UNIVERZITET U BEOGRADU
PRIRODNO MATEMATIČKI FAKULTET

PRILOG IZUČAVANJU ODNOSA TOPOLOŠKIH STRUKTURA I ALGEBARSKIH SISTEMA

DOKTORSKA DISERTACIJA

MALIŠA R. ŽIŽOVIĆ

BEOGRAD, 1980.

S A D R Ž A J

Strana

P R E D G O V O R

Ovaj rad je usmeren na izučavanje veze izmedju pojedinih algebarskih struktura, sa topološkom ili bitopološkom strukturom, datom na istom skupu. Dat je pregled dosadašnjih rezultata i dokazano je postojanje nekih osobina koje do sada nisu bile proučene.

Pojedine oblasti obuhvaćene ovim radom su bile ili malo izučavane ili nisu izučavane pa ovde ima dosta nerešenih pitanja pri čemu su neka i istaknuta kao otvorena.

U vezi sa algebarskim rezultatima koji se ovde koriste, značajno je napomenuti da je dobar deo tih rezultata dat od naših matematičara. Ti rezultati su navedeni, uglavnom oni noviji i oni koji nisu opšte poznati, u uvodnom delu bez dokaza.

Topološki rezultati korišćeni ovde (koji nisu opšte poznati ili su noviji) su navedeni uz odgovarajuće poglavlje isto bez dokaza. Dokazi su dati samo za originalne rezultate.

Na kraju ću istaći da neobičnu zahvalnost dugujem profesoru D. Adnadjeviću pod čijim rukovodstvom je radjen ovaj rad za savete i sugestije i stalno praćenje u toku rada, profesoru G. Čuponi za pomoć u toku rada i profesoru J. Ušanu za pomoć na početku rada i podsticaje u toku rada.

1. U V O D

1.1. <u>Osnovne oznake i pojmovi o algebarskim sistemima</u>

Pod pojmom n-arne ($n \in N$) algebarske operacije $*$ (n-operativa) na skupu G, koji nije prazan, podrazumeva se preslikavanje

$$* : G^n \longrightarrow G$$

odnosno podrazumeva se jednoznačno pridruživanje svakoj uredjenoj n-torci $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in G^n$, elementa iz G.
U slučaju n = 2 kaže se da je reč o binarnoj operaciji odnosno operaciji a za n = 1 operacija se zove unarnom i ovde je reč o preslikavanju skupa G u sama sebe.

Pored ovog, pod O-arnom operacijom podrazumeva se fiksiranje odredjenog elementa iz skupa G.

Napomenimo da ćemo često umesto $(a_1, \ldots, a_n)$ pisati a_1^n odnosno opštije da ćemo koristiti sledeći dogovor

$$a_m^n \;\underline{\underline{\mathrm{def}}}\; \begin{cases} (a_m, \ldots, a_n) & \text{u slučaju } m < n, \\ a_m & \text{u slučaju } m = n \\ \emptyset & \text{u slučaju } m > n \end{cases}$$

Niz (a, a, ..., a)(m puta) ćemo označavati sa $\overset{m}{a}$. Pritom $\overset{0}{a}$ će pretstavljati prazan simbol.

Pod algenarskim sistemom podrazumeva se skup G zajedno sa nekim sistemom operacija Ω na njemu zadatih. Algebarski sistem se naziva još i univerzalnom algebrom ili kraće algebrom. Skup simbola operacija iz skupa Ω naziva se signaturom algebarskog sistema. Činjenica da je operacija $\omega \in \Omega$ n-arna ćemo oznčavati sa $|\omega| = n$ ili $\omega \in \Omega\, n$.

Pojmovi homomorfizma, kongruencije, generatornog skupa itd su uzete u običajenom smislu[40],[65],[66],[11], itd.

1.2. Pojam n-polugrupe, n-grupe, n-kvazigrupe i neka njihova svojstva

1.2.1. Def. Neprazni skup Q zajedno sa n-arnom operacijom (A) zove se n-grupoidom.

1.2.2. Def. Za n-grupoid Q(A) kaže se da je (i, j) - asocijativan ($1 \leq i < j \leq n$) ako je ispunjena jednakost

$$A\,(x_1^{i-1},\ A\,(x_i^{i+n-1}),\ x_{i+n}^{2n-1}) =$$

$$A\,(x_1^{j-1},\ A\,(x_j^{j+n-1}),\ x_{j+n}^{2n-1}) \quad . \ . \ . \ . \quad (1)$$

Za svako $x_1^{2n-1} \in Q^{2n-1}$

1.2.3. Def. n-grupoid Q(A) koji je (i, j) - asocijativan za svako $1 \leq i < j \leq n$, naziva se n-polugrupom.

1.2.4. Def. n-grupoid Q(A) naziva se n-kvazigrupom ako je jednačina

$$A\,(a_1^{i-1},\ x,\ a_{i+1}^{n}) = b \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \quad (2)$$

jednoznačno rešiva za svako $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ i za proizvoljne $a_1, \dots, a_i, a_{i+1}, \dots, a_n, b \in Q$.

1.2.5. Def. n-kvazigrupa Q(A) koje je istovremeno i n-polugrupa naziva se n-grupom.
n-grupoide, n-polugrupe, n-kvazigrupe i n-grupe za n=2 zovemo grupoidima, polugrupama, kvazigrupama i grupama.

1.2.6. Def. Element $e \in Q$ naziva se jedinicom operativa Q(A) ako je $A\,(\overset{i-1}{e},\ x,\ \overset{n-1}{e}) = x$ za svako $i = 1, 2, \dots, n$ i svako $x \in Q$.

1.2.7. Def. n-kvazigrupa sa bar jednom jedinicom se naziva n-lupa.
Napomenimo da n-grupa ($n > 2$) ne mora imati jedinični element za razliku od grupe.

Od raznih operacija definisanih na nekom skupu može se doći do novih operacija tzv. superpozicijom:

Neka su na skupu Q date operacije A i B arnosti m odnosno n. Superpozicija ovih operacija je operacija C arnosti m+n-1 dobijene na sledeći način

$$C(x_1^{m+n-1}) = A(x_1^{i-1}, B(x_i^{i+n-1}), x_{i+n}^{m+n-1})$$

Pri tome na Q možemo dobiti m, m+n-1 arnih operacija u zavisnosti od pozicije gde se u prvoj nalazi druga operacija, (u ovom slučaju ta pozicija je i), a da bi smo to istakli mi pišemo

$$C = A \overset{i}{+} B$$

Napomenimo da je superpozicija kvazigrupa kvazigrupa, polugrupa polugrupa. Isto tako je značajno napomenuti da postoje kvazigrupe arnosti veće od 2 koje se ne mogu dobiti od binarnih kvazigrupa.

Često puta će biti upotrebljena i sledeće oznake radi kratkoće pisanja

$$\overset{k}{A} = \underbrace{A \overset{1}{+} A \overset{1}{+} \ldots\ldots \overset{1}{+} A}_{k\text{-puta}}$$

Ovde će biti istaknut još jedan način dobijanja operacija od datih (manje arnosti od date):

Neka je A operacija arnosti m, ako fiksiramo n – od m promenljivih tj. promenljive $x_{k1}, \ldots, x_{kn}$ zamenimo sa fiksiranim $a_1, \ldots, a_n$ tada $A(x_1^m)$ dobija oblik

$$A(x_1^{k_1-1}, a_1, x_{k_1+1}^{k_2-1}, a_2, \ldots, x_{k_{n-1}}^{k_n-1}, a_n, x_{k_n+1}^{m})$$

tj dobijamo operaciju

$$B(x_1^{k_1-1}, x_{k_1+1}^{k_2-1}, \ldots, x_{k_n+1}^{m})$$

čija je arnost m-n. Pri tom zamenu $x_{k_1}, \ldots, x_{k_2}$ sa (a_1^n) zovemo retrakcijom a operaciju B retraktom operacije A.

Napomenimo da je retrakt kvazigrupe kvazigrupa, polugrupe polugrupa.

Specijalno retrakti n-kvazigrupa dobijeni fiksiranjem n-1-elementa zovu se translacijama. Ovde ćemo posebno istaći translacije kvazi grupe $Q(A_i)$

$$T_i^{(t)}x = A_i\,(\underbrace{k, \ldots, k}_{(t-1)}, x, k, \ldots k)$$

gde je k - fiksirani element iz Q. U opštem slučaju translaciju kvazigrupe Q(A) pri fiksiranom $a_1, \ldots, a_{n-1}$ a sa promenljivom na mestu t ćemo označavati sa

$$T^{(t)}_{a_1^{n-1}}(x) = A(a_1^{t-1}, x, a_t^{n-1})$$

Kada je kvazigrupa binarna moguće je dobiti dve translacije (levu i desnu) za odredjeno k i tada ćemo koristiti oznake $Lx = A(k,x)$ odnosno $Rx = A(x,k)$.

1.2.8. Def. Za n-operativ Q(B) kaže se da je izotop n-operativa Q(A) ako postoji niz $T = (\alpha_1^{n+1})$ permutacija skupa Q takav da je

$$B(x_1^n) = \alpha_{n+1}^{-1}\,A\,(\{\alpha_i x_i\}_1^n)$$

Za svako $x_1^n \in Q^n$. Niz T nazivamo izotopijom.

Jasno u slučaju da je $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_{n+1}$ pojam izotopije se poklapa sa pojmom izomorfizma.

U slučaju kvazigrupa važe sledeća tvrdnja:

1.2.9. Teorema. Svaka n-kvazigrupa $(n \geqslant 2)(Q, A)$ izotopna je nekoj n-lupi (Q,L).

1.2.1o. Teorema. Ako je n-lupa Q(L) izotopna n-grupi sa neutralnim elementom, Q(A), onda je Q(L) izomorna sa Q(A).

Zadnja teorema je poznata pod nazivom Albertova teorema. Kod binarnog slučaja nije potrebno naglašavati postojanje neutralnog elementa jer on uvek postoji, ali bez tog ograničenje u slučaju $n \geqslant 3$ teorema ne važi jer postoje kvazigrupe koje su izotopne n-grupama a nisu sa njima izomorfne.

Kod kvazigrupa od date kvazigrupe mogu se definisati i nove kvazigrupe - inverzne datoj kvazigrupi na sledeći način: Neka je Q(A) n - kvazigrupa, tada po definiciji u jednakostima

$$A\,(x_1^n) = x_n^{n+1} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (3)$$

svakih n elemenata jednoznačno odredjuju (n+1) - i element.

Fiksirajmo broj i ($1 \leq i \leq n$). Tada x_1^{i-1}, x_{i+1}, x_{i+1}^n jednoznačno odredjuju element x_i. Dobijamo na taj način novu operaciju:

$$(x_1^{i-1},\ x_{n+1},\ x_{i+1}^n\ ) \longrightarrow x_i$$

koju označavamo sa ${}^{\pi_i}A$ tj.

$${}^{\pi_i}A\ (x_1^{i-1},\ x_{n+1},\ x_{i+1}^n) = x_i \quad . \quad . \quad . \qquad (4)$$

Jasno je da su relacije (3) i (4) ekvivalentne.

<u>1.2.11. Def.</u> Operaciju ${}^{\pi_i}A$, definisanu jednakošću (4) nazivamo i-tom inverznom operacijom operaciji A. i-ta inverzna operacija kvazigrupe je kvazigrupa iste arnosti [11].

Sada ćemo dati još jednu definiciju n-grupe zapravo data definicija n-grupe ($n \geq 3$) je analogan definiciije grupe kao asocijativne kvazigrupe, a ova definicija će biti analogon grupe kao asocijativne operacije sa neutralnim elementom i sa inverznim elementom za svaki element iz Q.

<u>1.2.12. Def.</u> Neka je Q(A) n-kvazigrupe. Rešenje jednačine $A(a^{i-1},\ x,\ a^{n-1}) = a$ nazivamo i-tom kosim elementom za a i označavamo sa $\bar{a}^{i}$. Ako je $\bar{a}$ i-ti kosi element za svako i = 1, 2, ..., n onda ga zovemo kosim elementom elementa a.

U slučaju n-grupa važe sledeći stavovi:

- i-ti kosi element $\bar{a}$, elementa a, je kosi element elementa a za svako i = 1, 2, ..., n.

- Ako je $\bar{a}$ kosi element elementa a, tada

$$(X\ a^{i-2}\ \bar{a}\ a^{n-1}) = (a^{n-1}\ \bar{a}\ a^{i-2}\ x) = x$$

Za svako $x \in Q$ i svako $i = 1, 2, \ldots, n$.

Ovo omogućava da se da nova definicija n-grupe ($n \geqslant 3$):

1.2.13. Def. Skup Q zajedno sa n-arnom asocijativnom operacijom naziva se n-grupa, ako je svako $x \in Q$ postoji element $x' \in Q$ takav da važe jednakosti

$$(x' \overset{n-2}{x} y) = (y \overset{n-1}{x} x') = y$$

$$(x\, x' \overset{n-3}{x} y) = (y \overset{n-3}{x} x'\, x) = y$$

za svako $y \in Q$.

Ova definicija je ekvivalentna prethodnoj. O ovome se može više videti u [11].

1.3. Reprezentacije n-grupa grupama. Potapanje n-grupe u grupu

Slično kao i za n-kvazigrupe postoje i n-grupe koje nije moguće dobiti superpozicijama binarnih grupa. Medjutim proizvoljnu n-grupu $Q(\ )$ možemo smestiti (potopiti) u opsežniju binarnu grupu $G\,(.)$ ($G \supseteq Q$) tako da je Q generatorni skup za G i da je $(x_1^n) = x_1.x_2 \ldots\ldots x_n$ za svako $x_1, \ldots, x_n \in Q$. Preciznije važi sledeća:

1.3.1. Teorema. Ako je $Q(\ )$ n-grupa, tada postoji jedinstvena (sa tačnošću do izomorfizma) grupa G takva da je

$$G = Q \cup Q^2 \cup \ . \ . \ . \ \cup Q^{n-1} \quad . \ . \ . \ (1)$$

$$(\forall x_1, \ldots, x_n \in Q)(x_1, \ldots, x_n) = x_1.x_2 \ldots x_n$$

$$1 \leq i \leq j \leq n,\ x_\nu,\ y_\lambda \in Q \Longrightarrow \{x_1 \ldots x_i = y_1 \ldots y_j \Leftarrow$$

$$\Big[i=j \wedge (\exists z_1, \ldots, z_{n-1} \in Q)(z_1, \ldots, z_{n-i} x_1 \ldots x_i) =$$

$$= (z_1 \ldots z_{n-1}\, y_1 \ldots y_i)\Big]\Big\} \quad . \ . \ . \ . \ . \ (3)$$

Grupu G u prethodnoj teoremi se zove slobodnim pokrivačem n-grupe Q. Prethodna teorema je poznata kao Postova teorema [11],[34].

Pored potapanja n-grupe u grupu moguće su i sledeće reprezentacije n-grupa:

1.3.2. Lema.[11] Neka je Q( ) n-grupa. Tada postoji binarna kvazigrupa Q(o) tako da važi

$$(x_1^n) = \varphi(x_1 \circ x_2 \circ \ldots\ldots\ldots \circ x_n)$$

pri čemu je φ neka permutacija skupa Q a

$$x_1 \circ \ldots\ldots \circ x_n = (\ldots((x_1 \circ x_2) \circ x_3) \circ \ldots x_n)$$

1.3.3. Teorema.[11] Neka je Q( ) n-grupa. Postoji binarna grupa Q(.) sa automorfizmom θ tako da za svako $x_1, \ldots, x_n \in Q$ važi jednakost

$$(x_1^n) = x_1\, \theta\, x_2\, \theta^2\, x_3 \ldots \theta^{n-2} x_{n-1} \theta^{n-1} x_n c \qquad (4)$$

gde je c - odredjeni element iz Q i pri tom su ispunjeni uslovi

$$\theta^{n-1} x = c\, x\, c^{-1}, \quad \theta c = c \quad (x \in Q)$$

Ova teorema je poznata pod imenom Hosu-Gluskinova teorema. Ova teorema ima sledeću zanimljivu posledicu:

1.3.4. Posledica. n-grupa Q( ) sa jedinicom se može prikazati u obliku $(x_1^n) = x_1 \circ x_2 \circ \ldots \circ x_n$ gde je Q(o) odredjena binarna grupa.

1.3.5. Def. Za elemenat a Q kažemo da pripada centru n-operative Q(A) ako za svako $x_1, \ldots, x_{n-1} \in Q$ i svako $1 \leq i < j \leq n$ važi jednakost

$$A(x_1^{i-1}\, a\, x_i^{n-1}) = A(x_1^{j-1}\, a\, x_j^{n-1})$$

Navešćemo još jednu teoremu koja daje odgovor na pitanje kada se n-grupa sa jedinicom može pretstaviti preko binarne grupe:

1.3.6. Teorema. n-grupa sa jedinicom tada i samo tada je izvedena od binarne grupe kada jedinica pripada centru n-grupe.

Ovaj rezultat je "stariji" od prethodnog i pokazan je u opštijem slučaju za n-polugrupe od naših matematičara G. Čupone i B. Trpenovskog u [39] 1961 dok su Hosu i Gluskin nezavisno jedan od drugog do teoreme 1.3.3. i njenih posledica došli 1963. odnosno 1964 [95].

Zanimljivo je postaviti pitanje kada se zna da postoji jedna jedinica n-grupe da li ih ima još i koje su? Odgovor na ovo pitanje dat je sledećim stavom:

1.3.7. Stav. Neka je $Q(A)$ n-grupa sa jedinicom i $Q(B)$ grupa kojom je pretstavljena $Q(A)$ sa elementom e kao jedinicom. Element $x \neq e$ iz Q je jedinica n-grupe $Q(A)$ tada i samo tada kada je x permutabilan sa svim elementima u grupi $Q(B)$ i kada je red elementa x u $Q(B)$, r, takav da je zadovoljena sledeća jednakost:

$$n = kr + 1$$

gde je $k \in N$.

Dokaz. Neka je $x \neq e$ jedinica iz $Q(A)$ tada je $A(x, y, x, \ldots x) = A(y, x, \ldots x)$ za svako $y \in Q$, tj, $B(B(\ldots B(B(x,y)x), \ldots x) x) = B(B(\ldots B(y\ x)\ x), \ldots x)x)$ odakle sledi da je

$$B(x,y) = B(y,x)$$

Takodje $A(y,x,\ldots,x) = B(B(\ldots B(y, x), \ldots, x), x) =$

$$B(y,x^{n-1}) = y \text{ tj., } x^{n-1} = e$$

Odnosno $kr = n-1$ odnosno $n = kr + 1$

Obratno, neka je $x \neq e$ permutabilan sa svim elementima iz $Q(B)$ i neka je $n = kr + 1$, tada je

$$A(\overset{i}{x}, y, \overset{n-i-1}{x}) = B(B(\ldots(B(B(B \ldots B(B(x,x), x)\ldots$$

$$\ldots x),y),x), \ldots), x) = \ldots\ldots\ldots =$$

$$= B(B(\ldots B(B(x,x), x) \ldots, x), y) = B(x^{n-1} y) -$$

$= B(x^{kr}, y) = B(e,y) = y$ za svako $y \in Q$ i svako $i = 0, 1, \ldots, n-1$.

1.3.8. Posledice.

1. U slučaju da je n-grupa $Q(A)$ komutativna u prethodnom stavu nije potrebna pretpostavka o permutabilnosti.

2. U slučaju komutativne n-grupe (i samo u tom slučaju) mogu svi elementi biti jedinice ako i samo ako M-najmanji zajednički sadržilac redova elemenata grupe $Q(B)$ zadovoljava jednakost $n = kM + 1$, $k \in N$.

3. Ako je grupa $Q(B)$ prostog reda tada su svi elementi n-grupe $Q(A)$ jedinice ili samo jedinica grupe $Q(B)$.

1.4. Potapanje n-polugrupe u polugrupu

1.4.1. Def. [23] Za polugrupu $S(.)$ kaže se da je pokrivač n-polugrupe $Q(\ )$ ako je $Q \subseteq S$, $(x_1^n) = x_1 \cdot x_2 \cdots\cdots x_n$ za svako $x_1, \ldots, x_n \in Q$, Q je generatorni skup za polugrupu S.

Svaku polugrupu izomorfnu sa S smatramo takodje pokrivačem za $Q(\ )$.

1.4.2. Def. [23] Homomorfizam od pokrivača S_1 na S_2 n-polugrupe $Q(\ )$ indukovan identičkim preslikvanjem Q na Q (ako postoji) zove se Q - homomorfizmom.

1.4.3. Def. [23] Pokrivač P iz skupa pokrivača za n-polugrupe $Q(\ )$ se zove maksimalan ako može Q - homomorfno da se preslika na svaki pokrivač iz $\sum$. Pokrivač T je minimalan ako svaki Q - homomorfizam od T na neki drugi član iz $\sum$ je izomorfizam.

U [23] je prikazano da maksimalni pokrivač (ako postoji) je jednoznačno odredjen do izomorfizma a da to ne važi za minimalne pokrivače.

Navešćemo sada dve teoreme date u [23].

1.4.4. Teorema. Klasa pokrivača n-polugrupe nije prazna, u njoj postoje maksimalni i minimalni članovi. Neka je M maksimalni pokrivač n-polugrupe Q i neka je $\Omega = \{\alpha\}$ familija svih kongruencija α polugrupe M takvih da $x, y \in Q$ i $x \alpha y \Longrightarrow x = y$. Polugrupa S je pokrivač od Q ako i samo ako je izomorfna sa nekom polugrupom oblika M/α, $\alpha \in \Omega$. Svaka od kongruencija $\alpha \in \Omega$ se sadrži u nekoj maksimalnoj kongruenciji $\beta \in \Omega$ za koju je M/β minimalni pokrivač.

1.4.5. Teorema. [23] Neka je Q( ) n-polugrupa i neka su $(x_1, \dots, x_k)$ i $(y_1, \dots, y_k)$ dve k-torke elemenata iz Q, $k \leq n-1$. Ako postoje elementi $a_1, a_2, \dots, a_t \in Q$ i brojevi r_i, s_i, takvi da je

$$x_1 = A^{r_1}\, a_1^{r_1(n-1)+1}, \quad x_2 = A^{r_2}\, a_{r_1(n-1)+1}^{(r_1+r_2)(n-1)+2}, \quad \dots,$$

$$x_k = A^{r_k}\, a^{t}_{(r_1+r_2+\dots+r_{k-1})(n-1)+k-1}$$

$$y_1 = A^{s_1}\, a_1^{s_1(n-1)+1}, \quad y_2 = A^{s_2}\, a_{s_1(n-1)+1}^{(s_1+s_2)(n-1)+2}, \quad \dots,$$

$$y_k = A^{s_k}\, a^{t}_{(s_1+\dots+s_{k-1})(n-1)+k-1}$$

pri čemu je

$$t - k = (r_1 + \dots + r_k)(n-1) = (s_1 + \dots + s_k)(n-1),$$

tada pišemo

$(x_1, \dots, x_k)\varphi_o (y_1, \dots, y_k)$. Neka je φ tranzitivno proširenje od φ_o tj. neka je

$$X \varphi Y \Longleftrightarrow X \varphi_o U \varphi_o Z \varphi_o \dots \varphi_o W \varphi_o Y \text{ za neke}$$

k-torke U, Z, ..., W.

Neka je M maksimalni pokrivač od Q i neka $x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_r \in Q$, $r, k \leq n-1$. Tada je jednakost $x_1 \dots x_k = y_1 \dots y_r$ tačna u M ako i samo ako je $k = r$, i

$$(x_1, \dots, x_k)\, \varphi\, (y_1, \dots, y_k)$$

1.5. Potapanje algebri u polugrupe

Problem je uraktno sledeći: Neka je data polugrupa (G,.) i neka je na G definisana n-operacija ω na sledeći način

$$\omega(x_1, \ldots, x_n) = a_1x_1a_2x_2a_3 \ldots a_nx_na_{n+1} \qquad (1)$$

gde su $a_1, \ldots, a_{n+1}$ elementi polugrupe G (neki od njih mogu biti i prazni simboli). Zadavši na polugripi G neki sistem operacija ovog oblika dobijamo algebru (G,Ω).

Za algebru (Q,Ω) kažemo da je potopljena u polugrupu (G,.) ako postoji bar jedan monomorfizam algebre (Q,Ω) u algebru (G,Ω).

Problem da li postoji takva pokrivajuća polugrupa za proizvljnu algebru je potvrdno rešen u najopštijem obliku u [25] i [78] a kada su $a_2, \ldots, a_{n+1}$ prazni simboli u [60] (elementaran dokaz poslednjeg stava može se naći u [30] i [40] .

Pitanja u vezi sa potapanjem univerzalne algebre u polugrupu iz odredjene klase su rešavana u [78], [79] i [25].

Napomenimo da je algebru moguće potopiti i u grupoide sa odredjenim zakonima [76] i [77].

Ovde ćemo izneti pojam kompatibilnosti dat u [30].

1.5.1. Def. Za klasu algebri Σ kažemo da je kompatibilna sa klasom polugrupa ako svaka algebra $A(\Omega)$ iz ove klase ima pokrivač (S,.) takav da je algebra $S(\Omega)$ iz iste klase.

Napomenimo da algebru $S(\Omega)$ dobijamo tako što stavljamo

$$(\forall\omega\in\Omega)\ (\forall x_1, \ldots, x_\omega \in S)\omega x_1 \ldots x_{n\omega} = d_\omega x_1 \ldots x_n$$

U [29] je pokazano da klasa prstena, grupoida entropijskih (G(*), je entropijski grupoid akko $(\forall x,y,u,v\ \ G)(x * y) * (u * v) = (x * u) * (y * v))$, idempotentnih grupoida ((G, *) je idempotentan grupoid akko $\forall x \in G\ \ x * x = x$), komutativnih grupoida, mreža i grupa shvaćenih kao algebri sa tri operacije (G, ., -1, e), nisu kompatabilne sa klasom polugrupa. Pritom je klasa grupa (kao algebra sa jednom operacijom) kompatabilna sa klasom polugrupa.

U [36] je prikazano da je klasa Ω- asocijativa (vidi [36]) odnosno slabih Ω - asocijativa kompatabilna sa klasom polugrupa.

1.5.2. Def. Za algebru $\underline{A} = (A,\Omega)$ kažemo da je algebra sa kraćenjem operacija akko

$$f_1 \overset{i}{+} g_0 = f_2 \overset{i}{+} g_0 \Longrightarrow f_1 = f_2$$

i

$$f_0 \overset{i}{+} g_1 = f_0 \overset{i}{+} g_2 \Longrightarrow g_1 = g_2$$

Za svako f_ν, $g_\mu \in \Omega$ i svako $i \in N$ tako da je

$$f_\nu \overset{i}{+} g_\mu \quad \text{definisano.}$$

1.5.3. Primer. Neka je dat neprazan skup A i neka je Ω skup svih kvazigrupnih operacija definisanih na skupu A. (A,Ω) je algebra sa kraćenjem operacije (videti [11] str. 98)(podrazumevamo da postoji u Ω bar jedna operacija dužine $\geqslant 2$.

1.5.4. Teorema. Algebra (A,Ω) je algebra sa kraćenjem operacija ako i samo ako postoji polugrupa S koja sadrži skup

$C = \{c_f \mid f \in \Omega\}$ takav da je za svako $x \in S$ i svako

$c_f, c_g \in C$ $\quad xc_f = xc_g \Rightarrow c_f = c_g$ i $c_f x = c_g x \Rightarrow c_f = c_g$,

i pri tom je $A \subseteq S$ i za svako $f \in \Omega$ važi

$$f(x_1,\dots,x_n) = c_f x_1 \dots x_{n_f} \qquad (2)$$

Dokaz: $\Longleftarrow$ Ako je $(S,\cdot)$ polugrupa u kojoj je $C = \{C_f \mid f \in \Omega\}$ podskup koji zadovoljava uslov teoreme tada je algebra definisana od ove polugrupe pomoću (2), (S,Ω) algebra se kraćenjem operacija i je i njena proizvoljna podlagebra algebra sa kraćenjem operacija.

$\Longrightarrow$: Neka je (A,Ω) algebra sa kraćenjem operacija i $(S,\cdot)$ Kon-Rebaneova polugrupa u koju je ova potopljena tako da važi (2) Dokažimo da su elementi skupa $C = \{C_f \mid f \in \Omega\}$ kancelativni.

Neka je $\quad x_o c_f = x_o c_g, \; x_o, \; c_f, \; c_g \in S.$

Pretpostavimo prvo da je $x_o \in A$. Neka je $c_\varphi \in C$ proizvoljni element takav da je $|\varphi| > 1$, tada zbog monotonije važi da je

$$c_\varphi \, x_o c_f = c_\varphi \, x_o c_g$$

i za proizvoljne

$x_1, \ldots, x_n \in A$, $(n = |\varphi| + |f| - 2)$ važi da je

$c_\varphi \, x_o c_f x_1 \ldots x_n = c_\varphi \, x_o c_g x_1 \ldots x_n$ odnosno

$c_{\varphi \overset{2}{+} c_f} (x_o^n) = c_{\varphi \overset{2}{+} c_g} (x_o^n)$ ili

$c_{\varphi \overset{2}{+} c_f} = c_{\varphi \overset{2}{+} c_g}$ a odakle sledi

$c_f = c_g$

Ako je po pretpostavci $x_o = c_\varphi \in C$ tada iz istih razloga kao prethodno važi

$c_\varphi \, c_f x_o \ldots x_n = c_\varphi \, c_g x_o \ldots x_n$ pa je opet

$\varphi \overset{1}{+} f \, (x_o^n) = \varphi \overset{1}{+} g \, (x_o^n)$ ili

$\varphi \overset{1}{+} f = \varphi \overset{1}{+} g$ odakle je

$f = g$

Ukoliko je element $x_o \in S$ takav da ne pripada skupu A odnosno C tada je on prema konstrkciji Kon-Rebaneove polugrupe S [34] iredu-cibilan proizvod elemenata iz A i C pa se kombinovanjem dokaza iz prethodna dva slučaja ponovo dokazuje da

$$x_o c_f = x_o c_g \Longrightarrow c_f = c_g$$

Da bi smo kompletirali dokaz ovoga dela napomenimo da relacija $x_o c_f = x_o c_g$ ne može biti ispunjena ako je $|f| \neq |g|$ jer ako je na primer $|f| < |g|$ tada je na primer u slučaju $x_o \in A$ (a analogno i u ostalim slučajevima).

$$c_{\varphi}\, x_o c_f x_1 \,\ldots\ldots\, x_n = c_{\varphi}\, x_o c_g x_1 \,\ldots\ldots\, x_n$$

što za $n = |\varphi| + |f| - 2$ pokazuje da leva strana pripada skupu A a desna ne pripada, što je nemoguće. Dokaz da iz $c_f x_o = c_g x_o \Longrightarrow \mathcal{L}_f = \mathcal{L}_g$ je u potpunosti analogan pa ga ne treba ponavljati.

1.6. O nekim vrstama n-kvazigrupa i njihovim osobinama

1.6.1. Def. [11] Kvazigrupa Q( ) arnosti n u kojoj je ispunjena jednkost

$$(x_{11}^{n}, x_{21}^{n}, x_{31}^{n}, \ldots\ldots\, x_{n1}^{n}) =$$
$$(x_{11}^{n}, x_{12}^{n}, \ldots\ldots, x_{1n}^{n}) \quad \ldots (1)$$

Za svako $x_{11}, \ldots, x_{nn} \in Q$ naziva se medijalnom kvazigrupom.

Za medijalne kvazigrupe važi Tojdova teorema:

1.6.2. Teorema. [11] Neka je Q( ) medijalna kvazigrupa arnosti n. Tada na Q možemo definisati Abelovu grupu Q(+) takvu da važi jednakost:

$$(x_1^n) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\, x_i + b \quad \ldots\ldots (2)$$

gde su α_i $(i = 1, \ldots, n)$ uzajamno komutativni automorfizmi te grupe a, b odredjeni fiksirani elemenat skupa Q.

1.6.3. Def. [11] Kvazigrupa Q( ) arnosti n se naziva Mengerovom kvazigrupom ako je u Q( ) ispunjena jednkost

$$((x_1^n)\, x_{n+1}^{2n-1}) = (x_1, x_2\, x_{n+1}^{2n-1}, x_3\, x_{n+1}^{2n-1}, \ldots,$$
$$x_n\, x_{n+1}^{2n-1}) \quad \ldots\ldots\ldots (3)$$

za $\forall x_1^{2n-1} \in Q^{n-1}$

Napomenimo da jednakost (3) se zove jednakošću Mengera a zajedno sa tom jednakošću često puta se posmatra i takozvana i-ta jednakost Mengera:

1.6.4. Def. [11] i-tom jednakošću Mengera zovemo jednakost

$$(x_1^{i-1}\ (y_1^n)\ x_{i+1}^n) = (x_1^{i-1} y_1 x_{i+1}^n,\ \ldots,$$

$$x_1^{i-1} y_{i-1} x_{i+1}^n,\ y_i,\ x_1^{i-1} y_{i+1} x_{i+1}^n,\ \ldots,$$

$$x_1^{i-1} y_n x_{i+1}^n) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

Za i = 1 dobijamo jednakost (3)

1.6.5. Def. [11] Kažemo da su u n-kvazigrupi ispunjeni uslovi $D_{i,j}$ $(1 \leq i < j \leq n)$, ako iz jednakosti

$$(x_1^{i-1}\ u_i^j\ x_{j+1}^n) = (x_1^{i-1}\ v_i^j\ x_{j+1}^n)$$

sledi

$$(y_1^{i-1}\ u_i^j\ y_{j+1}^n) = (y_1^{i-1}\ v_i^j\ y_{j+1}^n)$$

za svako $\quad y_1,\ \ldots,\ y_{i-1},\ y_{j+1},\ \ldots,\ y_n \in Q.$

1.6.6. Lema. [11] Ako su u n-kvazigrupama Q( ) ispunjeni uslovi $D_{i,j}$ tada postoje kvazigrupe Q(A) i Q(B) arnosti n-j+i i j-i+1 takve da je

$$(x_1^n) = A\ (x_1^{i-1},\ B\ (x_i^j),\ x_{j+1}^n)$$

1.6.7. Lema. [11] Mengerova n-kvazigrupa Q( ) zadovoljava uslove $D_{2,n}$.

1.6.8. Teorema. [11] Ako je Q( ) Mengerova n-kvazigrupa tada je

$$(x_1^n) = x_1 \circ C\ (x_2^n)$$

gde je Q(o) grupa a Q(C) n-1 kvazigrupa.

1.6.9. Teorema. [11] Neka je u n-kvazigrupi Q( ) ispunjena i-ta jednakost Mengera za svako i = 1, 2, ..., n, tada postaju komutativne grupe Q(.) stepena n-2 takva da je

$$(x_1^n) = x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n$$

Napomenimo da se u pojedinim člancima Mengerove kvazigrupe nazivaju i Dikerovim kvazigrupama (vidi [14]).

Sada ćemo navesti nekoliko rezultata koje je dao J. Ušan (neke zajedno sa saradnicima).

__1.6.10. Teorema.__ [88] Ako su n-arne kvazigrupe $Q(A_i)$ $i \in \{1, 2, \ldots, 2n\}$ $\underline{\underline{\text{def}}}$ N_{2n} povezane opštim asocijativnim zakonom

$$A_1(A_2(a_1^{j-1}, a_j^n), a_{n+1}^{j+n-1}, a_{j+n}^{2n-1}) =$$

$$A_{2j-1}(a_1^{j-1} A_{2j}(a_j^{j+n-1}), a_{j+n}^{2n-1}) \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

Za svako $j \in \{2, \ldots, n\}$ tada je

1° Svaka $Q(A_i)$ $i \in N_{2n}$ izotopna jednoj i samo jednoj n-grupi $Q(A)$ sa jedinicom.

2° Postoji binarna grupa $Q(B)$ takva da je

$$A(a_1^n) = B(B(\ldots(B(a_1, a_2), a_3)\ldots), a_{n-1}), a_n)$$

Za n = 2 ovu teoremu je dokazao Belousov i zato je ova teorema poznata pod imenom n-arni analogan teoreme Belousova o četiri kvazigrupe.

U [91] je data karakterizacija izotopija kvazigrupa $Q(A_i)$ u odnosu na n-grupu $Q(A)$ iz prethodne teoreme tj. dokazana je sledeća

__1.6.11 Teorema.__ Ako n-kvazigrupe $Q(A_i)$ i N_{2n} zadovoljavaju jednačine (5) onda važe sledeće jednakosti:

$$A_{2j-1}(a_1^n) = A(T_1^{(1)} T_2^{(1)} a_1, \ldots,$$

$$T_{2(j-1)-1}^{j-1} \; T_{2(j-1)}^{(1)} \; a_{j-1}, T_{2j-1}^{(j)} \; a_j,$$

$$T_{2(j+1)-1}^{(j+1)} \; T_{2(j+1)}^{(n)} \; a_{j+1}, \ldots,$$

$$T_{2n-1}^{(n)} \; T_{2n}^{(n)} \; a_n) \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (6)$$

i $$A_{2j}(a_1^n) = T_{2j-1}^{(j)^{-1}} A(T_{2j-1}^{(j)} \; T_{2j}^{(j)} \; a_1, \ldots,$$

$$T_{2n-1}^{(n)} \; T_{2n}^{(n)} \; a_{n-j+1}, \; T_3^{(2)} \; T_4^{(2)} \; a_{n-j+2}, \ldots,$$

$$T_{2j-1}^{(j)} \; T_{2j}^{(n)} \; a_n) \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \qquad (7)$$

Za svako $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$

Ovi rezultati su omogućili da se dobije čitav niz zanimljivih i važnih rezultata:

U [97] je dokazana sledeća:

<u>1.6.12. Teorema.</u> Ako kvazigrupe $Q(A_i)$ (arnosti n za $i = 2j - 1$ i arnosti $m = n + d$, $d \in N \cup \{o\}$ za $i = 2j$), i N_{2n}, zadovoljavaju sistem jednakosti

$$A_1(A_2(a_1^{n+d}) \; a_{n+d+1}^{2n+d-1}) = A_{2j-1}(a_1^{j-1}, \; A_{2j}(a_j^{j+n+d-1}),$$

$$a_{j+n+d}^{2n+d-1}) \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \qquad (8)$$

Za svako $j \in N_n \setminus \{1\}$ tada važe sledeće jednakosti

$$A_{2j-1}(a_1^n) = \overset{n-1}{B} (T_1^{(1)} T_2^{(1)} a_1, \; T_3^{(2)} T_4^{(1)} a_2, \ldots,$$

$$T_{2(j-1)-1}^{(j-1)} \; T_{2(j-1)}^{(n)} \; a_j, \;\; T_{2j-1}^{(j)} \; a_j,$$

$$T_{2(j+1)-1}^{(j+1)} \; T_{2(j+1)}^{(n+d)} \; a_{j+1}, \ldots,$$

$$T_{2n-1}^{(n)} \;\; T_{2n}^{(n+d)} \; a_n) \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \qquad (9)$$

$$A_{2j}(a_1^{n+d}) = T_{2j-1}^{(j)^{-1}} \overset{n-1}{B} \; (T_{2j-1}^{(j)} \;\; a_1,$$

$$T_{2(j+1)-1}^{(j+1)} \; T_{2(j+1)}^{(1)} \; a_2, \ldots, \; T_{2(n-1)-1}^{(n-1)} T_{2(n-1)}^{(1)} \; a_{n-j},$$

$$T_1^{(1)} \; D \; (a_{n-j+1}^{n-j+d+1}), \;\; T_3^{(2)} \; T_4^{(n+d)} \; a_{n-j+d+2}, \ldots,$$

$$T_{2j-1}^{(j)} \; T_{2j}^{(n+d)} \; a_{n+d}) \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \qquad (10)$$

Za svako $j \in N_n$, gde je B binarna grupa (kao u 1.6.11.T) a D kvazigrupa arnosti d + 1 definisana sa

$$D\,(a_n^{n+d}) = A_2\,(\overset{n-1}{k}, a_n^{n+d}) \qquad k \text{ - odredjeni element } Q.$$

a u [45] sledeća

1.6.13. Teorema. Ako kvazigrupe $Q(A_i)$(arnosti n za i parno i arnosti n + d za i neparno) $i \in N_{2(n+d)}$ zadovoljavaju sistem jednakosti

$$A_1(A_2(a_1^n), a_{n+1}^{2n+d-1}) =$$

$$A_{2j-1}(a_1^{j-1}, A_{2j}(a_j^{j+n-1}), a_{j+n}^{2n+d-1}) \quad \ldots . \quad (11)$$

Za svako $j \in \{2, \ldots, n+d\}$ tada važe jednakosti

$$A_{2j}(a_1^n) = T_{2j-1}^{(j)^{-1}} A\,(T_{2j-1}^{(j)}\, T_{2j}^{(1)}\, a_1, \ldots,$$

$$T_{2n-1}^{(n)}\, T_{2n}^{(1)} a_{n-j+1}, T_3^{(2)}\, T_4^{(n)} a_{n-j+2}, \ldots,$$

$$T_{2j-1}^{(j)}\, T_{2j}^{(n)}\, a_n) \quad \ldots \ldots \ldots \ldots . \quad (12)$$

$$A_{2j-1}(a_1^{n+d}) = \overline{A}\,(T_1^{(1)} T_2^{(1)} a_1, \ldots,$$

$$T_{2(j-1)-1}^{(n+d)}\, T_{2(j-1)}^{(1)}\, a_{j-1}, T_{2j-1}^{(j)}\, a_j,$$

$$T_{2(j+1)-1}^{(j+1)}\;\; T_{2(j+1)}^{(n)}\, a_{j+1},$$

$$T_{2(n+d)-1}^{(n+d)}\, T_{2(n+d)}^{(n)}\, a_{n+d}) \quad \ldots \ldots \ldots . \quad (12)$$

Za svako $j \in \{1, 2, \ldots, n+d\}$ gde je

$$A\,(a_1^n) = \overset{n-1}{B}\,(a_1^n)$$

$$\overline{A}\,(a_1^{n+d}) = \overset{n+d-1}{B}(a_1^{n+d})$$

a Q(B) je binarna grupa.

Translacije $T_i^{(t)}$ su definisane sa $T_i^{(t)}x = A_i\,(k, \overset{t-1}{x}, \overset{n-t}{t})$.

n-arni analogan Belousovljeve teoreme omogućio je stvaranje teorije o asocijativnim sistemima n-arnih kvazigrupa [94] analognu Belousovljevoj [12] kao i dokaz n-arnog analogne Šauflerove teoreme [98].

<u>1.6.14. Def.</u> [94] Neka je $\Sigma \subseteq \Omega$, gde je Ω skup svih n-arnih kvazigrupnih operacija definisanih na Q. Sistem Σ nazivamo slabo i asocijativnim u celom, kratko iA - sistemom, ako za svako A_{m+1}, $A_m \in \Sigma$, gde je m fiksiran broj oblika $m = 2i - 1$, $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, postoje takvi A_t, $A_{t+1} \in \Omega$, za svako $t \in \{2s - 1 \mid s \neq i,\ s \in \{1, 2, \dots, n\}\}$ da važi jednakost (5).

<u>1.6.15. Def.</u> [94] Neka je $\Sigma \subseteq \Omega$, gde je Ω skup svih n-arnih kvazigrupnih operacija definisanih na Q. Sistem nazivamo i-asocijativnim u celom (iA - sistemu) ako za svako A_m, $A_{m+1} \in \Omega$, gde je m fiksirani broj oblika $m = 2i-1$, $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, postoje takve A_t, $A_{t+1} \in \Sigma$ da za svako $t \in \{2s-1 \mid s \neq i,\ s \in \{1, 2, \dots, n\}\}$ da važi jednakost (5).

<u>1.6.16. Def.</u> [94] Neka je $\Sigma \subseteq \Omega$, gde je Ω skup svih n-arnih kvazigrupa definisanih na Q. Σ nazivamo A-sistemom ako je on iA-sistem za svako $i \in \{1, 2, \dots, n\}$.

<u>1.6.17. Teorema.</u> [94] Neka je na skupu Q dat iA-sistem Σ n-arnih kvazigrupa. Tada na Q možemo definisati grupu B takvu, da svaka operacija $A \in \Sigma$ ima oblik:

$$A(x_1^n) = \overset{n-1}{B}\,(\alpha_1^{i-1}\, x_1^{i-1},\ \alpha_i x_i, \alpha_{i+1}^n\, x_{i+1}^n)$$

gde su α_i - automorfizam grupe B a α_t, $t \in N_n \setminus \{i\}$ odredjene permutacije skupa Q.

<u>1.6.18. Napomena.</u> Proizvoljnu permutaciju α_n iz prethodne teoreme možemo dobiti kao kompoziciju odredjenih translacija kvazigrupa iz sistema Σ prema teoremi 1.6.11.

<u>1.6.19. Teorema.</u> [94] Neka je na Q dat iA-sistem Σ n-arnih kvazigrupa. Tada na skupu Q možemo definisati grupu B takvu da svaka operacija $C \in \Sigma$ ima oblik:

$$C(x_1^n) = B\,(\overset{n-1}{B}(\Phi_1 x_1,\ \Phi_2 x_2,\ \ldots,\ \Phi_n x_n),\ k)$$

gde su Φ_i automorfizni grupe B, a k odredjeni elemenat iz Q.

Napomenimo da prethodnu teoremu možemo očitati i kao teoremu Hosu-Gluskina (1.3.3.) kada je $\Sigma = \{A\}$ tj. Σ je jednoelementni skup od jedne n-grupe.

Kao primer 1A - sistema može nam poslužiti skup

$$\Sigma_B = \{A \mid A\,(x_1^n) = B\,(\overset{n-1}{B}(\varphi_1 x_1,\ \ldots,\ \varphi_n x_n),\ k),$$
$$k \in Q,\ \varphi_i \in \mathcal{A}_B \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \quad (13)$$

gde je B grupa na Q a $\mathcal{A}_B$ - skup automorfizma grupe B.

Može se videti da je Σ_B iA-sistem i za svako drugo i = 2, ..., n, tj. da je A - sistem.

1.6.19. Teorema. [94] iA - sistem Σ_B iz (13) je maksimalan tj. ne može se uključiti u širi iA - sistem.

1.7. O algebrama smeštaja

Odnosi medju finitarnim operacijama koji su izučeni u [21] mogu biti dati i preko odredjenih apstraktnih karakteristika kako je to učinjeno u [31], [35], i [13].

Ovde će biti izložene definisije i rezultati dati u [31].

Neka je $\{\Lambda_n \mid n = 0, 1, 2, \ldots,\}$ disjunktna familija skupova i neka je

$$\Lambda = \bigcup_{o}^{\infty} \Lambda_n .$$

Ako $f \in \Lambda_n$, tada ćemo pisati $|f| = n$. Osim toga, neka je $\{\overset{i}{+},\ i = 1, 2, \ldots\}$ familija binarnih parcijalno definisanih operacija u Λ sa sledećim osobinama:

1.7.1. Ako $f, g \in \Lambda$ i i je prirodan broj takav da je $i \leqslant |f|$, tada $h = f \overset{i}{+} g$ je jednoznačno definisan elemenat iz Λ (za $i > f$, $f \overset{i}{+} g$ nema smisla).

Pri tome
$$|f \overset{i}{+} g| = |f| + |g| - 1$$

1.7.2. Ako $f, g, h \in \Lambda$ i ako $i \leqslant |f|$, $j \leqslant |g|$ tada
$$f \overset{i}{+} (g \overset{i}{+} h) = (f \overset{i}{+} g) \overset{i+j-1}{+} h$$

1.7.3. Ako $f, g, h \in \Lambda, |h| = p$, $j < i \leqslant |f|$, tada
$$(f \overset{i}{+} g) \overset{j}{+} h = (f \overset{i}{+} h) \overset{i+p-1}{+} g$$

Ako je sve to ispunjeno kažemo da je Λ ($\overset{i}{+}$, $i = 1, 2, \ldots$) algebra smšetaja.

Kao primer algebre smeštaja imamo neprazni skup A zajedno sa svim n-arnim operacijama u A pri čemu je $\Omega_0(A) = A$ a $f \overset{i}{+} g$ je superpozicija operacija.

Za algebru smeštaja koja je podalgebra algebre iz prethodnih primera kažemo da je konkretna.

Napomenimo da su pojmovi homomorfizma, kongruencije, faktoralgebre, podalgebre definisani na uobičajeni način.

Za algebre smeštaja u [30] je dokazana sledeća:

1.7.4. Teorema. Svaka algebra smeštaja je konkretna.

2. TOPOLOŠKE n - GRUPE

2.1. Uvod

Zadnjih godina je, nekoliko autora (vidi npr. [20] , [34]), izučavajući topološke n-grupe, došlo do niza osobina sličnih onima koje poseduju topološke grupe. Ovde će biti razmotren odnos topoloških n-grupa u odnosu na topološke grupe sa ciljem da se pokaže da je taj odnos sličan odnosu n-grupa u odnosu na grupe. Specijalno ovde će biti prikazan rezultat G. Čupone [34] o potapanju topološke n-grupe u topološku grupu (njen pokrivač, (vidi 1.3.), je topološka grupa) i biće pokazan topološki analogan Hosu - Gluskinove teoreme (vid. 1.3.).

2.2. Osnovne definicije

2.2.1. Def. [20] Topološki prostor Q, koji je takodje i n-grupa naziva se topološka n-grupa, ako važi

1/ Preslikavanje $g_1 : Q^n \to Q : (x_1, \ldots, x_n) \to x_1, \ldots, x_n$ je neprekidno po svim promenljivima istovremeno

2/ Preslikavanje $g_2 : Q \to Q : x \to \bar{x}$ je neprekidno.

Nije teško videti da se pojam topološke n-grupe za slučaj n = 2 poklapa sa pojmom topološke grupe [75] , [54] .

2.2.2. Def. [54] Topološki prostor Q, koji je takodje i kvazigrupa naziva se topološkom kvazigrupom ako su kvazigrupne operacije i njoj inverzne operacije neprekidne po obema promenljivima.

Napomenimo da je topološka kvazigrupa koja je grupa topološka grupa.

2.3. Potapanje topološke n-grupe u topološku grupu

Poznato je, (t. 1.3.1.), da proizvoljna n-grupa može biti potopljena u grupu, tj., da svaka n-grupa ima slobodni pokrivač, pa takodje i proizvoljna topološka n-grupa ima slobodni pokrivač. S tim u vezi je prirodno postavljeno pitanje, da li je taj pokrivač u nekoj topologiji topološka grupa, ali takva, da indukovana topologija na skupu Q bude data topologija topološke n-grupe. Odgovor na ovo pitanje dao je G. Čupona u [34] sledećom teoremom:

2.3.1. Teorema. Neka je Q topološka n-grupa, a G slobodan pokrivač n-grupe Q. Neka je $\mathcal{B}$ kolekcija podskupova grupe G definisane na sledeći način:

$$\mathcal{B} = \{A_1 \dots A_k \mid 1 \leq k \leq n-1,\ A_1, \dots, A_k \text{ su otvoreni skupovi u } Q\}$$

tada je:

1/ $\mathcal{B}$ baza topologije $\mathcal{J}$ na G,
2/ Postojeća topologija na Q je indukovana topologijom na Q, Q je otvoren i zatvoren podskup od G,
3/ G je topološka grupa,
4/ Ako je Q kompaktna (Hauzdorfova) n-grupa onda je G kompaktna (Hauzdorfova) grupa.

Pored ovih osobina koje se prenose iz prostora Q na prostor slobodnog pokrivača postoje i druge osobine koje se takodje prenose, ovde ćemo dati neke od njih:

2.3.2. Stav. Ako je Q normalan topološki prostor onda je i G normalan topološki prostor.

Dokaz. Neka je F zatvoren podskup prostora G i neka je $F \subseteq Q^k$. Neka je O(F) proizvoljna okolina zatvorenog skupa F. Pri tom neka je $F = \bigcap\limits_{\alpha} F_{1\alpha} \dots F_{k\alpha}$ gde su $F_{1\alpha}, \dots, F_{k\alpha}$ zatvoreni skupovi u Q (jer iz prethodne teoreme proizilazi da je baza zatvorenih skupova sastavljena od elemenata oblika $F_1 \dots F_k$), a $O = \bigcup\limits_{\beta} O_{1\beta} \dots O_{k\beta}$ tako da je $F \subseteq O$.

Pokažimo da je u tom slučaju $F_i = \bigcap\limits_{\alpha} F_{i\alpha} \subseteq \bigcup\limits_{\alpha} O_{i\alpha} = O_i$. Pretpostavimo da to nije tj. neka postoji $a \in \bigcap\limits_{\alpha} F_{i\alpha}$ takva da $a \notin \bigcup O_{i\alpha}$ odnosno tada je za proizvoljne $a_j \in F_j$ $j \neq i$ $1 \leq j \leq k$, $s = (a_1, \dots a_{i-1}\ a\ a_{i+1}, \dots a_k) \in F_{1\alpha} \dots F_{k\alpha}$ a $s \notin O(F)$ što je suprotno pretpostavci da je $F \subseteq O(F)$.

Kako je Q po pretpostavci normalan pa po maloj Urisonovoj lemi postoji otvoren skup $O_i'(F_i) \supseteq F_i$ takav da je

$$F_i \subseteq \overline{O_i'} \subseteq O_i$$

odakle je
$$F \subseteq O_1' \; .... \; O_k' \subseteq \overline{O_1'} \; .... \; \overline{O_k'} =$$

$$\overline{O_1' \; .... \; O_k'} \subseteq \overline{O_1 \; .... \; O_k}$$

odnosno sledi da je prostor [illegible] malan prostor pa je i prostor G normalan.

2.3.3. Stav. Ako je prostor G_i potpuno nepovezan onda je i prostor G potpuno nepovezan.

Dokaz. Neka je $H = H_1 \; ... \; H_k$ proizvoljan bar dvočlan podskup od Q^k. Iz ove pretpostavke sledi da je za bar jedno i $H_i \subseteq Q$ bar dvočlan skup. Po pretpostavci Q je potpuno nepovezan prostor pa postoje otvoreni skupovi U_i, $V_i \subseteq Q$ takvi da je

$$(H_i \cap U_i) \cup (H_i \cap V_i) = H_i \quad \text{tj.}$$

$$H_i \cap (U_i \cup V_i) = H_i$$

i
$$(H_i \cap U_i) \cap (H_i \cap V_i) = \emptyset \quad \text{tj.}$$

$$H_i \cap (U_i \cap V_i) = \emptyset$$

Označimo pri tom sa

$$U = U_1 \; .... \; U_k$$

$$V = V_1 \; .... \; V_k$$

Otvorene skupove u prostoru Q^k takve da je

$$U_j \supseteq H_j, \quad V_j \supseteq H_j \quad \text{za proizvoljno } j \neq i \text{ a}$$

U_i i V_i su otvoreni skupovi sa gornjom pretpostavkom. Tada je

$$(H\cap U)\cup(H\cap V) = H \quad \text{i} \quad H\cap(U\cap V) = \emptyset$$

jer je $U\cap V = \emptyset$ po konstrukciji. Dakle prostor Q^k je potpuno nepovezan za proizvoljno $1 \leq k \leq n-1$ pa je i G potpuno nepovezan.

2.3.4. Posledica- Ako je Q kompaktan i nula dimenzionalan ($\dim Q = 0$) onda je $\dim G = 0$.

2.3.5. Stav. Ako je $\dim Q = 0$ onda je $\dim G = 0$.

Dokaz. Dokažimo da je $\dim Q^2 = 0$. Neka je W proizvoljni pokrivač prostora Q^2. Neka je $\mathcal{W}'$ pokrivač pokrivača $\mathcal{W}$ sastavljen od baznih elemenata.

$$\{U_\alpha \cdot V_\beta\}_{\alpha\beta}$$

pri tom $\{U_\alpha\}_\alpha$ je pokrivač prostora Q a takodje i $\{U_\beta\}_\beta$. Pri pretpostavci da je $\dim Q = 0$ prestaji konačni podpokrivač $\mathcal{U} = \{U_1, \ldots, U_s\}$ čija je kratnost 1 (svaka tačka pripada tačno jednom članu pokrivača) i $\mathcal{V} = \{V_1, \ldots, V_l\}$ kratnosti 1. Pri tome je

$\mathcal{W}' = \{U_i V_j\}$ $1 \leq i \leq s$, $1 \leq j \leq l$ konačan podpokrivač pokrivača $\{U_\alpha\ V_\beta\}_{\alpha\beta}$ takav da je njegova kratnost 1.
Zaista za proizvoljno $ab \in Q^2$ neka su $U_i \in U$ i $V_j \in V$ takvi da $a \in U_i$ i $b \in V_i$ a odavde $ab \in U_i V_j$ i ni u jednom više.

Odavde sledi $\dim Q^2 = 0$.

Analogno se pokazuje da je $\dim Q^k = 0$ $3 \leq k \leq n-1$ a odavde sledi da je $\dim G = 0$ jer je $G = QU \ldots UQ^{n-1}$ pri čemu su $Q, \ldots, Q^{n-1}$ zatvoreni nuladimenzionalni podskupovi prostora G.

2.3.5. Posledica. Ind $Q \Rightarrow 0 \Rightarrow$ Ind $G = 0$.
Sleduje iz činjenice da je $\dim X = 0 \Longleftrightarrow \operatorname{Ind} X = 0$ za proizvoljan prostor X.

2.3.6. Stav. Ako je ind $Q = 0$ onda je ind $G = 0$.

Dokaz. Neka je ind $Q = 0$ i neka je $p \in Q^k$ proizvoljna tačka iz G. Neka je $O(p)$ proizvoljna okolina tačke p. Ako $O(p) \geqslant Q^k$ tada stavimo $O_1 = Q^k$ i imamo da je ind $r(O_1)$ = ind $r(Q^k)$ = ind $\emptyset = -1$, odakle je ind r G = 0. Ako $O(p) \not\supseteq Q^k$ tada postoji okolina $V_1(p) \subseteq Q^k$ takva da je $V(p) = O(p) \cap Q^k$. Pri tom je

$$V(p) = \bigcup_{\alpha \in \Lambda} V_{1\alpha} \; V_{2\alpha} \cdots\cdots V_{k\alpha}$$

Tačke $p \in V(p)$ pa pri tom postoji $\alpha_o \in \Lambda$ takvo da je

$$p \in V_1 \alpha_o \; V_2 \alpha_o \; . \; . \; . \; V_k \alpha_o = V^{*}(p)$$

Neka je $a_1 \in V_1 \alpha_o$, ..., $a_k \in V_k \alpha_o$ takvo da je

$$p = a_1 \cdots\cdots a_k$$

Iz pretpostavke da je ind Q = 0 sledi da postoje

$V_1^{*}(a_1)$, ..., $V_k^{*}(a_k)$ takvi da je

$$\text{ind } r\,(V_1^{*}) = -1, \ldots, \text{ind } r\,(V_k^{*}) = -1$$

odnosno $\quad r\,(V_1^{*}) = \emptyset, \ldots, r\,(V_k^{*}) = \emptyset$

odnosno $\quad \overline{V_1^{*}} \setminus V_1^{*} = \emptyset, \ldots, \overline{V_k^{*}} \setminus V_k^{*} = \emptyset$

odakle je $\quad \overline{V_1^{*}} = V_1^{*}, \ldots, \overline{V_k^{*}} = V_k^{*}$

odavde je $\quad V_1^{*} \ldots V_k^{*} = \overline{V_1^{*}} \ldots \overline{V_k^{*}} = \overline{V_1^{*} \, V_2^{*} \ldots V_k^{*}}$

tj. $\quad r\,(V_1^{*} \ldots V_k^{*}) = \emptyset$ ili ind $r\,(V_1^{*} \ldots V_k^{*}) = -1$

odakle je $\quad \text{ind}\,_p G = 0$

Kako ovo važi za svako p G sledi da je

$$\text{ind } G = 0$$

Na sličan način se može dokazati još nekoliko sličnih stavova o osobinama koje se prenose sa prostora Q topološke n-arne grupe na prostor slobodnog pokrivača grupe G, kao na primer razne vrste kompaktnosti itd.

2.4. Topološki analogan Hosu - Gluskinove teoreme

Pre dokaza osnovnog rezultata prikazaćemo sledeće dve leme:

2.4.1. Lema. Ako je $(G(\ ), \mathcal{T})$ topološka n-grupa tada postoji topološka kvazigrupa $(G(o), \mathcal{T})$ takva da je $(x_1, \ldots, x_n) = \varphi(x_1 \circ \ldots \circ x_n)$ gde je φ homeomorfizam topološkog prostora $(G, \mathcal{T})$ i

$$x_1 \circ \ldots \circ x_n = (\ldots((x_1 o x_2) o x_3) o \ldots x_n).$$

Dokaz. Imajući u vidu algebarski analogan ove leme ([11] str. 58) dovoljno je dokazati da je φ homeomorfizam topološkog prostora G. Kako je $\varphi(x) = (\overset{n-1}{a}x) = y$ to sa obzirom na neprekidnost operacije ( ) postoje $U_1(a), \ldots, U_{n-1}(a), U_n(x)$ takvi da je $(U_1, \ldots, U_n) \subseteq U$ za proizvoljno $U(y)$. Odavde je $\varphi(U_n) \subseteq U$, tj, φ je neprekidno φ^{-1} je takodje neprekidno jer je $\varphi^{-1}(x) = (\bar{a}, \overset{n-3}{a}, \bar{a}, x)$. Da je kvazigrupa G(o) topološka sledi iz sledeće reprezentacije

$$o\,(x,y) = (\overset{n-1}{a}, \varphi^{-1}x, y)$$

$$o^{-1}\,(x,y) = (\overline{\varphi^{-1}x}, \overset{n-3}{\varphi^{-1}x}, \bar{a}, y)$$

$$-1_o\,(x,y) = \varphi(\bar{a}, x, \overset{n-3}{y}, \bar{y})$$

2.4.2. Lema. Ako su A, B, C, D četiri topološke kvazigrupe na skupu G sa topologijom $\mathcal{T}$ za koje važi

$$A(B(x,y), z) = C(x, D(y,z)) \text{ za svako } x,y,z \in G.$$

Onda su one izotopne jednoj grupi koja je topološka sa topologijom $\mathcal{T}$ i odgovarajuće izotopije su homeomorfizmi.

Dokaz. Imajući u vidu da su translacije topološke kvazigrupe homeomorfizmi prostora i da je $x \cdot y = A_1(R_1^{-1}x, L_4^{-1}L_3^{-1}y)$ to s obzirom da je A_1 topološka kvazigrupa sledi da je i G(.) topološka kvazigrupa koja je ujedno i grupa.

2.4.3. Teorema. Neka je $(G(\ ), \mathcal{T})$ topološka n-grupa. Postoji topološka grupa $(G(.), \mathcal{T})$ i automorfizam Θ topološke grupe $(G(.), \mathcal{T})$

tako da važi

$$(x_1^n) = x_1\theta\, x_2\theta^2\, x_3 \ldots \theta^{n-2}\, x_{n-1}\theta^{n-1}x_n c$$

gde je c odredjeni element iz G.

<u>Dokaz.</u> Po lemi 2.4.1. imamo da je $(x_1^n) = \varphi(x_1 o \ldots o x_n)$ pri čemu je $(G(o), \mathcal{T})$ topološka kvazigrupa i φ homeomorfizam prostora. U n-grupi važi (1, 2) - asocijativnost, pa imamo da je

$$\varphi(x_1 o \ldots o x_n)\, o x_{n+1} =$$

$$x_1 o\, \varphi(x_2 o \ldots o x_{n+1})$$

Kako je λx = xob (b je proizvoljni fiksirani element iz G) homeomorfizam topološke kvazigrupe G(o) imamo da je

$$\varphi\lambda^{n-1}(x_1 \text{ o } x_2) \text{ o } x_{n+1} =$$

$$x_1\varphi(\lambda^{n-2}x_2 \text{ o } x_{n+1})$$

odnosno dobijamo četiri topološke kvazigrupe

$$A\,(x, y) = \varphi\lambda^{n-1}x \text{ o } y$$

$$B\,(x, y) = x \text{ o } y$$

$$C\,(x, y) = x \text{ o } \varphi y$$

$$D\,(x, y) = \lambda^{n-2}x \text{ o } y$$

koje zadovoljavaju uslove leme 2.4.2. tj. one su izotopne topološkoj grupi G(.) a odgovarajuće izotopije su homeomorfizmi

$$x \text{ o } y = \alpha x \,.\, \beta y$$

nadalje zaključujemo da su homeomorfizmi α, β i φ kvaziautomorfizmi topološke grupe G(.), tj. postoje automorfizmi topološke grupe α_i, takvi da je

$$(x_1^n) = \alpha_1 x_1 \cdot \ldots \cdot \alpha_n x_n a_n$$

dobijamo odavde

$$(x_1^n) = \alpha_1 x_1 (a_1 \alpha_2 x_2 a^{-1}) \ldots$$

$$(a_1 \ a_2 \ldots a_{n-1} \alpha_n x_n a_{n-1}^{-1} \ldots a_1^{-1})(a_1 \ldots a_n)$$

odnosno

$$(x_1^n) = \varphi_1 x_1 \ldots \varphi_n x_n c$$

pri čemu su φ_i automorfizmi topološke grupe G(.) i c odredjeni element iz G. Zaključak da je $\varphi_1 = \varepsilon$ i $\varphi_2 = \varphi_i^{i-1}$ je isti kao i u algebarskom slučaju [11].

2.4.4. Napomena. Na osnovu ove teoreme možemo zaključiti da rezultati koji važe za topološke grupe (koji se odnose na topološku strukturu) važe i za topološke n-grupe. Na primer aksiome separacije su kod topoloških n-grupa ekvivalentne isto kao i kod topoloških grupa.

3. TOPOLOŠKE n-POLUGRUPE

3.1. Uvod

Ako je datu topološku n-polugrupu Q( ) moguće prikazati preko polugrupe (.) tj. ako je

$$(x_1^n) = x_1 \cdot x_2 \dots x_n$$

tada je jasno da je i data polugrupa topološka u istoj topologiji. Medjutim poznato je da postoje n-polugrupe koje ne mogu da se prikažu na gornji način, ali je svaku moguće prekriti slobodnim pokrivačen (vid. 1.4).

Ovde je razmatran vrlo prirodan problem koji je postavljao G. Čupona [34]- da li se može konstruisati topologija na nekom slobodnom pokrivaču topološke n-polugrupe tako da pokrivajuća polugrupa bude topološka i da indukovana topologija na prostoru n-polugrupe bude data topologija?

Ovde je dato delimično rešenje problema tj. ukazano je na odredjene klase topoloških n-semigrupa čiji odredjeni pokrivač (pre svih maksimalni) poseduje odredjenu osobinu.

3.2. Topologija pokrivača topološke n-polugrupe

3.2.1. Def. [34] Topološki prostor Q koji je ujedno i n-polugrupa naziva se topološkom n-polugrupom ako je preslikavanje

$$g : G^n \longrightarrow G : (x_1 \dots x_n) \longrightarrow x_1 \dots x_n$$

neprekidno po svakoj promenljivoj.

3.2.3. Stav. Neka je Q topološka n-polugrupa sa topologijom $\mathcal{T}$ i $Q^\wedge$ univerzalni pokrivač od Q. Sistem podskupova od Q^k $(1 \leq k \leq n-1)$ definisan na sledeći način

$$\mathcal{B}_k = \{ A_1 \dots A_k \mid A_1 x \dots x A_k = f_k^{-1} (A_1 \dots A_k),\ A_i \in \mathcal{T} \}$$

(gde je $f_k : \underbrace{Q x \dots x Q}_{k} \longrightarrow Q^k$ tj.,

$$f_k (x_1, \dots, x_k) = x_1 \dots x_k)$$

je baza topologije $\mathcal{T}_k$ na Q^k.

<u>Dokaz.</u> Pretpostavljamo da je $A_1 \dots A_k \cap B_1 \dots B_k \neq \emptyset$ i da su $A_1 \dots A_k$, $B_1 \dots B_k \in \mathcal{B}_k$. Prema definiciji proizvoda $A_1 \dots A_k$ i na osnovu osobina funkcije f^{-1} imamo da je

$$f^{-1} (A_1 \dots A_k \cap B_1 \dots B_k) =$$

$$f^{-1} (A_1 \dots A_k) \cap f^{-1} (B_1 \dots B_k) =$$

$$A_1 x \dots x A_k \cap B_1 x \dots x B_k =$$

$$(A_1 \cap B_1) x \dots x (A_k \cap B_k)$$

pa ako $(x_1, \dots, x_k) \in (A_1 \cap B_1) x \dots x (A_k \cap B_k)$

i $x_1 \dots x_k = y_1 \dots y_k$

sledi da i $(y_1, \dots, y_k) \in (A_1 \cap B_1) x \dots x (A_k \cap B_k)$

tj. $(A_1 \cap B_1) x \dots x (A_k \cap B_k) =$

$$f^{-1} ((A_1 \cap B_1) \dots (A_k \cap B_k))$$

Sa činjenicom da $Q^k \in \mathcal{B}_k$ kompletiramo dokaz da je $\mathcal{B}_k$ baza topologije $\mathcal{T}_k$ na Q^k.

<u>3.2.4. Stav.</u> Ako je data topologija na Q kompaktna onda je Dekartov proizvod $\underbrace{Q x \dots x Q}_{k}$ kompaktan prostor i Q^k je kompaktan prostor zato što je preslikavanje f^k neprekidno.

<u>3.2.5. Posledica.</u> Familija $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \dots \cup \mathcal{B}_{n-1}$ je baza topologije $\mathcal{T}^\wedge$ na $Q^\wedge$ i ako je data topologija na Q kompaktna onda je i $Q^\wedge$ kompaktan prostor.

3.2.6. Primeri. Neka je $Q = \{1, 2, 3,\}$ i

$$[x_1 x_2 x_3] = \begin{cases} 1 \text{ ako je } (x_1,x_2,x_3) \neq (2,2,2), (3,3,3) \\ 2 \text{ ako je } (x_1,x_2,x_3) = (2,2,2) \\ 3 \text{ ako je } (x_1,x_2,x_3) = (3,3,3) \end{cases}$$

onda je $Q[\,]$ ternarna polugrupa.

Univerzalni pokrivač ternarne polugrupe Q je $Q^\wedge = \{1, 2, 3, p, q, r\}$ sa polugrupnom operacijom definisanom sledećom Kelijevom tablicom.

	1	2	3	p	q	r
1	p	p	p	1	1	1
2	p	q	p	1	2	1
3	p	p	r	1	1	3
p	1	1	1	p	p	p
q	1	2	1	p	q	p
r	1	1	3	p	p	r

Ako je $\mathcal{T}_1 = \{\{1, 2, 3\}, \{3\}\ \emptyset\}$ i

$\mathcal{T}_2 = \{\{1, 2, 3\}, \{1, 2\}, \{3\}, \emptyset\}$

tada su $(Q, \mathcal{T}_1)$ i $(Q, \mathcal{T}_2)$ topološke ternarne polugrupe.

Pri tom

$$\mathcal{T}_1^\wedge = \{Q^\wedge, \{1,2,3,r\}, \{p,q,r,3\}, Q, Q^2, \{3,r\}, \{3\}. \{2\}, \emptyset\}$$

i

$$\mathcal{T}_2^\wedge = \{Q^\wedge, \{1,2,p,q,r\}, \{1,2,3,r\}, \{1,p,q,r\}, \{1,2,r\}, Q, Q^2, \{1,2\}, \{3,r\}, \{3\}, \{r\}, \emptyset\}$$

su topologije univerzalnog pokrivača definisane od topologije $\mathcal{T}_1$ i $\mathcal{T}_2$.

Pri tom $(Q^\wedge, \mathcal{T}_1^\wedge)$ je topološka polugrupa a $(Q^\wedge, \mathcal{T}_2^\wedge)$ nije topološka polugrupa.

Napomenimo uz to da kolekcija $\mathfrak{B} = \{B_1 B_2 \mid B_1$ i B_2 su otv. u $\mathcal{T}\}$ nije ni baza topologije te da se ovde ne može pristupiti na isti način kao pri topologiji pokrivača topoloških n-grupa.

Sledeći stav će dati dovoljne uslove pri kojima je univerzalni pokrivač topološke n-grupe sa topologijom definisanom, više, topološka polugrupa.

__3.2.7. Stav.__ $(Q^\wedge, \mathcal{T}^\wedge)$ je topološka polugrupa ako je ispunjen uslov:
Za svako $a_1, \ldots, a_k \in Q$ i $A_1, \ldots, A_k \in \mathcal{T}$ takvo da $a_i \in A_i$, postoje $A_1', \ldots A_k' \in \mathcal{T}$ tako da je $a_i \in A_i'$ i $A_1', \ldots, A_k' \subseteq A_1 \ldots A_k$ i $A_1' \ldots A_k' \in \mathfrak{B}^\wedge$ za svako $k = 2, \ldots n-1$. (*)

Pre dokaza ovog stava dokažimo sledeću lemu.

__3.2.8. Lema.__ Ako je $A_1 \ldots A_k \in \mathfrak{B}^\wedge$ tada

$$A_r \ldots A_{r+s} \in \mathfrak{B} \text{ za svako } 1 \leq r \leq r+s \leq k.$$

__Dokaz.__ Ako je $(x_1, \ldots, x_{r+s}) \in A_r x \ldots x A_{r+s}$

i

$$x_r \ldots x_{r+s} = y_r \ldots y_{r+s} \quad \text{i}$$

$$A_1 \ldots A_k \in B^\wedge \quad \text{tada za proizvoljno}$$

$$a_i \in A_i \quad i \in \{1, \ldots, r-1, r+s+1, \ldots, k\}$$

$$a_1 \ldots a_{r-1} x_r \ldots x_{r+s} a_{r+s+1} \ldots a_k =$$

$$a_1^{r-1} y_r^{r+s} a_{r+s+1}^k$$

a prema definiciji baze topologije

$$(a_1^{r-1}, y_r^{r+s}, a_{r+s+1}^k) \in A_1 x \ldots x A_k \quad \text{tj.}$$

$$(y_r, \ldots, y_{r+s}) \in A_r x \ldots x A_{r+s}$$

__Dokaz stava 3.2.7.__ Neka su $s = a_1 \ldots a_i$, $t = b_1 \ldots b_j$ $(i, j \leq n-1;\ a_\nu, b_\mu \in Q)$ dva elementa iz $Q^\wedge$ i neka je $g = s.t.$ Neka je $C \in \mathfrak{B}^\wedge$ i neka $g \in C$. Ako je $C = C_1 \ldots C_k$ $(k \leq n-1)$ tada postoje

$c_1, \ldots, c_k \in Q$ takvi da je $c_\lambda \in C_\lambda$; i $g = c_1 \ldots c_k$ tj.

$$a_1 \ldots a_i b_1 \ldots b_j = c_1 \ldots c_k$$

Ako je $i + j \leq n-1$ tada je $i + j = k$ i prema 2.7. $C' = C_1 \ldots C_i$ i $C'' = C_{i+1} \ldots C_k$ su okoline od s i t takve da je $C'C'' = C$.

Ako je $i + j > n-1$ tada stavivši $a = a_1 \ldots a_i b_1 \ldots b_{n-i}$ dobijamo da je

$$a\, b_{n-i+1} \ldots b_j = C_1 \ldots C_k \quad (k = i + j - n+1)$$

i $$a \in C_1,\ b_{n-i+1} \in C_2,\ \ldots,\ b_j \in C_k.$$

Zbog neprekidnosti n-semigrupne operacije i pretpostavke stava imamo da je

$$C_1(a)\ \ C_2(b_{n-i+1}) \ldots C\ (b_j) \supseteq$$

$$\supseteq \left[C_1(a_1) \ldots C_1(a_i)\ \ C_1(b_1) \ldots C_1(b_{n-i}) \right]$$

$$C_2\ (b_{n-i+1}) \ldots C_k(b_j) =$$

$$((C_1(a_1) \ldots C_1(a_i))(C_1(b_1) \ldots C_k(b_j)) \supseteq$$

$$(V(a_1) \ldots V(a_i))(V(b_1) \ldots V(b_j)) \quad \text{gde su}$$

$$V_1(a_1) \ldots V(a_i),\ V(b_1) \ldots V(b_j) \in \mathcal{B}^{\wedge}.$$

<u>3.2.9. Stav.</u> Ako Hauzdorfova n-polugrupa zadovoljava uslov (*) tada je topologija $\mathcal{T}^{\wedge}$ univerzalnog pokrivača Hauzdorfova.

<u>Dokaz.</u> Pretpostavimo da je Q Hauzdorfov prostor i neka su $s = a_1 \ldots a_i$ i $t = b_1 \ldots b_j$ dva različita elementa iz $Q^{\wedge}$.

Ako je $i \neq j$ tada su Q^i i Q^j okoline od s i t i pritom je $Q^i \cap Q^j = \emptyset$.

Ako je $i = j$, tada imamo da je

$$a_1 \dots a_i \neq b_1 \dots b_i \text{ pa je i}$$

$$(a_1, \dots, a_i) \neq (b_1, \dots, b_i)$$

Zato što je prostor Hauzdorfov postoje

$$A_1(a_1), \dots, A_i(a_i), B_1(b_1), \dots, B_i(b_i) \in \mathcal{T}$$

tako da je $A_1 x \dots x A_i \cap B_1 x \dots x B_i = \emptyset$ a odavde sledi da je

$$A_1 \dots A_i \cap B_1 \dots B_i = \emptyset$$

Prema uslovu (*) postoje

$$A_1'(a_1), \dots, A_i'(a_i), B_1'(b_1), \dots, B_i'(b_i) \in \mathcal{T}$$

tako da je $A_1' \dots A_i' \subseteq A_1 \dots A_i$ i $B_1' \dots B_i' \subseteq B_1 \dots B_i$

i pri tome $A_1' \dots A_i', \ B_1' \dots B_i' \in \mathcal{B}^{\wedge}$.

3.2.10. Primedba.

1. Činjenicu da je pokrivač Q maksimalni pokrivač nismo koristili u dokazima pa svi rezultati važe za proizvoljne pokrivače topološke n-polugrupe kod kojih je za svako i, j,

$$1 \leq i < j < n-1 \qquad Q^i \cap Q^j = \emptyset$$

2. Kao neposredna posledica ovih rezultata je topološki analogon Postove teoreme pa su ovi rezultati direktna poopštenja iste.

3. Ovaj način topologiziranja nije jedini (da topologija ispunjava iste uslove kao kod topološkog analogona Postove teoreme za topološke n-grupe), jer topologija

$$\mathcal{T} = \Big\{ Q^{\wedge}, Q^2, Q, \{1,2,2,p,q\}, \{1,2,3,r\}, \{1,2,p,q\}, \{1,2,r\}, \{1,2,p,q,r\}, \{3,p,q,r\}, \{3,p,q\}, \{3,r\}, \{p,q\}, \{r\}, \{1,2\}, \{3\}, \emptyset \Big\} .$$

ispunjava uslove topološkog analogona Postove teoreme prema topologiji $\mathcal{T}_2$ u našem primeru. Zato bi trebalo istraživati i druge načine topologizacije pokrivača topološke n-polugrupe.

4. O TOPOLOŠKIM n-KVAZIGRUPAMA

4.1. Uvod

Izučavanjem binarnih topoloških kvazigrupa bavili su se A.I. Maljcev[70], G.F. Lojbel[68], K.Hofman [51][55] i drugi, i pronašli su da niz važnih osobina topoloških grupa se prenosi na topološke kvazigrupe a izmedju ostalih i da je proizvoljna topološka kvazigrupa regularan prostor. Medjutim, pitanje potpune regularnosti topoloških kvazigrupa je ostalo nerešeno.

Delimičan odgovor na ovo pitanje dao je N.M. Suvorov[84] sledećom teoremom.

4.1.1. Teorema. Prostor topološke grupe je potpuno regularan ako je ispunjen sledeći uslov:

Za svake tri okoline jedinice U,V,W skupa Q postoji okolina jedinice W' takva da je

$$V(VW) \supseteq (UV)W',$$

Nije teško videti da se sličan stav može iskazati i za topološke n-kvazigrupe a pojmu potpune regularnosti topoloških n-kvazigrupa ovde prilazimo na drugi način:

Ukazaćemo na neke klase topoloških n-kvazigrupa koje su homeomorfne prostorima topoloških grupa. Jasno je da će takve topološke n-kvazigrupe biti potpuno regularne. Ujedno možemo postaviti ovde i sledeći problem:

4.1.2. Problem. Da li na prostoru proizvoljne topološke n-kvazigrupe postoji grupa koja je u istoj topologiji topološka?

U slučaju negativnog odgovora na ovo pitanje mogao bi se postaviti problem odredjivanja svih takvih n-kvazigrupa.

4.2. Osnovne definicije i stavovi

4.2.1. Def. Topološki prostor Q, koji je takodje i n-arna kvazigrupa zove se polutopološkom n-kvazigrupom, ako je kvazigrupna operacija neprekidna po svim promenljivima i ako su leve i desne translacije homeomorfizmi prostora.

4.2.2. Def. Topološki prostor Q, koji je takodje i n-kvazigrupa zove se topološkom kvazigrupom ako je on polutopološka n-kvazigrupa i ako su sve inverzne operacije neprekidne po svim promenljivima.

Na osnovu definicije neposredno sledi

4.2.3 Lema. Retrakt topološke (polutopološke) n-kvazigrupe je topološka (polutopološka) kvazigrupa.

Važi i sledeća

4.2.4. Lema. Superpozicija polutopološke n-kvazigrupe $(Q(A))$, i polutopološke m-kvazigrupe $(Q(B), \Upsilon)$ je polutopološka kvazigrupa arnosti $m+n-1$.

Dokaz. Neprekidnost kvazigrupne operacije $Q(C)$ je ogledna po definiciji a da je proizvoljna translacija homeomorfizam prostora sledi iz sledeće relacije:

$$T^{(j)}_{Ca_1^{m+n-2}}\, x = C\,(a_1^{j-1}, x, a_j^{m+n-2}) =$$

$$A \overset{i}{+} B\,(a_1^{j-1}, x\,, a_j^{m+n-2}) =$$

$$
= \begin{cases}
A\,(a_1^{i-1},\ B\,(a_i^{j-1},\ x,\ a_j^{m+n-2}),\ a_{m+i-1}^{m+n-2}) = \\
T^{(j)}_{Aa_1^{i-1}\ a_{m+i-1}^{m+n-2}}\ T^{(j-i)}_{Ba_i^{m+i-1}}\ x, \quad (i \leq j \leq m+i-1) \\
\\
A\,(a_1^{j-1},\ x,\ a_j^{i-1},\ B\,(a_i^{m+i-1})\ a_{m+i-1}^{m+n-2}\ ) = \\
T^{(j)}_{Aa_1^{i-1}\ k\ a_{m+i}^{m+n-2}}\ x, \qquad (i \leq j \leq i-1) \\
\\
A\,(a_1^{i-1},\ B\,(a_i^{m+i-1})\ a_{m+i}^{j-1}\ ,\ x,\ a_j^{m+n-2}) = \\
T^{j}_{Aa_1^{i-1}\ k\ a_{m+i}^{j-1}\ a_j^{m+n-2}}\ x, \qquad (m+i-1 \leq j \leq m+n-1) \\
\\
(k = B\,(a_i^{m+i-1})),
\end{cases}
$$

<u>4.2.5. Lema.</u> Superpozicija topološke n-kvazigrupe $(Q(A),\mathcal{T})$ i topološke m-kvazigrupe $(Q(B),\mathcal{T})$ je topološka m+n-1 kvazigrupa $(Q(C),\mathcal{T})$.

<u>Dokaz.</u> Neprekidnost proizvoljne inverzne operacije πj_C sledi iz sledećih relacija

$$\pi j_C\,(x_1^{m+n-1}) = x_{n+m} \iff$$

$$\iff \pi j_{(A \overset{i}{+} B)}(x_1^{m+n-1}) = x_{m+n} \iff$$

$$\iff (A \overset{i}{+} B)(x_1^{j-1},\ x_{m+n},\ x_{j+1}^{m+n-1}) = x_j$$

odnosno

$$
x_j = \begin{cases}
A(x_1^{i-1}, B(x_i^{j-1}, x_{m+n}, x_{j+1}^{m+i-1})\ x_{m+i}^{m+n-1}) & (i \leq j \leq m+i-1) \\
A(x_1^{j-1}, x_{m+n}, x_{j+1}^{i-1}, B(x_i^{m+i-1}) x_{m+i}^{m+n-1}) & (1 \leq j \leq i-1) \\
A(x_1^{i-1}, B(x_i^{m+i-1}), x_{m+i}^{j-1},\ x_{m+n}, x_{j+1}^{m+n-1}) & (m+i \leq j \leq m+n-1)
\end{cases}
$$

odnosno
$$x_j = \begin{cases} A \overset{i}{+} {}^{\pi_{j-i+1}} B & i \leq j \leq m+i-1 \\ {}^{\pi_j}A \overset{i}{+} B & 1 \leq j \leq i-1 \\ {}^{\pi_{j-m+1}}A \overset{i}{+} B & m+i \leq j \leq m+n-1 \end{cases}$$

<u>4.2.6. Lema.</u> Topološka n-kvazigrupa koja je n-grupa je topološka n-grupa.

<u>Dokaz.</u> Potrebno je dokazati neprekidnost operacije $x \longrightarrow \bar{x}$.

Kako je $A(x, \ldots, x, \bar{x}) = x$ imamo da je

$${}^{\pi_n}A(x, \ldots, x) = \bar{x}, \text{a iz nepr. oper. } {}^{\pi_n}A \text{ sledi}$$

$$U(\bar{x}) = U({}^{\pi_n}A(x,\ldots,x) \supseteq {}^{\pi_n}A(V(x),\ldots,V(x)) = \overline{V(x)}$$

<u>4.2.7. Lema.</u> Ako je topološka n-kvazigrupa $(Q(A), \mathcal{T})$ izotopna n-kvazigrupi $Q(B)$ a izotopije su homeomorfizmi prostora onda je i $(Q(B), \mathcal{T})$ topološka n-kvazigrupa.

<u>Dokaz.</u> Neka su $\{\alpha_i\}_{i=1}^{n+1}$ izotopije topološke n-kvazigrupe $(Q(A), \mathcal{T})$ u kvazigrupu $Q(B)$ homeomorfizmi prostora $(Q, \mathcal{T})$. Neka je U okolina od $B(x_1^n)$ tada je

$$U(B(x_1^n)) = U(\alpha_{n+1}A(\{\alpha_i^{-1} x_i\}_1^n) \supseteq$$

$$\supseteq \alpha_{n+1}U'(A\{\alpha_i^{-1}\}_1^n) \supseteq \alpha_{n+1}A(\{U_i(\alpha_i^{-1} x_i)\}_1^n) \supseteq$$

$$\supseteq \alpha_{n+1} A(\{\alpha_i^{-1}(V_i(x_i))\}_1^n = B(W_1^n)$$

pa je operacija B neprekidna. Neprekidnost operacije ${}^{\pi_i}B$ se dokazuje činjenicom da su ${}^{\pi_i}B$ izotopne sa ${}^{\pi_i}A$ koje su neprekidne, a izotopije $\{\alpha_1^{i-1} \alpha_{n+1} \alpha_{i+1}^n \alpha_i\}$ su homeomorfizmi prostora.

4.3. Asocijativni sistem topoloških n-kvazigrupa

Pre definicije asocijativnih sistema dokazaćemo sledeću teoremu.

4.3.1. Teorema. Ako polutopološke kvazigrupe $Q(A_i)$, $i \in N_{2n}$, od kojih je bar jedna topološka zadovoljavaju opšti asocijativni zakon ((5) str. 16) onda :

1. n-grupa $Q(A)$ izotopna n-kvazigrupama $Q(A_i)$ je topološka
2. Grupa $Q(B)$ takva da je $A(x_1^n) = \overset{n-1}{B}(x_1^n)$ je topološka
3. Sve kvazigrupe su topološke

Dokaz. 1. Neka je topološka kvazigrupa A_i i neka je $i=2j-1$ tada iz ((6) str. 16) nalazimo da je

$$A(a_1^n) = A_{2j-1}({T_2^{(1)}}^{-1} {T_1^{(1)}}^{-1} a_1, \ldots, {T_{2n}^{(n)}}^{-1} {T_{2n-1}^{(n)}}^{-1} a_n)$$

pa je A topološka n-kvazigrupa s obzirom da su translacije $T_i^{(t)}$ homeomorfizmi prostora po lemi 4.2.7. a ona je ujedno i n-grupa pa je po lemi 4.2.6. topološka n-grupa.
Analogno se dokazuje i u slučaju $i=2j$ koristeći se relacijom ((7) str. 17).

2. Neka je e jedinica grupe $Q(B)$, tada grupu $Q(B)$ možemo prikazati kao retrakt n-grupe $Q(A)$ tj.

$$A(x, y, e, \ldots, e) = B(x, y)$$

pa je grupa $Q(B)$ topološka po lemi 4.2.3.

3. Imajući u vidu relacije ((6) i (7) str. 16. i 17) i činjenicu da je $Q(A)$ topološka n-grupa zaključujemo da s obzirom da su translacije $T_i^{(t)}$ homeomorfizmi prostora po lemi 4.2.7. da su sve n-kvazigrupe $Q(A_i)$ $i \in N_{2n}$ topološke.

Napomenimo da je ova teorema analogon teoreme, 1.6.10 i napomenimo da se na potpuno isti način mogu dokazati analogoni teorema 1.6.12. i 1.6.13.

4.3.2. Def. Neka je Q topološki prostor a Ω' skup svih polutopoloških n-kvazigrupa definisanih na skupu Q. $\overline{iA}$ - sistem Σ' u skupu Ω' nazivamo topološkim ako Σ' sadrži bar jednu topološku n-kvazigrupu.

4.3.3. Def. Neka je Q topološki prostor a Ω' skup svih polutopoloških kvazigrupa definisanih na skupu Q. iA - sistem Σ' u skupu Ω' nazivamo topološkim iA - sistemom ako Σ' sadrži bar jednu topološku n-kvazigrupu.

4.3.4. Def. Neka je Q topološki prostor i Ω' skup svih polutopoloških n-arnih kvazigrupa definisanih na skupu Q. A-sistem $\Sigma' \subseteq \Omega'$ u skupu Ω' nazivamo topološki sistemom ako Σ' sadrži bar jednu topološku kvazigrupu.

Koristeći se teoremom 4.3.1. dokazaaćemo sledeću:

4.3.5. Teorema. Neka je Q topološki prostor a Σ' topološki $\overline{iA}$-sistem n-arnih kvazigrupa definisanih na Q tada je

1. Svaka od kvazigrupa iz Σ' topološka
2. Sve kvazigrupe iz Σ' su izotopne topološkoj n-grupi

a izotopije su homeomorfisane. Štaviše i kvazigrupe iz Ω' koje učestvuju u gradnji $\overline{iA}$ - sistema su topološke.

Dokaz. Dovoljno je uzeti na primer da je kvazigrupa $B \in \Sigma'$ topološka tada za svaku dokazujemo da je topološka uzimajući je u paru sa njom i pridružujući joj (2n-2) polu topološke n-kvazigrupe iz Ω' tako da sve zadovoljavaju opšti asocijativni zakon, tada po teoremi 4.3.1. sleduje da su sve topološke i da je n-grupa kojoj su izotopne topološke.

Analogno se može dokazati i teorema o iA - sistemima:

4.3.6. Teorema. Neka je Q topološki prostor, Σ' topološki iA - sistem n-arnih definisanih na skupu Q tada

1. Sve kvazigrupe iz Σ' su topološke
2. Sve kvazigrupe su izotopne topološkoj n-grupi i te izotopije su homeomorfizmi prostora.

Prethodna teorema se može očitati i kao poopštenje Hosu-Gluskinove teoreme tj. nje[illegible]opološkog analogona (teorema 4.2.3. str. 27).

Topološki analogon Hosu-Gluskinove teoreme u terminima iA - sistema se može iskazati na sledeći način.

4.3.7. Teorema. Ako je $\Sigma = \{A\}$ topološki iA - sistem n-arnih kvazigrupa onda postoji topološka grupa B takva da je

$$A(x_1^n) = B\left[\ {}^{n-1}_{\ B}(x_1, \alpha x_2, \alpha^2 x_3, \ldots, \alpha^{n-1} x_n), c\right]$$

gde je α - automorfizam topološke grupe B, a c odredjeni element skupa Q, pri čemu su ispunjeni uslovi

$$\alpha^{n-1} x = B\left[c,\ B(x, c^{-1})\right], \alpha_c = c$$

Na ovaj način teoremu 4.3.6. možemo smatrati jednim uopštenjem topološkog analogona Hosu-Gluskinove teoreme.

U vezi sa asocijativnim sistemima prirodno je postaviti pitanje: da li je proizvoljna kvazigrupa element nekog asocijativnog sistema?

Odgovor na ovo pitanje je negativan što se da lako zaključiti na osnovu sledećeg razmišljanja: Ako je svaka kvazigrupa element nekog asocijativnog sistema onda je i proizvoljna lupa član nekog asocijativnog sistema pa na osnovu toga izotopna nekoj grupi, a odavde na osnovu Albertove teoreme bi sledilo da je proizvoljna lupa izomorfna sa nekom grupom a što je netačno.

4.4. Medijalne topološke n-kvazigrupe

4.4.1. Def. Topološka (polutopološka) n-kvazigrupa koja zadovoljava zakon medijalnostinaziva se topološka (polutopološka) medijalna kvazigrupa.

4.4.2. Teorema. Ako je Q( ) medijalna topološka n-kvazigrupa, tada na Q postoji topološka Abelova grupa Q(+) takva da je

$$(x_1^n) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i + b$$

gde su α_i (i=1, ..., n) uzajamno komutativni automorfizmi topološke grupe Q(+) a b odredjeni element iz Q.

Dokaz. Teoremu dokazujemo indukcijom po arnosti:

Za n=2, neka je Q binarna medijalna topološka kvazigrupa, tada postoji Abelova topološka grupa takva da je $A(x,y) = \varphi(x)+\psi(y)+$ $+ c$, gde su φ i ψ komutativni automorfizmi topološke grupe Q(+) a c odredjeni element iz Q.

Zaista glavni izotop (+) topološke kvazigrupe Q(A) definisan na sledeći način

$$x+y = A(R_a^{-1}x,\ L_b^{-1}y)$$

je očigledno topološka kvazigrupa (s obzirom da su translacije R_a i L_b homeomorfizmi topološke kvazigrupe), a istovremeno je i Abelova grupa pa je i topološka Abelova grupa. Da su φ i ψ automorfizmi topološke grupe sledi neposredno iz činjenice da je $\varphi(x) =$ $= R_a x + (-k)$ i $L_b(x) = h + \psi(x)$

Pretpostavljamo da teorema važi svaki prirodni broj manji od n.

Iz pretpostavke da je kvazigrupa Q( ) topološka i leme 1.1. sledi da su

$$A(u,v) = (b,u,v,b^{n-3}) \text{ i}$$

$$B(x_2^n) = (a,\ x_2^n)$$

binarna odnosno (n-1)-arne medijalna topološka kvazigrupa, dobijene stavljanjem u medijalni zakon

$$\begin{cases} y_i = (\overset{n}{a}) = b & \text{za } i \neq 2,3 \\ y_2 = (x_1,\ \overset{n-1}{a}) = \alpha x_1 \\ y_3 = (a_1,\ x_2^n) \end{cases}$$

i

$$\begin{cases} z_1 = (a x_1 \overset{n-2}{a}) = \beta x_1 \\ z_i = (\overset{2}{a} x_i \overset{n-3}{a}) = \gamma x_i & \text{za svako } i \neq 1 \end{cases}$$

(Iz navedenih definicija je jasno da su α, β, γ, homeomorfizmi prostora).

Imajući u vidu induktivnu pretpostavku imamo da je

$$A(u,v) = \gamma u \oplus \delta v \oplus d$$

$$B(u_2^n) = \lambda_2 u_2 +^\cdot \lambda_3 u_3 +^\cdot \dots +^\cdot \lambda_n u_n +^\cdot c$$

gde su $\oplus$ i $+^\cdot$ topološke Abelove grupe a λ_i, γ i δ automorfizmi odgovarajućih topoloških grupa, c i d odredjeni elementi iz Q a $\lambda_i \lambda_j = \lambda_j \lambda_i$.

Na osnovu medijalnog zakona sledi da je

$$A(\alpha x_1, B(x_2^n)) = (\beta x_1, \{\gamma x_i\}_{i=2}^n) \qquad (1)$$

odnosno $\gamma \alpha x_1 \oplus \delta (x_2 x_2 +^\cdot \dots +^\cdot \lambda_n x_n +^\cdot c) \oplus d =$

$(\beta x_1, \{\gamma x_i\}_2^n)$. Grupu $+^\cdot$ zamenjujemo sa grupom $+$ koja je izomorfna sa njom jer je $(+^\cdot)^\delta = (+)$ a δ homeomorfizam prostora. Iz (1) dobijamo

$$(x_1^n) = \mu_1 x_1 \oplus (\mu_2 x_2 + \dots + \mu_n x_n + \delta^{-1} c) \oplus d \quad (2)$$

gde su $\mu_i = \delta^{-1} \lambda_i \gamma^{-1}$ za $i \neq 1$

i $\mu_1 = \gamma \alpha \beta^{-1}$

homeomorfizmi prostora.

Retrakt medijalne topološke kvazigrupe $(x_1^{n-1}a)$ je (n-1)-arna medijalna topološka kvazigrupa pa prema indukcijskoj pretpostavci važi da postoji Abelova topološka grupa Q(T) takva da je

$$(x_1^{n-1}\, a) = \nu_1 x_1 \,T\, \nu_2 x_2 \,T \dots T\, \nu_{n-1} x_{n-1} \,T h$$

gde su ν_i automorfizmi topološke grupe Q(T) a h fiksirani element iz Q.

Stavljajući da je $x_n = a$ u (2) dolazimo do jednakosti

$$\mu_1' x_1 \oplus (\mu_2 x_2 + \dots + \mu_{n-1}' x_{n-1}) =$$

$$\nu_1 x_1 T \nu_2 x_2 T \dots T \nu_{n-1} x_{n-1} T h$$

gde su $\mu_1' x = \mu_1 x \oplus d$

i $\mu_{n-1}' x = \mu_{n-1} x + \mu_n a + \delta^{-1} c$

i kao takvi μ_1' i μ_{n-1}' su homeomorfizam prostora pa koristeći se činjenicom da su grupe $(Q, \oplus)$ i (Q, T) i $(Q\ +)$ glavno izotopne dobijamo iz (2) koristeći se relacijom

$$u \oplus v = uTvTl,$$

i $uTv = u + v + l'$

da je $(x_1^n) = \mu_1 x_1 + \mu_2 x_2 + \dots + \mu_n x_n + r$ □

4.5. Mengerove topološke kvazigrupe

4.5.1. Def. Topološka n-kvazigrupa $Q(\ )$ naziva se Mengerovom topološkom n-kvazigrupom ako je Mengerova n-kvazigrupa (def.1.6.3.).

Pre nego što formulišemo glavno tvrdjenje dokazaćemo jednu pomoćnu lemu koja će nam koristiti pri dokazu glavnog rezultata:

4.5.2. Lema. Ako su u topološkoj n-kvazigrupi $Q(\ )$ ispunjeni uslovi $D_{i,j}$ tada postoje topološke kvazigrupe $Q(A)$ i $Q(B)$ arnosti $n-j+i$, $j-i+1$ takve da je

$$(x_1^n) = A(x_1^{i-1}, B(x_1^j)\ x_{j+1}^k)$$

Dokaz. Ako je $Q(\ )$ topološka n-kvazigrupa tada je i $Q(A)$ topološka $n-j+i$ - kvazigrupa jer je $Q(A)$ retrakt topološke kvazigrupe $Q(\ )$ tj.

$$A(x_1^{n-j+i}) = (x_1^{i-1} c_i^{j-1} x_i^{n-j+i})$$

a kada su $Q(\ )$ i $Q(A)$ topološke kvazigrupe tj.,

$$(\quad) = A \overset{i}{+} B$$

sledi da i $Q(B)$ mora biti topološka kvazigrupa (jer je $Q(B)$ retrakt topološke kvazigrupe $Q\,(\pi^i{}_A \overset{i}{+} C)$.

4.5.3. Teorema. Ako je $Q(\ )$ topološka Mengerova kvazigrupa tada postoji topološka grupa (o) i topološka n-1-kvazigrupa C, takva da je

$$(x_1^n) = x_1 \circ C(x_2^n)$$

Dokaz. Kako Mengerova n-kvazigrupa $Q(\ )$ ispunjava uslove $D_{2,n}$ a usto je ova po pretpostavci topološka, to postoje topološka binarna i topološka n-1-arna kvazigrupa $Q(A)$ i $Q(B)$ takva da je

$$(x_1^n) = A\,(x_1,\ B(x_2^n)).$$

Neka je $Q(o)$ - topološka lupa takva da je

$$A(x,y) = Rx \circ Ly$$

gde su R i L neki homeomorfizmi topološkog prostora Q tada možemo dokazati da je $Q(o)$ takodje i grupa pa je i topološka grupa.

Koristeći se prethodnim rezultatima i odgovarajućim rezultatima mi možemo dokazati i sledeću teoremu:

4.5.4. Teorema. Ako je u topološkoj n-kvazigrupi ispunjen i-ta jednakost Mengera za svako i=1, 2, ..., n tada postoji topološka grupa $Q(.)$ stepena n-2 takva da je

$$(x_1^n) = x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n$$

5.6. Zaključak

Na osnovu napred izloženog možemo kao posledicu zaključiti da su topološki prostori n-kvazigrupa koje pripadaju nekim asocijativnom sistemu, koje zadovoljavaju neki od topoloških asocijativnih zakona kao i zakone medijalnosti i Mengerove zakone potpuno regularni jer je na tim prostorima dobijena grupa koja je topološka čiji je prostor kao što je poznato potpuno regularan.

5. TOPOLOSKE ALGEBRE SMESTAJA

5.1. Uvod

Poznati odnosi koji važe za finitarne operacije mogu biti dati i preko oredjenih apstraktnih karakteristika (vid. [31], [39] i [13]).

Ovde će biti pokazano da se isto može učiniti i sa topološkim finitarnim operacijama tj. topološke algebre će biti date preko apstraktnih karakteristika.

5.2. Topološke algebre smeštaja (Λ, Σ)

5.2.1. Def. Za algebru smeštaja (1.7.) kažemo da je topološka u oznaci $(\Lambda, \Sigma, \mathcal{T})$ ako je na skupu $\Lambda_0 \neq \emptyset$ data topologija takva da za svako $f \in \Lambda$, $|f| = n > 0$ i za svako $a_1, \ldots, a_n \in \Lambda_0$

$$f \overset{1}{+} a_0 \overset{1}{+} \cdots \overset{1}{+} a_n = a \in U \in \mathcal{T}$$

postoje $\qquad U_1(a_1), \ldots, U_n(a_n) \in \mathcal{T}$

takvi da je $\qquad f \overset{1}{+} U_0 \overset{1}{+} \cdots \overset{1}{+} U_n \subseteq U.$

5.2.2. Primer. Neka je A neprazan skup sa topologijom $\mathcal{T}$ i neka je Ω (A) skup svih n-arnih operacija definisanih na skupu A (n=1, 2, ...,) koje su neprekidne u topologiji $\mathcal{T}$ tada, ako označimo Ω_0 (A) = A i definišemo

$$f \overset{i}{+} g\, (x_1^{m+n-1}) = f\, (x_1^{i-1},\ g(x_i^{m+i-1})\ x_{m+i}^{m+n-1})$$

dobijamo da je $(\Omega(A), \Sigma, \mathcal{T})$ topološka algebra smeštaja.

Za topološku algebru smeštaja kažemo da je konrektna ako je podalgebra topološke algebre definisane ovako (analogon konrektnoj algebri smeštaja (vid. G. Čupona [31]).

Mi ćemo ovde pokazati da je svaka topološka algebra smeštaja konkretna.

5.2.3. Teorema. Svaka topološka algebra je konrektna.

Dokaz. Topološka algebra smeštaja je i algebra smeštaja pa postoji algebra operacija $\Omega(A)$ čija je ona podalgebra takva da je $\Lambda_o \subseteq A$.

Konstruišimo na skupu A topologiju $\widetilde{\mathcal{T}}$ na sledeći način:

$U \subseteq A$ je otvoren ako i samo ako $U \in \mathcal{T}$ ili $U = A$.

Pokažimo da je $(\Omega(A), \Sigma, \widetilde{\mathcal{T}})$ topološka algebra smeštaja iz primera 5.2.2.

Neka je $f \in \Omega(A)$, $|f| = n > 0$ i neka su $a_1, a_1, \ldots {}_n \in A$ i neka je $f \overset{1}{+} a_1 \overset{1}{+} \ldots \overset{1}{+} a_n = a \in U \in \widetilde{\mathcal{T}}$. Pri tom mogu nastati sledeći slučajevi:

(A) $f \in \Lambda_n$, (1). $a \in \Lambda_o$, tada postoje, po pretpostavci da je $(\Lambda, \Sigma, \mathcal{T})$ topološka algebra smeštaja, $U_1(a_1), \ldots, U_n(a_n) \in \mathcal{T}$ takvi da je $f \overset{1}{+} U_1 \overset{1}{+} \ldots \overset{1}{+} U_n \subseteq U$, u slučaju da $U \in \mathcal{T}$ (jasno je da i $U_i \in \widetilde{\mathcal{T}}$). U slučaju da je $U = A$ tada je $f \overset{1}{+} A \overset{1}{+} \ldots \overset{1}{+} A \subseteq A$.

(2) Iz $a \notin \Lambda_o$, $a \in U$, sledi $U = A$ po definiciji topologije $\widetilde{\mathcal{T}}$ pa je

$$f \overset{1}{+} A \overset{1}{+} \ldots \overset{1}{+} A \subseteq A$$

(B) $f \notin \Lambda_n$, $f \in \Omega(A)$ tada $f \overset{1}{+} a_1 \overset{1}{+} \ldots \overset{1}{+} a_n = a \notin \Lambda_o$ pa dokaz sledi kao u (A.2).

Odavde sledi da je $(\Omega(A), \Sigma, \widetilde{\mathcal{T}})$ topološka algebra smeštaja. Jasno je da $\widetilde{\mathcal{T}}/\Lambda_o = \mathcal{T}$, da je dakle algebra $(\Lambda, \Sigma, \mathcal{T})$ konrektna.

Nije teško zaključiti da je topologija $\widetilde{\mathcal{T}}$ dosta gruba i da ne zadovoljava ni jednu od T_i aksioma bez obzira na to kakva je topologija $\mathcal{T}$.

5.3. Neke osobine topoloških algebri smeštaja

5.3.1. Def. Neka su $(\Lambda, \Sigma, \mathcal{T})$ i $(\Lambda', \Sigma, \mathcal{T}')$ dve topološke algebre sme taja, za preslikavanje $\varphi : \Lambda \to \Lambda'$ kažemo da je homomorfizam topološke algebre smeštaja ako je

$$1. \ \forall f \in \Lambda \ \left|\varphi(f)\right| = |f|$$

$$2. \ (\forall f, g \in \Lambda, \ i \leq |f|)\ \varphi(f \overset{i}{+} g) = \varphi(f) \overset{i}{+} \varphi(g)$$

3. $\varphi|\Lambda_o = \varphi_o$ je neprekidno preslikavanje topološkog prostora $(\Lambda_o, \mathcal{T})$ u topološki prostor $(\Lambda'_o, \mathcal{T}')$.

Slično se mogu uvesti i osnovni pojmovi monomorfizma, epimorfizma i izomorfizma topološke algebre smeštaja (u zadnjem slučaju se zahteva da je φ homeomorfizam prostora).

5.3.2. Napomena. Klasa topoloških algebri smeštaja je kategorija čiji su objekti topološke algebre smeštaja a morfizmi homomorfizma topoloških algebri smeštaja.

Nije teško proveriti da važe sledeći stavovi:

5.3.3. Stav. Ako je $(\Lambda, \mathcal{T})$ topološka algebra smeštaja i Λ' algebra smeštaja a φ epimorfizam algebre Λ na algebru Λ' tada:

$$1. \ \mathcal{T}' = \left\{U \subseteq \Lambda_o \ \middle|\ U = \varphi(V), \quad V \in \mathcal{T}\right\}$$

je topologija na Λ'_o a $(\Lambda', \mathcal{T}')$ topološka algebra smeštaja

2. φ je epimorfizam topološke algebre $(\Lambda, \mathcal{T})$ na topološku algebru $(\Lambda', \mathcal{T}')$

Dokaz. Jedino treba pokazati da je ispunjen uslov iz definicije topoloških algebri smeštaja.

Neka je $\quad f' \overset{1}{+} x'_1 \overset{1}{+} \dots \overset{1}{+} x'_n \in U' = \varphi(U)$

pri tome $\quad \exists f, x_1, \dots, x_n$ takvi da je

$$\varphi(f) = f', \ \varphi(x_1) = x'_1, \ \dots, \ \varphi(x_n) = x'_n$$

odnosno $\quad \varphi(f) \overset{1}{+} \varphi(x_1) \overset{1}{+} \dots \overset{1}{+} \varphi(x_n) =$

$$= \varphi(f \overset{1}{+} x_0 \overset{1}{+} \dots \overset{1}{+} x_n) \in \varphi(U) \Longrightarrow$$

$$f \overset{1}{+} x_1 \overset{1}{+} \dots \overset{1}{+} x_n \in U \Longrightarrow$$

$$\exists U_1(x_1), \dots, U_n(x_n)$$

takvi da je $f \overset{1}{+} U_1 \overset{1}{+} \dots \overset{1}{+} U_n \subseteq U \Longrightarrow$

$$\varphi(f \overset{1}{+} U_1 \overset{1}{+} \dots \overset{1}{+} U_n) \subseteq \varphi(U) \Longrightarrow$$

$$f' \overset{1}{+} U_1' \overset{1}{+} \dots \overset{1}{+} U_n' \subseteq U'$$

gde su $U_1' = \varphi(U_1), \dots, U_n' = \varphi(U_n)$

Slično se dokazuje i sledeće tvrdjenje:

5.3.4. Stav. Ako je Λ algebra smeštaja $(\Lambda', \mathcal{T}')$ topološka algebre smeštaja a φ epimorfizam algebre Λ u algebru Λ' tada:

1. $\mathcal{T} = \{ U \subseteq \Lambda_0 \mid \varphi(U) = U' \in \mathcal{T}' \}$ je topologija na Λ_0,

2. $(\Lambda, \mathcal{T})$ je topološka algebra smeštaja a φ epimorfizam topološke algebre $(\Lambda, \mathcal{T})$ u topološku algebru $(\Lambda', \mathcal{T}')$.

5.3.5. Stav. Ako je $(\Lambda, \mathcal{T})$ topološka algebra smeštaja $A \subseteq \Lambda_0$, i $(\Lambda \setminus \Lambda_0) \cup A, \Sigma)$ podalgebra algebre (Λ, Σ) onda je i$((\Lambda \setminus \Lambda_0) \cup \overline{A}, \Sigma)$ podalgebra algebre (Λ, Σ).

Dokaz. Uslovi II i III (vid. 1.7.) su za podalgebru $((\Lambda \setminus \Lambda_0) \cup \overline{A}, \Sigma)$ ispunjeni trivijalno i treba jedino proveriti uslov I (za slučaj dužine 0):

Neka su $x_1, \dots, x_n \in \overline{A}$ i $|f| = n$ pokažimo da je

$$f \overset{1}{+} x_1 \overset{1}{+} \dots \overset{1}{+} x_n \in \overline{A}$$

pretpostavimo da

$$f \overset{1}{+} x_1 \overset{1}{+} \dots \overset{1}{+} x_n \notin \overline{A}$$

odavde kako je $\Lambda_0 \setminus \overline{A} = U$ otvoren u topologiji $\mathcal{T}$, a $(\Lambda, \Sigma, \mathcal{T})$ topološka algebra smeštaja sledi da je

$$f \overset{1}{+} x_1 \overset{1}{+} \dots \overset{1}{+} x_n \in U$$

i postoje $U_1(x_1), \dots, U_n(x_n)$

tako da je $f \overset{1}{+} U_1 \overset{1}{+} \dots \overset{1}{+} U_n \subseteq U$ $\qquad (*)$

Kako je $U_i \cap \overline{A} \neq \emptyset \Rightarrow U_i \cap A \neq \emptyset$ a odavde sledi da postoje

$x_i' \in A \cap U_i$ tako da s obzirom da važi $(*)$

važi i $f \overset{1}{+} x_1' \overset{1}{+} \dots \overset{1}{+} x_n' \notin A$ što je suprotno pretpostavci da je A podalgebra algebre (Λ, Σ).

6. POTAPANJE TOPOLOSKIH ALGEBRI U TOPOLOSKE POLUGRUPE

6.1. Jedna topologija prekrivajuće polugrupe topološke algebre

6.1.1. Def. Za algebru $(A(\Omega), \mathcal{T})$ kaže se da je topološka ako je $(A, \mathcal{T})$ topološki prostor u kome su sve operacije neprekidne tj. za svako $\omega \in \Omega$, i $\omega(a_1, \ldots, a_n) = b \in U \in \mathcal{T}$, postoje okoline $U_1(a_1)$, ..., $U_n(a_n)$ takva da je

$$\omega(U_1, \ldots, U_n) \subseteq U$$

Svaka algebra pa i tropološka može da se potopi u polugrupu (vid. 1.5.). G. Čupona je u [33] dao jedan prirodan način topologizacije jednog pokrivača topološke algebre takav da je prekrivajuća polugrupa topološka.

Da bismo formulisali taj rezultat opišimo taj pokrivač (rezultat G. Čupone [30]).

Neka je $A(\Omega)$ univerzalna algebra i neka svaka operacija ω dužine $n \geqslant 1$ ima pridružen simbol d_ω takav da je $\omega \neq \widetilde{\sigma} \Rightarrow d_\omega \neq d_{\widetilde{\sigma}}$ i neka je skup D takvih simbola disjunktan sa A. Neka je S polugrupa generirana od $A \cup D$ takva da zadovoljava uslove

$$\omega(a_1, \ldots, a_n) = a, \text{ u } A(\Omega) \Longrightarrow d_\omega a_1 \ldots a_n = a \text{ u } S$$

Za proizvod $b_1 \ldots b_k$, $b_i \in A \cup D$ kažemo da je reducibilan ako postoji i takav da je $b_i = d_\omega$, $b_{i+1}, \ldots, b_{i+n} \in A$ i pritom je ω n-arna operacija u Ω. U protivnom se kaže da je proizvod reduciran. Pokazuje se da svaki elemenat $s \in S$ može na jedinstven način da se prikaže kao reduciran proizvod $s = c_1 \ldots c_m$.

Za dobijenu polugrupu S kažemo da je slobodno generirana od algebre $A(\Omega)$.

6.1.2. Teorema. [33] Neka je $A(\Omega)$ topološka algebra, a S polugrupa slobodno generirana od ove algebre. Pri tom pretpostavljamo da je $A \neq \emptyset$ a da u Ω postoji bar jedan n-arna operacija ω takva da je $n \geqslant 1$.

Neka je $\mathcal{B}$ familija od svih podskupova B u S oblik $B = B_1 \dots B_k$, gde je B_i otvoren skup datog topološkog prostora A ili pak $B_i = \{d\} \subseteq D$. Osim toga pretpostavljamo da je $B_1 \dots B_k$ reduciran proizvod tj, da je svaki proizvod $b_1 \dots b_k$, $b_i \in B_i$ reduciran.

Tada:
1. $\mathcal{B}$ je baza topologije $\mathcal{T}$ na S,
2. Polugrupa S je topološka u dobijenoj topologiji,
3. A je otvoren i zatvoren podprostor od S,
4. Ako je $(A(\Omega), \mathcal{T})$ T_2 prostor onda je i polugrupa $(S, \mathcal{T})$ T_2 prostor,
5. Prostor $(S, \mathcal{T})$ nije kompaktan.

6.2. Dve osobine Čuponine topologije

6.2.1. Stav. Ako je $(A, \mathcal{T})$ lokalno kompaktan topološki prostor onda je i $(S, \mathcal{T})$ lokalno kompaktan topološki pr...

Dokaz. Neka je $p \in S$ proizvoljna tačka i pri tom je $p = b_1 b_2 \dots b_k$, pokažimo da ona ima komapktnu okolinu. Kako je $b_i \in A \cup D$ za svako i, i A lokalno kompaktan prostor to za svako $b_i \in A$ postoji kompaktna okolina B_i, a i za $b_j \in D$ postoji komapktna okolina jer je $B_j = \{b_j\}$ u tom slučaju otvoren pa je jasno $B = B_1 B_2 \dots B_k$ kompaktna okolina tačke p.

6.2.2. Stav. Ako je $(A, \mathcal{T})$ potpuno nepovezan onda je i $(S, \mathcal{T})$ potpuno nepovezan.

Dokaz. Neka je $H = H_1 \dots H_r$ proizvoljan bar dvočlan skup tada je za bar jedan broj i H_i dvočlan. Ako je $\{a,b\} \subseteq H_i \subseteq A$ tada po pretpostavci da je A potpuno nepovezan postoje otvoreni skupovi $U_i(a)$ i V_i (b):

$$(H_i \cap U_i) \cup (H_i \cap V_i) = H_i$$

$$(H_i \cap U_i) \cap (H_i \cap V_i) = \emptyset$$

Ovo važi za sve bar dvočlane skupove $H_i \subseteq A$. Ako je $H_j \subseteq D$ tada je on potpuno nepovezan po konstrukciji a i u slučaju da $H_e \cap A \neq \emptyset$ i $H_e \cap D \neq \emptyset$ opet je H_e potpuno nepovezan zbog potpune nepovezanosti prostora A i podprostora D. Odavde sledi da za proizvoljne dve različite tačke p, $q \in H$ postoje

U (p) i V (p) ∴

$$H \cap (U \cap V) = \emptyset \quad \text{i} \quad H \cap (U \cup V) = H$$

Napomenimo da je ovde dovoljno za dokaz koristiti nepovezanost jednog od skupova dok se za ostale može uzeti S.

7. Ro - TOPOLOŠKE ALGEBRE

7.1. Ro - Topološki prostori

7.1.1. Def. Topološki prostor $(X,\mathcal{T})$ je Ro-prostor akko za svako $x, y \in X$, $x \neq y$ je ili $\mathrm{cl}\{x\} = \mathrm{cl}\{y\}$ ili $\mathrm{cl}\{x\} \cap \mathrm{cl}\{y\} = \emptyset$.

Topološki Ro prostori su proučavani od niza autora (vid. [..], [..], [..]). Izmedju ostalih osobina koje važe za Ro topološke prostore istaknimo na primer da je svaki regularan topološki prostor ... istaknimo sledeću te... ([12] i [44]):

7.1.2. Teorema. Nek... $(X,\mathcal{T})$ Ro-topološki prostor. Neka je R relacija ekvivalenci... skupu X definisana na sledeći način: $(x,y) \in R$ ako i samo ako $\mathrm{cl}\{x\} = \mathrm{cl}\{y\}$. Prostor $(X/R, \mathcal{T}_R)$ je tada T_1 - prostor.

7.2. Ro - Topološke algebre

7.2.1. Def. Neka je $(X,\Omega,\mathcal{T})$ topološka algebra. Kongruencija algebre (X,Ω) se zove kongruencijom topološke algebre $(X,\Omega,\mathcal{T})$ ako je za svako $x \in O \in \mathcal{T}$, $\pi(x) \subseteq O$.

7.2.2. Teorema. Neka je $(X,\Omega,\mathcal{T})$ Ro - topološka algebra.

Tada:

1. Relacija R iz teoreme 7.1.2. je relacija kongruencije topološke algebre
2. $(X/R, \Omega, \mathcal{T}_R)$ je T_1 topološka algebra.

Dokaz. 1. Pretpostavimo da je ω proizvoljna operacija iz Ω dužine n i da su

$$a_i,\ a_i' \in G \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

takvi da je

$$a_i R a_i' \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

odnosno $\mathrm{cl}\{a_i\} = \mathrm{cl}\{a_i'\}$ ili što je ekvivalentno sa $\forall O \in \mathcal{T}\ a_i \in O \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow a_i' \in O \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

Neka je $\omega(a_1, \ldots, a_n) \in O \in \mathcal{T}$, zbog neprekidnosti operacije ω sledi da postoje $O_1, \ldots, O_n \in \mathcal{T}$ takvi da je $a_1 \in O_1, \ldots, a_n \in O_n$ i da je

$$\omega(O_1, \ldots, O_n) \subseteq O$$

Kako iz $a_i \in O_i$ sledi $a_i' \in O_i$ proizilazi da i

$$\omega(a_1', \ldots, a_n') \in \omega(O_1, \ldots, O_n) \subseteq O$$

odnosno $\omega(a_1', \ldots, a_n') \in O$ za proizvoljno $O \in \mathcal{T}$ koje sadrži $\omega(a_1, \ldots, a_n)$
odnosno

$$\omega(a_1, \ldots, a_n)\ R\ \omega(a_1', \ldots, a_n')$$

pa imajući u vidu da je R relacija ekvivalencije dobijamo da je R kongruencija topološke algebre.

2. Iz činjenice da važi Teorema 7.1.2. i prethodno dokazanog dela neposredno sledi.

Prethodna teorema ima i ovu važnu posledicu:

<u>7.2.3. Posledica.</u> Ako je $(G, \Omega, \mathcal{T})$ regularna topološka algebra onda je $(G/R, \Omega, \mathcal{T}_R)$ T_3 topološki prostor.

Zbog ove osobine topoloških algebri je jasno da nema interesa za izučavanje topoloških grupa i topoloških kvazigrupa koje nisu T_3 prostori.

8. UZAJAMNO R_0 (PR_0) TOPOLOŠKE ALGEBRE

8.1. O uzajamno R_0 topološkim prostorima

Navedimo prvo sledeće oznake i definicije, koje ćemo koristiti u daljem radu, u bitopološkom prostoru $(X,\mathcal{P},\mathcal{D})$:

$$P(x,y) = \mathcal{P}\text{-cl}\{x\}\cap\mathcal{D}\text{-cl}\{y\}, \quad D(x) = \mathcal{D}\ \text{cl}\{x\}$$

$$R(x) = \mathcal{P}\text{cl}\{x\}$$

<u>8.1.1. Definicija.</u> Bitopološki prostor $(X,\mathcal{P},\mathcal{D})$ je $\mathcal{P}R_0$ u odnosu na $\mathcal{D}$ ako i samo ako je za svaki $\mathcal{P}$ otvoren skup $G\subseteq X$ i svako $x\in G$ $\mathcal{D}\text{-cl}\{x\}\subseteq G$.

<u>8.1.2. Definicija.</u> Bitopološki prostor $(X,\mathcal{P},\mathcal{D})$ je uzajamno R_0 ako i samo ako je $\mathcal{P}$ R_0 u odnosu na $\mathcal{D}$ i $\mathcal{D}$ R_0 u odnosu na $\mathcal{P}$.

<u>8.1.3. Lema.</u> Bitopološki prostor $(X,\mathcal{P},\mathcal{D})$ je uzajamno R_0 ako i samo ako je za svako $x,y\in X$, $x\neq y$ $P(x,y)=\emptyset$ ili $\{x,y\}\subseteq P(x,y)$.

<u>Dokaz.</u> Dovoljnost: Pretpostavimo da je $P(x,y)\neq\emptyset$ i $\{x,y\}\nsubseteq P(x,y)$. Neka je $z\in P(x,y)$ i $x\notin P(x,y)$ što daje $x\notin D(y)$ i $x\in CD(y)$. Skup $CD(y)$ je otvoren u topologiji $\mathcal{D}$, a $x\in CD(y)$ i pritom $R(x)\nsubseteq CD(y)$ jer je $z\in D(y)$. Dakle bitopološki prostor $(X,\mathcal{P},\mathcal{D})$ nije $\mathcal{D}$ R_0 u odnosu na $\mathcal{P}$ tj. bitopološki prostor nije uzajamno R_0. Analogan dokaz se izvodi pri pretpostavci da je $z\in P(x,y)$ i $y\notin P(x,y)$.

<u>Nužnost.</u> Neka je G $\mathcal{P}$ otvoren skup i $x\in G$. Pretpostavimo da je $G\nsupseteq D(x)$ a odakle proizilazi da postoji $y\in D(x)$ takvo da je $y\notin G$. Pri tom je $R(y)\cap G=\emptyset$ jer je $R(y)\subseteq CG$ a CG je $\mathcal{P}$- zatvoren skup. Odatle zaključujemo da

$$P(x,y)\nsupseteq\{x,y\} \quad \text{i} \quad P(y,x)\neq\emptyset$$

Odavde zaključujemo da je $G \supseteq D(x)$ za svako $x \in G$ tj. da je bitopološki prostor $(X, \mathcal{P}, \mathcal{Q})$ $\mathcal{P}$ R_0 u odnosu na $\mathcal{Q}$.

Dualno se dokazuje da je bitopološki prostor $(X, \mathcal{P}, \mathcal{Q})$ $\mathcal{Q}$ R_0 u odnosu na $\mathcal{P}$ tj. da je bitopološki prostor $(X, \mathcal{P}, \mathcal{Q})$ uzajamno R_0.

<u>8.1.4. Definicija.</u> Bitopološki prostor $(X, \mathcal{P}, \mathcal{Q})$ je uzajamno T_0 ako i samo ako za svako $x,y \in X$, $x \neq y$ (postoji $\mathcal{P}$ otvoren skup $U \ni x$ i $\mathcal{Q}$ otvoren skup $V \ni x$ tako da $y \notin U$ i $y \notin V$) ili (postoji $\mathcal{P}$ otvoren skup $U \ni y$ i $\mathcal{Q}$ otvoren skup $V \ni y$ tako da $x \notin U$ i $x \notin V$).

<u>8.1.5. Teorema</u> [100] U bitopološkom prostoru $(X, \mathcal{P}, \mathcal{Q})$ obe topologije su T_1 ako i samo ako je bitopološki prostor $(X, \mathcal{P}, \mathcal{Q})$ uzajamno T_0 i uzajamno R_0.

<u>Dokaz.</u> Dovoljnost: Očigledno je da ako su obe topologije T_1, onda je bitopološki prostor $(X, \mathcal{P}, \mathcal{Q})$ uzajamno T_0, a i da je bitopološki prostor $(X, \mathcal{P}, \mathcal{Q})$ uzajamno R_0, jer naprimer da je $\mathcal{P}$ R_0 u odnosu na $\mathcal{Q}$, (da je $\mathcal{Q}$ R_0 u odnosu na $\mathcal{P}$ simetrično), sledi iz: neka je G proizvoljan $\mathcal{P}$ otvoren skup i neka je x proizvoljan element iz G, $D(x) = \{x\}$ jer je $\mathcal{Q}$ T_1 topologija odakle $G \supseteq D(x)$ za svako $x \in G$.

<u>Nužnost:</u> Neka su za proizvoljno $x,y \in X$, $x \neq y$, U i V $\mathcal{P}$ odnosno $\mathcal{Q}$ okoline tačke x tako da $y \notin U$ i $y \notin V$. Kako je bitopološki prostor $(X, \mathcal{P}, \mathcal{Q})$ usto i uzajamno R_0 imamo da je $U \supseteq D(x)$ i $V \supseteq R(x)$ odakle je $CD(x) \ni y$ i $CR(x) \ni y$ tj. za proizvoljno $x, y \in X$, $x \neq y$, postoje $\mathcal{P}$ otvoren skup $U \ni x$ i $U \not\ni y$ i $\mathcal{Q}$ otvoren skup $CR(x) \ni y$ i $x \notin CR(x)$ kao i $\mathcal{Q}$ otvoren skup $V \ni x$, $V \not\ni y$ i $CD(x) \ni y$ i $x \notin CD(x)$ tj. obe topologije su T_1.

<u>8.1.6. Napomena.</u> Ova teorema je dokazana i u [72] 1966 ali na jedan drugi način.

<u>8.1.7. Definicija.</u> Bitopološki prostor $(X, \mathcal{P}, \mathcal{Q})$ poseduje osobinu (P) ako i samo ako $\forall x,y \in X$.

$$P(x,y) = \emptyset \Longrightarrow P(y,x) = \emptyset$$

<u>8.1.8. Definicija.</u> Bitopološki prostor je slabo uzajamno T_o ako i samo ako za svako $x,y \in X$, $x \neq y$ postoji bar jedna $\mathcal{P}$ ili $\mathcal{Q}$ okolija jedne tačke koja ne sadrži drugu tačku.

<u>8.1.9. Teorema.</u> U bitopološkom prostoru $(X, \mathcal{P}, \mathcal{Q})$ obe topologije su T_1 ako i samo ako je on uzajamno R_o, poseduje osobinu (P) i slabo je uzajamno T_o.

<u>Dokaz.</u> Neka je $x \neq y$ i neka je V $\mathcal{P}$ otvorena okolina tačke x takva da $y \notin V$. Pri tom mora biti prema lemi 8.1.3.

$$P(x,y) = \emptyset \quad \text{jer } y \notin \mathcal{P}\mathrm{cl}\{x\}$$

Kako važi (P) sledi da je $P(y,x) = \emptyset$. Iz $\mathcal{P}\mathrm{cl}\{x\} \cap \mathcal{Q}\,\mathrm{cl}\{y\} = \emptyset$ sledi da $C\,\mathcal{P}\,\mathrm{cl}\{x\} = V$ je $\mathcal{P}$ otvoren i $y \in V$ a $x \notin V$ i $C\,\mathcal{Q}\,\mathrm{cl}\{y\} = U$ je $\mathcal{Q}$ otvoren i $x \in U$, $y \notin U$.

Iz $\mathcal{P}\mathrm{cl}\{y\} \cap \mathcal{Q}\mathrm{cl}\{x\} = \emptyset$ sledi

$$V_1 = C\,\mathcal{Q}\,\mathrm{cl}\{x\} \text{ je } \mathcal{Q} \text{ otvoren i } x \notin V_1,\ y \in V_1 \text{ i}$$

$$U_1 = C\,\mathcal{P}\,\mathrm{cl}\{y\} \text{ je } \mathcal{P} \text{ otvoren i } y \notin U_1,\ x \in U_1$$

odnosno obe topologije su T_1.

<u>8.1.10. Definicija.</u> [100] Bitopološki prostor $(X, \mathcal{P}, \mathcal{Q})$ je uzajamno R_1 ako i samo ako je za svako $x,y \in X$, $x \neq y$, $\{x,y\} \subseteq P(x,y)$ ili ($P(x,y) = \emptyset$ i postoji $\mathcal{Q}$ otvoren skup $U \supseteq R(x)$ i $\mathcal{P}$ otvoren skup $V \supseteq D(y)$ tako da je $U \cap V = \emptyset$).

Iz same definicije sledi da je uzajamno R_1 bitopološki prostor ujedno i uzajamno R_o bitopološki prostor.

8.1.11. Definicija. Bitopološki prostor $(X,\mathcal{P},\mathcal{Q})$ je uzajamno T_2 ako za svako $x,y\in X$, $x\neq y$ postoje $\mathcal{P}$ otvoreni skup U i $\mathcal{Q}$ otvoren skup V tako da $x\in U$, $y\in V$ i $U\cap V=\emptyset$.

8.1.12. Teorema. [100] Bitopološki prostor $(X,\mathcal{P},\mathcal{Q})$ je uzajamno T_2 prostor ako i samo ako je uzajamno R_1 i uzajamno T_0.

Dokaz. Dovoljnost: Ako je bitopološki prostor $(X,\mathcal{P},\mathcal{Q})$ uzajamno T_2 onda su obe topologije T_1 pa je bitopološki prostor $(X,\mathcal{P},\mathcal{Q})$ i strogo uzajamno T_0. Analogno ako je uzajamno T_2 onda je za svako $x,y\in X$, $x\neq y$, $P(x,y)=\emptyset$ i postoji $\mathcal{Q}$ otvoren skup $U\ni x$ i $\mathcal{P}$ otvoren skup $V\ni y$ takvi da je $U\supseteq R(x)$ i $V\supseteq D(y)$ i $U\cap V=\emptyset$, tj. bitopološki prostor $(X,\mathcal{P},\mathcal{Q})$ je uzajmno R_1.

Nužnost: Ako je bitopološki prostor $(X,\mathcal{P},\mathcal{Q})$ uzajamno R_1 onda je on uzajamno R_0 kako je i uzajamno strogo T_0 onda su obe topologije T_1. Kako su obe topologije T_1, $R(x)=D(x)=\{x\}$ za svako $x\in X$. Odavde je za svako $x,y\in X$, $x\neq y$, $P(x,y)=\emptyset$, i postoji $\mathcal{Q}$ otvoren $U\ni x$ i $\mathcal{P}$ otvoren skup $V\ni y$ tako da je $U\cap V=\emptyset$ tj. bitopološki prostor $(X,\mathcal{P},\mathcal{Q})$ je uzajamno T_2.

8.1.13. Napomena. U [72] je data druga definicija uzajamno R_1 bitopoloških prostora pomoću koje nije bilo moguće iskazati i dokazati prethodnu teoremu.

Definicija uzajamno R_1 bitopoloških prostora ekvivalentna ovoj data je 1976 u [81] i na osnovu nje je iskazana i dokazana ista ova teorema.

8.1.14. Teorema. Bitopološki prostor $(X,\mathcal{P},\mathcal{Q})$ je uzajamno T_2 ako i samo ako je on uzajamno R_1, slabo uzajamno T_0 i zadovoljava osobinu (P).

Dokaz: $\Longrightarrow$: Neka je $x\in U$ gde je U $\mathcal{P}$ otvoren, i neka $y\notin U$ pa otuda $x\notin\mathcal{P}\text{cl}\{y\}$ odakle s obzirom da je $(X,\mathcal{P},\mathcal{Q})$ uzajamno R_1 sledi $P(y,x)=\emptyset$ i postoje $\mathcal{Q}$ otvoreni skup V_1 i $\mathcal{P}$ otvoreni skup U_1 takvi da je $U_1\cap V_1=\emptyset$ i $y\in V_1$, $x\in U_1$.

Kako je u prostoru zadovoljena osobina P iz $P(y,x)=\emptyset$ sledi

$P(x,y) = \emptyset$ pa postoji $\mathcal{Q}$ otvoren skup V_2 i $\mathcal{P}$ otvoren skup U_2 ∴

$$U_2 \cap V_2 = \emptyset$$

i
$$x \in V_2, \quad y \in U_2$$

Analogno prio ostalim pretpostavkama za uzajamno T_0 bitopološki prostor. $\Longleftarrow$: trivijalno.

8.1.15. Definicija. Bitopološki prostor $(X, \mathcal{P}, \mathcal{Q})$ je $\mathcal{P}$ regularan u odnosu na $\mathcal{Q}$ ako za svako $x \in X$ i svaki $\mathcal{P}$ zatvoren skup F ∴ $x \notin F$ postoje $\mathcal{P}$ otvoren skup $U(x)$ i $\mathcal{Q}$ otvoren skup $V(F)$ takvi da je $U \cap V = \emptyset$.

8.1.16. Definicija. Bitopološki prostor $(X, \mathcal{P}, \mathcal{Q})$ je uzajamno regularan ako je $\mathcal{P}$ regularan u odnosu na $\mathcal{Q}$ i $\mathcal{Q}$ regularan u odnosu na $\mathcal{P}$.

8.1.17. Napomena. Očigledno je da ako je bitopološki prostor uz. regularan onda je on i uzajamno R_1 i uzajamno R_0.

8.1.18. Definicija. Bitopološki prostor $(X, \mathcal{P}, \mathcal{Q})$ je uzajamno T_3 ako i samo ako je uzajamno regularan i ako su obe topologije T_1.

8.1.19. Posledica. Bitopološki prostor $(X, \mathcal{P}, \mathcal{Q})$ je uzajamno T_3 ako i samo ako je uzajamno regularan i uzajamno T_0.

8.1.20. Posledica. Bitopološki prostor $(X, \mathcal{P}, \mathcal{Q})$ je uzajamno T_3 ako i samo ako je uzajamno regularan, slabo uzajamno T_0 i poseduje osobinu P.

8.1.21. Primer. $(R, \mathcal{L}, \mathcal{D})$ je uzajamno regularan ali ne zadovoljava osobinu (P). (R je skup realnih brojeva a $\mathcal{L} = \{\emptyset\} \cup \{(-\infty, x) / x \in R\}$ $\mathcal{D} = \{\emptyset\} \cup \{(x, +\infty) / x \in R\}$.

8.1.22. Stav. Bitopološki prostor $(X, \mathcal{P}, \mathcal{Q})$ ima osobinu (P) ako i samo ako $P(x,y) \neq \emptyset \Longrightarrow P(y,x) \neq \emptyset \ (\forall x, y \in X)$, (NP).

Dokaz- Ako bitopološki prostor $(X, \mathcal{P}, \mathcal{Q})$ poseduje osobinu P pretpostavimo da ne važi osobina (NP) onda $\exists\ x, y \in X$ takve da je

$P(x,y) \neq \emptyset$ i $P(y,x) = \emptyset$ a to je suprotno pretpostavci (P) jer iz $P(y,x) = \emptyset \Rightarrow P(x,y) = \emptyset$ na osnovu (P), slično ako važi osobina (NP) mora biti ispunjena osobina (NP).

<u>8.1.23. Stav.</u> Ako je bitopološki prostor $(X,\mathcal{P},\mathcal{L})$ uzajamno R_0 i ako je jedan od prostora R_0 onda bitopološki prostor $(X,\mathcal{P},\mathcal{L})$ posedije osobinu (P).

<u>Dokaz.</u> Neka je $(X,\mathcal{P})$ R_0 prostor i neka je $P(y,x) \neq \emptyset$ tada $P(y,x) \supseteq \{x,y\}$ tj. $\mathcal{P}\mathrm{cl}\,\{y\} \cap \mathcal{L}\mathrm{cl}\,\{x\} \supseteq \{x,y\}$. Iz $x \in \mathcal{P}\mathrm{cl}\,\{y\}$ sledi $y \in \mathcal{P}\mathrm{cl}\,\{x\}$ jer je $(X,\mathcal{P})$ R_0 prostor odakle je

$$y \in \mathcal{P}\mathrm{cl}\,\{x\} \cap \mathcal{L}\mathrm{cl}\,\{y\} = P(x,y) \text{ odakle sledi da je}$$

$$P(x,y) \neq \emptyset \;\square$$

8.2. <u>O jednoj relaciji ekvivalencije u bitopološkim prostorima</u>

<u>8.2.1. Definicija.</u> Bitopološki prostor $(X,\mathcal{P},\mathcal{L})$ je slabo uzajamno T_1 ako i samo ako za svako $x, y \in X$, $x \neq y$, postoji $\mathcal{P}$ otvoren skup $U \ni x$ i $\mathcal{L}$ otvoren skup $V \ni y$, takvi da $y \notin U$ i $x \notin V$ (ili postoji $\mathcal{L}$ otvoren skup $U \ni x$ i $\mathcal{P}$ otvoren skup $V \ni y$ takvi da $y \notin U$ i $x \notin V$).

<u>8.2.2. Definicija.</u> Bitopološki prostor $(X,\mathcal{P},\mathcal{L})$ je slabo uzajamno T_2 ako i samo ako za svako $x, y \in X$, $x \neq y$ (postoji $\mathcal{P}$ otvoren skup $U \ni x$ i $\mathcal{L}$ otvoren skup $V \ni y$ takvi da je $U \cap V = \emptyset$) ili (postoji $\mathcal{P}$ otvoren skup $U \ni y$ i $\mathcal{L}$ otvoren skup $V \ni x$ takvi da je $U \cap V = \emptyset$).

<u>8.2.3. Definicija.</u> Neka je $(X,\mathcal{P},\mathcal{L})$ bitopološki prostor i R relacija ekvivalencije na skupu X a $(X/R,\mathcal{P}_R)$ i $(X/R,\mathcal{L}_R)$ odgovarajući količnik topološki prostori onda bitopološki prostor $(X/R,\mathcal{P}_R,\mathcal{L}_R)$ ćemo zvati bitopološki količnik prostor.

<u>8.2.4. Definicija.</u> Neka je $(X,\mathcal{P},\mathcal{L})$ bitopološki prostor. Za elemente $x, y \in X$, kažemo da su u relaciji R ako i samo ako je $P(x,y) \neq \emptyset$ i $P(y,x) \neq \emptyset$.

<u>8.2.5. Stav.</u> Ako je bitopološki prostor $(X,\mathcal{P},\mathcal{L})$ uzajamno R_0 onda je:

1. binarna relacija R relacija ekvivalencije skupa X

2. ako je a klasa ekvivalencije skupa X tada je za svako $x \in a$, $a \subseteq R(x)$ i $a \subseteq D(x)$

Dokaz. 1. Potrebno je dokazati jedino tranzitivnost jer su refleksivnost i simetričnost relacije R očigledni.

Neka je xRy, yRz to jest $P(x,y) \neq \emptyset$ i $P(y,x) \neq \emptyset$ i $P(y,z) \neq \emptyset$ i $P(z,y) \neq \emptyset$.

S obzirom na lemu 8.1.3. i gornju pretpostavku imamo da je $y \in R(x)$, $y \in D(x)$, $y \in R(z)$ i $y \in D(z)$ odakle je $P(x,z) \neq \emptyset$ i $P(z,x) \neq \emptyset$ t.j. xRz.

2. Pretpostavimo suprotno da postoji $y \in a$ i $y \notin R(x)$ a odavde na osnovu leme 8.1.3. $R(x,y) = \emptyset$ što je suprotno sa pretpostavkom da x i y pripadaju istoj klasi ekvivalencije. Analogno se dokazuje i drugi deo.

8.2.6. Posledica. Svaki $\mathcal{P}$ zatvoren skup G i $\mathcal{Q}$ zatvoren skup F su unije klasa ekvivalencije.

8.2.7. Teorema. Neka je bitopološki prostor $(X, \mathcal{P}, \mathcal{Q})$

1. uzajamno R_0,
2. uzajamno R_1,
3. uzajamno regularan,
4. uzajamno R_0 sa osobinom (P),
5. uzajamno R_1 sa osobinom (P),
6. uzajamno regularan sa osobinom (P)

a R relacija ekvivalencije (def. 8.2.3.) na skupu X tada je bitopološki količnik prostor $(X/R, \mathcal{P}_R, \mathcal{Q}_R)$.

1. slabo uzajamno T_1,
2. slabo uzajamno T_2,
3. uzajamno regularan,

4. uzajamno T_1,
5. uzajamno T_2,
6. uzajamno T_3.

<u>Dokaz.</u> 1. Neka su $a, b \in X/R$ i $a \neq b$, tada za proizvoljne $x \in a$ i $y \in b$ važi $(P(x,y) = \emptyset)$ ili $(P(y,x) = \emptyset)$. Odakle dobijamo:

$(CD(y) \supseteq a$ i $b \cap CD(y) = \emptyset)$ i

$(CR(x) \supseteq b$ i $a \cap CR(x) = \emptyset)$ ili

$(CR(y) \supseteq a$ i $b \cap CR(y) = \emptyset)$ i

$(CD(x) \supseteq b$ i $a \cap CD(x) = \emptyset)$

što zajedno sa 8.2.5. stavom daje da je $(X/R, \mathcal{P}_R, \mathcal{L}_R)$ slabo uzajamno T_1.

2. Neka su $a, b \in X/R$ i $a \neq b$. Za proizvoljno $x \in a$ i $y \in b$ važi $P(x,y) = \emptyset$ ili $P(y,x) = \emptyset$. S obzirom da je $(X, \mathcal{P}, \mathcal{L})$ uzajamno R_1 to imamo da: (postoji $\mathcal{L}$ otvoren skup $V \supseteq R(x)$ i postji $\mathcal{P}$ otvoren skup $U \supseteq D(y)$, takvi da je $U \cap V = \emptyset$) ili (postoji $\mathcal{L}$ otvoren skup $V \supseteq R(y)$ i postoji $\mathcal{P}$ otvoren skup $U \supseteq D(x)$ takvi da je $U \cap V = \emptyset$, što zajedno sa 8.2.5. stavom daje da je (X) R, $\mathcal{P}_R, \mathcal{L}_R)$ slabo uzajamno T_2.

3. Neka je $a \in X/R$ a $(F/R, \mathcal{L}_R)$ zatvoren skup takav da $a \notin F/R$. Jasno je $a \cap F = \emptyset$ i pri tom je za proizvoljno $x \in a$, $R(x) \cap F = \emptyset$ jer u suprotnom pretpostavljamo da je $y \in R(x)$ i $y \in F$ pa je $P(x,y) \neq \emptyset$ tj. na osnovu leme 8.1.3. $x \in D(y) \subseteq F$ tj. $x \in F$ što je suprotno sa pretpostavkom $a \cap F = \emptyset$. Na osnovu definicije $\mathcal{P}$ regularnog u odnosu na $\mathcal{L}$ bitopološkog prostora postoji $\mathcal{P}$ otvoren skup $U \supseteq F$ i $\mathcal{L}$ otvoren skup $V \supseteq R(x) \supseteq a$, takvi da je $U \cap F = \emptyset$ a ovo s obzirom na stav. 8.2.5. daje da je $(X/R, \mathcal{P}_R, \mathcal{L}_R)$ $\mathcal{P}$ regularan u odnosu na $\mathcal{L}$. Analogno se pokazuje i $\mathcal{L}\mathcal{P}$ regularnost.

4. $a, b \in X/R$ i $a \neq b$ tada za proizvoljno $x \in a$ i $y \in b$ važi da je $P(x,y) = \emptyset$ i $P(y,x) = \emptyset$ odakle zaključujemo da je $(X/R, \mathcal{P}_R, \mathcal{Q}_R)$ uzajamno T_1.

5. Neka su [illegible] R, $a \neq b$. Neka je $x \in a$ i $y \in b$ pri tom je $a \subseteq R(x)$ i $b \subseteq D(y)$ pa postoje, kako je prostor $(X, \mathcal{P}, \mathcal{Q})$ iz R_1 $\mathcal{Q}$ otvoren skup U i $\mathcal{P}$ otvoren skup V $\therefore$ $R(x) \subseteq U$, $D(y) \subseteq V$ i $U \cap V = \emptyset$. Skup U/R je otvoren u topologiji $\mathcal{P}_R$ i skup V/R je otvoren u topologiji $\mathcal{Q}_R$ pa je $U/R \cap V/R = \emptyset$. Analogno se pokazuje drugi deo.

6. Sledi iz (3) i (4).

6.3. PRo - Bitopološke algebre

6.3.1. Def. Algebra (G, Ω) zajedno sa topologijama $\mathcal{T}_1$ i $\mathcal{T}_2$ se naziva bitopološkom algebrom ako i samo ako je

(1) $(G, \Omega \setminus \Omega_1, \mathcal{T}_i)$ topološka algebra $i = 1, 2$.

(2) $\forall \omega \in \Omega_1$ je neprekidno preslikavanje od $(G, \mathcal{T}_1)$ u $(G, \mathcal{T}_2)$ i obrnuto.

[illegible] u slučaju da je $\mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_2$ pojam bitopološke algebre se poklapa [illegible] pojmom topološke algebre.

U slučaju da je $\Omega = \{\cdot, {}^{-1}, e\}$ odnosno algebra (G, Ω) je grupa tada se pojam bitopološke algebre poklapa sa pojmom bitopološke grupe (Birsan [16]). Za bitopološke grupe Birsan je pokazao niz [illegible] [illegible] osobina koje su slične osobinama topoloških grupa.

Slične osobine koje važe za topološke algebre mogu se prikazati i [illegible] bitopološke algebre npr:

6.3.2. Stav. Ako je $(G, \Omega, \mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2)$ bitopološka algebra a (Q, Ω) podalgebra algebre (G, Ω) onda je i $(\overline{Q}^{\mathcal{T}_1 \mathcal{T}_2}, \Omega)$ podalgebra algebre (G, Ω).

Dokaz. Treba dokazati da se proizvoljno $\omega \in \Omega$ i proizvoljne $a_1, \dots, a_n \in \overline{Q}^{\mathcal{T}_1 \mathcal{T}_2}$ važi da je $\omega(a_1, \dots, a_n) \in \overline{Q}^{\mathcal{T}_1 \mathcal{T}_2}$. Pretpostavimo da $\omega(a_1, \dots, a_n) \notin \overline{Q}^{\mathcal{T}_1 \mathcal{T}_2}$ tada $\omega(a_1, \dots, a_n) \in C\overline{Q}^{\mathcal{T}_1 \mathcal{T}_2}$ a pri tom je

$c\overline{Q}^{\gamma_1\gamma_2} \subseteq c\overline{Q}^{\gamma_1} \subseteq$ i $c\overline{Q}^{\gamma_1\gamma_2} \subseteq c\overline{Q}^{\gamma_2}$ pa moraju postojati $U, \ldots, U_n \in \mathcal{T}_1$: $\omega(U_1(a_1) \ldots U_2(a_n) \subseteq c\overline{Q}^{\gamma_1}$. Iz pretpostavke $a_1, \ldots, a_n \in \overline{Q}^{\gamma_1} \cap \overline{Q}^{\gamma_2}$ sledi da postoje $a_1' \in U_1', \ldots, a_n' \in U_n'$ takvi da $a_i' \in Q$ a odavde sledi da $\omega(a_1', \ldots, a_n') \notin c\overline{Q}^{\gamma_1}$ zbog toga što je (Q, Ω) podalgebra $\omega(a_1', \ldots, a_n') \in Q$, a što je nemoguće. Analogno se pokazuje da je $\omega(a_1, \ldots, a_n) \in \overline{Q}^{\gamma_2}$.

8.3.3. Def. Neka je $(X, \Omega, \mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2)$ bitopološka algebra. Kongruenciju $\mathcal{R}$ algebre (X, Ω) zovemo bitopološkom ako za $\forall O \in \mathcal{T}_i$ $(i=1,2)$ $x \in O \Rightarrow \mathcal{R}(x) \subseteq O$.

8.3.4. Stav. $xRy \iff \forall^{\alpha}$otv. U, $x \in U \Leftrightarrow y \in U$ i $\forall^{\beta}$otv. V, $x \in V \Leftrightarrow y \in V$

Dokaz: Pretpostavimo $P(x,y) \neq \emptyset$ i $P(y,x) \neq \emptyset$
Neka je U proizvoljan otvoren skup i neka je $x \in U$ tada α $cl\{x\} \subseteq U$ a iz $P(y,x) \neq \emptyset$ sledi na osnovu leme 8.1.3.

$$\{x,y\} \subseteq {}^{\beta}cl\{y\} \cap {}^{\alpha}cl\{x\} \subseteq {}^{\alpha}cl\{x\} \quad \text{odnosno}$$

$$y \in U$$

$\Longleftarrow$: Pretpostavimo da x nije u relaciji R sa y t.j. da je na primer $P(x,y) = \emptyset$. Odavde je ${}^{\beta}cl\{x\} \cap {}^{\alpha}cl\{y\} = \emptyset$ odakle sledi da

$$C\ {}^{\beta}cl\{x\} = U \text{ je } {}^{\beta}\text{otvoren skup, } y \in U \text{ a}$$

$$x \notin U.$$

8.3.5. Teorema. Neka je $(X, \Omega, \mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2)$ uzajamno Ro bitopološka algebra tada je relacija ekvivalencije R (def. 8.2.3.) bitopološka kongruencija.

Dokaz. Dokažimo da je ova relacija ekvivalencije kongruencija. Neka je $a_i R a_i'$ $i=1, \ldots, n$. tj. neka je za svako $O \in \mathcal{T}_1\ \mathcal{T}_2$ $a_i \in O \Leftrightarrow a_i' \in O$.
Neka je $\omega(a_1^n) \in O$ onda je $O \in \mathcal{T}_j$, $j=1,2$, tada $\exists\, O_1(a_1), \ldots, O(a_n) \in \mathcal{T}_j$ takvi da je $\omega(O_1, \ldots, O_n) \subseteq O$.
Kako i $a_i' \in O_i$ to je i $\omega(a_1', \ldots, a_n') \in O$ odnosno sledi da je $\omega(a_1') \; R \; \omega(a_1^n)$,

pa je ova kongruencija bitopološka kongruencija.

8.3.6. Posledica. Ako je $(X,\Omega,\mathcal{T}_1,\mathcal{T}_2)$

(a) uzajamno R_0,
(b) uzajamno R_1,
(c) uzajamno R_0 sa osobinom (P)
(d) uzajamno R_1 sa osobinom (P)
(e) uzajamno regularan sa osobinom (P)

bitopološka algebra a R bitopološka kongruencija iz prethodne teoreme tada je $(X/R,\Omega,\mathcal{T}_{1R},\mathcal{T}_{2R})$

(a) slabo uzajamno T_1
(b) slabo uzajamno T_2
(c) uzajamno T_1
(d) uzajamno T_2
(e) uzajamno T_3

bitopološka algebra.

8.3.7. Posledica. Ako je $(X, *, \mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2)$ (bitopološka grupa sa osobinom (P)) tada je $(X/R, *, \mathcal{T}_{1R}, \mathcal{T}_{2R})$ uzajamno T_3 bitopološki prostor.

Napomenimo da sve bitopološke grupe ne zadovoljavaju osobinu (P) kao što pokazuje sledeći primer:

8.3.8. Primer. [16] $(R, +, \mathcal{Z}, \mathcal{R})$ je bitopološka grupa u kojoj nije zadovoljena osobina (P).

9. TOPOLOŠKI UREDJENI ALGEBARSKI SISTEMI

9.1. Osnovni pojmovi i definicije

9.1.1. Def. [20] n-grupa G( ) koja je topološki prostor naziva se polutopološkom n-grupom ako je operacija ( ) neprekidna po svim promenljivima istovremeno i ako su translacije n-grupe homeomorfizmi prostora.
Napomenimo da ova definicija važi i za n = 2.

9.1.2. Def. [59] Grupu (G,.) koja je istovremeno i uredjen skup nazivamo uredjenom grupom ako za svako a,b,c∈G iz $a \leq b$ sledi $ac \leq bc$ i $ca \leq cb$.

9.1.3. Def. [19] n-grupu G( ) koja je istovremeno i uredjen prostor zovemo uredjenom, n-grupom ako iz $a \leq b$ sledi

$$(x_1^{i-1}\ a\ x_{i+1}^{n}) \leq (x_1^{i-1}\ b\ x_{i+1}^{n})$$

za svako $x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n \in G$ i svako $1 \leq i \leq n$.

9.1.4. Def. [83] Neka je $(X, \leq)$ delimično uredjen skup na kome je data topologija $\mathcal{T}$. Topologija $\mathcal{T}$ je S-saglasna sa uredjenjem ako je $\mathcal{T}$ T_1-topologija i ako za svaki par tačaka $a, b \in X$ takvih da je $a < b$, postoje okoline O(a) i O(b) takve da su zadovoljeni uslovi:

$$\text{za svako } x \in O(a) \quad x < b \qquad \text{ili} \quad x \parallel b$$

$$\text{za svako } y \in O(b) \quad a < y \qquad \text{ili} \quad y \parallel a$$

9.1.5. Def. [83] T_1-topologija $\mathcal{T}$ na delimično uredjenom skupu $(X, \leq)$ je strogo S-saglasna sa uredjenjem ako za svako $a, b \in X$, $a < b$ postoje okoline O(a) i O(b) takve da je za svako $x \in O(a)$ i svako $y \in O(b)$ $x < y$ ili $x \parallel y$.

Pre nego što damo još jednu definiciju saglasnosti topologije i uredjenja uvedimo pojam uredjajno udaljenih skupova: za podskupove $A, B \subseteq X$ delimično uredjenog skupa $(X, \leq)$ kažemo da su uredjajno udaljeni ako su ispunjei uslovi:

1. $A \cap B = \emptyset$

2. $(\forall x \in A, \forall y \in B$ važi $x \leq y \vee x \parallel y)$

ili $\qquad (\forall x \in A, \forall y \in B$ važi $y \leq x \vee x \parallel y)$

2.1.6. Def.[1] Neka je $(X, \mathcal{T}, \leq)$ prostor na kome su dati topologija $\mathcal{T}$ i uredjenje $\leq$. Topologija $\mathcal{T}$ je A-saglasna sa uredjenjem $\leq$ ako za svake dve tačke $a, b \in X$ i svaku okolinu $U(a)$ takvu da $b \notin U(a)$ postoji okolina $U^*(a) \subseteq U(a)$ koja je uredjajno udaljena od tačke b.

Pre nego što damo akciome separacije uredjenih prostora dajmo sledeću definiciju:

2.1.7. Def.[1] Disjunktni skupovi $A, B \subseteq X$ uredjenog prostora $(X, \mathcal{T}, \leq)$ su uredjajno razdvojeni skupovima V i W ako su $V \supseteq A$ i $W \supseteq B$ otvoreni skupovi i uredjajno udaljeni.

2.1.8. Def.[1] Neka je dat topološki prostor $(X, \mathcal{T})$ sa uredjenjem $\leq$: (a) $(X, \mathcal{T}, \leq)$ je T_0 uredjen ako se za bilo koji par tačaka $a, b \in X$ može naći okolina za bar jednu tačku tako da su ta okolina i druga tačka uredjajno udaljeni.

(b) $(X, \mathcal{T}, \leq)$ je T_1 uredjen ako se za bilo koji par tačaka $a, b \in X$ mogu naći okoline $V(a)$ i $W(b)$ takve da su $V(a)$ i b i $W(b)$ i a uredjajno udaljeni.

(c) $(X, \mathcal{T}, \leq)$ je T_2 uredjen ako se bilo koji par različitih tačaka može uredjajno razdvojiti.

(d) $(X, \mathcal{T}, \leq)$ je T_3 (T_4) uredjen ako je $(X, \mathcal{T})$ topološki T_3 (T_4) prostor i ako se proizvoljni uredjajno udaljen zatvoren skup i tačka (dva proizvoljno uredjajno udaljena zatvorena skupa) mogu uredjajno razdvojiti.

2.2. Saglasnost topologije i uredjenja uredjenih algebarskih sistema

2.2.1. Teorema. U delimično uredjenoj T_1 - polutopološkoj grupi G uredjenje je S-saglasno sa topologijom ako i samo ako za svako

$a,b \in G$, $a \prec b$, postoji $U(e)$ takva da je za svako $n \in U(e)$

$$b^{-1}a<n<a^{-1}b \quad \text{ili} \quad n \| a^{-1}b,\ b^{-1}a \quad \text{ili} \quad (*)$$

$$b^{-1}a<n,\ a^{-1}b \| n \quad \text{ili} \quad n<a^{-1}b,\ b^{-1}a \| n$$

Dokaz. Neka je $a \prec b$, a uredjenje saglasno sa topologijom, tada postoje $U_1(a)$ i $U_2(b)$ takvi da je

$$(*_1) \quad (a \prec y \quad \text{ili} \quad a \| y \text{ za svako } y \in U_2)$$

i

$$(*_2) \quad (x \prec b \quad \text{ili} \quad x \| b \quad \text{za svako } x \in U_1)$$

S obzirom da je grupa po pretpostavci polutopološka postoje $U_1(e)$ i $U_2(e)$ takve da je

$$U_1(a) = a\, U_1(e) \text{ i } U_2(b) = b\, U_2(e)$$

Neka je $U(e) = U_1(e) \cap U_2(e)$ i iz relacije $(*_1)$ i $(*_2)$ neposredno sledi da za svako $n \in U$ važi $(*)$.

$\Leftarrow$: Pretpostavimo da je $a \prec b$ i $U(e)$ okolina jedinice takva da je $b^{-1}a \prec n \prec a^{-1}b$ ili $n \| a^{-1}b,\ b^{-1}a$ ili $b^{-1}a<n,\ a^{-1}b \| n$ ili $n \prec a^{-1}b,\ b^{-1}a \| n$ za svako $n \in U(e)$ tada okoline aU i bU očigledno zadovoljavaju definiciju S - saglasnosti. $\square$

9.2.2. Posledica. U T_1 polutopološkom telu G uredjenje je S - saglasno sa topologijom ako i samo ako za svako $a,b \in G$, $a \prec b$ važi:

1. Postoji okolina $U(o)$ takva da za svako $n \in U(o)$

$$a - b \prec n \prec b - a$$

ili $\quad a - b<n,\ n \| b - a$

ili $\quad n<b - a,\ n \| a - b$

ili $\quad n \| a - b,\ n \| b - a \quad$ ili

2. Postoji $V(1)$ takva da za svako $v \in V(1)$

$$b^{-1}a<n<a^{-1}b$$

ili $\quad b^{-1}a<n,\ n \| a^{-1}b$

ili $\qquad n < a^{-1}b, \; n \parallel b^{-1}a$

ili $\qquad n \parallel a^{-1}b, \; n \parallel b^{-1}a.$

Kao neposredna posledica prethodne teoreme može se iskazati i stav o saglasnosti topologije i uredjene delimično uredjenog topološkog tela.

Na sličan način (kao T. 9.2.1.) može se dokazati i sledeća teorema:

9.2.3. Teorema. U delimično uredjenoj polutopološkoj grupi uredjenje je A - saglasno sa topologijom i samo ako za svako $a, b \in G$, $a \neq b$ i proizvoljno $U(e)$ takvo da a $U(e)$ ppostoji $U'(e) \subseteq U(e)$ takva da su $a^{-1}b$ i $U'(e)$ uredjajno ljeni i za proizvoljno $V(e)$ takvo da $b^{-1}a$ $V(e)$ postoji $V'(e) \subseteq V(e)$ takva da su $b^{-1}a$ i $V'(e)$ uredjajno udaljeni.

Analogno kao u prethodnom slučaju može se iskazati i stav o A - saglasnosti topologije i uredjenja polutopoloških uredjenih tela.

Pored ovih potrebnih i dovoljnih stavova mogu se pokazati i sledeći manje opšti stavovi:

9.2.4. Stav. Ako jedinica delimično uredjenje T_1 - polutopološke grupe G ima fundamentalni sistem konveksnih okolina onda je uredjenje A - saglasno sa topologijom.

Dokaz. Neka su $a, b \in G$ takvi da je $a \neq b$ tada možemo razlikovati sledeća dva slučaja $a < b$ $(b < a)$ i $a \parallel b$. Neka je $a < b$ i neka $b \notin U(a)$. Neka je $U^*(e)$ konveksna okolina jedinice takva da je $U^* \subseteq U(e) = a^{-1}U(a)$.
Tada je $U^*(a) = aU^* \subseteq U(a)$ konveksna okolina tačke a i tačka b i $U^*(a)$ su uredjajno udaljene: Zaista pretpostavimo da to nije tačno tj. neka je $x \in U^*(a)$ takva da je $b < x$, no tada zbog $a < b < x$ sledi da $b \in U^*(a)$ a što je kontradiktorno sa činjenicom $b \notin U(a) \supseteq U^*(a)$.
Analogno se dokazuje egzistencija uredjajno udaljene okoline tačke b u odnosu na tačku a.

Neka je $a \parallel b$ i neka $U(a) \not\ni b$. Neka je $U^*(e)$ konveksna okolina jedinice takva da je $U^*(e) \subseteq a^{-1}U(a)$. Dokažimo da su $U^*(a) = aU^*(e)$ i b uredjajno udaljeni. Pretpostavimo da nisu tj. neka postoje

$u_1, u_2 \in U^*(a)$ takvi da je $u_1 < b$ i $u_2 > b$, no tada imamo kontradikciju: činjenica da je $U^*(a)$ konveksna okolina tačke a i da $u_1, u_2 \in U^*(a)$ i $u_1 < b < u_2$ sa činjenicom $b \notin U(a) \supseteq U^*(a)$. Sa ovim je dokaz stava kompletiran.

Neposredno iz prethodnog stava i činjenice da je S - saglasnost topologije i uredjenja u uredjenom T_1 - topološkom prostoru posledica A - saglasnosti topologije i uredjenja sledi:

9.2.5. Posledica. Ako jedinica delimično uredjene T_1 - polutopološke grupe ima fundamentalni sistem konveksnih okolina onda je uredjenje S - saglasno sa topologijom.

9.2.6. Stav. Ako jedinica delimično uredjene T_2 - polutopološke grupe G ima fundamentalni sistem Σ konvesknih okolina takvih da za proizvoljno $a, b \in G$, $a < b$, postoji $U \in \Sigma$ takvo da za svako $n \in U$ važi $b^{-1}a < n$ ili $n < a^{-1}b$ tada se S - saglasnost i stroga S - saglasnost poklapaju.

Dokaz. Neka je $U(a) \cap V(b) = \emptyset$, $U(e) = a^{-1}U(a)$ $V(e) = b^{-1}V(e)$. Neka je $U^*(e) \subseteq U(e) \cap V(e)$ konveksna okolina jedinice koja zadovoljava uslov da je za svako $n \in U^*$, $b^{-1}a < n$ ili $n < a^{-1}b$, dokažimo da $U'(a) = aU^*(e)$ i $V'(b) = bV^*(e)$ zadovoljavaju uslove strogo S - saglasnosti. Okoline $U'(a)$ i $V'(a)$ su disjunktne. Pretpostavimo da postoje $x \in U'(a)$ i $y \in V'(b)$ takvi da je $y < x$. No, s obzirom na pretpostavku teoreme mora biti da je $y > a$ ili $x < b$. Neka je $y > a$ tada je zbog konveksnosti skupa $U'(a)$ i relacije $a < y < x$, $y \in U'(a)$ a to je nemoguće jer $y \in V'(a)$.

9.2.7. Stav. U linearno uredjenoj T_1 - polutopološkoj grupi uredjenje je S - saglasno sa topologijom ako i samo ako za svako $p \in P$ postoji $U(p) \subseteq P$ koje ne sadrži jedinicu.

Dokaz. $\Longrightarrow$: Očigledno

$\Longleftarrow$: Neka je $a < b$. Tada je $a^{-1}b \in P$ i po pretpostavci postoji okolina $U(a^{-1}b) \subseteq P$ takva da $e \notin U(a^{-1}b)$ tj. da je za svako $n \in U$, $n > e$. Pri tom je lako videti da je $U^* = a \cdot U(a^{-1}b)$ okolina tačke b takva da je za svako $y \in U^*$, $a < y$. Zaista ako je $a > y$ za neko $y \in U^*$ tj. $y = a \cdot n$ gde je $n \in U(a^{-1}b)$ sledi da je $a > an$ tj.

$a > n$, što je suprotno pretpostavci stava. Da dokažemo da postoji okolina $V(a)$ tačke a takva da je za svako $x \in V$, $x < b$, postupamo analogno, imajući u vidu da je uslovu "za svako $p \in P$ postoji $U(p) \subseteq P$ koje ne sadrži jedinicu" ekvivalentan uslov "za svako $n \in N$ postoji $U(n) \subseteq N$ koje ne sadrži jedinicu.

Na analogan način kao i u prethodnom stavu može se dokazati

<u>9.2.8. Stav.</u> Ako u delimično uredjenoj T_1 polutopološkoj grupi za svako $p \in P$, postoji $U(p) \subseteq P$ takvo da $e \notin U(p)$ onda je uredjenje S – saglasno sa topologijom.

Sledeći rezultati odnose se na saglasnost topologije i uredjenja topoloških uredjenih n-grupa.

<u>9.2.9. Teorema.</u> U delimično uredjenoj T_1 polutopološkoj n-grupi G, uredjenje je S – saglasno sa topologijom ako i samo ako za svako $a, b \in G$ i $a < b$ i proizvoljno fiksno $p \in G$ postoji $U(p)$ takvo da je za svako $n \in U(p)$ ispunjeno:

$$\left.\begin{array}{l} (\bar{b}\ \overset{n-3}{b}\ p\ a) < n < (\bar{a}\ \overset{n-3}{a}\ p\ b) \quad \text{ili} \\ (\bar{b}\ \overset{n-3}{b}\ p\ a) < n,\ n \parallel (\bar{a}\ \overset{n-3}{a}\ p\ b) \quad \text{ili} \\ n \parallel (\bar{b}\ \overset{n-3}{b}\ p\ a),\ n < (\bar{a}\ \overset{n-3}{a}\ p\ b) \quad \text{ili} \\ n \parallel (\bar{b}\ \overset{n-3}{b}\ p\ a),\ n \parallel (\bar{a}\ \overset{n-3}{a}\ p\ b) \end{array}\right\} \qquad (*_n)$$

<u>Dokaz.</u> $\Longrightarrow$: U delimično uredjenoj T_1 - topološkoj n-grupi S - saglasnost topologije i uredjenja za proizvoljne $a, b \in G$, $a < b$ povlači postojanje otvorenih skupova $U_1(a)$ i $U_2(b)$ takvih da je

$$(a < y \ \text{ ili } \ a \parallel y \ \text{ za svako } y \in U_2) \qquad (1)$$

$$(x < b \ \text{ ili } \ x \parallel b \ \text{ za svako } x \in U_1) \qquad (2)$$

odnosno postojanje $U_1(p)$ i $U_2(p)$ (za proizvoljno $p \in G$) takva da je

$$U_2(b) = (b\ \bar{p}\ \overset{n-3}{p}\ U_2(p))$$

$$U_1(a) = (a\,\bar{p}\,\overset{n-3}{p}\,U_1\,(p))$$

Neka je $U(p) = U_1(p) \cap U_2(p)$ tada za proizvoljno $n \in U(p)$ važi da je

$$b\,\bar{p}\,\overset{n-3}{p}\,a) \text{ ili } a \parallel (b\,\bar{p}\,\overset{n-3}{p}\,n)$$

odnosno $$(a\,\bar{p}\,\overset{n-3}{p}\,n) < b \text{ ili } b \parallel (a\,\bar{p}\,\overset{n-3}{p}\,n)$$

odakle sledi da je

$$(p\,\bar{b}\,\overset{n-3}{p}\,a) < (p\,\bar{b}\,\overset{n-3}{d}\,(b\,\bar{p}\,\overset{n-3}{p}\,n)) = n$$

ili $$(p\,\bar{b}\,\overset{n-3}{b}\,a) \parallel n$$

[illegible] $$n < (\bar{a}\,\overset{n-3}{a}\,p\,b) \text{ ili } n \parallel (\bar{a}\,\overset{n-3}{a}\,p\,b)$$

odakle neposredno sledi $(\ast_n)$.

$\Longleftarrow$: Ako su ispunjeni uslovi $(\ast_n)$ onda neposredno sledi da su $(b\,\bar{p}\,\overset{n-3}{p}\,U(p))$ i $(a\,\bar{p}\,\overset{n-3}{p}\,U(p))$ tražene okoline tačaka b odnosno a $(a < b)$ koje ispunjavaju uslove S - saglasnosti.

Prethodna teorema se može shvatiti kao poopštenje odgovarajuće teoreme za binarne grupe pa se na isti način može iskazati i dokazati odgovarajuća teorema za A - saglasnost:

2.2.10. Teorema. U delimično uredjenoj polutopološkoj n-grupi uredjenje je A - saglasno sa topologijom ako i samo ako za svako $a, b \in G$, $a \neq b$ i proizvoljno fiksirano $p \in G$ i proizvoljne $U(p)$, $V(p)$ takve da je $(p\,\bar{b}\,\overset{n-3}{b}\,a) \notin U(p)$, $(p\,\bar{a}\,\overset{n-3}{a}\,b) \notin V(p)$ postoje

$$U'(p) \subseteq U(p) \quad \text{i } V'(p) \subseteq V(p)$$

takvi da su $(p\,\bar{b}\,\overset{n-3}{b}\,a)$ i $U'(p)$

odnosno $(p\,\bar{a}\,\overset{n-3}{a}\,b)$ i $V'(p)$ uredjajno udaljeni.

9.3. O uredjajnim aksiomama separacije topoloških uredjenih algebarskih sistema

9.3.1. Stav. Polutopološka, uredjena grupa G je T_1 - uredjen prostor ako i samo ako za proizvoljnu tačku $a \in G$ postoji okolina jedinice V(e) takva da su a i V(e) uredjajno udaljeni.

Pre dokaza stava dokažimo sledeću

9.3.2. Lema. Ako su tačka a i skup V uredjajno udaljeni u delimično uredjenoj polutopološkoj grupi onda su i tačka xa (ax) i skup xV (Vx) uredjajno udaljeni.

Dokaz. Pretpostavimo da tvrdjenje leme nije tačno tj. pretpostavimo da postoje $v_1, v_2 \in V$ takvi da je $xv_1 < xa < xv_2$ odakle bi sledilo $v_1 < a < v_2$ a isto je nemoguće jer su a i V uredjajno udaljeni.

Dokaz stava. Neka je $a \neq b$. Dokažimo da postoje otvoreni skupovi V(a) i U(b) takvi da su a i U(b) uredjajno udaljeni i b i V(a) uredjajno udaljeni. Po pretpostavci stava postoji otvoren skup U(e) takav da su $a^{-1}b$ i V(e) uredjajno udaljeni i V(e) takav da su $b^{-1}a$ i V(e) uredjajno udaljeni.

Prema prethodnoj lemi b i a U(e) = U(a) su uredjajno udaljeni i a i b V(e) = V(b) su uredjajno udaljeni.
$\Longrightarrow$: očigledno.

Dobro je poznata činjenica da je T_0 topološka grupa ujedno i T_1, T_2, T_3 - topološka grupa. Za topološke uredjene grupe mogu se dokazati sledeći stavovi:

9.3.3. Teorema. Topološka uredjena grupa je T_1 uredjen prostor ako i samo ako je T_0 uredjen prostor.

Pre dokaza teoreme dokažimo sledeću lemu:

9.3.4. Lema. U uredjenoj grupi uredjajna udaljenost tačke a od skupa V povlači uredjajnu udaljenost tačke a^{-1} od skupa V^{-1}.

Dokaz. Pretpostavimo da za svako $x \in V$ važi da je $x \not< a$ ili [illegible] (analogno u obrnutom slučaju), tada će zbog zakona uredjene grupe važiti da je $a^{-1} < x^{-1}$ ili $a^{-1} \| x^{-1}$ za proizvoljno $x \in V$ odnosno $x^{-1} \in V^{-1}$ pa su a^{-1} i V^{-1} uredjajno udaljeni.

Dokaz teoreme. Kako je po pretpostavci topološka uredjena grupa T_0 uredjen prostor to će za proizvoljno $a \neq e$ postojati okolina $V(e)$ takva da su a i $V(e)$ uredjajno udaljeni ili će postojati $V(a)$ takva da su $V(a)$ i e uredjajno udaljeni. Prema 9.3.1. da bi topološka uredjena grupa bila T_1 uredjen prostor treba da bude obezbedjena egzistencija okoline jedinice za proizvoljnu tačku $a \in G$ tako da su ta okolina i tačka uredjajno udaljeni. Po našoj pretpostavci za proizvoljnu tačku takva okolina postoji ili postoji okolina te tačke koja je uredjajno udaljena sa jedinicom. Dokažimo da i u drugom slučaju postoji okolina koja zadovoljava uslove iz 9.3.1.. Prema 9.3.2. a^{-1} i $V(e) = a^{-1}V(a)$ su uredjajno udaljeni i pri tom je $V(e)$ okolina jedinice a prema 9.3.4. a i $V^{-1}(e)$ su uredjajno udaljeni, pri tome je (jer je u pitanju topološka grupa) $V^{-1}(e)$ okolina tačke e, pa je prema 9.3.1. prostor T_1 uredjen. $\square$

Poznato je da postoje T_1 uredjeni prostori ujedno i T_2 prostori a koji nisu istovremeno T_2 uredjeni prostori. Za topološke uredjene grupe važi sledeći

9.3.5. Stav. Topološka uredjena grupa G je T_2 uredjen prostor ako je T_0 uredjen prostor i ako postoji fundamentalni sistem konveksnih okolina jedinice.

Dokaz. Neka su $a, b \in G$, $a \neq b$ tada prema 9.3.3. postoje okoline $U_1(a)$, $V_1(b)$ takve da su $U_1(a)$ i b odnosno $V_1(b)$ i a uredjajno udaljeni. Kako je dati topološki prostor Hauzdorfov to postoje $U'(a)$ i $V'(b)$ takvi da je $U'(a) \cap V'(b) = \emptyset$. Označimo sa $U_2 = U_1 \cap U'$ i $V_2 = V_1 \cap V'$. S obzirom na pretpostavku teoreme o postojanju fundamentalnog sistema konveksnih okolina jedinice postoje konveksne okoline U i V tačaka a odnosno b takve da je $U(a) \subseteq U_2$ i $V(b) \subseteq V_2$.

Dokažimo da su U i V uredjajno razdvojeni skupovi: pretpostavimo da to nije tačno tj. ili neka postoje $x \in U$ i $y_1, y_2 \in V$ takvi da je

$$x < y_1 \quad \text{i} \quad y_2 < x$$

ili neka postoje x_1, $x_2 \in U$ i $y \in V$ takvi da je

$$y < x_1 \quad \text{i} \quad x_2 < y$$

Ako bi to bilo tačno to bi značilo da u prvom slučaju $x \in V$ a u drugom $y \in U$ zbog konveksnosti skupova U i V a to je nemoguće jer su oni disjunktni. $\square$

L I T E R A T U R A

[1.] Adnadjević Dušan., Saglasnost topologije sa uredjenjem, Mat. vesn. 7 (22) (1970) 109 - 112.

[2.] Adnadjević Dušan., Saglasnost topologije i uredjenja, Mat. vesn. 8 (23) (1971) sv. 1. 83 - 88.

[3.] Adnadjević Dušan., Topology and order, Docl. Ak. N. SSSR (1972) T206, N6. 1273 - 1276.

[4.] Adnadjević Dušan., Ordered topological spaces as bitopological spaces, Gl. mat. V10 (30) (1975), 337 - 340.

[5.] Adnadjević Dušan., Topologija (skripta) PMF Beograd (1970).

[6.] Аднадйевич Д ., Аксиомы отделимости и сходимость в битопологических упорядочених пространствах, Сообщения Ак. Н. Груз. ССР. 94. Н.2. /1979/ 285 - 288.

[7.] Александров П.С. Введение в теорию множестви общую топологию, "Наука" Москва 1977.

[8.] Александров П.С. Пасынков В.А., Введение в теорию размерности, "Наука" Москва 1973.

[9.] Александров П.С. Урысон, П.С., Мемуар о компактных топологических пространствих, "Наука" Москва 1971.

[10.] Белоусов В.Д. Основы теории квазигрупп и луп, "Наука" Москва 1967.

[11.] Белоусов В.Д. н-арные квазигруппы; "Штиинца" Кишинев 1972.

[12.] Белоусов В.Д. Ассоциативные в целом системы квазигрупп. Мат.сб. 55 / 97/ Н.2. /1961/, 221 - 236.

[13.] Belousov V.D. Balanced identities in algebras of quasigroups, University of Waterloo, 1969.

[14.] Белоусов В.Д., Сандик, М.Д., н-арные квазигруппы и лупы, Сиб. мат. журн., т 7 /1965/ Н.1. 35 - 54.

[15.] Birkhoff G., Lattice theory, New York. 1967.

[16.] Birsan T., Contribution a l'etude des groups bitopologiques, An.Sti, Univ. "Al. I Cuza" Sekt, I a mat. (N.S.) 19 (1973) 2, 297 - 310.

[17.] Бурбаки Н., Общая топология, "Наука" Москва 1968.

[18.] Celakoski N., Prilog kon teorijata na algebarskite strukturi so asocijativni operacii, doktorska disertacija, Skopje 1977.

[19.] Crombez G., aus Gent., On partially ordered n-groups, Abh. math. Sem. Univ. Hamburg vol 38 (1972) 141 - 146.
[20.] Crombez G., Six G., On topological n-groups Abh. math. sem. Univ. Hamburg 41 (1974) 115 - 124.
[21.] Čupona G., Za finitarnite operacii, God. zb. PMF Univ. vo Skopje kn. 12 (1959) N.1. 7 - 49.
[22.] Čupona G., Za socijativnite kongruencii, Bilt. Društv. mat. fiz. SRM kn. XIII (1962) 5 - 12.
[23.] Čupona G., Polugrupi generirani od asociativi, God. zb. PMF Univ. Skopje, A. kn. 15 (1964) 5 - 25.
[24.] Čupona G., Za [m,n]-prstenite, Bilt. Društ. mat. fiz. S.R. Makedonija kn. XVI (1965) 5 - 10.
[25.] Čupona G., On some primitive classes of universal algebras, Mat. vesn. 3 (18), sv. 2, (1966) 105 - 108.
[26.] Čupona G., Correctin of statment od the paper "On some primitive slasses of universal algebras" Mat. vesn. n.s, knji. 6 (21) sv. 3 (1969) 354.
[27.] Čupona G., Za asocijativite, Prilozi Il odd. za prir. mat. nauki MANU, Skopje 1965, 9 - 20.
[28.] Čupona G., Podalgebri na polugrupi, Bilt, Društ. mat. fiz. SRM k. XIX (1968) 9 - 16.
[29.] Čupona G., Asocijativi so kretenje, God. zb. PMF Univ. Skopje k. 19 (1969) 5 - 14.
[30.] Čupona G., Za teoremata na Kon-Rebane, God. zb. PMF Univ. Skopje k. 20 (1970) sekc. A 5 - 14.
[31.] Čupona G., Za algebrite na smestuvanja, God. zb. PMF Univ. Skopje, k. 20 (1970) sekc A 15 - 24.
[32.] Čupona G., Za kvaziprstenite, Bilt. na DMF, SRM, kn. (1968) 9 - 22.
[33.] Čupona G., Smestuvanje na topološki algebri vo topološki polugrupi, Bilt. Društ. mat. fiz. SRM XXI (1970) 37 - 42.
[34.] Čupona G., On topological n-groups, Bilt. Društv. mat. fiz. SRM k. XXII (1971) 5 - 10.
[35.] Čupona G., Edna klasa delumni algebri, God. zb. PMF Univ. Skopje k. 22 (1972) seku A 5 - 37.
[36.] Čupona G., Smestuvanje na asocijativi vo polugrupi (neštampano)
[37.] Čupona G., Celakoski N., On representation of n-associjatives Skopje (1974) 23 - 34.
[38.] Čupona G., Markovski S., Smestuvanje na univerzalni algebri, God. zb. PMF Univ. Skopje k 25-26 (1975-76) sek A 15-34.

[39.] Čupona G., Trpenovski B., Finitarni asociativni operacii so neutralni elementi, Bilt. Društ. Mat. fiz. SRM k. XII (1961) 15 - 24.

[40.] Čupona G., Predavanja po algebra, kn II, Skopje 1973.

[41.] Ćirić D., Bitopološki prostori, Mag. rad. (1973) Beograd.

[42.] Davis A.S., Indexed systems of neighborhoods for general topological spaces, Amer. math. Monthly 68 (1961) 886-893.

[43.] Двалишвили Б.П., О размерности и некоторых других вопросах теории битопологических пространств, Труди Тбилисского мат. инст.т. LVI /1977/ 15 - 51.

[44.] Dube K.K., A note on R_o-topological spaces, Mat. vesn. 11 (26), 3 (1974) 203 - 208.

[45.] Дйонин В., Решение системы функционалных уравнений $\wedge[X_1[X_2(a_1^n), a_{n+1}^{2n+d-1}] = X_{2j-1}[a_1^{j-1}, X_{2j}(a_j^{j+n-1}), a_{j+n}^{2n+d-1}], j\in\{2,..,n+d\}$, на алгебре квазигрупп Мат.весн. 12 /27/ 1975 135 - 142.

[46.] Dimitrijević R., Topološke i uredjajne strukture. Doktorska teza, Beograd 1978.

[47.] Frink O, Grätzer G., The closed subalgebras of a topological algebra, Arch. Math. Vol. XVII (1966) 154 - 158.

[48.] Фукс Л., Частично упорядоченные алгебраические системы, "Мир" Москва 1965.

[49.] Фукс Л., Бесконачные Абелевы группи Т.1., "Мир" Москва 1974.

[50.] Фукс Л., Бесконачные Абелевы группи Т.2., "Мир" Москва 1977.

[51.] Hofmann K. H., - Topologische loops, Math. Zeitscir. Bd. 70, S 13 - 37 (1958).

[52.] Hofmann K.H., Connested Abelian groups in compact loops, Trans. Amer. Math. Soc. 104 (1962) 132 - 143.

[53.] Hu Sze- Tsen., Osnovi opšte topologije, "Savremena administracija" Beograd 1973.

[54.] Husain T., Introduction to topological groups, W.B. Saunders company, Philadelphia 1966.

[55.] Jelić M., Preslikvanje i dimenzije u bitopološkim prostorima, doktorska disertacija, Beograd 1978.

[56.] Kelley J.L., General topology, Van Nost. Princeton, N.J. 19[illegible].

[57.] Kelly J.C., Bitopological spaces, Proc. London Math. Soc. XIII (1963) 71 - 89.

[58.] Kim Y.W., Pairwice compastness, Publ. Math. Debrecen 15 (1968) 87 - 90.

[59.] Кокорин А.И., Копитов В.М., - Линейно упорядоченые группы, "Наука" Москва 1972.
[60.] Кон. П., Универсалная алгебра, "Мир" Москва 1968.
[61.] Ку‿ратовский К., Топология I. "Мир" Москва 1966.
[62.] Ку‿ратовский К., Топология 2. "Мир" Москва 1969.
[63.] Kurepa Dj., Teorija skupova, "Školska knjiga" Zagreb 1951.
[64.] Курош А.Г., Теория групп, "Наука" Москва 1967.
[65.] Курош А.Г., Лекций по общей алгебра, "Наука" Москва 1973.
[66.] Курош А.Г., Обшая алгебра, "Наука" Москва 1974.
[67.] Lane E.P. Bitopological spaces and gusi-uniform spaces, Proc. London Math. Soc. XVII (1967) 241 - 256.
[68.] Loibel G.F., Sôbre guse-groups topologicas. Bilt. Soc. Math. Sao Paulo. Volume 13°. Fasiculos 1° e 2° Dezembro 1958. Sao Paulo 1961.
[69.] Levin N. An equivalence relation in topology, Math.J.Okayama Univ. 15(1971/72) 113 - 123.
[70.] Мальцев А.И., К обшей теорий алгебраических систем. Мат. сб., 35 /77/ Н.I. 1954, 3 - 20.
[71.] Misra D.N. and Dube K.K., Pairwice R_0- spaces, Ann. de la Société sci. de Bruxelles T87 I (1973) 3 - 15.
[72.] Murdeshwar, M.G. and Naimpally S.A., Qusi-uniform topological spaces, P. Noordhoff, Groningen. 1966.
[73.] Naimpally S.A., On R_0 - topological spaces, Ann. Univ. Sci Budapest Eötvös sect. Math. 10 (1967) 53 - 54.
[74.] Pervin W.J., Connecteduess in bitopological spaces, 1967, 369 - 372. Indag Math 29.
[75.] Понтрягин Л.С., Непрерывные группы, "Наука" Москва 1973.
[76.] Prešič M.D., Prešič S.B., On the embedding of Ω - algebras in groupoids, Publ. Inst. Math. n.s.T. 21 (35) (1977), 169-174.
[77.] Radojičić M.D., On the embedding od universal algebras in groupoids holding the law xy * Zu ** = xZ * yn **. Mat. vesn. 5 (1968) 353 - 356.
[78.] Ребане Ю.К., О преставлении универзалних алгебри в коммутативных полугруппах, Сиб. мат. ж. 7 /1966/ 878 - 885.
[79.] Ребане Ю.К., О пре‿ставлении универзалних алгебр в нильпотентных полугруппах, Сиб.мат.ж. /1969/ 945 - 949.
[80.] Reilly I. L., Zero dimensional bitopological spaces. Indag. Math. 35 (1973) 127 - 131.

[81.] Reilly I.L., On essentially pairwise Hausdorff spaces, Rend. Circ. Matem. Palermo, s II - t XXV (1976) 47 - 52.

[82.] Seagrove M.J., Pairwice complete regularity and compactification in bitopological spaces, J. London Math. Soc. (2) 7. (1973) 286 - 290.

[83.] Secanina A. and M., Topologies compatible vith ordering, Arch, Math. 2 (1966) 113 - 126.

[84.] Суворов Н.М., Об одном достаточном условии полной регуларности топологических луп. Мат.islед. 4 /1969/ 2 /12/ 152-155.

[85.] Swart J., Total disconnectedness in bitopological spaces and product bitopological spaces. Indag. Math. 33 (1971) 135-145.

[86.] Šanin N.A., On spearation in topological spaces, Doklady URSS, 38 (1943) 110 - 113.

[87.] Ушан Я. Обобщение теоремы В.Д. Белоусова о четырех квазигруппах на тернарный случай, Билт.Друшт.Мат.Физ.С.Р.М. кн. XX /1969/ 13 - 17.

[88.] Ушан Я., н-Арный аналоган теоремы Белоусова о четырех квазигруппах, и некатарые ее следствия, Билт.Друшт.Мат.Физ.С.Р.М. XXI /1970/ 5 - 17.

[89.] Ушан Я., Ассоциативные в целом системы тернарных квазигрупп, Math Balc. I /1971/ 273 - 281.

[90.] Ушан Я., Тернарний аналоган теоремы Шауфлера. Math. Balc. I (1971) 281-28

[91.] Ушан Я., Об одной системе функциональных уравнений общей н-арнойасоциативности на алгебре н - арных к азигрупп. Math.Balc. 2 /1972/ 288 - 295.

[92.] Ушан Я., Ассоциативные в целом системи тернарных квазигрупп, постросния i A - систем. Math.Balc. 2 /1972/ 270-287.

[93.] Ушан Я., Об точности с которой определены группа и подстановки в решению системы функциональних уравнений $j\in\{2,\dots,n\}\ X_1[X_2(a_1^n)\, a_{m+1}^{m+n-1}] = X_{2j-1}[a_1^{j-1}, X_{2j}(a_j^{j+m-1}), a_{j+m}^{m+n-1}]$ m = n. Publ. Math. Inst. N.S.t. 17 (31) 1974 173 - 182.

[94.] Ушан Я., Ассоциативные в целом системы н-арных квазигрупп /Построения iA-систему. Одно обобщение теоремы Хосу-Глускина/ Publ.Math.Inst., N.S. т. 19 /33/ 1975 155 - 165.

[95.] Ušan J., Kvazigrupe, Institut za matematiku PMF, Novi Sad, 1979.

[96.] Ušan J., Djonin V., Programirani uvod u algebru, Zrenjanin 1969.

[97.] Ушан Я., Дйонин В., Решение системы функционалных уравнений $j \in \{2, \ldots, n\}$ $X_1[X_2(a_1^n)\ a_{m+1}^{m+n-1}] = X_{2j-1}[a_1^{j-1}, X_{2j}(a_j^{aj+m-1}), a_{j+m}^{m+n-1}]$ для $m=n+d$ на алгебре квазигрупп., Мат. весн. II /26/ I974 2I5 - 22I.

[98.] Ушан Я., Жижович М., н-Арний аналоган теореми Шауфлера., Publ. Math. Inst. N.S. T I9 /33/ I975 I67 - I72.

[99.] Žižović M.R., Neke osobine bitpoloških prostora, Mat. vesn. 11 (26) 1974, 233 - 237.

[100.] Žižović M.R., Topološki analogon Hosu-Gluskinove teoreme. Mat. vesn. 13. (28) 1976 233 - 235.

[101.] Žižović M.R., On topological n-semigroups, Math. Balc. (u štampi).

POPIS POJMOVA