MATEMATIČKI VIDICI 4

TATOMIR P. ANĐELIĆ

UVOD U ASTRODINAMIKU

MATEMATIČKI INSTITUT
BEOGRAD, 1983.

MATEMATIČKI VIDICI 4

TATOMIR P. ANĐELIĆ

UVOD U ASTRODINAMIKU

MATEMATIČKI INSTITUT
BEOGRAD 1983.

Recenzenti:

Vujičić dr Veljko, redovni profesor Prirodno-matematičkog fakulteta u Beogradu
Leko dr Marko, redovni profesor Prirodno-matematičkog fakulteta u Beogradu

Primljeno za štampu na 130. sednici Naučnog veća Matematičkog instituta
od 27. decembra 1982. godine

Tehnički urednik
Milan Čavčić

Tiraž: 700

Izdaje: Matematički institut — Beograd, Knez Mihailova 35
Republička zajednica nauke SR Srbije učestvovala je u troškovima izdavanja ove publikacije.
Prema mišljenju Republičkog sekretarijata za kulturu SR Srbije, ova publikacija
je oslobođena poreza na promet.

Štampa: Beogradski izdavačko-grafički zavod, Beograd, Bulevar vojvode Mišića 17

S A D R Ž A J

Strana

PREDGOVOR

Niz godina sam predavao astrodinamiku kao jedan od predmeta na postdiplomskim studijama mehanike na Prirodno-matematičkom fakultetu u Beogradu. Smatrao sam da, u vezi sa savremenim kosmičkim istraživanjima i poduhvatima, treba, ne samo u specijalističkim spisima, već bar u postdiplomskoj nastavi, ukazati na problematiku astrodinamike i tako pružiti osnov za dalja usavršavanja i istraživanja.

U tom smislu ja sam ovde izneo uglavnom *uvod*, neophodan za dublja naučna istraživanja. Prikazani su elementi raketodinamike, astronomije, nebeske i racionalne mehanike zajedno sa teorijskim opisom niza osnovnih kosmičkih manevara i nekim mojim ličnim prilozima. U neka podrobnija izlaganja teorije i prakse kosmičkih letova ovde nisam ulazio.

Zahvaljujem se Matematičkom institutu koji je omogućio da ova moja knjiga bude objavljena i dostupna širem krugu čitalaca.

Posebno se zahvaljujem prof. dr Draganu Trifunoviću koji je učestvovao u isdavanju ove knjige.

Beograd, juna 1980. *Tatomir P. Anđelić*

ASTRODINAMIKA

Astrodinamika, shvaćena kao mehanika kosmičkih letova, razvila se iz tri glavna izvora: nebeske mehanike, balistike i aerodinamike (mehanike leta u atmosferi), koristeći se njihovim metodama i rezultatima. Pri tome se mora voditi, naravno, računa i o elementima astronomije kao nauke o sredini u kojoj se letelice kreću, o raketodinamici kao nauci o tehničkom ostvarivanju kosmičkih letova i, najzad, o metodama navigacije i kontrole leta upravljivih letelica i projektila.

Nebeska mehanika je potrebna astrodinamici stoga što se slobodni letovi (oni bez pogona) veštačkih objekata, u gravitacionom polju van atmosfere odvijaju po istim zakonima po kojima se planete kreću oko Sunca.

Balistika je od značaja što ona proučava slobodni nepogonski let izbačenih projektila u gravitacionom polju i igra posebno značajnu ulogu pri izbacivanju veštačkih satelita i ostalih kosmičkih letelica i posebno u nekim kosmičkim manevrima.

Aerodinamika je potrebna u vezi sa zakonima leta u atmosferi, otporom vazduha, klasifikacijom profila letelica, pitanjima povratka kosmičkih letelica na Zemlju.

Iznošenje nekih potpunijih podataka o razvoju prethodnih nauka ovde ne dolazi u obzir. Navešćemo samo da je od tekovina nebeske mehanike astrodinamika usvojila: rešenje problema dva i tri tela, teoriju putanja i njihovih poremećaja, Laplasovu sferu dejstva, uopšte teoriju kretanja tela u gravitacionom polju itd.

Kao primena i proširenje se sad postavljaju razna, u odnosu na klasičnu racionalnu i nebesku mehaniku, sasvim nova pitanja u vezi sa kretanjem ljudskom rukom izbačenih objekata u prostor: tzv. kosmičkih brzina, transfernih putanja, njihove optimalnosti, njihovog povratka na Zemlju itd.

Najzad, pred kraj XIX veka je došlo do osnivanja i razvijanja mehanike tela promenljive mase i razvoja raketodinamike u pravom smislu reči, koja je omogućila ostvarenje kosmičkih letova.

I OSNOVNI POJMOVI RAKETODINAMIKE

1. Zakon o održanju količine kretanja

Za izučavanje raketodinamike, kao dinamike raketnog leta, potrebno je prethodno poznavanje zakona dinamike i svega onoga što je s tim u vezi: pojmova mase i težine, osnovnog sistema jedinica i dimenzija veličina itd. O kretanju u gravitacionom polju biće ovde govora. Osim toga, kako zakon o održanju količine kretanja (odn. zakon o kretanju centra mase tela i sistema) zauzima u tome posebno mesto izložićemo ga ukratko i ovde.

Količina kretanja $\boldsymbol{K}$ tela mase m, koje se kreće brzinom v iznosi

$$\boldsymbol{K} = m\,\boldsymbol{v}. \tag{1}$$

Ako je masa tela u kretanju konstantna, kako je to usvojeno u Njutnovoj mehanici, tj. ako se masa uopšte ne menja i u toku kretanja nema ni pripajanja ni otpadanja mase, onda važi drugi Njutnov zakon (*osnovna jednačina dinamike* — $\boldsymbol{w}$ je ubrzanje tela)

$$\boldsymbol{F} = m\,\boldsymbol{w} = m\,\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \frac{d\boldsymbol{K}}{dt}, \tag{2}$$

gde sila $\boldsymbol{F}$ može zavisiti od položaja, brzine, vremena i drugih parametara. Odatle se dobiva zakon količine kretanja u diferencijalnom obliku

$$d\boldsymbol{K} = d(m\,\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{F}\,dt = d\boldsymbol{J}, \tag{3}$$

gde je $d\boldsymbol{J}$ *elementarni impuls* sile $\boldsymbol{F}$ i rečima: diferencijal količine kretanja jednak je elementarnom impulsu sile.

Najzad, imamo posle integracije od t_0 do t

$$\boldsymbol{K} - \boldsymbol{K}_0 = m\,\boldsymbol{v} - m\,\boldsymbol{v}_0 = \int_{t_0}^{t} \boldsymbol{F} dt = \boldsymbol{J}, \tag{4}$$

tj. konačna promena količine kretanja ($\boldsymbol{v}_0$ je početna brzina) jednaka je impulsu sile $\boldsymbol{J}$ u intervalu $t_0 - t$.

Ako je, pri tome, projekcija sile $\boldsymbol{F}$ na *neki* stalan pravac ($\boldsymbol{e} = \text{const}$) jednaka nuli, tj. ako je

$$\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{e} = \frac{d(m\,\boldsymbol{v})}{dt} \cdot \boldsymbol{e} = \frac{d(m\,\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{e})}{dt} = 0,$$

tada postoji jedan, tzv. prvi integral količine kretanja

$$m\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{e}=\boldsymbol{K}\cdot\boldsymbol{e}=0=\text{const.}$$

Kad je sila stalnog pravca pa nema projekcije na dva stalna nekolinearna vektora $\boldsymbol{e}_1=\text{const.}$ i $\boldsymbol{e}_2=\text{const}$, onda će jednačine kretanja imati dva prva integrala količine kretanja.

Najzad, ako je spoljašnja sila $\boldsymbol{F}=0$, onda se iz (2) dobiva

$$\boldsymbol{K}=m\boldsymbol{v}=\text{const.} \qquad (5)$$

i u tom slučaju se *količina kretanja ne menja u toku kretanja — ostaje održana*, a *centar mase tela se kreće po inerciji jednoliko i pravolinijski.*

Prema tome samo spoljašnje sile mogu menjati putanju centra mase i unutrašnje sile (sile čiji izvor nije u spoljašnjim masama) ne utiču na njegovo kretanje, već mogu samo pomerati delove tela jedne u odnosu na druge. Tako u slučaju kretanja tela u polju neke sile na pr. gravitacije, težište tela se kreće kao materijalna tačka (sa masom celog tela) i na to kretanje unutrašnje sile ne mogu uticati. Međutim, s obzirom na zakon o nezavisnosti dejstva sile može se svako složeno kretanje zamisliti razložno na kretanja pod dejstvom posebnih sila, i tako se kretanje napr. balističkog projektila može zamisliti kao sastavljeno uglavnom od kretanja po inerciji, privlačenja od strane nekog centra i eventualnih otpora sredine.

2. **Zakoni reaktivnog pogona**

Na telo u kretanju čija se masa u toku vremena menja $m=m(t)$ (mehaničkim otpadanjem — odbacivanjem ili pripajanjem, ali ne u smislu teorije relativnosti) dejstvuje u smislu zakona akcije i reakcije tzv. *reaktivna sila*. Takvo kretanje opisuje *jednačina Meščerskog* za izraz reaktivne sile i *obrazac Cjolkovskog* koji određuje brzinu v kretanja usled takve sile i zavisnosti od brzine c odvajanje mase u slučaju odbacivanja mase. U tom slučaju se brzina tela povećava, dok se ona u slučaju dodavanja mase smanjuje.

Izvođenje ovih osnovnih relacija reaktivnog pogona prikazaćemo ovde u izvesnoj neophodnoj meri kritički s obzirom na polazne stavove pri njihovom izvođenju.

Na pr. vrlo često se za izvođenje izraza za reaktivnu silu (uglavnom slučaj odvajanja mase od osnovnog tela) koristi prosto zakon akcije i reakcije.

Tako Vertregt (Vertregt) [43] i neki drugi uzimaju kao akciju $\boldsymbol{F}$ — silu kojom se masa dm izbacuje brzinom $\boldsymbol{c}$ za elementarno vreme dt, tj.

$$\boldsymbol{F}=\boldsymbol{c}\,\frac{dm}{dt},$$

a za reakciju $\boldsymbol{R}$ — silu koja masi saopštava ubrzanje $\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}$, tj.

$$\boldsymbol{R}=m\,\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}.$$

Pema tome iz zakona akcije i reakcije (da su suprotne) proističe $\boldsymbol{R} = -\boldsymbol{F}$, odnosno

$$m\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = -\boldsymbol{c}\frac{dm}{dt}. \tag{6}$$

Kako su vektori $\dfrac{d\boldsymbol{v}}{dt}$ i $\boldsymbol{c}$ kolinearni, može se prethodna relacija napisati u skalarnom obliku

$$m\frac{dv}{dt} = -c\frac{dm}{dt}, \tag{7}$$

pri čemu je $\dfrac{dm}{dt}$ uzeto apsolutno $\left(\dfrac{dm}{dt} > 0\right)$. Inače uzeto tačno u obzir, pri smanjivanju mase tela, biće $\dfrac{dm}{dt} < 0$ i zove se *brzina rashoda mase*. Sa druge strane, ako se telo kreće brzinom $\boldsymbol{v}$ u odnosu na neki nepokretni sistem referencije, i ako je brzina izbačene čestice u odnosu na taj isti nepokretni sistem $\boldsymbol{u}$, tada je $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}$ relativna brzina čestice u odnosu na pokretno telo.

Najzad, kretanje ovakvog tela može se (kad je reč o njegovom progresivnom kretanju) smatrati kao kretanje materijalne tačke samo pod pretpostavkom da je pri smanjenju mase tela pomeranje centra mase (težišta) u samom telu zanemarljivo.

Dakle, *reaktivna sila* $\boldsymbol{F}_r$ *(jednačina Meščerskog)*, prema (6) i (7), glasi

$$\boldsymbol{F}_r = -\boldsymbol{c}\frac{dm}{dt} = (\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v})\frac{dm}{dt}, \tag{8}$$

ili u skalarnom obliku

$$F_r = -c\frac{dm}{dt}. \tag{9}$$

U slučaju da na uočeno telo osim reaktivne sile $\boldsymbol{F}_r$ dejstvuje još neka spoljašnja aktivna sila $\boldsymbol{F}$ vektorska diferencijalna jednačina kretanja tela imaće oblik

$$m\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = m\boldsymbol{w} = \boldsymbol{F} + \boldsymbol{F}_r = \boldsymbol{F} - \boldsymbol{c}\frac{dm}{dt}, \tag{10}$$

što je u skalarnom obliku za $\dfrac{dm}{dt} > 0$

$$m\ddot{x} = X - c_1\frac{dm}{dt},$$

$$m\ddot{y} = Y - c_2\frac{dm}{dt},$$

$$m\ddot{z} = Z - c_3\frac{dm}{dt}.$$

Pri tome je

$$w=\{\dot{x},\ \dot{y},\ \dot{z}\},\ F=\{X,\ Y,\ Z\},\ c=\{c_1,\ c_2,\ c_3\}.$$

Očigledno je da se, za $c=0$ (relativna brzina čestice jednaka nuli), jednačina (10) svodi na osnovnu Njutnovu jednačinu dinamike.

Može se još biti u nedoumici, kako to da „reaktivna" sila kao unutrašnja može pokretati telo, a rečeno je, s obzirom na zakon o održanju količine kretanja, da unutrašnje sile, bez obzira na njihov mehanizam, ne mogu uticati na kretanje težišta. Međutim, unutrašnje sile mogu pomerati pojedine delove tela jedne u odnosu na druge i u našem slučaju reaktivna sila unutrašnjeg porekla koja nastaje pri otpadanju mase ustvari pokreće *preostali* deo tela posle izbacivanja dela mase.

Jednačina (7) se može napisati u obliku

$$m\,dv=-c\,dm,\quad \text{odn.}\quad dv=-c\,\frac{dm}{m},\tag{11}$$

odakle se onda integracijom od nekog trenutka t_0 do trenutka t dobiva

$$v-v_0=c\ln m\Big|_{t_0}^{t}=c\ln\frac{M}{m},\tag{12}$$

gde je v_0 brzina tela u trenutku t_0, a v njegova brzina u trenutku t, dok je M masa tela na startu za $t=t_0$, a m masa kao funkcija vremena u određenom kasnijem trenutku t.

Ako je $v_0=0$, onda se prethodni obrazac može napisati u obliku

$$v=c\ln\frac{M}{m},\tag{13}$$

i to je *obrazac Cjolkovskog* za određivanje brzine tela, kad je brzina otpadanja mase (isticanja gasova) jednaka c. Brzina v je ona brzina koju telo *(raketa)* postiže, ako se ne uzima u obzir gravitacioni ili neki drugi uticaj (napr. otpor vazduha) i na nju nema uticaja oblik putanje.

Treba samo obratiti pažnju da je prelaz od (11) do (12) odn. (13), tj. integracija, izvedena pod pretpostavkom da je brzina c u posmatranom intervalu $t-t_0$ konstantna ili bar približno konstantna, inače bi se pri nekoj promenljivosti o tome moralo voditi računa.

Jasno je, da, ako se i pređe preko upadljive površnosti prethodnog izvođenja jednačine Meščerskog (8), ostaje ipak činjenica da uopšte nisu jasno uočljive pretpostavke koje se pri tome izvođenju čine — od čega se polazi. To svakako treba kritički razmotriti, jer se radi o značajnim pitanjima koja stoje u osnovi raketodinamike.

Izvođenju jednačine Meščerskog može se stoga, što se takođe nalazi u literaturi: Kosmodemjanski, Rupe (Ruppe) [32] pristupiti i ovakvim razmišljanjem. Odbijeni deo mase Δm tela i ostatak mase $m-\Delta m$ posmatraju se kao dva neelastična čvrsta (čak kruta) tela pri sudaru. Tada je poznato da su njihove količine kretanja posle sudara (u trenutku odvajanja) suprotne. Dakle,

$$(m-\Delta m)\,\Delta v=-c\,\Delta m,\tag{14}$$

ako je Δv promena veličine brzine osnovnog tela a c brzina odvojene mase (odbijenog tela). Tada se iz (14) sasvim korektno dobiva, zanemarivanjem malih drugog reda $(\Delta m \, \Delta v)$, relacija

$$m \Delta v = -c \Delta m,$$

iz koje se deobom sa Δt i prelazom ka granici $(\Delta t \to 0)$ odmah izvodi relacija (11). Pretpostavka od koje se ovde polazi jeste da postoji čvrst dodir osnovnog i odbačenog tela. To bi značilo da se ne može govoriti o reaktivnoj sili u ovom smislu, osim ako su osnovno i odbačeno telo prethodno bili u čvrstom kontaktu.

Pitanje je sad, da li je hipoteza kontakta osnovnog tela i odbijene mase i njihova čvrstina neophodna pri izvođenju izraza za reaktivnu silu i za jednačinu kretanja tela promenljive mase, kad je poznato da ona važi i pri odvajanju fluida, što ukazuje na to da hipoteza čvrstog kontakta nije neophodna.

Stoga ćemo sad pokazati izvođenje jednačine Meščerskog prema onome kako je Kosmodemjanski to uradio u vektorskom obliku na osnovu skalarnog izvođenja Meščerskog (Levi-Čivita je izveo kasnije te relacije u vektorskom obliku) polazeći od zakona o održanju količine kretanja.

Telo (u širem smislu materijalni sistem) mase m neka se kreće izolovano (ili se tako zamisli) od dejstva spoljašnjih sila i nekim unutrašnim silama odbije se deo Δm mase osnovnog tela. Prema zakonu o održanju količine kretanja biće količina kretanja tela $m - \Delta m$, čija se brzina v (u odnosu na nepokretni sistem) promenila u $v + \Delta v$ i odbijenog tela Δm, koji se u odnosu na nepokretni sistem kreće brzinom $\boldsymbol{u}$, biti jednaka onoj pre raspada, tj.

$$(m - \Delta m)(\boldsymbol{v} + \Delta \boldsymbol{v}) + \boldsymbol{u} \Delta m = m \boldsymbol{v}.$$

Ako se ovde mala veličina $\Delta m \, \Delta v$ drugog reda zanemari u odnosu na male prvog reda, dobiće se

$$m \Delta \boldsymbol{v} = -(\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}) \Delta m,$$

i kad se stavi $\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v} = \boldsymbol{c}$, podeli sa Δt i pređe ka granici $(\Delta t \to 0)$ dobiva se relacija (6)

$$m \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = -\boldsymbol{c} \frac{dm}{dt}.$$

Ovde je samo jedno jasno da je dm uzeto pozitivno, ali nekih drugih pretpostavki o karakteru sistema nema. Prema tome, ove relacije važe i onda kad je u pitanju neki sistem međusobno povezanih čestica bez neophodnosti da on bude čvrsto telo.

Jednačina (10) pokazuje da je kretanje tela promenljive mase (rakete) u stvari složeno od kretanja

$$m \frac{d\boldsymbol{v}_s}{dt} = \boldsymbol{F}, \tag{15}$$

pod dejstvom spoljašnjih sila i kretanja

$$m \frac{d\boldsymbol{v}_r}{dt} = -\boldsymbol{c} \frac{dm}{dt}, \tag{16}$$

usled dejstva reaktivne sile. Pri tome su $\dfrac{d\boldsymbol{v}_s}{dt}$ i $\dfrac{d\boldsymbol{v}_r}{dt}$ odgovarajuća ubrzanja.

Međutim, ne treba ispustiti iz vida ni jednu pretpostavku koja se uzima pri korišćenju jednačine (10), a to je da se telo promenljive mase posmatra tako da npr. u gravitacionom polju ono *ne privlači konačne mase* već samo biva privlačeno od njih, pa prema tome ono ne izazıva poremećaje u kretanju okolnih tela konačne mase. Bliže odredbe o redu veličina ovih privlačenja ne postoje.

Sama jednačina (10) natura i pitanje načina i mogućnosti rešenja konkretnih zadataka, koji mogu biti vrlo važni. Treba znati da se, pri tom, u najopštijem slučaju ima posla sa diferencijalnom jednačinom koja ispisana u potpunosti eksplicitno ima oblik

$$m(t)\,\frac{d\,\boldsymbol{v}(t)}{dt}=\boldsymbol{F}(t)-\boldsymbol{c}(t)\,\frac{dm(t)}{dt}, \tag{17}$$

gde ni $\boldsymbol{c}$ ne mora biti konstanta. Osim toga, ako je spoljašnja sila gravitaciona, ona se svakako za vreme aktivnog (upravljivog) leta pri udaljavanju od Zemlje menja. Međutim i to pitanje je još nedovoljno proučeno.

Najzad, pokazaćemo još jedno izvođenje jednačina raketnog leta, koje se zasniva neposredno na samom zakonu količine kretanja a ne na njegovoj posledici zakonu o održanju količine kretanja. Što je najvažnije ne uvlače se nikakve pretpostavke o karakteru promenljivog dinamičkog sistema izuzev onih sasvim opšte usvojenih. Osim toga se pri izvođenju jednačine raketnog leta ne razdvaja reaktivni pogon od kretanja pod dejstvom aktivne sile. Ideja za to potiče od autora Rosera, R. Njutna i Grosa (J. B. Rosser, R. B. Newton, G. L. Gross) [31] ali je naše izvođenje originalno.

Zakon količine kretanja u diferencijalnom obliku (3) izvodi se pod pretpostavkom da je masa m tela u kretanju nepromenljiva i da se količina kretanja menja samo usled promene brzine $\boldsymbol{v}$. Taj zakon se može, kad je reč o konačnim priraštajima pomoću teoreme o srednjim vrednostima napisati u obliku

$$\boldsymbol{K}(t+\Delta t)-\boldsymbol{K}(t)=\boldsymbol{F}(t+\Delta t)\,\Delta t. \tag{18}$$

Odavde se naravno deobom sa Δt i prelazom ka granici može doći do osnovne jednačine dinamike (2) i zakona količine kretanja u diferencijalnom obliku (3).

Međutim, ako se masa m tela u toku kretanja menja, onda će se posle promene vremena Δt, količina kretanja promeniti ne samo usled promene brzine kretanja već i usled promene mase. To znači mesto (18) treba napisati

$$\boldsymbol{K}^*(t+\Delta t)-\boldsymbol{K}(t)=\boldsymbol{F}^*(t+\Delta t)\,\Delta t, \tag{19}$$

gde je sad $\boldsymbol{K}^*$ nova vrednost količine kretanja usled dvostruke promene a $\boldsymbol{F}^*$ nova ukupna sila koja pri tom dejstvuje.

Očigledno je da se sad može napisati

$$\boldsymbol{K}^*(t+\Delta t)=\boldsymbol{K}(t+\Delta t)+\Delta\boldsymbol{K}, \tag{20}$$

gde je $\boldsymbol{K}(t+\Delta t)$ količina kretanja promenjena samo usled promene brzine, dok je $\Delta\boldsymbol{K}$ onaj deo promene količine kretanja koji potiče od promene mase. Udeo promene količine kretanja usled smanjenja mase — odvajanja mase Δm od osnovnog tela brzinom $\boldsymbol{u}$ biće određen izrazom

$$\Delta\boldsymbol{K}=-\boldsymbol{u}\,\Delta m, \tag{21}$$

gde je brzina $\boldsymbol{u}$ određena u odnosu na isti nepokretni sistem kao i brzina tela $\boldsymbol{v}$, a $\Delta m>0$.

Kad se (21) unese u (20) i to posle stavi u (19) dobiće se

$$K(t+\Delta t)-K(t)-u\Delta m=F^*(t+\Delta t)\Delta t.$$

Deobom ove relacije sa Δt i prelazom ka granici dolazimo do

$$F-u\frac{dm}{dt}=F^*, \tag{22}$$

jer je

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{K(t+\Delta t)-K(t)}{\Delta t}=F,$$

spoljašnja aktivna sila, a

$$\lim_{\Delta t\to 0} u\frac{\Delta m}{\Delta t}=u\frac{dm}{dt}.$$

Sa druge strane deobom relacije (19) neposredno sa Δt i prelazom ka granici izvodi se

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{K^*(t+\Delta t)-K(t)}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{[mv]_{t+\Delta t}-[mv]_t}{\Delta t}=\frac{d(mv)}{dt}=F^*. \tag{23}$$

Kad se izjednače vrednosti (22) i (23) za F^* dobiće se

$$\frac{d(mv)}{dt}=F-u\frac{dm}{dt}, \tag{24}$$

odn. jednačina (10)

$$m\frac{dv}{dt}=F-(u-v)\frac{dm}{dt}=F-c\frac{dm}{dt}.$$

Do rezultata (23) može se doći i ovakoim razmišljanjem. Polazeći od

$$K^*(t+\Delta t)=(m-\Delta m)(v+\Delta v), \tag{25}$$

što je svakako promena količine kretanja usled promene brzine i promene mase i ako se $\Delta m\Delta v$ zanemari kao mala višeg reda a uzme u obzir da je $K(t)=mv$ i sve to unese u (19) dobiće se

$$m\Delta v-v\Delta m=F^*\Delta t.$$

Posle deobe i prelaza ka granici proističe jednačina (23)

$$m\frac{dv}{dt}-v\frac{dm}{dt}=\frac{d(mv)}{dt}=F^*.$$

3. **Istorijske primedbe**

Krajem XIX i početkom XX veka ruski naučnici *Ivan Vsevolodovič Meščerski* (1859—1935) i *Konstantin Eduardovič Cjolkovski* (1857—1935) postavili su osnove mehanike promenljive mase pa time i raketodinamike.

Osnovni radovi o tome su:

И. В. Мещчерский — *Динамика точки переменной массы.* С. Петербург, 1897.

Уравнения движения точки переменной массы в общем случае. С. Петербург, 1904.

К. Э. Циолковский — *Исследование мировых пространств реактивными приборами.* Калуга, 1903.

Osim ovih prvih publikacija u vezi sa mehanikom tela promenljive mase i raketodinamikom, koja se počela razvijati tek između dva rata, postoje i neke publikacije poznatog italijanskog naučnika jevrejskog porela *Tulija Levi-Čivite* (Tullio Levi-Civita 1873—1941). Njegovi su radovi u vezi sa ovim pitanjem:

T. Levi-Civita: — *Sul moto di un corpo di massa variabile. Rendiconti Accad. dei Lincei*, 1928 (6), (8) *p.* 329-333.

Aggiunta à la nota precedente, *p.* 621-622.

Ancora sul moto di un corpo di massa variabile. Rendiconti Accad. dei Lincei 1930, *p.* 626-632.

Dakle, iako su osnovne jednačine o kretanju tela promenljive mase postojale, Levi-Čivita ih izvodi ponovo ne pominjući ruske naučnike. Činjenica što je Meščerski svoje jednačine izveo u skalarnom obliku, a Levi-Čivita u vektorskom ne igra pri tom neku naročitu ulogu.

S obzirom da je Tulio Levi-Čivita veliki naučnik i da mu se ne može prebaciti nekorektnost plagijata, ovo se može objasniti samo kao nepoznavanje ruskih radova. Ti radovi su bili: 1) objavljeni na ruskom jeziku, a tada ruski jezik nije bio u nauci toliko poznat kao danas, i 2) o kretanju raketa, tj. tela promenljive mase počelo se šire govoriti tek posle prvog svetskog rata!

Prema tome, Levi-Čivita je ponovo otkrio osnovne jednačine kretanja tela promenljive mase nezavisno od Meščerskog i Cjolkovskog.

Danas se samo u ruskoj literaturi i literaturama bliskim ruskoj nauci ove jednačine nazivaju ispravno po imenu *Meščerskog* i Cjolkovskog, a u tzv. „zapadnoj" literaturi se uz ove jednačine obično ne pominje nijedno ime. Razlog za to je s jedne strane nepoznavanje činjeničnog stanja a s druge možda želja da se ne ošteti ni uspomena na Levi-Čivitu, koji je *bona fide*, istina 31 godinu posle Meščerskog, otkrio iste zakone. Još nešto u tome verovatno igra neku ulogu a to je savršena jasnost i elementarnost izvođenja ovih zakona i često uverenja da je to gotovo samo po sebi razumljivo i da je u neku ruku sasvim prirodna posledica poznatih zakona mehanike.

4. Sastav i performanse rakete

Raketa je letelica koja se kreće reaktivnim pogonom nastalim *odbacivanjem* sopstvene *mase* pomoću raketnog motora. To je letelica koja za svoj let ne zahteva prisustvo neke okolne sredine i može da se kreće u vodi, vazduhu, međuplanetnom prostoru itd. Ponekad se i sam aparat za odbacivanje mase naziva raketa. Inače reč raketa se odnosi uglavnom na: 1) one reaktivne letelice koje nose korisni teret u naučne ili neke druge praktične svrhe, i 2) na takve vojne letelice, nazvane i *projektili*, koje nose eksplozivne glave za razaranje i služe pretežno u vojne svrhe. Najzad reketom se nazivaju i poznati predmeti koji služe za vatromet a zasnivaju se takođe na principu reaktivnog pogona.

U sastav rakete unosi se na naročiti način pogonski materijal spremljen za odbacivanje i on može biti zasad čvrst i tečan. Savremeni tehnički razvoj koristi uglavnom tečni pogonski materijal i on se sastoji iz dva dela *goriva* u užem smislu i *paljiva* (oksidatora) koji služi za paljenje i izbacivanje gasova.

Sama raketa se sastoji od ovih osnovnih delova (prikazano shematski po Vertregtu [43] na sl. 1):

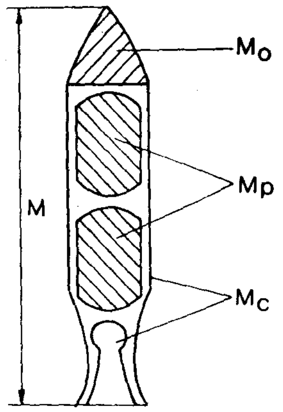
a) *Korisni teret*, čiju masu ćemo obeležiti sa M_0 — sastoji se od istraživačkih instrumenata i osoblja. Korisni teret obuhvata i masu same kabine u kojoj su smešteni instrumenti i posada i sve ono što je neophodno za održavanje posade (klimatski uređaji, rezerve hrane itd.).

b) *Pogonski materijal*, čija masa neka bude M_p a obuhvata gorivo i paljivo.

Upravo može se reći da je M_p masa svih onih supstancija koje se izbacuju za vreme leta.

c) *Ukupna totalna masa*, obeležena sa M.

d) *Konstrukciona masa* M_c dobiva se, kad se od celokupne mase M oduzme masa korisnog tereta i masa pogonskog materijala, tj. $M_c = M - M_o - M_p$. Ona predstavlja masu praznih rezervoara, motora, kontejnera u kome je sve smešteno, kontrolnih uređaja itd.



Sl. 1

Neke razmere ovih masa su karakteristične za performanse rakete. Tako razmera ukupne (startne) mase M i mase M_o korisnog tereta, tj.

$$k = \frac{M}{M_o}, \tag{26}$$

koja se naziva *razmera korisnosti*, određuje ukupnu masu rakete za unapred dati korisni teret. Veličina ove razmere zavisi od visine i brzine koje se mogu postići, odn. koje treba postići, ali i od prirode goriva, konstrukcije rakete i nekih drugih okolnosti.

Cilj je konstruktora da se veličina ove razmere učini što je moguće manjom, tako da za dati korisni teret celokupna masa bude što manja, odn. da za datu celokupnu masu korisni teret bude što veći.

Druga važna razmera — *strukturna rasmera s* — jeste odnos zbira pogonske i konstrukcione mase prema konstrukcionoj masi, tj.

$$s = \frac{M_p + M_c}{M_c}. \tag{27}$$

Ova razmera zavisi od više faktora a pre svega od upotrebljenog materijala i goriva, konstrukcije rakete itd. Za savremene rakete sa tečnim gorivom ova razmera iznosi nešto oko 10, dok se pri upotrebi čvrstih goriva očekuje i dvostruko više.

Najzad, za određivanje performansi raketa karakteristična je i *razmera masa* r, tj. razmera celokupne mase rakete — njene startne mase i mase rakete bez pogonske mase, odn. mase korisnog i konstrukcionog dela

$$r = \frac{M}{M - M_p} = \frac{M}{M_o + M_c}, \tag{28}$$

pošto je

$$M - M_p = M_o + M_c.$$

Ulogu razmere r pokazaćemo najbolje na ovaj način. Iz obrasca Cjolkovskog (13) vidi se da se najveća brzina v_{max} rakete može postići posle sagorevanja celokupnog goriva, tj. kad bude

$$m = M_k = M - M_p,$$

pa se stoga obrazac za najveću brzinu, koja se može postići određenom raketom, moče napisati u obliku

$$v_{max} = c \ln \frac{M}{M - M_p} = c \ln r. \tag{29}$$

Odavde je očigledno da će maksimalna brzina koju neka raketa može postići biti veća od brzine isticanja gasova c, tj. $v_{max} > c$, onda kad je

$$r > e\,(= 2{,}7182.),$$

inače je manja ili izuzetno jednaka.

To pokazuje da je razmera r jedna od najvažnijih karakteristika rekete.

Između tri prethodne razmere nije teško uspostaviti određenu vezu. Naime, biće

$$1 - \frac{1}{k} = 1 - \frac{M_o}{M} = \frac{M - M_o}{M} = \frac{M_p + M_c}{M} =$$

$$= \frac{M_p}{M} \cdot \frac{M_p + M_c}{M_p} = \left(1 - \frac{1}{r}\right)\left(1 - \frac{1}{s}\right)^{-1}, \tag{30}$$

pošto je iz (27)

$$\frac{M_p}{M_c} + 1 = s, \qquad \frac{M_c}{M_p} = \frac{1}{s-1},$$

pa je stoga

$$\frac{M_p + M_c}{M_p} = 1 + \frac{M_c}{M_p} = 1 + \frac{1}{s-1} = \frac{s}{s-1}.$$

Sa druge strane iz (28) se dobiva

$$r = \frac{M}{M - M_p} = \frac{1}{1 - \dfrac{M_p}{M}},$$

a odatle je

$$\frac{M_p}{M} = 1 - \frac{1}{r}.$$

Iz (30) se onda izvodi

$$\frac{k-1}{k} = \frac{r-1}{r} \cdot \frac{s}{s-1},$$

što, najzad, daje traženu vezu

$$k = r\,\frac{s-1}{s-r}. \tag{31}$$

Ova relacija služi za izračunavanje razmere korisnosti neke rakete, kad su date strukturna razmera i razmera masa.

5. **Potisak. Specifični impuls**

Ako je sagorevanje goriva rakete jednoliko ili bar približno jednoliko i ako je vreme trajanja sagorevanja u sekundama τ, može se, apsolutno uzeto, napisati

$$\frac{M_p}{\tau} = \text{brzina rashoda mase} = \frac{dm}{dt} = \dot{m} = q, \tag{32}$$

pri čemu je $m = m(t)$ promenljiva masa rakete u funkciji vremena. Međutim, korisni teret M_o i konstrukcioni elementi M_c se po pravilu ne menjaju ili bar ne u svakom trenutku vremena, pa se može napisati

$$q = \frac{dm}{dt} = \dot{m} = \frac{dm_p}{dt} = \dot{m}_p, \tag{33}$$

gde je m_p masa pogonskog materijala *shvaćena kao promenljiva u toku vremena.*

Veličina reaktivne sile (8) odn. skalarna vrednost (9) te sile, uzeta apsolutno, zove se *potisak* P (*thrust, тяга*), pa je

$$P = m w = m\,\frac{dv}{dt} = c\,\frac{dm}{dt} = c\,\dot{m}, \tag{34}$$

gde je $\dfrac{dv}{dt} = w$ ovde ubrzanje (njegova algebarska vrednost) koje potiče od reaktivne sile. S obzirom na (32) potisak se može izraziti o obliku

$$P = c\,q = c\,\dot{m} = c\,\dot{m}_p. \tag{35}$$

Pri tome je u sistemu CGS, dimenzija brzine isticanja c jednaka cm/s, brzina rashoda mase jednaka g/s, pa je onda dimenzija potiska data u dinima. Međutim, ako potisak treba izraziti u gramovima težine, onda treba podeliti još sa veličinom ubrzanja Zemljine teže i to po pravilu sa tzv. normalnim ubrzanjem $g_o = 980{,}665$. Tako se onda za potisak u gram-težinama dobiva

$$P = \frac{c\,\dot{m}_p}{g_o}. \tag{36}$$

Jasno je da se veličina potiska u klasičnim kilogram-težinama (kilopondima) odavde dobiva deobom još sa 10^3.

Međutim, ako se odmah želi izraziti potisak u savremenoj meri, tj. u njutnima (N), onda izraz (35) u dinima treba podeliti sa 10^5.

Da napomenemo uzgred da je jedna komponenta kretanja u slučaju reaktivnog pogona tzv. *pad pritiska* pri izlazu iz mlaznice. O njemu, naravno, može biti reči pri kretanju u vazduhu ili nekoj drugoj otpornoj sredini. To se mora računati kao komponenta potiska i obično je manjeg značaja a u vakuumu je nema.

Ta komponenta, kad postoji, određuje se na naredni način. Ako je P_1 pritisak u spoljašnjem prostoru a P_2 pritisak mlaza izduvnih gasova pred sam izlazak iz mlaznice i $\boldsymbol{n}$ jedinični vektor orijentisan unutra u mlaznicu, biće

$$p = (P_2 - P_1)\, S\, \boldsymbol{n}, \tag{37}$$

taj pad potiska, ako je S površina preseka otvora mlaznice. On je aerodinamičkog karaktera.

Ako se relacija (36) napiše u obliku

$$\frac{P}{\dot{m}_p} = \frac{c}{g_o}, \tag{38}$$

onda leva strana (razmera potiska i brzine rashoda mase) ili desna strana (razmera brzine isticanja gasova i ubrzanja Zemljine teže) određuje tzv. *specifični impuls* I_{sp} rakete. On se izražava u sekundama, jer je dimenzija količnika brzine i ubrzanja vreme, a u izvesnom smislu je takođe karakterističan za performanse rakete.

6. **Koeficijent korisnog dejstva rakete**

Koeficijent korisnog dejstva η rakete izražava se razmerom energije, izazvane postignutom brzionm v rakete posle izbacivanja celokupnog goriva M_p, tj. energije $\frac{1}{2} M_k v^2$, pri čemu je

$$M_k = M - M_p = M_o + M_c,$$

i energije u izbačenom materijalu (izduvnim gasovima) M_p brzinom c, tj. $\frac{1}{2} M_p c^2$.

Prema tome, biće

$$\eta = \frac{M_k}{M_p} \cdot \frac{v^2}{c^2}. \tag{39}$$

Sa druge strane, prema obrascu Cjolkovskog (13), biće maksimalna brzina v_k, apsolutno uzeta, na kraju sagorevanja celokupnog pogonskog materijala, poznata kao *karakteristična* ili *idealna brzina*

$$v_{\max} = v_k = c \ln \frac{M}{M_k}, \quad \text{odn.} \quad \frac{M}{M_k} = e^{v_k/c}. \tag{40}$$

Kako je

$$M_p = M - M_k = M_k \left(\frac{M}{M_k} - 1\right),$$

može se, s obzirom na prethodni rezultat, napisati

$$\frac{M_k}{M_p} = (e^{v_k/c} - 1)^{-1}.$$

Kad se ovo unese u (39) dobiće se najzad

$$\eta = \frac{(v_k/c)^2}{e^{v_k/c} - 1} \quad \text{ili} \quad \eta = \frac{\left(\ln \dfrac{M}{M_k}\right)^2}{\dfrac{M}{M_k} - 1}. \tag{41}$$

Odavde se sad može odrediti maksimum koeficijenta korisnog dejstva u odnosu na razmeru v_k/c i tako dobiva

$$\eta_{max} = 0{,}647,$$

za $v_k/c = 1{,}594$, odnosno

$$\frac{M}{M_k} = r = 4{,}93.$$

Dakle, maksimalna vrednost koeficijenta korisnog dejstva je za $v_k = 1{,}594\,c$. Međutim, ako napr. treba ostvariti $v_k = 5\,c$, onda tome odgovara vrlo nepovoljna razmera masa. Ona tada iznosi $r = 149$, a koeficijent korisnog dejstva je samo 0,169.

Iz prethodnog se vidi da je težište pitanja kako postići veliku brzinu v kretanja rakete u brzini c izbacivanja mlaza, tj. u tehnički ostvarljivoj brzini c.

7. Ubrzanje rakete. Pređeni put u toku pogonskog leta

Za ubrzanje reaktivne sile (uzeto apsolutno) može se prema (34) napisati

$$w = \frac{dv}{dt} = c\frac{\dot{m}}{m} = \frac{P}{m}. \tag{42}$$

Iz ove relacije je jasno, da, ako se kao uobičajeno zahteva *stalan potisak* ($P = \text{const.}$) pri odbacivanju materijala, onda, pošto se masa rakete u toku pogonskog leta smanjuje, mora ubrzanje rakete da raste.

Kako je na početku sagorevanja masa rakete M a po završetku sagorevanja ona iznosi $M - M_p$, onda je jasno da je najmanje ubrzanje

$$w_{min} = \frac{P}{M}, \tag{43}$$

a najveće

$$w_{max} = \frac{P}{M - M_p}. \tag{44}$$

Oba ova ubrzanja mogu se izraziti i pomoću karakterističnih razmera za let rakete. Tako, ako se u (43) unese vrednost P iz (35) i uzme u obzir da se (28) za ukupnu masu može napisati

$$M = \frac{r}{r-1} M_p,$$

onda iz (43) proističe

$$w_{\min} = c \frac{\dot{m}}{M_p} \cdot \frac{r-1}{r}.$$

Međutim, pošto je (ako je τ vreme sagorevanja)

$$\frac{M_p}{\tau} = \dot{m}, \tag{45}$$

odnosno

$$\frac{\dot{m}}{M_p} = \frac{1}{\tau},$$

dobiće se, najzad, za najmanje ubrzanje

$$w_{\min} = \frac{c}{\tau} \cdot \frac{r-1}{r}. \tag{46}$$

Na sasvim adekvatan način se od (44) dobiva za najveće ubrzanje izraz

$$w_{\max} = \frac{c}{\tau} (r-1). \tag{47}$$

U prethodnim obrascima je ubrzanje izraženo u cm s^{-2}, ali se u praksi ova ubrzanja rakete izražavaju u odnosu na normalno ubrzanje g_0 Zemljine teže i piše

$$w_{\min} = \frac{c}{g_0 \tau} \cdot \frac{r-1}{r}, \quad w_{\max} = \frac{c}{g_0 \tau} (r-1). \tag{48}$$

Deobom najvećeg i najmanjeg ubrzanja dobiva se

$$\frac{w_{\max}}{w_{\min}} = r, \tag{49}$$

odakle još jasnije proističe važnost razmere r masa rakete.

Kad je potisak stalan, mora, prema (35), biti $\dot{m} = \text{const.}$, tj. masa m je linearna funkcija vremena, pa će biti u nekom trenutku t

$$m = M - \dot{m}\, t,$$

gde je $\dot{m}\, t$ količina izbačenog materijala. Tada se iz (42) dobiva

$$dv = c \frac{\dot{m}}{m} dt = c \frac{\dot{m}}{M - \dot{m}\, t} dt, \tag{50}$$

a odatle integracijom od $v_0 = 0$ do v i od t_0 do t izvodi poznati obrazac Cjolkovskog

$$v = c \ln \frac{M}{m},$$

gde je M vrednost od $M - \dot{m}\, t$ za $t = 0$.

Ako, međutim, u toku pogonskog leta rakete treba iz određenih razloga obezbediti *konstantno ubrzanje* ($w = \text{const.}$) tada se, prema (42), mora u toku leta zajedno sa opadanjem mase smanjivati i potisak. Tada iz (42) imamo

$$w = \frac{dv}{dt} = c\,\frac{\dot{m}}{m} = a = \text{const.}, \tag{51}$$

odnosno

$$dv = a\,dt \quad \text{i} \quad v = at, \tag{52}$$

ako je početna brzina jednaka nuli.

Kad se vrednost $\frac{dv}{dt}$ za reaktivno ubrzanje iz (51) unete u jednačinu Meščerskog u obliku (7), dobiće se

$$\frac{dm}{dt} = -\frac{\dot{m}}{m}\, m,$$

ili

$$\frac{dm}{m} = -\frac{\dot{m}}{m}\, dt,$$

tj. pošto je iz (51)

$$\frac{\dot{m}}{m} = \frac{a}{c}, \tag{53}$$

najzad

$$\frac{dm}{m} = -\frac{a}{c}\, dt.$$

Integracijom levo od M do m a desno od 0 do t dobiće se s obzirom na (52)

$$\ln \frac{M}{m} = \frac{at}{c} = \frac{v}{c}, \tag{54}$$

što daje eksponencijalni zakon opadanja mase

$$m = M\, e^{-v/c} = M\, e^{-\frac{a}{c}t}. \tag{55}$$

Za vreme računato od 0, kad je trajanje sagorevanja (odbacivanja) materijala τ, biće na kraju sagorevanja dostignuta krajnja brzina, prema (51)

$$v_k = a\,\tau, \tag{56}$$

a masa rakete preostala posle sagorevanja biće

$$m_k = M\, e^{-\frac{a}{c}\tau}. \tag{57}$$

Relacija (53) je u stvari obrazac Cjolkovskog.

Pređeni put u toku pogonskog leta s od početka kretanja do nekog trenutka t može se izvesti iz relacije

$$v = \frac{ds}{dt} = c \ln \frac{M}{m}. \tag{58}$$

Pri tome se pređeni put u slučaju stalnog potiska razlikuje od onog pređenog za isto vreme, kad je ubrzanje stalno.

U slučaju stalnog potiska je $\dot{m} = \text{const.}$ pa za trenutnu vrednost razmere masa imamo

$$\ln \frac{M}{m} = -\ln \frac{m}{M} = -\ln \frac{M - \dot{m}\,t}{M} = -\ln\left(1 - \frac{\dot{m}\,t}{M}\right),$$

i relacija (58) se može napisati u obliku

$$ds = -c \ln\left(1 - \frac{\dot{m}}{M}\,t\right) dt.$$

Integracijom od 0 do s odnosno od 0 do t dobiće se za traženi pređeni put

$$s = c\,\frac{M}{\dot{m}}\left(1 - \frac{\dot{m}}{M}\,t\right)\left[\ln\left(1 - \frac{\dot{m}}{M}\,t\right) + 1\right]. \tag{59}$$

Čitav put σ koji raketa pređe za celo vreme τ pogonskog leta, dobiće se, kad se uzme u obzir, da je u trenutku prestanka rada raketnih motora s obzirom na (45)

$$1 - \frac{\dot{m}}{M}\,\tau = 1 - \frac{M_p}{M} = \frac{M - M_p}{M} = \frac{1}{r},$$

pa je tako

$$\sigma = c\,\frac{M}{\dot{m}}\,\frac{1}{r}\,(1 - \ln r). \tag{60}$$

Za slučaj konstantnog ubrzanja se iz (51) i (52) neposredno dobiva za konačno postignutu brzinu v_k na kraju izbacivanja materijala i pređeni put

$$\begin{aligned} v_k &= a\,\tau = c\,\frac{\dot{m}}{M}\,\tau, \\ \sigma &= \frac{1}{2}\,a\,\tau^2 = \frac{1}{2}\,c\,\frac{\dot{m}}{M}\,\tau^2. \end{aligned} \tag{61}$$

Iz (53) se množenjem sa vremenom sagorevanja τ izvodi

$$\frac{\dot{m}\,\tau}{M} = \frac{M_p}{M} = \frac{a\,\tau}{c} = \frac{v_k}{c} = \ln \frac{M}{M - M_p} = \ln r,$$

odakle se dobiva

$$\tau = \frac{M}{\dot{m}} \ln r. \tag{62}$$

Unošenjem ove vrednosti u (61) dobiva se za pređeni put u slučaju konstantnog ubrzanja isticanja materijala

$$\sigma = \frac{1}{2} \frac{M}{\dot{m}} c \ln r. \tag{63}$$

8. Višestepena raketa

Najveća brzina koja se može postići jednom običnom raketom, dostiže se, kako smo videli, na kraju sagorevanja ukupnog pogonskog materijala, naravno pod pretpostavkom da nema nikakvih gubitaka, i iznosi

$$v = c \ln \frac{M}{M_k} = c \ln r.$$

Ako se uzme da je pre uključivanja u rad raketnih motora raketa već imala neku brzinu v_0, tada je ta najveća dostiživa brzina

$$v = c \ln r + v_0. \tag{64}$$

Međutim, kako ta početna brzina ne može biti velika, jer neke udarne (nagle) promene količine kretanja rakete ne dolaze u obzir, sve zavisi od $c \ln r$, tj. kako je već rečeno, pre svega od brzine isticanja c, jer je razumljivo razmera masa r podložna izvesnim ograničenjima u vezi sa praktičnom ostvarljivošću.

Nevolja je u tome što se ne može samo povećavati količina pogonskog materijala (goriva i paljiva) M_p već se istovremeno mora povećavati i konstrukcioni materijal M_c pa se ubrzanje rakete radi dostizanja što veće brzine odnosi i na ubrzanje konstrukcionog materijala.

Ukoliko se ne nađe neki takav pogonski materijal koji bi davao veliku brzinu c isticanja (odvajanja mase od osnovnog tela), jedini izlaz za postizanje velikih brzina je konstrukcija višestepenih raketa.

Savremeni tečni hemijski pogonski materijali ne pružaju mogućnost ostvarenja velike brzine sa jednom raketom. Tako se sa etil-alkoholom kao gorivom i tečnim kiseonikom kao paljivom dostiže brzina isticanja $c = 2{,}4$ km/s sa kombinacijom hidrazin-azotna kiselina brzina $c = 2{,}7$ km/s a sa tečnim vodonikom i tečnim kiseonikom brzina $c = 3{,}6$ km/s.

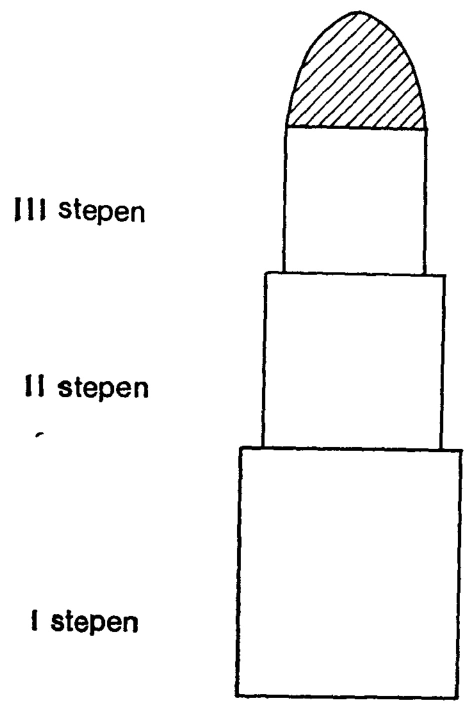
Napr., ako uočimo teorijski idelnu mogućnost da je razmera masa $r = 5$, što odgovara optimalnoj vrednosti koeficijenta korisnog dejstva i da je pogonski materijal tečni vodonik i tečni kiseonik dobiće se

$$v_k = 3{,}6 \text{ km/s} \cdot 1{,}6 \approx 5{,}8 \text{ km/s},$$

a to je još uvek manje od prve kosmičke brzine $v_{01} = 7{,}19$ km/s, o kojoj će tek biti govora.

Stoga se konstruišu višestepene rakete, koje se sastoje od nekoliko delova (stepena) — dva, tri ili više, pored korisnog tereta, koji se uključuju u rad uzastopno i to tako, da kad se potroši pogonski materijal u jednom od njih, onda se deo konstrukcije vezan za taj deo odbacuje i smanjuje u daljem letu celokupna masa rakete.

Na sl. 2 je shematski prikazana jedna trostepena reketa. Svaki stepen rakete sastoji se od raketnog motora, rezervoara pogonskog materijala i naravno noseće konstrukcije. Korisni teret (kabina sa posadom i instrumentima) je posebno (na slici prevučeno). On se obično ne smatra delom stepena rakete. Pod višestepenom raketom se onda razumeju svi stepani rakete zajedno sa korisnim teretom. Posle odbacivanja jednog, dva ili više stepena rakete ostaju tzv. delimične rakete. Prva delimična raketa se dobiva posle odbacivanja prvog stepena rakete.



Sl. 2

Odmah treba istaći da se ni višestepenim raketama ne rešava sve, jer se broj stepena ne može neograničeno povećavati. Treba upamtiti da je pravo i jedino rešenje povećavanje brzine isticanja materijalne mase.

Naime, maksimalna brzina koja se može postići nekom višestepenom raketom dobiva se *aritmetičkim* sabiranjem brzina ostvarenih pomoću pojedinih stepena, dok se ukupna masa rakete pri tome ipak menja i raste *geometrijski.*

Primera radi, ako imamo prostu raketu čije su karakteristične razmere: $r=5$ i $s=6$, a kod koje je brzina isticanja $c=2{,}7$ km/s, tada se može postići teorijski idealna brzina

$$v=2{,}7 \text{ km/s}\cdot 1{,}6=4{,}3 \text{ km/s}.$$

Razmera korisnosti ove rakete je prema (31)

$$k=\frac{M}{M_0}=r\,\frac{s-1}{s-r}=25,$$

tj. da bi se ovom raketom izbacio korisni teret od 1 *t* brzinom od 4,3 km/s potrebna je na startu raketa mase 25 *t*.

Međutim, ako se zamisli još jedan stepen rakete koji treba da poveća brzinu za još 4,3 km/s — da je udvostruči, onda se cela prethodna raketa mase M mora sad smatrati kao korisni teret koji treba izbaciti brzinom od 4,3 km/s. Pri istim karakterističnim razmerama to određuje novu masu M_1 na startu prema obrascu

$$\frac{M_1}{M}=25, \text{ odn. } M_1=625\,t.$$

Dakle, za izbacivanje korisnog tereta od samo 1 *t* brzinom od 8,6 km/s potrebna je, pri prethodnim razmerama, na startu masa od 625 *t*.

Kod višestepene (ovde trostepene) rakete obeležimo sa M_0, kao obično, masu korisnog tereta: sa $M_3 = M_0 + M_{p3} + M_{c3}$ masu *druge delimične rakete*, koju čini masa $M_{p3} + M_{c3}$ (pogonska i konstrukciona) trećeg stepena rakete zajedno sa korisnim teretom M_0, sa $M_2 = M_3 + M_{p2} + M_{c2}$ masu *prve delimične rakete*, koju sad čini masa druge delimične rakete sa pogonskom i konstrnkcionom masom rakete drugog stepena; i najzad sa $M_1 = M_2 + M_{p1} + M_{c1}$ masu ove *čitave trostepene rakete* na startu, koju čini masa prve delimične rakete zajedno sa pogonskom i konstrukcionom masom prvog stepena rakete. Pri tome se prva delimična reketa dobiva posle odbacivanja drvog stepena višestepene rakete, druga ostaje posle odbacivanja drugog stepena itd.

Tada imamo od početka, prvo, za čitavu raketu, prema definiciji (26), kao razmeru korisnosti k

$$k = \frac{M_1}{M_0}. \tag{65}$$

Međutim, razmera k_1 korisnosti za polaznu raketu, kad se cela prva delimična raketa smatra kao korisni teret, biće

$$k_1 = \frac{M_1}{M_2}.$$

Na sličan način biće za prvu delimičnu raketu ukupni teret M_2 a korisni ternt M_3, pa prema tome

$$k_2 = \frac{M_2}{M_3},$$

odnosno za drugu delimičnu raketu (koristi teret M_0 a ukupna masa M_3)

$$k_3 = \frac{M_3}{M_0}.$$

Kako se (65) očigledno može izraziti na naredni način

$$K = \frac{M_1}{M_0} = \frac{M_1}{M_2} \cdot \frac{M_2}{M_3} \cdot \frac{M_3}{M_0},$$

imamo

$$K = k_1 k_2 k_3,$$

odnosno za n stepena

$$K = k_1 k_2 \cdots k_n. \tag{66}$$

Drugim rečima, razmera korisnosti višestepene rakete je proizvod razmera korisnosti pojedinih delimičnih raketa.

Konstrukciona razmera i razmera mase se definišu samo u odnosu na pojedine delimične rakete i iznose za proizvoljni n-ti stepen

$$s_n = \frac{M_{pn} + M_{cn}}{M_{cn}}, \quad r_n = \frac{M_n}{M_n - M_{pn}}.$$

Rezultantna karakteristična brzina V neke višestepene rakete biće zbir karakterističnih brzina pojedinih delimičnih brzina, tj.

$$V = v_1 + v_2 + \cdots + v_n, \tag{67}$$

pri čemu je

$$v_i = c_i \ln r_i, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{68}$$

To, onda daje

$$V = c_1 \ln r_1 + c_2 \ln r_2 + \cdots + c_n \ln r_n. \tag{69}$$

Ako se uzme, odn. ako se višestepena raketa tako konstruiše, da se u svim njenim delovima brzine c_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ jednake, onda se iz (69) dobiva

$$V = c \ln r_1 \cdot r_2 \cdot r_3 \cdots r_n = c \ln R, \tag{70}$$

u kom slučaju se

$$R = r_1 \cdot r_2 \cdots r_n, \tag{71}$$

zove *ukupna razmera masa* višestepene rakete, tj. ukupna razmera masa višestepene rakete je proizvod razmera masa svih sastavnih delova rakete.

Ovo očigledno važi za slučaj jednakih brzina isticanja, što ne mora da povlači i jednakost svih postignutih brzina kretanja v_i.

Iz (70) se može izračunati ukupna razmera masa

$$R = e^{V/c}, \tag{72}$$

kad se zna karakteristična brzina V višestepene rakete i stalna brzina c isticanja gasova.

U zavisnosti od uslova postavljenog zadatka može se, naravno, zahtevati i da sve razmere korisnosti k i delimičnih raketa budu jednake, što onda s obzirom na (66) daje

$$K = k^n,$$

što je onda ukupna razmera korisnosti.

Najzad, ako su sve pojedinačne razmere r_i masa jednake biće ukupna razmera masa rakete prema (71)

$$R = r^n.$$

Mogu se dalje postaviti razna pitanja u vezi sa optimalnošću i drugim uslovima leta, napr. pitanje optimalnog broja stepena rakete za ostvarenje određenih performansi, ali se na tome ovde nećemo zadržavati.

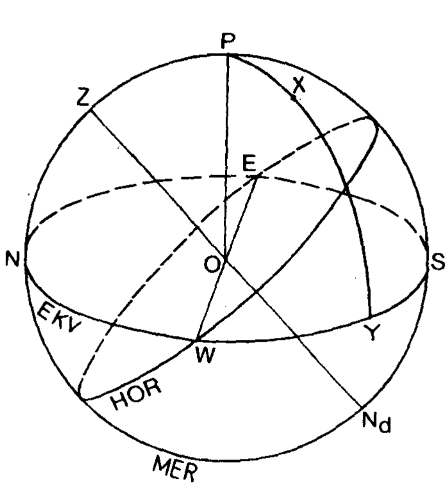
Dovoljno je samo još jednom naglasiti da se sa savremenim raspoloživim pogonskim materijalom praktično ne mogu ostvariti danas potrebne velike brzine, ni konstrukcijom višestepenih raketa.

II NEKI POJMOVI IZ ASTRONOMIJE

1. Nebeska sfera

Sfera čiji je centar u centru Zemlje a poluprečnik se zamišlja proizvoljno veliki zove se *nebeska sfera.* Ona je koncentrična sa Zemljom. U stvari njen centar je u posmatračevom oku, ali kad se radi o ogromnim kosmičkim udaljenostima, onda je greška usled zamene posmatračevog oka i centra Zemlje beznačajna i zanemarljiva.

Na toj sferi (sl. 3) uočavaju se određene osnovne tačke i veliki krugovi. Takva jedna osnovna taćka je severni pol nebeske sfere, kratko, *nebeski pol.* On se nalazi u onoj tački *P* nebeske sfere u kojoj Zemljina osa, orijentisana od južnog ka severnom polu, prodire nebesku sferu. Posmatrana kao osa kroz nebeski pol *P* i centar Zemlje *O* (odn. posmatračevo oko) ona se naziva *nebeska* ili *svetska osa.* Položaj nebeskog pola *P* nalazi se danas u konstelaciji (sazvežđu) Malih Kola (Malog Medveda) blizu zvezde *α ursae minoris,* koja se stoga zove *polarna zvezda.*



Sl. 3

Veliki krug — zamišljeni presek nebeske sfere i ravni Zemljinog ekvatora — zove se *nebeski ekvator,* ali i kratko samo *ekvator* (**EKV**). Ekvatorska ravan je jedna od osnovnih referentnih ravni za posmatranje u kosmosu. Preseci ravni paralelnih sa ekvatorom određuju na nebeskoj sferi *nebeske uporednike* ili *nebeske paralele.*

Nebeski horizont ili kratko samo *horizont* (**HOR**) određen je tangentnom ravni Zemlje zamišljene kroz posmatračevo oko ili njegovo stajalište. Pod horizontom se pri tome razume i sama ta tangentna ravan i veliki krug po kome ona seče nebesku sferu. S obzirom na veličine posmatranih rastojanja uzima se ponekad da i ta ravan prolazi kroz centar Zemlje. U tom slučaju se govori o *prividnom,* odn. *astronomskom* ili *geocentralnom horizontu,* dok se onaj prvi zove *pravi.* Dostupna posmatranju je samo ona polusfera nebeske sfere koja se nalazi iznad horizonta. Horizont je takođe jedna od osnovnih referentnih ravni u proučavanju kosmosa i kretanja u njemu.

Presek vertikale na datom mestu (određene viskom) sa nebeskom sferom u njenom vidljivom delu je *zenit* (*Z*) posmatrača. Njegov antipod, presek vertikale mesta sa nebeskom sferom u njenom nevidljivom delu je *nadir* (*Nd*). Svaki zamišljeni veliki krug na nebeskoj sferi (odn. često se kao i na Zemlji pri tome misli samo na određeni polukrug) kroz pol *P* zove se *nebeski meridijan* ili kratko *meridijan* (**MER**). Meridijan *PXY* kroz neko telo *X* (prirodno ili veštačko) na nebu (tj. u prostoru) zove se *meridijan tela X*. Onaj pak meridijan koji je određen zenitom posmatrača *Z*, tj. meridijan *ZPN* (vidi sliku 3) zove se *posmatračev meridijan*, odn. *meridijan mesta posmatranja*.

Osim pola *P* i zenita *Z* ima još četiri značajne referentne tačke; to su tzv. *kardinalne tačke ekvatora*: *sever* (*N*), *istok* (*E*), *jug* (*S*) i *zapad* (*W*).

Nihov položaj u prostoru može se utvrditi posmatranjem kretanja nebeske sfere. Nebeska sfera, posmatrana sa Zemlje, obrće se od istoka ka zapadu. To je njeno *prividno kretanje* i ono je posledica stvarne rotacije Zemlje oko njene ose od zapada ka istoku. Pri tome se i svako drugo kretanje od zapada ka istoku zove *diriktno*, a ono od istoka ka zapadu *retrogradno* (*prividno*). Sad se one dve tačke na ekvatoru, u kojima posmatračev meridijan seče ekvator, zovu *severna* (*N*) i *južna* (*S*). Pri tome je položaj severne tačke određen uslovom da prividno kretanje nebeske sfere ide, odatle posmatrano, od istoka ka zapadu. Nebeski horizont seče pak nebeski ekvator u *istočnoj* (*E*) i *zapadnoj* (*W*) tački. Pri tome je pravac *EW* upravan na pravcu *NS*, jer je, prema definiciji, horizont uvek upravan na posmatračevom meridijanu. Tačka *E* se uzima tako da bude na 90° od tačke *N* pri prividnom kretanju.

Položaj kardinalnih tačaka zavisi od posmatrača, jer je od tri pomenute presečne ravni samo položaj ekvatorske ravni nezavisan od posmatrača. Inače, od naših praktičnih svakodnevnih pravaca: sever, istok, jug i zapad samo se pravac istok-zapad uglavnom poklapa sa nebeskim pravcem, dok su ostale dve tačke sever i jug u stvari u ravni našeg horizonta (odn. o preseku posmatračevog meridijana i horizonta).

Da bismo upotpunili ova naša izlaganja o referentnim tačkama i ravnima nebeske sfere treba uzeti u obzir i uočiti i Sunce kao nebesko telo. Naime, dok se nebeska sfera sa zvezdama (*nekretnicama*) na njoj prividno kreće sa istoka na zapad kao celina, dotle to nije slučaj sa Suncem. Istina, na prvi pogled Sunce se kreće svojim dnevnim kretanjem prividno sa istoka na zapad, kao i čitava nebeska sfera, ali se posmatranjem i merenjem može utvrditi da ono menja položaj u odnosu na nebesku sferu. Osim svoga prividnog dnevnog kretanja oko Zemlje, koje je posledica rotacije Zemlje oko njene ose, Sunce prividno obilazi oko Zemlje, što je opet posledica Zemljinog obilaženja oko Sunca. Usled toga Sunce menja svoj položaj u odnosu na ekvator. Ovde o tome više neće biit govora, ali dok Sunce pri dnevnom kretanju prividno obilazi oko Zemlje za *jedan dan* (24 časa) dotle prividno u svom drugom kretanju ono obiđe Zemlju za *jednu godinu* dana.

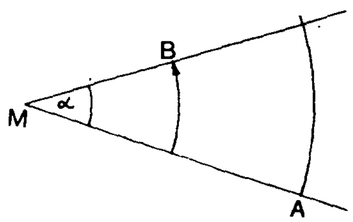
Nova osnovna referentna ravan Zemljine putanje oko Sunca, odn. ravan prividne putanje Sunca oko Zemlje koja se zove *ekliptika* (**EKL**). Posmatrano sa Zemlje Sunce u svom privionom kretanju oko Zemlje prolazi kroz 12 konstelacija zvezda, koje obrazuju tzv. *zodijak* (životinjski krug-zbog imena životinja koje imaju te konstelacije).

Ravan ekliptike je nagnuta prema ekvatorskoj ravni pod uglom $\varepsilon = 23° 27'$ koji se naziva *nagib ekliptike*. Ono pak mesto na nebeskom ekvatoru gde ga seče ekliptika pri prelazu Sunca na severnu polusferu na dan prolećne ravnodnevice zove se *prolećna tačka* i obeležava znakom ♈. Ovaj znak obeležava konstelaciju ovna (aries) u kojoj se pre 2000 godina nalazilo Sunce u svom prividnom kretanju oko Zemlje u tom trenutku. Ova se tačka, međutim, pomera po ekvatoru u smeru obilaženja Zemlje i tokom vekova dospela je danas u konstelaciju riba (pisces), ali je ipak zadržan znak ovna kao njeno obeležje.

2. Određivanje položaja tela u kosmosu. Koordinatni sistemi

Položaj tela na nebeskoj sferi određuje se samo *utvrđivanjem pravca* prema nekom referentnom sistemu u odnosu na koji se posmatra telo. Pitanje rastojanja od posmatrača (odn. od centra Zemlje) se ne mora postavljati i ostaje uglavnom neodređeno. Ako je reč o položaju tela u prostoru uopšte, onda je po pravilu pored pravca od značaja i rastojanje kao što je slučaj kod veštačkih satelita, ali i kod planeta.

Rastojanje tela na nebeskoj sferi se određuje ugaonom merom, pa su nezavisna od rastojanja posmatrača odn. Zemlje i ne izražavaju se dužinskom merom. Tako (sl. 4), ako je M posmatrač a MA i MB pravci prema telima A i B na nebu, onda se kao rastojanje između A i B smatra ugao α, tj. razlika uočenih pravaca. Naravno, za tela u Sunčevom sistemu, a pogotovu za veštačke satelite samo razlika pravaca, tj. ugao kao rastojanje između dva tela nije dovoljan.



Sl. 4

Kad se uzme u obzir da se jedan pun obrt (o) nebeske sfere odvija za 24 časa (24^h), biće

$$24^h = 360^\circ = 400^{gr} = 2\pi = 1\,o,$$

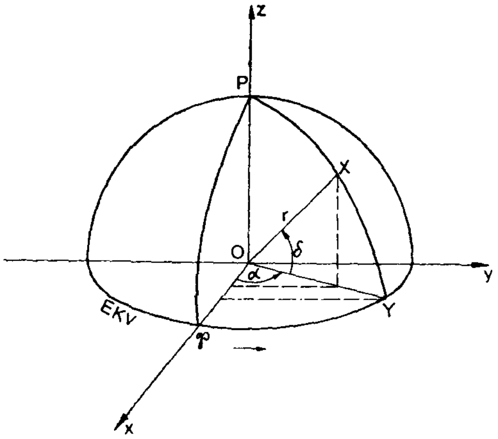
pri čemu se kaže i 2π rad. Jasno je da se ma koja od tih mera može upotrebiti za merenje uglova. U astronomiji, pa i u teoriji kretanja veštačkih satelita, veličine uglova se izražavaju obično u stepenima ili časovima i njihovim delovima. Pri tome, očigledno 15° odgovara 1^h, a 1° odgovara 4^{min}.

Za određivanje položaja tela kao materijalnih tačaka, uočavanih kao geometrijske tačke u prostoru, koriste se razni prostorni koordinatni sistemi kao što je to na pr. *Dekartov pravougli koordinatni sistem* i to po pravilu tzv. desne orijentacije. Međutim, u astronomiji, pa i u proučavanju kretanja veštačkih satelita, koriste se pretežno *sferni koordinatni sistemi*. Izbor koordinatnog sistema se prilagođava datom problemu. Pri tome je važan izbor početka O sistema, njegove osnovne ravni i osnovne ose. Pri proučavanju kretanja veštačkih satelita oko Zemlje koordinatni početak se uzima *u centru Zemlje* (*geocentralni sistem*) ili *u datom mestu*, na pr. u mestu posmatraća, (*topocentralni*). Inače se prema potrebi, naročito pri proučavanju kretanja u Sunčevom sistemu i dalje, uzima početak *u centru Sunca* (*heliocentralni sistem*). Može se, naravno, početak uzimati i u centru nekog drugog nebeskog tela, napr. planete (*planetocentralni*) ili Meseca (*selenocentralni*). I druge karakteristične tačke za telo i sistem tela mogu se uzimati za početak, napr. težište dva tela (*baricentralni sistem*). Ako se proučava kretanje u Galaksiji, onda se naročita tačka, definisana na određeni način, uzme za početak (*galaktički sistem*), ali nas to ovde neće interesovati.

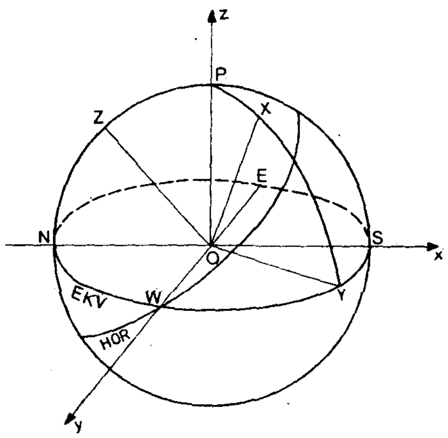
Za osnovnu ravan sfernog koordinatnog sistema se može uzeti nebeski ekvator (*ekvatorski sistem koordinata*), horizont (*horizontski sistem koordinata*) i ekliptika (*ekliptički sistem koordinata*).

a. E k v a t o r s k i s i s t e m k o o r d i n a t a. — Osnovna ravan je ekvator, osnovna tačka (koordinatni početak) O je u centru Zemlje, a prema orijentaciji osnovne x-ose razlikuju se dva ekvatorska sistema koordinata.

Prvi ekvatorski sistem koordinata. U njemu je x-osa *orijentisana prema prolećnoj tački* ♈ (sl. 5). Koordinate tela X u ovom sistemu su: *poteg* ili *radijus vektor* (rastojanje od Zemljinog centra) r i uglovi α i δ. Pri tome je α (*rektascenzija*) ugao-diedar između ravni meridijana kroz prolećnu tačku i kroz posmatrano telo X, odn. ugao u centru 0 određen lukom ekvatora ♈Y od prolećne tačke do preseka Y meridijana posmatranog tela sa ekvatorom, računatog u smeru direktnog kretanja, a meri se od $0° - 360°$. Ugao δ (*deklinacija*) je ugao koji obrazuje poteg prema posmatranom telu sa ravni ekvatora, odn. ugao određen lukom YX na meridijanu uočenog tela od ekvatora do tela i meri se od $0° - 90°$, pozitivno prema nebeskom polu. Mesto deklinacije uzima se ponekad i komplementni ugao $\sphericalangle POX = p$ deklinacije $(p + \delta = 90°)$ i zove *polarno rastojanje* (*distancija*). Ove koordinate su nezavisne od dnevnog kretanja Zemlje.



Sl. 5



Sl. 6

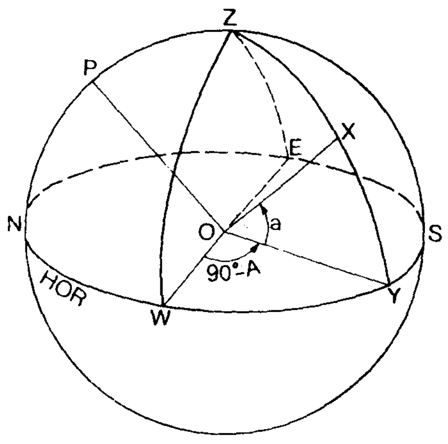
Drugi ekvatorski sistem koordinata. U njemu je x-osa *orijentisana južnoj tački S ekvatora* (sl. 6). Koordinate posmatranog tela X u ovom slučaju biće: *poteg* $r = OX$, *časovni ugao* $SPX = H$, tj. ugao diedar između ravni posmatračevog meridijana i meridijana posmatranog tela X, odn. ugao u centru O, određen lukom SY ekvatora računatim od posmatračevog meridijana retrogradno od $0^h - 24^h$, tako da se od $0^h - 12^h$ telo nalazi na zapadnoj hemisferi nebeske sfere a od $12^h - 24^h$ na istočnoj hemisferi. Treća koordinata je opet *deklinacija* $\delta = YX$, odn. polarno rastojanje $p = PX$. Deklinacija i polarno rastojanje se mere kao i u prethodnom slučaju.

U vezi za ekvatorskim sistemom treba navesti nekoliko primedbi. *Prvo,* sam sistem se zbog izvesne nestabilnosti ekvatorske ravni i pomeranja prolećne tačke donekle menja. Stoga se obično u astronomiji navodi tzv. *epoha,* tj. ono vreme, kad je uzet položaj ekvatorske ravni za osnovu posmatranja. To je sad početak 1950. godine (1950,0). Međutim, te su promene male i spore pa u našem izlaganju, koje je samo načelno, o tome nećemo voditi računa. *Drugo,* ekvatorski sistem je preko ekvatora koji je u vezi sa Zemljom vezan za Zemlju pa je stoga podesan za upotrebu pri posmatranjima u odnosu na Zemlju. Pri odlučivanju od koje meridijanske ravni kao polazne poći — od one kroz prolećnu tačku ili one kroz južnu tačku ekvatora za posmatrača — rukovodi se većim ili manjim interesom za objektivnošću odredbenih elemenata, tj. njihovom nezavisnošću od mesta posmatrača. Tako je prvi ekvatorski sistem koordinata nezavisan od posmatrača a drugi nije.

U vezu sa prvim sistemom ekvatorskih koordinata se dovodi u vezu Dekartov pravougli sistem koordinata u kome je prva osa već izabrana x-osa prema prolećnoj tački, z-osa upravna na ravan ekvatora i usmerena prema severnom polu P, a y-osa se uzima tako da sa prve dve kao prvom i trećom obrazuje desni pravougli triedar.

Sa drugim sistemom ekvatorskih koordinata bi se mogao povezati sistem pravouglih osa: x-osa orijentisana prema južnoj tački S, z-osa orijentisana prema severnom polu P, a y-osa tako da sa ove dve kao prvom i trećom obrazuje *levi* pravougli triedar, što je u ovom slučaju prikladnije, jer se časovni ugao meri retrogradno.

b. Horizontski sistem koordinata. Osnovna ravan je ili pravi ili astronomski horizont, osnovna tačka (koordinatni početak) je ili stajalište posmatrača Q ili centar Zemlje O, u drugom slučaju (sl. 7). Ovaj sistem je bitno vezan za posmatrača i prema tome je lokalnog karaktera. On se stoga po pravilu pri proučavanju kretanja veštačkih satelita uzima topocentralno, dok se u astronomiji uzima geocentralno. Sve ravni paralelne horizontu su horizontalne a pol horizonta na nebeskoj sferi je *zenit* (Z).

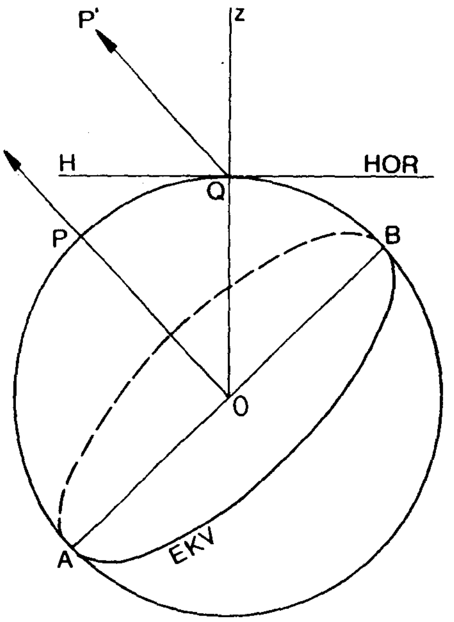


Sl. 7

Ravni koje prolaze kroz zenit i početak zovu se vertikalne ravni, jer prolaze kroz vertikalu. Svaki veliki krug nebeske sfere koji prolazi kroz zenit i nadir zove se ***vertikalni krug*** ili samo *vertikal*. I ovde se obično samo polukrug obeležava kao vertikal kao kod meridijana. Pravac OP od centra Zemlje ka nebeskom polu poklapa se sa osom Zemlje a pravac QP' (sl. 8) od stajališta dosmatrača prema nebeskom polu je, zbog praktično beskonačne udaljenosti nebeskog pola paralelan osi Zemlje i tako se uzima. Vertikal koji prolazi kroz severni pol (određen tačkama P, Z, i O) određuje u preseku sa horizontom u tačkama N i S severnu i južnu tačku horizonta, pri čemu je na severnoj polusferi severna ҭačka N ona za koju je P na lučnom rastojanju manjem od 90°. Vertikal upravan na vertikalu NOZ seče horizont u istočnoj i zapadnoj tački ekvatora, pa se istočna i zapadna tačka horizonta i ekvatora poklapaju.

Za određivanje horizontskog sistema koordinata treba pored početka izabrati i neke tri uzajamno upravne ose. Pravac i smer samo jedne se sad prirodno nameće, a to je pravac OZ sa smerom prema zenitu i to se uzima za z-osu. Međutim, izbor pravca i smera osnovne x-ose nije jedinstven pa se *pri korišćenjenju podataka mora tačno voditi računa kako je izabran osnovni sestem, kad je reč o horizontskim koordinatama.*

Po pravilu se kao prolazni uzima onaj vertikal koji prolazi kroz severnu i južnu tačku, tj. POZ, ali se onda za x-osu može uzeti pravac ON ili pravac OS sa smerom od O. Tada se u prvom slučaju y-osa obično uzima od O prema W i tako dobiva desni Dekartov pravougli triedar. U tom slučaju se položaj tela X na nebeskoj sferi određuje (sl. 7) uglovima: *azimutom* A i *visinom* a nad horizontom. Pri tome je azimut $A = \sphericalangle NWY$ (odn. $=$ luku NWY), visina $a = \sphericalangle XOY$ (odn. $=$ luku YX). Ugao A se meri od $0° - 360°$ u direktnom smeru, a ugao a od $0° - 90°$ od horizonta prema zenitu pozitivno, a ispod horizonta negativno. Pri tome se, naravno, mesto ugla a — visine može uzeti i *zenitno rastojanje* (z) jednako $90° - a$. Osim azimuta i visine za tačan položaj tela treba još znati i poteg r.



Sl. 8

Treba navesti i to da se za x-osu (naročito u Francuskoj) uzima pravac i smer od O prema jugu S, ali se pravac i smer y-ose zadržava prema zapadu, pa se tako dobiva levi ortogonalni triedar osa. Tada se azimut računa od južne tačke S prema zapadu W retrogradno, opet od $0°—360°$, dok se visina nad horizontom određuje na prethodni način. Za telo X biće sad azimut određen uglom SOY, odn. lukom SY. Postoji, na žalost, i treći način računanja azimuta i to od severne tačke N, ali samo do $180°$ pozitivno prema zapadu a negativno prema istoku, ili, od južne tačke S, ali sad retrogradno prema zapadu pozitivno a prema istoku negativno.

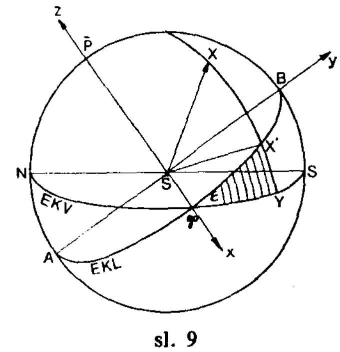
U vezi sa horizontom posmatrača istaći ćemo još neke veze. Sa sl. 8 se vidi da, ako je $\sphericalangle$ *BOQ geografska širina* (*latituda*) stajališta posmatrača Q, O centar Zemlje, a B presek posmatračevog meridijana i ekvatora, i $\sphericalangle P'QH$ *visina* nebeskog pola nad horizontom (QH je u pravom horizontu a $QP' \| OP$), onda imamo

$$\sphericalangle BOQ = \sphericalangle P'QH,$$

tj. *uvek je visina* nebeskog pola nad horizontom jednaka geografskoj širini mesta posmatrača.

Nebeski pol se nalazi u pravcu OP, ali s obzirom na malo rastojanje OQ (poluprečnik Zemlje) i na ogromnu udaljenost nebeskog pola, on se nalazi i u pravcu QP' i tako se traži sa horizonta posmatrača. Pravac OQ se uzima da je prema zenitu Z, jer se pretpostavlja da se pravac vertikale mesta tačno poklapa sa pravcem poluprečnika Zemljine sfere što nije sasvim tačno, jer, prvo Zemlja nije tačno sfernog oblika a drugo pravac vertikale je rezultanta gravitacione i centrifugalne sile od rotacije Zemlje oko ose, pa u stvari ne prolazi tačno kroz centar Zemlje.

c. Ekliptički sistem koordinata. — Ovde je osnovna ravan ekliptika (EKL, sl. 9). Osnovna tačka po pravilu u centru Sunca $\bar{S}$ (heliocentralni ekliptički sistem), ali ponekad i u centru Zemlje (geocentralni sistem). Heliocentralni sistem se ne koristi pri proučavanju kretanja veštačkih satelita Zemle već za opisivanje kretanja u širem međuplanetnom prostoru napr. planeta, a kad je reč o veštački izbačenim objektima onda za proučavanje kretanja tzv. kosmičkih sondi i međuplanetnih preleta (transfera). Geocentralni ekliptički sistem se koristi u astronomiji za izučavanje kretanja Sunca i Meseca. Osnovna x-osa orijentisana je od centra Sunca $\bar{S}$ ka prolećnoj tački ♈, z-osa od $\bar{S}$ ka severnom polu $\bar{P}$ ekliptike (na nebeskoj sferi sa centrom u centru Sunca) i najzad y-osa od $\bar{S}$ ka tački B u ravni ekliptike tako da se dobije desni triedar. Ako je sistem geocentralni, onda je osnovna x-osa opet orijentisana prema ♈, a z-osa prema polu ekliptike ali na nebeskoj sferi sa centrom u centru Zemlje i najzad y-osa prema ovim dvema da se dobije desni trijedar.



sl. 9

Ekliptičke koordinate su pored *potega r, ekliptička dužina* (*longituda*) λ (bolje λ_E) i *ekliptička širina* (*latituda*) φ (bolje φ_E) pri čemu je

$$\lambda_E = \sphericalangle\, \bar{S}X' \text{ (odn.} = \text{luku } ♈ X'),$$

$$\varphi_E \sphericalangle X'\bar{S}X \text{ (ond} = \text{luku } X'X),$$

gde je X' presek velikog kruga PSX kroz posmatrano telo X sa ekliptikom

Ekliptička dužina λ_E se meri od 0° – 360° u smeru suprotnom kretanju kazaljke na časovniku posmatrano od $\bar{P}$, tj. u smeru prividnog godišnjeg kretanja Sunca, dok se ekliptička širina meri u granicama $-90° \leqslant \varphi_E \leqslant 90°$, i to pozitivno prema severnom polu $\bar{P}$ ekliptike.

3. Određivanje vremena

Postoje dva prirodna, prilično stalna, vremenska intervala, koji se postavljaju u osnovu merenja vremena, to su: *zvezdani* (*sideralni*) *dan* i *Sunčev* (*solarni*) *dan*.

Zvezdani dan je interval vremena između dva prolaza prolećne tačke kroz određeni meridijan, napr. kroz meridijan posmatrača. Kaže se stručnije između dve uzastopne istoimene kulminacije prolećne tačke. Pri tome se za neko nebesko telo (uočeno kao geometriska tačka) ali i za veštački satelit kaže da se nalazi u *kulminaciji* (*da kulminira*) u trenutku prolaza kroz posmatračev meridijan. Razlikuje se *gornja kulminacija* – ona za nas na severnoj hemisferi i *donja kulminacija* – za nas na južnoj hemisferi. Gornja je vidljiva a donja nije. Zvezdani dan ima 24^h (odn. 1440^{min} i 86 400^s). Ova vremenska jedinica nije idealno postojana usled pomeranja prolećne tačke.

Sunčev dan je vreme između dva uzastopna prolaza Sunca kroz određeni meridijan (napr. meridijan posmatrača), drugim rečima, između dve uzastopne istoimene kulminacije Sunca. To vreme pokazuje Sunčev časovnik, ali kako se Sunce ne kreće po nebeskom svodu jednoliko, uvodi se tzv. *srednje Sunce* i *srednji Sunčev dan*, čije je vreme obilaženja pravog Sunca, ali se odvija jednoliko za 24 časa srednjeg Sunčevog vremena i odgovarajući broj minuta i sekunda. Međutim, pošto se osim prolećne tačke i samo Sunce pomera u odnosu na nebesku sferu, to je srednji sunčev dan duži od zvezdanog dana za 3^{mn} 56^{s} srednjeg Sunčevog vremena.

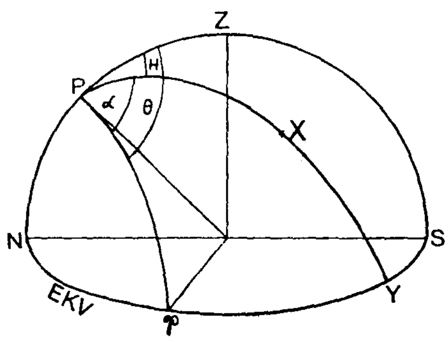
Sa prividnim kretanjem Sunca oko Zemlje po ekliptici vezana je još jedna jedinica merenja vremena – *godina*. Pri tome se u osnovi razlikuju dve razne godine: *sideralna* (*zvezdana*) i *tropska*. Zvezdana godina je vreme trajanja obilaska Sunca oko Zemlje u odnosu na pravac prema određenoj zvezdi nekretnici i njena je dužina 365,2564 srednjih Sunčevih dana. Tropska godina je vreme između dva uzastopna prolaza Sunca kroz prolećnu tačku i ima 365, 2422 srednjih Sunčevih dana. Ove jedinice nisu podesne za praktični rad pa se zato uvodi *kalendar* i *kalendarska godina*, ali o tome nema potrebe ovde govoriti.

Svako mesto na Zemlji ima svoju lokalnu donju kulminaciju Sunca (*ponoć*) i svoju gornju kulminaciju (*podne*). Radi potrebnog određivanja vremena na raznim mestima uvedeno je dogovorom tzv. *građansko računanje vremena* (UT = universal time). Ovo vreme se računa od $0^h - 24^h$ neprekidno od trenutka prolaza zamišljenog srednjeg Sunca kroz Grinički (*Greenwich*) meridijan. To znači da je 0^h UT, kad srednje Sunce ima donju kulminaciju u Griniču. Prema tome, svetsko vreme je identično građanskom vremenu određenom po Griniču, dok se ostala lokalna vremena moraju određivati prema njemu Tako naše *srednje evropsko vreme* (SEV) odstupa od njega za 1 sat, tj. uvek je $SEV = UT + 1^h$.

Osim zvezdanog i Sunčevog vremena u astronomiji se koriste još i *efemeridno vreme* u vezi sa periodom obilaženja Zemlje oko Sunca i *atomsko* i *biološko* vreme a u vezi sa atomskim i biološkim pojavama, ali o njima ovde nema potrebe govoriti.

Izvešćemo samo još tzv. *vremensku relaciju*. Neka (sl. 10) PXY bude meridijan neke zvezde X u datom trenutku i neka on seče ekvator u tački Y. Ako je pri tom posmatračev meridijan PZS a $N\Upsilon S$ ekvator, onda je časovni ugao tela X određen lukom $\widehat{SY} = H$, rektascenzija od X biće određena lukom $\widehat{\Upsilon Y} = \alpha$, a lokalno vreme posmatrača je $\widehat{S\Upsilon} = \theta$. Prema tome važi relacija

$$\theta = \alpha + H,$$



sl. 10

tj. *zvezdano vreme uočenog mesta jednako je zbiru rektascenzije uočenog mesta i njegovog časovnog ugla*. Može se reći i da je zvezdano vreme nekog mesta odredjeno uglom θ, merenim duž ekvatora u direknom smeru od prolećne tačke do posmatračevog meridijana, Tako, ako se sa θ_G obeleži zvezdano vreme Griničke opservatorije a sa λ geografska dužina nekog mesta na Zemlji, istočno od Griniča, onda je njegovo zvezeano vreme

$$\theta = \theta_G + \lambda.$$

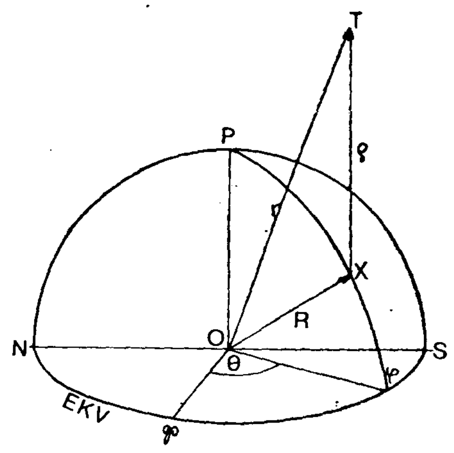
Veza između θ_G i UT nalazi se u astronomskim godišnjacima.

4. Neke veze među koordinatama

a. Veza između topocentralnih i geocentralnih ekvatorskih koordinata. – Pri određivanju položaja nekog veštačkog satelita T (sl. 11) ove dve vrste odredbenih elemenata mogu se dosta razlikovati pa se stoga mora znati veza među njima. Naravno, kad je reč o telima koja se nalaze daleko u kosmosu ove razlike su beznačajne i zanemarljive.

Neka mesto posmatranja bude X, a O centar Zemlje, R vektor položaja mesta posmatranja u odnosu na centar Zemlje ($R \approx 6370$ km) i neka su vektori položaja satelita T u odnosu na O i X dati sa $\boldsymbol{r}$ i $\boldsymbol{\rho}$. Tada očigledno važi vektorska relacija

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{\rho} + \boldsymbol{R}. \tag{1}$$



sl. 11

Uzmimo da je veštački satelit T određen u odnosu na topocentralni ekvatorski sistem rastojanjem XT (potegom) $\rho = |\boldsymbol{\rho}|$ i uglovima α_T i δ_T koji određuju pravac od X ka T. Neka pravac vektora $\boldsymbol{R}$ bude određen uglovima θ (odgovara geocentralnoj rektascenziji mesta posmatranja) i φ (geografska širina mesta koja odgovara geocentralnoj deklinaciji mesta posmatranja). Tada, ako sa Dekartove koordinate vežtačkog satelita T obeleže sa x, y, s; takve koordinate mesta X sa $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$; i najzad koordinate vektora $\boldsymbol{\rho}$ sa ξ, η, ζ dobivamo projeciranjem vektorske relacije (1) na ose Dekartovog pravouglog koordinatnog sistema sa početkom u tački O

$$x = \xi + + \bar{x}, \quad y = \eta + \bar{y}, \quad z = \zeta + \bar{z}. \tag{2}$$

Međutim, s obzirom na veze koje postoje između Dekartovih pravouglih koordinata i sfernih koordinata, biće

$$\begin{aligned} \xi &= \rho \cos \delta_T \cos \alpha_T, & \bar{x} &= R \cos \varphi \cos \theta, \\ \eta &= \rho \cos \delta_T \sin \alpha_T, & \bar{y} &= R \cos \varphi \sin \theta, \\ \zeta &= \rho \sin \delta_T; & \bar{z} &= R \sin \varphi. \end{aligned}$$

Unošenjem ovih vrednosti u relacije (2) biće određene Dekartove pravougle geocentralne koordinate x, y, z. Zatim se iz relacija

$$\begin{aligned} x &= r \cos \delta \cos \alpha, \\ y &= r \cos \delta \sin \alpha, \\ z &= r \sin \delta, \end{aligned}$$

gde su r, α i δ geocentralne ekvatorske koordinate veštačkog satelita T, dobiva

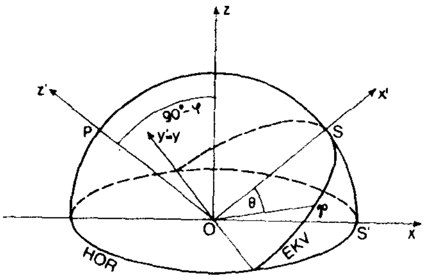
$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},$$

$$\sin \delta = \frac{z}{r}, \qquad (-90^\circ \leqslant \delta \leqslant 90^\circ)$$

$$\sin \alpha = \frac{y}{r \cos \delta}; \qquad \cos \alpha = \frac{x}{r \cos \delta}.$$

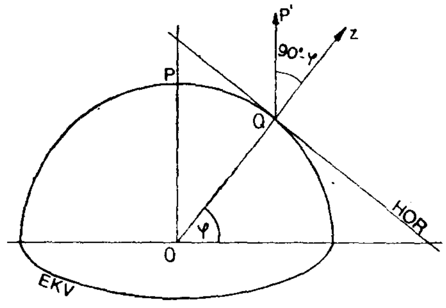
Jasno je da se ovaj postupak može obrnuti, tj. da se mogu odrediti topocentralne ekvatorske koordinate, ako su date geocentralne.

b. Transformacija ekvatorskih u horizontske koordinate. — Pošto su ekvatorske koordinate obično geocentralne a horizontske topocentralne tok ove transformacije se zamišla ovako. Na pr. prvo se geocentralne ekvatorske koordinate pretvore u topocentralne. Ovo se može izvesti prema obrascima za pretvaranje geocentralnih u topocentralne ekvatorske koordinate, pošto su kod veštačkih satelita potrebna rastojanja od Zemlje poznata.

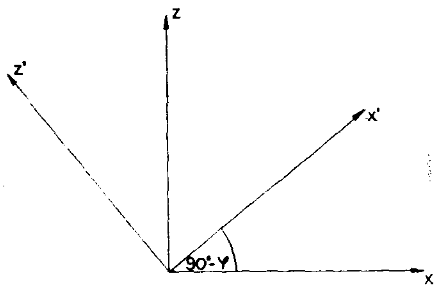


Sl. 12

Treba zatim uspostaviti veze između topocentralnih ekvatorskih i horizontskih koordinata. Radi toga uočimo jedan Dekartov pravougli sistem koordinata $Ox'y'z'$, koji odgovara drugom ekvatorskom sistemu koordinata, tj. kome je x'-osa orijentisana prema jugu S a osnovna ravan prolazi kroz stajalište O posmatrača (sl. 12). Neka drugi Dekartov pravougli sistem koordinata bude $Oxyz$ sa istim početkom O, ali kome je osnovna ravan horizont x-osa orijentisana prema južnoj tački S' u horizontu. Ova dva koordinatna sistema će nam omogućiti da uspostavimo tražene veze uz pomoć Dekartovih koordinata. Označimo još ugao između x-ose i $O\Upsilon$ sa θ, a ugao $ZOP = 90° - \varphi$, gde je φ geografska širina mesta posmatrača, jer horizont obrazuje sa ekvatorom ugao $90° - \varphi$ (sl. 13). Ako je u Dekartovom sistemu $Oxyz$, orijentacija y-ose izabrana



Sl. 13



Sl. 14

tako da sistem bude desni, onda se ose y' i y ova dva sistema poklapaju i sistem $Ox'y'z'$ je samo zaokrenut oko $y' = y$-ose prema sistemu $Oxyz$ za ugao $90° - \varphi$ (sl. 14). Tada je lako preračunati koordinate jednog pomoću koordinata onog drugog, tj.

$$\begin{aligned} x &= x' \sin\varphi - z' \cos\varphi, \\ y &= y', \\ z &= x' \cos\varphi + z' \sin\varphi. \end{aligned} \tag{1}$$

Na sličan se način koordinate ξ, η, ζ Dekartovog koordinatnog sistema, kome je ekvator osnovna ravan, pretvaraju u koordinate sistema $Ox'y'z'$

(kome je ekvator takođe osnovna ravan a koji je samo u odnosu na prvi zaokrenut oko ose $z' = \zeta$ za ugao θ). Tada je

$$
\begin{aligned}
x' &= \xi \cos\theta + \eta \sin\theta, \\
y' &= -\xi \sin\theta + \eta \cos\theta, \qquad (2) \\
z' &= \zeta .
\end{aligned}
$$

Ako se ove vrednosti za x', y', z' unesu u (1) dobiće se Dekartove pravougle koordinate u horizontskom sistemu izražene pomoću Dekartovih ekvatorskih topocentralnih koordinata ξ, η, ζ. Na taj način se dobiva

$$
\begin{aligned}
x &= \xi \sin\varphi \cos\theta + \eta \sin\varphi \sin\theta - \zeta \cos\varphi, \\
y &= \xi \sin\theta + \eta \cos\theta, \qquad (3) \\
z &= \xi \cos\varphi \cos\theta + \eta \cos\varphi \sin\theta + \zeta \sin\varphi.
\end{aligned}
$$

Azimut A i visina a se sad mogu izračunati iz relacija veza između Dekartovih i sfernih koordinata koje glase

$$
\begin{aligned}
x &= r \cos a \cos A, \\
y &= r \cos a \sin A, \\
z &= r \sin a,
\end{aligned}
$$

gde je

$$r = OX = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

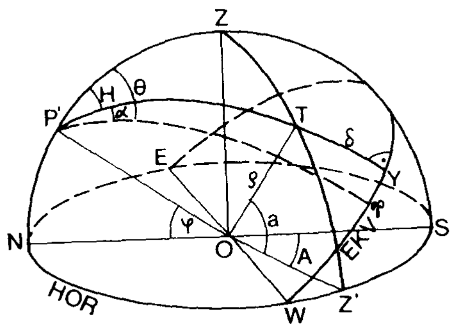
Međutim, i neposredno sa sl. 7, gde X obeležava veštački satelit, ako je x-osa prema jugu a y-osa prema zapadu vidi se da je tada

$$\sin A = \frac{y}{r \cos a},$$

$$\cos A = \frac{x}{r \cos a},$$

$$\sin a = \frac{z}{r}, \qquad (-90° \leqslant a \leqslant 90°).$$

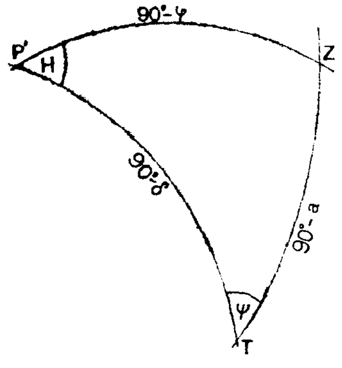
Ove veze između ekvatorskih i horizontskih topocentralnih koordinata mogu se izvesti i nešto neposrednije. Tako, neka bude (sl. 15) O — položaj poposmatrača, T — veštački satetit, P' — pravac prema nebeskom polu od posmatrača, Z — zenit, $P'ZS$ — merdijan posmatrača, $a = \sphericalangle TOZ'$ — visina, $A = \sphericalangle SZT$ — azimut satelita, ovde uočen od južne tačke retrogradno prema zapadu, ρ — poteg satelita, α i δ topocentralna rektascenzija i deklinacija satelita, H — časovni ugao, θ — lokalno zvezdano vreme (vreme posmatrača) i najzad φ — geografska širina mesta posmatranja.



Sl. 15

Tada se iz sfernog trougla (sl. 16), koji se zove i *nautički trougao* zato što se koristi u nautici, dobiva pomoću sinusne teoreme sferne trigonometrije naredna veza

$$\sin A \cos a = \cos \delta \sin H, \qquad \text{(I)}$$



sl. 16

a iz kosinusne teoreme za stranicu $90° - a$

$$\sin a = \sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta \cos H. \qquad \text{(II)}$$

Za tačno određivanje azimuta u razmaku od $0° - 360°$, koristi se pri ovom pretvaranju još jedan obrazac i to

$$\cos A \cos a = \cos \varphi \sin \delta + \sin \varphi \cos \delta \cos H \qquad \text{(III)}$$

Ovaj se obrazac izvodi tako što se ψ (ugao između meridijana i vertikala kod T) prvo odredi iz kosinusne teoreme za uglove sfernog trougla i napiše

$$\cos A = \cos H \cos \psi - \sin H \sin \psi \sin \delta,$$

odakle treba eliminisati $\sin \psi$ i $\cos \psi$. To se može postići, ako se iz sinusne teoreme sfernog trougla napiše veza

$$\sin \psi = \frac{\sin H \cos \varphi}{\cos a},$$

a iz kosinusne teoreme za uglove veza

$$\cos \psi = \cos H \cos A + \sin H \sin A \sin \psi,$$

pa to unese u izraz za $\cos A$.

U vezama I – III pojavljuju se sa strane ekvatorskih koordinata samo deklinacija δ i časovni ugao H, ali s obzirom na vremensku relaciju postoji uvek veza

$$\alpha = \theta - H,$$

gde je α rektascenzija satelita T, a θ *lokalno zvezdano vreme* (*vreme posmatrača*).

Pretvaranje ekvatorskih topocentralnih koordinata u takve horizontske koordinate potrebno je na pr. za postavljanje azimutne montaže usmerene antene radi prijema od veštačkog satelita. Pri tome azimutno montirati neki instrument znači podesiti da se može obrtati oko vertikalne i horizontalne ose.

III KRETANJE U POLJU NJUTNOVE SILE GRAVITACIJE. KEPLEROVI ZAKONI

Neka se sila F zove *centralna*, ako njena osnova (napadna linija) stalno prolazi kroz određenu tačku prostora — *centar sile*. Na ovaj način je za svaki položaj tačke (izuzev za sam centar) utvrđen *pravac* dejstva sile, a *smer* i *intenzitet* mogu biti proizvoljni. Centralna sila orijentisana ka centru je *privlačna* (*atraktivna*), a orijentisana od centra je *odbojna* (*repulzivna*). Što se tiče intenziteta posebno važnu kategoriju centralnih sila čine one, čiji intenzitet zavisi samo od rastojanja r tačke od centra. Pri tome je

$$r = |\boldsymbol{r}| = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}, \tag{1}$$

ako je koordinatni početak Dekartovog koordinatnog sistema u centru sile.

Najvažniji slučaj neke takve centralne sile je *Njutnova* (Newton) *sila univerzalne gravitacije* To je sila kojom se dve mase m i m_1 *uzajamno privlače*. Vektorska diferencijalna jednačina kretanja neke materijalne tačke (tela) mase m u takvom slučaju, ako je m_1 masa tela u centru sile, glasi

$$\boldsymbol{F} = m\ddot{\boldsymbol{r}} = -k^2 \frac{m m_1}{r^2} \boldsymbol{r}_0 = -k^2 \frac{m m_1}{r^3} \boldsymbol{r}, \tag{2}$$

gde je

$$k^2 = 6{,}67 \times 10^{-8}\,\mathrm{cm}^3\,\mathrm{g}^{-1}\,s^{-2} = 6{,}67 \times 10^{-11}\,m^3\,\mathrm{kg}^{-1}\,s^{-2}, \tag{3}$$

tzv. *univerzalna konstanta gravitacije*, a $\boldsymbol{r}_0 = \dfrac{\boldsymbol{r}}{r}$ jedinični vektor vektora položaja.

Vektorska diferencijalna jednačina (2) se može napisati u obliku

$$\ddot{\boldsymbol{r}} = -\frac{k^2 m_1}{r^3} \boldsymbol{r}, \tag{4}$$

koji je nezavisan od mase m. Iz (2) se vidi da je intenzitet sile F određen sa

$$F = \frac{k^2 m m_1}{r^2} \tag{5}$$

a zakon dejstva (ovde privlačenje) sa

$$f(r) = -k^2 \frac{m m_1}{r^2}. \tag{6}$$

Sila Zemljine teže je takođe centralna privlačna sila iste prirode kao sila (2) pa, ako se uzme u obzir Zemljin poluprečnik $R \approx 6{,}37 \times 10^3$ km, intenzitet sile kojom Zemlja privlači neku tačku mase m koja se nalazi na visini x iznad njene površi (naravno pretpostavljene kao sfera) biće

$$F = k^2 \frac{m\, m_1}{(R+x)^2}, \tag{7}$$

gde je m_1 masa Zemlje. Na samoj površi Zemlje je $x=0$ i $F=mg$, pri čemu je $g = 9{,}78\; m\, s^{-2}$ do $9{,}83\; m\, s^{-2}$ *ubrzanje Zemljine teže* na njenoj površi.

Masa Zemlje m_1 može sad da se izračuna iz obrasca

$$R^2 g = k^2 m_1, \tag{8}$$

koji se dobiva uzimanjem u obzir navedenih podataka, a odatle se za ubrzanje g dobiva

$$g = \frac{k^2 m_1}{R^2}. \tag{9}$$

Nije teško pokazati da za kretanje tela u polju gravitacije važi zakon o održanju mehaničke energije. Jer, ako se pođe od mehaničkog zakona kinetičke energije u diferencijalnom obliku

$$dT = \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r}, \tag{10}$$

gde je

$$T = \frac{1}{2} m v^2, \tag{11}$$

kinetička energija tela mase m, koja se kreće brzinom v, može se u našem slučaju s obzirom na (2) napisati

$$dT = -k^2 \frac{m\, m_1}{r^3} \boldsymbol{r} \cdot d\boldsymbol{r} = -k^2 \frac{m\, m_1}{r^2} dr, \tag{12}$$

pošto je $\boldsymbol{r} \cdot d\boldsymbol{r} = r\, dr$.

Tada se integracijom iz (12) dobiva

$$T = U + h, \tag{13}$$

ako se sa U obeleži *funkcija sile*

$$U = -k^2 m m_1 \int \frac{1}{r^2} dr = k^2 \frac{m\, m_1}{r}, \tag{14}$$

i ako je h neodređena konstanta integracije koja se određuje iz početnih uslova. U je ovde funkcija položaja.

Prema tome integral energije (13) se može napisati

$$mv^2 = 2 k^2 \frac{m\, m_1}{r} + 2h, \tag{15}$$

pri čemu je, ako su r_0 i v_0 početni poteg i početna brzina

$$2\,h = mv_0^2 - 2\,k^2\,\frac{m\,m_1}{r_0}\,. \tag{16}$$

Osim ovog integrala energije za kretanje tela u polju gravitacije postoji i *integral kinetičkog momenta* odnosno, *integral površine.*

Naime, iz mehaničkog zakona momenta količine kretanja tela (materijalne tačke) u diferencijalnom obliku koji, za telo mase m i za centar privlačenja kao pol, glasi

$$d\,[m\,(\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{v})] = (\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F})\,dt, \tag{17}$$

dobiva se za silu (2) odmah

$$d\,[m\,(\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{v})] = 0, \tag{18}$$

pošto je ovde centralna sila $\boldsymbol{F}$ kolinearna sa vektorom $\boldsymbol{r}$. Iz prethodne relacije proističe

$$m\,(\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{v}) = \boldsymbol{\Gamma} = \text{const}. \tag{19}$$

Konstantni vektor $\boldsymbol{\Gamma}$ je određen relacijom

$$\boldsymbol{\Gamma} = m(\boldsymbol{r}_0 \times \boldsymbol{v}_0), \tag{20}$$

gde su $\boldsymbol{r}_0$ i $\boldsymbol{v}_0$ vektori početnog položaja i početne brzine uočene tačke. To pokazuje da je vektor $\boldsymbol{\Gamma}$ stalno upravan na ravni određenoj vektorima $\boldsymbol{r}_0$ i $\boldsymbol{v}_0$, koja se zove *invarijabilna* (*nepromenljiva*) ili *Laplasova* (Laplace) *ravan*. Odavde se vidi da je putanja tela koje privlači neki nepokretni centar ravanska putanja.

Kako je

$$\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{v} = 2\,\boldsymbol{S} = \frac{\boldsymbol{\Gamma}}{m}, \tag{21}$$

ako je $\boldsymbol{S}$ tzv. sektorska brzina, imaće taj vektor samo jednu koordinatu S, onu upravnu na ravan određenu vektorima $\boldsymbol{r}_0$ i $\boldsymbol{v}_0$, odn. vektorom $\boldsymbol{\Gamma}$, i to

$$S = \frac{1}{2}\,|\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{v}| = \frac{1}{2}\,|\boldsymbol{r}_0 \times \boldsymbol{v}_0| = \frac{1}{2}\,r_0\,v_0 \sin(\boldsymbol{r}_0, \boldsymbol{v}_0) = \text{const}. \tag{22}$$

Pošto je utvrđeno da je kretanje uočene tačke u invarijabilnoj ravni, mogu se integral energije (15) i skalarna vrednost S sektorske brzine, na poznati način (vidi: Anđelić, Stojanović — *Racionalna mdhanika)* izraziti u ravanskim polarnim koordinatama ρ i ϑ. Ako se pol tog sistema uzme u centru privlačenja a polarna osa orijentiše proizvoljno, onda će se za $\rho = |\boldsymbol{r}| = r$, tj. poteg jednak intenzitetu vektora položaja, kad se uzme u obzir (22) dobiti

$$m\,(\dot{\rho}^2 + \rho^2\,\dot{\vartheta}^2) = 2\,U + 2\,h, \tag{23}$$

$$2\,S = \rho^2\,\dot{\vartheta} = \rho\,v \sin(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}) = \rho_0\,v_0 \sin(\boldsymbol{r}_0, \boldsymbol{v}_0) = A,$$

gde smo na desnoj strani uveli tzv. konstantu površine A.

Unošenjem

$$\dot{\vartheta} = \frac{A}{\rho^2}, \tag{24}$$

iz druge od jednačina (23) u prvu dobiva se

$$m\dot{\rho}^2 = 2U - \frac{mA^2}{\rho^2} + 2h, \tag{25}$$

a odatle se može eliminisati vreme t, kad se poteg ρ smatra kao funkcija vremena preko polarnog ugla ϑ, tj. $\rho = \rho[\vartheta(t)]$. Tada je s obzirom na (24)

$$\dot{\rho} = \frac{d\rho}{d\vartheta}\dot{\vartheta} = \frac{A}{\rho^2}\frac{d\rho}{d\vartheta},$$

pa kad je funkcija sile U funkcija samo od ρ, onda se diferencijalna jednačina (25) može napisati u obliku

$$\left(\frac{d\rho}{d\vartheta}\right)^2 = \Phi(\rho), \text{ odn. } \frac{d\rho}{\sqrt{\Phi(\rho)}} = d\vartheta, \tag{26}$$

gde je

$$\Phi(\rho) = \frac{1}{mA^2}(2U + 2h)\rho^4 - \rho^2. \tag{27}$$

Integracijom diferencijalne jednačine (26) dobiva se jednačina trajektorije

$$\rho = \rho(\vartheta) \tag{28}$$

u polarnim koordinatama.

Konačne jednačine kretanja onda dobivaju se, kad se ovaj integral unese u (24), što daje

$$\frac{d\vartheta}{dt} = \frac{A}{[\rho(\vartheta)]^2}, \tag{29}$$

tako, da se odatle prvo izračuna $\vartheta = \vartheta(t)$ a zatim zameni u (28) i dobiva $\rho = \rho(t)$.

U našem slučaju s obzirom na (14) biće

$$\Phi(\rho) = \frac{1}{mA^2}\left[\frac{2k^2mm_1}{\rho} + 2h\right]\rho^4 - \rho^2,$$

i ako se stavi

$$\frac{k^2m_1}{A^2} = \frac{1}{p}, \tag{30}$$

i malo uprosti, može se napisati

$$\Phi(\rho) = \left[\frac{2}{p\rho} + \frac{2h}{mA^2} - \frac{1}{\rho^2}\right]\rho^4. \tag{31}$$

Uvođenje oznake

$$e = \sqrt{1 + \frac{2hA^2}{k^4mm_1^2}}, \tag{32}$$

i daljim elementarnim transformacijama izraza (31) dobiće se

$$\Phi(\rho)=\frac{e^2\rho^4}{p^2}\left[1-\left(\frac{p}{e\rho}-\frac{1}{e}\right)^2\right],$$

i prema tome diferencijalna jednačina (25) postaje

$$\frac{-d\left(\frac{p}{e\rho}-\frac{1}{e}\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{p}{e\rho}-\frac{1}{e}\right)^2}}=d\vartheta, \tag{33}$$

odakle se kvadraturom dobiva

$$\operatorname{arc}\cos\left(\frac{p}{e\rho}-\frac{1}{e}\right)=\vartheta+\alpha,$$

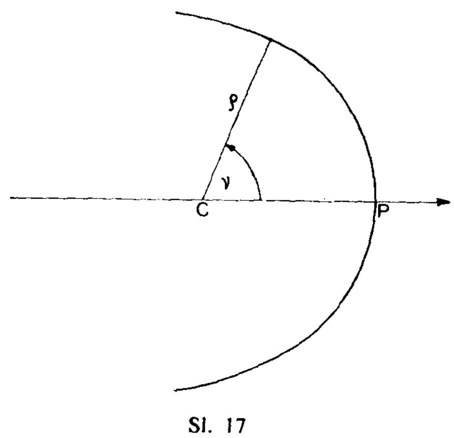
gde je α integraciona konstanta. Prema tome je

$$\frac{p}{e\rho}-\frac{1}{e}=\cos(\vartheta+\alpha),$$

odnosno ako se stavi $\vartheta+\alpha=\nu$

$$\rho=\frac{p}{1+e\cos\nu}. \tag{34}$$

Ovo je, međutim, jednačina konusnog preseka u polarnim koordinatama, čiji je fokus u centru privlačenja C (sl. 17), ρ je poteg a ν polarni ugao između fokusne ose orijentisane prema najbližoj tački P konusnog preseka (*pericientru*) i potega, tzv. *prava anomalija*. Veličina e je *ekscentričnost* (numerička) konusnog preseka, a p je tzv. *parametar* konusnog preseka.



Sl. 17

Iz (32) se vidi da će putanja biti: *elipsa* ($e<1$), kad je $h<0$; *parabola* ($e=1$), za $h=0$; *hiperbola* ($e>1$), za $h>0$.

Primetićemo još da izbor znaka + ili − ispred kvadratnog korena u (26) ne menja oblik krive linije putanje već to utiče samo na pomeranje faze i zavisi od početnih uslova.

Ovakvo kretanje tela zove se *keplerovsko* i tako se približno kreću planete i druga nebeska i veštačka tela, kad se može pretpostaviti da na njih dejstvuje samo jedan relativno nepokretan centar privlačenja (gravitacije) a ona sama ne privlače centar, odn. kad je uočeno telo koje se kreće malo u odnosu na telo u centru privlačenja (Sunce za planete, planete za neke svoje pratioce i veštačke satelite itd.).

Putanje planeta oko Sunca zovu se *orbite*, ali se termin orbita danas upotrebljava i šire za putanje veštačkih satelita Zemlje pa i uopšte za putanje tela koja ova opisuju oko drugog tela — za sve konusne preseke. Ipak, u pravom smislu reči, termin orbita se uglavnom koristi, kad je reč o putanji po kojoj se kretanje tela periodično ponavlja, što napr. nije slučaj kod paraboličnih i hiperboličnih putanja.

Činjenicu da su putanje planeta oko Sunca elipse otkrio je *Kepler* (Kepler) 1607. godine i ona je poznata kao *prvi Keplerov zakon*, koji glasi: *Planete opisuju elipse u čijoj se jednoj žiži nalazi Sunce.*

U smislu naših prethodnih izlaganja ovaj se zakon može ovako izraziti, jer nije reč samo o planetama i Suncu već i o veštačkim satelitima uopšte: *Telo čija je masa dovoljno mala u odnosu na telo u centru privlačenja kreće se po nekom konusnom preseku čija je žiža u centru privlačenja a oblik mu je određen početnim uslovima.*

Činjenica da je pri ovakvim kretanjima u polju gravitacije sektorska brzina (21) konstantna čini *drugi Keplerov zakon* (ili *zakon jednakih površina*) koji u Kaplerevoj formulaciji glasi: *Potezi planeta opisuju za jednaka vremena jednake površine*, odn. potezi opisuju u toku vremena površine sektora proporcionalne vremenu t, jer iz

$$\dot{P} = S = \text{const.}$$

proističe

$$P = St.$$

Ovaj zakon očigledno važi uopšte za sve slučajeve prirodnih i veštačkih satelita, a ne samo za planete.

Krug ($e = 0$) takođe spada u konusne preseke. Da bi kretanje bilo kružno potrebno je prema (16) i (32) i s obzirom da je $A = \rho_0^2 \dot{\vartheta}_0 = \rho_0 \vartheta_0$, da bude

$$v_4^0 - \frac{2k^2 m_1}{\rho_0} v_0^2 + \frac{k^4 m_1^2}{\rho_0^2} = 0, \tag{35}$$

a to je bikvadratna jednačina po početnoj brzini i ima samo jedno rešenje za kvadrat te brzine

$$v_0^2 = \frac{k^2 m_1}{\rho_0},$$

odnosno

$$\frac{v_0^2}{\rho_0} = \frac{k^2 m_1}{\rho_0^2}. \tag{36}$$

Pošto je $\dfrac{v_0^2}{\rho_0}$ centripetalno ubrzanje u početnom trenutku, a $\dfrac{k^2 m_1}{\rho_0^2}$ ubrzanje koje proisiiče od Njutnove sile gravitacije vidi se da u početnom trenutku centripetalno ubrzanje mora biti jednako ubrzanju izazvanom Njutnovom silom gravitacije.

Zamenom $v_0 = \rho_0 \dot{\vartheta}_0$ iz (36) se dobiva algebarska vrednost početnog ugaonog ubrzanja

$$\dot{\vartheta}_0 = \pm \sqrt{\frac{k^2 m_1}{\rho_0^3}}. \tag{37}$$

Početna brzina po kružnoj putanji je time potpuno određena, jer kako početna brzina mora biti tangentna na putanji, radijalna brzina je u ovom slućaju jednaka nuli ($\dot{\rho}_0 = 0$). Za sam uslov je inače irelevantno o kojem je znaku reč, jer to ukazuje samo na dva moguća smera kretanja po krugu.

Klasifikaciju putanja prirodnih i veštačkih tela oko centra privlačenja izveli smo malo čas prema ekscentričnosti e i vrednosti konstante h u integralu energije. Lako se može postaviti i klasifikacija u odnosu na brzinu kretanja. Tako, kad se izraz za integral energije (15) podeli masom m pokretnog tela i stavi

$$k^2 m_1 = \lambda, \quad a = -\frac{k^2 m m_1}{2h} = -\frac{m\lambda}{2h}, \tag{38}$$

on se može napisati u obliku

$$v^2 = \lambda \left(\frac{2}{\rho} - \frac{1}{a}\right), \tag{39}$$

gde je λ tzv. *karakteristična konstanta gravitacije* vezana za određeno telo (*gravitacioni parametar tela*).

Elipsa. — Iz prethodnog obrasca, s obzirom da je za elipsu $h < 0$, vidi se odmah da će za sve brzine

$$v^2 < \frac{2\lambda}{\rho}, \tag{40}$$

biti

$$0 < a < \infty, \tag{41}$$

i trajektorije elipse (uključujući tu i krug).

U slučaju elipse veličina a predstavlja tzv. *srednje rastojanje* pokretne materijalne tačke od privlačnog centra, odn. *veliku poluosu* elipse po kojoj se telo kreće.

I zaista, iz jednačine (34) se vidi da će najmanje rastojanje, određeno centrom privlačenja za $v = 0$ biti

$$\rho_{min} = \frac{1}{1+e}.$$

Pri tome se ona tačka na putanji koja je najbliža centru privlačenja zove *pericentar* (*perigej*, kad je reč o Zemlji kao privlačnom telu, a *perihel*, ako se radi o Suncu). Najveći poteg putanje za $v = \pi$ biće

$$\rho_{max} = \frac{1}{1-e},$$

pa je srednje rastojanje (velika poluosa elipse)

$$a = \frac{1}{2}(\rho_{min} + \rho_{max}) = \frac{p}{1-e^2}. \tag{42}$$

Najudaljenija tačka putanje od centra gravitacionog privlačenja zove se u opštem slučaju *apocentar* (*apogej* za Zemlju kao centralno telo, a *afel* za Sunce). Ista vrednost za a dobiva se i izračunavanjem iz diferencijalne jednačine (38).

Brzina proizvoljne tačke na elipsi može se uvek lako odrediti poznavanjem polarnih koordinata (ρ, ν) uočene tačke i ugla $\sphericalangle(\mathbf{r}, \mathbf{v})$ koji obrazuje brzina (tangenta) sa potegom na uočenom mestu. I zaista, kad se uzme u obzir da je, prema (30) i (38)

$$A^2 = \lambda p, \tag{43}$$

može se jednačina putanje (34) napisati u obliku

$$\rho = \frac{A^2}{\lambda(1 + e\cos\nu)},$$

a pošto je prema (23)

$$A = \rho v \sin(\mathbf{r}, \mathbf{v}),$$

dobiva se najzad

$$\frac{\rho v^2}{\lambda} \sin(\mathbf{r}, \mathbf{v}) = 1 + e\cos\nu. \tag{44}$$

Odavde se onda lako određuje, napr. brzina v_p neke tačke po elipsi u pericentru, gde je $\nu = 0$, $\sphericalangle(\mathbf{r}, \mathbf{v}) = \frac{\pi}{2}$, što daje

$$v_p = \sqrt{\frac{\lambda}{\rho_p}}\,(1 + e), \tag{45}$$

pri čemu je

$$\rho_p = \rho_{min} \qquad \rho_a = \rho_{max},$$

i

$$\frac{\rho_a}{\rho_p} = \frac{1 + e}{1 - e}.$$

Sad se iz ove relacije i relacije (45) može eliminacijom e izvesti obrazac

$$v_p = \sqrt{\frac{\lambda}{\rho_p} \cdot \frac{1}{\rho_p/\rho_a + 1}}, \tag{46}$$

gde su ρ_a i ρ_p pericentralni i apocentralni poteg.

Za određivanje *vremena T obilaženja* (*revolucije*) planeta oko Sunca i satelita (prirodnih i veštačkih) oko planeta ili, uopšte, obilaženja tela po elipsi oko centralnih privlačnih tela postupa se ovako. Iz kvadrata brzine u ravanskim polarnim koordinatama ρ i ν (sl. 17)

$$v^2 = \dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\nu}^2,$$

može se napisati

$$dt = \frac{d\rho}{\sqrt{v^2 - \rho^2 \dot{\nu}^2}}, \tag{47}$$

gde pozitivan znak ispred kvadratnog korena odgovara kretanju od pericentra ka apocentru, kad ρ raste.

Na osnovu (29) može se sad napisati

$$\rho^2 \left(\frac{d\nu}{dt}\right)^2 = \frac{A^2}{\rho^2}, \tag{48}$$

i pošto je prema (42) i (43)

$$A^2 = \lambda p = \lambda a (1 - e^2), \tag{49}$$

dobiće se najzad

$$\rho^2 \left(\frac{d\nu}{dt}\right)^2 = \frac{\lambda a (1 - e^2)}{\rho^2}. \tag{50}$$

Unošenjem ove vrednosti i vrednosti za v^2 iz (39) u diferencijalnu jednačinu (47) dobiće se

$$dt = \frac{d\rho}{\sqrt{\dfrac{2\lambda}{\rho} - \dfrac{\lambda}{a} - \rho^2 \left(\dfrac{d\nu}{dt}\right)^2}}, \tag{51}$$

i posle sređivanja

$$dt = \sqrt{\frac{a}{\lambda}} \frac{\rho \, d\rho}{\sqrt{2 a \rho - \rho^2 - a^2 (1 - e^2)}}. \tag{52}$$

Po pravilu vreme se računa od pericentra, i to od trenutka $t_0 = \tau$, tzv. *epohe pericentra*, tj. od vremena prolaza tela kroz pericentar, a ne od trenutka $t_0 = 0$, pri čemu je pericentralni poteg $\rho_p = a(1 - e)$. Posle takve integracije dobiće se

$$t - \tau = \sqrt{\frac{a^3}{\lambda}} \left[\arccos \frac{1 - \dfrac{\rho}{a}}{e} - e \sqrt{1 - \left(\frac{1 - \rho/a}{e}\right)^2} \right]. \tag{53}$$

Ako se još uvede

$$\frac{1 - \dfrac{\rho}{a}}{e} = \cos E, \tag{54}$$

biće

$$\sqrt{1 - \left(\frac{1 - \rho/a}{e}\right)^2} = \sin E.$$

Za vreme t potrebno da telo (materijalna tačka) pređe određeni put od pericentra P do ma koje tačke M na putanji dobiva se onda obrazac

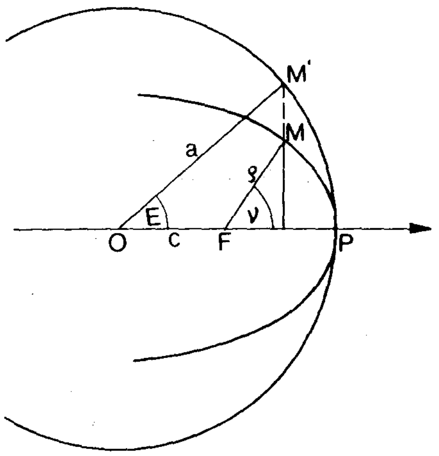
$$t - \tau = \sqrt{\frac{a^3}{\lambda}} (E - e \sin E) \tag{55}$$

ili

$$\sqrt{\frac{\lambda}{a^3}} (t - \tau) = E - e \sin E, \tag{56}$$

a to je *Keplerova jednačina*.

U ovoj jednačini je ugao E *ekscentrična anomalija*, koji je prikazan na slici (sl. 18) na kojoj se elipsa upoređuje sa krugom poluprečnika a sa centrom u centru O elipse. E je $\sphericalangle POM'$ što odgovara i luku PM' tog kruga. Tačka M' kruga koja odgovara tački M elipse nalazi se na normali polarne ose kroz tačku M. F je *žiža* a ugao ν *prava anomalija*. Pri tome je $OP=a$, $OF=c$ (*linearna ekscentričnost* elipse) i $e=\frac{c}{a}$ (*numerička ekscentričnost*).



Sl. 18

Vreme potrebno da bi telo izvelo polurevoluciju i došlo iz pericentra u apocentar, gde je apocentralni poteg $\rho_a=a(1+e)$ i ekscentrična anomalija $E=\pi$, izračunava se iz (56) po obrascu

$$\frac{1}{2}T=\pi\sqrt{\frac{a^3}{\lambda}},$$

a to znači za vreme T obilaženja (*potpune revolucije*) iznosi

$$T=2\pi\sqrt{\frac{a^3}{\lambda}}, \quad \text{odn.} \quad T^2=\frac{4\pi^2}{\lambda}a^3. \tag{57}$$

Ovo je matematički izraz *trećeg Keplerovog zakona*, i to naravno za slučaj, kad je centralno privlačno telo mnogo puta veće mase od posmatranog satelita.

Treći Keplerov zakon se izražava u obliku

$$T_1^2:T_2^2=a_1^3:a_2^3, \tag{58}$$

koji se lako izvodi iz (57) i koji kaže:

Kvadrati vremena obilaženja (planeta oko Sunca, satelita oko planeta), *odnose se kao kubovi velikih poluosa njihovih elipsnih putanja* (srednjih rastojanja pokretnog tela od centralnog tela).

U ovom zakonu leži mogućnost lakog određivanja vremena obilaženja veštačkih satelita po elipsnim putanjama oko Zemlje. Radi toga treba odrediti samo vreme jednolikog kruženja (obilaženja po krugu) poluprečnika a i to će onda biti i vreme obilaženja satelita po svakoj elipsi velike poluose a na osnovu trećeg Keplerovog zakona.

H/km	T/mn
0	84,4
100	86,5
200	88,6
300	90,5
400	92,6
500	94,7
1000	105,1
2000	127,2
5000	201,3
10000	347,7
100000	5742,0

Tablica I — Vreme T obilaženja veštačkog satelita oko Zemlje pri jednolikom kruženju na visini H nad Zemljom

Pri tome je očigledno, ako je R poluprečnik Zemlje biće $a=R+H$.

Za izraz na levoj strani Keplerove jednačine 56) uvodi se obično oznaka

$$M=\sqrt{\frac{\lambda}{a^3}}(t-\tau), \tag{59}$$

i zove *srednja anomalija* eliptičnog kretanja. Keplerova jednačina se onda piše u obliku transcendentne jednačine

$$M = E - e \sin E. \tag{60}$$

Smisao naziva srednja anomalija lako je objasniti, ako se definiše. *srednja ugaona brzina kretanja* po putanji, tzv. *srednje kretanje* $n = \frac{2\pi}{T}$ i uzme u obzir (57). Tada se dobiva

$$n = \sqrt{\frac{\lambda}{a^3}}, \tag{61}$$

pa se može napisati

$$M = n(t - \tau), \tag{62}$$

a to onda odgovara uglu koji opisuje poteg pri srednjem jednolikom kretanju.

U slučaju *parabolične putanje* biće u obrascu (39), s obzirom da je sad $h = 0$

$$v^2 = \frac{2\lambda}{\rho} \quad \text{i} \quad a = \infty, \tag{63}$$

pa se diferencijalna jednačina svodi na

$$dt = \frac{d\rho}{\sqrt{\frac{2\lambda}{\rho} - \rho^2 \left(\frac{d\nu}{dt}\right)^2}}, \tag{64}$$

što kad se uzme u obzir i (48) daje

$$dt = \frac{\rho \, d\rho}{\sqrt{2\lambda\rho - A^2}}. \tag{65}$$

Za početni položaj u temenu parabole $\rho = q = p/2$ u trenutku $t_0 = \tau$, dobiće se odavde posle integracije levo od τ do t, a desno od $p/2$ do ρ izraz

$$t - \tau = \frac{\sqrt{2\lambda\rho - A^2}}{3\lambda^2} (\lambda\rho + A^2).$$

Međutim, kako je i za parabolu $A^2 = \lambda p$, može se napisati

$$t - \tau = \frac{1}{3} (\rho + p) \sqrt{\frac{2\rho - p}{\lambda}}. \tag{66}$$

To je obrazac za određivanje vremena t koje protekne dok telo pređe put od pericentra (temena parabole) do položaja određenog nekim potegom ρ.

Sa druge strane pošto je za parabolu $e = 1$, iz jednčine (34) dobiva se $(p = 2q)$

$$\rho = \frac{p}{1 + \cos\nu} = \frac{p}{2\cos^2 \frac{\nu}{2}} = \frac{q}{\cos^2 \frac{\nu}{2}}, \tag{67}$$

gde je q žižno rastojanje od temena parabole.

Sad se može odrediti vreme prelaza određenog puta po paraboli u zavisnosti od prave anomalije ν na ovaj način. Prvo se integral površine može za parabolu izrazziti u obliku

$$A = \rho^2 \dot{\nu} = \sqrt{\lambda p} = \sqrt{2 \lambda q}.$$

i to uneto u diferencijalnu jednačinu (65) s obzirom na (67) posle kraće transformacije daje

$$dt = \sqrt{\frac{2 q^3}{\lambda}} \, \frac{d \frac{\nu}{2}}{\cos^4 \frac{\nu}{2}}. \tag{68}$$

Integracijom od $t = \tau$ i $\nu = 0$, dobiva se

$$\sqrt{\frac{\lambda}{2 g^3}} \, (t - \tau) = \operatorname{tg} \frac{\nu}{2} + \frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 \frac{\nu}{2}, \tag{69}$$

a to je *Barkerova* (Barker) ili *Olbersova* (Olbers) *jednačina* za određivanje vremena pređenog puta od temena do neke tačke na paraboli u zavisnosti od prave anomalije.

Za *hiperbolu*, za koju iz relacije (39) zbog $h > 0$ imamo

$$v^2 > \frac{2 \lambda}{\rho}, \tag{70}$$

mora sad biti a negativno, tj.

$$0 > a > -\infty,$$

odnosno

$$0 < -a < \infty. \tag{71}$$

Sad se u jednačinu (52) uvede mesto a vrednost $-a$ (što označava tzv. *realnu poluosu hiperbole* i odgovara računu za desnu granu hiperbole). Tada se dobiva

$$dt = \sqrt{\frac{a}{\lambda}} \, \frac{\rho \, d \rho}{\sqrt{2 a \rho + \rho^2 + a^2 (1 - e^2)}}. \tag{72}$$

Ako se opet vreme računa od prolaza kroz pericentar, dobiće se posle integracije od τ do t

$$t - \tau = \sqrt{\frac{\lambda}{(-a)^3}} \left[\operatorname{ar\,cos} h \, \frac{1 + \rho/a}{e} - e \sqrt{\left(\frac{1 + \rho/a}{e} \right)^2 - 1} \, \right]. \tag{73}$$

Za

$$\frac{1 + \rho/a}{e} = \cosh F,$$

biće

$$\sqrt{\left(\frac{1 + \rho/a}{e} \right)^2 - 1} = \sinh F,$$

i relacija (73) se može izraziti u obliku

$$\sqrt{\frac{(-a)^3}{\lambda}}\,(t-\tau)=e\sinh F-F. \tag{74}$$

Ovde je sad *srednja ugaona brzina kretanja* (srednje kretanje)

$$n=\frac{2\pi}{\tau}=\sqrt{\frac{\lambda}{(-a)^3}}, \tag{75}$$

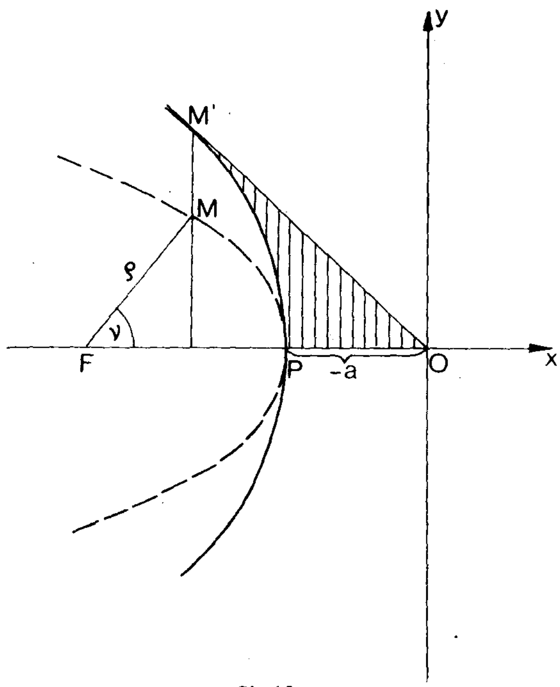
a kao *srednja anomalija* pri hiperboličnom kretanju uzima se

$$M=n\,(t-\tau)=\sqrt{\frac{\lambda}{(-a)^3}}\,(t-\tau), \tag{76}$$

pa hiperbolički ekvivalent Keplerove jednačine glasi

$$M=e\sinh F-F. \tag{77}$$

Geometrijsko značenje veličine F definisano prethodnim relacijama najbolje se uočava upoređivanjem hiperbole sa jednakostraničnom hiperbolom ($e=2$), čije su poluose po veličini obe jednake a, kao što se značenje ekscentričke anomalije kod elipse najbolje sagledava upoređivanjem elipse sa krugom čiji je poluprečnik jednak velikoj poluosi elipse.



Sl. 19

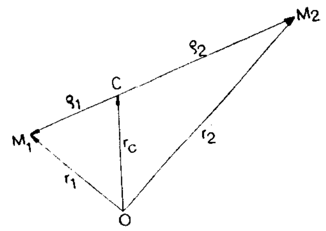
Na slici 19 je prikazana leva grana proizvoljne hiperbole (izvučena crtasto) sa jednakostraničnom hiperbolom (jače izvučeno). Značenje veličine F sad nije ugao (odno. luk) već površina osenčena na slici a koordinirana na pokazani način tački M hiperbole, a ograničena, kako se vidi, realnom poluosom, lukom jednakostranične hiperbole i spojnicom koordinatnog početka (centra O) sa tačkom M' na jednakostraničnoj hiperboli koja odgovara tački M date hiperbole. Pri tome se tačka M' nalazi na normali na polarnoj osi kroz tačku M.

IV PROBLEM DVA TELA

U prethodnom odeljku govorili smo o kretanju tela smatranih kao materijalne tačke u polju gravitacije i imali pred očima stalno *samo dva tela* jedno kao centar privlačenja i drugo pokretno, a inače oba dovoljno izolovana od ostalih kosmičkih objekata. Pri tome smo kosmički objekt (prirodni ili veštački) — pokretno telo-smatrali dovoljno male mase tako da je njegovo gravitaciono dejstvo na kretanje centralnog tela malo i može se zanemariti pa se centralno telo smatra kao nepokretno. Takve pretpostavke su dobro ostvarene, kad je reč, na pr. o kretanju veštačkih satelita Zemlje. Međutim, u opštem slučaju u prirodi to nije tako. Oba tela, i ono koje smo uzeli kao centralno, kreću se pod dejstvom gravitacije jedno u odnosu na drugo. Već, na pr., za dva tela kao Mesec, čija je masa m i Zemlja čija je masa $m_1 = 81{,}45\,m$ prethodni uslovi nisu zadovoljeni. Stoga se prethodni proučeni slučaj zove i *ograničeni problem dva tela.*

Pravi *problem dva tela*, u užem smislu, kad oba tela utiču na kretanje jedno drugog, se mora drukčije razmatrati i dovodi do nešto drukčijih rezultata.

Uočimo, dakle, sistem od dva tela (dve slobodne materijalne tačke) M_1 i M_2 čije su mase m_1 i m_2 (na pr. Zemlja i Mesec), a koja se uzajamno privlače po Njutnovom zakonu gravitacije (sl. 20).



Sl. 20

Ako su položaji te dve tačke određeni u odnosu na neki nepokretni pol O vektorima položaja $\boldsymbol{r}_1$ i $\boldsymbol{r}_2$, sila kojom telo M_2 dejstvuje na telo M_1 biće

$$\boldsymbol{F}_1 = k^2 \frac{m_1 m_2}{r^3} (\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1), \tag{1}$$

a sila kojom telo M_1 dejstvuje na telo M_2 biće

$$\boldsymbol{F}_2 = k^2 \frac{m_1 m_2}{r^3} (\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2), \tag{2}$$

gde je r rastojanje između tih tela $r = M_1 M_2 = |\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2|$, a k^2 kao uvek univerzalna konstanta gravitacije. Vektorske diferencijalne jednačine kretanja tačaka ovog sistema glase

$$\ddot{\boldsymbol{r}}_1 = k^2 \frac{m_2}{r^3} (r_2 - r_1), \tag{3}$$

$$\ddot{\boldsymbol{r}}_2 = k^2 \frac{m_1}{r^3} (r_1 - r_2). \tag{4}$$

Zbir sila F_1 i F_2 mora, prema trećem Njutnovom zakonu, biti jednak nuli. I zaista je, prema (1) i (2) $F_1 + F_2 = 0$. Stoga se sabiranjem jednačina (3) i (4) pomnoženih sa m_1 odn. m^2 dobiva

$$m_1 \ddot{r}_1 + m_2 \ddot{r}_2 = 0. \tag{5}$$

Međutim, po pravilu za određivanje centra mase C dinamičkog sistema, biće

$$m_1 r_1 + m_2 r_2 = (m_1 + m_2) r_C = m\, r_C, \tag{6}$$

gde je $m = m_1 + m_2$ ukupna masa oba tela a r_C vektor položaja centra mase. Zbog nepromenljivosti masa diferenciranjem relacije (6) dva puta po vremenu dobiće se s obzirom na (5) da centar mase nema ubrzanja

$$\ddot{r}_C = 0. \tag{7}$$

To znači, *centar mase sistema od dva tela kreće se po inerciji jednoliko po pravoj liniji*, koja je određena vektorskom jednačinom

$$r_C = At + B. \tag{8}$$

Vektori A i B su integracione konstante i određuju se iz početnih uslova t_0, r_{C_0} i $\dot{r}_{C_0}$,

$$A = \dot{r}_{C_0}, \quad B = r_{C_0} - \dot{r}_{C_0} t_0. \tag{9}$$

Da bismo proučili kretanje uočena dva tela u odnosa na njihov centar mase C, uzmimo sam centar mase za pol i tada, ako su vektori položaja tačke M_1 i M_2 obeleženi ρ_1 i ρ_2 biće

$$r_1 = r_C + \rho_1, \quad r_2 = r_C + \rho_2. \tag{10}$$

Vektori ubrzanja ova dva tela u odnosu na centar mase biće zbog (7)

$$\ddot{r}_1 = \ddot{\rho}_1, \quad \ddot{r}_2 = \ddot{\rho}_2. \tag{11}$$

Linearni moment masa za centar mase, kako znamo, jednak je nuli, pa je stoga

$$m_1 \rho_1 + m_2 \rho_2 = 0, \tag{12}$$

odakle proističe

$$\rho_1 = -\frac{m_2}{m_1} \rho_2, \quad \rho_2 = -\frac{m_1}{m_2} \rho_1. \tag{13}$$

S obzirom na (13) međusobno rastojanje $r = M_1 M_2$ tela M_1 i M_2 može se izraziti pomoću samo jednog od dva vektora položaja

$$r = |r_1 - r_2| = |\rho_1 - \rho_2| = \left| \rho_1 + \frac{m_1}{m_2} \rho_1 \right| = \left| -\frac{m_2}{m_1} \rho_2 - \rho_2 \right|,$$

tako da bude

$$r = \frac{m}{m_2} \rho_1 = \frac{m}{m_1} \rho_2, \tag{14}$$

gde je $\rho_1 = |\varrho_1|$, $\rho_2 = |\varrho_2|$. Kad se relacije (10), (11), (13) i (14) uzmu u obzir i odnosne vrednosti unesu u jednačine (3) i (4) ove će postati

$$\ddot{\varrho}_1 = -k^2 \frac{\mu}{\rho_1^3} \varrho_1, \qquad \left(\mu = \frac{m_2^3}{m^2}\right) \tag{15}$$

$$\ddot{\varrho}_2 = -k^2 \frac{\nu}{\rho_2^3} \varrho_2. \qquad \left(\nu = \frac{m_1^3}{m^2}\right). \tag{16}$$

To su jednačine kretanja ova dva tela u odnosu na njihov centar mase. One pokazuju svojim oblikom da *svako od ovih tela opisuje oko centra mase konusni presek* i to telo mase m_1 kao da je u centru mase privlačno telo mase μ, a telo m_2 tako kao da je u centru mase privlačno telo mase ν.

Ostaje još da se razjasni kretanje jednog od ovih tela u odnosu na drugo. Ako se radi toga sa $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{M_1 M_2} = \boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1$ obeleži vektor položaja jednog tela u odnosu na drugo, oduzimanjem diferencijalne jednačine kretanja (3) od jednačine (4) i uprošćavanjam dobiće se diferencijalne jednačina kretanja tela M_1 prema telu M_2 u obliku

$$\ddot{\boldsymbol{r}} = -k^2 \frac{m_1 + m_2}{r^3} \boldsymbol{r} = -k^2 \frac{m}{r^3} \boldsymbol{r}. \tag{17}$$

Ista takva jednaćina se dobiva i za određivanje kretanja tela M_2 u odnosu na telo M_1, što se odmah vidi zamenom u jednačini (17) vektora $\boldsymbol{r}$ sa $-\boldsymbol{r}$. Struktura ove jednačine je istovetna sa drugim jednačinama koje opisuju kretanje oko privlačnog centra u gravitacionom polju, pa se, prema tome, *dva tela kreću jedno oko drugog po konusnim presecima,* ali tako kao da je u centru privlačenja celokupna masa sistema.

Dakle, ako se uoče dva tela, oba dovoljno velika (na pr. Sunce i planeta ili Zemlja i Mesec), koja su oba pokretna i dovoljno izolovana od dejstva ostalih tela, tada tačna diferencijalna jednačina kretanja tela mase m_1 oko tela mase M s obzirom na (17) glasi

$$\ddot{\boldsymbol{r}} = -k^2 \frac{M + m_1}{r^3} \boldsymbol{r}, \tag{18}$$

ako je $\boldsymbol{r}$ vektor položaja tela mase m_1 u odnosu na telo mase M.

Stoga, ako se uoče dve planete, čije su mase m_1 i m_2, koje se kreću oko Sunca po zakonu (17) po eliptičnim putanjama čije su velike poluose a_1 i a_2, biće s obzirom na (III, 57)

$$T_1^2 = \frac{4\pi^2}{\lambda_1} a_1^3, \quad T_2^2 = \frac{4\pi^2}{\lambda_2} a_2^3.$$

Međutim, sad je $\lambda_1 = k^2 (M + m_1)$ i $\lambda_2 = k^2 (M + m_2)$, ako se na način ranije prikazan vreme obilaženja odredi na osnovu jednačine (18). Deobom T_1^2 sa T_2^2 dobiva se sad

$$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{M + m_2}{M + m_1} \frac{a_1^3}{a_2^3}, \tag{19}$$

i to je *poboljšani treći Keplerov zakon* koji važi kad centralno telo nije nepokretno, odn. kad masa jednog tela nije znatno manja od mase drugog tela. Očigledno je iz (19), međutim kad su mase m_1 i m_2 male i zanemarljive u u odnosu na masu M, da se ovaj poboljšani zakon svodi na uobičajenu formulaciju trećeg Keplerovog zakona.

V PUTANJA. ELEMENTI PUTANJE. POREMEĆAJI I KORIŠĆENJE

1. Astronomski putanjski elementi

Vektorska diferencijalna jednačina kretanja tela u odnosu na nepokretni cen'ar ili kretanja oko zajedničkog težišta tela u problemu dva tela

$$\ddot{\boldsymbol{r}} = -k^2 \frac{m}{r^3} \boldsymbol{r}, \tag{1}$$

gde je m odgovarajuća masa, određuje rešenje

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(C_1, \ldots, C_6; t).$$

Pri tome su konstante $C_1, \ldots, C_6$ elementi (parametri) koji određuju *putanju* (*trajektoriju*) tela po *obliku*, *veličini* i *položaju*. Za određivanje integracionih konstanata $C_1, \ldots, C_6$, kako znamo, treba znati početni položaj $\boldsymbol{r}_0 = \{x_0, y_0, z_0\}$ i početnu brzinu $\boldsymbol{v}_0 = \dot{\boldsymbol{r}}_0 = \{\dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0\}$ u nekom „početnom" trenutku t_0 računanja vremena — treba, dakle, znati šest skalarnih *početnih uslova*. Način rešavanja naučnih problema, kao što je ovo određivanje kretanja tela u gravitacionom polju, gde se početnim stanjem definiše svako kasnije, određuje tzv. *mehanički determinizam*.

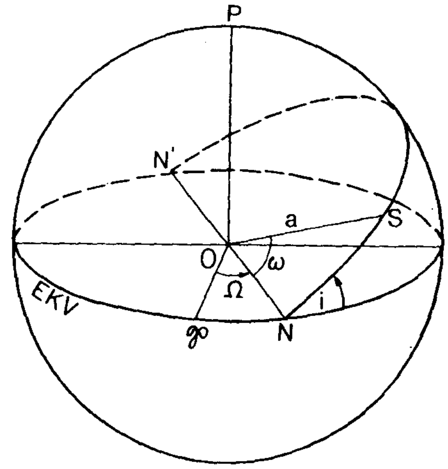
Međutim, za određivanje kretanja nije nužno polaziti od $\boldsymbol{r}$ i $\dot{\boldsymbol{r}}$ kao putanjskih elemenata, već se mogu koristiti i nekih drugih šest skalarnih elemenata, koji uz to imaju određena *geometrijska* i *mehanička značenja* i stoga su povoljniji.

a. Eliptički elementi putanje. — Eliptična putanja (orbita) određena je (III) uslovima

$$e < 1, \quad h < 0, \quad v_0^2 < \frac{2\lambda}{\rho_0}, \tag{2}$$

gde je e ekscentričnost, h konstanta energije i ρ_0 i v_0 su intenziteti vektora položaja i brzine u početnom trenutku vremena. Za određivanje putanje potrebni su (sl. 21) ovi elementi:

Ω — *Dužine* (*longituda*) *uzlaznog čvora* (planete, satelita S). Pri tome je *uzlazni čvor* N ono mesto na kome posmatrano telo prelazi osnovnu ravan, gledano od pola, u direktnom smeru na



Sl. 21

severnu stranu. Naspramna tačka N' je *silazni čvor* a prava NN' *linija čvorova* uočenog tela.

i — *Nagib ravni putanje* prema osnovnoj ravni.

Ω i i su parametri koji određuju položaj ravni putanje uočenog tela (planete, asteroida, veštačkog satelita itd.). Za osnovnu ravan se uzima u slučaju posmatranja u odnosu na Zemlju (naročito kad je reč o veštačkim satelitima) ekvator, a u slučaju (uglavnom u astronomiji) posmatranja u odnosu na Sunce — ekliptika.

ω — *Argument pericentra putanje*, tj. ugaono rastojanje pericentra od uzlaznog čvora.

a — *Velika poluosa* (*srednje rastojanje*) eliptične putanje.

e — *Ekscentričnost* (numerička), $e=\frac{c}{a}$, gde je c žižno udaljenje od centra elipse.

Parametri a i e određuju veličinu i oblik uočene eliptičke putanje, a ω njenu orijentaciju u smislu kako su postavljene njene ose.

τ — Vreme (trenutak) prolaza tela kroz pericentar, tzv. *epoha pericentra* i taj element služi za određivanje položaja tela na putanji.

Prethodnih šest elemenata su *opšti keplerovski elementi*. Mesto prethodnih elemenata se kod elipse mogu koristiti i: *parametar elipse* $p=a(1-e^2)$; *rastojanje* $q=a(1-e)$ *pericentra* od žiže (*perigejno*, ako je u žiži Zemlja, a *perihelno*, ako je Sunce itd.); *srednje kretanje* $n=\frac{2\pi}{T}=\sqrt{\frac{\lambda}{a^3}}$ i *period obilaženja* $T=\frac{2\pi}{n}$. Mesto ω se ponekad koristi *dužina pericentra* $\Lambda=\Omega+\omega$ bez obzira na to što uglovi Ω i ω ne leže u istoj ravni.

Očigledno je razmak promene ugaonih veličina elemenata Ω, i i ω određen nejednakostima

$$0°\leqslant\Omega<360°, \quad 0°\leqslant i\leqslant 180°, \quad 0°\leqslant\omega<360°.$$

Položaj samog tela na putanji određen je onda *potegom* ρ i *pravom anomalijom* v. Za određivanje položaja tela na putanji koristi se i tzv. *argument položaja* u, koji meri ugaono rastojanje tela od uzlaznog čvora ($u=\omega+v$).

Izračunavanje elemenata za eliptičnu putanju teče obično ovim tokom:

α) Prvo se pomoću $\lambda=k^2m$ i datih a i τ izračuna srednja anomalija M po obrascu

$$M=n(t-\tau), \tag{3}$$

i to uvek za dati trenutak vremena t, kad je τ epoha perihela poznata.

β) Izračuna se ekscentrična anomalija E, kad je dato e i izračunato M, iz Keplerove jednačine (III, 60)

$$M=E-e\sin E. \tag{4}$$

Ova transcendentna jednačina je od velikog značaja u raznim pitanjima vezanim za eliptične putanje, pa ćemo se stoga zadržati malo ovde na njoj. Za malo e razlika između ekscentrične anomalije E i srednje anomalije M je mala. Napr. za Zemljinu putanju oko Sunca je $e=0{,}0167$ pa, prema tome, najveće moguće pozitivno ili negativno odstupanje, kad se uzme $\sin E=\pm 1$, iznosi manje od 35′. Putanje, pak, veštačkih satelita oko Zemlje su obično približno kružne, pa za njih nema razlike između ekscentrične i srednje anomalije.

Jednačina (4) se može rešiti ma kojom metodom za približno rešavanje transcendentnih jednačina.

Napr. *grafički*, kad se ta jednačina napiše u obliku

$$e \sin E = E - M,$$

i u pravouglom koordinatnom sistemu koordinata (y — ordinata a E apscisa) konstruišu linije (jedna kriva i jedna prava)

$$y = e \sin E, \qquad y = E - M.$$

Tada je traženo rešenje za E određeno apscisom presečne tačke ove dve linije. Približno se može ta jednačina rešiti i *metodom sukcesivnih aproksimacija* (*Pikar* — Picard), kad se za prvu približnu vrednost uzme

$$E_1 = M,$$

pa dalje na poznati način računa

$$E_2 = M + e \sin E_1,$$

$$E_3 = M + e \sin E_2,$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

Pri tome se može dokazati da $E_n \to E$, što znači da je $E_n \approx E$, za neko dovoljno veliko n.

Pri korišćenju računara (ali i tablica specijalnih funkcija) može se Keplerova jednačina (4) rešavati i pomoću *Beselovih* (Bessel) *funkcija* na naredni način.

Kad se Keplerova jednačina napiše u diferencijalnom obliku

$$dE = (1 - e \cos E)^{-1}\, dM, \tag{5}$$

uoči da je

$$(1 - e \cos E)^{-1},$$

periodična funkcija od E sa periodom 2π i osim toga parna funkcija od M, može se razvi janjem u *trigonometrijski—Furijeov* (Fourier) *red* napisati

$$(1 - e \cos E)^{-1} = \frac{1}{2} A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos (kM).$$

Pri tome je

$$A_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} (1 - e \cos E)^{-1}\, dM,$$

što, kad se pomoću (5) svede na promenljivu E, daje

$$A_0 = 2.$$

Uopšte biće, na poznati način,

$$A_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} (1 - e \cos E)^{-1} \cos (kM)\, dM.$$

Ovo se posle svođenja na promenljivu E pomoću (4) i (5) može napisati

$$A_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \cos (kE - ek \sin E)\, dE$$

$$= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \cos (ek \sin E - kE)\, dE.$$

Međutim, kako Beselova funkcija reda k od argumenta ek glasi

$$J_k(ek) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(ek \sin E - kE)\, dE,$$

može se, najzad, rešenje Keplerove jednačine napisati u obliku beskrajnog reda po Beselovim funkcijama

$$E = M + 2\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k} J_k(ek) \sin(kM). \qquad (6)$$

Očigledno je da se za $e \ll 1$, može pri računu uzeti neki podesan konačan broj članova.

γ) Zatim se izračuna poteg ρ pomoću E, a i e po obrascu

$$\rho = a(1 - e\cos E), \qquad (7)$$

koja se lako izvodi sa sl. 18. Tamo je ($OF = c$, $ON = a\cos E$)

$$ON = a\cos E = c + \rho\cos\nu = ae + \rho\cos\nu. \qquad (8)$$

Ako se ovde unese vrednost za $\rho\cos\nu$ iz jednačine (III, 34) i zameni $p = a(1 - e^2)$ dobiće se gornja relacija (7).

δ) Prava anomalija ν se izračuna po obrascu

$$\operatorname{tg}\frac{\nu}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\operatorname{tg}\frac{E}{2}. \qquad (9)$$

Ovaj se obrazac može izvesti na naredni način. Jednačina

$$\rho\cos\nu = a(\cos E - e),$$

koja se dobiva iz (8), podeli se jednačinom (7) pa se tako dobiva

$$\cos\nu = \frac{\cos E - e}{1 - e\cos E},$$

a odatle se poznatim trigonometrijskim transformacijama izvodi obrazac (9) polazeći od

$$\operatorname{tg}^2\frac{\nu}{2} = \frac{1 - \cos\nu}{1 + \cos\nu}.$$

U izračunavanju elemenata eliptične putanje može se, naravno, prvo izračunati prava anomalija ν pa onda poteg ρ, jer su ta dva izračunavanja nezavisna jedno od drugog.

Na taj bi način položaj nekog satelita na elipsi bio određen u polarnim koordinatama ρ i ν prema ravanskom sistemu čiji je pol u centru privlačenja — žiži (napr. Zemlji) a polarna osa orijentisana prema pericentru pokretnog tela (satelita).

Prema prethodnoj shemi rada ključno pitanje u ovom izračunavanju leži, kad je reč o eliptičnim putanjama u određivanju ekscentrične anomalije E iz Keplerove jednačine (4), kad se zna M i e odn. n i e. Reč je o rešavanju jedne transcendentne jednačine i ona zahteva i pažnje i truda, kako smo pokazali, bez obzira na sva savremena pomoćna sredstva (tablice, računare itd).

b. Parabolički elementi putanje. — Parabolička putanja određena je uslovima

$$e = 1, \qquad h = 0, \qquad v_0^2 = \frac{2\lambda}{\rho_0}, \tag{10}$$

gde je značenje oznaka poznato.

Parabolična putanja se karakteriše kao i eliptična elementima Ω, i, ω, e i τ, čija su nam značenja poznata. Međutim, mesto a, koje kod parabole nije definisano, uzima se *parametar* parabole p, koji odgovara ordinati parabole u žiži (dužini normale na polarnoj osi u žiži do preseka sa parabolom). Mesto parametra se koristi i $q = p/2$, što opet odgovara rastojanju temena parabole od žiže.

Izračunavanje potega ρ i prave anomalije v kod parabolične putanje teče ovim tokom:

Ovde se može, prvo, iz Barkerove (Olbersove) relacije (III, 69) odrediti v u funkciji od t pomoću p odn. q i τ a zatim iz (III, 34) poteg ρ, jer je kod parabole uvek $e = 1$.

c) Hiperbolički elementi putanje. — Hiperbolično kretanje određeno je uslovima

$$e > 1, \quad h > 0, \quad v_0^2 > \frac{2\lambda}{\rho_0}, \tag{11}$$

a njegovi su putanjski elementi: Ω, i, ω, e i τ, čija su značenja poznata i realna osa a hiperbole. Ponekad se, kao kod elipse, koristi parametar p i pericentralno rastojanje q, pri čemu je sad $p = a(e^2 - 1)$ i $q = a(e - 1)$.

Treba voditi računa da veličina a u relaciji (III, 39) za klasifikaciju putanja pri centralom kretanju u gravitacionom polju *nije jednaka realnoj osi*, već je realna osa jednaka $-a$.

Određivanje potega ρ i prave anomalije v postiže se sad na ovaj način:

α) Odredi se, prvo, srednja anomalija M, pomoću λ, a i τ ili pomoću n i τ (III, 76).

β) Zatim se iz jednačine (III, 77) izračuna veličina F.

γ) Sad se može odrediti poteg iz obrasca

$$\rho = a(e \cosh F - 1), \tag{12}$$

koji se lako izvodi. Naime, sa slike 19, kad se pažljivo vodi računa o znacima, može se napisati

$$-a \cosh F + ae = \rho \cos v.$$

Ako se ovde unese vrednost za $\rho \cos v$ iz (III, 34) i za hiperbolu stavi $p = a(e^2 - 1)$ pa uprosti, dobiće se relacija (12).

δ) Najzad, polarni ugao v dobiva se iz relacije

$$\operatorname{tg} \frac{v}{2} = \sqrt{\frac{e+1}{e-1}} \operatorname{tg} h \frac{F}{2}. \tag{13}$$

Ova relacija se dobiva na analogan način kao kod elipse. Prvo se sa sl. 19 može napisati veza

$$\rho \cos \nu = -a \cosh F + ae = a(e - \cosh F),$$

pa kad se ova jednačina podeli jednačinom (12) dobiće se

$$\cos \nu = \frac{e - \cosh F}{e \cosh F - 1}.$$

Tada se poznatim trigonometrijskim transformacijama dobiva

$$\mathrm{tg}^2 \frac{\nu}{2} = \frac{1 - \cos \nu}{1 + \cos \nu} = \frac{e+1}{e-1} \frac{\cosh F - 1}{\cosh F + 1},$$

i kad se uzme u obzir da je

$$\frac{\cosh F - 1}{\cosh F + 1} = \mathrm{tgh}^2 \frac{F}{2},$$

dolazi posle svođenja do traženog obrasca (13).

Naravno, da se i ovde prvo može izračunati polarni ugao ν pa tek onda poteg ρ.

2. Poremećaji

Opšte primedbe. — Ako se ima pred očima slučaj kretanja tela mase m u odoosu na nepokretno telo mase m_1, odn. u problemu dva tela slučaj kretanja jednog tela u odnosu na drugo, onda treba imati u vidu da pored osnovnog privlačenja na neko telo mase m dejstvuju i druge sile, koje su istina obično male i često zanemarljive prema dominantnom osnovnom privlačenju. Dejstva takvih sila zovu se *poremećaji* i raznovrsnog su porekla. To mogu biti, napr., dejstva drugih nebeskih tela, mogu poticati od neravnomernog rasporeda mase u osnovnom telu, od spljoštenosti, kad je Zemlja u pitanju, od otpora vazduha bliže Zemlji, a u međuplanetnom prostoru od pritiska Sunčevog zračenja itd. Najzad, može biti u pitanju i neka mala veštački stvorena sila kao što je pogon nekog jonskog agregata. Tada vektorska diferencijalna jednačina kretanja tela mase m neće biti ona (III, 4) već

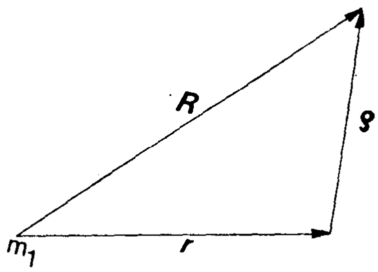
$$\ddot{\boldsymbol{r}} = -k^2 \frac{m_1}{r^3} \boldsymbol{r} + \boldsymbol{p} = -\frac{\lambda \boldsymbol{r}}{r^3} + \boldsymbol{p}, \tag{14}$$

gde je $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{P}/m$ *poremećajna sila*, određena na jedinicu mase, odn. to je udeo ubrzanja tela m koje zavisi od poremećaja. Treba imati na umu da je $\boldsymbol{p}$ po pravilu promenljivo, zavisi od $\boldsymbol{r}$ i da se tako mora uzimati u račun.

Očigledno je da je misaono najprostiji način rešenja ovog problema da se reši vektorska diferencijalna jednačina (14), odn. one tri skalarne diferencijalne jednačine koje joj odgovaraju, kad je $\boldsymbol{p}$ poznato kao funkcija položaja i vremena. To odgovara *Kauelovoj* (Cowell) *metodi.* Međutim, po pravilu, reč je o takvim diferencijalnim jednačinama, koje se ne mogu lako integraliti pa se moraju koristiti razne približne metode rešavanja, što ovu direktnu metodu u većini slučajeva ne čini preporučljivom zbog dugog vremena potrebnog za računanje.

Druga upotrebljivija metoda, koju ćemo pomenuti, i ovde opisati, samo u glavnim crtama, jeste *Enkeova* (Encke) *metoda.*

Suština ove metode je u tome što se stvarno, poremećeno kretanje upoređuje sa neporemećenim i već postojeće keplerovsko rešenje problema dva tela korististi kao pretežno u ukupnom kretanju. Obeležimo sad sa $\boldsymbol{r}=\{x, y, z\}$ vektor stvarnog položaja pokretnog tela mase m u odnosu na osnovno telo m_1 u trenutku t u slučaju neporemećenog kretanja, koje je određeno diferencijalnom jednačinom (III, 4), a sa $\boldsymbol{R}=\{X, Y, Z\}$ vektor stvarnog položaja tog tela u istom trenutku, pri čemu je sad kretanje određeno diferencijalnom jednačinom (14), *gde je samo mesto* $\boldsymbol{r}$ *stavljeno* $\boldsymbol{R}$. Tada je odstupanje od keplerovskog kretanja izazvano poremećejem određeno relacijom (sl. 22)



Sl. 22

$$\varrho=\boldsymbol{R}-\boldsymbol{r}, \tag{15}$$

gde je $\varrho=\{\xi, \eta, \zeta\}$ *vektor poremećaja.* U Dekartovim koordinatama prethodna vektorska relacija se svodi na naredne tri skalarne jednačine

$$\xi=X-x, \quad \eta=Y-y, \quad \zeta=Z-z. \tag{16}$$

Diferenciranjem jednačine (15) dva put po vremenu dobićese poremećajno ubrzanje

$$\ddot{\varrho}=\ddot{\boldsymbol{R}}-\ddot{\boldsymbol{r}}.$$

Ako se sad na desnoj strani ovde unese za $\ddot{\boldsymbol{R}}$ vrednost iz jednačine poremećenog kretanja, a za $\ddot{\boldsymbol{r}}$ izraz iz jednačine neporemećenog kretanja moći će se napisati

$$\ddot{\varrho}=\lambda\left(\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}-\frac{\boldsymbol{R}}{R^3}\right)+\boldsymbol{p}. \tag{17}$$

Ovde sad izraz u zagradi pokazuje odstupanje stvarnog privlačenja centralne mase od onog očekivanog poremećenog.

Neka u određenom trenutku t_0 bude poremećajno odstupanje $\varrho_0=\varrho(t_0)$, onda će stvarni položaj uočenog tela u tom trenutku biti određen relacijom

$$\boldsymbol{R}(t_0)=\boldsymbol{r}(t_0)+\varrho(t_0),$$

gde je $\boldsymbol{r}(t_0)$ odgovarajući položaj tačke u neporemećenom kretanju. U nekom narednom bliskom trenutku $t_0+\Delta t$, biće uočeno telo na mestu

$$\boldsymbol{R}(t_0+\Delta t)=\boldsymbol{r}(t_0+\Delta t)+\varrho(t_0+\Delta t). \tag{18}$$

Da bismo, dakle, odredili stvarni položaj $\boldsymbol{R}(t_0+\Delta t)$ u tom kasnijem trenutku treba prvo odrediti $\boldsymbol{r}(t_0+\Delta t)$. Kako se može smatrati da je rešenje $\boldsymbol{r}(t)$ problema dva tela bez uračunavanja poremećaja određeno, lako je odmah napisati i vrednost $r(t_0+\Delta t)$. Težište ove metode je sad u određivanju promene vektora poremećaja, tj. u određivanju

$$\rho(t_0+\Delta t)=\rho(t_0)+\Delta\rho,$$

gde je $\Delta\rho$ promena poremećajnog vektora posle nekog vremena Δt, koju treba izračunati iz poremećajnog ubrzanja $\ddot{\rho}$, pa se uzimanje u obzir poremećaja u Enkeovoj metodi svodi na integraciju malih promena ubrzanja koje se javljaju kod poremećenog kretanja. Pošto je reč o malom intervalu vremena u tom računu postoji čitav niz olakšica, iako se ustvari radi o integraciji od t_0 do t_0+t.

Izračunavanje $\Delta\rho$ počinje od neke tačke za koju je $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{R}$ i $\dot{\boldsymbol{r}}=\dot{\boldsymbol{R}}$, tj. $\rho=0$, a to je tačka u kojoj se pretpostavlja da stvarna putanja dodiruje (oskulira) osnovnu keplerovsku putanju. U toku daljeg kretanja može $|\Delta\rho|$ da dosta naraste i da se više ne može smatrati malim prema $|\boldsymbol{R}|$. Tada se izabere i uoči nova referentna putanja, za koju su opet ostvareni uslovi da su $\boldsymbol{R}$ i $\dot{\boldsymbol{R}}$ za stvarnu putanju jednaki sa vektorom položaja i vektorom brzine odnosne neporemećene putanje u trenutku promene referentske putanje. Ovaj postupak neposrednog približavanja od neporemećene putanje ka pravoj putanji uzastopnim koracima zove se i „rektifikacija putanje".

Treba još nešto podvući. Ova metoda postepenog izračunavanja malih promena ima jednu nezgodu. Naime, kako se u izrazu u zagradi jednačine (17) nalaze skoro jednaki vektori, to se veliki broj prvih decimala poništava i stoga se mora računati sa velikim brojem decimala, što i pored savremene tehnike računara nije najpodesnije. Da se ta nezoda koliko toliko ublaži postupa se ovako. Prvo se u jednačini (17) za $\boldsymbol{r}$ unese vrednost iz (15) pa se onda, posle transformacije, može napisati jednačina

$$\ddot{\rho}=\frac{\lambda}{r^3}\left[\left(1-\frac{r^3}{R^3}\right)\boldsymbol{R}-\rho\right]+\boldsymbol{p}. \tag{19}$$

Ako se sad uvede veličina η definisana relacijom

$$\frac{r^3}{R^3}=(1+2\eta)^{-3/2} \quad \text{tj.} \quad \eta=\frac{R^2-r^2}{2r^2}, \tag{20}$$

može se jednačina (19), ako je $|2\eta|<1$, tj. ako poremećaj nije veliki, napisati u obliku konvergentnog stepenog reda

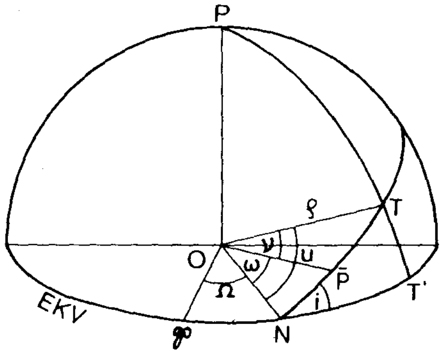
$$\ddot{\rho}=\frac{\lambda}{r^3}\left[\left(3\eta-\frac{1\cdot3\cdot5}{2!}\eta^2+\frac{1\cdot3\cdot5\cdot7}{3!}\eta^3-\cdots\right)\boldsymbol{R}-\rho\right]+\boldsymbol{p}, \tag{21}$$

kad se $(1+2\eta)^{-3/2}$ razvije po binomnom obrascu.

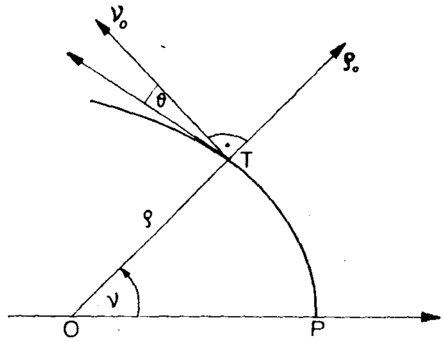
Na taj način sad mesto diferencijalne jednačine (17) imamo diferencijalnu jednačinu (21) za izračunavanje odstupanja od neporemećenog kretanja, u kojoj se ne javljaju razlike skoro jednakih veličina, a koja omogućuje navedeno postepeno izračunavanje.

Varijacija elemenata. — Suština metode varijacije orbitnih elemenata u računu poremećaja sast ji se u pretpostavci da poremećajna sila, u datom trenutku, može izazvati promenu eliptičkih elemenata (kad je reč o elipsi kao putanji), koji onda, promenjeni, određuju datoj Keplerovoj elipsi drugu oskulatornu elipsu, koja od date ne odstupa mnogo, ali ne mora biti čak ni u istoj ravni sa njom uvek, jer se mogu menjati i dužina Ω uzlaznog čvora i nagib i. Stvarna putanja je onda obvojnica svih ovakvih trenutnih elipsa.

U narednim izlaganjima imaćemo pred očima, uglavnom, eliptične putanje veštačkih satelita i njihove poremećaje. I neka bude data poremećajna sila $m\,\boldsymbol{w}_T$ u položaju satelita T na putanji, koji je određen polarnim koordinatama ρ i ν (sl. 23). Kad je reč o satelitima Zemlje, onda je O u centru Zemlje. Pri tome m neka bude masa satelita a $\boldsymbol{w}_T$ njegovo poremećajno ubrzanje. Kao obično, kad je reč o veštačkim satelitima Zemlje biće u osnovu izlaganja postavljen geocentralni ekvatorski sistem koordinata. Neka u odnosu na njega ravan putanje satelita T bude određena dužinom Ω uzlaznog čvora N i nagibom i putanje prema ekvatoru, a za određivanje položaja satelita na putanji može se mesto ρ i ν koristiti i $u=\omega+\nu$ (*argument položaja*).



Sl. 23



Sl. 24

Obeležimo sa w_ρ, w_ν i w_n koordinate vektora $\boldsymbol{w}_T$ poremećajnog ubrzanja, pa će biti

$$\boldsymbol{w}_T = w_\rho \boldsymbol{\rho}_0 + w_\nu \boldsymbol{\nu}_o + w_n \boldsymbol{n}_o, \tag{22}$$

gde su $\boldsymbol{\rho}_o$, $\boldsymbol{\nu}_o$ i $\boldsymbol{n}_o$ (sl. 24) jedinični vektori u smeru potega, normalno na poteg u ravni putanje i normalno na ravan putanje OPT.

Sa slike se vidi da će koordinate vektora brzine $\boldsymbol{v}$ u ravni neporemećene trajektorije (Keplerove elipse) biti

$$v_\rho = v\cos\vartheta,\quad v_\nu = v\sin\vartheta,\quad v_n = 0, \tag{23}$$

gde su v_ρ, v_ν i v_n koordinate vektora brzine u smerovima jediničnih vektora $\boldsymbol{\rho}_o$, $\boldsymbol{\nu}_o$ i $\boldsymbol{n}_o$, a ϑ ugao koji tangenta na putanju u T obrazuje sa potegom.

Koordinate vektora brzine $\boldsymbol{v}$ posle poremećaja u tački T, u trenutku t, dakle u ravni oskulatorne elipse, biće

$$v'_\rho = v\cos\vartheta + w_\rho\,\mathrm{dt};\quad v'_\nu = v\sin\vartheta + w_\nu\,\mathrm{dt};\quad v'_n = w_n\,\mathrm{dt}, \tag{24}$$

pošto su, posle elementa vremena dt odnosne promene koordinata brzine

$$dv_\rho = w_\rho\,\mathrm{dt},\quad dv_\nu = w_\nu\,\mathrm{dt},\quad dv_n = w_n\,\mathrm{dt}. \tag{25}$$

Zadatak se, prema tome, sastoji u tome da se pomoću elemenata osnovne (polazne) keplerovske elipse i poremećajnog ubrazanja odrede varijacije (promene)

$$d\Omega, \quad di, \quad da, \quad de, \quad \text{i} \quad d\omega,$$

odn. brzine ovih promena, tj.

$$\frac{d\Omega}{dt}, \quad \frac{di}{dt}, \quad \frac{da}{dt}, \quad \frac{de}{dt}, \quad \frac{d\omega}{dt}.$$

Pitanje šestog orbitnog elementa, tj. epohe pericentra, značajno za proučavanje kretanja planeta i asteroida, nije od značaja za proučavanje kretanja veštačkih satelita, jer ne dolazi u obzir uzimanje u obzir tzv. vekovnih (sekularnih) promena. Prosto se stoga, kao dato polazno vreme, uzima vreme prolaza satelita kroz pericentar $t_0 = 0$, tj. vreme se računa od prolaza veštačkog satelita kroz pericentar. Tada je srednja anomalija (III, 59)

$$M = \frac{2\pi}{T}\, t = \sqrt{\frac{\lambda}{a^3}}\, t, \tag{26}$$

ako je T vreme obilaženja veštačkog satelita, a velika poluosa njegove elipsne putanje (srednje rastojanje satelita), $\lambda = k^2 m_1$, kad je m_1 masa centralnog privlačnog tela.

Treba uzeti još u obzir da, kad se usled poremećenog ubrzanja w_ρ brzina satelita u pravcu potega za elementarno vreme dt promeni za $w_\rho dt$, onda se odnosna promena samog vektora položaja može dobiti po obrascu

$$\frac{1}{2}(0 + w_\rho dt)\, dt = \frac{1}{2} w_\rho dt^2, \tag{27}$$

a to se kao mala veličina višeg reda može zanemariti pa ρ smatreti kao nepromenjeno pri prelazu od Keplerove elipse ka oskulatornoj elipsi na uočenom mestu.

Izraz (27) za promenu vektora položaja na uočenom mestu T dobiva se kao proizvod srednje brzine $1/2\,(0 + w_\rho dt)$ u uočenom elementu vremena i samog elementa vremena dt.

Da bismo odredili promenu velike poluose a elipse kao putanje poći ćemo od izraza (III, 39) za kvadrat brzine. Diferenciranjem se odatle dobiva, pošto se ρ ne menja

$$2\, v\, dv = \frac{\lambda}{a^2}\, da,$$

odnosno

$$d\, a = \frac{2\, a^2}{\lambda}\, v dv. \tag{28}$$

Sad se vdv može odrediti pomoću datih podataka iz kvadrata brzine u ravanskim polarnim koordinatama

$$v^2 = \dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{v}^2 = v_\rho^2 + v_v^2, \tag{29}$$

pri čemu su radijalna v_ρ i transverzalna v_v brzina, određene obrascima

$$v_\rho = \dot{\rho}, \quad v_v = \rho \dot{v}, \tag{30}$$

i gde je konstanta površine

$$A = \rho^2 \dot{v} = \rho\, v_v = \sqrt{\lambda p}, \tag{31}$$

odakle se izračunava

$$v_v = \frac{\sqrt{\lambda p}}{\rho} = \frac{A}{\rho}. \tag{32}$$

Ako se izraz (29) diferencira dobiće se, pošto se za diferencijale dv_ρ i dv_v unesu vrednosti iz (25)

$$v dv = v_\rho\, dv_\rho + v_v\, dv_v = v_\rho\, w_\rho\, dt + v_v\, w_v\, dt. \tag{33}$$

Iz obrazaca (30) — (32) odrede se v_ρ i v_v i uzme u obzir da je iz (III, 34)

$$\dot{\rho} = \frac{\rho^2 \dot{v}}{p}\, e \sin v = \frac{A}{p}\, e \sin v,$$

pa najzad sve to unese u relaciju (33), dobiće se

$$v dv = A \left(\frac{1}{p}\, w_\rho\, e \sin v\, dt + \frac{1}{\rho}\, w_\rho\, dt \right). \tag{34}$$

Kad se to unese u (28) dobiće se za varijaciju velike poluose elipse

$$da = \frac{2\,a^2 A}{\lambda} \left(\frac{1}{p}\, w_\rho\, e \sin v\, dt + \frac{1}{\rho}\, w_v\, dt \right), \tag{35}$$

odnosno

$$\frac{da}{dt} = \frac{2\,a^2}{A} \left(e \sin v \cdot w_\rho + \frac{p}{\rho}\, w_\rho \right). \tag{36}$$

Da bismo dobili brzinu promene ekscentričnosti e poći ćemo od $p = a(1 - e^2)$, pa dobivamo

$$\frac{dp}{dt} = (1 - e^2)\,\frac{da}{dt} - 2\,ae\,\frac{de}{dt}. \tag{37}$$

Iz $\rho\, v_v = \sqrt{\lambda p}$ se diferenciranjem dobiva pri stalnom ρ

$$\rho\, w_v\, dt = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\lambda}{p}}\, dp, \tag{38}$$

odnosno

$$\frac{dp}{dt} = 2\,\rho \sqrt{\frac{p}{\lambda}}\, w_v = \frac{2\,\rho A}{\lambda}\, w_v, \tag{39}$$

što daje brzinu promene parametra p.

Ako se sad ueči (37) i tamo za $\dfrac{da}{dt}$ unese izraz (36) dobiće se

$$2\rho\sqrt{\frac{p}{\lambda}}\, w_v = (1-e^2)\frac{2a^2}{\sqrt{\lambda p}}\left[e\sin v\cdot w_\rho + \frac{p}{\rho}w_v\right] - 2ae\frac{de}{dt},$$

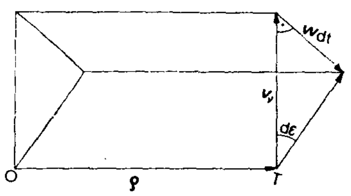
odakle je brzina promene ekscentričnosti

$$\frac{de}{dt} = \frac{p}{A}\left[w_\rho \sin v + \left(\frac{p}{e\rho} - \frac{\rho}{ae}\right)w_v\right]. \tag{40}$$

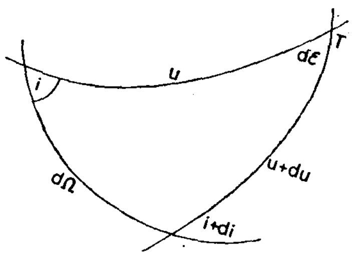
Ravan keplerovske elipse, određena sa $\boldsymbol{\rho}$ i $\boldsymbol{v}$, odn. sa $\boldsymbol{\rho}$ i $\boldsymbol{v}_v$, usled komponente $\boldsymbol{w}_n dt$ obrće se oko $\boldsymbol{\rho}$ za vreme dt za neki elementralni ugao $d\varepsilon$ (sl. 25). Kako je $\boldsymbol{w}_n$ upravno na ravan osnovne elipse biće

$$\operatorname{tg} d\varepsilon \approx d\varepsilon = \frac{w_n dt}{v_v} = \frac{\rho w_n dt}{\sqrt{\lambda p}} = \frac{\rho w_n dt}{A}, \tag{41}$$

s obzirom na (31) i (32).



Sl. 25



Sl. 26

Da bismo odredili uticaj obrtanja putanjske ravni za $d\varepsilon$ na elemente i i Ω uočićemo sferni trougao (sl. 26) koji prikazuje stanje elemenata posle vremena dt pri čemu se položaj čvorne tačke promeni za $d\Omega$ od Ω_1 do Ω_2. Sa slike se pomoću sinusne teoreme iz sferne trigonometrije dobivaju naredni rezultati

$$\frac{\sin(i+di)}{\sin d\varepsilon} = \frac{\sin u}{\sin d\Omega},$$

tj.

$$\sin i\,\cos di\,\sin d\Omega + \cos i\,\sin di\,\sin d\Omega = \sin u\,\sin d\varepsilon,$$

pa, kako su di, $d\varepsilon$, i $d\Omega$ mali biće

$$\sin d\varepsilon \approx d\varepsilon,\quad \cos di \approx 1,\quad \sin d\Omega \approx d\Omega,\quad \sin di \approx di, \tag{42}$$

pa se dobiva

$$\sin i\, d\Omega + \cos i\cdot di\cdot d\Omega = \sin u\cdot d\varepsilon.$$

Međutim, drugi član s leve strane u ovoj jednačini je mali drugog reda, pa se može zanemariti i tako dobiti relacija

$$\sin i\cdot d\Omega = \sin u\cdot d\varepsilon.$$

Odatle se, s obzirom na (41) dobiva najzad

$$d\,\Omega = \frac{\sin u}{\sin i}\,d\,\varepsilon, \tag{43}$$

odnosno

$$\frac{d\,\Omega}{dt} = \frac{\rho\, w_n}{\sqrt{\lambda\, p}}\,\frac{\sin u}{\sin i} = \frac{\rho\, w_n}{A}\,\frac{\sin u}{\sin i}. \tag{44}$$

Iz kosinusne teoreme sferne trigonometrije za uglove sa sl. 26 se dobiva

$$\cos\,(i + di) = \cos i \cos d\,\varepsilon - \sin i \sin d\,\varepsilon \cos u,$$

odnosno

$$\cos i \cos di - \sin i \sin di = \cos i \cos d\,\varepsilon - \sin i \sin d\,\varepsilon \cos u.$$

To se s obzirom na (42) može izrasiti u obliku

$$\cos i - \sin i \cdot di = \cos i - \sin i \cdot \cos u \cdot d\,\varepsilon.$$

Odatle se za varijaciju nagiba putanje i prema ekvatoru dobiva

$$di = \cos u \cdot d\,\varepsilon, \tag{45}$$

i s obzirom na (41)

$$\frac{di}{dt} = \frac{\rho\, w_v}{\sqrt{\lambda p}} \cos u = \frac{\rho\, w_n}{A} \cos u. \tag{46}$$

Za određivanje promene argumenta pericentra (perigeja) ω uoči se na sl. 26 ugao $u = \omega + \nu$ i sa nje po kosinusnoj teoremi za stranice sfernog trougla odredi

$$\cos\,(u + du) = \cos u \cos d\,\Omega + \sin u \sin d\,\Omega \cos i,$$

tj.

$$\cos u \cos du - \sin u \sin du = \cos u \cos d\,\Omega + \sin u \sin d\,\Omega \cos i,$$

pa onda za malo du ($\cos du \approx 1$, $\sin du \approx du$)

$$\cos u - \sin u \cdot du = \cos u + \sin u \cos i \cdot d\Omega.$$

Sad se može odrediti varijacija argumenta položaja u

$$du = -\cos i\, d\,\Omega, \tag{47}$$

i brzina njegove promene

$$\frac{du}{dt} = -\cos i\,\frac{d\,\Omega}{dt} = -\frac{\rho\, w_n}{A}\,\frac{\cos i \sin u}{\sin i}. \tag{48}$$

Sa druge strane se iz relacije (III,34) može posle diferenciranja po t izračunati $\frac{d\nu}{dt}$, kad se uzme u obzir da se na mestu dodira neporemećene i poremećene putanje ρ ne menja. Dakle, prvo

$$\rho\, e \sin \nu\,\frac{d\nu}{dt} = \rho\,\frac{de}{dt}\cos\nu - \frac{dp}{dt},$$

pa odatle, s obzirom na (39) i (40)

$$\frac{d\nu}{dt}=\frac{1}{e}\sqrt{\frac{p}{\lambda}}\,\frac{\cos\nu}{\sin\nu}\left[w_\rho\sin\nu+\left(\frac{p}{e\rho}-\frac{\rho}{ae}\right)w_\nu\right]-\frac{2}{e\sin\nu}\sqrt{\frac{p}{\lambda}}\,w_n,$$

i najzad posle uprošćavanja

$$\frac{d\nu}{dt}=\frac{1}{e}\sqrt{\frac{p}{\lambda}}\left\{w_\rho\cos\nu+\left[e\frac{\rho}{p}\,\frac{\cos\nu}{\sin\nu}+\frac{\cos^2\nu}{\sin\nu}\left(1+\frac{\rho}{p}\right)\right]w_\nu-\frac{2}{\sin\nu}w_\nu\right\}. \tag{49}$$

Diferenciranjem relacije $u=\omega+\nu$ dobiva se, međutim, za promenu argumenta pericentra

$$d\omega=du-d\nu, \tag{50}$$

odn. za brzinu te promene

$$\frac{d\omega}{dt}=\frac{du}{dt}-\frac{d\nu}{dt}, \tag{51}$$

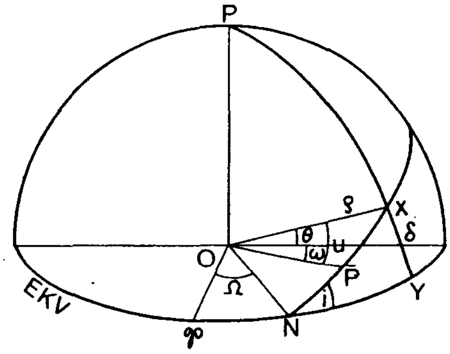
gde sad samo treba uneti, već izračunate vrednosti za $\frac{du}{dt}$ i $\frac{d\nu}{dt}$, da se dobije traženi rezultat.

3. **Veze između putanjskih i ekvatorskih koordinata**

Pri proučavanju kretanja veštačkih satelita se dosta koriste *putanjske koordinate* satelita. Napr., ako je ravan eliptične (i kružne) putanje nekog veštačkog satelita Zemlje (ili inače nekog drugog nebeskog tela) utvrđena prema ekvatoru nagibom i i dužinom Ω uzlaznog čvora, onda se u toj ravni uočava, kako smo već videli, ravanski polarni sistem koordinata, kome je početak O u centru Zemlje (odn. centralnog privlačnog tela), gde je žiža elipse, a polarna osa se orijentiše prema pericentru P ili prema ulaznom čvoru N. Tada je položaj satelita određen sa dva podatka (dve koordinate): potegom ρ i pravom anomalijom ν ili potegom ρ i argumentom položaja u. Izvesna neodređenost može nastupiti samo, ako je putanja krug, jer tada nije jednoznačno određen smer polarne ose, pošto nema pericentra, ili, kad ravan putanje prolazi kroz severni pol pošto to ostavlja smer kretanja po putanji donekle nedefinisan. Ovo se, međutim, može posebnim dogovorom otkloniti.

Međutim, i kad smo u stanju da ovako odredimo položaj satelita na njegovoj putanji, za neka važna pitanja takvo određivanje nije dovoljno. Na pr., ako radi praćenja kretanja satelita u toku vremena treba postaviti tzv. usmerenu antenu, onda su nam za to potrebne horizontalne koordinate. Da bismo do njih došli uspostavićemo vezu između putanjskih koordinata ρ i ν, odn. u satelita i njegovih geocentralnih ekvatorskih koordinata rekatascenzije α i deklinacije δ iz kojih se posle mogu odrediti azimut i visina.

Ove se veze mogu neposredno uspostaviti na ovaj način. Prvo poteg $\rho=OX$ (rastojanje satelita od Zemljinog centra) iz putanjskih elemenata ostaje nepromenjen pri prelazu na ekvatorske koordinate. Ostale potrebne veze između traženih i datih elemenata dobivaju se iz sfernog trougla NXY (sl. 27), koji je koji je određen položajem N uzlaznog čvora putanje satelita, položajem satelita X na putanji i presekom Y meridijana satelita sa ekvatorom. O je centar Zemlje (Zemljin centar mase) a ugao Y je prav, a ostale su oznake na sl. 27 poznate od ranije.



Sl. 27

Tada se, prvo, iz sinusne teoreme za sferni pravougli trougao NXY za stranice u i δ dobiva

$$\frac{\sin u}{\sin \delta}=\frac{1}{\sin i},$$

odakle se može izračunati deklinacija

$$\sin \delta=\sin u \sin i, \tag{52}$$

pri čemu je u dati argument položaja kao putanjska koordinata, a i je poznato kao odredbeni element položaja putanje.

Dalje, iz kosinusne teoreme za uglove sfernog trougla NXY dobiva se

$$\cos i=\sin(\sphericalangle NXY)\cos \delta, \tag{53}$$

a iz sinsne teoreme proističe

$$\sin(\sphericalangle NXY)=\frac{\sin(\alpha-\Omega)}{\sin u}, \tag{54}$$

i najzad, iz kosinusne teoreme za stranice istog trougla dobiva se relacija

$$\cos u=\cos(\alpha-\Omega)\cos\delta.$$

Deobom jednačina (54) ovom jednačinom i eliminacijom $\sin(\sphericalangle NXY)$ dobiće se

$$\operatorname{tg}(\alpha-\Omega)=\operatorname{tg} u \cos i, \tag{55}$$

odakle se pri poznatom Ω, u i nagibu i dobiva rektascenzija α.

Međutim, radi bolje i tačnije određenosti ugla δ, koji smo odredili samo sinusom, može se izvesti drugi obrazac za određivanje deklinacije δ, koji glasi

$$\operatorname{tg}\delta=\sin(\alpha-\Omega)\operatorname{tg} i, \tag{56}$$

a koji pretpostavlja da je prvo izračunat ugao $\alpha-\Omega$. Prethodni obrazac se izvodi, kad se iz relacije (52) i obrasca, dobivenog iz sinusne teoreme

$$\frac{\sin(\sphericalangle NXY)}{\sin i}=\frac{\sin(\alpha-\Omega)}{\sin \delta},$$

eliminiše $\sin(\sphericalangle NXY)$.

Veza između putanjskih koordinata ρ i v, odn. ρ i u i ekvatorskih geocentralnih koordinata α i δ može se uspostaviti i preko Dekartovog sistema koordinata $Oxyz$ (x-osa prema prolećnoj tački Υ, z-osa prema severnom nebeskom polu P, a y-osa tako da sa njima obrazuje desni trijedar, vid (II, 4) vezanog za prvi ekvatorski sistem koordinata.

Sam tok uspostavljanja veze teče ovim redom. Prvo se ucči jedan pomoćni Dekartov sistem pravouglih koordinata, kome je prva osa u pravcu linije čvorova, treća prema polu P' putanjske ravni, a druga na odnosni način orijentisana za dopunu do desnog trijedra, tada je vektor položaja uočene tačke na putanji određen na naredni način

$$\rho = \{\rho \cos u, \quad \rho \sin u, \quad 0\}.$$

Obaranjem putanjske ravni, tj. osnovne ravni ovog koordinatnog sistema, obrtanjem oko linije čvorova $N' N_m$ ravan ekvatora za ugao i, koordinate vektora položaja postaju

$$\rho = \{\rho \cos u, \quad \rho \sin u \cos i, \quad \rho \sin u \sin i\}.$$

I najzad, obrtanjem Dekartovog koordinatnog sistema iz ovog položaja oko OP (z-ose) za ugao Ω u ravni ekvatora, da bi se ovaj sistem preveo u upotrebljeni Dekartov koordinatni sistem (na osnovu obrazca za obrtanje sistema osa u ravni za dati ugao) dobiće se

$$\begin{aligned} x &= \rho (\cos u \cos \Omega - \sin u \cos i \sin \Omega), \\ y &= \rho (\cos u \sin \Omega + \sin u \cos i \cos \Omega), \\ z &= \rho \sin u \sin i. \end{aligned} \tag{57}$$

Ako se ove Dekartove koordinate izraze istovremeno pomoću ekvatorskih sfernih koordinata α i δ u obliku

$$\begin{aligned} x &= \cos \delta \cos \alpha, \\ y &= \cos \delta \sin \alpha, \\ z &= \sin \delta, \end{aligned} \tag{58}$$

onda se upoređivanjem jednih i drugih izraza dobiva odmah

$$z = \sin \delta = \sin u \sin i,$$

a to je već poznata veza (52). Zatim za određivanje rektascenzije α imamo

$$\frac{y}{x} = \operatorname{tang} \alpha = \frac{\cos u \sin \Omega + \sin u \cos i \cos \Omega}{\cos u \cos \Omega - \sin u \cos i \sin \Omega}.$$

4. **Projekcija putanje satelita na Zemljinu površ**

Pomoću geocentralnih ekvatorskih koordinata α i δ satelita, prvo, treba odrediti geografske α i φ tzv. „supsatelitske" tačke, tj. one tačke na Zemljinoj površi, koja se u datom trenutku t nalazi ispod satelita, odn. one tačke u čijem je zenitu satelit u tom trenutku. Pri pretpostavci da je Zemlja lopta bila bi (iz vremenske relacije) geografska dužina

$$\lambda = \alpha - \theta_G, \tag{59}$$

gde je θ_G zvezdano vreme Griniča (Greenwich) u trenutku t (izraženo u ugaonoj meri), a geografska širina

$$\varphi = \delta. \tag{60}$$

Spljoštenost Zemlje je mala i samo neznatno utiče na geografsku širinu pa se stoga zanemaruje, iako je moguće uzeti je u račun, kad se zahteva posebna tačnost.

Kad se ovako dobiveni podaci o supsatelitskim tačkama unesu u neku geografsku kartu Zemlje i spoje krivom linijom, onda se dobiva očigledna slika o prostornom i vremenskom toku putanje satelita nad površi Zemlje i relativno prema određenom mestu na Zemlji.

Do ovakve supsatelitske putanje dolazi se na ovaj način. Zamisli se presek putanjske ravni satelita sa Zemljom, zamišljenom kao sfera, pa se tako dobiva veliki krug Zemlje, koji seće ekvator u dve naspramne tačke, a čija je najsevernija tačka u $\varphi = +i$, a najjužnija u $\varphi = -i$. Međutim, pošto se Zemlja obrće oko svoje ose, supsatelitske tačke za vreme jednog obilaska satelita ne leže na istom velikom krugu. Tako, ako se uzme da satelit prelazi ekvator sa juga na sever u vreme t_N (vreme prolaza kroz uzlazni čvor) i to nad nekim mestom čija je geografska dužina λ_N i u tom trenutku zamisli postavljen *presek satelitske putanje* i Zemlje, onda, kad ne bi bilo obrtanja Zemlje, bile bi geografske koordinate λ i φ supsatelitske tačke u nekom kasnijem trenutku $t > t_N$

$$\lambda = \lambda_N + (\alpha - \Omega), \quad \varphi = \delta, \tag{61}$$

gde je α rektascenzija, Ω dužina uzlaznog čvora, a δ deklinacija, jer se geografska širina mesta rotacijom oko ose ne menja.

Zemlja se, međutim, za vreme $t - t_N$ obrne za ugao 0°, 2507 $(t - t_N)$, ako je $t - t_N$ izraženo u minutama svetskog vremena. Faktor 0°, 2507 određuje broj stepena ugla koji odgovara jednoj minuti vremena. Kad bi se zvezdani i srednji Sunčev dan poklapali prethodni faktor bi iznosio tačno 0°, 25, ali, kako znamo, zvezdani dan je nešto kraći. Prema tome, prava geografska dužina supsatelitske tačke u vreme t iznosiće

$$\lambda = \lambda_N + (\alpha - \Omega) - 0°,\ 2507\,(t - t_N), \tag{62}$$

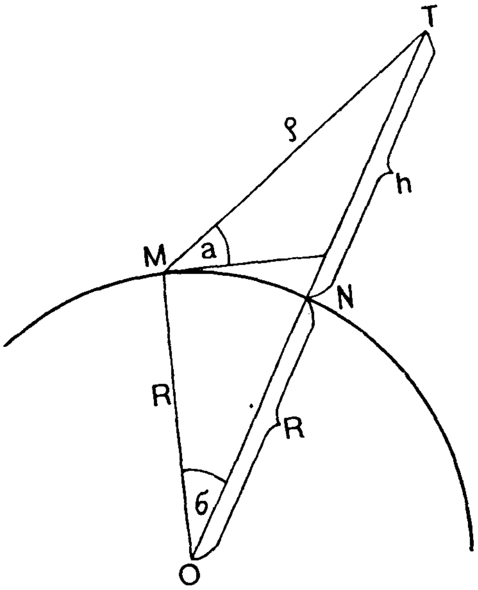
jer se tačka sa prvobitnog velikog kruga nešto pomakla. Geografska širina φ naravno ostaje nepromenjena. Odavde se dobiva ono isto λ kao i iz relacije (59), što nije teško pokazati. Naime, u trenutku t_N biće $\alpha = \Omega$, $\lambda = \lambda_N$, a $\theta_G = \Omega - \lambda_N$. Međutim, u kasnijem trenutku $t - t_N$ biće

$$\theta_G = \Omega - \lambda_N + 0°,\ 2507\,(t - t_N),$$

ako se vreme računa u minutama svetskog vremena a odredi kao ugao, a to potvrđuje tačnost iskaza.

Sprovođenje konkretne konstrukcije supsatelitske putanje obavlja se obično tako što se za niz ekvidistantnih vrednosti argumenta položaja u satelita odrede prema prethodnom odeljku (3), prvo, njegove ekvatorske koordinate α i δ pa zatim prema (62) geografske koordinate λ i φ supsatelitske tačke na Zemlji i to unese u neku geografsku kartu, na pr. u Merkatorovoj projekciji, i najzad tako dobivene tačke spoje. Ova kriva će u odnosu na trag prvobitnog velikog kruga biti pomerena u smeru obrtanja i to utoliko više ukoliko je vreme T kruženja veštačkog satelita duže. Najzgodnije je zbog ovog stalnog pomeranja ove krive nacrtati je na providnoj hartiji pa postavljati na kartu prema potrebi i prema odnosnoj vrednosti λ_N. Oblik ove krive zavisi pri datoj projekciji geografske karte uglavnom od i i T i, pošto se nagib i i vreme kruženja T relativno sporo menjaju, ovakva kriva se može koristiti duže, ali se, naročito pri promeni vremena kruženja T, mora crtati nova kriva.

Ima puno raznih potrebnih izračunavanja, posebno onih vezanih za postavljanje instrumenata na Zemlji za praćenje satelita, pa se stoga mora imati pred očima čitav splet prostornih odnosa između horizontskih, ekvatorskih i putanjskih koordinata.



Sl. 28

Tako se između ostalih, na pr., može postaviti i pitanje, kako se može odrediti visina (udaljenost) h veštačkog satelita T nad Zemljom, kad je poznata (ili izračunata) njegova ugaona visina a, posmatranog iz neke tačke M (sl. 28) i kad se zna ugaono rastojanje $MN = \sphericalangle MON = \sigma$ supsatelitske tačke N od posmatrača u uočenom trenutku. O je centar Zemlje i ona se uzima kao lopta, R je njen poluprečnik a $r = R + h$, rastojanje veštačkog satelita od centra O Zemlje.

Tada se primenom sinusne teoreme na trougao OTM dobiva

$$\frac{r}{R} = \frac{R+h}{R} = \frac{\sin(90° + a)}{\sin[90° - (a+\sigma)]} = \frac{\cos a}{\cos(a+\sigma)}.$$

Odavde se može izračunati h, kad je poznato a i σ, ali i obrnuto: može se izračunati a, kad je poznato h. Vrednost σ se ili izračunava ili nalazi u tablicama, a vrlo često se za to koriste i krive koje pretstavljaju trag satelitske putanje na Zemlji. Naravno, luk $\overset{\frown}{MN}$, odn. σ velikog kruga određuje se u pravcu azimuta veštačkog satelita posmatranog iz tačke M.

Sa sl. 28 se može odrediti i rastojanje $\rho = \overline{MT}$ od posmatrača do satelita pomoću obrasca

$$\rho = R\frac{\sin\sigma}{\cos(a+\sigma)},$$

koji se lako izvodi, kad se visina trougla OTM prema stranici OT izračuna jednom pomoću ρ a drugi put pomoću R ili neposredno pomoću sinusne teoreme.

VI PROBLEM N-TELA

1. Opšti integrali

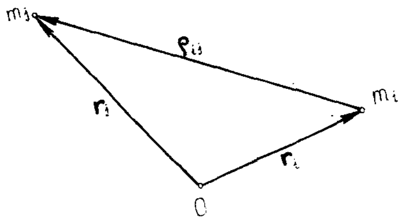
Neka je uočen sistem od N tela (materijalnih tačaka) koja jedno na drugo dejstvuju Njutnovim silama gravitacije i koji zamišljamo kao zatvoren i izolovan od dejstva drugih sila. Neka to budu tela čije su mase

$$m_1, m_2, \ldots, m_N,$$

kratko tela m_i $(i=1, 2, \ldots, N)$, čiji su uzajamni položaji određeni vektorima (sl. 29)

$$\boldsymbol{\rho}_{ij} = \boldsymbol{r}_j - \boldsymbol{r}_i, \qquad \rho_{ij} = |\boldsymbol{\rho}_{ij}|, \tag{1}$$

gde su $\boldsymbol{r}_i$ i $\boldsymbol{r}_j$ vektori položaja tela m_i i m_j u odnosu na neki stalan pol O u prostoru.



Sl. 29

Tada masa m_j dejstvuje na masu m_i silom

$$\boldsymbol{F}_{ij} = k^2 \frac{m_i m_j}{\rho_{ij}^3} \boldsymbol{\rho}_{ij} = k^2 \frac{m_i m_j}{\rho_{ij}^3} (\boldsymbol{r}_j - \boldsymbol{r}_i), \tag{2}$$

gde je k^2 kao uvek univerzalna konstanta gravitacije. Prema tome, na telo m_i dejstvovaće svih ostalih $N-1$ masa i diferencijalna jednačina kretanja tela m_i biće

$$m_i \ddot{\boldsymbol{r}}_i = k^2 \sum_{j=1}^{N} \frac{m_i m_j}{\rho_{ij}^3} (\boldsymbol{r}_j - \boldsymbol{r}_i), \tag{3}$$

pri čemu j ne uzima vrednost $j=i$, što kad se skrati sa m_i daje vektorsku jednačinu

$$\ddot{\boldsymbol{r}}_i = k^2 \sum_{j=1}^{N} m_j \frac{\boldsymbol{r}_j - \boldsymbol{r}_i}{\rho_{ij}^3}. \qquad (i=1, 2, \ldots, N) \tag{4}$$

U odnosu na Dekartov sistem pravouglih osa $Oxyz$, gde je $\boldsymbol{r}_i = \{x_i, y_i, z_i\}$ prethodne vektorske diferencijalne jednačine mogu se izraziti u skalarnom obliku

$$\begin{aligned} \ddot{x}_i &= k^2 \sum_{j=1}^{N} m_j \frac{x_j - x_i}{\rho_{ij}^3}, \\ \ddot{y}_i &= k^2 \sum_{j=1}^{N} m_j \frac{y_j - y_i}{\rho_{ij}^3}, \\ \ddot{z}_i &= k^2 \sum_{j=1}^{N} m_j \frac{z_j - z_i}{\rho_{ij}^3}, \end{aligned} \tag{5}$$

pri čemu treba staviti

$$\rho_{ij}=\sqrt{(x_j-x_i)^2+(y_j-y_i)^2+(z_j-z_i)^2}.$$

Za ovaj sistem (3) odn. (4) od N vektorskih diferencijalnih jednačina drugog reda, odn. za $3N$ skalarnih diferencijalnih jednačina kretanja (5) mogu se u najopštijem slučaju izvesti samo tri vektorska i jedan skalarni integral (a za potpuno rešenje dinamičkog problema o kretanju N-tela potrebno je $2N$ vektorskih ili $6N$ skalarnih integrala).

U sistemu relacija (2) koje određuju sile zbog uzajamnog privlačenja pojavljuju se pored sile $\boldsymbol{F}_{ij}$ i sila kojom masa m_i privlači telo m_j, tj. sila

$$\boldsymbol{F}_{ji}=-\boldsymbol{F}_{ij}.$$

Međutim, kako je $\rho_{ij}=\rho_{ji}$, biće sile $\boldsymbol{F}_{ij}$ i $\boldsymbol{F}_{ji}$ suprotne, dakle, $\boldsymbol{F}_{ji}=-\boldsymbol{F}_{ij}$, što se slaže sa trećim Njutnovim zakonom, da su akcije i reakcije jednake po veličini, pa stoga imamo

$$\boldsymbol{F}_{ij}+\boldsymbol{F}_{ji}=0.$$

Ako se sad sve sile rastave u takve parove, dobiće se sabiranjem svih N jednačina (3) po i

$$\sum_i m_i\ddot{\boldsymbol{r}}_i=0. \tag{6}$$

Odavde se integracijom odmah dobiva

$$\sum_i m_i\dot{\boldsymbol{r}}_i=\sum_i m_i\boldsymbol{v}_i=\boldsymbol{A}. \tag{7}$$

Na levoj strani je količina kretanja uočenog dinamičkog sistema od N-tela a desno konstantan vektor, nezavisan od vremena. Ovo je jedan prvi integral sistema vektorskih diferencijalnih jednačina (3), koji kaže da je *količina kretanja uočenog sistema od N-tela u vremenu nepromenljiva.*

Integracijom jednačine (7) dobiva se

$$\sum_i m_i\boldsymbol{r}_i=\boldsymbol{A}\,t+\boldsymbol{B}, \tag{8}$$

gde je vektor $\boldsymbol{B}$ konstantan (ne zavisi od vremena). Ovo je drugi vektorski integral problema N-tela koji ima naredno mehaničko značenje.

Kako je

$$\sum_i m_i\boldsymbol{r}_i=m\,\boldsymbol{r}_C,$$

gde je $m=\sum_i m_i$ a $\boldsymbol{r}_C$ je vektor položaja centra mase uočenog sistema, može se jednačina (8) napisati u obliku

$$m\boldsymbol{r}_C=\boldsymbol{A}t+\boldsymbol{B}. \tag{9}$$

To dokazuje da se centar mase sistema od N-tela kreće *pravolinijski* u prostoru u odnosu na neki nepokretni sistem referenlije.

Diferenciranjem jednačine (9) po vremenu dobiva se

$$m\boldsymbol{v}_C=\boldsymbol{A}\ \Rightarrow\ \boldsymbol{v}_C=\frac{\boldsymbol{A}}{m}, \tag{10}$$

tj. centar mase sistema od N-tela kreće se *jednolikom* brzinom. Konstante A i B određuju se iz početnih uslova i od njih zavisi pravolinijski put centra mase, odn. njegov položaj u prostoru.

Ako se sad jednačine (3) redom pomnože vektorski sa $\boldsymbol{r}_i$, na pr. zdesna, i saberu dobiće se $(i \neq j)$

$$\sum_i m_i (\ddot{\boldsymbol{r}}_i \times \boldsymbol{r}_i) = k^2 \sum_i \sum_j \frac{m_i m_j}{\rho_{ij}^3} (\boldsymbol{r}_j - \boldsymbol{r}_i) \times \boldsymbol{r}_i = k^2 \sum_i \sum_j \frac{m_i m_j}{\rho_{ij}^3} \boldsymbol{r}_j \times \boldsymbol{r}_i,$$

jer je $\boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{r}_i = 0$. Međutim, sad se u zbiru po i na desnoj strani pojavljuju parovi sabiraka $\boldsymbol{r}_j \times \boldsymbol{r}_i$ i $\boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{r}_j$, koji se tačno potiru, pa se tako dobiva da je

$$\sum_i m_i (\ddot{\boldsymbol{r}}_i \times \boldsymbol{r}_i) = \sum_i (\boldsymbol{r}_i \times \ddot{\boldsymbol{r}}_i) = 0. \tag{11}$$

Odavde se jednom integracijom dobiva

$$\sum_i m_i (\boldsymbol{r}_i \times \dot{\boldsymbol{r}}_i) = \sum_i m_i (\boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{v}_i) = \boldsymbol{C}, \tag{12}$$

jer je

$$\frac{d}{dt} \sum_i m_i (\boldsymbol{r}_i \times \dot{\boldsymbol{r}}_i) = \sum_i m_i (\dot{\boldsymbol{r}}_i \times \dot{\boldsymbol{r}}_i) + \sum_i m_i (\boldsymbol{r}_i \times \ddot{\boldsymbol{r}}_i) = \sum_i m_i (\boldsymbol{r}_i \times \ddot{\boldsymbol{r}}_i).$$

Vektor $\boldsymbol{C}$ je konstantan u odnosu na vreme i ovo je treći vektorski integral problema N-tela. Dok su ono pre bili integrali količine kretanja ovo je sad integral kinetičkog momenta, ali samo prvi, jer drugi u opštem slučaju ne može da se nađe.

Ako se stavi

$$\frac{1}{2} (\boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{v}_i) = \boldsymbol{S}_i,$$

gde je $\boldsymbol{S}_i$ sektorska brzina tela m_i, onda se (12) može napisati u obliku

$$2 \sum_i m_i \boldsymbol{S}_i = \boldsymbol{C}, \tag{13}$$

pa se prvi integral kinetičkog momenta zove i *integral površine* problema od N-tela.

Ovaj vektor $\boldsymbol{C}$ određuje, pošto je stalan, ravan koja je upravna na njemu i koja se uzima da prolazi kroz centar mase uočenog sistema. Ona je stoga *invarijabilna* ili *Laplasova ravan* o kojoj je bilo ranije govora i kod problema dva tela.

Jednačina te ravni glasi

$$\boldsymbol{C} \cdot (\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_C) = 0, \tag{14}$$

gde je $\boldsymbol{r}$ vektor položaja ma koje tačke ravni a $\boldsymbol{r}_C$ vektor položaja centra mase.

Najzad, može se odrediti još jedan, ali skalarni integral problema. Naime, ako se jednačine (3) redom pomnože skalarno sa $d\boldsymbol{r}_1, d\boldsymbol{r}_2, \ldots, d\boldsymbol{r}_N$ i saberu dobiće se

$$m_i \ddot{\boldsymbol{r}}_i \cdot d\boldsymbol{r}_i = k^2 \sum_i \sum_i \frac{m_i m_j}{\rho_{ij}^3} (\boldsymbol{r}_j - \boldsymbol{r}_i) \cdot d\boldsymbol{r}_i. \tag{15}$$

Ovde se u zbiru na desnoj strani pojavljuju opet parovi sa permutovanim indeksima i i j, ali je $m_i m_j = m_j m_i$ i $\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j = -(\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i)$, pa stoga imamo, napr.

$$k^2 \frac{m_i m_j}{\rho_{ij}^3} [(\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i)\cdot d\mathbf{r}_i + (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)\cdot d\mathbf{r}_j] = k^2 \frac{m_i m_j}{\rho_{ij}^3} (\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i)\cdot(d\mathbf{r}_i - d\mathbf{r}_j)$$

$$= k^2 \frac{m_i m_j}{\rho_{ij}^3} (\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i)\cdot d(\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i) = -k^2 \frac{m_i m_j}{\rho_{ij}^3} \boldsymbol{\rho}_{ij}\cdot d\boldsymbol{\rho}_{ij}$$

$$= -k^2 \frac{m_i m_j}{\rho_{ij}^3} \rho_{ij}\, d\rho_{ij} = -k^2 \frac{m_i m_j}{\rho_{ij}^2} d\rho_{ij}.$$

To znači da se posle sabiranja svih ovakvih proizvoda dobiva

$$\sum_i m_i \ddot{\mathbf{r}}_i \cdot d\mathbf{r}_i = -k^2 \sum_i \sum_j \frac{m_i m_j}{\rho_{ij}^2} d\rho_{ij}. \tag{16}$$

Leva strana jednačine (15) sa svoje strane može se ovako transformisati

$$\sum_i m_i \ddot{\mathbf{r}}_i \cdot d\mathbf{r}_i = \frac{d}{dt}\Big(\sum_i m_i \dot{\mathbf{r}}_i\Big)\cdot d\mathbf{r}_i = \frac{d}{dt}\Big(\sum_i m_i \mathbf{v}_i\Big)\cdot \mathbf{v}_i\, dt$$

$$= \sum_i m_i \mathbf{v}_i \cdot d\mathbf{v}_i = \sum_i m_i \mathbf{v}_i \cdot d\mathbf{v}_i = d\left(\sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2\right).$$

Desna, pak, strana, kad se uvede $(i \neq j)$ *funkcija sile*

$$U = \frac{1}{2} k^2 \sum_i \sum_j \frac{m_i m_j}{\rho_{ij}} = k^2 \left(\frac{m_1 m_2}{\rho_{12}} + \frac{m_1 m_3}{\rho_{13}} + \cdots + \frac{m_1 m_N}{\rho_{1N}} + \frac{m_2 m_3}{\rho_{23}} + \cdots + \frac{m_2 m_N}{\rho_{2N}} + \cdots + \frac{m_{N-1} m_N}{\rho_{N-1,N}}\right) \tag{17}$$

može se izraziti u obliku

$$-k^2 \sum_i \sum_j \frac{m_i m_j}{\rho_{ij}^2} d\rho_{ij} = dU.$$

Na taj način se sad jednačina (16) može izraziti u obliku

$$d\left(\sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2\right) = dU,$$

odn. posle integracije

$$\sum_i \left(\frac{1}{2} m_i v_i^2\right) = U + h,$$

a to je

$$T = U + h, \tag{18}$$

što je *integral energije sistema N-tela*, pošto je $T = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2$ njegova kinetička energija.

To znači za problem N-tela postoje 3 vektorska i 1 skalarni integral, što nam pruža mogućnost da za $6N$ elemenata, potrebnih za potpuno rešenje problema, odredimo samo *deset* jednačina, a to nije dovoljno ni za rešavanje problema tri tela.

2. Kretanje u odnosu na centar mase. Poremećajne funkcije

Potražimo sad obik jednačina kretanja (4) odn. (5) u odnosu na, ne neki apsolutni sistem referencije, već u odnosu na centar mase (težište) C samog posmatranog sistema od N tela.

Uzmimo radi toga da su koordinate centra mase C u odnosu na prvobitno dati apsolutni sistem referencije u polu O

$$\boldsymbol{r}_C = \{x_C,\ y_C,\ z_C\},$$

i neka novi sistem osa $CXYZ$ sa početkom u C ima ose paralelne osama sistema $Oxyz$. Obrazac za prelaz od jednog u drugi koordinatni sistem glasi, onda, u vektorskom obliku

$$\boldsymbol{r}_i = \boldsymbol{R}_i + \boldsymbol{r}_C, \tag{19}$$

odn. u skalarnom obliku

$$x_i = X_i + x_C,\quad y_i = Y_i + y_C,\quad z_i = Z_i + z_C,$$

pri čemu je $\boldsymbol{R}_i = \{X_i,\ Y_i,\ Z_i\}$ vektor položaja tela m_i prema novom polu — centru mase C.

Lako je pokazati da jednačine kretanja (4) odn. (5) transformisane na nove koordinate zadržavaju isti oblik (invarijante su u odnosu na ovu transformaciju), tj. izgledaju u vektorskom obliku

$$m_i \frac{d^2 \boldsymbol{R}_i}{dt^2} = k^2 \sum_j m_j \frac{\boldsymbol{R}_j - \boldsymbol{R}_i}{\rho_{ij}^3}, \tag{20}$$

odn. u skalarnom obliku

$$\begin{aligned} m_i \ddot{X}_i &= k^2 \sum_j m_j \frac{X_j - X_i}{\rho_{ij}^3}, \\ m_i \ddot{Y}_i &= k^2 \sum_j m_j \frac{Y_j - Y_i}{\rho_{ij}^3}, \\ m_i \ddot{Z}_i &= k^2 \sum_j m_j \frac{Z_j - Z_i}{\rho_{ij}^3}. \end{aligned} \tag{21}$$

To sledi otuda što, prvo, sva rastojanja ostaju nepromenjena samo se izražavaju u novim koordinatama

$$\rho_{ij} = \sqrt{(X_j - X_i)^2 + (Y_j - Y_i)^2 + (Z_j - Z_i)^2}$$

i drugo, što je s obzirom na veze (19) i relaciju (9)

$$\boldsymbol{r}_j - \boldsymbol{r}_i = \boldsymbol{R}_j - \boldsymbol{R}_i \ \text{ i } \ \ddot{\boldsymbol{r}}_i = \ddot{\boldsymbol{R}}_i.$$

Prema tome, pošto jednačine kretanja u novim koordinatama zadržavaju isti oblik, to ove jednačine relativno u odnosu na centar mase imaju iste prve integrale kao i one jednačine u odnosu na apsolutni sistem. Samo što je sad integral o kretanju centra mase (količine kretanja), koji naravno opet postoji, identički zadovoljen, jer se centar mase stalno poklapa sa početkom i ostaje u ovom sistemu nepokretan.

Posmatranje sistema od N tela u odnosu na centar njegove mase je i od praktičnog interesa. Naime, kako je zbir vektcra položaja opterećenih masama nekog sistema u odnosu na njegov centar mase nula, tj.

$$\sum_i m_i \boldsymbol{R}_i = 0. \tag{22}$$

odnosno

$$\sum_i m_i X_i = 0, \quad \sum_i m_i Y_i = 0, \quad \sum_i m_i Z_i = 0, \tag{23}$$

može se izračunati vektor položaja jednog tela, na pr. $\boldsymbol{R}_1$ za prvo telo, pa ćemo dobiti

$$\boldsymbol{R}_1 = -\frac{1}{m_1} \sum_\mu m_\mu \boldsymbol{R}_\mu, \tag{24}$$

gde se po μ *sabira od* 2 *do* N. U skalarnom obliku to će biti

$$X_1 = -\frac{1}{m_1} \sum_\mu m_\mu X_\mu, \quad Y_1 = -\frac{1}{m_1} \sum_\mu m_\mu Y_\mu, \quad Z_1 = -\frac{1}{m_1} \sum_\mu m_\mu Z_\mu. \tag{25}$$

Ako se, onda, pomoću ovih veza iz jednačina (20) odn. (21) eliminiše vektor položaja $\boldsymbol{R}_1$, odn. skalarne koordinate tela m_1, dobiće se $N-1$ vektorska jednačina ili $3N-3$ skalarne diferencijalne jednačine drugog reda po nepoznatim koordinatama svih tela *izuzev tela mase* m_1, što znači da za određivanje ostaje $2N-2$ vektorske ili $6N-6$ skalarnih integrala. Tako je preko određenog centra mase problem o kretanju N-tela sveden na samo $N-1$ vektorsku diferencijalnu jednačinu.

Ovih $N-1$ vektorskih diferencijalnih jednačina za relativno kretanje u odnosu na centar mase C sistema mogu se ovako izraziti ($\rho_{1\lambda} \equiv \rho_\lambda$)

$$\frac{d^2 \boldsymbol{R}_\lambda}{dt^2} = -\frac{k^2}{\rho_\lambda^3} \left[(m_1 + m_\lambda) \boldsymbol{R}_\lambda + \sum_\mu m_\mu \boldsymbol{R}_\mu \right] + k^2 \sum_\mu m_\mu \frac{\boldsymbol{R}_\mu - \boldsymbol{R}_\lambda}{\rho_{\lambda\mu}^3}, \tag{26}$$

gde se naravno uzima $\lambda \neq \mu$.

Odgovarajuće skalarne jednačine nije teško napisati.

Do prethodne vektorske jednačine dolazi se na ovaj način. Jednačine (20) se napišu samo za vektore $\boldsymbol{R}_\lambda$, *gde je* $\lambda = 2, 3, \ldots, N$, pošto se $\boldsymbol{R}_1$ eliminiše. Toj jednačini se, kad se izdvoji $\boldsymbol{R}_1$ može dati oblik

$$\frac{d^2 \boldsymbol{R}_\lambda}{dt^2} = k^2 m_1 \frac{\boldsymbol{R}_1 - \boldsymbol{R}_\lambda}{\rho_\lambda^3} + k^2 \sum_\mu m_\mu \frac{\boldsymbol{R}_\mu - \boldsymbol{R}_\lambda}{\rho_{\lambda\mu}^3}, \tag{27}$$

gde se u zbiru izostavlja $\lambda = \mu$, ali samo u onim izrazima gde se oba indeksa javljaju istovremeno. Kad se ovde, na desnoj strani unese za $\boldsymbol{R}_1$ njegova vrednost (24), pošto se u tom izrazi izdvoji član sa indeksom λ za sebe i napiše

$$\boldsymbol{R}_1 = -\frac{m_\lambda}{m_1} \boldsymbol{R}_\lambda - \frac{1}{m_1} \sum_\mu m_\mu \boldsymbol{R}_\mu,$$

dobiće se

$$-\frac{k^2 m_1}{\rho_\lambda^3} \left[\frac{m_\lambda}{m_1} \boldsymbol{R}_\lambda + \boldsymbol{R}_\lambda + \frac{1}{m_1} \sum_\mu m_\mu \boldsymbol{R}_\mu \right] + k^2 \sum_\mu m_\mu \frac{\boldsymbol{R}_\mu - \boldsymbol{R}_\lambda}{\rho_{\lambda\mu}^3},$$

što se, onda, lako svodi na (27).

Ovaj sistem jednačina je nešto složeniji cd onog u odnosu na apsolutni sistem referencije ali ima ona ista tri vektorska integrala i jedan skalarni integral.

Vrlo važno je sad i pitanje *određivanja kretanja jednog tela sistema od N tela u odnosu na jedno od njih* (na jednu materijalnu tačku, na centar mase jednog tela).

Na pr., kretanje veštačkog satelita u sistemu Sunce, Zemlja, Mesec i veštački satelit zavisi od toga u odnosu na koje telo cd njih kao osnovno se sve posmatra. Ako je to Zemlja, onda je to *geocentralno* kretanje, ako je Sunce, onda *heliocentralno*. Kad se u prethcdnom sistemu uzme za osnovni heliocentralni sistem, onda nema velike razlike između posmatranja kretanja na centar mase tog sistema i onog u odnosu na centar mase samog Sunca, pošto je pomeranje položaja težišta Sunca usled prisustva takvih masa kao što su Zemlja, Mesec i sateliti beznačajna.

Novi sistem koordinata uzećemo u centu mase M_1 tela mase m_1, jer to ni u čemu ne ograničava opštost razmatranja. Njegove ose $M_1\ \xi\eta\zeta$ ćemo uzeti opet paralelno osama apsolutnog sistema $Oxyz$ odn. baricentralnog sistema $CXYZ$.

Ako se vektor položaja tela mase m_λ ($\lambda = 2, 3, \dots, N$) obeleži $\boldsymbol{M_1 M_2} = \rho_\lambda = \{\xi_\lambda, \eta_\lambda, \zeta_\lambda\}$, onda se odmah može napisati naredna veza

$$\rho_\lambda = \boldsymbol{R}_\lambda - \boldsymbol{R}_1 = \{X_\lambda - X_1,\ Y_\lambda - Y_1,\ Z_\lambda - Z_1\}, \tag{28}$$

pa onda

$$m_1 \rho_\lambda = m_1 \boldsymbol{R}_\lambda - m_1 \boldsymbol{R}_1,$$

i kad se uzme u obzir relacija (24)

$$m_1 \rho_\lambda = m_1 \boldsymbol{R}_\lambda + \sum_{\mu = 2, \dots, N} m_\mu \boldsymbol{R}_\mu. \tag{29}$$

Međutim, ovde u sumi desno se svakako nalazi i indeks λ, pa se njegovim izdvajanjem dobiva

$$m_1 \rho_\lambda = (m_1 + m_\lambda) \boldsymbol{R}_\lambda + \sum_\mu m_\mu \boldsymbol{R}_\mu. \tag{30}$$

Da bismo sad dobili diferencijalne jednačine kretanja u odnosu na ovakav sistem referencije treba jednačinu (28) dva put diferencirati po vremenu pa ćemo dobiti

$$\frac{d^2 \rho_\lambda}{dt^2} = \frac{d^2 \boldsymbol{R}_\lambda}{dt^2} - \frac{d^2 \boldsymbol{R}_1}{dt^2}, \tag{31}$$

i ovde sad treba sve izraziti pomoću vektora ρ_λ. Radi toga se uzme u obzir da je

$$\boldsymbol{R}_\mu - \boldsymbol{R}_\lambda = \rho_\mu - \rho_\lambda. \tag{32}$$

Desna strana u jednačini (23) može se izraziti pomoću vektora ρ_λ, ako se uzme u obzir (28) i (32), pa se dobiva

$$\frac{d^2 \boldsymbol{R}_\lambda}{dt^2} = -\frac{k^2}{\rho_\lambda^3} m_1 \rho_\lambda + k^2 \sum_\mu m_\mu \frac{\rho_\mu - \rho_\lambda}{\rho_{\lambda\mu}^3}.$$

Najzad, se relacija (27) napiše za $\boldsymbol{R}_1$, pa kako se u zbiru ne nalazi $j = 1$, može se sumacioni indeks označiti se μ (sabiranje počinje od 2). Međutim, u tom zbiru od 2, . . . , N nalazi se i član sa indeksom λ pa ćemo njega izdvojiti, jer se inače posle stalno sabira za $\mu \neq \lambda$. Tako ćemo dobiti

$$\frac{d^2 R_1}{dt^2} = \frac{k^2}{\rho_\lambda^3} m_\lambda R_\lambda + k^2 \sum_\mu m_\mu \frac{\varrho_\mu}{\rho_\mu^3}.$$

Ako se sad ovako izvedene vrednosti unesu u (31) dobiće se tražena vektorska diferencijalna jednačina u obliku

$$\frac{d^2 \varrho_\lambda}{dt^2} + \frac{k^2}{\rho_\lambda^3}(m_1 + m_\lambda)\varrho_\lambda = k^2 \sum_\mu m_\mu \left(\frac{\varrho_\mu - \varrho_\lambda}{\rho_{\lambda\mu}^3} - \frac{\varrho_\mu}{\rho_\mu^3}\right). \tag{33}$$

Vrlo je lako, naravno, sad napisati skalarne jednačine za ove koordinate. Napisaćemo u potpunosti samo prvu od njih

$$\begin{aligned} &\ddot{\xi}_\lambda + \frac{k^2}{\rho_\lambda^3}(m_1 + m_\lambda)\xi_\lambda = k^2 \sum_\mu m_\mu \left(\frac{\xi_\mu - \xi_\lambda}{\rho_{\lambda\mu}^3} - \frac{\xi_\mu}{\rho_\mu^3}\right), \\ &\ddot{\eta}_\lambda + \frac{k^2}{\rho_\lambda^3}(m_1 + m_\lambda)\eta_\lambda = \cdots \\ &\ddot{\zeta}_\lambda + \frac{k^2}{\rho_\lambda^3}(m_1 + m_\lambda)\zeta_\lambda = \cdots \end{aligned} \tag{34}$$

Pri tome je $\rho_\lambda = |\varrho_\lambda|$ rastojanje tela m_λ od tela m_1 (poteg tela m_λ u odnosu na telo m_1 kao pol)

$$\rho_\lambda = \sqrt{\xi_\lambda^2 + \eta_\lambda^2 + \zeta_\lambda^2}.$$

Rastojanje između neka dva tela m_λ i m_μ biće

$$\rho_{\lambda\mu} = \sqrt{(\xi_\mu - \xi_\lambda)^2 + (\varkappa_\mu - \eta_\lambda)^2 + (\zeta_\mu - \zeta_\lambda)^2}.$$

Pitanje kretanja jednog tela u problemu $N-1$ tela u odnosu neko drugo telo može se interpretirati i na jedan poseban način u izvesnim slučajevima. Naime, ako na neko telo m_λ osnovno, centralno telo m_1 ima pretežan uticaj — deistvo, a dejstva se svih ostalih tela mogu smatrati kao određeni poremećaji, onda se jednačine (33) mogu napisati u drugom obliku koji te činjenice naročito ističe.

Tada se izraz za desnu stranu jednačina (33) može predstaviti kao parcijalni gradijent neke skalarne funkcije položaja ($\mu \neq \lambda$) za vektor

$$R_\lambda = k^2 \sum_\mu m_\mu R_{\lambda\mu}, \tag{35}$$

gde je

$$R_{\lambda\mu} = \frac{1}{\rho_{\lambda\mu}} - \frac{\varrho_\lambda \cdot \varrho_\mu}{\rho_\mu^3}. \tag{36}$$

I zaista iz

$$\operatorname{grad}_{\varrho_\lambda} R_\lambda = k^2 \sum_\mu m_\mu \operatorname{grad}_{\varrho_\lambda} R_{\lambda\mu},$$

imamo

$$\operatorname{grad}_{\varrho_\lambda}\left(\frac{1}{\rho_{\lambda\mu}} - \frac{\varrho_\lambda \cdot \varrho_\mu}{\rho_\mu^3}\right) = \frac{\varrho_\mu - \varrho_\lambda}{\rho_{\lambda\mu}^3} - \frac{\varrho_\mu}{\rho_\mu^3},$$

što nije teško pokazati, jer je

$$\operatorname{grad}_{\rho_\lambda} \frac{1}{\rho_{\lambda\mu}} = \frac{\rho_\mu - \rho_\lambda}{\rho_{\lambda\mu}^3},$$

a kako je poznato, parcijalni gradijent nekog skalarnog proizvoda po jednom faktoru jednak je drugom faktoru pa je

$$\operatorname{grad}_{\rho_\lambda} \frac{\rho_\lambda \cdot \rho_\mu}{\rho_\mu^3} = \operatorname{grad}_{\rho_\lambda} \left(\rho_\lambda \cdot \frac{\rho_\mu}{\rho_\mu^3} \right) = \frac{\rho_\mu}{\rho_\mu^3}.$$

Uvedimo još

$$k^2 (m_1 + m_\lambda) = M_\lambda,$$

kao karakterističnu gravitacionu konstantu za par tela m_1 i m_λ pa se onda diferencijalne jednačine (30) mogu napisati u sažetom obliku

$$\frac{d^2 \rho_\lambda}{dt^2} + \frac{M_\lambda \rho_\lambda}{\rho_\lambda^3} = \operatorname{grad}_{\rho_\lambda} R_\lambda. \tag{37}$$

U skalarnom obliku prethodne vektorske jednačine izgledaju ovako

$$\begin{aligned} \ddot{\xi}_\lambda + \frac{M_\lambda \xi_\lambda}{\rho_\lambda^3} &= \frac{\partial R_\lambda}{\partial \xi_\lambda}, \\ \ddot{\eta}_\lambda + \frac{M_\lambda \eta_\lambda}{\rho_\lambda^3} &= \frac{\partial R_\lambda}{\partial \eta_\lambda}, \\ \ddot{\zeta}_\lambda + \frac{M_\lambda \zeta_\lambda}{\rho_\lambda^3} &= \frac{\partial R_\lambda}{\partial \zeta_\lambda}. \end{aligned} \tag{38}$$

Funkcije R_λ zovu se *poremećajne (perturbacione) funkcije*.

Iako je ova teorija od posebnog interesa za proučavanje kretanja veštačkih satelita u gravitacionom polju gde ima nekoliko tela, ona je nastala u klasičnoj nebeskoj mehanici. Naime. pri proučavanju kretanja planeta uočeno je da je masa Sunca pretežna i da pri proučavanju kretanja jedne planete ostalih osam izazivaju često samo relativno neznatne poremećaje i odstupanja njihovih putanja od pravih keplerovskih. Sa druge strane ako neka kometa dođe u blizinu najveće planete Jupitera, onda će naravno glavna privlačna sila biti Jupiter pa njega treba uzeti kao centar u odnosu na koji se kretanje proučava.

Ne treba zaboraviti da, kad je reč o veštačkim satelitima, oni mogu da prelaze iz oblasti pretežne gravitacije jednog tela o takvu oblast drugog tela, pa onda treba u proučavanju kretanja menjati centar referencije.

VII PROBLEM TRI TELA

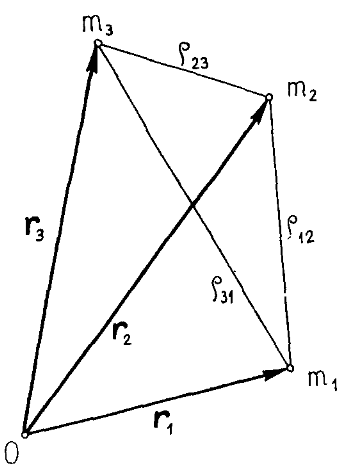
1. Opšte primedbe

Očigledno je da sve ono što važi za N tela važi za svako $N>2$, pa prema tome, i za $N=3$ – za *problem tri tela,* jer se inače problem dva tela kao vrlo važan i osoben uvek razmatra posebno.

Međutim, i problem tri tela, zamišljen naravno kao izolovani sistem, ističe se izvesnim osobenostima i od većeg je interesa nego opšti problem N-tela, pa se stoga iz praktičnih i istorijskih razloga i on izlaže posebno.

Ovde će, prvo, za problem tri tela biti izvedene iz opšteg problema N-tela zajedničke osobine, a posebno će biti istaknuto samo ono što naročito karakteriše sam problem tri tela.

Naravno, ne treba ni naglašavati da se, ponavljanjem opšteg postupka opisanog pri izvođenju integrala koji važe za N tela, mogu izvesti i odnosni integrali tri tela.



Sl. 30

Prema tome, ako su data tri tela čije su mase $m_i\,(i=1,\ 2,\ 3)$, vektorima $\boldsymbol{r}_i$ u odnosu na proizvoljni pol O, tada vektorske diferencijalne jednačine kretanja ta tri tela glase

$$m_i \frac{d^2 \boldsymbol{r}_i}{dt^2} = k^2 \sum_j m_i m_j \frac{\boldsymbol{r}_j - \boldsymbol{r}_i}{\rho_{ij}^3}, \quad (i,\ j=1,\ 2,\ 3) \qquad (1)$$

gde je, kao i kod problema N tela uopšte (sl. 30)

$$\rho_{ij} = \rho_{ji} = |\boldsymbol{r}_j - \boldsymbol{r}_i|.$$

Iz problema N tela proističe da postoje ova tri vektorska integrala ovog problema

$$\sum_i m_i \dot{\boldsymbol{r}}_i = \sum_i m_i \boldsymbol{v}_i = \boldsymbol{A} = \text{const.}, \qquad (2)$$

i to je *integral količine kretanja*

$$\sum m_i \boldsymbol{r}_i = \boldsymbol{A}\, t + \boldsymbol{B}, \qquad (3)$$

gde je $\boldsymbol{B}=$ const.. Kad se ovde uzme u obzir da je i sad

$$\sum_i m_i \boldsymbol{r}_i = (m_1 + m_2 + m_3)\, \boldsymbol{r}_C = M\, \boldsymbol{r}_C,$$

može se ovaj integral napisati u obliku

$$M\,\boldsymbol{r}_C = \boldsymbol{A}\,t + \boldsymbol{B}, \tag{4}$$

zbog čega se zove i integral o *kretanju centra mase*. On nam kazuje da se centar mase ova tri tela kreće nepromenljivo (jednoliko i pravolinijski) u prostoru. Izraz

$$\sum_i m_i(\boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{v}_i) = \boldsymbol{C} = \text{const.} \tag{5}$$

je *integral kinetičkog momenta* problema tri tela. On se s obzirom na pojam sektorske (površinske) brzine

$$\boldsymbol{S}_i = \frac{1}{2}(\boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{v}_i),$$

može izraziti i u obliku

$$2\sum_i m_i \boldsymbol{S}_i = \boldsymbol{C},$$

u kome je poznat kao *integral površine*.

Konstantni vektor $\boldsymbol{C}$, određen integralom površine određuje i ovde jednu stalnu ravan, recimo, kroz centar mase naša tri tela, koja se zove kao i kod problema N-tela i problema dva tela *Laplasova invarijabilna ravan.*

Osim ova tri vektorska integrala postoji za opšti problem N-tela pa i za problem tri tela i jedan skalarni integral, tzv. *integral energije*

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3} m_i v_i^2 = T = U + h, \tag{6}$$

gde je h konstanta energije, koja se određuje iz početnih uslova, a

$$U = k^2 \sum_i \sum_j \frac{m_i m_j}{\rho_{ij}}, \tag{7}$$

tzv. *funkcija gravitacionih sila,* pri čemu se u zbiru za $i, j = 1, 2, 3$ svaka kombinacija pojavljuje samo jedanput, tj. $m_1 m_2$, ali ne i $m_2 m_1$.

2. Centar atrakcije

Kako je za svako N

$$\sum_{i=1}^{N} m_i \frac{d^2 \boldsymbol{r}_i}{dt^2} = \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{F}_i = 0.$$

važi to i za $i = 1, 2, 3$, pa se onda iz relacije

$$\boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2 + \boldsymbol{F}_3 = 0, \tag{8}$$

vidi da su sve gravitacione sile u slučaju tri tela *komplanarne* (sve su uvek u ravni trenutnog centra mase).

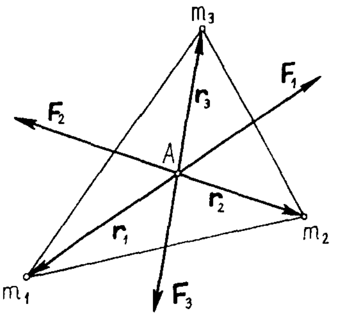
Dalje, iz uslova

$$\sum_i \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{F}_i = 0,$$

koji takođe važi za svako N imamo u potpunosti ispisano za $i=1, 2, 3$

$$\boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{r}_2 \times \boldsymbol{F}_2 + \boldsymbol{r}_3 \times \boldsymbol{F}_3 = 0, \tag{9}$$

što uopšte ne zavisi od izbora pola u odnosu na koji se određuju vektori položaja.



Sl. 31

Sa slike 31 koja odgovara proizvoljnom rasporedu data tri tela, odmah je jasno da se dve ma koje od sila koje dejstvuju na tela m_1, m_2 i m_3 (na pr. $\boldsymbol{F}_1$ i $\boldsymbol{F}_2$) moraju seći (jer rezultanta te dve privlačne sile mora padati u unutrašnjost trougla). Ako, onda za pol uzmemo njihovu presečnu tačku A,a vektore položaja tela u odnosu baš na taj pol obeležimo sa $\boldsymbol{r}_1$, $\boldsymbol{r}_2$ i $\boldsymbol{r}_3$, onda mora biti

$$\boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{r}_2 \times \boldsymbol{F}_2 = 0,$$

jer se $\boldsymbol{F}_1$ i $\boldsymbol{F}_2$ seku u tački A, a momenti sila u odnosu na neku tačku na nosaču sile su jednaki nuli. Međutim, kad se to unese u (9) dobiva se

$$\boldsymbol{r}_3 \times \boldsymbol{F}_3 = 0,$$

što znači da tačka A leži i na trećoj sili $\boldsymbol{F}_3$. Drugim rečima, *sve tri sile privlačenja (atrakcije) u problemu tri tela prolaze kroz jednu tačku koja se zove centar atrakcije* (po M. Milankoviću).

Centar atrakcije A je određen silama, a centar mase C tri tela rasporedom masa i njihovim veličinama, pa se može postaviti pitanje kad će se ova dva centra poklapati, tj. kad će biti

$$A \equiv C. \tag{10}$$

U takvom slučaju, pošto je

$$m_1 + m_2 + m_3 = M,$$

kad se centar mase C uzme za pol, mora biti $\boldsymbol{r}_C = 0$, pa

$$m_1 \boldsymbol{r}_1 + m_2 \boldsymbol{r}_2 + m_3 \boldsymbol{r}_3 = 0, \tag{11}$$

pa će zbog poklapanja centra mase C i centra atrakcije A biti

$$\boldsymbol{F}_i = -\lambda_i \boldsymbol{r}_i, \qquad (\lambda_i > 0), \tag{12}$$

jer su vektori položaja $\boldsymbol{r}_1$, $\boldsymbol{r}_2$, $\boldsymbol{r}_3$ uvek orijentisani od C ka masama, a sile $\boldsymbol{F}$ su orijentisane suprotno, tj. ka centru atrakcije.

Iz (8) i (11) sledi

$$\lambda_1 \boldsymbol{r}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{r}_2 + \lambda_3 \boldsymbol{r}_3 = \sum_i \lambda_i \boldsymbol{r}_i = 0. \tag{13}$$

Jednačine (11) i (12) proističu iz pretpostavke da se A i C poklapaju. Ako se sad jednačine (11) i (13) pomnože vektorski prvo, vektorom r_1, dobiće se

$$m_2 (\boldsymbol{r}_2 \times \boldsymbol{r}_1) + m_3 (\boldsymbol{r}_3 \times \boldsymbol{r}_1) = 0,$$

odnosno

$$\lambda_2 (\boldsymbol{r}_2 \times \boldsymbol{r}_1) + \lambda_3 (\boldsymbol{r}_3 \times \boldsymbol{r}_1) = 0,$$

odakle se izvodi deobom druge prvom

$$\frac{\lambda_2}{m_2} = \frac{\lambda_3}{m_3}.$$

Posle vektorskog množenja istih jednačina vektorom $\boldsymbol{r}_2$ dobiva se

$$m_1 (\boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{r}_2) + m_3 (\boldsymbol{r}_3 \times \boldsymbol{r}_2) = 0,$$

$$\lambda_1 (\boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{r}_2) + \lambda_3 (\boldsymbol{r}_3 \times \boldsymbol{r}_2) = 0,$$

što sad posle deobe daje

$$\frac{\lambda_1}{m_1} = \frac{\lambda_3}{m_3}.$$

To znači, ako se u problemu tri tela. centar atrakcije i centar mase poklapaju, onda važi relacija

$$\frac{\lambda_1}{m_2} = \frac{\lambda_2}{m_2} = \frac{\lambda_3}{m_3} = n^2, \tag{14}$$

gde je n^2 neka pozitivna skalarna veličina, pa se može kratko napisati

$$\lambda_i = n^2 m_i \qquad (i = 1,\ 2,\ 3) \tag{15}$$

Nije teško pokazati da ovo rasuđivanje važi i kad su data tri tela na istoj pravoj (kolinearna).

3. **Egzaktna rešenja problema tri tela**

Ako je konstelacija tri data tela takva da se za čitavo vreme kretanja A i C poklapaju, ona se može uzeti da je centar mase sistema nepokretan (jer se inače kreće jednoliko i pravolinijski) i kretanje takva tri tela posmatra u odnosu na centar mase odn. centar atrakcije. Diferencijalne jednačine kretanja će onda glasiti

$$m_i \frac{d^2 \boldsymbol{r}_i}{dt^2} = -\lambda_i \boldsymbol{r}_i, \qquad (i = 1,\ 2,\ 3) \tag{16}$$

što posle deobe sa m_i s obzirom na (14) daje

$$\frac{d^2 \boldsymbol{r}_i}{dt^2} = \frac{d \boldsymbol{v}_i}{dt} = -n^2 \boldsymbol{r}_i. \tag{17}$$

Treba samo imati na umu da, ako se konstelacija uočena tri tela može menjati, onda n^2 ne mora biti konstanta već je funkcija vremena

$$n^2 = n^2(t). \tag{18}$$

Da bismo dobili tzv. *egzaktna* (*tačna*) *rešenja* našeg problema pođimo od onog početnog položaja koji ispunjava uslov $A \equiv C$ i kad su mase m_1, m_2 i m_3 u temenima jednakostraničnog trougla. Pitanje je sad kakve treba da budu početne brzine pa da za celo vreme kretanja ostane $A \equiv C$ i *konstelacija bude stalno slična početnoj*. To znači sistem se ne mora kretati kao nepromenljivo kruto telo, ali konstelacija treba da ostane u sličnom položaju, tj. u prethodnom slučaju stalno u temenima jednakostraničnog trougla bilo većeg bilo manjeg.

Taj zahtev će biti ispunjen, ako su:

1/ vektori $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$ i $\boldsymbol{v}_3$ početnih brzina komplanarni i leže svi u ravni masa koja je onda nepromenljiva ravan;

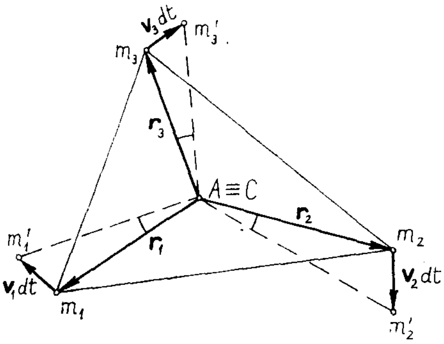
2/ vektori brzina svi obrazuju isti ugao sa odnosnim vektorima položaja, tj.

$$\sphericalangle(\boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{r}_i) = \vartheta = \text{const.}; \tag{19}$$

3/ intenziteti $v_i = |\boldsymbol{v}_i|$ vektora brzina u početnom trenutku su proporcionalni modulima $r_i = |\boldsymbol{r}_i|$ vektora položaja, tj.

$$\frac{v_i}{r_i} = \mu = \text{const.} \quad \frac{v_1}{v_2} = \frac{r_1}{r_2}, \ \text{itd.} \tag{20}$$

Da će, kad su ovi uslovi ispunjeni, postavljeni zahtev biti zadovoljen može se pokazati na naredni geometrijski Laplasov način (sl. 32).



Sl. 32

Kako su vektori $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, $\boldsymbol{v}_3$ u početnom položaju komplanarni i obrazuju isti ugao sa odnosnim vektorima položaja, biće položaj tri tela posle elementarnog vremena dt određen vektorima položaja

$$\boldsymbol{r}_i + \boldsymbol{v}_i \, dt. \tag{21}$$

Tako, ako su m_1, m_2, m_3 položaji naša tri tela u trenutku $t = 0$, biće njihov položaj u trenutku dt, određen vektorima (21) u m_1', m_2', m_3'. Međutim, trougli Cm_1m_1', Cm_2m_2', Cm_3C_3' su slični, jer su na osnovu (19) uglovi u temenima m_1, m_2, m_3 jednaki a iz (20) se vidi da su u tim trouglima stranice koje obrazuju te uglove proporcionalne. Otuda se može zaključiti da će radijus vektori koji određuju ta tri tela posle vremena dt biti zaokrenuti za isti ugao a njihove dužine produžene proporcionalno. To pokazuje da će nova konstelacija posle vremena dt biti slična polaznoj. Nije teško pokazati da će sličnost konstelacije ostati očuvana i u narednom elementu vremena dt, jer su prema (17) izvodi brzina po vremenu proporcionalni vektorima položaja (potezima). Prema tome, sličnost konstelacije će biti očuvana u toku kretanja. Uglovi među vektorima položaja masa u toku čitavog kretanja ostaju nepromenjeni — isti kao u početnom momentu, dok se veličine vektora položaja menjaju, ali ostaju u istoj onoj razmeri u kojoj su se nalazili u početku kretanja. To znači centar mase miruje (ili se kreće jednoliko i pravolinijski) a konstelacija tri tela se razmešta stalno tako da ostaje u početnoj konstelaciji, sličnoj konstelaciji.

Dakle, jednačine (17) važe i posle promene vremena, a razlaganjem ubrzanja na radijalno i transverzalno, može se onda napisati

$$\left[\frac{d^2 r_i}{dt^2} - r_i\left(\frac{d\varphi_i}{dt}\right)^2\right]\boldsymbol{r}_{io} + \left[r_i\frac{d^2\varphi_i}{dt^2} + 2\frac{dr_i}{dt}\frac{d\varphi_i}{dt}\right]\boldsymbol{n}_{io} = -n^2\boldsymbol{r}_i, \tag{22}$$

gde su $\boldsymbol{r}_{io}$ i $\boldsymbol{n}_{io}$ jedinični vektori u radijalnom i transverzalnom pravcu. Skalarnim množenjem jediničnim vektorima $\boldsymbol{r}_{io}$ i $\boldsymbol{n}_{io}$ dobivaju se šest skalarnih jednačina koje opisuju ovakvo kretanje

$$\frac{d^2 r_i}{dt^2} + n^2 r_i - r_i\left(\frac{d\varphi_i}{dt}\right)^2 = 0, \tag{23}$$

$$r_1\frac{d^2\varphi_i}{dt^2} + 2\frac{dr_i}{dt}\frac{d\varphi_i}{dt} = 0. \tag{24}$$

Kad se, sad, jednačina (24) napiše u obliku

$$\frac{1}{r_i}\frac{d}{dt}\left(r_i^2\frac{d\varphi_i}{dt}\right) = 0,$$

onda se vidi da za kretanje svakog od ova tri tela važi zakon površina, tj.

$$r_i^2\frac{d\varphi_i}{dt} = C_i = \text{const.}, \tag{25}$$

gde je C_i dvostruka sektorska brzina u početnom momentu, koja ostaje u toku kretanja očuvana.

Utvrdili smo, dakle, da putanje sva tri tela moraju biti slične, pa ostaje samo da se utvrdi kakve su to putanje.

U rešavanju ovog zadatka mora se poći od neke polazne konstelacije i Lagranž je utvrdio da se do *tačnih* (*egzaktnih*) *rešenja* o kretanju tri tela može doći, ako su u početnom položaju tri tela:

a) U temenima jednakostraničnog trougla sa stranicama nepromenljive dužine. To se naziva ***kružni slučaj***, jer sva tri tela mogu opisivati krugove sa centrima u C.

b) Na istoj pravoj liniji (*kolinearni slučaj*).

c) U homografskom položaju, kad je

$$\frac{\rho_{ij}}{\rho_{ij}^o} = \rho(t), \tag{26}$$

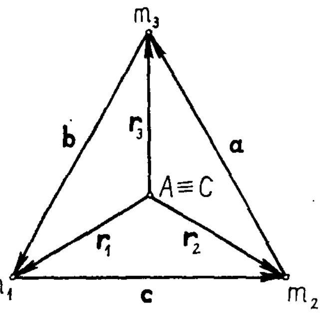
(***homografski slučaj***), tj. kad je razmera rastojanja ρ_{ij} tri tela prema njihovim rastojanjima ρ_{ij}^o u početnom položaju, neka funkcija vremena. Ovaj slučaj obuhvata prva dva, ali se mi na njemu nećemo zadržavati.

Inače u svim drugim slučajevima je račun vrlo složen i ne dovodi do nekih egzaktnih rešenja opšteg slučaja, osim naravno u raznim slučajevima ograničenog problema tri tela o čemu će kasnije biti reči. Rešenja gornja tri slučaja poznata su kao *Lagranževa* (ili *egzaktna*) *rešenja problema tri tela.*

Kružni slučaj tri tela. — Ako se uoči ma koja trouglasta konstelacija tri tela m_1, m_2, m_3 (sl. 33) i stranice obeleže sa

$$a = \overrightarrow{m_2 m_3}, \quad b = \overrightarrow{m_3 m_1}, \quad c = \overrightarrow{m_1 m_2}, \tag{27}$$

pri čemu je uslov $A \equiv C$ ispunjen, onda se mogu uspostaviti neke veze među masama i potezima. Naime, s obzirom da je



Sl. 33

$$m_1 + m_2 + m_3 = M,$$

a prema (11) je

$$m_1 \boldsymbol{r}_1 + m_2 \boldsymbol{r}_2 + m_3 \boldsymbol{r}_3 = 0,$$

mogu se iz druge od ovih jednačina, pomoću prve, eliminisati redom, prvo m_1, pa m_2 i najzad m_3 i tako dobiti tri naredne relacije

$$\begin{aligned} -M\boldsymbol{r}_1 &= m_2(\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1) + m_3(\boldsymbol{r}_3 - \boldsymbol{r}_1), \\ -M\boldsymbol{r}_2 &= m_3(\boldsymbol{r}_3 - \boldsymbol{r}_2) + m_1(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2), \\ -M\boldsymbol{r}_3 &= m_1(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_3) + m_2(\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_3). \end{aligned} \tag{28}$$

U kružnom slučaju biće

$$a = b = c = \text{const.} \tag{29}$$

Jednačina (17) se može, s obsirom na prvu od jednačina (28) napisati u obliku

$$\boldsymbol{F}_1 = m_1 \frac{d^2 \boldsymbol{r}_1}{dt^2} = \frac{n^2}{M} m_1 m_2 (\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1) + \frac{n^2}{M} (m_3 m_1 (\boldsymbol{r}_3 - \boldsymbol{r}_1). \tag{30}$$

Sa druge strane imamo prema (1)

$$\boldsymbol{F}_1 = m_1 \frac{d^2 \boldsymbol{r}_1}{dt^2} = k^2 \sum_j m_1 m_j \frac{\boldsymbol{r}_j - \boldsymbol{r}_1}{\rho_{1\rho}^3} = \frac{k^2}{c^3} m_1 m_2 (\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_1) + \frac{k^2}{b^2} m_3 m_1 (\boldsymbol{r}_3 - \boldsymbol{r}_1). \tag{31}$$

Ako se napišu još ovakvi izrazi za $\boldsymbol{F}_2$ i $\boldsymbol{F}_3$, onda se upoređivanjem koeficijenata uz $m_1 m_2 (\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1)$, $m_3 m_1 (\boldsymbol{r}_3 - \boldsymbol{r}_1)$. i $m_2 m_3 (\boldsymbol{r}_3 - \boldsymbol{r}_2)$ dolazi do zaključka da mora biti

$$\frac{n^2}{M} = \frac{k^2}{a^3} = \frac{k^2}{b^3} = \frac{k^2}{c^3}, \tag{32}$$

odn. pošto smo uzeli da je $a = b = c$

$$\frac{n^2}{M} = \frac{k^2}{a^3}, \Rightarrow n^2 = \frac{k^2 M}{a^3}. \tag{33}$$

Ako se još uvedu skraćene oznake

$$\frac{(m_2^2+m_2 m_3+m_3^2)^{3/2}}{M^2}=M_1,$$

$$\frac{(m_3^2+m_3 m_1+m_1^2)^{3/2}}{M^2}=M_2, \tag{34}$$

$$\frac{(m_1^2+m_1 m_2+m_2^2)^{3/3}}{M^2}=M_3,$$

onda se, najzad, dobiva

$$n^2=\frac{k^2 M_1}{r_1^3}=\frac{k^2 M_2}{r_2^3}=\frac{k^2 M_3}{r_3^3}, \tag{35}$$

tj. kratko

$$n^2=\frac{k^2 M_i}{r_i^3}. \tag{36}$$

Izrazi M_1, M_2, M_3 imaju dimenziju mase što je lako pokazati, jer je

$$\frac{M}{a^3}=\frac{M_1}{r_1^3}=\frac{M_2}{r_2^3}=\frac{M_3}{r_3^3}. \tag{37}$$

Do ove poslednje veze dolazi se na ovaj način. Dizanjem svake od vektorskih relacija (28) na kvadrat, uzimanjem u obzir (29) da je $a=b=c$, dobiće se tri naredne relacije

$$M^2 r_1^2=(m_2^2+m_2 m_3+m_3^2)\, a^2,$$

$$M^2 r_2^2=(m_3^2+m_3 m_1+m_1^2)\, a^2,$$

$$M^2 r_3^2=(m_1^2+m_1 m_2+m_2^2)\, a^2,$$

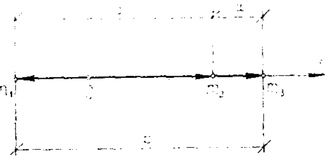
a odatle se onda izvode veze (37)

Vrednost (35) za n^2 uneta u jednačine (17) daje

$$\frac{d^2 \mathbf{r}_i}{dt^2}=-k^2 M_i \frac{\mathbf{r}_i}{r_i^3}. \tag{38}$$

Ova jednačina pokazuje (vidi od. III i IV) da se *telo mase m_i može u ovakvom slučaju kretati oko centra atrakcije A tako, kao da se u njemu nalazi masa M_i*. Prema tome, njegova putanja mora biti neki konusni presek, a koji ($e<0$, $e=0$, $e>0$) zavisi od početnih uslova. Putanje sva tri ova tela su, naravno, slične.

Kolinearni slučaj tri tela. — Neka sad tri data tela m_1, m_2 i m_3 leže na istoj pravoj i neka su tela poređana kao na sl. 34, na pr. sleva nadesno, a prava orijentisana i određena jediničnim vektorom $\boldsymbol{i}$ a C neka bude centar mase. Tada će biti



Sl. 34

za $\overrightarrow{Cm_1} = \boldsymbol{r}_1$, $\overrightarrow{Cm_2} = \boldsymbol{r}_2$ i $\overrightarrow{Cm_3} = \boldsymbol{r}_3$

$$\boldsymbol{r}_3 - \boldsymbol{r}_2 = a\,\boldsymbol{i}, \quad \boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_3 = -b\,\boldsymbol{i} = \boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1 = c\,\boldsymbol{i}. \tag{39}$$

Pri tome su a, b, i c pozitivne veličine ($a>0$, $b>0$, $c>0$) i ne mogu biti jednake, ako se tela ne poklapaju.

Ako se sad napišu izrazi za sile $\boldsymbol{F}_1$ $\boldsymbol{F}_2$ i $\boldsymbol{F}_3$ dobiće se prema (30)

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{F}_1 &= \frac{n^2}{M}(m_2 c + m_3 b)\, m_1 \boldsymbol{i},\\
\boldsymbol{F}_2 &= \frac{n^2}{M}(m_3 a - m_1 c)\, m_2 \boldsymbol{i},\\
\boldsymbol{F}_3 &= -\frac{n^2}{M}(m_1 b + m_2 a)\, m_3 \boldsymbol{i};
\end{aligned}\tag{40}$$

a prema (31)

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{F}_1 &= k\left(\frac{m_2}{c^2} + \frac{m_3}{b^2}\right) m_1 \boldsymbol{i},\\
\boldsymbol{F}_2 &= k^2\left(\frac{m_3}{a^2} - \frac{m_1}{c^2}\right) m_2 \boldsymbol{i},\\
\boldsymbol{F}_3 &= -k^2\left(\frac{m_1}{b^2} + \frac{m_2}{a^2}\right) m_3 \boldsymbol{i}.
\end{aligned}\tag{41}$$

Upoređivanjem koeficijenata uz odgovarajuće izraze u ovim jednačinama dolazi se do naredne tri veze

$$\begin{aligned}
\frac{n^2}{k^2 M}(m_2 c + m_3 b) &= \frac{m_2}{c^2} + \frac{m_3}{b^2},\\
\frac{n^2}{k^2 M}(m_3 a - m_1 c) &= \frac{m_3}{a^2} - \frac{m_1}{c^2},\\
\frac{n^2}{k^2 M}(m_1 b + m_2 a) &= \frac{m_1}{b^2} + \frac{m_2}{a^2},
\end{aligned}\tag{42}$$

od koiih su samo *dve* nezavisne, jer se treća može uvek izvesti iz ostale dve.

Stavimo li

$$\frac{a}{c} = z, \tag{43}$$

onda je (vidi 39)

$$b = a + c, \tag{44}$$

pa se može napisati

$$a = cz, \quad b = c(1 + z), \tag{45}$$

pa kad se prva od jednačina (42) podeli trećom dobiva se, u ovim oznakama, posle kraćeg računa

$$m_1 z^2 [1-(1+z)^3] + m_2 (1+z)^2 (1-z^3) + m_3 [(1+z)^3 - z^3] = 0, \tag{46}$$

ili kad se ova algebarska jednačina petog stepena po z razvije i napiše uređena po opadajućim stepenima od z, dobiće se

$$\begin{aligned}(m_1+m_2) z^5 + (3\,m_1 + 2\,m_2) z^4 + (3\,m_1 + m_2) z^3 - (m_2 + 3\,m_3) z^2 - \\ - (2\,m_2 + 3\,m_3) z - (m_2 + m_3) = 0.\end{aligned} \tag{47}$$

Ova jednačina određuje kako moraju tri kolinearna tela biti raspoređena i u kom međusobnom položaju da bi se njihov centar atrakcije poklapao sa centrom mase.

Analizom ove jednačine, pošto znamo da su sve mase pozitivne, dolazi se do zaključka da ona ima samo jedan realan i to pozitivan koren. Ta vrednost z određuje onda razmeru rastojanja srednje mase od one druge dve krajnje dok sama apsolutna rastojanja mogu biti proizvoljna.

Uvek je određen položaj srednje mase prema ostalim dvema. pa se za drugi raspored masa, na pr. m_2, m_3, m_1 ili m_3, m_1, m_2 dobivaju druga rešenja.

Na pitanje kako se mogu sad kretati ova tri tela, može se dati odgovor, kad se uzme u obzir da je pri rasporedu masa m_1, m_2, m_3 sleva nadesno

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a} = a\,\boldsymbol{i}, \quad \boldsymbol{b} = -b\,\boldsymbol{i}, \quad \boldsymbol{c} = c\,\boldsymbol{i} \\ \boldsymbol{r}_1 = -r_1\,\boldsymbol{i}, \quad \boldsymbol{r}_2 = \pm r_2\,\boldsymbol{i}, \quad \boldsymbol{r}_3 = r_3\,\boldsymbol{i},\end{aligned} \tag{48}$$

pri čemu je znak kod r_2 pozitivan, ako je centar mase sistema između tela m_1 i m_2, a negativan, ako je između m_2 i m_3.

Jednačine (28) pri ovim uslovima postaju (svi vektori su kolinearni)

$$\begin{aligned}Mr_1 &= m_2 c + m_3 b, \\ \pm Mr_2 &= m_3 a - m_1 c, \\ Mr_3 &= m_1 b + m_2 a.\end{aligned} \tag{49}$$

Iz ovih jednačina i jednačina (42) dobiva se za masu m_1 (u prvu od jednačina (42) treba umesto Mr_1 uneti $m_2 c + m_3 b$ iz prve od ovih jednačina (49))

$$n^2 = \frac{k^2}{r_1}\left(\frac{m_2}{c^2} + \frac{m_3}{b^2}\right). \tag{50}$$

Kad se odavde na osnovu (45) eliminiše b i c i stavi

$$M_1 = \frac{[m_2 + m_3 (1+z)^2]\,[m_2 (1+z)^2 + m_3]}{M^2 (1+z)^2}, \tag{51}$$

gde je M_1 neka konstanta, koja ima dimenziju mase, dobiće se

$$n^2 = \frac{k^2 M_1}{r_1^3}, \tag{52}$$

pa jednačina kretanja tela m_1 glasi

$$\frac{d^2 \boldsymbol{r}_1}{dt^2} = -k^2 M_1 \frac{\boldsymbol{r}_1}{r_1^3},$$

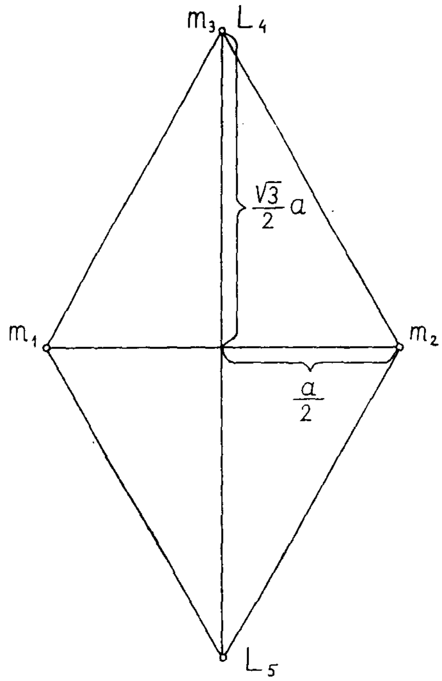
i slično za ostala dva tela, tj. opet se radi o jednačinama oblika (38)

$$\frac{d^2 r_i}{dt^2} = -k^2 M_i \frac{r_i}{r_i^3}. \tag{53}$$

One pokazuju da se i u kolinearnom slučaju tela kreću po konusnim presecima oko zajedničkog težišta, ostajući stalno na pravoj liniji i prolazeći kroz pericentre i apocentre istovremeno.

Za razliku od kružnog slučaja sad ove „fiktivne" mase M_i imaju druge veličine.

Tačke libracije. — U onim naročitim slučajevima problema tri tela, kad postoje egzaktna (partikularna) rešenja, može se postaviti pitanje položaja relativne ravnoteže jednog od njih u odnosu na ostala dva. Egzaktna rešenja, međutim, pod pretpostavkom poklapanja centra atrakcije i centra masa, postoje u slučaju rasporeda tih tela u temenima jednakostraničnog trougla nepromenljive veličine i u slučaju rasporeda tela na pravoj liniji pri naročitim razmerama njihovih rastojanja. Zato, ako se, u tzv. kružnom slučaju, postavi pitanje gde mora biti telo m_3, ako su tela m_1 i m_2 na nekom stalnom rastojanju a, odgovor glasi. Masa m_3 zauzimaće jedan od dva položaja L_4 i L_5 (sl. 35) u temenima jednakostraničnog trougla čija je stranica a i koji je u invarijabilnoj ravni. Ove dve tačke zovu se *trougaone tačke libracije* tri tela, a označuju se iz istorijskih razloga na pokazani način prema imenu Lagranža. Drugim rečima, ako bi se, na pr. neki veštački satelit našao u odnosu na Zemlju i Mesec kao treće telo u položaju koji odgovara trougaonoj tački libracije, on bi onda ostao u nepromenjenom položaju prema Zemlji i Mesecu, tj. teorijski ne bi nikad mogao stići ni na Zemlju ni na Mesec!



Sl. 35

Pitanie određivanja tačke libracije (relativnog položaja ravnoteže) tela m_3 u odnosu na tela m_1 i m_2, kad su sva tri tela na istoj pravoj liniji, zavisi od rasporeda uočena tri tela. Na pr., ako ih zamislimo raspoređene po i-osi sleva nadesno, onda ćemo dobiti jednu tačku libracije L_1, kad je m_3 srednje telo. Ako je telo m_3 levo ispred m_1 dobiće se druga tačka libracije L_2. I najzad, ako telo m_3 bude krajnje desno — iza m_2, dobiće se treća tačka libracije L_3. Ove tri tačke libracije zovu se *kolinearne*, a njihova numeracija, kao i onih dveju trougaonih je uobičajena po dogovoru. Ti položaji proističu iz uslova za podudaranje centra atrakcije i centra mase i otuda se mogu odrediti.

One dve tačke libracije koje mogu postojati u kružnom slučaju zovu se *Lagranževe* a ona tri u kolinearnom slučaju su *Ojlerove* (Euler).

VIII ASTEROIDNI PROBLEM

Asteroidni problem ili *ograničeni problem tri tela* je problem u kome tri tela ispunjavaju naročite uslove, koji omogućuju da se sam problem uprosti i lakše rešava. Reč je o slučaju, kad:

a) Dva tela imaju mase M i m, pri čemu može biti $M \geqslant m$ a treće telo ima, u odnosu na ova dva, malu zanemarljivu, masu μ tako da je

$$M \geqslant m \gg \mu.$$

b) Tela M i m se privlače među sobom i privlače telo po Njutnovom zakonu gravitacije, ali se *uzima da telo zanemarljive mase* μ *sa svoje strane ne privlači tela* M *i* m *i da ne remeti njihovo kretanje*. Ovo u izvesnim slučajevima dobro odgovara stvarnosti, ako se telo μ ne približava mnogo *osnovnim* ili *primarnim* telima M i m. U takvom slučaju će se tela M i m kretati prema Keplerovim zakonima kao dva tela.

c) Tela M i m se kreću oko zajedničkog centra mase po krugovima jednolikom brzinom (*kružni slučaj*).

Ovakve uslove približno zadovoljavaju asteroidi (planetoidi) u prostoru između Marsa i Jupitera, kad se njihovo kretanje proučava u odnosu na Sunce i Jupiter kao osnovna tela. Stoga se ovakav problem i naziva *asteroidni*. Inače je od velikog značaja za proučavanje kretanja veštačkih satelita u odnosu na Zemlju i Mesec kao osnovna tela. Iz opšteg problema tri tela može se ovaj slučaj izvesti stavljanjem $\mu \approx 0$.

Za opisivanje ovog kretanja obično se koristi sistem $CXYZ$ Dekartovih pravouglih koordinata čiji je početak u centru mase C tela M i m (baricentralni sistem koordinata), ali koji se jednoliko obrće ugaonom brzinom n, jednakom srednjoj ugaonoj brzini kretanja tela M i m oko ose CZ.

Dakle,

$$n = \frac{2\pi}{T}, \tag{1}$$

ako je T vreme za koje prava kroz M i m izvede punu rotaciju, odn. vreme za koje jedno od tela M i m obiđe potpuno oko drugog tela. Pri tome je za $\overline{mM} = a$ (sl. 36)

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{a^3}{\lambda}}, \tag{2}$$

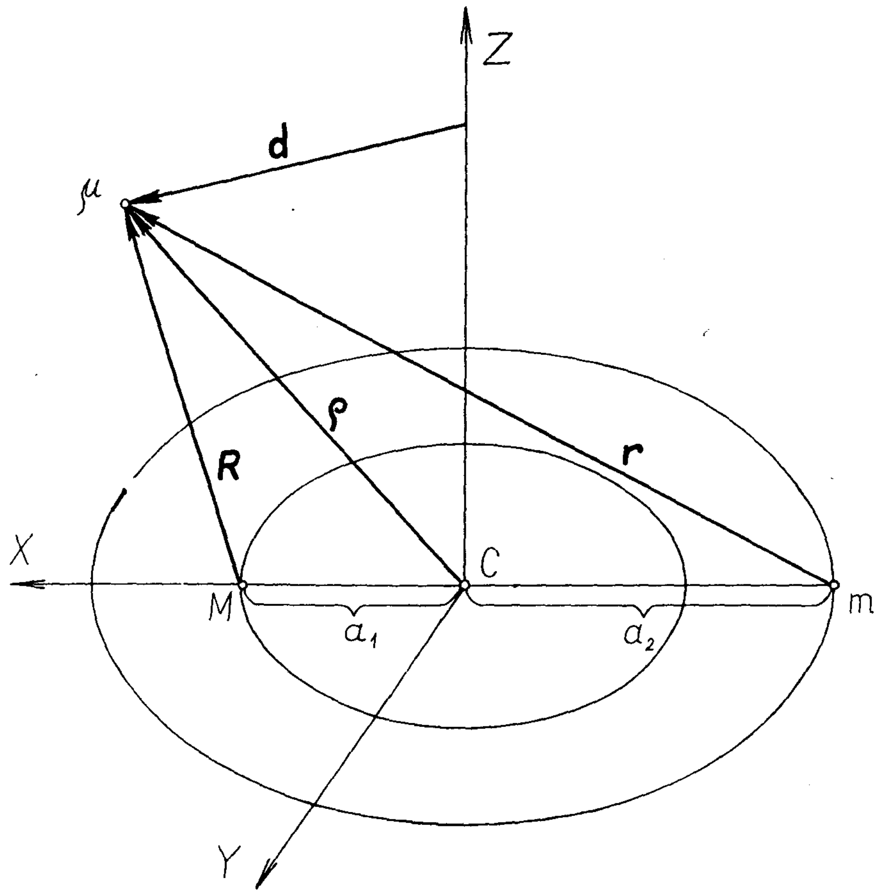
gde je univerzalna gravitaciona konstanta $\lambda = k^2(M+m)$ (vidi III — problem dva tela). Prema tome je

$$n = \frac{k\sqrt{M+m}}{a^{3/2}}. \tag{3}$$

Ravan CXY se poklapa sa ravni orbita tela M i m, koja se nalaze na osi CX, orijentisanoj dogovorno od m ka M. Osa CZ je upravna na ravni (invarijabilnoj) orbita osnovnih tela i orijentisana je tako da je iz njenog smera gledana rotacija sistema u direktnom smeru. Osa CY se uzima tako da sa CX kao prvom i CZ kao trećom osom obrazuje desni sistem. Prema tome, može se pisati

$$\boldsymbol{n} = n\,\boldsymbol{k}, \tag{4}$$

ako su $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ kao obično jedinični vektori ovako uvedenog sistema osa.



sl. 36

Ovaj koordinatni sistem zove se *Jakobijev* (Jacobi).

Malo telo μ se u opštem slučaju nalazi van ravni orbita tela M i m, ali, ako se nalazi u toj ravni, onda je reč o ***ravanskom asteroidnom problemu.***

Ako se obeleži

$$M\mu = \boldsymbol{R}, \quad m\mu = \boldsymbol{r}, \quad C\mu = \boldsymbol{\rho}; \tag{5}$$

$$\overline{CM} = a_1, \quad \overline{Cm} = a_2,$$

tada na telo mase μ dejstvuju ove sile:

1) Gravitaciona sila od tela mase M

$$\boldsymbol{F} = -k^2 \frac{M\mu}{R^3} \boldsymbol{R}.$$

2) Gravitaciona sila od tela mase m

$$\boldsymbol{f} = -k^2 \frac{m\mu}{r^3} \boldsymbol{r}.$$

3) Centrifugalna sila $\boldsymbol{G}$, usled toga što se sve posmatra u odnosu na pokretni Jakobijev sistem, koji se obrće zajedno sa masama M i m oko ose CZ. Ona iznosi

$$\boldsymbol{G} = \frac{\mu V^2}{d} \boldsymbol{d}_0 = \frac{\mu n^2 d^2}{d} \boldsymbol{d}_0 = \mu n^2 \boldsymbol{d},$$

kad se uzme da je d dužina normale spuštene iz tela μ na osu obrtanja CZ, $\boldsymbol{d}_0$ jedinični vektor te normale, orijentisan od ose CZ ka telu μ, $V = nd$ brzina (prenosna) obilaženja tela μ zajedno sa sistemom $CXYZ$ oko ose CZ.

4) Koriolisova (Coriolis) sila

$$\boldsymbol{K} = -2\mu(\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{v}) = 2\mu(\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{n}),$$

gde je $\boldsymbol{v} = \frac{d\rho}{dt}$ brzina (relativna) tela μ prema sistemu $CXYZ$.

Prema tome, vektorska diferencijalna jednačina kretanja tela μ, pri datim uslovima, u odnosu na centar mase C kao pol i sistem referencije $CXYZ$ glasi

$$\mu \frac{d^2 \boldsymbol{\rho}}{dt^2} = -k^2 \frac{M\mu}{R^3} \boldsymbol{R} - k^2 \frac{m\mu}{r^3} \boldsymbol{r} + \mu n^2 \boldsymbol{d} + 2\mu(\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{n}), \tag{6}$$

odn. kad se skrati sa μ

$$\frac{d^2 \boldsymbol{\rho}}{dt^2} = -k^2 \frac{M}{R^3} \boldsymbol{R} - r^2 \frac{m}{r^3} \boldsymbol{r} + n^2 \boldsymbol{d} + 2(\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{n}). \tag{7}$$

Međutim, pošto je

$$\operatorname{grad} \frac{k^2 M}{R} = -k^2 M \frac{\boldsymbol{R}}{R^3},$$

$$\operatorname{grad} \frac{k^2 m}{r} = -k^2 m \frac{\boldsymbol{r}}{r^3},$$

$$\operatorname{grad} \frac{1}{2} n^2 d^2 = n^2 \boldsymbol{d},$$

može, kad se stavi

$$k^2 M \frac{1}{R} + k^2 m \frac{1}{r} + \frac{1}{2} n^2 d^2 = W, \tag{8}$$

da se napiše

$$\frac{d^2 \boldsymbol{\rho}}{dt^2} = \operatorname{grad} W + 2(\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{n}). \tag{9}$$

Kad se još uzme u obzir da je

$$\boldsymbol{\rho} = \{X, Y, Z\} \qquad \boldsymbol{v} = \left\{\frac{dX}{dt}, \frac{dY}{dt}, \frac{dZ}{dt}\right\}, \qquad \boldsymbol{n} = \{0, 0, n\} \tag{10}$$

$$W = W(X, Y, Z),$$

vektorska jednačina (9) može se napisati u obliku narednog sistema skalarnih jednačina

$$\begin{aligned} &\frac{d^2 X}{dt^2} - 2n \frac{dY}{dt} = \frac{\partial W}{\partial X}, \\ &\frac{d^2 Y}{dt^2} + 2n \frac{dX}{dt} = \frac{\partial W}{\partial Y}, \\ &\frac{d^2 Z}{dt^2} \qquad\quad = \frac{\partial W}{\partial Z}. \end{aligned} \tag{11}$$

Sa slike i na osnovu definicije (8) skalara W, pošto je

$$R^2 = (X - a_1)^2 + Y^2 + Z^2, \qquad r^2 = (X + a_2)^2 + Y + Z^2,$$

biće

$$W = k^2 \left[\frac{M}{R} + \frac{m}{r}\right] + \frac{1}{2} n^2 (X^2 + Y^2). \tag{12}$$

Inače, vektorski proizvod $\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{n}$ može se na poznati način izraziti pomoću jediničnih vekora $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ osa Jakobijevog sistema i tako odrediti projekcije tog proizvoda na Jakobijeve ose. Biće

$$\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{n} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \frac{dX}{dt} & \frac{dY}{dt} & \frac{dZ}{dt} \\ 0 & 0 & n \end{vmatrix} = n \frac{dY}{dt} \boldsymbol{i} - n \frac{dX}{dt} \boldsymbol{j}. \tag{13}$$

Vektorska diferencijalna jednačina (9) ima jedan prvi integral. On se može dobiti skalarnim množenjem obe strane sa

$$d\boldsymbol{\rho} = \boldsymbol{v}\, dt$$

pa se, onda, na levoj strani dobiva

$$d\boldsymbol{\rho} \cdot \frac{d^2 \boldsymbol{\rho}}{dt} = \boldsymbol{v}\, dt \cdot \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \boldsymbol{v} \cdot d\boldsymbol{v} = v\, dv,$$

pošto je

$$\frac{d^2 \rho}{dt^2} = \frac{dv}{dt}.$$

Na desnoj strani biće

$$d\rho \cdot \text{grad } W = dW,$$

jer poslednji član otpada pošto je mešoviti proizvod sa dva kolinearna vektora uvek jednak nuli.

Na taj način se dobiva

$$v\,dv = dW,$$

odnosno

$$\frac{1}{2} v^2 = W + h \qquad v^2 = 2W + H, \tag{14}$$

kad se stavi $2h = H$.

Iz (14) se vidi da uvek mora biti

$$2W + H \geqslant 0, \tag{15}$$

pošto je v realno pa $v^2 \geqslant 0$.

Međutim, pošto je prema (8) $W > 0$ mora, u slučaju $v = 0$, konstanta H biti negativna ($H < 0$). Stoga, ako se konstanta integracije H odredi u trenutku $v_0 = 0$ i ako skalar W ima tada vrednost W_0 mora biti

$$2W_0 - H_0 = 0 \Rightarrow 2W_0 = H_0, \tag{16}$$

ako se uzme $H_0 > 0$.

Tako se onda, najzad integral (14) može napisati u obliku

$$v^2 = 2W - H_0 = 2(W - W_0). \tag{17}$$

Ovaj integral se zove *Jakobijev integral asteroidnog problema*, a pozitivna konstanta H_0 zove se *Jakobijeva konstanta*. U koordinatnom obliku, s obzirom na (10), on se može napisati

$$\left(\frac{dX}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dY}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dZ}{dt}\right)^2 = 2W - H_0. \tag{18}$$

Do ovog istog koordinatnog oblika Jakobijevog integrala može se doći i direktno polazeći od skalarnih jednačina (11) množeći ih redom sa dX, dY i dZ i sabiranjem.

U slučaju ravanskog asteroidnog problema može se uzeti da se sve odvija u ravni CXY ($Z = 0$), koja je onda invarijabilna ravan. Jednačine (11) se tada svode na

$$\begin{aligned} \frac{d^2X}{dt^2} - 2n\frac{dY}{dt} &= \frac{\partial W}{\partial X}, \\ \frac{d^2Y}{dt^2} + 2n\frac{dX}{dt} &= \frac{\partial W}{\partial Y}, \end{aligned} \tag{19}$$

pri čemu je sad

$$R^2 = (X-a_1)^2 + Y^2, \quad r^2 = (X+a_2)^2 + Y^2, \quad W = W(X, Y), \tag{20}$$

a integral (18) postaje

$$\left(\frac{dX}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dY}{dt}\right)^2 = 2W = H_0. \tag{21}$$

Površ nulte relativne brzine tela μ u odnosu na sistem referencije $CXYZ$ tj.

$$2W = H_0, \tag{22}$$

ili u eksplicitnom obliku

$$2k^2\left[\frac{M}{\sqrt{(X-a_1)^2+Y^2+Z^2}} + \frac{m}{\sqrt{(X+a_2)^2+Y^2+Z^2}}\right] + \frac{1}{2}n^2(X^2+Y^2) = H_0 \tag{23}$$

zove se *Hilova* (Hill) *površ*. To je algebarska površ simetrična u odnosu na koordinatne ravi CXY i CXZ. Ona deli prostor na oblasti $2W > H_0$, u kojima je kretanje tela μ moguće i oblasti $2W < H_0$, u kojima je kretanje tela μ nemoguće.

Kad je reč o ravanskom problemu ($Z = 0$) tada nultoj brzini odgovara *Hilova kriva* nulte brzine, čija je jednačina

$$2k^2\left[\frac{M}{\sqrt{(X-a_1)^2+Y^2}} + \frac{m}{\sqrt{(X+a_2)^2+Y^2}}\right] + \frac{1}{2}n^2(X^2+Y^2) = H_0, \tag{24}$$

koja je simetrična u odnosu na osu CX. U ovom slučaju kriva (24) određuje u ravni oblasti mogućeg i nemogućeg kretanja tela μ.

Polje skalara W, tj. porodica Hilovih površi, odn. Hilovih krivih za razne vrednosti konstante H_0 nas ovde podrobno ne interesuje pa se na tome nećemo zadržavati.

Prema teoriji egzaktnih rešenja u problemu tri tela, u slučaju ravanskog asteroidnog problema postojaće samo *kružno* i *kolinearno* egzaktno rešenje homografskih rešenja nema. U kružnom slučaju je raspored tela u temenima određenog relativno nepromenljivog jednakostraničnog trougla, pri čemu telo μ ne menja svoj položaj relativno prema telima M i m ($M > m \gg \mu$). U kolinearnom slučaju pak reč je o određenom stalnom relativno nepromenljivom rasporedu na jednoj pravoj liniji.

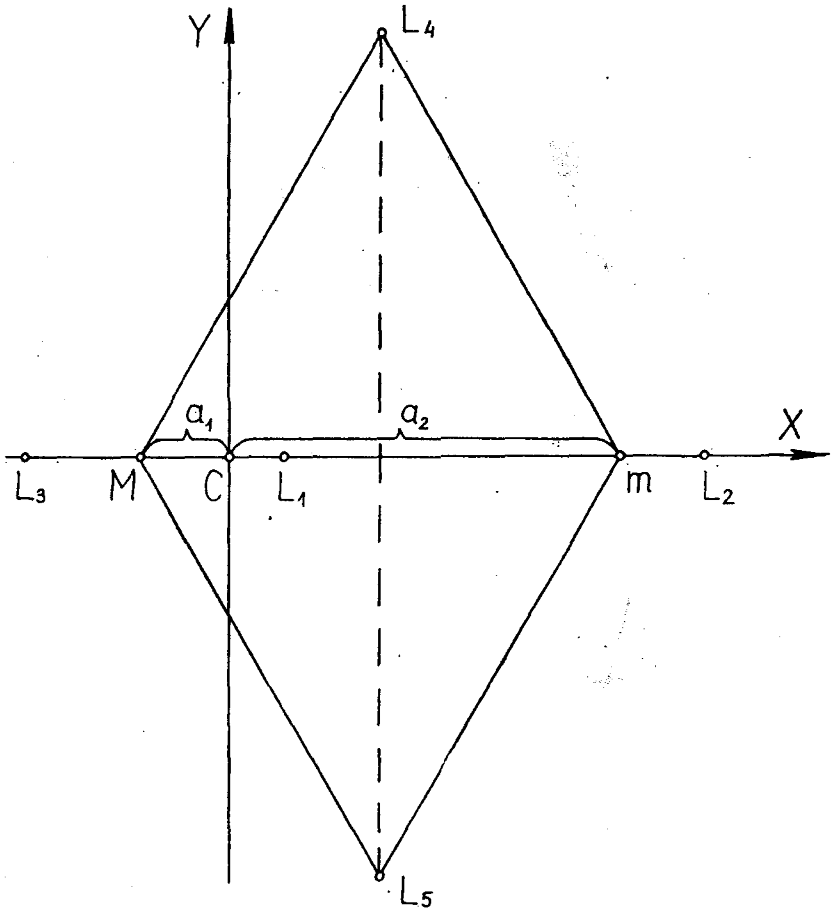
Prema tome, telo μ će biti u kružnom slučaju u ravni CXY (C je težište tela M i m) u relativnoj ravnoteži prema M i m u temenima L_4 i L_5 jednakostraničnih trouglova (sl. 37), čija je stranica $Mm = a = a_1 + a_2$, pri čemu su koordinate tih tačaka (v. i sl. 35)

$$X_4 = \frac{a_2 - a_1}{2}, \qquad Y_4 = \frac{\sqrt{3}}{2}a;$$

$$X_5 = \frac{a_2 - a_1}{2}, \qquad Y_5 = -\frac{\sqrt{3}}{2}a.$$

Te dve tačke su Lagranževe tačke libracije asteroidnog problema.

U kolinearnom slučaju, međutim, kako smo videli u problemu tri tela (i u asteroidnom) mogu postojati još tri relativno ravnotežna položaja L_1, L_2, L_3 na pravoj kroz M i m, i to prema orijentaciji X-ose, dobiće se tačka L_1,



Sl. 37

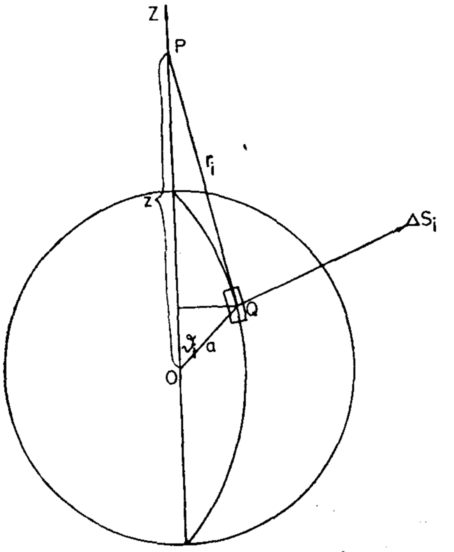
ako je treće telo μ između M i m, ako je naše telo μ desno posle m imamo tačku L_2, i najzad, kad je telo μ levo ispred M tačku L_3.

Ove tri tačke su Ojlerove tačke libracije.

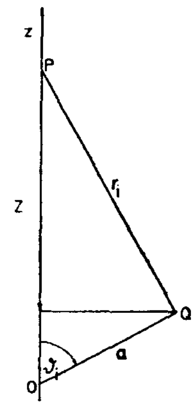
IX NEKE OSOBINE GRAVITACIONOG PRIVLAČENJA MEĐU TELIMA. SFERA DEJSTVA

1. Njutnova sila kojom homogena sferna ljuska i homogena lopta privlače materijalnu tačku

Neka je data homogena sferna ljuska sa centrom u O, poluprečnika a (sferna ljuska je deo lopte između dve koncentrične sfere ne velike razlike među poluprečnicima) i jedinična masa $m=1$ u tački P (sl. 38). Neka ΔS_i bude tipski element površine sferne ljuske koja ima stalnu površinsku gustinu



sl. 38



sl. 39

($\sigma_i = \text{const.}$). Tada je zakon dejstva elementarne Njutnove sile ΔF_i u tački P koja potiče od elementarne mase $\sigma_i \Delta S_i$ u tački Q kao centra privlačenja prema (III, 6)

$$\Delta F_i = -\frac{k^2 \sigma_i \Delta S_i}{r_i^2} = -\frac{k^2 \sigma_i \Delta S_i}{a^2+z^2-2\,az\cos\vartheta_i},$$

pri čemu je ϑ_i ugao koji obrazuje poteg $\overline{OQ}$ sa z-osom, $\overline{OP}=z$, $\overline{PQ}=r_i$. Ova sila (sl. 39) je orijentisana duž $\overline{PQ}$ od P ka Q. Međutim, zbog simetrije rasporeda mase, sila kojom sferna ljuska privlači uočenu jediničnu masu ima aktivnu komponentu samo u pravcu normalnom na osu Oz (osu od O ka P) pa se možemo ograničiti samo na elementarnu komponentu ΔZ_i, odn. i na ukupnu komponentu Z sile u pravcu z-ose. Kako je kosinus ugla OPQ kod P u trouglu OPQ određen obrascem

$$\cos(\sphericalangle OPQ) = \frac{z - a\cos\vartheta_i}{r_i}.$$

Ukupna sila privlaćenja za celu sfernu ljusku biće onda

$$Z = k^2 \sigma_1 \iint_S \frac{(a\cos\vartheta - z)\, dS}{(a^2 + z^2 - 2\,ar\cos\vartheta)^{3/2}}. \tag{1}$$

Radi izračunavanja ovog dvostrukog integrala upotrebićemo sferne polarne koordinate φ i ϑ ($\rho = a = \text{const.}$), pri čemu je ϑ već uvedeni ugao i odgovara prema uobičajenoj definicji tzv. polarnom ugaonom rastojanju. Tada se za element površine dobiva

$$dS = a^2 \sin\vartheta\, d\varphi\, d\vartheta,$$

pa će biti

$$Z = k^2 \sigma_1 a^2 \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \frac{(a\cos\vartheta - z)\sin\vartheta\, d\varphi\, d\vartheta}{(a^2 + z^2 - 2\,ar\cos\vartheta)^{3/2}}$$

$$= 2k^2 \pi\sigma_1 a^2 \int_0^{\pi} \frac{(a\cos\vartheta - z)\sin\vartheta\, d\vartheta}{(a^2 + z^2\, 2\,az\cos\vartheta)^{3/2}}.$$

Preostalu integraciju najlakše je izvesti, ako se kao promenljiva uvede r (rastojanje od P do tačke Q na površi ljuske) jer je z ovde nepromenljivo, i napiše

$$r^2 = a^2 + z^2 - 2\,az\cos\vartheta = (a\cos\vartheta - z)^2 + (a\sin\vartheta)^2,$$

odakle je

$$r\,dr = az\sin\vartheta\, d\vartheta$$

i

$$a\cos\vartheta - z = -\frac{r^2 + z^2 - a^2}{2z},$$

i tada se prethodni integral može napisati

$$\int_0^{\pi} \frac{(a\cos\vartheta - z)\sin\vartheta\, d\vartheta}{(a^2 + z^2 - 2\,az\cos\vartheta)^{3/2}} = -\frac{1}{2\,az^2} \int_{|z-a|}^{z+a} \left(1 + \frac{z^2 - a^2}{r^2}\right) dr$$

$$= -\frac{1}{2\,az^2} \left[r - \frac{z^2 - a^2}{r} \right]_{|z-a|}^{z+a},$$

jer za $\vartheta=0$ imamo $r=|z-a|$, pošto je r kao rastojanje pozitivna veličina. Na taj način se za $z>a$ ($|z-a|=z-a$) dobiva najzad

$$Z=-\frac{k^2\cdot 4\pi a^2\sigma_1}{z^2}=-\frac{k^2 m_1}{z^2}, \tag{2}$$

gde je $m_1=4\pi a^2\sigma_1$ celokupna masa ljuske.

Za $z<a$ ($|z-a|=a-z$) dobiva se

$$Z=0. \tag{3}$$

Prema tome, *homogena sferna ljuska privlači spoljašnju materijalnu tačku kao da je čitava njena masa u njenom centru, a uopšte ne privlači materijalnu tačku koja se nalazi u njenoj unutrašnjosti.*

Njutnova sila, kojom homogena lopta poluprečnika a privlači jediničnu masu na rastojanju $z\neq a$ od centra lopte može se odrediti na naredni način.

Neka elementarna masa $\sigma\Delta V$ (σ je prostorna gustina lopte) u tački $Q(\rho, \varphi, \vartheta)$ lopte privlači jediničnu masu ($m=1$) u tački $P(z, 0, 0)$, gde su tačke određene u sfernim polarnim koordinatama (za tačku P poteg $\rho=z$), pri čemu je $z=\text{const.}$, tada je

$$\Delta F=-\frac{k^2\sigma\Delta V}{\rho^2+z^2-2\rho z\cos\vartheta},$$

i

$$\Delta Z=-\frac{k^2\sigma(z-\rho\sin\vartheta)\Delta V}{(\rho^2+z^2-2\rho z\cos\vartheta)^{3/2}}=\frac{k^2\sigma(\rho\cos\vartheta-z)\Delta V}{(\rho^2+z^2-2\rho z\cos\vartheta)^{3/2}}.$$

Tako se najzad za silu privlačenja dobiva

$$Z=k^2\sigma\int_0^a\int_0^\pi\int_0^{2\pi}\frac{(\rho\cos\vartheta-z)\rho^2\sin\vartheta\, d\rho\, d\varphi\, d\vartheta}{(\rho^2+z^2-2\rho z\cos\vartheta)^{3/2}}$$

$$=k^2\sigma\int_0^a\rho^2 d\rho\int_0^\pi\int_0^{2\pi}\frac{(\rho\cos\vartheta-z)\sin\vartheta\, d\varphi\, d\vartheta}{(\rho^2+z^2-2\rho z\cos\vartheta)^{3/2}},$$

jer je

$$dV=\rho^2\sin\vartheta\, d\rho\, d\varphi\, d\vartheta.$$

Kad se ovde izvode integracije po φ i ϑ na sličan način kao u prethodnom zadatku za ljusku, dobiva se

$$\int_0^\pi\int_0^{2\pi}\frac{(\rho\cos\varphi-z)\sin\vartheta\, d\varphi\, d\vartheta}{(\rho^2+z^2-2\varphi z\cos\vartheta)^{3/2}}=-\frac{\pi}{\rho z^2}\left[u-\frac{z^2-\rho^2}{u}\right]_{|z-\rho|}^{z+\rho} \tag{4}$$

gde smo sad, da bismo istakli da je ρ promenljivo od 0 do a, stavili

$$u^2=\rho^2+z^2-2\rho z\cos\vartheta.$$

Za $z>a$, dakle, $|z-\rho|=z-\rho$, dobiva se

$$-\frac{\pi}{\rho z^2}\left[u-\frac{z^2-\rho^2}{u}\right]_{z-\rho}^{z+\rho}=-\frac{4\pi}{z^2}, \tag{5}$$

pa ostaje još samo integracija po ρ što daje

$$Z = -\frac{k^2}{z^2} 4\pi\sigma \int_0^a \rho^2 d\rho = -\frac{k^2}{z^2} \frac{4}{3} \pi a^3 \sigma = -\frac{k^2 m_1}{z^2},$$

gde je sad $m_1 = \frac{4}{3} \pi a^3 \sigma$ celokupna masa lopte.

Prema tome, i *masivna homogena lopta privlači spoljačnu materijalnu tačku kao da je njena celokupna masa smeštena u centru lopte.*

Međutim, kad se traži Njutnovo privlačenje materijalne tačke koja se nalazi unutra u lopti u tački P $(0 < z < a)$ rastavićemo određivanje integrala (4), pošto ρ nije konstantno već se menja od 0 do a, na dva dela — na integraciju od 0 do $z-\varepsilon$ i na integraciju od $z+\varepsilon$ do a, pri čemu je ε proizvoljno mali pozitivni broj. Tada je za sve vrednosti $\rho < z-\varepsilon$ sigurno $|z-\rho| = z-\rho$ pa se za taj deo integrala (4) dobiva opet vrednost (5).

Sa druge strane za $\rho > z+\varepsilon$ biće $|z-\rho| = \rho - z$ i integral (4) se svodi na nulu. Prema tome, biće sad

$$Z(\varepsilon) = -\frac{k^2}{z^2} 4\pi\sigma \int_0^{z-\varepsilon} \rho^2 d\rho = -\frac{k^2}{z^2} \frac{4\pi}{3} (z-\varepsilon)^3 \sigma,$$

što za $\varepsilon \to 0$ daje

$$Z = -\frac{k^2}{z^2} \frac{4}{3} \pi z^3 \sigma = -\frac{k^2 m_2}{z^2}, \tag{7}$$

gde je $m_2 = \frac{4}{3} \pi z^3 \sigma$ masa lopte poluprečnika z.

To znači, da *na neku unutrašnju materijalnu tačku homogene lopte opet dejstvuje sila iz centra lopte, ali ovoga puta kao da je u njoj koncentrisana masa samo one unutrašnje lopte koja ne obuhvata datu materijalnu tačku.*

Kad je masa celokupne homogene lopte poluprečnika a, može se masa m_2 lopte poluprečnika $z < a$ izraziti obrascem

$$m_2 = \frac{z^3}{a^3} m_1,$$

pa će Njutnova sila privlačenja unutrašnje tačke homogene lopte biti

$$Z = -\frac{k^2}{a^3} m_1 z = \lambda z, \tag{8}$$

ako se stavi $\lambda = -\frac{k^2}{a^3} m_1$. Kako je $\lambda = \text{const.}$, vidi se da je *privlačenje homogene lopte u unutrašnjoj tački proporcionalno rastojanju tačke od centra lopte.*

2. Sfera dejstva

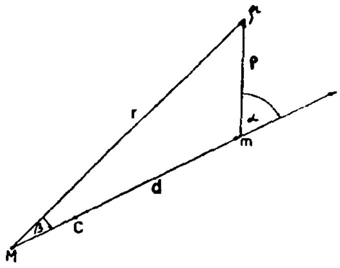
Posmatrajmo sistem od tri tela, čije su mase M, m i μ, pri čemu je $M > m \gg \mu$ a koja su u onoj ravni koju osnovna tela M i m određuju kao Laplasovu invarijabilnu ravan (kao u slučaju ravanskog asteroidnog problema).

Kao primer mogao bi poslužiti sistem Sunce, Zemlja i neki Zemljin veštački satelit (sl. 40). Pri tome osnovna tela M i m ostaju na stalnom rastojanju $\overline{Mm} = d$ $(\overrightarrow{Mm} = \boldsymbol{d})$.

Na kretanje tela μ (veštačkog satelita) u odnosu na telo m (Zemlju) dejstvuje, onda, *aktivna gravitaciona sila* $\boldsymbol{F}_m$ tela m

$$\boldsymbol{F}_m = -k^2 \frac{m\mu}{\rho^3} \boldsymbol{\rho}, \tag{9}$$

i kao *poremećajna sila* $\boldsymbol{P}_m$: gravitaciono privlačenje $\boldsymbol{F}_M$ tela μ od strane tela M (Sunca) i centrifugalna sila $\boldsymbol{G}$ koja dejstvuje na μ usled obrtanja sistema oko centra mase C. Inače centar mase ovog sistema se podudara sa centrom mase osnovnih tela M i m [zbog malosti mase μ. To nam, onda, prema ovde, na sl. 37, uvedenim oznakama, daje



sl. 40

$$\boldsymbol{P}_m = -k^2 \frac{M\mu}{r^3} \boldsymbol{r} + k^2 \frac{M\mu}{d^3} (\boldsymbol{r} - \boldsymbol{\rho}) = -k^2 M\mu \left[\frac{\boldsymbol{r}}{r^3} - \frac{\boldsymbol{d}}{d^3}\right]. \tag{10}$$

Da je vrednost pomenute centrifugalne sile zaista određena obrascem

$$\boldsymbol{G} = k^2 \frac{M\mu}{d^3} (\boldsymbol{r} - \boldsymbol{\rho}), \tag{11}$$

može se pokazati na ovaj način.

Očigledno je da se gravitaciona sila kojom masa M privlači sistem tela m i μ uravnotežava centrifugalnom silom koja dejstvuje na ta dva tela usled njihove zajedničke rotacije oko C.

To znači mora biti

$$-k^2 \frac{(m+\mu) M}{d^3} (\boldsymbol{r} - \boldsymbol{\rho}) + (m+\mu) n^2 \cdot \overrightarrow{Cm} = 0, \tag{12}$$

gde je uzeto da se centar mase tela m i μ, s obzirom na neznatnu veličinu mase μ prema m, ne razlikuje od centra mase samog tela m i gde je n srednja ugaona brzina.

Međutim, zbog nepromenljivosti rastojanja $\overline{Mm} = d$ između tela M i m, centrifugalna sila koja dejstvuje na m, usled rotacije sistema, mora, i za sebe, biti jednaka po veličini a suprotna po smeru gravitacionoj sili kojom masa M privlači masu m, tj.

$$mn^2 \cdot \overrightarrow{Cm} = k^2 \frac{Mm}{d^3} (\boldsymbol{r} - \boldsymbol{\rho}).$$

Kad se to uzme u obzir i unese u (12) dobiće se (11) što je i trebalo pokazati.

Prema tome, vidi se da je centrifugalna sila G jednaka sili kojom bi telo M privlačilo telo μ u položaju m.

Na sličan način se zaključuje za slučaj kretanja tela μ u odnosu na telo M, da na naše telo μ dejstvuje, prvo, aktivna sila privlačenja od tela M

$$\boldsymbol{F}_M = -k^2 \frac{M\mu}{r^3}\boldsymbol{r}, \tag{13}$$

a zatim i poremećajna sila, određena i ovde slično kao i u prethodnom slučaju relacijom

$$\boldsymbol{P}_M = -k^2 m\mu \left[\frac{\boldsymbol{\rho}}{\rho^3} + \frac{\boldsymbol{d}}{d^3}\right]. \tag{14}$$

Sfera dejstva (tačnije *oblast dejstva*) ili *gravitaciona sfera* nekog nebeskog tela definiše se uvek u odnosu na neko drugo nebesko telo i to obično veće od uočenog tela. Tada se pod sferom dejstva razume ona oblast u kojoj gragravitaciona sila uočenog nebeskog tela prevazilazi poremećajnu silu onog drugog nebeskog tela. Tako je, na pr., za telo m u odnosu na telo M to oblast, gde je

$$P_m < F_m, \quad \text{odn.} \quad \frac{P_m}{F_m} < 1,$$

ako je $P_m = |\boldsymbol{P}_m|$, a $F_m = |\boldsymbol{F}_m|$. Oblast dejstva tela M u odnosu na telo m biće određena relacijama

$$P_M < F_M, \quad \text{odn.} \quad \frac{P_M}{F_M} < 1,$$

gde je sad $P_M = |\boldsymbol{P}_M|$ i $F_M = |\boldsymbol{F}_M|$.

Prema tome, na granici oblasti dejstva tela m i M mora biti

$$\frac{P_m}{F_m} = \frac{P_M}{P_M},$$

odn. što je podesnije za računanje

$$\frac{P_m^2}{F_m^2} = \frac{P_M^2}{F_M^2}, \tag{15}$$

i to određuje jednačinu granične površi između obe oblasti dejstva.

Da bismo ovu uslovnu relaciju napisali eksplicitno, jer ona nam daje vezu između r, $\rho = |\boldsymbol{\rho}|$, d, m i M, treba, prvo, uprostiti izraze za poremećajne sile.

Pri tome je

$$\left[\frac{\boldsymbol{r}}{r^3} - \frac{\boldsymbol{d}}{d^3}\right]^2 = \frac{1}{d^4} + \frac{1}{r^4} - \frac{2\cos\beta}{d^2 r^2},$$

jer je $\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{d} = rd\cos\beta$ (sl. 40). Sa druge strane biće

$$\left[\frac{\boldsymbol{\rho}}{\rho} + \frac{\boldsymbol{d}}{d^3}\right]^2 = \frac{1}{d^4} + \frac{1}{\rho^4} + \frac{2\cos\alpha}{d^2 \rho^2},$$

jer je $\boldsymbol{\rho}\cdot\boldsymbol{d} = \rho\, d\cos\alpha$.

Ako se ovo unese u (15) i skrati što se može skratiti, dobiće se

$$\rho^4 \frac{M^2}{m^2}\left[\frac{1}{d^3}+\frac{1}{r^4}-\frac{2\cos\beta}{d^2\rho^2}\right]=r^4\frac{m^2}{M^2}\left[\frac{1}{d^4}+\frac{1}{\rho^4}+ +\frac{2\cos\alpha}{d^2\rho^2}\right], \tag{16}$$

što, kad se uvede razmera masa m i M, tj. $\frac{m}{M}=\nu$, daje

$$\rho^4\left(\frac{1}{d^4}+\frac{1}{r^4}-\frac{2\cos\beta}{d^2 r^2}\right)=r^4\nu^4\left(\frac{1}{d^4}+\frac{1}{\rho^4}+\frac{2\cos\alpha}{d^2\rho^2}\right). \tag{17}$$

Za odnos masa Zemlja-Sunce biće $\nu=\frac{1}{333\,000}\approx 0{,}000003$ a za Mesec--Zemlja $\nu=\frac{1}{81{,}45}\approx 0{,}0123$.

Međutim, kako je ρ znatno manje od d, tj. udaljene tela μ od tela m mnogo manje od rastojanja dva osnovna tela m *i* M, što je po pravilu slučaj kod večtačkih satelita, biće razmera $\Delta=\frac{\rho}{d}$ mala po veličini. Stoga je korisno uvesti je u račun, jer se svi njeni stepeni više od prvog mogu u podesnom trenutku zanemariti.

Prema tome, može se napisati

$$\frac{1}{d^4}+\frac{1}{\rho^4}-\frac{2\cos\alpha}{d^2\rho^2}=\frac{1}{\rho^4}(1-2\,\Delta^2\cos\alpha+\Delta^4). \tag{18}$$

Osim toga, da se oslobodimo dva ugla α i β i račun svedemo samo na jedan, napr. α, uzećemo u obzir (sl. 40) da se moža napisati

$$\frac{2\cos\beta}{d^2 r^2}=\frac{2r\cos\beta}{d^2 r^3}=2\,\frac{d+\rho\cos\alpha}{d^2 r^3}=2\,\frac{1+\Delta\cos\alpha}{dr^3}. \tag{19}$$

Sa druge strane primenom kosinusne teoreme dobiva se

$$r^2=d^2+\rho^2+2\,d\rho\cos\alpha=d^2(1+2\,\Delta\cos\alpha+\Delta^2). \tag{20}$$

Odavde se, onda, razvijanjem u red po stepenima od Δ dobiva

$$\frac{1}{r^3}=r^{-3}=d^{-3}(1+2\Delta\cos\alpha+\Delta^2)^{-\frac{3}{2}}$$

$$=d^{-3}\left[1-3\,\Delta\cos\alpha+\frac{3}{2}\,\Delta^2(5\cos^2\alpha-1)-\cdots\right];$$

$$\frac{1}{r^4}=r^{-4}=d^{-4}(1+2\,\Delta\cos\alpha+\Delta^2)^{-2}$$

$$=d^{-4}[1-4\,\Delta\cos\alpha+2\,\Delta^2(6\cos^2\alpha-1)-\cdots].$$

Da bismo sve ovo uprostili i došli do nekog preglednog obrasca izvešćemo još neke transformacije. Prvo, leva strana jednačine (17) može se s obzirom na (19) i (20) napisati

$$\frac{\rho^4}{d^4}\left[1+\frac{d^4}{r^4}-2\,\frac{d^3}{r^3}(1+\Delta\cos\alpha)\right]=$$

$$=\Delta^4[1+(1+2\,\Delta\cos\alpha+\Delta^2)^{-2}-$$

$$-2\,(1++\Delta\cos\alpha)(1+2\,\Delta\cos\alpha+\Delta^2)^{-3/2}].$$

Kad se izraz u uglastoj zagradi razvije u red po stepenima od Δ, dobiće se

$$\Delta^4[(1+3\cos^2\alpha)\,\Delta^2+(\cdots)\,\Delta^3+\cdots],$$

odnosno

$$\Delta^6[1+3\cos^2\alpha+(\cdots)\,\Delta+\cdots].$$

Ako se sad u uglastoj zagradi zanemare svi članovi sa Δ, koji su mali u poređenju sa $1+3\cos^2\alpha$, dobiće se na levoj strani

$$\Delta^6(1+3\cos^2\alpha).$$

Izraz

$$r^4\nu^4\left(\frac{1}{d^4}+\frac{1}{\rho^4}+\frac{2\cos\alpha}{d^2\rho^2}\right)=\frac{r^4\nu^4}{\rho^4}(1+2\,\Delta^2\cos\alpha+\Delta^4),$$

pak na desnoj strani od (17) s obzirom na (18), kad se opet zanemare članovi sa Δ, postaje $\frac{r^4\nu^4}{\rho^4}$, odn. pošto je po pretpostavci $r\approx d$, taj izraz se može izjednačiti sa

$$\frac{d^4}{\rho^4}\,\nu^4=\frac{\nu^4}{\Delta^4}.$$

Kad se sve to unese u (17) dobiće se

$$\Delta^6(1+3\cos^2\alpha)=\frac{\nu^4}{\Delta^4},\quad \text{odn.}\quad \Delta=\frac{\nu^{2/5}}{(1+3\cos^2\alpha)^{1/10}}.$$

Na kraju, kad se sve vrednosti unesu eksplicitno, imamo

$$\rho=d\sqrt[5]{\left(\frac{m}{M}\right)^2}\,(1+3\cos^2\alpha)^{-0,1}. \tag{21}$$

Jasno je da površ određena i polarnim koordinatama ρ i α prethodnom jednačinom nije sfera. Maksimalna vrednost od $1+3\cos^2\alpha$ je 4 i to sa $\alpha=0$ i $\alpha=\pi$, pa je tada

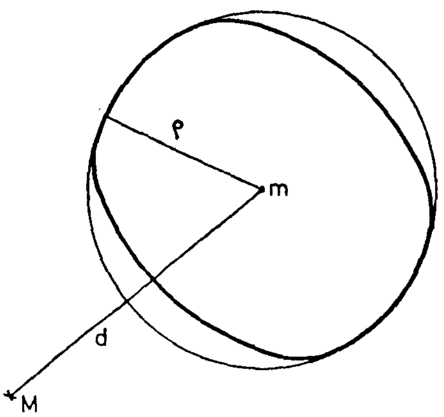
$$4^{-0,1}=0{,}8705.$$

Minimalna pak vrednost od $1+3\cos^2\alpha$ je 1 i to za $\alpha=\frac{\pi}{2}$ i $\alpha=\frac{3\pi}{2}$, pa je onda

$$1^{-0,1}=1.$$

Prema tome, površ određena jednačinom (21) je spoljoštena sfera (*Laplasova sfera dejstva*), ali je obrtna površ. Njeno suženje na pravcu *Mm* iznosi oko 13% od poluprečnika, pa kako se smatra da to nije veliko odstupanje obično se računa da je ta površ približno sfera i da njen poluprečnik iznosi

$$\rho = d\sqrt[5]{\left(\frac{m}{M}\right)^2}. \tag{22}$$



. 41

Presek te prave površi sa ravni M, m, μ pokazuje slika (41) jače izvučenom linijom.

Poluprečnik sfere dejstva Zemlje u odnosu na Sunce izračunat iz obrasca (22), kad se uzme za rastojanje Sunce-Zemlja (*astronomska jedinica AU*) $149{,}5 \cdot 10^6$ km daje 923 000 km. Poluprečnik sfere dejstva Meseca prema Zemlji, izračunat iz (22) za srednje rastojanje jednako 384 400 km Meseca od Zemlje, iznosi 66 000 km. Iz ovih izlaganja se vidi da se poluprečnik ove sfere dejstva nalazi u izvesnim granicama, jer i tako nije reč o pravoj sferi. Ovde ćemo stoga zbog aktuelnosti u savremenim kosmičkim istraživaniima navesti tablicu najmanjih i najvećih vrednosti tih poluprečnika *izraženih u tzv. astronomskim jedinicama* i to za nekoliko planeta u odnosu na Sunce i Mesec u odnosu na Zemlju prema Dubošinu

	ρ_{min}	ρ_{max}
Venera — Sunce	0,00409	0,00415
Zemlja — Sunce	0,00610	0,00631
Mars — Sunce	0,00350	0,00422
Mesec — Zemlja	0,00042	0,00047

Odavde se odmah vidi da poluprečnik sfere dejstva Zemlje u odnosu na Sunce leži između 912 000 i 942 000 km, da poluprečnik sfere dejstva Meseca u odnosu na Zemlju leži između 63 000 i 70 000 km.

X KOSMIČKE BRZINE

U savremenim kosmičkim istraživanjima se pod pojmom kosmičke brzine razume:

1) Brzina obletanja oko Zemlje po kružnoj putanji, tzv. *kružna brzina*, poznata i pod imenom *prve kosmičke brzine*

2) Brzina kojom treba izbaciti neko telo da bi se ono otrglo od Zemlje, oslobodilo od njene gravitacije, tzv. *brzina oslobođavanja* ili *karakteristična brzina*, poznata i pod imenom *druga kosmička* ili *parabolična brzina.*

3) Brzina kojom treba izbaciti neko telo sa Zemlje da bi se otrglo ne samo od Zemlje već i od Sunca i otišlo u našu Galaksiju. To je *treća kosmička* ili *hiperbolična brzina.*

Nije potrebno posebno naglašavati da sve ovo važi i za brzine u odnosu na druge planete kao polazna tela pa i na druga nebeska tela uopšte.

Primera radi pokazaćemo određivanje potrebnih relacija za slučaj, kad je Zemlja polazno telo, iako se to, naravno, može pokazati i za svako drugo telo.

Ako se masa tog centralnog tela, napr., Zemlje, obeleži sa M, a masa tela, čije se kretanje u odnosu na Zemlju posmatra, obeleži sa m, onda je Njutnova sila F kojom telo M privlači telo m određena izrazom

$$\boldsymbol{F} = -k^2 \frac{Mm}{\rho^3} \rho, \tag{1}$$

gde ρ obeležava vektor položaja tela m prema telu M, tj. gde je $\rho = \overrightarrow{Mm}$. Iz relacije (1), s obzirom na drugi Njutnov zakon, vidi se da je veličina ubrzanje w koje izaziva telo M svojim privlačenjem tela m određena sa

$$w = \frac{k^2 M}{\rho^2} = \frac{\lambda}{\rho^2}, \tag{2}$$

gde je, kao i ranije, $\lambda = k^2 M$, karakteristična gravitaciona konstanta tela M.

Neka je M masa Zemlje, čiji je poluprečnik $R = 6\,370$ km, tada će na površi Zemlje (odn. nedaleko od nje) biti

$$\frac{\lambda}{R^2} = \frac{k^2 M}{R^2} = g, \tag{3}$$

gde je g *ubrzanje Zemljine teže* na površi Zemlje koja se ovde smatra približno loptom.

Prva kosmička brzina. — Do kružne brzine se može doći ovakvim razmišljanjem. Na telo m koje se kreće brzinom veličine v po krugu poluprečnika ρ dejstvuje centrifugalna sila F_C, čija je veličina određena obrascem

$$F_C=\frac{mv^2}{\rho}. \tag{4}$$

Ako takvo telo m obilazi po krugu oko Zemlje, ali u njenoj blizini, tako da se može smatrati da je poluprečnik putanje dovoljno približno jednak poluprečniku Zemlje R, biće tada

$$F_C=m\frac{v_{01}^2}{R}, \tag{5}$$

ako se odnosna brzina kruženja obeleži sa v_{01}.

Na telo m pri tome dejstvuje i Zemljina teža i telo ima težinu

$$F_G=mg. \tag{6}$$

Kako pri kruženju oko Zemlje telo m ostaje stalno na istom rastojanju od Zemljinog centra moraju se centrifugalna sila i Zemljina teža uravnotežavati i biti jednake po veličini, a inače su suprotnih smerova, tj. mora biti

$$F_C=F_G,$$

što, posle skraćivanja sa m, s obzirom na (5) i (6) daje

$$\frac{v_{01}^2}{R}=g \Rightarrow v_{01}^2=gR=\frac{k^2M}{R},$$

odnosno

$$v_{01}=\sqrt{gR}=\sqrt{\frac{k^2M}{R}}=\sqrt{\frac{\lambda}{R}}. \tag{7}$$

Na taj način je veličina prve kosmičke brzine određena ovim obrascem.

Dalje, ako je $\dot{\theta}_0$ — ugaona brzina kruženja tela m biće

$$v_{01}=R\dot{\theta}_0,$$

pa se, s obzirom na (7), može napisati

$$R\dot{\theta}_0=\sqrt{\frac{k^2M}{R}},$$

odnosno

$$\dot{\theta}_0=\sqrt{\frac{k^2M}{R^3}}. \tag{8}$$

Pitanje znaka ispred korena, ako je to potrebno, može se utvrditi iz samih uslova zadataka i smera obilaženja.

Ostaje nam još pitanje određivanja kružne brzine na nekom proizvoljnom rastojanju ρ od centra Zemlje. Ako se ubrzanje Zemljine teže na takvom rastojanju obeleži sa γ, ono se može odrediti na osnovu Njutnovog zakona, po kome se gravitacione sile (pa i gravitaciona ubrzanja) odnose obrnuto kvadratima rastojanja, tj. biće

$$\frac{\gamma}{g}=\frac{R^2}{\rho^2} \Rightarrow \gamma=\frac{gR^2}{\rho^2}. \tag{9}$$

Posle toga samo ponavljanjem prethodnog razmišljanja za kružnu brzinu na rastojanju ρ, dobivamo

$$v_{01} = \sqrt{\gamma\rho} = \sqrt{\frac{\lambda}{\rho}}. \tag{10}$$

Druga kosmička brzina. — Da bismo odredili drugu kosmičku brzinu v_{02} po veličini, postavimo prvo pitanje do koje se visine H nad Zemljom (inače se isto tako postavlja pitanje i za druga nebeska tela) dospeti telo izbačeno početnom brzinom v_0 vertikalno naviše (vertikalni hitac) Ovo pitanje se postavlja i u nastavi fizike u srednjoj školi, ali samo za male visine, *kad se može smatrati da je ubrzanje Zemljine teže stalno.*

Ovde se postupa na ovaj način. Znamo da u polju gravitacione sile postoji integral energije (III), koji kaže da je promena kinetičke energije jednaka radu sile koja dejstvuje na odnosnom pomeranju, tj. da važi

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = U, \tag{11}$$

ako je v_0 brzina izbacivanja, v dostignuta brzina, a U obavljeni rad. Sila X, koja dejstvuje na izbačeno telo, iznosi na geocentralnom rastojanju x

$$X = -m\gamma = -m\frac{gR^2}{x^2}. \tag{12}$$

Elementarni rad sile X biće onda

$$Xdx = -mgR^2\frac{dx}{x^2}.$$

Ukupan rad U na putu dužine H od površi Zemlje, tj. od R do $\rho\,(H = \rho - R)$ biće

$$U = \int_R^\rho Xdx = -mgR^2\int_R^\rho \frac{dx}{x^2} = -mgR^2\left[-\frac{1}{x}\right]_R^\rho = -mgR^2\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{\rho}\right). \tag{13}$$

Pri dostizanju najveće visine H nad Zemljom brzina postaje jednaka nuli $v = 0$, pa s obzirom na (11) i (13) imamo

$$-\frac{mv_0^2}{2} = -mgR^2\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{\rho}\right),$$

odnosno

$$v_0^2 = 2\,gR^2\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{\rho}\right), \tag{14}$$

gde je ovde ρ najveće dostignuto udaljenje računato od centra Zemlje.

I sad, kad se za ρ stavi $R + H$ i sračuna dobiće se

$$v_0^2 = \frac{2\,gHR}{H + R}, \tag{15}$$

kao obrazac, koji određuje potrebnu brzinu izbacivanja v_0 da bi se dostigla visina H nad Zemljom

Ako je, međutim, reč o brzini oslobođavanja, tj. drugoj kosmičkoj, treba zahtevati mogućnost da telo ode u beskonačnost ($\rho \to \infty$), pa se onda iz (14) dobiva za brzinu oslobođavanja v_{02}

$$v_{02}^2 = 2gR, \Rightarrow v_{02} = \sqrt{2gR} = \sqrt{2}\sqrt{gR} = v_{01}\sqrt{2}. \tag{16}$$

To znači, *druga kosmička brzina* (parabolična, karakteristična) *dobiva se od prve kosmičke brzine množenjem* $\sqrt{2}$.

Pitanje određivanja kružne i parabolične brzine je u potpunosti regulisano teorijom ograničenog problema dva tela (IV). Tako je, napr., iz (IV, 39) odmah jasno da će u slučaju parabole, kad je $a = \infty$ biti

$$v_p = \sqrt{\frac{2\lambda}{\rho}}, \tag{17}$$

a to je, onda, parabolična brzina za tačku na geocentralnom rastojanju ρ tj. brzina dovoljna za oslobođavanje izbačenog tela. Za $\rho = R$, dobivamo

$$v_{02} = \sqrt{\frac{2\lambda}{R}} = \sqrt{2gR}.$$

Kružna brzina se iz (III, 39) dobiva, kad se stavi $\rho = a$, jer u kategoriji eliptičnih putanja je i krug, a ρ označava poteg elipse. Tako se za kružnu brzinu ma na kom geocentralnom rastojanju a dobiva

$$v_k = \sqrt{\frac{\lambda}{a}},$$

što za $a = R$ daje obrazac (7).

Brzina oslobođavanja tela izbačenog sa Zemlje iznosi 11, 19 km/s, a naredna tablica će nam prikazati ubrzanje Zemljine teže i brzine v_{01} kruženja na raznim visinama H iznad Zemljine površi.

H/km	γ/ms^{-1}	v_{01}/kms^{-1}
0	9,810	7,91
100	9,489	7,84
200	9,201	7,78
300	8,947	7,73
400	8,679	7,67
500	8,419	7,61
1000	7,321	7,35
2000	5,682	6,90
5000	3,080	5,92
10000	1,484	4,93
100000	0,035	1,94

Treća kosmička brzina. — Do treće kosmičke brzine, odn. do hiperbolične brzine, može se doći narednim razmišljanjem. Pre svega pitanje određivanja treće kosmičke brzine nalazi se donekle u okviru ograničenog problema tri tela (asteroidnog problema).

Neka sad v_{kZ} označava brzinu kruženja Zemlje oko Sunca, a v_{pZ} brzinu oslobođavanja od Sunčeve gravitacije sa putanje oko Zemlje nekog tela koje inače nije u polju Zemljine gravitacije. Tada je, kako znamo

$$v_{kZ} = 29{,}8\ \mathrm{km/s};\quad v_{pZ} = v_{kZ}\sqrt{2} = 42{,}14\ \mathrm{km/s}. \tag{18}$$

Ako za masu Zemlje zadržimo oznaku iz ovog odeljka M, a masu Sunca ovde obeležavamo sa M_1, pri čemu je, kako znamo, $M_1 = 333\,000\,M$, onda će poluprečnik Zemljine sfere dejstva (gravisfere) u odnosu na Sunce biti

$$\rho = d\sqrt[5]{\left(\frac{M}{M_1}\right)^2} \approx 923\,000\,\mathrm{km}, \tag{19}$$

gde je $d = 149{,}5 \cdot 10^6\,\mathrm{km}$ rastojanje Sunce — Zemlja.

Uočimo još i onu brzinu (kao skalarnu vrednost) koju treba dodati brzini kruženja v_{kZ} oko Sunca na nivou Zemljine putanje da bi se dostigla brzina oslobođavanja od Sunca v_{pZ} i obeležimo je v_{oS}, pa će biti

$$v_{oS} = v_{pZ} - v_{kZ} = v_{kZ}(\sqrt{2} - 1) = (42{,}14 - 29{,}8)\,\mathrm{km/s} = 12{,}34\ \mathrm{km/s}. \tag{20}$$

Ovo naravno važi, ako se pretpostavi da se izbacivanje obavlja tačno u pravcu i smeru kretanja uočenog tela, odn. Zemlje oko Sunca, tako da se u potpunosti iskoristi brzina kretanja oko Sunca kao prenosna brzina.

Napišimo zakon energije (III, 15) za Zemlju kao centralno privlačno telo (ovde $m_1 = M$) i skratimo odmah sa masom m projektila — tela koje se izbacuje, pa ćemo dobiti

$$v^2 = \frac{2k^2 M}{\rho} + H,$$

gde je stavljeno $\dfrac{2h}{m} = H$.

Ovaj izraz se može doterati lako na naredni oblik

$$v^2 = \frac{2k^2 M\rho}{\rho^2} + H = 2\gamma\rho + H. \tag{21}$$

U ovom integralu potrebno je sad odrediti vrednost konstante integracije H za određeno mesto i brzinu na tom mestu. Uočićemo mesto na granici sfere dejstva Zemlje, gde je brzina *računata u odnosu* na Zemlju v_{oS}, jer se sve razmatra prema Zemlji, Tako se onda iz (21) može napisati za H

$$H = v_{oS}^2 - 2\gamma\rho. \tag{22}$$

Kad se uzme vrednost za γ iz (9), dobiće se

$$2\gamma\rho = \frac{2gR^2}{\rho} \approx 0{,}876\ \mathrm{km^2/s^2}. \tag{23}$$

Sad se integral (21) može za neku tačku na površi Zemlje ($\rho = R$), ako je njena brzina v_{03}, s obzirom na (22) napisati u obliku

$$v_{03}^2 = \frac{2k^2 M}{R} + v_{06}^2 - 2\gamma\rho.$$

Dalje, pošto je

$$\frac{2\,k^2 MR}{R^2} = 2\,gR = v_{02}^2,$$

gde je v_{02} brzina oslobođavanja od Zemlje, dobiva se

$$v_{03}^2 = v_{02}^2 + v_{oS}^2 - 2\,\gamma\rho, \tag{24}$$

odn. s obzirom na (23)

$$v_{03}^2 = v_{02}^2 + v_{oS}^2 - 0{,}876. \tag{25}$$

Kad se, s obzirom na poznate vrednosti v_{02} i v_{oS}, ova vrednost izračuna, dobiće se za treću kosmičku brzinu

$$v_{03} = 16{,}62\,km/s. \tag{26}$$

Međutim, s obzirom da je ono 0,876 malo u poređenju sa ostalim veličinama u obrascu (25), a pogotovu što se u čitavom toku računanja, obavlja niz raznih aproksimacija, obično se kao obrazac za određivanje treće kosmičke brzine koristi samo

$$v_{03}^2 = v_{02}^2 + v_{oS}^2, \tag{27}$$

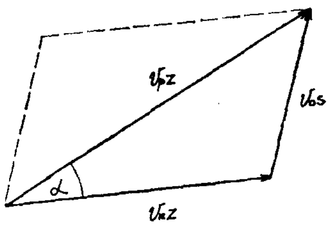
i on za treću kosmičku brzinu daje

$$v_{03} = 16{,}66\,km/s. \tag{28}$$

Ovo pokazuje da ovde drugo decimalno mesto nije pouzdano.

U slučaju da se brzina v_{kZ} kruženja oko Sunca povećava tačno u pravcu i smeru kretanja po putanji oko Sunca, to povećanje iznosi, kako smo naveli, 12,34 km/s. Međutim, u svim drugim slučajevima potrebno povećanje mora biti veće i može se odrediti.

Ako sve brzine uočimo sad kao vektore, onda se sa gledišta mehanike $\mathbf{v}_{kZ}$ — brzina kruženja Zemlje oko Sunca može smatrati kao *prenosna brzina*, $\mathbf{v}_{oS}$ — potrebna promena brzine kruženja da se dostigne brzina oslobođavanja $\mathbf{v}_{pZ}$ od Sunca sa putanje Zemlje — kao *relativna brzina*, a sama brzina $\mathbf{v}_{pZ}$ kao *apsolutna brzina* (sl. 42). Tada se sa slike može napisati



Sl. 42

$$\mathbf{v}_{kZ} + \mathbf{v}_{oS} = \mathbf{v}_{pZ}. \tag{29}$$

Odavde se podizanjem na kvadrat i rešenjem po v_{oS}^2 dobiva

$$v_{oS}^2 = v_{kZ}^2 + v_{pZ}^2 - 2\,v_{kZ}\,v_{pZ}\cos\alpha,$$

gde je α ugao koji obrazuju prenosna i apsolutna brzina, Međttim, pošto je $v_{pZ} = v_{kZ}\sqrt{2}$ prethodni izraz postaje

$$v_{oS}^2 = v_{kZ}^2 (3 - 2\sqrt{2}\cos\alpha),$$

i najzad

$$v_{oS} = v_{kZ}\sqrt{3 - 2\sqrt{2}\cos\alpha}. \tag{30}$$

To pokazuje kako veličina v_{oS} relativne brzine $\mathbf{v}_{oS}$ zavisi od ugla pod kojim se obavlja izbacivanje projektila odn. od smera u kome se obavlja promena brzine po kružnoj putanji. Iz obrasca (30) vidi se da će v_{oS} imati najmanju vrednost za $\alpha = 0$, a to znači, kad je ta brzina kolinearna i istosmerna sa brzinom v_{kZ} kruženja Zemlje, i to

$$(v_{oS})_{\min} = v_{kZ}\sqrt{3 - 2\sqrt{2}} = v_{kZ}(\sqrt{2} - 1),$$

odnosno

$$(v_{oS})_{\min} = 12{,}34 \text{ km/s},$$

što je već utvrđeno.

Prema obrascu (30) najveća vrednost ove promene v_{oS} biće za $\alpha = \pi$, tj. pri povećanju brzine tačno u suprotnom smeru od onoga u kome se Zemlja kreće oko Sunca. Sada će biti

$$(v_{oS})_{\max} = v_{kZ}(\sqrt{2} + 1) = 71{,}94 \text{ km/s}.$$

Uzgred da podvučemo da je v_{03} najmanja potrebna brzina za oslobođenje od Sunčeve gravitacije pri izbacivanju sa Zemlje i da je u tom slučaju putanja izbačenog tela parabola koja dodiruje putanju Zemlje na mestu izbacivanja. Međutim, može se naravno oslobođavanje od Zunčeve gravitacije postići i većim brzinama od v_{03} i onda će putanje biti dodirne hiperbole Zemljine putanje.

XI PRELAZ IZMEĐU KOPLANARNIH KRUŽNIH ORBITA

1. Uvodna razmatranja

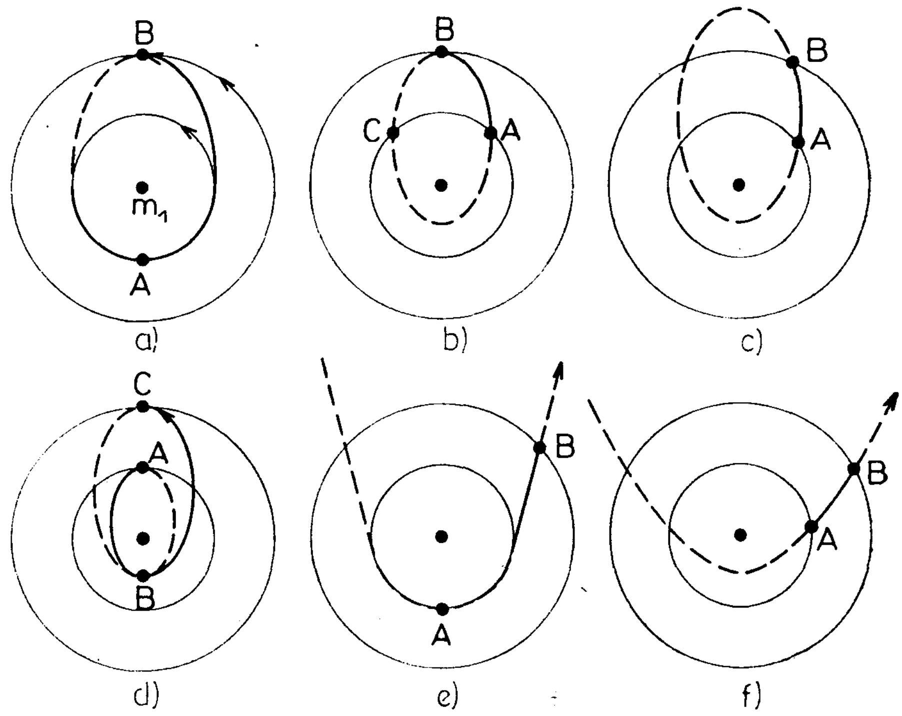
Važna primena problema dva tela u astrodinamici se odnosi na određivanje putanje međuplanetnih preleta, ali i prelaza (transfera) veštačkih satelita sa jedne putanje na drugu na višem ili nižem nivou. Treba imati pred očima da se prelet zamišlja tako da projektil (telo) sa jednog nivoa pređe na drugi nivo, odn. ne da dospe npr. na samu drugu planetu odmah, ako je reč o međuplanetnom preletu, već samo da pređe na nivo njene putanje. Pitanje dolaska na samu određenu drugu planetu zahteva posebno razmatranje.

U čitavoj ovoj stvari mora se voditi računa o tome da savremena tehnika još ne raspolaže sa raketnim motorima koji bi davali stalnu snagu za pogon, jer u tom slučaju bi se letelicama pri ovakvim prelazima moglo upravljati — bila bi moguća navigacija. Tada bi samo pitanje navigacije i optimalnosti uslova pri letu predstavljalo problem. Naprotiv, danas smo upućeni na *bespogonske (slobodne, balističke)* putanje po kojima se tela u uočenom gravitacionom polju kreću po zakonima nebeske mehanike, a moguće su samo ograničene promene brzine impulsnog karaktera (trenutne promene) proizvedene kratkotrajnim uključivanjem u rad reketnih motora. Ove promene mogu menjati intenzitet brzine kao i njen pravac i smer i tako dopuštaju određene manevre sa letelicama. Dugotrajni rad ovakvih motora zasad ne dolazi u obzir.

U prvi mah se ne može stoga uočiti problem preleta u svoj njegovoj složenosti, npr. prelaz sa jedne trajektorije proizvoljnog konusnog oblika na drugu takođe proizvoljnog oblika u istoj ravni ili u nekoj ravni koja obrazuje sa polaznom neki ugao. Prema tome, u prvi mah se *razmatraju samo slučajevi, kad su obe putanje kružne* (ili se bar sa dovoljnom tačnošću može smatrati da su kružne) *i kad su komplanarne i koncentrične*, a to znači kad su u istoj ravni. Ovi uslovi su dovoljno dobro ispunjeni za planete Sunčevog sistema, jer ove imaju male brojne ekscentričnosti i kreću se u Laplasovoj invarijabilnoj ravni Sunčevog sistema. Još nešto se usvaja, a to je da su poremećaji od trećih tela zanemarljivi. Tako su u slučaju prelaza između dve planete Sunčeva gravitacija zanemaruje, a isto tako i kad je reč o veštačkim satelitima Zemlje. Prema tome, uočavamo samo dva tela: Sunce za planete a Zemlju za veštačke satelite i samo telo čiji se transfer posmatra. Pri tome će i pitanje preleta iz oblasti sfere dejstva osnovnog tela u sferu dejstva drugog tela, kad se poremećaji moraju uzimati u obzir, biti odvojeno razmatrano isto tako kao i prelazi između nekomplaniranih putanja.

Trajektorije tela pri ovakvim preletima, pošto se obrazuju slobodno pod dejstvom gravitacionog polja, biće konusni preseci (elipsa, parabola i hiperbola a u degenerativnom slučaju prava linija) ili njihovi delovi. Nekoliko važnih mogućih položaja i oblika prelaznih putanja prikazuje sl. 43, pozajmljena od *R. H. Gizea* (R. H. Giese) [18]. U slučajevima *a*), *b*), *c*), i *d*) imamo posla sa poluelipsom ili lucima elipse, u slučaju *e*) sa lukom parabole a u slučaju *f*) sa lukom hiperbole.

Prvo pitanje na koje ćemo, u vezi sa ovim potražiti odgovor jeste: pod kojim uslovima treba izvesti promenu brzine i postići optimalni efekt takve



Sl. 43

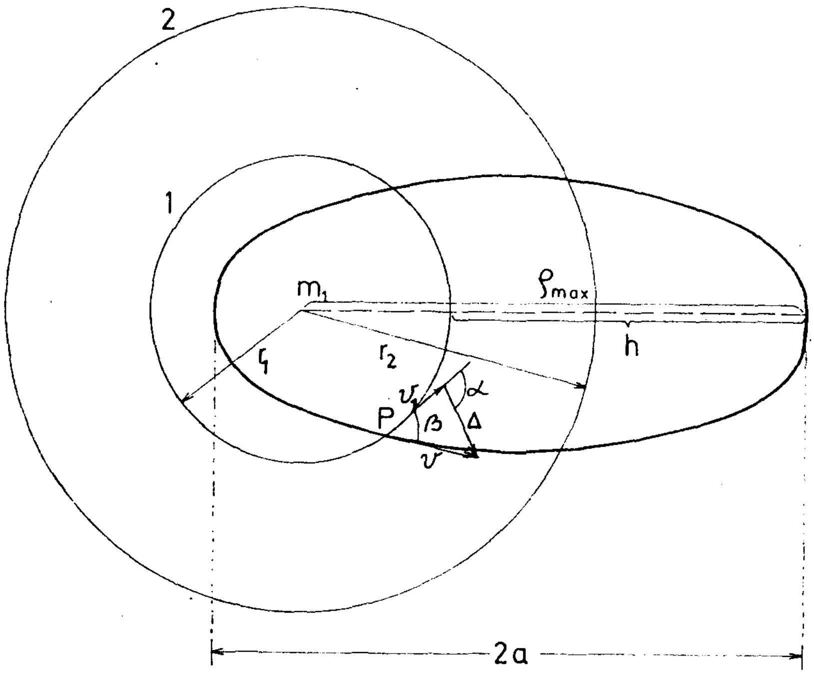
promene. Pri tome je jasno da se podizanje veštačkog satelita Zemlje na viši nivo, odn. prelaz na putanju udaljenije planete, može izvesti samo izvesnim određenim povećanjem brzine, jer se mora proizvesti ekvivalentna kinetička energija koja će obaviti rad u podizanju satelita, odn. udaljavanju od osnovnog tela. To proističe iz činjenice što u gravitacionom polju osnovnog tela važi zakon energije. Kad je reč o spuštanju satelita na niži nivo, odn. prelaz ka planeti koja je bliža Suncu, onda se polazna brzina kruženja satelita, odn. brzina kruženja planete mora nešto smanjiti.

Naravno, ne treba naročito ni naglašavati da sve ovo važi i za druge slične slučajeve u kosmosu a ne samo za Sunce i Zemlju kao osnovna tela.

Dakle, neka poluprečnik polazne kružne putanje 1 (sl. 44) bude $r_1 = 1$, pa kružna brzina $\mathbf{v}_1$ po tom krugu ima intenzitet

$$v_1 = \sqrt{\frac{k^2 m_1}{r_1}} = \sqrt{\lambda}, \tag{1}$$

gde je m_1 masa centralnog privlačnog tela. Neka masa satelita bude $m_1 = 1$, a Δv_1 promena brzine za koju ćemo kratko pisati samo Δ. Jedinice dužine i mase su podesno normirane.



Sl. 44

Posle promene kružne brzine dobiće se rezultantna brzina v, koja je određen relacijama

$$v^2 = (\vec{v}_1 + \vec{\Delta})^2 = v_2^1 + 2\, v_1\, \Delta \cos\alpha + \Delta^2, \tag{2}$$

$$\sin\beta = \frac{\Delta \sin\alpha}{v}.$$

Pri tome je α ugao koji obrazuje vektori v_1 i Δ a β ugao koji promenjena brzina obrazuie sa početnom kružnom brzinom v_1.

Prema zakonu o održanju energije biće za masu $m = 1$ u gravitacinom polju (III) tela mase m_1 totalna energija

$$E = \mathrm{T} + \Pi = \frac{1}{2}\, v^2 + \frac{k^2 m_1}{\rho} = \frac{1}{2}\, v^2 - \frac{\lambda}{\rho}, \tag{3}$$

kad ρ određuje položaj satelita prema centralnom telu.

Na kružnoj orbiti 1 u tački P biće s obzirom na (1) ta ukupna energija satelita

$$E_1 = \frac{1}{2}\,\lambda - \lambda = -\frac{1}{2}\,\lambda, \tag{4}$$

zbog $\rho = r_1 = 1$. Posle promene brzine v_1 za Δ dobićemo za satelit još uvek u tački P

$$E' = \frac{1}{2} v^2 - \lambda. \tag{5}$$

Međutim, kako se uopšte prema (III, 39) za satelit u položaju određenom potegom ρ može napisati

$$v^2 = \lambda \left(\frac{2}{\rho} - \frac{1}{a} \right), \tag{6}$$

gde je a velika poluosa putanje, kad je promenjena rezultantna brzina $v < v_1 \sqrt{2}$, tj. kad je od kružne prešla u eliptičnu brzinu. Za $\rho = r_1 = 1$, satelit je još u tački P na krugu 1, ali sa promenjenom brzinom, dobiće se

$$E' = -\frac{\lambda}{2a}. \tag{7}$$

Iz (5) i (7) proističe

$$-\frac{\lambda}{2a} = \frac{1}{2} v^2 - \lambda \Rightarrow \frac{\lambda}{a} = 2\lambda - v^2, \tag{8}$$

i kad se uzme u obzir još (2) dobiva se

$$\frac{\lambda}{a} = 2\lambda - (v_1^2 + 2 v_1 \Delta \cos\alpha + \Delta^2). \tag{9}$$

Konstanta površine je, kako znamo,

$$\begin{aligned} A &= |\rho \times v| = \rho v \sin\left(\frac{\pi}{2} - \beta \right) = \rho v \cos\beta = \rho v \sqrt{1 - \frac{\Delta^2 \sin^2\alpha}{v^2}} \\ &= \rho \sqrt{v^2 - \Delta^2 \sin^2\alpha} = \rho \sqrt{v_1^2 + 2 v_1 \Delta \cos\alpha + \Delta^2 - \Delta^2 \sin^2\alpha} \\ &= \rho \sqrt{v_1^2 + 2 v_1 \Delta \cos\alpha + \Delta^2 \cos^2\alpha} = \rho (v_1 + \Delta \cos\alpha), \end{aligned}$$

što u tački P putanje ovde ($\rho = 1$) daje

$$A = v_1 + \Delta \cos\alpha. \tag{10}$$

Ekscentričnost e ove elipsne putanje može se izračunati, kad se pođe od poznate veze (III, 49)

$$A^2 = \lambda a (1 - e^2),$$

odakle se, s obzirom na (10) dobiva

$$1 - e^2 = \frac{A^2}{\lambda a},$$

i kad se za A i a unesu vrednosti (9) i (10)

$$\begin{aligned} e^2 - 1 &= -\frac{(v_1 + \Delta \cos\alpha)^2}{\lambda a}, \\ e &= \left[1 - \frac{(v_1 + \Delta \cos\alpha)^2}{\lambda a} \right]^{1/2}. \end{aligned} \tag{11}$$

Sad se može za apocentralni (najveći) poteg elipse napisati

$$\rho_{\max}=a(1+e)=a\left\{1+\left[1-\frac{(v_1+\Delta\cos\alpha)^2}{\lambda a}\right]^{1/2}\right\},$$

a za najveću visinu h (sl. 44) nad nivoom kruga 1

$$\begin{aligned} h=\rho_{\max}-1&=\frac{\lambda}{2\lambda-v^2}\left\{1+\left[1-\frac{(v_1+\Delta\cos\alpha)^2}{\alpha a}\right]^{1/2}\right\}-1\\ &=\frac{\lambda}{2\lambda-v^2}\left\{1+\left[1-\frac{2\lambda-v^2}{\lambda^2}(v_1+\Delta\cos\alpha)^2\right]^{1/2}\right\}-1 \qquad 12)\\ &=\frac{\lambda}{\lambda-2\sqrt{\lambda}\,\Delta\cos\alpha-\Delta^2}\left\{1+\left[1-\frac{\lambda-2\sqrt{\lambda}\,\Delta\cos\alpha-\Delta^2}{\lambda^2}(\lambda+\right.\right.\\ &\qquad\left.\left.+2\sqrt{\lambda}\,\Delta\cos\alpha+\Delta^2\cos^2\alpha)\right]^{1/2}\right\}-1. \end{aligned}$$

Da bismo u toku daljeg rada bili u stanju da savladamo računske prepreke, koje su matematički obične, ali inače vrlo složene i da bismo mogli dati odgovor kako dostignuta visina h iznad polazne putanje 1 zavisi od ugla α, odn. da li će dospeti do putanje 2, stavićemo uslovno $v_1=1$. To znači da je prema (1)

$$v_1=\sqrt{\lambda}=1.$$

Stavljanjem $r_1=1$, $m=1$ i $\lambda=1$, odn. $v_1=1$ mi normiramo izvesne jedinice i zanemarujemo trenutno, u interesu računskih olakšica, mehaničke (fizičke) dimenzije ovih veličina, između kojih postoji ova dimenzijska jednačina

$$[\lambda]=[r_1]\,[v_1^2].$$

Naravno, brzina npr. ne može biti nikad jednaka dužini osim čisto brojno, i ovakvim se zanemarivanjem dimenzije njihovim uključivanjem u samu oznaku veličine može doći do dimenzijskih grešaka, pa treba biti oprezan. Ipak smo se ovde, da bismo obavili posao, poslužili *Rupeovim* (Rupe, 32) postupkom za ovo izračunavanje.

Ako se, dakle, u (12) unese $\lambda=1$, dobiće se posle kraćeg pažljivog računanja

$$\begin{aligned} h&=\frac{1}{1-2\Delta\cos\alpha-\Delta^2}\{1+\Delta[(1+\Delta\cos\alpha+\cos^2\alpha)^2+\sin^2\alpha\cos^2\alpha]^{1/2}\}-1\\ &=\Delta\,\frac{\Delta+2\cos\alpha+[(1+\Delta\cos\alpha+\cos^2\alpha)^2+\sin^2\alpha\cos^2\alpha]^{1/2}}{1-2\Delta\cos\alpha-\Delta^2}, \qquad 13) \end{aligned}$$

Ako se sad h smatra kao funkcija od α pri datom Δ i to preko $\sin^2\alpha$, $\cos\alpha$ i $\cos^2\alpha$, tj. uoči $h=h(\sin^2\alpha,\cos\alpha,\cos^2\alpha)$ može se napisati

$$\frac{dh}{d\alpha}=\frac{\partial h}{\partial\sin^2\alpha}2\sin\alpha\cos\alpha-\frac{\partial h}{\partial\cos\alpha}\sin\alpha-\frac{\partial h}{\partial\cos^2\alpha}2\cos\alpha\sin\alpha,$$

što očigledno pokazuje da se ekstremna (najveća i najmanja) vrednost za h dobiva, kad je $\sin\alpha=0$, odn. kad je $\alpha=0$ i $\alpha=\pi$.

Pri tome je za $\alpha=0$

$$h_{(\alpha=0)}=\frac{2\Delta(\Delta+2)}{1-2\Delta-\Delta^2}, \tag{14}$$

a za $\alpha=\pi$

$$h_{(\alpha=\pi)}=0,$$

pa se očigledno za $\alpha=0$ postiže maksimalna visina h_{max} što se i geometrijski vidi sa slike 44.

Drugim rečima, za dostizanje optimalne visine pri datom $\vec{\Delta}$, treba taj vektor da bude kolinearan vektoru $\vec{\Delta}_1$ kružne brzine po polaznoj putanji.

Prema tome, za prelaz sa kruga 1, čiji je poluprečnik $r_1=1$ na krug 2 (sl. 44) čiji je poluprečnik $r_2\,(r_2>r_1)$ potrebna je takva promena brzine (takav impuls) Δ_1, pri $\alpha=0$, da bude

$$h=r_2-1=\frac{2\Delta_1(\Delta_1+2)}{1-2\Delta-\Delta^2}. \tag{15}$$

Odatle se dobiva brojna relacija

$$\Delta_1=\left(\frac{1+h}{1+\dfrac{h}{2}}\right)^{1/2}-1, \tag{16}$$

gde samo ovo jedno rešenje kvadratne jednačine (15) po Δ_1 dolazi u obzir, pošto je Δ_1 po svom značenju intenzitet vektora Δ_1.

Na sasvim analogan način se postupa i pri prelazu na putanju na nižem nivou $(r_2<r_1)$, bližu osnovnom telu m_1, samo što se tada kružna brzina mora smanjiti.

Iz (16) se odmah dobiva kolika promena brzine, u slučaju $\alpha=0$, treba da se postigne pa da naše telo dostigne $h\to\infty$. Tada je brojno

$$\Delta_1=\lim_{h\to\infty}\left[\left(\frac{\dfrac{1}{h}+1}{\dfrac{1}{h}+\dfrac{1}{2}}\right)^{1/2}-1\right]=\sqrt{2}-1, \tag{17}$$

pa je, prema tome to potrebno povećanje brzine izraženo jediničnom kružnom brzinom jednako $\sqrt{2}-1$, a sama tražena brzina oslobođavanja brojno jednaka $\sqrt{2}$, što odgovara već poznatom rezultatu.

Ako se radi poređenja uoči vertikalna promena brzine $\left(\alpha=\frac{\pi}{2}\right)$ prema pravcu i smeru kruženja, onda ćemo dobiti iz (13)

$$h=\frac{\Delta'}{1-\Delta'},$$

ako se sa Δ' obeleži sad potrebna promena brzine. Odavde se izvodi

$$\Delta'=\frac{h}{1+h}.$$

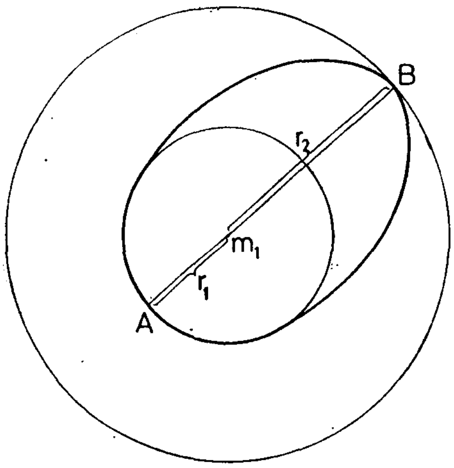
Za dostizanje samo visine $h=0,1$ (što znači za dostizanje visine od 640 km nad Zemljom) dobiće se razmera

$$\frac{\Delta}{\Delta_1}\approx 4, \tag{18}$$

tj. vertikalni impuls je skoro četiri puta veći od horizontalnog.

2. Homanovi preleti

Prema savremenim tehničkim mogućnostima najinteresantniji je tzv. *Homanov* (Hohmann) *prelet* i *Homanova trajektorija* (sl. 43, a). U tom slučaju je prelazna putanja (Homanova trajektorija) elipsa koja spaja dve koplanarne i koncentrične kružne putanje (sl. 45). Ta elipsa ima žižu u osnovnom centralnom telu m_1 (Suncu za planete, Zemlji za veštačke satelite), i ako je prelet sa nižeg na viši nivo, onda ta i takva elipsa *dodiruje* unutrašnji krug u svom pericentru (A), a spoljašnji krug u svom apocentru (B). Prema tome, biće velika poluosa a Homanove elipsne putanje



Sl. 45

$$a=\frac{1}{2}(r_1+r_2), \tag{19}$$

ako su poluprečnici unutrašnjeg i spoljašnjeg kruga r_1 i r_2.

Iz izraza za kvadrat brzine (II, 39) se sad, za proizvoljnu tačku na Homanovoj putanji, dobiva

$$v^2=2\lambda\left(\frac{1}{\rho}-\frac{1}{r_1+r_2}\right), \tag{20}$$

kad se sa ρ obeleži poteg elipsne putanje u odnosu na žižu m_1 kao pol i kad se za a, u poznati izraz za kvadrat brzine, unese vrednost (19) ($\lambda=k^2 m_1$).

Brzina v_1 u pericentru ($\rho=r_1$) biće

$$v_1^2=2\lambda\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_1+r_2}\right), \tag{21}$$

$$=2\frac{\lambda}{r_1}\,\frac{1}{r_1/r_2+1},$$

tj.

$$v_1=\sqrt{\frac{\lambda}{r_1}}\,\sqrt{\frac{2}{r_1/r_2+1}}. \tag{22}$$

Za brzinu u apocentru ($\rho=r_2$) dobiva se na analogan način

$$v_2=\sqrt{\frac{\lambda}{r_2}}\,\sqrt{\frac{2}{1+r_2/r_1}}. \tag{23}$$

Kako je kružna brzina v_{k1} po unutrašnjem krugu

$$v_{k1}=\sqrt{\frac{\lambda}{r_1}}, \tag{24}$$

za prelaz na elipsnu Homanovu putanju biće potrebna promena (i to priraštaj) brzine

$$\Delta v_1 = v_1 - v_{k1}, \tag{25}$$

jer je elipsna brzina v_1 veća od kružne brzine v_{k1}. Prema definiciji Homanove trajektorije, kao optimalne u smislu naših izlaganja u prethodnom odeljku, ova promena mora biti kao vektor tangentna na unutranju putanju i mora biti usmerena u smeru kretanja po kružnoj putanji. Osim toga, pošto je reč o bespogonskim putanjama smatra se da je promena brzine obavljena jednokratnim trenutnim impulsom, nrp. kratkotrajnim radom raketnih motora tako da je trajanje potisnog impulsa zanemarljivo u poređenju sa vremenom preleta po Homanovom putu. Tako se na osnovu (22) i (24) dobiva

$$\Delta v_1 = \sqrt{\frac{\lambda}{r_1}}\left[\sqrt{\frac{2}{r_1/r_2+1}}-1\right]=v_{k1}\left[\sqrt{\frac{2}{r_1/r_2+1}}-1\right]. \tag{26}$$

Međutim, kad naše telo (projektil) dospe do spoljašnje putanje kruga r_2 u tački (2), ona se mora početi vraćati po drugom delu elipse, zato što je sad elipsna putanjska brzina v_2 tela manja od potrebne kružne brzine v_{k2} po spoljašnjoj trajektoriji. To znači da se brzina tela mora ponovo promeniti tako da se promena obavi skoro trenutno u položaju dodira i da promena Δv_2, koja iznosi

$$\Delta v_2 = v_{k2} - v_2, \tag{27}$$

bude tangentna na spoljašnjoj putanji i da je u smeru kretanja po dolaznoj elipsnoj trajektoriji. Kako je

$$v_{k2}=\sqrt{\frac{\lambda}{r_2}}, \tag{28}$$

dobiva se, s obzirom na (23)

$$\Delta v_2 = \sqrt{\frac{\lambda}{r_2}}\left[1-\sqrt{\frac{2}{1+r_2/r_1}}\right]=v_{k2}\left[1-\sqrt{\frac{2}{1+r_2/r_1}}\right]. \tag{29}$$

Za veličinu Δv ukupne promene brzine, tj. za $\Delta v = \Delta v_1 + \Delta v_2$ može se posle kraćeg računa napisati (kad se svede na v_{k1})

$$\Delta v = v_{k1}\left(1-\sqrt{\frac{r_1}{r_2}}\right)\left[\sqrt{\frac{2}{r_1/r_2+1}}\left(1+\sqrt{\frac{r_1}{r_2}}\right)-1\right]. \tag{30}$$

Ovaj izraz pokazuje odmah, ono što je i inače jasno, da kad $r_2 \to r_1$, tj. $\Delta v \to 0$, da, naravno, nije potrebna nikakva promena brzine, ako telo treba da ostane na istoj putanji po kojoj se već kreće. Sa druge strane za $r_2 \to \infty$ (što je praktično približno ostvareno i kad je $r_2 \gg r_1$, pa se r_1/r_2 može zanemariti) iz (30) se dobiva

$$\Delta v_\infty \to v_{k1}(\sqrt{2}-1). \tag{31}$$

Ovde je baš onaj najmanji priraštaj brzine koji se telu po kružnoj putanji poluprečnika r_1 mora dodati da bi se postigla brzina oslobođavanja (vidi X — treća kosmička brzina).

Zanimljivo je da je Δv za razmeru potega $0 < r_1/r_2 < \frac{1}{3,4}$ veće nego ono potrebno za postizanje brzine oslobođavanja. Napr. konkretno za $r_1/r_2 = \frac{1}{4}$ se iz (30) dobiva

$$\Delta v = 0{,}45\, v_{k1},$$

dok je za oslobođavanje potrebno

$$\Delta v_\infty = 0{,}414\, v_{k1}.$$

Ako je dozvoljeno zanemariti onaj kratkotrajni rad raketnih motora, tj. smatrati promenu brzine kao trenutni impuls, onda se (I, 40) može uzeti da je

$$m_p = M - m_k = m_k \left(\frac{M}{m_k} - 1 \right) = m_k \left(e^{v_k/c} - 1 \right), \tag{32}$$

gde je m_p gorivo potrošeno do nekog određenog trenutka a ne do kraja sagorevanja celokupnog goriva, m_k odnosna preostala masa i M celokupna masa na startu.

Kad se utvrdi potrošnja goriva m_p, onda se može utvrditi i potrebna kinetička energija $\frac{1}{2} m_p c^2$ (c je brzina isticanja gasova u mlazu) za izvođenje kosmičkog manevra potrebnog za prelet, odn. za promenu brzine. Pri tome se promena brzine računa od v_{k1} kao početne do v_{k2} kao krajnje, pa je onda, prema obrascu Cjolkovskog

$$v = c \ln \frac{M}{m_k}, \tag{33}$$

jer i ranije izvedeni (I, 13) obrazac u stvari pokazuje tu promenu brzine v samo računatu od brzine 0 do brzine v.

Može se računom utvrditi da će za navedeni manevar biti potrebna i veća potrošnja goriva i veća energija, kad je $\infty > r_2 > 3{,}4\, r_1$, dakle, r_2 konačno, nego što nam treba pri izbacivanju radi oslobođenja od Sunčeve gravitacije i odlaska izvan Sunčevog sistema.

Vreme trajanja preleta τ po Homanovoj putanji, može se dobiti iz Keplerovog obrasca (III, 57) koji daje vreme za opisivanje cele elipsne putanje sa velikom poluosom a u obliku

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{a^3}{\lambda}}. \tag{34}$$

Aho se ovde unese $a = \frac{1}{2}(r_1 + r_2)$ i sa

$$T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{r_1^3}{\lambda}}, \tag{35}$$

obeleži vreme obilaženja po polaznoj kružnoj trajektoriji 1 (jer obrazac 34 naravno važi i za kružnu putanju kao naročiti slučaj elipse), može se najzad napisati

$$\tau = \frac{1}{2} T_1 \sqrt{\left(\frac{1 + r_2/r_1}{2} \right)^3}. \tag{36}$$

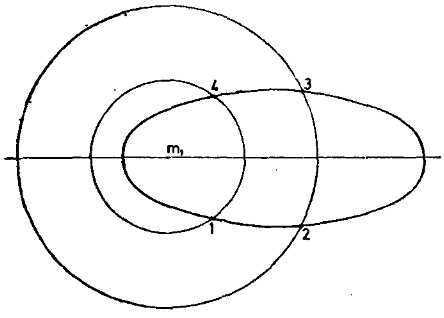
Tako za Zemljinu putanju kao polaznu ($r_1 = 1$ astronomska jedinica $= 149{,}5 \times 10^6$ km) biće $T_1 = 1$ godina, pa se za vreme τ trajanja preleta po Homanu sa Zemlje, odn. tačnije sa njene putanje, do raznih drugih planeta dobiva naredna tablica

planeta	Merkur	Venera	Mars	Jupiter	Saturn	Uran	Neptun	Pluton
τ (godina)	0,29	0,40	0,71	2,73	6,05	16,1	30,6	45,5
r_2/r_1	0,387	0,723	1,524	5,203	9,546	19,2	30,1	39,5

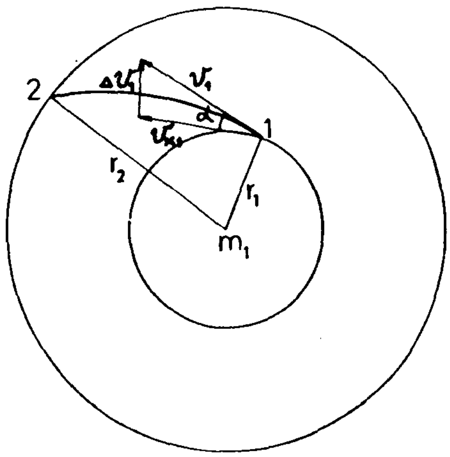
Ono što još treba pomenuti u vezi sa Homanovim preletom to je da su za ostvarenje preleta potrebna samo dva impulsa, da je to *dvoimpulsni prelet*, naravno, kad je reč o bespogonskom preletu.

3. Nehomanovi preleti

Kako su preleti po Homanu između koplanarnih i koncentričnih kružnih orbita dosta spori, jer se viši nivo dostiže u apocentru, a kako znamo po Keplerovom zakonu površina u blizini apocentra kretanje teče sporo, traže se ***brži preleti*** (brži transfer). Obično se ostvarenje takvih bržih preleta traži u putanjama koje nisu poluelipse već neki kraći luk elipse (ili luk parabole odn. hiperbole). Na sl. 46 luci elipse $\overset{\frown}{12}$ i $\overset{\frown}{34}$ predstavljaju takve brže preletne putanje.



Sl. 46



Sl. 47

Ako se pođe od poznatog obrasca (III, 39) za kvadrat brzine (odn. integral energije za telo mase $m = 1$), podseti se da je $\lambda = k^2 m_1$ i uzme u obzir da će žiža preletne elipse opet biti u centralnom telu m_1, onda se sa sl. 47 može napisati brzina v_1 po preletnoj putanji u tački 1

$$v_1^2 = \lambda \left(\frac{2}{r_1} - \frac{1}{a}\right) = \frac{\lambda}{r_1}\left(2 - \frac{r_1}{a}\right),$$

ako su poluprečnici unutrašnje i spoljašnje putanje opet r_1 i r_2. To daje najzad

$$v_1 = \sqrt{\frac{\lambda}{r_1}}\sqrt{2-\frac{r_1}{a}} = v_{k1}\sqrt{2-\frac{r_1}{a}}, \tag{37}$$

gde je a kao i uvek velika poluosa elipsne preletne putanje.

Potrebna promena brzine da se telo (letelica) prevede sa kružne na preletnu (transfernu) putanju biće u vektorskom obliku

$$\Delta \boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_{k1}.$$

Promena brzine se sad mora određivati vektorski, pošto vektori $\boldsymbol{v}_1$ i $\boldsymbol{v}_{k1}$ nisu kolinearni. Osim toga $\Delta \boldsymbol{v}$ ne ispunjava sad nikakve uslove optimalnosti i prema tome ne mora biti u pravcu i smeru tangente na putanju 1.

Iz zakona površina imamo

$$A = |\boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{v}_1| = r_1 v_1 \sin(90^\circ - \alpha) = r_1 v_1 \cos\alpha, \tag{38}$$

gde je α ugao između brzine $\boldsymbol{v}_1$ i kružne brzine $\boldsymbol{v}_{k1}$, i ako se stavi (III, 49)

$$A = \sqrt{\lambda a (1-e^2)},$$

dobiće se s obzirom na (37)

$$\cos\alpha = \frac{\sqrt{\lambda a(1-e^2)}}{r_1 v_1} = \frac{a}{r_1}\sqrt{\frac{\lambda/a\,(1-e^2)}{\lambda/r_1\left(2-\frac{r_1}{a}\right)}} \tag{39}$$

$$= \frac{a}{r_1}\sqrt{\frac{1-e^2}{2a/r_1 - 1}}.$$

Veličina potrebne promene brzine u 1 može se odrediti sa sl. 47 pomoću kosinusne teoreme

$$\Delta v_1^2 = v_1^2 + v_{k1}^2 - 2 v_1 v_{k1}\cos\alpha.$$

Kad se ovde unesu vrednosti (37) i (39) i uzme u obzir da je $v_{k1} = \sqrt{\frac{\lambda}{r_1}}$, dobiće se

$$|\Delta \boldsymbol{v}_1| = \Delta v_1 = v_{k1}\sqrt{3 - \frac{r_1}{a} - 2\sqrt{\frac{a}{r_1}(1-e^2)}}. \tag{40}$$

Odabiranje preletne elipsne trajektorije se svodi na izbor a i e u obrascima (39) i (40), što onda određuje ugao α koji putanjska brzina treba da obrazuje sa tangentom na putanji 1 (odn. sa brzinom kruženja po putanji 1) i veličinu promene brzine Δv_1.

Iznos Δv_2 promene brzine v_1 koji je potreban u tački 2, u kojoj preletna elipsa seče putanju 2, da bi letelica prešla na spoljašnju kružnu putanju i dostigla brzinu $v_{k2} = \sqrt{\frac{\lambda}{r_2}}$, može se lako dobiti na sličan način kao (40).

Dovoljno je, uostalom, u obrascu (40) zameniti svuda indeks 1 sa 2, pa se tako dobiva

$$|\Delta v_2| = \Delta v_2 = v_{k2} \sqrt{3 - \frac{r_2}{a} - 2\sqrt{\frac{a}{r_2}(1-e^2)}}. \tag{41}$$

Ovaj se obrazac može izraziti pomoću kružne brzine v_{k1} na polaznoj kružnoj putanji, kad se uzme u obzir da je

$$\frac{v_{k2}}{v_{k1}} = \sqrt{\frac{r_1}{r_2}} \Rightarrow v_{k2} = v_{k1}\sqrt{\frac{r_1}{r_2}}. \tag{42, 43}$$

To znači da se, najzad, može napisati

$$\Delta v_2 = v_{k1} \sqrt{\frac{r_1}{r_2}\left(3 - 2\sqrt{\frac{r_1}{r_2} \cdot \frac{a}{r_1}(1-e^2)} - \frac{r_1}{a}\right)}. \tag{44}$$

U račun se može uvesti i parametar $p = a(1-e^2)$ prelazne elipse, ako je potrebno i podesno.

Nije sad teško odrediti ukupnu potrebnu promenu, odn. *karakterističnu brzinu* preleta

$$\Delta v = \Delta v_1 + \Delta v_2. \tag{45}$$

Mada, kako samo rekli, brže preletne putanje mogu biti i parabolične i hiperbolične, ovde se ograničavamo na i inače najviše korišćene eliptične putanje. U tom slučaju mora biti $e < 1$, ali se obično uzimaju one elipse (za prelaz sa unutrašnje na spoljašnju putanju) za koje je pericentar manje udaljen od žiže u m_1 nego što je r_1, tj.

$$\rho_{min} = a(1-e) \leqslant r_1. \tag{46}$$

Kad se uzme u obzir maločas navedena vrednost za parametar elipse, onda se može za izabranu elipsu, tj. za dato p i datu kružnu polaznu putanju poluprečnika r_1, prethodni uslov, deljenjem jedne i druge strane nejednakosti, parametrom p, izraziti u obliku

$$\frac{a(1-e)}{a(1-e^2)} \leqslant \frac{r_1}{p} \Rightarrow \frac{p}{r_1} \leqslant 1 + e,$$

odn.

$$e \geqslant \frac{p}{r_1} - 1. \tag{47}$$

Sa druge strane, kad je reč o elipsi kao preletnoj putanji, onda svakako njen apocentar mora biti na samoj spoljašnjoj putanji ili van nje, tj. mora biti

$$\rho_{max} = a(1+e) \geqslant r_2, \tag{48}$$

odakle, s obzirom na vrednost parametra p, proističe

$$e \geqslant 1 - \frac{p}{r_2}. \tag{49}$$

Na taj način je za elipsu

$$1 > e \geqslant \frac{p}{r_1} - 1,$$

tj.

$$\frac{p}{r_1} - 1 < 1 \Rightarrow \frac{p}{r_1} < 2,$$

što, najzad, daje

$$p < 2r_1 \text{ ili } a(1-e^2) < 2r_1. \tag{50}$$

Kad je reč o znaku jednakosti u relacijama (47) i (49), onda se izjednačavanjem njihovih desnih strana dobiva

$$p = \frac{2r_1 r_2}{r_1 + r_2}, \tag{51}$$

i kad se ovo unese u prvu od relacija ($r_2 > r_1$)

$$e = \frac{r_2 - r_1}{r_1 + r_2}. \tag{52}$$

Na taj način se za slučaj znaka jednakosti u (47) i (49), odn. u (46), i (48), tj. za slučaj kad je pericensar preletne elipse na unutrašnjoj putanji a apocentar na spoljašnjoj iz (51) i (52) s obzirom na vezu između p, e i a izvodi

$$a = \frac{r_1 + r_2}{2},$$

što je velika poluosa Homanove preletne putanje.

Navešćemo i to, da se pri analitičkom i grafičkom proučavanju veza između elemenata a i e, odn. a i p preletne elipse i karakteristične brzine Δv, ova obično izražava ((normira) u jedinicama kružne brzine v_{k1} polazne putanje, tj. uzima kao jedinica za karakterističnu brzinu razmera $\Delta v / v_{k1}$.

Kako se vidi i za izvođenje manevara potrebnih za brži prelet sa jedne kružne koplanarne putanje na drugu potrebna su dva impulsa (dve promene brzine) — reč je o dvoimpulsnim manevrima. I ovde ne treba ponavljati postupak za prelet sa više na nižu, sa spoljašnje na unutrašnju, putanju, jer je postupak sasvim analogan samo se brzina sad prvo smanjuje

4. Prelazne putanje malog potiska

Iako, kako smo rekli, još nema trajnog raketnog pogona, postoje teorijska istraživanja, kako bi se mogao ostvariti jedan takav *pogonski* (upravljani) prelaz u slučaju da se može ostvariti i mali ali trajan potisak. Takvo jedno rešenje sa jonskim pogonom, koje istina još nije tehnički ostvareno, predložio je *E. Štulinger* (E. Stuhlinger) i mi ćemo ga ovde prikazati.

Ako se pođe, dakle, od izraza (3) za ukupnu energiju, određenu za jediničnu masu $m = 1$ pokretnog tela po krugu poluprečnika $\rho = r_1$, dobiće se

$$E_1 = -\frac{\lambda}{2r_1}, \tag{53}$$

gde je za Zemlju $\lambda = k^2 m_1 = 3{,}989 \cdot 10^{14}\,\mathrm{ms}^{-2}$. Neka se sad u kretanje letilice po krugu obima $2\pi r_1$ uključi neka mala potisna sila **F** (određena za jediničnu masu), uvek, tangentna na putanju, onda će rad te sile po obimu kružne putanje doprineti povećanju kinetaičke energije za veličinu tog rada, tj. za

$$\Delta E_1 = 2\pi r_1 F. \tag{54}$$

Međutim, prema (53) ukupna energija tela zavisi od poluprečnika putanje pa se sa promenom energije mora menjati i poluprečnik putanje. Naime, i male potisne sile moraju dovesti do povećavanja brzine i do postepenog udaljavanja tela od centralne mase. Promeni poluprečnika r_1 za Δr_1 odgovara prema (53) priraštaj energije

$$\Delta E_1 = \frac{\lambda}{2 r_1^2} \Delta r_1, \tag{55}$$

pod pretpostavkom, naravno, da se radi o nevelikoj promeni poluprečnika.

Izjednačavanjem vrednosti za ΔE_1 iz (54) i (55) dobiće se

$$\frac{\lambda}{2 r_1^2} \Delta r_1 = 2\pi r_1 F,$$

što daje

$$\Delta r_1 = \frac{4\pi}{\lambda} r_1^3 F, \tag{56}$$

i određuje promenu poluprečnika putanje tela za vreme jednog obletanja oko centralnog tela. Ako se uzme da bude $\frac{4\pi}{\lambda} F = \text{const}$ (tj. $F = \text{const.}$), onda se iz prethodne relacije vidi da je Δr_1 proporcionalno trećem stepenu od r_1.

U početku je pri navedenim uslovima priraštaj po jednom obilasku vrlo mali. Npr., ako se pusti u rad neki takav jonski motor u letelici koja obilazi Zemlju na visini od 600 km, a to znači na rastojanju od Zemljinog centra približno $r \approx 7\,000$ km, onda je ubrzanje g Zemljine teže na ovoj visini, kako znamo

$$g = \frac{\lambda}{r^2},$$

pri čemu se može uzeti da je zaokrugljeno $g = 10\,\mathrm{m/s^2}$, pošto je dovoljno blizu Zemlje a radi se samo o proceni promene poluprečnika. Uzmimo da je ubrzanje letelice (mali potisak na jedinicu mase) od pogonskog motora

$$F = 10^{-4} g,$$

i unesemo sve to u (56) pa će se dobiti

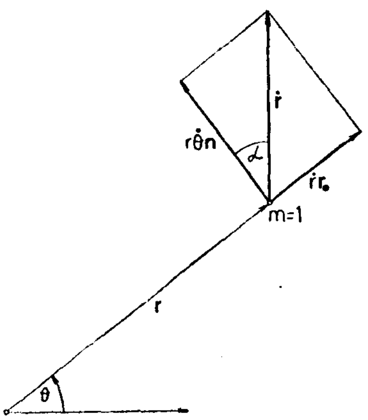
$$\Delta r_1 = 9\,\mathrm{km},$$

Drugim rečima, posle jednog obilaženja naša letelica prelazi na putanju poluprečnika 7 009 km.

Da bi se odredila putanja naše letelice mora se uzeti u obzir da na nju pored male potisne sile F dejstvuje i gravitaciona sila centralne mase m_1 (npr. Zemlje), jer ona sad usled promene brzine ne biva poništena centrifugalnom silom već dolazi do izražaja, dok se dejstvo Sunčeve gravitacije može svakako i dalje zanemariti. Prema tome, ako se sa **r** obeleži vektor položaja našeg tela u odnosu na centar mase centralnog tela, onda se u odnosu na jediničnu masu $m=1$ može napisati naredna vektorska diferencijalna jednačina

$$\ddot{r} = -\frac{\lambda}{r^3} r + F. \tag{57}$$

Iako je i ovde u stvari reč o problemu dva tela ipak se zbog one dodatne sile F ne može smatrati da uvek postoje integrali površine i energije ove diferencijalne jednačine. Stoga ćemo, radi proučavanja kretanja u ovom slučaju, razložiti sve vektore, koji se pojavljuju u prethodnoj jednačini na komponente u prvacu r_0 (jedinični vektor potega) i n (jedinični vektor upravan na r_0) i ograničiti se samo na ravanski problem (to je realno opravdano, ako potisna sila ostaje neprestano u ravni putanje kruženja). Tada će u ravanskim polarnim koordinatama r i ϑ (sl. 48) biti ubrzanje uočenog tela, kako je poznato



Sl. 48

$$w = \ddot{r} = (\ddot{r} - r\dot{\vartheta}^2) r_0 + (r\ddot{\vartheta} + 2\dot{r}\dot{\vartheta}) n. \tag{58}$$

Rastavljanjem potisne sile F u komponente u pravcima jediničnih vektora r_0 i n dobiva se

$$F = F_r r_0 + F_n n. \tag{59}$$

Ako se sad u jednačinu (57) unesu izrazi (58) i (59), onda se odmah dobivaju dve skalarne jednačine za kretanje naše letelice u pravcu potega i normalno na poteg, projiciranjem na jedinične vektore r_0 i n, i to

$$\ddot{r} = r\dot{\vartheta}^2 - \frac{\lambda}{r^2} + F_r, \tag{60}$$

$$\ddot{\vartheta} = -2\frac{\dot{r}\dot{\vartheta}}{r} + \frac{F_n}{r}. \tag{61}$$

Očigledno je da u jednačini (60) prvi član sa desne strane odgovara centrifugalnoj sili, drugi gravitaciji a treći radijalnoj komponenti potiska na jedinicu mase. Što se tiče jednačine (61) i ona se može mehanički interpretirati. Naime, ta jednačina se može (što se lako vidi) napisati u obliku

$$\frac{d}{dt}(r^2\dot{\vartheta}) = rF_n, \tag{62}$$

a to znači da je izvod kinetičkog momenta mase $m=1$ u odnosu na centralno telo kao pol, jednak momentu potisne sile u odnosu na isti pol.

Sad, ako je, kako smo pretpostavili, potisna sila stalno tangentna na putanju, a to znači kolinearna sa $v = \dot{r}$, onda se sa sl. 48 dobiva

$$F_r = F\sin\alpha = F\frac{\dot{r}}{\sqrt{\dot{r}^2 + (r\dot{\vartheta})^2}}, \tag{63}$$

$$F_n = F\cos\alpha = F\frac{r\dot{\vartheta}}{\sqrt{\dot{r}^2 + (r\dot{\vartheta})^2}}. \tag{64}$$

Ako se ove vrednosti za F_r i F_n unesu, najzad, u jednačine (60) i (61) odn. (62), dobiće se sistem običnih diferencijalnih jednačina drugog reda po r i ϑ i one se onda rešavaju. Ipak, treba podvući da se iz tih jednačina vrlo retko mogu dobiti konačna rešenja uobičajenim matematičkim metodama, ali se i za proizvoljne početne uslove i zahteve u vezi sa preletnom putanjom mogu *numerički* (pomoću računara) određivati trajektorije, koji se onda analiziraju u pogledu podesnosti za rešenje postavljenog zadatka.

Radi što jasnije predstave ovog problema razmotrićemo jedan sasvim određeni zadatak: kako se mora (ako je to, naravno, tehnički moguće) regulisati dati tangentni potisak, da bi se kao putanja dobila logaritamska spirala, čija se jednačina u ovde izabranim polarnim koordinatama može napisati u obliku

$$r = ae^{\vartheta/C}, \tag{65}$$

gde je $r_1 = a$ poluprečnik polazne kružne putanje a C ($C>0$) neka konstanta koja određuje brzinu odmotavanja logaritamske spirale, tj. određuje relativni priraštaj $\Delta r/_r$ od r na jedan obilazak.

Rešenje ovog zadatka se može dobiti na naredni način. Prvo se jednačina (65) dva put diferencira po vremenu, pa će se dobiti

$$\dot r = \frac{1}{C} r\dot\vartheta, \quad \ddot r = \frac{1}{C} \dot r \dot\vartheta + \frac{1}{C} r \ddot\vartheta. \tag{66}$$

Unošenjem sad vrednosti za $\dot r$ odavde u izraze (63) i (64) dobiće se

$$F_r = \frac{1}{\sqrt{1+C^2}} F, \qquad F_n = \frac{C}{\sqrt{1+C^2}} F. \tag{67}$$

Najzad, kad se u jednačine kretanja tela (60) i (61) unesu vrednosti za $\dot r$, $\ddot r$, F_r i F_n, koje smo dobili u ovom slučaju, dobiva se, posle eliminacije F

$$\dot\vartheta = C\sqrt{\frac{\lambda}{1+C^2}}\, r^{-3/2}, \tag{68}$$

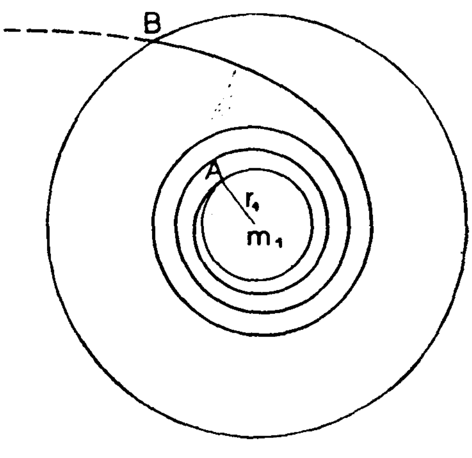
a s obzirom na prvu od jednačina (66)

$$\dot r = \sqrt{\frac{\lambda}{1+C^2}}\, r^{-1/2}. \tag{69}$$

Diferenciranje ove poslednje jednačine po vremenu daje

$$\ddot r = -\frac{1}{2} \frac{\lambda}{1+C^2} r^{-2}. \tag{70}$$

Na kraju, unošenjem vrednosti za F_r, $\dot\vartheta$ i r dobiće se onaj traženi izraz za veličinu tangentne potisne sile F na jedinicu mase, ako preletna putanja treba da bude logaritamska spirala (sl. 49)



Sl. 49

Taj izraz je

$$F = \frac{\lambda}{r^2} \frac{1}{2\sqrt{1+C^2}}. \tag{71}$$

To znači, da u tom slučaju tangentni potisak na jedinicu mase kosmičke letelice mora opadati sa kvadratom rastojanja r od centralne mase m_1.

XII NEKI KOSMIČKI MANEVRI

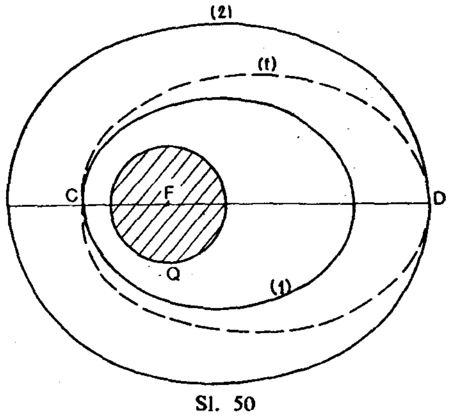
Osim izbacivanja veštačkih satelita u orbitu oko Zemlje, odn. nekog drugog nebeskog tela i preleta sa jedne kružne putanje na drugu u istoj ravni samo na višem ili nižem nivou, postoji niz tehnički ostvarliivih manevara. Pri tome je, napr., manevar prelaza sa neke kružne putanje na komplanarnu eliptičnu putaniu čija je jedna žiža u centru polazne kružne putanje već obuhvaćena teorijom prelaza sa jednog nivoa na drugi i ostvarena onom prelaznom elipsom.

Osim toga mogu se posmatrati i *preleti između komplanarnih elipsnih orbita.* Kako je obično reč o transferu između veštačkih satelita Zemlje, gde je Zemlja privlačni centar, ili između planeta, kad je Sunce privlačni centar, takvi preleti su uvek između konfokalnih putanja.

Drugi, takođe ostvarljivi manevri, jesu prelazi između nekomplanarnih orbita, napr. *obrtanje orbitne ravni* (popularno engleski: doglegging), *spust*, *susret* ili *sastanak* (встреча, rendevous) u međuplanetnom prostoru, *izbacivanje sondi, obletanje i spuštanje na Mesec*, zatim *obletanje i spuštanje na razne druge planete* itd.

1. Prelaz između komplanarnih eliptičnih putanja

Uočimo, dakle, prelaz sa elipsne putanje (1) na drugu (2) komplanarnu i konfokalnu (zajednička žiža F) i to po poluelipsi (t) koja je tangentna: na polaznoj u pericentru C i na drugoj elipsi u apocentru D (sl. 50). Q je Zemlja.



Sl. 50

Neka ekscentričnost prve elipse bude e_1 a druge e_2; njihovi pericentralni potezi ρ_{p1} i ρ_{p2} a apocentralni ρ_{a1} i ρ_{a2}. Za prelaznu (transfernu) putanju biće onda, prema ovim uslovima $\rho_{pt} = \rho_{p1}$ i $\rho_{at} = \rho_{a2}$.

Međutim, pri kretanju po nekoj elipsi (sl. 51) sa žižom u F transverzalna brzina u nekoj tački, čije su polarne koordinate ρ i ν, biće

$$v \cos \varphi = \rho \dot{\nu} = \frac{A}{\rho}, \tag{1}$$

ako je v brzina u toj tački a φ ugao između vektora brzine $\mathbf{v}$ i normale na poteg u tački P.

Tada se iz (III, 34) s obzirom na (III, 49) može napisati

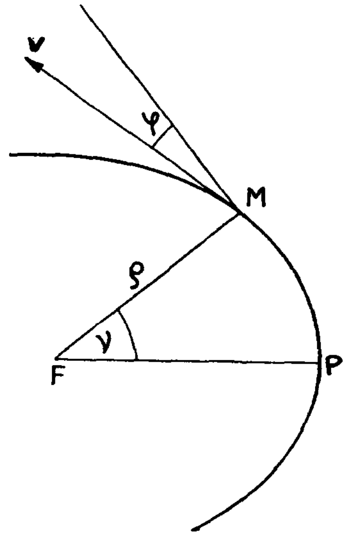
$$\frac{1}{\rho} = \frac{\lambda}{A^2}(1 + e \cos \nu),$$

a kako je prema (37)

$$A^2 = \rho^2 \dot{\nu} = \rho\, v \cos \varphi,$$

dobiva se za transverzalnu brzinu

$$v \cos \varphi = \sqrt{\frac{\lambda}{\rho}(1 + e)}. \tag{2}$$



Sl. 51

Iz ovog obrasca se onda za brzinu v_{p1} u pericentru C prve elipse, čija je ekscentričnost e_1 dobiva ($\nu = 0$, $\varphi = 0$ i $\rho = \rho_{p1}$)

$$v_{p1} = \sqrt{\frac{\lambda}{\rho_{p1}}(1 + e_1)}. \tag{3}$$

Da bi materijalna tačka od C nastavila da se kreće po transfernoj elipsi (t), koja obuhvata polaznu elipsu (1), treba brzina v_{p1} da se nešto poveća i da postane brzina

$$v_{pt} = \sqrt{\frac{\lambda}{\rho_{p1}}(1 + e_t)}, \tag{4}$$

jer su karakteristična gravitaciona konstanta λ i pericentralni poteg ($\rho_{pt} = \rho_{p1}$) ostali nepromenjeni. Treba samo odrediti ekscentričnost e_t pomoću pericentralnog potega ρ_{p1} polazne elipse i apocentralnog potega ρ_{a2} druge elipse.

Naime, za transformisanu elipsu (t) imamo

$$\frac{\rho_{at}}{\rho_{pt}} = \frac{\rho_{a2}}{\rho_{p1}} = \frac{1 + e_t}{1 - e_t}. \tag{5}$$

Odavde se odmah sabiranjem korespondentnih članova srazmere dobiva

$$\frac{\rho_{a2}}{\rho_{p1} + \rho_{a2}} = \frac{1 + e_t}{2},$$

i najzad

$$1 + e_t = \frac{2\rho_{a2}}{\rho_{p1} + \rho_{a2}}. \tag{6}$$

Unošenjem ove vrednosti za $1+e_t$ u (4) izvodi se potrebna brzina u pericentru C po transfernoj elipsi

$$v_{pt}=\sqrt{\frac{2\lambda}{\rho_{p1}}\,\frac{\rho_{a2}}{\rho_{p1}+\rho_{a2}}}=\sqrt{\frac{2\lambda}{\rho_{p1}}\,\frac{\rho_{a2}/\rho_{p1}}{1+\rho_{a2}/\rho_{p1}}}. \tag{7}$$

Prema tome, povećanje brzine v_1 za prelaz sa polazne na transfernu elipsu iznosi

$$\triangle v_1=v_{pt}-v_{p1}. \tag{8}$$

Iz obrasca (38) za $\varphi=0$, $\rho=\rho_{a2}$ i $e=e_2$ dobiva se za brzinu kretanja po elipsi (2) u apocentru izraz

$$v_{a2}=\sqrt{\frac{\lambda}{\rho_{a2}}(1-e_2)}. \tag{9}$$

i ovo treba nešto smanjiti da bi se kretanje nastavilo po transfernoj elipsi od apocentra D i treba da iznosi

$$v_{at}=\sqrt{\frac{\lambda}{\rho_{a2}}(1-e_t)}, \tag{10}$$

jer se pri prelazu od jedne do druge elipse menja samo ekscentricitet.

Iz srazmere (5) izvodi se sabiranjem podesnih korespondentnih članova i

$$1-e_t=\frac{2\rho_{p1}}{\rho_{a2}+\rho_{p1}}. \tag{11}$$

Unošenjem ovog izraza u (10) dobiće se za traženu brzinu

$$v_{at}=\sqrt{\frac{2\lambda}{\rho_{a2}}\,\frac{\rho_{p1}}{\rho_{p1}+\rho_{a2}}}=\sqrt{\frac{2\lambda}{\rho_{a2}}\,\frac{1}{1+\rho_{a2}/\rho_{p1}}}. \tag{12}$$

To znači da je promena brzine u apocentru D

$$\triangle v_2=v_{a2}-v_{at}, \tag{13}$$

i ukupna potrebna promena brzine za transfer iznosi

$$\triangle v=\triangle v_1+\triangle v_2. \tag{14}$$

Vreme τ trajanja preleta po navedenoj poluelipsi dobiva se iz Keplerovog obrasca (XI, 34)

$$\tau=\frac{1}{2}T=\pi\sqrt{\frac{a^3}{\lambda}},$$

gde je sad za transfernu elipsu

$$a=\frac{\rho_{p1}+\rho_{a2}}{2}$$

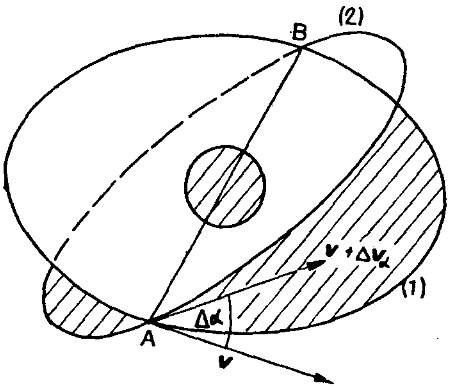
što uneto u prethodni obrazac daje

$$\tau=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}\sqrt{\frac{(\rho_{p1}+\rho_{p2})^3}{\lambda}}. \tag{15}$$

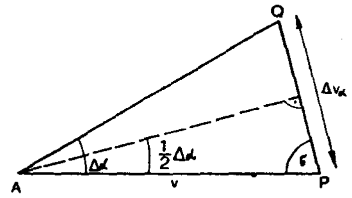
Određivanje količine potrošenog pogonskog materijala potrebnog za obavljanje preleta kao i za to potrebne kinetičke energije izvodi se za određano $\triangle v$ i brzinu isticanja gasova c na isti način kao i kod komplanarnih kružnih putanja.

2. **Prelaz između nekomplanarnih orbita**

a. Ako je pri tome reč o prelazu između kružnih orbita jednakih poluprečnika oko istog privlačnog centra, onda se prosto radi samo o promeni nagiba prvobitne orbite prema ekvatorskoj ravni, odn. o obrtanju ravni date putanje oko linije čvorova (prava preseka obe putanjske ravni) za određeni ugao. Tada u jednoj od čvornih tačaka (sl. 52) u kojima se uočene kružne putanje seku, napr. u tački A, treba promeniti *samo pravac* vektora brzine $\boldsymbol{v}$ po putanji (1) za ugao $\triangle\alpha$, bez promene intenziteta, da bi se kretanje nastavilo po kružnoj putanji (2).



Sl. 52



Sl. 53

Kako, u ovom slučaju, posle promene brzine na polaznoj orbiti, intenzitet brzine treba da ostane nepromenjen, stanje slaganja brzina treba da izgleda onako kako je to prikazano na sl 53, gde je trougao APQ jednakokrak, tj.

$$|\overrightarrow{AQ}| = |\boldsymbol{v} + \triangle \boldsymbol{v}_\alpha| = |\boldsymbol{v}| = |\overrightarrow{AP}|.$$

Neka je potrebna promena pravca brzine određena uglom $\triangle\alpha$, onda je, prema slici, veličina $\triangle v$ te potrebne promene data izrazom

$$\triangle v_\alpha = 2\,v \sin\frac{1}{2}\triangle\alpha, \tag{16}$$

a ugao σ koji obrazuje pravac promene brzine $\boldsymbol{v}$ sa pravcem prvobitne brzine iznosi

$$\sigma = \frac{1}{2}\,\pi - \frac{1}{2}\triangle\alpha. \tag{17}$$

Dakle, iako je ovaj manevar dosta delikatan, jer je neophodna velika tačnost, ipak, načelno posmatrano, obrtanje ravni putanje za određeni ugao radi prelaza na drugu kružnu putanju jednakog poluprečnika nije složeno — potreban je samo *jedan impuls*. Međutim, ako se uoči obrazac (16) onda se odmah vidi da je ovakav prost manevar neracionalan i podesan samo za male promene uglova nagiba, jer, napr., ako treba preći na orbitu pod pravim uglom prema prvobitnoj, onda to zahteva promenu veličine v prvobitne btrzine za $v_{90^\circ} = v\sqrt{2}$!

Pitanje prelaza sa jedne kružne putanje na drugu kružnu različitcg poluprečnika i nekomplanarnu sa prvom može se obaviti na dva načina. Prvo, obaviti prelaz sa date kružne putanje na drugu komplanarnu sa poluprečnikom (većim ili manjim) od prve, pa zatim, obrtanjem oko linije čvorova nove kružne orbite i one na koju treba prevesti pokretno telo, rečiti problem na sličan način kao u prethodnom slučaju. Međutim, naravno, može se prvo obaviti obrtanje ravni putanje u ravan tražene putanje za dati ugao pa zatim izvesti prelaz između komplanarnih kružnih orbita.

Međutim, ako sa neke kružne putanje treba preći na nekomplanarnu eliptičnu putanju (čija je žiža u centru prvobitne kružne putanje) tada se manevar može izvesti na naredni način.

Neka poluprečnik polazne kružne putanje bude r i neka pericentralni i apocentralni poteg one elipse, komplanarne sa krugom čija je žiža u centru kruga C, a koja je veličine nove eliptične putanje, budu ρ_p i ρ_a. Ako tada ta komplanarna, posredna elipsı (1) dodiruje osnovnu kružnu orbitu (k) u pericentru A, tada je $\rho_p=r$, pa mora biti $\rho_a>r$ (naravno, moguće je razmatrati i slučaj gde je pomenuti dodir u apocentru B i tada je $\rho_a=r$, a $\rho_p<r$).

U slučaju $\rho_a>r$ mora se u tački A povećati kružna brzina v_k (prvi impuls) za Δv_p, tako da u toj tački brzina po veličini postane

$$v_p=v_k+\Delta v_p.$$

Pri tome je za navedenu elipsu, prema (XI, 26), potrebna promena veličine brzine

$$\Delta v_p=v_k\left[\sqrt{\frac{2}{r/\rho_a+1}}-1\right], \tag{18}$$

jer je ovde $r_1=\rho_p=r$, a $r_2=\rho_a$. Otuda proističe s obzirom na (XI, 22) da brzina u pericentru, sa ovim oznakama, treba da ima veličinu

$$v_p=v_k\sqrt{\frac{2}{r/\rho_a+1}}=\sqrt{\frac{\lambda}{r}\,\frac{2}{r/\rho_a+1}}. \tag{19}$$

Kad se brzina po ovoj elipsi u apocentru obeleži sa v_a, onda je s obzirom na (III, 22 — zakon površina) i (III, 39)

$$v_p r=v_a\rho_a, \tag{20}$$

i

$$v_p^2-v_a^2=2\lambda\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{\rho_a}\right)=2v_k\left(1-\frac{r}{\rho_a}\right), \tag{21}$$

pa se tako za veličinu brzine v_a u aposentru dobiva se posle kraćeg transformisanja

$$v_a=\frac{2v_k^2}{v_p}-v_p=\frac{r}{\rho_a}v_k\sqrt{\frac{2}{r/\rho_a+1}}. \tag{22}$$

Kad se dospe u apocentar B ove prelazne elipse, onda se može izvesti korektura orbitnog nagiba, kao i u slučaju kružnih orbita, za veličinu (drugi impuls)

$$\Delta v_a=2v_a\sin\frac{1}{2}\Delta\alpha, \tag{23}$$

ako ravan putanje treba obrnuti oko velike ose ove elipse za ugao $\triangle\alpha$. Na taj način se može reći da je obavljen prelaz sa date kružne putanje na određenu nekoplanarnu eliptičnu putanju, ali takvu čija je velika osa (pericentar-apocentar) u ravni polaznog kruga.

Prethodni mehanizam prelaza sa kružne na eliptičnu nekoplanarnu putanju može se iskoristiti i za ostvarivanje prelaza sa jedne kružne putanje na drugu kružnu jednakog poluprečnika a nekoplanarnu. Naime, u prethodnom slučaju, letelica se vraća u pericentar A, posle obrtanja u B, sa ranijom veličinom brzine v_p. Prema tome, ako se sad brzina v_p u perihelu smanji za $\triangle v_p$, onda će se letelica postaviti u kružnu orbitu u ravni obrnute elipse koja je potpuno jednaka polaznoj kružnoj putanji. Na taj se način manevrom sa tri impulsa postiže traženi prelaz.

Pri ovom načinu korišćenja transferne elipse za prelaz sa jedne kružne na drugu nekoplanarnu putanju jednakog poluprečnika ukupna potrebna promena brzine posle tri impulsa, apsolutno uzev iznosi

$$|\triangle v| = 2|\triangle v_p| + |\triangle v_\alpha|, \tag{24}$$

tj.

$$|\triangle v| = 2v_k\left\{\sqrt{\frac{2}{r/\rho_a+1}}\left[1 + r/\rho_a \sin\frac{1}{2}\triangle\alpha\right] - 1\right\}. \tag{25}$$

Kako utrošena energija pri transferu uopšte zavisi od ukupne promene brzine pri tome, biće razmera apocentralnog ρ_a i pericentralnog $\rho_p = r$ pri optimalnom transferu za dato obrtanje

$$\frac{\rho_a}{r} = \frac{\sin\frac{1}{2}\triangle\alpha}{1 - 2\sin\frac{1}{2}\triangle\alpha}. \tag{26}$$

I zaista, ako se (25) diferencira po ρ_a dobiće se

$$\frac{d|v|}{d\rho_a} = \frac{v_k r}{\rho_a^2}\sqrt{2}\,(r/\rho_a + 1)^{-3/2}\left[1 - (r/\rho_a + 2)\sin\frac{1}{2}\triangle\alpha\right], \tag{27}$$

pa je optimalni transfer u slučaju

$$\frac{d|v|}{d\rho_a} = 0,$$

tj. kad je

$$(r/\rho_a + 2)\sin\frac{1}{2}\triangle\alpha = 1$$

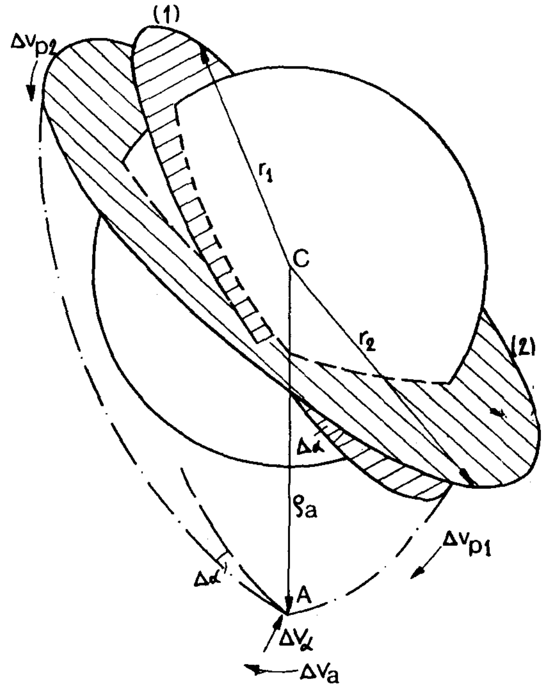
odakle se izvodi (26). Lako je pokazati da je ova optimalnost minimum.

Iz obrasca (16) vidi se da potrebna promena brzine pri obrtanju putanjske ravni zavisi, ne samo od ugla obrtanja, već i od brzine na mestu putanje gde se brzina menja. Ova pak brzina zavisi od visine letelice nad Zemljom, odn. od njene udaljenosti od Zemljinog centra i manja je na većoj visini. Stoga se korišćenjem prelazne putanje može postaviti pitanje izbora mesta obrtanja putanjske ravni i na taj način i optimalnosti energije potrebne za to obrtanje.

Iz (26) proizlazi da je, za obrtanje $\Delta\alpha \approx 39°$, $\rho_a/r = 1$, i transferna elipsa identična sa polaznim krugom. Korišćenje ove tehnike je za uglove obrtanja $\Delta\alpha < 39°$ nekorisno, što se lako vidi, jer tada je $\rho_\alpha < r$! Za uglove obrtanja $\Delta\alpha > 60°$ je ova tehnika neupotrebljiva jer je, za $\Delta\alpha = 60°$, $\rho_a/r = \infty$ a transferna elipsa postaje parabola. Praktičnu vrednost ovaj mehanizam preleta ima samo u razmaku $39° < \Delta\alpha < 60°$.

b. Ako treba *sa date kružne putanje preći na drugu kružnu nekoplanarnu ali različitog poluprečnika* (većeg ili manjeg), onda se korišćenjem transferne elipse može ovako postupiti.

Obe kružne putanje imaće isti centar (centar Zemlje C) i neka su kružne brzine po njima v_{k1} i v_{k2}, pri čemu je r_1 poluprečnik prvog, polaznog kruga (1) a r_2 drugog, konačnog kruga (2) i recimo, $r_1 < r_2$. Tada se postupak razlikuje od onog u prethodnom slučaju samo u tome što se drugi impuls ne ograničava samo na promenu Δv_α pravca brzine u apocentru transferne elipse već se i sama brzina po elipsi povećava za Δv_a tako da se dobiva nova eliptična putanja, u ovom slučaju veće velike ose elipse. Pri tome je ta promena takva da pericentar te nove elipse leži na traženom krugu.



Sl. 54

Kružna brzina v_{k1} po datom krugu (1) (Sl. 54) određena je obrascem

$$v_{k1} = \sqrt{\frac{\lambda}{r_1}}.$$

Da se otpočne sa manevrom treba (prvi impuls) promeniti tu brzinu za

$$\Delta v_{p1} = v_{k1}\left[\sqrt{\frac{2}{r_1/\rho_a + 1}} - 1\right], \tag{28}$$

da bi letelica prešla na prvu pomoćnu eliptičnu putanju čija je žiža u centru kruga C, a kako apocentralni poteg te elipse treba da bude veći od poluprečnika kruga ($\rho_a > r_1$), ta promena treba da bude povećanje brzine.

U apocentru A te transferne elipse se zatim pored promene brzine (drugi impuls) Δv_α prema (23) potrebne za obrtanje date putanjske ravni u ravan traženog kruga, bez promene brzine, za ugao $\Delta\alpha$ mora izvesti i promena Δv_a veličine brzine u samoj ravni nove putanje i prešlo na drugu, recimo, veću eliptičnu putanju. Pri tome je

$$\Delta v_\alpha = 2\, v_a \sin\frac{1}{2}\Delta\alpha,$$

gde je

$$v_a = \frac{2\, v_{k1}^2}{v_{p1}} - v_{p1},$$

a v_{p1} obeležava brzinu u pericentru prve transferne elipse.

Povećavanjem Δv_a brzine kretanja u apocentru po obrnutoj pravoj elipsi, jer bi inače bez toga letelica prošla ponovo kroz pericentar ranije putanje, povećava se velika ose ove elipse i tako prelazi na novu eliptičnu putanju koja treba da dodiruje traženu kružnu putanju tako da njen pericentar leži na toj traženoj kružnoj putanji.

Promena Δv_a se može izvesti kao razlika brzina u apocentru nove druge elipse i prve elipse, pri čemu je ekscentričnost druge elipse e_2. Imamo, stoga

$$\Delta v_a = \sqrt{\frac{\lambda}{\rho_a}}\{\sqrt{1-e_2} - \sqrt{1-e_1}\} =$$

$$= \sqrt{\frac{\lambda}{\rho_a}}\left\{\sqrt{\frac{2}{\rho_a/r_2+1}} - \sqrt{\frac{2}{\rho_a/r_1+1}}\right\}, \tag{29}$$

pri čemu je

$$e_2 = \frac{\rho_a - r_2}{\rho_a + r_2}.$$

Brzina potrebna, međutim, za kretanje po novoj kružnoj putanji iznosi

$$v_{k2} = \sqrt{\frac{\lambda}{r_2}},$$

ali pri dolasku u pericentar brzina v_{p2} letilice po drugom krugu biće

$$v_{p2} = \sqrt{\frac{\lambda}{r_2}\frac{2}{r_2/\rho_a+1}}, \tag{30}$$

i ako je podešeno da bude $\rho_a \geqslant v_{p2}$, mora biti $v_{k2} \leqslant v_{p2}$ i tražena promena veličine brzine određena sa

$$\Delta v_{p2} = v_{k2} - y_{p2}.$$

Ukupna promena brzine (četiri impulsa) iznosiće tako

$$|\Delta v| = |\Delta v_{p1}| + |\Delta v_\alpha| + |\Delta v_a| + |\Delta v_{p2}|,$$

odn. eksplicitno

$$\Delta v = v_{k1}\left\{\sqrt{\frac{2}{r_1/\rho_2}}\left[1 + r_1/\rho_a\left(2\sin\frac{1}{2}\Delta\alpha - 1\right)\right] - 1 + \right.$$

$$\left. + v_{k2}\left\{\sqrt{\frac{2}{r_2/\rho_a + 1}}\,[1 + r_2/\rho_a] - 1\right\}. \tag{31}$$

Odavde se može izvesti analiza uslova optimalnosti i odrediti granice korisnosti izvođenja ovog manevra ua ovaj način, ali pošto je to, istina samo računski, dosta složeno nećemo se na tome ovde zadržavati.

c. *Za izvođenje transfera (prelaza) između dve nekoplanarne eliptične putanje jednakih veličina,* dovoljno je samo u jednoj od presečnih tačaka tih putanja na liniji čvorova izvesti obrtanje jedne ravni u drugu za dati ugao $\Delta\alpha$ prema obrascu (23) kao bez ikakve promene veličine brzine kao u slučaju dve jednake kružne putanje. Međutim, iz istih razloga koje smo tamo naveli u vezi sa pitanjem optimalnosti izvođenja ovakvih prelaza i njihove veće ili manje korisnosti, koristi se i ovde mehanizam preleta potpuno analogan onome tamo, jer je potrebna manja promena brzine, ako se obrtanje prema obrascu (5) obavi na većem rastojanju od centra privlačenja. Zako u pogledu korišćenja energije prelaz sa tri impulsa može biti racionalniji od onoga na oko prostijeg sa samo jednim.

Ovde se postupa na ovaj način. Prvo se u pericentru (ili apocentru) date eliptične putanje pređe na transfernu elipsu, po pravilu veću od date, povećanjem brzine. Zatim se u apocentru ove transferne elipse obrne njena ravan za potrebni ugao $\Delta\alpha$ promenom brzine za Δv_α, kao i slučaju kod kružnih putanja. Kad se onda letilica vrati u pericentar transferne elipse, ova se novom promenom brzine postavlja u položaj druge, tražene putanje. U našem slučaju se obrnuta transferna elipsa, koja je u odnosu na polaznu eliptičnu putanju povećana, smanjuje do veličine polazne eliptične putanje. Obrtanje je oko velike ose date elipse.

Dakle, ako su ρ_p i ρ_a potezi u pericentru i apocentru date polazne putanje, a ρ_p i ρ_{at} odnosni potezi transferne elipse (jer se pericentar polazne i transferne elipse poklapaju) biće brzina u pericentru polazne eliptičke putanje prema (19)

$$v_p = \sqrt{\frac{\lambda}{\rho_p}\,\frac{2}{\rho_p/\rho_a + 1}}, \tag{32}$$

a brzina u pericentru transferne elipse prema istom obrascu je

$$v_{pt} = \sqrt{\frac{\lambda}{\rho_p}\,\frac{2}{\rho_p/\rho_{at} + 1}}, \tag{33}$$

tj. potrebni prvi impuls iznosi

$$\Delta v_p = v_{pt} - v_p.$$

Kad letilica dospe u apocentar transferne elipse, njena brzina tamo biće prema (22)

$$v_{at} = \frac{\rho_p}{\rho_{at}}\sqrt{\frac{\lambda}{\rho_{at}}\,\frac{2}{\rho_p/\rho_{at} + 1}}. \tag{34}$$

Drugi impuls je sad promena brzine u apocentru prema (16)

$$\Delta v_a = 2\, v_{at} \sin \frac{1}{2} \Delta \alpha$$

za obrtanje putanjske ravni.

Najzad, posle povratka u zajednički pericentar polazne i transferne elipse treba ponovo dati impuls Δv_p, ali samo suprotnog smera od prvog impulsa radi smanjenja brzine i veličine eliptične putanje da bi se tako prešlo na eliptičnu putanju veličine jednake polaznoj samo sad u drugoj ravni.

Prema tome, ukupna promena brzine (tri impulsa) iznosi

$$|\Delta v| = 2\,|\Delta v_p| + |\Delta v_\alpha|,$$

odn. eksplicitno

$$|\Delta v| = 2\sqrt{\frac{\lambda}{\rho_p}}\sqrt{\frac{2}{\rho_p/\rho_{at}+1}}\left[1 + \rho_p/\rho_{at} \sin\frac{1}{2}\Delta\alpha - 2\sqrt{\frac{\lambda}{\rho_p}}\sqrt{\frac{2}{\rho_p/\rho_a+1}}\right. . \qquad (35)$$

Ovo nije jednako odnosnoj promeni u slučaju transfera između nekoplanarnih jednakih krugova, jer se polazi od druge brzine u prvom trenutku.

I ovde se mogu odrediti optimalni uslovi i korisnost pojedinih transfera, ali se to obavlja slično kao kod kruga i dobija se za minimum uslov

$$\frac{\rho_{at}}{\rho_p} = \frac{\sin\frac{1}{2}\Delta\alpha}{1 - 2\sin\frac{1}{2}\Delta\alpha}, \qquad (36)$$

odakle se dobivaju ista ona ograničenja kao kod kruga, tj.

$$\varphi_{at}/\rho_p = 1, \text{ i } \rho_{at}/\rho_p = \infty.$$

Još se može pokazati da je početni manevar bolje otpočeti u pericentru nego u apocentru polazne putanje, iako bi na prvi pogled bilo racionalnije početi u apocentru. Običnim računom to nije teško dokazati, ali se u to ovde nećemo upuštati.

3. Susret

U svim slučajevima transfera sa jedne putanje na drugu dosad nije postavljeno pitanje *na koje mesto nove putanje i u kom trenutku treba da se stigne tamo*. Prema tome, treba proučiti i pitanje tzv. *susreta* pri čemu se radi o zadatku da dve letilice dođu na neko određeno mesto u istom trenutku vremena, tj. da se tamo sretnu, sastanu. Dakle, radi se o manevru prelaza sa jedne putanje na drugu, o transferu, ali na naročiti način. Jer, prelazna letelica, presretač (dostizač, interceptor) treba da pređe s jedne putanje na drugu, da tamo stigne u trenutku dolaska letilice sa kojom se sreće i da sa njom ima iste karakteristike kretanja. To znači da tamo ne samo dostigne (presretne) letelicu po putanji koja je cilj već i da nastavi da se kreće po toj putanji, da nešto smanji brzinu, ako bi inače presekla tu putanju ili nešto poveća, ako bi je samo dodirnula i vratila se.

Mehanizam ostvarenja randevua opisaćemo ovde samo u slučaju *dve letelice koje se kreću po nekoplanarnim kružnim putanjama, različitih poluprečnika, pri čemu se letelica koja je cilj susreta, kreće na većoj visini*, tj. po putanji kruga većeg poluprečnika. Svi drugi slučajevi se mogu onda sastaviti pomoću ovog primera i teorije drugih transfera o kojima je bilo reči. Napr. ako su putanje cilja i presretača koplanarne izostaće prosto impuls potreban za obrtanje ravni. Slično tome, neophodno prilagođavanje je moguće i u slučaju da je putanja presretača krug a cilja elipsa ili kad su ove eliptične.

Tako neka se letelica — neka kosmička stanica kao napr. „Салют", „Skylab" itd. kreće po kružnoj putanji poluprečnika r_2, dok se veštački satelit presretač — dopremač nalazi izbačen na kružnu putanju poluprečnika r_1, pri čemu je $r_2 > r_1$ i neka se putanje jedne i druge letelice nalaze pod uglom od $\Delta\alpha$. Tada se u trenutku kad presretač dostigne liniju čvorova (presek ravni obe putanje) izvede impuls za obaranje putanje presretača u ravan putanje cilja.

Potrebna promena brzine Δv_α za to iznosi prema (22)

$$\Delta v_\alpha = 2 v_{k1} \sin\frac{1}{2}\Delta\alpha,$$

gde je

$$v_{k1} = \sqrt{\frac{\lambda}{r_1}} = \sqrt{\frac{\lambda}{r_2}\frac{r_2}{r_1}} = v_{k2}\sqrt{\frac{r_2}{r_1}},$$

pri čemu je v_{k1} kružna brzina presretača, a v_{k2} kružna brzina letelice koja je cilj.

Zatim se uoči situacija kad se presretač nalazi u nekoj tački A na svojoj putanji, gde je cilj u tački A_1 za ugao θ ispred presretača u smeru kretanja, pri čemu se ovaj ugao može uglavnom podesno izabrati. Tada se letelica presretač impulsom u tom položaju prebacuje na Homanovu preletnu putanju, elipsu koja, recimo, u A dodiruje kružnu putanju presretača a u B kružnu putanju cilja, tako da je dužina putanje poluelipsa AB. Ovaj impuls, obeležićemo ga sa Δv_p, jer je pri ovom izboru A pericentar transferne elipse, iznosi, prema (XI, 26) i (XII, 7)

$$\Delta v_p = \sqrt{\frac{\lambda}{r_1}}\left[\sqrt{\frac{2}{r_1/r_2+1}} - 1\right]. \tag{37}$$

Najzad, jednom u tački B na orbiti cilja treba nešto povećati brzinu presretača, ako tamo samo dodiruje putanju cilja, da dostigne kružnu brzinu cilja, i to, prema (XI, 29) za

$$\Delta v_a = \sqrt{\frac{\lambda}{r_2}}\left[1 - \sqrt{\frac{2}{1+r_2/r_1}}\right]. \tag{38}$$

Pri ovakvom manevru ukupna promena brzine za ostvarenje susreta iznosi (tri impulsa)

$$|\Delta v| = |\Delta v_\alpha| + |\Delta v_p| + |\Delta v_a|.$$

Za prelet od A do B presretač opisuje poluelipsu velike poluose $a = \frac{\overline{AB}}{2} = \frac{1}{2}(r_1 + r_2)$, tako da je vreme preleta τ_1 prema (III, 57)

$$\tau_1 = \pi\sqrt{\frac{a^3}{\lambda}} = \frac{\pi}{\sqrt{\lambda}}\left(\frac{r_1+r_2}{2}\right)^{3/2}. \tag{39}$$

Vreme potrebno za prelet cilja od A_1 do B iznosi

$$\tau_2 = \frac{\pi - \theta}{\sqrt{\lambda}} r_2^{3/2}, \tag{40}$$

jer treba preći luk veličine $\pi - \theta$ radijana na krugu poluprečnika r_2 brzinom $v_{k2} = \sqrt{\frac{\lambda}{r_2}}$.

Iz uslova $\tau_1 = \tau_2$ dobiva se

$$\theta = \pi \left\{ 1 - \left[\frac{1}{2} (1 + r_1/r_2) \right]^{3/2} \right\}, \tag{41}$$

što određuje onu vrednost ugla θ, kad treba otpočeti ovaj manevar.

U slučaju koplanarnih ravni nedostajaće, kako smo rekli, impuls Δv_α, ali ostala dva ostaju nepromenjeni.

Susret u prethodnom slučaju dve nekoplanarne kružne putanje može se ostvariti i korišćenjem pomoćnih eliptičnih putanja na sličan način kao u slučaju običnog transfera između dve nekoplanarne kružne putanje. Naime, presretaču se pri prolazu kroz tačku A na liniji čvorova može povećati brzina (prvi impuls) za

$$\Delta v_{p1} = \sqrt{\frac{\lambda}{r_1}} \left[\sqrt{\frac{2}{r_1/\rho_a + 1}} - 1 \right],$$

da pređe na eliptičnu putanju u ravni presretačevoj, čija je žiža u centru kružne putanje presretača a apocentralni poteg ρ_a svakako veći od poluprečnika r_1 putanje presretača ($\rho_a > r_1$). U apocentru B te elipse izvodi se obrtanje ravni putanje presretača (drugi impuls) u ravan putanje cilja za

$$\Delta v_\alpha = \sqrt{\frac{\lambda}{\rho_a}} \sqrt{\frac{2}{r_1/\rho_a + 1}} \sin \frac{1}{2} \Delta \alpha,$$

i povećavanje veličine brzine v_a po toj novoj putanji (treći impuls) za

$$\Delta v_a = \sqrt{\frac{\lambda}{\rho_a}} \left[\sqrt{\frac{2}{\rho_a/r_2 + 1}} - \sqrt{\frac{2}{\rho_a/r_1 + 1}} \right],$$

da bi presretač prešao na novu eliptičnu putanju čiji će pericentar biti tačno u tački B susreta.

Najzad, se ova pomoćna eliptična putanja pretvara u B promenom brzine (smanjenjem) (četvrti impuls) za

$$\Delta v_{p2} = \sqrt{\frac{\lambda}{r_2}} \left[\sqrt{\frac{2}{r_2/\rho_a + 1}} - 1 \right],$$

u kružnu putanju cilja.

Vreme potrebno za prelet prve pomoćne poluelipse iznosi

$$\frac{\pi}{\sqrt{\lambda}} \left(\frac{r_1 + \rho_a}{2} \right)^{3/2},$$

a druge poluelipse obrnute i povećane biće

$$\frac{\pi}{\sqrt{\lambda}}\left(\frac{r_2+\rho_a}{2}\right)^{3/2},$$

što ukupno čini vreme preleta presretača od tačke A do cilja u B.

$$\tau_1=\frac{\pi}{\sqrt{\lambda}}\left[\left(\frac{r_1+\rho_a}{2}\right)^{3/2}+\left(\frac{r_2+\rho_a}{2}\right)^{3/2}\right].$$

Vreme preleta letelice — cilja od A_1 do susreta u B iznosi

$$\tau_2=\frac{2\pi+\theta}{\sqrt{\lambda}}r_2^{3/2},$$

gde je θ ugao koji pokazuje koliko u smeru kretanja (prema slici) cilj zaostaje iza presretača u odnosu na pravac od centra privlačenja.

Izjednačavanjem vremena τ_1 i τ_2 što je uslov za susret dobiva se

$$\theta=\pi\left[\left(\frac{r_1+\rho_a}{2}\right)^{3/2}+\left(\frac{r_2+\rho_a}{2}\right)^{3/2}-2r_2^{3/2}\right],$$

veličina ugla θ pri kojoj treba otpočeti manevar.

Ukupna promena brzine pri ovakvom manevru iznosi

$$|\Delta v|=|\Delta v_{p1}|+|\Delta v_\alpha|+|\Delta v_a|+|\Delta v_{p2}|.$$

4. Spust

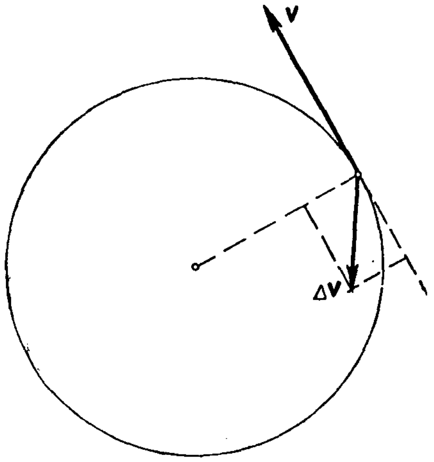
Jedan od najvažnijih kosmičkih manevara je *spust (spuštanje)* letelice na Zemlju — *prizemljenje (ateriranje)*.

Kad je reč o povratku objekata iz kosmosa na Zemlju, onda treba razlikovati one objekte koji se moraju spustiti očuvani na Zemlju — to su one letelice ili njihovi delovi (kabine, kapsule) u kojima je smeštena posada ili važni instrumenti — od onih raznih odbačenih delova letelice koji po pravilu nekontrolisano ulaze u gušće slojeve atmosfere i tamo izgore. Međutim, iz humanih i političkih razloga i njihovo spuštanje (pad) treba kontrolisati da ne bi nesagoreli pali na naseljene predele i pričinili štetu kao što je to 1979. godine postojala opasnost od pada američke kosmičke stanice „Skylab". Stoga se i u njih ugrađuju neki instrumenti koji dopuštaju izvesno upravljanje sa njima ili bar omogućuju njihovo razaranje pre pada.

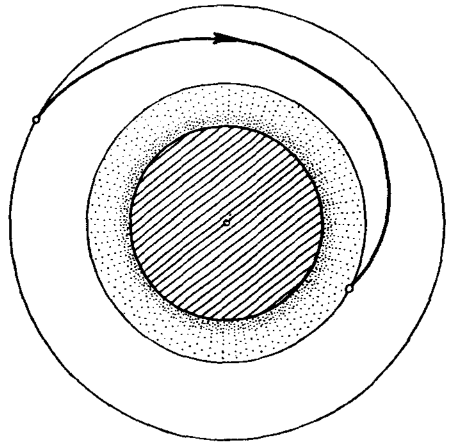
Trajektorija spuštanja sa orbite kruženja može se uglavnom podeliti na tri dela.

Prvi, prelazni, deo je putanja od silaska sa orbite do ulaska u gušće slojeve atmosfere. To je *putanja približavanja* letelice atmosferi. Pri tome neka određena tačna granica atmosfere, odn. njenih gušćih slojeva ne postoji. Uostalom gustina atmosfere opada sa visinom ali ne jednoliko i ne u istoj meri u svim pravcima od Zemlje. Međutim, neophodno je uzeti neku granicu koja treba da razdvaja gušće slojeve atmosfere, gde se aerodinamičke sile moraju uzimati u obzir, od onih, gde se aerodinamičke sile mogu zanemarivati ili smatrati samo kao poremećajne. Granica između tih slojeva se uzima obično na visini od 76 km ali ponekad i na visini od 100 km. Objekt koji se spušta prema Zemlji kreće se tada od silaska sa orbite do ulaska u gušće slojeve atmosfere *pasivnim (bespogonskim) letom*, otprilike kao kosi hitac u bezvazdušnom prostoru promenljive teže. Ono što još treba istaći, to je da pri ovakvom prelazu, jer se pretpostavlja da nema nekih značajnih otpora, ne dolazi do rasipanja mehaničke energije i zagrevanje objekta već se samo potencijalna energija pretvara u kinetičku. Dinamički problem opisivanja ovog kretanja i određivanja putanje može se, prema početnim uslovima na mestu silaska sa orbite i osobinama gravitacionog polja u oblasti prelaza, rešiti.

Ukoliko se orbita letelice ne nalazi suviše visoko, za prelaz na putanju približavanja dovoljno je letelici, koja se spušta, saopštiti pomoću kočnog uređaja raketnog motora mali, ali tačno određeni impuls (promenu brzine) u smeru suprotnom letu. Radi toga je neophodna tačna orijentacija letelice u prostoru da ne bi došlo do nepotrebne i neželjene promene ravni putanje letelice. Promena brzine Δv treba da bude ili direktno suprotna kretanju letelice ili da sa njegovim pravcem kretanja obrazuje tup ugao (sl. 55) tako da se postigne smanjenje putanjske brzine letelice i izvesna komponenta brzine prema Zemlji.



Sl. 55



Sl. 56

Mora se pri tome voditi računa da ne dođe do velikog smanjenja putanjske brzine što bi onda pri padanju prema Zemlji moglo dovesti do velikih ubrzanja i tako do povećanja težine astronauta Pri tome se kao granični dopušteni koeficijent preopterećenosti težinom smatra broj 10. Predviđa se i mogućnost ostvarenja silaska sa orbite prirodnim kočenjem broda usled onih minimalnih otpora koji postoje i van gušćih slojeva atmosfere, napr. kad dođe do kvara uređaja za kočenje, ali se to može dozvoliti samo, ako se računa sa sigurnim sagorevanjem letelice. Inače ona bi tako pre ulaska u gušće slojeve atmosfere mogla nekorisno da obilazi oko Zemlje što bi ometalo tačno proračunavanje i određivanje mesta ulaska letelice u gušće slojeve atmosfere. Najracionalniji slučaj smanjenja impulsa je onaj kad bi se prelazna putanja približavala gušćim slojevima tačno na onoj strani Zemlje koja je suprotna tački silaska (sl. 56), tj. kad putanja približavanja obrazuje luk od 180°. Međutim, teško je ostvariti tačno taj slučaj pa je prelazna trajektorija obično kraća i strmija od navedene. Ipak se, po pravilu, traži da ugao ulaska u gušće slojeve atmosfere ne prevazilazi 5°. Veličina samog impulsa za ostvarenje silaska prema dosadašnjoj praksi iznosi oko 150—200 m/s.

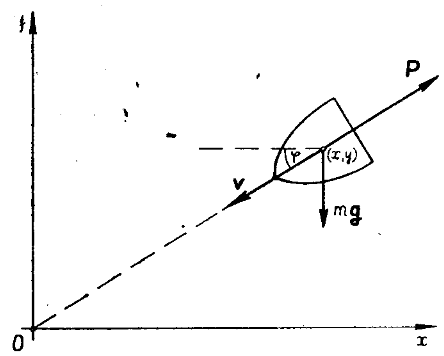
Drugi deo putanje spuštanja — ulazak i kretanje u atmosferi (re-entry) — je glavni. Sad letelica (odn. ono što se od nje spušta, jer se cele letelice bar zasad ne spuštaje) trpi *aerodinamički otpor* koji usporava objekat koji se spušta. Stoga je sad i sam oblik objekta od velikog značaja pa se oblik kabine odn. kapsule naročito podešava za prolaz kroz atmosferu. Kako letelica silazi gustina atmosfere raste a ovo dovodi do povećanja aerodinamičkog otpora, ali i do povećavanja težine u letelici i težinskog preopterećenja posade. Stoga ulaz letelice u gušće slojeve atmosfere treba da bude što usporeniji. Problem prolaza kroz atmosferu je dalje otežan činjenicom da se izuzetno visoki nivo energije graničnog sloja na letelici rasipa u obliku zagrevanja objekta. Na taj način je problem ulaska u atmosferu ekvivalentan problemu usporavanja i kinetičkog zagrevanja. Kinetičko zagrevanje se ne razmatra u dinamici, pa se u narednim izlaganjima neće uzimati u obzir pod pretpostavkom naravno da ne utiče bitno na dinamičke parametre. Inače u praksi se o tome obavezno mora voditi računa.

Posle ulaska u atmosferu, odn. njene gušće slojeve, objekt se kreće *bez pogona* pod dejstvom gravitacije i aerodinamičkog otpora. Ako se aerodinamički otpor pri tome sastoji samo od sile *čeonog otpora,* pa nema *uzgona,* onda se govori o *balističkom spuštanju* u užem smislu. Ako se pored čeonog otpora javlja i uzgon (podizanje) onda je spuštanje *planiranje (jedrenje).* Koji slučaj će nastupiti zavisi od ulaznih elemenata u atmosferu. Najzad, moguće je kad je ulaz suviše plitak i putanja nedovoljno povijena a pri velikoj brzini kretanja može doći do odbijanja objekta natrag u prostor (ricochet).

U narednim izlaganjima prikazaćemo slučaj balističkog spuštanja. Posmatrajmo stoga neki objekt koji ulazi u Zemljinu atmosferu iz prostora, kako je to shematski prikazano na sl. 57.

Uzmimo da je u nekoj tački (x, y) njegova brzina v i da putanja leta obrazuje ugao φ sa lokalnom horizontalom. Tada se dinamičke jednačine uočenog ravanskog kretanja mogu napisati u obliku

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= P\cos\varphi \\ m\ddot{y} &= P\sin\varphi - mg. \end{aligned} \tag{42}$$



Sl. 57

Aerodinamička sila otpora P određena je poznatim obrascem

$$P = \frac{1}{2}\rho v^2 c_p S, \tag{43}$$

gde je c_p koeficijent otpora, S referentna potisna površina, karakteristična za objekt koji se spušta, na pr. njegov profil, a ρ je gustina atmosfere. Na taj način se posle unošenja vrednosti (2) za P u jednačine (42) dolazi do jednačina

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= \frac{\rho v^2 c_p S \cos\varphi)}{2m}, \\ \ddot{y} &= \frac{\rho v^2 c_p S \sin\varphi}{2m} - g. \end{aligned} \tag{44}$$

Rešavanje jednačina (44) nužno zahteva korišćenje računara, ili, bar, neki postupk približavanja koraka po korak, jer se koeficijenat c_p menja sa *Mahovim* (Mach) i *Rejnoldsovim* (Reynolds) brojem, a atmosferska gustina i ubrzanje oboje zavise od visine.

Znatno uprošćenje problema, što je pod izvesnim uslovima moguće bez unošenja ozbiljnih grešaka, može se postići usvajanjem narednih pretpostavki:

1) objekt se spušta vertikalno;

2) koeficijent aerodinamičkog otpora je stalan;

3) gravitaciono ubrzanje je stalno; i

4) gustina $\rho = \rho_0 e^{-\beta y}$, gde su ρ_0 i β konstantne.

U tom slučaju se može dobiti konačno analitičko rešenje, jer se rešavanje jednačina (44) može svesti na rešavanje jednačine i to

$$\ddot{y} = -\dot{v} = \frac{\rho_0 v^2 c_p S e^{-\beta y}}{2m} - g. \tag{45}$$

Ako se ovde stavi $v^2 = Z$ i uzme u obzir da je

$$\dot{v} = -v\frac{dv}{dy},$$

može se prethodna jednačina napisati u obliku

$$\frac{dZ}{dy} = \frac{\rho_0 c_p S Z e^{-\beta y}}{m} - 2g = 0, \tag{46}$$

a ta jednačina ima integracioni faktor

$$exp\left\{\int \frac{\rho_0 c_p S}{m} e^{-\beta y} dy\right\}. \tag{47}$$

Pomoću ovog integracionog faktora dobiva se rešenje jednačine (46) u obliku

$$Z = v^2 = exp\,[-\rho_0 c_p S/\beta m) e^{-\beta y}] \times$$
$$\times \left\{\frac{2g}{\beta} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[(\rho_0 c_p S/\beta m) e^{-\beta y}]^n}{n!\,n} - 2gy + \text{const.}\right\}, \tag{48}$$

tako da se usporenje obrekta (u odnosu na g) može dati izrazom.

$$-\frac{\dot{v}}{g} = \frac{\rho_0 c_p S}{2mg} e^{-\beta y} \exp\,[(-\rho_0 c_p S/\beta m) e^{-\beta y}] \times$$
$$\times \left\{\frac{2g}{\beta} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{](\rho_0 c_p S/\beta m) e^{-\beta y}]^n}{n!\,n} - 2gy + \text{const.}\right\} - 1. \tag{49}$$

Pošto usporavanje letilice postiže vrlo velike vrednosti u poređenju sa g, jer aerodinamički otpor nadmaša težu, može se još član sa gravitacionim ubrzanjem g u jednačini (45) izostaviti što neće znatnije uticati na rezultate. Ako se to i učini jednačina (45) će postati

$$-\dot{v} = v\frac{dv}{dy} = \frac{\rho_0 v^2 c_p S}{2m} e^{-\beta y}, \tag{50}$$

tako da bude

$$v = C \exp\,[-(\rho_0 c_p S/2m\beta) e^{-\beta y}]. \tag{51}$$

Konstanta integracije C ovde može se odrediti, pošto je na visini ulaska u atmosferu

$$\exp\left[-(\rho_0 c_p S/2\beta m)e^{-\beta y}\right] \approx 1. \tag{52}$$

Prema tome, ako je brzina pri ulasku $v=v_0$, biće

$$v=v_0 \exp\left[-(\rho_0 c_p S/2\beta m)e^{-\beta y}\right], \tag{53}$$

i

$$-\frac{\dot{v}}{g}=\frac{\rho_0 c_p S v_0^2}{2mg}\exp\left[-(\rho_0 c_p S/m\beta)e^{-\beta y}\right]. \tag{54}$$

Ogledi su pokazali da jednačine (49) i (53) daju u suštini dovoljno saglasne rezultate.

Mogućnost da se u jednačini (4) zanemari član sa gravitacionim ubrzanjem g ukazuje na to, da ako ulazni ugao nije suviše mali, član sa g može da se izostavi u početnoj formulaciji (44). Prema tome za objekt koji ulazi velikom brzinom i pod dosta velikim uglom φ_n prema horizontali jednačine kretanja (3) postaju

$$\ddot{x}=\frac{\rho v^2 c_p S\cos\varphi_n}{2m}, \tag{55}$$

$$\ddot{y}=\frac{\rho^2 v^2 c_p S\sin\varphi_n}{2m}.$$

To znači da je ulazna trajektorija prava linija i usporenje dato relacijom

$$-\dot{v}=\frac{\rho v^2 c_p S}{2m}. \tag{56}$$

Ako se ovde za ρ uvede, prema pretpostavci 4/ izraz o eksponencijalnoj promeni gustine sa visinom i još uzme u obzir da je

$$\dot{v}=v\sin\varphi_n(dv/dy), \tag{57}$$

relacija (56) postaje

$$\frac{dv}{v}=\frac{\rho_0 c_p S\cos\varphi_n}{2m}e^{-\beta y}dy. \tag{58}$$

Ova jednačina se može onda integraliti i daje

$$v=v_0\exp\left[-(\rho_0 c_p S\operatorname{cosec}\varphi_n/2\beta m)e^{-\beta y}\right],$$

odakle se za visinu y_{max} na kojoj je najveće usporenje dobiva

$$y_{max}=\frac{1}{\beta}\ln\frac{\rho_0 c_p S\operatorname{cosec}\varphi_u}{\beta m}. \tag{59}$$

Odnosna brzina v_{max} postaje onda

$$v_{max}=v_0 e^{-\frac{1}{2}}\approx 0{,}61\, v_0, \tag{60}$$

pa je vrednost maksimalnog usporenja relativno prema g izraženo relacijom

$$-\left(\frac{\dot{v}}{g}\right)_{max}=\frac{\beta v_0^2\sin\varphi_u}{2ge}.$$

Znatno složeniji, ali zato i savršeniji način spusta jeste *planiranje* (*jedrenje*), kad aerodinamički otpor ima nezanemerljivu komponentu uzgona. U tom slučaju važnu ulogu u određivanju trajektorije objekta ima tzv. *aerodinamička karakteristika* spusta, a to je razmera P_u/P_0 veličine uzgona P_u i veličine P_0 čeonog otpora. Naime, tada se ukupni aerodinački otpor P(2) rastavlja u dve komponente sa različitim koeficijentima otpora c_u i c_0 — uzgona i čeonog otpora. Tada je

$$P_u = \frac{1}{2}\rho v^2 c_u S \text{ i } P_0 = \frac{1}{2}\rho v^2 c_0 S,$$

pa je, prema tome aerodinamička karakteristika spusta određena sa

$$P_u/P_0 = c_u/c_0 = \varkappa,$$

pri čemu je u balističkom slučaju $c_u = 0$ i $\varkappa = 0$.

Iako se ovde nećemo zadržavati na slučaju jedrenja i nećemo ga bliže razmatrati, treba ipak napomenuti da se pomoću njega znatno može smanjiti koeficijent težinskog opterećenja kabine, koja se spušta, na pr. svesti to na povećanja od samo 3 – 4 puta prema 8 – 10 u čisto balističkom slučaju a smanjuje se i zagrevanje. Što je takođe važno, postoji veća mogućnost manevrisanja pri prizemljenju i to kako po daljini tako i bočno pa se tako može sigurnije spustiti na određeno mesto ili pri prizemljenju izabrati podesnije mesto.

Treći deo trajektorije spusta je najkraći. Naime, aerodinamički otpor može, načelno uzev, ako ne dodje do razaranja letelice usled otpora ili do njenog prezagrevanja i sagorevanja, da smanji brzinu spuštanja do 150 – 250 m/s. Tada se putanja naglo izvija i počne strmo da se spušta pri čemu dolazi do izjednačenja otporne sile i projekcije gravitacione sile na pravac kretanja pa kretanje postaje jednoliko. Onda se na nekoj desetini kilometara nad Zemljom radi konačnog mekog spuštanja na kopno ili vodu koriste razni sistemi kočenja i upravljanja, padobranski sistemi, katapultiranje iz hermetički zatvorene kabine, prihvatanje mrežom a u novije vreme se ostvaruje i mogućnost spuštanja na pistu. U svakom slučaju da ne dođe do štetnih udara brzina u slučaju dodira sa tlom treba da bude 2 – 3 m/s. Većina ovih postupaka je eksperimentalno proverena ali ipak ponekad dolazi do priličnog odstupanja spuštanja od mesta koje je predviđeno.

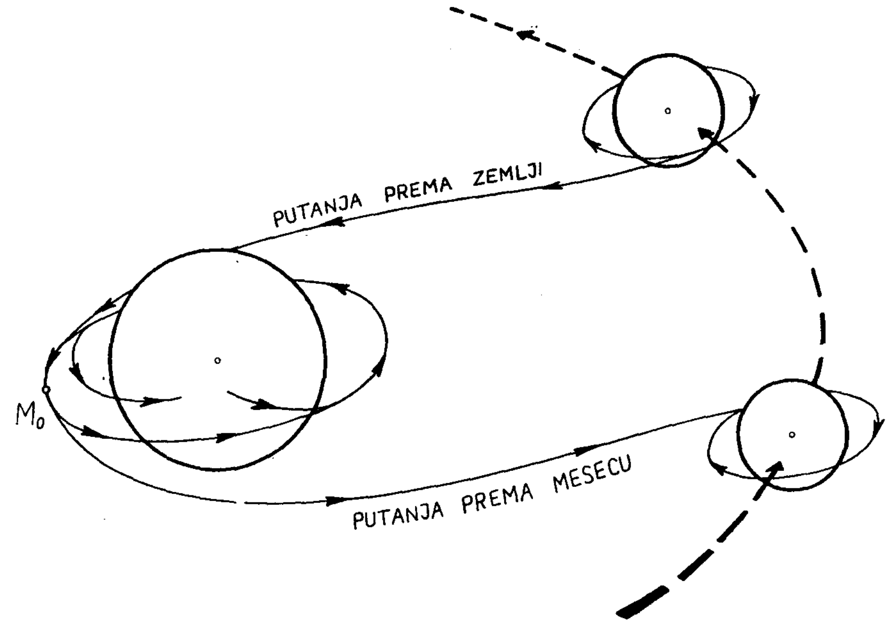
Da pomenemo samo još i to da se u slučaju postojanja aerodinamičkog usgona može dogoditi da se letilica (objekt) odbije jednom ili više puta od gušćih slojeva atmosfere, da odskače, kao pljosnata kamena pločica bačena tangentno po površini mirne vode.

5. Obletanje oko Meseca

Od raznim manevara koji su tehnički ostvarljivi i već se izvode opisaćemo ovde jedan manevar za obletanje Meseca, izbacivanje kosmičke sonde prema Mesecu, i naravno u vezi sa tim i spuštanja na Mesec.

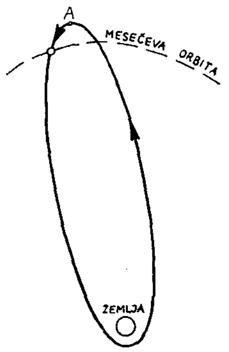
Prvo se radi veće sigurnosti i bolje određenosti izbora početnih uslova za ostvarenje obletanja oko Meseca letilica izbacuje sa Zemlje u tzv. *postajnu putanju* (parking orbit) oko Zemlje i to ne mnogo daleko od nje. Tek pošto se sve proveri pristupa se uključivanju raketnih motora i povećanju brzine letilice za let prema Mesecu. Ovde prikazani mehanizam manevra odnosi se na način i elemente obletanja „Apola 8" 1968. oko Meseca.

U nekoj tački M_0 (Sl. 58) postajne putanje (napr. na visini od 200 km nad Zemljom) letilica se ubrza do brzine *nešto veće* od minimalno potrebne za dostizanje Meseca po Homanovoj putanji. Neka to bude 10850 m/s. Letelica se onda kreće kao veštački satelit Zemlje po eliptičnoj putanii čija je žiža u centru Zemlje. Uzeto je da apogej. A ove elipse bude samo nešto malo iza Mesečeve putanje oko Zemlje (Sl. 59).

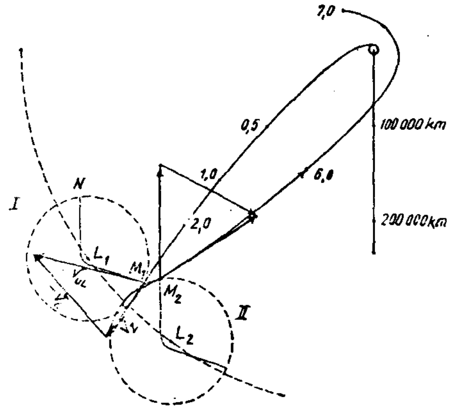


Sl. 58

Sa usvojenim početnim uslovima može se u apogej dostići za $69^h 36^{mn}$. Međutim, ako je letilica upućena prema Mesecu, ona će pre dostizanje apogeja, na prilazu orbiti Meseca, preći granicu Mesečeve gravisfere u položaju I u nekoj tački M_1 (Sl. 60) i to posle $57^h 38^{mn}$ kod „Apola 8". Neka je tada Mesec u tački L_1 na svojoj putanji oko Zemlje. U trenutku ulaza u Mesečevu sferu dejstva (tačnije oblast dejstva, jer nije sfera u pravom smislu reči) geocentralna (u odnosu na centar Zemlje), brzina letilice v_Z je oko 600 m/s pri



Sl. 59



Sl. 60

datim uslovima. Tada za određivanje ulazne selenocentralne (u odnosu na centar Meseca) brzine v_{uL} treba uzeti u obzir da sama Mesečeva gravitaciona oblast nailazi na letelicu brzinom od $v_L = 1020$ m/s prema Zemlji, pa brzinu v_{uL} treba odrediti slaganjem. Pošto letilica uđe u Mesečevu oblast dejstva, ona će se, s obzirom na početne uslove ulaska kretati u odnosu na Mesec po nekom od konusnih preseka u čijoj je jednoj žiži Mesec. Međutim, kako se Mesec zajedno sa svojom sferom dejstva kreće oko Zemlje, to kretanje letelice posmatrano sa Zemlje sad neće biti po konusnom preseku već po nekoj putanji koja je u opštem slučaju neka prostorna kriva linija. Ali, po izlasku iz Mesečeve sfere dejstva letilica, ako leti kao projektil bez pogona, podvrgava se zakonima gravitacionog privlačenja Zemlje i počinje da se kreće u odnosu na Zemlju.

Selenocentralna brzina v_{uL} kao relativna brzina prema Mesecu može se odrediti iz geocentralne brzine v_Z letelice prema Zemlji i brzine krtanja v_L Meseca po putanji kao prenosnog kretanja iz obrasca

$$v_{uL} = v_Z - v_L,$$

što je prikazano i slikom 60. Vektor v_L je, pri tome, vektor putanjske brzine Meseca u položaju L_1 kad je njegova gravisfera u položaju I.

Prema ranije navedenim početnim uslovima, ulazna selenocentralna brzina iznosila je 970 m/s. Inače ova brzina nije neka stalna veličina već se menja prema veličini geocentralne brzine i prema mestu ulaska u Mesečevu sferu dejstva.

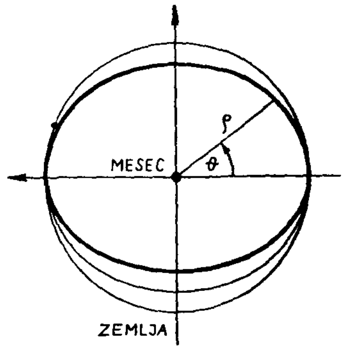
Rastojanje letilice od centra Meseca posle prodora u Mesečevu sferu dejstva zavisi naravno od mesta prodora i nalazi se negde između 66 000 km — dužine najvećeg potega oblasti dejstva i 38 400 km udaljenja tzv. neutralne tačke — najmanjeg udaljenja. Prema nekim približnim proračunima mesto prodora leterice „Apolo 8" u Mesečevu sferu dejsttva moralo je biti na rastojanju oko 55 000 km i sa veličinom brzine od oko 600 m/s.

Inače jednačina ravnog preseka one obrtne površi sa osom Zemlja-Mesec koja ograničava oblast Mesečeve oblasti dejstva glasi (IX, 21) u polarnim koordinatama sa polom u centru Meseca glasi

$$\rho = d\sqrt[5]{\left(\frac{m}{n}\right)^2}\,(1+3\cos^2\theta)^{-0,1},$$

gde je, kako smo već ranije videli (IX), d rastojanje $\overline{Mm}$ Zemlja-Mesec, ρ poteg tačke na površi koja ograničava oblast dejstva, θ polarni ugao koji obrazuje poteg sa osom Zemlja-Mesec orijentisanom od Zemlje ka Mesecu, m masa Meseca i M masa Zemlje, pri čemu je $\frac{m}{M} = \frac{1}{81,45}$. Taj presek shematski izgleda kao na Sl. 61.

Najveće vrednosti potega ρ su za $\theta = \pi/2$ i $\theta = 3\pi/2$, a najmanje za $\theta = 0$ i $\theta = \pi$ a to je na pravcu Zemlja-Mesec. Osim toga ova se oblast posebno sužava baš na pravcu Zemlja-Mesec između Zemlje i Meseba, jer se ono mesto, tzv. ***neutralna tačka***, u kome su geocentralno i selenocentralno privlačenenje jednaki nalazi na najmanjem udaljenju od Meseca i deli rastojanje Zemlja—Mesec u razmeri 10 : 1.



Sl. 61

Kakav je oblik putanje *u odnosu na Mesec* nije teško odrediti, kada se zna brzina kretanja (prva kosmička) v_1 i brzina oslobođavanja (druga kosmička) v_2 za Mesec, pri čemu je

$$v_1 = k\sqrt{\frac{m}{r}} \quad \text{i} \quad v_2 = v_1\sqrt{2},$$

i gde je univerzalna gravitaciona konstanta $k^2 = 6,665 \cdot 10^{-8}\, cm^3 g^{-1} s^{-2}$ (III, 3), $m = 7,338 \cdot 10^{25}$ g i $r = 1736,6$ km poluprečnik Meseca kao tela uzetog kao sfera. Tako se dobiva da je brzina kruženja veštačkcg satelita Meseca na rastojanju 11 – 112 km od njegove površi (slučaj Apola 8) iznosi oko 1627 m/s i vreme obilaženja oko Meseca na ovom rastojanju iznosi $1^h\, 59^{mn}$. Brzina oslobođavanja ppi poletanju sa same Mesečeve površi iznosi 2,4 km/s, dok je brzina oslobođavanja na rastcjanju 55 000 km (otprilike ono rastojanje na kojem je „Apolo 8" ušao u Mesečevu oblast oejstva) svega 422 m/s, dok na rastojanju od 66 000 km iznosi samo 385 m/s. Prema tome, ulazna selenocentralna brzina od 970 m/s dalnko premaša paraboličnu brzinu na mestu ulaska u oblast Mesečevog dejstva pa stcga mora biti hiperbolična. Kako nije usmerena prema Mesecu putanja u odnosu na Mesec mora biti hiperbola i sa dosta velikim otporom.

Vreme prolaza letelice kroz Mesečevu oblast dejstva može se izračunati kad su poznati početni uslovi. Pri navedenim početnim uslovima to vreme iznosi $33^h\, 36^{mn}$ i to do perilunijuma (periselenijuma, pericintijuma) — najbližeg mesta Mesecu — $16^h\, 48^{mn}$. Ovo je vreme prolaza u sjučaju da nema nikakvih naknadnih promena brzine, a pogotovu da nema satelitizacije, što je inače bio slučaj kod Apola 8. Drugim rečima ovo je situacija, ako posle izbacivanja prema Mesecu nema drugih impulsa.

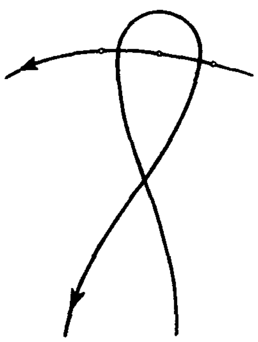
Kad letelica prođe kroz oblast dejstva Meseca, ona dolazi na granicu oblasti dejstva u N (sl. 60) i tamo izlazi iz nje. Međutim, za to vreme se i sama oblast dejstva Meseca premestila i našla u položaju II pri čemu je sad centar Meseca u tački L_2 a tačka N se premešta u tačku M_2.

Kako je selenocentralna brzina pri izlasku iz Mesečeve oblasti dejstva, kad nema nikakvih namernih promena u toku leta, s obzirom na zakon o održavanju mehaničke energije otprilike ista kao i pri ulasku, ako je izlazno mesto na istom rastojanju od Meseca kao i ulazno i ako se Mesec nije u toku proletanja letilice kroz njegovu oblast dejstva mnogo udaljio od Zemlje, to onda u odnosu na Zemlju letelica nastavlja put po elipsi. Ipak, ova elipsa nije tačno produženje one doletne elipse već deo nove elipsne putanje letilice kao veštačkcg satelita Zemlje koja je određena početnim uslovima u trenutku ulaska letelice u pretežno Zemljinu oblast dejstva. Od tih početnih uslova zavisi hoće li letelica pasti na Zemlju, postati njegov veštački satelit ili čak izaći iz Zemljine oblasti dejstva i otići međuplanetni prostor.

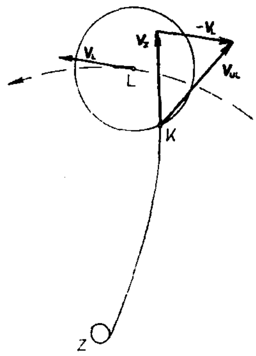
Oblik onog dela putanje projektila (letelice) u oblasti dejstva Meseca, u odnosu na Mesec, je, kako smo u našem slučaju videli, bila hiperbola. Izgled međutim, ove putanje posmatran sa Zemlje može se konstruisati, kad se posmatra kretanje tačke po hiperboli i žiža hiperbole pomera po krugu oko Zemlje sa odnosnim brzinama. Tako se dobiva petlja (deo osmice) (Sl. 62). Naravno. da se pri tome uprošćeno uzima da se ravan putanje letelice oko Meseca poklapa sa ravni Mesečeve putanje oko Zemlje. Ova kriva se može pri ovim uslovima dosta prostor konstruisati (Levantovski, 25) na naredni način.

Uzme se providni list hartije (što odgovara pokretnoj oblasti dejstva Meseca) i kreće po nepokretnom listu(što odgovara sistemu vezanom za Zemlju koja se smatra nepokretnom). Po hiperboli nacrtanoj na pokretnom listu, čija se žiža pomera po krugu nacrtanom na pokretnom listu, pomera po krugu nacrtanom na nepokretnom listu, pomera se pokretna tačka i iglom na svakom mestu probija pokretni list da bi ostavio trag na nepokretnom listu Ako se bar donekle vodi računa o razmeri kretanja vrha igle po hiperboli i pokretnog lista po nepokretnom, dobiće se dosta dobro rešenje za oblik putanje = polu-osmica. U posmatranom slučaju brzine po hiperboli treba da budu jednake njenim krajevima (na izlasku iz oblasti dejstva Meseca, ali se pri približavanju temenu hiperbole pojavljuje ubrzanje, dok je kretanje samog pokretnog lista jednoliko.

U prethodnom razmatranju pretpostavili smo (Sl. 60) da letelica ulazi u Mesečevu oblast dejstva ispred Meseca u odnosu na smer njegovog kretanja.



Sl. 62



Sl. 63

U slučaju da letelica prodire u Mesečevu oblast dejstra u tački K (sl. 63) iza Meseca, i ako se pretpostavi slična situacija kao ranije pri ulazu ispred Meseca u M_1, tj. da je veličina geocentralne brzine letelice $v_Z = 600\,\mathrm{m/s}$ a veličina geocentralne brzine $v_L - 1020\,\mathrm{m/s}$, tada će ulazna selenocentralna brzina v_{uL} biti usmerena, kako pokazuje slika, od Meseca pa uopšte neće doći do obilaženja (obletanja) Meseca, jer je uostalom Mesečeva geocentralna brzina veća od geocentralne brzine letelice.

Naravno, sva ova naša razmatranja biće drukčija, ako se letelica sa postajne putanje uputi prema Mesecu, ne po Homanovoj poluelipsi nego paraboličnom ili hiperbolicnom brzinom, ili ako postoji mogućnost da se naknadnim uključivanjem i radom raketnih motora brzina letelice mena po volji.

Pošto naša letelica ponovo uđe u Zemljinu oblast dejstva i postane, recimo, njen veštački satelit, onda se problem povratka svodi na smanjenje brzine leta do ispod kružne da se letelica počne spuštati prema Zemlji i treba izvesti manevar spusta (prizemljenja).

LITERATURA

[1] Алексеев К. Б. — Бебенин Г. Г. — Ярошевский В. А.: *Маневрирование камических аппаратов*. Москва, 1970.

[2] Андреевский В. В.: *Динамика спуска космических аппаратов на Землю*. Москва, 1970.

[3] Anđelić T. P.: *Međuplanetne putanje*. Beograd, 1960.

[4] Anđelić T. P. — Stojanović R.: *Racionalna mehanika*. Beograd, 1965.

[5] André R.: *Les satellites artificiels et l'astronautique*. Paris, 1959.

[6] Ball K. J. — Osborne G. P.: *Space Vehicle Dynamics*. Oxford, 1967.

[7] Battin R. H.: *Astronautical Guidance*. New York, 1965.

[8] Белецкий В. В.: *Очерки о движении космических тел*. Москва, 1977.

[9] Blasingname B. P.: *Astronautics*. New York, 1964.

[10] Bohrmann A.: *Bahnen künstlicher Satelliten*. Mannheim, 1966.

[11] Циолковский К. Э.: *Ракета и космическое пространство*. Москва, 1966.

[12] Чернявский Г. М. — Бертенев В. А.: *Орбиты спутников свези*. Москва, 1978.

[13] Добронравов В. В.: *Механика космического полета*. Москва, 1969.

[14] Дубошин Г. Н.: *Небесная механика*. Москва, 1975.

[15] „ „ : *Справочное руководство по небесной механике и астродинамике*.

[16] Ehricke Krafft A.: *Space Flight, I, II*. Princeton, 1860, 1862.

[17] Эльясберг П. Л.: *Введение в теорию полета искусственых спутников Земли*. Москва, 1965.

[18] Giese R. H.: *Weltraumforschung*. *I, II*. Mannheim, 1966.

[19] Гребеников Е. А. — Демин В. Г.: *Межпланетные полеты*. Москва, 1965.

[20] Herrick S.: *Astrodynamics, I, II*. New York, 1971, 1972.

[21] King-Hele D.: *Satellites and scientific Research*. London, 1960.

[22] Koelle H. H.: *Handbook of astronatical Engineering*. New York, 1961.

[23] Кондратьева Н. Я. — Одинцова В. А.: *Справачник по космонавтике*. Москва, 1966.

[24] Крисс П. Ж. — Кузнецова Л. И.: *Управление полетои космических аппаратов*. Москва, 1963.

[25] Левантовский В. И.: *Механика космического полета*. Москва, 1970.

[26] Мандрыка А. П.: *Генезис современной ракетодинамики*. Ленинград, 1971.

[27 ˈᶠeitner J. F.: *Astronautics for Science Teachers*. New York, 1965.

[28] Milanković M.: *Nebeska mehanika*. Beograd, 1935.

[29] Нариманов Г. С. — Тихонравов М. К.: *Основы теории полета космических аппаратов*. Москва, 1972.

[30] Nenadović M. — *Osnovi kosmičkog leta*. Beograd 1979.

[31] Петров В.: *Искусственые спутники Земли*. Москва, 1958.

[32] Rosser J. B. — Newton R. R. — Gross G. L.: *Mathematical Theory of Rocket Flight*. New York, 1947.

[33] R u p p e H.: *Introduction to Astronautics, I, II*. New York, 1966.
[34] S e i f e r t H. S.: *Space Technology*. New York, 1959.
[35] S t e r n e T. E.: *An Introduction to Celestial Mechanics*. New York, 1960.
[36] Ш т е р н ф е л ь д А. Ю.: *Введение в космонавтику*. Москва, 1937.
[37] Ш т е р н ф е л ь д А. А.: *Искусствение спутники*. Москва, 1958.
[38] Т а р а с о в Е. В.: *Космонавтика*. Москва, 1977.
[39] T h o m a s O.: *Astronomie*. Salzburg, 1942.
[40] Т и х о н р а в о в М. К.: *Основы теории полета искусственых спутников Земли*. Москва, 1967.
[41] T i s s e r a n d F. — A n d o y e r H.: *Leçons de cosmographie*. Paris, 1925.
[42] T i s s e r a n d F. *Traité de mécanique celeste, I—IV*. Paris, 1889.
[43] В е р и г о В. В. — Д а н к о в а Г. Ю.: *Космические траектории*. Москва, 1963.
[44] V e r t r e g t M.: *Principles of Astronautics*. Amsterdam, 1960.
[45] В о л к о в Е. Б.: *Ракетные двигатели*. Москва, 1961.

REGISTAR POJMOVA