UNIVERZITET U BEOGRADU

PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET

Pogány Tibor

Singularni slučajni procesi, Padé-aproksimacija i srednje kvadratna konvergencija

– doktorska disertacija –

ОСНОВНА ОРГАНИЗАЦИЈА УДРУЖЕНОГ РАДА
ЗА МАТЕМАТИКУ, МЕХАНИКУ И АСТРОНОМИЈУ
БИБЛИОТЕКА
Број: Dokt. 198/1
Датум: 5. 12. 1986.

BEOGRAD

1986

posvećeno mojoj Brani

ОСНОВНА ОРГАНИЗАЦИЈА УДРУЖЕНОГ РАДА
ЗА МАТЕМАТИКУ, МЕХАНИКУ И АСТРОНОМИЈУ
БИБЛИОТЕКА

Број: ______________________

Датум: ______________________

SADRŽAJ

ЗА МАТЕМАТИКУ, МЕХАНИКУ И АСТРОНОМИЈУ
БИБЛИОТЕКА
Број:
Датум:

Umesto predgovora

„... se rađau ... u Ribi -
- e,ti će da prodavau
prženu ribu i retoriku."

PETRONIJE ARBITER: SATIRIKON

Ovaj rad primenjuje klasične metode i rezultate Padé-aproksimacije u teoriji stacionarnih slučajnih procesa.Racionalna aproksimacija mi nije bila cilj, nego tek sredstvo.Zašto baš racionalna aproksimacija? Slučajni procesi sa racionalnim spektralnim gustinama su veoma važni u primenama - jednačina oblika Wienera-Hopffa je česta u estimaciji slučajnih procesa,a ona je rešiva jedino u toj klasi analitičkih funkcija (Yaglom).

Singularni slučajni procesi se mogu ekstrapolirati u srednje kvadratnom bez greške.Ta njihova osobina ih eliminiše iz sfere interesovanja većeg dela istraživača.Oni,koji su se bavili takvim procesima, su uglavnom davali potrebne i dovoljne uslove regularnosti (singularnosti) slučajnih procesa preko konvergencije (divergencije) integrala (2),(79),tako da je nedostatak literature o singularnim procesima bio jedan od stimulansa za pisanje ovog rada.

Divergencija integrala (2) očigledno zavisi od „repova" spektralne gustine $f(\lambda)$,tj. od brzine kojom $f(\lambda)$ iščezava kada $|\lambda| \to \infty$.Ta činjenica se iskoriščava u poglavlju I. kod konstrukcije nizova spektralnih gustina.

U čitavom radu osnovni pojam je centrirani slučajan proces sa neprekidnim vremenom: $EX(t) \equiv 0$.Ako to nije slučaj,posmatraćemo proces $X_0(t) = X(t)-EX(t)$ sa nultim očekivanjem.

Veličina $EX(t)\overline{X(o)} = K_x(t)$ je korelaciona funkcija procesa $X(t)$,koja preko Bohner-Hinčinove teoreme može pretstaviti u obliku

$$K_x(t) = \int_R e^{it\lambda}\, dF_x(\lambda) \quad ,$$

gde je $F_x(\lambda)$ neka funkcija raspodele.Radimo isključivo sa apsolutno neprekidnim $F_x(\lambda)$ (koju nazivamo spektralnom funkcijom),dakle $F_x'(\lambda) = f_x(\lambda)$ .Funkcija $f_x(\lambda)$ je spektralna gustina procesa $X(t)$ i ona je L_1-integrabilna na R ,nenegativna (za skalarne) odnosno nenegativno definitna i hermitski simetrična (za vektorske procese).

Funkcija $EX(t)\overline{Y(o)} = K_{xy}(t)$ je cross-koreleciona funkcija slučajnog procesa $X(t)$ i slučajnog procesa $Y(t)$ .Takođe preko Bohner-Hinčinove teoreme imamo da je

$$K_{xy}(t) = \int_R e^{it\lambda} f_{xy}(\lambda)\, d\lambda \quad ,$$

gde je $f_{xy}(\lambda)$ takozvana cross-spektralna gustina. Ona je L_1-integrabilna i hermitski simetrična :

$$f_{xy}(\lambda) = \overline{f_{yx}(\lambda)} \quad .$$

Većina definicija i oznaka su usaglašene sa standardnom literaturom iz teorije slučajnih procesa i Padé-aproksimacije.

Zahvaljujem se mentoru dr. J.Mališiću i dr.P.Peruničiću na korisnim savetima i sugestijama.Takođe dugujem zahvalnost i dr.Gy. Michaletzkom,kandidatu matematičkih nauka,za ideju elegantnog rešenja problema koji je izložen u II.5.5..

Bor,Zavidovići

avgust 1986. Pogány Tibor

I. SINGULARNI SLUČAJNI PROCESI I SREDNJE KVADRATNA KONVERGENCIJA

I.1. Uvod

I.1.1. Na osnovu jednog rezultata E.M.Slutskog,stacionaran u širokom smislu slučajan proces X(t) sa neprekidnim vremenom i spektralnom gustinom $f(\lambda) = e^{-\lambda^2}$ (za koji tada Slutsky nije mogao znati da je singularan!) može se aproksimirati u srednje kvadratnom,nizom stacionarnih regularnih slučajnih procesa $\{X_n(t)\}_1^\infty$ čije su spektralne gustine oblika $\{f_n(\lambda) = (1 + \lambda^2/n)^{-n}\}_1^\infty$,proizvoljnom tačnošću (vidi [46]).

I. 1.2. Odmah se nameće nekoliko pitanja:

1) Možemo li aproksimirati svaki singularan,stacionaran u širokom smislu slučajan proces,nizom regularnih slučajnih procesa,u srednje kvadratnom?
2) Možemo li aproksimirati regularan proces nizom singularnih?

I.1.3. Konvergencijom niza regularnih slučajnih procesa ka regularnom,kao i konvergencijom niza singularnih procesa ka singularnom procesu nećemo se baviti.Te konvergencije i rezultati u vezi sa njima mogu se naime dobiti kao posledice nekih teorema iz I. poglavlja rada.

I.2. Metoda neprekidnih spektralnih gustina

I.2.1. Neka je $\{f_n\}$ proizvoljan niz. Ako $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{} f$ u nekom smislu, tada kažemo da niz f_n aproksimira vrednost f. Ako je f_n spektralna gustina, tada se radi o konvergenciji tačka po tačka; ako je f_n slučajan proces, tada se radi o srednje kvadratnoj konvergenciji.

DEFINICIJA I.2.1. Neka je $X(t)$ stacionaran u širokom smislu slučajan proces sa spektralnom gustinom $f(\lambda)$. Kažemo da je $X(t)$ regularan (singularan), ako je

$$(1) \qquad \bigcap_t H_t(X) = 0 \qquad (= H(X))$$

gde je $H_t(X) = \langle X(s) \mid s \leqq t \rangle$, zatvoreni linearni omotač skupa $\{X(s) \mid s \leqq t\}$, dok je $H(X) = \bigcup_t H_t(X)$.

<u>TEOREMA I.2.1. Stacionaran slučajan proces</u> $X(t)$ <u>sa spektralnom gustinom</u> $f(\lambda)$ <u>je regularan (singularan), akko je integral</u>

$$(2) \qquad \int_R \frac{\ln f(\lambda)}{1+\lambda^2}\, d\lambda$$

<u>konvergentan (divergentan).</u>

Za dokaz vidi [38].

I.2.2. U radu ćemo se baviti singularnim slučajnim procesima čija je spektralna gustina pozitivna na svakom intervalu pozitivne Lebesgue-ove mere.Takvih spektralnih gustina ima dve vrste u našem izlaganju.Prvu klasu čine spektralne gustine koje su „odvojene" od nule,tj. za koje važi $0 < c \leq f(\lambda)$, (npr. tu spadaju spektralne gustine oblika $e^{-\lambda^2}R(\lambda)$,gde je $R(\lambda)$ racionalna spektralna gustina).U drugu klasu spadaju pozitivne spektralne gustine koje ne možemo konstantom „odvojiti" od nule(npr. spektralna gustina Slutskog).

I.2.3. Uslov (2) je ekvivalentan uslovu

$$\int_R \frac{|\ln f(\lambda)|}{1+\lambda^2}\,d\lambda < \infty \quad (= \infty)\,. \tag{3}$$

NAPOMENA I.2.1. Donji indeks r (s) označava regularnost (singularnost) kod slučajnih procesa.

PRIMER I.2.1. Neka je $X_r(t)$ slučajan proces sa spektralnom gustinom $f_r(\lambda)$.Iz konvergencije integrala (3) sledi da je

$$f_r(\lambda)|\lambda|^k \leq K_1 \tag{4}$$

$k \geq 2, K_1 > 0$; za dovoljno veliko λ .

PRIMER I.2.2. Neka je $X_s(t)$ slučajan proces sa spektralnom gustinom $f_s(\lambda)$.Iz divergencije integrala (3) sledi da važi

$$(5) \qquad f_s(\lambda) \underset{|\lambda|\to\infty}{\sim} K_2 e^{-a|\lambda|^b}, \quad a>0,\ b \geq 1, K_2>0.$$

□ <u>TEOREMA I.2.2. Neka je</u> $X_r(t)$ <u>regularan stacionaran slučajan proces. Tada postoji niz</u> $X_{ns}(t)$ <u>singularnih slučajnih procesa čija je srednje kvadratna granica</u> $X_r(t)$.

<u>DOKAZ.</u> Označimo spektralnu gustinu slučajnog procesa $X_r(t)$ sa $f_r(\lambda)$. Neka je spektralna gustina slučajnog procesa $X_{ns}(t)$ jednaka $f_{ns}(\lambda) = e^{-\lambda^2} f_r(\lambda) \sum_{0}^{n} \frac{\lambda^{2k}}{k!}$. Singularnost slučajnog procesa $X_{ns}(t)$ pak obezbeđuje faktor $e^{-\lambda^2}$. Jasno je da važi

$$\left| f_{ns}(\lambda) - f_r(\lambda) \right| = f_r(\lambda) \left| e^{-\lambda^2} \sum_{0}^{n} \frac{\lambda^{2k}}{k!} - 1 \right|$$

$$= f_r(\lambda)\, e^{-\lambda^2} \Big(\sum_{n+1}^{\infty} \frac{\lambda^{2k}}{k!} \Big) \leq f_r(\lambda) \frac{\lambda^{2(n+1)}}{(n+1)!},$$

gde je izraz u maloj zagradi ostatak jednog, svuda konvergentnog stepenog reda.

Neka je $K(t)$ korelaciona funkcija $X_r(t)$ i neka je $K^+ = \max\limits_{j} \left| K^{(j)}(0) \right|$. Tada iz

$$E \left| X_{ns}(t) - X_r(t) \right|^2 = \int_R \left(f_{ns}(\lambda) + f_r(\lambda) - f_{ns,r}(\lambda) \right) d\lambda$$

$$= \int_R \Big\{ \Big(e^{-\lambda^2} \sum_{0}^{n} \frac{\lambda^{2k}}{k!} + 1 \Big) f_r(\lambda) - 2e^{-\lambda^2/2} \Big(\sum_{0}^{n} \frac{\lambda^{2k}}{k!} \Big)^{1/2} f_r(\lambda) \Big\}\, d\lambda$$

$$\leq \int_R \left| e^{-\lambda^2/2} \left(\sum_0^n \frac{\lambda^{2k}}{k!}\right)^{1/2} - 1 \right|^2 f_r(\lambda)\, d\lambda$$

$$\leq \int_R \frac{\lambda^{4(n+1)}}{((n+1)!)^2} f_r(\lambda)\, d\lambda = \frac{\left|K^{(2n+2)}(o)\right|}{((n+1)!)^2}$$

$$\leq \frac{K^+}{((n+1)!)^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} o \tag{6}$$

sledi da je $\underset{n\to\infty}{\text{l.i.m.}}\, X_{ns}(t) = X_r(t)$.

Usput smo koristili procenu

$$\left| e^{-\lambda^2} \sum_0^n \frac{\lambda^{2k}}{k!} - 1 \right| \leq \frac{\lambda^{2(n+1)}}{(n+1)!} \ .$$

Kako je takođe:

$$\left| \left(e^{-\lambda^2} \sum \frac{\lambda^{2k}}{k!}\right)^{1/2} - 1 \right| = \frac{\left| e^{-\lambda^2} \sum_0^{2n} \frac{\lambda^{2k}}{k!} - 1 \right|}{\left| 1 + e^{-\lambda^2/2} \left(\sum_0^n \frac{\lambda^{2k}}{k!}\right)^{1/2} \right|}$$

$$\leq \frac{\lambda^{2(n+1)}}{(n+1)!} \; \frac{1}{1 + \left(e^{-\lambda^2} \sum_0^{n} \frac{\lambda^{2k}}{k!}\right)^{1/2}} \leq \frac{\lambda^{2(n+1)}}{(n+1)!} \ ,$$

sledi (6). Q.E.D.

I.2.3. Posmatrajmo sada proces $X_{ns}(t)$. Neka je $X_{os}(t) \equiv X(t)$. Spektralna gustina procesa $X_s(t)$ je $f_s(\lambda) = e^{-\lambda^2} f_r(\lambda)$, čiji oblik obezbeđuje egzistenciju momenata proizvoljnog reda korelacione funkcije,pa i procesa $X_s(t)$.Ako je $X_s^{(k)}(t)$ k-ti srednje kvadratni izvod slučajnog procesa $X_s(t)$ sa spektralnom gustinom $f_s^k(\lambda) = \lambda^{2k} f_s(\lambda)$,tada je

$$f_{ns}(\lambda) = \sum_0^n \frac{f_s^k(\lambda)}{k!} \quad .$$

Zbog

$$E|X_{ns}(t)|^2 = \sum_0^n \int_R \frac{1}{k!} f_s^k(\lambda)\, d\lambda = E\sum_0^n \left|\frac{X_s^{(k)}(t)}{(k!)^{1/2}}\right|^2$$

je evidentna veza $X_{ns}(t) \doteq \left(X_s(t), X_s'(t), \ldots, \frac{X_s^{(n)}(t)}{(n!)^{1/2}}\right)$.

NAPOMENA I.2.2. $F_{ns}(\lambda)$ je spektralna funkcija $X_{ns}(t)$.

$$F_{ns}(\lambda) = \int_{-\infty}^{\lambda} f_{ns}(u)\, du = \sum_0^n \frac{1}{k!} \int_{-\infty}^{\lambda} e^{-u^2} f_r(u)\, u^{2k}\, du \quad .$$

Odavde je $F_{ns}(\lambda) \xrightarrow[n\to\infty]{} F_r(\lambda)$ tačka po tačka.Dalje,Karhunenovo razlaganje $F_{ns}(\lambda)$ daje:

$$F_{ns}(\lambda) = F_{ns}^{(1)}(\lambda) + F_{ns}^{(2)}(\lambda) + F_{ns}^{(3)}(\lambda)$$

gde je $F_{ns}^{(1)}(\lambda)$ apsolutno neprekidna,$F_{ns}^{(2)}(\lambda)$ „funkcija skokova", $F_{ns}^{(3)}(\lambda)$ neprekidna funkcija čiji se prvi izvod anulira.
Dakle

$$F_{ns}'(\lambda) = f_{ns}^{(1)}(\lambda) = e^{-\lambda^2} F_r'(\lambda) \sum_0^n \frac{\lambda^{2k}}{k!} \; .$$

Zbog toga je $F_{ns}^{(2)}(\lambda) = \sum_{\Lambda(\lambda)=\{k|\lambda_k \le \lambda\}} (F_r(\lambda_k+o) - F_r(\lambda_k-o)) = F_r^{(2)}(\lambda)$

odnosno $F_{ns}^{(3)}(\lambda) = F_r^{(3)}(\lambda)$ pošto skup diskontinuiteta $\Lambda(\lambda)$ potiče od $f_r(\lambda)$.

PRIMER I.2.3. Sličan aproksimativni postupak kao u teoremi I.2.2. možemo dati i preko nizova spektralnih gustina kao

$$f_{ns}(\lambda) = e^{-\lambda^{2N}} \left(\sum_{o}^{n} \frac{\lambda^{2Nk}}{k!}\right) f_r(\lambda) \ ; \quad N \in \mathbb{N}$$

$$f_{ns}(\lambda) = e^{-\lambda^{2M}\, a(n)} f_r(\lambda) \ ; \quad M \in \mathbb{N} \ , \ a(n) \xrightarrow[n\to\infty]{} o.$$

U tim slučajevima ipak je teže svođenje niza slučajnih procesa $X_{ns}(t)$,na jedan jedini proces kao u I.2.3..

I.2.4. Neka je $f_a(\lambda)$ spektralna gustina slučajnog procesa $X_a(t)$, $a \in \{s,r\}$; $\{\alpha(n)\}_o^\infty$ proizvoljan,realan,monotono opadajući nula-niz.Tada važi

□ TEOREMA I.2.3. Svaki singularan slučajan proces $X_s(t)$ može se predstaviti kao granica (srednje kvadratna) jednog niza regularnih slučajnih procesa $\{X_{nr}(t)\}_o^\infty$.

DOKAZ. Neka je spektralna gustina slučajnog procesa $X_{nr}(t)$ $f_{nr}(\lambda)$.Uočimo proizvoljan regularan slučajan proces $X_r(t)$ sa spektralnom gustinom $f_r(\lambda)$,korelacionom funkcijom $K_r(t)$ i disperzijom $D\, X_r(t) = K_r(o)$.

Neka je $f_{nr}(\lambda) = f_s(\lambda) + \alpha(n)f_r(\lambda)$.Tada je

$$E\left|X_{nr}(t) - X_s(t)\right|^2 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \quad .$$

Prvo ćemo uvideti regularnost slučajnog procesa $X_{nr}(t)$.

Neka je

$$f_n^+(\lambda) = \begin{cases} (1+\alpha(n))f_r(\lambda) & f_r(\lambda) > f_s(\lambda) \text{ na } R \\ \begin{cases} f_{nr}(\lambda) & \lambda\in[\lambda_1,\lambda_2] \\ (1+\alpha(n))f_r(\lambda) & \lambda\in[\lambda_1,\lambda_2] \end{cases} & \text{za } f_r(\lambda') \leq f_s(\lambda') \end{cases}$$

gde su λ_1, λ_2 minimalni,odnosno maksimalni element skupa $\Lambda = \{\lambda \mid f_r(\lambda) = f_s(\lambda)\}$.Ako je $\Lambda \neq \emptyset$,tada je $f_n^+(\lambda)$ neprekidna u tačkama λ_1, λ_2.Dalje,$f_n^+(\lambda) \geq f_{nr}(\lambda)$,a jednakost nastaje isključivo za konačne vrednosti argumenta.Štaviše, $f_n^+(\lambda)$ je spektralna gustina jednog regularnog slučajnog procesa,koji možemo označiti sa $X_n^+(t)$.Na taj način imamo konvergenciju integrala

$$\int_R \frac{|\ln f_{nr}(\lambda)|}{1+\lambda^2}\,d\lambda \leq \int_R \frac{|\ln f_n^+(\lambda)|}{1+\lambda^2}\,d\lambda$$

pošto je desna strana poslednje nejednakosti konačna.Dakle slučajan proces $X_{nr}(t)$ je regularan.Tvrđenje teoreme sledi sada iz

$$E\left|X_{nr}(t) - X_s(t)\right|^2 = \int_R (2f_s(\lambda) + \alpha(n) f_r(\lambda) - 2f_{nr,s}(\lambda))d\lambda$$

$$\leq \alpha(n)\, K_r(o) \xrightarrow[n\to\infty]{} o \; . \tag{7}$$

U relaciji (7) jednakost nastupa akko su slučajni procesi $X_r(t)$ i $X_s(t)$ nekorelirani. Q.E.D.

NAPOMENA I.2.3. U oba dosadašnja slučaja razmatrali smo konvergenciju realnih slučajnih procesa, odnosno $X_a(t)$ je realan za $a \in \{r,s,nr,ns\}$. Ako je slučajan proces $X_a(t)$ kompleksan tada se u relacijama (6),(7) umesto $f_{nr,s}(\lambda)$ ($f_{ns,r}(\lambda)$) pojavljuju izrazi $\mathrm{Re}\, f_{nr,s}(\lambda)$ ($\mathrm{Re}\, f_{ns,r}(\lambda)$); ostali postupci u dokazivanju su u potpunosti identični već izloženim.

I.3. Metoda stepenastih funkcija

I.3.1. U ovom delu prvog poglavlja rada koristićemo metodu stepenastih funkcija u dokazivanju rezultata, koji se takođe odnose na pitanja u I.1.2..

DEFINICIJA I.3.1. Funkcija

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & x \in A \\ o & x \notin A \end{cases}$$

je indikatorna (stepenasta) funkcija skupa A.

I.3.2. Neka je $A = (-a_n, a_n)$, gde je $\{a_n\}$ realan, pozitivan određeno divergentan niz. Uvodimo sledeće oznake:

1) $\chi_{(-a_n,a_n)} = \chi_n$; $\chi_{(-a_n^\alpha,a_n^\alpha)} = \chi_{n;\alpha}$

2) $\chi_{A \triangle B} = \chi_A \triangle \chi_B$

3) $\chi_{\overline{A}} = \overline{\chi_A}$.

Tada važe sledeće osobine stepenastih funkcija:

1) $\chi_{A \cap B} = \chi_A \chi_B$

2) $\chi_o = \chi_\emptyset$

3) $\chi_m \overline{\chi_m} = o$

4) $\chi_n \triangle \chi_k + \chi_k \triangle \chi_m = \chi_n \triangle \chi_m$, ako je $n < k < m$.

Sada možemo izreći generalizaciju dosadašnjih rezultata, do kojih dolazimo sasvim novom aproksimativno-dokaznom metodom.

□ TEOREMA I.3.1. Neka je $X_a(t)$ stacionaran u širokom smislu slučajan proces. Tada postoji bar jedan niz stacionarnih u širokom smislu slučajnih procesa $\{X_{nb}(t)\}_o^\infty$ takav da važi

$$E\left| X_{nb}(t) - X_a(t)\right|^2 \xrightarrow[n\to\infty]{} o,$$

ako je $a, b \in \{r, s\}$; $a \neq b$.

DOKAZ. Neka je $f_a(\lambda)$ spaktralna gustina slučajnog procesa $X_a(t)$, $a \in \{r, s\}$. Tada je niz slučajnih procesa sa spektralnom gustinom (to je gustina $n+1$ - og člana niza)

$$(8) \qquad f_n(\lambda) = f_s(\lambda)\chi_{n;\alpha} + f_r(\lambda)(1 - \chi_{n;\alpha})$$

upravo traženi aproksimativni niz iz teoreme. Posredstvom ovog uopštenja nije teško uvideti da $X_n(t) \xrightarrow[n\to\infty]{} X_s(t)$ za $\alpha = 1$, dok za $\alpha = -1$ $X_n(t) \xrightarrow[n\to\infty]{} X_r(t)$ u srednje kvadratnom smislu.

Slučajni procesi $X_n(t)$ su regularni za svako n pošto je

$$\int_R \frac{|\ln f_n(\lambda)|}{1+\lambda^2}\,d\lambda = \int_{-a_n^\alpha}^{a_n^\alpha} \frac{|\ln f_s(\lambda)|}{1+\lambda^2}\,d\lambda + \int_{R\setminus(-a_n^\alpha,a_n^\alpha)} \frac{|\ln f_r(\lambda)|}{1+\lambda^2}\,d\lambda$$

konačan. Konačnost drugog sabirka je očigledna iz definicije regularnosti proizvoljnog slučajnog procesa (teorema I.2.1.), dok je prvi sabirak na desnoj strani zadnje jednakosti konačan na osnovu konvencije I.2.2..

Uzmimo za sada slučaj $\alpha = 1$, što znači da je $\chi_{n;1}$ stepenasta funkcija zastupljena u relaciji (8).

Važi takođe činjenica da je niz slučajnih procesa $\{X_n(t)\}_0^\infty$ Cauchy-jev u srednje kvadratnom. Dokažimo to. Predstavimo stoga spektralno naše slučajne procese:

$$X_a(t) = \int_R e^{it\lambda}\,dZ_a(\lambda) \qquad a \in \{r,s,n\}\,.$$

Neka je $m < n$. Tada je

$$Z_m(\lambda) - Z_n(\lambda) = \chi_m \Delta \chi_n \, (Z_s(\lambda) - Z_r(\lambda))$$

i dalje

$$E\left|X_m(t) - X_n(t)\right|^2 = E\iint\limits_{R\,R}\left|dZ_m(\lambda) - dZ_n(\lambda)\right|^2$$

$$= E\iint\limits_{R\,R}\chi_m \Delta \chi_n \left| dZ_s(\lambda) - dZ_r(\lambda)\right|^2$$

$$\leq 2E\iint\limits_{R\,R}\chi_m \Delta \chi_n \left(\left|dZ_s(\lambda)\right|^2 + \left|dZ_r(\lambda)\right|^2\right)$$

$$\leq 4\int_{a_n}^{a_m}\left(\int_R E\left(\left|dZ_s(\lambda)\right|^2 + \left|dZ_r(\lambda)\right|^2\right)\right)$$

$$\leq 8\int_{a_n}^{a_m}\max\left(f_s(\lambda), f_r(\lambda)\right) d\lambda \ .$$

Neka je $\max(f_s(\lambda),f_r(\lambda)) = f_r(\lambda)$ na intervalu integracije. Niz $\{a_n\}$ ćemo tako odabrati da važi (4).Primenimo dakle relaciju (4) na procenu odstojanja $X_m(t)$ od $X_n(t)$.Dobijamo procenu

$$(9) \qquad E\left|X_m(t) - X_n(t)\right|^2 \leq \frac{8K_1}{k-1}\left(a_n^{-k+1} - a_m^{-k+1}\right) .$$

Ako je $\max(f_s(\lambda),f_r(\lambda)) = f_s(\lambda)$,niz $\{a_n\}$možemo uvek tako odabrati da važi relacija (5) u kojoj imamo najbolju aproksimaciju na $E\left|X_m(t) - X_n(t)\right|^2$ za $b = 1$.

A to je

$$E|X_m(t) - X_n(t)|^2 \leqq \frac{8K_2}{a}(e^{-a\cdot a_n} - e^{-a\cdot a_m}) . \tag{10}$$

Kako je a_n divergentan niz to desne strane relacija (9) i (10) teže nuli kada m,n teže beskonačnosti.

Kako je dakle $\{X_n(t)\}_0^\infty$ Cauchy-jev niz,on je svakako konvergentan.Uverimo se još da je srednje kvadratna granica niza slučajnih procesa $\{X_n(t)\}_0^\infty$ upravo $X_a(t)$ $a \in \{r,s\}$ za $\alpha = \pm 1$.Procenićemo dakle odstupanje $X_n(t)$ od $X_s(t)$ u normi,za veliko n.

$$E|X_n(t) - X_s(t)|^2 = E\Big|\int_{-a_n}^{a_n} e^{it\lambda}\, dZ_s(\lambda) + \int_{R\setminus(-a_n,a_n)} e^{it\lambda}\, dZ_r(\lambda)$$

$$- \int_R e^{it\lambda}\, dZ_s(\lambda)\Big|^2$$

$$= E\Big|\int_{R\setminus(-a_n,a_n)} e^{it\lambda}\, d(Z_r(\lambda) - Z_s(\lambda))\Big|^2 = \iint_{R\setminus(-a_n,a_n)} E|d(Z_r(\lambda) - Z_s(\lambda))|^2$$

$$\leqq 2\iint_{R\setminus(-a_n,a_n)} E(|dZ_r(\lambda)|^2 + |dZ_s(\lambda)|^2)$$

$$\leqq 2\int_R (f_r(\lambda) + f_s(\lambda))\, \overline{\chi_n}\, d\lambda \tag{11}$$

Kod definisanja $f_n^+(\lambda)$ u teoremi I.2.3. već smo koristili procenu $f_r(\lambda) + f_s(\lambda) \leqq 2f_r(\lambda)$ koju sada upotrebljavamo na intervalu $[a_n,\infty)$.n ćemo tako odabrati da u intervalu

$[a_n,\infty)$ nema ekstrema funkcije $f_r(\lambda)$. Zatim koristimo osobinu (4) izrečenu za spektralne gustine regularnih slučajnih procesa u primeru I.2.1.. Konačno dobijamo da je

$$(12) \qquad E|X_n(t) - X_s(t)|^2 \leq \frac{8K_1}{k-1}(a_n)^{-k+1} .$$

Za veliko n vidimo da $X_n(t) \longrightarrow X_s(t)$ u srednje kvadratnom.

Q.E.D.

NAPOMENA I.3.1. Svaki slučajan proces se jednoznačno razlaže (Hanner, Karhunen, Kolmogorov) na ortogonalnu sumu

$$X_n(t) = X_{ns}(t) \oplus X_{nr}(t) .$$

U ovom razlaganju je spektralna funkcija $F_n(\lambda) = F_{ns}(\lambda) + F_{nr}(\lambda)$ odakle je spektralna gustina $f_n(\lambda) = f_{ns}(\lambda)+f_{nr}(\lambda)$, odnosno $f_n(\lambda) = (f_s(\lambda)+f_r(\lambda))\overline{\chi_{n;\alpha}} + (f_s(\lambda)+f_r(\lambda))\,\chi_{n;\alpha}$ gde za $\alpha = \pm 1$ nestaje drugi (prvi) izraz kada n raste.
A to je upravo rezultat dokazan u teoremi I.3.1.

PRIMER I.3.1. Neka je $X_s(t)$ stacionaran u širokom smislu slučajan proces sa spektralnom gustinom

$$f_s(\lambda) = e^{-a^2\lambda^2}\left|\frac{A(\lambda)}{B(\lambda)}\right|^2$$

dok je $f_r(\lambda) = |B(\lambda)|^{-2}$ spektralna gustina slučajnog

slučajnog procesa $X_r(t)$.Pri tom je $a \in R_+, A(\lambda) = \sum_0^N a_j \lambda^j$, $B(\lambda) = \sum_0^M b_j \lambda^j$ a jednačine $A(\lambda) = o = B(\lambda)$ imaju rešenja samo u gornjoj kompleksnoj poluravni.

Aproksimativni niz slučajnih procesa $X_{nr}(t)$ ima, poštujući dosadašnju metodu izloženu u teoremi I.3.1., spektralnu gustinu

$$f_{nr}(t) = |B(\lambda)|^{-2}(e^{-a^2\lambda^2}|A(\lambda)|^2 \chi_n + \overline{\chi_n}).$$

Procena brzine konvergencije data preko relacije (12) biće

$$E|X_{nr}(t) - X_s(t)|^2 \leq \frac{8K_1}{k-1}(c_n)^{-k+1}$$

gde je $\{c_n\}$ određeno divergentan niz sa realnim pozitivnim članovima.Konstante k, K_1 određujemo preko

$$|B(\lambda)|^{-2}|\lambda|^k \leq K_1 \ , \ |\lambda| \to oo$$

odakle izlazi $k = 2\deg B(\lambda) = 2M$, $K_1 = 1/|b_M|^2$ .Napokon

$$E|X_{nr}(t) - X_s(t)|^2 \leq \frac{8}{(2M-1)|b_M|^2 (c_n)^{2M-1}} \ .$$

Brzinu konvergencije diktira niz c_n.

I.4. Analitičnost i singularnost

I.4.1. Sada prelazimo na diskusiju povezanosti klase singularnih i klase analitičnih slučajnih procesa. Problem koji se razmatra možemo formulisati i ovako: „kada su izrazi ANALITIČAN i SINGULARAN ekvivalentni kod stacionarnih u širokom smislu slučajnih procesa?"

DEFINICIJA I.4.1. Slučajan proces $X(t)$ je analitičan u oblasti D ako se skoro svaka njegova realizacija može analitički produžiti u oblasti D.

I.4.2. Ako je slučajan proces $X(t)$ stacionaran, tada možemo izreći sledeće rezultate:

1) Korelaciona funkcija procesa $X(t)$, $K_X(t)$ analitična u intervalu $|t| \leq r$ akko je

$$\int_{R} e^{r\lambda} f_X(\lambda)\, d\lambda < \infty . \tag{13}$$

2) Ako je $K_X(t)$ analitičan u izvesnoj okolini $t=t_0$, tada je i slučajan proces $X(t)$ analitičan u identičnoj okolini.

3) Ako je $K_X(t)$ analitičan u intervalu $|t| \leq r$, tada je skoro svaka realizacija $X(t)$ analitična u polovima $|\mathrm{Im}\{t = \tau + i\sigma\}| < r$.

Vidi [3], [26], [35].

<u>TEOREMA I.4.1. Analitičan, stacionaran slučajan proces je singularan.</u>

Dokaz teoreme se može naći i u [35]. Ovde ćemo dati jednu njegovu kraću varijantu.

<u>DOKAZ.</u> Neka je $H_t(X) = \langle X(s) \mid s \leq t \rangle$. Dalje, ako važi (13) ta relacija ujedno obezbeđuje egzistenciju momenata svakog reda slučajnog procesa $X(t)$, pošto tada $f_x(\lambda)$ brže teži nuli od $|\lambda|^{-2n}$, $n \in \mathbb{N}$ kada $|\lambda| \to \infty$. Tada postoji $2n$-ti srednje kvadratni izvod korelacione funkcije $K_X(t)$ za svako prirodno n.

Ekstrapolacioni zadatak za slučajnu veličinu $X(t+\tau)$ jeste pronalaženje podnožja normale spuštene iz $X(t+\tau)$ na $H_t(X)$. Dužina normale je srednje kvadratna greška ekstrapolacije koju ćemo označiti sa σ_τ^2 i za koju važi

$$\sigma_\tau^2 = \lim_{n\to\infty} E\left|X(t+\tau) - \mathrm{Proj}^{H_t(X)} X(t+\tau)\right|^2$$

$$= \lim_{n\to\infty} E\left|X(t+\tau) - \sum_{0}^{n} \frac{X^{(k)}(t)}{k!} \tau^k\right|^2 .$$

Na taj način smo uvideli da se $X(t+\tau)$ može proceniti preko parcijalnih suma svog Taylorovog reda proizvoljnom tačnošću. Sa druge strane važi stoga da je

$$\bigcap_t H_t(X) = \bigcap_t \langle X(s) \mid s \leq t \rangle = H(X).$$

Dakle $X(t)$ je singularan. Q.E.D.

I.4.3. Neka je sada $X(t)$ slučajan proces sa spektralnom gustinom $f(\lambda)$ koja je pozitivna u smislu konvencije I.2.2. što znači da je

$$(14) \qquad f(\lambda) \underset{|\lambda|\to\infty}{\sim} C\cdot e^{-a|\lambda|^b} \qquad a>0, b \geq 1, C>0.$$

<u>TEOREMA I.4.2. Neka je</u> $X(t)$ <u>singularan slučajan proces sa gustinom oblika (14). Tada je slučajan proces</u> $X(t)$ <u>analitičan u intervalu</u> $|t| \leq r < a$.

<u>DOKAZ.</u> Zbog singularnosti procesa $X(t)$ i preko relacije (14) imamo da je na osnovu (13):

$$\int_{R} e^{r\lambda} f(\lambda)\, d\lambda \leq C\int_{-\infty}^{A} + C\int_{A}^{+\infty} e^{-(a-r)\lambda}\, d\lambda < \infty$$

za neko pozitivno A. Konvergencija nastaje za $r<a$.

Q.E.D.

I.4.4. Pošto se teoreme I.4.1. i I.4.2. mogu spojiti u potreban i dovoljan uslov, možemo ih izreći u obliku sveobuhvatnog rezultata.

<u>TEOREMA I.4.3. Neka je</u> $X(t)$ <u>slučajan proces sa spektralnom gustinom</u> $f(\lambda)$ <u>koja zadovoljava uslov (14). Tada su sledeća dva tvrđenja ekvivalentna:</u>

(i) <u>X(t) je singularan</u>

(ii) <u>X(t) je analitičan u intervalu</u> $|t| \leq r < a$, <u>gde se a određuje iz uslova (14).</u>

NAPOMENA I.4.1. Vrednost r može proizvoljno smanjiti dužinu intervala $|t| \leq r$ .Ipak,zbog analitičnosti slučajnog procesa $X(t)$,bez greške možemo ekstrapolirati $X(t)$ u tački $t+\tau$.

I.4.4. Ako je $X_r(t)$ karakterisan spektralnom gustinom

$$f_r(\lambda) = e^{-|\lambda-\lambda_0|^{\delta}} f_x(\lambda) \quad , \delta \in (-1,o)$$

gde je $f_x(\lambda)$ spektralna gustina regularnog slučajnog procesa,singularitet $\lambda=\lambda_0$ ne utiče na regularnost slučajnog procesa $X_r(t)$ zbog $f_r(\lambda) \underset{|\lambda|\to\infty}{\sim} f_x(\lambda)$.

I.5. Pregled literature

I.5.1. Literatura stacionarnih,singularnih slučajnih procesa se uglavnom grupiše oko tri teme:prvo - definisanje i zadavanje kriterijuma regularnosti (singularnosti) slučajnih procesa u terminima H-prostora,spektralne gustine odnosno korelacionog funkcionala.Klasični radovi iz te oblasti su [18], [23], [24], [45] .Moderniji pristup problematici imamo u [14], [37], [38] .Poznati su još radovi Kallianpura,Mandrekara i Salehija odnosno [29], [3o] šesdesetih godina,Ivkovića (sedamdesete) odnosno Tjøstheima koji se bavi beskonačnodimenzionalnim slučajnim procesima.

[.5.2. Druga tema je određivanje brzine konvergencije greške kestrapolacije diskretnog skalarnog procesa.Tu je spisak literature potpun - [1], [2], [35].

[.5.3. Na kraju,pstoje radovi o analitičkim slučajnim procesima.Sem klasičnog rada Paula Lèvy-ja - [26],spomenimo još [3] i [35].

ОСНОВНА ОРГАНИЗАЦИЈА УДРУЖЕНОГ РАДА
ЗА МАТЕМАТИКУ, МЕХАНИКУ И АСТРОНОМИЈУ
БИБЛИОТЕКА
Број: ___
Датум: ___

II. PADÉ-APROKSIMACIJA, SINGULARNI PROCESI I SREDNJE KVADRATNA KONVERGENCIJA

II.1. Uvod

II.1.1. Henri Eugéne Padé (1863-1953) je 21. juna 1892. pred komisijom Hermite, Appell, Picard odbranio disertaciju pod naslovom „Sur la representation approchée d'une fonction par des fractions rationelles", u kojoj je uopštio i sistematizovao sve dotadašnje rezultate o racionalnoj aproksimaciji. Ovu aproksimativnu metodu možemo primeniti i u teoriji stacionarnih u širokom smislu slučajnih procesa. U dosadašnjoj matematičkoj praksi Padé-aproksimacija se primenjivala za procenjivanje i „racionalizaciju" transfernih funkcija, kao i u teoriji parcijalne realizacije za rešavanje problema Frobeniusa-Kalmana ([15], [19]). Mi ćemo aproksimirati spektralne gustine stacionarnih slučajnih procesa.

II.1.2. Neka je f proizvoljan niz ili $f(\lambda) = \sum_{0}^{\infty} c_k \lambda^k$; $c_0 \neq 0$. Neka je $R_{m,n}$ klasa racionalnih funkcija sa elementima oblika $r = p/q$, gde su polinomi p i q stepena m i n respektivno. Određivanje elemenata $r \in R_{m,n}$ za koje važi

$$f(\lambda)\, q(\lambda) - p(\lambda) = O(\lambda^{m+n+1+j}), \quad \lambda \in R \tag{15}$$

zove se Padé-aproksimacija funkcije $f(\lambda); j \in \mathbb{N} \cup \{o\}$. Rešenje problema je jednoznačno (Padé). Ako je $j = o$ u jednačini (15), tada se govori o normalnoj Padé-aproksimaciji (u daljnjem Padé-aproksimacija).

Rešenje jednačine (15) za deto m,n ćemo označavati sa $P_n^m[f]_\lambda$. To je tzv. Padé-aproksimant funkcije $f(\lambda) = \sum_{o}^{\infty} c_k \lambda^k$. Uslov $c_o \neq o$ možemo zadati ekvivalentnim zapisom: $q(o) = 1$.

II.1.3. Neka je $f(\lambda)$ spektralna gustina stacionarnog u širokom smislu slučajnog procesa $X(t)$ sa neprekidnim vremenom i indeksnim skupom R. Tada se $f(\lambda)$ može Padé-aproksimirati nizom racionalnih spektralnih gustina uniformno na dovoljno malom intervalu oko koordinatnog početka. Iz relacije (15) vidi se da aproksimacija na čitavom R nije moguća. Ipak, postoje rezultati i na čitavom R: za fiksirano m i n, Padé-aproksimant spektralne gustine može biti, pod određenim uslovima, spektralna gustina.

U drugom delu poglavlja vršimo Padé-aproksimaciju spektralne gustine singularnog procesa, koja se anulira izvan nekog intervala I koji sadrži koordinatni početak.

Na kraju dajemo vezu između slučajnih procesa, njihovih Padé-aproksimanata i njihovih Hilbertovih prostora. Daju se uslovi (potrebni i dovoljni) podređenosti slučajnih procesa u terminologiji njihovih spektralnih gustina.

II.2. Padé-aproksimacija spektralnih gustina

II.2.1. Neka je $P_n^m : \{f(\lambda)\} \to R_{m,n}$ operator Padé koji prevodi klasu spektralnih gustina u klasu $R_{m,n}$. Red operatora P_n^m se definiše preko stepena imenioca i brojioca $P_n^m[f]_\lambda$ a označava se sa (m,n). Dakle $P_n^m[f]_\lambda = p_m(\lambda)/q_n(\lambda)$, a važe sledeće propozicije:

1) $o \leq m < n, \; q_n(o) = 1$

2) $p_m(\lambda) = |A_m(\lambda)|^2 = \sum_{o}^{2m} \alpha_k \lambda^k$;

$$q_n(\lambda) = |B_n(\lambda)|^2 = \sum_{o}^{2n} \beta_k \lambda^k \; ; \quad \alpha_k, \beta_k \in R$$

gde su nule polinoma A_m, B_n iz gornje kompleksne poluravni i $q_n(o) = |b_o|^2 = 1$. Veza između koeficijenata p_m, A_m odnosno q_n, B_n je

$$\alpha_k = \sum_{\substack{i+j=k \\ i,j \in \{0,1,\dots,m\}}} a_i \overline{a_j} \quad ; \quad \beta_k = \sum_{\substack{i+j=k \\ i,j \in \{0,1,\dots,n\}}} b_i \overline{b_j} \; .$$

II.2.2. Ako je $f(\lambda) = f(-\lambda)$ tada je n paran broj, inače bi zbog realnih koeficijenata $q_n(\lambda) = o$ imala bar dva realna rešenja. A to je nemoguće, jer je $P_n^m[f]_\lambda$ spektralna gustina nekog stacionarnog L_2-procesa.

II.2.3. Posmatrajmo formalni stepeni red spektralne gustine $f(\lambda)$:

(16) $$f(\lambda) = \sum_{o}^{2(n+m)} f_k \lambda^k + O(\lambda^{2(n+m)+1}) \; ; \; f_o \neq o$$

u kojem za $j = o$ dobijamo zbog (14) zapis

(17) $$|B_n(\lambda)|^2 f(\lambda) - |A_m(\lambda)|^2 = \lambda^{2(n+m)+1} h_{m,n}(\lambda) .$$

Pritom je $h_{m,n}(o) \neq o$.

TEOREMA II.2.1. Neka je $f(\lambda)$ pozitivna (u smislu I.2.2.), parna spektralna gustina. Tada je i $P_n^o[f]_\lambda = \alpha_o/|B_n(\lambda)|^2$ spektralna gustina.

DOKAZ. Neka je G pozitivno orijentisana zatvorena kontura kompleksne λ ravni koja sadrži koordinatni početak i fiksiranu vrednost λ, i ako je $f(\lambda)$ holomorfna na skupu $G \cup \mathrm{int}(G)$, sledi

(18) $$h_{m,n}(\lambda) = \frac{1}{2\pi i} \oint_G \frac{|B_n(u)|^2 f(u)}{(u-\lambda)^{2(n+m)+1}} du$$

(vidi [10]).

Zbog $|b_o|^2 = |B_n(o)|^2 = 1 > o$ postoje realni brojevi α, β ; $\alpha < o < \beta$ da je $P_n^m[f]_\lambda \geq o$ na konačnom intervalu $[\alpha, \beta]$.

Funkcija $f(\lambda)$, spektralna gustina L_2-procesa $X(t)$, zbog konačnog drugog momenta $X(t)$ je ograničena odozgo:

$f(\lambda) \leq c_2 < \infty$, a po pretpostavci je pozitivna. Neka je zasad „odvojena" od nule: $0 < c_1 \leq f(\lambda)$. Na intervalu $R \setminus [\alpha, \beta]$, ako je $b_n \neq 0$, imamo da je

$$h_{0,n}(\lambda) = \frac{1}{2\pi i} \oint_G \frac{|B_n(u)|^2 f(u)}{(u-\lambda)^{2n+1}} du$$

$$\leq \frac{c_2}{2\pi i} \oint_G \frac{|B_n(u)|^2 \, du}{(u-\lambda)^{2n+1}}$$

$$= \frac{c_2}{(2n)!} \left(|B_n(u)|^2 \right)^{(2n)} \Big|_{u=\lambda}$$

(19) $$= c_2 \, |b_n|^2 \, .$$

Na sličan način možemo doći do procene odozdo

$$h_{0,n}(\lambda) \geq c_1 \, |b_n|^2 > 0$$

za svako $\lambda \in R \setminus [\alpha, \beta]$.

Uzmimo sada u obzir parnost spektralne gustine $f(\lambda)$. U njenoj formalnoj predstavi (16) (koja se podudara sa McLaurin-ovim redom gustine $f(\lambda)$) pojavljuju se samo koeficijenti sa parnim indeksom:

(2o) $$f(\lambda) = \sum_{0}^{n} f_{2k} \lambda^{2k} + O(\lambda^{2n+1}).$$

Po uslovima teoreme je dakako $m = 0$.

Na osnovu (17),(19) i (2o) sledi

$$|B_n(\lambda)|^2 \geq \frac{c_1|b_n|^2}{f(\lambda)} \lambda^{2n+2}$$

$$\geq \frac{c_1}{c_2}|b_n|^2 \lambda^{2n+2} .$$

Najzad,kako je λ izvan intervala $[\alpha,\beta]$,na osnovu zadnje procene $|B_n(\lambda)|^2$ je strogo pozitivan,štaviše odvojen od nule:

$$|B_n(\lambda)|^2 \geq \frac{c_1}{c_2}|b_n|^2 \gamma^{2n+2} > 0$$

gde je $\gamma = \min\{|\alpha|,|\beta|\}$.

Ako je $f(\lambda)$ spektralna gustina drugog tipa (vidi I.2.2.) tada je dokazivanje pozitivnosti $|B_n(\lambda)|^2$ još jednostavnije. Naime,tada je $h_{o,n}(\lambda) > 0$ direktno,odakle sledi preko gorenavedenih procena tražena osobina tog polinoma.

Q.E.D.

PRIMER II.2.1. Spektralne gustine oblika $P_n^o[f]_\lambda = \alpha_o/|B_n(\lambda)|^2$ igraju značajnu ulogu u estimaciji stacionarnih slučajnih procesa.U slučaju ekstrapolacije sa celom poznatom prošlošću naprimer,ako $P_n^o[f]_\lambda$ ima jednostruke polove i karakteriše slučajan proces $X_{o,n}(t)$,tražimo funkcional

$$\hat{X}_{o,n}(t,\tau) = \mathrm{Proj}^{H_t} X_{o,n}(t+\tau)$$

u obliku

$$\hat{X}_{o,n}(t,\tau) = \sum_{o}^{n-1}(-i)^k \beta_k X_{o,n}^{(k)}(t)$$

gde je $H_t = H_t(X_{o,n})$, $X_{o,n}^{(k)}(t)$ pak k-ti srednje kvadratni izvod slučajnog procesa $X_{o,n}(t)$.Nepoznate koeficijente β_k određujemo iz sistema jednačina

$$(21) \qquad \sum_{o}^{n-1} \beta_k \lambda^k = e^{i\tau\lambda}\Big|_{\lambda=\lambda_k} \qquad k = \overline{1,n}$$

jednoznačno (determinanta sistema je $\prod_{j<k}(\lambda_k-\lambda_j)$).

PRIMER II.2.2. Neka su polovi spektralne gustine iz prethodnog primera višestruki: pol λ_k neka je reda n_k. Sistem (21) prelazi sada u sistem

$$(22) \qquad \frac{d^j}{d\lambda^j}\left(e^{i\tau\lambda} - \sum_{o}^{N}\alpha_k\lambda^k\right) = o \Big|_{\lambda=\lambda_k}$$

ako $k = \overline{1,m}$, $j = \overline{o,n_k-1}$, a $\sum_{1}^{m} n_k = n$.Determinanta sistema (22) je jednaka $\prod_{j<k}(\lambda_k-\lambda_j)^{n_k+n_j}$ .Nepoznati koeficijenti se određuju jednozančno.Ekstrapolator je

$$\hat{X}_{o,n}(t,\tau) = \sum_{o}^{N}(-i)^k \alpha_k X_{o,n}^{(k)}(t).$$

Sumiranje se vrši do nekog $N = N(n_k)$.

II.2.4. Kao što smo već napomenuli, veza između koeficijenata polinomâ p_m, A_m odnosno polinomâ q_n, B_n je

$$\alpha_k = \sum_{\substack{i+j=k \\ i,j\in\{0,\dots,m\}}} a_i \overline{a_j} \quad ; \quad \beta_k = \sum_{\substack{i+j=k \\ i,j\in\{0,\dots,n\}}} b_i \overline{b_j} \ .$$

Ako znamo formalni stepeni red spektralne gustine $f(\lambda)$, tada se koeficijenti α_k, $k = \overline{0,2m}$; β_k, $k = \overline{0,2n}$ mogu jednoznačno odrediti iz relacije (17) izjednačavanjem odgovarajućih koeficijenata do stepena $2(n+m)$:

$$(23) \qquad \begin{aligned} \sum_{0}^{k} f_j \beta_{k-j} &= \alpha_k & \qquad k &= \overline{0,2m} \\ \sum_{0}^{k} f_j \beta_{k-j} &= 0 & \qquad k &= \overline{2m+1,2(m+n)} \ . \end{aligned}$$

Dalje, kako je $\beta_0 = 1$, a (23) je sistem od $2(n+m)+1$ jednačine sa isto toliko nepoznatih, iz kojeg dobijamo jednoznačno rešenje, koeficijenti u $P_n^m[f]_\lambda$ su nađeni.

II.2.5. Po uslovima teoreme II.2.1. spektralna gustina $f(\lambda)$ je parna. Koeficijente $P_n^m[f]_\lambda$ određuje relacija

$$(24) \qquad \begin{aligned} \sum_{0}^{k} f_{2j} \beta_{k-2j} &= \alpha_k & \qquad k &= \overline{0,2m} \\ \sum_{0}^{k} f_{2j} \beta_{k-2j} &= 0 & \qquad k &= \overline{2m+1,2(n+m)} \ . \end{aligned}$$

U našem slučaju se, osim toga, radi o Padé-aproksimaciji reda (o,n), zbog čega je

$$\alpha_o = f_o\ , \qquad \beta_o = 1$$

$$\sum_{o}^{k} f_{2j}\, \beta_{k-2j} = o \qquad k = \overline{1,2n}\ .$$

Zadnji sistem jednačina se rešava rekurzivno. Realnost koeficijenata $|B_n(\lambda)|^2$ pak sledi iz

$$\sum_{\substack{i+j=k \\ i,j\in\{o,\dots,n\}}} b_i\, \overline{b_j} = \beta_k\ ;\ b_o = 1\ ,\ k = \overline{1,2n} \tag{25}$$

odakle nalazimo skup vrednosti $\{b_o, b_1, \dots, b_n\}$.

PRIMER II.2.3. Neka je spektralna gustina slučajnog procesa $X(t)$ oblika $f(\lambda) = e^{-\lambda^2/2}$, tada je formalni stepeni red gustine

$$f(\lambda) = 1 - \frac{\lambda^2}{2} + \frac{\lambda^4}{8} + o(\lambda^6)$$

odakle je $P_2^o[f]_\lambda = \alpha_o/(\beta_o + \beta_2\lambda^2 + \beta_4\lambda^4)^{-1}$.

Koeficijente određujemo iz formalnog stepenog reda i sistema (24) za $m = o$ i $n = 2$. Kako je $\alpha_o = \beta_o = 1$, $\beta_2 = -f_2 = 1/2$, $\beta_4 = -\beta_2 f_2 - f_4 = 1/8$ sledi da je

$$P_2^o[f]_\lambda = (1 + \frac{\lambda^2}{2} + \frac{\lambda^4}{8})^{-1}\ .$$

II.2.6. Sada prelazimo na diskusiju osobina Padê-aproksimanata spektralne gustine,kod kojih se i u brojiocu nalazi polinom stepena bar za dva manjeg od stepena imenioca.Dakle,

$$P_n^m[f]_\lambda = p_m(\lambda)/q_n(\lambda) = |A_m(\lambda)|^2/|B_n(\lambda)|^2 .$$

Uočimo ponovo sistem jednačina (24),koji možemo razbiti na četiri podsistema,i to uzimajući sve neparne (parne) jednačine prvo za $k = \overline{o,2m}$,zatim za $k = \overline{2m+1,2(n+m)}$.

Neka je M_{2m+1} matrica koeficijenata neparnih jednačina u (24),ako je $k = \overline{2m+1,2(n+m)}$.

$$\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccccccc} \beta_1 & \beta_3 & \beta_5 & \cdots & \beta_{2m+1} & \beta_{2m+3} & \cdots & \beta_{2n-1} \end{array} \\
M_{2m+1} = \begin{bmatrix}
f_{2m} & f_{2m+2} & f_{2m-4} & \cdots & f_0 & o & \cdots & o \\
f_{2m+2} & f_{2m} & f_{2m-2} & \cdots & f_2 & f_0 & \cdots & o \\
f_{2m+4} & f_{2m+2} & f_{2m} & \cdots & f_4 & f_2 & \cdots & o \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\
f_{2(n+m-1)} & f_{2(n+m-2)} & f_{2(n+m-3)} & \cdots & f_{2m+4} & f_{2m+2} & \cdots & f_{2m}
\end{bmatrix}
\end{array}$$

Determinanta matrice M_{2m+1} je različita od nule ($f_o \neq o$); kako je M_{2m+1} matrica sistema od n jednačina sa n nepoznatih ranga n,i kako je sistem homogen,rešenje mu je trivijalno, $\beta_1 = \beta_2 = \ldots = \beta_{2n-1} = o$.

Posmatrajmo sada jednačine sistema (24) i to

$$\alpha_{2k+1} = \sum_{o}^{2k+1} f_j \beta_{2k+1-j} \qquad ; \quad k = \overline{o,m-1}.$$

Odavde dobijamo da je $\alpha_1 = \alpha_3 = \ldots = \alpha_{2m-1} = o$ pošto se f_j anulira za j neparno ($f(\lambda)$ je parna spektralna gustina!).Kako su α_{2k}, $k = \overline{o,m}$ realni,sledi da je

$$(26) \qquad |A_m(\lambda)|^2 \geqq o \, .$$

Na kraju,moramo još uvideti da je imenilac $P_n^m[f]_\lambda$ pozitivan.Odmah pada u oči relacija

$$(27) \qquad P_n^m[f]_\lambda = Q_n^o[f]_\lambda \, |A_m(\lambda)|^2$$

gde je $Q_n^o[f]_\lambda$ Padé-aproksimant reda (o,n),pozitivne i parne spektralne gustine $f(\lambda)$,koju obrazujemo pomoću koeficijenata f_j, $j = \overline{o,2(n+m)}$ formalnog stepenog reda (16). Na osnovu teoreme II.2.1. i relacije (26) sledi da je $P_n^m[f]_\lambda \geqq o$.Konačnost drugog momenta stacionarnog u širokom smislu slučajnog procesa $X_{m,n}(t)$,čija je spektralna gustina $P_n^m[f]_\lambda$,sledi takođe iz teoreme II.2.1.Time je

TEOREMA II.2.2. Neka je $f(\lambda)$ pozitivna,parna spektralna gustina.Tada je Padé-aproksimant reda (m,n) spektralne gustine $f(\lambda)$ takođe spektralna gustina.

u potpunosti dokazana.

NAPOMENA II.2.1. Relacija (27) zahteva izvesna objašnjenja; ova veza je čudna samo na prvi pogled. Posmatrajmo matricu M_{2m} koeficijenata iz parnih jednačina sistema (24) za $k = \overline{2m+1, 2(n+m)}$.

$$
(28) \qquad M_{2m} = \begin{array}{c} \begin{matrix} \beta_0 & \beta_2 & \beta_4 & \cdots & \beta_{2m+2} & \beta_{2m+4} & \cdots & \beta_{2n} \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} f_{2m+2} & f_{2m} & f_{2m-2} & \cdots & f_0 & 0 & \cdots & 0 \\ f_{2m+4} & f_{2m+2} & f_{2m} & \cdots & f_2 & f_0 & \cdots & 0 \\ f_{2m+6} & f_{2m+4} & f_{2m+2} & \cdots & f_4 & f_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_{2(n+m)} & f_{2(n+m-1)} & f_{2(n+m-2)} & & f_{2(n-1)} & f_{2(n-2)} & \cdots & f_{2m} \end{bmatrix} \end{array}
$$

Kako je $\beta_0 = 1$, M_{2m} je proširena matrica sistema od n jednačina sa n nepoznatih, koja je nehomogena zbog $\beta_0 = 1$, a kolona slobodnih članova je prva kolona matrice M_{2m}. Odavde za $f_{2m} \neq 0$ imamo jednoznačno rešenje sistema, tj. skup vrednosti $\{\beta_2, \beta_4, \ldots, \beta_{2n}\}$. Naravno, možemo slobodno pretpostaviti da je $f_{2m} \neq 0$, jer ćemo tražiti takvu Padé-aproksimaciju gde red brojioca aproksimanta određuje indeks koeficijenta formalnog stepenog reda (16), koji je različit od nule.

Posmatrajmo sada dosad nekorišćene jednačine sistema (24)

$$\alpha_{2k} = \sum_{j=o}^{k} f_{2j} \beta_{2k-2j} , \qquad k = \overline{o,m} ,$$

iz kojih nalazimo koeficijente $\alpha_{2k}, k = \overline{o,m}$. α_{2k} su linearne kombinacije već određenih koeficijenata β_{2k}, $k = \overline{o,n}$.

II.2.7. Postavlja se pitanje za koje (m,n) možemo vršiti Padé-aproksimaciju spektralne gustine $f(\lambda)$. Kako je $f(o) = f_o \neq o$ i $f(\lambda)$ je pozitivna, postoji bar još jedan koeficijent u formalnom stepenom redu (16) $f_{2k} \neq o$. Inače bi $f(\lambda) \equiv 1$ skoro svuda na R, što je u suprotnosti sa pretpostavkom o L_2-svojstvu slučajnog procesa $X(t)$, čija je gustina $f(\lambda)$. Tada, naravno, vršimo aproksimaciju vida P_n^o. Jasno je da stepen brojioca $P_n^m[f]_\lambda$ određuje bolje lokalno približenje gustini $f(\lambda)$.

II.3. Padé-aproksimacija i singularni procesi

II.3.1. Na osnovu Walsh-ovih radova ([13], [41], [42], [43]) možemo zaključiti da je Padé-aproksimacija najbolja lokalna aproksimacija, tj. možemo je upotrebiti za aproksimaciju neke funkcije samo u izvesnoj okolini tačke u kojoj vršimo aproksimaciju. U prethodnom paragrafu dokazali smo da je Padé-aproksimacija spektralne gustine takođe spektralna gustina, ako su ispunjeni neki dodatni uslovi: parnost i pozitivnost inicijalne spektralne gustine.

To lokalno svojstvo Padé-aproksimacije možemo iskoristiti u ispitivanju srednje kvadratne konvergencije slučajnih procesa, čije spektralne gustine imaju oblik $P_n^m[f]_\lambda$ i anuliraju se izvan nekog intervala I, koji sadrži koordinatni početak.

II.3.2. Neka je $f_s(\lambda)$ spektralna gustina stacionarnog u širokom smislu slučajnog procesa $X(t)$ sa neprekidnim vremenom, koja ima osobine:

a) $f_s(o) \neq o$

b) $f_s(\lambda) = \chi_I(\lambda)\, f_Y(\lambda)$

gde je $f_Y(\lambda)$ spektralna gustina proizvoljnog regularnog slučajnog procesa $Y(t)$ sa neprekidnim vremenom. I je konačan podinterval od R koji sadrži origo.

II.3.3. Kako je $f_s(o) > o$, formalni stepeni red $f_s(\lambda)$ se podudara sa njegovim McLaurinovim redem:

$$f_s(\lambda) = \sum_{o}^{\infty} f_k \lambda^k = \sum_{o}^{\infty} \frac{f_s^{(k)}(o)}{k!} \lambda^k . \tag{29}$$

II.3.4. Ako je $P_n^m[f]_\lambda$ Padé-aproksimant funkcije $f_s(\lambda)$ reda (m,n) kojeg nalazimo u obliku

$$P_n^m[f_s]_\lambda = \frac{|A_m(\lambda)|^2}{|B_n(\lambda)|^2}, \quad |b_o|^2 = 1 , \tag{3o}$$

tada je $P_n^m[f_s]_\lambda > o$ na nekom intervalu $[\alpha,\beta]$, $\alpha\beta < o$. Odaberimo interval I tako da je $I = [\alpha,\beta]$.

DEFINICIJA II.3.1. Ako niz $r_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} r(x)$ na nekom skupu D tačka po tačka, to ćemo označavati sa

$$r_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{D} r(x) \quad .$$

II.3.5. Neka je $f_s(\lambda)$ analitička funkcija na kružnici C_r poluprečnika r, čiji je centar koordinatni početak. Na osnovu Cauchy-jevih integralnih formula i rezidualne teoreme sledi

$$2\pi\left|\frac{f_s^{(k)}(o)}{k!}\right| = 2\pi\left|\mathrm{res}(g;o;k+1)\right| = \left|\oint_{C_r}\frac{f_s(\lambda)}{\lambda^{k+1}}\,d\lambda\right|$$
$$\leq \oint_{C_r}\frac{|f_s(\lambda)||d\lambda|}{|\lambda|^{k+1}} \quad .$$

Posle uvodenja smene $\lambda = re^{it}$ dobijamo novu integracionu konturu: $|\lambda| = 1$. Važe sledeće procene:

$$\oint_{C_r} \frac{|f_s(\lambda)||d\lambda|}{|\lambda|^{k+1}} = \int_0^{2\pi} \frac{|f_s(re^{it})|\,dt}{r^k}$$

$$\leq \frac{\sup\limits_{0\leq t\leq 2\pi}|f_s(re^{it})|}{r^k} \int_0^{2\pi} dt = 2\pi\,\frac{f_s^+}{r^k} .$$

Usput smo sa f_s^+ označili vrednost $\sup\limits_{0\leq t\leq 2\pi}|f_s(re^{it})|$. Iz gorenavedenog sledi nejednakost:

$$k!\frac{f_s^+}{r^k} \geq \left| f_s^{(k)}(o) \right| , \tag{31}$$

koja se u literaturi vodi pod nazivom Cauchy-jeva nejednakost. U toku izvođenja smo koristili i oznaku $g(\lambda)=\dfrac{f_s(\lambda)}{\lambda^{k+1}}$.

TEOREMA II.3.1. Za svako λ iz skupa $D = I \cap (-r,r)$ važi

$$\lim_{m\to\infty} P_n^m[f_s]_\lambda = f_s(\lambda)$$

gde je

$$r^{-1} = \limsup_{k\to\infty} \left| \frac{f_s^{(k)}(o)}{k!} \right|^{1/k} . \tag{32}$$

DOKAZ. Stepeni red (16) konvergira uniformno na $(-r,r)$, gde je r poluprečnik konvergencije reda (16), čija je vrednost određena relacijom (32).

Procenimo vrednost izraza:

$$\mathcal{E}_{m,n}(\lambda) = \left| f_s(\lambda) - P_n^m[f_s]_\lambda \right| .$$

Pošto je $m < n$, $\mathcal{E}_{m,n}(\lambda) = \mathcal{E}_m(\lambda)$. Primenimo sada Cauchy-jevu nejednakost (31) na $\mathcal{E}_m(\lambda)$:

$$\mathcal{E}_m(\lambda) = \left| \sum_{2(n+m)+1}^{\infty} \frac{f_s^{(k)}(o)}{k!} \lambda^k \right| ,$$

(33) $$\mathcal{E}_m(\lambda) \leq f_s^+ \frac{\left(\frac{|\lambda|}{r}\right)^{2(n+m)+1}}{1 - \frac{|\lambda|}{r}} .$$

Za elemente skupa D važi $\max(-r,\alpha) < \lambda < \min(r,\beta)$, zato posredstvom (33) dobijamo $\mathcal{E}_m(\lambda) \xrightarrow[m\to\infty]{D} o$. Q.E.D.

II.3.6. Neka je $X(t)$ slučajan proces sa spektralnom gustinom $f_x(\lambda)$. To ćemo označavati sa $X(t) \sim f_x(\lambda)$. Na sličan način dolazimo i do oznake: $P_n^m[X]_t \sim P_n^m[f_s]_\lambda$.

II.3.7. Transformaciju A slučajnog procesa $X(t)$ u slučajan proces $Y(t) = AX(t)$ nazivamo linearnom transformacijom slučajnog procesa (ili filterom), ako se $Y(t)$ može predstaviti u obliku

$$Y(t) = \int_R h(t-s)\, X(s)\, ds$$

gde je $h(t)$ funkcija koja zadovoljava uslov

$$(34) \qquad \int_R \int_R h(t_1) K_x(t_2 - t_1) \overline{h(t_2)}\, dt_1\, dt_2 < \infty \quad .$$

$K_x(t)$ je korelaciona funkcija slučajnog procesa $X(t)$. Funkcija $h(t)$ je takozvana impulsna odzivna funkcija linearne transformacije (u daljnjem tekstu - filter) A. Fourier-ova transformacija $h(t)$ je

$$(35) \qquad H(i\lambda) = \int_R e^{-it\lambda}\, h(t)\, dt \quad ,$$

koju nazivamo spektralnom karakteristikom filtra A. Uslov (34) je ekvivalentan uslovu $H(i\lambda) \in L_2(f_x)$. Ako je spektralno razlaganje $X(t)$

$$(36) \qquad X(t) = \int_R e^{it\lambda}\, dZ_x(\lambda)$$

tada je

$$(37) \qquad Y(t) = \int_R e^{it\lambda} H(i\lambda)\, dZ_x(\lambda) \quad .$$

Veza izmedu korelacionih funkcija procesa $X(t)$ i $Y(t)$ je

$$K_y(t) = \int_R e^{it\lambda} |H(i\lambda)|^2 \, f_x(\lambda) \, d\lambda \quad ,$$

a njihovih spektralnih gustina je

$$f_y(\lambda) = |H(i\lambda)|^2 \, f_x(\lambda) \quad .$$

Odgovor na pitanje da li je $Y(t)$ linearna transformacija od $X(t)$, daje

TEOREMA ROZANOVA. Neka su $X(t) \sim f_x(\lambda)$ i $Y(t) \sim f_y(\lambda)$ stacionarni slučajni procesi. $Y(t)$ je rezultat primene filtra A na $X(t)$ sa spektralnom karakteristikom $H(i\lambda)$, akko važe uslovi

$$f_y(\lambda) = |H(i\lambda)|^2 \, f_x(\lambda)$$

$$f_{xy}(\lambda) = \overline{H(i\lambda)} \, f_x(\lambda) \quad ,$$

(vidi [37]).

PRIMER II.3.1. Razmotrimo filter koji je određen diferencijalnom jednačinom sa konstantnim koeficijentima $BY(t) = AX(t)$, gde su A i B diferencijalni operatori

$$A = \sum_0^m a_j \frac{d^j}{dt^j} \quad ; \quad B = \sum_0^n b_j \frac{d^j}{dt^j} \quad .$$

Pretpostavljamo da postoji m-ti srednje kvadratni izvod slučajnog procesa $X(t)$ (ako je pritom $X(t)$ singularan, tada ima srednje kvadratne izvode proizvoljnog reda!). Spektralne karakteristike dierencijalnih operatora A i B su polinomi po stepenima i $A(i\lambda)=\sum_{0}^{m} a_j(i\lambda)^j$, $B(i\lambda)=\sum_{0}^{n} b_j(i\lambda)^j$ respektivno. Ako je ispunjen uslov

$$\frac{A(i\lambda)}{B(i\lambda)} \in L_2(f_x), \tag{38}$$

tada postoji filter koji odgovara diferencijalnoj jednačini $BY(t) = AX(t)$. Spektralna karakteristika filtra je upravo funkcija (38).

PRIMER II.3.2. Neka je $X(t) \sim f_s(\lambda)$ singularan slučajan proces. Uočimo filter C procesa $X(t)$ sa spektralnom karakteristikom $f_s^{-1/2}(\lambda)$. Na osnóvu definicije $f_s(\lambda)$ u II.3.2. sledi da je $\int_R |f_s^{-1/2}(\lambda)|^2 f_s(\lambda)\, d\lambda = \mathrm{mes}(I)$. Iz konačnosti intervala I sledi da je $f_s^{-1/2}(\lambda) \in L_2(f_s)$. $f_s^{1/2}(\lambda)$ je inače rešenje, u smislu Rozanova, jednačine $(f_s^{1/2}(\lambda))^2 = f_s(\lambda)$ (vidi [38]). Formalni stepeni red karakteristike $H_c(i\lambda) = f_s^{-1/2}(\lambda)$ je

$$H_c(i\lambda) = \sum_{0}^{\infty} \frac{(f_s^{-1/2}(o))^{(k)}}{k!} \lambda^k . \tag{39}$$

Preko relacije (37) je

$$
\begin{aligned}
CX(t) &= \int_R e^{it\lambda} H_c(i\lambda)\, dZ_x(\lambda) \\
&= \int_R e^{it\lambda} \sum_0^{\infty} \frac{(f_s^{-1/2}(o))^{(k)}}{i^k k!} (i\lambda)^k \, dZ_x(\lambda) \\
&= \sum_0^{\infty} \frac{(f_s^{-1/2}(o))^{(k)}}{i^k k!} \int_R e^{it\lambda} (i\lambda)^k \, dZ_x(\lambda) \\
&= \sum_0^{\infty} \frac{(f_s^{-1/2}(o))^{(k)}}{i^k k!} X^{(k)}(t) \quad .
\end{aligned}
$$

Dakle C je „vrsta" diferencijalnog operatora.

II.3.8. Neka su A,B filteri sa spektralnim karakteristikama $H_A(i\lambda), H_B(i\lambda)$ respektivno. Uzastopni uticaj A,B na slučajan proces $X(t)$ je filter $A\circ B$ sa spektralnom karakteristikom $H_A(i\lambda)H_B(i\lambda)$ (naravno, ako je ona kvadratno integrabilna po meri $f_x(\lambda)d\lambda$). Operacija $\circ$ je slaganje preslikavanja.

II.3.9. U slučaju singularnog procesa $X(t) \sim f_s(\lambda)$ važi

STAV II.3.1. Neka je V skup svih filtera slučajnog procesa $X(t) \sim f_s(\lambda)$. Tada je $(V,\circ)$ Abel-ova grupa, akko je svaka spektralna karakteristika strogo pozitivna na I.

Zbog jednostavnosti dokaza nećemo ga navesti.

II.3.1o. Neka je $X(t) \sim f_s(\lambda)$, gde je spektralna gustina $f_s(\lambda)$ definisana u II.3.2..Padé-aproksimant gustine $f_s(\lambda)$ je $P_n^m[f_s]_\lambda$, koji je istovremeno spektralna gustina stacionarnog u širokom smislu slučajnog procesa $P_n^m[X]_t$. Neka je $P_n^m[\cdot]$ filter slučajnog procesa $X(t)$, sa spektralnom karakteristikom $\psi_n^m(\lambda)$ koju defišemo kao

$$\psi_n^m(\lambda) = \frac{A_m(\lambda)}{B_n(\lambda)} f_s^{-1/2}(\lambda) \quad . \tag{40}$$

Da je $\psi_n^m(\lambda)$ zaista spektralna karakteristika, odnoso da je $P_n^m[\cdot]$ odista filter, možemo se uveriti preko primera II.3.1. i II.3.2. i stava II.3.1..Iz

$$\int_R |\psi_n^m(\lambda)|^2 f_s(\lambda)\, d\lambda = \int_R \frac{|A_m(\lambda)|^2}{|B_n(\lambda)|^2}\, d\lambda$$

pak vidimo da je $\psi_n^m(\lambda) \in L_2(f_s)$.

Dakle, P_n^m je kompozicija dva diferencijalna operatora. Na osnovu teoreme II.3.1. pak sledi da je

$$|\psi_n^m(\lambda)|^2 \xrightarrow[m\to\infty]{D} 1 \quad . \tag{41}$$

Takođe je evidentno, da niz operatora-filtera $P_n^m[\cdot]$ teži jediničnom filteru J čija je spektralna karakteristika $H_J(i\lambda) = 1$.

<u>TEOREMA II.3.2.</u> $E\,|X(t) - P_n^m[X]_t|^2 \xrightarrow[m\to\infty]{D} 0$.

<u>DOKAZ.</u> Neka je $\mathrm{Re}\{\psi_n^m(\lambda)\} = \Theta_m(\lambda)$ i $\mathrm{Im}\{\psi_n^m(\lambda)\} = \Omega_m(\lambda)$, zbog $m<n$. Dokažimo prvo da $\Theta_m(\lambda) \xrightarrow[m\to\infty]{D} 1$. Neka je stoga C_r kružnica čiji je centar koordinatni početak, a poluprečnik r. Označimo infimum funkcije $|f_s(\lambda)|$ na C_r sa f_{s+}. Slično (31), važi druga Cauchy-jeva nejednakost

$$\left|\frac{f_s^{(k)}(0)}{k!}\right| \geq \frac{f_{s+}}{r^k} \ . \tag{42}$$

Relaciju (40) možemo modifikovati:

$$\psi_n^m(\lambda) = \frac{A_m(\lambda)}{B_n(\lambda)(P_n^m[f_s]_\lambda + \varepsilon_m(\lambda))^{1/2}} \ .$$

Pošto je za svako $\lambda \in D$

$$\frac{rf_{s+}}{r-|\lambda|}\left(\frac{|\lambda|}{r}\right)^{2(n+m)+1} \leq \varepsilon_m(\lambda) \leq \frac{rf_s^+}{r-|\lambda|}\left(\frac{|\lambda|}{r}\right)^{2(n+m)+1}$$

važi procena

$$\frac{(P_n^m[f_s]_\lambda)^{1/2}}{\left(P_n^m[f_s]_\lambda + \frac{rf_s^+}{r-|\lambda|}\left(\frac{|\lambda|}{r}\right)^{2(n+m)+1}\right)^{1/2}} \leq \psi_n^m(\lambda) \leq$$

$$\leq \frac{(P_n^m[f_s]_\lambda)^{1/2}}{\left(P_n^m[f_s]_\lambda + \frac{rf_{s+}}{r-|\lambda|}\left(\frac{|\lambda|}{r}\right)^{2(n+m)+1}\right)^{1/2}} \ . \tag{43}$$

Ako m neograničeno raste, tada $\psi_n^m(\lambda) \xrightarrow[m\to\infty]{D} 1$, na osnovu zadnje relacije.

Iz nejednakosti

$$|1 - \psi_n^m(\lambda)|^2 = (1 - \theta_m(\lambda))^2 + \Omega_m^2(\lambda)$$

$$\leq |1 - \theta_m^2(\lambda)| + \Omega_m^2(\lambda) \quad ,$$

koja važi za dovoljno veliko m, sledi zbog $\psi_n^m(\lambda) \xrightarrow[m\to\infty]{D} 1$ da $\theta_m(\lambda) \xrightarrow[m\to\infty]{D} 1$ i $\Omega_m^2(\lambda) \xrightarrow[m\to\infty]{D} 0$.

Ocenimo sada odstupanje u normi procesa $X(t)$ od procesa $P_n^m[X]_t$:

$$E|X(t) - P_n^m[X]_t|^2 = \int_R |1 - \psi_n^m(\lambda)|^2 f_s(\lambda)\, d\lambda$$

$$\leq \int_D (|1 - \theta_m^2(\lambda)| + \Omega_m^2(\lambda))\, f_s(\lambda)\, d\lambda .$$

Kada m neograničeno raste, podintegralna funkcija teži nuli na skupu D, odakle sledi tvrđenje teoreme.

Q.E.D.

II.4. O diskretizaciji singularnih procesa

II.4.1. Definišimo slučajan proces $\widetilde{X}(t)$ sa dikretnim vremenom preko slučajnog procesa $X(t)$ sa neprekidnim vremenom na sledeći način:

$$X(t) = \int_R e^{it\lambda}\, dZ_x(\lambda) \tag{44}$$

$$\widetilde{X}(t) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{it\mu}\, d\widetilde{Z}_x(\mu), \tag{45}$$

gde je $dZ_x(\lambda) = d\widetilde{Z}_x(\mu)$, $\mu/2 = \operatorname{arctg}\lambda$ .Diskretizacija slučajnog procesa sa neprekidnim vremenom tog tipa potiče od Gladysheva.U svom radu [14] on koristi ovu transformaciju pri određivanju kriterijuma regularnosti višedimenzionalnih slučajnih procesa.

Citiraćemo dva rezultata iz [14] :

I. Ako je $H(X) = \langle X(t) \mid t \in R \rangle$ i

$H(\widetilde{X}) = \langle \widetilde{X}(t) \mid t \in Z \rangle$,

tada je

$$H(X) = H(\widetilde{X}) . \tag{46}$$

II. $X(t)$ i $\widetilde{X}(t)$ su istovremeno regularni odnosno singularni.

II.4.2. Proces $P_n^m[X]_t$ ćemo takođe diskretizovati:

$$P_n^m[X]_t = \int_R e^{it\lambda}\, dZ_P(\lambda) \tag{47}$$

$$\widetilde{P_n^m[X]_t} = \int_{-\pi}^{\pi} e^{it\mu}\, d\widetilde{Z}_P(\mu) . \tag{48}$$

Na snazi je veza $dZ_P(\lambda) = d\widetilde{Z}_P(\mu)$, $\mu = 2\operatorname{arctg}\lambda$.

II.4.3. Ako je spektralna funkcija $X(t)$ F, procesa $\widetilde{X}(t)$ $\widetilde{F}$, dalje procesima $P_n^m[X]_t$, $\widetilde{P_n^m[X]_t}$ pripadaju redom spektralne funkcije PF odnosno $\widetilde{PF}$, tada je

$$F(\lambda) = \widetilde{F}(\mu)$$

$$PF(\lambda) = \widetilde{PF}(\mu) \tag{49}$$

$$d\mu = \frac{2d\lambda}{1+\lambda^2} \quad .$$

Pošto u ovom radu posmatramo stacionarne slučajne procese sa apsolutno neprekidnim spektralnim funkcijama, svaki razmatrani proces ima spektralnu gustinu. Ako je $\widetilde{F}'(\mu)=\widetilde{f_s}(\mu)$, $(PF(\lambda))'= P_n^m[f_s]_\lambda$, $(\widetilde{PF}(\mu))'= \widetilde{P_n^m[f_s]_\mu}$, tada važe odnosi

$$\widetilde{f_s}(\mu) = \frac{1+\lambda^2}{2} f_s(\lambda)$$

$$\widetilde{P_n^m[f_s]_\mu} = \frac{1+\lambda^2}{2} P_n^m[f_s]_\lambda \quad . \tag{5o}$$

<u>TEOREMA II.4.1.</u> $P_n^m[f_s]_\lambda \xrightarrow[m\to\infty]{D} f_s(\lambda) \Rightarrow \widetilde{P_n^m[f_s]_\mu} \xrightarrow[m\to\infty]{D} \widetilde{f_s}(\mu)$.

<u>DOKAZ.</u> Kako za svako λ iz D važi

$$\left| f_s(\lambda) - P_n^m[f_s]_\lambda \right| \leq \frac{rf_s^+}{r-|\lambda|}\left(\frac{|\lambda|}{r}\right)^{2(n+m)+1} ,$$

zbog $\left| \widetilde{f_s}(\mu) - \widetilde{P_n^m[f_s]_\mu} \right| = \frac{1+\lambda^2}{2} \left| f_s(\lambda) - P_n^m[f_s]_\lambda \right|$ sledi da je

$$(51) \qquad \left|\widetilde{f}_s(\mu) - \widetilde{P_n^m[f_s]_\mu}\right| \leq \frac{r\gamma f_s^+}{r - |\mathrm{tg}\,\mu/2|}\left(\frac{|\mathrm{tg}\,\mu/2|}{r}\right)^{2(n+m)+1}$$

za svako $\mu \in \widetilde{D} = [2\mathrm{arctg}(\max(-r,\alpha)), 2\mathrm{arctg}(\min(r,\beta))]$.

γ definišemo preko

$$\gamma = \max_D \frac{1+\lambda^2}{2} = \begin{cases} \dfrac{1+\max(\alpha^2, r^2)}{2} & \alpha^2 \geq \beta^2 \\ \dfrac{1+\min(\beta^2, r^2)}{2} & \alpha^2 < \beta^2 \end{cases}.$$

Neka u relaciji (51) m neograničeno raste. Tada će se izraz na desnoj strani te relacije anulirati.

Q.E.D.

II.4.4. Koristeći teoremu II.3.2. iz prethodnog paragrafa možemo izreći potrban i dovoljan uslov između konvergencija procesa sa neprekidnim, i sa diskretnim vremenom.

<u>TEOREMA II.4.2.</u> $E|X(t) - P_n^m[X]_t|^2 \xrightarrow[m\to\infty]{D} 0$, ako i samo ako

$$E|\widetilde{X}(t) - \widetilde{P_n^m[X]_t}|^2 \xrightarrow[m\to\infty]{\widetilde{D}} 0.$$

<u>DOKAZ.</u> Neka je $\widetilde{\psi_n^m(\mu)}$ spektralna karakteristika filtera $\widetilde{P_n^m}[\cdot]$. Tada je veza između spektralnih procesa od $X(t)$ i $P_n^m[X]_t$ predstavljenih spektralno u (44) i (47)

$$(52) \qquad dZ_P(\lambda) = \psi_n^m(\lambda)\, dZ_x(\lambda),$$

dok su procesi $\widetilde{X}(t)$ i $\widetilde{P_n^m[X]}_t$ predstavljeni preko (45) i (48) daju vezu:

$$(53) \qquad d\widetilde{Z}_P(\mu) = \widetilde{\psi_n^m}(\mu)\, d\widetilde{Z}_x(\mu) .$$

Iz teoreme Rozanova sledi da je

$$P_n^m[f_s]_\lambda = f_s(\lambda)\,|\psi_n^m(\lambda)|^2$$

$$\widetilde{P_n^m[f_s]}_\mu = \widetilde{f_s}(\mu)\,|\widetilde{\psi_n^m}(\mu)|^2 \quad ,$$

odnosno da je $|\psi_n^m(\lambda)|^2 = |\widetilde{\psi_n^m}(\mu)|^2$ .Naravno, $\widetilde{\psi_n^m}(\mu) \in L_2(\widetilde{f_s})$.
Na osnovu teoreme II.4.1. je

$$E|\widetilde{X}(t) - \widetilde{P_n^m[X]}_t|^2 = \int_{\widetilde{D}} (\widetilde{f_s}(\mu) - 2\mathrm{Re}\{\widetilde{\psi_n^m}(\mu)\}\widetilde{f_s}(\mu) + |\widetilde{\psi_n^m}(\mu)|^2\widetilde{f_s}(\mu))\, d\mu$$

$$\leq \int_D \frac{1+\lambda^2}{2} f_s(\lambda)(|1-\theta_m^2(\lambda)| + \Omega_m^2(\lambda))d\lambda$$

Zadnji izraz teži nuli,kada m neograničeno raste, na osnovu teoreme II.3.2..Sa tim je prvi deo dokaza završen.

Za drugi deo dokaza ćemo prvo uočiti vezu izmedu spektralnih gustina $f_s(\lambda)$ i $\tilde{f}_s(\mu)$:

$$f_s(\lambda) = \frac{2}{1+\lambda^2}\tilde{f}_s(\mu) = 2\cos^2\mu/2\tilde{f}_s(\mu) .$$

Naravno,po pretpostavci je

$$(54) \qquad \lim_{m\to\infty} \widetilde{P_n^m[f_s]_\mu} = \tilde{f}_s(\mu).$$

Pomnožimo obe strane jednakosti (54) sa $2\cos^2\mu/2$, dobijamo tvrdenje iskazano u teoremi II.3.1..Procenimo sada srednje kvadratno odstupanje $X(t)$ od $P_n^m[X]_t$:

$$E|X(t) - P_n^m[X]_t|^2 = \int_D (f_s(\lambda) - 2\mathrm{Re}\{\psi_n^m(\lambda)\} f_s(\lambda) + |\psi_n^m(\lambda)|^2 f_s(\lambda))d\lambda$$

$$(55) \qquad = \int_{\tilde{D}} 2\cos^2\mu/2\, \tilde{f}_s(\mu) \,|1 - \tilde{\psi}_n^m(\mu)|^2 \, d\mu .$$

U vodimo oznake $\mathrm{Re}\{\tilde{\psi}_n^m(\mu)\} = \tilde{\Theta}_m(\mu)$ i $\mathrm{Im}\{\tilde{\psi}_n^m(\mu)\} = \tilde{\Omega}_m(\mu)$. Preko (55) i na osnovu procene za m veliko i svako $\mu \in \tilde{D}$,

$$|1 - \tilde{\psi}_n^m(\mu)|^2 \leq |1 - \tilde{\Theta}_m^2(\mu)| + \tilde{\Omega}_m^2(\mu),$$

koju izvodimo na identičan način kao što je to urađeno u dokazu teoreme II.3.2.,imamo da je desna strana (55) proizvoljno mala ako m neograničeno raste.

Q.E.D.

NAPOMENA II.4.1. U dokazu teoreme II.4.1. nije napomenuta mogućnost da važi i obratno tvrđenje. Naime, takođe važi formula:

$$\widetilde{P_n^m[f_s]_\mu} \xrightarrow[m\to\infty]{D} \widetilde{f_s}(\mu) \Rightarrow P_n^m[f_s]_\lambda \xrightarrow[m\to\infty]{D} f_s(\lambda).$$

U njenu valjanost smo se uverili u dokazu teoreme II.4.2.; na taj način u teoremi II.4.1. umesto implikacije možemo bez ikakve bojazni staviti znak ekvivalencije. Dakle, spektralna gustina slučajnog procesa sa neprekidnim vremenom i spektralna gustina slučajnog procesa sa diskretnim vremenom su istovremeno granice Padé-aproksimanta i njegove slike kod preslikavanja argumenta $\mu = 2\operatorname{arctg}\lambda$.

II.5. Padé-aproksimacija i podčinjeni procesi

II.5.1. Prvo ćemo ukratko sumirati rezultate prethodnih paragrafa ovog poglavlja, koje ćemo ubrzo koristiti. Neka je $X(t)$ stacionaran u širokom smislu slučajan proces sa neprekidnim vremenom i spektralnom gustinom $f(\lambda)$. Ako je $f(o) > o$, tada je $f(\lambda)$ analitičan u nuli, te je njegov formalni stepeni red oblika

$$f(\lambda) = \sum_{o}^{\infty} f_k \lambda^k = \sum_{o}^{\infty} \frac{f^{(k)}(o)}{k!} \lambda^k .$$

Taj formalni stepeni red konvergira uniformno na intervalu $(-r,r)$ gde je $r^{-1} = \limsup_{k\to\infty} |f_k|^{1/k}$. Neka je $P_n^m[f]_\lambda$ Padé-aproksimant spektralne gustine $f(\lambda)$ reda (m,n) kojeg tražimo u obliku

$$P_n^m[f]_\lambda = \frac{|A_m(\lambda)|^2}{|B_n(\lambda)|^2}, \qquad m<n \ ; \ m,n \in 2\mathbb{N}$$

gde je $|b_o|^2 = 1$, $|a_o|^2 = f(o)$, tako, da funkcije $f(\lambda)$ i $P_n^m[f]_\lambda$ imaju dodir reda $2(m+n)$ u koordinatnom početku. Postoji jedan interval $[\alpha,\beta]$ $(\alpha\beta < o)$ na kojem je $P_n^m[f]_\lambda \geqq o$, pošto je tu $|B_n(\lambda)|^2 > o$. Posmatramo i interval $D = [\alpha,\beta] \cap (-r,r)$ na kojem $P_n^m[f]_\lambda$ teži ka $f(\lambda)$ tačka po tačka kada m teži beskonačnosti.

Definišimo sada slučajne procese $X_s(t) \sim f_s(\lambda)$; $P_n^m[X]_t \sim P_n^m[f_s]_\lambda$. Pritom je $f_s(\lambda) = f(\lambda)\chi_D(\lambda)$ odnosno $P_n^m[f_s]_\lambda = P_n^m[f]_\lambda \chi_D(\lambda)$. Na svakom podintervalu $[\alpha_1,\beta_1] \subseteqq$ $\subseteqq [\alpha,\beta]$ važi

$$P_n^m[f_s]_\lambda \xrightarrow[m\to\infty]{} f_s(\lambda)$$

(56)

$$E|X_s(t) - P_n^m[X]_t|^2 \xrightarrow[m\to\infty]{} o \ .$$

Naravno, $X_s(t)$ i $P_n^m[X]_t$ su singularni procesi, jer su njihove spektralne gustine identično jednaki nuli na intervalu pozitivne Lebesgue-ove mere.

U ovom paragrafu poglavlja II. ćemo izučavati vezu izmedu Hilbertovih prostora generisanih zasečenjima procesa $X_s(t)$ i $P_n^m[X]_t$.

II.5.2. Prvo ćemo uvesti oznake

$$H_t(X_s) = \langle X_s(t') \mid t \leq t' \rangle , \quad H(X_s) = \bigcup_t H_t(X_s)$$

$$H_t(P_n^m[X]) = \langle P_n^m[X]_{t'} \mid t \leq t' \rangle , \quad H(P_n^m[X]) = \bigcup_t H_t(P_n^m X).$$

Pošto je interval $[\alpha , \beta]$ nosač kako $f_s(\lambda)$ tako i $P_n^m[f_s]_\lambda$, i procesi koji su preko njih karakterisani singularni, sledi

$$H(X_s) = \bigcap_t H_t(X_s) = H_t(X_s) \tag{57}$$

za svako realno t. Slično tome važi relacija

$$H(P_n^m[X]) = \bigcap_t H_t(P_n^m[X]) = H_t(P_n^m[X]) . \tag{58}$$

II.5.3. U odeljku prethodnog paragrafa smo diskutovali egzistenciju operatora $P_n^m[\cdot]$ koji je vrsta diferencijalnog filtera slučajnog procesa $X(t)$ sa spektralnom karakteristikom $\psi_n^m(\lambda)$ koja je definisana sa (4o). Primenimo li sada filter P_n^m na slučajan proces $X_s(t)$, spektralna karakteristika $\psi_n^m(\lambda) \in L_2(f_s)$, važiće sledeće analogne relacije relacijama (36) i (37):

$$\begin{aligned} X_s(t) &= \int_R e^{it\lambda} \, dZ_s(\lambda) \\ P_n^m[X]_t &= \int_R e^{it\lambda} \, \psi_n^m(\lambda) \, dZ_s(\lambda) \; . \end{aligned} \tag{59}$$

Kako ni racion alna spektralna gustina $P_n^m[f_s]_\lambda$ a ni $f_s(\lambda)$ nemaju čisto relne polove na skupu D, tako ni $\psi_n^m(\lambda)$ nema takve, jer je $|\psi_n^m(\lambda)|^2 f_s(\lambda) = P_n^m[f_s]_\lambda$. Na taj način određujemo cross-spektralnu gustinu posmatranih procesa:

$$\text{(6o)} \qquad E\, X_s(t)\, \overline{P_n^m[X]_{t'}} = \int_R e^{i(t-t')\lambda}\, \overline{\psi_n^m(\lambda)}\, f_s(\lambda)\, d\lambda \,,$$

odakle sledi da je cross-spektralna gustina procesa $X_s(t)$ i $P_n^m[X]_t$ $f_{XP}(\lambda) = f_s(\lambda)\, \overline{\psi_n^m(\lambda)}$. Ali, iz (59) i (6o) važi relacija

$$\text{(61)} \qquad H(X_s) \supseteq H(P_n^m[X]) \quad .$$

DEFINICIJA II.5.1. Slučajan proces $Y(t)$ je podređen slučajnom procesu $X(t)$, ako važi

$$\text{(62)} \qquad \begin{aligned} &a) \quad H_t(X) \supseteq H_t(Y) \\ &b) \quad H_t^{\perp}(X) \supseteq H_t^{\perp}(Y) \end{aligned}$$

za svako realno t, gde je $H_t^{\perp} = H \ominus H_t$.

DEFINICIJA II.5.2. Slučajni procesi $X(t)$ i $Y(t)$ su spektralno povezani, ko njihova cross-spektralna gustina $f_{XY}(\lambda)$ nije nula na intervalu pozitivne Lebesgue-ove mere.

]<u>TEOREMA II.5.1. Neka je slučajan proces</u> $X_s(t) \sim f_s(\lambda) = f(\lambda)\,\chi_D(\lambda)$.<u>Ako je</u> $P_n^m[X]_t \sim P_n^m[f_s]_\lambda$,<u>tada je slučajan proces</u> $P_n^m[X]_t$ <u>podređen slučajnom procesu</u> $X_s(t)$.

<u>DOKAZ.</u> Procesi $X_s(t)$ i $P_n^m[X]_t$ su spektralno povezani, jer postoji njihova cross-spektralna gustina $f_{XP}(\lambda)$ - - vidi relaciju (6o).Zbog

$$P_n^m[X]_t = \int_R e^{it\lambda}\,\psi_n^m(\lambda)dZ_s(\lambda)$$

je na snazi (61).Time je uslov a) definicije II.5.1. ispunjen.Pošto su oba procesa singularna,ortogonalne dopune njihovih H-podprostora $H_t(X_s)$ odnosno $H_t(P_n^m[X])$ su trivijalni H-prostori.Na taj način su oba uslova definicije II.5.1. ispunjena,te je proces $P_n^m[X]_t$ podreden procesu $X_s(t)$.

Q.E.D.

II.5.3. Ispitajmo kada važi jednakost izmedu $H_t(X_s)$ i $H_t(P_n^m[X])$ za svako realno t .Dalje,kada važi jednakost u relaciji (61) ? Na ta,i još neka srodna pitanja ćemo tražiti odgovor u ovom delu paragrafa II.5..

Ako je $H(X_s) = H(P_n^m[X])$,tada je filter P_n^m invertibilan,a spektralna karakteristika inverznog filtera (koju ćemo označavati sa $(\psi^{-1})_n^m(\lambda)$) daje $X_s(t)$ iz $P_n^m[X]_t$ pomoću

$$X_s(t) = \int_R e^{it\lambda}\,(\psi^{-1})_n^m(\lambda)\,dZ_{\mathbb{P}}(\lambda), \tag{63}$$

pošto je spektralno razlaganje slučajnog procesa $P_n^m[X]_t$ na osnovu (47)

$$P_n^m[X]_t = \int_R e^{it\lambda}\,dZ_{\mathbb{P}}(\lambda) \quad .$$

Iz $|\psi_n^m(\lambda)|^2\, f_s(\lambda) = P_n^m[f_s]_\lambda$,a na osnovu stava II.3.1. sledi da je

$$(\psi^{-1})_n^m(\lambda) = (\,\psi_n^m(\lambda))^{-1}.$$

Dakle $(\psi^{-1})_n^m(\lambda)$ postoji ako je $P_n^m[f_s]_\lambda > o$ na skupu D,pošto je tada $(\psi^{-1})_n^m(\lambda) \in L_2(P_n^m[f_s])$.U ostalim tačkama intervala D na kojem je $P_n^m[f_s] > o$ i $f_s(\lambda) > o$, i čiji skup označavamo sa D' ,važi

<u>TEOREMA II.5.2. Neka je</u> $X_s(t) \sim f_s(\lambda)$ <u>i</u> $P_n^m[X]_t \sim P_n^m[f_s]_\lambda$, <u>gde su</u>

$$f_s(\lambda), P_n^m[f_s]_\lambda \begin{cases} > o & \lambda \in D' \\ = o & \underline{\text{inače}} \end{cases} .$$

<u>Tada je</u> $H(X_s) = H(P_n^m[X])$.

II.5.4. Stacionaran u širokom smislu slučajan proces

$X(t)$ sa neprekidnim vremenom,čija je spektralna gustina parna i pozitivna,neka je regularan.Tada je Padé-aproksimant spektralne gustine $f_x(\lambda)$ reda (m,n) takode spektralna gustina,kao što je to dokazano u teoremi II.2.2..

TEOREMA II.5.3. Neka je $X(t)\sim f(\lambda), P_n^m[X]_t \sim P_n^m[f]_\lambda$.
Tada je

$$a) \quad (\forall\lambda\in R)(P_n^m[f]_\lambda \geq o) \Leftrightarrow H_t(X) \supseteq H_t(P_n^m[X])$$

$$b) \quad (\forall\lambda\in R)(P_n^m[f]_\lambda > o) \Leftrightarrow H_t(X) = H_t(P_n^m[X]).$$

DOKAZ. Neka je $\psi_n^m(\lambda)$ spektralna karakteristika filtera P_n^m ;tada je

$$(64) \qquad f(\lambda)\,|\psi_n^m(\lambda)|^2 = P_n^m[f]_\lambda \geq o.$$

Pošto je spektralna gustina slučajnog procesa $X(t)$ pozitivna,zato iz jednakosti $P_n^m[f]_\lambda = o$ za neko realno λ_o važi $|\psi_n^m(\lambda_o)|^2 = o$.Predpostavimo da postoji inverz filtera P_n^m sa spektralnom karakteristikom $(\psi^{-1})_n^m(\lambda)$. Na osnovu odgovarajuće tačke stava II.3.1. sledi da je

$$|(\psi^{-1})_n^m(\lambda)|^2 = 1/|\psi_n^m(\lambda)|^2 \quad .$$

Kako spektralna karakteristika $\psi_n^m(\lambda)$ ima realnu nulu, biće $\hat{\psi}_n^{m'}(\lambda)(\lambda-\lambda_o)^k = \psi_n^m(\lambda)$,ako je λ_o nula k-tog reda.

Jasno je da integral

$$\int_R \frac{P_n^m[f]_\lambda \; d\lambda}{|\hat{\psi}_n^{m'}(\lambda)|^2 (\lambda - \lambda_o)^{2k}} \;, \quad m' + k = m$$

divergira. To znači da $(\psi^{-1})_n^m(\lambda) \notin L_2(P_n^m[f])$. Dakle, ako se spektralna gustina - Padé-aproksimant anulira bar za jedno realno λ_o, tada je $P_n^m[X]_t$ podčinjen procesu $X(t)$. Dokaz u obratnom smeru dela a) teoreme je očigledan.

Odbacivanjem jednakosti u (64) dobijemo b) tvrdenje teoreme II.5.3., preko egzistencije $(\psi^{-1})_n^m(\lambda)$.

Q.E.D.

II.5.5. Slučaj b) teoreme II.5.3. znači da su i $X(t)$ i $P_n^m[X]_t$ rezultat primene dva filtera na isti slučajan proces $U(t)$ tipa belog šuma sa neprekidnim vremenom. Naravno $U(t)$ je stacionaran u širokom smislu.

Da bi dokazali tu činjenicu, pretpostavimo suprotno: neka postoje slučajni procesi tipa belog šuma $U_X(t)$ i $U_P(t)$ koji generišu H-prostore slučajnih procesa $X(t)$ odnosno $P_n^m[X]_t$.

Zbog regularnosti slučajnih procesa $X(t)$ i $P_n^m[X]_t$ moguća je faktorizacija njihovih spektralnih gustina na osnovu Fejér-Riesz-ove teoreme u ravni:

$$f(\lambda) = |g(\lambda)|^2 \;, \quad P_n^m[f]_\lambda = |h(\lambda)|^2.$$

Neka su Fourier-ove transformacije funkcija $h(\lambda)$ i $g(\lambda)$

$$
\begin{aligned}
c(t) &= \int_R e^{it\lambda}\, g(\lambda)\, d\lambda \\
d(t) &= \int_R e^{it\lambda}\, h(\lambda)\, d\lambda \ .
\end{aligned} \tag{65}
$$

Razlaganje Wold-a slučajnih procesa $X(t)$ i $P_n^m[X]_t$ je dato sa

$$
\begin{aligned}
X(t) &= \int_{-\infty}^{t} c(t-s)\, dU_X(s) \\
P_n^m[X]_t &= \int_{-\infty}^{t} d(t-s)\, dU_P(s) \ .
\end{aligned} \tag{66}
$$

Na osnovu odgovarajućih osobina funkcija $g(\lambda)$ i $h(\lambda)$ važi za svako realno,negativno t :

$$
\int_R e^{it\lambda} \left\{ \begin{matrix} g(\lambda) \\ \\ h(\lambda) \end{matrix} \right\} d\lambda = 0 \ .
$$

Tada je,na osnovu spektralnog razlaganja i spektralne povezanosti procesa $X(t)$ i $P_n^m[X]_t$,koji su:

$$
\begin{aligned}
X(t) &= \int_R e^{it\lambda}\, dZ(\lambda) \\
P_n^m[X]_t &= \int_R e^{it\lambda}\, \psi_n^m(\lambda) dZ(\lambda) \ ,
\end{aligned}
$$

zaključak

$$(67) \qquad \int_R \frac{e^{iq\lambda}-1}{i\lambda\, g(\lambda)}\, dZ(\lambda) = \int_R \frac{e^{iq\lambda}-1}{i\lambda\, h(\lambda)}\, \psi_n^m(\lambda)\, dZ(\lambda) .$$

Nije teško uvideti da su procesi $U_X(t)$, $U_P(t)$ procesi sa nekoreliranim priraštajima i da je

$$E|U_i(w) - U_i(o)|^2 = w , \quad i \in \{X,P\}$$

za svako realno w.Kako je leva strana (67) ustvari

$$(68) \qquad U_X(q) - U_X(o) = \int_R \frac{e^{iq\lambda}-1}{i\lambda\, g(\lambda)}\, dZ(\lambda) ,$$

a desna strana se da predstaviti u obliku

$$(69) \qquad U_P(q) - U_P(o) = \int_R \frac{e^{iq\lambda}-1}{i\lambda\, h(\lambda)}\, \psi_n^m(\lambda)\, dZ(\lambda) ,$$

zato je $U_X(t) = U_P(t) + V$,gde je V proizvoljna slučajna promenljiva sa nultim očekivanjem i konačnim momentom drugog reda.Neka je $H_t(U_X) = \langle U_X(s) \mid s \leq t \rangle$. Posredstvom (66): $H_t(U_X) = H_t(X)$,za svako $t \in R$.Pošto je $X(t)$ regularan proces,zato je $\bigwedge_t H_t(X) = \langle o \rangle$,tj. podprostor generisan nultim elementom.

Odavde je (preko $U_X(t) = U_P(t)$) evidentna veza

$$(70) \qquad \bigwedge_t H_t(U_X) = \bigwedge_t \langle U_P(s)+V \mid s \leq t \rangle = \langle o \rangle ,$$

što znači da je slučajna promenljiva V generator trivijalnog podprostora $\langle o \rangle$;dakle $V \equiv o$.

Prema tome $U_X(t) \equiv U_P(t) := U(t)$ (kontradikcija sa predpostavkom!).Preko relacije (66) je napokon

$$H_t(X) = H_t(U) = H_t(P_n^m[X])$$

za svako realno t .

II.6. Neke osobine procesa $P_n^m[X]_t$, $\widetilde{P_n^m[X]}_t$

II.6.1. U ovom radu su svi posmtrani procesi centrirani bez obzira na njihovu singularnost ili regularnost.Ta osobina je kod inicijalnih procesa ($X(t)$ naprimer) uzeta a priori,dok kod Padé-aproksimantnih procesa centriranost je posledica određenih činjenica.

Pošto je u II.3. dokazana egzistencija filtera P_n^m sa spektralnom karakteristikom $\psi_n^m(\lambda)$,slučajan proces $P_n^m[X]_t$ svakako nasleđuje izvesne osobine procesa $X(t)$.

Diskretizacijom procesa $X(t)$, $P_n^m[X]_t$ dobijamo slučajne procese $\widetilde{X}(t)$, $\widetilde{P_n^m[X]}_t$ .Njihova spektralna razlaganja imaju i dalje originalne spektralne procese $Z_X(\lambda)$, $Z_P(\lambda)$ sa preslikanim argumentom,ali baš nam to omogućava izračunavanje i upoređivanje momenata posmatranih procesa.

II.6.2. U radu smo uveli pretpostavku $EX(t) = o$;
kako je na osnovu relacije (37)

$$E\, P_n^m[X]_t = E \int_R e^{it\lambda}\, \psi_n^m(\lambda)\, dZ_x(\lambda)$$

$$= \int_R e^{it\lambda}\, \psi_n^m(\lambda)\, E\, dZ_x(\lambda) = o\,, \tag{71}$$

važi iskaz $EX(t) = o \Rightarrow EP_n^m[X]_t = o$. Pošto je

$$\widetilde{X}(t) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{it\mu}\, d\widetilde{Z}_x(\mu)$$

gde je $d\widetilde{Z}_x(\mu) = dZ_x(\lambda)$ $(\mu/2 = \operatorname{arctg} \lambda)$, sledi

$$E\, \widetilde{X}(t) = \int_R e^{it\mu}\, E\, d\widetilde{Z}_x(\mu) = o.$$

Na sličan način kao u (71) dolazimo do

$$E\, \widetilde{P_n^m[X]}_t = \int_{-\pi}^{\pi} e^{it\mu}\, \widetilde{\psi}_n^m(\mu)\, E\, d\widetilde{Z}_x(\mu) = o\,.$$

Kako ni $\psi_n^m(\lambda)$, ni $\widetilde{\psi}_n^m(\mu)$ nisu identično jednaki nuli na intervalu integracije, iz $dZ_P(\lambda) = \psi_n^m(\lambda)\, dZ_x(\lambda)$ i $d\widetilde{Z}_P(\mu) = \widetilde{\psi}_n^m(\mu)\, d\widetilde{Z}_x(\mu)$ sledi da je i $EdZ_P(\lambda) = o$, odnosno $Ed\widetilde{Z}_P(\mu) = o$.

II.6.3. Slučajan proces $X(t) \sim f(\lambda)$ ima korelacionu funkciju $K_x(t)$ koja je preko Bohner-Hinčin-ove teoreme jednaka

$$K_x(t) = E\, X(t)\, \overline{X(o)} = \int_R e^{it\lambda} f(\lambda)\, d\lambda \; .$$

Padé-aproksimantni proces $P_n^m[X]_t$ smo definisali:

a) preko svoje spektralne gustine: $P_n^m[X]_t \sim P_n^m[f]_\lambda$, i tada je

$$K_P(t) = E\, P_n^m[X]_t\, \overline{P_n^m[X]_o} = \int_R e^{it\lambda} \frac{|A_m(\lambda)|^2}{|B_n(\lambda)|^2}\, d\lambda \; ,$$

b) preko filtera P_n^m sa spektralnom karakteristikom $\psi_n^m(\lambda) = A_m(\lambda)/(B_n(\lambda)\, f^{1/2}(\lambda))$, gde su $A_m(\lambda), B_n(\lambda)$ polinomi definisani u II.2.1., a $f(\lambda)$ spektralna gustina procesa $X(t)$. Tada je naosnovu teoreme Rozanova

$$f_P(\lambda) = |\psi_n^m(\lambda)|^2 f(\lambda) = \frac{|A_m(\lambda)|^2}{|B_n(\lambda)|^2} \; ,$$

što se svodi na a).

Diskretizacija Gladyshev-ljevog tipa (vidi II.4.) daje preko Herglotz-ove teoreme (diskretna varijanta Bohner-Hinčinove teoreme):

$$\widetilde{K}_x(t) = E\widetilde{X}(t)\overline{\widetilde{X}(o)} = \int_{-\pi}^{\pi} e^{it\mu} \widetilde{f_s}(\mu)\, d\mu \ ,$$

$$\widetilde{K}_{\mathbb{P}}(t) = E\widetilde{\mathbb{P}_n^m[X]}_t \overline{\widetilde{\mathbb{P}_n^m[X]}_o} = \int_{-\pi}^{\pi} e^{it\mu} \widetilde{P_n^m[f]}_\mu \, d\mu \ .$$

Veza izmedu spektralnih gustina procesa sa neprekidnim i diskretnim vremenom je data sa (5o).

II.6.4. Iz Rozanovljeve teoreme imamo da su $X(t)$ i $\mathbb{P}_n^m[X]_t$ spektralno vezani:

$$E\mathbb{P}_n^m[X]_t\overline{X(o)} = \int_R e^{it\lambda} \psi_n^m(\lambda) f(\lambda)\, d\lambda$$

odnosno cross-spektraln a gustina procesa $\mathbb{P}_n^m[X]_t$ i $X(t)$ je $f_{\mathbb{P}X}(\lambda) = \psi_n^m(\lambda) f(\lambda)$ .To je svakako u saglasnosti sa relacijom (6o),na osnovu hermitske simetrije cross-spektralnih gustina.

II.7. Pregled literature

II.7.1. Literatura uz II. poglavlje rada može da se deli u dve veće grupe.Prvu sačinjavaju reference iz oblasti teorije funkcije kompleksne promenljive i racionalne aproksimacije,a druga je stohastičkog karaktera - - sačinjavaju je radovi iz teorije stacionarnih slučajnih procesa.

II.7.2. Padé-aproksimacija je tema velikog broja simpozijuma, i koristi se ne samo u teoriji estimacije slučajnih procesa, nego uglavnom u teoriji aproksimacije (naprimer [9] se bavi procesima sa diskretnim vremenom). Veliku pomoć, u razumevanju pojma regularnosti slučajnih procesa i u zadavanju kriterijuma regularnosti preko spektralne gustine (relacija (2)) pružaju radovi Szegö-a, Grenandera itd. iz pedesetih godina ovog stoleća. Walsh, Sinanyan i Mergelyan se bave racionalnom aproksimacijom; dok prvi dokazuje da je Padé-aproksimacija lokalno najbolja, i daje rezultate o ravnomernoj konvergenciji niza Padé-aproksimanata, jermenski matematičari pristupaju rešavanju problema racionalne aproksimacije na topološki način - koriste pojam kapaciteta oblasti.

Važna je stoga monografija [13] ,koja daje pregled kako literature, tako i svih dosadašnjih rezultata iz teorije racionalne aproksimacije.

II.7.3. Približenje transfernoj funkciji je tema istraživanja nekih autora - oni u svojim radovima koriste nizove verižnih razlomaka za racionalnu aproksimaciju. Spomenimo imena Kalmana, Gragga, Lindquista, Porata itd. Takođe je od interesa problem poopštenja dosadašnjih rezultata iz ovog rada na višedimenzionalne slučajne procese (vidi sledeće poglavlje!). Naravno nastale bi izvesne poteškoće kod aproksimacije cross-spektralne gustine koji nema osobinu nenegativne definitnosti.

ОСНОВНА ОРГАНИЗАЦИЈА УДРУЖЕНОГ РАДА
ЗА МАТЕМАТИКУ, МЕХАНИКУ И АСТРОНОМИЈУ
Б И Б Л И О Т Е К А

Број: ______
Датум: ______

III. PADÉ-APROKSIMACIJA VIŠEDIMENZIONALNIH SLUČAJNIH PROCESA

III.1. Uvod

III.1.1. Aproksimacija skalarnog, stacionarnog u širokom smislu slučajnog procesa je izložena u poglavlju II. ovog rada. Izmedu ostalih, dokazani su sledeći rezultati:

a) Padé-aproksimant parne, pozitivne spektralne gustine je spektralna gustina;

b) Niz Padé-aproksimanata tačka po tačka konvergira ka spektralnoj gustini, na intervalu konvergencije formalnog stepenog reda spektralne gustine;

c) Niz slučajnih procesa koji su odredeni nizom Padé-aproksimanata spektralne gustine, konvergira u srednje kvadratnom slučajnom procesu sa spektralnom gustinom spomenutom pod b).

U ovom poglavlju posmatraćemo vektorske slučajne procese - vršićemo Padé-aproksimaciju matrične spektralne gustine. To možemo učiniti na dva načina: prvo, pretpostavljajući da su koordinatni procesi vektorskog procesa nekorelirani; drugo - ne uvodeći ovu pretpostavku.

Na kraju poglavlja III. daćemo neke rezultate o dvodimenzionalnim slučajnim procesima.

III.1.2. Ako su koordinatni slučajni procesi vektorskog slučajnog procesa nekorelirani, tada je slučajan proces $X(t) = (X_1(t),\ldots,X_r(t))$ sa očekivanjem $EX(t)=(o,\ldots,o)_{1xr}$ okarakterisan matričnom spektralnom gustinom $f_x(\lambda)$ koja je jednaka $(\delta_{ij} f_{ij}(\lambda))_{rxr}$, gde je δ_{ij} Kroneckerov δ-simbol, i matričnom korelacionom funkcijom $K_x(t) = (\delta_{ij} K_{ij}(t))_{rxr}$. Dakle, $f_x(\lambda)$ je dijagonalna matrica oblika

$$(72) \qquad f_x(\lambda) = \begin{bmatrix} f_{11}(\lambda) & & & 0 \\ & f_{22}(\lambda) & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & f_{rr}(\lambda) \end{bmatrix} .$$

Pošto je Padé-aproksimacija skalarnog slučajnog procesa već rešena (vidi III.1.1. a)), možemo definisati operator Padé, P, preko

$$(73) \qquad P[f_x]_\lambda = (P[f_{jj}]_\lambda)_{rxr} \; .$$

Naravno, matrična spektralna gustina $P[f_x]_\lambda$ mora ispuniti uslove nenegativne definitnosti, L_1-integrabilnosti, odnosno hermitske simetrije da bi bila spektralna gustina nekog stacionarnog u širokom smislu, slučajnog procesa $P[X]_t = (P[X_1]_t,\ldots,P[X_r]_t)$. Ove i još neke postavke i probleme ćemo diskutovati u ovom poglavlju rada.

III.2. Aproksimacija matrične spektralne gustine nekoreliranog procesa

[II.2.1. Neka je $X(t) = (X_1(t),\ldots,X_r(t))$ r-dimenzionalan, stacionaran u širokom smislu slučajan proces sa neprekidnim vremenom, spektralnom gustinom $f_x(\lambda) = (f_{ij}(\lambda))_{r\times r}$, korelacionom funkcijom $K_x(t)=(K_{ij}(t))$ koja je matrica reda $r\times r$. Neka je pritom $X(t)$ centriran. (Ako to nije slučaj, umesto $X(t)$ ćemo posmatrati slučajan proces $X_o(t) = X(t) - EX(t)$, sa nultim očekivanjem). Inače, $EX(t)$ se definiše na uobičajen način: $EX(t) = (EX_1(t),\ldots,EX_r(t))$.

Neka je $EX_i(t)X_j(s) = o$, za svako $t,s \in R$; $i,j=\overline{1,r}$; $i \neq j$. Nekoreliranost koordinatnih procesa $X(t)$ rezultira spektralnu gustinu oblika (72).

DEFINICIJA III.2.1. Neka je $f(\lambda)$ proizvoljna funkcija realne ili kompleksne promenljive. Sa $P_n^m[f]_\lambda$ ćemo označiti Padé-aproksimanta reda (m,n) funkcije $f(\lambda)$.

Ako je $f(\lambda)$ spektralna gustina, tada red (m,n) aproksimacije zanči da je $P_n^m[f]_\lambda$ oblika:

$$P_n^m[f]_\lambda = \frac{|A_m(\lambda)|^2}{|B_n(\lambda)|^2} \tag{74}$$

gde je $m<n$, $|B_n(o)|^2 = 1$; $A_m(\lambda) = \sum_0^m a_k \lambda^k$; $B_n(\lambda) = \sum_0^n b_k \lambda^k$ je polinom sa nulama izvan realne ose, tako da je $|B_n(\lambda)|^2 f(\lambda) - |A_m(\lambda)|^2 = O(\lambda^{2(n+m)+1})$.

DEFINICIJA III.2.2. Padé-aproksimacija matrične spektralne gustine $f_x(\lambda)$ oblika (72) se definiše kao

$$P[f_x]_\lambda = (P[f_{jj}]_\lambda)_{rxr} ,$$

gde je svaka koordinata $P[f_{jj}]_\lambda$ iz definicije III.2.1., respektivno reda (m_j, n_j) , $m_j < n_j$.

III.2.2. Neka je $f_x(\lambda)$ spektralna gustina slučajnog višedimenzionalnog procesa $X(t)$,ili u kraćoj oznaci $X(t) \sim f(\lambda)$.Slučajan proces određen matričnom spektralnom gustinom $P[f_x]_\lambda$ ćemo označavati sa $P[X]_t = (P[X_1]_t, \dots, P[X_r]_t)$, odnosno $P[X]_t \sim P[f_x]_\lambda$.

III.2.3. Matrična funkcija $F(x)$ je parna, ako je $F(-x) = F(x)$ za $\forall x \in D(F)$, gde je domen $D(F)$ simetričan u odnosu na origo.

]TEOREMA III.2.1. <u>Neka je</u> $f_x(\lambda)$ <u>pozitivno definitna, parna, matrična spektralna gustina stacionarnog u širokom smislu slučajnog procesa</u> $X(t) = (X_1(t), \dots, X_r(t))$ <u>sa neprekidnim vremenom. Ako je pritom</u> $f_x(\lambda)$ <u>oblika</u> (72), <u>tada je i Padé-aproksimant spektralne gustine</u> $f_x(\lambda)$, <u>u</u>

<u>oznaci</u> $P[f_x]_\lambda$ <u>, spektralna gustina nekog stacionarnog u širokom smislu slučajnog vektorskog procesa</u> $P[X]_t = (P[X_1]_t, \dots, P[X_r]_t)$.

<u>DOKAZ.</u> Po definiciji je $P[f_x]_\lambda = (P[f_{jj}]_\lambda)_{rxr}$. Primenom rezultata teoreme II.2.2., sledi da je

$$P[f_{jj}]_\lambda = P_{n_j}^{m_j}[f_{jj}]_\lambda \geq o \ , \ j = \overline{1,r} \ .$$

Matrica je nenegativno (pozitivno) definitna, ako su sve determinante minora matrice $P[f_x]_\lambda$ nenegativne (pozitivne), (kriterijum Sylvestera) . No, kako je

$$\det M_j = \prod_{1}^{j} P[f_{kk}]_\lambda \geq o \ , \ j = \overline{1,r}$$

gde je M_j minor reda jxj; očigledna je nenegativna (pozitivna) definitnost $P[f_x]_\lambda$.

L_1-integrabilnost funkcija $P[f_{jj}]_\lambda$ sledi iz relacija (18),(19) u dokazu teoreme II.2.1., jer se preko njih dokazuje da je

$$|B_{n_j}(\lambda)|^2 > o \quad \text{na } R \text{ za } j = \overline{1,r}.$$

Hermitska simetrija je pak posledica definicije III.2.1..
Dakle, $P[f_x]_\lambda$ je zaista spektralna gustina slučajnog pro-

cesa sa r koordinata,koje su nekorelirani slučajni procesi.Označićemo taj proces sa $P[X]_t$,a njegove koordinate sa $P[X_i]_t$, $i = \overline{1,r}$.

Q.E.D.

III.2.4. Kako se $P_{n_j}^{m_j}[f_{jj}]_\lambda$ traži u obliku (74),posle jednostavnih transformacija možemo pisati da je

$$P_{n_j}^{m_j}[f_{jj}]_\lambda = p_{m_j}(\lambda)/q_{n_j}(\lambda) ,$$

gde je $p_{m_j}(\lambda) = \sum_{o}^{2m_j} \alpha_k^{(j)}\lambda^k$, $q_{n_j}(\lambda) = \sum_{o}^{2n_j} \beta_k^{(j)}\lambda^k$ .Koeficijente polinomâ p,q ćemo odrediti iz sistema (24) prethodnog poglavlja.Formalni stepeni red spektralne gustine $f_{jj}(\lambda)$ je oblika:

$$f_{jj}(\lambda) = \sum_{o}^{2(n_j+m_j)} f_k^{(j)} \lambda^k + O(\lambda^{2(m_j+n_j)+1}) , \quad j = \overline{1,r} .$$

Odgovarajuće jednačine za nalaženje nepoznatih koeficijenata polinomâ p,q će biti:

$$(75) \quad \begin{aligned} &\sum_{o}^{i} f_{2k}^{(j)} \beta_{i-2k}^{(j)} = \alpha_i^{(j)} , && i = \overline{o,2m_j} \\ &\sum_{o}^{i} f_{2k}^{(j)} \beta_{i-2k}^{(j)} = o , && i = \overline{2m_j+1,2(n_j+m_j)} \end{aligned}$$

ako $j = \overline{1,r}$.

(75) je ustvari sistem jednačina koji se sastoji od r podsistema. Svaki podsistem ima $2(n_j+m_j)+1$ jednačinu sa isto toliko nepoznatih, jer po definiciji tj. uslovima Padé-aproksimacije mora biti $\beta_o^{(1)} = \beta_o^{(2)} = \dots = \beta_o^{(r)} = 1$. Možemo se uveriti i u jednoznačnost rešenja sistema (75), odnosno svakog od podsistema (75); delovi II.2.4. i II.2.5. paragrafa II.4. detaljno diskutuju taj problem.

III.3. O srednje kvadratnoj konvergenciji Padé-aproksimanata

III.3.1. Neka je $f(\lambda)$ spektralna gustina stacionarnog u širokom smislu slučajnog procesa $\xi(t)$ sa neprekidnim vremenom, i neka $f(\lambda)$ ima sledeće osobine:

1) $f(o) \neq o$

2) $f(\lambda) = \chi_I(\lambda)\, f_Y(\lambda)$,

$Y(t) \sim f_Y(\lambda)$ je prizvoljan regularan slučajan proces, I konačan podinterval R, koji sadrži origo.

]<u>TEOREMA III.3.1. Neka je</u> $X(t) = (X_1(t), \dots, X_r(t))$ <u>stacionaran u širokom smislu slučajan proces sa matričnom spektralnom gustinom oblika</u> (72), <u>čiji dijagonalni elementi</u> $f_{jj}(\lambda)$, $j = \overline{1,r}$ <u>ispunjavaju ujedno i uslov III.3.1. 1).</u> <u>Neka je dalje</u> $P_{n_j}^{m_j}[f_{jj}]_\lambda$ <u>Padé-aproksimant spektralne</u>

gustine $f_{jj}(\lambda)$ uveden definicijom III.2.1..Tada važi

$$\lim_{m\to\infty} P[f_x]_\lambda = f_x(\lambda)$$

na skupu $D = \bigcap_{k=1}^{r} (I_k \cap (-r_k, r_k))$ tačka po tačka, gde je
$m = \min_k(m_k)$, i

(76)
$$r_j^{-1} = \limsup_{k\to\infty} \left| \frac{f_{jj}^{(k)}(o)}{k!} \right|^{1/k} .$$

DOKAZ. Kako je $f_x(o) \neq o$ sledi da je $f_x(o) > o$, odnosno matrica $f_x(o)$ je pozitivno definitna. Stoga se formalni stepeni red svake spektralne gustine $f_{jj}(\lambda)$ podudara sa McLaurin-ovim redom dotične spektralne gustine:

(77)
$$f_{jj}(\lambda) = \sum_{o}^{\infty} f_k^{(j)} \lambda^k = \sum_{o}^{\infty} \frac{f_{jj}^{(k)}(o)}{k!} \lambda^k .$$

Takođe zbog $f_{jj}(o) > o$, $j = \overline{1,r}$ imamo da je $P_{n_j}^{m_j}[f_{jj}] > o$ na nekom intervalu $[\alpha_j, \beta_j]$, $\alpha_j \cdot \beta_j < o$.

Uzmimo da je $I_j = [\alpha_j, \beta_j]$.

Svaki stepeni red uniformno konvergira unutar svog intervala konvergencije, čiji se poluprečnik izračunava sa (76). Procenjujući razliku

$$\varepsilon_{m_j,n_j}(\lambda) = \left| f_{jj}(\lambda) - P_{n_j}^{m_j}[f_{jj}]_\lambda \right|$$

preko rezultata iz teoreme II.3.1., koji je iskazan relacijom (33), dobijamo ocenu

(78) $$\varepsilon_{m_j,n_j}(\lambda) \leq \frac{r_j f_{jj}^{+}}{r_j-|\lambda|}\left(\frac{|\lambda|}{r_j}\right)^{2(n_j+m_j)+1}$$

gde je $f_{jj}^{+} = \sup_{0\leq t\leq 2\pi}|f_{jj}(r_j e^{it})|$. Naravno, kako je $m_j < n_j$ umesto veličine $\varepsilon_{m_j,n_j}(\lambda)$ možemo slobodno posmatrati $\varepsilon_{m_j}(\lambda) = \varepsilon_{m_j,n_j}(\lambda)$.

Ako u relaciji (78) pustimo da $\min_j(m_j) = m$ neograničeno raste, to ujedno znači da i $\min_j(n_j) = n$ raste neograničeno; kako je λ iz skupa D, stoga $\varepsilon_{m_j}(\lambda)$ teži nuli bar geometrijskom brzinom. Dakle, možemo zaključiti da je

$$\lim_{m\to\infty} P[f_x]_\lambda = f_x(\lambda) \quad \text{za} \quad \forall x\in D = \bigcap_{1}^{r}(I_k\cap(-r_k,r_k)).$$

Q.E.D.

III.3.2. Neka je $P[X]_t \sim P[f_x]_\lambda$. Koordinatni procesi slučajnog procesa $P[X]_t$ će biti zadani preko spektralnih gustina $P_{n_j}^{m_j}[f_{jj}]_\lambda$, odnosno $P[X_j]_t \sim P_{n_j}^{m_j}[f_{jj}]_\lambda$.

Na taj način smo definisali višedimenzionalan slučajan proces $P[X]_t$ sa racionalnom spektralnom gustinom $P[f_x]_\lambda$, koja zadovoljava uslove 1) i 2) u III.3.1..

Dakle, i $P[X]_t$ je singularan.

Singularnost višedimenzionalnih slučajnih procesa možemo ispitati na osnovu

TEOREME III.3.2. Višedimenzionalan slučajan proces $X(t) \sim f(\lambda)$ je regularan (singularan), akko integral

$$(79) \qquad \int_R \frac{|\ln \det f(\lambda)|\, d\lambda}{1+\lambda^2}$$

konvergira (divergira).

Za dokaz vidi [38].

Budući da je $\det P[f_x]_\lambda = \prod_1^r P_{n_j}^{m_j}[f_{jj}]_\lambda$, pošto je $P[f_x]_\lambda$ dijagonalna matrica, konvergencija integrala (79) zavisi isključivo od nosača $P[f_x]_\lambda$. Kako je matrična spektralna gustina $P[f_x]_\lambda$ identično nula na intervalu pozitivne Lebesgue-ove mere, integral (79) divergira. Sa ovim smo uvideli singularnost procesa $\mathbf{P}[X]_t$.

III.3.3. Predstavimo spektralno slučajne procese $X(t), \mathbf{P}[X]_t$:

$$(80) \qquad X(t) = \left(\int_R e^{it\lambda}\, dZ_1(\lambda), \ldots, \int_R e^{it\lambda}\, dZ_r(\lambda) \right)$$

$$(81) \qquad \mathbf{P}[X]_t = \left(\int_R e^{it\lambda}\, dZ_1^{\mathbf{P}}(\lambda), \ldots, \int_R e^{it\lambda}\, dZ_r^{\mathbf{P}}(\lambda) \right)$$

gde su $Z_j(\lambda), Z_j^{\mathbf{P}}(\lambda)$ $\quad j = \overline{1,r}$ slučajni procesi sa nekoreliranim priraštajima, takzvani spektralni procesi slučajnih procesa $X_j(t), \mathbf{P}[X_j]_t$, $j = \overline{1,r}$. Ako $\mathbf{P}[\cdot]$ shvatimo kao filter slučajnog procesa $X(t)$,sa spektralnom karakteristikom $\psi(\lambda) \in L_2(f_x)$,tada matrični zapis spektralnog predstavljanja $P[X]_t$ glasi

$$(82) \qquad P[X]_t = \int_R e^{it\lambda}\, dZ^P(\lambda) = \int_R e^{it\lambda}\, \psi(\lambda)\, dZ(\lambda) .$$

Kako je dalje

$$E\, P[X]_t^T\, \overline{P[X]_o} = \int_R e^{it\lambda}\, P[f_x]_\lambda d\lambda = \int_R e^{it\lambda}\, \psi(\lambda)\, x$$

$$(83) \qquad x\, f_x(\lambda)\ \psi^*(\lambda)\, d\lambda \ ,$$

sledi veza $\psi(\lambda)\, f_x(\lambda)\ \psi^*(\lambda) = P[f_x]_\lambda$.Naravno, u relaciji (83) T je transponovanje, A^* je hermitski transponovana matrica od A,dok je spektralna karakteristika $\psi(\lambda)$ dijagonalna matrica reda $r x r$.

<u>TEOREMA III.3.3.</u> $\psi(\lambda)\ \psi^*(\lambda) \xrightarrow[m\to\infty]{D} E_{rxr}$,<u>gde je</u> E_{rxr} <u>oznaka za jediničnu matricu reda</u> rxr.

<u>DOKAZ.</u> Kako je $\psi(\lambda)\, f_x(\lambda)\ \psi^*(\lambda)$ ustvari

$$\begin{bmatrix} \psi_{n_1}^{m_1}(\lambda) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \psi_{n_r}^{m_r}(\lambda) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{11}(\lambda) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & f_{rr}(\lambda) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{\psi_{n_1}^{m_1}(\lambda)} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \overline{\psi_{n_r}^{m_r}(\lambda)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{n_1}^{m_1}[f_{11}]_\lambda & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & P_{n_r}^{m_r}[f_{rr}]_\lambda \end{bmatrix}$$

primenom relacije (41) dobijamo da je

$$\left|\psi_{n_j}^{m_j}(\lambda)\right|^2 \xrightarrow[m_j\to\infty]{D} 1 \quad , \; j = \overline{1,r} \; .$$

Uočićemo takođe činjenicu da je množenje dijagonalnih matrica komutativno:

$$(84) \qquad \psi(\lambda)\, f_x(\lambda)\, \psi^*(\lambda) = \psi(\lambda)\, \psi^*(\lambda)\, f_x(\lambda) = P[f_x]_\lambda .$$

Pustimo sada da $m = \min_j(m_j)$ neograničeno raste u (84). Na osnovu teoreme III.3.1. i relacije (84) je

$$(85) \qquad \psi(\lambda)\, \psi^*(\lambda)\, f_x(\lambda) \xrightarrow[m\to\infty]{D} f_x(\lambda)$$

što je ekvivalentno tvrđenju teoreme.

Q.E.D.

III.3.4. Sada možemo formulisati višedimenzionalan analogon teoreme II.3.2. o srednje kvadratnoj konvergenciji odstojanja procesa $X(t)$ od procesa $P[X]_t$ .Zadržaćemo, pritom, sve dosadašnje oznake.

]<u>TEOREMA III.3.4. Neka je</u> o_{rxr} <u>nula-matrica reda rxr.Tada je</u>

$$(86) \qquad E\overline{(X(t) - P[X]_t)^T(X(t) - P[X]_t)} \xrightarrow[m\to\infty]{D} o_{rxr} \; .$$

<u>DOKAZ.</u> Uočimo spektralno predstavljanje slučajnih procesa

$X(t)$ i $P[X]_t$ koje je dato relacijama (8o) i (81) respektivno;zamenimo ih u levu stranu (86).Posle toga transformišimo novodobijeni izraz:

$$E\,(X(t) - P[X]_t)^T\overline{(X(t) - P[X]_t)} =$$

$$= E \int_R e^{it\lambda}\,(d(Z(\lambda)-Z^P(\lambda)))^T \int_R e^{-it\lambda}\,\overline{d(Z(\lambda)-Z^P(\lambda))}$$

$$= E \int_R\int_R (d(Z(\lambda) - Z^P(\lambda)))^T\,\overline{d(Z(\lambda) - Z^P(\lambda))}\quad .$$

Uzmimo sada u obzir vezu $dZ^P(\lambda) = \psi(\lambda)(dZ(\lambda))^T$.Dalje je na osnovu te veze

$$E\,(X(t) - P[X]_t)^T\overline{(X(t) - P[X]_t)} =$$

$$= E \int_R\int_R (E_{rxr} - \psi(\lambda))dZ(\lambda)^T dZ(\lambda)(E_{rxr} - \psi(\lambda))^*,$$

jer je $(E_{rxr} - \psi(\lambda))^T = E_{rxr} - \psi(\lambda)$.Prema tome imamo

$$E\,(X(t) - P[X]_t)^T\overline{(X(t) - P[X]_t)} =$$

$$= \begin{bmatrix} \int_D \left|1 - \psi_{n_1}^{m_1}(\lambda)\right|^2 f_{11}(\lambda)d\lambda & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \int_D \left|1 - \psi_{n_r}^{m_r}(\lambda)\right|^2 f_{rr}(\lambda)d\lambda \end{bmatrix} .$$

Na osnovu teoreme II.3.2. sledi da svaki dijagonalni element matrice $E\,(X(t) - P[X]_t)^T\overline{(X(t) - P[X]_t)}$ u zadnjoj jednakosti podleže proceni

$$\int_D \left| 1 - \psi_{n_k}^{m_k}(\lambda) \right|^2 f_{kk}(\lambda)\, d\lambda \xrightarrow[m_k \to \infty]{D} 0$$

za svako $k = \overline{1,r}$.Pošto je $m = \min_j(m_j)$,ako m neograničeno raste,matrica (koju smo upravo malopre diskutovali) će se u graničnom slučaju poklapati sa $r x r$ nula-matricom.

Q.E.D.

III.4. Padé-aproksimacija cross-spektralnih gustina

III.4.1. Neka $X(t) = (X_1(t),\ldots,X_r(t))$ r-dimenzionalan stacionaran u širokom smislu slučajan proces sa koreliranim koordinatama,tj. $E\,X_j(t)\,\overline{X_k(s)} = K_{jk}(t-s)$ za svako $j \neq k$, $j,k = \overline{1,r}$. $K_{jk}(t-s)$ je cross-korelaciona funkcija procesa $X_j(t),X_k(t)$ odnosno (j,k)-ti element $K_x(t)$,matrične korelacione funkcijeprocesa $X(t)$.

Na osnovu Bohner-Hinčin-ove teoreme imamo da je

$$f_{jk}(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_R e^{-it\lambda} K_{jk}(t)\, dt \quad . \tag{87}$$

Funkciju $f_{jk}(\lambda)$ nazivamo cross-spektralna gustina slučajnih procesa $X_j(t)$ i $X_k(t)$, $j,k = \overline{1,r}$.

Funkcija $f_{jk}(\lambda)$ je L_1-integrabilna i hermitski simetrična. Te osobine slede iz istih osobina matrične spektralne gustine $f_x(\lambda)$,koja je takođe i nenegativno definitna.

Pretpostavićemo da je $f_{jk}(o) \neq o$.

III.4.2. Posmatramo formalni stepeni red cross-spektralne gustine $f_{jk}(\lambda)$:

$$(88) \qquad f_{jk}(\lambda) = \sum_{o}^{\infty} f_m^{(j,k)} \lambda^m \qquad \text{za } j<k;\ j,k = \overline{1,r} .$$

Kako je po pretpostavci $f_{jk}(o) \neq o$,to iz relacije (88) sledi da je $f_o^{(j,k)} \neq o$ .Zbog hermitske simetrije dovoljno je posmatrati elemente iznad (ispod) glavne dijagonale $f_x(\lambda)$: $\overline{f_{jk}(\lambda)} = f_{kj}(\lambda)$ znači da je

$$(89) \qquad \sum_{o}^{\infty} \overline{f_m^{(j,k)}} \lambda^m = \sum_{o}^{\infty} f_m^{(k,j)} \lambda^m \quad .$$

U relaciji (89) imamo konvergentne stepene redove, te su im odgovarajući koeficijenti jednaki: $\overline{f_m^{(j,k)}} = f_m^{(k,j)}$.

III.4.3. Neka je $f_{jk}(\lambda)$ cross-spektralna gustina stacionranih slučajnih procesa $X_j(t)$ i $X_k(t)$ .Funkcija

$$(9o) \qquad P_{n_{jk}}^{m_{jk}}[f_{jk}]_{\lambda} = \frac{C_{m_{jk}}(\lambda)}{D_{n_{jk}}(\lambda)} \quad , 1 \leq j<k \leq r$$

se naziva Padé-aproksimant od $f_{jk}(\lambda)$,ako je pritom

$$(91) \qquad D_{n_{jk}}(\lambda)f_{jk}(\lambda) - C_{m_{jk}}(\lambda) = O(\lambda^{n_{jk}+m_{jk}+1}),$$

$C_{m_{jk}}(\lambda)$ i $D_{n_{jk}}(\lambda)$ su polinomi sa kompleksnim koeficijentima, $m_{jk}+1 < n_{jk}$; $f_{jk}(o) \neq o$, $\lambda \in R$.

Jednačina $C_{m_{jk}}(\lambda)=o=D_{n_{jk}}(\lambda)$ ima rešenja jedino van R.

III.4.4. Neka je $f_x(\lambda) \sim X(t) = (X_1(t),\ldots,X_r(t))$.Matrica $f_x(\lambda)$ je matrična spektralna gustina višedimenzionalnog slučajnog procesa X(t).Padé-aproksimant matrične spektralne gustine $f_x(\lambda)$ je matrična funkcija $P[f_x]_\lambda = (P[f_{jk}]_\lambda)_{rxr}$.

$$(92) \qquad P[f_{jk}]_\lambda = \begin{cases} \dfrac{|A_{m_j}(\lambda)|^2}{|B_{n_j}(\lambda)|^2} & j = k;\ j = \overline{1,r} \\[2ex] \dfrac{C_{m_{jk}}(\lambda)}{D_{n_{jk}}(\lambda)} & 1 \leqq j < k \leqq r \end{cases} .$$

Dalje, $P[f_{jk}]_\lambda = \overline{P[f_{kj}]_\lambda}$ .Svi $P[f_{jk}]_\lambda$ zadovoljavaju uslov (91) za razne stepene brojioca i imenioca.

[III.4.5. Prvo aproksimiramo $f_x(\lambda)$ sa racionalnim funk-
:ijama koje imaju konstantne brojioce. Autospektralne gus-
:ine $f_{ii}(\lambda)$, $i = \overline{1,r}$ koordinatnih procesa ćemo aprok-
simirati preko

$$P^o_{n_i}[f_{ii}]_\lambda = \frac{f_{ii}(o)}{|B_{n_i}(\lambda)|^2} \qquad i = \overline{1,r}\ , \tag{93}$$

lok se cross-spektralna gustina aproksimira preko

$$P^o_{n_{jk}}[f_{jk}]_\lambda = \frac{f_{jk}(o)}{D_{n_{jk}}(\lambda)} \qquad 1 \leq j < k \leq r. \tag{94}$$

<u>'EOREMA III.4.1. Neka je spektralna gustina</u> $f_{ii}(\lambda)$ <u>dvojena od nule u smislu I.2.2.:</u>

$$o < c_1^{(i)} \leq f_{ii}(\lambda) \leq c_2^{(i)} < \infty \ , \ i = \overline{1,r}\ . \tag{95}$$

<u>ko je</u> $I_j = [\alpha_j, \beta_j]$ <u>interval na kojem je</u> $P^o_{n_j}[f_{jj}]_\lambda$ <u>trogo pozitivan i</u> $\gamma_j = \min(\alpha_j, \beta_j)$, $j = \overline{1,r}$ <u>,dok</u> <u>e</u> b_{n_i} <u>najstariji koeficijent polinoma</u> $B_{n_i}(\lambda)$<u>,tada</u> <u>aži procena</u>

$$|B_{n_i}(\lambda)|^2 \geq \frac{f_{ii}(o)}{c_2^{(i)}} + \gamma_i^{2n_i+2}\ \frac{c_1^{(i)}}{c_2^{(i)}}\,|b_{n_i}|^2\ . \tag{96}$$

DOKAZ. Na osnovu definicije Padé-aproksimacije spektralne gustine $f_{ii}(\lambda) \sim X_i(t)$ reda (o,n_i) , $i = \overline{1,r}$:

$$(97) \qquad |B_{n_i}(\lambda)|^2 f_{ii}(\lambda) - |a_o|^2 = \lambda^{2n_i+2} h_{o,n_i}(\lambda)$$

gde je $h_{o,n_i}(o) \neq o$.Zamenom vrednosti $\lambda = o$ u prethodnu, (97) ,relaciju,posle kraćeg računanja dobijamo da je $|a_o|^2 = f_{ii}(o)$,jer je po uslovu Padé-aproksimacije $|B_{n_i}(o)|^2 = |b_o|^2 = 1$.

Pošto je $f_{ii}(o) > o$,zato je $P^o_{n_i}[f_{ii}]_\lambda \geq o$ na nekom intervalu $[\alpha_i, \beta_i]$ koji sadrži origo.Uočimo pozitivno orijentisanu,jednostruko povezanu,zatvorenu konturu G_i u kompleksnoj Λ ravni. λ i origo su tačke iz oblasti čiji je rub G_i.Tada je

$$(98) \qquad h_{o,n_i}(\lambda) = \frac{1}{2\pi i} \int_{G_i} \frac{|B_{n_i}(u)|^2 f_{ii}(u)\, du}{(\lambda - u)^{2n_i+1}}$$

na osnovu Elliott-ovih rezultata.

Primenimo li (95) na (98),dobijamo nejednakost

$$h_{o,n_i}(\lambda) \leq \frac{c_2^{(i)}}{2\pi i} \int_{G_i} \frac{|B_{n_i}(u)|^2\, du}{(\lambda - u)^{2n_i+1}}$$

$$(99) \qquad = c_2^{(i)} |b_{n_i}|^2 \quad .$$

Posredstvom relacije (99),iz (97) sledi procena

$$|B_{n_i}(\lambda)|^2 \geq \frac{f_{ii}(o) + \lambda^{2n_i+2} c_1^{(i)} |b_{n_i}|^2}{f_{ii}(\lambda)} .$$

Kako je spektralna gustina $f_{ii}(\lambda)$ ograničena odozgo na R sa konstantom $c_2^{(i)}$,sledi relacija (96).

Q.E.D.

NAPOMENA III.4.1. Ako je spektralna gustina slučajnog procesa $X_i(t)$,koja čini i-tu koordinatu višedimenzionalnog slučajnog procesa X(t),pozitivna ali ne i odvojena od nule u smislu I.2.2.,tada donja granica brojioca Padé-aproksimanta spomenute gustine ima jednostavniju strukturu:

$$|B_{n_i}(\lambda)|^2 \geq \frac{f_{ii}(o)}{c_2^{(i)}} .$$

Ova nejednakost se može dobiti iz (96) tako,što umesto pozitivne veličine $c_1^{(i)}$ zamenimo nulu u tu relaciju.

III.4.6. Slično trećem paragrafu prethodnog poglavlja sada ćemo se baviti konvergencijom niza Padé-aproksimanata.

Definišimo intervale $I_j = [\alpha_j, \beta_j]$ kao u dokazu teoreme III.3.1.

TEOREMA III.4.2. Neka je $X(t) = (X_1(t),\dots,X_r(t))$ stacionaran u širokom smislu slučajan proces sa spektralnom gustinom $f_x(\lambda) = (f_{jk}(\lambda))_{r\times r}$, koja zadovoljava sledeće uslove:

1) $f_x(o) \neq o_{r\times r}$

2) $f_{ii}(o) > o$ na nekom skupu $I_i = [\alpha_i, \beta_i]$.

Neka je dalje $P^{m_j}_{n_k}[f_{jk}]_\lambda$ Padé-aproksimant spektralne gustine $f_{jk}(\lambda)$. Tada važi:

$$\lim_{m\to\infty} P[f_x]_\lambda = f_x(\lambda)$$

na skupu $D = \bigcap_{j,k=1}^{r} (I_k \cap (-r_{jk}, r_{jk}))$ tačka po tačka; pritom je $m = \min_j(m_j)$ i

$$(100) \qquad r_{jk}^{-1} = \limsup_{n\to\infty} \left| \frac{f_{jk}^{(n)}(o)}{n!} \right|^{1/n} .$$

DOKAZ. Konvergencija tačka po tačka dijagonalnih elemenata spektralne gustine $P[f_x]_\lambda$ ka dijagonalnim elementima $f_x(\lambda)$ je dokazana u teoremi III.3.1.. Dokažimo zato konvergenciju Padé-aproksimanata cross-spektralnih gustina ka inicijalnim cross-spektralnim gustinama. Iz pretpostavke imamo da je $f_{jk}(o) \neq o$. Pretstavimo $f_{jk}(\lambda)$ svojim formalnim stepenim redom, koji se poklapa sa McLaurinvim redom dotične funkcije:

$$(1o1) \qquad f_{jk}(\lambda) = \sum_{o}^{\infty} f_m^{(j,k)} \lambda^m = \sum_{o}^{\infty} \frac{f_{jk}^{(m)}(o)}{m!} \lambda^m .$$

Poluprečnik konvergencije reda (1o1) je definisan sa (1oo). Stoga suma $\sum_{m=o}^{n} f_{jk}^{(m)}(o)(m!)^{-1} \lambda^m$ ravnomerno konvergira ka $f_{jk}(\lambda)$ na intervalu $(-r_{jk}, r_{jk})$ kada n neograničeno raste. Ocenimo razliku

$$\rho_{m_j,n_k}(\lambda) = \left| P_{n_k}^{m_j}[f_{jk}]_\lambda - f_{jk}(\lambda) \right|$$

$$= \left| \sum_{m_j+n_k+1}^{\infty} \frac{f_{jk}^{(m)}(o)}{m!} \lambda^m \right| \leq \sum_{m_j+n_k+1}^{\infty} \frac{|f_{jk}^{(m)}(o)|}{m!} |\lambda|^m .$$

Koristeći Cauchyjevu nejednakost, dobijamo procenu:

$$\frac{\inf\limits_{o \leq t \leq 2\pi} |f_{jk}(r_{jk}e^{it})|}{1 - \frac{|\lambda|}{r_{jk}}} \left(\frac{|\lambda|}{r_{jk}} \right)^{m_j+n_k+1} \leq \rho_{m_j,n_k}(\lambda) \leq$$

$$(1o2) \qquad \leq \frac{\sup\limits_{o \leq t \leq 2\pi} |f_{jk}(r_{jk}e^{it})|}{1 - \frac{|\lambda|}{r_{jk}}} \left(\frac{|\lambda|}{r_{jk}} \right)^{m_j+n_k+1} .$$

Kako je zbog L_1-integrabilnosti $f_{jk}(\lambda)$ odnosno $P_{n_k}^{m_j}[f_{jk}]_\lambda$, $m_j < n_k$, sledi pooštrenje prethodne procene odstupanja spektralne gustine od njegovog Padé-aproksimanta.

Dakle

$$\frac{\inf\limits_{0\le t\le 2\pi}|f_{jk}(r_{jk}e^{it})|}{1-\frac{|\lambda|}{r_{jk}}}\left(\frac{|\lambda|}{r_{jk}}\right)^{2n_k+1} \le \varrho_{m_j,n_k}(\lambda) \le$$

$$\text{(1o3)}\qquad \le \frac{\sup\limits_{0\le t\le 2\pi}|f_{jk}(r_{jk}e^{it})|}{1-\frac{|\lambda|}{r_{jk}}}\left(\frac{|\lambda|}{r_{jk}}\right)^{2m_j+1} .$$

ko sada u (1o3) m_j neograničeno raste, tada $\varrho_{m_j,n_k}(\lambda)$:onvergira ka nuli eksponencijalnom brzinom. Za svako $j<k$ e dakle evidentno

$$\text{(1o4)}\qquad \lim_{m_j\to\infty} P_{n_k}^{m_j}[f_{jk}]_\lambda = f_{jk}(\lambda)$$

a skupu $(-r_{jk},r_{jk})$. Kako je pak $f_{jk}(\lambda) = \overline{f_{kj}(\lambda)}$, konju- acijom (1o4) dobijamo odgovarajuću konvergenciju eleme- ata matrice $P[f_x]_\lambda$ ka odgovarajućim elementima (ispod lavne dijagonale) matrične spektralne gustine $f_x(\lambda)$. ıravno $r_{jk} = r_{kj}$.

Sumirajući dosadašnje rezultate zaključujemo da

$$\lim_{m\to\infty} P[f_x]_\lambda = f_x(\lambda)$$

ıčka po tačka na skupu $D = \bigcap_{j,k=1}^{r}(I_k\cap(-r_{jk},r_{jk}))$.

Q.E.D.

III.5. O dvodimenzionalnoj Padé-aproksimaciji

III.5.1. Na primeru dvodimenzionalnih slučajnih procesa i njihovih matričnih spektralnih gustina se vidi kako je glomazan aparat upotrbljen za Padé-aproksimaciju prilikom višedimenzionalnih slučajnih procesa. Ako se radi o dvodimanzionalnom slučajnom procesu $X(t) = (X_1(t), X_2(t))$ gde su spektralne gustine koordinatnih procesa strogo odvojene od nule u smislu I.2.2.,(zadovoljavaju (95)), tada možemo dati jedan potreban uslov, da $P[f_x]_\lambda$ bude spektralna gustina.

TEOREMA III.5.1. Neka je $X(t) = (X_1(t), X_2(t))$ $f_x(\lambda) = (f_{jk}(\lambda))_{2x2}$ i neka $f_{ii}(\lambda)$ zadovoljavaju (95). Neka je $P[f_x]_\lambda$ Padé-aproksimant spektralne gustine $f_x(\lambda)$ definisan preko (93) i (94). Ako je

$$|D_{n_{12}}(\lambda)|^2 > \frac{|f_{12}(o)|^2}{f_{11}(o)f_{22}(o)} \left(\frac{f_{11}(o)}{c_2^{(1)}} + \gamma_1^{2n_1+2} |b_{n_1}|^2 \frac{c_1^{(1)}}{c_2^{(1)}} \right) x$$

$$x\left(\frac{f_{22}(o)}{c_2^{(2)}} + \gamma_2^{2n_2+2} |b_{n_2}|^2 \frac{c_1^{(2)}}{c_2^{(2)}} \right), \tag{105}$$

tada je $P[f_x]_\lambda$ matrična spektralna gustina stacionarnog u širokom smislu, slučajnog, dvodimenzionalnog procesa $P[X]_t = (P[X_1]_t, P[X_2]_t)$, sa neprekidnim vremenom.

DOKAZ. Sylvesterov kriterijum pozitivne definitnosti glasi: „Matrica je tada i samo tada pozitivno definitna, ako je matrična determinanta,kao i sve determinante glavnih podmatrica pozitivne."

Posmatrajmo matricu $P[f_x]_\lambda = (P[f_{jk}])_{2x2}$.Kako je $f_{11}(\lambda) > o$ po pretpostavci,na osnovu (96) sledi pozitivnost spektralne gustine $P[f_{11}]_\lambda$ .Detereminanta $P[f_x]_\lambda$ je

$$\det P[f_x]_\lambda = P[f_{11}]_\lambda P[f_{22}]_\lambda - |P[f_{12}]_\lambda|^2$$

$$= \frac{f_{11}(o)\ f_{22}(o)}{|B_{n_1}(\lambda)\ B_{n_2}(\lambda)|^2} - \frac{f_{12}(o)^{\ 2}}{|D_{n_{12}}(\lambda)|^2}$$

$$= \frac{f_{11}(o)f_{22}(o)|D_{n_{12}}(\lambda)|^2 - |f_{12}(o)|^2\ |B_{n_1}(\lambda)B_{n_2}(\lambda)|^2}{|B_{n_1}(\lambda)\ B_{n_2}(\lambda)\ D_{n_{12}}(\lambda)|^2} .$$

Brojilac poslednjeg razlomka je pozitivan samo ako važi relacija (1o5).Uverimo se i eksplicitno u to.

$$\text{Brojilac}(\det P[f_x]_\lambda) = f_{11}(o)f_{22}(o)|D_{n_{12}}(\lambda)|^2 -$$

$$- |f_{12}(o)|^2 \left(\frac{f_{11}(o)}{c_2^{(1)}} + \gamma_1^{2n_1+2} |b_{n_1}|^2 \frac{c_1^{(1)}}{c_2^{(1)}} \right) x$$

$$x\left(\frac{f_{22}(o)}{c_2^{(2)}} + \gamma_2^{2n_2+2} |b_{n_2}|^2 \frac{c_1^{(2)}}{c_2^{(2)}} \right)$$

Sylvesterov kriterijum zahteva pozitivnost svih leterminanti glavnih podmatrica matrične spektralne gus-;ine $P[f_x]_\lambda$ .Dakle brojilac(det $P[f_x]_\lambda$) mora biti pozi-;ivan.Primenom rezultata teoreme III.4.1.,koji je iska-;an u relaciji (96),dobijamo zadnju procenu.Posle kraćeg :ačunanja sledi (1o5).

Q.E.D.

IAPOMENA III.5.1. Ako se radi o koordinatnim slučajnim ırocesima $X_i(t)\sim f_{ii}(\lambda)$ $i = \overline{1,2}$ u teoremi III.5.1.,koji maju spektralne gustine neodvojene od nule u smislu I.2.2., :ada se donja granica od polinoma $D_{n_{12}}(\lambda)$ formira iz 1o5) zamenom o umesto $c_1^{(i)}$ $i = \overline{1,2}$ u taj izraz. ›obija se

$$\text{1o6)} \qquad D_{n_{12}}(\lambda)^2 > \frac{|f_{12}(o)|^2}{c_2^{(1)}\, c_2^{(2)}} \quad .$$

akle potreban uslov,da bi $P[f_x]_\lambda$ bila spektralna gustina ește (1o6) za slučaj neodvojenih spektralnih gustina,ako ı koordinatni slučajni procesi dvodimenzionalnog procesa orelirani.

)SLEDICA. $n_{12} \geq n_1 + n_2$.

ıista,kako je $D_{n_{12}}(\lambda) = \sum_{m=0}^{n_{12}} d_m \lambda^m$,imamo da je $|D_{n_{12}}(\lambda)|^2 = \sum_{m=0}^{2n_{12}} (\sum_{j+k=m} d_j \overline{d_k}) \lambda^m = \sum_{m=0}^{2n_{12}} \delta_m \lambda^m$ .Dalje, $B_{n_i}(\lambda) = \sum_{m=0}^{n_i} b_m^{(i)} \lambda^m$, e je $|B_{n_i}(\lambda)|^2 = \sum_{0}^{2n_i} \beta_m^{(i)} \lambda^m = \sum_{0}^{2n_i} (\sum_{j+k=m} b_j^{(i)} \overline{b_k^{(i)}}) \lambda^m$.

rema tome $|B_{n_1}(\lambda)\, B_{n_2}(\lambda)|^2 = \sum_{0}^{2(n_1+n_2)} \beta_m \lambda^m$,gde je koefi-

ijent β_m jednak: $\beta_m = \sum_{k_1+k_2=m} (\sum_{j+k=k_1} b_j^{(1)} \overline{b_k^{(1)}})(\sum_{j+k=k_2} b_j^{(2)} \overline{b_k^{(2)}})$.

dokazu teoreme III.5.1. smo formirali brojilac od

et $P[f_x]_\lambda$ .To je sada u razvijenom obliku:

$$f_{11}(o)f_{22}(o)|D_{n_{12}}(\lambda)|^2 - |f_{12}(o)|^2 |B_{n_1}(\lambda)B_{n_2}(\lambda)|^2 =$$

$$= \sum_{m=o}^{2\max(n_{12},n_1+n_2)} \varepsilon_m \lambda^m \quad .$$

realnost koeficijenata ε_m se lako možemo uveriti,

$_m$ se formira od koeficijenata realnih polinoma $|B_{n_i}(\lambda)|^2$.

;aviše koeficijenti su pozitivni,odakle sledi ekvivalen-

.ja (1o5) sa $n_{12} \geq n_1+n_2$.U specijalnom slučaju kada je

$_2 = n_1 + n_2$ imamo da je ε_m jednak

$$\sum_{j+k=m}(f_{11}(o)f_{22}(o)d_j\overline{d_k} - |f_{12}(o)|^2 \sum_{x+y=j} b_x^{(1)}\overline{b_y^{(1)}} \sum_{x+y=k} b_x^{(2)}\overline{b_y^{(2)}})$$

svako $m = \overline{o,2n_{12}}$.

:I.5.2. Uslove tipa (1o5) za tri i višedimenzionalne

.učajne procese nećemo davati.Njihovo izvođenje bi

'akako naišlo na velike poteškoće i u P_k^o slučaju.

III.6. Srednje kvadratna konvergencija vektorskih procesa

III.6.1. Neka je $X(t) = (X_1(t),\ldots,X_r(t))$ stacionaran u širokom smislu,slučajan,višedimenzionalan proces sa neprekidnim vremenom i koreliranim koordinatama.Spektralna gustina procesa $X(t)$ je matrica

$$f_x(\lambda) = (f_{jk}(\lambda))_{rxr} \quad ,$$

dok je korelaciona funkcija,matrica $K_x(t)$:

$$K_x(t) = (K_{jk}(t))_{rxr} \quad .$$

U prethodnom paragrafu smo prodiskutovali Padé-aproksimaciju cross-spektralnih gustina za koje važi da je $f_{jk}(o) \neq o$.Ova pretpostavka je vrlo bitna,jer se Padé-aproksimant $P_{n_k}^{m_j}[f_{jk}]_\lambda$ može izraziti preko koeficijenata formalnog stepenog reda samo u tom slučaju jednoznačno.Padé-aproksimaciju spektralne gustine oblika $f(\lambda)\,\lambda^{2k}$,$k\in\mathbb{N}$ bi mogli vršiti recimo operatorom $\widetilde{\mathbb{J}}$:

$$\widetilde{\mathbb{J}}\, f(\lambda)\,\lambda^{2k} = \lambda^{2k}\,\widetilde{\mathbb{J}}\, f(\lambda)$$

koji je neosetljiv na izraze oblika λ^{2k},tj. poseduje neku vrstu linearnosti u odnosu na njih.Naravno, $\mathcal{T}$ je Padé-ov operator koji racionalizuje funkciju $f(\lambda)$. Spektralnim gustinama tog tipa (koji imaju polinomijalni dodir sa nulom u koordinatnom početku) se nećemo baviti.

III.6.2. Višedimenzionalni analogon teoreme II.3.2. za nekorelirane koordinatne procese smo izrekli kao teoremu III.3.4..Pretpostavimo sada da su koordinatni procesi slučajnog procesa $X(t) = (X_1(t),\dots,X_r(t))$ korelirani.

III.6.3. Slično kao u II.3.7. možemo definisati filter (linarnu transformaciju) višedimenzionalnog slučajnog procesa u višedimenzionalan slučajan proces.Te „nove" pojmove ćemo prilagoditi našim zahtevima.To znači da posmatramo transformaciju $\underline{A}$ r-dimenzionalnog procesa $X(t)$ u r-dimentionalan proces $Y(t) = \underline{A}X(t)$.Tu transformaciju nazivamo filterom ako se $Y(t)$ može pretstaviti u obliku

$$Y(t) = \int_R \underline{h}(t - s)X(s)\, ds$$

gde je $\underline{h}(t)$ matrična (rxr) funkcija koja zadovoljava uslov (34) sa jednom izmenom: umesto konjugacije sada važi hermitsko transponovanje - $\underline{h}^*(t)$ .Ta funkcija je impulsna odzivna funkcija filtera $\underline{A}$.

Fourier-ova transformacija funkcije $\underline{h}(t)$ je

$$(107)\qquad \underline{H}(i\lambda) = \int_R e^{-it\lambda}\, \underline{h}(t)\, dt \quad ,$$

koju nazivamo spektralnom karakteristikom filtera $\underline{A}$. Modifikovani uslov (34) je ekvivalentan uslovu,ako pritom $L_2(f_x)$ ima standardno značenje, $\underline{H}(i\lambda) \in L_2(f_x)$.

Iz spektralnog razlaganja (u matričnom zapisu!) slučajnog procesa $X(t)$

$$X(t) = \int_R e^{it\lambda}\, dZ_x(\lambda)$$

je spektralno pretstavljanje $Y(t)$ jednako

$$(108)\qquad Y(t) = \int_R e^{it\lambda}\, \underline{H}(i\lambda)\, dZ_x(\lambda) \ .$$

Korelaciona funkcija procesa $Y(t)$ je

$$(109)\qquad K_y(t) = \int_R e^{it\lambda}\, \underline{H}(i\lambda)\, f_x(\lambda)\, \underline{\overset{*}{H}}(i\lambda)\, d\lambda \ ,$$

dok je spektralna gustina procesa $Y(t)$

$$f_y(\lambda) = \underline{H}(i\lambda)\, f_x(\lambda)\, \underline{\overset{*}{H}}(i\lambda) \ .$$

Teorema Rozanova važi takođe,ali da bi je primenili prethodno moramo izvršiti modifikaciju sa hermitskim transponovanjem.

TEOREMA III.6.1. Neka je $X(t)$ r-dimenzionalan slučajan proces sa koreliranim koordinatama i spektralnom gustinom koja je pozitivno definitna u nuli. Neka je r_{jk} poluprečnik konvergencije formalnog stepenog reda cross-spektralne gustine $f_{jk}(\lambda)$, definisan preko (100), dok je $D = \bigcap_{j,k=1}^{r}(I_k \cap (-r_{jk}, r_{jk}))$, gde je I_k, $k = \overline{1,r}$ interval pozitivnosti Padé-aproksimanta od $f_{jk}(\lambda)$. Neka je dalje $P[X]_t$ r-dimenzionalan slučajan proces sa spektralnom gustinom $P[f_x]_\lambda$. Tada je

$$E\,(X(t) - P[X]_t)^T\overline{(X(t) - P[X]_t)} \xrightarrow[m \to \infty]{D} 0_{r \times r}, \tag{111}$$

a $m = \min_j(m_j)$.

DOKAZ. Predstavimo spektralno $X(t)$ i $P[X]_t$ na osnovu relacija (80) i (81). Posle zamene tih izraza u levu stranu (111) dobijamo

$$E\,(X(t) - P[X]_t)^T\overline{(X(t) - P[X]_t)} =$$

$$= E\int_R e^{it\lambda}(d(Z_x(\lambda) - Z^P(\lambda)))^T \int_R e^{-it\lambda}\overline{d(Z_x(\lambda) - Z^P(\lambda))}$$

$$= E\int_R\int_R (d(Z_x(\lambda) - Z^P(\lambda)))^T\ \overline{d(Z_x(\lambda) - Z^P(\lambda))}\ . \tag{112}$$

pektralni procesi $Z_x(\lambda) = (Z_1(\lambda),\dots,Z_r(\lambda))$ i $Z^P(\lambda) = (Z_1^P(\lambda),\dots,Z_r^P(\lambda))$ slučajnih procesa $X(t)$ odnosno

$\mathbb{P}[X]_t$ su u ovom slučaju korelirani,te važe odnosi

$$\text{(113)}\qquad \begin{aligned} &E\int_R\int_R dZ_i(\lambda)\,\overline{dZ_j(\lambda)} = \int_R f_{ij}(\lambda)\,d\lambda \\ &E\int_R\int_R dZ_i^{\mathbb{P}}(\lambda)\,\overline{dZ_j^{\mathbb{P}}(\lambda)} = \int_R P_{n_j}^{m_i}[f_{ij}]_\lambda\,d\lambda \\ &E\int_R\int_R dZ_i(\lambda)\,\overline{dZ_j^{\mathbb{P}}(\lambda)} = \int_R g_{ij}(\lambda)\,d\lambda \end{aligned}$$

gde je $g_{ij}(\lambda)$ cross-spektralna gustina slučajnih procesa $X_i(t)$ i $\mathbb{P}[X_j]_t$ .Pošto pretstavimo slučajan proces $\mathbb{P}[X]_t$ kao rezultat filtera $\underline{\mathbb{P}}$ na slučajan proces $X(t)$ preko spektralne karakteristike $\underline{\psi}(\lambda)\in L_2(f_x)$,

$$\text{(114)}\qquad \underline{\psi}(\lambda)=\begin{bmatrix} \psi_{11}(\lambda) & (\varphi_{12}(\lambda))^{1/2} & \dots & (\varphi_{1r}(\lambda))^{1/2} \\ (\varphi_{21}(\lambda))^{1/2} & \psi_{22}(\lambda) & \dots & (\varphi_{2r}(\lambda))^{1/2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (\varphi_{r1}(\lambda))^{1/2} & (\varphi_{r2}(\lambda))^{1/2} & \dots & \psi_{rr}(\lambda) \end{bmatrix},$$

očita je veza

$$\text{(115)}\qquad g_{ij}(\lambda)=\begin{cases} \psi_{ij}(\lambda)\, f_{ij}(\lambda) & i = j \\ (\varphi_{ij}(\lambda))^{1/2} f_{ij}(\lambda) & i \neq j \end{cases}$$

odnosno relacija

$$(116)\quad P_{n_j}^{m_i}[f_{ij}]_\lambda = \begin{cases} |\psi_{ij}(\lambda)|^2 \; f_{ij}(\lambda) & i = j \\ \varphi_{ij}(\lambda)\; f_{ij}(\lambda) & i \neq j \end{cases} .$$

Struktura spektralne karakteristike $\underline{\psi}(\lambda)$ se dobro vidi iz (115).Kako je na osnovu Fejér-Riesz-ove teoreme svaka pozitivna funkcija ustvari kvadrat modula neke funkcije sa nulama iz gornje kompleksne poluravni, dijagonalni elementi spektralne gustine $P[f_x]_\lambda$ su oblika $|\psi_{ii}(\lambda)|^2\; f_{ii}(\lambda)$ za $i = \overline{1,r}$.Elementi van glavne dijagonale su nestalnog znaka i nisu obavezno realne funkcije,stoga,za njih važi jedino osobina hermitske simetrije i L_1-integrabilnosti.Koreni u (114) su uvedeni radi jednostavnosti $P[f_x]_\lambda$ i posmtramo ih u smislu Rozanova,tj. kao rešenja jednačine $((\varphi_{ij}(\lambda)^{1/2})^2 = \varphi_{ij}(\lambda)$.Dakle,kao kompleksnovrednosnoj funkciji, svakom $g_{ij}(\lambda)$ možemo preko relacije (115) pridružiti spektralnu karaketritiku $(\varphi_{ij}(\lambda))^{1/2}$.

Napokon,dolazimo do

$$E\,(X(t) - P[X]_t)^T\overline{(X(t) - P[X]_t)} =$$

$$= \left(\int_R h_{ij}(\lambda)\; f_{ij}(\lambda)\; d\lambda \right)_{rxr} ,$$

gde je

$$(117)\qquad h_{ij}(\lambda) = \begin{cases} |1 - \psi_{ii}(\lambda)|^2 & i = \overline{1,r} \\ (1 - (\varphi_{ij}(\lambda))^{1/2})^2 & 1 \leq j \neq i \leq r \end{cases}.$$

Matrica $\mathcal{H}(\lambda) = (h_{ij}(\lambda))_{r\times r}$ je takođe hermitski simetrična, zbog hermitske simetrije elemenata $h_{ij}(\lambda)$ preko iste osobine $\psi_{ii}(\lambda)$ i $\varphi_{ij}(\lambda)$.

Problem konvergencije Padé-aproksimanata je dakle preko aparata L_2-teorije stacionarnih slučajnih procesa prebačen na ispitivanje konvergencije niza spektralnih gustina odnosno niza spektralnih karakteristika, ta konvergencija je ispitivana u teoremi III.4.2..

Posmatramo matricu Padé-aproksimanata $P[f_x]_\lambda$. Element $P_{n_j}^{m_i}[f_{ij}]_\lambda$ te matrice teži spektralnoj gustini $f_{ij}(\lambda)$ na intervalu konvergencije formalnog stepenog reda gustine $f_{ij}(\lambda)$, tj. na intervalu $(-r_{ij}, r_{ij})$, tačka po tačka, kada m_i neograničeno raste $(m_i < n_j)$, na osnovu teoreme III.4.2.. Ako je pritom $i = j = \overline{1,r}$, odgovor na posmatrani problem konvergencije daje teorema III.3.1..

Neka je I_k interval stroge pozitivnosti elemenata sa glavne dijagonale $P[f_x]_\lambda$, dok sa m možemo označiti $\min\limits_j(m_j)$. Primenjujući rezultate spomenutih teorema na matricu $\mathcal{H}(\lambda)$ dobijamo konvergenciju tačka po tačka te matrice na skupu $D = \bigcap_{j,k=1}^{r} (I_k \cap (-r_{jk}, r_{jk}))$ ka matrici $O = o_{r \times r}$ -nula matrici.

Na osnovu III.4.3. i III.4.4. imamo da je

$$P_{n_{ij}}^{m_{ij}}[f_{ij}]_\lambda = \frac{C_{m_{ij}}(\lambda)}{D_{n_{ij}}(\lambda)} \qquad 1 \leq i \neq j \leq r \quad . \tag{118}$$

Eksplici tna veza između spektralnih gustina $f_{ij}(\lambda)$ i (118), u terminologiji filtera slučajnih procesa, preko filtera $\underline{P}$ je

$$f_{ij}(\lambda)\mathcal{H}_{n_{ij}}^{m_{ij}}(\lambda) = P_{n_{ij}}^{m_{ij}}[f_{ij}]_\lambda \quad , \tag{119}$$

gde je $\mathcal{H}_{n_{ij}}^{m_{ij}}(\lambda)$ ustvari $\psi_{ij}(\lambda)$ za $i = j$ i $(\varphi_{ij}(\lambda))^{1/2}$ za ostale vrednosti indeksa i,j.

Na osnovu teoreme III.4.2. je

$$\lim_{m_{ij} \to \infty} P_{n_{ij}}^{m_{ij}}[f_{ij}]_\lambda = f_{ij}(\lambda) \tag{12o}$$

za svako λ iz skupa D. Zamenom (119) u (12o) dobijamo da je

$$\mathcal{H}_{n_{ij}}^{m_{ij}}(\lambda) \xrightarrow[m_{ij} \to \infty]{D} 1 \quad .$$

Napokon možemo konstatovati da je (111) na snazi.

Q.E.D.

Umesto zaključka

Sve teoreme označene sa □ su originalne,kako je meni poznato.Njih dokazujem.Rezultati prvog poglavlja su u štampi,sadrži ih članak [33] .Teoreme bez dokaza su preuzete u originalu (ili sa neznatnim,nama nephodnim,modifikacijama) iz radova koji su navedeni ispod tih teorema (I.2.1.,teorema Rozanova i III.3.2.). Originalan je dokaz teoreme I.4.1.;taj rezultat je inače već poznat,može se naći kod autora koji su se bavili singularnim procesima ([3],[4],[29] ,[35]).

Rezultati II. i III. poglavlja nisu objavljivani.

I.

U prvom poglavlju najvažnijim smatram rezultate o singularnoj aproksimaciji regularnih (i vice versa) procesa sa procenom brzine srednje kvadratne konvergencije,kao i teoremu I.4.3. o uslovima jednakosti klase singularnih i klase analitičkih slučajnih procesa.Da singularni procesi imaju primene,govori teoretski model J.Neumann-a o olujom prouzrokovanim okeanskim talasima.Na žalost,rad W.J.Piersona mlađeg : Wing generated Gravity Waves,Advences in Geophysics, vol. 2,Academic Press,1955,koji ga sadrži,nije mi bio dostupan.

II.

U lietraturi se prvi put u poglavlju II. tretira Padé-aproksimacija spektralnih gustina.Zato je veći deo ovog poglavlja originalan.Značajnim smatram rezultate o srednje kvadratnoj konvergenciji Padé-aproksimantnih procesa ka originalnom procesu na skupu D.Kako se radi sa singularnim procesima sa parnom ,pozitivnom spektralnom gustinom,ostaje otvoreno pitanje Padé-aproksimacije gustina koje nisu parne.Odgovorna pitanja srednje kvadrate konvergencije takvih procesa može eventualno dati alternativni pristup - umeto Padé--aproksimacije,možemo aproksimirati verižnim razlomcima ili koristiti metode teorije kapaciteta krivih (primena rezultata Mergelyana,Sianyana i Pommerenkea o racionalnoj aproksimaciji).

Najvažnije teoreme: II.2.2.,II.3.1. (koja se u velikoj meri koisti i u III.poglavlju),II.3.2. i II.4.2..

III.

U ovom poglavlju su primenjeni uglavnom rezultati poglavlja II. na višedimenzionalne slučajne procese.

Neznatna se uopštenja rezultata teorema II.3.2. i II.4.2. daju u III.2. i III.3.;prektično uputstvo za Padé-aproksimaciju spektralne gustine višedimenzionalnog procesa sa nekoreliranim koordinatama dajemo u (75).Interesantne su teoreme III.3.1. i III.3.4.. Stožer III. poglavlja je paragraf 4. o Padé-aproksimaciji cross-spektralnih gustina.Važnije teoreme o koreliranim procesima su III.4.2. i III.6.1..Kako je parnost autospektralnih gustina i u ovom poglavlju značajna pretpostavka,slično kao u II. sledeći zadatak bi bio aproksimirati spektralne gustine koje nisu parne sa novim metodama - verižni razlomci,kapacitet.

Pitanja o H-prostorima posmatranih višedimenzionalnih procesa su takođe otvorena.

Pregled literature II.7. važi i za poglavlje III.

Literatura

[1] Babayan,N.M.,An asymptotic behaviour of the prediction error,Zapiski naučnih seminarov LOMI 13o, Problemi teor. ver. rasp. 8.,1983.

[2] Babayan,N.M.,An asymptotic behaviour of the prediction error in singular case,Teorija veroyat. i primenen. 29.,1984.

[3] Belyaev,Y.K.,Analytic random processes,Theory Probab. and its Appl.,English edition 4,1959,4o2.

[4] Bartlett,M.S.,An introduction to Stochastic Processes,Cambridge Press,1955.

[5] Blanc-Lapierre,A. et Fortet,R.,Sur la décomposition spectrale des fonctions aléatoires d'ordre deux, C.R.Acad.Sci. 222,1946,467.

[6] Blanc-Lapierre,A. et Fortet,R.,Résultats sur la décomposition spectrale des fonctions alêatoires stationnaires d'ordre 2,C.R.acad.Sci. 223,1946,713.

[7] Chover,J.,Conditions on the realization of prediction by measures,Duke Math. J.,1958,3o5.

[8] Cuyt,A.A.M.,Abstract Padé-approximants in operator theory,Lectur Notes in Mathematics,765,1979,61.

[9] Dewilde,P. and Dym,H.,Shur recursions,error formulas,and convergence of rational estimators for stationary stochastic sequences,IEEE,IT-27/4,1981.

[1o] Elliott,D.,Truncation error in Padé-approximants to certain functions: an alternative approach, Math.Comp. 21,1967,3o8.

[11] Garnett,J.B.,Bounded Analytic Functions,Academy Press,New York,1981.

[12] Gerencsér,L.,Aszimptotikus módszerek,II.rész, Preprint No. 8/85,Math.Inst.Hungar.Acad.Sci.,1985.

[13] Gilewicz,J.,Approximants de Padé,Lectur Notes in Mathematics,667,1978.

[14] Gladyshev,E.G.,On multi-dimensional stationary random processes,Teorija veroyat. i primenen. III/4,1958,458.

[15] Gragg,W.B. and Lindquist,A.,On the partial realization problem,Lin.Alg.Appl. 5o,1983,277.

[16] Grenander,U. and Rosenblatt,M.,Statistical Analysis of Stationary Time Series,John Wiley and Sons,New York,1955.

[17] Hanner,O.,Deterministic and non-deterministic stationary random processes,Ark.Mat.,Band 1, No 14,1949,161.

[18] Helson,H. and Lowdenslager,D.,Vector-valued processes,Proceedings of the Fourth Berkeley Symposium on the Mathematical Statistics and Probability,University of California Press,Berkeley and LA,1961,2o3.

[19] Kalman,R.E.,On partial realizations,transfer functions and canonical forms,Acta Polytech. Scand.,MA 31:9-32,1979.

[2o] Karhunen,K.,Zur Spektraltheorie stochastischer Prozessen,Ann.Acad.Sci.Fennicae,AI 34,1946.

[21] Karhunen,K.,Über lineare Methoden in der Wahrscheinlishkeitsrechnung,Ann.Acad.Sci.Fennicae, AI 37,1947.

[22] Karhunen,K.,Über die Struktur stationärer zufälliger Funktionen,Ark.Mat. 1,195o,141.

[23] Kolmogorov,A.N.,Stationary sequences in Hilbert space,Bul. Moscow State Univ. 2,No 6.,1941.

[24] Krein,M.G.,On an extrapolation problem of A.N. Kolmogorov,Dokl.Akad.Nauk SSSR (n.s.) 46,1945,3o6.

[25] Lax,P.,On the regularity of spectral densities, Teorija veroyat. i primenen., VIII/3,1963.

[26] Lévy,P.,Processus stochastiques et mouvement Brownien,Gautier-Villars,Paris,1948.

[27] Lovász,D.L.,Predikcióelmélet,Preprint No 6/85, Math.Inst.Hungar.Acad.Sci.,1985.

[28] Luke,Y.L.,The pecial Funtions and their Approximations,Academic Press,New York,1969.

[29] Matveyev,R.F.,On singular multidimensional stationary processes,Teorija veroyat. i primenen. V/33,196o.

[3o] Matveyev,R.F.,On regular multidimensional sta-

tionary processes,Teorija veroyat. i primenen. VI,1961,164.

[31] Poganj,T.,O rangu višedimenzionalnog slučaj- nog procesa ,Mat.Vesnik 35,1,1983.

[32] Pogány,T.,Der Rang einer Klasse multidimensio- nalen zufälligen Prozesse,Proceedings of V.PSMS, Reidel,(u štampi)

[33] Pogány,T.,Singuläre zufällige Prozesse und mittel- quadratische Konvergenz,Publ.Math.Debrecen,(u štampi)

[34] Porat,B.,Computation of additive decompositions of ARMA spectra,IEEE AC-29,No 1o,1984,949.

[35] Rosenblatt,M.,Some purely deterministic proces- ses,Journal of Math.Mech.,vol. 6,No 6,1957,8o1.

[36] Rozanov,Yu.A.,Spectral theory of multidimensional stationary stochastic processes with discrete time,Usp.Mat.Nauk 13,No 2,1958,93.

[37] Rozanov,Yu.A.,Stationary Random Processes,Fiz- matgiz,Moscow,1963.

[38] Rozanov,Yu.A.,Teorija obnavljajuščih processov, Nauka,Moskva,1974.

[39] Vastola,S.K. and Vincent Poor,H.,Robust Wiener- Kolmogorov theory,IEEE IT-3o,No 2,1984.

[4o] Walsh,J.L.,On approximation to an analytic func- tion by rational funktions of best approximation, Mat.Zeit. 38,1934.

[41] Walsh,J.L.,Interpolation and approximation by

rational functions in the complex domain, Amer. Math.Soc.Colloquium Publications 20, Providence, 1935.

[42] Walsh, J.L., Padé-approximants as limits of rational functions of best approximation, Journal Math. Mech., vol 13, No 2, 1964.

[43] Wuytack, L., The conditioning of Padé-approximation problem, Lectur Notes in Mathematics 888, 1981, 78.

[44] Zasuhin, V.N., On the theory of multidimensional random processes, Dokl.Akad.Nauk SSSR 33, 1941, 435.

[45] Yaglom, A.M., An introduction to the Theory of Stationary Random Functions, Dover Publications, New York, 1973.

[46] Yaglom, A.M., Outline of some topics in linear extrapolation of stationary random processes, Proceedings of Fifth Berkeley Symposium in Mathematical Statistics and Probability Theory, University of California Press, Berkeley and LA, 1964.

ОСНОВНА ОРГАНИЗАЦИЈА УДРУЖЕНОГ РАДА
ЗА МАТЕМАТИКУ, МЕХАНИКУ И АСТРОНОМИЈУ
БИБЛИОТЕКА

Број:
Датум: