UNIVERZITET U BEOGRADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET

PREDRAG PERUNIČIĆ

NEKONSTANTNO REŠETANJE PROCESA OBNAVLJANJA

– doktorska disertacija –

Beograd, avgust 1984.

P R E D G O V O R

Po rečima Smitha [15] , teorija obnavljanja nastala je u vezi razmatranja "samoobnavljajućih sveukupnosti", u početku bez verovatnosnog pristupa. Velika je zasluga Fellera što je 1948-49 prvi formulisao (i primenio) rezultate teorije obnavljanja u odnosu na ono što je on tada zvao "procesima rekurentnih dogadjaja" (to su ustvari diskretni procesi obnavljanja). Otada se teorija obnavljanja razvija u mnogim pravcima, te je rešetanje samo jedan manji deo problematike vezane za teoriju obnavljanja.

Pojam rešetanja vezuje se, istorijski, za A.Rényi-ja i 1956. godinu. Do svih važnijih rezultata u teoriji konstantnog rešetanja (karakterizacija Poisson-ovog procesa etc.) došao je sam Rényi. U ovom radu razradjeno je "rešetanje funkcijom" (dakle, nekonstantno rešetanje). Jedini rezultati tog tipa, koji su mi poznati, su rezultati Mogyoródija. U pitanju je, medjutim, sasvim drugi pristup, što je vidljivo u primedbama na kraju ovoga rada. Zbog toga, praktično sve što sadrže glave III, IV i V ovoga rada (sem paradigmatskih stvari) nisam sretao u literaturi.

Glave I i II ovoga rada su uvodne, i njihova uloga je jasna (od nečega se mora početi). U glavi III formalno se uvodi operacija funkcionalnog (nekonstantnog) rešetanja i daju neki osnovni rezultati. Mnogo toga nije ni pomenuto (rešetanje opšteg procesa obnavljanja, raspodela ekscesa i defekta u rešetanog procesa, etc.) no relativno lako sledi iz navedenog. Glava IV je u potpunosti posvećena problemu neosetljivosti pri promeni masstaba, i opisana je (u Laplace-ovim likovima) klasa neosetljivih zakona. Osim toga, opisana je i verovatnosna struktura stacionarnih raspodela u vidu uslovno ravnomernog sumiranja (randomizacija jedinice u S - konstrukciji). U glavi V navedeni su razni rezultati, uglavnom vezani za skoro izvesnu konvergenciju (sa i bez promene masstaba).

Avgust 1984. P.P.

I

P R O C E S I   O B N A V L J A N J A :
P R E L I M I N A R I J E   I   O S N O V N I   R E Z U L T A T I

1.1. Procesi obnavljanja na $\mathbb{R}^+$

Neka je dat niz nezavisnih nenegativnih slučajnih veličina $\{X_n, n \geq 1\}$ sa istom funkcijom raspodele F, i neka je $S_0 = 0$, $S_n = \sum_1^n X_k$. Tada uredjeni par $\langle S_n, F \rangle$ nazivamo prostim procesom obnavljanja (PO). U daljem ćemo, sem ako to nije posebno naglašeno, smatrati da je zakon raspodele F neprekidan.

Opštim procesom obnavljanja nazivamo trojku $\langle S_n, F_1, F \rangle$ gde X_1 ima zakon raspodele F_1 i nezavisna je od familije $\{X_n, n \geq 2\}$, i gde je $\langle S_{n+1} - X_1, F \rangle$ prost PO. Specijalan (i najvažniji) slučaj procesa obnavljanja opšteg tipa je stacionarni PO; kod njega postoji $EX_1 = \mu$ i

$$F_1(t) = \frac{1}{\mu} \int_0^t (1 - F(x))\,dx.$$

Pri prirodnoj interpretaciji S_n su momenti obnavljanjâ, a X_n intervali izmedju susednih obnavljanjâ.

1.1.1. Pretpostavimo da su intervali izmedju obnavljanja konstantni, npr.

$$P\{X_n = 1\} = 1 \quad , \quad n \geq 1 \; ,$$

i neka je taj prosti PO započeo u prošlosti, a mi počinjemo da ga pratimo tek od nekog momenta $t_0 \to \infty$. Vremenski interval do prvog opaženog obnavljanja imaće, jasno, $\mathcal{U}(0,1)$ raspodelu, a svi sledeći intervali izmedju obnavljanja biće kao i kod originalnog procesa. Opaženi PO je stacionaran.

1.1.2. Neka je

$$N(t)=\sum_{1}^{\infty} I\{S_n<t\}.$$

Slučajnu veličinu $N(t)$ nazivamo brojem obnavljanjâ na intervalu $(0,t)$. Primetimo da je pri pretpostavljenoj neprekidnosti raspodele F svejedno da li posmatramo broj obnavljanja na $(0,t)$ ili na $(0,t]$.

1.1.3. Funkcija

$$H(t)=\sum_{1}^{\infty} P\{S_n<t\}$$

je konačna za svako $t\geqslant 0$. Odatle,

$$P\{N(t)<+\infty\}=1$$

kao i

$$EN(t)=H(t).$$

Dokaz. Kako je $F(0)=0$ i $F(+\infty)=1$, a F neprekidna, to postoji x_0 takvo da je $0<F(x_0)<1$. Dalje,

$$\{S_m>mx_0\}\supset\bigcap_{1}^{m}\{X_k>x_0\}\Rightarrow F^{(m)}(mx_0)<1.$$

Kako za svako $t>0$ postoji $M\in\mathbb{N}$ takvo da je $Mx_0>t$, to za svako $t>0$ postoji $M\in\mathbb{N}$ takvo da je $F^{(M)}(t)<1$.

Dalje,

$$I\{S_n<t\}\leqslant I\{S_m<t\ \&\ S_n-S_m<t\}\ ,\ m\leqslant n,$$

i prema tome

$$F^{(n)}(t)\leqslant F^{(m)}(t)F^{(n-m)}(t)\ ,m\leqslant n.$$

Iz ovoga sledi da je

$$F^{(n)}(t)\leqslant[F^{(M)}(t)]^{k}$$

za $n=kM+r$, $0\leq r<M$.

Odatle je

$$\sum_1^\infty P\{S_n<t\}=H(t)\leq M\sum_1^\infty [F^{(M)}(t)]^k<+\infty .$$

Po jednom poznatom stavu (I lema Borel-Cantelli) sledi da se sa verovatnoćom 1 ostvaruje samo konačno mnogo dogadjaja $\{S_n<t\}$, tojest

$$P\{N(t)<+\infty\}=1 .$$

$EN(t)=H(t)$ sledi po stavu o monotonoj konvergenciji. □

1.1.4. Iz očigledne jednakosti

$$\{N(t)\geq n\}=\{S_n<t\}$$

sledi da je

$$\{N(t)=n\}=\{S_n<t\}\setminus\{S_{n+1}<t\}$$

i odatle

$$P\{N(t)=n\}=F^{(n)}(t)-F^{(n+1)}(t) \quad , n\in\{0,1,2,\dots\}$$

To je zakon raspodele broja obnavljanja.

1.1.5. Funkciju $H(t)$ nazivaćemo funkcijom obnavljanja. Iz

$$H(t)=EE(N(t)|X_1)=E(I\{X_1<t\}+H(t-X_1))$$

sledi da je

$$H(t)=F(t)+\int_0^t H(t-x)dF(x)$$

što je u literaturi poznato kao integralna jednačina teorije obnavljanja.

Uopšte, pod jednačinom obnavljanja podrazumevamo

$$L = g + F * L$$

gde je F funkcija raspodele na $\mathbb{R}^+$, a L i g funkcije ograničene na konačnim intervalima. Pretpostavlja se da su F i g poznate, i rešenje se traži po L.

1.1.6. Jednačina obnavljanja ima jedinstveno rešenje

$$L_0 = g + H * g$$

gde je $H = \sum_1^{\infty} F^{(n)}$ funkcija obnavljanja za F.

Dokaz: $L_0 = g + H * g$ jeste rešenje, jer

$$g + F * L_0 = g + F*(g + H*g) = g + F*g + (F*H)*g =$$
$$g + (F + F*H)*g = g + H*g = L_0.$$

Neka je L_1 neko drugo rešenje, i neka je

$$h = L_1 - (g + H*g).$$

Tada je

$$F * h = F*L_1 - (F + F*H)*g = F*L_1 - H*g =$$
$$(L_1 - g) + h - (L_1 - g) = h,$$

odakle je

$$(\forall n \in \mathbb{N})\ h = F^{(n)} * h.$$

No po 1.1.3. H je konačno za svako $t \in \mathbb{R}^+$, i prema tome $F^{(n)}(t) \to 0, n \uparrow \infty$, za svako t fiksirano. Odatle

$$F^{(n)} * h(t) \to 0,\ n \to \infty,$$

i mora biti

$$h(t) = 0, \quad t \in \mathbb{R}^+. \qquad \square$$

1.1.7. Laplaceovi likovi merâ

Neka je $\langle S_n, F\rangle$ prost PO i $H(t)$ funkcija obnavljanja tog procesa (obnavljajuća mera za F). Ako su

$$\varphi(s)=\int_0^\infty e^{-st}dF(t)\ ,\quad \mathcal{H}(s)=\int_0^\infty e^{-st}dH(t)$$

Laplaceove transformacije za F i H respektivno, lako se pokazuje da izmedju njih postoji sledeći odnos:

$$\mathcal{H}(s)=\frac{\varphi(s)}{1-\varphi(s)}\ .$$

To znači da kod prostog PO mere F i H jednoznačno odredjuju jedna drugu. Naprimer, obnavljajuća mera je (do na masstab) Lebesgue-ova akko je intervalna mera F eksponencijalna. Treba, naravno, imati u vidu da proizvoljna mera H na $\mathbb{R}^+$ sa $\mathcal{H}(0)=\infty$ ne mora imati gornju "geometrijsku" strukturu.

Prost se PO može zadati svojom funkcijom obnavljanja; zato se veliki deo teorije obnavljanja svodi na proučavanje $H(t)$, ili čak samo njenog asimptotskog ponašanja (Smith, [15]).

Dobijanje veze analogne gornjoj za opšti PO $\langle S_n, F_1, F\rangle$ je jednostavno. Neka je

$$\varphi_1(s)=\int_0^\infty e^{-st}dF_1(t),\ \varphi(s)=\int_0^\infty e^{-st}dF(t),\ \mathcal{H}(s)=\int_0^\infty e^{-st}dH(t).$$

Tada iz veze

$$H(t)=F_1(t)+\int_0^t K(t-x)dF_1(x)\quad \left(K(x)=\sum_1^\infty F^{(n)}(x)\right)$$

dobijamo da je

$$\mathcal{H}(s)=\frac{\varphi_1(s)}{1-\varphi(s)}\ .$$

1.2. Neki granični rezultati

1.2.1.

$$P\{\lim N(t)=+\infty\}=1.$$

Da je $N(t)$ neopadajući proces po t sledi iz definicije; prema tome,

$$P\{\omega \mid \exists \lim_{t\to\infty} N(t,\omega)\}=1$$

(konačan ili jednak $+\infty$).

Ako je ta granična vrednost konačna na skupu pozitivne verovatnoće, tada $\exists n\in\mathbb{N}$ takvo da je

$$P\{\omega \mid (\forall t\in\mathbb{R}^+)\, N(t,\omega)<n\}>0 .$$

No iz toga sledi da je

$$P\{\omega \mid (\forall t\in\mathbb{R}^+)\, S_n(\omega)\geqslant t\}>0 .$$

Poslednja kontradikcija (S_n su finitne) dokazuje tvrdjenje.□

1.2.2. Strogi zakon velikih brojeva za broj obnavljanja $N(t)$

Ako postoji $EX_1=\mu$, tada

$$P\{\lim_{t\to\infty}\frac{N(t)}{t}=\frac{1}{\mu}\}=1.$$

U slučaju kada EX_1 ne postoji

$$P\{\lim_{t\to\infty}\frac{N(t)}{t}=0\}=1.$$

Dokaz. Neka je $EX_1=\mu<+\infty$. Lako se vidi da važi

$$\frac{S_{N(t)}}{N(t)}\leqslant\frac{t}{N(t)}\leqslant\frac{S_{N(t)+1}}{(N(t)+1)\cdot\frac{N(t)}{N(t)+1}} .$$

Osim toga, pošto je po 1.2.1. $\lim_{t\to\infty} N(t) = +\infty$ s.i. to po strogom zakonu velikih brojeva

$$\frac{S_{N(t)}}{N(t)} \to \mu \,, \; t \to \infty \,.$$

U slučaju kada EX_1 ne postoji (kada nije konačno) uvedimo sečene (truncated) slučajne veličine

$$X_n(m) = X_n I\{X_n \leq m\}, \; m \in \mathbb{N}.$$

Tada je $X_n(m) \leq m$ s.i. i postoji $EX_n(m) = \mu(m)$. Osim toga,

$$P\{\lim_{n\to\infty} \frac{S_n(m)}{n} = \mu(m)\} = 1.$$

Pošto je

$$(\forall n, m \in \mathbb{N}) \; \frac{S_n}{n} \geq \frac{S_n(m)}{n}$$

to je i

$$(\forall m \in \mathbb{N}) \; P\{\liminf_{n\to\infty} \frac{S_n}{n} \geq \mu(m)\} = 1$$

i odatle, kako je $\lim_{m\to\infty} \mu(m) = +\infty$,

$$P\{\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{n} = +\infty\} = 1.$$

Dalji tok zaključivanja sasvim je analogan prethodnom slučaju (kada je EX_1 konačno). Time je stav dokazan. $\square$

1.2.3. Uvedimo dve važne slučajne veličine: defekt i eksces. Pod defektom (nivoa t) podrazumevamo veličinu

$$\delta(t) = t - S_{N(t)}$$

a pod ekscesom (nivoa t)

$$\gamma(t) = S_{N(t)+1} - t \,.$$

Pri prirodnoj interpretaciji, defekt nivoa t je vreme od prvog prethodnog obnavljanja do momenta t, a eksces nivoa t je vreme od momenta t do prvog narednog obnavljanja. Za defekt očigledno važi

$$P\{0<\delta(t)\leqslant t\}=1 \quad , \quad P\{\delta(t)=t\}=1-F(t).$$

1.2.4. Ako $\exists\, EX_1=\mu$, tada

$$ES_{N(t)+1}=\mu(1+H(t)).$$

Ovo je samo jedan oblik Waldove jednakosti:

$$ES_{N(t)+1}=E\sum_{n=0}^{\infty}S_{n+1}I\{N(t)=n\}=E\sum_{n=0}^{\infty}X_{n+1}I\{S_n<t\}=$$
$$\sum_{n=0}^{\infty}EX_{n+1}EI\{S_n<t\}=\mu(1+\sum_{1}^{\infty}F^{(n)}(t))=\mu(1+H(t)).$$

1.2.5. Ako $\exists\, EX_1=\mu$, tada je

$$(\forall t\in\mathbb{R}^+)\ H(t)\geqslant\frac{t}{\mu}-1.$$

Dokaz:

$$E\gamma(t)=\mu(1+H(t))-t\geqslant 0\ ,$$

i prema tome

$$H(t)\geqslant\frac{t}{\mu}-1.$$

1.2.4.-1.2.5. nam je potrebno za dokaz jednog od klasičnih rezultata teorije obnavljanja:

1.2.6. (Elementarna teorema obnavljanja). Ako $\exists\, EX_1=\mu$, tada je

$$\lim_{t\to\infty}\frac{H(t)}{t}=\frac{1}{\mu}.$$

Ako EX_1 ne postoji,

$$\lim_{t\to\infty}\frac{H(t)}{t}=0 .$$

Dokaz: neka je $C>0$. Definišimo Y_n sa

$$Y_n=\min\{X_n,C\}=X_n I\{X_n\leq C\}+C I\{X_n>C\}.$$

Tada je očigledno $\langle \Sigma_n, F_C\rangle$, gde je $\Sigma_n=\sum_1^n Y_k$, opet proces obnavljanja sa intervalnom funkcijom raspodele

$$F_C(x)=F(x)I\{x\leq C\}+I\{x>C\}.$$

Kako je

$$I\{\Sigma_n<t\}\geq I\{S_n<t\}$$

to je

$$N_C(t)\geq N(t)$$

gde je $N_C(t)$ broj obnavljanja "sečenog procesa" $\langle \Sigma_n, F_C\rangle$.

Odatle je

$$H_C(t)\geq H(t)\ ,\ t>0 .$$

Po 1.2.4. je

$$\frac{H_C(t)+1}{t}\leq\frac{1}{\mu(C)}+\frac{C}{t\mu(C)}\qquad(\mu(C)=E\min\{X_n,C\})$$

pošto je $\gamma_C(t)\leq C$. Dalje,

$$\limsup_{t\to\infty}\frac{H(t)}{t}\leq\limsup_{t\to\infty}\frac{H_C(t)}{t}\leq\frac{1}{\mu(C)}\qquad(\forall C>0).$$

Kako je $\lim\limits_{C\to+\infty}\mu(C)=\mu$, to je $\limsup\limits_{t\to\infty}\frac{H(t)}{t}\leq\frac{1}{\mu}$.

S druge strane, po 1.2.5. je

$$\liminf_{t\to\infty}\frac{H(t)}{t}\geq\frac{1}{\mu}\ ,$$

i dokaz je završen, u slučaju postojanja $EX_1=\mu$.

U slučaju da M ne postoji, primenjujemo opet postupak "sečenja" i kako sada $M(C) \to \infty$, kada $C \to \infty$, to je

$$\limsup_{t \to \infty} \frac{H(t)}{t} = 0 . \qquad \square$$

Druge važne asimptotske rezultate (kao što je osnovna teorema obnavljanja Smitha i čitav spektar posledica, npr. Blackwell-ova teorema) ovde nećemo navoditi, jer nisu relevantni u onome što sledi. Pogledati [2,3,12].

II

K O N S T A N T N O R E Š E T A N J E

R É N Y I - J A

2.1. Konstantno rešetanje

Neka je $\langle S_n, F\rangle$ prost PO. Pod rešetanjem ovog procesa podrazumevamo sledeću proceduru: za dato $p\in(0,1)$ svaki od momenata obnavljanja S_n biva izbačen sa verovatnoćom p. Izbacivanja različitih momenata obnavljanja su nezavisna. Takodje, uvodi se "novo vreme" množenjem starog sa $\frac{1}{q}$, gde je $q=1-p$. Dakle, ako je k prvi indeks takav da S_k nije izbačen, $T_1=qS_k$ je prvo obnavljanje novog procesa.

2.1.1. Neka je $\langle S_n, F\rangle$ prost PO i $\langle T_n, \cdot\rangle = R_p\langle S_n, F\rangle$ gde je R_p rešetanje sa verovatnoćom p, $p\in(0,1)$. Tada je:

(a) $\langle T_n, \cdot\rangle$ takodje prost PO;

(b) Intervalna funkcija raspodele procesa T_n je

$$F_p(x) = q\sum_{1}^{\infty} F^{(k)}\left(\frac{x}{q}\right)p^{k-1}, \quad x\in\mathbb{R}^+;$$

(c) $E(T_1)=E(S_1)$.

Dokaz:

$$F_p(x) = P\{T_1<x\} = \sum_{1}^{\infty} P\{T_1<x \mid T_1=qS_k\}P\{T_1=qS_k\};$$

$$F_p(x) = \sum_{1}^{\infty} P\{S_k<\frac{x}{q}\}P\{T_1=qS_k\},$$

odakle je

$$F_p(x) = q\sum_{1}^{\infty} F^{(k)}\left(\frac{x}{q}\right)p^{k-1}.$$

Nadjimo sada zajedničku raspodelu za T_1 i $T_2 - T_1$:

$$P\{T_1 < x \,\&\, T_2 - T_1 < y\} = \sum_{m,n} P\{T_1 < x, T_2 - T_1 < y \mid A_{m,n}\} P\{A_{m,n}\}$$

pri čemu je

$$A_{m,n} = \{T_1 = q S_m \,\&\, T_2 = q S_n\}, \quad 1 \le m < n.$$

$$P\{A_{m,n}\} = p^{m-1} q\, p^{n-m-1} q = p^{n-2} q^2.$$

$$P\{T_1 < x \,\&\, T_2 - T_1 < y\} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=m+1}^{\infty} P\{S_m < \tfrac{x}{q}, S_n - S_m < \tfrac{y}{q}\} p^{n-2} q^2 =$$

$$q^2 \sum_{m=1}^{\infty} F^{(m)}(\tfrac{x}{q}) p^{m-1} \sum_{n=m+1}^{\infty} F^{(n-m)}(\tfrac{y}{q}) p^{n-m-1} = F_p(x) F_p(y).$$

Prema tome, T_1 i $T_2 - T_1$ su nezavisne i jednako raspodeljene. Indukcijom po n lako se pokazuje da su intervali izmedju tačaka novog procesa T_n nezavisni i sa istom funkcijom raspodele F_p .

Neka je sada $E(S_1) < +\infty$. U tom slučaju

$$E(T_1) = \sum_{1}^{\infty} E(T_1 \mid T_1 = q S_k) P\{T_1 = q S_k\} = q \sum_{1}^{\infty} E(S_k) p^{k-1} q = E(S_1).$$

Vezu izmedju funkcijâ obnavljanja originalnog i rešetanog procesa ustanovljava sledeća jednostavna teorema:

2.1.2. Neka je $\langle T_n, F_p \rangle = R_p \langle S_n, F \rangle$ i $N_p(t)$ broj obnavljanja na $(0,t)$ rešetanog procesa. Tada je

$$EN_p(t) = q\, EN(\tfrac{t}{q})$$

gde je $N(t)$ broj obnavljanja originalnog procesa.

Dokaz:

$$N_p(t) = \sum_{n=1}^{\infty} I\{T_n < t\};$$

$$EN_p(t) = H_p(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F_p^{(n)}(t) \quad ,$$

no lako se vidi da je

$$F_p^{(n)}(t) = \sum_{k=n}^{\infty} \binom{k-1}{n-1} q^n p^{k-n} F^{(k)}\left(\frac{t}{q}\right) ,$$

i prema tome

$$EN_p(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=n}^{\infty} \binom{k-1}{n-1} q^n p^{k-n} F^{(k)}\left(\frac{t}{q}\right) =$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{k} \binom{k-1}{n-1} q^n p^{k-n} F^{(k)}\left(\frac{t}{q}\right) = q \sum_{k=1}^{\infty} F^{(k)}\left(\frac{t}{q}\right) = q EN\left(\frac{t}{q}\right).$$

Moglo se ovo pokazati i na sledeći način: kako je

$$N_p(qt) = \sum_{k=1}^{N(t)} I\{Y_k = 0\}$$

gde su Y_k indikatori izbačenih tačaka, nezavisni po pretpostavci, to je

$$N_p(qt) \mid N(t) : \mathcal{B}(N(t), q)$$

i rezultat sledi. □

Podsetimo se da je Poisson-ov proces ustvari prost proces obnavljanja, kod kojeg je intervalna funkcija raspodele eksponencijalna. U kontekstu konstantnog rešetanja njegovo je mesto, na odredjen način, centralno. To ćemo pokazati u onome što sledi.

2.1.3. Neka je $\langle S_n, F\rangle$ Poisson-ov proces. Tada, za $\forall p \in (0,1)$

$$R_p\langle S_n, F\rangle = \langle S_n, F\rangle$$

tj. Poisson-ov proces je neosetljiv na operaciju rešetanja.

(Primedba u vezi oznaka: $R_p\langle S_n, F\rangle = \langle S_n, F\rangle$ ne znači da je $R_p\langle S_n, F\rangle$ identična replika procesa $\langle S_n, F\rangle$, već samo to da im je verovatnosna struktura ista).

Dokaz. Ako je $\langle S_n, F\rangle$ Poisson-ov proces,

$$EN(t) = H(t) = \lambda t \ , \ \lambda = (EX_1)^{-1}.$$

No po 2.1.2.

$$EN_p(t) = q\,EN\left(\frac{t}{q}\right) = \lambda t \ ,$$

i kako funkcija obnavljanja jednoznačno odredjuje svaki prost PO, sledi da je i $R_p\langle S_n, F\rangle$ Poisson-ov proces.

Da bi dokazali jedan jači rezultat, biće nam potrebno

2.1.4. Neka je φ Laplace-ov lik zakona F, a φ_p lik zakona F_p. Tada je

$$\varphi_p(s) = \frac{q\varphi(qs)}{1-p\varphi(qs)} \ .$$

Dokaz:

$$\varphi_p(s) = q\sum_{k=1}^{\infty}(\varphi(qs))^k p^{k-1} = \frac{q\varphi(qs)}{1-p\varphi(qs)} \ .$$

Gornju vezu koristićemo u pogodnijoj formi

$$\frac{1}{\varphi_p(s)} - 1 = \frac{1}{q}\left(\frac{1}{\varphi(qs)} - 1\right).$$

2.1.5. Neka je $\langle S_n, F\rangle$ prost PO sa $E(X_1) < +\infty$, i neka

$$\exists p \in (0,1) \ R_p\langle S_n, F\rangle = \langle S_n, F\rangle.$$

Tada je $\langle S_n, F\rangle$ Poisson-ov proces.

Dokaz: lako se vidi da je

$$R_p R_p\langle S_n, F\rangle = R_{1-(1-p)^2}\langle S_n, F\rangle$$

kao i da je, u opštem slučaju,

$$R_{p_2} R_{p_1}\langle S_n, F\rangle = R_{1-(1-p_1)(1-p_2)}\langle S_n, F\rangle$$

koristeći vezu φ i φ_p iz 2.1.4. To znači da niz uzastopnih rešetanja sa verovatnoćama izbacivanja $p_1, \dots, p_n$ daje isti rezultat kao i jedno rešetanje sa verovatnoćom $1-\prod_1^n (1-p_k)$.

Prema tome,

$$\varphi(s) = \frac{q^n \varphi(q^n s)}{1-(1-q^n)\varphi(q^n s)} \qquad (q = 1-p).$$

Kada $n \to \infty$, za $u = q^n$ je

$$\varphi(s) = \lim_{u\to 0} \frac{u\varphi(us)}{1-\varphi(us)+u\varphi(us)} = \frac{\varphi(0)}{-\varphi'(0)s+\varphi(0)} = \frac{1}{1+sE(X_1)},$$

čime je dokaz završen. $\square$

Jednu zanimljivu karakterizaciju Poisson-ovog procesa daje i

2.1.6. Neka je $\langle S_n, F\rangle$ prost PO i neka $\exists a, b \in (0,1)$ $(a \neq b)$ tako da je

$$R_a\langle S_n, F\rangle = R_b\langle S_n, F\rangle .$$

Tada je $\langle S_n, F\rangle$ Poisson-ov proces.

Dokaz: neka su φ_a i φ_b Laplace-ovi likovi intervalnih zakonâ raspodele procesâ $R_a\langle S_n, F\rangle$ i $R_b\langle S_n, F\rangle$ respektivno. Po 2.1.4. je

$$\varphi_a(s) = \frac{c\varphi(cs)}{1-a\varphi(cs)}, \quad \varphi_b(s) = \frac{d\varphi(ds)}{1-b\varphi(ds)} \quad (c = 1-a, d = 1-b)$$

i po uslovima teoreme

$$\frac{c\varphi(cs)}{1-a\varphi(cs)} = \frac{d\varphi(ds)}{1-b\varphi(ds)}$$

ili u pogodnijem obliku

$$\frac{1}{c}\left(\frac{1}{\varphi(cs)} - 1\right) = \frac{1}{d}\left(\frac{1}{\varphi(ds)} - 1\right).$$

Neka je $\Psi(s)=\frac{1}{\varphi(s)}-1$. Tada je

$$d\Psi(cs)=c\Psi(ds).$$

Neka je $d<c$. Time se ne gubi opštost; neka je $\alpha=\frac{d}{c}$.

Tada je

$$\Psi(\alpha t)=\alpha\Psi(t)$$

i lako se dobija

$$\Psi(\alpha^n t)=\alpha^n\Psi(t)\ ,\ n\in\mathbb{N}\ ,$$

ili

$$\Psi(t)=\frac{\Psi(\alpha^n t)}{\alpha^n t}\,t\ .$$

Neka $n\to\infty$. Kako je $\Psi(0)=0$, to

$$\Psi(t)=\Psi'(0)t\ ,$$

gde je $\Psi'(0)=E(X_1)$.

Odatle je

$$\varphi(t)=\frac{1}{1+tE(X_1)}$$

i rezultat sledi. □

2.2. Nekonstantno rešetanje. Naivna verzija

U ovom odeljku će nas zanimati jedno uopštenje rešetanja. Neka je $\langle S_n,F\rangle$ prost PO, i neka je data funkcija

$$p:\mathbb{R}^+\longrightarrow[0,1]\ .$$

Uvedimo sledeću proceduru rešetanja procesa $\langle S_n,F\rangle$: tačka S_n , pod uslovom da je $X_n=x$, izbacuje se sa verovatnoćom $p(x)$. Izbacivanje tačaka S_n je zavisno od procesa $\langle S_n,F\rangle$;

takodje, uvodi se "novo vreme" množenjem starog faktorom q^{-1},

gde je

$$p = 1 - q = Ep(X_1) = \int_0^\infty p(x)dF(x) .$$

Na taj način, dobijamo novi tačkasti proces $\langle T_n, \cdot \rangle$.

2.2.1. Neka je $\langle S_n, F \rangle$ prost proces obnavljanja i

$$\langle T_n, \cdot \rangle = R_{p(x)} \langle S_n, F \rangle$$

gde je $R_{p(x)}$ operacija rešetanja sa $p(x)$. Tada je, za $q(x) = 1 - p(x)$, $q = 1 - p$, intervalna funkcija raspodele procesa $\langle T_n, \cdot \rangle$

$$F_p(x) = \sum_{k=1}^\infty Q_k\left(\frac{x}{q}\right) ,$$

gde je

$$Q_1(x) = \int_0^x q(t)dF(t) , \ Q_{k+1}(x) = \int_0^x Q_k(x-t)p(t)dF(t) \ (k \geq 1).$$

Dokaz. Neka je

$$Q_k(x) = P\{ T_1 < qx \ \& \ T_1 = qS_k \} .$$

Tada je

$$Q_1(x) = P\{T_1 < qx \ \& \ T_1 = qS_1\} = P\{S_1 < x \ \& \ T_1 = qS_1\} =$$
$$\int_0^x P\{T_1 = qS_1 | S_1 = s\} dP\{S_1 < s\} = \int_0^x q(t)dF(t) .$$

Dalje,

$$Q_{k+1}(x) = \int_0^x P\{S_k < x-t, T_1 - qt = qS_k\} p(t)dF(t)$$

što je očigledno. Pokažimo sada da je

$$P\{S_k < x-t, T_1 = q(S_k + t)\} = P\{S_k < x-t, T_1 = qS_k\} .$$

Uvedimo novi proces obnavljanja $S_n^* = S_n + t$. To je opšti proces obnavljanja sa intervalnim funkcijama raspodele

$$F_1^*(x) = F(x-t) \ \& \ F_k^*(x) = F(x) \quad (k \geqslant 2).$$

Neka se na S_n^* primenjuje isto rešetanje kao i na S_n , s tom razlikom što se novo vreme dobija ne parametrom ϱ , već nekim parametrom $a \in (0,1]$, kojeg ćemo odrediti uskoro. Dakle,

$$P\{S_k < x-t, T_1 = \varrho(S_k+t)\} = P\{S_k^* < x, T_1 = \varrho a^{-1} S_k^*\} =$$
$$P\{S_k^* < x, \varrho(a^{-1}T_1^* - t) = \varrho a^{-1} S_k^*\} =$$
$$P\{S_k^* < x, T_1^* = S_k^* + at\}.$$

Za $a = 1$ dobijamo da je ta verovatnoća jednaka

$$P\{S_k < x-t, T_1 = \varrho S_k\},$$

jer je očigledno

$$\{T_1^* = S_k^* + t\} = \{T_1 = \varrho S_k\}. \qquad \square$$

2.2.2. Zanimljivo je pogledati i vezu Laplace-ovih likova intervalnih zakonâ raspodele F i F_p . Uvedimo oznake

$$\varphi_p(s) = \int_0^\infty e^{-st} dF_p(t) \quad , \quad \varphi(s) = \int_0^\infty e^{-st} dF(t),$$
$$\varphi^*(s) = \int_0^\infty e^{-st} p(t) dF(t).$$

Može se jednostavno pokazati da je

$$1 - \varphi_p(s) = (1 - \varphi(\varrho s)) \cdot (1 - \varphi^*(\varrho s))^{-1}.$$

Dalje, neka je $0 < p < 1$ i

$$L(t)=\frac{1}{p}\int_0^t p(u)dF(u)\,,\quad M(t)=\frac{1}{q}\int_0^t q(u)dF(u)\,.$$

L i M su funkcije raspodele, čiji su $\mathcal{L}$-likovi redom

$$p^{-1}\varphi^*(s)\quad,\quad q^{-1}(\varphi(s)-\varphi^*(s)).$$

Kako je

$$\varphi_p(s)=(\varphi(qs)-\varphi^*(qs))\sum_{k=1}^{\infty}(\varphi^*(qs))^{k-1}$$

to je T_1, sa verovatnoćom $q\cdot p^{k-1}$, $k\geq 1$, raspodeljeno kao

$$q(U+\sum_{\ell=1}^{k-1}V_\ell)$$

gde je $\{U;V_n,n\geq 1\}$ niz nezavisnih sl. veličina, takvih da je M funkcija raspodele za U, a L funkcija raspodele za V_n. Time je opisana struktura intervalne funkcije raspodele F_p rešetanog procesa.

2.2.3. Jedan zanimljiv primer

Neka je $\{Y_n, n\geq 1\}$ niz nezavisnih jednako raspodeljenih sl. veličina sa $P\{Y_1>0\}=1$ i $\langle U_n, H\rangle$ odgovarajući prost PO, i neka je

$$\chi(s)=\int_0^\infty e^{-sx}dH(x).$$

Pretpostavimo da $X\,|\,U_n, n\geq 1$ ima gustinu raspodele

$$f_p(x\,|\,U_n,n\geq 1)=\sum_{n=1}^{\infty}q\cdot p^{n-1}\frac{1}{Y_n}I\{U_{n-1}\leq x<U_n\}\ ,\ 0<p<1.$$

Odredimo Laplace-ov lik raspodele za X :

$$E(e^{-sX}\,|\,U_n,n\geq 1)=\sum_{n=1}^{\infty}q\,p^{n-1}\,\frac{1-e^{-sY_n}}{sY_n}\cdot e^{-sU_{n-1}}\ ,$$

pa je

$$E(e^{-sX}) = \sum_{n=1}^{\infty} E\,\frac{1-e^{-sY_n}}{sY_n}\cdot q\cdot E\,p^{n-1}e^{-sU_{n-1}} =$$

$$E\,\frac{1-e^{-sY_1}}{sY_1}\cdot\frac{1-p}{1-p\chi(s)} = \psi(s)\cdot\frac{1-p}{1-p\chi(s)} = \varphi_p(s).$$

Kako je

$$\psi(s) = \int_0^{\infty}\frac{1-e^{-sx}}{sx}\,dH(x) = \int_0^{\infty}\Big\{\frac{1}{s}\int_0^{s}e^{-ux}du\Big\}dH(x) =$$

$$\frac{1}{s}\int_0^{s}\chi(u)du\,,$$

to je

$$\varphi_p(s) = \Big\{\frac{1}{s}\int_0^{s}\chi(u)du\Big\}\cdot\frac{1-p}{1-p\chi(s)}\,.$$

Time smo konstruisali rešetani zakon. Neka je sada X' sl. veličina takva da je

$$P\{X' = q^{-1}Y \mid Y\} = p\,,\quad P\{X' : U(0, q^{-1}Y) \mid Y\} = q$$

gde je Y izabrano po meri H. Imamo da je

$$\varphi(qs) = E e^{-qsX'} = \int_0^{\infty}\Big\{q\,\frac{1-e^{-sx}}{sx} + pe^{-sx}\Big\}dH(x)$$

i odatle

$$F(x) = P\{X' < x\} = p\,E\,I\{Y < qx\} + q^2x\,E\,\frac{1}{Y}\,I\{Y \geq qx\} =$$

$$pL(x) + qM(x).$$

Ako H ima gustinu h po Lebesgue-ovoj meri,

$$p(x) = \frac{pq\,h(qx)}{f(x)}\,I\{f(x) > 0\}$$

$(f = F')$

i time je odredjena funkcija rešetanja $p(x)$ takva da je

$$R_{p(x)}\langle S_n, F\rangle = \langle T_n, F_p\rangle .$$

Naprimer, za $H = \mathcal{U}(0,1)$ imamo da je

$$f(x) = pq - q^2 \ln qx \ , \ 0 < x < q^{-1}$$

($P\{0<X'<q^{-1}\}=1$ po meri F). Takodje,

$$p(x) = \frac{pq}{pq - q^2 \ln qx} \, I\{x<q^{-1}\}$$

je odgovarajuća funkcija rešetanja.

III

NEKONSTANTNO REŠETANJE.
FORMALIZAM I OSNOVNI REZULTATI

3.1. Osnovni pojmovi

Neka je na prostoru verovatnoće $\langle \Omega, \mathcal{F}, P \rangle$ zadan niz nezavisnih sl. veličina $\{X_n, n \geqslant 1\}$ sa istom funkcijom raspodele F za koju je $F(0+) = 0$, i

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k \quad (n \geqslant 1) \quad , \quad S_0 = 0 .$$

U našem kontekstu, sledeći formalizam mi se čini najprirodnijim. Trajektoriju

$$t(\omega) = (S_1(\omega), S_2(\omega), \dots) = \omega_1$$

posmatraćemo kao elementarni ishod. Neka je $\mathfrak{M} = \{\omega_1\}$, i $\mathfrak{T}$ najmanje σ-polje generisano cilindrima. Na merljivom prostoru $\langle \mathfrak{M}, \mathfrak{T} \rangle$ imamo indukovanu verovatnosnu meru, u oznaci F^{∞}.

Prostor verovatnoće

$$\langle \mathfrak{M}, \mathfrak{T}, F^{\infty} \rangle$$

ustvari je "prostor posmatranja".

Neka je

$$p : \mathbb{R}^{+} \longmapsto [0,1]$$

merljiva funkcija (u običnom smislu, tj. u odnosu na merljive prostore

$$\langle \mathbb{R}^{+}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^{+}} \rangle \quad \text{i} \quad \langle [0,1], \mathcal{B}_{[0,1]} \rangle \;)$$

takva da je

$$E_F\, p(X) = E\, p(X_1) = p \in (0,1) .$$

Ona je, per definitionem, funkcija rešetanja. Dalje,

$$q(x) = 1 - p(x) \quad , \quad x \in \mathbb{R}^{+} .$$

3.1.1. Važna primedba: u onome što sledi (a radi jednostavnosti zapisa) simbolom p biće označavana i funkcija rešetanja , i njeno usrednjenje po meri F . Iz konteksta će, nadamo se, uvek biti jasno o kojoj upotrebi tog simbola je reč. Isto se odnosi i na simbol q .

Neka je, dalje,

$$\langle \{0,1\}^{\mathbb{N}}, \mathcal{T}' \rangle$$

merljiv prostor, gde je $\mathcal{T}'$ najmanje σ-polje nad odgovarajućim cilindrima iz $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$. To je "prostor odluka". Imati u vidu: na njemu se, a priori , ne definiše neka verovatnosna mera.

Oznake

$$0_n = \{0,1\}^{n-1} \times \{0\} \times \{0,1\}^{\mathbb{N}} ,$$

$$1_n = \{0,1\}^{n-1} \times \{1\} \times \{0,1\}^{\mathbb{N}} \quad (n \in \mathbb{N})$$

su jasne. Cilindri 0_n i 1_n opisuju izbacivanje (rešetanje) : 0_n znači da je izbačeno, a 1_n da nije izbačeno $t_n(\omega_1) = S_n(\omega)$.

Posmatrajmo funkciju

$$Q : \mathfrak{M} \times \mathcal{T}' \longmapsto [0,1]$$

definisanu sa

$$Q(\omega_1, B) = \int_B d \prod_{n=1}^{\infty} \mathcal{B}(1 \ , q(t_n(\omega_1) - t_{n-1}(\omega_1)))$$

gde je $\mathcal{B}(1, \alpha)$ binomna mera. Ne ulazeći u sve detalje (jer ovaj konceptualni formalizam nije u osnovnom smeru daljeg rasudjivanja) jasno je da je

(a) Pri $\omega_1 \in \mathfrak{M}$ fiksiranom,

$$Q(\omega_1, \cdot)$$

verovatnoća na $\langle \{0,1\}^{\mathbb{N}} , \mathcal{T}' \rangle$;

(b) Pri $B \in \mathcal{T}'$ fiksiranom,

$$Q(\cdot\ ,B)$$

je $\langle \mathfrak{M}, \mathcal{T} \rangle$ -merljiva.

Na taj način, Q je prelazna verovatnoća izmedju prostorâ $\langle \mathfrak{M}, \mathcal{T} \rangle$ i $\langle \{0,1\}^{\mathbb{N}}, \mathcal{T}' \rangle$ redom.

3.1.2. Neka je $A \in \mathcal{T}$, $B \in \mathcal{T}'$. Posmatrajmo merljiv prostor

$$\langle \mathfrak{M} \times \{0,1\}^{\mathbb{N}}, \mathcal{T} \otimes \mathcal{T}' \rangle$$

gde je $\mathcal{T} \otimes \mathcal{T}'$ minimalno σ-polje nad cilindrima tipa $A \times B$.

Poznato je (Neveu, [11]) da, uz sve prethodno, postoji jedinstvena verovatnosna mera Π na tom merljivom prostoru, takva da je

$$\Pi(A \times B) = \int_A Q(\omega_1, B) F^{\infty}(d\omega_1)$$

za cilindre.

Takodje,

$$\int_{\mathfrak{M}} Q(\omega_1, B) F^{\infty}(d\omega_1) = \Pi(\mathfrak{M} \times B) = \int_B d \prod_1^{\infty} \mathcal{B}(1, q)$$

je verovatnosna mera na $\langle \{0,1\}^{\mathbb{N}}, \mathcal{T}' \rangle$ indukovana rešetanjem funkcijom $p(x)$, $x \in \mathbb{R}^+$.

3.1.3. Navedimo nekoliko primera, iz kojih je vidljivo kako se odredjuje $\Pi(A \times B)$:

$$\Pi(\{X_3 < x\} \times \{0_3 1_9\}) =$$

$$\int p(t_3(\omega_1) - t_2(\omega_1)) \cdot q(t_9(\omega_1) - t_8(\omega_1)) \cdot I\{t_3(\omega_1) - t_2(\omega_1) < x\} F^{\infty}(d\omega_1) =$$

$$q \cdot \int_0^x p(t) dF(t) \qquad (x \in \mathbb{R}^+) ,$$

$$\Pi(\{X_n<x\}\times\{O_n\})=\int_0^x p(t)\,dF(t)\,,$$

pa je

$$\Pi(\{X_n<+\infty\}\times\{O_n\})=p=\int_{\{O_n\}} d\prod_1^{\infty}\mathcal{B}(1,q)$$ etc.

3.1.4. Ako je

$$out(n)_{(\omega_1,\omega_2)}=out(n)_{(\omega_2)}=I(O_n)$$

indikator rešetanja S_n , $n\geq 1$, to prethodna konstrukcija omogućava da se nizovi

$$\{S_n\,,n\geq 1\} \quad \text{i} \quad \{out(n)\,,n\geq 1\}$$

posmatraju na istom prostoru (što je prirodno).

Mera $Q(\omega_1,\cdot)$ opisuje ponašanje niza $\{out(n),n\geq 1\}$ uslovno

$$\omega_1=(S_1(\omega)\,,S_2(\omega)\,,\dots)\ .$$

3.1.5. Slučajne veličine

$$T_1=\sum_{m=1}^{\infty}S_m\cdot\{\prod_{k=1}^{m-1}out(k)\}\cdot(1-out(m))=S_{\tau_1}\ ,$$

$$T_{n+1}=\sum_{m=\tau_n+1}^{\infty}S_m\cdot\{\prod_{\tau_n+1}^{m-1}out(k)\}\cdot(1-out(m))=S_{\tau_{n+1}}\quad (n\geq 1)$$

predstavljaju proprešetani niz obnavljanja, pri čemu je

$$\tau_1=\inf\{m\mid out(m)=0\}$$

i za $n\geq 1$

$$\tau_{n+1}=\inf\{m\mid m>\tau_n\wedge out(m)=0\}\,.$$

Lako se pokazuje da je za $x>0$

$$P\{T_1<x\}=P\{S_{\tau_1}<x\}=\sum_{k=1}^{\infty}Q_k(x)$$

gde je

$$Q_1(x) = \int_0^x q(t)\,dF(t) = \Pi(\{X_1 < x\} \times \{1_1\})$$

i

$$Q_{k+1}(x) = \int_0^x Q_k(x-t)\cdot p(t)\,dF(t) \quad , \; k \geqslant 1.$$

Uporediti sa "naivnom" verzijom nekonstantnog rešetanja u glavi II.

3.1.6. Neka je

$$\mathcal{H} = \mathcal{F}(X_n, n \geqslant 1).$$

Tada je

$$P\{T_1 = S_m \mid \mathcal{H}\} = \{\prod_{k=1}^{m-1} p(X_k)\} q(X_m) \; ,$$

$$P\{T_1 = S_m, T_2 = S_n \mid \mathcal{H}\} = \{\prod_{1}^{m-1} p(X_k)\} q(X_m) \{\prod_{m+1}^{n-1} p(X_k)\} q(X_n)$$

za $n \geqslant m+1$, itd.

3.1.7.

$$P\{T_1 < \infty \mid \mathcal{H}\} = 1.$$

Dokaz: neka je

$$G_n = \sum_{m=1}^{n} P\{T_1 = S_m \mid \mathcal{H}\}.$$

Jasno je da važi

$$G_{n+1} \geqslant G_n \quad , \quad (\forall n)\, G_n \leqslant 1.$$

Otuda je

$$\lim_{n\to\infty} G_n = G = \sum_{m=1}^{\infty} \{\prod_{1}^{m-1} p(X_k)\} q(X_m) \leqslant 1 \qquad \text{s. i.}$$

Po teoremi o monotonoj konvergenciji,

$$EG = \lim_{n\to\infty} EG_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{m=1}^{n} p^{m-1}\cdot q = 1 .$$

Dakle,

$$P\{G \leqslant 1\} = 1 \;\&\; EG = 1 \Rightarrow P\{G = 1\} = 1. \qquad \square$$

3.2. Rešetani proces obnavljanja

Pokažimo da je $\{T_n, n\geq 1\}$ opet prost proces obnavljanja.

3.2.1. Odredimo $P\{T_1<x \mid \mathcal{H}\}$ $(x\in\mathbb{R}^+)$.

$$P\{T_1<x,\ T_1=S_m \mid \mathcal{H}\} =$$
$$E(I\{T_1<x, T_1=S_m\} \mid \mathcal{H}) =$$
$$E(I\{S_m<x\} I\{T_1=S_m\} \mid \mathcal{H}).$$

Kako je $I\{S_m<x\}$ $\mathcal{H}$-merljivo, to je

$$P\{T_1<x,\ T_1=S_m \mid \mathcal{H}\} = I\{S_m<x\} P\{T_1=S_m \mid \mathcal{H}\} =$$
$$I\{S_m<x\}\{\prod_1^{m-1} p(X_k)\} q(X_m).$$

Prema tome,

$$P\{T_1<x \mid \mathcal{H}\} = \sum_{m=1}^{\infty} P\{T_1<x,\ T_1=S_m \mid \mathcal{H}\} =$$
$$\sum_{m=1}^{\infty}\{\prod_{k=1}^{m-1} p(X_k)\} q(X_m) I\{S_m<x\}.$$

3.2.2. Nezavisnost T_1 i T_2-T_1. Za $n\geq m+1$,

$$P\{T_1=S_m,\ T_2-T_1=S_n-S_m \mid \mathcal{H}\} =$$
$$\alpha(X_1,\dots,X_m)\alpha(X_{m+1},\dots,X_n)$$

gde je

$$\alpha(x_1,\dots,x_\ell) = p(x_1)\cdots p(x_{\ell-1})\cdot q(x_\ell).$$

Za $x, y\in\mathbb{R}^+$

$$P\{T_1<x,\ T_2-T_1<y \mid \mathcal{H}\} =$$
$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=m+1}^{\infty} E(I\{T_1<x, T_1=S_m, T_2-T_1<y, T_2-T_1=S_n-S_m\} \mid \mathcal{H}) =$$
$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=m+1}^{\infty} I\{S_m<x\}\alpha(X_1,\dots,X_m) I\{S_n-S_m<y\}\alpha(X_{m+1},\dots,X_n)$$

Otuda,

$$P\{T_1<x, T_2-T_1<y\}=EP\{T_1<x, T_2-T_1<y \mid \mathcal{H}\}=$$

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=m+1}^{\infty}E\{I\{S_m<x\}\alpha(X_1,\dots,X_m)\}E\{I\{S_n-S_m<y\}\alpha(X_{m+1},\dots,X_n)\}=$$

$$\sum_{m=1}^{\infty}E(I\{S_m<x\}\alpha(X_1,\dots,X_m))\sum_{n-m=1}^{\infty}E(I\{S_n-S_m<y\}\alpha(X_{m+1},\dots,X_n))=$$

$$P\{T_1<x\}\cdot P\{T_2-T_1<y\}.$$

Jasno je da T_1 i T_2-T_1 imaju isti zakon raspodele, tj. $\langle T_n, F_p\rangle$ je prost proces obnavljanja sa

$$F_p(x)=P\{T_1<x\}.$$

3.2.3. Neka je

$$N(t)=\sum_{m=1}^{\infty}I\{S_m<t\}$$

broj obnavljanja za $\langle S_n, F\rangle$. Tada, jasno,

$$P\{T_1<x \mid \mathcal{H}\}=\sum_{m=1}^{N(x)}\{\prod^{m-1}p(X_k)\}q(X_m).$$

Gornja relacija pokazuje da, u okviru ove teorije, otpada bilo kakvo rezonovanje tipa "uopštenih procesa obnavljanja", jer su sabirci zavisni od $N(x)$. Ako je rešetanje konstantno, dobijamo da je

$$P\{T_1<x \mid \mathcal{H}\}=1-p^{N(x)},$$

kao i

$$P\{T_1<x\}=1-Ep^{N(x)}, \quad x\in\mathbb{R}^+.$$

3.2.4. Zajednička raspodela za (S_1, T_1) .

$$P\{S_1<x, T_1<y \mid \mathcal{H}\}=E(I\{S_1<x\}I\{T_1<y\} \mid \mathcal{H})=$$

$$q(X_1)I\{S_1<\min\{x,y\}\}+\sum_{m=2}^{\infty}\alpha(X_1,\dots,X_m)I\{S_1<x\}I\{S_m<y\}.$$

Razmotrimo dva slučaja:

1° $0 < x \leq y$.

$$P\{S_1 < x, T_1 < y \mid \mathcal{H}\} = q(X_1)\cdot I\{S_1 < x\} + p(X_1) I\{S_1 < x\} P\{T_1' < y - X_1 \mid \mathcal{H}'\};$$

2° $0 < y < x$.

$$P\{S_1 < x, T_1 < y \mid \mathcal{H}\} = q(X_1)\cdot I\{S_1 < y\} + p(X_1) P\{T_1' < y - X_1 \mid \mathcal{H}'\},$$

gde je $\mathcal{H}' = \mathcal{F}(X_n, n \geq 2)$ i $T_1' = T_1 - X_1$.

Odatle,

$$H(x,y) = P\{S_1 < x, T_1 < y\} = \int_0^{\min\{x,y\}} (q(t) + G(y-t)p(t))\, dF(t)$$

gde je

$$F(x) = P\{S_1 < x\}, \quad G(y) = P\{T_1 < y\}.$$

3.2.5. Kada $x \to \infty$, imamo da je

$$G(y) = \int_0^y (q(t) + G(y-t)p(t))\, dF(t).$$

Ako se uvodi novo vreme (maßtab) tj. posmatra qT_1 umesto T_1 $(q = 1 - E_F p(X))$, tada je

$$F_p(qy) = \int_0^y (q(t) + F_p(q(y-t))p(t))\, dF(t)$$

gde je $F_p(y) = P\{qT_1 < y\}$. Prelaskom na $\mathcal{L}$-likove,

$$1 - \varphi_p(s) = (1 - \varphi(qs))\cdot(1 - \varphi^*(qs))^{-1};$$

$$\varphi(s) = \int_0^\infty e^{-st} dF(t), \quad \varphi^*(s) = \int_0^\infty e^{-st} p(t)\, dF(t), \quad \varphi_p(s) = \int_0^\infty e^{-st} dF_p(t).$$

Ako se maßtab ne menja,

$$1-\varphi_p(s) = (1-\varphi(s))\cdot(1-\varphi^*(s))^{-1}$$

pri čemu mora da važi

$$\varphi_p(s) \leq \varphi(s),$$

jer je

$$P\{T_1 \geq S_1\} = 1.$$

3.2.6. (Primer). Odredimo funkciju rešetanja $p(t)$ koja "prebacuje" $F = \Gamma(1)$ u $F_p = \Gamma(2)$.

U ovom primeru,

$$\varphi(s) = \frac{1}{1+s}, \quad \varphi_p(s) = \varphi^2(s).$$

Prema tome,

$$\varphi^*(s) = \frac{\varphi(s)-\varphi_p(s)}{1-\varphi_p(s)} = \frac{\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}s} =$$

$$\frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-\frac{s}{2}t}\cdot e^{-t}dt = \int_0^\infty e^{-sy}e^{-y}\cdot e^{-y}dy = \int_0^\infty e^{-sy}p(y)dF(y),$$

odakle je

$$p(t) = e^{-t}, \quad t \geq 0.$$

3.2.7. Raspodela za $T_1 - S_1$.

$$P\{T_1 - S_1 = 0\} = q.$$

Za $z \in \mathbb{R}^+$,

$$P\{T_1 - S_1 \geq z\} = \iint\limits_{y-x\geq z} dH(x,y) =$$

$$\iint\limits_{y-x\geq z} p(x)dF(x)dG(y-x) = \int_0^\infty (1-G(z))p(x)dF(x) =$$

$$p(1-G(z)) ,$$

pa je

$$P\{T_1 - S_1 < z\} = q + pG(z) \quad , \quad z > 0 .$$

Na taj način,

$$T_1 - S_1 : \quad \begin{matrix} 0 & T_1' \\ q & p \end{matrix} \qquad (T_1' \overset{R}{=} T_1)$$

pa je

$$E(T_1 - S_1) = pET_1 \quad \Rightarrow \quad E(qT_1) = E(S_1) ,$$

ako $E(S_1)$ postoji.

(Razlog eventualne promene maßtaba).

3.2.8. $D(qT_1)$.

Neka je $ES_1 = m$, $DS_1 = \sigma^2$:

$$E(T_1 - S_1)^2 = pET_1^2 ,$$

$$qET_1^2 - 2E(T_1 S_1) + ES_1^2 = 0 .$$

Odredimo $E(T_1 S_1)$, tj. $E(T_1 - S_1)S_1$.

$$P\{(T_1 - S_1)S_1 = 0 \mid \mathcal{H}\} = q(X_1) = P\{(T_1 - S_1)S_1 = 0 \mid X_1\} ,$$

$$P\{(T_1 - S_1)S_1 = T_1' S_1 \mid \mathcal{H}\} = p(X_1) = P\{(T_1 - S_1)S_1 = T_1' S_1 \mid X_1\} ,$$

gde T_1' ne zavisi od X_1 . Odatle $(X_1 = S_1)$

$$E((T_1 - S_1)S_1 \mid X_1) = T_1' S_1 p(X_1) \quad ,$$

$$E(T_1 - S_1)S_1 = ET_1' \cdot EX_1 p(X_1)$$

i za $\delta = E_F X p(X)$ je

$$E(T_1 - S_1)S_1 = \frac{1}{q} m \delta .$$

Otuda je

$$qET_1^2 = 2E(T_1-S_1)S_1 + ES_1^2 = \frac{2}{q}m\delta + m^2 + \sigma^2 ,$$

$$E(qT_1)^2 = 2m\delta + q(m^2+\sigma^2) ,$$

$$D(qT_1) = 2m\delta - pm^2 + q\sigma^2 .$$

Ako je $qT_1 \stackrel{R}{=} S_1$ (i ovi momenti postoje) tada

$$Ep(X)EX^2 = 2EX \cdot EXp(X)$$

(E se uzima po meri F).

3.2.9. Neka je F jednoznačno odredjena momentima

$$\mu_n = EX^n = \int_0^\infty x^n dF(x)$$

i neka je

$$\delta_n = Ep(X)X^n \quad (\delta_0 = p) .$$

Kako

$$T_1 | S_1 : \begin{matrix} S_1 & S_1 + T_1' \\ q(S_1) & p(S_1) \end{matrix}$$

to imamo da je

$$E((T_1-S_1)^k S_1^{n-k} | S_1) = S_1^{n-k} p(S_1) E(T_1')^k ,$$

$$E(T_1-S_1)^k S_1^{n-k} = E(T_1)^k \cdot \delta_{n-k} ,$$

za $1 \leq k \leq n$. Elem,

$$ET_1^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} E\{(T_1-S_1)^k S_1^{n-k}\} =$$

$$\mu_n - \delta_n + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \delta_{n-k} ET_1^k .$$

Za $\varrho T_1 \overset{R}{=} S_1$ dobijamo iz

$$E(\varrho T_1)^k = ES_1^k \quad , k \geq 1 ,$$

da važi

$$\mu_n = \varrho^n \mu_n + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \delta_{n-k} \varrho^{n-k} \mu_k \quad , n \geq 1.$$

Za dato F (tj. za dati niz $\{\mu_n , n \geq 1\}$) trebalo bi odrediti $\{\delta_n\}$ iz gornjeg sistema linearnih jednačina.

Recimo nešto i o strukturi rešetanog zakona F_p . Neka je

$$\chi(s) = \frac{1}{p}\varphi^*(\varrho s) \quad , \quad \psi(s) = \frac{1}{\varrho}(\varphi(\varrho s) - \varphi^*(\varrho s)).$$

To su $\mathcal{L}$-likovi verovatnosnih mera, i

$$\varphi_p(s) = \psi(s) \frac{1-p}{1-p\chi(s)} .$$

3.2.10. F_p sadrži ∞-deljivu komponentu.

To sledi iz činjenice da je $\dfrac{1-p}{1-p\chi(s)}$ $\mathcal{L}$-lik ∞-deljivog zakona (Lukacs, [8]).

Neka je $a_0 = (1-p)^{\frac{1}{n}}$ i

$$a_k = a_0 \cdot \frac{(1+n)(1+2n)\cdots(1+(k-1)n)}{n^k \cdot k!} p^k \quad , k \geq 1 ,$$

pri fiksiranom $n \geq 1$. Važi da je

$$a_k \geq 0 \ (k \geq 0) \ \wedge \ \sum_{k=0}^{\infty} a_k = 1 .$$

Prema tome,

$$\sum^{\infty} a_k \chi^k(s) = \left(\frac{1-p}{1-p\chi(s)}\right)^{\frac{1}{n}}$$

je $\mathcal{L}$-lik neke raspodele na $\mathbb{R}^+$ za $\forall n \geq 1$. Rezultat sledi.

Kako ∞-deljiv zakon ne može imati ograničen spektar (tj. slučajna veličina sa takvim zakonom ne može biti s. i. ograničena) to F_p ima neograničen spektar.

Naprimer, $\mathcal{U}(0,1)$ raspodela ne može biti dobijena bilo kojim rešetanjem, nekonstantnim po F meri, gde je F intervalna mera originalnog procesa. Imati u vidu da je

$$p(x) = \frac{1}{2} I\{0<x<1\} + \frac{1}{7} I\{x \geq 1\}$$

rešetanje koje je $\mathcal{U}(0,1)$-konstantno, a $\mathcal{E}(1)$-nekonstantno.

3.2.11. F_p može imati komponentu koja nije ∞-deljiva.

Primer: $F = \mathcal{E}(1)$, $p(x) = I\{x \geq 1\}$.

Tada je

$$\varphi(s) - \varphi^*(s) = \int^{1} e^{-sx} e^{-x} dx = \frac{1 - e^{-(s+1)}}{s+1} ,$$

$$\varrho = \varphi(0) - \varphi^*(0) = 1 - e^{-1} ,$$

i prema tome $\psi(s/\varrho) = \frac{1}{\varrho}(\varphi(s) - \varphi^*(s))$ je $\mathcal{L}$-lik verovatnosne mere čija je gustina

$$\frac{e^{-x}}{1 - e^{-1}} , \quad 0 < x < 1 .$$

Takav zakon raspodele nije ∞-deljiv, zbog ograničenog spektra. Znači da $\psi(s)$, takodje, predstavlja $\mathcal{L}$-lik zakona koji nije ∞-deljiv.

3.2.13. Funkcija obnavljanja rešetanog procesa (bez promene mašṭaba)

Neka je

$$N_p(t) = \sum_{n=1}^{\infty} I\{T_n < t\} ,$$

$$H_p(t) = EN_p(t)$$

kao i

$$\mathcal{H}_p(s) = \int_0^\infty e^{-st}\, dH_p(t)$$

$\mathcal{L}$-lik "rešetane" obnavljajuće mere H_p . Tada je

$$\mathcal{H}_p(s) = \frac{\varphi_p(s)}{1-\varphi_p(s)} = \frac{\varphi(s)-\varphi^*(s)}{1-\varphi(s)}$$

gde je φ $\mathcal{L}$-lik za F , a φ^* za $\int p\,dF$. Odatle je

$$H_p(t) = \int_0^t \{1+H(t-x)\} q(x)\, dF(x)$$

gde je H obnavljajuća mera za F , i $q(x) = 1 - p(x)$.

Vidi se da je

$$\mathcal{H}(s) = \mathcal{H}_p(s) + p \cdot \mathcal{K}_2(s)$$

gde je $\mathcal{K}_2(s)$ $\mathcal{L}$-lik obnavljajuće mere opšteg procesa obnavljanja $\langle S_n, L, F\rangle$, kod kojeg je

$$L(x) = \frac{1}{p}\int_0^x p(t)\, dF(t) .$$

Takodje,

$$\mathcal{H}_p(s) = q \cdot \mathcal{K}_1(s)$$

gde je $\mathcal{K}_1(s)$ $\mathcal{L}$-lik obnavljajuće mere opšteg PO $\langle S_n, M, F\rangle$ sa

$$M(x) = \frac{1}{q}\int_0^x q(t)\, dF(t) .$$

Najzad (jasno)

$$\mathcal{H}(s) = q \cdot \mathcal{K}_1(s) + p \cdot \mathcal{K}_2(s) .$$

3.2.13. Poslednje veze mogu imati izvesnog značaja, pri modeliranju nekonstantnog rešetanja. Naprimer,

$$H_p(t) = q \cdot K_1(t) = q \sum_{n=0}^{\infty} M * F^{(n)}(t)$$

te se broj obnavljanja rešetanog procesa može modelirati preko originalnog procesa, sa jednim umetnutim slučajnim intervalom (čija je dužina raspodeljena po meri M) na početku vremenske skale.

3.2.14. Rešetanje u Poisson-ov proces.

Razmotrimo jedan zanimljiv problem. Posmatrajmo klasu apsolutno neprekidnih zakona $\{F\}$ takvih da je

$$(\forall x \in \mathbb{R}^+)\ F(x) < 1 .$$

Za koje zakone iz te klase postoji rešetanje $p(x)$ takvo da

$$\langle S_n, F \rangle \xrightarrow{p(x)} \langle T_n, \mathcal{E}(1) \rangle \ ?$$

Očigledno je (ne menjamo mastab, jer to ovde nije bitno)

$$\varphi^*(s) = \frac{\varphi(s) - (s+1)^{-1}}{1 - (s+1)^{-1}} = \frac{\varphi(s) - 1}{s} + \varphi(s)$$

i za $f = \frac{d}{dx} F$ je

$$p(x) f(x) = f(x) - (1 - F(x))$$

(odatle je, naprimer, $\lim\limits_{x \downarrow 0} f(x) > 1$).

Prema tome, za

$$r(x) = \frac{f(x)}{1 - F(x)}$$

(to je funkcija intenzitota otkaza zakona F , failure rate function)

$$p(x) = 1 - \frac{1}{r(x)}$$

i $p(x)$ je verovatnoća za $1 \leq r(x) < \infty$.

Znači da za svaki zakon

$$F(x) = 1 - \exp\left\{ -\int_0^x r(t)\,dt \right\}$$

za kojeg je $1 \leq r(x) < \infty$, $x \in \mathbb{R}^+$, postoji funkcija rešetanja

$p(x)$ takva da

$$\langle S_n, F\rangle \xrightarrow{p(x)} \langle T_n, \mathcal{E}(1)\rangle .$$

1° Naprimer, ako je

$$F(x) = 1 - \exp\{-(e^{x} - 1)\} \ , \ x \geqslant 0 \ ,$$

$r(x) = e^{x}$ i rešetanje u $\mathcal{E}(1)$ je moguće sa $p(x) = 1 - e^{-x}, x \geqslant 0$.

2° Za

$$F(x) = 1 - \exp\{-\sqrt{x}\} \ , \ x \geqslant 0 \ ,$$

rešetanje u $\mathcal{E}(1)$ je, očigledno, nemoguće.

IV

NEKONSTANTNO REŠETANJE. PROBLEM NEOSETLJIVOSTI

4.1. Stacionarna raspodela za F koje je $p(x)$ -neosetljivo

Podsetimo se da, ako EX_1 postoji, raspodelu

$$F_1(x) = \frac{1}{EX_1}\int_0^x (1-F(t))dt$$

nazivamo stacionarnom za F .

Ako je F neosetljivo na rešetanje sa $p(x)$ (upor. 3.2.5) to je

$$1-\varphi(s) = \frac{1-\varphi(qs)}{1-p\chi(s)} = \dots = \frac{1-\varphi(q^n s)}{(1-p\chi(s))\cdots(1-p\chi(q^{n-1}s))}$$

i

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1-\varphi(q^n s)}{q^n} = -s\lim_{n\to\infty}\frac{\varphi(q^n s)-1}{q^n s} = -s\varphi'(0) = sEX_1 \quad ,$$

pa

$$\prod_{k=1}^{\infty}\frac{1-p}{1-p\chi(q^{k-1}s)}$$

konvergira, pri čemu je

$$\frac{1-\varphi(s)}{sEX_1} = \prod_{k=1}^{\infty}\frac{1-p}{1-p\chi(q^{k-1}s)}$$

Leva strana je, jasno, $\mathcal{L}$-lik za $F_1(x)$. Ako X^* ima stacionarni zakon F_1 to je

$$X^* \stackrel{R}{=} \sum_{k=1}^{\infty} q^{k-1} W_k$$

gde su $\{W_k \ , k \geq 1\}$ nezavisne sl. veličine sa istom raspodelom čiji je $\mathcal{L}$-lik

$$\frac{1-p}{1-p\chi(s)} \quad .$$

Kako $\sum_1^{\infty} q^{k-1} W_k$ konvergira skoro izvesno, to gornji beskonačni proizvod konvergira ravnomerno na svakom konačnom intervalu.

4.1.1. O skoro izvesnoj konvergenciji reda $\sum_{1}^{\infty} q^{k-1} W_k$:

$$\exists EX_1 \Leftrightarrow \exists \varphi'(0) \Rightarrow \exists \chi'(0).$$

No tada i lik $\frac{1-p}{1-p\chi(s)}$ ima prvi izvod u 0 , pa postoji EW_1.

Znači da je

$$\sum_{k=1}^{\infty} E(q^{k-1} W_k) = \frac{EW_1}{1-q} < +\infty ,$$

što je dovoljan uslov da red nenegativnih i nezavisnih sl. veličina s.i. konvergira.

4.1.2. Beskonačna deljivost stacionarne raspodele

Kako je

$$\ln \frac{1-p}{1-p\chi(q^{k-1}s)} = \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{p^{\ell}}{\ell} (\chi^{\ell}(q^{k-1}s) - 1)$$

to je

$$\frac{1-\varphi(s)}{sEX_1} = \prod_{\ell=1}^{\infty} \exp\left\{ \frac{p^{\ell}}{\ell} \sum_{k=1}^{\infty} (\chi^{\ell}(q^{k-1}s) - 1) \right\}.$$

To je konvolucija uopštenih Poisson-ovih mera, pa je ∞ -deljiva.

4.1.3. Verovatnosna mera na $\mathbb{R}^+$ je ∞-deljiva akko postoji mera Q na $\mathbb{R}^+$ takva da je

$$\int_{0}^{\infty} \frac{1}{1+x} dQ(x) < +\infty$$

i

$$\Psi(s) = \exp\left\{ -\int_{0}^{\infty} \frac{1-e^{-sx}}{x} dQ(x) \right\}$$

gde je Ψ $\mathcal{L}$-lik te verovatnosne mere (Feller, [4]).

Q je "gornja" (kanonička) mera.

Lako se pokazuje da je gornja mera verovatnosne mere sa $\mathcal{L}$-likom

$$\exp\left\{\frac{p^\ell}{\ell}(\chi^\ell(q^{k-1}s)-1)\right\}$$

sledeća:

$$dQ_{k,\ell}(x)=\frac{p^\ell}{\ell}\cdot x\,dH^{(\ell)}\left(\frac{x}{q^{k-1}}\right) \qquad (\nabla)$$

gde je $\chi(s)$ $\mathcal{L}$-lik verovatnosne mere H.

Otuda je gornja mera za ver. meru sa $\mathcal{L}$-likom

$$\exp\left\{\sum_{k=1}^{\infty}\frac{p^\ell}{\ell}(\chi^\ell(q^{k-1}s)-1)\right\}$$

ova:

$$dQ_\ell(x)=\frac{p^\ell}{\ell}\cdot x\sum_{k=1}^{\infty}dH^{(\ell)}\left(\frac{x}{q^{k-1}}\right)$$

Najzad, gornja mera za $F_1(x)=\frac{1}{EX_1}\int_0^x(1-F(t))dt$ je $Q(x)$, takvo da je

$$dQ(x)=x\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{\ell=1}^{\infty}\frac{p^\ell}{\ell}dH^{(\ell)}\left(\frac{x}{q^{k-1}}\right).$$

4.1.4. Neka je

$$k(s)=\int_0^\infty e^{-sx}dQ(x) \quad , \quad s\geq 0 \, ,$$

$\mathcal{L}$-lik mere Q.

Tada je

$$k(s)=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{\ell=1}^{\infty}\frac{p^\ell}{\ell}\int_0^\infty e^{-sx}\cdot x\,dH^{(\ell)}\left(\frac{x}{q^{k-1}}\right) .$$

Pošto je

$$\chi^\ell(q^{k-1}s)=\int_0^\infty e^{-sx}dH^{(\ell)}\left(\frac{x}{q^{k-1}}\right)$$

i $(\chi^\ell(s))'$ postoji za $\forall s\geq 0$, jer postoji $\chi'(0)$, imamo da je

$$(\chi^\ell(q^{k-1}s))'=-\int_0^\infty e^{-sx}\cdot x\,dH^{(\ell)}\left(\frac{x}{q^{k-1}}\right)=\ell\chi^{\ell-1}(q^{k-1}s)q^{k-1}\cdot\chi'(q^{k-1}s)$$

kao i

$$K(0)=\int_0^\infty dQ(x)=(-\chi'(0))\sum_{k=1}^\infty q^{k-1}\sum_{\ell=1}^\infty p^\ell=\frac{1}{q}(-\chi'(0)).$$

4.1.5.
$$\frac{1-p}{1-p\chi(s)}=\frac{1-\varphi(s)}{sEX_1}\cdot\left(\frac{1-\varphi(qs)}{qsEX_1}\right)^{-1},$$

pa je gornja mera verovatnosne mere sa likom $\dfrac{1-p}{1-p\chi(s)}$

$$d\left(Q(x)-q\cdot Q\left(\frac{x}{q}\right)\right)$$

što se pokazuje elementarno, koristeći rezultat iz 4.1.3.

$\mathcal{L}$-lik te gornje mere je

$$\int^\infty e^{-sx}d\left\{Q(x)-q\cdot Q\left(\frac{x}{q}\right)\right\}=K(s)-qK(qs).$$

Medjutim, po (∇) ta gornja mera jednaka je

$$\sum_{\ell=1}^\infty dQ_{1,\ell}(x)=\sum_{\ell=1}^\infty\frac{p^\ell}{\ell}\cdot x\,dH^{(\ell)}(x)$$

čiji je $\mathcal{L}$-lik

$$\sum_{\ell=1}^\infty\frac{p^\ell}{\ell}\int_0^\infty e^{-sx}\cdot x\,dH^{(\ell)}(x)=\sum_{\ell=1}^\infty\frac{p^\ell}{\ell}(-\chi^\ell(s))'=\left\{-\sum_{\ell=1}^\infty\frac{(p\chi(s))^\ell}{\ell}\right\}'=$$

$$\{\ln(1-p\chi(s))\}'=\frac{-p\chi'(s)}{1-p\chi(s)}.$$

Dakle,

$$K(s)-qK(qs)=\frac{-p\chi'(s)}{1-p\chi(s)}.$$

4.1.6.

Kako je

$$\int_0^s K(u)du-\int_0^s qK(qu)du=\ln(1-p\chi(s))-\ln(1-p)$$

to je

$$\prod_{k=1}^{n} \frac{1-p}{1-p\chi(q^{k-1}s)} = \exp\left\{ \int_0^{q^n s} k(u)du - \int_0^{s} k(u)du \right\}.$$

Kada $n \to \infty$, leva strana konvergira liku $\dfrac{1-\varphi(s)}{sEX_1}$.

Pošto je $k(0) < +\infty$, i k neprekidna za $s \geq 0$, imamo da je

$$\frac{1-\varphi(s)}{sEX_1} = \exp\left\{ -\int_0^{s} k(u)du \right\}.$$

Beskonačna deljivost stacionarne raspodele je (u ovom obliku) više nego očigledna.

4.2. S konstrukcija

Neka je

$$k(s) = \begin{cases} 1 & , \ s=0 \\ \dfrac{1-e^{-s}}{s} & , \ s>0 . \end{cases}$$

$k(s)$ je, očigledno, $\mathcal{L}$-lik $\mathcal{U}(0,1)$ raspodele. Tada je i

$$\exp\left\{ -\int_0^{s} k(u)du \right\}$$

$\mathcal{L}$-lik neke verovatnosne mere na $\mathbb{R}^+$. Konstruisaćemo slučajnu veličinu čiji je to $\mathcal{L}$-lik.

4.2.1. Neka je dat markovski niz sl. veličina $\{X_n, n \geq 1\}$ sa

$$X_1 : \mathcal{U}(0,1) \ \& \ X_{n+1} | X_n : \mathcal{U}(0, X_n) \ (n \in \mathbb{N}).$$

Pokazaćemo da $S = \sum_1^{\infty} X_n$ postoji u srednje kvadratnom smislu.

Indukcijom se lako dobija bezuslovna gustina za X_n :

$$f_n(x_n) = \frac{(-\ln x_n)^{n-1}}{\Gamma(n)} \ , \ 0 < x_n < 1 .$$

Odatle je

$$EX_n = \frac{1}{2^n} \ , \ EX_n^2 = \frac{1}{3^n} \quad (n \geq 1)$$

što se neposredno proverava.

Neka je $S_n=\sum_1^n X_k$. Za $m>n$ je

$$E|S_m-S_n|^2=E|\sum_{n+1}^m X_k|^2=\sum_{n+1}^m EX_k^2+\sum_{k\neq \ell} E(X_kX_\ell) .$$

Dovoljno je pokazati da je S_n Cauchy-jev niz u L_2 smislu.

$$E(X_kX_\ell)=E|X_kX_\ell|\leqslant (EX_k^2)^{\frac{1}{2}}\cdot(EX_\ell^2)^{\frac{1}{2}}=(\sqrt{3})^{-(k+\ell)},$$

za $k\neq \ell$.

Odatle je

$$E|S_m-S_n|^2\leqslant \sum_{n+1}^m \frac{1}{3^k}+\sum_{k\neq\ell}\frac{1}{(\sqrt{3})^{k+\ell}}=\left\{\sum_{n+1}^m\frac{1}{(\sqrt{3})^k}\right\}^2 .$$

Kako je $\sum_1^\infty \frac{1}{(\sqrt{3})^k}<+\infty$, to je $\sum_1^n \frac{1}{(\sqrt{3})^k}$ Cauchy-jev niz u $\mathbb{R}$, i otuda je

$$\lim_{m,n\to\infty} E|S_m-S_n|^2=0 .$$

Znači da $S=\sum_1^\infty X_n$ postoji u s.k. smislu. □

4.2.2.

S postoji i skoro izvesno. Dovoljno je pokazati da

$$\sup_{m>n}\left(\sum_{n+1}^m X_k\right)\xrightarrow{P} 0 \quad , \ n\to\infty$$

što lako sledi iz gornjeg.

4.2.3. Raspodela za S.

$$\lambda_1(u)=Ee^{-uS}=EE(e^{-uS}|X_1)=$$

$$Ee^{-uX_1}E(\exp\{-uX_1\sum_2^\infty \frac{X_n}{X_1}\}|X_1).$$

Neka je

$$Y_n=\frac{X_{n+1}}{X_1} \quad , \ n\geqslant 1 .$$

4.2.4. $\{Y_n, n\geqslant 1\}$ je markovski niz sl. veličina sa

$$Y_1:\mathcal{U}(0,1) \ \& \ Y_{n+1}|Y_n:\mathcal{U}(0,Y_n)$$

nezavisan od X_1.

Znači da $\{Y_n, n \geq 1\}$ ima istu verovatnosnu strukturu kao i niz $\{X_n, n \geq 1\}$.

Pokažimo to. Za $0 < y < 1$,

$$P\{Y_1 < y \mid X_1\} = E(I\{X_2 < yX_1\} \mid X_1) = E(y \mid X_1) = y$$

te $Y_1 : \mathcal{U}(0,1)$ nezavisno od X_1. Dalje,

$$P\{Y_{n+1} < y \mid Y_n\} = P\{X_{n+2} < yX_1 \mid \frac{X_{n+1}}{X_1}\},$$

i kako je

$$\mathcal{F}(\frac{X_{n+1}}{X_1}) \subset \mathcal{F}(X_{n+1}, X_1)$$

to je

$$P\{Y_{n+1} < y \mid Y_n\} = E(E(I\{X_{n+2} < yX_1\} \mid X_{n+1}, X_1) \mid \frac{X_{n+1}}{X_1}) =$$
$$E(E(I\{X_{n+2} < yX_1\} \mid X_{n+1}) \mid \frac{X_{n+1}}{X_1}) =$$
$$E(P\{X_{n+2} < yX_1 \mid X_{n+1}\} \mid \frac{X_{n+1}}{X_1}) =$$
$$E(\frac{yX_1}{X_{n+1}} \mid \frac{X_{n+1}}{X_1}) = \frac{y}{Y_n},$$

pa $Y_{n+1} \mid Y_n : \mathcal{U}(0, Y_n)$. Uverimo se još i u markovost niza Y_n.

$$P\{Y_{n+1} < y \mid Y_1, \dots, Y_n\} = P\{X_{n+2} < yX_1 \mid \frac{X_2}{X_1}, \dots, \frac{X_{n+1}}{X_1}\}.$$

Pošto je

$$\mathcal{F}(\frac{X_2}{X_1}, \dots, \frac{X_{n+1}}{X_1}) \subset \mathcal{F}(X_1, \dots, X_{n+1})$$

to je gornja uslovna raspodela jednaka

$$E(E(I\{X_{n+2} < yX_1\} \mid X_1, \dots, X_{n+1}) \mid \frac{X_2}{X_1}, \dots, \frac{X_{n+1}}{X_1}) =$$
$$E(E(I\{X_{n+2} < yX_1\} \mid X_{n+1}) \mid \frac{X_2}{X_1}, \dots, \frac{X_{n+1}}{X_1}) =$$
$$E(\frac{yX_1}{X_{n+1}} \mid \frac{X_2}{X_1}, \dots, \frac{X_{n+1}}{X_1}) = E(\frac{y}{Y_n} \mid Y_1, \dots, Y_n) = \frac{y}{Y_n} =$$
$$P\{Y_{n+1} < y \mid Y_n\},$$

čime je tvrdjenje dokazano. $\square$

4.2.5. **Vratimo se raspodeli za** S **. Na osnovu dokazanih osobina niza** $\{Y_n\}$ **, imamo da je**

$$\lambda_1(u) = Ee^{-uS} = Ee^{-uX_1}\lambda_1(X_1u)$$

a kako $X_1 : \mathcal{U}(0,1)$ **to je**

$$\lambda_1(u) = \int_0^1 e^{-ux}\lambda_1(ux)dx ,$$

$$u\cdot\lambda_1(u) = \int_0^u e^{-y}\lambda_1(y)dy .$$

Videli smo da je

$$EX_n = \frac{1}{2^n} \quad , \ ES < +\infty ,$$

pa je $\lambda_1(u)$ **diferencijabilna za** $u \geqslant 0$ **. Odatle je**

$$\lambda_1(u) + u\cdot\lambda_1'(u) = e^{-u}\lambda_1(u).$$

Rešenje te jednostavne diferencijalne jednačine biće

$$\lambda_1(u) = \exp\left\{-\int_0^u \frac{1-e^{-x}}{x}dx\right\}$$

(za $u=0$, $\lambda_1(u)=1$).

Time je pokazano da je $\exp\left\{-\int_0^s k(u)du\right\}$ $\mathcal{L}$-lik jedne verovatnosne mere na $\mathbb{R}^+$.

4.2.6. Pre nego što nastavimo sa opisom S -konstrukcije, red je da - bar u nekoliko reči - kažemo čemu ona služi, koja joj je uloga.

U 4.1.6. videli smo kako mora izgledati stacionarni lik u neosetljivoj situaciji. Randomizacija jedinice u S -konstrukciji (a taj pojam će, u onome što sledi, dobiti jasno značenje) biće generator stacionarnih likova tog tipa.

4.2.7. Totalna monotonost (TM)

Funkcija $\varphi(s)$, $s>0$, je po definiciji TM ako ima izvod svakog reda $\varphi^{(n)}$ i

$$(-1)^n \varphi^{(n)}(s) \geq 0 \ , \quad s>0 .$$

$(\varphi^{(0)} \equiv \varphi)$.

4.2.8. (**Bernštajn, 1928**).

$\varphi(s), s>0$, **je TM akko postoji mera** F **na** $\mathbb{R}^+$ **takva da je**

$$\varphi(s) = \int_0^\infty e^{-sx} dF(x) \ , \quad s>0 .$$

Jasno, $\varphi(s)$ **je** $\mathcal{L}$**-lik neke verovatnosne mere na** $\mathbb{R}^+$ **akko je** $\varphi(s)$ TM i $\varphi(0)=1$.

4.2.9. U 4.2.5. smo pokazali da je $\lambda_1(s)$ $\mathcal{L}$-lik jedne verovatnosne mere na $\mathbb{R}^+$. Pretpostavimo da je to lik stacionarne raspodele L_1 nekog zakona L , tj.

$$\lambda_1(s) = \frac{1-\lambda(s)}{s} .$$

U principu, takvo rasudjivanje ne valja, jer ako je $\varphi(s)$ $\mathcal{L}$-lik neke verovatnosne mere na $\mathbb{R}^+$, funkcija $1-s\cdot\varphi(s)$ uopšte ne mora imati istu osobinu.

No, u okviru S -konstrukcije,

4.2.10. $$\lambda(s) = 1 - s\cdot \exp\left\{-\int_0^s \frac{1-e^{-u}}{u} du\right\}$$

je $\mathcal{L}$-lik jedne verovatnosne mere na $\mathbb{R}^+$.

Dokaz.

$$\lambda'(s) = -\lambda_1(s) + s\frac{1-e^{-s}}{s}\lambda_1(s) = -e^{-s}\lambda_1(s).$$

Kako je e^{-s} $\mathcal{L}$-lik raspodele koncentrisane u tački $x = 1$, to je

$$-\lambda'(s) = e^{-s}\cdot\lambda_1(s)$$

$\mathcal{L}$-lik jedne verovatnosne mere na $\mathbb{R}^+$. Znači da je $(-\lambda'(s))$ TM, pa je za $n \geqslant 0$

$$(-1)^n(-\lambda'(s))^{(n)} = (-1)^{n+1}\lambda^{(n+1)}(s) \geqslant 0$$

ili

$$(-1)^n\lambda^{(n)}(s) \geqslant 0 \quad , \; n \geqslant 1$$

Pokažimo još da je $\lambda(s) \geqslant 0$. Po prethodnom,

$$s\lambda_1(s) = \int_0^s e^{-y}\lambda_1(y)dy \leqslant \int_0^s e^{-y}dy = 1 - e^{-s} \leqslant 1$$

pa je $\lambda(s) \geqslant 0$.

Dakle, $\lambda(s)$ je TM i $\lambda(0) = 1$, čime je dokaz okončan. $\square$

4.2.11.
$$\lambda_1(s)\cdot(\lambda_1(qs))^{-1} \quad , \; 0<q<1$$

je $\mathcal{L}$-lik neke verovatnosne mere na $\mathbb{R}^+$.

Dokaz.

$$\lambda_1(s)\cdot(\lambda_1(qs))^{-1} = \exp\left\{-\int_0^s k(u)du + \int_0^{qs} k(u)du\right\} =$$

$$\exp\left\{-\int_0^s (k(u)-qk(qu))du\right\} =$$

$$\exp\left\{-\int_0^\infty \frac{1-e^{-sx}}{x}\, d(\min\{x,1\}-\min\{x,q\})\right\}.$$

Očigledno je

$$\min\{x,1\}-\min\{x,q\}=\begin{cases} 0 & , \ 0\leq x\leq q \\ x-q & , \ q<x\leq 1 \\ 1-q & , \ x>1 \end{cases}$$

mera na $\mathbb{R}^+$, i to gornja mera nekog ∞-deljivog zakona. □

4.2.12. O vidu zakona L_1 sa likom $\lambda_1(s)$

Ako S ima funkciju raspodele $L_1(z)$, $z\in\mathbb{R}$, tada

$$S \stackrel{R}{=} X_1\cdot(1+S')$$

gde su X_1 i S' nezavisne, $S' \stackrel{R}{=} S$ i $X_1 : \mathcal{U}(0,1)$, što je u prethodnom dokazano. Otuda je, za $z>0$,

$$L_1(z)=\iint_A dx\, dL_1(y) \quad , \quad A: x(y+1)<z\,,\, 0<x<1\,,\, y>0\,,$$

pa je

$$L_1(z)=\int_0^{\min\{1,z\}} L_1\left(\frac{z}{x}-1\right)dx\ .$$

Za $0<z\leq 1$ je

$$L_1(z)=\int_0^z L_1\left(\frac{z}{x}-1\right)dx = z\int_0^\infty \frac{L_1(y)}{(1+y)^2}dy = c\cdot z \quad ,$$

gde je

$$c=\int_0^\infty \frac{L_1(y)}{(1+y)^2}dy\ .$$

Lako se dobija da je

$$L_1(z)=\begin{cases} c\cdot z & , \quad 0\leq z\leq 1 \\ \\ z\displaystyle\int_{z-1}^\infty \frac{L_1(y)}{(1+y)^2}dy & , \quad z>1\,. \end{cases}$$

Gustina ℓ_1 zakona L_1 je

$$\ell_1(z)=\begin{cases} c & , \quad 0\leqslant z\leqslant 1 \\ \dfrac{L_1(z)-L_1(z-1)}{z} & , \quad z>1. \end{cases}$$

Ako je L zakon sa likom $\lambda(s)$,

$$L(z)=1-\ell_1(z)\ ,\ z\geqslant 0 .$$

4.3. Randomizacija jedinice u S-konstrukciji

4.3.1. Neka je $\eta(s)$ $\mathcal{L}$-lik verovatnosne mere N na $\mathbb{R}^+$, sa $E_N X=1$, i

$$\int_0^\infty \eta(u)\exp\left\{-\int_0^u \frac{1-\eta(y)}{y}dy\right\}du\leqslant 1 .$$

Posmatrajno

$$\lambda_1(s)=\exp\left\{-\int_0^s \frac{1-\eta(u)}{u}du\right\}\ ,\ s\geqslant 0$$

$(\lambda_1(0)\stackrel{def}{=}1)$. Kako je

$$\int_0^s \frac{1-\eta(u)}{u}du\ ,\ s>0$$

pozitivna funkcija sa TM prvim izvodom, to je i $\lambda_1(s)$ TM, pri čemu je i ona $\mathcal{L}$-lik neke verovatnosne mere (jer je i $\lambda_1(0)=1$).

Dalje,

$$\lambda_1(s)+s\cdot\lambda_1'(s)=\eta(s)\lambda_1(s)\ ,$$

$$s\cdot\lambda_1(s)=\int_0^s \eta(y)\lambda_1(y)dy .$$

Kako je

$$s\cdot\lambda_1(s)\ \leqslant\ 1 \quad ,\quad s\geqslant 0\ ,$$

to je $\lambda(s)=1-s\lambda_1(s)$ nenegativna na $\mathbb{R}^+$. Osim toga,

$$\lambda'(s) = (1 - s\lambda_1(s))' = -\eta(s)\cdot\lambda_1(s)$$

odakle sledi da je funkcija

$$-(1 - s\lambda_1(s))'$$

TM, pa je i $\lambda(s)$ TM. Kako je $\lambda(0) = 1$, to je $\lambda(s)$ $\mathcal{L}$-lik ver. mere na $\mathbb{R}^+$.

4.3.2. Verovatnosna struktura lika $\lambda_1(s)$

Neka su S, X_1, V i S' nenegativne sl. veličine za koje važi:

(a) $S \overset{R}{=} S'$;

(b) X_1, V i S' su nezavisne;

(c) $X_1 : \mathcal{U}(0,1)$;

(d) $Ee^{-uV} = \eta(u)$, $Ee^{-uS} = \lambda_1(u)$;

(e) $S \overset{R}{=} X_1\cdot(V+S')$.

Tada je

$$\lambda_1(s) = \exp\left\{-\int_0^s \frac{1-\eta(u)}{u}\,du\right\}.$$

Dokaz je jednostavan.

$$Ee^{-uS} = EE(e^{-uS}|X_1),$$

$$E(e^{-uS}|X_1=x) = E(e^{-ux(V+S')}|X_1=x) = \eta(ux)\lambda_1(ux)$$

te je

$$\lambda_1(u) = \int_0^1 \eta(ux)\lambda_1(ux)\,dx$$

i rezultat sledi. $\square$

4.3.3. Za $V \overset{\text{s.I.}}{=\!=} 1$ u pitanju je S-konstrukcija iz 4.2.

Za $V : \mathcal{E}(1)$ je

$$\lambda_1(s) = \lambda(s) = \eta(s) = \frac{1}{1+s}$$

što odgovara konstantnom rešetanju.

Ideja je, onda, u sledećem: izborom raznih raspodela za V dobijati "neosetljive situacije". Relacija (e) omogućava (u odredjenim slučajevima) čak i efektivno odredjivanje raspodele za S .

4.3.4. Neka je $\{V, X_1, X_2, \dots\}$ markovski niz sl. veličina, tako da je $\eta(s)$ $\mathcal{L}$-lik za V i $P\{V>0\}=1$,

$$X_1|V : \mathcal{U}(0,V) \ \& \ X_{n+1}|X_n : \mathcal{U}(0,X_n) \ (n \geqslant 1).$$

Slučajni red

$$T = \sum_{n=1}^{\infty} X_n$$

s.i. konvergira za $EV = 1$. Očigledno, za $y>0$

$$P\{\frac{X_1}{V} < y\} = \frac{1}{V}\min\{yV, V\} = \min\{y, 1\} = P\{\frac{X_1}{V} < y|V\}$$

te su $\frac{X_1}{V}$ i V nezavisne.

Dalje, za $x, y > 0$ je

$$P\{V\sum_2^{\infty}\frac{X_n}{X_1} < x, V < y \mid \frac{X_1}{V}\} =$$

$$E(I\{V<y\}I\{V\sum_2^{\infty}\frac{X_n}{X_1}<x\} \mid \frac{X_1}{V}) =$$

$$E(E(I\{V<y\}I\{\sum_2^{\infty}X_n<x\frac{X_1}{V}\}|X_1,V)|\frac{X_1}{V}) =$$

$$E(I\{V<y\}E(I\{\sum_2^{\infty}X_n<x\frac{X_1}{V}\}|X_1,V)|\frac{X_1}{V}) =$$

$$E(I\{V<y\}H(x\frac{X_1}{V})\mid\frac{X_1}{V})=$$

$$H(x\frac{X_1}{V})P\{V<y\mid\frac{X_1}{V}\}=$$

$$P\{V<y\mid\frac{X_1}{V}\}P\{V\sum_2^\infty\frac{X_n}{X_1}<x\mid\frac{X_1}{V}\},$$

gde je $H(\cdot)$ funkcija raspodele za $\sum_2^\infty X_n$.

Dakle,

$$V \quad \text{i} \quad V\sum_2^\infty\frac{X_n}{X_1}=T'$$

-nezavisne su uslovno σ -polja $\mathcal{F}(\frac{X_1}{V})$.

T' ima istu raspodelu kao i T (uporediti sa S -konstrukcijom)

te je

$$T\overset{R}{=\!=}\frac{X_1}{V}\cdot(V+T')$$

gde su V i T' $\mathcal{F}(\frac{X_1}{V})$ -nezavisne, i $\frac{X_1}{V}:\mathcal{U}(0,1)$.

Za

$$\lambda_1(s)=Ee^{-sT}$$

onda imamo da je

$$\lambda_1(s)=\int_0^1\eta(sx)\lambda_1(sx)dx$$

te je

$$\lambda_1(s)=\exp\{-\int_0^s\frac{1-\eta(u)}{u}du\}.$$

Klasa ovih stacionarnih $\mathcal{X}$-likova može se, dakle, dobiti randomizacijom jedinice u S -konstrukciji. Uvodjenje sl. veličine V na početak markovskog niza $\{X_n,\,n\geqslant 1\}$ dovodi do niza "u V jedinicama" (preko V dobijamo slučajni maßtab u S -konstrukciji).

4.3.5. Iz 4.1.6. znamo da $\lambda_1(s)$ mora biti oblika

$$\exp\left\{-\int_0^s \kappa(u)\,du\right\}$$

gde je $\kappa(s)$ TM funkcija sa $\kappa(0)<+\infty$. Neka je

$$\lambda_1'(0) = -\kappa(0) = -1$$

(u pitanju je samo mastab). Funkcija

$$\lambda(s) = 1 - s\lambda_1(s)$$

mora biti TM, no takva mora biti i

$$-\lambda'(s) = (1 - s\kappa(s))\cdot\lambda_1(s)\,.$$

Jasno je da to u principu ne mora biti ispunjeno za proizvoljnu TM funkciju $\kappa(s)$ sa $\kappa(0)<+\infty$. Medjutim, $(-\lambda'(s))$ je obavezno TM pri stacionarnom $\kappa(s)$:

$$\kappa(s) = \frac{1}{s}(1-\eta(s))\ ,$$

gde je $\eta(s)$ $\mathcal{L}$-lik neke verovatnosne mere na $\mathbb{R}^+$.

U tome je razlog ograničenja na $\kappa(s)$ stacionarnog oblika.

4.3.6. Neka $\eta(s)$ i $\lambda_1(s)$ imaju smisao iz 4.3.1. i $q\in(0,1)$.

Tada je

$$\lambda_1(s)\cdot(\lambda_1(qs))^{-1} = \exp\left\{-\int_0^s \frac{\eta(qu)-\eta(u)}{u}\,du\right\}$$

$\mathcal{L}$-lik jedne verovatnosne mere na $\mathbb{R}^+$.

Dokaz.

$$\frac{1}{1-q}\cdot\frac{\eta(qu)-\eta(u)}{u} = \int_0^\infty \frac{e^{-qux}-e^{-ux}}{(1-q)ux}\cdot x\,dN(x)\,.$$

Za

$$E_N X = \int_0^\infty x\,dN(x) = 1$$

relacija

$$x\,dN(x) = dM(x)$$

odredjuje verovatnosnu meru M na $\mathbb{R}^+$. Kako je

$$\frac{e^{-qux} - e^{-ux}}{(1-q)\cdot ux}$$

$\mathcal{L}$-lik $\mathcal{U}(qx, x)$ raspodele, zamislimo sledeću konstrukciju.

Neka su X i Y dve sl. veličine za koje važi:

(a) $P\{X>0, Y>0\} = 1$;

(b) $Y \mid X = x : \mathcal{U}(qx, x)$;

(c) $P\{X<x\} = M(x)$, $x \in \mathbb{R}^+$.

Tada je, jasno,

$$\frac{1}{1-q}\cdot\frac{\eta(qu)-\eta(u)}{u} = EE(e^{-uY} \mid X) = Ee^{-uY}$$

TM funkcija. Znači da je

$$\int_0^s \frac{\eta(qu)-\eta(u)}{u}\,du$$

pozitivna funkcija sa TM prvim izvodom, te je i $\lambda_1(s)\cdot(\lambda_1(qs))^{-1}$ TM.

To je lik neke verovatnosne mere jer je $\lambda_1(0) = 1$.

4.3.7. Odredjivanje originala za $\lambda_1(s)$ i $\lambda(s)$

U situaciji

$$T \stackrel{R}{=} X_1\cdot(V+T')$$

iz prethodnog teksta, neka su L_1 i B funkcije raspodele za T i V redom, i $A = B * L_1$.

Za $z>0$ je

$$L_1(z) = \iiint_D dx\, dB(y)\, dL_1(w)$$

gde je $D \subset \mathbb{R}^3$ skup trojki (x, y, w) takvih da je

$$0 < x < 1\ ,\ y > 0\ ,\ w > 0\ ,\ x\cdot(y+w) < z\ .$$

Lako dobijamo da je

$$L_1(z) = \int_0^1 A\left(\frac{z}{x}\right)dx = z\cdot\int_z^\infty \frac{1}{t^2}A(t)\,dt\ ,$$

i odatle ($\ell_1 = L_1'$, $a = A'$, $L = 1 - \ell_1$, $\ell = L'$):

$$\ell_1(z) = \frac{1}{z}\left(L_1(z) - A(z)\right),$$

$$L(z) = 1 - \frac{1}{z}\left(L_1(z) - A(z)\right),$$

$$\ell(z) = \frac{1}{z}a(z) = \frac{1}{z}\int_0^z b(z-x)\,\ell_1(x)\,dx\ ,\quad z \in \mathbb{R}^+.$$

4.3.8. **Relacija $[$ izmedju TM funkcija**

Ako su $\alpha(s)$ i $\beta(s)$ ($s > 0$) TM funkcije, pisaćemo

$$\alpha(s)\ [\ \beta(s)$$

akko, po definiciji, postoji TM funkcija $\gamma(s)$ takva da je

$$\alpha(s)\cdot\gamma(s) = \beta(s).$$

Drugim rečima, mera na $\mathbb{R}^+$ čiji je $\mathcal{L}$-lik $\alpha(s)$ "konvoluciono je sadržana" u meri na $\mathbb{R}^+$ sa likom $\beta(s)$. Naprimer,

$$1\ [\ 2\quad ,\quad 2\ [\ 1\ ,$$

$$\frac{1}{1-q}\cdot\frac{\lambda(qs)-\lambda(s)}{s}\ ]\ \lambda_1(qs)\ ,\quad (-\lambda_1'(s))\ ]\ \lambda_1(s),$$

$$(-\lambda'(s))\ ]\ \lambda_1(s)\ ,\quad \lambda_1(qs)\ [\ \lambda_1(s)\ .$$

Poslednja relacija kaže da je $\lambda_1(s)\cdot(\lambda_1(qs))^{-1}$ TM za $0<q<1$ (kod Feller-a [4] to je tzv. klasa L (po Hinčinu)).

Nas zanima totalna monotonost $\chi(s)$ i $\Psi(s)$, odredjenih iz

$$\lambda_1(s)\cdot\chi(s)=\frac{1}{p}\cdot\frac{\lambda(qs)-\lambda(s)}{s}\quad,\quad \lambda_1(s)\cdot\Psi(s)=\lambda(s)\lambda_1(qs)$$

(funkcije $\chi(s)$ i $\Psi(s)$ zapravo bi trebalo indeksirati parametrom $q\in(0,1)$; to ne činimo zbog jednostavnosti zapisa).

Ako postoji $q\in(0,1)$ $(p=1-q)$ takvo da je

$$\text{(a)}\quad \frac{1}{p}\cdot\frac{\lambda(qs)-\lambda(s)}{s}\ ]\ \lambda_1(s)$$

$$\text{(b)}\quad \frac{1}{q}\cdot\frac{\lambda(s)-\lambda(s)\lambda(qs)}{s}\ ]\ \lambda_1(s)$$

tada je $\lambda(s)$ $\mathcal{L}$-lik verovatnosnog zakona na $\mathbb{R}^+$, neosetljivog na rešetanje odredjenom funkcijom $p(x)$, $x\in\mathbb{R}^+$ (odredjenom s.s. po meri L).

4.3.9. O izboru $\lambda(s)$

Kako je

$$\lambda_1(s)=\frac{1}{sE_LX}(1-\lambda(s))$$

može se, u principu, izabrati više verovatnosnih zakona L sa istim stacionarnim $\mathcal{L}$-likom $\lambda_1(s)$. Biramo ono $\lambda(s)$ za koje je

$$(\forall s\in\mathbb{R}^+)\ \lambda(s)=1-sE_LX\cdot\lambda_1(s)\geq 0$$

(da bi $\lambda(s)$ uopšte bio $\mathcal{L}$-lik ver. mere) i

$$\lim_{s\to\infty}\lambda(s)=\lambda(+\infty)=L(0+)=0$$

(Skok u nuli zakona L izbegava se principijelno).

Kako to izgleda u nekoj konkretnoj situaciji? Evo kako:

Neka je
$$\eta(s)=\left(\frac{2}{2+s}\right)^2 ,$$

tj. Laplace-ov lik za $\mathcal{E}(2)*\mathcal{E}(2)$. Lako se utvrdjuje da je
$$\lambda_1(s)=\exp\left\{-\int_0^s \frac{1-\eta(u)}{u}\,du\right\}=\frac{2}{2+s}\exp\left\{-\frac{s}{2+s}\right\} ,$$

te je
$$\lim_{s\to+\infty} s\lambda_1(s)=\frac{2}{e} .$$

Zato stavljamo $E_L X=\frac{e}{2}$, pa je
$$\lambda(s)=1-s(E_L X)\cdot\lambda_1(s)=1-\frac{s}{2+s}\exp\left\{\frac{2}{2+s}\right\} .$$

(imati u vidu da nismo dokazali da ova situacija odgovara neosetljivosti na neko rešetanje).

4.3.10. $\lambda_1(s)$ kao pravilno menjajuća funkcija

U okviru naše konstrukcije je
$$\lambda_1(s)\cdot(\lambda_1(qs))^{-1}=\frac{1-p}{1-p\chi(s)}$$

podsetimo se da je, sem toga,
$$\lambda(+\infty)=0 \Leftrightarrow L(0+)=0 .$$

Kako zakon raspodele sa likom $\chi(s)$ mora biti apsolutno neprekidan u odnosu na zakon sa likom $\lambda(qs)$, to mora biti
$$\chi(+\infty)=0$$

i otuda
$$\lim_{s\to\infty}\frac{\lambda_1(s)}{\lambda_1(qs)}=q .$$

Znači da je za $\forall x \in \mathbb{R}^+$

$$\lim_{s\to\infty} \frac{\lambda_1(s\cdot x)}{\lambda_1(s)} = \frac{1}{x} \quad ,$$

te je λ_1 pravilno menjajuća funkcija na beskonačnosti, sa eksponentom (-1) . Naravno, $s\cdot\lambda_1(s)$ je takodje pravilno menjajuća sa eksponentom 0 (drugim rečima, sporo menjajuća funkcija; [4]). Zato važi sledeće:

$$\text{(a)} \qquad \lim_{s\to\infty} \frac{s^{\alpha+1}\lambda_1(s)}{\int_0^s y^\alpha \lambda_1(y)dy} = \alpha \quad , \quad \alpha \geqslant 0 ;$$

$$\text{(b)} \qquad \lim_{s\to\infty} \frac{s^{\alpha+1}\lambda_1(s)}{\int_s^\infty y^\alpha \lambda_1(y)dy} = |\alpha| \quad , \quad \alpha < 0 .$$

(Feller, [4]). Otuda je, naprimer,

$$s\lambda_1(s) \uparrow 1 \iff \frac{1}{s}\int_0^s y\lambda_1(y)dy \longrightarrow 1 \quad (s\to\infty)$$

ili, u odnosu na $\lambda(s)$,

$$\lambda(+\infty) = 0 \iff \lim_{s\to\infty} \frac{1}{s}\int_0^s \lambda(y)dy = 0 .$$

Po Tauber-ovim teoremama

$$\lambda_1(s) \sim L_1\left(\frac{1}{s}\right) \quad , \quad s\to\infty .$$

Prema tome,

$$\lim_{s\to\infty} s\lambda_1(s) = \lim_{s\to\infty} sL_1\left(\frac{1}{s}\right) = \lim_{t\to 0+} \frac{L_1(t)}{t}$$

pa biramo $\lambda(s)$ (tj. zakon L) tako da je

$$\lim_{t\to 0+} \frac{L_1(t)}{t} = (E_L X)^{-1} ,$$

$$\lambda(s) = 1 - (E_L X)s\lambda_1(s) .$$

4.4. Stacionarna raspodela kao geometrijska smeša (compound)

4.4.1. Neka je $\eta(s)$ $\mathcal{X}$-lik ver. mere N sa $E_N X = 1$, i $\frac{1}{s}(1-\eta(s))$ $\mathcal{X}$-lik stacionarne ver. mere za N . Tada , za $q\in(0,1)$ i $p = 1-q$, postoji niz verovatnosnih mera sa $\mathcal{X}$-likovima $\{\alpha_n(s)\, , n\geqslant 0\}$ redom, tako da je

$$\frac{1-\eta(s)}{s} = \sum_{n=0}^{\infty} p\cdot q^n \alpha_n(s) \quad . \qquad (*)$$

Dokaz. Za $\forall q \in (0,1)$ i $p=1-q$, stavimo da je

$$\alpha_0(s) = \frac{1}{p}\cdot\frac{\eta(qs)-\eta(s)}{s}$$

i

$$\alpha_n(s) = \alpha_0(q^n s).$$

Prema 4.3.6. $\{\alpha_n(s)\, , n\geqslant 0\}$ je niz $\mathcal{X}$-likova ver. mera. Relacija $(*)$ sledi neposredno.

Dakle, stacionarna raspodela je UVEK (!) geometrijski compound, i to za SVAKO $q\in(0,1)$.

Slučaj $E_N X \neq 1$ dokazuje se analogno, zamenom s (u imeniocu) sa $s E_N X$.

4.4.2. Da vidimo šta ovaj rezultat znači u našoj konstrukciji. Kako je

$$\int_0^s \frac{1-\eta(u)}{u}\,du = \sum_{n=0}^{\infty} p q^n \int_0^s \alpha_0(q^n u)\,du = \sum_{n=0}^{\infty} p \int_0^{s q^n} \alpha_0(u)\,du$$

to je

$$\lambda_1(s) = \prod_{n=0}^{\infty} \exp\left\{-p\int_0^{q^n s} \alpha_0(u)\,du\right\}.$$

Nama je $\lambda_1(s)$ potreban u obliku

$$\prod_{n=0}^{\infty} \frac{1-p}{1-p\chi(q^n s)}$$

što se postiže za

$$\frac{1-p}{1-p\chi(s)} = \exp\left\{-p\int_0^{s} \alpha_0(u)\,du\right\}.$$

Zanimljivo je da SVAKI $\mathcal{L}$-lik oblika

$$\lambda_1(s) = \exp\left\{-\int_0^{s} \frac{1-\eta(u)}{u}\,du\right\}$$

ima strukturu koja nam je potrebna. Nevolja je, medjutim, u tome što samo na osnovu toga ne možemo zaključiti da je $\chi(s)$ $\mathcal{L}$-lik neke verovatnosne mere, jer

$$\frac{1-p}{1-p\chi(s)} \ \text{TM} \quad \not\Longrightarrow \quad \chi(s)\ \text{TM}.$$

$\chi(s)$ zavisi od parametra q, što je jasno. χ se ne indeksira zbog jednostavnosti zapisa. Za naše ciljeve, dovoljno je da postoji $q_0 \in (0,1)$ za koje je $\chi(s)$ $\mathcal{L}$-lik ver. mere.

4.4.3. Kako je i $\lambda_1(s)$ stacionarni lik, to i on ima compound-reprezentaciju

$$\lambda_1(s) = \sum_{n=0}^{\infty} pq^n \beta_0(q^n s)$$

gde je

$$\beta_0(s) = \frac{1}{p}\cdot\frac{\lambda(qs)-\lambda(s)}{s}.$$

Odatle je

$$\lambda_1(s) = q\cdot\lambda_1(qs) + p\cdot\beta_0(s)$$

kao i
$$\chi(s) = \frac{\beta_0(s)}{p\beta_0(s)+q\lambda_1(qs)} .$$

Kako $\beta_0(s)] \lambda_1(qs)$, to je
$$\chi(s) = \frac{\theta_1(s)}{q + p\cdot\theta_1(s)}$$

gde je $\theta_1(s) = \frac{1}{p}\left(\frac{\lambda_1(s)}{\lambda_1(qs)} - q\right)$ $\mathcal{L}$-lik ver. mere.

Postavlja se pitanje: ako je α $\mathcal{L}$-lik ver. mere, kada je $\frac{\alpha}{q+p\alpha}$ $\mathcal{L}$-lik ver. mere? Lako se pokazuje da to važi akko je
$$\alpha(s) = \frac{q\cdot\alpha_1(s)}{1-p\cdot\alpha_1(s)} ,$$

gde je $\alpha_1(s)$ $\mathcal{L}$-lik ver. mere.

U našem kontekstu, to znači sledeće: $\chi(s)$ je TM akko je $\theta_1(s)$ geometrijska smeša.

4.4.4. Pretpostavimo da se u konstrukciji neosetljivog lika λ polazi od χ . Neka je, dakle, $\chi(s)$ $\mathcal{L}$-lik ver. mere takav da je $\chi'(0) = -q$. Tada je
$$\frac{-\chi'(s)}{1-p\chi(s)}$$
$\mathcal{L}$-lik ver. mere na $\mathbb{R}^+$, pa je to i
$$\eta_1(s) = \sum_{k=0}^{\infty} pq^k \frac{(-\chi'(q^k s))}{1-p\chi(q^k s)} .$$

Ako je $\eta(s) = 1 - s\eta_1(s)$ takodje lik verovatnosne mere (tj. ako je η_1 stacionarni lik) onda imamo odgovarajuću situaciju.

V

RAZNI REZULTATI

5.1. Putevi

Ovde će biti reči o uzastopnom rešetanju istom funkcijom $p(x)$ bez promene maßtaba.

Neka je funkcija rešetanja $p(x)$, $x \in \mathbb{R}^+$, fiksirana. Putem koji polazi iz F_0 nazovimo proceduru uzastopnog rešetanja

$$F_0 \xrightarrow{p(x)} F_1 \xrightarrow{p(x)} F_2 \xrightarrow{p(x)} \ldots \xrightarrow{p(x)} F_n \xrightarrow{p(x)} \ldots$$

Uvedimo oznake

$$p_n = E_{F_n} p(X) \quad , \quad q_n = 1 - p_n$$

$$\mu_n = E_{F_n} X \quad , \quad \delta_n = E_{F_n} X p(X) \qquad (n \geq 0).$$

Dobijamo niz procesa obnavljanja

$$\langle S_k^{(n)} , F_n \rangle \quad , \quad n \geq 0 ,$$

i neka je $X_1^{(n)} = S_1^{(n)}$. Pošto se maßtab ne menja,

$$X_1^{(n+1)} \geq X_1^{(n)}$$

te postoji s.i. $\lim\limits_{n\to\infty} X_1^{(n)}$ (koji može biti jednak $+\infty$).

1° $P\{X_1^{(n)} \to \infty , n \to \infty\} = 1$ je nezanimljiv slučaj, jer granični PO (u smislu definicije puta) ne postoji.

2° $P\{X_1^{(n)} \to X_1^{(\infty)} , n \to \infty\} = 1$, gde je $X_1^{(\infty)}$ finitna sl. veličina. Tada put vodi nekom graničnom PO.

Kako je

$$\mu_{n+1} = q_n^{-1} \cdot \mu_n \quad ,$$

to je

$$\mu_n = \left(\prod_{k=0}^{n-1} q_k \right)^{-1} \mu_0 \ .$$

5.1.1. Ako $\prod_{0}^{\infty} q_K$ konvergira, tada

$$X_1^{(n)} \xrightarrow{S.I.} X_1^{(\infty)}$$

gde je $X_1^{(\infty)}$ **konačna sl. veličina.**

Kako je

$$X_1^{(1)} \leqslant X_1^{(2)} \leqslant \dots \leqslant X_1^{(n)} \leqslant \dots$$

to po teoremi o monotonoj konvergenciji (Beppo-Levi)

$$\lim_{n\to\infty} \mu_n < +\infty$$

onemogućava slučaj

$$P\{\omega \mid \lim_{n\to\infty} X_1^{(n)}(\omega) < +\infty\} < 1 .$$

5.1.2. **Neka je** $\varphi_n(s)$ $\mathcal{L}$**-lik za** F_n , $n \geqslant 0$. **Tada je**

$$1-\varphi_{n+1}(s) = \frac{1-\varphi_0(s)}{\prod_{0\leq k\leq n}(1-p_K \chi_K(s))} =$$

$$\Big(\prod_{0}^{n} q_K\Big)^{-1}(1-\varphi_0(s)) \prod_{0}^{n} \frac{1-p}{1-p_K \chi_K(s)} ,$$

gde je

$$\chi_K(s) = \frac{1}{p_K}\int_0^{\infty} e^{-sx} p(x)\, dF_K(x).$$

Otuda,

$$\frac{1-\varphi_{n+1}(s)}{s\cdot\mu_{n+1}} = \frac{1-\varphi_0(s)}{s\cdot\mu_0} \prod_{0}^{n} \frac{1-p_K}{1-p_K\chi_K(s)} .$$

Kada $n \to \infty$, leva strana konvergira stacionarnom graničnom liku. Neka je W_K sl. veličina sa $\mathcal{L}$-likom $\dfrac{1-p_K}{1-p_K\chi_K(s)}$.

Red nezavisnih sl. veličina $\{W_K , K \geqslant 0\}$

$$W = \sum_{k=0}^{\infty} W_k$$

konvergira u raspodeli, pa i skoro izvesno (to je ovde ekvivalentno)

te je

$$E(e^{-sW}) = \prod_{0}^{\infty} \frac{1-p_k}{1-p_k\chi_k(s)} .$$

Kako

$$\prod_{0}^{\infty} q_k \quad \text{conv.} \quad \Rightarrow \exists \lim_{n\to\infty} M_n ,$$

to imamo vezu

$$\frac{1-\varphi_\infty(s)}{sEX_1^{(\infty)}} = \frac{1-\varphi_0(s)}{sEX_1^{(0)}} \cdot E(e^{-sW}) .$$

Znači da je stacionarna granična raspodela konvolucija stacionarne za F_0 i raspodele za W .

5.1.3. Rešetanja-indikatori ("čistači")

1° $p(x)=I\{x\leq c\}, c>0$. Već pri prvom rešetanju bivaju izbačene sve tačke $S_k^{(0)}$ takve da je $X_k^{(0)} \leq c$, pa su u sledećem PO $\langle S_k^{(1)}, F_1\rangle$ intervali izmedju obnavljanja ($X_k^{(1)}$) obavezno duži od c . Na taj način, svako sledeće rešetanje sa $p(x)$ ne daje ništa novo, tj.

$$\langle S_k^{(n)}, F_n\rangle \equiv \langle S_k^{(1)}, F_1\rangle \quad , n\geq 2 .$$

2° $p(x) = I\{x\geq c\} , c>0$.

Neka je $X_1^{(0)} < c , \dots , X_\ell^{(0)} < c , X_{\ell+1}^{(0)} \geq c$.

Tada, uzastopnim rešetanjem sa $p(x)$:

- tačke $X_1^{(0)}=S_1^{(0)}, S_2^{(0)}, \dots , S_\ell^{(0)}$ ostaju "zauvek" ;
- sve tačke obnavljanja $S_{\ell+1}^{(0)}, S_{\ell+2}^{(0)}, \dots$ bivaju izbačene.

Na taj način, dobijamo "nesopstveni" PO sa intervalnom funkcijom raspodele

$$F_\infty(x) = F_0(x), \quad x \leq c,$$
$$F_\infty(\infty) = F_0(c).$$

Drugim rečima $P\{X_1^{(\infty)} = +\infty\} = 1 - F_0(c)$.

5.1.4. Kako

$$X_1^{(n+1)} - X_1^{(n)} : \begin{matrix} 0 & X_1^{(n+1)'} \\ q_n & p_n \end{matrix} \qquad (X_1^{(n+1)'} \overset{R}{=} X_1^{(n+1)})$$

to je

$$(\forall \varepsilon > 0) \; P\{|X_1^{(n+1)} - X_1^{(n)}| > \varepsilon\} \leq p_n .$$

Dakle, za $\sum_0^\infty p_n < +\infty$, niz $\{X_1^{(n)}, n \geq 0\}$ konvergira skoro izvesno (Neveu, [11]). Time je na drugi način pokazana ista stvar kao u 5.1.1., jer

$$\sum_0^\infty p_n < +\infty \Leftrightarrow \prod_0^\infty q_n \text{ conv.}$$

5.1.5. Neka $\sum_0^\infty p_n < +\infty$, i neka je za $\varepsilon > 0$

$$A_\varepsilon = \{x \mid x \in \mathbb{R}^+ \wedge p(x) > \varepsilon\}.$$

Tada je

$$p_n = \int_0^\infty p(x)\,dF_n(x) \geq \int_{A_\varepsilon} p(x)\,dF_n(x) \geq \varepsilon \int_{A_\varepsilon} dF_n(x)$$

Znači da je

$$(\forall \varepsilon > 0) \; \sum_{n=0}^\infty P\{X_1^{(n)} \in A_\varepsilon\} < +\infty .$$

Po I lemi Borel-Cantelli, sa verovatnoćom 1 ostvaruje se samo konačno mnogo dogadjaja $\{X_1^{(n)} \in A_\varepsilon\}$. Odatle,

$$P\{\lim_{n\to\infty} p(X_1^{(n)}) = 0\} = 1 .$$

Dobili smo da ne može biti $p(x) > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}^+$.

Kako je F_∞ neosetljivo na rešetanje sa $p(x)$ to je

$$\int_0^\infty e^{-sx} p(x)\, dF_\infty(x) = 0 ,$$

tj.

$$P\{ p(X_1^{(\infty)}) = 0 \} = 1 .$$

5.1.6. Uzastopno rešetanje Poissonovog procesa sa $p(x) = e^{-x}, x > 0$

Ovde je

$$F_0 \equiv \mathcal{E}(1) \quad , \quad p_0 = \frac{1}{2} \quad , \quad \varphi_0(s) = \frac{1}{1+s} ,$$

$$\chi_n(s) = \frac{1}{p_n} \int_0^\infty e^{-sx} e^{-x} dF_n(x) = \frac{1}{p_n} \varphi_n(s+1) ,$$

$$1 - \varphi_{n+1}(s) = \frac{1-\varphi_n(s)}{1-\varphi_n(s+1)} \quad , \quad \varphi_n(1) = p_n .$$

Neka je za $s > 0$

$$\Psi_n(s) = \ln(1 - \varphi_n(s)) .$$

Tada je

$$\Psi_{n+1}(s) = \Psi_n(s) - \Psi_n(s+1) =$$

$$\Psi_{n-1}(s) - 2\Psi_{n-1}(s+1) + \Psi_{n-1}(s+2) = \ldots$$

Indukcijom se može pokazati da je

$$\Psi_{n+1}(s) = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} (-1)^k \Psi_0(s+k)$$

i odatle

$$1 - \varphi_{n+1}(s) = \prod_{k=0}^{n+1} (1 - \varphi_0(s+k))^{(-1)^k \binom{n+1}{k}} , \quad s \geq 0 .$$

Za $\varphi_0(s) = \frac{1}{1+s}$ dobijamo

$$1 - \varphi_{n+1}(s) = \prod_{k=0}^{n+1} \left(\frac{s+k}{s+k+1} \right)^{(-1)^k \binom{n+1}{k}} .$$

Time je odredjena raspodela dužine intervala izmedju dva susedna obnavljanja, posle $(n+1)$ -og rešetanja Poisson-ovog procesa funkcijom $p(x) = e^{-x}$, $x > 0$.

Odatle, jednostavno:

$$q_{n+1} = 1 - \varphi_{n+1}(1) = \prod_{k=0}^{n+1} \left(\frac{k+1}{k+2} \right)^{(-1)^k \binom{n+1}{k}} .$$

Dalje,

$$1 - \varphi_{n+1}(s) = \frac{s}{s+1} \prod_{k=1}^{n+1} (\cdot) \quad , \; \mu_{n+1} = \lim_{s \downarrow 0} \frac{1 - \varphi_{n+1}(s)}{s} \quad ,$$

pa je

$$\mu_{n+1} = \prod_{k=1}^{n+1} \left(\frac{k}{k+1} \right)^{(-1)^k \binom{n+1}{k}} \quad ;$$

$$\prod_{k=0}^{n} q_k = \prod_{k=0}^{n} \prod_{\ell=0}^{k} \left(\frac{\ell+1}{\ell+2} \right)^{(-1)^\ell \binom{k}{\ell}} = \prod_{\ell=0}^{n} \prod_{k=\ell}^{n} (\cdot) =$$

$$\prod_{\ell=0}^{n} \left(\frac{\ell+1}{\ell+2} \right)^{\sum_{k=\ell}^{n} (-1)^\ell \binom{k}{\ell}}$$

Kako je $\binom{\ell}{\ell} + \binom{\ell+1}{\ell} + \ldots + \binom{n}{\ell} = \binom{n+1}{\ell+1}$, to je

$$\prod_{k=0}^{n} q_k = \prod_{\ell=0}^{n} \left(\frac{\ell+1}{\ell+2} \right)^{(-1)^\ell \binom{n+1}{\ell+1}} .$$

Koristeći isti metod,

$$\prod_{k=1}^{n+1} \mu_k = \prod_{k=0}^{n} \left(\frac{k+1}{k+2} \right)^{(-1)^{k+1} \binom{n+2}{k+2}} .$$

Gornji rezultati (dobijeni u relativno jednostavnoj situaciji) dobro ilustruju velike teškoće, na koje nailazimo ako hoćemo tačne izraze za q_n , μ_n etc.

Dva poslednja proizvoda neizbežno se javljaju pri izboru normirajućih konstanti, ukoliko proces divergira.

5.2. Neke važne raspodele

Vratićemo se oznakama iz 3.1., pa je $S_n = \sum_1^n X_k$ n-to obnavljanje originalnog, a T_n n-to obnavljanje rešetanog procesa. Sve druge oznake iste su kao u 3.1.

5.2.1. Raspodela za $T_n - S_n$, $n \geqslant 1$.

$$Ee^{-s(T_n-S_n)} = Ee^{-s(T_n-S_n)}\sum_{m=n}^{\infty} I\{T_n = S_m\} =$$

$$\sum_{m=n}^{\infty} EE(e^{-s(S_m-S_n)} I\{T_n = S_m\} \mid \mathcal{H}) =$$

$$\sum_{m=n}^{\infty} Ee^{-s(S_m-S_n)} P\{T_n = S_m \mid \mathcal{H}\},$$

gde je $\mathcal{H} = \mathcal{F}(X_n, n \geqslant 1)$. Za $m = n$ je

$$P\{T_n = S_n \mid \mathcal{H}\} = q(X_1)\cdots q(X_n)$$

pa je

$$Ee^{-s(S_n-S_n)} P\{T_n = S_n \mid \mathcal{H}\} = q^n.$$

Za $m \geqslant n+1$,

$$Ee^{-s(S_m-S_n)} P\{T_n = S_m \mid \mathcal{H}\} =$$

$$\sum Ee^{-s(S_m-S_n)} \prod_{\ell=0}^{n-1} p(X_{i_\ell+1})\cdots p(X_{i_{\ell+1}-1}) q(X_{i_{\ell+1}}) =$$

$$\sum Ee^{-sX_{n+1}}\cdots e^{-sX_m} \prod_{\ell=0}^{n-1} p(X_{i_\ell+1})\cdots p(X_{i_{\ell+1}-1}) q(X_{i_{\ell+1}})$$

gde se sumira po

$$0 = i_0 < i_1 < \dots < i_{n-1} < i_n = m .$$

Neka je K $q(\cdot)$ -ova na mestu sa indeksom $\leq n$, $0 \leq K \leq n-1$.

Broj načina da se to ostvari je

$$\binom{n}{k}\binom{m-n}{n-k} .$$

Zbog simetrije raspodele vektora

$$(X_1, \dots, X_n) \quad \text{i} \quad (X_{n+1}, \dots, X_m)$$

imamo da je

$$E e^{-s(S_m - S_n)} P\{T_n = S_m | \mathcal{H}\} =$$

$$\sum \binom{n}{k}\binom{m-n}{n-k} q^k p^{n-k} (\varphi(s) - \varphi^*(s))^{n-k-1} (\varphi^*(s))^{m+k-2n} (\varphi(s) - \varphi^*(s))$$

gde je $\sum$ po $0 \leq K \leq n-1$, $0 \leq n-K \leq m-n$.

Otuda je

$$\sum_{m=n+1}^{\infty} \sum_{K} E e^{-s(S_m - S_n)} P\{T_n = S_m | \mathcal{H}\} = \sum_{K=0}^{n-1} \sum_{m} (\,\cdot\,)$$

gde je unutrašnja $\sum$ po $m-n \geq n-K$.

Pošto je

$$\sum_{m-n=n-K}^{\infty} \binom{m-n}{n-K} (\varphi^*(s))^{(m-n)-(n-K)} = (1 - \varphi^*(s))^{-(n-K)} ,$$

to imamo da je

$$\psi_n(s) = E e^{-s(T_n - S_n)} =$$

$$q^n + \sum_{K=0}^{n-1} \binom{n}{K} q^K \left(p \, \frac{\varphi(s) - \varphi^*(s)}{1 - \varphi^*(s)} \right)^{n-K} =$$

$$\left(q + p \, \frac{\varphi(s) - \varphi^*(s)}{1 - \varphi^*(s)} \right)^n .$$

Pošto je (up. 3.2.5.)

$$\varphi_p(s) = Ee^{-sT_1} = \frac{\varphi(s)-\varphi^*(s)}{1-\varphi^*(s)}$$

dobijamo da je

$$\Psi_n(s) = (q + p\varphi_p(s))^n .$$

Na taj način, odredjena je raspodela za $T_n - S_n$, $n \in \mathbb{N}$.

5.2.2. Raspodela za $(S_n, T_n - S_n)$, $n \in \mathbb{N}$.

$$\mathcal{V}_n(u,v) = Ee^{-uS_n - v(T_n - S_n)} \quad (u, v \geq 0)$$

se dobija istom tehnikom kao i $\Psi_n(s)$ u 5.2.1., pri čemu

$$q \longmapsto \varphi(u) - \varphi^*(u) \ , \quad p \mapsto \varphi^*(u) ,$$
$$\varphi(s) \longmapsto \varphi(v) \ , \quad \varphi^*(s) \mapsto \varphi^*(v)$$

(strelica, jasno, označava zamenu). Na taj način,

$$\mathcal{V}_n(u,v) = (\varphi(u) - \varphi^*(u) + \varphi^*(u)\varphi_p(v))^n \ , \ n \in \mathbb{N} .$$

5.2.3. Raspodela za (S_n, T_n) , $n \in \mathbb{N}$.

Dobija se jednostavno iz $\mathcal{V}_n(u,v)$, zamenom

$$u + (-v) \mapsto u \ , \quad v \mapsto v .$$

5.2.4.

$$\frac{1}{n}(T_n - S_n) \xrightarrow{P} \frac{1}{q} - 1 \ , \ n \to \infty \quad (ES_1 = 1).$$

Dokaz: $\lim_{n\to\infty} \Psi_n(\frac{s}{n}) = \lim_{n\to\infty} (q+p\varphi_p(\frac{s}{n}))^n =$

$$\lim_{n\to\infty} \{1+p(\varphi_p(\tfrac{s}{n})-1)\}^n =$$

$$\exp\{\lim_{n\to\infty} pn(\varphi_p(\tfrac{s}{n})-1)\} =$$

$$\exp\{ps \lim_{n\to\infty} \frac{\varphi_p(\frac{s}{n})-1}{\frac{s}{n}}\} = \exp\{sp\varphi_p'(0)\} = e^{-(\frac{1}{q}-1)s},$$

tj. $\frac{1}{n}(T_n-S_n) \xrightarrow{R} \frac{1}{q}-1$, odakle sledi i konvergencija u meri ka istoj konstanti. □

Uostalom, po strogom zakonu velikih brojeva

$$\frac{1}{n}(T_n-S_n) \xrightarrow{S.I.} \frac{1}{q}-1 \quad , n\to\infty$$

(bez obzira na zavisnost tih nizova).

5.2.5. Granična raspodela za

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\{(T_n-S_n)-n\mu(\tfrac{1}{q}-1)\} \ , n\to\infty \ ,$$

gde je $ES_1=\mu$, $DS_1=\sigma^2$.

Umesto $\mathcal{L}$ -likova koristićemo karakteristične funkcije, kao pogodniju tehniku. Radi jednostavnosti ostavićemo iste oznake, tj.

$$\Psi_n(t)=Ee^{it(T_n-S_n)} \ , \ \varphi_p(t)=Ee^{itT_1} \quad (t\in\mathbb{R}).$$

Jasno, opet je

$$\Psi_n(t)=(q+p\varphi_p(t))^n \ , \ n\in\mathbb{N}.$$

Neka je

$$\alpha_n(t)=E\exp\{it\tfrac{1}{\sqrt{n}}(T_n-S_n-n\mu(\tfrac{1}{q}-1))\} =$$

$$(1+p\cdot(\varphi_p(\tfrac{t}{\sqrt{n}})-1))^n\cdot\exp\{-it\sqrt{n}\mu(\tfrac{1}{q}-1)\}.$$

Kako je

$$\varphi_p(\tfrac{t}{\sqrt{n}})-1=i\frac{t}{\sqrt{n}}\frac{\mu}{q}-\frac{t^2}{2n}ET_1^2+o(\tfrac{1}{n})$$

to je

$$\lim_{n\to\infty}\alpha_n(t)=\exp\{\lim_{n\to\infty}(np(\varphi_p(\tfrac{t}{\sqrt{n}})-1)-it\sqrt{n}\mu(\tfrac{1}{q}-1))\}=$$

$$\exp\{-pET_1^2\tfrac{t^2}{2}\}.$$

Znači da je granična raspodela $\mathcal{N}(0,pET_1^2)$ gde je

$$pET_1^2=E(T_1-S_1)^2=\frac{2p}{q^2}\mu\delta+\frac{p}{q}(\mu^2+\sigma^2)$$

$$(\delta=ES_1p(S_1)).$$ □

Rezultati 5.2.4. i 5.2.5 navedeni su radi ilustracije. Iz 5.2.3. se, pogodnim normiranjima, može dobiti veći broj rezultata tog tipa.

5.3. Skoro izvesna konvergencija pri uzastopnom rešetanju

5.3.1. $E(T_1|\mathcal{H})$.

$$E(T_1|\mathcal{H})=\sum_{m=1}^{\infty}S_mP\{T_1=S_m|\mathcal{H}\}=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{m}X_k\{\prod_{i=1}^{m-1}p(X_i)\}q(X_m)=$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=k}^{\infty}X_k\{\prod_{i=1}^{m-1}p(X_i)\}q(X_m).$$

Kako je

$$\sum_{m=k}^{\infty}\{\prod_{i=1}^{m-1}p(X_i)\}q(X_m)=\prod_{i=1}^{k-1}p(X_i)$$

skoro izvesno, to je

$$E(T_1|\mathcal{H}) = \sum_{k=1}^{\infty} X_k \cdot \prod_{i=1}^{k-1} p(X_i) .$$

5.3.2. $E(T_1|S_1)$.

Kako je $\mathcal{F}_{S_1} = \mathcal{F}_{X_1} \subset \mathcal{H}$,

$$E(T_1|S_1) = E(T_1|\mathcal{F}_{X_1}) = E(E(T_1|\mathcal{H})|\mathcal{F}_{X_1}) =$$
$$X_1 + p(X_1)E(\sum_{k=2}^{\infty} X_k \prod_{i=2}^{k-1} p(X_i)|\mathcal{F}_{X_1}) =$$
$$S_1 + p(S_1)E(S_1)\cdot\frac{1}{q} .$$

Za $ES_1 = 1$ je

$$E(T_1|S_1) = S_1 + \frac{1}{q}p(S_1) .$$

5.3.3. Neka je $\langle S_k^{(n)}, F_n \rangle, n \geqslant 0$, niz procesa obnavljanja dobijen uzastopnim rešetanjem sa $p(x)$, i $X_1^{(n)} = S_1^{(n)}$.

Imamo da je

$$E(q_n X_1^{(n+1)}|\mathcal{F}_{X_1^{(n)}}) = X_1^{(n)} + (p(X_1^{(n)}) - p_n \cdot X_1^{(n)}) , \quad n \geqslant 0$$

gde je $p_n = E_{F_n} p(X)$, $q_n = 1 - p_n$.

Zanima nas konvergencija niza

$$Z_n = (\prod_{k=0}^{n-1} q_k) \cdot X_1^{(n)} , \quad n \geqslant 0 .$$

Pri poznatom F_0 su $q_0, q_1, \ldots$ (u principu) poznati. Odatle je $\mathcal{F}_{Z_n} = \mathcal{F}_{X_1^{(n)}}$, kao i

$$E(Z_{n+1}|\mathcal{F}_{Z_n}) = Z_n + (\prod_{k=0}^{n-1} q_k)(p(X_1^{(n)}) - p_n \cdot X_1^{(n)}) .$$

Po strukturi uzastopnog rešetanja

$$(X_1^{(n+1)} \mid X_1^{(0)}, \dots, X_1^{(n)}) \overset{R}{=} (X_1^{(n+1)} \mid X_1^{(n)}),$$

pa je $\{X_1^{(n)}, n \geq 0\}$ markovski niz, a samim tim i $\{Z_n, n \geq 0\}$.

$$E(Z_{n+1} \mid \mathcal{F}(Z_0, \dots, Z_n)) = E(Z_{n+1} \mid \mathcal{F}(Z_n)) = Z_n + a(Z_n).$$

Ako je za n dovoljno veliko $a(Z_n) \leq 0$ s.i., imali bismo nenegativni supermartingal, pa bi

$$P\{Z_n \longrightarrow (\cdot),\ n \to \infty\} = 1.$$

Pri tome bi granična sl. veličina bila s.i. konačna. Naprimer, ako bi

$$\sum_{n=0}^{\infty} P\{p(X_1^{(n)}) > p_n \cdot X_1^{(n)}\} < +\infty$$

tada bi, po I Borel-Cantelli-jevoj lemi, $\{Z_n, n \geq 0\}$ počev od nekog (slučajnog) indeksa bio nenegativni supermartingal.

5.3.4. Pretpostavimo da je funkcija rešetanja $p(x)$ subaditivna, tj.

$$p(x+y) \leq p(x) + p(y), \quad x, y \geq 0.$$

Odredimo majorantu za $E(p(T_1) \mid \mathcal{H})$.

$$E(p(T_1) \mid \mathcal{H}) = \sum_{m=1}^{\infty} p(S_m) P\{T_1 = S_m \mid \mathcal{H}\} \leq$$

$$\leq \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{m} p(X_k) P\{T_1 = S_m \mid \mathcal{H}\} =$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=k}^{\infty} p(X_k) \{\prod_{i=1}^{m-1} p(X_i)\} q(X_m) =$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \prod_{i=1}^{k} p(X_i) \quad ,$$

sa verovatnoćom 1 (po prethodnome, videti 3.1.7.). Otuda je

$$E(p(T_1)|S_1) = E(E(p(T_1)|\mathcal{H})|\mathcal{F}_{X_1}) \leq \frac{1}{2}p(S_1).$$

Neka je

$$\Pi_n = \left(\prod_{k=0}^{n-1} q_k\right) p(X_1^{(n)}) \quad , \; n \geq 0$$

u oznakama iz 5.3.3. Tada je

$$P\{\Pi_n \longrightarrow (\cdot)\,;\, n \to \infty\} = 1.$$

Pokažimo to. Kako je

$$E(q \cdot p(T_1)|S_1) \leq p(S_1)$$

prema 5.3.4., to je

$$(\forall n \geq 0)\; E(q_n \cdot p(X_1^{(n+1)})|\mathcal{F}(X_1^{(n)})) \leq p(X_1^{(n)})$$

i pošto je

$$E(\Pi_{n+1}|\mathcal{F}(Z_n)) = E(\Pi_{n+1}|\mathcal{F}(Z_0,\dots,Z_n))$$

imamo da je

$$E(\Pi_{n+1}|\mathcal{F}(Z_0,\dots,Z_n)) \leq \Pi_n .$$

Znači da je $\{\Pi_n , \mathcal{F}(Z_0,\dots,Z_n)\}$ nenegativni supermartingal, te

$$P\{\Pi_n \longrightarrow (\cdot)\,,\, n \to \infty\} = 1 .$$

Ta granična vrednost može biti 0 (npr. kod konstantnog rešetanja: tada je $(\forall n)\; p_n = p \in (0,1)$).

5.3.5. O jednoj sekvencijalnoj proceduri

I ovde je reč o skoro izvesnoj konvergenciji pri uzastopnom rešetanju, sa promenom maßtaba.

Pri uzastopnom rešetanju

$$F_0 \xrightarrow{p_0(x)} F_1 \xrightarrow{p_1(x)} F_2 \xrightarrow{p_2(x)} \dots$$

$$(p_n = E_{F_n} p_n(X) \;,\; q_n = 1 - p_n \;;\; n \geq 0)$$

izabraćemo niz funkcija rešetanja $\{p_n(x), n \geq 0\}$ tako da niz odgovarajućih procesa obnavljanja

$$\langle S_k^{(n)}, F_n \rangle \;,\; n \geq 0 \,,$$

s.i. konvergira. U pitanju je sekvencijalna procedura, u tom smislu što se $p_n(x)$ ne zadaje unapred, već se bira na n-tom koraku (u zavisnosti od zakona F_n).

Podjimo od sledećeg rezultata, zapisanog u (S_1, T_1) oznakama.

$$E(1-e^{-\lambda T_1} | S_1) =$$
$$1 - e^{-\lambda S_1} + e^{-\lambda S_1} \cdot p(S_1) \cdot (1 - \varphi_p(\lambda)).$$

Dokaz:

$$E(e^{-\lambda T_1} | \mathcal{H}) = \sum_{m=1}^{\infty} e^{-\lambda S_m} P\{T_1 = S_m | \mathcal{H}\} =$$
$$\sum_{m=1}^{\infty} \{ \prod_{k=1}^{m-1} e^{-\lambda X_k} p(X_k) \} e^{-\lambda X_m} q(X_m).$$

Kako je, prema 3.1.7.

$$\sum_{m=1}^{\infty} \{ \prod_{k=1}^{m-1} e^{-\lambda X_k} p(X_k) \} (1 - e^{-\lambda X_m} p(X_m)) = 1$$

sa verovatnoćom 1, to je

$$E(e^{-\lambda T_1} | \mathcal{H}) = \sum_{m=1}^{\infty} \{ \prod_{k=1}^{m-1} e^{-\lambda X_k} p(X_k) \} (e^{-\lambda X_m} - 1) + 1 \,,$$

$$E(1 - e^{-\lambda T_1} | \mathcal{H}) = \sum_{m=1}^{\infty} \{ \prod_{k=1}^{m-1} e^{-\lambda X_k} p(X_k) \} (1 - e^{-\lambda X_m}).$$

Elem,

$$E(1-e^{-\Delta T_1}\,|S_1) = E(1-e^{-\Delta T_1}\,|X_1) =$$

$$1-e^{-\Delta S_1}+e^{-\Delta S_1}p(S_1)\sum_{m=2}^{\infty}E\{\prod_{k=2}^{m-1}e^{-\Delta X_k}p(X_k)\}(1-e^{-\Delta X_m}) =$$

$$1-e^{-\Delta S_1}+e^{-\Delta S_1}p(S_1)\sum_{m=2}^{\infty}(\varphi^*(\Delta))^{m-2}(1-\varphi(\Delta)) =$$

$$1-e^{-\Delta S_1}+e^{-\Delta S_1}p(S_1)\,\frac{1-\varphi(\Delta)}{1-\varphi^*(\Delta)}\ ,$$

i gornje tvrdjenje sledi.

Ako je u prethodnome

$$p(x) \leqslant 1-e^{-p\cdot x}\quad ,\ x \geqslant 0$$

imamo da je

$$E(1-e^{-\varrho T_1}\,|S_1) \leqslant 1-\varrho(S_1)e^{-\varrho\cdot S_1} \leqslant 1-e^{-S_1}\ ,$$

što navodi na ideju konstrukcije nenegativnog supermartingala.

Neka je F_0 zakon na $\mathbb{R}^+$ takav da je $F_0(0+)=0$, i na n -tom koraku biramo funkciju rešetanja $p_n(x)$ takvu da je

$$p_n(x) \leqslant 1-\exp\{-(\prod_{0}^{n-1}\varrho_k)\cdot p_n x\}\qquad (n \geqslant 0)\,.$$

Neka je, dalje,

$$Z_n = (\prod_{0}^{n-1}\varrho_k)\cdot X_1^{(n)}\ ,\ n \geqslant 0\,.$$

Tada

$$P\{\,Z_n \longrightarrow (\cdot)\,,\,n\to\infty\} = 1\,.$$

Pokažimo to:

$$E(1-e^{-Z_{n+1}}\,|Z_n) =$$

$$E(1-\exp\{-(\prod_{0}^{n}\varrho_k)X_1^{(n+1)}\}\,|X_1^{(n)}) \leqslant$$

$$\leq 1 - q(X_1^{(n)}) \exp\{-(\prod_0^{n-1} q_k) X_1^{(n)} \cdot q_n\} \leq$$

$$1 - \exp\{-(p_n + q_n) Z_n\} = 1 - e^{-Z_n}.$$

Kako je

$$E(1 - e^{-Z_{n+1}} \mid \mathcal{F}(Z_0, \ldots, Z_n)) = E(1 - e^{-Z_{n+1}} \mid \mathcal{F}(Z_n))$$

to je

$$\{1 - e^{-Z_n}, \mathcal{F}(Z_0, \ldots, Z_n)\}$$

nenegativni supermartingal, te je

$$P\{1 - e^{-Z_n} \longrightarrow (\cdot), n \to \infty\} = 1.$$

Odatle

$$P\{Z_n \longrightarrow (\cdot), n \to \infty\} = 1.$$

Granična veličina je s.i. konačna, tj. ne može biti

$$P\{Z_n \longrightarrow +\infty, n \to \infty\} = 1.$$

Evo zašto: kako je

$$E(1 - e^{-Z_{n+1}}) \leq E(1 - e^{-Z_n})$$

to je

$$E e^{-Z_{n+1}} \geq E e^{-Z_n}.$$

Kada bi $Z_n \xrightarrow{S.I.} +\infty$, tada bi $E e^{-Z_n} \to 0, n \to \infty$ (kao niz $\mathcal{L}$-likova za Z_n u 1). Jasno je da to ne važi.

P R I M E D B E

Pitanje: o čemu se, dakle, radi?
bilo je postavljeno tek iz uljudnosti, i nije tražilo odgovora.

Borel, Slučaj

Glave I i II su (delimično i parafrazirani) relevantni delovi glavâ I i III rada [12] . Sve primedbe na taj deo teksta date su u tom radu na str. 41-42.

3.1. Uslov $F(0+)=0$.

Uslov je, ustvari, obavezan: $F(0+)>0$ omogućava da je $S_{n+1}=S_n$, i uopšte da je $S_{n+k}=S_n$ ($k\geqslant 1$) tako da rešetanje gubi smisao (ista tačka može biti izbačena i ne biti izbačena, itd.).

3.1.6.

Za $p(x)=p\in(0,1)$, $x\geqslant 0$, je

$$P\{T_1=S_m\,|\,\mathcal{H}\}=p^{m-1}\cdot q \quad (m\geqslant 1,\ q=1-p)$$

te je izbacivanje tačaka nezavisno od $\mathcal{H}=\mathcal{F}(S_n, n\geqslant 1)$.

To potpuno odgovara Rényi-jevom rešetanju (u našim terminima, konstantnom per definitionem). Medjutim, konstantno rešetanje sada dobija i "dubinsku strukturu", u smislu projekcije na $\mathcal{H}$. Naprimer,

$$E(T_1|\mathcal{H})=\sum_{k=1}^{\infty}p^{k-1}\cdot X_k \quad , \qquad \text{etc.}$$

dok se pri "naivnoj definiciji" rešetanja takve relacije ne mogu izvesti.

2.2.

Tu je data definicija rešetanja koju nazivam "naivnom", jer je rešetanje tačke S_n zadano projekcijom na $\mathcal{F}(X_n)$, umesto na šire σ -polje $\mathcal{H}$. Rešetanja različitih tačaka S_n su zadana projekcijama na različita σ -polja, što principijelno nije u redu.

Evo u čemu je stvar. Neka je $\{out(n), n\geq 1\}$ niz sl. veličina takvih da je $out(n)\in\{0,1\}$ (indikatori izbacivanja) i $p(x)$ ($x\geq 0$) merljiva funkcija takva da je

$$(\forall x\geq 0)\ p(x)\in[0,1] \ ,$$
$$(\forall x,y\geq 0)\ 0\leq p(x)+p(y)-p\leq 1 \ ,$$

gde je $p=E_F p(X_1)$. Neka je, dalje,

$$P\{out(n)=1|\mathcal{H}\}=p(X_n)+p(X_{n+1})-p \ .$$

Tada je

$$P\{out(n)=1|X_n\}=p(X_n)$$

(kao i pri "naivnoj" definiciji), ali takva situacija očito ne odgovara intuitivnoj zamisli o uslovnoj nezavisnosti rešetanjâ pojedinih tačaka.

3.1.6.

U 3.1.6. (i u onome što sledi u glavi III) pojavljuje se simbol P , umesto uvedenog simbola Π , na Descartes-ovom proizvodu prostora. Shvatimo ga kao neko opšte "Prob" ili kao projekciju Π na $\mathcal{H}$. U svakom slučaju, jasno je o čemu se radi.

IV (Problem neosetljivosti)

Neosetljive situacije dobijale bi se iz jednačine

$$\frac{\eta(qs)-\eta(s)}{s} = \frac{-p\chi'(s)}{1-p\chi(s)}$$

gde su η i χ Laplace-ovi likovi verovatnosnih mera na $\mathbb{R}^+$. Odredjivanje takvih parova likova (η , χ) zahteva, medjutim,neki "l'esprit de finesse" koji tek treba steći.

Mogyoródi ([10])

To je, nažalost, jedini Mogyoródi-jev rad o kojem imam informaciju. Opisaću rezultate u tom radu, uz prilagodjenje oznaka.

Neka je, dakle, $\langle S_n, F\rangle$ prost PO na $\mathbb{R}^+$ sa $\mu = E_F X$, i $p(x):[0,\infty)\to[0,1]$ neprekidna funkcija. Rarefaction-procedura je u sledećem: pod uslovom $S_n = x$ ($n\in\mathbb{N}$) tačka S_n se izbacuje sa verovatnoćom $p(x)$, i ostaje sa verovatnoćom $1-p(x)$. Za različite n operacija se obavlja nezavisno.

Neka je τ_1 najmanje n za koje S_n nije izbačeno. Mogyoródi daje karakterizaciju τ_1, pa dokazuje da je

$$P\{\tau_1 \geq n\} = E\prod_{k=1}^{n-1} p(S_k) \quad , \; n \in \mathbb{N} \; ;$$

takodje, da bi τ_1 bila sopstvena sl. veličina potrebno je da

$$\int_0^\infty (1-p(x))\,dH(x)$$

divergira, gde je H obnavljajuća mera za F.

Dalje se daju dovoljni uslovi da τ_1 ima momente svakog reda, i ispituje se kada τ_1 zadovoljava Wald-ov identitet. Pokazuje se da

$$\frac{\tau_1}{E\tau_1} \xrightarrow{R} \mathcal{E}(1) \quad , \text{ kada } p(\cdot) \to 1 \, ,$$

kao i da

$$\frac{S_{\tau_1}}{\mu E(\tau_1)} \xrightarrow{R} \mathcal{E}(1) \quad , \text{ za } p(\cdot) \to 1 .$$

Sve u svemu, način rešetanja omogućava zanimljive rezultate u vezi sa τ_1 i S_{τ_1}, što pri našoj definiciji rešetanja nije slučaj.

V.P.Skitovič o operaciji rešetanja

U svojim <u>Elementima teorije masovnog opsluživanja</u> (izd. LGU, Lenjingrad 1976.) Skitovič kaže:

Potok trebovanja, koja dolaze u sistem masovnog opsluživanja, može biti izvor formiranja drugih potoka. To se dešava putem veštačkog ili prirodnog rešetanja, tačnije govoreći - razredjivanja, tj. razbijanja na posebne potoke. Naprimer, potok trebovanja koji dolazi u sistem sa nekoliko opslužujućih linija, razbija se na potoke koje opslužuju posebne mašine. U sistemima sa otkazima, osnovni potok razbija se na potok opsluženih trebovanja i potok trebovanja koja su dobila otkaz. U nekim sistemima sa čekanjem, potok opsluženih trebovanja se ne poklapa sa ulaznim potokom, jer neka trebovanja mogu napustiti red za čekanje pre početka opsluživanja.

Može se navesti još jedan primer. Na kontrolu dolazi potok proizvoda istog tipa. Škartirani proizvodi se isključuju, i na taj način se potok proizvoda prosejava...etc.

Skitovič zatim uvodi operaciju rešetanja, na taj način što (u našim oznakama) nju definiše sa

$$P\{T_1 = S_m\} = a_m \quad (m \geq 1)$$

uz prirodan uslov

$$\sum_1^{\infty} a_m = 1 .$$

Na taj način, operator rešetanja zadaje se generatrisom

$$P(z) = \sum_1^{\infty} a_m z^m .$$

Naravno,

$$P\{T_1 < x\} = \sum_1^{\infty} a_m F^{(m)}(x) \ , \ x \in \mathbb{R}^+$$

gde je $F(x) = P\{S_1 < x\}$.

Ovakav tip rešetanja (bezuslovna struktura mu ne mora biti geometrijska !) očigledno je van okvira našeg pristupa.

Takav tip rešetanja (kao u Skitoviča) može se, medjutim, uklopiti u formalizam sa početka glave III na sledeći način.

Prelazna verovatnoća

$$Q(\omega_1, B) = Q(B)$$

ne bi zavisila od ω_1 , i zadavala bi se (parafrazirajući Skitoviča) sa

$$Q(0_1 \cdots 0_{m-1} 1_m) = a_m \quad (m \geq 1)$$

a verovatnoća proizvoljnog $B \in \mathcal{T}'$ zadavala bi se kao proizvod verovatnoća serija - gde je serija, po definiciji, niz oblika $0 \cdots 01$. Naprimer,

$$Q(1_1 1_2 0_3 0_4 0_5 1_6 0_7 0_8) = Q^2(1) \cdot Q(0001) \cdot Q(00) =$$
$$a_1^2 \cdot a_4 \cdot Q(00) ,$$
$$Q(00) = Q(000) + Q(001) = \ldots =$$
$$1 - Q(1) - Q(01) = a_3 + a_4 + \ldots$$

4.3.2.

Do stacionarne raspodele tipa $\lambda_1(s)$ može se doći i preko sledeće konstrukcije. Neka su $\{X_n, n \geq 1\}$ i $\{V_n, n \geq 1\}$ nezavisni nizovi nezavisnih sl. veličina, $X_n : \mathcal{U}(0,1)$ i $Ee^{-sV_n} = \eta(s)$. Ako je

$$T = \sum_{n=1}^{\infty} V_n \prod_{k=1}^{n} X_k$$

lako se pokazuje da je

$$Ee^{-sT} = \exp\left\{-\int_0^s \frac{1-\eta(u)}{u} du\right\}.$$

L I T E R A T U R A

1) Barlow, R.E., Prochan F.: Mathematical Theory of Reliability, John Wiley & Sons, N.Y.-London-Sidney, 1965.

2) Çinlar, E.: Introduction to Stochastic Processes, Prentice Hall, 1975.

3) Cox, D.R.: Renewal Theory, Methuen, London, 1962.

4) Feller, W.: An Introduction to Probability Theory and its Applications, Vol. II, John Wiley & Sons, N.Y., 1966.

5) Galambos J., Kotz S.: Characterizations of Probability Distributions, Springer Verlag, Berlin-Heidelberg-N.Y., 1978.

6) Гихман, И.И., Скороход, А.В.: Введение в теорию случайных процессов, Наука, Москва, 1977.

7) Kopociński, B.: Zarys Teorii Odnowy i Niezawodności, PWN, Warszawa, 1973.

8) Lukacs, E.: Characteristic Functions, Griffin, London 1969.

9) Medgyessy P., Takács L.: Valószínűségszámítás, Tankönyvkiadó, Budapest, 1973 (samo drugi deo knjige, Sztochasztikus Folyamatok, čiji je autor Takács).

10) Mogyoródi, J.: On a Rarefaction Procedure, Magyar Tud. Akad. Mat. Fiz. Oszt. Közl. 20, N°3-4, 1972.

11) Neveu, J.: Bases mathématiques du calcul des probabilités, Masson et C^{ie}, Paris, 1964.

12) Peruničić, P.: Neki rezultati u vezi sa procesima obnavljanja, (magistarski rad), PMF, Beograd, 1980.

13) Peruničić, P.: O nekonstantnom rešetanju, Mat. vesnik...

14) Rényi, A.: A characterization of the Poisson process, u" "Selected Papers of Alfréd Rényi", Vol. 1, Akademiai Kiadó, Budapest, 1976.

15) Smith, W.L.: Renewal Theory and its Ramifications, Journ. Roy. Stat. Soc. Ser.B, 20, 1958.

16) Takács, L.: Stochastische Prozesse, R. Oldenbourg Verlag, München-Wien, 1966.

S A D R Ž A J