dokaz. U prostoru X postoji prebrojiv, svuda gust skup X_0, jer je X separabilan prostor. Pošto je preslikavanje F S_y-preslikavanje, za svako $x \in X$, skup $Fx \subset Y$ sadrži svuda gust u Fx prebrojiv skup B_x. No, prebrojiv će biti i skup $B = \cup\{B_x : x \in X_0\}$, a pokazaće se da je ovaj skup i svuda gust u Y. Neka je $V \subset Y$ proizvoljan otvoren skup. Otvoren je tada i skup $F'V \subset X$, jer je F semineprekidno odozdo preslikavanje. Zato postoji tačka $x_0 \in X_0 \cap F'V$, te je $Fx_0 \cap V \neq \emptyset$. Ali skup $V_1 = Fx_0 \cap V$ je otvoren u relativnoj topologiji podprostora Fx_0, pa kako je Bx_0 svuda gust u Fx_0, postoji $y_0 \in Bx_0 \cap V_1$. Na taj način $y_0 \in V_1 = Fx_0 \cap V \subset V$ i $y_0 \in Bx_0 \subset B$, tj. $B \cap V \neq \emptyset$. Time je pokazano da je prebrojiv skup B svuda gust u Y i da je prostor Y separabilan.

Posledica 2.3.

Neprekidna i jednoznačna slika separabilnog prostora je separabilan prostor.

S obzirom na definiciju 2.2. prethodna se propozicijama 2.3. može, nešto proširena, iskazati na način kako sledi.

Propozicija 2.4.

Neka je $F : X \dashrightarrow Y$ višeznačno s obe strane neprekidno, skoro-jednoznačno i Sx-preslikavanje topološkog prostora X na regularan prostor Y. Ako prostor X

a/ zadovoljava prvu aksiomu prebrojivosti, ili

b/ ima tačkasto prebrojivu topološku bazu 1/, ili

c/ ima prebrojivu topološku bazu,

tada i prostor Y ima isto odgovarajuće svojstvo.

Dokaz. Treba dokazati jedino tvrdjenje b/, jer tvrdjenje c/, sledi iz tvrdjenja b/, pošto je svaki prostor sa prebrojivom bazom - prostor sa tačkasto prebrojivom bazom.

Neka je $\mathcal{B}_X = \{U\}$ tačkasto prebrojiva baza prostora X, tj. takva baza da svaka tačka $x \in X$ leži u najviše prebrojivo mnogo elemenata $U \in \mathcal{B}_X$; tada je $\mathcal{B}_Y = \{FU : U \in \mathcal{B}_X\}$ tačkasto prebrojiva baza prostora Y. Zaista, neka je $y \in Y$ proizvoljna tačka i $V \subset Y$ njena proizvoljna okolina. Pošto je preslikavanje F semineprekidno odozdo, zatvoreno i skoro-jednoznačno, a prostor Y regularan, biće $F'y \cap F^bV \neq \emptyset$. Neka je $x \in F'y \cap F^bV$ proizvoljna tačka. Skup F^bV je tada neka njena otvorena okolina, jer je F i semineprekidno odozgo preslikavanje. Zato postoji element U iz baze $\mathcal{B}_X$, takav da je $x \in U \subset F^bV$. Ali zbog to-

1/ Za prostore sa tačkasto prebrojivom bazom videti, na pr.: A.S.MIŠČENKO: O prostranstvah s točečnosčotnoj bazoj, DAN, 144, 1962, 985-988.

ga je $y \in Fx \subset FU \subset FF^bV \subset V$, pa je dokazano da je $\mathcal{B}_y$ baza prostora Y. Treba još pokazati da je $\mathcal{B}_y$ tačkasto prebrojiva baza prostora Y. Ako je $U \cap F'y = \emptyset$, tada $FU \cap F^{\#}F'y = \emptyset$, pa kako je uvek $y \in F^{\#}F'y$, sledi da $y \in FU$. Tako $y \in FU$ za svaki skup $U \in \mathcal{B}_x$ za koji je $U \cap F'y \neq \emptyset$, pa treba još samo pokazati da je familija $\tilde{\mathcal{A}} = \{U : U \in \mathcal{B}_x, U \cap F'y \neq \emptyset\}$ najviše prebrojiva. Pošto je preslikavanje F Sx-preslikavanje, postoji prebrojiv, svuda gust u $F'y$ skup Ay. Pokazaće se da je familija $\tilde{\mathcal{A}}$ istovetna sa familijom $\mathcal{A}$ svih onih elemenata U baze $\mathcal{B}_x$ koji sadrže neko $a_i \in Ay$. Očigledno je $\mathcal{A} \subset \tilde{\mathcal{A}}$, te treba dokazati samo obrnutu inkluziju. Neka $U \in \tilde{\mathcal{A}}$, tada $F'y \cap U \neq \emptyset$, pa pošto je Ay svuda gust u $F'y$, postoji $a_i \in Ay$ da $a_i \in U$. Ali tada $U \in \mathcal{A}$ i inkluzija $\tilde{\mathcal{A}} \subset \mathcal{A}$ je dokazana, a time i propozicija.

Posledica 2.4.1.

Neka je $F : X \longrightarrow Y$ višeznačno, s obe strane neprekidno i skoro-jednoznačno preslikavanje topološkog prostora X sa prebrojivom bazom na regularan prostor Y. Tada i prostor Y ima prebrojivu bazu i metrizabilan je.

Dokaz. Ako prostor ima prebrojivu bazu, tada i svaki njegov podprostor ima prebrojivu bazu. Zato će i za svako $y \in Y$ skup $F'y \subset X$ imati prebrojivu topološku bazu u svojoj relativnoj topologiji i svuda gust podskup Ay. Sledi da je F Sx-preslikavanje. Prema prethodnoj propoziciji prostor Y ima prebrojivu topološku bazu, a pošto je regularan on je po teoremi o metrizaciji P.S. Urisona - metrizabilan. Takodje nije teško videti da preslikavanje F tada i Ay-preslikavanje.

Svojstva višeznačnih preslikavanja, kao, uostalom, i jednoznačnih, nisu nezavisna od prostora izmedju kojih uspostavljaju vezu. Sledeća teorema to pokazuje.

Teorema 2.5.

Neka je $F : X \dashrightarrow Y$ višeznačno, semineprekidno odozgo i zatvoreno preslikavanje normalnog T_1-prostora X na T_1-prostor Y sa prvom aksiomom prebrojivosti. Tada je rub $\beta(F'y)$ inverzne slike $F'y$ svake tačke $y \in Y$ - kompaktan.

Dokaz. Ako skup $\beta(F'y) \subset F'y$ ne bi bio kompaktan, postojao bi prebrojivi niz $\{x_n : n \in N\} \subset \beta(F'y)$ koji ne bi imao tačku nagomilavanja u $\beta(F'y)$, tj. za svaku tačku $x \in \beta(F'y)$ postojala bi otvorena okolina U_x, koja sadrži samo konačno mnogo tačaka niza $\{x_n : n \in N\}$. Zato za svako x_n, $n = 1,2,\dots$, postoji otvoreni skup G_n da $x_n \in G_n$ i $G_i \cap G_j = \emptyset$ za $i \neq j$, jer je X normalan prostor. Budući da $x_n \in \beta(F'y)$ postoji tačka $x_n' \in X$, takva da $x_n' \notin \beta(F'y)$ i $x_n' \in G_n \cap F'V_n$ gde je V_n neka otvorena okolina prebrojive lokalne baze $\mathcal{V}(y)$ tačke $y \in Y$.

Tako je dobijen niz $\{x_n' : n \in N\}$ koji je lokalno konačan, jer $x_n' \in G_n$ za $n \in N$, a familija $\{G_n : n \in N\}$ je familija disjunktnih otvorenih skupova. Zato je skup $A = \{x_n' : n \in N\}$ zatvoren u prostoru X. Budući da je preslikavanje F zatvoreno, zatvoren je u Y i skup FA.

Pošto je $A \cap \beta(F'y) \subset A \cap F'y = \emptyset$, biće $FA \cap F^{\#}F'y = \emptyset$ i zato $y \notin FA$, jer uvek $y \in F^{\#}F'y$. Tako $y \in Y \setminus FA = H$ i H je otvorena okolina tačke y. No, kako prostor Y zadovoljava prvi aksiom prebrojivosti, postoji skup $V_i \in \mathcal{V}(y)$ takav da $y \in V_i \subset H$.

Ali $x_i' \in F'V_i \cap G_i$, tj. $x_i \in F'V_i$, odakle $Fx_i' \cap V_i \neq \emptyset$.

S druge strane, pošto $x_i \in A$, biće $Fx_i' \subset FA = Y \setminus H \subset Y \setminus V_i$, pa je $Fx_i' \cap V_i = \emptyset$. Dobijena protivrečnost dokazuje propoziciju.

Posledica 2.5.1.

Neka je $F : X \longrightarrow Y$ višeznačno, seminеprekidno odozgo i zatvoreno preslikavanje parakompaktnog prostora X na prostor Y sa prvom aksiomom prebrojivosti. Tada je rub $\beta(F'y)$ inverzne slike svake tačke $y \in Y$ bikompaktan.

Ova posledica proizilazi iz toga što je svaki parakompaktan kompaktan prostor - bikompaktan [1] i što je rub svakog skupa zatvoren skup, te zato parakompaktan.

Posledica 2.5.2.

Neka je $F:X \longrightarrow Y$ višeznačno, s obe strane neprekidno, skoro-jednoznačno i Sx-preslikavanje normalnog prostora X sa prvom aksiomom prebrojivosti na regularan prostor Y. Tada je rub $\beta(F'y)$ inverzne slike svake tačke $x \in Y$ kompaktan.

Dokaz. Prema propoziciji 2.4. prostor Y zadovoljava prvu aksiomu prebrojivosti, budući da je preslikavanje F s obe strane neprekidno, skoro-jednoznačno i Sx-preslikavanje, a prostor Y regularan. No, preslikavanje F je i seminеprekidno odozgo i zatvoreno, te po teoremi 2.5. sledi da je rub $\beta(F'y)$ svake tačke $y \in Y$ kompaktan skup.

---

[1] R.Arens, I.Dugandiji: Remark on the concept of compactness, Portug.Math. 9. 1950, p.141-143.

Posledica 2.5.3.

Neka je $F : X \longrightarrow Y$ preslikavanje kao u prethodnoj posledici i neka je prostor X parakompaktan sa prvom aksiomom prebrojivosti, a prostor Y regularan. Tada je i prostor Y prostor koji zadovoljava prvu aksiomu prebrojivosti i rub $\beta(F' y)$ koslike svake tačke $y \in Y$ je bikompaktan.

3. VIŠEZNAČNA PRESLIKAVANJA SEPARABILNIH METRIZABILNIH, METRIZABILNIH I LOKALNO METRIZABILNIH TOPOLOŠKIH PROSTORA

Ovaj je paragraf posvećen višeznačnim preslikavanjima topoloških prostora koji su separababilni metrizabilni, metrizabilni i lokalno metrizabilni. Pokazuje se da sva navedena svojstva ostaju pri s obe strane neprekidnim i skoro - jednoznačnim, višeznačnim preslikavanjima koja su, u slučaju metrizabilnosti i lokalne metrizabilnosti, još i X-bikompaktna. Za takva preslikavanja kao što je teoremom 2.1. pokazano postoji podprostor X metrizabilnog prostora X na kome se višeznačno preslikavanje $F : X \longrightarrow Y$ svodi na jednoznačno koje je neprekidno i bikompaktno i koje preslikava podprostor X na čitav prostor Y. Inače, o višeznačnim preslikavanjima metrizabilnih /metričkih/ prostora ima malo rezultata. Od njih treba spomenuti rezultat C. Borgesa [1],(teorema 3,2. p.455) koji pokazuje da se metrizabilnost čuva pri savršenim višeznačnim preslikavanjima $F : X \longrightarrow Y$, ukoliko su oba prostora X i Y T_1-prostori sa G_δ-dijagonalama [1/] i bar jedan od prostora X ili Y metrizabilan.

Rezultati koji su ovde dobijeni ne pretpostavljaju, medjutim, za prostore X i Y osim regularnosti, ništa drugo.

Takodje treba pomenuti i rezultat A.Arhangelskog da se klasa parakompaktnih p-prostora podudara sa klasom nepreki-

---

[1/] Topološki prostor X ima G_δ -dijagonalu, ako je skup $\{x,x : x \in X\}$ G_δ -skup u XxX.

dnih, otvorenih, zatvorenih X i Y-bikompaktnih višeznačnih slika metričkih prostora. /A.Arhangelskij,[2] ,(teorema 5.7. p.67).

Budući da svaki separabilni metrizabilni prostor ima prebrojivu topološku bazu i da svaki podprostor prostora sa prebrojivom bazom ima prebrojivu bazu, biće svaki podprostor separabilnog metrizabilnog prostora separabilan. Zato je svako višeznačno preslikavanje $F : X \longrightarrow Y$ separabilnog metrizabilnog prostora X na drugi prostor Y S_X-preslikavanje. Zbog toga sada iz posledice 2.5.1. neposredno sledi naredna propozicija o invarijantnosti separabilne metrizabilnosti.

Propozicija 3.1.

Neka je $F : X \longrightarrow Y$ višeznačno, s obe strane neprekidno i skoro jednoznačno preslikavanje separabilnog metrizabilnog /metričkog/ prostora na regularan prostor Y. Tada je i prostor Y separabilan metrizabilni /metrički/ prostor.

Ako metrizabilan /metrički/ prostor nije separabilan, metrizabilnost se čuva tek pri takvim višeznačnim preslikavanjima koja pripadaju jednoj podklasi klase s obe strane neprekidnih i skoro jednoznačnih preslikavanja, kao što se vidi iz sledeće

Teorema 3.2.

Neka je $F : X \longrightarrow Y$ višeznačno, sa obe strane neprekidno, skoro jednoznačno i X-bikompaktno preslikavanje metrizabilnog prostora X na regularan prostor Y. Tada je i prostor Y metrizabilan.

Dokaz. Po osnovnoj teoremi o metrizaciji Nagata-Smirnova, prostor X ima σ - lokalno konačnu otvorenu bazu $\mathcal{A} = \bigcup_{i=1}^{\infty} \mathcal{A}_i$, gde su $\mathcal{A}_i$ lokalno konačne familije otvorenih skupova prostora X.

Pokazaće se da uz navedene pretpostavke o preslikavanju F i prostor Y ima σ - lokalno konačnu otvorenu bazu $\mathcal{B} = \bigcup_{i=1}^{\infty} \mathcal{B}_i$ i da su $\mathcal{B}_i = \{V : V = FU,\ U \in \mathcal{A}_i\}$, $(i = 1,2,\dots)$ lokalno konačne familije otvorenih skupova prostora Y.

Zaista, skupovi $V = FU$ su otvoreni, jer je preslikavanje F-otvoreno. Da su familije $\mathcal{B}_i$ $(i = 1,2,\dots)$ lokalno konačne proizilazi iz sledećeg razmatranja. Neka je $y \in Y$ proizvoljna tačka.

Za svako $x \in F'y$, postoji otvorena okolina O_x tačke x, koja seče konačno mnogo skupova $U \in \mathcal{A}_i$. Familija $\{O_x : x \in F'y\}$ pokriva bikompaktan skup $F'y$, pa se može redukovati na konačnu podfamiliju $O_{x_1}, O_{x_2}, \dots, O_{x_n}$, koja takodje pokriva $F'y$, tj. $F'y \subset \bigcup_{i=1}^{n} O_{x_i} = O$. I skup O seče samo konačno mnogo skupova $U \in \mathcal{A}_i$, te zato i otvoreni skup $F^{\#}O = H$, koji je otvorena okolina tačke y, seče konačno mnogo skupova $V \in \mathcal{B}_i$. Jer, ako je za neki skup $U \in \mathcal{A}_i$, $U \cap O = \emptyset$, biće $FU \cap F^{\#}O = \emptyset$, tj. $V \cap H = \emptyset$, pa H seče najviše one skupove $V = FU$, za koje je $U \cap O \neq \emptyset$.

Treba još dokazati da je familija $\mathcal{B}$ baza prostora Y. Neka $y \in Y$ i neka je $H \subset Y$ otvoreni skup, takav da $y \in H$. Pošto je prostor Y regularan, a preslikavanje F zatvoreno, seineprekidno odozdo i skoro-jednoznačno biće prema teoremi 2.1. /: $F'y \cap F^{b}H \neq \emptyset$. Skup $F^{b}H$ je otvoren, jer je preslikavanje F neprekidno, a ako $x \in F'y \cap F^bH$ postoji za neko i otvoreni skup $U \in \mathcal{O}_i \subset \mathcal{O}$ da $x \in U \subset F^bH$. Zato će biti $y \in Fx \subset FU = V \subset FF^bH \subset H$, tj. $y \in V \subset H$, za neki skup $V \in \mathcal{B}_i \subset \mathcal{B}$. Time je dokazano da je familija $\mathcal{B}$ – baza prostora Y i da je prostor Y metrizabilan.

Posledica 3.2.1.

Neka je $f : X \longrightarrow Y$ savršeno, otvoreno i jednoznačno preslikavanje metrizabilnog prostora X na regularan prostor Y. Tada je i prostor Y metrizabilan.

Napomena. Prethodna teorema 3.2. mogla bi se dokazati i uz pomoć teoreme Morita – Stone-Hanai, de se metrizabilnost topoloških prostora čuva pri jednoznačnim savršenim preslikavanjima. Takvo je preslikavanje $F_0 = F/X_0$ – restrikcija svakog višeznačnog, s obe strane neprekidnog, X-bikompaktnog i skoro jednoznačnog preslikavanja proizvoljnog metrizabilnog prostora X na regularan prostor Y. To sledi na osnovu teoreme 2.1. b/, ako se dokaže da je X_0 zatvoren u X skup i da je za zatvoreni skup $A \subset X$:

$$F_0 A = FA.$$

Zaista, ako je $x \in X \setminus X_0$, tada je $\operatorname{card}\{Fx\} > 1$, to skup Fx sadrži bar dve tačke. Neka je $V \subset Y$ takav otvoreni skup da je $y \in V$, ali $y' \notin \overline{V}$, gde $y, y' \in Fx$. Tada je $\langle Y; V , Y \setminus \overline{V} \rangle$ otvoreni skup i okolina "tačke" Fx u Y. Zbog neprekidnosti preslikavanja F, postoji okolina U tačke x, takva da je $\hat{\bar{F}}U \subset \langle Y; V, Y \setminus \overline{V} \rangle$. To znači da je, za svako $x \in U, Fx \cap V \neq \emptyset$ i $Fx \cap (Y \setminus \overline{V}) \neq \emptyset$, tj. za svako $x \in U$ je $\operatorname{card}\{Fx\} > 1$. Budući da je, za svako $x \in X_0$, card $\{Fx\} = 1$, dokazano je da $U \cap X = \emptyset$, tj. da je X_0 zatvoren u X skup. Zato je svaki zatvoren u X_0 skup A, zatvoren i u X skup.

Pošto je očigledno $F_0^{-1} = F^b$ i za svako $y \in Y$ je $F_0^{-1} y = F^b y = F' y \cap X_0$, jer je za y, $y' \in Y$ i $y \neq y'$ uvek $F' y \cap F^b y' = \emptyset$. Dalje će biti:

$$F_0 A = \{ y : F_0^{-1} y \cap A \neq \emptyset \} = \{ y : (F^b y \cap X_0) \cap A \neq \emptyset \} =$$
$$= \{ y : (F' y \cap X_0) \cap A \neq \emptyset \} = \{ y : F' y \cap A \neq \emptyset \} = FA,$$

jer je $A \subset X_0$. Budući da je F zatvoreno preslikavanje zatvoren je skup $FA = F_0 A$, tj. F_0 je takodje zatvoreno preslikavanje.

Pri istim višeznačnim preslikavanjima kao u prethodnoj teoremi, moguće je pokazati da se čuva i lokalna metrizabilnost prostora u klasi regularnih prostora. No prethodno je potrebna sledeća

Lema 3.3. Neka su A_i, / $i = 1, 2, \ldots, n$/ zatvoreni podskupovi topološkog prostora X, metrizabilni u svojim relativnim topologijama. Tada je i unija $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ metrizabilna u svojoj relativnoj topologiji podprostora prostora X.

Dokaz leme proizilazi neposredno iz sledećeg poznatog stava: Ako je S unija lokalno konačnog sistema zatvorenih metrizabilnih podprostora S, tada je S metrizabilan prostor.

/V.: A.H.Stone: Metrizability of union of spaces, Proc.Am.Math. soc.10, p.361, 1959./. Tako se sada može dokazati

Teorema 3.4.

Neka je $F : X \longrightarrow Y$ s obe strane neprekidno, skoro jednoznačno i X-bikompaktno preslikavanje lokalno metrizabilnog regularnog prostora X na regularan prostor Y. Tada je i prostor Y lokalno metrizabilan.

Dokaz. Neka je $y_0 \in Y$ proizvoljna tačka; treba pokazati da postoji otvorena okolina G tačke y_0 metrizabilna u svojoj relativnoj topologiji. Pošto je prostor X lokalno metrizabilan, a skup $F' y_0 \subset X$ bikompaktan, postoji konačno mnogo otvorenih, metrizabilnih okolina U_{x_i}, tačaka $x_i \in F' y_0$, / $i = 1,2,\dots,n$/ koje pokrivaju skup $F' y_0$. No kako je prostor X regularan može se uzeti da su i zatvorenja $\bar{U}_{x_i}$ ovih skupova metrizabilna u svojim relativnim topologijama. Tada je prema lemi 3.3. i unija $\bar{\Gamma} = \cup \{\bar{U}_{x_i} : i = 1,2,\dots,n\}$ metrazabilan podprostor, pa je, dakle, metrizabilan i njegov podskup $\Gamma = \cup\{U x_i : i = 1,2\dots,n\} \supset F' y_0$.

Pokazaće se dalje da je skup $G = F^{\#}\Gamma$ metrizabilna, otvorena okolina tačke y_0. Pošto je $F' y_0 \subset \Gamma$, to je $y_0 \in F^{\#}\Gamma$, a F zatvoreno preslikavanje, skup $F^{\#}\Gamma$ je otvorena okolina tačke y_0.

Prelazi se sada na dokaz metrizabilnosti skupa G. Kako je preslikavanje F semineprekidno odozdo, zatvoreno i skoro-jednoznačno, prostor Y regularan, za svako $y \in G$ i svaki otvoreni skup $H \subset G$, za koji je $y_0 \in H$ biće $F' y \cap F^b H \neq \emptyset$. Ali $y \in G = F^{\#}\Gamma$, te $F' y \subset \Gamma$, pa je $(F' y \cap F^b H) \cap \Gamma \neq \emptyset$ i postoji $x \in F' y \cap (F^b H \cap \Gamma)$. Skup $F^b H$ je otvoren u X, jer je preslikavanje F semineprekidno odozgo, zato je otvoren i skup $F^bH \cap G$ i otvorena je okolina tačke x.

No skup Γ je metrizabilan, i ako je $\mathcal{A} = \bigcup_{i=1}^{\infty} \mathcal{A}_i$ neka njegova σ - lokalno konačna otvorena baza, postoji otvoreni skup $U_0^i \in \mathcal{A}_i$ da $x \in U_0^i \subset F^bH \cap \Gamma$. Iz ovoga sledi da $y \in Fx \subset F\ U_0^i \subset F\,(F^bH \cap U) \subset FF^bH \subset H$. /1/

Zato se za otvorenu, σ-lokalno konačnu bazu podprostora $G = F^{\#}\Gamma$ može uzeti familija $\mathcal{B}_V = \bigcup_{i=1}^{\infty} \mathcal{B}_i$, gde je $\mathcal{B}_i = \{ V : V = FU,\ U \in \mathcal{A}_i \}$ za svako $i \in N$. Prema/1/ sledi da će familija $\mathcal{B}$ biti baza /u relativnoj topologiji/ podprostora G. Ostaje još da se dokaže da je svaka familija $\mathcal{B}_i$ lokalno konačna. Za svako $y \in G$: $F'y \subset \Gamma$ i pošto je $\mathcal{A}_i$ lokalno konačna familija otvorenih skupova, za svako $x \in F'y$ postoji otvorena okolina O_x tačke x /sadržana u Γ/ koja seče samo konačno mnogo skupova $U \in \mathcal{A}_i$. Familija $\{O_x : x \in F'y\}$ ovako odredjenih otvorenih skupova, može se redukovati na konačnu podfamiliju O_{x_1}, $O_{x_2}, \dots O_{x_k}$ koja pokriva $F'y$, jer je $F'y$ bikompaktan skup. Zato skup $O = \bigcup_{i=1}^{k} O_{x_i}$ seče samo konačno mnogo skupova $U \in \mathcal{A}_i$ i kako $F'y \subset O \subset \Gamma$ to $y \in F^{\#}O \subset F^{\#}H \subseteq G$. Skup $F^{\#}O$ je tada otvorena okolina tačke y, koja seče samo konačno mnogo skupova $U \in \mathcal{A}_i$. Jer, ako za neko $U \in \mathcal{A}_i$, $O \cap U = \emptyset$, biće $F^{\#}O \cap FH = \emptyset$ tj. $F^{\#}O \cap V = \emptyset$. Ovim je dokazano da je familija $\mathcal{A}_i$ lokalno konačna, a time i da je G podprostor metrizabilan u svojoj relativnoj topologiji.

<u>Posledica 3.4.1.</u>

Neka je $f : X \longrightarrow Y$ savršeno, otvoreno i jednoznačno preslikavanje lokalno metrizabilnog prostora X na regularan prostor

Tada je i Y lokalno metrizabilan prostor.

Posledica 3.4.2.

Neka je $F : X \longrightarrow Y$ neprekidno s obe strane, skoro-jednoznačno i X-bikompaktno preslikavanje lokalno metrizabilnog prostora X na parakompaktan prostor Y. Tada je prostor Y metrizabilan.

Tvrdjenje posledica 3.4.2.sledi iz teoreme 3.4. i iz poznatog kriterijuma:

da je lokalno metrizabilan prostor - metrizabilan ako i samo ako je parakompaktan.

Posledica 3.4.3.

Neka je $f : X \longrightarrow Y$ savršeno, otvoreno i jednoznačno preslikavanje lokalno-metrihabilnog prostora X na parakompaktan prostor Y. Tada je prostor Y -metrizabilan.

Iako propozicija 3.1. i teorema 3.2. i 3.4. daju tek dovoljne uslove za višeznačna preslikavanja pri kojima se čuvaju svojstva a/ separabilne metrizabilnosti,

b/ metrizabilnosti, i

c/ lokalne metrizabilnosti,

ipak sva tri ova iskaza imaju završni karakter u tom smislu što omogućuju da se dobiju potrebni i dovoljni uslovi pri kojima se sva tri navedena svojstva čuvaju.

1/ Ako je $F : X \longrightarrow Y$ s obe strane neprekidno preslikavanje separabilnog metrizabilnog prostora X na separabilan metrizabilan prostor Y, tada postoji višeznačno s obe strane neprekidno preslikavanje $F^*: X^* \longrightarrow Y$, nekog separabilnog metrizabilnog prostora $X^* \supset X$ na prostor Y koje je skoro - jednoznačno, i čija je restrikcija na prostoru X preslikavanje F, tj. $F^* | X = F$. Za dokaz dovoljno je uzeti da X^* bude topološka unija separabilnih metrizabilnih prostora X i Y, tj. da $X^* = X \cup Y$. Očigledno je prostor X^* takodje separabilan metrizabilan prostor, jer se uvek može uzeti da su prostori X i Y disjunktni.

Ako se preslikavanje F^* definiše tako da je za svako $x^* \in X^*$

$$F x^* = \begin{cases} Fx, & x^* = x \in X \\ y, & x^* = y \in Y \end{cases} ,$$

biće ovo preslikavanje s obe strane neprekidno i skoro-jednoznačno, a njegova restrikcija $F | X^*$ je jednaka preslikavanju F.

Obrnuto, ako svako s obe strane neprekidno preslikavanje $F : X \longrightarrow Y$ separabilnog metrizabilnog prostora X na regularan prostor Y ima produženje $F^*: X^* \longrightarrow Y$, gde je $X^* \supset X$ neki separabilan metrizabilan nadprostor prostora X, a preslikavanje F^* je s obe strane neprekidno i skoro jednoznačno, tada će prema propoziciji 3.1. prostor Y biti separabilan, metrizabilan prostor.

Na taj način je dokazana.

<u>Teorema 3.3.</u>

Neka je $F : X \longrightarrow Y$ višeznačno, s obe strane neprekidno preslikavanje separabilnog metrizabilnog prostora X na regularan prostor Y. Da bi prostor Y bio separabilan, metrizabilan prostor, potrebno je i dovoljno da se preslikavanje F može produžiti u s obe strane neprekidno i skoro-jednoznačno preslikavanje $F^*: X^* \longrightarrow Y$ nekog separabilnog metrizabilnog nadprostora X^* prostora X na prostor Y.

Na isti način se može dokazati i analogna teorema za slučaj metrizabilnih i lokalno metrizabilnih prostora, pošto je višeznačno preslikavanje $F : X \longrightarrow Y$ i tada s obe strane neprekidno, X-bikompaktno i skoro jednoznačno, a za prostor X može se uzeti takodje topološka unije $X \cup Y$ koja je, kako je lako videti, metrizabilan, odn. lokalno metrizabilan prostor, ako su joj takve komponente.

Tako važi

<u>Teorema 3.6.</u>

Neka je $F : X \longrightarrow Y$ višeznačno, s obe strane neprekidno i X-bikompaktno preslikavanje metrizabilnog /lokalno metrizabilnog/ prostora X na regularan prostor Y.

Da bi prostor Y bio metrizabilan /lokalno metrizabilan/, potrebno je i dovoljno da se preslikavanje F može produžiti u s obe strane neprekidno, X-bikompaktno i skoro jednoznačno preslikavanje

$F^*: X \longrightarrow Y$ nekog metrizabilnog /lokalno metrizabilnog/ nadprostora X^* prostora X na prostor Y.

4. VIŠEZNAČNA PRESLIKAVANJA π-BIKOMPAKTNIH I π-PARAKOMPAKTNIH TOPOLOŠKIH PROSTORA

Osnovni rezultat ovog paragrafa je teorema 4.1. koja daje dovoljne uvlove za višeznačna preslikavanja pri kojima se čuva π-bikompaktnost topoloških prostora i teorema 4.4. koja takodje daje dovoljne uslove pri kojima se čuvaju razne vrste π-parakompaktnosti.

Obe ove teoreme pretstavljaju na izvestan način krajnji rezultat, jer omogućuju da se dobiju potrebni i dovoljni uslovi za višeznačna preslikavanja pri kojima se navedena svojstva čuvaju.

Preslikavanja koja pripadaju podklasi klase s obe strane neprekidnih i skoro jednoznačnih preslikavanja, koja su Y-bikompaktna imaju svojstvo da čuvaju i π-bikompaktnost, kako to pokazuje

Teorema 4.1. Neka je $F : X \longrightarrow Y$ s obe strane neprekidno, skoro jednoznačno i Y - bikompaktno preslikavanje π- bikompaktnog prostora X na regularan prostor Y. Tada je i prostor Y π- bikompaktan.

Dokaz. Treba pokazati da za svaku tačku $y \in Y$ i svaku otvorenu okolinu V postoji okolina W sa bikompaktnim rubom. Prema teoremi 2.2./a/ će biti $F'y \cap F^bV \neq \emptyset$ i postoji $x \in F'y \cap F^bV$ tako da je $y \in Fx \subset V$. No kako je F seminaprekidno odozgo preslikavanje biće skup $F^bV = U$ otvoren i okolina tačke x . Budući da je prostor X π- bikompaktan, postoji otvorena okolina H tačke x s bikompaktnim rubom $\beta(H)$, da je $x \in H \subset F^{b}V$. No F je zatvoreno preslikavanje, pa će biti

/1/ $\overline{FH} \subset F\overline{H}$ i očigledno $y \in Fx \subset FH \subset \overline{FH}$.

Skup $FH = W$ je otvoren pošto je F i otvoreno preslikavanje i zato otvorena okolina tačke y . Iz /1/, dalje, sledi da je $FH \cup \beta(FH) = \overline{FH} \subset F\overline{H} = F(H \cup \beta(H)) = FH \cup F(\beta(H))$. Skupovi FH i $\beta(FH)$ su disjunktni, pa će biti

$$\beta(FH) \subset F\,\beta(H).$$

Ali skup $F\beta(H)$ je bikompaktan, jer je preslikavanje F neprekidno i Y-bikompaktno. Pošto je skup $\beta(FH)$ zatvoren podskup bikompaktnog skupa $F\,\beta(H)$ biće i sam bikompaktan.

Posledica 4.1.1. Neka je $f : X \longrightarrow Y$ jednoznačno, neprekidno otvoreno-zatvoreno preslikavanje π- bikompaktnog prostora X na regularan prostor Y. Tada je i Y π-bikompaktan prostor.

Ova posledica proizilazi iz toga što je svako jednoznačno preslikavanje skoro-jednoznačno i Y-bikompaktno.

I iskaz teoreme 4.1. isto kao i iskazi u propoziciji 3.1. i teoremama 3.2. i 3.4. ima završni karakter i na osnovu njega se dobijaju na potpuno jednak način kao i u teoremi 3.2. potrebni i dovoljni uslovi za višeznačno preslikavanje pri kojima se čuva π-bikompaktnost.

Teorema 4.2. Neka je $F : X \longrightarrow Y$ višeznačno s obe strane neprekidno i Y-bikompaktno preslikavanje π-bikompaktnog prostora X na regularni prostor Y. Da bi prostor Y bio π-bikompaktan, potrebno je dovoljno da se preslikavanje F može produžiti u s obe strane neprekidno, Y-bikompaktno i skoro-jednoznačno preslikavanje $F^*: X^* \longrightarrow Y$ nekog π-bikompaktnog nadprostora X^* prostora X na prostor Y.

Preslikavanje F^* se definiše kao i u teoremi 3.5. i nije teško videti da je ono s obe strane neprekidno, Y-bikompaktno i skoro-jednoznačno.

Inkluzija $\beta(F\acute{H}) \subset F\beta(H)$ iz prethodne teoreme 4.1. omogućuje da se pri višeznačnim preslikavanjima vrlo bliskim onim iz pomenute teoreme očuvaju i druge svojstva topoloških prostora slična π-bikompaktnosti, kao π-parakompaktnost, π-prebrojiva parakompaknost, π-zvezdasta parakompaktnost. No prethodno će se dati definicije prostora sa navedenim svojstvima.[1]

<u>Definicija 4.1.</u> Reći će se da je prostor X periferijski parakompaktan /periferijski prebrojivo parakompaktan, periferijski zvezdasto parakompaktan/, ili kraće π-parakompaktan /π-prebrojivo parakompaktan, π-zvezdasto parakompaktan/, ako za svaku tačku $x \in X$ i svaku okolinu U tačke x, postoji okolina $H \subset U$ tačke x, čiji je rub $\beta(H)$ parakompaktan /prebrojivo parakompaktan, zvezdasto parakompaktan/.

Kao što je pokazo C.Borges [1],/teorema 3.5. p. 456/, parakompaktnost, prebrojiva parakompaktnost i zvezdasta parakompaktnost se čuvaju pri savršenim višeznačnim preslikavanjima u klasi regularnih prostora. Zbog toga će se

1/ O silno parakompaktnim prestorima videti J.M.Smirnov. Izv. A.N.SSSR, s.mat.20 /1956/ 253-274.

dalje pretpostaviti da su prostori o kojima će biti reč - regularni.

Posle ovih napomena može se iskazati

Teorema 4.3. Neka je $F : X \longrightarrow Y$ s obe strane neprekidno, skoro jednoznačno, X i Y-bikompaktno /tj. savršeno/ preslikavanje π-parakompaktnog/ π-prebrojivo parakompaktnog, π-zvezdasto parakompaktnog/ prostora X na prostor Y. Tada je i prostor Y π-parakompaktan / π-prebrojivo parakompaktan, π-zvezdasto parakompaktan/.

Dokaz. Prema dokazu teoreme 4.1. za proizvoljnu okolinu V tačke $y \in Y$ postoji okolina H tačke $x \in F'y \cap F^bV$, da $x \in H \subset F^bV$ sa parakompaktnim rubom $\beta(H)$. Pošto je preslikavanje F s obe strane neprekidno i skoro-jednoznačno biće $\beta(FH) \subset F\beta(H)$ i $y \in FH \subset V$, takodje prema dokazu teoreme 4.1.

Skup $\beta(H)$ je zatvoren podskup prostora X, koji je parakompaktan u svojoj relativnoj topologiji. Kao što će se dalje pokazati, restrikcija preslikavanja F na zatvorenom skupu $\beta(H)$ je savršeno preslikavanje. Tada je, prema pomenutoj teoremi C.Borgesa podprostor $F\beta(H) \subset Y$ parakompaktan u svojoj relativnoj topologiji, a pošto je $\beta(FH)$ njegov zatvoreni podskup i on je parakompaktan, tj. prostor Y je π-parakompaktan. Isto tako se pokazuje invarijantnost π-prebrojive i π-zvezdaste parakompaktnosti.

Ostaje još da se dokaže da je restrikcija F_A savršenog preslikavanja $F : X \longrightarrow Y$ na zatvorenom skupu $A \subset X$ -

savršeno preslikavanje.

Zaista, tada je preslikavanje $F_A : A \longrightarrow FA \subset Y$, Y i X-bikompaktno, pošto je za $x \in A$: $F_A x = Fx$, a za $y \in FA$ je $F_A' y = F'y \cap A$, te je ovo zatvoren i bikompaktan podskup bikompaktnog skupa $F'y$.

Preslikavanje F_A je zatvoreno, jer je svaki zatvoren u A podskup $K \subset A$, takodje zatvoren i u X, a $F_A K = FK \subset FA$. Isto tako je zatvoreno i preslikavanje F_A', jer je zatvoren u FA podskup $L \subset FA$, zatvoren i u Y, a $F_A' L = F'L \cap A$. Na taj način je završen dokaz teoreme 4.3.

Iz ove teoreme proizilazi očigledna posledica

<u>Posledica 4.3.1.</u> Neka je $f : X \longrightarrow Y$ jednoznačno, neprekidno, otvoreno - zatvoreno i X-bikompaktno preslikavanje π-parakompaktnog / π-prebrojivo, π-zvezdasto parakompaktnog/ prostora X na prostor Y. Tada je i prostor Y π-parakompaktan/ π-prebrojivo, π-zvezdasto parakompaktan/.

Iz teoreme 4.3. dobija se naredna teorema, koja ima isto značenje za teoremu 4.3. kao i teorema 4.2. za teoremu 4.1. i na isti se način kao i teorema 4.2. dokazuje.

<u>Teorema 4.5.</u> Neka je $F : X \longrightarrow Y$ višeznačno, s obe strane neprekidno, X i Y-bikompaktno preslikavanje π-parakompaktnog / π-prebrojivo, π-zvezdasto parakompaktnog/ prostora X na prostor Y. Da bi prostor Y bio π-parakompaktan / π-prebrojivo parakompaktan, π-zvezdasto parakompaktan/ potreb-

no je i dovoljno da se preslikavanje F može produžiti u s obe strane neprekidno, X i Y-bikompaktno i skoro-jednoznačno preslikavanje $F^* : X^* \longrightarrow Y$ nekog π-parakompaktnog / π-prebrojivo, π-zvezdasto parakompaktnog/nad prostora X^* prostora X na prostor Y.

Na kraju ovog odeljka će biti data nekoliko primera višeznačnih preslikavanja, koji su u vezi sa teoremom 4.1. Oni pokazuju da su uslovi koje treba da zadovoljavaju višeznačna preslikavanja iz teoreme 4.1. medjusobno nezavisni i samo .

<u>Prvi primer.</u> Za prostor X uzeće se skup svih iracionalnih brojeva iz intervala $(0, 1)$ sa relativnom topologijom iz R^1, a za prostor Y interval $(0, 1) \subset R^1$, takodje sa relativnom topologijom iz R^1. Prostor X je π-bikompaktan, jer za svaku tačku $x \in X$ i svaku njenu otvorenu okolinu $V \subset X$, postoji okolina $U = (x - \varepsilon, x + \varepsilon) \cap X$, $(\varepsilon > 0)$, sadržana u V, čiji se rub $\beta(U)$ sastoji od dve tačke. Slično se pokazuje da je i prostor Y π-bikompaktan. Višeznačno preslikavanje $F : X \longrightarrow Y$ definisaće se da za svako $x \in X$ bude

$$Fx = \begin{cases} 4x, & x \in (0,1/4) \cap X \\ \left[\frac{7}{8}x, \frac{7}{8}x + \frac{1}{8}\right], & x \in (1/4, 3/4) \cap X \\ \left[\frac{7}{8}x, \frac{7}{8}x + \frac{1}{8}\right] \cup \left[(x-1)\cdot\frac{7}{8}, 1 - \frac{7}{8}x\right], & \\ \qquad x \in (3/4, 1) \cap X. & \end{cases}$$

Ovako definisano preslikavanje F je neprekidno /1/, Y-bikompaktno /3/ i skoro jednoznačno /2/, ali ni otvoreno ni zatvoreno /tj. F nije neprekidno/. Zaista, ako je $A \subset (0, 1/4) \cap X$ neki otvoreni /zatvoreni/ skup, njegova slika FA nije otvoren /zatvoren/ skup u Y. Ovaj primer pokazuje da uslovi /2/ i /3/ ne impliciraju uslòv /1/.

<u>Drugi primer</u>. U ovom primeru će se uzeti da je $X = Y = [0,1] \subset R^1$ sa relativnom topologijom iz R^1, a preslikavanje $F : X \longrightarrow Y$ neka bude, za $x \in X$, definisano da je

$$Fx = \left[\frac{15}{16}x, \frac{15}{16}x + \frac{1}{16}\right].$$

Lako se vidi da je preslikavanje F s obe strane neprekidno /1/ i Y-bikompaktno, ali nije skoro jednoznačno, jer ne postoji ni jedno $x \in X$ da $Fx \subset V = \left(\frac{15}{16}x, \frac{15}{16}x + \frac{1}{16}\right)$. Dati primer pokazuje da uslov /2/ iz teoreme nije posledica uslova /1/ i /3/.

<u>Treći primer.</u> Neka su prostori X i Y jednaki i neka se sastoje iz svih iracionalnih brojeva iz $(0,1) \subset R^1$, sa relativnom topologijom iz R^1, a višeznačno preslikavanje $F : X \longrightarrow Y$ neka bude definisano tako da za svako $x \in X$ bude

$$Fx = \begin{cases} 3x, & x \in (0, 1/3) \cap X, \\ \left[\frac{15}{18}x + \frac{1}{18}, \frac{5}{6}x + \frac{1}{6}\right] \cap Y, & x \in (2/3, 1) \cap X. \end{cases}$$

Preslikavanje F je s obe strane neprekidno /1/ i skoro-jednoznačno. No kako ni jedan od skupova oblika

$[a, b] \cap Y \subset (0, 1)$ nije bikompaktan, preslikavanje F nije Y-bikompaktno, tj. nije ispunjen uslov /3/ iz teoreme.

Četvrti primer. Opet će se uzeti da je $X = Y = [0, 1] \subset R^1$ sa relativnom topologijom iz R^1.

Ako se preslikavanje $F : X \longrightarrow Y$ definiše da bude

$$Fx = \begin{cases} 3x, & x \in [0, 1/3] \\ \left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right], & x \in (1/3, 2/3) \\ x, & x \in [2/3, 1], \end{cases}$$

tada je ono semineprekidno odozdo zatvoreno, Y-bikompaktno /3/ i skoro jednoznačno /2/. Preslikavanje F nije semineprekidno odozgo ni otvoreno, jer je na pr.

$$F'\left[\frac{1}{2}, \frac{5}{6}\right] = [1/6, 5/18] \cup (1/3, 2/3), \text{ a } F(1/3, 2/3) = [1/3, 2/3].$$

Ako se ovo preslikavanje modificira tako da za $x \in X$ bude

$$Fx = \begin{cases} 3x, & x \in [0, 1/3) \\ [1/3, 2/3], & x \in [1/3, 2/3] \\ x, & x \in (2/3, 1], \end{cases}$$

tada je preslikavanje F semineprekidno odozgo, zatvoreno, Y-bikompaktno /3/ i skoro jednoznačno /2/, ali nije ni otvoreno ni semineprekidno odozdo, što se vidi iz sledećeg:

$$F(1/3, 2/3) = [1/3, 2/3] \text{ i } F'(1/2, 5/6) = (1/6, 5/18) \cup [1/3, 2/3].$$

5. q-PROSTORI I VIŠEZNAČNA PRESLIKAVANJA q-PROSTORA

Klasu q-prostora uveo je E.Michael ([1], p.173). To je veoma obimna klasa topoloških prostora koja sadrži sve prostore sa prvom aksiomom prebrojivosti, sve lokalno kompaktne /i bikompaktne/ prostore, p-prostore A.Arhangelskog i M-prostore K.Morite.

U ovom paragrafu će se pokazati da je moguće, koristeći višeznačna preslikavanja, uspostaviti izvesne veze izmedju podklasa prostora sadržanih u klasi q-prostora /propozicija 5.1, teorema 5.2. i posledica 5.2.1/.

Dalje će pokazati da osobine višeznačnih preslikavanja o kojim se govorilo u teoremi 2.5. važe i ako se klasa višeznačnih preslikavanja ograniči na neprekidna i zatvorena preslikavanja, a klasa prostora Y proširi na klasu q-prostora /teorema 5.3. i posledice koje slede/.

Na kraju su dati dovoljni uslovi za višeznačna preslikavanja pri kojima se čuvaju q-prostori.

Klasu q-prostora odredio je E.Michael u [1] sledećom definicijom. Topološki prostor X je q-prostor, ako za svaku tačku $x \in X$ postoji prebrojiv sistem okolina $\mathcal{U}_x = \{U_n : n \in N\}$ tačke x da birajući u svakoj okolini U_n proizvoljnu tačku x_n, tako da sve ovako izabrane tačke budu različite, tada niz tih tačaka $\{x_n : n \in N\}$ ima tačku nagomilavanja $\bar{x} \in X$.

Izvesne informacije o odnosu nekih klasa prostora koje su sadržane u klasi q-prostora moguće je dobiti i pomoću višeznačnih preslikavanja kako će se iz sledeće propozicije i teoreme videti.

Propozicija 5.1. Neka je $F : X \longrightarrow Y$ višeznačno semineprekidno odozgo, otvoreno i Y-kompaktno preslikavanje prostora X sa prvom aksiomom prebrojivosti na T_1-prostor Y. Tada i prostor Y zadovoljava prvu aksiomu prebrojivosti.

Dokaz. Neka je $F : X \longrightarrow Y$ višeznačno, neprekidno, otvoreno i Y-kompaktno preslikavanje prostora X sa prvom aksiomom prebrojivosti T_1-prostor Y i $y \in Y$ proizvoljna tačka. Neka je $x \in F'y$ takodje proizvoljna tačka, a $\mathcal{U}_x = \{U_n : n \in N\}$ neka prebrojiva baza tačke x u prostoru X.

Može se uzeti da elementi baze $\mathcal{U}_x$ zadovoljavaju uslov monotonosti: $U_{n+1} \subset U_n$ za svako $n \in N$.

Familija $\mathcal{U}_x$ odredjuje u prostoru Y posredstvom preslikavanja F koje je otvoreno, familiju $\mathcal{V}_y = \{V_n : V_n = FU_n, U_n \in \mathcal{U}_x\}$ otvorenih okolina tačke y. Pokazaće se da familija $\mathcal{V}_y$ zadovoljava uslov definicije q-prostora, tj. da je $\mathcal{V}_x$ q-familija okolina tačke y.

Neka je dalje $\{y_n : n \in N\}$ proizvoljan niz medjusobno različitih tačaka, izabranih tako da $y_n \in V_n$, za svako $n \in N$. Za tačke ovog niza moguće su sledeće dve pretpostavke.

Ili postoji beskonačno mnogo tačaka ovog niza ko-

1/ A.Arhangelskij: Ob odnom klase prostranstv,..., Mat.sb.1965 t.67 /1o9/, №1, 55-88.
K.Morita: Products of normal spaces with metric spaces, Math.Ann. 154, 1964, 365-382.

je leže u skupu Fx- slici tačke $x \in F'y$,

ili ovaj skup sadrži tih tačaka samo konačno mnogo. U prvom slučaju, pošto je skup Fx prebrojivo kompaktan u svojoj relativnoj topologiji, postoji tačka $\bar{y} \in Fx$ koja je tačka nagomilavanja onih tačaka niza $\{y_n : n \in N\}$ koje leže u Fx, pa dakle i čitavog niza.

I u slučaju kada samo konačan broj tačaka niza $\{Un : n \in N\}$ leži u Fx, skup B svih onih tačaka ovog niza koje ne leže u Fx ima tačku nagomilavanja $\bar{y} \in Y$.

Jer, ako skup B ne bi imao tačku nagomilavanja svaki njegov podskup /pa i sam skup B/ bio bi zatvoren u Y, pošto je Y T_1 -prostor. No, preslikavanje je semineprekidno odozgo, pa je, zatvoren i skup $F'B \subset X$. Kako je $Fx \cap B = \emptyset$, biće $F^bFx \cap F'B = \emptyset$. Ali $x \in F^bFx$, te sledi da $x \notin F'B$, tj. $x \in X \setminus F'B = U$ i U je otvorena okolina tačke x. Zbog toga postoji indeks $n_o \in N$ da za svako $n \geqslant n_o$, $x \in U_n \subset U = X \setminus F'B$, pa je $U_n \cap F'B = \emptyset$ za $n \geqslant n_o$.

Medjutim, pošto $y_n \in V_n = FU_n$ za svako $n \in N$, biće $F'y_n \cap U_n \neq \emptyset$ za svako $n \in N$. Ako je, dalje, $m \geqslant n_o$ takav indeks za koji je $y_m \in B$, biće

$$\emptyset \neq F'y_m \cap U_m \subset F'B \cap U_m.$$

Dobijena protivrečnost pokazuje da skup B mora da ima bar jednu tačku nagomilavanja u X i time je propozicija dokazana.

Naredna teorema odnosi se na regularne q-prostore i uspostavlja vezu tih prostora sa metričkim prostorima.

Teorema 5.2. Svaki regularan q-prostor je višeznačna, semi-neprekidna odozgo, otvorena, i Y-kompaktna slika nekog metričkog prostora.

Dokaz. Neka je Y regularan q-prostor. Tada za svaku tačku $y \in Y$ postoji prebrojiv sistem /q-sitem/ okolina $\{V_n : n \in N\}$ sa svojstvom da birajući u svakom skupu V_n tačku y_n, tako da sve, na ovaj način dobijene, tačke budu različite, tada niz $\{y_n : n \in N\}$ ima tačku nagomilavanja $\bar{y} \in Y$. Pošto je prostor Y regularan, može se uzeti da skupovi V_n zadovoljavaju uslov $\bar{V}_{n+1} \subset V_n$, za svako $n \in N$.

Neka je, dalje $K = \bigcap\{V_n : n \in N\}$. Tada svaki prebrojivi niz tačaka $\{y_n : y_n \in K, n \in N\}$ ima tačku nagomilavanja $\bar{y} \in K$, jer $y_n \in K \subset V_n$ za svako $n \in N$, a skup K je zatvoren. Zato je skup K prebrojivo kompaktan, a sistem $\mathcal{V}_K = \{V_n : n \in N\}$ čine prebrojivu bazu skupa K u Y, te skup K ima prebrojiv karakter u prostoru Y /u smislu A.Arhangelskog, (def.3.5. iz [1])/.

Zaista, ako za neki otvoreni skup $H \supset K$ ne bi postojao skup $V_n \in \mathcal{V}_K$ da $K \subset V_n \subset H$, tada bi za svaki skup $V_n \in \mathcal{V}_K$ bilo $V_n \cap (Y \setminus H) \neq \emptyset$. Zbog monotonosti sistema $\mathcal{V}_K$ tada bi bilo

$$\emptyset \neq \bigcap_{n=1}^{\infty}[V_n \cap (Y \setminus H)] = \left[\bigcap_{n=1}^{\infty} V_n\right] \cap (Y \setminus H) = K \cap Y \setminus H \text{ , suprotno}$$

pretpostavci da $H \subset K$.

Skupovi K koji su na opisani način dobijeni čine pokrivač prostora Y i podfamiliju $\mathcal{K}'$ familije $\mathcal{K} = \{K_\alpha : \alpha \in A\}$ svih kompaktnih skupova prebrojivog karaktera prostora Y.

Neka je dalje $\mathcal{W} = \{W_\beta : \beta \in B\}$ neka familija otvorenih skupova prostora Y, sa svojstvom da za svaki skup $K_\beta \in \mathcal{K}$

i svaki otvoreni skup $H \supset K_\alpha$ postoji skup $W_\beta \in \mathcal{W}$ da $K_\alpha \subset W_\beta \subset H$ Za familiju $\mathcal{W}$ može se, na primer, uzeti unija svih familija $\mathcal{V}_{K_\alpha}; \alpha \in A$. Dalje će se formirati topološki proizvod $P = \prod_{n=1}^{\infty} B_n$, gde je $B_n = B$, za svako $n \in N$.

Skup B će se topologizirati diskretnom topologijom. Tada je topološki proizvod P metrizabilan prostor /Berov prostor/ i zato slabo separabilan. U prostoru P će se dalje odrediti njegov podprostor X na sledeći način. Tačka $x = \{\beta_n; \beta_n \in B_n = B$ $n \in N\} \in P$ pripadaće skupu X, ako odgovarajući sistem $\{W_{\beta_n}:$ $n \in N\}$ skupova familije $\mathcal{W}$ obrazuje prebrojivu bazu nekog sk pa $K_\alpha \in \mathcal{K}$ u Y.

Na skupu X se sada na prirodan način može definisati višeznačno preslikavanje $F : X \longrightarrow Y$ stavljajući za $x \in X$, $Fx = K_\alpha$, gde je $K_\alpha \in \mathcal{K}$ onaj skup kome je sistem $\{W_{\beta_n}: n \in N\}$, koji odgovara tački x, prebrojiva baza. Preslikavanje F je na taj način potpuno definisano na podprostoru X i preslikava X na čitav prostor Y i pri tome su svi skupovi $Fx = K_\alpha'$ zatvoreni i kompaktni, pa je preslikavanje F Y-kompaktno. Treba još da se pokaže da je preslikavanje F seminеprekidno odozgo i otvoreno.

Neka je $x_0 \in X$ i $H \subset Y$ proizvoljan otvoreni skup, takav da $Fx_0 = K_{\alpha_0} \subset H$. Pošto je $\{W_{\beta_n} : n \in N\}$ baza skupa K_{α_0} u Y, postoji $n_0 \in N$ da $Fx_0 = K_{\alpha_0} \subset W_{\beta_{n_0}} \subset H$. No svaki od prostora B_n je diskretan i svaka njegova tačka je otvoren skup, te će zato i skup $U_{n_0}(x_0) =: \{x : x = \{\beta_n\} \in P, \beta_n = \beta_{n_0}\}$ biti otvoren u P. Ovaj skup odredjuje otvoren u X skup $U(x_0) = U_{n_0}(x_0) \cap X$. Preslikavanje F će biti seminеprekidno odozgo ako se pokaže da

$FU(x_0) \subset H \ \ldots$ /1/

Neka $x \in U(x_0)$, tada je $pr_{n_0} x = \beta_{n_0} = \beta^0_{n_0} = pr_{n_0} x_0$ i zato $W_{\beta_{n_0}} = W_{\beta^0_{n_0}}$. No tada je $Fx = K_\alpha \subset W_{\beta_{n_0}} = W_{\beta^0_{n_0}} \subset H$, pa je dokazana inkluzija /1/ i da je preslikavanje F semineprekidno odozgo.

Ostaje da se pokaže da je preslikavanje F i otvoreno. Neka je $U \subset X$ otvoren skup i $y \in K_{\alpha'} = Fx' \subset FU$, gde $x' \in U$. Pošto je skup U otvoren, postoji element U' baze prostora P, takav da $x \in U' \cap X = U$.

Može se uzeti da je skup $U' = \{x : x \in P,\ pr_{n_i} x = \beta_{n_i} = \beta'_{n_i} = pr_{n_i} x',\ \text{za } i = 1,2,\ldots,m\}$. Tada je $W_{\beta'_{n_i}} = W_{\beta_{n_i}}$ za $i = 1,2\ldots,m$. Skup $W = \bigcap_{i=1}^{m} W_{\beta'_{n_i}}$ je otvoren u Y i $K_{\alpha'} \subset W$. Pokazaće se da $W \subset FU$ i time da je preslikavanje F otvoreno.

Neka je $y_1 \in W$; tada zbog regularnosti prostora Y postoji otvoren skup V da $y_1 \in V \subset \overline{V} \subset W$. Pomoću skupa $\overline{V}$ odredjen je skup $K_{\alpha_1} \in \mathcal{K}$, takav da je $y_1 \in K_{\alpha_1}$, na sledeći način.

Neka je $K_1 = \bigcap \{\overline{V}_n : V_n \in \mathcal{V}_{y_1},\ n \in N\}$, gde je $\mathcal{V}_{y_1}$ q-sistem okolina tačke y. Tada je $K_{\alpha_1} = K_1 \cap \overline{V}$. Pošto je $K_{\alpha_1} \subset W \subset W_{\beta'_{n_i}}$, za $i = 1,2,\ldots,m$ može se prebrojiva baza $\{W_{\beta^1_n}\}$ skupa K_{α_1} izabrati da bude $W_{\beta^1_{n_i}} = W_{\beta'_{n_i}}$ za $i = 1,2,\ldots,m$. Tada je $x_1 = \{\beta^1_n : n \in N\} \in U'$, a kako je $\{W_{\beta^1_n}\}$ prebrojiva baza skupa K_{α_1}, to $x_1 \in X$, dakle $x_1 \in U' \cap X = U$. Iz ovoga sledi da $y_1 \in K_{\alpha_1} = Fx_1 \subset FU$, te pošto $y \in W$, dokazana je inkluzija $W \subset FU$ i teorema.

Budući da svaki metrički prostor zadovoljava prvu aksiomu prebrojivosti, na osnovu propozicije 5.1. i prethodne teoreme proizilazi

Posledica 5.2.1. Da bi regularan prostor X bio q-prostor potrebno je i dovoljno da postoji višeznačno, seminepreki-dno odozgo, otvoreno i Y-kompaktno preslikavanje $F : X \longrightarrow Y$ nekog prostora X sa prvom aksiomom prebrojivosti na prosto Y.

Sledeća teorema i posledice koje iz nje proizilaze ukazuju na značaj q-prostora u odnosu na svojstva višeznačnih preslikavanja.

Teorema 5.3. Neka je $F : X \longrightarrow Y$ višeznačno, neprekidno i zatvoreno preslikavanje T_1-prostora X na regularan q-prostor Y. Tada je za proizvoljnu tačku $y \in Y$, rub $\beta(F'y)$ inverzne slike $F'y$ pseudokompaktan skup, tj. svaka neprekidna i realna jednoznačna funkcija na $\beta(F'y)$ je ograničena.

Dokaz. Neka, naprotiv, postoji realna funkcija $h : X \longrightarrow R^1$ koja je neograničena na $\beta(F'y)$. Tada postoji prebrojiv niz tačaka $\tilde{x} = \{ x_n : x_n \in \beta(F'y),\ n \in N \}$ da je $|h(x_{n+1})| > |h(x_n)| + 1$ i može se odrediti familija $\mathcal{U} = \{ U_n : n \in N \}$ otvorenih skupova

$$U_n = \{ x : x \in X,\ |h(x) - h(x_n)| < \tfrac{1}{2} \} \text{ za svako } n \in N.$$

Nije teško dokazati da je familija U diskretna u X, tj. da svaka tačka $x \in X$ ima okolinu O_x° koja seče samo jedan skup $U_n \in \mathcal{U}$. Ako se u svakom skupu $U_n \in \mathcal{U}$ izabere neka tačka z_n $n \in N$, dobija se skup $A = \{ z_n : n \in N \}$ koji je zatvoren u X. Zaista, ako $x \in \bar{A}$, tada svaka okolina O_x tačke x seče A; no postoji, zbog diskretnosti familije $\mathcal{U}$ u prostoru X, okolina O_x° koja seče samo jedan skup $U_k \in \mathcal{U}$. Zato $z_k \in O_x^{\circ}$, jer bi u suprotnom slučaju bilo $O_x^{\circ} \cap A = \emptyset$. Ali takodje mora biti $x = z_k$, jer ako bi bilo $x \neq z_k$, tada otvorena okolina $O_x^1 = O_x^\circ \setminus \{z_k\}$ tačke x ne sadrži ni jednu tačku skupa A. Tako je dokazana inkluzija $\bar{A} \subset A$, a time i zatvorenost skupa A. Isto tako se dokazuje da je i svaki podskup $A_1 \subset A$ zatvoren u X. Pošto je preslikavanje F semineprekidno odozdo, za svaku otvorenu okolinu W tačke y, biće otvoren i skup $F'W$ i $F'y \subset F'W$. Ali skup $F'y$ je zatvoren u X, jer je preslikavanje Fi semineprekidno odozgo, a prostor Y T -prostor. Zato je $\beta(F'y) \subset F'y \subset F'W$ i za svaki skup $U_n \in \mathcal{U}$ biće $(F'W \cap U_n) \setminus F'y \neq \emptyset$.

Pošto je prostor Y q-prostor i $y \in Y$, prostoji prebrojiv niz okolina $\mathcal{V}_y = \{V_n : y \in V_n,\ n \in N\}$ tačke y, sa svojstvom da svaki niz medjusobno različitih tačaka $\{y_n : y_n \in V_n,\ n \in N\}$ ima tačku nagomilavanja $\bar{y} \in Y$.

Staviće se sada $V_1 = W_1$ i pošto je V_1 okolina tačke y, biće $(F'W \cap U_1) \setminus F'y \neq \emptyset$ i može se izabrati $z_1 \in (F'W_1 \cap U_1) \setminus F'y$. Tada $z_1 \notin F'y$ i sledi da $y \notin Fz$.

Kako je prostor Y regularan, postoji otvoreni skup H_1 da

$$Fz_1 \subset H_1 \subset \bar{H}_1 \text{ i } y \in Y \setminus \bar{H}_1 = G_1.$$

No $z \in F'W_1 \cap U_1 \subset F'W_1$, te je $Fz_1 \cap W_1 \neq \emptyset$ i može se izabrati $y_1 \in Fz_1 \cap W_1 = Fz_1 \cap V_1$.

Dalje će se staviti $W_2 = V_2 \cap G_1$ i izabrati tačka $z_2 \in (F'W_2 \cap U_2) \setminus F'y$ i otvoreni skup H_2 da $Fz_2 \subset H_2 \subset \bar{H}_2$, a $y \in Y \setminus \bar{H}_2 = G_2$. Takodje se može naći $y \in Fz_2 \cap W$, jer $Fz_2 \cap W_2 \neq \emptyset$.

Opisani postupak se može na isti način produžiti i kada su već odredjene tačke $z_1, z_2, \dots, z_k$ i tačke $y_1, y_2, \dots u_k$, te otvoreni skupovi $H_1, H_2, \dots, H_k$, $(Fz_i \subset H_i,\ i=1,2,\dots,k)$ i pomoću njih drugi niz otvorenih skupova $G_1, G_2, \dots, G_k$

koji su okoline tačke y, staviće se $W_{k+1} = V_{k+1} \cap \{\bigcap_{i=1}^{k} G_i\}$ i izabrati tačka $z_{k+1} \in (F'W_{k+1} \cap U_{k+1}) \setminus F'y$. Zatim je moguće naći otvoreni skup H_{k+1} da $Fz_{k+1} \subset H_{k+1}$ i $y \in Y \setminus \bar{H}_{k+1} = G_{k+1}$. Dalje se može naći tačka $y_{k+1} \in Fz_{k+1} \cap W_{k+1} \subset V_{k+1}$, jer je $z_{k+1} \in F'W_{k+1}$.

Tako se za svaki prirodan broj $\underline{n}$ može naći tačka z_n, skup $H_n \supset Fz_n$ i tačka $y_n \in Fz_n \cap W_n \subset V_n$.

Prema izboru tačaka niza $\{y_n : n \in N\}$, vidi se da su sve tačke različite i da $y_n \in V_n$. Pošto je Y q-prostor postoji tačka $\bar{y} \in Y$ koja je tačka nagomilavanja niza $\{y_n : n \in N\}$. Zbog toga $\bar{y} \in \bar{B}$, gde je $B = \cup\{y_n : n \in N\}$.

Kako $z_n \in U_n$, skup $A = \cup\{z_n : n \in N\}$ je zatvoren u X, pa je zatvoren i skup FA u Y, jer je preslikavanje F - zatvoreno. Dalje iz uslova da $y_n \in Fz_n$, sledi da $B \subset FA$ i otuda

$\bar{y} \in \bar{B} \subset \overline{FA} = FA$. Tako $\bar{y} \in FA = \bigcup_{n=1}^{\infty} Fz_n$ i postoji $z_{n_0} \in A$ da $y \in Fz_{n_0}$. Ali otvoreni skup H_{n_0} sadrži Fz_{n_0} te i $\bar{y}$, a ne sadrži ni jednu tačku skupa B osim y_{n_0}, pa sledi da $\bar{y}$ ne možetačka nagomilavanja niza $\{y_n : n \in N\}$.

Dobijena protivrečnost pokazuje da je nemoguća pretpostavka da postoji realna i neprekidna, jednoznačna funkcija $h : X \longrightarrow R^1$ koja nije ograničena na rubu $\beta(F'y)$ skupa $F'y$.

<u>Posledica 5.3.1.</u> Ako je prostor X iz prethodne teoreme normalan, tada je rub $\beta(F'y)$ skupa $F'y$ kompaktan skup.

<u>Dokaz.</u> Neka u $\beta(F'y)$ postoji prebrojiv niz tačaka $A = \{x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots\}$ koji u $\beta(F'y)$ nema tačaka nagomilavanja. Tada taj niz nema tačaka nagomilovanja ni u X, jer je skup

$\beta(F'y)$ je zatvoren u X, pa je A zatvoren u X skup.

Definisaće se dalje jednoznačna i realna funkcija $g : A \longrightarrow R^1$ stavljajući $G(x_n) = n$. Tada je g neprekidna funkcija na zatvorenom skupu A i pošto je X normalan prostor, funkciju g moguće je neprekidno produžiti na čitav prostor.

Neka je $h : X \longrightarrow R^1$ takvo produženje funkcije g. Ali h je neograničena funkcija na $\beta(F'y)$, jer je $h(x_n) = g(x_n) = n$, što je kontradikcija sa prethodnom teoremom.

<u>Posledica 5.3.2.</u> Neka je $F : X \longrightarrow Y$ višeznačno, neprekidno i zatvoreno preslikavanje parakompaktnog prostora X na regularan q-prostor Y. Tada je za svako $y \in Y$ rub $\beta(F'y)$ inverzne slike $F'y$ bikompaktan.

<u>Dokaz.</u> Prema posledici 5.3.1. zatvoreni skup $\beta(F'y)$ je /prebrojivo/ kompaktan, a takodje i parakompaktan. Ali svaki parakompaktan, prebrojivo kompaktan prostor je bikompaktan, pa sledi da je $\beta(F'y)$ bikompaktan za svako $y \in Y$.

Tvrdjenje teoreme 5.3. ostaje u važnosti i kada se pretpostavke o prostoru Y i preslikavanju F delimično izmene kako će se videti iz sledeće

<u>Propozicije 5.4.</u> Neka je $F : X \longrightarrow Y$ višeznačno, neprekidno i zatvoreno preslikavanje T_1-prostora X na T_2-prostor Y. Ako je preslikavanje F Y-bikompaktno ili samo ima svojstvo da je rub $\beta(Fx)$ slike Fx svake tačke $x \in X$ bikompaktan, tada je svaka neprekidna, realna i jednoznačna fun-

kcija na X ograničena na rubu $\beta(F'y)$ inverzne slike $F'y$, svake tačke $y \in Y$.

Dokaz. propozicije je isti kao i dokaz teoreme 5.3, sem u delu gde se odredjuje okolina H_i svakog skupa Fz_i, $i = 1,2, \ldots$, te se taj deo ovde daje.

Pošto za svako $i \in N$, $y \notin Fz_i$, a Fx je zatvoren skup za svako $x \in X$, to $y \in \beta(Fz_i)$. Zbog pretpostavke da je Y T_2-prostor, a $\beta(Fz_i)$ bikompaktan skup, postoje okoline Oy i $O \supset Fz_i$ koje su dsjunktne. Pri tome se okolina Oy uvek može izabrati da bude $Oy \cap \operatorname{int} Fz_i = \emptyset$. Ako se stavi $H_i = O \cup \operatorname{int} Fz_i$, tada je $Oy \cap H_i = \emptyset$ i zato $y \notin \overline{H}_i$, te se može uzeti da je $G_i = Y \setminus \overline{H}_i$, za svako $i \in N$. Time je propozicija dokazana.

Takodje ~~xx~~ pomenute izmene važe i posledice 5.3.1, 5.3.2. te će se one, modificirane, ovde samo navesti.

Posledica 5.4.1. Ako je prostor X iz propozicije 5.6. normalan, tada je rub $\beta(F'y)$ skupa $F'y$ kompaktan skup.

Posledica 5.4.2. Neka je $F : X \dashrightarrow Y$ višeznačno, neprekidno i zatvoreno preslikavanje parakompaktnog prostora X na T_2-q-prostor Y. Ako je preslikavanje F Y-bikompaktno, ili je rub $\beta(Fx)$ slike Fx svake tačke $x \in X$ -bikompaktan, tada je bikompaktan i rub $\beta(F'y)$ inverzne slike $F'y$ svake tačke $y \in Y$.

U vezi sa q-prostorima postavlja se problem da se odrede potrebni i dovoljni uslovi za višeznačna preslikavanja pri kojima se čuvaju q-prostori.

Delimično ovaj problem rešava sledeća teorema koja daje dovoljne uslove za višeznačna preslikavanja pri kojima se čuvaju q-prostori.

__Teorema 5.5.__ Neka je $F : X \longrightarrow Y$ višeznačno, seminepreki-dno odozgo, otvoreno i Y.bikompaktno preslikavanje q-prostora X na T_1-prostor Y. Tada je i Y q-prostor.

__Dokaz.__ Neka je $y \in Y$ proizvoljna tačka, a $x \in F'y$ takodje proizvoljna tačka, čiji je q-sistem okolina $\mathcal{U}_x = \{U_n(x) : n \in N\}$. Tada svaki otvoreni skup $U_n(x)$ seče skup $F'y$, pa $y \in FU_n(x) = \{y : F'y \cap U_n(x) \neq \emptyset\} = V_n$. Skup V_n je otvoren i okolina je tačke y. Pokazaće se da je sistem $\mathcal{V} = \{V_n : V_n = FU_n(x),\ n \in N\}$ q-sistem okolina tačke y, tj. da svaki niz $\tilde{y} = \{y_n \in V_n,\ n \in N\}$ medjusobno različitih tačaka ima tačku nagomilavanja $\bar{y} \in Y$.
Pošto su tačke niza $\tilde{y}$ medjusobno različite, biće $F'y_k \neq F'y_m$, čim je $k \neq m$. No kako $y_n \in V_n = FU_n(x)$, biće $F'y_n \cap U_n(x) \neq \emptyset$ za svako $n \in N$. Zato se može, za svako $n \in N$, izabrati tačka $x_n \in F'y_n \cap U_n(x)$. Na taj način dobijen je niz $\tilde{x} = \{x_n : x_n \in U_n(x),\ n \in N\}$. Ako se pretpostavi da sistem $\mathcal{U}_x$ čine skupovi $U_n(x) = \bigcap_{i=1}^{n} U_i'(x)$, gde skupovi $U_i'(x)$ pripadaju prvobitnom q-sistemu okolina tačke x, tada su za tačke niza $\tilde{x}$ moguća dva slučaja.

1/ Postoji podniz $\tilde{x}' = \{x_{n_i} : i \in N\}$ niza $\tilde{x}$ čije su sve tačke medjusobno jednake, tj. $x_{n_i} = \bar{x}$ za svako $i \in N$. Tada odgovarajući niz $\{y_n : i \in N\}$ čine tačke koje sve pripadaju bikompaktnom skupu $Fx \subset Y$, jer iz $x_{n_i} = \bar{x} \in F'y_{n_i}$ sledi $y_{n_i} \in F\bar{x}$, za svako $i \in N$. No tada postoji tačka $\bar{y} \in F\bar{x}$ koja je tačka nagomilavanja niza $\tilde{y}' = \{y_{n_i} : i \in N\}$.

b/ Postoji podniz $\{x_{n_i} : i \in N\} = \tilde{x}'$ niza $\tilde{x}$ čije su sve tačke različite. Tada, pošto $x_{n_i} \in U_{n_i}(x) = \bigcap_{k=1}^{n_i} U_k'(x)$, može se uzeti da $x_{n_i} \in U_i(x)$, jer je $i \leqslant n_i$ za svako $i \in N$. Ali X je q-prostor, a $x \in X$, te postoji tačka $\bar{x} \in X$, koja je tačka nagomilavanja niza $\tilde{x}'$. No tada i odgovarajući niz $\tilde{y}' = \{y_{n_i} : i \in N\}$ ima tačku nagomilavanja $\bar{y} \in F\bar{x}$. Jer, ako ni jedna tačka $y \in F\bar{x}$ ne bi bila tačka nagomilavanja niza $\tilde{y}'$, postojala bi okolina O_y tačke y koja sadrži samo konačno mnogo tačaka niza $\tilde{y}'$. Familija $\mathcal{O} = \{O_y : y \in F\bar{x}\}$ pokriva bikompaktan skup $F\bar{x}$, pa se može redukovati na konačnu podfamiliju $O_{y_1}, O_{y_2}, \ldots, O_{y_k}$ koja takodje pokriva skup $F\bar{x}$, tj. $F\bar{x} \subset \bigcup_{i=1}^{k} O_{y_i} = O$. Pošto je preslikavanje F semineprekidno odozgo, skup $U = F^b O$ je otvorena okolina tačke $\bar{x}$, takva da je $FU \subset O$. Ali okolina U sadrži beskonačno mnogo tačaka x_{n_i} niza $\tilde{x}''$, pa će i skup $O \supset FU$ takodje sadržavati beskonačno mnogo podskupova Fx_{n_i}. Kako $y_{n_i} \in Fx_{n_i}$, skup O sadržavaće beskonačno mnogo tačaka y_{n_i} niza $\tilde{y}'$.

Medjutim, skup O je unija konačno mnogo skupova $O_{y_1}, O_{y_2}, \ldots, O_{y_k}$, koji svaki sadrži samo konačno mnogo tačaka niza $\tilde{y}'$, te zato i skup O sadrži samo konačno mnogo tačaka niza $\tilde{y}'$. Dobijena protivrečnost pokazuje da je bar jedna tačka $\bar{y} \in F\bar{x}$ tačka nagomilavanja niza $\{y_n : n \in N\}$. Time je doka[illegible] je tačka $y \in Y$ q-tačka, tj. da je Y q-prostor.

Posledica 5.5.1. Neprekidna, otvorena i jednoznačna slika q-prostora je q-prostor.

Napomena. Teorema 5.5. i jedna teorema A.Arhangelskog omogućuju da se dopune informacije o q-prostorima, koji su kompletno regularni. Naime, prema teoremi A.Arhangelskog, prostori tačkasto prebrojivog tipa i samo oni su seminepreki- dne odozgo, otvorene i Y-bikompaktne višeznačne slike metričkih prostora.

Pri tome se pod prostorima tačkasto prebrojivog tipa podrazumevaju takvi prostori koji se mogu pokriti bikompaktima prebrojivog karaktera u X, tj. da za svaki bikompakt F pokrivača postoji familija njegovih otvorenih okolina $\varphi=\{U_i : i \in N\}$ sa svojstvom da za proizvoljni otvoreni skup $O \supset F$, postoji $U_k \in \varphi$ da $F \subset U_k \subset O$.

[V.: Teoremu 3.14, p.41 i definicije 3.5. i 3.8. p.p.33, 34 iz članka A.Arhangelskog: Bikompaktnie, množestva..., Trudi Mosk.Mat. obšč. 1965, t.13].

Prema teoremi 5.5. biće svaka semineprekidna odozgo, otvorena i Y-bikompaktna višeznačna slika metričkog prostora q-prostor, tj. svaki tačkasto prebrojivi prostor biće q-prostor, jer je svaki metrički prostor q-prostor.

Posledica 5.5.1. Neprekidna, otvorena i jednoznačna slika q-prostora je q-prostor.

Napomena. Teorema 5.5. i jedna teorema A.Arhangelskog omogućuju da se dopune informacije o q-prostorima, koji su kompletno regularni. Naime, prema teoremi A.Arhangelskog, prostori tačkasto prebrojivog tipa i samo oni su semineprekidne odozgo, otvorene i Y-bikompaktne višeznačne slike metričkih prostora.

Pri tome se pod prostorima tačkasto prebrojivog tipa podrazumevaju takvi prostori koji se mogu pokriti bikompaktima prebrojivog karaktera u X, tj. da za svaki bikompakt F pokrivača postoji familija njegovih otvorenih okolina $\varphi = \{U_i : i \in N\}$ sa svojstvom da za proizvoljni otvoreni skup $O \supset F$, postoji $U_k \in \varphi$ da $F \subset U_k \subset O$.

[V.: Teoremu 3.14, p.41 i definicije 3.5. i 3.8. p.p.33, 34 iz članka A.Arhangelskog: Bikompaktnыe množestva..., Trudi Mosk.Mat. obšč. 1965, t.13].

Prema teoremi 5.5. biće svaka semineprekidna odozgo, otvorena i Y-bikompaktna višeznačna slika metričkog prostora q-prostor, tj. svaki tačkasto prebrojivi prostor biće q-prostor, jer je svaki metrički prostor q-prostor.

Zaključne primedbe

Kao što se vidi prvi deo ovog rada predstavlja pokušaj da se teorija višeznačnih preslikavanja zasnuje uzimajući kao primarni pojam jednoznačna preslikavanja.
Takav metodološki pristup omogućuje da se uvidi značaj svojstva aditivnosti višeznačnih / i jednoznačnih/preslikavanja kao i njegovu povezanost sa definisanjem slika podskupova pri višeznačnim preslikavanjima. Rezultati dobijeni takvim pristupom mogu da predstavljaju osnov za dalja istraživanja.
Druga istraživanja u ovom radu , takodje predstavljaju pokušaj da se,sledeći ideje V.I.Ponomareva,reše neki problemi o čuvanju izvesnih invarjanti topoloških prostora pri višeznačnim preslikavanjima uvodeći u razmatranje i nove klase višeznačnih preslikavanja. Veliki deo ovog rada,posvećen istraživanjima svojstava višeznačnih preslikavanja odredjenih klasa topoloških preslikavanja,sadrži nove rezultate,od kojih su neki uopštenja već poznatih dobijenih za jednoznačna preslikavanja od raznih autora.

I tabela

	F	F^*	F'	F^b	formula
1	seminoprekidno odozgo	–	zatvoreno	otvoreno	$\overline{F'B} \subset F'\overline{B}$, $B \subset Y$
2	semineprekidno odozdo	–	otvoreno	zatvoreno	$F\overline{A} \subset \overline{FA}$, $A \subset X$ $\overline{F^bB} \subset F^b\overline{B}$, $B \subset Y$
	neprekidno	–	zatvoreno otvoreno	otvoreno zatvoreno	$\overline{F'B} \subset F'\overline{B}$, $F^bB \subset F^bB$, $B \subset Y$; $F\overline{A} \subset \overline{FA}$, $A \subset X$
3	zatvoreno	otvoreno	semineprekidno odozgo	–	$\overline{FA} \subset F\overline{A}$, $A \subset X$
4	otvoreno	zatvoreno	semineprekidno odozdo	–	$F'\overline{B} \subset \overline{F'B}$, $B \subset Y$ $\overline{F^{\#}A} \subset F^{*}\overline{A}$, $A \subset X$
	ZATVORENO-otvoreno	otvoreno – zatvoreno	neprekidno	–	$\overline{FA} \subset F\overline{A}$, $\overline{F^{\#}A} \subseteq F^{\#}\overline{A}$, $A \subset X$; $F'\overline{B} \subset \overline{F'B}$, $B \subset Y$

II tabela

F	$F^\#$	F'	F^b	formula
zatvoreno semineprekidno odozdo	otvoreno	otvoreno	zatvoreno	$\overline{FA} = F\bar{A}, \quad A \subset X$
otvoreno semineprekidno odozgo	zatvoreno	zatvoreno semineprekidno odozdo	otvoreno	$\overline{F'B} = F'\bar{B}, \quad B \subset Y$
otvoreno neprekidno	zatvoreno	otvoreno-zatvoreno semineprekidno odozdo	otvoreno-zatvoreno	$\overline{F'B} = F'\bar{B}$ $\overline{F^bB} \subset F^b\bar{B}, \quad B \subset Y$ $F\bar{A} \subset \overline{FA}, \quad A \subset X$
zatvoreno neprekidno	otvoreno	otvoreno-zatvoreno semineprekidno odozgo	otvoreno-zatvoreno	$\overline{FA} = F\bar{A}, \quad A \subset X$ $\overline{F'B} \subset F'\bar{B}, \quad B \subset Y$ $\overline{F^\#A} \subset F^\#\bar{A}$
neprekidno otvoreno-zatvoreno	otvoreno-zatvoreno	neprekidno otvoreno-zatvoreno	otvoreno-zatvoreno	$\overline{FA} = F\bar{A}, \ \overline{F^\#A} \subset F^\#\bar{A},$ $\overline{F'B} = F'\bar{B}, \ F^bB \subset F^bB,$ $A \subset X, \quad B \subset Y$

LITERATURA

[1] A. Arhangelskij: Bikompaktne množestva i topologija prostranstv, Trudi Mosk. mat. ob. 1965, t.13, 3-55.

[2] A.Arhangelskij: Obodnom klase prostranstv,... Mat.sb. 1965, 67 /1o9/, №9, 55-88.

[3] A.Arhangelskij: Otabraženija i prostranstva Uspehi mat. nauk, 1966, t.21, vip. 4 /130/, 133-184.

[1] C.Berge: Espaces topologiges, fonctions multivoques, Dunod, 1959.

[1] C.Borges: A. study of multivalued functions, Pacific J. Math. vol.23, №3, 1967, 452-461.

[1] N.Bourbaki: Obščaja topologija, osnovnie strukturi, Moskva 1968.

[1] J.L.Kelley: General topology, New York, 1957.

[1] Đ. Kurepa: Teorija skupova, Zagreb, 1951.

[1] C.Kuratowski: Topologija, t.I i II, Moskva 1966.

[1] C.Kuratowski, A.Mostowski: Set theory, 1967, Amsterdam.

[1] E.Michael: A. note on closed maps and compact sets, Israel J.Math. 1964, sec.F , №3, 173-176.

[1] Z.Mamuzić: Uvod u opštu topologiju, Beograd, 1960.

[1] K.Morito, S.Hanai: Closed mappings and Metric spaces, Proc. Japan, Acad.,vol. 32, 1956, 10-14.

[1] V.I. Ponomarev: O svojstvah topologičeskih prostranstv..., Mat. sb. 1959, t.51 /93/, №4, 515-536.

[1] V.I. Ponomarev: Novoe prostranstvo zamknutih množestv..., Mat.sb. 1959. t.48 /90/, №2, 191-212.

[1] J.M. Smirnov: O siljno parakompaktnih prostranstvah, Izv. Akad.Nauk. serija mat. 20, 1956, 253-274.

[1] W.L. Strother: Continuons multivalued functions. Bol. soc. Math. São Paulo, vol. 10, F , et 2, 1958, 87.

S A D R Ž A J