U N I V E R Z I T E T   U   B E O G R A D U

PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET

Nikola S. Jotić

PRILOG TEORIJI EKSTREMALNIH PROBLEMA PROGRAMIRANJA

Doktorska disertacija

Beograd, 1981 g.

S A D R Ž A J

Strana

Uvod 1

1. Opšta svojstva konveksnih skupova 5

2. Mere paralelopipeda i simpleksa 13

   2.1. Specijalno utapanje n-dimenzionog simpleksa i izračunavanje njegove zapremine 19

3. Podela konveksnih skupova 23

4. Konusi i poliјedri u prostoru R^n 28

5. Nejednakosti 32

   5.1. Nejednakosti u teoriji ekstremalnih problema i teoriji nepokretne tačke 43

6. Istorijski osvrt 49

7. Linearno programiranje. Metod izlaza i njegovo intuitivno zasnivanje u R^2 i R^3 55

   7.1. Metod izlaza sa okolinskim poliedrom . 60

   7.2. Projekcija vektora γ na presek m-hiperravni u prostoru R^n. 68

8. Zadatak linearnog programiranja bez suvišnih ograničenja. Metod okolinskog polijedra . . . 73

9. Izdvajanje suvišnih ograničenja iz sistema ograničenja koji definiše konveksni polijedar sa unutrašnjom tačkom u prostoru R^n 77

10. P r i m e r i 80

U V O D

U novije vreme interes za teoriju ekstremalnih problema je sve zapaženiji. Teorija ekstremalnih problema kao posebna matematička disciplina je novijeg datuma. Upravo jedna oblast te teorije linearno programiranje počinje krajem četrdesetih godina sa poznatim simpleks-metodom [8]. G.B.Dantzig poznati američki naučnik može se nazvati utemeljivačem linearnog programiranja kao nove matematičke discipline. Njegova monografija LINEAR PROGRAMMING AND EXTENSIONS iz 1963. godine predstavlja enciklopediju linearnog programiranja.

U SSSR-u 1939. godine Kantorovič L.V. je dao ideje linearnog programiranja, ali su te ideje dugo bile u zaboravu. Kantorovića su interesovali problemi primene matematike u planiranju, pa je 1939. godine publikovao monografiju "Matematički metodi organizacije i planiranja proizvodnje". Radovi Kantorovića [23],[24] su nesumnjivo najviše pomogli u ekonomskom planiranju proizvodnje.

Pomenućemo još neke radove koji su odigrali veliku ulogu za razvoj linearnog programiranja u posleratnom periodu. Još 1936. godine Neyman D. i Pearson E.S. [35] dali su dobro poznatu lemu Neyman-Pearson za konstrukciju najboljeg kriterijuma provere proste hipoteze, koja ima jedinstvenu alternativu. Za opštiju klasu hipoteza autori su pokazali da ako postoji kriterijum koji zadovoljava njihovu lemu i u uopštenoj formi, onda je on optimalan. U 1939. godini (i u svojoj doktorskoj disertaciji u 1946. godini) Dantzig je prvi dokazao da za sasvim opšte uslove takav kriterij uvek postoji.

Interesantno je zapaziti da su uslovi uopštene leme Neyman-Pearson-a ustvari uslovi za koje rešenje zadatka linearnog programiranja sa ograničenjima za promenljive postaje optimalno.

Zasluga za razradu matematičkih osnova linearnog programiranja više nego drugima pripada Nojmanu.

U leto 1947. godine poznati ekonomist Gurlic L. radio je sa Dancingom na metodama za rešavanje zadatka linearnog programiranja. Rezultati toga rada leže u osnovi simpleks-metoda. Prosta ideja kretanja po stranama konveksnog polijedra od jednog temena do drugog (što i karakteriše simpleks-metod) ranije je bila odbačena kao neefikasna. Ipak se ova ideja pokazala kao dobra.

Fon Nojman je u vreme prvog susreta sa Dancingom 1947. godine preformulisao osnovne teoreme teorije igara. On je uveo pojam dvojstvenosti i uvideo vezu izmedju zadatka teorije igara i linearnog programiranja.

U Institutu za numeričku analizu prof. T.Mockin predložio je nekoliko numeričkih šema za rešavanje zadatka linearnog programiranja: "Metod relaksacije" (Mockin i Šjonberg [33]) i "Metod dvojnog opisivanja" (Mockin, Raifa, Tompson i Grol [34]). Kako u SAD tako isto i u drugim zemljama radilo se na novim metodama za numeričko rešavanje zadatka linearnog programiranja. Multipleks metodom Friš-a [14] obogaćena je već utemeljena disciplina linearnog programiranja. U Velikoj Britaniji istraživanja iz linearnog programiranja odvijala su se pod rukovodstvom S. Vajde. Iz tih istraživanja proizašle su odredjene varijante simpleks--metoda koje su razradili Lemke, Bil, Hejs, Oršard i drugi.

Danas su istraživanja u linearnom i nelinearnom programiranju raširena skoro u celom svetu. Metode koje su varijante već postojećih ili su pak potpuno nove daju nam mogućnosti da skoro sve probleme iz teorije ekstrema rešimo na načine koji, uz primenu elektronskih računskih mašina, predstavljaju poboljšanje u smislu ekonomičnosti.

U ovom radu razvijena je jedna nova metoda za linearno programiranje, a isto tako dat je i odredjen broj teorema koje su u uskoj vezi sa ekstremalnim problemima. S obzirom da su ograničenja od bitnog uticaja za iznalaženje metoda za numeričko rešavanje zadatka linearnog i nelinearnog programiranja, to je dosta prostora dato osnovnim svojstvima konveksnih poliedara u euklidskom prostoru R^n. Ako posebno nije istaknuto sa R^n označavamo euklidski prostor (u izvesnim slučajevima sa R^n smo označavali i n-dimenzioni vektorski prostor).

Ovaj rad je podeljen u dve glave sa deset odeljaka.

U prvoj glavi obradjen je materijal koji je uglavnom vezan za konveksne poliedre, konuse i konveksne skupove. Veći broj novih teorema vezan je za skupove čija su ograničenja oblika

$$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i \leqslant b$$

i to iz razloga što su u linearnom programiranju ova ograničenja bitna."

U drugoj glavi date su nove ideje za razvijanje numeričkih metoda u linearnom programiranju. No, obratićemo pažnju na one delove rada koji se mogu smatrati novim doprinosom razvoju teorije ekstremalnih problema. Zato ćemo dati pregled ovog rada po odeljcima.

Prvi odeljak sadrži već poznate opšte osobine konveksnih skupova. Drugi odeljak je u celosti nov doprinos. U njemu je na osnovu teoreme 2.3 izveden obrazac za zapremine n-dimenzionalnih pravilnih simpleksa preko zapremina njihovih graničnih simpleksa. Kao specijalni slučaj dobijen je obrazac za izračunavanje površine trougla pomoću njegovih strana (Heronov obrzac). Treći odeljak je takodje izvestan novi doprinos, a u vezi je sa podelom konveksnih skupova u R^2 i R^3 sa pravom odnosno ravni pod odredjenim uslovima. Odeljak četiri je od bitnog uticaja na dalje razvijanje novih metoda u programiranju. Ovde su date dve nove teoreme koje su kasnije uzete kao polazište za metod izlaza. Odeljak pet je originalni doprinos autora ovog rada datog u magistarskom radu iz 1972. godine. Neke ideje ovog odeljka mogu znatno uticati kao u teoriji ekstrema, tako isto i u matematičkoj analizi. Posebno ističemo ideju za dokazivanje- nejednakosti pomoću jednakosti $f.f^{-1} = f^{-1}.f$, gde je f konveksna funkcija u R. Na osnovu ove jednakosti dokazane su poznate nejednakosti Košija, Minkovskog, Heldera, veći broj nejednakosti koje su u vezi sa sredinama. U ovom odeljku dat je nov dokaz teoreme M. Petrovića o konveksnim funkcijama. Isto tako dato je geometrijsko tumačenje Lagranžovog identiteta.

Od odeljka šest počinje druga glava ovog rada. Najpre u odeljku šest dat je istorijski osvrt na razvoj teorije ekstremalnih problema. Dalje, u odeljku sedam razmatra se problem linearnog programiranja u R^3 i daje ideja metoda izlaza ako nam je poznata unutrašnja tačka. Zatim se daje metod izlaza sa okolinskim poliedrom u R^n. Proučava metod traženja projekcije vektora u R^n na presek odredjenog broja hiper-ravni i definiše oštra projekcija vektora. Odeljak osam posvećen je metodi za numeričko rešavanje zadatka linearnog programiranja bez suvišnih ograničenja. Odeljak devet posvećen je metodi za eliminisanje suvišnih ograničenja. Na kraju u odeljku deset dati su ilustrativni primeri.

Ovaj rad je radjen pod rukovodstvom prof.Dr Simonović Velimira, vanrednog profesora Mašinskog fakulteta u Beogradu.

Posebno se zahvaljujem mentoru Dr Simonović Velimiru, profesorima Dr Prešić Slaviši, Dr Marjanović Milosavu, kao i svojim kolegama sa Katedre za Matematiku na Mašinskom fakultetu na pomoći koju su mi ukazali prilikom izrade ovog rada.

Beograd, januara 1981.

Nikola Jotić

I. G L A V A

1. OPŠTA SVOJSTVA KONVEKSNIH SKUPOVA

Kako konveksni skupovi igraju posebnu ulogu u teoriji linearnog i konveksnog programiranja, to ćemo u ovoj glavi izneti neke poznate, ali glavne osobine konveksnih skupova. Posebno ćemo voditi računa o onim svojstvima konveksnih skupova koja nam omogućavaju bliže upoznavanje sa njihovim granicama, jer upravo su one od interesa za ekstremalne probleme.

Uglavnom ćemo se baviti konveksnim skupovima u n-dimenzionalnom vektorskom prostoru R^n, ili kada je to potrebno, bez posebnog naglašavanja, uvedenim skalarnim proizvodom u euklidovom vektorskom prostoru R^n.

Def. 1.1. Neka je M skup tačaka iz R^n. Skup M naziva se konveksnim (kažemo M "linearno konveksni", kada se jednovremeno razmatraju i drugi vidovi konveksnosti), ako za bilo koje dve tačke x,y tog skupa odsečak (segment) $[x,y]$, koji ih spaja, ceo se sadrži u tom skupu. Naprimer, svaka ravan (bilo koje dimenzije) je konveksni skup u R^n. Drugi primer za konveksni skup može poslužiti bilo koji zatvoren poluprostor, tj. skup oblika $\{x; ax = \lambda\}$, gde $a \in R^n$ različit od nula vektor, a $\lambda \in R$ (pa je λ realan broj). Konveksnim skupom javljaju se i otvoreni poluprostori $\{x: ax < \lambda\}$. Dalje, zatvorena (otvorena) lopta sa proizvoljnim centrom $x_0 \in R^n$ i poluprečnikom $r > 0$ je takodje konveksni skup.

Primetimo još da ako je $M \subset R^n$ konveksan skup onda je njegova ε-okolina $U_\varepsilon(M) = \{x \in R^n, d(x,M) \leq \varepsilon\}$ konveksan skup za svako $\varepsilon > 0$.

Neophodno je da se podsetimo izvesnog niza poznatih teorema koje ćemo ovde dati bez dokaza.

<u>Teorema 1.1.</u> Presek bilo kakve familije konveksnih skupova je konveksni skup.

Kako je svaki zatvoren poluprostor konveksni skup, to je na osnovu prethodne teoreme presek bilo kakve familije konveksnih i zatvorenih poluprostora takodje konveksan, zatvoren skup. No, iz jedne druge teoreme važi i obrnuto: svaki zatvoreni konveksni skup u R^n predstavlja presek neke familije zatvorenih poluprostora.

Def. 1.2. Presek konačnog broja zatvorenih poluprostora naziva se zatvorenim poliedrom. Napomenimo, da skup $M \subset R^u$ kažemo da je ograničen, ako se on sadrži u nekoj lopti, pa zato možemo posebno govoriti i o ograničenim konveksnim poliedrima. Jedan od najprostijih poliedara u R^n je n-dimenzionalni paralelopiped (u nekom dekart. sistemu $x_1, \dots, x_n$) zadat nejednačinama $a_i \leq x_i \leq b_i$, $i = 1,2,\dots,n$;

Def. 1.3. Konveksnom ljuskom (opnom) skupa $F \subset R^n$ nazivamo najmanji konveksni skup koji sadrži skup F, tj. presek svih konveksnih skupova koji sadrži skup F. Konveksnu ljusku skupa F obeležavaćemo sa conv F.

Teorema 1.2 Da bi tačka pripadala konveksnoj ljusci skupa $F \subset R^n$, potrebno je i dovoljno, da postoje tačke a_0, $a_1, \dots, a_n$ F (neobavezno različite izmedju sebe) i ne negativni brojevi $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n$ tako da su ispunjene jednačine

$$\lambda_0 + \lambda_1 + \dots + \lambda_n = 1 , \quad c = \lambda_0 a_0 + \lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_n a_n$$

Neka je, naprimer, k - jedan od brojeva 1, 2, . . ., i izaberimo u prostoru R^n proizvoljno k + 1 tačku $a_0, a_1, \dots, a_k$ koje ne leže u jednoj k-1 dimenzionalnoj hiper-ravni. Konveksna ljuska skupa $a_0, \dots, a_k$ označava se sa $a_0, a_1 \dots, a_k$ i naziva se k dimenzionim simpleksom.

Specijalno, tačka C pripada tada i samo tada odsečku $[a,b]$ ako je $C = \lambda a + (1-\lambda)b$, gde je $0 \leq \lambda \leq 1$.

Skup svih tačaka $x = (1- \ )a + \ b$, gde je $0 < \lambda < 1$, je interval sa krajevima $a \neq b$ i označava se sa $]a, b[$, a poluintervali koji se dobijaju pridruživanjem a odnosno b sa $[a, b[$ odnosno $]a, b]$. Polupravu koja polazi iz tačke a i sadrži tačku b označavaćemo sa $[a,b)$, a pravu koja sadrži tačke a i b sa (a,b).

<u>Teorema 1.3</u> Svaki konveksni skup $M \subset R^n$ se javlja kao konveksno telo ili kao skup koji se sadrži u hiperravni dimenzije manje od n.

<u>Def. 1.4.</u> Hiperravan najmanje dimenzije koja sadrži skup $M \subset R^n$ naziva se nosećom ravni konveksnog skupa M i označava se sa aff$M$. Konveksni skup M naziva se k dimenzionim, ako je njegova hiperravan dimenzije k. Unutrašnjost skupa M u odnosu na prostor aff$M$ označava se sa ri$M$ (relint M).

<u>Teorema 1.4</u> Ako je skup $M \subset R^n$ konveksan, onda su skupovi $\bar{M}$ i ri M takodje konveksni.

<u>Def. 1.5.</u> Skup $\bar{M} \setminus$ ri$M$ tj. granica konveksnog skupa M u odnosu na aff M , označava se sa rbd M. U slučaju kada je dim $M = n$ tj. kada se M javlja kao konveksno telo imamo: rbd $= \bar{M}$ ri $M =$ int M, što predstavlja granicu skupa M u R^n i označava se sa bd M. Ako je dim $M < n$, onda se granica bd$M$ u odnosu na ceo prostor R^n poklapa sa $\bar{M}$, jer je int M (unutrašnjost od M) $= \emptyset$.

<u>Teorema 1.5</u> Neka je $M \subset R^n$ proizvoljan konveksan skup. Ako je a iz unutrašnjosti ri M u odnosu na aff M, a b M, tada se svaki poluinterval $[a,b[$ sadrži u ri M.

<u>Teorema 1.6</u> Ako konveksni skupovi M_1 , M_2 , . . . , M_s imaju svojstvo da je ri M_1 ri M_2 . . . ri $M_s \neq \emptyset$, tada važe relacije

$$\mathrm{ri}(M_1 \cap M_2 \ \cdots \cap M_s) = \mathrm{ri} M_1 \cap \mathrm{ri}\ M_2 \cap \cdots \cap \mathrm{ri}\ M_s$$

$$\overline{M_1 \cap M_2 \cap \cdots \cap M_s} = \bar{M}_1 \cap \bar{M}_2 \ \cdots \cap \bar{M}_s$$

$$\mathrm{aff}(M_1 \cap M_2 \cap \cdots \cap M_s) = \mathrm{aff}\ M_1 \cap \mathrm{aff}\ M_2 \cap \cdots \cap \mathrm{aff}\ M_s$$

Def. 1.5. Neka je $M \subset R^n$ neograničen konveksan skup hiperravan L naziva se asimptotska za M, ako je rastojanje $d(M,L) = 0$. Svaku asimptotsku hiperravan L skupa M označimo sa Π_L.

Skup $\widetilde{M} = \cap \Pi_L$, gde je presek uzet po svim asimptotskim hiperravnima skupa M, naziva se skup asimptotskog obuhvata za M. Ako skup M nema asimptotskih hiperravni onda pišemo $\widetilde{M} = R^n$. Jasno je da je relacija $M \subset \widetilde{M}$ tačna. No iz $M_1 \subset M_2$ ne sledi $\widetilde{M}_1 \subset \widetilde{M}_2$.

Def. 1.6. Za konveksne skupove M_1 i M_2 kažemo da su razdvojeni (disjuktni), ako postoji hiperravan $\Gamma \subset R^n$ takva da je skup M_1 u jednom, a skup M_2 u drugom poluprostoru odredjenim a hiperravan Γ; hiperravan Γ naziva se razdvajajuća hiperravan. Ako bar jedan od skupova $M_1 \setminus \Gamma$, $M_2 \setminus \Gamma$ nije prazan, kažemo da su skopivi M_1 i M_2 strogo razdvojivi.

Teorema 1.7 Neka su M_1 i M_2 konveksni skupovi u R^n. Ako je $\mathrm{ri}\, M_1 \cap \mathrm{ri}\, M_2 = \emptyset$, onda su skupovi M_1 i M_2 strogo razdvojeni.

Teorema 1.8 Neka su M_1 i M_2 zatvoreni skupovi u R^n, pri čemu je jeean od njih ograničen. Ako je $M_1 \cap M_2 = \emptyset$, onda su skupovi M_1 i M_2 jako razdvojeni, tj. postoji hiperravan takva da su preseci $\Gamma \cap M_1$, $\Gamma \cap M_2$ prazni.

Def. 1.7. Neka je $M \subset R^n$ zatvoren konveksan skup. Grana F_x tačke $x \in M$ u skupu M naziva se skup koji sadrži tačku x i sve tačke $y \neq x$ iz M, za koje prava, koja prolazi kroz x i y, sadrži takav interval $I =]a,b[$ da je $x \in I \subset M$. Ako je $x \in \mathrm{ri}\, M$, tada se F_x poklapa sa M. Ova grana se naziva <u>nesopstvena</u>. Ako je x rbd M, tada se F_x sadrži u rbd M i u tom slučaju se grana F_x naziva <u>sopstvena</u>.

Za sopstvene grane možemo imati dva slučaja koji igraju važnu ulogu. Ako je F_x tačke $x \in \mathrm{rbd}\, M$ ne sadrži ni jednu drugu različitu od nje granu, onda se F_x naziva minimalna grana. Sopstvena grana skupa M naziva se maksimalnom granom, ako se ona ne sadrži ni u kakvoj drugoj sopstvenoj grani skupa M.

Ova dva slučaja ne isključuju jedan drugoga tj. sopstvena grana može biti i minimalna i maksimalna. Naprimer, skup $x_1^2 + x_2^2 = 1$ u R^3 sopstvenim granama se javljaju izvodnice cilindra koje su i minimalne i maksimalne. Očigledno, ako je F_x tačke $x \in \mathrm{rbd} M$ jednočlani skup $\{x\}$, tačka x konveksnog skupa M naziva se eksperimentalnom tačkom.

Ako je M zatvoren skup telo u R^n, gde se sve maksimalne grane javljaju kao tačke, onda se telo M naziva strogo konveksno. Naprimer kugla u euklidovom prostoru R^n.

Teorema 1.9 Grana F_x tačke $x \in M$ je najveća iz takvih konveksnih skupova $Q \subset M$, gde je $x \in \mathrm{ri}\, Q$. Neprazan presek dveju grana skupa M takodje je grana skupa M. Da bi se dve grane F_x i F_y poklapale, potrebno je i dovoljno da je $y \in \mathrm{ri}\, F_x$. Ako je $y \in \mathrm{rbd}\, F_x$, onda F_y je grana y u skupu F_x.

Teorema 1.10 Svaki konveksan zatvoren i ograničen skup M poklapa se sa konveksnom ljuskom skupa njegovih ekstremalnih tačaka.

Teorema 1.11 Neka je $M \subset R^n$ proizvoljan konveksan skup. Kroz svaku tačku $x \in \mathrm{db}\, M$ prolazi bar jedna dodirna hiperravan skupa M.

Teorema 1.12 Neka je $M \subset R^n$ zatvoreno konveksno telo. Dodirna hiperravan Γ tela M, koja prolazi kroz tačku $x \in \mathrm{bd}\, M$, sadrži granu F_x tačke x. Ako je F_x maksimalna grana onda je $F_x = \Gamma \cap M$.

Def. 1.8. Neka je M proizvoljan zatvoren konveksan skup. Tačka $x \in \mathrm{rbd}\, M$ naziva se pravilnom, ako je grana F_x te tačke maksimalna.

Neka je $M \subset R^n$ zatvoreno konveksno telo. Tačka $x \in \mathrm{bd}\, M$ naziva se regularnom ako postoji samo jedna dodirna hiperravan tela M koja prolazi kroz x.

Teorema 1.13 Skup P svih regularnih tačaka $x \in \mathrm{bd} M$ je svuda gust u granici tela M tj. $\overline{P} = \mathrm{bd} M$. Takodje je tačno za bilo koji zatvoren konveksan skup M skup svih pravilnih tačaka je svuda gust u rbd M. Šta više, ako je $M \subset R^n$ zatvoren konveksno telo P skup svih regularnih tačaka i Q skup svih pravilnih tačaka, tada je $P \cap Q$ svuda gust u bd M.

Def. 1.9. Skup $K \subset R^n$ naziva se konus sa vrhom u tački a, ako za bilo koju tačku bd K različitu od a luk a,b ceo pripada skupu K. Posebno možemo govoriti o konveksnim konusima i teles. konveksnim konusima.

Teorema 1.14 Neka je K konveksni konus sa vrhom u tački a i neka su $b_1, b_2, \ldots, b_k$ - tačke konusa K, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ nenegativni brojevi. Tada tačka $b = a + \lambda_1(b_1 - a) + \ldots + \lambda_k(b_k - a)$ takodje pripada konusu K. Ako je pri tom b_1 unutrašnja tačka konusa K i $\lambda_1 > 0$, to je i b unutrašnja tačka konusa K.

Teorema 1.15 Neka su $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$ konveksni konusi sa vrhom O. Tada je $Q = \mathrm{conv}(Q_1\ Q_2\ \ldots\ Q_{nc})$ takodje konveksni konus sa vrhom O. Tačka b pripada konusu K tada i samo tada ako je $b = b_1 + b_2 + \ldots + b_n$ gde je $b_i \in Q_i \quad i = 1, \ldots m$

Definicija 1.10. Neka je M proizvoljan konveksan skup u R^n i a njegova granična tačka. Posmatrajmo sve hiperravni koje prolaze kroz a i dodiruju M. Svaka od njih odredjuje poluprostor koji sadrži M. Presek svih tih poluprostora predstavlja zatvoren konveksan konus sa vrhom u tački ać i naziva se dodirnim konusom konveksnog skupa M u tački a. Ako je $a \in \mathrm{ri}\, M$ onda je dodirni konus noseća ravan aff M.

Def. 1.11. Neka je $M \subset R^n$ neograničen konveksan skup i $a \in M$. Posmatrajmo sve poluprave sa početkom u a, koje se cele sadrže u M. Unija svih tih poluprava čini upisani konveksni konus skupa M u tački a.

Def. 1.12. Konveksan skup $M \subset R^n$ naziva se poluograničen, ako ne sadrži u celini ni jednu pravu. Poluograničeni konveksni konus nazivamo oštrim konusom.

Teorema 1.16 Svaki zatvoren neograničen konveksan skup $M \subset R^n$ može se predstaviti u vidu sume $M = L + M'$, gde je L neka k-dimenziona ravan $(o \leq k \leq n)$, a M' poluograničen konveksan skup rasprostranjen direktnom dopunom ravni L. Upisani konus skupa M predstavlja sumu ravni L i upisanog konusa M'.

Def. 1.13. Neka je $K \subset R^n$ konveksni konus sa vrhom a. Sa $D(K)$ označavamo dualni (dvojni) konus tj. skup svih tačaka $y \in R^n$ koje ispunjavaju uslov $y(x - a) = 0$ za $x \in K$. Ako je $\bar{K} = K$ imamo $K = D(D(K)) + a$.

Teorema 1.17 Konveksni konus $K \subset R^n$ je tada i samo tada telesni, ako je $D(k)$ oštri konus.

Teorema 1.18 Neka je $K \subset R^n$ hiperravan (dimenzije k) i neka prolazi kroz tačku a. Razmatraćemo k kao konus sa vrhom a. Vektor y pripada $D(k)$ tada i samo tada ako je y ortogonalan na hiperravni K.

Teorema 1.19 Neka je L poluprostor odredjen u R^n nejednačinom $b(x - a) = 0$, gde je a R^n i $b \neq 0$. Posmatrajmo L kao konus sa vrhom a. Vektor y tada i samo tada pripada konusu $D(L)$, ako je $y = \lambda b$, gde je $\lambda \geq 0$.

Teorema 1.20 Neka je K proizvoljan zatvoren konus sa vrhom O. Ako je K_1 pravilna grana konusa K, onda je $D(k_1)$ dodirni konus konusa $D(k)$ u nekoj njegovoj tački.

Teorema 1.21 Neka je K proizvoljan zatvoren konus s vrhom O. Ako je Q dodirni konus konusa k u nekoj tački a, onda je $D(k)$ pravilna grana konusa $D(k)$.

Primer. Uvedimo u R^3 pravougli sistem koordinata $x_1\ x_2\ x_3$ i označimo sa M konus odredjen nejednačinama $(x_1)^2 \leq 2.x_2x_3$, $x_2 \geq 0$ $x_3 \geq 0$ tj. sa e označimo zrak $x_2 = x_3 = 0$ $x_1 \geqslant 0$. Konus $K = conv(M \cup R)$ je zatvoren i konveksan, a skup K_1' odredjen relacijama $x_3 = 0$, $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$ javlja se maksimalnom granom tog konusa. Zrak K_1 odredjen sa $x_1 = x_3 = 0$, $x_2 \geq 0$ takodje je grana konusa K, ali ta grana nije pravilna. $D(K_1)$ ne javlja se dodirnim konusom konusa $D(K)$.

Takodje važi $D(K) = D(conv(M \cup e)) = D(M) \wedge D(e)$

Teorema 1.22 Neka je $\mathcal{K}$ proizvoljan konveksni konus s vrhom O. Tada je $D(\mathrm{aff}\mathcal{K})$ minimalna grana konusa $D(\mathcal{K})$.

Def. 1.14. Neka su $K_1, K_2, \ldots, K_m$ konveksni konusi u R^n sa zajedničkim vrhom a. Kažemo da su konusi K_1, $K_2, \ldots, K_n$ razdvojivi u R^n, ako postoji hiper-ravan koja prolazi kroz a, a odvaja jedan od tih konusa od preseka ostalih.

Teorema 1.23 Neka $Q_1, Q_2, \ldots, Q_e$ zatvoreni konveksni konusi sa vrhom O. Ako konus $\mathrm{conv}(Q_1 \cup Q_2 \cup \ldots \cup Q_e)$ nije zatvoren, onda postoje takvi vektori $b_1 \in Q_1$, $b_2 \in Q_2, \ldots, b_e \in Q_e$ i svi nisu jednaki nuli, tako da je $b_1 + b_2 + \ldots + b_e = 0$.

Teorema 1.24 Da bi konveksni konusi $K_1, K_2, \ldots, K_m$ sa zajedničkim vrhom bili odvojivi u R^n potrebno je i dovoljno da postoje vektori b_1 $D(K_1)$, b_2 $D(K_2), \ldots, b_m$ $D(K_m)$ takvi da je bar jedan od njih različit od nule i da je

$$b_1 + b_2 + \ldots + b_m = 0.$$

Više o opštim svojstvima konveksnih skupova može se pročitati u [1] [4] [5] [6]

2. MERE PARALELOPIPEDA I SIMPLEKSA

Vektorski proizvod sistema od n-1 vektora u prostoru R^n

Pojam mere za paralelopipede i simplekse u R^n uvodimo tako da budu u saglasnosti sa merama u R^1, R^2 i R^3.

Teorema 2.1 Neka su $a_i = (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in})$, gde je $i = 0, 1, 2, \dots, n$ linearno nezavisne tačke u prostoru R^n.

Tada paralelopiped razapet nad vektorima $\overrightarrow{a_o a_1}$, $\overrightarrow{a_o a_2}, \dots, \overrightarrow{a_o a_n}$ ima meru $w(a_o, a_1, \dots, a_n)$ odredjenu determinatom

$$w(a_o, a_1 . . . , a_n) = \begin{vmatrix} 1 & a_{o1} & a_{o2} & \dots & a_{on} \\ 1 & a_{11} & a'_{12} & \dots & a_{1n} \\ - & - & - & - & - \\ 1 & a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Simpleks $(a_o, a_1, \dots, a_n)$ ima $n!$ puta manju meru od paralelopipeda.

Ova teorema dokazana je u knjizi Karola Borsuka MULTIDIMENSIONAL ANALITIC GEOMETRY (st.116 - 120), (1969.). Isto tako i vektorski proizvod od n-1 vektora u R^n uvodimo, kao i meru u R^n, da bude u saglasnosti sa već poznatom definicijom vektorskog proizvoda u R^2 i R^3.

Teorema 2.2 Neka je dat linearno nezavisan sistem vektora $\vec{a}_i = a_{i1}\vec{V}_1 + \dots + a_{in}\vec{V}_n$, $i = 1, 2, \dots, n-1$ tada je vektorski proizvod $\vec{W}$ vektora a_i, $i = 1, \dots, n-1$ vektor definisan sledećom formulom

$$\vec{W} = \begin{vmatrix} \vec{V}_1 & \vec{V}_2 & \dots & \vec{V}_n \\ a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ - & - & - & - \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \dots & a_{n-1,n} \end{vmatrix}$$

gde su $\vec{v}_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$ jedinični medjusobno ortogonalni vektori u R^n. Vektorski proizvod $\vec{W}$ vektora a_i, $i = 1, \ldots, n-1$ je ortogonalan na sve jedinične vektore $\vec{v}_i$.

Teorema 2.3 Neka su $a_i = 0, o, \ldots a_{ii}, \ldots 0)$, $i = 1, \ldots, n+1$ linearno zavisne tačke koje leže na koordinatnim osama. Obeležimo n-dimenzioni simplek odredjen tačkama a_i, $i = 1, \ldots, n$ sa A, a $n-1$ dimenzione simplekse odredjene tačkama $0, a_1, \ldots, a_{i-1}, a_{i+1}, \ldots, a_n$ sa A_i. Dalje, neka su mere simpleksa A i A_i respektivno $m(A)$ i $m(A_i)$, tada je

$$m^2(A) = \sum_{i=1}^{n} m^2(A_i) \quad \ldots\ldots \tag{1}$$

Dokaz. Zaista, prema definiciji mere za simplekse u prostoru R^{n-1} imamo:

$$m(A_i) = \frac{1}{(n-1)!}\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \ldots\ldots & 0 \\ 0 & a_{22} & \ldots\ldots & 0 \\ 0 & \ldots & a_{i-1,i-1} & 0 \\ & & & n \\ 0 & \ldots & a_{i+1,i+1} & 0 \\ 0 & \ldots\ldots & & a_{nn} \end{vmatrix} = \frac{1}{(n-1)!} a_{11}a_{22} \ldots a_{i-1,i-1}a_{i+1,i+1} \ldots a_{nn}$$

$i = 1, 2, \ldots n$.

S druge strane vektorski proizvod za vektore a_1a_2, $a_1a_3, \ldots a_1a_n$

$$\vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{v}_1 & \vec{v}_2 & \vec{v}_3 & \ldots, & \vec{v}_n \\ -a_{11} & a_{22} & 0 & \ldots, & 0 \\ -a_{11} & 0 & a_{33} & \ldots, & 0 \\ - & - & - & - & - \\ -a_{11} & 0 & 0 & \ldots, & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= \vec{V}_1 \begin{vmatrix} a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{33} & \dots & 0 \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} - \vec{V}_2 \begin{vmatrix} -a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ -a_{11} & a_{33} & \dots & 0 \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ -a_{11} & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} +$$

$$\vec{V}_s \begin{vmatrix} -a_{11} & a_{22} & \dots & 0 \\ -a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ & & & \\ -a_{11} & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \dots + (-1)^{n-1}\vec{V}_n \begin{vmatrix} -a_{11} & a_{22} & 0 \dots & 0 \\ -a_{11} & 0 & a_{33} & 0 \\ & & & \\ -a_{11} & 0 & 0 \dots & a_{n-1,n-1} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{22}a_{33}\dots a_{nn}\vec{V}_1 + a_{11}a_{33}\dots a_{nn}\vec{V}_2 + a_{11}a_{22}a_{44}\dots a_{nn}\vec{V}_3 + \dots +$$

$$+ a_{11}a_{22}a_{33}\dots a_{n-1,n-1}\vec{V}_n$$

$$A^2 = a_{22}^2 a_{33}^2 \dots a_{nn}^2 + a_{11}^2 a_{33}^2 \dots a_{nn}^2 + \dots + a_{11}^2 a_{22}^2 \dots a_{n-1,n-1}^2 \qquad (3)$$

Kako je $m^2(A) = \frac{1}{(n-1)!} A^2$ to je teorema dokazana.

Teoremu 2.3 Možemo koristiti za izračunavanje površine trougla pomoću njegovih stranica, a isto tako i za izračunavanje zapremine tetraedra pomoću površine njegovih trouglova koji čine njegovu granicu. I slično možemo dati obrazac za izračunavanje mere k-dimenzionih simpleksa pomoću mera njegovih graničnih k-1 dimenzionih simpleksa . Izvedimo najpre obrazac za izračunavanje površine trougla. Posmatrajmo tačke $A(a_1,0,0)$ $B(0,a_2,0)$ $C(0,0,a_3)$. Na osnovu teoreme 3. možemo pisati:

$$P^2_{ABC} = P^2_{OAB} + P^2_{OAC} + P^2_{OBC} \qquad (4) \quad i$$

$$\overline{AB}^2 = c^2 = a_1^2 + a_2^2$$

$$\overline{AC}^2 = b^2 = a_1^2 + a_3^2 \qquad (5)$$

$$\overline{BC}^2 = a^2 = a_2^2 + a_3^2$$

Površine pravouglih trouglova

$$P^2_{OAB} = (\tfrac{1}{2} a_1 a_2)^2, \; P^2_{OAC} = (\tfrac{1}{2} a_1 a_3)^2, \; P^2_{OBC} = (\tfrac{1}{2} a_2 a_3)^2 \qquad (6)$$

nalazimo na osnovu definicije mere.

Iz (5) imamo:

$$a_1^2 = \frac{1}{2}(b^2+c^2-a^2),\ a_2^2 = \frac{1}{2}(a^2+c^2-b^2),\ a_3 = \frac{1}{2}(a^2+b^2-c^2) \qquad (7)$$

što znači da mora da važe relacije trougla za a,b i c. Ako u (4) umesto desne strane napišemo izraz koji sledi zbog (6) i (7) dobićemo:

$$P^2_{ABC} = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}\Big[(b^2+c^2-a^2)(a^2+c^2-b^2)+(b^2+c^2-a^2)(a^2+b^2-c^2)+ +(a^2+c^2-b^2)(a^2+b^2-c^2)\Big]$$

ili

$$P^2_{ABC} = \frac{1}{4^2}\Big[c^4-(a^2-b^2)^2 + b^4-(a^2-c^2)^2 + a^4-(b^2-c^2)^2\Big]$$

i na kraju

$$P = \frac{1}{4}\sqrt{2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - a^4-b^4-c^4} \qquad (8)$$

Heronov obrazac $P^2 = s(s-a)(s-b)(s-c)$, gde je $s = \frac{1}{2}(a+b+c)$ izvodimo elementarnim putem.

Izvodjenje obrazca za izračunavanje zapremine tetraedra biće slično kao za izvodjenje obrazca za površinu trougla.

Izaberimo tačke $A(a_1, 0, 0, 0)$ $B(0,a_2,0,0)$ $C(0,0,a_3,0)$ $D(0,0,0,a_4)$ u prostoru R^4 na osnovu teoreme 3. imamo:

$V^2_{ABCD} = V^2_{0ABC}+V^2_{0ACD}+V^2_{0ABD}+V^2_{0ACD}$, gde smo sa V označili zapreminu tetraedra, a s obzirom na definiciju mere u R^4 imamo

$$V^2_{ABCD} = \left(\frac{1}{3!}\right)^2(a_1^2a_2^2a_3^2+a_1^2a_3^2a_4^2+a_1^2a_2^2a_4^2+a_1^2a_3^2a_4^2) \qquad (9)$$

No, zbog teoreme 3. imamo i sistem:

$$\begin{aligned} 4.P^2_{ABC} &= a_1^2a_2^2 + a_1^2a_3^2 + a_2^2a_3^2 \\ 4.P^2_{ABD} &= a_1^2a_2^2 + a_1^2a_4^2 + a_2^2a_4^2 \\ 4.P^2_{ACD} &= a_1^2a_3^2 + a_1^2a_4^2 + a_3^2a_4^2 \\ 4.P_{BCD} &= a_2^2a_3^2 + a_2^2a_4^2 + a_3^2a_4^2 \end{aligned} \qquad (10)$$

Ovaj sistem treba rešiti po a_1^2, a_2^2, a_3^2 i a_4^2 i njihove vrednosti zameniti u (9). Na taj način dobićemo V^2_{ABCD} u funkciji od P^2_{ABC}, P^2_{ABD}, P^2_{ACD} i P^2_{BCD}.

U specijalnom slučaju kada je $a_1 = a_2 = a_3 = a_4$

$$V_{ABCD} = \frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt[4]{27}} P \quad P$$

Bez obzira kakav će biti obrazac za izračunavanje zapremine tetraedra pomoću njegovih strana možemo zaključiti da će to biti neka složenija funkcija.

Ako označimo: $P_{ABC} = P_d$, $P_{ABD} = P_c$ $P_{ACD} = P_b$ $P_{BCD} = P_a$ i napišemo obrazce za izračunavanje površine trougla pomoću njegovih strana dobićemo sistem:

$$
\begin{aligned}
4^2.p_d^2 &= 2.\overline{AB}^2.\overline{AC}^2 + 2.\overline{AB}^2\overline{BC}^2 + 2.\overline{AC}^2.\overline{BC}^2 - \\
&\quad - \overline{AB}^4 - \overline{AC}^4 - \overline{BC}^4 \\
4^2.p_c^2 &= 2.\overline{AB}^2\overline{AD}^2 + 2.\overline{AB}^2.\overline{BD}^2 + 2.\overline{AD}^2\overline{BD}^2 - \\
&\quad - \overline{AB}^4 - \overline{AD}^4 - \overline{BD}^4 \\
4^2.p_a^2 &= 2.\overline{BC}^2.\overline{BD}^2 + 2.\overline{BC}^2.\overline{CD}^2 + 2.\overline{BD}^2.\overline{CD}^2 - \\
&\quad - \overline{BC}^4 - \overline{BD}^4 - \overline{CD}^4 \\
4^2.p_b^2 &= 2.\overline{AC}^2.\overline{AD}^2 + 2.\overline{AC}^2.\overline{CD}^2 + 2.\overline{CD}^2.\overline{AD}^2 - \overline{AC}^4 - \\
&\quad - \overline{AD}^4 - \overline{CD}^4
\end{aligned}
\tag{11}
$$

gde je:

$$\overline{AB} = a_1^2 + a_2^2 \qquad \overline{AD} = a_1^2 + a_4^2 \qquad \overline{BD} = a_2^2 + a_4^2$$

$$\overline{AC} = a_1^2 + a_3^2 \qquad \overline{BC} = a_2^2 + a_3^2 \qquad \overline{CD} = a_3^2 + a_4^2$$

Zamenom ovih vrednosti u (11) dobićemo sistem:

$$
\begin{aligned}
16.p_d^2 &= 2(a_1^2+a_2)(a_1^2+a_3) + 2(a_1^2+a_2^2)(a_2^2+a_3^2) + \\
&\quad + 2(a_1^2+a_3^2)(a_2^2+a_3^2) - (a_1^2+a_2^2)^2 - (\bar{a}_1^2 + a_3^2)^2 - (a_2^2+a_3^2)^2 \\
16.p_c^2 &= 2(a_1^2+a_2^2)(a_1^2+a_4^2) + 2(a_1^2+a_2^2)(a_2^2+a_4^2) + \\
&\quad + 2(a_1^2+a_4^2)(a_2^2+a_4^2) - (a_1^2+a_2^2)^2 - (a_1^2+a_4^2)^2 - (a_2^2+a_4^2)^2
\end{aligned}
\tag{12}
$$

$$16.p_a^2 = 2(a_2^2+a_3^2)(a_2^2+a_4^2) + 2(a_2^2+a_3^2)(a_3^2+a_4^2) +$$
$$+ 2(a_2^2+a_4^2)(a_3^2+a_4^2) - (a_2^2+a_3^2)^2 - (a_2^2+a_4^2)^2 - (a_3^2+a_4^2)^2$$

$$16.p_b^2 = 2(a_1^2+a_3^2)(a_1^2+a_4^2) + 2(a_1^2+a_3^2)(a_3^2+a_4^2) +$$
$$+ 2(a_3^2+a_4^2)(a_1^2+a_4^2) - (a_1^2+a_3^2)^2 - (a_1^2+a_4^2)^2 - (a_3^2+a_4^2)^2$$

Iz napred izloženog vidimo da dobijamo složene sisteme (10) i (12). Za rešavanje tih sistema treba pored dobrog poznavanja algebre i geometrijski smisao.

Evidentna je činjenica da će zapremina zavisiti ne samo od mernog broja strana tetraedra, već i od geometrijskog oblika. Možemo zaključiti da od svih tetraedara koji imaju istu površinu, najveću zapreminu će imati pravilni tetraedar, koji ima strane jednakostranične trouglove.

Definicija 2.1. Skoro pravilni tetraedri su oni tetraedri čije su strane podudarne. To znači da ivice ne moraju biti jednake. Koliko važnu ulogu igra oblik za zapreminu najbolje možemo videti iz skoro pravilnih tetraedara.

Verovatno da zato prilikom rešavanja sistema (10) treba strogo voditi računa u biranju vrednosti za a_1^2, jer sistem nam nudi više rešenja. Da bi to biranje olakšali, moramo voditi računa o uredjenju $a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq a_4$, pa shodno tome i treba uzimati vrednosti.

O simpleksima i paralelopipedima u euklidskom prostoru može se više naći u [7]

2.1 Specijalno utapanje n-dimenzionog simpleksa i izračunavanje njegove zapremine

Iz prethodnog izlaganja vidimo da za izračunavanje zapremine tetraedra pomoću strana koje ga ograničavaju imamo tetraedar čija su temena na koordinatnim osama. Isto tako iz sistema (10) teoreme 2.3 vidimo da imamo više rešenja za nepoznate a_i^2 $i = 1, 2, 3, 4 \ldots$ Za nas će biti od interesa obrazac ili postupak koji dobijamo za izračunavanje zapremine tetraedra pomoću njegovih strana ako ima i praktičnu vrednost.

Kao prvo možemo postaviti sledeće pitanje: za kakve tetraedre postoji obrazac koji izražava njegovu zapreminu pomoću površina njegovih graničnih trouglova.

Da bi na ovo pitanje odgovorili moramo razmotriti najpre pitanje: sa kojim minimalnim brojem realnih veličina možemo zadati ma kakav tetraedar.

Bez ograničenja opštosti možemo prihvatiti da su temena ma kakvog tetraedra zadata tačkama: $0(o, o, o)$, $A(a_1, 0,0)$, $B(b_1,b_2 0)$ i $C(C_1, C_2\ C_3)$. Ovako izabrana temena sigurno ne leže na jednoj pravoj niti pak u jednoj ravni u prostoru D^3. Isto tako možemo pretpostaviti da su a_1, b_1, b_2 C_1, C_2 i C_3 pozitivni.

Da bi odgovorili na naše prvo pitanje moramo dati sledeću definiciju.

<u>Definicija 2.1.1</u> Za n-dimenzioni simpleks iz R^n kažemo da je koordinatni ako ga možemo utopiti u prostor R^{n+1} tako da mu temena leže na koordinatnim osama u prostoru R^{n+1}.

Tetraedar OABC je odredjen sa 6 veličina, pa kako imamo 4 granična trougla, to možemo napisati četiri jednačine koje vezuju površine graničnih trouglova sa nepoznatim veličinama koje odredjuju tetraedar OABC. Znači, mogu se zapremine samo nekih tetraedara izraziti pomoću površina njegovih graničnih trouglova. Isto tako primećujemo da imamo 6 ivica tetraedra OABC, pa zato možemo dati sledeći zaključak.

Zapremina tetraedra može se izračunati jednoznačno pomoću dužina njegovih ivica. Zaista, zapremina tetraedra OABC iznosi:

$$V = \frac{1}{6} a_1 b_2 C_3,$$ a sistem:

$$\overline{OA} = a_1 \qquad \overline{AB}^2 = (b_1 - a_1)^2 + b_2^2$$

$$\overline{OB}^2 = b_1^2 + b_2^2 \qquad \overline{AC}^2 = (C_1 - a_1)^2 + C_2^2 + C_3^2 \tag{1}$$

$$\overline{OC}^2 = C_1^2 + C_2^2 + C_3^2 \qquad \overline{BC}^2 = (C_1 - b_1)^2 + (C_2 - b_2)^2 + C_3^2$$

omogućava nam da b_2 i C_3 izrazimo pomoću dužina ivica tetraedra OABC i to:

$$b_2^2 = \frac{2\,\overline{OA}^2\overline{OB}^2 + 2\,\overline{OB}^2 AB^2 + 1\,\overline{OA}^2 AB^2 - (\overline{OB}^4 + \overline{OA}^4 + \overline{AB}^4)}{4\,OA^2}$$

$$C_3^2 = \overline{OC}^2 - \frac{(\overline{OC}^2 + \overline{OA}^2 - \overline{AC}^2)^2}{4\,OA^2} - \tag{2}$$

$$- \frac{\left[2(\overline{OA}^2(\overline{OC}^2+\overline{OB}^2-\overline{BC}^2)-(\overline{OB}^2+\overline{OA}^2-\overline{AB}^2)(\overline{OC}^2+\overline{OA}^2-\overline{AC}^2)\right]^2}{4\,\overline{OA}^2\left[2\,\overline{OA}^2 OB^2 + 2\,\overline{OB}^2\overline{AB}^2 + 2\,\overline{OA}^2 AB^2 - (\overline{OA}^4+\overline{OB}^4+\overline{AB}^4)\right]}$$

Posle sredjivanja izraza na desnoj strani za C_3^2 i zamenjivanja u formulu za V dobićemo obrazac za zapreminu tetraedra pomoću dužine njegovih ivica.

Kao što smo iz napred izloženog zaključili da je zapreminu tetraedra, čija su temena data na koordinatnim osama u prostoru R^4, moguće izraziti preko površine njegovih graničrih trouglova, to ćemo sada razmotriti uslove pod kojima možemo utopiti tetraedar OABC iz R^3 u prostor R^4 tako da mu temena leže na pravouglim koordinatnim osama. Bolje reći da vidimo pod kojim uslovima postoji tačka $O_1(x_1\ x_2\ x_3\ x_4)$ R^4 takva da "vidimo" sve ivice tetraedra OABC pod pravim uglom, tj. da je:

$$1.\ \vec{OO_1}\cdot\vec{AO_1} = 0 \quad 2.\ \vec{OO_1}\cdot\vec{BO_1} = 0 \quad 3.\ \vec{OO_1}\cdot\vec{CO_1} = 0 \tag{3}$$

$$4.\ \vec{AO_1}\cdot\vec{BO_1} = 0 \quad 5.\ \vec{AO_1}\cdot\vec{CO_1} = 0 \quad 6.\ \vec{BO_1}\cdot\vec{CO_1} = 0$$

Odakle dobijamo sistem:

1. $x_1(x_1-a_1) + x_2^2+x_3^2+x_4^2 = 0$

2. $x_1(x_1-b_1)+x_2(x_2b_2)+x_3^2+x_4^2 = 0$ (4)

3. $x1(x_1-C_1) + x_2(x_2-C_2) + x_3(x_3-C_3) + x_4^2 = 0$

4. $(x_1-a_1)(x_1-b_1) + x_2(x_2-b_2) + x_3^2 + x_4^2 = 0$

$$
\begin{aligned}
&5. \quad (x_1-a_1)(x_1-C_1) + x_2(x_2-C_2) + x_3(x_3-C_3) + x_4 = 0 \\
&6. \quad (x_1-b_1)(x_1-C_1) + (x_2-b_2)(x_2-C_2) + x_3(x_3-C_3) + x^4 = 0
\end{aligned}
\qquad (4)
$$

Iz ovog sistema možemo dobiti sistem:

$$
\begin{aligned}
&1. && x_1(x_1-a_1) + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 0 \\
&1-2 && (a_1-b_1)x_1 - b_2x_2 = 0 \\
&1-3 && (a_1-C_1)x_1 - C_2x_2 - C_3x_3 = 0 \\
&1-4 && b_1x_1 + b_2x_2 = a_1b_1 \\
&1-5 && C_1x_1 + C_2x_2 + C_3x_3 = a_1C_1 \\
&1-6 && (a_1-b_1-C_1)x_1 - (b_2+C_2)x_2 - C_3x_3 = b_1C_1
\end{aligned}
\qquad (5)
$$

Odakle dobijamo:

$$
\begin{aligned}
x_1 &= b_1 \\
x_2 &= \frac{b_1(a_1 - b_1)}{b_2} \\
x_3 &= \frac{b_1(b_1C_2 + a_1b_2 - a_1C_2 - C_1b_2)}{b_2\ C_3} \\
x_4^2 &= b_1(b_1 \; a_1) + \frac{b_1^2(a_1-b_1)^2}{b_2^2} + \frac{b_1^2(b_1C_2+a_1b_2-a_1C_2-C_1b_2)^2}{b_2^2\ C_3^2} \\
x_4^2 &= (a_1-b_1)b_1 - \frac{b_1^2C_3^2(a_1-b_1)^2 + b_1^2(b_1C_2+a_1b_2-a_1C_2-C_1b_2)^2}{b_2^2\ C_3^2}
\end{aligned}
\qquad (6)
$$

Uslov 1-5 $\quad C_1b_1+C_2\dfrac{b_1(a_1-b_1)}{b_2} + C_3\dfrac{b_1}{b_2\ C_3}(b_1C_2+a_1b_2-a_2C_2-C_1b_2) =$

$= a_1C_1$

ili posle sredjivanja

uslov 1-5 $\quad b_1 = C_1$

Uslov 1-6 $\quad (a_1\ b_1-C_1)b_1-(b_2+C_2)\dfrac{b_1(a_1-b_1)}{b_2} - C_3\dfrac{b_1(b_1C_2+a_1b_2-}{b_2\ C_3}$

$\dfrac{-a_1C_2-C_1b_2)}{b_2\ C_3} =$

$= - b_1C_1$

ili:

$$b_1 c_2 = a_1 b_2$$

Ako uočimo izraz za x_4^2 u (6) možemo zaključiti da je $a_1 \quad b_1$ i da je izraz u srednjoj zagradi pozitivan.

Iz svega do sada izloženog vidimo da koordinatne tetraedre možemo tražiti u skupu kosouglih tetraedara tj. tetraedara čije bilo koje dve susedne ivice zaklapaju oštar ugao.

Uslov pod kojima n-dimenzioni simpleks možemo utopiti u prostor R^{n+1} tako da mu temena leže na koordinatnim osama, možemo slično kao sa tetraedrom potražiti koristeći se specijalno zadatim temenima pomoću koordinata u R^n i to: $A_0(o,o,\ldots,0)$ $A_1(a_{11},0,\ldots,0)$ $A_2(a_{21}\ a_{22},\ 0,\ldots,0),\ldots,A_n(a_{n1}a_{n2},\ldots,a_{nn})$.

Tačka $O_1(x_1,\ x_2,\ldots,x_n,x_{n+1})$ R^{n+1} iz koje se sve ivice "vide" pod pravim uglom zadovoljava sledećih $\frac{(n+1)n}{2}$ jednačina:

$$\overrightarrow{A_iO_1}\cdot\overrightarrow{A_jO_1} = 0, \quad i \quad j; \quad i,j = 0,1,\ldots,n \tag{7}$$

Kao i kod traženja uslova za koordinatne tetraedre, tako isto i ovde možemo zaključiti da je skup koordinatnih n-dimenzionih simpleksa podskup kosouglih n-dimenzionih simpleksa. Izračunavanje zapremine n-dimenzionog simpleksa odnosno njegove mere bilo bi skopčano sa rešavanjem algebarskih jednačina tipa (10) kao u prethodnom odeljku 2.3.

Ako je koordinatni n-dimenzioni simpleks S pravilan tj. ako su mu temena: $A_1(a,o,\ldots,o)$ $A_2(o,a,o,\ldots,o),\ldots,$ $A_i(o,\ldots,o,a,o,\ldots,o),\ldots,A_{n+1}(o,\ldots,a)$ i ako obeležimo njegovu zapreminu sa V_n a zapremine njegovih graničnih simpleksa sa V_{n-1} možemo, koristeći se teoremom 2.3, napisati veze:

$$V_n^2 = (n+1)\left[\frac{a^n}{n!}\right]^2 ; \quad V_{n-1}^2 = n\left[\frac{a^{n-1}}{(n-1)!}\right]^2 \tag{8}$$

odakle sledi:

$$V_n = \frac{\sqrt{n+1}}{n!}\left[\frac{(n-1)!}{n}\right]^{\frac{n}{2(n-1)}} V_{n-1}^{\frac{n}{n-1}} \tag{9}$$

Obrazac (9) je kao što vidimo jednostavno izveden zbog dobro postavljenog pravilnog n-dimenzionog simpleksa S u R^{n+1}.

3. PODELA KONVEKSNIH SKUPOVA U R^2 I R^3

Problem linearnog a i nelinearnog programiranja se uspešno rešava ako poznajemo bitna svojstva konveksnih skupova. U ovom paragrafu iznalazićemo neke nove teoreme na kojima se baziraju pojedine nove metode u programiranju.

Kao prvo razmotrićemo jedan problem koji je u vezi sa konveksnim skupovima u R^2 i R^3, tačnije o specijalnom sečenju konveksnih skupova pomoću prave, odnosno ravni u R^2 i R^3. Problem je postavio Ž.Živanović [39] (1973.) a on glasi:

Da li možemo bilo kakav ograničen konveksan skup u ravni preseći pravom, tako da nova dva konveksna skupa imaju jednake površine i jednake dužine ruba -obime. Slično pitanje možemo postaviti i za prostor R^3, tj. da li možemo preseći bar jednom ravni svaki ograničeni konveksni skup u R^3, tako da nove dobij dva konveksna skupa imaju jednake zapremine, kao i jednake površine njihovih granica.

Za ova dva pitanja odgovor je pozitivan i jednostavan, ako posmatramo, na primer, u ravni: krug, kvadrat, pravougaonik, paralelogram, deltoid, kao i puno sličnih figura, ili u prostoru R^3 paralelopiped, konus, pravilnu trostranu prizmu i td. Nije teško uočiti da sečenje sa postavljenim uslovima u ravni možemo za napred nove cele figure obaviti sa više pravih odnosno u prostoru sa više različitih ravni. No teško je zaključiti da se može dati pozitivan odgovor za bilo kakve ograničene konveksne skupove u ravni odnosno prostoru. Na ovom problemu u ravni radilo je više matematičara, ali dokazi njihovih tvrdjenja nisu posebno interesantni za postavljanje sličnog pitanja za R^3

Radeći na datom problemu našao sam pozitivan odgovor za konveksne skupove u ravni, ali sam uočio da se sličnim načinom može dati i pozitivan odgovor za konveksne skupove u prostoru R^3. Za prostore R^n možemo postaviti slično pitanje i na njega dati pozitivan odgovor na već iniciran način, koji je dat u dokazima sledećih teorema.

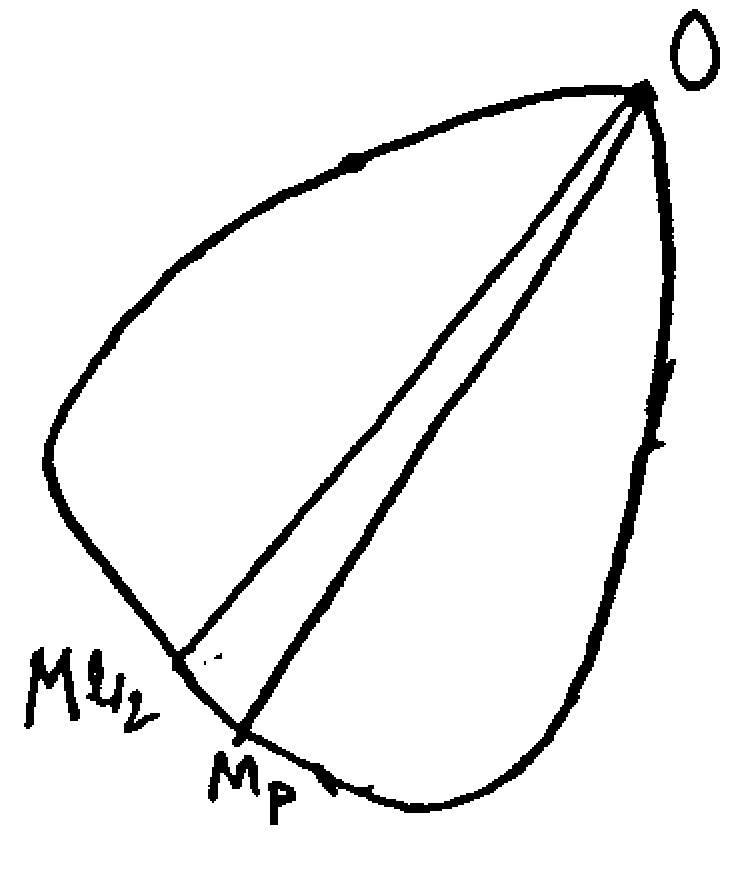
Teorema 3.1. Svaki ograničeni konveksni skup C u R^2 možemo preseći bar jednom pravom p tako da novodobijena dva konveksna skupa C_1 i C_2 imaju jednake površine i jednake obime.

D o k a z: Iz napred navedenih primera možemo zaključiti da, naprimer, kvadrat možemo preseći pravama koje prolaze sredinama njihovih paralelnih strana, kao i pravama koje sadrže njihove dijagonale. Za deltoid uočavamo pravu koja sadrži dužu dijagonalu i slično možemo bez teškoća naći odgovore na gore postavljeno pitanje za niz simetričnih figura u ravni.

Da bi dokazali teoremu 1. uočimo dve evidentne osobine za ograničene konveksne skupove u R^2 i to: kroz bilo koju tačku na rubu konveksnog skupa iz R^2 možemo povući jednu pravu koja deli površinu datog skupa na pola i možemo povući pravu koja deli dužinu ruba - obim na dva jednaka dela.

Predjimo najzad na dokaz Teoreme 1. Izaberimo bilo koju tačku 0 sa ruba L konveksnog skupa C, a zatim s obzirom na tačku 0 kao početak, sve ostale tačke obeležimo sa M_d, gde je d-broj koji predstavlja dužinu luka $0M_d$, uzimajući da od 0 do M_d idemo u direktnom smeru, tj. $d=d(0,M_d)$ (Sl. 1.) kratko napravimo skalu na rubu L konveksnog skupa C koristeći def. dužine luka.

S obzirom da je konveksni skup C ograničen, to je l $d \in I = [0, l]$, l je konačan pozitivan broj i predstavlja dužinu ruba odnosno obim skupa C.



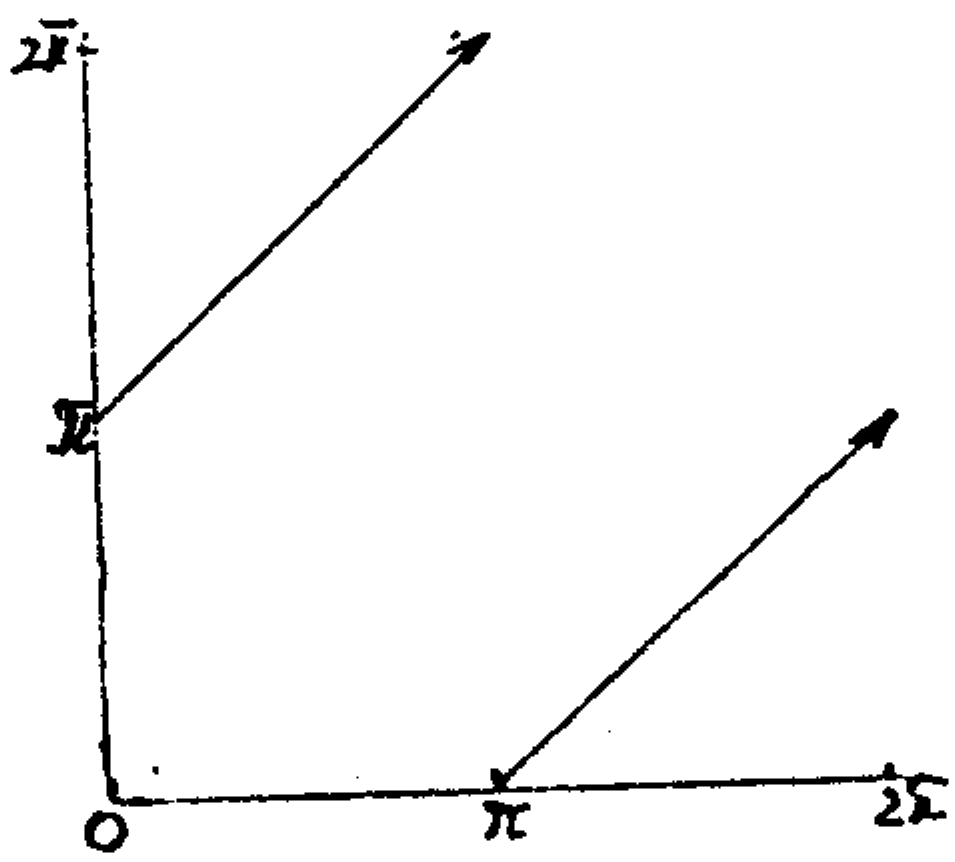
Sl. 1.

Dalje, uvedimo dve realne funkcije $s(d)$, $p(d)$ koje preslikavaju I na I i to tako da definicija funkcije $s(d)$ sledi iz činjenice da prava koja spaja tačke M_d i $M_{s(d)}$ polovi dužinu ruba skupa C, a funkcija $p(d)$ se definiše činjenicom da prava koja spaja tačku m_d i tačku $M_{p(d)}$ polovi površinu konveksnog skupa C. Primećujemo da su funkcije $s(d)$, $p(d)$ jednoznačne. Funkcija $s(d)$ je neprekidna i rastuća za

$d \in [0, M_{1/2}[$, u tački $1/2$ ima prekid prve vrste odnosno skok, a za $d \in [M_{1/2}, 1]$, $s(d)$ je ponovo neprekidna i rastuća funkcija. Funkcija $p(d)$ slično kao i funkcija $s(d)$ za $d \in [0,p[$ je rastuća i neprekidna funkcija, za tačku p funkcija $p(d)$ ima prekid, a nadalje za $d \in [p,1]$ $p(d)$ je rastuća i neprekidna. Ako uzmemo da je specijalno konveksni skup C kružnica poluprečnika 1 onda grafici funkcija $s(d)$ i $p(d)$ se ne bi razlikovali (Sl. 2.).

$$s(d) = \begin{cases} \pi + d, & d \in [0, \pi[\\ d - \pi, & d \in [\pi, 2] \end{cases}$$

$$p(d) = s(d) \quad \text{za} \quad d \in I$$



Sl. 2.

Neka je kao na slici 1. prava $OM_{1/2}$ prava koja polovi dužinu ruba L skupa C, a prava OM_p prava koja polovi površinu skupa C tj. neka je $1/2 < p$ ako to nije slučaj pravljenjem skale desne orijentacije, onda će to biti za slučaj pravljenja skale leve orijentacije. Znači to nije bitno ograničenje za razmatranje problema. Kako su $s(d)$, $p(d)$ rastuće i neprekidne funkcije na intervalima $[0, 1/2[$ i $[1/2\ 1]$ i $[0,p[$ i $[p,1]$ to možemo zaključiti da je:

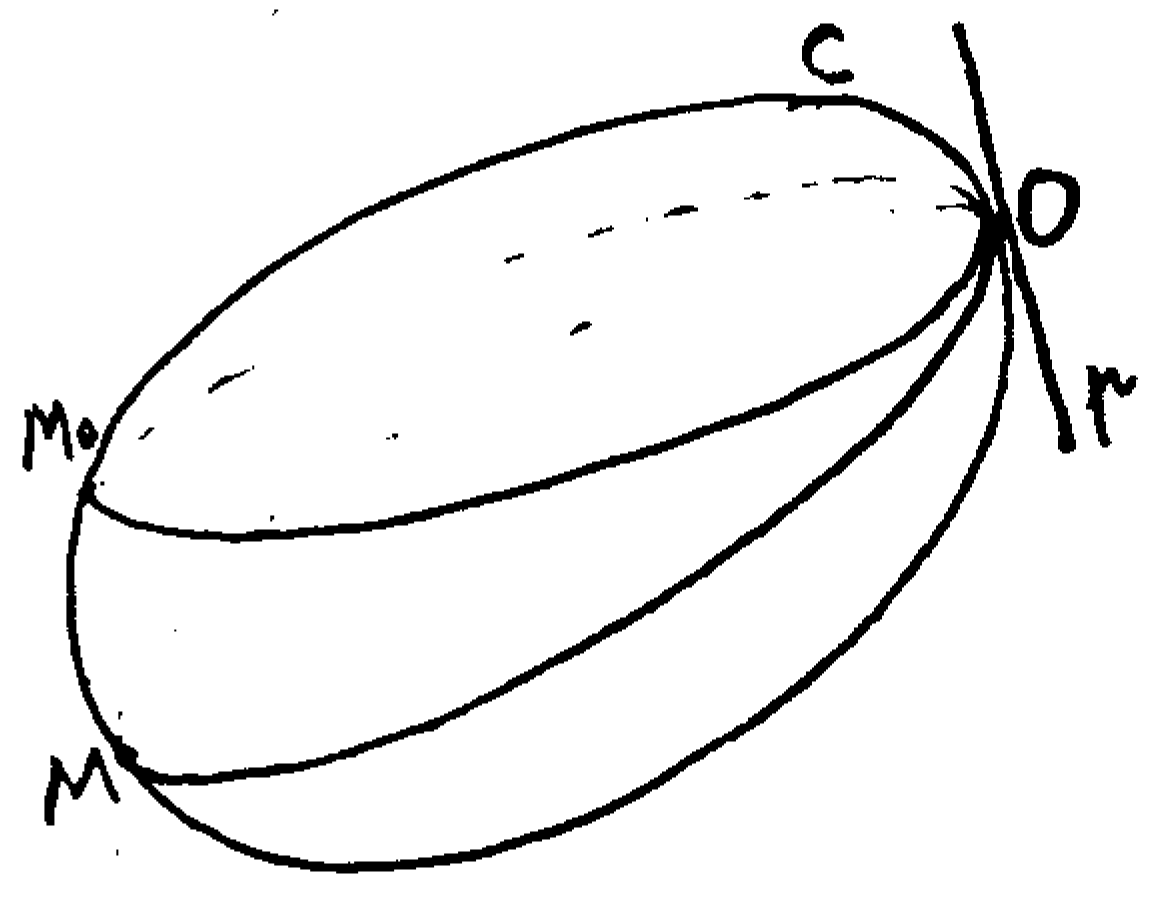
$$s(0) < p(0) \quad \text{i}$$
$$s(1/2) > p(1/2)$$

pa postoji bar jedno $d \in (0,1/2)$ takvo da je $s(d) = p(d)$, što je i trebalo dokazati.

<u>Teorema 3.2.</u> Svaki ograničen konveksni skup K u R^3 možemo preseći bar jednom ravni R tako da novodobijeni konveksni skupovi K_1 i K_2 imaju jednake zapremine i jednake površine.

<u>D o k a z:</u> Kao i u prethodnoj teoremi možemo slično i ovde smatrati za evidentne činjenice da kroz svaku tačku konveksnog skupa K možemo postaviti ravan koja polovi povr-

šinu skupa K, kao i da kroz svaku tačku skupa K možemo postaviti ravan koja polovi zapreminu konveksnog skupa K. Nije teško uočiti i činjenicu da kroz svaku tačku skupa K možemo postaviti ravni koje polove površinu odnosno zapreminu skupa K, a da budu paralelne datoj pravoj. Radi dokaza Teoreme 2. izbaerimo bilo koju tačku ruba $0 \in \mathrm{rbd}\, K$ i bilo koju ravan R_p koja prolazi kroz tačku 0 a polovi površinu skupa K, a zatim kroz tačku 0 pravu p koja leži u ravni R_1 i dodiruje skup K. Najzad, kroz pravu p postavimo ravan R_V koja polovi zapreminu konveksnog skupa K. Da bi definisali realne funkcije kao u Teoremi 1., potrebno je ponovo napraviti jednu kružnu odnosno zatvorenu skalu. Zbog toga kroz tačku 0 postavimo ravan R_n koja je normalna na presek ravni R_p i R_V odnosno na pravu p. Ravan R_n seče konveksni skup duž neke zatvorene konveksne linije C. Sve tačke krive C možemo označiti sa M_d, gde je indeks d broj koji predstavlja dužinu luka od tačke 0 do tačke M_d ako izaberemo smer kretanja desne orijentacije. Na taj način smo dobili i dve presečne tačke M_p i M_V ravni R_p i ravni R_V sa krivom C. S obzirom da smo za pravljenje skale izabrali proizvoljno smer desne orijentacije, to možemo slobodno predpostaviti da je $p < V$. Možemo primetiti da je skala na krivoj C realna, jer ako bi R_n sadržalo samo 0 iz K onda bi to bila tangentna ravan, što je suprotno pretpostavci da je R_n normalna na p.



Sl. 3.

Sada definišimo dve realne funkcije koje preslikavaju $I = [0,2C]$ na samog sebe. Najpre definišimo funkciju $P(d)$, $d \in [0,2C]$ zahtevom da ravan $R_{p(d)}$ prolazi kroz tačke M_d i $M_{p(d)}$, paralelna je pravoj p i polovi površinu skupa K. Funkciju $V(d)$, $d \in I$ definišemo zahtevom da ravan $R_{V(d)}$ prolazi kroz tačke M_d i $M_{V(d)}$, polovi zapreminu konveksnog skupa K i paralelna je pravoj p. Ovako definisane funkcije $P(d)$ i $V(d)$

su jednoznačne. Dalje, možemo zaključiti da je $P(d)$ rastuća i neprekidna funkcija za $d \in [0,p[$, za p ima skok, a za $d \in [p,2C]$ ponovo rastuća i neprekidna funkcija. $V(d)$ je rastuća i neprekidna u intervalima $[0,V[$ i $[V, 2C]$, a za $d = V$ ima prekid prve vrste odnosno skok.

Specijalno ako bi konveksni skup u R^3 bila kugla K poluprečnika jedan, onda bi za $P(d)$ i $V(d)$ imali jednostavne funkcije koje bi bile identične na skupu I.

$$P(d) = \begin{cases} \pi + d, & d \in [0,\pi[\\ d - , & d \in [\pi, 2\pi \end{cases}$$

$$V(d) = P(d), \quad d \in I$$

Prema do sad izloženom možemo zaključiti da je:

$$P(0) = p, \quad P(p) = 2C$$

$$V(0) = v, \quad V(p) < 2C$$

a kako su obe funkcije rastuće i neprekidne na intervalu $[0,p[$ to mora postojati bar jedna tačka $d_o \in [0,p]$ takva da je $P(d_o) = V(d_o)$ tj. mora postojati bar jedna ravan koja prolazi kroz tačke M_{do} i $MP(d_o)$ i paralelna pravoj p a da polovi zapreminu i površinu ograničenog tela odnosno skupa K iz R^3.

Iz napred izloženog dokaza može se zaključiti da Teorema 2. može imati možda i bolju formulaciju.

<u>Teorema 3.3.</u> Svaki konveksni ograničeni skup K u R^3 može se preseći bar jednom ravni, tako da površina i zapremina skupa K budu podeljene na pola, a da ta ravan bude paralelna unapred datoj krivoj.

Iz napred izloženog načina da dokaz Teoreme 1. i Teoreme 2. možemo bez poteškoća postaviti i slično pitanje za konveksne skupove u prostoru R^n, ali pre toga treba dati dobre definicije mere unutrašnjosti skupa, kao i njegove granice.

Možda je od interesa da se detaljnije ispitaju napred definisane funkcije $s(d)$, $p(d)$ $P(d)$, $V(d)$ s obzirom da su nam obezbedile dokaz o postojanju bar jednog sečenja koje je prirodno i specijalno.

4. KONUSI I POLIJEDRI U PROSTORU R^n

Prirodno, neke figure u prostoru R^2 ili tela u prostoru R^3 mogu biti zadani nejednačinom, a oblika $f_j(x)-b_j \leq 0$, $(j = 1,2,\ldots,m)$. Na primer: u ravni kružna ploča poluprečnika $r = 1$, odnosno krug, nejednačinom $x^2 + y^2 \leq 1$.

Kvadrat može biti dat nejednačinom $|x| + |y| \leq 1$ odnosno sistemom nejednačina: $x + y \leq 1$, $-x + y \leq 1$, $x-y \leq 1$, $-x - y \leq 1$.

Kugla i oktaedar zadati su nejednačinom $x^2+y^2+z^2 \leq 1$ odnosno $|x| + |y| + |z| \leq 1$.

Mi ćemo kao prvo razmotriti ome konveksne skupove koje možemo zadati pomoću nejednačina:

(1) $\pi_j = a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2+\ldots+a_{jn}x_n-b_j \leq 0$; $(j=1,2,\ldots,m)$; $x \in R^n$. Konveksni skupovi zadati sistemom (1) mogu biti ograničeni ili ne. Za nas će od posebnog interesa biti polijedri ili konusi zadati sistemom nejednačina (1). Ukoliko posebno ne naglasimo kad govorimo o polijedru ili konusu smatraćemo da su sva ograničenja iz sistema (1) potrebna za njihovu definiciju. Radi daljeg izučavanja nekih osobina polijedara i konusa uvešćemo sledeće definicije.

<u>Definicija 4.1.</u> Za dve hiperravni π_j: $\sum_{i=1}^{n} a_{ei}x_i-b \leq 0$ i π_k: $\sum_{i=1}^{n} a_{ki}x_i-b_k = 0$ kažemo da su susedna ograničenja polijedra odnosno konusa ako, bar jedna tačka njihovog preseka pripada polijedru odnosno konusu.

<u>Definicija 4.2.</u> Za polijedar Ωu_0 kažemo da je oko-

okolinski polijedar u tački U_o polijedra Ω ako je tačka U_o unutrašnja tačka polijedra Ω, a sistem ograničenja koja definišu Ω_{U_o} dobijamo iz sistema ograničenja za definiciju polijedra Ω translacijom istih u pravcu hiperlopte $S: \sum_{i=1}^{n} (x_i-U_{io})^2 = r^2$, tako da nova ograničenja dodiruju S. Centar hiperlopte je $U_o = (U_{1o}, U_{2o}, \ldots U_{no})$ a poluprečnik $r = \min_j d(U_o, \pi_j)$.

Iz same definicije okolinskog polijedra Ω_{Uo} možemo zaključiti: 1. Da je broj ograničenja za definiciju polijedra Ω i Ω_{Uo} isti.

2. Ako su hiperravne π_1 i π_k susedne za polijedar Ω tada su i π_{1U_o} i π_{kuo} susedne za polijedar Ω_{uo}, gde su π_{1uo} i π_{kuo} jednačine hiperravni koje odgovaraju hiperravnima π_1 i π_k. U svakom temenu polijedra imamo najmanje n hiperravni, koje prolaze kroz njega, pa su sve te hiperravni i susedne.

<u>Definicija 4.3.</u> Za konus K^* sa vrhom u tački V_1 kažemo da je unutrašnje transliran konus konusa K sa vrhom V, ako je $V_1 \in K$ i prilikom te translacije V predje u V_1.

Sada ćemo razmotriti neke osobine koje su u vezi sa unutrašnjim transliranjem konusa.

<u>Teorema 4.1.</u> Neka je dat konus $K \subset R^n$ sa vrhom V i njemu unutrašnje transliran konus K^* sa vrhom V_1. Neka je hiperravan π van konusa K i neka je V najbliža tačka konusa K od π, tada je i vrh V_1 konusa K^* najbliža tačka konusa K^* od hiperravni π.

<u>Dokaz:</u> Kroz vrh V konusa K postavimo novu hiperravan π_V koja je paralelna sa π, odnosno da su njihovi vek-

tori isti. Konus K će ležati u onom delu prostora R^n u odnosu na postavljenu hiperravan π_v u kome nije hiperravan π. Prilikom unutrašnje translacije π_v će preći u novu hiperravan π_{v1} ali će konus K^* biti u onom delu prostora R^n razdeljenog sa hiperravni π_{v1} u kome nije hiperravan π, pa će zbog toga tačka V_1 biti najbliža tačka K^* od hiperravni π.

Posledica 4.1. Iz teoreme 4.1. sledi posledica za polijedre Ω i Ω_{Ua}. Ako je teme V polijedra Ω najbliže hiperravni π koja nema zajedničkih tačaka sa Ω, tada je i odgovarajuće teme V_1 okolinskog polijedra Ω_{Uo} polijedra Ω najbliža tačka polijedra Ω_{uo} od π.

Možemo primetiti da sve što smo govorili za najbližu tačku možemo isto reći i za najdalju tačku.

Teorema 4.2. Neka je dat konus $K \subset R^n$ sa vrhom V i njemu unutrašnje transliran konus K^* sa vrhom V_1. Neka je tačka O van konusa K i neka je V najbliža tačka konusa K od tačke O, tada je i V_1 najbliža tačka konusa K^* od tačke O.

Dokaz. Posmatrajmo najpre prostor R^2. Jasno je da ako je V vrh konusa K odredjenog ograničenjima π_1 i π_2 najbliža tačka tački O, tada krug koji prolazi kroz V sa centrom u O seče prave π_1 i π_2 van konusa K, pa će najbliža tačka π_1 odnosno π_2 od tačke O biti na sredini izmedju preseka π_1 odnosno π_2 sa krugom koji prolazi kroz V a sa centrom u O. Prava n koja prolazi kroz O a normalna je na π_1 je takva da leži van konusa R a svi koncentrični krugovi sa centrom u O seku prave koje su paralelne sa π_1 u dve tačke od kojih je jedna sa one strane sa koje nije konus K. Iz napred izloženog sledi da smo neki krug sa centrom u O prolazi kroz V_1 onda on mora tangirati K^* u V_1 što je i trebalo dokazati. Ako sada posmatramo K u R^n onda možemo pretpostaviti da teorema nije tačna, tj. da je najbliža tačka konusa K^* neka tačka $U \neq V_1$. No, ako bi sada posmatrali jednu dvodimenzionalnu ravan koja prolazi kroz V, V_1 i U i izvršili projektovanje K, K^* i O kao i koncentrične hiperlopte sa centrom u O, dobili bi smo dvodimenzionalne konuse i koncentrične krugove gde ne bi važila teorema za R^2 što je nemoguće.

Nije teško uočiti da umesto koncentričnih krugova mogu biti i koncentrične elipse odnosno koncentrični hiperelipsoidi, jer projekcijom sve ono što smo govorili za krugove možemo govoriti i za elipse. Zato ćemo dati sada sledeću teoremu

Teorema 4.3. Neka je dat konus K sa vrhom u tački V i neka je K^* sa vrhom V_1 unutrašnje transliran konus konusa K. Ako je V tačka minimuma za funkciju $Z(x) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j$ * za $x \in (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in K$, tada je i V_1 tačka minimuma funkcije Z za $x \in K^*$.

Dokaz: Podjimo od činjenice da je ortogonalna projekcija prave i kruga na ravan u R^3 prava odnosno elipsa. Isto tako možemo se pozvati na činjenicu da se svaka elipsa može projektovati bar na jednu ravan, tako da njena projekcija bude krug. Iste zaključke možemo dati i za centralnu projekciju, pa zato tačnost teoreme 4.3. kada je u pitanju prostor R^3 ne bi teško dokazali s obzirom na prethodnu teoremu.

Istinitost teoreme 4.3. u prostoru R^n možemo potvrditi na taj način što ćemo pretpostaviti da je teorema 4.3. tačna u prostoru R^{n-1}.

----

*Kvadratna funkcija

5. NEJEDNAKOSTI

U ovom odeljku posvećena je posebna pažnja ograničenjima datim u vidu nejednakosti. Znamo da svaki ekstremalni problem sa ograničenjima možemo rešiti samo ako dobro poznajemo ta ograničenja. Drugim rečima metod rešavanja eksperimentalnog problema sa ograničenjem je u uskoj vezi sa prirodom samih ograničenja. Nejednakosti igraju vrlo važnu ulogu u teoriji aproksimativnih metoda i nemaju ništa manji značaj ni u drugim oblastima matematike.

Za iznalaženje novih kao i za pooštravanje već poznatih nejednakosti primenjuju se razne metode. Navodimo D.S.Mitrinovića i N. Vasića, koja se sastoji u sledećem: (i) Podje se od nejednakosti koja se dokazuje korišćenjem teorije ekstremuma; (ii) U funkciji pomoću koje se dobija uočena nejednakost na poznati način se ubaci jedan ili više parametara; (iii) Odredi se ekstremum ove funkcije koji sadrži parametre, smatrajući ove parametre kao fiksne. Na ovaj način se dobija nejednakost koja sadrži jedan ili više parametara. Dajući tim parametrima pogodne vrednosti, koje ne moraju biti fiksne, dolazi se do raznih nejednakosti različitih od polazne nejednakosti.

Ja sam došao na jednu novu ideju za dokazivanje nekih poznatih kao i novih nejednakosti. Ova ideja bi se sastojala u sledećem: Podje se od jednakosti $f\, f(x)^{-1} = f^{-1} f(x)$ pa se zatim specificira funkcija f kao tačka x. Isto tako može se poći od izvesnogidentiteta, a zatim se taj identitet analizira kao funkcija jednog ili više argumenata, zavisno od toga kakav polazni identitet ima oblik.

Način na koji je M. Marjanović u radu [31] dokazao nejednakosti J. Karamate i J.Steffensena pomogao mi je da dodjem na ideju da dam novi dokaz nejednakosti M. Petrovića dat u sledećoj teoremi.

<u>Teorema 5.1.</u> Ako je f konveksna funkcija na segmentu $[0,a]$ i ako je $x_i \in [0,a]$.(i=1,...,n) i $x_1+x_2+\ldots+x_n = a$, tada važi sledeća nejednakost:

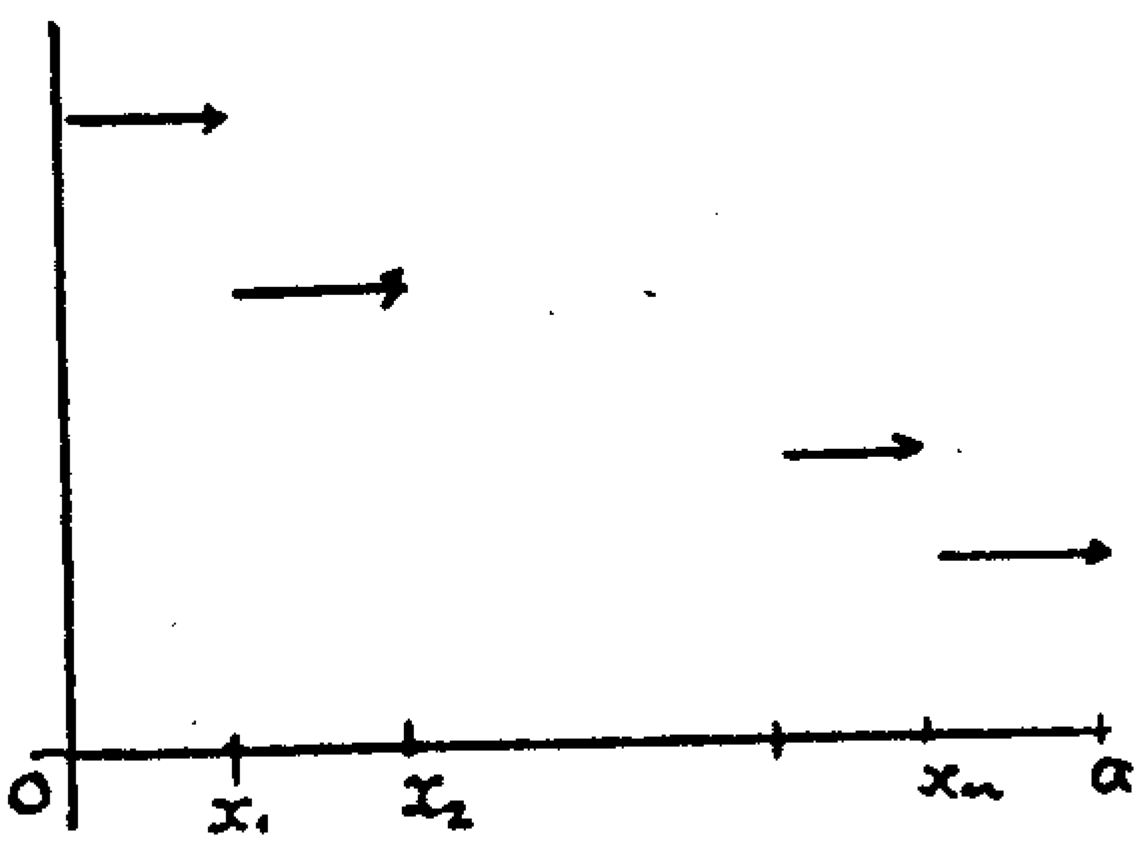
$$f(x_1)+f(x_2)+\ldots+f(x_n) \leq f(x_1+x_2+\ldots+x_n)+(n-1)f(0) \qquad (1)$$

<u>D o k a z:</u> Možemo slobodno pretpostaviti da je

$x_1 \quad x_2 \quad \ldots \quad x_n$.

Sada definišimo stepenaste funkcije g_1 i g_2 na sledeći način:

$$g_1(x) = \begin{cases} n \ ; & x \in [0 \quad x_1 (\\ n-1 ; & x \in \quad x_1 \quad x_2 \\ \vdots & \\ 1 \ ; & x \quad x_{n-1} \ x_n \\ 0 \ ; & x \quad x_n \ , \ a \end{cases} \qquad g_1 = 1 \ , \quad x \in [0,a]$$



Sl. 1.

Iz definicije funkcije g_1 i g_2 sledi nejednakost

$\int_0^x g_1(x)dx \quad \int_0^x g_2(x)dx$ što ćemo označiti sa $g_1 \succ g_2$. Zaista

$$\int_0^a g_1(x)dx = n_1x_1+(n-1)(x_2-x_1)+\ldots+(x_n-x_{n-1})$$
$$= x_1 + x_2 + \ldots + x_n = a$$

Kako je f konveksna funkcija, možemo je predstaviti pomoću integrala kao

$$f(x) = f(o) + \int_0^x f'(x)dx \ , \quad \text{gde je } f' \nearrow \qquad \text{rastuća}$$

i integrabilna funkcija, pa na osnovu Steffensenove nejednakosti [32] imamo

$$\int_0^a f'(x)g_1(x)dx \leqslant \int_0^a f'(x)g_2(x)dx = \int_0^a f'(x)dx = f(a)-f(0) .$$

S druge strane:

$$\int_0^{a_n} f(x)g_1(x)dx = n\ f(x_1)-f(0)\ +(n-1)\ f(x_2)-f(x_1)\ +$$

$$+.\ .\ .+ f(x_n)-f(x_{n-1}) =$$

$$= f(x_1) + f(x_2) + .\ .\ .+ f(x_n) - n\ f(0)$$

Odakle, posmatrajući poslednju nejednakost, najzad dobijamo nejednakost (1). Za slučaj kada su $x_i = x_1$, važnost nejednačine (1) potvrdjujemo pomoću granične vrednosti.

Korišćenje identiteta za dobijanje nejednakosti

U sledećih nekoliko teorema koristićemo se jednom interesantnom jednakosti $ff^{-1} = f^{-1}f$. Pomoću ove jednakosti, ako posebno pretpostavimo homogenost, konveksnost i subaditivnost funkcije f možemo doći do vrlo interesantnih nejednačina.

Teorema 5.2. Neka je f realna rastuća konveksna funkcija, koja je definisana na intervalu ili segmentu I, tada važi nejednakost

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} p_i f^{-1}(x_i)\right) \leq f^{-1}\left(\sum_{i=1}^{n} p_i f(x_i)\right) \tag{1}$$

gde je $p_i > 0$ i $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$ a $x_i \in I$.

D o k a z: Kao prvo možemo zaključiti da funkcija f ima jednoznačnu inverznu funkciju f^{-1}. Inverzna funkcija f^{-1} takodje je monotono rastuća ali konkavna. Kako za konveksne, odnosno konkavne funkcije važe sledeće nejednakosti:

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} p_i x_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{n} p_i f(x_i) ,$$

$$f^{-1}\left(\sum_{i=1}^{n} p_i x_i\right) \geqslant \sum_{i=1}^{n} p_i f^{-1}(x_i) \ ,$$

gde je $p_i > 0$, $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$ i $x_i \subset I$ za $i = 1,\ldots,n$;

a na osnovu jednakosti

$$ff^{-1}\left(\sum_{i=1}^{n} p_i x_i\right) = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i = f^{-1}f\left(\sum_{i=1}^{n} p_i x_i\right)$$

sledi nejednakost (1).

Teorema 5.3. Ako je f monotono opadajuća i konveksna funkcija koja preslikava segment $I = [0\ a]$ na sama sebe, tada važi jedna od sledećih nejednakosti:

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} p_i\, f(x_i)\right) \leqslant f^{-1}\left(\sum_{i=1}^{n} p_i\, f^{-1}(x_i)\right) \quad (1.)$$

$$f^{-1}\left(\sum_{i=1}^{n} p_i\, f^{-1}(x_i)\right) \leqslant f\left(\sum_{i=1}^{m} p_i f'(x_i)\right) , \quad (2.)$$

gde je $p_i > 0$, $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$ i $x_i \in I$ za $i = 1,2,\ldots,n$.

D o k a z: Inverzna funkcija f^{-1} funkcije f je očigledno monotono opadajuća i konveksna funkcija na segmentu I. Pretpostavimo da je

$$f^{-1}\left(\sum_{i=1}^{n} p_i x_i\right) \leqslant f\left(\sum_{i=1}^{n} p_i x_i\right) \quad \text{i} \quad \sum_{i=1}^{n} p_i x_i < x^* ,$$

gde je x^* rešenje jednačine $f(x) = x$, tada je

(i) x^* $\sum_{i=1}^{n} p_i\, f^{-1}(x_i) \leqslant \sum_{i=1}^{n} p_i\, f(x_i)$, a kako je za

$x > x^*$ $f^{-1}(x) > f(x)$ to važi

n $f^{-1}\left(\sum_{i=1}^{n} p_i f^{-1}(x_i)\right) \geqslant f\left(\sum_{i=1}^{n} p_i\, f^{-1}(x_i)\right)$, s obzirom na

pretpostavke o funkciji f i nejednačine (i) možemo napisati:

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} p_i\, f^{-1}(x_i)\right) \geqslant f\left(\sum_{i=1}^{n} p_i\, f(x_i)\right) \ , \text{ i najzad}$$

$f^{1}(\sum_{i=1}^{n} p_i . f^{-1}(x_i)) \leq f(\ _{i=1}^{n} p_i . f(x_i))$, što je i trebalo dokazati. Slično možemo dobiti i nejednačinu (1).

Teorema 5.4. Neka je f monotono opadajuća konkavna funkcija koja preslikava segment I na samu sebe. Tada važi *jedna od* nejednakosti:

$$f(\sum_{1}^{m} p_i . f(x_i)) < f^{-1}(\sum_{1}^{m} p_i . f^{-1}(x_i)) \qquad (1)$$

$$f^{-1}(\sum_{1}^{m} p_i . f(x_i) < f(\sum_{1}^{m} p_i . f^{-1} x_i)) \qquad (2)$$

gde je $p_i > 0$, $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$ i $x_i \in I$ za $i=1,2,\ldots,n$

Dokaz: Inverzna funkcija od f je monotono opadajuća i konkavna funkcija. Kao i u prethodnoj teoremi možemo pretpostaviti da je:

$$f^{-1}(\sum_{i=1}^{n} p_i x_i) \quad f(\sum_{i=1}^{n} p_i . x_i) \quad i \quad \sum_{i=1}^{n} p_i x_i < x^* ,$$

gde je x^* rešenje jednačine $f(x) = x$, pa je zbog konkavnosti funkcije f ispravna nejednačina (i)

$$x^* < \sum_{i=1}^{n} p_i . f^{-1}(x_i) \quad _{i=1}^{n} p_i . f(x_i),$$

a zbog opadanja funkcija f i f^{-1} važe nejednačine

$$f^{-1}(\sum_{1}^{m} p_i f^{-1}(x_i)) \geq f^{-1}(\sum_{1}^{m} p_i . f(x_i))$$

$f(\sum_{1}^{m} p_i . f^{-1}(x_i)) \geq f(\sum_{1}^{m} p_i f(x_i))$. Ako je za $x > x^*$ $f^{-1}(x) \geq f(x)$, možemo najzad pisati i nejednačinu

(1) $f^{-1}(\sum_{i=1}^{n} p_i . f^{-1}(x_i)) \geq f(\sum_{i=1}^{n} p_i . f(x_i))$. Dokaz je završen.

Teorema 5.5. Neka je f superaditivna funkcija koja preslikava skup realnih brojeva I na samu sebe. Tada važi nejednakost

$$(1) \quad f(\sum_{i=1}^{n} f^{-1}(x_i)) \leq f^{-1}(\sum_{i=1}^{n} f(x_i)) ,$$

gde je $x_i \in I$, $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

<u>D o k a z:</u> Funkcija f je superaditivna, tj. važi nejednačina.

(i) $f(x_1 + x_2) \geqslant f(x_1) + f(x_2)$ za x_1 i x_2 iz I.

Iz nejednačine (i) zaključujemo da je f monotono rastuća, pa je njena inverzna funkcija f^{-1} takodje monotono rastuća. Ako u (i) umesto x_1 i x_2 stavimo $f^{-1}(x_1)$ i $f^{-1}(x_2)$ dobijamo nejednačinu

$f(f^{-1}(x_1) + f^{-1}(x_2)) \geqslant x_1 + x_2$, a s obzirom da je f^{-1} monotono rastuća, imamo nejednačinu:

(ii) $f^{-1}(x_1) + f^{-1}(x_2) \geqslant f^{-1}(x_1 + x_2)$. Odnosno:

(iii) $f^{-1}(x_1) + \ldots + f^{-1}(x_n) \geqslant f^{-1}(x_1 + \ldots + x_n)$.

Zbog superaditivnosti funkcije f i rašćenja funkcije f^{-1} možemo iz jednakosti:

$f.f^{-1}(\sum_{i=1}^{n} x_i) = f^{-1}f(\sum_{i=1}^{n} x_i)$ pisati:

$$f(\sum_{i=1}^{n} f^{-1}(x_i)) \geqslant \sum_{i=1}^{n} x_i)$$

$f^{-1}(\sum_{i=1}^{n} f(x_i)) \leq \sum_{i=1}^{n} x_i$ i na kraju nejednačinu (1),

čime je dokaz završen.

<u>P r i m e d b a:</u> Iz dokaza teoreme primećujemo da I nije obavezno segment odnosno interval.

Na osnovu gore dokazanih teorema 2, 3, 4 i 5, možemo izvesti dobro poznate nejednakosti, ali i veći broj novih nejednakosti.

<u>Primer 5.1.</u> Na osnovu teoreme 2., za funkciju $f(x) = e^x$ možemo napisati nejednakost:

(i) $e^{\sum_{i=1}^{n} p_i \ln . x_i} \leq \sum_{i=1}^{n} p_i . x_i \leqslant \ln(\sum_{i=1}^{n} p_i e^{x_i})$, odnosno

$$\text{AG} \quad \prod_{i=1}^{n} x_i^{p_i} \leq \sum_{i=1}^{n} p_i \cdot x_i \text{ , gde je } \quad p_i = 1, \quad x_i \in I$$

što predstavlja vezu izmedju aritmetičke i geometrijske sredine.

Ako u AG* umesto x_i stavimo $\frac{1}{y_i}$ dobijamo:

$$\prod_{i=1}^{n} \frac{1}{(y_i)^{p_i}} \leq \sum_{i=1}^{n} \frac{p_i}{y_i} \text{ , odnosno}$$

$$\text{HG} \quad \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} \frac{p_i}{y_i}} \leq \prod_{i=1}^{n} y_i^{p_i}$$

, ili vezu izmedju harmonijske i geometrijske sredine.

<u>Primer 5.2.</u> Na osnovu Teoreme 2., za funkciju $f(x) = x^{t/s}$, gde je $t \quad s \quad 0$, dobijamo nejednakost:

$$\text{(i)} \quad \left(\sum_{i=1}^{n} p_i \cdot x^{s/t}\right)^{s/t} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} p_i \cdot x^{t/s}\right)^{s/t} .$$

Ako u (i) umesto x_i stavimo $a_i^{\sqrt{st}}$ dobićemo nejednakost

$$\text{(ii)} \quad \left(\sum_{i=1}^{n} p_i a^s\right)^{1/s} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} p_i a^t\right)^{1/t} \text{ , gde je}$$

$$p_i > 0, \quad a_i > 0 \quad \text{i} \quad \sum_{i=1}^{n} p_i = 1.$$

Ako u (ii) umesto a_i stavimo $1/b_i$ dolazimo do nejednakosti:

$$\text{(iii)} \quad \left(\sum_{i=1}^{n} p_i \cdot b^{-t}\right)^{-\frac{1}{t}} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} p_i \cdot b^{-s}\right)^{-1/s} .$$

Zbog konveksnosti funkcije $f(x) = x^{-s/t}$ možemo iz jednakosti $ff^{-1}(x) = x$ napisati

---

*vidi [20]

$$\Big(\sum_{i=1}^{n} p_i x_i^{-\sqrt{s/t}}\Big)^{-\sqrt{t/s}} \leqslant \sum_{i=1}^{n} p_i x_i$$, ili ako umesto x_i

stavimo c_i^{xt} dobijamo

(iv) $$\Big(\sum_{i=1}^{n} p_i c_i^{-s}\Big)^{-1/s} \leqslant \Big(\sum_{i=1}^{n} p_i c_i^{st}\Big)^{1/st}$$

Iz (ii), (iii) i (iv) sledi da je funkcija

$$F(t) = \Big(\sum_{i=1}^{n} p_i x_i^{t}\Big)^{1/t}$$ rastuća za svako t.

Drugi način dokaza da funkcija $F(t)$ raste, data je u D.S. [ ]

Primer 5.3. Na osnovu Teoreme 5. za funkciju $f(x) = x^{s/t}$, gde je $0 < s < t$, imamo nejednakost

(i) $$\Big(\sum_{i=1}^{n} x_i^{t/s}\Big)^{s/t} \leqslant \Big(\sum_{i=1}^{n} x_i^{s/t}\Big)^{t/s}$$

Ako umesto x_i stavimo a_i^{st} u nejednakost (i) dobićemo nejednakost

$$\Big(\sum_{i=1}^{n} a_i^{t}\Big)^{\frac{1}{t}} \leq \Big(\sum_{i=1}^{n} a_i^{s}\Big)^{\frac{1}{s}}$$. Odakle zaključujemo da je

funkcija

$$F(t) = \Big(\sum_{i=1}^{n} a_i^{t}\Big)^{1/t}$$

opadajuća za $t > 0$.

Korišćenje teorije ekstrema za dokazivanje nejednakosti može biti od velike koristi. Ukoliko najpre formiramo pogodnu funkciju koja je inicirana podesnim identitetom u prostoru R^n. Ova ideja omogućava da na prvi pogled raznorodne nejednakosti dokažemo i izvedemo na jedinstven način. U sledećim teoremama novu ideju ćemo demonstrirati za dokazivanje već poznatih nejednačina kao i za dobijanje njihovih uopštenja, a isto tako i za dobijanje novih nejednakosti.

Primer 5.4. Posmatrajmo identitet:

$$(1) \quad \sum_{i=1}^{n} ab = (\sum_{i=1}^{n} a^p)^{\frac{1}{p}} (\sum_{i=1}^{n} b^q)^{\frac{1}{q}}, \text{ gde je}$$

$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Uvedimo funkciju z i oznake ϕ i H

$$(2) \quad \phi = (\sum_{i=1}^{n} a_i^p)^{\frac{1}{p}} (\sum_{i=1}^{n} b_i^q)^{\frac{1}{q}} - z = 0$$

$$H = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i - z = 0$$

Uočimo gradijente ϕ i H ako prihvatimo da su hiperpovrš ϕ i hiperravan H funkcije samo od a_i i z imamo

$$\text{grad} = (\frac{\partial \phi}{\partial a_1}, \dots, \frac{\partial \phi}{\partial a_n}, \frac{\partial \phi}{\partial z}) =$$

$$((\sum_{i=1}^{n} a_i^p)^{\frac{1}{p}-1} a_1^{p-1} (\sum_{1}^{m} b_i^q)^{\frac{1}{q}}, \dots, -1)$$

$$\text{grad } H = (b_1, \dots, b_n, -1)$$

Da bi se hiperpovrš i hiperravan H dodirivali, potrebno je da je

$$(\sum_{i=1}^{n} a_i^p)^{\frac{1}{p}} . a_k^{p-1} = \alpha_0 b_k \qquad \text{tj.}$$

$$a_k^{p-1} = m . b_k \qquad \text{i}$$

$$\alpha a_k^p = \beta b_k^q$$

Hiperpovrš ϕ je konveksna, pa je u važnosti relacija

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leq (\sum_{i=1}^{n} a_i^p)^{\frac{1}{p}} (\sum_{i=1}^{n} b_i^q)^{\frac{1}{q}},$$

gde je $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ i $a_i, b_i > 0$, $i = 1, \dots, n$.

Više o ovim nejednačinama možemo saznati u [18] [27] i [28]

Primer 5.5. Za dokazivanje Minkovskijeve nejednakosti

$$(1) \quad \sum_{i=1}^{n} (a_i+b_i)^{p\,\frac{1}{p}} \leq (\sum_{i=1}^{n} a_i^p)^{\frac{1}{p}} + \sum_{i=1}^{n} (b_i^p)^{\frac{1}{p}}, \quad p>0$$

može poslužiti sledeća funkcija

$$F(a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n) =$$

$$(\sum_{i=1}^{n} (a_i\, b_i)^p)^{\frac{1}{p}} - (\sum_{i=1}^{n} a_i^p)^{\frac{1}{p}} + (\sum_{i=1}^{n} b_i^p)^{\frac{1}{p}}$$, koja uz uslov

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = c_1, \quad \sum_{i=1}^{n} b_i = c_2 \qquad a_i \geqslant 0, \quad b_i \geqslant 0$$

ima jedinstven maksimum jednak 0 za $a_i = \frac{c_1}{n} = a$ i $b_i = \frac{c_2}{n} = b$, $i = 1, \ldots, n$, čime se dokazuje nejednačina (1).

Primer 5.6. Jedan identitet u R^n za dobijanje Košijeve nejednačine.

Posmatrajmo najpre jednu tačku B i jednu pravu p u ravni, odnosno prostoru R^2, a zatim jednu ravan P i jednu tačku B u prostoru R^3, i slično tačku i linearnu formu u prostoru R^n.

Neka je data tačka $B(b_1, b_2)$ i prava p:

$$a_1x_1 + a_2x_2 = 0 \text{ u ravni } R^2.$$

Uočimo pravougli trougao $OB'B$, gde je B' ortogonalna projekcija tačke B na pravu p. Tačku B' nalazimo u preseku prave p i normale n spuštene iz tačke B na pravu p. Koordinate tačke B dobijamo rešavanjem sistema:

$$(1) \quad p: \quad a_1x_1 + a_2x_2 = 0$$

$$n: \quad \frac{x_1 - b_1}{a_1} = \frac{x_2 - b_2}{a_2} .$$

Dakle, nalazimo tačku $B'(b_1-a_1\frac{a_1b_1+a_2b_2}{a_1^2+a_2^2},\ b_2-a_2\frac{a_1b_1+a_2b_2}{a_1^2+a_2^2})$.

Prema Pitagorinoj teoremi, za trougao $OB'B$ imamo

$$\overline{OB}^2 = \overline{OB'}^2 + \overline{B'B}^2$$

ili u obliku

$$(2)\quad b_1^2+b_2^2 = (b_1-a_1\frac{a_1b_1+a_2b_2}{a_1^3+a_2^2})^2+(b_2-a_2\frac{a_1b_1+a_2b_2}{a_1^2+a_2^2})^2 + $$

$$+ (\frac{a_1b_1+a_2b_2}{a_1^2+a_2^2})^2$$

Sličnim posmatranjem u prostoru R^3, umesto prave p posmatraćemo ravan P, a umesto sistema (1) sistem:

P: $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0$.

$$(3)\quad n': \frac{x_1-b_1}{a_1} = \frac{x_2-b_2}{a_2} = \frac{x_3-b_3}{a_3}$$

Iz odgovarajućeg trougla, prema Pitagorinoj teoremi dobijamo identitet:

$$(4)\quad \sum_{i=1}^{3} b_i^2 = \sum_{i=1}^{3} b_i-a_i\frac{\sum_{1}^{3} a_ib_i}{\sum_{i=1}^{3} a_i^2} + \frac{(\sum_{i=1}^{3} a_ib_i)^2}{\sum_{i=1}^{3} a_i^2}$$

Na sličan način za prostor R^n dobili bi identitet

$$(5)\quad \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \sum_{i=1}^{n} b_i^2 - (\sum_{i=1}^{n} a_ib_i)^2 =$$

$$= \sum_{1}^{m} a_i^2 \sum_{1}^{m}\left[b_i-a_i\frac{\sum_{i=1}^{n} a_ib_i}{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}\right]$$

Kod poznatog Lagranževog identiteta imamo umesto desne strane izvedenog identiteta (5) izraz:

$$\sum_{1\leq i<j\leq n} (a_ib_j - a_jb_i)^2 .$$

Iz identiteta (5) neposredno sledi Košijeva nejednakost:

$$(6)\quad \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \sum_{i=1}^{n} b_i^2 \leqslant (\sum_{i=1}^{n} a_ib_i)^2$$

5.1. NEJEDNAKOSTI U TEORIJI EKSTREMALNIH PROBLEMA I TEORIJI NEPOKRETNE TAČKE

Za iznalaženje novih metoda za rešavanje problema iz linearnog i nelinearnog programiranja od velikog je značaja poznavanje teorije nejednakosti.

Ograničenja za promenljive su obično data u obliku nejednačina i jednačina u Euklidskom prostoru R^n. Ta ograničenja definišu konveksni skup ili konveksno telo kod linearnog i konveksnog programiranja. Za postupak p kojim efektivno dolazimo do tačke maksimuma u konveksnom programiranju možemo reći da definiše funkciju koja preslikava skup ograničenja u sama sebe. Ta funkcija prema samoj konstrukciji mora da poseduje osobinu nepokretne tačke. Zato izučavanje uslova za postojanje nepokretne tačke je od bitnog značaja za konstrukciju postupka za nalaženje optimalnog rešenja u programiranju.

Iz razgovora sa kolegom Lj. Ćirićem o nepokretnim tačkama funkcija,proizašlo je interesovanje za uslove koji su uglavnom nejednačine,i koji obezbedjuju postojanje nepokretne tačke. Rezultat ovog interesovanja je jedno uopštenje Teoreme A. Ivanova [21].

Teorema 5.1(Ivanov): Neka je (x,d) kompletan metrički prostor, $T:X \to X$ takvo preslikavanje da su uspunjeni uslovi:

$$\alpha d(x,y)+\beta d(Tx,Ty)+\gamma[d(x,Tx)+d(y,Ty)]+$$
$$+\delta[d(x,Ty)+d(y,Tx)] \geqslant 0 \tag{1}$$

$$\alpha+\beta+2\gamma < \min\{0,-2\delta\} \tag{2}$$

$$\beta+\gamma+\delta < 0 \tag{3}$$

Tada postoji nepokretna tačka preslikavanja T, a ako je ispunjen i uslov

$$\alpha+\beta+2\gamma < 0 \tag{4}$$

onda je nepokretna tačka jedinstvena.

Od interesa je da postavimo pitanje kakve još uslove treba dodati, pa da α, β, γ, δ budu funkcije koje su definisane na $[0,\infty)$. Na ovo pitanje daje odgovor sledeća teorema.

Teorema 5.1.1. Neka je (X,d) kompletan metrički prostor i neka je $T:X \rightarrow X$ preslikavanje prostora X u samog sebe. Ako postoje neprekidne funkcije sa desne strane $\alpha(t)$, $\beta(t)$, $\gamma(t)$, $\delta(t)$ koje preslikavaju $[0\ \infty)$ u $(-\infty,\ \infty)$ tako da su ispunjeni uslovi:

$$\alpha(b)d(x,y)+\beta(b)d(Tx,Ty)+\gamma(b)[d(x,Tx)+d(y,Ty)]+$$
$$\delta(b)\,[d(x,Ty)+d(y,Tx)] \geqslant 0 \tag{1}$$
$$\alpha(b)+\beta(b)+\gamma(b)+\delta(b)+|\delta(b)| < 0 \tag{2}$$
$$\beta(b)+\gamma(b)\ +\delta(b) < 0 \tag{3}$$
$$\alpha(b)\ +\ \beta(b)\ +\ 2\delta(b)\ < 0 \tag{4}$$

gde je $b = d(x,y)$, x i y iz X, tada preslikavanje T ima jedinstvenu nepokretnu tačku.

Dokaz: Ako u (1) umesto y stavimo Tx dobijamo:

$$\alpha(b_x)d(x,T_x)+\beta(b_x)d(T_x,T^2x)+\gamma(b_x)\,[d(x,T_x)\ +$$
$$+d(T_x,T^2x)]+\delta(b_x)\,[d(x,T^2x)+d(Tx,T^2x)] \geqslant 0 \qquad \text{ili}$$

$$(b_x)+\ (b_x)\ d(x,Tx)+\ \ (b_x)+\ (b_x)\ d(Tx,T^2x)\ +$$
$$+d(b_x)d(x,T^2x)\qquad 0 \tag{5}$$

gde je $b_x = d(x,Tx)$.

Razmotrićemo dva slučaja. Prvo, neka je $\delta(b_x) \geqslant 0$. Na osnovu relacije trougla i $\delta \geqslant 0$ sledi:

$\delta d(x,T^2x)\ \leqslant \delta d(x,Tx)+\delta d(Tx,T^2x)$, te prema (5) sledi:

$$\alpha(b_x)+\gamma(b_x)+\delta(b_x)\ \ d(x,T_x)+[\beta(b_x)+\gamma(b_x)+\delta(b_x)]\,d(Tx,T^2x) \geqslant 0$$

odnosno

$$-\ \beta(b_x)+\gamma(b_x)+\delta(b_x)\ \ d(Tx,T^2x) \leqslant [\alpha(b_x)+\gamma(b_x)+\delta(b_x)]\,d(x,Tx),$$

pa s obzirom na (3) imamo da je:

$$\alpha(b_x)\ +\ \gamma(b_x)\ +\ \delta(b_x) > 0 \tag{6}$$

$$d(Tx,T^2x) \leqslant -\ \frac{\alpha(b_x)+\gamma(b_x)+\delta(b_x)}{\beta(b_x)+\gamma(b_x)+\delta(b_x)}\ d(x,Tx) \tag{7}$$

Ako uslov (2) za $\delta(b_x) > 0$ napišemo u obliku:

$\alpha(b_x)+\gamma(b_x)+\delta(b_x) < -[\beta(b_x)+\gamma(b_x)+\delta(b_x)]$ tada zbog (3) i (6) imamo:

$$o \leq - \frac{\alpha(b_x)+\gamma(b_x)+\delta(b_x)}{\beta(b_x)+\gamma(b_x)+\delta(b_x)} < 1 \tag{8}$$

Da bi dokazali da je orbitralni niz $\{T_x^n\}$ Košijev daćemo najpre sledeću definiciju. Neka je $x_o \in X$, $x_{n+1} = Tx_n$, $b_n = d(x_n, x_{n+1})$, $n = (0, 1, 2, \ldots)$

Uzimajući u obzir (7) i (8) možemo zaključiti da je niz $\{b_n\}$ opadajući, pa kako je ograničen nulom sa leva, on je i konvergentan. Dokazaćemo da je

$$\lim_{n\to\infty} b_n = b^* = 0$$

Pretpostavimo da je $b > 0$. Tada se prema (7) dobija:

$$0 < b^* = \lim_{n\to\infty} b_{n+1} \leq \lim_{n\to\infty} \frac{-[\alpha(b_n)+\gamma(b_n)+\delta(b_n)]}{\beta(b_n)+\gamma(b_n)+\delta(b_n)} b_n$$

i zbog neprekidnosti $\alpha(t), \beta(t), \gamma(t)$ i $\delta(t)$ sa desna možemo zaključiti:

$$0 < b^* = \lim_{n\to\infty} b_{n+1} \leq - \frac{\alpha(b^*)+\gamma(b^*)+\delta(b^*)}{\beta(b^*)+\gamma(b^*)+\delta(b^*)} b^* \text{ , što je}$$

u kontradikciji sa $- \dfrac{\alpha(t)+\gamma(t)+\delta(t)}{\beta(t)+\gamma(t)+\delta(t)} < 1$ za svako $t > o$.

Prema tome mora biti $b^* = 0$.

Sada ćemo dokazati da je $\{x_n\}$ Košijev niz. Pretpostavimo suprotno, tj. da niz $\{x_n\}$ nije Košijev. Tada postoji $r > o$ i podnizovi $\{p_n\}$, $\{q_n\}$ prirodnih brojeva iz N takvih da za svako $n = 0, 1, 2, \ldots$ važi

$$p_n > q_n > n \text{ , } d(x_{p_n}, x_{q_n}) \geq r \tag{9}$$

Na osnovu principa minimuma u N možemo uzeti da je

$$d(x_{p_{n-1}}, x_{q_n}) < r \tag{10}$$

Stavimo $c_n = d(x_{p(n)}, x_{q(n)})$, $n = 0, 1, 2, \ldots$

tada je $r \leq c_n = d(x_{p(n)}, x_{q(n)}) \leq d(x_{p(n)-1}, x_{q(n)}) +$

$$+d(x_{p(n)-1}, x_{p(n)}) \leq r + b_{p(n)-1}$$

Kako je $\lim\limits_{n\to\infty} b_{p(n)-1} = 0$ zaključujemo da c_n teži ka r sa desne strane, pa je zato

$$\lim_{n\to\infty} \alpha(c_n) = \alpha(r) \ , \ \lim_{n\to\infty} \beta(c_n) = \beta(r) \ , \ \lim_{n\to\infty} \gamma(c_n) = \gamma(r)$$

$$\lim_{n\to\infty} \delta(c_n) = \delta(r)$$

Ako u (1) umesto x,y, stavimo respektivno $x_{p(n)} \equiv \overline{x}p(n)$ i $x_{q(n)} \equiv \overline{x}q(n)$ dobijamo:

$$\alpha(c_n)d(x_{p(n)}, x_{q(n)}) + \beta(c_n)d(T_{\overline{x}p(n)}, T_{\overline{x}q(n)}) +$$
$$+ \gamma(c_n)\left[d(x_{p(n)}, T_{\overline{x}p(n)}) + d(x_{q(n)}, T_{\overline{x}q(n)}\right] +$$
$$+\delta(c_n)\left[d(x_{p(n)}, T_{\overline{x}q(n)}) + d(x_{q(n)}, T_{\overline{x}p(n)})\right] \geqslant 0$$

odnosno:

$$\alpha(c_n)c_n+\beta(c_n)d(T_{\overline{x}p(n)}, T_{\overline{x}q(n)}) + \gamma(c_n)b_{p(n)} +$$
$$+\gamma(c_n)b_{q(n)} + \delta(c_n)d(x_{p(n)}T_{\overline{x}q(n)}) +$$
$$+\delta(c_n)d(x_{q(n)},T_{\overline{x}p(n)}) \geqslant 0 \tag{11}$$

Pošto je:

$$d(T_{\overline{x}p(n)}, T_{\overline{x}q(n)}) = d(x_{p(n)+1}, x_{q(n)+1}) \leqslant$$
$$d(x_{q(n)} x_{q(n)+1}) + d(x_{q(n)}, x_{p(n)}) + d(x_{p(n)}, x_{p(n)+1})$$

i

$$d(x_{q(n)+1}, x_{p(n)+1}) \geqslant d(x_{p(n)}, x_{q(n)}) - d(x_{q(n)}, x_{q(n)+1}) -$$
$$-d(x_{p(n)}, x_{p(n)+1})$$

imamo

$$c_n - b_{q(n)} - b_{p(n)} \leqslant d(x_{q(n)+1}, x_{p(n)+1}) \leqslant b_{q(n)} +$$
$$+ b_{p(n)} + c_n \tag{12}$$

i slično koristeći relaciju trougla dobijamo:

$$c_n - b_{q(n)} \leqslant d(x_{p(n)} x_{q(n)+1}) \leqslant c_n + b_{q(n)} , \tag{13}$$

$$c_n - b_{p(n)} \leqslant d(x_{q(n)}, x_{p(n)+1}) \leqslant c_n + b_{p(n)} \qquad (13')$$

Ako sada pustimo da n teži ka $+\infty$ iz (11) sledi, s obzirom na (12) i (13), relacija:

$$\alpha(r).r + \beta(r).r + \delta_{(r)}.r + \delta_{(r)}.r \geqslant 0 \quad \text{i zbog} \quad r > 0$$

$\alpha(r) + \beta(r) + 2\delta(r) > 0$ što je u suprotnosti sa (4). Znači $r \leqslant 0$ pa je $r = 0$. Dakle, $\{x_n\}$ je Košijev niz. Kako je x kompletan sledi da x_n konvergira nekoj tački x iz X. Dokažimo da je x^* nepokretna tačka za preslikavanje T. Označimo sa $dn = d(x^*, x_n)$, tada iz (1) imamo:

$$\alpha(d_n)d(x^*, x_n) + \beta(d_n)d(Tx^*, Tx_n) +$$
$$\gamma(d_n)\left[d(x_n, Tx_n) + d(x^*, Tx^*)\right] +$$
$$+\delta(_d)\left[d(x_n, Tx^*) + d(x^*, Tx_n)\right] \geqslant 0 \qquad (14)$$

Ako pustimo da $n \to \infty$ dobijamo:

$$\beta(0)d(x^*, Tx^*) + \gamma(0)d(x^*, Tx^*) + \delta(0)d(x^*, Tx^*) \geqslant 0$$
$$d(x^*, Tx^*)\left[\beta(0) + \gamma(0) + \delta(0)\right] \geqslant 0 \qquad (15)$$

i pošto je $\beta(0) + \gamma(0) + \delta(0) < -\frac{1}{2} < 0$ sledi da je $d(x9, Tx^*) = 0$ tj. $Tx^* = x^*$.

Pretpostavimo sada da postoji još jedna nepokretna tačka x^{**} tj. $Tx^{**} = x^{**}$ tada je:

$$\alpha(b^*)d(x9, x^{**}) + \beta(b^*)d(Tx^*, Tx^{**}) +$$
$$+\gamma(b^*)\left[d(x^*Tx^*) + d(x^{**}, Tx^{**})\right] +$$
$$+\delta(b^*)\left[d(x^*, Tx^{**}) + d(x^{**}\ Tx^*\right] \geqslant 0,$$

gde je $b^* = d(x^*, x^{**})$.

Odnosno:

$$\left[\alpha(b^*) + \beta(b^*) + 2\delta\ (b^*)\right]d(x^*, x^{**}) \geqslant 0 \quad \text{i zbog (4)}$$

$$d(x^*, x^{**}) = 0,\ x^* = x^{**}$$

Znači x^* je jedinstvena nepokretna tačka.

Sada ćemo razmotriti slučaj $\delta \leqslant 0$.

Podjimo od relacije

$d(x,T^2x) \geq d(Tx,T^2x)-d(x,Tx)$, a na osnovu (5) možemo dobiti nejednakost:

$$0 \leq [\alpha(b_x)+\gamma(b_x)-\delta(b_x)]\, d(x,Tx)+[\beta(b_x)+\gamma(b_x)+\delta(b_x)]\, d(Tx,T^2x)$$

i kako je $\beta(b_x) + \gamma(b_x) + \delta(b_x) < 0$

dobijamo:

$$d(Tx,T^2x) \leq -\frac{\alpha(b_x)+\gamma(b_x)-\delta(b_x)}{\beta(b_x)+\gamma(b_x)+\delta(b_x)}\, d(x,Tx)$$

S druge strane za $\delta \leq 0$ uslov (2) možemo napisati u vidu $\alpha(b_x) + \gamma(b_x) - \delta(b_x) + \beta(b_x) + \gamma(b_x) + \delta(b_x) < 0$ i zato:

$$0 \leq -\frac{\alpha(b_x)+\gamma(b_x)-\delta(b_x)}{\beta(b_x)+\gamma(b_x)+\delta(b_x)} < 1$$

Na taj način smo dokazali da i za $\delta \leq 0$ ispunjen je uslov Banaha za orbitu $\{x_n\}$.

Sve ostalo u dokazu se ponavlja slično kao za slučaj kada je $\delta \geq 0$ čime se završava dokaz Teoreme 5.1.1.

II. G L A V A

6. ISTORIJSKI OSVRT

Ekstremalni problemi su bili predmet ispitivanja matematičara na samom početku razvitka matematike. Možemo reći da su ekstremalni problemi značajno uticali na razvoj celokupne matematike.

Prvobitni rezultati su sredjeni i objedinjeni u okvirima varijacijanog računa sa mnogobrojnim primerima iz fizike i mehanike. Glavna pažnja posvećena je analizi glatkih funkcija i funkcionala zadatih na celom prostoru ili na delu prostora ograničenog glatkom granicom.

Uslovi ekstremuma zapisivali su se u tom slučaju u vidu tzv. Ojlerovih jednačina (sa multiplikatorima Lagranža u slučaju ograničenja).

Razvitak tehnike i tehnologije postavio je niz novih zadataka: zadatak upravljanja objektima, upravljajući parametri koji se menjaju u nekom zatvorenom skupu koji ima kraja. Sirok krug zadataka u vezi sa ekstremima ispitan je u radovima L.S.Pontrjagina, V.G. Boltjanskog itd. Dobijen je potreban uslov ekstremuma u vidu takozvanog "principa maksimuma Pontrjagina".

Potrebe ekonomike iziskivale su nove metode za iznalaženje ekstremuma glatkih funkcija na zatvorenoj oblasti sa parcijalno gratkom granicom. Prvi rezultati za iznalaženje ekstremuma pod gore navedenim uslovima dobijeni su radovima L.V.Kontroviča 1939. g. Danas se ta oblast matematike naziva matematičko (nelinearno) programiranje.

Sličnost rezultata i metoda matematičkog programiranja s teorijom Pontrjagina je nesumnjiva, mada je prefinjena geometrijska tehnika Boltjanskog i Pontrjagina skrivala donekle analitičku suštinu zadatka.

Ekstremalni problemi su vrlo različiti. Još u prošlosti postavljeni su geometrijski problemi u vezi sa iznalaženjem najmanje i najveće vrednosti. Poznato je izoperimetričko svojstvo kruga još iz V veka pre nove ere: pitanja o maksimumu i minimumu nalazimo u radovima Euklida, Apolonija i Arhimeda. Potreba rešenja mnogobrojnih i različitih ekstremalnih problema uticala je na stvaranju i razvijanju matematičke analize i varijacionog računa. U XVII i XVIII veku otkriveni su varijacioni principi u statici i mehanici.

Danas u vezi sa zadacima tehnike i ekonomije, teorija ekstremalnih zadataka doživljava preporod. Naglo se razvijaju matematičko programiranje, teorija optimalnog upravljanja, numeričke metode optimizacije.

Mada su ekstremalni problemi mnogobrojni i sasvim različiti, ipak možemo uočiti i dosta zajedničkih osobina. Ne mali broj ekstremalnih problema daje se u opisnoj formi. Radi toga je potrebno problem prvo formalizovati, kako bi primenili matematičku aparaturu.

Problem ekstrema obično se daje u sledećoj formi: Data je funkcija $f_o(x)$ definisana na izvesnom skupu X sa vrednostima i u njoj odredjen podskup C skupa X, koji predstavlja ograničenje za postavljen zadatak traženja infimum ili sup. funkcije $f_o(x)$.
Kratko: naći inf (sup) funkcije $f_o(x)$ za svako x koje pripada ograničenju C ili u standardnom zapisu:

$$f_o(x) \to \inf(\sup); \qquad x \in C \tag{1}$$

Tačka $x \in C$ naziva se rešenjem zadatka ukoliko u njoj funkcija $f_o(x)$ dostiže svoj inf(sup).

Ako je prostor X snabdeven topologijom, onda to znači da postoji okolina $U_x \subset C$ tačke x^*, tako da je:

$$f_o(x) \geq f_o(x^*) \, (f_o(x) \leq f_o(x^*)) \quad \text{za svako } x \text{ iz } U_x.$$

$U_{x^*} \cap C$, $U_{x^*} \subset X$, preseka neke okoline tačke x i podskupa C.

Primećujemo da: $\inf f = \sup -f$, traženje inf funkcije $f_o(x)$ je isto što i traženje sup funkcije $-f_o(x)$.

Obično jedan ekstremalni problem dopušta razne formulacije. Naprimer sledeći zadatak o brahistohroni. Zadatak se obično zadaje opisno. Neka su date dve kugle koje jednovremeno počinju da se kreću kotrljanjem iz jedne tačke, jedna po luku kružnice, druga po tetivi kružnice izmedju njene dve tačke. Ravan kruga je normalna na horizontalnu ravan. Koja će kugla brže doći do niže tačke? Ustanovljava se da će brže stići kugla koja se kreće po luku.

Mogli bi postaviti opštiji zadatak. Kakvu formu treba da ima žljeb po kome se kreće kugla bez trenja pod dejstvom sile teže, padajući iz jedne tačke u drugu za najkraće vreme. Prevesti ovaj zadatak na matematički jezik možemo na više načina. Obično uvodimo u ravni sistem koordinata (x,y), tako da osa x bude horizontalna, a osa y vertikalna. Neka je $y(x)$ forma žljeba. S obzirom na Galilejev zakon brzina kugle u tački $(x, y(x))$ ne zavisi od forme žljeba, već samo do ordinate $y(x)$. Brzina kugle iznosi $\sqrt{2gy}$. Shodno tome, vreme dt, potrebno za prelazak dela dužine prave ds, jednako je: $ds/\sqrt{2gy}$. Tako dolazimo do sledeće formulacije problema:

$$\int_{x_o}^{x_1} \sqrt{\frac{1 + y(x)}{2gy(x)}}\, dx \to \inf \tag{2}$$

$$y(x_o) = 0, \qquad y(x_1) = y_1$$

Nije teško uočiti da minimizacija funkcionala u (2) je isto što i minimizacija integrala:

$$\int \sqrt{\frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{2gy}}\, dt \tag{3}$$

preko svih krivih $(x(t), \; y(t))$, koje spajaju tačke (x_o, o) i $(x_1 y_1)$.

Isti problem možemo postaviti polazeći od zadatka koji je u vezi sa prolazom svetlosti kroz ravnu izotropnu optičku sredinu, u kojoj lokalna brzina rasprostiranja svetlosti u tački (x,y) iznosi $\sqrt{2gy}$. Na osnovu principa Ferma u geometrijskoj optici koji glasi: svetlost prolazom kroz nehomogenu sredinu bira takvu putanju da vreme prilaska kroz datu sredinu bude najkraće. U tom slučaju gornji problem bi formalizovali ovako:

$$T \to \inf$$

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = 2gy \tag{4}$$

$$X(o) = x_o, \quad y(o) = 0 \qquad x(T) = x_1, \quad y(t) = y_1$$

Iz gore navedenog možemo zaključiti da postoji više načina formalizacija jednog problema. Svaka od formalizacija ima i svoje prednosti, ali i svoje nedostatke. Za svaku od izloženih formalizacija morali smo preći iz jedne naučne oblasti u drugu, ili bolje reći na modele izgradjene u drugom apstraktnom prostoru. Nije redak slučaj da se razvijanje jedne naučne oblasti, pa samim tim i modela koji je definisan osnovnim aksiomama u toj oblasti, pospešuje vidjenjem odgovarajućeg problema iz drugih oblasti.

Put razrešavanja jednog problema u mnogome zavisi od modela definisanog u odredjenoj naučnoj oblasti. Zato nije redak slučaj da analiza jednog problema bude daleko jednostavnija za jednog matematičara ako ima pred sobom svoj sopstveni model koji u sebi sadrži dati problem. Brojni matematičari najčešće analizu ekstremalnih problema vrše uglavnom na takozvanom "geometrijskom" modelu. Zapravo, analizirajući krive, površi i tela u trodimenzionalnom Eklidenom prostoru.

Iz napred navedenih formalizacija možemo zaključiti da su ograničenja kod ekstremalnih problema data jednačinama, ali često se zadaju ograničenja jednačinama i nejednačinama. Tako dolazimo do sledećeg oblika postavke ekstremalnog problema:

$$f_o(x) \rightarrow \inf$$

$$F(x) = y_o$$

$$f_i(x) \leq 0, \quad i \in I$$

$$x \in A,$$

gde su Y i I neki skupovi, $F: X \rightarrow Y$, $f_i: X \rightarrow R$, $i \in I$ i $A \subset X$. Ograničenje $x \in A$ je nefunkcionalno, no obično je ono samo početno.

Sada možemo preći na razmatranje opštih principa u teoriji ekstremalnih problema.

Prirodno u vezi sa svakim ekstremalnim problemom postavljaju se tri osnovna pitanja: prvo, da li postoji rešenje postavljenog problema? Ako možemo pretpostaviti da ono postoji, onda moramo utvrditi koje sve uslove ispunjava. Na kraju, kao treće pitanje: kako doći do rešenja, odnosno kojom metodom doći do pravog ili približnog rešenja? Ovi zadaci pripadaju odgovarajućim oblastima teorije ekstremalnih problema. Problemi postojanja rešenja potrebnih i dovoljnih uslova ekstremuma i numeričkih metoda za nalaženje rešenja su dosta povezani. Zapravo, kao i svaka matematička oblast što je i samostalna, a i u vezi sa drugim oblastima.

Još u početku možemo reći nešto o potrebnim uslovima ekstremuma. Prvi opšti princip dobijanja potrebnih uslova kod ekstremalnih zadataka bez ograničenja dobio je Ferma. Njegova ideja sastojala se u sledećem: inf. glatkog funkcionala $f_o(x)$ treba tražiti medju njegovim stacionarnim tačkama, tj. medju rešenjima jednačine $f_o'(x) = 0$. Za zadatke sa ograničenjima opšti princip dobijanja potrebnih uslova ekstremuma dao je Lagranž. Metodu Lagranža možemo rasprostraniti na daleko širi krug zadataka od onih koje je on sam razmatrao.

Da bi iskazali opšti princip Lagranža postavićemo sledeći problem: neka su X i Y linearni prostori $F:X \quad Y$, $f_i:X \to R$, $i = 1,\dots,m$, $A \quad X$. Razmotrimo zadatak:

$$f_o(x) \to \inf; \quad F(x) = 0$$
$$f_i(x) \leq 0, \quad i,\dots m, \; x \in A \tag{1}$$

Funkciju $Z(x,y^*,\lambda_o,\dots,\lambda_n) = \langle y^*,F(x)\rangle + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i f_i(x)$,

zovemo funkcija Lagranža zadatka (1). Funkcionom y^* i brojevi λ_i, $o \leq i \leq m$, nazivamo multiplikatorima Lagranža.

Langranžov princip sastojao bi se u sledećem: Neka je tačka x tačka lokalnog minimuma zadatka (1'). Tada je moguće naći multiplikatore y^* i $x_i \quad 0$ $(i=0,1,\dots,m)$, koji nisu svi jednovremeno jednaki nula, tako da x_* zadovoljava potrebama uslove lokalnog minimuma zadatka:

$$Z(x, \cdot) \to \inf; \quad x \in A$$

$$\text{za } \lambda_i f_i(X_x) = 0, \quad i = 1,\dots,m$$

Drugim rečima, potrebni uslovi minimuma u početnom zadatku (1') poklapaju se sa potrebnim uslovima minimuma funkcije Lagranža na skupu $X \subset A$, ograničena, koja ne pripadaju funkciji Lagranža.

Ilustrovaćemo Lagranžov princip na sledećem problemu. Neka je u (1') $X = A = R^n$ (n-dimenzionalni Euklideli prostor) i neka nejednačine nema. Jednačine se zadaju u obliku $f_1(x) = 0,\dots,f_m(x) = 0$, što znači $F = (f_1,\dots,f_m)$

preslikava R^n u R^m. Za sve funkcije $f_i(x)$, $i = 0,1,\dots,m$ pretpostavljamo da su glatke. S obzirom na Lagranžov princip imamo funkciju Lagranža

$$\mathcal{L}_x = \sum_{i=0}^{m} \lambda_i f_i(x),$$

i potrebne uslove za zadatak bez ograničenja L inf (teorema forma)

$$\mathcal{L}_x = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i f_i'(x\ ) = 0$$

Ovaj rezultat poznat je pod nazivom pravilo Lagranžovih multiplikatora.

Princip Lagranža ispravan je kod velikog broja važnih zadataka, no svaki put potrebno je njegovu primenu opravdati. Koje su metode dokaza principa Lagranža i drugih potrebnih uslova? U osnovi velikog bfoja dokaza leži metod varijacije. Vratimo se ponovo na zadatak (1), gde je X topološki prostor. Varijacijom tačke X naziva se neprekidno preslikavanje $\lambda \to X(\lambda)$ odsečka $[o, \varepsilon]$ u X, tako da $X(o) = x_*$. Varijacija se naziva dozvoljenom, ako se dovoljno male λ sve tačke $X(\lambda)$ pripajaju C. Neka je $\varphi(\lambda) = f_o(X(\lambda))$ diferencijabilna u nuli, , ako je x_* tačka lokalnog minimuma u (1), funkcija $\varphi(x)$ ima minimum u nuli i važi nejednačina $\varphi'(o) \geqslant 0$, koja predstavlja potreban uslov minimuma $\varphi(x)$ na $[0\ \varepsilon]$. Metod varijacija se sastoji u tome što se traži dosta široka klasa dozvoljenih varijacija, a zatim se izvlače posledice iz $\varphi'(o) \geqslant 0$, napisane za svaku varijaciju iz zadate klase.

Prirodno, na samom početku razvitka teorije primenjivale su se prostije varijacije - varijacije po usmerenju. Tako su dobijeni potrebni uslovi za zadatke u konačno dimenzionalnoj analizi.

O linearnom i nelinearnom programiranju možemo više pročitati u [4] [8] [36]

7. LINEARNO PROGRAMIRANJE. METOD IZLAZA I NJEGOVO INTUITIVNO ZASNIVANJE U R^2 i R^3

Za rešavanje zadataka linearnog programiranja imamo dobro poznati simpleks metod, kao i neke njegove modifikacije. Pošto veliki broj zadataka iz ekonomije, a i drugih oblasti rešavamo pomoću teorije linearnog programiranja, to svaka nova metoda ima značaja ne samo za rešavanje konkretnih problema, već i za obogaćivanje teorije ekstremalnih problema. Metod koji ćemo dole izložiti izvire iz jedne nama dobro poznate prirodne pojave sa rekom. Naime, zamislimo kanalisanu reku pregradjenu nekom mrežom koja treba da zaustavi dečju loptu. Ako mreža nije previše zategnuta, lopta koju nosi voda najpre će udariti u mrežu, a zatim će pored mreže dalje ploviti do najniže kote do koje dolazi i mreža. Znači, lopta će u početku ploviti pravcem toka reke, a kasnije njen pravac kretanja će diktirati razapeta mreža. Ovaj na očigled jednostavan put nije teško i matematički opisati. Zato umesto zadatka sa rekom i loptom dajemo njemu analogan zadatak:

Neka je zadata funkcija $Z = C_1x_2 + C_2x_2$ čiji maksimum tražimo pod uslovom da važe nejednakosti:

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 \quad b_i \; , \; i = 1,\dots,m \tag{1}$$

i da je tačka $x^o = (x_1^o \; , \; x_2^o)$ unutrašnja tačka konveksnog skupa definisanog sistemom nejednačina (1). Ako želimo da rešimo ovaj zadatak, slično putu kojim je plovila lopta, možemo najpre napisati jednačine prave koja prolazi kroz tačku x^o, a čiji je vektor $\vec{n} = C_1\vec{i} + C_2\vec{j}$ u obliku:

$$x_1 = C_1t + x_1^o \; , \quad x_2 = C_2t + x_1^o \tag{2}$$

Uzmimo da se vrednost funkcije Z uvećava za one tačke x za koje je t raste. Nadjimo sada sve prodore prave (2) sa pravama koje čine granicu konveksnog skupa definisanog sa (1). Posmatrajmo dalje samo one granice iz (1) koje prava (2) prodire za $t > 0$, i neka se ti prodori ostvaruju sa odredjenim pravama iz (1) za $t = t_k$, gde je sa t_k označena vrednost parametra t koju ovaj uzima u prodoru prave (2) sa pravom (K): $a_{K1}x_1 + a_{K2}x_2 = b_K$. Ako skup $\{t_k\}$ nije prazan naš zadatak ima rešenje. Dalje, neka je $\min_k \{t_k\} = t_1$ i neka je jedinstven, jer ako nije jedinstven možemo početi postupak iz neke druge unutrašnje tačke koju možemo dobiti pomoću prodora bilo koje prave koja prolazi kroz datu unutrašnju tačku granice konveksnog skupa definisanog sa (1).

Sada pišemo parametarske jednačine prave (1):

$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1$ kao

$$x_1 = C_1't + x_1^1 , \quad x_2 = C_2't + x_2^1 . \tag{3}$$

gde je tačka $x^1 = (x_1^1 , x_2^1)$ prodora prave (2) kroz pravu (1): $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1$, a vektor $\vec{C}' = (C_1' C_2')$ projekciji vektora $\vec{C} = (C_1 , C_2)$ na pravu (1). Potražimo vrednosti t_j^* parametra t prodora prave (3) sa ostalim pravama, a zatim izdvojimo one prave iz (1) koje prava (3) prodire za $t > 0$ ili t= . Neka je $\{t_j^*\}$ taj skup vrednosti parametra t. Neka je dalje $\min_j \{t_j^*\} = t^*$ i neka je $t^* = t_{j1} = t_{j2} = \dots = t_{js}$ gde su $j_1 \dots , j_s$ indeksi koje uzima j, tj. neka kroz jedno teme prolazi više pravih. Da bi kretanje nastavili dalje moramo najpre iz skupa ograničenja: $a_{jk1}x_1 + a_{jk}x_2 = b_{jk}$, $k = 1,\dots$ $\dots,s$ izdvojiti ono pravo, odnosno ono koje ima bar još jednu tačku koja zadovoljava sistem (1). U tom cilju posmatrajmo početnu tačku $x^0(x_1^0 , x_2^0)$, tačku $x^*(x_1^* , x_2^*)$, gde je $x_1^* = C_1't^* + x_1^1$ i $x_2^* = C_2't^* + x_2^1$ i sa njima odredjenu novu unutrašnju tačku:

$x_0^* \left(\frac{(n-1)x_1^* + x_1^0}{n} , \frac{(n\ 1)x_2^* + x_2^0}{n}\right)$, gde je n dovoljno veliki prirodan broj.

Tačka x_0^* je unutrašnja tačka konveksnog skupa definisanog sa (1), a nalazi se u okolini tačke X^*. Kroz tačku x_0^* postavimo pravu (4) čiji je vektor $\vec{C}' = (C_1' , C_2')$, a zatim ponovo kao sa pravom (3) potražimo vrednost parametra t za koji će prava (4) imati "izlaz" iz konveksnog skupa odredjenog sa (1). Uzmimo da je t_j vrednost parametra t za koji se postiže izlaz iz datog konveksnog skupa i neka je za $t = t_{j2}$

$x^r(x_1^r, x_2^r)$ izlazna tačka koja leži na pravoj (j_r):

$a_{jr1}x_1 + a_{jr2}x_2 = b_{jr}$.

Jasno je da je $t_{j2} = \min\{t_{j1}, t_{j2}, \ldots, t_{js}\}$.

Sada možemo uporediti vrednosti funkcije Z za tačke x^* i x^r. Ako je $Z(x^*) > Z(x^r)$ postupak je završen i $Z(x^*)$ je najveća vrednost funkcije Z, a ako je $Z(x^*) < Z(x^r)$ postupak se nastavlja na napred opisan način, samo se iz daljeg razmatranja odstranjuju ograničenja koja su dodirivala konveksni skup definisan sa (1) u temenu x^*.

Iz napred izloženog možemo zaključiti da se traženje najveće vrednosti funkcije Z metodom izlaza svodi na odredjeno kretanje duž granice konveksnog skupa. Isto tako primećujemo da svako teme može biti potencijalna tačka maksimuma, pa je zato potrebno izračunavati vrednost funkcije Z u svakom temenu, kao i u dovoljno maloj okolini oko temena.

Za rešavanje odgovarajućeg problema maksimizacije u prostoru R^3 metod i z l a z a može da se primeni, ali s obzirom da su ograničenja ravni, kretanje po granici zadatog konveksnog skupa biće nešto složenije. Da bi se uočile sve poteškoće kod primene metode izlaza u daljem izlaganju rešićemo jedan problem linearnog programiranja u prostoru R^3.

Naći najveću vrednost za celu funkciju $Z = C_1x_1 + C_2x_2 + C_3x_3$ pod uslovom da su ispunjena ograničenja

$$(i):\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + a_{i3}x_3 \leq b_i\ ,\quad i=1,2,\ldots,m \qquad (5)$$

i da je data jedna unutrašnja tačka (x_1^o, x_2^o, x_3^o) konveksnog skupa definisanog sa (5). Radi rešavanja ovog zadatka najpre napišimo jednačine prave

$$x_1 = C_1t + x_1^o\ ,\quad x_2 = C_2t + x_2^o\ ,\quad x_3 = C_3t + x_3^o\ , \qquad (6)$$

i potražimo skup $\{t_k^*\}$ pozitivnih vrednosti parametra t za koje imamo ostvarene prodore prave (6) kroz odgovarajuće ravni iz (5). Izabrali smo skup pozitivnih vrednosti parametra t, jer kao i u prethodnom zadatku u prostoru R^2 vrednost funkcije Z raste kada t raste. Neka je dalje $\min\limits_k \{t_k^*\} = t_j^*$ jedinstven. Sada nadjimo projekcije $\vec{C}' = (C_1', C_2', C_3')$ vektora $\vec{C} = \{C_1, C_2, C_3\}$ na ravni (j) $a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 + a_{j3}x_3 = 0$.

Ako projektujemo vrh $(C_1\ C_2\ C_3)$ vektora C na ravan (j) dobićemo:

$$C_1' = \frac{C_1(a_{j2}^2 + a_{j3}^2) - a_{j1}(C_2a_{j2} + C_3a_{j3})}{a_{j1}^2 + a_{j2}^2 + a_{j3}^2}$$

$$C_2' = \frac{C_2(a_{j2}^2 + a_{j3}^2) - a_{j2}(C_1a_{j1} + C_3a_{j3})}{a_{j1}^2 + a_{j2}^2 + a_{j3}^2} \qquad (7)$$

$$C_3' = \frac{C_3(a_{j2}^2 + a_{j1}^2) - a_{j3}(C_2a_{j2} + C_1a_{j1})}{a_{j1}^2 + a_{j2}^2 + a_{j3}^2}$$

ukoliko je $C_1' = C_2' = C_3' = 0$. Tačke strane konveksnog skupa koje leže na ravni (j) su tačke maksimuma. Neka je bar jedan $C_i \neq 0$, $i = 1,2,3$, potražimo skup pozitivnih vrednosti t_k^{*1} za koje se ostvaruju prodori kroz odgovarajuće ravni iz (5) i prave $x_1 = C_1't + x_1^j$, $x_2 = C_2't + x_2^j$, $x_3 = C_3't + x_3^j$, gde je $x^j = (x_1^j, x_2^j, x_3^j)$ tačka prodora prave (6) i ravni (j). Neka je ponovo $\min\{t_k^{*1}\} = t_2^{*1}$ jedinstven.

Dalje, treba tražiti projekciju vektora $\vec{C} = (C_1, C_2, C_3)$ na presek ravni (1) i (j), a zatim skup pozitivnih vrednosti $\{t_k^{*2}\}$ za koje se ostvaruju prodori sa odgovarajućim ravnima iz (5) i prave

$$x_1 = C_1''t + x_1^1, \quad x_2 = C_2''t + x_2^1, \quad x_3 = C_3''t + x_3^1, \qquad (8)$$

gde je $\vec{C}'' = (C_1'', C_2'', C_3'')$ projekcija vektora $\vec{C} = (C_1\ C_2\ C_3)$ na presek ravni (1) i (j), a $x^1 = (x_1^1, x_2^1, x_3^1)$ tačka tog preseka. Ako $\min\{t_k^{*2}\} = t_s^{*2}$ nije jedinstven, onda se teme x^{*3} konveksnog skupa def. sa (5) koje dobijamo iz (8) kada umesto t stavimo t_s^{*2} nalazi u više ravni, ali sve one ne moraju imati još neku tačku zajedničku sa konveksnim skupom odredjenim sa (5), tj. neke mogu samo dodirivati konveksni skup u temenu x^{*3}. Da bi se odlučili koje ravni stvarno obrazuju konus u x^{*3} možemo postupiti slično kao kod prvog zadatka u ravni R^2.

Spojimo tačku x^{*3} sa unutrašnjom tačkom x^o, a zatim nadjimo jednu tačku x^{o1} iz okoline tačke x^{*3} upravo tačku čije su koordinate date jednačinama:

$$x_1^{ol} = \frac{x_1^o+(n-1)x_1^{*3}}{n} , \quad x_2^{ol} = \frac{x_2^o+(n-1)x_2^{*3}}{n} , \quad x_3^{ol} = \frac{x_3^o+(n-1)x_3^{*3}}{n} \qquad (9)$$

gde je n dovoljno veliki prodoran broj.

Nadjimo sada $\min \{t_k^{o*}\} = t_s^o$ skupa pozitivnih vrednosti parametra t za koje dobijamo preseke prave (10) i odgovarajuće ravni iz (5), gde je:

$$x_1 = C_1''t + x_1^{ol} , \quad x_2 = C_2''t + x_2^{ol} , \quad x_3 = C_3''t + x_3^{ol} \qquad (10)$$

Ako je $Z(x^{*3}) > Z(x^o)$ postoji mogućnost da je $Z(x^{*3})$ najveća vrednost, ali da bi se u to uverili moramo ponovo potražiti projekciju vektora $\vec{C}$ na ravan (s) i napisati jednačine prave kroz tačku x^s, a čiji je vektor projekcija vektora $\vec{C}$ na ravan (s), a zatim naći prvi prodor kroz odgovarajuće ravni iz (5) kojim napuštamo za pozitivnu vrednost parametra t naš konveksni skup. Ako obeležimo taj prodor sa x^{s1}, onda je $Z(x^{*3})$ najveća vrednost ukoliko važi

$$Z(x^{*3}) > Z(x^{s1}) > Z(x^s) \qquad (11)$$

a ako (11) nije ispunjeno postupak treba nastaviti kao i u početku. Posle prelaska iz tačke x^{s1} u neku novu tačku x^{s2} treba iz daljeg razmatranja izostaviti sve one ravni iz (5) koje su prolazile kroz teme x^{*3} i dodiruju polijedar definisan sa (1) kao i one koje možemo uzeti za bazu konusa sa vrhom u x^{*3} i čije smo prodore sa prethodnim pravama dobijali za negativno t.

Metod izlaza ima nedostatak koji se ogleda u neprecizno definisanoj okolini oko nekog temena, zapravo ne baš precizno definisanog prirodnog broja n. Verovatno da su praktični problemi takvi da umesto n možemo uzeti 100.

Projekciju vektora na ravan odnosno pravac tražimo na više načina, ali vodimo računa da je nama potreban samo pravac i smer tog vektora.

7.1. METOD IZLAZA SA OKOLINSKIM POLIJEDROM

U većini slučajeva problem linearnog programiranja koji se javlja u tehnici, ekonomiji ili drugim oblastima, nije uvek "očišćen" od suvišnih ograničenja, bilo da lice koje zapisuje probelm nije dovoljno stručno da od ponudjenih podataka odabere ona prava, ili pak zbog komplikovanosti analize koju treba sprovesti.

Problem se zadaje u obliku koji obično glasi: Naći maksimum funkcije $Z = C_1x_1 + C_2x_2 + \dots C_nx_n$, ako za $x_1, x_2, \dots, x_n$ važe ograničenja:

$$
\begin{aligned}
H_1&: a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \leq b_1 \\
H_2&: a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \leq b_2 \qquad (1) \\
&- \\
H_m&: a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots a_{mn}x_n \leq b_m ,
\end{aligned}
$$

gde je: $m > n$.

Rešavanje ovoga problema možemo početi slično kao kod analognih problema u rpstoru R^2 i R^3. Naime, iz jedne unutrašnje tačke u_o Ω_o, gde je Ω_o okolinski polijedar polijedra Ω definisanog sa (1) počinjemo prvi korak: kroz u_o postavimo pravu: $x_i = c_i t - u_i$, $i = 1, 2, \dots, n$ (2) gde je: $u_o(u_1, u_2, \dots, u_n)$ $_o$. Pretpostavimo da funkcija Z raste kada t raste. Slično kao i kod zadatka u R^2 potražimo prodore prave (2) kroz sve hiperravni (1) i obeležimo prvi prodor prave (2) kroz Ω definisanog sa (1), a koji se ostvaruje za $t > 0$. Neka je taj prodor tačka $\underline{a}$ koja pripada preseku π_1 odredjenih hiperravni iz (1). Sada kroz tačku $\underline{a}$ postavimo pravu:

$$x_i = C_i' t + a_i , \quad i = 1, \dots, n \qquad (3)$$

gde je: $\vec{C}(C_1', C_2' \dots C_n')$* projekcija vektora $\vec{C}(C_1, C_2, \dots, C_n)$ na presek π_1 i ponovo potražimo prvi pro-or $\underline{b}$ prave (3) kroz Ω za $t > 0$. Tražimo projekciju vektora $\vec{C}$ na presek π_2 hiperravni iz (1) koje sadrže tačku b i postupak nas-

* Umesto vektora $\vec{C}$ možemo uzeti i bilo koji vektor $\vec{C}^o$ koji zaklapa oštar ugao sa $\vec{C}$ tj. $\vec{C}.\vec{C}^o > 0$.

tavljamo sve dok ne dodjemo do prvog temena polijedra Ω. Obeležimo to teme sa v i potražimo tačku w koja se nalazi u bližoj okolini tačke v, a unutrašnja je tačka polijedra Ω. Tačku $w(w_1, \ldots, w_n)$ mogli bi potražiti iz jednačina:

$$w_i = \frac{v_i + (m - 1)u_i}{m}, \quad i = 1, 2, \ldots n \tag{4}$$

gde je $m = 100$ za praktične potrebe.

Kroz tačku w postavimo paralelnu pravu pravoj koja nas je dovela do temena v i potražimo prodor p te prave kroz Ω za pozitivno t, tj. za t za koje funkcija Z raste. Ako na napred izložen način krenemo iz tačke p kao i kod tačke a može se dogoditi da funkcija Z i dalje raste ili pak da je $Z(v)$ maksimalna vrednost za Z. Znači, posle nalaženja temena v treba izračinati $Z(v)$ i $Z(p)$ kao i $Z(p_1)$ i d i d_1 rastojanja tačke v od p i p_1, pa ako je:

$$Z(v) > Z(p_1) > Z(p) \quad \text{i} \quad d > d_1 \tag{5}$$

funkcija Z ima maksimum za v, a ako nije ispunjeno (5) treba postupak nastaviti iz tačke p_1 koja je dobijena posle nastavka opisanog procesa iz tačke p. Traženje tačke p_1 je potrebno da bi zaključili da daljim nastavkom procesa ne izlazimo iz okoline temena v tj. da je v i maksimalna tačka.

Postupak koji smo napred opisali za rešavanje našeg zadatka je zasnovan na geometrijskoj predstavi problema u prostoru R^3.

Iz svega što smo do sada analizirali možemo zaključiti da broj temena preko kojih treba preći da bi došli do temena za koje funkcija Z ima maksimum zavisi od početne tačke u_o kao i od broja ograničenja iz (1). Dalje, proveravanje da li je teme tačka maksimuma ili ne vezano je za jednu okolinu koja u specijalnim slučajevima mora biti malog prečnika.

U većini slučajeva broj suvišnih ograničenja nije veliki, pa možemo za dobijanje tačke maksimuma za funkciju Z koristiti i okolinski polijedar Ω_{uo} polijedra Ω. Kako smo napred opisali postupak za rešavanje problema linearnog programiranja to možemo sada uočiti da smo preko okolinskog polijedra Ω_{uo} posle prvog traženja prodora za maksimiziranje funkcije Z ba Ω_{uo} ušli upravo na put koji je pripadao skupu bitnih ograničenja, tj. ograničenja koja sadrže tačku maksimuma. Ako slično za naš zadatak nadjemo okolinsko-tangentni polijedar Ω^{T}_{uo} za sva ograničenja iz (1), možemo naći maksimum za Z na Ω^{T}_{uo}. Taj maksimum nije veći od maksimuma za funkciju Z na okolinskom polijedru Ω_{uo} polijedra Ω definisanog samo sa pravim ograničenjima, jer se može desiti da kroz tačku maksimuma prolaze hiperravni koje su dobijene translacijom suvišnih hiperravni iz (1), što će izazvati umanjenje pravog maksimuma na Ω_{uo}. Zato možemo zaključiti: ako je tačka maksimuma za Z na Ω^{T}_{uo} dobijena preko putanje koja je prolazila bar jednom hiperravni koja je upravo translirana suvišna hiperravan iz (1), onda možemo smatrati da odgovarajući sistem hiperravni iz (1) definiše maksimalnu tačku za Z na Ω.

Da bi smo se na neki način oslobodili velikog broja temena kao i provera da li je funkcija Z u njima maksimalna ili ne, mi ćemo donekle modificirati napred izloženi postupak za traženje maksimalne tačke za Z na skupu ograničenja (1).

Najpre posmatrajmo skup ograničenja (1) i unutrašnju tačku u_o. Iz napred izloženog zaključujemo da su bitna ograničenja važna u procesu dobijanja maksimalne tačke pa ćemo radi toga prvo obeležiti neka prava ograničenja iz (1).

Koristeći se jednačinama:

$$x_i' = x_i - u_i\,, \qquad i = 1,2,\ldots,n \tag{6}$$

sistem (1) prelazi u novi sistem u segmentnom obliku:

$$\begin{aligned} &\frac{x_1'}{p_{11}} + \frac{x_2'}{p_{12}} + \ldots + \frac{x_n'}{p_{1n}} \leqslant 1 \\ &\frac{x_1'}{p_{21}} + \frac{x_2'}{p_{22}} + \ldots + \frac{x_n'}{p_{2n}} \leqslant 1 \\ &- - - - - - - - - - - - - - \\ &\frac{x_1'}{p_{m1}} + \frac{x_2'}{p_{m2}} + \ldots + \frac{x_n'}{p_{mn}} \leqslant 1 \end{aligned} \tag{7}$$

skup p_{ij} možemo razbiti u dva podskupa p_{i_2j} – i p_{i_1j} + negativnih i pozitivnih brojeva, pa ako potražimo max p_{i_2j} – i min p_{i_1j} + možemo obeležiti one hiperravni iz(1) za prave hiperravni koje prodire x_j osa. Na ovaj način možemo bez većih teškoća naći znatan broj pravih ograničenja. Da bi njihov broj uvećali možemo potražiti i prodore pravih:

$$
\begin{aligned}
x_i &= c_i t \qquad & i &= 1, \ldots, n \\
x_i &= k_i^j t \qquad & i &= 1, \ldots, n
\end{aligned}
\tag{8}
$$

gde je k^j vektor iz skupa vektora čije su koordinate 0, 1 ili -1.

Počnimo sada sa traženjem maksimuma za funkciju Z na Ω^T_{uo}. Ako prvi prodor prave (1)$x_i = c_i t + u_i$, i = = 1, . . . ,n pripada nekoj hiperravni H_1' koja je nastala translacijom prave hiperravni H_1 iz (1) onda treba početi traženje maksimuma funkcije Z na Ω iz tačke prodora H_1 sa nekom od osa. Ako pak prava (1) prodire u nekoj hiperravni koja nije dobijena translacijom obeležene hiperravni iz (1) postupak traženja maksimuma za Z na Ω^T_{uo} treba nastaviti dok ne dodjemo do neke hiperravni koja je nastala translacijom prave hiperravni iz (1), tj. dok ne dodjemo do hiperravni koju smo obeležili kao pravu u prethodnom postupku. Cilj koji postižemo preko Ω^T_{uo} je upravo izdvajanje iz obeleženih pravih ograničenja bitna ograničenja.

Prirodno ukoliko pre dodjemo do bitnog ograničenja utoliko ćemo brže doći i do tačke maksimuma za funkciju Z.

Najzad razmotrimo problem projekcija vektora $\vec{c}$ na presek hiperravni iz (1) preko kojih se obavlja ceo proces traženja maksimalne tačke. Ako se krećemo u pravcu vektora $\vec{c}$ jasno je da će funkcija Z najbrže rasti, ali isto tako će funkcija Z rasti ako se krećemo i u pravcu bilo koga vektora $\vec{c}^o$ koji sa vektorom $\vec{c}$ zaklapa oštar ugao, odnosno ako je $\vec{c}^o.\vec{c} > 0$. Vektor $\vec{c}'$ (projekcija vektora $\vec{c}$ na presek odredjenih hiperravni iz (1)) možemo zameniti bilo kojim vektorom $\vec{c}^o$ koji leži u preseku odgovarajućih hiperravni iz (1), a zadovoljava nejednačinu $\vec{c}^o.\vec{c} > 0$.

Na ovaj način izbegli smo ne baš jednostavno traženje projekcije vektora ali smo zato ~~ali smo zato~~ krenuli sa rizikom da se na putu naidje na teme koje nije maksimalna tačka funkcije Z. Zato moramo proveriti svako teme da li je maksimalna tačka ili ne na napred izložen način. U praksi je vrlo retko da takva temena dolaze na putu za traženje ekstrema funkcije Z no zahvaljujući činjenici da smo krenuli postupak iz tačke koja pripada bitnom ograničenju, možemo skoro sa sigurnošću tvrditi da neka ograničenja posle dolaska do prvog temena u daljem procesu treba izbaciti iz razmatranja. To su one hiperravni koje nisu bitna ograničenja i mogu predstavljati bazu konusa sa vrhom u dobijenom temenu. Baze konusa su sve one hiperravni koje su do dolaska u dato teme n puta prodirane gore opisanim pravima za negativnu vrednost parametra t.

Iz do sada izloženog možemo zaključiti:

Prvo: nalaženje maksimalne tačke za funkciju Z na skupu dobijamo posle konačnog broja koraka koji u praksi nije veći od n.

Drugo: biranje vektora $\vec{c}^{\,o}$ (presek odgovarajućih hiperravni) u našem postupku nije jednoznačno odredjeno, jer ispunjava samo uslov $\vec{c}^{\,o}.\vec{c} > 0$.

Treće: postupak traženja optimalnog rešenja za funkciju Z na skupu Ω je završen posle provere da je dobijena tačka maksimalna.

Četvrto: ukoliko rešenje nije jedinstveno onda prilikom provere treba obeležiti sve hiperravni koje odredjuju to rešenje.

Iz svega do sada izloženog možemo postaviti prirodan red operacija koje moramo obaviti prilikom rešavanja zadatka linearnog programiranja. Metod izlaza sa okolinskim poliedrom počinje od polaznog oblika ograničenja u vidu nejednačina:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i \leqslant b_i \quad , i=1\dots m$$

pa se kao prvi zadatak nameće: svodjenje zadatka linearnog programiranja na kanonični oblik. Naime, ukoliko medju ograničenjima ima i jednačina treba te jednačine izdvojiti i rešiti neke nepoznate tih jednačina pomoću preostalih, a zatim iz preostalih nejednačina i funkcije treba odstraniti te nepoznate. Na taj način smanjujemo broj nepoznatih, a i broj ograničenja koja su ostala samo u vidu nejednačina. Dalje, radi primene metode izlaza sa okolinskim poliedrom treba izvršiti translaciju koordinatnog početka u unutrašnju tačku u^o iz Ω. Pisanje odgovarajućih ograničenja za okolinski poliedar Ω_o ili ako nam je to zgodnije za tangentni poliedar Ω_o^T gde je susednost pojedinih hiperravni poremećena samo suvišnim ograničenjem. Celokupnu ovu pripremu možemo šematski prikazati na ovaj način:

1. Svodjenje zadatka na kanonični oblik

2. Pisanje ograničenja u pogodnom obliku za obeležavanje pravih

3. Izdvajanje bitnih ograničenja

1. ŠEMA ZA KANONIČNI OBLIK ZADATKA

Nepoz.	x_1	x_2	. . . . .	x_{11}	b	$b_i'=b_i-c_i \cdot u_i$
1	a_{11}	a_{12}	. . . . .	a_{1n}	b_1	b_1'
2	a_{21}	a_{22}	. . . . .	a_{2n}	b_2	b_2'
.						
.						
.						
.						
.						
m	a_{m1}	a_{m2}	. . . . .	a_{mn}	b_m	b_m'
u_o	u_1	u_2		u_n		
c	c_1	c_2		c_n		

2. ŠEMA ZA IZDVAJANJE PRAVIH OGRANIČENJA

Nepoz.	x_1	x_2	.....	x_n	s.č.	Prodori koord. osa kroz
1	p_{11}^{-1}	p_{12}^{-1}	....	p_{1n}^{-1}	1	
2	p_{21}^{-1}	p_{22}^{-1}	....	p_{2n}^{-1}	1	
.						
.						
.						
.						
.						
m	p_{m1}	p_{m2}	....	p_{mn}	1	
0	0	0		0		$p_{ij} = b_i'/a_{ij}$
c	c_1	c_2		c_u		

3. ŠEMA ZA IZDVAJANJE BITNIH OGRANIČENJA

	x_1	x_2	.....	x_n	b'	n	Prodori raznih osa kroz bitni konus*
1	a_{11}	a_{12}	.....	a_{1n}	b_1'	a_1^*	
2	a_{21}	a_{22}	.....	a_{2n}	b_2'	a_2^*	
.							
.							
.							
.							
.							
m					b_m'	a_m^*	
0	0	0		0			$a_i^* = (\sum_j a_{ij}^2)^{1/2}$
c	c_1	c_2		c_n			

*Bitni konus je definisan bitnim ograničenjima, a vrh mu je u maksimalnoj tački.

U šemi 2. u redovima gde treba upisivati oznake za prodore osa treba pisati x_{j+} odn. x_{j-} što nam označava da su te hiperravni prave, a prodori su dobijeni osom x_j. Ovako dobijeni prodori ne iziskuju nikakva posebna sračunavanja već samo upoređjivanje brojeva. Šema 3. nam služi za traženje prodora prave $x_i = c_i t$, $i = 1,\dots,n$ kroz bitni konus, a s obzirom da taj prodor može biti kroz neku hiperravan koju prethodno nismo obeležili kao pravu, to moramo potražiti i prodore pravih $x_i = c_i^o t + v_i$, $i = 1,\dots,n$ gde je $\vec{c}^o(c_1^o,\dots,c_n^o)$ vektor koji ispunjava uslov $\vec{c}.\vec{c}^o > 0$, a $(v_1,\dots,v_n)$ tačka koja leži na pravoj c izmedju tačaka O i w, tako da je rastojanje tačke v od koordinatnog početka veće od jedan, a manje od rastojanja koordinatnog početka do tačke w.

S obzirom da je u većini slučajeva dolaženje do bitnog ograničenja otežano ako imamo dosta suvišnih ograničenja, to rešavanje postavljenog zadatka preko bitnih ograničenja možemo izbeći na napred opisan način.

Posle odredjivanja bitnog ograničenja vraćamo se ponovo na šemu 2. i počinjemo rešavanje zadatka iz tačke prodora bitnog ograničenja sa onom od osa za koju je funkcija najveća.

Neka je početni prodor tačka $a^1 \in H_1$ tada pravom p_1: $x_i = c_i^2 t + a_i^1$, $i = 1,\dots,n$ dolazimo do sledećeg prodora: a^2 kroz H_2 odakle dalje napuštamo poliedar Ω. Ovde možemo uzeti za vektor $\vec{c}^2$ bilo koji vektor za koji je ispunjeno $\vec{c}.\vec{c}^2 > 0$ i $c^2.\vec{n} = 0$, gde je $\vec{n}$ vektor normale hiperravni H_1.

7.2. PROJEKCIJA VEKTORA $\vec{a}$ NA PRESEK m-HIPER RAVNI U PROSTORU R^n

Neka je dat vektor a $a_1, \ldots, a_n$ i skup hiper ravni $\pi_i = \sum_{j=1}^{n} b_{ij}x_j = 0$, $i=1,\ldots,m$ (m n), gde je

$\sum_{j=1}^{n} b_{ij}a_j \neq 0$, $(i = 1,2,\ldots,m)$.

Projekciju vektora $\vec{a}$ na presek hiper ravni i , $i=1,\ldots,m$ dobijamo rešavanjem ekstremalnog problema:

naći tačku A' na $\sum_{i=1}^{m}$ i koja je najbliža vrhu vektora a odnosno tački $(a_1,\ldots,a_n)$ $y_1 R^n$. Najpre formirajmo funkciju Lagranža:

$$f = d^2 = \sum_{j=1}^{n}(x_j-a_j)^2+2\lambda_1 \sum_{j=1}^{n} b_{1j}x_j+\ldots+2\lambda_m \sum_{j=1}^{n} b_{mj}x_j \ , \qquad (1)$$

zatim koristeći se teorijom vezanih ekstrema možemo napisati sledeći sistem jednačina:

$$\begin{array}{ll}
 & (x_1-a_1) + {}_1b_{11}+\ldots+ {}_m b_{m1} = 0 \\
n & (x_2-a_2)+ {}_1b_{12}+\ldots+ {}_m b_{m2} = 0 \\
 & ---- \quad ----------- \\
 & x_n-a_n+ {}_1b_{1n}+\ldots+ {}_m b_{mn} = 0 \\
 & b_{11}x_1+\ldots+b_{1n}x_n = 0 \\
m & b_{21}x_1+\ldots+b_{2n}x_n = 0 \\
 & - \cdot - \cdot --- \quad -- \\
 & b_{m1}x_1+\ldots+b_{mn}x_n = 0
\end{array} \qquad (2)$$

Ako uvedemo matrice $a = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ a_n \end{bmatrix}$, $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix}$, $\lambda = \begin{bmatrix} \lambda 1 \\ \lambda 2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \lambda n \end{bmatrix}$

$$A = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \dots b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} \quad b_{2n} \\ b_{m1} & b_{m2} \dots b_{mm} \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad B = \begin{bmatrix} b_{11}, b_{21} \dots b_{m1} \\ b_{12} \quad b_{22} \dots b_{m2} \\ b_{1n} \quad b_{2n} \dots b_{mn} \end{bmatrix}$$

sistem (2) možemo napisati kao matrični sistem:

$$\begin{aligned} & x = a - B.\lambda \\ & A.x = 0 \end{aligned} \tag{3}$$

odnosno

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_n \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} b_{11} & b_{21} \dots & b_{m1} \\ b_{12} & b_{22} & b_{m2} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{1n} & b_{2n} & b_{mn} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \lambda_m \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \cdot \;\cdot\; \cdot & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} \cdot \;\cdot\; \cdot & b_{2n} \\ \cdot & & \\ \cdot & & \\ \cdot & & \\ b_{m1} & b_{m2} \cdot \;\cdot\; \cdot & b_{mn} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix} = 0$$

Iz (3) imamo:

$$A.(a - B.\lambda) = 0$$

$$A.a - A.(B.\lambda) = 0$$

$$A.a) - (A.B).\lambda = 0$$

$$\lambda = (A.B)^{-1}.(A.a)$$

$$x = a - B.\left[(A.B)^{-1}.(A.a)\right] , \tag{4}$$

pa je projekcija vektora $\vec{a}$ na $\bigcap_{i=1}^{n} \pi_i$ vektor $\vec{x}$. Ukoliko je $m = n - 1$ projekciju tačke $(a_1, \dots, a_n)$ odnosno vrha vektora $\vec{a}$ na presek hiper ravni π_i za $i=1,\dots, n-1$ možemo naći kao rešenje sledećeg sistema jednačina:

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^{n} b_{ij} x_j = 0 , \quad i = 1,\dots,n-1 \\ & \sum_{j=1}^{n} x_j (x_j - a_j) = 0 \end{aligned} \tag{5}$$

Ovaj sistem sledi iz činjenice da vektor $\vec{x}$ leži u preseku hiperravni i, a da je normalan na vektoru x-a.

Primer 1. Naći projekciju vektora a 1, 1, 1 na presek ravni $x-2y+z = 0$ i $3x-y+2z = 0$. Koristeći se metodom Lagranževih multiplikatora možemo dobiti sistem jednačina:

$$
\begin{aligned}
&x - 2y + z = 0\\
&3x - y + 2z = 0\\
&x - 1 - \lambda_1 + 3\lambda_2 = 0\\
&y - 1 - 2\lambda_1 - \lambda_2 = 0\\
&z - 1 + \lambda_1 + 2\lambda_2 = 0
\end{aligned}
\qquad (6)
$$

Ako iskoristimo uslov ortogonalnosti vektora $(\vec{x}-\vec{a})$ na vektor $\vec{x}$ možemo napisati sistem jednačina:

$$
\begin{aligned}
&x - 2y + z = 0\\
&3x - y + 2z = 0\\
&x(x-1) + y(y - 1) + z(z-1) = 0
\end{aligned}
\qquad (7)
$$

Rešenje sistema (6) je: $_1 = \frac{-28}{35}$ $_2 = \frac{24}{35}$

$x = \frac{-9}{35}$, $y = \frac{3}{35}$ i $z = \frac{15}{35}$, a rešenje sistema (7) je:

$x = \frac{-9}{35}$, $y = \frac{3}{35}$ i $z = \frac{15}{35}$.

Dakle, možemo zaključiti, da sa praktične tačke gledišta, metod koji zasnivamo na ortogonalnosti vektora x i vektor x-a ima prednosti, s obzirom na manji broj nepoznatih koje treba odredjivati. Ako želimo da izbegnemo Lagranževe multiplikatore kod rešavanja gore postavljenog zadatka za slučaj kada je m n - 1 možemo posmatrati sistem jednačina:

$$
\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{n} b_{ij}\, x_j = 0, \quad i = 1,2, \ldots, m\\
&\sum_{j=1}^{n} x_j^{(k)} (x_j - a_j) = 0, \quad k = 1,2, \ldots, n-m
\end{aligned}
\qquad (8)
$$

gde su tačke $x^{(k)} = (x_1^{(k)}, \ldots, x_n^{(k)})$ $k = 1,\ldots,n-m$ iz preseka hiperravni $_i$. Njih možemo slobodno izabrati, ali tako da vektori $x^{(k)}$ nisu linearno zavisni. To možemo postići, recimo, ako iz sistema: $\sum_{j=1}^{n} b_{ij} x_j = 0, \; i=1,2,\ldots,m$ možemo rešiti $x_1, x_2, \ldots, x_m$ u funkciji od x_{m+1}, $x_{m+2}, \ldots, x_m$, pa uzmemo za $x_{m+1} = 1, \; x_{m+2} = x_{m+3} = \ldots = x_n = 0$ i td., ili bilo koje druge nama pogodne vrednosti. Iz napred izloženog vidimo da zadatak odredjivanja Lagranžovih multiplikatora ovde zamenjujemo zadatkom odredjivanja vektora $\vec{x}^{(k)}$. Kako to konkretno radimo možemo pokazati na sledećem primeru.

Primer 2. Naći projekciju vektora a 1,1,1,1,1 na presek hiperravni $x_1 + x_2 \quad 2\,x_3 + 2\,x_4 \quad x_5 = 0$

$$2\,x_1 - x_2 + x_3 \quad 2\,x_4 + x_5 = 0$$

Najpre napišimo odgovarajući sistem na osnovu (2):

$$
\begin{aligned}
&1) \quad x_1 + x_2 - 2\,x_3 + 2\,x_4 - x_5 = 0\\
&2) \quad 2\,x_1 - x_2 + x_3 - 2\,x_4 + x_5 = 0\\
&3) \quad x_1 - 1 + {}_1 + 2\;{}_2 = 0\\
&4) \quad x_2 - 1 + {}_1 - {}_2 = 0\\
&5) \quad x_3 - 1 - 2\,x_1 + {}_2 = 0\\
&6) \quad x_4 - 1 + 2\;{}_1 - 2\;{}_2 = 0\\
&7) \quad x_5 - 1 - {}_1 + {}_2 = 0
\end{aligned}
\qquad (9)
$$

Rešenja sistema (9) su: $x_1 = \frac{34}{85}$, $x_2 = 1$, $x_3 = \frac{102}{85}$

$x_4 = 1$, $x_5 = 1$ $\;{}_1 = {}_2 = \frac{17}{85}$

Odgovarajući sistem jednačina sistemu (8) dobijamo ako prvo iz jednačine (1) i (2) iz (9) izrazimo x_1 i x_2 u funkciji x_3, x_4 i x_5 kao

$$x_1 = \frac{1}{3}\,x_3\,,$$

$$x_2 = \frac{5}{3}\,x_3 - 2\,x_4 + x_5\,,$$

a zatim odredimo tačke $u_1(1,5,3,0,0)$, $u_2(1,3,3,1,0)$ i $u_3(0,1,0,0,1)$ preseka datih hiperravni.

Sada možemo napisati sistem jednačina:

1) $x_1 + x_1 \quad 2x_3 + 2x_4 - x_5 = 0$

2) $2x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 + x_5 = 0$

3) $(x_1 - 1) + 5(x_2 - 1) + 3(x_3 - 1) = 0$ (10)

4) $(x_1 - 1) + 3(x_2 - 1) + 3(x_3 - 1) + (x_4 - 1) = 0$

5) $(x_2 - 1) + (x_5 - 1) = 0.$

Proverom možemo ustanoviti da za $x_1 = \frac{34}{85}$ $x_2 = 1$ $x_3 = \frac{102}{85}$ $x_1 = 1$ i $x_5 = 1$ leve strane sistema (10) imaju vrednosti nula.

Nije teško primetiti da ukoliko rešavamo početni zadatak za presek hiperravni

$$\mathcal{H}_i = \sum_{j=1}^{n} b_{ij} \; x_j = c_i \;, \quad i = 1, \ldots m \quad \text{i vektor } \vec{a}(a_1, \ldots, a_n)$$

tada umesto sistema (8) imamo sistem:

$$\sum_{j=1}^{n} b_{ij} \, x_j = c_i \;, \quad i = 1, \ldots, m$$

$$\sum_{j=1}^{n} (x_j^o - x_j^{(k)})(x_j - a_j) = 0 \;, \quad k = 1, 2, \ldots, n-m \;,$$

gde su x^o i $x^{(k)}$ konkretne tačke iz preseka hiperravni $\mathcal{H}_i$ koje obezbedjuju da vektori $(\vec{x}^o - \vec{x}^{(k)})$ nisu linearno zavisni.

Kako nam nije potrebna projekcija vektora za nalaženje maksimalne tačke to možemo uvesti pojam opšte projekcije vektora t.j. vektora koji sa datim vektorom ima skalarni proizvod veći od nule.

8. ZADATAK LINEARNOG PRIGRAMIRANJA BEZ SUVIŠNIH OGRANIČENJA. METOD OKOLINSKOG POLIJEDRA.

Neka je dat zadatak: Nađi maksimum funkcije

$f = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i$, pri ograničenjima

$$\begin{array}{l} H_1: a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \ldots + a_{1n} x_n \leq b_1 \\ H_2: a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \ldots + a_{2n} x_n \leq b_2 \\ - - - - - - - - - - - - - - - - - \\ H_m: a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \ldots + a_{m} x_n \leq b_m \end{array} \qquad (1)$$

Dalje, neka među ograničenjima (1) nema suvišnih i neka je koordinatan početak O unutrašnja tačka skupa Ω definisanog sistemom (1).

Jasno je da ako koordinatni početak nije unutrašnja tačka Ω možemo translacijom dovesti koordinatni početak u bilo koju tačku skupa Ω

Da bi rešili napred postavljeni zadatak prvo napišimo sistem (1) u normalnom obliku:

$$\begin{array}{l} a_{11}^{o} x_1 + a_{12}^{o} x_2 + \ldots + a_{1n}^{o} x_n - p_1 \leq 0 \\ a_{21}^{o} x_1 + a_{22}^{o} x_2 + \ldots + a_{2n} x_n - p_2 \leq 0 \end{array} \qquad (2)$$

gde je $a_{ij}^{o} = \dfrac{a_{ij}}{(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^{2})^{1/2}}$, $i = 1,2,\ldots,m$

Potražimo $\min_i \{p_i\}$, $i = 1,\ldots m$ i neka je p_1 taj minimum. S obzirom na teškoće koje su se javljale prilikom dosadašnjih metoda za traženje optimalnog rešenja kada se dodje do nekog temena polijedra Ω, mi ovde izlažemo nov metod. Ovaj metod zovemo Metod okolonskog polijedra za rešavanje zadatka linearnog programiranja bez suvišnih ograničenja. Ideja ovog metoda je u tome što se početni zadatak prvo reši za okolinski polijedar $_o$ polijedra definisanog sistemom (1), a zatim i za sam polijedar Ω, tj. naš početni zadatak.

Sada ćemo izložiti taj metod. Prvo napišimo nov sistem ograničenja za okolinski polijedar $_o$

$$\begin{aligned} H_1^o &: a_{11}^o x_1 + a_{12}^o x_2 + \ldots + a_{1n}^o x_n \leq p_1 \\ H_2^o &: a_{21}^o x_2 + a_{22}^o x_2 + \ldots + a_{2n} x_n \leq p_1 \\ &\vdots \\ H_m^o &: a_{m1}^o x_1 + a_{m2}^o x_2 + \ldots + a_{mn}^o x_n \leq p_1 \end{aligned} \tag{3}$$

Potražimo prvi prodor prave

$$x_i = C_i t \;, \quad i = 1,2,\ldots n \tag{4}$$

u pravcu za koji funkcija f raste kroz polijedar Ω_o. Neka se taj prodor ostvaruje za $t = t_{jo}$ i neka taj prodor pripada preseku L_{jo} ili samo jednoj hiperravni H_{jo}^o iz skupa ograničenja (3). Na osnovu napred dokazane teoreme sva ograničenja preseka L_{jo} pripadaju skupu bitnih ograničenja. Ako presek L_{jo} predstavlja tačku onda skup ograničenja H_s^o, $s \in S$, gde je S podskup skupa $1,2,\ldots,m$ odredjuje tu tačku, a skup H_s odredjuje maksimalnu tačku za početni problemm pa znači treba rešiti samo sistem linearnih jednačina od n nepoznatih.

Neka L_{jo} presek od l n hiperravni iz (3) i neka je C_{jo}^1 projekcija vektora $C = C_1, C_2, \ldots C_n$ na L_{jo}. Nadjimo pravu kroz nadjeni prodor P_{jo} u pravcu vektora $C_{jo}^1 = C'_{jo1}, C'_{jo2}, \ldots, C'_{jon}$. Jednačine te prave su:

$$x_i = C'_{joi} t + x_{joi} \;, \quad i = 1,2,\ldots,n \tag{5}$$

Sada ponovo prvi prodor prave (5) u pravcu rašćenja funkcije f kroz polijedar $_o$ i ponovo razmotrimo dva slučaja. Prvi slučaj. Prodor je vrh konusa definisanog bitnim ograničenjima i drugi slučaj: Prodor pripada preseku bitnih ograničenja iz skupa svih ograničenja koji definišu polijedar Ω_o.

Ako je drugi slučaj postupak treba nastaviti na napred opisan način sve dok ne dodjemo do vrha S konusa definisanog bitnim ograničenjima za funkciju f.

Najzad da bi rešili naš početni zadatak treba izdvojiti sva ograničenja iz (1) koja odgovaraju bitnim ograničenjima Ω_o i rešiti odgovarajući sistem linearnih jednačina.

Rešavanje ovog sistema biće olakšano s obzirom na prethodna izračunavanja sprovedena u napred izloženom postupku.

Primećujemo da rešavanje zadataka linearnog programiranja svodimo na rešavanje sistema linearnih jednačina od n-nepoznatih, ali izbor tog sistema je potpomognut okolinskim polijedrom Ω_o i napred izloženog projeciranja vektora $\vec{C}=\{c_1, c_2, \ldots, c_n\}$ na odgovarajuće preseke L_{jo} hiperravni iz (3).

Dalje, možemo zaključiti da ukoliko je projekcija vektora $\vec{C}$ na presek L_{jo} nula vektor, onda presek odgovarajućih hiperravni iz (1) predstavlja skup maksimalnih tačaka za funkciju f. Maksimalan broj projeciranja vektora $\vec{C}$ na preseke odgovarajućih hiperravni je n. Posle svakog koraka smanjuje se broj hiperravni kroz koje se traže prodori bar za jedan. Kod poslednjeg projeciranja vektora $\vec{C}$ na presek (n-1)-hiperravni dobijamo projekciju koju možemo potražiti i kao vektorski proizvod n-1 vektora normali na hiperravni koje ulaze u taj presek.

Poslednja jednačina prave pomoću koje nalazimo vrh S znači mogu biti napisane kao

$$x_i = C_i^* t + x_i^* , \quad i = 1,2,\ldots,n \tag{6}$$

gde je $\vec{C}^* = (C_1^*, C_2^*, \ldots, C_n^*)$ vektorski proizvod vektora normali hiperravni iz preseka dimenzije jedan. Ako sada pretpostavimo da je prvi prodor prave (6) kroz hiperravan H_n^o, što nije bitno kako je ona numerisana, imamo da je:

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ni}(C_i^* t + x_i^*) = p_n \qquad \text{odnosno}$$

$$t = \frac{p_n - \sum_{i=1}^{n} a_{ni} x_i^*}{\sum_{i=1}^{n} a_{ni} C_i^*} \tag{7}$$

Imenilac $D = \sum_{i=1}^{n} a_{ni} C_i^*$ predstavlja upravo determinantu sistema linearnih jednačina koje odredjuju maksimalnu tačku za naš zadatak.

Primedba 1.

Kod projekcije vektora $\vec{c}$ na preseke bitnih hiperravni pretpostavili smo da ako je presek dimenzije $k < n$ onda je i $n - k$ hiperravni odredjivalo taj presek, jer ako bi ih bilo više onda neka od njih bi bila suvišna što smo isključili postavkom zadatka.

Primedba 2.

Okolinski polijedar ima ulogu da njom izdvoji bitna ograničenja, ali iz same njegove konstrukcije vidimo da to može biti bilo kakav tangentni polijedar n-dimenzione kugle kod koga je osobina susednosti zadržana kao kod početnog polijedra. Upravo to nam daje mogućnosti da i tu osobinu tangentnog polijedra koristimo za izdvajanje bitnih ograničenja.

9. IZDVAJANJE SUVIŠNIH OGRANIČENJA IZ SISTEMA OGRANIČENJA KOJI DEFINIŠE KONVEKSAN POLIJEDAR Ω SA UNUTRAŠNJOM TAČKOM U PROSTORU R^n.

Neka je dat skup $H = H_1, \ldots H_m$ linearnih nejednačina oblika:

$$
\begin{aligned}
H_1 &: a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \leq b_1 , \\
H_2 &: a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \leq b_2 \\
&\vdots \\
H_m &: a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \leq b_m
\end{aligned}
\qquad (1)
$$

koji definiše neki polijedar u prostoru R^n. Neka u skupu $H = \{H_1, H_2, \ldots H_m\}$ postoje i takva ograničenja koja ne uzimaju znak jednakosti ni za jednu tačku polijedra Ω tj. neka ima suvišnih ograničenja. Izdvajanje suvišnih ograničenja nije ni malo lak zadatak, jer se on svodi na linearno programiranje.

Ako želimo da proverimo da li je na primer ograničenje H_i suvišno ili ne, onda levu stranu ograničenja H_i možemo prihvatiti kao funkciju koju treba minimizirati, odnosno maksimizirati ako uzmemo u obzir preostala ograničenja. No da bi ubrzali proces izdvajanja suvišnih ograničenja možemo najpre potražiti ona ograničenja koja izdvajamo koristeći unutrašnju tačku polijedra Ω.

Bez ograničenja opštosti možemo pretpostaviti da je koordinatni početak O unutrašnja tačka polijedra Ω, jer ako to nije možemo izvršiti translaciju tako da unutrašnja tačka bude baš koordinatni početak O′ u novom sistemu, a sistem (1) prelazi u odgovarajući sistem (1′). Ako uzmemo da je koordinatni početak O unutrašnja tačka polijedra Ω tj da za O ni jedno ograničenje H_i, $i = 1, \ldots m$ ne uzima znak jednakosti, onda sistem (1) možemo napisati u segmentnom obliku kao:

$$
\begin{aligned}
H_1 &\cdot \frac{x_{11}}{c_{11}} + \frac{x_{12}}{c_{12}} + \ldots + \frac{x_{1n}}{c_{1n}} \leqslant 1 \\
H_2 &\cdot \frac{x_{21}}{c_{21}} + \frac{x_{22}}{c_{22}} + \ldots + \frac{x_{2n}}{c_{2n}} \leqslant 1 \\
&\vdots \\
H_m &\cdot \frac{x_{m1}}{c_{m1}} + \frac{x_{m2}}{c_{m2}} + \ldots + \frac{x_{mn}}{c_{mn}} \leqslant 1
\end{aligned}
\qquad (2)
$$

Posmatrajmo skupove odnosno vektor kolone leve strane (2), naprimer skup

$$C_k = [c_{1k}, c_{2k}, \ldots c_{mk}]^T, \quad k \in \{1,\ldots,n\}$$

Skup $\{C_k\}$ možemo razdvojiti na dva podskupa C_k^+ i C_k^-, gde je C_k^+ skup pozitivnih elemenata, a C_k^- prestali skup negativnih elemenata skupa C_k, tj.

$$C_k = C_k^+ \cup C_k^- \quad i \quad C_k^+ \cap C_k^- = \theta.$$

Neka je $\max C_k^- = c_{qk}$ i $\min C_k^+ = C_{pk}$ gde je $p,q \in \{1,2,\ldots,m\}$, tada su ograničenja H_p i H_q granična ograničenja poliedra Ω, jer osa x_k u tačkama $P(0,0,\ldots,c_{pk},\ldots 0)$ i $Q(0,0,\ldots,c_{qk},\ldots,0)$ prodire poliјedar . Na ovaj način možemo dobiti $2n$ prodora, no kako oni ne moraju biti u različitim hiperravnima, to je na ovaj način izdvojeno najmanje $n+1$ graničnih hiperravni, jer sa toliko hiperravni možemo formirati simpleks u prostoru R^n. Na gore opisan način iz sistema (1) možemo izdvojiti bez većih izračunavanja dovoljan broj graničnih ograničenja. Dalje izdvajanje graničnih ograničenja obavljamo rešavanjem zadatka linearnog programiranja. Naime, uzimamo jedno ograničenje naprimer H_s iz sistema (1) za koje na gore opisan način nismo utvrdili da je granično, a zatim tražimo max F, gde je $F = a_{s1}x_1 + \ldots + a_{sn}x_n - b_s$ pod uslovom da su ispunjena sva preostala ograničenja.

Prilikom rešavanja ovog zadatka treba posle svakog koraka koji nas vodi do tačke maksimuma, objasniti ograničenja koja su pripadala poliјedru Ω . Na taj način smanjujemo broj ograničenja koja treba dalje ispitivati da li su suvišna ili su granična.

Neka se maksimum za F postiže u prvom slučaju u jedinstvenoj tački u, tada ako je $F(u) < 0$ i $b_s > 0$ H_s je suvišno ograničenje, a ako je $F(u) \geq 0$ H_s je granično ograničenje polijedra . U drugom slučaju ako se maksimum za F postiže na nekom preseku odredjenih hiperravni iz (1) ili na celoj hiperravni, treba uzeti bilo koju tačku iz datog preseka odnosno hiperravni i izvesti zaključak kao u prvom slučaju.

Zadatak izdvajanja suvišnih ograničenja rešavao je Širvanov A. [38].

Primer 1.

Rešiti problem transporta kratko zadat sledećom šemom.

	B_1	B_2	B_3	B_4	Zalihe
A_1	8	3	5	2	10
A_2	4	1	6	7	15
A_3	1	9	4	3	25
Potrebe	5	10	20	15	

A_1 , A_2 , A_3 punktovi dostave
B_1 , B_2 , B_3 , B_4 punktovi potreba

Brojevi u kvadratićima su cene prevoza po jedinici proizvoda.

1. Metod izlaza

Ovaj zadat. ćemo rešiti najpre metodom izlaza sa okominskim polijedrom. Koristeći se metodom "severozapadnog ugla" možemo dobiti sledeći sistem jednačina:

$$
\begin{aligned}
x_{11} &= 5 - x_{21} - x_{31} \\
x_{12} &= 5 + x_{21} + x_{31} - x_{13} - x_{14} \\
x_{22} &= 5 - x_{21} - x_{31} + x_{13} + x_{14} - x_{32} \\
x_{23} &= 10 + x_{31} - x_{13} - x_{14} + x_{32} - x_{24} \\
x_{33} &= 10 - x_{31} + x_{14} - x_{32} + x_{24} \\
x_{31} &= 15 - x_{14} - x_{24}
\end{aligned} \tag{1}
$$

Kako su svi $x_{ij} \geqslant 0$ to možemo iz (1) dobiti sistem nejednačina koji pišemo u obliku:

$$
\begin{aligned}
&1.\ x_{21} + x_{31} \leqslant 5 \\
&2.\ x_{13} + x_{14} - x_{21} - x_{31} \leqslant 5 \\
&3.\ x_{13} - x_{14} + x_{21} + x_{31} + x_{32} \leqslant 5 \\
&4.\ x_{13} + x_{14} + x_{24} - x_{31} - x_{32} \leqslant 10 \\
&5.\ x_{14} - x_{24} + x_{31} + x_{32} \leqslant 10 \\
&6.\ x_{14} + x_{24} \leqslant 15 \\
&7.\ x_{13} \geqslant 0, \quad 8.\ x_{14} \geqslant 0, \quad 9.\ x_{21} \geqslant 0 \\
&10.\ x_{24} \geqslant 0, \quad 11.\ x_{31} \geqslant 0, \quad 12.\ x_{32} \geqslant 0
\end{aligned} \tag{2}
$$

Funkcija f koju treba minimizirati posle elementarnih sračunavanja je:

$$f = 3.x_{13} - 5.x_{14} - 2.x_{21} + 2.x_{24} - 3.x_{31} + 10.x_{32} + 175$$

Radi primene metode izlaza sa okominskim polijedrom, a s obzirom na specifičnost transportnog problema, možemo napred napisane nejednačine i funkciju, kao i unutrašnju tačku u (1, 1, 1, 1, 1, 1) pregledno dati u sledećoj tablici:

Tablica 1.

	x_{13}	x_{14}	x_{21}	x_{24}	x_{31}	x_{32}	Sl. 2.	T.sl.č.	n	Prodori osa kroz
1			1		1		5	3	2	$x_{21}^{+}x_{31}^{+}$
2	1	1	1		1		5	5	2	$x_{13}^{+}x_{14}^{+}$
3	-1	-1	1		1	1	5	4	5	x_{32}^{+}
4	1	1		1	-1	-1	10	9	5	x_{24}^{+}
5		-1		-1	1	1	10	10	2	
6		1		1			15	13	2	
u_o	1	1	1	1	1	1				
f	-3	-5	-2	2	-3	10	175	174		

U tablicu nismo unosili nejednačine $x_{ij} \geqslant 0$, jer bi to bilo u ovom slučaju malo opravdano. Negativni prodori su ostvareni kroz hiperravni od 7. - 10.

Potražimo sada prvi prodor prave c :

$$x_{13} = -3t, \quad x_{14} = -5t, \quad x_{21} = -2t, \quad x_{24} = 2t, \quad x_{31} = -3t$$

$$x_{32} = 10t.$$

Kroz Ω za negativnu vrednost t jer u ovom slučaju f opada kada t opada.

1. $-2t - 3t = 2 \qquad t_1 = -\frac{2}{5}$

2. $-3t - 5t + 2t + 3t = 2, \qquad t_2 = -\frac{2}{3}$

3. $3t + 5t - 2t - 3t + 10t = 5, \qquad t_3 = \frac{-5}{13}$

4. $-3t - 5t + 2t + 3t - 10t = 5, \qquad t_4 = -\frac{5}{13}$

5. $5t - 2t \quad 3t + 10t = 2, \quad t_5 = \frac{2}{10}$

6. $-5t + 2t = 2, \quad t_6 = -\frac{2}{3}$

7. $t_7 = +\frac{1}{3}$, 8. $t_8 = \frac{1}{5}$, 9. $t_9 = +\frac{1}{2}$, 10. $t_{10} = \frac{1}{2}$

11. $t_{11} = \frac{1}{3}$, 12. $t_{12} = \frac{-1}{10}$

S obzirom da je $-x_{32} \quad 1$ bitno ograničenje, a pošto nije bilo translacije prilikom dobijanja to postupak traženja minimuma funkcije f na počinjemo od tačke u_1 $(\frac{3}{10}, \frac{5}{10}, \frac{2}{10}, \frac{-2}{10}, \frac{3}{10}, -1)$ koja leži u hiperravni 12.

Izaberimo sada vektor c^1 $(-1, -1, -1, 1, -1, 0)$ koji sa vektorom c $(-3, -5, -2, +2, -3, 10)$ čini oštar ugao ti. $c^1 . c \quad 0$, a leži u $x_{32} = 0$. Potražimo sada prodore prave c_1:

$$x_{13} = -t + \frac{3}{10}, \quad x_{14} = -t + \frac{5}{10}, \quad x_{21} = -t + \frac{2}{10}$$

$$x_{24} = t - \frac{2}{10}, \quad x_{31} = -t + \frac{3}{10}, \quad x_{32} = -1$$

kroz hiperravni od 1. do 11. koje definišu .

1. $-t + \frac{2}{10} \quad -t + \frac{3}{10} = 3, \quad t_1 = -\frac{5}{4}$

2. $-t + \frac{3}{10} \quad -t + \frac{5}{10} + t - \frac{2}{10} + t - \frac{3}{10} = 5; \quad t_2 \quad 0$

3. $-t - \frac{3}{10} \quad + t - \frac{5}{10} - t + \frac{2}{10} - t + \frac{3}{10} - 1 = 4, \quad t_3 = \infty$

4. $-t + \frac{3}{10} \quad -t + \frac{5}{10} + t - \frac{2}{10} + t - \frac{3}{10} + 1 = 9, \quad t_4 = \infty$

5. $-t + \frac{5}{10} \quad + t - \frac{2}{10} - t + \frac{3}{10} - 1 = 10, \quad t_5 = -\frac{4}{10}$

6. $-t + \frac{5}{10} \quad + t - \frac{2}{10} = 13, \quad t_6 = \infty$

7. $t - \frac{3}{10} = 1 \quad t_7 = \frac{13}{10}$

8. $t - \frac{5}{10} = 1 \quad t_8 = \frac{15}{10}$

9. $t - \frac{2}{10} = 1 \qquad t_9 = \frac{12}{10}$

10. $-t + \frac{2}{10} = 1 \qquad t_{10} = -\frac{8}{10}$

11. $+t - \frac{3}{10} = 1 \qquad t_{11} = \frac{13}{10}$

Dalje traženje minimuma f ide pomoću vektora c^2 $(-1, -1, 0, 0, -1, 0)$. jer je 12. $c_{32} = 0$ i 10.$c_{24} = 0$.

Sada tražimo prodore prave c_3:

$$x_{13} = -t + \frac{11}{10}, \quad x_{14} = -t + \frac{13}{10}, \quad x_{21} = t + 1$$

$$x_{24} = -1, \quad x_{31} = -t + \frac{11}{10}, \quad x_{32} = -1$$

1. $t + 1 - t + \frac{11}{10} = 3 \qquad t_1 = \infty$

2. $-t + \frac{11}{10} - t + \frac{13}{10} - t - 1 + t + \frac{11}{10} = 5, \quad t_2 = \frac{-25}{20}$

3. $t - \frac{11}{10} + t - \frac{13}{10} + t + 1 - t + \frac{11}{10} - 1 = 4, \quad t_3 = \frac{53}{10}$

4. $-t + \frac{11}{10} - t + \frac{13}{10} - 1 + t - \frac{11}{10} + 1 = 9, \quad t_4 = -\frac{77}{10}$

5. $-t + \frac{13}{10} + 1 - t + \frac{11}{10} - 1 = 10, \quad t_5 = -\frac{76}{20}$

6. $-t + \frac{13}{10} - 1 = 13, \quad t_6 = -12 + \frac{13}{10}$

7. $t_7 \pm \frac{11}{10} + 1$, 8. $t_8 = \frac{13}{10} + 1$

9. $-t - 1 = 1 \qquad \underline{t_9 = -2}$

11. $t = 1 + \frac{11}{10}$

Novi vektor c^3 $(1, -1, 0, 0, 0, 0)$ biće vektor prave C_4:

$$x_{13} = -t + \frac{31}{10}, \quad x_{14} = -t + \frac{33}{10}, \quad x_{21} = -1$$

$$x_{24} = -1, \quad x_{31} = -t + \frac{31}{10}, \quad x_{32} = -1$$

a potreban prodor kroz Ω dobijamo iz jednačina:

1. $-1 + \frac{31}{10} \quad 3$

2. $t + \frac{31}{10} + \frac{33}{10} - t + 1 - \frac{31}{10} \quad 5, \qquad t_2 = \infty$

3. $t - \frac{31}{10} + t - \frac{33}{10} + 1 + \frac{31}{10} - 1 = 4, \quad t_3 = \infty$

4. $t + \frac{31}{10} + \frac{33}{10} - t - 1 - \frac{31}{10} + 1 = 9, \quad t_4 = \infty$

5. $t \cdot \frac{33}{10} + 1 + \frac{31}{10} - 1 = 10 ,$ $\qquad t_5 = 10+ \frac{2}{10}$

6. $\frac{33}{10} - t - 1 = 13 ,$ $\qquad t_6 = -10,7$

7. $- t = 1 + \frac{31}{10} = \frac{41}{10}$ $\qquad \underline{t_7 = -4,1}$

8. $t = 1 + \frac{33}{10} = 4,3 ,$ $\qquad t_8 = 4,3$

Nova prava c_5 ima sledeće jednačine:

$x_{13} = -1$; $x_{14} = -t + 7,4$; $x_{21} = -1$;
$x_{24} = 1$; $x_{31} = -t + 3,1$; $x_{32} = -1$, a njene pro-
dore sa nalazimo iz jednačina:

1. $-1 -t + 3,1 = 3 ,$ $\qquad t_1 = -0,9$
2. $-1 -t + 7,4 + 1 + t - 3,1 = 5 ,$ $\qquad t_2 =$
3. $1 +t - 7,4 - 1 - t + 3,1 - 1 = 4 ,$ $t_3 = +$
4. $-1 -t + 7,4 - 1 + t - 3,1 + 1 = 9,$ $t_4 =$
5. $t - 7,4 + 1 - t + 3,1 - 1 = 10,$ $\qquad t_5 =$
6. $-t + 7,4 - 1 = 13 ,$ $\qquad t_6 = -6,6$
8. $t_8 = 8,4$; 11. $t_{11} = 4,1$

i na kraju imamo pravu c_6:

$x_{13} = -1$, $x_{14} = -t + 8,3$; $x_{21} = -1$; $x_{24} = -1$;

$x_{31} = 4$; $x_{32} = -1$. Ona nam sa daje optimalno rešenje.

2. $-1 - t + 8{,}3 + 1 - 4 = 5$; $\underline{t_2 = -0{,}7}$

3. $1 + t - 8{,}3 - 1 + 4 - 1 = 4$, $t_3 = 9{,}3$

4. $-1 - t + 8{,}3 - 1 - 4 + 1 = 9$, $t_4 = -5{,}7$

5. $t - 8{,}3 + 1 + 4 - 1 = 10$, $t_5 = 14{,}3$

6. $-t + 8{,}3 - 1 = 13$, $t_6 = -5{,}7$

8. $t_8 = 0{,}3$

Dakle, tačka $x_{13} = -1$, $x_{14} = 9$, $x_{21} = -1$, $x_{24} = -1$, $x_{31} = 4$, $x_{32} = -1$, odnosno, ako uzmemo u obzir da smo izvršili translaciju, dobijamo tačku minimuma

$$x_{13} = x_{21} = x_{24} = x_{31} = 0 \ , \quad x_{14} = 10 \ , \quad x_{31} = 5$$

i minimum funkcije $f = 140$.

2. Metod potencijala

Počnimo od "severozapadnog" ugla kome odgovara nepoznata x_{11} i zapitajmo se koliko najviše može biti x_{11}. Pošto B_1 potražuje iznos 5, a u punktu A_1 je 10, stavljamo $x_{11} = 5$. Samim tim iznosi preostalih nepoznatih kolone B_1 moraju biti nule. Kolonu B_1 u daljem razmatranju izostavljamo jer su sva mesta u njoj popunjena. Na redu je novi "severozapadni" ugao nepoznate x_{12}.

Iznos za x_{12} može najviše biti 5 koliko je preostalo u x_1, pa stavljamo $x_{12} = 5$. Iznosi preostalih nepoznatih u vrsti od A_1 moraju biti nule.

Vrstu od A_1 izostavljamo i prelazimo na idući "severozapadni" ugao nepoznate x_{22}. Uzimamo $x_{22} = 5$ koliko je još potrebno punktu B_2, a za iznose preostalih nepoznatih kolone od B_2 nule.

Izostavljamo kolonu od B_2 i prelazimo na "severozapadni" ugao nepoznate x_{23}.

Stavljamo $x_{23} = 10$ (koliko još ima u A_2) a za sve preostale nepoznate vrste A_2 nule. Izostavljamo vrstu A_2 i prelazimo na "severozapadni" ugao nepoznate x_{33}. Stavljamo $x_{33} = 10$ i izostavljamo kolonu od B_3. Prelazimo na poslednji "severozapadni" ugao nepoznate x_{34} i stavljamo $x_{34} = 15$ koliko je i preostalo u A_3, a koliko trebuje B_4.

Prema tome:

$$\begin{aligned} &x_{11} = x_{12} = x_{22} = 5; \quad x_{23} = x_{33} = 10; \quad x_{34} = 15 \\ &x_{13} = x_{14} = x_{21} = x_{24} = x_{31} = x_{32} = 0 \end{aligned} \tag{3}$$

je jedno rešenje sistema ograničenja.

U izloženom postupku, svakom "severozapadnom" uglu odgovara izostavljanje jedne vrste ili kolone, a poslednjem "severozapadnom" uglu izostavljanje vrste i kolone istodobno. Može se pokazati da je broj baznih nepoznatih jednak $m + n - 1$ (u našem slučaju $3 + 4 - 1 = 6$) tj. broju "severozapadnih" uglova, a da je rešenje sistema ograničenja, koje se dobiva metodom "severozapadnog" ugla upravo bazno rešenje. U našem primeru rešenje (3) je bazno rešenje koje pregledno izražavamo tablicom:

$$x_1 = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 5 & 5 & / & / \\ \hline / & 5 & 10 & / \\ \hline / & / & 10 & 15 \\ \hline \end{array} \qquad (4)$$

U tablici (4) popunjena mesta odgovaraju baznim nepoznatim;

x_{11}; x_{12}; x_{22}; x_{23}; x_{33}; x_{34} , a nepopunjena mesta slobodnim nepoznatim x_{13}; x_{14}; x_{21}; x_{24}; x_{31}; x_{32}.

Sada dolazi do modifikacije simpleksa - algoritma.

Naime, nije nam potrebno poznavanje baznog oblika sistema ograničenja i funkcije.

$$f = s + s_{pq} x_{pq} \qquad (5)$$

izraženo pomoću slobodnih nepoznatih, već ovo poslednje i odgovarajuće bazno rešenje koje dobijamo metodom "severozapadnog" ugla.

Koeficijente s_{pq} uz slobodne nepoznate x_{pq} odredjume pomoću "metode potencijala".

Baznim nepoznatim x_{kl} pridružimo "potencijale" α_k i β_l i jednačine

$$\alpha_k + \beta_l = c_{kl} \qquad (6)$$

Kako baznih nepoznatih ima m + n - 1 to i jednačina oblika (6) ima takodje m + n - 1. Iz tog sistema, sa m + n nepoznatih α_k, β_l (može se pokazati da je sistem saglasan i da se jednoj od nepoznatih može dati proizvoljna vrednost) izračunavamo vrednosti potencijala.

Koeficijente s_{pq} uz slobodne nepoznate x_{pq} izračunavamo iz jednačina:

$$s_{pq} = c_{pq} - c'_{pq} \; ; \quad \text{gde je}$$

$$c'_{pq} = \alpha_p + \beta_q$$

Moguća su dva slučaja:

I.) Svi koeficijenti s_{pq} u (5) su nenegativni. Tada je nadjeno bazno rešenje traženo optimalno rešenje za koje je f minimalno.

II.) Postoje u (5) negativni koeficijenti. Neka je to naprimer $s_{p_o q_o}$.

Tada povećavajući $x_{p_o q_o}$ (a zadržavajući ostale slobodne nepoznate jednake 0) vrednost funkcije se može smanjiti.

Neka je $x_{p_o q_o} = \varrho$ najveća dozvoljena vrednost za $x_{p_o q_o}$. Jedna od baznih promenljivih tada postaje slobodna, a preostale bazne i dalje ostaju bazne, s tim što se neki od njihovih iznosa umanjuje ili uvećavaju za (jer zbir iznosa po vrstama i kolonama mora ostati neizmenjen).

Ako kvadrat kome odgovara nova bazna $x_{p_o q_o}$ i kvadrate, koji odgovaraju ovim baznim čiji su iznosi naizmenično umanjeni ili uvećani za ϱ, spojimo duž kolona i vrsta dobijamo zatvorenu liniju, koju nazivamo cikl. U jednom vrhu cikla je ϱ, a u drugim njegovim vrhovima neki od iznosa starih baznih umanjeni ili uvećani za ϱ. Kada pomoću cikla odredimo iznos za i novo bazno rešenje X_2 za koje je $f_{X_2} = f_{X_1} - s_{p_o q_o}\varrho$, završava se prvi korak metode potencijala. Drugi korak počnimo sa baznim rešenjem X_2. Korisno je prikazati čitavu metodu potencijala pomoću blok-šeme:

Odredjivanje prvog baznog rešenja

Odredjivanje potencijala

k' 1

Odredjivanje koeficijenata

$s_{pq} = C_{pq} - C_{pq}$

Odredjivanje cikla po izabranom negativnom koeficijentu $s_{po\,qo}$

Odredjivanje novog baznog rešenja

Vratimo se sada rešavanju brojnog primera. Baznom rešenju X_1 odgovara vrednost funkcije

$$f_{X_1} = 5.8 + 5.3 + 5.1 + 10.6 + 10.4 + 15.3 = 205$$

Potencijale izračunavamo rešavanjem sistema linearnih jednačina

$$\begin{array}{lll}
\alpha_1 + \beta_1 = 8 & & \\
\alpha_1 + \beta_2 = 3 & & \\
\alpha_2 + \beta_2 = 1 & \alpha_1 = 0 \; : & \beta_1 = 8 \\
\alpha_2 + \beta_3 = 6 & \alpha_2 = -2 \; ; & \beta_2 = 3 \\
\alpha_3 + \beta_3 = 4 & \alpha_3 = -4 \; ; & \beta_3 = 8 \\
\alpha_3 + \beta_4 = 3 & & \beta_4 = 7
\end{array}$$

Kako se vrednost jednog od potencijala može uzeti proizvoljno stavljamo $\alpha_1 = 0$.

Zbirove $c'_{pq} = \alpha_p + \beta_q$ određujemo pregledno pomoću tablice:

	8	3	8	7
0	8	3	8	7
-2	6	1	6	5
-4	4	-1	4	3

Odredimo koeficijente s_{pq}:

$$s_{13} = c_{13} - c'_{13} = 5 - 8 = -3; \quad s_{21} = c_{21} - c'_{21} = 4-6 = -2$$
$$s_{14} = c_{14} - c'_{14} = 2 - 7 = -5; \quad s_{24} = c_{24} - c'_{24} = 7-5 = 2$$
$$s_{31} = c_{31} - c'_{31} = 1 - 4 = -3; \quad s_{32} = c_{32} - c'_{32} = 9+1 = 10$$

i odaberimo jednog od negativnih npr. $s_{21} = -2$. Formirajmo odgovarajući cikl.

$5 - \rho$	$5 + \rho$		
ρ	$5 - \rho$	10	
		10	15

Možemo uzeti najviše $\rho = 5$. Prelazimo na novo bazno rešenje X_2:

X_2

	10		
5	0	10	
		10	15

Rešenju X_2 odgovara vrednost funkcije:

$$f_{X_2} = 205-2. \quad = 205-2.5 = \\ = 195$$

Time je prvi korak završen i započinje drugi.

Odredjujemo potencijale iz sistema jednačina:

$$\alpha_1 + \beta_2 = 3; \qquad \alpha_2 + \beta_3 = 6$$
$$\alpha_2 + \beta_1 = 4; \qquad \alpha_3 + \beta_3 = 4$$
$$\alpha_2 + \beta_2 = 1; \qquad \alpha_3 + \beta_4 = 3$$

i dobijamo

$$\alpha_1 = 0 \; ; \qquad \beta_1 = 6$$
$$\alpha_2 = -2 \; ; \qquad \beta_2 = 3$$
$$\alpha_3 = -4 \; ; \qquad \beta_3 = 8$$
$$\beta_4 = 7$$

Formiramo tablicu za C'_{pq}

$\alpha \backslash \beta$	6	3	8	7
0	6'	3	8'	7'
-2	4	1	6	5'
-4	2'	-1'	4	3

Odredimo koeficijente s_{pq}:

$$s_{11} = 8 - 6 = 2 \; ; \qquad s_{24} = 7 - 5 = 2$$
$$s_{13} = 5 - 8 = -3 \; ; \qquad s_{31} = 1 - 2 = -1$$
$$s_{14} = 2 - 7 = -5 \; ; \qquad s_{32} = 9 + 1 = 10$$

Biramo jednog od negativnih npr. $s_{14} = -5$ i formiramo odgovarajući cikl.

	$10 - \rho$		ρ
5	$0 + \rho$	$10 - \rho$	
		$10 + \rho$	$10 - \rho$

Kako je $\rho = 10$ dobijamo novo bazno rešenje:

Za koje je:

$X_3 =$

			10
5	10	0	
		20	5

$X_3 = 195-5. = 195-50 = 145$

Počnimo treći korak. Odredjujemo prvo iznose potencijala iz sistema jednačina:

$$\alpha_1 + \beta_4 = 2 \; ; \; \alpha_2 + \beta_1 = 4 \; ; \; \alpha_2 + \beta_2 = 1 \; ; \; \alpha_2 + \beta_3 = 6 ;$$

$$\alpha_3 + \beta_3 = 4 \; ; \; \alpha_3 + \beta_4 = 3,$$

odakle dobijamo:

$$\alpha_1 = 0 \; ; \; \alpha_2 = 3 \; ; \; \alpha_3 = 1$$

$$\beta_1 = 1 \; ; \; \beta_2 = -2 \; ; \beta_3 = 3 \; ; \; \beta_4 = 2$$

Formirajmo tablicu za C'_{pq}

$\alpha \backslash \beta$	1	-2	3	2
0	1'	-2'	3'	2
3	4	1	6	5'
1	2'	-1'	4	3

Računajmo koeficijente s_{pq}:

$s_{11} = 8-1' = 7$; $s_{12} = 3+2' = 5$

$s_{13} = 5-3' = 2$; $s_{24} = 7-5' = 2$

$s_{31} = 1-2' = -1$; $s_{32} = 9+1' = 10$

Formirajmo cikl po $s_{31} = -1$.

Pošto je $\rho = 5$ dobijamo novo bazno rešenje:

			10
$5-\rho$	10	$0+\rho$	
ρ		$20-\rho$	5

$X_4 =$

			10
	10	5	
5		15	5

Za koje je $f_{X_4} = 145 - \rho = 145 - 5 = 140.$

Odredimo nove potencijale iz sistema jednačina:

$$\alpha_1 + \beta_4 = 2 \; ; \; \alpha_2 + \beta_2 = 1 \; ; \; \alpha_2 + \beta_3 = 6 \; ; \; \alpha_3 + \beta_1 = 1 \; ;$$

$$\alpha_3 + \beta_3 = 4 \; ; \; \alpha_3 + \beta_4 = 3.$$

$$\alpha_1 = 0 \; ; \; \alpha_2 = 3 \; ; \; \alpha_3 = 1$$

$$\beta_1 = 0 \; ; \; \beta_2 = -2 \; ; \; \beta_3 = 3 \; ; \; \beta_4 = 2.$$

Formirajmo tablicu za c'_{pq}: i odredimo koeficijente s_{pq}:

$\alpha \backslash \beta$	0	-2	3	2
0	0'	-2'	3'	2
3	3'	1	6	5'
1	1	-1'	4	3

$s_{11} = 8-0' = 8$; $s_{12} = 3+2' = 5$

$s_{13} = 5-3' = 2$; $s_{21} = 4-3' = 1$

$s_{24} = 7-5' = 2$; $s_{32} = 9+1' = 10$

Pošto su svi koeficijenti s_{pq} pozitivni postupak je završen, pa je poslednje bazno rešenje X_4:

$x_{11} = x_{12} = x_{13} = x_{21} = x_{24} = x_{32} = 0$

$x_{14} = 10$; $x_{22} = 10$; $x_{23} = 5$

$x_{31} = 5$; $x_{33} = 15$; $x_{34} = 5$

optimalno.

Zato je $\min f = f_{X_4} = 140$.

Problem transporta je jedan od važnijih problema i više o njegovom rešavanju može se videti u [9]

Primer 2. Minimizirati $z =$ [illegible]
ako važe ograničenja :

1. $5.x_1 - 4.x_2 + 13.x_3 - 2.x_4 + x_5 =$ [illegible]
2. $x_1 - x_2 + 5.x_3 - x_4 + x_5 =$ [illegible]
3. $x_1 \geq 0$, 4. $x_2 \geq 0$, 5. $x_i \geq 0$ [illegible]

1. METOD IZLAZA

a) Traženje kanoničnog oblika

1. $3.x_1 - 2.x_2 + 3.x_3 - x_5 = 4$, $x_5 = 3.x_1 - 2.x_2 + 3.x_3 - 4$
2. $4.x_1 - 3.x_2 + 8.x_3 - x_4 = 12$, $x_4 = 4.x_1 - 3.x_2 + 8.x_3 - 12$

1. $3.x_1 - 2.x_2 + 3.x_3 \geqslant 4$
2. $4.x_1 - 3.x_2 + 8.x_3 \geqslant 12$
3. $x_1 \geqslant 0$, 4. $x_2 \geqslant 0$, 5. $x_3 \geqslant 0$

$z = 20.x_1 - 7.x_2 + 16.x_3 - 32$

$u_o(1,1,2)$

Izvršimo translaciju koordinatnog sistema sa:

$x_1 = X_1 + 1 \quad x_2 = X_2 + 1 \quad x_3 = X_3 + 2$

1. $3.X_1 - 2.X_2 + 3.X_3 \geqslant -3$; $-3.X_1 + 2.X_2 - 3.X_3 \leqslant 3$
2. $4.X_1 - 3.X_2 + 8.X_3 \geqslant -5$; $-4.X_1 + 3.X_2 - 8.X_3 \leqslant 5$
3. $X_1 + 1 \geqslant 0$; $-X_1 \leqslant 1$
4. $X_2 + 1 \geqslant 0$; $-X_2 \leqslant 1$
5. $X_3 + 2 \geqslant 0$; $-X_3 \leqslant 2$

$O(0,0,0)$

$Z = 20.X_1 - 7.X_2 + 16.X_3 + 13$

$C(20, -7, 16)$

Metod izlaza: Tablična forma

	x_1	x_2	x_3	Sl.čl.	n
1	-3	2	-3	3	22
2	-4	3	-8	5	89
3	-1			1	1
4		-1		1	1
5			-1	2	1
C	-20	7	16		

Odredjivanje pravih ograničenja

	x_1	x_2	x_3	Sl.čl.	Prodori osa kroz		
1	-1	3/2	-1	1	x_1^-	x_2^+	x_3^-
2	-5/4	5/3	-5/8	1	x_3^-		
3	-1			1	x_1^-		
4		-1		1	x_2^-		
5			-2	1			

Odredjivanje bitnog ograničenja

	C.n			t_o	t
1	60	14	48	22/122	3/122
2	80	21	128	89/229	5/229
3	20			1/20	1/20
4		-7		-1/7	-1/7
5			16	1/16	2/16
C	-20	7	-16		

	$C_{o1}\cdot n - u_1\cdot n$			t
2	20	-9 9/2	-24	-1/26
3	5			1/5*
4		3 -3/2		5/6
5			-3	-2/3
C_{o1}	-5	-3	3	
u_1	0	3/2	0	

$C_{o1}\cdot n_1 = 0\ ,\quad C_{o1}\cdot C \quad 0$

$-3\cdot C_{11}+2\cdot C_{21}-3\cdot C_{31} = 0$

$-20\cdot C_{11}+7\cdot C_{21}-16\cdot C_{31} \quad 0$

	$C_{o2}\cdot n - u_2\cdot n$			
2	4	-9 27/10	16 -24/5	$\frac{31}{70}$*
4		3 -9/10		19/30
5			2 -5/3	13/10
C_{o2}	0	-3	-2	
U_2	-1	9/10	3/5	

$C_{o2}\cdot n_1 = 0\ ,\quad C_{o2}\cdot n_3 = 0$

$C_{o2}\cdot C \quad 0$

$-3\cdot C_{12}+2\cdot C_{22}-3\cdot C_{32} = 0$

$C_{12} = 0$

$-20\cdot C_{12}+7\cdot C_{22}-16\cdot C_{32} \quad 0$

$$x_1 = -1\ ,\quad x_2 = \frac{-3}{7}\ ,\quad x_3 = \frac{-2}{7}$$

i na kraju tačka minimuma za početni zadatak $x_1 = -1+1 = 0$, $x_2 = \frac{-3}{7} + 1 = \frac{4}{7}$, $x_3 = -\frac{2}{7} + 2 = \frac{12}{7}$ i min $z = -60/7$.

Sada ćemo isti zadatak rešiti simpleks metodom.

Simpleks-metoda: Tablična forma

Bazne promen	Slobodne promen					Nove promen				Sl.čl.
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7			
x_6	5	-4	13	-2	+1	1				20
x_7	1	-1	+5	-1	+1		1			8
$-z$	1	6	-7	1	5			1		0
$-w$	-6	+5	-18	+3	-2				1	-28
			*			o	.	.	.	
x_3	$\frac{5}{13}$	$-\frac{4}{13}$	1	$-\frac{2}{13}$	$\frac{1}{13}$	$\frac{1}{13}$				$\frac{20}{13}$
x_7	$-\frac{12}{13}$	$+\frac{7}{13}$		$-\frac{3}{13}$	$\frac{8}{13}$	$-\frac{5}{13}$	1			$\frac{4}{13}$
$-z$	$\frac{48}{13}$	$\frac{50}{13}$		$-\frac{1}{13}$	$\frac{72}{13}$	$\frac{7}{13}$		1		$\frac{140}{13}$
$-w$	$+\frac{12}{13}$	$-\frac{7}{13}$		$+\frac{3}{13}$	$-\frac{8}{13}$	$\frac{18}{13}$			1	$-\frac{4}{13}$
			.		*	o		.	.	
x_3	$\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{8}$	1	$-\frac{1}{8}$		$+\frac{1}{8}$	$-\frac{1}{8}$			$\frac{3}{2}$
x_5	$-\frac{12}{8}$	$\frac{7}{8}$		$-\frac{3}{8}$	1	$-\frac{5}{8}$	$\frac{13}{8}$			$\frac{4}{8}$
$-z$	12	-1		2		4	-9	1		8
$-w$						1	1		1	0
		*	.		o			.	.	

x_3	$-\frac{1}{7}$		1	$-\frac{2}{7}$	$\frac{3}{7}$	$-\frac{1}{7}$	$+\frac{4}{7}$		$\frac{12}{7}$
x_2	$-\frac{12}{7}$	1		$-\frac{3}{7}$	$\frac{8}{7}$	$-\frac{5}{7}$	$\frac{13}{7}$		$\frac{4}{7}$
$-z$	$\frac{72}{7}$			$\frac{11}{7}$	$\frac{8}{7}$	$\frac{23}{7}$	$-\frac{50}{7}$	1	$\frac{60}{7}$
		•	•					•	

Ovaj zadatak smo uzeli iz knjige "Linejnoe programirovanie jevo abobščenija i primenenija" od Dž.Dancig-a, Izd. "Progres", Moskva, 1966.

L I T E R A T U R A

BECKENBACH, E.

|1| Convex functions, Bull. Amer., Math. Soc. 54 (1948).

|2| On Hölder's inquality, I. Math.Anal. App. 15 (1966).

BECKENBACH, E., BELMAN, R.

|3| Neravenstva (Mir.Moskva, 1965).

BOLTJANSKIJ, V.

|4| Optimalnoe upravlenee diskretnimi sistemami, M., "Nauka", 1972.

|5| Svojstvo otdelimosti sistemi vipuklih ko[illegible]sov, Izd.AN. Arm CCP "Matem." 11, No.5, 1976.

BOLTJANSKIJ, V., SOLOTAN, P.

|6| Kombinatornaja geometrija razlicnih klasov vipuklih mnočestv, Izd.Kišinev, 1978.

BORSUK, K.

|7| Multidimensional analitic geometry, Warszawa, 1969.

DANTZIG, G.

|8| Programming in Alinear structure, Wadington, Comptoller, USAF, 1948.

|9| Application of the Simplex method to a transportation problem.

10| Notes on Linear programming: Part XI, Composite simplex dual simplex algorithm-I, The RAND. Cor.Re.Mem. RM-1214 (1954).

11| Linear programming and extensious, 1963, Prinston Univ.Press, Princeton, New Yersey, Dancig, Orden A., Vulf.

12| Obobšćenij simpleksnij metod minimizacii linejnih neravensv (Sbornik statej pod red. V.S.Nemičinova), Bip.2, M. Gosstatizdat, 1963.

DAYKIN, D., ELIEZR, C.

13| Generalization of Hölder's and Minkowski's inequalities, Proc. Camridge Philos. Soc. 64 (1968)

FRISCH, R.

14| Linear dependencies and a mechanized form of the multiplex method for Linear programming, Memor.Univ. Sos. Inst. Oslo, 1957.

GEJL, D.

15| Sosednie veršini na vipuklom mnogogranike, Zbornik Linejnie neravenstva i smežnie vaprosi, Parevod sbr. (pod.red.Kuna Takera), MIL, 1959.

GIRSANOV, I.

|16| Lekcii po matematičeskoj teorii ekstremalnih zadač, Izd.Mos. Univ., 1970.

GODUNOVA, E. LEVIN

|17| General class of inequalities containing the inequality of Steffensen, Mat.Zam.3 (1968)

HARDY, C., LITTLWOOD, J., POLYA, G.

|18| Inequalities, Cambridge, 1952.

HIMMELBLAU, D.

|19| Prikladnoe nelinejnoe programirovanie, Izd. "Mir", Moskva, 1975 (243÷332).

HUNTER, J.

|20| Generalization of the inquality of the aritmetic.-geomet.means, Proc.Glasgow Math.Assoc.2 (1956).

IVANOV,A.

|21| Neravenstva i teoremi o nepodvižnih točkah, Mat. Balkan, 1976(4).

JOTIĆ, N.

|22| Geometrijska interpretacija jednog identiteta, "Matematika", Beograd, 1973.

KANTOROVIČ, L.V.

|23| Matematičeskie metodi organizacii i planirovanija proizvodstva. Sbornik primen.mat. v ekon. isled. T.2 (red. Nemčinov v.), M. Socekgiz, 1961.

|24| Ob odnom efektivnom metode rešenija nekatornih klasov ekstremalnih problem, Dol. ANCCC 28 (3), (1940) (212÷215).

KANTOROVIČ, L.V., GAVURIN, M.K.

|25| Primenenie matematičeskih metodov v voprosah analiza gruzopotokov, Sbornik "Prob.poviš.efekt.rab.tras.", M.Izd ANCCCR (1949) (110÷138)

KUN,TAKKER,(TUCKER, A.W.)

|26| Non-linear programming, Noyman J. red. Proc. of the Sek.Berkley. Simp. Math. Stat. Probl. Vol.I, Berkley, Univ.of California Press, 1961.

KUREPA, S.

|27| On the Buniakowsky - Cauchy - Schwarz inequality, Glanik Mat. Ser.III 1 (21), 1966.

|28| On an inquality, ibid, 3(23), (1968).

KUZNECOV, J., KUZBOV, V., VOLOŠĆENKO, A.

|29| Matematičeskoe programiruvanie, Moskva, 1976.

LAMKE, K.

|30| Dvojstvenij metod rešenija zadači linegnovo programiruvanija, Sbornik (metodi i algoritmi rešenija transportnoj zadači), Vip. 2,M. Cosstatizdat, 1963, 86 str.

MARJANOVIĆ, M.

|31| Some inequalities with convex functions, Pub. Inst. Math. Beograd, 8(22), 1968.

MITRINOVIĆ, D.S., VASIĆ, P.M.

|32| Analitičke nejednakosti, Beograd, 1970.

MOTZKIN, T., SCOENBERG, I.

|33| The relaxation method for linear inequalities, Canad. I. Math. 6, No.3 (1954).

MOCKIN, P.X., T.G., T.R.

|34| Metod dvojnova opisanija, Matričnie igri (pod.red. H.Vorobjeva), M. Fizmatgiz, 1961.

NEYMAN, J., PEORSON, E.S.

|35| Contributions to the Theory of testing statistical hypothesis, Statistic. Res. Mem. Parts. I-II, 1936, 1938.

ROSEN, J.B.

|36| The Gradient Projection Method for Nonlinear Programming, Part. I. I.Soc. Ind. Appl. Math. 8, 181 (1960), 9, 514 (1961).

SIMONOVIĆ, V.

|37| O singularnim slučajevima u racionalbo-linearnom programiranju, X JU-simpozijum, Zagreb, 1976.

ŠIRVANOV, A.

|38| O zadače videlenija,"lišnih" (Zavisimih) neravenstr iz danoj sistemi linejnih neravenstr. Funkcionalnij analiz. izd. AKH. ACCP Baku, 1967.

ŽIVANOVIĆ, Ž.

|39| O jednom specijalnom presecanju trougla pravom,"Matematika",3, Beograd, 1973.