ATEMATIČKI INSTITUT – BEOGRAD

Savremena računska tehnika i njena primena

Knjiga 3

Dr Dragiša Stojanović

Profesor Ekonomskog fakulteta

EKONOMSKO-MATEMATIČKI MODELI LINEARNOG PROGRAMIRANJA

METODOLOŠKA STUDIJA

BEOGRAD 1973

MATEMATIČKI INSTITUT - BEOGRAD

Savremena računska tehnika i njena primena

Knjiga 3

Dr Dragiša Stojanović

Profesor Ekonomskog fakulteta

EKONOMSKO-MATEMATIČKI MODELI LINEARNOG PROGRAMIRANJA

METODOLOŠKA STUDIJA

BEOGRAD 1973

Zajednica za naučni rad SR Srbije učestvovala je u troškovima izdavanje ove publikacije

Prema mišljenju Republičkog sekretarijata za kulturu SR Srbije ova publikacija je oslobođena poreza na promet.

S A D R Ž A J

I. UVOD

Interesovanje za matematičke metode i modele naglo je poraslo posle drugog svetskog rata, a naročito sa razvojem linearnog programiranja, koje je omogućilo rešavanje složenih ekonomskih problema. Razvoj linearnog programiranja vezan je za ime čuvenog matematičara G. Dantziga koji je svojim fundamentalnim radom Maksimiziranje linearne forme podvrgnute ograničenjima u vidu sistema linearnih jednačina (nejednačina) postavio osnove savremenog programiranja[1] .

Šta je linearno programiranje i kakva je njegova primena u ekonomiji? Linearno programiranje predstavlja matematičku analizu problema optimuma, odnosno analizu problema u kome se traži maksimalna (minimalna) vrednost linearne forme, pri unapred datim ograničavajućim uslovima, koji su izraženi sistemom linearnih (nelinearnih) jednačina. Drugim rečima, ono obuhvata i ispituje linearne sisteme kojima su izraženi odredjeni uslovi, sa ciljem da se nadju ona rešenja koja će odredjene zahteve učiniti maksimalnim (minimalnim). Pri razmatranju ekonomskih problema linearni sistemi izražavaju uslove u kojima se odvijaju ekonomski procesi, a linearna forma odredjeni zahtev (kriterijum,cilj)koji se u datim uslovima želi postići. Da bi se postavljeni zahtev mogao ostvariti potrebno je obuhvatiti i ispitati delovanje svih faktora koji rezultiraju iz raspoloživih, ali ograničenih resursa. To se postiže formiranjem odgovarajućih sistema iz kojih se kasnije specijalnim metodama dolazi do optimalnih rešenja.

---

[1]) Dantzig G.B. Maximization of a Linear Function of Variables Subject to Linear Inequalities, T.C.Koopmans "Activity Analysis of Production and Allocation" John Wiley 1951.

Razvoj linearnog programiranja povezan je sa pojmom linearizacije sistema, odnosno sa mogućnostima da se medjuzavisnosti u ekonomskim sistemima izražavaju linearnim vezama koje relativno dobro prikazuju stvarne odnose izmedju različitih veličina. Takva aproksimativna izražavanja medjuzavisnosti pokazala su se u praktičnim razmatranjima sasvim prihvatljivim i omogućila su relativno brz i uspešan razvoj matematičko-medodoloških istraživanja. Medju prvim pokušajima takve vrste treba pomenuti radove Leontijeva tridesetih godina, koji je na bazi društvenih bilansa radjenih u Sovjetskom Savezu, po uzoru na Marksove šeme proste i proširene društvene reprodukcije, pokušao da izvrši generalizaciju na veći broj privrednih oblasti, odnosno grana, i da matematičkim putem u vidu sistema linearnih jednačina uspostavi odnose u raspodeli bruto društvenog proizvoda, uspostavljajući vezu izmedju ukupne proizvodnje i finalne potrošnje (tražnje) po privrednim granama. Pri tome, osnovna pretpostavka ticala se konstantnih tehničkih koeficijenata sistema, odnosno konstantnih odnosa u okviru reprodukcione potrošnje izmedju privrednih grana. Takva teorijska orijentacija, a kasnije, sa razvojem elektronskih računara i praktična primena otvorili su put novom matematičko-metodološkom razvoju, nasuprot dotada isključivoj primeni klasičnog matematičkog instrumentarija koji se zasnivao na infinitezimalnom računu i diferencijalnim jednačinama. Razvoj teorije skupova, linearne algebre i drugih novih matematičkih disciplina uporedo sa prihvatanjem pretpostavke o linearizaciji sistema omogućio je stvaranje teorije linearnog programiranja, koja je dala zanačajan doprinos teorijskim i praktičnim razmatranjima u ekonomiji a naročito razvoju matematičko-metodološkog istraživanja.

Specifičan značaj linearnog programiranja u ekonomiji proizilazi iz činjenice da je priroda problema koji se teorijski razmatraju vrlo bliska ili identična, praktičnim problemima koji se vrlo često postavljaju u različitim domenima. Naime, problemi u ekonomiji najčešće su izraženi odredjenim zahtevima za postizanje odredjenih ciljeva, kao što su: ostvarivanje maksimalne proizvodnje, dohotka, dobiti, maksimalne efektivnosti ulaganja, maksimalnog korišćenja raspoloživih resursa ili minimalnih troškova proizvodnje, minimalnih zaliha, minimalnih transportnih troškova, itd. Medjutim, svaki od postavljenih zahteva ne može se posmatrati izolovano od uslova u kojima se želi njegova realizacija. Drugim rečima, uslovi u kojima se postavljaju odredjeni zahtevi imaju odlučujući značaj pri realizaciji takvih ciljeva, s obzirom na to da se oni uvek pojavljuju kao ograničavajući faktori u vrlo složenom i simultanom delovanju. Čak i u jednostavnim slučajevima pri razmatranju relativno malih privrednih organizacija sa malim obimom i asortimanom proizvodnje ovi uslovi mogu biti složeni. U prvom redu oni se izražavaju ograničenim kapacitetima pojedinih mašina, postrojenja ili pogona, dalje snabdevanja sirovinama i reprodukcionim materijalom,raspoloživim sredstvima, neophodnom kvalifikacionom strukturom radne snage , ograničenim mogućnostima plasmana proizvoda,organizacionim pitanjima u pogledu proizvodnje, razmeštanja i pomoćnih službi, skladišta, transportnih troškova, svih vidova zaliha (sirovina, materijala, poluproizvoda i finalnih proizvoda) itd. Svi navedeni elementi i mnogi drugi javljaju se simultano i deluju kao ograničavajući faktori svakog proizvodnog procesa, tako da su prilikom postavljanja ma kakvog zahteva oni prisutni, bez obzira na to da li se u posmatranom momentu posebno ističu ili ne.

Linearno programiranje u svom teorijskom konceptu polazi od takvih predpostavki, ističući na jednoj strani zahtev (cilj, kriterijum) koji se želi ostvariti, a na drugojm mogućnosti da se eksplicitno izraze svi ograničavajući faktori u vidu sistema linearnih nejednačina (jednačina) i na taj način opišu uslovi u kojima se takav zahtev postavlja.Iz ovoga se vidi da linearno programiranje odgovara ekonomskim uslovima i da zbog toga ima poseban značaj u odgovarajućim istraživanjima. Ono se razlikuje od drugih matematičkih metoda, a naročito klasičnih, u prvom redu po tome što jasno diferencira ciljeve i zahteve od opštih uslova razmatranja, omogućavajući tako da se ekonomski problem jasno definiše i matematički formuliše u pogledu zahteva i odgovarajućih uslova. Sem toga značajno je primetiti da je broj ograničenja (jednačina, nejednačina) nezavisan od broja nepoznatih što znači da su ograničavajući uslovi dati sistemom od m jednačina (nejednačina) sa n nepoznatih ($m \neq n$). Ova okolnost ukazuje na to da ne postoje nikakve ograde u pogledu obuhvatanja relevantnih faktora koji mogu biti od uticaja u procesu proizvodnje, niti pak broja proizvoda, odnosno aktivnosti značajnih u odgovarajućem razmatranju. Najzad, za praktična razmatranja je od značaja činjenica da su ograničavajući uslovi izraženi siste mom nejednačina koji omogućuju realno postavljanje odgovaraju - ćih uslova, naročito kada se radi o mogućnosti korišćenja raspoloživih resursa koji se u realnosti po pravilu ne koriste u pot punosti, pa i onda kada se imaju u vidu optimalna rešenja. Na kraju, u svakom problemu linearnog programiranja, po pravilu, figuriraju tzv. uslovi nenegativnosti koji isključuju mogućnost dobijanja negativnih rešenja, što je s obzirom na konkretna eko nomska značenja pojedinih veličina vrlo značajan uslov.

Na osnovu navedenih karakteristika vidimo da linearno pro gramiranje u metodološkom smislu doprinosi razmatranju i rešavanju ekonomskih problema više no i jedan do sada poznati matematički metod i da su njegove mogućnosti sve veće pri rešavanju praktičnih i teorijskih problema.

Proizilazi, dakle, da linearno programiranje obuhvata i rešava relativno veliki broj ekonomskih problema.U prvom redu probleme optimalnih proizvodnih programa u složenim i različi - tim uslovima, koji praktično mogu biti sveobuhvatni u okviru privredne organizacije. Oni se, kao što smo već napomenuli, mogu ticati tehničko-tehnoloških uslova proizvodnje sirovina, zaliha, tržišta, ponude i tražnje, uvoza, izvoza i dr. Formulisanje pomenutih uslova pomoću matematičkih relacija (jednačina nejednačina) i formiranje odgovarajućih sistema medjuzavisnosti omogućava postizanje onih rešenja koja proizilaze iz simultanog delovanja obuhvaćenih faktora. Takvi sistemi sa posrednim i neposrednim dejstvima predstavljaju realnu sliku medjuzavisnosti koja postoji u privrednoj organizaciji. Linearno programiranje polazi od takvih sistema i na bazi unapred utvrdjenih kriterijuma, koji mogu biti različiti u zavisnosti od problema, ispituje uslove optimalnosti,odredjujući ona rešenja koja su u datim uslovima najbolja (optimalna). Drugim rečima, ako se za kriteri - jum uzme dohodak privredne organizacije, koji se ostvaruje od proizvodnje različitih proizvoda, tada je pri unapred poznatim ograničavajućim uslovima moguće odrediti onaj proizvodni prog - ram koji omogućava ostvarivanje maksimalnog ukupnog dohotka.Takav program nazivamo optimalnim u odnosu na postavljani kriterijum. Medjutim, pri istim ograničavajućim uslovima, kriterijum može biti različit, što znači da se mogu naći odgovarajući optimalni proizvodni programi. Primena linearnog programiranja je vrlo različita u ekonomskim istraživanjima. Tako se prilikom razmatranja investicionih ulaganja mogu tražiti optimalna rešenja sa maksimalnom efektivnošću investicija, zatim optimalni odnosi akumulacije i potrošnje u strukturnom smislu. Takodje je moguće razmatrati probleme tržišta, pri različitim pretpostavkama, probleme spoljnotrgovinske razmene, problema kooperacije i integracije, probleme potrošnje, probleme ishrane, probleme optimalnih mešavina, u poljoprivredi probleme optimalnih ulaganja i selektivne proizvodnje, probleme transporta u različitim varijantama, probleme lokacije, asignacije, rasporeda itd. Najzad, moguće je rešavati složene probleme koordinacije i uskladjivanja programa različitih sistema počev od preduzeća, pa preko integracionih zajednica do programiranja proizvodnih planova privrednih grana u okviru cele privrede, pomoću metoda dekompozicije. Skala problema koji se mogu rešavati pomoću linearnog programiranja je vrlo velika i nemoguće ih je sve nabrojati. Praktično, svaki problem strukturne prirode u kome se postavlja zahtev da se izmedju velikog broja mogućih alternativnih rešenja odredi ono koje je prema unapred postavljenim zahtevima najbolje pripada grupi problema linearnog programiranja.

II. PROBLEM LINEARNOG PROGRAMIRANJA

Opšti oblik problema programiranja može se izraziti na sledeći način: naći vrednosti promenljivih $x_1, x_2 \ldots x_k$ koje zadovoljavaju ograničavajuće uslove, izražene sistemom jednačina (ne - jednačina),

$$F_r(x_1, x_2, \ldots x_k) \lesseqgtr b_r \qquad r = 1,2\ldots m \tag{1}$$

tako da funkcija kriterija

$$f = Q(x_1, x_2, \ldots x_k) \tag{2}$$

dostigne maksimalnu (minimalnu) vrednost.

U sistemu ograničavajućih uslova svakom uslovu odgovara samo jedan znak jednakosti ili nejednakosti. Sistem može biti izražen jednačinama i nejednačinama različitog smisla, a broj uslova m može biti veći, manji ili jednak broju promenljivih k. Uslovi su specificirani odredjenim funkcijama koje mogu imati linearan ili nelinearan karakter, sa unapred poznatim konstantnim vrednostima $b_r (r = 1,2,\ldots m)$

Ako su ograničavajući uslovi i funkcija kriterija izraženi linearnim relacijama, tj.

$$F_r(x_1, x_2, \ldots x_k) = \sum_{s=1}^{k} a_{rs}\, x_s \quad (r = 1,2,\ldots m),$$

$$Q(x_1, x_2, \ldots x_k) = \sum_{s=1}^{k} c_s\, x_s,$$

tada se razmatranje svodi na problem linearnog programiranja koji se može javiti u jednom od dvaju standardnih oblika, kao problem maksimuma ili problem minimuma. Ukoliko se uzme u obzir us -

lov nenegativnosti $x_s \geqslant 0$, $s = 1,2,\ldots k$, tj. uslov da su sve promenljive nenegativne, problem se može izraziti na sledeći način: naći nenegativne vrednosti promenljivih $x_1, x_2, \ldots, x_k$ tako da funkcija kriterija

$$f = \sum_{s=1}^{k} c_s x_s \tag{3}$$

dostigne maksimalnu (minimalnu) vrednost pri ograničavajućim uslovima

$$\sum_{s=1}^{k} a_{rs} x_s \lesseqgtr b_r, \quad r = 1,2\ldots m, \tag{4}$$

gde su c_s, a_{rs} i b_r date konstante.

U razvijenom obliku, opšti problem linearnog programiranja u kome se traži maksimalna vrednost funkcije kriterija možemo izraziti:

$$(\max) f = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_k x_k \tag{5}$$

pri ograničavajućim uslovima

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1k}x_k &\leqslant b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2k}x_k &\leqslant b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mk}x_k &\leqslant b_m \\ x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0, \ldots\ x_k &\geqslant 0. \end{aligned} \tag{6}$$

Kao što se vidi, u opštem obliku problema figurira zahtev (cilj) koji je izražen funkcijom kriterijuma, i uslovi u kojima se takav zahtev postavlja, a koji su dati tzv. ograničavaju - ćim uslovima u vidu sistema linearnih nejednačina (jednačina).Na sličan način može se postaviti problem minimuma, koji se u standardnoj formulaciji razlikuje suprotnim smislom nejednakosti ograničavajućih uslova. Medjutim, i u jednom i u drugom problemu uopšte uzev mogu figurirati uslovi različitog smisla nejednakosti. Imajući u vidu da izmedju problema maksimuma i problema minimuma u linearnom programiranju postoji, po definiciji duala, utvrdjen odnos, razmatraćemo u ovom delu isključivo problem maksimuma.

Ograničavajući uslovi (6) mogu se napisati u vidu sistema jednačina uvodjenjem, tzv. dopunskih promenljivih x_{k+1}, $x_{k+2}, \ldots$

$\dots x_{k+m}$,

$$
\begin{array}{l}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1k}x_k + x_{k+1} = b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2k}x_k + x_{k+2} = b_2 \\
\dots\dots\dots \\
\dots\dots\dots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mk}x_k + x_{k+m} = b_m
\end{array}
\qquad (7)
$$

$$x_1,\ x_2, \dots x_k,\ x_{k+1}, \dots x_{k+m} \geqslant 0,$$

tako da se problem linearnog programiranja može izraziti u obliku

$$(\max)\ f = \sum_{s=1}^{n} c_s x_s \qquad (8)$$

$$
\begin{array}{l}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\
\dots\dots\dots \\
\dots\dots\dots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \\
\quad x_1, x_2, \dots, x_n \geqslant 0
\end{array}
\qquad (9)
$$

gde smo stavili $k + m = n$ i $a_{rk+1} = \begin{cases} 1 & \text{za } i=r \\ 0 & \text{za } i \neq r \end{cases}$,

a u funkciji kriterijuma koeficijenti koji odgovaraju dopunskim promenljivim jednaki su nuli.

Ako sa $c = \{c_1, c_2, \dots c_n\}$ označimo n-dimenzionalni vektor koeficijenata u funkciji kriterijuma, sa

$x = \{x_1, x_2, \dots x_n\}$ promenljivi vektor n-tog reda,

sa $b = \{b_1, b_2, \dots b_m\}$, m-dimenzionalni vektor slobodnih članova, a sa

$$A = \begin{Bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots a_{mn} \end{Bmatrix} \qquad (10)$$

matricu koeficijenata sistema (m,n)-tog reda, problem se može napisati

$$(\max) f = c'x$$
$$Ax = b \quad , \quad x \geqslant 0 \qquad (11)$$

ili u obliku

$$(\max) f = \sum_{s=1}^{n} c_s x_s$$
$$\sum_{s=1}^{n} A_s x_s = b \qquad (12)$$
$$x_s \geqslant 0, \quad s=1,2\ldots n$$

gde smo sa $A_s = \{a_{1s}, a_{2s}, \ldots a_{ms}\}$ označili kolone matrice A, koje su u ekonomsko-metodološkim razmatranjima poznate pod imenom vektori aktivnosti ili prosto aktivnosti.

Rešenje problema linearnog programiranja postiže se simplex metodom na sledeći način.

Neka prvih m linearno nezavisnih vektora aktivnosti $A_r (r=1,2\ldots m)$ matrice sistema A čine bazu $B=(A_1, A_2, \ldots A_m)$, tako da se vektor b može izraziti kao linearna kombinacija baznih vektora,

$$\sum_{r=1}^{m} A_r x_r = b \qquad (x_r > 0) \qquad (13)$$

Takodje, u odnosu na datu bazu možemo izraziti ma koji nebazični vektor $A_s (s=m+1, m+2, \ldots n)$

$$\sum_{r=1}^{m} A_r x_{rs} = A_s \qquad (14)$$

Ako sada radi promene vektorske baze dodamo i oduzmemo levoj strani jednačine (13) nebazični vektor A_s pomnožen sa neodredjenom konstantom θ , imamo

$$\sum_{r=1}^{m} A_r x_r + \theta A_s - \theta A_s = b$$

ili, s obzirom na (14),

$$\sum_{r=1}^{m} A_r x_r - \theta \sum_{r=1}^{m} A_r x_{rs} + \theta A_s = b$$

odnosno

$$\sum_{r=1}^{m} (x_r - \theta x_{rs}) A_r + \theta A_s = b. \qquad (15)$$

Odredimo sada θ , tako da za r=i odgovarajući član postane jednak nuli, tj.

$$x_i - \theta x_{is} = 0$$

odnosno

$$\theta = \frac{x_i}{x_{is}} = \min_r\left(\frac{x_r}{x_{rs}}\right), \quad x_{rs} > 0 \tag{16}$$

gde je uzet minimalni količnik rešenja za vektor b i A_s, za $x_{rs} > 0$, tako da je $\theta > 0$.

Prema uslovu (16) moguće je izvršiti promenu vektorske baze. Ispitajmo kakvog uticaja ova promena ima na vrednost funkcije kriterijuma. Pre svega, funkcija kriterijuma za bazu B ima vrednost

$$f = \sum_{r=1}^{m} c_r x_r, \tag{17}$$

a za novu bazu izraženu jednačinom (15), uzimajući u obzir uslov (16)

$$f' = \sum_{r=1}^{m} c_r(x_r - \theta x_{rs}) + \theta c_s$$

gde je c_s koeficijent u funkciji kriterijuma koji odgovara nebazičnom faktoru A_s, odnosno

$$f' = \sum_{r=1}^{m} c_r x_r + \theta(c_s - \sum_{r=1}^{m} c_r x_{rs})$$

ili s obzirom na to da je

$$f_s = \sum_{r=1}^{m} c_r x_{rs}$$

vrednost funkcije kriterijuma za nebazični vektor A_s, i jednačine (17), imamo:

$$f' = f + \theta(c_s - f_s) \tag{18}$$

Relacija (18) pokazuje da ukoliko je $\theta>0$ i $(c_s - f_s) >0$ za jedan ili više nebazičnih vektora, vrednost funkcije kriterijuma za novu bazu može se povećati u odnosu na staru.

Dakle, ako se za promenu vektorske baze podje od kriterijuma

$$c_j - f_j = \max_s (c_s - f_s) > 0$$

$$\Theta = \frac{x_i}{x_{ij}} = \min_r \left(\frac{x_r}{x_{rj}} \right), \quad x_{rj} > 0 \tag{19}$$

tada se u konačnom broju iteracija može doći do optimalne baze, tj. do rešenja koje će vrednost funkcije kriterijuma učiniti maksimalnom. Rešenje se uvek može postići jer je mogući broj baza konačan, a imajući u vidu uslove (19), vrednost funkcije kriterijuma se u svakoj narednoj iteraciji može povećati (isključujući slučaj degeneracije). Prema tome, simplex metodom se može uvek doći do rešenja problema linearnog programiranja.

Razmotrimo važnije teoreme na kojima egzistira rešenje problema linearnog programiranja.

Teorema 1. Skup svih mogućih rešenja čini konveksan skup K.

Dokaz: Neka $x^1 = \{ x_1^1, x_2^1, \ldots x_n^1 \}$ i $x^2 = \{ x_1^2, x_2^2, \ldots x_n^2 \}$ predstavljaju dva moguća različita rešenja. Tada imamo,

$$Ax^1 = b \quad i \quad Ax^2 = b$$

$$x^1 > 0 \qquad x^2 \geqslant 0$$

Konveksna kombinacija rešenja x^1 i x^2, tj.

$$x = \lambda x^1 + (1 - \lambda) x^2, \qquad 0 \leqslant \lambda \leqslant 1$$

predstavlja takodje moguće rešenje, jer je $x \geqslant 0$ i

$$Ax = A \left[\lambda x^1 + (1 - \lambda) x^2 \right] = \lambda A x^1 + (1 - \lambda) A x^2 = \lambda b + (1 - \lambda) b = b$$

Dakle, ako moguća rešenja x^1 i x^2 pripadaju skupu K, tada i svaka konveksna kombinacija pripada skupu. Prema tome, skup mogućih rešenja je konveksan.

Ako skup mogućih rešenja ima konačan broj ekstremnih tačaka, tada K predstavlja konveksan poliedar. Moguća rešenja problema linearnog programiranja predstavljaju tačke konveksnog poliedra.

Teorema 2. Funkcija kriterijuma $f = c'x$ definisana na konveksnom skupu mogućih rešenja K dostiže maksimalnu vrednost u ekstremnoj tački skupa.

Pretpostavimo da x nije ekstremna tačka skupa K, a funkcija f(x) ima maksimalnu vrednost. Tada se x može izraziti, kao konveksna kombinacija ekstremnih tačaka $x_1, x_2, \dots x_p$, tj.

$$x=\sum_{r=1}^{p}\lambda_r x_r, \qquad \lambda_r \geqslant 0, \qquad \sum_r \lambda r = 1$$

tako da se može pisati

$$(\max) f = f\left[\sum_{r=1}^{p}\lambda_r x_r\right] = \sum_r \lambda_r f(x_r),$$

s obzirom na to da je f linearna funkcija. Ako, sada, izmedju svih ekstremnih tačaka $x_r (r=1,2\dots p)$ uzmemo onu za koju je f maksimalno, recimo $f(x_p)$, tada pošto je $\lambda_r \geqslant 0$, imamo

$$(\max)\ f \leqslant \sum_r \lambda_r\ f(x_p) = f(x_p)\sum_r \lambda_r = f(x_p),$$

odakle proizilazi da je

$$(\max)\ f(x) = f(x_p),$$

odnosno da funkcija kriterijuma dostiže maksimalnu vrednost u ekstremnoj tački x_p skupa K.

Dokaz je sličan za minimalnu vrednost funkcije kriterijuma.

Ukoliko funkcija kriterijuma dostiže maksimalnu vrednost za dve ili više ekstremnih tačaka konveksnog skupa K, $x_1, x_2, \dots x_p$ tj. $f(x_1) = f(x_2) = \dots = f(x_p) = M$ tada će ona imati maksimalnu vrednost za svako x konveksne kombinacije ekstremnih tačaka $x_1, x_2, \dots, x_p$, tj.

$$x = \sum_{r=1}^{p} \lambda r\ x_r \qquad \lambda r \geqslant 0,\ \sum_r \lambda r=1$$

dakle,

$$f(x) = \sum_{r=1}^{p} \lambda r\ f(x_r) = \sum_{r=1}^{p} \lambda r M = M$$

Teorema 3. Tačka $x = \{x_1, x_2, \dots x_p, 0, 0 \dots 0\}$ je ekstremna tačka konveksnog skupa k ako, i samo ako, izmedju svih vektora aktivnosti $A_s (s=1,2\dots n)$ može biti odredjen skup linearno nezavisnih $A_1, A_2, \dots A_p (p \leqslant m)$, tako da je

$$\sum_{s=1}^{p} x_s A_s = b \quad \text{i} \quad x_s \geqslant 0 \text{ za svako } s.$$

Poslednjih (n-p) komponenata od x jednako je nuli.

Pretpostavimo suprotno, da x nije ekstremna tačka skupa K. Tada se x može izraziti kao linearna konveksna kombinacija drugih dveju tačaka x_1 i x_2 skupa K., tj.

$$x = \lambda x_1 + (1-\lambda)\, x_2 \qquad 0 < \lambda < 1$$

Poslednjih (n-p) komponenata od x_1 i x_2 takodje je jednako nuli.

Pošto tačke x_1 i x_2 pripadaju skupu K, to se može pisati

$$\sum_{s=1}^{p} x_{1s} A_s = b \quad \text{i} \quad \sum_{s=1}^{p} x_{2s} A_s = b$$

Medjutim, po pretpostavci, vektori $A_1, A_2, \ldots A_p$ su linearno nezavisni, tako da izražavanje vektora b u kombinaciji posmatranih vektora mora biti jednoznačno, odakle proizilazi da mora biti $x_s = x_{1s} = x_{2s}$ za svako s. Dakle, x ne može biti izraženo kao konveksna kombinacija drugih dveju tačaka, odakle zaključujemo da je ekstremna tačka skupa K .

Teorema 4. Ako je $x = \{x_1, x_2, \ldots x_n\}$ ekstremna tačka skupa K, tada vektori sa pozitivnim množiteljima x_s obrazuju linearno nezavisan skup, tako da je najviše p od x_s množitelja pozitivno.

Ako je prvih p množitelja pozitivno, pišemo:

$$\sum_{s=1}^{p} x_s A_s = b, \qquad x_s > 0, \qquad s=1,2\ldots p$$

Pretpostavimo suprotno da su vektori $A_1, A_2, \ldots A_p$ linearno zavisni, tako da je

$$\sum_{s=1}^{p} \mu_s A_s = 0$$

gde svi μ_s nisu jednaki nuli.

Neka je za relativno mali broj ε

$$x_s + \varepsilon\mu_s > 0 \qquad \text{i} \qquad x_s - \varepsilon\mu_s > 0$$

za svako s=1,2...p, tako da se može pisati

$$\sum_{s=1}^{p} (x_s + \varepsilon\mu_s)\, A_s = b \quad \text{i} \quad \sum_{s=1}^{p} (x_s - \varepsilon\mu_s)\, A_s = b$$

Ako sa μ označimo vektor koji ima poslednjih (n-p) komponenata jednako nuli, tada imamo

$$x_1 = x + \varepsilon\mu \quad i \quad x_2 = x - \varepsilon\mu$$

dva moguća rešenja koja zadovoljavaju postavljene uslove, tako da je

$$x = \frac{1}{2} x_1 + \frac{1}{2} x_2$$

Medjutim, to je suprotno pretpostavci da je x ekstremna tačka skupa k . Prema tome, pretpostavka da su vektori sa pozitivnim množiteljima linearno zavisni ne može se prihvatiti pa zaključujemo da su vektori $A_1, A_2, \ldots A_p$ linearno nezavisni.

Pošto su vektori A_s m - dimenzionalni ne može postojati više od m linearno nezavisnih vektora sa pozitivnim množite - ljima $x_s (s=1,2\ldots m)$, isključujući slučaj degeneracije.

Poslednjim dvema teoremama pokazano je da u problemu linearnog programiranja svako bazično moguće rešenje predstavlja ekstremnu tačku konveksnog skupa mogućih rešenja i drugo svakoj ekstremnoj tački skupa mogućih rešenja odgovara bazično moguće rešenje.

Dualni problem

Važna osobina linearnog programiranja izražena je činjenicom da svakom problemu programiranja (primarnom problemu) odgovara dualni problem. Naime, ako je primarni problem dat u obliku

$$(\max) f = c'x \tag{1}$$

$$Ax \leqslant b, \qquad x \geqslant 0 \tag{2}$$

tada je, po definiciji, dualni problem dat u obliku

$$(\min) v = b'y \tag{3}$$

$$A'y \geqslant c \quad , \quad y \geqslant 0 \tag{4}$$

gde je y vektor dualnih promenljivih.

Primećujemo da ako je kriterijum u primarnom problemu izražen u vidu maksimalnih zahteva u dualnom problemu je on izražen u vidu minimuma. Takodje, matrica sistema ograničavajućih uslova u dualnom problemu je transponovana matrica primarnog problema, a koeficijenti u funkciji kriterijuma i raspoloživi nivoi ograničenja u primarnom i dualnom problemu su zamenjeni.

Neke važnije teoreme dualiteta ukaužuju na vezu koja postoji izmedju primarnog i dualnog problema u linearnom programiranju.

Teorema 1. Dual dualnog problema daje primarni problem.

Posle množenja sa (-1) relacije (3) i (4) imamo:

$$(\max)\ (-v) = -b'y \tag{5}$$

$$-A'y \leqslant -c, \qquad y \geqslant 0 \tag{6}$$

gde je $-(\min)v = (\max)\ (-v)$

Problem (5) i (6) predstavlja standardni primarni problem Uzmimo dual od (5) i (6) , tj.

$$(\min)\ (-f) = -c'x$$

$$-A\ x \geqslant -b, \qquad x \geqslant 0$$

Posle množenja sa (-1), imamo primarni problem

$$(\max)\ f = c'x$$

$$A\ x \leqslant b\ , \qquad x \geqslant 0$$

gde je $-(\min)\ (-f) = (\max)\ f$

Vidimo, dakle, da dual dualnog problema daje primarni problem, s tim što nije od značaja koji se problem označava kao primarni, a koji kao dualni.

Teorema 2. Za svako moguće rešenje x primarnog problema (1) i (2) i odgovarajuće moguće rešenje y duala (3) i (4), vrednost funkcije kriterijuma primarnog problema manja je ili najviše jednaka vrednosti funkcije kriterijuma duala, tj.

$$c'x \leqslant b'y \tag{7}$$

Posle množenja (2) sa $y \geqslant 0$, imamo

$$y'\ A\ x \leqslant y'\ b, \tag{8}$$

odnosno, posle množenja (4) sa $x \geqslant 0$, imamo

$$x'A'\ y \geqslant x'\ c$$

Posle transponovanja i sredjivanja, izrazi (8) i (9) mogu se napisati

$$y'A\ x \leqslant b'y \qquad \text{i} \qquad y'A\ x \geqslant c'x$$

što daje

$$c'x \leqslant b'y$$

Teorema 3. Ako je x_0 moguće rešenje primarnog problema, a y_0 moguće rešenje dualnog problema tako da je

$$c'x_0 = b'y_0, \tag{10}$$

tada je x_0 optimalno rešenje primarnog, a y_0 otpimalno rešenje dualnog problema.

Podjimo od pretpostavke da je za x_0 i y_0, $c'x_0 = b'y_0$. Medjutim, prema (7) za svako moguće rešenje x imamo:

$$c'x<b'y_o = c'x_o,$$

odakle proizilazi da je x_o optimalno rešenje sa $(\max)f=c'x_o$. Na isti način, za ma koje moguće rešenje duala, imamo:

$$b'y_o = c'x_o \leqslant b'y,$$

odakle zaključujemo da je y_o optimalno rešenje duala sa $(\min)\ v = b'y_o$.

Prema tome, ako za neko rešenje x_o i y_o primarnog i dualnog problema važi relacija (10), tada su x_o i y_o optimalna reše nja primarnog i dualnog problema sa

$$(\max)\ f = (\min)\ v$$

Teorema 4. Ako primarni problem ima optimalno rešenje,tada i dual ima optimalno rešenje.

Uspostavimo vezu izmedju primarnog i dualnog problema tako da pomoću simplex kriterijuma konstruišemo optimalno rešenje duala iz optimalnog rešenja primarnog problema. Pretpostavimo da je posle uvodjenja dopunskih promenljivih u problemu (1) i (2) odredjena optimalna baza B primarnog problema sa optimalnim baziČnim rešenjem

$$B\ x = b\ ,\ \text{odnosno}\ x = B^{-1}\ b$$

i rešenjem za nebazični vektor A_s

$$x_s = B^{-1}A_s \quad (s = m + 1,\ \ m + 2,\ldots n)$$

Vrednosti funkcije kriterijuma za x i x_s jesu

$$(\max)f = c'x = c'B^{-1}b$$

$$f_s = c'x_s = c'B^{-1}A_s,$$

gde je c' m-dimenzionalni vektor, koji sadrži koeficijente iz funkcije kriterijuma koji odgovaraju baziČnim promenljivim. Za optimalno rešenje, simplex kriterijum $c_s - f_s \leqslant 0$ za svako $s(s= = 1,2\ldots n)$

Posmatrajmo sada simplex kriterijum podvojeno za efektivne i dopunske promenljive. Za vektore koji odgovaraju efektivnim promenljivim, imamo:

$$c_s - \bar{c}'\ B^{-1}\ A_s \leqslant 0\ , \quad (s = 1,2\ldots n)$$

odnosno

$$\bar{c}'\ B^{-1}\ A_s \geqslant c_s$$

ili

$$c'B^{-1}(A_1,\ A_2\ldots A_n) \geqslant (c_1,c_2,\ \ldots\ c_n)$$

$$c'\ B^{-1}\ A \geqslant c'$$

Ako stavimo $y' = c'B^{-1}$, imamo:

$$y'A \geqslant c', \text{ osnosno } A'y \geqslant c \qquad (11)$$

Uporedjujući dobiveni rezultat sa (4), vidimo da se iz simplex kriterijuma za efektivne promenljive (sa optimalnom bazom) odredjuju ograničavajući uslovi duala. Takodje, vidimo da je $y = c'B^{-1}$ rešenje dualnog problema (3), (4).

Uzimajući simplex kriterijum za dopunske promenljive, imajući u vidu da su odgovarajući koeficijenti u funkciji kriterijuma jednaki nuli, imamo:

$$0 - c' b^{-1} e_k \leqslant 0 , \quad (k = 1,2 \dots m)$$

odnosno

$$c' B^{-1} e_k \geqslant 0$$

ili za sve jedinične vektore koji odgovaraju dopunskim promen - ljivim

$$c' B^{-1}(e_1, e_2, \dots e_m) \geqslant 0$$

ili

$$c' B^{-1} I \geqslant 0, \text{ odnosno } c' B^{-1} \geqslant 0$$

Pošto je $y' = c' B^{-1}$, vidimo da je zadovoljen uslov nenegativnosti $y \geqslant 0$, pa rešenje predstavlja moguće rešenje dualnog problema.

Pokažimo da $y' = c'B^{-1}$ predstavlja optimalno rešenje dualnog problema. Podjimo od funkcije kriterijuma duala

$$v = b'y = y'b = c'B^{-1}b$$

Kako je optimalno rešenje primarnog problema $x = B^{-1}b$, to imamo

$$v = b'y = c'B^{-1} b = c'x = (\max) f \qquad (12)$$

Iz (12) proizilazi da je $b' y = c' x$, pa prema teoremi 3. i činjenici da su x i y moguća rešenja primarnog i dualnog problema sledi da je y optimalno rešenje dualnog problema, sa

$$(\min) v = b'y = c'x, = (\max) f$$

Ovim je dokazan stav da ako primarni problem ima optimalno rešenje, tada i dualni problem ima optimalno rešenje.

Nadalje se može pokazati da ako je p - to ograničenje primarnog problema dato u vidu jednačine, tada je odgovarajuća dualna promenljiva y_p neodredjena u znaku, i obratno.

III. METODOLOŠKA RAZMATRANJA I FORMULACIJA MODELA

U problematici preduzeća, linearno programiranje ima različitu primenu, što zavisi od vrste preduzeća, karaktera proizvodnje ili predmeta istraživanja. Ono se sa istom efikasnošću koristi pri razmatranju proizvodnih procesa unutar preduzeća , kao i odnosa izmedju privrednih organizacija u okviru združenih preduzeća, kooperacije, integracije i drugih oblika udruživanja. Primena linearnog programiranja u privrednim organizacijama je značajna kako zbog toga što se njome rešavaju složeni i različiti problemi tako i zbog činjenice da su pristup i izražavanje odgovarajućim problemima adekvatni ekonomskim zahtevima. Standardni oblik primene tiče se odredjivanja optimalnog programa proizvodnje, i to u pravom redu onih programa koji su povezani sa ostvarivanjem maksimalnog dohotka (proizvodnje, dobiti) u uslovima raspoloživih kapaciteta pojedinih pogona, i drugih faktora proizvodnje koji su od vitalnog značaja za privrednu organizaciju i procese proizvodnje. Razmatranje takvih problema predstavlja značajan korak u naučnom prilazu relativno složenim praktičnim problemima, u kojima se na egzaktan način obuhvataju tehničko-tehnološke uslove proizvodnje, nasuprot opštim i verbalnim razmatranjima složenih sistema medjuzavisnosti.

Pretpostavimo da preduzeće proizvodi k proizvoda P_k, koji u procesu proizvodnje prolaze kroz m različitih pogona (mašina), sa poznatim tehničko-tehnološkim uslovima proizvodnje i raspoloživim kapacitetima pojedinih pogona u posmatranom periodu. Takodje, pretpostavimo da postoji odredjeni zahtev (cilj) koji je izražen odgovarajućom funkcijom kriterijuma.

Osnovni elementi mogu se tabelarno iskazati na sledeći način:

Pogon	Angažov.kapac.po jed.proizv.			Ukupno raspoloživi kapaciteti
	P_1	$P_2 \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot$	P_k	
1	a_{11}	$a_{12} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot$	a_{1k}	b_1
2	a_{21}	$a_{22} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot$	a_{2k}	b_2
.	. . . .			.
.	. . . .			.
m	a_{m1}	a_{m2}	a_{mk}	b_m

gde koeficijent a_{rs} $(r = 1,2...m,\ s= 1,2...k)$ označava angažovanje kapaciteta r-tog pogona po jedinici s = tog proizvoda, a b_r (r = 1,2... m) ukupno raspoložive kapacitete r -tog pogona u posmatranom periodu (koeficijenti su izraženi vremenskim je - dinicama u apsolutnim iznosima ili procentima).

Ako sa $x_1, x_2, \ldots x_k$ označimo obime proizvodnje proizvoda $P_1, P_2, \ldots P_k$, respektivno, tada su ukupno iskorišćeni kapaciteti r-tog pogona

$$a_{r1} x_1 + a_{r2} x_2 + \ldots + a_{rk} x_k,$$

koji, s obzirom na raspoložive kapacitete, ne mogu preći naznačeni nivo b_r, te pišemo

$$a_{r1} x_1 + a_{r2} x_2 + \ldots + a_{rk} x_k \leqslant b_r.$$

Uzeto preko svih pogona imamo sistem ograničavajućih uslova

$$\sum_{s=1}^{k} a_{rs} x_s \leqslant b_r, \qquad r= 1,2\ldots m, \tag{1}$$

koji izražava tehničko-tehnološke uslove proizvodnje u vezi ras položivih kapaciteta. Prema unapred postavljenom zahtevu, odnosno datoj funkciji kriterijuma, moguće je tražiti optimalno rešenje problema (optimalni proizvodni program) koji čini funkciju kriterijuma maksimalnom, Ako sa, $c_1, c_2, \ldots c_k$ označimo do - hotke po jedinici proizvoda, tada se funkcija kriterijuma može pisati kao

$$f = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_k x_k$$

ili

$$f= \sum_{s=1}^{k} c_s x_s \tag{2}$$

gde f označava ukupan dohodak. Ovako postavljene problema omogućava nalaženje optimalnog programa proizvodnje koji čini ukupan dohodak maksimalnim. Medjutim, u okviru istih ograničavajućih uslova, kriterijum može biti različit, i odnositi se na maksimalni obim proizvodnje, maksimalnu dobit, maksimalno korišćenje kapaciteta itd., i tada tražiti odgovarajuća optimalna rešenja. Suprotno tome, kriterijum može ostati nepromenljiv, a ograniča - vajući uslovi se mogu menjati, odnosno uključiti druge elemente koji su od značaja u ispitivanju, i tada se optimalni proizvodni program takodje menja. Kada se govori o promeni kriterija onda se u metodološkom smislu ne vrše bitne transformacije, u funkciji kriterijuma jer ona zadržava standardni oblik linearne forme, a prema vrsti zahteva koeficijenti imaju specifična značenja, koja kao što smo napomenuli mogu biti različita. Medjutim, kada se govori o promeni ograničavajućih uslova tada se, po pravilu, ima u vidu njihovo proširenje u smislu potpunijeg obuhvatanja faktora proizvodnje i što egzatnijeg izražavanja stvarnih uslova privredjivanja. Tada, sistem ograničavajućih uslova, koji se tiče raspoloživih kapaciteta pojedinih pogona(orudja za rad,mašina itd) predstavlja samo deo opštih i posebnih uslova koji su nedovoljni da potpuno obuhvate relevantne faktore proizvodnje, i da tako što realnije izraze stvarne odnose u proizvodnim procesima privrednih organizacija. Zbog toga ćemo pristupiti formulaciji i drugih ograničenja koja su često predmet razmatranja u problematici programiranja. Naravno, druga dopunska ograničenja će imati, takodje, linearni karakter i proširenje sistema u ovom smislu ne znači da će se ovim putem obuhvatiti apsolutno svi faktori, jer je to praktično nemoguće postići, već će takva nastojanja imati za cilj da što potpunije i realnije obuhvate odnose u preduzeću, kako bi ograničavajući uslovi bili što bolja aproksimacija stvarnog stanja.

U tom smislu razmotrimo dodatne uslove koji se tiču raspoloživih sirovina. Pretpostavimo, uopšte uzev, da se za proizvodnju k proizvoda koristi p različitih sirovina. Ako sa q_{is} označimo učešće i - te sirovine po jedinici s - tog proizvoda, a sa S_i ukupno raspoloživi obim i - te sirovine u posmatranom periodu, tada se ograničavajući uslovi mogu pisati u vidu sistema

$$\sum_{s=1}^{k} q_{is}\, x_s \leqslant S_i, \qquad i = 1,2...p \tag{3}$$

Ako se postavi uslov u vezi radne snage, odnosno potrebnih radnika prema odgovarajućim kvalifikacijama za pojedine proizvode i ako sa d_{js} označimo potreban fond časova j-te kvalifikacione strukture za proizvodnju jedinice s-tog proizvoda, a sa R_j označimo ukupan raspoloživi fond časova radne snage, odgovarajuće kvalifikacije u posmatranom periodu, tada se ograničavajući uslovi mogu napisati

$$\sum_{s=1}^{k} d_{js}\, x_s \leqslant R_j, \qquad j= 1,2...J \tag{4}$$

Dalje, ako je učešće repro-materijal iz uvoza,uopšte uzev neophodno za proizvodnju svakog proizvoda, tada se kao ograni - čavajući faktor javljaju raspoloživa devizna sredstva. Ako, pri tome, u procesu proizvodnje postoje (figuriraju) različiti delovi repro-materijala iz uvoza i za svaki od njih postoji poseb no ograničenje deviznih sredstava, i ako sa $U_{\ell s}$ označimo u - češće uvoznog materijala (u dolarima) po jedinici s -tog proizvoda, a sa U_{ℓ} ukupna raspoloživa devizna sredstva za ℓ -tu vr - stu materijala, tada se ograničavajući uslovi mogu izraziti sledećim sistemom

$$\sum_{s=1} u_{\ell s} x_s \leqslant U_{\ell} \qquad \ell = 1,2\ldots L \qquad (5)$$

U pogledu skladišnog prostora mogu postojati ograničenja različite vrste, bilo da je reč o sirovinama, reprodukcionom materijalu ili gotovim proizvodima - finalnoj proizvodnji.Pretpostavimo da postoji više skladišta (magacina, hladnjača itd) u kojima je, uopšte uzev, moguće vršiti razmeštaj svakog od proizvoda. Tada, ako sa z_{vs} označimo potreban prostor u v-tom skladištu po jedinici s-tog proizvoda (u m^3), a sa Z_v ukupno raspoloživi prostor v-tog skladišta u m^3, ograničavajući uslovi se mogu izraziti u obliku

$$\sum_{s=1}^{k} z_{vs} x_s \leqslant Z_v , \qquad v = 1,2\ldots V \qquad (6)$$

Ova ograničenja mogu figurirati u okviru ovako opšteg razmatranja, ali ona u različitim situacijama predstavljaju posebne probleme i imaju svoj specifičan tretman, posebno u dinamičkom aspektu, o čemu ćemo govoriti naknadno kada bude bilo reči o modelima zaliha. Medjutim, koristimo priliku da kažemo da i sva dosadašnja ograničenja u vezi različitih uslova mogu biti predmet posebnih razmatranja.

Ukupno raspoloživa finansijska sredstva mogu takodje biti ogrančavajući faktor proizvodnje. Tako na primer, ako su u periodu posmatranja raspoloživa finansijska sredstva F, a troškovi sirovina, materijala, radne snage (varijabilne troškove) po jedinici t_s, tada se uslov može pisati

$$\sum_{s=1}^{k} t_s x_s \leqslant F$$

Ukoliko se radi o većim pogonima koji predstavljaju samostalne radne organizacije sa sopstvenim sredstvima (ili u okviru združenih preduzeća i integracionim zajednicama) tada se u okviru svakog pogona mogu postavljati slična ograničenja. Ovo naravno samo onda ako se radi o simultanom učešću sredstava u okviru pogona, te tada ograničavajuće uslove možemo pisati

$$\sum_{s=1}^{k} t_{rs} x_s \leq F_r, \qquad r = 1,2...m \tag{7}$$

gde t_{rs} označava varijabilne troškove proizvodnje u r-tom pogonu po jedinici s-tog proizvoda, a F_r raspoloživa sredstva r-tog pogona.

Sem navedenih ograničenja, prilikom razmatranja standardnih problema postoje i drugi uslovi koji su značajni za real - nije izražavanje stvarnih uslova privredjivanja privrednih orga nizacija. Pomenućemo dva, relativno jednostavna ali važna uslova koji se tiču ograničenja u vezi minimalnog obima proizvodnje za odredjene proizvode i ograničenja koje se tiču mogućnosti plasmana proizvoda na tržištu. Ako je privredna organizacija zainteresovana za proizvodnju svih proizvoda iz postojećeg programa tada se postavljaju ograničenja za svaki proizvod,

$$x_s \geq g_s, \qquad s = 1,2...k \tag{8}$$

gde $g_s \geq 0$ označava donju granicu obima proizvodnje s-tog proizvoda. Ova ograničenja obezbedjuju prisustvo svih proizvoda u optimalnom programu, ali se prilikom njihovog postavljanja mora voditi računa o konzistentnosti zahteva i raspoloživih resursa, čak i u uslovima minimalnih zahteva. Njihovo prisustvo obezbe - djuje postojeći program proizvodnje, s tim što u granicama mogućnosti dopušta ostvarenje optimalnog programa. Nepostojanje ovih uslova često dovodi do proizvodnih programa koji u optimalnom rešenju obuhvataju relativno mali broj proizvoda, što u odredje nim uslovima nije prihvatljivo. Nasuprot ovome, kada se želi selekcija proizvoda, prema unapred postavljenom kriterijumu ovi uslovi nisu potrebni.

Na drugoj strani, mogu se postaviti uslovi koji limitiraju obim proizvodnje, svih ili pojedinih proizvoda, prema zahtevima tržišta. Oni izražavaju gornje granice obima proizvodnje prema unapred ocenjenom obimu tražnje h_s u datom periodu, tj.

$$x_s \leq h_s \qquad s = 1,2...k \tag{9}$$

Iz uslova (8) i (9) proizilazi

$$g_s \leq x_s \leq h_s$$

odnosno

$$g_s \leq h_s \qquad s = 1,2...k$$

Pokazli smo da sistem ograničavajućih uslova obrazuje konveksan skup tačaka tako da su sva moguća rešenja obuhvaćena postavljenim uslovima. Ograničenja (8) i (9) koja se tiču donjih i gornjih limita proizvodnje mogu, u odredjenim uslovima,biti značajna i uticati na korišćenje raspoloživih faktora (resursa),što znači da bi skup mogućih rešenja mogao biti sadržan u skupu rešenja koji rezultira iz raspoloživih resursa. Medjutim, ovo ne mora uvek biti slučaj tako da postavljena ograničenja (8) i (9) mogu sadržati skup mogućih rešenja u vezi postavljenih uslova . Tada, takva ograničenja ne bi trebalo uzimati u obzir ukoliko bi bilo mogućno izvršiti tačne procene. Ali, kada se radi o većem broju proizvoda i brojnim ograničenjima, takve procene nisu a priori moguće, pa je neophodno uzeti u obzir i ova ograniče - nja, bez obzira na to što neka od njih neće imati uticaja na optimalno rešenje, a otežavaju rešavanje problema jer nesrazmerno povećavaju broj operacija.

Kao što smo rekli svaki od razmatranih sistema ograničavajućih uslova, pri datom kriterijumu može predstavljati problem za sebe. Ali uzeti svi zajedno oni imaju poseban značaj za razmatranje optimalnih proizvodnih programa. Dakle, uzimajući funkciju kriterija (2) i ograničavajuće uslove izražene relacijama (1), (3), (4), (5), (6), (7) i (8), možemo postaviti sledeći problem: naći nenegativne vrednosti promenljivih $x_1, x_2, ... x_k$, tako da se ostvari ukupan maksimalan dohodak, tj.

$$(\max)\ f = \sum_{s=1}^{k} c_s x_s$$

respektujući ograničavajuće uslove u vezi

kapaciteta $\quad \sum_{s=1}^{k} a_{rs} x_s \leq b_r, \qquad r = 1,2...m$

sirovina $\sum_{s=1}^{k} q_{is}x_s \leq S_i$, $i = 1,2...I$

radne snage $\sum_{s=1}^{k} d_{js}\, x_s \leq R_j$, $j = 1,2...J$

uvoza $\sum_{s=1} u\ell_s\, x_s \leq U\ell$, $\ell = 1,2...L$

zalika $\sum_{s=1} z_{vs}\, x_s \leq Zv$, $v = 1,2,.. V$

finansijskih sredstava $\sum_{s=1}^{k} t_{rs}\, x_s \leq F_r$, $r = 1,2...m$

donje granice obima proizvod. $x_s \geq g_s$, $s = 1,2...k$

tražnje $x_s \leq h_s$, $s = 1,2...k$

Vidimo da u problemu figurira k promenljivih (nepoznatih) i 2(m + k) + I + J + L + V nejednačina. Posle uvodjenja dopunskih promenljivih u svaku od nejednačina sistema, problem će imati 2m + 3k + I + J + L + V promenljivih.

Primera radi posmatrajmo sistem ograničavajućih uslova koji se tiče kapaciteta pogona i gornjih i donjih granica obima proizvodnje posmatranih proizvoda

$$\sum_{s=1}^{k} a_{rs}\, x_s \leq b_r \qquad r = 1,2...m$$

$$x_s \leq h_s \qquad s = 1,2...k$$

$$x_s \geq g_s$$

ili posle uvodjenja dopunskih promenljivih

x_{k+r}, x_{k+r+s}, x_{k+r+2s}, imamo:

$$\sum_{s=1}^{k} a_{rs}\, x_s + x_{k+r} = b_r, \qquad r = 1,2...m$$

$$x_s + x_{k+r+s} = h_s, \qquad s = 1,2...k$$

$$x_s - x_{k+r+2s} = g_s$$

gde je broj efektivnih promenljivih k, a dopunskih m + 2k .

U matricionom obliku, sistem ograničavajućih uslova može se napisati

$$\left\{\begin{array}{l:l:l:l}
a_{11}\ a_{12}\ldots a_{1k} & 1\ 0\ \ldots\ 0 & & \\
a_{21}\ a_{22}\ldots a_{2k} & 0\ 1\ \ldots\ 0 & & \\
\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & & \\
\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & & \\
a_{m1}\ a_{m2}\ldots a_{mk} & 0\ 0\ \ldots\ 1 & & \\
\hdashline
1\ 0\ \ldots\ 0 & & 1\ 0\ \ldots\ 0 & \\
0\ 1\ \ldots\ 0 & & 0\ 1\ \ldots\ 0 & \\
\cdot\ \cdot\ \cdot & & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \\
\cdot\ \cdot\ \cdot & & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \\
0\ 0\ \quad 1 & & 0\ 0\ \ldots .1 & \\
\hdashline
1\ 0\ \ldots\ o & & & -1\ 0\ \ldots\ 0 \\
0\ 1\ \ldots\ 0 & & & 0\ 1\ \ldots\ 0 \\
\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & & & \cdot\ \cdot\ \cdot \\
\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & & & \cdot\ \cdot\ \cdot \\
0\ 0\ \quad 1 & & & 0\ 0\ \quad -1
\end{array}\right\}$$

Vidimo da u ovom slučaju matrica sistema ima 3k + m vek - tora aktivnosti od kojih je svaki reda 2k + m. Prema tome baza sistema je reda 2k + m. Broj bazičnih sistema je

$$\binom{3k+m}{2k+m} = \frac{(3k+m)\,!}{n(2k+m)\,!\,k!}$$

Napomenuli smo da se zahtev odnosno kriterijum može postaviti u različitoj formi. U razmatranom modelu uzeli smo krite - rijum maksimalni dohodak.

$$f = \sum_{s=1}^{k} c_s\, x_s$$

gde smo sa c_s označili dohodak po jedinici koji se ostvaruje od proizvoda P_s.

Ako se postavi kriterijum maksimalne vrednosti proizvod - nje tada možemo pisati

$$f_1 = \sum_{s=1}^{k} p_s\, x_s$$

gde p_s označava cenu s-tog proizvoda a f_1 ukupnu vrednost proizvodnje.

Ako sa d_s označimo dobit po jedinici S -tog proizvoda onda se kriterijum može izraziti u obliku

$$f_2 = \sum_{s=1}^{k} d_s x_s$$

gde f_2 označava ukupnu dobit.

U slučaju kriterija u vezi maksimalnog korišćenja kapaciteta, koeficijenti se odredjuju tako što se posmatra ukupno pot rebno vreme angažovanja kapaciteta u svim pogonima na jedinicu s-tog proizvoda, tj. $\sum_{r=1}^{m} a_{rs}$, pa funkcija kriterijuma ima oblik

$$f_3 = \sum_{s=1}^{k} \sum_{r=1}^{m} a_{rs} x_s$$

I u drugim slučajevima funkcija kriterijma se na sličan način može postaviti. Ono što je bitno u pogledu kriterijuma jeste da svakom kriterijumu, uopšte uzev, odgovara drugi opti - malni program pri istim ili promenjenim ograničavajućim uslovima.

Dinamički model programiranja

Jedan specijalan slučaj dinamičkog programiranja može se razmatrati preko linearnog programiranja. Pretpostavimo da u vremenskom intervalu (0,T) preduzeće ima raspoložive kapacitete $b' = (b_1, b_2, \ldots b_m)$ sa matricom tehničko-tehnoloških uslova proizvodnje A reda (m,n) i datom funkcijom kriterijuma f. Ako vre - menski interval podelimo na k jednakih perioda, tada pod nepromenljivim tehničkim uslovima proizvodnje i srazmernim smanjenjem raspoloživih kapaciteta u pojedinim periodima imamo k istovetnih programa. Medjutim ako se pretpostavi da postoje dopunska ograničenja $x_{sj} \leq g_{sj}$ $(j = 1,2\ldots k)$ u vezi plasmana proizvoda na tržištu u pojedinim periodima, tada se problem može postaviti i rešavati dvojako: ili kao u predhodnom slučaju u vidu k nezavisnih problema ili simultano preko svih perioda u dinamičkom smislu. Prvi slučaj je jednostavniji ali ne i sasvim prih - vatljiv zbog toga što u zavisnosti od tržišnih ograničenja,koja mogu varirati u različitim periodima, dovodi do toga da u jednom periodu kad je tražnja relativno mala dodje do nepotpunog korišćenja kapaciteta, a u drugom kad je veća do nemogućnosti ostvarenja odgovarajućeg obima proizvodnje i zadovoljenja tržišnih zahteva. Zbog toga je ispravnije simultano posmatranje odgovarajućih programa preko svih perioda u smislu dinamičkog programiranja. Ako se još pretpostavi da u odgovarajućim periodima postoji i donja ograničenja oblika $x_{sj} \geq h_{sj}$, kao i to da su tehničko-tehnološki uslovi proizvodnje u različitim periodima različiti, tj. ako je matrica sistema u j-tom periodu $A_j (j=1,2...k)$, tada se sistem u dinamičkom obliku može izraziti.

$$
\left\{
\begin{array}{ccccccccccc}
A_1 & A_2 & \cdots & A_k & I' & & & & & & \\
I_1 & & & & & I_1 & & & & & \\
 & I_2 & & & & & I_2 & & & & \\
\vdots & \vdots & \vdots & & & & & & & & \\
 & & & I_k & & & & I_k & & & \\
I_1 & & & & & & & & -I_1 & & \\
 & I_2 & & & & & & & & I_2 & \\
\cdots & \cdots & & & & & & & & & \\
\cdots & \cdots & & & & & & & & & \\
 & & & I_k & & & & & & & -I_k
\end{array}
\right\}
$$

gde $A_1, A_2, ... A_k$ označavaju matrice tehničkih uslova proizvodnje u odgovarajućim periodima, $I_1, I_2, ... I_k$ jedinične matrice n-tog reda, koje odgovaraju donjim i gornjim ograničenjima obima proizvodnje prema unapred postavljenim zahtevima a I' jednačina matrica m-tog reda. Postavljena struktura sistema ne mora zavisiti od različitih tehničkih uslova proizvodnje u pojedinim periodima jer bi i u slučaju $A_1 = A_2 = ... = A_k$ ostala nepromenjena. Ako je u pitanju n proizvoda i m ograničenja u k različitih perioda, sa dodatnim ograničenjima u pojedinim periodima onda je red matrice sistema $(m + 2kn; 3kn + m)$. Drugim rečima sistem će imati $m + 2kn$ jednačina sa kn efektivnih i 2kn+m dopunskih promenljivih.

U daljem razmatranju, može se pretpostaviti da u okviru svakog pogona postoji više ograničenja koja se tiču i drugih uslova a ne samo tehničkih, tako da u okviru I-tog pogona u j-tom periodu razmatramo sledeći sistem

$$A_{ij} = \begin{Bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \\ a_{m_{i1}}, & a_{m_{i2}} & \dots & a_{m_{in}} \end{Bmatrix} \qquad \begin{matrix} i = 1,2\dots q \\ j = 1,2\dots k \end{matrix}$$

gde smo koeficijente matrice iz tehničkih razloga označili sa a_{rs} $(r = 1,2\dots m_i;\ s=1,2\dots n)$ umesto a_{rs}^{ij}. Broj kolona matrice u svakom periodu je n, a broj vrsta zavisi od ograničenja u pojedinim pogonima, tako da je za i-ti pogon red matrice $(m_i;\ n)$.

Matrica sistema preko svih perioda, ima oblik

$$\begin{Bmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1k} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2k} \\ \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \\ A_{q1} & A_{q2} & \dots & A_{qk} \end{Bmatrix}$$

odnosno, posle uvodjenja dopunskih promenljivih

$$\begin{Bmatrix} A_{11} & \dots\dots & A_{1k} & I'_1 & \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ A_{q1} & \cdot\ \cdot\ \cdot & A_{qk} & \cdot\ \cdot\ \cdot & I'_q \end{Bmatrix}$$

gde je I'_i $(i = 1,2\dots q)$ jedinična matrica m_i-tog reda i odgovara dopunskim promenljivim i-tog pogona.

U slučaju ograničenja u vezi tražnje i donjih limita proizvodnje u svim periodima, sistem postaje

$$\begin{Bmatrix} A_{11} & \dots\dots & A_{1k} & I'_1 & & & \\ \dots\dots \\ \dots\dots \\ A_{q1} & \dots\dots & A_{qk} & I'_q & & & \\ I_1 & & & & I_1 & & \\ & & I_k & & & I_k & \\ I_1 & & & & & & -I_1 \\ & & I_k & & & & & -I_k \end{Bmatrix}$$

gde je, kao što smo rekli I'_i jedinična matrica m_i-tog reda, a

I_j (j=1,2...k) jednačina matrica n-tog reda. Sistem ima $\sum_i m_i+2nk$ jednačina sa $\sum m_i+3nk$ promenljivih od kojih nk efektivnih i $\sum_i m_i + 2nk$ dopunskih.

Model planiranja proizvodnje

U preduzeću se često postavljaju problemi u vezi izvrše - nja plana proizvodnje, odnosno mogućnostima realizacije odredje-nog obima proizvodnje u posmatranom periodu, ili zadaci koji proizilaze iz ugovornih obaveza sa utvrdjenim rokom isporuke. Ovakvi i slični zadaci spadaju u grupu problema linearnog programiranja i karakteristični su po tome što se odredjena proiz - vodnja želi ostvariti u predvidjenom roku. U takvim slučajevima radna organizacija ispituje mogućnost što potpunijeg korišćenja kapaciteta i što bolje raspodele poslova.

Prepostavimo da preduzeće proizvodi k različitih proizvoda na m različitih mašina, pri čemu svaka mašina može proizvoditi bilo koji od proizvoda sa različitim utroškom vremena po jedinici. Neka koeficijent a_{rs} $(r = 1,2...m; \; s = 1, 2 ... k)$ označava utrošak vremena na r-toj mašini po jedinici s-tog proizvoda. Označimo sa b_r ukupno raspoloživi fond časova r-te ma - šine, a sa q_s ukupnu zahtevanu količinu s-tog proizvoda u datom periodu. Neka x_{rs} označava obim proizvodnje s-tog proizvoda na r-toj mašini.

Problem se sastoji u odredjivanju programa proizvodnje (raspodele poslova na pojedine mašine) tako da ukupno raspoloživi kapaciteti budu maksimalno iskorišćeni, pri čemu treba uzeti u obzir i zahtev u vezi planiranog obima proizvodnje. Postavljanje problema nešto je drugojačija u odnosu na probleme kod ko - jih se traži maksimalno korišćenje kapaciteta. Ova razlika proizilazi iz dvojakog karaktera ograničavajućih uslova, tj.uslova u pogledu utroška vremena pojedinih mašina za jedinicu proizvoda i uslova u pogledu planiranog obima proizvodnje u datom pe - riodu.

Model se u opštem obliku može izraziti na sledeći način: naći maksimalnu vrednost funkcije kriterija

$$(\max)\; f = \sum_{r=1}^{m} \sum_{s=1}^{k} a_{rs}\, x_{rs},$$

koja izražava ukupan fond časova koji preduzeću stoji na raspolaganju u datom periodu, pri ograničavajućim uslovima

$$\sum_{s=1}^{k} a_{rs} x_{rs} \leqslant b_r \qquad r = 1,2...m$$

$$\sum_{r=1}^{m} x_{rs} = q_s \qquad s = 1,2...k$$

$$x_{rs} \geqslant 0$$

ili u razvijenom obliku

$$a_{11} x_{11} + a_{12} x_{12} + \ldots + a_{1k} x_{1k} \leqslant b_1$$
$$a_{21} x_{21} + a_{22} x_{22} + \ldots + a_{2k} x_{2k} \leqslant b_2$$
$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$
$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$
$$a_{m1} x_{m1} + a_{m2} x_{m2} + \ldots + a_{mk} x_{mk} \leqslant b_m$$
$$x_{11} + x_{21} \ldots\ldots + x_{m1} = q_1$$
$$x_{12} + x_{22} \ldots\ldots + x_{m2} = q_2$$
$$: \; : \; : \; : \; : \; :$$
$$x_{1k} + x_{2k} + \ldots \; x_{mk} = q_k$$

Ograničavajući uslovi predstavljeni sa m prvih nejednačina izražavaju uslove proizvodnje a ograničavajući uslovi dati sa k poslednjih jednačina izražavaju plan proizvodnje koji treba ostvariti u posmatranom periodu.

Problem će imati rešenje, ako su zahtevi u pogledu plana proizvodnje konzistentni sa tehničko-tehnološkim uslovima pr izvodnje.

Model investicija

Pretpostavimo da preduzeće proizvodi m proizvoda u n različitih pogona, ili različitih proizvodnih procesa. Planirano je povećanje r-tog proizvoda za P_r novčanih jedinica (apsolutno izraženo) u odredjenom periodu. Označimo sa $k_{rs} = \frac{\Delta P_r}{J_s}$ priraštaj proizvodnje r-tog proizvoda na jedinicu ulaganja u s-tc pogonu. Priraštaj proizvodnje i ulaganja izražena su vrednosno.

Ako sa $c_s = \sum_{r}^{m} k_{rs}$ označimo koeficijent u funkciji kriterija koji izražava ukupan priraštaj proizvodnje različitih proizvoda na jedinicu ulaganja u s-tom pogonu, problem se može svesti na traženje optimalnog programa ulaganja, tako da planirano pove - ćanje proizvodnje posmatranih proizvoda bude maksimalno.

Funkcija kriterija i ograničavajući uslovi mogu se napisati

$$(\max)\ f = \sum_{s=1}^{n} c_s J_s = \sum_{s=1}^{n} \left(\sum_{r=1}^{m} k_{rs} \right) J_s$$

$$\sum_{s=1}^{n} k_{rs} J_s \leqslant P_r , \qquad r = 1,2...m$$

$$J_s \geqslant 0$$

Sem navedenih ograničenja u pogledu ulaganja, mogućno je postaviti dopunska ograničenja u vezi ukupno raspoloživih sredstava S, tj.

$$\sum_{s=1}^{n} J_s = S,$$

a takodje i ograničenja u pogledu gornjih i donjih limita ulaganja po pogonima u obliku

$$j_s \leqslant q_s , \qquad J_s \geqslant h_s, \qquad q_s \leqslant h_s, \qquad s= 1,2...n$$

Slični modeli mogu se koristiti prilikom udruživanja (integracija) istorodnih preduzeća koja imaju slične proizvodne programe i planiraju udruženo povećanje proizvodnje.

Model uvoza

Spoljno trgovinsko preduzeće uvozi m vrsta reprodukcionog materijala $R_r (r = 1,2...m)$ iz n zemalja Z_s (s=1,2...n), prema različitim uslovima, koji se tiču cena, transportnih i drugih trškova. Postoje ograničenja deviznih sredstava prema vrsti proizvoda, a takodje i ograničenja u pogledu obima uvoza. Tabela ilustruje odgovarajuće uslove.

vrsta repro-materij.	Troškovi uvoza po jedinici z_1 z_2 .... z_n	Raspoloživa devizna sredstva
R_1	p_{11} p_{12}........ p_{1m}	s_1
R_2	p_{21} p_{22}........ p_{2n}	s_2
.	. . . . .	.
.	. . . . .	.
R_m	p_{m1} p_{m2}.........p_{mn}	s_m

Ako sa $u_1, u_2, \ldots u_n$ označimo obime uvoza iz pojedinih zemalja, tada se problem sastoji u traženju optimalnog programa uvoza iz odgovarajućih zemalja tako da se postigne maksimalan ukupan uvoz, tj.

$$(\max)U = \sum_{s=1}^{n} u_s ,$$

pri ograničavajućim uslovima

$$\left\{\begin{matrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ p_{m1} & p_{m2} & \cdots & p_{mn} \end{matrix}\right\} \cdot \left\{\begin{matrix} u_1 \\ u_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ u_n \end{matrix}\right\} \leq \left\{\begin{matrix} s_1 \\ s_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ s_m \end{matrix}\right\}$$

Posle uvodjenja dopunskih promenljivih matrica sistema postaje

$$\left\{\begin{matrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & & & \\ p_{m1} & p_{m2} & \cdots & p_{mn} & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{matrix}\right\}$$

ili

$$\left\{A_{mn} \; I_m\right\}$$

gde je A_{mn} matrica sistema a I_m jedinična matrica m-tog reda.

Ukoliko postoje ograničenja u pogledu maksimalnog obima uvoza iz pojedinih zemalja tada matrica sistema postaje

$$\begin{Bmatrix} A_{mn} & I_m & 0_{mn} \\ I_n & 0_{nm} & I_n \end{Bmatrix}$$

Najzad, ukoliko postoje ograničenja u pogledu maksimalnog i minimalnog uvoza matrica sistema ima oblik

$$\begin{Bmatrix} A_{mn} & I_m & 0_{mn} & 0_{mn} \\ I_n & 0_{nm} & I_n & 0_{nn} \\ I_n & 0_{nm} & 0_{nn} & -I_n \end{Bmatrix}$$

gde su I_m i I_n jedinične matrice m-tog i n-tog reda, a 0_{mn} nula matrica (m,n) tog reda.

U slučaju dva proizvoda i tri zemlje, imamo

$$\begin{aligned}
p_{11} u_1 + p_{12} u_2 + p_{13} u_3 &\leqslant S_1 \\
p_{21} u_1 + p_{22} u_2 + p_{23} u_3 &\leqslant S_2 \\
u_1 \qquad\qquad\qquad &\leqslant h_1 \\
u_2 \qquad\quad &\leqslant h_2 \\
u_3 &\leqslant h_3 \\
u_1 \qquad\qquad\qquad &\geqslant q_1 \\
u_2 \qquad\quad &\geqslant q_2 \\
u_3 &\geqslant q_3
\end{aligned}$$

Posle uvodjenja dopunskih promenljivih, imamo

$$\begin{array}{lllllllllllll}
p_{11} u_1 & + p_{12} u_2 & + p_{13} u_3 & + u_4 & & & & & & & & & = S_1 \\
p_{21} u_1 & + p_{22} u_2 & + p_{23} u_3 & & + u_5 & & & & & & & & = S_2 \\
u_1 & & & & & + u_6 & & & & & & & = h_1 \\
 & u_2 & & & & & + u_7 & & & & & & = h_2 \\
 & & u_3 & & & & & + u_8 & & & & & = h_3 \\
u_1 & & & & & & & & - u_9 & & & & = q_1 \\
 & u_2 & & & & & & & & -u_{10} & & & = q_2 \\
 & & u_3 & & & & & & & & -u_{11} & & = q_3
\end{array}$$

Odnosno sa matricom sistema reda (8,11)

$$A = \left\{ \begin{matrix} A_{23} & I_{22} & 0_{23} & P_{23} \\ I_{33} & 0_{32} & I_{33} & 0_{33} \\ I_{33} & 0_{32} & 0_{33} & -I_{33} \end{matrix} \right\}$$

gde indeksi pokazuju red matrica, ili u razvijenom obliku

$$\left\{ \begin{matrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{matrix} \right\}$$

Model zaliha

Razmatranje problema zaliha metodama linearnog programi - ranja obuhvata one aspekte problema kojima se ispituju uslovi za uskladjivanje proizvodnih planova preduzeća sa zahtevima tržišta. Imajući u vidu promene tražnje u različitim vremenskim periodima, koje mogu biti sezonskog ili drugog karaktera, i mogućnost da se one realno ocene, nameću potrebu privrednim organizacijama da pristupe programiranju proizvodnje. U takvim uslovima postoji potreba za uskladjivanjem proizvodnih kapaciteta i drugih resursa sa stvarnim zahtevima tržišta, izbegavajući nepotrebna i prevremena angažovanja sredstava kada se radi o jednoj grupi proizvoda, a nedovoljna u drugim slučajevima za koje postoji realno veće potrebe. Na taj način dolazi do smanjenja zaliha i odgovarajućih troškova. Ovo je naročito značajno pri razmatranju složenih proizvodnih programa koji simultano obuhvataju tehničko-tehnološke uslove proizvodnje i tržišne uslove za relativno veliki broj proizvoda i u različitim vremenskim intervalima. Takva razmatranja poznata su još pod imenom mesečnog ili kalendarskog programiranja zbog toga što se ovakvim pristupom mogu vršiti ispitivanja mesečnih (tromesečnih ili nedeljnih)proizvodnih programa.

Model koji ćemo ovde razmatrati omogućava da se odrede takvi proizvodni programi koji će pokazati koliko i u kom periodu treba proizvoditi svaki od posmatranih proizvoda da bi se postigli najveći efekti, odnosno da bi se troškovi zaliha sveli na najmanju moguću meru. Ovde troškovi zaliha (skladištenja)kao kriterijum često imaju sekundarni karakter, jer su oni relativno mali u odnosu na angažovana sredstva na zalihama. Medjutim, oni su vrlo dobar pokazatelj direktnih i indirektnih efekata zbog toga što izmedju njih i ostalih troškova po jedinici postoji vrlo visoka korelacija. Oni na indirektan način izražavaju odnose u proizvodnji i realizaciji.

Pretpostavimo da preduzeće proizvodi n proizvoda P_s ($s = 1, 2 \ldots n$) na m različitih mašina M_r ($r = 1,2 \ldots m$) u k jednakih perioda q_t ($t = 1,2 \ldots k$).

Uvedimo sledeće oznake:

a_{rs} - utrošak vremena na r-toj mašini za jedinicu s-tog proizvoda (u časovima).

b_{rt} - ukupno raspoloživi kapacitet r-te mašine u periodu t (u časovima).

c_s - troškovi stokiranja (skladištenja) jedinice s-tog proizvoda (jednaki za bilo koji period)

x_{st} - obim proizvodnje s-tog proizvoda u periodu t.

p_{st} - obim tražnje proizvoda s u periodu t.

$P_{st} = \sum_{i=1}^{t} p_{si}$ - kumulativ tražnje s-tog proizvoda za prvih t-perioda

$X_{st} = \sum_{i=1}^{t} x_{si}$ - kumulativ proizvodnje s-tog proizvoda za prvih t-perioda

Problem je odrediti minimalne troškove zaliha

$$C = \sum_{s=1}^{n} \sum_{t=1}^{k} c_s (X_{st} - P_{st})$$

za sve proizvode preko svih perioda, pod uslovom da kumulativ proizvodnje nije manji od kumulativa tražnje, tj.

$$X_{st} \geq P_{st} \qquad \begin{array}{l} s = 1,2 \ldots n \\ t = 1,2 \ldots k \end{array}$$

a pri datim tehničko-tehnološkim uslovima proizvodnje

$$\sum_{s=1}^{n} a_{rs}\, x_{st} \leqslant b_{rt} \qquad r = 1,2...m \quad t = 1,2...k$$

Korišćenjem relacija

$$P_{st} = \sum_{s=1}^{t} p_{si} \quad \text{i} \quad X_{st} = \sum_{i=1}^{t} x_{si}$$

problem se može izraziti i na sledeći način: naći nenegativne promenljive x_{st} ($s = 1,2...\ n$; $t = 1,2...k$) tj. obime proizvodnje različitih proizvoda u različitim periodima, tako da ukup - ni troškovi stokiranja budu minimalni, tj.

$$(\min)C = \sum_{s=1}^{n} \sum_{t=1}^{k} \sum_{i=1}^{t} c_s\, (x_{si} - p_{si})$$

pri ograničavajućim uslovima

$$\sum_{i=1}^{t} (x_{si} - p_{si}) \geqslant 0 \qquad s = 1,2...\ n \quad t = 1,2...\ k$$

$$\sum_{s=1}^{n} a_{rs}\, x_{st} \leqslant b_{rt} \qquad r = 1,2...\ m \quad t = 1,2...\ k$$

$$x_{st} \geqslant 0 \quad \text{za svako } s \text{ i } t.$$

Problem se javlja u relativno složenom obliku zbog toga što je neophodno povezivanje programa u različitim periodima . Drugim rečima, ovde je reč o jednom specijalnom slučaju dinamičkog programiranja. U ovakvim i sličnim slučajevima nije dovoljno odrediti k nezavisnih programa, koji se odnose na različite periode, već je potrebno njihovo nedjusobno uskladjivanje , što zahteva simultano rešavanje sistema ograničavajućih uslova uz postavljeni kriterijum. Broj promenljivih i broj nejednačina u ovakvim problemima po pravilu je veliki. Za n proizvoda, k perioda i m mašina, broj promenljivih je nk, a broj nejedna - čina (m + n) k. Ako se još uzmu u obzir dopunske promenljive za svaku nejednačinu, onda je ukupan broj promenljivih (m+ 2n)k .

Model ishrane

Preduzeće prehranbene industrije proizvodi odredjenu vrstu hrane, upotrebljavajući pri tome k osnovnih artikala sa m hranljivih sastojaka.

Označimo sa a_{rs} ($r = 1,2\ldots m$, $s = 1,2\ldots k$) količinu r-tog hranljivog sastojka na jedinicu s-tog artikla, sa b_r minimalnu, unapred propisanu količinu r-tog sastojka na jedinicu pripremane hrane, sa c_s cenu po jedinici s-tog artikla.

Problem je odrediti optimalnu kombinaciju utrošenih artikala tako da troškovi budu minimalni, tj.

$$(\min)\ C = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_k x_k$$

respektujući uslove u vezi propisanih minimalnih iznosa hranljivih sastojaka, tj.

$$\sum_{s=1}^{k} a_{rs} x_s \geqslant b_r, \qquad (r = 1,2\ldots m)$$

$$x_s \geqslant 0$$

Dualni model

Posmatrajmo standardni oblik problema u kome ograničavajući uslovi izražavaju tehničko-tehnološke uslove proizvodnje m različitih faktora, a funkcija kriterijuma dobit koja se ostvaruje od k proizvoda, tj.

$$(\max)\ f = c'x$$

$$Ax \leqslant b, \qquad x \geqslant 0,$$

gde je f ukupna dobit

$c' = (c_1, c_2 \ldots c_k)$ - vektor dobiti po jedinici proizvoda

$x' = (x_1, x_2, \ldots x_k)$ - vektor obima proizvodnje

$b' = (b_1, b_2, \ldots b_m)$ - vektor raspoloživih faktora,

$$A = \begin{Bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2k} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mk} \end{Bmatrix}$$

matrica tehničko-tehnoloških uslova proizvodnje.

Dualni problem ima oblik

$$(\min)\ v = b'y$$
$$A'y \geqslant c$$

gde je v vrednost funkcije kriterijuma duala, a y vektor dualnih promenljivih.

Postoji mogućnost da se u odredjenim uslovima pruži adekvatna ekonomska interpretacija dualnog problema, a posebno dualnih promenljivih.

Posmatrajmo r-to ograničenje primarnog problema, pretpostavljajući da je odgovarajuća dopunska promenljiva jednaka nuli, odnosno da je raspoloživi iznos r-tog faktora u potpunosti iskorišćen za odredjeni proizvodni program, tj.

$$\sum_{s=1}^{k} a_{rs}\, x_s = b_r,$$

gde,kao što smo rekli a_{rs} označava učešće (obim) r-tog faktora na jedinicu s-tog proizvoda, a b_r ukupno raspoloživi iznos r-tog faktora.

Posmatrajmo, sada, s-to ograničenje duala koje, po definiciji, odgovara r-tom ograničenju primarnog problema, tj.

$$\sum_{r=1}^{m} a_{rs}\, y_r \geqslant c_s,$$

gde c_s označava dobit po jedinici s-tog proizvoda (izražena vrednosno). Interpretacija dualne promenljive y_r u sklopu posmatrane relacije može biti data na sledeći način.

Pošto c_s označava dobit po jedinici s-tog proizvoda, koja je izražena vrednosno (recimo u dinarima) to ono ima dimenziju dinar po jedinici s-tog proizvoda. Istu dimenziju mora imati izraz $a_{rs}\, y_r$. Ali kako a_{rs} ima dimenziju r-tog faktora na jedinicu s-tog proizvoda, to y_r mora imati dimenziju vrednosti (u dinarima) po jedinici r-tog faktora. Drugim rečima, dualna promenljiva y_r predstavlja vrednost (trošak, cenu) jedne jedinice r-tog faktora angažovanog u proizvodnji jedinice s-tog proizvoda od koje se ostvaruje dobit c_s. Kako u procesu proizvodnje sudeluje m faktora, to dualne promenljive $y_1, y_2, \ldots y_m$ označavaju troškove (cene, učešća, vrednosti itd. zavisno od problema) pojedinih faktora (uzetih po jedinici faktora) za proizvodnju jedne jedinice s-tog proizvoda, od koje se ostvaruje dobit c_s. Ovi troškovi ne izražavaju realne troškove proizvodnje, već relativna učešća troškova posmatranih faktora. Oni su poznati još pod imenom shadow prices, ili input-troškova, ili obračunskih troškova. Uopšte uzev, dualne promenljive izkazuju relativno učešće faktora u procesu proizvodnje.

Pošto leva strana s-tog ograničenja duala, tj. $\sum_r a_{rs} y_r$ predstavlja troškove (vrednosti) angažovanih faktora za proizvodnju jedne jedinice s-tog proizvoda ona je, s obzirom na relaciju

$$\sum_{r=1}^{m} a_{rs} y_r \geq c_s$$

veća ili najviše jednaka dobiti po jedinici s-tog proizvoda. Imajući u vidu funkciju kriterijuma $v = b'y$, koja predstavlja ukupne troškove raspoloživih faktora, problem se sastoji u nalaženju takvih vrednosti dualnih promenljivih da ukupni troškovi proizvodnje budu minimalni.

U drugim slučajevima interpretacije duala mogu biti različite u zavisnosti od problema, ali smatramo da jedan pristup može biti od posebnog teorijskog i praktičnog značaja. Ako pretpostavimo da koeficijenti u funkciji kriterijuma označavaju dohotke po jedinici proizvoda, a ograničenja se tiču raspoloživih kapaciteta pojedinih pogona, tada se pod odredjenim uslovima koji se tiču približno iste produktivnosti sredstava rada, konstantnih graničnih dohodaka po jedinici i u uslovima slobodnog tržišta preko dualnog problema može doći do osnove za raspodelu dohotka.

Prema onome što smo malopre rekli u vezi dualnih promenljivih proizilazi da one imaju značenje uloženog živog rada izraženog vrednosno po jednom času angažovanog kapaciteta r-tog pogona. Jer ispitujući dimenzije pojedinih veličina, imamo a_{rs} -časovi r-tog pogona po jedinici s-tog proizvoda, y_r-vrednost uloženog živog rada po času u r-tom pogonu a c_s - dohodak po jedinici s-tog proizvoda. Dakle,

$$\frac{\text{časovi r-tog pogona}}{\text{jed.s-tog proizvoda}} \cdot \frac{\text{vrednost živog rada}}{\text{časovi r-tog pogona}} = \frac{\text{dohodak}}{\text{jed.s-tog proizvoda}}$$

vidimo da dualna promenljiva y_r označava jednočasovnu vrednost živog rada u r-tom pogonu za ostvarenje dohotka po jedinici s-tog proizvoda. Drugim rečima, ona predstavlja udeo živog rada u okviru r-tog pogona za ostvarenje jediničnog dohotka s-tog proizvoda. Prema tome, izraz $\sum_{r} a_{rs} y_r$ označava angažovani živi rad preko svih pogona potreban da se ostvari jedinični dohodak s-tog proizvoda. On je veći ili jednak dohotku c_s, tj.

$$\sum_{r=1}^{m} a_{rs}\, y_r \geqslant c_s$$

Ovakvo objašnjenje može biti uzeto u obzir jer ukoliko se ostvaruje optimalan program proizvodnje, odnosno ukoliko su $y_r (r=1,2,\ldots m)$ optimalne vrednosti, uloženi živi rad biće jednak dohotku (novostvorenoj vrednosti) a ukoliko rešenje nije optimalno tada je on veći od dohotka.

Funkcija kriterijuma duala $v= b'y$ izkazuje ukupan živi rad potreban u procesu proizvodnje za ostvarenje odredjenog programa proizvodnje. Važno je primetiti da je za ma koje moguće rešenje primarnog i odgovarajuće rešenje dualnog problema ukupan dohodak manji ili najviše jednak ukupno angažovanom živom radu, tj. $f \leqslant v$. Samo u slučaju kada se ostvaruje optimalan program proizvodnje postoji jednakost, $(\max)\ f= (\min)\ v$, izmedju ukupnog dohotka i ukupnog angažovanog živog rada.

Da ovo pokažemo podjimo od optimalne baze primarnog problema i prepostavimo da su kapaciteti svih pogona u potpunosti iskorišćeni. Ako sa B označimo optimalnu bazu, tada je optimalno rešenje

$$\bar{x} = B^{-1} b \qquad |B| \neq 0$$

gde smo sa $\bar{x}$ označili vektor optimalnog rešenja koji sadrži komponente koje odgovaraju aktivnostima u bazi. Za optimalno rešenje postiže se maksimalan dohodak

$$(\max)\ f= \bar{c}' B^{-1} b$$

gde je $\bar{c}'$ vektor dohodaka po jedinici proizvoda koji se nalaze u optimalnoj bazi.

Odredimo sada dohodak koji se postiže angažovanjem jedne jedinice kapaciteta r-tog pogona. Tada imamo

$$\bar{x}_r = B^{-1} I_r$$

gde je I_r jedinični vektor, odakle posle zamene u funkciji kriterijuma imamo

$$f_r = \bar{c}' B^{-1} I_r$$

Kako je $\bar{c}' B^{-1} I_r = y_r$, to vidimo da je dohodak koji se ostvaruje angažovanjem jedne jedinice kapaciteta r-tog pogona jednak jednočasovnom učešću živog rada r-tog pogona, tj. $f_r = y_r$. Uzeto na sličan način preko svih pogona imamo:

$$(f_1, f_2, \dots f_m) = (y_1, y_2, \dots y_m) = \bar{c}' B^{-1} I$$

odnosno

$$y' = \bar{c}' B^{-1} \qquad (1)$$

ili posle množenja sa B dobijamo

$$y' B = \bar{c}' \text{ odnosno } B' y = \bar{c} ,$$

odakle vidimo da je B optimalna baza duala i da je y' optimalno rešenje dualnog problema. Posle množenja jednačine (1) sa b, imamo

$$y' b = \bar{c}' B^{-1} b = \bar{c}' \bar{x},$$

odakle vidimo da je za optimalnu bazu maksimalni dohodak jednak minimalno angažovanom živom radu, tj.

$$(\max) f = (\min) v$$

Primećujemo da za aktivnosti koje nisu u optimalnoj bazi A_s $(s = m + 1, m + 2, \dots k)$
imamo:

$$\bar{x}_s = B^{-1} A_s \text{ ,odnosno } f_s = \bar{c}' B^{-1} A_s$$

Kako je prema simplex kriterijumu za sve nebazične aktivnosti $c_s - f_s \leqslant 0$, odnosno $f_s \geqslant c_s$, ili $\bar{c}' B^{-1} A_s \geqslant c_s$ i $y = \bar{c}' B^{-1}$, imamo:

$$y A_s \geqslant c_s,$$

odnosno

$$\sum_{r=1}^{m} a_{rs} y_r \geqslant c_s,$$

što pokazuje da je za one aktivnosti koje su van optimalne baze uloženi živi rad veći od dohotka. Medjutim, za sve aktivnosti u optimalnoj bazi imamo $c_s - f_s = 0$, odnosno $f_s = c_s$, ili

$$\sum_{r=1}^{m} a_{rs} y_r = c_s, \quad \text{za} \quad s = 1, 2 \dots m,$$

odakle se vidi da je za optimalno rešenje $y_1, y_2 \dots y_m$ uloženi živi rad jednak dohotku.

IV. MODELI KOOPERACIJE I INTEGRACIJE

Prilikom razmatranja problema kooperacije ograničavajući uslovi se često javljaju u vidu složenih sistema madjuzavisnosti. Tako na primer ako u kooperaciji sudeluje k preduzeća na proizvodnji n proizvoda, tada se ograničavajući uslovi svih kooperanata javljaju simultano u okviru složenog sistema. Neka su ograničavajući uslovi j-tog preduzeća

$$\sum_{s=1}^{n} a_{rsj}\, x_{sj} \leqslant b_{rj} \qquad \begin{array}{l} r = 1,2\ldots m_j \\ j = 1,2\ldots k \end{array}$$

sa matricom sistema

$$A_j = \left\{ \begin{array}{llll} a_{11j} & a_{12j} & \cdots & a_{1nj} \\ a_{21j} & a_{22j} & \cdots & a_{2nj} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1j} & a_{m2j} & \cdots & a_{mnj} \end{array} \right\} \qquad j = 1,2\ldots k$$

gde a_{rsj} označava angažovanje r-tog pogona na jedinicu s-tog proizvoda u j-tom preduzeću.

Posle uvodjenja dopunskih promenljivih matrica sistema postaje

$$\left\{ \begin{array}{llll|llll} a_{11j} & a_{12j} & \cdots & a_{1nj} & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ a_{21j} & \cdot & \cdots & a_{2nj} & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & & & \\ a_{m1j} & \cdot & \cdots & a_{mnj} & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{array} \right\}$$

Iz tehničkih razloga stavili smo a_{msj} umesto $a_{m(j)s}$, $s=1,2\ldots n$.

Ako pretpostavimo da svi kooperanti učestvuju u proizvodnji n proizvoda tako da je s-ta aktivnost j-tog preduzeća povezana sa s-tim finalnim proizvodom onda su matrice sistema pojedinih preduzeća reda (m_j, n), $j=1,2\ldots k$, pa matricu sistema svih kooperanata možemo pisati.

$$\left\{ \begin{array}{llll} A_{m1} & I_{m1} & & \\ A_{m2} & & I_{m2} & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \\ A_{mk} & & & I_{mk} \end{array} \right\}$$

gde smo sa A_{mj} označili matricu sistema j-tog preduzeća, a sa I_{mj} jediničnu matricu m_j-tog reda (j = 1,2... k).

Sistem se može posmatrati u nešto drugačijem obliku ako finalista postavi ograničenja u vezi donje ili gornje granice obima proizvodnje. Ukoliko se radi o gornjoj granici, kooperanti se mogu naći u situaciji da njihovi kapaciteti ne budu u potpunosti iskorišćeni te u takvim uslovima moraju tražiti optimalna rešenja, za deo neangažovanih kapaciteta. Medjutim, situacija može postati složenjija ako finalista postavi uslov da obim proizvodnje gotovih proizvoda ne bude ispod unapred planiranog obima proizvodnje u posmatranom periodu, odnosno ako se postavi uslov da je $x_s \geqslant q_s$, za svako s. Time se odmah postavlja pitanje raspoloživih kapaciteta (resursa) finaliste, a takodje u još značajnijem vidu za ostale kooperante. Ako pretpostavimo da preduzeće koje finalizira proizvodnju može da zadovolji postavljene uslove, za kooperante se takav zahtev povezuje sa mogućnošću povećanja proizvodnje u okviru postojećih kapaciteta, odnosno sa mogućnošću povećanja proizvodnih kapaciteta koje je praćeno dodatnim ulaganjima.

Pretpostavimo da je k-to preduzeće finalist. Tada pri datim pretpostavkama imamo sledeći sistem

$$\left\{\begin{array}{cccccccccc}
a_{11k} & a_{12k} & \dots & a_{1nk} & 1 & 0 & \dots & 0 & & \\
a_{21k} & a_{22k} & \dots & a_{2nk} & 0 & 1 & \dots & 0 & & \\
\dots & & & & \dots & & & & & \\
\dots & & & & \dots & & & & & \\
a_{m1k} & a_{m2k} & \dots & a_{mnk} & 0 & 0 & & 1 & & \\
1 & 0 & \dots & 0 & & & & -1 & 0 \dots & 0 \\
0 & 1 & \dots & 0 & & & & 0 & -1 \dots & 0 \\
\dots & & & & & & & \dots & & \\
\dots & & & & & & & \dots & & \\
0 & 0 & & 1 & & & & 0 & 0 & -1
\end{array}\right\}$$

odnosno

$$\left\{\begin{array}{ccc}
A_{mk} & I_{mk} & 0_{mk} \\
I_{nk} & 0_{nk} & -I_{nk}
\end{array}\right\}$$

ili u okviru celokupnog sistema, respektujući ograničenja ostalih kooperanata, imamo

$$\left\{\begin{matrix} A_{m1} & I_{m1} & & & \\ A_{m2} & & I\,I_{m2} & & \\ \cdot\ \cdot\ \cdot & & & & \\ \cdot\ \cdot\ \cdot & & & & \\ A_{mk} & & & I_{mk} & \\ I_{nk} & & & & -\ I_{nk} \end{matrix}\right\}$$

gde matrica I_{mj} odgovara dopunskim promenljivim u okviru j- tog preduzeća, a I_{nk} jedinična matrica koja odgovara ograničenjima u vezi donje granice obima proizvodnje a - I_{nk} jedinična matrica koja odgovara dopunskim nepoznatim.

Nadalje se može posmatrati model u kome preduzeća kooperiraju jednim delom proizvodnje, koristeći samo delimično raspoložive kapacitete pogona (resursa), dok drugim delom imaju programe proizvodnje nezavisne od pomenutih kooperantskih odnosa. Ovakvi slučajevi su najčešći u praksi te su interesantni za razmatranje i matematičku formulaciju modela. Pretpostavimo kao i ranije da su ograničavajući uslovi j-tog preduzeća u okviru kooperacije za n proizvoda dati sledećim sistemom

$$\sum_{s=1}^{n} a_{rsj}\, x_{sj} \leqslant I_{rj} \qquad \begin{matrix} r = 1,2\ldots m_j \\ j = 1,2\ldots k \end{matrix}$$

s tim što raspoloživi kapaciteti I_{rj} predstavljaju deo ukupno raspoloživih kapaciteta r-tog pogona u j-tom preduzeću,koji iznose

$$K_{rj} = I_{rj} + V_{rj}$$

u odredjenom periodu posmatranja.

Pretpostavimo da je preostali deo kapaciteta V_{rj} angažovan za proizvodnju p_j proizvoda van kooperacije, i da postoje odgovarajući ograničavajući uslovi

$$\sum_{i=1}^{pj} b_{rij}\, y_{ij} \leqslant V_{rj} \qquad \begin{matrix} r = 1,2\ldots m_j \\ j = 1,2\ldots k \end{matrix}$$

gde b_{rij} označava angažovanje r-tog pogona (resursa) po jedinici i-tog proizvoda van kooperacije u j-tom preduzeću, a y_{ij} obim proizvodnje i-tog proizvoda u j-tom preduzeću. Ovde smo pretpostavili da preduzeća koriste isti broj ograničenja u kooperaciji i van nje. Ovo nije posebno ograničenje jer se uvek može uzeti u obzir različiti broj uslova, ako stavimo da je r= 1,2 ... q_j.

Prema onome što smo rekli sada postoje dva sistema tehničkih koeficijenta, jedan koji se odnosi na proizvode u okviru kooperacije i drugi koji se tiče finalne proizvodnje svakog preduzeća nezavisan od odnosa u kooperaciji. Dakle imamo sledeće sistema.

$$A_j = \begin{Bmatrix} a_{11j} & a_{12j} & \cdots & a_{1nj} \\ a_{21j} & a_{22j} & \cdots & a_{2nj} \\ \cdots & \cdots & & \\ \cdots & \cdots & & \\ a_{m1j} & a_{m2j} & \cdots & a_{mnj} \end{Bmatrix}, \quad B_j = \begin{Bmatrix} b_{11j} & b_{12j} & \cdots & b_{1pj} \\ b_{21j} & b_{22j} & \cdots & b_{2pj} \\ \cdots & \cdots & & \\ \cdots & \cdots & & \\ b_{m1j} & b_{m2j} & \cdots & b_{mpj} \end{Bmatrix}$$

Ako posmatramo celovit sistem u okviru J-tog preduzeća posle uvodjenja dopunskih promenljivih, imamo:

$$\begin{Bmatrix} a_{11j} & a_{12j} & \cdots & a_{1nj} & b_{11j} & b_{12j} & \cdots & b_{1pj} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21j} & a_{22j} & \cdots & a_{2nj} & b_{21j} & b_{22j} & \cdots & b_{2pj} & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & & & \cdots & \cdots & & & \cdots & & & \\ \cdots & \cdots & & & \cdots & \cdots & & & \cdots & & & \\ a_{m1j} & a_{m2j} & \cdots & a_{mnj} & b_{m1j} & b_{m2j} & \cdots & b_{mpj} & 0 & 0 & & 1 \end{Bmatrix},$$

odnosno

$$\begin{Bmatrix} A_j & B_j & I \end{Bmatrix},$$

gde je jedinična matrica m_j-tog reda, ili za sva preduzeća u okviru kooperacije:

$$\begin{Bmatrix} A_{m1} & B_{m1} & I_{m1} & & & & \\ A_{m2} & & & B_{m2} & I_{m2} & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & & \\ A_{mk} & & & & & B_{mk} & I_{mk} \end{Bmatrix},$$

gde smo sa A_{mj} i B_{mj} $(j = 1,2\ldots k)$ označili matrice sistema tehničkih koeficijenata u okviru kooperacije i van nje, j-tog preduzeća, a sa I_{mj} jediničnu matricu m_j-tog reda. Primećujemo da sistem ima $\sum_{i=1}^{k} m(j)$ jednačina sa $n + \sum_j pj + k \sum_j m(j)$ nepoznatih od kojih su $n + \sum_j p_j$ efektivnih a $k \sum_j m_j$ dopunskih. Izmedju evektivnih nepoznatih, n-njih tiče se proizvoda u kooperaciji, a $\sum_j p_j$ proizvoda van kooperacije.

Ako sada pretpostavimo da struktura sistema u okviru kooperacije ostaje nepromenjena u dužem vremenskom intervalu, ali se tehnički odnosi u odredjenim periodima tog intervala menjaju i ako sa C_1, C_2... C_t označimo odgovarajuće sistema u pojedinim periodima, sa ukupno raspoloživim kapacitetima u posmatranom vremenskom intervalu

$$\sum_{t=1}^{T} K_{rjt} = \sum_{t=1}^{T} I_{rjt} + \sum_{t=1}^{T} V_{rjt},$$

sistem se u dinamičkom smislu može izraziti

$$\left\{ c_1 \; c_2 \; \cdots \cdots \; c_t \right\}$$

Pošto razmatranje proizvodnih programa u vremenu obuhvata precizno odgovarajuće periode, što sa svoje strane implicira ograničenja raspoloživih kapaciteta, i drugih resursa, kao i ograničenja u pogledu tražnje i mogućnosti plasmana to je pot - rebno obuhvatiti i druge uslove.

Ako te uslove, koji nisu obuhvaćeni ograničenjima u okviru potsistema A_{mj} i B_{mj}, označimo sa R_t $(t = 1,2... T)$, tada se sistem može izraziti

$$\left\{ \begin{matrix} C_1 & C_2 & \cdots & C_T \\ R_1 & & & \\ & R_2 & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ & & & R_T \end{matrix} \right\}$$

Vidimo da dinamički aspekt problema kooperacije vodi ka sistemima koji su u linearnom programiranju poznati kao proble mi dekompozicije. Videćemo da se i drugi ekonomski problemi svo de na slične sisteme.

Posmatrajmo opštiji slučaj kooperacije - integracije, gde uopšte uzev, svako od preduzeća može biti nosilac finalne proizvodnje, specijalizovano za odredjene grupe proizvoda, a istov - remeno i kooperant u drugim preduzećima

Ako sa $A_{ij} = \left\{ a_{rs}^{ij} \right\}$, $(r = 1,2...m_p,\ s = 1,2...n_q$ i, $j = 1,2...n)$ označimo matricu tehničkih uslova proizvodnje i-tog preduzeća (kooperanta) u okviru j-tog preduzeća (finaliste), sistem se može napisati

$$\begin{Bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{Bmatrix} .$$

Ako sa $b_1, b_2, \ldots b_n$ označimo vektore raspoloživih kapaciteta (resursa) m_p-tog reda, a sa $x_1, x_2, \ldots x_n$ vektore obima proizvodnje odgovarajućih preduzeća n_q-tog reda, tada možemo pisati

$$\begin{Bmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1n} \\ \cdot & \cdot & \\ \cdot & \cdot & \\ A_{n1} & \cdots & A_{nn} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{Bmatrix} .$$

Sistem ima $\sum_p m_p$ jednačina sa $\sum_q n_q$ nepoznatih,odnosno proizvoda. Kao što se vidi, postoji n različitih proizvodnih programa koji odgovaraju pojedinim preduzećima. Ostvarenje svakog pro - izvodnog programa ne zavisi samo od tehničkih uslova proizvod - nje posmatranog preduzeća A_{ii} već i od uslova proizvodnje ostalih preduzeća.

Prilikom razmatranja ovakvih sistema nužna su dopunska ograničenja koja se tiču posebnih ili opštih uslova u pogledu obima proizvodnje i korišćenja raspoloživih kapaciteta (resursa) u okviru finalne i reprodukcione potrošnje. Tako na primer ako je utvrdjeno da i-to preduzeće u okviru svog finalnog programa proizvodnje angažuje raspoložive kapacitete u odredjenom obimu, onda preostali deo raspoloživih kapaciteta treba da bude rasporedjen tako da zadovolji potrebe ostalih preduzeća.Ovi posebni uslovi najčešće su izraženi maksimalnim i minimalnim zahtevima u pogledu obima proizvodnje pojedinih proizvoda u okviru pojedinih preduzeća. Tako se sistem može pisati u obliku

$$\left\{\begin{array}{llllll} A_{11} & A_{12} & \cdots\cdots & A_{1n} & & \\ A_{21} & A_{22} & \cdots\cdots & A_{an} & & \\ \cdots & \cdots & & & & \\ \cdots & \cdots & & & & \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots\cdots & A_{nn} & & \\ I_1 & & & -I_1 & & \\ & I_2 & & & -I_2 & \\ & & I_n & & & -I_n \end{array}\right\},$$

gde I_i $(i=1,2...n)$ predstavljaju jedinične matrice n_i-tog reda koje izražavaju uslove u pogledu minimalnog obima proizvodnje . Slično se mogu postaviti uslovi u pogledu maksimalnog obima proizvodnje. Medjutim, sem ovih posebnih uslova, koji mogu biti različiti, postoje i opšti uslovi u okviru integracionih sistema kao što su ukupna raspoloživa finansiska sredstva, raspoloživi iznosi sirovina, uvoza, izvoza i opštih planova, razvoja.Ako te uslove izrazimo matricama A_{o1}, A_{o2},... A_{on}, sistem možemo pisati

$$S = \left\{\begin{array}{llllll} A_{01} & A_{02} & \cdots & A_{0n} & & \\ A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} & & \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} & & \\ \cdots & \cdots & & & & \\ \cdots & \cdots & & & & \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} & & \\ I_1 & & & -I_1 & & \\ & I_2 & & & -I_2 & \\ & & I_n & & & -I_n \end{array}\right\}$$

Najzad, preko ovako integrisanih sistema, uz dodatna proširenja ili posebne specifikacije, možemo posmatrati velike sistema u okviru cele privrede. Ako sa S_1, S_2,... S_m označimo sisteme svih integracionih celina u privredi, a sa S_{10}, S_{20},... S_{mo} odgovarajuća centralna ograničenja koja se tiču opštih privrednih ciljeva tada se opšti privredni sistem može iskazati u vidu matrica

$$\left\{\begin{matrix} S_{01} & S_{02} & \cdots & S_{0m} \\ S_1 & & & \\ & S_2 & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \\ & & & S_m \end{matrix}\right\},$$

ukoliko su integracioni sistemi medjusobno nezavisni. . Ukoliko postoji delimična zavisnost, sistem se može napisati u obliku

$$\left\{\begin{matrix} S_{01} & S_{02} & S_{03} & \cdots & S_{0m} \\ S_{11} & S_{12} & & & \\ S_{21} & & S_{23} & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & & \\ S_{m1} & & & & S_{mm} \end{matrix}\right\},$$

gde su vertikalnom zavisnošću povezani delovi integracionih sistema koji se u procesu reprodukcije simultano izražavaju.

Na kraju, ukoliko se pretpostavi postojanje opšte medjuzavisnosti integracionih sistema tada se privreda može posmatrati u vidu sledećeg sistema

$$P = \left\{\begin{matrix} S_{o1} & S_{o2} & \cdots & S_{om} \\ S_{11} & S_{12} & \cdots & S_{1m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \\ S_{m1} & S_{m2} & \cdots & S_{mm} \end{matrix}\right\},$$

gde $S_{\alpha\beta}$, $\alpha,\beta = 1,2...,m$ označavaju integracione celine koje su medjusobno povezane u okviru cele privrede.

Vidimo, dakle, da polazeći od privredne organizacije kao sistema možemo u okviru integracionih zajednica posmatrati odgovarajuća preduzeća kao podsisteme većih sistema. Posebnim grupisanjem integracionih sistema u okviru privrednih grana i oblasti kao i užih i širih regiona dolazimo do velikih ekonomskih sistema koji obuhvataju privredu u celini. Ovde je bilo reči o sistemima baziranim na linearnom programiranju i mogućnostima da se u okviru takvih razmatranja dodje do odredjenih teorijskih aspekata koji ukazuju na relativno široke mogućnosti primene programiranja. Pri tome treba istaći da razmatranja u svim fazama počev od preduzeća do privrede u celini pokazuju specifičnu strukturu koja se izražava dekompozibilnošću sistema. Drugim rečima, bilo da se radi o vertikalnim ili horizontalnim povezivanjem podsistema u okviru većih sistema uvek postoje dodatni uslovi, specifični za odgovarajuće podsisteme koji sistem čine dekompozibilnim. Ova osobina je izražena u statičkim i dinamičkim uslovima. Jer ako sistem P za koji pretpostavljamo da izražava uslove u okviru cele privrede posmatramo kao statički sistem, onda bez obzira na opšti oblik medjuzavisnosti podsistema uvek postojaće dopunska ograničenja koja sistem u celini izražavaju u formi dekompozicije, kao na primer

$$P_1 = \left\{ \begin{array}{llll} S_{01} & \cdots\cdots & & S_{0m} \\ S_{11} & \cdots\cdots & & S_{1m} \\ \cdots\cdots & & & \\ \cdots\cdots & & & \\ S_{m1} & \cdots\cdots & & S_{mm} \\ R_1 & & & \\ & R_2 & & \\ \cdots\cdots & & & R_m \end{array} \right\},$$

gde smo sa $R_1, R_2, \ldots R_m$ označili odgovarajuće specifične uslove vertikalno povezanih sistema.

Isti je slučaj i pri dinamičkom aspektu sistema. Ako sa $P_1, P_2, \ldots P_k$ označimo sisteme u odgovarajućim periodima vremenskog intervala $(0,T)$, a sa $R'_1, R'_2, \ldots R'_k$ odgovarajuće specifične uslove, tada struktura sistema ima oblik

$$\left\{ \begin{array}{lll} P_1 \; P_2, \ldots & & P_k \\ R'_1 & & \\ & R'_2 & \\ \vdots\vdots\vdots & & R'_k \end{array} \right\}$$

Osobina dekompozicije ogleda se u tome što omogućava da se raspoloživi kapaciteti (resursi) pojedinih preduzeća ili asocijacija jednovremeno angažuju u dvojakim uslovima vertikalnih i horizontalnih procesa, što odgovara povezivanju podsistema u okviru većih sistema. Za linearno programiranje, ona je od izuzetnog značaja, zbog činjenice da iako su tehničko-tehnološki uslovi u različitim procesima specifični oni moraju biti jednovremeno povezani sa raspoloživim kapacitetima. Ovo se najbolje ilustruje razmatranjima kada privredna organizacija jedan deo svojih kapaciteta angažuje u okviru kooperacije, odnosno reprodukcije proizvodnje, a drugi deo u okviru programa proizvodnje koji je nezavisan od prethodnog. I upravo ta okolnost istovremene zavisnosti u jednom i nezavisnosti u drugom slučaju izražava pravi značaj principa dekompozicije. Kad govorimo o ovom principu onda mislimo na slučaj dekompozicije izražen matricom oblika

$$\begin{Bmatrix} A_1 & B_1 & & & \\ A_2 & & B_2 & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \\ A_k & & & & B_k \end{Bmatrix}$$

ali, uopšte uzev, i na slučaj transponovane matrice sistema

$$\begin{Bmatrix} A_1 & A_2 \cdots\cdots\cdots & & A_k \\ B_1 & & & \\ & B_2 & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & B_k \end{Bmatrix}$$

Prilikom ovih razmatranja, a naročito složenih sistema, nismo posebno isticali ciljeve i kriterijume, ne zbog toga što oni nisu dovoljno značajni u ovakvim ispitivanjima, već zbog činjenice da je postavljanje ciljeva relativno jednostavno i da samo po sebi implicira odgovarajuće zahteve koji su skoro uvek izraženi odgovarajućom efektivnošću u vidu maksimalnog obima proizvodnje, maksimalnog dohotka, dobiti itd. Ono što predstavlja centralni i najvažniji deo problema linearnog programiranja, u matematičkom i metodološkom smislu, tj. prilikom postavljanja modela, tiče se pre svega ograničavajućih uslova koji su po pravilu izraženi složenim sistemima. Medjutim, ova složenost uslovljava rešavanje problema te su potrebne odgovarajuće transformacije poznate pod imenom princip dekompozicije. Stoga posmatrajmo opšti oblik problema dekompozicije

$$(\max)\ f = \sum_{s=1}^{k} c'_s\, x_s \tag{1}$$

pri ograničenjima

$$\sum_{s=1}^{k} A_s\, x_s = b_o \tag{2}$$

$$B_s\, x_s = b_s\,, \qquad s = 1,2\ldots k$$

$$x_s \geq 0$$

gde je A_s matrica reda (m_o, n_s) ; x_s i c_s vektori n_s-tog reda, b_o, vektor m_o-tog reda i b_s vektor m_s-tog reda $(s = 1,2\ldots k)$.

Problem se može izraziti u matričnom obliku

$$(\max)\ f = \sum_{s=1}^{k} c'_s\, x_s$$

$$\begin{Bmatrix} A_1 & A_2 \ldots\ldots\ldots A_k \\ B_1 & 0 \ldots\ldots\ldots 0 \\ 0 & B_2 \ldots\ldots\ 0 \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ 0 & 0 \qquad\quad B_k \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_k \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} b_o \\ b_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ b_k \end{Bmatrix}$$

$$x_s \geq 0, \qquad s = 1,2\ldots\ldots k$$

Primećujemo da ako je $A_s=0$, za svako s, problem se svodi na rešavanje k nezavisnih problema oblika $(\max)\ f_s = c'_s\, x_s$, $B_s x_s = b_s$, $x_s \geq 0$. Drugim rečima vidimo da opšti uslovi, izraženi matricama $A_1, A_2\ldots\ldots A_k$, objedinjavaju posebne uslove preduzeća u okviru integracionih sistema i na taj način omogućavaju nalaženje optimalnih rešenja.

Kao što smo napomenuli, praktično razmatranje i rešavanje problema u okviru u kome je dat nije moguće zbog relativno velikih dimenzija. Bazična matrica sistema je reda $\sum_{s=o}^{k} m_s$, te primenom principa dekompozicije problem postaje relativno jednostavniji.

Pretpostavimo da je skup tačaka x_s, koji zadovoljava

$B_s x_s = b_s$ ograničen konveksom skup K_s, sa konačnim brojem ekstremnih tačaka (konveksan poliedar). Ako sa $\bar{x}_{rs}$ $(r = 1,2 \dots g_s)$ označimo ekstremne tačke K_s, tada se svaka tačka skupa, odnosno svako moguće rešenje x_s može izraziti kao konveksna kombinacija ekstremnih tačaka

$$x_s = \sum_{r=1}^{g_s} V_{rs} \bar{x}_{rs}, \quad V_{rs} \geq 0, \quad \sum_r V_{rs} = 1$$

Posle zamene x_s u (1) i (2), dobijamo:

$$(\max)\ f = \sum_s \sum_r V_{rs} c_s' \bar{x}_{rs}$$

$$\sum_s \sum_r V_{rs} A_s \bar{x}_{rs} = b_o$$

$$\sum_r V_{rs} = 1, \qquad s = 1,2 \dots k$$

Ako uvedemo sledeće oznake

$\alpha_{rs} = c_s' \bar{x}_{rs}$ i $U_{rs} = A_s \bar{x}_{rs}$, za svako r i s, problem možemo izraziti

$$(\max)\ f = \sum_r \sum_s \alpha_{rs} V_{rs}$$

$$\sum_r \sum_s V_{rs} U_{rs} = b_o$$

$$\sum_r V_{rs} = 1, \qquad s = 1,2 \dots k$$

Najzad, ako stavimo $Z_{rs} = \{U_{rs}, e_s\}$, gde je e_s jedinični vektor k-tog reda, a sa $b = \{b_o, 1'\}$ označimo vektor slobodnih članova, gde je $1'$ suma vektor k-tog reda, problem se može pisati

$$(\max)\ f = \sum_s \sum_r \alpha_{rs} V_{rs}$$

$$\sum_s \sum_r Z_{rs} V_{rs} = b$$

$$V_{rs} \geq 0 \quad \text{za svako } r \text{ i } s.$$

Vidimo da se problem može svesti na sistem od $m_0 + k$ jednačina, što predstavlja znatno uprošćavanje u odnosu na broj ograničenja. Istovremeno, broj promenljivih V_{rs} je znatno porastao, s obzirom na to da je broj ekstremnih tačaka skupa K_s veći od dimenzije vektora x_s . Medjutim, povećani broj promenljivih ne mora da bude od značaja prilikom rešavanja problema , jer u bazi figurira najviše $m_o + k$ promenljivih, a generiranjem vektora pomoću simplex kriterijuma koji ulaze u bazu veliki broj neće doći u obzir za razmatranje. Na taj način se problem dekompozicije može uprostiti, mada on i posle ovih transformacija ostaje relativno složen.

Model kooperacije sa gledišta međusektorske analize

Jedan specijalan pristup problemu koperacije i integracije može se učiniti sa gledišta medjusektorske analize. Pretpostavimo da n preduzeća učestvuje u kooperaciji sa jednim ili više proizvoda. Označimo sa X_r (r = 1,2... n) vrednost proizvodnje r-tog preduzeća u odredjenom periodu. Pretpostavimo da od ukupne proizvodnje deo proizvodnje x_{rr} ostaje preduzeću, deo x_{rs} (s = 1,2...n) odlazi kooperantima, a deo proizvodnje b_r odlazi na tržište u vidu finalnog proizvoda.

Raspodela se može izraziti na sledeći način

$$X_r = \sum_{s=1} x_{rs} + b_r , \qquad (r = 1,2....n)$$

odnosno

$$X_r - \sum_{s=1} x_{rs} = b_r$$

Pretpostavimo da izmedju inputa koje s-to preduzeće dobija od drugih kooperanata i ukupne vrednosti proizvodnje X_s toga preduzeća postoji stalan odnos, tj.

$$a_{rs} = \frac{x_{rs}}{X_s}$$

ili

$$x_{rs} = a_{rs} X_s, \quad \text{za svako } r \text{ i } s,$$

odnosno, posle zamene u jednačini raspodele imamo

$$X_r - \sum_{s=1}^{n} a_{rs} X_s = b_r \qquad (r = 1,2....n)$$

ili

$$(I - A) X = b$$

gde je A matrica sistema tehničkih koeficijenata

$$A = \begin{Bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots\cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots\cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots\cdots & a_{nn} \end{Bmatrix}$$

I jedinična matrica, $X_{,} = (X_1, X_2, \ldots\ X_n)$ vektor ukupne proiz vodnje i $b' = (b_1, b_2 \ldots b_n)$ vektor finalne proizvodnje, odno sno vektor proizvodnje koja odlazi na tržište van kooperacije u vidu finalnog proizvoda.

Problem koji se u okviru ovakvog sistema postavlja sastoji se u odredjivanju vektora ukupne proizvodnje, pri unapred planiranom obimu finalne proizvodnje pojedinih kooperanata. Drugim rečima, svako povećanje finalne proizvodnje kooperanata uslovljeno je odnosima koji postoje u kooperaciji, a koji su izraženi matricom reprodukcione potrošnje. Ako je matrica sistema (I - A) regularna, tj. $|I - A| \neq 0$, tada je rešenje sistema

$$X = (I - A)^{-1}\ b$$

odnosno

$$X_r = \frac{1}{|I-A|} \sum_{s=1}^{n} A_{sr}\ b_s, \quad (r = 1,2 \ldots n),$$

gde A_{sr} predstavljaju kofaktore matrice (I - A).

Pokazana analiza medjuzavisnosti preduzeća u kooperaciji slična je medjusektorskoj analizi koja je poznata kao Input-output analiza pri razmatranju medjugranskih odnosa u okviru cele privrede. Njena generalizacija u pravcu linearnog programiranja može biti učinjena u više pravaca, ako se umesto ukupnih učešća vrednosno izraženih za pojedina preduzeća, izvrši klasifikacija prema vrsti proizvoda, ili ako se, kao što smo učinili u prethodnim razmatranjima uzmu u obzir odnosi raspoloživih kapaciteta i drugih resursa.

Linearno programiranje i Input-output sistem

Isto tako, interesantno je posmatrati neke slučajeve medjusektorske analize sa aspekta linearnog programiranja, kada se umesto jednoznačnih granskih inputa posmatraju vektori aktivnosti različitih procesa u okviru privrednih grana. Tada matrica tehničko-tehnoloških uslova proizvodnje u okviru input- output sistema ne sadrži isti broj aktivnosti koliki je broj privrednih grana, s obzirom na to da se u okviru svake grane može pret postaviti veći broj različitih procesa. U takvim slučajevima matrica tehničkih koeficijenata je reda $(n; n\ p(r)\quad)$, gde je n broj privrednih grana, a $p(r)$ broj aktivnosti u okviru r - te privredne grane. U takvim uslovima medjusektorski problem je ne posredno povezan sa problematikom programiranja i može se izraziti u obliku

$$(\max)\ f = \sum_{r=1}^{n} \sum_{s=1}^{p(r)} c_{rs}\, x_{rs}$$

$$\sum_{r=1}^{n} \sum_{s=1}^{p(r)} (I_r - A_{rs})\, x_{rs} = b$$

$$x_{rs} \geqslant 0$$

gde f označava ukupnu efektivnost različitih aktivnosti, c_{rs} koeficijent efektivnosti s-te aktivnosti u okviru r-te grane, A_{rs} vektor aktivnosti koji odgovara s-tom procesu u okviru r-te grane, I_r jednačini vektor r-te grane, i b vektor finalnog proizvoda. Problem je odrediti optimalni skup aktivnosti tako da funkcija kriterijuma dostigne maksimalnu vrednost. U optimalnoj bazi može figurirati najviše n aktivnosti, s obzirom na to da su one n-tog reda, dok su nivoi nebazičnih aktivnosti jednaki nuli. Medjutim, u ovakvim slučajevima može se desiti da aktiv - nosti u optimalnom rešenju ne bude rasporedjene tako da iz svake privredne grane figurira samo jedna. U tom slučaju potrebno je uvesti dopunska ograničenja koja obezbedjuju ove uslove.

U jednom drugom smislu, input-ontput sistem može biti interpretiran sa gledišta linearnog programiranja. Ovaj aspekt se tiče dualiteta i odgovarajućih cena. Kao i ranije pretpostavimo da je privreda podeljena na n privrednih grana, sa poznatom matricom tehničkih koeficijenata A. Tehnički koeficijenti izraženi su u fizičkim jedinicama.

Uvedimo sledeće oznake

X - vektor ukupne proizvodnje
b - vektor finalne proizvodnje
p - vektor cena

r - vektor učešća radne snage

ω - vektor troškova radne snage po jed. proizvoda.

Ako su dati prosečni troškovi radne snage $\bar{\omega}$, tada između vektora r i ω postoji sledeća veza

$$\omega = \bar{\omega}\, r$$

Vektori X, b, i r izraženi su u fizičkim jedinicama.

Imajući u vidu standardni model input-ontput sistema

$$(I - A) X = b$$

moguće je, kao specijalan slučaj linearnog programiranja, posmatrati sledeći problem

$$(\min)\ V = \omega' X$$

pri ograničenjima

$$(I - A) X = b \qquad X > 0$$

u kome se traži optimalni program proizvodnje X, koji čini funkciju kriterijuma minimalnom, odnosno koji minimizira ukupne troškove radne snage V.

Dual primarnog problema daje

$$(\max)\ f = b'\, p$$

$$(I - A)'\, p = \omega \qquad p > 0$$

gde se, kao što vidimo, traži optimalna struktura cena odgovarajućih proizvoda tako da se ostavari maksimalni nacionalni dohodak (vrednosno izražen).

Imajući u vidu da se u ovom slučaju radi o specijalnom slučaju linearnog programiranja, gde su u primarnom i dualnom problemu ograničavajući uslovi izraženi sistemom od n jednačina sa n nepoznatih, rešenje je jednoznačno i zajedničko za oba problema. Drugim rečima, moguće rešenje problema je ujedno i optimalno tako da se u ovom slučaju ne postavlja pitanje izbora najpovoljnije kombinacije aktivnosti. Prema tome, rešenja primarnog i dualnog problema jesu:

$$X = (I - A)^{-1}\, b$$

$$p' = \omega'\, (I - A)^{-1},$$

a prema uslovu jednakosti vrednosti funkcija kriterijuma primarnog i dualnog problema za optimalna rešenja, imamo

$$(\min)\ V = \omega' (I - A)^{-1}\ b$$

$$(\max)\ f = p'\ b = \omega' (I - A)^{-1}\ b,$$

što dokazuje tvrdjenje (min) V = (max) f.

Dinamički model Input-output sistema

Generalizacija Input-output sistema u dinamičkom smislu vodi ka složenijim sistemima medjuzavisnosti i mogućnosti razmatranja takvih modela metodama linearnog programiranja. Umesto statičkog odnosa u raspodeli, Leontijev razmatra i druge medjuzavisnosti, a u prvom redu one koji obuhvataju dinamičke aspekte problema, Sem dinamičkih elemenata, u modelu figuriraju reprodukciona i investiciona potrošnja, što je sa gledišta bilansa proizvodnje i potrošnje značajno u uslovima dugoročnog razvoja i planiranja.

Pretpostavke u vezi tehničkih koeficijenata u okviru reprodukcione potrošnje iste su kao i u uslovima statičkih razmatranja, odnosno definisani su kao konstantni odnosi, nezavisno od perioda posmatranja, tj.

$$a_{rs} = \frac{x_{rs}(t)}{X(t)} \qquad t = 1,2....T, \quad \text{za svako } r \text{ i } s.$$

Koeficijenti u vezi investicione potrošnje definisani su kao odnos kapitalnih dobara r-te grane na jedinicu proizvoda s-te grane, tj.

$$k_{rs} = \frac{K_{rs}(t)}{X_s(t)} \quad , \text{ za svako } r,\ s \text{ i } t$$

Ukupna kapitalna dobra r-te grane u okviru cele privrede u periodu t, data su sledećom relacijom

$$K_r(t) = \sum_{s=1}^{n} K_{rs}(t) = \sum_{s=1}^{n} k_{rs} X_s(t) \quad ,$$

a priraštaj kapitalnih dobara u t-om periodu je

$$\Delta K_r(t) = K_r(t + 1) - K_r(t)$$

Ako sa $b_r(t)$ označimo finalnu tražnju r-tog proizvoda u periodu t, tada se raspodela može izraziti

$$X_r(t) = \sum_{s=1}^{n} a_{rs}X_s(t) + \Delta K_r(t) + b_r(t)$$

$$(r = 1,2...n)$$

odnosno u vidu dinamičkog modela

$$(I-A)X(t) = D\left[X(t+1) - X(t)\right] + b(t)d,$$

gde su A i D matrice odgovarajućih tehničkih koeficijenata reprodukcione i investicione potrošnje, a X(t) i b(t) vektori ukupne i finalne proizvodnje u periodu t.

Sem datih jednakosti postoji relacija

$$K(t) = D\,X(t),$$

koja se tiče odnosa priraštaja kapitalnih dobara i vrednosti proizvodnje u periodu t.

Za poznate inicijalne vrednosti kapitala, obima proizvodnje i unapred datu finalnu proizvodnju, moguće je postići rešenje sistema diferencnih jednačina koje je dato modelom

$$X(t+1) = X(t) + D^{-1}(I-A)X(t) - D^{-1}b(t),$$

gde je D^{-1} inverzna matrica od D.

Prilikom razmatranja dinamičkih modela ovog tipa, mnogi slučajevi se svode na probleme linearnog programiranja. Tako se pod odredjenim pretpostavkama, koje se tiču kriterijuma i ograničenja, može posmatrati sledeći model

$$(\max) f = c\sum_{s=1}^{n=1} r(s),$$

pri ograničavajućim uslovima

$$(I-A)X(t) = K(t) - K(t-1) + Dr(t) + b(t)$$

$$x(t) \leqslant q_o + \sum_{s=1}^{t-1} r(s) \qquad t = 1,2....n$$

$$x(t) \geqslant 0, \quad r(t) \geqslant 0,$$

kojim se želi ostvariti maksimalna efektivnost proizvodnih kapaciteta u n-tog godišnjem periodu, pri ograničenjima koja se tiču tehničko-tehnoloških uslova proizvodnje, novih ulaganja i pretpostavke o ograničenom obimu proizvodnje u pojedinim periodima. Vektor c izražava efektivnost novih proizvodnih kapaciteta u pojedinim periodima, q_o vektor inicijalnih proizvodnih kapaciteta, a r(t) vektor novih proizvodnih kapaciteta nastalih u perioru t.

Najzad, preko linearnog programiranja moguće je posmatrati i druge dinamičke modele od kojih je značajno pomenuti jedan koji se svodi na problem dekompozicije, tj.

$$(\max)\ f = \sum_{t=1}^{T} c'_t\, x_t\ ,$$

$$A_t\, x_t - B_{t-1}\, x_{t-1} \leqslant b_t$$

$$x_t \geqslant 0, \quad t = 1,2\ldots T,$$

gde su uzete onake

c_t - vektor koeficijenata funkcije kriterijuma u periodu t

x_t - vektor nivoa aktivnosti u periodu t

A_t - matrica tehničkih koeficijenata inputa u periodu t

B_t - matrica tehničkih koeficijenata outputa u periidu t

b_t - vektor finalnog proizvoda u periodu t

Ako se kao inicijalna vrednost uzme da je za t-1, $B_{t-1} = 0$,tada se ograničavajući uslovi mogu napisati:

$$\begin{array}{lll} A_1 x_1 & & \leqslant b_1 \\ -B_1 x_1 + A_2 x_2 & & \leqslant b_2 \\ & -B_2 x_2 + A_3 x_3 & \leqslant b_3 \\ \ldots\ldots & & \\ \ldots\ldots & & \end{array}$$

sa matricom sistema

$$\begin{Bmatrix} A_1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ -B_1 & A_2 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & -B_2 & A_3 & \ldots & 0 \\ \ldots & & & & \\ \ldots & & & & \end{Bmatrix}$$

Treba primetiti da svaka od matrica A_t i B_{t-1} sadrži n vektora aktivnosti m-tog reda $A_{st} = (a_{1st}, a_{2st}, \ldots a_{mst})$

$B_{st} = (b_{1st}, b_{2st} \ldots t_{mst})$

tako da linearne komibinacije koje proizilaze iz odgovarajućih inputa i outputa mogu uopšte uzev biti vrlo složene.

V. TRANSPORTNI MODEL

Jedno od značajnih područja linearnog programiranja posvećeno je tzv. transportnom problemu, koji se javlja kao specijalan slučaj opštih razmatranja. Razmatranja u ovom domenu značajna su kako zbog samog transportnog problema u klasičnom smislu tako i zbog relativno široke pirmene u drugim problemima koji nemaju ničeg zajedničkog sa poznatim problemom. Mnogi se problemi formalno izražavaju na isti način a metodološki postupci za njihovo rešavanje identični su sa postupcima koji se primenjuju za rešavanje standardnog transportnog problema. U preduzeću se mogu postaviti pitanja optimalnog razmeštaja objekata, mašina postrojenja, razmeštaja skladišnih mesta itd. u cilju postizanja većih efekata. Takodje, najpovoljniji izbor radnika za obavljanje odredjenih poslova ili najpovoljniji izbor mašina za obav - ljanje odredjenih operacija ili lokacija odredjenih objekata i službi u gradskim naseljima ili razmatranje specijalnih problema proizvodnje i zaliha spadaju u grupu problema koji se mogu podvesti pod tzv. transportni problem. Ukazaćemo, takodje, na nekoliko modela iz oblasti tržišta i snabdevanja, investicija i proizvodnje, kaoičitav niz drugih specijalnih slučajeva interesantnih za matematičku primenu u ekonomiji.

Specifičnost transportnog problema u odnosu na opšti problem linearnog programiranja ogleda se u ograničavajućim uslovima koji su u ovom slučaju dati trouglastom matricom sa elementima jednakim 0 i 1. Ma da se transportni problem može rešavati istim simplex algoritmom kao i standardni problem programiranja ipak zbog specifičnosti problema postoje odgovarajući postupci koji u mnogome uprošćavaju dobijanje optimalnog rešenja. Medju prvim zapaženim razmatranjima transportnog problema treba pomenuti radove sovjetskog naučnika Kantorovića (1939) i Hitchecocka (1941) koji je prvi postavio i rešio problem nezavisno od linearnog programiranja. Kasnije je pokazana veza problema sa linearnim programiranjem i od tada postoji veliki broj različitih algoritama i metoda medju kojima treba pomenuti Stepping stone metod i Modi metod koji je dat od strane Dantziga i koji se pokazao kao najefikasniji za rešavanje transportnog problema.

Razmotrimo transportni problem u sledećem obliku. Postoji m različitih centara (preduzeća) P_r (r=1,2...n) proizvoljno lociranih iz kojih se snabdeva n različitih mesta (tržišta) M_s (s= 1,2...n). Označimo sa $a_r > 0$ obim proizvodnje centra P_r, a sa $b_s > 0$ tražnju mesta M_s. Sa c_{rs} označimo transportne troškove po jedinici, a sa x_{rs} obim transporta (broj jedinica) od r-tog centra do s-tog mesta.

Problem je: naći transportni program $x_{rs} > 0$ tako da ukupni transportni troškovi budu minimalni, tj.

$$(\min)\ C = \sum_{r=1}^{m} \sum_{S=1}^{n} c_{rs}\, x_{rs} \tag{1}$$

pri ograničenjima da je ukupan obim transporta iz centra P_r do različitih mesta M_s jednak obimu proizvodnje a_r, tj.

$$\sum_{s=1}^{n} x_{rs} = a_r \qquad (r = 1,2\ldots m) \tag{2}$$

i da je obim koji primi mesto M_s iz različitih centara jednak ukupnoj tražnji tog mesta, tj.

$$\sum_{r=1}^{n} x_{rs} = b_s \qquad (s = 1,2\ldots n) \tag{3}$$

i $x_{rs} > 0$ za svako r i s.

Pored datih uslova postoji još jedan koji implicitno figurira u problemu i koji izražava zahtev da je ukupan obim proizvodnje u svim preduzećima jednak ukupnoj tražnji svih mesta, tj.

$$\sum_{r=1}^{m} a_r = \sum_{s=1}^{n} b_s$$

U problemu figurira m + n jednačina sa mn nepoznatih . Medjutim u problemu postoji svega m + n - 1 nezavisnih jednačina sa istim brojem bazičnih promenljivih.

Dualni problem transportnog problema ima oblik

$$(\max)\ C' = \sum_{s=1}^{m} a_r u_r + \sum_{s=1}^{n} b_s v_s$$

sa ograničavajućim uslovima

$$u_r + v_s \leq c_{rs} \qquad \begin{array}{l} r = 1,2\ldots m \\ s = 1,2\ldots n \end{array}$$

gde su u_r i v_s dualne promenljive ili tzv. simplex množitelji.

Rešenje transportnog problema postiže se relativno jednostavno preko dualnog problema, odredjujući pre svega početno bazično rešenje sastavljeno od $m + n - 1$ bazičnih nepoznatih. U zavisnosti od stepena prilagodjenosti početnog rešenja transportnim troškovima c_{rs}, rešavanje će se izvesti sa manjim ili većim brojem iteracija. Ukoliko je izbor početnih bazičnih promenljivih takav da one ulaze u bazu prema minimalnim troškovima po jedinici, ili pretežno prema ovom kriterijumu, tada će broj iteracija do konačnog optimalnog rešenja biti manji, i obratno.

Kriterijum za izbor početnog transportnog programa je

$$x_{ij} = \min (a_r, b_s) \qquad \begin{array}{l} r = 1,2\ldots m \\ s = 1,2\ldots n \end{array}$$

gde je indeksima (i,j) označena bazična promenljiva. Prema ovom postupku proizilazi da su bazične promenljive jednake razlici parcijalnih zbirova tabela $\sum_r a_r$ i $\sum_S b_s$

Rekli smo da u bazičnom rešenju figurira $m + n - 1$ promenljivih. Ovo proizilazi otuda što u problemu postoji $m + n - 1$ nezavisnih jednačina, što znači da je jedna od jednačina sistema posledica ostalih. Ovo se može pokazati ako se (zbir prvih) $(m - 1)$ jednačina oduzme od zbira poslednjih n jednačina. Tada se dobije m-ta jednačina sistema.

Rešenje dualnog problema postižemo na sledeći način. Ako svaku jednačinu primarnog problema pomnožimo odgovarajućom dualnom promenljivom u_r, odnosno v_s, zavisno od toga da li se radi o jednačini sistema (2) ili (3) i dodamo funkciji kriterijuma dobijamo

$$\sum_{r,s} (c_{rs} + u_r + v_s)\, x_{rs} = f + \sum_{r=1}^{m} a_r u_r + \sum_{s=1}^{n} b_s v_s$$

Posle stavljanja

$$c'_{rs} = c_{rs} + u_r + v_s \qquad r = 1,2\ldots m$$
$$s = 1,2\ldots n$$

i odredjivanja u_r i v_s tako da je za bazične promenljive x_{rs}

$$c_{rs} + u_r + v_s = 0,$$

a imajući u vidu da su nebazične promenljive jednake nuli, imamo:

$$(\max)\ C = -f = \sum_{r=1}^{m} a_r u_r + \sum_{s=1}^{n} b_s v_s,$$

odakle proizilazi uslov optimalnosti

$$c'_{rs} = c_{rs} + u_r + v_s \geqslant 0$$

za nebazične promenljive.

Ukoliko je $c'_{rs} \leqslant 0$ za jednu ili više nebazičnih promen - ljivih, tada se nova bazična promenljiva x_{pq} uvodi prema uslovu

$$c'_{pq} = \min_{r,s} (c_{rs} + u_r + v_s) \leqslant 0$$

za nebazične promenljive. Na taj način u konačnom broju iteracija može se odrediti optimalno rešenje, odnosno optimalni transportni program koji čini ukupne troškove minimalnim.

Pri razmatranju varijanata transportnog problema moguća su dva slučaja, tj. slučajevi u kojima nije ispunjen uslov jednakosti ponude i tražnje. Ako pretpostavimo da je ukupna traž - nja veća od ukupne ponude (proizvodnje), tada se problem javlja u obliku

$$(\min)\ f = \sum_{r=1}^{m} \sum_{s=1}^{n} c_{rs}\, x_{rs},$$

pri ograničavajućim uslovima

$$\sum_{s=1}^{n} x_{rs} = a_r \qquad (r = 1,2\ldots m)$$

$$\sum_{r=1}^{m} x_{rs} \leqslant b_s \quad (s = 1,2\ldots n),$$

gde je

$$\sum_r a_r \leqslant \sum_s b_s \,, \qquad x_{rs} \geqslant 0$$

Postavljeni problem svodi se na standardni trasportni problem na taj način što se sistem nejednačina izbilansira uvodjenjem n nenegativnih dopunskih promenljivih $x_{m+1,s}$, tako da imamo

$$\sum_{r=1}^{m} x_{rs} + x_{m+1,s} = b_s, \qquad (s = 1,2...n)$$

odakle se sumiranjem ograničavajućih uslova u vezi ponude i tražnje dobija

$\sum_s b_s - \sum_r a_r = \sum_s x_{m+1,s} = a_{m+1}$, gde a_{m+1} označava razliku izmedju ukupne tražnje i ponude. Praktično, ovo znači da se u ovakvim slučajevima uvodi jedno fiktivno preduzeće (odnosno dopuna iz uvoza) koje bi imalo funkciju da izjednači ponudu sa tražnjom. Drugim rečima, uslov jednakosti ponude i tražnje u standardnom problemu ne predstavlja smetnju za rešavanje i onih problema u kojima on faktički nije zadovoljan. Uvek se odgovarajućom transformacijom ovaj uslov formalno može zadovoljiti.

U suprotnom slučaju, tj. kada je ponuda veća od tražnje problem ima oblik

$$(\min)\ f = \sum_{r=1}^{m} \sum_{s=1}^{n} c_{rs}\, x_{rs},$$

pri ograničavajućim uslovima

$$\sum_{s=1}^{n} x_{rs} \leqslant a_r, \qquad (r = 1,2...m)$$

$$\sum_{r=1}^{m} x_{rs} = b_s, \qquad (s = 1,2...m)$$

$$x_{rs} \geqslant 0,$$

odakle proizilazi

$$\sum_{s=1}^{n} b_s \leqslant \sum_{r=1}^{m} a_r$$

Slično ranijem postupku, posle uvodjenja dopunskih promenljivih $x_{r,n+1}$, sistem nejednačina postaje

$$\sum_{s=1}^{n} x_{rs} + x_{r,n+1} = a_r, \qquad (r = 1,2...m)$$

odnosno razlika

$$\sum_r a_r - \sum_s b_s = \sum_r x_{r;n+1} = b_{n+1}$$

gde smo sa b_{n+1} označili ukupan višak ponude nad tražnjom. Ovim postupkom praktično uvodimo fiktivno mesto (skladište) koje apsorbuje višak proizvodnje (ponude) nad tražnjom.

Mnogi drugi problemi mogu biti predmet sličnih razmatra - nja. Na primer, preduzeće ima veći broj skladišta, lociranih u različitim mestima. Tada pod pretpostavkom jednakosti kapaciteta skladišnog prostora sa obimom tražnje, problem se javlja u istom obliku kao i prethodni zadatak.

Posmatrajmo sada drugi model koji se tiče problema asig - nacije. Pretpostavimo da u preduzeću postoji n različitih mašina M_r $(r = 1,2...n)$ od kojih svaka može da proizvodi n raz - ličitih proizvoda, P_s $(s = 1,2...n)$, ali sa različitim utroškom vremena (različitim troškovima) po jedinici. Označimo sa c_{rs} utrošak vremena r-te mašine za izradu jedinice s-tog proizvoda, a sa x_{rs} promenljivu koja označava obim proizvodnje r-te mašine s-tog proizvoda.

Problem je naći program proizvodnje, odnosno raspored proizvoda na pojedine mašine tako da ukupni troškovi (u vremenu ili novčano izraženi) budu minimalni. Drugim rečima, treba odrediti minimalne troškove

$$(\min)\ C = \sum_{r=1}^{n} \sum_{s=1}^{n} c_{rs}\, x_{rs},$$

pri ograničavajućim uslovima

$$\sum_{r=1}^{n} x_{rs} = 1 \qquad (s = 1,2...n)$$

$$\sum_{s=1}^{n} x_{rs} = 1 \qquad (r = 1,2...n)$$

$$x_{rs} \geqslant 0 \qquad \text{za svako } r \text{ i } s.$$

Problem predstavlja specijalan slučaj transportnog problema, prvo zbog toga što je ovde broj mašina jednak broju proizvoda (m = n) i drugo, ograničavajući uslovi imaju desne strane jednake 1. Prvi uslov predstavlja angažovanje r-te mašine na s-tom proizvodu, a drugi da je s-ti proizvod dodeljen r-toj mašini. Specifičnost uslova ogleda se još u tome što promenljive x_{rs} uzimaju samo cele brojeve, odnosno što svakoj mašini pripada samo jedan odredjen posao. Kako vrednosti promenljivih ne mogu biti veće od jedinice, a moraju biti celi brojevi, to proizilazi da one mogu biti samo 1 ili 0. U složenijim slučajevima moguće je posmatrati problem gde se jedna mašina angažuje za proizvodnju više različitih proizvoda.

U problemu figurira n^2 promenljivih od kojih je $2n - 1$ baziċnih. S obzirom na to da promenljive uzimaju vrednosti 0 ili 1, to n-1 od njih ima vrednost 0, a n vrednost 1.

Nešto opštije razmatranje može se izvesti kada se posmatra vreme t_{rs} potrebno za proizvodnju jedinice proizvoda s na r-toj mašini, a kada je poznat broj raspoloživih mašina m na kojima se proizvodi n proizvoda. Tada pod sličnim uslovima kao i u prethodnim razmatranjima imamo model u kome se traži optimalni program proizvodnje $x_{rs} \geqslant 0$ tako da ukupni troškovi budu minimalni, tj

$$(\min)\ C = \sum_{r=1}^{m} \sum_{s=1}^{n} c_{rs}\, x_{rs}, \tag{1}$$

pri ograničavajućim uslovima

$$\sum_{s=1}^{n} t_{rs}\, x_{rs} \leqslant a_r \qquad (r = 1,2\ldots m) \tag{2}$$

$$\sum_{r=1}^{m} x_{rs} = b_s \qquad (s = 1,2\ldots n) \tag{3}$$

Ovako formulisani model razlikuje se od standardnog problema i poznat je kao generalisani oblik transportnog problema . Ali relativno jednostavnom transformacijom on se može svesti na standardni oblik ako se pretpostavi da je odnos vremena potreban za proizvodnju jedinice proizvoda na bilo koje dve različite mašine isti za svaki proizvod. Drugim rečima, ako je

$$\frac{t_{rs}}{t_{ks}} = p_r ,$$

gde je k fiksirano i odnosi se na jednu utvrdjenu mašinu, imamo:

$$t_{rs}\, x_{rs} = \frac{t_{rs}}{t_{ks}}\, t_{ks}\, x_{rs} = p_r\, t_{ks}\, x_{rs} = p_r\, x'_{rs},$$

gde smo stavili

$$x'_{rs} = t_{ks}\, x_{rs}$$

Tada ograničavajući uslovi (2) postaju

$$\sum_{s=1}^{n} x'_{rs} \leq a'_r , \qquad \text{gde je } a'_r = \frac{a_r}{p_r}$$

Ograničavajući uslovi (3), posle množenja sa t_{ks}, postaju

$$\sum_{r=1}^{m} x'_{rs} = b'_s , \qquad \text{gde je } b'_s = t_{ks}\, b_s$$

Najzad, ako stavimo $c'_{rs} = \dfrac{c_{rs}}{t_{ks}}$, funkcija kriterija postaje

$$C = \sum_{r=1}^{m} \sum_{s=1}^{n} c'_{rs}\, x'_{rs}$$

Prema tome, vidimo da je generalisani problem transformisan na standardni oblik transportnog problema i može se istim metodološkim postupkom rešiti.

Model programiranja proizvodnje

Razmotrimo problem programiranja proizvodnje odredjenog proizvoda prema poznatoj tražnji u datom periodu. Pretpostavimo da je period (0,T) podeljen na n jednakih vremenskih intervala (nedelja, meseci, tromesečja itd) i da je za svaki od tih intervala poznata tražnja b_r kao i obim proizvodnje $X_r (r=1,2..n)$ Pretpostavimo, takodje, da u svakom od tih intervala može postojati dopunska proizvodnja X'_r proizvedena prekovremeno u cilju zadovoljenja povećane tražnje. Označimo sa c_r i c'_r troškove proizvodnje po jedinici u redovnoj i dopunskoj proizvodnji u r-tom periodu, a sa α_r troškove držanja jedne jedinice proizvoda na zalihama u r-tom periodu. Najzad sa x_{rs} i x'_{rs} označimo obim proizvodnje (broj jedinica) proizveden u r-tom a realizovan u s-tom periodu u redovnoj i dopunskoj (prekovremenoj) proizvodnji.

Tada, pošto svaka jedinica proizvedena u r-tom periodu može biti prodata u r-tom ili nekom kasnijem periodu, ograničenja koja se tiču ponude imaju oblik

$$\sum_{s=r}^{n} x_{rs} \leqslant X_r \qquad r = 1,2\ldots n$$

$$\sum_{s=r}^{n} x'_{rs} \leqslant X'_r \qquad r = 1,2\ldots n$$

Na drugoj strani, ograničenja koja se tiču tražnje imaju oblik

$$\sum_{r=1}^{s} x_{rs} + \sum_{r=1}^{s} x'_{rs} = b_s \qquad s = 1,2\ldots n$$

Ovom relacijom je izražen uslov da svaka jedinica prodata u s - tom periodu može biti proizvedena u ranijim periodima počev od prvog, u redovnoj i dopunskoj proizvodnji.

Dalje, pretpostavimo da je ukupna tražnja manja od ukupne proizvodnje, tj.

$$\sum_{j=1}^{s} b_j < \sum_{j=1}^{s} (X_j + X'_j)$$

za svako s.

Ukupni troškovi obuhvataju troškove u redovnoj i dopunskskoj proizvodnji, kao i troškove stokiranja, te možemo pisati

$$C = \sum_{r=1}^{n} \sum_{s=r}^{n} c_r x_{rs} + \sum_{r=1}^{n} \sum_{s=r}^{n} c'_r x'_{rs}$$

$$+ \sum_{s=r}^{n} \sum_{r=1}^{s-1} \sum_{r=j}^{s-1} \alpha_j (x_{rs} + x'_{rs})$$

Problem je: naći optimalni proizvodni program

$x_{rs} \geqslant 0$, $x'_{rs} \geqslant 0$, tako da ukupni troškovi budu minimalni, respektujući postavljena ograničenja u vezi sa ponudom i traž - njom.

Posle uvodjenja dopunskih promenljivih u ograničenja koja se tiču ponude, problem se svodi na transportni problem u kome postoji 2n centara sa n + 1 mesta (odredišta), odnosno u kome postoji 3n +1 jednačina. Treba primetiti da iako postoji veći broj ograničenja, problem je strukturno prostiji od standardnog oblika zbog činjenice da dinamičko programiranje proizvodnje i realizacije obuhvata samo uslove za s $\geqslant$r, r, s = 1,2... n.

Ako se pretpostavi da su troškovi c_r, c'_r i α_r konstantni u svim periodima, tada se funkcija ukupnih troškova može izraziti

$$C = c\sum_{r=1}^{n}\sum_{s=r}^{n} x_{rs} + c'\sum_{r=1}^{n}\sum_{s=r}^{n} x'_{rs} + \alpha\sum_{s=2}^{n}\sum_{r=1}^{s-1}(s-r)(x_{rs} + x'_{rs})$$

Najzad sličan model se može posmatrati u slučaju više proizvoda, s tom razlikom što su elementi u vezi proizvodnje (ponude) i tražnje izraženi odgovarajućim vremenskim jedinicama, kako bi se jednostavnije izvršilo agregiranje pojedinih veličina.

Dakle, ako preduzeće proizvodi k proizvode tada pri istim uslovima kao i u prethodnom modelu imamo sledeći problem

$$(\min)\ C = \sum_{i=1}^{k}\sum_{r=1}^{n}\sum_{s=r}^{n} c_i\, x_{rsi} + \sum_{i=1}^{k}\sum_{r=1}^{n}\sum_{s=r}^{n} c'_i\, x'_{rsi}$$

$$+\sum_{i=1}^{k}\alpha_i \sum_{s=2}^{n}\sum_{r=1}^{s-1}(s-r)\,(x_{rsi} - x'_{rsi})'$$

pri ograničenjima

$$\sum_{i=1}^{k}\sum_{s=r}^{n} x_{rsi} \leqslant X_r \qquad r = 1,2\ldots n$$

$$\sum_{i=1}^{k}\sum_{s=r}^{n} x'_{rsi} \leqslant X'_r$$

$$\sum_{r=1}^{s}(x_{rsi} + x'_{rsi}) = b_{si} \qquad \begin{array}{l} i = 1,2\ldots k \\ s = 1,2\ldots n \end{array}$$

$$x_{rsi} \geqslant 0, \qquad x'_{rsi} \geqslant 0$$

za svako r, s, i. Značenje pojedinih oznaka je sledeće:

X_r - Ukupno raspoloživi fond vremena u r-tom periodu.

X'_r - Dodatni fond vremena u r-tom periodu.

x_{rsi} - angažovano vreme za i-taj proizvod u r-tom periodu, a za realizaciju proizvoda u s-tom periodu

b_{si} - Ukupno angažovano vreme za i-ti proizvod za koji postoji tražnja u s-tom periodu.

U ovom slučaju postoji 2n centara i mn+1 mesta (odredišta), što ukupno daje (m+2)n+1 jednačinu.

Model robnih kuća

U okviru problematike programiranja razmotrimo tzv. problem robnih kuća (The Warehouse Problem) koji u dinamičkom aspektu obuhvata neka praktična pitanja povezana sa programom nabavke, prodaje i zaliha. On predstavlja specijalan slučaj prethodnih razmatranja, ali je interesantan zbog toga što se relativno često javlja u praksi i što se relativno jednostavna rešenja mogu koristiti i u drugim slučajevima.

Pretpostavimo da robna kuća raspolaže ukupnim skladišnim prostorom kapaciteta K jedinica i da se u trenutku $t = 0$, na zalihama nalazi Z jedinica. Označimo sa $x_{s-\theta}$ iznos narudžbine u periodu $s-\theta$, gde je θ period vremena koji protekne od trenutka kada je upućena narudžbina do trenutka prijema robe. Označimo, dalje, sa c_s cenu proizvodjača uključujući i troškove narudžbine po jedinici, sa y_s iznos prodaje, a sa p_s prodajnu cenu u periodu s. Neka je vremenski interval posmatranja podeljen na n perioda tako da posmatrane veličine uzimamo konstantnim unutar pojedinih perioda. Pretpostavićemo da je $\theta = 1$.

Razliku izmedju prihoda $p_s\, y_s$ i troškova $c_s\, x_s$, uzeta preko svih perioda, označićemo kao ukupnu dobit

$$f = \sum_{s=1}^{n} (p_s\, y_s - c_s\, x_s)$$

Ograničavajući uslovi se tiču raspoloživih kapaciteta, odnosno mogućnosti nabavke i prodaje proizvoda u odgovarajućim periodima. Kao prvo, uzimamo u obzir da zbir inicijalnih zaliha Z i odgovarajućeg dodatnog iznosa $(x_s - y_s)$ kroz s - ti period ne može biti veći od raspoloživih kapaciteta, tj.

$$Z + \sum_{s=1}^{r} (x_s - y_s) \leqslant K, \qquad r=1,2...n$$

Takodje, ograničenja koja se tiču prodaje moraju zadovoljiti uslov da iznos prodaje u periodu s ne može biti veći od raspoloživih zaliha na kraju prethodnog perioda, tj

$$y_s \leq K + \sum_{s=1}^{r-1} (x_s - y_s), \qquad r = 1,2....n$$

Uzimajući u obzir uslove nenegativnosti $x_s \geq 0$, $y_s \geq 0$ vidimo da se problem svodi na traženje optimalnog programa nabavke i prodaje u pojedinim periodima, tako da se ostvari maksimalna ukupna dobit u intervalu posmatranja.

Posle sredjivanja, problem se može pisati

$$(\max) f = \sum_{s=1}^{n} (p_s y_s - c_s x_s)$$

pri ograničavajućim uslovima

$$\sum_{s=1}^{r} x_s - \sum_{s=r}^{r} y_s \leq K - Z$$

$$- \sum_{s=1}^{r-1} x_s + \sum_{s=1}^{r} y_s \leq Z \qquad r = 1,2....n$$

Dualni problem ima oblik

$$(\min) V = (K - Z) \sum_{r=1}^{n} u_r + K \sum_{r=1}^{n} v_r$$

sa ograničenjima

$$\sum_{r=j}^{n} u_r - \sum_{r=j+1}^{n} v_r \geq - c_j$$

$$-\sum_{r=j}^{n} u_r + \sum_{r=j}^{n} v_r \geq p_j \qquad j = 1,2....n$$

gde su u_r i v_r dualne promenljive. U primarnom problemu postoji 2n nejednačina, a u dualnom 2n promenljivih. Problem se može rešavati transportnom metodom ili tzv. principom regrupisanja podataka koji su dali Charnes i Cooper.[1)]

[1)] Charnes A and. W.Cooper : Duality, Regrouping and Warehousing, ONR. Research Memo, Pittsburgh 1954.

Model lokacije

Razmotrimo jedan specijalan slučaj problema lokacije koji se svodi na transportni problem.

Pretpostavimo da se k preduzeća P_i ($i=1,2....k$) loci - ranih u različitim mestima snabdeva jednom vrstom sirovine iz m izvora I_r ($r= 1,2...m$). Posle prerade, finalni proizvodi pre - duzeća plasiraju se na n različitih tržišta T_s ($s=1,2....n$) .

Označimo sa a_r kapacitet izvora I_r. Neka x_{ri} označava obim transporta, a c_{ri} transportne troškove po jedinici od izvora I_r do preduzeća P_i. Označimo sa b_s tražnju tržišta T_s, i neka y_{is} označava obim transporta, a c'_{is} transportne troškove po jedinici finalnog proizvoda od preduzeća P_i do tržišta T_s. Sem toga neka z_i označava obim proizvodnje preduzeća P_i.

Prema uslovu transportnog problema proizilazi,

$$\sum_r a_r = \sum_s b_s,$$

da obim sirovine svih izvora bude jednak obimu tražnje finalnih proizvoda na svim tržištima. Pretpostavka se može prihvatiti u specijalnim slučajevima, kada je učešće sirovina u finalnom proizvodu relativno veliko i kada je odnos stalan, tako da se aproksimativno može jedinica finalnog proizvoda izražavati jedinicom sirovine.

Pod ovim pretpostavkama problem se može izraziti na sledeći način: naći transportni program $x_{ri} \geqslant 0$, $y_{rs} \geqslant 0$, tako da ukupni transportni troškovi budu minimalni, tj

$$(\min)\ C = \sum_r \sum_i c_{ri}\, x_{ri} + \sum_i \sum_s c'_{is}\, y_{is}$$

pri ograničavajućim uslovima

$$\sum_i x_{ri} = a_r \qquad (r = 1,2....m)$$

$$\sum_r x_{ri} = z_i \qquad (i = 1,2...k)$$

$$\sum_s y_{is} = z_i \qquad (s = 1,2...n)$$

$$\sum_i y_{is} = b_s,$$

gde prvi uslov izražava jednakost kapaciteta a_r i ukupnog obima transporta sirovine upućene svim preduzećima iz izvora I_r; drugi jednakost proizvodnje s_i preduzeća P_i obima sirovine dobivene iz svih izvora; treći, jednakost proizvodnje s_i preduzeća P_i i poslatog iznosa finalnog proizvoda svim tržištima i najzad četvrti jednakost tražnje b_s tržišta T_s i primljenih iznos finalnog proizvoda od svih preduzeća.

Iz prvog i drugog uslova odnosno trećeg i četvrtog proizilazi da se postavljeni problem sastoji iz dva simultana transportnog problema koji se na sličan način mogu postaviti i rešiti kao i standardni transportni problem. Posle eliminacije s_i iz drugog i trećeg uslova, ograničavajuće uslove možemo pisati

$$\sum_i x_{ri} = a_r \qquad (r = 1,2...n)$$

$$\sum_r x_{ri} - \sum_s y_{is} = 0 \qquad (i = 1,2...k)$$

$$\sum_i x_{is} = b_s \qquad (s = 1,2...n)$$

U problemu figurira $m + n + k$ jednačina, sa $(m+k)n$ promenljivih od kojih je $m+n+k-1$ bazičnih, s obzirom na to da je broj nezavisnih jednačina $m+n+k-1$. Ovaj model formulisao je B.Korda: "K problematici razmisteni vyroby" Praha 1963. Takodje videti Ljubomir Martić, Matematičke metode za ekonomske analize, II , Zagreb, 1966. god.

Model mešavine

Pretpostavimo da preduzeće proizvodi n varijanti jednog ili više proizvoda, u vidu mešavine, upotrebljavajući m osnovnih sirovina. Ograničenja u pogledu raspoloživih sirovina i odgovarajućih učešća u svakoj varijanti unapred su data. Takodje, postoje ograničenja u pogledu obima proizvodnje pojedinih varijanata.

Ako sa x_{rs} označimo obim r-te sirovine u s-toj varijanti proizvoda, tada je ukupan obim proizvodnje s-te varijante

$$x_s = \sum_r x_{rs}$$

a ukupna raspoloživa količina r-te sirovine

$$X_r = \sum_s x_{rs}$$

Ako sa p_s označimo cenu s-te varijante proizvoda, a sa p'_r cenu r-te sirovine, tada se ukupan prihod može izraziti u obliku

$$\sum_s \sum_r p_s \, x_{rs},$$

a ukupni troškovi sirovina kao

$$\sum_s \sum_r p'_r \, x_{rs},$$

odakle je ukupna dobit

$$f = \sum_s \sum_s (p_s - p'_r) \, x_{rs}$$

Ako sa $h_s \leqslant X_s$ označimo obim proizvodnje s-te varijante, ograničavajući uslovi u vezi obima proizvodnje mogu se napisati

$$\sum_r x_{rs} \leqslant h_s \qquad s = 1,2....n$$

Na sličan način, ako sa $b_r \leqslant X_r$ označimo raspoložive količine r-te sirovine, ograničavajući uslovi postaju

$$\sum_s x_{rs} \leqslant b_r \qquad r = 1,2....n$$

Najzad, ako je sastav u različitim varijantama unapred propisan, tj. ako sa

$$k_{rs} = \frac{x_{rs}}{X_s}$$

označimo učešće r-te sirovine u s-toj varijanti, tada posle zamene u ograničavajućim uslovima, imamo

$$\sum_r k_{rs} = 1 \qquad \text{za} \quad s = 1,2....n$$

$$\sum_s x_{rs} = \sum_s k_{rs} \, X_s,$$

odnosno

$$\sum_s x_{rs} - \sum_s k_{rs} \sum_r x_{rs} = 0, \qquad r = 1,2....m$$

Problem je odrediti optimalne vrednosti promenljivih $x_{rs} \geqslant 0$ $(r = 1,2...m; \; s = 1,2...n)$, a time i optimalni izbor varijanti tako da funkcija kriterijuma dostigne maksimalnu vrednost, tj.

$$(\max) \quad f = \sum_{s} \sum_{r} (p_s - p'_r)\, x_{rs}$$

pri ograničavajućim uslovima

$$\sum_{r} x_{rs} < h_s \qquad s = 1,2\ldots n$$

$$\sum_{s} x_{rs} < b_r \qquad r = 1,2\ldots m$$

$$\sum_{s} x_{rs} - \sum_{s} k_{rs} \sum_{r} x_{rs} = 0$$

$$x_{rs} > 0 \quad \text{za svako } r \text{ i } s.$$

LITERATURA

1. Dorfman R.: Application of linear Programming to the Theory of the Firm, California 1951.

2. Dorfman R., Samuelson P. and Solow R.:Linear Programming and Economic Analysis, McGraw-Hill, New York, 1958.

3. Charnes A., Cooper W.: Management Models and Industrial Application of Linear Programming, vols, I,II, John Wiley, New York, 1964.

4. Dantzig G.B.: Maximization of a Linear Function of Variables Subject to Linear Inequalities, and Application of the Simplex Method to a Transportation Problem, chap. XXI, XXIII,respect. of T.C.Koopmons, "Activity Analysis of Production and Allocation", John Wiley, 1951.

5. Dantzig G.B. and Wolfe P.: A Decomposition Principle for Programs, "Operations Research", vol. 8,n.1,1959.

6. Dantzig G.B. and Wolfe P.: The Decomposition Algorithm for Linear Programs, "Econometrica" vol. 29.,n. 4, 1961.

7. Dantzig G.B.: Linear Programming and Extensions, Princeton University Press, Princeton, 1963.

8. Ford L. and Fulkerson D.: Solving the Transportation Problems, "Management Sci.", 3, 1956.

9. Garvin W.: Introduction to Linear Programming, McGraw-Hill, New York, 1960.

10. Hadley G.: Linear Programming, Addison-Wesley Co. Reading. Massaachusetts, 1963.

11. Kantorovič L.V.: Matematičeskie metodi organizacii i planirovania proizvodstva, Izd-vo LGU, 1939.

12. Kantorovič L.V.: Gavurin M.K.: Primenenie matematičeskih metodov v voprosah analiza gruzonomokov, A.N.SSSR, 1949.

13. Kantorovič L.V.: O metodax analiza nekamopih ekstremaljnjih planovo-proizvodstvenih zadač, "Dokladi" A.H.SSSR, t. 115, N° 3, 1957.

14. Leontief W.W.: Studies in the Structure of the American Economy: Theoretical and Empirical Explorations in Input - Output Analysis, Oxford University Press, New York, 1953.

15. Martić Lj.: Matematičke metode za ekonomske analize II, Zagreb, 1966.

16. McKinsey J.C.: Introduction to the Theory of Games, McGraw-Hill, 1952.

17. Morgenstern O.: Economic Activity Analysis, John Wiley,1951.

18. Sasieni M.Saspan A, Friedmen L.: Operations Research-Method and Problems, John Wiley 1961.

19. Vajda S.: Mathematical Programming, Addison-Wesley, 1961.

20. Vajda S.: Readings in Mathematical Programming, John Wiley, 1962.

21. Stojanović D. Matematičke metode u ekonomiji preduzeća, Rad, Beograd, 1968.

SAVREMENA RAČUNSKA TEHNIKA I NJENA PRIMENA

U ovoj seriji Matematičkog instituta dosada su publikovane sledeće knjige:

1. *Nedeljko Parezanović*
   Algoritmi i programski jezik FORTAN IV,
   Beograd, 1972., str. 272.
2. *Pavle Pejović i Nedeljko Parezanović*
   Analogni elektronski računari i njihova primena
   Beograd, 1972., 322
3. *Dragiša Stojanović*
   Ekonomsko-matematički modeli linearnog programiranja,
   Beograd, 1973., 84

U pripremi za štampu:

4. *Jurij Stepanenko*
   Dinamika prostornih mehanizama, Beograd,
5. *Mirko Stojaković*
   Algoritmi i automati, Beograd,

Dr Dragiša Stojanović

EKONOMSKO-MATEMATIČKI MODELI LINEARNOG PROGRAMIRANJA

METODOLOŠKA STUDIJA

Rukopis za snimanje kucala	*Milica Isidorović*
Korekture izvršili	*Vojislav Popović* *Dr Dragiša Stojanović i* *Milan Čavčić*
Nacrt za korice	*Milan Čavčić*
Tiraž	*500 primeraka*
Štampanje završeno	*jula 1973. godine*