Математички факултет

Универзитет у Београду

Милош Миловановић

Примена симетрија у решавању диференцијалних једначина

дипломски рад

Ментор:
др Срђан Вукмировић

Чланови комисије:
др Мирјана Ђорић
др Зоран Ракић

Београд, март 2008.

УВОД

У овом раду разматрамо решавање диференцијалних једначина употребом симетрија што је тема којом се бавио Софус Ли у другој половини деветнаестог века. Појмови Лијеве групе и алгебре, данас широко распрострањени, дугују своје постојање управо овим Лијевим радовима. Познавање теорије Лијевих група и алгебри од користи је, иако није неопходно, јер се у првој глави ови појмови уводе у оној мери у којој су потребни. Ипак, пажљиви читалац приметиће да неке ствари нису до краја разјашњене што је израз тежње да се избегне залажење у сложене и апстрактне конструкције које немају конкретне везе са основним током рада.

У првој глави уводимо основне појмове у вези са симетријама диференцијалних једначина као и Лијевим групама и алгебрама. Друга глава бави се диференцијалним једначинама са једном уоченом симетријом и показује се како нам познавање симетрије омогућава снижавање реда диференцијалне једначине. У трећој глави разматра се општи случај када је алгебра симетрија једначине вишедимензионална и излаже се метода диференцијалних инваријаната која омогућава да се ред једначине снизи онолико пута колико износи димензија алгебре. Најзад, у четвртој глави уводи се појам решивости алгебре који је од кључног значаја за успешну примену методе.

Захваљујем члановима комисије на пажљивом читању и корисним примедбама, као и др Милану Рајковићу са Института за нуклеарну физику у Винчи на потребној литератури.

1 ОСНОВНИ ПОЈМОВИ

1.1 ПОЈАМ СИМЕТРИЈЕ У САВРЕМЕНОЈ МАТЕМАТИЦИ

По дефиницији Феликса Клајна симетрија је *дејство које дати облик оставља идентичним.* Ово је веома општа дефиниција примењива у скоро свим областима математике будући да је симетрија општи математички појам.

За елементарне примере послужићемо се геометријом која нам својом очигледношћу може открити шта се у овој замисли крије. Пођимо од круга који је најсиметричнији лик у равни. Круг ће остати исти ако га заротирамо око центра, или га рефлектујемо у односу на осу која пролази кроз центар круга. Наведена дејства јесу симетрије овог лика.

Други пример је квадрат. Његове симетрије су такође везане за центар. То су рефлексије у односу на дијагонале и на симетрале страница и ротације око центра за умножак правог угла. Ротација за 45^o већ није симетрија јер фугура неће бити иста.

Вратимо се сада дефиницији да размотримо кључне речи које у њој учествују. Најпре, *дејство* подразумева неки чин, утицај, динамику која мења или бар тежи да нешто промени. *Идентично* значи исто (лат. *idem*-исто), стално, постојано, тако рећи непромењиво. У српском језику, реч истина изведена је од корена *исто*, па се може сматрати директним преводом латинске позајмљенице идентитет. Од истог корена изводи се и глагол јесте.

Реч *облик* у корену садржи лик, па се можемо запитати какво је значење изведенице у односу на корен. Из претходног разматрања видимо да је симетрија нека промена која оставља истим. Другим речима, ми промену не видимо, јер нови лик идентификујемо са старим и то називамо истим обликом. Облик је, дакле, неки калуп идентитета који лику даје спољашње одређење, док нам симетрије говоре о динамици коју тај идентитет допушта. Лику се нешто дешава, али ми то видимо као исти облик.

Још један добар пример наведеног можемо наћи у геометрији. Реч је о релацији подударности која успоставља једнакост облика који се могу добити један од другог изометријским трансформацијама. Пример је врло сликовит јер показује како се идентитет задаје симетријама које су, у овом случају, трансформације равни које чувају дужине.

Последњи пример даћемо из области на коју се рад непосредно односи. Нека је дата диференцијална једначина

$$y` + y^2 - \frac{1}{x^2} = 0$$

и смена променљивих

$$x \mapsto ax,$$

$$y \mapsto \frac{1}{a}y.$$

Посматрајмо како се диференцијална једначина понаша при датој смени. Најпре, датом сменом извод постаје

$$y` = \frac{dy}{dx} \mapsto \frac{d(\frac{1}{a}y)}{d(ax)} = \frac{1}{a^2}y`,$$

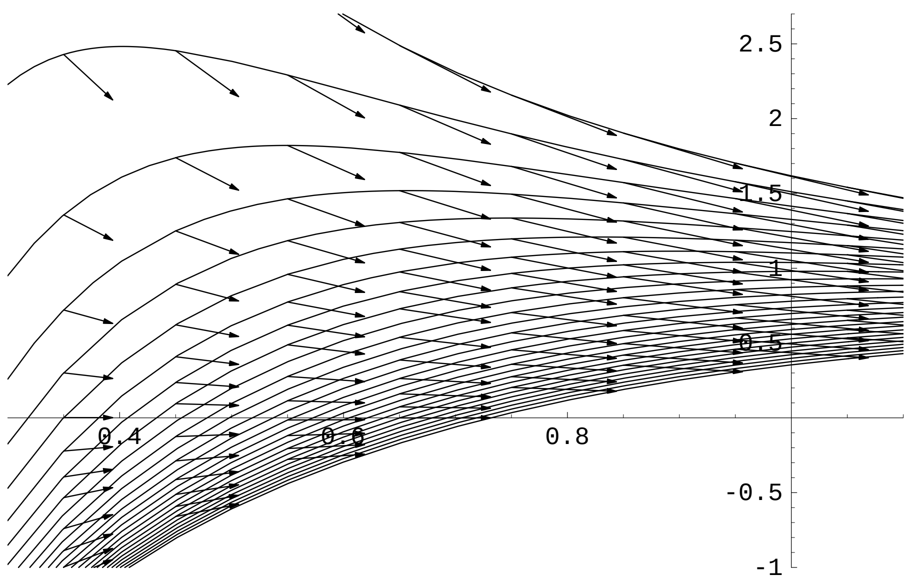
па ће једначина постати

$$\frac{1}{a^2}y` + \frac{1}{a^2}y^2 - \frac{1}{a^2x^2} = 0,$$

што после скраћивања даје

$$y` + y^2 - \frac{1}{x^2} = 0.$$

Једначина је сачувала облик, па ова смена променљивих представља њену симетрију. Да бисмо овај појам ближе одредили, најпре ћемо увести неке дефиниције.



Слика 1. На слици је приказано како симетрија једначине $y`+y^2-\frac{1}{x^2}=0$ представљена пољем стрелица преводи решења једно у друго

1.2 ДИФЕРЕНЦИЈАЛНЕ ЈЕДНАЧИНЕ

Дефиниција *1.2.1 Диференцијална једначина n-тог реда је једнакост облика*

$$F(x, y, y`, \dots, y^{(n)}) = 0$$

где је F глатка реална функција, а x и y променљиве. Функцију F називамо формом диференцијалне једначине.

Дефиниција *1.2.2 Експлицитно решење диференцијалне једначине је једнакост облика $y = \psi(x)$ где је ψ глатка реална функција таква да за свако x*

$$F(x, \psi(x), \psi`(x), \dots, \psi^{(n)}(x)) = 0.$$

Дефиниција *1.2.3 Имплицитно решење диференцијалне једначине је једнакост облика $\phi(x, y) = 0$ где је ϕ глатка реална функција таква да за сваку глатку функцију ψ такву да је $\phi(x, \psi(x)) = 0$ за свако x, $y = \psi(x)$ је експлицитно решење једначине.*

Дефиниција *1.2.4 (Коначно) решење једначине је њено експлицитно или имплицитно решење. Делимично решење једначине је диференцијална једначина нижег реда еквивалентна полазној у смислу да је свако решење једне једначине, решење и друге (семантичка еквиваленција).*

Дефиниција *1.2.5 Решавати диференцијалну једначину значи наћи њено коначно или делимично решење.*

1.3 СИМЕТРИЈЕ ДИФЕРЕНЦИЈАЛНЕ ЈЕДНАЧИНЕ

Дефиниција *1.3.1 Смена променљивих у диференцијалној једначини је пресликавање $T : (x, y) \mapsto (x_1, y_1)$ задато правилом*

$$x_1 = P(x, y),$$

$$y_1 = Q(x, y),$$

где су P и Q глатка инвертибилна пресликавања.

Овај се појам назива и тачкаста трансформација (x, y)-равни будући да пресликавања P и Q зависе само од тачке (x, y)-равни, а не и од њихове међузависности (нпр. од извода $y`(x)$).

Да бисмо записали правила промене извода $y`, y`` \dots$, при смени променљивих T, увешћемо оператор тоталног диференцирања

$$D = \frac{\partial}{\partial x} + y`\frac{\partial}{\partial y} + y``\frac{\partial}{\partial y`} + \dots$$

који делује на функцију дајући њен тотални извод по промењљивој x. Сада је

$$y_1` = \frac{dy_1}{dx_1} = \frac{DQ}{DP} = \frac{Q_x + y`Q_y}{P_x + y`P_y} = Q^{(1)}(x, y, y`).$$

Аналогно ће бити

$$y_1`` = \frac{dy_1`}{dx_1} = \frac{DQ^{(1)}}{DP} = \ldots = Q^{(2)}(x, y, y`, y``)$$

итд. што нам отвара пут следећој дефиницији.

Дефиниција ***1.3.2*** *n-то продужење смене T је пресликавање*

$$T^{(n)} : (x, y, \ldots, y^{(n)}) \mapsto (x_1, y_1, \ldots, y_1^{(n)})$$

задато правилом

$$\begin{aligned} x_1 &= P(x, y), \\ y_1 &= Q(x, y), \\ y_1` &= \frac{DQ}{DP} = Q^{(1)}(x, y, y`), \\ y_1^{(k)} &= \frac{DQ^{(k-1)}}{DP} = Q^{(k)}(x, y, y`, \ldots, y^{(k)}), \ \ k = 2, \ldots, n. \end{aligned}$$

Дефиниција ***1.3.3*** *Функцију $F(x, y)$ називамо инваријантом смене $T : (x, y) \mapsto (x_1, y_1)$ ако важи идентитет*

$$F(x, y) = F(x_1, y_1)$$

тј. $F = F \circ T$.

Дефиниција ***1.3.4*** *Једнакост $F(x, y) = 0$ називамо инваријантом смене $T : (x, y) \mapsto (x_1, y_1)$ ако важи*

$$F(x, y) = 0 \Longleftrightarrow F(x_1, y_1) = 0,$$

тј. $F \circ T|_{F=0} = 0$.

Дефиниција ***1.3.5*** *Смену промењљивих $T : (x, y) \mapsto (x_1, y_1)$ називамо симетријом диференцијалне једначине*

$$F(x, y, y`, \ldots, y^{(n)}) = 0$$

ако је дата једначина (као једнакост) инваријанта њеног n-тог продужења $T^{(n)}$.

Дефиниција ***1.3.5 (.1)*** *Смену промењивих* $T : (x,y) \mapsto (x_1, y_1)$ *називамо симетријом диференцијалне једначине*

$$F(x, y, y`, \ldots, y^{(n)}) = 0$$

ако је њена форма F *(коа функција) инваријанта њеног* n*-тог продужења* $T^{(n)}$.

Иако друга дефиниција изгледа знатно слабије, може се показати да се свака једначина која задовољава прву може еквивалентно записати у облику у ком одговара другој дефиницији[1]. Друга дефиниција је, према томе, истог значења као прва ако се посматра у смислу класе еквивалентних једначина. Ми ћемо, у овом раду користити по потреби једну или другу дефиницију. Прву ћемо користити када тражимо симетрије конкретне једначине, док ћемо када решавамо једначину претпостављати да је доведена на облик друге дефиниције што обично није тешко урадити.

Овако дефинисане симетрије називају се још и тачкасте, јер представљају тачкасту трансформацију (x,y)-равни, али ми ћемо у овом раду разматрати само тачкасте симетрије диференцијалних једначина, па то нећемо посебно наглашавати.

1.4 ГРУПА СИМЕТРИЈА ЈЕДНАЧИНЕ

Из саме дефиниције није тешко уочити да ће симетрије диференцијалне једначине у односу на композицију пресликавања чинити групу. Као што ће се показати, групе симетрија диференцијалних једначина увек ће нам бити описане са једним или више реалних параметара. Другим речима, локално ће постоји пресликавање $a = (a_1, \ldots, a_k) \mapsto T_a \in G$ које групи G даје структуру глатке многострукости. Такве групе називају се Лијеве групе.

Дефиниција ***1.4.1*** *Нека је дата група* G *чији су елементи тачкасте трансформације* (x,y)*-равни. Њеним* n*-тим продужењем зваћемо групу*

$$G^{(n)} = \{T^{(n)} \,|\, T \in G\}$$

чији су елементи n*-та продужења елемената из* G.

Дефиниција ***1.4.2*** *Кажемо да једначина*

$$F(x, y, y`, \ldots, y^{(n)}) = 0$$

допушта групу G *ако је једначина инваријанта њеног* n*-тог продужења* $G^{(n)}$*. Другим речима, једначина допушта групу* G *ако је свако* $T \in G$ *симетрија једначине.*

Дефиниција *1.4.2 (.1) Кажемо да једначина*

$$F(x, y, y`, \ldots, y^{(n)}) = 0$$

допушта групу G ако је њена форма F инваријанта њеног n-тог продужења $G^{(n)}$. Другим речима, једначина допушта групу G ако је свако $T \in G$ симетрија једначине.

Посматрајмо једнопараметраску групу тачкастих трансформација

$$G = \{T_a : (x, y) \mapsto (x_1, y_1) \,|\, x_1 = P_a(x, y),\, y_1 = Q_a(x, y)\}.$$

При томе ћемо од параметризације захтевати да буде хомоморфизам тј.

$$T_0 = I, \quad T_a \circ T_b = T_{a+b}, \quad T_a^{-1} = T_{-a}.$$

Развивши функције P_a и Q_a у Тејлоров ред у околини тачке $a = 0$, добијамо

$$x_1 \approx x + \xi(x, y)a, \quad y_1 \approx y + \eta(x, y)a$$

где је

$$\xi(x, y) = \frac{\partial P_a}{\partial a}|_{a=0}, \quad \eta(x, y) = \frac{\partial Q_a}{\partial a}|_{a=0}.$$

Оператор $X = \xi(x, y)\frac{\partial}{\partial x} + \eta(x, y)\frac{\partial}{\partial y}$ назива се тангентним векторским пољем групе G у тачки $a = 0$.

Алгебарска структура једнопараметарске групе у потпуности је одређена тангентним пољем, па ћемо уместо да говоримо о групи симетрија радије говорити о симетрији задатој пољем X. Овај се приступ успешно може уопштити и на вишепараметарске групе као што ћемо касније видети.

Теорема *1.4.1 Функција $F(x, y)$ биће инваријанта једнопараметарске групе G ако и само ако $XF = 0$ где је X тангентно векторско поље групе.*

Доказ: Да би функција била инваријанта групе G,

$$F(P_a(x, y), Q_a(x, y)) = F(T_a(x, y))$$

мора бити независно од a. Ако израз диференцирамо па a, добићемо

$$\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial P_a}{\partial a} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial Q_a}{\partial a} = 0$$

што за $a = 0$ даје $XF = 0$.

С друге стране, из $XF = 0$ следи $\frac{\partial}{\partial a}F(T_a(x, y))|_{a=0} = 0$ за свако x и y. Међутим, за неко $t \neq 0$ важиће

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial a}F(T_a(x, y))|_{a=t} &= \frac{\partial}{\partial a}F(T_{a+t}(x, y))|_{a=0} = \frac{\partial}{\partial a}F(T_a \circ F_t(x, y))|_{a=0} = \\ &= \frac{\partial}{\partial a}F(T_a(x_1, y_1))|_{a=0} = 0.\end{aligned}$$

Према томе, $F(P_a(x,y),Q_a(x,y)) = F(T_a(x,y))$ је константна по a, па је F инваријанта групе G. $\diamondsuit$

Теорема ***1.4.2*** *Једначина $F(x,y,y`,\ldots,y^{(n)}) = 0$ допушта једнопараметарску групу G ако је $X^{(n)}F|_{F=0} = 0$ где је $X^{(n)}$ n-то продужење њеног тангентног векторског поља X.* $\diamondsuit$

Теорема ***1.4.2 (.1)*** *Једначина $F(x,y,y`,\ldots,y^{(n)}) = 0$ допушта једнопараметарску групу G ако је $X^{(n)}F = 0$ где је $X^{(n)}$ n-то продужење њеног тангентног векторског поља X.* $\diamondsuit$

Доказ ове теореме је углавном сличан доказу Теореме 1.4.1, али најпре морамо дефинисати продужење поља. Полазећи од Тејлоровог развоја, добијамо

$$y_1` = \frac{dy_1}{dx_1} \approx \frac{d(y+\eta a)}{d(x+\xi a)} = \frac{y` + D\eta a}{1+D\xi a} \approx y` + (D\eta - y`D\xi)a = y` + \eta^{(1)}(x,y,y`)a$$

и аналогно

$$y_1^{(k)} \approx y^{(k)} + (D\eta^{(k-1)} - y^{(k-1)}D\xi)a = y^{(k)} + \eta^{(k)}(x,y,\ldots,y^{(k)})a.$$

Дефиниција ***1.4.3*** *Нека је дато векторско поље*

$$X = \xi(x,y)\partial_x + \eta(x,y)\partial_y.$$

Његовим n-тим продужењем називамо поље

$$X^{(n)} = \xi\partial_x + \eta\partial_y + \eta^{(1)}\partial_{y`} + \ldots + \eta^{(n)}\partial_{y^{(n)}}$$

где је

$$\eta^{(1)} = D\eta - y`D\xi,$$
$$\eta^{(k)} = D\eta^{(k-1)} - y^{(k)}D\xi, \;\; k = 2,\ldots,n.$$

1.5 АЛГЕБРА СИМЕТРИЈА ЈЕДНАЧИНЕ

Претходна разматрања могу се уопштити на вишепараметраске групе с том разликом што ће се у Тејлоровом развоју јавити k чланова где је k број параметара групе. Тангентна векторска поља у нули $X_1,\ldots,X_k$ разапињаће k-димензиони векторски простор $\mathcal{T} = < X_1,\ldots,X_k >$ који ћемо звати тангентним простором у нули групе G. Да бисмо на тангентни простор пренели алгебарску структуру групе, увешћемо следећу операцију.

Дефиниција ***1.5.1*** *Нека су дата тангентна векторска поља $X, Y \in \mathcal{T}$ групе G у нули. Операцију*

$$[X, Y] = XY - YX$$

називамо комутатором, где се под операцијом множења поља подразумева композиција пресликавања, а одузимање се врши у простору функција тачка по тачка. Структуру $\mathcal{L} = (\mathcal{T}, [\cdot, \cdot])$ тангентног простора са комутатором зовемо Лијевом алгебром дате Лијеве групе G.

Може се показати да је тангентни простор затворен за операцију комутирања [1] што ми овде нећемо чинити. Приметимо само да то значи да за сваки пар базних вектора X_i, X_j важи

$$[X_i, X_j] = c_{ij}^k X_k,$$

где подразумевамо сумирање по поновљеном индексу k. Реалне константе c_{ij}^k називамо структурним коефицијентима алгебре $\mathcal{L}$ у датој бази.

Лијева алгебра је једноставнија за посматрање од саме групе јер има структуру векторског простора, а с друге стране, у потпуности одређује алгебраску структуру групе. Стога се уместо групе радије посматра њена алгебра, што ћемо и ми чинити у остатку рада. Уместо Лијеве групе коју допушта диференцијална једначина, посматраћемо њој придружену алгебру.

1.6 ПРИМЕР

Нађимо симетрије диференцијалне једначине

$$y'' + \frac{1}{x} y' - e^y = 0.$$

Да би дата једначина допуштала поље $X = \xi\partial_x + \eta\partial_y$, мора бити $X^{(2)}F|_{F=0} = 0$ где је

$$X^{(2)} = \xi\partial_x + \eta\partial_y + \eta^{(1)}\partial_{y'} + \eta^{(2)}\partial_{y''}.$$

При том је

$$\begin{aligned}
\eta^{(1)} &= D\eta - y' D\xi = (\eta_x + y'\eta_y) - y'(\xi_x + y'\xi_y) = \eta_x + y'(\eta_y - \xi_x) - y'^2\xi_y, \\
\eta^{(2)} &= D\eta^{(1)} - y'' D\xi = \ldots = \\
&= \eta_{xx} + (2\eta_{xy} - \xi_{xx})y' + (\eta_{yy} - 2\xi_{xy})y'^2 - \xi_{yy}y'^3 + (\eta_y - 2\xi_x - 3\xi_y y')y''.
\end{aligned}$$

$$X^{(2)}F|_{F=0} = (-\xi\frac{y'}{x^2} - \eta e^y + \eta^{(1)}\frac{1}{x} + \eta^{(2)})|_{y''=e^y - \frac{y'}{x^2}} = 0$$

$$\eta_{xx} + (2\eta_{xy} - \xi_{xx})y' + (\eta_{yy} - 2\xi_{xy})y'^2 - \xi_{yy}y'^3 +$$
$$+(\eta_y - 2\xi_x - 3y'\xi_y)(e^y - \frac{y'}{x} + \frac{1}{x})(\eta_x + (\eta_y - \xi_x)y' - y'^2) - \xi\frac{y'}{x^2} - \eta e^y = 0.$$

Добијена једначина назива се детерминациона једначина и њеним решавањем добијамо функције ξ и η. Најпре, лева страна једначине је полином трећег степена по промењљиви y', па да би био једнак нули морају чланови уз сваки степен бити једнаки нули. Тако добијамо систем од четири парцијалне једначине другог реда.

Без дубљег уласка у решавање система, даћемо само крајње решење

$$\begin{aligned} \xi &= C_1 x\, lnx + C_2 x, \\ \eta &= -2[C_1(1 + lnx) + C_2]. \end{aligned}$$

Према томе једначина допушта два линеарно независна поља

$$\begin{aligned} X_1 &= x\, lnx\, \partial_x - 2(1 + lnx)\partial_y, \\ X_2 &= x\, \partial_x - 2\partial_y, \end{aligned}$$

па је Лијева алгебра симетрија дводимензионална, генерисана овим векторима.

2 ЈЕДНАЧИНЕ СА ЈЕДНОДИМЕНЗИОНАЛНОМ АЛГЕБРОМ СИМЕТРИЈА

2.1 КАНОНСКЕ КООРДИНАТЕ

У овој глави разматраћемо решавање диференцијалне једначине са једном уоченом симетријом израженом векторским пољем X. Показаћемо да постоји смена промењљивих (дефинисана у свакој регуларној тачки датог поља) у којима се посматрана симетрија види као транслација дуж једне од координатних оса. Нови облик једначине настао овом сменом зваћемо канонском формом, а нове промењљиве канонским координатама. Транслаторна симетрија новодобијене једначине омогућиће нам њено решавање.

Теорема *2.1.1 Нека је дата диференцијална једначина*

$$F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0$$

која допушта симетрију X. Тада постоји смена промењљивих $(x, y) \mapsto (r, s)$ дефинисана у свакој регуларној тачки поља X (тј. у свакој тачки где $X \neq 0$) таква да се X у новим координатама види као транслација дуж s.

Лема 2.1.1.1 *Векторско поље $X = \xi(x, y)\partial_x + \eta(x, y)\partial_y$ сменом промењљивих $(x, y) \longrightarrow (r, s)$ прелази у облик $X = Xr(x, y)\partial_r + Xs(x, y)\partial_s$ где се под $r(x, y)$ и $s(x, y)$ подразумевају функције које задају смену.*

Доказ: Нека је $F(r, s)$ произвољна глатка функција. Тада

$$XF = \xi\frac{\partial F}{\partial x} + \eta\frac{\partial F}{\partial y} = \xi(\frac{\partial F}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial x}) + \eta(\frac{\partial F}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial y}) =$$

$$= (\xi\frac{\partial r}{\partial x} + \eta\frac{\partial r}{\partial y})\frac{\partial F}{\partial r} + (\xi\frac{\partial s}{\partial x} + \eta\frac{\partial s}{\partial y})\frac{\partial F}{\partial s} = Xr\frac{\partial F}{\partial r} + Xs\frac{\partial F}{\partial s}$$

Следи $X = Xr\frac{\partial}{\partial r} + Xs\frac{\partial}{\partial s}$ што је требало доказати.$\diamondsuit$

Доказ Теореме 2.1.1: Транслација дуж s је поље облика $X = \partial_s$, па је, сходно претходној леми, потребно наћи функције r и s такве да буде

$$Xr = \xi\frac{\partial r}{\partial x} + \eta\frac{\partial r}{\partial y} = 0,$$

$$Xs = \xi\frac{\partial s}{\partial x} + \eta\frac{\partial s}{\partial y} = 1.$$

Најпре, јасно је да друга једначина не може бити задовољена за $\xi(x, y) = \eta(x, y) = 0$, тј. тамо где је $X = 0$, па у тим тачкама функције r и s нису дефинисане.

Канонске координате могу се наћи коришћењем метода карактеристика. Карактеристичне једначине гласе

$$\frac{dx}{\xi(x,y)} = \frac{dy}{\eta(x,y)},$$

$$\frac{dx}{\xi(x,y)} = \frac{dy}{\eta(x,y)} = ds.$$

Под претпоставком $\xi(x,y) \neq 0$ (а без умањења оштости), из прве једначине имамо

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\eta(x,y)}{\xi(x,y)}.$$

Решење ове једначине је облика

$$\phi(x,y) = c$$

где је c константа. Диференцирањем једнакости по x добијамо

$$\frac{\partial\phi}{\partial x} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0$$

што уз карактеристичну једначину даје

$$\xi(x,y)\frac{\partial\phi}{\partial x} + \eta(x,y)\frac{\partial\phi}{\partial y} = 0.$$

Ако ово упоредимо са полазном једначином по r, видимо да је

$$r = \phi(x,y)$$

њено решење, чиме је једна канонска координата нађена решавањем прве карактеристичне једначине.

Једнакост $r = \phi(x,y)$ најчешће се (барем локално) може решити по y, другим речима може се записати у облику $y = \psi(r,x)$. Сада се s може добити из друге карактеристичне једначине у облику

$$s(x,y) = \left(\int \frac{dx}{\xi(x,\psi(r,x))}\right)|_{r=\phi(x,y)}$$

где се r у интегралу посматра као константа. $\diamondsuit$

Није тешко уочити да канонске координате нису јединстваено дефинисане. Наиме, ако r и s задовољавају канонски услов, исто ће да важи и за

$$r_1 = F(r), \quad s_1 = s + G(r)$$

где су F и G произвољне глатке функције, уз услов недегенерисаности смене $F`(r) \neq 0$.

2.2 РЕШАВАЊЕ ЈЕДНАЧИНЕ МЕТОДОМ КАНОНСКИХ КООРДИНАТА

У претходном поглављу разматрали смо како се за једначину са једном симетријом X могу наћи канонске координате у којима се дата симетрија види као транслација. У овом поглављу показаћемо да нам канонска форма једначине заправо отвара могућност да ред једначине спустимо за један. Полазимо од претпоставке да имамо једначину у облику $F(r, s, s', \dots, s^{(n)}) = 0$ која допушта симетрију $X = \partial_s$.

Симетрија X говори нам да је задовољен услов $X^{(n)}F = 0$, где је $X^{(n)}$ n-то продужење поља X. Показује се да из $X = \partial_s$ следи и $X^{(n)} = \partial_s$. Ово се може лако извести из формула продужења, а у основи значи да транслација дуж координатних оса оставља изводе инваријантним. Сада $X^{(n)}F = 0$ значи $\frac{\partial F}{\partial s} = 0$, другим речима F је константно по s, па га у једначини можемо заменити произвољном вредношћу s_0 коју узима ова координата. Тако добијамо

$$F_1(r, s', \dots, s^{(n)}) = 0,$$

где је $F_1(\dots) = F(\dots, s_0, \dots)$.

Нови облик једначине дозвољава нам да сменом $v = s'$ добијемо једначину

$$F_1(r, v, v', \dots, v^{(n-1)}) = 0$$

која је за ред нижа од полазне, а чије решавање води решењу полазне једначине. Овим је метода укратко изложена, а у следећем поглављу ово ће бити поткрепљено једним конкретним примером.

2.3 ПРИМЕР

Нека је дата једначина

$$y'' = \left(\frac{3}{x} - 2x\right) y' + 4y.$$

Једначина допушта симетрију $X = y\partial_y$. Канонске координате налазимо решавајући систем

$$Xr = y\frac{\partial r}{\partial y} = 0,$$

$$Xs = y\frac{\partial s}{\partial y} = 1.$$

Најједноставније канонске координате су облика

$$r = x, \quad s = ln|y|.$$

$$\frac{ds}{dr} = \frac{y'}{y},$$

$$\frac{d^2s}{dr^2} = \frac{y''}{y} - \frac{y'^2}{y^2}.$$

Полазна једначина се може записати у облику

$$\frac{y''}{y} = \left(\frac{3}{x} - 2x\right)\frac{y'}{y} + 4$$

што у канонским координатама гласи

$$\frac{dv}{dr} = \left(\frac{3}{r} - 2r\right)v + 4 - v^2, \quad v = \frac{ds}{dr} = \frac{y'}{y}.$$

Ово је Рикатијева једначина и може се решити захваљујући познавању једног партикуларног решења

$$v = -2r.$$

Решење ћемо претпоставити у облику

$$v = -2r + \frac{1}{w}.$$

При томе, w мора задовољавати линеарну једначину

$$\frac{dw}{dr} = 1 - \left(\frac{3}{r} + 2r\right)w$$

чијим решавањем добијамо

$$w = \frac{c_1}{r^3}e^{-r^2} + \frac{1}{2r} - \frac{1}{2r^3}.$$

Даље је

$$\frac{ds}{dr} = v = -2r + \frac{2r^3}{2C_1e^{-r^2} + r^2 - 1},$$

$$s = -r^2 + \int \frac{2r^3dr}{2C_1e{-}r^2 + r^2 - 1} + C_2.$$

Враћајући смену

$$r = x, \;\; s = ln|y|$$

добијамо

$$ln|y| = -x^2 + \int \frac{2x^3dx}{2C_1e^{-x^2} + x^2 - 1} + C_2$$

што је решење у квадратурама.

3 ЈЕДНАЧИНЕ СА ВИШЕДИМЕНЗИОНАЛНОМ АЛГЕБРОМ СИМЕТРИЈА

3.1 ДИФЕРЕНЦИЈАЛНЕ ИНВАРИЈАНТЕ АЛГЕБРЕ

Нека је дата диференцијална једначина

$$F(x, y, y`, \ldots, y^{(n)}) = 0$$

са симетријом задатом пољем X. У канонским координатама (r, s) једначина постаје

$$F_1(r, v, v`, \ldots, v^{(n-1)}) = 0, \quad v = s`,$$

а поље је записано у облику $X = \partial_s$, док услов симетрије гласи $\quad X^{(n)}F = 0.$

Дефиниција *3.1.1* *Неконстантна функција $I = I(x, y, y`, \ldots, y^{(k)})$ назива се диференцијалном инваријантом k-тог реда поља X ако је $X^{(k)}I = 0$ где је $X^{(k)}$ продужење поља X.*

Услов инваријантности $X^{(k)}I = 0$ заправо значи да диференцијална једначина

$$I(x, y, y`, \ldots, y^{(k)}) = 0$$

допушта симетрију задату пољем X. Записана у канонским координатама, једначина добија облик

$$F(r, v, v`, \ldots, v^{(k-1)}) = 0,$$

па се I може записати у облику

$$I = F(r, v, \ldots, v^{(k-1)}).$$

Јединa диференцијална инваријата нултог реда је $r(x, y)$ (до на функционалну зависност). Све диференцијалне инваријанте првог реда су функције од $r(x, y)$ и $v(x, y, y`)$, при чему се за $v$ може узети произвољна инваријанта независна од $r$, тј. која садржи $y`$. Инваријанте r и v називају се фундаменталне диференцијалне инваријанте поља X. Претходно разматрање води нас следећем тврђењу које смо у овом пасусу већ доказали.

Теорема *3.1.1* *Све диференцијалне инваријанте k-тог реда поља X су функције фундаменталних инваријанти r, v и извода v по r до реда $k-1$.* $\diamondsuit$

Фундаменталне диференцијалне инваријанте добијају се као решења парцијалне једначине

$$\xi I_x + \eta I_y + \eta^{(1)} I_{y`} = 0,$$

при чему је $r(x,y)$ оно решење које не зависи од y'. Аналогно се могу дефинисати инваријанте вишедимензионалне алгебре.

Дефиниција *3.1.2 Рећи ћемо да је I диференцијална инваријанта алгебре $\mathcal{L}$ ако је инваријанта сваког поља те алгебре.*

Наравно, због линеарности, довољно је инваријантност испитати на генераторима алгебре. Фундаменталне инваријанте алгебре $\mathcal{L} = < X_1, \dots, X_R >$ су решења система

$$\begin{bmatrix} \xi_1 & \eta_1 & \eta_1^{(1)} & \dots & \eta_1^{(R)} \\ \xi_2 & \eta_2 & \eta_2^{(1)} & \dots & \eta_2^{(R)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \xi_R & \eta_R & \eta_R^{(1)} & \dots & \eta_R^{(R)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_x \\ I_y \\ I_{y'} \\ \vdots \\ I_{y^{(R)}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Систем има два функционално независна решења под условом да је матрица на левој страни максималног ранга. Они се могу наћи коришћењем Гаусове елиминационе методе и методе карактеристика. Једно решење не зависи од $y^{(R)}$ и означићемо га са r_R . Са v_R означићемо оно решење које нетривијално зависи од $y^{(R)}$. Све диференцијалне инваријанте вишег реда алгебре $\mathcal{L}$ биће функције фундаменталних инваријанти r_R, v_R и извода v_R по r_R до одговарајућег реда.

3.2 ПРИМЕР

Наћи диференцијалну једначину чије су симетрије

$$X_1 = \partial_x, \;\; X_2 = \partial_y, \;\; X_3 = x\partial_x + y\partial_y.$$

Нека је $\mathcal{L}$ алгебра задата базним векторима X_1, X_2 и X_3. Знајући да је $X_1^{(3)} = \partial_x, X_2^{(3)} = \partial_y$ и $X_3^{(3)} = x\partial_x + y\partial_y - y''\partial_{y''} - 2y'''\partial_{y'''}$, фундаменталне диференцијалне инваријанте добићемо као решење система

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ x & y & 0 & -y'' & -2y''' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_x \\ I_y \\ I_{y'} \\ I_{y''} \\ I_{y'''} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Систем је еквивалентан са

$$I_x = 0,$$

$$I_y = 0,$$

$$-y``I_{y``} - 2y```I_{y```} = 0.$$

Прве две једначине говоре да I не зависи од x и y, а трећа, применом методе карактеристика постаје

$$\frac{dy`}{0} = \frac{dy``}{-y``} = \frac{dy```}{-2y```}.$$

Тако добијамо два независна интеграла $r_3 = y`$ и $v_3 = \frac{y```}{y``^2}$ који су фундаменталне инваријанте алгебре.

Одговор на постављено питање разликоваће се зависно од реда диференцијалне једначине коју тражимо. Ако је тражена једначина трећег реда, тада ће њена форма, по дефиницији симетричности, бити инваријанта трећег реда алгебре $\mathcal{L}$. Свака инваријанта трећег реда је, међутим, функција фундаменталних инваријаната, па је тражена једначина

$$F(r_3, v_3) = 0,$$

тј.

$$F(y`, \frac{y```}{y``^2}) = 0,$$

где је F произвољна глатка функција. Ако тражимо једначину четвртог реда, њена форма ће бити функција r_3, v_3 и $\frac{dv_3}{dr_3} = \frac{y^{iv}y`` - 2y```^2}{y``^4}$. Стога ће једначина бити облика

$$F(y`, \frac{y```}{y``^2}, \frac{y^{iv}y`` - 2y```^2}{y``^4}) = 0$$

с тим што F мора нетривијално зависити од трећег члана.

3.3 ПРИМЕР

Решити једначину трећег реда

$$y``` = \frac{y``^2}{y`(1+y`)}$$

знајући да су јој симетрије $X_1 = \partial_x$, $X_2 = \partial_y$ *и* $X_3 = x\partial_x + y\partial_y$.

Означимо алгебре

$$\mathcal{L}_1 =< X_1 >, \mathcal{L}_2 =< X_1, X_2 >, \mathcal{L}_3 =< X_1, X_2, X_3 > .$$

Фундаменталне диференцијалне инваријанте ових алгебри су

$$r_1 = y, \quad v_1 = y`,$$

$$r_2 = y`, \quad v_2 = y``,$$

$$r_3 = y^{‘}, \quad v_3 = \frac{y^{‘‘‘}}{y^{‘‘2}}.$$

Форма задате једначине је диференцијална инваријанта трећег реда алгебре $\mathcal{L}_3$, па се може записати као алгебарска једначина сачињена од фундаменталних диференцијалних инваријаната које су и саме трећег реда. Може се видети да је једначина еквивалентна са

$$v_3 = \frac{1}{r_3(1 + r_3)}.$$

Под рестрикцијом оператора X_3 на диференцијалне инваријанте алгебре $\mathcal{L}_2$ сматраћемо оператор

$$\widetilde{X_3} = X_3^{(1)} r_2 \partial_{r_2} + X_3^{(2)} v_2 \partial_{v_2}$$

где уместо оператора X_3 на r_2 и v_2 делују одговарајућа продужења. Тако добијамо

$$\widetilde{X_3} = -v_2 \partial_{v_2},$$

а сменом

$$s_3 = -ln|v_2| = -ln|y^{‘‘}|$$

добијамо канонску форму поља $X_3 = \partial_{3_3}$. Сада је

$$\frac{ds_3}{dr_3} = -v_3 = \frac{-1}{r_3(1 + r_3)},$$

па је

$$s_3 = -ln|v_2| = -ln|\frac{r_3}{1 + r_3}| + C.$$

Пошто је r_3 функција од r_2 и v_2, ово ће бити

$$v_2 = \frac{C_1 r_2}{1 + r_2}.$$

Добили смо алгебарску једначину у терминима диференцијалних инваријанти алгебре $\mathcal{L}_2$ и поступак даље настављамо на исти начин.

Даље, тражећи рестрикцију X_2 на промењљиве (r_1, v_1) добијамо

$$\widetilde{X}_2 = X_2 r_1 \partial_{r_1} + X_2^{(1)} v_1 \partial_{v_1} = \partial_{r_1} = \partial_{s_2}.$$

Релација $s_2 = r_1$ даје канонске координате (s_2, r_2), па у новим координатама алгебарска једначина постаје

$$\frac{ds_2}{dr_2} = \frac{y^{‘}}{y^{‘‘}} = \frac{r_2}{v_2} = \frac{1}{C_1}(1 + r_2)$$

чијим се решавањем добија

$$s_2 = C_2 + \frac{1}{2C_1}(1 + r_2)^2,$$

а у терминима диференцијалних инваријанти првог реда ово ће бити

$$r_1 = C_2 + \frac{1}{2C_1}(1+v_1)^2.$$

Најзад $s_1 = x$ је канонска координата симетрије $\widetilde{X}_1$, па добијамо

$$\frac{ds_1}{dr_1} = \frac{1}{v_1} = \frac{1}{-1 \pm \sqrt{2C_1(r_1 - C_2)}}.$$

После интеграције и замене $s_1 = x, r_1 = y$ добијамо

$$x = C_3 + \frac{1}{C_1}\left(ln|-1 \pm \sqrt{2C_1(y-C_2)}| \pm \sqrt{2C_1(y-C_2)}\right).$$

Напомена *3.3.1* *У претходном примеру, за канонску базу алгебре могли смо изабрати и*

$$X_1 = \partial_x, X_2 = \partial_y, X_3 = x\partial_x + y\partial_y.$$

Инваријанте алгебри су неизмењене као и поступак решавања, с тим што ће нам се јавити једначина

$$r_1 = C_2 + \frac{1}{C_1}(ln|v_1| + v_1)$$

која нам представља проблем јер је не можемо решити по v_1.

И премда избор канонске базе није од суштинске важности, ипак ће у пракси неки избори начинити решавање непотребно тешким. Изгледа да је једини начин да се ово превазиђе пробање са више канонских база што се односи не само на избор вектора већ и на њихов редослед.

3.4 РЕШАВАЊЕ ЈЕДНАЧИНЕ МЕТОДОМ ДИФЕРЕНЦИЈАЛНИХ ИНВАРИЈАНАТА

У претходном поглављу показали смо на примеру употребу ове методе. Овде ћемо дати њен потпуни опис.

Претпоставићемо да је једначина дата у експлицитном облику

$$y^{(n)} = f(x, y, \ldots, y^{(n-1)})$$

са симетријама $X_1, \ldots, X_R$ које разапињу алгебру $\mathcal{L}$. У терминима фундаменталних диференцијалних инваријаната ове алгебре, једначина се може записати

$$v_R = F(r_R).$$

Нека генератори $X_1, \ldots, X_{R-1}$ разапињу подалгебру $\mathcal{L}_{R-1}$ чије су фундаменталне инваријанте (r_{R-1}, v_{R-1}). Ако посматрамо рестрикцију $\widetilde{X_R}$ на (r_{R-1}, v_{R-1}), постојаће канонске координате

$$(r_R, s_R) = (r_R(r_{R-1}v_{R-1}), s_R(r_{R-1}, v_{R-1}))$$

у свакој регуларној тачки такве да $\widetilde{X_R} = \partial_{s_R}$. v_R као диференцијална инваријанта алгебре $\mathcal{L}_{R-1}$ реда R биће функција r_R, s_R и $s_R` = \frac{ds_R}{dr_R}$ (јер су r_R и s_R и саме фундаменталне инваријанте алгебре $\mathcal{L}_{R-1}$), па се полазна једначина може записати као

$$\gamma(r_R, s_R, s_R`) = F(r_R).$$

Међутим, ова једначина допушта симетрију $\widetilde{X}_R = \partial_{s_R}$ што значи да s_R у њој не учествује, а једначина се (у принципу) може решити по $s_R`$ чиме добијамо

$$s_R` = G(r_R).$$

Интеграцијом добијамо

$$s_R(r_{R-1}, v_{R-1}) = \int G(r_R) dr_R|_{r_R = r_R(r_{R-1}, v_{R-1})} + C_R$$

Тиме смо ред једначине смањили за један. Ако се једначина може решити по v_{R-1}, поново имамо полазни проблем али са алгебром $\mathcal{L}_{R-1}$ димензије за један мање.

4 ПИТАЊЕ РЕШИВОСТИ АЛГЕБРЕ СИМЕТРИЈА

4.1 ПРИМЕР

Решимо линеарну једначину

$$y" + y' - \frac{y}{x} = 0.$$

Једначина има решење $y = x$, па због принципа суперпозиције дозвољава групу трансформација $y_1 = y + ax$ којој одговара поље $X_1 = x\partial_y$. Даље, једначина је хомогена, па дозвољава и смене $y_1 = (a+1)y$ којима одговара поље $X_2 = y\partial_y$. Њихов комутатор је $[X_1, X_2] = X_1$, што значи да је $\mathcal{L}_2 =< X_1, X_2 >$ дводимензионална Лијева алгебра.

Прво продужење оператора X_1 је

$$X_1^{(1)} = x\partial_y + \partial_{y'},$$

а његове инваријанте су $r = x, v = y' - \frac{y}{x}$. Извод v по r је

$$\frac{dv}{du} = y" - \frac{y'}{x} + \frac{y}{x^2} = y" - \frac{v}{u},$$

одакле добијамо $y" = \frac{dv}{dr} + \frac{v}{r}$. У терминима диференцијалних инваријанти, полазна једначина гласи

$$\frac{dv}{dr} + (1 + \frac{1}{r})v = 0.$$

Погледајмо сада како оператор X_2 делује на (r, v) равни. Најпре, прво продужење гласи

$$X_2^{(1)} = y\partial_y + y'\partial_{y'}.$$

Рестрикција оператора на (r, v) биће

$$\widetilde{X_2} = X_2 r\,\partial_r + X_2^{(1)} v\,\partial_v = v\partial_r.$$

Поље $\widetilde{X_2}$ је допуштена симетрија једначине првог реда по диференцијалним инваријантама, што нам омогућава њено решавање. Заправо, поменута једначина може се решити простим раздвајањем променљивих, чиме се добија

$$v = C_1 r^{-1} e^{-r}.$$

Заменом $r = x, v = y' - \frac{y}{x}$ добијамо једначину

$$y' = \frac{y}{x} + C_1 x^{-1} e^{-x}$$

која задржава симетрију X_1 што омогућава њено даље решавање. Дакле, захваљујући рестрикцији оператора X_2, успели смо да спустимо ред диференцијалне једначине.

Допустимо сада себи да снижавање реда учинимо првим оператором. Најпре ћемо наћи диференцијалне инваријанте оператора X_2 које су

$$r = x, \;\; v = \frac{y'}{y}, \;\; \frac{dv}{dr} = \frac{y''}{y} - \frac{y'^2}{y^2}.$$

У терминима диференцијалних инваријанти, једначина добија облик

$$\frac{dv}{dr} + v^2 + v - \frac{1}{r} = 0.$$

Међутим, ово је Рикатијева једначина за коју нам је познато да се не може решити, другим речима не постоји симетрија која би омогућила њено решавање.

Да бисмо видели зашто је то тако, погледајмо шта се дешава са симетријом X_1 када се рестрихује на (r, v).

$$\widetilde{X_1} = \left(\frac{1}{y} - \frac{xy'}{y^2}\right)\partial_v = \frac{1}{y}(1 - rv)\partial_v.$$

Пошто је $y = e^{\int vdr}$, добијени оператор може се написати у облику

$$\widetilde{X_1} = e^{-\int vdr}(1 - rv)\partial_v$$

Ово није оператор тачкасте симетрије једначине (онако како смо га дефинисали), већ нешто што би се могло назвати оператором нелокалне симетрије. Ово нам говори да нам рестрикција оператора X_1 не може помоћи да спустимо ред једначине, па идеја да започнемо решавање оператором X_2 није била добра.

Питање зашто нам се ово десило водиће нас до одговора који ће нам открити под којим условом на структуру Лијеве алгебре симетрија можемо применити поступак решавања описан у претходној глави.

4.2 ДОПУНА МЕТОДЕ ДИФЕРЕНЦИЈАЛНИХ ИНВАРИЈАНАТА

Ово поглавље надовезује се на опис методе диференцијалних инваријаната дато у 3.4. Потражићемо одговор на питање када ће у поступку решавања описаном методом рестрикција симетрије на алгебру нижег реда дати одговарајући оператор тачкасте симетрије.

Симетрија X_R ће деловати на диференцијалне инваријанте

(r_{R-1}, v_{R-1}) као генератор тачкастих трансформација ако је рестрикција облика

$$\widetilde{X_R} = \alpha(r_{R-1}, v_{R-1})\partial_{r_{R-1}} + \beta(r_{R-1}, v_{R-1})\partial_{v_{R-1}}.$$

Ово заправо значи

$$X_R r_{R-1} = \alpha(r_{R-1}, v_{R-1}), \;\; X_R v_{R-1} = \beta(r_{R-1}, v_{R-1}).$$

Диференцијалне инваријанте r_{R-1}, v_{R-1} задовољавају

$$X_i r_{R-1} = 0, \;\; X_i v_{R-1} = 0, \quad \forall i = 1, \ldots, R-1$$

те према томе

$$[X_i, X_R] r_{R-1} = X_i \alpha(r_{R-1}, v_{R-1}) = 0.$$

Ово се може написати

$$c_{iR}^k X_k r_{R-1} = 0, \quad \forall i = 1, \ldots, R-1,$$

што води услову

$$c_{iR}^R \alpha(r_{R-1}, v_{R-1}) = 0, \forall i = 1, \ldots R-1.$$

Аналогним расуђивањем добијамо

$$c_{iR}^R \beta(r_{R-1}, v_{R-1}) = 0, \quad \forall i = 1, \ldots R-1.$$

Пошто је бар један од α, β ненула,

$$c_{iR}^R = 0, \quad \forall i = 1, \ldots R-1.$$

Даље, $\mathcal{L}_{R-1} =< X_1, \ldots, X_{R-1} >$ је подалгебра ако

$$c_{ij}^R = 0, \quad \forall 1 \leq i \leq j \leq R-1,$$

па ће X_R деловати на (r_{R-1}, v_{R-1}) као тачкаста симетрија ако и само ако

$$c_{ij}^R = 0, \quad \forall 1 \leq i \leq j \leq R.$$

Овај услов нам омогућава да снизимо ред једначине за један. Слично, друго спуштање реда могуће је ако

$$c_{ij}^{R-1} = 0, \quad \forall 1 \leq i \leq j \leq R-1.$$

Настављајући на исти начин, сваки оператор X_k може бити употребљен да донесе по једну интеграцију ако

$$c_{ij}^k = 0, \quad \forall 1 \leq i \leq j \leq k.$$

Овај нас услов води појму решивости алгебре који ће бити описан у наредном поглављу.

4.3 РЕШИВЕ АЛГЕБРЕ

Дефиниција *4.3.1* *За дату алгебру $\mathcal{L}$, алгебру*

$$\mathcal{L}` =< [X, Y] \,|\, X, Y \in \mathcal{L} >$$

генерисану комутаторима називамо изводом алгебре $\mathcal{L}$.

Дефиниција *4.3.2* *Низ алгебри*

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_n \supset \ldots \supset \mathcal{L}_1$$

зваћемо изводним низом ако је извод сваке претходне алгебре у низу садржан у следећој. При томе ћемо исте алгебре у низу идентификовати, па ћемо сматрати да је инклузија алгебри строга.

Дефиниција *4.3.3* *Изводни низ алгебре $\mathcal{L}$ називамо решивим низом ако се завршава тривијалном $\{0\}$ алгебром. За алгебру $\mathcal{L}$ која има решиви низ кажемо да је решива.*

Дефиниција *4.3.4* *Нека је дата база $X_1, \ldots, X_n$ решиве алгебре $\mathcal{L}$ таква да подалгебре $\mathcal{L}_k =< X_1, \ldots, X_k >$ формирају решиви низ*

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_n \supset \ldots \supset \mathcal{L}_1 \supset \{0\}.$$

Тада $X_1, \ldots, X_n$ називамо канонском базом алгебре $\mathcal{L}$.

Теорема *4.3.1* *Нека је дата алгебра $\mathcal{L} =< X_1, \ldots, X_n >$. Тада је услов*

$$c_{ij}^k = 0, \quad \forall 1 \leq i \leq j \leq k$$

еквивалентан тврдњи да је алгебра $\mathcal{L}$ решива и да $X_1, \ldots, X_n$ формирају канонску базу алгебре.

Доказ: Доказ изводимо директно по дефиницији канонске базе и симбола c_{ij}^k. Наиме, нека је база канонска. Тада је за свако k, $\mathcal{L}_k` \subset \mathcal{L}_{k-1}$. Ово значи да за $1 \leq i \leq j \leq k$ важи $[X_i, X_j] \in \mathcal{L}_{k-1}$, па је $c_{ij}^k = 0$.

Ни обрнут смер доказа не представља проблем ако имамо у виду да је изводна алгебра генерисана комутаторима базних вектора. $\diamondsuit$

Теорема *4.3.2* *Нека је задата диференцијална једначина реда R која допушта симетрије $X_1, \ldots, X_R$. На ову једначину је могуће применити методу диференцијалних инваријанти ако и смо ако наведене симетрије представљају канонску базу решиве алгебре $\mathcal{L} =< X_1, \ldots, X_R >$.*

$\diamondsuit$ Доказ следи из Теореме 4.3.1 и разматрања датог у претходном поглављу.

5 ЛИТЕРАТУРА

[1] N.H. Ibragimov, *Group Analysis of Ordinary Differencial Equations and the Invariance Principle in Mathematical Physics (for 150th anniversary of Sophus Lie)*, Uspekhi Mat. Nauk 47:4 (1992), 83-144, Russian Math. Surveys 47:4 (1992), 89-156.

[2] Peter E. Hydon, *Symmetry Method for Differencial Equations - A Beginner's Guide*, Cambridge University Press 2000.