PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET U BEOGRADU

Miroslav Pavlović

GEOMETRIJA KOMPLEKSNIH BANACHOVIH PROSTORA

(doktorska disertacija)

BEOGRAD, februara 1983.

SADRŽAJ

UVOD . . . . i-ix

I. MODULI KOMPLEKSNE KONVEKSNOSTI 1

1. Definicija i osnovne osobine (1). 2. Veza između Miljmanovog i Clarksonovog modula (3). 3. Proširenja Kadecove teoreme o bezuslovnoj konvergenciji (6). 4. Neke primene Clarksonovog modula (9). 5. Jedna generalizacija Schwarzove leme (11). 6. Primeri (11). 7. Ravnomerna c-konveksnost kvazinormiranih prostora (13). 8. Teorema o bezuslovnoj konvergenciji u kvazinormiranom prostoru (15). 9. Neke napomene o dualnim svojstvima (17).

II. MODULI c-KONVEKSNOSTI LEBESGUEOVIH PROSTORA . . 18

1. Slučaj $p=1$ (18). 2. Slučaj $1<p<2$ (20). 3. Dokaz teoreme 3 (22). 4. Slučaj $0<p<1$ (24). 5. Primedbe i primeri (26).

III. RAVNOMERNA c-KONVEKSNOST ORLICZEVIH PROSTORA . . 29

1. Definicija Orliczevih prostora (29). 2. Procena modula c-konveksnosti (29). 3. Prostori sa mešovitim normama (32). 4. Kotip Orliczevih prostora (34). 5. O teoremama 1 i 4 u slučaju kad je funkcija M konveksna (36). 6. O drugim klasama prostora (39). 7. Primeri i primedbe (40).

IV. HARDY-ORLICZEVI I BERGMAN-ORLICZEVI PROSTORI . . 43

1. Definicije i neka svojstva (43). 2. Generalizacija Hardy-Littlewoodove teoreme (44). 3. Banachova obvojnica Hardy-Orliczevih prostora (46). 4. Obvojnica Bergman-Orliczevih prostora (48). 5. Primeri uz teoreme 1, 2, 3 (49). 6. Razlaganje Bergman-Orliczevih prostora (51). 7. Bezuslovni bazis u Bergman-Orliczevim prostorima (53).

LITERATURA 57

U V O D

Prvi rezultati o kvantitativnim karakteristikama jedinične sfere Banachovog prostora pojavili su se 1936. u radu J. A. Clarksona "Uniformly convex spaces" [8]. Razmatrajući Radon-Nikodymov stav za vektorske mere, on je definisao modul konveksnosti —

$$\delta_X(\varepsilon) = \inf\left\{1 - \left\|\frac{x+y}{2}\right\| : \|x\|\le 1,\ \|y\|\le 1,\ \|x-y\|\ge\varepsilon\right\},\quad 0\le\varepsilon\le 2.$$

Prostore koji zadovoljavaju uslov $\delta_X(\varepsilon) > 0$ $(0<\varepsilon<2)$ Clarkson je nazvao ravnomerno konveksnim. On je dokazao da je L^p ravnomerno konveksan ako je $1<p<\infty$, kao i da je

$$\delta_p(\varepsilon) := \delta_{L^p}(\varepsilon) = 1-(1-\varepsilon^p/2^p)^{1/p} \ge p^{-1}(\varepsilon/2)^p,\qquad p\ge 2.$$

Tek dvadeset godina kasnije O. Hanner [32] i M. I. Kadec [44] našli su zadovoljavajuću procenu u slučaju $p<2$:

$$\delta_p(\varepsilon) \ge K_p\,\varepsilon^2,\qquad 1<p<2.$$

U Kadecovom radu je dokazana sledeća teorema, u kojoj je prvi put povezano jedno čisto geometrijsko svojstvo sfere sa konvergencijom redova.

<u>Teorema Kadeca</u>. Iz bezuslovne konvergencije reda $\sum x_n$ u normiranom prostoru X sledi konvergencija reda $\sum \delta_X(\|x_n\|)$.

Primenom te teoreme Kadec je izveo, i to u slučaju $p>1$, Orliczevu teoremu o bezuslovnoj konvergenciji u L^p [76].

<u>Teorema Orlicza</u>. Iz bezuslovne konvergencije reda $\sum x_n$ u prostoru L^p, $p\ge 1$, sledi konvergencija reda $\sum \|x_n\|^r$, $r=\max(2,p)$.

Mogućnost primene Kadecove teoreme ograničena je činjenicom da su ravnomerno konveksni Banachovi prostori refleksivni (V. D. Miljman [70]). Osim toga, Orliczeva teorema važi i kad je $0<p<1$, a tada prostor L^p, ako je beskonačne dimenzije, nije ni lokalno konveksan. Te činjenice su polazna tačka jednog dela ovog rada.

<u>U prvoj glavi</u> se razmatraju numeričke karakteristike (moduli c-konveksnosti) ravnomerne c-konveksnosti kompleksnog (kvazi)normiranog prostora i njihova primena. Pojam ravnomerne c-konveksnosti uveo je J. Globevnik [27] pre osam godina. Ideja, međutim, potiče od E. Thorpa i R. Whitleya [102], koji su 1967. uveli pojam stroge c-konveksnosti i ustanovili njegovu vezu sa principom strogog maksimuma modula vektorskih analitičkih funkcija.

<u>Teorema Thorpa-Whitleya</u>. Neka je X strogo c-konveksan Banachov prostor ~~i D —~~ oblast u kompleksnoj ravni. Ako analitička funkcija $f: D\to X$ zadovoljava uslov $\|f(z_0)\| = \sup\{\|f(z)\| : z\in D\}$ za neko $z_0\in D$,

onda je $f(z)=f(z_0)$ za svako $z\in D$.

Definicija ravnomerne c-konveksnosti zadržava smisao i u slučaju kvazinormiranog prostora a može se izraziti nejednakošću

$$\hat{\delta}_c(X;\varepsilon):=\inf_{\|x\|=\|y\|=1}\ \sup_{|\lambda|\le 1}\|x+\lambda\varepsilon y\|-1>0,\qquad \varepsilon>0.$$

Glavni rezultat u prvoj glavi je teorema 5 (str. 15), koju formulišemo i na ovom mestu.

Teorema A. Iz bezuslovne konvergencije reda $\sum x_n$ u kompleksnom kvazinormiranom prostoru X sledi konvergencija reda $\sum\hat{\delta}_c(X;\|x_n\|)$.

Ova teorema je primenljiva, za razliku od teoreme Kadeca, ne samo na L^1 nego i na jednu klasu prostora u kojoj je L^p, $p<1$.

U većem delu prve glave razmatraju se normirani prostori (tač. 1-6). Osobine norme, naročito formula $\|x\|=\sup\{|x^*(x)|:\|x^*\|\le 1\}$, skraćuju dokaze i obezbeđuju dodatne informacije o modulima c-konveksnosti. Većina rezultata iz tač. 2 predstavlja direktnu generalizaciju poznatih tvrđenja o modulu konveksnosti, ali su dokazi novi i manje zavise od nejednakosti trougla od postojećih. U tački 3 daje se dokaz teoreme A pod pretpostavkom da je X normiran (teorema 1). Taj dokaz se malo razlikuje od Kadecovog i drugih dokaza teoreme Kadeca i u njemu se bitno koristi nejednakost trougla (lema 2). Osim toga, dokazuje se jedno proširenje teoreme Gurarija i Markusa o strogo apsolutno konvergentnim redovima operatora (teorema 2). U tačkama 4-6 razmatraju se neke druge primene. Daje se jedna kvantitativna verzija teoreme Thorpa-Whitleya i Schwarzove leme (teorema 4) i pokazuje kako se može izvesti Hinčinova nejednakost u $L^1(0,1)$ (primer 6.4). Na kraju se, u tačkama 7 i 8, daje dokaz teoreme A.

U drugoj glavi su date tačne vrednosti modula c-konveksnosti Lebesgueovih prostora beskonačne dimenzije. Thorp i Whitley [102] su dokazali da je L^1 strogo c-konveksan, što je pojačao Globevnik [27] dokazavši da je L^1 ravnomerno c-konveksan. Ravnomerna c-konveksnost kvazinormiranih prostora do sada nije razmatrana. Ovde se dokazuje da je L^p ravnomerno c-konveksan i kad je $p<1$.

Teorema B. Neka je $0<p\le 1$ i $\dim(L^p)=\infty$. Tada je

$$(+)\qquad \hat{\delta}_c(L^p;\varepsilon)=\left\{\int_0^{2\pi}|1+\varepsilon e^{it}|^p\,dt/2\pi\right\}^{1/p}-1,\qquad \varepsilon\ge 0.$$

Osim toga, prostor L^p je "najravnomernije" c-konveksan u klasi svih p-normiranih prostora koji su mu izomorfni. Preciznije, ako je X iz te klase, onda je $\hat{\delta}_c(X;\varepsilon)\le\hat{\delta}_c(L^p;\varepsilon)$ za svako $\varepsilon\ge 0$.

Mada se može dati jedinstven dokaz jednakosti (+), koja važi i za $p \in]1,2]$ (posledica 3), zasebno se tretiraju slučajevi $p=1$ (teorema 1) i $p<1$ (teorema 5), jer je u prvom moguć vrlo prost dokaz. Drugi deo teoreme B sledi iz jedne direktne generalizacije (propozicija 1, tač. 4) poznatog rezultata R. C. Jamesa [57: str. 97]. (Napominjemo da je kvazinormirani prostor $(X,\|\cdot\|)$ p-normiran ako je $\|x+y\|^p \leq \|x\|^p + \|y\|^p$, $x,y \in X$.)

Osim teoreme B, u drugoj glavi se dokazuju neke generalizacije (teoreme 3, 4) Hannerovih rezultata o uniformnoj konveksnosti prostora L^p, $1 \leq p < 2$ [32]. Ideja dokaza je ista kao kod Hannera (primena Jensenove nejednakosti), ali je realizacija mnogo složenija. Na kraju se daje nekoliko primera uz teoremu B. Jednim od njih se pokazuje da prostor $BV[0,2\pi]$ (funkcijā ograničene varijacije) ima iste karakteristike kao L^1, pri čemu se koriste svojstva harmonijskih funkcija.

Treća glava je posvećena geometrijskim svojstvima Orliczevih prostora, snabdevenih Luxemburgovom (kvazi)normom, i nekih njihovih generalizacija. Te prostore je 1932. uveo W. Orlicz [77, 78] i, po nekim mišljenjima (na primer, B. Turret [106]), oni su dugo bili samo zanimljiva generalizacija Lebesgueovih prostora. Međutim, u poslednje vreme porastao je interes za geometriju Orliczevih prostora, prvenstveno zahvaljujući radovima J. Lindenstraussa i L. Tzafririja (videti [57]). Geometriju normiranih Orliczevih prostora proučavalo je mnogo autora [7, 28, 47, 63, 105 itd.]. U ovom radu se razmatra ravnomerna c-konveksnost i njena primena na kotip kvazinormiranih Orliczevih prostora. Rezultate iz tačke 2 (teoreme 1 i 2) formulišemo na ovom mestu u sledećem obliku.

Teorema C. Neka je p bilo koji pozitivan broj i M — Orliczeva funkcija za koju je $\sup\{M(2t)/M(t) : t>0\} < \infty$ (uslov Δ_2). Važe ova tvrđenja:

(i) Prostor L_M je ravnomerno c-konveksan i $\hat{\delta}_c(L_M;\varepsilon)K \geq F_M(\varepsilon) := \inf\{(\varepsilon/v)^2 M(vt)/M(t) : \varepsilon \leq v \leq 1,\ t>0\}$, $0<\varepsilon \leq 1$.

(ii) $x, y \in L_M$, $\int_0^{2\pi} \|x+e^{it}y\|^p\, dt/2\pi \leq 1 \Rightarrow 1-\|x\| \geq K F_M(\|y\|)$.

Ovde je K pozitivna konstanta koja ne zavisi od ε, x, y. Terminom "Orliczeva funkcija" označena je funkcija M koja se može napisati u obliku $M(t) = P(t^p)$ za neko $p>0$, gde je P Orliczeva u uobičajenom značenju (i nedegenerisana [57: str. 137]).

Drugi deo teoreme C može se interpretirati u kontekstu nedavnih rezultata A. B. Aleksandrova [1] i J. Peetrea [114]. Aleksandrov je definisao lokalno holomorfne a Peetre lokalno (analitički) pseudoklase, koja sadrži lokalno konveksne prostore i neke od kvazinormiranih (na primer, L^p). Peetre je dokazao da je jedinična kugla prostora L_M pseudokonveksna, što se (po Aleksandrovu) može izraziti nejednakošću

$$\|x\|^p \leq \int_0^{2\pi} \|x+e^{it}y\|^p \, dt/2\pi \ , \quad p>0.$$

Međutim, to je ekvivalentno tvrđenju da iz premise implikacije (ii) sledi $1-\|x\| \geq 0$. Da bismo to tvrđenje uporedili sa teoremom C(ii), pretpostavimo da je funkcija M konkavna. Tada je $F_M(\varepsilon) = \varepsilon^2$ i zaključak izgleda ovako: $1-\|x\| \geq K\|y\|^2$. Dakle, teorema C(ii) pokazuje da je jedinična kugla prostora L_M "ravnomerno pseudokonveksna", odnosno da je funkcija $\|\cdot\|^p$ "ravnomerno plurisubharmonijska". To se koristi u tački 3 da bi se dokazala ravnomerna c-konveksnost prostora $L_{M,N}$ (koje je uveo A. C. Zaanen [109]). Osim toga, teorema C(ii) može poslužiti kao sredstvo da bi se proširili poznati rezultati o kotipu Orliczevih prostora. To je učinjeno u tač. 4 (teorema 4).

Teorema D. Ako Orliczeva funkcija M zadovoljava uslov Δ_2, onda je prostor L_M (netrivijalnog) kotipa F_M.

Pojam kotipa je u uskoj vezi sa skoro sigurnom konvergencijom slučajnih redova [89, 115]. Naime, neka je (x_n) niz u Banachovom prostoru X i neka je X kotipa F. Ako red $\sum \varphi_n(t)\, x_n$, gde je $\varphi_n(t) = \operatorname{sign}\sin(2^n\pi t)$, konvergira za skoro sve $t\in[0,1]$, onda konvergira i red $\sum F(\|x_n\|)$. To sledi iz teoreme J.-P. Kahanea [115: teorema II.4] i definicije kotipa.

Ako je, za neko $q<1$, funkcija $M(t^q)$ konveksna, onda zaključak teoreme D sledi iz teoreme Maleeva-Trojanskog (tač. 2) i teoreme Figiela-Pisiera [21] kojom se tvrdi da je normiran prostor X kotipa δ_X. Međutim, ako je q=1, teorema Figiela-Pisiera ne daje nikakve informacije jer prostor L_M može biti nerefleksivan. Neka slabija tvrđenja (od teoreme D) o kotipu normiranih Orliczevih prostora dobili su Z. G. Gorgadze i V. I. Tarieladze [28]. Kotip u kvazinormiranom slučaju nije bio razmatran.

Dokaz teoreme D zasniva se na tome da je prostor L^1_X (funkcijā integrabilnih po Bochneru) ravnomerno c-konveksan ako je X "ravnomerno pseudokonveksan" (propozicija 2). Strategija se sastoji u tome da se oceni modul c-konveksnosti prostora L^1_X pa da se primeni teorema A (odnosno propozicija I.7, koja je, u suštini, ekvivalentteoremi A). Taj metod je primenljiv i na druge klase prostora. U tački 6 je objašnjeno kako se može modifikovati dokaz jedne teoreme T. Figiela da bi se dokazala teorema B. Maureya o kotipu Banachove rešetke koja zadovoljava "lower q-estimate".

Verovatno je da se teorema D ne može poboljšati ako je $L_M = L_M(\mu)$, gde je μ beskonačna neatomična mera. To se dokazuje u tački 5, ali pod pretpostavkom da je funkcija M konveksna.

U četvrtoj glavi dokazani su neki rezultati o Hardy-Orliczevim i Bergman-Orliczevim prostorima (H_Q i A_Q). Skoro svi dokazi zasnovani su na jednoj karakterizaciji L_Q-integrabilnosti stepenih redova sa pozitivnim koeficijentima koju su dali M. Mateljević i autor [65, 66] (videti lemu 4, tač. 5). Jedan od glavnih rezultata odnosi se na vezu između Hardy-Orliczevih i nekih prostora koje su uveli i razmatrali A. L. Shields i D. L. Williams [93, 94]. Zanemarujući neke nebitne detalje, taj rezultat (teorema 2) možemo formulisati na sledeći način.

Teorema E. Neka je Q Orliczeva funkcija takva da za neko $q<1$ funkcija $Q(t)/t^q$ opada na $[0,\infty[$. Tada se Banachova obvojnica prostora H_Q sastoji od analitičkih funkcija $f:\mathbb{D}\to\mathbb{C}$ ($\mathbb{D}$ = jedinični disk) koje zadovoljavaju uslov

$$\iint_{\mathbb{D}} |f(z)|\, P(|z|)\, dx\, dy < \infty \qquad (z = x+iy),$$

gde je $1/P(|z|) = (1-|z|)^2 Q^{-1}[1/(1-|z|)]$.

Pojam Banachove obvojnice uveli su J. Peetre [84] i, dve godine kasnije, J. H. Shapiro [92]. (Naziv potiče od Shapiroa [91].) To je, u izvesnom smislu, najmanji Banachov prostor u kojem je sadržan dati kvazinormirani prostor. Pored toga, obvojnica je tesno povezana sa dualnošću. Tako se, na primer, pomoću teoreme E i rezultata Shieldsa i Williamsa [93] može dati konkretna reprezentacija linearnih funkcionala na prostoru H_Q (pod uslovima teoreme E). (Videti primer 5.2.) Linearne funkcionale na H_Q razmatrao je R. Lesniewicz [52].

U dokazu teoreme E koristi se jedna generalizacija poznate teoreme Hardy-Littlewooda [15: teorema 5.11] . Dokaz te teoreme (teorema 1) je nov a zasniva se na Hardy-Steinovom identitetu i pomenutoj karakterizaciji L_Q-integrabilnosti stepenih redova. Pored teoreme 1, u završnom delu dokaza teoreme E primenjuje se jedan metod J. H. Shapiroa [92] .

U drugom delu glave IV (tač. 6 i 7) razmatra se problem linearnotopološke klasifikacije Bergman-Orliczevih prostora. Ideja o izomorfnosti nekih prostora analitičkih funkcija prostorima nizova (sa monotonim normama) potiče od J. Lindenstraussa i A. Pelczynskog [55]. Oni su dokazali da je prostor A^p, $1\le p<\infty$, ($\iint_{\mathbb{D}} |f(z)|^p\, dx\, dy < \infty$)

Pelczynskog [57: teorema 2.a.1] o komplementiranim potprostorima prostora ℓ^p. Međutim, primenom tog metoda teško je ustanoviti koje funkcije iz A^p odgovaraju elementima kanonskog bazisa u ℓ^p. U radu [66] takav problem je rešen za jednu klasu prostora koja sadrži A^p, $1<p<\infty$. Tamo je dokazano da je niz $(w_n)_{n\geq 0}$, definisan preko podniza $w_{2^n} = 2^{-n} z^{2^n}(1-z^{2^n})(1-z)^{-1}$, bezuslovni bazis u A^p, $1<p<\infty$. Pomoću tog bazisa na prirodan način se definiše izomorfizam između A^p i ℓ^p. U ovom radu se sistem (w_n) koristi da bi se dokazala ova teorema (teorema 5):

<u>Teorema F</u>. Neka je $1<p\leq q<\infty$ i neka je Q Orliczeva funkcija takva da $Q(t)/t^p$ raste i $Q(t)/t^q$ opada na intervalu $]0,\infty[$. Tada je prostor A_Q izomorfan prostoru $L_Q(N,\mu)$, pri čemu je $\mu(\{n\}) = (n+1)^{-2}$ $(n=0, 1, \ldots)$. Važi i više: funkcija $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{f}(n) w_n(z)$ pripada prostoru A_Q ako i samo ako je $\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)^{-2} Q(|\hat{f}(n)|) < \infty$.

Izomorfnost prostora A_Q i $L_Q(N,\mu)$ ne može se dokazati metodom Lindenstraussa i Pelczynskog osim, možda, ako je Q minimalna Orliczeva funkcija [57: problem 4.b.8]. Ovde se postupa slično kao u [66], ali je prelaz od dekompozicione teoreme (teorema 4) do teoreme F komplikovaniji (videti primedbe na str. 55). S obzirom da su A^1 i ℓ^1 međusobno izomorfni, prirodno je očekivati da prvi deo teoreme F važi i u slučaju $p=1$ (možda i za $p<1$). Međutim, to se pomoću niza (w_n) ne može dokazati.

<u>Neki problemi</u>. Jedno od najvažnijih svojstava funkcije δ_X sadržano je u nejednakosti $\delta_X(\theta\varepsilon) \leq K\,\delta_X(\varepsilon)\theta^2$, $0<\theta<1$, $0<\varepsilon<2$, koja važi ako je $\dim(X)\geq 2$ [58: propozicija 1.e.6]. Bilo bi od interesa ispitati da li to svojstvo poseduje i funkcija

$$\delta_c(X;\varepsilon) := \inf\{1-\|x\| :\ S(x,y) \leq 1,\ \|y\|\geq\varepsilon\},$$

gde je $S(x,y) = \sup\{\|x+\lambda y\| : |\lambda|\leq 1\}$ i $0\leq\varepsilon\leq 1$.

<u>Problem 1</u>. Neka je X (kvazi)normiran prostor beskonačne dimenzije. Postoji li pozitivan broj K takav da je

$$\delta_c(X;\theta\varepsilon) \leq K\theta^2\delta_c(X;\varepsilon),\quad 0\leq\varepsilon,\theta\leq 1\ ?$$

Ako bi odgovor bio pozitivan, lako bi se dokazalo da se teoreme C i D ne mogu poboljšati (asimptotski) u slučaju $L_M = L_M(0,\infty)$. (Videti propoziciju III.3, str. 37.)

Čini se da centralno mesto u vezi sa ravnomernom c-konveksnošću

Problem 2. Da li je X kotipa $\delta_c(X;\cdot)$ ako je $\dim(X)=\infty$?

U slučaju pozitivnog odgovora dobilo bi se uopštenje i poboljšanje teoreme Figiela-Pisiera. Tako bi teorema D sledila iz teoreme C(i). Navedeni problem tesno je povezan sa sledećim.

Problem 3. Pod kojim je uslovima $\delta_c(L^1_X;\varepsilon)\geq K\,\delta_c(X;\varepsilon)$?

Ovde L^1_X označava prostor integrabilnih (po Bochneru) funkcija $f:[0,1]\to X$ sa kvazinormom $\|f\|=\int_0^1\|f(t)\|\,dt$. Vrlo je verovatno da nejednakost $\delta_c(L^1_X;\varepsilon)\geq K\,\delta_c(X;\varepsilon)$ važi ako je X normiran prostor beskonačne dimenzije.

Rešenje navedenih problema upotpunilo bi sliku odnosa između ravnomerne konveksnosti i ravnomerne c-konveksnosti. Taj odnos, kako se vidi iz rezultata ovog rada, podseća na odnos između konveksnosti i pseudokonveksnosti (u teoriji analitičkih funkcija). Kao što pokazuje teorema B, ravnomerna c-konveksnost nije striktno vezana za normirane prostore. Kod nekih klasičnih prostora situacija je verovatno slična kao kod Lebesgueovih. Na primer, sudeći po rezultatima N. Tomczak-Jaegerman [103], može se očekivati da je S_p (prostor tragova) ravnomerno c-konveksan ako je $0<p<1$, kao i da je $\delta_c(S_p;\varepsilon)\geq K_p\,\varepsilon^2$.

Nekoliko napomena o principu maksimuma modula. Interesantno je da pojam stroge konveksnosti, mada je mnogo stariji od pojma stroge c-konveksnosti, nije doveđen u vezu sa principom maksimuma modula. Gledajući teoremu Thorpa-Whitleya, nije teško pretpostaviti da bi stroga konveksnost mogla biti povezana sa harmonijskim funkcijama. Važi ovo tvrđenje:

(*) Neka je X strogo konveksan Banachov prostor, D — oblast u $\mathbb{R}^n$ i $f:D\to X$ harmonijska funkcija. Ako je $\|f(t_0)\|=\sup\{\|f(t)\| : t\in D\}$ za neko $t_0\in D$, onda je $f(t)=f(t_0)$ za svako $t\in D$.

Kao što je poznato, bez pretpostavke o strogoj konveksnosti može se jedino zaključiti da je $\|f(t)\|=\|f(t_0)\|$. Tvrđenje (*) je, u izvesnom smislu, karakteristično. Naime, ako X nije strogo konveksan, onda postoje $x,y\in X$ takvi da je $\|x\|=1$, $y\neq 0$ i $\|x+ty\|\leq 1$ za sve $t\in[-1,1]$. Tada harmonijska funkcija $f(t):=x+ty$, $t\in\,]-1,1[$, nije konstantna iako je $\|f(0)\|=\sup\|f(t)\|$.

U slučaju $n=2$ tvrđenje (*) se može precizirati na sledeći način.

Teorema G. Neka je X realan Banachov prostor. Ako harmonijska funkcija $f:\mathbb{D}\to X$ zadovoljava uslov $\sup\{\|f(z)\|: z\in\mathbb{D}\}\leq 1$, tada je

$$(1-|z|)\,\|f(z)-f(0)\| \le 2|z|\left[1-\delta_X(2\|f(0)\|)\right], \quad z\in\mathbb{D}.$$

Ova teorema se izvodi na sličan način kao teorema I.4, s tim što se umesto leme I.5 primenjuje sledeća.

Lema. Za harmonijsku funkciju $h:\mathbb{D}\to[-1,1]$ važi nejednakost

$$(1-|z|)\,|h(z)-h(0)| \le 2|z|(1-|h(0)|), \quad z\in\mathbb{D}.$$

Dokaz. Stavimo $u(z)=h(z)-1$ ako je $h(0)\ge 0$ a $u(z)=-h(z)-1$ ako je $h(0)<0$. U oba slučaja je $u(z)\le 0$ za $z\in\mathbb{D}$. Neka je $p>0$ i neka je g analitička funkcija za koju je $|g(z)|=e^{p\,u(z)}$, $z\in\mathbb{D}$. Kako je $|g(z)|\le 1$, to je, po lemi I.5,

$$(1-|z|)\,\big||g(z)|-|g(0)|\big| \le (1-|z|)\,|g(z)-g(0)| \le |z|(1-|g(0)|^2).$$

Odavde sledi nejednakost

$$e^{p\min(u(z),\,u(0))}p|u(z)-u(0)| \le \frac{|z|}{1-|z|}(1-e^{2p\,u(0)}).$$

Deleći ovu nejednakost sa p i dopisujući $\lim\limits_{p\to 0}$, dolazimo do traženog rezultata. ◼

Teorema G važi i pod pretpostavkom da je X kompleksan, jer se svaki kompleksan prostor može tretirati i kao realan a da se to ne odrazi na definiciju harmonijske funkcije. (Napominjemo da je funkcija $f:\mathbb{D}\to X$ harmonijska ako je, za svako $x^*\in X^*$, skalarna funkcija x^*f harmonijska.) Slučaj kompleksnog prostora interesantan je zato što se tada pretpostavka teoreme G može pojačati tako da funkcija f bude analitička. Dobiće se bolja nejednakost (teorema I.4)

$$(1-|z|)\,\|f(z)-f(0)\| \le 2|z|\left[1-\delta_c(X;\|f(0)\|)\right], \quad z\in\mathbb{D}.$$

Iz ove nejednakosti sledi teorema Thorpa-Whitleya a iz teoreme G — tvrđenje (*) u slučaju $n=2$. Bilo bi interesantno ispitati šta će biti sa teoremom G ako se umesto diska $\mathbb{D}$ uzme jedinična kugla u prostoru $\mathbb{R}^3$.

U ovom radu se ne razmatra stroga c-konveksnost kvazinormiranih prostora. Najprirodniji pristup išao bi preko principa maksimuma modula, ali je neizvesno da li bi ravnomerna c-konveksnost implicirala strogu c-konveksnost. Ipak, neki klasični prostori (Lebesgueovi, Lorentzovi [2], Orliczevi itd.) bili bi strogo c-konveksni i u tom smislu. Važi, na primer, sledeće tvrđenje.

(:) Neka je $(f_n)_{n\ge 1}$ niz kompleksnih funkcija koje su holomorfne u $\mathbb{D}$ i neprekidne u $\overline{\mathbb{D}}$. Ako je, za neko $p\in\,]0,\infty[$,

$$\sum_{n=1}^{\infty}|f_n(z)|^p \le 1, \quad |z|=1,$$

onda ista nejednakost važi za svako $z\in\mathbb{D}$. Ako je, pored toga,

$\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(z_0)|^p = 1$ za neko $z_0 \in \mathbb{D}$, onda su sve funkcije f_n konstantne. (Povodom slučaja $p=1$ videti primer II.5.1, str. 26.)

Analogno tvrđenje o harmonijskim funkcijama važi samo kad je $p>1$. I jedno i drugo tvrđenje posledica su stroge konveksnosti prostora L^p, $p>1$, i principa maksimuma subharmonijskih funkcija.

Pomoću tvrđenja (!) teorema Thorpa-Whitleya se može preneti na prostore ℓ^p.

(!) Neka je D oblast u $\mathbb{C}$ i $X=\ell^p$, $0<p<\infty$. Ako analitička funkcija $f: D \to X$ nije konstantna, onda je $\|f(z_0)\| < \sup_{z\in D} \|f(z)\|$ za svako $z_0 \in D$.

Ovde se uzima da je f analitička ako se u okolini svake tačke može predstaviti kao suma ravnomerno konvergentnog stepenog reda. U vezi s tim napominjemo da se ekvivalentnost različitih definicija skalarnih analitičkih funkcija gubi ako se tretiraju funkcije sa vrednostima u kvazinormiranom prostoru [1].

Glava I

MODULI KOMPLEKSNE KONVEKSNOSTI

Oznake. U prvih šest tačaka slovo X označava normiran prostor. Slovom $\mathbb{D}$ je označen jedinični disk u kompleksnoj ravni $\mathbb{C}$. Ako je A deo kompleksne ravni, onda je $\bar{A}$ njegovo zatvorenje a co(A) - konveksni omotač.

1. Definicija i osnovne osobine

Neka skup $A \subset \bar{\mathbb{D}}$ zadovoljava uslov

(1) $\{-b, b\} \subset co(A)$ za neko $b \neq 0$.

Neka geometrijska svojstva kompleksnog normiranog prostora X pogodno je opisivati pomoću funkcije

(2) $$\delta(A,X;\varepsilon) := \inf\{1-\|x\|:\ x, y\in X,\ \sup_{\lambda\in A}\|x+\lambda y\| \le 1,\ \|y\|\ge\varepsilon\},$$

$0 \le \varepsilon \le 1$, koju ćemo nazivati Clarksonovim modulom.

Glavne primere daju skupovi $\mathbb{T} := \{\lambda\in\mathbb{C}: |\lambda| = 1\}$ i

$$\mathbb{T}_n := \exp(k\pi i/2^n):\ 0\le k < 2^{n+1},\ k\in\mathbb{N}\},\ n\in\mathbb{N},$$

gde je $\mathbb{N}$ skup nenegativnih celih brojeva. Dva specijalna slučaja su $\mathbb{T}_0 = \{-1, 1\}$ i $\mathbb{T}_1 = \{-1, 1, -i, i\}$. Module koji odgovaraju skupovima $\mathbb{T}$ i $\mathbb{T}_n$ označavamo, redom, sa $\delta_c(X;\varepsilon)$ i $\delta_c^n(X;\varepsilon)$. Modul δ_c^0 predstavlja modifikaciju Clarksonovog modula konveksnosti; važi jednakost

(3) $$\delta_c^0(X;\varepsilon) = \delta_X(2\varepsilon), \quad 0\le\varepsilon\le 1.$$

Iz elementarne jednakosti

$$\sup_{\lambda\in A}\|x+\lambda y\| = \sup_{\lambda\in\bar{A}}\|x+\lambda y\| = \sup_{\lambda\in co(A)}\|x+\lambda y\|$$

sledi formula

(4) $$\delta(A,X;\varepsilon) = \delta(\bar{A},X;\varepsilon) = \delta(co(A),X;\varepsilon), \quad 0\le\varepsilon\le 1,$$

pomoću koje zaključujemo da je Clarksonov modul nenegativna rastuća funkcija. Osim toga, uslov "$\|y\|\ge\varepsilon$" u jednakosti (2) može se zameniti sa "$\|y\| = \varepsilon$". Sledeće nejednakosti su, takođe, jednostavna posledica relacija (1), (2) i (4):

(5) $$\delta_c^0(X;|b|\varepsilon) \le \delta(A,X;\varepsilon) \le \delta_c(X;\varepsilon), \quad 0\le\varepsilon\le 1,$$

(6) $$\delta_c(X;r\varepsilon) \le \delta(A,X;\varepsilon) \text{ ako je } r\mathbb{D}\subset co(A),\ r\ge 0.$$

Od interesa su prostori čiji je modul nenegativan na intervalu $]0, 1]$.

Definicija 1. Prostor X je ravnomerno c-konveksan ako je

$$\delta_c(X;\varepsilon) > 0 \text{ za svako } \varepsilon\in]0,1].$$

Definicija se može iskazati i ovako [27]: X je ravnomerno c-konveksan ako za svako $\varepsilon\in]0,1]$ postoji $\delta>0$ takvo da iz $\|y\|\geq\varepsilon$, $\max\|x+\lambda y\|\leq 1$ $(\lambda\in T)$ sledi $\|x\|\leq 1-\delta$.

Nejednakosti (5) i (6) pokazuju da je X ravnomerno c-konveksan ako i samo ako je $\delta_c^1(X;\varepsilon)>0$ za $\varepsilon\in]0,1]$.

Definicija 2. X je strogo c-konveksan ako je $\delta_c(X;1)=1$.

Ova definicija je ekvivalentna originalnoj definiciji E. Thorpa i R. Whitleya [102]: X je strogo c-konveksan ako su sve tačke njegove jedinične sfere c-ekstremalne. Kaže se da je x $(\|x\|=1)$ c-ekstremalna tačka ako iz uslova $\max\|x+\lambda y\|\leq 1$ $(\lambda\in T)$ sledi $y=0$.

Navodimo, radi poređenja, i odgovarajuće definicije iz "realne" geometrije.

Definicija 3. X je strogo konveksan ako je $\delta_c^0(X;1)=1$, a ravnomerno konveksan ako je $\delta_c^0(X;\varepsilon)>0$ za $\varepsilon\in]0,1]$.

Obično se stroga konveksnost definiše ovako: X je strogo konveksan ako na njegovoj jediničnoj sferi nema nijedne duži.

Primeri. 1. Prostor $L^1(0,1)$ je ravnomerno c-konveksan [27] iako na njegovoj sferi nema ekstremalnih tačaka. Ovaj primer pokazuje da ima Banachovih prostora koji su ravnomerno c-konveksni a nisu refleksivni. Poznato je da je Banachov prostor refleksivan ako je ravnomerno konveksan [70].

2. Orliczev prostor $E_M(0,\infty)$ je strogo konveksan ako je funkcija M strogo konveksna [105]. S druge strane, ima strogo konveksnih funkcija, M, takvih da $E_M(0,\infty)$ nije izomorfan nijednom ravnomerno c-konveksnom prostoru (videti kraj tačke III.2).

3. Lako se proverava da je $\delta_c(C;\varepsilon)=\varepsilon$. Kako X sadrži izometričnu kopiju kompleksne ravni (pretpostavljamo, kao obično, da je $\dim(X)\geq 1$), to je

$$\delta(A,X;\varepsilon)\leq\varepsilon,\quad 0\leq\varepsilon\leq 1. \tag{7}$$

4. Pomoću relacije paralelograma lako se dokazuje da je

$$\delta_c^0(\ell^2;\varepsilon)=\delta_c(\ell^2;\varepsilon)=1-(1-\varepsilon^2)^{1/2},\quad 0\leq\varepsilon\leq 1.$$

Primenom teoreme Dvoretzkog [69] može se dokazati da je $\delta_c(X;\varepsilon)\leq\delta_c(\ell^2;\varepsilon)$ ako je $\dim(X)=\infty$.

5. Za prostor kompleksnih nula-nizova važi jednakost

$$\delta_c(c_0;\varepsilon)=0,\quad 0\leq\varepsilon\leq 1.$$

Moduli po V. D. Miljmanu. Sledeću funkciju, koja je jedna vrsta Miljmanovih δ-usrednjavanja [68: str. 102], upotrebljavao je (u slučaju A=T) E. V. Tokarev [104]:

$$\hat{\delta}(A,X;\varepsilon)=\inf_{\|x\|=\|y\|=1}\ \sup_{\lambda\in A}\|x+\lambda\varepsilon y\|-1,\quad \varepsilon\geq 0. \tag{8}$$

Ovu ćemo funkciju zvati Miljmanov modul, jer je u slučaju $A=T_0$ jednaka Miljmanovom modulu konveksnosti [68].

Miljmanov modul je nenegativna rastuća funkcija i, s obzirom da je jednak infimumu familije konveksnih funkcija koje se anuliraju u nuli, zadovoljava uslov

(9) $$\hat{\delta}(A,X;\theta\varepsilon)\leq \theta\hat{\delta}(A,X;\varepsilon),\quad 0\leq\theta\leq 1,\ \varepsilon\geq 0.$$

Pored Clarksonovog i Miljmanovog modula koristićemo u nekoliko situacija i funkciju

(10) $$\omega(A,X;\varepsilon):=\sup\{\|y\|:\ (x,y)\in P(\varepsilon)\},\quad \varepsilon\geq 0,$$

gde je

$$P(\varepsilon):=\{(x,y)\in X^2:\ \|x\|=1,\ \sup_{\lambda\in A}\|x+\lambda y\|\leq 1+\varepsilon\}.$$

Ako je $A=T$ ili $A=T_n$, koristićemo oznake $\hat{\delta}_c(X;\varepsilon)$, $\hat{\delta}_c^n(X;\varepsilon)$, $\omega_c(X;\varepsilon)$ i $\omega_c^n(X;\varepsilon)$. Funkciju ω_c uveo je J. Globevnik [27].

Primer 6. Relacija paralelograma daje jednakosti

$$\hat{\delta}_c^o(\ell^2;\varepsilon)=\hat{\delta}_c(\ell^2;\varepsilon)=(1+\varepsilon^2)^{1/2}-1,$$
$$\omega_c^o(\ell^2;\varepsilon)=\omega_c(\ell^2;\varepsilon)=(2\varepsilon+\varepsilon^2)^{1/2}.$$

Funkcije $\hat{\delta}$ i ω koje odgovaraju skupu T ili T_1 možemo koristiti u ispitivanju ravnomerne c-konveksnosti na sledeći način.

Propozicija 1. Neka je $A=T$ ili $A=T_1$. Tada su sledeća tvrđenja ekvivalentna. (a) X je ravnomerno c-konveksan. (b) $\hat{\delta}(A,X;\varepsilon)>0$ za svako $\varepsilon>0$. (c) $\lim \omega(A,X;\varepsilon)=0$ $(\varepsilon\to 0+)$.

Dokaz je jednostavan; ekvivalencija je ispravna kad god je nula u unutrašnjosti skupa $co(A)$.

2. Veza između Clarksonovog i Miljmanovog modula

U ovoj tački pišemo $\delta(\varepsilon)$, $\hat{\delta}(\varepsilon)$ i $\omega(\varepsilon)$ umesto, redom, $\delta(A,X;\varepsilon)$, $\hat{\delta}(A,X;\varepsilon)$ i $\omega(A,X;\varepsilon)$. Pri tome pretpostavljamo da je X kompleksan normiran prostor ($\dim(X)\geq 1$), $A\subset T$ i da je A simetričan u odnosu na realnu osu. Dakle, važi jednakost

$$\sup_{\lambda\in A}\|x+\lambda y\|=\sup_{\lambda\in A}\|y+\lambda x\|,$$

iz koje sledi da je

(1) $$\hat{\delta}(\varepsilon)=\varepsilon\hat{\delta}(1/\varepsilon)+\varepsilon-1,\quad \varepsilon>0.$$

Pomoću ove jednakosti i nejednakosti (1.9) možemo zaključiti da je funkcija $\hat{\delta}$ neprekidna. Naime, ako je $0<\eta<\varepsilon$, onda je $0\leq\hat{\delta}(\varepsilon)-\hat{\delta}(\eta)$ $=\varepsilon\hat{\delta}(1/\varepsilon)-\hat{\delta}(1/\eta)\eta+\varepsilon-\eta\leq\varepsilon-\eta$ i, prema tome,

(2) $$|\hat{\delta}(\varepsilon)-\hat{\delta}(\eta)|\le|\varepsilon-\eta|,\quad \varepsilon,\eta\ge 0.$$

Propozicija 2. Važi jednakost

$$\hat{\delta}(w(\varepsilon))=\varepsilon\quad,\quad \varepsilon>0.$$

Dokaz. Lako je videti da je $w(\varepsilon)\ge\varepsilon$ i, dakle, $w(\varepsilon)>0$ za $\varepsilon>0$. Neka je ξ pozitivan broj takav da je $w(\varepsilon)-\xi>0$. Tada postoje x i y takvi da je $\|x+\lambda y\|\le 1+\varepsilon$ $(\lambda\in A)$ i $\|y\|\ge w(\varepsilon)-\xi$. Zato je $\hat{\delta}(w(\varepsilon)-\xi)\le\varepsilon$ i, zbog neprekidnosti $\hat{\delta}$, $\hat{\delta}(w(\varepsilon))\le\varepsilon$. Suprotna nejednakost sledi iz nejednakosti

$$\sup_{\lambda\in A}\|x+\lambda y\|\ge 1+\varepsilon,\quad \|x\|=1,\quad \|y\|=w(\varepsilon).$$

Ako ova nejednakost ne bi važila, postojali bi x, y $(\|x\|=1,\ \|y\|=w(\varepsilon))$ i $\beta>0$ takvi da je $\|x+\lambda y\|\le 1+\varepsilon-w(\varepsilon)\beta$ za sve $\lambda\in A$, što bi značilo da $(x,y+\beta y)\in P(\varepsilon)$ (pogl. (1.10)) i, dakle, $w(\varepsilon)\ge(1+\beta)w(\varepsilon)$, a to je nemoguće jer je $w(\varepsilon)>0$. ⊠

Posledica 1. Funkcija w je neprekidna i strogo rastuća na intervalu $]0,+\infty[$. Osim toga, važe nejednakosti

(3) $$w(\theta\varepsilon)\ge\theta w(\varepsilon),\quad 0\le\theta\le 1,\quad \varepsilon>0,$$

(4) $$|w(\varepsilon)-w(\eta)|\ge|\varepsilon-\eta|\ ;\quad \varepsilon,\eta>0.$$

Posledica 2. Ako je X ravnomerno c-konveksan i $0\in\operatorname{int}(\operatorname{co}(A))$, onda su funkcije w i $\hat{\delta}$ međusobno inverzne.

Sledeća činjenica sledi neposredno iz definicije Clarksonovog modula.

Lema 1. Ako je $\|x+\lambda y\|\le 1$ za svako $\lambda\in A$, onda je $\|x\|+\delta(\|y\|)\le 1$ i $\delta(\|x\|)+\|y\|\le 1$.

Propozicija 3. Važi jednakost

$$1=\delta(\varepsilon)+\varepsilon w(1/\varepsilon-1),\quad 0<\varepsilon\le 1.$$

Dokaz. Neka je $\alpha=1/\varepsilon-1$, $0<\varepsilon\le 1$ i neka $(x,y)\in P(\alpha)$. Tada je $\|(\varepsilon x)+(\varepsilon y)\lambda\|\le 1$ za $\lambda\in A$ i, prema lemi 1, $\delta(\varepsilon)+\|\varepsilon y\|\le 1$. To znači da je $\delta(\varepsilon)+\varepsilon w(\alpha)\le 1$. Da bismo dokazali suprotnu nejednakost, pretpostavimo da je $\|x+\lambda y\|\le 1$ za $\lambda\in A$ i $\|y\|=\varepsilon$. Tada $(y/\varepsilon, x/\varepsilon)\in P(\alpha)$, što, po definiciji funkcije w, znači da je $\|x/\varepsilon\|\le w(\alpha)$, odnosno $1-\|x\|\ge 1-\varepsilon w(\alpha)$. Uzimajući infimum po x, dobijamo traženu nejednakost. ⊠

Posledica 3. Funkcija δ je neprekidna na intervalu $[0,1[$.

Iz propozicija 1 i 3 dobijamo sledeće tvrđenje.

Posledica 4. X je ravnomerno c-konveksan ako i samo ako je $\lim\delta_c(X;\varepsilon)=1$ $(\varepsilon\to 1-)$.

Slično tvrđenje važi za ravnomernu konveksnost; X je ravnomerno konveksan ako i samo ako je $\lim \delta_c^o(X;\varepsilon)=1$ ~~($\varepsilon\to 1-$)~~, odnosno $\lim \delta_X(\varepsilon)=1$ ($\varepsilon\to 2-$) (pogl. (1.3)).

Ako u nejednakosti (1.6) uzmemo $A=T_n$, biće $r_n\mathbb{D}\subset co(A)$, gde je $r_n=\cos(2^{-n-1}\pi)$, i, dakle $\delta_c(X;r_n\varepsilon)\le \delta_c^n(X;\varepsilon)\le \delta_c(X;\varepsilon)$. Iz ovoga i posledice 3 dobijamo jednakost

(5) $$\delta_c(X;\varepsilon)=\lim_n \delta_c^n(X;\varepsilon),\quad 0\le\varepsilon<1.$$

Iz propozicija 2 i 3 sledi jednakost

(6) $$\hat\delta((1-\delta(\varepsilon))/\varepsilon)=1/\varepsilon-1,\quad 0<\varepsilon<1,$$

a iz nje i (1)

(7) $$\hat\delta(\varepsilon/(1-\delta(\varepsilon)))=\delta(\varepsilon)/(1-\delta(\varepsilon)),\quad 0\le\varepsilon<1.$$

Ovakva jednakost za modul δ_c^o pojavljuje se kod V. D. Miljmana [68: lema 1.4] ; korektan dokaz, uz pretpostavku da je X ravnomerno konveksan, dao je T. Figiel [19]. Dokaz koji je ovde izveden (računajući i dokaze propozicija 2 i 3) potpuno je drukčiji.

Još neka svojstva Clarksonovog modula slede iz prethodnih rezultata; na primer, funkcija $\delta(\varepsilon)/\varepsilon$ raste na intervalu $]0,1]$, tj. važi nejednakost

(8) $$\delta(\theta\varepsilon)\le\theta\delta(\varepsilon),\quad 0\le\theta,\varepsilon\le 1.$$

Ova činjenica se lako izvodi iz propozicije 3 pomoću nejednakosti (4). Iz (7) i (1.9) dobijamo nejednakost

(9) $$\delta(\varepsilon)\ge\hat\delta(\varepsilon),\quad 0\le\varepsilon<1,$$

a iz (6) i (7) - jednakost

(10) $$\delta(1-\delta(\varepsilon))=1-\varepsilon,\quad 0<\varepsilon<1,\quad \delta(\varepsilon)>0.$$

Iz (7) sledi, takođe, jednakost

(11) $$\lim \hat\delta(\varepsilon)/\delta(\varepsilon)=1\ (\varepsilon\to 0+).\ (\delta(\varepsilon)>0 \text{ za } \varepsilon>0.)$$

Na kraju, posledica 3 se može precizirati procenom

(12) $$|\delta(\varepsilon)-\delta(\eta)|\le|\varepsilon-\eta|/(1-r),\ r=\min(\varepsilon,\eta),\ 0\le\varepsilon,\eta<1.$$

Sličnu nejednakost, ali sa $(\sqrt{5}+1/2)|\varepsilon-\eta|$ umesto $|\varepsilon-\eta|$, dokazao je za modul konveksnosti V. I. Gurarij (pogl. [68: teorema 1.14]).

Da bismo dokazali (12), pretpostavimo da je $1>\varepsilon>\eta>0$. Primenjujući (2) na (7), dobijamo nejednakost

$$(1-\delta(\varepsilon))^{-1}-(1-\delta(\eta))^{-1}\le \varepsilon\cdot(1-\delta(\varepsilon))^{-1}-\eta\cdot(1-\delta(\eta))^{-1},$$

i, posle sređivanja,

$$\delta(\varepsilon)-\delta(\eta)\le \varepsilon-\eta+\eta\delta(\varepsilon)-\varepsilon\delta(\eta)\le\varepsilon-\eta+\eta(\delta(\varepsilon)-\delta(\eta)),$$

što završava dokaz.

3. Proširenje Kadecove teoreme o bezuslovnoj konvergenciji

Klasična teorema Dvoretzkog-Rogersa [17, 11] tvrdi da su bezuslovna i apsolutna konvergencija redova ekvivalentne jedino u normiranim prostorima konačne dimenzije. Preciznije, ako je $\dim(X)=\infty$, $(c_n : n\geq 1)$ - niz pozitivnih brojeva i $\sum c_n^2<\infty$, onda postoji bezuslovno konvergentan red $\sum x_n$ (u X) takav da je $\|x_n\|=c_n$ za $n\geq 1$. Zato se, kao jedan od najvažnijih u vezi sa bezuslovnom konvergencijom, pojavljuje sledeći problem:

Dat je normiran prostor X, $\dim(X)=\infty$. Naći (što bolju) funkciju $\phi : [0,+\infty[\to [0,+\infty[$ tako da važi tvrđenje: (+) Ako red $\sum x_n$ bezuslovno konvergira, onda konvergira i red $\sum \phi(\|x_n\|)$.

Teorema Dvoretzkog-Rogersa pokazuje da funkcija ϕ ne može biti bolja od kvadratne. Ako je $X=L^p$, $1\leq p<\infty$, onda se, po teoremi Orlicza [76], može uzeti $\phi(\varepsilon)=\varepsilon^r$, $r=\max(2,p)$, i ništa bolje.

M. I. Kadec [44] je otkrio vezu bezuslovne konvergencije sa geometrijskim svojstvima jedinične sfere. On je dokazao da važi tvrđenje (+) sa $\phi(\varepsilon)=\delta_X(\varepsilon)$, $0\leq\varepsilon\leq 2$, i iz toga izveo teoremu Orlicza u L^p za $p>1$. Slučaj $p=1$ ostaje van domašaja teoreme Kadeca jer je $\delta_X(\varepsilon)=0$ za $0\leq\varepsilon\leq 1$ ako je X kompletan i nerefleksivan [68: str. 100]. Ovaj nedostatak se može ukloniti ako se koristi modul δ_c.

Teorema 1. Neka je X ravnomerno c-konveksan prostor i $\hat{\delta}_c(\varepsilon)=\hat{\delta}_c(X;\varepsilon)$. Ako red $\sum x_n$ bezuslovno konvergira u X, onda konvergira red

$$\sum \hat{\delta}_c(\|x_n\|).$$

Ova se teorema može primenjivati i na realne prostore, i to prelaskom na pogodnu kompleksifikaciju. Da bismo videli da ona i u tom slučaju uključuje Kadecovu teoremu, razmotrimo kompleksifikaciju, X, realnog prostora X_1, snabdevenu normom

$$\|x+iy\|:=\left\{\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\|x\cos t+y\sin t\|^2\,dt\right\}^{1/2};\quad x,y\in X_1.$$

Prema jednom rezultatu T. Figiela i G. Pisiera [21] važi nejednakost $\hat{\delta}_c^o(X;\varepsilon)\geq\hat{\delta}_c^o(X_1;r\varepsilon)$, gde je r pozitivna konstanta a $\hat{\delta}_c^o(X_1;\cdot)$ označava Miljmanov modul konveksnosti prostora X_1. Na osnovu toga lako je izvesti Kadecovu teoremu u X_1 iz teoreme 1.

Teorema Orlicza u L^1 sledi neposredno iz teoreme 1 i nejednakosti

$$\delta_c(L^1;\varepsilon)\geq\varepsilon^2/4,\quad 0\leq\varepsilon\leq 1, \tag{1}$$

koja će biti dokazana u sledećoj glavi.

Kadecova teorema i teorema 1 posledica su sledećih dveju lema i nejednakosti (2.9). Oznake su kao u prethodnoj tački.

Lema 2. Neka $x_1,\dots,x_n \in X$ $(n\geq 1)$ i neka je

$$\|\lambda_1 x_1+\dots+\lambda_n x_n\| \leq 1$$

za svaki niz $(\lambda_k: 1\leq k\leq n)$ iz A. Tada je

$$\delta(\|x_1\|)+\dots+\delta(\|x_n\|) \leq 1.$$

Dokaz. Bez umanjenja opštosti možemo pretpostaviti da je $\|\lambda_1 x_1+\dots+\lambda_n x_n\| \leq \|x_1+\dots+x_n\|$ za sve λ_k iz A. Neka je $z=x_1+\dots+x_n$. Razmotrimo, prvo, slučaj $\|z\|=1$. Kako je $\|z-x_k+\lambda x_k\| \leq 1$ za $\lambda\in A$ i $1\leq k\leq n$, to je, na osnovu leme 1,

$$\|z-x_k\|+\delta(\|x_k\|) \leq 1, \quad 1\leq k\leq n.$$

Sabirajući ove nejednakosti i koristeći nejednakost

$$\sum_{k=1}^{n}\|z-x_k\| \geq \|nz-z\| = n-1,$$

dolazimo do zaključka. Ako je $\|z\|<1$, onda je prema upravo dobijenom rezultatu (isključujući trivijalni slučaj $z=0$)

$$\sum_{k=1}^{n}\delta(\|x_k\|) \leq \sum_{k=1}^{n}\delta(\|x_k\|/\|z\|) \leq 1. \boxtimes$$

Lema 3 [44]. Ako red $\sum x_n$ $(n\geq 1)$ bezuslovno konvergira, onda postoji prirodan broj m takav da je

$$\Big\|\sum_{n=m}^{k}\lambda_n x_n\Big\| \leq 1, \quad \{\lambda_n\}\subset A, \ k\geq m.$$

Redovi operatora. Ako su X i Y kompleksni ili realni Banachovi prostori, onda sa L(X,Y) označavamo prostor ograničenih linearnih operatora koji preslikavaju X u Y. Neka je $(U_n: n\geq 1)$ niz u L(X,Y). Kaže se da red $\sum U_n$ strogo apsolutno konvergira ako je

(2) $$\sum_{n=1}^{\infty}\|U_n(x)\| < \infty \quad \text{za svako } x\in X.$$

Ako je $\dim(X)=1$ i, dakle, $L(X,Y)=X^*$ (=dual X), onda niz (U_n) zadovoljava uslov (2) ako i samo ako red $\sum U_n$ bezuslovno konvergira u X^*.

Teorema 2. Neka su X, Y, Z kompleksni Banachovi prostori, pri čemu je $X=Z^*$ ili $Z=X^*$ a Z je ravnomerno c-konveksan. Ako red $\sum U_n$ u L(X,Y) strogo apsolutno konvergira, onda konvergira i red

$$\sum \hat{\delta}_c(Z;\|U_n\|).$$

Dovoljno je razmotriti slučaj $Z=X^*$ i, zatim, primeniti sledeću propoziciju.

Propozicija 4. Ako je Z kompleksan Banachov prostor, onda je

$$\hat{\delta}_c(Z^{**};\varepsilon)=\hat{\delta}_c(Z;\varepsilon), \quad 0\leq\varepsilon<1.$$

Dakle, ako je Z ravnomerno c-konveksan, onda je i Z^{**}.

Dokaz. Neka je $0 \le \varepsilon < 1$, $x^{**}, y^{**} \in Z^{**}$, $\|y^{**}\| = \varepsilon$, $\|x^{**} + \lambda y^{**}\| \le 1$ za $\lambda \in T$. Neka je, dalje, $\theta > 1$. Prema principu lokalne refleksivnosti [56: teorema 3.1] postoje $x, y \in Z$ takvi da je $\theta\|y\| \ge \varepsilon$, $\theta\|x\| \ge \|x^{**}\|$ i $\|x + \lambda y\| \le \theta$ za $\lambda \in T$. Iz ovih nejednakosti i leme 1 sledi nejednakost $\|x^{**}\|/\theta^2 + \delta_c(Z; \varepsilon/\theta^2) \le 1$, koja se graničnim prelazom, uz korišćenje posledice 3, transformiše u $1 - \|x^{**}\| \ge \delta_c(Z;\varepsilon)$. Ovim je dokazana nejednakost $\delta_c(Z^{**};\varepsilon) \ge \delta_c(Z;\varepsilon)$; suprotna sledi iz toga što je Z izometričan potprostoru u Z^{**}. ☒

Dokaz teoreme 2. Neka je U_n^* operator konjugovan sa U_n. Izaberimo $y_n^* \in Y^*$ tako da je $\|y_n^*\| \le 1$ i $\|x_n^*\| \ge \|U_n\|$, gde je $x_n^* := 2U_n^*(y_n^*)$. Koristeći uslov (2), zaključujemo da red $\sum |x_n^*(x)|$ konvergira za svako $x \in X$, što je ekvivalentno bezuslovnoj konvergenciji reda $\sum x_n^*$ u prostoru X^*. Prema teoremi 1 i propoziciji 4 red $\sum \hat{\delta}_c(Z; \|x_n^*\|)$ konvergira, što završava dokaz jer je $\|U_n\| \le \|x_n^*\|$. ☒

<u>Posledica 5</u>. Neka su X_1 i Y_1 realni Banachovi prostori. Ako X i Z zadovoljavaju uslove teoreme 2, pri čemu je X kompleksifikacija prostora X_1, onda strogo apsolutna konvergencija reda $\sum V_n$ u $L(X_1, Y_1)$ povlači konvergenciju reda

$$\sum \hat{\delta}_c(Z; \|V_n\|).$$

Dokaz. Neka je Y bilo koja kompleksifikacija prostora Y_1. Definišimo operatore $U_n \in L(X,Y)$ jednakošću $U_n(x + iy) = V_n(x) + iV_n(y)$, $x, y \in X_1$. Jednostavno se dokazuje da red $\sum U_n$ strogo apsolutno konvergira, odakle sledi konvergencija reda u zaključku teoreme 2. Ovim je dokaz završen jer je $\|V_n\| \le \|U_n\|$. ☒

Ova posledica proširuje sledeći rezultat V. I. Gurarija i A. S. Markusa [29: teorema 3].

<u>Teorema (GM)</u>. Neka su X_1 i Y_1 realni Banachovi prostori, pri čemu je X_1 ravnomerno gladak (tj. X_1^* je ravnomerno konveksan). Ako red $\sum V_n$ u $L(X_1, Y_1)$ strogo apsolutno konvergira, onda konvergira i red

$$\sum \hat{\delta}_c^o(X_1^*; \|V_n\|).$$

Da posledica 5 uključuje teoremu (GM) može se dokazati malom modifikacijom argumenata koji su dati uz teoremu 1; da je stvarno proširuje pokazuje sledeći primer.

<u>Posledica 6</u>. Neka $V_n \in L(X_1, Y_1)$, gde je X_1 prostor realnih nula-nizova. Tada iz strogo apsolutne konvergencije reda $\sum V_n$ sledi konvergencija reda $\sum \|V_n\|^2$.

Tvrđenje sledi iz posledice 5 i jednakosti (1), a ne može se dobiti pomoću teoreme (GM) jer X_1 nije ravnomerno gladak.

4. Neke primene Clarksonovog modula

Navedeni dokaz leme 2 predstavlja modifikaciju dokaza koji je dao T. Figiel [19] u slučaju kad je $A=T_o$. U ovoj tački dokazujemo jedno poboljšanje te leme koje, ujedno, generališe lemu 1.

Neka je $S(A;x_1,\dots,x_n)=\sup\{\|\sum_{k=1}^n \lambda_k x_k\| : \{\lambda_k\}\subset A\}$, $x_1,\dots,x_n\in X$, i $\delta(\varepsilon)=\delta(A,X;\varepsilon)$, pri čemu je X kompleksan normiran prostor. Tada važi sledeće tvrđenje.

Propozicija 5. Ako je $n\geq 2$ i $S(A;x_1,\dots,x_n)\leq 1$, onda je

$$\|x_1\|+\delta(\|x_2\|)+\dots+\delta(\|x_n\|)\leq 1.$$

Dokaz. Pretpostavimo da je tvrđenje tačno za neko $n\geq 2$ i neka je $S(A;x_1,\dots,x_n,x_{n+1})\leq 1$. Tada je, na osnovu leme 1, $S(A;x_1,\dots,x_n)\leq 1-\delta(\|x_{n+1}\|)=:r$. Ako je $r=0$, sve je prosto; neka je $r>0$. Tada je $S(A;x_1/r,\dots,x_n/r)\leq 1$ i, prema početnoj pretpostavci, $\|x_1/r\|+\delta(\|x_2/r\|)+\dots+\delta(\|x_n/r\|)\leq 1$. Odavde, pomoću nejednakosti (2.8), dobijamo nejednakost $\|x_1\|+\delta(\|x_2\|)+\dots+\delta(\|x_n\|)\leq r$, tj. $\|x_1\|+\delta(\|x_2\|)+\dots+\delta(\|x_n\|)+\delta(\|x_{n+1}\|)\leq 1$. Da bi se dokaz kompletirao, dovoljno je konstatovati da je tvrđenje tačno ako je n=2, što sledi iz leme 1. ⊠

Sledeće tvrđenje je povezano sa teoremom 2.

Propozicija 6. Neka su X i Y kompleksni normirani prostori i $U_k: X\to Y$ $(1\leq k\leq n)$ linearni operatori koji zadovoljavaju uslov

$$\sum_{k=1}^n \|U_k(x)\|\leq \|x\|, \quad x\in X. \tag{1}$$

Ako je X^* ravnomerno c-konveksan, onda je

$$\|U_1\|+\sum_{k=2}^n \delta_c(X^*;\|U_k\|)\leq 1. \tag{2}$$

Dokaz. Neka $y_k^*\in Y^*$, $\|y_k^*\|\leq 1$ $(1\leq k\leq n\geq 2)$. Iz uslova (1) lako se dobija nejednakost

$$S(T;U_1^*(y_1^*),\dots,U_n^*(y_n^*))\leq 1,$$

iz koje, prema propoziciji 5, sledi

$$\|U_1^*(y_1^*)\|+\sum_{k=2}^n \delta_c(X^*;\|U_k^*(y_k^*)\|)\leq 1. \tag{3}$$

Uzimajući supremum po (y_k^*) i koristeći neprekidnost funkcije $\delta_c(X^*;\cdot)$ na intervalu [0,1] (posledice 3 i 4), dobijamo nejednakost (2). ⊠

Primedba. Ako su X i Y realni a X ravnomerno gladak, onda isti postupak daje sličnu činjenicu koja poboljšava jednu teoremu V. I. Gurarija i A. S. Markusa [29: teorema 2].

<u>O strogoj c-konveksnosti duala</u>. Izvođenje nejednakosti (2) iz (3) zasnovano je na neprekidnosti modula $\delta_c(X^*;\cdot)$ u jedinici, što je obezbeđeno pretpostavkom da je X^* ravnomerno c-konveksan. Međutim, ako nametnemo neka ograničenja na operatore, onda možemo oslabiti pretpostavku o X^* tako da propozicija 6 još važi. Slédeći tu ideju, dolazimo do jedne karakterizacije stroge c-konveksnosti prostora X^*.

<u>Teorema 3</u>. Neka su X i Y kompleksni normirani prostori. Tada su sledeći iskazi ekvivalentni.

(i) X^* je strogo c-konveksan.

(ii) Neka operatori $U_1,\dots,U_n$ $(n\geq 2)$ zadovoljavaju uslov (1). Ako je jedan od njih kompaktan i ima jediničnu normu, onda su ostali (identički) jednaki nuli.

Dokaz. Neka je $n\geq 2$ i neka X^* nije strogo c-konveksan. Tada postoje x^*, $y^*\in X^*$ takvi da je $\|x^*\|=1$, $y^*\neq 0$ i $\|x^*+\lambda y^*\|\leq 1$ za $\lambda\in\mathbb{T}$. Definišimo operatore U_k na sledeći način: $U_1(x)=x^*(x)y$, $U_2(x)=y^*(x)y$ i $U_k=0$ za $3\leq k\leq n$ (ako je $n\geq 3$), gde je y bilo koji element prostora X sa jediničnom normom. Tada je $\|U_1\|=1$, $\|U_2\|=\|y^*\|>0$; svi operatori U_k su kompaktni i, što se lako dokazuje, zadovoljavaju uslov (1). Time je dokazana implikacija (ii) $\Rightarrow$ (i).

Da bismo dokazali obrat, pretpostavimo da je ispunjen zahtev (1) i da je U_n kompaktan operator sa jediničnom normom. Neka je $k\neq n$. Tada je $\|x\|\geq\|U_k(x)\|+\|U_n(x)\|$, $x\in X$. Rasuđujući kao pri dokazivanju propozicije 6, dobijamo nejednakost

$$\|U_k\|+\delta_c(X^*;\|U_n^*(z^*)\|)\leq 1,\quad \|z^*\|=1.$$

Ako je X^* strogo c-konveksan, onda je $\delta_c(X^*;1)=1$. Dakle, dokaz će biti završen ako dokažemo da postoji z^* $(\|z^*\|=1)$ takvo da je $\|U_n^*\|=\|U_n^*(z^*)\|$. To se daje u sledećoj lemi.

<u>Lema 4</u>. Neka je linearni operator $U: X\to Y$ kompaktan. Tada postoji $y^*\in Y^*$ takvo da je $\|y^*\|=1$ i $\|U^*\|=\|U^*(y^*)\|$.

Dokaz. Neka je $\|U\|=1$ $(=\|U^*\|)$. Kako je U kompaktan, postoje $y\in Y$ i niz (x_n) na jediničnoj sferi prostora X takvi da je $\|y\|=1$ i $\lim\|U(x_n)-y\|=0$ $(n\to\infty)$. Izaberimo $y^*\in Y^*$ tako da je $y^*(y)=\|y^*\|=1$. Tada je $\|U^*(y^*)\|\geq|y^*(U(x_n))|$ za svako n i, dakle, $\|U^*(y^*)\|\geq|y^*(y)|=1$. ⊠

<u>Primedba</u>. Ako su X i Y realni prostori, onda je X^* strogo konveksan ako i samo ako važi tvrđenje (ii). Ovo je, možda, jedna nova karakterizacija stroge konveksnosti duala. (Operatori U_k su kompleksno linearni ako su X i Y kompleksni.)

5. Jedna generalizacija Schwarzove leme

Pretpostavimo da je X kompleksan Banachov prostor. Ako analitička funkcija $f:\mathbb{D}\to B_X := \{x\in X: \|x\|\le 1\}$ zadovoljava uslov $f(0)=0$, onda je, prema Schwarzovoj lemi, $\|f(\zeta)\|\le|\zeta|$ za svako $\zeta\in\mathbb{D}$. Sledeća teorema generališe Schwarzovu lemu i, takođe, sadrži neke informacije o principu maksimuma modula, koji je bio razmatran u nekoliko radova. (Videti, na primer, [27], [34], [102]).

Teorema 4. Ako je $f:\mathbb{D}\to B_X$ analitička funkcija, onda je

(1) $$(1-|\varepsilon\zeta|)\,\|f(\zeta)-f(0)\|\le |\zeta|\,(1+\varepsilon)(1-\delta_c(\varepsilon)),\qquad \zeta\in\mathbb{D},$$

gde je $\varepsilon=\|f(0)\|$ i $\delta_c(\varepsilon)=\delta_c(X;\varepsilon)$.

Dokaz ćemo izvesti pomoću sledeće leme, koja je nešto preciznija od slične leme L. A. Harrisa (videti [27]).

Lema 5. Za analitičku funkciju $h:\mathbb{D}\to\overline{\mathbb{D}}$ važi nejednakost

(2) $$(1-|\zeta h(0)|)\,|h(\zeta)-h(0)|\le|\zeta|\,(1-|h(0)|^2),\qquad \zeta\in\mathbb{D}.$$

Dokaz. Funkcija $g(\zeta):=(h(\zeta)-b)/(1-\bar{b}h(\zeta))$, gde je $b=h(0)$, ispunjava uslove Schwarzove leme i zato je $|g(\zeta)|\le|\zeta|$, odnosno, ako pišemo α umesto $h(\zeta)-b$,

$$|\alpha|\le|\zeta|\,|1-\bar{b}(\alpha+b)| = |\zeta|\,|1-|b|^2-\alpha\bar{b}|\le|\zeta|(1-|b|^2)+|\alpha|\,|\zeta b|\ .\ \boxtimes$$

Dokaz teoreme 4. Neka je $\zeta\ne0$, $x=(f(\zeta)-f(0))(1-|\varepsilon\zeta|)/(1+\varepsilon)\zeta$ i $y=f(0)$. Korišteći jednakost

(3) $$\max_{\lambda\in\mathbb{T}}\|x+\lambda y\| = \sup\{|x^*(x)|+|x^*(y)| : x^*\in B_{X^*}\}$$

i lemu 1, zaključujemo da je dovoljno dokazati nejednakost

$$|x^*(x)|+|x^*(y)|\le 1,\quad \|x^*\|\le 1.$$

Međutim, ako je $\|x^*\|\le1$, onda funkcija $h(\zeta):=x^*f(\zeta)$ zadovoljava uslov (2) jer je analitička i preslikava $\mathbb{D}$ u $\overline{\mathbb{D}}$. Kako je, pored toga, $\varepsilon\ge|h(0)|$, to je

$|x^*(x)|+|x^*(y)|\le\ |h(\zeta)-b|\,(1-|\zeta b|)/(1+|b|)|\zeta|+|b|\ \le 1$. Ovde je $b=h(0)$. $\boxtimes$

Korišćenjem odnosa između Clarksonovog i Miljmanovog modula može se dokazati da je nejednakost (1) preciznija od sledeće, koju je dokazao J. Globevnik [27] :

$$(1-|\zeta|)\,\|f(\zeta)-f(0)\|\le 2|\zeta|\,\omega_c(1-\|f(0)\|).$$

6. Primeri

Na primeru prostora ℓ^1 može se ilustrovati nekoliko razlika između ravnomerno c-konveksnih i ravnomerno (i strogo) konveksnih prostora. Poznato je da četvrti dual nerefleksivnog Banachovog prostora nije strogo konveksan [14]. (Videti, takođe, [26, 96, 97].)

S druge strane, prema propoziciji 4, četvrti dual prostora ℓ^1 ne samo da je strogo nego i ravnomerno c-konveksan. Zna se, takođe, da se ravnomerna konveksnost čuva pri prelasku na kvocijentni prostor [12]. Za razliku od toga, ravnomerno c-konveksni prostor ℓ^1 ima kvocijenata koji nisu ni strogo c-konveksni, što sledi iz činjenice da je svaki separabilan prostor (na primer, c_0) izometričan nekom kvocijentu ℓ^1. U ovoj tački navodimo još nekoliko primera u vezi sa razmatranjima iz prethodnih tačaka.

Primer 1. Neka je X izomorfan prostoru c_0. Tada je $\delta_c(X;\varepsilon)=0$ za $0\le\varepsilon<1$.

Ovo se može ustanoviti na osnovu jedne teoreme R. C. Jamesa [57: propozicija 2.e.3]. Naime, za svako $\theta>1$ postoji potprostor Y u X i izomorfizam $U:Y\to c_0$ takav da je $\|U^{-1}\|=1$ i $\|U\|\le\theta$. Rasuđujući slično kao pri dokazivanju propozicije 4, dolazimo do nejednakosti $\delta_c(X;\varepsilon)\le\delta_c(c_0;\varepsilon)=0$ ako je $0\le\varepsilon<1$.

Primer 2. Ako kompleksna Banachova rešetka X nije slabo sekvencijalno kompletan prostor, onda je $\delta_c(X;\varepsilon)=0$ za $0\le\varepsilon<1$.

U ovom slučaju X sadrži potprostor koji je izomorfan c_0 [58: teorema 1.c.4] pa se možemo pozvati na prethodni primer.

Sledeći primer predstavlja modifikaciju poznatog primera M. M. Daya [9, 68].

Primer 3. Postoji refleksivan prostor koji nije izomorfan nijednom ravnomerno c-konveksnom.

Razmotrimo prostor $\ell(p,q)$, $1\le p,q\le\infty$, koji se sastoji od kompleksnih nizova $(b_k: k\ge1)$ za koje $(c_n: n\ge0)\in\ell^q$, gde je

$$c_n=\|(b_k: k\in I_n)\|_p,\quad I_n=\{k: 2^n\le k<2^{n+1}\}.$$

Norma u $\ell(p,q)$ uvodi se jednakošću $\|(b_k)\|:=\|(c_n)\|_q$.

Dobro poznata i laka je činjenica da je prostor $X=\ell(\infty,q)$ refleksivan ako je $1<q<\infty$. Neka je $Y=(X,|\cdot|)$ i $r\|x\|\le|x|\le\|x\|$, $x\in X$, pri čemu je r pozitivna konstanta. Neka je, dalje, (e_k) kanonski bazis prostora X. Tada je

$$|\textstyle\sum_{k\in I_n}\lambda_k e_k|\le1,\quad \lambda_k\in T,$$

i, na osnovu leme 2, $\sum_{k\in I_n}\delta_c(Y;|e_k|)\le1$. S obzirom da je $r=r\|e_k\|\le|e_k|$, to je $2^n\delta_c(Y;r)\le1$ za svako n i, dakle, $\delta_c(Y;r)=0$. ⊠

Primer 4. Hinčinova nejednakost u $L^1(0,1)$

Neka je $(\varphi_k:k\ge1)$ niz Rademacherovih funkcija i $(b_k: k\ge1)$ - niz kompleksnih brojeva. Tada važi nejednakost

(1) $$\int_0^1 \left|\sum_{k=1}^n b_k \varphi_k(t)\right| dt \geq K \left(\sum_{k=1}^n |b_k|^2\right)^{1/2},$$

gde je K pozitivna konstanta.

Ova nejednakost se može dokazati pomoću leme 2. (Obično se dokazuje Hinčinova nejednakost u L^p, $p>2$, pa se na osnovu toga i Hölderove nejednakosti rešava slučaj $p<2$; videti [111].) Korišćenjem generalizacije jednakosti (5.3) (sa n sabiraka) lako se dokazuje da je $S(T;x_1,\dots,x_n) \leq 2S(T_0;x_1,\dots,x_n)=:2J$. Odavde dobijamo, pomoću leme 2,

(2) $$\sum_{k=1}^n \delta_c(X;\|x_k\|/2J) \leq 1 \qquad (J\neq 0).$$

Neka je $X=L^1(0,1)$, $x_k=b_k\varphi_k$. Tada je $\|x_k\|=|b_k|$, $J=\left\|\sum_{k=1}^n x_k\right\|$, pa nejednakost (1) sledi iz (2) i (3.1).

Navedeni postupak dovodi do jednakosti $K=1/4$. Najbolja konstanta je $1/\sqrt{2}$ i nju je izračunao S. J. Szarek [100]. (Videti i [31].)

7. Ravnomerna c-konveksnost kvazinormiranih prostora

Realna funkcija $\|\cdot\|$, definisana na kompleksnom vektorskom prostoru X, naziva se kvazinormom ako su ispunjeni ovi uslovi [48: str. 159]: (i) $\|x\|>0$ za svako $x\neq 0$; (ii) $\|\alpha x\|=|\alpha|\,\|x\|$ za sve $\alpha\in\mathbb{C}$; (iii) postoji $K\geq 1$ takvo da je

(1) $$\|x+y\| \leq K(\|x\|+\|y\|), \qquad x,y\in X.$$

Uređeni par $(X,\|\cdot\|)$ naziva se kvazinormiranim prostorom.

Uslov (1) je ispunjen ako je, za neko $p\in\,]0,1]$,

(2) $$\|x+y\|^p \leq \|x\|^p + \|y\|^p, \qquad x,y\in X.$$

Tada se može uzeti $K=2^{1/p-1}$.

Oznaka. Ako je X kvazinormiran prostor ($\dim(X)\geq 1$), onda ćemo sa $\mathrm{ind}(X)$ označavati najveći od brojeva p koji zadovoljavaju uslov (2). Jasno je da je $0\leq \mathrm{ind}(X)\leq 1$, a ako je $\mathrm{ind}(X)=1$, onda je X normiran.

Glavni primer kvazinormiranih prostora predstavljaju prostori $L^p(S,\mu)$ sa kvazinormom

$$\|x\|_p := \left(\int_S |x(s)|^p \mu(ds)\right)^{1/p}, \qquad x\in L^p.$$

Ako je $\dim(L^p)\geq 2$, tada je $\mathrm{ind}(L^p)=\min(1,p)$.

Svi pojmovi iz prve tačke formalno se mogu preneti na kvazinormirane prostore, ali su neki, kao ravnomerna konveksnost, upotrebljivi samo kod normiranih prostora. Na primer, ako je $A=\{1,-1\}$ i $\delta(A,X;\varepsilon)\geq 0$, onda je X normiran. Međutim, ako uzmemo da je $A=\mathbb{D}$, situacija se menja, tj. ima pravih kvazinormiranih prostora koji zadovoljavaju uslov

(3) $\hat{\delta}_c(X;\varepsilon) := \hat{\delta}(\mathbb{D},X;\varepsilon) > 0$ za sve $\varepsilon > 0$.

Primer. U sledećoj glavi biće dokazano da je $\hat{\delta}_c(L^p;\varepsilon) \geq p\,\varepsilon^2/4$ ako je $0<p<1$, $0<\varepsilon<1$.

Definicija 4. Kažemo da je kvazinormirani prostor X ravnomerno c-konveksan ako je ispunjen uslov (3).

Sledeći rezultati iz tačke 2 ostaju tačni ako se dopusti da je prostor X kvazinormiran, $\mathrm{ind}(X) > 0$ i $A = \overline{\mathbb{D}}$: propozicije 2 i 3, lema 1, posledice 2, 3, 4 i jednakosti (2.1), (2.6), (2.7), (2.10) i (2.11). Jedino dokaz propozicije 2 zahteva neke izmene jer je zasnovan na nejednakosti (2.2), koja obezbeđuje neprekidnost funkcije $\hat{\delta}_c$. U novoj situaciji umesto (2.2) može se iskoristiti nejednakost

$$|(1+\hat{\delta}_c(\varepsilon))^p-(1+\hat{\delta}_c(\eta))^p| \leq |\varepsilon-\eta|^p \qquad (p = \mathrm{ind}(X)),$$

koja se dobija iz (2).

Ostali rezultati iz tačke 2 prenose se pod dodatnom pretpostavkom da je funkcija $\hat{\delta}_c$ kvazikonveksna, tj. da funkcija $\varepsilon \mapsto \hat{\delta}_c(\varepsilon)/\varepsilon$ raste. Ta pretpostavka se ostvaruje, na primer, u slučaju prostora L^p. U nekim drugim primerima, kao što su Orliczevi prostori, moguće je modul $\hat{\delta}_c(X;\varepsilon) := \hat{\delta}(\overline{\mathbb{D}},X;\varepsilon)$ oceniti odozdo netrivijalnom kvazikonveksnom funkcijom. Tada ćemo primenjivati (videti propoziciju III.2) sledeću generalizaciju leme 2.

Propozicija 7. Neka je F kvazikonveksna nenegativna minoranta funkcije $\hat{\delta}_c = \hat{\delta}_c(X;\cdot)$ i $0<p\leq\mathrm{ind}(X)$. Ako $x_1, \dots, x_n \in X$ i

(+) $$\left\|\sum_{k=1}^n \lambda_k x_k\right\| \leq c_p := 2^{1-2/p}(2^p-1)^{1/p} \quad \text{za sve } \lambda_k \in \{1,-1\},$$

onda je

(++) $$\sum_{k=1}^n F(\|x_k\|) \leq 1.$$

Glavni korak u dokazu je sledeća lema.

Lema 6. Ako je ispunjen uslov (+), onda je

$$S(x_1,\dots,x_n) := \sup\left\{\left\|\sum_{k=1}^n \lambda_k x_k\right\| : \{\lambda_k\} \subset \overline{\mathbb{D}}\right\} \leq 1.$$

Dokaz. Pretpostavimo, prvo, da $\lambda_k \in \{1, 0\}$ za svako k. Tada $2\lambda_k - 1 \in \{1, -1\}$ i zato je

$$\left\|\sum_{k=1}^n \lambda_k x_k\right\|^p = 2^{-p}\left\|\sum_{k=1}^n x_k + \sum_{k=1}^n (2\lambda_k-1)x_k\right\|^p \leq 2^{1-p}c_p^{\,p}.$$

Pretpostavimo sada da su λ_k brojevi iz intervala $[0, 1]$ sa konačnom dijadskom reprezentacijom. Tada postoji niz $\lambda_{k,m}$ $(1\leq k\leq n,\ m\geq 1)$ takav da je $\lambda_{k,m} \in \{0, 1\}$ i

$$\lambda_k = \sum_{m=1}^{\infty} 2^{-m}\lambda_{k,m},$$

pri čemu su sve sume konačne. Odatle dobijamo, pomoću prethodne procene,

$$\|\sum_{k=1}^{n}\lambda_k x_k\|^p = \|\sum_{m=1}^{\infty}2^{-m}\sum_{k=1}^{n}\lambda_{k,m}x_k\|^p$$

$$\leq \sum_{m=1}^{\infty}2^{-mp}\|\sum_{k=1}^{n}\lambda_{k,m}x_k\|^p$$

$$\leq c_p^p\, 2^{1-p}\sum_{m=1}^{\infty}2^{-mp} = 1/2.$$

Kako brojevi sa konačnom dijadskom reprezentacijom čine gust skup u $[0, 1]$, dobijena nejednakost važi za sve $\lambda_k \in [0, 1]$. Pomoću toga se lako dokazuje da ta nejednakost važi za sve $\lambda_k \in [-1, 1]$. Na kraju, ako je $|\lambda_k| \leq 1$, onda je $\lambda_k = \alpha_k + i\beta_k$ za neke α_k, $\beta_k \in [-1, 1]$. Zato je

$$\|\sum_{k=1}^{n}\lambda_k x_k\|^p \leq \|\sum_{k=1}^{n}\alpha_k x_k\|^p + \|\sum_{k=1}^{n}\beta_k x_k\|^p \leq 1. \boxtimes$$

Dokaz propozicije 7. Dovoljno je dokazati implikaciju $S(x_1,\dots,x_n) \leq 1 \Rightarrow (+)$, što se može učiniti kao u dokazu propozicije 5. Međutim, moguć je još jedan dokaz. Stavimo $S_k = S(x_1,\dots,x_k)$ za $1 \leq k \leq n$ i neka je $x_1 \neq 0$. Tada je $S_k \neq 0$ za svako k i

$$S_k/S_{k+1} + \delta_c(\|x_{k+1}\|/S_{k+1}) \leq 1,$$

što se dobija iz definicije modula δ_c. Kako je F kvazikonveksna, $F \leq \delta_c$ i $S_{k+1} \leq 1$, imamo

$$S_k + F(\|x_{k+1}\|) \leq S_{k+1}.$$

Sumiranjem ovih nejednakosti dolazimo do traženog rezultata. $\boxtimes$

8. Teorema o bezuslovnoj konvergenciji u kvazinormiranom prostoru

U kvazinormiran prostor X uvodi se topologija tako što se okolinama nule proglase skupovi $\{x : \|x\| \leq \alpha\}$, $\alpha > 0$. U odnosu na tu topologiju X je lokalno ograničen prostor [48: str. 159]. Niz (x_n) u X konvergira ako i samo ako je $\lim \|x_n - x\| = 0$ za neko $x \in X$.

Definicija 5. Red $\sum x_n$ $(n \geq 1)$ u kvazinormiranom prostoru X konvergira bezuslovno ako konvergira red $\sum x_{\sigma(n)}$ za sve $\sigma \in P$, gde je P skup svih permutacija skupa pozitivnih celih brojeva.

Teorema 5. Iz bezuslovne konvergencije reda $\sum x_n$ u kvazinormiranom prostoru X sledi konvergencija reda $\sum \hat{\delta}_c(X; \|x_n\|)$.

Da bismo mogli da primenimo lemu 6, biće nam potrebne još dve leme. Dokaz prve od njih može se naći u [48: str. 160-161].

Lema 7. Neka prostor X zadovoljava uslov (7.1) i neka je $1/p =$

$1+\log_2 K$. Tada postoji kvazinorma $|||\cdot|||$ na X koja zadovoljava uslove: (i) $|||x||| \le \|x\| \le 2^{1/p}|||x|||$, (ii) $|||x+y|||^p \le |||x|||^p + |||y|||^p$, $x,y \in X$.

Lema 8. Neka je $\sum x_n$ bezuslovno konvergentan red u kvazinormiranom prostoru X. Tada za svako $\varepsilon > 0$ postoji prirodan broj m takav da je, za sve $n \ge m$ i sve $\lambda_k \in \{1,-1\}$,

$$\|\sum_{k=m}^{n} \lambda_k x_k\| \le \varepsilon .$$

Dokaz. (Isti je kao dokaz leme 3; videti [57: str. 15].) Pretpostavimo da tvrđenje nije tačno. Tada postoje $\varepsilon > 0$ i niz konačnih skupova $B_n \subset \{1, 2, \dots\}$ takvi da je $q_n := \max B_n < p_{n+1} := \min B_{n+1}$ i $\|\sum_{j\in B_n} x_j\| \ge \varepsilon$ za svako n. Neka je σ bilo koja permutacija prirodnih brojeva takva da je $\sigma(\{p_n+j:\ 1\le j\le k_n\}) = B_n$, gde je $k_n = \operatorname{card} B_n$. Tada red $\sum x_{\sigma(n)}$ divergira jer ima niz odsečaka koji ne teži nuli. To je suprotno pretpostavci. ⊠

Dokaz teoreme 5. Primenjujući leme 8, 7 i 6, nalazimo broj m takav da je $S(x_m,\dots,x_n) \le 1$ za svako $n \ge m$. Neka je $m=1$, $x_1 \ne 0$ i $S_k := S(x_1,\dots,x_k)$. Za dato k izaberimo $\lambda_1,\dots,\lambda_k \in \mathbb{D}$ tako da je $(1-2^{-k})S_k \le \|\sum_{j=1}^{k}\lambda_j x_j\|$. Iz definicije funkcije $\hat{\delta}_c$ sledi nejednakost $S(y_k, x_{k+1}) \ge \|y_k\|(1+\hat{\delta}_c(\|x_{k+1}\|/\|y_k\|))$, gde je $y_k = \sum_{j=1}^{k}\lambda_j x_j$. Odavde dobijamo

$$S_{k+1} \ge S(y_k, x_{k+1}) \ge (1-2^{-k})(1+\hat{\delta}_c(\|x_{k+1}\|))\, S_k, \quad \text{tj.}$$

$$S_{k+1} - S_k + 2^{-k}S_k \ge 2^{-1}\|x_1\|\,\hat{\delta}_c(\|x_{k+1}\|).$$

Kako je $S_k \le 1$ i $x_1 \ne 0$, red $\sum \hat{\delta}_c(\|x_k\|)$ konvergira. ⊠

Primer. Ako red $\sum x_n$ u prostoru L^p, $0<p<1$, bezuslovno konvergira, onda konvergira red $\sum \|x_n\|^2$. To sledi iz teoreme 5 i nejednakosti $\hat{\delta}_c(L^p;\varepsilon) \ge p\,\varepsilon^2/4$ $(0<\varepsilon<1)$. (Videti teoremu II.5.) Ovo se tvrđenje ne može poboljšati ako je $L^p = L^p(0,1)$ jer $L^p(0,1)$ sadrži potprostor koji je izomorfan Hilbertovom prostoru, što je posledica Hinčinove nejednakosti:

$$K_p^{-1}\left(\sum_{k=1}^{n}|b_k|^2\right)^{1/2} \le \left(\int_0^1 \left|\sum_{k=1}^{n} b_k \varphi_k(t)\right|^p dt\right)^{1/p}$$

$$\le K_p\left(\sum_{k=1}^{n}|b_k|^2\right)^{1/2}, \quad 0<p<\infty,$$

gde je K_p pozitivna konstanta koja zavisi samo od p.

U slučaju $p<1$ Hinčinova nejednakost se lako izvodi iz propozicije 7 (videti primer 6.4). I u slučaju $p>2$ mogu se iskoristiti geometrijska svojstva prostora L^p. Naime, tada Hinčinova nejednakost sledi iz Lindenstraussove teoreme o divergentnim redovima u ravnomerno glatkim prostorima [53] i formula za modul glatkosti prostora L^p [58].

9. Neke napomene o dualnim svojstvima

Neka je X normiran prostor nad poljem $\mathbb{K}$ ($=\mathbb{R}$ ili $\mathbb{C}$) i $L_{\mathbb{K}}(X)$ – prostor ograničenih linearnih operatora sa X u X. Nazovimo prostor X $\mathbb{K}$-glatkim ako je za sve U, $V\in L_{\mathbb{K}}(X)$ i sve $x\in X$, $\|x\|=1$, ispunjen ovaj uslov:

($G_{\mathbb{K}}$) Ako je $Ux=x$ i $\|Uy\|+\|Vy\|\leq\|y\|$ za sve $y\in X$, onda je $\|V\|=0$.

Može se dokazati (kao teorema 3) da je X $\mathbb{R}$-gladak ako i samo ako je gladak, tj. ako i samo ako za sve $x,y\in X$, $x\neq 0$, postoji $\lim(\|x+ty\|-\|x\|)/t$ $(t\to 0)$. Prema tome, $\mathbb{R}$-glatkost je nasledno svojstvo (nasleđuju ga potprostori). Interesantno je, međutim, da $\mathbb{C}$-glatkost nije nasledna iako se uslovi ($G_{\mathbb{R}}$) i ($G_{\mathbb{C}}$) formalno ne razlikuju. Naime, može se dokazati da je X $\mathbb{C}$-gladak ako je X^* strogo c-konveksan, iz čega sledi da je prostor $C[0,1]$ $\mathbb{C}$-gladak (videti primer II.5.2). S druge strane, lako je proveriti da prostor ℓ^1, koji je (kao i svaki separabilan) izometrijski sadržan u $C[0,1]$, nije $\mathbb{C}$-gladak.

Pojam $\mathbb{C}$-glatkosti podudara se sa pojmom c-glatkosti koji su uveli M. Hladnik i M. Omladič [117]. Označimo sa W skup onih elemenata sa jedinične sfere prostora X^* koji dostižu svoju normu na jediničnoj sferi u X. Kaže se da je X c-gladak ako su sve tačke iz W c-ekstremalne. Pojam ravnomerne c-glatkosti (ako je uopšte potreban) prirodno je definisati zahtevom da je dual ravnomerno c-konveksan. Tada iz propozicije 4 sledi da je X^* ravnomerno c-gladak ako i samo ako je X ravnomerno c-konveksan. Osim toga, svaki normiran prostor izometričan je potprostoru nekog ravnomerno c-glatkog prostora, i to prostora neprekidnih funkcija na kompaktu. Sa glatkošću se takve stvari ne događaju. Na primer, ravnomerno c-glatki prostor ℓ^∞ nije izomorfan nijednom glatkom prostoru [13].

Glava II

MODULI c-KONVEKSNOSTI LEBESGUEOVIH PROSTORA

Opšta je pretpostavka u ovoj glavi da je $\dim(L^p)=\infty$. To znači, prema jednoj teoremi iz teorije Rieszovih prostora [113: teorema 26.10], da odgovarajuća σ-algebra sadrži beskonačan broj međusobno disjunktnih elemenata konačne pozitivne mere. Dakle, L^p sadrži potprostor koji je izometričan prostoru ℓ^p. Sa L^p je označen uobičajeni Lebesgueov prostor merljivih kompleksnih funkcija, definisanih na istom skupu S sa pozitivnom merom ν. Kad god pišemo " $x\in L^p$", podrazumevamo da je $0<p<\infty$ i

$$\|x\| = \left(\int_S |x(s)|^p \, \nu(ds) \right)^{1/p}.$$

Radi skraćivanja ovakvih formula izostavljaćemo slova S i ν.

1. Slučaj $p=1$

Ravnomernu c-konveksnost prostora L^1 ustanovio je J. Globevnik [27: teorema 1]. Ovde dajemo kraći i elegantniji dokaz i, uz to, tačnu vrednost modula $\hat{\delta}_c(L^1;\varepsilon)$ i $\hat{\delta}_c^1(L^1;\varepsilon)$.

Teorema 1. Važi jednakost

$$\hat{\delta}_c(L^1;\varepsilon) = (2\pi)^{-1} \int_0^{2\pi} |1+\varepsilon e^{it}|\,dt - 1, \qquad \varepsilon \ge 0. \tag{1}$$

Ako je prostor X izomorfan L^1, onda je $\hat{\delta}_c(X;\varepsilon) \le \hat{\delta}_c(L^1;\varepsilon)$.

Nejednakost " $\hat{\delta}_c(L^1;\varepsilon) \ge$ " lako se dokazuje pomoću sledeće leme.

Lema 1. Neka je $E=[0,2\pi]$. Ako $x, y \in L^1$, onda je

$$\int_E \|x+e^{it}y\|\,dt \ge \int_E \big|\|x\|+e^{it}\|y\|\big|\,dt.$$

Dokaz. Skup $Q:=\{s\in S:\ |x(s)|+|y(s)|\neq 0\}$ ima σ-konačnu meru; primenjujući Fubinijevu teoremu i nekoliko očiglednih transformacija, dobijamo

$$\int_E \|x+e^{it}y\|\,dt = \int_Q ds \int_E |x(s)+e^{it}y(s)|\,dt$$

$$= \int_Q ds \int_E \big||x(s)|+e^{it}|y(s)|\big|\,dt = \int_E dt \int_Q \big||x(s)|+e^{it}|y(s)|\big|\,ds$$

$$\ge \int_E \left| \int_Q (|x(s)|+e^{it}|y(s)|)\,ds \right| dt = \int_E \big|\|x\|+e^{it}\|y\|\big|\,dt. \quad \boxtimes$$

Da bismo dokazali deo " $\hat{\delta}_c \le$ " jednakosti (1), dovoljno je da razmotrimo slučaj kad je $L^1=\ell^1$, zato što L^1 sadrži potprostor izometričan ℓ^1. Definišimo elemente $x=(\xi_k)$ i $y=(\eta_k)$ prostora ℓ^1 na sledeći način: $\xi_k=2^{-n-1}$ ako je $0\le k<2^{n+1}$; $\xi_k=0$ ako je $k\ge 2^{n+1}$; $\eta_k=\varepsilon\,\xi_k\exp(k\pi i/2^n)$, gde je $\varepsilon\ge 0$, $n\in\mathbb{N}$. Tada je $\|x\|=1$, $\|y\|=\varepsilon$ i $1+\hat{\delta}_c^n(\ell^1;\varepsilon)\le\max_{\lambda\in T_n}\|x+\lambda y\|=2^{-n-1}\sum_{\lambda\in T_n}|1+\lambda\varepsilon|$. Koristeći analogon jednakosti (I.2.5), dobijamo traženu nejednakost.

Da bismo dokazali ostatak teoreme 1, pretpostavimo da je prostor X izomorfan L^1. Neka je $\varepsilon>0$ i $\theta>1$. Prema Jamesovoj teoremi [57: propozicija 2.e.3], postoji u X potprostor Y sa invertibilnim operatorom $U:\ell^1\to Y$ takvim da je $\|U^{-1}\|=1$ i $\|U\|\le\theta$. Dakle, ako $x, y\in\ell^1$, $\|x\|=1$, $\|y\|=\varepsilon$, $x'=Ux$, $y'=Uy$, onda je $1\le\|x'\|\le\theta$, $\varepsilon\le\|y'\|\le\theta\varepsilon$ i $\theta\max_{\lambda\in T}\|x+\lambda y\|\ge\max_{\lambda\in T}\|x'+\lambda y'\|\ge 1+\hat{\delta}_c(Y;\varepsilon/\theta)$. Zato je $\hat{\delta}_c(X;\varepsilon/\theta)\le\hat{\delta}_c(Y;\varepsilon/\theta)\le\theta\,\hat{\delta}_c(\ell^1;\varepsilon)+\theta-1$ i, zbog neprekidnosti Miljmanovog modula, $\hat{\delta}_c(X;\varepsilon)\le\hat{\delta}_c(\ell^1;\varepsilon)=\hat{\delta}_c(L^1;\varepsilon)$. Time je dokaz teoreme 1 završen. ⊠

<u>Posledica 1</u>. Neka je $w=w_c(L^1;\varepsilon)$ za neko $\varepsilon\ge 0$, i $\delta=\delta_c(L^1;\varepsilon)$ za neko $\varepsilon\in[0,1]$. Tada je

$$2\pi(1+\varepsilon)=\int_0^{2\pi}|w+e^{it}|\,dt,\tag{2}$$

$$\int_0^{2\pi}|1-\delta+\varepsilon e^{it}|\,dt=2\pi.\tag{3}$$

Dokaz. Jednakost (2) sledi iz teoreme 1 i posledice I.2. Jednakost (3) sledi iz (1) i (I.2.6). ⊠

Korišćenjem dobijenih jednakosti mogu se dati neke procene modula c-konveksnosti prostora L^1. Na primer, primenjujući Parsevalovu formulu na (1), dobijamo jednakost

$$\hat{\delta}_c(L^1;\varepsilon)=\sum_{n=1}^{\infty}\gamma_n^2\,\varepsilon^{2n},\quad 0\le\varepsilon\le 1;\quad \gamma_n=(2n-3)!!/(2n)!!.\tag{4}$$

Odavde, pomoću rezultata iz glave I, tačka 2, dolazimo do sledećih procena:

$$\hat{\delta}_c(L^1;\varepsilon)\ge\varepsilon^2/4,\quad 0\le\varepsilon\le 2,\tag{5}$$

$$w_c(L^1;\varepsilon)\le 2\,\varepsilon^{1/2},\quad 0\le\varepsilon\le 1.\tag{6}$$

Ako je $0\le\varepsilon\le 1$, onda nejednakost (5) sledi iz (4); ako je $1\le\varepsilon\le 2$, onda je, zbog (I.2.1), $\hat{\delta}_c(L^1;\varepsilon)\ge 1/4\varepsilon+\varepsilon-1\ge\varepsilon^2/4$. Nejednakost (6) sledi iz (5) i propozicije I.2 i preciznija je od sledeće, koju je dokazao J. Globevnik [27]:

$$w_c(L^1;\varepsilon)\le 4(1+2(1+\varepsilon^2)^{1/2})\varepsilon^{1/2}.$$

Pomoću jednakosti (3) može se zaključiti da je $\pi/4$ rešenje jednačine $\delta_c(L^1;\varepsilon)=1-\varepsilon$. Koristeći to i jednakosti (I.2.6), (I.2.10), dobijamo procenu Clarksonovog modula:

$$(7)\qquad \delta_c(L^1;\varepsilon) \geq \begin{cases} (1-(1-\varepsilon^2)^{1/2})/2, & 0 \leq \varepsilon \leq \pi/4, \\ 1-2(\varepsilon-\varepsilon^2)^{1/2}, & \pi/4 \leq \varepsilon \leq 1. \end{cases}$$

I sledeća teorema pokazuje da je L^1 ravnomerno c-konveksan.

Teorema 2. Važi jednakost

$$2\,\hat{\delta}^1_c(L^1;\varepsilon) = (1+\varepsilon^2)^{1/2}-1,\quad 0 \leq \varepsilon \leq 1.$$

Dokaz se zasniva na sledećoj lemi.

Lema 2. Ako su x, y kompleksni brojevi, onda je

$$(8)\qquad |x+y|+|x-y|+|x+iy|+|x-iy| \geq 2(|x|^2+|y|^2)^{1/2}+2|x|.$$

Dokaz. Očigledno je da je dovoljno razmotriti slučaj kad je $y=1$, $x=re^{it}$, gde su r, t realni brojevi i $r>1$. Neka je, za dato $r>1$,

$$\phi(t) = |re^{it}+1|+|re^{it}-1|+|re^{it}+i|+|re^{t}-i|.$$

Služeći se binomnom formulom, dobijamo jednakost

$$(+)\qquad \phi(t) = 4b+2b\sum_{n=1}^{\infty} c_n(\cos^{2n}t+\sin^{2n}t),$$

gde je $b=(1+r^2)^{1/2}$, $c_n = (2r/b^2)^{2n}\binom{1/2}{2n}$. Kako je $c_n<0$, to iz (+) sledi da je $\phi(t) \geq \phi(0) = 2(1+r^2)^{1/2}+2r$, što je trebalo dokazati. ⊠

Teorema se lako izvodi iz sledeće leme.

Lema 3. Ako $x, y \in L^1$, onda je

$$(9)\qquad \|x+y\|+\|x-y\|+\|x+iy\|+\|x-iy\| \geq 2(\|x\|^2+\|y\|^2)^{1/2}+2\|x\|.$$

Dokaz. Neka je $z(s)=(|x(s)|^2+|y(s)|^2)^{1/2} = |\,|x(s)|+i|y(s)|\,|$. Tada je $\|z\| = \int |\,|x(s)|+i|y(s)|\,|\,ds \geq |\int(|x(s)|+i|y(s)|)\,ds| = (\|x\|^2+\|y\|^2)^{1/2}$, pa se nejednakost (9) dobija integracijom iz (8). ⊠

Kombinujući teoremu 2 sa rezultatima iz glave I.2, dobijamo tačnu vrednost modula δ^1_c:

$$(10)\qquad \delta^1_c(L^1;\varepsilon) = \begin{cases} \varepsilon^2/4, & 0 \leq \varepsilon \leq 2(\sqrt{2}-1), \\ 1-2(1-\varepsilon)^{1/2}, & 2(\sqrt{2}-1) \leq \varepsilon \leq 1. \end{cases}$$

2. Slučaj $1<p<2$

Sledeća činjenica generališe lemu 3; dokaz je, međutim, znatno komplikovaniji.

Teorema 3. Ako $x, y \in L^p$, $1 \leq p < 2$, onda je, za svako $n \in \mathbb{N}$,

$$(1)\qquad \sum_{\lambda\in T_n}\|x+iy\|^p \geq \sum_{\lambda\in T_n}|\,\|x\|+\lambda\|y\|\,|^p.$$

U slučaju $n=0$, tj. $T_n=\{1,-1\}$, ovu nejednakost, prema pisanju O. Hannera [32], prvi je dokazao A. Beurling na seminaru u Uppsali

(7) $$\delta_c(L^1;\varepsilon) \ge \begin{cases} (1-(1-\varepsilon^2)^{1/2})/2, & 0 \le \varepsilon \le \pi/4, \\ 1-2(\varepsilon-\varepsilon^2)^{1/2}, & \pi/4 \le \varepsilon \le 1. \end{cases}$$

I sledeća teorema pokazuje da je L^1 ravnomerno c-konveksan.

Teorema 2. Važi jednakost

$$2\,\hat{\delta}_c^1(L^1;\varepsilon) = (1+\varepsilon^2)^{1/2}-1, \quad 0 \le \varepsilon \le 1.$$

Dokaz se zasniva na sledećoj lemi.

Lema 2. Ako su x, y kompleksni brojevi, onda je

(8) $$|x+y| + |x-y| + |x+iy| + |x-iy| \ge 2(|x|^2+|y|^2)^{1/2} + 2|x|.$$

Dokaz. Očigledno je da je dovoljno razmotriti slučaj kad je $y=1$, $x=re^{it}$, gde su r, t realni brojevi i $r>1$. Neka je, za dato $r>1$,

$$\phi(t) = |re^{it}+1| + |re^{it}-1| + |re^{it}+i| + |re^{\,t}-i|.$$

Služeći se binomnom formulom, dobijamo jednakost

(+) $$\phi(t) = 4b+2b\sum_{n=1}^{\infty} c_n(\cos^{2n}t + \sin^{2n}t),$$

gde je $b=(1+r^2)^{1/2}$, $c_n = (2r/b^2)^{2n}\binom{1/2}{2n}$. Kako je $c_n<0$, to iz (+) sledi da je $\phi(t) \ge \phi(0) = 2(1+r^2)^{1/2}+2r$, što je trebalo dokazati. ☒

Teorema se lako izvodi iz sledeće leme.

Lema 3. Ako $x, y \in L^1$, onda je

(9) $$\|x+y\| + \|x-y\| + \|x+iy\| + \|x-iy\| \ge 2(\|x\|^2+\|y\|^2)^{1/2} + 2\|x\|.$$

Dokaz. Neka je $z(s) = (|x(s)|^2+|y(s)|^2)^{1/2} = \big|\,|x(s)|+i|y(s)|\,\big|$. Tada je $\|z\| = \int \big|\,|x(s)|+i|y(s)|\,\big|\,ds \ge \left|\int(|x(s)|+i|y(s)|)\,ds\right| = (\|x\|^2+\|y\|^2)^{1/2}$, pa se nejednakost (9) dobija integracijom iz (8). ☒

Kombinujući teoremu 2 sa rezultatima iz glave I.2, dobijamo tačnu vrednost modula δ_c^1:

(10) $$\delta_c^1(L^1;\varepsilon) = \begin{cases} \varepsilon^2/4, & 0 \le \varepsilon \le 2(\sqrt{2}-1), \\ 1-2(1-\varepsilon)^{1/2}, & 2(\sqrt{2}-1) \le \varepsilon \le 1. \end{cases}$$

2. Slučaj $1<p<2$

Sledeća činjenica generališe lemu 3; dokaz je, međutim, znatno komplikovaniji.

Teorema 3. Ako $x, y \in L^p$, $1 \le p < 2$, onda je, za svako $n \in \mathbb{N}$,

(1) $$\sum_{\lambda\in T_n} \|x+\lambda y\|^p \ge \sum_{\lambda\in T_n} \big|\,\|x\|+\lambda\|y\|\,\big|^p.$$

U slučaju $n=0$, tj. $T_n=\{1,-1\}$, ovu nejednakost, prema pisanju O. Hannera [32], prvi je dokazao A. Beurling na seminaru u Uppsali

Posledica 2. Ako $x, y \in L^p$, $1<p<2$, onda je

$$(2) \qquad \int_0^{2\pi} \|x+e^{it}y\|^p\,dt \geq \int_0^{2\pi} |\,\|x\|+e^{it}\|y\|\,|^p\,dt.$$

Dokaz. Nejednakost (1) se prvo pomnoži sa 2^{-n-1} pa se, zatim, uzme granična vrednost po n. ⊠

Primenićemo teoremu 3, čiji dokaz ostavljamo za sledeću tačku, da bismo izračunali modul $\hat{\delta}_c^n(L^p;\varepsilon)$. U slučaju $n=0$ rezultat pripada O. Hanneru [32] (mada je on radio sa Clarksonovim modulom konveksnosti).

Teorema 4. Ako je $1\leq p<2$ i $n\in\mathbb{N}$, onda je

$$(3) \qquad (1+\hat{\delta}_c^n(L^p;\varepsilon))^p = 2^{-n-1}\sum_{\lambda\in T_n}|1+\lambda\varepsilon|^p, \qquad \varepsilon\geq 0.$$

Dokaz. Neka $x, y \in L^p$, $\|x\|=1$, $\|y\|=\varepsilon$. Ako sa $K_{n,p}(\varepsilon)$ označimo izraz na desnoj strani jednakosti (3), onda je, prema teoremi 3, $\max\limits_{\lambda\in T_n}\|x+\lambda y\|^p \geq K_{n,p}(\varepsilon)$. Uzimajući infimum po $\{(x,y): \|x\|=1, \|y\|=\varepsilon\}$, dobijamo deo "$\geq$" jednakosti (3). Da bismo dokazali ostatak, dosta je da razmotrimo slučaj kad je $L^p=\ell^p$. Definišimo $x=(\xi_k)$ i $y=(\eta_k)$, $x, y\in\ell^p$, na sledeći način: $\xi_k=2^{-(n+1)/p}$ za $0\leq k<2^{n+1}$; $\xi_k=0$ za $k\geq 2^{n+1}$; $\eta_k=\varepsilon\,\xi_k\exp(k\pi i/2^n)$. Tada je $\|x\|=1$, $\|y\|=\varepsilon$ i, što je lako proveriti, $\|x+\lambda y\|^p=K_{n,p}(\varepsilon)$ za svako $\lambda\in T_n$. Time je dokaz završen. ⊠

Delujući na jednakost (3) operatorom $\lim\limits_n$, dobijamo sledeće tvrđenje.

Posledica 3. Ako je $1<p<2$, onda je

$$(4) \qquad (1+\hat{\delta}_c(L^p;\varepsilon))^p = (2\pi)^{-1}\int_0^{2\pi}|1+\varepsilon e^{it}|^p\,dt, \qquad \varepsilon\geq 0.$$

Posledica 4. Ako je $0\leq\varepsilon\leq 1$ i $\delta=\hat{\delta}_c(L^p;\varepsilon)$, $1<p<2$, onda je

$$(5) \qquad \int_0^{2\pi}|1-\delta+\varepsilon e^{it}|^p\,dt = 2\pi.$$

Ova jednakost se dobija iz jednakosti (4) i (I.2.6) i može se iskoristiti da se dobiju neke procene nalik na (1.7). U iste svrhe može poslužiti posledica 3 u kombinaciji sa (I.2.6) i (I.2.7) ili (I.2.10). Pri tome je pogodno jednakost (4) pisati u obliku

$$(6) \qquad (1+\hat{\delta}_c(L^p;\varepsilon))^p = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{p/2}{n}^2\varepsilon^{2n}, \quad 0\leq\varepsilon\leq 1,$$

što se dobija primenom Parsevalove formule na funkciju $(1+\varepsilon e^{it})^{p/2}$. Tako, na primer, imamo procenu $\hat{\delta}_c(L^p;\varepsilon)\geq(1+\varepsilon^2p^2/4)^{1/p}$, iz koje se može izvesti sledeća:

(7) $\delta_c(L^p;\varepsilon) \geq \max(p\varepsilon^2/4,\ 1-2(1/p-\varepsilon/p)^{1/2}), \quad 0 \leq \varepsilon \leq 1.$

3. Dokaz teoreme 3

Realna funkcija f, definisana na skupu $R_+^2 := \{(\xi,\eta):\ \xi,\eta \geq 0\}$, naziva se sublinearnom ako je $f(\alpha z) = \alpha f(z)$ za sve $\alpha \geq 0$, $z \in R_+^2$, i $f(z_1+z_2) \leq f(z_1)+f(z_2)$, $z_1, z_2 \in R_+^2$.

Lema 4. Ako je funkcija $f: R_+^2 \to R$ neprekidna i homogena a funkcija $g(\xi) := f(\xi,1)$, $\xi \geq 0$, konveksna, onda je f sublinearna.

Dokaz. Neka je $z_1 = (\xi_1, \eta_1)$, $z_2 = (\xi_2, \eta_2)$, pri čemu je $\eta_1 > 0$ i $\eta_2 > 0$ (što ne umanjuju opštost jer je f neprekidna). Tada je, zbog homogenosti,

$$f(z_1+z_2) = (\eta_1+\eta_2)\, g(\alpha_1 \xi_1/\eta_1 + \alpha_2 \xi_2/\eta_2),$$

gde je $\alpha_k = \eta_k/(\eta_1+\eta_2)$, $k=1,2$. Kako je g konveksna i $\alpha_1+\alpha_2 = 1$, $\alpha_1, \alpha_2 \geq 0$, to je

$$f(z_1+z_2) \leq (\eta_1+\eta_2)(\alpha_1 g(\xi_1/\eta_1) + \alpha_2 g(\xi_2/\eta_2))$$

$$= \eta_1 g(\xi_1/\eta_1) + \eta_2 g(\xi_2/\eta_2) = f(z_1) + f(z_2). \boxtimes$$

Lema 5. Ako je $1 \leq p < 2$ i $t \in R$, onda je funkcija

$$f(\xi,\eta) = |\xi^{1/p} + e^{it}\eta^{1/p}|^p + |\xi^{1/p} - e^{it}\eta^{1/p}|^p, \quad (\xi,\eta) \in R_+^2,$$

sublinearna.

Dokaz. Lako je videti da se tvrđenje svodi na slučaj kad je $1 < p < 2$ i $0 < t < \pi/2$. Dokazaćemo da je pod tom pretpostavkom funkcija $g(\xi) = f(\xi,1)$ konveksna. Neka je $h(\xi) = |\xi + e^{it}|$, $\xi \in R$. Direktno računanje drugog izvoda funkcije g pokazuje da je $g''(\xi) \geq 0$, za sve $\xi > 0$, ako i samo ako je $\phi(\xi) \geq 0$, gde je

$$\begin{aligned}\phi(\xi) = {} & (p-1)\,h(\xi)^{p-4}(\xi+\cos t)^2\xi + (p-1)\,h(-\xi)^{p-4}(\xi-\cos t)^2\xi \\ & - (p-1)\,h(\xi)^{p-2}(\xi+\cos t) - (p-1)\,h(-\xi)^{p-2}(\xi-\cos t) \\ & + h(\xi)^{p-4}(h(\xi)^2-(\xi+\cos t)^2)\xi + h(-\xi)^{p-4}(h(-\xi)^2-(\xi-\cos t)^2)\xi .\end{aligned}$$

Primenjujući na dva poslednja sabirka nejednakosti

$$h(\xi)^{p-4} \geq (p-1)\,h(\xi)^{p-4}, \quad h(-\xi)^{p-4} \geq (p-1)\,h(-\xi)^{p-4},$$

i uzimajući u obzir da je $h(\xi) \geq |\xi + \cos t|$ za $\xi \in R$, dobijamo, posle sređivanja,

$$\phi(\xi) \geq (p-1)(h(-\xi)^{p-2} - h(\xi)^{p-2})\cos t, \quad \xi > 0.$$

Sada traženi rezultat sledi iz nejednakosti $p-2 < 0$, $\cos t > 0$ i $h(\xi) \geq h(-\xi)$ za $\xi > 0$. $\boxtimes$

Lema 6. Ako je $1 \leq p < 2$ i $n \in N$, onda je funkcija

$$E(\xi,\eta) = \sum_{\lambda \in m} |\xi^{1/p} + \lambda\eta^{1/p}|^p, \quad (\xi,\eta) \in R_+^2,$$

sublinearna.

Dokaz. Tvrđenje sledi iz leme 5, jer se E može predstaviti kao zbir funkcija koje imaju formu funkcije f (definisane u formulaciji leme 5). ⊠

Lema 7. Neka su x, y kompleksni brojevi, $1\le p<2$, $n\in\mathbb{N}$ i

$$F(x,y)=\sum_{\lambda\in T_n}|x+\lambda y|^p.$$

Tada je $F(x,y)\ge F(|x|,|y|)$.

Dokaz. Zadatak se svodi na nalaženje minimuma funkcije $\phi(t):=F(re^{it},1)$, $t\in\mathbb{R}$, $r>1$. Polazeći od jednakosti

$$\phi(t)=\sum_{\sigma\in Z_n}\{(1+r^2-2r\cos(t-\sigma))^{p/2}+(1+r^2+2r\cos(t-\sigma))^{p/2}\},$$

gde je $Z_n:=\{k\pi/2^n:\ 0\le k<2^n$, i koristeći binomnu formulu, dolazimo do jednakosti

$$(+)\qquad \phi(t)=2^{n+1}b+2b\sum_{m=1}^{\infty}c^{2m}\binom{p/2}{2m}\Psi_n(t,m),$$

gde je $c=2r(1+r^2)^{-1}<1$, $b=(1+r^2)^{p/2}$,

$$\Psi_n(t,m)=\sum_{\sigma\in Z_n}\cos^{2m}(t-\sigma).$$

Zapisujući Ψ_{n+1} u obliku

$$\Psi_{n+1}(t,m)=\sum_{\sigma\in Z_n}(\cos^{2m}(t-\sigma/2)+\sin^{2m}(t-\sigma/2))$$

dobijamo, posle jednostavnih transformacija u kojima se koriste formule $2\cos^2\alpha=1+\cos2\alpha$ i $2\sin^2\alpha=1-\cos2\alpha$, sledeću vezu između Ψ_n i Ψ_{n+1}:

$$(++)\qquad \Psi_{n+1}(t,m)=2^{1-m}\sum_{k\ge0}\binom{m}{2k}\Psi_n(2t,k).$$

Kako je $\cos^{2m}t=\Psi_0(t,m)\le\Psi_0(0,m)$, to iz (++) dobijamo, indukcijom po n,

$$(+++)\qquad \Psi_n(t,m)\le\Psi_n(0,m).$$

Na kraju, koristimo činjenicu da je $\binom{p/2}{2m}<0$ za $m\ge1$, koja zajedno sa (+) i (+++) daje traženi rezultat: $\phi(t)\ge\phi(0)=F(|x|,1)$. ⊠

Dokaz teoreme. Neka je $1\le p<2$, $n\in\mathbb{N}$ i neka su E i F funkcije definisane u formulacijama lema 6 i 7. Ako $x,y\in L^p$, onda je

$$\begin{aligned}\sum_{\lambda\in T_n}\|x+\lambda y\|^p&=\int F(x(s),y(s))\,ds\ \ge\ \int F(|x(s)|,|y(s)|)\,ds\\&=\int E(|x(s)|^p,|y(s)|^p)\,ds\ \ge\ E\Big(\int|x(s)|^p,\int|y(s)|^p\Big)\\&=E(\|x\|^p,\|y\|^p)=\sum_{\lambda\in T_n}|\,\|x\|+\lambda\|y\|\,|^p.\end{aligned}$$

U drugom koraku je korišćena lema 7 a u četvrtom - lema 6 i Jensenova nejednakost.

4. Slučaj $0<p<1$

Iako u prostoru $L^p(0,1)$, $0<p<1$, nema netrivijalnih konveksnih tela[10], on je ravnomerno c-konveksan. To je poseban slučaj sledeće teoreme.

Teorema 5. Ako je $0<p<1$, onda je

$$\hat{\delta}_c(L^p;\varepsilon) = \left(\int_0^{2\pi} |1+\varepsilon e^{it}|^p\, dt/2\pi\right)^{1/p} - 1, \quad \varepsilon \geq 0. \tag{1}$$

Osim toga, ako je kvazinormirani prostor X izomorfan L^p i $\operatorname{ind}(X) \geq p$, tada je

$$\hat{\delta}_c(X;\varepsilon) \leq \hat{\delta}_c(L^p;\varepsilon) \quad \text{za svako } \varepsilon \geq 0. \tag{2}$$

Dokaz prve jednakosti zasnovan je na sledećoj lemi.

Lema 8. Ako je $0<p<1$, onda je funkcija

$$f(\xi,\eta) := \int_0^{2\pi} |\xi^{1/p} + \eta^{1/p} \cdot e^{it}|^p\, dt, \qquad (\xi,\eta) \in \mathbb{R}_+^2,$$

sublinearna.

Dokaz. Kako je f homogena, dovoljno je dokazati da je funkcija $g(\xi) := f(\xi,1)$, $\xi>0$, konveksna. Primenom Fubinijeve teoreme dobijamo jednakost

$$g(\xi^p) - 2\pi = \int_0^{\xi} ds \int_0^{2\pi} p(s+\cos t)\,|s+e^{it}|^{p-2}\, dt, \quad \xi > 0.$$

Zatim pomoću Lebesgueove teoreme o dominantnoj konvergenciji zaključujemo da je funkcija

$$s \mapsto \int_0^{2\pi} p(s+\cos t)\,|s+e^{it}|^{p-2}\, dt, \quad s>0,$$

neprekidna. Oba zaključka su laka posledica nejednakosti

$$|s+\cos t|\cdot|s+e^{it}|^{p-2} \leq |s+\cos t|^{p-1}.$$

Dakle, funkcija g je diferencijabilna i zato je dovoljno dokazati njenu konveksnost na intervalima $[0,1]$ i $]1,\infty[$.

Ako je $0<\xi\leq 1$, primenjujemo Parsevalovu formulu na funkciju $t \mapsto (1+\xi^{1/p} e^{it})^{p/2}$ i dobijamo

$$g(\xi)/2\pi = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{p/2}{n}^2 \xi^{2n/p}.$$

To pokazuje da je g na intervalu $[0,1]$ jednaka zbiru konveksnih funkcija, pa je i sama konveksna na $[0,1]$. Ako je $\xi>1$, tada je $g(\xi) = \xi g(1/\xi)$ i zato $g''(\xi) = g''(1/\xi)/\xi^3$. To znači, prema upravo dobijenom rezultatu, da je $g''(\xi) \geq 0$. ⊠

Dokaz jednakosti (1). Primenjujemo postupak dokazivanja teoreme 3 uz korišćenje jednakosti

$$\int_0^{2\pi}|x(s)+e^{it}y(s)|^p\,dt=\int_0^{2\pi}||x(s)|+e^{it}|y(s)||^p\,dt$$

umesto leme 7. Tako dobijamo nejednakost

$$\int_0^{2\pi}\|x+e^{it}y\|^p\,dt\ge\int_0^{2\pi}|\|x\|+e^{it}\|y\||^p\,dt,\quad x,y\in L^p.$$

Odatle sledi deo " $\hat{\delta}_c\ge$ " jednakosti (1).

Suprotnu nejednakost dovoljno je dokazati u slučaju $L^p=\ell^p$. Za dato $\varepsilon>0$ i pozitivan ceo broj n definišimo $x=(\xi_k)$ i $y=(\eta_k)$ iz ℓ^p na sledeći način: $\xi_k=n^{-1/p}$, $1\le k\le n$; $\xi_k=0$, $k\ge n$; $\eta_k=\varepsilon\xi_k e^{2k\pi i/n}$. Stavimo $m_k=\max\{|1+\varepsilon e^{it}|^p\colon (2k-2)\pi/n\le t\le 2k\pi/n\}$. Tada je

$$\|x+\lambda y\|^p\le n^{-1}\sum_{k=1}^n m_k\quad\text{za svako }\lambda\in\mathbb{D}.$$

Kako je $\|x\|=1$ i $\|y\|=\varepsilon$, dobijamo nejednakost

$$(1+\hat{\delta}_c(\ell^p;\varepsilon))^p\le n^{-1}\sum_{k=1}^n m_k.$$

Izraz na desnoj strani predstavlja integralnu sumu funkcije $t\mapsto|1+\varepsilon e^{it}|^p/2\pi$ na intervalu $[0,2\pi]$, što povlači nejednakost "$\hat{\delta}_c\le$".

Nejednakost (2) se dokazuje na osnovu proširenja Jamesove teoreme koja je korišćena u dokazu teoreme 1, i to isto kao teorema 1.

Propozicija 1. Neka je X kvazinormiran prostor, $\operatorname{ind}(X)\ge p>0$ i $\theta>1$. Ako je X izomorfan prostoru ℓ^p, onda postoji potprostor $Y\subset X$ i linearan operator $U\colon\ell^p\to Y$ koji zadovoljava uslov

$$\|x\|\le\|Ux\|\le\theta\|x\|,\qquad x\in\ell^p.$$

Dokaz. Služimo se istim postupkom kojim se dokazuje Jamesova teorema [57: str. 97]. Označimo sa $|\cdot|$ normu u ℓ^p koju daje izomorfizam prostora X i ℓ^p. Pretpostavimo da je, za neko $\alpha>0$,

$$\alpha|x|\le\|x\|\le|x|.$$

Neka je, dalje, X_n skup onih $x\in\ell^p$ koji se za neko $m\ge n$ mogu predstaviti u obliku

$$x=\sum_{j=n}^m\eta_j e_j,$$

gde je $(e_j\colon j\ge1)$ kanonski bazis prostora ℓ^p, $\{\eta_k\}\subset\mathbb{C}$. Kako je $X_{n+1}\subset X_n$, niz

$$\beta_n:=\sup\{\|x\|\colon x\in X_n,\ |x|=1\}$$

opada i teži nekom γ, $\alpha\le\gamma\le1$. Izaberimo n_0 tako da je $\beta_{n_0}<\gamma\sqrt{\theta}$. Tada postoji $n_1>n_0$ takav da $y_1:=\sum_{j\in B_1}\eta_j e_j$, za neki izbor η_j, zadovoljava uslove $|y_1|=1$ i $\|y_1\|>\gamma/\sqrt{\theta}$; ovde je $B_1=\{j\colon n_0<j\le n_1\}$. Rasuđujući tako, nalazimo niz $y_k=\sum_{j\in B_k}\eta_j e_j$, $B_k=\{j\colon n_{k-1}<j\le n_k\}$, takav da je $|y_k|=1$ i $\|y_k\|>\gamma/\sqrt{\theta}$ za svako $k\ge1$. Tada imamo, za svaki niz skalara $(\xi_k\colon k\ge1)$,

$$|\sum_{k=1}^{\infty} \xi_k y_k| \geq \beta_{n_o}^{-1} \|\sum_{k=1}^{\infty} \xi_k y_k\| = \beta_{n_o}^{-1}(\sum_{k=1}^{\infty}|\xi_k|^p \|y_k\|^p)^{1/p}$$

$$\geq (\gamma\sqrt{\theta})^{-1}(\gamma/\sqrt{\theta}) \,(\sum_{k=1}^{\infty}|\xi_k|^p)^{1/p} = \theta^{-1}(\sum_{k=1}^{\infty}|\xi_k|^p)^{1/p}.$$

S druge strane, iz toga što je $\mathrm{ind}(X)\geq p$ i $|y_k|=1$, dobijamo

$$|\sum_{k=1}^{\infty} \xi_k y_k| \leq (\sum_{k=1}^{\infty}|\xi_k y_k|^p)^{1/p} = (\sum_{k=1}^{\infty}|\xi_k|^p)^{1/p}.$$

Iz dobijenih nejednakosti lako se dolazi do traženog tvrđenja. ⊠

Činjenica da je L^p, $0<p<1$, ravnomerno c-konveksan sledi iz nejednakosti

$$\hat{\delta}_c(L^p;\varepsilon) \geq p\varepsilon^2/4, \qquad 0\leq\varepsilon\leq 1,$$

koja se dobija iz jednakosti (1) primenom Parsevalove formule.

5. Primedbe i primeri

Slučaj $p\geq 2$ nije posebno razmatran jer se tada moduli mogu izračunati na osnovu jednakosti

$$\delta_c^o(L^p;\varepsilon) = 1-(1-\varepsilon^p)^{1/p},$$

koju je dokazao J. A. Clarkson [8]. Naime, ako su x, y elementi kanonskog bazisa prostora ℓ^p, onda je $\|x+\lambda y\|^p = \|x\|^p + \|\lambda y\|^p$ za $\lambda \in \mathbb{C}$. Iz toga je lako izvesti nejednakost $\delta_c(L^p;\varepsilon) \leq \delta_c^o(L^p;\varepsilon)$. Kako suprotna važi u svakom slučaju, vidimo da je

$$\delta_c(L^p;\varepsilon) = \delta_c^n(L^p;\varepsilon) = 1-(1-\varepsilon^p)^{1/p} \qquad (p\geq 2,\ 0\leq\varepsilon\leq 1).$$

Odavde sledi da je funkcija $\delta_c(L^p;\cdot)$ konveksna ako je $p\geq 2$. To je tačno i u slučaju $0<p<2$, ali je manje očigledno. Relativno lako se dokazuje da je funkcija $\hat{\delta}_c(L^p;\cdot)$ konveksna pa se na osnovu toga i jednakosti (I.2.6) može ustanoviti konveksnost funkcije δ_c. U vezi s tim napominjem da je V. I. Liokumovič našao primer dvodimenzionalnog realnog prostora sa nekonveksnim modulom konveksnosti [60].

U slučaju $p\geq 1$ navedene vrednosti Clarksonovog modula mogu se iskoristiti da se konkretizuju neki rezultati iz prve glave kao, na primer, teorema I.2, propozicija I.6 i teorema I.4. Dajemo jedan primer u vezi sa teoremom I.4.

Primer 1. Razmotrimo niz analitičkih funkcija $f_n: \mathbb{D}\to\mathbb{C}$ $(n\geq 1)$ koje zadovoljavaju uslov

$$\sum_{n=1}^{\infty}|f_n(\zeta)| \leq 1, \qquad \zeta\in\mathbb{D}.$$

Neka je $(e_k: k\geq 1)$ kanonski bazis prostora ℓ^1. Tada su funkcije $\sum_{k=1}^{n} f_k e_k: \mathbb{D}\to\ell^1$ analitičke. Primenjujući na njih teoremu I.4 i i jednakost (1.10), dobijamo dve nejednakosti:

$$(1-\varepsilon|\zeta|)\sum_{n=1}^{\infty}|f_n(\zeta)-f_n(0)| \le 2|\zeta|(1+\varepsilon)(1-\varepsilon)^{1/2},$$

$$(1-\varepsilon|\zeta|)\sum_{n=1}^{\infty}|f_n(\zeta)-f_n(0)| \le |\zeta|(1+\varepsilon)(1-\varepsilon^2/4),$$

gde je $\varepsilon=\sum_{n=1}^{\infty}|f_n(0)|$. Iz prve nejednakosti sledi rezultat E. Thorpa i R. Whitleya: Ako je $\varepsilon=1$, onda su sve funkcije f_n konstantne.

Slične procene se mogu dobiti iz teoreme I.4 i nejednakosti (2.7).

Primer 2. Prostor $BV[0,2\pi]$

Funkcija $x:[0,2\pi]\to\mathbb{C}$ pripada prostoru $BV[0,2\pi]$ ako je ograničene varijacije, neprekidna zdesna i zadovoljava uslov $x(0)=0$. Norma se uvodi jednakošću $\|x\|=\mathrm{var}\,(x(t):\ 0\le t\le 2\pi)$.

Pomoću Kakutanijeve teoreme o reprezentaciji L-prostora [58: teorema 1.b.2] može se dokazati da svi rezultati iz tač. 1 ostaju tačni ako se L^1 zameni sa $BV[0,2\pi]$. Postoji, međutim, jedan jasniji i interesantniji način da se to učini.

R. Lesniewicz [52 III: str. 282] je dokazao da je $BV[0,2\pi]$ izometričan prostoru $\mathbb{h}^1$, koji se sastoji od harmonijskih funkcija $f:\mathbb{D}\to\mathbb{C}$ sa osobinom

$$(+)\qquad \|f\|:=\sup\{M_1(r,f):\ 0<r<1\}<\infty,$$

gde je

$$M_1(r,f)=\int_0^{2\pi}|f(re^{it})|\,dt/2\pi,\quad 0<r<1.$$

Izometrija se ostvaruje Poisson-Stieltjesovim integralom, tj. preslikavanjem $x\mapsto f$, $x\in BV[0,2\pi]$, gde je

$$f(re^{it})=(2\pi)^{-1}\int_0^{2\pi}(1-r^2)(1-2r\cos(t-s)+r^2)^{-1}\,dx(s).$$

Mogućnost da se, na primer, lema 3 prenese na prostor $\mathbb{h}^1$ leži u činjenici da funkcija $M_1(r,f)$ raste po r. Imajući to u vidu, dovoljno je konstatovati da se u jednakosti (1.9) norma može zameniti sa $M_1(r,\cdot)$. Na sličan način se prenose i ostala tvrđenja iz tačke 1.

Primer 3. Prostor $H(p,\varphi)$, $0<p\le 1$

Neka je $\varphi:[0,1]\to[0,\infty[$ strogo rastuća funkcija; neka postoje pozitivni brojevi b, c takvi da je

$$t^c\varphi(r)\le\varphi(tr)\le t^b\varphi(r),\quad 0\le r,t\le 1.$$

Prostor $H(p,\varphi)$ čine analitičke funkcije $f:\mathbb{D}\to\mathbb{C}$ koje zadovoljavaju uslov

$$\|f\|^p:=\int_0^1\varphi(1-r)^p\,M_p(r,f)^p\,dr/(1-r)<\infty,$$

gde je

$$M_p(r,f) = \left(\int_0^{2\pi} |f(re^{it})|^p \, dt/2\pi\right)^{1/p}, \quad 0<r<1.$$

Prostor $H(1,\varphi) = \mathbb{B}(\varphi)$ uveli su A. L. Shields i D. L. Williams [93, 94]. U četvrtoj glavi prostor $\mathbb{B}(\varphi)$ biće razmatran u vezi sa Banachovom obvojnicom Hardy-Orliczevih prostora.

Neka je $f(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n \zeta^{2^n}$. Tada je

$$M_p(r,f) \geq K \left(\sum_{n=0}^{\infty} |\gamma_n|^2 r^{2^{n+1}}\right)^{1/2},$$

gde je K pozitivna konstanta koja zavisi samo od p [111 I: str. 215]. Važi i nejednakost

$$M_p(r,f) \leq \sum_{n=0}^{\infty} |\gamma_n| r^{2^n}.$$

Kombinujući ove procene sa rezultatima iz [66], dobijamo

$$K^{-1}\|f\| \leq \left(\sum_{n=0}^{\infty} |\varphi(2^{-n})\gamma_n|^p\right)^{1/p} \leq K\|f\|.$$

Dakle, $H(p,\varphi)$ sadrži potprostor koji je izomorfan sa ℓ^p. Iz toga sledi, primenom teorema 1 i 5,

$$\hat{\delta}_c(H(p,\varphi);\varepsilon) \leq \hat{\delta}_c(L^p;\varepsilon) \quad (p \leq 1).$$

S druge strane, jasno je da $L^p(\mathbb{D})$ sadrži izometričnu kopiju prostora $H(p,\varphi)$ i zato je

$$\hat{\delta}_c(H(p,\varphi);\varepsilon) = \hat{\delta}_c(L^p;\varepsilon) \quad (p \leq 1).$$

<u>Primer 4</u>. Iz teoreme 5 sledi dobro poznata činjenica da prostori L^p i L^q nisu izomorfni ako je $p \neq q$ i $p,q \in]0,1]$. Naime, u protivnom bi bilo (prema drugom delu teoreme 5) $\hat{\delta}_c(L^p;\varepsilon) = \hat{\delta}_c(L^q;\varepsilon)$, što važi samo kad je $p=q$. U stvari, ako je $0<p<q\leq 2$, onda je

$$\hat{\delta}_c(L^p;\varepsilon) < \hat{\delta}_c(L^q;\varepsilon) < \hat{\delta}_c(L^p;\sqrt{q/p}\,\varepsilon), \quad \varepsilon>0.$$

<u>Primedba</u>. Drugi deo teoreme 1 može se uopštiti tako da X bude bilo koji normiran prostor koji nije B-konveksan. Pojam B-konveksnosti uveo je A. Beck [5] u vezi sa zakonom velikih brojeva. D. Giesy [24] je dokazao sledeću karakterizaciju, iz koje se lako izvodi pomenuto uopštenje. Prostor X nije B-konveksan ako i samo ako za svako $n\geq 2$ i $\varepsilon>0$ postoje $x_1,\dots,x_n \in S_X$ (=jedinična sfera) takvi da je za sve $\lambda_1,\dots,\lambda_n \in \mathbb{C}$:

$$(1-\varepsilon)\sum_{k=1}^{n}|\lambda_k| \leq \left\|\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k\right\| \leq \sum_{k=1}^{n}|\lambda_k|.$$

Glava III

RAVNOMERNA c-KONVEKSNOST ORLICZEVIH PROSTORA

1. Definicija Orliczevih prostora

Funkciju M nazivamo Orliczevom ako su ispunjeni ovi uslovi: (i) M je definisana i nenegativna na $[0,\infty[$, (ii) $M(0)=0$ i $M(t) > 0$ za $t>0$, (iii) postoji pozitivan broj p takav da je

(1) funkcija $P(t):=M(t^{1/p})$ konveksna.

Neka je (S,ν) prostor sa pozitivnom merom ν. Orliczev prostor $L_M = L_M(\nu) = L_M(S,\nu)$ čine merljive funkcije $x: S \to C$ sa osobinom

(2) $$\int_S M(|x(s)|/\varrho)\nu(ds) < \infty \quad \text{za neko } \varrho>0.$$

Kvazinorma se uvodi jednakošću

$$\|x\|=\|x\|_M = \inf\{\varrho>0: \int_S M(|x(s)|/\varrho)\nu(ds) \le 1, \quad x\in L_M.$$

Iz jednakosti $\|x\|_M^p = \| |x|^p\|_p$ i činjenice da je $\|\cdot\|_p$ norma [49] sledi da je $\operatorname{ind}(L_M) \ge \min(1,p)$.

Ako u (2) umesto "neko" napišemo "svako", dobićemo definiciju prostora $E_M = E_M(\nu)$. Poznato je [49] da je

(3) $$\int_S M(|x(s)|/\|x\|)\nu(ds) = 1 \quad \text{ako } x \in E_M, \ x\ne 0.$$

Da bi L_M i E_M bili jednaki, dovoljno je da M zadovoljava uslov Δ_2:

$$\sup\{M(2t)/M(t): t>0\} < \infty.$$

Odgovarajuću klasu označavamo sa (Δ_2). Poznato je da $M\in(\Delta_2)$ ako i samo ako postoji $q\in]0,\infty[$ takvo da je

(4) $$M(rt) \le r^q M(t), \quad r\ge 1, \quad t\ge 0.$$

Klasu funkcija koje zadovoljavaju uslove (1) i (4) označavamo sa $\bar{\Delta}(p,q)$. Funkcija $M(t)=t^p$ pripada klasi $\bar{\Delta}(p,p)$ a odgovarajući Orliczev prostor jednak je L^p (uključujući i jednakost kvazinormi).

U vezi sa nekim geometrijskim svojstvima prostora L_M pojavljuje se funkcija F_M koja se definiše jednakostima $F_M(0)=0$ i

(5) $$F_M(\varepsilon) = \varepsilon^2 \inf\{v^2 M(t)/M(vt): 1\le v\le 1/\varepsilon, \ t>0\}, \quad 0<\varepsilon\le 1.$$

Očigledno je $F_M(1)=1$ a da bi bilo $F_M(\varepsilon)>0$ za $\varepsilon>0$, neophodno je i dovoljno da $M\in(\Delta_2)$. Lako se dokazuje da je

$$F_M(\varepsilon) = \varepsilon^r \text{ ako je } M(t)=t^q, \ r=\max(2,q).$$

2. Procena modula c-konveksnosti

Uslovi pod kojima je prostor L_M ravnomerno konveksan prilično su komplikovani. Da bi, na primer, $L_M(0,\infty)$ bio ravnomerno konveksan, neophodno je i dovoljno da $M \in (\Delta_2)$ i da je M ravnomerno konveksna [47: teorema 3]. (Ravnomerna konveksnost je pojačanje konveksnosti i označava postojanje funkcije $\varphi:]0,1[\to]0,1[$ takve da je $M((t+bt)/2)/(1-\varphi(b)) \le (M(t)+M(bt))/2$ za sve $b \in]0,1[$ i $t>0$.) Za razliku od toga, ravnomerna c-konveksnost sledi već iz uslova Δ_2.

Teorema 1. Ako Orliczeva funkcija M zadovoljava uslov Δ_2, onda je prostor L_M ravnomerno c-konveksan. Važi nejednakost

(1) $$\delta_c(L_M;\varepsilon) \ge K F_M(\varepsilon), \qquad 0 \le \varepsilon \le 1,$$

gde je K pozitivna konstanta koja ne zavisi od ε.

Ovu teoremu valja uporediti sa rezultatom S. L. Trojanskog i R. P. Malejeva [63: teorema 1]:

Teorema (MT). Neka su M i $M^*(t) := \sup\{tu - M(u) : u \ge 0\}$ Orliczeve funkcije koje zadovoljavaju uslov Δ_2. Tada postoji Orliczeva funkcija N koja je ekvivalentna sa M i takva da je

$$\delta_c^o(L_N;\varepsilon) \ge K F_M(\varepsilon), \qquad 0 \le \varepsilon \le 1.$$

Napominjemo da su funkcije M i N ekvivalentne ako postoje pozitivni brojevi c, d takvi da je

$$dM(ct) \ge N(t) \ge M(t/c)/d \quad \text{za svako } t>0.$$

Prelaskom na ekvivalentnu funkciju nejednakost (1) ne može pretrpeti bitne promene. U stvari, može se oslabiti samo konstanta K. S druge strane, prostor L^2 je ravnomerno konveksan, a $L_N(0,1)$, gde je $N(t) = \max(t^2, 3t-2)$, nije ni strogo konveksan [105] iako je funkcija N ekvivalentna sa kvadratnom.

Teorema 1 sledi neposredno iz sledećeg, nešto jačeg rezultata.

Teorema 2. Neka $M \in \overline{\Delta}(p,q)$, $0<p\le 1\le q<\infty$, $x, y \in L_M(\nu)$ i

$$0 \ne J := \left(\int_0^{2\pi} \|x+e^{it}y\|^p \, dt/2\pi\right)^{1/p}.$$

Tada je

(2) $$J - \|x\| \ge K F_M(\|y\|/J)\, J,$$

gde je K pozitivna konstanta koja zavisi samo od p i q.

Radi dokaza biće nam potrebno nekoliko lema.

Lema 1. Neka je $0<p\le 1$, $x, y \in \mathbb{C}$ i $0 \ne w = \left(\int_0^{2\pi} |x+e^{it}y|^p \, dt/2\pi\right)^{1/p}$. Tada je $|x| \le (1-p|y|^2/4w^2)\, w$.

Dokaz. 1° $|y| \le |x|$. Primenom Parsevalove formule na funkciju $t \mapsto (1+ye^{it}/x)^{p/2}$ dobijamo $w \ge |x|(1+p^2|y|^2/4|x|^2)^{1/p}$. Kako je $1 \le 1/p$, to je $w \ge |x|(1+p|y|^2/4|x|^2)$, tj. $w \ge |x| + p|y|^2/4|x| \ge |x| + p|y|^2/4w$ (jer je $|x| \le w$).

2° $|x| < |y|$. Imamo, prema prethodnom, $w \ge |y| + p|x|^2/4|y|$. Zato je

$w-|x| \geq |y|-|x|+p|x|^2/4|y| \geq p(|y|-|x|+|x|^2/4|y|) = p(2|y|-|x|)^2/4|y| \geq p|y|/4$
$\geq p|y|^2/4w$. ⊠

Lema 2. Neka su p, x, y, w kao u lemi 1. Ako je funkcija $M(t^{1/p})$ konveksna, onda je

$$M(w) - M(|x|) \geq p^2|y|^2M(w)/4w^2.$$

Dokaz. Neka je $v = 1-p|y|^2/4w^2$. Kako je $0 \leq v \leq 1$, to je $M(vt) \leq v^pM(t)$ za svako $t \geq 0$. S obzirom na to i lemu 1 imamo

$$M(|x|) \leq v^pM(w) \leq (1-p^2|y|^2/4w^2)\, M(w). \ ⊠$$

Lema 3. Neka je M Orliczeva funkcija. Tada je (sa prethodnim oznakama)

$$|y|^2M(w)/w^2 \geq F_M(d)(M(|y|/d) - M(w)), \qquad 0 < d \leq 1.$$

Dokaz. Nejednakost je trivijalna ako je $|y|/d \leq w$, jer je tada $M(|y|/d)-M(w) \leq 0$. Neka je $|y|/d > w$. Stavimo $v = |y|/wd$, $t = w$. Tada je $1 \leq v \leq 1/d$ i, po definiciji funkcije F_M,

$$F_M(d) \leq d^2v^2M(t)/M(vt) = |y|^2M(w)/w^2M(|y|/d). \ ⊠$$

Lema 4. Neka je $0 < p \leq 1 \leq q < \infty$, $r = \max(2,q)$, $M \in \overline{\Delta}(p,q)$ i $0 < \varepsilon, \theta < 1$. Tada je (i) $M(\theta t) \geq \theta^qM(t)$, (ii) $F_M(\theta\varepsilon) \leq \theta^2F_M(\varepsilon)$ i (iii) $F_M(\theta\varepsilon) \geq \theta^rF_M(\varepsilon)$.

Dokaz. Prva nejednakost sledi iz (1.4). Da bismo dokazali druge dve, koristimo se jednakošću $F_M(\theta\varepsilon) = \min(b,c)$, gde je

$$b = \varepsilon^2 \inf\{v^2M(\theta t)/M(vt):\ 1 \leq v \leq 1/\varepsilon,\ t > 0\},$$
$$c = \varepsilon^2\theta^2 \inf\{v^2M(t)/M(vt):\ 1 \leq v \leq 1/\theta,\ t > 0\}.$$

Očigledno je $c = \varepsilon^2F_M(\theta)$ i zato je $F_M(\theta\varepsilon) \leq \varepsilon^2F_M(\theta)$; time je dokazana nejednakost (ii). Iz (i) dobijamo dve nejednakosti: $b \geq \theta^qF_M(\varepsilon)$ i $F_M(\theta) \geq \theta^r$. Kako je $\varepsilon^2 \geq F_M(\varepsilon)$, to je $c = \varepsilon^2F_M(\theta) \geq F_M(\varepsilon)\theta^r$ i, dakle, $\min(b,c) \geq \theta^rF_M(\varepsilon)$. ⊠

Lema 5. Neka su p, M, x, y, J kao u teoremi 2 i $w(s) = (\int_0^{2\pi} |x(s)+e^{it}y(s)|^p\, dt/2\pi)^{1/p}$. Tada je $J \geq \|w\|$.

Dokaz. Neka je $N(t) = M(t^{1/p})$. Kako je $\|\cdot\|_N$ norma i $\|w\|^p = \|w^p\|_N$, imamo

$$\|w\|^p \leq \int_0^{2\pi} \||x+e^{it}y|^p\|_N\, dt/2\pi = J^p. \ ⊠$$

Dokaz teoreme 2. Dokazaćemo nejednakost

$$\|w\|-\|x\| \geq K\, F_M(\|y\|/\|w\|)\, \|w\|, \tag{3}$$

pri čemu je $w(s)$ kao u lemi 5. Tada će biti $J - \|x\| \geq \|w\|-\|x\| \geq$

$K F_M(\|y\|/\|w\|)\,\|w\| \geq K F_M(\|y\|/J)\,J$, pri čemu smo se koristili kvazi-konveksnošću funkcije F_M (lema 4(ii)) i lemom 5. Dakle, nejednakost (2) sledi iz (3).

Da bismo dokazali (3), možemo uzeti da je $\|w\| = 1$. Tada je, na osnovu lema 2 i 3,

$$M(w(s)) - M(|x(s)|) \geq 4^{-1}p^2 F_M(d)(M(|y(s)|/d) - M(w(s)))$$

za sve $s \in S$, $d \in]0,1]$. Ako stavimo $d = \|y\|/2^{1/p}$ i integralimo po s, dobićemo, uz korišćenje nejednakosti $M(2^{1/p}t) \geq 2M(t)$ i jednakosti (1.3),

$$1 - \int_S M(|x(s)|)\,\nu(ds) \geq 4^{-1}p^2 F_M(2^{-1/p}\|y\|).$$

S obzirom da je $\|x\| \leq \|w\| = 1$, iz (1.3) i leme 4(i) dobijamo nejedna-

$$\|x\|^q \leq \int_S M(|x(s)|)\,\nu(ds),$$

što sa prethodnim rezultatom daje

$$q(1-\|x\|) \geq 1-\|x\|^q \geq 4^{-1}p^2 F_M(2^{-1/p}\|y\|) \geq K F_M(\|y\|),$$

gde je $K = p^2 2^{-r/p}/4$. Na kraju je korišćena lema 4(iii). Teorema je dokazana. ⊠

Primenom lema 2 i 5 može se dokazati da je prostor $E_M(\nu)$ strogo c-konveksan nezavisno od svojstava funkcije M pa, dakle, i kad M ne zadovoljava uslov Δ_2. S druge strane, ako $M \notin (\Delta_2)$, onda se na standardan način [49: str. 92; 57: str. 138-139] može dokazati da $E_M(0,\infty)$ sadrži izomorfnu kopiju prostora c_0. Iz toga sledi da u prostoru $E_M(0,\infty)$ postoje bezuslovno konvergentni redovi sa proizvoljno sporo opadajućim članovima i, prema teoremi I.5, on nije izomorfan nijednom ravnomerno c-konveksnom prostoru.

3. Prostori sa mešovitim normama

Neka su (S,ν) i (Ω,τ) prostori sa pozitivnim σ-konačnim merama i M,Φ - Orliczeve funkcije koje zadovoljavaju uslov Δ_2. Prostor $L_{M,\Phi} = L_{M,\Phi}(\nu\times\tau)$ čine merljive funkcije $f: S\times\Omega \to C$ koje imaju sledeća svojstva:

(i) Za svako $\omega\in\Omega$ funkcija $f_\omega(s) := f(s,\omega)$, $s\in S$, pripada prostoru $L_M(\nu)$.

(ii) Funkcija $x(\omega) := \|f_\omega\|_M$, $\omega\in\Omega$, pripada prostoru $L_\Phi(\tau)$.

U slučaju kad su M i Φ konveksne funkcije prostor $L_{M,\Phi}$ uveo je, na nešto drukčiji način, A. C. Zaanen [109: str. 473]. Sledeća propozicija pokazuje da je $L_{M,\Phi}$ linearan prostor. (Linearnost nije uključena u definiciju prostora.)

Propozicija 1. Ako $f, g \in L_{M,\Phi}$, onda $f+g \in L_{M,\Phi}$.

Dokaz. Kako je $\|f_w+g_w\|_M \leq K(\|f_w\|_M+\|g_w\|_M)$, dovoljno je dokazati da je funkcija $z(w):=\|f_w+g_w\|_M$ merljiva, što se svodi na dokaz merljivosti skupa $\Omega_\alpha=\{w\in\Omega:\ z(w)>\alpha\}$, $\alpha>0$. Iz definicije norme u L_M i uslova Δ_2 sledi da je $\Omega_\alpha=\{w\in\Omega:\ G(w,\alpha)>1\}$, gde je

$$G(w,\alpha)=\int_S M(|f(s,w)+g(s,w)|/\alpha)\ \nu(ds).$$

Ovde je podintegralna funkcija merljiva na $S\times\Omega$, jer su takve i funkcije f, g. To znači da je funkcija $w\mapsto G(w,\alpha)$ merljiva na Ω, iz čega i sledi merljivost skupa Ω_α. ∎

Ako $f\in L_{M,\Phi}$ i $x(w)=\|f_w\|_M$, $w\in\Omega$, onda ćemo pisati

$$\|f\|=\|f\|_{M,\Phi}=\|x\|_\Phi .$$

Lako se dokazuje da je ovom jednakošću definisana kvazinorma u prostoru $L_{M,\Phi}$ (uz uobičajenu identifikaciju funkcija koje se razlikuju samo na skupu mere nula). Posebno, ako je $M(t)=t^p$, $\Phi(t)=t^q$, $0<p,q<\infty$, onda je $L_{M,\Phi}=L^{p,q}$ i $\|f\|_{M,\Phi}=(\int_\Omega\|f_w\|_p^q\ \tau(dw))^{1/q}=:\|f\|_{p,q}$.

Neka geometrijska svojstva prostora $L^{p,q}$, posebno ravnomernu konveksnost, proučavali su E. J. McShane [90] i A. Benedeck i R. Panzone [4]. Oni su dokazali da je $L^{p,q}$ ravnomerno konveksan ako je $1<p,q<\infty$. Iz rezultata koji se dokazuju u ovoj tački sledi da je $L^{p,q}$ ravnomerno c-konveksan ako je $0<p,q<\infty$.

Da bismo ocenili modul $\delta_c(L_{M,\Phi};\cdot)$, uvodimo funkciju $F_{M,\Phi}$ na sledeći način: $F_{M,\Phi}(0)=0$,

$$F_{M,\Phi}(\varepsilon)=\inf\{F_M(v\varepsilon)\Phi(t)/\Phi(vt):\ 1\leq v\leq 1/\varepsilon,\ \ t>0\},\qquad 0<\varepsilon\leq 1.$$

<u>Teorema 3</u>. Neka su M i Φ Orliczeve funkcije klase (Δ_2). Tada je prostor $L_{M,\Phi}$ ravnomerno c-konveksan i važi nejednakost

$$\delta_c(L_{M,\Phi};\varepsilon)\geq K F_{M,\Phi}(\varepsilon),\qquad 0\leq\varepsilon\leq 1, \tag{1}$$

gde je K pozitivna konstanta koja zavisi samo od M i Φ.

Dokaz. Izaberimo p i q tako da je $0<p\leq 1\leq q<\infty$ i $M,\Phi\in\overline{\Delta}(p,q)$. Neka je $0<\varepsilon<1$, $f,g\in L_{M,\Phi}$, $\|g\|=\varepsilon$ i $\|f+\lambda g\|\leq 1$ za sve $\lambda\in T$. Tada je $\|J\|_\Phi\leq 1$, gde je

$$J(w)^p=(2\pi)^{-1}\int_0^{2\pi}\|f_w+e^{it}g_w\|_M^p\,dt,\qquad w\in\Omega .$$

Neka je $x(w)=\|f_w\|_M$, $y(w)=\|g_w\|_M$. Prema teoremi 2, imamo

$$J(w)-x(w)\geq K F_M(y(w)/J(w))\,J(w),\quad w\in\Omega .$$

(Tokom dokaza K označava pozitivnu konstantu koja zavisi samo od p, q i nije ista u svim pojavljivanjima.) Odavde dolazimo do nejednakosti

$$\Phi(J(w)) - \Phi(x(w)) \geq K F_M(y(w)/J(w))\,\Phi(J(w))$$
$$\geq K F_{M,\Phi}(d)(\Phi(y(w)/d) - \Phi(J(w))),$$

gde je $d = 2^{-1/p}\|y\|_\Phi$. (Pogledati dokaze lema 2 i 3.) Integraleći ovu nejednakost i rasuđujući kao pri dokazivanju teoreme 2, dobijamo
$$1-\|f\| = 1 - \|x\|_\Phi \geq K F_{M,\Phi}(\varepsilon).$$
Ovim je dokazana nejednakost (1). Prostor $L_{M,\Phi}$ je ravnomerno c-konveksan jer je $F_{M,\Phi}(\varepsilon) > 0$ pri $0<\varepsilon<1$. ⊠

Posledica 1. Neka je $0<p,q<\infty$. Tada je $\delta_c(L^{p,q};\varepsilon) \geq K\varepsilon^r$, gde je $r = \max(2,p,q)$.

4. Kotip Orliczevih prostora

Neka je F nenegativna funkcija na intervalu $[0,b[$, $b>0$. Kaže se da je kvazinormirani prostor X kotipa F ako postoje $c \in]0,b[$ i $K<\infty$ takvi da iz uslova
$$\int_0^1 \left\|\sum_{k=1}^n \varphi_k(t)\, x_k\right\| dt \leq c, \quad x_1,\ldots,x_n \in X, \quad n\geq 1,$$
sledi
$$\sum_{k=1}^n F(\|x_k\|) \leq K.$$
Ovde φ_k označava k-tu Rademacherovu funkciju: $\varphi_k(t) = \operatorname{sign}\sin(2^k\pi t)$.

Navedena definicija kotipa uzeta je iz [20].

Neke informacije o kotipu normiranih Orliczevih prostora moguće je dobiti primenom teoreme (MT) (tač. 2) i sledećeg rezultata T. Figiela i G. Pisiera [20].

Teorema (FP). Normiran prostor X je kotipa $\delta_c^o(X;\cdot)$.

Kako su izomorfni prostori istog kotipa, teoreme (MT) i (FP) daju sledeću informaciju: Ako funkcije M i M^* zadovoljavaju uslov Δ_2, onda je normirani prostor L_M kotipa F_M. Ovo se ne može primeniti, na primer, na prostor L^1, koji je kotipa ε^2.

Teorema 4. Ako je M bilo kakva Orliczeva funkcija, onda je prostor L_M kotipa F_M.

Primetimo da je zaključak trivijalan ako $M \notin (\Delta_2)$, jer je u tom slučaju $F_M(\varepsilon) = 0$ za $\varepsilon \in]0,1[$.

Kako je $F_M(\varepsilon) \geq \varepsilon^q$ ako $M \in \overline{\Delta}(p,q)$, $2\leq q<\infty$, iz teoreme 4 dobijamo sledeći rezultat, koji su u slučaju $p=1$ dokazali Z. G. Gorgadze i V. I. Tarieladze [28].

Posledica 2. Neka $M \in \overline{\Delta}(p,q)$, $0<p\leq 2\leq q<\infty$. Tada je prostor L_M kotipa ε^q.

Teorema 4 se može izvesti iz teoreme 3. Upotrebićemo, međutim, jedan sličan, ali opštiji postupak, koji se može primeniti i na neke druge klase prostora.

Propozicija 2. Neka je X kvazinormiran, $\operatorname{ind}X > 0$. Pretpostavimo da kvazikonveksna funkcija $F: [0,1] \to [0,\infty[$ zadovoljava uslov

$$(1) \qquad x, y \in X, \quad \int_0^{2\pi} \|x + e^{it} y\| dt \leq 2\pi \quad \Longrightarrow \quad \|x\| + F(\|y\|) \leq 1.$$

Tada je X kotipa F.

Teorema 2 pokazuje da se u slučaju Orliczevih prostora može uzeti $F = K F_M$. Prema tome, teorema 4 je posledica teoreme 2 i propozicije 2.

Dokaz propozicije. Označimo sa L^X skup svih funkcija $f: [0,1] \to X$ za koje je skup $\{f(t): t \in [0,1]\}$ konačan. Jednakošću

$$\|f\| = \int_0^1 \|f(t)\|_X dt$$

definisana je kvazinorma u L^X. Lako je videti da je $\operatorname{ind}(L^X) = \operatorname{ind}(X)$. Dokazaćemo da pod uslovom (1) važi nejednakost

$$(2) \qquad \delta_c(L^X; \varepsilon) \geq F(\varepsilon/2), \qquad 0 \leq \varepsilon \leq 1.$$

Pretpostavimo da je to učinjeno i dokažimo da je X kotipa F. Neka $x_1, \ldots, x_n \in X$ i

$$(*) \qquad \int_0^1 \left\| \sum_{k=1}^n \varphi_k(t) x_k \right\| dt \leq c_p/2,$$

gde je $c_p = 2^{1-2/p}(2^p - 1)$, $p = \operatorname{ind}(X) = \operatorname{ind}(L^X)$. Tada funkcije $2\varphi_k x_k =: f_k$ pripadaju prostoru L^X i za svaki izbor $\theta_k \in \{1, -1\}$ važi jednakost

$$\left\| \sum_{k=1}^n \theta_k f_k \right\| = 2 \int_0^1 \left\| \sum_{k=1}^n \varphi_k(t) x_k \right\| dt.$$

S obzirom na to i nejednakost $(*)$ ispunjeni su uslovi propozicije I.7 (sa L^X, f_k i $F(\varepsilon/2)$). Zbog toga je

$$\sum_{k=1}^n F(\|f_k\|/2) = \sum_{k=1}^n F(\|x_k\|) \leq 1.$$

Dokažimo sada nejednakost (2). Neka je $0 < \varepsilon < 1$, $f, g \in L^X$, $\|g\| = \varepsilon$ i $\|f + \lambda g\| \leq 1$ za svako $\lambda \in \mathbb{D}$. Tada je

$$1 \geq \int_0^1 \Psi(t)\, dt =: b,$$

gde je

$$\Psi(t) = \int_0^{2\pi} \|f(t) + e^{iu} g(t)\| du/2\pi, \qquad t \in [0,1].$$

Označimo sa G najveću konveksnu minorantu funkcije F. Tada iz definicije funkcije Ψ i uslova (1) dobijamo nejednakost

$$\|f(t)\| + \Psi(t)\, G(\|g(t)\|/\Psi(t)) \leq \Psi(t) \quad \text{na skupu } \{t: \Psi(t) \neq 0\} =: \Omega.$$

Neka je $\mu(dt) = \Psi(t)dt/b$. Tada je $\mu(\Omega) = 1$ pa je, prema Jensenovoj nejednakosti, $\int_{\Omega} G(\|g(t)\|/\Psi(t))\mu(dt) \geq G(\int_{\Omega}\|g(t)\|\mu(dt)/\Psi(t)) = G(\varepsilon/b)$. Iz toga i nejednakosti (.) dobijamo $\|f\| + G(\varepsilon) \leq \|f\| + bG(\varepsilon/b) \leq b \leq 1$. Dovoljno je još dokazati da je $G(\varepsilon) \geq F(\varepsilon/2)$. Međutim, kako je $F(\varepsilon) \geq \int_0^{\varepsilon} F(t)\,dt/t =: F_1(\varepsilon)$ a funkcija F_1 konveksna, imamo $G(\varepsilon) \geq F_1(\varepsilon) \geq \int_{\varepsilon/2}^{\varepsilon} F(t)\,dt/t \geq (\varepsilon/2)F(\varepsilon/2)(\varepsilon/2) = F(\varepsilon/2)$. ⊠

Da bismo formulisali neke posledice teoreme 4, potrebne su nam ove oznake: $F_M^{\infty}(0) = F_M^{0}(0) = 0$,

$$F_M^{\infty}(\varepsilon) = \varepsilon^2 \inf\{v^2 M(t)/M(vt):\ 1 \leq v \leq 1/\varepsilon,\ t \geq 1\},$$

$$F_M^{0}(\varepsilon) = \varepsilon^2 \inf\{M(vt)/v^2 M(t):\ \varepsilon \leq v \leq 1,\ 0 < t \leq 1\},\quad 0 < \varepsilon \leq 1.$$

Posledica 3. Ako je mera ν konačna, onda je $L_M(\nu)$ kotipa F_M^{∞}.

Dokaz. Izaberimo $p \in]0,1]$ tako da je funkcija $t \mapsto M(t^{1/p})$ konveksna i stavimo $N(t) = M(1)\,t^p$ za $t \in [0,1]$ i $N(t) = M(t)$ za $t \geq 1$. Tada je N Orliczeva funkcija a prostori L_M i L_N međusobno su izomorfni jer je mera ν konačna [49]. Dakle, dovoljno je dokazati da je L_N kotipa F_M^{∞} a to sledi iz nejednakosti $F_N \geq F_M^{\infty}$. Da bismo dokazali tu jednakost, pretpostavimo da je $0 < \varepsilon \leq 1$, $1 \leq v \leq 1/\varepsilon$, $t > 0$. Ako je $0 < t \leq 1$, onda je $N(vt) \leq t^p M(v)$ i, prema tome, $(\varepsilon v)^2 N(t)/N(vt) \geq (\varepsilon v)^2 M(1)/M(v) \geq F_M^{\infty}(\varepsilon)$; ako je $t > 1$, onda je $(\varepsilon v)^2 N(t)/N(vt) = (\varepsilon v)^2 M(t)/M(tv) \geq F_M^{\infty}(\varepsilon)$. ⊠

Posledica 4. Ako je $\inf\{\nu(E):\ E \text{ merljiv},\ \nu(E) > 0\} > 0$, tada je $L_M(\nu)$ kotipa F_M^{0}.

Dokaz. U ovom slučaju L_M je izomorfan prostoru L_N, gde je $N(t) = M(t)$, $0 \leq t \leq 1$; $N(t) = M_+'(1)(t^p - 1)/p + M(1)$, $t \geq 1$. Da bismo dokazali nejednakost $F_N \geq F_M^{0}$, pišemo F_N u sledećem obliku:

$$F_N(\varepsilon) = \varepsilon^2 \inf\{N(vt)/N(t)v^2:\ \varepsilon \leq v \leq 1,\ t > 0\}.$$

Neka je $0 < \varepsilon \leq 1$, $\varepsilon \leq v \leq 1$, $t \geq 1$. Tada je $N(vt) \geq t^p N(v) = t^p M(v)$. Kako je i $M_+'(1) \geq pM(1)$, to je

$$\varepsilon^2 N(vt)/v^2 N(t) \geq \varepsilon^2 M(v)/v^2 M(1) \geq F_M^{0}(\varepsilon).$$

Ako je $0 < t < 1$, tada je

$$\varepsilon^2 N(vt)/v^2 N(t) = \varepsilon^2 M(vt)/v^2 M(t) \geq F_M^{0}(\varepsilon).\ ⊠$$

5. O teoremama 1 i 4 u slučaju kad je funkcija M konveksna

Ako mera ν zadovoljava neke dodatne uslove, onda se navedeni rezultati ne mogu dalje poboljšavati. Razmotrićemo detaljno meru ν sa sledećim svojstvom:

(++) Postoji niz međusobno disjunktnih merljivih skupova (E_n: $n \geq 1$) takav da je $\sum_{n=1}^{\infty} \nu(E_n) = \infty$ i $\nu(E_n) \downarrow 0$ $(n \to \infty)$.

Ovaj uslov zadovoljava, na primer, svaka beskonačna neatomična mera.

Propozicija 3. Pretpostavimo da mera ν ima svojstvo (++). Ako je prostor $L_M(\nu)$ kotipa $F: [0,1[\to [0,\infty[$, onda postoji realan broj K takav da je $F(\varepsilon) \leq K F_M(\varepsilon)$, $0 \leq \varepsilon < 1$. (M je konveksna.)

Centralno mesto u dokazu ima sledeći rezultat T. Figiela [20: teorema 1.8].

Teorema Figiela. Neka je normirani prostor X kotipa F. Ako je $F(\varepsilon) > 0$ za $\varepsilon \in [0,1[$, onda postoji Orliczeva funkcija G takva da su ispunjeni ovi uslovi: (i) $G(t) \geq F(t)$, $0 \leq t < 1$; (ii) $G \in \overline{\Delta}(2,q)$ za neko $q < \infty$; (iii) X je kotipa G.

Dokaz propozicije. Pretpostavimo da je F Orliczeva funkcija klase $\overline{\Delta}(2,q)$, što je moguće na osnovu teoreme Figiela. Neka je $0 < \varepsilon < 1$, $1 \leq v \leq 1/\varepsilon$, $t > 0$. Naći ćemo konstante $K < \infty$ i $c \in]0,1]$ koje ne zavise od ε, v, t tako da je

$$(*) \qquad K M(t/c)/M(vt) \geq F(1/v).$$

Birajući v, ε tako da je $1/v = \varepsilon = c/2$, zaključujemo da $M \in (\Delta_2)$. Zato je $K_1 \varepsilon^2 v^2 M(t)/M(tv) \geq (\varepsilon v)^2 F(1/v) = (\varepsilon v)^2 F(\varepsilon/\varepsilon v) \geq F(\varepsilon)$; poslednja nejednakost sledi iz pretpostavke da je funkcija $F(\sqrt{\cdot})$ konveksna. Iz dobijene procene i jednakosti (1.5) dolazimo do tvrđenja. Preostaje dokaz relacije (*).

Izaberimo prirodan broj m tako da je

$$F(1)/(m+1) \leq F(1/v) \leq F(1)/m.$$

Neka je (k_j: $j \geq 1$) strogo rastući niz prirodnih brojeva koji zadovoljava uslov $1/M(vt) \leq \sum_{n \in B_j} \nu(E_n) \leq 2/M(vt)$, gde je (E_n) niz iz uslova (++) i $B_j = \{n \in \mathbb{N}: k_j \leq n < k_{j+1}\}$. Tada su skupovi $S_j := \bigcup E_n$ $(n \in B_j)$ međusobno disjunktni i važi nejednakost

$$1/M(vt) \leq \nu(S_j) \leq 2/M(vt), \quad j \geq 1.$$

Definišimo funkcije $x_j \in L_M(\nu)$, $j \geq 1$, na sledeći način:

$$x_j(s) = \begin{cases} t, & s \in S_j, \\ 0, & s \in S \setminus S_j. \end{cases}$$

Tada je $\int_S M(x_j(s)\, v)\, \nu(ds) = M(vt)\nu(S_j) \geq 1$ i, prema tome, $\|x_j\| \geq 1/v$. Zato je

$$\sum_{j=1}^{m+1} F(\|x_j\|) \geq (m+1)F(1/v) \geq F(1).$$

Kako $F\in(\Delta_2)$, postoji konstanta $c\in]0,1]$, koja zavisi samo od F, takva da je $\|\sum_{j=1}^{m+1} \theta_j x_j\| \geq c$ za neki izbor $\theta_j\in\{1,-1\}$. Iz toga sledi

$$\sum_{j=1}^{m+1} M(t/c)\nu(S_j) = \int_S M(c^{-1}|\sum_{j=1}^{m+1} \theta_j x_j(s)|)\nu(ds) \geq 1.$$

Odavde dobijamo $(m+1)M(t/c)/M(vt) \geq 1/2$, tj. $M(t/c)/M(vt) \geq 1/4m \geq F(1/v)/4F(1)$. Time je nejednakost (*) dokazana. ⊠

Na osnovu propozicije 3 možemo dokazati da je teorema 1 u nekim slučajevima najbolja moguća.

Propozicija 4. Neka je Banachov prostor X izomorfan prostoru $L_M(0,\infty)$, pri čemu je M konveksna Orliczeva funkcija koja zadovoljava uslov Δ_2. Tada postoji realan broj K takav da je

$$\delta_c(X;\varepsilon) \leq K F_M(\varepsilon), \quad 0\leq\varepsilon\leq 1.$$

Dokaz. Dovoljno je dokazati da je $L_M(0,\infty)$ kotipa $\delta_c(X;\varepsilon)$ i primeniti propoziciju 3. Neka je Z skup svih nizova $(x_k: k\geq 1)$ sa konačnim brojem članova različitih od nule; $x_k\in L_M(0,\infty)$. Jednakošću $\|(x_k: k\geq 1)\| := \|(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2)^{1/2}\|_M$ definisana je norma u Z. Imitirajući prvi deo dokaza propozicije 2.d.1 [58], zaključujemo da je Z izomorfan potprostoru prostora $L_M(\mu)$, gde je μ Lebesgueova mera na skupu $[0,1]\times[0,\infty[$. S druge strane, kako su beskonačne mere Lebesguea međusobno izomorfne [35: str. 171], $L_M(\mu)$ je izomorfan $L_M(0,\infty)$. Dakle, postoji potprostor Y prostora X i izomorfizam $U: Y$ na Z.

Pretpostavimo sada da je $c>0$, $x_1,\dots,x_n\in L_M(0,\infty)$ i

$$\int_0^1 \|\sum_{k=1}^{n} \varphi_k(t)x_k\|_M\, dt \leq c.$$

Tada je (videti [58: teorema 1.d.6])

$$\|(\sum_{k=1}^{n}|x_k|^2)^{1/2}\|_M \leq c\sqrt{2}.$$

Iz toga sledi da je

$$\|\sum_{k=1}^{n} \lambda_k z_k\|_Z \leq c\sqrt{2} \quad \text{za sve} \quad \lambda_k\in T,$$

gde je $z_k = (\delta_{jk}x_j: j\geq 1)\in Z$. Neka je $z_k=Uy_k$, $y_k\in Y$. Tada je

$$\|\sum_{k=1}^{n}\lambda_k y_k\|_Y \leq c\sqrt{2}/\|U^{-1}\| =: 1/c_1.$$

Odavde pomoću leme I.2 dobijamo

$$\sum_{k=1}^{n} \delta_c(Y;\, c_1\|y_k\|) \leq 1.$$

Birajući c tako da je $c_1=\|U\|$, dobijamo nejednakost $\sum_{k=1}^{n}\delta_c(X;\|x_k\|) \leq 1$. Time je dokaz završen. ⊠

6. O drugim klasama prostora

Metod dokazivanja teoreme 2 može se primeniti na modularne prostore $\ell_{(M_n)}$. Dosta informacija o tim prostorima može se naći u [57: str. 166] i [108].

Neka je $(M_n : n\geq 1)$ niz konveksnih Orliczevih funkcija. Kompleksni niz $x=(\xi_n : n\geq 1)$ pripada prostoru $\ell_{(M_n)}$ ako je

$$\|x\| := \inf\left\{\varrho>0 : \sum_{n=1}^{\infty} M_n(|\xi_n|/\varrho) \leq 1\right\} < \infty.$$

Obično se pretpostavlja da funkcije M_n zadovoljavaju uslov

(1) $$M_n(1)=1.$$

Ako je $M_n(t)=t^{p_n}$, $1\leq p_n<\infty$, onda je prostor $\ell_{(M_n)}$ jednak prostoru $\ell^{(p_n)}$, koji je uveo H. Nakano. Ravnomernu konveksnost tog prostora proučavao je K. Sundaresan [99].

Neka niz $(t_n : n\geq 1)$ iz intervala $[0,1]$ zadovoljava uslov

$$\sum_{n=1}^{\infty} M_n(t_n) < \infty.$$

Definišimo funkcije N_n na sledeći način: $N_n(t)=M_n(t)$ ako je $t_n\leq t\leq 1$; $N_n(t)=M_n'(1)(t-1)+1$ ako je $t\geq 1$; $N_n(t)=M_n(t_n)t/t_n$ ako je $t_n>0$ i $0\leq t\leq t_n$. (Ovde M_n' označava desni izvod.) Ako postoji $q<\infty$ takvo da je

(2) $$tM_n'(t)/M_n(t) \leq q \quad \text{za sve } n\geq 1,\ t\in[t_n,1],$$

onda $N_n\in\overline{\Delta}(1,q)$ za svako n. Imitiranjem dokaza teoreme 2 može se ustanoviti da prostor $\ell_{(N_n)}$ zadovoljava uslov (5.1) sa

$$F(\varepsilon) = \inf_n KF_{N_n}(\varepsilon), \quad 0\leq\varepsilon\leq 1.$$

S druge strane, lako je dokazati da je

$$F_{N_n}(\varepsilon) = \varepsilon^2 \inf\left\{M_n(vt)/v^2M_n(t) : t_n\leq t\leq 1,\ \varepsilon\leq v\leq 1\right\} =: G_n(\varepsilon).$$

S obzirom na to i činjenicu da su prostori $\ell_{(M_n)}$ i $\ell_{(N_n)}$ izomorfni, imamo sledeće tvrđenje:

Ako niz (M_n) ispunjava uslove (1) i (2), onda je prostor $\ell_{(M_n)}$ netrivijalnog kotipa $F(\varepsilon)=\inf_n G_n(\varepsilon)$ i izomorfan je ravnomerno c-konveksnom prostoru $\ell_{(N_n)}$.

Primena na modularni prostor $\ell^{(p_n)}$ dovodi do zaključka da je on kotipa ε^r ako je $r>2$ a skup $\{n : p_n>r\}$ konačan. Na primer, prostor $\ell^{(2+1/n)}$ je kotipa ε^r za svako $r>2$.

O jednoj klasi Banachovih rešetki. Neka je X kompleksna Banachova rešetka. Kazaćemo da je X q-B-rešetka (q-Besselian lattice [20]) ako je $1 \leq q < \infty$ i postoji pozitivan broj K takav da je

(3) $$\|\sum_{k=1}^{n}|x_k|\| \geq K\,(\sum_{k=1}^{n}\|x_k\|^q)^{1/q}$$

za svaki konačan niz $(x_k : 1 \leq k \leq n)$ iz X.

Teorema Maureya [64]. Ako je X q-B-rešetka i $q>2$, onda je X kotipa ε^q.

Ova teorema se može dokazati pomoću propozicije 2 i argumenata koji su, u vezi sa ravnomernom konveksnošću q-B-rešetke, dati u [58: str. 89]. Polazi se od toga da je q-B-rešetka izometrična Kötheovom funkcionalnom prostoru nad verovatnosnim prostorom (Ω,μ). Zatim se pokazuje da se teorema svodi na slučaj kad je $K=1$ u nejednakosti (3). Na ovom se mestu koristi nejednakost

(4) $$\int_0^{2\pi}|x+e^{it}y|\,dt/2\pi \geq (|x|^2+|y|^2/4)^{1/2}, \quad x,y\in\mathbb{C},$$

umesto leme 1.f.2 u [58]. Dalje se rasuđuje na sličan način kao u [58] i dolazi se do zaključka da važi implikacija (5.1) sa $F(\varepsilon) = K_1\varepsilon^q$.

Nejednakost (4) se lako izvodi pomoću leme II.2.

7. Primedbe i primeri

Prostor L_M, kao posebna vrsta modularnih prostora [73, 75], definiše se i uz slabije pretpostavke od onih u tački 1. Neki od tako uopštenih prostora izomorfni su prethodno razmatranima, ali imaju praktičnih prednosti.

Pretpostavimo da neprekidna funkcija $Q: [0,\infty[\to [0,\infty[$ nije identički nula i da zadovoljava uslov

(1) $$Q(rt) \leq K\,Q(t)\,r^p, \quad 0\leq r\leq 1, \quad t\geq 0,$$

gde su K i p pozitivne konstante koje ne zavise od r i t. Ako se L_Q i $\|\cdot\|_Q$ definišu kao u tački 1, onda je $(L_Q, \|\cdot\|_Q)$ kvazinormiran prostor i može se postaviti pitanje kakvog je kotipa. Odgovor je sličan teoremi 4:

Ako $Q\in(\Delta_2)$, tj. $Q(2t)\leq K\,Q(t)$ za $t>0$, onda je L_Q netrivijalnog kotipa F_Q.

Ovo tvrđenje se može izvesti iz teoreme 4. Naime, neka je $N(t) = \sup\{Q(tu)/u^p : 0<u\leq 1\}$, $t\geq 0$. Tada $N(t)/t^p$ raste $(t>0)$ i zato je funkcija $t\mapsto M(t^{1/p}) := \int_0^t N(u^{1/p})\,du/u$, $t\geq 0$, konveksna. Pored toga, važi nejednakost $Q(t/2)\leq M(t)\leq K\,Q(t)$, $t\geq 0$, iz koje sledi da su L_Q i L_M izomorfni i, dakle, istog su kotipa. Međutim, ako $Q\in(\Delta_2)$, onda $M\in\bar{\Delta}(p,q)$ za neko $q<\infty$, pa traženo tvrđenje sledi iz teoreme 4.

Neka je $0<p\leq q<\infty$. Pisaćemo $Q\in\Delta(p,q)$ [65] ako postoji pozitivan broj K takav da su ispunjeni uslovi ~~(1) i~~

(2) $\qquad Q(rt)\leq K\,r^{q}\,Q(t),\quad r\geq 1,\quad t\geq 0.$

(Q je neprekidna, nenegativna i nije identički nula.)

Primer 1. Neka je $Q(t)=\min(t^{p},\,t^{q})$, $p\leq q$. Lako je dokazati da $Q\in\Delta(p,q)$ i da ne postoji $p_1>0$ takvo da $Q\in\bar{\Delta}(p_1,q)$. Zato se teorema 4 ne može direktno primeniti. Ipak, prema prethodnim razmatranjima, L_Q je kotipa $F(\varepsilon)=\varepsilon^{m}$, gde je $m=\max(2,q)$. Prostor L_Q je u vezi sa prostorom $X=L^{p}+L^{q}$, koji se prirodno pojavljuje u teoriji interpolacije linearnih operatora [50]. Prostor X sačinjavaju merljive funkcije x koje se mogu predstaviti u obliku $x=x_1+x_2$, $x_1\in L^{p}$, $x_2\in L^{q}$. Kvazinorma se definiše jednakošću

$$\|x\|_X=\inf\{\|x_1\|_p+\|x_2\|_q:\ x_1+x_2=x,\ x_1\in L^{p},\ x_2\in L^{q}\}.$$

Ako $x_1\in L^{p}$, $x_2\in L^{q}$, onda je $\|x_1\|_p\geq\|x_1\|_Q$ i $\|x_2\|_q\geq\|x_2\|_Q$ i, dakle, $\|x_1\|_p+\|x_2\|_q\geq K\|x\|_Q$ $(x=x_1+x_2)$. Zato je $\|x\|_X\geq K\|x\|_Q$. S druge strane, ako $x\in L_Q$, stavimo $S_1=\{s:\ |x(s)|\geq 1\}$, $S_2=\{s:\ |x(s)|<1\}$. Tada je $x=x_1+x_2$, pri čemu je x_k $(k=1,\,2)$ proizvod funkcije x i karakteristične funkcije skupa S_k. Time je dokazana inkluzija $L_Q\subset X$. Iz nje i nejednakosti $\|x\|_X\geq K\|x\|_Q$, zbog kompletnosti X i L_Q, sledi da su X i L_Q izomorfni. Prema tome, prostor $L^{p}+L^{q}$ $(p\leq q)$ kotipa je $F(\varepsilon)=\varepsilon^{\max(2,q)}$. $\boxtimes$

Razmotrimo slučaj konačne mere. Pisaćemo $Q\in\Delta_{\infty}(p,q)$, $0<p\leq q<\infty$, ako postoje pozitivni brojevi K i t_0, $Q(t_0)>0$, takvi da su ispunjeni uslovi (1) i

(3) $\qquad Q(rt)\leq K\,r^{q}\,Q(t),\quad r\geq 1,\quad t\geq t_0.$

Pretpostavimo da Q, $N\in\Delta_{\infty}(p,q)$ i da je mera ν konačna. Na standardan način [49] se dokazuje da su $L_Q(\nu)$ i $L_N(\nu)$ izomorfni (i skupovno jednaki) ako je, za neke c, $b>0$,

$$c^{-1}N(t)\leq Q(t)\leq c\,N(t),\quad t\geq b,$$

što ćemo zapisivati kao

$$Q(t)\approx N(t),\quad t\to\infty.$$

Lema 6. Neka $Q\in\Delta_{\infty}(p,q)$. Tada postoji Orliczeva funkcija $M\in\bar{\Delta}(p,q)$ takva da je $Q(t)\approx M(t)$, $t\to\infty$.

Dokaz. Neka su ispunjeni uslovi (1) i (3). Definišimo funkciju Q_1 na sledeći način: $Q_1(t)=t^{p}Q(t_0)/t_0^{p}$, $0\leq t\leq t_0$; $Q_1(t)=Q(t)$, $t\geq t_0$. Tada funkcija $Q_2(t)=\inf\{Q_1(tu)/u^{q}:\ 0\leq u\leq 1\}$, $t\geq 0$, ima sledeća svojstva: $Q_2 \in \Delta(p,q)$; $Q_2(t)/t^q$ $(t>0)$ opada; $Q_2(t) \approx Q(t)$, $t \to \infty$. Iste osobine ima i funkcija $N(t) = \sup\{Q_2(tu)/u^p : 0<u\leq 1\}$ i, uz to, $N(t)/t^p$ raste. Tražene uslove zadovoljava funkcija

$$M(t) = \int_0^1 N(u^{1/p}t)\, du/u, \quad t \geq 0. \quad \boxtimes$$

Iz posledice 3 i leme 6 sledi da je prostor $L_Q(\nu)$ (ako je mera ν konačna) kotipa

$$F(\varepsilon) = \varepsilon^2 \inf\{v^2 Q(t)/Q(vt) : 1 \leq v \leq 1/\varepsilon,\ t > t_0\} \quad (Q(t_0) > 0).$$

<u>Primer 2</u>. Ako je mera ν konačna i $Q \in \Delta_\infty(p,2)$, onda je $L_M(\nu)$ kotipa ε^2. To se može primeniti na prostor $L_Q = L^p(\log^+ L)^\alpha$, $p<2$, $\alpha>0$, gde je $Q(t) = t^p(\log^+ t)^\alpha$, $\log^+ t = \max(\log t,\ 0)$. Ako je $p \geq 2$, onda je $L^p(\log^+ L)^\alpha$ kotipa $\varepsilon^p/|\log\varepsilon|^\alpha$, što se može zaključiti i pomoću teorema (MT) i (FP). $\boxtimes$

<u>Primer 3</u>. Neka su X i Y kompleksni Banachovi prostori i $p \geq 1$. Kaže se da je linearan operator $U: X \to Y$ p-apsolutno zbirljiv ako je

$$\sum_{k=1}^n \|Ux_k\|^p \leq K^p \sup_{\|x^*\|\leq 1} \sum_{k=1}^n |x^*(x_k)|^p$$

za svako n i svaki niz (x_k) iz X. Pri tome je K pozitivna konstanta koja zavisi samo od U. Ako je Y Banachova rešetka, onda su sledeća tvrđenja ekvivalentna [58: teorema 1.f.16] : (i) Y je kotipa ε^2. (ii) Svaki operator $U: c_0 \to Y$ zbirljiv je 2-apsolutno (ako je linearan i neprekidan). Pretpostavimo da je M konveksna Orliczeva funkcija. Iz propozicije 3 sledi da je $L_M(0,\infty)$ kotipa ε^2 ako i samo ako $M \in \Delta(1,2)$. Na sličan način se dokazuje da je ℓ_M kotipa ε^2 ako i samo ako je, za neko $K>0$, (iii) $M(vt) \geq Kv^2 M(t)$, $0<v,t<1$. Ekvivalenciju (ii)$\Leftrightarrow$(iii), $Y = \ell_M$, dokazao je direktno I. A. Komarčev [116].

Glava IV

HARDY-ORLICZEVI I BERGMAN-ORLICZEVI PROSTORI

Oznake. Slova p, q, r označavaju realne brojeve koji, ako nije drukčije naglašeno, zadovoljavaju uslove

$$0<r<1, \qquad 0<p\le q.$$

Slovo f uvek označava analitičku funkciju na jediničnom disku $\mathbb{D}$. Slovo K se upotrebljava kao oznaka za pozitivne realne konstante koje ne zavise od f i r.

1. Definicije i neka svojstva

Neka $Q\in\Delta_\infty(p,q)$, tj. Q zadovoljava uslove (III.7.1) i (III.7.3). Hardy-Orliczev prostor H_Q obrazuju analitičke funkcije f koje zadovoljavaju uslov

$$\|f\|_Q := \sup\{M_Q(r,f):\ 0<r<1\} < \infty,$$

gde je

$$M_Q(r,f) = \inf\{\varrho>0:\ I_Q(r,f/\varrho)\le 1\},$$

$$I_Q(r,f) = \int_0^{2\pi} Q(|f(re^{it})|)\, dt/2\pi .$$

Bergman-Orliczev prostor A_Q čine analitičke funkcije iz $L_Q(\mathbb{D})$. Kvazinormu u A_Q definišemo jednakošću

$$\|f\|_Q^* = \inf\{\varrho>0:\ J_Q(f/\varrho)\le 1\},$$

gde je

$$J_Q(f) = \int_0^1 I_Q(r,f)\, dr.$$

Ako $f\in H_Q$, onda granična vrednost

$$f(e^{it}) := \lim_{r\to 1-} f(re^{it})$$

postoji za skoro sve $t\in[0,2\pi]$ i njome je definisana funkcija iz $\hat{L}_Q = L_Q([0,2\pi], dt/2\pi)$. Osim toga, ako je $f(e^{it}) = g(e^{it})$ skoro svuda na $[0,2\pi]$ $(f, g\in H_Q)$, onda je $f(z)=g(z)$ za svako $z\in\mathbb{D}$. Prema tome, H_Q se može shvatiti kao deo prostora $\hat{L}_Q$. Ako $Q\in\bar{\Delta}(p,q)$, onda važi više: H_Q je izometričan potprostoru prostora $\hat{L}_Q$ [52 I]. Naime, tada je funkcija $Q(|f(z)|)$, $z\in\mathbb{D}$, subharmonijska i, dakle, $I_Q(r,f)$ raste po r. Iz toga sledi da je (ako $Q\in\bar{\Delta}(p,q)$)

$$\|f\|_Q = \inf\{\varrho>0:\ I_Q(f/\varrho)\le 1\}, \tag{1}$$

gde je

$$I_Q(f) := \sup\{I_Q(r,f):\ 0<r<1\} = \int_0^{2\pi} Q(|f(e^{it})|)\, dt/2\pi.$$

Primeri. Najvažniji su prostori H^p i A^p koji se dobijaju kad se uzme da je $Q(u)=u^p$. Potpunije informacije o H^p i A^p, kao i nekim uopštenjima, mogu se naći u [15], [23] i [66].

Osim H^p, u klasičnoj analizi često se pojavljuje prostor $H_Q = H^p(\log^+ H)^\alpha$, gde je $Q(u)=u^p(\log^+ u)^\alpha$ $(\alpha \geq 0)$.

Neka je
$$r\, C_Q(r,f) = \int_{\mathbb{D}_r} Q(|f(z)|)\, |f'(z)/f(z)|^2 \mu(dz),$$
gde je μ Lebesgueova mera na $\mathbb{D}$, $\mathbb{D}_r = \{z \in \mathbb{D}: |z| \leq r\}$ i $f(z) \neq 0$ za neko $z \in \mathbb{D}$. Ako je $f(z)=0$ za svako z, stavićemo $C_Q(r,f)=0$. Korisna je sledeća osobina funkcionala C_Q.

Lema 1. Neka $Q \in \overline{\Delta}(p,q)$ i $f(0)=0$. Tada je
$$K^{-1} I_Q(f) \leq \int_0^1 C_Q(r,f)\, dr \leq K I_Q(f).$$

Dokaz. Razmotrimo funkciju
$$N(u) = \int_0^u \Big(\int_0^s Q(t)\, dt/t\Big)\, ds/s = \int_0^1 \int_0^1 Q(st\, u)\, ds\, dt/st, \quad u > 0.$$
Kako je N dvaput diferencijabilna, važi jednakost (Hardy-Steinov identitet [85])
$$2\pi r \frac{d}{dr} I_N(r,f) = \int_{\mathbb{D}_r} (N''(|f|) + N'(|f|)/|f|)\, |f'|^2 \mu(dz)$$
$$= r\, C_Q(r,f), \quad f \neq 0. \tag{2}$$
S druge strane, korišćenjem nejednakosti $(st)^q Q(u) \leq Q(stu) \leq (st)^p Q(u)$, $0 < s,t < 1$, dobijamo $Q(u)/q^2 \leq N(u) \leq Q(u)/p^2$. Iz toga sledi nejednakost $p^2 I_N(f) \leq I_Q(f) \leq q^2 I_N(f)$, koja sa (2) daje traženi rezultat.

2. Generalizacija teoreme Hardyja i Littlewooda

Jedno od važnih sredstava u teoriji H^p prostora predstavlja sledeća teorema [15: teorema 5.11].

Teorema (HL). Ako $f \in H^p$, onda je
$$\int_0^1 (1-r)^{-p/b}\, M_b(r,f)^p\, dr < \infty \quad \text{za sve } b \in]p,\infty[.$$

Napominjemo da je
$$M_b(r,f) = \Big(\int_0^{2\pi} |f(re^{it})|^b\, dt/2\pi\Big)^{1/b}.$$

Kratak dokaz teoreme (HL) dat je u [66]. Ovde dokazujemo sledeću generalizaciju.

Teorema 1. Neka $Q \in \overline{\Delta}(p,q)$ i $b > q$. Tada je
$$\int_0^1 Q\big[(1-r)^{-1/b} M_b(r,f)\big]\, dr \leq K I_Q(f).$$

Dokaz. Upotrebom Blaschkeovog proizvoda [15] teorema se svodi na slučaj $b=2$. Osim toga, dovoljno je razmotriti slučaj kad je $f(0)=0$. Neka je $b=2$, $f(0)=0$ i $f\neq 0$. Tada je $q<2$ i

$$f(z)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n .$$

Uvedimo sledeće oznake: $\phi(u)=Q(\sqrt{u})$, $w(r)=\left(\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|r^n\right)^2$ i

$$\sigma(r)=\sum_{n=1}^{\infty} n|a_n|^2 r^{2n-1}=\frac{1}{\pi r}\int_{\mathbb{D}_r}|f'(z)|^2\mu(dz).$$

Kako je $|f(z)|^2\leq w(r)$, $z\in\mathbb{D}_r$, a $\phi(u)/u$ $(u>0)$ opada (jer $\phi\in\Lambda(p/2,\,q/2)$),

to je $\quad r\,C_Q(r,f)\geq \frac{\phi(w(r))}{w(r)}\int_{\mathbb{D}_r}|f'(z)|^2\,(dz)=\pi r\,\sigma(r)\frac{\phi(w(r))}{w(r)}$. Odavde

pomoću leme 1 dobijamo

$$K\,I_Q(f)\geq\int_0^1[\phi(w(r))\,\sigma(r)/w(r)]\,dr.$$

Kako $\phi(u)/u$ opada, važi nejednakost $\phi(u)\,v/u\geq\phi(v)-\phi(u)$, $u,v>0$. Iz nje i prethodne sledi

$$K\,I_Q(f)\geq\frac{1}{c}\int_0^1[\phi(c\,\sigma(r))-\phi(w(r))]\,dr, \tag{1}$$

gde je c pozitivna konstanta koju ćemo naknadno odabrati.

Da bismo nastavili dokaz, potrebne su nam dve nejednakosti koje su neposredna posledica teoreme 6 iz [65]:

$$\int_0^1\phi(\sigma(r))\,dr\geq K_1\sum_{n=0}^{\infty}2^{-n}\phi\Big(\sum_{k\in I_n}k|a_k|^2\Big), \tag{2}$$

$$\int_0^1\phi(w(r))\,dr\leq K_2\sum_{n=0}^{\infty}2^{-n}\phi\Big(\Big(\sum_{k\in I_n}|a_k|\Big)^2\Big). \tag{3}$$

Ovde je $I_n=\{k:\ 2^n\leq k<2^{n+1}\}$; K_1 i K_2 su pozitivne konstante.

Koristeći se nejednakošću $\left(\sum_{k\in I_n}|a_k|\right)^2\leq\sum_{k\in I_n}k|a_k|^2$, iz (2) i (3) dobijamo

$$\int_0^1\phi(w(r))\,dr\leq K_3\int_0^1\phi(\sigma(r))\,dr\leq\frac{1}{2}\int_0^1\phi(c\,\sigma(r))\,dr,$$

pri čemu je konstanta c odabrana tako da je $c\geq 1$ i $c^{p/2}\geq 2K_3$. Iz ove procene i nejednakosti (1) sledi

$$K\,I_Q(f)\geq\int_0^1\phi(\sigma(r))\,dr. \tag{3'}$$

Dokaz će biti gotov kad dokažemo nejednakost

$$K\int_0^1\phi\left[(1-r)^{-1}M_2(r,f)^2\right]dr\leq\int_0^1\phi(\sigma(r))\,dr. \tag{4}$$

Neka je $\xi_n=\sum_{k\in I_n}|a_k|^2$. Tada je $M_2(r,f)^2\leq\sum_{n=0}^{\infty}\xi_n r^{2^n}$ i, zbog neprekidnosti i subaditivnosti funkcije ϕ,

$$\phi\left[(1-r)^{-1}M_2(r,f)^2\right]\leq\sum_{n=0}^{\infty}\phi\left[(1-r)^{-1}\xi_n r^{2^n}\right]\leq$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \phi[(1-r)^{-1}\xi_n] r^{2^n p/2}.$$

Odavde integracijom dobijamo

(5) $$\int_0^1 \phi[(1-r)^{-1} M_2(r,f)^2]\,dr \le K \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} \phi(2^n \xi_n),$$

pri čemu je primenjena nejednakost

$$\int_0^1 \phi[(1-r)^{-1}\xi_n] r^{\alpha}\,dr = \alpha^{-1} \int_0^{\alpha} \phi(\alpha\xi_n/u)(1-u/\alpha)^{\alpha}\,du$$

$$\le \alpha^{-1} \int_0^{\alpha} \phi(\alpha\xi_n)(u^{-p/2}+u^{-q/2})(1-u/\alpha)^{\alpha}\,du \le K\phi(\alpha\xi_n)/\alpha, \quad \alpha \ge p/2.$$

Nejednakost (4) sledi iz (2) i (5). Teorema je dokazana. ☒

Iz teoreme 1 dobijamo, primenom leme III.6, sledeću generalizaciju teoreme (HL):

Posledica 1. Neka $Q \in \Delta_{\infty}(p,q)$, $q < b$. Ako $f \in H_Q$, tada je

$$\int_0^1 Q[(1-r)^{-1/b} M_b(r,f)]\,dr < \infty.$$

Specijalno, ako $f \in H^p(\log^+ H)^{\alpha}$, $b > p$, onda je

$$\int_0^1 (1-r)^{-p/b} M_b(r,f)^p |\log(1-r)|^{\alpha} dr < \infty.$$

3. Banachova obvojnica Hardy-Orliczevih prostora

Neka je $(X, \|\cdot\|)$ kompleksan kvazinormiran prostor. Norma u X^* (dual X) uvodi se, kao i kod normiranih prostora, jednakošću

$$\|x^*\| = \sup\{|x^*(x)| : \|x\| \le 1,\ x \in X\}.$$

Od interesa je slučaj kad X^* razdvaja tačke u X, što znači da je x=y ako je $x^*(x) = x^*(y)$ za svako $x^* \in X^*$. Tada je jednakošću

(1) $$|||x||| = \sup\{|x^*(x)| : \|x^*\| \le 1,\ x^* \in X^*\}, \quad x \in X,$$

definisana norma u X. Lako se dokazuje, primenom teoreme o razdvajanju konveksnih skupova, da je

$$|||x||| = \inf\{\rho > 0 : x/\rho \in \overline{\mathrm{co}}(B_X)\},$$

gde je B_X jedinična kugla prostora X. Upotpunjenje prostora $(X, |||\cdot|||)$, koje ćemo označavati sa Env(X), naziva se Banachovom obvojnicom prostora X (sa kvazinormom $\|\cdot\|$). Taj pojam je uveden u [84] i [91].

Korišćenjem jednakosti (1) može se lako dokazati da je

$$\mathrm{Env}(\ell^p) = \ell^1, \quad 0 < p < 1.$$

Međutim, to je jedan od retkih primera u kojima je moguće dati izometrijsku reprezentaciju Banachove obvojnice. Nalaženje izomorfne reprezentacije nešto je lakši problem i za H^p prostore rešili su ga P. L. Duren, B. W. Romberg i A. L. Shields [16]. Ovde se njihov rezultat uopštava na jednu klasu Hardy-Orliczevih prostora.

Neka je funkcija φ definisana, pozitivna i neprekidna na intervalu $]0,1[$. Prostor $\mathbb{B}(\varphi)$, koji su uveli A. L. Shields i D. L. Williams [93], obrazuju analitičke funkcije f koje zadovoljavaju uslov

$$\|f\|_{(\varphi)} := \int_0^1 \varphi(1-r)(1-r)^{-1} M_1(r,f)\,dr < \infty.$$

U sledećoj teoremi Q^- označava neprekidnu pozitivnu funkciju na $[1,\infty[$ koja zadovoljava uslov

$$Q^-(Q(u)) \approx u, \quad u \to \infty.$$

Teorema 2. Neka $Q \in \Delta_\infty(p,q)$ i $\varphi(r) = 1/rQ^-(1/r)$. Ako je $q<1$, tada su prostori $\mathrm{Env}(H_Q)$ i $\mathbb{B}(\varphi)$ izomorfni.

Deo dokaza je sadržan u sledećoj lemi.

Lema 2. $\|f\|_{(\varphi)} \le K\|f\|_Q$.

Dokaz. Korišćenjem leme III.6 tvrđenje se svodi na slučaj kad $Q \in \bar{\Delta}(p,q)$. Neka je tako. Lako je dokazati da je $\mathbb{B}(\varphi)$ izomorfan prostoru $\mathbb{B}(\psi)$, gde je

$$\psi(r) = 1/rQ^{-1}(1/r)$$

a Q^{-1} označava inverznu funkciju. Prema tome, dovoljno je dokazati nejednakost

$$\|f\|_{(\psi)} \le K\|f\|_Q.$$

Neka je $\|f\|_Q = 1$. Tada je $I_Q(f) = 1$ i, prema teoremi 1,

$$(*) \qquad \int_0^1 Q[(1-r)^{-1} M_1(r,f)]\,dr \le K.$$

Kako $M_1(r,f)/(1-r)$ raste sa r, to je

$$(1-r)\,Q[(1-r)^{-1} M_1(r,f)] \le K$$

a odavde sledi

$$M_1(r,f) \le K/\psi(1-r),$$

tj. $u_0 \le K u_1$, gde je $u_0 = (1-r)^{-1} M_1(r,f)$, $u_1 = Q^{-1}(1/(1-r))$. Kako $Q(u)/u$ opada, važi nejednakost $Q(u_1)/u_1 \le K\,Q(u_0)/u_0$, tj.

$$K^{-1}(1-r)^{-1}\psi(1-r)\,M_1(r,f) \le Q[(1-r)^{-1} M_1(r,f)].$$

Sada traženi rezultat sledi iz nejednakosti $(*)$. ⊠

Dokaz teoreme 2. Dovoljno je dati dokaz pod pretpostavkom da je $Q \in \bar{\Delta}(p,q)$ i $Q^- = Q^{-1}$. Tada se primenom leme 2 i metoda J. H. Shapiroa [92] teorema svodi na sledeće:

Ako je $f \in \mathbb{B}(\psi)$ i $\|f\|_{(\psi)} = 1$, onda postoji Borelova mera τ na $\mathbb{D}$ i operator $U:\mathbb{D} \to H_Q$ takvi da je

$$(2) \qquad |\tau|(\mathbb{D}) \le 1,$$

$$(3) \qquad \sup\{\|U_z\|_Q : z \in \mathbb{D}\} \le K.$$

(4) $$f(z) = \int_{\mathbb{D}} U_\zeta(z)\, \tau(d\zeta), \qquad z \in \mathbb{D}.$$

(K je pozitivna realna konstanta koja ne ~~zavisi od f.)~~

Neka $f \in \mathbb{B}(\varphi)$, $\|f\|_{(\varphi)} = 1$ i

$$\tau(d\zeta) = \varphi(1-|\zeta|)\, f(\zeta)\, \mu(d\zeta)/2\pi(1-|\zeta|), \quad \zeta \in \mathbb{D},$$

pri čemu je μ Lebesgueova mera na $\mathbb{D}$. Tada je

$$|\tau|(\mathbb{D}) = \int_0^1 r\, dr \int_0^{2\pi} (1-r)^{-1}\, \varphi(1-r)\, |f(re^{it})|\, dt/2\pi \;\le\; \|f\|_{(\varphi)} = 1.$$

Dakle, uslov (2) je ispunjen.

Da bismo definisali operator U, izaberimo β tako da je

$$(\beta+2)\,p > 1.$$

Neka je

$$V_\zeta(z) = (\beta+1)(1-|\zeta|^2)^\beta\, (1-\bar{\zeta} z)^{-\beta-2}, \qquad \zeta, z \in \mathbb{D}.$$

Tada je (videti [92])

$$f(z) = \int_{\mathbb{D}} V_\zeta(z)\, f(\zeta)\, \mu(d\zeta).$$

Stavljajući

$$U_\zeta(z) = 2\,(1-|\zeta|)^2\, Q^{-1}(1/(1-|\zeta|))\, V_\zeta(z),$$

vidimo da U zadovoljava uslov (4). Preostaje dokaz nejednakosti (3).

S obzirom da U ne zavisi od f, dovoljno je dokazati nejednakost

(5) $$\sup\{\|U_\zeta\|_Q : \zeta \in \mathbb{D}\} < \infty.$$

Neka $\zeta \in \mathbb{D}$, $u = Q^{-1}(1/(1-|\zeta|))$ i $h(z) = (1-|\zeta|)^{\beta+2}(1-\bar{\zeta}z)^{-\beta-2}$. Tada je $|U_\zeta(z)| \le K u |h(z)|$, pri čemu K ne zavisi od ζ i z. Kako je $|h(z)| \le 1$, to je $Q(|U_\zeta(z)|) \le K\,Q(u|h(z)|) \le K\,Q(u)|h(z)|^p = K|h(z)|^p/(1-|\zeta|)$. Odavde sledi $I_Q(U_\zeta) \le K\,\|h\|_p^p/(1-|\zeta|)$. Na osnovu nejednakosti

$$\int_0^{2\pi} |1-\bar{\zeta}e^{it}|^{-\alpha-1}\, dt \le K\,(1-|\zeta|)^{-\alpha}, \qquad \alpha > 0,$$

[15: str. 84], zaključujemo da je $\|h\|_p^p \le K\,(1-|\zeta|)$, tj. $I_Q(U_\zeta) \le K$, pri čemu K ne zavisi od ζ. Odatle sledi nejednakost (5). Teorema je dokazana. ⊠

4. Obvojnica Bergman-Orliczevog prostora

Prostor $\mathrm{Env}(\mathbf{A}_Q)$ ima sličnu reprezentaciju kao $\mathrm{Env}(H_Q)$, ali se pretpostavka o funkciji Q može oslabiti.

Teorema 3. Neka $Q \in \Delta_\infty(p,1)$ $(p \le 1)$. Tada je obvojnica prostora $\mathbf{A}_Q$ izomorfna prostoru $\mathbb{B}(\varphi)$, gde je

$$\varphi(r) = 1/r\; Q^{-}(1/r^2).$$

Simbol Q^{-} ima isto značenje kao u teoremi 2.

Dokaz se zasniva na sledećoj lemi.

Lema 3. Ako $Q \in \tilde{\Delta}(p,1)$, onda je

$$(1) \qquad \int_0^1 (1-r)\, Q[(1-r)^{-1} M_1(r,f)]\, dr \leq K \int_0^1 I_Q(r,f)\, dr.$$

Iz ove leme, slično kao pri dokazu leme 2, izvodimo nejednakost $\|f\|_{(\varphi)} \leq K\|f\|_Q^*$. Tada se teorema 3 dokazuje na isti način kao teorema 2.

Dokaz leme 3. Najpre dokazujemo nejednakost

$$(2) \qquad (1-r)\, Q[(1-r)^{-1} M_1(r,f)] \leq K\, I_Q(f), \quad f \in H_Q.$$

Neka je $P(u) = Q(u^2)$, $u \geq 0$, i $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$. Iz dokaza teoreme 1 vidi se da je

$$(3) \qquad \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} Q(2^n \sum_{k \in I_n} |a_k|^2) \leq K\, I_P(f).$$

S druge strane, funkcija Q je subaditivna jer $Q(u)/u$ opada i zato je

$$Q[(1-r)^{-1} M_2(r,f)^2] \leq \sum_{n=0}^{\infty} Q[(1-r)^{-1} \xi_n] r^{2^n p},$$

gde je $\xi_n = \sum_{k \in I_n} |a_k|^2$. Iz toga i elementarne procene

$$(1-r)\, Q[(1-r)^{-1} \xi_n] r^{2^n p} \leq K\, 2^{-n} Q(2^n \xi_n)$$

dobijamo nejednakost

$$K^{-1} (1-r)\, Q[(1-r)^{-1} M_2(r,f)^2] \leq \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} Q(2^n \xi_n) \leq K\, I_P(f).$$

Odavde se dolazi do (2) standardnom upotrebom Blaschkeovog proizvoda.

Primenjujući nejednakost (2) na funkciju $f_r(z) = f(rz)$, dobijamo

$$(1-r)\, Q[(1-r)^{-1} M_1(r^2,f)] \leq K\, I_Q(r,f),$$

a odavde sledi (1). ⊠

Primedba. Izvođenje nejednakosti (2.3′) u dokazu teoreme 1 zavisi samo od pretpostavke da $Q \in \tilde{\Delta}(p,2)$, što je, zajedno sa (2.2), primenjeno u dokazu leme 3 da bi se izvela nejednakost (3).

5. Primeri uz teoreme 1, 2 i 3

Postupak kojim je dokazana teorema 1 može se se iskoristiti da se dobiju neke informacije o koeficijentima funkcije iz prostora H_Q. Navodimo jedan primer.

Primer 1. Neka je $Q \in \Delta_{\infty}(p,q)$. (i) Ako je $q = 2$ i $f \in H_Q$, onda je $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-2} Q(n|a_n|) < \infty$. (ii) Ako je $p = 2$ i $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-2} Q(n|a_n|) < \infty$, onda $f \in H_Q$.

U ovom primeru je sadržana Hardy-Littlewoodova teorema o koeficijentima H^p-funkcija [15: teoreme 6.2 i 6.3].

Prvo tvrđenje se lako izvodi iz nejednakosti (2.2) i (2.3') a drugo se može izvesti iz procene

$$I_Q(f) \le K \int_0^1 Q(\sqrt{\varepsilon(r)})\, dr, \qquad Q \in \bar{\Delta}(2,q). \tag{1}$$

Pri tome se koristi teorema 6 [65], koju ovde formulišemo u sledećem obliku.

Lema 4. Neka je $(b_n : n \ge 1)$ niz nenegativnih realnih brojeva, $\Psi(r) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n r^n$ i $Q \in \Delta_\infty(p,q)$. Tada postoji pozitivna konstanta K, koja ne zavisi od (b_n), takva da je

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} Q\Big(\sum_{k\in I_n} b_k\Big) \le K + K\int_0^1 Q(\Psi(r))\, dr,$$

$$\int_0^1 Q(\Psi(r))\, dr \le K + K\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} Q\Big(\sum_{k\in I_n} b_k\Big).$$

Napominjemo da nejednakosti (1) i (2.3') predstavljaju uopštenje odgovarajućeg rezultata F. Hollanda i J. B. Twomeya [38] o H^p prostorima.

Primer 2. O dualu Hardy-Orliczevih prostora

Linearne funkcionale na Hardy-Orliczevim prostorima razmatrao je R. Lesniewicz [51, 52] ali bez konkretne reprezentacije duala. Teorema 2, zajedno sa rezultatima A. L. Shieldsa i D. L. Williamsa [93], omogućava nam da odredimo prostor $(H_Q)^*$ u slučaju kad $Q \in \Delta_\infty(p,q)$, $q < 1$. Naime, tada je prostor $(H_Q)^*$ izomorfan prostoru $\mathbb{B}'(\Psi)$, gde je

$$\Psi(r) = r^{\gamma+2}\, Q^-(1/r), \qquad \gamma > 1/p - 2.$$

Sparivanje se zadaje bilinearnom formom

$$(f,g) = \int_{\mathbb{D}} f(z)\, g(\bar z)(1-|z|)^{\gamma} \mu(dz), \qquad f \in H_Q, \quad g \in \mathbb{B}'(\Psi). \tag{2}$$

Prostor $\mathbb{B}'(\Psi)$ čine analitičke funkcije g na $\mathbb{D}$ koje zadovoljavaju uslov

$$\|g\|'_\Psi = \sup\{|g(z)|\Psi(1-|z|) : z \in \mathbb{D}\} < \infty.$$

Ako je $Q(u) = u^p(\log^+ u)^{\alpha}$, $p < 1$, $\alpha \ge 0$, može se uzeti da je

$$Q^-(u) = u^{1/p}(\log(1+u))^{-\alpha/p}, \qquad u \ge 1. \tag{3}$$

Odatle sledi da je dual prostora $H^p(\log^+ H)^{\alpha}$, $p < 1$, izomorfan sa $\mathbb{B}'(\Psi)$, $\Psi(r) = r(1+|\log r|)^{-\alpha/p}$, u odnosu na formu (2) sa $\gamma = 1/p - 1$. U slučaju $\alpha = 0$ ovaj rezultat pripada Durenu, Rombergu i Shieldsu [16].

Korišćenjem teoreme 3 mogu se dobiti slični rezultati o dualnosti Bergman-Orliczevih prostora.

Primer 3. Teorema 2 neće važiti ako se izostavi pretpostavka da je $q < 1$. Neka je, na primer,

$$Q(u) = u(1+|\log u|)^{-1}, \quad u > 0.$$

Tada $Q \in \Delta_\infty(p,1)$ za svako $p < 1$ i može se uzeti $Q^-(u) = u\log(1+u)$. Kako $\mathbb{M}_1(r,f)$ raste po r i $\varphi(r) = 1/rQ^-(1/r) \geq K/(1+|\log r|)$, prostor $\mathbb{B}(\varphi)$ sadrži jedino nulu. S druge strane, $\mathrm{Env}(H_Q)$ je beskonačne dimenzije jer $(H_Q)^*$ razdvaja tačke u H_Q [52 I].

Teorema 3 je primenljiva i u ovom slučaju, za razliku od teoreme 2. Prostor $\mathrm{Env}(A_Q)$ izomorfan je $\mathbb{B}(\Psi)$, gde je

$$\Psi(r) = r/(1+|\log r|).$$

6. Razlaganje Bergman-Orliczevih prostora

Do kraja ove glave služićemo se oznakama: $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, $I_n = \{k:\ 2^n \leq k < 2^{n+1},\ k \in \mathbb{N}\}$ $(n=0, 1, \ldots)$ i

$$f_n(z) = \sum_{k\in I_n} a_k z^k.$$

Teorema 4. Ako $Q \in \Delta_\infty(p,q)$, $1 < p \leq q$, onda je

$$(1) \qquad Q(|f(0)|) + \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} I_Q(f_n) \leq K + K\,J_Q(f),$$

$$(2) \qquad J_Q(f) \leq K + K\,Q(|f(0)|) + K\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} I_Q(f_n),$$

gde je

$$J_Q(f) = \int_0^1 I_Q(r,f)\,dr.$$

U slučaju $Q(u) = u^p$, $1 < p < \infty$, ovaj rezultat je dokazan u [66]; tamo su dokazane i neke generalizacije na prostore sa mešovitim normama. Ovde se služimo sličnim metodom.

Lema 5. Neka je $h(z) = \sum_{k=m}^{n} a_k z^k$, $0 \leq m < n$. Tada je

$$I_Q(h) r^{nq} \leq I_Q(r,h) \leq I_Q(h) r^{np}$$

ako $Q \in \bar{\Delta}(p,q)$.

Dokaz. Neka je $g(z) = \sum_{k=m}^{n} \bar{a}_k z^{n-k}$. Tada je

$$I_Q(r,h) = \int_0^{2\pi} Q(|g(e^{it}/r) r^n|)\,dt/2\pi \geq I_Q(1/r, g)\,r^{nq}.$$

Kako je g polinom, funkcija $|g|^p$ je subharmonijska u celoj ravni i, prema tome, subharmonijska je i $Q(|g|)$. Zato je $I_Q(r^{-1}, g) \geq I_Q(g) = I_Q(h)$. Time je dokazana prva nejednakost; druga se dokazuje na sličan način. ☒

Lema 6. Neka $Q \in \Delta_\infty(p,q)$, $p > 1$. Tada je

$$I_Q(r,f_n) \leq K + K\, I_Q(r,f),$$

pri čemu K ne zavisi od n.

Ovaj rezultat se izvodi, na isti način kao kad je funkcija Q stepena, iz nejednakosti [111 II: Ch. XII (4.33)]

$$(3) \qquad \int_0^{2\pi} Q(|\tilde{g}(t)|)dt \leq K + K\int_0^{2\pi} Q(|g(t)|)\,dt .$$

Ovde $\tilde{g}$ označava konjugovanu funkciju. Konstanta K ne zavisi od $g \in L_Q(0, 2\pi)$.

Dokaz teoreme 4. Pretpostavimo, samo iz tehničkih razloga, da je $f(0) = 0$. Teorema se svodi na slučaj kad $Q \in \tilde{\Delta}(p,q)$. (Videti lemu III. 6.) Neka $Q \in \tilde{\Delta}(p,q)$ $(1<p\leq q)$. Tada je

$$1+ I_Q(r,f) \geq K\,(1-r)\sum_{n=0}^{\infty} 2^n(1+ I_Q(r,f))\, r^{2^n}$$
$$\geq K\,(1-r)\sum_{n=0}^{\infty} 2^n\, I_Q(r,f_n)\, r^{2^n},$$

pri čemu je primenjena lema 6. Odavde dobijamo, primenom leme 5,

$$K + K\, I_Q(r,f) \geq (1-r)\sum_{n=0}^{\infty} 2^n\, I_Q(f_n)\, r^{2^n(q+1)}.$$

Integracijom ove nejednakosti dobijamo nejednakost (1).

Da bismo dokazali nejednakost (2), stavimo

$$F_{m,r}(z) = Q(\sum_{n=0}^{m} |h_n(z)| r^{2^n}),$$

gde je $h_n(z) = z^{-2^n} f_n(z)$. Kako je h_n polinom a Q konveksna funkcija, to je funkcija $F_{m,r}$ subharmonijska u celoj ravni. Iz toga sledi

$$\int_0^{2\pi} F_{m,r}(re^{it})\,dt \leq \int_0^{2\pi} F_{m,r}(e^{it})\,dt$$

[36: teorema 2.12]. Odavde dolazimo do nejednakosti

$$2\pi\, I_Q(r,f) \leq \int_0^{2\pi} Q(\sum_{n=0}^{\infty} |f_n(e^{it})| r^{2^n})\,dt.$$

Primenom leme 4 sada dobijamo

$$2\pi\, J_Q(f) \leq K + K\int_0^{2\pi}\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n}\, Q(|f(e^{it})|)\,dt.$$

Time je dokaz završen. ☒

Iz teoreme 4 i leme 5 sledi nejednakost (ako je $p>1$)

$$-1+ K^{-1} J_Q(f) \leq Q(|f(0)|) + \sum_{n=0}^{\infty} J_Q(f_n) \leq K + K\, J_Q(f),$$

kojom je opisana jedna bezuslovna dekompozicija prostora A_Q na prostore konačne dimenzije. Lako je dokazati (direktno ili pomoću teoreme o zatvorenom grafiku) da je jednakošću

$$|||f|||_Q^* = \inf \{\rho > 0 : |f(0)|/\rho + \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} I_Q(f_n/\rho) \le 1\}$$

definisana ekvivalentna norma na A_Q (ako $Q \in \Delta_\infty(p,q)$, $p > 1$).

Primedba. Nejednakost (3) dokazana je u [111 II] pod pretpostavkom da je $Q(u) = u^p \phi(u)$, gde je ϕ sporo promenljiva funkcija, ali se dokaz lako prenosi na funkcije klase $\Delta_\infty(p,q)$. Taj dokaz se zasniva na jednoj varijanti interpolacione teoreme Marcinkiewicza [111 II: str. 116]. Postoji i elementarniji dokaz [88].

7. Bezuslovni bazis u A_Q

Upotrebićemo teoremu 4 da bismo konstruisali bezuslovni bazis u prostoru A_Q. To je sistem $(w_n : n \ge 0)$, definisan na sledeći način:

$$w_0(z) = 1,$$

$$w_n(z) = \frac{z^n}{n} \frac{1-z^n}{1-z} \quad \text{ako} \quad n \in \{2^m : m = 0, 1, \dots\},$$

$$w_{n+k}(z) = w_n(\varepsilon_m^{-k} z) \quad \text{ako je} \quad n = 2^m, \quad 0 \le k < n.$$

Ovde je $\varepsilon_m = \exp(2\pi i/n)$.

Ako je $n = 2^m$ i $0 \le k < n$, tada je w_{n+k} jedinstveni polinom oblika $\sum_{j \in I_m} b_j z^j$ koji zadovoljava uslov

$$w_{n+k}(\varepsilon_m^j) = \begin{cases} 1, & j = k \\ 0, & j \ne k. \end{cases} \qquad (0 \le j < n)$$

Neka je $\hat{f}(0) = f(0) = a_0$ i

$$\hat{f}(2^m + k) = f_m(\varepsilon_m^k) = \sum_{j \in I_m} a_j \varepsilon_m^{kj}, \quad 0 \le k < 2^m.$$

Tada je

$$(1) \qquad f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{f}(n) w_n(z), \qquad z \in \mathbb{D}.$$

Ova reprezentacija je jedinstvena, tj. ako je $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n w_n(z)$, $z \in \mathbb{D}$, onda je $b_n = \hat{f}(n)$.

Teorema 5. Funkcija f pripada prostoru A_Q ($Q \in \Delta_\infty(p,q)$, $p > 1$) ako i samo ako je

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)^{-2} Q(|\hat{f}(n)|) < \infty.$$

Osim toga, prostor A_Q je izomorfan prostoru $L_Q(\mathbb{N}, \lambda)$, gde je $\mathbb{N} = \{0, 1, \dots\}$ i $\lambda(\{n\}) = (n+1)^{-2}$.

Sledeći rezultat J. Lindenstraussa i A. Pelczynskog [55] predstavlja specijalan slučaj drugog dela teoreme 5.

Teorema (LP). Ako je $1 < p < \infty$, onda su prostori A^p i ℓ^p izomor-

Dokaz teoreme 5. Možemo pretpostaviti da $Q\in\tilde{\Delta}(p,q)$ i $f(0)=0$. Tada je, prema poznatom rezultatu iz interpolacije trigonometrijskim polinomima [111 II: Ch. X,(7.4), (7.6)] ,

$$2^{-n}\sum_{k=0}^{2^n-1} Q(|f_n(\varepsilon_n^k)|) \le K I_Q(f_n),$$

pri čemu K ne zavisi od n. Iz toga i teoreme 4 dobijamo nejednakost

$$(2) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} n^{-2} Q(|\hat{f}(n)|) \le K + K J_Q(f).$$

Time je dokazana implikacija

$$f\in A_Q \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} n^{-2} Q(|\hat{f}(n)|) < \infty.$$

Da bismo dokazali obrat, pretpostavimo da je

$$(3) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} n^{-2} Q(|\hat{f}(n)|/\alpha) = 1,$$

gde je α pozitivna konstanta koju ćemo naknadno odabrati. Neka je

$$Q^*(u) = \sup\{su - Q(s):\ s\ge 0\}$$

(komplementarna funkcija). Tada

$$(4) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} n^{-2} Q^*(c_n) \le 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} n^{-2}|\hat{f}(n)c_n| \le 2 .$$

Da bismo nastavili dokaz, potrebna nam je sledeća lema.

Lema 7. Neka je funkcija $h(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n z^n$ analitička u $\mathbb{D}$ i $h_n(z) = \sum_{k\in I_n} \gamma_k z^k$. Tada je

$$\int_0^{2\pi} f_n(e^{it})\, h_n(e^{-it})\, dt/2\pi = 2^{-n} \sum_{k\in I_n} \hat{f}(k)\, \hat{h}(k).$$

Primenjujući nejednakost (2) na funkcije h i Q^*, dobijamo

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-2} Q^*(|\hat{h}(n)|) \le K + K \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} I_{Q^*}(h_n).$$

Odavde stižemo do implikacije, pomoću (4) i leme 7,

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} I_{Q^*}(h_n) \le 1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n}\left|\int_0^{2\pi} f_n(e^{it})\, h_n(e^{-it})\, dt\right| \le K_1 .$$

Korišćenjem nejednakosti (6.3) i leme 6, zaključujemo da se u ovoj implikaciji umesto $h_n(e^{-it})$ može pisati $g_n(t)$, pri čemu je g_n proizvoljna funkcija iz $L_{Q^*}(0,2\pi)$; na desnoj strani će se pojaviti konstanta K_2 koja ne zavisi od f, g_n i α. Izaberimo α tako da je $2\pi = K_2\alpha$. Tada

$$(5) \qquad \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} I_{Q^*}(g_n) \le 1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n}\left|\int_0^{2\pi} f_n(e^{it})\, g_n(t)\, dt/2\pi\right| \le 1,$$

gde $g_n\in L_{Q^*}(0,2\pi)$, $I_{Q^*}(g_n) = \int_0^{2\pi} Q^*(|g_n(t)|)\, dt/2\pi$.

Neka je $g_n(t) = Q_+'(|f_n(e^{it})|)\, \operatorname{sign} f_n(e^{it})$. Tada je

$$(6) \qquad I_Q(f_n) + I_{Q^*}(g_n) = \int_0^{2\pi} f_n(e^{it})\, g_n(t)\, dt/2\pi .$$

Pretpostavimo da je $\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} I_{Q^*}(g_n) = \beta \in [1,\infty[$. Tada je, zbog konveksnosti Q^*,

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} I_{Q^*}(g_n/\beta) \le 1$$

i, prema relacijama (5) i (6),

$$\beta + \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} I_Q(f_n) \le \beta .$$

Odavde sledi da je $f(z) = 0$ za svako $z \in \mathbb{D}$, što je nemoguće zbog (3). Na sličan način se dokazuje nemogućnost jednakosti $\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} I_{Q^*}(g_n) = \infty$. Dakle, $\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} I_{Q^*}(g_n) < 1$. Sada iz (5) i (6) sledi

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} I_Q(f_n) \le 1.$$

Time je dokazana implikacija $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-2} Q(|\hat{f}(n)|) < \infty \Rightarrow f \in A_Q$.

Izomorfnost prostora A_Q i $L_Q(\mathbb{N},\lambda)$ sadržana je u prethodnim razmatranjima, a može se se izvesti i na osnovu teoreme o zatvorenom grafiku. ☒

Primedba. Primena leme 6 i nejednakosti (2) i (6.3) sa funkcijom Q^* umesto Q bilo je moguće zbog toga što je

$$r^{q'} Q^*(u) \le Q^*(ru) \le r^{p'} Q^*(u), \quad u > 0,$$

ako $Q \in \bar{\Delta}(p,q)$, $p > 1$, pri čemu je $p' = p/(p-1) < \infty$, $q' = q/(q-1) > 1$.

Dokaz leme 7. Lako je proveriti da je

$$f_n(z) = \sum_{k \in I_n} \hat{f}(k)\, w_k(z)$$

i

$$\int_0^{2\pi} w_n(e^{it})\, w_m(e^{-it})\, dt = 0 \quad \text{za } m \ne n.$$

Zato je

$$\int_0^{2\pi} f_n(e^{it})\, h_n(e^{-it})\, dt = \sum_{k \in I_n} \hat{f}(k)\, \hat{h}(k) \int_0^{2\pi} w_k(e^{it})\, w_k(e^{-it})\, dt.$$

Primenom Parsevalove formule dobijamo

$$\int_0^{2\pi} w_k(e^{it})\, w_k(e^{-it})\, dt = 2\pi \cdot 2^{-n}, \quad k \in I_n.$$

Time je dokaz završen. ☒

Primedbe. 1. Ako je $Q(t) = t^p$, $1 < p < \infty$, onda je izvođenje teoreme 5 iz teoreme 4 mnogo prostije (videti [66]). Naime, tada teorema 5 sledi direktno iz teoreme 4 i nejednakosti

$$K^{-1} I_Q(f_n) \le 2^{-n} \sum_{k=0}^{2^n-1} |f_n(\varepsilon_n^k)|^p \le K\, I_Q(f_n).$$

2. Drugi deo dokaza teoreme 5 pokazuje da je dual prostora A_Q

(pod uslovima teoreme 5) izomorfan prostoru $\mathbf{A}_{Q^*}$. Isti zaključak sledi iz teoreme 5 i dobro poznatih rezultata o dualnosti Orliczevih prostora. Izomorfnost prostora $(\mathbf{A}^p)^*$ i $\mathbf{A}^{p'}$, $1<p<\infty$, prvi su dokazali V. Zaharjuta i V. I. Judovič [110], i to korišćenjem projekcije prostora $L^p(\mathbb{D})$ na $\mathbf{A}^p$.

3. Teorema 5 pokazuje da prostor $\mathbf{A}_Q$ ima sasvim drugačiju strukturu od svog natprostora $L_Q(\mathbb{D})$. Postoje i druge razlike, koje su uslovljene svojstvima analitičkih funkcija. Pretpostavimo da je Q konveksna Orliczeva funkcija klase $\Delta_\infty(p,q)$ $(q\geq p\geq 1)$. Tada je prostor $\mathbf{A}_Q$ strogo konveksan i gladak. (Glatkost se može ustanoviti pomoću poluskalarnog proizvoda [82, 25].) Iz toga, na primer, sledi da prostor $\mathbf{A}^1$ nije izometričan sa ℓ^1 (izomorfan jeste).

Literatura

1. A. B. Aleksandrov, "Essays on non locally convex Hardy classes", Lecture Notes in Math. 864(1981), 1-90.
2. Z. Altschuler, "Uniform convexity in Lorentz sequence spaces", Israel J. Math. 20(1975), 260-274.
3. T. Ando, "Linear functionals on Orlicz spaces", Nieuw Arch. Wiskunde 8(1960), 1-16.
4. A. Benedeck, R. Panzone, "The spaces L^p with mixed norm", Duke Math. J. 28(1961), 301-324.
5. A. Beck, "A convexity condition in Banach spaces and the strong law of large numbers", Proc. Amer. Math. Soc. 13(1962), 329-334.
6. Z. Birnbaum, W. Orlicz, "Über die Verallgemeinerung des Begriffes der zueinander konjugirten Potenzen", Studia Math. 3(1931), 1-67.
7. D. W. Boyd, "Indices for the Orlicz spaces", Pacific J. Math. 38 (1971), 315-323.
8. J. A. Clarkson, "Uniformly convex spaces", Trans. Amer. Math. Soc. 40(1936), 396-414.
9. M. M. Day, "Reflexive Banach spaces not isomorphic to uniformly convex spaces", Bull. Amer. Math. Soc. 47(1941), 313-317.
10. M. M. Day, "The spaces L^p with $0<p<1$", Bull. Amer. Math. Soc. 46 (1936), 396-414.
11. M. M. Day, "Normed linear spaces", Berlin-Göttingen-Heidelberg, Springer-Verlag 1958.
12. M. M. Day, "Uniform convexity in factor and conjugate spaces", Ann. of Math. 45(1944), 375-385.
13. J. Diestel, "Geometry of Banach spaces. Selected topics", Lect. Notes in Math. 485(1975).
14. J. Dixmier, "Sur une theoreme de Banach", Duke Math. J. 15(1948), 1051-1071.
15. P. L. Duren, "Theory of H^p spaces", Academic Press 1970.
16. P. L. Duren, B. W. Romberg, A. L. Shields, "Linear functionals on H_p spaces with $0<p<1$", J. Reine Angew. Math. 238(1969), 32-60.
17. A. Dvoretzky, C. A. Rogers, "Absolute and unconditional convergence in normed linear spaces", Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. 36 (1950), 192-197.
18. P. Enflo, "A counterexample to the approximation property in Banach spaces", Acta Math. 130(1973), 309-317.
19. T. Figiel, "On the moduli convexity and smoothness", Studia Math. 56(1976), 121-155.
20. T. Figiel, "Uniformly convex norms on Banach lattices", Studia Math. 68(1980), 215-247.
21. T. Figiel, G. Pisier, "Séries aléatoires dans les espaces uniformément convexes ou uniformément lisses", C. R. Acad. Sci. Paris 279(1974), 611-614.
22. T. Figiel, J. Lindenstrauss, V. D. Miljman, "The dimension of almost spherical sections of convex bodies", Acta Math. 139 (1977), 53-94.
23. T. M. Flett, "Lipschitz spaces of functions on the circle and

24. D. P. Giesy, "On a convexity condition in normed linear spaces", Trans. Amer. Math. Soc. 125(1966), 114-146.

25. J. R. Giles, "Classes of semi-inner-product spaces", Trans. Amer. Math. Soc. 129(1967), 436-446.

26. J. R. Giles, "A non-reflexive Banach space has non-smooth third conjugate space", Canad. Math. Bull. 17(1974), 117-119.

27. J. Globevnik, "On complex strict and uniform convexity", Proc. Amer. Math. Soc. 47(1975), 175-178.

28. Z. G. Gorgadze, V. I. Tarieladze, "On geometry of Orlicz spaces", Lecture Notes in Math. 828(1980), 47-51.

29. В. И. Гурарий, А. С. Маркус, "Несколько замечаний о векторных и операторных рядах в равномерно выпуклых и равномерно гладких пространствах", Мат. исслед. 10(1975), 126-134.

30. J. Gustavsson, J. Peetre, "Interpolation of Orlicz spaces", Studia Math. 60(1977), 33-59.

31. U. Haagerup, "Les meilleures constantes de l'inegalite de Khintchine", C. R. Acad. Sci. Paris 286(1978), 259-262.

32. O. Hanner, "On the uniform convexity of L^p and l^p", Arkiv f. Math. 3(1956), 239-244.

33. G. H. Hardy, J. E. Littlewood, "Elementary theorems concerning power series with pozitive coefficients and moment constants of pozitive functions", J. für Math. 157(1927), 141-158.

34. L. A. Harris, "A continuous form of Schwartz's lemma in normed linear spaces", Pac. J. Math. 38(1971), 635-639.

35. P. R. Halmos, "Measure theory", New York, D. van Nostrand 1950.

36. W. K. Hayman, P. B. Kennedy, "Subharmonic functions", London-New York-San Francisco, Academic Press 1976.

37. E. Hille, R. S. Phillips, "Functional analysis and semigroups", Amer. Math. Soc. Colloquium Publ. 31, 1957.

38. F. Holland, J. B. Twomey, "On Hardy classes and the area function", J. London Math. Soc. 17(1978), 275-283.

39. V. I. Istratescu, "On complex strictly convex spaces III", Rend. Istit. Mat. Univ. Trieste 10(1978), 48-56.

40. R. C. James, "A non-reflexive Banach space isometric with its second conjugate", Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. 36(1950), 192-197.

41. R. C. James, "Reflexivity and the supremum of linear functionals", Ann. of Math. 66(1957), 159-169.

42. R. C. James, "Characterizations of reflexivity", Studia Math. 23 (1964), 205-216.

43. R. C. James, "Reflexivity and the sup of linear functionals", Israel J. Math. 13(1972), 289-300.

44. М. И. Кадец, "Безусловно сходящиеся ряды в равномерно выпуклом пространстве", Успехи мат. наук 11(1956), 185-190.

45. М. И. Кадец, "Доказательство топологической эквивалентности всех сепарабельных бесконечномерных пространств Банаха", Функц. анал. 1(1967), 61-70.

46. М. И. Кадец, "Геометрия нормированных пространств", Мат. анализ 13(1975), 99-127.

47. A. Kamińska, "On uniform convexity of Orlicz spaces", Proc. Amst. Acad. Sci. A 85(1982), 27-36.

48. G. Köthe, "Topological vector spaces I", Berlin-Heidelberg-New York, Springer-Verlag 1969.

49. М. А. Красносельский, Я. Б. Рутицкий, "Выпуклые функции и пространства Орлича", Москва 1958.

50. С. Г. Крейн, Ю. И. Петунин, Е. М. Семенов, "Интерполяция линейных операторов", Москва 1978.

51. R. Leśniewicz, "On Hardy-Orlicz spaces I, II", Bull. Acad. Pol. Sci. 14(1966), 145-150; 15(1967), 277-281.

52. R. Leśniewicz, "On linear functionals on Hardy-Orlicz spaces I, II, III", Studia Math. 46(1973), 53-77; 46(1973), 259-295; 47 (1973), 261-284.

53. J. Lindenstrauss, "On the modulus of smoothness and divergent series in Banach spaces", Mich. Math. J. 10(1963), 241-252.

54. J. Lindenstrauss, A. Pelczynski, "Absolutely summing operators in $\mathcal{L}_p$ spaces and their applications", Studia Math. 29(1968), 275-326.

55. J. Lindenstrauss, A. Pelczynski, "Contributions to the theory of classical Banach spaces", J. Funct. Anal. 8(1971), 225-249.

56. J. Lindenstrauss, H. P. Rosenthal, "The $\mathcal{L}_p$ spaces", Isr. J. Math. 7(1969), 325-349.

57. J. Lindenstrauss, L. Tzafriri, "Classical Banach spaces I. Sequence spaces", Ergebnisse 92, Springer-Verlag 1977.

58. J. Lindenstrauss, L. Tzafriri, "Classical Banach spaces II. Function spaces", Ergebnisse 97, Springer-Verlag 1979.

59. J. Lindenstrauss, L. Tzafriri, "On the complemented subspace problem", Isr. J. Math. 9(1971), 263-269.

60. В. И. Лиокумович, "Существование B-пространства с невыпуклым модулем выпуклости", Изв. высших уч. зав. 12(1973), 43-50.

61. П. И. Лизоркин, "О базисах и мультипликаторах в пространствах $B^r_{p,\theta}(\Pi)$", Труды мат. инст. АН СССР 143(1977), 88-104.

62. G. Lumer, "Semi-inner-product spaces", Trans. Amer. Math. Soc. 100(1961), 29-43.

63. R. P. Maleev, S. L. Trojanski, "On the moduli of convexity and smoothness in Orlicz spaces", Studia Math. 54(1975), 131-141.

64. B. Maurey, "Type et cotype dans les espaces munis de structure locales inconditionnelles", Seminaire Maurey-Schwartz, 1973-4, Exposes 24-25, Ecole Polytechnique, Paris.

65. M. Mateljević, M. Pavlović, "L^p-behavior of power series with positive coefficients and Hardy spaces", Proc. Amer. Math. Soc. (u štampi).

66. M. Mateljević, M. Pavlović, "L^p-behavior of the integral means of analytic functions", Studia Math. vol. 77(pojaviće se).

67. В. Д. Мильман, "Геометрическая теория пространств Банаха I", Успехи мат. наук 25(1970), 113-174.

68. В. Д. Мильман, "Геометрическая теория пространств Банаха II", Успехи мат. наук 26(1971), 73-149.

69. В. Д. Мильман, "Новое доказательство теоремы А. Дворецкого о сечении выпуклых тел", Функц. ан. и прилож. 5(1971), 28-37.

70. Д. П. Мильман, "О некоторых признаках рефлексивности пространств типа B", Докл. АН СССР 20(1938), 243-246.

71. H. W. Milnes, "Convexity of Orlicz spaces", Pac. J. Math. 7(1957),

72. С. Я. Новиков, "Котип и тип функциональных пространств Лоренца", Мат. заметки 32(1982), 213-221.

73. J. Musielak, W. Orlicz, "On modular spaces", Studia Math. 18 (1959), 49-65.

74. J. Musielak, "Some problems concerning modular spaces of analytic functions", Fasc. Math. 11(1979), 17-24.

75. H. Nakano, "Generalized modular spaces", Studia Math. 31(1968), 439-449.

76. W. Orlicz, "Uber unbedingte Konvergenz in Funktionenräumen I", Studia Math. 4(1933), 33-37.

77. W. Orlicz, "Uber eine gewisse Klasse von Räumen vom Typus B", Bull. Intern. Acad. Pol. sér. A(1932), 207-220.

78. W. Orlicz, "Uber Räume (L^M)", ibid. (1936), 93-107.

79. M. Pavlović, "Модули с-выпуклости нормированных пространств I. Пространства L_p", Мат. весник 6(1982),

80. M. Pavlović, "Модули с-выпуклости нормированных пространств II. Пространства Орлича", Мат. весник 6(1982),

81. M. Pavlović, "Некоторые неравенства в пространствах L^p", Мат. весник 6(1982), 67-73.

82. M. Pavlović, "Glatkost i poluskalarni proizvod u normiranim prostorima", Magistarski rad, Beograd 1978.

83. J. R. Partington, "Hadamard-Landau inequalities in uniformly convex spaces", Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 90(1981), 259-264.

84. J. Peetre, "Remark on the dual of an interpolation space", Math. Scand. 34(1974), 124-128.

85. Ch. Pommerenke, "Univalent functions", Göttingen 1975.

86. R. S. Phillips, "On weakly compact subsets of a Banach space", Amer. J. Math. 65(1943), 108-136.

87. M. M. Rao, "Smoothness in Orlicz spaces I, II", Proc. Amst. Acad. Sci. 28(1965), 671-690.

88. R. Ryan, "Conjugate functions in Orlicz spaces", Pacific J. Math. 13(1963), 1371-1377.

89. L. Schwartz, "Geometry and Probability in Banach spaces", Lect. Notes in Math. 852(1981).

90. E. J. McShane, "Linear functionals on certain Banach spaces", Proc. Amer. Math. Soc. 1(1950), 402-408.

91. J. H. Shapiro, "Remarks on F-spaces of analytic functions", Lect. Notes in Math. 604(1977), 107-124.

92. J. H. Shapiro, "Mackey topologies, reproducing kernels and diagonal maps on the Hardy and Bergman spaces", Duke Math. J. 43 (1976), 187-202.

93. A. L. Shields, D. L. Williams, "Bounded projections, duality and multipliers in spaces of analytic functions", Trans. Amer. Math. Soc. 162(1971), 287-302.

94. A. L. Shields, D. L. Williams, "Bounded projections, duality and multipliers in spaces of harmonic functions", J. Reine Angew. Math. 299/300(1978), 256-279.

95. I. Singer, "Bases in Banach spaces", Berlin-Heidelberg-New York Springer-Verlag 1970.

96. M. A. Smith, "A smooth, non-reflexive second conjugate space", Bull. Austral. Math. Soc. 15(1976), 129-131.

97. M. A. Smith, "Rotundity and smoothness in conjugate spaces", Proc. Amer. Math. Soc. 61(1976), 232-234.

98. K. Sundaresan, "Orlicz spaces isomorphic to strictly convex spaces", Proc. Amer. Math. Soc. 17(1966), 1353-1356.

99. K. Sundaresan, "Uniform convexity of Banach space $\ell(\{p_i\})$, Studia Math. 25(1965), 337-341.

100. S. J. Szarek, "On the best constants in Khintchine's inequality", Studia Math. 58(1976), 197-208.

101. В. Л. Шмульян, "О дифференцируемости нормы в пространстве Банаха", Докл. АН СССР 27(1940), 643-648.

102. E. Thorp, R. Whitley, "The strong maximum modulus theorem for analytic functions into Banach spaces", Proc. Amer. Math. Soc. 18(1967), 640-646.

103. N. Tomczak-Jaegerman, "The moduli of smoothness and convexity and the Rademacher averages of the trace class S_p $(1<p<\infty)$", Studia Math. 50(1974), 163-182.

104. Е. В. Токарев, "О с-выпуклых банаховых решетках", Функц. анал. и прилож. 15(1981), 90-91.

105. B. Turret, "Rotundity of Orlicz spaces", Proc. Acad. Amsterdam A 79(1976), 462-469.

106. B. Turret, "Fenchel-Orlicz spaces", Rozprawy Math. 181(1981).

107. J. J. Uhl, Jr., "Orlicz spaces of finitely additive set functions", Studia Math. 29(1967), 19-58.

108. J. Y. T. Woo, "On modular sequence spaces", Studia Math. 48(1973), 271-289.

109. A. C. Zaanen, "Linear analysis", Amsterdam 1953.

110. В. Захарюта, В. И. Юдович, "Общий вид линейного функционала в H_p'", Успехи мат. наук 19(1964), 139-142.

111. A. Zygmund, "Trigonometric series I, II", Cambridge 1959.

112. J. L. Krivine, "Sous espaces de dimension finie des espaces de Banach reticulés", Ann. of Math. 104(1976), 1-29.

113. W. A. J. Luxemburg, A. C. Zaanen, "Riesz spaces", North. H. Pub. Co. 1971.

114. J. Peetre, "Locally analytically pseudo-convex topological vector spaces", Studia Math. 73(1982), 253-262.

115. Ж. П. Кахан, "Случайные функциональные ряды", Москва 1973.

116. И. А. Комарчев, "О 2-абсолютно суммирующих операторах в некоторых банаховых пространствах", Мат. заметки 25(1979), 591-602.

117. M. Hladnik, M. Omladič, "On complex rotundity and smoothness", Glasnik mat. 12(1977), 73-79.