D - /

UNIVERZITET U BEOGRADU

MATEMATIČKI FAKULTET — BEOGRAD

Novica Lj. Blažić

KRIVINA I KARAKTERISTIČNE KLASE KOMPLEKSNIH VEKTORSKIH RASLOJAVANJA

Doktorska disertacija

BEOGRAD
1990

Mentor: Bang-Yen Chen
Michigan State University
East Lansing

Članovi komisije: Neda Bokan
Univerzitet u Beogradu
Beograd

Zoran Lučić
Univerzitet u Beogradu
Beograd

Rade Živaljević
Matematički Insitut
Beograd

Datum odbrane

Datum promocije

Doktorat nauka

KRIVINA I KARAKTERISTIČNE KLASE KOMPLEKSNIH VEKTORSKIH RASLOJAVANJA

Abstrakt

U ovom radu se dobijaju globalna svojstva kompleksnog vektorskog raslojavanja koje dopušta izvesne geometrijske strukture. U poglavlju 2 se proučavaju kompleksna vektorska raslojavanja nad skoro Kähler-ovom mnogostrukošću. Uopštava se Lübke-ova nejednakost za klasu raslojavanja koja dopuštaju formalno holomorfnu Einstein-ovu povezanost. Takođe karakteriše se slučaj jednakosti. Glavni rezultat poglavlja je konstrukcija familije netrivijalnih primera, tj. familije kompleksnih, neholomorfnih vektorskih raslojavanja nad skoro Kähler-ovom mnogostrukošću koja dopuštaju formalno holomorfnu Einstein-ovu povezanost sa ne-nula Chern-ovim klasama c_1 i c_2. U narednom poglavlju dobijamo "perturbacione rezultate" u hermitskoj geometriji. Uvodi se klasa $\mathcal{E}_{k,\delta}$ raslojavanja koja sadrži holomorfna Einstein-ova raslojavanja ranga 2. Za raslojavanja iz $\mathcal{E}_{k,\delta}$ dokazujemo nejednakost između kvadratnih invarijanti tenzora krivine i ispitujemo slučaj jednakosti. Takođe ustanovljuju se neke nejednakosti između Chern-ovih brojeva tih raslojavanja. Šta više, dobijene su i neke posledice. Razmatraju se i konformne promene promene metrike holomorfnog raslojavanja radi konstrukcije interesantnih primera $\mathcal{E}_{k,\delta}$ raslojavanja. U poglavlju 4 dobija se karakterizacija kompaktnih kompleksnih prostornih formi u terminima uopštenih Chern-ovih brojeva i zapreminama malih geodezijskih lopti. Razmatra se Gray-Vanhecke-ova hipoteza o zapreminama kao i njena oslabljenja pod dodatnim pretpostavkama. Zatim, uvodi se pojam geodezijsko-Einstein-ove metrike i dobijamo topološki uslov za postojanje geodezijsko-Einstein-ove metrike. Ovaj uslov uopštava nejednakost Chen-a i Ogiue-a. Daju se i primene u slučaju kompleksnih površi.

Ključne reči

kompleksno vektorsko raslojavanje, skoro kompleksna mnogostrukost, uopšteni Chern-ovi brojevi, povezanost, krivina, metrika, Einstein-ov uslov, geodezijska lopta, kompleksna površ.

CURVATURE AND CHARACTERISTIC CLASSES OF COMPLEX VECTOR BUNDLES

Abstract

In this paper we obtain global properties of a complex vector bundle if it admits a certain geometrical structures. In Chapter 2 we study complex vector bundles over an almost Kähler manifold. We generalize inequality of Lübke for the class of bundles which admit a formally holomorphic Einstein connection. Also, we characterize the equality case. The main result in this chapter is the construction of a family of non-trivial examples, i.e. a family of complex, non-holomorphic vector bundles over an almost Kähler manifold with non-zero Chern classes c_1 and c_2 and with a formally holomorphic Einstein connection. In the next chapter we obtain some "perturbation results" in hermitian geometry. The class of $\mathcal{E}_{k,s}$ bundles, which contains the class of holomorphic Einstein bundles of rank 2 is defined. For a bundle from $\mathcal{E}_{k,s}$ we prove the inequality between the quadratic invariants of the curvature tensors and study the equality case. Also some inequalities between its Chern numbers are established. Moreover, some consequences are studied. Conformal changes of a metric on a holomorphic bundles are considered in order to construct some interesting examples of $\mathcal{E}_{k,s}$ bundles. In Chapter 4 we characterize compact, complex space forms in terms of generalized Chern numbers and the volumes of small geodesic balls. Also we study Gray and Vanhecke's "volume conjecture" as well as its weaker version with some additional conditions. Then, we introduce the notion of a geodesically-Einstein metric and we find a topological obstruction for the existence of a geodesically-Einstein metric. This condition generalize the inequality of Chen and Ogiue. Applications of the inequality in the case of a complex surface is given.

Key words:

complex vector bundle, almost complex manifold, generalized Chern numbers, connection, curvature, metric, Einstein condition, geodesic ball, complex surface.

Predgovor

Glavni problem koji se razmatra u radu je izučavanje globalne strukture kompleksnih vektorskih raslojavanja koja dopuštaju povezanost koja ima određena geometrijska svojstva.

Rad se sastoji iz četiri poglavlja i to su

1 Uvod

2 Kompleksna vektorska raslojavanja nad skoro kompleksnim mnogostrukostima

3 Skoro Einstein-ova holomorfna vektorska raslojavanja

4 Uopšteni Chern-ovi brojevi Kähler-ovih mnogostrukosti i zapremine malih geodezijskih lopti.

Poglavlje 1 se sastoji od dva odeljka. U prvom odeljku se daje nastanak i razvoj ideja i pregled rezultata u ovoj oblasti. Pre svega navode se matematičari koji su uticali na nastanak teorije karakterističnih klasa i posebna pažnja se posvećuje vezi između karakterističnih klasa glatkih vektorskih raslojavanja i diferencijalne geometrije. Zatim se navode rezultati koji se odnose na relacije između Chern-ovih karakterističnih klasa raslojavanja. U ovom radu se razmatraju kompleksna vektorska raslojavanja sa povezanostima koje zadovoljavaju različite uslove Einstein-ovog tipa. U drugom odeljku se navode definicije osnovnih diferencijalno-geometrijskih pojmova, npr. diferencijabilna mnogostrukost, tangentno raslojavanje, kompleksno vektorsko raslojavanje, povezanost, krivina, de Rham-ove kohomologije, karakteristične klase, celobrojne forme i dr., koji se javljaju u ovom radu. Sem toga navode se i poznate teoreme koje se koriste u radu.

Glave 2, 3 i 4 sadrže originalne rezultate.

U poglavlju 2 se izučavaju globalna svojstva kompleksnih vektorskih raslojavanja $\xi = (E, h)$ nad skoro kompleksnom baznom mnogostrukošću (M, g). Pretpostavlja se da je raslojavanje snabdeveno formalno holomorfnom povezanošću. U odeljku 2.1 se navodi definicija formalno holomorfne povezanosti koja je uvedena u [G-B-N-V]. Zatim se daju osnovna geometrijska svojstva odgovarajućeg tenzora krivine. U narednom odeljku se za ovu klasu vektorskih raslojavanja dobijaju izrazi za uopštene Chern-ove brojeve

$$c_1[\Phi]^{n-1}(M), \quad c_1^2[\Phi]^{n-2}(M) \quad \text{i} \quad c_2[\Phi]^{n-2}(M)$$

u terminima linearnih i kvadratnih invarijanti tenzora krivine.

Za razmatranu klasu raslojavanja u odeljcima 2.3 i 2.4 se dokazuje uopštenje Lübke-ove nejednakosti. Takođe se dobija i karakterizacija slučaja kada nastupa jednakost u toj nejednakosti. Kao posledica nejednakosti pokazuje se da neke klase raslojavanja ne dopuštaju formalno holomorfnu Einstein-ovu povezanost. Glavni rezultat poglavlja je konstrukcija familije netrivijalnih primera formalno holomorfnih povezanosti data u poslednjem odeljku. Tu se dobija familija kompleksnih, neholomorfnih vektorskih raslojavanja ranga dva nad skoro Kähler-ovom mnogostrukošću sa nenula Chern-ovim klasama c_1 i c_2. Zatim se za dobijena raslojavanja konstruišu formalno holomorfne povezanosti koje zadovoljavaju Einstein-ov uslov.

Rezultati iz poglavlja 3 spadaju u grupu "perturbacionih rezultata" u hermitskoj geometriji. U odeljku 3.1 definiše se klasa $\mathcal{E}_{k,\delta}$ raslojavanja koja se za $k = 1$ svodi na klasu holomorfnih raslojavanja ranga dva koja zadovoljavaju Einstein-ov uslov. Za raslojavanja iz $\mathcal{E}_{k,\delta}$ se dokazuje nejednakost između kvadratnih invarijanti tenzora krivine i proučava se kada nastupa jednakost u njima. U odeljku 3.2 se ustanovljuju neke nejednakosti za Chern-ove brojeve $\mathcal{E}_{k,\delta}$ raslojavanja. Dobijene su i posledice ovih nejednakosti. U poslednjem odeljku se proučavaju konformne promene metrike na holomorfnom raslojavanju da bi se omogućila konstrukcija interesantnih primera $\mathcal{E}_{k,\delta}$ raslojavanja.

U prvom delu poglavlja 4 dobija se karakterizacija kompaktnih kompleksnih prostornih formi u terminima uopštenih Chern-ovih brojeva i zapremina malih geodezijskih lopti. Takođe razmatra se i hipoteza

Gray-a i Vanhecke-a o zapreminama kao i njena oslabljenja uz određene dodatne uslove. U drugom delu uvodi se pojam geodezijsko-Einstein-ove metrike i nalazi se topološki uslov za postojanje geodezijsko-Einstein-ove metrike. Ovaj uslov predstavlja uopštenje nejednakosti Chen-a i Ogiue-a. Navode se i primene nejednakosti u slučaju kompleksne površi.

U bibliografiji je navedena samo ona literatura na koju se pozivam u radu. Među tim radovima i knjigama nalaze se i oni koji sadrže potpuniji pregled literature koja se odnosi na rezultate dobijene do sada u oblasti primene Chern-ovih karakterističnih klasa u diferencijalnoj geometriji. Ove knjige i radovi su posebno istaknuti na odgovarajućim mestima u radu.

Pozivanje na formule, definicije i teoreme je uobičajeno: 2.3.1 označava prvu formulu u trećem odeljku poglavlja dva a 3.1 formulu iz istog poglavlja. Pri pozivanju na literaturu odgovarajuća oznaka stavlja se u uglaste zagrade.

Ovom prilikom želim da se zahvalim prof. Dr. Bang-Yen Chen-u na čiju sam inicijativu počeo da razmatram ove probleme i koji mi je potom dao niz važnih sugestija i informacija. Takođe želim da se zahvalim prof. Dr. Nedi Bokan za mnogobrojne korisne diskusije, komentare i podršku tokom izrade rada kao i dugo vremena pre toga.

Zahvaljujem se i svim drugim kolegama koji su mi pružili podršku u radu.

Beograd, 29.1.1990. Novica Blažić

Sadržaj

Poglavlje 1

Uvod

1.1 Istorijat problema

Vektorskim raslojavanjima se poslednjih decenija poklanja velika pažnja. Pored ostalih pitanja, sa posebnim interesovanjem se izučava globalna struktura kompleksnih vektorskih raslojavanja. Karakteristične klase su najjednostavnije invarijante koje mere odstupanje lokalne produkt strukture od globalne produkt strukture.

Euler-Poincaré-ova karakteristika je najjednostavnija karakteristična klasa. Neka je M kompaktna, orijentisana, diferencijabilna mnogostrukost dimenzije n i neka je X glatko vektorsko polje na M sa izolovanim nulama. Za svaku nulu može se definisati njena višestrukost. H. Hopf(1927) je u svojoj disertaciji pokazao da za Euler-Poincaréovu karakteristiku $\chi(M)$ važi

$$\chi(M) = \sum \text{višestrukost nule za } X.$$

Time $\chi(M)$ dobija diferencijalno topološko značenje. Uopštavajući ovu ideju H. Whitney i E. Stiefel su 1935 postavili osnove teorije karakterističnih klasa. Oni su za vektorsko raslojavanje $\xi = (E, M, \pi)$ ranga q definisali karakteristične kohomološke klase $w^i \in H^i(M, Z_2)$, $1 \leq i \leq n-1$ i $w^n \in H^n(M, Z)$. Te klase se danas nazivaju Stifel-Whitney-jeve karakteristične klase. Razvoj teorije su nastavili Л. С. Понтрягин i S. S. Chern. Понтрягин-ove klase $p_k(\xi) \in H^{4k}(M, Z)$, $1 \leq k \leq [n/4]$ i Chern-ove klase za kompleksna raslojavanja $c_i(\xi) \in H^{2i}(M, R)$, $1 \leq$

$i \leq [q/2]$ se mogu definisati pomoću realnih i kompleksnih Grassmann-ovih mnogostrukosti.

Stiefel-Whitney-jeve klase su topološke invarijante, Понтрягин-ove klase su invarijante diferencijabilne strukture a Chern-ove klase su invarijante kompleksne strukture.

S. S. Chern je u [Ch46] pokazao da su karakteristične klase povezane sa krivinom odgovarajuće mnogostrukosti. Kao polazni rezultat tog tipa smatra se Gauss-Bonnet-ova formula. Neka je D oblast u dvodimenzionoj Riemann-ovoj mnogostrukosti. Tada je njena Euler-Poincaré-ova karakteristika određena formulom

$$2\pi\chi(D) = \sum_i (\pi - \alpha_i) + \int_{\partial D} k_g \, ds + \iint_D K \, dA,$$

gde je prvi član na desnoj strani suma spoljašnjih uglova, drugi član je integral geodezijske krivine a poslednji član je integral Gauss-ove krivine. Oni redom predstavljaju krivinu tačke, krivinu linije i krivinu površi D. Gauss-Bonnet-ova formula se dakle može interpretirati kao jednakost Euler-Poincaré-ove karakteristike $\chi(D)$ i totalne krivine oblasti D.

Chern je razmatrao kompleksno vektorsko raslojavanje $\xi = (E, M, \pi)$, ranga λ, sa povezanošću ∇ i odgovarajućom formom krivine Θ. Zatim se koristi Weil-ov homomorfizam za konstrukciju globalno definisane forme $\gamma_i \in \Lambda^{2i}$, $0 \leq i \leq \lambda$. Za odgovarajuće de Rham-ove kohomološke klase se pokazuje

$$[\gamma_i] = c_i(\xi) \in H^{2i}(M, \mathbf{R}),$$

čime se ostvaruje veza između lokalne geometrije raslojavanja i njegove topologije. Na sličan način se mogu razmatrati i Понтрягин-ove klase.

Posmatrano sa geometrijske strane, prirodno se postavlja pitanje:

> *"Kakva je globalna struktura vektorskog raslojavanja ako ono dopušta određenu geometrijsku stukturu?"*

Ovo pitanje je razmatrano u algebarskoj i diferencijalnoj geometriji za razne tipove geometrijskih uslova.

U ovom radu, što se tiče geometrijske strane problema, posebna pažnja će se pokloniti Ricci-jevoj krivini i Einstein-ovom uslovu. Einstein-ove mnogostrukosti su geometrijski objekti koji su sami za sebe interesantni. Pored toga su blisko povezane sa raznim oblastima geometrije, matematičke fizike i teorijom relativnosti. U kategoriji vektorskih raslojavanja Einstein-ov uslov je povezan sa važnim konceptom stabilnosti vektorskih raslojavanja. Detalji o Einstein-ovim mnogostrukostima se mogu naći u [Bs87].

Topološka svojstva četvoro-dimenzionih Riemann-ovih mnogostrukosti, Euler-Poincaré-ova karakteristika i Hirzebruch-ov znak, pod raznim pretpostavkama o krivini mnogostrukosti, bila su predmet mnogobrojnih istraživanja. Navedimo neke od autora koji su se bavili ovim pitanjima: M. Berger[Bg65], S. S. Chern, J. Milnor, J. A. Thorpe, N. Hitchin. Za detaljnije informacije videti npr. [Pb78] i [Bs81, pog. XI].

Pomenimo sada rezultate koji se odnose na tangentna raslojavanja kompleksnih mnogostrukosti. Guggenheimer[Gh52] je 1952 pokazao da je za tangentno raslojavanje kompaktne Kähler-ove površi

$$c_2(M) \geq \frac{1}{3}c_1^2(M).$$

Za tangentno raslojavanje hermitske površi (M, g) Gauduchon[Gh80] je 1980 pokazao da $3c_2 - c_1^2 = \chi - 3\sigma \geq 0$ ako je g standardna metrika koja zadovoljava Einstein-ov uslov.

Svojstva prve i druge Chern-ove klase Einstein-Kähler-ove mnogostrukosti proizvoljne dimenzije je zatim razmatrao Apte[Ap55] 1955. Chen i Cgiue[C-O75] su 1975 uopštili gornju nejednakost na slučaj n-dimenzione Kähler-ove mnogostrukosti. Tada je

$$(-1)^n c_1^{n-2} c_2(M) \geq (-1)^n \frac{n}{2(n+1)} c_1^n(M).$$

Jednakost važi ako i samo ako je M kompleksna prostorna forma. U vezi sa ovim rezultatom videti i Bourguignon[Bg77] i Yau[Ya77]. Nejednakost iste vrste razmatrao je i Bando[Bd87].

I u algebarskoj geometriji su razmatrane nejednakosti ovog tipa. Van de Ven je dokazao nejednakost $8c_2(M) \geq c_1^2(M)$ za tangentno raslojavanje površi opšteg tipa. Zatim je Ф. Богомолов poboljšao nejednakost na $4c_2(M) \geq c_1^2(M)$. Y. Miyaoka je poboljšao dokaz Ф. Богомолов-a i dokazao $3c_2(M) \geq c_1^2(M)$ pri čemu nije razmatran slučaj jednakosti. Reference za ove radove se mogu naći u [Ya77,Kb87].

Koncept hermitskog Einstein-ovog raslojavanja uveo je Kobayashi motivisan rezultatima Ф. Богомолов-а o stabilnim vektorskim raslojavanjima. Lübke[L82] je 1982 je dokazao da za holomorfno Einstein-ovo raslojavanje (E,h) ranga λ nad kompaktnim Kähler-ovim baznim prostorom (M,g) važi

$$\int_M \{(\lambda-1)c_1^2(\xi) - 2\lambda c_2(\xi)\} \wedge \Phi^{n-2} \leq 0.$$

Izučen je i slučaj kada nastupa jednakost. U [B-S87] su razmatrana svojstva Chern-ove klase c_1 normalnih raslojavanja nekih kompleksnih podmnogostrukosti.

U ovom radu se razmatra klasa kompleksnih vektorskih raslojavanja (E,h) nad skoro kompleksnim mnogostrukostima (M,g). Pretpostavlja se da (E,h) dopušta formalno holomorfnu povezanost D i da je (M,g) skoro Kähler-ova mnogostrukost. Ako D zadovoljava i Einstein-ov uslov onda u ovom slučaju važi ista nejednakost između Chern-ovih klasa raslojavanja(videti [Bz89]).

Pojam formalno holomorfne povezanosti uveden je u [G-B-N-V] 1980. U ovom radu(videti i [Bz89]) su dati netrivijalni primeri kompleksnih vektorskih raslojavanja sa formalno holomorfnom Einstein-ovom povezanošću. Konstruisana su kompleksna raslojavanja ovog tipa nad skoro Kähler-ovom mnogostrukošću M_n sa nenula Chern-ovim klasama c_1 i c_2. Primetimo da su u [G-B-N-V] konstruisani primeri formalno holomorfnih povezanosti. Navedeni primeri se uglavnom zasnivaju na hermitskim povezanostima tangentnih raslojavanja nekih klasa skoro hermitskih mnogostrukosti. Na primer, razmatraju se klasa $\mathcal{H}$ hermitskih mnogostrukosti, klasa $\mathcal{NK}$ blizu Kähler-ovih mnogostrukosti, klasa $\mathcal{AK}$ skoro Kähler-ovih mnogostrukosti i klasa $\mathcal{QK}$ kvazi Kähler-ovih mnogostrukosti. Tangentno raslojavanje skoro Kähler-ove mnogostrukosti nije moglo biti iskorišteno za konstrukciju potrebnog primera. To je u skladu sa sledećom poznatom hipotezom[Gb69,Ws83]:

Hipoteza *Skoro kompleksna struktura kompaktne Einstein-ove skoro Kähler-ove mnogostrukosti je integrabilna.*

Ova hipoteza nije dokazana u opštem slučaju. U [Sg85,Sg87,S-V] K. Sekigawa i L. Vanhecke su dokazali neke parcijalne slučajeve hipoteze.

U Riemann-ovoj geometriji je poznat veliki broj interesantnih rezultata "perturbacionog tipa". Tipični primer je klasična teorema o sferi

Rauch-a, Berger-a i Klingerberg-a. U vezi sa problemima koji se razmatraju u radu interesantni su rezultati A. Polombo-a[Pb78](videti i [Bs81, pog. XI]) koji je razmatrao relacije između Euler-Poincaré-ove karakteristike i Hirzebruch-ovog znaka mnogostrukosti pod pretpostavkom da Riemann-ova metrika zadovoljava neke uslove uskosti. U poglavlju 3 razmatraju se "perturbacioni problemi" u hermitskoj geometriji. Definiše se klasa $\mathcal{E}_{k,\delta}$ raslojavanja čiji Ricci-jevi tenzori zadovoljavaju određene uslove uskosti. Zatim se dobija uopštenje nejednakosti Lübke-a za raslojavanja iz te klase.

Neke relacije između karakterističnih brojeva mnogostrukosti i zapremine malih geodezijskih lopti su poznati, videti npr. [G-V79]. U monografiji [Gr88], A. Gray-a dosta pažnje je posvećeno vezi između topologije i zapremine cilindra. Gray i Vanhecke su u [G-V79] između ostalog formulisali Hipotezu 1 o tome da zapremine malih geodezijskih lopti karakterišu kompleksne prostorne forme i dokazali su parcijalne slučajeve hipoteze. U poglavlju 4 se dokazuju još neki parcijalni slučajevi hipoteze uz dodatne pretpostavke o uopštenim Chern-ovim brojevima. Pored toga razmatraju se i neka oslabljenja hipoteze. S obzirom na značaj Einstein-ovog uslova u drugom delu poglavlja uvodi se pojam geodezijski-Einstein-ovog uslova. Za tu klasu mnogostrukosti pokazuje se da ima neka ista svojstva kao i odgovarajuće Einstein-ove mnogostrukosti. Pokazuje se, na primer, da $CP^2\#n$, $n \geq 2$, ne dopušta geodezijsko-Einstein-ovu metriku.

1.2 Krivina i topologija kompleksnih vektorskih raslojavanja

U ovom odeljku se navode definicije osnovnih objekata u diferencijalnoj geometriji i topologiji i njihove osobine u obliku kako se koriste u ovom radu. Osnovni pojmovi, mnogostrukost, tangentno raslojavanje, povezanost itd., mogu se definisati na razne načine(npr. videti [Bk79,Ch84,G-H78,Hb66,K-N69,M-K71,M-S74,Po81,Wl73]).

1.2.1 Mnogostrukosti i vektorska raslojavanja

Definicija 1.1 Pseudogrupa transformacija *topološkog prostora S je skup preslikavanja Γ, takvih da su ispunjeni sledeći uslovi:*

(i) *svako $f \in \Gamma$ je homeomorfizam otvorenog skupa u S(naziva se domen za f) u drugi otvoren skup(slika za f) u S;*

(ii) *ako je $f \in \Gamma$, restrikcija f na proizvoljan otvoren podskup domena za f pripada Γ;*

(iii) *neka je $U = \cup_i U_i$, gde su svi U_i otvoreni skupovi u S, homeomorfizam f skupa U na otvoren skup u S pripada Γ, ako restrikcija f na U_i pripada Γ za svako i;*

(iv) *za svaki otvoren skup U u S identično preslikavanje na U pripada Γ;*

(v) *ako $f \in \Gamma$, to je $f^{-1} \in \Gamma$;*

(vi) *ako je $f \in \Gamma$ homeomorfizam između U i V, a $f' \in \Gamma$ homeomorfizam između U' i V' i ako $V \cap U'$ nije prazan, onda $f' \circ f$, homeomorfizam skupa $f^{-1}(V \cap U')$ u $f'(V \cap U')$, pripada Γ.*

Navedimo primere grupa transformacija koje će se koristiti u ovom radu. Pseudogrupa transformacija $\Gamma^r(\mathbf{R}^n)$, $r \geq 0$, se sastoji od homeomorfizama f otvorenih skupova u $\mathbf{R}^n$ u otvorene skupove u $\mathbf{R}^n$ takvih da su f i f^{-1} C^r-preslikavanja. Ako ovi homeomorfizmi čuvaju orijentaciju onda oni formiraju pseudogrupu transformacija $\Gamma_0^r(\mathbf{R}^n)$. Ako su homeomorfizmi f i f^{-1} realna analitička preslikavanja, odgovarajuća pseudogrupa transformacija označava se sa $\Gamma^\omega(\mathbf{R}^n)$. Analogno se definiše pseudogrupa holomorfnih transformacija kompleksnog prostora $\mathbf{C}^n$ i označava se sa $\Gamma(\mathbf{C}^n)$.

Za topološke prostore koji se javljaju u ovom radu pretpostavićemo da su Hausdorf-ovi i povezani.

Definicija 1.2 Lokalni koordinatni sistem(karta) *na topološkom prostoru M je par (U, ϕ), gde je U otvoren skup u M, a $\phi : U \longrightarrow S$ homeomorfizam između U i $\phi(U)$.*

Definicija 1.3 Atlas *topološkog prostora M, saglasan sa pseudogrupom Γ, je familija koordinatnih karata (U_i, ϕ_i) takvih da :*

(i) *familija skupova U_i prekriva ceo skup M;*

(ii) *ako $U_i \cap U_j$ nije prazan, onda preslikavanje $\phi_j \circ \phi_i^{-1}$ iz $\phi_i(U_i \cap U_j)$ u $\phi_j(U_i \cap U_j)$ pripada Γ.*

Potpun *atlas na M, saglasan sa Γ, je atlas na M koji nije sadržan ni u jednom drugom atlasu na M, saglasnom sa Γ.*

Definicija 1.4 Diferencijabilna mnogostrukost *klase C^r je topološki prostor sa fiksiranim potpunim atlasom, saglasnim sa $\Gamma^r(\mathbf{R}^n)$. Prirodan broj n se naziva dimenzija mnogostrukosti.*

Diferencijabilna mnogostrukost klase C^ω naziva se i *realna analitička mnogostrukost.* U ovom radu ćemo pod diferencijabilnom(glatkom) mnogostrukošću, ili samo mnogostrukošću, podrazumevati diferencijabilnu mnogostrukost klase C^∞. *Kompleksna mnogostrukost* kompleksne dimenzije n je topološki prostor sa fiksiranim potpunim atlasom, saglasnim sa $\Gamma(\mathbf{C}^n)$. *Orijentisana* diferencijabilna mnogostrukost klase C^r je topološki prostor sa fiksiranim potpunim atlasom saglasnim sa $\Gamma_0^r(\mathbf{R}^n)$.

Za svaku od razmatranih struktura, *dopustiva karta* je lokalna karta koja pripada fiksiranom potpunom atlasu koji određuje strukturu. Nadalje ćemo pod kartom podrazumevati dopustivu kartu. Neka je data dopustiva karta (U, ϕ) n-dimenzione mnogostrukosti M klase C^r. Tada se sistem funkcija $x^1 \circ \phi, \ldots, x^n \circ \phi$, definisanih na U, naziva *lokalni koordinatni sistem* na U i kažemo da je U koordinatna okolina.

Neka su date mnogostrukosti M i N klase C^r. Neprekidno preslikavanje $f : M \longrightarrow N$ je diferencijabilno preslikavanje klase C^k, $k \leq r$, ako za svaku kartu (U, ϕ) na M i svaku kartu (V, ψ) na N takve da $f(U_i) \subset V_j$, preslikavanje $\psi \circ f \circ \phi^{-1}$ iz $\phi(U)$ u $\psi(V)$ je diferencijabilno preslikavanje klase C^k. Pod *diferencijabilnim preslikavanjem*, ili *glatkim preslikavanjem*, podrazumevaćemo preslikavanje klase C^∞. Preslikavanje f je difeomorfizam ako je f homeomorfizam a f i f^{-1} su glatka preslikavanja. Diferencijabilna funkcija klase C^k na M je preslikavanje klase C^k iz M u $\mathbf{R}$.

Holomorfno preslikavanje između kompleksnih mnogostrukosti i holomorfna funkcija na kompleksnoj mnogostrukosti definišu se na analogan način. Preslikavanje f između kompleksnih mnogostrukosti, f :

$M \longrightarrow N$, je *biholomorfno* ako je f homeomorfizam a preslikavanja f i f^{-1} su holomorfna.

Definicija 1.5 *Neka je $C^\infty(p)$ algebra diferencijabilnih funkcija definisanih u okolini tačke $p \in M$.* Tangentni vektor X *u tački p je preslikavanje $X : C^\infty(p) \longrightarrow \mathbf{R}$ koje zadovoljava uslove:*

(i) *X je linearno preslikavanje;*

(ii) $X(fg) = (Xf)g(p) + f(p)(Xg)$ *za $f, g \in C^\infty(p)$.*

Skup svih tangentnih vektora u p obrazuje realni vektorski prostor dimenzije iste kao i dimenzija mnogostrukosti M. Ovaj vektorski prostor se naziva tangentnim prostorom *mnogostrukosti M u p i označava sa T_pM ili T_p.*

Neka je $u^1, \ldots, u^n$ lokalni koordinatni sistem u koordinatnoj okolini (U, ϕ) tačke p. Za svako j $(\partial/\partial u^j)_p$, definisano sa

$$\left(\frac{\partial}{\partial u^j}\right)_p f = \frac{\partial}{\partial u^j}(f \circ \phi^{-1})|_{\phi(p)} \quad \text{za} \quad f \in C^\infty(M),$$

je tangentni vektor. Vektori $(\partial/\partial u^1{}_p, \ldots, \partial/\partial u^n{}_p)$ čine bazu prostora T_pM. Brojevi $\xi^1, \ldots, \xi^n$ su komponente vektora $\sum \xi^j (\partial/\partial u^j)_p$ u odnosu na lokalni koordinatni sistem $u^1, \ldots, u^n$.

Neka je p tačka kompleksne mnogostrukosti M i $z^1, \ldots, z^n$ lokalni koordinatni sistem u okolini te tačke. Neka je $z^i = x^i + \sqrt{-1}y^i$. *Realni* tangentni prostor je određen sa

$$T_{\mathbf{R},p} = T_pM = \mathbf{R}\left\{\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial y^i}\right\}.$$

Zatim, $T_{\mathbf{C},p}M = T_pM \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{C}$ je *kompleksificirani* tangentni prostor na M u p. On se može predstaviti kao

$$T_{\mathbf{C},p} = \mathbf{C}\left\{\frac{\partial}{\partial z^i}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}^i}\right\},$$

gde je

$$\frac{\partial}{\partial z^i} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x^i} - \sqrt{-1}\frac{\partial}{\partial y^i}\right), \qquad \frac{\partial}{\partial \bar{z}^i} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x^i} + \sqrt{-1}\frac{\partial}{\partial y^i}\right).$$

Holomorfni tangentni prostor $T_p'M$ se definiše kao $T_p'M = \mathbf{C}\{\partial/\partial z^i\}$. Slično, *antiholomorfni* tangentni prostor je određen sa $T_p''M = \mathbf{C}\{\partial/\partial \bar{z}^i\}$ i pri tome važi

$$T_{\mathbf{C},p}M = T_p'M \oplus T_p''M.$$

Vektorsko polje X na mnogostrukosti M je dodeljivanje vektora $X_p \in T_pM$ svakoj tački p iz M. Ako je f diferencijabilna funkcija na M, onda je Xf funkcija na M definisana sa $(Xf)(p) = X_pf$. Vektorsko polje je *diferencijabilno* ako je funkcija Xf diferencijabilna za svaku diferencijabilnu funkciju f. U terminima lokalnog koordinatnog sistema $u^1, \ldots, u^n$ vektorsko polje X može biti izraženo kao $X = \sum \xi^j(\partial/\partial u^j)$ i funkcije ξ^j, definisane u koordinatnoj okolini, su *komponente* za X u odnosu na $u^1, \ldots, u^n$. Vektorsko polje X je diferencijabilno ako i samo ako su komponentne funkcije diferencijabilne.

Označimo sa $\mathfrak{X}(M)$ skup svih diferencijabilnih vektorskih polja na M. Za X i Y iz $\mathfrak{X}(M)$ definiše se vektorsko polje, Liova zagrada, $[X, Y]$ sa

$$[X, Y]f = X(Yf) - Y(Xf).$$

U odnosu na ovu operaciju $\mathfrak{X}(M)$ je realna Lieva algebra (beskonačno dimenziona).

Za proizvoljnu tačku $p \in M$ dualni vektorski prostor T_p^*M tangentnog prostora T_pM naziva se *kotangentni prostor* (ili prostor kovektora) u p. Neka je $\bigwedge T_p^*M$ spoljašnja algebra nad T_p^*M. Tada je *r-forma* ω dodeljivanje elementa stepena r iz $\bigwedge T_p^*M$ svakoj tački p iz M. U terminima lokalnog koordinatnog sistema $u^1, \ldots, u^n$ ω se može napisati u obliku

$$\omega = \sum_{i_1 < \cdots < i_r} f_{i_1 \ldots i_r} du^{i_1} \wedge \cdots \wedge du^{i_r}.$$

Pri tome je ω *diferencijabilna forma* ako su sve komponente $f_{i_1 \ldots i_r}$ diferencijabilne. Pod r-formom podrazumevaćemo diferencijabilnu r-formu.

Označimo sa $A^r(M, \mathbf{R})$ skup svih r-formi na M a sa $A(M, \mathbf{R}) = \sum_{r=0}^n A^r(M, \mathbf{R})$. U odnosu na spoljašnji proizvod $A(M, \mathbf{R})$ obrazuje algebru nad realnim brojevima. *Spoljašnje diferenciranje* d se može okarakterisati na sledeći način:

(i) $d : A(M, \mathbf{R}) \longrightarrow A(M, \mathbf{R})$ je $\mathbf{R}$-linearno preslikavanje takvo da $d(A^r(M, \mathbf{R})) \subset A^{r+1}(M, \mathbf{R})$;

(ii) $df(X) = X(f)$ za $f \in A^0(M, \mathbf{R})$;

(iii) za $\omega \in A^r(M, \mathbf{R})$ i $\eta \in A^s(M, \mathbf{R})$, to je

$$d(\omega \wedge \eta) = d\omega \wedge \eta + (-1)^r \omega \wedge d\eta;$$

(iv) $d^2 = 0$.

Ako je M glatka n-dimenziona mnogostrukost označimo sa $\mathbf{Z}^r(M, \mathbf{R})$ potprostor zatvorenih r-formi u $A^r(M, \mathbf{R})$. Kako je $d \circ d = 0$ to je $d(A^{r-1}(M, \mathbf{R})) \subseteq \mathbf{Z}^r(M, \mathbf{R})$. Faktor grupa

$$H^r_{DR}(M, \mathbf{R}) = \mathbf{Z}^r(M, \mathbf{R})/dA^{r-1}(M, \mathbf{R})$$

zatvorenih formi po modulu tačnih formi naziva se *grupa kohomologija de Rham-a.*

Slično, označimo sa $A^r(M)$ i $Z^r(M)$ redom prostore svih kompleksnoznačnih r-formi i zatvorenih kompleksnoznačnih r-formi. Odgovarajući faktorprostor je

$$H^r_{DR}(M) = Z^r(M)/dA^{r-1}(M) \quad \text{i važi} \quad H^r_{DR}(M) = H^r_{DR}(M, \mathbf{R}) \otimes \mathbf{C}.$$

Preslikavanje $f : M \longrightarrow N$ indukuje homomorfizme

$$f^* : H^r_{DR}(N, \mathbf{R}) \longrightarrow H^r_{DR}(M, \mathbf{R}) \quad \text{i} \quad f^* : H^r_{DR}(N) \longrightarrow H^r_{DR}(M).$$

Za kompleksnu mnogostrukost M označimo sa $T^{*\prime}_p M$ i $T^{*\prime}_p M$ dualne prostore redom holomorfnog i antiholomorfnog tangentnog prostora. Tada je

$$A^n(M) = \oplus_{p+q=n} A^{p,q}(M),$$

gde je

$$A^{p,q}(M) = \{\phi \in A^n(M) : \phi(z) \in \bigwedge^p T^{*\prime}_z(M) \otimes \bigwedge^q T^{*\prime\prime}_z(M) \text{ za sve } z \in M\}.$$

Forma $\phi \in A^{p,q}(M)$ naziva se formom tipa (p, q). Pri tome je $d = \partial + \bar{\partial}$,

$$\bar{\partial} : A^{p,q}(M) \longrightarrow A^{p,q+1}(M) \text{ i } \partial : A^{p,q}(M) \longrightarrow A^{p+1,q}(M).$$

Neka $Z^{p,q}_{\bar\partial}(M)$ označava prostor $\bar\partial$-zatvorenih formi tipa (p,q). Kako je $\bar\partial^2 = 0$ na $A^{p,q}(M)$,

$$\bar\partial(A^{p,q}(M)) \subset Z^{p,q+1}_{\bar\partial}(M).$$

Stoga se može definisati *grupa kohomologija Dolbeault-a* sa

$$H^{p,q}_{\bar\partial}(M) = Z^{p,q}_{\bar\partial}(M)/\bar\partial(A^{p,q-1}(M)).$$

Definicija 1.6 Kompleksno vektorsko raslojavanje $\xi = (E, M, \pi)$ *ranga n nad mnogostrukošću M sastoji se od mnogostrukosti E i projekcije $\pi : E \longrightarrow M$, pri čemu je u svakom sloju $\pi^{-1}(m)$ data struktura kompleksnog vektorskog prostora i ispunjeni su uslovi:*

(i) *projekcija π je glatko preslikavanje;*

(ii) *za svaku tačku $m \in M$ postoji okolina U te tačke i difeomorfizam*

$$\phi_U : \pi^{-1}(U) \longrightarrow U \times \mathbf{C}^n$$

koji kompleksno-linearno preslikava $\pi^{-1}(m)$ na proizvod $b \times \mathbf{C}^n$; par (U, ϕ_U) se naziva lokalna trivijalizacija.

Mnogostrukost E se naziva prostor raslojavanja *ξ i označava se sa $E(\xi)$ a $\pi^{-1}(m)$ je* sloj *raslojavanja ξ nad tačkom m i označava se sa $F_m(\xi)$.*

Na analogan način se definišu realna vektorska raslojavanja. Raslojavanja ranga jedan nazivaju se linearna raslojavanja. Ako se kod kompleksnog vektorskog raslojavanja ξ slojevi $\mathbf{C}^n$ razmatraju kao realni vektorski prostor $\mathbf{R}^{2n}$ dobija se njemu odgovarajuće realno raslojavanje koje se označava sa $\xi_{\mathbf{R}}$.

Primedba: Ako se u definiciji zahteva da su E i M kompleksne mnogostrukosti, π holomorfno preslikavanje i lokalna trivijalizacija ϕ_U biholomorfno preslikavanje onda je ξ *holomorfno* vektorsko raslojavanje.

Za svaki par trivijalizacija ϕ_U i ϕ_V definisano je preslikavanje $g_{UV} : U \cap V \longrightarrow GL(n, \mathbf{C})$ sa

$$g_{UV}(m) = (\phi_U \circ \phi_V^{-1})|_{\{m\}\times\mathbf{C}^n}.$$

Preslikavanja g_{UV} nazivaju se *funkcije prelaza* za raslojavanje ξ u odnosu na trivijalizacije ϕ_U i ϕ_V. Funkcije prelaska zadovoljavaju identitete

$$g_{UV}(m) \circ g_{VU}(m) = I, \qquad \text{za sve } m \in U \cap V,$$

$$g_{UV}(m) \circ g_{VW}(m) \circ g_{WU}(m) = I, \qquad \text{za sve } m \in U \cap V \cap W.$$

Obratno, ako je dat otvoren pokrivač $U = \{U_i\}$ mnogostrukosti M i preslikavanja $g_{ij} : U_i \cap U_j \longrightarrow GL(n, \mathbf{C})$, koja zadovoljavaju ove identitete, onda postoji jedinstveno kompleksno vektorsko raslojavanje ξ nad M sa funkcijama prelaska $\{g_{ij}\}$.

Preslikavanje $f : E(\xi) \longrightarrow E(\eta)$ je *homomorfizam* vektorskih raslojavanja ξ i η nad istim baznim prostorom M ako je restrikcija preslikavanja f homomorfizam slojeva $F_x(\xi)$ i $F_x(\eta)$. Ako je $\xi = \eta$ onda se homomorfizam f naziva *endomorfizam.* Može se definisati i raslojavanje $Hom(\xi, \eta)$ nad M određeno slojevima

$$F_m(Hom(\xi, \eta)) = Hom(F_m(\xi), F_m(\eta)),$$

za sve $m \in M$. Koristi se i oznaka $End(\xi) = Hom(\xi, \xi)$.

Definicija 1.7 *Kompleksna vektorska raslojavanja ξ i η nad istim baznim prostorom M su* izomorfna, *piše se $\xi \cong \eta$, ako postoji difeomorfizam*

$$f : E(\xi) \longrightarrow E(\eta)$$

prostora raslojavanja, koji linearno preslikava svaki vektorski prostor $F_m(\xi)$ na odgovarajući vektorski prostor $F_m(\eta)$.

Definicija 1.8 Kompleksna struktura *na realnom vektorskom raslojavanju ξ je endomorfizam J tog raslojavanja takav da je $J^2 = -I$, I je identični endomorfizam.*

Može se pokazati da realno raslojavanje η dopušta kompleksnu strukturu ako i samo ako je $\eta = \xi_{\mathbf{R}}$ za neko kompleksno raslojavanje ξ.

Trivijalno kompleksno vektorsko raslojavanje ranga n nad baznim prostorom M, τ_B, je raslojavanje izomorfno direktnom proizvodu $M \times \mathbf{C}^n$.

Definicija 1.9 Sečenje *vektorskog raslojavanja* $\xi = (E, M, \pi)$ *je preslikavanje*

$$s : M \longrightarrow E(\xi)$$

koje prevodi tačku m *u element sloja* $F_m(\xi)$, *tj.* $\pi \circ s$ *je identično preslikavanje na* M. *Skup svih sečenja raslojavanja* ξ *označava se sa* $\mathcal{S}(\xi)$. *Sečenja* $s_1, \ldots, s_n$ *su nezavisna ako su za svaku tačku* m *iz* M *vektori* $s_1(m), \ldots, s_n(m)$ *linearno nezavisni.*

Neka je $\xi = (E, M, \pi)$ kompleksno vektorsko raslojavanje i $\overline{M}$ podmnogostrukost od M. Tada se može definisati *restrikcija raslojavanja* $\xi|_M = (\pi^{-1}(\overline{M}), \overline{M}, \pi)$ gde su slojevi ovog raslojavanja određeni sa $F_m(\xi|_{\overline{M}}) = F_m(\xi)$ za $m \in M$.

Navedimo sada nekoliko osnovnih konstrukcija pomoću kojih se od datih kompleksnih raslojavanja ranga k i l formiraju nova kompleksna raslojavanja. Neka su $\xi = (E, M, \pi_1)$ i $\eta = (F, M, \pi_2)$ kompleksna vektorska raslojavanja čije su funkcije prelaska $\{g_{UV}\}$ i $\{h_{UV}\}$.

(i) *dualno* raslojavanje ξ^* raslojavanju ξ određeno je funkcijama prelaska g^*_{UV} definisanim sa

$$g^*_{UV}(m) = (g_{UV}(m)^{-1})^T \in GL(k, \mathbf{C});$$

(ii) *Whitney-jeva suma* $\xi \oplus \eta$ određena je funkcijama prelaska oblika

$$g^{\oplus}_{UV}(m) = \begin{pmatrix} g_{UV}(m) & 0 \\ 0 & h_{UV}(m) \end{pmatrix} \in GL(\mathbf{C}^k \oplus \mathbf{C}^l);$$

(iii) *tenzorski proizvod* $\xi \otimes \eta$ ima funkcije prelaska zadate sa

$$g^{\otimes}_{UV}(m) = g_{UV}(m) \otimes h_{UV}(m) \in GL(\mathbf{C}^k \otimes \mathbf{C}^l);$$

(iv) *spoljašnji stepen* $\bigwedge^r \xi$ određen je funkcijama prelaska

$$g^{\wedge}_{UV}(m) = \bigwedge^r g_{UV}(m) \in GL(\bigwedge^r \mathbf{C}^k);$$

posebno, $\bigwedge^k \xi$ je linearno raslojavanje sa funkcijama prelaska

$$g_{UV}{}'(m) = \det g_{UV}(m) \in GL(1, \mathbf{C}) = \mathbf{C}^*;$$

i naziva se *determinantom* raslojavanja ξ.

Podraslojavanje $\xi' \subset \xi$ raslojavanja $\xi = (E, M, \pi)$ je familija $\{F_m \subset E_m\}_{m\in M}$ potprostora slojeva E_m raslojavanja ξ, tako da je $F = \cup F_m \subset E$ podmnogostrukost od E. Takođe, može se definisati i *faktor raslojavanje* ξ/ξ' čiji su slojevi $F_m(\xi/\xi') = F_m(\xi)/F_m(\xi')$.

Za preslikavanje mnogostrukosti $f : N \longrightarrow M$ i kompleksno raslojavanje $\xi = (E, M, \pi)$ može se definisati *indukovano* raslojavanje $f^{-1}\xi$ određeno sa

$$F_m(f^{-1}\xi) = F_{f(m)}(\xi).$$

Sve što je do sada rečeno o kompleksnim vektorskim raslojavanjima direktno se prenosi i na kategoriju holomorfnih vektorskih raslojavanja. Moguće je definisati dualno raslojavanje, Whitney-jevu sumu, tenzorski i spoljašnji proizvod holomorfnih vektorskih raslojavanja tako da ona budu holomorfna. Takođe, inverzna raslojavanje $f^*\xi$ holomorfnog vektorskog raslojavanja ξ pri holomorfnom preslikavanju $f : N \longrightarrow M$ kompleksnih mnogostrukosti ima prirodnu holomorfnu strukturu. Holomorfno podraslojavanje $\xi' = (F, M, \pi)$ holomorfnog raslojavanja $\xi = (E, M, \pi)$ je takvo podraslojavanje da je F kompleksna podmnogostrukost od E. Šta više, i odgovarajuće faktor raslojavanje je holomorfno.

Za vektorsko raslojavanje ξ, $A^p(\xi) = \mathcal{S}(\Lambda^p(M) \otimes \xi)$ je prostor *ξ-vrednosnih p-formi*. Slično se za holomorfno vektorsko raslojavanje ξ definiše prostor *ξ-vrednosnih formi tipa* (p, q) i označava se sa $A^{p,q}(\xi)$. U tom slučaju se prirodno definiše operator $\bar{\partial}$ (videti npr. [G-H78])

$$\bar{\partial} : A^{p,q}(\xi) \longrightarrow A^{p,q+1}(\xi).$$

Nad kompleksnom mnogostrukošću mogu se razmatrati sledeća raslojavanja:

- $T_{\mathbb{C}}M$ i $T^*_{\mathbb{C}}M$-kompleksno tangentno i kotangentno raslojavanje

- $T'M$ i $T''M$-holomorfno i antiholomorfno tangentno raslojavanje

- $T^{*\prime}M$ i $T^{*\prime\prime}M$-holomorfno i antiholomorfno kotangentno raslojavanje

- $T^{*(p,q)}M = \Lambda^p T^{*\prime}M \otimes \Lambda^q T^{*\prime\prime}M$.

1.2.2 Metrika, povezanost i krivina

Neka je $\xi = (E, M, \pi)$, rang $\xi = \lambda$, kompleksno vektorsko raslojavanje. *Hermitska metrika* na ξ je hermitski skalarni proizvod na svakom sloju E_m, koji glatko zavisi od $m \in M$, tj. takav da

(i) $h(u,t)$ je linearan po u, gde je $u, t \in E_m$

(ii) $h(u,t) = \overline{h(t,u)}$,

(iii) $h(u,u) > 0$ za $u \neq 0$;

(iv) $h(u,t)$ je glatka funkcija za $u, t \in S(\xi)$.

Reper s raslojavanja ξ je *unitarni* ako je $s_1(m), \ldots, s_\lambda(m)$ ortonormirana baza prostora E_m za sve m. Unitarni reper uvek postoji lokalno. Na sličan način se definiše *euklidska metrika* na realnom vektorskom raslojavanju i *ortonormirani* reper. Na realnom raslojavanju $\xi = (E, M, \pi)$ sa kompleksnom strukturom J definiše se *hermitska matrika* h kao euklidska metrika koja zadovoljava uslov $h(Ju, Jt) = h(u,t)$ za $u, t \in E_m$. Holomorfno raslojavanje sa hermitskom metrikom (E, h) naziva se *hermitsko vektorsko raslojavanje.*

Definicija 1.10 Povezanost *na kompleksnom raslojavanju ξ je* C*-linearno preslikavanje*

$$D : A^0(\xi) \longrightarrow A^1(\xi)$$

koje zadovoljava formulu Leibniz-a

$$D(f \cdot s) = df \otimes s + fD(s)$$

za svako s iz $A^0(\xi)$ i sve funkcije f iz $C^\infty(M, \mathbb{C})$.

Može se pokazati da na svakom vektorskom raslojavanju postoji povezanost (videti npr. [M-S74,K-N69]).

U ovom radu prihvaćena je Einstein-ova konvencija o sabiranju te se podrazumeva sabiranje za svaki par ponovljenih indeksa.

Neka je U dovoljno mali otvoren skup u M takav da je raslojavanje $\xi|_U$ trivijalno. Izaberimo bazu $s = (s_1, \ldots, s_\lambda)$ sečenja raslojavanja $\xi|_U$. Povezanost D na trivijalnom raslojavanju $\xi|_U$ jednoznačno je određena vrednostima $D(s_1), \dots, D(s_\lambda)$ koja mogu biti proizvoljna sečenja raslojavanja $T^*_{\mathbf{C}} \otimes \xi|_U$. Svako sečenje $D(s_i)$ se na jedinstven način predstavlja u obliku $\sum \theta_i^j \otimes s_j$. Matrica $\theta = [\theta_i^j]$, se naziva *forma povezanosti* u odnosu na s i ona može biti proizvoljna $\lambda \times \lambda$ matrica kompleksnih 1-formi na U.

Forma povezanosti θ_s u tački $m \in U$ zavisi od izbora repera u okolini tačke m: ako je $s' = (s'_1, \dots, s'_\lambda)$ drugi reper u okolini tačke m i $s'_i(m) = \sum t_i^j(m) s_j(m)$, tada je forma povezanosti $\theta_{s'}$ određena sa

$$\theta_{s'} = dt \cdot t^{-1} + t \cdot \theta_s \cdot t^{-1}$$

gde je $t = [t_i^j]$.

Za sečenje s Ds se naziva kovarijantni izvod. Zatim, za tangentni vektor $X \in T_{\mathbf{C},m}M$ koristi se oznaka

$$(Ds)(X) = D_X s \in E_m$$

i $D_X s$ se naziva *kovarijantni izvod* sečenja s u pravcu X.

Sečenje s je *paralelno* ako je $Ds = 0$. Ako je $c = c(t)$, $0 \le t \le a$, kriva u M, sečenje s definisano duž krive c je *paralelno duž* c ako je

$$D_{c'(t)} s = 0 \quad \text{za} \quad 0 \le t \le a,$$

gde $c'(t)$ označava tangentni vektor krive c u $c(t)$.

Za povezanost D na raslojavanju ξ koje je snabdeveno metrikom g kažemo da je *kompatibilna sa metrikom* ako je

$$dg(s,u) = g(Ds,u) + g(s,Du) \quad \text{za} \quad s,u \in \mathcal{S}(\xi).$$

Na analogan način se uvodi odgovarajući pojam za hermitsko vektorsko raslojavanje.

Povezanost D na hermitskom vektorskom raslojavanju ξ može se razložiti u zbir $D = D' + D''$ gde

$$D' : A^0(\xi) \longrightarrow A^{1,0}(\xi)$$

a

$$D'' : A^0(\xi) \longrightarrow A^{0,1}(\xi).$$

Ovo je posledica razlaganja $T^*M = T^{*\prime}M \oplus T^{*\prime\prime}M$.

Prirodna povezanost na vektorskom raslojavanju $\xi = (E, M, \pi)$ u opštem slučaju ne postoji. Ako je ξ hermitsko vektorsko raslojavanje može se pokazati (videti [Kb87]) da postoji jedinstvena povezanost koja je kompatibilna sa metrikom takva da je $D'' = \bar{\partial}$. Ona se naziva *kanonska (hermitska) povezanost.*

Za povezanost D na vektorskom raslojavanju $\xi = (E, M, \pi)$ prirodno se definiše preslikavanje koje zadovoljava Leibniz-ov uslov

$$\widehat{D} : A^1(\xi) \longrightarrow A^2(\xi)$$

odnosno $K_D = \widehat{D} \circ D$, čime je određeno sečenje raslojavanja $Hom(\xi, \bigwedge T^*_{\mathbb{C}} \otimes \xi)$. Sečenje K_D naziva se *tenzor krivine* povezanosti D.

U terminima lokalnog repera s u okolini tačke $m \in U$, $s = (s_1, \ldots, s_\lambda)$, krivina se može predstaviti u obliku

$$K s_i = \sum \Theta_i^j s_j,$$

gde je Θ_i^j 2-forma, a matrica $\Theta = [\Theta_i^j]$ se naziva *forma krivine.* Ako je $s' = (s'_1, \ldots, s'_\lambda)$ drugi reper u okolini tačke $m \in U'$ i t matrica prelaska sa repera s na s', to su forme krivine $\Theta_{s'}$ i Θ_s povezane sa

$$\Theta_{s'}(m) = t(m) \cdot \Theta_s \cdot t(m)^{-1}.$$

Forma krivine se izražava pomoću forme povezanosti kao

$$\Theta_s = d\theta_s - \theta_s \wedge \theta_s.$$

Ova jednakost se naziva *strukturnom jednačinom Cartan-a.*

Za lokalni koordinatni reper s koriste se sledeće oznake

$$(K s_i)(X, Y) = R_{XY} s_i = R_{XY}{}_i^j s_j$$

za $X, Y \in T_{\mathbb{C},m}$. Tenzor krivine $K = K_D$ se može izraziti i u obliku

$$(K s_i)(X, Y) = D_{[X,Y]} s_i - [D_X, D_Y] s_i$$

za $X, Y \in T_{\mathbb{C},m} M$. Analogne oznake se koriste i za tenzor krivine realnog raslojavanja.

Koristeći rezultat iz [Kb87] vidimo da se pojam projektivno ravne povezanosti može uvesti na sledeći način.

Definicija 1.11 *Povezanost D na kompleksnom vektorskom raslojavanju ξ nad M je* projektivno ravna *ako postoji kompleksna 2-forma α na M tako da je krivina K oblika*

$$K = \alpha I_\xi,$$

I_ξ je identični endomorfizam raslojavanja ξ.

1.2.3 Topologija mnogostrukosti

Sada ćemo navesti definicije homoloških i kohomoloških grupa mnogostrukosti M. Za detalje videti [Ch84,G-H78,M-S74].

Definicija 1.12 *Sa Δ_p se označava* simpleks *u* $\mathbf{R}^p$, *definisan sa* $0 \leq x_i \leq 1$ *i* $\sum_{i=1}^{p} x_i \leq 1$.

Definicija 1.13 *Diferencijabilni* singularni p-simpleks *na M je neprekidno preslikavanje iz Δ_p u M koje može biti prošireno na preslikavanje okoline od Δ_p u $\mathbf{R}^p$ u M. Diferencijabilni* p-lanac *je konačna formalna linearna kombinacija singularnih p-simpleksa sa realnim koeficijentima. Analogno se definišu* celobrojni p-lanci.

Skup p-lanaca na M formira realni vektorski prostor $C_p(M)$. Pri tome se može prirodno definisati granica $\partial\Delta_p$ kao $(p-1)$-lanac i ona se proširuje na linearno preslikavanje $\partial : C_p(M) \longrightarrow C_{p-1}(M)$. Za operator ∂ važi $\partial \circ \partial = 0$.

Definicija 1.14 *Za p-lanac c kažemo da je* cikl *ako je $\partial c = 0$. Sa $Z_p(M)$ označava se prostor p-ciklova na M. S obzirom na $\partial \circ \partial = 0$, prostor $\partial(C_{p+1}(M))$ je potprostor od $Z_p(M)$.*

Definicija 1.15 *Količnički prostor $Z_p(M)/\partial(C_{p+1}(M))$ se naziva* p-dimenziona homološka grupa *mnogostrukosti M koja se označava sa $H_p(M, \mathbf{R})$.*

Na sličan način se definiše $H_p(M, \mathbf{Z})$, *celobrojna homološka grupa.*

Za vektorski prostor p-lanaca $C_p(M)$ može se definisati dualni vektorski prostor *kolanaca* $C^p(M)$ i operator ∂ indukuje operator *kogranice*

$\delta : C^p(M) \longrightarrow C^{p+1}(M)$. Kolanac je *kocikl* ako je $\delta c = 0$ i prostor kociklova se označava sa $Z^p(M)$. Kao i u predhodnom slučaju definiše se *p-dimenziona kohomološka grupa* $H^p(M, \mathbf{R}) = Z^p(M)/\delta(C^{p-1}(M))$. Slično se može definisati i celobrojna kohomološka grupa $H^p(M, \mathbf{Z})$.

Neka je $\xi = (E, M, \pi)$ realno vektorsko raslojavanje ranga λ. Označimo sa E_0 skup svih nenula vektora iz E i sa π_0 projekciju $\pi_0 : E_0 \longrightarrow M$. Tada se može uspostaviti veza između celobrojnih kohomoloških grupa prostora M i E.

Teorema 1.1 ([M-S74]) *Za svako orijentisano vektorsko raslojavanje ξ ranga λ imamo tačan niz oblika*

$$\cdots \longrightarrow H^i(M, \mathbf{Z}) \xrightarrow{\cup e} H^{i+\lambda}(M, \mathbf{Z}) \xrightarrow{\pi_0^*} H^{i+\lambda}(E_0, \mathbf{Z}) \longrightarrow \cdots \quad .$$

□

Simbol $\cup e$ označava homomorfizam $a \longmapsto a \cup e(\xi)$, za $a \in H^i(M, \mathbf{Z})$ i $e(\xi) \in H^\lambda(M, \mathbf{Z})$ je Euler-ova klasa raslojavanja ξ. Ovako definisan niz naziva se *Gysin-ov tačan niz* vektorskog raslojavanja.

Navedimo teoremu de Rham-a koja povezuje de Rham-ove i singularne kohomološke grupe glatke mnogostrukosti.

Teorema 1.2 ([M-S74,G-H78]) *Neka je M glatka mnogostrukost. Tada je grupa de Rham-ovih kohomologija $H^p_{DR}(M, \mathbf{R})$, $p \geq 0$, izomorfna sa grupom singularnih realnih kohomologija $H^p(M, \mathbf{R})$. Posmatrajmo sada odgovarajuće kohomološke prstene $H^*_{DR}(M, \mathbf{R})$ i $H^*(M, \mathbf{R})$ u kojima se množenja definišu redom kao spoljašnji proizvod diferencijabilnih formi i kao spoljašnji proizvod kohomoloških klasa. Tada su i ti kohomološki prsteni izomorfni.* □

Za zatvorenu 2-formu α na M sa $[\alpha]$ označava se njom određena de Rham-ova kohomološka klasa.

Teorema 1.3 (dualnost Poincare-a) *Neka je M kompaktna orijentisana n-dimenziona mnogostrukost. Tada je*

$$H_k(M, \mathbf{Z}) \cong H^{n-k}(M, \mathbf{Z})$$

za $0 \leq k \leq n$. □

Definicija 1.16 *Za n-dimenzionu mnogostrukost M, definiše se p-ti* Betti-jev *broj $b_p(M)$, $0 \leq p \leq n$, kao broj nezavisnih generatora grupe $H^p(M)$.* Euler-Poincare-ova *karakteristika je $\sum_{p=1}^{n}(-1)^p b_p(M)$.*

Navedimo definiciju i osnovna svojstva celobrojnih kohomoloških formi.

Definicija 1.17 *Prirodno ulaganje $\varepsilon : \mathbf{Z} \longrightarrow \mathbf{R}$ indikuje koeficijentni homomorfizam*

$$\varepsilon^* : H^*(M, \mathbf{Z}) \longrightarrow H^*(M, \mathbf{R}).$$

Kohomološka klasa $\gamma \in H^*(M, \mathbf{R})$ je celobrojna *ako γ pripada slici preslikavanja ε^*. Zatvorena forma $\alpha \in \bigwedge^p(M)$ je* celobrojna *ako je $[\alpha] \in H^p_{DR}(M, \mathbf{R}) \cong H^p(M, \mathbf{R})$ celobrojna.*

U [W71,W52] je data sledeća karakterizacija celobrojnih kohomoloških klasa.

Teorema 1.4 *Neka je M kompaktna orijentisana mnogostrukost. Zatvorena forma $\alpha \in \bigwedge^p(M)$ je celobrojna ako i samo ako je*

$$\int_{C_p} \alpha \in \mathbf{Z}$$

za svaki p-dimenzioni celobrojni glatki cikl C_p. □

Navedimo još jednu važnu osobinu celobrojnih formi.

Teorema 1.5 ([W71, Poglavlje IV]) *Ako su zatvorene forme α i β celobrojne onda je i forma $\alpha \wedge \beta$ celobrojna.* □

Neka je M kompaktna 4-dimenziona orijentisana mnogostrukost. Tada se na $H^2(M, \mathbf{Z})$ definiše simetrična bilinearna forma B koja preslikava $(\bar{\alpha}, \bar{\beta}) \in H^2(M, \mathbf{Z}) \times H^2(M, \mathbf{Z})$ u

$$B(\bar{\alpha}, \bar{\beta}) = \int_M \alpha \wedge \beta$$

gde su α i β zatvorene 2-forme takve da je $\varepsilon^*\bar{\alpha} = [\alpha]$ i $\varepsilon^*\bar{\beta} = [\beta]$ u $H^2(M, \mathbf{R})$.

Definicija 1.18 Hirzebruch-ov znak $\sigma(M)$ *mnogostrukosti* M *je indeks bilinearne forme* B.

Označimo sa $h^{p,q}(M)$ dimenziju Dolbeault-ove kohomološke grupe kompleksne mnogostrukosti M.

Definicija 1.19 Aritmetički rod $a(M)$ *kompleksne mnogostrukosti* M *kompleksne dimenzije* n *definiše se sa*

$$a(M) = \sum_{q=0}^{n}(-1)^q h^{0,q}(M).$$

1.2.4 Chern-ove klase

Chern-ove karakteristične klase se mogu zadati na razne načine(videti npr.[Hb66,Kb87,K-N69]). Ovde se razmatra kategorija kompleksnih vektorskih raslojavanja nad realnim mnogostrukostima i jednostavan sistem aksioma koji karakteriše Chern-ove karakteristične klase.

Aksioma 1 *Za svako kompleksno vektorsko raslojavanje* ξ *nad* M *i za svaki ceo broj* $i \geq 0$, *određena je Chern-ova klasa* $c_i(\xi)$ *iz* $H^{2i}(M, \mathbf{R})$ *i* $c_0(\xi) = 1$.

Formalna suma $c(\xi) = 1 + c_1(\xi) + \cdots + c_n(\xi) + \cdots$ naziva se *potpunom Chern-ovom klasom* raslojavanja ξ.

Aksioma 2 (prirodnost) *Neka je* ξ *kompleksno vektorsko raslojavanje nad* M, *a* $f : N \longrightarrow M$ *glatko preslikavanje. Tada je*

$$c(f^{-1}\xi) = f^*(c(\xi)) \in H^*(N, \mathbf{R}),$$

gde f^{-1} *označava indukovano kompleksno vektorsko raslojavanje nad* N.

Aksioma 3 (formula za Whitney-jevu sumu) *Neka su* $\xi_1, \ldots, \xi_q$ *kompleksna linearna raslojavanja nad* M. *Tada je*

$$c(\xi_1 \oplus \cdots \oplus \xi_q) = c(\xi_1) \cdots c(\xi_q).$$

Množenje potpunih Chern-ovih klasa, koje se ovde javlja, definiše se kao množenje formalnih stepenih redova.

Za formulaciju Aksiome 4 neophodno je definisati *kanonsko* kompleksno linearno raslojavanje nad n-dimenzionim kompleksnim projektivnim prostorom CP^n. Tačka x u CP^n je jednodimenzioni kompleksni potprostor, označava se sa F_x, iz C^{n+1}. Svakom $x \in CP^n$ pridružimo F_x kao sloj nad x i na taj način se određuje kanonsko kompleksno linearno raslojavanje nad CP^n, koje se označava sa γ^n.

Aksioma 4 (normalizacija) *Neka je γ^1 kanonsko linearno raslojavanje nad kompleksnim projektivnim prostorom CP^1. Tada je $-c_1(\gamma^1)$ generatorni element za kohomološku grupu $H^2(CP^1, Z) \cong Z$. Drugim rečima, vrednost $c_1(\gamma^1)$ na fundamentalnom 2-ciklu za CP^1, jednaka je -1.*

U topologiji se razmatraju celobrojne Chern-ove karakteristične klase u kategoriji topoloških kompleksnih vektorskih raslojavanja kao elementi grupe $H^*(M, Z)$ definisane pomoću analognih aksioma. Topološki dokaz egzistencije i jedinstvenosti Chern-ovih klasa, dat u [Hb66], važi i u diferencijabilnom slučaju .

Kada na kompleksnom raslojavanju ξ, ranga λ, imamo povezanost D, Chern [Ch46,Ch79] je pokazao da se Chern-ova klasa $c_i(\xi)$ može izraziti u terminima de Rham-ovih kohomoloških klasa. Neka je Θ forma krivine povezanosti D. Definišimo $2k$-formu γ_k, $1 \leq k \leq \lambda$, sa

$$\det\left(I_\lambda - \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\Theta\right) = 1 + \gamma_1 + \cdots + \gamma_\lambda.$$

Teorema 1.6 ([K-N69]) *Chern-ova klasa $c_k(\xi)$ kompleksnog vektorskog raslojavanja $\xi = (E, M, \pi)$ sa povezanošću D je predstavljena sa predhodno definisanom $2k$-formom γ_k, tj.*

$$c_k(\xi) = [\gamma_k].$$

□

1.2.5 Riemann-ova i Kähler-ova geometrija

Definicija 1.20 Riemann-ova *mnogostrukost M je glatka, realna mnogostrukost sa zadatim euklidskom metrikom g u kotangentnom raslojavanju T^*. Povezanost D na raslojavanju T^* je* simetrična *(ili* bez torzije*) ako je kompozicija*

$$\mathcal{S}(T^*) \xrightarrow{D} \mathcal{S}(T^* \otimes T^*) \xrightarrow{\wedge} \mathcal{S}(\bigwedge^2 T^*)$$

jednaka spoljašnjem diferenciranju d.

Može se pokazati (videti npr. [K-N69]) da na kotangentnom raslojavanju T^* Riemann-ove mnogostrukosti postoji jedinstvena simetrična povezanost saglasna sa metrikom. Ova povezanost naziva se *Riemann-ova povezanost* ili *povezanost Levi-Civita.* Pri tome povezanost D i metrika g indukuju povezanost na tangentnom raslojavanju koja se označava na isti način.

Neka je $\tau = x(t)$, $a < t < b$, kriva na mnogostrukosti M. Označimo sa X polje tangentnih vektora krive τ. Ako je polje X paralelno duž τ kažemo da je τ *geodezijska linija.* Za geodezijske linije važno je tvrđenje(videti [K-N69]) da za svaku tačku m iz M i proizvoljni vektor $X \in T_m(M)$ postoji jedinstvena geodezijska linija τ s početnim uslovom (m, X), tj. takva da je $x(0) = m$ i $\dot{x} = X$.

Povezanost na M je *kompletna* ako svaka geodezijska linija može biti produžena do geodezijske $\tau = x(t)$ definisane za $-\infty \leq t \leq \infty$, gde je t afini parametar.

Definicija 1.21 *Za datu povezanost D moguće je u svakoj tački m definisati* eksponencijalno preslikavanje, exp : $U_m \longrightarrow M$*, gde je U_m okolina tačke 0 u T_mM. Za $X \in T_mM$ neka je $\tau = x(t)$ geodezijska linija sa početnim uslovom (m, X). Tada je*

$$\exp(tX) = x(t)$$

za $-\epsilon_1 \leq t \leq \epsilon_2$, gde su ϵ_1 i ϵ_2 pozitivni brojevi. Ako je povezanost kompletna eksponencijalno preslikavanje exp *definiše se na celom T_mM za sve $m \in M$.*

Lema 1.7 ([K-N69]) *Za svaku tačku $m \in M$ postoji okolina N_m tačke m (preciznije nula vektora u m) u T_mM, koja se preslikava difeomorfno na okolinu U_m tačke m iz M eksponencijalnim preslikavanjem.* □

Definicija 1.22 *Realna mnogostrukost M, realne dimenzije $2n$, takva da je na njenom tangentnom raslojavanju TM data kompleksna struktura J naziva se* skoro kompleksna *mnogostrukost (M, J). Ako je g Riemann-ova metrika na M, (M, g, J) je* skoro hermitska *mnogostrukost ako je J izometrija, tj. $g(JX, JY) = g(X, Y)$ za $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$.* Fundamentalna *2-forma Φ skoro hermitske mnogostrukosti (M, g, J) definisana je sa $\Phi(X, Y) = g(JX, Y)$ za $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$. Ako je forma Φ zatvorena, $d\Phi = 0$, kažemo da je (M, g, J) skoro Kähler-ova mnogostrukost.*

Zatvorena 2-forma Φ na M koja je nesingularna(tj. Φ^n je različita od nule u svim tačkama) naziva se *simplektička* forma. Simplektička forma Φ je *kompatibilna* sa skoro kompleksnom strukturom (M, J) ako je $\omega(JX, JY) = \omega(X, Y)$ za $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$.

Na holomorfnom tangentnom raslojavanju $T'M$ kompleksne mnogostrukosti može se definisati skoro kompleksni endomorfizam $J \in S(End(T'M))$, $J^2 = -I$. Kompleksna mnogostrukost M sa hermitskom metrikom $h^{\mathbf{C}}$, $(M, h^{\mathbf{C}}, J)$ naziva se *hermitska* mnogostrukost. Analogno kao i u realnom slučaju definiše se fundamentalna forma Φ hermitske mnogostrukosti i tada kažemo da je $(M, h^{\mathbf{C}}, J)$ *Kähler-ova* mnogostrukost ako je fundamentalna forma zatvorena.

Za Betti-jeve brojeve Kähler-ove mnogostrukosti važi sledeća teorema.

Teorema 1.8 ([Gb62]) *Za kompaktnu Kähler-ovu mnogostrukost p-ti Betti-jev broj je paran ako je p neparano. Parno-dimenzioni Betti-jevi brojevi $b_p(p \leq 2n)$ su različiti od nule.* □

Opišimo sada klasičnu *kvadratnu transformaciju*(naziva se i *proširivanje tačke*) kompleksne površi M u kompleksnu površ M^* (videti [M-K71, str. 17]). Neka je $S^* = \mathbf{C}P^1$. Definišimo površ $M^* = (M - p) \cup \mathbf{C}P^1$, $p \in M$, na sledeći način. Izaberimo koordinatnu kartu

$$W = \{(z_1, z_2) \mid |z_1| < \epsilon_1,\ |z_2| < \epsilon_2\}$$

u okolini tačke p tako da je $z_1(p) = z_2(p) = 0$. Neka je

$$W^* = \{(z_1, z_2, \xi_1, \xi_2) \in W \times CP^1 \mid z_1\xi_2 - z_2\xi_1 = 0\}$$

podmnogostrukost od $W \times CP^1$. Projekcija $W \times CP^1 \to W$ indukuje preslikavanje $f^* : W^* \longrightarrow W$. Tada je $W^* \supseteq 0 \times CP^1 = S^*$, $f^* : S^* \longrightarrow p = (0,0)$ i $F^* : W^* - S^* \longrightarrow W - p$ je biholomorfno preslikavanje. Na kraju, slepljivanjem (videti [M-K71, str. 15]) odnosno zamenom W sa W^* dobijamo M^*. Preciznije, $M^* = (M - p) \cup W^*$ gde je svaka tačka $z^* \in W^* - S^*$ identifikovana sa $z = f^*(z^*)$. Površi M i M^* su biracionalno izomorfne.

Ako $\#$ označava povezanu sumu dva topološka prostora onda iz navedene konstrukcije sledi

$$M^* = M \# C\bar{P}^2$$

gde $C\bar{P}^2$ označava kompleksnu površ dobijenu iz CP^2 promenom orijentacije (videti [Bs81, Pog. 4]).

Za mnogostrukost M može se definisati proširivanje konačno mnogo tačaka pomoću uzastopnih proširivanja. Topologija dobijene mnogostrukosti ne zavisi od redosleda proširivanja tačaka.

Za skoro kompleksnu mnogostrukost (M, J) definiše se *torzija* N skoro kompleksne strukture J kao

$$N(X,Y) = 2\{[JX, JY] - [X,Y] - J[X, JY] - J[JX, Y]\},$$

za $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$. Kažemo da je skoro kompleksna struktura *integrabilna* ako joj je torzija $N \equiv 0$.

Teorema 1.9 (Newlander-Nirenberg) *Skoro kompleksna struktura J na M je generisana nekom kompleksnom strukturom ako i samo ako je skoro kompleksna struktura J integrabilna.* □

Neka je (M, g, J) Kähler-ova mnogostrukost, R Riemann-ov tenzor krivine na realnom tangentnom prostoru T_mM i J skoro kompleksna struktura na T_mM. Tada se za J-invarijantnu ravan π u T_mM definiše *holomorfna sekciona krivina* $K_m(\pi)$ sa

$$K_m(\pi) = g(R_{XJX}X, JX),$$

gde $X \in T_m M$ a vektori X i JX generišu π.

Ako je $K_m(\pi)$ konstantno za sve J-invarijantne ravni π iz $T_m M$ i za sve tačke $m \in M$ kažemo da je M *prostor konstantne holomorfne sekcione krivine*(ili *kompleksna prostorna forma*).

Teorema 1.10 ([K-N69]) *Neka je M Kähler-ova mnogostrukost kompleksne dimenzije $n \geq 2$. Ako holomorfna sekciona krivina $K_m(\pi)$, gde je π J-invarijantna ravan iz $T_m M$, zavisi samo od tačke m, onda je M prostor konstantne holomorfne sekcione krivine.*

Neka je $T_{p\nu}$ vektorski prostor polilinearnih preslikavanja

$$A : \underbrace{M_m \otimes \cdots \otimes M_m}_{p} \otimes \underbrace{E_m \otimes \cdots \otimes E_m}_{\nu} \longrightarrow \mathbf{R} \, .$$

U $T_{p\nu}$ se prirodno uvodi skalarni proizvod

$$\langle \, , \, \rangle : T_{p\nu} \otimes T_{p\nu} \longrightarrow \mathbf{R}$$

sa

$$\langle A, C \rangle = \sum A(e_{I_1}, \ldots, e_{I_p}, f_{B_1}, \ldots, f_{B_\nu}) \cdot C(e_{I_1}, \ldots, e_{I_p}, f_{B_1}, \ldots, f_{B_\nu}) \quad (1.1)$$

gde je $A, C \in T_{p\nu}$, $e_1, \ldots, e_{2n}$ je ortogonalna baza za M_m i $f_1, \ldots, f_{2\lambda}$ je ortogonalna baza za E_m a sabiranje se vrši po svim permutacijama $(I_1, \ldots, I_{2n})$ i $(B_1, \ldots, B_{2\lambda})$ skupova $(1, \ldots, 2n)$ i $(1, \ldots, 2\lambda)$ respektivno.

1.2.6 Holomorfna vektorska raslojavanja

U ovom poglavlju se koriste oznake uvedene u [Kb87, Pog. IV]. Neka je (E, h) hermitsko vektorsko raslojavanje ranga λ nad hermitskom mnogostrukošću (M, g) kompleksne dimenzije n. Kao što je već navedeno u odeljku 1.2 (E, h) dopušta jedinstvenu hermitsku povezanost D. Njen tenzor krivine R je $(1,1)$-forma sa vrednostima u raslojavanju $End(E)$.

Neka $s = (s_1, \ldots, s_\lambda)$ označava polje lokalnih repera raslojavanja E. Tada se forma krivine $\Omega = [\Omega^i_j]$ određuje na sledeći način

$$R(s_j) = \sum \Omega^i_j s_i \quad , \quad \Omega^i_j = \sum R_j{}^i{}_{\alpha\bar{\beta}} dz^\alpha \wedge d\bar{z}^\beta \quad (1.2)$$

u terminima lokalnog koordinatnog sistema $(z^1, \dots, z^n)$ na M. Tada koristimo oznake

$$h_{i\bar{j}} = h(s_i, s_j) \quad \text{i} \quad g = \sum g_{\alpha\bar{\beta}} dz^\alpha d\bar{z}^\beta$$

gde je $g_{\alpha\bar{\beta}} = g(\partial/\partial z^\alpha, \partial/\partial\bar{z}^\beta)$ i pišemo, u skladu sa tradicijom, $dz^\alpha d\bar{z}^\beta$ umesto $dz^\alpha \otimes d\bar{z}^\beta$.

Tada se $R_{j\bar{i}\alpha\bar{\beta}} = h_{k\bar{i}} R_j{}^k{}_{\alpha\bar{\beta}}$, komponente tenzora krivine, mogu izraziti na sledeći način

$$R_{j\bar{i}\alpha\bar{\beta}} = -\frac{\partial^2 h_{i\bar{j}}}{\partial z^\alpha \partial\bar{z}^\beta} + \sum h^{a\bar{b}} \frac{\partial h_{a\bar{j}}}{\partial z^\alpha} \frac{\partial h_{i\bar{b}}}{\partial\bar{z}^\beta}. \tag{1.3}$$

Ricci-jev tenzor ρ i $\widehat{\ }$-Ricci-jev tenzor $\widehat{\rho}$ definišu se respektivno sa

$$\rho_j^i = \sum g^{\alpha\bar{\beta}} R_j{}^i{}_{\alpha\bar{\beta}} \quad , \quad \rho_{j\bar{k}} = \sum h_{i\bar{k}} \rho_j^i \tag{1.4}$$

i

$$\widehat{\rho}_{\alpha\bar{\beta}} = \sum h_i^j R_j{}^i{}_{\alpha\bar{\beta}} \quad , \quad \widehat{\rho}_\alpha^\beta = \sum \widehat{\rho}_{\alpha\bar{\gamma}} g^{\bar{\gamma}\beta}. \tag{1.5}$$

Neka su $s = (s_1, \dots, s_\lambda)$, $e = (e_1, \dots, e_n)$ i $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_n)$ lokalna polja unitarnih repera za (E, h), TM i T^*M redom. Tada se formulama

$$\begin{aligned} \Phi &= \sqrt{-1} \sum \theta^\alpha \wedge \bar{\theta}^\alpha \\ \|R\|^2 &= 4 \sum |R_j{}^i{}_{\alpha\bar{\beta}}|^2 \\ \|\rho\|^2 &= 2 \sum |\rho_j^i|^2 = 2 \sum |\rho_{j\bar{i}}|^2 \\ \|\widehat{\rho}\|^2 &= 2 \sum |\widehat{\rho}_{\alpha\bar{\beta}}|^2 = 2 \sum |\widehat{\rho}_\alpha^\beta|^2 \\ \tau &= 2 \sum \rho_i^i = 2 \sum \widehat{\rho}_{\alpha\bar{\alpha}} \end{aligned} \tag{1.6}$$

definisane redom fundamentalna forma mnogostrukosti (M, g), norme tenzora R, ρ, $\widehat{\rho}$ i skalarna krivina τ vektorskog raslojavanja (E, h). Skalarne krivine i $\widehat{\ }$-Ricci-jevi tenzori holomorfnih vektorskih raslojavanja (E', h') i (E'', h'') označavaju se redom sa τ', τ'', $\widehat{\rho}'$ i $\widehat{\rho}''$. Norme tenzora $\rho - \frac{\tau}{4} h$ i $\widehat{\rho}' - \widehat{\rho}''$ su zbog 1.1 određene sa

$$\|\rho - \frac{\tau}{4} h\|^2 = 2 \sum |\rho_{j\bar{j}} - \frac{\tau}{4} h_{j\bar{j}}|^2, \tag{1.7}$$

$$\|\widehat{\rho}' - \widehat{\rho}''\|^2 = 2 \sum |\widehat{\rho}'_{\alpha\bar{\alpha}} - \widehat{\rho}''_{\alpha\bar{\alpha}}|^2. \tag{1.8}$$

Navedimo sada neke osobine kompleksnih linearnih raslojavanja. Detalji se mogu naći u [W71,Kb56,Kt70].

Definicija 1.23 *Za dva kompleksna linearna raslojavanja* $\xi = (L_1, M)$ *i* $\eta = (L_2, M)$ *kažemo da su* ekvivalentna *ako postoji difeomorfizam* $\tau : L_1 \longrightarrow L_2$ *takav da je* τ *homomorfizam raslojavanja* ξ *i* η. *Skup klasa ekvivalentnih linearnih raslojavanja nad* M *označava se sa* $\mathcal{L} = \mathcal{L}(M)$.

Slično, linearna raslojavanja sa povezanostima (L_1, ∇^1) i (L_2, ∇^2) nad M su ekvivalentna ako postoji ekvivalencija raslojavanja $\tau : L_1 \longrightarrow L_2$ tako da je

$$\tau(\nabla^1_X s) = \nabla^2_X \tau(s),$$

za $X \in \mathcal{X}_{\mathbf{C}}(M)$ i $s \in \mathcal{S}(L_1)$. Skup klasa ekvivalencije linearnih raslojavanja sa povezanostima nad M koja dopuštaju paralelnu hermitsku metriku h označava se sa $\mathcal{L}_{\mathbf{C}}(M)$.

Neka je ω zatvorena, realna 2-forma na mnogostrukosti M. Neka $\mathcal{L}_{\mathbf{C}}(M, \omega)$ označava skup klasa ekvivalencija $[(L, \nabla)]$, gde je L kompleksno linearno raslojavanje nad M sa povezanošću ∇ koje dopušta ∇-paralelnu metriku h i čija je forma krivine jednaka datoj formi ω.

Kobayashi [Kb56] je dokazao teoremu o klasifikaciji kružnih raslojavanja. Odgovarajuća teorema o klasifikaciji kompleksnih linearnih raslojavanja je dobijena u [Kt70] i [W71, str. 90].

Teorema 1.11 *Neka je* ω *zatvorena, realna 2-forma na* M. *Tada je* $\mathcal{L}_{\mathbf{C}}(M, \omega)$ *neprazno ako i samo ako je* $[\omega] \in H^2(M, \mathbf{R})$ *celobrojna kohomološka klasa.* □

Poglavlje 2

Kompleksna vektorska raslojavanja nad skoro kompleksnim mnogostrukostima

2.1 Skoro kompleksne mnogostrukosti i formalno holomorfna povezanost

Neka je E kompleksno vektorsko raslojavanje nad skoro kompleksnom mnogostrukošću M realne dimenzije $2n$, pri čemu je svaki sloj raslojavanja E realne dimenzije 2λ. Označimo sa $C^{\infty}(M, \mathbb{C})$ prsten kompleksno-vrednosnih C^{∞} funkcija na M, a sa $\mathfrak{X}_{\mathbb{C}}(M)$ Lievu algebru C^{∞} kompleksnih vektorskih polja na M. Predstavićemo E kao realno vektorsko raslojavanje sa skoro kompleksnom strukturom J. Šta više koristićemo istu oznaku J za skoro kompleksnu strukturu tangentnog raslojavanja mnogostrukosti M. Neka h i g označavaju redom realne unutrašnje proizvode na E i na tangentnom raslojavanju mnogostrukosti M tako da je

$$h(JW, JX) = h(W, X), \quad W, X \in E_m$$

$$g(JU, JT) = g(U, T), \quad U, T \in \mathfrak{X}_{\mathbb{C}}(M)$$

gde je E_m sloj raslojavanja E nad tačkom m.

Formalno holomorfna povezanost je prvi put razmatrana u [G-B-N-V].

Definicija 2.1 *Povezanost D na kompleksnom vektorskom raslojavanju (E, g, J) je* formalno holomorfna *ako su ispunjeni sledeći uslovi*

(i) *D je kompleksna, tj.*

$$D_U(J) = 0, \quad za \quad U \in \mathfrak{X}_{\mathbf{C}}(M), \tag{2.1}$$

(ii) *D čuva poslojnu metriku, tj.*

$$Uh(s,t) = h(D_U s, t) + h(s, D_U t), \tag{2.2}$$

za $U \in \mathfrak{X}_{\mathbf{C}}(M)$ i $X, Y \in \mathcal{S}(E)$,

(iii) *za krivinu S povezanosti D važi*

$$S_{JUJT} = S_{UT}, \quad za \ U \in \mathfrak{X}_{\mathbf{C}}(M). \tag{2.3}$$

Dobro je poznato da su Riemann-ove povezanosti Kähler-ovih mnogostrukosti i kanonske povezanosti hermitskih mnogostrukosti formalno holomorfne povezanosti. Takođe, tangentna raslojavanja nekih klasa skoro kompleksnih mnogostrukosti, npr. klase $\mathcal{NK}$ i $\mathcal{AK}_2$ u Gray-Hervella-noj klasifikaciji ([G-He80]), dopuštaju formalno holomorfne povezanosti(videti [G-B-N-V]).

Za $u, t \in M_m \otimes \mathbf{C}$ i $w, x \in E_m$ pišemo

$$S_{utwx} = h(S_{UT}W, X)(m),$$

gde je $U, T \in \mathfrak{X}_{\mathbf{C}}(M)$ i W, X su lokalna sečenja za E tako da $W_m = w, X_m = x, T_m = t, U_m = u$. Za $u \in M_m \otimes \mathbf{C}$ i $x \in E_m$ koristimo oznake $Ju = u^*$, $Jx = x^*$. Tada jednačine 2.1 i 2.3 postaju

$$S_{utwx} = S_{u^*t^*wx}, \tag{2.4}$$
$$S_{utwx} = S_{utw^*x^*}, \tag{2.5}$$

za $u, t \in M_m \otimes \mathbf{C}$, $w, x \in E_m$. Pored toga važe uobičajena simetrijska svojstva tenzora krivine:

$$S_{utwx} = -S_{utxw} = -S_{tuwx}, \tag{2.6}$$

za $u,t \in M_m \otimes \mathbf{C}$, $w,x \in E_m$.

Neka je $e_1, Je_1, \cdots, e_p, Je_p = e_p^*, \cdots, e_n, Je_n$ realna ortonormirana baza za M_m i $\omega^1, \omega_*^1, \cdots, \omega^n, \omega_*^n$ odgovarajuće dualne baze za M_m^*. Koriste se i oznake $e_P = Je_p = e_p^*$ za $P = n+p$, $1 \le p \le n$ i slično $\omega^Q = \omega_*^q$ za $Q = n+q$, $1 \le q \le n$. Dalje, neka je $f_1, Jf_1 = f_{\lambda+1}, \cdots, f_\lambda, Jf_\lambda = f_{2\lambda}$ realna baza za E_m, pri čemu se koriste oznake $f_A = f_\alpha^* = Jf_\alpha$ za $A = \lambda + \alpha$. $1 \le \alpha \le \lambda$. Neka je

$$S_{PQAB} = h(S_{e_P e_Q} f_A, f_B) \quad \text{i} \quad S_{PQ^*AB^*} = h(S_{e_P Je_Q} f_A, Jf_B)\ .$$

Za indekse se u ovom radu pretpostavlja da su iz određenih intervala

$$\begin{array}{rl} \alpha,\beta,\gamma,\delta,\ldots = 1,2,\ldots,\lambda, & A,B,\Gamma,\ldots = 1,2,\ldots,2\lambda, \\ p,q,r,s,\ldots = 1,2,\ldots,n \quad \text{i} & P,Q,R,N,\ldots = 1,2,\ldots,2n \end{array}$$

ako se ne naglasi drugačije.

Definišimo sada Ricci-jeve krivine $\widehat{\rho}$ i ρ tenzora krivine S kao i njegovu skalarnu krivinu τ(videti [G-B-N-V]).

$$\widehat{\rho}(S)(x,y) = \sum S_{xy^* f_\alpha f_\alpha^*}, \tag{2.7}$$

za $x,y \in M_m \otimes \mathbf{C}$, $t,u \in E_m$,

$$\rho(S)(t,u) = \sum S_{pp^* tu^*}\ . \tag{2.8}$$

Pri tome koristimo oznake

$$\begin{array}{rl} \widehat{\rho}_{PQ} = \widehat{\rho}(S)(e_P, e_Q), & \widehat{\rho}_{P^*Q^*} = \widehat{\rho}(S)(Je_P, Je_Q), \\ \rho_{AB} = \rho(S)(f_A, f_B) \quad \text{i} & \rho_{A^*B^*} = \rho(S)(Jf_A, Jf_B)\ . \end{array}$$

Kako je D formalno holomorfna povezanost uslovi 2.4 i 2.6 impliciraju

$$\widehat{\rho}(Jx, Jy) = \widehat{\rho}(x,y) \quad \text{i} \quad \widehat{\rho}(x,y) = \widehat{\rho}(y,x), \tag{2.9}$$

za $x,y \in M_m \otimes \mathbf{C}$, a kompleksnost povezanosti D, formula 2.5 i formula 2.6 impliciraju

$$\rho(Jt, Ju) = \rho(t,u) \text{ i } \rho(t,u) = \rho(u,t) \tag{2.10}$$

za $t,u \in E_m$.

Neka je V proizvoljni vektorski prostor i

$$T^{2,0}V = \{B|B : V \times V \longrightarrow \mathbf{R},\ B \text{ je bilinearno preslikavanje}\}.$$

Tada proizvoljni endomorfizam K prostora V indukuje endomorfizam $a : T^{2,0}V \longrightarrow T^{2,0}V$ definisan sa

$$a(B)(x,y) = B_a(x,y) = B(Kx,y)$$

za $B \in T^{2,0}V$ i $x,y \in V$. Za nas će biti kasnije interesantna preslikavanja h_a i $\widehat{\rho}_a$, pri čemu se za endomorfizam K uzimaju odgovarajuće skoro kompleksne strukture. Na osnovu svojstava skalarnog proizvoda h vidi se da je h_a antisimetrično preslikavanje. Isto važi i za $\widehat{\rho}_a$ zbog jednakosti 2.9.

Norme tenzora S, $\widehat{\rho}$ i ρ definišu se sa

$$\begin{aligned} \|S\|^2 &= \langle S,S\rangle = \sum S^2_{PQAB} \\ \|\widehat{\rho}\|^2 &= \langle \widehat{\rho},\widehat{\rho}\rangle = \sum \widehat{\rho}^2_{PQ} \\ \|\rho\|^2 &= \langle \rho,\rho\rangle = \sum \rho^2_{AB} \end{aligned} \tag{2.11}$$

i one su kvadratne invarijante.

Dobro je poznato(videti [M-K71]) da su Whitney-jeva suma, tenzorski proizvod i $\wedge$-proizvod holomorfnih vektorskih raslojavanja holomorfna raslojavanja. U [G-B-N-V] je pokazana sledeća lema u kojoj se kaže da važi odgovarajuće tvrđenje za raslojavanja sa formalno holomorfnom povezanošću.

Lema 2.1 ([G-B-N-V]) *Neka su E_1 i E_2 kompleksna vektorska raslojavanja nad skoro kompleksnom mnogostrukošću M i pretpostavimo da su D_1 i D_2 formalno holomorfne povezanosti na E_1 i E_2 respektivno. Tada su povezanosti $D_1 \oplus D_2$ na $E_1 \oplus E_2$, $D_1 \otimes D_2$ na $E_1 \otimes E_2$ i $D_1 \wedge D_2$ na $E_1 \wedge E_2$ formalno holomorfne. Odgovarajući tenzori krivine $S_1 \oplus S_2$, $S_1 \otimes S_2$ i $S_1 \wedge S_2$ zadovoljavaju jednakosti*

$$\begin{aligned} (S_1 \oplus S_2)_{XY}(T_1 \oplus T_2) &= S_{1XY}(T_1) \oplus S_{2XY}(T_2), \\ (S_1 \otimes S_2)_{XY}(T_1 \otimes T_2) &= S_{1XY}(T_1) \otimes T_2 \oplus T_1 \otimes S_{2XY}(T_2), \\ (S_1 \wedge S_2)_{XY}(T_1 \wedge T_2) &= S_{1XY}(T_1) \wedge T_2 \oplus T_1 \wedge S_{2XY}(T_2), \end{aligned} \tag{2.12}$$

gde su S_1 i S_2 tenzori krivine raslojavanja E_1 i E_2 respektivno, $X,Y \in \mathfrak{X}_{\mathbf{C}}(M)$, $T_1 \in S(E_1)$, $T_2 \in S(E_2)$. □

2.2 Chern-ove klase i formalno holomorfna povezanost

U ovom odeljku izvešćemo formule za prve dve Chern-ove forme i neke uopštene Chern-ove brojeve kompleksnog vektorskog raslojavanja koje dopušta formalno holomorfnu koneksiju D.

Definišimo realne 2-forme Ω_{AB} na M sa

$$\Omega_{AB} = \sum S_{PQAB}\omega^P \wedge \omega^Q.$$

Uočimo sada lokalnu unitarnu bazu $s_1, \cdots, s_\lambda$ za E definisanu sa

$$s_\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}(f_\alpha - \sqrt{-1}Jf_\alpha)\ , 1 \leq \alpha \leq \lambda.$$

Tada, koristeći elementarne simetrije tenzora krivine i svojstva 2.1 i 2.2 imamo

$$\begin{aligned} S_{wxs_\alpha s_\beta} &= h^{\mathbf{C}}(S_{wx}s_\alpha, s_\beta) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}h^{\mathbf{C}}(S_{wx}(f_\alpha - \sqrt{-1}f_\alpha^*), f_\beta - \sqrt{-1}f_\beta^*) \\ &= h^{\mathbf{C}}(S_{wx}f_\alpha, f_\beta) + \sqrt{-1}h^{\mathbf{C}}(S_{wx}f_\alpha, f_\beta^*), \end{aligned}$$

gde je $h^{\mathbf{C}}$ hermitski skalarni proizvod indukovan sa h, $w, x \in M_m \otimes \mathbf{C}$ i $f_\alpha, f_\beta \in E_m$. Odavde dobijamo da su forme krivine u odnosu na lokalnu unitarnu bazu određene sa

$$\Theta_{\alpha\beta} = \Omega_{\alpha\beta} - \sqrt{-1}\Omega_{\alpha\beta^*}\ , 1 \leq \alpha, \beta \leq \lambda.$$

Na osnovu 1.2 imamo

$$\gamma_1 = \frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\sum \Theta_{\alpha\alpha} = \frac{1}{2\pi}\sum \Omega_{\alpha\alpha^*} \tag{2.13}$$

i

$$\begin{aligned} \gamma_2 &= \frac{-1}{4\pi^2}\sum_{1\leq\alpha<\beta\leq\lambda}(\Theta_{\alpha\alpha}\wedge\Theta_{\beta\beta} - \Theta_{\alpha\beta}\wedge\Theta_{\beta\alpha}) \\ &= \frac{1}{4\pi^2}\sum_{1\leq\alpha<\beta\leq\lambda}(\Omega_{\alpha\alpha^*}\wedge\Omega_{\beta\beta^*} - \Omega_{\alpha\beta}^2 - \Omega_{\alpha\beta^*}^2). \end{aligned} \tag{2.14}$$

Odavde je

$$\gamma_1 = \frac{1}{2\pi}\widehat{\rho}_{PQ}\omega^P \wedge \omega^Q \qquad \text{i} \qquad \gamma_1(T,U) = \frac{1}{2\pi}\widehat{\rho}_a(T,U), \tag{2.15}$$

za $T, U \in \mathfrak{X}_{\mathbb{C}}(M)$.

Fundamentalna 2-forma skoro kompleksne mnogostrukosti (M, g, J) definiše se sa $\Phi(T,U) = g(JT, U)$ za $T, U \in \mathfrak{X}_{\mathbb{C}}(M)$, odakle za uvedenu unitarnu lokalnu bazu tangentnog raslojavanja imamo $\Phi = \sum \omega^P \wedge \omega_*^P$.

U narednoj lemi dobijaju se važne i prirodne veze između Chern-ovih formi γ_1, γ_2 i fundamentalne forme Φ s jedne strane i kvadratnih invarijanti krivine S i zapreminskog elementa s druge strane.

Lema 2.2 *Neka je (E, h) kompleksno vektorsko raslojavanje nad skoro kompleksnom mnogostrukošću (M, g) i neka je D formalno holomorfna koneksija na E. Tada za prvu i drugu Chern-ovu formu važe sledeće formule*

(i) $\gamma_1 \wedge \Phi^{n-1} = \frac{\tau}{2n\pi}\Phi^n$,

(ii) $\gamma_1^2 \wedge \Phi^{n-2} = \frac{1}{4n(n-1)\pi^2}(\tau^2 - 2\|\widehat{\rho}\|^2)\Phi^n$,

(iii) $\gamma_2 \wedge \Phi^{n-2} = \frac{1}{8n(n-1)\pi^2}(\tau^2 - 2\|\widehat{\rho}\|^2 - 2\|\rho\|^2 + \|S\|^2)\Phi^n$.

Dokaz: (i) Na osnovu 2.13

$$\begin{aligned}
2\pi\gamma_1 \wedge \Phi^{n-1} &= \sum \Omega_{\alpha\alpha^*} \wedge \Phi^{n-1} = \sum S_{PQ\alpha\alpha^*}\omega^P \wedge \omega_*^Q \wedge \Phi^{n-1} \\
&= -(n-1)!(\sum \widehat{\rho}_{PQ^*}\omega^P \wedge \omega^Q) \wedge \left(\sum_{p=1}^{n} \bigwedge_{i=1,\ i\neq p}^{n} (\omega^i \wedge \omega_*^i)\right) \\
&= (n-1)!(\widehat{\rho}_{pp} + \widehat{\rho}_{p^*p^*})\left(\bigwedge_{i=1}^{n}\omega^i \wedge \omega_*^i\right) .
\end{aligned}$$

Osobina 2.9 sada daje

$$\gamma_1 \wedge \Phi^{n-1} = \frac{1}{n\pi}\left(\sum \widehat{\rho}_{pp}\right)\Phi^n = \frac{\tau}{2n\pi}\Phi^n .$$

(ii) U vezi sa formulom (ii) imamo

$$
\begin{aligned}
4\pi^2\gamma_1^2 \wedge \Phi^{n-2} &= \left(\sum \widehat{\rho}_{PQ}\widehat{\rho}_{RS}\omega^P \wedge \omega_*^Q \wedge \omega^R \wedge \omega_*^S\right) \wedge \Phi^{n-2} \\
&= (n-2)! \left(\sum \widehat{\rho}_{PQ}\widehat{\rho}_{RS}\omega^P \wedge \omega_*^Q \wedge \omega^R \wedge \omega_*^S\right) \wedge \left(\sum_{1 \le p < q \le n} \left(\bigwedge_{i=1,\ i \ne p,q}^{n} \omega^i \wedge \omega_*^i\right)\right) \\
&= \frac{1}{n(n-1)} \left(\sum_{p,q=1}^{n} A_{pq}\right) \Phi^n ,
\end{aligned}
$$

gde je

$$
\begin{aligned}
A_{pq} &= \widehat{\rho}_{pp}\widehat{\rho}_{qq} + \widehat{\rho}_{p^*p^*}\widehat{\rho}_{qq} + \widehat{\rho}_{pp}\widehat{\rho}_{q^*q^*} + \widehat{\rho}_{p^*p^*}\widehat{\rho}_{q^*q^*} \\
&- \widehat{\rho}_{pq}\widehat{\rho}_{qp} - \widehat{\rho}_{p^*q}\widehat{\rho}_{qp^*} - \widehat{\rho}_{pq^*}\widehat{\rho}_{q^*p} - \widehat{\rho}_{p^*q^*}\widehat{\rho}_{q^*p^*} \\
&- \widehat{\rho}_{qp}\widehat{\rho}_{pq} - \widehat{\rho}_{q^*p}\widehat{\rho}_{pq^*} - \widehat{\rho}_{qp^*}\widehat{\rho}_{p^*q} - \widehat{\rho}_{q^*p^*}\widehat{\rho}_{p^*q^*} \, .
\end{aligned}
$$

Kako je D formalno holomorfna koneksija, to zbog 2.9 i 2.12 važi $\|\widehat{\rho}\|^2 = 2\sum_{p,q=1}^{n}(\widehat{\rho}_{pq}^2 + \widehat{\rho}_{pq^*}^2)$ i zatim je

$$
\sum_{p,q=1}^{n} A_{pq} = \sum_{p,q=1}^{n} \left(\widehat{\rho}_{pp}\widehat{\rho}_{qq} - \widehat{\rho}_{pq}^2 - \widehat{\rho}_{pq^*}^2\right) = \tau^2 - 2\|\widehat{\rho}\|^2 \, .
$$

čime je tvrđenje (ii) pokazano.

(iii) Ako pođemo od jednakosti 2.14 dobijamo

$$
\gamma_2 = \frac{1}{8\pi^2}\Gamma_{PQRN}\omega^P \wedge \omega^Q \wedge \omega^R \wedge \omega^N ,
$$

gde je $1 \le P,\ Q,\ R,\ N \le 2n$ i

$$
\Gamma_{PQRN} = \sum \left(S_{PQ\alpha\alpha^*}S_{RN\beta\beta^*} - S_{PQ\alpha\beta}S_{RN\alpha\beta} - S_{PQ\alpha\beta^*}S_{RN\alpha\beta^*}\right) .
$$

Detaljnije

$$
\begin{aligned}
\gamma_2 = \frac{1}{4\pi^2} \sum_{1 \le p < q \le n} &(\Gamma_{pp^*qq^*} - \Gamma_{pp^*q^*q} + \Gamma_{p^*pq^*q} - \Gamma_{p^*pqq^*} \\
&- \Gamma_{p^*q^*pq} + \Gamma_{p^*q^*qp} - \Gamma_{q^*p^*qp} + \Gamma_{q^*p^*pq} \\
&- \Gamma_{pq^*qp^*} + \Gamma_{pq^*p^*q} - \Gamma_{q^*pp^*q} + \Gamma_{q^*pqp^*}\ )\omega^p \wedge \omega_*^p \wedge \omega^q \wedge \omega_*^q \\
&+ T ,
\end{aligned}
$$

pri čemu je

$$T \wedge \Phi^{n-2} = 0 \ .$$

Sada se ponovo koristi uslov da je koneksija D formalno holomorfna i imajući u vidu i uslov 2.4 dobijamo

$$\Gamma_{PQRS} = -\Gamma_{QPRS} = -\Gamma_{PQSR} = \Gamma_{RSPQ},$$

i

$$\Gamma_{PQRS} = \Gamma_{P^*Q^*RS} = \Gamma_{PQR^*S^*} \ .$$

Odatle je

$$\gamma_2 = \frac{1}{2\pi^2}\left(\sum B_{pq}\omega^p \wedge \omega^p_* \wedge \omega^q \wedge \omega^q_*\right) + T,$$

gde je

$$B_{pq} = \Gamma_{pp^*qq^*} - \Gamma_{pq^*qp^*} - \Gamma_{pqp^*q^*} \ .$$

Iz dobijenih formula proizilazi

$$\gamma_2 \wedge \Phi^{n-2} = \frac{1}{2n(n-1)\pi^2}\left(\sum B_{pq}\right)\Phi^n$$

i

$$\begin{aligned}
\sum_{1\le p<q\le n} B_{pq} &= \sum(\Gamma_{pp^*qq^*} - \Gamma_{pq^*qp^*} - \Gamma_{pqp^*q^*}) \\
&= \sum(\widehat{\rho}_{pp}\widehat{\rho}_{qq} - S_{pp^*\alpha\beta}S_{qq^*\alpha\beta} - S_{pp^*\alpha\beta^*}S_{qq^*\alpha\beta^*} \\
&\quad + \widehat{\rho}_{pq^*}\widehat{\rho}_{p^*q} + S_{pq\alpha\beta}S_{pq^*\alpha\beta} + S_{pq\alpha\beta^*}S_{p^*q^*\alpha\beta^*} \\
&\quad - \widehat{\rho}_{pq}\widehat{\rho}_{p^*q^*} - S_{pq^*\alpha\beta}S_{p^*q\alpha\beta} - S_{pq^*\alpha\beta^*}S_{p^*q\alpha\beta^*}) \\
&= \frac{1}{4}\tau^2 - \widehat{\rho}_{pq^*}\widehat{\rho}_{q^*p} - \widehat{\rho}_{pq}\widehat{\rho}_{qp} - \rho^2_{\alpha\beta^*} - \rho^2_{\alpha\beta} \\
&\quad + \sum\left(S^2_{pq\alpha\beta} + S^2_{pq\alpha\beta^*} + S^2_{pq^*\alpha\beta} + S^2_{pq^*\alpha\beta^*}\right).
\end{aligned}$$

Na osnovu 2.4, 2.5, 2.6 i 2.12

$$\|S\|^2 = 4\sum\left(S^2_{pq\alpha\beta} + S^2_{pq\alpha\beta^*} + S^2_{pq^*\alpha\beta} + S^2_{pq^*\alpha\beta^*}\right),$$

$$\|\rho\|^2 = 2\sum\left(\rho^2_{\alpha\beta} + \rho^2_{\alpha\beta^*}\right),$$

odakle sledi

$$\sum_{1\le p<q\le n} B_{pq} = \frac{1}{4}\tau^2 - \frac{1}{2}\|\widehat{\rho}\|^2 - \frac{1}{2}\|\rho\|^2 + \frac{1}{4}\|S\|^2,$$

čime je dokaz leme završen. □

2.3 Einstein-ova vektorska raslojavanja

Definicija 2.2 *Povezanost D na kompleksnom raslojavanju (E, h) nad skoro kompleksnom mnogostrukošću (M, g) zadovoljava* slab Einsten-ov uslov sa faktorom ϕ *ako je endomorfizam ϱ proporcionalan identičnom endomorfizmu I, tj. ako važi*

$$\rho(X,Y) = \phi \cdot h(X, JY), \quad za \ X, Y \in \mathcal{S}_{\mathbb{C}}(E),$$

gde je ρ Ricci-jev tenzor povezanosti D, a ϕ je realna funkcija na M. Ako je ϕ konstanta na M onda kažemo da D zadovoljava Einsten-ov uslov.

Ovaj koncept uveo je Kobayashi (videti [Kb80,Kb87]) 1980. godine za slučaj holomorfnih vektorskih raslojavanja. Tako, na primer, za tangentno raslojavanje Kähler-ove mnogostrukosti i povezanost Levi-Civita slabi Einstein-ov uslov se svodi na uobičajeni Einstein-ov uslov. Dodatni primeri biće dati kasnije.

U narednoj lemi dobija se karakterizacija raslojavanja koja zadovoljavaju slab Einsten-ov uslov u terminima kvadratnih invarijanti. Dobija se i slična karakterizacija projektivno ravne koneksije.

Lema 2.3 *Neka je (E, h, M, g) kompleksno vektorsko raslojavanje ranga λ, (M, g) $2n$-dimenziona skoro kompleksna mnogostrukost i S tenzor krivine formalno holomorfne koneksije D. Tada je*

(i) $\|\rho\|^2 - \frac{1}{2\lambda}\tau^2 \geq 0,$

(ii) $\|S\|^2 - \frac{2}{\lambda}\|\widehat{\rho}\|^2 \geq 0.$

Jednakost važi u (i) ako i samo ako (E, h, D, M, g) zadovoljava slab Einstein-ov uslov. Jednakost važi u (ii) ako i samo ako je (E, h, D, M, g) projektivno ravno vektorsko raslojavanje.

Dokaz: Pođimo od tenzorskog polja $\rho_0 = \rho - (\tau/2\lambda)h$. Tada je

$$\|\rho_0\|^2 = \langle \rho - \frac{\tau}{2\lambda}h, \rho - \frac{\tau}{2\lambda}h \rangle = \|\rho\|^2 - \frac{\tau^2}{2\lambda} \geq 0 \, .$$

pa jednakost važi ako i samo ako je $\rho = (\tau/2\lambda)h$ na M, a ovo je slab Einstein-ov uslov, pa je prva nejednakost pokazana.

Da bismo dokazali drugu nejednakost posmatrajmo tenzorsko polje $\widehat{P} = S - (1/\lambda)\widehat{\rho}_a \otimes h_a$. Dalje imamo

$$\|\widehat{P}\|^2 = \langle S - \frac{1}{\lambda}\widehat{\rho}_a \otimes h_a, S - \frac{1}{\lambda}\widehat{\rho}_a \otimes h_a\rangle = \|S\|^2 - \frac{2}{\lambda}\|\widehat{\rho}\|^2 \geq 0,$$

a $\widehat{P}$ se anulira ako i samo ako je $S = (1/\lambda)\widehat{\rho}_a \otimes h_a$, odnosno ako je (E, h, D, M, g) projektivno ravno raslojavanje(videti [Kb82b]). □

U [G-B-N-V, Lema 2.2] pokazano je da Whitney-jeva suma i tenzorski proizvod kompleksnih vektorskih raslojavanja sa formalno holomorfnim koneksijama su ista takva raslojavanja. Kobayashi u svojim radovima(videti [Kb82b, odeljak 5] i [Kb87]) razmatra kada su raslojavanja generisana holomorfnim Einstein-ovim raslojavanjima takođe holomorfna Einstein-ova raslojavanja. Sada ćemo navesti odgovarajuće činjenice za formalno holomorfne povezanosti.

Lema 2.4 *Neka su E_1 i E_2 kompleksna vektorska raslojavanja nad skoro kompleksnom mnogostrukošću M, i pretpostavimo da su D_1 i D_2 formalno holomorfne koneksije na E_1 i E_2 redom. Neka još (E_1, h_1) i (E_2, h_2) zadovoljavaju slab Einstein-ov uslov sa faktorima ϕ_1 i ϕ_2 redom. Tada*

(i) *tenzorski proizvod $(E_1 \otimes E_2, D_1 \otimes D_2, h_1 \otimes h_2)$ zadovoljava slab Einstein-ov uslov sa faktorom $\phi = \phi_1 + \phi_2$;*

(ii) *Whitney-jeva suma $(E_1 \oplus E_2, D_1 \oplus D_2, h_1 \oplus h_2)$ zadovoljava slab Einstein-ov uslov sa faktorom ϕ ako i samo ako je $\phi = \phi_1 = \phi_2$;*

(iii) *dualno raslojavanje (E_1^*, D_1^*, h_1^*) zadovoljava slab Einstein-ov uslov sa faktorom $\phi = -\phi_1$;*

(iv) *ako je N skoro kompleksna mnogostrukost i Φ glatko preslikavanje, $\Phi : N \longrightarrow M$, onda i indukovano raslojavanje $\Phi^{-1}E$ zadovoljava slab Einstein-ov uslov.*

Dokaz: (i) Na osnovu formula 2.8 i 2.12 može se napisati

$$\varrho(S_1 \otimes S_2)(T_1 \otimes T_2) = \sum_p (S_1 \otimes S_2)_{pp^*}(T_1 \otimes T_2)$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_p \{(S_{1pp}.T_1)\otimes T_2 + T_1 \otimes (S_{2pp}.T_2)\} \\
&= \varrho(T_1)\otimes T_2 + T_1\otimes \varrho(T_2),
\end{aligned}
$$

za $T_1 \in \mathcal{S}(E_1), T_2 \in \mathcal{S}(E_2)$ a ϱ_1 i ϱ_2 su Ricci-jevi endomorfizmi za S_1 i S_2 respektivno. Ako iskoristimo uslov da su E_1 i E_2 Einstein-ova raslojavanja, to je

$$
\varrho(S_1\otimes S_2)(T_1\otimes T_2) = (\phi_1+\phi_2)(T_1\otimes T_2),
$$

što pokazuje da tenzorski proizvod raslojavanja $E_1\otimes E_2$ zadovoljava slab Einstein-ov uslov sa faktorom $\phi_1+\phi_2$.

(ii) Ponovo zbog 2.8 i 2.12 dobijamo

$$
\begin{aligned}
\varrho(S_1\oplus S_2)(T_1\oplus T_2) &= \sum_p (S_1\oplus S_2)_{pp}.(T_1\oplus T_2) \\
&= \sum_p \{S_{1pp}.T_1 \oplus S_{2pp}.T_2\} \\
&= \varrho T_1 + \varrho T_2,
\end{aligned}
$$

a odavde se izvodi

$$
\varrho(S_1\oplus S_2)(T_1\oplus T_2) = \phi_1\cdot T_1 + \phi_2\cdot T_2, \tag{2.16}
$$

pa je jasno da iz $\phi_1=\phi_2$ na M imamo da je ispunjen odgovarajući slab Einstein-ov uslov

$$
\varrho(S_1\oplus S_2) = \phi\cdot I,
$$

za $\phi=\phi_1$.

S druge strane, ispunjenje ovog uslova povlači da je $\phi=\phi_1=\phi_2$. Time je tvrđenje (ii) dokazano.

(iii) Neka je $\theta \in \mathcal{S}(E_1^*)$ i $T_1\in\mathcal{S}(E_1)$ i neka je S_1^* tenzor krivine koji odgovara indukovanoj koneksiji D_1^*. U [E-L83] je za proizvoljna vektorska raslojavanja pokazano da

$$
(S^*_{1XY}\theta)(T_1) = -\theta(S_{1XY}T_1)\ . \tag{2.17}
$$

Na osnovu 2.8 i 2.17

$$
\begin{aligned}
(\varrho(S_1^*)\theta)(T_1) &= \sum_p \left(S^*_{1pp}.\theta\right) T_1 \\
&= -\sum_p \theta(S_{1pp}.T_1) = -\theta(\varrho_1 T_1) \\
&= -\theta(\phi_1 T_1) = -\phi_1\cdot\theta(T_1),
\end{aligned}
$$

odakle sledi $\varrho(S_1^*)\theta = -\phi_1\theta$ što dokazuje tvrđenje (iii). □

Ako je (E, h) holomorfno Einstein-ovo vektorsko raslojavanje nad kompaktnom kompleksnom mnogostrukošću (M, g), Kobayashi je pokazao (videti [Kb82b,Kb87]) da postoji konformna promena hermitske strukture h takva da je Einstein-ov uslov zadovoljen za neki konstantan faktor.

2.4 Uopštenje Lübke-ove nejednakosti

U odeljku 1.2.6 formulisana je Lübke-ova teorema (videti [L82]) koja se odnosi na holomorfna Einstein-ova vektorska raslojavanja. Sada ćemo videti da se ova teorema može uopštiti i na slučaj formalno holomorfne koneksije. Na taj način se dobija jedan potreban uslov da kompleksno vektorsko raslojavanje dopušta formalno holomorfnu Einstein-ovu koneksiju.

Teorema 2.5 *Neka je (M, g) kompaktna, $2n$-dimenziona, skoro Kähler-ova mnogostrukost. Ako kompleksno vektorsko raslojavanje E nad (M, g), ranga λ, dopušta metriku h i formalno holomorfnu koneksiju D takvu da (E, h, D, M, g) zadovoljava Einstein-ov uslov, tada važi nejednakost*

$$\int_M \left\{(\lambda - 1)c_1^2(E) - 2\lambda c_2(E)\right\} \wedge [\Phi]^{n-2} \leq 0, \tag{2.18}$$

gde je Φ fundamentalna 2-forma za (M, g). Jednakost važi ako i samo ako je (E, h) projektivno ravno.

Dokaz: Za zatvorenu formu α na M označimo sa $[\alpha]$ de Rham-ovu kohomološku klasu određenu sa α (videti 1.2). Chern-ove forme γ_1 i γ_2 definisane jednakostima 2.13 i 2.14 predstavljaju Chern-ove klase $c_1(E) = [\gamma_1]$ i $c_2(E) = [\gamma_2]$.

Kako je (M, g) skoro Kähler-ova mnogostrukost, njena fundamentalna 2-forma Φ je zatvorena. Tada važi

$$\begin{aligned}
&\int_M \left\{(\lambda - 1)c_1^2(E) - 2\lambda c_2(E)\right\} \wedge [\Phi]^{n-2} \\
&= \int_M \left\{(\lambda - 1)\gamma_1^2(E) - 2\lambda\gamma_2(E)\right\} \wedge \Phi^{n-2} .
\end{aligned}$$

Kada u ovu jednakost zamenimo izraze dobijene u Lemi 2.3 ona dobija oblik

$$\int_M \left\{(\lambda-1)c_1^2(E) - 2\lambda c_2(E)\right\} \wedge [\Phi]^{n-2}$$
$$= \frac{1}{8n(n-1)\pi^2}\int_M \{-\tau^2 + 2\|\widehat{\rho}\|^2 + 2\lambda\|\rho\|^2 - \lambda\|S\|^2\}\Phi^n . \quad (2.19)$$

Pretpostavka da raslojavanje (E,h) zadovoljava Einstein-ov uslov, 2.19 i Lema 2.3 impliciraju

$$\int_M \left\{(\lambda-1)c_1^2(E) - 2\lambda c_2(E)\right\} \wedge [\Phi]^{n-2} = \frac{-\lambda}{8n(n-1)\pi^2}\int_M \|\widehat{P}\|^2\Phi^n \leq 0,$$

gde je $\widehat{P}$ tenzorsko polje uvedeno u poglavlju 2.3. Jasno je da jednakost važi ako i samo ako je $\widehat{P} = 0$ skoro svuda na M, a odavde, zbog neprekidnosti, je $S = \frac{1}{\lambda}\widehat{\rho}_a \otimes h_a$ na M. Sada, na osnovu definicije sledi da je (E,h,D,M,g) projektivno ravno kompleksno vektorsko raslojavanje. □

Primedba: Za $n = 2$ nije neophodno da se pretpostavi da je (M,g) skoro Kähler-ova mnogostrukost. Tada teorema važi za proizvoljnu kompaktnu skoro hermitsku mnogostrukost.

Naredna posledica daje nam ograničenje za postojanje formalno holomorfne Einstein-ove povezanosti na projektivno ravnom raslojavanju.

Posledica 2.6 *Neka je (M,g) kompaktna, $2n$-dimenziona, skoro Kähler-ova mnogostrukost. Pretpostavimo da kompleksno vektorsko raslojavanje $\xi = (E,h)$ nad (M,g) dopušta formalno holomorfnu projektivno ravnu povezanost D. Tada je svako drugo raslojavanje $\xi_1 = (E,h_1,D_1,M,g_1)$ sa formalno holomorfnom Einstein-ovom povezanošću D_1 nad skoro Kähler-ovim baznim prostorom (M,g), takođe projektivno ravno.*

Dokaz: Kako su ispunjeni uslovi Teoreme 2.5, a D je projektivno ravna povezanost to važi jednakost u 2.18. Chern-ove klase su topološke invarijante. One ne zavise od izbora metrike i povezanosti ([K-N69,M-S74]). Razmotrimo prvo slučaj 4-dimenzione bazne mnogostrukosti (M,g). Tada je

$$2\lambda c_2(\xi) - (\lambda-1)c_1^2(\xi) = 2\lambda c_2(\xi_1) - (\lambda-1)c_1^2(\xi_1)$$

pa možemo primeniti Teoremu 2.5 na raslojavanje ξ_1. Odatle sledi da D_1 mora biti projektivno ravna povezanost.

Vratimo se sada na opšti slučaj. Tada kohomološka klasa

$$\left\{(\lambda-1)c_1^2(E)-2\lambda c_2(E)\right\}\wedge[\Phi]^{n-2}$$

nije topološka invarijanta raslojavanja za $n\geq 2$ jer se promenom metrike može promeniti klasa $[\Phi]$, određena fundamentalnom formom bazne mnogostrukosti. Analizirajmo zato detaljnije ovu kohomološku klasu. Kako je D projektivno ravna povezanost odgovarajući tenzor krivine ima jednostavan oblik

$$S=\frac{1}{\lambda}\widehat{\rho}_a\otimes h_a\,.$$

Dakle 2-forma $\Omega_{\alpha\alpha^*}$, razmatrana u odeljku 2.2., dobija oblik $\Omega_{\alpha\alpha^*}=\frac{1}{\lambda}\widehat{\rho}_a$. Lako se vidi da je druga Chern-ova forma

$$\gamma_2(\xi)=\frac{\lambda-1}{8\lambda\pi^2}\widehat{\rho}_a\wedge\widehat{\rho}_a,$$

i s obzirom da je $\gamma_1(\xi)=\frac{1}{2\pi}\widehat{\rho}_a$(formula 2.15), vidimo da za projektivno ravnu povezanost važi relacija

$$\gamma_2(\xi)=\frac{\lambda-1}{2\lambda}\gamma_1^2(\xi)\,.$$

Na nivou odgovarajućih de Rham-ovih kohomoloških klasa to je

$$c_2(\xi)=\frac{\lambda-1}{2\lambda}c_1^2(\xi)\,. \tag{2.20}$$

Zbog topološke invarijantnosti karakterističnih klasa sledi da ista veza važi i za Chern-ove klase raslojavanja ξ_1

$$c_2(\xi_1)=\frac{\lambda-1}{2\lambda}c_1^2(\xi_1)\,,$$

odnosno za odgovarajuće Chern-ove forme

$$(\lambda-1)\gamma_1^2(\xi_1)-2\lambda\gamma_2(\xi_1)=d\eta, \tag{2.21}$$

gde je η 1-forma na M. Ako iskoristimo formulu 2.21 možemo pisati

$$\int_M\left\{(\lambda-1)\gamma_1^2(E)-2\lambda\gamma_2(E)\right\}\wedge[\Phi_1]^{n-2}=\int_M d\eta\wedge[\Phi_1]^{n-2},$$

gde je Φ_1 fundamentalna 2-forma bazne mnogostrukosti (M, g_1). Po pretpostavci je (M, g_1, J_1) skoro Kähler-ova mnogostrukost, tj. Φ_1 je zatvorena forma, i zato je

$$\int_M d\eta \wedge [\Phi_1]^{n-2} = \int_M d(\eta \wedge [\Phi_1]^{n-2}) = 0 \ .$$

Poslednja jednakost sledi iz Stokes-ove formule. Na ovaj način smo pokazali da za raslojavanje ξ_1 važi jednakost u 2.18. To znači da možemo ponovo primeniti Teoremu 2.5, pa zaključujemo da je povezanost D_1 projektivno ravna, čime je tvrđenje dokazano. □

Posledica 2.7 *Neka je (M, g, J) $2n$-dimenziona, kompaktna, skoro Kähler-ova mnogostrukost. Neka je E kompleksno raslojavanje ranga λ nad M sa $c_1^2(E)[\Phi]^{n-2}[M] > 0$ koja dopušta formalno holomorfnu projektivno ravnu povezanost. Tada za prirodne brojeve p i q raslojavanje*

$$pE \oplus qE^* = \underbrace{E \oplus \cdots \oplus E}_{p} \oplus \underbrace{E^* \oplus \cdots \oplus E^*}_{q}$$

ne dopušta formalno holomorfnu Einstein-ovu povezanost.

Dokaz: Na osnovu svojstava karakterističnih klasa imamo

$$c_1(pE \oplus qE^*) = (p-q)c_1(E)$$

i

$$c_2(pE \oplus qE^*) = (p+q)c_2(E) + \frac{1}{2}((p-q)^2 - p - q)c_1^2(E) \ .$$

Zatim

$$\begin{aligned} & 2\lambda(p+q)c_2(pE \oplus qE^*) - (p\lambda + q\lambda - 1)c_1^2(pE \oplus qE^*) \\ = \ & 2\lambda(p+q)^2 c_2(E) + (p-q)^2 - \lambda(p+q)^2 c_1^2(E) \ . \end{aligned}$$

Raslojavanje E je projektivno ravno. Zato važi 2.20, odakle i sledi

$$2\lambda(p+q)c_2(pE \oplus qE^*) - (p\lambda + q\lambda - 1)c_1^2(pE \oplus qE^*) = -4pqc_1^2(E) < 0 \ .$$

Zbog dobijene nejednakosti, na osnovu Teoreme 2.5 sledi da formalno holomorfna Einstein-ova povezanost ne postoji na raslojavanju $pE \oplus qE^*$. □

2.5 Primeri

U ovom odeljku konstruisaćemo klasu netrivijalnih kompleksnih vektorskih raslojavanja koja dopuštaju formalno holomorfnu Einstein-ovu povezanost. Preciznije, konstruisaćemo neholomorfna kompleksna vektorska raslojavanja nad skoro Kähler-ovom mnogostrukošću tako da su odgovarajuća prva i druga Chern-ova klasa netrivijalne, tj. različite od 0. U [G-B-N-V] su dati primeri kompleksnih raslojavanja sa formalno holomorfnim povezanostima, ali oni ne zadovoljavaju preostale uslove.

Ključni korak je konstrukcija kompaktne skoro Kähler-ove mnogostrukosti i kompleksnog linearnog raslojavanja sa formalno holomorfnom povezanošću nad njim. Zato ćemo iskoristiti narednu lemu.

Lema 2.8 *Neka je Ω celobrojna simplektička forma na mnogostrukosti M. Tada postoji beskonačna familija skoro Kähler-ovih mnogostrukosti (M, g, J) kompatibilnih sa simplektičkom formom Ω. Za svaku takvu skoro Kähler-ovu strukturu postoji hermitsko linearno raslojavanje (E, h, J) nad M koje dopušta formalno holomorfnu povezanost ∇.*

Dokaz: Za datu 2-formu Ω, g i J mogu biti istovremeno generisani polarizacijom tako da je $\Omega(X, Y) = g(X, JY)$ za $X, Y \in \mathcal{X}(M)$ (videti [Vs87, Teorema 3.1.2]). Tada je (M, g, J) skoro Kähler-ova mnogostrukost sa fundamentalnom formom Ω. Označimo sa $\mathcal{A}$ skup svih skoro Kähler-ovih struktura na M koje imaju Ω kao svoju fundamentalnu 2-formu. Na osnovu predhodne teoreme $\mathcal{A}$ je neprazan skup. U [Bl88], Blair je pokazao da je $\mathcal{A}$ "veliki " skup, tj. $\mathcal{A}$ je beskonačno dimenzioni prostor.

Na osnovu poznate teoreme (videti npr. [Kb56, str.35] ili [Kt70, str.133]) sledi da je skup $\mathcal{L}_c(M, \Omega)$ neprazan. To znači da postoji hermitsko linearno raslojavanje (E, h, J) nad M sa povezanošću ∇ tako da je h paralelno u odnosu na ∇, a forma krivine je data forma Ω. Pokažimo sada da je ∇ kompleksna povezanost, odnosno da je skoro kompleksna struktura J paralelna. Kako su hermitski proizvod i skoro kompleksna struktura kompatibilni to je

$$\nabla_X h(Js, Jt) = \nabla_X h(s, t) \; .$$

Zbog paralelnosti metrike je

$$h(\nabla_X Js, Jt) + h(Js, \nabla_X Jt) = h(\nabla_X s, t) + h(s, \nabla_X t), \tag{2.22}$$

za $X \in \mathfrak{X}(M)$ i $s, t \in \mathcal{S}(E)$.

Zamenivši $t = s$ i $t = Js$ u 2.22 dobijaju se redom jednakosti

$$h(J\nabla_X Js + \nabla_X s, s) = 0,$$

$$h(J\nabla_X Js + \nabla_X s, Js) = 0,$$

što znači da je $J\nabla_X Js + \nabla_X s$ normalno na s i Js. Dakle, $J\nabla_X Js + \nabla_X s = 0$, odnosno $\nabla_X Js = J\nabla_X s$ za proizvoljno $s \in \mathcal{S}(E)$.

Time je dokazano da je ∇ kompleksna povezanost, odnosno da je ispunjen uslov 2.1. Za tenzor krivine S linearnog raslojavanja E važi $S_{XY} = \Omega(X, Y)$. Zatim, iz kompatibilnosti h i J sledi

$$S_{JXJY} = \Omega(JX, JY) = -g(JX, Y) = g(X, JY) = \Omega(X, Y) = S_{XY},$$

što pokazuje da je uslov 2.3 ispunjen. Uslov 2.2 se jednostavno proverava. Znači povezanost ∇ je formalno holomorfna i time je tvrđenje leme dokazano. □

Primedba: Svako linearno hermitsko raslojavanje trivijalno zadovoljava i slab Einstein-ov uslov.

S obzirom na dokazanu lemu, sada će biti konstruisani primeri kompaktnih mnogostrukosti M_n koje dopuštaju topološki netrivijalnu, celobrojnu simplektičku formu Ω. Heizenberg-ova grupa i njena uopštenja, kružna raslojavanja nad kružnim raslojavanjima nad torusom T^2 su u poslednje vreme intenzivno izučavana (videti npr. [A84,D-G-M-S, F-G-G,Th76]). U narednom primeru ćemo razmatrati familiju 2-formi koje se prirodno javljaju na ovim mnogostrukostima i pokazati da su one celobrojne. Konstrukcijom simplektičke forme Ω kompletira se konstrukcija tražene familije primera.

Primer 2.1 *Neka je $M_n = M_n^3 \times S^1$, gde je n ceo broj i M_n^3 je kružno raslojavanje nad torusom T^2. Mnogostrukost M_n^3 eksplicitno se opisuje na sledeći način. Za $n = 0$, M_n^3 je 3-torus; za $n \neq 0$, to je kompaktni količnik $\Gamma_n \backslash H_n$, gde je H_n Lieva grupa matrica oblika*

$$\begin{bmatrix} 1 & a & -c/n \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

a Γ_n *je podgrupa od* H_n *sastavljena od elemenata za koje su* a, b *i* c *celi brojevi. Za* $n = -1$, H_{-1} *je standardna Heizenberg-ova grupa.*

U [F-G-G] *je primenjen Gysin-ov niz da bi se izračunale celobrojne kohomološke klase mnogostrukosti* $M_n^3 = \Gamma_n \backslash H_n$ *za* $n \neq 0$. *One su određene sa*

$$H^1(M_n, \mathbf{Z}) = \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z} \qquad i \qquad H^2(M_n, \mathbf{Z}) = \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}_{|n|} \ .$$

Na osnovu dualnosti određuju se i homološke klase

$$H_1(M_n, \mathbf{Z}) = \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}_{|n|} \qquad i \qquad H_2(M_n, \mathbf{Z}) = \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z} \ .$$

U narednom koraku razmatraćemo diferencijalne forme na M_n^3 *koje će biti upotrebljene za konstrukciju simplektičkih celobrojnih 2-formi. Neka* x, y, z *označavaju koordinatne funkcije na* M_n^3 *definisane sa*

$$x(A) = a \quad , \quad y(A) = b \quad , \quad z(A) = -c/n \ ,$$

za $A \in M_n^3$. *Tada za* L_B, *levu translaciju elementom* $B \in H_n$,

$$B = \begin{bmatrix} 1 & a & -c/n \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} ,$$

važi

$$L_B^*(dx) = dx,\ L_B^*(dy) = dy,\ L_B^*(dz) = dz + ady$$

i

$$L_B^*(-ndz + nxdy) = -ndz + nxdy \ ,$$

gde je

$$L_B^* : \Lambda^1(M_n^3) \longrightarrow \Lambda^1(M_n^3)$$

indukovano preslikavanje.

Forme dx, dy, $-ndz+nxdy$ *su nezavisne, šta više predhodne relacije pokazuju da su one invarijantne u odnosu na dejstvo grupe* H_n. *Samim tim su invarijantne u odnosu na dejstvo grupe* Γ_n, *podgrupe od* H_n. *Označimo sa* π *kanonsku projekciju*

$$\pi : H_n \longrightarrow \Gamma_n \backslash H_n \ .$$

Tada postoje 1-forme α, β, γ *na* M_n *takve da važi*

$$\pi^*(\alpha) = dx \ , \quad \pi^*(\beta) = dy \qquad i \quad \pi^*(\gamma) = -ndz + nxdy \ .$$

Dobijene forme α, β, γ *su linearno nezavisne i globalno definisane na* M. *Primetimo da važi*

$$d\alpha = d\beta = 0 \qquad i \qquad d\gamma = -n\alpha \wedge \beta \ ,$$

odnosno grupe kohomologija H^1 *i* H^2 *su određene sa*

$$\begin{aligned} H^1(\Gamma_n \backslash H_n, \mathbf{R}) &= \{[\alpha], [\beta]\}, \\ H^2(\Gamma_n \backslash H_n, \mathbf{R}) &= \{[\alpha \wedge \gamma], [\beta \wedge \gamma]\} \ . \end{aligned}$$

Za završetak konstrukcije potrebna nam je sledeća lema.

Lema 2.9 *De Rham-ove kohomološke klase* $[\alpha]$, $[\beta]$, $[\alpha \wedge \gamma]$, $[\beta \wedge \gamma]$ *su celobrojne,*

$$[\alpha], [\beta] \in H^1(\Gamma_n \backslash H_n, \mathbf{Z}) \quad i \quad [\alpha \wedge \gamma], [\beta \wedge \gamma] \in H^2(\Gamma_n \backslash H_n, \mathbf{Z}) \ .$$

Dokaz: Označimo sa I jedinični interval $[0,1]$. Definišimo preslikavanja $c_1, c_2, c_3 : I \longrightarrow H_n$ na sledeći način

$$c_1(t) = \begin{bmatrix} 1 & t & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad , \quad c_2(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -t/n \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

i

$$c_3(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \ .$$

Tada su $\pi \circ c_i : S^1 \longrightarrow \Gamma_n \backslash H_n$, $1 \leq i \leq 3$, jednodimenzioni cikli na $\Gamma_n \backslash H_n$. Njima određene kohomološke klase $[\pi \circ c_i]$, $1 \leq i \leq 3$, generišu grupu $H_1(\Gamma_n \backslash H_n, \mathbf{Z}) = \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}_{|n|}$. Pri tome $[\pi \circ c_3]$ generiše torzioni deo, jer važi

$$[\pi \circ c_3] = \partial[\pi \circ B_3],$$

za dvodimenzioni lanac $B_3 : I \times I \longrightarrow H_n$ definisan sa

$$B_3(u,v) = \begin{bmatrix} 1 & u & 0 \\ 0 & 1 & v \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} .$$

Da bi se proverilo da su $[\alpha]$ i $[\beta]$ celobrojne kohomološke klase dovoljno je pokazati da važi

$$\int_{[\pi \circ c_i(S^1)]} \alpha \in \mathbf{Z} \qquad \text{i} \qquad \int_{[\pi \circ c_i(S^1)]} \beta \in \mathbf{Z}$$

za $i = 1,2,3$ (videti [W71,Wl73]). Navedeni uslovi se lako proveravaju jer važi

$$\int_{\pi \circ c_1} \alpha = \int_0^1 dt = 1 \ , \ \int_{\pi \circ c_i} \alpha = 0 \ , \ \text{za } i = 2,3,$$

odnosno

$$\int_{\pi \circ c_2} \beta = 1 \ , \ \int_{\pi \circ c_i} \beta = 0 \ , \ \text{za } i = 1,3.$$

Definišimo preslikavanja $B_1, B_2 : I \times I \longrightarrow H_n$ sa

$$B_1(u,v) = \begin{bmatrix} 1 & u & -v/n \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad B_2(u,v) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -v/n \\ 0 & 1 & u \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} .$$

Slično kao u predhodnom koraku $\pi \circ B_1$ i $\pi \circ B_2$ su cikli na $\Gamma_n \backslash H_n$, $\partial(\pi \circ B_1) = 0$ i $\partial(\pi \circ B_2) = 0$. Pri tome homološka grupa $H_2(\Gamma_n \backslash H_n)$ je generisana klasama $[\pi \circ B_1]$ i $[\pi \circ B_2]$. Dakle kohomološke klase $[\alpha \wedge \gamma]$ i $[\beta \wedge \gamma]$ su celobrojne ako i samo ako je

$$\int_{B_1'} \alpha \wedge \gamma \ , \ \int_{B_2'} \beta \wedge \gamma \in \mathbf{Z}$$

gde je $B_i' = \pi \circ B_i(I \times I)$, $i = 1,2$. Direktnim računanjem dobijamo

$$\int_{B_1'} \alpha \wedge \gamma = 1 \quad , \quad \int_{B_2'} \alpha \wedge \gamma = 0$$

i

$$\int_{B_1'} \beta \wedge \gamma = 0 \quad , \quad \int_{B_2'} \beta \wedge \gamma = 1 \ ,$$

tako da su potrebni uslovi ispunjeni. Time je tvrđenje leme dokazano. □

Razmotrimo ponovo 4-dimenzionu mnogostrukost $M_n = M_n^3 \times S^1$, S^1 je jedinična kružnica. Neka je $\eta \in H^1(S^1, \mathbf{R})$ celobrojna forma na S^1 koja generiše grupu $H^1(S^1, \mathbf{R}) = \mathbf{R}$. U ovom odeljku biće korištene iste oznake za diferencijalne forme na M_n^3 i S^1 i njima prirodno indukovane forme na $M_n^3 \times S^1$.

Mnogostrukost M_n dopušta mnogo simplektičkih formi. Na primer,

$$\Omega = (a\alpha + b\beta) \wedge \gamma + (e\alpha + f\beta) \wedge \eta$$

je zatvorena za proizvoljne konstante a, b, e, f. Forma Ω ima maksimalni rang ako je $af - be \neq 0$. Šta više, važi sledeće tvrđenje.

Lema 2.10 *Ako su a, b, e, f, celi brojevi, 2-forma Ω je celobrojna.*

Dokaz: U Lemi 2.9 je već pokazano da su klase $[\alpha \wedge \gamma]$ i $[\beta \wedge \gamma]$ celobrojne. S druge strane kohomološke klase $[\alpha]$, $[\beta]$ i $[\eta]$ su celobrojne. Iz Teoreme 1.5 sledi da su i klase $[\alpha \wedge \eta]$ i $[\beta \wedge \eta]$ celobrojne. Kako su izabrani celobrojni koeficijenti rezultat direktno sledi. □

U našem slučaju je prvi Betti-jev broj mnogostrukosti M_n jednak 3. To znači da M_n ne dopušta Kähler-ovu strukturu jer bi u tom slučaju prvi Betti-jev broj bio paran(videti Teoremu 1.8).

Primer 2.2 *Neka su n, a, b, e, f, celi brojevi takvi da je $n \neq 0$ i $af - be \neq 0$. Tada, zbog Leme 2.8, postoji skoro Kähler-ova struktura (M_n, g, J) na M_n sa Kähler-ovom formom Ω definisanom sa $\Omega(X, Y) = g(X, JY)$. Takođe, postoji hermitsko linearno raslojavanje (L, h, D) nad M_n, gde je D formalno holomorfna povezanost i Ω je njoj odgovarajuća forma krivine. Kako svako hermitsko linijsko raslojavanje zadovoljava slab Einstein-ov uslov, (L, h, D) je Einstein-ovo hermitsko vektorsko raslojavanje. Pored toga, prva Chern-ova klasa raslojavanja L je određena sa*

$$2\pi c_1(L) = [\Omega] ,$$

tako da linearno raslojavanje L ima netrivijalnu prvu Chern-ovu klasu.

Od linearnih raslojavanja sa formalno holomorfnom Einstein-ovom povezanošću mogu se generisati mnogi novi primeri formalno holomorfnih Einstein-ovih raslojavanja nad skoro kompleksnim mnogostrukostima koristeći Lemu 2.4. Ovakve konstrukcije uključuju kombinacije Whitney-jevih suma i tenzorskih proizvoda linearnih raslojavanja.

Primer 2.3 *Naredni primer hermitskog raslojavanja* (E, h, J, M_n, g, J) *koje zadovoljava Einstein-ov uslov pokazuje da u nejednakosti 2.18 može važiti stroga nejednakost. To znači da je E primer raslojavanja koje ne dopušta projektivno ravnu strukturu.*

Razmatraćemo M_n *za* $a = f = 1$ *i* $b = c = 0$. *Na mnogostrukosti* M_n *postoje četiri globalno definisane 1-forme* $\alpha, \beta, \gamma, \delta$. *Njima odgovaraju dualna vektorska polja* e_1, e_2, e_3, e_4, *respektivno. U tom slučaju je*

$$\Omega = \alpha \wedge \gamma + \beta \wedge \eta$$

simplektička forma na M_n. *Skoro kompleksna struktura J i metrika g mogu se eksplicitno opisati sa*

$$Je_1 = e_3\ ,\ Je_3 = -e_1\ ,\ Je_2 = e_4\ ,\ Je_4 = -e_2\ ,$$

i

$$g(X,Y) = 2\Omega(X,Y)\ ,\quad za\ \ X, Y \in \mathfrak{X}_{\mathbb{C}}(M)\ .$$

Direktno se može proveriti da je g pozitivno definitna metrika i da je skoro kompleksna struktura J kompatibilna sa metrikom g. Riemann-ova metrika g i skoro kompleksna struktura J proučavani su u [A84, F-G-G].

Neka je $\Omega_{pq} = 2(p\alpha \wedge \gamma + q\beta \wedge \eta)$ *za proizvoljne cele brojeve p i q. Forma* Ω_{pq} *je celobrojna i kompatibilna sa datom skoro kompleksnom strukturom J, tj.* $\Omega_{pq}(JX, JY) = \Omega_{pq}(X,Y)$ *za* $X, Y \in \mathfrak{X}_{\mathbb{C}}(M)$. *Za* $p \neq q$,

$$\Omega_1 = \Omega_{pq} \qquad i \qquad \Omega_2 = \Omega_{qp}$$

su dve celobrojne 2-forme. Dakle, na osnovu Leme 2.8 postoje kompleksna linearna raslojavanja $\xi_1 = (L_1, h_1, D_1)$ *i* $\xi_2 = (L_2, h_2, D_2)$ *nad* M_n *sa formalno holomorfnim povezanostima i sa formama krivine* Ω_1 *i* Ω_2 *respektivno. Njihove Chern-ove klase su određene sa*

$$c_1(\xi_1) = \frac{1}{2\pi}[\Omega_{pq}] \qquad i \qquad c_1(\xi_2) = \frac{1}{2\pi}[\Omega_{qp}],$$

i te kohomološke klase nisu nula za $(p, q) \neq (0, 0)$. *Zatim je* $\tau_1 = \tau_2 = p + q$, *gde su* τ_1 *i* τ_2 *skalarne krivine raslojavanja* ξ_1 *i* ξ_2. *Dakle ova raslojovanja zadovoljavaju Einstein-ov uslov sa istim faktorom. Na osnovu Leme 2.4 zaključujemo da Whitney-jeva suma* $\xi = \xi_1 \oplus \xi_2$ *dopušta formalno holomorfnu povezanost i zadovoljava Einstein-ov uslov. Šta više,*

$$c_1(\xi) = c_1(\xi_1) + c_1(\xi_2) \qquad i \qquad c_2(\xi) = c_1(\xi_1)c_1(\xi_2) \ .$$

To znači

$$4c_2(\xi) - c_1^2(\xi) = 8(p-q)^2\pi^2 \int_{M_n} \alpha \wedge \gamma \wedge \beta \wedge \eta = 4(p-q)^2\pi^2 \int_{M_n} \Omega^2 \ .$$

Kako je forma $\alpha \wedge \gamma \wedge \beta \wedge \eta$ *zapreminski element na* M_n *vidimo da važi*

$$\int_{M_n} \{4c_2(\xi) - c_1^2(\xi)\} > 0 \ .$$

Za proizvoljno λ, $\lambda = rang(\xi)$, primeri ove vrste mogu biti konstruisani koristeći Lemu 2.4.

Poglavlje 3

Skoro Einstein-ova holomorfna vektorska raslojavanja

3.1 Osnovna svojstva $\mathcal{E}_{k,\delta}$-raslojavanja

U glavi 3 pretpostavićemo da je (E, h) holomorfno raslojavanje ranga 2 i da je bazna mnogostrukost kompleksna površ. Pri tome ćemo koristiti oznake uvedene u 1.2.6. Označimo sa ϱ i $\widehat{\varrho}$ sečenja raslojavanja $End(E)$ i $End(TM)$ definisana sa

$$h(\varrho(s), t) = \rho(s, t) \quad \text{i} \quad g(\widehat{\varrho}(e), f) = \widehat{\rho}(e, f),$$

za $s, t \in E_p$ i $e, f \in T_pM$, $p \in M$. Svako holomorfno raslojavanje zadovoljava uslove 2.9 i 2.10 što znači da su endomorfizmi ϱ i $\widehat{\varrho}$ simetrični. Zato su sopstvene vrednosti ovih endomorfizama realne. Šta više, kako su Ricci-jev tenzor i $\widehat{\ }$-Ricci-jev tenzor kompatibilni sa skoro kompleksnom strukturom, zaključujemo da endomorfizmi ϱ i $\widehat{\varrho}$ imaju po dve dvostruke realne sopstvene vrednosti r_1, r_2 i $\widehat{r}_1, \widehat{r}_2$ respektivno. Dalje ćemo koristiti lokalno polje unitarnih repera $s = (s_1, s_2)$ određeno sopstvenim vektorima endomorfizma ϱ koji odgovaraju sopstvenim vrednostima r_1 i r_2. Takođe, lokalno polje unitarnih repera $e = (e_1, e_2)$ je određeno sopstvenim vektorima endomorfizma $\widehat{\varrho}$.

Definicija 3.1 *Neka je* $r = \max\{|r_1|, |r_2|\}$. *Tada, za* $0 \leq k \leq 1$, *kažemo da je Ricci-jeva krivina* ρ *raslojavanja* (E, h) k-uska *ako je*

$$krh \leq \rho \leq rh \quad \textit{ili} \quad -rh \leq \rho \leq -krh \tag{3.1}$$

na M.

Tada je, jasno, $r_1 r_2 \geq 0$ na M. Za $k = 1$, 3.1 predstavlja slab Einstein-ov uslov(Definicija 2.2).

Definicija 3.2 Gauss-ova krivina $\hat{r}$ *raslojavanja* (E, h) *definiše se sa*

$$\hat{r} = \det \hat{\varrho} = \hat{r}_1 \cdot \hat{r}_2 \,. \tag{3.2}$$

Gauss-ova krivina $\hat{r}$ *je* δ*-ograničena odozdo ako je*

$$\hat{r} \geq \delta r^2 \tag{3.3}$$

na M.

Definicija 3.3 *Klasa holomorfnih vektorskih raslojavanja koja zadovoljavaju uslov 3.1 i 3.3 označava se sa* $\mathcal{E}_{k,\delta}$.

Dokažimo sada ključne leme u ovom poglavlju.

Lema 3.1 *Neka je* (E, h) *holomorfno vektorsko raslojavanje ranga 2 nad hermitskom površi* (M, g) . *Tada važi sledeća nejednakost*

$$\|R\|^2 \geq \|\hat{\rho}\|^2 + \|\rho - \frac{\tau}{4}h\|^2 \,. \tag{3.4}$$

Dokaz: Na osnovu definicije norme tenzora krivine R, formula 2.12, dobijamo

$$\|R\|^2 \geq 4(|R_{1\bar{1}1\bar{1}}|^2 + |R_{2\bar{2}2\bar{2}}|^2 + |R_{2\bar{2}1\bar{1}}|^2 + |R_{1\bar{1}2\bar{2}}|^2), \tag{3.5}$$

a zatim formula

$$\|\hat{\rho}\|^2 = 2(|\hat{\rho}_{11}|^2 + |\hat{\rho}_{22}|^2) = 2(|R_{1\bar{1}1\bar{1}} + R_{1\bar{1}2\bar{2}}|^2 + |R_{2\bar{2}1\bar{1}} + R_{2\bar{2}2\bar{2}}|^2)$$

implicira identitet

$$\begin{aligned}
&4(|R_{1\bar{1}1\bar{1}}|^2 + |R_{2\bar{2}2\bar{2}}|^2 + |R_{2\bar{2}1\bar{1}}|^2 + |R_{1\bar{1}2\bar{2}}|^2) \\
&= \|\widehat{\rho}\|^2 + 2(|R_{1\bar{1}1\bar{1}} - R_{1\bar{1}2\bar{2}}|^2 + |R_{2\bar{2}1\bar{1}} - R_{2\bar{2}2\bar{2}}|^2) \ . \qquad (3.6)
\end{aligned}$$

Primetimo da važi nejednakost

$$2(|R_{1\bar{1}1\bar{1}} - R_{1\bar{1}2\bar{2}}|^2 + |R_{2\bar{2}1\bar{1}} - R_{2\bar{2}2\bar{2}}|^2) \geq |R_{1\bar{1}1\bar{1}} + R_{2\bar{2}1\bar{1}} - R_{1\bar{1}2\bar{2}} - R_{2\bar{2}2\bar{2}}|^2,$$

odnosno

$$2(|R_{1\bar{1}1\bar{1}} - R_{1\bar{1}2\bar{2}}|^2 + |R_{2\bar{2}1\bar{1}} - R_{2\bar{2}2\bar{2}}|^2) \geq |\rho_{11} - \rho_{22}|^2 \ . \qquad (3.7)$$

U nejednakosti 3.7 važi jednakost ako i samo ako je

$$R_{1\bar{1}1\bar{1}} - R_{1\bar{1}2\bar{2}} = R_{2\bar{2}1\bar{1}} - R_{2\bar{2}2\bar{2}} \ . \qquad (3.8)$$

Iz relacija 3.5, 3.6 i 3.7 sledi

$$\|R\|^2 \geq \|\widehat{\rho}\|^2 + |\rho_{11} - \rho_{22}|^2 \ . \qquad (3.9)$$

S druge strane direktno se proverava da važi

$$\|\rho - \frac{\tau}{4}h\|^2 = |\rho_{11} - \rho_{22}|^2 \ . \qquad (3.10)$$

Identitet 3.10 i nejednakost 3.9 dokazuje traženi rezultat. □

Kada (E,h) zadovoljava slab Einstein-ov uslov, tj. ako je Ricci-jeva krivina 1-uska, slučaj kada nastupa jednakost u 3.4 izučavan je u [Kb87]. U tom slučaju u 3.4 važi jednakost ako i samo ako je raslojavanje (E,h) projektivno ravno, tj. $R = \frac{1}{2}\widehat{\rho} \otimes h$. Tako se prirodno postavlja pitanje jednakosti u opštem slučaju.

Lema 3.2 *Neka je (E,h) holomorfno vektorsko raslojavanje ranga 2 nad hermitskom površi (M,g) čiji je Ricci-jev tenzor krivine ρ paralelan i $r_1 \neq r_2$ na M. Tada važi jednakost*

$$\|R\|^2 = \|\widehat{\rho}\|^2 + \|\rho - \frac{\tau}{4}h\|^2, \qquad (3.11)$$

ako i samo ako se E razlaže,

$$E = E' \oplus E'',$$

gde su (E', h') i (E'', h'') holomorfna ortogonalna linijska raslojavanja takva da je

$$\widehat{\rho}' - \widehat{\rho}'' = \frac{1}{4}(\tau' - \tau'')g \ . \tag{3.12}$$

Primedba: Ako je $r_1 = r_2$ na M, iz istih uslova proizilazi jednakost u 3.11.

Dokaz: Pretpostavimo da je uslov 3.12 zadovoljen. Tada za $E = E' \oplus E''$ direktnim računanjem dobijamo

$$\|R\|^2 = 2(\|\widehat{\rho}'\|^2 + \|\widehat{\rho}''\|^2) \quad , \qquad \widehat{\rho} = \widehat{\rho}' + \widehat{\rho}'' \quad ,$$

$$\tau' = 2\rho_{11} \qquad \text{i} \qquad \tau'' = 2\rho_{22} \ .$$

To znači

$$\|R\|^2 - \|\widehat{\rho}\|^2 - \|\rho - \frac{\tau}{4}h\|^2 = \|\widehat{\rho}' - \widehat{\rho}''\|^2 - \frac{1}{4}|\tau' - \tau''|^2, \tag{3.13}$$

što zajedno sa 3.12 implicira

$$\|R\|^2 = \|\widehat{\rho}\|^2 + \|\rho - \frac{\tau}{4}h\|^2 \ .$$

Dokažimo sada drugi deo tvrđenja. Pretpostavimo zato da važi jednakost 3.11 i da je $r_1 \neq r_2$ na M. U tom slučaju podraslojavanja E' i E'' od raslojavanja E mogu biti definisana sa

$$\begin{aligned} E'_p &= \{t \in E_p | \varrho(t) = r_1 t\}, \\ E''_p &= \{t \in E_p | \varrho(t) = r_2 t\}, \end{aligned}$$

za $p \in M$.

Kako je endomorfizam ϱ paralelan može se pokazati da su podraslojavanja E' i E'' paralelna. Neka je s sečenje podraslojavanja E'. Tada je

$$\varrho s = r_1 s \tag{3.14}$$

i $\nabla_X s = s' + s''$ za $s' \in \mathcal{S}(E')$, $s'' \in \mathcal{S}(E'')$, gde je X proizvoljno vektorsko polje na M. Iz 3.14 sledi da je

$$\varrho(\nabla_X s) = \nabla_X(r_1 s) + r_1 \nabla_X s, \tag{3.15}$$

odnosno

$$\varrho(s' + s'') = \nabla_X r_1 \cdot s + r_1(s' + s'') .$$

Ako u 3.15 uporedimo komponente koje leže u E'' dobija se

$$r_2 s'' = r_1 s',$$

što znači $s'' = 0$, zbog $r_1 \neq r_2$ na M. Time je pokazano da $\nabla_X s \in \mathcal{S}(E')$. Na sličan način se pokazuje paralelnost podraslojavanja E''. Konačno, na osnovu Propozicije 4.18, str. 13, u [Kb87], zaključujemo da su (E', h') i (E'', h'') holomorfna linijska raslojavanja i da je $E = E' \oplus E''$ globalno razlaganje raslojavanja E. Hermitski proizvodi h' i h'' su određeni restrikcijama hermitskog proizvoda h. Tada je $R = R' + R''$, pa se može ustanoviti jednakost 3.13. S obzirom na 3.11 zaključujemo da je i uslov Einstein-ovog tipa 3.12 ispunjen. Tako je lema dokazana. □

Sada će biti navedene neke posledice predhodnih rezultata i Leme 2.2.

Posledica 3.3 *Neka je (E, h) holomorfno vektorsko raslojavanje ranga 2 nad kompaktnom hermitskom površi (M, g). Ako je Gauss-ova krivina raslojavanja E nenegativna, tada je*

$$c_1^2(E) \geq 0 .$$

Dokaz: Zbog Leme 2.2 je

$$c_1^2(E) = \frac{1}{8\pi^2} \int_M (\tau^2 - 2\|\hat{\rho}\|^2)\Phi^2 . \tag{3.16}$$

S druge strane je $\tau = 2(\hat{r}_1 + \hat{r}_2)$ i $\|\hat{\rho}\|^2 = 2(\hat{r}_1^2 + \hat{r}_2^2)$, odnosno $\tau^2 - 2\|\hat{\rho}\|^2 = 8\hat{r}_1 \cdot \hat{r}_2$. Gauss-ova krivina $\hat{r}$ definisana je sa $\hat{r} = \hat{r}_1 \cdot \hat{r}_2$, što daje relaciju $\tau^2 - 2\|\hat{\rho}\|^2 = 8\hat{r}$. Tada iz jednakosti 3.16 proizilazi jednostavan izraz za Chern-ov broj $c_1^2(E)$ u terminima Gauss-ove krivine $\hat{r}$:

$$c_1^2(E) = \frac{1}{\pi^2} \int_M \hat{r}\, \Phi^2 . \tag{3.17}$$

Traženi rezultat sada direktno sledi. □

Primedba: Dobijeni rezultat je već poznat (videti [G-B-N-V], Tm. 4.1) jer je Gauss-ova krivina nenegativna ako i samo ako je $\hat{\ }$-Ricci-jeva krivina nenegativna ili nepozitivana. Ovde predstavljen dokaz zasniva se na interesantnoj jednakosti 3.17.

odnosno
$$\varrho(s'+s'')=\nabla_X r_1\cdot s+r_1(s'+s'')\ .$$
Ako u 3.15 uporedimo komponente koje leže u E'' dobija se
$$r_2 s''=r_1 s',$$
što znači $s''=0$, zbog $r_1\neq r_2$ na M. Time je pokazano da $\nabla_X s\in\mathcal{S}(E')$. Na sličan način se pokazuje paralelnost podraslojavanja E''. Konačno, na osnovu Propozicije 4.18, str. 13, u [Kb87], zaključujemo da su (E',h') i (E'',h'') holomorfna linijska raslojavanja i da je $E=E'\oplus E''$ globalno razlaganje raslojavanja E. Hermitski proizvodi h' i h'' su određeni restrikcijama hermitskog proizvoda h. Tada je $R=R'+R''$, pa se može ustanoviti jednakost 3.13. S obzirom na 3.11 zaključujemo da je i uslov Einstein-ovog tipa 3.12 ispunjen. Tako je lema dokazana. □

Sada će biti navedene neke posledice predhodnih rezultata i Leme 2.2.

Posledica 3.3 *Neka je (E,h) holomorfno vektorsko raslojavanje ranga 2 nad kompaktnom hermitskom površi (M,g). Ako je Gauss-ova krivina raslojavanja E nenegativna, tada je*
$$c_1^2(E)\geq 0\ .$$

Dokaz: Zbog Leme 2.2 je
$$c_1^2(E)=\frac{1}{8\pi^2}\int_M(\tau^2-2\|\hat{\rho}\|^2)\Phi^2\ . \tag{3.16}$$
S druge strane je $\tau=2(\hat{r}_1+\hat{r}_2)$ i $\|\hat{\rho}\|^2=2(\hat{r}_1^2+\hat{r}_2^2)$, odnosno $\tau^2-2\|\hat{\rho}\|^2=8\hat{r}_1\cdot\hat{r}_2$. Gauss-ova krivina $\hat{r}$ definisana je sa $\hat{r}=\hat{r}_1\cdot\hat{r}_2$, što daje relaciju $\tau^2-2\|\hat{\rho}\|^2=8\hat{r}$. Tada iz jednakosti 3.16 proizilazi jednostavan izraz za Chern-ov broj $c_1^2(E)$ u terminima Gauss-ove krivine $\hat{r}$:
$$c_1^2(E)=\frac{1}{\pi^2}\int_M\hat{r}\,\Phi^2\ . \tag{3.17}$$
Traženi rezultat sada direktno sledi. □

Primedba: Dobijeni rezultat je već poznat (videti [G-B-N-V], Tm. 4.1) jer je Gauss-ova krivina nenegativna ako i samo ako je $\hat{}$-Ricci-jeva krivina nenegativna ili nepozitivana. Ovde predstavljen dokaz zasniva se na interesantnoj jednakosti 3.17.

Posledica 3.4 *Neka je (E,h) holomorfno linijsko raslojavanje nad kompaktnom hermitskom površi (M,g) i neka je E^* dualno raslojavanje od E. Tada holomorfno raslojavanje $E \oplus E^*$ ne dopušta metriku čija Gauss-ova krivina ima stalno isti znak (pozitivan ili negativan).*

Dokaz: Pretpostavimo da postoji metrika na $E \oplus E^*$ sa navedenim osobinama. S obzirom da je $c_1(E^*) = -c_1(E)$ to je $c_1(E \oplus E^*) = c_1(E) \oplus c_1(E^*) = 0$ a zatim zbog 3.17 dolazimo do kontradikcije sa pretpostavkom.

3.2 Chern-ovi brojevi $\mathcal{E}_{k,\delta}$-raslojavanja

Neka $e(E)$ označava Euler-ovu karakteristiku kompleksnog vektorskog raslojavanja E.

Teorema 3.5 *Neka je (E,h) holomorfno vektorsko raslojavanje ranga 2 nad kompleksnom hermitskom površi (M,g). Ako je Ricci-jev tenzor krivune k-uzak i Gauss-ova krivina $\frac{1}{4}(1-k)^2$-ograničena odozdo, to je*

$$e(E) \geq 0 \; . \tag{3.18}$$

Ako je Ricci-jeva krivina ρ paralelna i $k < 1$, jednakost važi ako i samo ako (E,h) dopušta dekompoziciju $(E,h) = (E',h') \oplus (E'',h'')$ sa $\widehat{\rho}' - \widehat{\rho}'' = \frac{1}{4}(1-k)rg$ i $\widehat{\tau} = \frac{1}{4}(1-k)^2 r^2$. Za $k = 1$ isti uslovi impliciraju jednakost u 3.18.

Dokaz: Na osnovu Leme 2.2

$$e(E) = c_2(E) = \frac{1}{16\pi^2} \int_M (\tau^2 - 2\|\rho\|^2 - 2\|\widehat{\rho}\|^2 + \|R\|^2)\Phi^2,$$

a odavde zbog Leme 3.1 sledi

$$e(E) \geq \frac{1}{16\pi^2} \int_M (\tau^2 - 2\|\rho\|^2 - \|\widehat{\rho}\|^2 + \|\rho - \frac{\tau}{4}h\|^2)\Phi^2 \; .$$

Sada se lako proverava da je $\|\rho - \frac{\tau}{4}h\|^2 = \|\rho\|^2 - \frac{1}{4}\tau^2$ što daje

$$e(E) \geq \frac{1}{16\pi^2} \int_M (\frac{3}{4}\tau^2 - \|\rho\|^2 - \|\widehat{\rho}\|^2)\Phi^2 \; .$$

Zbog $\tau = 2(r_1 + r_2) = 2(\hat{r}_1 + \hat{r}_2)$, $\|\hat{\rho}\|^2 = 2(\hat{r}_1^2 + \hat{r}_2^2)$, i $\|\rho\|^2 = 2(r_1^2 + r_2^2)$ može se zaključiti da je

$$e(E) \geq \frac{1}{16\pi^2} \int_M \{4\hat{r}^2 - (\rho_{11} - \rho_{22})^2\}\Phi^2 .$$

Kako je ρ k-usko iz 3.1 sledi $|r_1 - r_2| \leq (1-k)r$. Zato iz činjenice da je Gauss-ova krivina $\frac{1}{4}(1-k)^2$-ograničena, dobijamo 3.18.

Analizirajmo sada slučaj kada nastupa jednakost u 3.18. U tom slučaju neophodno je da važi jednakost i u 3.11 i da je $\hat{r} = \frac{1}{4}(1-k)^2 r^2$ i $|\rho_{11} - \rho_{22}|^2 = (1-k)^2 r^2$. Zbog Leme 3.2 E se razlaže kao $E = E' \oplus E''$ tako da važi $\hat{r}' - \hat{r}'' = (1-k)r$, čime je tvrđenje teoreme dokazano.

Za Einstein-ovo hermitsko vektorsko raslojavanje (E, h), Lübke [L82] (videti takođe [Kb87]) je pokazao sledeću nejednakost

$$c_2(E) \geq \frac{1}{4} c_1^2(E) . \tag{3.19}$$

Jednakost važi u 3.19 ako i samo ako je (E, h) projektivno ravno vektorsko raslojavanje.

U sledećoj teoremi razmatra se uopštenje nejednakosti 3.19 za raslojavanja iz klase $\mathcal{E}_{k,\delta}$.

Teorema 3.6 *Neka je (E, h) hermitsko vektorsko raslojavanje ranga 2, nad kompaktnom hermitskom površi (M, g), koja pripada klasi $\mathcal{E}_{k,\delta}$, $\delta \geq 0$. Tada*

$$c_2(E) \geq \left\{ \frac{1}{4} - \frac{(1-k)^2}{16\delta} \right\} c_1^2(E) . \tag{3.20}$$

Ako je Ricci-jeva krivina ρ paralelna i $k < 1$, jednakost važi ako i samo ako (E, h) dopušta holomorfnu ortogonalnu dekompoziciju

$$(E, h) = (E', h') \oplus (E'', h'') \tag{3.21}$$

sa $\hat{\rho}' - \hat{\rho}'' = \frac{1}{4}(1-k)rg$ i $\hat{r} = \delta r^2$.

Primedba: U slučaju Einstein-ovog raslojavanja, tj. za $k = 1$, nejednakost 3.20 se svodi na nejednakost 3.19. Ako (E, h) dopušta dekompoziciju 3.21 sa $\hat{\rho}' = \hat{\rho}''$ to važi jednakost u 3.19 (videti [L82]).

Dokaz: Neka je a proizvoljan realan broj. Tada se primenom Leme 2.2 dobija

$$c_2(E)-ac_1^2(e)=\frac{1}{16\pi^2}\int_M\{(1-2a)\tau^2-2\|\rho\|^2-2(1-2a)\|\widehat{\rho}\|^2+\|R\|^2\}\Phi^2,$$

odnosno na osnovu nejednakosti 3.4

$$c_2(E)-ac_1^2(e)\geq \frac{1}{16\pi^2}\int_M\{(1-2a)\tau^2-2\|\rho\|^2-(1-4a)\|\widehat{\rho}\|^2+\|\rho-\frac{\tau}{4}h\|^2\}\Phi^2 .$$

Neposredno se proverava da važi identitet

$$\|\rho\|^2=\frac{\tau^2}{4}+\|\rho-\frac{\tau}{4}h\|^2 .$$

Dakle

$$c_2(E)-ac_1^2(e)\geq \frac{1}{16\pi^2}\int_M\{\frac{1}{2}(1-4a)\tau^2-(1-4a)\|\widehat{\rho}\|^2-\|\rho-\frac{\tau}{4}h\|^2\}\Phi^2 . \tag{3.22}$$

Kako je

$$\|\rho-\frac{\tau}{4}h\|^2=|r_1-r_2|^2 \qquad \text{i} \qquad \frac{1}{2}\tau^2-\|\widehat{\rho}\|^2=4\widehat{\tau}$$

iz 3.22 se može zaključiti

$$c_2(E)-ac_1^2(e)\geq \frac{1}{16\pi^2}\int_M\{-|r_1-r_2|^2+4(1-4a)\widehat{\tau}\}\Phi^2 . \tag{3.23}$$

Ako sada iskoristimo pretpostavku da je raslojavanje (E,h) iz klase $\mathcal{E}_{k,\delta}$ vidimo da važi

$$|r_1-r_2|\leq(1-k)r \qquad \text{i} \qquad \widehat{\tau}\geq\delta r^2,$$

što znači

$$-|r_1-r_2|^2+4(1-4a)\widehat{\tau}\geq\{-(1-k)^2+4(1-4a)\delta\}r^2 . \tag{3.24}$$

Primetimo da je $4(1-4a)\delta-(1-k)^2=0$ za $a=\frac{1}{4}-\frac{(1-k)^2}{16\delta}$. To znači da 3.23 i 3.24 impliciraju

$$c_2(E)-\left\{\frac{1}{4}-\frac{(1-k)^2}{16\delta}\right\}c_1^2(E)\geq 0,$$

što je i trebalo dokazati.

Analizirajmo sada kada nastupa jednakost u 3.20. Tada važi jednakost 3.11 i pri tome je

$$\hat{\tau} = \delta r^2 \qquad \text{i} \qquad r_1 - r_2 = (1-k)r \tag{3.25}$$

na M. S obzirom na date pretpostavke, iz Leme 3.2 vidimo da postoji holomorfna ortogonalna dekompozicija

$$(E,h) = (E',h') \oplus (E'',h''),$$

takva da je $\hat{\rho}' - \hat{\rho}'' = \frac{1}{4}(\tau' - \tau'')g$. Iz konstrukcije sledi da je $\tau' = r_1$ i $\tau'' = r_2$. Nakon toga uslovi 3.25 pokazuju da dobijena dekompozicija zadovoljava sve tražene uslove. Time je dokaz teoreme završen. □

Primedba: Nejednakosti 3.4 i 3.20 važe takođe i za formalno holomorfna vektorska raslojavanja.

3.3 Konformna promena poslojne metrike

Sada ćemo razmotriti holomorfna hermitska vektorska raslojavanja (E,h) ranga λ, nad kompaktnom Kähler-ovom mnogostrukošću dimenzije n. Dobro je poznato da metrika h jednoznačno određuje holomorfnu povezanost ∇ i njoj odgovarajući tenzor krivine se eksplicitno određuje sa

$$R_{i\bar{j}\alpha\bar{\beta}} = -\partial_\alpha \partial_{\bar{\beta}}(h_{i\bar{j}}) + h^{a\bar{b}}\partial_\alpha h_{i\bar{b}} \cdot \partial_{\bar{\beta}} h_{a\bar{j}} \ ,$$

za $1 \le i,j \le \lambda$, $1 \le \alpha,\beta \le n$(videti 1.3). Neka je $h' = ah$ konformno ekvivalentna metrika metrici h, gde je a pozitivna funkcija na M. Označimo sa R' tenzor krivine koji odgovara metrici h'. Tada su tenzori krivine R i R' povezani na sledeći način

$$R'_{i\bar{j}\alpha\bar{\beta}} = aR_{i\bar{j}\alpha\bar{\beta}} - ah_{i\bar{j}}\partial_\alpha\partial_{\bar{\beta}}(\log a) \ . \tag{3.26}$$

Pretpostavimo sada da je (E,h) raslojavanje ranga 2. Izaberimo konstantu k tako da je

$$\int_M r_1 \Phi^n = k \int_M r_2 \Phi^n \ . \tag{3.27}$$

Teorema 3.7 *Neka je (E,h) hermitsko vektorsko raslojavanje ranga 2 nad kompaktnom Kähler-ovom mnogostrukošću (M,g) i neka je k konstanta definisana sa 3.27. Tada za $k \neq 1$, postoji konformno ekvivalentna hermitska struktura $h' = ah$, a je pozitivna funkcija na M, takva da je*

$$r'_1 = k \cdot r'_2 \tag{3.28}$$

na M. Ova metrika je jedinstvena do na homotetiju.

Dokaz: Označimo sa $\rho'_{j\bar{k}}$ i ϱ' Ricci-jev tenzor krivine i njemu odgovarajući endomorfizam određen metrikom h'. Iz formule 3.26 kontrakcijom se dobija veza između odgovarajućih Ricci-jevih tenzora ρ i ρ',

$$\rho'_{j\bar{k}} = a\rho_{j\bar{k}} - (\Delta \log a) a h_{j\bar{k}},\ 1 \leq j,k \leq 2, \tag{3.29}$$

gde je Laplasian $\Delta = g^{\alpha\bar{\beta}}\partial_\alpha\partial_{\bar{\beta}}$.

U odeljku 3.1 je pretpostavljeno da se lokalno polje unitarnih repera (s_1, s_2) sastoji od sopstvenih vektora endomorfizma ϱ sa odgovarajućim sopstvenim vrednostima r_1 i r_2. Zato važi

$$\rho'_{i\bar{i}} = ar_i - (\Delta \log a)a,\ i = 1,2,$$

a to znači da su

$$s'_i = \frac{1}{\sqrt{a}} s_i,\ i = 1,2,$$

sopstveni vektori endomorfizma ϱ', koji odgovaraju sopstvenim vrednostima r'_1 i r'_2, određenim sa

$$r'_i = r_i - \Delta \log a\ ,\ i = 1,2. \tag{3.30}$$

Iz 3.30 se vidi

$$r'_1 - r'_2 = r_1 - r_2,$$

što znači da je $r_1 - r_2$ konformna invarijanta. Primetimo da parcijalna jednačina 3.28 dobija oblik

$$r_1 - kr_2 = (1-k)(\Delta \log a),$$

ili

$$\Delta \log a = f, \tag{3.31}$$

za $f = (r_1 - kr_2)/(1-k)$.

Sada ćemo dokazati egzistenciju globalnog rešenja jednačine 3.31. Laplasian Δ je samokonjugovan eliptički operator ([Gk74,Wl73]) reda 2, pa se može primeniti Hodge-ova teorema o razlaganju (videti [Gk74, Gb62]) koja kaže

$$C^\infty(M) = Ker(\Delta) \oplus \Delta(C^\infty(M)), \tag{3.32}$$

gde je $Ker(\Delta)$ skup harmonijskih funkcija na M. Tako iz 3.32 sledi da postoji harmonijska funkcija f_0 i glatka funkcija f_1 na M tako da se f razlaže

$$f = f_0 + \Delta f_1 \ . \tag{3.33}$$

Kako je M kompaktna mnogostrukost, primenom Hopf-ove leme zaključujemo da je f_0 konstantna funkcija. Razlaganje 3.32 je ortogonalno, $Ker(\Delta) \perp \Delta(C^\infty(M))$. Dakle, može se dobiti

$$\int_M \Delta f_1 \Phi^n = 0,$$

jer su konstantne funkcije na M harmonijske, tj. pripadaju $Ker(\Delta)$. S obzirom na način izbora funkcije f i zbog 3.27 jasno je da je $\int_M f\Phi^n = 0$. Iz 3.33 zaključujemo

$$\int_M f_0 \Phi^n = 0 \ , \tag{3.34}$$

odnosno

$$f_0 \int_M \Phi^n = 0,$$

što konačno daje $f_0 \equiv 0$ na M. Time se razlaganje 3.33 pojednostavljuje i svodi na $f = \Delta f_1$. Tako je $a = \exp(f_1)$ traženo globalno rešenje jednačine 3.31, pa je egzistencija pokazana.

Pretpostavimo sada da je $h_1 = a_1 h$ proizvoljna metrika koja zadovoljava jednačinu 3.28. Tada funkcija a_1 zadovoljava parcijalnu jednačinu

$$\Delta \log a_1 = f \ . \tag{3.35}$$

Iz jednačina 3.31 i 3.35 sledi

$$\Delta \log \frac{a_1}{a} = 0 \ ,$$

tj., $\log(a_1/a)$ je harmonijska funkcija na M, pa je samim tim konstanta na M. Tada je $a_1 = c \cdot a$, odnosno, $h_1 = ch'$ za neku pozitivnu konstantu na M. Time je pokazano da su proizvoljne dve metrike koje zadovoljavaju jednačinu 3.28 homotetično ekvivalentne, čime je dokaz teoreme završen. □

Primedba: Kao što je već uočeno, $r_1 - r_2$ je konformna invarijanta.

Primedba: Za $k = 1$, Teorema 3.7 važi ako i samo ako polazna metrika h zadovoljava Einstein-ov uslov.

Posledica 3.8 *Pod istim pretpostavkama kao u Teoremi 3.26, ako je*

(i) $\int_M r_1\Phi^n \cdot \int_M r_2\Phi^n \geq 0$ *i*

(ii) $|\int_M r_1\Phi^n| < |\int_M r_2\Phi^n|$,

raslojavanje (E, h) *dopušta metriku sa* k*-uskom Ricci-jevom krivinom, gde je konstanta* k *definisana formulom 3.27.*

Dokaz: Na osnovu (i) je $k \geq 0$. Na osnovu formule 3.27 i uslova (ii) $k = |\int r_1\Phi^n|/|\int r_2\Phi^n| < 1$. Tada zbog predhodne teoreme zaključujemo da raslojavanje E dopušta metriku h, tako da ona zadovoljava uslov $kr_2 = r_1$ na M za sopstvene vrednosti r_1 i r_2. Lako se može proveriti da metrika zadovoljava i uslov 3.1 na M pa je tako Posledica 3.8 dokazana. □

Poglavlje 4

Uopšteni Chern-ovi brojevi Kähler-ovih mnogostrukosti i zapremine malih geodezijskih lopti

4.1 Karakterizacija kompleksnih prostornih formi

U ovom poglavlju se koriste oznake uvedene u [G-V79] i [C-O75]. Neka je M n-dimenziona analitička mnogostrukost. Pretpostavimo da je pozitivan broj r_0 tako mali da je eksponencijalno preslikavanje $\exp_m$ difeomorfizam na lopti radiusa r_0 u tangentnom prostoru M_m. Geodezijska lopta poluprečnika r sa centrom u tački $m \in M$ označava se sa $B_m(r)$,

$$B_m(r) = \{\exp_m(x) | x \in M_m,\ \|x\|^2 \leq r\}.$$

Zatim se uvode oznake

$$S_m(r) = \text{ zapremina } \{\exp_m(x) | x \in M_m,\ \|x\|^2 = r\}$$

i

$$V_m(r) = \text{ zapremina } \{\exp_m(x) | x \in M_m,\ \|x\|^2 \leq r\}.$$

Ovde se podrazumeva $(n-1)$-dimenziona zapremina za $S_m(r)$ i n - dimenziona zapremina za $V_m(r)$.

U [G-V79, Teorema 3.3] pokazano je da za funkcije $V_m(r)$ i $S_m(r)$ važe sledeći stepeni razvoji

$$V_m(r) = \Omega_n r^n (1 - Ar^2 + Br^4 + O(r^6)), \tag{4.1}$$

gde je

$$A = \frac{\tau}{6(n+2)}, \; B = \frac{1}{360(n+2)(n+4)}(-3\|R\|^2 + 8\|\rho\|^2 + 5\tau^2 - 18\Delta\tau),$$

i

$$S_m(r) = C_n r^{n-1}(1 - Cr^2 + Dr^4 + O(r^6)),$$

gde je

$$C = \frac{n+2}{n}A, \; D = \frac{n+4}{n}B.$$

Ovde Ω_n označava zapreminu jedinične lopte u $\mathbf{R}^n$ a C_n označava $(n-1)$-dimenzionu zapreminu jedinične euklidske sfere S^{n-1}. Pri tome važi $C_n = n\Omega_n = n\pi^{n/2}(1/\Gamma(n/2+1))$.

Pretpostavimo nadalje da je M Kähler-ova mnogostrukost kompleksne dimenzije n. Neka je $\theta^1, \ldots, \theta^n$ lokalno polje unitarnih korepera. Tada se Kähler-ova metrika izražava lokalno kao $g = \sum(\theta^\alpha \otimes \bar{\theta}^\alpha + \bar{\theta}^\alpha \otimes \theta^\alpha)$ i njoj odgovarajuća 2-forma $\Phi(X,Y) = g(X, JY)$ se predstavlja u obliku $\Phi = \sqrt{-1}\sum \theta^\alpha \otimes \bar{\theta}^\alpha$. U ovom poglavlju pretpostavićemo da indeksi $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \ldots$ uzimaju vrednosti u skupu $\{1, \ldots, n\}$. Poznato je da je forma Φ zatvorena. Fundamentalna klasa ω na M je de Rham-ova kohomološka klasa određena sa Φ, $\omega = [\Phi]$. U slučaju holomorfnog tangentnog raslojavanja $T^{\mathbf{C}}M$, u odnosu na fiksirani lokalni reper, komponente tenzora krivine R označavaju se sa $R_{\alpha\bar{\beta}\gamma\bar{\delta}}$. U slučaju Kähler-ove mnogostrukosti Ricci-jevi tenzori ρ and $\widehat{\rho}$ se poklapaju i njihove komponente su određene sa

$$\rho_{\alpha\beta} = \sum R_{\alpha\bar{\gamma}\gamma\bar{\beta}} = 2\sum R_{\alpha\bar{\beta}\gamma\bar{\gamma}} = 2\sum R_{\gamma\bar{\gamma}\alpha\bar{\beta}}.$$

Odgovarajuća skalarna krivina je $\tau = 2\sum \rho_{\alpha\bar{\alpha}}$.

U daljem radu koristiće se sledeći poznat rezultat.

Lema 4.1 ([C-O75]) *Neka je M n-dimenziona Kähler-ova mnogostrukost. Tada*

$$\frac{n(n+1)}{2}\|R\|^2 \geq 2n\|\rho\|^2 \geq \tau^2 .$$

Prva jednakost važi ako i samo ako je M kompleksna prostorna forma. Druga jednakost važi ako i samo ako je M Einstein-ova mnogostrukost.
□

Na osnovu rezultata dobijenih u odeljku 2.2(videti i [C-O75]) dobijamo

$$\gamma_1 \wedge \Phi^{n-1} = \frac{\tau}{n\pi}\Phi^n, \tag{4.2}$$

$$\gamma_1^2 \wedge \Phi^{n-2} = \frac{1}{4n(n-1)\pi^2}(\tau^2 - 2\|\rho\|^2)\Phi^n, \tag{4.3}$$

$$\gamma_2 \wedge \Phi^{n-2} = \frac{1}{8n(n-1)\pi^2}(\tau^2 - 4\|\rho\|^2 + \|R\|^2)\Phi^n, \tag{4.4}$$

gde γ_1 i γ_2 označavaju prvu i drugu Chern-ovu formu. Uopšteni Chern-ovi brojevi $\omega^{n-1}c_1(M)$, $\omega^{n-2}c_1^2(M)$ i $\omega^{n-2}c_2(M)$ definišu se sa

$$\int_M \gamma_1 \wedge \Phi^{n-1}, \int_M \gamma_1^2 \wedge \Phi^{n-2} \text{ i } \int_M \gamma_2 \wedge \Phi^{n-2}$$

redom.

Teorema 4.2 *Neka je (M,g,J) kompaktna Kähler-ova mnogostrukost kompleksne dimenzije n. Pretpostavimo da su uopšteni Chern-ovi brojevi $\omega^{n-1}c_1(M)$ i $\omega^{n-2}c_1^2(M)$ nenegativni. Tada, ako M zadovoljava jedan od sledećih uslova, (i) ili (ii),*

(i) $V_m(r) \geq \Omega_{2n}r^{2n}$,

(ii) $V_m(r) \leq \frac{r}{2n}S_m(r)$,

M je biholomorfno prekriveno sa $\mathbf{C}^n$.

Dokaz: Prvo ćemo pokazati da iz $\omega^{n-1}c_1(M) \geq 0$, $\omega^{n-2}c_1^2(M) \geq 0$ i uslova (i) sledi rezultat. Zbog (i)

$$\tau \leq 0 \text{ na } M, \tag{4.5}$$

a na osnovu $\omega^{n-1}c_1(M) \geq 0$ i $\omega^{n-2}c_1^2(M) \geq 0$ je

$$\int_M \gamma_1 \wedge \Phi^{n-1} = \frac{1}{n\pi}\int_M \tau\Phi^n, \tag{4.6}$$

i

$$\gamma_1^2 \wedge \Phi^{n-2} = \frac{1}{4n(n-1)\pi^2}(\tau^2 - 2\|\rho\|^2)\Phi^n. \tag{4.7}$$

Zbog 4.5, iz 4.6 sledi $\tau = 0$ na M. Tada koristeći 4.7, vidimo da je i $\rho = 0$ na M. Iz uslova (i) je

$$-3\|R\|^2 + 8\|\rho\|^2 + 5\tau^2 - 18\Delta\tau \geq 0 \text{ na } M,$$

odnosno $\|R\|^2 \leq 0$ na M. Tako je $R = 0$ na M i ona je biholomorfno nadkrivena sa $\mathbf{C}^n$.

Ako pretpostavimo da važi uslov (ii) umesto (i) dokaz se izvodi na sličan način. □

Posledica 4.3 *Neka je M Kähler-ova mnogostrukost kao u Teoremi 4.2. Ako se prva Chern-ova klasa $c_1(M)$ anulira i ako M zadovoljava jedan od dva uslova, (i) ili (ii), tada je M biholomorfno prekriveno sa $\mathbf{C}^n$.* □

U [Ya77] i [Ya78] je pokazano da postoje kompaktne, kompleksne mnogostrukosti koje dopuštaju Ricci-ravnu Kähler-ovu metriku koja nije ravna. Na primer, takva je svaka hiperpovrš kompleksnog projektivnog prostora $\mathbf{C}P^{n+1}$, stepena $n+2$. Konkretno, u tu klasu spada K3-površ, hiperpovrš od $\mathbf{C}P^3$ definisana jednakošću $z_1^4+z_2^4+z_3^4+z_4^4 = 0$ u homogenim koordinatama. Jasno, za takve n-dimenzione mnogostrukosti, za zapremine njenih geodezijskih lopti važi

$$V_m(r,M) = \Omega_{2n}r^{2n}\left(1 - \frac{1}{480(n+1)(n+2)}\|R\|^2 + O(r^6)\right).$$

Dakle, sve zapremine $V_m(r,M)$ su strogo manje od odgovarajućih euklidskih zapremina. U vezi sa navedenim primerom je interesantna sledeća posledica Teoreme 4.2.

Posledica 4.4 *Neka je M kompaktna mnogostrukost koja dopušta ne ravnu, Ricci-ravnu Kähler-ovu metriku. Tada za svaku Kähler-ovu metriku na M postoji bar jedna tačka $m \in M$ takva da je zapremina malih geodezijskih lopti $V_m(r)$ manja od odgovarajućih euklidskih za svako dovoljno malo r.*

Dokaz: Kako M dopušta Ricci-ravnu metriku, to je $c_1(M) = 0$, odnosno $\omega^{n-1}c_1(M) = \omega^{n-2}c_1^2(M) = 0$. Pretpostavimo da za neku Kähler-ovu metriku g tvrđenje nije tačno. Tada bi zbog Teoreme 4.5, mnogostrukost (M, g) bila ravna i $c_2(M) = 0$. Ali, to je kontradikcija sa

$$c_2(M) = \frac{1}{8n(n-1)\pi^2} \int_M \|R_1\|^2 \Phi_1^2 > 0$$

gde je R_1 tenzor krivine Ricci-ravne metrike koja nije ravna. Time je posledica dokazana. □

Posebno je interesantan slučaj površi K3 tipa. Površ tipa K3 definiše se kao kompaktna, povezana, kompleksna površ čija je prva Chern-ova klasa $c_1(M) = 0$ i prvi Betti-jev broj $b_1(M) = 0$. Za svojstva K3-površi videti [Bs81, poglavlje 8] .

Posledica 4.5 *Neka je M K3-površ. Tada, za svaku Kähler-ovu metriku g na M postoji bar jedna tačka $m \in M$ takva da je zapremina malih geodezijskih lopti $V_m(r)$ manja od odgovarajućih euklidskih za sve dovoljno malo r.*

Dokaz: Yau ([Ya77,Ya78]) je dokazao hipotezu Calabi-ja odakle proizilazi da postoji Ricci-ravna Kähler-ova metrika koja nije ravna na svakoj K3-površi. Dokaz dalje sledi iz Posledice 4.4. □

U nastavku poglavlja razmatraju se proizvoljne kompleksne kompaktne prostorne forme. Moguće je dobiti njihovu karakterizaciju u terminima zapremina malih geodezijskih lopti i Chern-ovih brojeva. Prvo je lokalni uslov, a drugo je globalni.

Neka $M(\mu)$ označava Kähler-ovu mnogostrukost kompleksne dimenzije n i konstantne holomorfne sekcione krivine μ. Tada, ako je $\mu \neq 0$, za sve $p \in M(\mu)$, zapremina malih geodezijskih lopti u $M(\mu)$ poluprečnika r je data sa

$$V_m(r\mu) = \frac{(4\pi)^n}{n!\mu^n} \left\{ \sin \frac{\sqrt{\mu}}{2} r \right\}^{2n},$$

ili

$$V_m(r\mu) = \frac{(4\pi)^n}{n!|\mu|^n} \left\{ \sinh \frac{\sqrt{|\mu|}}{2} r \right\}^{2n},$$

u zavisnosti da li je $\mu > 0$ ili $\mu < 0$ (videti [C-V81]). U [G-V79] je formulisana sledeća hipoteza:

Hipoteza 1 *Neka je M Kähler-ova mnogostrukost kompleksne dimenzije n i pretpostavimo da za sve $m \in M$ i sve dovoljno male $r > 0$, $V_m(r)$ je isto kao kod n-dimenzione Kähler-ove mnogostrukosti konstantne holomorfne sekcione krivine μ.*

Hipoteza 1 do sada još nije pokazana u opštem slučaju. Zato se u sledećoj teoremi pokazuje da hipoteza važi u jednom partikularnom slučaju.

Teorema 4.6 *Neka je M kompaktna Kähler-ova mnogostrukost kompleksne dimenzije n, i pretpostavimo da za sve $m \in M$ i sve dovoljno male $r > 0$, $V_m(r)$ je isto kao kod n-dimenzione kompaktne Kähler-ove mnogostrukosti $M(\mu)$ sa konstantnom holomorfnom sekcionom krivinom μ. Neka ω i ω_μ označavaju fundamentalne klase za M i $M(\mu)$ redom. Ako su zadovoljeni sledeći uslovi*

$$(i) \quad \omega^{n-1} c_1(M) = \omega_\mu^{n-1} c_1(M(\mu)), \tag{4.8}$$

$$(ii) \quad \omega^{n-2} c_1^2(M) \geq \omega_\mu^{n-2} c_1^2(M(\mu)), \tag{4.9}$$

M ima konstantnu holomorfnu sekcionu krivinu μ.

Dokaz: Neka τ_μ, $\|\rho_\mu\|^2$ i $\|R_\mu\|^2$ označavaju skalarnu krivinu, normu Ricci-jevog tenzora i normu tenzora krivine mnogostrukosti $M(\mu)$. Sve ove funkcije su konstantne na $M(\mu)$. Zbog $V_m(r) = V_m(r, \mu)$ vidi se da važi

$$\tau = \tau_\mu, \tag{4.10}$$

$$3(\|R_\mu\|^2 - \|R\|^2) = 8(\|\rho_\mu\|^2 - \|\rho\|^2). \tag{4.11}$$

Pretpostavke (i) i (ii) impliciraju

$$\int_M \tau \Phi^n = \int_{M(\mu)} \tau_\mu \Phi_\mu^n \tag{4.12}$$

i

$$\int_M (\tau^2 - 2\|\rho\|^2)\Phi^n \geq \int_{M(\mu)} (\tau_\mu^2 - 2\|\rho_\mu\|^2)\Phi_\mu^n. \tag{4.13}$$

Za $\mu = 0$, iz 4.10, 4.13 i 4.11 sledi $\tau = \|\rho\|^2 = \|R\|^2 = 0$ na M. Znači mnogostrukost M je ravna kao što je trebalo pokazati.

Za $\mu \neq 0$ formule 4.10 i 4.12 daju da M i $M(\mu)$ imaju jednake zapremine,

$$\int_M \Phi^n = \int_{M(\mu)} \Phi^n_\mu. \tag{4.14}$$

Zatim iz relacija 4.10 i 4.13 dobijamo

$$\int_M \|\rho\|^2 \Phi^n \leq \int_{M(\mu)} \|\rho_\mu\|^2 \Phi^n_\mu. \tag{4.15}$$

Zbog 4.14

$$\int_{M(\mu)} \|\rho_\mu\|^2 \Phi^n_\mu = \int_M \|\rho_\mu\|^2 \Phi^n. \tag{4.16}$$

Kombinujući 4.15 i 4.16 dobija se nejednakost

$$\int_M \|\rho\|^2 \Phi^n \leq \int_M \|\rho_\mu\|^2 \Phi^n. \tag{4.17}$$

Iz formule 4.13 se može izvesti relacija

$$\begin{aligned} & \int_M \left(\|R\|^2 - \frac{4}{n+1} \|\rho\|^2 \right) \Phi^n \\ = & \int_M \left(\|R_\mu\|^2 - \frac{4}{n+1} \|\rho_\mu\|^2 \right) \Phi^n \\ + & \frac{4}{3} \left(\frac{3}{n+1} - 2 \right) \int_M (\|\rho_\mu\|^2 - \|\rho\|^2) \Phi^n. \end{aligned}$$

Mnogostrukost $M(\mu)$ je konstantne holomorfne sekcione krivine, što zbog Leme 4.1 znači $\|R_\mu\|^2 = 4\|\rho_\mu\|^2/(n+1)$, odnosno

$$\int_M \left(\|R\|^2 - \frac{4}{n+1} \|\rho\|^2 \right) \Phi^n = \frac{4}{3} \left(\frac{3}{n+1} - 2 \right) \int_M (\|\rho_\mu\|^2 - \|\rho\|^2) \Phi^n.$$

Sada je zbog nejednakosti 4.17

$$\int_M \left(\|R\|^2 - \frac{4}{n+1} \|\rho\|^2 \right) \Phi^n \leq 0. \tag{4.18}$$

S druge strane, primenom Leme 4.1 još jednom, $\|R\|^2 \geq 4\|\rho\|^2/(n+1)$ na M. To znači, zbog 4.18, da je $\|R\|^2 = 4\|\rho\|^2/(n+1)$ na M, odnosno zbog Leme 4.1, M ima konstantnu holomorfnu sekcionu krivinu. Tako je tvrđenje leme dokazano. $\square$

Interesantno je razmatrati i slučaj kada se mnogostrukosti M i $M(\mu)$ poklapaju. Tada se uslov za zapremine malih geodezijskih lopti može oslabiti.

Teorema 4.7 *Neka je (M, g_μ, J_μ) kompaktna n-dimenziona Kähler-ova mnogostrukost sa konstantnom holomorfnom sekcionom krivinom μ, fundamentalnom klasom ω_μ i skoro kompleksnom strukturom J_μ. Pretpostavimo da je (M, g, J) Kähler-ova mnogostrukost sa fundamentalnom klasom ω i skoro kompleksnom strukturom J. Ako je*

(i) $V_m(r) \geq V_m(r, \mu)$ *za sve $m \in M$ i sve dovoljno male $r > 0$,*

(ii) $\omega = \omega_\mu$,

(iii) $c_1(M, J) = c_1(M, J_\mu)$,

tada M ima konstantnu holomorfnu sekcionu krivinu μ.

Dokaz: Ako iskoristimo nejednakost između zapremina geodezijskih lopti, uslov (i), dobijamo

$$\tau \leq \tau_\mu, \tag{4.19}$$

na M. Ako za Chern-ove klase $c_1(M, J_1)$ i $c_1(M, J)$ označimo redom njima odgovarajuće Chern-ove forme sa $\bar{\gamma}_1$ i γ_1, to je

$$\bar{\gamma}_1 - \gamma_1 = d\eta_1, \tag{4.20}$$

za neku 1-formu $\eta_1 \in \bigwedge^1(M)$, zbog uslova (iii). S druge strane, zbog jednakosti fundamentalnih klasa ω i ω_μ, za njihove fundamentalne 2-forme Φ i Φ_μ važi

$$\Phi - \Phi_\mu = d\eta, \tag{4.21}$$

za neku 1-formu η. Primetimo da zbog zatvorenosti forme Φ_μ

$$\Phi^n = \Phi^n_\mu + d\bar{\eta},$$

za $\bar{\eta} \in \bigwedge^{2n-1}(M)$, odakle su zapremine mnogostrukosti (M, g) i (M, g_μ) iste

$$\int_M \Phi^n = \int_M \Phi^n_\mu . \tag{4.22}$$

Za razliku od Chern-ovih brojeva, uopšteni Chern-ovi brojevi ne moraju biti topološke invarijante. Ali na osnovu relacija 4.20 i 4.21, zbog Stokes-ove teoreme dolazimo do veza

$$\omega^{n-1} c_1(M) = \omega^{n-1} c_1(M_\mu), \tag{4.23}$$

$$\omega^{n-2} c_1^2(M) = \omega^{n-2} c_1^2(M_\mu) . \tag{4.24}$$

Zatim, kombinujući 4.2 i 4.23,

$$\int_M \tau\Phi^n = \int_M \tau_\mu \Phi_\mu^n$$

odakle, zbog konstantnosti skalarne krivine τ_μ i 4.22 zaključujemo

$$\int_M (\tau - \tau_\mu)\Phi^n = 0. \tag{4.25}$$

S obzirom na $\tau - \tau_\mu \le 0$ na M, to je zbog 4.25 $\tau = \tau_\mu$ skoro svuda na M. Konačno, zbog neprekidnosti je $\tau = \tau_\mu$ na celoj mnogostrukosti M.

Uslov (i) se može ponovo primeniti da se u kombinaciji sa razlaganjem 4.1 napiše

$$\begin{aligned} &-3\|R\|^2 + 8\|\rho\|^2 + 5\tau^2 - 18\Delta\tau \\ \ge\ &-3\|R_\mu\|^2 + 8\|\rho_\mu\|^2 + 5\tau_\mu^2 - 18\Delta\tau_\mu. \end{aligned} \tag{4.26}$$

Uzevši u obzir da je $\tau = \tau_\mu$ konstantno na M, nejednakost 4.26 se svodi na

$$-3\|R\|^2 + 8\|\rho\|^2 \ge -3\|R_\mu\|^2 + 8\|\rho_\mu\|^2 . \tag{4.27}$$

Iz 4.24 i 4.3 proizilazi

$$\int_M (\tau^2 - 2\|\rho\|^2)\Phi^n = \int_M (\tau_\mu^2 - 2\|\rho_\mu\|^2)\Phi_\mu^n,$$

odnosno, zbog 4.22 to je

$$\int_M (\|\rho\|^2 - \|\rho_\mu\|^2)\Phi^n = 0 . \tag{4.28}$$

Metrika g_μ je Einstein-ova i primenom Leme 4.1 zaključujemo $\|\rho_\mu\|^2 = \tau_\mu^2/2n = \tau^2/2n$. Ponovnom primenom Leme 4.1 je $\|\rho\|^2 \ge \tau^2/2n$, odnosno

$$\|\rho\|^2 \ge \|\rho_\mu\|^2,$$

što zajedno sa 4.28 daje $\|\rho\|^2 = \|\rho_\mu\|^2$ na M. Tada važi jednakost u drugom delu nejednakosti iz Leme 4.1 i metrika g je Einstein-ova. Nejednakost 4.28 dobija oblik

$$\|R\|^2 \le \|R_\mu\|^2 . \tag{4.29}$$

Kako je metrika g_μ sa konstantnom holomorfnom sekcionom krivinom, zbog Leme 4.1 je

$$\|R\|^2 \geq \frac{4}{n+1}\|\rho\|^2 = \frac{4}{n+1}\|\rho_\mu\|^2 = \|R_\mu\|^2. \tag{4.30}$$

Nejednakosti 4.29 i 4.30 impliciraju $\|R\|^2 = \|R_\mu\|^2$, odnosno

$$\|R\|^2 = \frac{4}{n+1}\|\rho\|^2 ,$$

što s obzirom na Lemu 4.1 znači da je mnogostrukost (M, g) kompleksna prostorna forma. Ovim je teorema pokazana. □

Primedba: Ako se za (M, g_μ, J_μ), modelnu Kähler-ovu mnogostrukost, umesto da je kompleksna prostorna forma pretpostavi da ima konstantnu skalarnu krivinu ili da je Einstein-ova onda na osnovu izvedenog dokaza sledi da iste te osobine ima i mnogostrukost (M, g, J).

Ako pretpostavimo da su skoro kompleksne strukture J i J_μ identične, onda se preostali uslovi u teoremi pojednostavljuju.

Posledica 4.8 *Neka je (M, g_μ, J) kompaktna, n-dimenziona Kähler-ova mnogostrukost sa konstantnom holomorfnom sekcionom krivinom μ(ili sa konstantnom skalarnom krivinom ili zadovoljava Einstein-ov uslov), fundamentalnom klasom ω_μ i skoro kompleksnom strukturom J. Pretpostavimo da je (M, g, J) Kähler-ova mnogostrukost sa fundamentalnom klasom ω_μ i istom skoro kompleksnom strukturom J. Ako je*

(i) *$V_m(r) \geq V_m(r, \mu)$ za sve $m \in M$ i sve dovoljno male $r > 0$,*

(ii) *$\omega = \omega_\mu$,*

tada (M, g, J) ima konstantnu holomorfnu sekcionu krivinu μ(ili konstantnu skalarnu krivinu ili zadovoljava Einstein-ov uslov).

Dokaz: Chern-ove karakteristične klase su topološke invarijante kompleksnih raslojavanja (videti [M-S74]) i zato je ispunjen automatski uslov (iii) iz teoreme. Dokaz se odavde nastavlja na isti način. □

Primer 4.1 *Pokažimo da postoje primeri mnogostrukosti (M, g) koji ispunjavaju pretpostavke Posledice 4.8.*

Neka je (M, g, J) proizvoljna kompaktna Kähler-ova mnogostrukost, Φ njena fundamentalna 2-forma i $\rho_a \in \bigwedge^{1,1}(M, \mathbb{R})$ odgovarajuća Ricci-jeva forma. Tada je

$$c_1(M) = \left[\frac{1}{2\pi}\rho_a\right] \in H^{1,1}(M),$$

gde je $H^{1,1}(M)$ grupa Dolbealt-ovih kohomologija. Izaberimo sada $\tilde{\rho}_a \in \bigwedge^{1,1}(M, \mathbb{R})$ tako da $[\tilde{\rho}_a] = [\rho_a]$. Na osnovu Teoreme 11.15 u [Bs87] *(takođe videti* [Ca55,Ya78]*) sledi da postoji Kähler-ova metrika $\tilde{g}$ na M, tako da je $\tilde{\rho}_a$ Ricci-jeva forma metrike $\tilde{g}$ i pri tome su odgovarajuće Kähler-ove forme jednake*

$$[\Phi] = [\tilde{\Phi}] \in H^{1,1}(M).$$

4.2 Geodezijsko-Einstein-ove mnogostrukosti

Einstein-ove mnogostrukosti su vrlo važan objekat istraživanja u savremenoj diferencijalnoj geometriji i teoriji relativnosti. Zato se razmatraju i mnogobrojna oslabljenja ovog uslova u različitim pravcima. U ovom odeljku se definišu geodezijski-Einstein-ove mnogostrukosti. Pokazuje se da za egzistenciju geodezijski-Einstein-ove metrike moraju biti zadovoljeni neki potrebni uslovi, isti kao i za egzistenciju Einstein-ove metrike.

Definicija 4.1 *Neka su M i M_e Riemann-ove mnogostrukosti iste dimenzije n. Kažemo da je M* geodezijski-Einstein-ova mnogostrukost reda k *u odnosu na Einstein-ovu mnogostrukost M_e ako postoji preslikavanje $f : M \longrightarrow M_e$, takvo da*

$$V_m(r) = V_{f(m)}(r) + O(r^{n+2(k+1)}), \tag{4.31}$$

za sve tačke $m \in M$ i sve dovoljno male $r > 0$. Ako je umesto 4.31 ispunjen uslov

$$V_m(r) = V_{f(m)}(r), \tag{4.32}$$

kažemo da je M geodezijski-Einstein-ova mnogostrukost.

Može se očekivati da geodezijski-Einstein-ove mnogostrukosti imaju slična svojstva kao i Einstein-ove mnogostrukosti. U ovom poglavlju dokazaćemo nejednakost između Chern-ovih klasa geodezijski-Einstein-Kähler-ove mnogostrukosti koja uopštava rezultat dobijen u [C-O75]. Takođe, razmatraju se i posledice ove nejednakosti na geodezijski-Einstein-Kähler-ove površi.

Lema 4.9 *Neka su M i M_e kompaktne, n-dimenzione, $n \leq 2$, Kähler-ove mnogostrukosti kao što je pretpostavljeno u Definiciji 4.1. Ako je M geodezijski-Einstein-ova mnogostrukost reda 2 u odnosu na M_e, tada*

$$\int_M \left\{ c_2(M) - \frac{n}{2(n+1)} c_1^2(M) \right\} \wedge [\Phi]^{n-2} \geq 0 \, . \tag{4.33}$$

Za $n \geq 3$ jednakost važi ako i samo ako je M kompleksna prostorna forma. Za $n = 2$, ako je M homogena mnogostrukost, jednakost važi ako i samo ako je M_e kompleksna prostorna forma.

Dokaz: Neka $\|R_e\|^2$, $\|\rho_e\|^2$ i τ_e označavaju odgovarajuće funkcije za Einstein-Kähler-ovu mnogostrukost M_e. Kako je skalarna krivina τ_e konstantna na M_e, 4.1 i 4.31 impliciraju $\tau = \tau_e$ i

$$3(\|R\|^2 - \|R_e\|^2) = 8(\|\rho\|^2 - \|\rho_e\|^2). \tag{4.34}$$

Dakle

$$\begin{aligned} &\int_M \left\{ \gamma_2(M) - \frac{n}{2(n+1)} \gamma_1^2(M) \right\} \wedge \Phi^{n-2} \\ &= \frac{1}{8n(n-1)\pi^2} \int_M \left(\|R_e\|^2 - \frac{4}{n+1} \|\rho_e\|^2 \right) \Phi^n \\ &+ \frac{(n-2)}{12n(n^2-1)} \int_M (\|\rho\|^2 - \|\rho_e\|^2) \Phi^n. \end{aligned} \tag{4.35}$$

Kako je

$$\|\rho\|^2 - \|\rho_e\|^2 = \|\rho\|^2 - \frac{\tau_e^2}{2n} = \|\rho\|^2 - \frac{\tau^2}{2n},$$

to zbog Leme 4.1 vidimo da je

$$\|R_e\|^2 - \frac{4}{n+1} \|\rho_e\|^2 \geq 0 \;\text{ i }\; \|\rho\|^2 - \|\rho_e\|^2 \geq 0,$$

što zajedno sa jednakošću 4.35 daje traženi rezultat.

Pretpostavimo da važi jednakost u 4.33. Tada na $f(M)$ važi $\|R_e\|^2 = (4/(n+1))\|\rho_e\|^2$ i za $n \geq 3$, $\|\rho\|^2 = \|\rho_e\|^2$. Tako, za $n \geq 3$, iz 4.34 sledi $\|R_e\|^2 = \|R\|^2$ i konačno $\|R\|^2 = (4/(n+1))\|\rho\|^2$, što zbog Leme 4.1 znači da je (M, g) kompleksna prostorna forma. Za $n = 2$, Lema 4.1 i jednakost $\|R_e\|^2 = (4/(n+1))\|\rho_e\|^2$ pokazuju da (M_e, g_e) ima konstantnu holomorfnu sekcionu krivinu na skupu $f(M)$. Zatim iz homogenosti površi (M_e, g_e) sledi da je to kompleksna prostorna forma. □

Primer 4.2 *Ovde će biti naveden primer ne-Einstein-ove Kähler-ove mnogostrukosti M koja je geodezijski-Einstein-ova reda 2, tj.*

$$V_m(r) = V(r, M_3) + O(r^{4p+6}), \tag{4.36}$$

za sve $m \in M$ i sve dovoljno male $r > 0$. Ovde je M_3 kompleksna prostorna forma kompleksne dimenzije $2p$, $p \geq 2$, i $V(r, M_3)$ je zapremina geodezijske lopte poluprečnika r u M_3. Zatim, neka su M_1 i M_2 kompleksne prostorne forme kompleksne dimenzije p, čije su skalarne krivine τ_1 i τ_2 redom, $\tau_1 \neq 0$. Mnogostrukost M_3 ima skalarnu krivinu $\tau_3 = \tau_1 + \tau_2$. Pretpostavimo da je $\tau_2 = a\tau_1$ gde broj a zadovoljava kvadratnu jednačinu

$$(p-1)(4p+1)a^2 - 2(p+1)(4p-1) = -(p-1)(4p+1)\ , \tag{4.37}$$

tj.,

$$a_{1,2} = \frac{(p+1)(4p-1) \pm 2\sqrt{3p(4p^2-1)}}{(p-1)(4p+1)}\ .$$

Za kompleksnu prostornu formu M_3, razvoj 4.1 ima oblik

$$\begin{aligned} & V(r, M_3) \\ = \ & \Omega_{4p} r^{4p} \left\{ 1 - \frac{A(M_3)}{12(2p+1)} r^2 + \frac{B(M_3)}{2880(p+1)(2p+1)} r^4 + O(r^6) \right\}, \end{aligned}$$

gde je

$$\begin{aligned} A(M_3) &= \tau(M_3) = \tau_3 = \tau_1 + \tau_2 = (1+a)\tau_1, \\ B(M_3) &= -3\|R_3\|^2 + 8\|\rho_3\|^2 + 5\tau_3^2 \\ &= \left(\frac{-3}{p(2p+1)} + \frac{2}{p} + 5 \right) \tau_3^2. \end{aligned}$$

I na mnogostrukosti $M = M_1 \times M_2$ zapremina male geodezijske lopte poluprečnika r ne zavisi od položaja centra, zato se na sličan način dobija razvoj

$$V(r, M) = \Omega_{4p} r^{4p} \left\{ 1 - \frac{A(M)}{12(2p+1)} r^2 + \frac{B(M)}{2880(p+1)(2p+1)} r^4 + O(r^6) \right\},$$

za

$$\begin{aligned} A(M) &= \tau(M_1 \times M_2) = \tau_1 + \tau_2 = (1+a)\tau_1, \\ B(M) &= -3\|R\|^2 + 8\|\rho\|^2 + 5\tau^2 \\ &= -3(\|R_1\|^2 + \|R_2\|^2) + 8(\|\rho_1\|^2 + \|\rho_2\|^2) + 5(\tau_1 + \tau_2)^2 \\ &= \frac{2}{p}\left(\frac{-3}{p+1} + 2\right)(\tau_1^2 + \tau_1^2) + 5(\tau_1 + \tau_2)^2. \end{aligned}$$

Uzevši u obzir jednačinu 4.37 lako se proverava da je

$$A(M_3) = A(M) \;\; i \; B(M_3) = B(M),$$

što pokazuje da je uslov 4.36 ispunjen. Kako je

$$\|\rho\|^2 - \frac{\tau^2}{4p} = \frac{1}{4p}(\tau_1 - \tau_2)^2 = \frac{1}{4p}(1-a)^2\tau_1^2,$$

to zbog $a \neq 1$ i $\tau_1 \neq 0$, sledi da $M = M_1 \times M_2$ ne zadovoljava Einstein-ov uslov. Na osnovu prethodne leme sledi da važi stroga nejednakost u 4.33 za tangentno raslojavanje mnogostrukosti M. Odstupanje od jednakosti se eksplicitno izražava na sledeći način:

$$\begin{aligned} & 16p(2p-1)\pi^2 \int_M \left\{ \gamma_2 - \frac{p}{2p+1}\gamma_1^2 \right\} \wedge \Phi^{2p-2} \\ &= \int_M \left\{ \frac{1}{2p+1}\tau^2 4\frac{p+1}{2p+1}\|\rho\|^2 + \|R\|^2 \right\} \Phi^{2p} \\ &= \frac{p-1}{3p(2p+1)} \int_M (\tau_1 - \tau_2)^2 \Phi^{2p} - \frac{1}{3p(p+1)(2p+1)} \int_M C(a)\tau_1^2 \Phi^{2p} \\ &= \frac{p-1}{3p(2p+1)} \int_M (\tau_1 - \tau_2)^2 \Phi^{2p}, \end{aligned}$$

jer je

$$C(a) = (1 + a^2)(p - 1)(4p + 1) - 2a(p + 1)(4p - 1)$$

i pri tome je $C(a_1) = C(a_2) = 0$.

Razmotrimo sada posledice Leme 4.9 za Kähler-ovu površ M koja zadovoljava geodezijski-Einstein-ov uslov reda 2. Neka χ, σ i a označavaju redom njenu Euler-ovu karakteristiku, Hirzebruch-ov znak i aritmetički rod. Tada na osnovu Gauss-Roch-Hirzebruch-Chern-ove teoreme(videti [A-S68,Ch78,Hb66,Pl65]) dobijamo

$$\begin{aligned} \chi(M) &= \int_M c_2, \\ \sigma(M) &= \frac{1}{3}\int_M (c_1^2 - 2c_2), \\ a(M) &= \frac{1}{12}\int_M (c_1^2 + c_2). \end{aligned}$$

Kako je

$$\chi(M) - 3a(M) = a(M) - \sigma(M) = \frac{1}{4}\int_M (3c_2 - c_1^2) \geq 0,$$

koristeći Lemu 4.9 dolazimo do sledećeg važnog tvrđenja.

Teorema 4.10 *Neka je (M, g) kompaktna Kähler-ova površ koja zadovoljava geodezijski-Einstein-ov uslov reda 2. Tada je*

(i) $\chi(M) \geq 3a(M)$ *i*

(ii) $a(M) \geq \sigma(M)$.

Jednakost važi u (i) ili (ii) ako i samo ako modelna mnogostrukost M_ϵ ima konstantnu sekcionu krivinu na $f(M) \subseteq M_\epsilon$. □

Primedba: Navedena teorema uopštava Teoremu 10.4 u [G-V79].

Teorema 4.11 *Neka je M kompaktna kompleksna površ. Tada površ $\overline{M}$ koja se dobija iz M proširivanjem k tačaka ne dopušta geodezijski-Einstein-ovu Kähler-ovu metriku reda 2 ako je*

$$k < \sigma - a \quad ili \quad k < \frac{1}{4}(3\sigma - \chi).$$

Dokaz: Kako je aritmetički rod biracionalna invarijanta, površi M i $\overline{M}$ imaju isti aritmetički rod. S druge strane, topološki, proširivanje tačke na površi je ekvivalentno lepljenju CP^2 sa suprotnom orijentacijom (označavaćemo ga sa $C\overline{P}^2$). S obzirom da je $\overline{M}$ dobijeno iz M proširivanjem k tačaka, $\overline{M}$ je difeomorfno direktnoj sumi $M\#kC\overline{P}^2$. Ovde $\#$ označava direktnu sumu topoloških prostora. Za kompaktne kompleksne površi M i N je

$$\sigma(M\#N) = \sigma(M) + \sigma(N)$$

i

$$\chi(M\#N) = \chi(M) + \chi(N) - 2.$$

Pored toga je $\sigma(-M) = -\sigma(M)$ i $\chi(-M) = \chi(M)$, gde je površ $-M$ dobijena iz M promenom orijentacije. Direktno se proverava da su Hirzebruch-ov znak i Euler-ova karakteristika za CP^2 redom 1 i 3. Konačno

$$\sigma(M\#kC\overline{P}^2) = \sigma(M) - k$$

i

$$\chi(M\#kC\overline{P}^2) = \chi(M) - k,$$

te rezultat sledi iz Teoreme 4.10. □

Primenimo sada Teoremu 4.10 na površ

$$M = CP^2\#n = \underbrace{CP^2\#\cdots\#CP^2}_{n}.$$

Posledica 4.12 *Površ $M = CP^2\#n$ ne dopušta geodezijski-Einstein-ovu Kähler-ovu metriku reda 2 za $n > 1$.*

Dokaz: Kako je $\sigma(M) = n$ i $\chi(M) = n + 2$,

$$\chi(M) - 3\sigma(M) = -2(n-1) < 0$$

za $n > 1$. To znači da je postojanje tražene metrike u kontradikciji sa Teoremom 4.10. Primetimo da za parno n, M ne dopušta ni skoro kompleksnu strukturu jer $\chi + \sigma$ nije deljivo sa 4(videti [Bs81, poglavlje 5]). □

Bibliografija

[A84] E. Abbena, *An example of an almost Kähler manifolds which is not Kählerian,* Bolletino U.M.I.6,3-A (1984), 383–392.

[Ap55] M. Apte, *Sur certaines classes des caracteristuques des varietes kählieriennes compactes,* C. R. Acad. Sci. Paris, 240(1955), 144–151.

[A-S68] M.F. Atiyah and I.M. Singer, *The index of elliptic operators,* Ann. of Math., 87(1968), 546–604.

[Bd87] S. Bando, *The K-energy map, almost Einstein Kähler metrics and an inequality of the Miyaoka-Yau type,* Tôhoku Math. Journ., 39(1987), 231–235.

[B-S87] M. Barros and F. Santos *On the first Chern class of a complex submanifold in an almost hermitian manifold and the normal connection,* Coll. Math., 54(1987), 59–65.

[Bg65] M. Berger, *Sur les variétés d'Einstein compactes,* C.r.IIIe Reunion Math.Expression latine, Namur, 1965, 35–55.

[Bs81] A. Besse, *"Seminaire Arthur Besse 1978/79,"* Cedic/Fernand Nathan, Paris, 1981.

[Bs87] A. Besse, *"Einstein Manifolds,"* Springer-Verlag, Berlin, 1987.

[Bl88] D. Blair, *The isolatedness of special metrics,* Proc.of the International Conference on Differential Geometry and its Applications, Dubrovnik, 1988, 49–58.

[Bz89] N. Blažić, *Chern classes of complex vector bundles over almost complex manifolds,* Bolletino U.M.I.7,3-B (1989), 939–951.

[Bz89a] N. Blažić, *The volumes of small geodesic balls and generalized Chern numbers of Kähler manifolds,* Nagoya Math. J., 116(1989), 181–189.

[Bz89b] N. Blažić, *On almost Einstein holomorphic vector bundles over hermitian surfaces,* Proc. Amer. Math. Soc. (to appear).

[Bk79] N. Bokan, *"Grupe Transformacija na Skoro Kontaktnim Mnogostrukostima ,"* Doktorska teza, Beograd, 1979.

[Bg77] J. P. Bourguignon, *Premiéres formes de Chern des variétes Kählériennes compactes,* Séminare Bourbaki, 1977–78, No. 507, LNM 710, 1–21, Springer-Verlag, 1979.

[Ca55] E. Calabi, *On Kähler manifolds with vanishing canonical class,* Alg. geom. and top., a symposium in honor of S. Lefschetz, Princeton Univ.Press., 1955, 78–89.

[Ch71] B.-Y. Chen, *"Notes on Characteristic Classes,"* lecture notes, Michigan State University, E. Lansing, 1971.

[Ch78] B.-Y. Chen, *Some topological obstructions to Bochner-Kähler metrics and their applications,* J.Diff.Geom., 13(1978), 547–558.

[Ch84] B.-Y. Chen, *"Total Mean Curvature and Submanifolds of Finite Type,"* World Scientific, 1984.

[C-O75] B.-Y. Chen and K. Ogiue, *Some characterizations of complex space forms in terms of Chern classes,* Quart. J. Math. Oxford 26(1975), 459–464.

[C-V81] B.-Y. Chen and L. Vanhecke, *Differential geometry of geodesic spheres,* J. Reine Angew. Math., 325(1981), 28–67.

[Ch46] S.S. Chern, *Characteristic classes of hermitian manifolds,* Ann. of Math., 47(1946), 85–121.

[Ch79] S.S. Chern, *"Complex Manifolds Without Potential Theory,"* Springer-Verlag, Berlin, 1979.

[D-G-M-S] P. Deligne, P. Griffiths, J. Morgan and D. Sullivan, *Real homotopy type of Kähler manifolds,* Inventiones math.29(1975), 245–274.

[E-L83] J. Eels and L. Lemaire, *"Selected Topics in Harmonic Maps,"* Regional conference Series in mathematics, 50, Am.Math. Soc., 1983.

[F-G-G] M. Fernandez, M. Gotay and A. Gray, *Four-dimensional parallelizable symplectic and complex manifolds,* Proc.Amer. Math.Soc.

[Gh80] P. Gauduchon, *La topologie d'une surface hermitiene d'Einstein,* C. R. Acad. Sc. Paris Sér.A 290(1980), 509–512.

[Gk74] P. Gilkey, *"The Index Theorem and the Heat Equation,"* Publish or Perish, 1974.

[Gb62] S.I. Goldberg, *"Curvature and Homology,"* Academic Press, New York, 1962.

[Gb69] S.I. Goldberg, *Integrability of almost Kähler manifolds,* Proc. Amer. Math. Soc., 21(1969), 96–100.

[Gr73] A. Gray, *The volume of small geodesic balls in a Riemannian manifold,* Michigan Math.J., 20(1973), 329–344.

[Gr88] A. Gray, *"Tubes,"* Addison-Wesley Publishing company, 1990.

[G-B-N-V] A. Gray, M. Barros, A. Naveira and L. Vanhecke, *The Chern numbers of holomorphic vector bundles and formally holomorphic connections of complex vector bundles over almost complex manifolds,* Jour. für die reine und ang.Math.314(1980), 84–98.

[G-He80] A. Gray and L. M. Hervella, *The sixteen classes of almost Hermitian manifolds and their linear invariants,* Ann. Mat. Pura Appl.(IV), 123(1980), 35–58.

[G-V79] A. Gray and L. Vanhecke, *Riemmanian Geometry as described by the volumes of small geodesic balls,* Act Math., 142(1979), 157–198.

[G-H78] P. Griffits and J. Harris, *"Principles of Algebraic Geometry,"* A Wiley -Interscience Publication, 1978.

[Gh52] H. Guggenheimer, *Uber vierddimensionale Einstein-raume,* Experimentia 8(1952), 420–421.

[Hb66] F. Hirzebruch, *"Topological Methods in Algebraic Geometry,"* Springer-Verlag, Berlin, 1966.

[Kb56] S. Kobayashi, *Principal fibre bundles with the 1-dimensional toroidal group,* Tohoku Math.J., (2)8(1956), 29–45.

[Kb80] S. Kobayashi, *First Chern class and holomorphic tensor fields,* Nagoya Math. J., 77(1980), 5–11.

[Kb82a] S. Kobayashi, *Einstein-Hermitian vector bundles and stability,* Proc.Symp. Global Riem.Geom., Durham(1982), 60–64.

[Kb82b] S. Kobayashi , *Curvature and stability of vector bundles,* Proc.Japan Acad.58,Ser.A(1982), 158–162.

[Kb87] S. Kobayashi, *"Differential Geometry of Complex Vector Bundles,"* Princeton University Press, Princeton, 1987.

[K-N69] S. Kobayashi and K. Nomizu, *"Foundations of Differential Geometry,"* vol.1,2, Interscience Publishers, 1969.

[Kt70] B. Konstant, *Quantization and unitary representations,* Lecture Notes in Mathematics, Springer-Verlag, New York 170(1970), 87–207.

[L82] M. Lübke, *Chernklassen von Hermite-Einstein-vectorbündeln,* Math.Ann.260(1982), 133–141.

[M-S74] J. Milnor and J. Stasheff, *"Characteristic Classes,"* Princeton Univ. Press and Univ. of Tokyo Press, 1974.

[M-K71] J. Morrow and K. Kodaira, *"Complex Manifolds,"* New York, 1971.

[Pl65] R. S. Palais, *"Seminar on Atiyah-Singer index theorem,"* Annals of Math. Studies 57, Princeton University Press, Princeton, 1965.

[Pb78] A. Polombo, *Nombres caracteristiques d'une variete Riemannianne de dimension 4,* J.Differential Geometry 13(1978), 145–162.

[Po81] W. A. Poor, *"Differential Geometric Structure,"* Mc Grow-Hill, New York, 1981.

[Sg85] K. Sekigawa, *On some 4-dimensional compact Einstein almost Kähler manifolds,* Math. Ann., 271(1985), 333–337.

[Sg87] K. Sekigawa, *On some compact Einstein almost Kähler manifolds,* J. Math. Soc. Japan, 39(1987), 677–684.

[S-V] K. Sekigawa and L. Vanhecke, *Four-dimensional almost Kähler Einstein manifolds,* Ann. di Mat. pura ed appl.

[Th76] W.P. Thurston, *Some simple examples of symplectic manifolds,* Proc. Amer. Math. Soc., 55(1976), 467–468.

[T-V81] F. Tricerri and L. Vanhecke, *Curvature tensors on almost Hermitian manifolds,* Transactions of the Amer.Math.Soc.267, 2(1981), 365–398.

[Vs87] I. Vaisman, *"Symplectic Geometry and Secondary Characteristic Classes,"* Birkhäuser, 1987.

[Ws83] B. Watson, *New examples of strictly almost Kähler manifolds,* Proc. Amer. Math. Soc., 88(1983), 541–544.

[W52] A. Weil, *Sur les théoremes de de Rham,* Comm. Math. Helv., 26(1952), 119–145.

[W71] A. Weil, *"Varietes Kähleriannes,"* Herman, Paris, 1971.

[Wl73] R.O. Wells , *"Differential Analysis on Complex Manifolds,"* Prentice-Hall, Inc., 1973.

[Ya77] S. T. Yau, *On Calabi's conjecture and some new results in algebraic geometry,* Proc. Nat.Acad. Sci. USA, 74(1977), 1798–1799.

[Ya78] S. T. Yau, *On the Ricci curvature of a compact Kähler manifold and the complex Monge-Ampére equation I,* Com. Pure and Appl. Math., 31(1978), 339–411.