

BIBLIOTEKA
MATEMATIČKOG
INSTITUTA

Nenad Mladenović

**Kontinualni
lokacijski problemi**

**Matematički institut
SANU**

Nenad Mladenović

**Kontinualni
lokacijski problemi**

**Matematički institut
SANU**

Издавач: Математички институт САНУ, Београд, Кнеза Михаила 35
Рецензент: Вера Вујчић, професор Факултета организационих наука
Примљено за штампу 22. септембра 2003. године
одлуком Научног већа Математичког института
За издавача: Богољуб Станковић, главни уредник
Технички уредник: Драган Благојевић
Штампа: "Академска издања", Земун
Штампање завршено јула 2004.
ISBN 86-80593-35-4

CIP – Каталогизација у публикацији
Народна библиотека Србије, Београд

599.863

Младеновић, Ненад

Kontinualni lokacijski problemi / Nenad Mladenović.

– Београд : Математички институт САНУ, 2004 (Земун : Академска издања).

– 50 стр. : илустр., граф. прикази ; 24 cm.

Тираж 200. – Библиографија: стр. 49–50.

ISBN 86-80593-35-4

а) Математички модели

COBISS.SR-ID 115683596

PREDGOVOR

Jedna od oblasti primenjene i industrijske matematike i operacionih istraživanja čiji se rezultati najčešće koriste u praktičnim problemima je *Teorija lokacije*. Generalno govoreći, problem spada u lokacijski ako je neka od promenljivih (nepoznatih) u zadatku optimizacije lokacija nekog objekta (odnosno njene koordinate u dvo-dimenzionalnom ili tro-dimenzionalnom realnom prostoru). Zbog velikog broja primena, ova oblast se počela razvijati i u teorijskom pravcu.

Najčešća podela matematičkih modela lokacije je na kontinualne, diskretne i mrežne. Kod prvih se nepoznate nalaze u kontinualnom prostoru, kod diskretnih se od datog broja ponuđenih rešenja bira ono koje optimizuje neki zadati kriterijum, dok se u mrežnim optimalno rešenje nalazi ili u temenu zadatog grafa ili mreže, ili duž zadatih lukova. Dakle mrežni modeli mogu imati ili diskretna (u temenima grafa) ili kontinualna (duž lukova) rešenja.

U ovoj knjizi biće reči samo o kontinualnim modelima. Prilikom izlaganja trudio sam se da materijal bude dostupan što širem krugu čitalaca, dakle ne samo diplomskim i posle-diplomskim studentima, već i inženjerima i drugim radoznalim čitaocima primenjenih matematičkih disciplina. Minimalno predznanje iz matematike za praćenje većine izloženog teksta je na nivou Matematike I na matematičkim i tehničkim fakultetima u Srbiji.

Prva verzija ovog rukopisa nastala je 1988 godine kao deo skripata namenjenih studentima treće godine Fakulteta organizacionih nauka, a u okviru predmeta *Matematički modeli i metode*. Skripta, koja su interno deljena studentima u periodu od 1988 do 1993 dok sam predavao dotični predmet, pored Teorije lokacije sadržala su i Višekriterijumsko programiranje. U ovoj knjizi deo tog rukopisa je proširen i nekim mojim novijim rezultatima publikovanim u vodećim časopisima Operacionih istraživanja, a do kojih sam došao sa svojim kolegama s kojima sam saradivao u poslednjih desetak godina.

Izlaganje kontinualnih lokacijskih problema biće podeljeno u sedam odeljaka koja sadrže sledeće: (i) u Uvodu se navode primeri primene, klasifikacije problema i istorijat; (ii) osnovni *Min-Sum* model lokacije jednog objekta (tzv. Veberov problem) i osobine modela vezane za različite načine merenja rastojanja, obrađen je u drugom odeljku; (iii) prošireni *Min-Sum* modeli lokacije jednog objekta u kojima se razmatraju i različiti oblici u skupu ograničenja, kao i različite nelinearne funkcije cilja, dati su u trećem odeljku; (iv) osnovni *Min-Max* model lokacije jednog objekta (tzv. Raulsov problem) izložen je u četvrtom odeljku; (v) dvo-kriterijumski zadatak predstavljen kao linearna kombinacija Veberovog i Raulsovog zadatka formulisan

je u petom odeljku; (vi) modeli *lokacije više novih objekata* i (vii) *Lokacijsko-alokacijski* modeli, obrađeni su u poslednja dva odeljka. Originalni rezultati autora izloženi su u odeljcima (vi) i (vii).

Pri izlaganju težište će biti bačeno na procedure, dok će se teorijski obraditi samo problemi koji su za ovu oblast fundamentalni.

Zahvalnost dugujem pre svega svojim kolegama s kojima sam saradivao i zajednički objavljivao radove u poslednjih desetak godina: akademik Pierre Hansen s montrealnog univerziteta; Jack Brimberg s Kraljevske vojne škole u Kanadi; Jose Moreno s univerziteta La Laguna u Španiji; Frank Plastria i Martine Labbe sa Slobodnog univerziteta u Briselu, Draganu Uroševiću s Matematičkog instituta u Beogradu.

Zahvaljujem se i recenzentu knjige profesoru Veri Kovačević-Vujčić na korisnim sugestijama, koje su poboljšale kako način prezentovanja, tako i kvalitet izlaganja u knjizi.

Zahvaljujem se Mariji Kuzmanović na tehničkoj pomoći, a i svojoj supuzi Branki na kucanju delova knjige, kao i na dugogodišnjoj toleranciji, pa joj zapravo i posvećujem ovu knjigu.

Autor

1. UVOD

Teorija lokacije je jedna od oblasti primenjene i industrijske matematike i operacionih istraživanja čiji se rezultati najčešće koriste u praktičnim problemima. Generalno govoreći, problem spada u lokacijski ako je neka od promenljivih (nepoznatih) u zadatku optimizacije lokacija nekog objekta (odnosno njene koordinate u dvodimenzionalnom ili trodimenzionalnom realnom prostoru). Zbog velikog broja primena, ova oblast se počela razvijati i u teorijskom pravcu.

Matematički modeli lokacije najčešće se dele na *kontinualne*, *diskretne* i *mrežne*. Kod prvih se nepoznate nalaze u kontinualnom prostoru, kod diskretnih se od datog broja ponuđenih rešenja bira ono koje optimizuje neki zadati kriterijum, dok se u mrežnim optimalno rešenje nalazi ili u temenu zadatog grafa ili mreže, ili duž zadatih lukova. Dakle mrežni modeli mogu imati ili diskretna (u temenima grafa) ili kontinualna (duž lukova) rešenja. U ovoj knjizi biće reči samo o kontinualnim modelima.

Matematički modeli teorije lokacije imaju za cilj da odgovore i na neka od sledećih pitanja:

- (i) Koliko novih objekata treba otvoriti (postaviti)?
- (ii) Gde će oni biti locirani?
- (iii) Koliko veliki (tj. kog kapaciteta) će biti svaki od otvorenih objekata?
- (iv) Kom novom objektu će biti pridodeljen (alociran) svaki od korisnika usluga?

Odgovori na ova pitanja naravno zavise od konkretnog problema koji se rešava. Ako treba odrediti lokacije protiv-požarnih stanica ili vozila za hitnu pomoć, tada su nove lokacije u naseljenim regionima. Ako treba odrediti lokacije deponija ili hemijskog ili nuklearnog otpada, tada izbor pada na lokacije što je moguće dalje od naselja. Koliko novih objekata i koje veličine oni treba da budu, najčešće je kompromis između cene i kvaliteta usluge: više servisa (novih objekata) poboljšavaju kvalitet usluge, ali povećavaju i cenu. Kao odgovor na iv), korisnici se najčešće alociraju svom najbližem centru, mada u nekim slučajevima takvo raspoređivanje ne mora biti optimalno.

1.1. Tipični primeri primene. Dizajniranje mreže. Gradske vlasti su suočene s problemom dizajniranja vodovodne i kanalizacione mreže. Pri tome treba odrediti lokacije sabirnih centara (odnosno mesta gde se voda prerađuje) tako da se minimizuje ukupna dužina cevi.

Lokacija skladišta. Neka kompanija želi da odredi lokacije svojih skladišta kako bi bila u stanju da brže i jeftinije usluži klijente. Svaka moguća lokacija skladišta

karacteriše se fiksnim troškovima zakupa, transportnim troškovima po jedinici robe do korisnika i ograničenošću svojih kapaciteta.

Lokacija vatrogasnih brigada. Treba odrediti lokacije fiksnog broja vatrogasnih brigada u gradu, sa ciljem da se minimizuje maksimalno rastojanje od svake zgrade do njoj najbliže brigade.

Konkurentno lociranje objekata. Firma želi da otvori novu radnju u gradskoj četvrti gde konkurenti već imaju radnje. Zahtevi kupaca za određenom robom u toj četvrti su poznati, ali se mogu i povećati uvođenjem nove prodavnice. Cilj je da se odredi gde otvoriti radnju da bi se maksimizirao profit u uslovima konkurencije i podele tržišta.

1.2. Klasifikacija lokacijskih problema i modela. Lokacijski problemi i modeli mogu se klasifikovati na različite načine u zavisnosti od principa klasifikacije. Ako se posmatra topografija, lokacijski problemi se dele na *kontinualne, diskretne i mrežne*; po obliku funkcije cilja podela je na *Min-Sum* i *Min-Max* modele; lokacijski modeli mogu biti *statički* i *dinamički, jedno-kriterijumski* i *više-kriterijumski, jedno-robni (single-comodity)* i *više-robni (multi-comodity)*, neograničenog kapaciteta novih objekata (*uncapacitated*) i ograničenog (*capacitated*), *deterministički* i *stohastički*, itd. Jednom rečju gotovo sve moguće podele modela operacionih istraživanja mogu se primeniti i na lokacijske probleme. Bilo je više pokušaja u literaturi da se izvrši stroga klasifikacija svih lokacijskih modela (videti npr. Brandeau i Chiu (1989)), ali se ti pokušaji nisu održali jer se uvek može naći lokacijski model koji ne upada ni u jednu od unapred određenih klasa.

Mi ćemo sada izložiti nekoliko najčešćih načina podele problema lokacije, a u kasnijem izlaganju držaćemo se ovog prvog.

Kontinualni, diskretni i mrežni modeli. Jedna od osnovnih razlika između lokacijskih modela je način na koji se predstavljaju promenljive. Ako novi objekti mogu biti locirani u ravni (R^2) ili prostoru (R^3), govori se o *kontinualnim* modelima: polje promenljivih je kontinuum, odnosno dopustivi skup ima beskonačno mnogo tačaka. Ako je skup mogućih lokacija unapred zadat ali treba odrediti neki njegov podskup tako da se optimizira neki kriterijum, tada je definisan *diskretan* lokacijski model. *Mrežni* modeli imaju elemenata i kontinualnih i diskretnih. Polje mogućih novih lokacija je bilo gde na zadatoj mreži; na njoj je skup čvorova (temena) konačan, a skup tačaka na lukovima koji spajaju temena, beskonačan (kontinuum).

Oblik funkcije cilja. U Teoriji lokacije najčešće se razmatraju dva tipa problema: *Min-Sum* i *Min-Max*. U prvoj grupi funkcijom cilja se minimizuje težinski zbir svih rastojanja novih i fiksnih objekata. Na taj način se favorizuju "prosečni" korisnici, a zanemaruju udaljeni ili izolovani. Drugi tip funkcije cilja ravnopravno tretira sve korisnike tako što se nalaze nove lokacije koje minimizuju maksimalno rastojanje između postojećih i nepoznatih objekata. Ovi modeli se, na primer, koriste pri lokaciji TV odašiljača ili lokaciji vatrogasnih brigada, gde i udaljeni stanovnici imaju ista prava kao i oni grupisani u gradovima.

Broj novih objekata. Način na koji se mogu karakterisati lokacijski modeli je i broj objekata (servisa) koje treba otvoriti. U nekim problemima je ovaj broj unapred zadat (npr. u Veberovom i lokacijsko-alokacijskom kontinualnom problemu, u

diskretnim i mrežnim zadacima p -težišta i p -centra). Ovakve modele nazivamo *endogenim*. Nasuprot njima su *egzogeni* modeli, gde je broj novih servisa nepoznata veličina i njena vrednost se dobija kao rezultat optimizacije. Kao primer egzogenih modela navešćemo *jednostavni lokacijski* (ili zemljišni) *problem* (*simple-plant location* ili *uncapacitated facility location*) i problem prekrivanja skupa.

Dalje moguće podela endogenih modela (koji će se kasnije razmatrati) su na *jednoobjektne*, *višeobjektne* i *lokacijsko-alokacijske*. Ove dve poslednje grupe modela se opet mogu podeliti u dve grupe: bez interakcije između novih objekata i s interakcijom. Svaka od ovih klasa i podklasa modela, matematički posmatrano, imaju svoje teorijske specifičnosti, pa se zato odvojeno razmatraju.

Lokacijski problemi privatnog i javnog sektora. U privatnom sektoru, ulaganje i dobit od ulaganja se meri novčanim jedinicama. Dakle funkcija cilja može predstavljati minimizaciju troškova, maksimizaciju profita, ili dvo-ktiterijumski i jedno i drugo. Ovi ciljevi čine modele ovog tipa relativno jednostavnim.

U javnom sektoru, veliki broj ciljeva koji se ne izražavaju direktno novcem, takođe treba uvesti u model. Na primer, u lokacijama hitnih medicinskih službi, gubitak života se ne može izraziti novcem, ili odvoženje opasnih hemijskih supstanci u zabačene krajeve, ne treba meriti cenom prevoza.

1.3. Kratak istorijat. Francuski matematičar Pjer de Ferma (1601–1665) se najčešće navodi kao prvi koji je postavio jedan lokacijski problem: *naći tačku trougla čiji je zbir rastojanja do temena minimalan*. Tu tačku je nazvao petom značajnom tačkom trougla. Galilejev učenik, Toričeli (1608–1647) navodi se kao prvi koji je uspeo da reši zadatak konstruktivno: konstruisati jednakostranične trouglove nad svakom stranicom, sa trećim temenom sa suprotne strane od unutrašnjosti početnog trougla (slika 2). Tražena tačka nalazi se na preseku krugova opisanih oko ovih jednakostraničnih trouglova.



Cavalieri



Torricelli



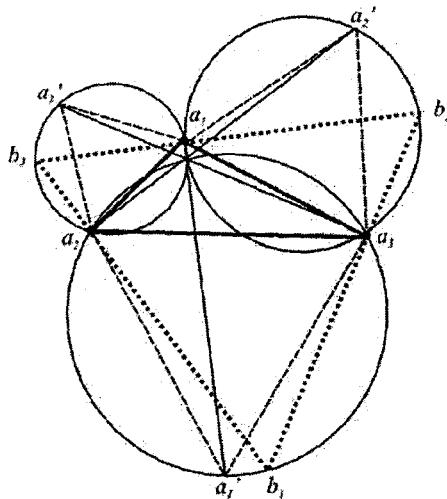
Fermat

SLIKA 1. Ko je prvi formulisao i rešio jedan lokacijski problem?

Batista Cavalieri (1598–1647) pokazuje da duži koje spajaju "Toričelijevu tačku" s temenima trougla, obrazuju ugao od 120 stepeni. Sto godina kasnije (1750), engleski matematičar Tomas Simpson (1710–1761) predlaže jednostavnije konstruktivno rešenje. On takođe koristi jednakostranične trouglove kao i Toričeli, ali

traženu tačku nalazi kao presek pravih dobijenih spajanjem novih temena jednakostraničnih trouglova i datih temena sa suprotne strane (slika 2). Ove prave su kasnije nazvane "Simpsonove prave" (tj. prave $a_1a'_1$, $a_2a'_2$ i $a_3a'_3$ na slici 2). U obadve navedene konstruktivne metode pretpostavlja se da su svi unutrašnji uglovi trougla manji od 120 stepeni. Ako to nije slučaj, onda je Toričelijeva tačka u temenu tupog ugla. U istom radu Simpson, kao zadatak za vežbu, navodi uopštenje na težinsku verziju problema: svakoj tački trougla pridodeljena je težina (neki realan broj); naći tačku takvu da je zbir težinskih rastojanja od nje do tačaka trougla minimalan.

Na slici 2 je konstruisan i trougao $b_1b_2b_3$ opisan oko trougla određenog s tri date tačke. On je zapravo rešenje sledećeg problema (prvi put formulisanog 1810. godine u "Annals de Mathematiques Pures et Appliquées", Vol I, str. 384): *naći najveći jednakostranični trougao opisan oko datog trougla*. U sledećem volumenu istog časopisa (1811) dato je i rešenje: stranice traženog trougla normalne su na prave $a_1a'_1$, $a_2a'_2$ i $a_3a'_3$ (tj. na Simpsonove prave). Kako je kasnije primetio Kuhn (1967) ovaj zadatak je verzija duala problema koji je postavio Ferma: ako je poznata Toričelijeva tačka (primal), tada je lako konstruisati najveći opisan jednakostranični trougao (dual) i obrnuto. Inače, ideja dualnosti je jedna od fundamentalnih u metodama optimizacije: svaki optimizacioni zadatak ima svog parnjaka (dual) baziranog na suprotnostima (ili je neka vrsta dopune do celine). Dual (parnjak) minimizacije je maksimizacija; relaciji \leq parnjak je \geq , itd. U našem slučaju Toričelijeva tačka je rezultat minimizacije, pa je dual rezultat maksimizacije površine opisanog jednakostraničnog trougla.



SLIKA 2. Konstruktivna rešenja nalaženja pete značajne tačke trougla (• – fiksne tačke, * – Toričelijeva tačka)

U 20. veku, austrijski ekonomista Veber (1909) predlaže težinski model s tri tačke u problemu nalaženja lokacije fabrike, a s ciljem minimizacije transportnih troškova od fabrike do tri grupe snabdevača sirovinama. Matematički deo knjige u Dodatku napisao je Georg Pick, koji je naveo i geometrijsko rešenje problema. Interesantno je da je uopštena težinska verzija problema na m fiksni tačkama kasnije vezana za Veberovo ime, iako on nije prvi ni predložio model, niti ga je prvi rešio. On je prvi našao primenu modela u industriji (o daljim istorijskim detaljima, videti npr. Wesolowski, 1993).

Pomenimo ovde jedan sličan problem za koji se u literaturi ustalio naziv "Štajnerov problem" (Jacob Steiner, 1796–1863), a koji se najčešće ne uvrštava u lokacijske: *naći mrežu minimalne dužine, tako da sve date tačke pripadaju mreži*. Za tri date tačke, Štajnerov i Veberov (tj. Fermaov) problem imaju isto rešenje. Interesantno je Kuhn-ovo (1967) zapažanje po kome je Štajner potpuno "nevin" u Štajnerovom problemu: on ga nije ni postavio, ni rešio ni praktično primenio. Njegova zasluga je u bezuspešnim pokušajima da problem reši. Ipak, Kurant i Robins (Courant i Robbins, 1941) greškom problem nazivaju Štajnerovim, a kasnije se taj naziv ustalio i nije bilo lako nazvati ga drugačije bez opasnosti od konfuzije.

2. LOKACIJA JEDNOG OBJEKTA (VEBEROV PROBLEM)

Kao što je već rečeno, u kontinualnom lokacijskom zadatku polje mogućih novih lokacija (koordinata traženih tačaka) je kontinuum: treba izabrati tačke u ravni (ili prostoru) kojim se dostiže minimum ili maksimum nekog kriterijuma, gde je polje mogućih rešenja beskonačno.

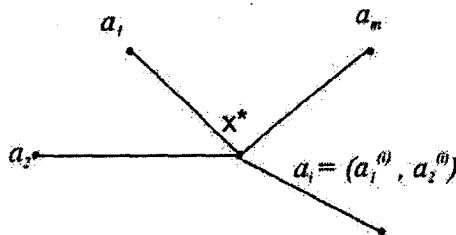
Veberov problem se može formulisati na sledeći način: dato je m tačaka u ravni (a_1, a_2, \dots, a_m) i m skalara (težina) pridodeljenih svakoj tački (w_1, w_2, \dots, w_m) . Naći tačku x za koju je suma težinskih rastojanja do datih tačaka minimalna.

Ako na primer $a_i = (a_1^{(i)}, a_2^{(i)})$, $i = 1, \dots, m$, predstavljaju koordinate zgrada u nekom naselju u kome treba podići novu robnu kuću s nepoznatim koordinatama $x = (x_1, x_2)$, tada težinski koeficijenti w_i koji se mogu pridodeliti zgradi, mogu predstavljati broj njenih stanovnika. Funkcijom cilja se minimizuje težinski zbir rastojanja (ili cena prevoza) do nove robne kuće. Matematički model ovog problema je

$$(1) \quad (\min) f_w(x) = \sum_{i=1}^m w_i \cdot d(x, a_i),$$

gde su:

- $x = (x_1, x_2)$ – koordinate nepoznate lokacije;
- m – broj fiksnih (postojećih) lokacija ili korisnika,
- $d(x, a_i)$ – rastojanje i -tog korisnika do nepoznate lokacije,
- n_i – broj elemenata i -tog korisnika,
- r_i – jedinična cena prevoza i -tog korisnika,
- $w_i = n_i r_i$ – težinski koeficijenti pridodeljeni i -tom korisniku,
- $a_i = (a_1^{(i)}, a_2^{(i)})$ – koordinate (lokacije) i -tog korisnika,
- f_w – funkcija cilja Veberovog problema.



SLIKA 3. Veberov problem s Euklidovom merom rastojanja

Ovaj model je model nelinearnog programiranja, bez prisustva skupa ograničenja, odnosno (1) je zadatak bezuslovne minimizacije po x , jer je funkcija rastojanja $d(x, a_i)$ nelinearna. Poznato je da se $d(x, a_i)$ (odnosno $d(a_i, x)$, jer je funkcija rastojanja simetrična) može predstaviti na više načina, što je uslovljeno konkretnim problemom koji se rešava u praksi. Sada će se izložiti osobine Veberovog problema za različite načine merenja rastojanja.

2.1. Euklidova metrika. Ako x i z pripadaju R^n , tada je njihovo Euklidovo rastojanje određeno sa

$$d(x, z) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - z_i)^2} = \|x - z\|_2,$$

gde $\|\cdot\|_2$ predstavlja Euklidovu normu. Funkcija cilja (1) sada ima oblik

$$(2) \quad (\min) f_w(x) = \sum_{i=1}^m w_i d(x, a_i) = \sum_{i=1}^m w_i \left(\sum_{j=1}^n (x_j - a_j^{(i)})^2 \right)^{1/2}.$$

U nelinearnom programiranju (NP) osnovno je pitanje da li je konkretan problem konveksan ili ne, iz razloga što se konveksni problemi daleko lakše rešavaju. Sledeći stav govori da je funkcija cilja Veberovog problema konveksna. U daljem tekstu ograničićemo se na slučaj $n = 2$, iako većina stavova koji će biti navedeni važe i u opštem slučaju, tj. za svako $n \geq 2$.

STAV 1. *Ako su $a_i = (a_1^{(i)}, a_2^{(i)})$ niz datih tačaka u R^2 dužine m , tada je f_w definisana sa (2), konveksna funkcija.*

DOKAZ. Dovoljno je dokazati da je $d(x, a_i)$ konveksna za svako i , jer je pozitivna linearna kombinacija konveksnih funkcija konveksna. Dokazaćemo da je konveksna sledeća funkcija:

$$(3) \quad g(x) = d(x, z) = ((x_1 - z_1)^2 + (x_2 - z_2)^2)^{1/2},$$

odnosno da važi:

$$(4) \quad g((1 - \lambda)x' + \lambda x'') \leq (1 - \lambda)g(x') + \lambda g(x'')$$

za svako $\lambda \in [0, 1]$ i $x', x'' \in R^2$. Koristićemo poznatu tzv. nejednakost trougla,

$$d(p + q, z) \leq d(p, z) + d(q, z),$$

gde su $p = (p_1, p_2)$, $q = (q_1, q_2)$ tačke u ravni. Ova nejednakost važi za svaku funkciju rastojanja (metriku), pa i za Euklidovu. Ona zapravo tvrdi da stranica trougla ne može biti veća od zbira druge dve stranice. Traženo tvrđenje konveksnosti se dobija zamenom vektora p i q u nejednakost trougla na sledeći način: $p = (1 - \lambda)x'$, $q = \lambda x''$, tj.

$$\begin{aligned} g((1 - \lambda)x' + \lambda x'') &= d((1 - \lambda)x' + \lambda x'', z) = d(p + q, z) \\ &\leq d(p, z) + d(q, z) = d((1 - \lambda)x', z) + d(\lambda x'', z) \\ &= (1 - \lambda)d(x', z) + \lambda d(x'', z) = (1 - \lambda)g(x') + \lambda g(x'') \quad \square \end{aligned}$$

Stavom 1 dokazano je da (2) predstavlja zadatak (bezuslovnog) nelinearnog konveksnog programiranja, u kome se za uslove prvog reda nalazi gradijent

$$\nabla f_w(x) = \left(\frac{\partial f_w}{\partial x_1}, \frac{\partial f_w}{\partial x_2} \right),$$

gde je

$$(5) \quad \frac{\partial f}{\partial x_j} = \sum_{i=1}^m \frac{w_i \cdot (x_j - a_j^{(i)})}{d(x, a_i)}, \quad j = 1, 2.$$

Očigledno su parcijalni izvodi prekidne funkcije pa $f_w(x)$ nije glatka. Tačke prekida su postojeće lokacije, tj. za $x = a_i$, jer je $d(a_i, a_i) = 0$. Sledeći stav određuje uslove pod kojima je optimalno rešenje u nekoj od fiksnih tačaka. On predstavlja uopštenje tvrđenja izloženog ranije, a koje se odnosi na tri tačke: kod trougla s jednim uglom $\geq 120^\circ$, Veberova tačka se nalazi u temenu tupog ugla.

STAV 2. Funkcija $f_w(x)$ dostiže minimum u jednoj od fiksnih tačaka

$$a_r = (a_1^{(r)}, a_2^{(r)}), \quad r \in \{1, \dots, m\}$$

ako i samo ako važi

$$c_r = \left(\left(\sum_{i=1}^m \frac{w_i \cdot (a_1^{(r)} - a_1^{(i)})}{d(a_r, a_i)} \right)^2 + \left(\sum_{i=1}^m \frac{w_i \cdot (a_2^{(r)} - a_2^{(i)})}{d(a_r, a_i)} \right)^2 \right)^{1/2} \leq w_r$$

DOKAZ. Ideja dokaza je da se pokaže da je razlika desne i leve strane gornje nejednakosti zapravo minimalna vrednost izvoda po pravcu funkcije f_w u tački a_r . Ako je ta minimalna vrednost nenegativna (dovoljan uslov), sledi da je f_w rastuća po svim pravcima iz a_r , odnosno da je a_r minimum. Obrnuto, ako je a_r minimum (potreban uslov), tada je i izvod po svakom pravcu iz tačke a_r (pa i po minimalnom) nenegativan. Pokažimo sada da je razlika desne i leve strane nejednakosti iz ovog stava vrednost izvoda po pravcu $f_w(a_r)$.

Obeležimo ovu nejednakost sa $R_1^2 + R_2^2 \leq w_r^2$, i posmatrajmo $f_w(a_r + tb)$, gde je $b = (b_1, b_2)$ jedinični vektor ($b_1^2 + b_2^2 = 1$):

$$f_w(a_r + tb) = \sum_{i=1}^m w_i d(a_r + tb, a_i).$$

Lako se može pokazati da je izvod po pravcu određenom sa vektorom b u tački a_r jednak

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{df_w}{dt} = \lim_{t \rightarrow 0} (w_r + b_1 R_1(t) + b_2 R_2(t)) = w_r + b_1 R_1 + b_2 R_2$$

Sada ćemo pokazati da je minimalni izvod po pravcu jednak $w_r - \sqrt{R_1^2 + R_2^2}$, što je zapravo razlika desne i leve strane nejednakosti iz ovog stava.

$$\min_{(b_1, b_2)} (w_r + b_1 R_1 + b_2 R_2) = \min_{b_1} \left(w_r + b_1 R_1 + R_2 \sqrt{1 - b_1^2} \right)$$

Nalaženjem minimuma (po jednoj nepoznatoj) i korišćenjem uslova $b_1^2 + b_2^2 = 1$, dobijamo rešenje

$$b_1^* = -\frac{R_1}{\sqrt{R_1^2 + R_2^2}}; \quad b_2^* = \frac{R_2}{\sqrt{R_1^2 + R_2^2}}$$

Zamenom dobijenih vrednosti za b_1^* i b_2^* u formulu za izvod po pravcu, dobija se

$$w_r + b_1^* R_1 + b_2^* R_2 = w_r - \sqrt{R_1^2 + R_2^2}.$$

Ako je a_r minimum funkcije $f_w(x)$, tada je f_w rastuća po svakom pravcu iz a_r , tj. njen minimalan izvod po pravcu, $w_r - \sqrt{R_1^2 + R_2^2}$, mora biti nenegativan. Očigledno važi i obrnuto. \square

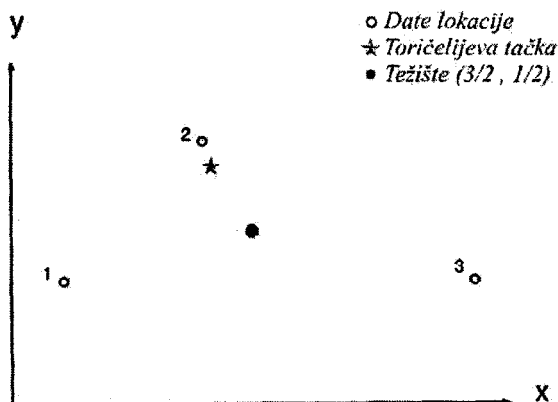
Pre nego što pređemo na metode rešavanja Veberovog zadatka, navešćemo drugi lokacijski model čije se rešenje može dobiti u analitičkom obliku. To je problem nalaženja težišta ili centroida, gde se umesto $d(x, a_i)$, razmatra $d^2(x, a_i)$,

$$(6) \quad f_c(x) = \sum_{i=1}^m w_i d^2(x, a_i)$$

Izjednačavanjem parcijalnih izvoda funkcije $f_c(x)$ s nulom, dobija se rešenje koje se naziva težište ili centroid:

$$(7) \quad x_j^c = \frac{\sum_{i=1}^m a_j^{(i)} w_i}{\sum_{i=1}^m w_i}, \quad j = 1, 2.$$

Primetimo da za $w_i = 1$ rešenje (7) predstavlja aritmetičku sredinu koordinata datih tačaka. Mada se Veberova tačka i centroid mogu dosta razlikovati (videti sliku 4), u praksi se često rešenje dato sa (7) pogrešno koristi kao rešenje problema (2).



SLIKA 4. Zadanim tačkama $a_1(0,0)$, $a_2(1,1)$ i $a_3(3,0)$, tačka težišta i Toričelijeva tačka su različite.

2.2. Metode rešavanja problema s Euklidovom merom rastojanja.

Kako je $f_w(x)$ konveksna (stav 1) to se u rešavanju može koristiti bilo koja metoda bezuslovne minimizacije koja ne zahteva glatkost. Na žalost, u ovom slučaju konvergencija klasičnih metoda je veoma spora u slučajevima kada je optimalna lokacija u nekoj od fiksnih tačaka. Iz tog razloga se prvo proveriti da li je to slučaj (stav 2), pa ako nije, primeni se neka metoda bezuslovne minimizacije. Čak šta više, $f_w(x)$ se može jednostavno transformisati u glatku funkciju korišćenjem tzv. hiperbolijske aproksimacije:

$$d^H(x, z) = \sqrt{(x_1 - z_1)^2 + (x_2 - z_2)^2 + \varepsilon},$$

gde je ε proizvoljan mali broj (Wesolowski i Love, 1972).

U slučaju hiperbolijske aproksimacije, dodatni problem je numerička nestabilnost: vrednost funkcije cilja reformulisano problema može biti veoma blizu vrednosti originalnog zadatka, dok se njihova rešenja (koordinate) mogu značajno razlikovati.

Drugi popularniji način nalaženja rešenja Veberovog problema je u numeričkom rešavanju sistema nelinearnih jednačina

$$(8) \quad \frac{\partial f}{\partial x_j} = \sum_{i=1}^m \frac{w_i \cdot (x_j - a_j^i)}{d(x, a_i)} = 0, \quad j = 1, 2$$

Iterativnu metodu za nalaženje rešenja sistema (8), prvi je predložio Endre Weiszfeld, 1937. godine (uzgred, njegovo pravo ime na poljskom je Andrew Vazonyi), ali je njena konvergencija dokazana tek šezdesetih godina (Kuhn i Kienne, 1962).

Ako se sistem (8) razloži, kao

$$x_j \cdot \sum_{i=1}^m \frac{w_i}{d(x, a_i)} = \sum_{i=1}^m \frac{w_i a_j^{(i)}}{d(x, a_i)}, \quad j = 1, 2$$

i kada se x_j , $j = 1, 2$ eksplicitno izrazi, dobija se

$$(9) \quad x_j = \frac{\sum_{i=1}^m \frac{a_j^{(i)} \cdot w_i}{d(x, a_i)}}{\sum_{i=1}^m \frac{w_i}{d(x, a_i)}}, \quad j = 1, 2,$$

u kome su nepoznate x_1 i x_2 na obe strane jednakosti.

Ovaj ekvivalentni oblik predstavljanja uslova prvog reda (8), može se iskoristiti za uspostavljanje iterativne procedure, što je čest slučaj u numeričkoj analizi (npr. Gaus-Zajdelova metoda rešavanja sistema linearnih jednačina). Naime, zada se proizvoljno (početno) rešenje (x_1, x_2) , izračuna se desna strana jednakosti (9) za date x_1 i x_2 , što predstavlja nove vrednosti za x_j , $j = 1, 2$. Sada se te nove vrednosti ubace na desnu stranu, itd. Ovaj iterativni postupak se ponavlja sve dok dve uzastopne tačke nisu proizvoljno bliske. Kao početno rešenje najčešće se uzima tačka centroida $x_j^{(c)}$ definisana sa (7).

Obeležimo sa $\varphi(x_j)$ desnu stranu jednakosti (9). Vajsfeldova metoda se onda može predstaviti kao

$$x_j^{(k)} = \varphi(x_j^{(k-1)}), \quad j = 1, 2; \quad k = 1, 2, \dots$$

gde je k broj iteracija. Na dokazu konvergencije se nećemo zadržavati (videti na primer Brimberg). U vektorskom obliku, Vajsfeldov iteracioni postupak ima sledeći oblik:

$$x^{(k)} = x^{(k-1)} - \nabla f(x^{(k-1)}) / \left(\sum_{i=1}^m \frac{w_i}{d_i(x^{(k-1)}, a_i)} \right),$$

gde je gradijent dat sa

$$\nabla f(x^{(k-1)}) = \sum_{i=1}^m \frac{w_i(x^{(k-1)} - a_i)}{d(x^{(k-1)} - a_i)}.$$

Na slici 5 dat je listing podprograma u Fortran-u za rešavanje Veberovog problema Vajsfeldovom iterativnom metodom. Kriterijum zaustavljanja je predstavljen s dva parametra: *iter* – maksimalan broj iteracija; *tol* – bliskost kvadrata rastojanja dva uzastopna rešenja.

2.3. Pravougaono rastojanje. U gradskim uslovima, direktno rastojanje između novih i postojećih tačaka određeno Euklidovom metrikom, često je nereavno. Vozila se kreću po ulicama, koje se obično seku pod pravim uglom. Iz tog razloga se u Teoriji lokacije razmatraju i modeli sa pravougaonom (l_1) metrikom.

Ako u (1) rastojanje određujemo sa

$$(10) \quad d_i(x) = \sum_{j=1}^n |x_j - a_j^{(i)}|, \quad i = 1, \dots, m,$$

odnosno za problem lokacije u ravni ($n = 2$)

$$d_i(x) = d_i(x, a_i) = |x_1 - a_1^{(i)}| + |x_2 - a_2^{(i)}|, \quad i = 1, \dots, m$$

tada funkcija cilja ima oblik

$$(11) \quad \begin{aligned} f_w(x) &= \sum_{i=1}^m w_i \cdot (|x_1 - a_1^{(i)}| + |x_2 - a_2^{(i)}|) \\ &= \sum_{i=1}^m w_i |x_1 - a_1^{(i)}| + \sum_{i=1}^m w_i |x_2 - a_2^{(i)}| \\ &= f_w(x_1) + f_w(x_2) \end{aligned}$$

pa se problem svodi na dve minimizacije po jednoj promenljivoj, odnosno problem je separabilan. Sledeći stav govori o konveksnosti.

STAV 3. *Funkcija $f(x) = w|x - a|$ je konveksna, za svako $w > 0$ i $a \in \mathbf{R}$.*

Dokaz ovog elementarnog stava prepuštamo čitaocu (koristiti nejednakost trougla i definiciju konveksne funkcije).

Kako je zbir konveksnih funkcija konveksna funkcija, to su i $f_w(x_1)$, $f_w(x_2)$ i $f_w(x)$ konveksne. Zbog separabilnosti $f_w(x)$, a u cilju nalazjenja rešenja problema


```

subroutine WEBER(n,x,y,w,xo,yo,fun)
real*8 xo,tol,yo,sw,xt,yt,fx,fy,fxx,fun
real*8 x(500),y(500),w(500),d(500)
* ----- Parametri
  iter=100
  tol=1.d-5
* ----- Pocetno resenje (xo,yo)-teziste
  xo=0.0d0
  yo=0.0d0
  do j=1,n
    xo=xo+w(j)*x(j)
    yo=yo+w(j)*y(j)
  enddo
  xo=xo/sw
  yo=yo/sw
  sw=1.d20
  it=0
* ----- Iteracije
  do while (it.lt.iter.and.sw.gt.tol)
    it=it+1
    fx=0.d0
    fy=0.d0
    fxx=0.d0
    fyy=0.d0
    do j=1,n
      d(j)=DSQRT((xo-x(j))*(xo-x(j))+(yo-y(j))*(yo-y(j)))
      fx=fx+w(j)*x(j)/d(j)
      fxx=fxx+w(j)/d(j)
      fy=fy+w(j)*y(j)/d(j)
    enddo
    xt=fx/fxx
    yt=fy/fxx
    sw=(xt-xo)*(xt-xo)+(yt-yo)*(yt-yo)
    xo=xt
    yo=yt
  enddo
* ----- Funkcija cilja 'fun'
  fun=0.
  do j=1,n
    fun=fun+d(j)*w(j)
  enddo
  return
end

```

SLIKA 5. Fortranski kôd za Vajsfeldovu metodu rešavanja Weberovog zadatka.

(11), preformulisaćemo i razložiti problem (11) na nalaženje minimuma po jednoj promenljivoj kao

$$(12) \quad \min_x f(x) = \sum_{i=1}^p t_i |x - a^{(i)}|,$$

$$a^{(1)} \leq a^{(2)} \leq \dots \leq a^{(p)}$$

gde je $p \leq m$, $t_i \geq w_l$ ($i = 1, \dots, p$; $l = 1, \dots, m$), $x \in R$, $a^{(i)} \in R$.

Razlog što je $p \leq m$ i $t_i \geq w_i$ izložićemo na malom primeru. Pretpostavimo da je $a^{(3)} = a^{(4)} = 3$ i da je $w_3 = 3$ i $w_4 = 7$. Sumiranjem $w_3|x - a^{(3)}| + w_4|x - a^{(4)}| = 3|x - 3| + 7|x - 3|$ dobijamo član $t_3|x - a^{(3)}| = 10|x - 3|$. Dakle, broj sabiraka (u slučaju kada dve date tačke imaju neku istu koordinatu) je smanjen za jedan ($p = m - 1$), a nova težina t_3 je dobijena kao zbir $w_3 + w_4 = 3 + 7 = 10$. Izvod funkcije (12) ima oblik

$$(13) \quad f'(x) = \begin{cases} -\sum_{j=1}^p t_j, & x < a^{(1)} \\ \sum_{j=1}^i t_j - \sum_{j=i+1}^p t_j, & a^{(i)} < x \leq a^{(i+1)} \\ \sum_{j=1}^p t_j, & x > a^{(p)} \end{cases}$$

Dakle, $f(x)$ je deo po deo linearna i konveksna funkcija.

Sledeći stav daje uslove za nalaženje minimuma funkcije (12), odnosno uslove za nalaženje indeksa i^* za koji je $x^* = a^{(i^*)}$.

STAV 4. Pri rešavanju zadatka (12)–(13), obeležimo sa i^* indeks za koji važi

$$(14) \quad s_1 = \sum_{j=1}^{i^*-1} t_j < \frac{1}{2} \sum_{j=1}^p t_j \leq \sum_{j=1}^{i^*} t_j = s_2.$$

Ako je ispunjena stroga nejednakost u (14), tada je $x^* = a^{(i^*)}$, a ako u (14) važi jednakost, tada je optimalno rešenje bilo koja vrednost na intervalu $x^* \in [a^{(i^*)}, a^{(i^*+1)}]$.

DOKAZ. Koeficijent pravca u (13) očigledno raste s rastom indeksa i , pa za neko i^* (gde izvod menja znak pa i $f(x)$ dostiže minimum) važi

$$\sum_{j=1}^{i^*-1} t_j - \sum_{j=i^*}^p t_j < 0, \quad \sum_{j=1}^{i^*} t_j - \sum_{j=i^*+1}^p t_j \geq 0.$$

Ove dve nejednakosti se lako mogu svesti na izraz (14). □

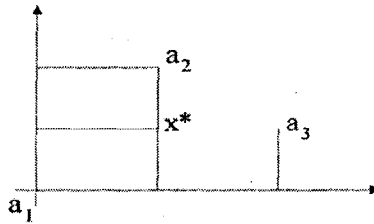
Poslednji stav omogućava formiranje jednostavne procedure nalaženja rešenja zadatka (11).

Algoritam 2.

Za svaku koordinatu $l = 1, 2$, ponoviti sledeće korake:

Korak 1. Inicijalno je $p = m$ i $t_i = w_i$, $i = 1, \dots, m$.

Korak 2. Urediti koordinate u neopadajući niz $a_i^{(1)} \leq a_i^{(2)} \leq \dots \leq a_i^{(m)}$



SLIKA 6. Primer za Veberov problem s pravougaonim rastojanjem.

Korak 3. Redukovati problem u slučaju da su neke koordinate jednake: novi niz će imati p različitih elemenata sa težinama t_i , $i = 1, \dots, p$.

Korak 4. Izračunati $s = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^p t_i$

Korak 5. $i := 1$

Korak 6. Naći s_1 i s_2 kao u (14).

Korak 7. Ako je $s_1 < s < s_2$, nađeno je rešenje za l -tu koordinatu kao $x_l^* = a_l^{(i)}$; ako je $s_1 < s = s_2$, tada je $x_l^* = [a_l^{(i)}, a_l^{(i+1)}]$; u suprotnom $i = i + 1$ i preći na korak 6.

Primer 1. Koordinate fiksni tačaka su $a_1(0,0)$, $a_2(1,2)$ i $a_3(2,1)$ (Slika 6), a težine $w_i = 1$. Naći Veberovu tačku za pravougaono rastojanje.

Rešenje. Problem se svodi na nalaženje minimuma sledeće dve deo po deo linearne funkcije

$$(\min) f_1(x) = |x_1| + |x_1 - 1| + |x_1 - 2|,$$

$$(\min) f_2(x) = |x_2| + |x_2 - 2| + |x_2 - 1|.$$

Kako je $f_1(x) \equiv f_2(x)$, to ćemo izložiti korake algoritma samo za $f_1(x)$. Sa slike 7 je jasno da je $x^* = (1, 1)$. Proverićemo i da li ćemo dobiti rešenje $x_1^* = 1$ primenom gornjeg algoritma.

Korak 1. $p = 3$, $t_1 = t_2 = t_3 = 1$.

Korak 2. $a_1^{(1)} \leq a_1^{(2)} \leq a_1^{(3)} \leftrightarrow 0 \leq 1 \leq 2$

Korak 3. Nema redukcije jer su sve koordinate različite.

Korak 4. $s = 3/2$

Korak 5. $i = 1$

Korak 6. $s_1 = 0$, $s_2 = t_1 = 1$

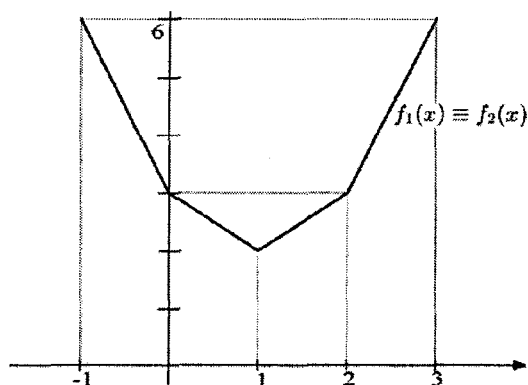
Korak 7. $0 < 3/2 < 1$ - nije; $i = 2$ (druga iteracija)

Korak 6. $s_1 = t_1 = 1$, $s_2 = t_1 + t_2 = 2$

Korak 7. $1 < 3/2 < 2$ - jeste $\rightarrow i^* = 2 \rightarrow x_1^* = a_1^{(2)} = 1$; Kraj.

2.4. l_p rastojanje. Pretpostavimo da se rastojanje u Veberovom lokacijskom problemu određuje sa l_p funkcijom, tj.

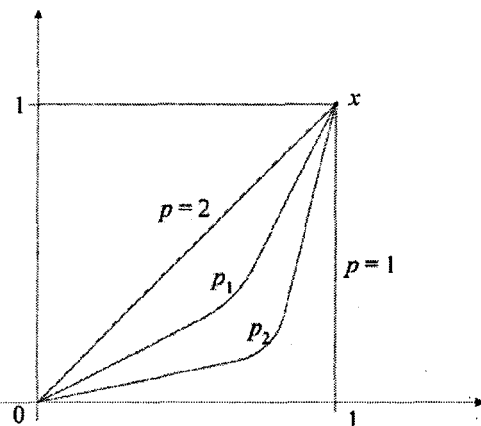
$$(15) \quad d_p(x, a_i) = d_i(x) = \left(|x_1 - a_1^{(i)}|^p + |x_2 - a_2^{(i)}|^p \right)^{1/p}, \quad p \geq 1, p \in \mathbf{R}$$



SLIKA 7. Minimizacija deo-po-deo linearne funkcije iz Primera 1.

U nekim realnim problemima bolje je pretpostaviti da $p \in (1, 2)$ nego da je $p = 1$ ili $p = 2$. Na primer, na američkim autostradama ustanovljeno je da je najbolja metrika za $p = 1.41$.

Pravougaono i linijsko (Euklidovo) rastojanje su očigledno specijalni slučajevi l_p rastojanja, odnosno za $p = 1$ ili $p = 2$, dobijaju se odgovarajuće formule za ove funkcije rastojanja. Na slici 8 data je l_p funkcija od tačke $(0, 0)$ do $(1, 1)$ u \mathbf{R}^2 , za različite vrednosti $p \in [1, 2]$.



SLIKA 8. l_p -rastojanje za različite vrednosti p ($p_1 > p_2$).

Funkcija rastojanja od koordinatnog početka do bilo koje tačke u posmatranom prostoru naziva se norma, tj. $d_p(0, x) = \|x\|_p$. Na slici 8 date su dakle norme za

$x = (1, 1)$ i različite vrednosti parametara p : $d_2((0, 0), (1, 1)) = \|(1, 1)\|_2 = \sqrt{2}$; $d_1((0, 0), (1, 1)) = \|(1, 1)\|_1 = 2$. Primetimo da je $d_{p_1}(0, x) < d_{p_2}(0, x)$, ako je $p_1 > p_2$.

Lako se može proveriti i da za $p \rightarrow \infty$, $d_p(x, a_i)$ postaje $\max\{|x_1 - a_1^{(i)}|, |x_2 - a_2^{(i)}|\}$. Ova funkcija rastojanja (l_∞) se zove Čebiševljeva funkcija. U gornjem primeru je $d_\infty((0, 0), (1, 1)) = \|(1, 1)\|_\infty = 1$.

Sledećim stavom se dokazuje da Veberov problem sa l_p rastojanjem spada u klasu konveksnih programa.

STAV 5. *Funkcija*

$$(16) \quad f_w(x) = \sum_{i=1}^m w_i d_p(x, a_i), \quad p \geq 1$$

je konvekna, gde je $d_p(x, a_i)$ definisano sa (15).

DOKAZ. Kako je zbir konveksnih funkcija, konveksna, dovoljno je dokazati (kao u dokazu stava 2.1), da je $d_p(x, a_i)$ konveksna. U dokazu će se pored nejednakosti trougla koristiti i poznata nejednakost Minkovskog

$$\left(\sum_{k=1}^n |\alpha_k + \beta_k|^p \right)^{1/p} \leq \left(\sum_{k=1}^n |\alpha_k|^p \right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^n |\beta_k|^p \right)^{1/p},$$

gde je $p \geq 1$, a α_k i β_k realni brojevi.

Obeležimo sa $y' = x' - a$ i $y'' = x'' - a_i$, gde su $x' = (x'_1, x'_2)$ i $x'' = (x''_1, x''_2)$. Tvrdjenje sledi po sledećem nizu nejednakosti i jednakosti:

$$\begin{aligned} & d_p(\lambda y'_1 + (1 - \lambda)y''_1, \lambda y'_2 + (1 - \lambda)y''_2) \\ & \quad \text{(nejednakost trougla)} \\ & \leq [(|\lambda y'_1| + |(1 - \lambda)y''_1|^p) + (|\lambda y'_2| + |(1 - \lambda)y''_2|^p)]^{1/p} \\ & \quad \text{(nejednakost Minkovskog)} \\ & \leq (|\lambda y'_1|^p + |\lambda y'_2|^p)^{1/p} + (|(1 - \lambda)y''_1|^p + |(1 - \lambda)y''_2|^p)^{1/p} \\ & = \lambda (|y'_1|^p + |y'_2|^p)^{1/p} + (1 - \lambda) (|y''_1|^p + |y''_2|^p)^{1/p} \\ & = \lambda d_p(y'_1, y'_2) + (1 - \lambda) d_p(y''_1, y''_2). \quad \square \end{aligned}$$

Analogno stavu 2, daćemo potreban i dovoljan uslov da optimalna lokacija bude u fiksnoj tački a_r .

STAV 6. $f_w(x)$ dostiže minimum u fiksnoj tački $a_r(a_1, a_2)$ ako i samo ako važi

$$(17) \quad \left(|R_1|^{p/(p-1)} + |R_2|^{p/(p-1)} \right)^{(p-1)/p} \leq w_r, \quad \text{za } p > 1$$

$$(18) \quad \max\{|R_1|, |R_2|\} \leq w_r, \quad \text{za } p = 1$$

gde je

$$R_k = \sum_{i=1, i \neq r}^m \frac{w_i \cdot \text{sign}(a_k - a_k^{(i)}) |a_k - a_k^{(i)}|^{p-1}}{(l_p(a_r, a_i))^{p-1}}, \quad k = 1, 2$$

DOKAZ. Primitimo da je R_k jednako parcijalnom izvodu funkcije (16) u tački $x = a_r$. Dokaz zatim sledi analogno dokazu stava 2. Leva strana nejednakosti (17) nije definisana za $p = 1$. Uvođenjem smene $p' = p/(p - 1)$ i traženjem limesa (17) pri $p' \rightarrow \infty$, dobijamo traženo tvrđenje (18) (za $p = 1$). \square

Kako $f(x)$ očigledno nije glatka, to se umesto $d_i(x)$ uvodi $\bar{d}_i(x)$ kao

$$(19) \quad \bar{d}_i(x) = \left\{ [(x_1 - a_1^{(i)})^2 + \varepsilon]^{p/2} + [(x_2 - a_2^{(i)})^2 + \varepsilon]^{p/2} \right\}^{1/p}, \quad \varepsilon > 0.$$

Nova funkcija cilja $\bar{f}(x) = \sum t_i \bar{d}_i(x)$ je glatka za svako x . Ova tzv. hiperbolička aproksimacija se uvodi i iz razloga što je $\bar{f}(x)$ takođe strogo konveksna, pa se na njoj mogu primeniti metode nelinearnog programiranja (NP) prvog reda.

STAV 7. *Funkcija $\bar{f}(x)$ je strogo konveksna.*

DOKAZ. Da bi se dokazala stroga konveksnost funkcije $\bar{d}_i(x)$, dovoljno je dokazati da je njen Hesijan pozitivno definitna matrica (svi glavni minori su veći od nule), što prepuštamo čitaocu. \square

Prirodno pitanje je, koliko su rešenja problema s funkcijom rastojanja (15) i (19) bliska, odnosno koliko je dobra hiperbolijska aproksimacija l_p rastojanja u rešavanju Veberovog problema? Odgovor daje sledeći stav.

$$\text{STAV 8. } \max\{\bar{f}_p(x) - f_p(x)\} \leq 2^{1/p} \cdot \varepsilon^{1/2} \cdot \sum_{i=1}^m w_i.$$

DOKAZ. Dokažimo prvo nejednakost $\bar{f}_p(x) - f_p(x) \leq 2^{1/p} \cdot \varepsilon^{1/2}$ korišćenjem nejednakosti Minkovskog. Uvedimo smene $y_1 = |x_1 - a_1^{(i)}|$; $y_2 = |x_2 - a_2^{(i)}|$; $y_3 = \varepsilon^{1/2}$

$$\begin{aligned} \bar{d}_i(x) &= [(y_1^2 + y_3^2)^{p/2} + (y_2^2 + y_3^2)^{p/2}]^{1/p} \\ &\leq [((y_1 + y_3)^2)^{p/2} + ((y_2 + y_3)^2)^{p/2}]^{1/p} \\ &= [|y_1 + y_3|^p + |y_2 + y_3|^p]^{1/p} \quad (\text{nejednakost Minkovskog}) \\ &\leq [|y_1|^p + |y_2|^p]^{1/p} + [|y_3|^p + |y_3|^p]^{1/p} \\ &= d_i(x) + 2^{1/p} \cdot \varepsilon^{1/2} \end{aligned}$$

Skalarnim množenjem sa $w = (w_1, \dots, w_m)$ leve i desne strane gornje nejednakosti, dobija se traženo tvrđenje. \square

Iz prethodnog stava je jasno da su rešenja hiperboličke aproksimacije i odgovarajućeg Veberovog problema, proizvoljno bliske. Potrebno je izabrati mali broj ε i zadatak rešiti bilo kojom varijantom gradijentne metode NP. Pa ipak, i na $\bar{f}(x)$ se najčešće primenjuje Vajsfeldova metoda. Ostavićemo čitaocu da posle izjednačavanja parcijalnih izvoda $\bar{f}(x)$ sa nulom, nađe Vajsfeldovu iterativnu formulu u kojoj se za $p = 2$ i $\varepsilon = 0$ dobija jednačina (9).

3. LOKACIJA JEDNOG OBJEKTA – PROŠIRENI MODELI

U ovom odeljku navešćemo samo neka od velikog broja mogućih proširivanja osnovnog modela kontinualne lokacije jednog objekta. Pri tome se, zbog ograničenosti prostora nećemo upuštati u teorijske detalje, već ćemo ukratko navesti procedure kojima se prošireni model svodi na osnovni.

3.1. Lokacijska ograničenja. Ako postoje neke lokacije u kojima se ne može graditi novi objekt, bilo zbog reljefa (jezera, planine i sl.), ljudskog faktora itd., tada govorimo o lokacijskim ograničenjima. Skup dopustivih lokacija obeležićemo sa \mathbf{D} . Tada prošireni model ima oblik

$$(\min) f_w(x) = \sum w_i d(x, a_i), \quad x \in \mathbf{D}.$$

Izložićemo jedan jednostavan algoritam za rešavanje ovog zadatka.

Algoritam 3.

Korak 1. Naći bezuslovni minimum zadatka (1) i obeležiti ga sa x ;

Korak 2. Proveriti da li je tačka x dopustiva ($x \in \mathbf{D}$), ako jeste, kraj;

Korak 3. Naći podskup dopustivog skupa koji je vidljiv iz tačke x .

Korak 4. x^* je najbliža sa x a pripada podskupu određenom u koraku 3 (tj. x^* je najbliža dopustiva, a vidljiva iz x).

Stroža definicija vidljivosti je: x^* je *vidljiva* iz tačke x ako i samo ako ne postoji tačka y na duži koja spaja x i x^* , takvo da $y \notin \mathbf{D}$. Za slučaj da je \mathbf{D} poligon (ili unija konveksnih poligona), Hansen, Peeters i Thisse (1979) predlažu efektivnu metodu za nalaženje optimalne lokacije, na kojoj se nećemo zadržavati.

3.2. Nelinearna zavisnost funkcije cilja od rastojanja. Iako je $f(x)$ nelinearna funkcija, u formuli (1) zavisnost funkcije, od rastojanja je linearna. Drugim rečima, ako obeležimo sa $y_i = d_i(x)$, tada je (1) linearna funkcija po y ,

$$f(y) = \sum_{i=1}^m w_i y_i.$$

Navešćemo neke primere u kojima je bolje pretpostaviti nelinearnost funkcije f od rastojanja y , tj. neka je $C_i[d_i(x)]$ nelinearna funkcija.

Primer 2. Često realna situacija nalaže i uvođenje u model fiksnih troškova transporta k_i iz datih tačaka a_i , tj.

$$C_i[d_i(x)] = \begin{cases} k_i + w_i d_i(x), & x \neq a_i, \quad i = 1, \dots, m \\ 0, & x = a_i \end{cases}$$

Algoritam kojim se rešava ovaj problem ima sledeće korake:

Algoritam 4.

Korak 1: rešiti lokacijski problem s funkcijom cilja $\sum_{i=1}^m (k_i + w_i d_i(x))$ (s lokacijskim ograničenjima ili bez njih) Vajsfeldovom metodom;

Korak 2: uporediti vrednosti funkcije cilja u x sa a_i , $i = 1, \dots, m$ i naći traženu najmanju vrednost kao $x^* = \arg \min \{f(x^*), f(a_1), \dots, f(a_m)\}$.

Primer 3. Eksperimentalno je utvrđeno da minimalno vreme dolaska hitnih službi opada s povećanjem rastojanja i da je C_i strogo konkavna za kratka rastojanja, a linearna za velika. Matematički se ovi uslovi mogu zapisati kao

$$C_i[d_i(x)] = k_i + w_i d_i^\alpha(x), \quad \alpha \in (0, 1), \quad x \neq a_i$$

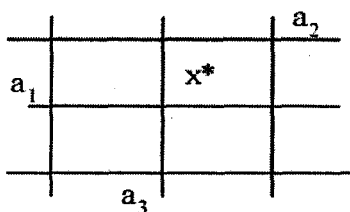
Metoda rešavanja ovog problema za Euklidovo rastojanje je slično Weiszfeld-ovoj (Cooper 1968), odnosno iz izjednačavanja gradijenta s nulom, nalazimo iterativnu formulu kao (videti (9)):

$$x_j^{(k+1)} = \frac{\sum_{i=1}^m w_i a_j^{(i)} \cdot d_i^{\alpha-2}(x^{(k)})}{\sum_{i=1}^m w_i \cdot d_i^{\alpha-2}(x^{(k)})}, \quad j = 1, 2.$$

Kako $f(x) = \sum_{i=1}^m C_i[d_i(x)]$ nije konveksna funkcija, dobijena tačka nije garantovano globalni minimum. Međutim, za pravougaono rastojanje $d(x, a_i) = \sum_{j=1}^2 |x_j - a_j^i|$ važi sledeći stav, koga nećemo dokazivati:

STAV 9. (Wendell i Hurter 1973) *Sve optimalne lokacije (ako ih ima više od jedne) pripadaju tačkama preseka pravih paralelnih koordinatnim osama, koje prolaze kroz a_i .*

Koristeći ovaj stav moguće je konstruisati proceduru nalaženja optimalnog rešenja prebrojavanjem svih tačaka preseka pravih iz gornjeg stava (slika 9). Detalje algoritma ostavljamo čitaocu kao vežbu.



SLIKA 9. Optimalno rešenje x^* je na preseku pravih paralelnih osama.

Primer 4. Ako se putni troškovi mere gubitkom korisnosti, tada $C_i[d_i(x)]$ raste s rastojanjem i strogo je konveksna. Ovaj slučaj je ređi u praksi, mada se teorijski najlakše rešava (lokalni optimum je i globalan). Ovo se može matematički formulisati kao $C_i[d_i(x)] = k_i + w_i d_i^\alpha(x)$, $\alpha > 1$.

Primer 5. U ovom primeru, pretpostavimo samo da je $C_i(\cdot)$ rastuća i neprekidna od rastojanja, tj. da se radi o lokacijskom problemu

$$(\min) f(x) = \sum_{i=1}^m C_i[d_i(x)].$$

Pošto je zbir neprekidnih funkcija takođe neprekidna, sledi da je i $f(x)$ neprekidna.

Sledeći stav određuje oblast u kojoj treba tražiti globalni minimum ovog nekonveksnog zadatka.

STAV 10. (Wendell, Hurter, 1973) *Globalni minimum leži u konveksnom omotaču tačaka a_1, \dots, a_m .*

Korišćenjem ovog stava i tehnike grananja i ograđivanja, za rešavanje zadatka iz primera 5, predložena je metoda *Veliki kvadrat - mali kvadrat (Big Square - Small Square)* (Hansen, Thisse, 1981).

Algoritam 5 (Veliki kvadrat - mali kvadrat).

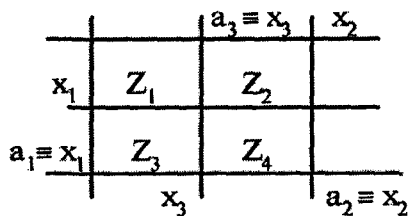
Korak 1: Izabrati početnu tačku $x_0 = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m a_i$ koja pripada konveksnom omotaču (KO) tačaka $\{a_1, \dots, a_m\}$ i naći $\bar{f} = f(x_0)$

Korak 2: Podeliti konveksni omotač KO (a_1, \dots, a_m) na zone (kvadrate) i naći donju granicu svake od zona, tj. $\underline{f}_{z_j} = \sum_{i=1}^m C_i[d_i(Z_j)]$, gde je dijametar $d_i(Z_j) = (\min)d(a_i, Z_j)$ - najkraće rastojanje između a_i i zone Z_j .

Korak 3: Eliminirati sve zone Z_j za koje važi $\underline{f}_{z_j} > \bar{f}$.

Korak 4: ako je dijametar neeliminiranih zona manji od proizvoljno malog broja ε , kraj.

Korak 5: izračunati vrednosti f u proizvoljnim tačkama neeliminiranih zona (na primer u centru) i onu gde je f najmanja označiti sa \bar{f} . Podeliti preostalu oblast na još manje zone tj. preći na korak 2.



SLIKA 10. Ilustracija zona u metodi *Veliki kvadrat - mali kvadrat*

Rešenje dobijeno ovom metodom je aproksimacija optimalnog rešenja. *Veliki kvadrat - mali kvadrat* se jednostavno uopštava za rešavanje problema s lokacijskim ograničenjima.

Metoda *Veliki kvadrat - mali kvadrat* se može podesiti i za rešavanje ovog zadatka, tako što se S podeli u konačnu familiju konveksnih poligona. Međutim, ako su $D_i(\cdot)$ linearne, problem je lako rešiv, tj.

$$(\max) f_D(x) = \sum_{i=1}^m w_i d(a_i, x), \quad x \in S$$

STAV 11. *Ako su D_i linearne funkcije i S poligon ili unija konveksih poligona, tada je optimalno rešenje u temenima poligona.*

DOKAZ. Zaista, ako su funkcije $D_i(\cdot)$ opadajuće, tada je funkcija $f(x)$ konkavna, a ako su $D_i(\cdot)$ rastuće, tada je $f(x)$ konveksna, jer je $d_i(x)$ konveksna (po stavu 1).

Po poznatoj teoremi NP minimum konkavne (ili maksimum konveksne) funkcije se nalazi na rubu oblasti S . Ako je S poligon, ili je unija konveksnih poligona, optimalno rešenje anti-Veberovog problema se može dobiti jednostavnim računanjem funkcije cilja u svim rogljevima poligona S . \square

I u ovoj vrsti problema moguće je formulisati funkciju cilja na različite načine. Pored Min-Sum oblika, moguće je posmatrati i Min-Max zadatak.

4. RAULSOV PROBLEM, Min-Max KRITERIJUM

Očigledno je da Veberov model zapostavlja izolovane korisnike usluga, odnosno Veberova tačka je najbliža "prosečnom" korisniku. Zaista, ako se $f_w(x)$ podeli konstantom $W = \sum w_i$, tada su rešenja (tj. x^*) problema $(\min) f_w(x)$ i $(\min) f_w(x)/W$ jednaka. S druge strane, $f_w(x)/W$ predstavlja srednju (prosečnu) vrednost rastojanja od korisnika lociranih u a_i , $i = 1, \dots, m$, i nove lokacije x . Iz tog razloga je u knjizi *Theory of Justice* Rauls (1971) predložio ravnopravno tretiranje i naseljenih i nenaseljenih mesta u izboru nove lokacije, na primer bolnice, stanice hitne pomoći ili vatrogasne brigade. U ovim slučajevima stanovnik na periferiji grada bi trebao da ima ista prava za hitnom intervencijom kao i stanovnik u centru. Za razliku, dakle, od Min-Sum kriterijuma, predložen je Min-Max kriterijum, po kome se minimizira maksimalno težinsko rastojanje između novog i postojećih objekata.

$$(21) \quad (\min) f_R(x) = \max_i \{w_i d_i(x)\} \quad i = 1, \dots, m.$$

Za lokaciju televizijskih odašiljaca, radara i slično, težinski koeficijenti nisu bitni pa su svi koeficijenti jednaki 1, odnosno

$$(22) \quad (\min) f_R(x) = \max_i \{d_i(x)\} \quad i = 1, \dots, m$$

Sada će biti izložena drugačija ekvivalentna formulacija Raulsovog problema u opštem slučaju (odnosno za l_p , $p > 1$ rastojanje), s ciljem da se problem svede na zadatak konveksnog nelinearnog programiranja:

$$\begin{aligned} & (\min) z \\ \text{p.o.} \quad & w_i \cdot d_p(x, a_i) \leq z, \quad i = 1, \dots, m. \end{aligned}$$

Zaista, dobijeni model je konveksan, jer su funkcije u skupu ograničenja konveksne (stav 5).

U specijalnom slučaju, za $p = 2$ (Euklidovo rastojanje) i $w_i = 1$, uvođenjem smene $x_3 = z - (x_1^2 + x_2^2)$, prethodni problem se svodi na jednostavan zadatak kvadratnog programiranja (po promenljivim x_1 , x_2 i x_3),

$$\begin{aligned} & (\min) x_1^2 + x_2^2 + x_3 \\ \text{p.o.} \quad & 2x_1 a_1^{(i)} + 2x_2 a_2^{(i)} + x_3 \geq (a_1^{(i)})^2 + (a_2^{(i)})^2, \quad i = 1, \dots, m. \end{aligned}$$

Raulsov problem (netežinski slučaj) može se rešiti i geometrijski. Geometrijska formulacija glasi: konstruisati krug minimalnog prečnika, tako da skup datih tačaka u ravni $A = \{a_i(a_1^{(i)}, a_2^{(i)}), i = 1, \dots, m\}$, bude unutar kruga. Ovo je dakle zadatak

Algoritam 7 (Hansen, Peeters, Thisse 1981).

Korak 1: Rešiti Veberov problem $f_w(x)$; obeležiti sa x' optimalno rešenje;

Korak 2: Izračunati $f_r(x')$; obeležiti sa f' dobijenu vrednost;

Korak 3: $f' = f' - h$, gde je h korak, fiksni mali broj;

Korak 4: Umanjiti proporcionalno sa h u odnosu na f' sve $d_i(x)$ i obeležiti ih sa r_i , tj. $r_i = d_i(x') \cdot (f' - h) / f'$

Korak 5: Opisati krugove s centrima u a_i i poluprečnicima r_i ($K_i(a_i, r_i)$).

Korak 6: Ako je presek krugova prazan skup x' je Pareto optimalno rešenje i problem je rešen. U suprotnom rešiti Veberov problem s lokacijskim ograničenjima koja su predstavljena kao presek krugova, obeležiti dobijeno rešenje sa x' pa preći na korak 2.

5. LOKACIJA VIŠE OBJEKATA

Do sada je bilo reči o lokaciji samo jednog novog objekta. Mnogo češći slučaj u praksi je određivanje više novih objekata istovremeno. Kod lokacije više objekata pojavljuju se sledeća pitanja:

koji je optimalni broj novih objekata?

koji korisnici su usluženi od kog snabdevača (alokacijske promenljive y_{ij})?

koja je uloga interakcije između snabdevača (novih objekata)?

U modelima lokacije više novih objekata, razlikujemo one kod kojih postoji interakcija između novih lokacija i one kod kojih međusobna veza ne postoji. I kod ovih modela se mogu primeniti klasifikacije navedene u problemima lociranja jednog novog objekta. Može se posmatrati *min-sum* (Veberov) ili *min-max* (Raulsov) problem lokacije više objekata, rastojanja se takođe mogu određivati na različite načine, itd.

5.1. Min-Sum (Veberov) problem lokacije više objekata. Ovaj problem formulisao je Miehle 1958:

$$(\min) f_M(x) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^q w_{ij} d_i(x_j) + \sum_{j=1}^{q-1} \sum_{k=j+1}^q v_{jk} d(x_j, x_k)$$

m – broj fiksnih (postojećih) objekata,

q – broj novih objekata,

$x = (x_1, x_2, \dots, x_q)$ – nepoznate lokacije novih objekata,

$x_j = (x_1^{(j)}, x_2^{(j)})$, $j = 1, \dots, q$, – koordinate nepoznatih objekata,

v_{jk} , $j, k = 1, \dots, p$ – mera interakcije između novih objekata j i k

(odnosno cena), gde je $v_{jk} = v_{kj}$,

w_{ij} – cena jediničnog transporta od korisnika i do nove lokacije j ,

$d_i(x_j) = d(x_j, a_i)$ – rastojanje između korisnika i j -te nove tačke,

$a_i = (a_1^{(i)}, a_2^{(i)})$ – koordinate i -tog korisnika.

Dakle, funkcija cilja može predstavljati ukupnu cenu transporta između postojećih i novih objekata, kao i između samih novih objekata. Specijalan slučaj modela je kada je $v_{jk} = 0$, odnosno kada ne postoji interakcija između novih objekata.

I u modelu lokacije više objekata kao meru rastojanja moguće je izabrati pravougaono, Euklidovo ili l_p rastojanje, što zavisi od konkretnog problema koji se rešava. S matematičke tačke gledišta, osnovno je pitanje konveksnosti funkcije $f_M(x)$.

STAV 13. *Funkcija $f_M(x)$ je konveksna, za l_p ($p > 1$) funkciju rastojanja.*

DOKAZ. Ranije je dokazano da je funkcija $d_p(x_j, a_i)$ konveksna. Da bismo dokazali tvrđenje ovog stava, dovoljno je dokazati da je funkcija $d_p(x_j, x_k)$ konveksna, za svako $p \in (1, \infty)$. (Razlika između $d_p(x_j, a_i)$ i $d_p(x_j, x_k)$ je očigledno u tome što su u $d_p(x_j, x_k)$ i x_j i x_k promenljive).

Obeležimo sa $y = (y_1, y_2, y_3, y_4) = (x_1^{(j)}, x_2^{(j)}, x_1^{(k)}, x_2^{(k)})$. Tada je

$$(23) \quad d_p(x_j, x_k) = g(y) = (|y_1 - y_2|^p + |y_3 - y_4|^p)^{1/p}$$

Konveksnost funkcije $g(y)$ sledi iz nejednakosti Minkovskog i definicije konveksnosti, što ostavljamo čitaocu da proveri (pogledati dokaz stava 5). Konačno funkcija $f_M(x)$ je konveksna jer je zbir konveksnih funkcija. \square

Slično kao i u zadatku lokacije jednog objekta, $f_M(x)$ nije glatka, o čemu govori sledeći stav.

STAV 14. *Izvod funkcije $d_p(x_j, x_k)$, pa samim tim i izvod funkcije $f_M(x)$, nije definisan za svako $x_j, x_k \in \mathbf{R}^2$.*

DOKAZ. Kao i u dokazu prethodnog stava, neka je $d_p(x_j, x_k) = g(y)$ definisano sa (23). Definišimo jedinični pravac, $s = (s_1, s_2, s_3, s_4) \in \mathbf{R}^4$, $\|s\| = 1$, pa posmatrajmo skup $S = \{y \in \mathbf{R}^4 \mid y_1 = y_2, y_3 = y_4\}$. Ako bi prvi izvod po pravcu u tački $y \in S$ postojao, onda bi po definiciji bio dat sa

$$\begin{aligned} \frac{dg(y)}{ds} &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{g(y + \lambda s) - g(y)}{\lambda} \\ &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{|\lambda| \cdot [|s_1 - s_2|^p + |s_3 - s_4|^p]^{1/p}}{\lambda} \\ &= \begin{cases} [|s_1 - s_2|^p + |s_3 - s_4|^p]^{1/p}, & \lambda > 0 \\ - [|s_1 - s_2|^p + |s_3 - s_4|^p]^{1/p}, & \lambda < 0 \end{cases} \end{aligned}$$

odakle sledi da limes ne postoji (levi nije jednak desnom). Kako su x_k i x_j bilo koje dve tačke u ravni, izvod $d_p(x_j, x_k)$ nije definisan za $x_j = x_k$. \square

Da bi se omogućilo rešavanje ovog konveksnog neglatkog optimizacionog zadatka, korišćenjem metoda nelinearnog programiranja prvog reda, koristi se ista ideja kao u rešavanju Veberovog problema, odnosno uvodi se nova funkcija $f_M(x, \varepsilon)$, koja za $\varepsilon \rightarrow 0$ ima isto rešenje i daje istu vrednost minimuma kao i $f_M(x)$. Funkcija $f_M(x, \varepsilon)$ dobija se tako što se $d_i(x_j)$ i $d(x_j, x_k)$ zamene sa

$$d_i(x_j) = \left(\sum_{l=1}^n (x_l^j - x_l^i)^p + \varepsilon \right)^{1/p} \quad \text{i} \quad d(x_j, x_k) = \left(\sum_{l=1}^n (x_l^j - x_l^k)^p + \varepsilon \right)^{1/p}.$$

Lako se može pokazati da su svi izvodi funkcije $f_M(x, \varepsilon)$ neprekidni. Da $f_M(x, \varepsilon)$ teži $f_M(x)$ pri $\varepsilon \rightarrow 0$, govori sledeći stav.

$$\text{STAV 15. } \max_x [f_M(x, \varepsilon) - f_M(x)] \leq 2^{1/p} \cdot \varepsilon^{1/2} \left(\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^q \omega_{ij} + \sum_{j=1}^{q-1} \sum_{k=j+1}^q v_{jk} \right).$$

Dokaz ovog stava je sličan dokazu stava 8, pa ga prepuštamo čitaocu. Budući da su svi teorijski uslovi za rešavanje zadatka $\min f_M(x)$ analogni zadatku $\min f_w(x)$, to se i ovde može primeniti Vajsfeldova iterativna procedura. Posle izjednačavanja gradijenta s nulom iterativna metoda rešavanja se može dobiti kao

$$x_j^{(k+1)} = \left(\frac{1}{d_i(x_j^{(k)})} \sum_{i=1}^m w_{ij} + \frac{1}{d(x_j, x_k^{(k)})} \sum_{u \neq j} v_{kj} \cdot y_k \right) / \left(\frac{1}{d_i(x_j^{(k)})} \sum_{i=1}^m w_{ij} + \frac{1}{d(x_j, x_k^{(k)})} \sum_{u \neq j} v_{kj} \right),$$

$$j = 1, \dots, m, k = 1, 2, \dots,$$

gde je $x_j^{(k)} = (x_{1j}^{(k)}, x_{2j}^{(k)})$ lokacija j -tog novog objekta u k -toj iteraciji.

Gore navedeni rezultati odnose se na l_p ($p > 1$) rastojanje. Za pravougaono rastojanje ($p = 1$), problem se može svesti (na čemu se nećemo zadržavati) na n (za probleme u ravni $n=2$) potproblema. Svaki od njih je zadatak linearnog programiranja sa $q^2 + 2mq$ promenljivih i $q(q-1)/2$ ograničenja. Simpleks metoda se pokazala neefektivnom zbog velikog broja promenljivih i ograničenja. Cabot, Francis i Stary (1970) su pokazali da se dualni problemi može svesti na zadatak minimalnog protoka na mreži sa $m+q$ temena i $mq + q(q-1)/2$ lukova, a ovaj se lakše rešava jer je strogo polinomijalne vremenske složenosti (optimizacioni zadatak na mreži je strogo polinomijalan ako je broj operacija u njegovom rešavanju ograničen polinomijalnom funkcijom od broja temena i lukova, tj. ne zavisi od dužine lukova).

5.2. Min-max lokacijski problem s više novih objekata. Ovaj zadatak moguće je formulisati kao

$$(\min) f_R(x) = \max\{w_{ij}d_i(x_j), v_{jk}d(x_j, x_k)\},$$

$$i = 1, \dots, m; j, k = 1, \dots, q; 1 \leq j < k \leq q$$

gde parametri modela imaju isto značenje kao u Min-Sum problemu iz 5.1. Zbog ograničenosti prostora, nećemo se zadržavati na ovom problemu.

5.3. Lokacija p neželjenih objekata. Pomenućemo jednu interesantnu klasu modela lokacije p neželjenih novih objekata, tako da objekti budu što je moguće dalji jedni od drugih u nekoj zatvorenoj datoj oblasti S . Primetimo da u njima ne figurišu postojeći objekti. Dakle, data je samo oblast (na primer, konveksni mnogougao S) i broj novih lokacija p . Na primer, treba odrediti p lokacija nuklearnog otpada, hazardnog materijala ili vojnih baza, tako da one budu što je moguće dalje jedna od druge. Ovi modeli se mogu primeniti i u lokaciji p sirena za uzbunu u gradu, nalaženju lokacija prskalica na nekom fudbalskom igralištu ili parku, određivanju mesta p prodavnica ili kioska tako da se "pokrije" što veća teritorija, itd. Erkurt i Newman (1991) predlažu 4 modela ovog tipa: a) *max-min-min*; b) *max-min-sum*; c) *max-sum-min* i d) *max-sum-sum*. Funkcije cilja ovih modela

su:

$$(24) \quad f_1(x) = \max_{x \in S} (\min_i \min_j d(x_i, x_j)), \quad i \neq j$$

$$f_2(x) = \max_{x \in S} \left(\min_i \sum_{j=1}^p d(x_i, x_j) \right)$$

$$f_3(x) = \max_{x \in S} \sum_{i=1}^p \min_j d(x_i, x_j)$$

$$(25) \quad f_4(x) = \max_{x \in S} \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^r d(x_i, x_j)$$

Svi ovi problemi pripadaju klasi problema globalne optimizacije, jer funkcije cilja nisu ni konveksne ni konkavne. Model pod a) je poznat i kao *p-disperzioni* (*p-dispersion*), dok se problem pod d) često naziva i problem “*p-zbirne odbrane*” (*p-defence-sum*).

Max-min-min (p-Disperzioni problem). Ako je rastojanje Euklidovo, *p*-disperzioni problem (24) je tesno vezan s klasičnim matematičkim *zadatkom pakovanja* krugova jednakih poluprečnika u kvadrat: konstruisati *p* disjunktih krugova istog poluprečnika u jedinični kvadrat tako da poluprečnik bude što je moguće veći. Zaista, (24) se očigledno može predstaviti i kao zadatak nelinearnog programiranja:

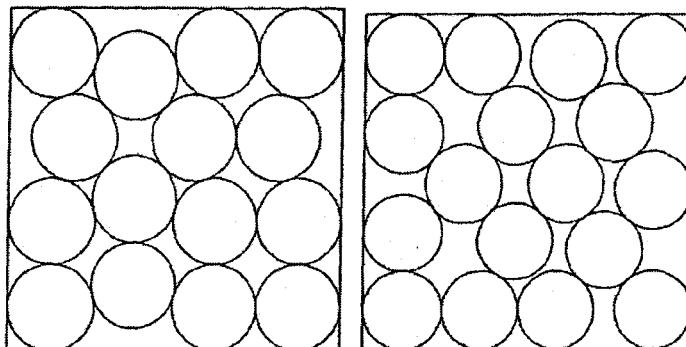
$$\text{Max } r$$

po ograničenjima

$$(26) \quad d(x_i, x_j) \geq r, \text{ za svako } i, j = 1, \dots, p \quad (i \neq j), \\ x_i \in S.$$

Ako je *S* jedinični kvadrat, *d* Euklidovo rastojanje i *r* prečnik, tada *p*-disperzioni problem postaje zadatak pakovanja krugova. Godinama su matematičari nalazili konstruktivno bolja i bolja rešenja (tj. rešenja s većim poluprečnikom) za *p* = 5, 6, 7, ..., 12. Nedavno su primenom metoda nelinearnog programiranja na model (24) nađena približna rešenja za *p* = 13, 14, ..., 30 (Drezner i Erkut, 1995). Neka od tih rešenja data su na slici 11.

Primetimo da problem (24) ne pripada klasi konveksnih programa, jer skup definisan skupom ograničenja očigledno nije konveksan u prostoru dimenzije $2n + 1$. Programski paket *Minos* (Gill, Murray i Wright (1981)), sa svoje strane, transformiše problem NP sa ograničenjima u problem bez ograničenja; tako dobijena funkcija naravno, nije ni konveksna ni konkavna, pa u problemu postoji više lokalnih maksimuma. Kako *Minos* završava s radom kada je gradijent jednak nuli, to dobijeno rešenje nemora biti čak ni lokalni maksimum, već može biti *stacionarna tačka*. Iz tog razloga su Drezner i Ercurt (1995) za svako *n* po 100 puta startovali *Minos*, ali iz drugačijeg početnog rešenja i saopštili najbolje tako dobijeno rešenje.



SLIKA 11. Pakovanje 15 i 17 krugova primenom paketa NP *Minos*.

Pakovanje krugova u krug. Ako je skup S iz problema (24) jedinični krug a ne kvadrat, tada se problem pakovanja datog broja (n) krugova u S može formulisati na sledeći način:

Max r

p. o.

$$\begin{aligned} (x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 - 4r^2 &\geq 0, & 1 \leq j < i \leq n, \\ x_i^2 + y_i^2 - (1 - r)^2 &\leq 0, & 1 \leq i \leq n, \\ (x_i, x_i) &\in R^2, & 1 \leq i \leq n. \end{aligned}$$

Prvim skupom ograničenja se obezbeđuje disjunktnost krugova poluprečnika r , dok se drugim skupom ograničenja zahteva da krugovi u celosti moraju pripadati jediničnom krugu.

Pored formulacije u Dekartovim koordinatama (x_i, x_i) , problem se jednostavno može preformulisati koristeći polarne koordinate (ρ_i, θ_i) , pa problem pakovanja n krugova ima sledeći oblik:

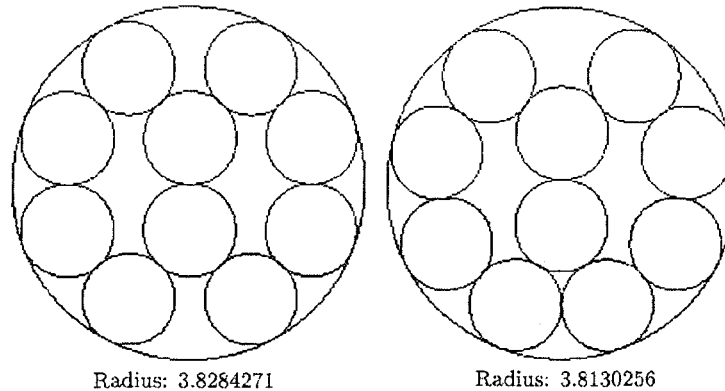
Max r

p. o.

$$\begin{aligned} \rho_i^2 + \rho_j^2 - 4\rho_i\rho_j \cos(\theta_i - \theta_j) - 4r^2 &\geq 0, & 1 \leq j < i \leq n, \\ \rho_i + r &\leq 1, & 1 \leq i \leq n, \\ \rho_i, r &\geq 0, \theta_i \in [0, 2\pi], & 1 \leq i \leq n. \end{aligned}$$

Primitimo da je gornji problem ekvivalentan pakovanju jediničnih krugova u krug minimalnog poluprečnika R ($R = 1/r$). Na slici 12 data su 2 rešenja pakovanja 10 jediničnih krugova. Dugo se smatralo da je rešenje dato na levoj strani slike optimalno, međutim, ispostavilo se da je rešenje sa desne strane bolje (odgovara mu manji radius R , odnosno veći poluprečnik r). U radu Mladenović, Plastria, Urošević (2004) primećeno je da se od prvog do drugog rešenja sa Slike 12 može doći pomeranjem svih centara krugova koji dodiruju veliki krug. Naime, svi pomenuti

centri pripadaju istom krugu pa je transformacija kojom se oni pomeraju duž istog kruga nelinearna u Dekartovim, a linearna u polarnim koordinatama. Iz tog razloga je predložena metoda kojom se iterativno menjaju formulacije problema.



SLIKA 12. Dva rešenja pakovanja 10 krugova

Iako su formulacije problema pakovanja i u Dekartovim i polarnim koordinatama ekvivalentne (optimalna rešenja oba modela su ista), Mladenović, Plastria i Urošević (2003) su uočili sledeće:

STAV 16. *Skupovi stacionarnih tačaka preformulisanih modela s Dekartovim i polarnim koordinatama pakovanja krugova u jedinični krug nisu jednaki.*

Dakle, kada *Minos* (ili neki drugi program rešavanja problema NP-a koji koristi prve parcijalne izvode) završi s radom u jednoj formulaciji, takvo rešenje je moguće popraviti jednostavnom promenom formulacije uz primenu iste optimizacione metode. U istom radu Mladenović, Plastria i Urošević (2003) predlažu novu metodu nazvanu *Reformulacioni spust* (*Reformulation descent*), koja koristeći očigledan stav 16, iterativno menja formulacije problema sve dok postoji bolje rešenje i dok ono nije stacionarna tačka po svim formulacijama (videti sliku 13).

Ova metoda se naravno može primeniti i u drugim problemima globalne (nekonveksne) optimizacije. Njeni koraci su sledeći:

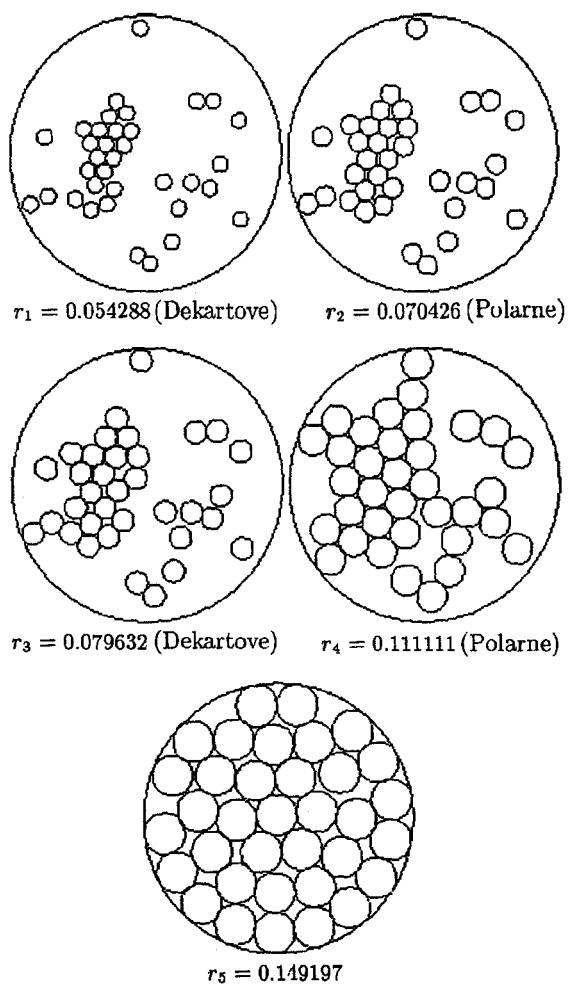
Algoritam 8 (*Reformulacioni spust*).

Korak 1. Konstruisati najmanje dve nelinearno povezane formulacije problema;

Korak 2. Izabrati početno rešenje Z ;

Korak 3. Ponavljati slededeće korake po svim definisanim formulacijama:

(a) naći stacionarnu tačku Z' primenom neke NP metode, čije je početno rešenje Z ;



SLIKA 13. Iteracije metode reformulacionog spusta u pakovanju 35 krugova

(b) ako je Z' bolje od Z , tada je $Z = Z'$; vratiti se na korak 3, tj. na prvu formulaciju;

U pomenutom radu korišćen je paket *Minos* u rešavanju problema pakovanja $n = 10, 11, \dots, 100$ krugova u jedinični krug. Upoređene su 4 metode: (i) *Minos* s formulacijom pomoću Dekartovih koordinata (MD); (ii) *Minos* s formulacijom pomoću polarnih koordinata (MP); (iii) Metoda reformulacionog spusta (RS) koja takođe koristi *Minos* u koraku 3(a); (iv) paket Spenbar (SP) koji je baziran na

Njutnovoj metodi, dakle metodi koja koristi i druge parcijalne izvode (Hessian), pa se ne zaustavlja u stacionarnoj tački.

Pokazano je da su metode RS i SP približne po kvalitetu dobijenog rešenja, ali je RS oko 150 puta brža. Pored toga, sa SP nije bilo moguće rešiti probleme veće od $n = 70$ za jedan sat kompjuterskog vremena. Preciznije, prosečno procesorsko vreme (na računaru Pentium IV, 1800 MHz) je bilo 4.94 sekunde za RS prema 704.96 za SP; poređenje je izvršeno za $n = 10, 11, \dots, 70$. Metode MD i MP su bile značajno lošije po kvalitetu rešenja u proseku. Njihova prosečna greška (na svih 90 primera i 10 početnih rešenja za svako n) bila je 79.25% za MD i 26.95% za MP. Na slici 13 ilustrovane su iteracije metode RS na primeru upisa 35 krugova. Iz slike se vidi da, zbog lošeg slučajno izabranog početnog rešenja, prvih par iteracija daje relativno slabija rešenja, da bi se u petoj iteraciji dobilo rešenje vrlo blizu do sada najboljem saopštenom u literaturi (tj. vredosti $r = 0.149294468$).

Max-sum-sum (p-odbrambeni) problem je definisan formulom (25). On ima interesantne osobine, što je pokazano u radu Mladenovića i Plastrije (2000). Pretpostavimo da je skup S konveksni poliedar u q -dimenzionom prostoru, odnosno neka je

$$(27) \quad S = \{x \in R^q \mid Ax \leq b, b \in R^m, A \in R^{m \times q}\}.$$

Tada važi sledeći stav:

STAV 17. *Optimalno rešenje x_j^* , $j = 1, \dots, p$, max-sum-sum problema (25), gde je S definisano sa (27), nalazi se u rogljevima poliedra S .*

DOKAZ. Neka je $X = (x_1, \dots, x_p) \in R^{qp}$ i neka je $S^p = S \times S \times \dots \times S$. Sada se $f_4(x)$ može predstaviti kao

$$\text{Max } g(X) = \sum \sum d(x_i, x_j), \quad X \in S^p$$

Dokaz ovog stava zasnovan je na poznatom tvrđenju da se maksimum konveksne funkcije nad konveksnom oblašću dostiže na rubovima te oblasti. Kako je $g(X)$ konveksna funkcija (kao zbir konveksnih), to se maksimum dostiže u ekstremnim tačkama (rogljevima) S^p . S druge strane važi da je $\text{ext}(S^p) = (\text{ext}(S))^p$, pa dakle $(x_1, \dots, x_p) = (e_1, \dots, e_p)$, gde je $e_j \in \text{ext}(S)$. \square

Dakle, iako je prostor mogućih lokacija beskonačan (kontinuum), svih p tačaka će se naći u rogljevima polijedra S . Postavlja se pitanje da li je moguće da u optimalnom rešenju više od jednog novog objekta bude locirano u istoj tački. Takvo rešenje nazvaćemo *degenerisanim*.

STAV 18. *Optimalno rešenje problema (25) može biti degenerisano ako je $p > 3$.*

DOKAZ. Lako uočavamo da za $p \leq 3$ rešenje nije nikad degenerisano. Dokaz ćemo izvesti pomoću kontraprimera za $n = p = 4$ i proizvoljno q . Odredimo poliedar S sa sledeća četiri roglja: e_1 je centar sfere čiji je poluprečnik jednak 10; ostale tri rubne tačke su smeštene na sferi na međusobnom rastojanju 1, 1 i 2 respektivno. Ako su sve 4 tražene lokacije smeštene u rogljevima, tj. $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (e_1, e_2, e_3, e_4)$, tada funkcija cilja ima vrednost $f_4(x_1, x_2, x_3, x_4) = 10 + 10 + 10 + 2 +$

$1 + 1 = 34$. Ali ako dve nove tačke lociramo u e_1 , odnosno ako je $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (e_1, e_2, e_3, e_1)$, tada je $f_4(x_1, x_2, x_3, x_4) = 10 + 10 + 0 + 1 + 10 + 10 = 41$. Dakle bolja (veća) vrednost je dobijena u degenerisanom rešenju. \square

Sledeći ove rezultate Mladenović i Plastrija (2000) su pokazali da se problem (25) može svesti na specifičan kombinatorni problem tj. na *kvadratni problem ranca* (*quadratic knapsack problem*).

6. LOKACIJSKO-ALOKACIJSKI PROBLEM

Do sada su razmatrani lokacijski modeli u kojima je protok (ili alokacija) između novih i postojećih objekata dat (tj. alokacije w_{ij} i v_{jk} u problemu lokacije više objekata). U praksi je međutim daleko češći slučaj da su i w_{ij} i v_{jk} nepoznate. Pored toga, u model ponekad treba uvesti i broj novih objekata (p) kao promenljivu zbog različitih fiksnih troškova vezanih za otvaranje objekta. U ovom delu ograničićemo se na najjednostavniji lokacijsko-alokacijski model, u kome se pored lokacija novih objekata određuje i gde će se koji korisnik snabdevati (alocirati). Pojednostavljenje se sastoji u sledećem:

- ne postoje interakcije između novih objekata
- broj novih objekata je unapred zadat
- korisnici se snabdevaju jednom vrstom robe (*single-comodity*)
- kapacitet novih lokacija (distributivnih centara) nije ograničen.

Dugi nazivi za lokacijsko-alokacijski problem je *više-izvorni Veberov problem* (*Multisource Weber*). Osnovni model lokacijsko-alokacijskog zadatka (Cooper, 1963) ima sledeći oblik:

$$(\min) f_{LA}(x, y) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^p y_{ij} \cdot w_i \cdot d_i(x_j)$$

p.o.

$$\sum_{j=1}^p y_{ij} = 1, \quad i = 1, \dots, m$$
$$0 \leq y_{ij} \leq 1, \quad i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, p.$$

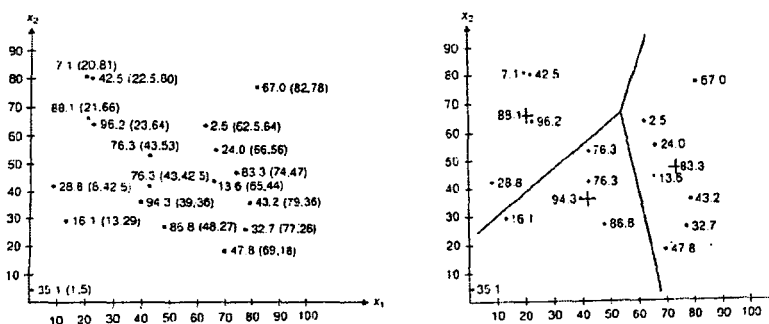
gde su

- $d_i(x_j) = d(a_i, x_j), a_i, x_j \in R^q$
- p – broj novih objekata (nepoznatih)
- m – broj korisnika (grupa korisnika)
- x_j – nepoznate lokacije novih objekata, $j = 1, \dots, p$ (lokacijska promenljiva)
- y_{ij} – promenljiva koja određuje proporciju zahteva korisnika i za objektom j (alokacijske promenljive);
- a_i – lokacije korisnika, $i = 1, \dots, m$.
- w_i – težinski koeficijent i -tog korisnika.

Skup ograničenja označava da potrebe korisnika u celosti moraju biti zadovoljene. Funkcija cilja daje ukupnu cenu prevoza sistema. U slučaju snabdevanja

samo jednom vrstom robe ("single commodity"), može se pokazati da se u optimalnom rešenju $(x_1^*, x_2^*, \dots, x_p^*)$, svaki korisnik snabdeva kod najbližeg snabdevača, tj. $y_{ij} \in \{0, 1\}$.

Primer 7. Na slici 14(a) date su lokacije 19 korisnika (u zagradama) i količina njihovih zahteva (težine) za robom. Na primer, 7.1 (20;81) označava da zahtev korisnika lociranog u tački s koordinatama (20;81) iznosi 7.1 kg. Treba odrediti lokacije tri distributivna centra, tako da zahtevi svih korisnika za robom budu zadovoljeni, a da težinski zbir rastojanja od svakog korisnika do distributivnog centra bude minimalan. Na slici 14(b) dato je optimalno rešenje. Sa + su označene lokacije centara. Potrošači su podeljeni (alocirani) u tri grupe (dve s pet potrošača i jedna sa devet). Vrednost funkcije cilja u toj tački je 15203 kg-km.



SLIKA 14. (Love i dr. 1989). Primer lokacijsko-alokacijskog zadatka i optimalno rešenje za $p = 3$.

Iako na prvi pogled lokacijsko-alokacijski model izgleda jednostavniji od modela višeobjektnog lociranja, on se daleko teže može rešiti. Broj promenljivih je sada $m \cdot p$ alokacijskih i $q \cdot p$ lokacijskih. Pored toga, funkcija cilja nije konveksna u prostoru svih promenljivih, tj. u $R^{p(m+q)}$, o čemu govori sledeći stav.

STAV 19. $f_{LA}(x)$ nije ni konveksna ni konkavna.

DOKAZ. Po poznatom stavu iz NP, dva puta diferencijabilna funkcija nije ni konveksna ni konkavna na otvorenom nekonveksnom skupu ako njena Hesijan matrica H (matrica parcijalnih izvoda drugog reda) nije ni pozitivno ($H > 0$) ni negativno definitna ($H < 0$). Po drugom poznatom stavu, matrica je pozitivno (negativno) definitna ako i samo ako su svi njeni glavni minori pozitivni (odnosno naizmenično pozitivni i negativni).

Dovoljno je dakle dokazati da bilo koji glavni minor (determinanta) matrice H , pa i minor drugog reda ne mora biti pozitivan za svako $(x, y) \in R^{p(m+q)}$, ako je već minor prvog reda pozitivan (za negaciju pozitivne definitnosti) ili ako je minor prvog reda negativan (za negaciju negativne definitnosti). Tehničke detalje dokaza (nalaženje drugih izvoda od $f_{LA}(x, y)$) prepuštamo čitaocu. \square

Kako $f_{LA}(x, y)$ nije ni konveksna ni konkavna, ona ima više lokalnih minimuma, pa lokacijsko-alokacijski problem spada u domen globalne optimizacije i tačno rešenje je moguće dobiti samo za probleme malih dimenzija ($m \leq 50$). Pošto u realnim problemima broj korisnika može biti više hiljada, to je pažnja istraživača usmerena na heurističke (aproksimativne ili približne) metode. Karakteristika ovog problema je veliki broj lokalnih minimuma različitog kvaliteta, pa je iz tog razloga često korišćen u testiranju novo predloženih metoda globalne optimizacije. Eilon i dr., (1971) su na problemu sa $m = 50$ i $p = 5$ registrovali 61 lokalni minimum s razlikom između najbolje i najlošije vrednosti od 40.9%. Tih 61 minimuma je dobijeno primenom Kuperovog algoritma (1964) sa 200 slučajno generisanih početnih rešenja, koga ćemo sada izložiti.

6.1. Alternativna heuristika (Cooper, 1964). Alternativne metode nisu retke i mogu se sresti u raznim oblastima numeričke matematike. U njima se prvo jedan skup promenljivih privremeno fiksira kako bi se neki složen numerički problem pojednostavio. Dobijena rešenja za nefiksirane promenljive se zatim fiksiraju, pa se rešava problem po promenljivim koje su ranije bile fiksirane. Ovo naizmenično rešavanje dva problema se nastavlja sve dok se konačno rešenje ne može popraviti, odnosno procedura se završava kada su dva uzastopna rešenja (i po jednoj i po drugoj grupi promenljivih) proizvoljno bliska. Naravno, neophodno je i dokazati konvergenciju ovakvog postupka. Ako je problem koji se rešava iz klase globalne optimizacije, *Alternativna metoda* je približna, dakle heuristička. Ona može voditi i do egzaktnog rešenja, što je na primer slučaj s poznatom Gaus-Zajdelov-om metodom rešavanja linearnih jednačina.

Alternativna heuristička procedura za rešavanje lokacijsko-alokacijskog zadatka naizmenično (alternativno) rešava lokacijski i alokacijski problem, dok se ne dobije lokalni minimum, odnosno rešenje koje se ponavljanjem gornjih procedura više ne može popraviti. Drugim rečima skup svih promenljivih je podeljen na prirodan način: na lokacijske x_j i alokacijske y_{ij} .

Algoritam 9 (Alternativna heuristika)

Korak 1: Iniciranje. Izaberi lokacije (proizvoljno) p tačaka (snabdevača) x_1, x_2, \dots, x_p . Brojač iteracija je na 1.

Korak 2: Alokacijski problem. Pridodeliti svakom korisniku najbližeg snabdevača, odnosno naći ($y_{ij} \in \{0, 1\}$).

Korak 3: Kriterijum završetka. Ako nema promena u ovom pridodeljivanju u odnosu na prethodnu iteraciju, kraj.

Korak 4: Lokacijski problem. Rešiti Veberove probleme za svaku grupu potrošača, vezanu za snabdevanje u x_j . Te tačke obeležiti sa x_1, x_2, \dots, x_p , pa preći na korak 2.

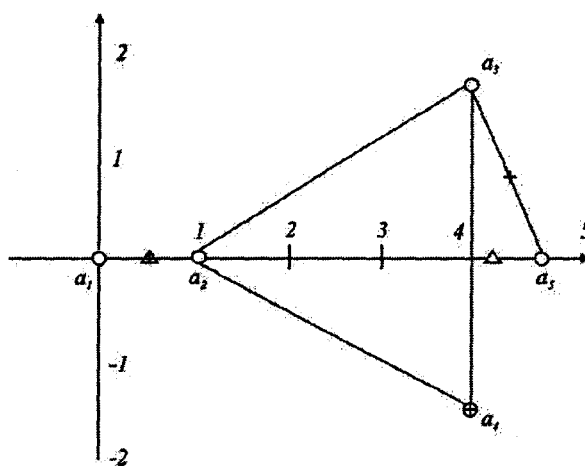
Iako alternativne metode rešavanja različitih problema imaju slične osobine, one se na žalost u različitim disciplinama nezavisno razvijaju i često nazivaju drugačijim imenima. Tako se na primer procedura ovog tipa u *Klaster analizi*

naziva *C-Means*, *H-Means*, ili *Fuzzy C-Means*; za rešavanje problema nalaženja p -Medijana ova Alternativna metoda se naziva Maranzanina metoda; za rešavanje zadatka bilinearnog programiranja, metoda alternativnog tipa se naziva *Rekurzivna*; u Statistici se metoda naziva *EM* (Expectation Maximum), itd.

Mali pomak u sagledavanju nekih mogućih zajedničkih osobina metoda alternativnog tipa saopšten je u radovima Mladenovića i Brimberga (1996) i Brimberga i Mladenovića (1999), gde je pokazano da se Kuperovom heuristikom mogu dobiti rešenja s manje od p novih lokacija, nezavisno od načina izbora početnog rešenja. Takva rešenja su nazvana "degenerisana" jer je jasno da ona nemogu biti optimalna; da bi se dobilo rešenje bolje od degenerisanog, dovoljno je novom snabdevaču dodeliti lokaciju bilo kog "nezauzetog" korisnika, odnosno korisnika čija lokacija već nije okupirana nekim snabdevačem.

STAV 20. Za inicijalnu particiju skupa potrošača u p grupa ($p \geq 3$), Kuperovom metodom se može dobiti degenerisano rešenje.

DOKAZ. Lako je pokazati da se za $p=2$ ne može dobiti degenerisano rešenje pomoću Alternativne heuristike, jer svi potrošači ne mogu biti u istoj grupi ako su na startu već bili podeljeni u dve grupe. Za $p \geq 3$ dokaz izvodimo kontra primerom. Na slici 15 dat je primer degenerisanog rešenja dobijenog Kuperovom metodom za $m = 5$, $p=3$ i $w_i = 1$.



○ fiksne tačke △ Kuperovo rešenje + optimalno rešenje

SLIKA 15. Primer degenirasonog rešenja dobijenog Kuperovom metodom za $m = 5$ i $p = 3$, koje umesto tri, ima dve nove lokacije.

Fiksne tačke imaju koordinate: $a_1 = (0, 0)$; $a_2 = (1, 0)$; $a_3 = (4, \sqrt{3})$; $a_4 = (4, -\sqrt{3})$; $a_5 = (4.75, 0)$. Pretpostavimo da je početno rešenje za Kuperov algoritam dato tako da se korisnik a_1 opslužuje u prvoj novoj nački, a_2 , a_3 i a_4 u drugoj i a_5 u trećoj. Lokacije te tri nove tačke su očigledno $x_1 = a_1 = (0, 0)$, $x_2 = (3, 0)$ i $x_3 = a_5 = (4.75, 0)$. Alociranjem korisnika svom najbližem snabdevaču x_j (korak 2 Kuperove procedure), korisnik lociran u a_2 se pridružuje prvom snabdevaču, dok se oni iz a_3 i a_4 pridružuju trećem, tj. tački a_5 . Dakle, x_2 nije više u upotrebi jer su se korisnici a_1 i a_2 grupisali oko prvog snabdevača x_1 , a ostalih tri oko trećeg. Rešavanjem Veberovih zadataka za ove dve grupe, dobijaju se rešenja $x_1 = (0, 0.5)$ i $x_2 = (0, 4.25)$. Kako se ponovnim rešavanjem alokacijskog zadatka ovo rešenje neće promeniti, zaključujemo da se alternativna heuristika zaustavlja u degenerisanom rešenju. \square

Interesantno je i pitanje *stepena degenerisanosti* dobijenog rešenja, odnosno za koliko je u rešenju bilo manje novih lokacija od traženog broja p . Nedegenerisano rešenje je *valjano*, pa je stepen degenerisanosti valjanog rešenja jednak nuli. U radovima Mladenović, Brimberg (1996) i Brimberg, Mladenović (1999), pokazano je da stepen degenerisanosti raste sa p . Neki eksperimentalni rezultati dobiveni Kuperovom metodom na klasičnom test primeru sa 50 korisnika i različitim brojem novih objekata (Eilon i dr. (1971)), dati su u tabeli 1.

TABELA 1

p	0	1	2	3	4	5	6	7	8
4	100	0	0	0	0	0	0	0	0
8	100	0	0	0	0	0	0	0	0
12	87	12	1	0	0	0	0	0	0
16	54	38	6	2	0	0	0	0	0
20	13	34	26	22	5	0	0	0	0
24	3	17	26	30	15	8	1	0	0
28	1	8	16	32	25	12	6	0	0
32	0	5	19	7	30	22	13	2	2
36	0	2	11	23	29	21	13	1	0

Kolone u tabeli 1 označavaju stepen degenerisanosti, dok vrste daju zahtevani broj novih objekata p . Eksperiment se sastojao u ponavljanju sledećeg eksperimenta 100 puta: za svako p početno rešenje je generisano na slučajan način, pa je zatim primenjena Kuperova heuristika. Dakle, za 4 i 8 novih objekata, svih 100 rešenja je bilo valjano; za na primer $p = 20$, 13 rešenja je bilo valjano, 34 rešenja je umesto 20 novih objekata našlo 19 (stepen degenerisanosti jednak jedan), s 26 rešenja su predložene lokacije 18 novih objekata, 22 puta je stepen degenerisanosti bio 3, itd. Interesantan je podatak da se za $p = 32$ i za $p = 36$ nije dobilo nijedno valjano rešenje.

Jednostavna modifikacija po kojoj se, u slučaju pojave degenerisanog rešenja novi objekti (dopuna do p) ubacuju na mesto izabranih fiksnih objekata, čime se

očigledno poboljšava kvalitet rešenja (i do 50% za veliko p), predložena je u Brimberg i Mladenović (1999).

6.2. p -Median heuristika. U radu u kome je predložio *Alternativnu* heuristiku, Kuper je pomenuo i nekoliko drugih približnih metoda rešavanja lokacijsko-alokacijskog zadatka. Ona koja je davala najbolje rezultate, ali je bila eksponencijalne složenosti pa je zato kasnije zanemarivana, sastojala se u izboru novih u postojećim lokacijama, odnosno u prebrojavanju svih $\binom{m}{p}$ kombinacija. Nedavno su Hansen, Mladenović i Taillard (1998) identifikovali ovu heuristiku kao problem nalaženja p -medijana (ili p -težišta) i primenili savremene egzaktne i približne metode rešavanja problema p -težišta u prvom koraku (videti Hansen i Mladenović (1997)), a zatim za svaki od p centara i njima najbližih korisnika, rešili Veberov problem. Tako dobijena rešenja su na nekim klasičnim test primerima iz literature bila daleko bolja i od modifikovane Kuperove metode (npr. za $m = 287$ i $p = 50$, dobijeno rešenje je bilo duplo manje).

6.3. Meta-heurističke metode. U rešavanju LA problema oprobane su i neke metaheuristike: (i) *genetski algoritam* u Brimberg, i dr. (2000); (ii) *tabu traženje* u Brimberg, Mladenović (1996a) i Brimberg i dr. (2000); (iii) *metoda promenljivih okolina* u Brimberg, Mladenović, (1996b), Mladenović, Hansen (1997) i Hansen i Mladenović (2003).

Metaheurističke pristup rešavanju problema kombinatorne i globalne optimizacije u načelu popravlja rešenja dobijena lokalnim pretraživanjima. U opsežnom radu Brimberga i dr. (2000) preko deset heurističkih i meta-heurističkih metoda je upoređeno na istim test primerima, na istom računaru i za isto procesorsko vreme. Najbolji rezultati (u srednjem) dobijeni su metodom *promenljivih okolina* i varijantom metode tabu traženja, tzv. "lančanom zamenom mesta" (*chain-interchange*) (Mladenović i dr. (1996)).

6.4. LA model ograničenih kapaciteta. Od velikog broja mogućih proširivanja ovog osnovnog modela, pomenućemo onaj u kome su kapaciteti snabdevača (novih objekata) ograničeni (*capacitated*). Matematički model ima sledeći oblik:

$$\begin{aligned}
 (\min) f(x, y) &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^p y_{ij} \cdot w_i \cdot d_i(a_i, x_j) \\
 \sum_{j=1}^p y_{ij} &= 1, \quad i = 1, \dots, m, \\
 \sum_{i=1}^m y_{ij} \cdot n_i &\leq \bar{n}_j, \quad j = 1, \dots, p \\
 0 &\leq y_{ij} \leq 1
 \end{aligned}$$

gde su

n_i – potražnja korisnika lociranog u tački a_i .

\bar{n}_j – maksimalan kapacitet snabdevača x_j .

Izraz $y_{ij}n_i$ predstavlja dakle količinu proizvoda koju je korisnik i dobio od novog objekta (distributivnog centra) j . U ovom modelu pretpostavljeno je da je kapacitet j -tog novog objekta ograničen. Cooper (1972) je predložio metodu alternativnog tipa, u kojoj se u koraku 2 umesto alokacijskog rešava transportni problem.

6.5. Model s konstantnim fiksnim troškovima (FT). Varijanta osnovnog LA modela odnosi se na realniju pretpostavku da broj novih lokacija p nije poznat. Pri tome se u model uvode i dati fiksni troškovi otvaranja nove lokacije F , jer da ih nema, broj novih lokacija u optimalnom rešenju bi naravno bio nula. Ovaj model, koga ćemo označiti sa FT, predložen je u radu Brimberg, Mladenović i Salhi (2003) i ima sledeći oblik:

$$(\min) f(x, y) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^p y_{ij} \cdot w_i \cdot d_i(x_j) + pF$$

p.o.

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^p y_{ij} &= 1, \quad i = 1, \dots, m \\ 0 \leq y_{ij} &\leq 1, \quad i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, p. \end{aligned}$$

Funkcijom cilja ovog modela određuju se ukupni troškovi transporta od korisnika do snabdevača ili centara, dok se skupom ograničenja obezbeđuje ispunjenje svih zahteva korisnika. Jasno je da se zapravo traži optimalan balans između cene izgradnje novog objekta F i njihovog broja p .

Ako pretpostavimo da p novih lokacija treba izabrati među lokacijama m korisnika, tada se gornji kontinualni model transformiše u dobro poznati diskretni *jednostavni lokacijski problem* (JLP):

$$(\min) f(x, y) = \sum_{j=1}^n F_j z_j + \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m c_{ij} \cdot y_{ij}$$

p.o.

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n y_{ij} &= 1, \\ 0 \leq y_{ij} &\leq z_j, \quad i = 1, 2, \dots, m; \quad j = 1, 2, \dots, m, \\ z_j &\in \{0, 1\}, \quad j = 1, 2, \dots, m; \end{aligned}$$

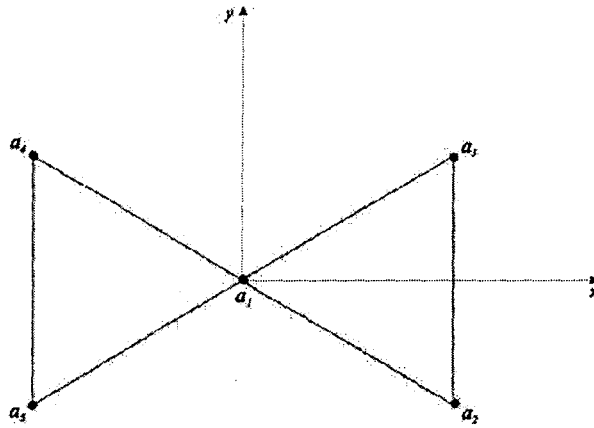
gde je F_j cena postavljanja (izgradnje) j -te lokacije, $c_{ij} = w_i d(a_i, x_j)$ cena (ili rastojanje) između korisnika i potencijalnog snabdevača, dok z_j predstavlja 0-1 promenljivu koje imaju vrednost 1 ako je izabrana lokacija j -tog korisnika kao mesto gde će se otvoriti novi centar. Za diskretni JLP model, jasno je da će se svaki korisnik snabdevati u najbližem otvorenom centru, odnosno lako je dokazati sledeći stav.

STAV 21. *Ako je (Z^*, Y^*) optimalno rešenje jednostavnog lokacijskog problema, tada je $y_{ij}^* \in \{0, 1\}$.*

Budući da u literaturi za JLP postoji veliki broj efektivnih metoda, to Brimberg, Mladenović i Salhi (2003) istražuju veze između FT i JLP, kako bi se kontinualni problem eventualno približno rešio primenom diskretnih metoda.

STAV 22. *Neka su p_1 i p_2 optimalan broj novih objekata u kontinualnom (FT) i diskretnom (JLP) problemu respektivno. Tada su moguće sve tri relacije između p_1 i p_2 , odnosno p_1 može biti veće, jednako ili manje od p_2 .*

DOKAZ. Ovo tvrđenje dokazaćemo kontraprimerom. Posmatrajmo slučaj s pet datih tačaka u ravni sa sledećim koordinatama: $a_1(0, 0)$, $a_2(\sqrt{3}/2, -1/2)$, $a_3(\sqrt{3}/2, 1/2)$, $a_4(-\sqrt{3}/2, 1/2)$, $a_5(-\sqrt{3}/2, -1/2)$, datih na slici 16.



SLIKA 16. Primer za dokaz stava 22.

Pretpostavimo da su težine pridodeljene svim korisnicima jednake 1, tj. $w_j = 1$, za $j = 1, \dots, m$. Optimalna rešenja i za diskretni JLP i kontinualni FT model data su u tabeli 2.

TABELA 2

$p \setminus$	Diskretni JLP	Kontinualni FT
1	$4 + F$	$4 + F$
2	$3 + 2F$	$(1 + \sqrt{3}) + 2F$
3	$2 + 3F$	$\sqrt{3} + 3F$
4	$1 + 4F$	$1 + 4F$
5	$5F$	$5F$

Za diskretan slučaj nije potrebno razmatrati vrednosti 2, 3 i 4 za p jer je $p_2 = 5$, za $0 \leq F \leq 1$, a za $F > 1$, važi $p_2 = 1$.

$$p_2 = \begin{cases} 5, & 0 \leq F \leq 1 \\ 1, & F > 1 \end{cases}$$

U kontinualnom slučaju važi sledeće:

$$p_1 = \begin{cases} 5, & 0 \leq F \leq \sqrt{3}/2 \\ 3, & \sqrt{3}/2 < F \leq 1 \\ 2, & 1 < F \leq 3 - \sqrt{3} \\ 1, & F > 3 - \sqrt{3} \end{cases}$$

Dakle,

- (a) $p_1 < p_2$, ako je $\sqrt{3}/2 < F < 1$;
- (b) $p_1 > p_2$, ako je $1 < F < 3 - \sqrt{3}$;
- (c) $p_1 = p_2$, u svim ostalim slučajevima.

Time je dokaz završen. \square

Sledeći stav, koji nećemo dokazivati (videti Brimberg, Mladenović, Salhi (2003)), daje uslove po kojima su rešenja kontinualnog i diskretnog modela lokacije asimptotski (u beskonačnosti) jednaka.

STAV 23. *Neka su m lokacija korisnika generisane na jediničnom kvadratu sa ravnomernom raspodelom i neka su težine generisanih tačaka $w_j = 1/m$, $j = 1, \dots, m$. Tada za $m \mapsto \infty$, $p_1 = p_2$.*

Koristeći stavove 22 i 23, u gornjem radu je predložena više-etapna heuristika bazirana na metodi Promena okolina razvijenom za rešavanje diskretnog JLP-a (Hansen, i dr. (2003)), na kojoj se nećemo zadržavati.

6.6. Model lančanog snabdevanja (Supply chain management). Drugo moguće proširenje uključuje u model i snabdevače novih distributivnih centara, ili fabrike. Za njih se pretpostavlja da su dati (njih $q < p$) i da imaju neograničen kapacitet. Treba odrediti lokacije p novih distributivnih centara tako da ukupna cena transporta (ili ukupno rastojanje) od korisnika do centra i od snabdevača do centra bude minimalno. Donosioc odluke mora balansirati svoje (tj. od fabrike do distributivnog centra) i troškove korisnika. Naravno, ako su troškovi korisnika veliki, centar će imati manji promet.

U cilju formulisanja matematičkog modela, uvešćemo i sledeće oznake:

q – broj snabdevača (fabrika);

b_k , $k = 1, \dots, q$ – poznate lokacije snabdevača;

z_{kj} – promenljiva koja određuje količinu robe koju treba transportovati od fabrike k do centra j ;

$\lambda \in [0, 1]$ – parametar kojim se određuje odnos troškova koje imaju korisnici i distributivni centri; za $\lambda=1$, donosioc odluke ne uzima u obzir svoje troškove.

Model ima sledeći oblik:

$$(\min) f(x, y, z) = \lambda \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^p y_{ij} \cdot w_i \cdot d_i(a_i, x_j) + (1 - \lambda) \sum_{k=1}^q \sum_{j=1}^p z_{kj} \cdot d_i(b_k, x_j)$$

p.o.

$$\sum_{j=1}^p y_{ij} = 1, \quad i = 1, \dots, m,$$

$$\sum_{i=1}^m y_{ij} \cdot n_i \leq \sum_{k=1}^q z_{kj}, \quad j = 1, \dots, p$$

$$0 \leq y_{ij} \leq 1$$

Novo ograničenje je takozvano *tranzitno* ili *protočno* ograničenje koje kaže da količina robe koja uđe u centar mora biti veća ili jednaka od količine koja iz njega izađe.

Literatura

- [1] Aho A., Hopcroft J., Ullman J. (1974), *The Design and Analysis of Computer Algorithms*, Addison-Wesley, Reading, Massachusetts
- [2] Brandeau M., Chiu S. (1989), "An overview of representative problems in location research", *Management Science*, **35**, 645–674.
- [3] Brimberg J., Hansen P., Mladenović N., Taillard E. (2000), "Improvements and Comparison of Heuristics for Solving the Multisource Weber Problem", *Operations Research*, **48**, 444–460.
- [4] Brimberg J., Mladenović N. (1996a), "Solving the continuous location – allocation problem with Tabu search", *Studies in location analysis*, **8**, pp. 23–32, Reeves, C. (Ed.) Athens, Greece.
- [5] Brimberg J., Mladenović N. (1996b), "A variable neighbourhood algorithm for solving the continuous location-allocation problem", in *Studies in location analysis*, **10**, pp.1–12, Hamacher, D. (Ed.), Athens, Greece.
- [6] Brimberg J., Mladenović N. (1999), "Degeneracy in the multi-source Weber problem", *Mathematical programming*, **85**, 213–220.
- [7] Brimberg J., Mladenović N., Salhi S. (2003), "The Multi-source Weber problem with constant fixed cost", *Journal of Operational Research Society* (u štampi).
- [8] Cabot A., Francis R., Stary M. (1970), "A network flow solution to a rectilinear distance facility location problem", *AIIE Transactions* **2**, 132–141.
- [9] Chen P., Hansen P., Jaumard B., Tuy H. (1988), "Solution of the multisource Weber and conditional Weber problems by d.-c. programming", *Operations Research*, **46**, 548–562.
- [10] Cooper L. (1963), "Location-allocation problems", *Operations Research*, **11**, 331–343.
- [11] Cooper L. (1964), "Heuristic methods for location-allocation problems", *SIAM Review*, **6**, 37–53.
- [12] Cooper L. (1968), "An extension of the generalized Weber problem", *Journal of Regional Science*, **8**, 181–197.
- [13] Cooper L. (1972), "Location-transportation problem", *Operations Research*, **20**, 94–108.
- [14] Courant R., Robins H. (1941), *What is new in Mathematics?*, Oxford University Press.
- [15] Eilon S., Watson-Gandy C., Christofides N. (1971), *Distribution management: Mathematical modeling and practical analysis*, Griffin, London.
- [16] Elzinga J., Hearn D. (1972), "Geometrical solutions for some minimax location problems", *Transportation Science*, **6**, 379–394.
- [17] Erkut E., Neuman S. (1991), "Comparison of four models for dispersing facilities", *INFOR*, **29**, 68–65.
- [18] Francis R. (1972), "A geometrical solution procedure for a rectilineardistance minimax location problem", *AIIE Transactions*, **4**, 328–332.
- [19] Gill P., Murray W., Wright M. (1981), *Practical Optimization*, Academic Press, London.
- [20] Hansen P., Brimberg J., Urošević D., Mladenović N. (2003), "Primal-dual Variable neighborhood search for exact solution of the simple plant location problem", *Operation Research* (poslato).
- [21] Hansen P., Mladenović N. (1997), "Variable Neighbourhood Search for the p -Median", *Location science*, **5**, 207 –226.
- [22] Hansen P., Mladenović N. (1999), "An Introduction to Variable Neighborhood Search" in *Metaheuristics, Advances and Trends in Local Search Paradigms for Optimization*, pp. 433–458, Voss, S. et al. (Ed.), Kluwer, Dordrecht.

- [23] Hansen P., Mladenović N. (2003), "Variable Neighborhood Search", u Glover, Kochenberger (eds), *Handbook of Metaheuristics*, 145–184, Kluwer, Dordrecht.
- [24] Hansen P., Mladenović N., Taillard E. (1998), "Heuristic solution of the Multisource Weber problem as a p -median problem, *Operations Research Letters*, **22**, 55–62.
- [25] Hansen P., Peeters D., Thisse J-F. (1981), "Constrained location and the Weber-Rawls problem", *Annals of Discrete Mathematics*, **11**, 147–164.
- [26] Hansen P., Peeters D., Thisse J-F. (1982), "An algorithm for a constrained Weber problem", *Management Science*, **28**, 1285–1290.
- [27] Hansen P., Peeters D., Thisse J-F. (1983), "Public facility location: a selective survey", in *Locational analysis of public facilities*, 223–262, Thisse, Zoller (Ed.), North-Holland.
- [28] Hansen P., Thisse J-F. (1981), "The Weber problem revisited", R.P. 10, SPUR, Louvain-la-Neuve.
- [29] Jacobsen S. (1981), "An algorithm for the minimax Weber problem", *European Journal for Operational Research*, **6**, 144–148.
- [30] Kuhn W. (1967), "On a pair of dual nonlinear programs", In: Abadie, J. (Ed.) *Nonlinear programming*, New Holland.
- [31] Kuhn W. (1973), "A note of Fermat's problem", *Mathematical Programming*, **4**, 98–107.
- [32] Kuhn W., Kuenne R. (1962), "An efficient algorithm for the numerical solution of the generalized Weber problem in spatial economics", *Journal of Regional Science*, **4**, 21–33.
- [33] Love R., Juel H. (1982), "Properties and solution methods for large location-allocation problems", *Journal of Operational Research Society*, **33**, 443–452.
- [34] Love R., Morris J., Wesolowsky G. (1989), *Facility location – models and methods*, North-Holland, New York.
- [35] Miehle W. (1958), "Link-length minimization in networks", *Operations Research*, **6**, 232–243.
- [36] Mladenović N., Brimberg J. (1995), "A Descent-Ascent Technique for solving the Multi-source Weber problem", *Yugoslav Journal of Operations Research*, **5**, 211–219.
- [37] Mladenović N., Brimberg J. (1996), A degeneracy property in continuous location-allocation problems, Les Cahiers du GERAD, G-96-37, Montreal.
- [38] Mladenović N., Hansen P. (1997), "Variable neighbourhood search", *Computers and Operations Research*, **24**, 1097–1100.
- [39] Mladenović N., Moreno J., Moreno-Vega J. (1996), "A chain-interchange heuristic method", *Yugoslav Journal of Operations Research*, **6**, 41–54.
- [40] Mladenović N., Plastria F. (2000), "A note on continuous p -defense-sum problem", *Yugoslav Journal of Operations Research*, **10**, 299–302.
- [41] Mladenović N., Plastria F., Urošević D. (2003), "Reformulation descent applied to circle packing problems", *Computers and Operations Research* (u štampi).
- [42] Rawls J. (1971), *A Theory of Justice*, Harvard University Press, Cambridge.
- [43] Reilly W. (1931), *The Law of Retail Gravitation*, Putnam, New York.
- [44] Weber A. (1909), *Ueber den Standort der Industrien*, Tubingen.
- [45] Weiszfeld E. (1936), "Sur le point pour lequel la somme des distances de n points donne le minimum", *Tohoku Mathematical Journal*, **43**, 355–386.
- [46] Wendell R., Hurter A. (1973), "Location theory, dominance and convexity", *Operations Research*, **21**, 314–320.
- [47] Wesolowsky G., and Love R. (1972), "A nonlinear approximation method for solving a generalized rectangular distances Weber problem", *Management Sciences*, **18**, 656–663.
- [48] Wesolowsky G. (1993), "The Weber problem: history and perspectives", *Location Science*, **1**, 5–23.

SADRŽAJ

Predgovor	3
1. Uvod	5
1.1. Tipične primene	5
1.2. Klasifikacija lokacijskih problema i modela	6
1.3. Kratak istorijat	7
2. Lokacija jednog objekta – Veberov Min-Sum problem	10
2.1. Euklidova metrika	11
2.2. Metode rešavanja problema s Euklidovom merom rastojanja	14
2.3. Pravougaono rastojanje	15
2.4. l_p rastojanje	18
3. Lokacija jednog objekta – prošireni modeli	22
3.1. Lokacijska ograničenja	22
3.2. Nelinearna zavisnost funkcije cilja od rastojanja	22
3.3. Lokacija neželjenih objekata	25
4. Lokacija jednog objekta - Raulsov Min-Max problem	27
4.1. Lokacija jednog objekta – Veber - Raulsov problem	28
5. Lokacija više objekata	30
5.1. Veberov problem lokacija više objekata	30
5.2. Raulsov problem lokacija više objekata	32
5.3. Lokacija p neželjenih objekata	32
6. Lokacijsko-alokacijski problem	39
6.1. Alternativna heuristika	41
6.2. p -median heuristika	44
6.3. Metaheurističke metode	44
6.4. Model ograničenih kapaciteta	44
6.5. Model fiksnih troškova	45
6.6. Model lančanog snabdevanja	47
Literatura	49