Aleksandar Jovanović

DO 167

PRILOG TEORIJI ULTRAPROIZVODA

ОСНОВНА ОРГАНИЗАЦИЈА УДРУЖЕНОГ РАДА
ЗА МАТЕМАТИКУ, МЕХАНИКУ И АСТРОНОМИЈУ
БИБЛИОТЕКА
Број: Dokt. 129/1
Датум: 23.5.1983

Beograd 1982.

ОСНОВНА ОРГАНИЗАЦИЈА УДРУЖЕНОГ РАДА
ЗА МАТЕМАТИКУ, МЕХАНИКУ И АСТРОНОМИЈУ
БИБЛИОТЕКА
Број:
Датум:

S A D R Ž A J

ОСНОВНА ОРГАНИЗАЦИЈА УДРУЖЕНОГ РАДА
ЗА МАТЕМАТИКУ, МЕХАНИКУ И АСТРОНОМИЈУ
БИБЛИОТЕКА
Број:
Датум:

UVOD

Učestvujući u radu seminara za matematičku logiku u Matematičkom institutu u Beogradu, autor ovog rada stekao je određena znanja, produbio interesovanje za logiku da bi u teoriji modela pronašao specifičniju oblast za koju je vezao višegodišnji rad, ultraproizvode modela. Pomenuto područje bilo je i još uvek predstavlja oblast intenzivno istraživanu sa značajnim rezultatima za teoriju modela, teoriju skupova, topologiju, Boolove algebre, nestandardnu analizu, funkcionalnu analizu i druge delove matematike.

Ultraproizvode je uveo Skolem tridesetih godina a veće interesovanje logičara im se pridaje nakon Lošove teoreme 1955. Do polovine šezdesetih godina radovima Keislera Changa i drugih formira se teorija i postavljaju veliki problemi. Scottovim rezultatima iz istog perjoda zasniva se teorija velikih kardinala, deo teorije skupova možda najintezivnije proučavan. Sledi uvođenje iteriranih ultraproizvoda od strane Gaifmana i Keislera koje je posebno razvio Kunen. Sedamdesetih godina radi se na povezivanju sa forsingom na razne načine. Ovde poseban značaj imaju generički ultraproizvodi proučavani od Silvera, Jecha, Prikrya, Jensena i drugih i infinitarna kombinatorika gde su značajne rezultate dali Solovay, Magidor, Ketonen, Kunen, Michell, Jensen, Silver i dosta drugih matematičara.

Bibliografija u ovoj oblasti je već toliko opširna da se teško može pratiti.

Ovaj rad podeljen je na pet delova. U prvom i drugom izloženi su elementi teorije modela i teorije skupova potrebni dalje u radu. U trećem delu data je klasifikacija filterskih svojstava, uspostavljene neke veze među kombinatornim osobinama i dati stavovi egzistencije. Četvrta glava se bavi ultraproizvodima. Povezana je struktura ultraproizvoda sa strukturom ultrafiltera i kardinalnošću ultraproizvoda. Stavovi 4.8 i 4.10 mogu se dobiti iz Stava 4.6. Recimo, međutim, da Stav 4.8 predstavlja najzanimljivi slučaj a da mu je dokaz znatno jednostavniji od dokaza Stava 4.6. Stavovi 4.8 i 4.10 predstavljaju uopštenje Keislerovog Teorema 4.3.9 iz 19 te su dokazani uopštenjem iste osnovne Keislerove ideje, s tim što je Stav 4.6 nešto opštiji i komplikovaniji. Dalje, razmatrana su i druga pitanja, pomenimo dvokardinalni problem. Data je veza sa kontinuum problemom u slučaju merljivog kardinala - Stav 4.17 , te više tvrđenja o kardinalnosti ultraproizvoda. Peti deo uvodi prvo forsing da bi se na bazi trećeg i četvrtog dela razmatrala razna svojstva. Veći deo posvećen je problemu mere. Inspirisani filterskom normom uvodimo normu mere te ispitujemo moguće odnose aditivnosti i norme mere. Rešavaju se razna pitanja i konstruišu različite mere nad malim kardinalima polazeći od pogodnih jakih aksioma beskonačnosti. Inspirisani Solovayevom ekvikonsistencijom merljivih i realno merljivih kardinala kojom se sva snaga vrlo velikih merljivih kardinala izražava na malim, do kontinuuma, pokušali smo da i ostale veće velike kardinale dovoljno dobro spustimo do ispod kontinuuma, definišući realno velike kardinale na prirodan način zamenom definicionih filtera na velikim kardinalima zgodnim realnim merama. Na primeru realno kompaktnih kardinala dokazana je relativna neprotivurečnost prema ZFC + odgovarajući veliki kardinal. Ekvikonsistenciju nismo uspeli dokazati ali isto nije pošlo za rukom do sada ni jačim matematičarima i za sada predstavlja otvoren problem, čak se smatra da se tehnologija za rešenje pomenutog pitanja tek razvija. Detaljnije je ispitivana struktura ultrafiltera i ultraproizvoda, uvedena generalizacija slabo normalnih ultrafiltera, te dvokardinalni problem. Na kraju dati su spiskovi korišćenih stavova sa referencama i originalnih i samostalno dokazanih stavova kako bi se tačno moglo videti šta je doprinos ove teze.

ОСНОВНА ОРГАНИЗАЦИЈА УДРУЖЕНОГ РАДА
ЗА МАТЕМАТИКУ, МЕХАНИКУ И АСТРОНОМИЈУ
БИБЛИОТЕКА

Број: ____________

Датум: ____________

TEORIJA MODELA

Jezik je kolekcija relacijskih, funkcijskih i simbola konstanti koje redom obeležavamo sa P, F, c, koristeći indekse prema potrebi. Sam jezik obično označavamo simbolom $\mathcal{L}$. Moć jezika je

$$\|\mathcal{L}\| = \omega + |\mathcal{L}|.$$

Ako su svi simboli jezika $\mathcal{L}$ sadržani u jeziku $\mathcal{L}'$, onda kažemo da je $\mathcal{L}'$ ekspanzija od $\mathcal{L}$ ili da je $\mathcal{L}$ redukt jezika $\mathcal{L}'$, što označavamo sa $\mathcal{L} \subset \mathcal{L}'$.

Model za $\mathcal{L}$ je par $\langle A, \mathcal{F} \rangle$. Modele označavamo gotskim slovima. Neprazan skup A je univerzum, $\mathcal{F}$ je interpretacija koja svakom relacijskom, funkcijskom i simbolu konstante dodeljuje redom relaciju, funkciju, konstantu skupa A, pri čemu dužine relacija i funkcija moraju biti jednake dužinama odgovarajućih relacijskih i funkcijskih simbola.

Uvodjenjem logičkih simbola: zagrada (,) , promenljivih $v_0, v_1, \ldots$ veza $\&$, $\neg$, kvantifikatora i simbola jednakosti, definišemo terme, atomske formule i formule jezika $\mathcal{L}$

na uobičajen način.

Logičke aksiome, pravila izvodjenja, dokaz, teorema imaju uobičajena značenja.

Zapis $\vdash \varphi$ znači da je φ teorema. Ako je Σ skup rečenica $\Sigma \vdash \varphi$ znači da se iz logičkih aksioma i Σ pravilima izvodjenja izvodi φ.

Skup rečenica T jezika $\mathcal{L}$ naziva se teorijom nad jezikom $\mathcal{L}$. U tom slučaju aksiome teorije T su elementi skupa T dok kompletnost, neprotivurečnost teorije T imaju uobičajena značenja.

Izraz $t(v_0 \dots v_n)$ označava term t čije promenljive čine podskup od $\{v_0, \dots, v_n\}$, dok $\varphi(v_0 \dots v_n)$ označava formulu φ čije se slobodne promenljive nalaze u $\{v_0, \dots, v_n\}$.

Neka je $\mathfrak{A}$ model jezika $\mathcal{L}$ i neka su $a_0, \dots, a_n \in A$. Definišemo vrednost terma $t(v_0 \dots v_n)$ u $a_0, \dots, a_n$, u oznaci $t[a_0 \dots a_n]$:

1. $t[a_0 \dots a_n] = a_i$ ako je $t = v_i$.

2. ako je $t = c$, onda je $t[a_0 \dots a_n] = a$, pri čemu je a interpretacija konstante c.

3. ako je $t = F(t_1 \dots t_k)$, G interpretacija simbola F, onda $t[a_0 \dots a_n] = G(t_1[a_0 \dots a_n] \dots t_k[a_0 \dots a_n])$.

Jedan od najvažnijih pojmova je relacija zadovoljenja koju je uveo Tarski tridesetih godina. Formula $\varphi(v_0 \dots v_n)$ je zadovoljena nizom $a_0, \dots, a_n \in A$, u oznaci $\mathfrak{A} \models \varphi[a_0 \dots a_n]$:

1. ako je φ atomska formula $t_1 = t_2$, onda

$\mathfrak{A} \models \varphi[a_0 \dots a_n]$ akko $t_1[a_0 \dots a_n] = t_2[a_0 \dots a_n]$;

2. ako je φ atomska formula $P(t_1 \dots t_k)$, onda

$\mathfrak{A} \models \varphi[a_0 \dots a_n]$ akko $R(t_1[a_0 \dots a_n] \dots t_k[a_0 \dots a_n])$,

pri čemu je R interpretacija simbola P ;

3. ako je φ formula $\varphi_1 \& \varphi_2$, onda

$\mathfrak{A} \models \varphi[a_0 \dots a_n]$ akko $\mathfrak{A} \models \varphi_1[a_0 \dots a_n]$ i $\mathfrak{A} \models \varphi_2[a_0 \dots a_n]$;

4. ako je φ formula $\neg \varphi_1$, onda

$\mathfrak{A} \models \varphi[a_0 \dots a_n]$ akko nije $\mathfrak{A} \models \varphi_1[a_0 \dots a_n]$;

5. ako je φ formula $(\forall v_i)\, \varphi_1(v_0 \dots v_i \dots v_n)$, onda

$\mathfrak{A} \models \varphi[a_0 \dots a_n]$ akko za svaki $a \in A$

$\mathfrak{A} \models \varphi_1[a_0 \dots a_{i-1}\, a\, a_{i+1} \dots a_n]$;

Kažemo da su modeli $\mathfrak{A}$ i $\mathfrak{A}'$ elementarno ekvivalentni akko svaka rečenica, koja važi u jednom, važi i u drugom modelu. To označavamo sa $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{A}'$.

Ako je $\mathfrak{A}$ model za $\mathcal{L}$, a $\mathcal{L}'$ ekspanzija jezika $\mathcal{L}$, onda se interpretiranjem simbola iz $\mathcal{L}' \setminus \mathcal{L}$, $\mathfrak{A}$ može proširiti do modela $\mathfrak{A}'$ za $\mathcal{L}'$. U tom slučaju kažemo da je $\mathfrak{A}'$ ekspanzija modela $\mathfrak{A}$ ili da je $\mathfrak{A}$ redukt modela $\mathfrak{A}'$.

Ako su $\mathfrak{A}$ i $\mathfrak{A}'$ modeli jezika $\mathcal{L}$, onda je $\mathfrak{A}$ podmodel od $\mathfrak{A}'$, u oznaci $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{A}'$ ako važi:

1. $A \subset A'$.

2. ako su R i R' odgovarajuće relacije - interpretacije istog relacijskog simbola dužine n , onda je

$$R = R' \cap A^n .$$

3. ako su G i G' odgovarajuće funkcije dužine n , onda je

$$G = G' \upharpoonright A^n .$$

4. ako su a i a' interpretacije konstante c , onda je $a = a'$.

Kardinalnost modela $\mathfrak{A}$ u oznaci $|\mathfrak{A}|$ je kardinal $|A|$.

Funkcija $f: A \to A'$ je izomorfizam modela $\mathfrak{A}$ i $\mathfrak{A}'$ ako važi

1. f je 1-1 i na.

2. ako su R i R' odgovarajuće relacije, onda za sve $a_0, \ldots, a_n \in A$

$$R(a_0 \ldots a_n) \quad \text{akko} \quad R'(a_0 \ldots a_n).$$

3. ako su G i G' odgovarajuće funkcije, onda za sve $a_0, \ldots, a_n \in A$

$$f(G(a_0 \ldots a_n)) = G'(fa_0 \ldots fa_n).$$

4. ako su a i a' interpretacije konstante c u redom modelima $\mathfrak{A}$ i $\mathfrak{A}'$, onda

$$f(a) = a'.$$

Za modele $\mathfrak{A}$ i $\mathfrak{A}'$ kažemo da su izomorfni ako postoji izomorfizam $f: \mathfrak{A} \to \mathfrak{A}'$. To označavamo sa $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{A}'$.

Neposredno se proverava da iz $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{A}'$ sledi $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{A}'$. Model $\mathfrak{A}$ je izomorfno utopljen u $\mathfrak{A}'$ ako postoji podmodel $\mathfrak{A}'' \subset \mathfrak{A}'$, izomorfan sa $\mathfrak{A}$.

$\mathfrak{A}$ je elementarni podmodel od $\mathfrak{A}'$ ili $\mathfrak{A}'$ je elementarna ekstenzija modela $\mathfrak{A}$, u oznaci $\mathfrak{A} \prec \mathfrak{A}'$ ako važi:

1. $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{A}'$.

2. za bilo koju formulu $\varphi(v_0 \ldots v_n)$ od $\mathcal{L}$ i bilo koje $a_0, \ldots, a_n$ iz A

$$\mathfrak{A} \models \varphi[a_0 \ldots a_n] \text{ akko } \mathfrak{A}' \models \varphi[a_0 \ldots a_n].$$

Ako su $\mathfrak{A}$ i $\mathfrak{A}'$ modeli za $\mathcal{L}$,kažemo da je $\mathfrak{A}$ homomorfan sa $\mathfrak{A}'$ akko postoji preslikavanje $f: A \xrightarrow{na} A'$ tako da:

1. za svaki par odgovarajućih relacija R i R' iz

$\mathfrak{A}$ i $\mathfrak{A}'$ i sve $a_1, \dots, a_n \in A$

$R(a_1 \dots a_n)$ povlači $R'(fa_1 \dots fa_n)$.

2. za svaki par odgovarajućih funkcija G i G' i bilo koje $a_1, \dots, a_n \in A$

$f(G(a_1 \dots a_n)) = G'(fa_1 \dots fa_n)$.

3. ako su a, a' interpretacije konstante c u $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}'$, onda $f(a) = a'$.

U takvom slučaju funkciju f nazivamo homomorfizmom modela $\mathfrak{A}$ na model $\mathfrak{A}'$. Takodje kažemo da je $\mathfrak{A}'$ homomorfna slika od $\mathfrak{A}$ što označavamo sa $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{A}'$. $\mathfrak{A}$ je homomorfno potopljen u $\mathfrak{A}'$ ako je $\mathfrak{A}$ homomorfan nekom podmodelu od $\mathfrak{A}'$.

Definiše se jezik $\mathcal{L}_{\alpha,\beta}$ koji ima β promenljivih, koristeći pored pomenutih pravila za izgradnju terma i formula još konjunkciju dužine $<\beta$ i kvantifikator dužine $<\alpha$:

Ako je F skup formula jezika $\mathcal{L}_{\alpha,\beta}$ i ako je $|F| < \beta$, onda je i $\& F$ formula.

Ako je V skup promenljivih, φ formula jezika $\mathcal{L}_{\alpha,\beta}$, onda je $(\forall V)\varphi$ formula.

Očigledno, za $\alpha = \beta = \omega$, $\mathcal{L}_{\omega,\omega}$ je jezik prvog reda. Ako je $\beta > \omega$, onda je $\mathcal{L}_{\alpha,\beta}$ infinitarni jezik koji ima i formula beskonačne dužine.

Modeli za $\mathcal{L}_{\alpha,\beta}$ su modeli za $\mathcal{L}_{\omega}$, s tim da relaciju zadovoljenja za formule iz $\mathcal{L}_{\alpha,\beta}$ definišemo kao i za formule jezika $\mathcal{L}_{\omega}$ sa dodatkom

$\mathfrak{A} \models \& F[a_0 \dots]$ akko za svaku formulu $\varphi \in F$

$\mathfrak{A} \models \varphi[a_0 \dots]$,

$\mathfrak{A} \models (\forall V)\varphi$ akko za svaki $f \in {}^{V}A$

$\mathfrak{A} \models \varphi[f(v_0) \dots]$.

Skolemova ekspanzija $\mathcal{L}^*$ jezika $\mathcal{L}$ dobija se dodavanjem novih funkcijskih simbola F_φ za svaku formulu $\varphi = (\exists x)\varphi_1$. Pri tome ako φ ima n slobodnih promenljivih, onda je F_φ dužine n

$\Sigma_{\mathcal{L}}$ je Skolemova teorija jezika $\mathcal{L}$ u jeziku $\mathcal{L}^*$ akko za svaku formulu $\psi(x_1 \dots x_n) = (\exists x)\varphi(x\, x_1, \dots x_n)$ formula

$$(\forall y_1 \dots y_n)(\psi(y_1 \dots y_n) \to \varphi(F_\psi(y_1 \dots y_n)\, y_1 \dots y_n))$$

je aksiom teorije $\Sigma_{\mathcal{L}}$.

Neka je $\mathfrak{A}$ model za $\mathcal{L}$.

$\mathfrak{A}^*$ je Skolemova ekspanzija modela $\mathfrak{A}$ do jezika $\mathcal{L}^*$ akko $\mathfrak{A}^*$ je ekspanzija modela $\mathfrak{A}$ do jezika $\mathcal{L}^*$ i

$$\mathfrak{A}^* \models \Sigma_{\mathcal{L}}.$$

Ako je T teorija nad jezikom $\mathcal{L}$, onda je T^* Skolemova ekspanzija od T akko skup aksioma od T^* je $T \cup \Sigma_{\mathcal{L}}$.

Očigledno je $\|\mathcal{L}\| = \|\mathcal{L}^*\|$. Neposredno se proverava da svaki model ima Skolemovu ekspanziju, odakle sledi da ako je T neprotivurečna, onda je i Skolemova ekspanzija T^* teorije T neprotivurečna teorija.

Jezici prvog reda su preslabi za opisivanje nekih svojstava značajnih za teoriju skupova. Zbog toga se uvode jezici višeg reda. Promenljive prvog reda interpretiramo elementima univerzuma modela. Promenljive drugog reda variramo na podskupovima univerzuma, odnosno na elementima partitivnog skupa univerzuma datog modela. Slično je i sa promenljivima višeg reda. Označimo sa $X^n, Y^n, Z^n, \dots$ promenljive $(n+1)$. reda. Termi reda $n+1$ su promenljive reda $n+1$ .Ako su S, T termi redom reda $n, n+1$, onda je $T(S)$ formula. Uvodi se kvantifikovanje promenljivih višeg reda. Neka je $\mathcal{L}$ jezik višeg reda. Model za $\mathcal{L}$ se definiše kao i za jezike prvog reda. Neka je $\mathfrak{A}$ model za $\mathcal{L}$. X^n interpretiramo elementom od $P^n(A) = \underbrace{P\ldots P}_{n}(A)$. Zadovoljenje se definiše kao i ranije. Novi slučaj je formula $S(T)$, S je reda $n+1$, T reda n :

$$\mathfrak{A} \models S(T)[B_n, B_{n-1}] \text{ akko}$$
$$B_{n-1} \in B_n.$$

Pri tome je $B^n \in P^n(A)$, $B^{n-1} \in P^{n-1}(A)$.

Podskup $D \subset P(I)$ je filter nad skupom I ako važi:

1. $X, Y \in D \rightarrow X \cap Y \in D$
2. $X \in D,\ X \subset Y \subset I \rightarrow Y \in D.$

Skup I nazivamo skupom indeksa. $\{I\}$ je trivijalan filter, $P(I)$ je nepravi filter. Pod filterom u daljem tekstu podrazumevamo pravi filter. Filter D je ultrafilter ako iz $X \subset I$ sledi $X \in D$ ili $I \setminus X \in D$.

Neka su za $i \in I$, $\mathfrak{A}_i$ modeli jezika $\mathcal{L}$, neka je D filter nad I . Definišemo redukovani proizvod modela $\mathfrak{A}_i$ po modulu filtera D , u oznaci $\prod_D \mathfrak{A}_i$. Neka su $f, g \in \prod_{i \in I} A_i$. Definišemo $f =_D g$ akko $\{i \in I : f(i) = g(i)\} \in D.$

Neposredno se proverava da je $=_D$ relacija ekvivalencije u skupu $\prod_{i \in I} A_i$. Količnik skup $\prod_{i \in I} A_i /_{=_D}$ nazivamo redukovanim proizvodom skupova A_i po modulu filtera D i kraće se označava sa $\prod_D A_i$. $\prod_D A_i$ uzimamo za univerzum modela $\prod_D \mathfrak{A}_i$. Ako je $f \in \prod_{i \in I} A_i$, onda sa f_D označavamo klasu ekvivalencije funkcije f u odnosu na $=_D$. Ako je P relacijski simbol dužine n jezika $\mathcal{L}$, R_i interpretacija P u modelu $\mathfrak{A}_i$, onda je interpretacija simbola P u $\prod_D \mathfrak{A}_i$ relacija R data sa:

$$R(f_D^1 \dots f_D^n) \quad \text{akko} \quad \{i \in I : R_i(f^1(i) \dots f^n(i))\} \in D.$$

Interpretacija n -arnog funkcijskog simbola F biće n-arna funkcija G definisana sa:

$$G(f_D^1 \dots f_D^n) = \langle G_i(f^1(i) \dots f^n(i)) : i \in I \rangle_D .$$

Pri tome su $G_i, i \in I$ interpretacije simbola F u modelima $\mathfrak{A}_i$, $i \in I$.

Ako je c konstanta iz $\mathcal{L}$ čije su interpretacije u $\mathfrak{A}_i$, a_i, onda je interpretacija c u $\prod_D \mathfrak{A}_i$ element a :

$$a = \langle a_i : i \in I \rangle_D .$$

Ako je D ultrafilter, onda $\prod_D \mathfrak{A}_i$ nazivamo ultraproizvodom. Ako je za sve $i \in I$ $\mathfrak{A}_i = \mathfrak{A}$ umesto ultraproizvoda, govorimo o ultrastepenu. Kardinalnost proizvoda $\prod_D \mathfrak{A}_i$ definišemo sa $|\prod_D \mathfrak{A}_i| = |\prod_D A_i|$.

Neka je $\mathcal{L}'$ ekspanzija od $\mathcal{L}$, neka su za $i \in I$ $\mathfrak{A}_i$ modeli za $\mathcal{L}$, $\mathfrak{A}_i'$ ekspanzija modela $\mathfrak{A}_i$ za $\mathcal{L}'$. Lako se proverava da je $\prod_D \mathfrak{A}_i'$ ekspanzija modela $\prod_D \mathfrak{A}_i$.

Sledeći stav dokazao je J.Łoš 1955. Od tada ultraproizvodi u teoriji modela dobijaju pravi značaj.

Stav 1.1. Neka je $\mathfrak{A}$ ultraproizvod $\prod_D \mathfrak{A}_i$, I skup indeksa.

1. za svaki term $t(v_1 \dots v_n)$ jezika $\mathcal{L}$ i elemente $f_D^1, \dots, f_D^n \in A$ važi

$$t_{\mathfrak{A}}[f_D^1 \dots f_D^n] = \langle t_{\mathfrak{A}_i}[f^1(i) \dots f^n(i)] : i \in I \rangle_D .$$

2. za svaku formulu $\varphi(v_1 \dots v_n)$ jezika $\mathcal{L}$ i bilo koje $f_D^1, \dots, f_D^n \in A$

$$\mathfrak{A} \models \varphi[f_D^1 \dots f_D^n] \quad \text{akko} \quad \{i \in I : \mathfrak{A}_i \models \varphi[f^1(i) \dots f^n(i)]\} \in D.$$

3. za svaku rečenicu φ od $\mathcal{L}$

$$\mathfrak{A} \models \varphi \quad \text{akko} \quad \{i \in I : \mathfrak{A}_i \models \varphi\} \in D.$$

Posledica

$$\prod_D \mathfrak{A} \equiv \mathfrak{A}.$$

Prirodno utapanje modela $\mathfrak{A}$ u $\prod_D \mathfrak{A}$ je funkcija d data sa:

$$d(a) = \langle a : i \in I \rangle_D .$$

Očigledno da za svaku formulu $\varphi(v_1 \dots v_n)$ važi

$\mathfrak{A} \models \varphi[a_1, \dots a_n]$ akko

$\{i \in I : \mathfrak{A} \models \varphi[\langle a_1 : i \in I \rangle_D(i) \dots \langle a_n : i \in I \rangle_D(i)]\} \in D$ akko

$\prod_D \mathfrak{A} \models \varphi[d(a_1) \dots d(a_n)]$;

Znači d je elementarno utapanje.

Definicija dopuštanja

Neka je $\mathfrak{A}$ model jezika $\mathcal{L}$, neka je U unarni relacijski simbol jezika $\mathcal{L}$ i neka je V interpretacija simbola U u modelu $\mathfrak{A}$. Kaže se da je model $\mathfrak{A}$ (α, β) model ako i samo ako je $|\mathfrak{A}| = \alpha$, $|V| = \beta$. Kaže se da teorija T dopušta par kardinala (α, β) akko T ima (α, β) model.

Sledeći stav koji su dokazali Keisler, Robinson i Morley od značaja je za razmatranja u glavi 4.

Stav 12.

Neka je T teorija u prebrojivom jeziku $\mathcal{L}$.

a) ako T dopušta (α, β), onda T dopušta (γ, β) za sve γ takve da $\alpha \geqslant \gamma \geqslant \beta$.

b) ako T dopušta (α, β), onda za svaki γ, T dopušta (γ, γ).

c) za svaki $n \in \omega$ postoji teorija T koja dopušta svaki par $(\beth_n(\alpha), \alpha)$, a ne dopušta nijedan par $(\beth_n(\alpha)^+, \alpha)$.

d) za svaki $n \in \omega$ postoji teorija T koja dopušta svaki par $(\gamma_n(\alpha), \alpha)$, a ne dopušta nijedan par $(\gamma_{n+1}(\alpha), \alpha)$.

Dokaz.

a) neka je $\mathfrak{A} = \langle A, V, \ldots \rangle$ model za T takav da $|A| = \alpha$, $|V| = \beta$. Neka je $\beta \leq \gamma \leq \alpha$, $V \subset X \subset A$ i $|X| = \gamma$.

$\mathfrak{A}$ ima elementarni podmodel $\mathfrak{B} = \langle B, W, \ldots \rangle$ takav da je $X \subset B$ i $|B| = \gamma$. Pošto $W = V \cap B = V$, biće $|W| = \beta$.

b) prema a) T dopušta (α, β). Neka je $\mathfrak{A} = \langle A, V, \ldots \rangle$ takav model da je $|A| = |V| = \beta$. Neka je $\mathcal{L}' = \mathcal{L} \cup \{F\}$, pri čemu je F novi unarni funkcijski simbol. Neka je T' ekstenzija teorije T dobijena dodavanjem sledeće rečenice. F je 1-1 preslikavanje univerzuma A na V. Očigledno da T' ima jedan beskonačan model $\mathfrak{A}' = \langle \mathfrak{A}, G \rangle$, gde je G bijekcija A na V, pa po Skolem Löwenheim Tarski teoremi ima model u svakom beskonačnom kardinalu γ, čiji redukt je (γ, γ) model za T.

c) Dokaz za $n = 1$. Pretpostavimo da je E binarni relacijski simbol. Uočimo rečenice:

$$(\forall xy)(x \equiv y \longleftrightarrow (\forall z)(E(zx) \longleftrightarrow E(zy))),$$

$$(\forall x)(\neg U(x) \longrightarrow (\forall y)(E(yx) \longrightarrow U(y))).$$

Očigledno, ako je kardinalnost interpretacije U α, onda je kardinalnost modela najviše 2^α. Slično se konstruišu odgovarajuće rečenice za bilo koji n.

TEORIJA SKUPOVA

Naša meta teorija je ZFC + odgovarajući aksiomi koji garantuju egzistenciju pojedinih velikih kardinala kada se o njima raspravlja. Aksiom izbora se koristi, izmedju ostalog, u dokazu teoreme o ultrafilterima : svaka familija skupova sa osobinom konačnog preseka može se proširiti do ultrafiltera. Aksiom izbora omogućava da se definišu kardinali i pojednostavi kardinalna aritmetika. Neki stavovi se dokazuju uz pomoć GCH ili neke slabije hipoteze kontinuuma. Tako, na primer, hipoteza da za neki kardinal α važi

$$\alpha^{cf\alpha} = \alpha,$$

koja se inače dosta upotrebljava u odredjivanju kardinalnosti ultraproizvoda ekvivalentna je sa:

za sve $\beta < \alpha$ i $\lambda < cf\alpha$, $\beta^{\lambda} \leq \alpha$.

<u>Aksiome Zermelo-Fraenkel teorije skupova</u>

(A_1) Aksioma ekstenzionalnosti:

$$(\forall xy)((\forall z)(z \in x \leftrightarrow z \in y) \to x = y).$$

x i y su jednaki ako imaju iste elemente.

(A_2) Aksioma para:

$$(\forall u)(\forall v)(\exists x)(\forall z)(z \in x \leftrightarrow z = u \vee z = v).$$

Za svaki u i v postoji skup x čiji su jedini elementi u i v.

Da je ovde skup x jedinstven, sledi iz aksiome ekstenzionalnosti što nam omogućava da definišemo neuredjeni par

$$\{u,v\} = X \leftrightarrow (\forall z)(z \in X \leftrightarrow z = u \vee z = v)$$

singlton

$$\{u\} = \{u,u\}$$

i uredjeni par

$$\langle u,v \rangle = \{\{u\},\{u,v\}\}.$$

(A_3) Aksioma zasnivanja:

$$(\exists y)(y \in x) \to (\exists y)(y \in x \,\&\, (\forall z)\neg(z \in X \,\&\, z \in y)).$$

Ovom aksiomom se utvrdjuje da je relacija $\in$ dobro zasnovana.

(A_4) Aksiom praznog skupa:

$$(\exists y)(\forall x)(x \notin y).$$

Postoji prazan skup. Označavamo ga sa ϕ.

(A_5) Aksiom - shema podskupa:

$$(\forall z)(\exists y)(\forall x)(x \in y \longleftrightarrow x \in z \,\&\, \varphi(x)).$$

Za dati skup z postoji podskup y koji se sastoji od onih elemenata koji zadovoljavaju formulu φ.

Ovaj aksiom omogućava da se definiše podskup

$$Y \subset X \longleftrightarrow (\forall z)(z \in Y \to z \in X).$$

(A_6) Aksiom partitivnog skupa:

$$(\forall x)(\exists y)(\forall z)(z \subset x \longleftrightarrow z \in y).$$

Za dati skup x postoji skup y koji se sastoji od svih podskupova od X. Definišemo partitivni skup

$$P(x) = \{y \mid y \subset x\}.$$

(A_7) Aksiom unije:

$$(\forall z)(\exists y)(\forall z)(z \in y \leftrightarrow (\exists u)(z \in u \,\&\, u \in x)).$$

Definišemo uniju od x

$$\cup x = \{y \mid (\exists z \in x)(y \in z)\}.$$

(A_8) Aksiom zamene:

$$(\forall x)(\forall y)(\forall z)(\varphi(x,y) \,\&\, \varphi(x,z) \rightarrow y = z) \rightarrow$$

$$(\forall x)(\exists y)(\forall u)(\forall z)(u \in x \,\&\, \varphi(u,z) \rightarrow z \in y).$$

Ako φ definiše funkciju i ako je x domen te funkcije, onda je i antidomen skup.

Sada se mogu definisati relacije i funkcije.

(A_9) Aksioma beskonačnosti:

$$(\exists x)(\phi \in x \,\&\, (\forall y)(y \in x \rightarrow \{y\} \in x)).$$

Postoji beskonačan skup.

Neka $\phi \notin x$. f je funkcija izbora za x ako za sve $y \in x$ $f(y) \in y$.

(A_{10}) Aksioma izbora:

Za svaku familiju nepraznih skupova x postoji funkcija izbora za x.

Poznat je veći broj stavova ekvivalentnih aksiomi izbora. Sledeća dva su posebno značajna.

Zermelova teorema:

Svaki se skup može dobro urediti.

Zornova Lema

Neka je x parcijalno uredjen relacijom $<$ i neka svaki lanac u x ima gornju granicu, onda x ima maksimalni element.

Ordinali i kardinali

Definicija:

Skup X je tranzitivan ako

$$(\forall Y)(\forall Z)(Y \in X \ \& \ Z \in Y \rightarrow Z \in X).$$

Skup X je ordinalni broj ako važi:

1. X je tranzitivan
2. X je uredjen relacijom $\in$.

Ordinalne brojeve označavamo malim grčkim slovima. Klasu svih ordinala označavamo sa Ord. Ordinali su prirodno uredjeni relacijom $\in$:

$$\alpha < \beta \longleftrightarrow \alpha \in \beta.$$

Takodje važi:

$$\alpha + 1 = \alpha \cup \{\alpha\}.$$

α je naslednì ordinal ako postoji β tako da $\alpha = \beta + 1$. α je granični ordinal ako nije naslednik. α je paran ordinal ako je granični ili ako postoji granični ordinal β i paran prirodan broj n tako da $\alpha = \beta + n$ Inače, α je neparan ordinal.

Stav 21.

Neka je X skup ordinala. $\bigcup X$ je ordinal.

Dokaz.

Po definiciji ordinala.

Sada možemo definisati kumulativnu hijerarhiju skupova:

$$R(\emptyset) = \emptyset$$

$$R(\alpha+1) = P(R(\alpha))$$

$$R(\alpha) = \bigcup_{\beta < \alpha} R(\beta) \quad \text{ako je } \alpha \text{ granični}$$

$$V = \bigcup_{\alpha \in Ord} R(\alpha).$$

$$\rho(x) = \min \alpha \; (x \in R(\alpha+1)).$$

Za skupove X i Y kaže se da su iste moći (kardinalnosti) ako postoji 1-1 i na funkcija čiji je domen X i antidomen Y. X je moći manje ili jednake Y ako postoji podskup Z od Y tako da su X i Z iste moći. Definišemo inicijalne redne brojeve uobičajeno:

$\omega = \{\alpha \mid \alpha$ je konačan redni broj$\}$

$\omega_{\alpha+1} = \{\alpha \mid \alpha$ je ordinal moći manje ili jednake $\omega_\alpha\}$

$\omega_\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} \omega_\beta$ ako je α granični ordinal.

Iz aksiome izbora sledi da za svaki skup X postoji inicijalni redni broj ω_α tako da su X i ω_α iste moći, što omogućava da se definiše moć (kardinalnost) skupa X sa

$$|X| = \omega_\alpha,$$

kao i operacije kardinalne aritmetike na uobičajen način.

Stav 22.

$$2^\kappa > \kappa .$$

Dokaz.

Cantorov dijagonalni postupak.

U vezi sa ovim stavom odmah se postavlja problem odredjivanja 2^{ω_α} za dati ω_α. Cantor je postavio hipotezu (CH) da je

$$2^\omega = \omega_1 .$$

Uopštena kontinuum hipoteza (GCH) glasi:

za svaki α $2^{\omega_\alpha} = \omega_{\alpha+1}$.

Gödel i Cohen su dokazali neprotivurečnost i nezavisnost GCH od aksioma ZFC. Samim tim pitanje odredjivanja 2^{ω_α} nije rešivo u ZFC i to je poznato kao problem kontinuuma.

Ako je κ kardinal, kofinalnost od κ $(cf(\kappa))$je minimalan ordinal α takav da postoji funkcija $f:\alpha\to\kappa$ za koju važi

$$\bigcup_{\xi<\alpha} f(\xi)=\kappa .$$

κ je regularan kardinal akko $cf(\kappa)=\kappa$. Inače, κ je singularni kardinal. $cf(\kappa)$ je uvek regularni kardinal, $\omega_{\alpha+1}$ je regularan za sve α (u ZFC). ω_α je granični kardinal ako je α granični ordinal, inače ω_α je kardinal naslednik. Definišimo slabu potenciju kardinala:

$$\alpha^{\underline{\beta}}=\sum_{\gamma<\beta}\alpha^{\gamma} .$$

Definišemo

$$\beth_\alpha=|R(\omega+\alpha)| .$$

κ je jaki granični kardinal ako za neki granični ordinal α važi

$$\kappa=\beth_\alpha .$$

Sledeći stav dokazao je Tarski.

Stav 23.

Neka su α i β kardinali takvi da $\beta>0$, α graničan i neka je ξ granični ordinal takav da $\beta<cf\xi, cf\alpha\le\xi$. Neka je $\{\alpha_\nu|\nu<\xi\}$ rastući niz kardinala manjih od α za koje važi

$$\sum_{\nu<\xi}\alpha_\nu=\alpha ;$$

onda

$$\sum_{\nu<\xi}\alpha_\nu^{\beta}=\alpha^{\beta}.$$

Dokaz.

Neka je $f \in {}^{\beta}\alpha$. Odavde, za $i \in \beta$, $f(i) < \alpha$, pa postoji $\nu(i) < \xi$ tako da

$$f(i) < \alpha_{\nu(i)} .$$

Stavimo

$$\nu = \sup_{i < \beta} \nu(i) .$$

Biće $\nu < \xi$, pa zato $f \in {}^{\beta}\alpha_{\nu}$, odakle

$${}^{\beta}\alpha \subset \bigcup_{\nu < \xi} {}^{\beta}\alpha_{\nu} .$$

S druge strane, očigledno

$$\sum_{\nu < \xi} \alpha_{\nu}^{\beta} \leq \alpha^{\beta} .$$

Sledeći stav dokazao je König.

Stav 24.

Neka je I neprazan skup i neka $\alpha_i < \beta_i$ za $i \in I$. Onda

$$\sum_{i \in I} \alpha_i < \prod_{i \in I} \beta_i .$$

Dokaz.

Za sve $i \in I$, $\alpha_i \in \beta_i \setminus \alpha_i$; stavimo za sve $j \in I$

$$T_j = \{ f \in \prod_{i \in I} \beta_i \mid (i \neq j \to f(i) = \alpha_i) \;\&\; f(j) \in \alpha_j \} .$$

Biće

$$|T_j| = \alpha_j ,$$

$$i \neq j \longrightarrow T_i \cap T_j = \phi .$$

Odavde

$$\left| \bigcup_{j \in I} T_j \right| = \sum_{j \in I} \alpha_j ,$$

$$\bigcup_{j \in I} T_j \subset \prod_{j \in I} \beta_j ,$$

pa zato

$$\sum_{i\in I}\alpha_i \leq \prod_{i\in I}\beta_i .$$

Pretpostavimo da ovde važi jednakost. Onda postoji familija $\{S_i \mid i\in I\}$ disjunktnih podskupova od $\prod_{i\in I}\beta_i$ tako da za sve $i\in I$

$$|S_i| = \alpha_i \qquad \text{i}$$

$$\bigcup_{i\in I} S_i = \prod_{i\in I}\beta_i .$$

Neka je $\pi_i : \prod_{j\in I}\beta_j \to \beta_i$, i-ta projekcija. Stavimo

$$P_i = \pi_i[S_i] \subset \beta_i .$$

Odavde $\beta_i \setminus P_i \neq \phi$, pa zato postoji .
Očigledno da funkcija f data sa $f(i) = \xi_i$ pripada

$$\prod_{i\in I}\beta_i \setminus \bigcup_{i\in I} S_i .$$

Kontradikcija.

Posledica 1.

Ako je α beskonačan kardinal, onda $\alpha < \alpha^{cf\alpha}$

Posledica 2.

Ako je α beskonačan kardinal, onda $\alpha < cf\, 2^{\alpha}$.

Vrednost izraza $\alpha^{cf\alpha}$ je od posebnog značaja za izračunavanje kardinalnosti ultrastepena. Posebno je značajan slučaj $\alpha^{cf\alpha} = \alpha$ koji je okarakterisan sledećim stavom.

Stav 25.

Neka je α beskonačan kardinal. Onda važi

$$\alpha^{cf\alpha} = \alpha \text{ akko } (\forall\beta\lambda)(\beta<\alpha \;\&\; \lambda < cf\alpha \to \beta^{\lambda} \leq \alpha).$$

Dokaz.

Dokaz s leva u desno je neposredan. Pretpostavimo da desna strana važi.

a) Neka je za neki β $cf(\alpha) = \beta^+$. Onda postoji rastući niz

$$\{\gamma_i \mid i < \beta^+ \ \& \ \gamma_i < \alpha\}$$

sa supreminom α :

$$\alpha = \sum_{i<\beta^+} \gamma_i .$$

Primenjujući stav 23. za ma koji $\lambda < \beta^+$

$$\alpha^\lambda = \sum_{i<\beta^+} \gamma_i^\lambda .$$

Po pretpostavci: $\gamma_i \leq \alpha$ pa zato

$$\alpha^\lambda \leq \alpha \cdot \beta^+ = \alpha .$$

Odavde sumiranjem

$$\alpha^{cf\alpha} \leq \alpha .$$

b) Neka je $cf(\alpha) = \beta$ - granični kardinal, znači β je nedostiživ.

Neka je

$$\{\gamma_i \mid i < cf\alpha = \beta\}$$

rastući niz kardinala manjih od α sa supreminom α. Primenom stava 23. dobijamo za sve $\lambda < cf\beta = \beta$

$$\alpha^\lambda = \sum_{i<\beta} \gamma_i^\lambda .$$

Pošto je za sve $i < \beta$ $\gamma_i^\lambda \leq \alpha$, sumiranjem dobijamo

$$\alpha^{cf\alpha} = \sum_{\lambda<\beta} \alpha^\lambda \leq \alpha \cdot \beta \cdot \beta = \alpha .$$

Modeli za ZF

Da je teorija ZF neprotivurečna ne može se dokazati u okviru ZF. Medjutim, može se govoriti o relativnoj neprotivurečnosti formule φ od aksioma ZF. Ako pretpostavivši neprotivurečnost aksioma ZF dokažemo da je ZF + φ neprotivurečna teorija, onda kažemo da je φ relativno neprotivurečna sa ZF. Slično, kažemo da je formula φ relativno nezavisna od aksioma ZF ako su $\varphi, \neg\varphi$ relativno neprotivurečne sa ZF.

Model $\mathfrak{A} = \langle A, E \rangle$ je dobro zasnovan akko svaki podskup od A ima E-minimalni element.

Model $\mathfrak{A} = \langle A, E \rangle$ je ekstenzionalan akko u $\mathfrak{A}$ je zadovoljen aksiom ekstenzionalnosti.

<u>Lema kolapsiranja Mostowskog</u>

Ako je $\mathfrak{A}$ ekstenzionalan dobro zasnovan model, onda postoji jedinstven tranzitivni model $\mathfrak{B} = \langle B, \in \rangle$ tako da je

$$\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B} .$$

Drugim rečima, u razmatranjima dobro zasnovanih modela teorije skupova možemo se ograničiti na tranzitivne $\in$ modele.

Podskup X skupa M je definibilan u M akko postoji formula $\varphi(u v_1 \ldots v_n)$ teorije skupova i elementi $y_1, \ldots, y_n$ iz M tako da

$$X = \{ x \in M \mid \langle M, \in \rangle \models \varphi [x y_1 \ldots y_n] \}.$$

Definišemo $L(\alpha)$ za $\alpha \in Ord$ sa:

$$L(\phi) = \phi$$

$$L(\alpha+1) = \{ x \subset L(\alpha) \mid x \text{ je definibilan u } L(\alpha) \}$$

$$L(\alpha) = \bigcup_{\beta<\alpha} L(\beta) \qquad \text{ako je } \alpha \text{ granični ordinal.}$$

Definišemo klasu L sa

$$L = \bigcup L(\alpha).$$

L zovemo konstruktibilni univerzum. Skup X je konstruktibilan ako je $X \in L$. Aksiom konstruktibilnosti glasi

$$V = L .$$

Svaki skup je konstruktibilan.

Konstruktibilni univerzum je model za $ZF + V = L$ ako je ZF neprotivurečan. Gödel, koji je uveo konstruktibilne skupove, pokazao je da su GCH i aksiom izbora posledice aksioma konstruktibilnosti. Sa ZFL označavamo teoriju $ZF + V = L$. Gödel je pokazao da su ZF i ZFL ekvikonsistentne teorije. Kako je $V = L$ vrlo jak aksiom, Gödelov dokaz nam daje odgovor na pitanje neprotivurečnosti većeg broja različitih jakih hipoteza za koje je dokazano da su posledice aksioma konstruktibilnosti.

Veliki kardinali

Kardinal ω_α je slabo nedostiživ akko ω_α je granični, regularni kardinal. Kako je za granične kardinale $cf(\omega_\alpha) = cf(\alpha)$ i $\alpha \leq \omega_\alpha$, sledi za slabo nedostižive kardinale da je $\omega_\alpha = \alpha$, što znači da oni predstavljaju fiksne tačke u enumeraciji kardinala. Medjutim, to ne karakteriše samo nedostižive kardinale. Uzmimo niz $\alpha_0 = \omega_0$, $\alpha_{n+1} = \omega_{\alpha_n}$. Neka je $\alpha = \sum_{n<\omega} \alpha_n$. Biće $\omega_\alpha = \alpha$ i $cf(\omega_\alpha) = \omega$. Kardinal α je jako nedostiživ ako je regularan i ako za svaki $\beta < \alpha$ važi $2^\beta < \alpha$. Može se pokazati da je

$$\alpha = \beth_\alpha ,$$

što znači da je α jak granični kardinal. Obavezno

$$\omega_\alpha \leq \beth_\alpha ,$$

ali uz GCH imamo

$$\omega_\alpha = \beth_\alpha$$

pa se gornji pojmovi nedostiživosti poklapaju (uz GCH). Jako nedostiživi kardinali su fiksne tačke funkcije enumeracije $\beth_\alpha$ $(\alpha \in Ord)$, medjutim, to nije karakteristično, što se lako proverava ako se slično kao gore uzme $\alpha_0 = \omega$, $\alpha_{n+1} = \beth_{\alpha_n}$ onda $\alpha = \sum_{n<\omega} \alpha_n$ jeste fiksna tačka ali je singularan.

Ako je α jako nedostiživ, onda se može proveriti da u $R(\alpha)$ važe svi aksiomi ZFC. Odavde sledi da se postojanje jako nedostiživih kardinala ne može dokazati ako je ZFC neprotivurečna teorija.

Stav 26.

Ako je κ jako nedostiživ, onda je $\langle R(\kappa), \in \rangle$ model za ZFC.

Dokaz.

Lako se proverava da ako je σ granični ordinal, onda $\langle R(\sigma), \in \rangle$ zadovoljava sve aksiome ZFC osim možda aksiome zamene. Ako je X skup u $R(\kappa)$ (znači X nije prava klasa), onda za neki $\alpha < \kappa$, $X \in R(\alpha)$. Neka je f funkcija sa domenom X . Pošto je $\alpha < \kappa$, biće i $|Dom(f)| = |X| \leq |R(\alpha)| \leq \beth_\alpha < \kappa$. Pošto je κ regularan, mora biti zbog $|f(x)| = \beta < \kappa$, za neki $\gamma < \kappa$, $f(x) \subset R(\gamma) \in R(\kappa)$, pa je i $f(x)$ skup.

Može se uvesti hijerarhija nedostiživih kardinala. α je 0 - hipernedostiživ ako je nedostiživ. α je β-hipernedostiživ ako za svaki $\gamma < \beta$, α je α-ti γ- hipernedostiživ kardinal.

Funkcija $f: Ord \to Ord$ je normalna ako važi:

1. f je rastuća

2. f je neprekidna, tj. za granične α

$$f(\alpha) = \bigcup_{\beta<\alpha} f(\beta).$$

Može se dokazati da fiksne tačke normalne funkcije čine zatvorenu neograničenu klasu. Sledeći aksiom predstavlja najjače direktno uopštenje aksioma koji garantuju egzistenciju nedostižvih kardinala.

NF: svaka normalna funkcija ima regularnu fiksnu tačku.

f je normalna funkcija na α ako je $Dom(f) \subset \alpha$, f neograničena u α, rastuća i neprekidna. α je slab (jak) mahlo kardinal ako svaka normalna funkcija na α ima regularnu (jako nedostižnu) fiksnu tačku. Slično kao gore mogu se dijagonalizacijom indeksa definisati hiper-mahlo,... α-hiper-mahlo,... Kardinal α je slabo kompaktan akko infinitarni jezik $\mathcal{L}_{\alpha,\alpha}$ ima sledeće svojstvo kompaktnosti: ako je Σ skup rečenica iz $\mathcal{L}_{\alpha,\alpha}$ takav da $|\Sigma| = \alpha$ i za svaki $\Sigma_0 \subset \Sigma$, $|\Sigma_0| < \alpha \rightarrow \Sigma_0$ ima model, onda Σ ima model.

Parcijalno uredjeni skup $(T, <)$ je drvo ako važi:

1. $<$ je tranzitivna relacija
2. $<$ je dobro zasnovana
3. svaki (levi polukonus) $\{y \in T : y < x\}$ je lanac
4. postoji najmanji element $t \in T$ tako da za sve $x \in T$, $x \neq t \rightarrow t < x$.

Jasno da je svaki lanac dobro uredjen. Sa $\tau(x)$ označimo redni tip skupa prethodnika od x (red elemenata x),

$$\tau(T) = \bigcup_{x \in T} \tau(x) \qquad \text{(visina } T\text{)}.$$

$G \subset T$ je grana akko

5. iz $x \in G$ i $y < x$ sledi $y \in G$

6. $x, y \in G$ povlači $x < y$ ili $y < x$ ili $x = y$.

Kažemo da kardinal α ima svojstvo grananja akko svako drvo T visine α nad kardinalom α takvo da za svaki $\beta < \alpha$ manje od α elemenata je reda β, ima granu reda α. Može se dokazati da su za nedostižive kardinale svojstva grananja i slabe kompaktnosti ekvivalentna. Takodje, ako je α slabo kompaktni nedostiživi kardinal, onda ispred α ima α nedostiživih kardinala.

Kardinal α je Π^m_n (Σ^m_n) neopisiv ako za svaki $S \subset R(\alpha)$ i za svaku Π^m_n (Σ^m_n) rečenicu φ važi sledeće. Ako

$$\langle R(\alpha), \in, S \rangle \models \varphi,$$

onda je za neki $\beta < \alpha$

$$\langle R(\beta), \in, S \cap R(\beta) \rangle \models \varphi.$$

Stav 27.

α je Π^1_0 neopisiv akko α je jako nedostiživ.

Dokaz.

Neka je α jako nedostiživ, $S \subset R(\alpha)$. Neka je $\mathfrak{A}_\alpha = \langle R(\alpha), \in, S \rangle$, neka je F skup Skolemovih funkcija za $\mathfrak{A}_\alpha$. $|F| = \omega$. Neka je za dati $\gamma < \alpha$, $g(\gamma)$ prvi ordinal takav da za sve $f \in F$ iz $x_1, \dots, x_m \in R(\gamma)$ sledi

$$f(x_1 \dots x_m) \in R(g(\gamma)).$$

Pošto je α jako nedostiživ, biće $g(\gamma) < \alpha$. Ako uzmemo

$$\beta = \bigcup_{n < \omega} g^n(0)$$

biće i $\beta < \alpha$. Pošto je $R(\beta)$ zatvoren za sve $f \in F$, biće

$$\mathfrak{A}_\beta = \langle R(\beta), \in, S \cap R(\beta) \rangle \prec \mathfrak{A}_\alpha.$$

Odavde za svaku rečenicu prvog reda φ

$$\mathfrak{A}_\beta \models \varphi \qquad \text{akko} \qquad \mathfrak{A}_\alpha \models \varphi.$$

Znači α je Π^1_0- neopisiv.

Neka je α Π^1_0-neopisiv. Pretpostavimo da α nije jako nedostiživ. Biće $\alpha = \gamma^+$ ili α je singularan ili za neki $\gamma < \alpha$, $\alpha \leq 2^\gamma$. Neka je $\alpha = \gamma^+$. Neka je $S = \{\gamma\} \subset R(\alpha)$, φ formula $\exists x\, A_1(x)$ biće

$$\langle R(\alpha), \in, \{\gamma\} \rangle \models \exists x\, A_1(x),$$

ali za sve $\beta < \alpha$

$$\langle R(\beta), \in, \{\gamma\} \cap R(\beta) \rangle \models \neg \exists x\, A_1(x),$$

jer je $\{\gamma\} \cap R(\beta) = \emptyset$. Odavde α nije ni Σ^0_1 neopisiv, pa zato ne može biti ni Π^1_0 neopisiv.

Neka je α singularan, $cf\alpha = \gamma < \alpha$. Neka je $f \in {}^{cf\alpha}\alpha$ tako da $\bigcup_{\nu \in \gamma} f(\nu) = \alpha$. Uzmimo $\{\gamma\}, f \subset R(\alpha)$ zza parametre:

$$\langle R(\alpha), \in, \{\gamma\}, f \rangle \models \exists x\, (A_1(x) \,\&\, A_2 : x \to Ord).$$

$\{\gamma\}$ je neprazno pa u modelu $A_1[\gamma]$.

$f \restriction \gamma = Dom(f)$, pa ako A_2 interpretiramo sa f , jasno je da gornja relacija zadovoljenja važi. $A_2 : x \to Ord$ znači da je A_2 relacija (funkcija) čiji je domen x a slike su u Ord . Medjutim, za sve $\beta < \alpha$, $\{\gamma\} \cap R(\beta) = \begin{cases} \emptyset & \text{za } \gamma \geq \beta \\ \{\gamma\} & \text{za } \gamma < \beta \end{cases}$.

Takodje za sve $\beta < \alpha$, $Dom(f \cap R(\beta)) \subset \gamma$ ali $Dom(f \cap R(\beta)) \neq \gamma$ jer je f neograničeno u α. Sledi da za sve $\beta < \alpha$

$$\langle R(\beta), \in, \{\gamma\} \cap R(\beta), f \cap R(\beta) \rangle \models \neg \exists x\, (A_1(x) \,\&\, A_2 : x \to Ord),$$

jer ili $Dom(f \cap R(\beta)) \neq \{\gamma\} \cap R(\beta)$ ili je $\{\gamma\} \cap R(\beta) = \emptyset$, što znači da je α opisan tom formulom pa nije Π^1_0 neopisiv.

Neka je $\gamma < \alpha$, $\alpha \leq 2^{\gamma}$ i neka $f : P(\gamma) \to \alpha$, f je *na*. Uzmimo opet $\{\gamma\}$ i f za parametre. Biće

$$\langle R(\alpha), \in, \{\gamma\}, f \rangle \models \exists x\, (A_1(x) \,\&\, A_2 : P(x) \to \mathrm{Ord}).$$

Medjutim za sve $\beta < \alpha$

$$\langle R(\beta), \in, \{\gamma\} \cap R(\beta), f \cap R(\beta) \rangle \models \neg \exists x\, (A_1(x) \,\&\, A_2 : P(x) \to \mathrm{Ord}),$$

jer, slično kao gore, $\mathrm{Dom}\,(f \cap R(\beta)) \neq \{\gamma\} \cap R(\beta)$ ili je $\{\gamma\} \cap R(\beta) = \emptyset$, pošto je $f(P(X)) = \alpha$.

Stav 28.

Ako je κ Π^1_1 neopisiv, onda κ ima svojstvo grananja.

Dokaz.

Pretpostavimo da je κ jako nedostiživ i da nema svojstvo grananja. Neka je $\langle T, <_T \rangle$ drvo kardinalnosti κ kod koga je svaki red kardinalnosti manje od κ, bez grane dužine κ. Možemo pretpostaviti da je $T \subset R(\kappa)$ i da je

1. $x <_T y$ povlači $\rho(x) < \rho(y)$

2. $\tau_T(x) = \tau_T(y)$ povlači $\rho(x) = \rho(y)$,

gde je $\tau_T(x)$ redni tip skupa prethodnika od x. Pošto su $T, <_T \subset R(\kappa)$, uzmimo ih za parametre. Neka je φ sledeća Π^1_1 formula.

$$\forall X\, (X \text{ je grana u } \langle A_1, A_2 \rangle \to \exists y\, (X \subset Y))\ \&\ \forall Y \neg (A_1 \subset Y).$$

Lako se proverava da važi

$$\langle R(\kappa), \in, T, <_T \rangle \models \varphi.$$

Za sve $\beta < \kappa$, $T \cap R(\beta)$ je ograničeno u β ili $T \cap R(\beta)$ ima granu neograničenu u β. U oba slučaja

$$\langle R(\beta), \in, T \cap R(\beta), <_T \cap R(\beta) \rangle \models \neg \varphi,$$

pa κ nije Π^1_1 neopisiv.

Stav 29.

Neka je κ slabo kompaktan, jako nedostiživi kardinal. Onda za svaki $U \subset R(\kappa)$, model $\langle R(\kappa), \in, U \rangle$ ima pravu elementarnu ekstenziju $\langle A, \in, U' \rangle$ tako da je A tranzitivan i $\kappa \in A$.

Dokaz.

Neka je Σ skup rečenica $\mathcal{L}_{\kappa,\kappa}$:

$$\Sigma = Th_{\mathcal{L}_{\kappa,\kappa}}(\langle R(\kappa), \in, U, (x)_{x \in R(\kappa)} \rangle) \cup \{ c \neq \underline{x} \mid x \in R(\kappa) \} \cup Ord(c).$$

c je ovde nova konstanta različita od svih $\underline{x}$, $x \in R(\kappa)$. Pošto je $\beth_\kappa = \kappa$, $|\Sigma| \geqslant \kappa$, biće $|\Sigma| = \kappa$. Neka je $\Sigma' \subset \Sigma$ takav da $|\Sigma'| < \kappa$. Jasno da postoji $\alpha < \kappa$ tako da $\underline{\alpha}$ nije ni u jednoj rečenici iz Σ'. Biće

$$\langle R(\kappa), \in, U, (x)_{x \in R(\kappa)}, \alpha \rangle \models \Sigma',$$

pa zbog slabe kompaktnosti κ, Σ ima model. Neka je

$$\langle B, E, U', (x')_{x \in R(\kappa)}, Y' \rangle \models \Sigma;$$

pošto

$$\neg \exists (x_n)_{n \in \omega} \mathop{\&}_{n \in \omega} (x_{n+1} \in x_n) \in Th_{\mathcal{L}_{\kappa,\kappa}}(\langle R(\kappa), \in \rangle),$$

biće relacija E dobro zasnovana pa po teoremi Mostowskog postoji izomorfizam

$$\langle B, E, U', (x')_{x \in R(\kappa)}, Y' \rangle \cong \langle A, \in, U', (x)_{x \in R(\kappa)}, Y \rangle.$$

Da je slika od x', x dokazuje se indukcijom po $\rho(z)$ $(z \in x)$. Y mora biti ordinal koji nije u $R(\kappa)$. $Y \in A$ pa zbog tranzitivnosti, $\kappa \in A$.

Stav 2.10.

Neka je κ jako nedostiživ i neka za svaki $U \subset R(\kappa)$, model $\langle R(\kappa), \in, U\rangle$ ima pravu elementarnu ekstenziju $\langle A, \in, U'\rangle$ takvu da je A tranzitivan i $\kappa \in A$. Onda κ je Π^1_1 neopisiv.

Dokaz.

Neka je φ Π^1_1 rečenica takva da $\langle R(\kappa), \in, U\rangle \models \varphi$. Imaćemo u modelu $\langle A, \in, U'\rangle$ da važi

$$\langle R(\kappa), \in, U\rangle \models \varphi,$$

odnosno

$$\langle A, \in, U'\rangle \models \exists\alpha\,(\langle R(\alpha), \in, U' \cap R(\alpha)\rangle \models \varphi).$$

$\exists\alpha\,(\langle R(\alpha), \in, U' \cap R(\alpha)\rangle \models \varphi)$ je formula prvog reda pa zato

$$\langle R(\kappa), \in, U\rangle \models \exists\alpha\,(\langle R(\alpha), \in, U \cap R(\alpha)\rangle \models \varphi),$$

odakle sledi da je κ Π^1_1 neopisiv.

Neka je κ neprebrojivi kardinal. Funkcija $\mu : P(\kappa) \to \{\phi, 1\}$ je σ aditivna mera nad κ ako važi:

1. $\mu(\kappa) = 1$
2. $\alpha < \kappa \to \mu(\{\alpha\}) = \phi$
3. $X \subset P(\kappa)\ \&\ |X| < \sigma\ \&\ (Y, Z \in X\ \&\ Y \neq Z \to Y \cap Z = \phi) \to$
   $\mu(\cup X) = \sum_{Y \in X} \mu(Y)$.

Uslov 3. definiše σ aditivnost. μ je uniformna mera ako iz $\mu(X) = 1$ sledi $|X| = \kappa$. κ je merljiv kardinal ako egpostoji κ aditivna mera nad κ. Ovo je ekvivalentno egzistenciji κ kompletnog neglavnog ultrafiltera nad κ.

Stav 2.11.

Ako je κ merljiv, onda je κ jako nedostiživ.

Dokaz.

Neka je κ singularan. Znači $cf\kappa < \kappa$, pa postoji rastući $cf\kappa$ niz sa supremumom κ :

$$\{\alpha_\xi \mid \xi < cf\kappa\}$$

$$\sum_{\xi < cf\kappa} \alpha_\xi = \kappa,$$

odnosno $\kappa = \bigcup_{\xi < cf\kappa} \alpha_\xi$. Neka je μ κ aditivna mera nad κ . Biće

$$\mu(\kappa) = \mu\left(\bigcup_{\xi < cf\kappa} \alpha_\xi\right) = \sum_{\xi < cf\kappa} \mu(\alpha_\xi) = \phi .$$

Znači κ je regularan. Pretpostavimo da za neki $\alpha < \kappa$, $\kappa \leq 2^\alpha$.

Stavimo za $\sigma < \alpha$, $X \subset {}^\alpha 2$, $|X| = \kappa$

$$A_{\sigma,i} = \{f \mid f \in X \ \& \ f(\sigma) = i\} .$$

Možemo smatrati da je $\kappa \subset 2^\alpha$.

Kako je za svaki $\sigma < \alpha$

$$A_{\sigma,0} \cap A_{\sigma,1} = \phi , \quad A_{\sigma,0} \cup A_{\sigma,1} = \kappa,$$

Uzmimo i_σ tako da bude

$$\mu(A_{\sigma,i_\sigma}) = 1 .$$

Stavimo

$$A = \bigcap_{\sigma < \alpha} A_{\sigma,i_\sigma} .$$

Biće $\mu(A) = 1$. Medjutim $|A| = 1$ jer $f \in A$ povlači da za sve σ , $f(\sigma) = i_\sigma$, odakle $\mu(A) = \phi$.

Sledeći stav govori o mogućnosti proširenja mere na veće kardinale ukoliko postoji merljiv kardinal.

Stav 2.12.

Neka je $\gamma > \kappa$ i neka je κ merljiv. Onda nad γ postoji κ -aditivna mera.

Dokaz.

Neka je κ merljiv, μ mera nad κ, γ kardinal veći od κ. Definišimo funkciju $\mu' : P(\gamma) \to \{0,1\}$ sa $\mu'(X) = \mu(X \cap \kappa)$ i dokažimo da je κ aditivna mera nad γ.

$$\mu'(\gamma) = \mu(\gamma \cap \kappa) = \mu(\kappa) = 1;$$

ako je $\sigma < \gamma$, onda za $\sigma \geq \kappa$

$$\mu'(\{\sigma\}) = \mu(\{\sigma\} \cap \kappa) = \mu(\emptyset) = 0;$$

za $\sigma < \kappa$ je

$\mu'(\{\sigma\}) = \mu(\{\sigma\} \cap \kappa) = \mu(\{\sigma\}) = 0$ jer je μ mera nad κ.

Znači, za svaki singleton u $P(\gamma)$, $\mu(\{\sigma\}) = 0$.

Neka je $X = \{x_i \mid i \in I\}$, $|I| < \kappa$ bilo koja familija disjunktnih skupova iz $P(\gamma)$.

Prvo, ne može biti za $i \neq j$, $\mu'(x_i) = \mu'(x_j) = 1$.

Pretpostavimo da to jeste slučaj, onda bismo imali

$$\mu'(x_i) = \mu(x_i \cap \kappa) = 1 \text{ i } \mu'(x_j) = \mu(x_j \cap \kappa) = 1.$$

Kako su x_i i x_j disjunktni, biće to i za $x_i \cap \kappa$ i $x_j \cap \kappa$, znači $x_j \cap \kappa \subset \kappa \setminus (x_i \cap \kappa)$ što povlači $\mu(x_j \cap \kappa) \leq \mu(\kappa \setminus (x_i \cap \kappa)) = 1 - \mu(x_i \cap \kappa)$. Odavde $\mu'(x_i) + \mu'(x_j) \leq 1$. Neka je za neki i_0, $\mu'(x_{i_0}) = 1$; onda $\mu'(\cup X) = \mu(\cup X \cap \kappa) = 1$. S druge strane,

$\sum_{i \in I} \mu'(x_i) = \mu'(x_{i_0}) + \sum_{i \in I \setminus \{i_0\}} \mu'(x_i) = \mu'(x_{i_0}) = 1$; neka za sve $i \in I$, $\mu'(x_i) = 0$.

Onda $\sum_{i \in I} \mu'(x_i) = 0$, $\mu'(\cup X) = \mu(\cup X \cap \kappa) = \mu(\cup\{x_i \cap \kappa : x_i \in X\}) = 0$.

Znači, važi $\mu'(\cup X) = \sum_{x_i \in X} \mu'(x_i)$, pa je μ' stvarno κ aditivna mera nad γ.

Sledeći stav dopunjuje prethodni.

Stav 2.13.

Neka je κ merljiv kardinal i neka je $\gamma > \kappa$ singularni kardinal kofinalnosti manje od κ. Tada nad γ ne postoji κ-aditivna uniformna mera (to ne znači da nad γ ne postoji uniformna mera koja je σ-aditivna za neki $\sigma < \kappa$).

Dokaz.

Neka je κ merljiv kardinal i $\gamma > \kappa$ kardinal kofinalnosti manje od κ. Dokažimo da nad γ ne postoji uniformna κ-aditivna mera. Pretpostavimo suprotno. Neka je μ takva mera. Iz uniformnosti μ sledi da za svaki $\alpha < \gamma$, $\mu([\alpha, \gamma)) = 1$, jer bi inače bilo

$\mu([\alpha,\gamma)) = 0$, pa zato $\mu(\gamma \setminus [\alpha,\gamma)) = 1$.

$\gamma \setminus [\alpha,\gamma) = \alpha < \gamma$, sledi zbog uniformnosti μ da je $|\alpha| = \gamma$.

Znači, mera svakog završnog komada mora biti 1.

Uzmimo da je $A = \{\alpha_i \mid i \in I\}$ niz u γ takav da

$|I| < \kappa$,

$i < j$ povlači $\alpha_i < \alpha_j$ i

$\sup A = \gamma$.

Takav A sigurno postoji zbog uslova $cf\,\gamma < \kappa$.

Neka je $A_\gamma = \{\gamma \setminus \alpha_i \mid \alpha_i \in A\}$. Jasno je da je svaki element iz A_γ završni komad u γ pa iz gornjeg imamo

$$x \in A_\gamma \longrightarrow \mu(x) = 1.$$

Dokažimo da mora biti $\mu(\bigcap A_\gamma) = 1$.

$$\mu(\bigcap A_\gamma) = 1 - \mu(\gamma \setminus \bigcap A_\gamma) = 1 - \mu(\bigcup_{x \in A_\gamma} \gamma \setminus x) = 1 - \mu(\bigcup A).$$

Medjutim, $\mu(\bigcup A) \leq \sum_{a \in A} \mu(a) = 0$, iz gornjeg.

Znači $\mu(\cap A_\gamma)=1$, pa zato $|\cap A_\gamma|=\gamma$, jer je μ uniformna mera. Medjutim, $\cap A_\gamma=\phi$ po izboru A_γ.

Kontradikcija.

Kardinal $\kappa>\omega$ je jako kompaktan ako za svaki skup Σ rečenica jezika $\mathcal{L}_{\kappa,\kappa}$ važi:

Ako svaki podskup od Σ kardinalnosti manje od κ ima model, onda Σ ima model.

Mera μ nad $P_\kappa(\lambda)$ je normalna ako je κ-aditivna i ako za svaku funkciju $f: P_\kappa(\lambda)\to P_\kappa(\lambda)$ važi:

ako za sve $x\in P_\kappa(\lambda)$, $f(x)\in x$, onda za neki $\alpha<\lambda$ $\mu(\{x\in P_\kappa(\lambda)\mid f(x)=\alpha\})=1$.

κ je superkompaktan ako za svaki $\lambda\geqslant\kappa$ postoji normalna mera nad $P_\kappa(\lambda)$.

Poznato je da važe sledeće implikacije:

κ je superkompaktan $\longrightarrow$ κ je jako kompaktan

κ je jako kompaktan $\longrightarrow$ κ je merljiv

κ je merljiv $\longrightarrow$ κ je slabo kompaktan

(Poslednja implikacija je upravo stav 3.13).

Magidor je u (1974) dokazao da iz neprotivurečnosti

ZFC + postoji jako kompaktan kardinal

sledi da je neprotivurečna i teorija

ZFC + prvi jako kompaktan je prvi merljiv kardinal.

S druge strane iz neprotivurečnosti

ZFC + postoji super kompaktni kardinal

sledi neprotivurečnost teorije

ZFC + prvi superkompaktni = prvi jako kompaktan.

Problem kontinuuma

Kantorovu teoremu da za svaki beskonačni skup X važi

$$|P(X)| > |X|$$

možemo u ZFC formulisati u sledećem obliku:

za svaki ordinal α

$$2^{\omega_\alpha} = \omega_{\alpha+1},$$

odnosno

$$2^{\omega_\alpha} = \omega_{F(\alpha)}, \qquad (\phi)$$

pri čemu je $F(\alpha) \geqslant \alpha + 1$ strogo rastuća. Znači da F možemo rastaviti tako da za sve α

$$F(\alpha) = \alpha + f(\alpha), \qquad (1)$$

pri čemu je $f(\alpha) \geqslant 1$. Ako stavimo da je za sve $\alpha \in Ord$

$$f(\alpha) = 1,$$

dobijamo iz (ϕ) formulaciju GCH.

Jasno je da

$$\alpha \leqslant \beta \quad \text{povlači} \quad F(\alpha) \leqslant F(\beta) \qquad (2)$$

Takodje važi (Königova teorema)

$$cf(\omega_{F(\alpha)}) > \omega_\alpha. \qquad (3)$$

Rezultati Gödela i Cohena potvrdjuju da u ZFC, funkcija F iz (ϕ) nije odredjena. Svakako je od značaja da se utvrdi kakva ona uopšte može biti. Prirodno se, dakle, nameće pitanje:

ako je $\varphi(F)$ formula

$$F : Ord \to Ord \ \& \ 2^{\omega_\alpha} = \omega_{F(\alpha)}$$

kakva onda može biti funkcija F pa da je teorija $ZFC + \varphi(F)$ neprotivurečna? Odmah je jasno da mora zadovoljiti uslove (2) i (3). U tom smislu možemo reći da su Gödel i Cohen dali odgovore na gornje pitanje za dve odredjene funkcije. Problem hipoteze kontinuuma je bio otvoren decenijama pre Gödelovog i Cohenovog rešenja. Kurepa je 1937. ispitivao funkciju $N(\alpha)$ u izrazu

$$2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{N(\alpha)},$$

a 1953. zaključio da bi se kao nezavisan aksiom uz ZFC moglo uzeti da je u gornjem izrazu $N(\phi)$ bilo koji redni broj $\beta > \phi$ kofinalnosti različite od ω. Pored ove i drugih hipoteza kontinuuma koje je razmatrao zanimljiv je slučaj i sledeće.

Neka je I_n skup svih ordinala (kardinala) manji od n. Sa $\pi(n)$ označimo skup svih funkcija $f: I_n \to I_n$ takvih da $f(x) \leq x$. Neka je $n!$ kardinalnost skupa svih permutacija od n. Formula

$$n! = |P(n)|$$

je tačna za sve prirodne brojeve. Za beskonačan n imamo ordinalni (I_n je skup ordinala) i kardinalni (I_n je skup kardinala prethodnika od n) slučaj. U prvom je

$$n! = 2^n,$$

$$|P(n)| = \left|\prod_{\xi \in n}(\xi+1)\right| = 2^n = n!,$$

pa vidimo da formula važi za sve ordinale n.

Kardinalni slučaj je neobičan. Ako je, na primer, $n=\omega_1$, onda

$$I_n = \omega + 1,$$

$$|P(n)| = |P(\omega_1)| = |\prod_{\xi \in \omega+1} (\xi+1)| = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \omega = 2^{\omega} \cdot \omega = 2^{\omega}.$$

Medjutim, $\omega_1! = 2^{\omega_1}$, pa gornja formula daje

$$2^{\omega_1} = 2^{\omega}.$$

Slično za bilo koji kardinal ω_α , kardinalni slučaj ove formule daje

$$\omega_\alpha ! = 2^{\omega_\alpha} = |P(\omega_\alpha)|.$$

Medjutim, ovde je

$$ot(I_{\omega_\alpha}) = \omega + \alpha,$$

pa je

$$P(\omega_\alpha) \cong \prod_{\xi \in \omega+\alpha} (\xi+1),$$

odakle sledi

$$|P(\omega_\alpha)| = 2^{|\omega+\alpha|}.$$

Tako iz formule dobijamo hipotezu: za sve ordinale α

$$2^{\omega_\alpha} = 2^{|\omega+\alpha|}.$$

Za $\alpha < \omega$ to je

$$2^{\omega_\alpha} = 2^{\omega},$$

za $\alpha \geqslant \omega$ imamo

$$2^{\omega_\alpha} = 2^{|\alpha|}.$$

Iz ovoga dalje sledi da je za sve kardinale kofinalnosti ω , manje od prvog slabo nedostiživog i_0,

$$2^{\omega_\alpha} = 2^\omega.$$

Pošto kardinali kofinalni sa ω čine neograničeni pod-skup od i_0, imamo da je za sve $\omega_\alpha < i_0$

$$2^{\omega_\alpha} = 2^\omega.$$

Pošto je $i_0 = \sup_{\alpha < i_0} \omega_\alpha$ i $2^{\omega_\alpha} > \omega_\alpha$ biće

$$i_0 \leq 2^\omega.$$

Neposredno se vidi da ova hipoteza implicira egzistenciju slabo nedostiživog kardinala (uz ZFC). Jer, inače, bi bilo za sve ordinale α

$$2^{\omega_\alpha} = 2^\omega.$$

Uz aksiom izbora imamo da je za neki β

$$2^\omega = \omega_\beta,$$

pa bi odmah bilo

$$2^{2^\omega} = 2^\omega,$$

suprotno Kantorovom osnovnom stavu.

S druge strane jasno je da formula uvek važi za sve nedo-stižive kardinale.

Sledeći stav dokazao je Easton i on razrešava kontinuum problem u ZFC za regularne kardinale.

Stav 2.14.

Za svaku funkciju F, čiji je domen klasa svih ordinala α za koje je ω_α regularni kardinal i koja zadovoljava (2) i (3), neprotivurečnost ZFC povlači neprotivurečnost od $ZFC + \varphi'(F)$. Pri tome φ' je formula

$$\forall\alpha \in Dom(F) \quad 2^{\omega_\alpha} = \omega_{F(\alpha)} .$$

Drugim rečima, u ZFC za regularni ω_α , 2^{ω_α} može biti bilo koji kardinal, pod uslovom da važi (2) i (3), odnosno, može se ići neograničeno u visinu. Posle ovoga ostao je otvoren problem singularnih kardinala, koji je prilično rešio Silver 1974., dobivši za sve iznenadjujući rezultat.

Stav 2.15.

Ako je ω_α singularni kardinal takav da $cf\,\omega_\alpha > \omega$ onda

$$\forall\beta<\alpha \quad 2^{\omega_\beta} = \omega_{\beta+1} \quad \text{povlači} \quad 2^{\omega_\alpha} = \omega_{\alpha+1} .$$

Slučaj singularnih kardinala kofinalnosti ω nije rešen, pa je i pitanje nezavisnosti i neprotivurečnosti sledeće hipoteze u odnosu na ZFC otvoreno.

HCS (hipoteza o singularnim kardinalima) Neka je $cf\,\omega_\alpha < \omega_\alpha$. Onda

$$\forall\beta<\alpha \quad 2^{\omega_\beta} = \omega_{\beta+1} \longrightarrow 2^{\omega_\alpha} = \omega_{\alpha+1} .$$

Sledeći pojačani rezultat je takodje Silverov, a poznata su i druga profinjenja.

Stav 2.16.

Neka je ω_α singularni kardinal kofinalnosti $\varkappa > \omega$

i neka je μ ordinal $\mu < \varkappa$. Ako je

$$\{\beta < \alpha : 2^{\omega_\beta} \leq \omega_{\beta+\mu}\}$$

stacionaran podskup od α (tj. seče sve zatvorene kofinalne podskupove od α), onda je

$$2^{\omega_\alpha} \leq \omega_{\alpha+\mu} .$$

Neočekivan je nakon svega bio Jensenov rezultat koji povezuje HCS. Sa aksiomom koji garantuje egzistenciju jednog merljivog kardinala - AM.

Stav 2.17.

Ako je negacija HCS neprotivurečna sa ZFC, onda je i AM neprotivurečna sa ZFC.

O vezi AM i Eastonovog rezultata biće još reči u 4.poglavlju. Videće se da AM na odredjen način ograničava slobodu koju u ZFC garantuje Eastonova teorema.

FILTERI

Struktura ultraproizvoda je najuže povezana sa ultrafilterom. Zato i kardinalnost ultraproizvoda direktno zavisi od osobina ultrafiltera. U ovom odeljku razmatraju se neka filterska svojstva koja se kasnije primenjuju za odredjivanje kardinalnosti ultraproizvoda.

Familija skupova E je (α,β)-regularna akko:

1. $|E|=\beta$

2. $X\subset E\ ,\ |X|\geqslant\alpha$ povlači $\bigcap X=\phi$.

E je α-regularna familija akko E je (α,α)-regularna. Filter D nad I je (α,β)-regularan akko postoji $E\subset D$ i E je (α,β)-regularna familija. Filter D je α-regularan akko sadrži α-regularnu familiju. Filter je regularan akko je $|I|$-regularan.

Filter D je α-kompletan akko iz $E\subset D\ ,|E|<\alpha$ sledi $\bigcap E\in D$.

Filter D je uniforman akko iz $x\in D$ sledi $|X|=|\bigcup D|$.

Norma filtera D u oznaci $\|D\|$: $\|D\|=\min\limits_{X\in D}|X|$.

Filter D je glavni akko postoji $X\in D$ tako da

$$D=\{Y\mid Y\subset\bigcup D\ \&\ X\subset Y\}.$$

Filter D je α-silaznonekompletan akko postoji $E\subset D$ tako da

1. $E = \{ e_\xi \mid \xi < \alpha \}$

2. $\xi < \xi' \rightarrow e_{\xi'} \subset e_\xi$

3. $\bigcap E = \emptyset$.

D je α-silazno kompletan ako nije α-silazno nekompletan.

Filter D je α-rastavljiv ako postoji familija $Y_\xi (\xi < \alpha)$ tako da

1. $\xi, \eta < \alpha \ \& \ \xi \neq \eta \rightarrow Y_\xi \cap Y_\eta = \emptyset$

2. $\bigcup \{ Y_\xi \mid \xi < \alpha \} = \bigcup D$

3. $X \subset \alpha \ \& \ |X| < \alpha \rightarrow \bigcup \{ Y_\xi \mid \xi \in X \} \notin D$

Ako niz $E = \{ Y_\xi \mid \xi < \alpha \}$ zadovoljava 1., 2. i 3., kažemo da je E α-rastav za D. D je α-nerastavljiv akko D nije α-rastavljiv.

Ultrafilter D nad $\alpha > \omega$ je normalan ako važi:

1. D je α-kompletan neglavni ultrafilter

2. u ultrastepenu $\prod_D \langle \alpha, < \rangle$ klasa ekvivalencije identične funkcije id je α-ti element.

Ultrafilter D nad α je slabo normalan akko svaka funkcija $f \in {}^\alpha\alpha$ takva da $\{ i \mid f(i) < i \} \in D$ je ograničena, $\{ i : f(i) = \gamma < \alpha \} \in D$.

D je Ramsey ultrafilter ako važi:

1. D je uniforman nad α

2. Ako $[\alpha]^n = P_0 \cup P_1$, $P_0 \cap P_1 = \emptyset$, onda postoje $A \in P(\alpha)$, $i < 2$ tako da

$A \in D$ i za sve $n < \omega$ $[A]^n \subset P_i$.

Neka $f : P_\omega(\beta) \to P(\alpha)$. f je monotona ako za $F, G \in P_\omega(\beta)$, iz $G \subset F$ sledi $f(F) \subset f(G)$. f je multiplikativna ako za sve $F, G \in P_\omega(\beta)$ važi

$$f(F \cup G) = f(F) \cap f(G).$$

Za $f, g \in {}^{P_\omega(\beta)}P(\alpha)$ definišimo $f \leq g$ ako za sve $F, G \in P_\omega(\beta)$

$$f(F) \subset f(G).$$

Ultrafilter D nad α je β-dobar ako za sve $\gamma < \beta$ i svaku monotonu funkciju $f : P_\omega(\gamma) \to D$ postoji multiplikativna funkcija $g : P_\omega(\gamma) \to D$ tako da $g \leq f$. Ako postoji kardinal β tako da D nije β-dobar, onda stepen dobrote od D definišemo sa

$$G(D) = \min\{\beta \mid D \text{ nije } \beta^+\text{- dobar}\}.$$

Sledeća četiri jednostavna stava se koriste u više slučajeva.

Stav 31.

Neka je D filter nad I i neka je $X \in D$. Tada je $D' = P(X) \cap D$ filter nad X. Ako je D β regularan ili α-kompletan ili ultrafilter, onda isto važi i za D'.

Dokaz.

Očigledno je da je D' filter nad X. Pretpostavimo da je D ultrafilter. Neka je $Y \subset X$. $Y \in D$ ili $I \setminus Y \in D$. Odavde, $Y \in D$ ili $(I \setminus Y) \cap X \in D$, što povlači da je $Y \in D'$ ili $X \setminus Y \in D'$.

Neka je D β regularan i neka je E β regularna familija u D. $E' = \{e \cap X \mid e \in E\} \subset D$. Očigledno $|E'| \leq \beta$

Pretpostavimo da je $|E'| < \beta$. To povlači da postoji $E_0 \subset E$, $|E_0| = \beta$ tako da $\cap E_0 \neq \phi$, suprotno pretpostavci. Za $E_0' \subset E'$, $|E_0'| \geqslant \omega$ je

$$\cap E_0' = \cap \{e_i \cap X \mid i < |E_0'|\} = (\cap \{e_i \mid i \triangleleft |E_0'|\}) \cap X = \phi .$$

Dalje, $\cup E' = (\cup E) \cap X = X$, pa je D' β regularan.

Ako je D α-kompletan, jasno je da i D' mora biti α-kompletan.

Posledica.

Ako za X iz stava 31. uzmemo skup minimalne kardinalnosti u D , onda je D' uniforman filter.

Stav 32.

Neka je D ultrafilter nad I i neka je $f: I \to J$ preslikavanje $1-1$. Onda je $E = \{X \subset J \mid f^{-1}(X) \in D\}$ ultrafilter nad J . Ako je D (α,β)-regularan ili α-kompletan, onda isto važi i za E . $\|E\| = \|D\|$.

Dokaz.

Jasno je da je E filter. Ako je $X \subset J$, onda je $f^{-1}(X) \cap f^{-1}(J \setminus X) = \phi$ i $f^{-1}(X) \cup f^{-1}(J \setminus X) = I$, pa zato tačno jedan od $f^{-1}(X)$, $f^{-1}(J \setminus X)$ pripada D , recimo da je to $f^{-1}(X)$. Odatle $X \in E$, pa je E ultrafilter.

Ako je D,(α,β)regularan filter i Y (α,β)-regularna familija u D , onda je $Y' = \{f^{-1}(X) \mid X \in Y\}$ (α,β)-regularna familija u E , pa je E (α,β)-regularan filter. Očigledno $|Y'| = \beta$. Ako je $Y_0' \subset Y'$ tako da $|Y_0'| \geqslant \alpha$, onda za neki $Y_0 \subset Y$

$$Y_0' = \{X \mid f^{-1}(X) \in Y_0\}; \quad f^{-1}(\cap Y_0') = \bigcap_{X \in Y_0'} f^{-1}(X) = \cap Y_0 = \phi ,$$

pa zato $\cap Y_0' = \phi$.

Ako je D, α-kompletan, jednostavno se proverava da je i E, α-kompletan.
Da je $\|E\| = \|D\|$ izlazi iz obostrane jednoznačnosti funkcije f.

Posledica.

Iz stava 32. sledi da se u razmatranjima o ultrafilterima možemo ograničiti na filtere nad kardinalima.

Stav 33.

a) Filter D nad I je ω-regularan akko postoji prebrojivi opadajući lanac

$$I = I_0 \supset I_1 \supset \dots$$

elemenata $I_n \in D$ tako da je $\bigcap_{n<\omega} I_n = \emptyset$

b) Ultrafilter je ω-regularan akko je prebrojivo nekompletan. Svaki ω-regularni filter je prebrojivo nekompletan.

Dokaz.

a) Ako je uslov ispunjen, D je ω-regularan. Neka je D, ω-regularan filter i neka je E, ω-regularna familija u D. Formirajmo niz $I_0 = I$, $I_1 = I_0 \cap e_1, \dots, I_{n+1} = I_n \cap e_{n+1}, \dots$ Očigledno $I_k \in D$, $I_{k+1} \subset I_k$, $\bigcap_{k<\omega} I_k \subset \bigcap E = \emptyset$.

b) Neposredno.

Stav 34.

Nad svakim skupom I, beskonačne moći α, postoji

α-regularni ultrafilter nad I.

Dokaz.

Prema stavu 32. možemo uzeti da je $I = P_\omega(\alpha)$, jer je $|P_\omega(\alpha)| = \alpha$. Za $\beta \in \alpha$ neka je

$$\hat{\beta} = \{ i \in I \mid \beta \in i \} \qquad \text{i}$$

$$E = \{ \hat{\beta} \mid \beta \in \alpha \}.$$

Tada E ima moć α. Svaki $i \in I$ se nalazi u samo konačno mnogo $\hat{\beta} \in E$, jer je i konačan, a takodje, $i \in \hat{\beta}$ akko $\beta \in i$. Skup E ima osobinu konačnog preseka jer

$$\{\beta_1, \dots, \beta_n\} \subset \hat{\beta}_1 \cap \dots \cap \hat{\beta}_n .$$

Po teoremi o ultrafilteru E se može proširiti do ultrafiltera D koji je po definiciji α-regularan.

Sledeći stav je u vezi sa problemom kontinuuma.

Stav 35.

Za svaki par kardinala $\alpha, \beta, \alpha \leq \beta$ postoji ultrafilter U nad β koji je tačno α-regularan ((ω, α)-regularan i za svaki $\gamma > \alpha$ nije (ω, γ) regularan).

Dokaz.

Prema stavu 34. nad α postoji α-regularni ultrafilter A. Iz $\alpha \leq \beta$ sledi $\alpha \subset \beta$, $P(\alpha) \subset P(\beta)$, pa zato $A \subset P(\beta)$. Po teoremi o ultrafilteru, A se može proširiti do ultrafiltera U nad β. Filter U je obavezno α-regularan. Pretpostavimo da je U γ-regularan i da je $\gamma > \alpha$. Onda postoji $E' \subset U$ tako da $|E'| = \gamma$ i za svaki $X \subset E'$, $|X| \geq \omega$ povlači $\cap X = \phi$. Neka je f dato sa

$$f : E' \to \mathcal{U}, \ f(e) = e' \cap \alpha.$$

Kako $e', \alpha \in \mathcal{U}$, biće $f(e') \in \mathcal{U}$. Ako je

$$E'' = f(E') \quad \text{biće} \quad |E''| = \gamma.$$

Pretpostavimo da je $|E''| < \gamma$. Onda postoji $X' \subset E'$ tako da

$$|X'| \geqslant \omega, \quad |f(X')| = 1.$$

Znači postoji $u \in \mathcal{U}$ tako da $e \in X'$ povlači $f(e) = e \cap \alpha = u \neq \emptyset$.

Odavde $\bigcap X' \supset u \neq \emptyset$ suprotno pretpostavci da je E' (ω, γ)-regularna familija. Znači $|E''| = \gamma$. Neka je g dato sa

$$g : \alpha \to P(E'')$$

$$g(j) = \{ e'' \mid e'' \in E'' \ \& \ j \in e'' \}.$$

Biće za svaki $j \in \alpha$,

$$|g(j)| < \omega \qquad \text{i}$$

$$\bigcup_{j \in \alpha} g(j) = E''.$$

Zato

$$|E''| \leqslant \sum_{j \in \alpha} |g(j)| = \alpha.$$

Kontradikcija. Znači, $\mathcal{U}$ nije γ -regularan.

Posledica 1.

Iz dokaza stava 35. jasno je da $\mathcal{U}$ može biti najviše $\|\mathcal{U}\|$ -regularan.

Posledica 2.

Ako je $\alpha = \omega$, $\beta = \omega_1$, onda po stavu 35. postoji neuniformni ultrafilter $\mathcal{U}$ nad ω_1 koji je ω -regularan i nije ω_1 -regularan.

J. Silver u (1974) navodi sledeći rezultat M. Magidora. Ako nad ω_1 postoji neuniformni, ω -regularan ultrafilter koji nije ω_1 -regularan, onda

$$\forall \alpha < \omega_1 \; 2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1} \text{ povlači } 2^{\aleph_{\omega_1}} = \aleph_{\omega_1+1} .$$

Primenom posledice 2. stava 35. gornji stav Magidora može se svesti na

$$\forall \alpha < \omega_1 \; 2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1} \text{ povlači } 2^{\aleph_{\omega_1}} = \aleph_{\omega_1+1} .$$

Stav 36.

Neka su $\mathcal{U}(\kappa)$ i $\mathcal{V}(\kappa^+)$ uniformni ultrafilteri nad redom kardinalima κ, κ^+ . Proizvodi $\mathcal{U}\times\mathcal{V}$ i $\mathcal{V}\times\mathcal{U}$ su (κ,κ^+)-regularni.

Dokaz.

Neka je $\beta\in\kappa^+$. Onda $|\beta|\le\kappa$, pa se β može predstaviti kao niz dužine ne veće od κ :

$$*1 \qquad \beta=\{\xi_0^\beta,\dots,\xi_\nu^\beta,\dots \mid \nu<|\beta|\le\kappa\} .$$

Neka je

$$*2 \qquad \sigma(\nu,\beta)=\{\xi_i^\beta \mid i<\nu<|\beta|\le\kappa\} .$$

Definišimo

$$e_\xi=\{\langle\nu,\beta\rangle \mid \xi\in\sigma(\nu,\beta)\} \;, \; \xi\in\kappa^+ .$$

Neka je

$$\mathcal{E}=\{e_\xi \mid \xi<\kappa^+\} .$$

ОСНОВНА ОРГАНИЗАЦИЈА УДРУЖЕНОГ РАДА
ЗА МАТЕМАТИКУ, МЕХАНИКУ И АСТРОНОМИЈУ
БИБЛИОТЕКА

Број:
Датум:

Dokazaćemo

1. $\mathcal{E} \subset \mathcal{U} \times \mathcal{V}$

2. $|\mathcal{E}| = \kappa^+$

3. $X \subset \mathcal{E}$ & $|X| \geq \kappa \rightarrow \cap X = \emptyset$.

1. Neka je $e_\xi \in \mathcal{E}$, $\beta \geq \max(\xi, \kappa)+1$, $\beta < \kappa^+$. Onda $\xi \in \beta$, pa iz $*1$ i $*2$ sledi da postoji $\nu < \kappa$ tako da $\xi \in \sigma(\nu, \beta)$. Prema $*2$ biće za sve $\nu' \in [\nu, \kappa)$, $\xi \in \sigma(\nu', \beta)$, pa zato $\langle \nu', \beta \rangle \in e_\xi$. Dakle, za svaki $\beta < \kappa^+$, $\beta \geq \max(\xi, \kappa)+1$ postoji $\nu(\beta)$ tako da važi

$$\{\langle \nu, \beta \rangle \mid \nu \in [\nu(\beta), \kappa)\} = \sigma^\xi_\beta \subset e_\xi .$$

Odavde

$$\bigcup_{\beta \in [\max(\xi, \kappa)+1,\, \kappa^+)} \sigma^\xi_\beta \subset e_\xi .$$

Odavde

$$\{\beta \mid \{\nu \mid \langle \nu, \beta \rangle \in \bigcup_{\beta \in [\max(\xi,\kappa)+1, \kappa^+)} \sigma^\xi_\beta\} \in \mathcal{U}\} \supset$$

$$\{\beta \mid \{\nu \mid \nu \in [\nu(\beta), \kappa)\} \in \mathcal{U} \ \& \ \beta \in [\max(\xi, \kappa)+1, \kappa^+)\} \in \mathcal{V}.$$

Poslednje sledi iz činjenice da su $[\nu(\beta), \kappa)$, $[\max(\xi, \kappa)+1, \kappa^+)$ kao završni komadi u kardinalima κ, κ^+ elementi uniformnih ultrafiltara $\mathcal{U}$ i $\mathcal{V}$. Znači

$$e_\xi \in \mathcal{U} \times \mathcal{V} \quad \text{i} \quad \mathcal{E} \subset \mathcal{U} \times \mathcal{V}.$$

2. Neka je $\xi \neq \xi'$. Dokažimo da mora biti $e_\xi \neq e_{\xi'}$ pa zato i

$$|\mathcal{E}| = \kappa^+.$$

Neka je $\beta = max(\xi, \xi') + 1$. Onda $\xi, \xi' \in \beta$. Neka su prema $*1$

$$\xi = \xi^{\beta}_{\nu_\xi} \ , \ \xi' = \xi^{\beta}_{\nu_{\xi'}} \ .$$

Pretpostavimo da je $\nu_\xi < \nu_{\xi'}$. Biće

$$\xi \in \sigma(\nu_{\xi'}, \beta) \ , \ \xi' \notin \sigma(\nu_{\xi'}, \beta) .$$

Odavde

$$\langle \nu_{\xi'}, \beta \rangle \in e_\xi \ , \ \langle \nu_{\xi'}, \beta \rangle \notin e_{\xi'} .$$

Znači

$$e_\xi \neq e_{\xi'} .$$

3. Neka je $X \subset \mathcal{E}$ i neka je $|X| \geqslant \kappa$. Pretpostavimo da je $\cap X \neq \phi$. Onda postoji par $\langle \nu, \beta \rangle \in \kappa \times \kappa^+$ tako da

$$\langle \nu, \beta \rangle \in \bigcap X .$$

Iz gornjeg je

$$X = \{ e_\xi \mid \xi \in X_0 \subset \kappa^+ \ \& \ |X_0| \geqslant \kappa \} .$$

Znači

$$\langle \nu, \beta \rangle \in \bigcap_{\xi \in X_0} e_\xi \ .$$

Odnosno, za sve $\xi \in X_0$, $\xi \in \sigma(\nu, \beta)$. Odavde sledi

$$|X_0| \leqslant |\sigma(\nu, \beta)| .$$

Kako je

$$|\sigma(\nu, \beta)| = |\nu| < |\beta| \leqslant \kappa \qquad \text{i}$$

$$|X_0| \geqslant \kappa ,$$

kontradikcija. Znači

$$\bigcap X = \emptyset .$$

Stav 36. daje važnu informaciju o regularnosti uniformnih ultrafiltera nad kardinalima naslednicima. Kako je $|\kappa \times \kappa^+| = \kappa^+$, prema stavu 32., svaki uniformni ultrafilter nad κ^+, koji se može dobiti obostrano jednoznačnim preslikavanjem proizvoda uniformnih ultrafiltera nad redom κ i κ^+, obavezno je (κ, κ^+) regularan. Specijalno za $\kappa = \omega$, svaki uniformni ultrafilter nad ω_1, izomorfan proizvodu uniformnih ultrafiltera nad redom ω, ω_1, je regularan. Ovo je u vezi sa sledećim teškim problemom Gilmanna i Keislera: da li je svaki uniformni ultrafilter nad ω_1 regularan ? Iz egzistencije merljivih kardinala sledi da nad njima postoje neregularni uniformni ultrafilteri. Medjutim, pitanje Gilmanna i Keislera može se postaviti za svaki kardinal manji od prvog merljivog, odnosno, za svaki kardinal ukoliko nema merljivih kardinala.

Sledeći stav daje važnu karakterizaciju pojma kompletnosti.

Stav 37.

Neka je D ultrafilter nad I. D je α-kompletan akko za svaku particiju skupa I na manje od α delova, jedan deo pripada D.

Dokaz.

Pretpostavimo da je D α-kompletan i da je $I = \bigcup_{i<\beta} X_i$ particija I na β delova, $\beta < \alpha$. Očigledno

$$\bigcap_{i<\beta}(I\setminus X_i)=\emptyset\in D$$

pa za neki i, $I\setminus X_i\notin D$, odakle $X_i\in D$. Kako su X_j po pretpostavci disjunktni, biće za sve $j\neq i$, $X_j\notin D$.

Pretpostavimo da je ispunjen uslov stava 37. Neka je $E\subset D$ tako da $|E|=\beta<\alpha$. Neka je $E=\{e_i\mid i<\beta\}$. Definišimo funkciju $f: I\to\beta+1$. Ako je $j\in\bigcap E$, onda $f(j)=\beta$. Ako $j\notin\bigcap E$, $f(j)$ je prvi $i<\beta$ za koji $j\notin e_i$. $f^{-1}(\beta+1)$ je particija od I u $|\beta+1|=\beta<\alpha$ delova, pa po pretpostavci mora za neki $\nu\in\beta+1$ biti $f^{-1}(\nu)\in D$. Za sve $i<\beta$, $f(j)=i$ povlači $j\notin e_i$, pa odatle $f^{-1}(i)\cap e_i=\emptyset$. Pošto je $e_i\in D$, biće za sve $i<\beta$, $f^{-1}(i)\notin D$, pa zato $f^{-1}(\beta)\in D$. Medjutim, $f^{-1}(\beta)=\bigcap E$, pa je $\bigcap E\in D$. Odatle sledi da je D α-kompletan.

Svaki filter je po definiciji ω-kompletan. Medjutim, za neglavne ultrafiltere kompletnost je neobična i retka osobina, što se vidi iz sledećeg stava.

Stav 38.

Neka je D neglavni ultrafilter. Onda postoji najveći kardinal α za koji je D α-kompletan. α je merljiv.

Dokaz.

Neka je $I=\bigcup D$. Za svaki $i\in I$, nije $\{i\}\in D$ jer je D neglavni ultrafilter. Očigledno

$$\bigcap_{i\in I} I\setminus\{i\}=\emptyset\notin D$$

pa zato D nije $|I|^+$-kompletan. Neka je β prvi kardinal tako da nije D β -kompletan. β nije granični kardinal jer bi, inače, za sve $\gamma<\beta$ D bio γ kompletan. Ako je $E\subset D$ i $|E|<\beta$, bilo bi $|E|^+<\beta$, pa bi iz gornjeg $\bigcap E\in D$ što bi značilo da je D β -kompletan. Znači $\beta=\alpha^+$ za neki α i α je najveći kardinal za koji je D α -kompletan.

D nije α^+ -kompletan, pa po stavu 37. postoji particija

$$I=\bigcup_{i<\alpha} X_i$$

na α delova od kojih ni jedan ne pripada D . Neka je f funkcija definisana sa

$$f: I\to\alpha$$

$$f(j)=i \qquad \text{akko} \qquad j\in X_i .$$

Uočimo

$$E=\{Y\subset\alpha \mid f^{-1}(Y)\in D\}.$$

Slično kao u stavu 32., može se proveriti da je E α-kompletan ultrafilter nad α . Ako bi E bio glavni, onda bi za neki $i<\alpha$ bilo $\{i\}\in E$, odakle

$$X_i = f^{-1}(\{i\})\in D$$

suprotno izboru particije X_i $(i\in\alpha)$. Znači, E je neglavni i α je merljiv kardinal.

Sve što znamo o regularnosti uniformnih filtera dato je u sledećem stavu.

Stav 39.

Neka je D uniformni ultrafilter nad α .

a) D je $(cf\alpha, cf\alpha)$-regularan

b) D je (α,α)-regularan

c) D je (ω,ω)-regularan ili postoji merljivi kardinal $\beta \leq \alpha$ tako da je D (β,β)-regularan i za sve $\gamma < \beta$ nije D (γ,γ)-regularan.

Dokaz.

a) Neka je α_ξ $(\xi < cf\alpha)$ niz kardinala u α tako da

$$\bigcup_{\xi < cf\alpha} \alpha_\xi = \alpha .$$

Pošto je D uniforman i $\alpha_\xi < \alpha$ biće $\alpha \setminus \alpha_\xi \in D$. Familija

$$\{\alpha \setminus \alpha_\xi \mid \xi < cf\alpha\}$$

je $(cf\alpha, cf\alpha)$-regularna.

b) Neka je $e_i = \{\xi \in \alpha \mid i < \xi\}$ za $i < \alpha$. Biće $e_i \in D$. Očigledno da je familija

$$\mathcal{E} = \{e_i \mid i < \alpha\}$$

(α, α)-regularna familija u D.

c) Ako je $\alpha = \omega$, alternative nema. Pretpostavimo da je $\alpha > \omega$. D je ili prebrojivo nekompletan ili je prebrojivo kompletan. U prvom slučaju po stavu 33. b) D je ω-regularan. U drugom slučaju D je ω_1-kompletan, pa po stavu 38. postoji najveći kardinal β tako da je D β-kompletan. Kako je β nedostiživ, biće

$$\omega < \omega_1 < \beta \leq \alpha .$$

Neka je $E \subset D$, $|E| = \gamma < \beta$. Biće $\bigcap E \in D$, pa D nije (γ,γ) regularan.

Stav 3.10.

Neka je D α-kompletni neglavni ultrafilter nad α. D je uniforman.

Dokaz.

Za svaki $\beta<\alpha$ neka je

$$X_\beta=\alpha\setminus\{\beta\}.$$

Kako je D neglavni, biće $X_\beta\in D$. Dalje, za svaki $\beta<\alpha$

$$\bigcap_{\xi<\beta}X_\xi=\alpha\setminus\beta\in D$$

zbog α-kompletnosti. Pretpostavimo da je D neuniforman. Onda je za neki $X\in D$, $|X|<\alpha$. Pošto je α regularan, biće $X\subset\alpha$ i $\bigcup X<\alpha$. Iz gornjeg

$$\alpha\setminus(\bigcup X+1)\in D.$$

Medjutim,

$$X\cap(\alpha\setminus(\bigcup X+1))=\emptyset.$$

Kontradikcija.

Postojanje α-kompletnog neglavnog ultrafiltera nad α ekvivalentno je da je α merljiv. Slično kao za meru može se za svaki $\gamma>\alpha$, α-kompletni neglavni ultrafilter D nad α proširiti do α-kompletnog neglavnog ultrafiltera nad γ. Medjutim, težak je sledeći problem: ako je α merljiv, da li onda nad α^+ postoji uniformni α-kompletni ultrafilter? Ako je $\gamma>\alpha$, $cf\gamma<\alpha$ i α merljiv, onda se dokazuje, koristeći stav 2.13. da nad γ ne postoji α kompletni uniformni ultrafilter.

Sledeće uopštenje Došove teoreme na infinitarni jezik $\mathcal{L}_{\alpha,\alpha}$ dokazao je Keisler.

Stav 3.11.

Neka je D nad I α-kompletni ultrafilter i $\mathfrak{A} = \prod_D \mathfrak{A}_i$.

1. Ako je $\varphi(x_1 x_2 \ldots)$ formula jezika $\mathcal{L}_{\alpha,\alpha}$ i $f_D^1, f_D^2, \ldots \in A$, onda

$$\mathfrak{A} \models \varphi[f_D^1 f_D^2 \ldots] \quad \text{akko} \quad \{i \in I \mid \mathfrak{A}_i \models \varphi[f^1(i) f^2(i) \ldots]\} \in D.$$

2. Ako je φ rečenica jezika $\mathcal{L}_{\alpha,\alpha}$, onda

$$\mathfrak{A} \models \varphi \quad \text{akko} \quad \{i \in I \mid \mathfrak{A}_i \models \varphi\} \in D.$$

Dokaz.

Slično dokazu Łošove teoreme, dokaz se izvodi indukcijom po složenosti formule. Ako formula sadrži beskonačni kvantifikator, dokaz je analogan konačnom slučaju. Preostaje beskonačna konjunkcija. Neka je Φ skup formula od $\mathcal{L}_{\alpha,\alpha}$ takav da je $|\Phi| < \alpha$ i 1. važi za $\varphi \in \Phi$. Za bilo koje $f_D^1, f_D^2, \ldots$ u A važi:

$$\mathfrak{A} \models (\& \Phi)[f_D^1 f_D^2 \ldots] \quad \text{akko}$$

za sve $\varphi \in \Phi$, $\mathfrak{A} \models \varphi[f_D^1 f_D^2 \ldots]$ akko

za sve $\varphi \in \Phi$ $\{i \mid \mathfrak{A}_i \models \varphi[f^1(i) f^2(i) \ldots]\} \in D$ akko (α-kompletnost)

$\{i \in I \mid$ za sve $\varphi \in \Phi$ $\mathfrak{A}_i \models \varphi[f^1(i) f^2(i) \ldots]\} \in D$ akko

$$\{i \in I \mid \mathfrak{A}_i \models (\& \Phi)[f^1(i) f^2(i) \ldots]\} \in D.$$

Posledica.

Neka je D nad I α-kompletan ultrafilter. Neka je za $i \in I$, $\mathfrak{A}_i = \langle A_i, <_i, \dots \rangle$, $<_i$ dobro zasnovana relacija. U proizvodu $\prod_D \langle A_i, <_i, \dots \rangle = \langle A, <, \dots \rangle$, $<$ je dobro zasnovana relacija.

Dokaz.

Formula $(\forall x_0 x_1 \dots) \neg \underset{n<\omega}{\&} P(x_{n+1}, x_n)$ jezika $\mathcal{L}_{\omega_1} \subset \mathcal{L}_\alpha$ izražava činjenicu da je P dobro zasnovana relacija. Prema prethodnom stavu u ultraproizvodu $\langle A, <, \dots \rangle$ relacija $<$ je dobro zasnovana.

Stav 312.

Neka je D α-kompletni neglavni ultrafilter nad α. Onda ultrastepen

$$\prod_D \langle \alpha, < \rangle = \langle A, \prec \rangle$$

je dobro uredjen relacijom $\prec$.

Dokaz.

Očigledno, relacija $\prec$ je dobro zasnovana. Neka je φ rečenica $(\forall x y)(x \neq y \rightarrow P(xy) \vee P(yx))$. Jasno da

$$\langle \alpha, < \rangle \models \varphi,$$

pa zato i

$$\prod_D \langle \alpha, < \rangle \models \varphi.$$

Stav 313.

Neka je α merljiv. Ako je Σ skup rečenica od $\mathcal{L}_\alpha$ tako da $|\Sigma| = \alpha$ i ako svaki podskup od Σ moći manje od α ima model, onda Σ ima model.

Dokaz.

Neka je D α-kompletni neglavni ultrafilter nad α. $\Sigma = \{\sigma_\beta \mid \beta < \alpha\}$. Neka je $\Sigma_\beta = \{\sigma_\nu \mid \nu < \beta\}$ i neka je $\mathfrak{A}_\beta$ model za Σ_β. Jasno da za svaki $\nu < \alpha$

$$\{\beta < \alpha \mid \mathfrak{A}_\beta \models \sigma_\nu\} \supset \alpha \setminus \nu \in D$$

zbog uniformnosti D. Zato je prema stavu 3.11. $\prod_D \mathfrak{A}_i$ model za σ_ν. Sledi

$$\prod_D \mathfrak{A}_i \models \underline{\Sigma}.$$

Gornji stav karakteriše slabo kompaktne kardinale.

Uz uslov α-kompletnosti, normalnost i slaba normalnost su ekvivalentna svojstva.

Stav 3.14.

Neka je D α-kompletan neglavni ultrafilter nad α. D je normalan akko D je slabo normalan.

Dokaz.

Neka je D normalan i neka je $g \in {}^\alpha\alpha$ regresivna funkcija. $\{\beta : g(\beta) < \beta\} \in D$. Označimo sa id identičnu funkciju na α. Obavezno za sve $\gamma \in \alpha$

$$\{\beta \mid \gamma < id(\beta) = \beta\} \in D$$

jer je D uniforman. Označimo sa c_γ funkciju $\langle \gamma \ldots \gamma \ldots \mid i \in \alpha \rangle$. Očigledno da za sve γ

$$c_\gamma <_D id.$$

Takodje, iz $\nu \neq \gamma$ sledi

$$[c_\gamma]_D \neq [c_\nu]_D .$$

Pošto je D normalan id_D je α-ti element u $\prod_D \langle \alpha, < \rangle$, pa je zato

$$\{h_D \in \prod_D \langle \alpha, < \rangle \mid h <_D id\} = \{[c_\gamma]_D \mid \gamma < \alpha\}.$$

Iz prethodnog sledi da je za neki $\gamma < \alpha$

$$g_D = [c_\gamma]_D$$

odnosno

$$\{\beta \mid g(\beta) = \gamma\} \in D .$$

Neka je D slabo normalan. Onda za sve $g \in {}^\alpha\alpha$

$$\{\beta \mid g(\beta) < \beta = id(\beta)\} \in D$$

povlači da za neki $\gamma < \alpha$

$$g_D = [c_\gamma]_D .$$

Drugim rečima, id_D je baš onaj element u $\prod_D \langle \alpha, < \rangle$ koji sledi iza svih $[c_\gamma]_D$.

Egzistenciju normalnih filtera iz egzistencije merljivih kardinala dokazao je Scott.

Stav 315.

Neka je α merljiv kardinal, $\alpha > \omega$ onda postoji normalni ultrafilter nad α .

Dokaz.

Neka je E α -kompletni neglavni ultrafilter nad α .

Uočimo

$$\prod_E \langle\alpha,<\rangle = \mathfrak{A} = \langle A, \prec\rangle$$

i neka je f_E α-ti element u $\mathfrak{A}$. Definišimo

$$D = \{ X \subset \alpha \mid f^{-1}(X) \in E \}.$$

Da je D α-kompletan, proverava se slično kao u stavu 32. D nije glavni, jer bi, inače, za neki γ, $\{\gamma\} \in D$, odakle

$$f^{-1}(\{\gamma\}) = \{ \beta < \alpha \mid f(\beta) = \gamma \} \in E$$

što bi značilo da je

$$f =_E \langle \gamma \ldots \gamma \ldots \mid i < \alpha \rangle,$$

suprotno pretpostavci da je f_E α-ti element u $\mathfrak{A}$.

Neka je $g \in {}^{\alpha}\alpha$ tako da

$$X = \{ \beta < \alpha \mid g(\beta) < \beta \} \in D.$$

Neka je $h = g \circ f$. Biće $f^{-1}(X) \in E$ i za sve $\beta \in f^{-1}(X)$

$$h(\beta) = g(f(\beta)) < f(\beta).$$

Odavde

$$h_E \prec f_E$$

pa je zato za neki $\gamma < \alpha$

$$\{ \beta < \alpha \mid h(\beta) = \gamma \} \in E.$$

Medjutim,

$$\{ \beta < \alpha \mid h(\beta) = \gamma \} = \{ f(\beta) < \alpha \mid g(f(\beta)) = \gamma \} =$$

$$= f^{-1}(\{ i \mid g(i) = \gamma \}) \in E.$$

Stav 316.

Ako je D normalan ultrafilter nad α, onda D je Ramsey ultrafilter.

Dokaz.

Indukcijom po n u uslovu Ramseya. Za $n=0$ uslov važi. Pretpostavimo da je uslov ispunjen za n i neka

$$[\alpha]^{n+1} = P_0 \cup P_1 \qquad \text{i}$$

$$P_0 \cap P_1 = \phi.$$

Za $\xi < \alpha$ definišimo

$$P_0(\xi) = \{F \in [\alpha]^n \mid \xi \in F \vee (\xi \notin F \,\&\, F \cup \{\xi\} \in P_0)\},$$

$$P_1(\xi) = \{F \in [\alpha]^n \mid \xi \notin F \,\&\, F \cup \{\xi\} \in P_1\}.$$

Po induktivnoj pretpostavci postoji $A_\xi \in D$ i $\nu(\xi) < 2$ tako da

$$[A_\xi]^n \subset P_{\nu(\xi)}(\xi)$$

za $\xi < \alpha$. Odavde $\nu \in {}^{\alpha}2$ i postoji $i < 2$ tako da

$$\nu^{-1}(i) = B \in D$$

jer je D ultrafilter. Definišimo

$$A = \{\beta \in B \mid \beta \in A_\xi, \xi < \beta, \xi \in B\}$$

i dokazaćemo

1. $A \in D$

2. $[A]^{n+1} \subset P_i \quad i = \phi$ ili $i = 1$.

definišimo $f \in {}^{\alpha}\alpha$:

$$f(\beta)=\beta \quad \text{za} \quad \beta\in A$$

$$f(\beta)=\min\{\xi\in B \mid \beta\notin A_\xi\} \quad \text{za} \quad \beta\in B\setminus A$$

$$f(\beta)=\emptyset \quad \text{ako} \quad \beta\in\alpha\setminus B.$$

Ako $B\setminus A\in D$, onda

$$\{\beta<\alpha \mid f(\beta)<\beta\}\in D$$

pa zbog normalnosti D je za neki $\gamma<\alpha$

$$\{\beta<\alpha \mid f(\beta)=\gamma\}\in D.$$

Odavde

$$\{\beta<\alpha \mid \beta\notin A_\gamma\}\in D,$$

suprotno definiciji f.

Neka $F\in[A]^{n+1}$. Stavimo

$$\xi=\min F$$

$$G=F\setminus\{\xi\};$$

onda

$$G\in[A]^n,\ \xi\in B$$

i $\xi<\beta$ za $\beta\in G$. Znači, iz $\beta\in G$ sledi $\beta\in A_\xi$, pa

$$G\in[A_\xi]^n\subset P_i(\xi) \qquad \text{i}$$

$$F\in P_i.$$

Posledica.

Ako je $\alpha>\omega$ merljiv kardinal, onda je α jaki

Ramsey kardinal.

Dokaz.

Neka je

$$P_\omega(\alpha) = P_0 \cup P_1 \qquad \text{i}$$

$$P_0 \cap P_1 = \phi.$$

Stavimo

$$P_{i,n} = P_i \cap [\alpha]^n \quad \text{za } n<\omega,\ i<2.$$

Nad α postoji normalni ultrafilter koji je po prethodnom stavu Ramsey ultrafilter. Dakle, postoje $A_n \in D$ i $\nu \in {}^\omega 2$ tako da za sve $n \in \omega$

$$[A_n]^n \subset P_{\nu(n),n}.$$

Neka je

$$A = \bigcap_{n<\omega} A_n.$$

Zbog α -kompletnosti D je $A \in D$. Očigledno da za sve $n<\omega$

$$[A]^n \subset P_{\nu(n),n} \subset P_{\nu(n)}.$$

Sledeća tri stava od značaja su za ispitivanje strukture ultraproizvoda.

Prvi stav povezuje svojstva α rastavljivosti α silazne kompletnosti. i (α,α) regularnosti. Drugi i treći stav daju informacije o dobrim ultrafilterima.

Stav 3.17.

a) Za regularni α, D je α rastavljiv akko D je α silazno nekompletan. Za singularni α, ako je D α rastavljiv, onda D je α silazno nekompletan.

B) Za regularni α, α silazna nekompletnost i (α,α) regularnost su ekvivalentni. Za singularni α, α silazna nekompletnost povlači (α,α) regularnost.

Dokaz.

Tvrđenje pod a): ako je α regularan, iz α-silazne familije elemenata filtera sa praznim presekom dobija se jedan α rastav; obrnuto, α Rastav na standardan način generiše α silaznu familiju sa praznim presekom.

b) Neka je D, α silazno nekompletan i neka je $E=\{X_\nu \mid \nu<\alpha\}$ jedna silazna familija dužine α sa praznim presekom

$$\bigcap E = \emptyset.$$

Pretpostavimo da filter nije (α,α) regularan. Znači, svaka familija kardinalnosti α ima podfamiliju kardinalnosti α sa nepraznim presekom. Neka je

$$E' = \{X_{\nu_\xi} \mid \xi<\alpha\}$$

podfamilija familije E sa nepraznim presekom, pa neka

$$i \in \bigcap E'.$$

Neka je ν_0 prvi indeks takav da $i \notin X_{\nu_0}$. Sledi da za sve $\nu_\xi > \nu_0$, $i \notin X_{\nu_\xi}$ pa zato mora biti

$$|E'| < \alpha.$$

(jer je svaki niz kardinalnosti α kofinalan u α). Otuda, E je (α,α) -regularna familija.

Neka je α regularan kardinal i neka je $E=\{X_\eta \mid \eta<\alpha\}$ regularna familija elemenata filtera. Dijagonalizacijom familije E dobija se familija

$$E' = \{\bigcup_{\nu<\eta<\alpha} X_\eta \mid \nu<\alpha\} .$$

Jasno je da je E' silazna famòlija tipa α kao i da mora biti

$$\bigcap E' = \phi$$

odakle sledi tvrđenje.

Dobri ultrafilteri i ultraproizvodi po dobrim ultrafilterima imaju značajnu primenu u teoriji modela, a takođe omogućuju određivanje kardinalnosti ultraproizvoda i njihovih strukturnih svojstava.

Stav 318.

Ultrafilter D je α^+-dobar akko za svaku monotonu funkciju $f: P_\omega(\alpha) \to D$ postoji multiplikativna funkcija $g: P_\omega(\alpha) \to D$ tako da $g \leq f$.

Dokaz.

Neka je $\beta \leq \alpha$ i neka je f monotona funkcija $f: P_\omega(\beta) \to D$. Definišimo $f': P_\omega(\alpha) \to D$ sa

$$f'(F) = f(F \cap \beta).$$

Jasno da je i f' monotona, pa po pretpostavci postoji multiplikativna funkcija $g' : P_\omega(\alpha) \to D$ takva da $g' \leq f'$. Neka je i inkluzija

$$i : P_\omega(\beta) \to P_\omega(\alpha)$$

inducirana inkluzijom $\beta \subset \alpha$. Stavimo

$$g = g' \circ i .$$

Biće $g \leq f$ i, pošto je g multiplikativna, stav je dokazan.

Stav 3.19.

Svaki ultrafilter je ω^+-dobar.

Dokaz.

Neka je D ultrafilter nad nekim kardinalom. Prema prethodnom stavu dovoljno je posmatrati monotone funkcije $f : P_\omega(\omega) \to D$. Za $F \in P_\omega(\omega)$ stavimo

$$n(F) = \min \{ n < \omega \mid F \subset n \} \in P_\omega(\omega)$$

i definišimo

$$g : P_\omega(\omega) \to D \qquad \text{sa}$$

$$g(F) = f(n(F)).$$

Zbog monotonosti f je za sve $F \in P_\omega(\omega)$

$$g(F) = f(n(F)) \subset f(F)$$

odnosno $g \leq f$.

Neka $F, G \in P_\omega(\omega)$, onda

$$n(F \cup G) = n(F) \cup n(G) = \max \{ n(F), n(G) \}$$

i odavde

$$g(F\cup G) = f(n(F\cup G)) = f(\max\{n(F), n(G)\}) =$$

$$= f(n(F)) \cap f(n(G)) = g(F) \cap g(G).$$

Stav 3.20.

Ako je D prebrojivo nekompletan, β^+-dobar ultrafilter nad α, onda D je (ω,β)-regularan.

Dokaz.

Pošto je D prebrojivo nekompletan, postoji familija I_n takva da

$$I_0 = \alpha$$

$$I_{n+1} \subset I_n \in D$$

$$\bigcap_{n<\omega} I_n = \phi .$$

Definišimo $f : P_\omega(\beta) \to D$ sa

$$f(F) = A_{|F|} .$$

f je monotona funkcija, pa pošto je D β^+-dobar, postoji multiplikativna funkcija $g : P_\omega(\beta) \to D$ tako da $g \le f$.

Za $\nu < \alpha$ stavimo

$$F(\nu) = \{\xi < \beta \mid \nu \in g(\{\xi\})\}.$$

Stavimo $n(\nu) = \min\{n<\omega \mid \nu \in A_n\}$ tako da je za sve $\nu < \alpha$

$$n(\nu) < \omega.$$

Dokazaćemo da za sve $\nu < \alpha$

$$|F(\nu)| < n(\nu).$$

Pretpostavimo da za neki $\nu < \alpha$

$$|F(\nu)| \geq n(\nu).$$

Onda postoji $G \subset F(n)$ tako da $|G| = n(\nu)$ i pošto je g multiplikativna funkcija, imamo

$$\nu \in \bigcap_{\xi \in G} g(\xi) = g(G) \subset f(G) = A_{n(\nu)}.$$

Kontradikcija, jer $\nu \notin A_{n(\nu)}$.

Dakle, $F(\nu) \in P_\omega(\beta)$ za sve $\nu < \alpha$, što povlači da je svaki beskonačni presek skupova familije $\{g(\{\nu\}) \mid \nu < \beta\}$ prazan, pa je D (ω, β)-regularan.

Stav 3.21.

Neka je D prebrojivo nekompletan ultrafilter nad α. Onda

1. $\omega^+ \leq G(D) \leq \alpha^+$

2. ako je $G(D) = \alpha^+$, onda je D regularan.

Dokaz.

Po prethodnom stavu, ako je $G(D) = \alpha^+$, onda je D (ω, α)-regularan. Takodje, po prethodnom stavu i po stavu 3.5. posledica 1. iz $G(D) = \beta^+$ sledi

$$\| D \| \geq \beta,$$

pa pošto je $\| D \| \leq \alpha$, mora biti

$$G(D) \leq \alpha^+.$$

Dobre ultrafiltere uveo je Keisler koji je i dokazao prethodna četiri stava. Dobrota filtera je svojstvo usko povezano sa poretkom u ultraproizvodu, a time i sa kardinalnošću ultraproizvoda, što će se videti još u sledećem odeljku.

Sledeća tri stava dokazao je Prikry 1971., pokazavši da kombinatorna hipoteza PH ima za posledicu da je svaki uniformni ultrafilter nad ω_1, regularan. Za uslov PH, koji je usko povezan sa Kurepinom hipotezom, Prikry je pokazao da sledi iz $V=L$, modifikujući Solovayev dokaz da je Kurepina hipoteza posledica aksiome konstruktibilnosti. Jensen je uopštio Prikryev rezultat i dokazao da u konstruktibilnom univerzumu važi: za svaki $n<\omega$, ako je D uniforman ultrafilter nad ω_n, onda je D regularan. Prikry je takodje dokazao da iz $V=L$ sledi da za svaki kardinal κ^+ svaki uniformni ultrafilter nad κ^+ je (κ,κ^+)-regularan.

Stav 3.22.

Neka je za svaki $\alpha\in\omega_1$, F_α skup funkcija za koji važi:

1. $|F_\alpha|=\omega$

2. $\forall\varphi\in F_\alpha\ (\varphi\subset\alpha\times\alpha)$.

Onda postoji familija

$$\{A(\alpha,\beta)\mid \alpha\in\omega_1,\ \beta\in\omega_1\}\subset P(\omega_1)$$

tako da

(A) za svaki $\alpha\in\omega_1$ i svaki beskonačni podskup S od $\omega_1-\alpha$

$$\Big|\bigcap_{\beta\in S} A(\alpha,\beta)\Big|=\omega.$$

Ako je θ najmanji ordinal tako da

$$|\theta \cap S| \geqslant \omega$$

onda

$$\bigcap_{\beta \in S} A(\alpha,\beta) \subset \theta.$$

(B) ako je $f \in {}^{\omega_1}\omega_1$ tako da za svaki $\alpha \in \omega_1$ postoji $\varphi \in F_\alpha$ i

$$f \cap (\alpha \times \alpha) \subset \varphi$$

onda za svaki beskonačni skup $S \subset \mathrm{Dom}(f)$ važi

$$\bigcup_{\alpha \in S} A(\alpha, f(\alpha)) = \omega_1.$$

Označimo sa (P) sledeće svojstvo niza $\{F_\alpha\}$. $\{F_\alpha\}$ ispunjava uslove stava 3.22.i neka za svaki $g \in {}^{\omega_1}\omega_1$ postoji funkcija f tako da

$$(\forall \alpha \in \omega_1)(\exists \varphi \in F_\alpha)(f \cap (\alpha \times \alpha) \subset \varphi),$$

$$|\{\gamma \mid \gamma \in \mathrm{Dom}(f) \ \& \ g(\gamma) < f(\gamma)\}| > \omega.$$

PH: postoji familija sa svojstvom (P).

Stav 3.23.

Ako postoji familija sa svojstvom (P), onda je svaki uniformni ultrafilter nad ω_1 regularan.

Stav 3.24.

Ako je $V = L$, onda postoji familija sa svojstvom (P).

ULTRAPROIZVODI

U ovom odeljku razmatramo pretežno svojstva od značaja za kardinalnost redukovanih proizvoda modela. Struktura filtera ima najveći uticaj, što se vidi već iz prvih elementarnih stavova koje dajemo pretežno bez dokaza.

Stav 4.1.

Ako su D i D' filteri i $D \subset D'$, onda

a) $|\prod_{D'} A_i| \leq |\prod_D A_i|$.

b) $|\prod_D A_i| \leq |\prod_{i \in I} A_i|$.

c) $|A| \leq |\prod_D A| \leq |\prod_{\{I\}} A| = |A|^{|I|}$.

d) Ako za sve $i \in I$ $|A_i| \leq |B_i|$, onda

$$|\prod_D A_i| \leq |\prod_D B_i|.$$

Stav 4.2.

Neka je D filter nad I, $|I| = \beta$ i $f : I \xrightarrow[\text{na}]{1-1} \beta$. Neka je $E = \{X \subset \beta \mid f^{-1}(X) \in D\}$, onda

$$|\prod_D A_i| = |\prod_E A_{f(i)}|.$$

Iz prethodna dva stava sledi da se u daljem tekstu bez posledica po opštost tvrdjenja možemo ograničiti na filtere nad kardinalima. Takodje univerzum modela uvek se može identifikovati sa njegovim kardinalom.

Stav 4.3.

Neka je $X \in D$ i $D' = P(X) \cap D$. Onda važi

$$\prod_D \mathfrak{A}_i \cong \prod_{D'} \mathfrak{A}_i .$$

Dokaz.

Može se proveriti da $f =_D g$ akko $f\restriction_X =_{D'} g\restriction_X$.
Očigledno da je preslikavanje

$$\pi : \prod_D \mathfrak{A}_i \to \prod_{D'} \mathfrak{A}_i , \quad \pi f_D = (f\restriction_X)_D$$

bijekcija. Da je *na*, sledi zbog toga što je svaka funkcija $f' \in \prod_{D'} \mathfrak{A}_i$ slika onih $f \in \prod_D \mathfrak{A}_i$ čija je f' restrikcija. Dokažimo da je π izomorfizam.

Neka su S, S', R_i interpretacije relacijskog simbola P, redom u modelima

$$\prod_D \mathfrak{A}_i , \prod_{D'} \mathfrak{A}_i , \mathfrak{A}_i .$$

$S(f_D^1 \dots f_D^n)$ akko

$Y = \{i \in I \mid R_i(f^1(i) \dots f^n(i))\} \in D$ akko

$Y \cap X \in D$ akko

$\{i \in X \mid R_i(f^1(i) \dots f^n(i))\} \in D$ akko

$Z = \{i \in X \mid R_i(f^1\restriction_X(i) \dots f^n\restriction_X(i))\} \in D'$ akko

$S'((f^1\restriction_X)_{D'} \dots (f^n\restriction_X)_{D'})$ akko $S'(\pi f_D^1 \dots \pi f_D^n)$.

Neka su H, H', G_i interpretacije funkcijskog simbola F u redom modelima

$$\prod_D \mathfrak{A}_i , \prod_{D'} \mathfrak{A}_i , \mathfrak{A}_i .$$

Biće

$$H(f_D^1 \dots f_D^n) = \langle G_i(f^1(i) \dots f^n(i)) \mid i \in I \rangle_D$$

$$\pi(H(f_D^1 \dots f_D^n)) = \pi \langle G_i(f^1(i) \dots f^n(i)) : i \in I \rangle_D =$$

$$= (\langle G_i(f^1(i) \dots f^n(i)) : i \in I \rangle \upharpoonright_X)_{D'} =$$

$$= \langle G_i(f^1(i) \dots f^n(i)) : i \in X \rangle_{D'} =$$

$$= \langle G_j(f^1\upharpoonright_X(j) \dots f^n\upharpoonright_X(j)) : j \in X \rangle_{D'} =$$

$$= H'((f^1\upharpoonright_X)_{D'} \dots (f^n\upharpoonright_X)_{D'}) =$$

$$= H'(\pi f_D^1 \dots \pi f_D^n).$$

Ako su a, a', a_i interpretacije konstante c u redom modelima

$\prod_D \mathfrak{A}_i$, $\prod_{D'} \mathfrak{A}_i$, $\mathfrak{A}_i$, biće

$$a = \langle a_i : i \in I \rangle_D,$$

$$a' = \langle a_i : i \in X \rangle_{D'}$$

i odavde

$$\pi a = a'.$$

Posledica 1.

Ako je $D = \{Y \subset I \mid X \subset Y\}$ glavni filter generisan skupom X, onda

$$\prod_D \mathfrak{A}_i \cong \prod_{P(X) \cap D} \mathfrak{A}_i = \prod_{\{X\}} \mathfrak{A}_i = \prod_{i \in X} \mathfrak{A}_i$$

što znači da se redukovani proižvod u ovom slučaju svodi na direktan proizvod. Odavde sledi da je

$$|\prod_D \mathfrak{A}_i| = |\prod_{i \in X} \mathfrak{A}_i|.$$

Posledica 2.

Neka je $X \in D$. Iz posledice 1. i stava 4.1. a) sledi

$$\left|\prod_D \mathfrak{A}_i\right| \leq \prod_{i\in X} |\mathfrak{A}_i| .$$

Posledica 3.

Ako je D glavni ultrafilter, onda postoji $i_0 \in I$ tako da

$$\prod_D \mathfrak{A}_i \cong \mathfrak{A}_{i_0} .$$

Posledica 4.

Neka je $X \in D$, $\|D\| = |X|$, $D' = P(X) \cap D$. Onda

$$\prod_D \mathfrak{A}_i \cong \prod_{D'} \mathfrak{A}_i ,$$

pri čemu je D' uniforman filter.

Posledica 5.

Ako $\{i \in I \mid \alpha_i \leq \beta_i\} \in D$, onda

$$\left|\prod_D \alpha_i\right| \leq \left|\prod_D \beta_i\right| .$$

Stav 4.4.

Neka je D ultrafilter, $\mathfrak{A}$ model za koji $|\mathfrak{A}| = \alpha$. Prirodno utapanje d preslikava $\mathfrak{A}$ na $\prod_D \mathfrak{A}$ akko D je α^+ kompletan.

Dokaz.

Pretpostavimo da je D, α^+ kompletan. Neka je

$$f_D \in \prod_D A .$$

f preslikava I u A. Kako je $|A| = \alpha$, razbijanje

$I = \bigcup \{ f^{-1}(a) \mid a \in A \}$ deli I na najviše α delova pa zbog α^+ kompletnosti filtera D postoji $a \in A$ tako da $f^{-1}(a) \in D$, što znači da je

$$f =_D \langle a \mid i \in I \rangle \quad \text{, odnosno}$$

$$f_D = d(a).$$

Pretpostavimo da d preslikava $\mathfrak{A}$ na $\prod_D \mathfrak{A}$. Neka je

$$I = \bigcup_{\eta < \beta} X_\eta$$

particija I na $\beta < \alpha^+$ delova. Pošto je $|\beta| \leq \alpha = |A|$, možemo prenumerisati indekse η i pustiti da $\eta \in B \subset A$ i da je pri tom $|B| = |\beta|$. Otuda

$$I = \bigcup_{a \in B} X_a .$$

Neka je funkcija $f : I \rightarrow A$ definisana sa

$$f(i) = a \quad \text{akko} \quad i \in X_a .$$

Iz pretpostavke sledi da postoji $a_0 \in A$ tako da $f_D = d(a_0)$. Medjutim, $f(i) \in B$, za sve $i \in I$, pa zato $a_0 \in B$. Odavde sledi da $f^{-1}(a_0) \in D$, odnosno $X_a \in D$, što povlači da je D α^+-kompletan.

Posledica 1.

Ako je $\mathfrak{A}$ konačan ili ako je D glavni ultrafilter, onda d preslikava $\mathfrak{A}$ na $\prod_D \mathfrak{A}$.

Posledica 2.

Ako je $|A|$ manje od prvog merljivog kardinala ili ako ne postoji merljivi kardinal a D je ω_1 -kompletan ultrafilter, onda d preslikava $\mathfrak{A}$ na $\prod_D \mathfrak{A}$.

Stavovi 4.1. do 4.4. pružaju dosta informacija o strukturi i kardinalnosti ultraproizvoda. Medjutim, odredjivanje kardinalnosti ultraproizvoda predstavlja težak nerešen problem. Zato su od interesa razni parcijalni odgovori izloženi u daljem tekstu.

Gornje pitanje je od interesa za dvokardinalni problem, što ilustruje sledeći stav.

Stav 4.5.

Ako teorija T dopušta (α, β), $\beta \geq \omega$, onda za svaki ultrafilter D teorija T dopušta $(|\prod_D \alpha|, |\prod_D \beta|)$.

Dokaz.

Neka je $\mathfrak{A}$ (α, β) model teorije T i neka je V interpretacija unarnog relacijskog simbola U. Biće $|A| = \alpha$, $|V| = \beta$. Neka je D ultrafilter. $\prod_D \mathfrak{A}$ je model za T kardinalnosti $|\prod_D \alpha|$. Neka je V' interpretacija relacijskog simbola U u modelu $\prod_D \mathfrak{A}$. Pokazaćemo da je

$$|V'| = |\prod_D \beta|;$$

za svaki $f_D \in \prod_D A$ je

$$f_D \in V' \quad \text{akko}$$

$$\{i \in I \mid f(i) \in V\} \in D \quad \text{akko}$$

postoji $g \in {}^I V$ tako da $\{i \in I \mid f(i) = g(i)\} \in D$.

Definišimo $\pi : V' \to \prod_D V$ sa

$$\pi f_D = g_D.$$

Očigledno je π 1-1, na.

Sledeći Keislerov stav ima široku primenu u odredjivanju kardinalnosti ultraproizvoda.

Stav 4.6.

Neka su α , γ kardinali, D ultrafilter nad α , $\{\beta_\xi \mid \xi<\alpha\}$ kardinali i $\{F_\xi \mid \xi<\gamma\} \subset D$. Označimo za sve $\xi<\alpha$

$$\lambda_\xi = |\{\zeta<\gamma \mid \xi \in F_\zeta\}|;$$

tada je

$$|\prod_D \beta_\xi|^\gamma \leq |\prod_D \beta_\xi^{\lambda_\xi}|.$$

Dokaz.

Definišimo $P : (\prod_{\xi\in\alpha} \beta_\xi)^\gamma \longrightarrow (\prod_D \beta_\xi)^\gamma$ sa

$$P(\langle f(i) : i<\gamma \rangle) = \langle f(i)_D : i<\gamma \rangle.$$

P je na . Pošto je $\{i<\gamma \mid \xi\in F_i\}$ podskup od γ kardinalnosti λ_ξ , postoji funkcija

$$e_\xi : \lambda_\xi \longrightarrow \gamma$$

tako da za sve $\xi<\alpha$

$$e_\xi[\lambda_\xi] = \{i<\gamma : \xi\in F_i\}.$$

Označimo sa π_ξ ξ-tu projekciju

$$\pi_\xi : \prod_{\xi\in\alpha} \beta_\xi \longrightarrow \beta_\xi .$$

Otuda za

$$f \in (\prod_{\xi\in\alpha} \beta_\xi)^\gamma$$

može se formirati kompozicija

$$\lambda_\xi \xrightarrow{e_\xi} \gamma \xrightarrow{f} \prod_{\xi<\alpha} \beta_\xi \xrightarrow{\pi_\xi} \beta_\xi .$$

Zato

$$\pi_\xi \circ f \circ e_\xi \in \beta_\xi^{\lambda_\xi} .$$

Definišimo

$$Q : (\prod_{\xi<\alpha} \beta_\xi)^\gamma \longrightarrow \prod_D \beta_\xi^{\lambda_\xi}$$

sa

$$Q(f) = \langle \pi_\xi \circ f \circ e_\xi : \xi < \alpha \rangle_D .$$

Dokažimo da za $f, g \in (\prod_{\xi<\alpha} \beta_\xi)^\gamma$, iz $P(f) \neq P(g)$ sledi $Q(f) \neq Q(g)$.

$P(f) \neq P(g)$ povlači da postoji $i < \gamma$

tako da

$$f(i)_D \neq g(i)_D .$$

Odnosno

$$A = \{ \xi < \alpha \mid (f(i))(\xi) \neq (g(i))(\xi) \} \in D .$$

Odavde

$$A \cap F_i \in D ;$$

iz $\xi \in A \cap F_i$ sledi da postoji $\eta < \lambda_\xi$ takav da

$$i \in e_\xi(\eta) .$$

Odakle

$$\pi_\xi \circ f \circ e_\xi \neq \pi_\xi \circ g \circ e_\xi ,$$

što povlači

$$A \cap F_\xi \subset \{ \xi < \alpha \mid \pi_\xi \circ f \circ e_\xi \neq \pi_\xi \circ g \circ e_\xi \} \in D .$$

Zato je

$$Q(f) \neq Q(g) .$$

Neka je

$$s, t \in (\prod_D \beta_\xi)^\gamma , \quad s \neq t .$$

Biće

$$Q[P^{-1}(\{s\})] \cap Q[P^{-1}(\{t\})] = \emptyset$$

i

$$\emptyset \neq Q[P^{-1}(\{s\})] \subset \prod_D \beta_\xi^{\lambda_\xi} .$$

Posledica 1.

Ako su α , γ kardinali, D ultrafilter nad α i $\beta_\xi, \xi<\alpha$ kardinali, onda

$$|\prod_D \beta_\xi|^\gamma \leq |\prod_D \beta_\xi^\gamma| .$$

Dokaz.

Prema stavu 4.6. $\lambda_\xi \leq \gamma$ za sve $\xi < \alpha$. Odavde sledi da za sve $\xi < \alpha$

$$\beta_\xi^{\lambda_\xi} \leq \beta_\xi^\gamma$$

pa tvrdjenje sledi po stavu 4.1. d).

Stav 4.7.

Neka je α beskonačni kardinal i $\mathcal{S} \subset {}^\alpha\alpha$ takav da

a) $f,g \in \mathcal{S}$, $f \neq g$ povlači $|\{\xi<\alpha \mid f(\xi)=g(\xi)\}|<\alpha$

b) $\mathcal{S}$ je maksimalan skup sa svojstvom a);

onda $|\mathcal{S}| > \alpha$.

Posebno, postoji familija $\mathcal{S} \subset {}^\alpha\alpha$ takva da $|\mathcal{S}|>\alpha$ i $\mathcal{S}$ zadovoljava a).

Dokaz.

Neka $\mathcal{S}$ ispunjava uslove stava i neka je

$$|\mathcal{S}| \leq \alpha ,$$

Neka je

$$\langle f_\xi \mid \xi < \alpha \rangle$$

dobro uredjenje skupa $\mathcal{S}$.

Definišimo $f \in {}^\alpha\alpha$ dijagonalno, tj. tako da

$$f(\xi) \in \alpha \setminus \{ f_\zeta(\xi) \mid \zeta < \xi \}.$$

Ovo je moguće jer je

$$|\alpha \setminus \{ f_\zeta(\xi) \mid \zeta < \xi \}| = \alpha .$$

Očigledno da $f \notin \mathcal{S}$. Medjutim, $\mathcal{S} \cup \{f\}$ ispunjava uslove stava pa $\mathcal{S}$ ne može biti maksimalan. Znači,

$$|\mathcal{S}| > \alpha .$$

Drugi deo tvrdjenja sledi iz prvog primenom Zornove Leme.

Posledica 1.

Ako je $\alpha \geqslant \omega$ i D uniformni ultrafilter nad α , onda

$$|\prod_D \alpha| > \alpha .$$

Dokaz.

Prema stavu 4.7. postoji familija $\mathcal{S} \subset {}^\alpha\alpha$ takva da za sve $f, g \in \mathcal{S}$ ako je $f \neq g$, onda

$$|\{ \xi < \alpha \mid f(\xi) = g(\xi) \}| < \alpha ,$$

$$|\mathcal{S}| > \alpha .$$

Zbog uniformnosti filtera D za $f, g \in \mathcal{S}$ biće

$$f_D \neq g_D ,$$

pa zato

$$|\prod_D \alpha| > \alpha .$$

Gornja posledica je rezultat Frayne Morell i Scotta iz 1962. Medjutim, još nije poznato da li postoji kardinal α takav da je za neki uniformni ultrafilter D nad α

$$|\prod_D \alpha| < 2^{\alpha}.$$

Stav 4.8.

Neka je D ultrafilter nad kardinalom γ. Ako je D (α, β) -regularan, a $\nu, \kappa \in [\alpha, \beta]$ su kardinali takvi da

$$\kappa^{\nu} = \kappa$$

onda za sve kardinale $\kappa' \in [\kappa, \beta)$ važi

$$|\prod_D \kappa'| \geq \kappa'^{\beta}.$$

Dokaz.

Po pretpostavci je $\kappa^{\nu} = \kappa$, što povlači da je $\nu \leq \kappa$ i

$$|\prod_D \kappa| = |\prod_D \kappa^{\nu}|.$$

Pošto je D (α, β) regularan i $\nu \in [\alpha, \beta]$, D je (ν, β) regularan. Neka je $E \subset D$ (ν, β)-regularna familija. Neka je E dobro uredjena relacijom $\preccurlyeq$; za sve $i \in \bigcup E \in D$ definišimo

$$X(i) = \{e \in E \mid i \in e\},$$

a sa $seq(i)$ označimo niz $e \in X(i)$ uredjen relacijom $\preccurlyeq$. Za $g \in {}^{E}\nu$ definišemo g':

ako je $seq(i) = \langle e_{\xi} \mid \xi < \nu_i < \nu \rangle$, onda je

$$g'(i) = \langle g(e_{\xi}) \mid \xi < \nu_i < \nu \rangle.$$

Biće $X(i) \subset E$, $i \in \bigcap X(i)$, pa zato i zbog (ν,β) -regularnosti familije E je $|X(i)| < \nu$. Odavde je

$$g'(i) \in \kappa^{\underset{\smile}{\nu}}.$$

Definišimo

$$\pi : {}^{E}\nu \longrightarrow \prod_D \kappa^{\underset{\smile}{\nu}}$$

sa $\pi g = g'_D$. Dokažimo da je π 1-1. Neka su $g, h \in {}^{E}\nu$, $g \neq h$. Sledi da za neki $e \in E$

$$g(e) \neq h(e).$$

Neka je $e = e_\lambda$ u $seq(i)$. Odavde, za sve $i \in e$

$$g'(i) = \langle g(e_1) \dots g(e_\lambda) \dots g(e_\xi) \dots \mid \xi < \nu_i < \nu \rangle \neq$$

$$\langle h(e_1) \dots h(e_\lambda) \dots h(e_\xi) \dots \mid \xi < \nu_i < \nu \rangle = h'(i).$$

Pošto je $e \in D$, biće $g'_D \neq h'_D$. Znači

$$|\prod_D \kappa| \geqslant |{}^{E}\nu| = 2^\beta,$$

pa tvrdjenje sledi prema stavu 4.1.

Posledica 1.

Neka je D (α,β)-regularan ultrafilter nad γ. Tada je

$$|\prod_D \alpha^{\underset{\smile}{\alpha}}| \geqslant 2^\beta.$$

Dokaz.

$(\alpha^{\underset{\smile}{\alpha}})^{\underset{\smile}{\alpha}} = \alpha^{\underset{\smile}{\alpha}}$, pa ako stavimo $\kappa = \alpha^{\underset{\smile}{\alpha}}$ i $\nu = \alpha$, tvrdjenje sledi iz prethodnog stava.

Posledica 2.

Neka je D β-regularni ultrafilter, onda je za svaki beskonačni α

$$|\prod_D \alpha| \geq 2^\beta.$$

Dokaz.

D je (ω,β)-regularan i $\alpha^\omega = \alpha$, pa prema stavu 4.8. imamo

$$|\prod_D \alpha| \geq 2^\beta.$$

Uz GCH iz stava 4.8. može se eliminisati uslov $k^\omega = k$. Medjutim, sam uslov je znatno slabiji od GCH, što omogućava da stav 4.8. bude od koristi i kad je GCH grubo prekršena. Neka je, na primer, D $(\omega_1, \beth_{\omega_1})$-regularan. Obavezno $\omega_1^{\omega_1} = \omega_1^\omega = \beth_1$. Takodje, interval $(\beth_1, \beth_{\omega_1})$ sadrži, bez obzira na GCH, dosta kardinala. Iz stava 4.8. sledi

$$|\prod_D \beth_1| \geq \beth_{\omega_1+1}$$

Naravno, kardinal $\beth_1$ može i sam biti jako veliki, ali to samo znači da se gornji stav ne može primeniti na prethodnike od $\beth_1$ u ovom primeru.

Posledica 3.

Neka teorija T dopušta par (α,β). Onda za svaki γ T dopušta $(\alpha^\gamma, \beta^\gamma)$.

Dokaz.

Neka je D γ-regularan filter nad γ. Prema posledici 2. je

$$|\prod_D \alpha| = \alpha^\gamma, \ |\prod_D \beta| = \beta^\gamma,$$

pa tvrdjenje sledi iz stava 4.5.

Sledeći stav dokazao je Keisler.

Stav 4.9.

Pretpostavimo da važi GCH. Neka je $\alpha \geq \alpha' \geq \beta' \geq \beta \geq \omega$ i $\|\mathcal{L}\| \leq \alpha'$. Onda svaka teorija T u jeziku $\mathcal{L}$, koja dopušta (α, β), dopušta i (α', β').

Dokaz.

Prema stavu 1.2. može se uzeti da je $\beta' > \beta$. Neka je β' kardinal 1. vrste. $\beta' = \gamma^+$. Zato, uz GCH, $\beta' = \beta^\gamma$, pa po posledici 3. stava 4.8. T dopušta $(\alpha^\gamma, \beta^\gamma)$. Primenom stava 1.2. a) sledi da T dopušta (α', β'). Neka je β' granični kardinal. Uočimo sledeći elementarni lanac. Neka je $\beta \leq \gamma < \beta'$ i neka je $\mathfrak{A}_\beta$ jedan (α, β) model teorije T. Pretpostavimo da su za $\nu \geq \beta, \nu < \gamma$ konstruisani (α, ν) modeli $\mathfrak{A}_\nu$. Ako je γ granični ordinal, neka je $\mathfrak{A}_\gamma = \cup\{\mathfrak{A}_\nu \mid \beta \leq \nu < \gamma\}$. Biće $\mathfrak{A}_\gamma$, (α, γ) model teorije T. Ako je $\gamma = \nu^+$, onda $\gamma = \nu^\nu$ pa po posledici 3. stava 4.8. postoji (α^ν, γ) model $\mathfrak{B} \succ \mathfrak{A}_\nu$. Prema stavu 1.2. a) postoji (α, γ) model $\mathfrak{A}_\gamma$ za koji je $\mathfrak{A}_\nu \prec \mathfrak{A}_\gamma \prec \mathfrak{B}$. Neka je

$$\mathfrak{A}' = \cup\{\mathfrak{A}_\gamma \mid \beta \leq \gamma < \beta'\}.$$

$\mathfrak{A}'$ je (α, β') model za T, odakle sledi da T dopušta i par (α', β').

Stav 4.10.

Neka je D (α, β) regularan ultrafilter i neka je za kardinale $\nu,\kappa\in[\alpha,\beta]$, $\kappa^{\nu}=\kappa$, $\alpha\leq cf\,\nu$. Tada

$$|\prod_D \kappa|^{\nu} = |\prod_D \kappa|.$$

Dokaz.

Iz $\kappa^{\nu}=\kappa$ sledi $|\prod_D \kappa| = |\prod_D \kappa^{\nu}|$. Dokazaćemo da je

$$|\prod_D \kappa|^{\nu} \leq |\prod_D \kappa^{\nu}|.$$

Dovoljno je naći $\pi : {}^{\nu}({}^{\gamma}\kappa) \to {}^{\gamma}(\kappa^{\nu})$ takav da važi

(+) $\quad g,h\in {}^{\nu}({}^{\gamma}\kappa)$, $\pi g =_D \pi h$ onda za sve $\xi<\nu$

$$g(\xi) =_D h(\xi).$$

Tada možemo definisati π' tako da je domen π' podskup od $\prod_D \kappa^{\nu}$ a kodomen ${}^{\nu}(\prod_D \kappa)$:

ako je $\pi g = f$, onda

$$\pi'(f_D) = \langle g(\xi) \mid \xi<\nu\rangle.$$

D je (α,β) regularan i zato (α,ν) regularan. Neka je E (α,ν) regularna familija skupova iz D, uredjena re-lacijom $\preccurlyeq$. $E=\{e_\xi \mid \xi<\nu\}$. Zbog (α,ν) regularnosti familije E, za svaki $i\in \bigcup E$ postoji $\nu_i<\nu$ tako da

$$i\in e_{\nu_i} \quad \text{i za sve } \xi>\nu_i$$
$$i\notin e_\xi.$$

Definišemo π na sledeći način. Ako je $g\in {}^{\nu}({}^{\gamma}\kappa)$, onda

$$(\pi g)(i) = \langle g(\phi)(i) \ldots g(\xi)(i) \ldots \mid \xi\leq\nu_i\rangle.$$

Biće

$$\pi g \in {}^{\gamma}(\kappa^{\nu}).$$

Dokažimo (+). Neka je $\pi g =_D \pi h$ i neka je

$$X = \{ i\in\gamma \mid (\pi g)(i) = (\pi h)(i)\};$$

važi $X \in D$. Za sve $\xi < \nu$ definišimo

$$d_\xi = \{ i \in \gamma \mid \nu_i > \xi \} ;$$

za sve $\xi < \nu$ $d_\xi \in D$, pošto

$$\{ i \in \gamma \mid \nu_i > \xi \} = \bigcup_{\xi < \lambda} e_\lambda ;$$

odatle, za sve $\xi < \nu$

$$d_\xi \cap X \in D.$$

Medjutim, za sve $i \in d_\xi \cap X$ je $\nu_i > \xi$ i $(\pi g)(i) = (\pi h)(i)$.

Sledi

$$\{ i \in \gamma \mid g(\xi)(i) = h(\xi)(i) \} \supset d_\xi \cap X \in D,$$

a odavde

$$g(\xi) =_D h(\xi).$$

Posledica 1.

Ako je D (α, β)-regularan filter, $\nu, \kappa \in [\alpha, \beta]$, $(cf \nu \geq \alpha)$ su kardinali, onda

$$|\prod_D \kappa^\nu| \geq |\prod_D \kappa|^\nu .$$

Dokaz.

Direktno koristeći dokaz stava 4.10.

Posledica 2.

Ako je D uniforman filter nad γ i ako je

$$cf\gamma^{cf\gamma} = cf\gamma$$

tada

$$|\prod_D cf\gamma|^{cf\gamma} = |\prod_D cf\gamma|.$$

Dokaz.

D je uniforman i zato $(cf\gamma, cf\gamma)$ -regularan. Primenom stava 4.10 sledi tvrdjenje.

Posledica 3.

Ako je γ jako nedostiživ i D uniforman ultrafilter nad γ , onda je

$$|\prod_D \gamma| = 2^{\gamma}.$$

Dokaz.

$cf\gamma = \gamma$, $\gamma^{\underline{\gamma}} = \gamma$, pa dokaz sledi iz posledice 2.

Posledica 4.

Ako je D uniforman ultrafilter nad kardinalom λ^+ i ako kontinuum hipoteza važi za λ , onda

$$|\prod_D \lambda^+| = 2^{\lambda^+}.$$

Dokaz.

Po pretpostavci je $2^{\lambda} = \lambda^+$. Zato $\lambda^{+\underline{\lambda^+}} = \lambda^+$ i $cf\lambda^+ = \lambda^+$, pa primenom posledice 2. sledi dokaz.

Posledica 1. stava 4.7. je rezultat Frayne Morell i Scotta iz 1962. Posledice 3. i 4. stava 4.10. dopunjuju prethodni rezultat, dok pitanje kardinalnosti

$$|\prod_D \alpha|$$

(D uniforman filter nad α), u slučaju da ne važe uslovi posledica 3. i 4., ostaje i dalje otvoreno.

Neka je D ultrafilter nad α i neka su β_ξ , $\xi<\alpha$ kardinali. Definišemo esencijalni supremum kardinala β_ξ, $\xi<\alpha$ u odnosu na filter D :

$$\text{ess.sup}_D \{\beta_\xi \mid \xi<\alpha\} = \min_{A\in D} (\sup_{\xi\in A} \beta_\xi).$$

Stav 4.11.

Neka je $\alpha \geqslant \omega$, D regularni ultrafilter nad α, β_ξ, $\xi<\alpha$ neprazni kardinali takvi da

$$X = \{\xi<\alpha \mid \beta_\xi \geqslant \omega\} \in D$$

i da je

$$\text{ess.sup}_D \{\beta_\xi \mid \xi<\alpha\} = \kappa ;$$

onda

$$|\prod_D \beta_\xi| = \kappa^\alpha.$$

Dokaz,

Pošto je prema stavu 4.3.

$$|\prod_D \beta_\xi| = |\prod_{D\cap P(\alpha)} \beta_\xi|,$$

možemo smatrati da su svi $\beta_\xi \geqslant \omega$. Neka je $E \subset D$ α-regularna familija. Prema posledici 1. stava 3.5. biće za sve $e \in E$, $|e| = \alpha$, pa ako primenimo stav 4.6., biće $\gamma = \alpha$ i za sve $\xi < \alpha$ $\lambda_\xi < \omega$, pa zato i $\beta_\xi^{\lambda_\xi} = \beta_\xi$, odakle

$$(+) \qquad |\prod_D \beta_\xi| = |\prod_D \beta_\xi|^\alpha.$$

Ako je $\kappa = \lambda^+$, biće $B = \{\xi < \alpha \mid \beta_\xi = \kappa\} \in D$ pa zato i

$$|\prod_D \beta_\xi| = |\prod_D \kappa| = \kappa^\alpha.$$

Ako je κ granični kardinal, biće za sve $\lambda < \kappa$

$$B_\lambda = \{\xi < \alpha \mid \lambda < \beta_\xi\} \in D.$$

Odavde

$$|\prod_D \beta_\xi| \geqslant \lambda$$

za sve $\lambda < \kappa$, što povlači

$$(-) \qquad |\prod_D \beta_\xi| \geqslant \kappa.$$

Neka je $B \in D$ takav da $\kappa = \sup\{\beta_\xi \mid \xi \in B\}$; onda je prema stavu 4.1. i zbog uniformnosti D

$$|\prod_D \beta_\xi| = |\prod_{D\cap P(B)} \beta_\xi| \leqslant |\prod_{D\cap P(B)} \kappa| = \kappa^\alpha.$$

Imajući u vidu da važi $(+)$ i $(-)$, zaključujemo

$$|\prod_D \beta_\xi| = \kappa^\alpha.$$

Dobri ultrafilteri i ultraproizvodi po dobrim ultrafilterima su od posebnog značaja za teoriju modela. Sledeći stav dokazao je Keisler.

Stav 4.12.

Neka je D β^+ dobar ultrafilter nad α , $0 < n_\xi < \omega$ za $\xi < \alpha$ i

$$\mathrm{ess.sup}_D \{n_\xi \mid \xi < \alpha\} = \omega \ ;$$

onda je

$$|\prod_D n_\xi| \geqslant 2^\beta .$$

Dokaz.

Definišimo $\Phi : P_\omega(\beta) \to P(\alpha)$ sa

$$\Phi(F) = \{\xi < \alpha \mid n_\xi \geqslant 2^{|F|}\} .$$

Budući da je $\mathrm{ess.sup}_D \{n_\xi \mid \xi < \alpha\} = \omega$, sledi da je Φ preslikavanje u D . Očigledno je Φ monotona funkcija, pa zbog toga što je D β^+-dobar, postoji multiplikativna funkcija Ψ ,

$$\Psi : P_\omega(\beta) \to D ,$$

takva da $\Psi \leqslant \Phi$. Neka je

$$F(\xi) = \{\eta < \beta \mid \xi \in \Psi(\{\eta\})\} \ ;$$

važi $F(\xi) \in P(\beta)$. Uočimo da je

$$\bigcap_{n<\omega} \Phi(n) = \emptyset ,$$

odakle sledi da za svaki $\xi < \alpha$ postoji najmanji $n'_\xi < \omega$ takav da

$$\xi \notin \Phi(n'_\xi) .$$

Pretpostavimo da je

$$|F(\xi)| \geqslant n'_\xi .$$

Znači da postoji $F' \subset F(\xi)$ za koji je $|F'| = n'_\xi$. Pošto je Ψ multiplikativna, bilo bi

$$\xi \in \bigcap_{\eta \in F'} \Psi(\{\eta\}) = \Psi(F') \subset \Phi(F') = \Phi(|F'|) = \Phi(n'_\xi),$$

suprotno izboru n'_ξ.

Štaviše, ako je $F(\xi) = \{\eta_i \mid i < n\}$, onda je za sve $\xi < \alpha$

$$\xi \in \bigcap_{i<n} \Psi(\{\eta_i\}) = \Psi(F(\xi)) \subset \Phi(F(\xi)),$$

zbog multiplikativnosti funkcije Ψ. Odavde sledi da za sve $\xi < \alpha$

$$2^{|F(\xi)|} \leq n_\xi,$$

što povlači

$$|\prod_D 2^{|F(\xi)|}| \leq |\prod_D n_\xi|.$$

Definišimo sa $Q(f) = \langle f \upharpoonright_{F(\xi)} \mid \xi < \alpha \rangle_D$ preslikavanje

$$Q : 2^\beta \longrightarrow \prod_D {}^{F(\xi)}2 .$$

Neka je $f, g \in 2^\beta$ i $f \neq g$. Neka je $f(\eta) \neq g(\eta)$. Biće

$$\{\xi < \alpha \mid f \upharpoonright_{F(\xi)} \neq g \upharpoonright_{F(\xi)}\} \supset \Psi(\{\eta\}) \in D,$$

pa je zato Q 1-1, što povlači

$$2^\beta \leq |\prod_D n_\xi|.$$

Posledica 1.

Neka je D prebrojivo nekompletan i $\beta_\xi > \phi$, $\xi < \alpha$ takvi da je

$$\text{ess.}\sup_D \beta_\xi \geq \omega;$$

onda je

$$|\prod_D \beta_\xi| \geq 2^\omega.$$

Dokaz.

Prema stavu 3.21. je sigurno ω^+ dobar pa dokaz sledi iz stava 4.12.

Stav 4.13.

Ako je α merljiv, $\alpha > \omega$ i ako je D normalni ultrafilter nad α, onda

$$\langle R(\alpha+1), \in \rangle \cong \prod_D \langle R(\beta+1), \in \rangle.$$

Jedan izomorfizam je definisan sa

$$\pi(x) = \langle x \cap R(\beta) \mid \beta < \alpha \rangle_D, \quad x \in R(\alpha+1).$$

Dokaz.

Stavimo

$$\prod_D \langle R(\beta+1), \in \rangle = \langle B, E \rangle.$$

Neka su $x, y \in R(\alpha+1)$ takvi da $x \neq y$. Pretpostavimo da je $x \setminus y \neq \phi$. Neka je $z \in x \setminus y$. Pošto je $x \in P(R(\alpha))$, biće $z \in R(\alpha)$. Pošto je α granični kardinal, biće za neki $\gamma < \alpha$, $z \in R(\gamma)$. Za svaki $\beta \in [\gamma, \alpha)$ važi

$$z = z \cap R(\beta),$$

$$z \in (x \cap R(\beta)) \setminus (y \cap R(\beta)).$$

Pošto je $[\gamma, \alpha) \in D$, biće

$$\pi z \; E \; \pi x,$$

$$\pi z \; \not{E} \; \pi y;$$

sledi $\pi x \neq \pi y$, pa je π 1-1.

Pretpostavimo da je $X \in Y$. Onda je $x \in R(\alpha)$, pa zato za neki $\gamma < \alpha$, $X \in R(\gamma)$. Za $\gamma \leq \beta < \alpha$ je

$$X = X \cap R(\beta),$$
$$X \in Y \cap R(\beta).$$

Odavde

$$\pi X \; E \; \pi Y.$$

Dokažimo da je π na . Neka je $f_D \in B$. Pretpostavimo da je

$$X = \{\beta \in \alpha \mid f(\beta) \in R(\beta)\} \in D.$$

Za svaki $\beta < \alpha$, sa $g(\beta)$ označimo najmanji γ za koji

$$f(\beta) \in R(\gamma+1).$$

Onda za svaki $\beta \in X$ je $g(\beta) < \beta$. Ako je $\beta = \gamma + 1$, onda $g(\beta) \leq \gamma < \beta$. Ako je β druge vrste, onda postoji $\gamma < \beta$ tako da

$$f(\beta) \in R(\gamma) \subset R(\gamma+1).$$

Pošto je D normalan ultrafilter, postoji $\gamma < \alpha$ takav da

$$Y = \{\beta \mid g(\beta) = \gamma\} \in D.$$

Dalje imamo da je $|R(\gamma+1)| = \beth_{\gamma+1}$. Pošto je α jako nedostiživ, važi

$$\alpha = \beth_\alpha > \beth_{\gamma+1}$$

za sve $\gamma < \alpha$. Posmatrajmo particiju α na $\beth_{\gamma+1}$ delova, takvu da je $\alpha \setminus Y$ jedan deo i da je za svaki $\in R(\gamma+1)$ skup

$$\{\beta \mid f(\beta) = u\} \text{ deo}.$$

$\alpha \setminus Y \in D$ jer je $Y \in D$. Zbog α -kompletnosti filtera D je za neki $u \in R(\gamma+1)$

$$\{\beta \mid f(\beta) = u\} \in D.$$

Medjutim, za $\beta > \gamma$ je $u = u \cap R(\beta)$ i zato

$$\{\beta \mid f(\beta) = u \cap R(\beta)\} \in D.$$

Kako je $\pi(u) = \langle u \cap R(\beta) \mid \beta < \alpha \rangle_D$, iz gornjeg sledi

$$\{\beta \mid f(\beta) = \langle u \cap R(\beta) \mid \beta < \alpha \rangle(\beta)\} \in D$$

odnosno $f_D = \pi(u)$. Znači

$$f_D \in \pi(R(\alpha+1)).$$

Takodje važi: ako postoji $g_D \in B$ za koji $h_D E g_D$, onda postoji $u \in R(\alpha)$ za koji $h_D = \pi(u)$:

$$h_D E g_D \text{ akko } \{\beta \mid h(\beta) \in g(\beta)\} \in D$$

odakle

$$\{\beta \mid h(\beta) \in R(\beta)\} \in D.$$

Iz gornjeg onda sledi da postoji u za koji $h_D = \pi(u)$.
Neka je f_D bilo koji element iz B . Stavimo

$$X = \{Y \in R(\alpha) \mid \pi(Y) E f_D\}.$$

Onda $X \in R(\alpha+1)$. Dokažimo da je $\pi(X) = f_D$. Pošto aksiom ekstenzionalnosti važi i u $\langle R(\alpha+1), \in \rangle$ i u $\langle B, E \rangle$ dovoljno je dokazati

$$h_D E f_D \text{ akko } h_D E \pi(X).$$

Ako je $h_D E f_D$, onda postoji $u \in R(\alpha)$ tako da je $h_D = \pi(u)$. Odavde, $u \in X$. Medjutim, $u \in X$ povlači $\pi(u) = h_D E \pi(X)$. Ako je $h_D E \pi(X)$, onda, pošto je $\pi(X) = f_D \in B$, postoji $u \in R(\alpha)$ za koji $h_D = \pi(u)$. $\pi(u) E \pi(X)$ pa zato $u \in X$.

Odavde je $\pi(u) E f_D$, odnosno $h_D E f_D$. Znači, $\pi(x) = f_D$, pa je π na preslikavanje.

Posledica 1.

Ako je D normalan ultrafilter nad merljivim kardinalom α, onda

$$\left|\prod_D \beth_{\beta+1}\right| = 2^{\alpha}.$$

Stav 4.14.

Neka je $\alpha > \omega$ merljiv kardinal i neka je D normalan ultrafilter nad α.

a) Za svaku formulu $\varphi(x_1 \dots x_n)$ i $S_1, \dots, S_n \in R(\alpha+1)$

$\langle R(\alpha+1), \in \rangle \models \varphi(S_1 \dots S_n)$ akko

$\{\beta \in \alpha \mid \langle R(\beta+1), \in \rangle \models \varphi[S_1 \cap R(\beta) \dots S_n \cap R(\beta)]\} \in D.$

b) Ako je $In(\alpha)$ skup nedostiživih kardinala manjih od α, onda $In(\alpha) \in D$.

c) Ako je $Tr(\alpha)$ skup kardinala manjih od α koji imaju svojstvo grananja, onda $Tr(\alpha) \in D$.

Dokaz.

a) $\langle R(\alpha+1), \in \rangle \models \varphi[S_1 \dots S_n]$ akko

$\prod_D \langle R(\beta+1), \in \rangle \models \varphi[\pi(S_1) \dots \pi(S_n)]$ akko

$\prod_D \langle R(\beta+1), \in \rangle \models \varphi[\langle S_1 \cap R(\beta) \mid \beta < \alpha \rangle_D \dots \langle S_n \cap R(\beta) \mid \beta < \alpha \rangle_D]$ akko

$\{\beta \in \alpha \mid \langle R(\beta+1), \in \rangle \models \varphi[\langle S_1 \cap R(\beta) \mid \beta < \alpha \rangle(\beta) \dots \langle S_n \cap R(\beta) \mid \beta < \alpha \rangle(\beta)]\} \in D$

akko

$\{\beta \in \alpha \mid \langle R(\beta+1), \in \rangle \models \varphi[S_1 \cap R(\beta) \dots S_n \cap R(\beta)]\} \in D.$

Ovde je π izomorfizam iz stava 4.13.

b) Formalizacijom definicije nedostiživosti dobijamo formulu φ takvu da

$\langle R(\beta+1),\in\rangle \models \varphi$ akko β je nedostiživ.

Dokaz onda sledi primenom a).

c) Slično kao u b) neka je φ formula koja se dobija formalizacijom svojstva grananja. Onda

$\langle R(\beta+1),\in\rangle \models \varphi$ akko β ima svojstvo grananja koje je ekvivalentno slaboj kompaktnosti. Medjutim, α je slabo kompaktan (stav3.13.), pa je

$\langle R(\alpha+1),\in\rangle \models \varphi$. Odavde, primenom a) sledi da

$$I_2(\alpha) = \{\beta\in\alpha \mid \langle R(\beta+1),\in\rangle \models \varphi\} \in \underline{D}.$$

Prethodna dva stava dokazao je Scott. Iz poslednjeg sledi da je merljivi kardinal Π_1^2 neopisiv i da predstavlja tačku nagomilavanja velikog broja osobina.

Sledeći stav povezuje odredjivanje kardinalnosti ultraproizvoda sa prirodnim poretkom u ultrastepenu.

Stav 4.15.

Neka je D ultrafilter nad kardinalom κ. Neka je

$$\mathfrak{A} = \langle A, <_A\rangle = \prod_D \langle \kappa, <\rangle.$$

Ako je $f\in {}^{\kappa}(\kappa\setminus\{\emptyset\})$, onda

$$\prod_D \langle f(\beta), <\rangle \cong \langle \{g_D^{\mathfrak{A}}\in \mathfrak{A} \mid g_D^{\mathfrak{A}} <_A f_D^{\mathfrak{A}}\}, <_A\rangle.$$

Dokaz.

Neka je

$$g \in \prod_{\beta \in \kappa} f(\beta) ;$$

onda je $g \in {}^{\kappa}\kappa$. Definišimo

1. $g_D = \{ h \in \prod_{\beta \in \kappa} f(\beta) \mid \{ i < \kappa \mid g(i) = h(i) \} \in D \}$.

2. $g_D^{\mathfrak{U}} = \{ h \in {}^{\kappa}\kappa \mid \{ i < \kappa \mid g(i) = h(i) \} \in D \}$.

Jasno je da važi $g_D \subset g_D^{\mathfrak{U}}$. Definišimo

$$\pi : \prod_D f(\beta) \longrightarrow A$$

sa

$$\pi(g_D) = g_D^{\mathfrak{U}} .$$

Dokažimo da je π 1-1 . Neka je $g_D \neq h_D$ i $g_D, h_D \in \prod_D f(\beta)$. Biće $g_D \cap h_D = \phi$. Pretpostavimo da $\pi g_D = \pi h_D$. Znači $g_D^{\mathfrak{U}} = h_D^{\mathfrak{U}}$ i

$$\{ i < \kappa \mid g(i) = h(i) \} \in D .$$

Sledi $h_D = g_D$. Kontradikcija. Stavimo

$$F = \{ g_D^{\mathfrak{U}} \in \mathfrak{U} \mid g_D^{\mathfrak{U}} <_A f_D^{\mathfrak{U}} \} .$$

Dokažimo da je

$$\pi \left(\prod_D f(\beta) \right) = F .$$

Neka je

$$g_D \in \prod_D f(\beta) .$$

Onda

$$\{\beta < \kappa \mid g(\beta) < f(\beta)\} = \kappa \in D.$$

Sledi da je

$$g_D^{\mathfrak{A}} <_A f_D^{\mathfrak{A}}.$$

Odavde, $g_D^{\mathfrak{A}} \in F$.

Neka je $g_D^{\mathfrak{A}} \in F$. Onda

$$X = \{\beta < \kappa \mid g(\beta) < f(\beta)\} \in D.$$

Neka je $\bar{g} \in {}^{\kappa}\kappa$ takva da važi

$$\bar{g}(\beta) = g(\beta) \qquad \text{ako} \qquad \beta \in X$$

$$\bar{g}(\beta) = 1 \qquad \text{ako} \qquad \beta \in \kappa \setminus X.$$

Onda $\bar{g} \in g_D^{\mathfrak{A}}$. Medjutim,

$$\bar{g} \in \prod_{\beta \in \kappa} f(\beta),$$

pa

$$\bar{g}_D \in \prod_D f(\beta).$$

Dakle, $\pi(\bar{g}_D) = g_D^{\mathfrak{A}}$, pa π preslikava $\prod_D f(\beta)$ na F .

Stav 4.16.

Neka je D normalni ultrafilter nad merljivim kardinalom κ , onda je $\mathfrak{A} = \langle A, <_A \rangle = \prod_D \langle \kappa, < \rangle$ dobro uredjen relacijom $<_A$. Redni tip

$$ot(\mathfrak{A}) > 2^{\kappa}.$$

Dokaz.

Prema stavu 3.12. $<_A$ je dobro uredjenje. Pošto je D uniforman ultrafilter D je (κ,κ) regularan. κ je merljiv, otuda jako nedostiživ, pa prema posledici stava 4.10. važi

$$\left|\prod_D \kappa\right| = 2^\kappa.$$

Odavde sledi da je

$$2^\kappa \leq ot(\mathfrak{A}) \leqslant (2^\kappa)^+.$$

Prema stavu 4.13. je

$$\left|\prod_D R(\beta+1)\right| = \left|\prod_D \beth_{\beta+1}\right| = 2^\kappa.$$

Iz jako nedostiživosti κ sledi da za sve $\beta<\kappa$, $\beth_\beta<\kappa$ pa zato i $\beth_{\beta+1}<\kappa$. Neka je σ funkcija: $\sigma(\beta)=\beth_{\beta+1}$ za $\beta<\kappa$. Sledi da je $\sigma\in{}^\kappa\kappa$. Prema gornjem i stavu 4.15. je

$$(*) \qquad \prod_D \langle \sigma(\beta), < \rangle \cong \langle \{ f_D^{\mathfrak{A}} \in \mathfrak{A} \mid f_D^{\mathfrak{A}} <_A \sigma_D^{\mathfrak{A}} \}, <_A \rangle$$

i

$$\left|\prod_D \sigma(\beta)\right| = 2^\kappa.$$

Znači $(*)$ je početni komad u $\mathfrak{A}$, rednog tipa bar 2^κ, odakle sledi tvrdjenje.

Posledica 1.

Za svaki $f_D\in\mathfrak{A}$ postoji ordinal γ_f tako da je f_D, γ_f-ti element u $\mathfrak{A}$ i važi

$$\langle \prod_D f(\beta), <_A \rangle \cong \langle \gamma_f, < \rangle.$$

Za svaki ordinal $\varkappa < ot\,\mathfrak{U}$ postoji $f^{\varkappa} \in {}^{\kappa}\kappa$ tako da $f^{\varkappa}_D$ je $\varkappa$-ti element u $\mathfrak{U}$.

Dokaz.

Neposredno iz stava 4.15. i stava 4.16.

Sledeći stav rešava kontinuum problem za merljive kardinale, izračunavanjem kardinalnosti ultraproizvoda.

Stav 4.17.

Neka je D normalni ultrafilter nad merljivim kardinalom κ. Neka je za $\beta < \kappa$ f dato sa

$$2^{\omega_\beta} = \omega_{\beta + f(\beta)}$$

i neka je $\mathfrak{U} = \prod_D \langle \kappa, < \rangle$.

Onda važi

$$f(\kappa) \leq ot\,(\prod_D \langle f(\beta), < \rangle).$$

Dokaz.

Zbog jake nedostiživosti merljivog kardinala κ važi: iz $\beta < \kappa$ sledi $cf(\beta) < \kappa$, $\omega_\beta < \kappa$, $2^{\omega_\beta} < \kappa$, $f(\beta) < \kappa$.

Zato je

$$f \upharpoonright \kappa \in {}^{\kappa}\kappa \;,\; f \upharpoonright \kappa \in \prod_D \langle \kappa, < \rangle.$$

Definišimo

$$G_h = \{ g_D \in \mathfrak{U} \mid g_D <_A f_D \},$$

$$H = \{ h_D \in \mathfrak{U} \mid \{ \beta < \kappa \mid h(\beta) \in [\omega_\beta, \omega_{\beta + f(\beta)}) \cap card \} \in D \},$$

odnosno, za $h_D \in H$, $h(\beta)$ je kardinal za sve $\beta < \kappa$ i

$$\omega_\beta \leq h(\beta) < \omega_{\beta + f(\beta)} .$$

Odavde sledi da za svaki $h_D \in H$ postoji $g_D \in G_f$ tako da

$$(*) \qquad \{\beta < \kappa \mid h(\beta) = \omega_{\beta + g(\beta)}\} \in D .$$

Definišimo $\pi : H \longrightarrow G_f$ sa

$$\pi(h_D) = g_D \qquad \text{akko} \quad (*) .$$

Neposredno se proverava da π ne zavisi od elemenata od h_D i da je π 1-1 . Sledi

$$ot(H, <_A) \leq ot(G_f, <_A).$$

Neka je $\varkappa$ kardinal takav da je $\kappa \leq \varkappa < 2^\kappa$. Prema posledici 1. stava 4.16. postoji $f^\varkappa \in {}^\kappa\kappa$ takav da $f^\varkappa_D$ je $\varkappa$-ti ordinal u $\mathfrak{A}$, odnosno

$$\gamma_{f^\varkappa} = \varkappa .$$

Prema istoj posledici biće

$$ot(\langle \prod_D f^\varkappa(\beta), <_A \rangle) = ot(G_{f^\varkappa}, <_A) = ot\,\varkappa = \varkappa .$$

Za funkciju g sa domenom κ , definišemo

$$|g| = \langle |g(\beta)| : \beta < \kappa \rangle .$$

Važi

$$|\prod_D |f^\varkappa(\beta)|| = |\prod_D f^\varkappa(\beta)| = \varkappa .$$

Sledi da je

$$ot(\langle \prod_D f^\varkappa(\beta), <_A \rangle) = ot\langle \prod_D |f^\varkappa(\beta)|, <_A \rangle = \varkappa ,$$

pa je

$$|G_{|f^{\varkappa}|}| = \varkappa$$

i

$$\gamma_{|f^{\varkappa}|} \geqslant \varkappa ,$$

što znači da je $(|f^{\varkappa}|)_D$ bar $\varkappa$-ti element u $\mathfrak{U}$. Pošto je $(|f^{\varkappa}|)_D <_A f^{\varkappa}_D$ ili je $(|f^{\varkappa}|)_D = f^{\varkappa}_D$, po izboru $f^{\varkappa}$ mora biti

$$f^{\varkappa} =_D |f^{\varkappa}|.$$

Odavde sledi da je

$$X = \{\beta < \kappa \mid f^{\varkappa}(\beta) \text{ je kardinal}\} \in D.$$

Neka je $\sin(\kappa)$ skup jako nedostiživih kardinala manjih od κ. Prema stavu 4.14. važi

$$\sin(\kappa) \in D.$$

Sada imamo alternativu:

$$\{\beta < \kappa \mid f^{\varkappa}(\beta) \geqslant \omega_{\beta + f(\beta)}\} \in D \text{ ili}$$
$$\{\beta < \kappa \mid f^{\varkappa}(\beta) < \omega_{\beta + f(\beta)}\} \in D.$$

U prvom slučaju imali bismo

$$\{\beta \in \kappa \cap \sin(\kappa) \mid f^{\varkappa}(\beta) \geqslant \omega_{\beta + f(\beta)} = \mathcal{b}(\beta)\} \in D,$$

gde je $\mathcal{b}(\beta) = \beth_{\beta+1}$. Odavde bi bilo

$$2^{\kappa} = |\prod_{D \cap P(\sin(\kappa))} \beth_{\beta+1}| \leq |\prod_{D} f^{\varkappa}(\beta)| = \varkappa < 2^{\kappa}.$$

Kontradikcija. Znači

$$\{\beta < \kappa \mid f^{\varkappa}(\beta) < \omega_{\beta+f(\beta)}\} \in D.$$

Pošto je $\varkappa \geqslant \kappa$ i $f^{\varkappa} =_D |f^{\varkappa}|$, imamo da je zbog normalnosti ultrafiltera D

$$\{\beta < \kappa \mid f^{\varkappa}(\beta) \geqslant \beta\} \in D.$$

Presecajući ovaj skup sa $\sin(\kappa)$, sledi, s obzirom na gornje,

$$\{\beta < \kappa \mid f^{\varkappa}(\beta) \in [\omega_\beta, \omega_{\beta+f(\beta)}) \cap \mathrm{Card}\} \in D.$$

Sledi da postoji $h_D \in H$ tako da $f^{\varkappa} \in h_D$, odnosno

$$f^{\varkappa}_D \in H.$$

Pošto za $\varkappa, \varkappa' \in [\kappa, 2^{\kappa}) \cap \mathrm{Card}$ i $\varkappa \neq \varkappa'$, sledi

$$f^{\varkappa}_D \neq f^{\varkappa'}_D.$$

Imamo da je

$$\mathrm{ot}([\kappa, 2^{\kappa}) \cap \mathrm{Card}) = f(\kappa) \leqslant \mathrm{ot}(\langle H, <_A \rangle) =$$

$$= \mathrm{ot}(\langle G_f, <_A \rangle) = \mathrm{ot}(\prod_D \langle f(\beta), < \rangle).$$

Posledica 1.

Neka je D normalni ultrafilter nad merljivim kardinalom κ. Tada

$$\{\beta < \kappa \mid 2^{|\beta|} = |\beta|^{+}\} \in D \longrightarrow 2^{\kappa} = \kappa^{+}.$$

Dokaz.

Iz pretpostavkê sledi da

$$\{\beta \in \kappa \cap \sin(\kappa) \mid 2^{\omega_\beta} = \omega_{\beta+1}\} \in D$$

odnocno, da je $f(\beta) =_D 1$, pa iz stava 4.17. i Cantorove nejednakosti dobijamo

$$1 \leq f(\kappa) \leq ot(\prod_D \langle 1, < \rangle) = 1 .$$

Ovo znači da je $\underline{2^\kappa = \kappa^+}$.

Iz stava 4.17. i posledice sledi da se Eastonov rezultat ne može primeniti na $ZFCM = ZFC+AM$ budući da je $f(\kappa)$ ograničeno vrednošću $ot(\prod_D \langle f(\beta), < \rangle)$.

Dobijamo u stvari

$$2^\kappa = 2^{\omega_\kappa} \leq \omega_{\kappa + ot(\prod_D \langle f(\beta), < \rangle)} .$$

Silver je dokazao da neprotivurečnost $ZFCM$ implicira neprotivurečnost teorije $ZFCM + GCH$. Takodje, postoji dokaz da, ako je $ZFCM$ neprotivurečna teorija, onda je i $ZFCM + \neg GCH$ neprotivurečna. Time gornji rezultat dobija smisao. Ostaje otvoreno pitanje:

Da li se ma koji ordinal σ za koji važi

$$1 \leq \sigma \leq ot(\prod_D \langle f(\beta), < \rangle) ,$$

može uzeti za vrednost $f(\kappa)$?

Takodje je otvoreno pitanje:

Da li je u $ZFCM$ prvi merljiv kardinal istovremeno prvi regularni kardinal za koji ne važi eastonov rezultat ?

Budući da egzistencija merljivih kardinala implicira egzistenciju poveće hijerarhije velikih kardinala od kojih svaki novi ima po neku novu osobinu, ne bi bilo čudno da je odgovor i na to pitanje potvrdan.

Sledeći stav dokazao je Scott.

Stav 4.18.

$$AM \longrightarrow V \neq L.$$

Dokaz.

Neka je κ prvi merljiv kardinal i neka je $\beta = (2^{2^{2^{\kappa}}})^{+}$. $R(\kappa+3)$ je tranzitivni skup kardinalnosti $< \beta$, pa imamo

$$R(\kappa+3) \in L(\beta) \qquad \text{i}$$

$$\langle L(\beta), \in \rangle \models ZF-P.$$

Neka je D neglavni κ-kompletni ultrafilter nad κ i neka je dat ultrastepen

$$\langle B, E \rangle = \prod_D \langle L(\beta), \in \rangle.$$

Biće

$$\langle B, E \rangle \models ZF-P.$$

Pošto je D κ-kompletan, slično dokazu stava 3.12, sledi da je E dobro zasnovana relacija. Dokažimo da je

$$ot(\langle B, E \rangle) = \beta.$$

Prirodno utapanje d preslikava izomorfno β u ordinale iz $\langle B, E \rangle$, pa je

$$ot(\langle B, E \rangle) \geqslant \beta.$$

Neka je X ordinal u $\langle B,E\rangle$. Za neki $f\in {}^{\kappa}\beta$ je $x=f_D$. Pošto je $cf\beta>\kappa$, postoji $\gamma<\beta$ tako da $f\in {}^{\kappa}\gamma$. Sledi da je

$$|\{y \mid yEx\}| \leq \gamma^{\kappa}$$

što znači da svaki ordinal iz $\langle B,E\rangle$ ima manje od β prethodnika pa, s obzirom na gornje

$$ot(\langle B,E\rangle)=\beta.$$

Ako je $\varphi(x)$ formula teorije skupova:

„ x je prvi merljivi kardinal"

onda je jasno da se kvantifikatori od $\varphi(x)$ mogu ograničiti na $P(P(P(x)))$ pa je $\varphi(x)$ apsolutna za $\langle L(\beta),\in\rangle$. Sledi

$$\langle L(\beta),\in\rangle\models\varphi[\sigma] \quad \text{akko} \quad \sigma=\kappa.$$

U ultrastepenu jedinstveni element koji zadovoljava φ je $d(\kappa)$. Slično dokazu stava 4.16. zaključujemo da je

$$|\prod_D \kappa| = 2^{\kappa} = \{g_D\in B \mid g_D <_B d(\kappa)\},$$

pa je zato $d(\kappa)>\bar{\kappa}$ - κ-ti ordinal u $\langle B,E\rangle$. Sledi

$$ot(\langle B,E\rangle)=ot(\langle L(\alpha),\in\rangle),$$

$$\langle B,E\rangle \not\cong \langle L(\alpha),\in\rangle.$$

Znači da aksiom konstruktibilnosti ne važi.

Kontrapozicijom stava 4.18. i Jensenove teoreme iz glave 2 dobijamo

$$ZFC + V=L \vdash \neg AM$$

$$ZFC + V=L \vdash \neg AM \rightarrow HCS$$

$$ZFC + V=L \vdash HCS$$

što se već slaže sa poznatim Gödelovim rezultatom, jer

$$ZFC + GCH \vdash HCS.$$

Iz stava 4.17. sledi da, ukoliko u nekom modelu postoji takva funkcija f da ne važi tvrdjenje 4.17., onda u tom modelu ne bi moglo biti merljivih kardinala (što ne znači da je u tom modelu $V=L$), pa bismo primenom Jensenove teoreme dobili da u modelu važi HCS.

U vezi odnosa velikih kardinala i kontinuum problema, pomenimo još sledeći Solovayev rezultat.

Stav 4.19.

Neka je κ jako kompaktni kardinal i neka je λ singularni jako granični kardinal veći od κ. Onda je

$$2^\lambda = \lambda^+.$$

Tri sledeća stava rešavaju veći broj problema vezanih za odredjivanje kardinalnosti ultraproizvoda po kompletnim filterima.

Stav 4.2Ø

Neka je D normalni ultrafilter nad κ i neka su

α_i, $i \in \kappa$ kardinali. Onda

a) $|\prod_D \alpha_i| = \gamma < \kappa$ akko $\mathrm{ess.\,sup}_D\, \alpha_i = \gamma$

b) $|\prod_D \alpha_i| = \kappa$ akko $\{i \in \kappa \mid \alpha_i = i\} \in D$

Dokaz.

a) Neka je $g \in {}^{\kappa}\kappa$ takva da $g(i) = \alpha_i$ i neka je $\mathfrak{A} = \prod_D \langle \kappa, < \rangle$

$$|\prod_D \alpha_i| = \gamma < \kappa \quad \text{akko}$$

$$ot(\prod_D \langle \alpha_i, < \rangle) = \gamma \quad \text{akko} \quad \text{(prema 4.15)}$$

$$ot(\{h_D^{\mathfrak{A}} \in \mathfrak{A} \mid h_D^{\mathfrak{A}} <_A g_D^{\mathfrak{A}}\}) = \gamma \quad \text{akko}$$

$$g_D^{\mathfrak{A}} = d(\gamma).$$

b) Dokaz analogno dokazu a), uzimajući u obzir da je

$$\{i < \kappa \mid \alpha_i = i\} \cap Card \in D \quad \text{akko}$$

$$\{i < \kappa \mid \alpha_i = i\} \in D.$$

Stav 4.21.

Neka je D normalni ultrafilter nad κ i neka su α_i, $i \in \kappa$ kardinali. Onda za svaki kardinal $\varkappa$ takav da je

$$\kappa \leq \varkappa \leq 2^{\kappa}$$

postoji niz kardinala $\alpha_i^{\varkappa}$, $i \in \kappa$ takav da je

$$\mathrm{ess.\,sup}_D \{\alpha_i^{\varkappa} \mid i < \kappa\} = \kappa$$

i $$|\prod_D \alpha_i^{\varkappa}| = \varkappa.$$

Dokaz.

Neka je prema posledici 1. stava 4.16. $f_D^{\varkappa}$, $\varkappa$-ti element iz

$$\prod_D \langle \kappa, < \rangle .$$

Neka je $\alpha_i^{\varkappa} = f^{\varkappa}(i)$. Prema stavu 4.15. obavezno je

$$|\prod \alpha_i^{\varkappa}| = \varkappa .$$

Prema stavu 4.2Ø b) i stavu 4.15. je

$$\{i \in \kappa \mid \alpha_i^{\varkappa} \geqslant i\} \in D,$$

$$\text{ess.}\sup_D \{\alpha_i^{\varkappa} \mid i < \kappa\} \geqslant \kappa .$$

Pošto je $\varkappa \leqslant 2^{\kappa}$, biće i

$$\{i \in \kappa \mid \alpha_i^{\varkappa} \leqslant \beth_{i+1}\} \in D$$

pa zato

$$\text{ess.}\sup_D \{\alpha_i^{\varkappa} \mid i < \kappa\} = \kappa .$$

Stav 4.22.

Neka je D normalni ultrafilter nad κ i neka su $\alpha_i , i \in \kappa$ kardinali takvi da:

$$cf(\text{ess.}\sup_D \{\alpha_i \mid i < \kappa\}) \neq \kappa .$$

Onda

$$|\prod_D \alpha_i| = |\prod_D \text{ess.}\sup_D \{\alpha_i \mid i < \kappa\}| .$$

Dokaz.

Neka je $\gamma = \text{ess.}\sup_D \{\alpha_i \mid i < \kappa\}$.

1. slučaj. $cf\,\gamma < \kappa$.

Za $\gamma < \kappa$ tvrdjenje se svodi na stav 4.20 a). Neka je $\gamma > \kappa$. Onda obavezno važi da se γ može napisati u obliku

$$\gamma = \omega_{g(\gamma)}$$

gde je σ takav da $\sigma < \kappa$. S obzirom na pretpostavku, biće za svaki kardinal $\beta < \gamma$

$$X_\beta = \{ i \in \kappa \mid \alpha_i > \beta \} \in D$$

(jer u suprotnom γ ne bi bio esencijalni supremum). Prema tome, možemo uzeti da se svi α_i mogu predstaviti:

$$\alpha_i = \omega_{g(\gamma)} + f(i).$$

Ako je $f =_D d(\sigma)$, stvar je dokazana.

S obzirom na prethodno, biće

$$f \in {}^{\kappa}\sigma$$

pa zbog $\sigma < \kappa$ i normalnosti ultrafiltera D mora biti za neki $\delta \leq \sigma < \kappa$

$$f =_D \delta.$$

Ako bi bilo $\delta < \sigma$, ne bi bilo $\gamma = ess.sup_D \{ \alpha_i \mid i < \kappa \}$. Znači $\delta = \sigma$.

2. slučaj $cf\,\gamma > \kappa$.

Neka je g dato sa $g(i) = \alpha_i$. Pošto je

$$Dom(g) = \kappa$$

i $$cf\,\gamma > \kappa$$

mora biti

$$\{i<\kappa \mid \alpha_i = \gamma\} \in D$$

odakle sledi tvrdjenje.

Iz stava 4.21. sledi da se u slučaju

$$cf(\text{ess.}\sup_D \{\alpha_i \mid i<\kappa\}) = \kappa$$

ne može dobiti ovakvo tvrdjenje.

Prethodni stavovi omogućuju da se dopune dvokardinalni rezultati.

Stav 4.23.

Neka je D normalni ultrafilter nad merljivim kardinalom κ i neka je $\lambda < \kappa$.

a) Ako teorija T dopušta (κ, λ), onda za svaki par (α, β) takav da $\lambda \leq \beta \leq \alpha \leq 2^\kappa$, T dopušta (α, β).

b) Ako nad κ^+ postoji uniformni κ kompletni ultrafilter, onda svaka teorija, koja dopušta (κ, λ), dopušta i par $(2^{\kappa^+}, \lambda)$.

Dokaz.

a) Prema stavu 4.5. T dopušta par $(|\prod_D \kappa|, |\prod_D \lambda|)$. Iz stava 4.20. je

$$|\prod_D \lambda| = \lambda,$$

iz stava 4.8. je

$$|\prod_D \kappa| = 2^\kappa$$

pa tvrdjenje sledi iz stava 4.9.

b) Neka je D^+ uniformni κ-kompletni ultrafilter nad κ^+. Prema a) T dopušta par $(2^\kappa, \lambda)$. Prema stavu 4.5. T dopušta

$$(|\prod_{D^+} 2^\kappa|, |\prod_{D^+} \lambda|).$$

Biće, slično kao u stavu 4.20 a),

$$|\prod_{D^+} \lambda| = \lambda.$$

D^+ je uniforman, zato (κ^+, κ^+)-regularan, pa će prema stavu 4.8. biti

$$|\prod_{D^+} \kappa^{+^{\kappa^+}}| = |\prod_{D^+} (\kappa^+)^\kappa| = 2^{\kappa^+}.$$

Medjutim,

$$(\kappa^+)^\kappa = 2^\kappa,$$

što povlači da je

$$|\prod_{D^+} 2^\kappa| = 2^{\kappa^+}.$$

Time je stav dokazan.

Stav 4.5. omogućuje da se sagleda na koji način se ultraproizvodi mogu koristiti u dvo-kardinalnim problemima. Poznati Keislerov rezultat da, ako T dopušta (α, β), onda T dopušta i $(\alpha^\gamma, \beta^\gamma)$, dobijen primenom regularnih ultrastepena ima ograničenu selektivnost, jer za $\gamma \geqslant \alpha$ $(\alpha^\gamma, \beta^\gamma)$ postaje $(2^\gamma, 2^\gamma)$, a to je samo specijalan slučaj rezultata dobivenog i bez ultrastepena (stav 1.2.b).

Ovo naročito dolazi do izražaja kada je razmak izmedju α i β mali. Ako se u takvom slučaju išta može dobiti, onda to mora biti tako da se jedan kardinal "drži", a drugi da se udaljuje. Budući da se ultraproizvodima mogu konstruisati modeli samo prema gore, onda je prirodno da se ovde β "drži" fiksiran ili bar da se zadrži ili poveća razmak izmedju α i β. U okolini merljivih kardinala to se može postići. Da bi to bilo izvodljivo i ispod njih, s obzirom na stav 4.8., potreban je neregularni filter. Uz $V=L$ Prikry i Jensen (1970-71) dobili su rezultat da je za $n<\omega$ svaki uniformni ultrafilter nad ω_n regularan. Slično tvrdjenje za kardinale $\geqslant \omega_\omega$ nije poznato. Magidor je (1977) iz egzistencije ogromnih (Huge) kardinala dobio sledeći rezultat.

Stav 4.24.

Ako postoji ogroman (Huge) kardinal, onda

a) nad ω_2 postoji uniformni ultrafilter D takav da

$$\left|\prod_D \omega\right| \leq \omega_2 .$$

b) nad ω_3 postoji uniforman ultrafilter D koji nije (ω_1,ω_3) -regularan i važi

$$\left|\prod_D \omega_1\right| \leqslant \omega_3 .$$

Dokaz ovih tvrdjenja je opšte prirode pa slično važi i za veće kardinale. Korišćenjem ovog rezultata dobijamo:

Stav 4.25.

Neka postoji ogroman kardinal.

a) Ako je $\omega_2 = 2^{\omega_1}$ i ako teorija $\top$ dopušta par (ω_2, ω) , onda $\top$ dopušta i $(2^{\omega_2}, \omega_2)$.

b) Ako je $\omega_3 = 2^{\omega_2}$ i ako $\top$ dopušta (ω_3, ω_1), onda $\top$ dopušta i par $(2^{\omega_3}, \omega_3)$.

Dokaz.

a) D je (ω_2, ω_2) regularan zbog uniformnosti. Iz $2^{\omega_1} = \omega_2$ sledi $\omega_2^{\omega_2} = \omega_2$, pa primenom stava 4.24. i stava 4.5. dobijamo a).

b) Slično kao a).

Ujednačavanjem nekih elemenata na odredjeni način (u odnosu na relaciju ekvivalencije $=_D$) $\prod_D A_i$ se dobija iz Dekartovog proizvoda $\prod_{i \in I} A_i$ gde je $I = \cup D$. Razmatrajući pitanje kardinalnosti $\prod_D A_i$ interesuje nas da li se neka svojstva $|\prod_{i \in I} A_i|$ zadržavaju i nakon ujednačavanja. Posebno važna osobina Dekartovog proizvoda je invarijantnost $|\prod_{i \in I} A_i|$ u odnosu na permutacije indeksa. Ako je $f: I \xrightarrow[na]{1-1} I$ onda $|\prod_{i \in I} A_{f(i)}|$ ni po čemu ne razlikujemo od $\prod_{i \in I} A_i$.

U predhodnom razmatranju kardinalnosti uočeno je da najviše stvari zavisi od pitanja za koje (α, β) je dati filter regularan. Za dati filter D definišemo

$$\rho D = \{ (\alpha, \beta) : D \text{ je } (\alpha, \beta) \text{ regularan} \}.$$

Možemo se sada pitati:

(A) Da li $(*)$ $\rho D = \rho E$ povlači da je

$$|\prod_D \alpha_i| = |\prod_E \alpha_i| \ ?$$

Stav 4.26

Neka su D i E κ-kompletni ultrafiltri nad κ i neka je $D \neq E$. Tada gornja implikacija ne važi.

Dokaz.

Neka je $d \in D \setminus E$; biće

$$e = \kappa \setminus d \in E \setminus D.$$

Za filtere D i E važi uslov (*) jer

$$\rho D = \{(\kappa,\kappa)\} = \rho E$$

Neka su α_i, $i \in \kappa$ kardinali takvi da je

$$\alpha_i = \omega_i \ , i \in d$$

$$\alpha_i = \beta < \kappa \ , i \in e.$$

Biće za sve $\alpha < \kappa$

$$\text{ess.sup}_D \alpha_i > \alpha \text{ , pa zato i}$$

$$\text{ess.sup}_D \alpha_i = \kappa.$$

S druge strane

$$\text{ess.sup}_E \alpha_i = \beta.$$

Prema Stavu 4.18 biće

$$|\prod_D \alpha_i| \geq \kappa,$$

$$|\prod_E \alpha_i| < \kappa.$$

Niz kardinala α_i iz predhodnog dokaza nema isti esencijalni supremum po filterima D i E. Uz uslov prethodnog tvrdjenja može se dodati i uslov da je D normalan. Tada se može konstruisati niz kardinala koji će imati isti esencijalni supremum nad D i E, ali za koji neće važiti implikacija (A). Medjutim, uz ovaj pojačani uslov, ako stavimo još i da je

$$\text{ess.sup}_D \alpha_i < \kappa,$$

sličnim rezonovanjem kao u predhodna dva stava, zaključuje se da implikacija (A) za κ kompletne filtere važi. Na sličan način se konstruiše niz kardinala koji obara (A) ako su D i E regularni filteri. Takodje, uz dodatni uslov da je

$$\text{ess.sup}_D \alpha_i = \text{ess.sup}_E \alpha_i$$

može se, slično kao i za kompletne ultrafiltere, dokazati da (A) važi ako su D i E regularni. Slučaj kada D i E nisu regularni a važi $(\omega, \omega) \in \rho D \cap \rho E$ ne može se u ovom smislu direktno raspraviti jer se raspolaže samo nejednakostima koje zadovoljava

$$|\prod_D \alpha_i|,$$

pa implikacija (A) predstavlja otvoren problem.

REALNA MERA

U ovom delu razmatraju se neka osnovna pitanja vezana za pojam realne mere. Glavna inspiracija je rad Solovaya (163), u kome je dokazana ekvikonsistentnost teorije ZFC + "postoji merljiv kardinal" i teorije ZFC + "postoji proširenje Lebesgueove mere na sve skupove realnih brojeva", odnosno teorije ZFC + "postoji realno merljiv kardinal". Do ovog rezultata pitanje neprotivrečnosti mealno merljivih kardinala bilo je dugo otvoreno. Solovayev rezultat nas je inspirisao da uvedemo velike realno merljive kardinale direktnom analogijom sa ostalim velikim kardinalima čiju relativnu neprotivrečnost dokazujemo uopštenjem Solovayevog forsinga. Prvo izlažemo osnovna svojstva realne mere i uvodimo forsing metod na uobičajen način izbegavajući sve detalje koji se mogu naći na drugim mestima. Redosled i notacija slede kao u Jech (55). Prvo definišemo realnu meru: μ je realna mera nad κ akko

1. $\mu : P(\kappa) \to [0,1]$
2. $\forall \alpha \in \kappa \ \mu(\{\alpha\})=0$
3. $\mu(\kappa)=1$
4. μ je σ aditivna.

Aditivnost realne mere definiše se sa

$$add(\mu) = \min \lambda \ (\exists X \in dom\,\mu)(|X|=\lambda \ \& \ \mu(\cup X)>0 \ \& \ \forall Y \in X \, \mu(Y)=0).$$

Kardinal κ je realno merljiv akko postoji κ aditivna (totalna) mera nad κ.

Stav 51. (Ulam) Neka je μ realna mera. Tada je $add(\mu)$ realno merljiv kardinal.

Dokaz. Neka je $\kappa = \mathrm{add}(\mu)$. Neka je A skup pozitivne μ mere koji je jednak disjunktnoj uniji κ skupova mere 0:

$$A = \bigcup_{\xi \in \kappa} A_\xi .$$

Uočimo projekciju $f: A \to \kappa$ datu sa $f(x) = \xi \iff x \in A_\xi$. Realna mera γ nad κ definiše se sa

$$\gamma(B) = \mu(f^{-1}(B))/\mu(A).$$

γ je κ aditivna mera (nad κ).

Poznati Vitalijev stav isključuje postojanje translatorno invarijantne mere nad kontinuumom koja proširuje Lebesgueovu meru (u ZFC). Postojanje mere koja preširuje Lebesgueovu meru i koja nije translatorno invarijantna delimično rasvetljavaju sledeća dva Ulamova stava.

Stav 52. (Ulam) Ako je κ realno merljiv onda je $\kappa \leq 2^\omega$ ili je κ merljiv.

Dokaz. Predpostavimo da κ nije merljiv, preciznije da je κ manji od prvog merljivog kardinala ukoliko takav postoji, odnosno bilo kakav ako ne postoji merljiv kardinal. Neka je μ mera nad κ. Konstruiše se drvo podskupova od κ. Na nultom nivou je κ. Za svaki X iz drveta važi da je pozitivne mere μ i da se može rastaviti na uniju dva disjunktna podskupa pozitivne mere koji su naslednici od X u drvetu. Ako je α granični ordinal α- ti nivo drveta sastoji se od svih preseka $X = \bigcap_{\xi<\alpha} X_\xi$ takvih da je svaki X_ξ na ξ-tom nivou i da X ima pozitivnu meru. Obeležimo ovo drvo sa T. Svaka grana u T ima prebrojivu dužinu: ako je $\{X_\xi : \xi < \alpha\}$ grana onda skup $\{X_\xi - X_{\xi+1} \mid \xi < \alpha\}$ se sastoji od disjunktnih skupova pozitivne mere. Sledi da je visina T najviše ω_1. Slično svaki nivo T je najviše prebrojiv, pa T ima najviše 2^ω grana. Sledi da grana sa nepraznim presekom ima $\leq 2^\omega$, odakle sledi da je κ unija od najviše 2^{ω} skupova mere 0. Sledi da je $\kappa \leq 2^{\omega}$.

Stav 53.(Ulam) Ako je κ realno merljiv sa realnom merom μ i $\kappa \leq 2^{\omega}$ onda postoji proširenje ν Lebesgueove mere na ceo $P(2^{\omega})$.

Dokaz. Za svaki konačan niz 0 i 1 konstruiše se skup $X_s \subseteq \kappa$ tako da važi: $X_\emptyset = \kappa$ i za svaki niz 0-1 s, $X_{s0} \cup X_{s1} = X_s$, $X_{s0} \cap X_{s1} = \emptyset$,

$$\mu(X_{s0}) = \mu(X_{s1}) = \frac{1}{2}\mu(X_s).$$

Definiše se mera ν_1 nad ${}^{\omega}2$:

$$\nu_1(Z) = \mu(\bigcup\{X_f : f \in Z\})$$

gde $X_f = \bigcap_{n \in \omega} X_{f|n}$ za sve $f \in {}^{\omega}2$. Koristeći funkciju $F: {}^{\omega}2 \to [0,1]$ datu sa

$$F(f) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(n)}{2^{n+1}},$$

dobija se mera ν nad $[0,1]$. Ova mera se poklapa sa Lebesgueovom na svim intervalima $[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}]$ pa zato i na svim Borelovim skupovima. Svaki skup koji ima Lebesgueovu meru 0 uključen je u Borelov skup mere 0 pa otuda ima i ν- meru 0. Svaki Lebesgue merljiv skup X se može rastaviti $X = (B - N_1) \cup N_2$ gde N_1 i N_2 imaju Lebesgue meru 0 pa je Lebesgueova mera X jednaka $\nu(X)$. Sledi da se mera ν i Lebesgueova mera slažu na svim Lebesgue merljivim skupovima.

Forsing.

Neka je $\mathcal{L} = \{\in, =\}$. Ako je A klasa onda $\mathcal{L}_A = \mathcal{L} \cup \{\underline{a} \mid a \in A\}$ ($\underline{a}$ su konstante-imena za elemente od A). Neka je B kompletna Bulova algebra. B- vrednosna predstruktura za $\mathcal{L}$ je sistem $\mathfrak{A} = \langle A, E, I \rangle$ gde su $E, I: A \times A \to B$. Analogno relaciji zadovoljenja definiše se B-zadovoljenje:

$$\|\underline{a} = \underline{b}\|_{\mathfrak{A}} = I(a,b)$$

$$\|\underline{a} \in \underline{b}\|_{\mathfrak{A}} = E(a,b)$$

$$\|\neg \varphi\|_{\mathfrak{A}} = \overline{\|\varphi\|_{\mathfrak{A}}}$$

$$\|\varphi_1 \vee \varphi_2\|_{\mathfrak{A}} = \|\varphi_1\|_{\mathfrak{A}} \vee \|\varphi_2\|_{\mathfrak{A}}$$

$$\|\exists x_i\, \varphi\|_{\mathfrak{A}} = \sum_{a \in A} \|\varphi(\tfrac{x_i}{a_i})\|_{\mathfrak{A}}.$$

Rutinski se proverava

Stav 54. Ako je σ ma koja teorema predikatskog računa bez jednakosti u $\mathcal{L}$ onda je $\|\sigma\|_{\mathfrak{A}}=1$. $\| \ \|_{\mathfrak{A}}$ je zatvorena za modus ponens.

$\mathcal{B}$-vrednosna predstruktura $\mathfrak{A}$ je $\mathcal{B}$-vrednosna struktura akko za svaki jednakosni aksiom φ važi $\|\varphi\|_{\mathfrak{A}}=1$. Slično kao napred proverava se da ako je $\mathfrak{A}$ $\mathcal{B}$-vrednosna struktura i σ rečenica -teorem predikatskog računa u jeziku $\mathcal{L}$ onda je $\|\varphi\|_{\mathfrak{A}}=1$.

$\mathfrak{A}$ je normalna struktura akko iz $I(a,b)=1$ sledi $a=b$. Svaka $\mathcal{B}$-struktura se može normalizovati identifikovanjem I-jednakih elemenata.

Definišemo V^B analogno V :

$V_0^B = \phi$,

$V_{\alpha+1}^B = \{x \mid x$ je B-vrednosni podskup od $V_\alpha^B\} = \{x \mid x : V_\alpha^B \xrightarrow[P]{} B\}$

$V_\alpha^B = \bigcup_{\beta<\alpha} V_\beta^B$ ako je α graničan.

I $V^B = \bigcup_{\alpha \in Ord} V_\alpha^B$.

Neka je $\mathfrak{M} \models$ ZFC + "B je kompletna Bulova algebra". Definiše se $\mathfrak{M}^B = (V^B)^{\mathfrak{M}}$ (analogno $\mathfrak{M} = (V)^{\mathfrak{M}}$). Slično, za svaki ordinal $\alpha \in \mathfrak{M}$ $\mathfrak{M}_\alpha^B = (V_\alpha^B)^{\mathfrak{M}}$. Očigledno je $\mathfrak{M}^B = \bigcup_{\alpha \in \gamma} \mathfrak{M}_\alpha^B$ gde je $\gamma = \mathfrak{M} \cap Ord$ (ako je $\mathfrak{M}$ klasa umesto γ stoji Ord). Uvek važi $\mathfrak{M}^B \subseteq \mathfrak{M}$. Za sve aksiome φ ZFC važi $\|\varphi\|_{V^B}=1$. Indukcijom po složenosti formule φ proverava se da važi $\|\varphi(\bar{a})\|_{\mathfrak{M}^B} = (\|\varphi(\bar{a})\|_{V^B})^{\mathfrak{M}}$.

Sledi da ako je $\mathfrak{M} \models ZFC$ onda za svaku aksiomu φ ZFC $\|\varphi\|_{\mathfrak{M}^B}=1$.

Homomorfizam $h : B \to 2$ naziva se M-kompletan akko h je homomorfizam i ako važi

$$(\forall x \subseteq B)(x \in M \Rightarrow h(\Sigma_B x) = \Sigma_2 \{h(y) \mid y \in x\}).$$

Neka je G filter u B, G je M-kompletan akko

$$(\forall x \subseteq G)(x \in M \Rightarrow \prod_B x \in G).$$

Korespondencija M-kompletnih ultrafiltera i homomorfizama:

$h : B \to 2$ je M-kompletan homomorfizam akko $\{b \in B \mid h(b) = 1\}$ je M-kompletan ultrafilter u B. Obrnuto, $G \subseteq B$ je M-kompletan ultrafilter u B akko $h : B \to 2$ dato sa $h(b) = 1 \overset{df}{\Leftrightarrow} b \in G$ je M-kompletan homomorfizam.

Neka je $h : B_1 \to B_2$, B_2 kompletna Bulova algebra, $\mathfrak{A} = \langle A, E, I \rangle$. Neka je $\mathrm{codom}(E) \cup \mathrm{codom}(I) \subseteq B_1$ i neka je B_1 gusta u B_1', gde je B_1' kompletna. Neka je $\mathfrak{A}$ B_1'-vrednosna struktura. Definišimo $h(\mathfrak{A}) = \langle A, E', I' \rangle$:

$$E'(a_1, a_2) = h(E(a_1, a_2)),$$
$$I'(a_1, a_2) = h(I(a_1, a_2)).$$

Lako se proverava da je $h(\mathfrak{A})$ B_2vrednosna struktura. Indukcijom po φ dokazuje se da važi:

za M, B kao do sada ($M \models B$ je kompletna). Ako je $h : B \to 2$ homomorfizam, onda za svaku formulu φ i sve $\vec{a} \in \mathfrak{M}^B$

$$\|\varphi(\vec{a})\|_{h(\mathfrak{M}^B)} = h(\|\varphi(\vec{a})\|_{\mathfrak{M}^B}).$$

Za $x \in \mathfrak{M}$ definiše se $\check{x} \in \mathfrak{M}^B$ indukcijom:

$$\check{\emptyset} = \emptyset$$

za sve $x \in \mathfrak{M}$, $\check{x} \in \mathfrak{M}^B$ je funkcija data sa $\mathrm{dom}(\check{x}) = \{\check{y} \mid y \in x\}$ i za sve $y \in x$, $\check{x}(\check{y}) = 1$.

Strukturi $\mathfrak{A} = \langle A, E, I \rangle$ pridružimo model $\mathfrak{A}^* = \langle A^*, E^* \rangle$ gde je

$$A^* = A/\sim \;;\quad a_1 \sim a_2 \Leftrightarrow I(a_1, a_2) = 1 \;;\quad a^* = a/\sim .$$
$$a_1^* E^* a_2^* \Leftrightarrow E(a_1, a_2) = 1 .$$

Lako se proverava da je $\mathfrak{A}^* \models \varphi(\vec{a}^*)$ akko $\|\varphi(\vec{a})\|_{\mathfrak{A}} = 1$.

Stav 55. Neka je $\mathfrak{M} \models$ ZFC + "Bje kompletna Bulova algebra", $\mathfrak{M}$ tranzitivan, $h : B \to 2$, $\mathfrak{M}$-kompletan homomorfizam. Tada je $h(\mathfrak{M}^B)^*$ dobro zasnovan model od ZFC. Neka je k izomorfizam $h(\mathfrak{M}^B)^*$ i tranzitivnog modela $\langle N,\in\rangle$. Neka je $f=k\circ {}^*\circ h$. Važi $\forall x\in\mathfrak{M}\,(f(\check{x})=x)$, $Ord\cap M=Ord\cap N$ i N je najmanji tranzitivan model koji sadrži M i kome pripada h.

Model N još se označava sa $M[h]$ odnosno $M[G]$, gde je G $\mathfrak{M}$-kompletan ultrafilter pridružen homomorfizmu h. Iz prethodnog, jasno je da važi

$$\mathfrak{M}[h]\models\varphi(f\underline{a})\quad \text{akko}\quad h(\|\varphi(\underline{a})\|_{\mathfrak{M}^B})=1.$$

Stav 56. Ako B ima κ.c.c. onda svi kardinali iz $\mathfrak{M}$, $\geq\kappa$, ostaju kardinali i u $\mathfrak{M}[h]$. ----

Stav 57. Neka je $\mathfrak{M}\models$ ZF + "B je kompletna Bulova algebra", tranzitivan, prebrojiv ineka je $b\in B$, $b\neq 0$ onda postoji $\mathfrak{M}$-kompletni homomorfizam $h: B\to 2$ takav da $h(b)=1$.

Stav 58.Neka su $\mathfrak{M}$ i B kao u prethodnom stavu. Tada važi

$$\mathfrak{M}\models|{}^{\kappa}B|=\lambda\quad\text{onda}\quad\mathfrak{M}[h]\models 2^{\kappa}\leq\lambda$$

tj λ je gornja granica za 2^{κ} u $\mathfrak{M}[h]$.

Dokaz. Svaki podskup $A\subseteq\kappa$ u $\mathfrak{M}[h]$ ima ime $\underline{A}\in\mathfrak{M}^B$, svaki takav $\underline{A}$ određuje funkciju $\alpha\mapsto\|\check{\alpha}\in\underline{A}\|$ iz ${}^{\kappa}B$. Različitim podskupovima odgovaraju različite funkcije, pa zato broj podskupova od κ u $\mathfrak{M}[h]$ nije veći od $(|{}^{\kappa}B|)^{\mathfrak{M}}=\lambda$.

Forsing Solovaya.

Polazeći od modela u kome postoji merljiv kardinal, Solovay pravi Bulovu algebru (algebra proizvoda mera) nad skupom moći veće ili jednake merljivom kardinalu koja služi za dobijanje generičkog modela u kome postoji realno merljiv kardinal. Opisujemo prvo tu konstrukciju.

Neka je F kompletno polje skupova i neka je μ mera na F, sa idealom skupova mere 0, I. Posmatra se Bulova algebra B = F/I. B je kompletna Bulova algebra. Mera μ inducira funkciju m na B $m[x]=\mu(x)$, $[x]$ je klasa ekvivalencije skupa x u B. Da $m[x]$ ne zavisi od izbora X kao i da ima sledeća svojstva, lako se proverava,

1. m je realna na B
2. $m(0)=0$, $m(1)=1$, $a\neq 0 \Rightarrow m(a)>0$
3. $a\leq b \Rightarrow m(a)\leq m(b)$
4. σ aditivnost: ako su a_n, $n\in\omega$ disjunktni onda

$$m\left(\sum_{n\in\omega} a_n\right)=\sum_{n\in\omega} m(a_n).$$

Bulova algebra B sa merom m naziva se algebra mere. Upotrebljava se sledeći jednostavan slučaj proizvoda prostora sa merom. Neka je I beskonačan skup. Za svaki $i\in$ I posmatrajmo binarni prostor

$$S_i=\{\emptyset,1\},\quad F_i=P(S_i),$$
$$\mu_i(\{\emptyset\})=\mu_i(\{1\})=\tfrac{1}{2},\ \mu(\emptyset)=0,\ \mu(\{\emptyset,1\})=1.$$

Neka je $S=\prod_{i\in I} S_i$ i neka je μ mera proizvoda na $\mathcal{F}$, najmanjem σ kompletnom polju podskupova od S koje sadrži skupove

$\{t\in {}^{I}\{\emptyset,1\} \mid t(i)=\emptyset\}$ za sve $i\in I$.

Neka je $\mathfrak{M}$ tranzitivan model za ZFC i neka je λ beskonačan kardinal u $\mathfrak{M}$ za koji $\lambda^\omega=\lambda$. Neka je $(S,\mathcal{F},\mu)$ proizvodni prostor sa merom ${}^{I}\{\emptyset,1\}$ napred definisan i za koji $I=\lambda\times\omega$. Neka je B = F / ideal mere 0. Neka je h jedan $\mathfrak{M}$-kompletan homomorfizam Bulove algebre B u 2. B ima c.c.c. pa zato $\mathfrak{M}[h]$ čuva kardinale tj svi kardinali iz $\mathfrak{M}$ su kardinali i u $\mathfrak{M}[h]$(poznata osobina generičkih proširenja). Solovay je dokazao da je u $\mathfrak{M}[h]$, $2^\omega=\lambda$. Prvo sledi da je $|\mathcal{F}|=\lambda$ (zbog $\lambda^\omega=\lambda$) i da je $|B|=\lambda$ (B ima c.c.c.). Iz Stava 58 sledi

$$(2^\omega)^{\mathfrak{M}[h]}\leq(|B|^\omega)^{\mathfrak{M}}=\lambda.$$

Sada će se pokazati da u $\mathfrak{M}[h]$, ω ima λ podskupova. Za sve $\alpha<\lambda$ i sve $n<\omega$ neka je $u_{\alpha,n}=[U_{\alpha,n}]$ gde je $U_{\alpha,n}\in F$ takav da

$$U_{\alpha,n}=\{t\in {}^{\lambda\times\omega}\{0,1\} \mid t(\alpha,n)=1\}.$$

Za sve $\alpha<\lambda$ neka je x_α B-vrednosni podskup od ω (ime) takav da

$$\|\check{n}\in \underline{x}_\alpha\| = u_{\alpha n} \qquad n\in\omega.$$

Neka je $x_\alpha = f(\underline{x}_\alpha)$ tj slika od $\underline{x}_\alpha$ u $\mathfrak{M}[h]$. Dokažaćemo da je $\|\underline{x}_\alpha=\underline{x}_\beta\|=0$ odakle sledi da je $x_\alpha\neq x_\beta$ (u $\mathfrak{M}[h]$) čim je $\alpha\neq\beta$. Neka je $k\in\omega$. Onda

$$\|\underline{x}_\alpha\cap\check{k}=x_\beta\cap\check{k}\| = [N_{\alpha,\beta,k}]$$

gde je
$$N_{\alpha,\beta,k} = \{t \mid t(\alpha,n)=t(\beta,n)\,,\ n<k\}.$$

Proverava se da za sve k, $\mu(N_{\alpha\beta k})=\frac{1}{2^k}$. Međutim

$$\|x_\alpha = x_\beta\| = \prod_{k\in\omega}[N_{\alpha,\beta,k}] = [\bigcap_{k<\omega} N_{\alpha,\beta,k}] = 0$$

jer $\mu(\bigcap_{k\in\omega} N_{\alpha\beta k})=0$ ———

Sledeća teorema rešava pitanje egzistencije realne mere u generičkom proširenju.

Stav 59 (Solovay). Neka je κ merljiv u polaznom modelu $\mathfrak{M}$, neka je B (u $\mathfrak{M}$) algebra mere i neka je h jedan $\mathfrak{M}$-kompletan homomorfizam B u 2. Onda u $\mathfrak{M}[h]$ postoji κ aditivna mera nad κ.

Dokaz. Neka je U κ-kompletan ultrafilter nad κ (neglavni). B je kompletna i neka je m mera na B. Definisaćemo B vrednosno ime $\underline{\mu}$ i pokazati da je slika od $\underline{\mu}$ u $\mathfrak{M}[h]$ κaditivna mera nad κ, za svaki $\mathfrak{M}$-kompletni homomorfizam h Bulove algebre B u 2.

Neka je $a\in B$, $a\neq 0$ i neka je $\underline{A}\in\mathfrak{M}^B$ B vrednosno ime za koje $a\Vdash \underline{A}\subseteq\check{\kappa}$. Za sve $\alpha<\kappa$ definišimo

$$1. \qquad f_a(\underline{A},\alpha) = \frac{m(a\cdot\|\check{\alpha}\in\underline{A}\|)}{m(a)}\,,$$

Pošto je U κ-kompletan, postoji realan broj r takav da $f_a(\underline{A},\alpha)=r$ za skoro sve α (po modulu U). Neka je

$\mu_a(\underline{A}) = r\,(f_a(\underline{A},\alpha)=r$ skoro svuda modulu U).

Uočimo da iz $a \Vdash \underline{A} = \underline{A}'$ sledi $\mu_a(\underline{A}) = \mu_a(\underline{A}')$. Takođe $a \Vdash \underline{A}_1 \subseteq \underline{A}_2$ povlači $\mu_a(\underline{A}_1) \leq \mu_a(\underline{A}_2)$. Ako je $X \subseteq k$ u $\mathfrak{M}$ onda $f_a(\check{X}, \alpha) = 1$ za sve $\alpha \in X$ i $f_a(\check{X}, \alpha) = 0$ za sve $\alpha \notin X$. Odavde imamo

$$X \in \mathcal{U} \Rightarrow \mu_a(\check{X}) = 1, \quad X \notin \mathcal{U} \Rightarrow \mu_a(\check{X}) = 0.$$

Neka je $\gamma < k$ i neka su $\underline{A}_\xi$, $\xi < \gamma$ takvi da $a \Vdash \underline{A}_\xi \subseteq \check{k}$ za sve $\xi < \gamma$ i da iz $\xi \neq \eta$ sledi $a \Vdash \underline{A}_\xi \cap \underline{A}_\eta = \emptyset$. Neka je $\underline{A}$ takav da $a \Vdash \underline{A} = \bigcup_{\xi<\gamma} \underline{A}_\xi$. Onda za sve $\alpha < k$

$$f_a(\underline{A}, \alpha) = \sum_{\xi<\gamma} f_a(\underline{A}_\xi, \alpha).$$

Odavda sledi $\mu_a(\underline{A}) = \sum_{\xi<\gamma} \mu_a(A_\xi)$. **2.**

Neka je τ realan broj iz $[0,1]$ i neka je $a_n, n \in \omega$ particija $a \in$ B. Ako je za sve n, $\mu_{a_n}(\underline{A}) < \tau$ onda za skoro sve α, $m(a_n \cdot \| \check{\alpha} \in \underline{A} \|) < \tau \cdot m(a_n)$ odakle sledi da za skoro sve α, $m(a \cdot \| \check{\alpha} \in \underline{A} \|) < \tau \cdot m(a)$ pa zato je $\mu_a(\underline{A}) < \tau$.

Posledica prethodnog

3. Ako za svaki $b \leq a$ različit od 0 postoji $c \leq b$, veći od 0 i takav da $\mu_c(\underline{A}) < \tau$ onda $\mu_a(\underline{A}) < \tau$.

(analogno važi ako se mesto $<$ stavi $\leq$, $>$ ili $\geq$).

Ako $b \Vdash \underline{A} \subseteq \check{k}$, definišemo

$$\mu_b^*(\underline{A}) = \inf_{a \leq b} \mu_a(\underline{A}). \tag{4.}$$

Iz $b \Vdash \underline{A}_1 \subseteq \underline{A}_2$ sledi $\mu_b^*(\underline{A}_1) \leq \mu_b^*(\underline{A}_2)$. Za $X \in \mathfrak{M}$, $X \in \mathcal{U} \Rightarrow \mu_b^*(\check{X}) = 1$ i $X \notin \mathcal{U} \Rightarrow \mu_b^*(\check{X}) = 0$. Međutim μ_b^* nije aditivna i imamo samo (iz **2.**) da za sve $\gamma < k$

$$\mu_b^*(\underline{A}) \geq \sum_{\xi<\gamma} \mu_b^*(\underline{A}_\xi) \tag{5.}$$

pod uslovom da $\xi \neq \eta$ povlači $b \Vdash \underline{A}_\xi \cap \underline{A}_\eta = \emptyset$ i da važi

$$b \Vdash \underline{A} = \bigcup_{\xi<\gamma} \underline{A}_\xi ;$$

primetimo da iz $b_1 \leq b_2$ sledi $\mu_{b_1}(\underline{A}) \geq \mu_{b_2}(\underline{A})$.

Definišimo $\underline{\mu}$. Neka je h $\mathfrak{M}$-kompletan homomorfizam B u 2 i neka je G njemu pridružen generički ($\mathfrak{M}$-kompletni) ultrafilter.

U $\mathfrak{M}[h]$ ($=\mathfrak{M}[G]$) definiše se $\mu : P(k) \to [0,1]$ sa

6. $$\mu(A) = \sup_{\sigma \in G} \mu_\sigma^*(\underset{\sim}{A})$$

gde je $\underset{\sim}{A}$ ime za A . Neka je $\underset{\sim}{\mu}$ (kanonsko) ime za μ . Jasno je da μ ne zavisi od imena $\underset{\sim}{A}$ od A ; da iz $A_1 \subseteq A_2$ sledi $\mu(A_1) \leq \mu(A_2)$ i da za $X \in \mathfrak{M}$ iz $x \in U$ sledi $\mu(x) = 1$, takođe $x \notin U$ povlači $\mu(x) = 0$. Preostaje da se dokaže daje μ k-aditivna.

Neka je $r \in [0,1]^{\mathfrak{M}}$. Dokazujemo

7. $$\mu_\sigma^*(\underset{\sim}{A}) \geq r \quad \text{akko} \quad \sigma \Vdash \underset{\sim}{\mu}(\underset{\sim}{A}) \geq \check{r}.$$

Ako je $\mu_\sigma^*(\underset{\sim}{A}) \geq r$ onda za svaki generički G kome pripada σ, $\mu(A) \geq r$ odakle sledi $\sigma \Vdash \underset{\sim}{\mu}(\underset{\sim}{A}) \geq \check{r}$. Obrnuto. Neka je $\sigma \Vdash \underset{\sim}{\mu}(\underset{\sim}{A}) \geq \check{r}$. Onda

$$\sigma \Vdash \forall q < \check{r}\ \exists d \in G\ \mu_d^*(\underset{\sim}{A}) \geq q$$

odnosno, 8. $$\forall q < r\ \forall c \leq \sigma\ \exists d \leq c\ \mu_d^*(\underset{\sim}{A}) \geq q \quad .$$

Neka je $q < r$. Dokažimo da je $\mu_\sigma^*(\underset{\sim}{A}) \geq q$. Ako je $a \leq \sigma$ onda $\forall c \leq a \exists d \leq c$ tako da $\mu_d^*(\underset{\sim}{A}) \geq q$ i zato $\mu_a(\underset{\sim}{A}) \geq q$. Dakle $\mu_\sigma^*(\underset{\sim}{A}) \geq q$. Pošto isto važi za svaki $q \leq r$, imamo $\mu_\sigma^*(A) \geq r$.

Dokazuje se da je μ konačno aditivna. Neka su $\underset{\sim}{A}, \underset{\sim}{A}_1, \underset{\sim}{A}_2$ takvi da svaki uslov forsira da je $\underset{\sim}{A}$ disjunktna unija A_1 i A_2 . Ako su r_1 i r_2 realni brojevi i ako $\sigma \Vdash (\underset{\sim}{\mu}(\underset{\sim}{A}_1) \geq \check{r}_1$ i $\underset{\sim}{\mu}(\underset{\sim}{A}_2) \geq \check{r}_2$) onda po 5. i 7. sledi $\sigma \Vdash \underset{\sim}{\mu}(\underset{\sim}{A}) \geq \check{r}_1 + \check{r}_2$; odavde je $\mu(A) \geq \mu(A_1) + \mu(A_2)$

Dalje pretpostavimo da je $\mu(A) > \mu(A_1) + \mu(A_2)$. Onda postoje realni brojevi r_1 i r_2 iz $\mathfrak{M}$ i $\sigma \in G$ takvi da

$$\sigma \Vdash \underset{\sim}{\mu}(\underset{\sim}{A}_1) < \check{r}_1, \underset{\sim}{\mu}(\underset{\sim}{A}_2) < \check{r}_2 \ ; \ \underset{\sim}{\mu}(\underset{\sim}{A}) \geq \check{r}_1 + \check{r}_2$$

Pošto $\sigma \Vdash \underset{\sim}{\mu}(\underset{\sim}{A}_1) < \check{r}_1$, onda postoji za svaki $c \leq \sigma$ neki $d \leq c$ tako da $\mu_d(\underset{\sim}{A}_1) < r_1$; odavde, po 3. , $\mu_\sigma(\underset{\sim}{A}_1) < r_1$. Slično $\mu_\sigma(\underset{\sim}{A}_2) < r_2$ odakle $\mu_\sigma^*(\underset{\sim}{A}) \leq \mu_\sigma(\underset{\sim}{A}) < r_1 + r_2$. Kontradikcija.

Pošto je μ konačno aditivna dovoljno je pokazati da za svaku familiju $\{A_\xi \mid \xi < \gamma\}$ od manje od k podskupova od k važi

$$\mu\left(\bigcup_{\xi<\gamma} A_\xi\right) \leq \sum_{\xi<\gamma} \mu(A_\xi).$$

Neka je $\xi < \gamma$ i neka su $\underline{A}_\xi, \xi < \gamma$ i $\underline{A}$ takvi da $\| \underline{A} = \bigcup_{\xi<\gamma} \underline{A}_\xi \| = 1$ i pretpostavimo da je $\mu(A) > \sum_{\xi<\gamma} \mu(A_\xi)$. Onda postoji $\check{r} \in \mathfrak{M}$ i $b \in G$ tako da važi

$$b \Vdash \sum_{\xi<\gamma} \underline{\mu}(\underline{A}_\xi) < \check{r}, \underline{\mu}(\underline{A}) > \check{r}.$$

Neka je $E \subseteq \gamma$ proizvoljan konačan skup, neka je $A_E = \bigcup_{\xi \in E} A_\xi$. Pošto je $\| \underline{\mu}(\underline{A}_E) \leq \sum_{\xi \in E} \underline{\mu}(\underline{A}_\xi) \| = 1$, imamo $b \Vdash \underline{\mu}(\underline{A}_E) < \check{r}$. Prema $3.$, sledi $\mu_b(\underline{A}_E) < r$.

Pošto $\mu_b(\underline{A}_E) < r$ za svaki konačan $E \subseteq \gamma$, sledi iz $2.$ da je $\mu_b(\underline{A}) \leq r$. Odavde $\mu_b^*(\underline{A}) \leq r$. Kontradikcija.

Birajući $\lambda \geq \kappa, \lambda^\omega = \lambda$, od modela u kome je κ merljiv dobija se Solovayevim forsingom generički model za ZFC u kome je $2^\omega = \lambda$ i u kome prema prethodnom stavu postoji realna mera nad κ , pa je tu κ realno merljiv (u užem smislu) prema Ulamovoj teoremi. Koristeći Ulamov stav o proširenju Lebesgueove mere pod pretpostavkom egzistencije realno merljivog kardinala, sledi da u istom generičkom modelu postoji proširenje Lebesgueove mere na sve skupove realnih brojeva. Time je jedna strana ekvikonsistencije merljivih i realno merljivih kardinala dokazana. Druga implikacija se dokazuje korišćenjem relativne konstruktibilnosti:

1 neka je A skup $L_0[A] = \emptyset$.

2 ako je α graničan $L_\alpha[A] = \bigcup_{\beta<\alpha} L_\beta[A]$.

3 $L_{\alpha+1}[A] = \{ x \subseteq L_\alpha[A] \mid x \text{ definabilan} \}$.

4 $L[A] = \bigcup_{\alpha \in Ord} L_\alpha[A]$.

Važi $L[A] \supseteq L$.

Slično kao i za L dokazuje se da je $L[A]$ model za ZFC, kao i da postoji relacija $<_{L[A]}$ koja dobro uređuje model $L[A]$.

Može se dokazati da postoji rečenica θ (dokaziva u ZF) takva da ako je M tranzitivan model za θ i $A\in M$ onda je funkcija $\alpha\mapsto L_\alpha[A]$ apsolutna za M. Rečenica θ važi u svakom $L_\lambda[A]$ ako je λ beskonačan kardinal (A proizvoljan). Sledi da ako je M elementarni podmodel od $\langle L_\lambda[A],\in\rangle$ i $A\in M$ onda je M izomorfan nekom $L_\alpha[\pi[A)]$ gde je π tranzitivan kolaps od M. Takođe ako je M tranzitivan model za θ i A takav da $A\cap M\in M$ onda za svaki $\alpha\in M$

$$L_\alpha[A]=L_\alpha[A\cap M]=(L_\alpha[A\cap M])^M.$$

Stav 511 (Rowbottom) Neka je κ Ramsey kardinal i neka je $\lambda<\kappa$ beskonačan kardinal. Neka je $\mathfrak{A}=\langle A,\ldots\rangle$ model jezika $\mathcal{L}$ takvog da $|\mathcal{L}|\leq\lambda$ i neka $A\supseteq\kappa$. Ako je $P\subseteq A$ takav da $|P|<\kappa$ onda $\mathfrak{A}$ ima elementarni podmodel $\mathfrak{B}=\langle B,\ldots\rangle$ takav da $|P\cap B|\leq\lambda$ i $|B|=\kappa$. Ako je $X\subseteq A$ moći najviše λ onda postoji $\mathfrak{B}$ takav da $X\subseteq\mathfrak{B}$. Ako je κ merljiv kardinal i D normalna mera nad κ onda postoji $\mathfrak{B}$ takav da $B\cap\kappa\in D$.

Stav 512. ako je $V=L[A]$ i $A\subseteq P(\omega_\alpha)$ onda za sve $\beta\geq\alpha$ $2^{\omega_\beta}=\omega_{\beta+1}$.

Sledeći stav rešava pitanje neprotivurečnosti GCH i egzistencije merljivog kardinala.

Stav 513. (Silver) Neka je κ merljiv kardinal sa normalnom merom D. Tada $L[D]\models GCH+ZFC$.

Dokaz. Ako je $\lambda\geq\kappa$ onda $D\subseteq P(\lambda)$ pa prema prethodnom stavu $2^\lambda=\lambda^+$. Znači dovoljno je dokazati da važi $2^\lambda=\lambda^+$ za $\lambda<\kappa$. Neka je $\lambda<\kappa$ i pretpostavimo da je $|P(\lambda)|>\lambda^+$. Onda postoji $x\subseteq\lambda$ koji je λ^+- ti podskup od λ u kanonskom dobrom uređenju od $L[D]$ ($<_{L[D]}$). Neka je α prvi ordinal takav da $x\in L_\alpha[D]$. Pošto dobro uređenje $<_{L[A]}$

ima svojstvo da je svaki $L_\beta[D]$ početni komad u $<_{L[D]}$, svaki podskup od λ koji prethodi x je takođe u $L_\alpha[D]$ odakle sledi

$$|P(\lambda) \cap L_\alpha[D]| \geq \lambda^+.$$

Upotreba Stava 511. Neka je η kardinal za koji $\eta > \alpha$ i takav da $D \in L_\eta[D]$; posmatrajmo model $\mathfrak{A} = \langle A, \in \rangle$, $A = L_\eta[D]$. Imamo $k \subseteq A$ i uočimo skup $P = P(\lambda) \cap A$. Pošto je $2^\lambda < k$ biće i $|P| < k$. Prema Stavu 511. postoji elementarni podmodel $\mathfrak{B} \prec \mathfrak{A}$ takav da $\lambda \cup \{D, x, \alpha\} \subseteq \mathfrak{B}$, $k \cap \mathfrak{B} \in D$ i $|P \cap \mathfrak{B}| \leq \lambda$. Neka je π tranzitivan kolaps B na tranzitivan M; imamo za neki γ

$$M = L_\gamma[\pi(D)].$$

Korišćenjem normalnosti D pokazuje se da $\pi(D) = D \cap M$. Jasno da je $\pi(k) = k$ jer $|k \cap \mathfrak{B}| = k$. π je 1-1 i za sve $\xi < k$, $\pi(\xi) \leq \xi$. Zbog normalnosti D postoji $Z \in D$ Takav da za sve $\xi \in Z$, $\pi(\xi) = \xi$. Znači ako je $Y \in B \cap D$ onda $\pi(Y) \supseteq \pi(Y \cap Z) = Y \cap Z$,pa je zato $\pi(Y)$ u D; slično ako je $Y \in B$ i $\pi(Y) \in D$ onda $Y \in D$. Sledi da je

$$\pi(D) = \pi[D \cap \mathfrak{B}] = D \cap M.$$

Sledi $M = L_\gamma[D]$. Pošto $\lambda \subseteq \mathfrak{B}$, π slika svaki podskup od λ na sebe samog, pa je zato $M \cap P(\lambda) = P(\lambda) \cap \mathfrak{B}$. Posebno, važi $\pi(x) = x$,pa zato $x \in L_\gamma[D]$. Po uslovu minimalnosti α (pretpostavka), imamo $\alpha \leq \gamma$, kontradikcija. Jer imamo

$$|P(\lambda) \cap L_\alpha[D]| \geq \lambda^+ \quad \text{i} \quad |P(\lambda) \cap L_\gamma[D]| \leq \lambda.$$

Ako je k realno merljiv sa idealom mere O, I onda nad k postoji σ-zasićen, k-kompletan, normalan ideal J. Neka je $\bar{J} = J \cap L[J]$ i neka je D njemu dualan filter. Lako se proverava da je u $L[\bar{J}]$ $\bar{J}$ normalan, k-kompletan, σ-zasićen ideal nad k Dokaz da u $L[D]$ (ovo je isto što i $L[\bar{J}]$) važi GCH potpuno je istovetan dokazu prethodnog Silverovog stava, pa sledi da je u $L[\bar{J}]$ κ merljiv kardinal čime je dokazana ekvikonsistencija egzistencije merljivog i realno merljivog kardinala.

U vezi sa merom definišemo još dva korisna pojma:

indeks mere $ind(\mu) = \bigcup dom(\mu)$

i normu mere po analogiji sa filterskom normom

$$\|\mu\| = \min |x| \, (x \in dom(\mu) \,\&\, \mu(x) > 0).$$

Lako se proverava da uvek važi $add(\mu) \leq \|\mu\| \leq |ind(\mu)|$.

Za meru μ kažemo da je uniformna ako je $\|\mu\| = |ind(\mu)|$.

Smatramo da je od interesa da se rasprave mogućnosti odnosa norme i aditivnosti mere.

Stav 514. Ekvikonsistentne su sledeće teorije:

1. ZFC + "postoji realno merljiv kardinal"
2. ZFC + "postoji proširenje Lebesgueove mere ℓ na ceo $P(2^\omega)$ i za svaku meru μ koja širi ℓ na ceo $P(2^\omega)$ postoji $x \subseteq 2^\omega$ takav da $\mu(x) > 0$ i $|x| < 2^\omega$ tj $\|\mu\| < 2^\omega$ "
3. ZFC + "postoji mera $\mu \supseteq \ell$ sa domenom $P(2^\omega)$ i za svaku meru $\nu \supseteq \ell$ sa domenom $P(2^\omega)$ važi $\|\nu\| = 2^\omega$ ".

Dokaz. Pošto u 2. i 3. postoji realno merljiv kardinal dovoljno je pokazati samo drugu stranu. 1. $\Rightarrow$ 3. Prva teorija je ekvikonsistentna sa ZFC + "postoji merljiv kardinal", na čiji model se primeni Solovayev metod birajući $\lambda = \kappa$ (jedini) merljiv kardinal. U generičkom modelu 2^ω je (jedini) realno merljiv kardinal. Zato svaka mera u njemu ima aditivnost 2^ω, pa zato norma svake mere koja širi ℓ mora biti baš 2^ω. 1.$\Rightarrow$2. $L[\bar{J}]$ (uz ista značenja kao i do sada) zadovoljava ZFC + GCH + "postoji merljiv kardinal". Neka je u $L[\bar{J}]$, $\lambda = \omega_{\kappa+\omega_1}$. Primenom Solovayevog forsinga dobija se $2^\omega = \lambda$. Pošto su kardinali i kofinalnosti očuvane, u generičkom modelu je $2^\omega = \omega_{k+\omega_1}$. Ako bi u generičkom modelu postojala uniformna mera nad 2^ω, bila bi sigurno κ aditivna. Neka je $\prec$ dobro uređenje kontinuuma tipa λ. Uočimo neki kofinalan niz (u 2^ω), tipa ω_1, ξ_ν. Neka je $X_{\xi_\nu} = (\xi_\nu, 2^\omega), \nu < \omega_1$. Zbog uniformnosti ove mere, biće mera svakog završnog komada X_{ξ_ν} pozitivna, pa će zbog aditivnosti isto važiti i za presek ove familije koji je prazan. Kontradikcija.

Stav 515.1. Con (ZFC + "postoje dva merljiva kardinala") $\Rightarrow$
Con (ZFC + $\exists \mu_1, \mu_2 \supseteq \ell\ \mathrm{dom}(\mu_1) = \mathrm{dom}(\mu_2)\ \&\ \|\mu_1\| < 2^\omega\ \&\ \|\mu_2\| = 2^\omega$).

2. Ako postoji model N $\models$ ZFC + postoji θ merljivih kardinala, onda postoji model N′ $\models$ ZFC + postoji θ realno merljivih kardinala, za svaki kardinal θ.

3. Con (ZFC + "postoji superkompaktan kardinal") $\Rightarrow$
Con (ZFC + "postoji uniformna mera μ nad 2^ω i postoji skup $X \subseteq 2^\omega$ pozitivne μ mere takav da za svaki $Y \in X$ postoji nad Y uniformna mera koja je $|Y|$-aditivna").

Dokaz. 1. Neka su κ_1 i κ_2 merljivi kardinali u M. Neka je $\kappa_1 < \kappa_2 = \lambda$ $(\kappa_2^\omega = \kappa_2)$. Primenom Solovayevog forsinga, dobija se M$[\dot{h}]$ u kome je $2^\omega = \kappa_2$. U modelu M primenom Stava 59. na κ_1 i κ_2 sledi da su ova dva kardinala realno merljiva sa realnim merama μ_1' i μ_2'. Iz osnovne relacije za aditivnost i normu imamo $\|\mu_1'\| \leq \kappa_1$ $\|\mu_2'\| = 2^\omega$. Primenom Ulamove teoreme od ovih mera dobijaju se Proširenja μ_1 i μ_2 Lebesgueove mere ℓ. Jednostavno se proverava da se kod dobijenih mera i polaznih mera aditivnost i norma poklapaju: $\mathrm{add}(\mu_1') = \mathrm{add}(\mu_1) = \|\mu_1'\| = \|\mu_1\| = \kappa_1$; $\mathrm{add}(\mu_2') = \|\mu_2'\| = \mathrm{add}(\mu_2) = \|\mu_2\| = 2^\omega$.
2. i 3. se dokazuju iteracijom istog metoda. Uočimo da je broj realno merljivih kardinala u modelu M uvek ograničen sa 2^ω,

prema Ulamovoj teoremi. Da bi se dokazalo 3. pretpostavimo da je M model u kome postoji superkompaktan kardinal κ . U tom slučaju postoji mera nad κ koja se koncentriše na kardinale , štaviše merljivi kardinali čine skup mere 1. Neka je $\bar{\mu}$ takva mera i neka je X skup merljivih kardinala manjih od κ , sa pridruženim merama D_λ , $\lambda \in X$. Forsirajući da bude $2^\omega = \kappa$ i primenjujući Stav 59. prvo na meru $\bar{\mu}$ a zatim na mere D_λ dobijaju se realne mere kao u tački 3.

Za sve mere u prethodnim stavovima važi da se aditivnost i norma poklapaju. Sledeći stav rešava pitanje postojanja mere sa normom većom od aditivnosti.

Stav 516. Ako je neprotivurečna teorija ZFC + "postoji κ - kompletan uniforman ultrafilter nad λ " onda je neprotivurečna i teorija ZFC + "postoji realna mera μ takva da $add(\mu) < \|\mu\|$ ".

Dokaz. Neka je M model za prvu teoriju. Može se proveriti da u M postoji (κ,λ) regularan, κ- kompletan ultrafilter nad λ (λ regularan). Primenom Solovayevog forsinga dobija se M[G] u kome je $2^\omega = \lambda$. Koristeći ovaj filter za konstrukciju realne mere nad 2^ω (prema Stavu 59.) dobijamo realnu meru nad 2^ω. Aditivnost dobijene mere je κ . Svi intervali (α, λ) , pošto pripadaju polaznom ultrafilteru imaće meru 1 i u dobijenoj realnoj meri. Svaki skup X (u generičkom modelu) kardinalnosti manje od λ ne može biti kofinalan u λ , pa zato postoji završni komad (γ, λ) disjunktan sa X. Sledi da je nova mera uniformna (sa normom $= 2^\omega$ ili $< 2^\omega$, po želji). Da aditivnost nije veća od $\kappa < \lambda$ sledi iz činjenice da se polazna (κ , λ) regularna familija kroz forsing ne kvari nego ostaje

(κ,λ) regularna pa mera ne može biti više nego κ - aditivna.

Ovaj stav dakle daje i uniformnu meru nad 2^ω aditivnosti manje od 2^ω. Sledeći daje dopunske infoomacije.

Stav 517. 1. Od modela za ZFC + "postoje dva kompaktna kardinala" može se dobiti model za ZFC + "postoje dve uniformne mere nad 2^ω različitih aditivnosti".

2. Ako je neprotivurečna teorija ZFC + "postoji mera koja se koncentriše na kompaktnim kardinalima" onda je neprotivurečna teorija ZFC + "postoji uniformna mera nad 2^ω koja se koncentriše na uniformne mere nad 2^ω, sve različitih aditivnosti".

Dokaz. 1. Neka je M model u kome su κ_1 i κ_2 (jako) kompaktni kardinali. Neka je $\kappa_1 < \kappa_2$ i neka je $\lambda \geq \kappa_2$ takav da je $\lambda^\omega = \lambda$ i da je κ_1,κ_2 λ-kompaktan. Iz pretpostavljenog sledi da nad λ postoje ultrafilteri D_1 i D_2 koji su redom κ_1,κ_2 kompletni i (κ_1,λ) odnosno (κ_2,λ) regularni. Prvo se napravi generički model $M[G]$ upotrebom već standardne Bulove algebre mere u kome je $2^\omega = \lambda$. Zatim se postupa kao u Stavu 516 prvo sa merom D_1 pa onda sa merom D_2. Dobijaju se realne uniformne mere μ_1, μ_2 za koje važi $dom(\mu_1) = dom(\mu_2) = \|\mu_1\| = \|\mu_2\| = 2^\omega$; $add(\mu_1) = \kappa_1 < \kappa_2 = add(\mu_2)$.

2. neka je D mera nad κ (ultrafilter, κ kompletan) koja se koncentriše na kompaktne kardinale. Neka je $X \subseteq \kappa$ skup kompaktnih kardinala manjih od κ. Znači $D(X) = 1$ tj $X \in D$. Za $\xi \in X$ važi $|\xi| = \xi$. Takođe, za svaki $\xi \in X$, zbog kompaktnosti ξ i merljivosti κ sledi da je ξ κ-kompaktan. Odavde sledi da imamo kolekciju ultrafiltera $\mathcal{K} = \{ D_\xi \mid D_\xi$ je ξ-kompletan, (ξ,κ) regularan ultrafilter nad κ, $\xi \in X\}$

Forsing. Postavimo da u generičkom modelu bude $2^{\omega} = \kappa$, upotrebom algebre mere. Zatim se primeni Stav 516 na filter D i filtere iz $\mathcal{K}$. Od D se dobija mera μ sa svojstvima $add(\mu) = \|\mu\| = 2^{\omega}$. Skup X se ne menja i budući bio u D ostaje sa merom $\mu(X) = 1$. Elementi od X su i dalje kardinali. Od D_{ξ}, $\xi \in X$, dobijaju se mere μ_{ξ}, $\xi \in X$. Za μ_{ξ} važi $dom(\mu_{\xi}) = \|\mu_{\xi}\| = 2^{\omega}$; $add(\mu_{\xi}) = \xi$.

Iz prethodnih stavova jasno je da se razna svojstva velikih kardinala, izražena u formi određenih ultrafilterskih svojstava prenose i na realno vrednosne mere, što navodi na očekivanje da analogno odnosu merljivi-realno merljivi kardinali postoje i drugi "mali" kardinali koji dosta verno odražavaju svojstva velikih. Međutim tu nailazimo na barijeru 2^{ω} za realno merljive kardinale, uspostavljenu Ulamovim stavom. Međutim, ako se isti stav pažljivije ispita može se uočiti da se pomenuto ograničenje odnosi isključivo na aditivnost mere ali ne i na normu. Smatramo da se najprirodnije uopštenje realno merljivih kardinala dobija na sledeći način. Definišemo realno (vrednosne) velike kardinale tako što u definicijama velikih kardinala sve zadržimo isto osim što binarne mere-ultrafiltere zamenimo realnovrednosnim merama. Tako na primer κ je realno (jako) kompaktan akko za svaki $\lambda \geq \kappa$ takav da $cf\lambda \geq \kappa$ postoji uniformna mera nad λ aditivnosti κ.

Sledeći stav je analogija Ulamovog stava o razdvajanju realno merljivih kardinala.

Stav 518. Ako je κ realno velik kardinal onda je $\kappa \leq 2^{\omega}$ ili je κ (isti) veliki kardinal. (na primer ako je κ realno kompaktan onda je $\kappa \leq 2^{\omega}$ ili je κ kompaktan).

Dokaz. Lako se uveravamo da važi Ulamovo razdvajanje. Svaki realno veliki kardinal je obavezno i realno merljiv. Znači, ako je realno velik onda $\kappa \leq 2^{\omega}$ ili je κ veći ili jednak od prvog merljivog kardinala. U drugom slučaju sve mere aditivnosti κ su obavezno atomične te su ili ultrafilteri ili generišu κ kompletne ultrafiltere, zadržavajući pritom istu normu.

Da bi realno veliki kardinali bili od nekog interesa potrebno je napraviti neki realno veliki koji nije i veliki. Znači, realno veliki $\leq 2^{\omega}$. Pitanje neprotivurečnosti takvih rešava sledeći stav, na primeru realno kompaktnih (slično može za ostale).

Stav 519. Ako je neprotivurečna teorija ZFC + "postoji kompaktan kardinal" onda je neprotivurečna i teorija ZFC + "postoji realno kompaktan kardinal".

Dokaz. Neka je M model za prvu teoriju i neka je κ kompaktan kardinal u M. Neka je $\mathcal{K} = \{ D_\lambda \mid D_\lambda$ je κ-kompletan, uniforman ultrafilter nad λ (i (κ, λ) regularan), $\lambda \in Card, cf\lambda \geq \kappa$

Primenimo Solovayev forsing: neka je $M[h]$ odgovarajući generički model takav da $M[h] \models 2^{\omega} \geq \kappa$. Forsing čuva kardinale i kofinalnosti, pa nema kvarenja klase $\mathcal{K}$. Napravimo klasu

$$\mathcal{K}' = \{ \mu_\lambda \mid \lambda \in Card,\ cf\lambda \geq \kappa \}$$

tako da za sve $\mu_\lambda \in \mathcal{K}'$, μ_λ bude κ-aditivna, uniformna mera nad λ isto kao u Stavu 516. Klasa $\mathcal{K}' \subseteq M[h]$ svedoči da je κ realno kompaktan kardinal u $M[h]$.

Kako sa drugom stranom? Da bi se od realno velikog kardinala dobio veliki potrebno bi bilo ako bi se radilo sa unutrašnjim

modelima da se radi relativna konstruktibilnost polazeći od prave klaše različitih mera umesto jedne realne mere kao kod Solovaya, što za sada izaziva nerešene probleme. Sledeći problem (postavljen na Logic colloquiumu u Marseilleu 81.) je otvoren.
Da li iz neprotivurečnosti realno kompaktnog kardinala sledi neprotivurečnost kompaktnog (mod ZFC)?

Izgleda nam vrlo upadljivo da se Ulamovo razdvajanje prenosi i na sve ostale realno velike kardinale. Smatramo da je za to odgovoran $[0,1]$ segment, odnosno njegova kardinalnost pa se usuđujemo predložiti dalje uopštenje binarne i realne mere tako da se posmatraju mere koje slikaju $P(k)$ u neku drugu strukturu, na primer u bulovu algebru ili recimo neki zgodan prostor. Očekujemo da bi se i u još ponekom takvom slučaju dobila svojstva koja definišu neke male velike kardinale slično ovde uvedenim i da bi se donja granica Ulamovog razdvajanja mogla varirati i levo i desno od 2^{ω}.

Neregularni ultrafilteri nad malim (malim velikim) kardinalima.

Prvi primer neregularnog ultrafiltera potiče od Silvera. Sledeći stav nije publikovan. Ovde ga navodimo onakvog kakvog nam je dao Silver početkom 1979. u Berkeleyu. Inače teorem je u nezvaničnoj formi poznat i drugim matematičarima.
Stav 520. (Silver) Neka je k realno merljiv kardinal. Tada nad k postoji (uniforman) ultrafilter koji nije λ regularan za sve $\lambda < k$ za koje $cf\lambda \neq \omega$. (U stvari dokazano je da predmetni filter nije (λ,λ) regularan ni za jedan $\lambda < k$, $cf\lambda \neq \omega$).
Dokaz. (Pretpostavlja se da je $k \leq 2^{\omega}$, jer inače nema šta da se dokazuje.) Neka je μ k-aditivna mera nad k . Neka je D ma

koji ultrafilter koji širi filter $\mathcal{F} = \{x \in \kappa \mid \mu(x) = 1\}$.
Znači, $x \in D$ povlači $\mu(x) > 0$. Sledeća napomena je korisna:

(+) za ma koje skupove $X_\alpha, \alpha \in \lambda$ postoji prebrojiv skup $C \subseteq \lambda$ takav da $\mu(\bigcup_{\alpha\in\lambda} X_\alpha - \bigcup_{\alpha \in C} X_\alpha) = 0$.

dokaz (+). neka $Y_\alpha \subseteq X_\alpha$, Y_α disjunktni i $\bigcup_\alpha Y_\alpha = \bigcup_\alpha X_\alpha$. Dakle

$$\mu(\bigcup_{\alpha\in\lambda} X_\alpha) = \mu(\bigcup_{\alpha\in\lambda} Y_\alpha) = \sum_{\alpha\in\lambda} \mu(Y_\alpha).$$

Izaberimo C tako da

$$\sum_{\alpha \in C} \mu(Y_\alpha) = \sum_{\alpha\in\lambda} \mu(Y_\alpha).$$

Neka je $cf\lambda > \omega$, $X_\alpha \in D$, $\alpha < \lambda$. Stavimo $r_\beta = \mu(\bigcup_{\beta \leq \alpha} X_\alpha)$.
Postoji neki γ takav da $\beta, \beta' \geq \gamma$ povlači $r_\beta = r_{\beta'}$ (inače, zbog $cf\lambda > \omega$, imali bi smo ω_1 silazni lanac realnih brojeva).
Za svaki $\beta > \gamma$, neka je $C_\beta \subseteq \lambda - \beta$, C_β prebrojiv i takav da

$$\mu(\bigcup_{\alpha \in C_\beta} X_\alpha) = r_\beta \quad \text{(koji je } = r_\gamma\text{, koristeći (+))}.$$

Pošto je $cf\lambda > \omega$, postoji skup $Z \subseteq \lambda$ kardinalnosti λ i takav da za $\beta < \beta'$ u Z sledi da je svaki elemenat iz $C_{\beta'}$ veći od ma kog elementa u C_β. Za svaki $\beta \in Z$, neka je $Y_\beta = \bigcup_{\alpha \in C_\beta} X_\alpha$. Pošto je $\mu(\bigcup_{\gamma\leq\alpha} X_\alpha - Y_\beta) = 0$ imaćemo $\mu(Y_\beta \Delta Y_{\beta'})$ za $\beta, \beta' \in Z$. Takođe je $\mu(Y_\beta) = r_\gamma > 0$. Zato je $\mu(\bigcap_{\beta\in Z} Y_\beta) = r_\gamma > 0$ i odavde

$$\bigcap_{\beta\in Z} Y_\beta \neq 0.$$

Ali $\bigcap_{\beta\in Z} Y_\beta = \bigcup_{\substack{f: Z\to\lambda \\ \forall\beta\, f(\beta)\in C_\beta}} \bigcap_{\alpha\in Z} X_{f(\alpha)}$.

Otuda postoji $f: Z \to \lambda$ takav da za sve $\beta \in Z$, $f(\beta) \in C_\beta$ imamo $\bigcap_{\alpha\in Z} X_{f(\alpha)} \neq \emptyset$. Tako dobismo λ različitih X_α sa nepraznim presekom.

Vidimo da ovaj ultrafilter jeste maksimalno neregularan, budući da je prebrojivo nekompletan pa zato i (α,α) regularan za sve α, $cf\alpha = \omega$, a zbog uniformnosti mora biti (κ,κ) regularan.

Očigledno je da za sve $\alpha < \lambda$, $F_{\alpha+1} = \{G_\alpha\}$, pa ostaje da se ispita F_α za granične ordinale α. Zato otsad kad napišemo F_α smatramo da je tu α graničan ordinal.

Stav 523. (Keisler) Neka je D prebrojivo nekompletan ultrafilter. Onda za svaku familiju A_i, $|\prod_D A_i|$ je konačan ili $\geq 2^\omega$.

Stav 524. (Keisler) Ultrafilter D je α- silazno potpun akko $d(\nu)$ je kofinalan u $\prod_D \langle \alpha, < \rangle$.

Stav 525. (Prikry) Ako je λ regularan onda svaki λ- silazno kompletan ultrafilter je λ^+- silazno kompletan.

Prethodni stavovi su od koristi u utvrđivanju svojstava intervala F_α, o čemu dosta informacija daje sledeći stav.

Stav 526. Neka je D ultrafilter i F_α definisani kao napred.

a) ako je D prebrojivo kompletan onda za sve $\alpha < \kappa$, $|F_\alpha| = \emptyset$.
 F_κ je dobro uređen i $2^\kappa < ot(F_\kappa) < (2^\kappa)^+$ (znači $\prec$ je dobro uređenje).

b) za sve $\alpha \leq \lambda$ i sve $f_D \in F_\alpha$, $|(\cdot, f_D)_{F_\alpha}| \leq |(f_D, \cdot)_{F_\alpha}|$ tj
 $$|\{g_D \in F_\alpha \mid g <_D f\}| \leq |\{g_D \in F_\alpha \mid f <_D g\}|.$$

c) za sve α $F_\alpha = \emptyset$ akko $F_{cf\alpha} = \emptyset$.

d) $\alpha < \beta$ i $cf\alpha = cf\beta$ povlači $|F_\alpha| \leq |F_\beta|$.

e) $cf\alpha = \omega$ i $f_D \in F_\alpha$ povlači $|F_\alpha| \geq |(\cdot, f_D)_{F_\alpha}| \geq 2^\omega$.

f) $\mu = |\mu|$, $F_\mu \neq \emptyset$ povlači $|F_\mu| \geq \sum_{\alpha < \mu} |F_\alpha|$ i $|F_\mu| = |\prod_D \mu|$.

g) $F_{|\alpha|} \neq \emptyset$ povlači $|F_{|\alpha|}| \geq |F_\alpha|$.

h) $F_\alpha = \emptyset$ akko D je $cf|\alpha|$- silazno kompletan

i) ako je D μ-regularan onda za sve $\alpha \leq \mu$, $|F_\alpha| \geq 2^\mu$.

j) ako je $\kappa = \omega_n$ onda za sve $\alpha \leq \kappa$ $|F_\alpha| \geq 2^\omega$.

k) ako je za neki ν $F_\nu = \emptyset$ onda za sve n, $\kappa > \nu^{(n)}$.

l) ako je D Silverov filter onda za sve α, $cf\,\alpha \neq \omega, \kappa$ povlači $F_\alpha = \emptyset$.

Dokaz. a) sledi iz Stava 416.

b) translacija $(\cdot, f_D)_{F_\alpha}$

$$f_D + (\cdot, f_D)_{F_\alpha} = \{(f+g)_D \mid g_D \in (\cdot, f_D)_{F_\alpha}\} \subseteq (f_D, \cdot)_{F_\alpha}$$

pošto je α graničan ordinal i pošto $f_D + (\cdot, f_D)_{F_\alpha} \cong (\cdot, f_D)_{F_\alpha}$.

c) neka je $\nu = cf\,\alpha$, neka je α_ξ, $\xi < \nu$ rastući niz i $\alpha = \bigcup_{\xi<\nu} \alpha_\xi$

Za $f_D \in F_\nu$ definišemo $\bar{f}$ sa $\bar{f}(i) = \alpha_\xi$ akko $f(i) = \xi$.

$\bar{f}_D \in F_\alpha$ jer bi inače bilo $\bar{f}_D \in F_{\alpha_\xi}$, odakle $f_D \in F_\xi$ što je u kontradikciji sa $f_D \in F_\nu$. Druga strana. Za $f_D \in F_\alpha$ definišimo

$f' : \kappa \to \nu (= cf\,\alpha)$ sa $f'(i) = \xi_i$ akko $\xi_i = \min\{x \in \nu \mid f(i) \in \alpha_x\}$.

Ako $f_D' \notin F_\nu$ onda postoji $\xi < \nu$ tako da $f_D' \in F_\xi$ odnosno

$f' < \xi$ skoro svuda, pa $f_D \in F_{\alpha_\xi}$, protivurečno sa $f_D \in F_\alpha$.

d) slično dokazu c).

e) prema Stavu 415, 523, b) i c).

f) neka je $f_D \in F_\mu$. Za svaki $\alpha < \mu$ imamo $f_D + F_\alpha \subseteq F_\mu$. Ako je $g <_D f$ i $g \in \prod_D \mu$ onda $(f+g)_D \in F_\mu$. Sada se primeni b).

g) sledi iz f) i činjenice da skupovi iste kardinalnosti imaju ultrastepene iste kardinalnosti.

h) sledi iz Stava 524 i c).

i) za sve $\nu < \mu$, D je $cf|\nu|$- regularan pa zato $cf|\nu|$ silazno nekompletan. Iz h) sledi da za sve $\alpha \leq \mu$ F_α je neprazan. Dokaz sledi iz f) i Stava 48.

j) ako je $\kappa = \omega_n$ onda D nije ω_m- silazno kompletan ni za jedan $m < n$ pa su zato svi F_α neprazni. Nejednakost sledi iz e) i f).

k) slično kao i j).

l) za svaki $\lambda < \kappa$, $cf\,\lambda \neq \omega$ Silverov ultrafilter D je (λ, λ)- neregularan. Kako prema Stavu 317. (λ, λ) regularnost sledi iz $cf\,\lambda$ silazne ne kompletnosti, tvrđenje sledi iz c) i h).

Sada ćemo razmotriti pitanje odnosa svojstava λ- silazne nekompletnosti i (λ,λ) regularnosti. Prema Stavu 317. imali smo da su ta dva svojstva ekvivalentna ako je λ regularan kardinal. Pokazaćemo da do razdvajanja ovih pojmova može doći. Neka je D $(\omega_k, \omega_{k+\omega_1+1})$ - regularan, k-kompletan ultrafilter nad $\omega_{k+\omega_1+1}$ u modelu M, za ZFC. Napravimo M $[h]$ koristeći Bulovu algebru mere - Solovayev forsing, tako da bude M $[h] \models 2^{\omega} \geq k$. Kao u Stavu 516. od D dobijamo u M $[h]$ uniformnu, k aditivnu meru μ nad $\omega_{k+\omega_1+1}$. Neka je $\mathcal{F} = \{x \subseteq \omega_{k+\omega_1+1} \mid \mu(x) = 1\}$, filter podskupova od $\omega_{k+\omega_1+1}$

mere 1. $\mathcal{F}$ je k- kompletan. Proširimo $\mathcal{F}$ do ultrafiltera D'. $(k, \omega_{k+\omega_1+1})$-regularna familija iz D se slika u familiju skupova

mere 1, koja se ne deformiše jer Bulova algebra ima c.c.c. pa se regularnost prenosi i na $\mathcal{F}$ a zato i na D' pa je D' $(k, \omega_{k+\omega_1+1})$ regularan. Analogno Silverovom dokazu Stava 520. dokazuje se da je D' (λ,λ) neregularan za sve $\lambda < k$ za koje $\mathrm{cf}\,\lambda \neq \omega$, pa D' nije (ω_1,ω_1) regularan i prema Stavu 317. jeste ω_1- silazno kompletan pa prema Stavu 526. c) i h) jeste $\omega_{k+\omega_1}$- silazno kompletan (pa je zato i $F_{\omega_{k+\omega_1}} \neq \emptyset$) i $(\omega_{k+\omega_1}, \omega_{k+\omega_1})$-regularan. Time je dokazan sledeći stav.

Stav 527. Ako postoji realno kompaktan kardinal ili ako postoji k- aditivna uniformna mera nad $\omega_{k+\omega_1+1}$ onda postoji ultrafilter koji je $\omega_{k+\omega_1}$- silazno kompletan i $(\omega_{k+\omega_1}, \omega_{k+\omega_1})$ regularan.

Prvi kardinal, kandidat za razdvajanje (λ,λ) regularnosti i λ silazne nekompletnosti je ω_{ω_1}. (ω_ω otpada zbog ω regularnosti). Sledeće pitanje je otvoreno.

Postoji li ultrafilter nad ω_{ω_1+1} koji je $(\omega_{\omega_1}, \omega_{\omega_1})$ regularan i ω_{ω_1}-silazno kompletan?

Inspirisani pojmom slabe normalnosti dajemo definiciju α slabe normalnosti. Neka je D ultrafilter nad κ. D je α slabo normalan akko F_α ima najmanji element. Jasno, ako je D slabo normalan onda je D κ slabo normalan. Lako se od slabo normalnog ultrafiltera pravi α slabo normalan, produženjem indeksa i zadržavanjem norme. Pitanje je postoji li α slabo normalan ultrafilter D takav da $\alpha < \|D\|$? Sledeći stav daje prvi odgovor.

Stav 528. Neka su $\kappa_1 < \kappa_2$ merljivi kardinali sa redom normalnim ultrafilterima D_1 nad κ_1 i D_2 nad κ_2. Tada postoji ultrafilter D nad κ_2 koji je κ_1 slabo normalan i uniforman.

Dokaz.

Neka je $D' = D_1 \times D_2$ proizvod ultrafiltera D_1 i D_2. Uredimo $I = (\kappa_1+1) \times (\kappa_2+1)$ antileksikografski:

$$(0,0) < (1,0) < \ldots < (\kappa_1,0) < \ldots < (\kappa_1,1) < \ldots < (\alpha,\beta) < \ldots < (\kappa_1,\kappa_2)$$

Slično kao i do sada, sa $F_{(\alpha,\beta)}$ označimo

$$F_{(\alpha,\beta)} = \prod_{D'}(\alpha \times \beta) - \bigcup_{(\gamma,\delta)<(\alpha,\beta)} \prod (\gamma \times \delta) \quad \text{za} \quad (\alpha,\beta) \in I .$$

Važi $\prod_{D'}(\kappa_1 \times \kappa_2) = \bigcup_{(\alpha,\beta)\in I} F_{(\alpha,\beta)}$.

Ultraproizvod $\prod_{D'}\langle \kappa_1 \times \kappa_2, < \rangle$ je dobro uređen. Označimo sa $<_{D'}$ to dobro uređenje. Dokazuje se da su $F_{(\alpha,\beta)}$ disjunktni intervali u $<_{D'}$ za $(\alpha,\beta) \in I$. Ako je $\alpha \not< \kappa_1$ iz κ_1-kompletnosti ultrafiltera D′ sledi $|F_{(\alpha,\beta)}| = 1$. Pošto je

$$\left|\prod_{D'} \kappa_1\right| = \left|\prod_{D_2} \prod_{D_1} \kappa_1\right| = 2^{\kappa_1},$$

sledi, slično kao i u stavu 526 da za sve (α,β) za koje $cf\,\alpha = \kappa_1$, važi $|F_{(\alpha,\beta)}| \geq 2^{\kappa_1}$. Sledi da $F_{(\kappa_1,0)}$ ima minimalni element. Prirodnom bijekcijom $\kappa_1 \times \kappa_2$ i κ_2, od D′ dobijamo D nad κ_2. Isto preslikavanje je izomorfizam, odakle sledi da je i D uniforman kao i da F_α^D za $cf\,\alpha = \kappa_1$ ima minimalan element. Sledi da je D κ_1-slabo normalan i da je $\|D\| = \kappa_2 > \kappa_1$.

Slično, neka je D tačno κ kompletan ultrafilter i neka je $\|D\| > \kappa$, onda je D κ-slabo kompletan.

Sledeći stav koristi slabije predpostavke.

Stav 529. Ako nad κ_1 postoji slabo normalan ultrafilter i ako je $\kappa_2 > \kappa_1$ merljiv, onda nad κ_2 postoji κ_1- slabo normalan ultrafilter D takav da $\|D\| \leq \kappa_2 > \kappa_1$.

Dokaz.

Slično dokazu Stava 528. D se dobija iz D; $D' = D_1 \times D_2$, gde je D_1 slabo normalan ultrafilter nad κ_1, a D_2 neki neglavni κ_2-kompletan ultrafilter nad κ_2. Zbog κ_2-kompletnosti ultrafiltera D_2 imamo

$$\prod_{D'} \langle (\kappa_1 \times 1), \prec \rangle \cong \prod_{D_1} \langle (\kappa_1 \times 1), \prec \rangle = \prod_{D_1} \langle \kappa_1, \prec \rangle.$$

Dokazuje se da je

$$F^{D'}_{(\kappa,1)} \cong F^{D_1}_{(\kappa)}.$$

Pošto je D_1 slabo normalan, $F^{D_1}_{\kappa}$ ima najmanju neograničenu funkciju, pa isto važi i za $F^{D'}_{(\kappa_1 \times 1)}$, odakle sledi tvrđenje.

Očekujem afirmativne odgovore na sledeća pitanja, na koja do sada nisu odgovorili više poznatih svetskih stručnjaka za ultrafiltere.

P 529.1

Ako su D_1 nad κ_1 i D_2 nad κ_2 slabo normalni ultrafilteri i $\kappa_1 < \kappa_2$, da li je i filter nad κ_2 koji je izomorfan $D_1 \times D_2$, κ_1 slabo normalan?

P 529.2

Isto pitanje ako su κ_1 i $\kappa_2 \leq 2^{\omega}$ realno merljivi, a D_1 i D_2 kao u Silverovoj teoremi.

Posebno nas interesuje postoji li κ slabo normalan ultrafilter D, $\kappa < \|D\|$, koji nije izomorfan proizvodu.

P 529.3

Neka je $\kappa < \lambda \leq 2^{\omega}$ i neka je μ realna mera za koju $\|\mu\| = \lambda$, $add(\mu) = \kappa$. Neka je D ultrafilter koji sadrži skupove μ mere 1. (važi $\|D\| = \lambda$). Da li je D κ-slabo normalan?

P 529.4

Postoji li traženi tip ultrafiltera nad nekim malim kardinalom, na primer manijm od prvog slabo nedostižnog?

Dvokardinalni problem

Neka je T teorija , recimo, prvog reda i neka je P unarni relacijski simbol. Od interesa je da se karakterizuje klasa svih parova kardinala koje T dopušta. Imajući u vidu već pomenuta svojstva u prethodnoj glavi tu su najznačajniji ekstremni slučajevi. Definišemo otvore teorije.

Kardinalni par (α,β) je veliki otvor (VO) teorije T akko T dopušta par (α,β) i ako se taj par ne može rastezati ni levo ni desno, tj ako je $\alpha' > \alpha$, $\beta > \beta'$ onda T ne dopušta ni jedan od parova (α',β), (α,β'). Imamo odmah i drugu krajnju mogućnost: par (α,β) je mali otvor (MO) za T akko za sve $\alpha' < \alpha$, $\beta' > \beta$ teorija T ne dopušta ni jedan od parova (α',β), (α,β').

Pošto za sada nema opštih karakterizacija od interesa su i sledeći pojmovi.

Par je levi mali otvor (LMO) teorije T akko T dopušta (α,β) i za sve $\alpha' <$, T ne dopušta par (α',β). Na odgovarajući način definiše se DMO, LVO i DVO. Treba dakle odrediti koji su parovi (α,β) otvori.

Jasno je da teoriji T možemo pridružiti kardinalnu funkciju Λ tako da bude

za sve κ, za koji postoji LVO, $(\Lambda(\kappa),\kappa)$ je LVO za T. Slično možemo definisati kardinalne (parcijalne) funkcije koje odgovaraju LMO, DMO, DVO teorije T.

Osim stavova 45, 49, 423 koji daju određene informacije o dvokardinalnom problemu navodimo sledeće tri poznate teoreme.

Stav 530 (Keisler-Vaught). Ako teorija T dopušta (κ^+,κ) onda T dopušta (ω_1,ω).

Stav 531. (Chang)(GCH). Ako teorija T dopušta (ω_1,ω) onda T dopušta i par (κ^+,κ).

Stav 532 (Keisler). Neka je $\alpha \geq \alpha' \geq \beta' \geq \beta^{\omega}$. Ako teorija T dopušta (α,β) onda T dopušta i par (α',β').

Sledeći stav daje zanimljive informacije o otvorima.

Stav 533. Neka su Λ i Ξ kardinalne operacije takve da su za redom teorije T_1 i T_2 $(\Lambda(\kappa),\kappa)$ i $(\Xi(\kappa),\kappa)$ LVO za sve κ. Neka važi jedno od sledećeg.

1. GCH ,
2. Λ je monotona ,
3. $|\Xi(\kappa)|^{\omega} = \Xi(\kappa)$.

Onda postoji T takva da je $((\Lambda \circ \Xi)(\kappa), \kappa)$ LVO za T.

Slično važi i za LMO, DVO i DMO.

Dokaz.

Pošto Λ određuje LVO za T_1 onda postoji model $\mathfrak{A} = \langle A, V, \ldots\rangle \models T_1$ takav da je V interpretacija unarnog relacijskog simbola Q, $|V| = \Xi(\kappa)$, $|A| = (\Lambda \circ \Xi)(\kappa)$.

Neka je $\mathfrak{B} = \langle B, U, \dots \rangle \models T_2$ takav model da je U interpretacija relacijskog simbola P (iz) i da je $|U| = k$, $|B| = \xi(k)$. Može se predpostaviti bez gubitka opštosti da je $\mathcal{L}_{T_1} \cap \mathcal{L}_{T_2} = \phi$, kao i da T_2 ima zatvorene aksiome. Uočimo ekstenziju T′ teorije T_1 koju dobijamo na sledeći način.

1. Neka je T′ teorija u jeziku $\mathcal{L}_{T_1} \cup \mathcal{L}_{T_2}$ sa aksiomama teorije T_1.
2. Širimo T′ do T dodajući interpretacije aksioma teorije T_2 u jeziku $\mathcal{L}_{T_1} \cup \mathcal{L}_{T_2}$. Prethodna interpretacija se definiše se na sledeći način. Svaki simbol jezika $\mathcal{L}_{T_2}$ slika se u samog sebe. U aksiomama od T_2 svaka podformula oblika $\exists x\, \varphi$ zamenjuje se podformulom $\exists x\, (Q(x) \,\&\, \varphi)$. Univerzum interpretacije je Q pa nam trebaju i aksiome

$$\exists x\, Q(x)$$

ako je F n-arni funkcijski simbol jezika onda je aksioma od T formula $Q(x_1) \,\&\, \dots \,\&\, Q(x_n) \Longrightarrow Q(F(x_1, \dots x_n))$.

Dalje, pravi se model $\mathfrak{A}'$, ekspanzija modela $\mathfrak{A}$, da bi se dobio model teorije T, korišćenjem bijekcije $|B| = |V|$.

Neka je $f : B \xrightarrow[1-1]{na} V$. Proširimo f do izomorfizma.

Za $c \in \mathcal{L}_{T_2}$ definišimo $c^{\mathfrak{A}} = f(c)$.

Ako je F funkcijski simbol iz $\mathcal{L}_{T_2}$ definišemo

$$F^{\mathfrak{A}}(a_1, \dots a_n) = \begin{cases} f(F^{\mathfrak{B}}(f^{-1}a_1, \dots f^{-1}a_n)) & \text{ako su } a_1, \dots a_n \in V \\ \text{proizvoljno} & \text{inače} \end{cases}$$

Ako je R relacijski simbol iz $\mathcal{L}_{T_2}$ definišemo interpretaciju

$$R^{\mathfrak{A}}(a_1, \dots a_n) \quad \text{akko} \quad \begin{cases} R^{\mathfrak{B}}(f^{-1}a_1 \dots f^{-1}a_n) & \text{za } a_1, \dots a_n \in V \\ \perp & \text{inače} \end{cases}$$

Uočimo relacijski simbol P iz $\mathcal{L}_T$ i model $\mathfrak{A}''=\langle A,U,\dots\rangle$ za T. $\mathfrak{A}''$ je $(\Lambda(\Xi(k)),k)$ model.

Neka je $\mathfrak{A}=\langle A,V,U,\dots\rangle$ neki model za T i $|U|=k$. Neka su V i U interpretacije za redom Q i P. Neka je $\mathcal{L}_{T_2}'$ redukcija $\mathcal{L}_T$ na $\{Q\}\cup\mathcal{L}_{T_1}$ i neka T_2' ima samo prevode aksioma T_2. Sledi $|V|\le\Xi(k)$. Koristeći osnovnu pretpostavku na sličan način dobijamo $|A|\le\Lambda(\Xi(k))$, odakle sledi tvrđenje.

Slično se dokazuje sledeća posledica.

Posledica.

Neka su T_1 i T_2 teorije sa redom LVO, DVO $(\Lambda(k),k)$ i $(k,\Gamma(k))$ za sve k. Tada postoji teorija T kojoj je $(\Lambda(k),\Gamma(k))$ VO za sve k.

Slično tvrđenje važi i za MO.

Stav 534. Uz pretpostavke iz prethodne posledice važi

$$\Gamma(|\prod_D k|)\le|\prod_D\Gamma(k)|\le|\prod_D k|\le|\prod_D\Lambda(k)|\le\Lambda(|\prod_D k|).$$

Dokaz.

Srednje dve nejednakosti slede iz osnovnih osobina kardinalnosti ultraproizvoda.

Prema stavu 4.5

teorija T_1 dopušta par $(\prod_D\Lambda(k),\prod_D k)$ i

teorija T_2 dopušta par $(|\prod_D k|,|\prod_D\Gamma(k)|)$.

Pošto je $(\Lambda(|\prod_D k|),|\prod_D k|)$ LVO za T_1 i pošto je $(|\prod_D k|,\Gamma(|\prod_D k|))$ DVO za T_2 spajanjem sa prethodnim činjenicama slede spoljne nejednakosti.

Sledeći stav omogućuje korisne primene prethodnih.

Stav 535. a) Postoji teorija T_1 takva da za sve κ T_1 ima otvor (κ, κ),

b) Postoji teorija T_2 sa VO (κ^+, κ).

c) Postoji teorija T sa VO $(2^\kappa, \kappa)$.

Dokaz.

a) Neka je T' proizvoljna teorija sa beskonačnim modelom. Stavimo $T_1 = T' + \forall x\, U(x)$.

b) Neka je $\mathcal{L}_{T_2} = \{\leq, F^{(2)}, U^{(1)}, a, 0\}$. Neka je T_2 teorija linearnog poretka sa još sledećim aksiomama.

$$\forall x (U(x) \,\&\, y \leq x \Rightarrow U(y)) \,\&\, U(0) \,\&\, U(a)$$
$$\forall x\, F(x, .) : [0, x] \xrightarrow[1-1]{na} U.$$

Neka je R interpretacija unarnog relacijskog simbola U u modelu $\mathfrak{A} = \langle A, R, \ldots \rangle$. Neka je $|R| = \kappa$. Neka je $X \subseteq A$ takav da $|X| = \kappa^+$. X ne može biti sadržan u početnom komadu pa mora biti kofinalan u A, odakle sledi

$$A = \bigcup_{x \in X} (0, x) ,$$

što povlači

$$|A| = |X| \cdot \sup_{x \in X} |[0, x]| = \kappa^+ \cdot \kappa = \kappa^+$$

pa je (κ^+, κ) VO za T_2.

c) Uočimo sledeće aksiome

$$(\forall x y)\ (x = y \Leftrightarrow (\forall z)(E(z, x) \leftrightarrow E(z, y))) .$$
$$\forall x)\ (\neg U(x) \rightarrow (\forall y)(E(y, x) \Rightarrow U(y))) .$$

Intuitivno ove aksiome tvrde da svaki element x koji nije u U određuje jedan podskup U_x od U, kao da iz $x \neq y$ sledi $U_x \neq U_y$. Sledi da ako je interpretacija od U kardinalnosti κ onda je kardinalnost modela ograničena sa 2^κ.

Sledeći stav predstavlja pojačanje Stava 4.23.

Stav 536. a) Ako postoji κ kompletan (κ,λ) regularan ultrafilter nad λ, onda za sve (α,β) takve da $\kappa \leq \alpha \leq \lambda$ i $\beta < \kappa$, par (α,β) nije VO(nije mi dopušten).

b) Ako je (α,β) VO onda ne postoji slabo kompaktan kardinal $\kappa \leq \alpha$, $\kappa > \beta$.

Dokaz.

a) se dokazuje slično Stavu 4.23 uz korišćenje rezultata o kardinalnosti ultrastepena po (κ,λ) regularnom filteru iz prethodne glave.

b) dokaz sledi iteracijom dokaza a) preko prave klase.

Celularnost u Boolovoj algebri se definiše kao supremum kardinalnosti disjunktnih familija. Aksiome Boolove algebre i definicija celularnosti su 1. reda pa možemo razmatrati modele $(\kappa, \mathrm{cel}\,\kappa)$. Uvedimo ded (D,$<$) kao u ( ). ded (D,$<$) je kardinalnost skupa dedekindovih preseka u (D,$<$). Michell je dokazao nezavisnost $\kappa < \mathrm{ded}\,\kappa < 2^{\kappa}$ za sve κ (privatno cirkulisani manuskript).

Možemo sada navesti neke posledice prethodnih stavova. (Recimo) važi sledeće.

1. $\forall\lambda\forall n$, $(\omega_n(\lambda),\lambda)$, $(\beth_n(\lambda),\lambda)$ su VO.

2. $|\prod_D \omega_n(\lambda)| \leq \omega_n(|\prod_D \lambda|)$; $|\prod_D \beth_n(\lambda)| \leq \beth_n(|\prod_D \lambda|)$.

3. neka je Λ neka kombinacija operacija $\omega_n(\cdot)$, $\beth_n(\cdot)$, ded^{k}, na primer $\Lambda = {}^{++} \circ \beth_7(\ ) \circ \mathrm{ded}^3(\ )$ onda važi

$$|\prod_D \Lambda(\kappa)| \leq \Lambda(|\prod_D \kappa|)$$ odnosno, u primeru za Λ

$$|\prod_D |\beth_7(\mathrm{ded}^3(\kappa)|^{++}| \leq |\beth_7(\mathrm{ded}^3(|\prod_D \kappa|)|^{++}.$$

Gornja razmatranja imaju veze i sa kontinuum problemom. Neka je D Magidorov ultrafilter nad ω_3 (filter kao u Magidorovom modelu). Tada važi $|\prod_D \omega_1| \le \omega_3$ i $|\prod_D \omega_3| = 2^{\omega_3}$. Korišćenjem prethodnih posledica (za filter sa osobinama Magidorovog filtera nad ω_3, važi $2^{\omega_2} = \omega_3 \Rightarrow \prod_D \omega_3 = 2^{\omega_3}$) dobijamo

$$|\prod_D \omega_3| = |\prod_D \omega_1^{++}| \le |\prod_D \omega_1|^{++} \le \omega_5 .$$

pa zato $2^{\omega_2} = \omega_3$ povlači $2^{\omega_3} \le \omega_5$. Pošto je Magidorov rezultat opšte prirode slične implikacije se dobijaju i za ostale kardinale. Sledi da egzistencija ultrafiltera sa skokovitom kardinalnom funkcijom uvodi ograničenja u funkciju kontinuuma. Posledica gornjeg je da za svaki ω-regularni ultrafilter i svaki kardinal κ važi $|\prod_D \kappa| > \kappa$.

Spisak koriščenih rezultata

	REF		STRANA
Stav 1.1	19	Theor. 4.1.9	170
Stav 1.2	19	Prop. 3.2.11	133
Stav 2.2	9	Cantor	
Stav 2.3	23	1.26 Lemma	17
Stav 2.4	23	1.19 Theor.	13
Lema kolapsiranja	53	Theor. 15A	25
Stav 2.6	53	Theor. 21	36
Stav 2.7	27	1.3. Theor.	269
Stav 2.8	27	1.5. Theor.	270
Stav 2.9	27	2.1(6) Theor.	292
Stav 2.10	27	2.1(5) Theor.	292
Stav 2.11	150	Banach Ulam Theorem	308
Stav 2.14	28	Lemma 36	176
Stav 2.15	159	Theor. 2.1	267
Stav 2.16	159	Theor. 2.2	268
Stav 2.17	167	1.7. Theor.	494-04
Stav 3.3	19	Prop. 4.3.3. Prop. 4.3.4	201
Stav 3.4	19	Prop. 4.3.5	201
Stav 3.7	19	Lemma 4.2.3	180
Stav 3.8	19	Prop. 4.2.7	182
Stav 3.9 a)	23	7.10 Lemma c)	149
Stav 3.11	19	Theor. 4.2.11	183
Stav 3.12	19	Lemma 4.2.13 (1)	185
Stav 3.13	19	Theor. 4.2.12	185
Stav 3.15	19	Prop. 4.2.20	192
Stav 3.16	23	8.27 Theor.	189
Stav 3.18	23	9.7. Lemma	217
Stav 3.19	23	9.8. Lemma	217
Stav 3.20	23	9.9. Theor.	218
Stav 3.21	23	9.10. Coroll.	218
Stav 3.22	135	Lemma 1.	180
Stav 3.23	135	Lemma 2.	181
Stav 3.24	135	Theor. 2.	183

	REF		STRANA
Stav 4.4	19	Prop. 4.2.4.	181
Stav 4.6	23	12.15. Theor.	297
Stav 4.7	23	12.19. Lemma	300
Stav 4.9	19	4.3.11 Coroll.	206
Stav 4.11	23	12.22. Theor.	301
Stav 4.12.	23	12.23. Theor.	302
Stav 4.13	19	Theor. 4.2.21.	193
Stav 4.14	19	Theor. 4.2.23.	196
Stav 4.18	23	4.2.18. Theor.	191
Stav 4.19	164	Theorem 1	366
Stav 4.24	(Magidor 1977 nepublikovano)		
Stav 51	163		
Stav 52	55	Lemma 27.5	
Stav 53	163		
Stav 54	55	folklor	
Stav 55		"	
Stav 56		"	
Stav 57		"	
Stav 58		"	
Stav 59	55	Lemma 34.6	423
Stav 511	163	Theorem 5	406
Stav 512	55	Lemma 31.1	360
Stav 513	55	Theorem 75	361
Stav 520	Silverov manuskript		
Stav 521	55	theorem 84	416
Stav 523	19	exercise 4.3.14	210
Stav 524	19	" 4.3.34	213
Stav 525	Silverova predavanja		
Stav 530	folklor		
Stav 531	"		
Stav 532	19	Theorem 6.5.11	390
Stav 535 c)	19	Theorem 3.2.11	133

Spisak originalnih i samostalno dokazanih rezultata

Stav 2.5
Stav 2.12
Stav 2.13
Stav 3.1 (dokaz. samos.)
Stav 3.2 (dokaz. samos.)
Stav 3.5
Posledice
Stav 3.6
Stav 3.9. c)
Stav 3.10 (dokaz. samost.)
Stav 3.14 (dokaz. samost.)
Stav 3.17
Stav 4.2
Stav 4.3 (dokaz. samost.)
Posledice
Stav 4.5 Generalizacija Theor. 4.3.10 Str.205 iz (19)
Stav 4.8
Posledice
Stav 4.10
Posledice
Stav 4.15
Stav 4.16
Posledica
Stav 4.17
Posledica
Stav 4.20
Stav 4.21
Stav 4.22
Stav 4.23
Stav 4.25
Stav 4.26
Stav 4.27
Stav 4.28
Stav 4.29
Stav 4.30
Stav 4.31

Stav 514
Stav 515
Stav 516
Stav 517
Stav 518
Stav 519
Stav 522
Stav 526
Stav 527
Stav 528
Stav 529
Stav 533
Stav 534
Stav 535 b) samostalan dokaz
Stav 536

Bibliografija

J.W.Addison and Y.N.Moschovakis

I (1967) Some consequences of the axiom of definable determinateness, Proc.Natl.Acad.Sci. U.S.A. 59, 708-712.

J.L.Bell

2 (1972) On the relationship between weak compactness in $\mathcal{L}_{\omega_1,\omega}$, $\mathcal{L}_{\omega_1,\omega_1}$ and restricted second order languages, Arch.Math.Logik Grundlagenforsch. 15, 74-78.

J.L.Bell and A.B.Slomson

3 (1969) Models and Ultraproducts: An Introduction (North-Holland, Amsterdam).

J.L.Bell and A.B. Slomson

4 (1969) Models and Ultraproducts (North-Holland, Amsterdam)

M.Benda

5 (1969) Reduced products and nonstandard logics, J.Symb.Logic 34, 424-436.

6 (1970) Reduced products, filters and Boolean ultrapowers, Ph.D.Thesis,Univ.of Wisconsin.

L.Bukovsky

7 (1965) The continuum problem and powers of alephs, Comment. Math.Univ.Carolinae 6, 125-128.

L.Bukovsky and K.L.Prikry

8 (1966) Some metamathematical properties of measurable cardinals, Bull.Acad.Polon.Sci.Sér.Sci.Math. Astron.Phys. 14, 95-99.

G.Cantor

9 (1915) Contributions to the Founding of the Theory of Transfinite Numbers (translated by P.E.B. Jourdain; reprinted by Dover Publ.,New York).

C.C.Chang

I0 (1954) Some general theorems on direct products and their applications in the theory of models, Koninkl.Ned.Akad.Wetensch.Proc.Ser.A 57 (=Indag.Math.16) 592-598.

II (1959) On unions of chains of models, Proc.Am.Math. Soc.10, 120-127.

I2 (1960) A lemma on ultraproducts and some applicationa, Prelim.Rept.,Notices Am.Math.Soc.7, 635.

I3 (1965a) A note on the two-cardinal problem, Proc.Am. Math.Soc.16, 1148-1155.

I4 (1967b) Ultraproducts and other methods of constructing models, Sets, Models and Recursion Theory, J.N. Crossley,ed.(Notth-Holland,Amsterdam) 85-121.

I5 (1967c) Descendingly incomplete ultrafilters, Trans. Am.Math.Soc.126, 108-118.

I6 (1968) Infinitary properties of models generated from indiscernibles, in: B. van Rootselaar and J.F.Staal, eds., Logic, Methodology and Philosophy of Science III (North-Holland,Amsterdam) 9-21.

I7 (1971) Sets constructible using $\mathcal{L}_{\kappa,\kappa}$ in: D.S.Scott, ed., Axiomatic Set Theory, Proc.Symp.Pure Math. 13 (1)(Amer.Math.Soc., Providence, R.I.) 1-8.

C.C.Chang and H.J.Keisler

I8 (1962) Applications of ultraproducts of pairs of cardinals to the theory of models, Pacific J.Math. 12, 835-845

I9 (1973) Model Theory (North-Holland, Amsterdam).

P.J.Cohen

20 (1963) A minimal model for set Theory, Bull.Amer.Math. Soc. 69, 537-540.

2I (1964) The independence of the continuum hypothesis I, II, Proc.Natl.Acad.Sci. U.S.A. 50 (1963) 1143-1148, 51 (1964) 105-110.

22 (1965) Independence results in set theory, in:J.W.Addison, L.Henkin and A.Tarski, eds., The Theory of Models (North-Holland, Amsterdam) 39-54.

Comfort, Negrepontis

23 (1974) The theory of ultrafilters, Springer - Verlag 1974.

K.J.Devlin

24 (1973) Some weak versions of large cardinal axioms, Ann.Math.Logic 5, 291-325.

25 (1973a) Aspects of Constructibility, Lecture Notes in Math. 354 (Springer, Berlin).

M.A.Dickman

26 (1974) Large Infinitary Languages-Model Theory North-Holland, Amsterdam

F.R.Drake

27 (1974) Set theory, North-Holland 1974

W.B.Easton

28 (1964) Powers of regular cardinals, Ph.D.Dissertation, Princeton University (1964); Ann.Math.Logic 1 (1970) 139-178.

P.Erdős and A.Hajnal

29 (1971) Unsolved problems in set theory, in: D.S.Scott, ed., Axiomatic Set Theory, Proc.Symp.Pure Math. 13 (1) (Amer.Math.Soc., Providence, R.I.)17-48.

P.Erdős, A.Hajnal and R.Rado

30 (1965) Partition relations for cardinal numbers, Acta Math.Acad.Sci.Hung. 16, 93-196.

P.Erdős and R.Rado

31 (1956) A partition calculus in set theory, Bull.Amer. Math.Soc. 62, 427-489.

P.Erdős and A.Tarski

32 (1961) On some problems involving inaccessible cardinals, in: Essays on the Foundations of Mathematics (Magnes Press, Jerusalem) 50-82.

U.Felgner

33 (1971) Models of ZF set theory, Lecture Notes in Math. 223 (Springer, Berlin).

G.Fődor

34 (1966) On stationary sets and regressive functions, Acta Sci.Math. (Széged) 27, 105-110.

A.A.Fraenkel and Y. Bar-Hillel

35 (1958) Foundations of Set Theory (North-Holland,Amsterdam).

T.E.Frayne, A.C.Morel and D.S.Scott

36 (1962) Reduced direct products, Fund.Math. 51, 195-228 (Abstract: Notices Am.Math.Soc. 5 (1958) 674).

H.Gaifman

37 (1967) Uniform extension operators for models and their applications, in: J.Crossley, ed., Sets, Models and Recursion Theory (North-Holland, Amsterdam) 122-155.

K.Gődel

38 (1938) The consistency of the axiom of choice and of the generalized continuum hypothesis, Proc.Natl. Acad.Sci. U.S.A. 24, 556-557.

39 (1939) Consistency-proof for the generalized continuum hypothesis, Proc.Natl.Acad.Sci. U.S.A. 25, 220-224.

40 . (1940) The Consistency of the Continuum Hypothesis, Ann.Math.Studies 3 (Princeton Univ.Press,Princeton, N.J.; printing 1966).

41 (1946) Remarks before the Princeton Bicentennial Conference on problems in mathematics, in: M.Davis, ed., The Undecidable (Raven Press, New York, 1964) 84-88.

42 (1947) What is Cantor's continuum problem?, Amer.Math. Monthly 54, 515-525; reprinted, eypanded, in: P.Bennaceraf and H.Putnam, eds., Philosophy of Mathematics, Selected Readings (Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J.,(1964) 258-273.

P.Hájek

43 (1971) Sets, semisets and models, in: D.S.Scott, ed., Axiomatic Set Theory, Proc.Symp. Pure Math. 13 (1)(Amer.Math.Soc.Providence,R.I.) 67-82.

A.Hajnal

44 (1956) On a consistency theorem connected with the generalized continuum problem, Z.Math.Logik Grundl.Math.2, 131-136; see also: Acta Math. Acad.Sci.Hung. 12 (1961) 321-374.

45 (1960) Some results and problems on set theory, Acta Math.Acad.Sci.Hung. 11, 277-298.

W.P.Hanf

46 (1960) Models of languages with infinitely long expressions, Intern.Cong. for Logic, Methodology and Philosophy of Science, Stanford University, abstracts of contributed papers (mimeographed).

47 (1964) Incompactness in languages with infinitely long expressions, Fund.Math. 53, 309-324.

W.P.Hanf and D.S.Scott

48 (1961) Classifying inaccessible cardinals, Notices Amer.Math.Soc. 8, 455.

S.H.Hechler

49 (1973) Powers of singular cardinals and a strong form of the negation of the generalized continuum hypothesis, Z. Math.Logik Grundl.Math. 19, 83-84.

T.J.Jech

50 (1966) On ordering of cardinalities, Bull.Acad.Polon. Sci.Sér.Sci.Math.Astron.Phys. 14, 293-296.

51 (1967) Non-provability of Souslin's hypothesis, Comment. Math.Univ.Carolinae 8, 291-305.

52 (1971) Trees, J.Symb.Logic 36, 1-14.

53 (1971a) Lectures in set theory with particular emphasis on the method of forcing, Lecture Notes in Math. 217 (Springer, Berlin).

54 (1973) Some combinatorial problems concerning uncountable cardinals, Ann.Math.Logic 5, 165-198.

T.J.Jech

55 (1978) Set theory, Addison Wesley, New York 1978.

Precipitous ideals

T.J.Jech, M.Magidor, W.Mitchell and K.Prikry

56 Precipitous ideals

T.J.Jech and A.Sochor

57 (1966) On the V-model of set theory, Bull.Acad.Polon. Sci.Sér.Math.Astron.Phys. 14, 297-303.

58 (1966a) Applications of the V-model, Bull.Acad.Polon. Sci.Sér.Math.Astron.Phys. 14, 351-353

R.B.Jensen

59 (1967) Concrete models of set theory, in: J.Crossley, ed., Sets, Models and Recursion Theory (North-Holland, Amsterdam) 44-47.

60 (1967a) Modelle der Mengenlehre, Lecture Notes in Math. 37 (Springer, Berlin)

61 (1970) Definable sets of minimal degree, in: Y.Bar-Hillel, ed.,Mathematical Logic and Foundations of Set Theory (North-Holland, Amsterdam) 122-128

62 (1972) The fine structure of the constructible hierarchy, Ann.Math.Logic 4, 229-308.

R.B.Jensen and R.M.Solovay

63 (1970) Some applications of almost disjoint sets, in: Y.Bar-Hillel, ed., Mathematical Logic and Foundations of Set Theory (North-Holland, Amsterdam) 84-104.

A.Kanamori

64 (1975) Some combinatorics involving ultrafilters

C.R.Karp

65 (1964) Languages with Expressions of Infinite Length (North-Holland, Amsterdam).

H.J.Keisler

66 (1961) Ultraproducts and elementary classes, Koninkl. Ned.Akad.Wetensch.Proc.Ser.A 64 (=Indag.Math.23) 477-495.

H.J.Keisler

67 (1962) Some applications of the theory of models to set theory, Logic, Methodology and Philosophy of Science, E.Nagel, P.Suppes and A.Tarski,eds. (Stanford Univ.Press,Stanford,Calif.) 80-86.

68 (1963) Limit ultrapowers, Trans.Am.Math.Soc.107, 383-408.

69 (1964c) On Cardinalities of ultraproducts, Bull.Am. Math.Soc.70, 644-647.

70 (1964d) Ultraproducts and saturated models, Koninkl. Ned.Akad.Wetensch.Proc.Ser. A 67 (=Indag.Math. 26) 178-186.

7I (1965a) A survey of ultraproducts, Logic, Methodology and Philosophy of Science, Y.Bar-Hillel, ed. (North-Holland, Amsterdam) 112-126.

72 (1965b) Limit ultraproducts, J.Symb.Logic 30, 212-234.

73 (1965d) Reduced products and Horn classes, Trans.Am. Math.Soc. 117, 307-328.

74 (1967a) Ultraproducts of finite sets, J.Symb.Logic 32, 47-57.

75 (1967b) Ultraproducts which are not saturated, J.Symb. Logic 32, 23-46.

76 (1971) Model Theory for Infinitary Logic (North-Holland, Amsterdam)

H.J.Keisler and F.Rowbottom

77. (1965) Constructible sets and weakly compact cardinals, Notices Am.Math.Soc.12, 373.

H.J.Keisler and A.Tarski

78 (1964) From accessible to inaccessible cardinals, Fund. Math. 53, 225-308; corrections: ibid.57, 119.

J.Ketonen

79 (1971) Everything you wanted to know about ultrafilters, but were afraid to ask, Dissertation, Univ. of Wisconsin, Madison, Wisc.

80 (1972) On non-regular ultrafilters, J.Symb.Logic 37, 71-74.

8I (1972a) Strong compactness and other cardinal sins, Ann.Math.Logic 5, 47-76.

J.Ketonen

82 (1973) Ultrafilters over measurable cardinals, Fund. Math. 77, 257-269.

83 (1974) On the existence of P -points.

84 (1976) Non-regular ultrafilters and large cardinals, Transactions of Ams, vol. 2241- 1976.
Open problems in the theory of ultrafilters.

E.M.Kleinberg

85 (1969) The independence of Ramsey's theorem, J.Symb. Logic 34, 205-206.

86 (1970) Strong partition properties for infinite cardinals, J.Symb.Logic 35, 410-428.

87 (1972) The equiconsistency of two large cardinal axioms (abstract), Notices Am.Math.Soc.16, A-329.

E.M.Kleinberg and R.A.Shore

88 (1971) Large cardinals and partition relations, J. Symb.Logic 36, 305-308.

89 (1972) Weak compactness and square bracket relations, J.Symb.Logic 37, 673-676.

J.Kőnig

90 (1904) Zum Kontinuumproblem, Math.Ann.60, 177-180.

K.Kunen

91 (1968) Inaccessibility properties of cardinals, Ph.D. Dissertation, Stanford Univ., Stanford, Calif.

92 (1970) Some applications of iterated ultrapowers in set theory, Ann.Math.Logic 1, 179-227.

93 (1971) Elementary embeddings and infinitary combinatorics, J.Symb.Logic 36, 407-413.

94 (1971a) On the GCH at measurable cardinals, in: R.O.Gandy and C.E.M. Yates, eds., Logic Colloquium'69 (North-Holland, Amsterdam) 107-110.

95 (1972) Ultrafilters and independent sets, Trans.Amer. Math.Soc. 172, 299-306.
Saturated ideals

K.Kunen and J.B.Paris

96 (1971) Boolean extensions and measurable cardinals, Ann. Math.Logic 2, 359-378.

K.Kunen and K.L. Prikry

97 (1971) On descendingly incomplete ultrafilters, J. Symb.Logic 36, 650-652.

98 (1973) Ultrafilters and independent sets, Trans. Amer.Math.Soc.,

K.Kuratowski and A.Mostowski

99 (1968) Set Theory (North-Holland, Amsterdam).

D.Kurepa

100 (1935) Ensembles ordonnés et ramifiés, Publ. Math. Univ.Belgrade 4, 1-138.

101 (1937) L'hypothèse du continu et les ensembles partiellement ordonnés, Comptes rendus, Paris, 205, 1937, 1196-1198.

102 (1953) O faktorijelama konačnih i beskonačnih brojeva, Rad Jug.Ak., 296, 1953, 105-122.

103 (1954) Über die Factoriellen der endlichen und unendlichen Zahlen, Bull.internat.Ac.Sci.Yougoslave, Zagreb, classe math. 4, 1954, 51-64.

104 (1958/9) Sull ipotesi del continuo, Rendiconti del Seminario Matematico, Torino, 18, 1958/59, 11-20.

105 (1968) On several continuum hypotheses; Proc.international summer school, Varenna 1968, 57-64.

A.Lévy

106 (1960) A generalization of Gödel's notion of constructibility, J.Symb.Logic 25, 147-155.

107 (1960a) Axiom schemata of strong infinity in axiomatic set theory, Pacific J.Math. 10, 223-238.

108 (1971) The sizes of the indescribable cardinals, in: D.S.Scott, ed.,Axiomatic Set Theory, Proc. Symp. Pure Math. 13 (1)(Amer.Math.Soc.Providence,R.I.) 205-218.

A.Lévy and R.M.Solovay

109 (1967) Measurable cardinals and the continuum hypothesis, Israel J.Math. 5, 234-248.

J.Łoś

110 (1955) Quelques remarques,théorèmes et problèmes sur les classes définissables d'algèbres, in:T.Skolem et al.,Mathematical Interpretation of Formal Systems (North-Holland, Amsterdam) 98-113.

M.Magidor

111 (1971) There are a lot of normal ultrafilters to a supercompact cardinal, Israel J.Math. 9, 186-192.

112 (1971a) On the role of supercompact and extendible cardinals in logic, Israel J.Math. 10, 147-157.

113 (1972) Dissertation, Univ. of Jerusalem.

114 (1974) How large is the first strongly compact cardinal?

R.Mansfield

115 (1971a) A Souslin operation for Π^1_2, Israel J.Math. 9, 367-379.

D.A.Martin

116 (1968) The axiom of determinateness and reduction principles in the analytical hierarchy, Bull. Amer.Math.Soc. 74, 687-689.

117 (1970) Measurable cardinals and analytic games, Fund. Math. 66 (1969/70) 287-291.

D.A.Martin and R.M.Solovay

118 (1969) A basis theorem for Σ^1_3 sets of reals, Ann. Math. (2) 89, 138-159.

T.K.Menas

119 (1973) On strong compactness and supercompactness, Dissertation, Univ. of California, Berkeley, Calif.

R.M. Montague and R.L.Vaught

120 (1959) Natural models of set theories, Fund.Math.47, 219-242.

A.Mostowski

121 (1938) Bericht aus einem Satz von Gödel über die Widerspruchsfreiheit des Auswahlaxioms, Ann. Soc.Polon.Math. 17, 115.

122 (1948) On the principle of dependent choices, Fund. Math. 35, 127-130.

123 (1949) An undecidable arithmetical statement, Fund. Math. 36, 143-164.

A.Mostowski

I24 (1956) On models of axiomatic set theory, Bull.Acad. Polon.Sci.Cl.III 4, 663-668.

I25 (1965) On models of Zermelo-Fraenkel set theory satisfying the axiom of constructibility, Acta Phil.Fenn.18, 135-144.

I26 (1969) Constructible Sets with Applications (North-Holland, Amsterdam).

Ž. Mijajlović

127 (1977) Doktorska disertacija, PMF Beograd

J.Mycielski and S.Swierczkowski

I28 (1964) On the Lebesque measurability and the axiom of determinateness, Fund.Math.54, 67-71.

K.Namba

I29 (1967) On $\aleph_0$ -complete cardinals,J.Math.Soċ.Japan 19, 347-358.

I30 (1967a) $\aleph_0$ -complete cardinals and transcendency of cardinals, J.Symb.Logic 32, 452-472.

I3I (1967b) An axiom of strong infinity and analytic hierarchy of ordinal numbers, Comment.Math.Univ. St.Paul 16, 21-55.

I32 (1971) An axiom of strong infinity, in: D.S.Scott, ed., Axiomatic Set Theory, Proc.Symp. Pure Math.13(1) (Amer.Math.Soc.,Providence,R.I.) 279-319.

L.Pacholski and C.Ryll-Nardzewski

I33 (1970) On countably compact reduced products I,Fund. Math.67, 155-161.

K.L.Prikry

I34 (1970) Changing measurable into accessible cardinals, Dissertationes Math.(= Rozprawy Mat.) 68.

I35 (1971) On a problem of Gillman and Keisler,Ann.Math. Logic 2, 179-188.

F.P.Ramsey

I36 (1930) On a problem of formal logic,Proc.London Math. Soc.(2) 30, 264-286.

F.Rowbottom

I37 (1964) Some strong axioms of infinity incompatible with the axiom of constructibility, Ph.D. Dissertation,Univ. of Wisconsin, Madison,Wisc.; Ann.Math.Logic 3 (1971) 1-44.

B.Russell and A.N.Whitehead

I38 (1910) Principia Mathematica (Cambridge Univ.Press, Cambridge; Vol. 1, 1910; Vol. 2, 1912; Vol. 3, 1913; 2nd ed.: Vol. 1, 1925; Vols 2,3,1927).

G.E.Sacks

I39 (1969) Measure-theoretic uniformity in recursion theory and set theory, Trans.Amer.Math.Soc.142, 381-420.

I40 (1971) Forcing with perfect closed sets, in:D.S.Scott, ed.,Axiomatic Set Theory,Proc.Symp.Pure Math.13 (1)(Amer.Math.Soc.,Providence,R.I.) 331-355.

J.Schmerl

I4I (1969) On hyperinaccessible-like models (abstract), Notices Am.Math.Soc. 19, 843, also see J.Symb. Logic 37, (1972) 521-530.

D.S.Scott

I42 (1961) Measurable cardinals and constructible sets, Bull.Acad.Polon.Sci.Sér.Sci.Math.Astron.Phys.7, 145-149.

I43 (1965) Logic with denumerably long formulas and finite strings of quantifiers, in:J.W.Addison,L.Henkin and A.Tarski, eds., The Theory of Models (North-Holland, Amsterdam) 329-341.

I44 (1967) A proof of the independence of the Continuum Hypothesis, Math.Systems Theory 1, 89-111.

D.S.Scott (ed.)

I45 (1971) Axiomatic Set Theory, Proc. 1967 Summer Inst. Amer.Math.Soc.,Proc.Symp.Pure Math.13(1)(Amer. Math.Soc.,Providence,R.I.).

S.Shelah

I46 (1970c) When every reduced product is saturated (abstract), Notices Am.Math.Soc. 17, 453.

S.Shelah

I47 (1972b) Every two elementarily equivalent models have isomorphic ultrapowers, Israel J.Math.

J.C.Shepherdson

I48 (1951) Inner models for set theory, I, II, III, J.Symb.Logic 16 (1951) 161-190, 17, (1952) 225-237, 18 (1953) 145-167.

J.R.Shoenfield

I49 (1961) The problem of predicativity, in: Essays on the Foundations of Mathematics (Magnes Press, Jerusalem) 132-142.

I50 (1967) Mathematical Logic (Addison-Wesley, Reading, Mass.).

I5I (1971) Unramified forcing, in:D.S.Scott, ed., Axiomatic Set Theory, Proc.Symp.Pute Math. 13(1) (Amer.Math.Soc.,Providence,R.I.) 357-381.

J.H.Silver

I52 (1966) Some applications of model theory in set theory, Ph.D.Dissertation, Univ. of California, Berkeley, Calif.

I53 (1970) A large cardinal in the constructible universe, Fund.Math.69, 93-100.

I54 (1970a) Every analytic set is Ramsey, J.Symb.Logic 35, 60-64.

I55 (1971) The consistency of the GCH with the existence of a measurable cardinal, in: D.S.Scott, ed., Axiomatic Set Theory, Proc.Symp.Pure Math.13 (1)(Amer.Math.Soc.,Providence,R.I.) 391-396.

I56 (1971a) Measurable cardinals and Δ^1_3 well-orderings, Ann.Math.94, 414- 446

I57 (1971b) Some applications of model theory in set theory (revision of 1966), Ann.Math.Logic 3, 45-110.

I58 (1971c) The independence of Kurepa's conjecture and two-cardinal conjectures in model theory, in: D.S.Scott, ed., Axiomatic Set Theory, Proc. Symp, Pure Math.13(1)(Amer.Math.Soc.,Providence, R.I.) 383-395.

J.H.Silver

I59 (1974) On the singular cardinals problem, Proc. of Intern.congress of mathematicians, Vancouver 1974.pp 265-268.

R.M.Solovay

I60 (1967) A non-constructible Δ_3^1 set of integers, Trans. Amer.Math.Soc.127, 58-75.

I6I (1969) The cardinality of Σ_2^1 sets, in: J.J.Bulloff, T.C.Holuoke and S.W.Hahn, eds.,Foundations of Mathematics, Symposium papers commemorating the sixtieth birthday of Kurt Gödel, 1966 (Springer, Berlin) 58-73.

I62 (1970) A model of set theory in which every set of reals is Lebesgue measurable, Ann.Math.92, 1-56.

I63 (1971) Real-valued measurable cardinals, in: D.S.Scott, ed.,Axiomatic Set Theory, Proc.Symp.Pure Math.13 (1)(Amer.Math.Soc.,Providence,R.I.) 397-428.

I64 (1972) Strongly compact cardinals and the G.C.H., in: Proc.1971 Tarski Symp.

R.M.Solovay and S.Tennenbaum

I65 (1971) Iterated Cohen extensions and Souslin's Problem, Ann.Math.94, 201-245.

M.Souslin

I66 (1920) Problème (3), Fund.Math.1, 223

J.Stern

I67 (1976/7) Le problème des cardinaux singuliers, Séminaire Bourbaki, 29:494(1976/7) 494-01-494-14.

A.Tarski

I68 (1930) Une contribution à la théorie de la mesure, Fund.Math.15, 42-50.

I69 (1948) A problem concerning the notion of definability, J.Symb.Logic 13, 107-111.

I70 (1954) Theorems on the existence of successors of cardinals and the axiom of choice, Indag.Math.16, 26-32.

A.Tarski

171 (1958) Remarks on predicate logic with infinitely long expressions, Colloq.Math.6, 171-176.

S.Tennenbaum

172 (1968) Souslin's problem, Proc.Natl.Acad.Sci. U.S.A. 59, 60-63.

R.L.Vaught

173 (1963) Indescribable cardinals, Notices Amer.Math. Soc.10, 126.

P.Vopenka and P.Hájek

174 (1972) The Theory of Semisets (North-Holland,Amsterdam).

P.Vopenka and K.Hrbáček

175 (1966) On strongly measurable cardinals, Bull.Acad. Polon.Sci.Sér.Sci.Math.Astron.Phys.14, 587-591.

J.M.Weinstein

176 (1965) First-order properties preserved by direct product,Ph.D.Thesis, Univ.of Wisconsin, Madison, Wisc.