RIRODNO - MATEMATIČKI FAKULTET U BEOGRADU

RANISLAV BULATOVIĆ

RILOG DINAMICI KONZERVATIVNIH SISTEMA

— doktorska disertacija —

BEOGRAD, 1983. godine

S A D R Ž A J

P R E D G O V O R

Najpotpunije obradjen dio analitičke mehanike je svakako, dinamika konzervativnih holonomnih sistema. Medjutim, i pored toga, proučavanje kretanja konzervativnih sistema je i danas aktuelan zadatak, što najbolje potvrdjuju radovi koji se iz ove oblasti često pojavljuju. Dinamici konzervativnih sistema posvećen je i ovaj rad.

Prvi dio rada, uglavnom, uvodnog je karaktera. Kretanje konzervativnog sistema, kao što je uobičajeno, razmatra se kao kretanje reprezentativne tačke u konfiguracionom prostoru sa odredjenom metrikom. Pošto se u radu srećemo i sa problemima globalnog karaktera konfiguracioni prostor se razmatra kao glatka mnogostrukost, što omogućuje primjenu moćnih metoda savremene diferencijalne geometrije. Da bi ta primjena bila što neposrednija na početku, gdje su izloženi osnovi dinamike konzervativnih sistema, uporedo se daje uobičajena /mehanička/ i geometrijska terminologija. Opšte poznate činjenice i geometrijski objekti korišćeni su obično bez objašnjenja.

Uvodjenjem Jakobijeve metrike neposredno se povezuje dinamika konzervativnih sistema i rimanska geometrija, tj. proučavanje kretanja, na osnovu principa najmanjeg dejstva, svodi se na proučavanje geodezijskih linija Jakobijeve metrike. Ali ovakav pristup ima specifičnost uslovljenu degeneracijom metrike na granici oblasti mogućih kretanja, čija je posledica neanalognost geometrije rimanskih prostora i geometrije oblasti mogućih kretanja. Geometrija oblasti mogućih kretanja s krajem, u kojoj centralno mjesto ima Kozlovljeva /В. В. Козлов/ teoreme, novijeg je datuma [44,45,37] . Kako je ona od fundamentalnog značaja za naša razmatranja podrobno je izložena u dijelu 1.2 i 1.3, slijedeći u osnovi [16] . U dijelu 1.4 i 1.5 razvili smo teoriju fokalnih tačaka granice oblasti mogućih kretanja, koja ne samo da upotpunjuje geometriju oblasti mogućih kretanja, već ima značajnu ulogu pri globalnom integraljenju Hamilton-Jakobijeve/Hamilton-Jakobi/ jednačine.

Drugi i treći dio rada posvećeni su Hamilton-Jakobijevoj jednačini. Hamilton-Jakobijev metod je jedan od najmoćnijih metoda integraljenja dinamičkih jednačina, a njegova suština se sastoji u nalaženju potpunog integrala koji nas direktno vodi ka kvadraturama. Nažalost, ne postoji neki opšti metod nalaženja potpunog integrala. Nedavna istraživanja pokazala su da je ograničen broj slučajeva koji se mogu riješiti jednim od najefikasnijih metoda - metodom razdvajanja promenljivih [41]. S druge strane još od Poenkarea/Poincare/ je jasno da za opšte dinamičke sisteme, ne samo da ne možemo naći potreban broj prvih integrala, nego oni i ne postoje. Sve ovo motiviše potrebu da se traže i ispituju parcijalna rješenja Hamilton-Jakobijeve jednačine na osnovu kojih možemo izdvojiti neku familiju kretanja sa odredjenim osobinama. U radu se, upravo, i razradjuje metod parcijalnog integraljenja Hamilton-Jakobijeve jednačine.

Pitanjima egzistencije lokalnih parcijalnih rješenja je posvećen drugi dio, pri čemu je posebno interesantno integraljenje Hamilton-Jakobijeve jednačine u okolini ravnotežnih položaja. Dokazuju se teoreme o postojanju analitičkih rješenja iz kojih neposredno slijedi egzistencija asimtotskih kretanja ka ravnotežnom položaju. U slučaju kada u ravnotežnom položaju potencijalna energija ima nesingularni maksimum, za razliku od nama korišćenog direktnog metoda razlaganja u redove, u radu [36] se pomoću analize asimtotskih kretanja, čija se egzistencija prethodno utvrdjuje, dokazuje postojanje neanalitičkog rješenja. Ukazuje se i na mehaničku intepretaciju mogućih kompleksnih rješenja.

U trećem dijelu proučava se egzistencija rješenja Hamilton-Jakobijeve jednačine u čitavoj oblasti mogućih kretanja s krajem. Postojanje granice, i ovdje kao u prvom dijelu rada, bitno karakteriše problem. Dobijena su prosta ograničenja na topologiju oblasti mogućih kretanja u kojima postoji globalno rješenje.

Specijalno, granica ne može biti povezana. Pokazuje se da egzistenciji globalnog rješenja čine smetnju fokalne tačke, koje su razmatrane u prvom dijélu. Dokazuju se karakteristične osobine rješenja u okolini granice kao i njihova veza sa potpunim integralom.

U četvrtom dijelu razmatra se nestabilnost ravnotežnog stanja. Rezultati dobijeni u trećem dijelu rada omogućuju da se analizira i rasvijetli valjanost jednog Citajevog /Н.Г. Четаев/ dokaza inverzije Lagranžove /Lagrange/ teoreme /ispravnost kojeg je osporena u radu [46] /, a koji je zasnovan na osobinama integrala Hamilton-Jakobijeve jednačine [38] , Zatim se, kombinujući ideju Vujičića [49,50] , da se o stabilnosti sudi na osnovu pomoćnih funkcija zavisnih samo od položaja, i jedne Citajeve teoreme [39] izvodi kriterijum nestabilnosti ravnotežnog stanja skleronomnih holonomnih sistema. Kriterijum se primjenjuje na konzervativne sisteme.

Najvažnije rezultate do kojih sam došao u ovom radu saopštavani su na naučnim seminarima Katedre za teorijsku mehaniku moskovskog univerziteta.

Na kraju, želim da izrazim zahvalnost profesoru beogradskog univerziteta dr Veljku Vujičiću za pomoć i usmjeravanje na mom postdiplomskom i kasnijem naučnom usavršavanju. Takodje, izražavam zahvalnost profesorima titogradskog univerziteta dr Luki Vujoševiću i dr Batriću Vulićeviću na podršci i interesovanju za moj rad.

Izuzetnu zahvalnost dugujem profesoru moskovskog univerziteta dr Valeriju V. Kozlovu na prihvatanju da pod njegovim naučnim rukovodstvom realizujem specijalizaciju iz teorijske mehanike, kao i za pomoć i usmjeravanje u ovom radu.

1. O konzervativnim mehaničkim sistemima

Posmatrajmo sistem od N materijalnih tačaka masa $m_1, \dots, m_N$, čiji je položaj u trodimenzionalnom euklidskom prostoru $R^3\{x,y,z\}$ sa dekartovim koordinatama x,y,z, odredjen radijus-vektorima $r_1, \dots, r_N$. Položaju sistema se korespondira položaj "reprezentativne tačke" u $3N$ dimenzionom euklidskom prostoru $R^{3N} = R^3\{r_1\} \times \dots \times R^3\{r_N\}$ - konfiguracionom prostoru slobodnog materijalnog sistema. Radijus - vektor reprezentativne tačke označimo sa $r = (r_1, \dots r_N) \in R^{3N}$

Neka kretanja sistema ograničava k holonomnih skleronomnih veza, koje zadajemo sa k funkcionalno nezavisnih jednačina

$$f_1(r) = 0, \dots f_k(r) = 0.$$

Veze u prostoru R^{3N} zadaju $n = 3N - k$ dimenzionu glatku mnogostrukost M - konfiguracioni prostor neslobodnog sistema. Skup tangentnih vektora na M u tački $x \in M$ obrazuje linearni n dimenzionalni prostor $T_x M$ - tangentni prostor. Svaka tačka mnogostrukosti M ima takvu okolinu $U \subset R^{3N}$ da postoji glatko preslikavanje $r = r(q)$, $q = (q_1, \dots q_n)$)* neke oblasti koordinatnog euklidskog prostora $R^n\{q\}$ na $M \cap U$, tako da vektori $\frac{\partial r}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial r}{\partial q_n}$ čine bazu prostora $T_x M$. Unija tangentnih prostora

$$\bigcup_{x \in M} T_x M = TM = R^{3N}\{r\} \times R^{3N}\{\dot r\}$$

čini tangentno raslojenje koje ima strukturu glatke $2n$ - dimenzione mnogostrukosti uložene u R^{6N} sa lokalnim koordinatama $q_1, \dots, q_n$, $\dot q_1, \dots, \dot q_n$. U mehanici je uobičajeno da se lokalne koordinate q zovu Lagranžove ili generalisane koordinate, $\dot q$ -generalisane brzine, M -konfiguracioni prostor, TM -fazni prostor.

Neka na sistem dejstvuju potencijalne sile F_i, tj. neka postoji glatka funkcija $\Pi : R^{3N} \to R$ -potencijalna energija, takva da je

$$F_i = -\frac{\partial \Pi}{\partial r_i} \quad (i = 1, \dots, N)$$

)* Iako pišemo $q = (q_1, \dots, q_n)$ podrazumijevaćemo da je u pitanju kolona.

Diferencijalne jednačine kretanja u generalisanim koordinatama su Lagranžove jednačine)*

$$(1) \qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0 .$$

gdje je $L = T - \Pi$ Lagranžova funkcija/ kinetički potencijal / i jednaka je razlici kinetičke i potencijalne energije. Kinetička energija $T(q, \dot{q})$ dobija se restrikcijom kinetičke energije slobodnog sistema na fazni prostor TM, tj.

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i \dot{x}_i^2 \Big|_{TM}$$

U lokalnim koordinatama zapisivaćemo je u obliku

$$T(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} \langle B(q)\dot{q}, \dot{q} \rangle .$$

/ $\langle \cdot , \cdot \rangle$ -obični skalarni proizvod / gdje je $B(q)$ simetrična pozitivno definitna matrica. Takodje je $\Pi(q) = \Pi(r)\big|_M$

Pošto kinetička energija predstavlja pozitivno definitnu kvadratnu formu to ona na M zadaje rimansku metriku)**

$$ds^2 = T dt^2 = \langle B(q)\, dq, dq \rangle$$

Mi možemo "zaboraviti" na činjenicu da je konfiguraciona mnogostrukost uložena u $3N$ - dimenzioni konfiguracioni prostor sistema slobodnih tačaka i objekat razmatranja proširiti na apstraktnu glatku rimansku mnogostrukost. U tom smislu prihvatimo sledeću definiciju [4,16] :

Definicija 1.

1) Konzervativnom mehaničkom sistemu odgovara trojka (M, ds, Π)

gdje su: M glatka n - dimenziona mnogostrukost,

ds -rimanska metrika na M zadata kinetičkom energijom sistema $\left(T = \frac{1}{2}\frac{ds^2}{dt^2} \right)$,

)* Napomenimo da sa $\frac{\partial}{\partial q} = \left(\frac{\partial}{\partial q_1}, \cdots, \frac{\partial}{\partial q_n}\right)$ označavamo, zavisno od konteksta, ili vektor kolonu ili vektor vrstu.

)** Po Singovoj /Synge/ terminologiji [32] kinematski linijski element.

Π - glatka funkcija na M /potencijalna energija/.

2. Kretanje konzervativnog sistema je glatko preslikavanje

$$h : \mathbb{R}(t) \to M$$

oje u lokalnim koordinatama na M zadovoljava Lagranžove jednaine sa lagranžijanom $L = T - \Pi$.

Na ovaj način, ne samo što se proširuje objekat razmaranja, već ovakav prilaz omogućuje direktno korišćenje nekih, naočito globalnih, rezultata diferencijalne geometrije pri proučaanju kretanja.

Sistem Lagranžovih jednačina (1) je ekvivalentan sistemu $2n$ kanonskih jednačina

$$(2) \qquad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} \; ; \quad \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} \; ,$$

dje je hamiltonijan

$$H : T^{*}M \to \mathbb{R}$$

unkcija na kotangentnom raslojenju konfiguracione mnogostrukosti fazni prostor sa lokalnim koordinatama p, q /-dobijena Ležandrvom transformacijom lagranžijana L. Generalisani impulsi p se adaju relacijama

$$p = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}} = B(q)\dot{q}$$

hamiltonijan

$$H(p, q) = \frac{1}{2} < A(q)p, p > + \Pi(q),$$

dje je matrica $A(q)$ inverzna matrici $B(q)$.

Jednačine kretanja imaju prvi integral-integral enegije

$$T + \Pi = h \; .$$

ri fiksiranoj vrijednosti h integral energije izdvaja u faznom rostoru $(2n-1)$-dimenzionu "hiperpovrš"* Π^{2n-1}. Fazna trajektorija istema čije se kretanje realizuje pri datoj vrijednosti konstante h u cjelosti pripada hiperpovrši Π^{2n-1}. Projekcija $\mathcal{P}$ hiperpovrši

---

* Hiperpovrš Π^{2n-1} može sadržati singularne tačke u okolini kojih na nema strukturu glatke mnogostrukosti.

Π^{2n-1} na konfiguracioni prostor

$$\begin{array}{ccc} \Pi^{2n-1} & \subset & T^{*}M \\ \downarrow \pi & & \downarrow \pi \\ D & \subset & M \end{array}$$

odredjuje skup D u kojem je moguće kretanje sistema. D se zove oblast mogućih kretanja. Pošto je kinetička energija pozitivno definitna funkcija iz integrala energije slijedi

$$D = \{ q \in M : \Pi(q) \leq h \} .$$

Bitno je razlikovati sledeća dva slučaja:

1) $h > \sup_M \Pi$,

i

2) $h < \sup_M \Pi$.

U prvom slučaju oblast mogućih kretanja se poklapa sa čitavim konfiguracionim prostorom, a u drugom ona predstavlja dio konfiguracioneg prostora sa granicom

$$\partial D = \{ q \in M : \Pi(q) = h \} .$$

Pri nekritičnim vrijednostima konstante h, kojima odgovaraju nekritične tačke potencijalne energije, granica ∂D je glatka $(n-1)$ - dimenziona mnogostrukost, a oblast mogućih kretanja je glatka mnogostrukost s krajem ∂D [24]. Skup kritičnih vrijednosti konstante h je mjere nula $)^{*}$ [16]. Kritičnim tačkama potencijalne energije odgovaraju ravnotežni položaji mehaničkog sistema. Znači, pri kritičnim vrijednostima h granica oblasti D sadrži ravnotežne položaje, a na odgovarajućim energetskim nivoima se nalaze singularne tačke jednačina kretanja (ravnotežna stanja). Kad god to nije posebno naglašeno predpostavljaćemo da na granici oblasti mogućih kretanja nema ravnotežnih položaja.

$)^{*}$ Znači, da se skup kritičnih vrijednosti može prekriti sa prebrojivo mnogo intervala proizvoljno male ukupne dužine.

Ukažimo na neka karakteristicna svojstva kretanja onzervativnih sistema,koja su posledica specifične strukture jednačina kretanja.

Prije svega, napomenimo da pošto je kvadratna forma T pozitivno definitna postoji jedinstveno kretanje sa početnim slovima

$$k(0)=a\in M,\quad \frac{d}{dt}k(0)=v\in T_aM .$$

Lema 1. Ako je $k(t)$ rješenje Lagranžovih jednačina 1) sa početnim uslovima

$$k(0)=a,\quad \frac{d}{dt}k(0)=v$$

ada je i $k(-t)$ rješenje, ali sa početnim uslovima

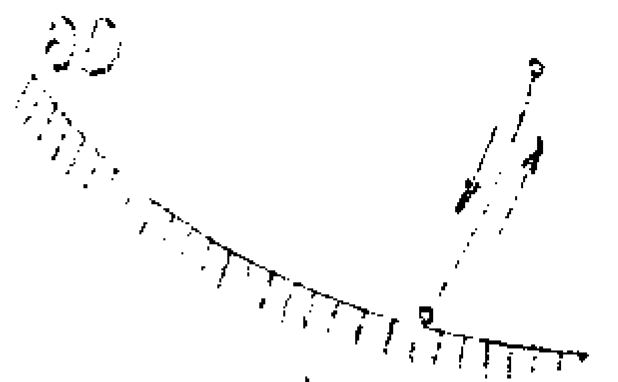
$$k(0)=a\quad \frac{d}{dt}k(0)=-v .$$

Dokaz.Uvodjenjem nove promenjive $\tau=-t$ jednačine kretanja se ne mijenjaju pa ako je $k(t)$ rješenje tada i $k(\tau)$ zadovoljava jednačine, ali je u početnom trenutku $k(0)=a$, $\frac{dk}{dt}(0)=-v$ (jer je $\frac{dk}{dt}=\frac{dk}{d\tau}\cdot\frac{d\tau}{dt}=-\frac{dk}{d\tau}$).

Iz jedinstvenosti rešenja Lagranžovih jednačina i leme 1 slijedi

Posledica (inverzija kretanja). Ako je $k(t)$ kretanje sa početnim uslovima $\frac{d}{dt}k(0)=0$,onda je $k(t)=k(-t)$,tj. rješenje je parna funkcija vremena t .

Dakle, ako je reprezentativna tačka $k(t)$ u nekom trenutku vremena po nekoj trajektoriji dospjela na granicu oblasti mogućih kretanja(tada je njena brzina jednaka nuli) u narednom trenutku ona će se kretati u suprotnom smjeru po istoj traektoriji i sa istim vrijednostima inteziteta brzine(sl.1)



Sl. 1

Teorema 1. Trajektorija nekog kretanja može imati najviše dvije zajedničke tačke sa granicom oblasti mogućih kretanja u tom slučaju kretanje je periodično.

Dokaz. Pretpostavimo da postoji kretanje čija trajektorija presijeca granicu ∂D u tri tačke a, b, c. Počevši kretanje iz tačke a reprezentativna tačka k dospijeva u tačku b iz koje se, na osnovu prethodnog komentara, vraća po istoj trajektoriji i kroz neko vrijeme dospijeva opet u tačku a. Po-tom tačka opet kreće po istoj trajektoriji od a do b i td.. Znači, ona nikada ne dospijeva u c. Kontradikcija. Periodičnost slijedi iz posledice leme 1.

Pošto reprezentativna tačka sistema vrši oscilatorna kretanja izmedju krajnjih tačaka trajektorije, to se ovakva periodična kretanja, po analogiji sa sistemima od jednog stepena slobode, nazivaju libracije [45].

<u>Lema 2.</u> Za kompaktne oblasti mogućih kretanja postoji broj $\varepsilon_0 > 0$, takav da se za svako $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ tačka $k(t)$ može samo konačno dugo nalaziti u oblasti

$$V_\varepsilon = \{ q : h - \Pi \leq \varepsilon \}.$$

<u>Posledica.</u> Tačka $k(t)$ se ne može asimptotski približavati granici ∂D kada $t \to \infty$.

Dokaz leme. Odaberimo sistem lokalnih koordinata $q = \{q_i\}$ $(i = 1, \dots, n)$, i razmotrimo potencijalnu energiju kao složenu funkciju vremena, tj. $\Pi = \Pi(q(t))$. Nalazimo

$$\dot{\Pi} = \left\langle \frac{\partial \Pi}{\partial q}, \dot{q} \right\rangle$$

$$\ddot{\Pi} = \left\langle \frac{\partial \Pi}{\partial q}, \ddot{q} \right\rangle + \left\langle \frac{\partial^2 \Pi}{\partial q^2} \dot{q}, \dot{q} \right\rangle .$$

Ako iskoristimo Ležendrovu transformaciju i kanonske jednačine

$$p = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}} \ ; \quad \dot{q} = \frac{\partial T}{\partial p} \ , \quad \dot{p} = -\frac{\partial T}{\partial q} - \frac{\partial \Pi}{\partial q} \ ,$$

drugi izvod potencijalne energije možemo napisati u obliku

$$-\ddot{\Pi} = \left\langle A(q) \frac{\partial \Pi}{\partial q}, \frac{\partial \Pi}{\partial q} \right\rangle + \Phi(q, p) .$$

gdje je $\bar{\Phi}$ neka kvadratna forma generalisanih inpulsa. Izraz

$$< A(q) \frac{\partial \Pi}{\partial q}, \frac{\partial \Pi}{\partial q} >$$

predstavlja kvadrat gradijenta potencijalne energije u odgovarajućoj rimanskoj metrici. Uzimajući ε toliko malo da u oblasti V_ε nema kritičnih tačaka potencijalne energije, zbog kompaktnosti biće

$$< A(q) \frac{\partial \Pi}{\partial q}, \frac{\partial \Pi}{\partial q} > > \delta_\varepsilon > 0 .$$

Pošto je

$$T \geqslant c_1 < p, p > , \quad |\bar{\Phi}| \leqslant c_2 < p, p > ,$$

$$c_1, c_2 - const.$$

i

$$T + \Pi = h ,$$

to je u blizini granice ∂D forma $\bar{\Phi}$ proizvoljno mala. Dakle, možemo uvijek odabrati ε_0, tako da je u okolini V_ε $(\varepsilon < \varepsilon_0)$ na snazi procjena $-\ddot{\Pi} \geqslant \delta > 0$,

gdje je δ neka konstanta.

Predpostavimo da postoji kretanje koje ulazi u okolinu V_ε i tamo vječno ostaje. Dolazimo do kontradikcije, jer sa jedne strane funkcija Π ograničena(kao neprekidna na kompaktu), a sa druge strane

$$-\Pi \geqslant \frac{\delta}{2} t^2 + \dot{\Pi}(0) t + \Pi(0)$$

što neograničeno raste kada $t \to \infty$.

1.1. Metrizacija oblasti mogućih kretanja i princip najmanjeg dejstva.

Neka su a i b dvije tačke iz oblasti mogućih kretanja D. Dio po dio glatki put iz a u b je preslikavanje

$$\gamma : [\bar{t}, \bar{\bar{t}}] \to D$$

sa osobinama:

1) da postoji podjela $\bar{t} = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = \bar{\bar{t}}$ intervala $[\bar{t}, \bar{\bar{t}}]$ takva da je svako preslikavanje

$$\gamma|_{[t_{i-1}, t_i]} \quad (i = 1, \cdots, n)$$

glatko:

2) $\gamma(\underline{t}) = a$ i $\gamma(\bar{t}) = b$

Skup svih dio po dio glatkih puteva iz a u b označimo sa Ω_{ab}, tj.

$$\Omega_{ab} = \{ \gamma : \gamma(\underline{t}) = a , \gamma(\bar{t}) = b \}.$$

Na skupu Ω_{ab} uočimo funkcional

$$S = \int_{\gamma \in \Omega_{ab}} \sqrt{2(h-\Pi)}\, ds .$$

Kretanje konzervativnog sistema i rimansku geometriju neposredno povezuje

Princip najmanjeg dejstva /Jakobijeva forma/ [2,13] .

Kretanje konzervativnog sistema sa datom vrijednošću potpune energije h se vrši duž ekstremale varijacionog zadatka

$$\delta \int_{\gamma} \sqrt{2(h-\Pi)}\, ds = 0.$$

Napomenimo da princip odredjuje trajektoriju, a položaj reprezentativne tačke na trajektoriji zavisno od vremena se odredjuje poslije deparametrizacije

$$t - t_0 = \int_{a}^{\mathfrak{z}} \sqrt{\frac{ds}{2(h-\Pi)}} .$$

Funkcional

$$S = \int_{a}^{\ell} \sqrt{2(h-\Pi)}\, ds = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{2(h-\Pi)}\, \sqrt{2T}\, dt = \int_{t_0}^{t_1} 2T\, dt$$

zvaćemo, u skladu sa nazivom principa, dejstvom)*.

Pri kretanju po inerciji iz principa neposredno slijedi

)* U literaturi su još prisutni nazivi: skraćeno dejstvo i Lagranžovo dejstvo.

da se kretanje vrši po geodezijskim linijama rimanskog prostora (M, ds). Ovaj rezultat se može uopštiti uvodeći akcionu metriku

$$d\rho = \sqrt{2(h-\Pi)}\, ds\,,$$

koju ćemo zvati Jakobijeva metrika. Vrijednost dejstva na nekoj krivoj, očigledno, je jednaka dužini krive u Jakobijevoj metrici $d\rho$. Unutar oblasti mogućih kretanja Jakobijeva metrika predstavlja rimansku metriku. Na granici ∂D je $d\rho = 0$ pa je dužina svake krive koja pripada granici jednaka nuli. Govorićemo da je metrika na granici neregularna, odnosno degenerisana.

Kako se Jakobijeva metrika $d\rho$ razlikuje od metrike ds za množilac koji zavisi samo od izbora tačke konfiguracionog prostora, to su ove dvije metrike konformno ekvivalentne, tj. uglovi u metrici $d\rho$ se poklapaju sa uglovima u metrici ds [29].

Iz predhodnih razmatranja slijedi da princip najmanjeg dejstva možemo formulisati i na sledeći način: Unutar oblasti mogućeg kretanja D kretanje konzervativnog sistema se vrši po geodezijskim linijama Jakobijeve metrike.

Ako je vrijednost potpune energije h veća od maksimuma potencijalne energije na konfiguracionom prostoru tada je metrika $d\rho$ korektno definisana na čitavom prostoru i za proučavanje dinamičkih zadataka se mogu primijeniti teoreme vezane za geodezijske linije rimanske mnogostrukosti $(M, d\rho)$. Tako, napr. , zadatak o nalaženju jedne klase periodičnih kretanja se svodi na nalaženje zatvorenih geodezijskih linija [4].

U drugom slučaju, kada oblast mogućih kretanja ima granicu, situacija je bitno drugačija. Geometrija geodezijskih u oblastima s krajem nije analogna geometriji običnih rimanskih prostora, što je posledica degenerisanosti metrike na granici. Tako, napr., za kompaktne rimanske mnogostrukosti proizvoljne dvije tačke se mogu spojiti geodezijskom linijom /Hopf-Rinovljeva teorema/. Drugim riječima, izmedju bilo koje dvije tačke konfiguracione mnogostrukosti može se realizovati kretanje sa datom /jednom te istom/ vrijednošću potpune energije h.
U kompaktnim oblastima mogućih kretanja s krajem, kao što pokazuje primjer iz [44], to više ne važi. Osnovi geometrije oblasti mogućih kretanja s krajem razradjeni su u radu [44]. Pošto su ti rezultati bitni za naša dalja razmatranja na njima ćemo se podrobnije zadržati.

1.2. Geometrija oblasti mogućih kretanja

Uvedimo funkciju
$$d : D \times D \to \mathbb{R}$$
Odredjenu formulom
$$d(a,b) = \inf_{\sigma \in \Omega_{ab}} \{ \rho(\sigma) \},$$
gdje je $\rho(\sigma)$ dužina krive σ u Jakobijevoj metrici $d\rho$. Nenegativna funkcija d zadovoljava sledeća svojstva

1) $d(a,a)=0$ za svako $a \in D$
2) $d(a,b)=d(b,a)$ " $a,b \in D$
3) $d(a,b)+d(b,c) \geq d(a,c)$; " $a,b,c \in D$

Ako se tačke a i b nalaze na povezanoj komponenti granice ∂D, tada je zbog neregularnosti metrike $d(a,b)=0$. Ako pak $a,b \notin \partial D$ i $d(a,b)=0$ tačke a i b se poklapaju. Znači, aksiomi metričkog prostora su ispunjeni samo unutar oblasti D.

Analogno skupu $\Omega_{a,b}$, uvedimo skup svih dio po dio glatkih puteva koji spajaju tačku $a \in D$ sa granicom ∂D

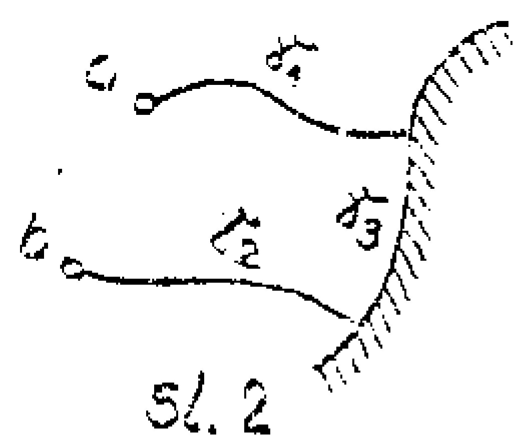
$$\Omega_a = \{ \gamma : \gamma(t) = a, \gamma(\bar{\bar{t}}) \in \partial D \}.$$

Definicija 2. Veličina

$$\partial(a) = \inf_{\gamma \in \Omega_a} \{ \rho(\gamma) \}$$

se zove rastojanje tačke a do granice ∂D.

Jasno je da je $\partial(a) = 0$ ako i samo ako je $a \in \partial D$. Funkcije $d(a,b)$ i $\partial(a)$ su neprekidne na $D \times D$, odnosno na D [16]. Neka su γ_1 i γ_2 krive koje iz tačaka a i b idu do granice (sl.2)



sl. 2

Tada je $$\partial(a) + \partial(b) = \inf (S(\gamma_1) + S(\gamma_2)).$$

Da bi ocijenili $d(a,b)$ uočimo krivu $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_3 \cup \gamma_2$, gdje je γ_3 kriva koja leži na granici ∂D, a spaja tačke $\gamma_1(\bar{\bar{t}})$ i $\gamma_2(\bar{\bar{t}})$. Tada je

$$d(a,b) \leq \inf S(\gamma) = \partial(a) + \partial(b)$$

jer je $S(\gamma_3) = 0$. Znači, važi ocjena $d(a,b) \leq \partial(a) + \partial(b)$

Analogno se pokazuje da je $\partial(a) \leq d(a,b) + \partial(b)$

Navedimo neka osnovna tvrdjenja lokalnog karaktera iz diferencijalne geometrije koja su na snazi i u okolinama unutrašnjih tačaka oblasti mogućih kretanja, a čiji se dokaz, npr., nalazi u [22].

Teorema 2.

1) Ako je $a \in D / \partial D$ uvijek postoji broj $\sigma > 0$ takav da je skup

$$\{ g \in D : d(a,g) = \sigma \},$$

glatka mnogostrukost difeomorfna sferi S^{n-1}.

2) Ako je duzina puta γ, koji spaja

[t]ačke a i b jednaka $d(a,b)$ onda je on geodezijska [l]inija metrike $d\rho$.

3) Dvije proizvoljne tačke $a, b \in D$ koje za [d]ovoljno malo $\delta > 0$ zadovoljavaju uslov $d(a,b) < \delta$ mogu se [s]pojiti geodezijskom linijom.

Centralno mjesto u geometriji oblasti s krajem [i]ma

Kozlovljeva teorema)* [44] . Svaku tačku a iz [u]nutrašnjosti kompaktne oblasti mogućih kretanja, čija granica [n]e sadrži ravnotežne položaje, možemo spojiti sa nekom tačkom [g]ranice geodezijskom linijom dužine $\partial(a)$.

Drugim riječima, iz proizvoljne tačke možemo [p]o najkraćoj krivoj dospjeti na granicu.

Neka je $k(t,a)$ kretanje sistema sa početnim [u]slovima na granici ∂D , tj.

$$k(0,a) = a \in \partial D \;, \quad \frac{d}{dt} k(0,a) = 0.$$

[I]z posledice leme 1 i prethodne teoreme slijedi

Posledica. Skup svih trajektorija koje izlaze sa [g]ranice ∂D prekriva čitavu oblast mogućih kretanja, tj.

$$\bigcup_{t \in R} \bigcup_{a \in \partial D} k(t,a) = D$$

Dokaz teoreme u opštim crtama. Uočimo sferu S^{n-1} malog radijusa $\delta > 0$ sa centrom u tački $a \in D/\partial D$. [Z]bog neprekidnosti funkcije $\partial(x)$ i kompaktnosti sfere postoji [t]ačka $b \in S^{n-1}$, takva da je

$$\partial(b) = \min_{x \in S^{n-1}} \partial(x) .$$

[N]eka je γ jedinstvena geodezijska linija koja prolazi kroz tačke a i b (ovakva geodezijska,na osnovu trećeg tvrdjenja teoreme 2, uvijek postoji),i neka je ona parametrizovana prirodnim parametrom s - dužinom luka krive γ u Jakobijevoj metrici- pri čemu je $\gamma(0) = a$ .Očigledno je $\gamma(\delta) = b$,gdje je $\delta = d(a,b)$.Pokazuje se

)*U odredjenom smislu ova teorema predstavlja analogon Hopf-Rinovljeve teoreme.

a je za svako $s \in [0, \partial(a))$ na snazi jednakost

$$\partial(\gamma^s(a)) = \partial(a) - s$$

Razmotrimo kretanje $k(t)$ koje pocinje u tački a sa početnom brzinom usmjerenom duz geodezijske γ i inte- itetom odredjenim vrijednošću potpune energije h. Za ovakvo retanje pokazuje se da kada parametar $s \to \partial(a)$ vrijeme t teži ekoj konačnoj vrijednosti t', a tačka $k(t)$ se približava granici ∂D. Sada se iz prethodne jednakosti puštajući a $t \to t'$ dobija da je dužina krive $k(t)$, $0 \leq t \leq t'$ jednaka $\partial(a)$.

Koristeci tehniku dokaza ove teoreme može se pokazati a se izmedju dveju unutrašnjih tačaka a i b oblasti D ože uspostaviti kretanje, ako one zadovoljavaju uslov $\partial(a) + \partial(b) > d(a,b)$.

1.3. Okolina granice oblasti mogućih kretanja

U oblasti mogucih kretanja, dovoljno blizu granice ∂D, mogu se uvesti lokalne koordinate x, y; $x = (x_1, \dots, x_{n-1})$, tako da su x lokalne koordinate na ∂D, a da je na skupovima

$$\{(x,y) : y = h\} \subset D$$

potencijalna energija konstantna. Smatraćemo da je unutar D $y > 0$, a na granici ∂D $y = 0$. Funkcija $\Pi(y)$ monotono opada u okolini nule.

Razmatrimo rješenje jednačina kretanja(1) sa početnim uslovima na ∂D, tj.

$$x = x_0, \quad y = 0, \quad \dot{x} = 0, \quad \dot{y} = 0,$$

i označimo in sa

$$x = x(t, x_0), \quad y = y(t, x_0), \quad x_0 \in \partial D. \tag{3}$$

Kako na granici ∂D nema ravnotežnih položaja možemo jednačine (3) napisati u obliku

$$x = x_0 + t^2 X(t, x_0), \quad y = t^2 Y(t, x_0), \tag{4}$$

gdje su X, Y glatke funkcije na $R \times \partial D$. Uz to je $Y(0, x_0) > 0$ za svako $x_0 \in \partial D$.

Trajektorije jednačina (3) su geodezijske linije Jakobijeve metrike $d\rho$. Sa $\rho(\tilde{t}, x_0)$ označimo dužinu geodezijskih linija (3) u metrici $d\rho$ kada se t mijenja u intervalu $[0, \tilde{t}]$. Pošto je

$$d\rho = \sqrt{2(h-\Pi)}\, ds, \quad a \quad (ds/dt)^2 = 2T,$$

imaćemo

$$\rho(\tilde{t}, x_0) = 2\int_0^{\tilde{t}} [h - \Pi(y)]\, dt.$$

Odavde je $\dot{\rho} = 2[h - \Pi(y(t,x_0))]$, $\ddot{\rho} = -2\frac{\partial \Pi}{\partial y}\dot{y}$,

$$\dddot{\rho} = -2\left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial y^2}\dot{y}^2 + \frac{\partial \Pi}{\partial y}\ddot{y}\right).$$

Za $t=0$ je $\dot{\rho} = \ddot{\rho} = 0$, a $\dddot{\rho} > 0$, jer funkcija $\Pi(y)$ monotono opada, a $\ddot{y} > 0$. Znači, da je

$$\rho(t, x_0) = t^3 \mathcal{R}(t, x_0),$$

gdje je $\mathcal{R}$ glatka funkcija na $R \times D$ i uz to je $\mathcal{R}(0, x_0) > 0$ za svako $x_0 \in \partial D$.

Razmotrimo preslikavanje dovoljno male okoline granice ∂D na D, odredjeno formulama

$$x' = x, \quad y' = \sqrt{y}.$$

Ovo preslikavanje je difeomorfno izvan ∂D. Dalje je, na osnovu (4),

$$(5) \qquad y' = t\, Y'(t, x_0)$$

gdje je $Y' = \sqrt{Y(t, x_0)}$ glatka funkcija. Pošto je $\dot{y}'_{t=0} = Y'(0, x_0) > 0$ možemo u dovoljno maloj okolini tačke $t=0$ riješiti (5) po t, i dobiti funkciju

$$t = t(y', x_0),$$

koja je glatka na $[0, \varepsilon) \times \partial D$. Znači, biće glatka i funkcija $\rho(y', x_0)$ koja se može napisati u obliku

$$(6) \qquad \rho = y'^3 \mathcal{R}'(y', x_0), \quad \mathcal{R}'(0, x_0) > 0.$$

Sa Σ_ρ označimo skup tačaka iz D čije rastojanje do granice ∂D duž geodezijskih(3) jednako ρ . Oigledno je $\Sigma_0 \equiv \partial D$.

<u>Lema 3.</u>Pri dovoljno malom $\rho > 0$ skup Σ_ρ je glatka hiperpovrš u D difeomorfna ∂D .

Dokaz.Skupovi Σ_ρ su,na osnovu formule(6), nivoi glatke funkcije $f = \sqrt[3]{\rho}$,koja nema kritičnih tačaka za male vrijednosti promenjive ρ' .Dakle, Σ_ρ je glatka mnogostrukost za $0 \leq \rho \leq \rho_0$,gdje je ρ_0 dovoljno mali broj, a kako se nulti nivo funkcije f poklapa sa ∂D slijedi postojanje difeomorfizma [22] .

<u>Lema 4.</u>Postoji $\rho_0 > 0$,takoda da se za $0 \leq \rho_1 < \rho_2 \leq \rho_0$ hiperpovrši Σ_{ρ_1} i Σ_{ρ_2} ne presijecaju.

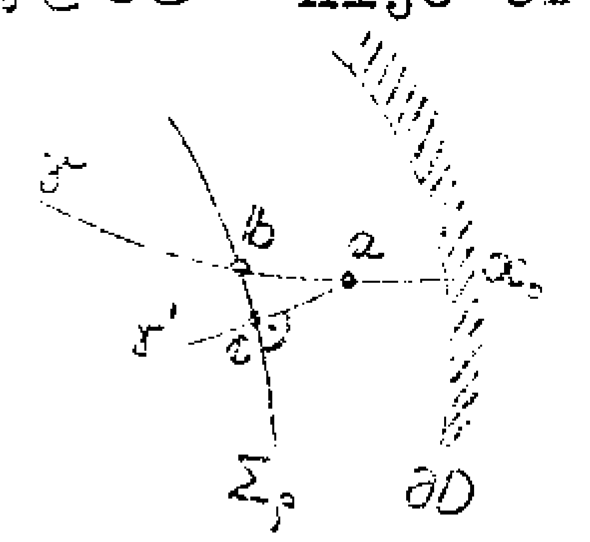
Ova lema je posledica činjenice da različiti nivoi glatke funkcije nemaju zajedničkih tačaka.

<u>Lema 5.</u>Postoji $\rho_0 > 0$ tako da je rastojanje svake tačke $a \in \Sigma_\rho$ $(0 \leq \rho \leq \rho_0)$ do granice jednako ρ , tj. $\partial(a) = \rho$.

Dokaz.Jasno je da rastojanje $\partial(a)$ ne prevazilazi ρ .Pretpostavimo da je za neko $a \in \Sigma_\rho, \rho \in [0,\rho_0]$ ispunjena nejednakost $\partial(a) < \rho$.Tada po Kozlovljevoj teoremi postoji geodezijska Jakobjeve metrike sa krajevima u tačkama a i $b \in \partial D$ takva da je njena dužina jednaka $\partial(a) = \rho'$ .Razmotrimo geodezijsku γ koja izlazi iz tačke $b \in \partial D$ .Tada, tačka a koja je na rastojanju ρ' od granice duž γ pripada hiperpovrši $\Sigma_{\rho'}$ .Pošto je $\rho' < \rho \leq \rho_0$ saglasno prethodnoj lemi hiperpovrši $\Sigma_{\rho'}$ i Σ_ρ nemaju zajedničkih tačaka.Kontradikcija.

<u>Teorema 4.</u>(analogon Gausove leme)* Postoji $\rho_0 > 0$ tako da za svako $\rho \in (0,\rho_0]$ geodezijske,koje izlaze iz tačaka granice ∂D ,ortogonalno presijecaju hiperpovrši Σ_ρ .

Dokaz.Pretpostavimo suprotno, tj. da neka geodezijska γ sa krajem u tački $x_0 \in \partial D$ nije ortogonalna na Σ_ρ (sl.3.)



sl. 3

Neka je a tačka na γ' dovoljno bliska Σ_ρ. Razmotrimo geodezijsku γ' koja prolazi kroz tačku a i koja je ortogonalna na Σ_ρ. Takva geodezijska postoji [28 ,glava VIII] .Luk $ac\subset\gamma'$ je kraći od luka $ab\subset\gamma$. No tada dio po dio glatka kriva koja se sastoji iz lukova $x_0 a\subset\gamma$ i luka $ac\subset\gamma'$ ima dužinu manju od ρ, što protivureči tvrdjenju leme 5.

1.4. Fokalne tačke granice oblasti mogućih kretanja

Pretpostavimo, neumanjujući opštost, da karta sa lokalnim koordinatama $q=\{q_i\}\ (i=1,\dots,n)$ prekriva cijelu oblast D. Na granici oblasti mogućih kretanja ∂D uočimo proizvoljnu tačku q_0 i u nekoj okolini te tačke uvedimo lokalne koordinate, $\alpha=\{\alpha_i\}\ (i=1,\dots,n-1)$, tako da tački q_0 odgovara $\alpha=0$. Razmotrimo rješenja jednačina kretanja (1)

$$q = q(\alpha, t) \tag{7}$$

sa početnim uslovima zadatim u okolini tačke q_0 na granici oblasti mogućih kretanja $(\dot{q}(\alpha,0)=0)$,kao $(n-1)$ parametarsku familiju trajektorija γ_α koje izlaze iz granice ∂D. Na osnovu osnovne teoreme teorije običnih diferencijalnih jednačina **ova familija je korektno definisana, tako da možemo uvesti glatko preslikavanje

$$F : \partial D \times R_+ \to D,$$

gdje je
$$R_+ = \{ t : t>0 \},$$

---

*) Gaus(Gauss) je 1827 godine u čuvenim "Disquisitions generalès circa superficies curvas" primijetio da ortogonalne trajektorije proizvoljne familije paralelnih površi predstavljaju geodezijske linije.

**) Pod osnovnom teoremom teorije diferencijalnih jednačina obično se podrazumijeva teorema o jedinstvenosti i glatkoj zavisnosti rješenja od početnih uslova.

a koje zadajemo formulama

$$\mathbb{F}(\alpha, t) = \mathcal{Q}(\alpha, t).$$

Uvedimo sledeću definiciju:

Definicija 5. Tačka $\mathcal{Q}^*(0, t^*)$ je fokalna tačka granice oblasti mogućih kretanja duž trajektorije $\mathcal{O}_0$ ako ona predstavlja kritičnu vrijednost preslikavanja $\mathbb{F}$.

Drugim riječima, tačka $\mathcal{Q}^*(0, t^*)$ je fokalna tačka ako je u tački $(0, t^*)$ jakobijan preslikavanja $\mathbb{F}$ singularan, tj.

$$(8) \qquad rang \left. \frac{\partial \mathcal{Q}}{\partial(\alpha, t)} \right|_{(0, t^*)} < n.$$

Geometrijski smisao ovoj definiciji daju naredne teoreme.

Teorema 5. Fokalna tačka $\mathcal{Q}^*$ je ili tačka sa granice $(\mathcal{Q}^* \in \partial D)$ ili presječna tačka trajektorija koje izlaze iz beskonačno bliskih tačaka granice ∂D.

Imajući u vidu da, na osnovu teoreme 4, uvijek postoji neka okolina granice ∂D u kojoj se trajektorije koje izlaze sa granice ne presijecaju neposredno slijedi :

Posledica. Postoji okolina granice oblasti mogućih kretanja koja ne sadrži fokalne tačke.

Dokaz teoreme. Zajedno sa trajektorijom $\mathcal{O}_0 : t \mapsto \mathcal{Q}(0, t)$ razmotrimo beskonačno blisku trajektoriju $t \mapsto \mathcal{Q}(\delta\alpha, t)$, gdje je

$$\delta\alpha = (\delta\alpha_1, \ldots, \delta\alpha_{n-1})$$

beskonačno malo pomjeranje iz tačke $\mathcal{Q}_0$ na granici ∂D. Presječnoj tački odgovaraju bliske vrijednosti parametra t, tj.

$$\mathcal{Q}(\delta\alpha, t)\Big|_{t^* + \varepsilon} = \mathcal{Q}(t)\Big|_{t^*}.$$

Kako je

$$\mathcal{Q}(\delta\alpha, t)\Big|_{t^* + \varepsilon} = \mathcal{Q}(t^*) + \left.\frac{\partial \mathcal{Q}}{\partial t}\right|_{t^*} \varepsilon + \delta\mathcal{Q}\Big|_{t^*} + \ldots,$$

gdje je

$$\delta\mathcal{Q} = \left.\frac{\partial \mathcal{Q}}{\partial \alpha}\right|_{\alpha = 0} \delta\alpha$$

odbacujući članove višeg reda malenosti dobijemo)*

$$\frac{\partial Q}{\partial t}\Big|_{(a,t^*)} \varepsilon + \delta Q\Big|_{t^*} = 0 ,$$

odnosno

$$(9) \qquad \frac{\partial Q}{\partial t}\Big|_{(a,t^*)} \varepsilon + \frac{\partial Q}{\partial \alpha}\Big|_{(a,t^*)} \delta\alpha = 0 .$$

Homogeni sistem obicnih jednačina(9) po nepoznatima ε , $\delta\alpha$ imaće netrivijalno rešenje ako je determinanta sistema jednaka nuli, tj.

$$\det \frac{\partial Q}{\partial(\alpha, t)}\Big|_{(a,t^*)} = 0 .$$

što je ekvivalentno uslovu(8).

Ako je $\dot{Q}(t^*) \neq 0$ tačka Q^* je, znači, presječna tačka)** i nalazi se unutar oblasti D . Kada je $\dot{Q}(t^*) = 0$ iz (9) ne slijedi da trajektorije uvijek presijecaju, no tada je $Q^* \in \partial D$.

Korang matrice sistema(9) ukazuje na broj nezavisnih pravaca po kojima treba pomjeriti ishodnu tačku trajektorije γ_0 da bi se ostvarilo presijecanje u unutrašnjoj fokalnoj tački. Da bi se i u tački $Q^* \in \partial D$ presijecale bliske trajektorije potrebno je da rang(8) bude manji od $n-1$ .Zbog svega ovoga korang Jakobijeve matrice opravdano je zvati višestrukošću fokalne tačke.

Predpostavimo da postoji obvojnica $(n-1)$ parametarske familije γ_α .

Teorema 6. Fokalna tačka granice oblasti mogućih kretanja duž trajektorije γ_0 se poklapa sa zajedničkom tačkom obvojnice familije γ_α i trajektorije γ_0 .

)* Dobijena relacija predstavlja takozvanu asihronu varijaciju.

)** Jasno, da pod presijecanjem podrazumijevamo presijecanje u linearnoj aproksimaciji.

Dokaz. Pretpostavimo, da postoji obvojnica i da se ona zadaje jednačinom $f(Q)=0$ koja u D odredjuje regularnu)* hiperpovrš. Neka tački dodira trajektorija $\tilde{C}_\alpha$ i obvojnice odgovara trenutak $t^*(\alpha)$. Tada je u nekoj okolini tačke Q, na ∂D

$$f(Q(t^*(\alpha),\alpha))\equiv 0$$

Diferencirajući prethodnu identičnost po α dobijamo

$$\frac{\partial f}{\partial Q}\left(\frac{\partial Q}{\partial \alpha}+\frac{\partial Q}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial \alpha}\right)=0 .$$

Uslov dodira je

$$(10)\qquad \left\langle \left.\frac{\partial f}{\partial Q}\right|_{Q^*}, \left.\frac{\partial Q}{\partial t}\right|_{t^*}\right\rangle = 0 .$$

Slijedi

$$\frac{\partial f}{\partial Q}\frac{\partial Q}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial \alpha}=0 ,$$

tj.

$$(11)\qquad \left.\frac{\partial f}{\partial Q}\right|_{Q^*}\left.\frac{\partial Q}{\partial \alpha}\right|_{(\alpha,t^*)}=0 .$$

Iz (10) i (11) i uslova regularnosti obvojnice dobijamo

$$\det \left.\frac{\partial Q}{\partial(\alpha,t)}\right|_{(\alpha,t^*)}=0 ,$$

što i dokazuje teoremu.

<u>Definicija 4.</u> Geometrijsko mjesto fokalnih tačaka granice oblasti mogućih kretanja zove se kaustika.

Naziv potiče iz geometrijske optike. Tamo je kaustika obvojnica familije zraka i može se primijetiti, na pr., na zidu osvijetljenom zracima odbijenim od neke glatke iskrivljene površi [4]. Na kaustici geometrijska optika predskazuje beskonačnu intezivnost svetlosti (Caustic-vruć). Kaustika definisana u smislu definicije(4) imaće važnu ulogu pri integraljenju Hamilton-Jakobijeve jednačine. U opštem slučaju ona predstavlja mnogostrukost dimenzije $(n-1)$ koja može imati razne neregularnosti.

)* Regularna u smislu da je $\operatorname{grad} f=\frac{\partial f}{\partial Q}\neq 0$

Primijetimo da definisano preslikavanje $\mathcal{F}$ može imati pri $\alpha = 0$ razne kritične tačke kojima odgovaraju različite vrijednosti parametra t ,te u tom smislu možemo govoriti o prvoj, drugoj, itd. fokalnoj tački granice ∂D duž trajektorije γ_0 . Jasno da prvoj fokalnoj tački odgovara najbliža nuli vrijednost parametra t za koju se anulira jakobijan preslikavanja $\mathcal{F}$. Analogno možemo govoriti o prvoj, drugoj, itd. kaustici. Mi ćemo nadalje govoreći o fokalnoj tački imati u vidu prvu fokalnu tačku.

Po pravilu, odrediti kaustiku u nekom konkretnom slučaju je složeno. Naime, mali je broj slučajeva kada mozemo eksplicitno napisati jednačine kaustike. Navešćemo nekoliko primjera koji ne zahtijevaju previse složena računanja.

Primjer 1. $M = \mathbb{R}^2\{q_1, q_2\}$; $T = \frac{1}{2}(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2)$, $\Pi = -\frac{1}{2}(q_1^2 + \omega^2 q_2^2)$.

Oblast mogućih kretanja je

$$D = \{(q_1, q_2) : q_1^2 + \omega^2 q_2^2 \geqslant 2h\}, \quad h > 0$$

a parametarske jednačine granice ∂D

$$q_1^0 = \sqrt{2h}\cos\varphi \quad , \quad q_2^0 = \frac{\sqrt{2h}}{\omega}\sin\varphi ,$$

a jednačine kretanja sa pocetnim uslovima na ∂D su

$$q_1 = \sqrt{2h}\cos\varphi\, ch\, t \, , \quad q_2 = \frac{\sqrt{2h}}{\omega}\sin\varphi\, ch\,\omega t$$

Dalje je

$$\det \frac{\partial q}{\partial(t,\varphi)} = \det \begin{vmatrix} \cos\varphi\, sh\, t & -\sin\varphi\, ch\, t \\ \omega\sin\varphi\, sh\, t & \cos\varphi\, ch\,\omega t \end{vmatrix}$$

što je različito od nule za $\forall t \in (0, \infty)$ i $\forall \varphi$ .Znači, u ovom primjeru granica oblasti mogućih kretanja nema fokalnih tačaka. Za $\omega = 1$ situacija je prikazana na slici 4.

Sl. 4

Primjer 2. $M = R^2\{q_1, q_2\}$, $T = \frac{1}{2}(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2)$, $\Pi = \frac{1}{2}(q_1^2 + \omega^2 q_2^2)$

Oblast mogućih kretanja i jednačine granice ∂D su:

$$D = \{(q_1, q_2) : q_1^2 + \omega^2 q_2^2 \leq 2h\}, \quad h > 0$$

$$\partial D : q_1^0 = \sqrt{2h}\cos\varphi, \quad q_2^0 = \frac{\sqrt{2h}}{\omega}\sin\varphi$$

a jednačina kretanja

$$q_1 = \sqrt{2h}\cos\varphi\cos t, \quad q_2 = \frac{\sqrt{2h}}{\omega}\sin\varphi\cos\omega t$$

Kaustiku odredjujemo iz jednačine

$$\det\frac{\partial q}{\partial(t,\varphi)} = \frac{1}{\omega}\cos^2\varphi\sin t^*\cos\omega t^* + \sin^2\varphi\cos t^*\sin\omega t^* = 0 \tag{12}$$

Razmotrimo prvo slučaj kada je $\omega = 2$. Iz (12) nalazimo

$$t^* = \operatorname{arctg}\sqrt{1 + tg^2\varphi}$$

pa su parametarske jednačine kaustike

$$q_1^* = \sqrt{2h}\,\frac{\cos\varphi}{\sqrt{1 + 2tg^2\varphi}}, \quad q_2^* = -\sqrt{2h}\sin\varphi\,\frac{tg^2\varphi}{1 + 2tg^2\varphi}$$

Dobijena kriva je zatvorena sa četiri singularne tačke(sl.4.). Analiza za ostale vrijednosti parametra ω ukazuje na slično ponašanje kaustike. Evolucija kaustike pri promjeni parametra ω od 0 do ∞ prikazana je na slici 5. Primijetimo da se za $\omega = 1$ kaustika degeneriše u tačku.

Primjer 3. $M = R^2\{q_1, q_2\}$, $T = \frac{1}{2}(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2)$, $\Pi = \frac{1}{2}(q_1^2 - a^2 q_2^2)$

$a = const$

Uzmimo da je vrijednost potpune energije h negativan. U ovom primjeru je:

$$D = \{(q_1, q_2) : q_1^2 - a^2 q_2^2 \leq \ldots\}$$

$$\partial D : q_1^0 = \sqrt{-2h}\,\operatorname{sh}\psi, \quad q_2^0 = \ldots$$

Jednačine kretanja sa početnim uslovima na ∂D su

$$q_1 = \sqrt{-2h}\,\operatorname{sh}\psi\cos t, \quad q_2 = -\frac{\sqrt{-2h}}{a}\operatorname{ch}\psi\,\operatorname{ch}\ldots$$

Ako sračunamo jakobijan preslikavanja F dobijamo

$$\Delta(t,\psi) = \det \frac{\partial Q}{\partial(t,\psi)} = \frac{1}{a} sh^2\psi \sin t\, ch\, at + ch^2\psi\, ch\, at$$

za $\psi = 0$ je $\Delta(t,0) = \cos t\, ch\, at$ pa iz uslova $\Delta(t^*,0) = 0$ dobijamo $t^* = \frac{\pi}{2}$ .Koordinate fokalne tačke granice ∂D duz trajektorije koja izlazi iz tačke $\psi = 0$ su:

$$Q_1^* = 0 \quad , \quad Q_2^* = -\frac{\sqrt{-2h}}{a}\, ch\, \frac{a\pi}{2} \, .$$

Pošto je

$$\frac{\partial}{\partial t}\Delta(t,\psi)\Big|_{(\frac{\pi}{2},0)} \neq 0 \ ,$$

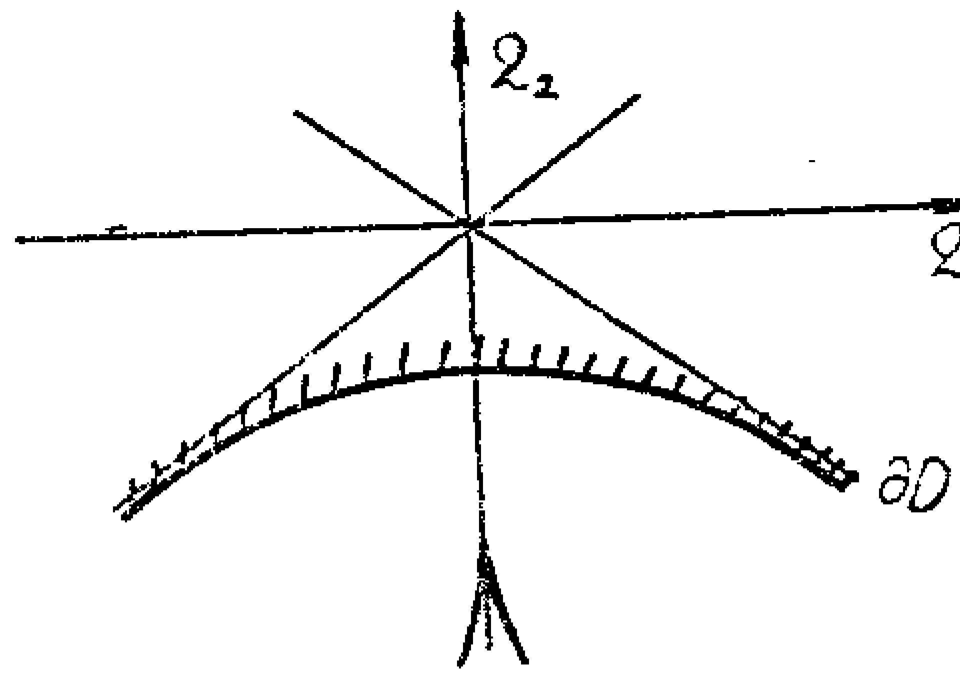
mozemo riješiti po t jednačinu $\Delta(t,\psi) = 0$ u okolini tačke $(\frac{\pi}{2},0)$. Dobijamo

$$t^* = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{a}\, cth\, \frac{a\pi}{2}\psi^2 + \dots ,$$

sto poslije zamjene u jednačine kretanja daje

$$Q_1^* = -\frac{\sqrt{-2h}}{a}\, cth\, \frac{a\pi}{2}\psi^3 + \dots ,$$
$$Q_2^* = -\frac{\sqrt{-2h}}{a}\, ch\, \frac{a\pi}{2}\left(1 + \frac{3}{2}\psi^2 + \dots\right)$$

Dakle, u tački $\left(0, -\frac{\sqrt{-2h}}{a}\, ch\, \frac{a\pi}{2}\right)$ kaustika ima singularnu-povratnu tačku(sl.6.)

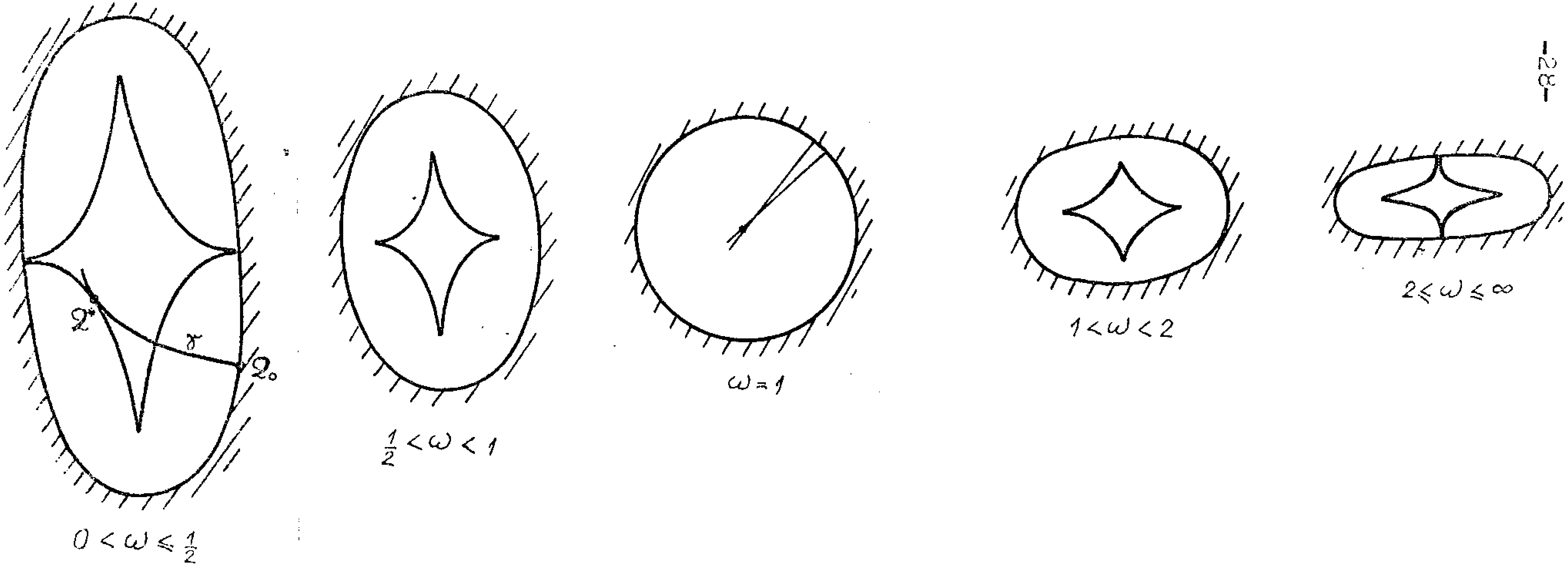


sl.6

1.5. Analogon Jakobijeve teoreme.

Za dalja razmatranja pogodno je uvesti sledeće oznake, uobičajene u diferencijalnoj geometriji. Neka je $V \in T_Q M$ -tangentni vektor, a $\gamma : [0,1] \to M$ geodezijska linija koja zadovoljava uslove: $\gamma(0) = Q$, $\dot\gamma(0) = V$. Tačka $\gamma(1)$ se zove eksponent tangentnog vektora V , i označava se sa $\exp_Q V$. Sada se geodezijska γ može zapisati u obliku

$$\gamma(u) = \exp_Q(uV) \ ,$$


$\mathcal{Q}^*$
γ
$\mathcal{Q}_0$
$0 < \omega \leq \frac{1}{2}$
$\frac{1}{2} < \omega < 1$
$\omega = 1$
$1 < \omega < 2$
$2 \leq \omega \leq \infty$

sl. 5

i uvesti glatko preslikavanje, takozvano eksponencijalno preslikavanje

$$Exp : TM \to M$$

odredjeno sa
$$Exp(q,v) = exp_q v .$$

Neka je dalje N podmnogostrukost u M i $\perp N$ normalno raslojenje, tj.

$$\perp N = \{(q,v) \in TM : v \in T_q \text{ i } v \perp T_q N\} ,$$

a sa
$$exp : \perp N \to M$$

označimo restrikciju eksponencijalnog preslikavanja na $\perp N$.
Neka je r zrak koji spaja O sa V u prostoru $\perp_q N$ $(r = uV)$ - sloju raslojenja $\perp N$ nad q . Tada se, po definiciji, tačka $exp\, V$ zove fokalna tačka podmnogostrukosti N duž krive $exp\, r$ ako je ona kritična vrijednost uočen-og preslikavanja [9] .

Uočimo hiperpovrš Σ_ε razmotrenu u 1.3.

Lema 6. Unutrašnje fokalne tačke granice oblasti mogućih kretanja se poklapaju sa fokalnim tačkama hiperpovrši Σ_ε

Dokaz. Pošto je unutar oblasti D svaka trajektorija glatka regularna kriva možemo na njoj uvesti prirodni parametar-dužinu luka krive i tada ona prelazi u" standardnu" geodezijsku. Geodezijske koje izlaze iz granice oblasti mogućih kretanja na osnovu teoreme 4, ortogonalno presijecaju Σ_ε .

Razmotrimo eksponencijalno preslikavanje normalnog raslojenja hiperpovrši Σ_ε

$$exp : \perp\Sigma_\varepsilon \to D$$

Ono se zadaje formulom

$$exp(q, sV) = exp_q\, sV$$

koja odredjuje geodezijsku liniju, koja izlazi iz tačke $q \in \Sigma_\varepsilon$ u pravcu normale ($|V| = 1$). Dobijene geodezijske se poklapaju sa trajektorijama koje izlaze sa granice ∂D (dvije geodezijske koje se dodiruju u nekoj tački se poklapaju). Znači, unutar oblasti D poklapaju se kritične vrijednosti preslikavanja F i $\exp$, što i dokazuje lemu.

Izvedena lema omogućuje da neka svojstva fokalnih tačaka u rimanskim mnogostrukostima prenesemo na oblasti mogućih kretanja s krajem.

Neka je, kao i ranije $\gamma(t)$ trajektorija koja izlazi iz granice ∂D i $\gamma(t^*)$ prva fokalna tačka.

<u>Teorema 7.</u> (Analogon Jakobijeve teoreme)* Iza prve fokalne tačke trajektorija $\gamma(t)$ ne minimizira rastojanje do ∂D.

Drugim riječima, rastojanje tačaka $\gamma(t)$ ($t > t^*$) do granice ∂D se ne mjeri duž trajektorije $\gamma(t)$.

Dokaz. Pošto se fokalne tačke granice ∂D unutar D poklapaju sa fokalnim tačkama hipepovrši Σ_ε, $\gamma(t)$ ne minimizira rastojanje do Σ_ε [9 ,glava XI] .Na osnovu leme 5. rastojanje svake tačke $q \in \Sigma_\varepsilon$ do ∂D je jednako ε tj. ne postoji odsječak krive dužine manje od ε koji spaja tačke hiperpovrši Σ_ε i granice ∂D. Odavde, neposredno, slijedi tvrdjenje za unutrašnje fokalne tačke. Ako je, pak, prva fokalna tačka $\gamma(t^*)$ na granici ∂D tada je trajektorija $\gamma(t)$ trajektorija libracionog kretanja. Tačke $\gamma(t^*+\sigma)$ i $\gamma(t^*-\sigma)$ se poklapaju, i odsječak $\gamma([0,t^*-\sigma])$ je kraći od segmenta $\gamma([0,t^*+\sigma])$.

Primijetimo da se analogno tvrdjenje može formulisati i za okolinu tačke $\gamma(0)$ u ∂D.

Ako je $\gamma([0,t_1])$ segmet trajektorije $\gamma(t)$

)* Analogno tvrdjenje za takozvane kinetičke fokuse pripada Jakobiju [15] kojem nema fokalnih tačaka granice ∂D ,koristeći tvrdjenja [9] i rasudjujući kao i pri dokazu prethodne teoreme dolazimo zaključka da postoji okolina segmeta u D i okolina V tačke $\gamma(0)$ u ∂D , tako da γ minimizira rastojanje u klasi dio dio glatkih krivih koje spajaju tačke iz V sa $\gamma(t)$ za $t < t_1$.

ači, prvu fokalnu tačku mogli smo definisati i na sledeći način: čka $\gamma(t^*)$ je prva fokalna tačka granice ∂D duž γ ako $\gamma([0,t_1])$ minimizira duzinu luka do okoline V za $t_1 > t^*$,a minimizira za $t_1 < t^*$.

Na kraju, primijetimo da kaustika obično razdvaja last moguceg kretanja na oblast do granice i na "unutrašnju" blast ograničenu kaustikom (vidi primjere). No odavde ne slijedi se tačke koje pripadaju unutrašnjoj oblasti uvijek nalaze iza kalne tačke odgovarajuće trajektorije. Na ovu cinjenicu ukazuje orema 6. No, ona slijedi iz sledećeg rasudjivanja.Po Kozlovlje-j teoremi svaku tačku oblasti mogucih kretanja pa samim tim i čku iz unutrašnje oblasti mozemo spojiti najkraćom krivom sa granim . Ako bi presječna tačka uočene krive i kaustike bila fokalna ta-a,to bi na osnovu teoreme 7 postajala kraća kriva što protivurječi zlovljevoj teoremi. To praktično znači da kaustika u oblastima sa vezanom granicom mora imati neregularnosti.

2. O lokalnim rješenjima Hamilton-Jakobijeve jednačine

Zadatak integraljenja kanonskog sistema jednačina, dobro je poznato, može se zamijeniti ekvivalentnim zadatkom nalaženja potpunog integrala jedne nelinearne parcijalne diferencijalne jednačine prvog reda- Hamilton-Jakobijeve jednačine. Prvi je Hamilton 1834. godine, razvijajući optičko-mehaničku analogiju, našao vezu izmedju opšteg rješenja kanonskog sistema diferencijalnih jednačina i rješenja-karakteristične funkcije-dveju parcijalnih jednačina. Jakobi je pokazao da je jedna od Hamiltonovih parcijalnih jednačina posledica druge, te sa aspekta teorije integraljenja predstavlja nepotrebno usložnjenje, i razvio je osnove metoda danas poznatog kao Hamilton-Jakobijev metod [13] . U osnovi ovog metoda leži poznata Hamilton-Jakobijeva teorema, koju za klasu ovdje razmatranih sistema, kada hamiltonijan ne zavisi od vremena, možemo formulisati na sledeći način:

<u>Hamilton-Jakobijeva teorema</u> [13 , XXI predavanje] . Ako je $W(Q,\alpha,h)$, $\alpha=(\alpha_1,\dots,\alpha_{n-1})$ neki potpuni integral Hamilton-Jakobijeve jednačine)*

$$(1)\qquad H\left(Q,\frac{\partial W}{\partial Q}\right)=h\,,$$

integrali jednačina kretanja mogu se zapisati u obliku

$$(2)\qquad \frac{\partial W}{\partial Q}=P\,,\quad \frac{\partial W}{\partial \alpha}=\beta\,,\quad \frac{\partial W}{\partial h}=t-\tau$$

gdje su α i $\beta=(\beta_1,\dots,\beta_{n-1})$, τ proizvoljne konstante a h energetska konstanta.

)* Napomenimo da je u literaturi uobičajeno da se pod Hamilton-Jakobijevom jednačinom podrazumijeva jednačina

$$(*)\qquad \frac{\partial V}{\partial t}+H\left(Q,\frac{\partial V}{\partial Q}\right)=0\,,$$

dok se jednačina(1) zove skraćena ili modifikovana Hamilton-Jakobijeva jednačina. Pokazuje se, da iz potpunog integrala $W(Q,\alpha,h)$ možemo dobiti potpuni integral jednačine (*) u obliku $V=-h(t-\tau)+W$ eliminacijom konstante h uz pomoć jednačine $\frac{\partial W}{\partial h}=t-\tau$. Kako razmatramo samo jednačinu oblika (1) zvaćemo je prosto Hamilton-Jakobijeva jednačina.

Potpuni integral $W(q,\alpha,h)$ jednačine(1) je rješenje oje osim konstante h sadrži još $n-1$ konstantu α i koje za- adovoljava uslov

$$\det \frac{\partial^2 W}{\partial q\,\partial \beta} \neq 0\ , \qquad \beta=(\alpha,h).$$

Za sisteme, koje razmatramo, Hamiltonova funkcija e

$$H(q,p)=\frac{1}{2}<A(q)p,p>+\Pi(q),$$

a Hamilton-Jakobijeva jednačina ima oblik

$$(3)\qquad \frac{1}{2}<A(q)\frac{\partial W}{\partial q},\frac{\partial W}{\partial q}>+\Pi(q)=h.$$

Hamilton-Jakobijev metod, sadržaj kojega čini pri- jena Hamilton-Jakobijeve jednačine u integraljenju jednačina ana- itičke mehanike, predstavlja moćno sredstvo za rješavanje dinami- kih zadataka. Nažalost, ne postoji neki opšti metod nalaženja po- punog integrala parcijalne jednačine. Sam Jakobi je, rešavajući epierov zadatak, uvodjenjem sfernih koordinata uspio da razbije arcijalnu jednačinu na nekoliko jednačina od kojih je svaka sadržala o jednu promenjivu i izvod traženog rješenja po toj promjenjivoj, to predstavlja suštinu takozvanog metoda razdvajanja promjenjivih, oji je i postao osnovni metod za integraljenje parcijalnih jednačina rvog reda. Mehaniku druge polovine XIX i prve polovine XX vijeka načajno karakterišu napori da se razradi metod razdvajanja prome- jivih. Ovim problemima bavili su istaknuti naučnici toga vremena: iuvil (Liouvlle) , Štekel (Stäkel),Imšenicki(Имшенецкий),Morera Morera),Levi-Civita(Levi-Civita), Forbat (Forbat),Burgati(Burgatti) i dr.. Burgati je predpostavljao da postoji $n+1$ tip Hamiltonove unkcije koja dopušta razdvajanje promenjivih. Znatno kasnije Jarov Jarovoj(Яров-Яровой) je u radu [41] dokazao da su Burgatijevi ezultati opšti, tj. da daju sve slučajeve koji se mogu riješiti azdvajanjem promenjivih. U radu [41] je dat i kratak pregled razvo- ja metoda.

Prema tome, i ako mnogi konkretni zadaci mogu biti riješeni ovim metodom, problem integraljenja Hamilton Jakobijeve jednačine je i dalje aktuelan.

Umjesto da tražimo potpuni integral jednačine (3) pretpostavićemo znatno manje, da znamo neko parcijalno rješenje $W(\underset{\sim}{q})$ (rješenje koje ne sadrži konstante) Hamilton-Jakobijeve jednačine. Jasno, da pomoću parcijalnog rješenja ne mozemo dobiti opšte rješenje kanonskog sistema diferencijalnih jednačina, ali analitički takvo rješenje možemo iskoristiti za integraljenje polovine potpunog sistema kanonskih jednačina. Naime, uz pomoć n jednačina

$$p = \frac{\partial W}{\partial q}$$

iz druge grupe kanonskih jednačina dobijamo sistem od n diferencijalnih jednačina

$$\dot{q} = - \left.\frac{\partial H}{\partial p}\right|_{p = \frac{\partial W}{\partial q}}$$

iz čijeg opšteg rješenja $q = q(t, C), C = (C_1, \ldots, C_n)$ dobijamo n parametarsku familiju polaznog kanonskog sistema.

Osim toga, parcijalno rješenje dopušta i prozračnu interpretaciju u faznom prostoru. Uočimo u faznom prostoru mnogostrukost L odredjenu na sledeći način

$$L = \left\{ (q, p) : \; p = \frac{\partial W}{\partial q} \right\},$$

i potražimo izvod jednačina

$$\frac{\partial W}{\partial q} - p$$

u smislu kanonskih jednačina. Imaćemo

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial W}{\partial q} - p \right) = \frac{\partial^2 W}{\partial q^2} \, \dot{q} - \dot{p}$$

$$= \frac{\partial^2 W}{\partial q^2} \, \frac{\partial H}{\partial p} + \frac{\partial H}{\partial q} .$$

S druge strane diferencirajući (1) po koordinatama q dobijamo

$$\frac{\partial}{\partial q} H\left(q, \frac{\partial W}{\partial q}\right) = \frac{\partial H}{\partial q} + \frac{\partial^2 W}{\partial q^2} \, \frac{\partial H}{\partial p} \equiv 0$$

pa je

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial W}{\partial Q}-p\right)\Big|_{(Q(t),\,p(t))}=0\ ,$$

tj.

$$\left(\frac{\partial W}{\partial Q}-p\right)\Big|_{(Q(t),\,p(t))}=const.$$

Znači, ako je u nekom trenutku fazna trajektorija na mnogostrukosti L, tada ona ostaje na njoj. Drugim riječima, parcijalno rješenje Hamilton-Jakobijeve jednačine odredjuje u faznom prostoru n dimenzionu mnogostrukost, takozvanu Lagranžovu mnogostrukost, koja je invarjantna u odnosu na kanonski sistem jednačina.

Primijetimo još, da u nekim slučajevima ne moramo imati neko konkretno rješenje, već da je dovoljno utvrditi egzistenciju rješenja odredjenog tipa, tj. rješenja sa odredjenim osobinama, da bi na osnovu toga mogli dolaziti do odredjenih informacija o kretanju kvalitativnog karaktera.Ova ideja biće nadalje podrobnije razradjivana.

Predpostavljajući da znamo rješenje Hamilton-Jakobijeve jednačine prećutno smo podrazumijevali da je takvo rješenje definisano u nekom dijelu oblasti mogućih kretanja. U vezi sa tim zadatak nalaženja parcijalnih rješenja, koji ćemo zvati integraljenje Hamilton-Jakobijeve jednačine, razdvaja se na dva dijela:

1) Zadatak nalaženja lokalnog rješenja, tj. rješenja definisanog, u krajnjem slučaju, u maloj okolini neke tačke obalasti mogućih kretanja;

2) Zadatak nalaženja globalnog rješenja-rješenja definisanog u cijeloj oblasti mogućih kretanja.

Prvom zadatku je i posvećen ovaj dio rada a drugi zadatak biće proučen u narednom,trećem,dijelu.

Sa tačke gledišta lokalne teorije od posebnog interesa je integraljenje Hamilton-Jakobijeve jednačine u okolini ravnotežnih položaja-tačaka u konfiguracionom prostoru koje odgovaraju ravnotežnim stanjima u faznom prostoru. Da bi obrazložili ovu tvrdnju dokazaćemo jedno tvrdjenje koje se odnosi na kanonski sistem jednačina, dopunjavajući na taj način poznatu teoremu o ispravljanju iz teorije običnih diferencijalnih jednačina)* [5], a koje nijesmo sreli u literaturi.

Iz Dorbuove (Darboux) teoreme [4] slijedi da u okolini neke tačke $(p_0, q_0) \in R^{2n}$ možemo izabrati sistem lokalnih koordinata (P, Q), takav da forma $\omega^2 = dp \wedge dq$ ponovo poprimi standardni oblik $dP \wedge dQ$. Odavde slijedi da se prelaz $(p, q) \to (P, Q)$ ostvaruje kanonskom transformacijom (očuvava se simpleksna struktura, tj. $dP \wedge dQ = dp \wedge dq$). Dokaz Dorbuove teoreme dopušta proizvoljan izbor prve nove koordinate P_1. Tačnije, za prvu koordinatu P_1 se može uzeti proizvoljna glatka funkcija čiji je diferencijal u tački (p_0, q_0) različit od nule. Kako su kritične tačke hamiltonijana ravnotežna stanja, to se u okolini tačaka faznog prostora koje ne predstavljaju ravnotežna stanja može za prvu koordinatu uzeti Hamiltonova funkcija, tj. $P_1 = H$. Tada dobijena kanonska transformacija prevodi kanonski sistem

$$\frac{dp}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q}, \quad \frac{dq}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p}$$

u sistem sa hamiltonijanom $\tilde{H} = H(p(P,Q), q(P,Q)) \equiv P_1$ tj.

$$\frac{dP}{dt} = 0, \quad \frac{dQ}{dt} = \frac{\partial \tilde{H}}{\partial P}, \quad \frac{\partial \tilde{H}}{\partial P} = (1, 0, \dots, 0).$$

Tako je dokazana

<u>Teorema 8.</u> U okolini nekritičnih tačaka Hamiltonove funkcije kanonski sistem se može "ispraviti" kanonskom transformacijom.

Odavde slijedi da u okolini nekritičnih tačaka fazne trajektorije imaju prostu strukturu. One su s tačnošću do lokalnog difeomorfizma paralelne prave linije.

Transformisanom sistemu odgovara Hamilton-Jakobijeva jednačina $\frac{\partial W}{\partial Q_1} = h$, koja se jednostavno integrali.

Prema tome, zadržavajući se u okvirima Hamiltonovog formalizma, integraljenje u okolini tačaka koje odgovaraju neravnotežnim stanjima ne predstavlja principijelne teškoće i sa

---

)* U literaturi na ruskom jeziku teorema se navodi kao теорема о выпрямлении.

aspekta kvalitativne analize nije od nekog interesa. Znatno složenija i vrijedna pažnje je situacija kada je tačka $(Q_0, P=0)$ ravnotezno stanje.

2.1. Integraljenje Hamilton-Jakobijeve jednačine u okolini ravnotežnih položaja

Posto je $H(Q,p) = T(Q,p) + \Pi(Q) = h$, u ravnotežnom stanju je potpuna energija jednaka vrijednosti potencijalne energije u ravnotežnom položaju Q_0. Potencijalnu energiju zadajemo s tacnošcu do aditivne konstante pa uzimamo da je $\Pi(Q_0)=0$. Tada je i $h=0$. Neumanjujući opštost možemo predpostaviti da je ravnotežni položaj u koordinantnom početku konfiguracionog prostora, tj. $Q_0 = 0$. Kako je kritična vrijednost potencijalne energije jednaka konstanti potpunog integrala energije $(h=0)$, ravnotežni položaj pripada granici oblasti mogucih kretanja. Dakle, da bi okolina ravnotežnog položaja pripadala oblasti mogućih kretanja neophodno je da u ravnotežnom položaju potencijalna energija ima lokalni maksimum. Sada Hamilton-Jakobijeva jednačina poprima oblik

$$\frac{1}{2} \left\langle A(Q)\frac{\partial W}{\partial Q}, \frac{\partial W}{\partial Q} \right\rangle + \Pi(Q) = 0 \tag{4}$$

Ograničicemo se na analiticke sisteme, tj. predpostavljat ćemo da su potencijalna energija $\Pi(Q)$ i koeficijenti kinetičke energije analitičke funkcije u nekoj okolini ravnotežnog položaja. Pokušaćemo da ispitamo pod kojim uslovima, pri navedenim predpostavkama, postoji analitičko rješenje jednačine (4) u okolini tačke $Q=0$.

2.1.1. Formalna analiza

Razlažući koeficijente matrice $A(Q)$ po stepenima koordinata možemo kinetičku energiju napisati u obliku

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}(0)\, p_i p_j + (*) ,$$

ije je $\sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}(0)p_i p_j$ pozitivno definitna kvadratna forma, a sa $(*)$ smo označili zbir clanova reda većeg od dva u odnosu na oordinate i impulse.

Takodje, razložimo i potencijalnu energiju u ed po stepenima koordinata

$$\Pi = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}\left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial q_i \partial q_j}\right)_{q=0} q_i q_j + (*).$$

Iz teoreme o svodjenju kvadratnih formi na zbir kvadrata" [3] slijedi da možemo odabrati linearnu ransformaciju (ona je i kanonska) $q \to x$, $p \to y$, tako da u novim oordinatama kinetička i potencijalna energija poprime oblik

$$T(x,y) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} y_i^2 + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} A^{ij}(x)y_i y_j, \quad A^{ij}(0) = 0$$

$$\Pi(x) = \sum_{i=2}^{\infty} \Pi_i, \quad \Pi_2 = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^2.$$

Pošto su $A^{ij}(x)$ analitičke funkcije možemo h u okolini tačke $x = 0$ predstaviti apsulutno konvergentim tepenim redovima

$$A^{ij}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k^{ij}(x),$$

dje su

$$A_k^{ij}(x) = \sum_{\alpha_1+\cdots+\alpha_n=k} a^{ij}_{\alpha_1\ldots\alpha_n} x_1^{\alpha_1}\ldots x_n^{\alpha_n}$$

orme k - tog stepena koje sadrže sve članove stepena k u razvoju funkcije $A^{ij}(x)$.

Analogno, stavićemo

$$\Pi_k(x) = \sum_{\alpha_1+\cdots+\alpha_n=k} c_{\alpha_1\ldots\alpha_n} x_1^{\alpha_1}\ldots x_n^{\alpha_n}, \quad (k \geq 2).$$

Sada Hamilton-Jakobijeva jednačina (4) ima oblik

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial W}{\partial x_i}\right)^2 + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{\infty} A_k^{ij}(x)\right)\frac{\partial W}{\partial x_i}\frac{\partial W}{\partial x_j} + \sum_{k=2}^{\infty}\Pi_k(x) = 0.$$

Potražimo rješenje ove jednačine u obliku reda

$$(6) \qquad W = \sum_{k=2}^{\infty} W_k ,$$

gdje su
$$W_k = \sum_{\alpha_1+\dots+\alpha_n=k} a_{\alpha_1\dots\alpha_n} x_1^{\alpha_1}\dots x_n^{\alpha_n}.$$

Postavljajući red (6) u jednačinu (5) dobijamo

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\Big(\sum_{l=2}^{\infty}\frac{\partial W_l}{\partial x_i}\Big)^2+\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}\Big(\sum_{k=1}^{\infty}A_k^{ij}\Big)\Big(\sum_{m=2}^{\infty}\frac{\partial W_m}{\partial x_i}\Big)\Big(\sum_{m=2}^{\infty}\frac{\partial W_m}{\partial x_j}\Big)+\sum_{k=2}^{\infty}\Pi_k=0.$$

Izdvajajući forme istog stepena, u prvom koraku dobijamo

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\Big(\frac{\partial W_2}{\partial x_i}\Big)^2=-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i^2 ,$$

odakle nalazimo
$$W_2=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\Lambda_i x_i^2 ,$$

gdje su $\Lambda_i = \pm\sqrt{-\lambda_i}\ (i=1,\dots,n)$. Uzmimo, radi odredjenosti, $\Lambda_i = \sqrt{-\lambda_i}$. Primijetimo da je $-\lambda_i \geqslant 0$ jer funkcija $\Pi(x)$ ima u tački $x=0$ maksimum. Za odredjivanje koeficijenata k - te forme $W_k\ (k\geqslant 3)$ dobijamo rekurentne obrazce

$$\sum_{i=1}^{n}\Lambda_i x_i\frac{\partial W_k}{\partial x_i}=-\Pi_k-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{l=3}^{k-1}\frac{\partial W_l}{\partial x_i}\frac{\partial W_{k+2-l}}{\partial x_i}$$
$$-\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}\sum_{m=1}^{k-2}A_m^{ij}\sum_{l=2}^{k-m}\frac{\partial W_l}{\partial x_i}\frac{\partial W_{k+2-m-l}}{\partial x_j} ;$$

koje možemo zapisati u obliku

$$\sum_{\alpha_1+\dots+\alpha_n=k}(\alpha_1\Lambda_1+\dots+\alpha_n\Lambda_n)a_{\alpha_1\dots\alpha_n}x_1^{\alpha_1}\dots x_n^{\alpha_n}=\sum_{\alpha_1+\dots+\alpha_n=k}d_{\alpha_1\dots\alpha_n}x_1^{\alpha_1}\dots x_n^{\alpha_n},$$

gdje koeficijenti k - te forme $d_{\alpha_1\dots\alpha_n}$ na odredjen način zavise od koeficijenata poznatih formi $\Pi_l\ (l=2,\dots,k)$, $A_m^{ij}\ (m=1,\dots,k-2)$.

Iz posljednje relacije jednoznačno odredjujemo koeficijente $a_{\alpha_1\dots\alpha_n}$ u koliko su izrazi

$$\alpha_1\lambda_1 + \dots + \alpha_n\lambda_n$$

različiti od nule, za cijele nenegativne brojeve α_s $(s=1,\dots,n)$, koji zadovoljavaju uslov

$$\alpha_1 + \dots + \alpha_n = k\,, \qquad k = 3, 4, \dots$$

Pri našem izboru brojeva λ_i $(\lambda_i = \sqrt{-a_i})$, da bi ovaj uslov bio ispunjen, potrebno je i dovoljno da bude $\lambda_i \neq 0$ $(i=1,\dots,n)$, tj. $\lambda_1\cdots\lambda_n \neq 0$. Zaista, ako je $\lambda_i \neq 0$ za svako $i \in \{1,\dots,n\}$, očigledno je $\alpha_1\lambda_1 + \dots + \alpha_n\lambda_n \neq 0$. Obrnuto, neka je neko $\lambda_m = 0$. Tada uvijek, za svako k, možemo uočiti kombinaciju $\alpha_i = 0$ za $i \neq m$ i $\alpha_i = k$ za $i = m$, za koju je $\alpha_1\lambda_1 + \dots + \alpha_n\lambda_n = 0$.

Znači, kada je $\lambda_i \neq 0$ $(i=1,\dots,n)$ nalazimo koeficijente forme W_k

$$a_{\alpha_1\dots\alpha_n} = \frac{c_{\alpha_1\dots\alpha_n}}{\alpha_1\lambda_1 + \dots + \alpha_n\lambda_n}\,, \qquad \alpha_1 + \dots + \alpha_n = k\,.$$

Uslov $\lambda_i \neq 0$ $(i=1,\dots,n)$ je ekvivalentan uslovu nesingularnosti hesijana potencijalne energije u tački maksimuma, koji u polaznim koordinatama zapisujemo u obliku)*

$$\det \frac{\partial^2 \Pi}{\partial Q^2}\Big|_{Q=0} \neq 0\,.$$

Prema tome, kada potencijalna energija u ravnotežnom položaju ima nesingularni maksimum može se odrediti stepen-i red

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i^2 + \sum_{\alpha_1+\dots+\alpha_n=3}^{\infty} a_{\alpha_1\dots\alpha_n} x_1^{\alpha_1}\cdots x_n^{\alpha_n}\,,$$

)* Nesingularnost hesijana je invarjantna u odnosu na zamjenu koordinata.

koji formalno zadovoljava Hamilton-Jakobijevu jednačinu. Dalje, ćemo pokazati da ovaj red predstavlja analitičku funkciju tako da suma ovog apsulutno konvergentnog, u nekoj okolini koordinatnog početka, reda (označimo je sa $W(x)$) predstavlja traženo rješenje.

2.1.2. Teorema o egzistenciji analitičkog rješenja

U ovom dijelu biće dokazana

Teorema 9. U okolini ravnotežnog položaja, kojem odgovara nesingularni maksimum potencijalne energije, postoji analitičko rješenje Hamilton-Jakobijeve jednačine(5).

Dokaz ćemo sprovesti metodama funkcionalne analize. Prije toga dokažimo neka pomoćna tvrdjenja.

Uočimo sledeću jednačinu

$$(7) \qquad \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial W}{\partial x_i}\right)^2 + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\varepsilon^k A_k^{ij}\right)\frac{\partial W}{\partial x_i}\frac{\partial W}{\partial x_j} + \sum_{k=2}^{\infty}\varepsilon^{k-2}\Pi_k = 0,$$

gdje je ε dovoljno mali realan broj.

Lema 7. Ako pri dovoljno malom ε postoji analitičko rješenje jednačine (7) u kocki $G=\{x: |x_i|\leq 1, i=1,\dots,n\}$, tada postoji i analitičko rješenje jednačine(5) u nekoj okolini koordinantnog početka.

Dokaz. Primijetimo, da ako red $W=\sum_{k=2}^{\infty} W_k$ zadovoljava jednačinu(5) tada red $\overline{W}=\sum_{k=2}^{\infty}\varepsilon^{k-2}W_k$ zadovoljava jednačinu(7). Po predpostavci leme red $\overline{W}=\sum_{k=2}^{\infty}\varepsilon^{k-2}W_k$ je apsolutno konvergentan u oblasti G, no tada je i $\overline{W}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)=\frac{1}{\varepsilon^2}\sum_{k=2}^{\infty}W_k$ apsolutno konvergentan u oblasti $\{x: |x_i|\leq\varepsilon, i=1,\dots,n\}$, odakle slijedi tvrdjenje.

Razmatrimo linearni prostor analitičkih funkcija $f: R^n \to R$, koje se u kocki G predstavljaju apsolutno konvergentnim stepenim redovima

$$f(x)=\sum_{\alpha_1+\dots+\alpha_n=2}^{\infty} a_{\alpha_1\dots\alpha_n} x_1^{\alpha_1}\dots x_n^{\alpha_n}, \quad a_{\alpha_1\dots\alpha_n}\in R.$$

U ovaj prostor uvedimo normu

$$\|f\| = \sum_{\alpha_1+\dots+\alpha_n=2}^{\infty} |a_{\alpha_1\dots\alpha_n}| < \infty .$$

...ista, aksiomi norme su ispunjeni:

1. $\|f\| \geqslant 0$, $\|f\| = 0 \Longleftrightarrow f \equiv 0$;

2. $\|f^{(1)}+f^{(2)}\| = \sum_{\alpha_1+\dots+\alpha_n=2}^{\infty} |a^{(1)}_{\alpha_1\dots\alpha_n} + a^{(2)}_{\alpha_1\dots\alpha_n}|$

$$\leqslant \sum_{\alpha_1+\dots+\alpha_n=2}^{\infty} |a^{(1)}_{\alpha_1\dots\alpha_n}| + |a^{(2)}_{\alpha_1\dots\alpha_n}| = \|f^{(1)}\| + \|f^{(2)}\| \; ;$$

3. $\|\beta f\| = |\beta| \, \|f\|$, $\beta \in R$.

...ednostavno je pokazati da uvedena norma zadovoljava nejednakost

$$\|f^{(1)} \cdot f^{(2)}\| \leqslant \|f^{(1)}\| \, \|f^{(2)}\| . \tag{8}$$

...rostor sa ovako uvedenom normom označićemo sa B.

Sledeća lema utvrdjuje kompletnost prostora B u ...dnosu na metriku koju inducira uvedena norma.

Lema 8. Prostor B je Banahov prostor.

Dokaz. Uočimo jedan Košijev niz $(f^{(k)})$ u ...rostoru B. Tada je

$$d(f^{(m)}, f^{(k)}) = \|f^{(m)} - f^{(k)}\|$$

$$= \sum_{\alpha_1+\dots+\alpha_n=2}^{\infty} |a^{(m)}_{\alpha_1\dots\alpha_n} - a^{(k)}_{\alpha_1\dots\alpha_n}| < \varepsilon \quad \text{za} \quad m > k \geqslant k_0 .$$

ako je

$$|a^{(m)}_{\alpha_1\dots\alpha_n} - a^{(k)}_{\alpha_1\dots\alpha_n}| \leqslant d(f^{(m)}, f^{(k)}) ,$$

, je za svako fiksirano $\alpha_1 \dots \alpha_n$, niz

$$\left(a^{(k)}_{\alpha_1 \dots \alpha_n}\right)_{k=1,2,\dots}$$

ošijev niz u R, a pošto je R kompletan prostor [1] postojaće broj $a_{\alpha_1 \dots \alpha_n}$, takav da

$$a^{(k)}_{\alpha_1 \dots \alpha_n} \to a_{\alpha_1 \dots \alpha_n} \quad \text{kada} \quad k \to \infty .$$

Pokažimo da red

$$\sum_{\alpha_1 + \dots + \alpha_n = 2}^{\infty} |a_{\alpha_1 \dots \alpha_n}|$$

onvergira, tj. da funkcija

$$f = \sum_{\alpha_1 + \dots + \alpha_n = 2}^{\infty} a_{\alpha_1 \dots \alpha_n} x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}$$

ripada prostoru B. Zaista, kako je svaki Košijev niz ograničen, o je

$$d(f^{(k)}, 0) = \sum_{\alpha_1 + \dots + \alpha_n = 2}^{\infty} |a^{(k)}_{\alpha_1 \dots \alpha_n}| \leq a < \infty ,$$

dakle slijedi

$$\sum_{\alpha_1 + \dots + \alpha_n = 2}^{l} |a^{(k)}_{\alpha_1 \dots \alpha_n}| \leq a \quad \text{za} \ \forall k \ i \ \forall l .$$

ustimo li da $k \to \infty$, dobićemo

$$\sum_{\alpha_1 + \dots + \alpha_n = 2}^{l} |a_{\alpha_1 \dots \alpha_n}| \leq a \quad \text{za} \ \forall l ,$$

to znači da je red

$$\sum_{\alpha_1 + \dots + \alpha_n = 2}^{\infty} |a_{\alpha_1 \dots \alpha_n}|$$

onvergentan, odnosno da je funkcija

$$f = \sum_{\alpha_1 + \dots + \alpha_n = 2}^{\infty} a_{\alpha_1 \dots \alpha_n} x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}$$

nalitička u G .

Ostaje, još, da pokažemo da $f^{(k)} \to f$ kad $k \to \infty$ u smislu metrike u B. Imamo,

$$\sum_{\alpha_1+\dots+\alpha_n=2}^{l} \left| a^{(m)}_{\alpha_1\dots\alpha_n} - a^{(k)}_{\alpha_1\dots\alpha_n} \right| < \varepsilon \quad \text{za} \quad m > k \geqslant k_0 \ \text{i} \ \forall l.$$

Pustimo li da $m \to \infty$, dobijamo

$$\sum_{\alpha_1+\dots+\alpha_n=2}^{l} \left| a_{\alpha_1\dots\alpha_n} - a^{(k)}_{\alpha_1\dots\alpha_n} \right| < \varepsilon \quad \text{za} \ \forall l,$$

odakle slijedi

$$\sum_{\alpha_1+\dots+\alpha_n=2}^{\infty} \left| a_{\alpha_1\dots\alpha_n} - a^{(k)}_{\alpha_1\dots\alpha_n} \right| \leqslant \varepsilon \quad \text{za} \ k \geqslant k_0 .$$

Dakle, $d(f^{(k)}, f) \leqslant \varepsilon$ za $k \geqslant k_0$, što i znači da $f^{(k)} \to f$ u smislu uvedene metrike. Znači B je Banahov prostor.

U razmatrani prostor analitičkih funkcija možemo uvesti i sledeću normu

$$\| f \|_1 = \sum_{\alpha_1+\dots+\alpha_n=2}^{\infty} (\alpha_1 + \dots + \alpha_n) \left| a_{\alpha_1\dots\alpha_n} \right| ,$$

i potpuno analogno dokazu prethodne leme pokazati da je ovako normirani prostor, koji ćemo označavati sa A, takodje Banahov.

Dokaz teoreme. Na osnovu leme 7 dovoljno je pokazati egzistenciju analitičkog rješenja jednačine (7) u kocki G.

Jednačinu (7) zapišimo kao $F(W, \varepsilon) = 0$. Uočimo okolinu V tačke $(W_2, 0) \in A \times \mathbb{R}$

$$= \{ (W, \varepsilon) : \| W - W_2 \|_1 < a, \ |\varepsilon| < b \} .$$

gdje je $\quad W_2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \bar{\lambda}_i x_i^2, \quad \bar{\lambda}_i = \sqrt{-\lambda_i} \ (i = 1, \dots, n)$

rješenje jednačine (7) pri $\varepsilon = 0$. Razmotrimo

$$F : V \to B$$

kao preslikavanje okoline V u prostor B. Pokazaćemo da preslikavanje F zadovoljava sve uslove teoreme o implicitnoj funkciji u Banahovim prostorima [15, glava X]:

1) $F(W_2, 0) = 0$.

2) Neprekidnost preslikavanja F u tački $(W_2, 0)$:
Ocijenimo normu razlike $F(W,\varepsilon) - F(W_2, 0)$. Imaćemo

$$\| F(W,\varepsilon) - F(W_2,0) \| = \| \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial W}{\partial x_i}\right)^2 + \frac{1}{2}\varepsilon \sum_{i,j=1}^{n} (A_1^{ij} + \cdots) \frac{\partial W}{\partial x_i} \frac{\partial W}{\partial x_j}$$

$$- \Pi_2 - \varepsilon(\Pi_3 + \cdots) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial W}{\partial x_i}\right)^2 + \Pi_2 \|,$$

što se, na osnovu osobine (8) i činjenice da je u okolini V

$$\| W \|_1 \leqslant \| W_2 \|_1 + a = a_1 ,$$

može učiniti manjim ili jednakim od

$$\frac{1}{2} n a_2 \| W - W_2 \|_1 + \frac{1}{2} (n^2 a_1^2 a_3 + a_4) |\varepsilon| ,$$

gdje su:

$$a_2 = a + 2 \| W_2 \|_1 ,$$

$$a_3 = \max_{i,j} \sum_{\alpha_1 + \cdots \alpha_n = 1}^{\infty} b^{\alpha_1 + \cdots + \alpha_n - 1} | a_{\alpha_1 \ldots \alpha_n}^{ij} | ,$$

$$a_4 = 2 \| \sum_{k=3}^{\infty} b^{k-3} \Pi_k \| .$$

Odavde slijedi da kada je $\| W - W_2 \|_1 < \delta$ i $|\varepsilon| < \delta$, gdje je

$$\delta = \min \left\{ \frac{\eta}{n a_2}, \frac{\eta}{n^2 a_1^2 a_3 + a_4} \right\} ;$$

a η proizvoljno mali pozitivan broj, biće

$$\| F(W,\varepsilon) - F(W_2, 0) \| < \eta ,$$

što i dokazuje neprekidnost.

3 a) Egzistencija i neprekidnost parcijalnog izvoda F'_W

Sracunajmo priraštaj $F(W+h,\varepsilon)-F(W,\varepsilon), h\in A$. Dobijamo

$$F(W+h,\varepsilon)-F(W,\varepsilon)=F'_W(W,\varepsilon)h - r(h) .$$

je su:

$$F'_W(W,\varepsilon)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial W}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_i}+\varepsilon\sum_{i,j=1}^{n}\Big(\sum_{k=1}^{\infty}\varepsilon^{k-1}A_k^{ij}\Big)\frac{\partial W}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_j} ;$$

$$r(h)=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\Big(\frac{\partial h}{\partial x_i}\Big)^2+\frac{1}{2}\varepsilon\sum_{i,j=1}^{n}\Big(\sum_{k=1}^{\infty}\varepsilon^{k-1}A_k^{ij}\Big)\frac{\partial h}{\partial x_i}\frac{\partial h}{\partial x_j} .$$

eba pokazati da je linearni operator $F'_W(W,\varepsilon)$ ograničen, i da

$$\frac{\|r(h)\|}{\|h\|_1}\to 0 \qquad \text{kada} \qquad \|h\|_1\to 0 .$$

Zaista je

$$\|F'_W(W,\varepsilon)h\|\leqslant M\|h\|_1 ,$$

je je

$$M=na_1(1+bna_3) ,$$

$$\frac{\|r(h)\|}{\|h\|_1}\leqslant\frac{1}{2}n(1+bna_3)\|h\|_1\to 0 \quad \text{kada} \quad \|h\|_1\to 0$$

, dakle, postoji izvod F'_W (u Frešovom smislu).

Dalje je

$$\|F'_W(W,\varepsilon)-F'_W(W_2,0)\|=\sup_h\frac{\|F'_W(W,\varepsilon)h-F'_W(W_2,0)h\|}{\|h\|_1}$$

$$\leqslant n\|W-W_2\|_1+n^2a_2a_3|\varepsilon|<\eta$$

da je

$$\|W-W_2\|_1<\delta \; ; \; |\varepsilon|<\delta ,$$

gje je

$$\delta=\min\Big\{\frac{\eta}{2n} , \frac{\eta}{2n^2a_2a_3}\Big\} .$$

znači, izvod $F'_w(\cdot,\cdot)$ je neprekidan u tački $(W_2, 0)$.

b) egzistencija i ograničenost inverznog operatora $[F'_w(W_2,0)]^{-1}$

Izraz $F'_w(W_2,0)v$ za svako $v \in A$ predstavlja element prostora B. Kako je

$$F'_w(W_2,0) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial W_2}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_i},$$

o jednačina $F'_w(W_2,0)u = v$ ima oblik

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \frac{\partial u}{\partial x_i} = v\ ;$$

gdje je

$$v = \sum_{\alpha_1+\cdots+\alpha_n=2}^{\infty} b_{\alpha_1\cdots\alpha_n} x_1^{\alpha_1}\cdots x_n^{\alpha_n} \in B.$$

ri svakom fiksiranom v, pošto je

$$\det \left.\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}\right|_{x=0} \neq 0$$

(a što je ekvivalentno uslovu $\lambda_1\alpha_1+\cdots+\lambda_n\alpha_n \neq 0$), ova jednačina ima jednoznačno rješenje

$$u = \sum_{\alpha_1+\cdots+\alpha_n=2}^{\infty} \frac{b_{\alpha_1\cdots\alpha_n}}{\lambda_1\alpha_1+\cdots+\lambda_n\alpha_n} x_1^{\alpha_1}\cdots x_n^{\alpha_n},$$

tj. postoji inverzni operator. Dalje je

$$\|u\|_1 \leq C\,\|v\|,$$

gdje je

$$C = \frac{1}{\min\limits_i \lambda_i},$$

tj.

$$\|[F'_w(W_2,0)]^{-1} v\|_1 \leq C\,\|v\|.$$

Dakle, operator

$$F'_w(W_2,0) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \frac{\partial}{\partial x_i},$$

ima ograničen inverzni operator.

Prema tome, pošto su svi uslovi teoreme o implicitnoj funkciji ispunjeni, u prostoru A postoji rješenje jednačine(7) za dovoljno malo ε .Teorema je dokazana.

2.1.3.O egzistenciji neanalitičkog rješenja

Pokazali smo da je uslov

$$\det \frac{\partial^2 \Pi}{\partial x^2}\bigg|_{x=0} \neq 0 ,$$

dovoljan za egzistenciju analitičkog rješenja u okolini tačke maksimuma potencijalne energije Hamilton-Jakobijeve jednačine. Iz postupka odredjivanja koeficijenata razvojnog reda je jasno da u protivnom slučaju ne možemo uvijek odrediti rješenje koje bi se moglo predstaviti redom, te prema tome neće uvijk ni postojati analitičko rješenje. S toga je prirodno postaviti pitanje: Da li, možda, u takvim slučajevima postoji neanalitičko rješenje? Mi ne možemo dati potpun odgovor na ovo pitanje, no sledeći primjer upućuje na mogućnost egzistencije neanalitičkog rješenja u slučajevima kada ne postoji analitičko rješenje.

Uzmimo da razmatramo sistem sa kinetičkom energijom

$$T = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) ,$$

i potencijalnom energijom

$$2\Pi = Ax^4 + Bx^2y^2 + Cy^4,$$

gdje su A , B , C pozitivne konstante

Hamilton-Jakobijeva jednačina(5) poprima oblik

$$(9) \quad \left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial y}\right)^2 = Ax^4 + Bx^2y^2 + Cy^4.$$

Ako postoji analitičko rješenje ono je oblika

$$W = W_3 = a_1x^3 + a_2x^2y + a_3xy^2 + a_4y^3.$$

Za odredjivanje koeficijenata ove forme dobijamo sledeći sistem jednačina

$$9a_1^2 + a_2^2 = A$$

$$4a_2(3a_1 + a_3) = 0$$

$$4a_2^2 - 6a_1a_3 + 4a_3^2 + 6a_2a_4 = B$$

$$4a_3(a_2 + 3a_4) = 0$$

$$9a_4^2 + a_3^2 = C$$

i je preodredjen, jer ima pet jednačina a četiri nepoznate, u opštem slučaju on nema rješenja. Konkretna analiza pokazuje kada su koeficijenti A, B i C odabrani tako da je

$$B \neq 0$$

$$4C \pm 2\sqrt{AC} \neq B$$

(10) $$4A \pm 2\sqrt{AC} \neq B$$

$$A \neq C \quad ili \quad A = C \neq \frac{B}{2}$$

stem nema rješenja, tj. ne postoji analitičko rješenje jednačine(9)

Da bi našli neanalitičko rješenje uvedimo polarne
rdinate

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi.$$

načina(9) se transformiše u

(11) $$\left(\frac{\partial W}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial W}{\partial \varphi}\right)^2 = r^4 \Phi(\varphi),$$

je je $$\Phi(\varphi) = A\cos^4\varphi + B\cos^2\varphi\sin^2\varphi + C\sin^4\varphi.$$

ešenje tražimo u obliku $W = r^3 f(\varphi)$;

je je $f(\varphi)$ nepoznata funkcija. Za odredjivanje funkcije $f(\varphi)$ iz
1) dobijamo

(12) $$f'^2 + 9f^2 = \Phi.$$

Odredimo uslove koje moraju zadovoljavati koeficijenti
, B i C da bi rješenje jednačine(12) bilo oblika

$$f(\varphi) = b_1\cos^2\varphi + b_2\cos\varphi\sin\varphi + b_3\sin^2\varphi.$$

stavljajući $f(\varphi)$ u (12) dobijamo da kada je

(13) $$\pm 10\sqrt{AC} + 4A + 4C = 9B,$$

rješenje može biti predpostavljenog oblika. Takodje, nalazimo

$$b_1 = \pm \frac{\sqrt{A}}{3} \ , \quad b_2 = 0 \ , \quad b_3 = \pm \frac{\sqrt{C}}{3}$$

Znači, pod uslovom (13) funkcija

$$(14) \qquad R(r, \varphi) = \frac{r^3}{3}(\sqrt{A}\cos^2\varphi + \sqrt{C}\sin^2\varphi)$$

je rješenje jednačine [illegible]. Vraćajući se na dekartove koordinate, dobijamo rješenje polazne jednačine

$$S(x, y) = \frac{1}{3}(\sqrt{A}\,x^2 + \sqrt{C}\,y^2)\sqrt{x^2+y^2} \ ,$$

koje pripada klasi dva puta neprekidno diferencijabilnih funkcija.

Kako skup vrijednosti koeficijenata A, B i C koji zadovoljavaju uslove (10) i uslov (13) nije prazan)*, to ih možemo odabrati tako da ne postoji analitičo rješenje, a da je (14) rješenje polazne jednačine.

2.2. Primjena dobijenih rezultata

Dobijeni rezultati omogućuju da se izdvoji i prouči jedna karakteristčna familija kretanja, koja se mogu realizovati u okolini ravnotežnog položaja, takozvana asimptotska kretanja ka ravnotežnom položaju.

Po definiciji, kretanje $\gamma : [0, \infty] \to M$ je asimptotsko ka ravnotežnom položaju $\underset{\sim}{Q} = 0$, ako $\gamma(t) \to 0$ kada $t \to \infty$. Asimptotskom kretanju odgovara fazna trajektorija koja se nalazi na nultom nivou ukupne mehaničke energije, odnosno duž asimptotske fazne trajektorije je $H = 0$ [36].

<u>Teorema 10</u>. Neka je ravnotežni položaj $\underset{\sim}{Q} = 0$ tačka nesingularnog maksimuma potencijalne energije. Tada postoji okolina Δ tačke $\underset{\sim}{Q} = 0$, takva da za svaku tačku $\underset{\sim}{Q}_0 \in \Delta$ postoji kretanje

$$\gamma : [0, \infty] \to \Delta \ , \quad \gamma(0) = \underset{\sim}{Q}_0$$

asimptotsko ka ravnotežnom položaju.

Teorema uopštava rezultat Knezera/Kneser/ [42], koji se odnosi na sisteme sa dva stepena slobode, ali takodje, predstavlja autonomni slučaj rezultata iz [36], koji se odnosi na reonomne sisteme, a dokázan je metodama diferencijalne dinamike.

Dokaz teoreme. Pošto je ravnotežni položaj tačka nesingularnog maksimuma potencijalne energije, postojaće, na osnovu

---

)* Da taj skup nije prazan pokazuje, recimo, primjer:

[t]eorema 9, analitičko rješenje $W(\mathcal{Q})$ Hamilton-Jakobijeve jednačine. [I]z oblika razvoja ovog rješenja neposredno slijedi da u tački $\mathcal{Q}=0$ ono ima lokalni maksimum.

Uzmimo proizvoljnu tačku $\mathcal{Q}_0 \in \mathcal{L}$, gdje je $\mathcal{L}$ odabrano tako da pripada oblasti definisanosti rješenja W. Uočimo kretanje $\mathcal{T}(t)$, odredjeno početnim uslovima

$$\mathcal{T}(0)=\mathcal{Q}_0 \quad , \quad p(0)=\frac{\partial W}{\partial \mathcal{Q}}\Big|_{\mathcal{Q}_0} .$$

razmotrimo promjenu funkcije W duž kretanja $\mathcal{T}(t)$. Imaćemo

$$\frac{dW}{dt}\Big|_{\mathcal{T}(t)} = \left\langle \frac{\partial W}{\partial \mathcal{Q}} \, ; \, \dot{\mathcal{Q}} \right\rangle \Big|_{\mathcal{T}(t)}$$

kako je $\dot{\mathcal{Q}}=Ap$, i duž kretanja $\mathcal{T}(t)$

$$p(t) \equiv \frac{\partial W}{\partial \mathcal{Q}}\Big|_{\mathcal{T}(t)}$$

[k]onačno dobijamo $\displaystyle \frac{dW}{dt}\Big|_{\mathcal{T}(t)} = \left\langle A\frac{\partial W}{\partial \mathcal{Q}} \, , \, \frac{\partial W}{\partial \mathcal{Q}} \right\rangle \Big|_{\mathcal{T}(t)} = -2\Pi\Big|_{\mathcal{T}(t)} \geqslant 0$

[š]to znači da W raste duž $\mathcal{T}$ i u odredjenom trenutku t_1 dostiže [m]aksimum $W(0)$. Tada se reprezentativna tačka nalazi u ravnotežnom položaju. Iz principa determinizma slijedi da trenutak t_1 [n]e može biti konačan. Znači, $\mathcal{T}(t)\to 0$ kada $t\to\infty$.

Napomenimo, da će u ovom slučaju Lagranžova mnogotrukost biti satkana iz faznih trajektorija koje se asimptotski približavaju ravnotežnom stanju, a čije projekcije na ko[n]figuracioni prostor daju trajektorije asimtotskog kretanja.

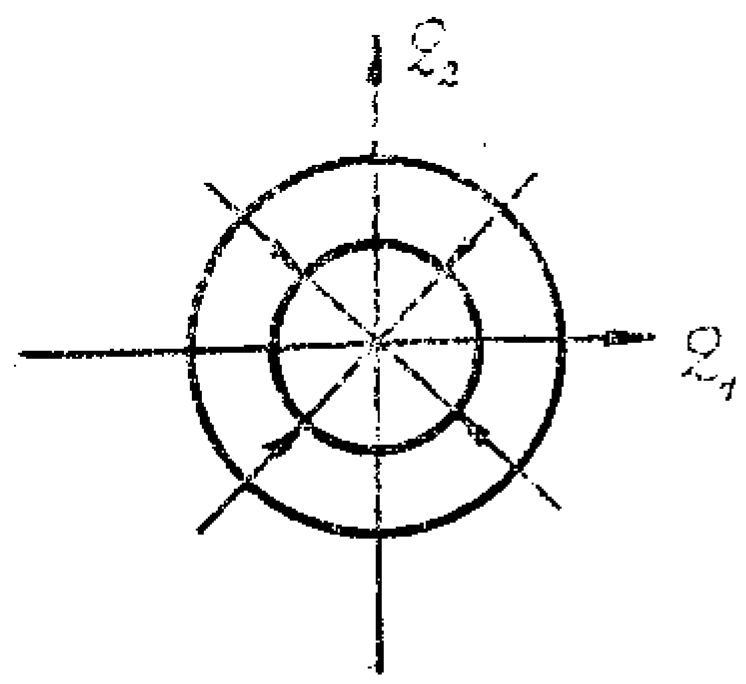
Razmotrimo hiperpovrš

$$W(\mathcal{Q})=C ,$$

[g]dje je C -dovoljno mali negativan broj. Kako funkcija W ima [u] tački $\mathcal{Q}=0$ strogi maksimum ova hiperpovrš je zatvorena, a ra[v]notežni položaj se nalazi u njenoj unutrašnjosti. Za $C=0$ hiper[p]ovrš se degeneriše u tačku-koordinatni početak. Na hiperpovrši $W=C$ je

$$dW\Big|_{W=C} = \left\langle \frac{\partial W}{\partial \mathcal{Q}} \, ; \, d\mathcal{Q} \right\rangle = 0 ,$$

[a] o, kako s druge strane parcijalni izvodi $\frac{\partial W}{\partial \mathcal{Q}}$ odredjuju impu[l]se duž asimtotskog kretanja, to je u tački presjeka hiperpo[v]rši i asimtotske trajektorije $\langle p, d\mathcal{Q}\rangle = 0$. Znači, trajektorije [a]simtotskog kretanja ortogonalno presijecaju uočene hiperpo[v]rši/sl.7/.



sl.7

Prema tome, trajektorije asimptotskih kretanja posjeduju ojstvo optičkih zraka, jer se ponašaju kao svjetlosni zraci u ici.Svjetlosne zrake karakteriše osobina da su uvijek ortogonalni lasnim površina.Ovo svojstvo asimtotskih trajektorija predstavlja io dio analogije koja postoji izmedju mehanike i optike a koju prvi uočio i razvijao Hamilton [8,18] .

2.3.O kompleksnim rješenjima Hamilton-Jakobijeve jednačine

Tražeći rješenje Hamilton-Jakobijeve jednačine pred-ostavljali smo da okolina ravnotežnog položaja pripada oblasti ogućih kretanja, što je i zahtijevalo postojanje maksimuma pote-ijalne energije. Ovog, ograničavajućeg,uslova možemo se osloboditi o rješenje potražimo u klasi kompleksnih funkcija realnih promenji-n.

Neka je $W : A \subset R^n\{q\} \to C$ rješenje Hamilton-Jakobijeve dnačine(1), koje možemo zapisati u obliku

$$W(q) = W_1(q) + i\,W_2(q) \quad (i = \sqrt{-1}) ,$$

je su $W_1, W_2 : A \subset R^n \to R$ realne funkcije.Iz Hamilton-Jakobijeve dnačine slijedi da realni W_1 i imaginarni W_2 dio rješenja adovoljavaju sistem parcijalnih jednačina

$$\frac{1}{2} \langle A \frac{\partial W_1}{\partial q}, \frac{\partial W_1}{\partial q} \rangle - \frac{1}{2} \langle A \frac{\partial W_2}{\partial q}, \frac{\partial W_2}{\partial q} \rangle + \Pi = h$$

$$\langle A \frac{\partial W_1}{\partial q}, \frac{\partial W_2}{\partial q} \rangle = 0 .$$

Uvedimo mnogostrukost

$$K = \left\{ \frac{\partial W_2}{\partial q} = 0 , \; p = \frac{\partial W_1}{\partial q} \right\} \subset R^{2n}\{p, q\} .$$

Teorema 11. Mnógostrukost K je invarjantna u nosu na sistem kanonskih jednačina.

Dokaz.Treba pokazati,da ako je $(q_0 , p_0) \in K$, da je tada

$$\frac{\partial W_2}{\partial Q}\Bigg|_{Q=Q(Q_0,P_0,t)} \equiv 0 \quad i \quad \left(\frac{\partial W_1}{\partial Q} - p\right)\Bigg|_{\substack{p=p(Q_0,P_0,t)\\ Q=Q(Q_0,P_0,t)}} \equiv 0$$

vo, nalazimo

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial W_2}{\partial Q} = \frac{\partial^2 W_2}{\partial Q^2}\frac{\partial H}{\partial p} \quad i \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial W_1}{\partial Q} - p\right) = \frac{\partial^2 W_1}{\partial Q^2}\frac{\partial H}{\partial p} + \frac{\partial H}{\partial Q}.$$

drugе strane, diferencirajući identičnost

$$H\left(Q, \frac{\partial W}{\partial Q}\right) \equiv h$$

Q , dobijamo

$$\frac{\partial}{\partial Q} H\left(Q, \frac{\partial W}{\partial Q}\right) = \frac{\partial H}{\partial Q} + \frac{\partial^2 W}{\partial Q^2}\frac{\partial H}{\partial p}$$

$$= \frac{\partial H}{\partial Q} + \frac{\partial^2 W_1}{\partial Q^2}\frac{\partial H}{\partial p} + i\,\frac{\partial^2 W_2}{\partial Q^2}\frac{\partial H}{\partial p} \equiv 0;$$

lakle je $$\frac{\partial^2 W_2}{\partial Q^2}\frac{\partial H}{\partial p} \equiv 0,$$

$$\frac{\partial H}{\partial Q} + \frac{\partial^2 W_1}{\partial Q^2}\frac{\partial H}{\partial p} \equiv 0.$$

rema tome, biće

$$\frac{\partial W_2}{\partial Q}\Bigg|_{Q(Q_0,P_0,t)} = const = \frac{\partial W_2}{\partial Q}\Bigg|_{(Q_0)} = 0,$$

$$\left(\frac{\partial W_1}{\partial Q} - p\right)\Bigg|_{\substack{Q(Q_0,P_0,t)\\ p(Q_0,P_0,t)}} = const = \left(\frac{\partial W_1}{\partial Q} - p\right)\Bigg|_{(Q_0,P_0)} = 0,$$

to i dokazuje teorema.

Kada je $W_2 \equiv 0$ mngostrukost K je ranije razmarana Lagranžova mnogostrukost L .

Primijetimo, da jedini bitni uslov pri dokazivanju eoreme (9) je nesingularnost kritične tačke potencijalne enegije. Dopuštajući, da rješenje Hamilton-Jakobijeve jednačine može pripadati klasi kompleksnih funkcija realnih promenjivih, otpuno analogno teoremi(9) može se dokazati opštija:

<u>Teorema 12.</u> U okolini nesingularne kritične tačke otencijalne energije Hamilton-Jakobijeva jednačina(5) ima analitičko rješenje.

Razmotrimo detaljnije sisteme sa dva stepena slobode. U ranije uvedenim koordinatama (x, y) potencijalna energija ima oblik

$$\Pi = \frac{1}{2}(\lambda_1 x_1^2 \ [illegible]) + \bar{\Pi}(x), \quad x = (x_1, x_2)$$

gdje je $\bar{\Pi}(x)$ obuhvata članove reda višeg od dva. Ne umanjujući opštost uzmimo da je $\lambda_1 = -a^2$ a $\lambda_2 = b^2$. Rješenje odgovarajuće Hamilton-Jakobijeve jednačine je oblika

$$W = \frac{1}{2}(a x_1^2 + i b x_2^2) - \bar{W}_1 + i \bar{W}_2 .$$

Mnogostrukost K je odredjena jednačinama

$$\frac{\partial W_2}{\partial x_1} = \frac{\partial \bar{W}_2}{\partial x_1} = 0 \ , \qquad \frac{\partial W_2}{\partial x_2} = b x_2 + \frac{\partial \bar{W}_2}{\partial x_2} = 0 \, ,$$

$$p_1 = \frac{\partial W_1}{\partial x_1} = a x_1 + \frac{\partial \bar{W}_1}{\partial x_1} \, , \qquad p_2 = \frac{\partial W_1}{\partial x_2} = \frac{\partial \bar{W}_1}{\partial x_2} \, .$$

Iz druge jednačine, prve grupe jednačina, pošto je

$$\frac{\partial}{\partial x_2}\left(b x_2 + \frac{\partial \bar{W}_2}{\partial x_2} \right)\Big|_{x=0} = b \neq 0 ,$$

po teoremi o implicitnoj funkciji, nalazimo

$$x_2 = f(x_1) \, .$$

Pokažimo da je

$$\frac{\partial \bar{W}_2}{\partial x_1}\Big|_{x_2 = f(x_1)} \equiv 0 .$$

Iz druge jednačine sistema (15) u razvijenom obliku dobijamo

$$x_1 \left(a + \sum_{i=1}^{\infty} c_i x_1^i \right) \frac{\partial \bar{W}_2}{\partial x_1}\Big|_{x_2 = f(x_1)} \equiv 0 ,$$

a kako je izraz u zagradi $\neq 0$ za $x_1 = 0$, to je on različit od nule i u nekoj okolini te tačke, odakle i slijedi

$$\frac{\partial \bar{W}_2}{\partial x_1}\Big|_{x_2 = f(x_1)} \equiv 0 .$$

Prema tome, sistem jednačina (16) u faznom prostoru odredjuje jednodimenzionu mnogostrukost sastavljenu iz faznih trajektorija asimtotskih kretanja.

Primjer. Razmotrimo sistem sa kinetičkom i potencialnom energijom;

$$T = \frac{1}{2}(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2), \quad \Pi = \frac{1}{2}(-x_1^2 + x_2^2)$$

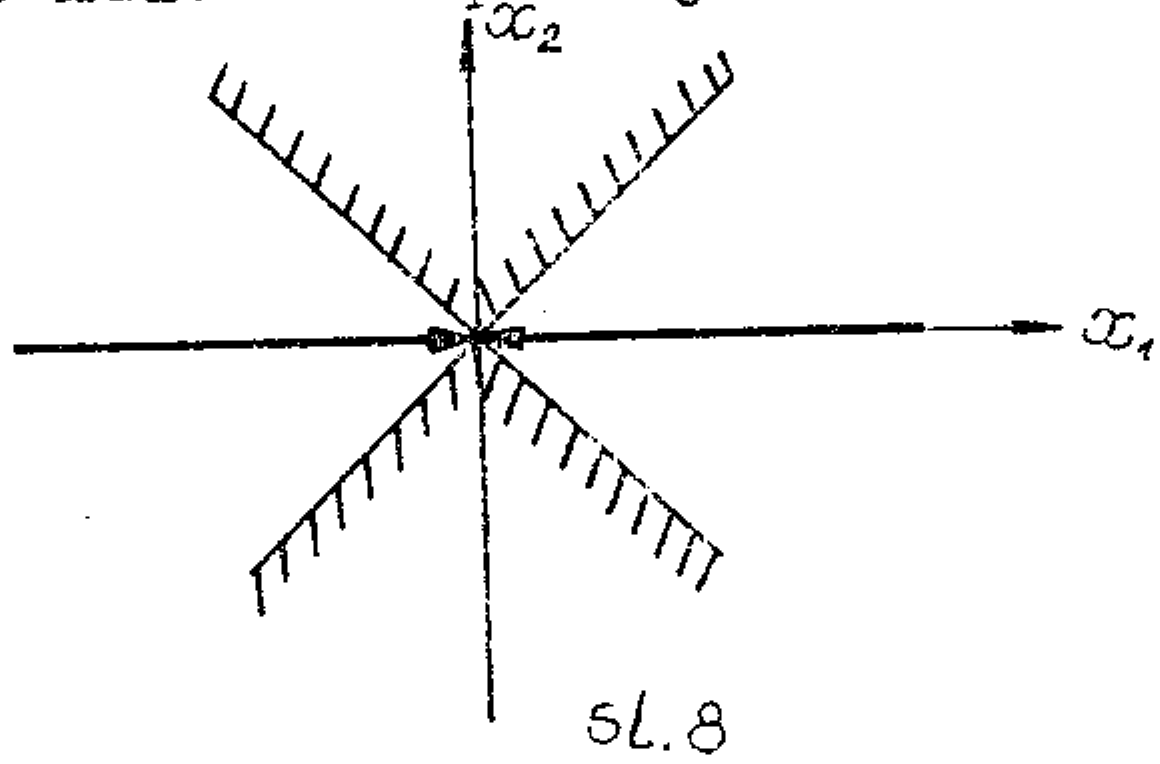
Rješenje odgovarajajuće Hamilton-Jakobijeve jeačine u okolini ravnotežnog položaja je

$$W = \frac{1}{2}(-x_1^2 + i x_2^2).$$

Mnogostrukost asimptotskih trajektorija odredjujemo dnačinama

$$\frac{\partial W_2}{\partial x_1} = \frac{\partial}{\partial x_1}(x_2^2) \equiv 0 \quad , \quad \frac{\partial W_2}{\partial x_2} = x_2 = 0 .$$

prema tome, one se nalaze na pravoj $x_2 = 0$ (sl. 8)



sl. 8

o se jednostavno i neposredno provjerava.

5. Hamilton-Jakobijeva jednačina u oblastima mogućih kretanja s krajem.

Sva razmatranja predhodnog dijela vršena su "u malom" . odnosila su se na male okoline u oblasti mogućih kretanja. . interesa je i integraljenje Hamilton-Jakobijeve jednačine u jeloj oblasti mogućih kretanja. Ovim pitanjima je i posvećen aj dio rada.

Pretpostavlja-ćemo, kao i u dijelu 1, da oblast gucih kretanja D ima granicu $\partial D\,(h < \max_M \Pi)$, i da na anici ∂D nema ravnotežnih položaja. Postojanje granice lasti mogućih kretanja bitno karakteriše rješenja Hamilton-kobijeve jednačine.

Razmotrimo, prvo, specifičnosti rješenja uslovlje- samom strukturom Hamilton-Jakobijeve jednačine. Zapišimo dnačinu u obliku

$$\frac{1}{2} \left< A \frac{\partial W}{\partial Q}, \frac{\partial W}{\partial Q} \right> = h - \Pi ,$$

pretpostavimo da je realna funkcija $W(Q)$ rješenje ove jeačine. Kako lijeva strana predstavlja skalarni kvadrat vekora $\frac{\partial W}{\partial Q}$ u odgovarajućoj metrici, oblast definisanosti nkcije $W(Q)$ ne može izlaziti izvan oblasti

$$h - \Pi \geqslant 0 ,$$

j. izvan oblasti mogućih kretanja. Na granici oblasti mogućih retanja je

$$\Pi \Big|_{\partial D} = h ,$$

a iz Hamilton-Jakobijeve jednačine dobijamo

$$\frac{\partial W}{\partial Q} \Big|_{\partial D} = 0 .$$

iksirajmo jednu tačku A na granici ∂D i povežimo je sa roizvoljnom tačkom B granice odsječkom glatke krive $\gamma(u)$ $(\gamma(u_1)=A, \gamma(u_2)=B)$ koja u cjelosti pripada granici oblasti mogućih kretanja. Ova konstrukcija je uvijek moguća na jednoj te istoj komponenti povezanosti granice ∂D .

šenje funkcije W na krivu γ je funkcija jedne promje-
ive, tj.

$$W\Big|_{\gamma(u)} = W(u) .$$

ferencirajući po u dobijamo

$$\frac{dW(u)}{du} = \left\langle \frac{\partial W}{\partial Q}, \frac{d\gamma}{du} \right\rangle\Big|_{\partial D} = 0 ,$$

akle je

$$W(u_1) = W(u_2) ,$$

pošto tačku B možemo proizvoljno pomjeriti po granici, ostajući mo na istoj komponenti povezanosti, slijedi da funkcija W svakoj komponenti povezanosti granice ima konstantnu vrijednost.

Prema tome, prirodno je pod rješenjem Hamilton-kobijeve jednačine u oblastima mogućih kretanja s krajem, podzumijevati glatku funkciju unutar oblasti D koja na svakoj vezanoj komponenti granice ∂D ima konstantne vrijednosti.

5.1. Dejstvo kao rješenje Hamilton-Jakobijeve jednačine u okolini granice oblasti mogućih kretanja.

Pod "okolinom" granice oblasti mogućih kretanja odrazumijevaćemo "traku" koja se nalazi izmedju granice ∂D hiperpovrši Σ_ε (ε dovoljno mali pozitivan broj) defiisane u dijelu 1.3.

Razmotrimo integral dejstva

$$W = \int_\gamma \sqrt{2(h-\Pi)}\, ds = \int_\gamma 2\sqrt{h-\Pi}\,\sqrt{T}\, dt = \int_\gamma 2T\, dt$$

a familiji krivih γ, koje predstavljaju trajektorije kretanja istema sa početnim uslovima na granici oblasti mogućih kretanja. očimo neku tačku Q unutar oblasti mogućih kretanja i neku njenu kolinu σ, tako da ona u cjelosti pripada okolini granice ∂D. Na osnovu Kozlovljeve teoreme, tačku Q možemo spojiti a granicom ∂D geodezijskom Jakobijeve metrike-ekstramalom ntegrala dejstva. Trajektorije, koje izlaze sa granice, prekrivaju cijelu okolinu granice, i pri tome se u njoj ne presijecaju.

...kle, kroz svaku tačku uočene okoline prolazi jedinstvena trajektorija pa integral dejstva računat duž trajektorija koje izlaze sa granice ... možemo razmatrati kao funkciju krajnje tačke Q tj. ... u takvouočenoj okolini nema fokalnih tačaka granice oblasti mogućih kretanja, to se upravo duž ovih trajektorija mjeri rastojanje do granice pa je, očigledno, vrijednost funkcije $W(Q)$ jednaka rastojanju tačke Q do granice ∂D, tj. $W(Q) = \partial(Q)$.

Teorema 13. Diferencijal funkcije W je jednak

$$dW = \langle p, dQ \rangle = p\,dQ ,$$

dje se $p = \frac{\partial T}{\partial \dot{Q}}$ odredjuje na osnovu brzine $\dot{Q}$ na trajektoriji σ.

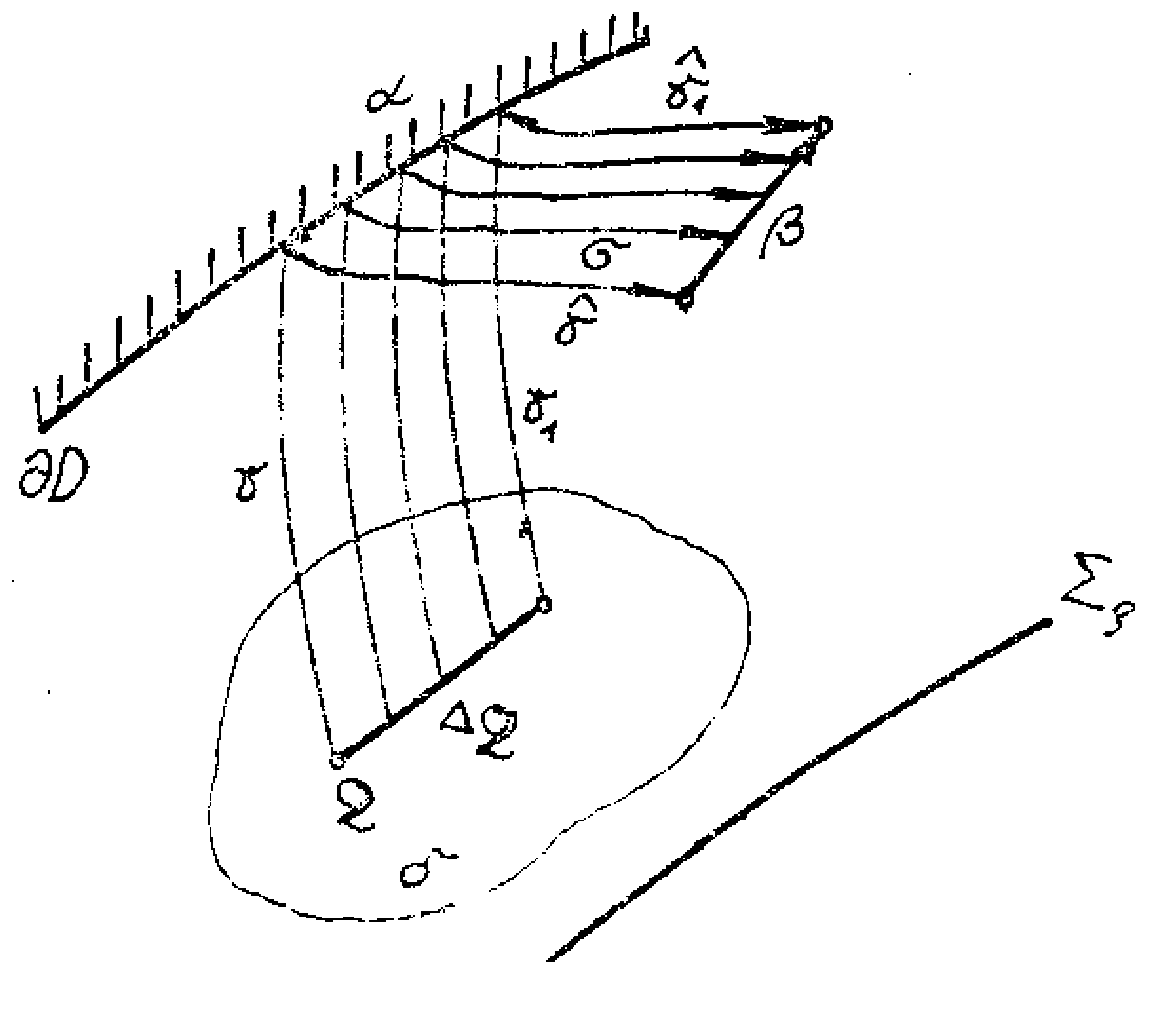
Dokaz. Sprovešćemo dokaz analogno dokazu o diferencijalu funkcije Hamiltonovog dejstva [4, glava IX].

Svaku trajektoriju koja izlazi sa granice oblasti mogućih kretanja podignimo na $2n-1$ dimenzionu hiperpovrš

$$\Pi^{2n-1} = \{(Q, p) : H(Q, p) = h\}$$

faznog prostora, stavljajući $p = \partial T / \partial \dot{Q}$. Tako dobijamo fazne trajektorije kanonskog sistema jednačina, koje u faznom prostoru obrazuju n dimenzionu mnogostrukost. One predstavljaju linije rotora forme $p\,dQ$ na Π^{2n-1} [4]

U okolini σ tački Q zadajmo priraštaj ΔQ, i svaku tačku otsječka $Q + \theta\Delta Q, 0 \le \theta \le 1$ spojimo trajektorijama sa granicom ∂D. Na hiperpovrši Π^{2n-1} dobijamo četvorougaonik sastavljen iz linija rotora forme $p\,dQ$ (sl.9).



...nica ovog četvorougaonika

$$\partial\sigma = \hat{\gamma} - \hat{\gamma}_1 + \beta - \alpha$$

...koji se iz dvije razne trajektorije $\hat{\gamma}$ i $\hat{\gamma}_1$, odsječka ...nice oblasti mogućih kretanja α i odsječka β čija se ...jekcija na konfiguracioni prostor poklapa sa odsječkom Δq. ...to se σ sastoji iz linija rotora, na osnovu Stoksove teoreme, ...mo

$$0 = \iint_{\sigma} d(p\,dq) = \int_{\partial\sigma} p\,dq$$

$$= \int_{\hat{\gamma}} p\,dq - \int_{\hat{\gamma}_1} p\,dq + \int_{\beta} p\,dq - \int_{\alpha} p\,dq .$$

...odsječku α je $p = 0$, a na raznim trajektorijama $\hat{\gamma}$ i $\hat{\gamma}_1$

$$p\,dq = 2T\,dt.$$

...či, pošto je razlika

$$\int_{\hat{\gamma}_1} p\,dq - \int_{\hat{\gamma}} p\,dq$$

...naka priraštaju funkcije dejstva, dobijamo

$$W(q + \Delta q) - W(q) = \int_{\beta} p\,dq .$$

...a $\Delta q \to 0$, biće

$$\int_{\beta} p\,dq = p\,dq + o(\Delta q),$$

...kle i slijedi tvrdjenje teoreme.

Kako je $W = W(q)$, to je, s druge strane, ... $\langle \frac{\partial W}{\partial q}, dq \rangle$ pa je u oblasti D : $p = \partial W / \partial q$. Imajući u ...u integral energije neposredno slijedi

Teorema 14. Funkcija dejstva $W(q)$ - rastojanje do ...nice ∂D, u dovoljno maloj okolini granice ∂D zadovoljava ...ilton-Jakobijevu jednačinu

$$\frac{1}{2} \langle A \frac{\partial W}{\partial q}, \frac{\partial W}{\partial q} \rangle - \Pi = h.$$

Prema tome, uvijek postoji rješenje Hamilton-Jakobi-...ve jednačine u okolini granice oblasti mogućih kretanja. Pitanjima ... li je ovo rješenje jedinstveno i do kojih granica se može produži-... bavićemo se u dijelu 5.5., a u narednom dijelu razjasnimo pitanje ...istencije rješenja u cijeloj oblasti D.

5.2. Neophodni uslovi za egzistenciju globalnog rje- šenja Hamilton-Jakobijeve jednačine.

Teorema 15. U kompaktnim oblastima mogućih kreta- nja sa povezanom granicom ne postoji globalno rješenje Hamilton-Jakobijeve jednačine (2.1.).

Dokaz. Pretpostavimo suprotno tvrdjenju, da postoji latko rješenje W definisano u cijeloj oblasti D. Tada, bog kompaktnosti, funkcija W dostiže ekstremalne vrijednosti oblasti D, a kako je ona na granici konstantna i granica vezana, to je bar jedna tačka ekstremuma unutar oblasti D. ajutim, pošto u ekstremalnim (kritičnim) tačkama gradijent funkcije W je jednak nuli, iz Hamilton-Jakobijeve jednačine slijedi da ova ačka mora pripadati granici ∂D. Kontradikcija.

Napomena. Analogno, kada je oblast mogućih kreta- ja zatvorena kompaktna mnogostrukost (mnogostrukost bez kraja) postoji globalno rješenje jednačine (2.1.), što neposredno slijedi činjenice da svaka glatka funkcija na kompaktnoj mnogostrukosti a najmanje dvije kritične tačke [25].

Tako, npr., Hamilton-Jakobijeva jednačina koja isuje kretanje sfernog klatna ne može imati glatko rješenje na itavom kontfiguracionom prostoru- sferi.

Da je u prethodnim razmatranjima bitna kompaktnost lasti mogućih kretanja pokazuje sledeći primjer.

Primjer 1.

$$T = \frac{1}{2}\left(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2\right), \quad \Pi = -(x_1 + x_2).$$

Oblast mogućih kretanja je poluravan

$$D = \left\{ (x_1, x_2) : \; -(x_1 + x_2) \leq h \right\},$$

ija je granica prava $\quad x_1 + x_2 + h = 0.$

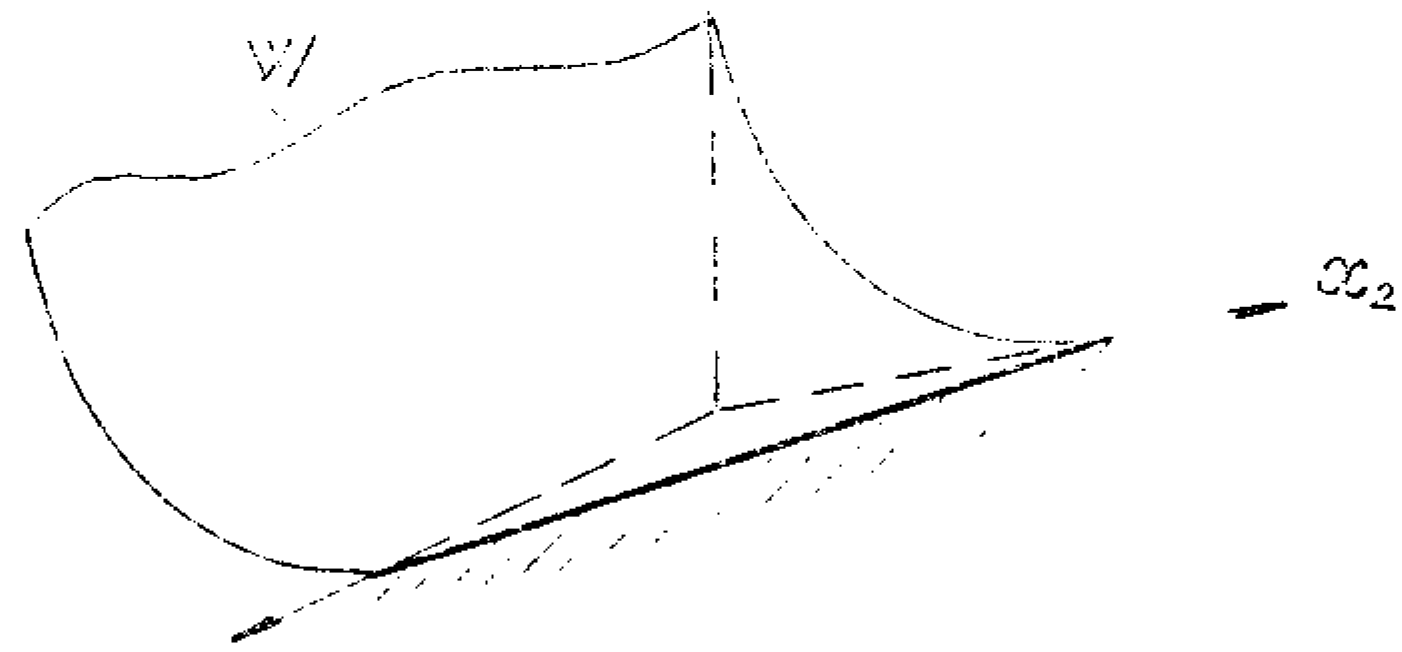
Hamilton-Jakobijeva jednačina je

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial W}{\partial x_1}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial W}{\partial x_2}\right)^2 - (x_1 + x_2) = h.$$

eposredno se može provjeriti da funkcija

$$W = \frac{2}{3}\left(h + x_1 + x_2\right)^{3/2}$$

zadovoljava jednačinu, na granici je konstantna ($W_{|\partial D} = 0$), u čitavoj poluravni $D/\partial D$ predstavlja glatku funkciju(sl.10)



sl. 10

Sledeća teorema daje odgovor na pitanje: da li ima kompaktnih oblasti mogućih kretanja D u kojima je moguće postojanje globalnog rješenja jednačine (2.1.)?

Teorema 16. Ako u oblasti mogućih kretanja D postoji globalno rješenje Hamilton-Jakobijeve jednačine, oblast D je homeomorfna direktnom proizvodu

$$\Gamma \times [0,1] \quad (\partial D = \Gamma \times \{0\} \cup \Gamma \times \{1\}),$$

gdje je Γ glatka povezana kompaktna $n-1$ dimenziona mnogostrukost.

Dokaz. Dokaz ćemo sprovesti metodama Morsove teorije [22].

Pretpostavimo da u cijeloj oblasti mogućih kretanja D postoje rješenja W jednačine(2.1). Iz prethodne teoreme slijedi da granica ∂D oblasti D ne može biti povezana. Prvo, razmotrimo slučaj kada se granica ∂D sastoji iz dvije glatke povezane mnogostrukosti $\partial D'$ i $\partial D''$, koje se ne presijecaju

$$\partial D = \partial D' \cup \partial D'' \quad i \quad \partial D' \cap \partial D'' = \emptyset,$$

$$W_{|\partial D'} = c_1 = const, \quad W_{|\partial D''} = c_2 = const$$

Sa Σ_ε označimo skup tačaka iz D koje se nalaze na rastojanju $\varepsilon > 0$ od granice ∂D. Za dovoljno malo ε, na osnovu rezultata iz dijela 1, Σ_ε će predstavljati glatku mnogostrukost sastavljenu od dvije povezane komponente Σ'_ε i Σ''_ε, takve da je pri čemu smo sa Σ'_ε (Σ''_ε) označili mnogostrukost blizu kraju $\partial D'$ ($\partial D''$). Mnogostrukost $\overline{\Sigma}_\varepsilon$ ograničava neku glatku mnogostrukost s krajem G, sadržanu u oblasti mogućih kretanja.

Na Σ'_ε i Σ''_ε funkcija W ima konstantno vrijednosti, i na njima nema kritičnih tačaka, jer Σ'_ε i Σ''_ε pripadaju unutrašnjosti oblasti mogućih kretanja. Dakle, W možemo razmatrati kao Morsovu funkciju trijade gladkih mnogostrukosti

$$(G, \Sigma'_\varepsilon, \Sigma''_\varepsilon).$$

Morsov broj μ [23] uočene trijade je jednak nuli, jer funkcija W nema kritičnih tačaka u G. Primenjujući teoremu o trivijalnom kobordizmu [23] slijedi da je $(G, \Sigma'_\varepsilon, \Sigma''_\varepsilon)$ trivijalni kobordizam, tj. G je difeomorfno $\Sigma'_\varepsilon \times [0,1]$, a Σ''_ε difeomorfno Σ'_ε. S druge strane, $\partial D'$ i Σ'_ε ($\partial D''$ i Σ''_ε) graničava, takodje, gladku mnogostrukost s krajem, difeomorfnu $\partial D' \times [0,1]$ ($\partial D'' \times [0,1]$). Zaista, funkcija

$$f = y'\sqrt[3]{\mathcal{R}'(y;x_0)}, \quad \mathcal{R}'(0,x_0) > 0,$$

razmatrana u 1.3., nema kritičnih tačaka u dovoljno maloj okolini granice, niti na samoj granici. Uz to je i

$$f\Big|_{\partial D'} = 0, \quad f\Big|_{\Sigma'_\varepsilon} = const. \quad \left(f\Big|_{\partial D''} = 0 \;, \; f\Big|_{\Sigma''_\varepsilon} = const. \right)$$

pa je i u ovom slučaju primjenjiva teorema o trivijalnom kobordizmu.

"Lijepeći" mnogostrukosti po zajedničkim krajevima, tj. identifikujući

$$\partial D' \times \{1\} \text{ i } \Sigma'_\varepsilon \; (\partial D'' \times \{1\} \text{ i } \Sigma''_\varepsilon = \Sigma'_\varepsilon \times \{1\})$$

dobijamo da je D, u krajnjem slučaju, homeomorfno $\partial D' \times [0,1]$.

Predpostavljajući da se granica oblasti mogućih kretanja ∂D sastoji samo od dvije povezane konponente nijesmo umanjili opštost. Zaista, predpostavljajući postojanje više povezanih djelova granice ∂D, dolazimo do zaključka, da se oblast D razdvaja na nekoliko mnogostrukosti s krajem, od kojih je svaka homeomorfna direktnom proizvodu jedne povezane komponente granice i intervala.

Prema tome, globalno rješenje Hamilton-Jakobijeve jednačine može postojati samo u slučajevima kada oblast mogućih kretanja ima dovoljno prostu topološku strukturu.

Sledeća teorema povezuje egzistenciju globalnog rješenja Hamilton-Jakobijeve jednačine i egzistenciju libracionih kretanja.

<u>Teorema 17</u>. Ako postoji globalno rješenje Hamilton-Jakobijeve jednačine, onda svaka trajektorija koja izlazi sa granice oblasti mogucih kretanja je trajektorija libracionog kretanja.

Egzistencija bar jednog libracionog kretanja u slučaju kada je oblast mogucih kretanja difeomorfna direktnom proizvodu $N \times [0,1]$ gdje je N gladka kompaktna mnogostrukost, dokazana je u radu [45].

Dokaz. Uočimo proizvoljnu trajektoriju γ koja izlazi sa granice ∂D. Neka je W globalno rješenje i $W|_{\partial D'} = c_1$, $W|_{\partial D''} = c_2$. Diferencirajući W duž ove trajektorije, dobijamo da je unutar oblasti D

$$\frac{dW}{dt} = \left\langle \frac{\partial W}{\partial q}, \dot{q} \right\rangle = 2(h - \Pi) > 0$$

Znači, W raste duž trajektorije, i ako uzmemo da je $W(\gamma(t))|_{t=0} = c_1$ pri odredjenom t' funkcija W će dostići vrijednost c_2 i reprezentativna tačka dospijeva na granicu. Vrijednost t' je konačna, jer se na osnovu posledice leme 2 reprezentativna tačka ne može asimtotski približavati granici. Dakle, trajektorija γ ima dvije zajedničke tačke sa granicom pa je ona, na osnovu teoreme 1, trajektorija libracionog kretanja.

Primjer 2. Razmotrimo kretanje sistema sa kinetičkom i potencijalnom energijom

$$T = \frac{1}{2}(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2), \quad 2\Pi = x_1^2 + x_2^2 - 2a\sqrt{x_1^2 + x_2^2} + a^2, \quad a > 0$$

Oblast mogućih kretanja je prsten

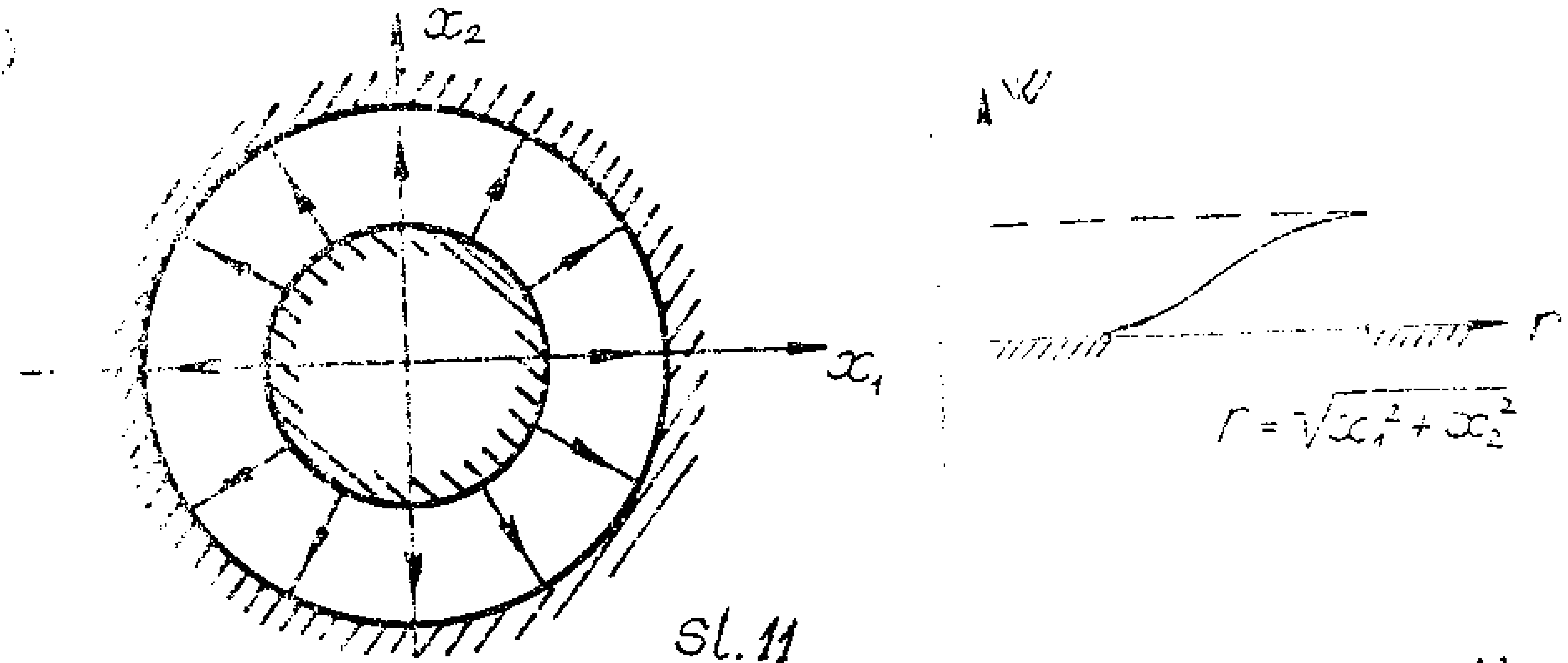
$$D: (a - \sqrt{2h})^2 \leq x_1^2 + x_2^2 \leq (a + \sqrt{2h})^2,$$

gdje je $h < a^2/2$

Funkcija

$$W = \frac{1}{2}\left[\left(\sqrt{x_1^2 + x_2^2} - a\right)\sqrt{2h - \left(\sqrt{x_1^2 + x_2^2} - a\right)^2} + 2h \arcsin \frac{\sqrt{x_1^2 + x_2^2} - a}{\sqrt{2h}}\right] +$$

zadovoljava odgovarajuću Hamilton-Jakobijevu jednačinu, gladka je unutar oblasti D i na granici oblasti ∂D ima konstantne vrijednosti(sl.11)



sl. 11

5.3.O rješenju u okolini granice oblasti mogucih kretanja.

Ovdje ćemo, neumanjujući opštost, predpostavljati da je granica oblasti mogucih kretanja povezana.

Naš zadatak se sastoji u nalaženju rješenja Hamilton-Jakobijeve jednačine u okolini granice oblasti mogucih kretanja, gladkog unutar D ,a koje na granici ∂D ima konstantnu vrijednost, recimo $W|_{\partial D} = a = const$ .Primijetimo da i ako se postavljeni zadatak sastoji u nalazenju rješenja parcijalne jednačine koja na početnoj mnogostrukosti(u našem slučaju granici ∂D) zadovoljava odredjene uslove on se zbog specificnosti granice ne uklapa u Košijev zadatak za nelinearne parcijalne jednačine, tj. u našem slučaju teorema o rješenju Košijevog zadatka je neprimjenjiva. Košijev zadatak, kao što je poznato, ima jedinstveno rješenje, ili bezkonacno mnogo rješenja, ili pak, uopšte nema rješenja [17] .

U 5.1. smo pokazali da rastojanje od granice kao funkcija položaja predstavlja rješenje u definisanom smislu, te postoji rješenje postavljenog zadatka. No, rješenje našeg zadatka nije jedinstveno. Zaista, ako je $W_1 = W$ rješenje tada je i $W_2 = 2a - W$ takodje rješenje. Naredna teorema dokazuje da mogu postojati samo dva rješenja postavljenog zadatka.

Teorema 18. Funkcije

$$W(q) = a \pm \int_{q_0 \in \partial D}^{q} 2T dt$$

ntegraljenje duž trajektorije koja povezuje tačku $Q \in D$ sa
anicom ∂D) su jedina rješenja postavljenog zadatka.

Dokaz. Očigledno, uslovi na granici su zadovoljeni.
je ćemo pokazati, da slijedeći metod karakteristika dolazimo
procesa, koji na jedinstven način, s tačnošću do znaka $\pm$, dovodi
rješenja $W(Q)$.

Karakteristični sistem je kanonski sistem jednačina:

$$\frac{dp}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial Q} \;, \qquad \frac{dQ}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p} \;,$$

azne trajektorije su karakteristike Hamilton-Jakobijeve jednačine.
karakteristika je [17]

$$(1) \qquad \frac{dW}{dt} = \left\langle p, \frac{\partial H}{\partial p} \right\rangle .$$

motrimo familiju rješenja kanonskog sistema

$$Q = Q(\alpha, t) \;, \quad p = p(\alpha, t)$$

početnim uslovima na granici oblasti mogućih kretanja, gdje su
$\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ koordinate na ∂D. Fiksirajmo α i razmotrimo (1)
odgovarajuće karakteristike. Integraljeći, uz početni uslov
$= a$ za $t = 0$, dobijamo $W = W(\alpha, t)$, što možemo razmatrati
funkciju n promenjivih α, t. Iz osnovne teoreme teorije
čnih diferencijalnih jednačina slijedi jedinstvenost rješenja
$W(\alpha, t)$ i gladkost po α i t. Jasno, da će funkcija W pre-
avljati rješenje Hamilton-Jakobijeve jednačine, koje po konstruk-
i izlazi sa granice ∂D, ako W koje smo dobili u vidu fun-
je od α, t možemo posmatrati kao funkciju od Q, tj.
promenjive α, t gladko zavise od Q. Ako bi prelaz od
t) ka Q u okolini $t = 0$ bio jednoznačan, onda bi rješenje
šeg zadatka bilo jedinstveno. Medjutim, na osnovu posledice leme 1.

$$Q(\alpha, t) = Q(\alpha, -t) \;,$$

tačkama (α, t) i $(\alpha, -t)$ odgovara jedna te ista tačka Q u
asti mogućih kretanja. Pošto je na faznim trajektorijama

$$\left\langle p, \frac{\partial H}{\partial p} \right\rangle = 2T \;,$$

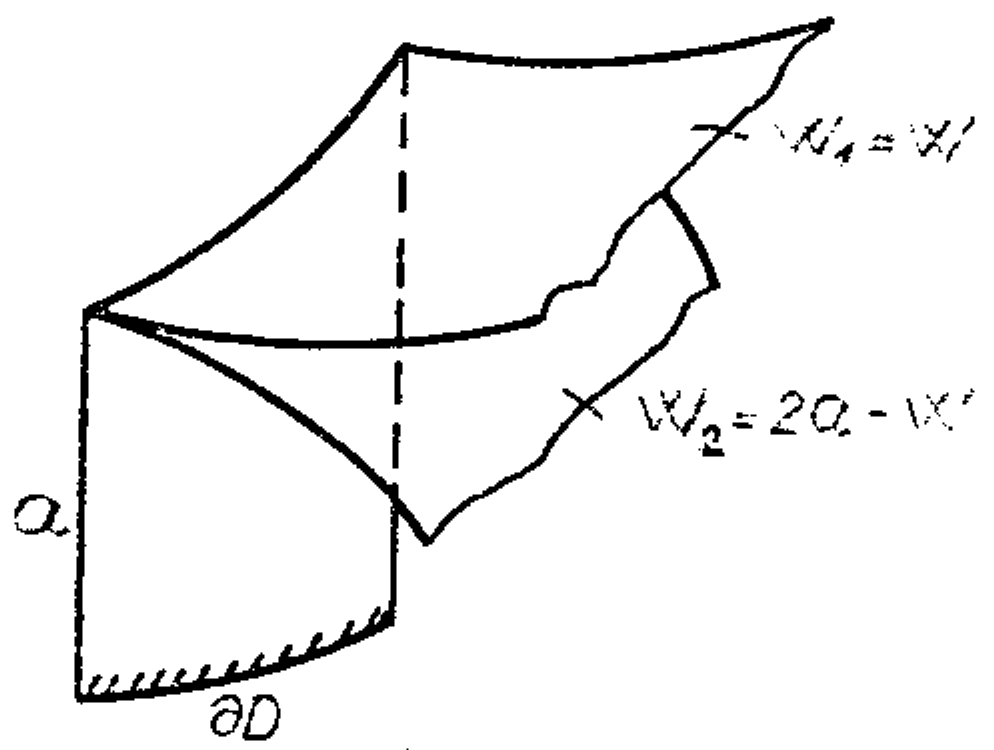
1)dobijamo formule

$$W(\alpha,t)=a+\int_0^t 2T\,dt\,,\qquad t\geq 0$$

$$W(\alpha,-t)=a+\int_0^{-t} 2T\,dt=a-\int_0^t 2T\,dt$$

$$=2a-W(\alpha,t)$$

, u nekoj dovoljno maloj okolini granice ∂D imaćemo samo dva ješenja. Prema tome , u maloj okolini granice ∂D možemo izvrti zamjenu promenjivih i dobiti dvije integralne površi koje ize sa granice(sl.12) - rješenja našeg zadatka.



sl.12

Sada je jasno, da svako rješenje Hamilton-Jakobijeve dnačine u okolini granice po apsulutnoj vrijednosti je jednako iru rastojanja do granice i neke konstante.

Razmotrimo mogućnost produženja rješenja "duž ajektorije", tj. u okolini neke unaprijed fiksirane trajektorije, ja izlazi iz tačke $Q_0(\alpha=0)$ sa granice ∂D .Bez obzira, sto su $)(\alpha,t)$ i $W(\alpha,t)$ jednoznačno odredjene kanonskim sistemom jednačinom(1) nemoguće je proizvoljno daleko produžiti integrau površ ne dospijevajući, pri tome, na singularne tačke. Singurne tačke, to su tačke u okolini kojih funkcija $W(Q)$ ne že biti jednoznačna.Nejednoznačnost se pojavljuje tamo gdje je neoguće jednoznačno izraziti α , t preko Q .

takvim tačkama se moraju narušiti uslovi teoreme o inverznoj fukciji, tj. mora biti

$$\det\frac{\partial Q}{\partial(\alpha,t)}=0\,,$$

vaj uslov definiše fokalne tačke granice oblasti mogućih kreta-
ja.

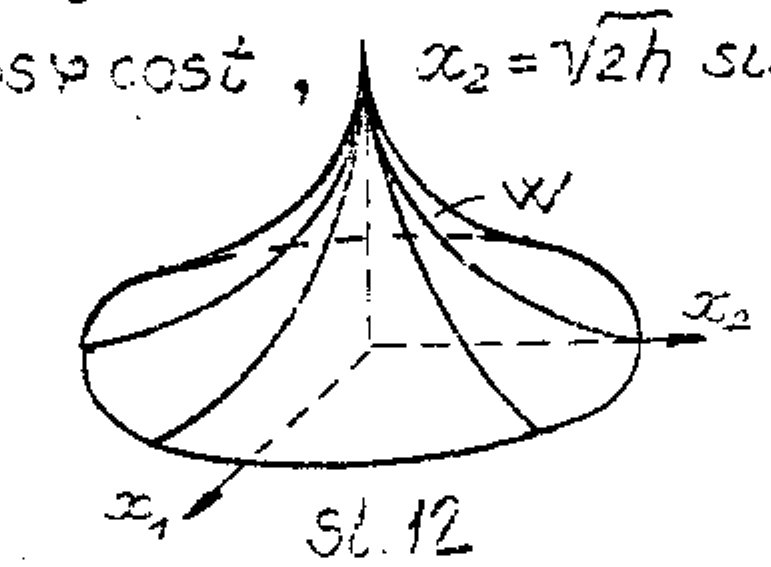
Prema tome granične tačke produženja rješenja ...ilton-Jakobijeve jednačine su fokalne tačke čije geometrijsko ...sto obrazuje kaustiku razmatranu u dijelu 1.

Primjer 5.

$$T=\frac{1}{2}(\dot{x}_1^2+\dot{x}_2^2)\ ,\ \Pi=\frac{1}{2}(x_1^2+x_2^2)\ .$$

Trajektorije koje izlaze sa granice su prave ...je su parametarske jednačine

$$x_1=\sqrt{2h}\cos\varphi\cos t\ ,\quad x_2=\sqrt{2h}\sin\varphi\cos t\ .$$



Sl. 12

...ovim trajektorijama kinetička energija je $2T=2h\sin^2t$, nalazimo $W(\varphi,t)=2h\int_0^t\sin^2t\,dt$. Eliminacijom vremena t uz ...moć jednačine $\cos^2t=(x_1^2+x_2^2)/2h$ dobijamo

$$W(x_1,x_2)=\frac{1}{2}\sqrt{x_1^2+x_2^2}\ \sqrt{2h-(x_1^2+x_2^2)}\ -h\arccos\frac{\sqrt{x_1^2+x_2^2}}{\sqrt{2h}}$$

...nkcija $W(x_1,x_2)$ je gladka svuda u unutrašnjosti oblasti mogućih ...etanja osim u koordinantnom početku koji, kako smo pokazali u ...imjeru 1.2., predstavlja jedinu fokalnu tačku granice ∂D ...1.12.)

Sada smo u stanju da ocijenimo oblast egzi...encije jednoznačnog rješenja. Iz svake tačke $\mathcal{Q}_0$ granice ∂D is...stimo trajektoriju i nadjimo prvu fokalnu tačku $\mathcal{Q}_0^*$. Rastojanje ...čke $\mathcal{Q}_0^*$ od $\mathcal{Q}_0$ duž trajektorije je jednako $\partial(\mathcal{Q}_0^*)$. "Pomjerimo" ...anicu ∂D duž trajektorija na rastojanje

$$c=\inf_{\mathcal{Q}_0\in\partial D}\partial(\mathcal{Q}_0^*).$$

...bijamo hiperpovrš Σ_c, koja zajedno sa granicom ∂D iz...lasti mogućih kretaja izdvaja traku u kojoj je

$$\det \frac{\partial z}{\partial(\alpha, t)} \neq 0$$

ı kojoj znači postoje rješenja Hamilton-Jakobijeve jednačine.

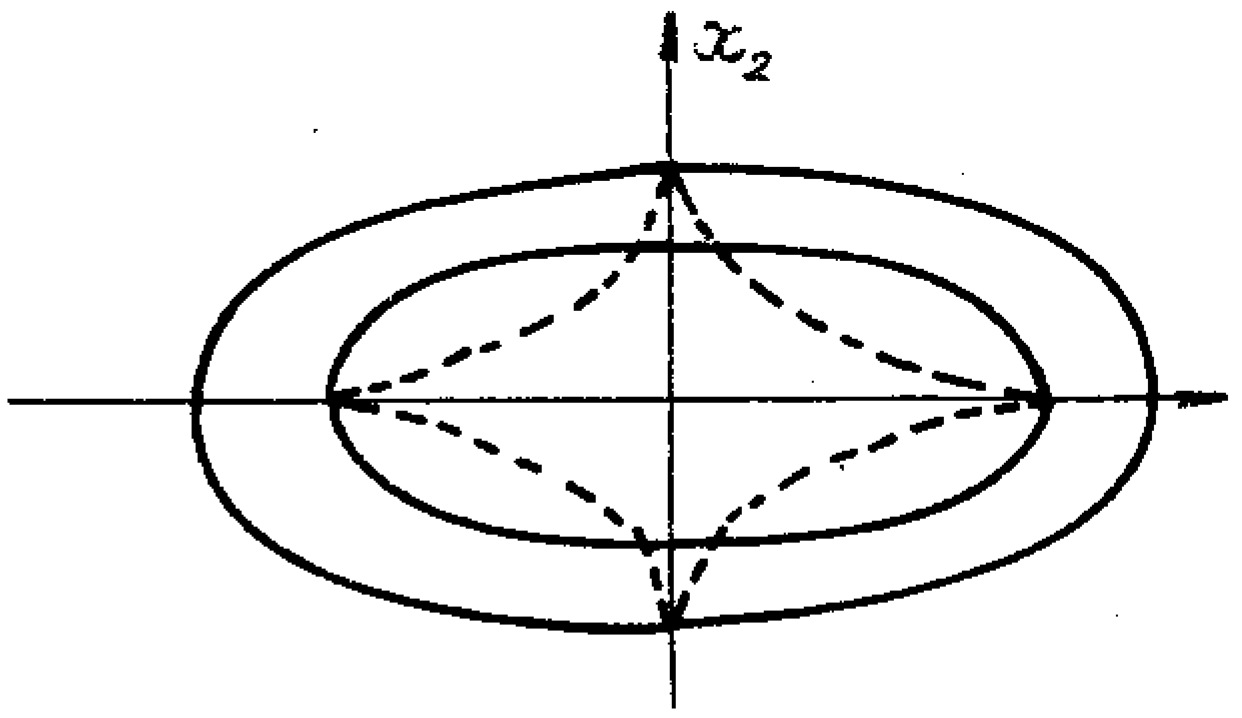
Ako dz predstavlja pomjeranje na hiperpovrši $(b<c)$,bice

$$0 = dX/|_{\Sigma_b} = \langle p, dz \rangle ,$$

akle slijedi da trajektorije presijecaju hiperpovrši Σ_b pod avim uglom. Dakle, na ovaj način, ocijenili smo vrijednost broja ρ_0 u Gausovoj lemi. Naime, ρ_0 mora biti manje od rastojanja jbliže fokalne tačke granice oblasti mogućih kretanja.

Prema tome, na osnovu osobina rješenja Hamilton-Jakobijeve jednačine u okolini granice ∂D možemo dobiti sva tna svojstva koja karakterišu kretanje u blizini granice.

U primjeru 1.2. kada je $\omega=2$, dobijamo da rješenje govarajuće jednačine postoji u prstenu koji ograničavaju elipse 1.15)



sl. 13

Primijetimo, da u primjeru 1 trajektorije koje izlaze granice (prave $x_1+x_2+h=0$) su prave linije pa granica nema fokalnih tačaka, sto omogućuje postojanje rješenja u čitavoj oblasti mogućih kretanja.

3.4.Potpuni integral i rješenje u okolini granice

U Hamilton-Jakobijevoj teoriji od suštinskog su začaja potpuni integrali koji, kao što smo u uvodu dijela 2 nazli, predstavljaju rješenja Hamilton-Jakobijeve jednačine koja sim energetske konstante h sadrže još $n-1$ konstantu $\alpha=(\alpha_1,\dots,\alpha_{n-1})$

adovoljavaju uslov nesingularnosti. Uspostavimo vezu koja postoji edju potpunog integrala i rješenja u okolini granice oblasti ućih kretanja. Radi geometrijske očiglednosti ograničimo se sisteme sa 2 stepena slobode. Neka je $W(q,\alpha,h)$ potpuni in-ral odgovarajuće Hamilton-Jakobijeve jednačine. Pri fiksiranoj jednosti konstante h on predstavlja jedno-parametarsku familiju šenja Hamilton-Jakobijeve jednačine. Oblast definisanosti ovih šenja, označimo je sa D_α ,zavisi od α i predstavlja neki dio asti mogućih kretanja. Da bi mogli potpuni integral da koristimo kolini granice ∂D on mora biti definisan u oblastima D_α , e imaju zajedničke tačke sa granicom ∂D .Medjutim, pošto za ne vrijednosti parametra α funkcije $W(q,\alpha,t)$ predstavljaju na rješenja Hamilton-Jakobijeve jednačine (zbog uslova nesingula-sti potpunog integrala ova rješenja se ne mogu razlikovati prosto konstantu), na osnovu teoreme 18, slijedi da se $\bar{D}_\alpha$ (adheren-ja oblasti D_α) može presijecati sa granicom ∂D samo po lovanom skupu tačaka. Neka su ovi uslovi ispunjeni. Ako predposta-o da postoji obvojnica jednoparametarske familije rješenja $W(q,\alpha,h)$ a će i ona predstavljati rješenje [17,29] no, očigledno, de-isano u okolini granice ∂D . Na osnovu teoreme 18 slijedi se ova obvojnica poklapa, s tačnošću do konstante, sa jednim ranije odredjenim rješenjem u okolini granice oblasti mogućih tanja. Tako je dokazana.

Teorema 19. Ako postoji obvojnica jednoparametarske familije šenja Hamilton-Jakobijeve jednačine, koju zadaje potpuni integral fiksiranoj vrijednosti konstante h , ona će u okolini granice asti mogućih kretanja predstavljati integralnu površ Hamilton-Jako-eve jednačine.

Analogni rezultat može se formulisati za sisteme sa pro-oljnim brojem stepeni slobode.

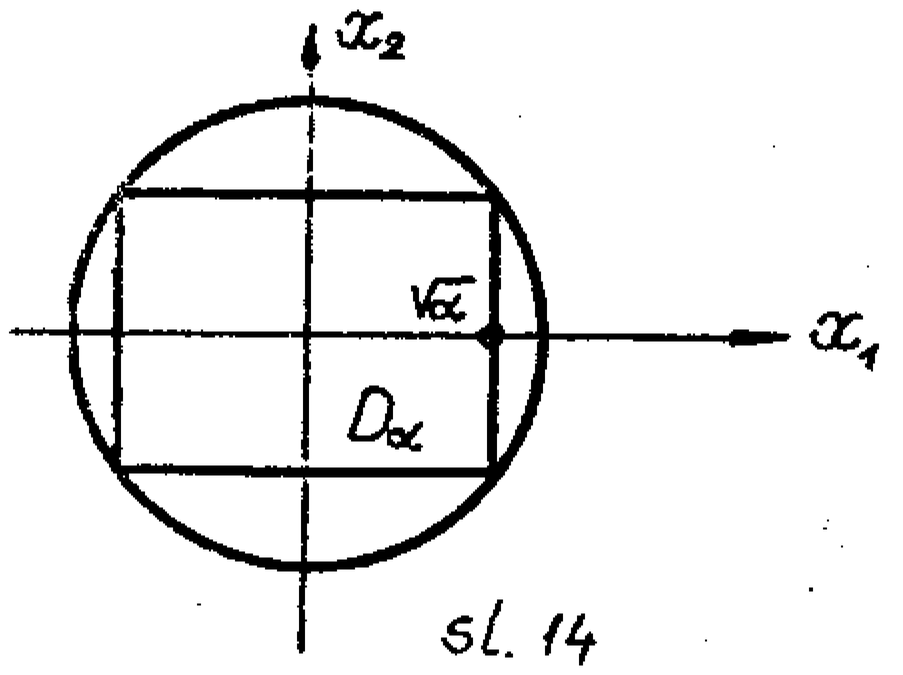
Ilustrujmo teoremu na primjeru 1, za koji smo već našli šenje u okolini granice. Odgovarajuća Hamilton-Jakobijeva jednačina

$$\left(\frac{\partial W}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial x_2}\right)^2 + x_1^2 + x_2^2 = 2h.$$

Koristeći metod razdvajanja promenjivih nalazimo otpuni integral

$$W(x,\alpha,h) = \int \sqrt{\alpha - x_1^2}\, dx_1 + \int \sqrt{2h - \alpha - x_2^2}\, dx_2 ,$$

oblastima definisanosti D_α prikazanim na slici



sl. 14

Iz potpunog integrala nalazimo

$$\frac{\partial W}{\partial \alpha} = \frac{1}{2}\int \frac{dx_1}{\sqrt{\alpha - x_1^2}} - \frac{1}{2}\int \frac{dx_2}{\sqrt{2h - \alpha - x_2^2}} .$$

iminacijom parametra α iz uslova $\partial W/\partial \alpha = 0$ i potpunog integrala dobijamo obvojnicu

$$W(x) = \frac{1}{2}\sqrt{x_1^2 + x_2^2}\,\sqrt{2h - (x_1^2 + x_2^2)} + h \arcsin \frac{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}{\sqrt{2h}} ,$$

to se od ranije nadjenog rješenja razlikuje samo za konstantu, e prema tome predstavlja rješenje u okolini granice oblasti mogućih kretanja.

4. O nestabilnosti ravnotežnog stanja

Ovaj dio rada posvećen je nestabilnosti ravnotežnog anja konzervativnih mehaničkih sistema.

Lagranž je 1788. godine formulisao teoremu po kojoj je vnotežno stanje konzervativnog mehaničkog sistema stabilno ako ravnotežnom položaju potencijalna energija ima strogi minimum. grančov dokaz predpostavlja linearizaciju diferencijalnih jednaa kretanja, što uvijek nije opravdano. Korektan dokaz Lagranzove oreme dao je Dirihle (Dirichlet). Korišćenjem, znatno kasnije zvijene, Ljapunovljeve teorije stabilnosti dokaz ove teoreme je ivijalan.

Postojanje minimuma potencijalne energije je dovoljan lov za stabilnost ravnotežnog stanja. Poznati Vintnerov (Vintner) imjer sistema sa jednim stepenom slobode

$$\Pi(q) = e^{-1/q^2}\cos\frac{1}{q}\ , \qquad q \neq 0$$

$$\Pi(0) = 0$$

$$T = \frac{1}{2}\dot{q}^2$$

kazuje da ovaj uslov nije i neophodan. U ovom primjeru i ako tencijalna energija, koja je gladka funkcija, u ravnotežnom oložaju $q=0$ nema minimum, ravnotežno stanje je stabilno. Ljapunovljevo pitanje: u kojoj mjeri je dovoljan uslov Lagranve teoreme i neophodan do sada nije dat odgovor. Tvrdjenja koja kazuju na osnovu kakvih osobina funkcije $\Pi(q)$ možemo suditi nestabilnosti ravnotežnog stanja obično se nazivaju "inverzije" agranžove teoreme. Ovim, svakako jednim od najtežih problema teijske mehanike, bavili su se mnogi naučnici. Dobro su poznati, i gu se naći u gotovo svakom udžbeniku iz teorijske mehanike Ljapuvljevi i Čitajev slučaj inverzije.

Odavno je prisutna sledeća hipoteza:

Hipoteza nestabilnosti. Ako potencijalna energija alitičkog sistema u ravnotežnom položaju nema lokalni minimum ranotežno stanje je nestabilno.

Čini se, da analogna hipoteza ima smisla i kada je $\Pi(q)$ gladka funkcija uz dodatni uslov da u oblasti

$$\Pi_\varepsilon = \{ q : \Pi(q) < 0 , \|q\| < \varepsilon \}$$

ema ravnotežnih položaja sistema.

Ponekad se u literaturi navodi da je dovoljan slov i neophodan za stabilnost analitičkih sistema, što je , ili rezultat samoubjedjenja autora ili rezultat nepravilne primjene opšte Čitajeve teoreme o nestabilnosti kretanja. Tako je, pr., u radu [40], izmedju ostalog, pokazana i pogrešnost LaSale LaSalle)- Lifšicovog (Lefschetz) dokaza.

Ćitajev, koji je veoma mnogo radio na problemu nverzije Langražove teoreme je 1938.godine u radu [38] ,napuštaući koncepciju neposredne konstrukcije pomoćne funkcije, predložio nteresantan dokaz hipoteze zasnovan na osobinama rješenja Hamilton- - Jakobijeve jednačine. Koliko je nama poznato prvi je Arnoljd Арнольд) izrazio sumnju u korektnost ovog dokaza. Takodje, ozlov u radu [46] tvrdi da je predloženi dokaz pogrešan, no okaz se ne analizira niti se igdje ukazuje na greške. To što je stalo nejasno pitanje korektnosti Ćitajevog dokaza mogu donekle a objasne riječi redaktora Ćitajevih sabranih radova [10] "Ćiajev je pisao radove veoma koncizno, mjestimicno lakonski. Zato je, majući u vidu i principijelnu složenost problema kojima se bavio, a razumijevanje njegovih radova potrebna izuzetna pripremljenost pažnja". Interesantno je primijetiti da se Ćitajev znatno kasnije radu [39] ponovo osvrće na problem inverzije, gdje i dokazuje edan kriterijum nestabilnosti ravnotežnog stanja čijim su razradjianjem razni autori dobili nove slučajeve inverzije.

Rezultati koje smo dobili u trećem dijelu rada omoucuju da se ukaže na problematicnost dokaza iz rada [38] .

Ćitajev, prećutno, koristi činjenicu da je za dokaz estabilnosti dovoljno pokazati da za proizvoljno mali broj $\varepsilon > 0$ ostoji trajektorija kretanja sa nultom pocetnom brzinom i pocetnim oložajem proizvoljno bliskim ravnotežnom koja izlazi iz oblasti Π_ε

mjenjujući sistem diferencijalnih jednačina poremećenog ravnotežnog stanja Hamilton-Jakobijevom parcijalnom jednačinom tvrdi da se iz potpunog integrala $W(\mathcal{Q}, \alpha, h)$, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1})$ za svaki početni položaj $\mathcal{Q}_0 \in \Pi_\varepsilon$ može izdvojiti rješenjem koje ostaje u oblasti

$$G = \left\{ \mathcal{Q} : \Pi(\mathcal{Q}) \leq \Pi(\mathcal{Q}_0), \ \|\mathcal{Q}\| < \delta \right\}$$

nema singularnih tačaka (tačaka grananja). Kako je, na osnovu osobine rješenja Hamilton-Jakobijeve jednačine, izvod duž uočene trajektorije)*

$$\frac{dW}{dt} = \left\langle \frac{\partial W}{\partial \mathcal{Q}}, \frac{\partial W}{\partial \mathcal{Q}} \right\rangle > 0 ,$$

to slijedi nestabilnost.

Iz dokaza je nejasno kako iz potpunog integrala izdvojiti odgovarajuće rješenje. No, na osnovu rezultata iz dijela .4. slijedi da su jedino moguća dva slučaja:

1) Izdvojiti odgovarajuće rješenje iz $n-1$ parametarske familije rješenja koju zadaje potpuni integral, ili

2) Izdvojiti rješenje u okolini granice oblasti mogućih kretanja.

Prva mogućnost otpada, jer, kako je pokazano, takvo rješenje ne može biti ni definisano u cijeloj oblasti Ω.

Pretpostavimo da se ima u vidu rješenje u okolini granice oblasti mogućih kretanja (u radu se kao osobina izdvojenog rješenja navodi njegova konstantnost u linearnoj aproksimaciji na hiperpovrši $\Pi(\mathcal{Q}) = \Pi(\mathcal{Q}_0)$-granici oblasti mogućih kretanja).

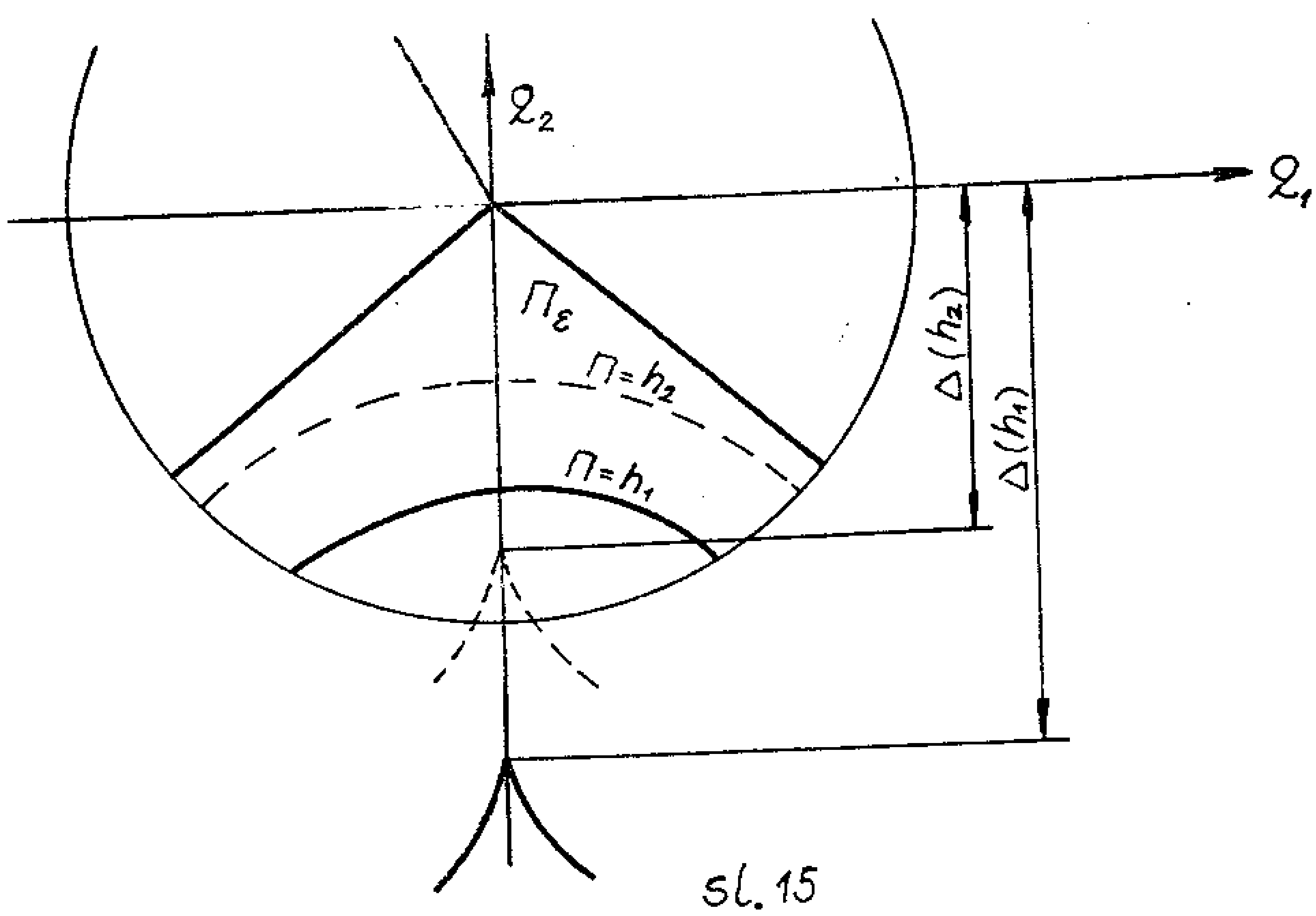
Granica jednoznačnosti ovog rješenja, kao što je pokazano, je dio kaustike koja odgovara dijelu granice oblasti mogućih kretanja sadržane u $\partial\Omega$. Pri tome je rastojanje Δ od ravnotežnog položaja do njemu najbliže fokalne tačke konačno.

)* U radu [38] se razmatraju sistemi sa "euklidskom" kinetičkom energijom.

sno da ovo rastojanje zavisi od izbora vrijednosti potpune ergije($h=\Pi(q)<0$). Da bi Čitajev dokaz prolazio potrebno bi lo pokazati da je $\Delta(h)$ ograničeno sa donje strane kada $h \to 0$. Drugim riječima, trebalo bi dokazati da se može odabrati toliko mali broj $\to 0$ da kaustike granice oblasti mogućih etanja ni za jedno fiksirano $h_0<h<0$ ne ulaze u oblast Π_ε. Ko kontra-primjer ovoj pretpostavci služi ranije razmotreni primjer stabilnog ravnotežnog položaja 1.3. (sl.15). U ovom primjeru je

$$\Delta(h)=\frac{\sqrt{-2h}}{a}\,ch\,a\frac{\pi}{2},$$

to teži nuli kada $h \to 0$. Iza povratne tačke kaustike integralna površ odgovarajućeg rješenja se složeno presijeca, te rješenje nije jednoznačno.



sl. 15

4.1. Kriterijum nestabilnosti ravnotežnog stanja.

Ovdje ćemo na početku proširiti model razmatranja na holonomni skleronomnim sistem koji se kreće pod dejstvom generalisanih sila $Q=(Q_1,\dots,Q_n)$. U ravnotežnom položaju $q=0$ je $Q(0)=0$.

Kombinujući ideju, koja potiče od Vujičića [49,50], da se oblast definisanosti pomoćnih funkcija, na osnovu kojih se sudi o stabilnosti, suži na konfiguracioni prostor i Čitajevu ideju iz rada [39], dolazimo do kriterijuma koji daje dovoljan uslov

Teorema 26. Ako postoje:

A) Skalarna funkcija $W(Q) \in C_2'$ koja u okolini ravnotežnog položaja izdvaja povezanu oblast

$$W_\varepsilon = \{ Q : W(Q) < 0, \ \|Q\| < \varepsilon \}, \quad 0 \in \partial W_\varepsilon \ ;$$

B) Neprekidno diferencijabilno vektorsko polje $Q : W_\varepsilon \to R^n$ sa osobinama:

B1) $V(0) = 0$,

B2) $\left\langle \frac{\partial V}{\partial Q} \eta, \eta \right\rangle \geq c \langle \eta, \eta \rangle \ (c>0)$ za $\forall \eta \in R^n$ i $Q \in W_\varepsilon$

tako da je

1) $\langle Q, V \rangle > 0$.

2) $\left\langle Q + \frac{\partial W}{\partial Q}, Ap \right\rangle \leq 0$ na

$$D = \{ (Q, p) : Q \in W_\varepsilon, \ T + W < 0, \ \langle V, p \rangle > 0 \}$$

ravnotežno stanje razmatranog sistema je nestabilno.

Posledica 1. Za $V = Q$ dobijamo kriterijum iz rada [52])*.

Dokaz teoreme. Uočimo funkciju

$$(1) \qquad V = -(T + W) \langle V, p \rangle .$$

Pošto kinetičku energiju T možemo učiniti proizvoljno malom (T - neprekidna funkcija i $T(Q,0)=0$) samo na račun dovoljno malih impulsa, i kako je $V(0) = 0$, postajaće oblast

$$D = \{ (Q, p) : T(Q, p) + W(Q) < 0 \ , \ \langle V, p \rangle > 0 \}$$

u svakoj proizvoljno maloj okolini koordinatnog početka faznog prostora, pri čemu je u oblasti D $W(Q)<0$. Iz(1) slijedi da je u oblasti D ispunjen uslov $V > 0$, a na granici ∂D, gdje je očigledno, ili $\langle V, p \rangle = 0$, ili $T + W = 0$, funkcija V jednaka nuli.

)* Kriterijumi, analogni ovom iz rada [52], za nestabilnost ravnotežnog stanja i kretanja neholonomnih sistema dokazani su u [35]

U faznom prostoru uočimo sferu

$$S_\Delta = \{(Q,p) : \|(Q,p)\| = \Delta\} ,$$

gdje je Δ mali pozitivan broj, odabran tako da je $S_\Delta \cap R^n(Q) \subset W_\varepsilon$. Neka je σ proizvoljno mali broj $(0<\sigma<\Delta)$. Kako je $(0,0) \in \partial D$, postojaće unutrašnja tačka $(Q_0,p_0) \in D$, takva da je $\|(Q_0,p_0)\| < \sigma$ i $V(Q_0,p_0) = \alpha > 0$.

Uocimo faznu trajektoriju $(Q(t), p(t))$ odredjenu početnim uslovom $Q(0)=Q_0$, $p(0)=p_0$. Pokažimo da fazna trajektorija izlazi iz sfere S_Δ.

Predpostavimo, suprotno tvrdjenju, da je $\|(Q(t),p(t))\| < \Delta$ za svako $t \geq t_0$ i razmotrimo promjenu funkcija $V(Q,p)$ duž fazne trajektorije. Imacemo

$$\frac{dV}{dt} = -\frac{d}{dt}(T+W)<v,p> - (T+W)\frac{d}{dt}<v,p> ,$$

odakle imajući u vidu diferencijalne jednačine poremećenog ravnotežnog stanja

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{Q}} - \frac{\partial T}{\partial Q} = Q ,$$

prvo nalazimo

$$\frac{d}{dt}(T+W) = <Q + \frac{\partial W}{\partial Q}, Ap> ,$$

a zatim i

$$\frac{d}{dt}<v,p> = <\frac{\partial v}{\partial Q}Ap, p> + <Q, v> + \Phi(Q,p) ,$$

gdje je $\Phi(Q,p)$ kvadratna po inpulsima forma sa proizvoljno malim koeficijentima.

Kako, na osnovu Malkinove leme [21], forma sa proizvoljno malim koeficijentima ne mijenja definitnost, to je dV/dt u oblasti D, pod uslovima teoreme, pozitivno definitna funkcija, pa je za $t \geq t_0$

$$V(Q(t), p(t)) \geq V(Q_0,p_0) = \alpha .$$

Znači, fazna trajektorija ne presijeca unutrašnju granicu oblasti D (jer je $V|_{\partial D} = 0$). Osim toga, zbog neprekidnosti funkcija V i dV/dt, u podoblasti za koju je $V(Q,p) \geq \alpha$, biće

$$\frac{dV}{dt} \geqslant \beta > 0 \qquad (\beta = \beta(\alpha)),$$

odakle dobijamo

$$V(Q(t), p(t)) \geqslant V(Q_0, p_0) + \beta(t - t_0),$$

što je u suprotnosti sa ograničenošću funkcije $V(Q, p)$ u Δ.

Prema tome, uvijek će postojati fazna trajektorija sa početkom u proizvoljno maloj okolini tačke O koja izlazi iz sfere S_Δ, tj. ravnotežno stanje je nestabilno.

Posledica 2. Za konzervativne sisteme, uzimajući $W = \Pi(Q)$, iz teoreme 20 dobijamo, sa neznatno izmijenjenom formulacijom, Citajevu teoremu iz [39].

Iz ove teoreme odgovarajućim izborima vektorskog polja $W(Q)$ dobijaju se sve inverzije Lagranžove teoreme koje se dokazuju direktnim metodom. Tako, npr., specijalno za $W = Q$ dobijaju se Ljapunovljeve i Čitajeve inverzije. Ova teorema je kasnije razradjivana od strane više autora. Posebno treba istaći rezultat Palamodova koji je, predpostavljajući da vektorsko polje može gubiti diferencijabilnost na konačnom broju glatkih krivih, dokazao hipotezu nestabilnosti za sisteme sa dva stepena slobode i euklidskom kinetičkom energijom [48]. Ovaj rezultat je Kozlov uopštio za sisteme sa proizvoljnom kinetičkom energijom [46]

Za razliku od autora koji su odgovarajućim konstrukcijama vektorskog polja (vidi, npr. [48, 47]) dobijali nove slučajeve inverzije, mi ćemo, predpostavljajući da je

$$\Pi = \sum_{i=m}^{\infty} \Pi_i \qquad (m \geqslant 2),$$

izabrati vektorsko polje u obliku

$$W = \frac{Q}{m} - \frac{\|Q\|^{m+\frac{1}{k}}}{\left\|\frac{\partial \Pi}{\partial Q}\right\|^2} \frac{\partial \Pi}{\partial Q} \qquad (\|\cdot\|^2 = \langle \cdot, \cdot \rangle),$$

gdje je k prirodan broj veći od 1.

Ispitajmo prvo uslov 1) iz kriterijuma nestabilnosti koji pošto je $\Omega = -\partial \Pi / \partial Q$, dobija oblik

$$<\frac{\partial\Pi}{\partial\mathfrak{Q}}, \mathbb{V}> < 0.$$

macemo

$$<\frac{\partial\Pi}{\partial\mathfrak{Q}}, \mathbb{V}> = \frac{1}{m} <\frac{\partial\Pi}{\partial\mathfrak{Q}}, \mathfrak{Q}> - \|\mathfrak{Q}\|^{m+\frac{1}{k}},$$

akle, na osnovu Ojlerove formule, dobijamo

$$<\frac{\partial\Pi}{\partial\mathfrak{Q}}, \mathbb{V}> = \Pi_m + \frac{m+1}{m}\Pi_{m+1} + \cdots - \|\mathfrak{Q}\|^{m+\frac{1}{k}}.$$

zlika

$$<\frac{\partial\Pi}{\partial\mathfrak{Q}}, \mathbb{V}> - \Pi = -\|\mathfrak{Q}\|^{m+\frac{1}{k}} + \sum_{s=m}^{\infty}\frac{1}{s}\Pi_{s+1},$$

, na osnovu Malkinove leme, negativno definitna u dovoljno ma-
j okolini koordinantnog početka, tj. tamo je

$$<\frac{\partial\Pi}{\partial\mathfrak{Q}}, \mathbb{V}> < \Pi.$$

Znači, u oblasti Π_ε uslov 1) je zadovoljen.

Ako bi bili ispunjeni i uslovi B1 i B2 imali bi
kaz hipoteze o nestabilnosti. Nažalost, naredna analiza će po-
zati da to nije uvijek slučaj. Prvo, nalazimo

$$\|\mathbb{V}\| \leq \frac{1}{m}\|\mathfrak{Q}\| + \frac{\|\mathfrak{Q}\|^{m+\frac{1}{k}}}{\left\|\frac{\partial\Pi}{\partial\mathfrak{Q}}\right\|}$$

edimo "sferne" koordinate $(\|\mathfrak{Q}\|, \vartheta_1, \ldots, \vartheta_{n-1}) \to (\mathfrak{Q})$ za koje mo-
mo, neumanjujući opstost, pretpostavljati da su regularne u obla-
i Π_ε. Imaćemo

$$\left\|\frac{\partial\Pi}{\partial\mathfrak{Q}}\right\| = \|\mathfrak{Q}\|^{m-1}\left\|\frac{\partial\Pi_m}{\partial\mathfrak{Q}}(\vartheta) + \|\mathfrak{Q}\|\frac{\partial\Pi_{m+1}}{\partial\mathfrak{Q}}(\vartheta) + \cdots\right\|,$$

ako je

$$\left\|\frac{\partial\Pi_m}{\partial\mathfrak{Q}}\right\|_{\bar{\Pi}_\varepsilon} \neq 0$$

$$\frac{\|\mathfrak{Q}\|^{m+\frac{1}{k}}}{\left\|\frac{\partial\Pi}{\partial\mathfrak{Q}}\right\|} \to 0 \qquad kod \quad \|\mathfrak{Q}\| \to 0$$

odakle slijedi neprekidnost na $\bar{\Pi}_\varepsilon$.

Analogno se pokazuje da pod gornjim uslovom i

$$\frac{\partial V}{\partial q} \to \frac{1}{m} E \quad kada \quad \|q\| \to 0, \quad q \in \Pi_\varepsilon ,$$

gdje je E jedinična matrica, pa pri dovoljno malom ε matrica $\partial V/\partial q$ je pozitivno definitna u Π_ε .

Ograničavajući uslov $\|\partial \Pi/\partial q\|\big|_{\bar{\Pi}_\varepsilon} \neq 0$ zahtijeva da prva forma Π_m bude regularna, tj. da nema kritičnih tačaka u oblasti $\bar{\Pi}_\varepsilon$ osim tačke $q=0$. Ako je ovaj uslov ispunjen ravnotežno stanje je nestabilno. Ovaj rezultat za euklidsku kinetičku energiju i $\Pi \in C_q^m$ je dokazao Palamodov [48 , teorema 2] .

U slučajevima kada prva forma Π_m je singularna možemo tražiti skalarnu funkciju W u obliku $W = \Pi + W_1$; tako da u oblasti $\bar{W}_\varepsilon \subset \Pi_\varepsilon$ forma Π_m nema kritičnih tačaka. Imajući u vidu ovu ideju iz kriterijuma nestabilnosti direktno dobijamo

<u>Teorema 21</u>. Ako postoji skalarna funkcija $W_1 \in C_q^1$ sa osobinama:

$$1) \quad \frac{\partial \Pi_m}{\partial q}\bigg|_{\bar{W}_\varepsilon \subset \Pi_\varepsilon} \neq 0$$

$$2) \quad \left\langle \frac{\partial W_1}{\partial q}, \dot{q} \right\rangle \bigg|_D \leq 0$$

ravnotežno stanje je nestabilno.

L I T E R A T U R A

1 S.Aljančić. - Uvod u realnu i funkcionalnu analizu. Beograd, 1968.

2 T.Andjelić, R.Stojanović. - Racionalna mehanika. Beograd,1966.

3 T.Andjelić. - Matrice. Beograd, 197o.

4 В.И.Арнольд. - Математической механики. Москва, 1979.

5 В.И.Арнолд. - Обыкновенные дифференциальные уравнения. Москва, 1971.

6 В.И.Арнолд. - Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Москва, 1978.

7 P.Appel. - Traite de mecanique rationele. Gouthiel-Vilaris, 19o9.

8 A.Bilimović. - Racionalna mehanika II. Beograd, 1951.

9 R.Bishop, R.Crittenden. - Geometry of manifolds. New York-London, 1964.

1o Н.Г.Четаев. - Устойчивость движения. Работы по аналитической механике. Москва, 1962.

11 Б.А.Дубровин, С.П.Новиков, А.Т.Фоменко. - Современая геометрия. Москва, 1979.

12 F.Gantmaher. - Analitička mehanika /prevod sa ruskog/. Beograd, 1965.

13 C.Jakobi. - Vorlesungen uber dynamik. Berlin, 1884.

14 H.Goldstein. - Classical Mechanics. Cambridge, 1951.

15 А.Н.Колмогоров, С.В.Фомин. - Элементы теории функций и функционального анализа. Москва, 1981.

16 В.В.Козлов. - Методы качественого анализа в динамике твердого тела. Москва, 1980.

17 R.Courant. - Partial differential equations.
New York - London, 1962.

18 C.Lanczos. - The variational principles of mechanics.
Toronto, 1962.

19 А.И.Лурье. - Аналитическая механика.
Москва, 1956.

20 А.М.Ляпунов. - Собрание сочинений, т.2.
Москва, 1956.

21 И.Г.Малкин. - Теория устойчивости движения.
Москва, 1952.

22 J.Milnor. - Morse theory. Primceton, 1963.

23 J.Milnor. - Lectures on the h-cobordism theorem.
Princeton, 1965.

24 Дж.Милнор, А.Уоллес.- Дифференциальная топология,
Москва, 1972.

25 А.С.Мищенко, А.Т.Фоменко.- Курс дифференциальной
геометрии и топологии. Москва, 1980.

26 L.Pars. - Analitical dyinamics.
London, 1964.

27 Л.С.Понтрягин.- Обыкновение дифференциальные уравнения.
Москва, 1970.

28 П.К.Рашевский.- Риманова геометрия и тензорный анализ.
Москва, 1967.

29 П.К.Рашевский.- Геометрическая теория уравнений с
частными произвдными.
Москва-Ленинград, 1947.

E.Whittaker. - A treatise on the analitical dinamic.
Cambrige, 1937.

M.Spivak. - Calculus on manifolds.
New York - Amsterdam, 1965.

2 J.Synge. - Classical dynamics.

3 Г.Н.Суслов. - Теоретическая механика.
Москва-Ленинград, 1947.

4 Л.Н.Авдонин. - Одна теорема о неустойчивости равновесия.
П М М, 35:6, 1971.

5 A.Bakša. - Stabilnost kretanja neholonomnih sistema
/doktorska disertacija/. Beograd, 1976.

6 С.В.Болтин, В.В.Козлов. - Об асимптотических решениях
уравнений динамики. - Вестн.моск.ун.-та.Мат.,мех.,№5,198

7 С.В.Болотин, В.В.Козлов. - Либрация в системах со
многими степенями свободы. П М М, 42:2, 1978.

8 Н.Г.Четаев. - О неустойчивости равновесия, когда
силовая функция не есть максимум.
Уч. зап. Казанск. ун. - та. 98:3, 1938.

9 Н.Г.Четаев. - О неустойчивости равновесия в некоторых
случаях, когда функция сил не есть максимум.
П М М, 16:1, 1952.

10 P.Hagedorn.-Die Umkehrung der Stabilitatssatze von
Lagrange-Dirichlet und Routh. Arch. Rational
Mech. Anal., 42, 1971.

11 М.С.Яров-Яровой. - Об интегрировании уравнения
Гамильтона-Якоби методом разделения переменных
П М М, 21:6, 1963.

42 A.Kneser. - Studien uber die Bewegungsvorgange in der Umgebung instabiler Gleichgewichtslagen. J.reine und angew. Math., 118 .

43 W.Koiter. - On the instability of equilibriun in the absonce of a minimum of the potential energy. Naderl. Acad. Wetensch. Proc., 68:3, 1965.

44 В.В.Козлов.- О геометрии областей возможных движений с краем. Вестн. моск. ун-та. Матем., мех., №5, 1977.

45 В.В.Козлов. - Принцип наименьшего действия и периодические решения в задачах класической механики. П М М, 40:3, 1976.

46 В.В.Козлов. - Неустойчивость равновесия в потенциальном поле. У М Н, 36:1, 1981.

47 В.В.Козлов. - О неустойчивости равновесия в потенциальном поле. У М М, 36:3, 1981.

48 В.П.Паламодов. - Об устойчивости равновесия в потенциальном поле. Функц. анализ., II:4, 1977.

49 В.А.Вуйичич. - Критерий об устойчивости состояния равновесия системы динамических точек Publ. Inst. Math., 8:22, 1968.

50 В.А.Вуйичич. - Общее утверждение об устойчивости движени и состояния равновесия механических систем. Publ. Inst. Math., 11:25, 1971.

51 R.Bulatović. Stabilnost ravnotežnog stanja djelimično slobodnih sistema /magistarski rad/. Beograd, 1981.

52 R.Bulatović. Kriterijum nestabilnosti djelimično slobodnih sistema. XV jugoslovenski kongres teorijske i primijenjene mehanike. Zbornik radova, A-22, str. 19-22. Kupari, 1981.

53 Р.М.Вулатович. - Существование решений уровнения Гомилтона-Якоби в окрестности невыржденных положений равновесия. П.М.М. 47:4, 1983.

54 Р.М.Вулатович. - Уровнение Гомильтоня-Якоби в областях возможнога движения скроем. П.М.М. (predato u štampu)

55 R.Bulatović. - Geometrija okoline granice oblasti mogućih kretanja s krajem. I simpozijum teorijske i primijenjene mehanike i mehanizama, Zbornik radova, str.333-341, Skoplje, 1982.

56 R.Bulatović. - O kompleksnim rješenjima Hamilton-Jakobijeve jednačine. I simpozijum teorijske i primijenjene mehanike i mehanizama, Zbornik radova, str. 353-359, Skoplje, 1982.