

UNIVERZITET U PRIŠTINI  
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET

20 123

Rasim Bejtullahu

ОСНОВНА ОРГАНИЗАЦИЈА УДРУЖЕНОГ РАДА  
ЗА МАТЕМАТИКУ, МЕХАНИКУ И АСТРОНОМИЈУ  
БИБЛИОТЕКА

Број: Јокас. 97/1  
Датум: 22. 9. 1980.

ДИФРАКЦИОНА ТЕОРИЈА НЕКИХ  
КЛАСИЧНИХ ИНТЕРФЕРЕНЦИОНИХ  
ШЕМА

—ДОКТОРСКА ДИСЕРТАЦИЈА—

PRIŠTINA 1976 god.

Osećam osobitu obavezu da na ovom mestu izrazim svoju duboku zahvalnost voditelju ovoga rada, teoretičaru, Prof. Dr. Josipu Moseru, koji mi je predložio ovu temu, pratio svaki detalj i stavio na raspolaganje sopstvenu biblioteku.

Takodje, u mojoj pravilnijoj orijentaciji, veliku pomoć su mi pružili teoretičari vanr. Prof. Dr. Ljiljana Janićijević i doc. Dr. Mirjana Jonoska, bez čijih saveta ovaj rad bio bi jednostran.

Ovom prilikom se zahvaljujem i doc. Dr. Dimitri Karčickoj, za veliku pomoć koju mi je pružila na programiranju nekih funkcija koje su ispitivane elektronskim računarem.

## S A D R Ž A J

	Str.
UVOD .....	1
1. KIRCHHOFFOVA INTEGRALNA TEOREMA .....	7
2. KIRCHHOFFOVA FORMULA ZA CILINDRIČNE TALASE .....	12
G L A V A I	
1. INTERFERENCIJA DVAJU IZVORA NA DVA OTVORA PRI KOSOM UPADANJU. (FRESNELOVA BIOGLEDALA).....	15
2. SLUČAJ SPOJENIH OGLEDALA .....	25
3. SLUČAJ RAZMAKNUTIH OGLEDALA .....	36
4. SLUČAJ KOSOG NEPROZIRNOG ZAKLONA .....	47
5. FRAUNHOFEROV PRELAZ KOD BIOGLEDALA .....	51
G L A V A II	
6. DIFRAKCIONA TEORIJA BIPRIZME (FAZNA METODA) .....	57
7. DIFRAKCIONA TEORIJA DVAJU IZVORA (METOD DVAJU IZVORA).....	62
8. ANALIZA NUMERIČKIH REZULTATA KOD BIPRIZME .....	67
9. FRAUNHOFEROV PRELAZ KOD BIPRIZME .....	81
10. PRELAZ IZ BIPRIZME NA PUKOTINU .....	85
G L A V A III	
11. DIFRAKCIONA TEORIJA BILLETVOG BISOČIVA .....	90
12. SLUČAJ UPADNIH CILINDRIČNIH TALASA .....	100
13. DIFRAKCIONA TEORIJA BILLETVOG BISOČIVA (DRUGA VERZIJA).....	105
14. FRAUNHOFEROV PRELAZ KOD BILLETVOG BISOČIVA .....	107
G L A V A IV	
15. DIFRAKCIONA TEORIJA MESLINOVOG EKSPERIMENTA .....	110
16. EGZISTENCIJA FIKTIVNIH IZVORA DUŽ OPTIČKE OSI .....	114
17. RASPORED INTENZITETA NA RAVNINI PRVOG FIKTIVNOG IZVORA .....	116
18. RASPORED INTENZITETA NA RAVNINI DRUGOG FIKTIVNOG IZVORA .....	118

19.	FRAUNHOFEROV PRELAZ KOD MESLINOVOG EKSPERIMENTA .....	121
G L A V A V		
DIFRAKCIONA TEORIJA YOUNGOVOG EKSPERIMENTA		
20.	FRESNELOVA DIFRAKCIJA NA DVE PARALELNE PUKOTINE .....	123
21.	DIFRAKCIONA TEORIJA PRVOBITNOG YOUNGOVOG EKSPERIMENTA (FRAUNHOFEROV PRELAZ) .....	129
22.	YOUNGOV EKSPERIMENT SA PARALELNIM UPADNIM TALASIMA ...	132
23.	TEOREM EKVIVALENCIJE .....	134
	Z A K L J U Č A K .....	136
	CITIRANA LITERATURA .....	141
	D O D A T A K (PROGRAMI NUMERIČKE ANALIZE ZA: SPOJENA OGLEDALA, RAZMAKNUTA OGLEDALA, BIPRIZMU I FRESNELOVU DIFRAKCIJU NA DVE PUKOTINE).	

## U V O D

U ovom radu biće postavljena difrakciona teorija za neke klasične interferencione šeme. Začudo, već više od 150 godina bili smo zadovoljeni elementarnom teorijom takvih šema koje je postavio Fresnel [1]. Fresnel je zamislio eksperimente koji nose njegovo ime - biogledala i biprizmu da bi dokazao da se interferencione linije nastaju ukrštavanjem dvaju svjetlosnih snopova i da pri tom nisu odlučni nikakvi rubovi tela, zaklona ili pukotina. Sam Fresnel spominje da je zamislio svoje eksperimente - biogledala, jer je tražio slučajeve u kojima bi rešio difrakciju i doveo do interferencije snopove nedifraktirane svjetlosti. Međutim, ne samo Fresnelovi eksperimenti sa dva ogledala nego i ostale interferencione šeme mnogo su složenije nego što su ih zamišljali Fresnel i drugi fizičari, i nego što se po literaturi navode. Precizno merenje interferencionih linija koje su izvršene zadnjih decenija pokazuju da je nemoguće izdvojiti interferenciono područje prekrivanja od difrakcionog područja. Ukoliko se služimo jezikom difrakcione teorije koju sam primenio da bi postavio teoriju ovih šema, onda možemo slobodno kazati da su i interferencione linije koje se dobivaju interferencionim šemama difrakcionog karaktera. Da je to tačno, možemo se ubediti ne samo iz matematičke analize koju sam postavio za neke klasične interferencione šeme, nego i iz kompjuterskih rezultata koji su dobiveni programiranjem istih funkcija za neke parametre.

Prema Fresnelovom očekivanju, na bliskim rastojanjima od optičke osi treba dobiti interferencione linije jednakih intenziteta. Ali, postavljena difrakciona teorija pokazuje da i na bliskim rastojanjima od optičke osi linije nisu konstantnog intenziteta. A Fresnel je bio postavio svoju elementarnu teoriju upravo za tu oblast. Postavljena difrakciona teorija u sebi sadrži analizu rasporeda svjetlosnog intenziteta i za onaj deo prostora, gde je Fresnel smatrao da dolazi do prekrivanja svjetlosnih

snopova, odnosno do odvojenosti interferencionih prekrivanja od difrakcionih i za onaj deo prostora u kojem se jače izražava difrakcija a za koji je Fresnel smatrao da je uspeo ukloniti sa svojim interferencionim šemama.

Šta su interferencione šeme? Prvo tačno objašnjenje interferencije svetlosti dao je Th. Young [2] 1802. god. Njegovo tačno objašnjenje interferencije svetlosti donelo je veliko priznanje talasnoj prirodi svetlosti. Uredjaj koji je on upotrebio sastoji se od izvora svetlosti od kojeg se koristi samo jedan mali deo i dvaju otvora koji su postavljeni na izvesnu udaljenost od izvora. Zbog velike udaljenosti izvora u odnosu na rastojanje centara otvora možemo pretpostaviti da se ravnina upadnog talasa podudara sa ravninom u kojoj su postavljeni mali otvori. Prelazeći kroz te male otvore svetlosni talasi odstupaju od pravolinijskog prostiranja, tj. difraktuju se i interferiraju. To znači da ćemo na nekoj ravnini koja je paralelna sa ravninom u kojoj se nalaze mali otvori na raznim mestima dobiti različite vrednosti intenziteta svetlosti. Kako svetlost dvaju nezavisnih izvora ne može da interferira, onda ti snopovi svetlosti treba da potiču od iste talasne površine upadnog talasa ili kako se kaže, ti centri zračenja treba da budu sinhroni. Fazna razlika talasa u tim centrima jednaka je nuli a u bilo kojoj drugoj tački prostora fazna razlika u odnosu na fazu centara ne zavisi od vremena. Ovi centri zrače koherentne talase koji mogu medjusobno interferirati.

Daljnji problem talasne teorije svetlosti se sastojao u mogućnosti stvaranja odnosno obezbedjenja koherentnih izvora. Mogućnost stvaranja koherentnih centara bila je postignuta idejama A. Fresnela, M. Puyilleta, Billeta, Lloyda, Pohla i drugih. Svi uredjaji koje su oni napravili za dobivanje tačkastih ili linijskih koherentnih izvora za posmatranje interferencije koja nije lokalizirana u prostoru, zovu se interferencione šeme - uredjaji. Sve ove interferencione šeme koriste Youngovu konstataciju,

tj. potrebu da izvori sleduju od iste talasne površine i da svetlost dolazi u istu tačku prostora na dve različite putanje, koje se medjusobno malo razlikuju.

U ranijoj literaturi se navodi da ove interferencione šeme koje obezbeđuju egzistenciju dvaju koherentnih izvora daju samo interferenciju. To je sasvim opravdano uzimajući u obzir činjenicu da pritom klasičari nisu uzeli u obzir nikakav uticaj specifičnih faktora koji su povezani sa egzistencijom same interferencione šeme. Medjutim, mišljenja sam, samo zanemarivanje nekih faktora koji su specifični za svaku interferencionu šemu vodi do opravdanosti Fresnelove konstatacije. To znači, da se klasične šeme ne mogu odvojiti od sopstvenih faktora jer upravo ti faktori obezbeđuju egzistenciju same aparature a nama, omogućavaju bolji način približavanja konkretnom problemu.

Kod svake klasične šeme imamo posla sa ograničenim svjetlosnim fluksevima. Ograničenost flukseva koji dolaze od zračnih centara je posledica specifičnih faktora date šeme. Tako napr. za biogledala imamo sledeće specifične faktore;  $a$  - udaljenost zračnog centra od spojnice biogledala,  $b$  - ravnina gde se posmatra data interferenciona slika,  $\alpha$  - ugao koji zatvaraju ogledala,  $\varphi$  - ugao koji povezuje položaj izvora sa geometrijom biogledala. Fresnelova elementarna teorija nije mogla povezati sve te parametre. Naime, poznato je da je Fresnel izveo svoju formulu koristeći razliku puteva dveju oscilacija koje polaze od koherentnih zračnih centara i sastaju se na nekoj ravnini koja je mnogo udaljena u odnosu na medjusobnu udaljenost zračnih centara i koja je paralelna sa ravninom u kojoj se nalaze ti centri. Svakako, mi ćemo dobiti bolju sliku sastavljanja koherentnih talasa primenom difrakcione teorije.

Fresnel navodi dva merenja koja je izvršio sa biogledalima i spominje, da ga na tu ideju mogla navesti jedino teorija vibracija a ni





sistema - od mesta gde se ogledala dodiruju. S druge strane, oni nisu uzeli u obzir specifične parametre koji su različiti za svaku interferencijsku šemu. Istina je, njih je interesirao problem biogledala gde dolaze do izražaja fiktivni izvori, ali u nekim interferencionim šemama kako ćemo videti kasnije, specifični faktori utiču na takav način, da se interferencijska slika, dobiva prekrivanjem svjetlosnih flukseva, od dvaju realnih izvora koji se javljaju iza difrakcionog otvora (Billet).

U novoj literaturi još uvek te šeme se spominju kao aparati za dobivanje interferencije, mada se prećutno navodi da se detaljna analiza ne može izvršiti bez uzimanja u obzir i difrakcije [9],[10],[11]. Autor [9] na str. 109 vrši uporedjenja između Youngovog eksperimenta i drugih interferencionih šema i na kraj tog paragrafa kaže "U aparatima Fresnela, Lloydja i drugih, difrakcija izlazi iz kraja prizme ili ogledala." Nešto slično spominju i autori [10]. Na strani 289 nalazimo "U ovoj glavi mi ćemo (kada je moguće) pretpostavljati da se ponašanje svjetlosnih flukseva podvrgava zakonima geometrijske optike i zanemarićemo difrakcione efekte koji kako je pokazano ranije dolaze u blizini fokalnih tačaka i granice senke." Da ne zaboravimo, kod svih klasičnih interferencionih šema nalazi se sa strane svjetlosnih flukseva neosvjetljeni prostor.

Zadnjih decenija poboljšanjem mjernih tehnika i tehnika snimanja izvršen je jedan niz snimanja interferencionih slika [12],[13],[14], koje su dobivene Fresnelovim biogledalima. Autor u [12] opisuje uređaj kojim se on služio za dobivanje interferencionih linija Fresnelovim biogledalima. Na str. 103. toga rada nalazimo "No i ta su mjerenja (radi se o mjerenjima koje je izvršio Struve) jednostrana, jer je mijenjan sistematski samo jedan faktor, udaljenost ravnine motrenja od sastava zrcala. Daljih sistematskih kvantitativnih ispitivanja nisam našao u literaturi..." pa nastavlja: "Opisao bih ovdje jednostavan uređaj, koji omogućava svestrano

ispitivanje toga pokusa i dozvoljava tačno mjerenje razmaka pruga interferencije u zavisnosti o svim odlučnim faktorima. Tim sam se uređajem poslužio pri kvantitativnim istraživanjima pojava interferencije i ogiba na Fresnelovim zrcalima, ..." Njegova su mjerenja do danas najpreciznija i pomoću njegovog uređaja kako sam autor spominje mogu se demonstrirati mnogi eksperimenti povezani sa Fresnelovom difrakcijom svjetlosti. I ne samo to. U kasnijim radovima [13] i [14] isti autor još više poboljšava mjernu tehniku i uspeo je snimiti interferencione linije kod Fresnelovih biogledala i tada kada su ona razmaknuta za izvesnu udaljenost. Tu autor [12],[13],[14] pokazuje da je proširenje Weberovog rada sa strane Struvea - da razmak između ogledala ne može se zanemariti u odnosu na talasnu dužinu svjetlosti, treba još proširiti na mogućnost da se ogledala mogu razmaknuti i za nekoliko cm. U ovom slučaju difrakcioni efekti dolaze još više do izražaja, a slike pokazuju sasvim druge osobine. Eksperimenti su izvršeni sa razmaknutim ogledalima do 2,2 cm.

U ovom radu biće postavljena difrakciona teorija sledećih interferencionih šema:

1. Fresnelova biogledala
2. Razmaknuta biogledala
3. Fresnelova biprizma
4. Billetova bismočiva
5. Meslinov eksperiment
6. Youngov eksperiment Fresnelovog tipa.

Kako svaka šema ima sopstvene karakteristične faktore, za svaku šemu biće postavljena posebna teorija. Ove šeme ću analizirati sa difrakcionog aspekta. Kao osnovu za postavljanje ove teorije koristiću Kirchhoffovu integralnu teoremu i ako Kirchhoffova teorija nije slobodna od nekih matematičkih i fizičkih pretpostavki [15]. Poznato je, da se u Kirchhoffovoj teoriji ne uzima u obzir uticaj materijala ekrana na svetlosno polje u

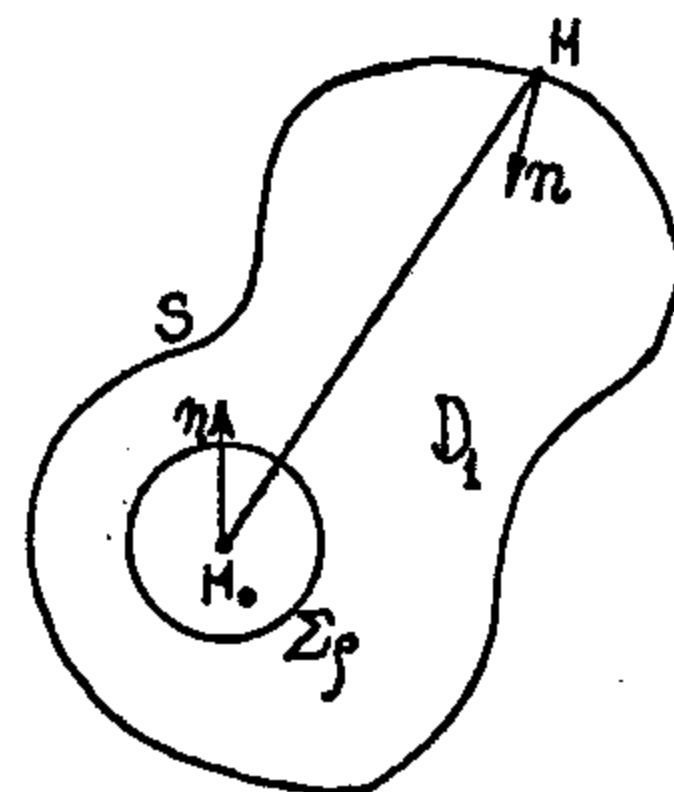
njegovoj blizini, što ne odgovara stvarnosti [16], mada dovodi u tim slučajevima samo do neznatnih grešaka kada su dimenzije otvora velike u odnosu na talasnu dužinu upadne svjetlosti. Budući da u ovoj teoriji nećemo imati posla sa otvorima koji imaju dimenzije reda talasne dužine onda primenom Kirchhoffove teorije nećemo uvesti nikakvu grešku u analizu rasporeda intenziteta svjetlosti.

Kako ćemo videti Fresnelova formula formalno izlazi iz difrakcione teorije. Budući da su funkcije intenziteta suviše komplikovane za analizu, čitava analiza je izvršena pomoću elektronskog računara.

-----

### 1. KIRCHHOFFOVA INTEGRALNA TEOREMA

Greenova formula [17] nam omogućava da izračunamo vrednost neke funkcije u proizvoljnu tačku  $M_0$  unutar oblasti  $D$  kao zbir nekog površinskog i zapreminskog integrala. Neka je  $U(M)$  zadana funkcija u oblasti  $D$  i neprekidna sa svojim prvim i drugim izvodom u oblasti  $D$  i na površini  $S$  koja ograničava oblast  $D$ . Primenimo Greenovu formulu za ovu funkciju i funkciju  $V = \frac{1}{r}$ , gde je  $r$  rastojanje od određene tačke  $M_0$  koja se nalazi unutar oblasti  $D$  do promenljive tačke  $M$ , sl. 1. Kako funkcija  $V = \frac{1}{r}$  teži prema beskonačnosti ako  $M \rightarrow M_0$  ne možemo primeniti Greenovu formulu na čitavu oblast prostora  $D$ . Tačku  $M_0$  izdvojimo iz prostora  $D$  malom sferom sa centrom u  $M_0$  i radiusom  $\rho$ . Preostalu oblast prostora označimo sa  $D_1$  a površinu male sfere sa  $\Sigma_\rho$ . Budući da u oblasti  $D_1$  funkcije  $U$  i  $\frac{1}{r}$  zadovoljavaju uslove neprekidnosti, primenom Greenove formule dobijemo:



sl. 1.

$$\iiint_{D_1} \left[ u \Delta \frac{1}{r} - \frac{1}{r} \Delta u \right] dv = \iint_S \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{1}{r} \right) \right] ds + \iint_{\Sigma_\rho} \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{1}{r} \right) \right] ds \quad (1)$$

Ovde smo primenili Greenovu formulu za slučaj normale koja je orijentisana prema unutrašnjosti zapremine  $D_1$ , a integracija se vrši po površinama  $S$  i  $\Sigma_\rho$  koje ograničavaju prostor  $D_1$ . Nije teško dokazati da funkcija  $V = \frac{1}{r}$  zadovoljava Laplacovu jednačinu  $\Delta \frac{1}{r} = 0$ , pa ćemo dobiti iz (1),

$$\iiint_{D_1} \frac{\Delta u}{r} dv + \iint_S \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{1}{r} \right) \right] ds + \iint_{\Sigma_\rho} \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{1}{r} \right) \right] ds = 0$$

Uzimajući u obzir da su na maloj sferi  $\Sigma_\rho$   $r$  i  $\underline{n}$  kolinearni dobićemo.

$$\iiint_{D_1} \frac{\Delta u}{r} dv + \iint_S \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{1}{r} \right) \right] ds + \iint_{\Sigma_\rho} \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial n} ds + \iint_{\Sigma_\rho} \frac{1}{r^2} u ds = 0 \quad (2)$$

Sada ćemo pustiti da radius sfere  $\rho$  teži prema nuli. Pri tome prvi integral po oblasti  $D_1$  težiće k zaprominskom integralu zapremine  $D$ . Drugi integral ne zavisi od  $\rho$ . Kod poslednjeg integrala na površini male sfere  $\Sigma_\rho$ ,  $r$  imaće konstantnu vrednost  $\rho$  pa možemo pisati,

$$\iint_{\Sigma_\rho} \frac{1}{r^2} u(M) ds = \frac{1}{\rho^2} \iint_{\Sigma_\rho} u(M) ds \quad (3)$$

odnosno

$$\iint_{\Sigma_\rho} \frac{1}{r^2} u(M) ds = \frac{1}{\rho^2} u(M_\rho) \cdot 4\pi \rho^2 = 4\pi u(M_\rho)$$

gde je  $M_\rho$  neka tačka na površini male sfere  $\Sigma_\rho$ . Tačka  $M_\rho \rightarrow M_0$  kada  $\rho \rightarrow 0$ , a poslednji izraz teži prema  $4\pi u(M_0)$ . Budući da prvi izvod funkcije  $u$  u proizvoljnom smjeru kada  $M_\rho \rightarrow M_0$  ostaje ograničen jer u oblasti  $D$  funkcija  $u$  ima neprekidne izvode prvog i drugog reda, lako je dokazati da pretposljednji integral u (2) teži k nuli kada  $\rho \rightarrow 0$ , jer

$$\iint_{\Sigma_\rho} \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial n} ds = \frac{1}{\rho} \iint_{\Sigma_\rho} \frac{\partial u}{\partial n} ds = \frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{M_\rho} \cdot 4\pi \rho^2 = \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{M_\rho} \cdot 4\pi \rho \rightarrow 0 \quad \text{kada } \rho \rightarrow 0 \quad (4)$$

izlazi, 
$$[\Delta V] = \frac{1}{c^2} \left[ \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} \right] \quad (8)$$

onda ćemo za  $\Delta U$  dobiti,

$$\Delta U = \frac{2}{c^2} \left[ \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} \right] - \frac{2}{c} \left[ \frac{\partial^2 V}{\partial t \partial r} \right] - \frac{2}{cr} \left[ \frac{\partial V}{\partial t} \right]$$

i nakon sredjivanja izlazi

$$-\frac{\Delta U}{r} = -\frac{2}{c} \left\{ \frac{1}{cr} \left[ \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} \right] - \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial^2 V}{\partial t \partial r} \right] - \frac{1}{r^2} \left[ \frac{\partial V}{\partial t} \right] \right\} \quad (9)$$

Lako je dokazati da desna strana jednačine (9) predstavlja divergenciju nekog vektora.

$$-\frac{\Delta U}{r} = \text{div} \left\{ \frac{2}{c} \left[ \frac{\partial V}{\partial t} \right] \text{grad } \ln r \right\} \quad (10)$$

Naime, primenom formule  $\text{div}(\vec{a}\vec{b}) = \vec{a} \cdot \text{div}\vec{b} + \vec{b} \cdot \text{grad}a$ , gde su:  $\vec{a} = \frac{2}{c} \left[ \frac{\partial V}{\partial t} \right]$  i  $\vec{b} = \text{grad } \ln r$  lako se dokazuje ispravnost relacije (10).

Primenimo sada Gaussovu formulu koja glasi,

$$\iiint_D \text{div}\vec{A} dv = \iint_S A_n ds \quad (11)$$

gde je  $S$  površina oblasti  $D$ , dok je  $A_n = \vec{A} \cdot \vec{n}$  - projekcija vektora  $\vec{A}$  na smjer normale  $\vec{n}$ . Ovde je  $\vec{n}$  jedinični vektor spoljašnje normale na površini  $S$ ,  $\vec{n} = \vec{i} \cos\alpha + \vec{j} \cos\beta + \vec{k} \cos\gamma$ . Kako je u formuli (5) poslednji član oblika,

$$\begin{aligned} -\iiint_D \frac{\Delta U}{r} dv &= \iiint_D \text{div} \left\{ \frac{2}{c} \left[ \frac{\partial V}{\partial t} \right] \text{grad } \ln r \right\} dv = \\ &= -\iint_S \left\{ \frac{2}{c} \left[ \frac{\partial V}{\partial t} \right] \text{grad } \ln r \right\} \vec{n} ds = -\frac{2}{c} \iint_S \left[ \frac{\partial V}{\partial t} \right] \frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial n} ds \end{aligned} \quad (12)$$

predznak minus u (12) dolazi zbog smjera normale prema unutrašnjosti površine. Zamenimo u (5) izraz (12), uzimamo u obzir (7) i činjenicu što  $U(M_0, t) = V(M_0, t)$  jer u tačku  $M_0$ ,  $r=0$  pa ćemo dobiti,

$$V(M_0; t) = \frac{1}{4\pi} \iint_S \left\{ [V] \frac{\partial(1/r)}{\partial n} - \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial V}{\partial n} \right] + \frac{1}{cr} \left[ \frac{\partial V}{\partial t} \right] \frac{\partial r}{\partial n} - \frac{2}{c} \left[ \frac{\partial V}{\partial t} \right] \frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial n} \right\} ds$$

g.

$$V(M_0; t) = \frac{1}{4\pi} \iint_S \left\{ [V] \frac{\partial(1/r)}{\partial n} - \frac{1}{cr} \left[ \frac{\partial V}{\partial n} \right] \frac{\partial r}{\partial n} - \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial V}{\partial n} \right] \right\} ds \quad (13)$$

Formula (13) izražava  $V(M_0; t)$  preko retardiranih vrednosti  $V$ ,  $\frac{\partial V}{\partial t}$  i  $\frac{\partial V}{\partial n}$  na površini  $S$ . Simbol  $\frac{\partial}{\partial n}$  pokazuje diferenciranje u smjeru unutrašnje normale na površini  $S$ . Formula (13) je poznata kao Kirchhoffova integralna teorema.

Pretpostavimo da funkcija  $V$  zavisi od vremena po harmonijskom zakonu [18],

$$V(x, y, z, t) = g(x, y, z) e^{-i\omega t} \quad (14)$$

gde je,  $\frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda} = k$

$$\text{Tada je } [V] = g(x, y, z) e^{-i\omega(t - \frac{r}{c})} = g(x, y, z) e^{i(\frac{\omega}{c}r - \omega t)} = g(x, y, z) e^{i(kr - \omega t)}$$

Tada za svaku tačku oblasti  $D$  (ako nema izvora unutar oblasti) imamo iz (13)

$$g(x_0, y_0, z_0) e^{-i\omega t} = \frac{1}{4\pi} \iint_S g(x, y, z) e^{i(kr - \omega t)} \left\{ \frac{\partial(\frac{1}{r})}{\partial n} - \frac{1}{cr} (-i\omega g) e^{i(kr - \omega t)} \frac{\partial r}{\partial n} - \frac{1}{r} \frac{\partial g}{\partial n} e^{i(kr - \omega t)} \right\} ds$$

jer je,

$$\left[ \frac{\partial V}{\partial t} \right] = -i\omega g e^{i(kr - \omega t)} ; \left[ \frac{\partial V}{\partial n} \right] = \frac{\partial g}{\partial n} e^{i(kr - \omega t)}$$

$$g(x_0, y_0, z_0) = \frac{1}{4\pi} \iint_S \left\{ g e^{i(kr)} \frac{\partial(\frac{1}{r})}{\partial n} + \frac{i\omega}{cr} g e^{i(kr)} \frac{\partial r}{\partial n} - \frac{e^{i(kr)}}{r} \frac{\partial g}{\partial n} \right\} ds$$

$$\text{No kako je, } g \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{e^{i(kr)}}{r} \right) = g e^{i(kr)} \frac{\partial(\frac{1}{r})}{\partial n} + g \frac{i(kr)}{r} e^{i(kr)} \frac{\partial r}{\partial n}$$

$$\text{imamo konačno ; } g(x_0, y_0, z_0) = \frac{1}{4\pi} \iint_S \left\{ g \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{e^{i(kr)}}{r} \right) - \left( \frac{e^{i(kr)}}{r} \right) \frac{\partial g}{\partial n} \right\} ds \quad (15)$$

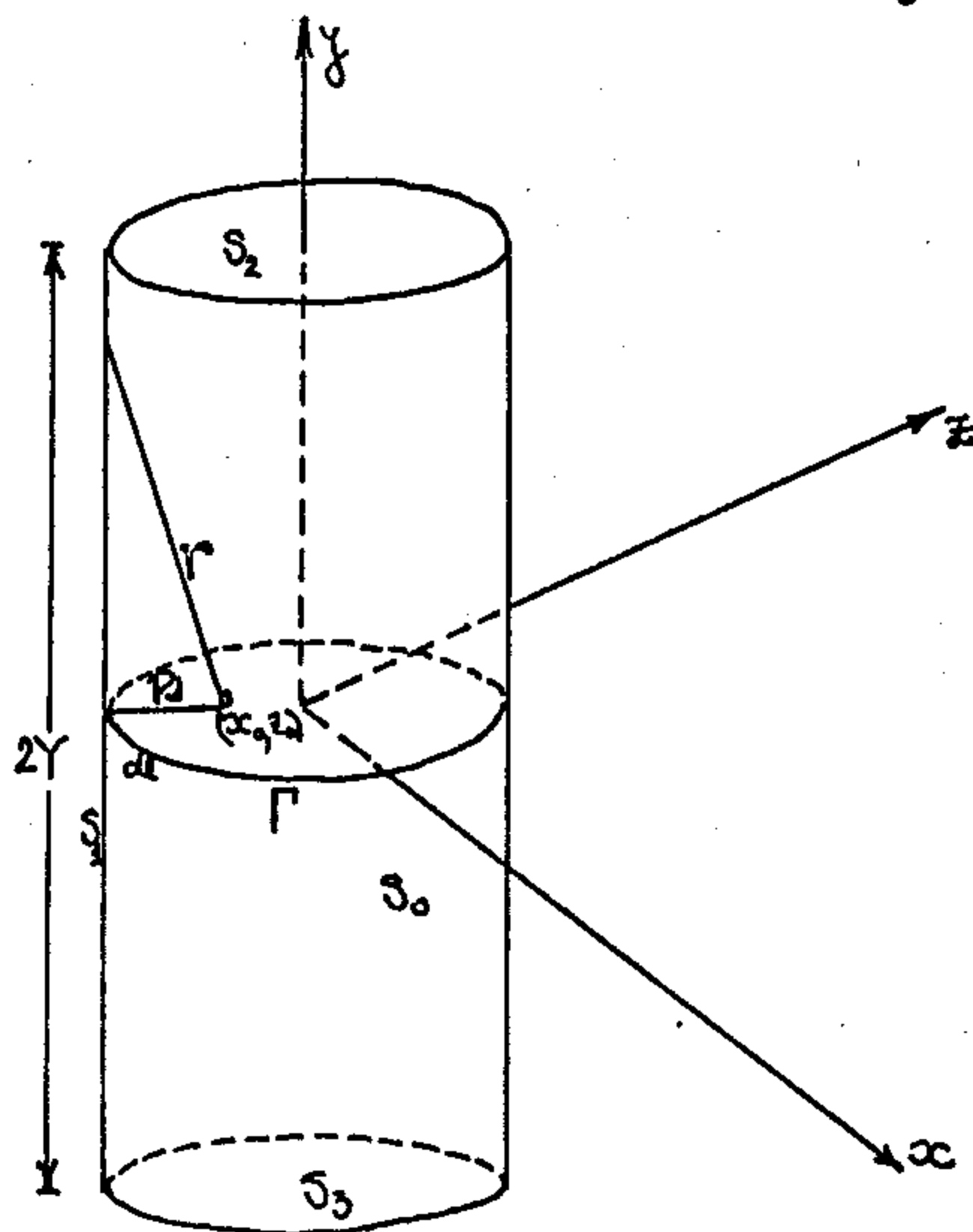
To znači da se vrednost funkcije  $\underline{g}$ , u nekoj tački prostora  $P$  može odrediti, ako se zna funkcija  $\underline{g}$  i njezin izvod  $\frac{\partial g}{\partial n}$  po unutrašnjoj normalni zatvorene površine koja obuhvata tačku  $P$ . Da bismo primenili formulu (15) potrebno je znati  $\underline{g}$  i  $\frac{\partial g}{\partial n}$  na površini ekrana i otvora. Strogo govoreći, da bismo ih znali, potrebno je znati rešenje zadatka. Sam Kirchhoff [19] rešava ovu poteškoću. On pokazuje kako bi trebalo uzeti  $\underline{g}$  i  $\frac{\partial g}{\partial n}$  na površini i kaže: Za tačke unutar otvora uzmite te vrednosti za  $\underline{g}$  i  $\frac{\partial g}{\partial n}$  koje bi one imale na tom mestu u odsustvu ekrana, a van otvora, na ekranu, uzmite da su jednake nuli.

## 2. KIRCHHOFFOVA FORMULA ZA CILINDRIČNE TALASE

U ovom radu ću rešiti teorijski, probleme, čija geometrija odgovara cilindričnim talasima svjetlosti. Zato treba Kirchhoffovu formulu specijalizirati za cilindrične talase.

Pretpostavimo da je  $\Gamma$  zatvorena kriva u ravnini  $\underline{x}, z$  a  $(x_0, z_0)$ -tačka unutar oblasti ograničen ovom krivom. Neka je  $S_0$  površina cilindra koji ima dužinu  $2Y$ . Zatvorena kriva  $\Gamma$  predstavlja konturu preseka cilindra (sl.2). Tada znajući vrednost  $\underline{v}$  na  $\Gamma$  možemo naći  $V(x_0, z_0, t)$  integracijom po  $S_0$  i ispitivanjem vrednosti integrala kada  $Y \rightarrow \infty$ .

Posmatrajmo harmonijski signal  $V(x, z, t) = g(x, z) e^{-i\omega t}$  (16)



sl. 2.

Kako se vidi iz slike 2 površina  $S_0$  sastoji se iz cilindričnog dela  $S_1$  i ravninama  $y = \pm Y$  odnosno ravninama  $S_2$  i  $S_3$ . Na svim tačkama površina  $S_2$  i  $S_3$  važe relacije,

$$\frac{\partial g}{\partial n} = \pm \frac{\partial g}{\partial y} = 0, \quad \frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial n} \xrightarrow{Y \rightarrow \infty} 0$$

Ove površine imaju konačnu vrednost i ne zavise od  $Y$  zbog čega možemo u (15) izvršiti integraciju samo po površini  $S_1$ . Koristimo da je  $dS=dl \cdot dy$  i budući da  $Y \rightarrow \infty$  dobićemo,

$$\iint_{S_1} \left[ g \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{e^{ikr}}{r} \right) - \left( \frac{e^{ikr}}{r} \right) \frac{\partial g}{\partial n} \right] dS = \int_{\Gamma} dl \int_{-\infty}^{\infty} \left[ g \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{e^{ikr}}{r} \right) - \left( \frac{e^{ikr}}{r} \right) \frac{\partial g}{\partial n} \right] dy \quad (17)$$

Pošto u (17) funkcije  $g$  i  $\frac{\partial g}{\partial n}$  ne zavise od  $y$  možemo ih izlučiti ispred integrale i tada formula (15) glasi,

$$g(x_0, z_0) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} \left[ g \frac{\partial}{\partial n} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ikr}}{r} dy - \frac{\partial g}{\partial n} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ikr}}{r} dy \right] dl \quad (18)$$

Is sl. 2. odredimo vrednost za  $r$  i zamenimo u (18)

$$r = \sqrt{R^2 + y^2} \quad R = \sqrt{(x-x_0)^2 + (z-z_0)^2}$$

$$g(x_0, z_0) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} \left[ g \frac{\partial}{\partial n} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ik\sqrt{R^2+y^2}}}{\sqrt{R^2+y^2}} dy - \frac{\partial g}{\partial n} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ik\sqrt{R^2+y^2}}}{\sqrt{R^2+y^2}} dy \right] dl \quad (19)$$

Is matematike znamo da se poslednji integrali dadu izraziti pomoću Hankelovih funkcija [20] ovako:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ik\sqrt{R^2+y^2}}}{\sqrt{R^2+y^2}} dy = i\pi H_0^1(kR) \quad (R > 0) \quad (20)$$

Ovde je  $H_0^1(kR)$  Hankelova funkcija prve vrste i nultog reda. Odavde (19) dobiva sledeći oblik,

$$g(x_0, z_0) = \frac{i}{4} \int_{\Gamma} \left[ g \frac{\partial H_0^1(kR)}{\partial n} - \frac{\partial g}{\partial n} H_0^1(kR) \right] dl \quad (21)$$

uzimajući u obzir da je;

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial H_0^1(kR)}{\partial n} &= \text{grad } H_0^1(kR) \cdot \vec{n} \\ \frac{\partial g}{\partial n} &= \text{grad } g \cdot \vec{n} \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

tada (21) možemo napisati u formi,



$$g(x_0, z_0) = \frac{i}{4} \int_{\Gamma} [g \cdot \text{grad } H_0^{\pm}(kR) - H_0^{\pm}(kR) \text{ grad } g] \vec{n} dl \quad (23)$$

Ukoliko uzimamo u obzir da je [21]

$$\frac{i}{4} H_0^{\pm}(kR) = G(kR)$$

gde je  $G(kR)$  Greenova funkcija, tada ćemo dobiti konačnu formu Kirchhoffove formule za cilindrične talase,

$$g(x_0, z_0) = \int_{\Gamma} [g \text{ grad } G(kR) - G(kR) \text{ grad } g] dl \quad (24)$$

U ovom radu koristićemo formulu (24) odnosno (23) kao polaznu formulu za postavljanje teorije za interferencijske šeme.

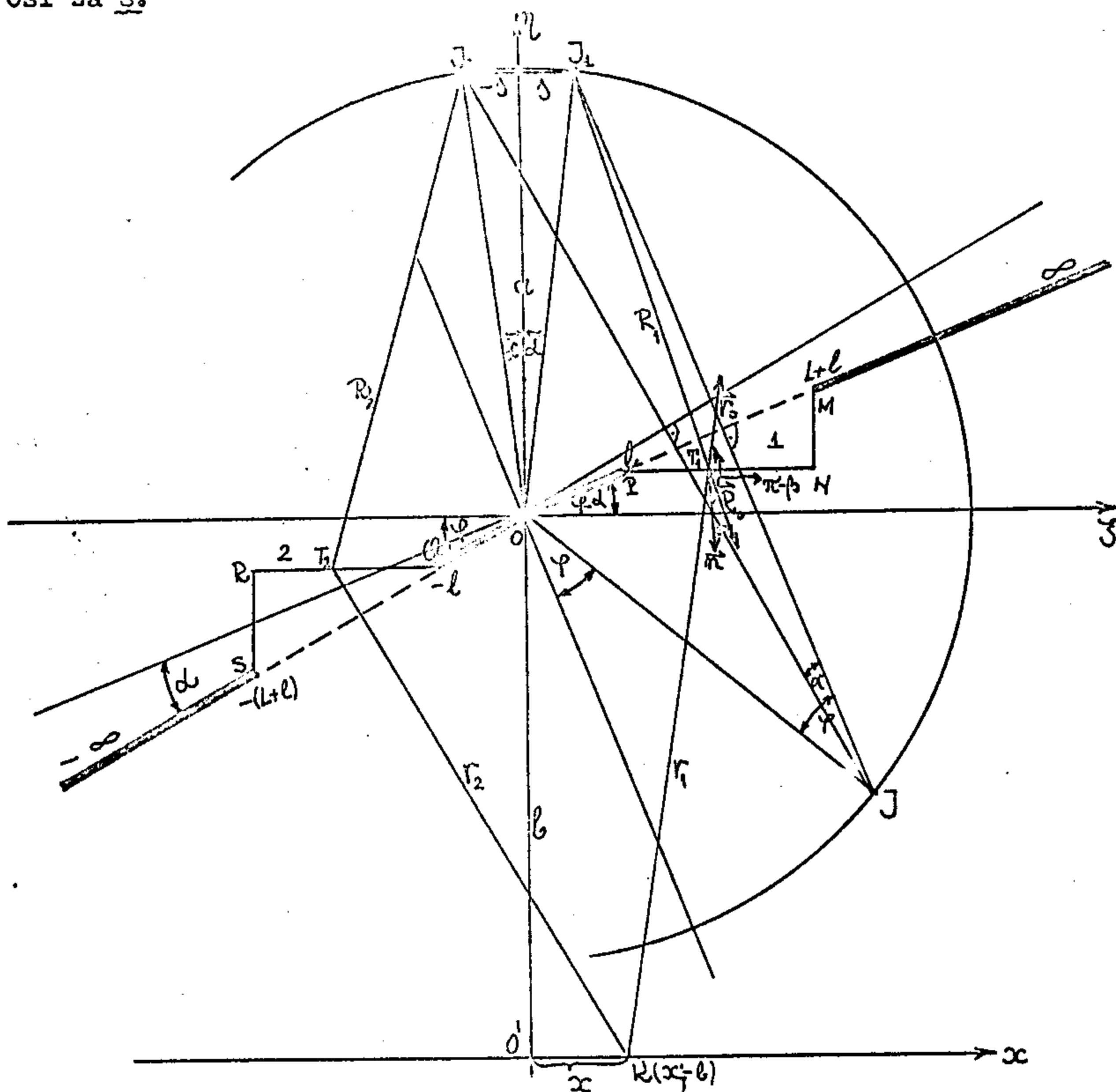
## G L A V A I

1. INTERFERENCIJA DVAJU IZVORA NA DVA OTVORA  
PRI KOSOM UPADANJU. (FRESNELOVA BIOGLEDALA)

Matematička analiza Fresnelovih biogledala može se provesti istovremeno i za razmaknuta i za spojena ogledala. Videćemo kasnije da su spojena ogledala jedan specijalan slučaj razmaknutih ogledala. Geometrija problema koji želim postaviti se nalazi na sl. 3. Zamislimo da su ogledala širine  $L$  simetrično razmaknuta za rastojanje  $2l$  u odnosu na jedan nepokretni koordinatni sistem  $\xi, \eta$ . Za početak pretpostavimo da ona zaklapaju jedan proizvoljan ugao u odnosu na koordinatni sistem. Pretpostavimo takođe da su širina ogledala puno manja od njihovih dužina, tako da problem zbog jednostavnosti možemo svoditi na jednodimenzionalan. Ova pretpostavka neće uticati na nikakav način na krajnji rezultat. Pretpostavimo takođe da su ogledala napravljena od istog materijala. To znači da ne postoji fazna razlika između talasa svjetlosti koji se reflektiraju na raznim ogledalima. Neka je izvor monohromatske svjetlosti udaljen od koordinatnog sistema za udaljenost  $a$ . Ogledala međusobno zatvaraju jedan mali ugao koji ćemo označiti sa  $\alpha$ . Taj ugao, ogledala zaklapaju u odnosu na koordinatni sistem koji je postavljen u međuprostor između ogledala. Ovakav način uzimanja ugla  $\alpha$  vodi nas do simetričnih rezultata bez štete na općenitost rezultata. Povuci ćemo normalu kroz koordinatni sistem u produžetku ravnine prvog ogledala koje se nalazi u prvom kvadrantu. Označimo sa  $\gamma$  ugao koji zaklapa izvor sa normalom koja prolazi kroz koordinatni početak. Sa ova dva parametra,  $a$  i  $\gamma$  položaj izvora potpuno je određen. Sada treba povezati pomoću ugla  $\gamma$  i  $\alpha$  položaje ogledala u odnosu na koordinatni sistem.

Sa centrom u koordinatni sistem sa dužinom  $a$  nacrtajmo jedan krug tako da izvor svjetlosti leži na tom krugu. Iz izvora  $I$  nacrtajmo normale na ravnine ogledala. Preseci ovih normala sa kružnom linijom

daće nam položaj likova koje stvaraju ogledala, tj. položaj dvaju fiktivnih izvora  $I_1$  i  $I_2$ . Međusobna udaljenost ovih izvora je  $2s$ . Fiktivni izvori su simetrično postavljene u odnosu na os  $\eta$  i svaki je udaljen od te osi za  $s$ .



sl. 3.

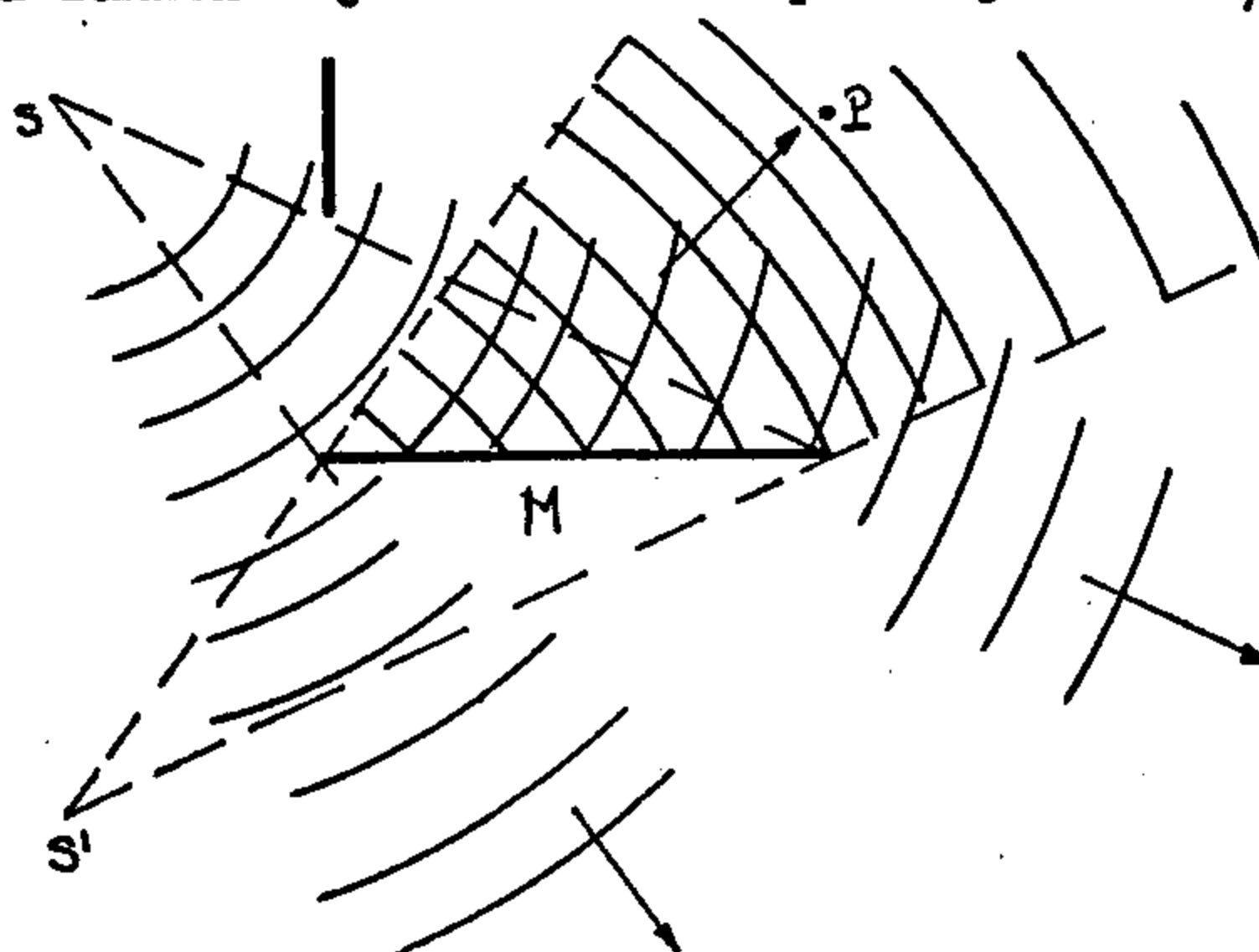
Iz sliko 3. se vidi da je  $\sphericalangle J_1 J J_2 = \alpha$  jer su  $\underline{I I_1}$  i  $\underline{I I_2}$  normalni na ogledalima. Dok je  $\sphericalangle J_1 O J_2 = 2\alpha$  kao centrični za periferni ugao  $\alpha$ ,

$\sphericalangle J_1 O M = \frac{\pi}{2} - \gamma$  . Nama treba ugao između ravnine prvog ogledala i osi  $\xi$  . Taj ugao će biti jednak,  $\sphericalangle M O \xi = \frac{\pi}{2} - (\frac{\pi}{2} - \gamma) - \alpha = \gamma - \alpha$  .

Budući da je drugo ogledalo pomerenom u odnosu na prvo za  $d$  sledi da ono sa osom  $\zeta$  zatvara ugao  $\varphi$ . Sada ćemo pretpostaviti da iz fiktivnih izvora  $I_1$  i  $I_2$  svjetlosni talasi prolaze kroz ekvivalentne aperture jednake sa širinama ogledala.

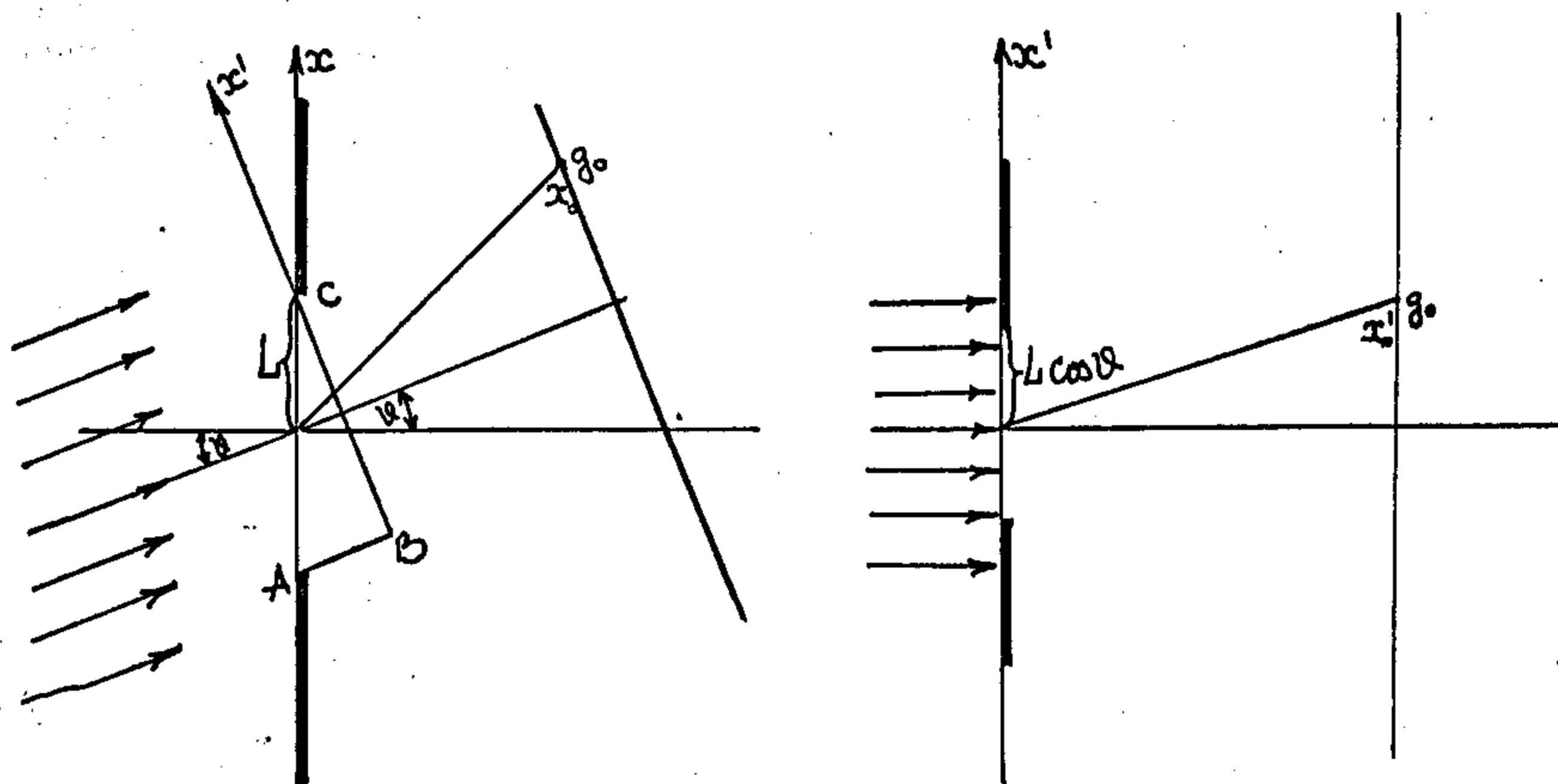
Sada bismo mogli problem formulirati ovako. Odrediti difrakcioni intenzitet dvaju koherentnih izvora svjetlosti koji osvetljavaju dve pukotine i to tako da svjetlosne oscilacije iz izvora  $I_1$  mogu prolaziti samo kroz otvor 1, a oscilacije iz izvora  $I_2$  mogu prolaziti samo kroz otvor 2.

Ova pretpostavka predstavlja samo proširenje principa difrakcije na ravnim ogledalima. Tako na [22] str. 167 nalazim: "Ako se tačkasti izvor  $S$  nalazi ispred ravnine ogledala  $M$ , pod pretpostavkom da ogledalo  $M$  potpuno reflektira, tada slika 8-6 (u ovom radu sl. 4.) pokazuje kako se delovi talasne fronte iz  $S$ , reflektirane na ogledalo, prolaze, kao da su one dolazile iz geometrijske slike tačkastog izvora  $S'$  i prolazile kroz aperturu istog oblika kao ogledalo  $M$ . Reflektirani talasi koji dolaze u tački posmatranja pokazuju difrakcione efekte i mogu se izračunati pomoću Kirchhoffovog integrala primenjenog u ekvivalentnoj aperturi sa izvorom u  $S'$ . (Direktna svjetlost iz  $S$  doći će također u  $P$ , ako proizvoljni zaklon nije uveden kako pokazuje sl. 4.)"



sl. 4.

Sada treba ekvivalentne otvore projicirati kako bismo imali posla sa normalnim aperturama. Na sl. 3. projekcije koso položenih otvora označene su stepenicama PNM i QRS. Pri tome koordinate odgovarajućih tačaka se uzimaju u odnosu na projicirane otvore a ne u odnosu na koso položene. I ova ideja predstavlja samo malo proširenje jednog principa koji se javlja kod Fresnelove difrakcije na koso položenim otvorima. Naime, u [23] na str. 347 nalazimo sledeće: "U Kirchhoffovoj formuli površina integracije se uzima proizvoljno. Zbog toga, umesto površine otvora možemo uzeti površinu čiji je presek prikazan linijom ABC sl. 9.2a (odnosno 5). Ako upadni ugao nije blizu  $90^\circ$ , ova linija leži u bliskoj zoni, gde je difrakciono polje jednako upadnom polju. Zbog toga, kod integriranja po liniji ABC može se primeniti Kirchhoffova formula. Iz formule ... se vidi da je integriranje duž linije AB malo efektivno. Ekvivalentnost rezultata pri normalnom i kosom upadanju sleduje iz toga što duž linije BC polje je jednako  $f(x)=f\left(\frac{x'}{\cos\vartheta}\right)$ ".



sl. 5.

Kako je oblik površine integracije kod Kirchhoffove formule proizvoljan za naš slučaj (sl. 3.) integraciju ćemo voditi po putu  $-\infty S, R, Q, O, P, N, M, \infty$ . Duž djelova  $\infty M; P, Q;$  i  $S, -\infty$  nema doprinosa zbog

neprozirnog ekrana. Duž djelova MN i RS doprinos je također nula, jer je normala na tim djelovima približno normalno na  $\underline{R}$  i  $\underline{r}$ , pa je  $\vec{n}\vec{R}_0 = \vec{n}\vec{r}_0 = 0$ . Ostaju samo doprinosi na putu RQ i PN. Ovi djelovi puta su paralelni sa osi  $\xi$  i zato kosinusi uglova  $\approx 1$  i oni ne ulaze u Kirchhoffovoj formuli.

Ukupna talasna funkcija na nekoj tački  $K(x; -b)$  će biti jednaka zbiru talasnih funkcija iz svakog otvora.

$$g = g_1 + g_2 \quad * \quad (1,1)$$

gde su:

$$g_1 = \frac{i}{4} \int_{\Gamma_1} [g_{s_1} \text{grad } H_0^+(kr_1) - H_0^+(kr_1) \text{grad } g_{s_1}] \vec{n} dl \quad (1,2)$$

$$g_2 = \frac{i}{4} \int_{\Gamma_2} [g_{s_2} \text{grad } H_0^+(kr_2) - H_0^+(kr_2) \text{grad } g_{s_2}] \vec{n} dl \quad (1,3)$$

Ovde smo koristili formulu (23) samo umesto  $\underline{R}$  stavili smo  $r_1$  i  $r_2$ , gde ćemo označiti sa  $r_1$  i  $r_2$ , kako se vidi iz sl. 3. udaljenost od projiciranih otvora do tačke K. Ovde su  $g_{s_1}$  i  $g_{s_2}$  upadni talasi od izvora  $I_1$  odnosno  $I_2$ ;  $\vec{n}$  - jedinični normalni vektor na površini prvog ogledala odnosno drugog ogledala;  $dl$  - element širine ogledala.

Ako se radi o linijskim izvorima onda od izvora  $I_1$  i  $I_2$  izlaze cilindrični talasi, jer talasna fronta ili ekvifazna površina talasa na rastojanje  $\underline{R}$  od izvora predstavljaće cilindar čija je generatrisa paralelna sa izvorom a os cilindra u samom izvoru. Eksperimenti se izvode sa vrlo uskim linijskim izvorima, pa će zbog toga širenje cilindričnih talasa zavisiti samo od udaljenosti od izvora. Kako kod difrakcije dolaze progresivni talasi, onda ćemo talase koji izlaze iz linijskih izvora opisati Hankelovim [24] funkcijama. Hankelove funkcije opisuju progresivne talase i u difrakcionim problemima najviše se koriste Hankelove funkcije prve vrste. Kod difrakcionih problema rastojanje između izvora

\* U daljem tekstu prvim brojem označićemo paragraf a drugim brojem formule u datom paragrafu.

i otvora, a takodje rastojanje izmedju otvora i ekrana gde hvatamo difrakcionu sliku je veliko, pa ćemo zbog toga uzeti asimptotsku vrednost Hankelove funkcije [25].

$$g_{s_1} \rightarrow f(\xi) H_0^{(1)}(kR_1) \rightarrow f(\xi) \sqrt{\frac{2}{\pi k R_1}} e^{i(kR_1 - \frac{\pi}{4})} \quad (1.4)$$

$$\begin{aligned} \text{grad } H_0^{(1)}(kR_1) &= -k H_1^{(1)}(kR_1) \vec{r}_0 \rightarrow -k \sqrt{\frac{2}{\pi k R_1}} e^{i(kR_1 - \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4})} \vec{r}_0 \\ &= ik \sqrt{\frac{2}{\pi k R_1}} e^{i(kR_1 - \frac{\pi}{4})} \vec{r}_0 \end{aligned} \quad (1.5)$$

$$\text{grad } g_{s_1} = -f(\xi) k H_1^{(1)}(kR_1) \vec{R}_0 \rightarrow ik f(\xi) \sqrt{\frac{2}{\pi k R_1}} e^{i(kR_1 - \frac{\pi}{4})} \vec{R}_0 \quad (1.6)$$

gde je  $f(\xi)$  amplitudna funkcija,  $R_1$  udaljenost od izvora do otvora a  $r_1$  udaljenost od otvora do tačke K sl. 3. Uvrstimo (1,4), (1,5) i (1,6) u (1,2) pa ćemo dobiti za vrednost amplitude  $g_1$ ,

$$\begin{aligned} g_1 &= \frac{i}{4} \int \left[ f(\xi) \sqrt{\frac{2}{\pi k R_1}} e^{i(kR_1 - \frac{\pi}{4})} ik \sqrt{\frac{2}{\pi k R_1}} e^{i(kR_1 - \frac{\pi}{4})} \vec{r}_0 - \right. \\ &\quad \left. - \sqrt{\frac{2}{\pi k R_1}} e^{i(kR_1 - \frac{\pi}{4})} ik f(\xi) \sqrt{\frac{2}{\pi k R_1}} e^{i(kR_1 - \frac{\pi}{4})} \vec{R}_0 \right] \vec{n} dl \end{aligned} \quad (1.7)$$

Sredjivanjem izraza (1,7) dobićemo,

$$g_1 = \frac{i}{2\pi} \int f(\xi) \frac{e^{ik(R_1+r_1)}}{\sqrt{R_1 r_1}} (\vec{r}_0 \vec{n} - \vec{R}_0 \vec{n}) dl \quad (1.8)$$

gde su  $\vec{r}_0$  i  $\vec{R}_0$  jedinični vektori u smjerovima  $\underline{r}$  i  $\underline{R}$  a  $\vec{n}$  je jedinični vektor u smjeru normale na projiciranu površinu. Sa slike 3. se vidi da je

$$\vec{R}_0 \vec{n} = \cos \langle \vec{R}_0, \vec{n} \rangle = \cos \alpha \approx 1$$

$$\vec{r}_0 \vec{n} = \cos \langle \vec{r}_0, \vec{n} \rangle = \cos(\pi - \beta) = -\cos \beta \approx -1$$

Ukoliko uzimamo još da je  $\frac{1}{\sqrt{R_1 r_1}} \sim \frac{1}{\sqrt{ab}}$  gde su:  $\underline{a}$  - udaljenost od izvora do koordinatnog sistema a,  $\underline{b}$  - udaljenost od koordinatnog sistema do ekrana, dobićemo sredjenu relaciju za amplitudu  $g_1$ ,

$$g_1 = -\frac{i}{\pi \sqrt{ab}} \int_{\Gamma_1} f(\xi) e^{ik(R_1+r_1)} dl \quad (1.9)$$

Na potpuno analogan način dobićemo za  $g_2$ ,

$$g_2 = -\frac{i}{\pi \sqrt{ab}} \int_{\Gamma_2} f(\xi) e^{ik(R_2+r_2)} dl \quad (1.10)$$

Zamenom (1,9) i (1,10) u (1,1) izlazi:

$$g = -\frac{i}{\pi \sqrt{ab}} \int_{r_1} f(\xi) e^{ik(R_1+r_1)} dl - \frac{i}{\pi \sqrt{ab}} \int_{r_2} f(\xi) e^{ik(R_2+r_2)} dl \quad (1.11)$$

Sada treba da odredimo  $R_1$ ,  $r_1$ ,  $R_2$  i  $r_2$  i da uvrstimo u (1,11). Iz sl. 3 vidimo da su koordinate tačaka izvora, biogledala i ekrana:

$$J_1(s, a); J_2(-s, a); P[l \cos(\varphi - \alpha), l \sin(\varphi - \alpha)]; N[(L+l) \cos(\varphi - \alpha), l \sin(\varphi - \alpha)]; \\ Q(-l \cos \varphi, -l \sin \varphi); R[-(L+l) \cos \varphi - l \sin \varphi]; T_1[\xi, l \sin(\varphi - \alpha)]; \\ T_2(\xi, -l \sin \varphi); K(x, -b)$$

$$R_1^2 = \overline{J_1 T_1}^2 = (s - \xi)^2 + (a - l \sin(\varphi - \alpha))^2 = a^2 - 2al \sin(\varphi - \alpha) + l^2 \sin^2(\varphi - \alpha) + \\ + s^2 - 2s\xi + \xi^2 \quad (1.12)$$

$$r_1^2 = \overline{T_1 K}^2 = (\xi - x)^2 + [l \sin(\varphi - \alpha) + b]^2 = b^2 + 2bl \sin(\varphi - \alpha) + l^2 \sin^2(\varphi - \alpha) + \\ + x^2 - 2x\xi + \xi^2 \quad (1.13)$$

Budući da su  $\underline{a}$  i  $\underline{b}$  mnogo veći od  $\underline{s}$  i  $\underline{\xi}$ , kod razvijanja relacije (1,12) i (1,13) po binomnoj formuli, zanemarićemo članove u kojima u imenitelju dolazi veći stepen od jedan kod  $\underline{a}$  i  $\underline{b}$ . Zbog toga za  $R_1$  i  $r_1$  dobićemo:

$$\text{no: } \left. \begin{aligned} R_1 &\approx a - l \sin(\varphi - \alpha) + l^2 \sin^2(\varphi - \alpha) \frac{1}{2a} + \frac{s^2}{2a} - \frac{s\xi}{a} + \frac{\xi^2}{2a} \\ r_1 &\approx b + l \sin(\varphi - \alpha) + l^2 \sin^2(\varphi - \alpha) \frac{1}{2b} + \frac{x^2}{2b} - \frac{x\xi}{b} + \frac{\xi^2}{2b} \end{aligned} \right\} (1.14)$$

ili zbir, iz (1,14);

$$R_1 + r_1 = a + b + \frac{x^2}{2b} + \frac{s^2}{2a} + l^2 \sin^2(\varphi - \alpha) \frac{1}{2} \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) - \left( \frac{x}{b} + \frac{s}{a} \right) \xi + \frac{\xi^2}{2} \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) \quad (1.15)$$

Dalje treba odrediti  $R_2$  i  $r_2$ .

$$R_2^2 = \overline{J_2 T_2}^2 = (s + \xi)^2 + (a + l \sin \varphi)^2 = a^2 + 2al \sin \varphi + l^2 \sin^2 \varphi + s^2 + 2s\xi + \xi^2 \quad (1.16)$$

odnosno, nakon razvijanja u binomnoj formuli i zanemarivanja članova u kojim dolazi  $\underline{a}$  na veći stepen od jedan za  $R_2$  izlazi;

$$R_2 \approx a + l \sin \varphi + l^2 \sin^2 \varphi \frac{1}{2a} + \frac{s^2}{2a} + \frac{s\xi}{a} + \frac{\xi^2}{2a} \quad (1.17)$$

Na kraju odredimo  $r_2$ ,  $r_2^2 = \overline{T_2 K}^2 = (\xi - x)^2 + (b - l \sin \varphi)^2 =$

$$= b^2 - 2bl \sin \varphi + l^2 \sin^2 \varphi + x^2 - 2x\xi + \xi^2 \quad (1.18)$$



Razvijanjem (1,18) po binomnoj formuli dobićemo,

$$r_2 \cong b - l \sin \varphi + l^2 \sin^2 \varphi \frac{1}{2a} + \frac{x^2}{2b} - \frac{x\xi}{b} + \frac{\xi^2}{2b} \quad (1.19)$$

Zbir (1,17) i (1,19) daje,

$$R_2 + r_2 = a + b + \frac{\Delta^2}{2a} + \frac{x^2}{2b} + l^2 \sin^2 \varphi \frac{1}{2} \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) - \left( \frac{x}{b} - \frac{\Delta}{a} \right) \xi + \frac{\xi^2}{2} \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) \quad (1.20)$$

Zamenimo (1,15) i (1,20) u (1,11) i pretpostavimo da je upadno svjetlosno polje homogeno. Tada treba uzeti da je  $f(\xi) = 1$ , a granice integracije odredimo iz sl. 3.

$$g = -\frac{i}{\pi \sqrt{ab}} \left\{ \int_{l \cos(\varphi - \alpha)}^{(L+l) \cos(\varphi - \alpha)} e^{ik \left\{ a + b + \frac{\Delta^2}{2a} + \frac{x^2}{2b} + l^2 \sin^2(\varphi - \alpha) \frac{1}{2} \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) - \left( \frac{x}{b} + \frac{\Delta}{a} \right) \xi + \frac{\xi^2}{2} \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) \right\}} d\xi + \int_{-(L+l) \cos \varphi}^{-l \cos \varphi} e^{ik \left\{ a + b + \frac{\Delta^2}{2a} + \frac{x^2}{2b} + l^2 \sin^2 \varphi \frac{1}{2} \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) - \left( \frac{x}{b} - \frac{\Delta}{a} \right) \xi + \frac{\xi^2}{2} \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) \right\}} d\xi \right\} \quad (1.21)$$

Sredimo još malo relaciju (1,21),

$$g = -\frac{i}{\pi \sqrt{ab}} e^{ik \left( a + b + \frac{\Delta^2}{2a} + \frac{x^2}{2b} \right)} \left\{ e^{i \frac{k}{2} l^2 \sin^2(\varphi - \alpha) \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right)} \int_{l \cos(\varphi - \alpha)}^{(L+l) \cos(\varphi - \alpha)} e^{i \frac{k}{2} \left[ \frac{2}{\lambda} \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) \xi^2 - \frac{4}{\lambda} \left( \frac{x}{b} + \frac{\Delta}{a} \right) \xi \right]} d\xi + \int_{-(L+l) \cos \varphi}^{-l \cos \varphi} e^{i \frac{k}{2} \left[ \frac{2}{\lambda} \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) \xi^2 - \frac{4}{\lambda} \left( \frac{x}{b} - \frac{\Delta}{a} \right) \xi \right]} d\xi \right\} \quad (1.22)$$

$$\text{Označimo sa: } \left. \begin{aligned} p^2 &= \frac{2}{\lambda} \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right); & q_1 &= \frac{2}{\lambda} \left( \frac{x}{b} + \frac{\Delta}{a} \right); & q_2 &= \frac{2}{\lambda} \left( \frac{x}{b} - \frac{\Delta}{a} \right) \\ \Phi_1 &= \frac{k l^2}{2} \sin^2(\varphi - \alpha) \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right); & \Phi_2 &= \frac{k l^2}{2} \sin^2 \varphi \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) \end{aligned} \right\} 1.23$$

Takođe označimo eksponencijal ispred velike zagrade sa  $K^*$  tako da kod izračunavanja intenziteta proizvod  $K^* K = 1$ . Pomoću (1,23), (1,22) glasi,

$$g = -\frac{iK^*}{\pi \sqrt{ab}} \left\{ e^{i\Phi_1} \int_{l \cos(\gamma-d)}^{(L+l) \cos(\gamma-d)} e^{\frac{i\pi}{2}(p^2 \zeta^2 - 2q_1 \zeta)} d\zeta + e^{i\Phi_2} \int_{-(L+l) \cos \gamma}^{-l \cos \gamma} e^{\frac{i\pi}{2}(p^2 \zeta^2 - 2q_2 \zeta)} d\zeta \right\} \quad (1.24)$$

Ove integrale ćemo rešiti metodom potpunih kvadrata,

$$p^2 \zeta^2 - 2q_1 \zeta = (p\zeta - \frac{q_1}{p})^2 - (\frac{q_1}{p})^2 \quad p^2 \zeta^2 - 2q_2 \zeta = (p\zeta - \frac{q_2}{p})^2 - (\frac{q_2}{p})^2 \quad (1.25)$$

$$g = -\frac{iK^*}{\pi \sqrt{ab}} \left\{ e^{i\Phi_1} e^{-\frac{i\pi}{2}(\frac{q_1}{p})^2} \int_{l \cos(\gamma-d)}^{(L+l) \cos(\gamma-d)} e^{\frac{i\pi}{2}(p\zeta - \frac{q_1}{p})^2} d\zeta + e^{i\Phi_2} e^{-\frac{i\pi}{2}(\frac{q_2}{p})^2} \int_{-(L+l) \cos \gamma}^{-l \cos \gamma} e^{\frac{i\pi}{2}(p\zeta - \frac{q_2}{p})^2} d\zeta \right\} \quad (1.26)$$

U (1,26) uvodimo dve nove promenljive sledećim smenama,

$$p\zeta - \frac{q_1}{p} = \xi_1 \quad ; \quad p\zeta - \frac{q_2}{p} = \xi_2 \quad ; \quad d\zeta = \frac{d\xi_1}{p} = \frac{d\xi_2}{p} \quad (1.27)$$

A granice integracije pretvaraju se u,

$$\left. \begin{aligned} l \cos(\gamma-d) &\rightarrow p l \cos(\gamma-d) - \frac{q_1}{p} \\ (L+l) \cos(\gamma-d) &\rightarrow p(L+l) \cos(\gamma-d) - \frac{q_1}{p} \\ -l \cos \gamma &\rightarrow -(p l \cos \gamma + \frac{q_2}{p}) \\ -(L+l) \cos \gamma &\rightarrow -(p(L+l) \cos \gamma + \frac{q_2}{p}) \end{aligned} \right\} \quad (1.28)$$

Koristeći relacije (1,28) i (1,27), relacija (1,26) dobiva sledeću formu,

$$g = -\frac{iK^*}{\pi \sqrt{ab}} p \left\{ e^{i\Phi_1} e^{-\frac{i\pi}{2}(\frac{q_1}{p})^2} \int_{p l \cos(\gamma-d) - \frac{q_1}{p}}^{p(L+l) \cos(\gamma-d) - \frac{q_1}{p}} e^{\frac{i\pi}{2} \xi_1^2} d\xi_1 + e^{i\Phi_2} e^{-\frac{i\pi}{2}(\frac{q_2}{p})^2} \int_{-(p(L+l) \cos \gamma + \frac{q_2}{p})}^{-(p l \cos \gamma + \frac{q_2}{p})} e^{\frac{i\pi}{2} \xi_2^2} d\xi_2 \right\} \quad (1.29)$$

Poslednji su integrali u teoriji difrakcije poznati kao Fresnelovi integrali. Ovi integrali se definišu kao [26]

$$\left. \begin{aligned} C(x) &= \int_0^x \cos(\frac{\pi}{2} t^2) dt \\ S(x) &= \int_0^x \sin(\frac{\pi}{2} t^2) dt \end{aligned} \right\} \quad (1.30)$$

Koristeći (1,30) tada (1,29) možemo napisati kao,

$$g = -\frac{iK^*}{\pi \sqrt{ab}} p \left\{ e^{i\Phi_1} \left[ C[p(L+l) \cos(\gamma-d) - \frac{q_1}{p}] - C[p l \cos(\gamma-d) - \frac{q_1}{p}] \right] + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + i \left[ S \left[ p(L+l) \cos(\varphi-d) - \frac{a_1}{p} \right] - S \left[ pl \cos(\varphi-d) - \frac{a_1}{p} \right] \right] \Big\} + \\
& + e^{i\psi_2} \left\{ C \left[ p(L+l) \cos \varphi + \frac{a_2}{p} \right] - C \left[ pl \cos \varphi + \frac{a_2}{p} \right] + \right. \\
& \left. + i \left[ S \left[ p(L+l) \cos \varphi + \frac{a_2}{p} \right] - S \left[ pl \cos \varphi + \frac{a_2}{p} \right] \right] \right\} \quad (1.31)
\end{aligned}$$

gde smo u (1,31) kraće označili:

$$\psi_1 = \Phi_1 - \frac{\pi}{2} \left( \frac{a_1}{p} \right)^2 \quad ; \quad \psi_2 = \Phi_2 - \frac{\pi}{2} \left( \frac{a_2}{p} \right)^2$$

Dalje ćemo u (1,31) označiti sa  $A_1$ ,  $B_1$ ,  $C_1$  i  $D_1$  razliku Fresnelovih integrala,

$$\begin{aligned}
A_1 &= C \left[ p(L+l) \cos(\varphi-d) - \frac{a_1}{p} \right] - C \left[ pl \cos(\varphi-d) - \frac{a_1}{p} \right] \\
B_1 &= S \left[ p(L+l) \cos(\varphi-d) - \frac{a_1}{p} \right] - S \left[ pl \cos(\varphi-d) - \frac{a_1}{p} \right] \\
C_1 &= C \left[ p(L+l) \cos \varphi + \frac{a_2}{p} \right] - C \left[ pl \cos \varphi + \frac{a_2}{p} \right] \\
D_1 &= S \left[ p(L+l) \cos \varphi + \frac{a_2}{p} \right] - S \left[ pl \cos \varphi + \frac{a_2}{p} \right]
\end{aligned} \quad (1.32)$$

Sada možemo napisati talasnu funkciju  $g$  u sledećoj formi,

$$g = -\frac{iK^*}{\pi \sqrt{ab} p} \left\{ e^{i\psi_1} (A_1 + iB_1) + e^{i\psi_2} (C_1 + iD_1) \right\} \quad (1.33)$$

Budući da optički instrumenti ili oko ne mogu registrirati funkciju (1,33) zbog visoke frekvencije svetlosnog polja, potrebno je naći intenzitet svetlosti u posmatranoj tački  $K$ . Intenzitet svetlosti je određen gustinom elektromagnetne energije, a ona je proporcionalna kvadratu na koje komponente jačine električnog ili magnetnog polja, tj. kvadratu talasne funkcije (1,33). Znajući da samo moduo talasne funkcije ima realan fizički smisao zaključujemo da je intenzitet svetlosti u nekoj tački proporcionalan kvadratu modula talasne funkcije u toj tački. Zbog toga je,

$$J = \frac{k_0}{\pi^2 ab p^2} \left\{ e^{i\psi_1} (A_1 + iB_1) + e^{i\psi_2} (C_1 + iD_1) \right\} \left\{ e^{-i\psi_1} (A_1 - iB_1) + e^{-i\psi_2} (C_1 - iD_1) \right\} \quad (1.34)$$

Ovde smo sa  $k_0$  označili jednu konstantu proporcionalnosti. Nakon množenja i sredjivanja izraza (1,34) dobićemo krajnju formulu za raspored intenziteta u nekoj tački prostora udaljenoj za razmak  $b$  od ogledala

koja ima oblik: 
$$J = \frac{k_0}{\pi^2 ab p^2} \left\{ (A_1 + C_1)^2 + (B_1 + D_1)^2 - 4[(A_1 C_1 + B_1 D_1) \sin\left(\frac{\Psi_2 - \Psi_1}{2}\right) + (A_1 D_1 - B_1 C_1) \cos\left(\frac{\Psi_2 - \Psi_1}{2}\right)] \sin\left(\frac{\Psi_2 - \Psi_1}{2}\right) \right\} \quad (1.35)$$

Određimo na kraju argument trigonometrijskih funkcija,

$$\frac{\Psi_2 - \Psi_1}{2} = \frac{1}{2} \left[ \frac{\sqrt{k}}{2} \left(\frac{q_1}{p}\right)^2 - \frac{\sqrt{k}}{2} \left(\frac{q_2}{p}\right)^2 + \Phi_2 - \Phi_1 \right] = \frac{2\pi x \Delta}{\lambda(a+b)} + \frac{k l^2}{4} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) (\sin^2 \varphi - \sin^2(\varphi - \alpha)) \quad (1.36)$$

Formula (1,35) u sebi sadrži i slučaj spojenih i slučaj razmaknutih ogledala. Zato, ćemo analizirati odvojeno svaki od tih slučajeva.

## 2. SLUČAJ SPOJENIH OGLEDALA

Specijaliziraćemo funkciju intenziteta za slučaj spojenih ogledala. Taj slučaj ćemo dobiti ako u (1,35) uzimamo  $l=0$ , a (1,36) dobiva oblik,

$$\frac{\Psi_2 - \Psi_1}{2} = \frac{2\pi x \Delta}{\lambda(a+b)} \quad (2.1)$$

Iz slike 3 vidimo da je,

$$s = a \cdot \sin \alpha \quad (2.2)$$

i ako zamenimo u (2,1) izlazi,

$$\frac{\Psi_2 - \Psi_1}{2} = \frac{2\pi x a \sin \alpha}{\lambda(a+b)} \quad (2.3)$$

Funkcija intenziteta (1,35) kod spojenih ogledala imaće formu,

$$J = \frac{\lambda k_0}{2\pi^2 D} \left\{ (A_2 + C_2)^2 + (B_2 + D_2)^2 - 4[(A_2 C_2 + B_2 D_2) \sin \frac{2\pi a \sin \alpha x}{\lambda D} + (A_2 D_2 - B_2 C_2) \cos \frac{2\pi a \sin \alpha x}{\lambda D}] \sin \frac{2\pi a \sin \alpha x}{\lambda D} \right\} \quad (2.4)$$

Za  $D=a+b$ , i sledeći sistem integrala,

$$A_2 = C\left(\frac{q_1}{p}\right) - C\left(\frac{q_1}{p} - pl \cos(\varphi - \alpha)\right) \quad \left. \right\} \quad (2.5)$$

$$\left. \begin{aligned} B_2 &= S\left(\frac{q_1}{p}\right) - S\left(\frac{q_1}{p} - pL \cos(\varphi - \alpha)\right) \\ C_2 &= C\left(\frac{q_2}{p} + pL \cos\varphi\right) - C\left(\frac{q_2}{p}\right) \\ D_2 &= S\left(\frac{q_2}{p} + pL \cos\varphi\right) - S\left(\frac{q_2}{p}\right) \end{aligned} \right\} (2.5)$$

U sistemu integrala (2,5)  $p, q_1$  i  $q_2$  zadane su relacijom (1,23). U ovom obliku funkcija (2,4) nije simetrična u odnosu na  $x=0$ , jer sam sistem integrala u (2,5) nije simetričan. Ovaj sistem lako možemo pretvoriti u simetričnom obliku a time i funkciju intenziteta. Kako znamo u eksperimentima sa biogledalima ugao  $\varphi \gg \alpha$ . Kako u Fresnelovim integralima dolazi  $\cos(\varphi - \alpha)$ , možemo zbog malog  $\alpha$  napraviti sledeću aproksimaciju,

$$\cos(\varphi - \alpha) = \cos\varphi \cos\alpha + \sin\varphi \sin\alpha \sim \cos\varphi$$

Numerička analiza pokazuje da se razlika pojavljuje tek na trećoj decimali. Time nećemo napraviti neku značajnu grešku. Naime, kod crtanja difrakcionih intenziteta ne možemo uzeti u obzir treću decimalu.

Uz ovu pretpostavku sistem integrala (2,5) se pretvara u,

$$\left. \begin{aligned} A_2 &= C\left(\frac{q_1}{p}\right) - C\left(\frac{q_1}{p} - pL \cos\varphi\right) \\ B_2 &= S\left(\frac{q_1}{p}\right) - S\left(\frac{q_1}{p} - pL \cos\varphi\right) \\ C_2 &= C\left(\frac{q_2}{p} + pL \cos\varphi\right) - C\left(\frac{q_2}{p}\right) \\ D_2 &= S\left(\frac{q_2}{p} + pL \cos\varphi\right) - S\left(\frac{q_2}{p}\right) \end{aligned} \right\} (2.6)$$

Lako je dokazati da je sistem (2,6) simetričan u odnosu na  $x=0$ . Kako su;

$$q_1(x) = \frac{2}{\lambda} \left( \frac{x}{e} + \sin\alpha \right) \quad ; \quad q_1(-x) = -\frac{2}{\lambda} \left( \frac{x}{e} - \sin\alpha \right) = -q_2(x)$$

$$q_2(x) = \frac{2}{\lambda} \left( \frac{x}{e} - \sin\alpha \right) \quad ; \quad q_2(-x) = -\frac{2}{\lambda} \left( \frac{x}{e} + \sin\alpha \right) = -q_1(x)$$

a za sistem (2,6) izlazi,

$$\left. \begin{aligned} A_2(-x) &= C\left(pL \cos\varphi + \frac{q_2}{p}\right) - C\left(\frac{q_2}{p}\right) = C_2(x) \\ B_2(-x) &= S\left(pL \cos\varphi + \frac{q_2}{p}\right) - S\left(\frac{q_2}{p}\right) = D_2(x) \\ C_2(-x) &= C\left(pL \cos\varphi - \frac{q_1}{p}\right) + C\left(\frac{q_1}{p}\right) = A_2(x) \\ D_2(-x) &= S\left(pL \cos\varphi - \frac{q_1}{p}\right) + S\left(\frac{q_1}{p}\right) = B_2(x) \end{aligned} \right\} (2.7)$$

Ukoliko se poslednji sistem integrala zameni u (2,4), funkcija ostaje nepromenjena a time smo dokazali našu tvrdnju o simetričnosti funkcije intenziteta. Ova činjenica nam olakšava posao naročito kod kompjuterskih programiranja kojim putem je izvršena i analiza. Slučaj spojenih ogledala eksperimentalno teško je realizirati. Naime, kako se navodi u literaturi, eksperimentalno čak nije moguće ostvariti taj slučaj. Tom slučaju eksperimentalci se mogu samo približavati. Tako u [14] str. 214 čitam sledeće, "Sastav zrcala i kraj pomno brušenih rubova tvori neku brazdu, te slučaj sastavljenih zrcala mora shvatiti kao rastavljena zrcala uz vrlo malen razmak zrcala. Kako se ne može u potpunosti realizirati slučaj  $\ell=0$  to uz sastavljena zrcala zavisnost ..."

Iz funkcije intenziteta (2,4), tj. iz difrakcione teorije možemo izvesti Fresnelovu formulu koju je on izveo elementarnim putem. Funkcija I će imati maksimum koji iznosi,

$$J_{\max} = \frac{\lambda k_0}{2\pi^2 D} \left\{ (A_2 + C_2)^2 + (B_2 + D_2)^2 \right\} \quad (2.8)$$

za 
$$\frac{2\pi a \sin \alpha}{\lambda D} = m\pi \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3 \dots$$

i razmak medju maksimumima je

$$\alpha = \frac{\lambda D}{2a \sin \alpha} = \frac{\lambda}{2 \sin \alpha} \left( 1 + \frac{\ell}{a} \right) \quad (2.9)$$

U literaturi formula (2,9) je korišćena za izračunavanje širine interferencionih linija. Funkciju intenziteta (2,4) možemo specijalizirati za slučaj  $\alpha=0$ . U tom slučaju otpada trigonometrijski član, pa ostaje,

$$J = \frac{\lambda k_0}{2\pi^2 D} \left\{ (A_3 + C_3)^2 + (B_3 + D_3)^2 \right\} \quad (2.10)$$

gde su:

$$\left. \begin{aligned} A_3 &= C\left(\frac{q}{p}\right) - C\left(\frac{q}{p} - pL \cos \varphi\right) \\ B_3 &= S\left(\frac{q}{p}\right) - S\left(\frac{q}{p} - pL \cos \varphi\right) \end{aligned} \right\} \quad (2.11)$$

$$\left. \begin{aligned} C_3 &= C\left(\frac{a}{p} + \rho L \cos \varphi\right) - C\left(\frac{a}{p}\right) \\ D_3 &= S\left(\frac{a}{p} + \rho L \cos \varphi\right) - S\left(\frac{a}{p}\right) \end{aligned} \right\} \quad (2.11)$$

dalje je, 
$$q = \frac{2x}{\lambda b} \quad \rho^2 = \frac{2}{\lambda} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)$$

Sistem (2,11) se dobiva iz sistema (2,6) zamenom  $\alpha=0$ . Na analogan način kao i ranije možemo dokazati simetričnost postavljene funkcije (2,10). Tako nalazimo,

$$A_3(-x) = C_3(x)$$

$$B_3(-x) = D_3(x)$$

$$C_3(-x) = A_3(x)$$

$$D_3(-x) = B_3(x)$$

Funkcija (2,10) je difrakcionog karaktera. Znamo da za  $\alpha=0$  formula (2,9) gubi smisao, jer tada  $x \rightarrow \infty$ . Međutim, difrakciona teorija pokazuje da u tom slučaju ipak izlazi jedna oscilatorna funkcija koja je zadana Fresnelovim integralima i ona ima difrakcioni karakter. Klasična elementarna teorija na ovo pitanje nije mogla odgovoriti. Tako u [14] str. 212 nalazim ovo: "Prema formuli (1) (naša 2,9) je  $\lim_{x \rightarrow \infty} \alpha=0$ , dok pokusi pokazuju, da uz vrlo malen kut  $\alpha$  ni najšire centralne pruge ne dostižu razmake, koji bi odgovarali formuli. I uz  $\alpha=0$  nastaje vrlo difuzna centralna pruga konačne širine." Na strani 214 istog rada čitam: "Za slučaj  $\alpha=0$  uz sastavljena zrcala ne slijedi da mora biti  $x \rightarrow \infty$ , i opet, jer sastavljena zrcala ne znači  $L=0$ , nego samo  $L$  vrlo maleno, a za taj slučaj dolaze u obzir pruge prelaznog područja."

Treba dodati još činjenicu da smo mi račun izveli za idealan slučaj, ako se ogledala dodiruju, tj. ako je  $L=0$ . Međutim, bez ikakve poteškoće može se dobiti slična formula samo u Fresnelovim argumentima dolazi taj međuprostor  $L$ . Ova činjenica pokazuje da kod Fresnelovih biogledala u formiranju interferencionihih slika učestvuje i difrakcijom skrenuta svjetlost.

Radi proveravanja tačnosti postavljene formule (2,4) za sistem integrala (2,6) izvršili smo numeričku analizu. Za analizu smo koristili neke poznate parametre koji se nalaze u [12]. Pri tome, sam želio programirati one parametre koji daju karakteristične interferencione i difrakcione linije. Kompjuterska analiza pokazuje da su interferencione linije kod sl. 6, 7, 8, 9 i 10 različitih intenziteta. Kako sam i ranije naveo, Fresnelova elementarna teorija predviđa interferencione linije konstantnog intenziteta. Difrakciona teorija, ipak pokazuje suprotno. Iz slika se vidi da nisu maksimalnog intenziteta centralne linije, nego one u zavisnosti od eksperimenata - parametra, imaju različite vrednosti. To se najbolje vidi na sl. 10, uz simetričnost izvora i ravnine posmatranja. Opšta osobina svih krivih jeste neizdvojenost difrakcionih linija od interferencionih. To se lepo uočava na sl. 6, 7 i 10. Radi proveravanja hipoteze izvođenja relacije (2,9) iz (2,4) tražio sam da se programiraju istovremeno funkcije (2,4) i (2,8). Obe funkcije su nacrtane na sl. 6. Vidi se, da za te parametre za koje je nacrtana funkcija (2,4) izlazi rezultat koji potpuno odgovara relaciji (2,9). Na toj slici donja kriva pokazuje tok funkcije (2,4) za sistem integrala (2,6), a gornja - modulacionu funkciju, odnosno funkciju (2,8). Difrakcioni karakter interferencionih linija najbolje se vidi iz slike 6, odnosno iz modulacione funkcije koja nije konstantnog intenziteta. Ona nas podseća na difrakcionu krivu Fresnelovog tipa na jednoj pukotini i ako nema nikakve veze sa difrakcijom na pukotini. Iz te slike se vidi da je poslednji - peti maksimum najjači u odnosu na prvo četiri. Te su linije najjačeg intenziteta kako se vidi iz same slike. Sličnu situaciju imamo i na slici 7. Ova mogućnost je nacrtana za  $b=0,50m$ , što znači da smo se mnogo približili koordinatnom sistemu sl. 3, odnosno mesta gde se ogledala dodiruju. I na toj slici jako je lepo izražena difrakcija. Širine interferencionih linija na sl. 6 razlikuju se od širine interferencionih linija na sl. 7.



Ovo se vidi iz činjenice da je na sl. 6, jedan podeok je jednak sa  $0,000080$  m, a na sl. 7, jedan podeok iznosi  $0,000020$  m. To je opravdano kada se uzimaju u obzir parametri  $b$  odgovarajućih slika. Slučaj vrlo malog ugla  $\alpha$  je nacrtan na slikama 8 i 9. I u tom slučaju interferencione linije pokazuju difrakcioni karakter. Broj linija je manji a širina linija veća. Na sl. 9 se vidi jedna debela centralna linija i 3 - 4 takodje, debele linije ali manjih intenziteta. To je slučaj kada je ravnina posmatranja vrlo mnogo udaljena a ugao  $\alpha$  vrlo mali.

Treba napomenuti, da za slučaj simetrije,  $b=a$  formula (2,9) dobiva oblik,

$$x = \frac{\lambda}{\sin \alpha} \quad (2.12)$$

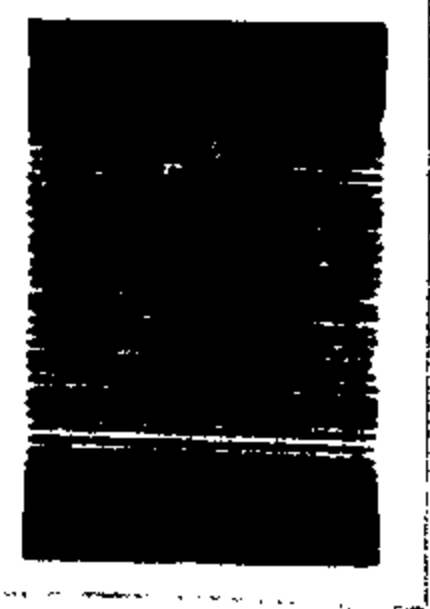
što znači da za simetričan položaj izvora svjetlosti i ravnine posmatranja razmak interferencionih linija ne zavisi od položaja izvora i ravnine posmatranja. Ukoliko (2,12) pišemo u formi

$$\lambda = x \sin \alpha \quad (2.13)$$

vidimo da se ona formalno podudara sa formulom optičke rešetke i može se upotrebiti za određivanje talasne dužine svjetlosti. Uz određenu udaljenost  $a$  i  $b$  i nekog velikog ugla  $\alpha$  dobiva se priličan broj interferencionih linija i njihov razmak može se tačno odrediti. Funkcija intenziteta (2,4) za ovaj slučaj ostaje ista, samo što će u sistemu (2,6) parametar  $p$  iz sistema (1,23) biti  $p^2 = \frac{4}{\lambda a}$ . Za ovaj karakterističan primer je nacrtana sl. 10. Vidi se, da i ova kriva ima interferencione linije različitih intenziteta, centralna nije najosvetljenija a difrakcioni efekti ne mogu se odvojiti od interferencione slike. Treba napomenuti da se sve krive podudaraju sa samim snimcima koji su izvršeni kod eksperimentiranja sa biogledalima i odgovaraju parametrima koje sam uzeo za programiranja.

Na tablici I su izneti rezultati uporedjivanja širina interferencionih linija dobivenih iz formule (2,9) koje predvidja Fresnelova teorija i širina interferencionih linija koje izlaze iz difrakcione

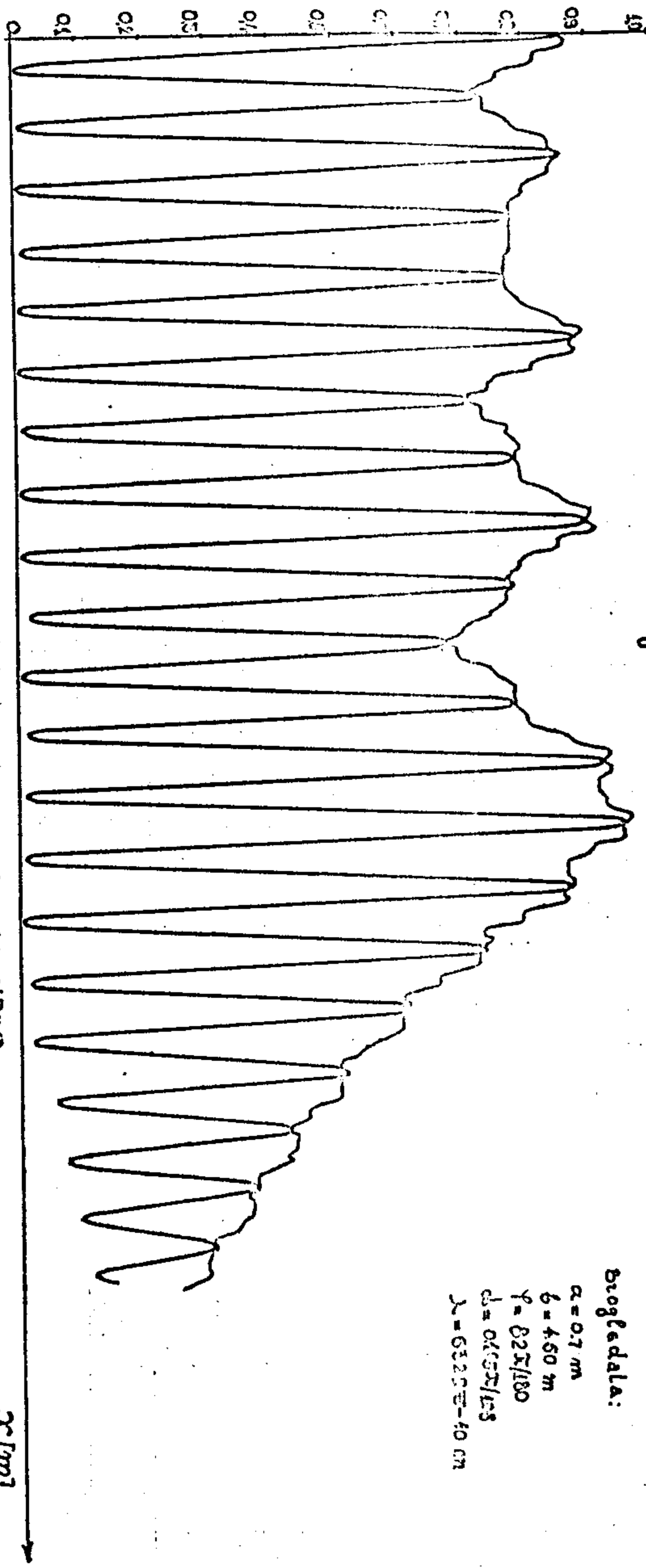
17/2



Fotografski snimak

Brojevalnik:

- $a = 0.7 \text{ m}$
- $b = 4.50 \text{ m}$
- $\varphi = 82\pi/180$
- $d = 0.05\pi/125$
- $\lambda = 632.8 \text{ nm} = 40 \text{ nm}$

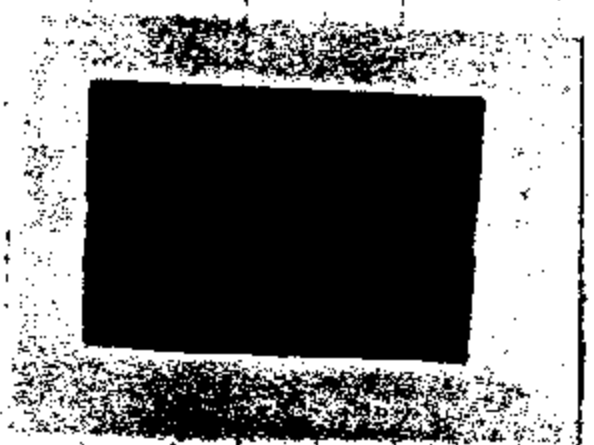


$1 \text{ m.m.} = 0.000080$

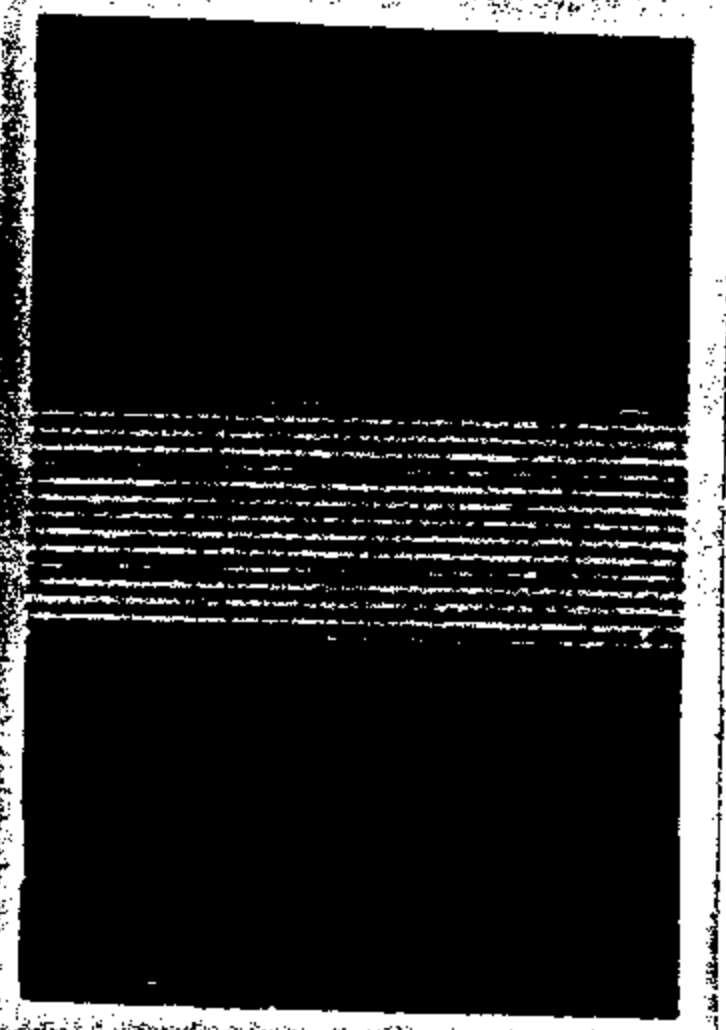
Sl. 6.

TEORIJSKA KRIVA

$x [m]$



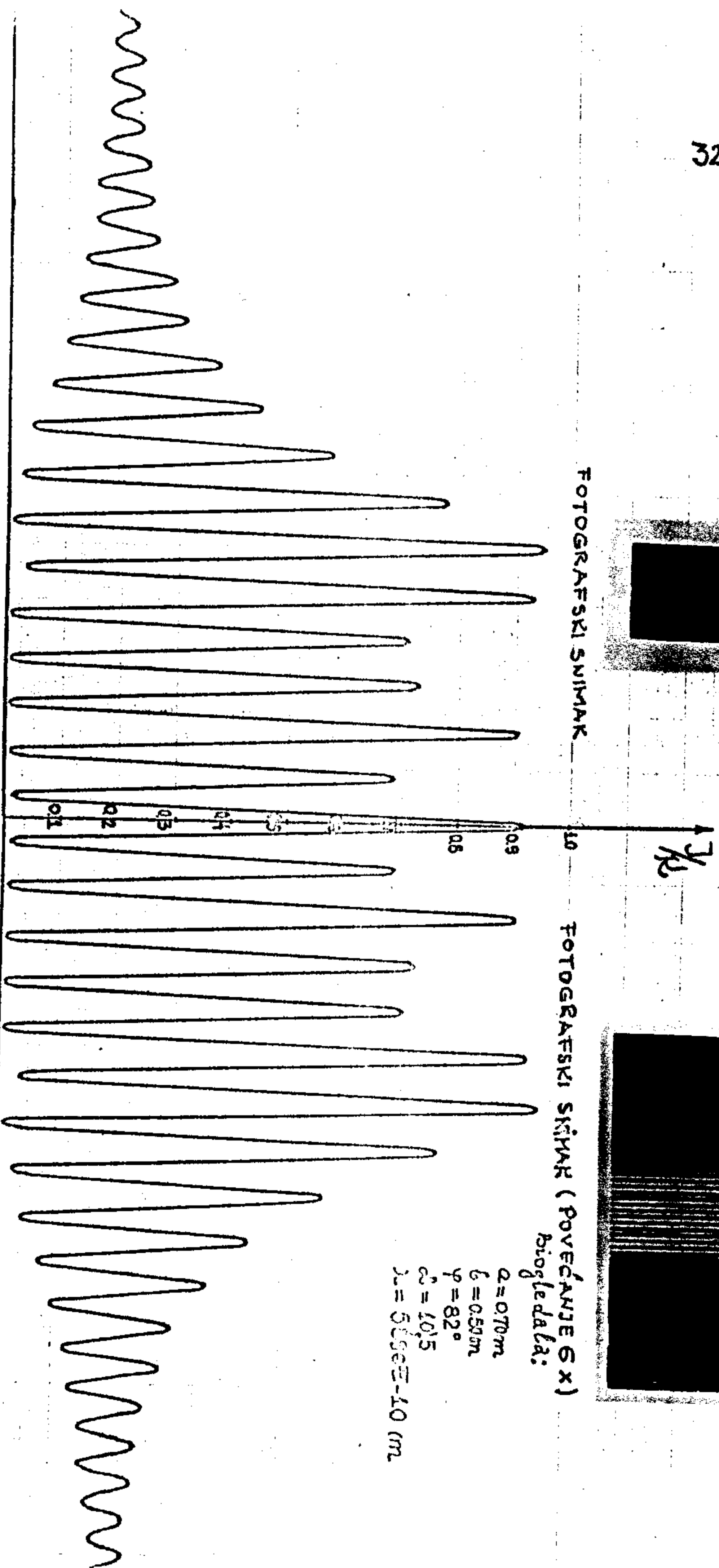
FOTOGRAFSKI SNIMAK



FOTOGRAFSKI SNIMAK (POVEĆANJE 6x)

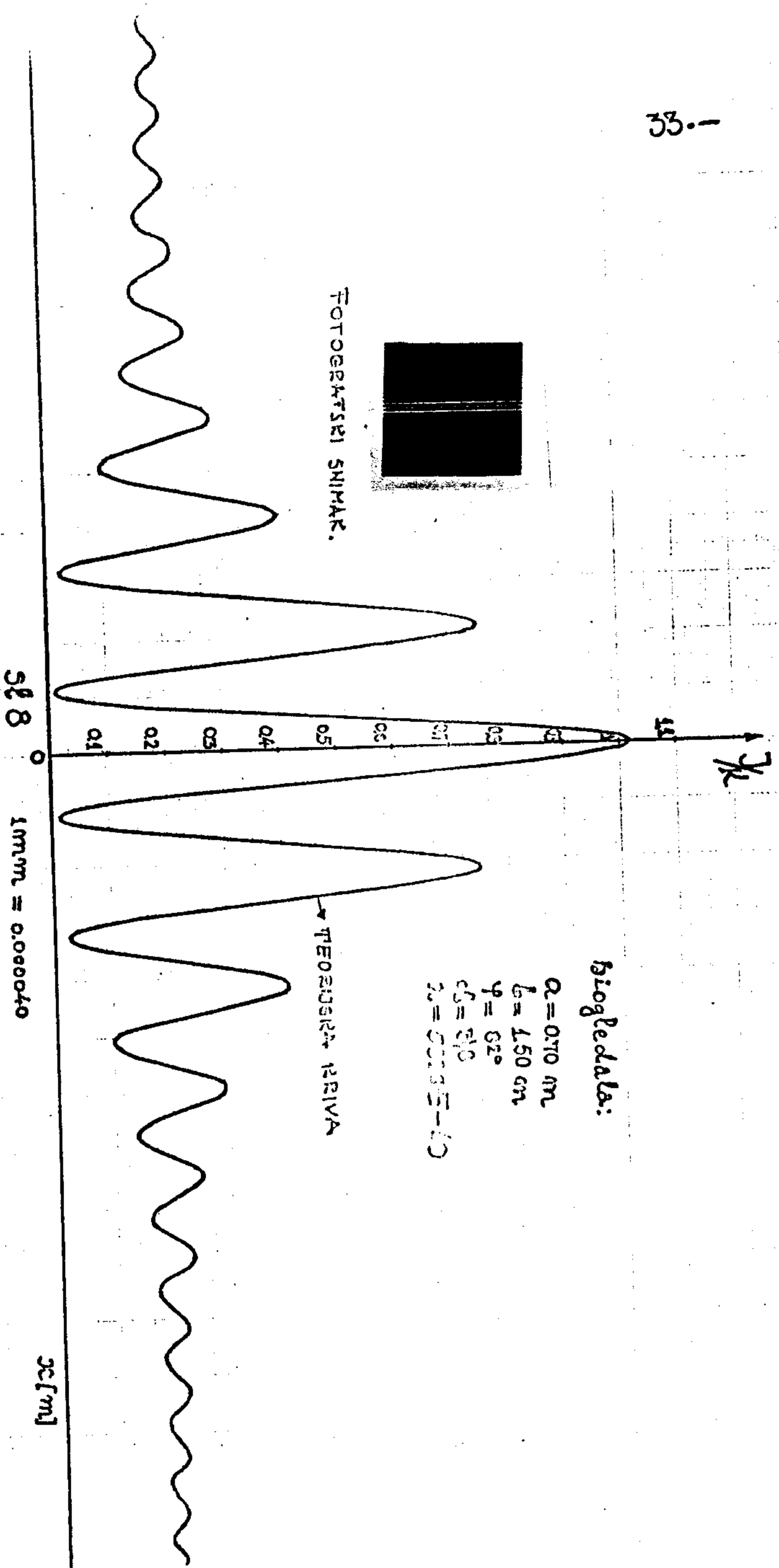
Pogledala:

$a = 0.70 \text{ m}$   
 $l = 0.50 \text{ m}$   
 $\varphi = 82^\circ$   
 $\omega = 10.5$   
 $\lambda = 5.05 \times 10^{-10} \text{ m}$



SP7 PIZNDI-eri,  $l \text{ m} \text{ m} = 0.000020$

$x \text{ [m]}$



ФОТОГРАФИЯ ШЛИТА



Измерения:

$a = 0.170 \text{ mm}$

$b = 1.50 \text{ cm}$

$\varphi = 62^\circ$

$\lambda = 640 \text{ nm}$

$\lambda = 500 \text{ nm} - 60$

ТЕОРИТИНГ КРИВА

528

$1 \text{ mm} = 0.000040$

x [m]

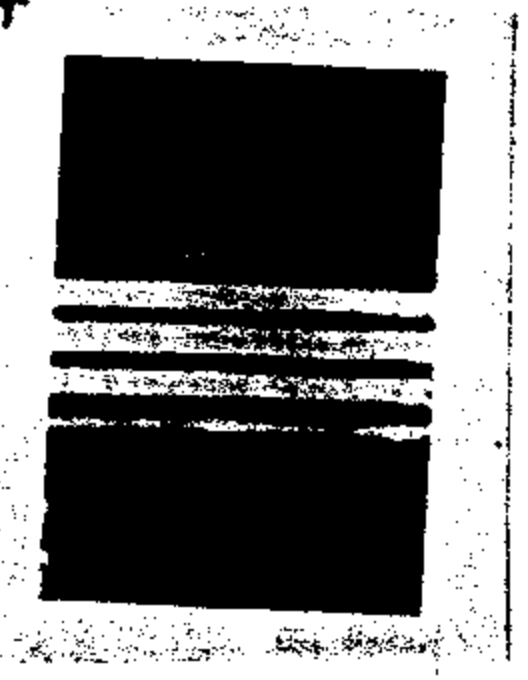
$\frac{1}{\lambda}$

34.

0 01 02 03 04 05 06 07 08 09 10

TEORISKA KRIVA

FOTOGRAFSKI SNIMAK



biografika:

$a = 0.09 \text{ m}$

$b = 0.77 \text{ m}$

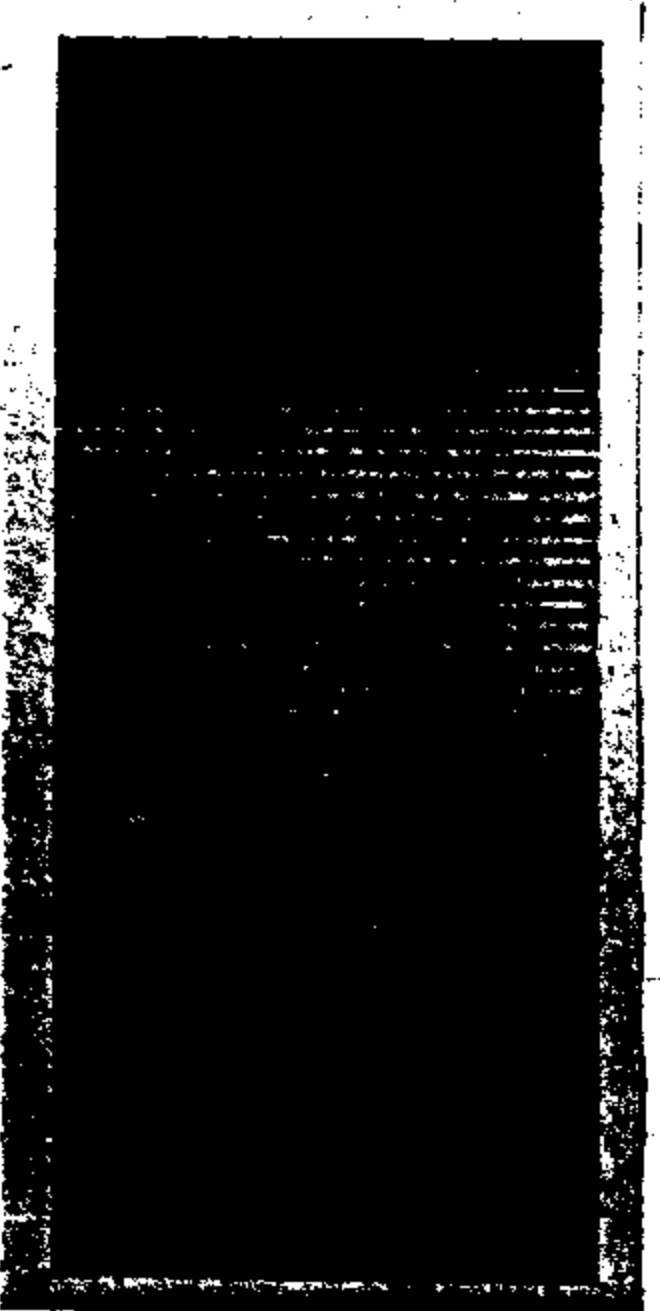
$\varphi = 0.5^\circ$

$d_s = 2'$

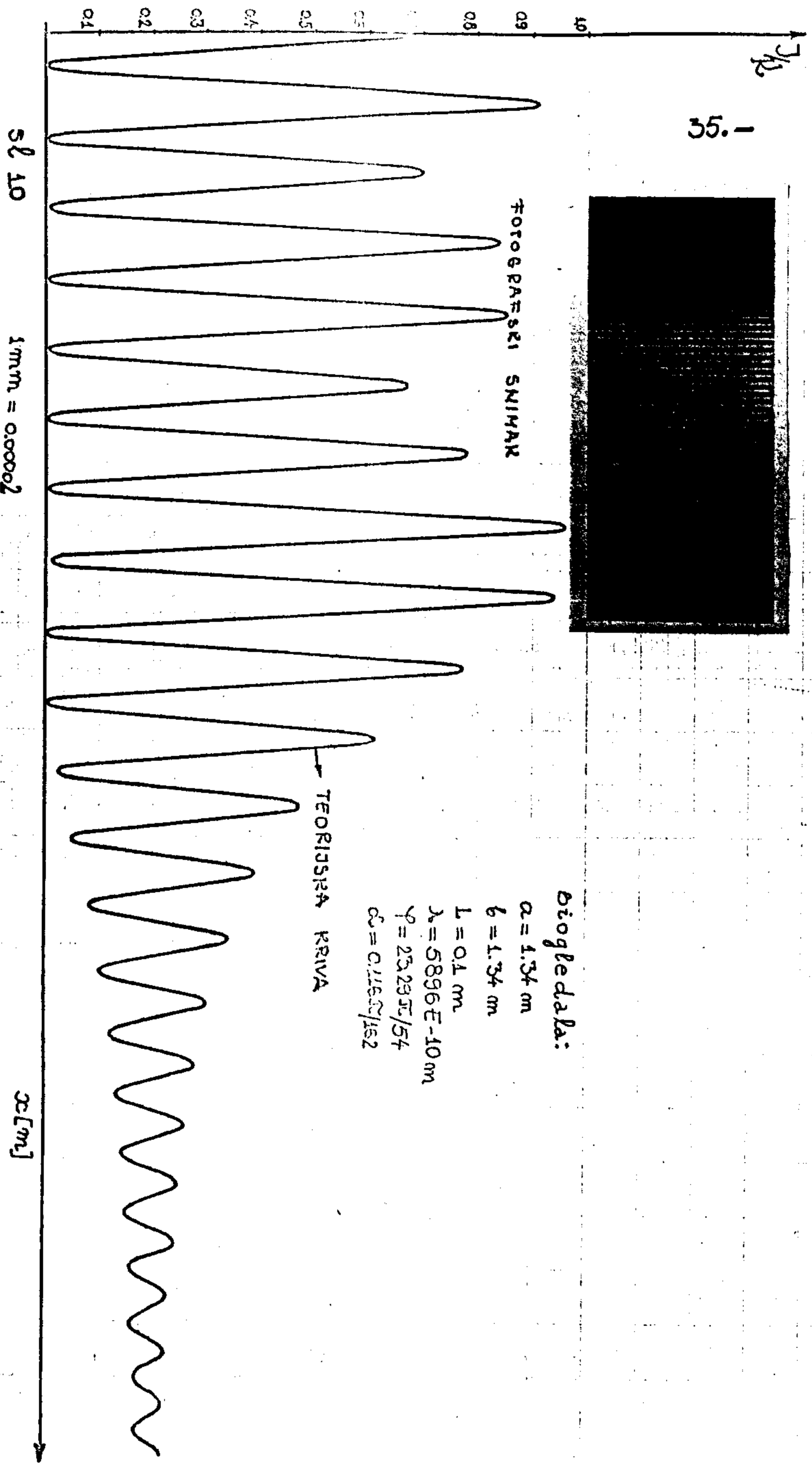
$\lambda = 632.8 \text{ nm}$

1 mm - 1000 nm

0.5 mm



FOTOGRAFSKI SNIMAK



Biogledala:

- $a = 1.34 \text{ m}$
- $b = 1.34 \text{ m}$
- $L = 0.1 \text{ m}$
- $\lambda = 5896 \text{ \AA} = 10 \text{ nm}$
- $\varphi = 23.23\pi/54$
- $\alpha = 0.116\pi/162$

TEORISKA KRIVA

$x$  [m]

teorije. Širina interferencionih linija kako predviđa difrakciona teorija je izračunata kompjutorom. Rezultati uporedjivanja se odnose samo za centralnu interferencionu liniju.

T A B L I C A I

Red. broj	$\lambda$ (m)	a(m)	b(m)	$\alpha$	x(mm) po form. 2,9	x(mm) po dif. teoriji	Kojoj sl. odgovara
1	5896E-10	1,34	1,34	7'44''	0,262	0,259	sl. 10
2	5896E-10	0,70	1,50	3'48''	0,038	0,879	sl. 8
3	6328E-10	0,69	5,77	2'	5,092	0,480	sl. 9
4	5896E-10	0,70	4,50	10'30''	0,769	0,779	sl. 6
5	5896E-10	0,70	0,50	10'30''	0,165	0,159	sl. 7

Iz tablice se vidi da je najveće neslaganje širina interferencionih linija kod broja 2 i 3. Inače kod broja 1, 4 i 5 obe teorije daju takve širine interferencionih linija koje se malo razlikuju. Ta mala odstupanja verovatno dolaze iz kompjuterskih koraka ispitivanja funkcija. Sudeći po ovome i širina interferencionih linija uopšte uzevši odgovara Fresnelovom očekivanju.

### 3. SLUČAJ RAZMAKNUTIH OGLEDALA

U literaturi o Frenelovom eksperimentu sa biogledalima nalazimo pretpostavke da se ogledala moraju dodirivati. To autor [4] i posebno ističe, a u [3] nalazimo slučaj da su rubovi ogledala vertikalno pomereni, a ogledala se dodiruju. Međutim, eksperimentalna merenja koja nalazim u [13] i [14] pokazuju da i u slučaju razmaknutih ogledala dobijaju se

interferencione i difrakcione linije. Da bismo izveli difrakcionu teoriju razmaknutih ogledala polazimo iz relacije (1,35) i (1,36). Označimo u (1,36) sa:

$$\beta = \frac{k l^2}{4} \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) (\sin^2 \varphi - \sin^2(\varphi - \alpha)) = \frac{\pi l^2}{2\lambda} \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) (\sin^2 \varphi - \sin^2(\varphi - \alpha)) \quad (3.1)$$

pa ćemo dobiti,

$$\frac{1}{2}(\varphi_2 - \varphi_1) = \frac{2\pi a x \sin \alpha}{\lambda(a+b)} + \beta \quad (3.2)$$

Zamenimo vrednost (3,2) u (1,35) i dobićemo vrednost funkcije intenziteta,

$$J = \frac{\lambda k_0}{2\pi^2 D} \left\{ (A_3 + C_3)^2 + (B_3 + D_3)^2 - 4[(A_3 C_3 + B_3 D_3) \sin\left(\frac{2\pi a \sin \alpha x}{\lambda(a+b)} + \beta\right) + (A_3 D_3 - B_3 C_3) \cos\left(\frac{2\pi a \sin \alpha x}{\lambda(a+b)} + \beta\right)] \sin\left(\frac{2\pi a \sin \alpha x}{\lambda(a+b)} + \beta\right) \right\} \quad (3.3)$$

Za sistem integrala (1,32) odnosno za,

$$\left. \begin{aligned} A_3 &= C\left(\frac{q_1}{p} - p \cos(\varphi - \alpha)\right) - C\left(\frac{q_1}{p} - p(L+l) \cos(\varphi - \alpha)\right) \\ B_3 &= S\left(\frac{q_1}{p} - p \cos(\varphi - \alpha)\right) - S\left(\frac{q_1}{p} - p(L+l) \cos(\varphi - \alpha)\right) \\ C_3 &= C\left(\frac{q_2}{p} + p(L+l) \cos \varphi\right) - C\left(\frac{q_2}{p} + p \cos \varphi\right) \\ D_3 &= S\left(\frac{q_2}{p} + p(L+l) \cos \varphi\right) - S\left(\frac{q_2}{p} + p \cos \varphi\right) \end{aligned} \right\} \quad (3.4)$$

U sistemu integrala (3,4) vrednost za  $\underline{p}$ ,  $\underline{q}_1$  i  $\underline{q}_2$  čitamo iz relacije (1,23).

Kao i ranije možemo zanemariti vrednost ugla  $\alpha$  u argumentima sistema integrala, što je sasvim opravdano zbog  $\varphi \gg \alpha$  pa sistem (3,4) će dobiti jednostavniju formu:

$$\left. \begin{aligned} A_3 &= C\left(\frac{q_1}{p} - p \cos \varphi\right) - C\left(\frac{q_1}{p} - p(L+l) \cos \varphi\right) \\ B_3 &= S\left(\frac{q_1}{p} - p \cos \varphi\right) - S\left(\frac{q_1}{p} - p(L+l) \cos \varphi\right) \\ C_3 &= C\left(\frac{q_2}{p} + p(L+l) \cos \varphi\right) - C\left(\frac{q_2}{p} + p \cos \varphi\right) \\ D_3 &= S\left(\frac{q_2}{p} + p(L+l) \cos \varphi\right) - S\left(\frac{q_2}{p} + p \cos \varphi\right) \end{aligned} \right\} \quad (3.5)$$



Veličina  $\beta$  koja dolazi u (3,3) kako se vidi iz (3,1) je neimenovan broj, što znači da igra ulogu nekog faznog faktora. Prisustvo tog člana, koji je uključen u teoriji zbog geometrije koso položenih ogledala neće promeniti razmak između interferencionih linija, nego samo njihov raspored u odnosu na koordinatni sistem  $O'$  slike 3. Na ovo možemo se lako ubediti ako izračunamo širine interferencionih linija. Budemo li, označili sa  $d$  razmak između  $m+1$  i  $m$ -te linije, onda ćemo imati,

$$d = X_{m+1} - X_m$$

$$\frac{4X_{m+1}a \sin \alpha}{\lambda(a+b)} + \beta - 2(m+1) - \frac{4X_m a \sin \alpha}{\lambda(a+b)} - (\beta + 2m) = 0$$

odnosno

$$d = \frac{\lambda(a+b)}{2a \sin \alpha} \quad (3,6)$$

koja je potpuno identična sa formulom (2,9) koja izlazi u slučaju spojenih ogledala. Veličina pomeranja maksimuma interferencionih linija kod razmaknutih ogledala može se odrediti iz sledeće relacije,

$$\Delta = \frac{\lambda}{2 \sin \alpha} \left(1 + \frac{b}{a}\right) - \frac{b^2}{2\lambda} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) (\sin^2 \varphi - \sin^2(\varphi - \alpha)) \quad (3,7)$$

gde smo sa simbolom  $\Delta$  označili pomećanje u odnosu na koordinatni sistem  $O'$  sl. 3.

Iz relacije (3,7) vidimo da za određene vrednosti  $\underline{1}, \lambda, \varphi$  i  $\alpha$  (pomeraj tih linija zavisi od zbira recipročnih vrednosti udaljenosti izvora i ravnine gde hvatamo difrakcionu sliku. Poslednji slučaj je ispitivan numeričkim putem, tako da je programirana funkcija (3,3) za sistem integrala (3,5). U svim slikama parametri  $\underline{1}, \lambda, \varphi, a$  i  $\alpha$  održani su konstantni osim parametra  $\underline{b}$ . Taj parametar varira između  $(0,95 - 3,05)m$ . Za sve slučajeve napravljen je program kada  $\beta = 0$  i kada  $\beta$  ima odgovarajuću vrednost. Time sam mogao najbolje da pratim zavisnost pomeraja interferencionih linija od parametra  $\underline{b}$ . Odmah se vidi da sa povećanjem  $\underline{b}$  veličina pomeraja  $\Delta$  se smanjuje. To se može najbolje videti na slikama gde  $\underline{b}$  dobiva maksimalne i minimalne vrednosti  $(0,95$  i  $3,05)m$ . Na slici 11 je

prikazan slučaj kada je  $b=3,05m$ . U ovom slučaju fazni pomeraj je najmanji i obe difrakcione slike gotovo se ne razlikuju. Donja slika predstavlja slučaj  $\beta = 0$  a gornja kada  $\beta$  dobiva odgovarajuće vrednosti. Centralna interferenciona linija kada je  $\beta = 0$  ima relativni intenzitet  $0,6948E$  ol, a kada  $\beta$  ima odgovarajuće vrednosti relativni intenzitet iznosi  $0,4820E$  ol. Upravo zbog ove male razlike interferencione krive gotovo se ne razlikuju. To se može najbolje videti iz ordinata relativnih intenziteta. Što se tiče širina interferencionih linija one su potpuno jednake saglasno relaciji (3,6). Prividno, čini nam se da su gornje interferencione linije duplo većih širina. To dolazi zbog različitih koraka u numeričkom ispitivanju. Kako bi mogao dobro pratiti fazni pomeraj, korak numeričke analize dva puta je povećan. Ista diskusija važi i za sl. 12, kod koje je parametar  $b=2,34m$ . Veličina faznog pomeraja je veća u odnosu na sl. 11 o čemu se možemo ubediti iz ordinata relativnih intenziteta centralnih interferencionih linija. Ti intenziteti iznose: za  $\beta = 0$  (donja kriva sl. 12)  $0,9485E$  ol, a za  $\beta$  uz odgovarajuću vrednost (gornja kriva sl. 12)  $0,6096E$  ol. Ova razlika centralnih intenziteta, kako se vidi veća je od razlike centralnih intenziteta kod prohodne slike. Korak gornje krive sl. 12 je identičan sa korakom donje krive sl. 12 i vidimo da su linije interferencije istih širina.

Uopšte uzevši, za volike vrednosti faznog pomeraja raspored intenziteta interferencionih linija nije jednak sa slučajem kada je  $\beta = 0$ . To sledi iz relacije (3,3) kod koje modulaciona funkcija,

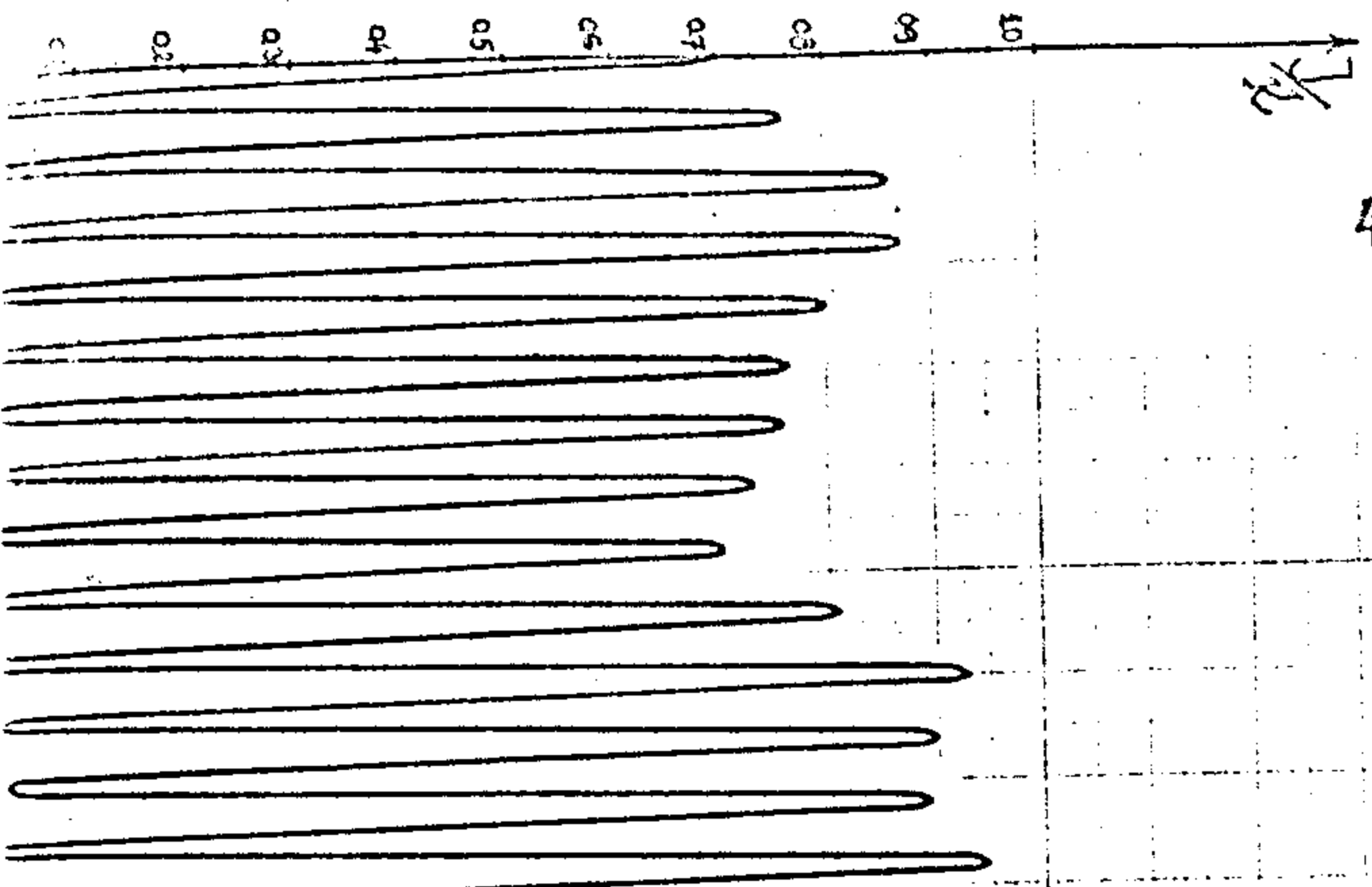
$$J = \frac{k_0 \lambda}{2\pi^2 D} \left\{ (A_3 + C_3)^2 + (B_3 + D_3)^2 \right\} \quad (3,8)$$

ne zavisi od faktora  $\beta$ . Budući da interferencione linije prate modulacionu funkciju onda u zavisnosti od faktora  $\beta$  menja se i njihov raspored, odnosno njihovi relativni intenziteti. Ova činjenica se vidi upore-

djivanjem kriva na sl. 13 i 14. Na slici 14 tri maksimumi centralnih interferencionih linija iznose,  $0,9296E$  ol;  $0,8554E$  ol;  $0,7382E$  ol, a odgovarajući relativni intenziteti kada je  $\beta = 0$  iznose  $0,8896E$  ol;  $0,8234E$  ol;  $0,7054E$  ol. To je zbog toga što je sl. 14 pomerena na levo prema negativnim vrednostima apacise  $x$  za neki fazni faktor  $\beta$ . Na obe slike, linije su istih širina. Maksimalno pomeranje u odnosu na tri prethodne slike je nacrtano na sl. 15. Ovde  $b$  iznosi  $0,95m$ , što iz(37) predstavlja maksimalno pomeranje u odnosu na prethodne parametre  $b$ . Pomeranje ovde iznosi gotovo polovinu interferencione linije. Gornji i donji difrakcioni maksimumi su spojeni jednom vertikalnom linijom koja prolazi kroz centar najvećeg maksimuma ( $\beta = 0$ ). Odmah iz te vertikalne linije možemo pročitati pomeraj za slučaj kada je  $\beta \neq 0$ .

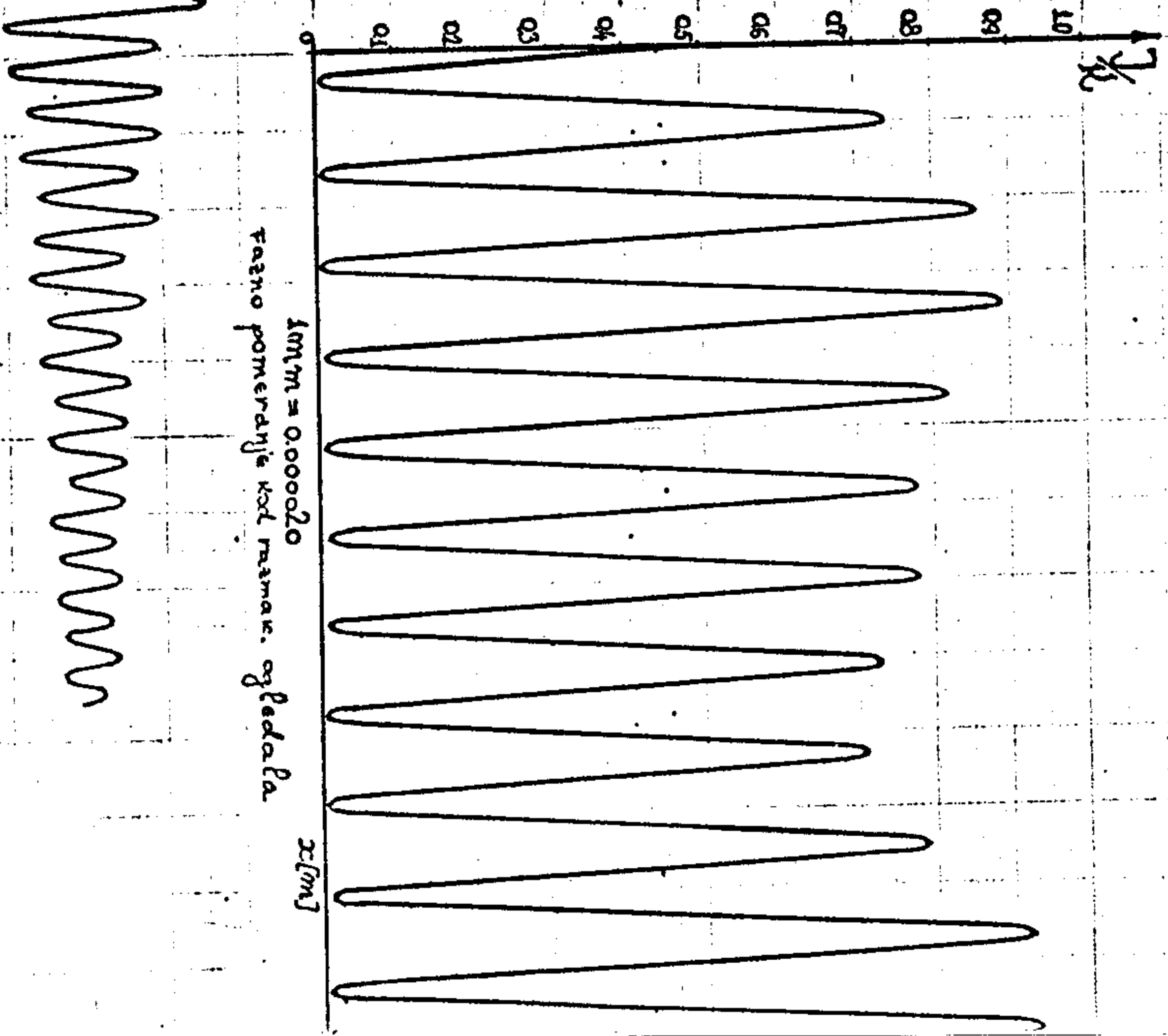
Opšta karakteristika difrakcionih slika koje se dobivaju sa razmaknutim ogledalima sastoji se u povezanosti difrakcionih i interferencionih linija. Kako sam spominjao i ranije Fresnel je tražio slučajeve u kojima bi odstranio difrakciju i dobio samo interferencione linije. Međutim, teorija razmaknutih ogledala a i eksperimenti koji su izvodjeni pokazuju da je nemoguće odvojiti interferenciju od difrakcije. Difrakcija dolazi još jače do izražaja kod razmaknutih ogledala. Ukoliko pratimo raspored intenziteta duž optičke osi, tj. u odnosu na liniju koja prolazi kroz koordinatni početak vidimo sledeće; za velike vrednosti parametra  $b$ , tj. kada je ekran dovoljno daleko, difrakcioni maksimumi su udaljeniji u odnosu na  $x=0$  (sl. 11). Smanjenjem parametra  $b$  difrakciona slika se sužava u odnosu na  $x=0$  (sl. 12). Za parametar  $b=1,34m$  centralni maksimum je najveći i on opada udaljavanjem od  $x=0$ . Ostali difrakcioni maksimumi u odnosu na centralni nisu značajnog intenziteta (sl. 13). Na toj slici se vidi da je prvi difrakcioni maksimum u odnosu na centralni oko 2,5 puta slabiji. Ispod difrakcionih maksimuma, osim kod centralnog, se pojavlju-

41.



Paamæruta ogleðala.

- $a = 1.34 \text{ m}$
- $b = 3.05 \text{ m}$
- $L = 0.1 \text{ m}$
- $\ell = 0.011 \text{ m}$
- $\varphi = 23.85^\circ/54$
- $d = 0.07^\circ/54$
- $\lambda = 5836 \text{ E-}10 \text{ m}$

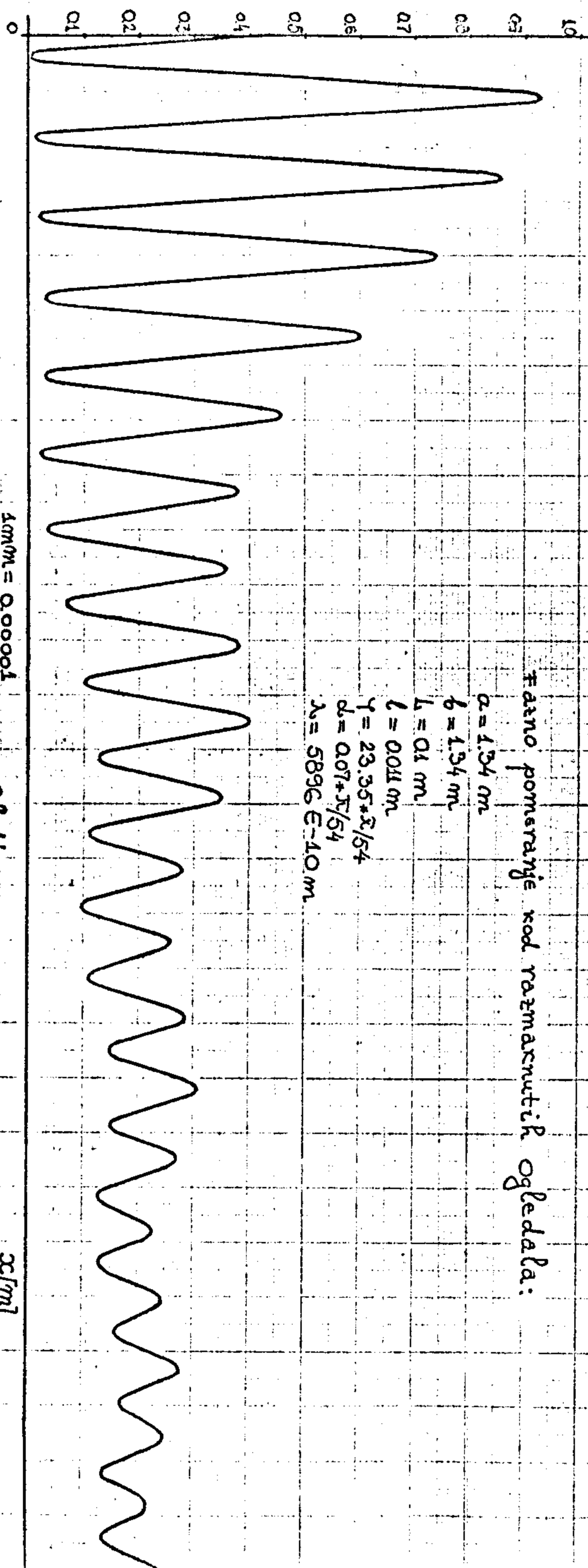


$\Delta\varphi$  [m] = 0.000020  
Fasno þomerdýgi kvi þamark. ogleðala.





44. -



Fazno pomiranje kod razmarnutih ogledala:

$$a = 1.34 \text{ m}$$

$$b = 1.34 \text{ m}$$

$$L = 0.1 \text{ m}$$

$$l = 0.011 \text{ m}$$

$$\gamma = 23.35 \cdot \pi / 54$$

$$d = 0.07 \cdot \pi / 54$$

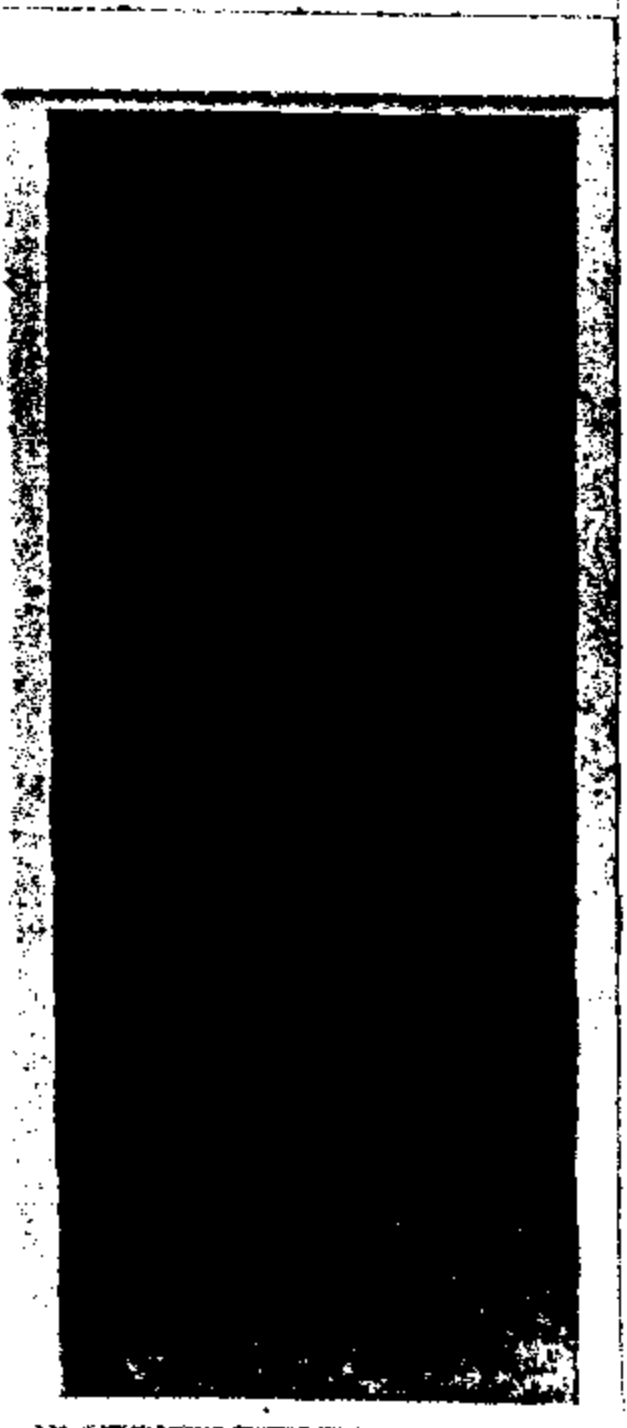
$$\lambda = 5896 \text{ E-10 m}$$

$\Delta x \text{ [mm]} = 0.00001$

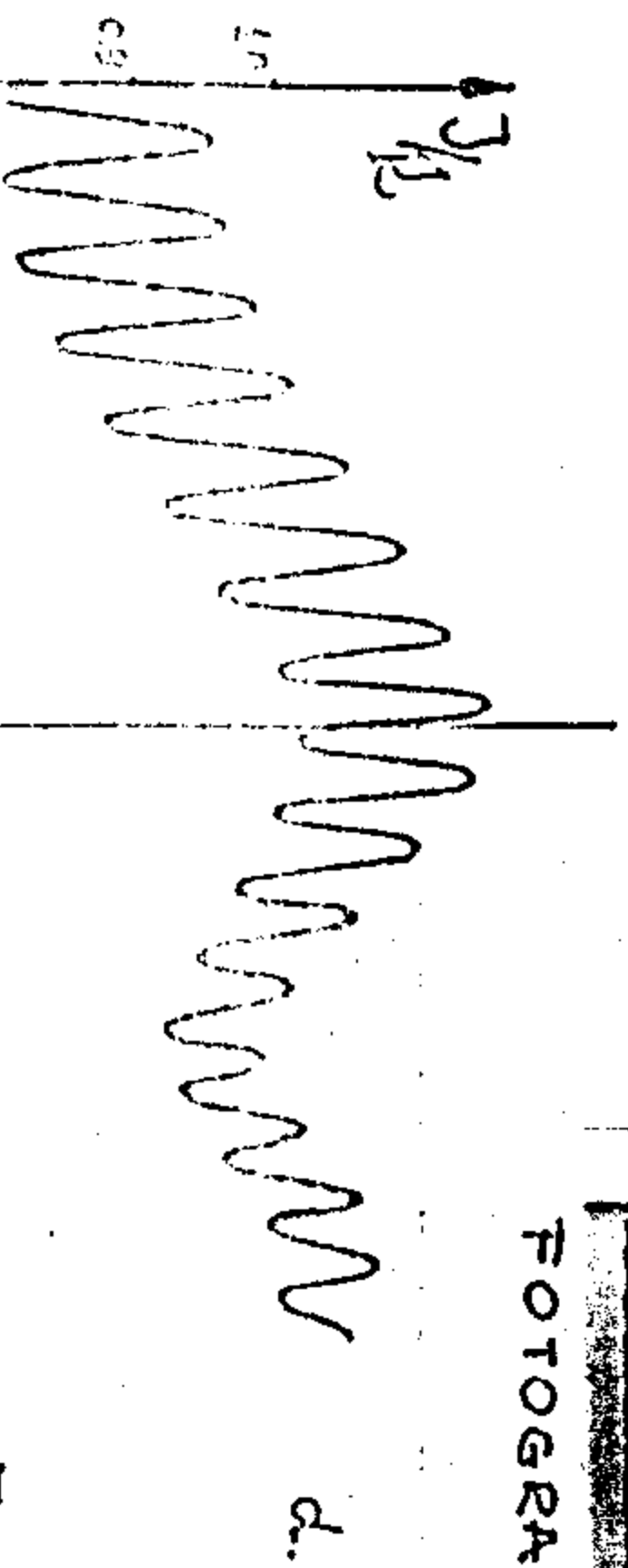
S.8.14

$x \text{ [cm]}$

45.-



FOTOGRAFSKI SINAR



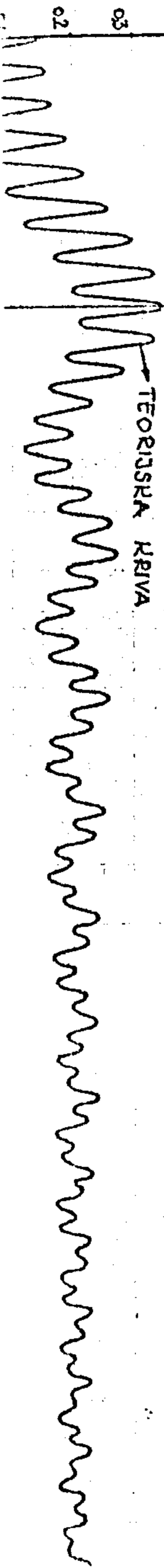
d. Rezultati ožbeđala

- $a = 1.34 \text{ cm}$
- $b = 0.55 \text{ cm}$
- $L = 0.1 \text{ cm}$
- $l = 0.011 \text{ cm}$
- $\lambda = 5836 \text{ \AA} - 10 \text{ nm}$
- $\gamma = 23.35 \pi / 54$
- $d = 0.07 \cdot \frac{\pi}{2}$

Fazno pomerenje kod razm. ožbeđala.  $x$

$L \text{ mm} = 0.000020$

TEORIJSKA KRIVA





je jedan svjetlosni fon koji je voći sa udaljavanjem od  $x=0$ . Za vrlo male vrednosti  $b_2$  u našem slučaju  $b=0,95m$  u sredini difrakcione slike se pojavljuje jedan minimum a interferencione linije su slabijeg intenziteta (sl. 15). To bi trebalo očekivati jer razmak između ogledala odgovara tamnom zaklonu koso položenom prema smjeru upadnih talasa.

Spominjem na kraju da postoji izvesno neslaganje između dobivenih eksperimentalnih snimaka i teorijskih krivi. To neslaganje dolazi usled različitih koordinatnih sistema. Naime, za izvođenje teorije ja upotrebljavam koordinatni sistem koji prolazi kroz centar fiktivnog zaklona. Autor [13] upotrebljava koordinatni sistem koji je povezan sa rubom prvog ogledala. Tako, da sve parametre uzima u odnosu na taj rub, napr. ugao  $\alpha$ ,  $\psi$  i  $a$ . Nije teško dokazati da je veza između teorijskog i eksperimentalnog koordinatnog sistema za ugao  $\alpha$  zadan relacijom,

$$\alpha = 2\psi$$

gde je  $\alpha$  teorijski ugao između ogledala na sl. 3, a  $\psi$  eksperimentalni ugao u odnosu na rub prvog ogledala. Sl. 15 potpuno se podudara sa snimkom na radu [13] jer u tom slučaju difrakcioni efekti manje dolaze do izražaja, što znači da glavnu ulogu igra razmak među ogledalima, odnosno koso položeni fiktivni zaklon. Bez obzira na različite koordinatne sisteme difrakcione i interferencione linije pokazuju isti karakter.

Ukoliko uzimamo da je  $\alpha = 0$  tada je  $\frac{1}{2}(\psi_2 - \psi_1) = 0$  pa iz (3,3) izlazi,

$$J = \frac{\lambda k_0}{2\pi^2 D} \left\{ (A_3 + C_3)_{d=0}^2 + (B_3 + D_3)_{d=0}^2 \right\} \quad (3.9)$$

a to je slučaj Fresnelove difrakcije na dve pukotine. Ovaj slučaj ćemo analizirati detalno u glavi V. U funkciju intenziteta (3,9) imamo sledeći sistem integrala:

$$A_3(d=0) = C\left(\frac{a_0}{p} - p l \cos \psi\right) - C\left(\frac{a_0}{p} - p(L+l) \cos \psi\right) \quad (3.10)$$

$$\begin{aligned}
 B_3(\alpha=0) &= S\left(\frac{a_0}{p} - p l \cos \varphi\right) - S\left(\frac{a_0}{p} - p(l+l) \cos \varphi\right) \\
 C_3(\alpha=0) &= C\left(\frac{a_0}{p} + p(l+l) \cos \varphi\right) - C\left(\frac{a_0}{p} + p l \cos \varphi\right) \\
 D_3(\alpha=0) &= S\left(\frac{a_0}{p} + p(l+l) \cos \varphi\right) - S\left(\frac{a_0}{p} + p l \cos \varphi\right)
 \end{aligned}
 \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} B_3 \\ C_3 \\ D_3 \end{aligned}} \right\} (3.10)$$

u sistemu (3,10) je,  $a_0 = \frac{2x}{\lambda b}$  ;  $p^2 = \frac{2}{\lambda} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)$  (3,11)

Na kraju ću priložiti rezultat uporedjivanja širina interferencionih linija dobivenih iz difrakcione teorije i prema Fresnelovoj teoriji, odnosno prema formuli (3,6). Uporedjivanje je izvršeno samo za centralnu interferencionu liniju, jer prema (3,6) faktor  $\beta$  u tom smislu ne igra nikakvu ulogu. Rezultati uporedjivanja su uneseni u tab. II. Prema tablici II se vidi, da se teorijski rezultati i rezultati dobiveni iz (3,6) potpuno podudaraju.

T A B L I C A II

Red. broj	$\lambda$ (m)	a(m)	b(m)	$\alpha$	$\underline{2l}$ (cm)	x(mm) po formuli (3,6)	x(mm) po difrakcionoj teoriji
1.	5896E-10	1,34	3,05	14°	2,2	0,237	0,240
2.	5896E-10	1,34	2,34	14°	2,2	0,198	0,200
3.	5896E-10	1,34	1,34	14°	2,2	0,144	0,140
4.	5896E-10	1,34	0,95	14°	2,2	0,123	0,120

#### 4. SLUČAJ KOSOG NEPROZIRNOG ZAKLONA

Za izvodjenje opšte formule (1,35) služio sam se pretpostavkom da razmak medju ogledalima odgovara tamnom zaklonu koso položenom prema smjeru svjetlosnih talasa. Zbog toga, saglasno [19], na toj oblasti prostora uzeto je, da je amplituda upadnih talasa jednaka nuli.

Na osnovu ove pretpostavke, specijalizacijom formule (1,35) za slučaj kada ogledala imaju veliku širinu  $L$  i postavljena su u istoj ravnini, kada je ugao između njih jednak nuli, možemo dobiti formulu za difrakcioni intenzitet svjetlosti na koso položenom zaklonu.

Za  $\alpha = 0$ ,  $s_1 = s_2 = 0$ , znači da se izvor nalazi duž  $\eta$  osi, udaljen za  $a$  od koordinatnog sistema, odnosno od sredine koso položenog zaklona. Tada se sistem integrala (1,32) transformira na sledeći sistem:

$$\left. \begin{aligned} A_1 &= C\left[p(L+l)\cos\varphi - \frac{q}{p}\right] - C\left[p\cos\varphi - \frac{q}{p}\right] \\ B_1 &= S\left[p(L+l)\cos\varphi - \frac{q}{p}\right] - S\left[p\cos\varphi - \frac{q}{p}\right] \\ C_1 &= C\left[p(L+l)\cos\varphi + \frac{q}{p}\right] - C\left[p\cos\varphi + \frac{q}{p}\right] \\ D_1 &= S\left[p(L+l)\cos\varphi + \frac{q}{p}\right] - S\left[p\cos\varphi + \frac{q}{p}\right] \end{aligned} \right\} 4.1$$

koji je identičan sistemu integrala (3,10), a  $q$  i  $p$  su zadane relacijom (3,11). Budući da  $p$  ne može biti jednako nuli zbog Fresnelovog regiona, što znači da  $a$  i  $b$  imaju konačne vrednosti. Tada će i odnos  $q/p$  u sistemu integrala (4,1) ostati konačan. Uzimajući u obzir da  $L \rightarrow \infty$  onda možemo zaključiti da važi,

$$p(L+l)\cos\varphi \gg \frac{q}{p} \quad (4,2)$$

a u sistemu (4,1) imaćemo:

$$\left. \begin{aligned} C\left[p(L+l)\cos\varphi - \frac{q}{p}\right] \Big|_{L \rightarrow \infty} &\rightarrow \frac{1}{2} \\ S\left[p(L+l)\cos\varphi - \frac{q}{p}\right] \Big|_{L \rightarrow \infty} &\rightarrow \frac{1}{2} \\ C\left[p(L+l)\cos\varphi + \frac{q}{p}\right] \Big|_{L \rightarrow \infty} &\rightarrow \frac{1}{2} \\ S\left[p(L+l)\cos\varphi + \frac{q}{p}\right] \Big|_{L \rightarrow \infty} &\rightarrow \frac{1}{2} \end{aligned} \right\} (4.3)$$

Zamenom (4,3) u (4,1) izlazi,

$$\left. \begin{aligned} A_1 &= \frac{1}{2} - C\left(p\cos\varphi - \frac{q}{p}\right) \\ B_1 &= \frac{1}{2} - S\left(p\cos\varphi - \frac{q}{p}\right) \end{aligned} \right\} (4.4)$$

$$\left. \begin{aligned} C_1 &= \frac{1}{2} - C\left(pl \cos \varphi + \frac{a}{p}\right) \\ D_1 &= \frac{1}{2} - S\left(pl \cos \varphi + \frac{a}{p}\right) \end{aligned} \right\} (4.4)$$

Uzimajući u obzir da zbog  $\alpha = 0$  iz (1,36) sledi da je,

$$\frac{1}{2}(\Psi_2 - \Psi_1) = 0$$

i za funkciju intenziteta kod koso položenog zaklona izlazi iz (1,35)

sledeća formula,

$$J = \frac{k_0 \lambda}{2\pi^2 D} \left\{ \left[ 1 - C\left(pl \cos \varphi - \frac{a}{p}\right) - C\left(pl \cos \varphi + \frac{a}{p}\right) \right]^2 + \right. \\ \left. + \left[ 1 - S\left(pl \cos \varphi - \frac{a}{p}\right) - S\left(pl \cos \varphi + \frac{a}{p}\right) \right]^2 \right\} \quad (4.5)$$

Funkcija (4,5) ima oscilatorni karakter. Da bismo se o tom uverili označimo u (4,5) sa,

$$K = \frac{k_0 \lambda}{2\pi^2 D} \quad (4.6)$$

i odredimo položaje maksimuma interferencionih linija. Po pravilima matematike moramo odrediti prvi izvod izraza (4,5),

$$\frac{dJ}{dx} = \frac{4K}{\lambda b p} \left\{ \left[ 1 - C\left(pl \cos \varphi - \frac{a}{p}\right) - C\left(pl \cos \varphi + \frac{a}{p}\right) \right] \left[ \cos \frac{\pi}{2} \left(pl \cos \varphi - \frac{a}{p}\right)^2 - \cos \frac{\pi}{2} \left(pl \cos \varphi + \frac{a}{p}\right)^2 \right] + \right. \\ \left. + \left[ 1 - S\left(pl \cos \varphi - \frac{a}{p}\right) - S\left(pl \cos \varphi + \frac{a}{p}\right) \right] \left[ \sin \frac{\pi}{2} \left(pl \cos \varphi - \frac{a}{p}\right)^2 - \sin \frac{\pi}{2} \left(pl \cos \varphi + \frac{a}{p}\right)^2 \right] \right\} = 0 \quad (4.7)$$

označimo kraće sa:

$$\left. \begin{aligned} \Psi &= pl \cos \varphi - \frac{a}{p} \\ \Phi &= pl \cos \varphi + \frac{a}{p} \end{aligned} \right\} (4.8)$$

Lako je videti, da izraz (4,7) izjednačen s nulom predstavlja jednu transcendentnu jednačinu koju nije lako rešiti. Zbog toga ćemo ove integrale izraziti pomoću Gilbertovog načina predstavljanja Fresnelovih integrala [27].

$$\left. \begin{aligned} C(\Psi) &= \frac{1}{2} - G(\Psi) \cos \frac{\pi}{2} \Psi^2 + H(\Psi) \sin \frac{\pi}{2} \Psi^2 \\ S(\Psi) &= \frac{1}{2} - G(\Psi) \sin \frac{\pi}{2} \Psi^2 - H(\Psi) \cos \frac{\pi}{2} \Psi^2 \end{aligned} \right\} (4.9)$$

gde su:

$$G(\psi) = \frac{1}{\pi\sqrt{2}} \int_0^{\infty} \frac{e^{-\frac{\pi}{2}\psi^2 x} \sqrt{x}}{1+x^2} dx \quad (4.10)$$

$$H(\psi) = \frac{1}{\pi\sqrt{2}} \int_0^{\infty} \frac{e^{-\frac{\pi}{2}\psi^2 x}}{\sqrt{x}(1+x^2)} dx$$

Zamenom izraza (4,8), (4,9) u (4,7) i sredjivanjem izlazi,

$$\begin{aligned} \frac{dJ}{dx} = \frac{4K}{\lambda b p} & \left\{ (G(\psi) \cos \frac{\pi}{2} \psi^2 + G(\Phi) \cos \frac{\pi}{2} \Phi^2) \left( \cos \frac{\pi}{2} \psi^2 - \cos \frac{\pi}{2} \Phi^2 \right) - \right. \\ & - \left( H(\psi) \sin \frac{\pi}{2} \psi^2 + H(\Phi) \sin \frac{\pi}{2} \Phi^2 \right) \left( \cos \frac{\pi}{2} \psi^2 - \cos \frac{\pi}{2} \Phi^2 \right) + \\ & + \left( G(\psi) \sin \frac{\pi}{2} \psi^2 + G(\Phi) \sin \frac{\pi}{2} \Phi^2 \right) \left( \sin \frac{\pi}{2} \psi^2 - \sin \frac{\pi}{2} \Phi^2 \right) + \\ & \left. + \left( H(\psi) \cos \frac{\pi}{2} \psi^2 + H(\Phi) \cos \frac{\pi}{2} \Phi^2 \right) \left( \sin \frac{\pi}{2} \psi^2 - \sin \frac{\pi}{2} \Phi^2 \right) \right\} \quad (4.11) \end{aligned}$$

Sredjivanjem (4,11) izlazi,

$$\frac{dJ}{dx} = \frac{4K}{\lambda b p} \left\{ 2[G(\psi) - G(\Phi)] \sin \frac{\pi}{4} (\Phi^2 - \psi^2) - [H(\psi) + H(\Phi)] \cos \frac{\pi}{4} (\Phi^2 - \psi^2) \right\} \sin \frac{\pi}{4} (\Phi^2 - \psi^2) \quad (4.12)$$

izjednačenjem sa nulom izraza (4,12) dobićemo

$$\left\{ [G(\psi) - G(\Phi)] \sin \frac{\pi}{4} (\Phi^2 - \psi^2) - [H(\psi) + H(\Phi)] \cos \frac{\pi}{4} (\Phi^2 - \psi^2) \right\} \sin \frac{\pi}{4} (\Phi^2 - \psi^2) = 0 \quad (4.13)$$

Relacija (4,13) će biti zadovoljena za

$$x = n \frac{\lambda b}{2l \cos \varphi} \quad (4.14)$$

gde je  $n=0, \pm 1, \pm 2, \pm 3 \dots$

Poslednja relacija nam pokazuje da unutar geometrijske senke dobivamo jednako razmaknute interferencione linije čiji je položaj maksimuma određen relacijom (4,14). Centralna linija koja se nalazi za  $n=0$  poklapa se sa  $\eta$  osom.

Specijalno za  $\varphi = 0$  iz (4,14) izlazi,

$$x = n \frac{\lambda b}{2l} \quad (4.15)$$

koja izražava položaj maksimuma interferencionih linija unutar geometrijske senke u slučaju kada je zaklon postavljen normalno na spojnici iz-

vora i centra slike. Spominjem da relaciju (4,15) možemo dobiti specijalizacijom difrakcione teorije Fresnelovog tipa Youngovog eksperimenta o kome ćemo detaljno govoriti u gl. V.

### 5. FRAUNHOFEROV PRELAZ KOD BIOGLEDALA

Kada se ispred svjetlosnog izvora na sl. 3 postavi jedno cilindrično sočivo tako da se izvor nalazi u fokalnoj ravnini, onda na ogledala pada ravni talas. Ovaj slučaj je identičan slučaju kada je izvor postavljen na beskonačno velikom rastojanju od ogledala. Budemo li postavili ravninu gde hvatamo difrakcionu sliku na vrlo veliku udaljenost, tada ćemo dobiti difrakcione slike sasvim drugog karaktera, -difrakcione slike Fraunhoferovog tipa. Teorija Fraunhoferove difrakcije se pojavljuje kao specijalan slučaj Fresnelove difrakcije kada su i izvor i ekran beskonačno daleko u odnosu na difrakcioni otvor. Teorija dvaju izvora kojom smo se služili kod biogledala tada gubi svoj smisao.

Postoje dva načina specijaliziranja Fresnelove difrakcije na Fraunhoferovu. Prvi način sastoji se u izvodjenju nove funkcije intenziteta, kada su upadni talasi paralelni a izlazni elementarni talasi, cilindrični, [24], [28], [29]. Funkcija intenziteta koja izlazi za taj slučaj je identična funkciji (1,35) samo što u njoj više ne figurira konstanta  $a$ , odnosno udaljenost izvora. Iz te formule možemo dobiti difrakcionu teoriju Fraunhoferovog tipa kako je to učinjeno u radovima [24], [28], [29].

Drugi način se sastoji u direktnom specijaliziranju formule (1,35) kada udaljenost izvora pustimo da teži prema beskonačnosti. U tom slučaju konstanta koja se nalazi ispred funkcije intenziteta (1,35)

$$K = \frac{k_0}{a^2 ab} \rightarrow 0 \quad \text{kada} \quad a \rightarrow \infty \quad (5,1)$$

što znači da je Fraunhoferov difrakcioni intenzitet jednak nuli. Eksperimenti pak pokazuju da to nije istina. Kako je konstanta  $k_0$  povezana sa geometrijom samog eksperimenta, tj. sa udaljenostima izvora i ekrana od difrakcionog otvora, možemo pretpostaviti da u graničnom prelazu konstanta  $k_0$  teži prema beskonačnosti kao i proizvod  $a \cdot b$ . Time će konstanta ispred (1,35) imati konačnu vrednost i u slučaju Fraunhoferovog prelaza. O karakteru konstante u slučaju ovakvih prelaza u [10] str. 418 čitam: "Strogo govoreći članovi drugog i drugih visokih redova iščezavaju samo u graničnom slučaju kada  $a \rightarrow \infty$  i  $b \rightarrow \infty$ , tj. kada se i izvor i tačka posmatranja nalaze u beskonačnosti (tada treba pustiti, da i konstanta  $k_0$  ispred integrala teži prema beskonačnosti, kao proizvod,  $a \cdot b$ )".\*

Funkciju intenziteta (1,35) uz malu transformaciju možemo dovesti na oblik,

$$J = \frac{k_0}{\pi^2 a b p^2} \left\{ A_1^2 + B_1^2 + C_1^2 + D_1^2 + 2(A_1 C_1 + B_1 D_1) \cos \Psi + 2(B_1 C_1 - A_1 D_1) \sin \Psi \right\} \quad (5.2)$$

gde je,  $\Psi = \Psi_2 - \Psi_1$  (5.3)

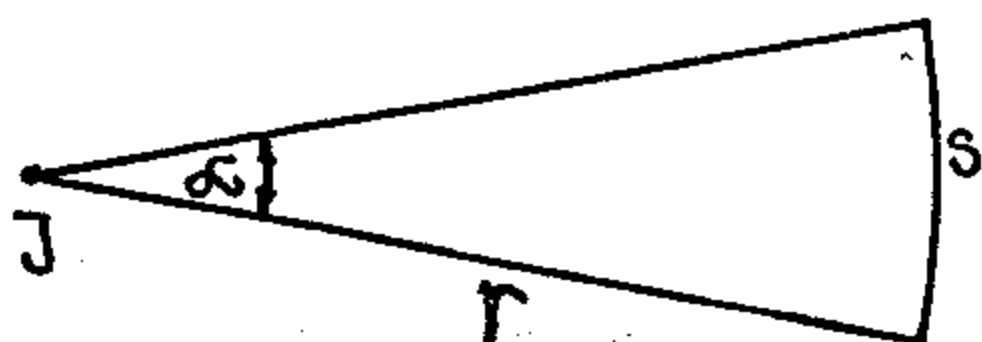
a  $A_1, B_1, C_1$  i  $D_1$  zadani su relacijom (1,32). Označimo kraće sa, [22]

$$\left. \begin{aligned} v &= pL \cos(\varphi - \alpha) - \frac{a}{p} \\ \Delta v &= pL \cos(\varphi - \alpha) \\ u &= pL \cos \varphi + \frac{a}{p} \\ \Delta u &= pL \cos \varphi \end{aligned} \right\} \quad (5.4)$$

I zamenimo u (5,2) vrednosti (5,4), (5,1) i (1,32). Izlazi,

=====

\*Vladanje konstante pri prelazu od cilindričnih talasa na ravne talase treba da se objasni na sledeći način. Kod cilindričnih talasa fluks energije koju zrači izvor na udaljenosti  $r$  se raširi na deo površine  $S$  (sl. a). Ako je gustina te energije  $E_0$ , može se pisati,



sl. a

$$\Phi = E_0 S = E_0 r \alpha$$

Uzmimo da se pomoću cilindričnog sočiva sve talase tog snopa svetlosti učinimo paralelnim. Sočivo neka je u fokusu izvora tako da cijeli snop paralelizira (sl.b)

$$\begin{aligned} \frac{J_p^2}{R} = & \left\{ [C(v+\Delta v) - C(v)]^2 + [S(v+\Delta v) - S(v)]^2 + [C(u+\Delta u) - C(u)]^2 \right. \\ & + [S(u+\Delta u) - S(u)]^2 + 2[C(v+\Delta v) - C(v)][C(u+\Delta u) - C(u)] \cos \psi + \\ & + 2[S(v+\Delta v) - S(v)][S(u+\Delta u) - S(u)] \cos \psi + 2[S(v+\Delta v) - S(v)][ \\ & \left. [C(u+\Delta u) - C(u)] \sin \psi - 2[C(v+\Delta v) - C(v)][S(u+\Delta u) - S(u)] \sin \psi \right\} \quad (5.5) \end{aligned}$$

U sistemu (5,4) su:  $p^2 = \frac{2}{\lambda b}$ ,  $q = \frac{2}{\lambda b} x$  a njihov odnos

$$\frac{q}{p} = \sqrt{\frac{2}{\lambda b}} x \quad (5.6)$$

Kod Fraunhoferovog prelaza  $b$  je vrlo velik i bez obzira na red veličine talasne dužine upadne svjetlosti  $p \rightarrow 0$  kada  $b \rightarrow \infty$  i u tom slučaju možemo koristiti asimptotsku vrednost Fresnelovih integrala za velike vrednosti argumenta. Za velike vrednosti argumenta Fresnelove integrale možemo aproksimirati sa [30], [25].

$$\begin{aligned} C(v) & \sim \frac{1}{2} + \frac{\sin \frac{\pi}{2} v^2}{\pi v} \\ S(v) & \sim \frac{1}{2} - \frac{\cos \frac{\pi}{2} v^2}{\pi v} \end{aligned} \quad (5.7)$$

Koristeći (5,7) možemo  $A_1$  iz sistema integrala (1,32) napisati ovako:

$$\begin{aligned} C(v+\Delta v) - C(v) & \sim \frac{1}{\pi v} [\sin \frac{\pi}{2} (v+\Delta v)^2 - \sin \frac{\pi}{2} v^2] = \\ & = \frac{2}{\pi v} \sin \frac{\pi}{4} [(v+\Delta v)^2 - v^2] \cos \frac{\pi}{4} [(v+\Delta v)^2 + v^2] = \\ & = \frac{2}{\pi v} \sin \frac{\pi}{4} (v^2 + 2v\Delta v + \Delta v^2 - v^2) \cos \frac{\pi}{4} (v^2 + 2v\Delta v + \Delta v^2 + v^2) \sim \frac{2}{\pi v} \sin \frac{\pi}{2} v \Delta v \cdot \end{aligned}$$

Na analogan način izlazi vrednost za,

$$\cos \frac{\pi}{2} (v^2 + v\Delta v) \quad (5.8)$$



sl. b

Gustine energije tih talasa proporcionalne su kvadratima amplituda. Dakle,  $E_r = K_r A_r^2$ ,  $E_c = K_c A_c^2$ , stoga je  $A_r^2 = \frac{K_c}{K_r} \frac{A_c^2}{a}$ . Označimo kraće,  $B^2 = \frac{K_c}{K_r} \frac{A_c^2}{a}$

pa ćemo imati,  $A_r^2 = B^2 r$ , ili  $A_r = B \sqrt{r}$ . Stoga kod zamjene amplitude cilindričnih talasa sa amplitudom za ravne talase treba kod ravnih talasa umesto konstante A uzeti  $B \sqrt{r}$ .



$$S(v+\Delta v) - S(v) \sim \frac{2}{\lambda v} \sin \frac{\pi}{2} v \Delta v \cdot \sin \frac{\pi}{2} (v^2 + v \Delta v) \quad (5,9)$$

Zamenom (5,8) i (5,9) u (5,5), izlazi;

$$\begin{aligned} \frac{J_p^2}{R} = & \left\{ \left( \frac{2}{\lambda v} \sin \frac{\pi}{2} v \Delta v \cdot \cos \frac{\pi}{2} (v^2 + v \Delta v) \right)^2 + \left( \frac{2}{\lambda v} \sin \frac{\pi}{2} v \Delta v \cdot \sin \frac{\pi}{2} (v^2 + v \Delta v) \right)^2 + \right. \\ & + \left( \frac{2}{\lambda u} \sin \frac{\pi}{2} u \Delta u \cdot \cos \frac{\pi}{2} (u^2 + u \Delta u) \right)^2 + \left( \frac{2}{\lambda u} \sin \frac{\pi}{2} u \Delta u \cdot \sin \frac{\pi}{2} (u^2 + u \Delta u) \right)^2 + \\ & + 2 \left( \frac{2}{\lambda v} \sin \frac{\pi}{2} v \Delta v \cdot \cos \frac{\pi}{2} (v^2 + v \Delta v) \right) \left( \frac{2}{\lambda u} \sin \frac{\pi}{2} u \Delta u \cdot \cos \frac{\pi}{2} (u^2 + u \Delta u) \right) \cos \Psi + \\ & + 2 \left( \frac{2}{\lambda v} \sin \frac{\pi}{2} v \Delta v \cdot \sin \frac{\pi}{2} (v^2 + v \Delta v) \right) \left( \frac{2}{\lambda u} \sin \frac{\pi}{2} u \Delta u \cdot \sin \frac{\pi}{2} (u^2 + u \Delta u) \right) \cos \Psi + \\ & + 2 \left( \frac{2}{\lambda v} \sin \frac{\pi}{2} v \Delta v \cdot \sin \frac{\pi}{2} (v^2 + v \Delta v) \right) \left( \frac{2}{\lambda u} \sin \frac{\pi}{2} u \Delta u \cdot \cos \frac{\pi}{2} (u^2 + u \Delta u) \right) \sin \Psi - \\ & \left. - 2 \left( \frac{2}{\lambda v} \sin \frac{\pi}{2} v \Delta v \cdot \cos \frac{\pi}{2} (v^2 + v \Delta v) \right) \left( \frac{2}{\lambda u} \sin \frac{\pi}{2} u \Delta u \cdot \sin \frac{\pi}{2} (u^2 + u \Delta u) \right) \sin \Psi \right\} \quad (5,10) \end{aligned}$$

Sredjivanjem izraza (5,10) nalazimo,

$$\begin{aligned} \frac{J_p^2}{R} = & \left\{ \left( \frac{2}{\lambda v} \sin \frac{\pi}{2} v \Delta v \right)^2 + \left( \frac{2}{\lambda u} \sin \frac{\pi}{2} u \Delta u \right)^2 + 2 \left( \frac{2}{\lambda v} \sin \frac{\pi}{2} v \Delta v \right) \left( \frac{2}{\lambda u} \sin \frac{\pi}{2} u \Delta u \right) \cdot \right. \\ & \left. \cos \left\{ \frac{\pi}{2} [(v^2 + v \Delta v) - (u^2 + u \Delta u)] - \Psi \right\} \right\} \quad (5,11) \end{aligned}$$

Iz (5,3) i (5,4) izračunamo izraz,

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{2} [(v^2 + v \Delta v) - (u^2 + u \Delta u)] - \Psi = & \frac{\pi}{2} \left[ p^2 l^2 (\cos^2 \varphi - \cos^2 (\varphi - \alpha)) + 2 g l (\cos \varphi + \cos (\varphi - \alpha)) \right. \\ & \left. + p^2 l L (\cos^2 \varphi - \cos^2 (\varphi - \alpha)) + g L (\cos \varphi + \cos (\varphi - \alpha)) \right] + 2 \beta \quad (5,12) \end{aligned}$$

gde je  $\beta$  relacija (3,1).

Formula (5,11) koja u sebi sadrži relaciju (5,12) predstavlja formulu Fraunhoferovog prelaza kod razmaknutih ogledala. Možemo ju specijalizirati za neke specijalne slučajeve.

a. Neka je  $\alpha = 0$ . Tada iz (5,12) izlazi,

$$\frac{\pi}{2} [(v^2 + v \Delta v) - (u^2 + u \Delta u)] - \Psi = \pi g (L + 2l) \cos \varphi \quad (5,13)$$

Iz (5,4) se vidi da je  $\Delta u = \Delta v$  pa nakon uvrštavanja u (5,11) izlazi

$$\begin{aligned} \frac{J_p^2}{R} = & (\Delta v)^2 \left\{ \left( \frac{\sin \frac{\pi}{2} v \Delta v}{\frac{\pi}{2} v \Delta v} \right)^2 + \left( \frac{\sin \frac{\pi}{2} u \Delta v}{\frac{\pi}{2} u \Delta v} \right)^2 + 2 \left( \frac{\sin \frac{\pi}{2} v \Delta v}{\frac{\pi}{2} v \Delta v} \right) \left( \frac{\sin \frac{\pi}{2} u \Delta v}{\frac{\pi}{2} u \Delta v} \right) \cdot \right. \\ & \left. \cos \pi g (L + 2l) \cos \varphi \right\} \quad (5,14) \end{aligned}$$

Na kraju izračunamo izraze oblika,

$$v \Delta v = \sqrt{\frac{2}{\lambda l}} L \cos \varphi \left( \sqrt{\frac{2}{\lambda l}} l \cos \varphi - \sqrt{\frac{2}{\lambda l}} x \right) \sim -\frac{2}{\lambda l} L x \cos \varphi \quad (5,15)_1$$

jer proizvod  $\frac{2L \cdot l \cos^3 \varphi}{\lambda b} \rightarrow 0$ , zbog veliko  $b$  i malog  $L \cdot l$  proizvoda.

$$u \Delta u = \sqrt{\frac{2}{\lambda b}} L \cos \varphi \left( \sqrt{\frac{2}{\lambda b}} l \cos \varphi + \sqrt{\frac{2}{\lambda b}} x \right) \sim \frac{2}{\lambda b} L x \cos \varphi \quad \left. \vphantom{\frac{2}{\lambda b}} \right\} (5,15)_2$$

Zamenom (5,15)<sub>1</sub> u (5,14) izlazi,

$$J = K (2L \cos \varphi)^2 \left\{ \left( \frac{\sin \frac{\pi L x}{\lambda b} \cos \varphi}{\frac{\pi L x}{\lambda b} \cos \varphi} \right)^2 \cos^2 \frac{\pi x}{\lambda b} (2l + L) \cos \varphi \right\} \quad (5,16)$$

Formula (5,16) je poznata formula Fraunhoferove difrakcije na dve koso položene pukotine. Uostalom, to bi trebalo očekivati jer je ona dobivena specijalizacijom formule razmaknutih ogledala.

b. Neka je  $l=0$ . Tada (5,16) nam daje,

$$J = K (2L \cos \varphi)^2 \left( \frac{\sin \frac{\pi x}{\lambda b} (2L \cos \varphi)}{\frac{\pi x}{\lambda b} (2L \cos \varphi)} \right)^2 \quad (5,17)$$

To je formula Fraunhoferove difrakcije na kosoj pukotini širine  $2L$ , kako bi trebalo očekivati, jer (5,17) predstavlja Fraunhoferov prelaz kod spojenih ogledala.

c.  $\varphi = 0$ . Iz (5,16) sledi;

$$J = K (2L)^2 \left\{ \left( \frac{\sin \frac{\pi L x}{\lambda b}}{\frac{\pi L x}{\lambda b}} \right)^2 \cos^2 \frac{\pi x}{\lambda b} (L + 2l) \right\} \quad (5,18)$$

A iz (5,17)

$$J = K (2L)^2 \left( \frac{\sin \frac{\pi x}{\lambda b} \cdot 2L}{\frac{\pi x}{\lambda b} \cdot 2L} \right)^2 \quad (5,19)$$

Formule (5,18) i (5,19) su poznate formule Fraunhoferove difrakcije na dve odnosno jednoj pukotini<sup>\*)</sup>

Na kraju ovog poglavlja spominjem da smo teoriju biogledala proveli za slučaj kada je izvor svjetlosti vrlo uska pukotina. No, da bismo dobili intenzivne difrakcione slike treba povećati širinu izvora  
 \*)Ovde treba napomenuti da su formule (5,18) i (5,19) zapravo rezultati Fresnelove difrakcije za slučaj paralelne upadne svjetlosti, jer se računalo sa cilindričnim talasima u skrenutoj svjetlosti. Da se dobije potpuno Fraunhoferov slučaj treba i u skrenutoj svjetlosti uzeti ravne talase. Taj prelaz ide ovako:  $x/b = b \sin \alpha$ , gde je  $\alpha$  ugao skretanja one zrake koje iz koord. početka ide do tačke  $(x, -b)$ . Za male uglove  $\sin \alpha \approx \alpha$ , pa se u formulama za  $b \rightarrow \infty$  može  $x/b$  zameniti sa  $\sin \alpha$ .

ali u tom slučaju menja se i vidljivost interferencionih linija [31]. Sa povećanjem širine izvora, intenzitet interferencionih linija opada, tj. vidljivost teži k nuli, prolazeći kroz niz maksimuma i minimuma. Označimo li širinu izvora sa  $e$ , a širinu interferencionih linija sa  $H$ , onda po Michelsonovoj formuli za vidljivost interferencionih linija izlazi formula,

$$V = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}} = \frac{H}{e\pi} \left| \sin \frac{\pi e}{H} \right| \quad (5,20)$$

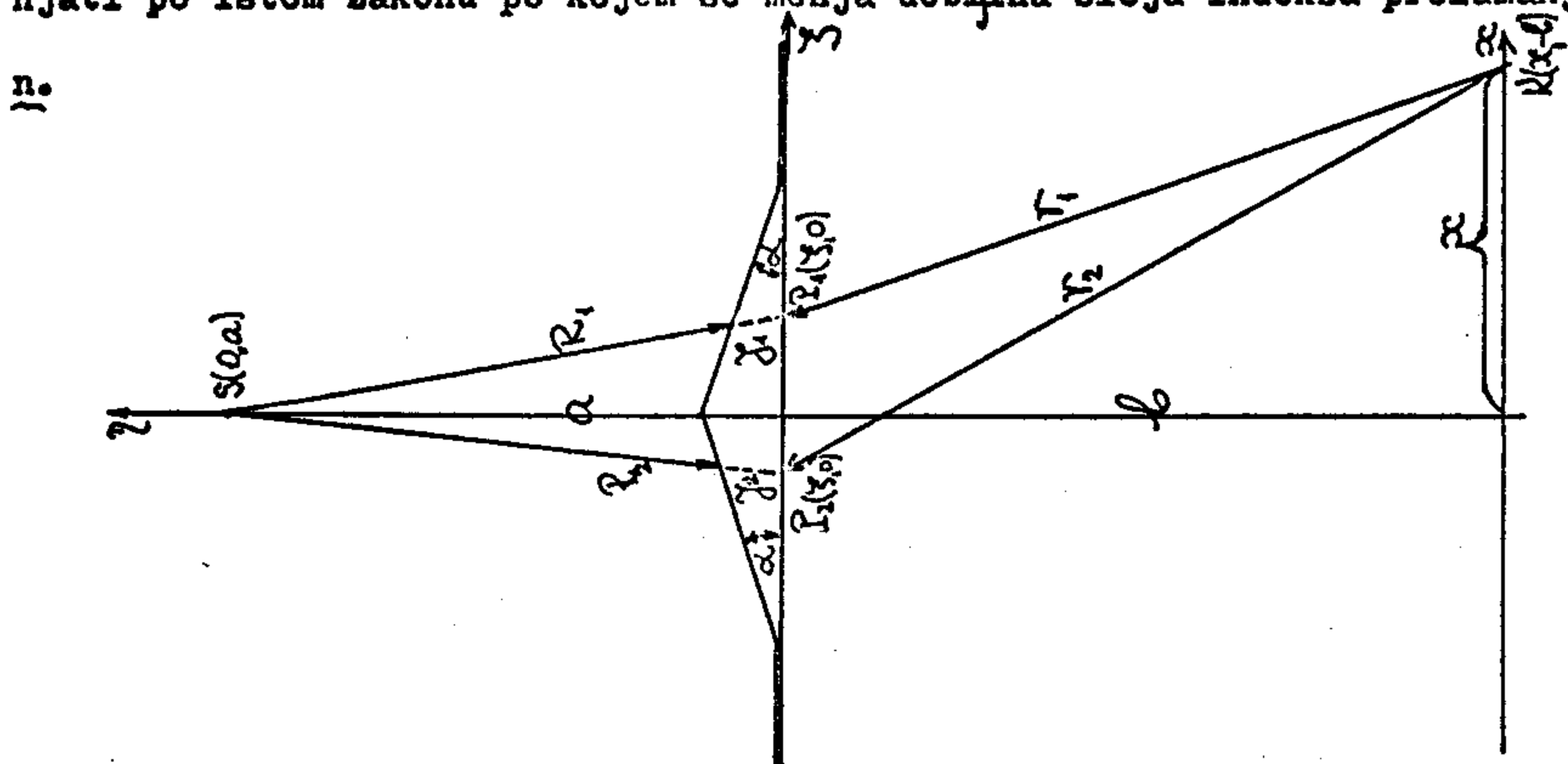
Interferencione linije nestaju na mestima gde je  $e/H = 1, 2, 3, \dots$

## G L A V A II

## 6. DIFRAKCIONA TEORIJA BIPRIZME (FAZNA METODA)

Spojimo dve male prizme sa malim prelomnim uglom kao na sl. 16 i na mesto dodira položimo koordinatni sistem  $\eta, \zeta$ . Udaljenost izvora svjetlosti od mesta dodira, odnosno od centara dobivene biprizme označimo sa  $a$ , dok udaljenost ravnine gde posmatramo interferencionu sliku označimo sa  $b$ . Širinu jedne prizme označimo sa  $l$ , tako da će difrakcioni otvor imati širinu  $2l$ . Pretpostavimo da su prizme vrlo dugačke tako da zavisnost od koordinate  $\zeta$  neće dolaziti do izražaja, a problem možemo rešiti kao jednodimenzionalan. Ova pretpostavka neće uopšte promeniti difrakcionu sliku i neće uticati na općenitost dobivenih rezultata, kao što se dokazalo i kod teorije biogledala. Pretpostavimo da je unutar otvora širine  $2l$  postavljena biprizma, tako da je van tog otvora amplituda upadnih talasa jednaka nuli.

Sada bismo mogli zadatak formulisati na sledeći način. Odrediti difrakcionu sliku Fresnelovog tipa simetrično postavljenog linearnog profila. Naime, na difrakcionom otvoru faza upadnih talasa će se menjati po istom zakonu po kojem se menja debljina sloja indeksa prelamanja



sl. 16

Talaska funkcija jednaka je zbiru doprinosa difragiranih talasa od svake prizme, pa možemo koristiti formulu (1,1), odnosno (1,9) i (1,10) sa faznim dodatkom,

$$g = -\frac{i}{\pi \sqrt{ab}} \left[ \int_0^l f(\xi) e^{i[k(R_1+r_1)+\delta_1]} d\xi + \int_{-l}^0 f(\xi) e^{i[k(R_2+r_2)+\delta_2]} d\xi \right] \quad (6.1)$$

Iz sl. 16 se vidi da su:

$$\left. \begin{aligned} (R_1+y_1)^2 &= a^2 + \xi^2 \\ (R_2+y_2)^2 &= a^2 + \xi^2 \\ r_1^2 &= b^2 + (\xi-x)^2 \\ r_2^2 &= b^2 + (\xi-x)^2 \end{aligned} \right\} \quad (6.2)$$

$a \gg \xi \text{ i } x$   
 $b \gg \xi \text{ i } x$

Odatde možemo izračunati eksponentiale u (6,1) uzimajući u obzir da su,\*

$$\begin{aligned} \delta_1 &= n y_1 \\ \delta_2 &= n y_2 \end{aligned} \quad (6.2a)$$

$$k(R_1+r_1)+k\delta_1 = k\left(a+b+\frac{x^2}{2b}\right) + k\left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\xi^2 - \frac{x}{b}\xi + (n-1)y_1\right] \quad (6.3)$$

$$k(R_2+r_2)+k\delta_2 = k\left(a+b+\frac{x^2}{2b}\right) + k\left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\xi^2 - \frac{x}{b}\xi + (n-1)y_2\right]$$

Kako su:

$$\begin{aligned} y_1 &= -\operatorname{tg} \alpha \xi + l \operatorname{tg} \alpha \\ y_2 &= \operatorname{tg} \alpha \xi + l \operatorname{tg} \alpha \end{aligned} \quad (6.4)$$

onda (6,3) glasi,

$$\begin{aligned} k(R_1+r_1)+k\delta_1 &= k\left(a+b+\frac{x^2}{2b} + (n-1)l \operatorname{tg} \alpha\right) + k\left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\xi^2 - \left(\frac{x}{b} + (n-1)\operatorname{tg} \alpha\right)\xi\right] \\ k(R_2+r_2)+k\delta_2 &= k\left(a+b+\frac{x^2}{2b} + (n-1)l \operatorname{tg} \alpha\right) + k\left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\xi^2 - \left(\frac{x}{b} - (n-1)\operatorname{tg} \alpha\right)\xi\right] \end{aligned} \quad (6.5)$$

Pretpostavimo da su upadni talasi homogeni tako da je  $f(\xi)=1$ . Naime,

uloga funkcije  $f(\xi)$  dolazi do izražaja kada se transparentija duž

\*Ovde treba napomenuti da su prizme vrlo tanke i zato nećemo pogrešiti kad  $y_1$  i  $y_2$  računamo kao ordinate proreza koji ograničavaju prizme za apscisu  $\xi$ ,<sup>2</sup> i ako su prema sl. 16  $y_1$  i  $y_2$  kosi.

otvora menja po nekom zakonu. Neki difrakcioni efekti su izračunati sa različitim transparentijama za slučaj Fraunhoferove difrakcije sa paraboličnom i eksponencialnom transparentijom od autora [32] i [33]. Kako su oni pokazali u tim slučajevima difrakcione slike imaju sasvim drugi karakter.

Zamenimo (6,5) u (6,1), pa ćemo dobiti,

$$g = -\frac{i e}{\pi \sqrt{ab}} \left\{ e^{i k \left( a+b+\frac{x^2}{2l} + (n-1)l \tan \alpha \right)} \int_0^l e^{i \frac{\pi}{2} \left[ \frac{2}{\lambda} \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{l} \right) \xi^2 - \frac{4}{\lambda} \left( \frac{x}{l} + (n-1) \tan \alpha \right) \xi \right]} d\xi + \int_{-l}^0 e^{i \frac{\pi}{2} \left[ \frac{2}{\lambda} \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{l} \right) \xi^2 - \frac{4}{\lambda} \left( \frac{x}{l} - (n-1) \tan \alpha \right) \xi \right]} d\xi \right\} \quad (6,6)$$

Da bismo rešili integrale (6,6) označimo sa:

$$\begin{aligned} p &= \frac{2}{\lambda} \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{l} \right) \\ t &= \frac{2}{\lambda} \left( \frac{x}{l} + (n-1) \tan \alpha \right) \\ t_1 &= \frac{2}{\lambda} \left( \frac{x}{l} - (n-1) \tan \alpha \right) \end{aligned} \quad (6,7)$$

i metodom potpunih kvadrata dobijemo,

$$g = -\frac{i e}{\pi \sqrt{ab}} e^{i k \left( a+b+\frac{x^2}{2l} + (n-1)l \tan \alpha \right)} \left\{ e^{-i \frac{\pi}{2} \left( \frac{t}{p} \right)^2} \int_0^l e^{i \frac{\pi}{2} \left( p\xi - \frac{t}{p} \right)^2} d\xi + e^{-i \frac{\pi}{2} \left( \frac{t_1}{p} \right)^2} \int_{-l}^0 e^{i \frac{\pi}{2} \left( p\xi - \frac{t_1}{p} \right)^2} d\xi \right\} \quad (6,7a)$$

dalje označimo sa,

$$\begin{aligned} p\xi - \frac{t}{p} &= \xi_1 \\ p\xi - \frac{t_1}{p} &= \xi_2 \end{aligned}$$

a granice se pretvaraju,

$$\begin{aligned} \xi = 0 \quad \xi_1 &\rightarrow -\frac{t}{p} \quad ; \quad \xi_2 \rightarrow -\frac{t_1}{p} \\ \xi = l \quad \xi_1 &\rightarrow pl - \frac{t}{p} \quad ; \quad \xi_2 \rightarrow -(pl + \frac{t_1}{p}) \end{aligned} \quad (6,8)$$

pa (6,7a) glasi:

$$g = -\frac{i e}{\pi \sqrt{ab} p} \left\{ e^{-i \frac{\pi}{2} \left( \frac{t}{p} \right)^2} \int_{-\frac{t}{p}}^{pl - \frac{t}{p}} Fr + e^{-i \frac{\pi}{2} \left( \frac{t_1}{p} \right)^2} \int_{-(pl + \frac{t_1}{p})}^{-\frac{t_1}{p}} Fr \right\} =$$

$$= -\frac{ic^*}{\pi \sqrt{ab} p} \left\{ e^{-\frac{i\pi}{2} \left(\frac{t}{p}\right)^2} \left( \int_0^{pl - \frac{t}{p}} \frac{1}{Fr} - \int_0^{-\frac{t}{p}} \frac{1}{Fr} \right) + e^{-\frac{i\pi}{2} \left(\frac{t_1}{p}\right)^2} \left( \int_0^{-\frac{t_1}{p}} \frac{1}{Fr} - \int_0^{-(pl + \frac{t_1}{p})} \frac{1}{Fr} \right) \right\} \quad (6.9)$$

u relaciju (6,9) sa  $c^*$  smo označili kraće eksponencialnu kompleksnu konstantu ispred integrala,

$$c^* = \exp \left[ ik(a+bx^2/2b + (n-1)tg\alpha) \right]$$

Koristimo formule (1,30) pa ćemo dobiti za talasnu funkciju sledeću formulu,

$$g = -\frac{ic^*}{\pi \sqrt{ab} p} \left\{ e^{-\frac{i\pi}{2} \left(\frac{t}{p}\right)^2} \left[ C(pl - \frac{t}{p}) + C(\frac{t}{p}) + iS(pl - \frac{t}{p}) + iS(\frac{t}{p}) \right] + e^{-\frac{i\pi}{2} \left(\frac{t_1}{p}\right)^2} \left[ C(pl + \frac{t_1}{p}) - C(\frac{t_1}{p}) + iS(pl + \frac{t_1}{p}) - iS(\frac{t_1}{p}) \right] \right\} \quad (6.10)$$

u (6,10) označimo kraće sa,

$$A_{1b} = C(pl - \frac{t}{p}) + C(\frac{t}{p})$$

$$B_{1b} = S(pl - \frac{t}{p}) + S(\frac{t}{p})$$

$$C_{1b} = C(pl + \frac{t_1}{p}) - C(\frac{t_1}{p})$$

$$D_{1b} = S(pl + \frac{t_1}{p}) - S(\frac{t_1}{p})$$

(6.11)

(gde ćemo indeksom b označiti integrale koji se odnose za biprizmu, kako bismo vodili računa da se oni uopšte uzevši razlikuju od integrala dobivenih kod biogledala).

Sa oznakama (6,11) talasna funkcija glasi,

$$g = -\frac{ic^*}{\pi \sqrt{ab} p} \left\{ e^{-\frac{i\pi}{2} \left(\frac{t}{p}\right)^2} (A_{1b} + iB_{1b}) + e^{-\frac{i\pi}{2} \left(\frac{t_1}{p}\right)^2} (C_{1b} + iD_{1b}) \right\}$$

ili intenzitet,

$$J = \frac{k_0 \lambda}{2\pi^2 D} \left\{ (A_{1b} + C_{1b})^2 + (B_{1b} + D_{1b})^2 - 4 \left[ (A_{1b} C_{1b} + B_{1b} D_{1b}) \sin \frac{2\pi a(n-1)tg\alpha x}{\lambda D} + (A_{1b} D_{1b} - B_{1b} C_{1b}) \cos \frac{2\pi a(n-1)tg\alpha x}{\lambda D} \right] \sin \frac{2\pi a(n-1)tg\alpha x}{\lambda D} \right\} \quad (6.12)$$

gde je  $D=a+b$ .

Dobivena funkcija nam izražava raspored interferencionih linija kod bi-prizme. Lako je videti da ona ima isti karakter kao funkcija (2,4) koju smo dobili kod spojenih ogledala. Razlika postoji samo u argumentima Fresnelovih integrala i trigonometrijskih funkcija. I funkcija (6,12) je simetrična u odnosu na  $x=0$ . Kako je iz (6,7)

$$\begin{aligned} t(-x) &= -t_1(x) \\ \text{i } t_1(-x) &= -t(x) \end{aligned} \quad (6,13)$$

onda sistem integrala za negativne vrednosti  $x$  će biti,

$$\begin{aligned} A_{1b}(-x) &= C_{1b}(x) \\ B_{1b}(-x) &= D_{1b}(x) \\ C_{1b}(-x) &= A_{1b}(x) \\ D_{1b}(-x) &= B_{1b}(x) \end{aligned} \quad (6,14)$$

na osnovu čega zaključujemo da je (6,12) parna funkcija. Funkcija (6,12) se sastoji od dva dela kao i funkcija (2,4) kod spojenih ogledala. Prvi deo funkcije,

$$(A_{1b} + C_{1b})^2 + (B_{1b} + D_{1b})^2 \quad (6,15)$$

predstavlja modulacionu funkciju koja izražava maksimume interferencionih linija i ima difrakcioni karakter, što je suprotno Fresnelovoj tvrdnji o konstantnosti interferencionih linija. I na bliskim rastojanjima od optičke osi (6,15) pokazuje oscilatorni karakter što znači da i na tom području linije interferencije nisu konstantnog intenziteta. Drugi deo funkcije,

$$4 \left[ (A_{1b}C_{1b} + B_{1b}D_{1b}) \sin \frac{2\pi a(n-1) \operatorname{tg} \alpha x}{\lambda D} + (A_{1b}D_{1b} - B_{1b}C_{1b}) \cos \frac{2\pi a(n-1) \operatorname{tg} \alpha x}{\lambda D} \right] \cdot \sin \frac{2\pi a(n-1) \operatorname{tg} \alpha x}{\lambda D} \quad (6,16)$$

predstavlja interferencioni član koji je moduliran izrazom (6,15). Na mestima maksimuma izraza (6,16) izraz (6,12) imaće vrednost zadan (6,15).

Tako za,

$$\frac{2\pi a(n-1) \operatorname{tg} \alpha x}{\lambda D} = n\pi \quad n = 0; \pm 1; \pm 2; \pm 3 \dots$$



izlazi da je za,

$$x = n \frac{\lambda D}{2a(n-1)\text{tg}\alpha} \quad (6.17)$$

intenzitet interferencionih linija zadan funkcijom (6,15). Iz izraza (6,16) možemo izračunati udaljenost fiktivnih izvora odnosno zračnih koherentnih centara koje obezbeđuje biprizma. Iz Fresnelove elementarne formule

$$x = n \frac{\lambda D}{2s} \quad (6,18)$$

sledi da je,

$$s = a(n - 1)\text{tg}\alpha \quad (6,19)$$

Relacija (6,18) nam daje mogućnost da izračunamo koordinate fiktivnih izvora a time nam omogućava da postavljamo teoriju biprizme na jedan sasvim drugi način. Taj način može u sebi sadržati teoriju svih interferencionih šema kada imamo posla sa fiktivnim izvorima i kada su nam njihove koordinate poznate. Upoznaćemo detaljnije drugi način rešavanja.

## 7. DIFRAKCIONA TEORIJA DVAJU IZVORA (METOD DVAJU IZVORA)

Metod dvaju izvora je prikladan za rešavanje onih problema kada možemo izračunati koordinate fiktivnih izvora, što u interferencionim šemama nije uvek moguće. Koordinate fiktivnih izvora možemo lako odrediti jedino kod linearnih profila. Tu možemo svrstavati biogledala i biprizmu. Naime, kod biogledala položaj izvora se odredjuju konstruktivnim putem kako smo se i mi poslužili, a kod biprizme međusobna udaljenost tih izvora je zadana relacijom (6,19), odnosno

$$2s = 2a(n - 1)\text{tg}\alpha \quad (7,1)$$

Medjutim, kod drugih profila kod kojih se faza menja po nekom kvadratnom zakonu nije lako odrediti  $s$ . Ali metod dvaju izvora, bez obzira na to, predstavlja jednu generalizacionu metodu za sve interferencione šeme u kojima imamo posla sa fiktivnim izvorima. A dobiveni rezultati

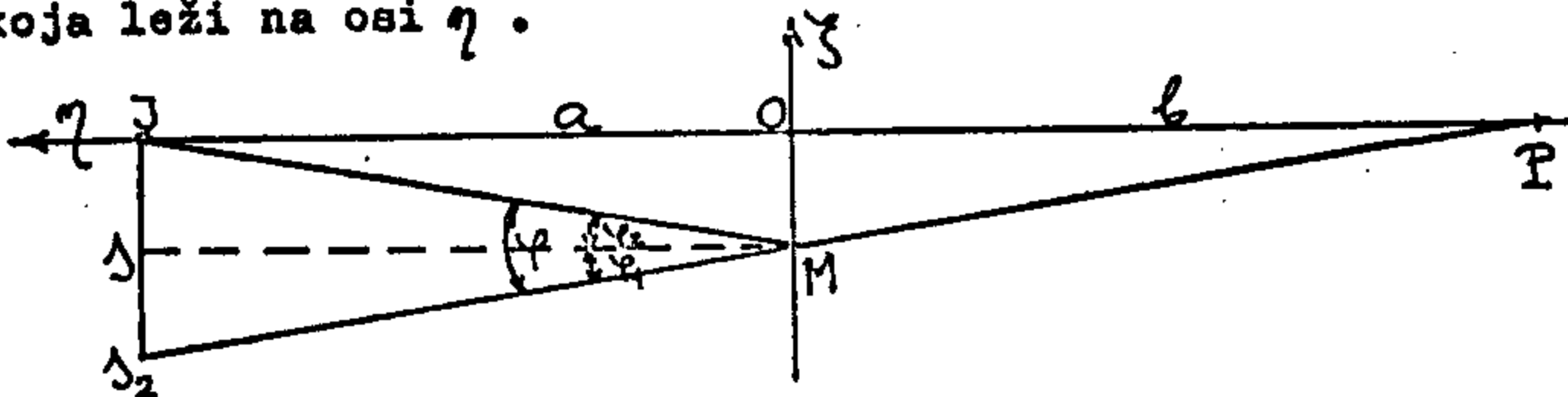
nam pokazuju da sve interferencione šeme imaju jedan te isti karakter.

Upoređivanjem rezultata difrakcione teorije dvaju izvora i rezultata difrakcione teorije kvadratnog profila možemo odrediti, koliki je  $s$  i kod kvadratnih profila. Na takav način primena ove metode je vrlo široka.\*

Zamislamo dva izvora  $I_1$  i  $I_2$  koji su međusobno udaljeni za razmak  $2s$  a od difrakcionog otvora za razmak  $a$ . Izvori su tako podešeni da svjetlost može prolaziti samo kroz odgovarajuće polovine difrakcionog otvora. Difrakcioni otvor neka je vrlo dugačak u odnosu na svoju širinu. Svjetlosne oscilacije izvora  $I_1$  i izvora  $I_2$  odvojene su jednom neprozirnom ravninom koja prolazi kroz centar difrakcionog otvora i normalno je u odnosu na ravninu crteža (sl. 17). Ova zamišljena ravnina ne dozvoljava da svjetlosne oscilacije od izvora  $I_1$  prolaze kroz drugu polovinu difrakcionog otvora kao što ne dozvoljava da svetlosne oscilacije od izvora  $I_2$  prolaze kroz prvu polovinu difrakcionog otvora.

=====

\*Treba napomenuti da međusobnu udaljenost fiktivnih izvora kod biprizme možemo izračunati na sledeći način. Svjetlost iz izvora I (sl. a) stiže u prizmu kod M, prelama se i dolazi na ekranu u tački P koja leži na osi  $\eta$ .



sl. a

U prizmi se zrak svjetlosti skrene za ugao devijacije  $\gamma$ , koji kod vrlo tankih prizama iznosi  $\gamma = (n-1)\alpha$  gde je  $\alpha$  prelomni ugao prizme. Paralela sa  $\eta$  kroz M dijeli  $\gamma$  na dva djela,  $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$ . Iz slike sledi da je,

$$s = a \operatorname{tg} \gamma_1 + a \operatorname{tg} \gamma_2 \text{ i za male uglove važi,}$$

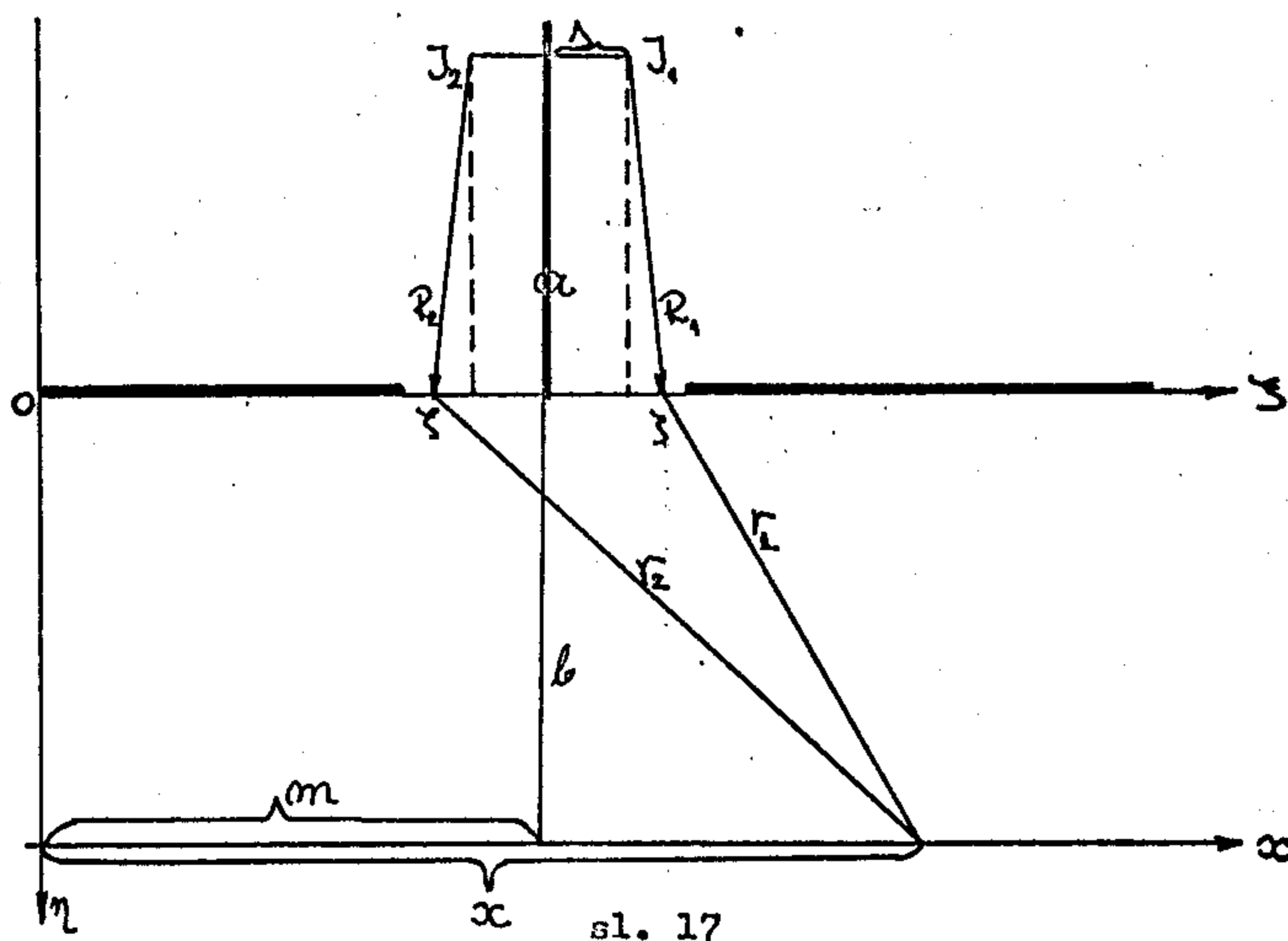
$$s = a(\gamma_1 + \gamma_2) = a\gamma$$

dakle,  $s = a(n-1)\alpha$  odnosno zbog malog  $\alpha$

$$s = a(n-1)\operatorname{tg} \alpha$$

Kod interferencionih šema ulogu ove zamišljene ravnine koja odvaja oscilacije zračnih centara igraju sopstveni specifični parametri same šeme, napr. kod biogledala ovu ulogu igra ugao između njih  $\alpha$ , kod biprizme linearni profili, kod Billetovog bismočiva kvadratni profil itd.

Postavimo koordinatni sistem van otvora, tako da os  $\xi$  prolazi kroz širinu tog otvora sl. 17, a os  $\eta$  je paralelan ravninom koja odvaja svjetlosne oscilacije fiktivnih izvora. Na ravninu  $b$  iza difrakcionog otvora potražićemo svjetlosni intenzitet. Označimo sa  $m$  udaljenost od koordinatnog sistema do sredine difrakcionog otvora.



Iz slike 17 sledi,

$$\begin{aligned} R_1^2 &= a^2 + (\xi - m - s)^2 \\ r_1^2 &= b^2 + (x - \xi)^2 \\ R_2^2 &= a^2 + (m - s - \xi)^2 \\ r_2^2 &= b^2 + (x - \xi)^2 \end{aligned} \quad (7.2)$$

uz transformaciju,

$$\begin{aligned} \xi &= m + \xi' \\ x &= m + x' \end{aligned} \quad (7.3)$$

izlazi,

$$\begin{aligned} R_1^2 &= a^2 + (\xi' - \Delta)^2 \\ R_2^2 &= a^2 + (\xi' + \Delta)^2 \\ r_1^2 &= b^2 + (x' - \xi')^2 \\ r_2^2 &= b^2 + (x' + \xi')^2 \end{aligned} \quad (7.4)$$

Time smo koordinatni sistem postavili u centru difrakcionog otvora.

Naime, ovakvim izborom koordinatnog sistema mogli smo odrediti apscise fiktivnih izvora. Kako vidimo izvori imaju koordinate  $I_1(s, a)$ ;  $I_2(-s, a)$ .

Time smo potvrdili ispravnost koordinata i kod biogledala.

Razvijanjem i sredjivanjem sistema (7,4) dobićemo talasnu funkciju oblika (6,6),

$$g = -\frac{i}{\pi \sqrt{ab}} e^{ik(a+b + \frac{\Delta^2}{2a} + \frac{x^2}{2b})} \left\{ \int_0^b e^{ik[\frac{1}{2}(\frac{1}{a} + \frac{1}{b})\xi^2 - (\frac{x}{b} + \frac{\Delta}{a})\xi]} d\xi + \int_{-b}^0 e^{ik[\frac{1}{2}(\frac{1}{a} + \frac{1}{b})\xi^2 - (\frac{x}{b} - \frac{\Delta}{a})\xi]} d\xi \right\} \quad (7.5)$$

kada označimo još sa:

$$\begin{aligned} p &= \frac{2}{\lambda} \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) \\ t &= \frac{2}{\lambda} \left( \frac{x}{b} + \frac{\Delta}{a} \right) \\ q &= \frac{2}{\lambda} \left( \frac{x}{b} - \frac{\Delta}{a} \right) \end{aligned} \quad (7.6)$$

i uvedemo dve nove varijable supstitucijom,

$$p\xi - \frac{t}{p} = v; \quad p\xi - \frac{q}{p} = w \quad (7.7)$$

dobićemo talasnu funkciju oblika,

$$g = -\frac{i}{\pi \sqrt{ab} p} e^{ik(a+b + \frac{\Delta^2}{2a} + \frac{x^2}{2b})} \left\{ e^{-\frac{i\pi}{2} \left( \frac{t}{p} \right)^2} \left[ C(pv - \frac{t}{p}) + C\left(\frac{t}{p}\right) + iS(pv - \frac{t}{p}) + iS\left(\frac{t}{p}\right) \right] + e^{-\frac{i\pi}{2} \left( \frac{q}{p} \right)^2} \left[ C\left(\frac{q}{p} + pv\right) - C\left(\frac{q}{p}\right) + iS\left(\frac{q}{p} + pv\right) - iS\left(\frac{q}{p}\right) \right] \right\} \quad (7.8)$$

ili intenzitet:

$$J = \frac{k_0}{\pi^2 ab p^2} \left\{ (A_{2z} + C_{2z})^2 + (B_{2z} + D_{2z})^2 - 4[(A_{2z} C_{2z} + B_{2z} D_{2z}) \sin \frac{2\pi \Delta}{\lambda D} x + (A_{2z} D_{2z} - B_{2z} C_{2z}) \cos \frac{2\pi \Delta}{\lambda D} x] \sin \frac{2\pi \Delta}{\lambda D} x \right\} \quad (7.9)$$

gde smo kraće u (7,9) označili:  $D = a + b$ ,

$$\begin{aligned}
 A_{2z} &= C(pl - \frac{t}{p}) + C(\frac{t}{p}) \\
 B_{2z} &= S(pl - \frac{t}{p}) + S(\frac{t}{p}) \\
 C_{2z} &= C(pl + \frac{a}{p}) - C(\frac{a}{p}) \\
 D_{2z} &= S(pl + \frac{a}{p}) - S(\frac{a}{p})
 \end{aligned}
 \tag{7,10}$$

Uporedjivanjem\* funkcije intenziteta (7,10) i (7,9) sa funkcijom (6,12) i (6,11) vidimo da su one potpuno jednake ukoliko uzimamo da je  $\underline{s} = a(n-1)\text{tg}\alpha$ , jer tada sistem (6,7) je potpuno jednak sistemu (7,6). S druge strane, funkcija intenziteta dvaju izvora je analogna funkciji intenziteta kod spojenih ogledala. Razlika postoji samo u različitim vrednostima međusobne udaljenosti fiktivnih izvora i kosinusa ugla  $\Psi$  koji dolazi u argumentu sistema integrala (2,5). Ova činjenica nam pokazuje da je bila opravdana tvrdnja o projekciji ogledala. Kako obično u eksperimentu širine ogledala iznose nekoliko santimetara, a ugao  $\Psi$  je reda  $70^\circ - 80^\circ$ , tada  $\underline{p}\underline{l}\cos\Psi$  imaće istu širinu kao i produkt  $\underline{p}\underline{l}$  koji dolazi kod biprizme. Na osnovu toga možemo naći vezu između difrakcionih slika koje se dobivaju kod biogledala i difrakcionih slika koje se dobivaju kod biprizme. Označimo sa  $\Psi$  ugao između ogledala a sa  $\alpha$  ugao biprizme. Tada iz (2,4) i (6,12) sledi sledeća veza,

$$\sin\Psi = (n-1)\text{tg}\alpha$$

odnosno

$$\Psi = \text{arc sin}[(n-1)\text{tg}\alpha] \tag{7,11}$$

Iz (7,11) za vezu između biogledala i biprizme odredimo vrednost ugla  $\Psi$  kod biogledala koji odgovara uglu biprizme  $\alpha$ , uz određeni indeks prelamanja  $n$ . Neka su:  $n = 1,5262$ ,  $\alpha = 16^\circ$ ; tada iz (7,11) sledi,

$$\sin\Psi = (1,5262 - 1)\text{tg}16^\circ = 0,0024468 \quad \text{odnosno}$$

$$\Psi = 8^\circ 24''$$

To znači da uz određene parametre  $\underline{a}$ ,  $\underline{b}$  i  $\underline{\lambda}$  difrakciona slika koja se dobiva biogledalima za ugao između njih  $\Psi = 8^\circ 24''$ , je identična

\*Indeksom 2z označavamo integrale teorije dvaju izvora.

difrakcionom slikom koja se dobiva biprizmom uz iste parametre ako je indeks prelamanja  $n=1,5262$  i nagibni ugao  $\alpha = 16'$ . Napominjem da kod izvodjenja difrakcione teorije biprizme nismo uzeli u obzir hromatsku aberaciju. I ako fluksevi nisu strogo stigmatični zbog malog nagibnog ugla biprizme, možemo slobodno zanemariti ovu aberaciju ne praveći time neku značajnu grešku.

Iz formule (7,9), teorije dvaju izvora se vidi da se ona sastoji od dva člana. Prvi, difrakcioni član, koji modulira interferencione linije je oblika,

$$(A_{2z} + C_{2z})^2 + (B_{2z} + D_{2z})^2 \quad (7,12)$$

a drugi koji izražava raspored interferencionih linija je oblika,

$$4 \left[ (A_{2z} C_{2z} + B_{2z} D_{2z}) \sin \frac{2\pi \Delta}{\lambda D} x + (A_{2z} D_{2z} - B_{2z} C_{2z}) \cos \frac{2\pi \Delta}{\lambda D} x \right] \sin \frac{2\pi \Delta}{\lambda D} x \quad (7,13)$$

$$\text{za:} \quad x = n \frac{\lambda D}{2\Delta} \quad n = 0, \pm 1, \pm 2 \dots \quad (7,14)$$

Na osnovu teorije dvaju izvora možemo zaključiti da je u svim interferencionim šemama nemoguće odvojiti interferenciju od difrakcije. Napominjem da je izraz (7,14) Fresnel dobio uz pretpostavku o konstantnosti intenziteta interferencionih linija. Difrakciona teorija pak pokazuje da to nije istina.

## 8. ANALIZA NUMERIČKIH REZULTATA KOD BIPRIZME

Kako sam i ranije spomenuo, funkcija intenziteta kod biprizme (6,12) sastoji se od dva člana. Prvi član (6,15) ima difrakcioni karakter i predstavlja modulacionu funkciju izraza (6,16), a drugi član (6,16) predstavlja interferencionu funkciju, odnosno opisuje

raspored interferencionih linija. Na osnovu ove hipoteze smo izveli formulu (6,17) odnosno (7,14). Međutim, detaljna analiza dobivenih rezultata nemoguća je bez numeričke analize. Zbog toga je funkcija intenziteta (6,12) programirana za neke parametre koje sam smatrao karakterističnim. U numeričkom rešavanju izraza (6,12) posebno je ispitivana funkcija modulacije (6,15) i posebno čitava funkcija (6,12). Kako je za vrednosti (6,17) funkcija (6,12) jednaka funkciji (6,15), to potvrđuje i numerička analiza. Međutim, nisam u svim slikama nacrtao zajedno i modulacionu i čitavu funkciju intenziteta, jer sam smatrao da to nije potrebno. Ono što se lepo vidi, jeste da modulaciona funkcija verno prati tok interferencionih linija. Za sve slike uzet je isti indeks prelamanja biprizme,  $n=1,5262$  koji odgovara kron-flint staklu za žutu natrijumovu svetlost talasne dužine  $\lambda = 5893 \text{ \AA}$ . Zbog toga taj parametar nije označen na odgovarajućim slikama. Ostali parametri su označeni na svakoj slici. Glavna karakteristika svih difrakcionih slika kod biprizme, je neodvojenost difrakcije od interferencije. Difrakcioni karakter vidi se po tome što u niukom slučaju ne možemo govoriti o konstantnosti interferencionih linija, kako se to spominje u literaturi. U svim slikama se pojavljuje jedna opšta karakteristika, što centralna linija nikada nije najosvjetlenija, nego najosvjetlenije interferencione linije su udaljene od optičke osi. Tu se izražavaju najviše difrakcioni efekti. Tako na sl. 18 osma interferenciona linija ima maksimalno osvjetljenje. Posle nje linije opadaju po intenzitetu i osciliraju oko vrednosti 0,2. Linije su jednakih širina. Nejednakost širina interferencionih linija može da dolazi kao posledica koraka numeričke analize. Na svakoj slici je označen korak numeričke analize. Tako napr. na sl. 18 označio sam da je  $1 \text{ mm} = 0.000050$ , što znači da je jedan milimetar u crtežu odnosno jedan podeok iznosio

0,000050 m koji predstavlja korak numeričke analize. Na sl. 19 istovremeno je nacrtana i modulaciona funkcija i funkcija intenziteta. Vidimo, da modulaciona funkcija nije tako glatka što je čest slučaj kod Fresnelove difrakcije. Linije imaju manju širinu nego one na sl. 18, kako to izlazi iz relacije (6,17). Ovo je opravdano, jer u ovom slučaju izvor se nalazi na većoj udaljenosti nego u prethodnom. Na sl. 20 takodje je nacrtana i funkcija intenziteta i modulaciona funkcija. Linije su vrlo široke zbog približavanja izvora prema biprizmi, ali imaju iste širine. Lepo se vidi difrakcioni karakter tih linija. Upoređivanjem modulacionih funkcija sl. 20 i 19 vidimo da na sl. 19 imamo četiri difrakciona maksimuma a na sl. 20 samo dva. To je očito zbog različitih udaljenosti izvora od biprizme. Sledeće četiri slike se odnose na ispitivanje uticaja talasne dužine upadne svjetlosti na širinu interferencionih linija kako predviđa formula (6,17). Zbog toga održani su parametri sl. 19 za udaljenost izvora do biprizme i udaljenost ravnine posmatranja intenziteta od biprizme, samo je smanjena talasna dužina upadne svjetlosti. Tako na sl. 21 talasna dužina iznosi  $\lambda = 4000 \text{ \AA}$ . U sledećim slikama 22, 23, 24 održani su parametri sl. 19 samo što je povećana talasna dužina upadne svjetlosti i to, na 5000  $\text{\AA}$ , 6500  $\text{\AA}$  i 7500  $\text{\AA}$ . Linije su u ovim slikama različitih širina kako predviđa relacija (6,17). Na sl. 25 povećan je samo ugao nagiba biprizme. Na toj slici on iznosi  $0,5^\circ$  i dobiven je jedan veliki broj interferencionih linija. Primećuje se jedan izrazitiji difrakcioni maksimum. Linije su vrlo uske. Nešto slično se dobiva i kada se ugao nagiba biprizme još više povećava. To se vidi na sl. 26. Zbog koraka koji iznosi 0,000030 možemo zaključiti da su linije vrlo uske u odnosu na prethodne slike. Intenzitet linija opada sa povećanjem ugla  $\alpha$ . To se vidi na sl. 27, gde je  $\alpha = 1^\circ$ . U ovim slikama biprizma je imala širinu  $2l = 1,27 \text{ cm}$ .



Numerička analiza pokazuje da se iste slike dobivaju i povećanjem širine biprizme 2 1. To bi trebalo očekivati, jer povećanjem širine biprizme zračni centri ostaju nepromenjeni a time i argument u trigonometrijskoj funkciji interferencionog člana izraza (6,16).

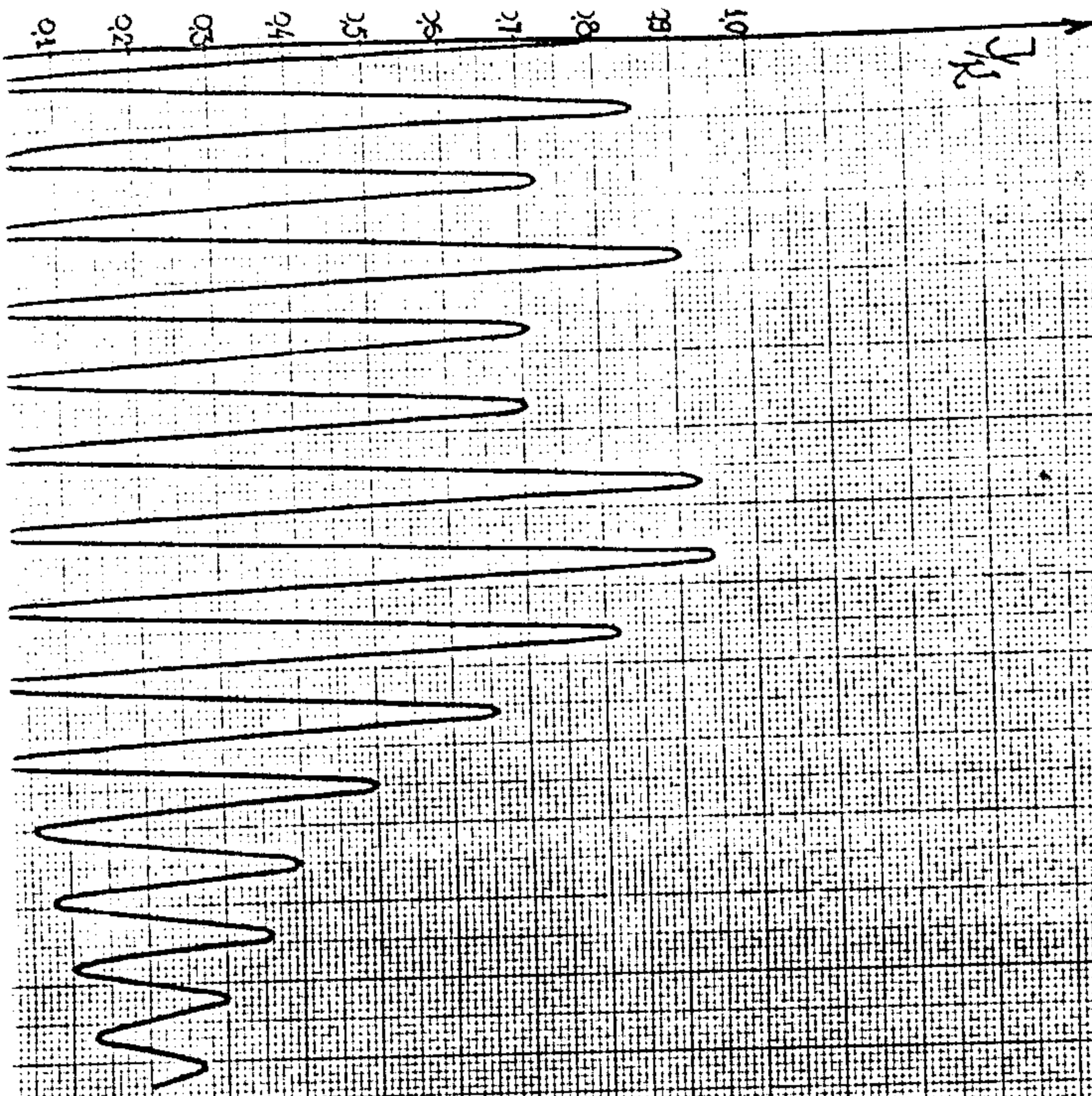
Napominjem da nam ove krive izražavaju samo relativne intenzitete jer u difrakcionoj teoriji nije bitna konstanta koja se nalazi ispred funkcije intenziteta, nego raspored funkcije intenziteta. Zbog toga u svim ovim slikama na ordinatnoj osi je nacrtan odnos I/K.

Na sledećoj tablici III su uneti rezultati uporedjivanja širina interferencionih linija kako predviđa formula (6,17) i kako izlaze iz difrakcione teorije odnosno iz kompjuterskih rezultata. Rezultati uporedjivanja se odnose za centralnu interferencionu liniju.

T A B L I C A III

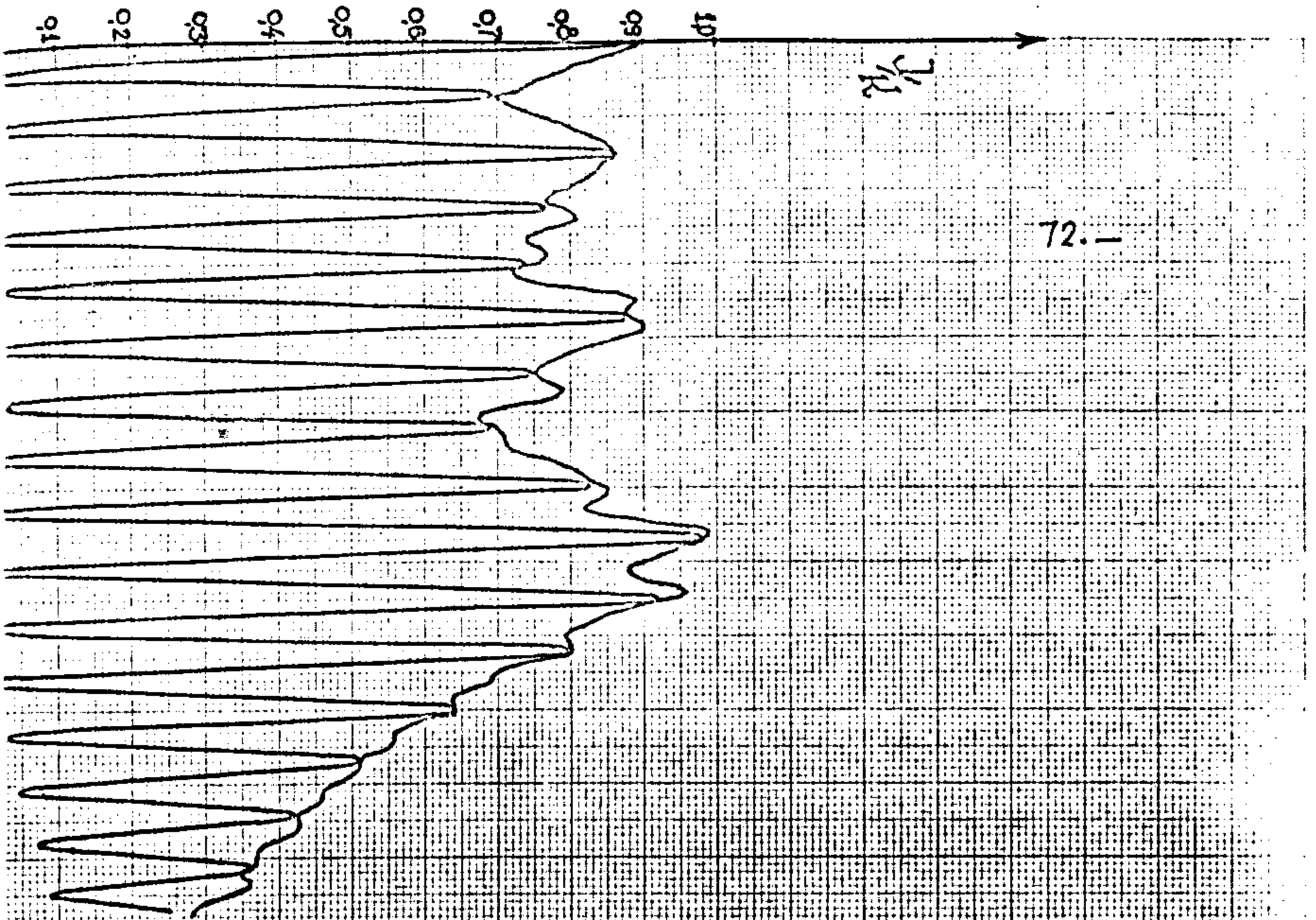
Red. broj	a(m)	b(m)	$\lambda$ (m)	$\alpha$ (rad)	x(m) po formuli (6,17)	x(m) po difrakcionoj teoriji (kompjuter)
1.	0,7	2,1	5893E-10	$\pi/675$	0,00048	0,00045
2.	1	2,1	5893E-10	$\pi/675$	0,00037	0,00035
3.	0,4	2,5	5893E-10	$\pi/675$	0,00087	0,00085
4.	1	2,1	5893E-10	$\pi/360$	0,00020	0,00020
5.	1	2,1	4000E-10	$\pi/675$	0,00025	0,00025
6.	1	2,1	5000E-10	$\pi/675$	0,00031	0,00030
7.	1	2,1	6500E-10	$\pi/675$	0,00041	0,00040
8.	1	2,1	7500E-10	$\pi/675$	0,00047	0,00049
9.	1	2,1	5893E-10	$\pi/240$	0,00013	0,00012
10.	1	2,1	5893E-10	$\pi/180$	0,000099	0,000090

Iz tablice se vidi da postoji jedno lepo slaganje formule (6,17) i difrakcione teorije.



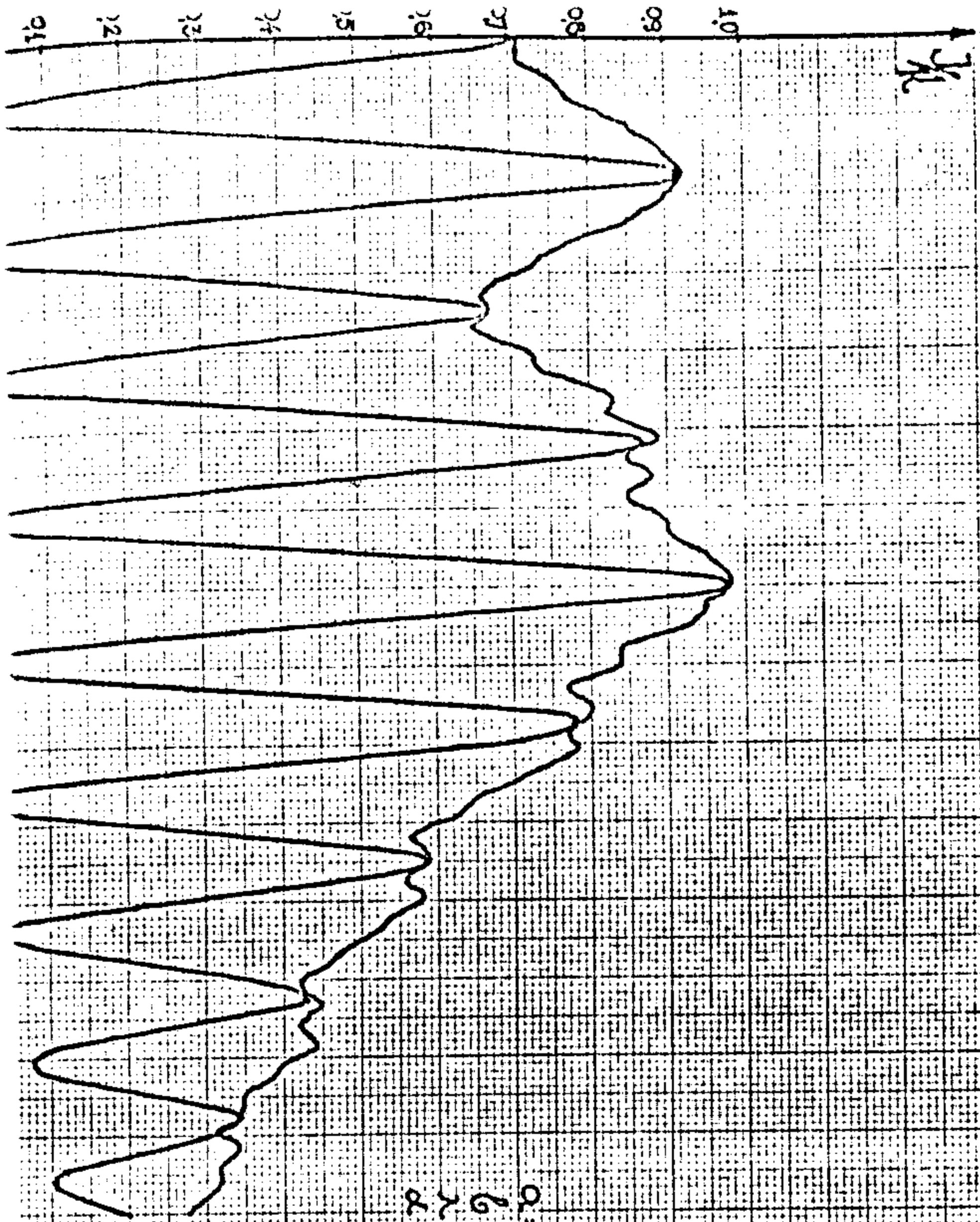
71.-

$a = 0.7 \text{ m}$   
 $b = 2.1 \text{ m}$   
 $\lambda = 589.5 \text{ nm} = 40 \text{ m}$   
 $\alpha = \pi/675$



72.-

$a = 1m$   
 $b = 2.1m$   
 $\lambda = 5893E - 10 m$   
 $\alpha = \pi/675$

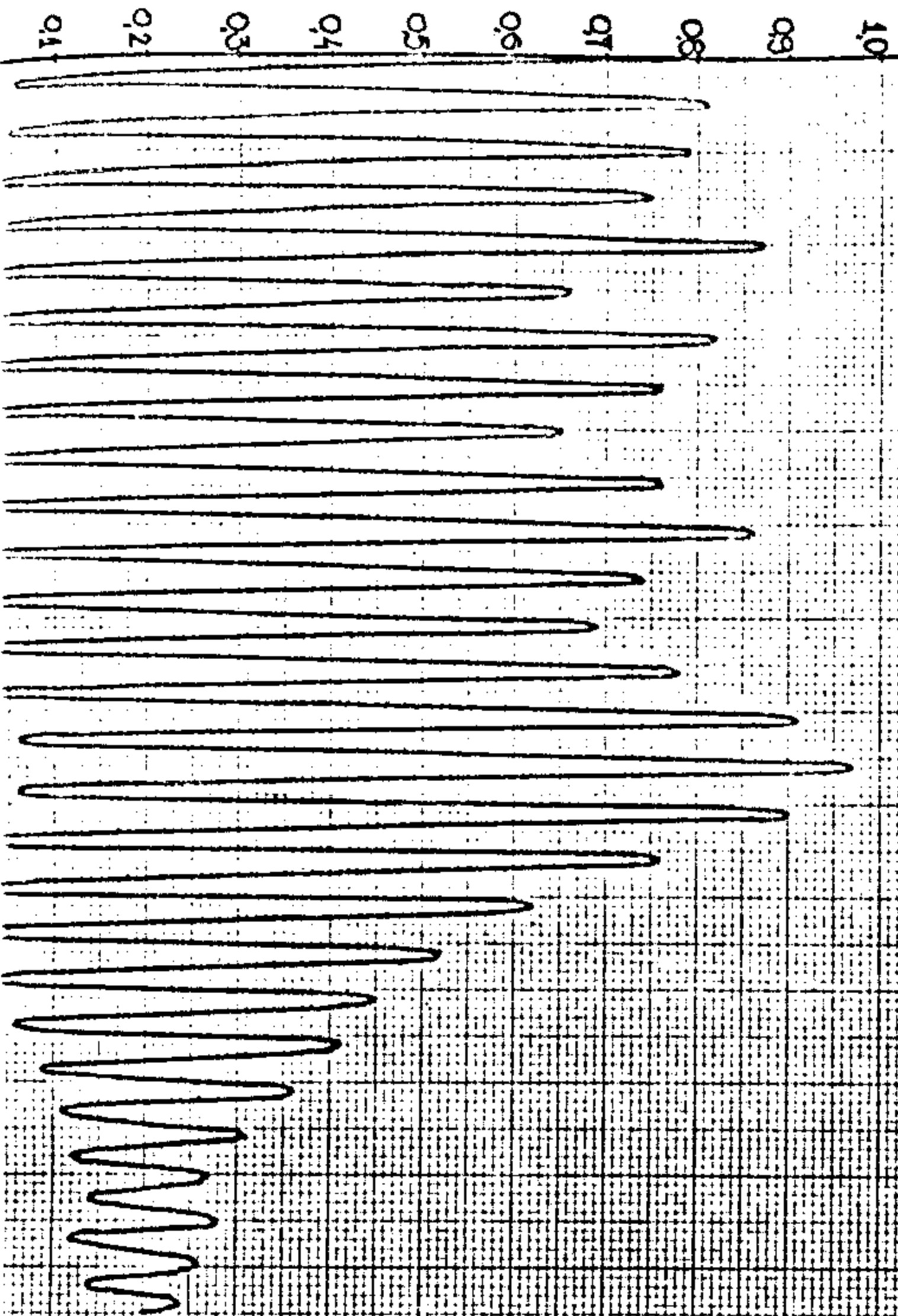


T3.

$a = 0.4 \text{ m}$   
 $b = 2.5 \text{ m}$   
 $\lambda = 5693 \text{ E} - 10 \text{ m}$   
 $d = \pi / 675$

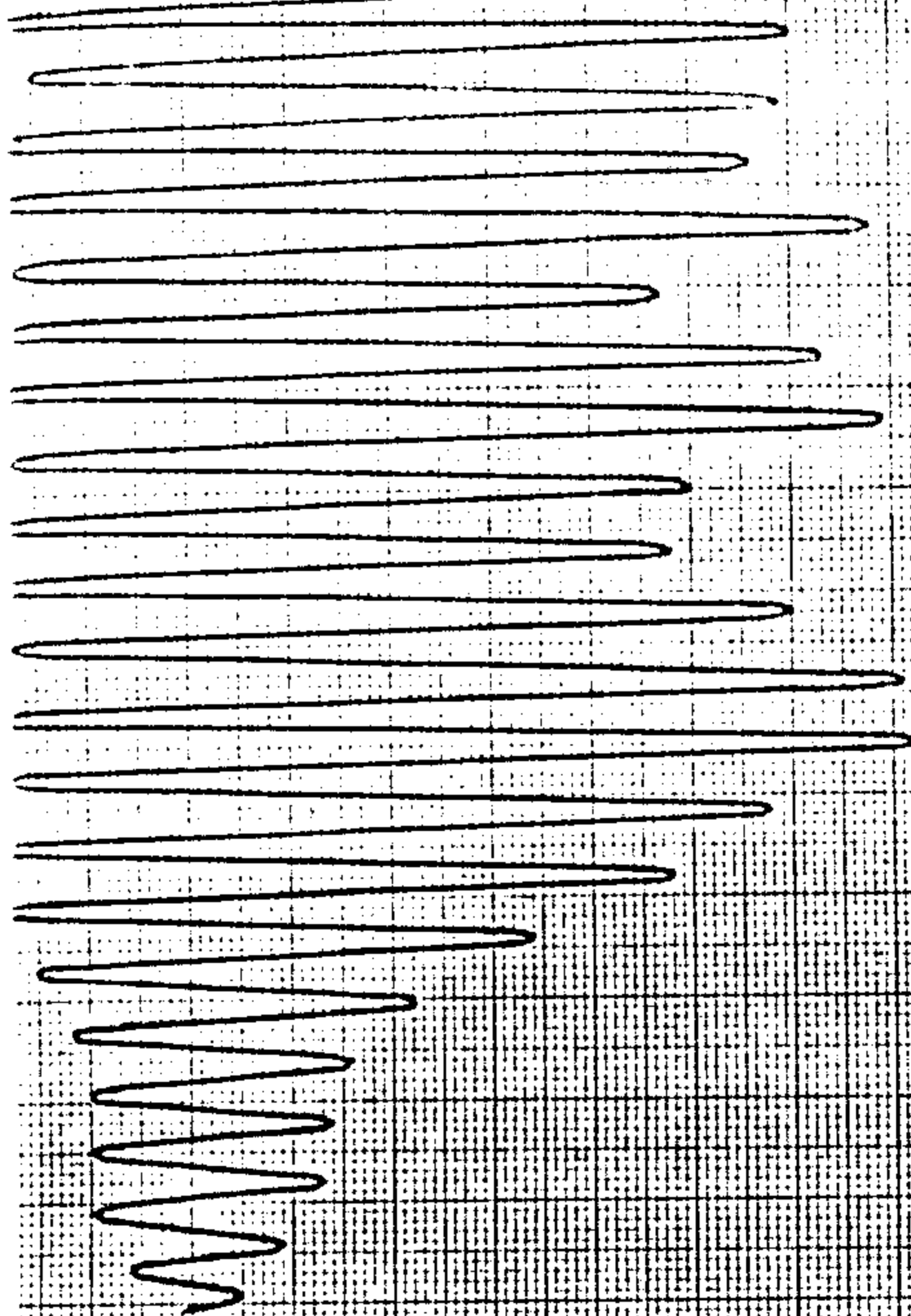
73

74.-



$\alpha = 1m$   
 $\beta = 21m$   
 $\gamma = 2000E - 10 m$   
 $\delta = 5/675$

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

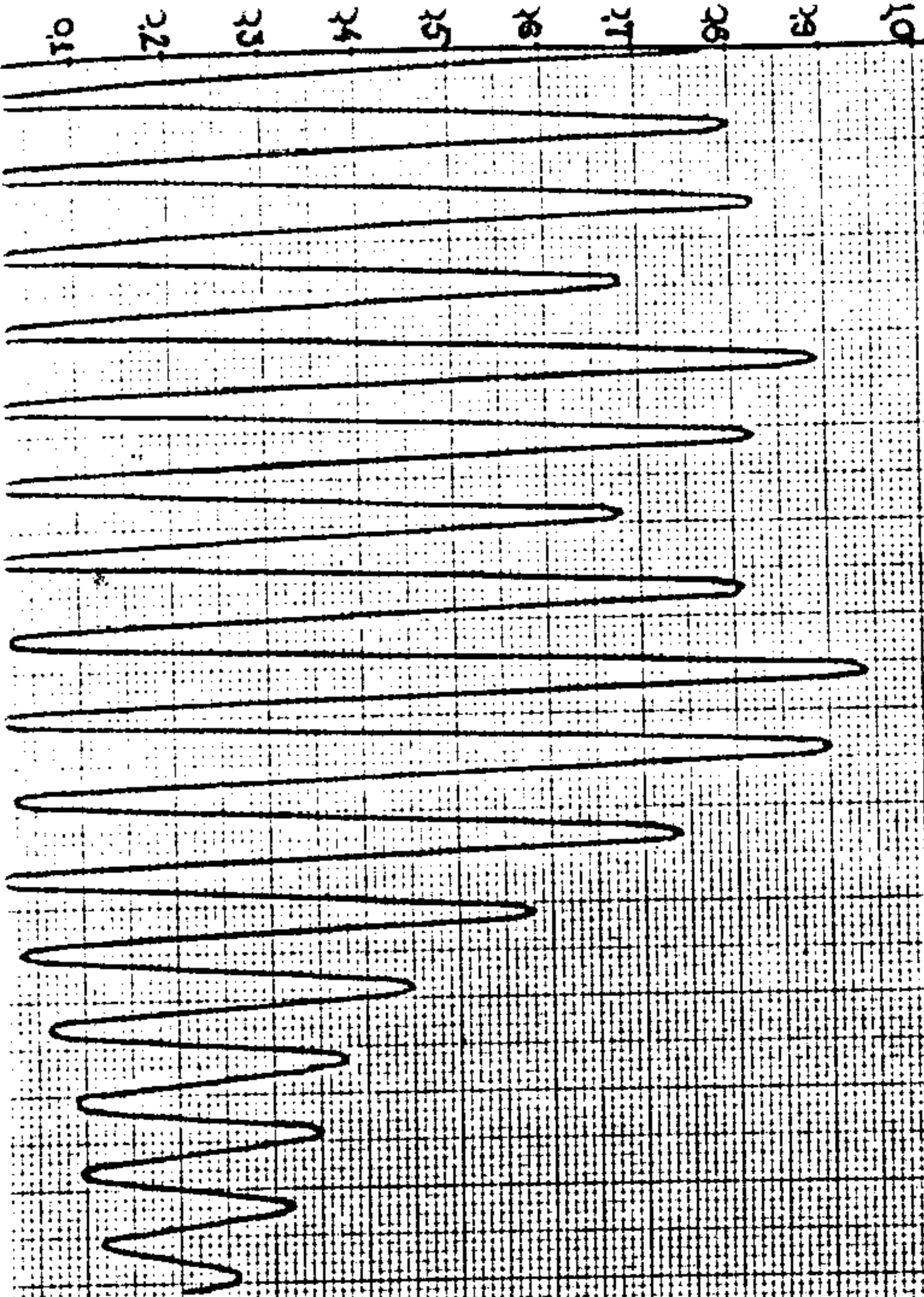


75.

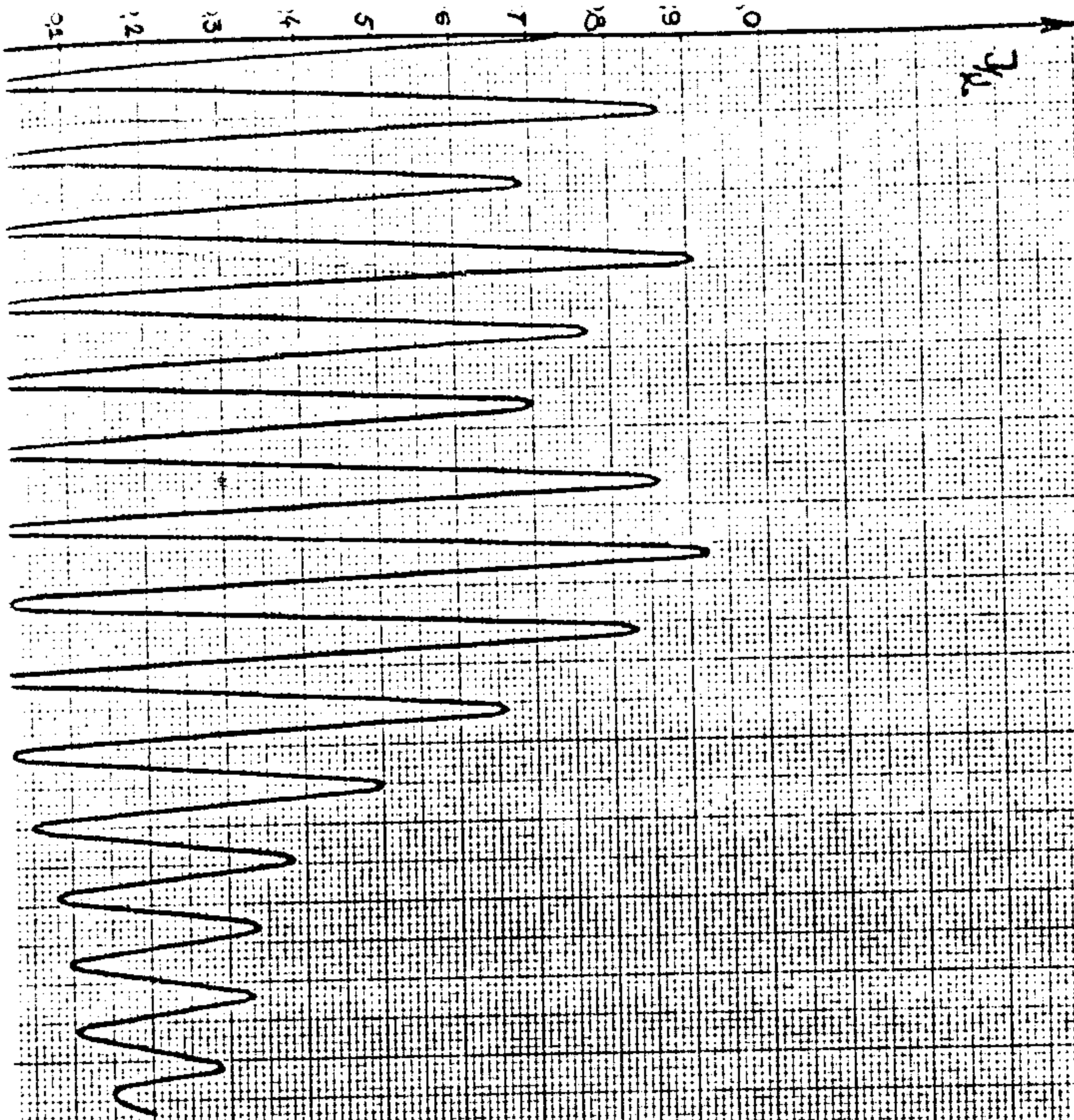
$a = 1 \text{ m}$   
 $b = 2 \text{ m}$   
 $\lambda = 5000 \text{ E} - 10 \text{ m}$   
 $\omega = \pi/675$

75

75.-



$\alpha = 1 \text{ mV}$   
 $\beta = 2.1 \text{ mV}$   
 $\lambda = 6500 \text{ E} - 10 \text{ mV}$   
 $\omega = 57/675$



77

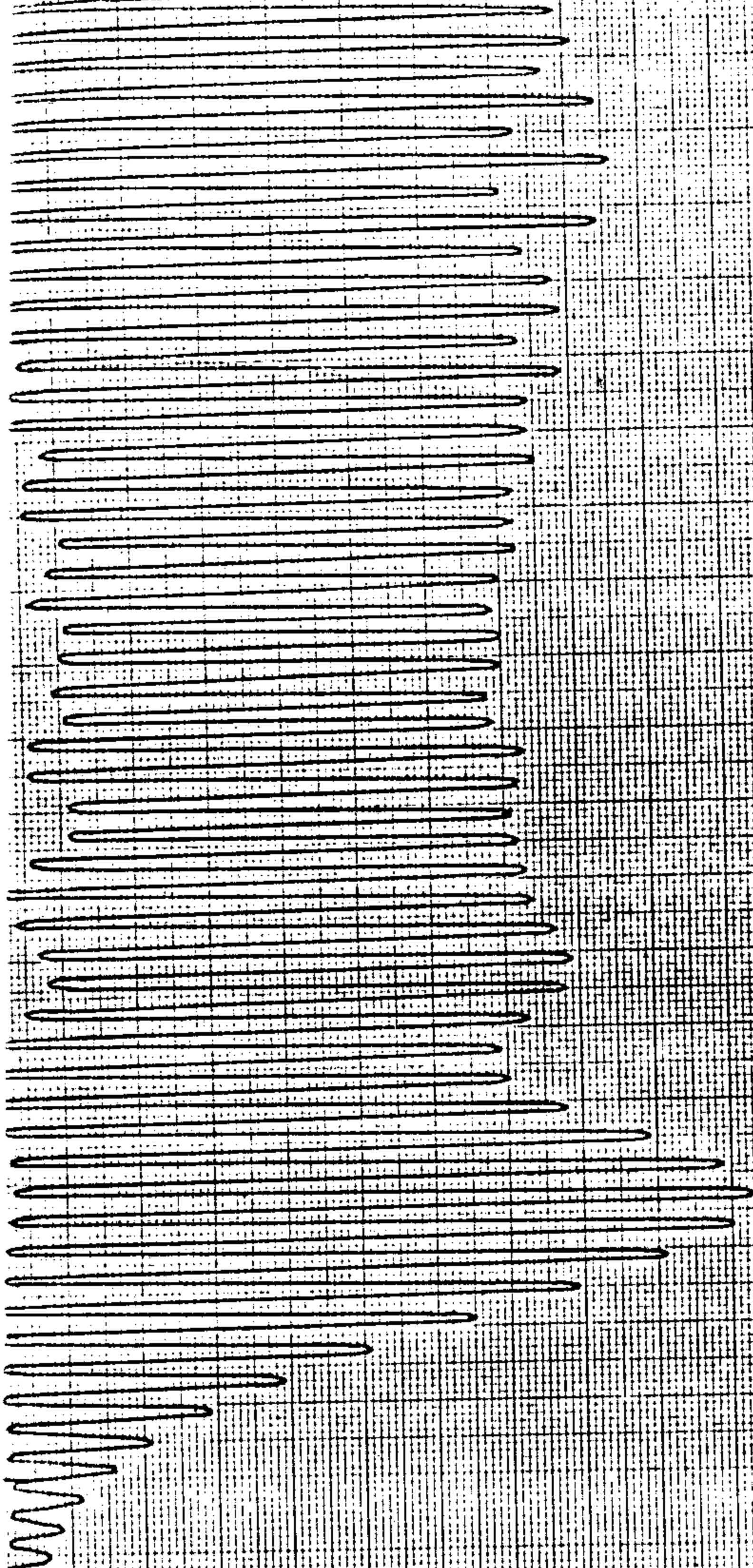
$a = 1 \text{ m}$   
 $L = 21 \text{ m}$   
 $\lambda = 7500 \text{ E} - 10 \text{ m}$   
 $\omega = 2\pi / 675$



78. —

72

08 09 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30



a - 1 mV

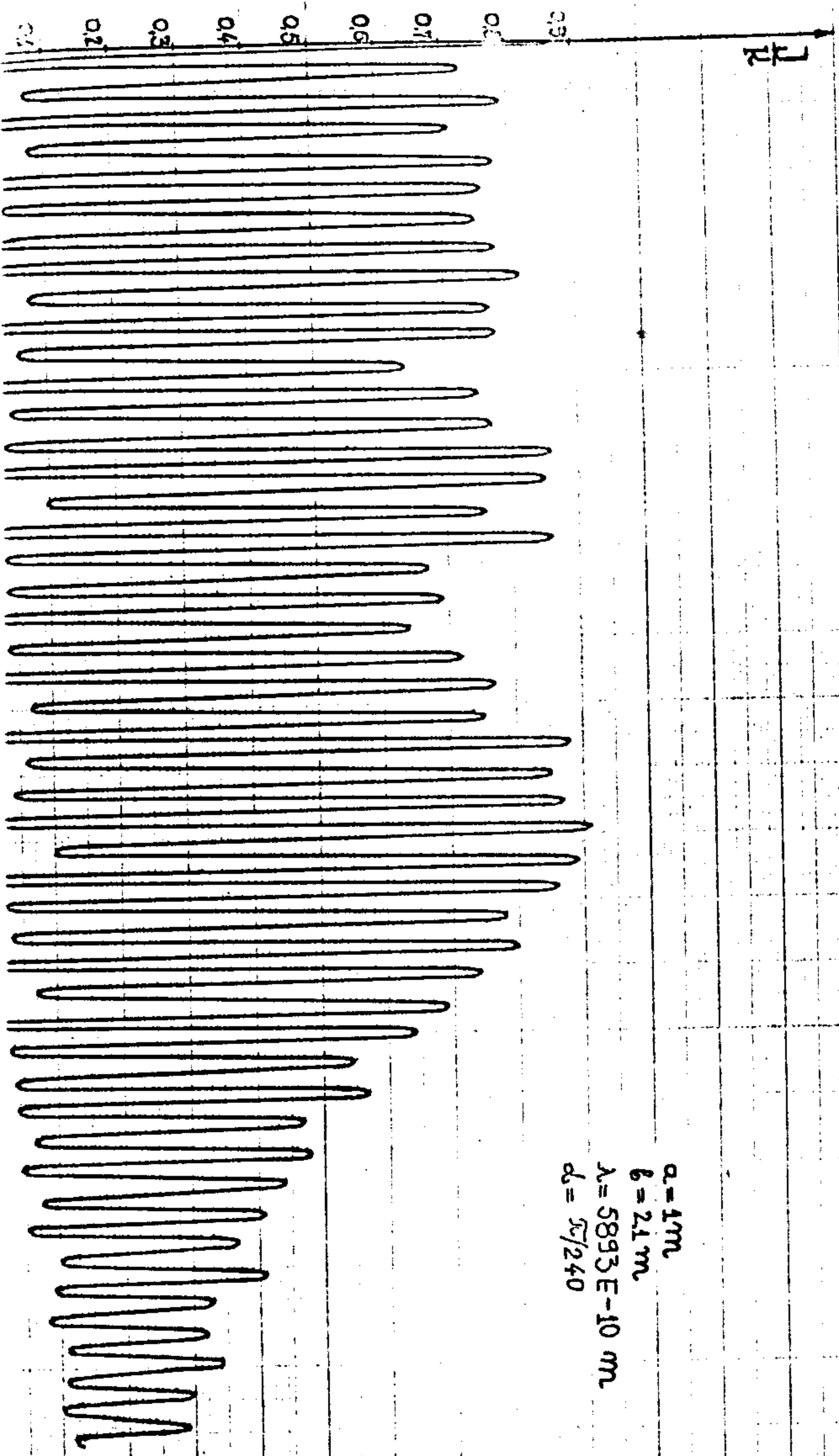
6.21 m

λ - 5895E-10 m

δ - 2/360

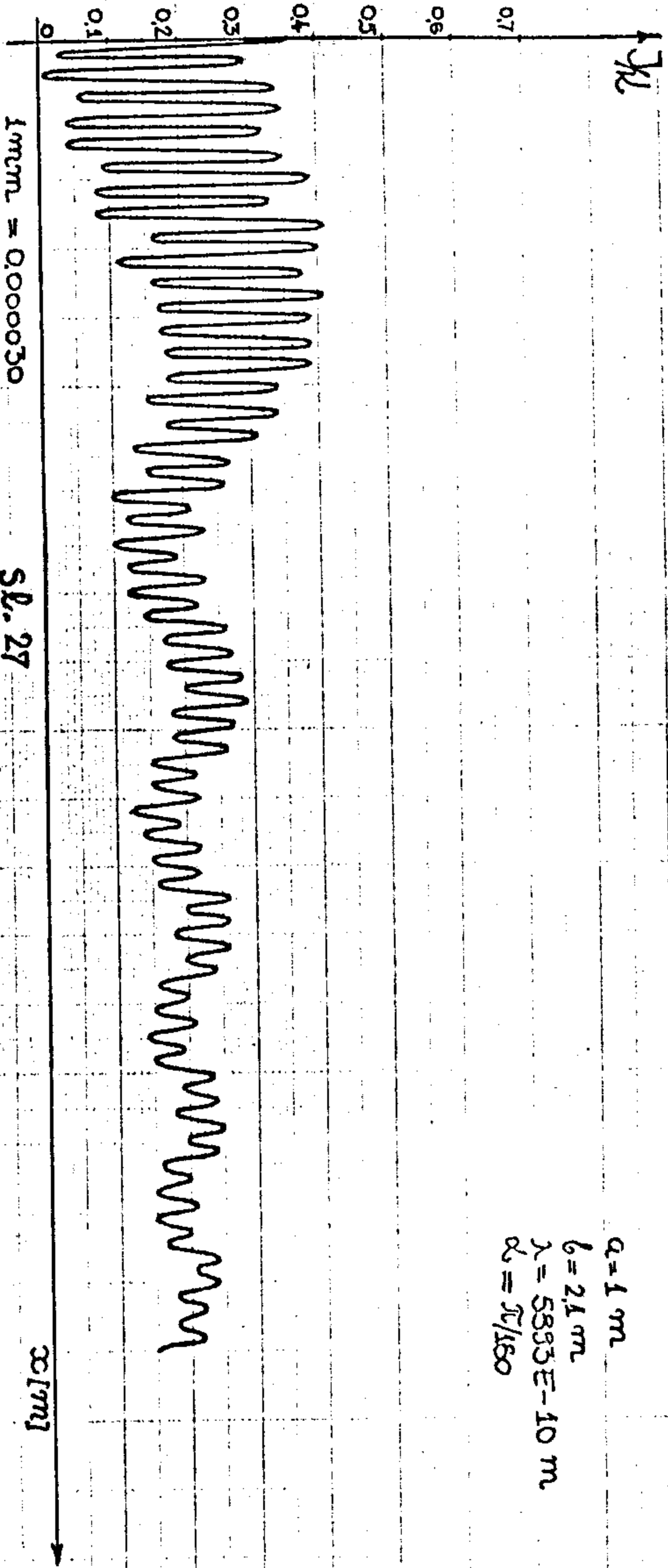
MM

79.-

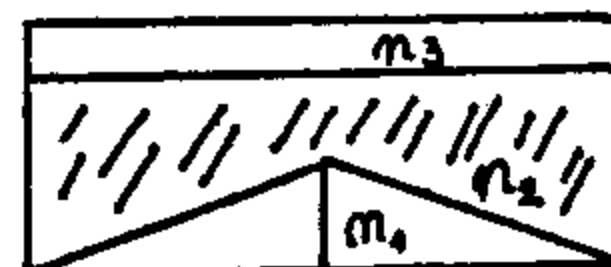


$a = 1m$   
 $b = 21m$   
 $\lambda = 5893E-10 m$   
 $\delta = \pi/240$

80.



Biprizmu sa vrlo malim prelomnim uglom  $\alpha$  teško je napraviti. Često se ova teškoća zaobilazi na takav način da se prizma indeksa prelamanja  $n_1$  pravi sa uglom koji se znatno razlikuje od  $0^\circ$  (napr.  $5^\circ$ ) i pribor se dopunjava ravnim staklom (A. Winkelmann), koje je slepljeno sa prizmom tako da se stvara šupljina kao na sl. 28. Ova se šupljina ispuni benzolom indeksa prelamanja  $n_2=1,50$ . Sada u difrakcionoj teoriji umesto indeksa prelamanja vazduha  $n=1$  dolazi  $n_2=1,50$ , odnosno razlika indeksa prelamanja stakla i benzola ( $n_1-n_2$ ).



sl. 28

Difrakciona teorija Winkelmannove biprizme može se dobiti ako faktor  $(n - 1)$ , zameni sa faktorom  $(n_1 - n_2)$ . Druge razlike nema.

### 9. FRAUNHOFEROV PRELAZ KOD BIPRIZME

Specijaliziraćemo formulu (6,12) za slučaj kada se svetlosni izvor nalazi u beskonačnosti odnosno u žiži jednog cilindričnog sočiva koje je postavljeno ispred difrakcionog otvora. Neka je i ravni-  
na u kojoj registrujemo difrakcionu sliku postavljena na veliku udaljenost od biprizme. Uz malu transformaciju, funkcija (6,12) se pretvara u,

$$\frac{J_p^2}{K^2} = \left\{ A_{1e}^2 + B_{1e}^2 + C_{1e}^2 + D_{1e}^2 + 2(A_{1e}C_{1e} + D_{1e}B_{1e})\cos\vartheta + 2(B_{1e}C_{1e} - A_{1e}D_{1e})\sin\vartheta \right\} \quad (9.1)$$

gde su:  $K$  konstanta koja se nalazi ispred funkcije intenziteta  $i$  za koju važi isto obrazloženje kao kod biogledala, a

$$\vartheta = \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{4\pi a(n-1)\operatorname{tg}d x}{\lambda(a+b)} = \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{4\pi(n-1)\operatorname{tg}d x}{\lambda\left(1+\frac{b}{a}\right)} = 2k(n-1)\operatorname{tg}d x \quad (9.2)$$

U izrazu (9,1) su:

$$\begin{aligned} A_{1b} &= C\left(\frac{t}{p}\right) - C\left(\frac{t}{p} - pl\right) \\ B_{1b} &= S\left(\frac{t}{p}\right) - S\left(\frac{t}{p} - pl\right) \\ C_{1b} &= C\left(pl + \frac{t_1}{p}\right) - C\left(\frac{t_1}{p}\right) \\ D_{1b} &= S\left(pl + \frac{t_1}{p}\right) - S\left(\frac{t_1}{p}\right) \end{aligned} \quad (9.3)$$

$$\begin{aligned} p^2 \Big|_{a \rightarrow \infty} &= \frac{2}{\lambda b} & t &= \frac{2}{\lambda} \left( \frac{x}{b} + (n-1) \operatorname{tg} \alpha \right) \\ & & t_1 &= \frac{2}{\lambda} \left( \frac{x}{b} - (n-1) \operatorname{tg} \alpha \right) \end{aligned} \quad (9.4)$$

označimo sa:

$$\begin{aligned} v_1 &= \frac{t}{p} \\ v_2 &= \frac{t_1}{p} \end{aligned} \quad (9.5)$$

$$\Delta v = pl$$

pa sistem (9,3) glasi,

$$\begin{aligned} A_{1b} &= C(v_1) - C(v_1 - \Delta v) \\ B_{1b} &= S(v_1) - S(v_1 - \Delta v) \\ C_{1b} &= C(v_2 + \Delta v) - C(v_2) \\ D_{1b} &= S(v_2 + \Delta v) - S(v_2) \end{aligned} \quad (9.6)$$

Zamenom (9,6) u (9,1) izlazi,

$$\begin{aligned} \frac{J_p^2}{k^2} &= \left\{ [C(v_1) - C(v_1 - \Delta v)]^2 + [S(v_1) - S(v_1 - \Delta v)]^2 + [C(v_2 + \Delta v) - C(v_2)]^2 + \right. \\ &+ [S(v_2 + \Delta v) - S(v_2)]^2 + 2[C(v_1) - C(v_1 - \Delta v)][C(v_2 + \Delta v) - C(v_2)] \cos \varphi + \\ &+ 2[S(v_1) - S(v_1 - \Delta v)][S(v_2 + \Delta v) - S(v_2)] \cos \varphi + \\ &+ 2[S(v_1) - S(v_1 - \Delta v)][C(v_2 + \Delta v) - C(v_2)] \sin \varphi - \\ &\left. - 2[C(v_1) - C(v_1 - \Delta v)][S(v_2 + \Delta v) - S(v_2)] \sin \varphi \right\} \end{aligned} \quad (9.7)$$

Za velike vrednosti, kao i kod biogledala možemo koristiti asimtotsku vrednost Fresnelovih integrala (5,7). Iz (5,7) možemo izračunati sistem integrala (9,6). Dobićemo,

$$\begin{aligned} C(v_1) - C(v_1 - \Delta v) &\sim \frac{2}{\pi v_1} \sin \frac{\pi}{2} v_1 \Delta v \cos \frac{\pi}{2} (v_1^2 - v_1 \Delta v) \\ S(v_1) - S(v_1 - \Delta v) &\sim \frac{2}{\pi v_1} \sin \frac{\pi}{2} v_1 \Delta v \cdot \sin \frac{\pi}{2} (v_1^2 - v_1 \Delta v) \end{aligned} \quad (9.8)$$

$$C(\nu_2 + \Delta\nu) - C(\nu_2) \sim \frac{2}{\pi\nu_2} \sin \frac{\pi}{2} \nu_2 \Delta\nu \cdot \cos \frac{\pi}{2} (\nu_2^2 + \nu_2 \Delta\nu) \quad (9.8)$$

$$S(\nu_2 + \Delta\nu) - S(\nu_2) \sim \frac{2}{\pi\nu_2} \sin \frac{\pi}{2} \nu_2 \Delta\nu \cdot \sin \frac{\pi}{2} (\nu_2^2 + \nu_2 \Delta\nu)$$

Zamenimo (9,8) u (9,7) pa izlazi,

$$\begin{aligned} \frac{J_p^2}{R} = & \left\{ \left( \frac{2}{\pi\nu_1} \sin \frac{\pi}{2} \nu_1 \Delta\nu \right)^2 + \left( \frac{2}{\pi\nu_2} \sin \frac{\pi}{2} \nu_2 \Delta\nu \right)^2 + \right. \\ & + 2 \left( \frac{2}{\pi\nu_1} \sin \frac{\pi}{2} \nu_1 \Delta\nu \right) \left( \frac{2}{\pi\nu_2} \sin \frac{\pi}{2} \nu_2 \Delta\nu \right) \left( \cos \frac{\pi}{2} (\nu_1^2 - \nu_1 \Delta\nu) \cdot \cos \frac{\pi}{2} (\nu_2^2 + \nu_2 \Delta\nu) + \right. \\ & + \left. \sin \frac{\pi}{2} (\nu_1^2 - \nu_1 \Delta\nu) \cdot \sin \frac{\pi}{2} (\nu_2^2 + \nu_2 \Delta\nu) \right) \cos \varphi + \\ & + 2 \left( \frac{2}{\pi\nu_1} \sin \frac{\pi}{2} \nu_1 \Delta\nu \right) \left( \frac{2}{\pi\nu_2} \sin \frac{\pi}{2} \nu_2 \Delta\nu \right) \left( \cos \frac{\pi}{2} (\nu_2^2 + \nu_2 \Delta\nu) \sin \frac{\pi}{2} (\nu_1^2 - \nu_1 \Delta\nu) - \right. \\ & \left. \left. - \cos \frac{\pi}{2} (\nu_1^2 - \nu_1 \Delta\nu) \sin \frac{\pi}{2} (\nu_2^2 + \nu_2 \Delta\nu) \right) \sin \varphi \right\} \quad (9.9) \end{aligned}$$

označimo u (9,9) sa:

$$\begin{aligned} \vartheta &= \frac{\pi}{2} (\nu_1^2 - \nu_1 \Delta\nu) \\ \varphi &= \frac{\pi}{2} (\nu_2^2 + \nu_2 \Delta\nu) \end{aligned} \quad (9.10)$$

i posle sredjivanja izraza (9,9) izlazi,

$$\begin{aligned} \frac{J_p^2}{R} = & \left\{ \left( \frac{2}{\pi\nu_1} \sin \frac{\pi}{2} \nu_1 \Delta\nu \right)^2 + \left( \frac{2}{\pi\nu_2} \sin \frac{\pi}{2} \nu_2 \Delta\nu \right)^2 + \right. \\ & \left. + 2 \left( \frac{2}{\pi\nu_1} \sin \frac{\pi}{2} \nu_1 \Delta\nu \right) \left( \frac{2}{\pi\nu_2} \sin \frac{\pi}{2} \nu_2 \Delta\nu \right) \cos(\vartheta - \varphi - \varphi) \right\} \quad (9.11) \end{aligned}$$

Iz (9,10) i (9,2) izlazi,

$$\begin{aligned} \vartheta - \varphi - \varphi &= -\frac{\pi}{2} (t + t_1) l = -\frac{2\pi x l}{\lambda b} \\ \nu_1 \Delta\nu &= \frac{2}{\lambda} \left( \frac{x}{b} + (n-1) \operatorname{tg} \alpha \right) l \\ \nu_2 \Delta\nu &= \frac{2}{\lambda} \left( \frac{x}{b} - (n-1) \operatorname{tg} \alpha \right) l \end{aligned} \quad (9.12)$$

Množimo i podelimo sa  $\Delta\nu$  izraz (9,11) i uzimamo u obzir (9,12) i (9,5)

pa ćemo dobiti:

$$\begin{aligned} J = R l^2 \left\{ \left( \frac{\sin \frac{\pi}{\lambda} \left( \frac{x}{b} + (n-1) \operatorname{tg} \alpha \right) l}{\frac{\pi}{\lambda} \left( \frac{x}{b} + (n-1) \operatorname{tg} \alpha \right) l} \right)^2 + \left( \frac{\sin \frac{\pi}{\lambda} \left( \frac{x}{b} - (n-1) \operatorname{tg} \alpha \right) l}{\frac{\pi}{\lambda} \left( \frac{x}{b} - (n-1) \operatorname{tg} \alpha \right) l} \right)^2 + \right. \\ \left. + 2 \left( \frac{\sin \frac{\pi}{\lambda} \left( \frac{x}{b} + (n-1) \operatorname{tg} \alpha \right) l}{\frac{\pi}{\lambda} \left( \frac{x}{b} + (n-1) \operatorname{tg} \alpha \right) l} \right) \left( \frac{\sin \frac{\pi}{\lambda} \left( \frac{x}{b} - (n-1) \operatorname{tg} \alpha \right) l}{\frac{\pi}{\lambda} \left( \frac{x}{b} - (n-1) \operatorname{tg} \alpha \right) l} \right) \cos \frac{2\pi l x}{\lambda b} \right\} \quad (9.13) \end{aligned}$$

Formula (9,13) predstavlja formulu Fraunhoferove difrakcije na bipriz-

mu. Ona se sastoji od tri dela. Prvi deo formule nam izražava difrakciju

na jednoj polovini biprizme, drugi takodje izražava difrakciju na drugoj polovini a treći član medjusobnu interferenciju prvog i drugog člana. Postavljenu formulu možemo specijalizirati za neke specijalne slučajeve.

1. Neka je  $\alpha = 0$ , znači duž difrakcione pukotine faza ne postoji. To je slučaj obične pukotine širine 2 l.

$$J = 2Kl^2 \left( \frac{\sin \frac{\pi}{\lambda} \frac{x}{b} l}{\frac{\pi}{\lambda} \frac{x}{b} l} \right)^2 \left( 1 + \cos \frac{2\pi x}{\lambda b} l \right) = K(2l)^2 \left( \frac{\sin (2l) \frac{\pi x}{\lambda b}}{(2l) \frac{\pi x}{\lambda b}} \right)^2 \quad (9.14)$$

To je poznata formula Fraunhoferove difrakcije na pukotini širine 2 l, (uz obrazloženje koje sam dao kod Fraunhoferovog prelaza kod biogledala).

2. Slučaj linearnih profila. Formulu (9,13) možemo napisati u sledećoj formi,

$$J = Kl^2 (J_1 + J_2 + 2\sqrt{J_1 J_2} \cos \delta) \quad (9.15)$$

gde smo sa  $I_1$  označili prvi intenzitet, sa  $I_2$  drugi, a sa  $\delta$  argument funkcije kosinus. Označimo dalje proizvod  $Kl^2 = I_0$  pa ćemo dobiti,

$$J = J_0 (J_1 + J_2 + 2\sqrt{J_1 J_2} \cos \delta) \quad (9.16)$$

2a. Neka je  $I_1 = 0$ , tada ćemo dobiti difrakcioni intenzitet na pukotini u kojoj je postavljena obična prizma širine l (sl. 29). Tada iz (9,13) izlazi,

$$J = J_0 \left( \frac{\sin \frac{\pi}{\lambda} \left( \frac{x}{b} - (n-1)btg\alpha \right) l}{\frac{\pi}{\lambda} \left( \frac{x}{b} - (n-1)btg\alpha \right) l} \right)^2 \quad (9.17)$$

Veličina pomeranja glavnog maksimuma izraza (9,17) izražava se relacijom,

$$x_0 = (n - 1)btg\alpha \quad (9.18)$$

Relacija (9,18) predstavlja veličinu skretanja kod prizme.

2b. Neka je  $I_2 = 0$ , tada ćemo dobiti slučaj suprotne faze, odnosno Fraunhoferovu difrakciju na prizmi koja je postavljena u suprotnom smjeru (sl. 30), širine l.

$$J = J_0 \left( \frac{\sin \frac{\pi}{\lambda} \left( \frac{x}{b} + (n-1) \operatorname{tg} \alpha \right) l}{\frac{\pi}{\lambda} \left( \frac{x}{b} + (n-1) \operatorname{tg} \alpha \right) l} \right)^2 \quad (9,19)$$

u ovom slučaju veličina skretanja iznosi,

$$x_0 = -(n-1) b \operatorname{tg} \alpha \quad (9,20)$$



sl. 29



sl. 30

2c. Neka je  $\alpha = 0$  kod intenziteta  $I_1$ . Tada iz formule (9,13)

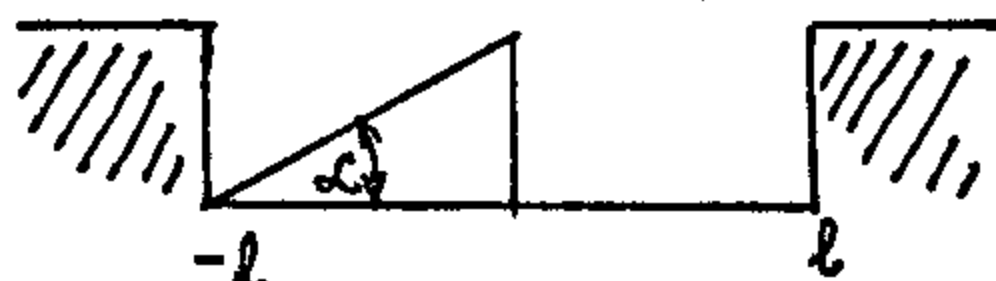
i (9,12) izlazi,

$$J = J_0 \left\{ \left( \frac{\sin \frac{\pi}{\lambda} \frac{x}{b} l}{\frac{\pi}{\lambda} \frac{x}{b} l} \right)^2 + \left( \frac{\sin \frac{\pi}{\lambda} \left( \frac{x}{b} - (n-1) \operatorname{tg} \alpha \right) l}{\frac{\pi}{\lambda} \left( \frac{x}{b} - (n-1) \operatorname{tg} \alpha \right) l} \right)^2 + 2 \left( \frac{\sin \frac{\pi}{\lambda} \frac{x}{b} l}{\frac{\pi}{\lambda} \frac{x}{b} l} \right) \left( \frac{\sin \frac{\pi}{\lambda} \left( \frac{x}{b} - (n-1) \operatorname{tg} \alpha \right) l}{\frac{\pi}{\lambda} \left( \frac{x}{b} - (n-1) \operatorname{tg} \alpha \right) l} \right) \cos \left[ \frac{\pi}{\lambda} \left( 2 \frac{x}{b} - (n-1) \operatorname{tg} \alpha \right) l \right] \right\} \quad (9,21)$$

jer u ovom slučaju,

$$\begin{aligned} \varphi - \varphi - \varphi &= -\frac{\pi}{2} (t + t_1) l = -\frac{\pi}{2} \left[ \frac{2}{\lambda} \left( \frac{x}{b} + (n-1) \operatorname{tg} \alpha \right) l + \frac{2}{\lambda} \left( \frac{x}{b} - (n-1) \operatorname{tg} \alpha \right) l \right] = \\ &= -\frac{\pi}{\lambda} \left( 2 \frac{x}{b} - (n-1) \operatorname{tg} \alpha \right) l \end{aligned}$$

Fraunhoferova difrakcija (9,21) odgovara profilu na sl. 31.



sl. 31

2d. Moguće je napraviti i obrnutu kombinaciju. Napominjem da su ovi profili već detaljno ispitivani u radu [34], a izvodjeni su drugim putem.

#### 10. PRELAZ IZ BIPRIZME NA PUKOTINU

Specijalizacijom funkcije intenziteta biprizme možemo dobiti formulu za Fresnelovu difrakciju na pukotinu. Taj slučaj možemo dobiti ako u izraz (6,12) stavimo  $\alpha = 0$ . Tada ćemo dobiti za intenzitet Fresnelove difrakcije na pukotini sledeću formulu,



$$J = \frac{k_0 \lambda}{2\pi^2 D} \left\{ (A_{1p} + C_{1p})^2 + (B_{1p} + D_{1p})^2 \right\} \quad (10,1)$$

gde smo indeksom  $p$  označili Fresnelove integrale koji se odnose na pukotinu. U funkciju (10,1) Fresnelovi integrali su,

$$\begin{aligned} A_{1p} &= C\left(\frac{t_0}{p}\right) - C\left(\frac{t_0}{p} - pl\right) \\ B_{1p} &= S\left(\frac{t_0}{p}\right) - S\left(\frac{t_0}{p} - pl\right) \end{aligned} \quad (10,2)$$

$$C_{1p} = C\left(\frac{t_0}{p} + pl\right) - C\left(\frac{t_0}{p}\right)$$

$$D_{1p} = S\left(\frac{t_0}{p} + pl\right) - S\left(\frac{t_0}{p}\right)$$

$$\text{za: } t_0 = \frac{2x}{\lambda b}; \quad p^2 = \frac{2}{\lambda} \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) l$$

Posle zamene sistema integrala (10,2) u (10,1) izlazi,

$$J = \frac{k_0 \lambda}{2\pi^2 D} \left\{ \left[ C\left(\frac{t_0}{p} + pl\right) + C\left(pl - \frac{t_0}{p}\right) \right]^2 + \left[ S\left(\frac{t_0}{p} + pl\right) + S\left(pl - \frac{t_0}{p}\right) \right]^2 \right\} \quad (10,3)$$

To je formula intenziteta Fresnelove difrakcije na pukotini ako su upadni talasi, cilindrični. Treba napomenuti da je izraz (10,3) izveden u nepokretnom koordinatnom sistemu kojim ćemo se poslužiti za izvodjenje difrakcione teorije svih interferencionih šema koje ćemo analizirati u ovom radu.

Naime, u teoriji Fresnelove difrakcije češće se upotrebljava i pokretni koordinatni sistem. U slučaju obične pukotine oba koordinatna sistema daju potpunu jednake rezultate. Međutim, za fazne probleme i probleme dvaju izvora pokretni koordinatni sistem vodi do zamršenih rezultata koji uopšte nisu pristupačni za analizu. Možemo slobodno reći da se za naše probleme interferencionih šema pokretni koordinatni sistem ne može primeniti.

Tačnost postavljene formule (10,3) možemo proveravati Fraunhoferovim prelazom. Formulu (10,3) možemo napisati i na sledeći način,

$$J = \frac{k_0}{\pi^2 a b p^2} \left\{ \left[ C\left(pl + \frac{t_0}{p}\right) - C\left(\frac{t_0}{p} - pl\right) \right]^2 + \left[ S\left(pl + \frac{t_0}{p}\right) - S\left(\frac{t_0}{p} - pl\right) \right]^2 \right\} \quad (10,4)$$

U (10,4) treba označiti sa:

$$\begin{aligned} pl &= \Delta v = \sqrt{\frac{2}{\lambda b}} l \\ \frac{t_0}{p} &= v = \sqrt{\frac{2}{\lambda b}} x \end{aligned} \quad (10,5)$$

i kada uvrstimo u (10,4) izlazi,

$$J = \frac{k_0}{\pi^2 a b \rho^2} \left\{ [C(u+\Delta u) - C(u-\Delta u)]^2 + [S(u+\Delta u) - S(u-\Delta u)]^2 \right\} \quad (10,6)$$

Koristimo asimptotsku vrednost Fresnelovih integrala (5,7) za velike argumente pa ćemo dobiti,

$$C(u+\Delta u) - C(u-\Delta u) \sim \frac{1}{\sqrt{u}} \left[ \sin \frac{\pi}{2} (u+\Delta u)^2 - \sin \frac{\pi}{2} (u-\Delta u)^2 \right] \sim \quad (10,7)$$

$$\sim \frac{2}{\sqrt{u}} \cos \frac{\pi u}{4} [(u+\Delta u)^2 + (u-\Delta u)^2] \sin \frac{\pi}{4} [(u+\Delta u)^2 - (u-\Delta u)^2] =$$

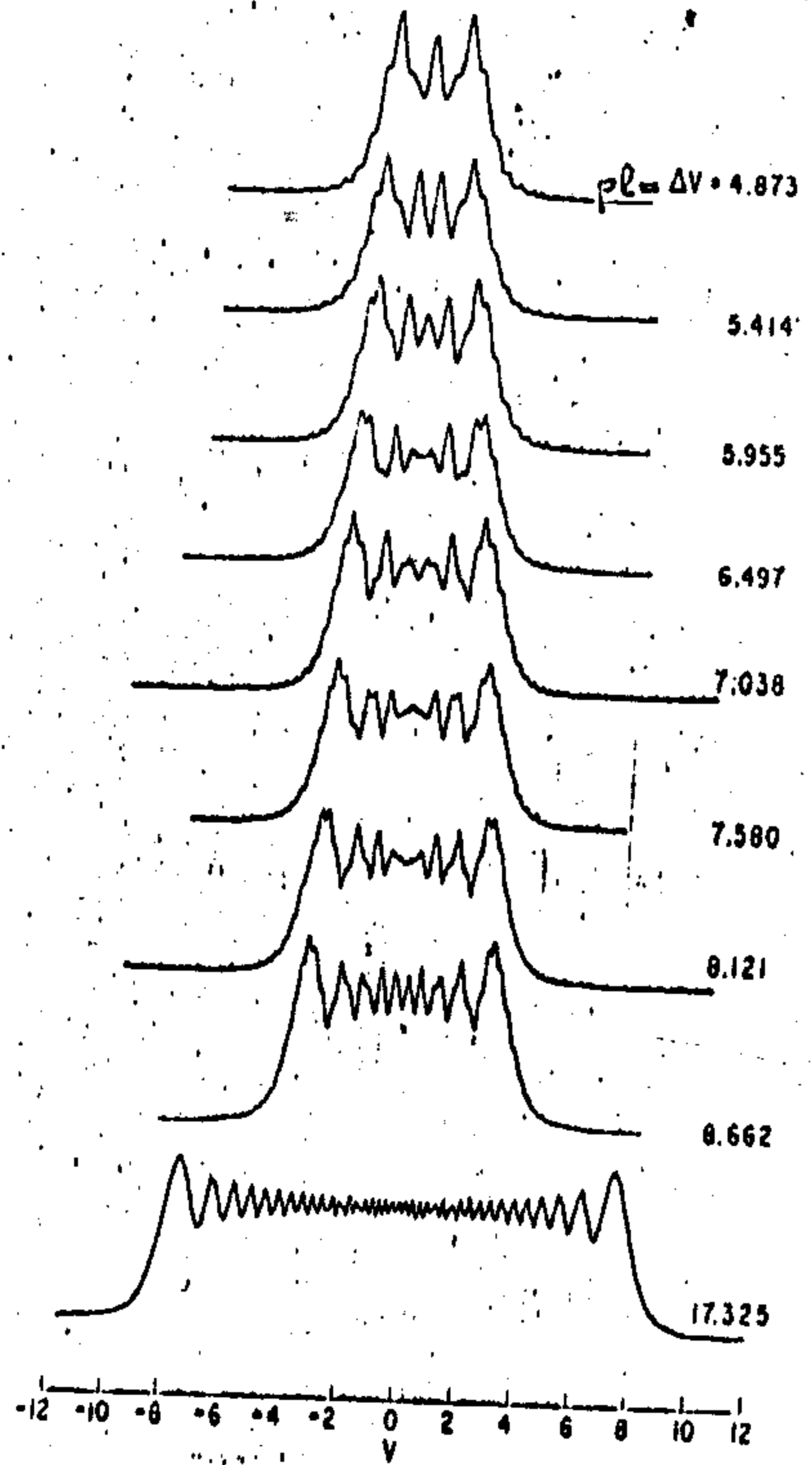
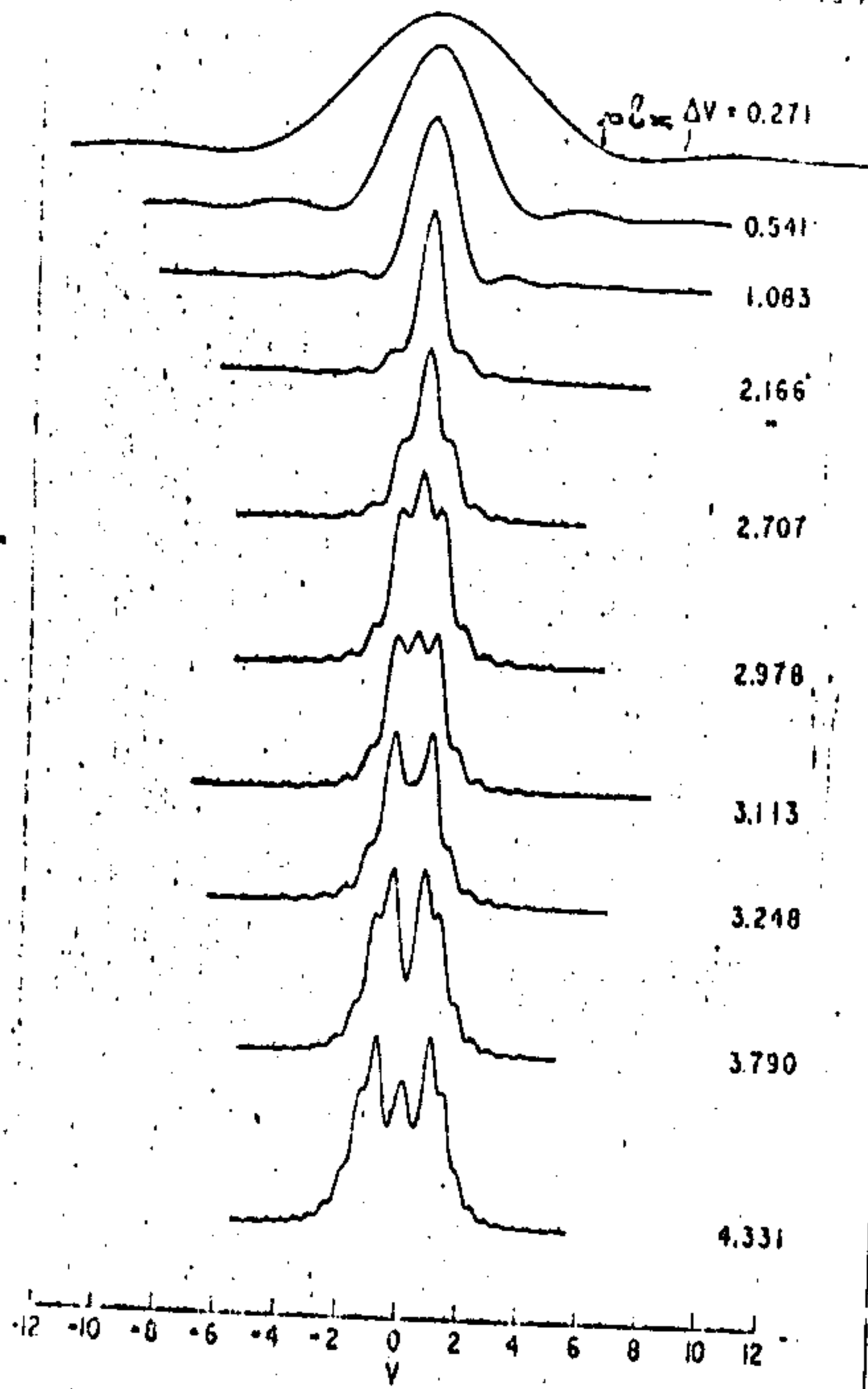
$$= \frac{2}{\sqrt{u}} \cos \frac{\pi u}{2} \sin \frac{\pi}{2} u \Delta u$$

Na analogan način izlazi,  $S(u+\Delta u) - S(u-\Delta u) \cong \frac{2}{\sqrt{u}} \sin \frac{\pi u}{2} \sin \frac{\pi}{2} u \Delta u$  (10,8)

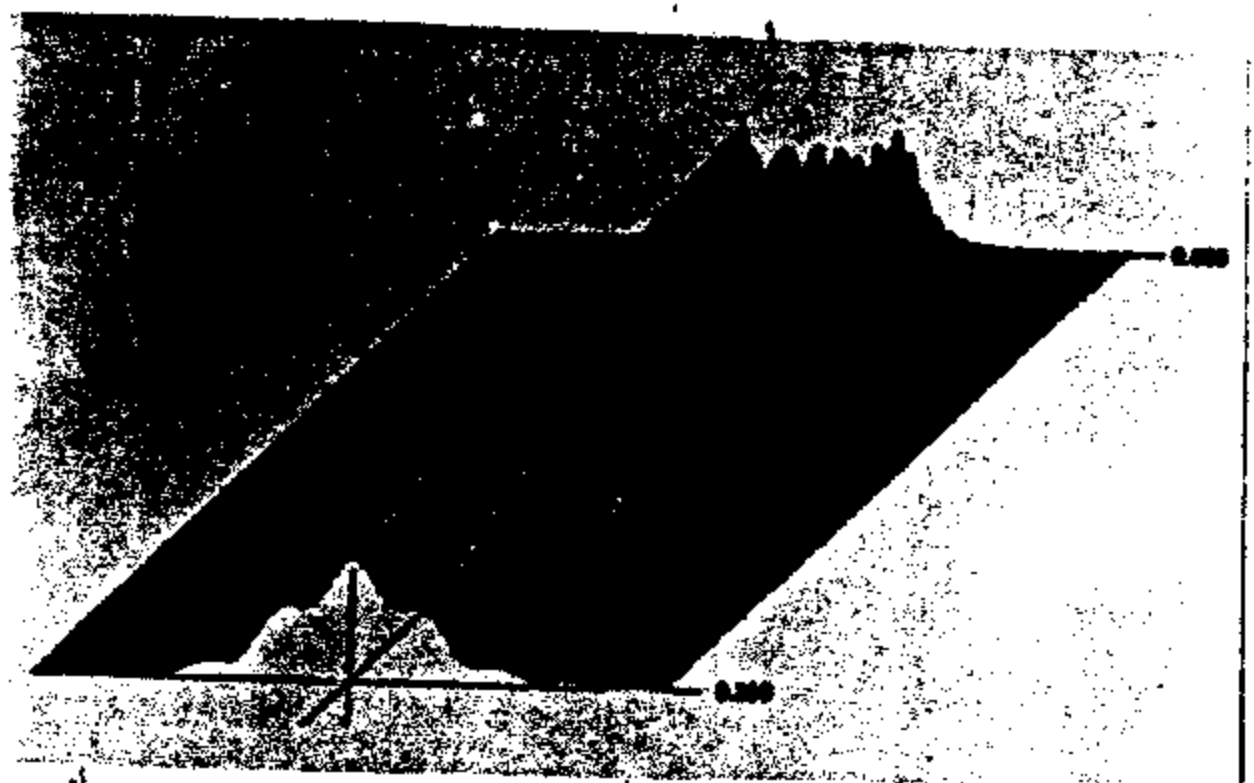
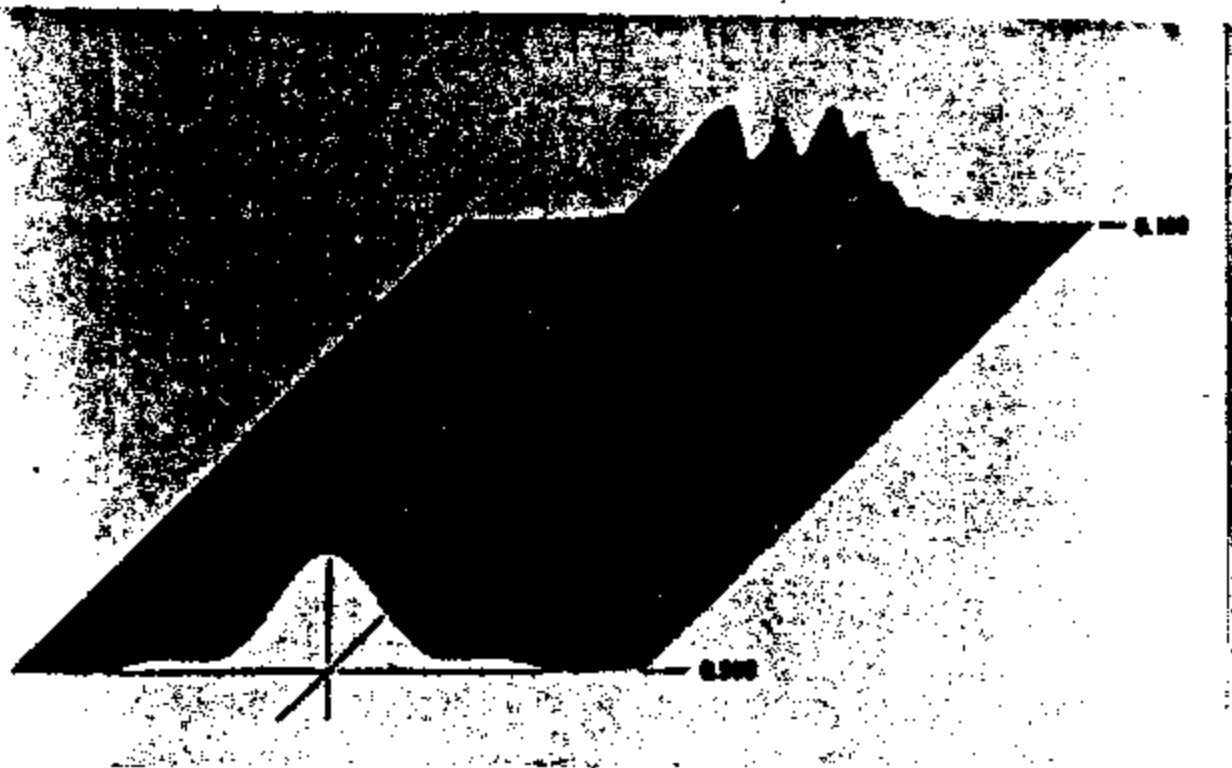
Nakon uvrštavanja (10,8) i (10,7) u (10,6) izlazi,

$$J = k(2l)^2 \left( \frac{\sin \frac{\pi}{\lambda_0} (2l) x}{\frac{\pi (2l) x}{\lambda_0}} \right)^2 \quad (10,9)$$

Formula (10,9) je poznata formula Fraunhoferove difrakcije na pukotini širine  $2l$ . Ona je identična formulama (9,14) i (5,19). Analiza formule (10,3) je proverena eksperimentalnim putem u radu [35] i pokazalo se da postoji dobra saglasnost između teorijskih i eksperimentalnih rezultata. Autori [35] su uzeli rastojanje izvora do pukotine oko 20 m, a rastojanje fotomultiplikatora do pukotine oko 30 m. Napravili su merenja sa pukotinom širine 0,5 do 32 mm i sa talasnom dužinom 4358 Å i 5461 Å. Ispitivanje su izvršili počev od Fraunhoferovog regiona do bliske zone. U ovom radu ću priložiti snimke koji su oni dobivali eksperimentalnim mjerenjem (sl. 32). Oni su mjerili krive intenzivnosti u intervalu  $p_1 = \sqrt{\frac{2(a+b)}{\lambda}} l = 0,271 - 17,325$ . Za  $p_1 = 0,271; 0,541; 1,083$  dobivaju slike Fraunhoferove difrakcije na pukotini sa različitim širinama intenzivnosti. To potvrđuje da je označavanje (10,5) pravilnije jer upravo za male vrednosti  $p$ , što znači za vrlo velike vrednosti  $a$  i  $b$  prelazimo na Fraunhoferov region. Ranije, kod numeričke analize sam napomenuo da modulacione difrakcione linije kod biprizme pa i kod biogledala nisu baš glatke što je čest slučaj kod Fresnelove difrakcije. To najbolje možemo videti iz eksperimentalnih merenja na sl. 32.



sl. 32



sl. 33

Uporedjivanjem difrakcionih krivih na sl. 32 i na sl. 19 i 20 vidimo neku analogiju. Sl. 19 ima u centru difrakcioni maksimum a sl. 20 u centru ima difrakcioni minimum. Kod eksperimentalnih merenja na sl. 32 vidimo da je to moguće kod Fresnelove difrakcije i ako sl. 19 i 20 prikazuju nešto sasvim drugo od sl. 32. Ovom radu ću priložiti i trodimenzionalnu sliku difrakcije na pukotini koju su isti autori napravili. Lepo se vidi promena intenziteta duž optičke osi (sl. 33) od Fraunhoferovog regiona do Fresnelovog područja.

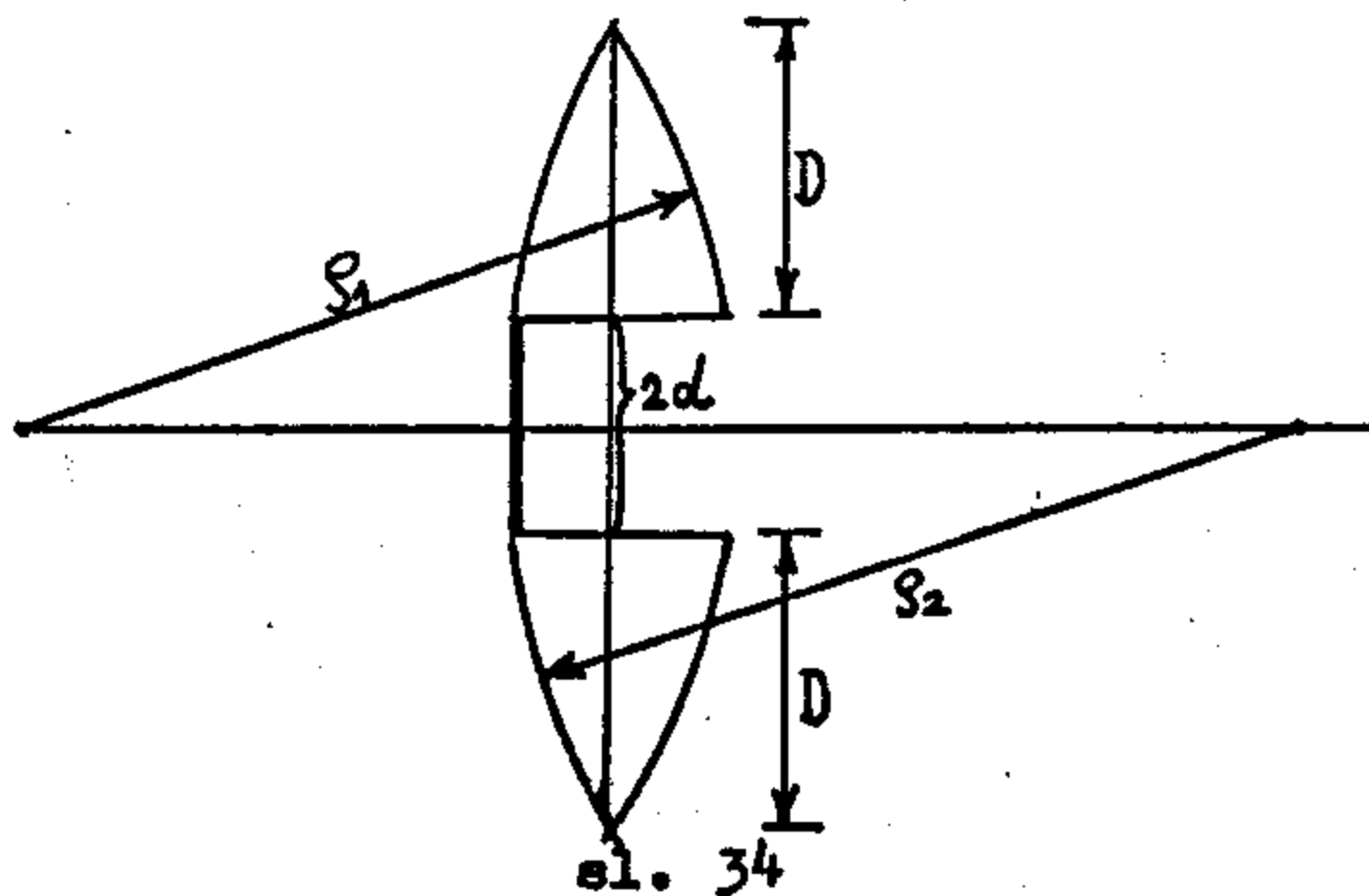
Specijalizacijom formule biprizme za običnu pukotinu i Fraunhoferov slučaj potvrdili smo tačnost postavljene teorije.

## G L A V A III

## 11. DIFRAKCIONA TEORIJA BILLETVOG BISOČIVA

Ova interferenciona šema se realizuje pomoću cilindričnog sočiva koje je razrezano po prečniku i obe polovine se razdvajaju za mali pomak  $2d$ . Prostor između polusočiva je pokriven neprozirnim ekranom [36], sl. 34.

Pretpostavimo da na bikonveksno cilindrično sočivo padaju ravni svjetlosni talasi. Da bismo našli difrakcioni intenzitet iza sočiva, u nekoj tački prostora upotrebićemo Kirchhoffovu integ-

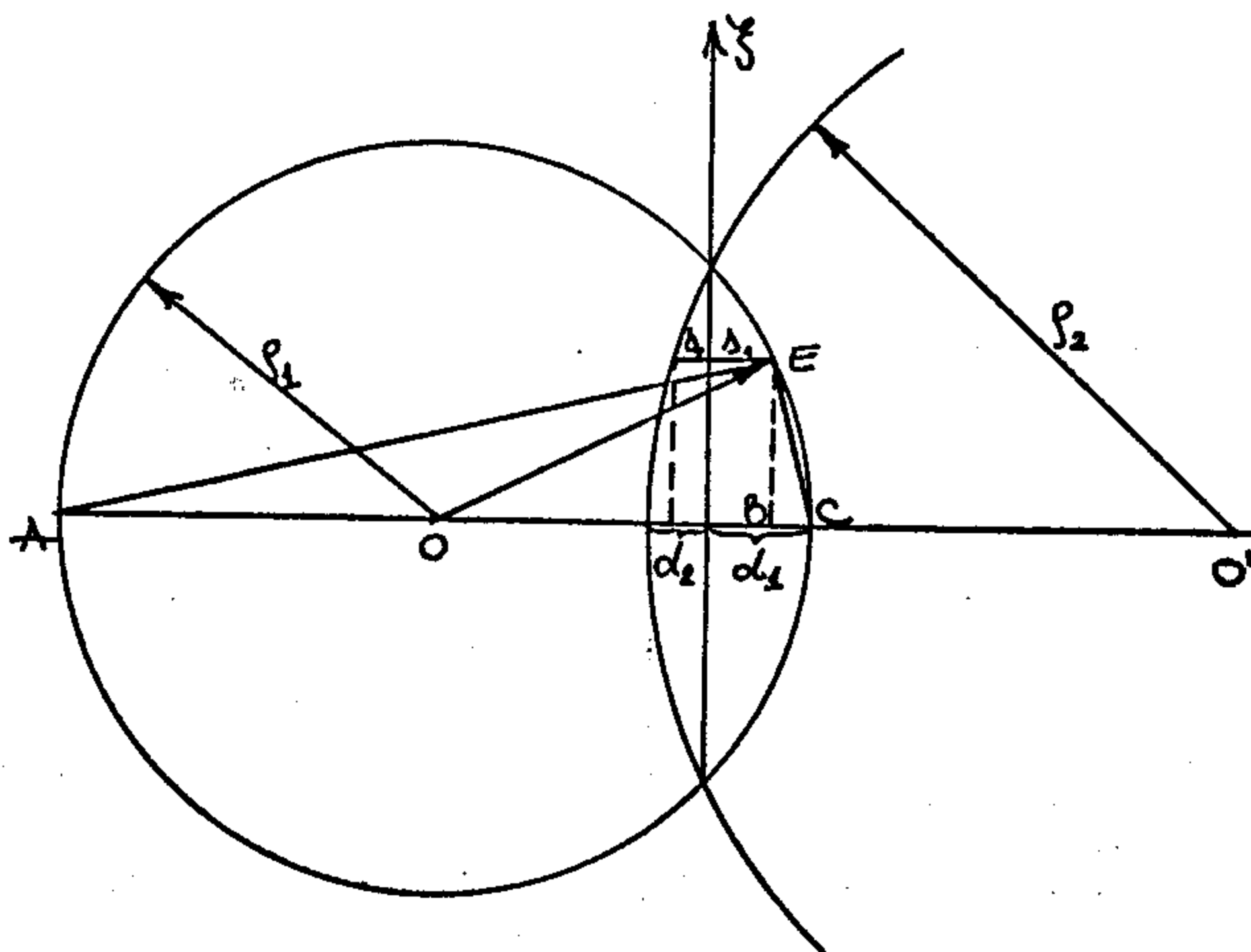


ralnu formulu (24). Svjetlosni talasi prelazeći kroz sočivo dobivaju jednu faznu razliku  $\delta$  koja u Kirchhoffovoj formuli ulazi u vidu eksponencijalne funkcije. Fazna razlika u slučaju bikonveksnog sočiva se određuje po formuli,

$$\delta = kn(\Delta_1 + \Delta_2) \quad (11,1)$$

gde su  $s_1$  i  $s_2$  rastojanje između sredine sočiva i mesta gde padaju i gde izlaze svjetlosni talasi iz sočiva (sl. 35). Za slučaj plankonveksnog sočiva kako se vidi iz sl. 35  $s_1=0$  ili  $s_2=0$ , prema tome u kojem je smjeru okrenuto sočivo u odnosu na upadnu svjetlost. Pretpostavimo da sočivo kao difrakcioni objekt izaziva samo faznu promenu upadnih talasa a iste ne apsorbira. U suprotnom ispred eksponencijalne funkcije faze, dolazi još jedan faktor koji izražava stepen apsorpcije. Daljnji problem se sastoji u povezanosti dužine  $s_1$  i  $s_2$  sa širinom centralnog dela sočiva i položaja na sočivo gde padaju svjetlosni talasi.

Na sl. 35 nacrtano je cilindrično sočivo kao presek dveju cilindričnih površina sa različitim poluprečnicima. Račun ćemo provesti za tanko cilindrično sočivo.



sl. 35

Iz sl. 35 vidimo da je  $\Delta_1 = d_1 - \overline{BC}$ . Označimo poluprečnik prvog cilindra sa centrom u O sa  $\rho_1$ . Vidimo da je  $\overline{OE} = \rho_1$ . Bilo koja tačka udaljena od optičke osi ima apscisu  $\zeta$ . Tako da u našem slučaju je  $\overline{EB} = \zeta$ . Označimo rastojanje  $\overline{OB} = z$ . Iz slike se vidi da je  $\overline{BC} = \rho_1 - z$ , a iz pravog trougla OBE sledi da je  $\zeta^2 + z^2 = \rho_1^2$ , odnosno  $\zeta^2 = \rho_1^2 - z^2$ , tj.

$$\zeta^2 = (\rho_1 - z)(\rho_1 + z) \quad (11,2)$$

Budući da se radi o tankom sočivu možemo uzeti približno da je  $2\rho_1 = \rho_1 + z$  odnosno, da važi približno,

$$\zeta^2 \cong 2\rho_1(\rho_1 - z) \cong 2\rho_1 \overline{BC} \quad (11,3)$$

Iz (11,3) odredimo,  $\overline{BC} \cong \frac{\zeta^2}{2\rho_1}$ , odnosno,

$$\Delta_1 = d_1 - \frac{\zeta^2}{2\rho_1} \quad (11,4)$$

Na potpuno analogan način možemo dobiti,

$$\Delta_2 = d_2 - \frac{\zeta^2}{2\rho_2} \quad (11,5)$$

Formule (11,4) odnosno (11,5) koje uz malu modifikaciju predstavljaju polazne relacije difrakcione teorije Billetovog bisočiva možemo dobiti na jedan posve drugi način. Ukoliko visinu pravouglog trougla AEC

označimo sa  $\xi$  i koristimo poznati teorem pravougljih trouglova, do-  
bićemo,

$$\xi^2 = \overline{AB} \cdot \overline{BC} \quad (11,6)$$

kako je  $\overline{AB} = 2\rho_1 - \overline{BC}$ , (11,6) nam daje,

$$\xi^2 = (2\rho_1 - \overline{BC})\overline{BC} \quad (11,7)$$

Budemo li zanemarili u (11,7)  $\overline{BC}^2$  što je sasvim opravdano zbog male  
dužine, tada ćemo dobiti,

$$\overline{BC} = \frac{\xi^2}{2\rho_1} \quad (11,8)$$

a iz (11,8) formulu za  $s_1$  odnosno  $s_2$ . Naime, relacija (11,8) može se  
izvesti iz (11,7) ako je  $\overline{BC} \ll 2\rho$ .

Ukoliko želimo postaviti difrakcionu teoriju za sočivo  
koje je razrezano po prečniku i obe polovine razdvojene za mali pomak  
 $d$  u odnosu na optičku os, onda formule (11,4) odnosno (11,5) treba mo-  
dificirati za taj slučaj (sl. 34). Te modificirane formule glase,

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= d_1 - \frac{(\xi-d)^2}{2\rho_1} & \text{jer za } d=0 & \Delta_1 = d_1 - \frac{\xi^2}{2\rho_1} \\ \Delta_2 &= d_2 - \frac{(\xi-d)^2}{2\rho_2} & \text{za } d=0 & \Delta_2 = d_2 - \frac{\xi^2}{2\rho_2} \end{aligned} \quad (11,9)$$

Za donju polovinu bisočiva treba uzeti sledeće vrednosti,

$$\begin{aligned} \Delta'_1 &= d_1 - \frac{(\xi+d)^2}{2\rho_1} & \text{jer za } d=0 & \Delta'_1 = d_1 - \frac{\xi^2}{2\rho_1} \\ \Delta'_2 &= d_2 - \frac{(\xi+d)^2}{2\rho_2} & \text{za } d=0 & \Delta'_2 = d_2 - \frac{\xi^2}{2\rho_2} \end{aligned} \quad (11,10)$$

Ovde ćemo sa linijom gore označiti veličine koje se odnose za drugu  
polovinu bisočiva. Naime, veličine  $s_1$ ,  $s_2$ ,  $s'_1$  i  $s'_2$  treba da zadovo-  
ljavaju sledeće granične uslove:

1.  $\Delta_1 = d_1$  za  $\xi = d$
2.  $\Delta_2 = d_2$  za  $\xi = d$
3.  $\Delta'_1 = d_1$  za  $\xi = -d$
4.  $\Delta'_2 = d_2$  za  $\xi = -d$
5.  $\Delta_1 = \Delta'_1$  za  $\xi = \pm d$  odnosno  $\Delta_1(d) = \Delta'_1(-d)$
6.  $\Delta_2 = \Delta'_2$  za  $\xi = \pm d$  odnosno  $\Delta_2(d) = \Delta'_2(-d)$
7.  $\Delta_1 = 0$  za  $\xi = +(D+d)$  odnosno  $\Delta_1(D+d) = \Delta'_1[-(D+d)]$

(11,11)

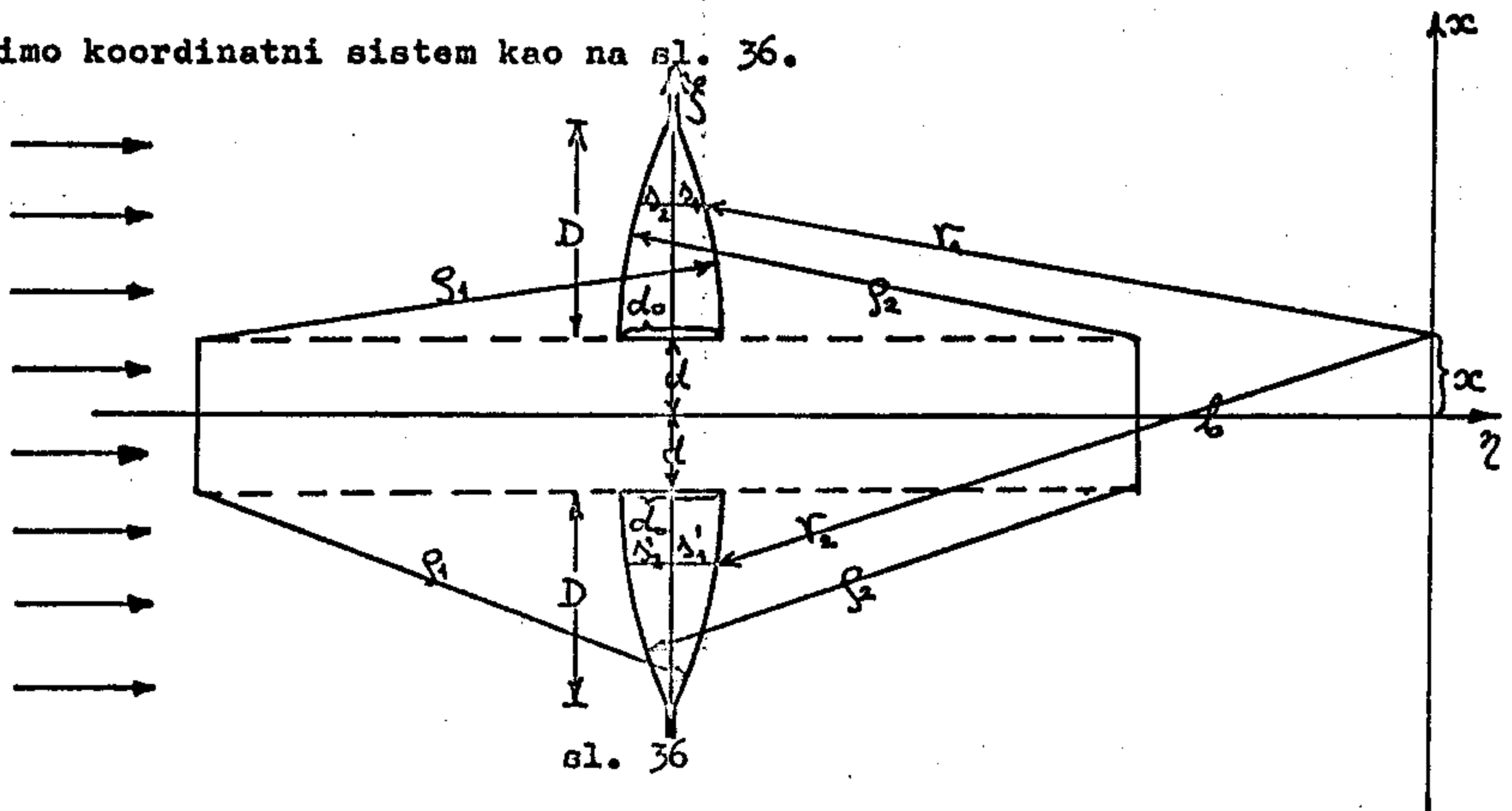
$$\begin{array}{l}
 8. \quad \Lambda_1' = 0 \text{ za } \xi = -(D+d) \text{ odnosno } \Lambda_1(D+d) = \Lambda_1'[-(D+d)] \\
 9. \quad \Lambda_2 = 0 \text{ za } \xi = (D+d) \\
 10. \quad \Lambda_2' = 0 \text{ za } \xi = -(D+d)
 \end{array}
 \left. \vphantom{\begin{array}{l} 8. \\ 9. \\ 10. \end{array}} \right\} \text{odnosno } \Lambda_2(D+d) = \Lambda_2'[-(D+d)] \quad (11,11)$$

nije teško dokazati da (11,9) i (11,10) zadovoljavaju uslove (11,11).

Polazimo iz relacije (1,1), (1,2) i (1,3) za izračunavanje talasne funkcije u nekoj tački prostora iza bismočiva.

$$\begin{aligned}
 g(x, b) = \frac{i}{4} & \left\{ \int_{d-d}^{d+d} [g_{s1} \text{grad } H_0^{\pm}(kr_1) - H_0^{\pm}(kr_1) \text{grad } g_{s1}] \vec{n} dl + \right. \\
 & \left. + \int_{-(d+d)}^{-d} [g_{s2} \text{grad } H_0^{\pm}(kr_2) - H_0^{\pm}(kr_2) \text{grad } g_{s2}] \vec{n} dl \right.
 \end{aligned} \quad (11,12)$$

u (11,12) sa  $\pm d$  smo označili pomak delova sočiva u odnosu na koordinatni sistem,  $2D$  je širina cilindričnog sočiva,  $g_{s1}$  i  $g_{s2}$  su upadne talasne funkcije (sl. 36). Prvo ćemo rešiti problem ravnih upadnih talasa. Položimo koordinatni sistem kao na sl. 36.



Upadne talasne funkcije se razlikuju samo u faznim faktorima. Uzeću da su one oblika,

$$\begin{aligned}
 g_{s1} &= Bf(\xi) e^{ikR} e^{ikn(s_1+s_2)} e^{-iks_2} \\
 g_{s2} &= Bf(\xi) e^{ikR} e^{ikn(s_1'+s_2')} e^{-iks_2'}
 \end{aligned} \quad (11,13)$$

U (11,13) moramo uzeti upadne talasne funkcije tako, jer  $R$  je udalje-



nost od sočiva koje daje paralelan snop svjetlosti do osi  $\xi$ . Ali svjetlost ide kroz vazduh samo do bismočiva i zato prolazi put  $R - s_2$ . Do izlaza iz bismočiva svjetlost još prolazi put  $s_1 + s_2$  kroz sredinu indeksa prelamanja  $n$ .  $B$ , je jedna konstanta a  $f(\xi)$  je funkcija transparentije. Odredimo gradiente upadnih funkcija (11,13).

$$\text{grad } g_{s_1} = B e^{ikR} e^{ikn(d_1+d_2)} f(\xi) e^{-ikn\left[\frac{(\xi-d)^2}{2s_1} + \frac{(\xi-d)^2}{2s_2}\right]} e^{-ik\left[d_2 - \frac{(\xi-d)^2}{2s_2}\right]} \cdot \left[ f'(\xi) - \frac{ikn}{s_1}(\xi-d) - \frac{ikn}{s_2}(\xi-d) + \frac{ik}{s_2}(\xi-d) \right] \text{grad } \xi \quad (11,14)$$

kako je  $\text{grad } \xi = \vec{j}$  i  $(\vec{s}_0 \cdot \vec{n}) = \vec{j} \cdot \vec{z} = 0$  sledi da je  $\text{grad } g_{s_1} = 0$ . Na isti način se dokazuje da je  $\text{grad } g_{s_2} = 0$ . Dalje koristimo relaciju (1,5) i uslov  $\vec{r}_0 \cdot \vec{n} \approx -1$ , pa ćemo dobiti,

$$g(x,b) = \frac{B}{4} \sqrt{\frac{2k}{\pi b}} e^{i(kR - \frac{\pi}{4})} \left\{ \int_d^{d+D} f(\xi) e^{ikr_1} e^{ikn(s_1+s_2)} e^{-ikr_2} d\xi + \int_{-(d+D)}^{-d} f(\xi) e^{ikr_2} e^{ikn(s'_1+s'_2)} e^{-ikr_1} d\xi \right\} \quad (11,15)$$

Iz slike 36 odredimo  $r_1$  i  $r_2$ ,

$$\begin{aligned} r_1^2 &= (b-s_1)^2 + (\xi-x)^2 \\ r_2^2 &= (b-s'_1)^2 + (\xi-x)^2 \end{aligned} \quad (11,16)$$

i zbog malih vrednosti  $s_1$  i  $s'_1$  ćemo dobiti,

$$\begin{aligned} r_1 &\sim b-s_1 + \frac{(\xi-x)^2}{2(b-s_1)} \sim b-s_1 + \frac{(\xi-x)^2}{2b} \\ r_2 &\sim b-s'_1 + \frac{(\xi-x)^2}{2(b-s'_1)} \sim b-s'_1 + \frac{(\xi-x)^2}{2b} \end{aligned} \quad (11,17)$$

Zamenimo (11,17) u (11,15) i označimo sa:  $d_0$  - širinu centralnog dela sočiva,  $\frac{1}{f} = (n-1)\left(\frac{1}{s_1} + \frac{1}{s_2}\right)$ , fokalnu daljinu sočiva. Posle sredjivanja izlazi,

$$g(x,b) = \frac{B}{4} \sqrt{\frac{2k}{\pi b}} e^{i(kR - \frac{\pi}{4})} e^{ik\left[b + (n-1)d_0 + \frac{x^2}{2b} - \frac{d^2}{2f}\right]} \left\{ \int_d^{d+D} f(\xi) e^{\frac{i\pi}{2}\left[\frac{2}{\lambda}\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{f}\right)\xi^2 - \frac{4}{\lambda}\left(\frac{x}{b} - \frac{d}{f}\right)\xi\right]} d\xi + \int_{-(d+D)}^{-d} f(\xi) e^{\frac{i\pi}{2}\left[\frac{2}{\lambda}\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{f}\right)\xi^2 - \frac{4}{\lambda}\left(\frac{x}{b} + \frac{d}{f}\right)\xi\right]} d\xi \right\} \quad (11,18)$$

Dalje označimo sa:

$$\begin{aligned} \frac{2}{\lambda} \left( \frac{1}{b} - \frac{1}{f} \right) &= p^2 \\ \frac{2}{\lambda} \left( \frac{x}{b} - \frac{d}{f} \right) &= q \\ \frac{2}{\lambda} \left( \frac{x}{b} + \frac{d}{f} \right) &= t \end{aligned} \quad (11,19)$$

i konstantu ispred integrala,

$$C_k = \exp \left\{ i \left( kR - \frac{\pi}{4} \right) + ik \left[ b + (n-1)d_0 + \frac{x^2}{2b} - \frac{d^2}{2f} \right] \right\}$$

i zamenimo u (11,18)

$$g(x, b) = \frac{B}{4} \sqrt{\frac{2k}{\pi b}} C_k \left\{ \int_d^{d+D} e^{\frac{i\pi}{2} (p^2 \zeta^2 - 2q\zeta)} d\zeta + \int_{-(d+D)}^{-d} e^{\frac{i\pi}{2} (p^2 \zeta^2 - 2t\zeta)} d\zeta \right\} \quad (11,20)$$

U (11,20) uzeto je  $f(\zeta) = 1$ , slučaj homogenih talasa.

Rešavanje integrala (11,20) je identično sa rešavanjem integrala kod biogledala i biprizme. Kada se rešavaju integrali (11,20) i dobiveni se rezultat množi sa njemu konjugiranom, izlazi funkcija intenziteta koja je oblika,

$$J = \frac{B^2}{4\lambda b p^2} \left\{ (A_s + C_s)^2 + (B_s + D_s)^2 - 4 \left[ (A_s C_s + B_s D_s) \sin \frac{2\pi x d}{\lambda(b-f)} + (A_s D_s - B_s C_s) \cos \frac{2\pi x d}{\lambda(b-f)} \right] \sin \frac{2\pi x d}{\lambda(b-f)} \right\} \quad (11,21)$$

i prikazuje raspored intenziteta u nekoj ravnini udaljenoj za  $\underline{b}$  iza bisočiva ako su upadni talasi paralelni. U (11,21) integrali imaju sledeći oblik\*.

$$\begin{aligned} A_s &= C \left[ p(d+D) - \frac{q}{p} \right] - C \left( pd - \frac{q}{p} \right) \\ B_s &= S \left[ p(d+D) - \frac{q}{p} \right] - S \left( pd - \frac{q}{p} \right) \\ C_s &= C \left[ p(d+D) + \frac{t}{p} \right] - C \left( pd + \frac{t}{p} \right) \\ D_s &= S \left[ p(d+D) + \frac{t}{p} \right] - S \left( pd + \frac{t}{p} \right) \end{aligned} \quad (11,22)$$

Parametar  $\underline{b}$  u (11,21) i (11,22) može imati bilo koju vrednost. Zbog toga on može da bude,

$$\begin{aligned} b &< f \\ b &> f \\ b &= f \end{aligned} \quad (11,23)$$

=====

\*Integrale bisočiva označićemo indeksom  $\underline{B}$ .

1. Slučaj  $b < f$ : tada je  $\frac{1}{b} > \frac{1}{f}$  i  $p^2 > 0$ . Jedina razlika u (11,21) dolazi u argumentima trigonometrijskih funkcija. Kako je sinus neparna funkcija, onda ćemo dobiti,

$$J = \frac{B^2}{4\lambda b p^2} \left\{ (A_s + C_s)^2 + (B_s + D_s)^2 - 4[(A_s C_s + B_s D_s) \sin \frac{2\pi x d}{\lambda(f-l)} + (B_s C_s - A_s D_s) \cos \frac{2\pi x d}{\lambda(f-l)}] \sin \frac{2\pi x d}{\lambda(f-l)} \right\} \quad (11,24)$$

za sistem integrala (11,22). Ova funkcija se sastoji takodje od difrakcionog člana koji je oblika,

$$(A_s + C_s)^2 + (B_s + D_s)^2 \quad (11,25)$$

i predstavlja modulacionu funkciju interferencionog člana koji je oblika,

$$\left[ (A_s C_s + B_s D_s) \sin \frac{2\pi x d}{\lambda(f-l)} + (B_s C_s - A_s D_s) \cos \frac{2\pi x d}{\lambda(f-l)} \right] \sin \frac{2\pi x d}{\lambda(f-l)} \quad (11,25a)$$

Specijalno na mestima odredjenim sa,

$$x = \frac{n\lambda(f-l)}{2d} \quad n = 0, \pm 1, \pm 2 \dots$$

intenzitet će biti jednak,

$$I = \frac{B^2}{4\lambda b p^2} \left\{ (A_s + C_s)^2 + (B_s + D_s)^2 \right\} \quad (11,26)$$

koji je difrakcionog karaktera i prikazuje da su interferencione linije člana (11,25a) promenljivog intenziteta.

2. Slučaj  $b > f$ : tada je  $\frac{1}{b} < \frac{1}{f}$  i saglasno (11,19)  $\underline{p}$  će biti imaginarnog karaktera a  $\underline{q}$  i  $\underline{t}$  su realne veličine. Budući da  $\underline{p}$  ulazi i u sistemu integrala i u konstanti ispred funkcije intenziteta, tada su argumenti sistema integrala (11,22) imaginarnog karaktera. Zbog toga će biti,  $\underline{p} = i\underline{p}'$  gde je

$$p' = \sqrt{\frac{2}{\lambda} \left( \frac{1}{f} - \frac{1}{b} \right)} \quad (11,27)$$

zamenimo (11,27) u (11,22) i uzimamo u obzir da je,

$$C(iv) = iC(v); S(iv) = -iS(v) \quad (11,28)$$

$$\begin{aligned}
 A_s &= C \left[ i p' (d+D) - \frac{q}{i p'} \right] - C \left( i p' d - \frac{q}{i p'} \right) = i \left\{ C \left[ p' (d+D) + \frac{q}{p'} \right] - C \left( p' d + \frac{q}{p'} \right) \right\} = i A_{1s} \\
 B_s &= S \left[ i p' (d+D) - \frac{q}{i p'} \right] - S \left( i p' d - \frac{q}{i p'} \right) = -i \left\{ S \left[ p' (d+D) + \frac{q}{p'} \right] - S \left( p' d + \frac{q}{p'} \right) \right\} = -i B_{1s} \\
 C_s &= C \left[ i p' (d+D) + \frac{t}{i p'} \right] - C \left( i p' d + \frac{t}{i p'} \right) = i \left\{ C \left[ p' (d+D) - \frac{t}{p'} \right] - C \left( p' d - \frac{t}{p'} \right) \right\} = i C_{1s} \\
 D_s &= S \left[ i p' (d+D) + \frac{t}{i p'} \right] - S \left( i p' d + \frac{t}{i p'} \right) = -i \left\{ S \left[ p' (d+D) - \frac{t}{p'} \right] - S \left( p' d - \frac{t}{p'} \right) \right\} = -i D_{1s}
 \end{aligned} \tag{11,29}$$

gde su:

$$\begin{aligned}
 A_{1s} &= C \left[ p' (d+D) + \frac{q}{p'} \right] - C \left( p' d + \frac{q}{p'} \right) \\
 B_{1s} &= S \left[ p' (d+D) + \frac{q}{p'} \right] - S \left( p' d + \frac{q}{p'} \right) \\
 C_{1s} &= C \left[ p' (d+D) - \frac{t}{p'} \right] - C \left( p' d - \frac{t}{p'} \right) \\
 D_{1s} &= S \left[ p' (d+D) - \frac{t}{p'} \right] - S \left( p' d - \frac{t}{p'} \right)
 \end{aligned} \tag{11,30}$$

Tako da za slučaj  $b > f$  funkcija intenziteta glasi,

$$\begin{aligned}
 J &= \frac{B^2}{4\lambda b p'^2} \left\{ (A_{1s} + C_{1s})^2 + (B_{1s} + D_{1s})^2 - 4 \left[ (A_{1s} C_{1s} + B_{1s} D_{1s}) \sin \frac{2\pi x d}{\lambda(b-f)} + \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + (B_{1s} C_{1s} - A_{1s} D_{1s}) \cos \frac{2\pi x d}{\lambda(b-f)} \right] \sin \frac{2\pi x d}{\lambda(b-f)} \right\}
 \end{aligned} \tag{11,31}$$

I funkcija (11,31) se sastoji od dva člana. Prvi je difrakcionog karaktera,

$$(A_{1s} + C_{1s})^2 + (B_{1s} + D_{1s})^2 \tag{11,32}$$

a drugi,  $\left[ (A_{1s} C_{1s} + B_{1s} D_{1s}) \sin \frac{2\pi x d}{\lambda(b-f)} + (B_{1s} C_{1s} - A_{1s} D_{1s}) \cos \frac{2\pi x d}{\lambda(b-f)} \right] \sin \frac{2\pi x d}{\lambda(b-f)}$  (11,33) je interferencionog karaktera. I ovde kao i ranije, specijalno za

$$x = n \frac{\lambda(b-f)}{2d} \tag{11,34}$$

dobićemo položaje maksimuma interferencionih linija koje su zadane relacijom,

$$I = \frac{B^2}{4\lambda b p'^2} \left\{ (A_{1s} + C_{1s})^2 + (B_{1s} + D_{1s})^2 \right\}$$

3. Slučaj  $b = f$ :

Iz (11,18) izlazi, 
$$g(x, f) = \frac{B}{4} \sqrt{\frac{2f}{\pi f}} e^{i(kR - \frac{\pi}{4})} e^{ik \left[ f + (n-1)d - \frac{x^2}{2f} - \frac{d^2}{2f} \right]} \left\{ \int_d^{d+D} e^{-\frac{ik}{f}(x-d)\xi} d\xi + \int_{-(d+D)}^{-d} e^{-\frac{ik}{f}(x+d)\xi} d\xi \right\} \tag{11,35}$$

označimo kraće sa:

$$\begin{aligned}\Delta_1 &= \frac{k}{f}(x-d) \\ \Delta_2 &= \frac{k}{f}(x+d)\end{aligned}\quad (11,36)$$

$$C_k = \exp i \left[ \left( kR - \frac{\pi}{4} \right) + k \left( f + (n-1)d_0 + \frac{x^2}{2f} - \frac{d^2}{2f} \right) \right]$$

pa ćemo dobiti,

$$g(x, f) = \frac{B}{4} \sqrt{\frac{2k}{\pi f}} C_k \left\{ \int_d^{d+\Delta} e^{-i\Delta_1 \xi} d\xi + \int_{-(d+\Delta)}^{-d} e^{-i\Delta_2 \xi} d\xi \right\} \quad (11,37)$$

Rešavanjem (11,37) dobićemo vrednost kompleksne amplitude. Budući da je izračunavanje intenziteta iz (11,37) prilično komplicirano ako se rezultat integracije (11,37) pomnoži sa njemu konjugirano kompleksnom funkcijom, postupimo na sledeći način. Rezultat integracije (11,37) može se napisati i ovako:

$$g(x, f) = \frac{B}{4} \sqrt{\frac{2k}{\pi f}} C_k \left\{ a_1 e^{i\varphi_1} + a_2 e^{i\varphi_2} \right\} \quad (11,38)$$

odavde dobijemo vrednost intenziteta,

$$J = \frac{B^2}{4\lambda f} \left\{ a_1^2 + a_2^2 + 2a_1 a_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1) \right\} \quad (11,39)$$

i dalji zadatak se sastoji u određivanju amplituda  $a_1$ ,  $a_2$  i faza  $\varphi_1$  i  $\varphi_2$ . Upoređivanjem rezultata integracije (11,37) sa relacijom (11,38) izlazi,

$$\begin{aligned}a_1 &= \frac{2}{\Delta_1} \sin \frac{\Delta_1 \Delta}{2} & \varphi_1 &= -\Delta_1 \left( d + \frac{\Delta}{2} \right) \\ a_2 &= \frac{2}{\Delta_2} \sin \frac{\Delta_2 \Delta}{2} & \varphi_2 &= \Delta_2 \left( d + \frac{\Delta}{2} \right)\end{aligned}\quad (11,40)$$

Zamenimo (11,40) u (11,39) pa ćemo dobiti vrednost intenziteta.

$$J = \frac{B^2 \Delta^2}{4\lambda f} \left\{ \left( \frac{\sin \frac{\Delta_1 \Delta}{2}}{\frac{\Delta_1 \Delta}{2}} \right)^2 + \left( \frac{\sin \frac{\Delta_2 \Delta}{2}}{\frac{\Delta_2 \Delta}{2}} \right)^2 + 2 \left( \frac{\sin \frac{\Delta_1 \Delta}{2}}{\frac{\Delta_1 \Delta}{2}} \right) \left( \frac{\sin \frac{\Delta_2 \Delta}{2}}{\frac{\Delta_2 \Delta}{2}} \right) \cos \frac{2\pi x (2d+\Delta)}{\lambda f} \right\} \quad (11,41)$$

To je formula Fraunhoferove difrakcije na dve paralelne pukotine sa fazom. Analiza sličnih funkcija je provedena u radu [34]. Napominjem da ćemo kasnije dobiti istu formulu uz druge pretpostavke i drugi način rešavanja (vidi formulu (14,9)). To je sasvim razumljivo, jer se radi o istom problemu koji se rešava na dva različita načina.

4. Slučaj  $\underline{b} = \underline{f}$ , ću analizirati još jednom uz dopunski uslov  $\underline{d} = 0$ . Ovaj slučaj predstavlja difrakciju svjetlosti na tankom cilindričnom sočivu. Iz (11,18) izlazi,

$$g(x, f) = \frac{B}{4} \sqrt{\frac{2R}{\pi f}} e^{i(kR - \frac{\pi}{4})} e^{ik[f + (n-1)d_0 + \frac{x^2}{2f}]} \int_{-D}^D e^{-i\frac{\pi}{\lambda} \frac{2x}{f} y} dy \quad (11,42)$$

odnosno intenzitet,

$$J = \frac{B^2 D^2}{\lambda f} \left( \frac{\sin \frac{2\pi}{\lambda} \frac{x}{f} D}{\frac{2\pi}{\lambda} \frac{x}{f} D} \right)^2 \quad (11,43)$$

a to je formula Fraunhoferove difrakcije na otvoru širine  $2D$ . Vidimo da je (11,43) jednako difrakcionom intenzitetu na otvoru širine  $2D$  koji ne sadrži sočivo. Znači na fokalnu ravninu cilindričnog sočiva dobićemo jedan izrazitiji intenzitet i jedan niz sporednih intenziteta, kako pokazuje (11,43). Visina tog intenziteta na mesto  $\underline{b} = \underline{f}$ ,  $\underline{x} = 0$  iz (11,43) je

$$J_0 = \frac{B^2 D^2 (n-1)}{\lambda (f_1 + f_2)} \quad (11,44)$$

Istu visinu intenziteta možemo dobiti iz (11,21) za  $\underline{d} = 0$ ,  $\underline{b} = \underline{f}$  i  $\underline{x} = 0$ , [37].

$$J = \frac{B^2 D^2}{\lambda f} \left[ \left( \frac{C(pD)}{pD} \right)^2 + \left( \frac{S(pD)}{pD} \right)^2 \right] \quad (11,45)$$

za  $\underline{b} \neq \underline{f}$  funkcija (11,45) nam daje raspored intenziteta duž optičke osne ravnine. Medjutim, za  $\underline{b} = \underline{f}$ ,  $p \rightarrow 0$  i izraz (11,45) postaje neodređen. Saglasno L'hospitalovom pravilu dobićemo,

$$\lim_{pD \rightarrow 0} \frac{C(pD)}{pD} = \lim_{pD \rightarrow 0} \cos \frac{\pi}{2} p^2 D^2 \rightarrow 1$$

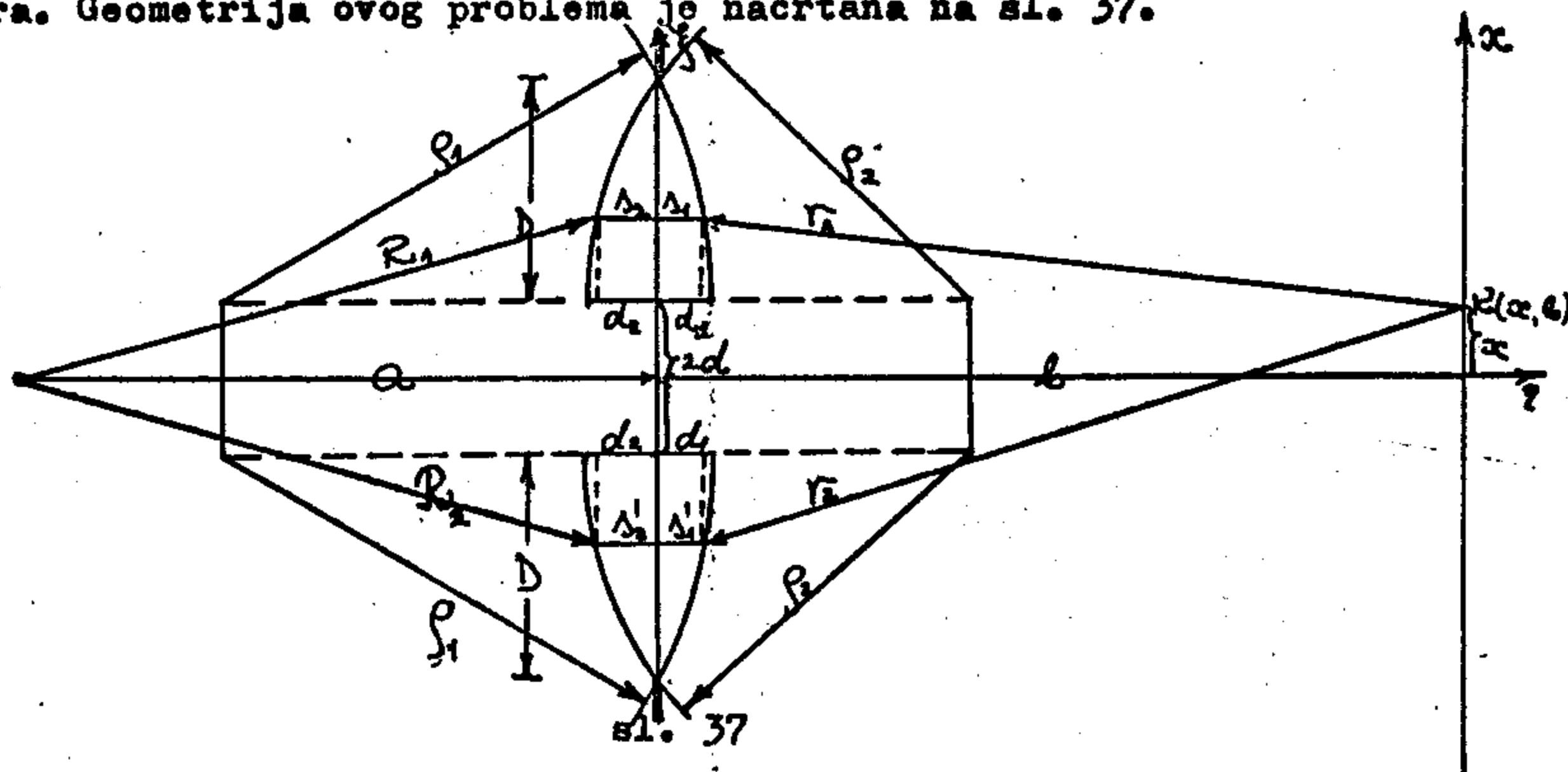
$$\lim_{pD \rightarrow 0} \frac{S(pD)}{pD} = \lim_{pD \rightarrow 0} \sin \frac{\pi}{2} p^2 D^2 \rightarrow 0 \quad x=0.$$

Time je dokazano da je (11,45) jednaka (11,43) za  $\underline{b} = \underline{f}$ . Napominjem da su funkcije (11,21), (11,24) i (11,31) simetrične u odnosu na os  $\underline{x} = 0$ .

Dokaz ide po istoj analogiji kao kod biogledala i biprizme.

## 12. SLUČAJ UPADNIH CILINDRIČNIH TALASA

Analiziraću još jednom slučaj koji je iznesen u paragrafu 11, samo umesto upadnih paralelnih talasa uzeću da su upadni talasi cilindrični. Obično se eksperimenti sa Biletovim bismočivom izvode sa upadnim cilindričnim talasima. Ovaj slučaj u sebi sadrži različite kombinacije u zavisnosti od položaja izvora cilindričnih talasa. Tako da uz položaj izvora dobijemo slučaj fiktivnih ili pak realnih zračnih centara. Geometrija ovog problema je nacrtana na sl. 37.



Fazna funkcija  $i$  u slučaju cilindričnih talasa treba da zadovoljava uslove koje sam postavio za upadne paralelne talase. Polazimo iz formule (11,12). Upadne talasne funkcije ćemo uzeti u sledećoj formi,

$$g_{s_1} = Af(\xi) \sqrt{\frac{2}{\pi k R_1}} e^{i(kR_1 - \frac{\pi}{4})} e^{ik(\Delta_1 + \Delta_2)\eta} \quad (12,1)$$

$$g_{s_2} = Af(\xi) \sqrt{\frac{2}{\pi k R_2}} e^{i(kR_2 - \frac{\pi}{4})} e^{ik(\Delta'_1 + \Delta'_2)\eta}$$

gde su:  $\underline{s_1}$ ,  $\underline{s_2}$ ,  $\underline{s_1'}$  i  $\underline{s_2'}$  zadane relacijama (11,9) i (11,10). Otuda,

$$\text{grad } g_{s_1} = Af(\xi) \text{grad } H_0^{(1)}(kR_1) e^{ik(\Delta_1 + \Delta_2)\eta}$$

$$\text{grad } g_{s_2} = Af(\xi) \text{grad } H_0^{(1)}(kR_2) e^{ik(\Delta'_1 + \Delta'_2)\eta} \quad (11,2)$$

Kao i ranije, uzećemo, zbog velikih vrednosti argumenata, asimptotsku vrednost Hankelovih funkcija. Dalje uzimamo da je,  $(\vec{n} \cdot \vec{R}_{01}) \approx 1$ ,

$$(\vec{n} \cdot \vec{R}_{02}) \approx 1, (\vec{n} \cdot \vec{F}_{01}) \approx -1, (\vec{n} \cdot \vec{F}_{02}) \approx -1 \quad (12,3)$$

$$g(x, b) = \frac{kA}{2} \left\{ \int_{-d}^{d+D} [f(\xi) H_0^{(1)}(kR_1) H_0^{(1)}(kr_1) e^{ikn(\nu_1 + \nu_2)}] d\xi + \int_{-(d+D)}^d [f(\xi) H_0^{(1)}(kR_2) H_0^{(1)}(kr_2) e^{ikn(\nu'_1 + \nu'_2)}] d\xi \right\} \quad (12,4)$$

odnosno,

$$g(x, b) = -\frac{iA}{\pi\sqrt{ab}} \left\{ \int_{-d}^{d+D} [f(\xi) e^{ik(R_1 + r_1)} e^{ikn(\nu_1 + \nu_2)}] d\xi + \int_{-(d+D)}^d [f(\xi) e^{ik(R_2 + r_2)} e^{ikn(\nu'_1 + \nu'_2)}] d\xi \right\} \quad (12,5)$$

Iz sl. 37 sledi da treba uzeti sledeće vrednosti za,

$$\begin{aligned} r_1 &\sim b - \nu_1 + \frac{(\xi - x)^2}{2b} \\ R_1 &\sim a - \nu_2 + \frac{\xi^2}{2a} \\ r_2 &\sim b - \nu'_1 + \frac{(\xi - x)^2}{2b} \\ R_2 &\sim a - \nu'_2 + \frac{\xi^2}{2a} \end{aligned} \quad (12,6)$$

Zamenom izraza (12,6) u (12,5) i sredjivanjem dobićemo,

$$g(x, b) = -\frac{iC_k A}{\pi\sqrt{ab}} \left\{ \int_{-d}^{d+D} e^{i\frac{\pi}{2} \left[ \frac{2}{\lambda} \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{1}{f} \right) \xi^2 - \frac{2}{\lambda} \left( \frac{x}{b} - \frac{d}{f} \right) \xi \right]} d\xi + \int_{-(d+D)}^d e^{i\frac{\pi}{2} \left[ \frac{2}{\lambda} \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{1}{f} \right) \xi^2 - \frac{2}{\lambda} \left( \frac{x}{b} + \frac{d}{f} \right) \xi \right]} d\xi \right\} \quad (12,7)$$

gde su:  $C_k = \exp \cdot [ik(a+b+x^2/2b + (n-1)d_0 - d^2/2f)]$   $d_0 = d_1 + d_2$  - širina centralnog dela sočiva,  $\frac{1}{f} = (n-1) \left( \frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} \right)$  - fokalno rastojanje sočiva i  $f(\xi) = 1$ , upadni talasi su homogeni, tj. ne postoji apsorpcija.

Rešavanje integrala (12,7) je identično sa rešavanjem predhodnih integrala. Zbog toga označimo sa,

$$\begin{aligned} p_1^2 &= \frac{2}{\lambda} \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{1}{f} \right) \\ q &= \frac{2}{\lambda} \left( \frac{x}{b} - \frac{d}{f} \right) \\ t &= \frac{2}{\lambda} \left( \frac{x}{b} + \frac{d}{f} \right) \end{aligned} \quad (12,8)$$

Uvrstimo (12,8) u (12,7) i posle sredjivanja izlazi,

$$g(x, b) = -\frac{iC_k A}{\pi\sqrt{ab} p_1} \left\{ e^{-i\frac{\pi}{2} \left( \frac{q}{p_1} \right)^2} \int_{p_1 d - \frac{q}{p_1}}^{p_1(d+D) - \frac{q}{p_1}} e^{i\frac{\pi}{2} v^2} dv + e^{-i\frac{\pi}{2} \left( \frac{t}{p_1} \right)^2} \int_{[p_1(d+D) + \frac{t}{p_1}]}^{-p_1 d + \frac{t}{p_1}} e^{i\frac{\pi}{2} w^2} dw \right\} \quad (12,9)$$

ili

$$g(x, b) = -\frac{iC_k A}{\pi\sqrt{ab} p_1} \left\{ e^{-i\frac{\pi}{2} \left( \frac{q}{p_1} \right)^2} (A_{2s} + iB_{2s}) + e^{-i\frac{\pi}{2} \left( \frac{t}{p_1} \right)^2} (C_{2s} + iD_{2s}) \right\} \quad (12,10)$$



za sistem integrala:

$$\begin{aligned} A_{2s} &= C \left[ p_1(d+D) - \frac{a}{p_1} \right] - C \left( p_1 d - \frac{a}{p_1} \right) \\ B_{2s} &= S \left[ p_1(d+D) - \frac{a}{p_1} \right] - S \left( p_1 d - \frac{a}{p_1} \right) \\ C_{2s} &= C \left[ p_1(d+D) + \frac{a}{p_1} \right] - C \left( p_1 d + \frac{a}{p_1} \right) \\ D_{2s} &= S \left[ p_1(d+D) + \frac{a}{p_1} \right] - S \left( p_1 d + \frac{a}{p_1} \right) \end{aligned} \quad (12,11)$$

odnosno intenzitet,  $J = \frac{\lambda^2}{\pi^2 ab p_1^2} \left\{ (A_{2s} + C_{2s})^2 + (B_{2s} + D_{2s})^2 - \right.$

$$\left. - 4 \left[ (A_{2s} C_{2s} + B_{2s} D_{2s}) \sin \frac{2\pi x d}{2\lambda f \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{1}{f} \right)} + (B_{2s} C_{2s} - A_{2s} D_{2s}) \cos \frac{2\pi x d}{2\lambda f \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{1}{f} \right)} \right] \right\} \quad (12,12)$$

Uopšte uzevši, funkcija (12,12) takodje se sastoji od dva dela. Prvi deo je oblika,

$$(A_{2s} + C_{2s})^2 + (B_{2s} + D_{2s})^2 \quad (12,13)$$

i ima difrakcioni karakter, dok je drugi deo

$$\left[ (A_{2s} C_{2s} + B_{2s} D_{2s}) \sin \frac{2\pi x d}{2\lambda f \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{1}{f} \right)} + (B_{2s} C_{2s} - A_{2s} D_{2s}) \cos \frac{2\pi x d}{2\lambda f \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{1}{f} \right)} \right] \sin \frac{2\pi x d}{2\lambda f \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{1}{f} \right)} \quad (12,14)$$

interferencionog karaktera. Što znači da je i kod Billetovog bismočiva nemoguće odvojiti difrakcione pojave od interferencionih. Naime, iz (12,13) zaključujemo da su interferencione linije promenljivog intenziteta. Njihovi maksimumi određeni su difrakcionim članom (12,13). Karakter funkcije (12,12) je analogan funkcijama koje smo dobili kod biogledala i biprizme, međjutim, diskusiju treba provesti u zavisnosti od parametara  $\underline{a}$  i  $\underline{b}$ . U tom slučaju dolaze sledeće kombinacije,

1.  $a < f$ ; sledi  $p_1 = \sqrt{\frac{2}{\lambda} \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{1}{f} \right)} > 0$ ,  $\underline{b}$  je proizvoljan. U tom slučaju teorija se svodi za slučaj fiktivnih centara, jer tada nećemo imati ograničenje što se tiče parametra  $\underline{b}$ .

2.  $a > f$ ; kako je  $\frac{1}{a} < \frac{1}{f}$  onda treba uzeti u obzir i vrednost parametra  $\underline{b}$  i to,

2a.  $b > f$  tako da je  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} < \frac{1}{f}$ , tada argumenti Fres-

nelovih integrala postaju imaginarni, takodje i konstanta  $p_1$  ispred funkcije intenziteta.

$$2b. \quad b = f, \quad p_1 = \sqrt{\frac{2}{\lambda a}} > 0$$

$$2c. \quad b < f, \quad \frac{1}{b} > \frac{1}{f}, \quad p_1 > 0 \text{ bez obzira na položaj izvora } a,$$

$$3. \quad \frac{1}{a} + \frac{1}{b} > \frac{1}{f}, \quad p_1 > 0$$

4.  $x \rightarrow \infty$ , slučaj se svodi na upadne paralelne talase uz obrazloženje koje sam dao za konstantu ispred funkcije intenziteta kod Fraunhoferovog prelaza kod biogledala. Na kraju može se uzeti slučaj, 5.  $a = f$ .

Sve ove specijalizacije lako je provesti u funkciju (12,12) po istoj analogiji koja je izneta u paragrafu 11. Mi ćemo поближе upoznati se sa slučajem 1, za  $a < f$ ,  $b$  je proizvoljan. Odmah se vidi da u tom slučaju zbog proizvoljnosti parametra  $b$  dobije se ista difrakciona i interferencionna slika za svako  $b$ . Otuda sledi da se slučaj svodi na fiktivne zračne centre koji se formiraju na istoj strani gde se nalazi i realni cilindrični izvor. To je poznato i kod lupe sa jedinom razlikom što je ovde lupa podeljena na dva dela koji su međusobno razmaknuti za razmak  $2d$ . Za  $a < f$ ,  $p_1 > 0$  i raspored difrakcionog intenziteta svetlosti opisuje funkcija (12,12) sa difrakcionom funkcijom (12,13) i interferencionom (12,14).

Specijalno za  $x = \frac{n\lambda b f}{2d} \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{1}{f} \right) \quad n = 0, \pm 1, \pm 2 \dots$  (12,15) dobićemo maksimume interferencionih linija koje opisuje funkcija (12,13). Funkcija (12,12) je simetrična u odnosu na os  $x = 0$ . Takodje su simetrične i funkcije (12,13) i (12,14). Relacija (12,15) može se napisati i na sledeći način,

$$x = \frac{n\lambda D_0}{2d} \left( \frac{f}{a} - \frac{e}{D_0} \right) \quad (12,16)$$

uz  $D_0 = a + b$ .

i ako uzimamo u obzir iz teorije dvaju izvora raspored maksimuma interferencijonih linija koji je zadan relacijom (7,14)

$$x = \frac{m\lambda D_0}{2\lambda} \quad (12,17)$$

sledi da je,

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{1}{d} \left( \frac{f}{a} - \frac{b}{D_0} \right) \quad (12,18)$$

odnosno,

$$\lambda = \frac{d}{\frac{f}{a} - \frac{b}{D_0}} \quad (12,19)$$

Vidi se da je  $\underline{s} > 0$  jer je,  $\frac{f}{a} > 1$ , a  $\frac{b}{a+b} < 1$ . Specijalno je  $\underline{s} = 0$  za  $\underline{d} = 0$  što bi trebalo očekivati jer tada ćemo dobiti slučaj lupe pomoću koje se ne pojavljuju interferencijone linije. Ostale specijalizacije smatram da nije potrebno provesti.

Postavljena teorija može da nam potvrdi jednu poznatu osobinu konvergentnih sočiva. Znamo da, cilindrična sočiva pretvaraju cilindrične talase u ravne ako se izvor postavlja na žižnu ravninu sočiva. Ovu osobinu možemo dobiti i pomoću difrakcione teorije odnosno iz (12,12) za  $\underline{d} = 0$ ,  $\underline{a} = \underline{f}$ . Tada će (12,12) glasiti,

$$J = \frac{A^2}{\pi^2 b f p_2^2} \left\{ (A_{3s} + C_{3s})^2 + (B_{3s} + D_{3s})^2 \right\} \quad (12,20)$$

gde su:

$$\begin{aligned} q &= t = \frac{2x}{\lambda b} & p_2 &= \sqrt{\frac{2}{\lambda b}} \\ A_{3s} &= C(pD - \frac{q}{p}) + C(\frac{q}{p}) \\ B_{3s} &= S(pD - \frac{q}{p}) + S(\frac{q}{p}) \\ C_{3s} &= C(pD + \frac{q}{p}) - C(\frac{q}{p}) \\ D_{3s} &= S(pD + \frac{q}{p}) - S(\frac{q}{p}) \end{aligned} \quad (12,21)$$

odnosno,

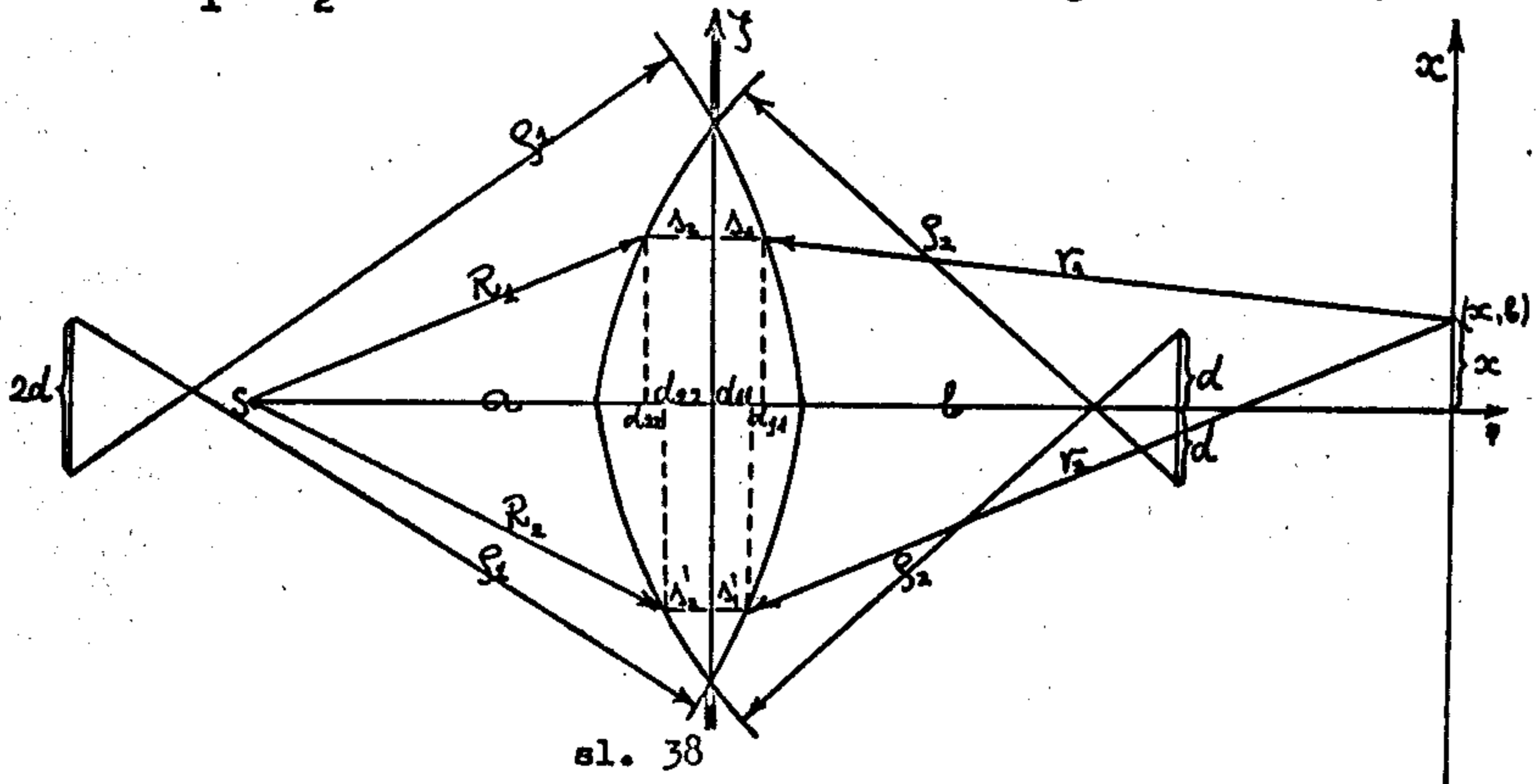
$$J = \frac{A^2}{\pi^2 b f p_2^2} \left\{ \left[ C(pD + \frac{q}{p}) - C(\frac{q}{p} - pD) \right]^2 + \left[ S(pD + \frac{q}{p}) - S(\frac{q}{p} - pD) \right]^2 \right\} \quad (12,22)$$

Formula (12,22) prikazuje raspored difrakcionih talasa svjetlosti ako su upadni talasi paralelni. Ovu formulu smo dobili specijalizacijom cilindričnih talasa na paralelne (formula (10,4)) uz uslov (10,5) kod

Fraunhoferovog prelaza. Ovde smo ju dobili na posve drugi način.

### 13. DIFRAKCIONA TEORIJA BILLETOVOG BISOČIVA (DRUGA VERZIJA)

Billetovu bisočivo možemo upotrebljavati i tako, da iz sredine sočiva izrežemo komad i dobivena oba dela spojimo. Izvor se postavlja između glavne žiže i sočiva. U tom slučaju dobićemo dva fiktivna izvora  $s_1$  i  $s_2$  koji su imaginarni likovi realnog izvora (sl. 38).



sl. 38

U ovom slučaju moramo uzeti sledeće vrednosti za  $s_1$ ,  $s_2$ ,  $s_1'$  i  $s_2'$ .

$$\begin{aligned} \Delta_{10} &= d_1 - \frac{(\zeta + d)^2}{2R_1} \\ \Delta_{20} &= d_2 - \frac{(\zeta + d)^2}{2R_2} \\ \Delta'_{10} &= d_1 - \frac{(\zeta - d)^2}{2R_1} \\ \Delta'_{20} &= d_2 - \frac{(\zeta - d)^2}{2R_2} \end{aligned} \quad (13,1)$$

Funkcije (13,1) treba da zadovoljavaju sledeće granične uslove:

1.  $\Delta_{10} = d_{11}$  za  $\zeta = 0$ ;  $d_{11} < d_1$ ;  $d_1$  je širina polovine centralnog dela sočiva.
2.  $\Delta_{20} = d_{22}$  za  $\zeta = 0$ ;  $d_{22} < d_2$ ;  $d_2$  je širina druge polovine centralnog dela sočiva.
3.  $\Delta'_{10} = d_{11}$  za  $\zeta = 0$
4.  $\Delta'_{20} = d_{22}$  za  $\zeta = 0$

(13,2)

$$\begin{aligned}
 5. \quad \Delta_{10}(D-d) &= \Delta'_{10}[-(D-d)] \\
 6. \quad \Delta_{20}(D-d) &= \Delta'_{20}[-(D-d)] \\
 7. \quad (\Delta_{10} + \Delta_{20})|_{\xi=0-d} &= (\Delta'_{10} + \Delta'_{20})|_{\xi=-(D-d)} \\
 8. \quad \Delta_{10} = \Delta_{20}|_{\xi=0-d} &\text{ i } \Delta'_{10} = \Delta'_{20}|_{\xi=-(D-d)}
 \end{aligned} \tag{13,2}$$

to je lako dokazati iz (13,1).

Polazimo iz formule (12,5) koja glasi,

$$g(x, b) = -\frac{iA}{\pi \sqrt{ab}} \left\{ \int_0^{D-d} f(\xi) e^{ik(R_1+r_1)} e^{ikn(\Delta_{10}+\Delta_{20})} d\xi + \int_{-(D-d)}^0 f(\xi) e^{ik(R_2+r_2)} e^{ikn(\Delta'_{10}+\Delta'_{20})} d\xi \right\} \tag{13,3}$$

uzimamo da su:

$$\begin{aligned}
 R_1 + r_1 &= a + b - (\Delta_{10} + \Delta_{20}) + \frac{\xi^2}{2a} + \frac{(\xi - x)^2}{2b} \\
 R_2 + r_2 &= a + b - (\Delta'_{10} + \Delta'_{20}) + \frac{\xi^2}{2a} + \frac{(\xi - x)^2}{2b}
 \end{aligned} \tag{13,4}$$

osle zamene (13,4) u (13,3) i sredjivanja, izlazi,

$$g(x, b) = -\frac{iA}{\pi \sqrt{ab}} e^{ik(a+b+(n-1)d_0 + \frac{x^2}{2b} - \frac{d^2}{2f})} \left\{ \int_0^{D-d} f(\xi) e^{ik[\frac{\xi^2}{2}(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{1}{f}) - (\frac{x}{b} + \frac{d}{f})\xi]} d\xi + \int_{-(D-d)}^0 f(\xi) e^{ik[\frac{\xi^2}{2}(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{1}{f}) - (\frac{x}{b} - \frac{d}{f})\xi]} d\xi \right\} \tag{13,5}$$

ilje označimo sa:

$$\begin{aligned}
 p_2^2 &= \frac{2}{\lambda} \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{1}{f} \right) \\
 q_2 &= \frac{2}{\lambda} \left( \frac{x}{b} + \frac{d}{f} \right) \\
 t_2 &= \frac{2}{\lambda} \left( \frac{x}{b} - \frac{d}{f} \right)
 \end{aligned} \tag{13,6}$$

dobićemo,

$$g(x, b) = -\frac{iAC_0}{\pi \sqrt{ab} p_2} \left\{ e^{-i\frac{\pi}{2} \left( \frac{q_2}{p_2} \right)^2} (A_{43} + iB_{43}) + e^{-i\frac{\pi}{2} \left( \frac{t_2}{p_2} \right)^2} (C_{43} + iD_{43}) \right\} \tag{13,7}$$

nosno intenzitet,

$$J = \frac{A^2}{\pi^2 ab p_2^2} \left\{ (A_{43} + C_{43})^2 + (B_{43} + D_{43})^2 - 4[(A_{43}C_{43} + B_{43}D_{43}) \sin \frac{2\pi x d}{b\lambda f(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{1}{f})} + (A_{43}D_{43} - B_{43}C_{43}) \cos \frac{2\pi x d}{b\lambda f(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{1}{f})}] \sin \frac{2\pi x d}{b\lambda f(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{1}{f})} \right\} \tag{13,8}$$

Analiza izraza (13,8) je identična analizi izraza (12,12).

Ovde također su interferencijske linije povezane sa modulacionom funkcijom kao i ranije. Specijalno za

$$x = \frac{n\lambda b f}{2d} \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{1}{f} \right) \quad (13,9)$$

dobićemo maksimume interferencijskih linija izražene sledećom funkcijom,

$$J = \frac{A^2}{\pi^2 a b f^2} \left\{ (A_{45} + C_{45})^2 + (B_{45} + D_{45})^2 \right\} \quad (13,10)$$

za sistem integrala:

$$\begin{aligned} A_{45} &= C \left[ p_2(0-d) - \frac{q_2}{f_2} \right] + C \left( \frac{q_2}{f_2} \right) \\ B_{45} &= S \left[ p_2(0-d) - \frac{q_2}{f_2} \right] + S \left( \frac{q_2}{f_2} \right) \\ C_{45} &= C \left[ p_2(1-d) + \frac{t_2}{f_2} \right] - C \left( \frac{t_2}{f_2} \right) \\ D_{45} &= S \left[ p_2(1-d) + \frac{t_2}{f_2} \right] - S \left( \frac{t_2}{f_2} \right) \end{aligned} \quad (13,11)$$

specijalno za  $d = 0$  izlazi,

$$J = \frac{A^2}{\pi^2 a b f_2^2} \left\{ (A'_{45} + C'_{45})^2 + (B'_{45} + D'_{45})^2 \right\} \quad (13,12)$$

za sistem integrala:

$$\begin{aligned} A'_{45} &= C \left( p_2 0 - \frac{q}{f_2} \right) + C \left( \frac{q}{f_2} \right) \\ B'_{45} &= S \left( p_2 0 - \frac{q}{f_2} \right) + S \left( \frac{q}{f_2} \right) \\ C'_{45} &= C \left( p_2 1 + \frac{q}{f_2} \right) - C \left( \frac{q}{f_2} \right) \\ D'_{45} &= S \left( p_2 1 + \frac{q}{f_2} \right) - S \left( \frac{q}{f_2} \right) \quad ; q = t_2 = q_2 \end{aligned}$$

to je formula za difrakcioni intenzitet za tanko cilindrično sočivo.

ao i u paragrafu 12 i ovde bismo mogli provesti analizu za različite oložaje izvora svetlosti. Napominjem da su (13,8) i (13,12) parne funkcije.

#### 14. FRAUNHOFEROV PRELAZ KOD BILLETTOVOG BISOČIVA

Provest ću teoriju za slučaj koji je prikazan na sl. 37.

Istićemo da  $a \rightarrow \infty$ ; - upadni talasi su paralelni i potražićemo difrakcioni intenzitet na ekranu koji je blizu fokusa sočiva. Zadatak se

svodi na Fraunhoferovu difrakciju na dve paralelne pukotine jednakih širina u kojima su umetnute polovine sočiva. Polazimo iz (12,12) koju možemo napisati u sledećem obliku,

$$J(x, l) = \frac{A^2}{\pi^2 a b p_1^2} \left\{ A_{2s}^2 + B_{2s}^2 + C_{2s}^2 + D_{2s}^2 + 2(A_{2s}C_{2s} + B_{2s}D_{2s}) \cos \Psi + \right. \\ \left. + 2(A_{2s}D_{2s} - B_{2s}C_{2s}) \sin \Psi \right\} \quad (14,1)$$

de je  $\Psi = \frac{\pi}{2} \left( \frac{t^2 - q^2}{p_1^2} \right)$ , a  $t$ ,  $q$  i  $p_1$  su zadane relacijom (12,8), odnosno

$$q = \frac{z}{\lambda} \left( \frac{x}{l} - \frac{d}{f} \right); \quad t = \frac{z}{\lambda} \left( \frac{x}{l} + \frac{d}{f} \right); \quad p_1^2 = \frac{z}{\lambda} \left( \frac{1}{l} - \frac{1}{f} \right) \quad (14,2)$$

matramo da je  $p_1$  realan broj i malo se razlikuje od nule. U tom slučaju argumenti Fresnelovih integrala postaju vrlo veliki. U (14,1) imamo sledeći sistem integrala:

$$\begin{aligned} A_{2s} &= C \left[ p_1(d+D) - \frac{q}{p_1} \right] - C \left( p_1 d - \frac{q}{p_1} \right) \\ B_{2s} &= S \left[ p_1(d+D) - \frac{q}{p_1} \right] - S \left( p_1 d - \frac{q}{p_1} \right) \\ C_{2s} &= C \left[ p_1(d+D) + \frac{t}{p_1} \right] - C \left( p_1 d + \frac{t}{p_1} \right) \\ D_{2s} &= S \left[ p_1(d+D) + \frac{t}{p_1} \right] - S \left( p_1 d + \frac{t}{p_1} \right) \end{aligned} \quad (14,3)$$

načimo sa:

$$\begin{aligned} p_1 D &= \Delta v \\ p_1 d - \frac{q}{p_1} &= v \\ p_1 d + \frac{t}{p_1} &= u \end{aligned} \quad (14,4)$$

zamenimo u (14,1),

$$J(x, l) = \frac{B^2}{\pi^2 p_1^2} \left\{ [C(v+\Delta v) - C(v)]^2 + [S(v+\Delta v) - S(v)]^2 + [C(u+\Delta v) - C(u)]^2 + \right. \\ \left. + [S(u+\Delta v) - S(u)]^2 + 2[C(v+\Delta v) - C(v)][C(u+\Delta v) - C(u)] \cos \Psi + \right. \\ \left. - 2[S(v+\Delta v) - S(v)][S(u+\Delta v) - S(u)] \cos \Psi + 2[C(v+\Delta v) - C(v)][S(u+\Delta v) - S(u)] \sin \Psi - \right. \\ \left. - [S(v+\Delta v) - S(v)][C(u+\Delta v) - C(u)] \sin \Psi \right\} \quad (14,5)$$

velike vrednosti argumenta  $v$  koristimo formule (9,8) pa izlazi,

$$J = \frac{B^2}{6\pi^2 p_1^2} \left\{ \left( \frac{2}{\pi v} \sin \frac{\pi}{2} v \Delta v \cdot \cos \frac{\pi}{2} (v^2 + v \Delta v) \right)^2 + \left( \frac{2}{\pi v} \sin \frac{\pi}{2} v \Delta v \cdot \sin \frac{\pi}{2} (v^2 + v \Delta v) \right)^2 + \right. \\ \left. + \left( \frac{2}{\pi u} \sin \frac{\pi}{2} u \Delta v \cdot \cos \frac{\pi}{2} (u^2 + u \Delta v) \right)^2 + \left( \frac{2}{\pi u} \sin \frac{\pi}{2} u \Delta v \cdot \sin \frac{\pi}{2} (u^2 + u \Delta v) \right)^2 + \right. \\ \left. + 2 \left( \frac{2}{\pi v} \sin \frac{\pi}{2} v \Delta v \cdot \cos \frac{\pi}{2} (v^2 + v \Delta v) \right) \left( \frac{2}{\pi u} \sin \frac{\pi}{2} u \Delta v \cdot \cos \frac{\pi}{2} (u^2 + u \Delta v) \right) \cos \Psi + \right. \\ \left. + 2 \left( \frac{2}{\pi v} \sin \frac{\pi}{2} v \Delta v \cdot \sin \frac{\pi}{2} (v^2 + v \Delta v) \right) \left( \frac{2}{\pi u} \sin \frac{\pi}{2} u \Delta v \cdot \sin \frac{\pi}{2} (u^2 + u \Delta v) \right) \cos \Psi + \right. \\ \left. + 2 \left( \frac{2}{\pi v} \sin \frac{\pi}{2} v \Delta v \cdot \cos \frac{\pi}{2} (v^2 + v \Delta v) \right) \left( \frac{2}{\pi u} \sin \frac{\pi}{2} u \Delta v \cdot \sin \frac{\pi}{2} (u^2 + u \Delta v) \right) \sin \Psi - \right. \\ \left. - 2 \left( \frac{2}{\pi v} \sin \frac{\pi}{2} v \Delta v \cdot \sin \frac{\pi}{2} (v^2 + v \Delta v) \right) \left( \frac{2}{\pi u} \sin \frac{\pi}{2} u \Delta v \cdot \cos \frac{\pi}{2} (u^2 + u \Delta v) \right) \sin \Psi \right\} \quad (14,6)$$

Sredjivanjem (14,6) nalazimo,

$$J = \frac{B^2 \Delta v^2}{l \pi^2 \rho^2} \left\{ \left( \frac{\sin \frac{\pi}{2} v \Delta v}{\frac{\pi}{2} v \Delta v} \right)^2 + \left( \frac{\sin \frac{\pi}{2} u \Delta v}{\frac{\pi}{2} u \Delta v} \right)^2 + 2 \left( \frac{\sin \frac{\pi}{2} v \Delta v}{\frac{\pi}{2} v \Delta v} \right) \left( \frac{\sin \frac{\pi}{2} u \Delta v}{\frac{\pi}{2} u \Delta v} \right) \cos \frac{2\pi}{\lambda} \frac{x}{l} (2d + \Delta) \right\} \quad (14,7)$$

z (14,2) i (14,4) sledi,

$$v \Delta v = -\frac{2}{\lambda l} (x-d) \Delta$$

$$u \Delta v = \frac{2}{\lambda l} (x+d) \Delta$$

(14,8)

osle zamene (14,8) u (14,7) izlazi,

$$J = \frac{B^2 \Delta^2}{l \pi^2} \left\{ \left( \frac{\sin \frac{\pi}{\lambda l} (x-d) \Delta}{\frac{\pi}{\lambda l} (x-d) \Delta} \right)^2 + \left( \frac{\sin \frac{\pi}{\lambda l} (x+d) \Delta}{\frac{\pi}{\lambda l} (x+d) \Delta} \right)^2 + 2 \left( \frac{\sin \frac{\pi}{\lambda l} (x-d) \Delta}{\frac{\pi}{\lambda l} (x-d) \Delta} \right) \left( \frac{\sin \frac{\pi}{\lambda l} (x+d) \Delta}{\frac{\pi}{\lambda l} (x+d) \Delta} \right) \cdot \cos \frac{2\pi}{\lambda} \frac{x}{l} (2d + \Delta) \right\} \quad (14,9)$$

sašla je analogna formula kao (11,41),

Specijalno za  $d = 0$

$$J = \frac{B^2 (2\Delta)^2}{l \pi^2} \left( \frac{\sin \frac{\pi}{\lambda l} (2\Delta) x}{\frac{\pi}{\lambda l} (2\Delta) x} \right)^2 \quad (14,10)$$

slednja formula je identična sa formulom difrakcionog intenziteta na kotini širine  $2\Delta$  kod difrakcije Fraunhoferovog tipa.



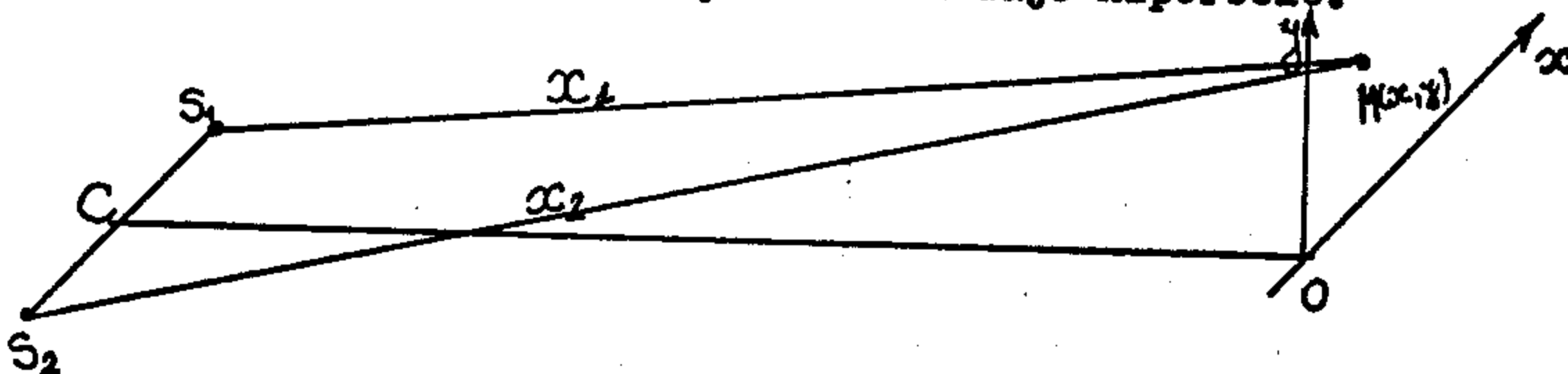
## G L A V A IV

## 15. DIFRAKCIONA TEORIJA MESLINOVOG EKSPERIMENTA

Kod do sada analiziranih interferencionih šema ravnina posmatranja je bila postavljena paralelno sa linijom koja spaja fiktivne ili realne zračne centre (sl. 39). Ako su upadni talasi, sferni, tada su tačke prostora za koje je razlika udaljenosti od koherentnih zračnih centara  $S_1$  i  $S_2$  konstanta, leže na rotacionom hiperboloidu kojemu je pravac kroz  $S_1$  i  $S_2$  os rotacione simetrije. Označimo li na sl. 39  $X_1$  i  $X_2$  rastojanje tih centara do posmatrane tačke  $M$  vidimo da je geometrijsko mesto tačke  $M$  za koju je fazna razlika konstantna za talase koji dolaze iz  $S_1$  i  $S_2$  predstavlja površinu koja je određena jednačinom,

$$X_2 - X_1 = \text{const.} \quad (15,1)$$

Hiperboloid određen jednačinom (15,1) je geometrijsko mesto jednakih faza i predstavlja ekvifaznu površinu. To znači da sve tačke maksimalne osvetljenosti leže na porodicama hiperboloida sa fokusima u  $S_1$  i  $S_2$ . Presek ravnine  $XY$  koji je paralelan linijom  $2s$  i stoji normalno na  $\overline{CO}$  sa porodicom hiperboloida daje hiperbole.



sl. 39

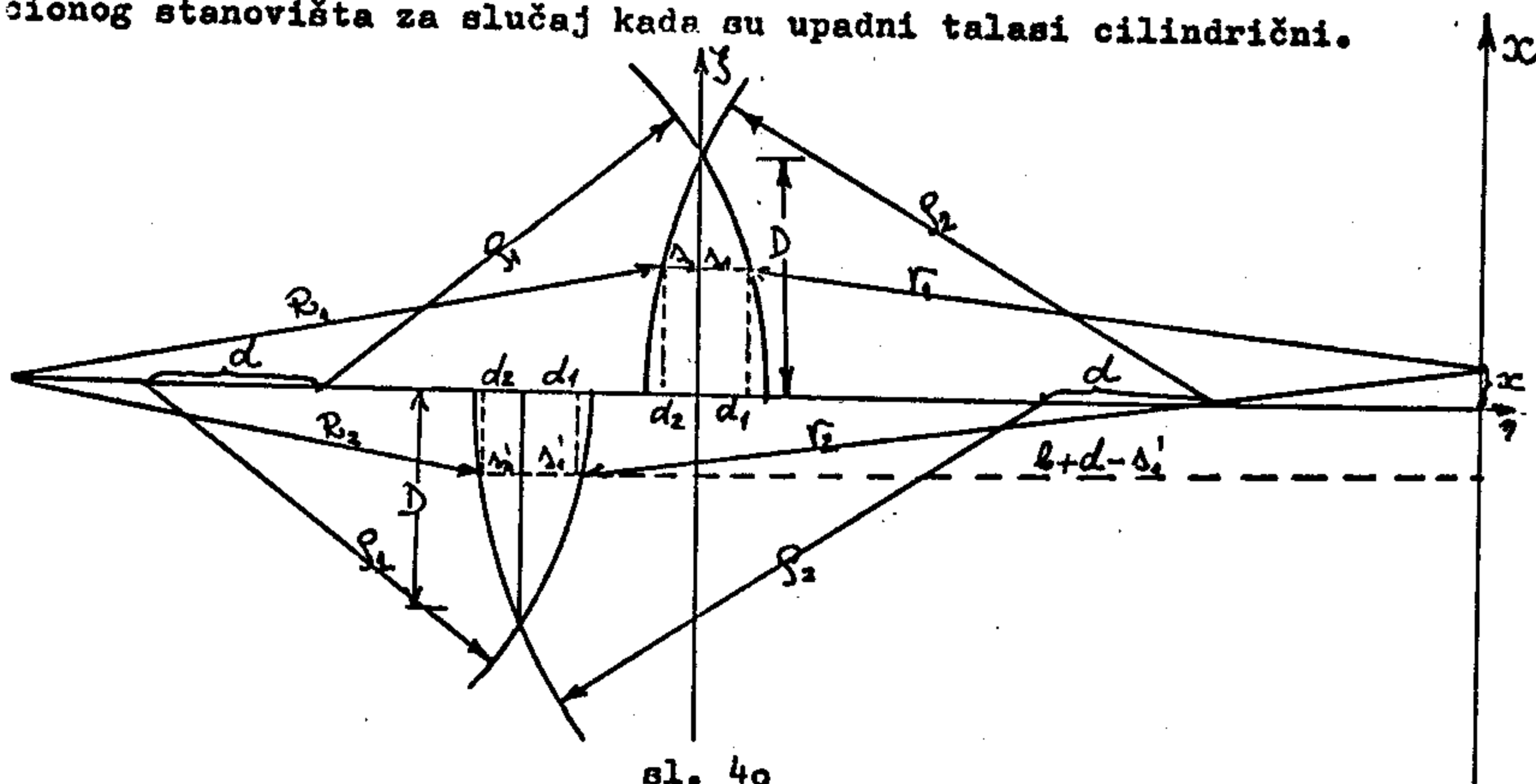
U tački  $O$  ove hiperbole malo se razlikuju od pravih linija i leže malo na liniju  $2s$  udaljene za  $\overline{CO}$ .

Ako je ekran postavljen normalno na liniju  $S_1$  i  $S_2$  onda će

interferencione linije predstavljati koncentrične krugove, jer to su preseki rotacionih hiperboloida sa fokusima u  $S_1$  i  $S_2$  sa ravninom koja je normalna na  $2s$ . Medjusobni razmak ovih krugova neće biti jednak.

Obično se kao izvor uzima jako osvijetljena uska pukotina koja je paralelna ravninom simetrije sistema (prečniku proreza Billetovog bisočiva, strani Fresnelovog biogledala, biprizme itd.). Pri ovakvom linearnom izvoru, tj. pri upadnim cilindričnim talasima, interferencione slike od raznih tačaka izvora biće medjusobno pomerene duž izvora, dajući na ekranu interferencione linije, koje su paralelne sa izvorom. Budemo li posmatrali interferencione linije na ekranu koji je normalan na liniju  $2s$  onda nećemo videti koncentrične krugove kao kod sfernih upadnih talasa nego ravne linije koje su nejednako medjusobno razmaknute.

Poslednji slučaj može se realizirati eksperimentom koji je postavio Meslin. Ovaj eksperiment predstavlja jednu drugu verziju Billetovog bisočiva i dobije se kada se druga polovina Billetovog bisočiva pomeri u odnosu na prvu za neki razmak  $d$  duž optičke osi a ne normalno na optičku os (sl. 40). Provest ćemo analizu ovog eksperimenta sa difrakcionog stanovišta za slučaj kada su upadni talasi cilindrični.



Polazimo iz formule (12,5) koja za Meslinov eksperiment glasi,

$$g(x,b) = -\frac{iA}{\pi\sqrt{ab}} \left\{ \int_0^D f(\xi) e^{ik(R_1+r_1)} e^{ikn(\lambda_1+\lambda_2)} d\xi + \int_{-D}^0 f(\xi) e^{ik(R_2+r_2)} e^{ikn(\lambda_1+\lambda_2)} d\xi \right\} \quad (15,2)$$

$\lambda_1 = \lambda_1'; \lambda_2 = \lambda_2'$

i kada zamenimo u (15,2) vrednost (11,4), (11,5) i sledeće vrednosti za,

$$\begin{aligned} R_1 &\sim a - \lambda_2 + \frac{\xi^2}{2a} \\ r_1 &\sim b - \lambda_1 + \frac{(\xi-x)^2}{2b} \\ R_2 &\sim a - d - \lambda_2 + \frac{\xi^2}{2(a-d)} \\ r_2 &\sim b + d - \lambda_1 + \frac{(x-\xi)^2}{2(b+d)} \end{aligned} \quad (15,3)$$

dobićemo,

$$g(x,b) = -\frac{iA}{\pi\sqrt{ab}} e^{ik[a+b+(n-1)d_0]} \left\{ e^{ik\frac{x^2}{2b}} \int_0^D f(\xi) e^{ik\left[\frac{\xi^2}{2}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{1}{f}\right) - \frac{x\xi}{b}\right]} d\xi + e^{ik\frac{x^2}{2(b+d)}} \int_{-D}^0 f(\xi) e^{ik\left[\frac{\xi^2}{2}\left(\frac{1}{a-d} + \frac{1}{b+d} - \frac{1}{f}\right) - \frac{x\xi}{b+d}\right]} d\xi \right\} \quad (15,4)$$

Dalje označimo sa:

$$\begin{aligned} p^2 &= \frac{2}{\lambda} \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{1}{f} \right) \\ q &= \frac{2x}{\lambda b} \\ t^2 &= \frac{2}{\lambda} \left( \frac{1}{a-d} + \frac{1}{b+d} - \frac{1}{f} \right) \\ \omega &= \frac{2x}{\lambda(b+d)} \end{aligned} \quad (15,5)$$

gde su,  $d_0 = d_1 + d_2$ ,  $\frac{1}{f} = (n-1)\left(\frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2}\right)$

Rešavanjem integrala (15,4) nalazimo,

$$g(x,b) = -\frac{iAC_k}{\pi\sqrt{ab}} \left\{ \frac{e^{i\psi_1}}{p} \left\{ [C(pD - \frac{q}{p}) + C(\frac{q}{p})] + i[S(pD - \frac{q}{p}) + S(\frac{q}{p})] \right\} + \frac{e^{i\psi_2}}{t} \left\{ [C(tD + \frac{\omega}{t}) - C(\frac{\omega}{t})] + i[S(tD + \frac{\omega}{t}) - S(\frac{\omega}{t})] \right\} \right\} \quad (15,6)$$

gde smo u (15,6) kraće označili sa,

$$\begin{aligned} C_k &= \exp[ik(a+b+(n-1)d_0)] \\ \psi_1 &= \frac{kx^2}{2b} - \frac{\pi}{2} \left( \frac{q}{p} \right)^2 \\ \psi_2 &= \frac{kx^2}{2(b+d)} - \frac{\pi}{2} \left( \frac{\omega}{t} \right)^2 \end{aligned} \quad (15,7)$$

relaciju (15,6) pišaćemo u formi,

$$g(x,b) = -\frac{iAC_k}{\pi\sqrt{ab}} \left\{ \frac{e^{i\psi_1}}{p} (A_m + iB_m) + \frac{e^{i\psi_2}}{t} (C_m + iD_m) \right\} \quad (15,8)$$

Iz (15,8) dobićemo vrednost intenziteta,\*

$$J = \frac{A^2}{\pi^2 ab} \left\{ \left( \frac{A_m}{p} + \frac{C_m}{t} \right)^2 + \left( \frac{B_m}{p} + \frac{D_m}{t} \right)^2 - \frac{4}{tp} \left[ (A_m C_m + B_m D_m) \sin\left(\frac{\psi_2 - \psi_1}{2}\right) + (A_m D_m - B_m C_m) \cos\left(\frac{\psi_2 - \psi_1}{2}\right) \right] \sin\left(\frac{\psi_2 - \psi_1}{2}\right) \right\} \quad (15,9)$$

Za sistem integrala:

$$\begin{aligned} A_m &= C(pD - \frac{a}{p}) + C(\frac{a}{p}) \\ B_m &= S(pD - \frac{a}{p}) + S(\frac{a}{p}) \\ C_m &= C(tD + \frac{b}{t}) - C(\frac{b}{t}) \\ D_m &= S(tD + \frac{b}{t}) - S(\frac{b}{t}) \end{aligned} \quad (15,10)$$

Kako se vidi iz (15,9), dobili smo analognu formulu kao i kod ranije analiziranih interferencionih šema. Međutim, to je samo formalno tako, jer (15,9) ne sadrži linearne članove u kojima dolazi promenljiva  $x$ . Takodje i (15,9) sastoji se od dva člana. Prvi koji je oblika,

$$\left( \frac{A_m}{p} + \frac{C_m}{t} \right)^2 + \left( \frac{B_m}{p} + \frac{D_m}{t} \right)^2 \quad (15,11)$$

predstavlja modulacionu funkciju interferencionih linija koje su zadane drugim članom,

$$\left[ (A_m C_m + B_m D_m) \sin\left(\frac{\psi_2 - \psi_1}{2}\right) + (A_m D_m - B_m C_m) \cos\left(\frac{\psi_2 - \psi_1}{2}\right) \right] \sin\left(\frac{\psi_2 - \psi_1}{2}\right) \quad (15,12)$$

Znači, da su interferencione linije promenljivog intenziteta kako slede iz (15,11).

Maksimum interferencionih linija se određuje iz uslova koji se lako može izvesti iz (15,12), (15,7) i (15,5).

$$x = \pm \sqrt{2n\lambda \frac{1}{\frac{1}{b^2 \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{1}{f} \right)} - \frac{1}{(b+d)^2 \left( \frac{1}{a-d} + \frac{1}{b+d} - \frac{1}{f} \right)} + \frac{1}{b+d} - \frac{1}{b}}} \quad (15,13)$$

$n=0,1,2$

Predznaci pred korenom (15,13) imaju važan fizički smisao. Naime, kod Meslinovog eksperimenta može se videti samo polovina difrakcione slike

\*Indeksom  $m$  označićemo integrale koji se javljaju kod Meslinovog eksperimenta.

do optičke osi. Predznaci upravo pokazuju da dolazi samo polovina difrakcione slike. Medjutim, s druge strane optičke osi dolazi takodje jedno difrakcione osvjetljenje bez interferencionih linija. Specijalno za  $d = 0$ ,  $\psi_2 - \psi_1 = 0$ ,  $\underline{p} = \underline{t}$ ,  $\underline{q} = \underline{Q}$ , pa iz (15,9) sledi,

$$J = \frac{A^2}{\pi^2 ab p^2} \left\{ \left[ C(pD - \frac{Q}{p}) + C(pD + \frac{Q}{p}) \right]^2 + \left[ S(pD - \frac{Q}{p}) + S(pD + \frac{Q}{p}) \right]^2 \right\} \quad (15,14)$$

a to je formula (12,22) za obično cilindrično sočivo.

## 16. EGZISTENCIJA FIKTIVNIH IZVORA DUŽ OPTIČKE OSI

Raspodelu intenziteta duž optičke osi ćemo dobiti ako u formuli intenziteta varijablu  $\underline{x}$  izjednačimo sa nulom. Eksperimenti pokazuju da se u ovoj interferencionoj šemi izvori nalaze duž optičke osi. Dokazaćemo egzistenciju tih izvora sa difrakcionog stanovišta. Za  $\underline{x} = 0$ , iz (15,5) i 15,7) izlazi,

$$\begin{aligned} \underline{q} &= \underline{Q} = 0 \\ \psi_2 - \psi_1 &= 0 \end{aligned} \quad (16,1)$$

a (15,9) uz (16,1) glasi,

$$J = \frac{A^2 D^2}{\pi^2 ab} \left\{ \left( \frac{C(pD)}{pD} + \frac{C(tD)}{tD} \right)^2 + \left( \frac{S(pD)}{pD} + \frac{S(tD)}{tD} \right)^2 \right\} \quad (16,2)$$

Poslednja formula postaje neodređena kada  $pD \rightarrow 0$  i  $tD \rightarrow 0$ , ( $D \neq 0$ ), jer kako nam je poznato  $C(0) = S(0) = 0$ . Koristimo L'Hospitalovo pravilo za (16,2) kada  $pD \rightarrow 0$  i  $tD \rightarrow 0$ .

$$\begin{aligned} \lim_{pD \rightarrow 0} \frac{C(pD)}{pD} &= \lim_{pD \rightarrow 0} \frac{\cos \frac{\pi}{2} p^2 D^2}{\frac{\pi}{2} p^2 D^2} \rightarrow 1 \\ \lim_{tD \rightarrow 0} \frac{C(tD)}{tD} &= \lim_{tD \rightarrow 0} \frac{\cos \frac{\pi}{2} t^2 D^2}{\frac{\pi}{2} t^2 D^2} \rightarrow 1 \\ \lim_{pD \rightarrow 0} \frac{S(pD)}{pD} &= \lim_{pD \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{\pi}{2} p^2 D^2}{\frac{\pi}{2} p^2 D^2} \rightarrow 0 \\ \lim_{tD \rightarrow 0} \frac{S(tD)}{tD} &= \lim_{tD \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{\pi}{2} t^2 D^2}{\frac{\pi}{2} t^2 D^2} \rightarrow 0 \end{aligned} \quad (16,3)$$

Znači, na mestima odredjenim sa  $\underline{pD} = 0$  i  $\underline{tD} = 0$  intenzitet neće biti

jednak nuli. Za  $pD = 0$  intenzitet će biti,

$$J_{10} = \frac{A^2 D^2}{\pi^2 a b_{10}} \left\{ \left( 1 + \frac{C(tD)}{tD} \right)^2 + \left( \frac{S(tD)}{tD} \right)^2 \right\} \quad (16,4)$$

$b = b_{10} \qquad b = b_{10}$

Ovaj intenzitet će biti uz uslov

$$\frac{2}{\lambda} \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{1}{f} \right) = 0$$

odnosno na mestu odredjenom sa,  $b_{10} = \frac{af}{a-f}$  (16,5)

u (16,5)  $b_{10} > 0$  za  $a > f$ .

(16,6)

Zamenimo u (15,5) kod  $t$ , vrednost (16,5) pa ćemo dobiti,

$$t^2 = \frac{2}{\lambda} \left( \frac{1}{a-d} + \frac{a-f}{af+d(a-f)} - \frac{1}{f} \right) = T_1^2 \quad (16,7)$$

Uz (16,7), (16,4) glasi,

$$J_{10} = \frac{A^2 D^2}{\pi^2 a b_{10}} \left\{ \left( 1 + \frac{C(T_1 D)}{T_1 D} \right)^2 + \left( \frac{S(T_1 D)}{T_1 D} \right)^2 \right\} \quad (16,8)$$

To je vrednost intenziteta na mesto  $b = b_{10}$  - intenzitet prvog fiktivnog izvora.

Drugi izvor se nalazi na mestu odredjenom iz uslova,

$$\frac{1}{a-d} + \frac{1}{b+d} - \frac{1}{f} = 0 \quad (16,9)$$

odnosno za,

$$b_{20} = \frac{f(a-d) - d(a-d-f)}{a-d-f} \quad (16,10)$$

Vrednost drugog fiktivnog izvora je,

$$J_{20} = \frac{A^2 D^2}{\pi^2 a b_{20}} \left\{ \left( 1 + \frac{C(pD)}{pD} \right)^2 + \left( \frac{S(pD)}{pD} \right)^2 \right\} \quad (16,11)$$

$b = b_{20} \qquad b = b_{20}$

gde je,

$$p^2 = \frac{2}{\lambda} \left( \frac{1}{a} + \frac{a-d-f}{f(a-d) - d(a-d-f)} - \frac{1}{f} \right) = T_2^2 \quad (16,12)$$

Otuda sledi intenzitet drugog fiktivnog izvora,

$$J_{20} = \frac{A^2 D^2}{\pi^2 a b_{20}} \left\{ \left( 1 + \frac{C(T_2 D)}{T_2 D} \right)^2 + \left( \frac{S(T_2 D)}{T_2 D} \right)^2 \right\} \quad (16,13)$$

Iz (16,10) sledi da je  $b_{20} > 0$  za  $a > f+d$  (16,14)

Relacija (16,14) nam izražava položaj realnog izvora kod Meslinovog eksperimenta. Da bi smo dobili izvore duž optičke osi u suprotnoj strani od realnog izvora, onda realni izvor treba postaviti na mesto kako

sledi iz (16,14). Taj uslov istovremeno obuhvata i uslov (16,6).

Rastojanje izmedju fiktivnih izvora je,

$$b_{20} - b_{10} = \frac{d[d(a-f) + a(2f-a)]}{(a-d-f)(a-f)} \quad (16,15)$$

Udaljenost odredjena relacijom (16,15) nije konstantna nego varira duž optičke osi u zavisnosti od udaljenosti realnog izvora od koordinatnog sistema i pomaka dela bismočiva. Specijalno ako je taj pomak  $\underline{d} = 0$ ,  $b_{20} = b_{10}$ , što bi trebalo očekivati jer tada se oba izvora poklapaju, što predstavlja slučaj cilindričnog sočiva. U tom slučaju  $\underline{p} = \underline{t}$ , a jedini intenzitet duž optičke osi iz (16,2) je,

$$J = \frac{4A^2 D^2}{\pi^2 a b} \left\{ \left( \frac{C(pD)}{pD} \right)^2 + \left( \frac{S(pD)}{pD} \right)^2 \right\} \quad (16,16)$$

Želimo li postaviti ravninu posmatranja izmedju fiktivnih izvora, recimo, u sredini tih izvora, tada treba za udaljenost ravnine posmatranja od koordinatnog sistema uzeti,

$$b_{00} = \frac{b_{20} - b_{10}}{2} = \frac{d[d(a-f) + a(2f-a)]}{2(a-d-f)(a-f)} \quad (16,17)$$

i (16,17) zameniti u (15,13) za  $\underline{b} = \underline{b_{00}}$ .

## 17. RASPORED INTENZITETA NA RAVNINI PRVOG FIKTIVNOG IZVORA

Želimo li ispitivati raspored intenziteta u ravnini prvog fiktivnog izvora kod Meslinovog eksperimenta, tada u (15,4) treba zameniti vrednost (16,5),

$$g_{10}(x, b_{10}) = -\frac{iACe_k}{\pi \sqrt{ab_{10}}} \left\{ e^{i\frac{k}{2}\left(\frac{a-f}{af}\right)x^2} \int_0^D f(\xi) e^{-i k \left(\frac{a-f}{af}\right) x \xi} d\xi + e^{i\frac{k}{2}x^2 \left(\frac{a-f}{af+d(a-f)}\right)} \int_{-D}^0 f(\xi) e^{i k \left[ \frac{\xi^2}{2} \left( \frac{1}{a-d} + \frac{a-f}{af+d(a-f)} - \frac{1}{f} \right) - \frac{x(a-f)\xi}{af+d(a-f)} \right]} d\xi \right\} \quad (17,1)$$

Označimo sa:

$$\begin{aligned} \Delta &= k \left( \frac{a-f}{af} \right) x \\ \frac{2}{\lambda} \left( \frac{1}{a-d} + \frac{a-f}{af + d(a-f)} - \frac{1}{f} \right) &= \tau_1^2 \\ \frac{2}{\lambda} \left( \frac{a-f}{af + d(a-f)} \right) x &= q_1 \end{aligned} \quad (17,2)$$

pa izlazi,

$$g_{10} = -\frac{iACk}{\pi \sqrt{ab_{10}}} \left\{ e^{\frac{i\Delta x}{2}} \int_0^D f(\xi) e^{-i\tau_1 \xi} d\xi + e^{\frac{i\tau_1 q_1 x}{2}} \int_{-D}^0 f(\xi) e^{\frac{i\tau_1}{2} (\tau_1^2 \xi^2 - 2q_1 \xi)} d\xi \right\} \quad (17,3)$$

Rešavanjem (17,3) (za homogene upadne talase  $f(\xi) = 1$ ), dobijemo,

$$g_{10} = -\frac{iACk}{\pi \sqrt{ab_{10}}} \left\{ D e^{i\tau_1 \frac{\Delta D}{2}} \left( \frac{\sin \frac{\Delta D}{2}}{\frac{\Delta D}{2}} \right) + \frac{e^{i\tau_1 q_1 x}}{\tau_1} \left[ C \left( \tau_1 D + \frac{q_1}{\tau_1} \right) - C \left( \frac{q_1}{\tau_1} \right) \right] + \left[ S \left( \tau_1 D + \frac{q_1}{\tau_1} \right) - S \left( \frac{q_1}{\tau_1} \right) \right] \right\} \quad (17,4)$$

gde smo kraće označili,

$$\begin{aligned} \tau_1 &= \frac{\lambda}{2} (x-D) \\ \tau_2 &= \frac{\lambda}{2} \left[ q_1 x - \left( \frac{q_1}{\tau_1} \right)^2 \right] \end{aligned} \quad (17,5)$$

Dalje označimo sa,

$$\begin{aligned} A &= C \left( \tau_1 D + \frac{q_1}{\tau_1} \right) - C \left( \frac{q_1}{\tau_1} \right) \\ B &= S \left( \tau_1 D + \frac{q_1}{\tau_1} \right) - S \left( \frac{q_1}{\tau_1} \right) \end{aligned} \quad (17,6)$$

pa izlazi vrednost kompleksne amplitude,

$$g_{10} = -\frac{iACk}{\pi \sqrt{ab_{10}}} \left\{ D e^{i\tau_1 \frac{\Delta D}{2}} \left( \frac{\sin \frac{\Delta D}{2}}{\frac{\Delta D}{2}} \right) + \frac{e^{i\tau_1 q_1 x}}{\tau_1} (A + iB) \right\} \quad (17,7)$$

odnosno intenziteta,

$$J_{10} = \frac{A^2}{\pi^2 ab_{10}} \left\{ D^2 \left( \frac{\sin \frac{\Delta D}{2}}{\frac{\Delta D}{2}} \right)^2 + \left( \frac{A}{\tau_1} \right)^2 + \left( \frac{B}{\tau_1} \right)^2 + \frac{2D}{\tau_1} \left( \frac{\sin \frac{\Delta D}{2}}{\frac{\Delta D}{2}} \right) (A \cos(\tau_2 - \tau_1) - B \sin(\tau_2 - \tau_1)) \right\} \quad (17,8)$$

Funkcija (17,8) izražava raspodelu intenziteta na ravnini prvog fiktivnog izvora. Ona se sastoji od dva dela. Prvi deo funkcije,

$$D^2 \left( \frac{\sin \frac{\Delta D}{2}}{\frac{\Delta D}{2}} \right)^2 \quad (17,9)$$

izražava vrednost rasporeda intenziteta koji je rezultat prolaza svjetlosti kroz onaj deo sočiva koji je postavljen u koordinatnom sistemu a drugi - preostali deo funkcije (17,8) je rezultat prolaza svjetlosti kroz deo sočiva koji je pomeren unapred. Otuda sledi da je relacija



(17,8) neparna u odnosu na  $x$  osu. Iz funkcije (17,8) možemo izvesti jedan važan zaključak. Naime, za  $x = 0$ ,  $q_1 = 0$ ,  $\varphi_1 = 0$ ,  $\varphi_2 = 0$ , pa izlazi,

$$J_{10} = \frac{A^2 D^2}{\pi^2 a b_{10}} \left\{ \left( 1 + \frac{C(T_1, D)}{T_1 D} \right)^2 + \left( \frac{S(T_1, D)}{T_1 D} \right)^2 \right\} \quad (17,10)$$

a to je visina intenziteta prvog fiktivnog izvora (16,8). To je sasvim razumljivo jer intenzitet na mestu preseka dveju medjusobno normalnih ravnina treba da bude jednak. A mi smo ispitivali isti intenzitet na dve medjusobno normalne ravnine.

Uzećemo specijalno da je  $d = 0$ , tada je  $T_1 = 0$  i iz (17,1) izlazi,

$$q_{101} = - \frac{i A C e}{\pi \sqrt{a b_{10}}} e^{\frac{i k x^2}{2 b_{10}}} \left\{ \int_{-D}^D e^{-i k \left( \frac{a-f}{a f} \right) x \xi} d\xi \right\} \quad (17,11)$$

i za  $a \rightarrow \infty$ , izlazi saglasno Fraunhoferovim prelazima,

$$J_{101} = \frac{B^2 4 D^2}{\pi^2 f} \left( \frac{\sin \frac{\pi (2D) x}{\lambda f}}{\frac{\pi (2D) x}{\lambda f}} \right)^2 \quad (17,12)$$

gde je  $B$  konstanta prelaza. To je intenzitet difragiranih talasa u fokalnoj ravnini cilindričnog sočiva. Intenzitet u fokalnoj ravnini jednak je nuli na mestima za koja je ugaona širina jednaka,

$$\sin \vartheta \approx \frac{x}{f} = \frac{n \lambda}{D} \quad \begin{array}{l} n = 1, 2, 3, \dots \\ n \neq 0 \end{array} \quad (17,13)$$

Prvi difrakcioni minimum je odredjen sa,

$$\sin \vartheta = \frac{\lambda}{2D} \quad (17,14)$$

Otuda za razdvojnu moć kod cilindričnog sočiva izlazi formula,

$$R = \frac{1}{\sin \vartheta} = \frac{2D}{\lambda} \quad (17,15)$$

koja se slaže sa Rayleighovom kriterijumom.

## 18. RASPORED INTENZITETA NA RAVNINI DRUGOG FIKTIVNOG IZVORA

Položićemo ravninu posmatranja na  $\underline{b} = b_{20}$  i odredićemo

raspored intenziteta na toj ravnini. Tada (15,4) uz (16,10) glasi,

$$g_{20} = -\frac{iACk}{\pi \sqrt{ab_{20}}} \left\{ e^{\frac{ik}{2}x^2} \frac{a-d-f}{[f(a-d)-d(a-d-f)]} \times \int_{-D}^D f(\xi) e^{i\frac{k}{2}\xi^2 \left( \frac{1}{a} + \frac{a-d-f}{f(a-d)-d(a-d-f)} - \frac{1}{f} \right) - \frac{(a-d-f)x\xi}{f(a-d)-d(a-d-f)}} d\xi + e^{\frac{ik}{2}x^2 \left( \frac{a-d-f}{f(a-d)} \right)} \int_{-D}^D f(\xi) e^{-i\frac{k}{2}x \frac{(a-d-f)\xi}{f(a-d)}} d\xi \right\} \quad (18,1)$$

označimo sa:

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= \frac{kx(a-d-f)}{f(a-d)} \\ T_2^2 &= \frac{2}{\lambda} \left( \frac{1}{a} + \frac{a-d-f}{f(a-d)-d(a-d-f)} - \frac{1}{f} \right) \\ Q_2 &= \frac{2}{\lambda} \left( \frac{(a-d-f)x}{f(a-d)-d(a-d-f)} \right) \end{aligned} \quad (18,2)$$

pa funkcija (18,1) uz (18,2) se transformiše u formi,

$$g_{20} = -\frac{iACk}{\pi \sqrt{ab_{20}}} \left\{ e^{\frac{i\pi}{2}Q_2 x^2} \int_{-D}^D f(\xi) e^{\frac{i\pi}{2}(T_2^2 \xi^2 - 2Q_2 \xi)} d\xi + e^{\frac{i\Delta_1 x}{2}} \int_{-D}^D f(\xi) e^{-i\Delta_1 \xi} d\xi \right\} \quad (18,3)$$

Posle rešavanja (18,3), izlazi,

$$g_{20} = -\frac{iACk}{\pi \sqrt{ab_{20}}} \left\{ D e^{i\varphi_3} \left( \frac{\sin \frac{\Delta_1 D}{2}}{\frac{\Delta_1 D}{2}} \right) + \frac{e^{i\varphi_4}}{T_2} (A_1 + iB_1) \right\} \quad (18,4)$$

gde su:

$$\begin{aligned} \varphi_3 &= \frac{\Delta_1}{2}(x+D) \\ \varphi_4 &= \frac{\pi}{2} \left[ Q_2 x - \left( \frac{Q_2}{T_2} \right)^2 \right] \\ A_1 &= C \left( T_2 D - \frac{Q_2}{T_2} \right) + C \left( \frac{Q_2}{T_2} \right) \\ B_1 &= S \left( T_2 D - \frac{Q_2}{T_2} \right) + S \left( \frac{Q_2}{T_2} \right) \end{aligned} \quad (18,5)$$

Kada se izračuna intenzitet iz (18,4) izlazi,

$$I_{20} = \frac{A^2}{\pi^2 ab_{20}} \left\{ D^2 \left( \frac{\sin \frac{\Delta_1 D}{2}}{\frac{\Delta_1 D}{2}} \right)^2 + \left( \frac{A_1}{T_2} \right)^2 + \left( \frac{B_1}{T_2} \right)^2 + \frac{2D}{T_2} \left( \frac{\sin \frac{\Delta_1 D}{2}}{\frac{\Delta_1 D}{2}} \right) (A_1 \cos(\varphi_4 - \varphi_3) - B_1 \sin(\varphi_4 - \varphi_3)) \right\} \quad (18,6)$$

Funkcija intenziteta (18,6) koja izražava raspored intenziteta na rav-

nini drugog fiktivnog izvora takodje se sastoji od dva člana. Prvi član

$D^2 \left( \frac{\sin \frac{\Delta_1 D}{2}}{\frac{\Delta_1 D}{2}} \right)^2$  je rezultat difrakcije na onoj polovini biscočiva koje je pomaknuto za  $d$  unapred od koordinatnog sistema a drugi deo potiče od de-

la biscočiva koje se nalazi u koordinatnom sistemu. To znači, da i ova

funkcija nije simetrična u odnosu na os  $x = 0$ . Specijalno za  $x = 0$  dobi-

ćemo vrednost intenziteta (16,13) jer ispitivanje vršimo u preseku dveju

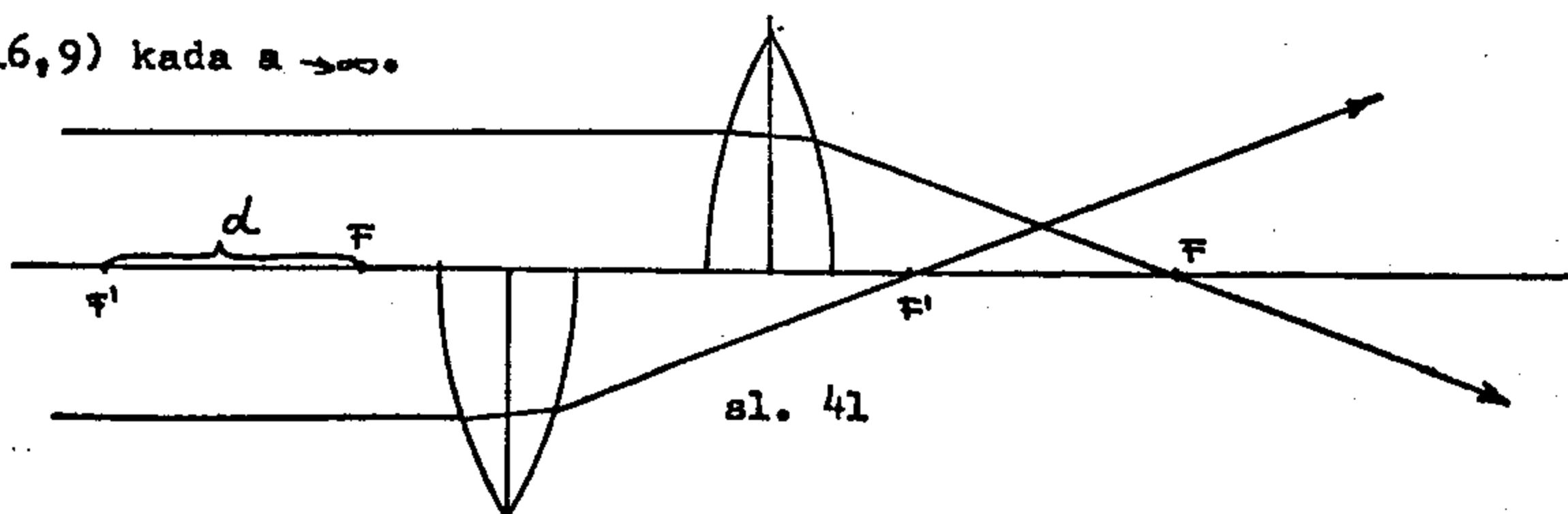
medjusobno normalnih ravnina. Visina tog intenziteta iznosi,

$$J_{20} = \frac{A^2 D^2}{\pi^2 ab} \left\{ \left( 1 + C \left( \frac{T_2 D}{T_1 D} \right)^2 \right)^2 + \left( \frac{S(T_2 D)}{T_1 D} \right)^2 \right\} \quad (18,7)$$

Ako se formula (18,1) specijalizira za uslov  $\underline{d} = 0$  tada izlazi funkcija (17,12) kako bi trebalo očekivati.

Treba napomenuti da su sve funkcije kod Meslinovog eksperimenta neparne u odnosu na  $\underline{x} = 0$ , osi. To je razumljivo zbog nesimetričnosti same interferencione šeme. Kako nam je poznato iz elementarne teorije sočiva, simetričan raspored intenziteta možemo dobiti jedino u slučaju  $\underline{d} = 0$ , jer se tada Meslinov eksperiment svodi na obično cilindrično sočivo.

S druge strane se Meslinov eksperiment, osim izloženog na početku ovog poglavlja, razlikuje od druge interferencione šeme i po tome što fiktivni izvori zavise, ne samo od položaja realnog izvora i fokalne ravni sočiva, nego i od pomaka delova sočiva duž optičke osi. U zavisnosti od ovih parametara izvori "putuju" duž optičke osi. Slučaj koji smo analizirali odnosio se na slučaj kada se drugi fiktivni izvor nalazi iza prvog. Međutim, to ne mora uvek biti tako. Napr. ako se eksperimentira sa paralelnim talasima (Fraunhoferov prelaz) odnosno za vrlo veliku udaljenost izvora od delova sočiva, tada drugi izvor prelazi ispred prvog što dovodi do prelaza slike na drugu stranu optičke osi (sl. 41). U tom graničnom slučaju rastojanje izmedju fiktivnih izvora iznosi onoliko koliko je pomak medju delovima sočiva. U tom slučaju fiktivni izvori se nalaze u žižama odgovarajućih delova sočiva kako to sledi iz (16,5) i (16,9) kada  $a \rightarrow \infty$ .



Za vrlo veliku udaljenost izvora dobićemo slučaj upadnih paralelnih talasa, odnosno Fraunhoferov prelaz. Izvešćemo taj prelaz.

### 19. FRAUNHOFEROV PRELAZ KOD MESLINOVOG EKSPERIMENTA

Izvešćemo prelaz za funkciju (15,9) koju uz malu transformaciju možemo napisati u obliku,

$$J = \frac{A^2}{\pi^2 ab} \left\{ \left( \frac{A_m}{p} \right)^2 + \left( \frac{B_m}{p} \right)^2 + \left( \frac{C_m}{t} \right)^2 + \left( \frac{D_m}{t} \right)^2 + 2 \frac{(A_m C_m + B_m D_m) \cos \Psi}{pt} + \right. \\ \left. + 2 \frac{(B_m C_m - A_m D_m) \sin \Psi}{pt} \right\} \quad (19,1)$$

gde smo sa  $\Psi$  kraće označili u (15,9) razliku  $\Psi_2 - \Psi_1$ . Koristeći osobine nesimetrije Fresnelovih integrala sistem (15,10) možemo napisati na sledeći oblik,

$$\begin{aligned} A_m &= C\left(\frac{q}{p}\right) - C\left(\frac{q}{p} - pD\right) \\ B_m &= S\left(\frac{q}{p}\right) - S\left(\frac{q}{p} - pD\right) \\ C_m &= C\left(\frac{Q}{t} + tD\right) - C\left(\frac{Q}{t}\right) \\ D_m &= S\left(\frac{Q}{t} + tD\right) - S\left(\frac{Q}{t}\right) \end{aligned} \quad (19,2)$$

Pustićemo da  $a \rightarrow \infty$  i potražimo intenzitet blizu fokusa tako da su,  $p > 0$  i  $t > 0$ . Kako se u ovom slučaju  $p$  i  $t$  malo razlikuju od nule, argumenti Fresnelovih integrala postaju vrlo veliki. Zbog toga koristićemo relacije (9,8) za asimtotsku vrednost Fresnelovih integrala i koristimo sledeće smene,

$$\begin{aligned} v &= \frac{q}{p} & u &= \frac{Q}{t} \\ \Delta v &= pD & \Delta u &= tD \end{aligned} \quad (19,3)$$

Uzimajući u obzir (9,8), (19,3) i (19,2) i vladanje konstante A kod prelaza od cilindričnih talasa na ravne, (19,1) glasi,

$$J = \frac{B^2}{\pi^2 b} \left\{ \frac{1}{p^2} \left( \frac{2}{\pi v} \sin \frac{\pi}{2} v \Delta v \cdot \cos \frac{\pi}{2} (v^2 - v \Delta v) \right)^2 + \frac{1}{p^2} \left( \frac{2}{\pi v} \sin \frac{\pi}{2} v \Delta v \cdot \sin \frac{\pi}{2} (v^2 - v \Delta v) \right)^2 + \right. \\ \left. + \frac{1}{t^2} \left( \frac{2}{\pi u} \sin \frac{\pi}{2} u \Delta u \cdot \cos \frac{\pi}{2} (u^2 + u \Delta u) \right)^2 + \frac{1}{t^2} \left( \frac{2}{\pi u} \sin \frac{\pi}{2} u \Delta u \cdot \sin \frac{\pi}{2} (u^2 + u \Delta u) \right)^2 + \right. \\ \left. + \frac{2}{tp} \left( \frac{2}{\pi v} \sin \frac{\pi}{2} v \Delta v \cdot \cos \frac{\pi}{2} (v^2 - v \Delta v) \right) \left( \frac{2}{\pi u} \sin \frac{\pi}{2} u \Delta u \cdot \cos \frac{\pi}{2} (u^2 + u \Delta u) \right) \cos \Psi + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{2}{t_p} \left( \frac{2}{\pi v} \sin \frac{\pi}{2} v \Delta v \cdot \sin \frac{\pi}{2} (v^2 - v \Delta v) \right) \left( \frac{2}{\pi u} \sin \frac{\pi}{2} u \Delta u \cdot \sin \frac{\pi}{2} (u^2 + u \Delta u) \right) \cos \Psi + \\
& + \frac{2}{t_p} \left( \frac{2}{\pi v} \sin \frac{\pi}{2} v \Delta v \cdot \sin \frac{\pi}{2} (v^2 - v \Delta v) \right) \left( \frac{2}{\pi u} \sin \frac{\pi}{2} u \Delta u \cdot \cos \frac{\pi}{2} (u^2 + u \Delta u) \right) \sin \Psi - \\
& - \frac{2}{t_p} \left( \frac{2}{\pi v} \sin \frac{\pi}{2} v \Delta v \cdot \cos \frac{\pi}{2} (v^2 - v \Delta v) \right) \left( \frac{2}{\pi u} \sin \frac{\pi}{2} u \Delta u \cdot \sin \frac{\pi}{2} (u^2 + u \Delta u) \right) \sin \Psi \}
\end{aligned} \tag{19,4}$$

ili u sredjenom obliku,

$$\begin{aligned}
J = K D^2 \left\{ \left( \frac{\sin \frac{\pi}{2} v \Delta v}{\frac{\pi}{2} v \Delta v} \right)^2 + \left( \frac{\sin \frac{\pi}{2} u \Delta u}{\frac{\pi}{2} u \Delta u} \right)^2 + 2 \left( \frac{\sin \frac{\pi}{2} v \Delta v}{\frac{\pi}{2} v \Delta v} \right) \left( \frac{\sin \frac{\pi}{2} u \Delta u}{\frac{\pi}{2} u \Delta u} \right) \cdot \right. \\
\left. \cos \left[ \frac{\pi}{2} (v^2 - v \Delta v - u^2 - u \Delta u) - \Psi \right] \right\}
\end{aligned} \tag{19,5}$$

Odredimo argument funkcije kosinus.

$$\begin{aligned}
\frac{\pi}{2} (v^2 - v \Delta v - u^2 - u \Delta u) - \Psi = \frac{\pi}{2} \left[ \left( \frac{q}{p} \right)^2 - q \Delta - \left( \frac{Q}{t} \right)^2 - Q \Delta \right] - \\
- \left[ \frac{k x^2}{2(b+d)} - \frac{\pi}{2} \left( \frac{Q}{t} \right)^2 - \frac{k x^2}{2b} + \frac{\pi}{2} \left( \frac{q}{p} \right)^2 \right] = - \frac{\pi}{2} \Delta (q+Q) + \frac{k x^2}{2b} - \frac{k x^2}{2(b+d)}
\end{aligned}$$

Sada kad smo uklonili veličine  $p$  i  $t$  možemo pretpostaviti da  $b$  je <sup>velič</sup> vršni

$b$  više nije povezano sa fokalnom ravninom  $f$ . Zbog toga je,

$$\frac{\pi}{2} (v^2 - v \Delta v - u^2 - u \Delta u) - \Psi = - \frac{\pi \Delta}{\lambda} \left( \frac{1}{b} + \frac{1}{b+d} \right) x \tag{19,6}$$

$$\begin{aligned}
J = k D^2 \left\{ \left( \frac{\sin \frac{\pi x \Delta}{\lambda b}}{\frac{\pi x \Delta}{\lambda b}} \right)^2 + \left( \frac{\sin \frac{\pi x \Delta}{\lambda (b+d)}}{\frac{\pi x \Delta}{\lambda (b+d)}} \right)^2 + 2 \left( \frac{\sin \frac{\pi x \Delta}{\lambda b}}{\frac{\pi x \Delta}{\lambda b}} \right) \left( \frac{\sin \frac{\pi x \Delta}{\lambda (b+d)}}{\frac{\pi x \Delta}{\lambda (b+d)}} \right) \cdot \right. \\
\left. \cos \frac{\pi \Delta x}{\lambda} \left( \frac{1}{b} + \frac{1}{b+d} \right) \right\}
\end{aligned} \tag{19,7}$$

Formula (19,7) izražava nam formulu Fraunhoferovog prelaza kod Meslinovog eksperimenta. Specijalno za  $d = 0$  dobićemo slučaj običnog cilindričnog sočiva.

$$J = K (2D)^2 \left( \frac{\sin \frac{\pi (2D) x}{\lambda b}}{\frac{\pi (2D) x}{\lambda b}} \right)^2 \tag{19,8}$$

Poslednja formula je identična sa formulama koje smo izveli kod sličnih prelaza, kako to treba očekivati.

## G L A V A V

## DIFRAKCIONA TEORIJA YOUNGOVOG EKSPERIMENTA

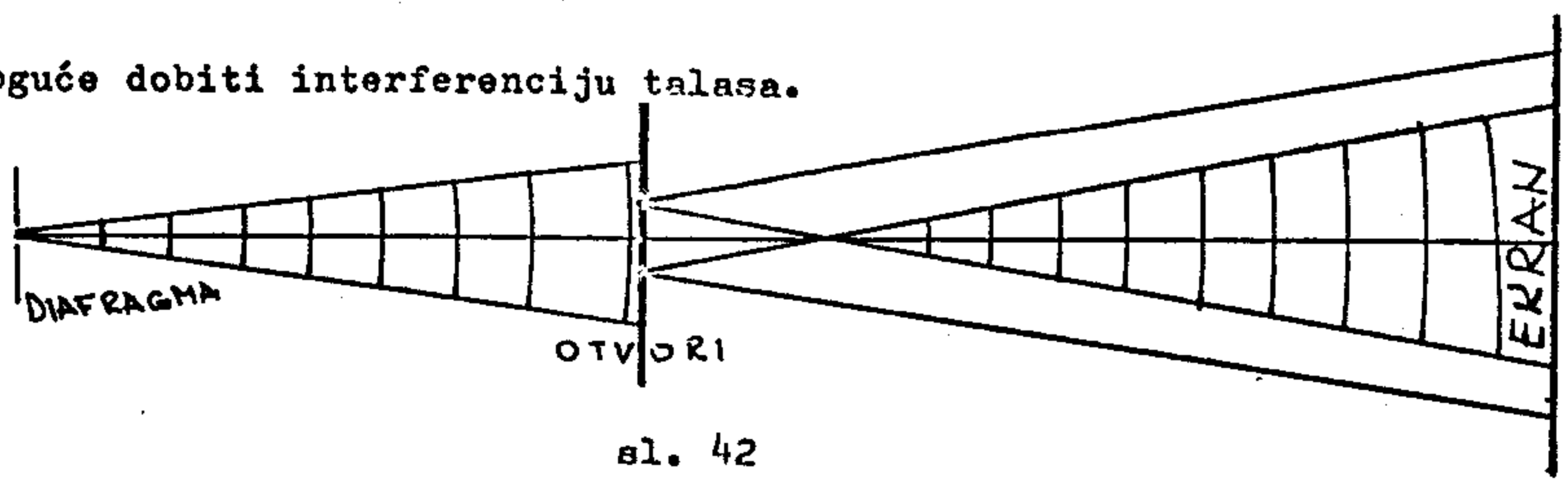
## 2o. FRESNELOVA DIFRAKCIJA NA DVE PARALELNE PUKOTINE

Uredjaj koji je upotrebio TH. Young sastoji se iz izvora svjetlosti ispred kojeg se postavlja diafragma malog otvora i dva otvora koji su postavljeni u zastoru. Medjusobna udaljenost otvora prema udaljenosti zastora od izvora svjetlosti je vrlo mala. TH. Young je prvi posmatrao pojavu interferencije ostvarenu na ovaj način i prvi je u jasnom obliku ustanovio princip slaganja amplituda kod objašnjavanja pojava interferencije.

Ako je otvor diafragme uska pukotina onda se svjetlost širi u prostoru izvan geometrijske sjene (sl. 42) i pada na drugi zastor gde su postavljene uske pukotine. Zbog velikog rastojanja između diafragme i zastora možemo uzeti da je sferni odnosno cilindrični upadni talas praktički jednak ravnom talasu. To znači da se ravnina drugog zastora gde su postavljene mali otvori podudara sa ravninom upadnog talasa i možemo smatrati da delovi talasa na otvorima pripadaju istom upadnom talasu. Sa stanovišta Huygensovog principa iz otvora šire se elementarni sferni odnosno cilindrični talasi koji stvaraju sopstvenu talasnu površinu. U aproksimaciji geometrijske optike bi svjetlosni talasi iza otvora bili potpuno odvojeni. Medjutim, zbog difrakcije ti se snopovi iza otvora mešaju i interferiraju. Na ovaj način raspored intenziteta svjetlosti na nekom ekranu koji je dovoljno dalek od zastora neće biti u svim smjerovima jednak, nego će se pojaviti jedno periodično osvjetljenje ekrana, odnosno pojaviti će se interferencione linije.

U smislu Huygensovog principa pukotine deluju kao sinhroni izvori jer potiču od iste talasne površine i jedino je u ovim uslovima

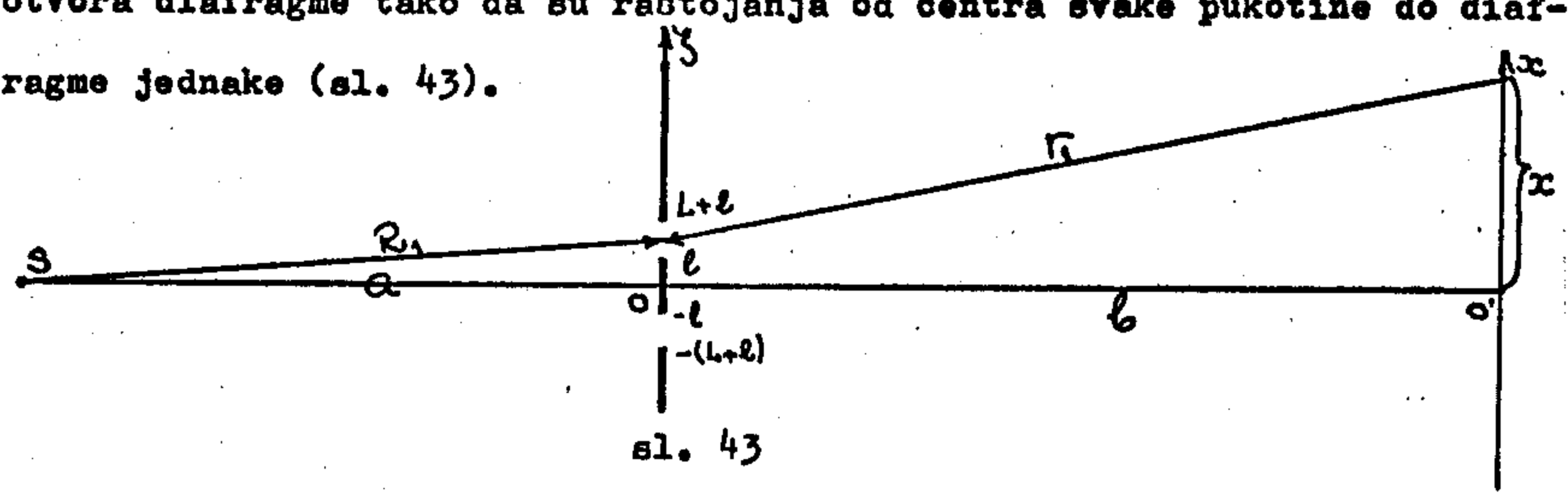
moгуће dobiti interferenciju talasa.



sl. 42

Problem ćemo rešiti za slučaj upadnih cilindričnih talasa, tj. kada je otvor diafragme uska pukotina.

Najpre ćemo odrediti Fresnelovu difrakciju na dve paralelne pukotine i dobiveni rezultat specijaliziraćemo za Youngov eksperiment. Pretpostavimo da su pukotine simetrično postavljene u odnosu na položaj otvora diafragme tako da su rastojanja od centra svake pukotine do diafragme jednake (sl. 43).



sl. 43

Pretpostavimo da su pukotine vrlo dugačke u odnosu na njihovu širinu L, tako da možemo problem rešiti kao jednodimenzionalan. Položimo os  $\zeta$  koordinatnog sistema u smjeru širina pukotina i neka su pukotine odvojene neprozirnim zaklonom širine 2l. U tom se slučaju kompleksna amplituda izračunava iz formule,

$$g = -\frac{iA}{\pi \sqrt{ae}} \left\{ \int_l^{L+l} e^{ik(R_1+r_1)} d\zeta + \int_{-(L+l)}^{-l} e^{ik(R_1+r_1)} d\zeta \right\} \quad (20,1)$$

gde su:

$$R_1 \sim a + \frac{\zeta^2}{2a}$$

$$r_1 \sim b + \frac{(\zeta - x)^2}{2b} \quad (20,2)$$

Tada (20,1) glasi,

$$g = -\frac{iA}{\pi\sqrt{ab}} e^{ik(a+b+\frac{x^2}{2b})} \left\{ \int_0^{L+l} e^{ik[\frac{\zeta^2}{2}(\frac{1}{a}+\frac{1}{b})-\frac{x\zeta}{b}] } d\zeta + \int_{-(L+l)}^{-l} e^{ik[\frac{\zeta^2}{2}(\frac{1}{a}+\frac{1}{b})-\frac{x\zeta}{b}] } d\zeta \right\} \quad (20,3)$$

Dalje označimo sa,

$$p^2 = \frac{\lambda}{2} \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right)$$

$$t = \frac{2x}{\lambda b}$$

(20,4)

i posle uvrštavanja u (20,3) izlazi,

$$g = -\frac{iAC_k}{\pi\sqrt{ab}} \left\{ \int_0^{L+l} e^{i\frac{\pi}{2}(p\zeta - \frac{t}{p})^2} d\zeta + \int_{-(L+l)}^{-l} e^{i\frac{\pi}{2}(p\zeta - \frac{t}{p})^2} d\zeta \right\} \quad (20,5)$$

gde smo sa  $C_k$  označili kompleksnu konstantu ispred integrala u (20,5),

$$C_k = \exp\left[ ik\left(a+b+\frac{x^2}{2b}\right) - i\frac{\pi}{2}\left(\frac{t}{p}\right)^2 \right]$$

Uz novu promenljivu,

$$p\zeta - \frac{t}{p} = w$$

$$\zeta = l : w \rightarrow pl - \frac{t}{p}$$

$$\zeta = L+l : w \rightarrow p(L+l) - \frac{t}{p}$$

$$\zeta = -l : w \rightarrow -(pl + \frac{t}{p})$$

$$\zeta = -(L+l) : w \rightarrow -[p(L+l) + \frac{t}{p}]$$

(20,6)

izlazi vrednost kompleksne amplitude,

$$g = -\frac{iAC_k}{\pi\sqrt{ab}p} \left\{ (A_1 + iB_1) + (C_1 + iD_1) \right\} \quad (20,7)$$

odnosno intenzitet,

$$J = \frac{A^2}{\pi^2 ab p^2} \left\{ (A_1 + C_1)^2 + (B_1 + D_1)^2 \right\} \quad (20,8)$$

Za sledeći sistem integrala:

$$A_1 = C \left[ p(L+l) - \frac{t}{p} \right] - C \left( pl - \frac{t}{p} \right)$$

$$B_1 = S \left[ p(L+l) - \frac{t}{p} \right] - S \left( pl - \frac{t}{p} \right)$$

$$C_1 = C \left[ p(L+l) + \frac{t}{p} \right] - C \left( pl + \frac{t}{p} \right)$$

$$D_1 = S \left[ p(L+l) + \frac{t}{p} \right] - S \left( pl + \frac{t}{p} \right)$$

(20,9)

Formula (20,8) izražava raspored intenziteta difragiranih talasa na dve pukotine ako su i izvor i ekran postavljeni na konačnom rastojanju.

Analizu formule (20,8) sam izvršio numeričkim putem i to za dva ekstremna slučaja. Prvi slučaj, kada su pukotine blizu izvora,  $a = 6m$ , ali za ekran koji je tri puta više udaljen,  $b = 18m$ , za širinu

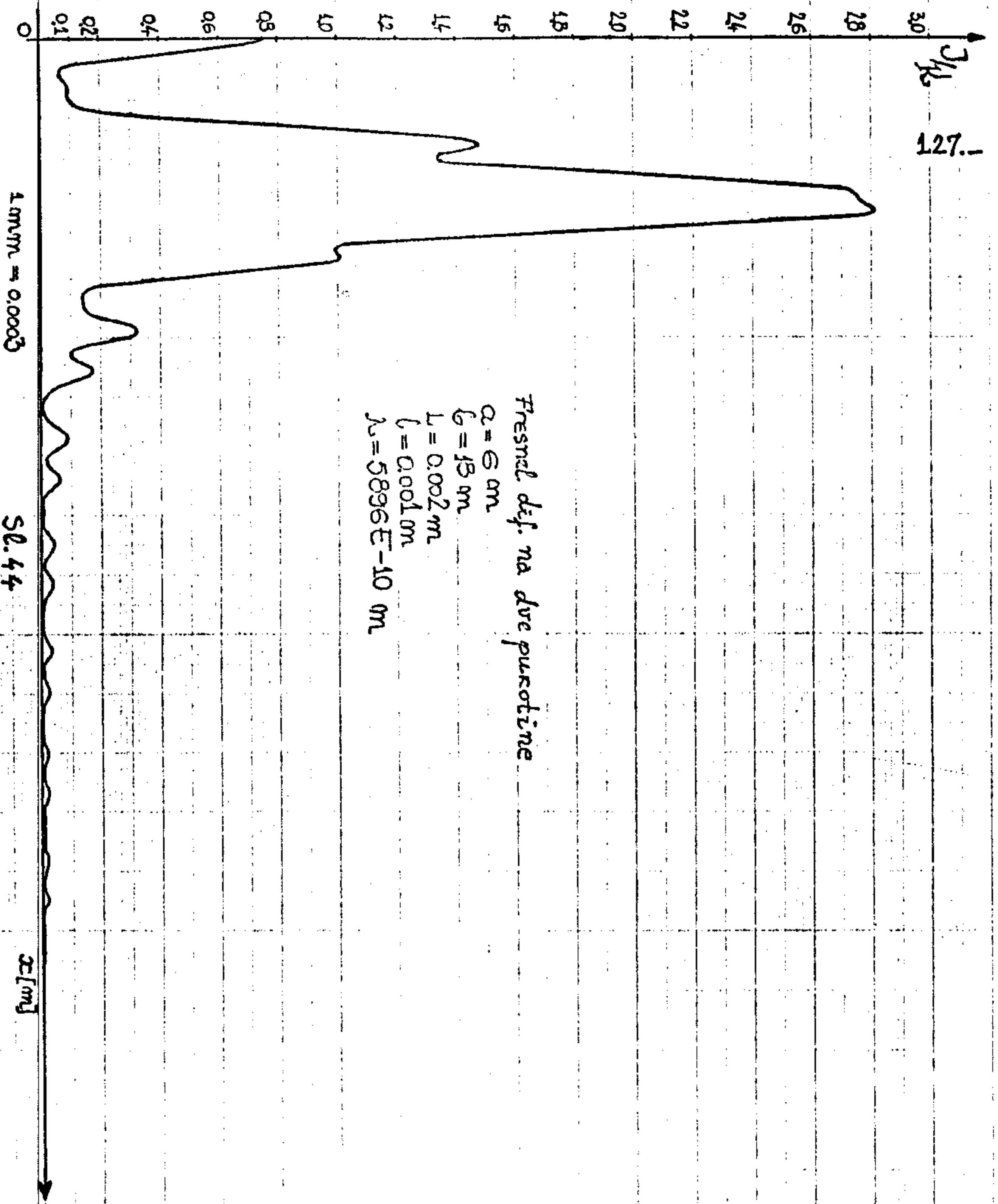


pukotine  $\underline{L} = 2 \text{ mm}$  i  $\underline{2l} = 2 \text{ mm}$ . U tom slučaju kako se vidi iz sl. 44 intenziteti difragiranih talasa iz svake pukotine sasvim malo se preklapaju. Funkcija (20,8) je simetrična pa je nacrtana samo polovina difrakcione slike. Intenzitet preklapanja - centralni intenzitet je 2,5 puta slabiji od intenziteta koji dolazi od svake pukotine. Glavni intenziteti pokazuju slabe fluktuacije povećanjem  $\underline{x}$ , njihovi su intenziteti vrlo slabi u odnosu na glavnih maksimuma. Ovaj slučaj je uzet upravo zbog karakteristike odvojenosti difragiranih talasa od svake pukotine.

Drugi slučaj je uzet za veliku udaljenost izvora do zaklona,  $a = 21,42 \text{ m}$  i za udaljenost zaklona do ekrana,  $b = 32,67 \text{ m}$ . Naime, ti podaci su uzeti iz rada [35]. Autori tog rada su izvršili jedno eksperimentalno merenje intenziteta difragiranih talasa na dve pukotine fotomultiplikatorom i nisu dali dovoljno podataka o njihovom merenju. Oni spominju da je proizvod,

$$pL = \sqrt{\frac{2}{\lambda} \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right)} L = 6.746 \quad (20,10)$$

za  $\lambda = 5461E-10 \text{ m}$ . Na osnovu (20,10) do druge decimale, približno sam ocenio vrednost za  $\underline{a}$  i  $\underline{b}$ . Numerička analiza daje potpuno njihovu sliku koju ću priložiti u disertaciju. Upoređivanjem njihove eksperimentalne krive (sl. 45) i krivu koju sam dobio iz (20,8) (sl. 46), vidimo da postoji potpuna saglasnost. Čak i za velike vrednosti  $\underline{x}$ , funkcija (20,8) odlično opisuje raspored intenziteta koji su dobili autori [35] eksperimentalno. Teorijska kriva, tako i eksperimentalna su simetrične pa je zbog toga nacrtana samo polovina difrakcione slike. U ovom radu ću priložiti i fotografski snimak intenziteta svjetlosti za krivu koju su autori [35] odredili fotomultiplikatorom (sl. 47). Na slici 46 intenzitet interferencionih linija do jedne vrednosti  $\underline{x}$  stalno opada, od te vrednosti se povećava tako da se lepo vidi, da su minimumi bočnog dela slike onoliki koliki su maksimumi centralnog dela slike. Od  $\underline{x}$  osi do minimuma interferencionih linija se nalazi jedan svjetlosni fon, koji pokazuje nekohe-



Fresnel dif. na dve pukotine

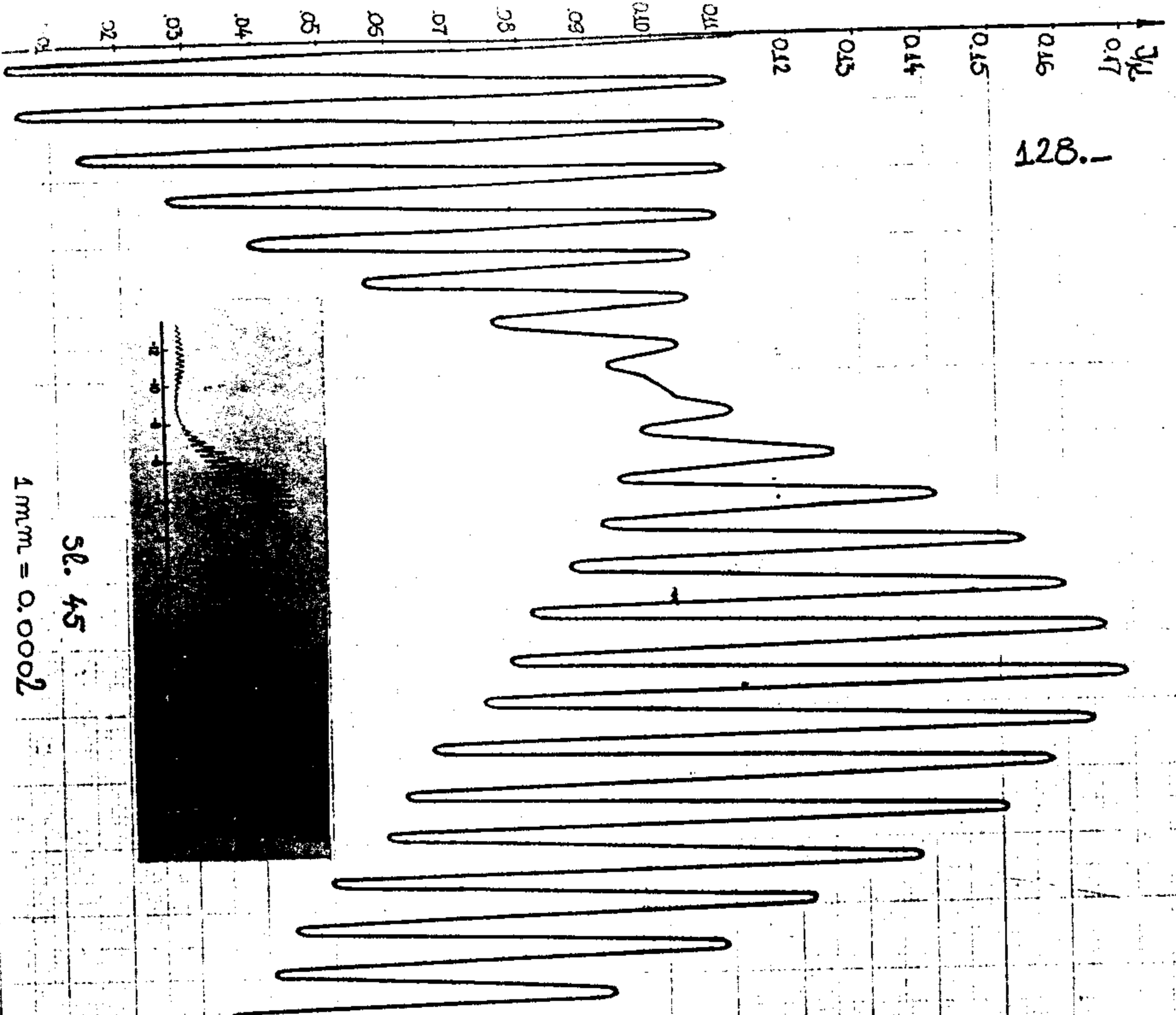
- $a = 6 \text{ m}$
- $b = 13 \text{ m}$
- $L = 0.002 \text{ m}$
- $l = 0.001 \text{ m}$
- $\lambda = 5896 \text{ E}^{-10} \text{ m}$

1 mm = 0.0003

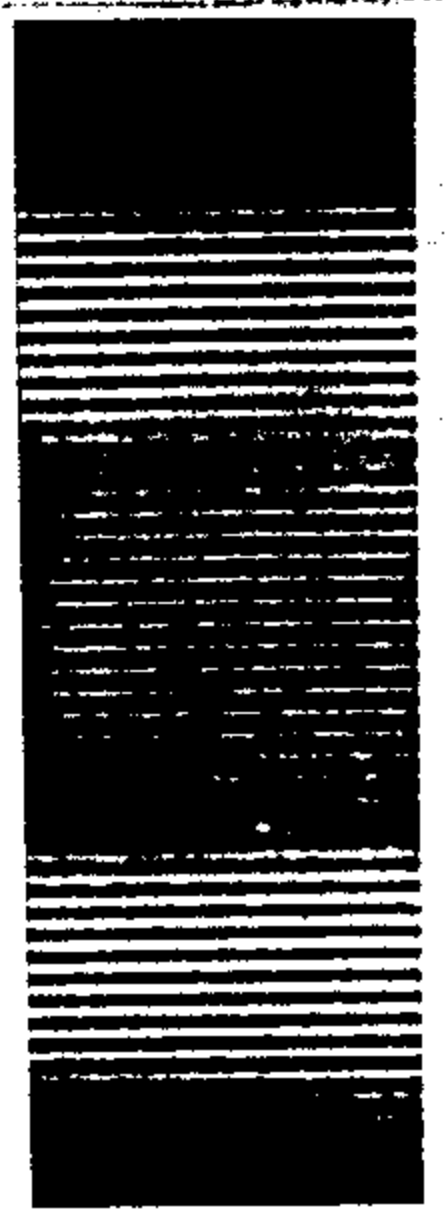
Sl. 44

z [m]

128.-

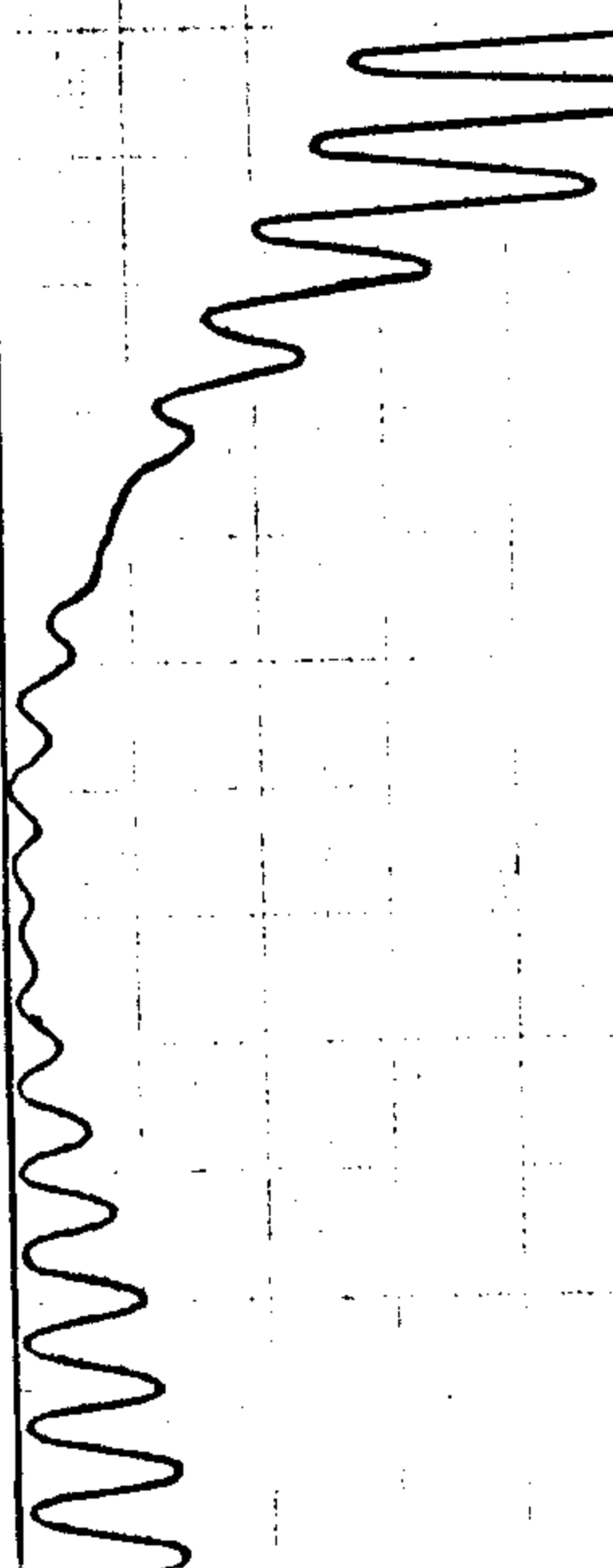


Sl. 45  
 $1 \text{ mm} = 0.0002$



Sl. 47

Fresnelova difracija na dve pukotine  
 $a = 21.42 \text{ m}$   
 $b = 32.67 \text{ m}$   
 $L = 0.00065 \text{ m}$   
 $\lambda = 0.00654 \text{ m}$   
 $\lambda_0 = 5461 \text{ E} - 10 \text{ m}$



rentno sastavljanje talasa svjetlosti. To se može pratiti i na fotografiskom snimku (sl. 47).

## 21. DIFRAKCIONA TEORIJA PRVOBITNOG YOUNGOVOG EKSPERIMENTA (FRAUNHOFEROV PRELAZ)

Teorija Youngovog eksperimenta je identična Fraunhoferovoj difrakciji na dve paralelne pukotine. To ćemo dokazati matematičkim i numeričkim putem. Jedina razlika je u tome što pukotine mogu biti široke i znatno razmaknute (kod Fraunhoferove difrakcije) a da se ipak u fokalnoj ravnini mogu videti interferencione linije. U prvobitnom Youngovom uređaju interferirali su samo snopovi difraktirane svjetlosti koji su se preklapali u uskom ugaonom području. Da bi do tog preklapanja uopšte moglo doći potrebno je bilo da pukotine budu uske kako bi se snop difraktirane svjetlosti mogao dovoljno raširiti i da budu blizu kako bi moglo doći do preklapanja snopova. Interferencione linije dobivene pomoću prvobitnog Youngovog uređaja, su zato slabog intenziteta, ali su dobivene bez posebnog objektiva.

Polazimo iz formule (20,8) i pretpostavimo da  $a \rightarrow \infty$ . To odgovara slučaju kada su pukotine vrlo blizu medju sobom a da se izvor nalazi na konačnom rastojanju. Pretpostavimo takodje da je  $b$  vrlo veliko. U sistemu integrala (20,9) označimo sa,

$$\begin{aligned} \rho l - \frac{t}{p} &= v \\ \rho l &= \Delta v \\ \rho l + \frac{t}{p} &= u \end{aligned} \quad (21,1)$$

gde je  $\rho = \sqrt{\frac{2}{\lambda b}}$  za  $a \rightarrow \infty$  i  $t = \frac{2x}{\lambda b}$ . Budući da je  $b$  vrlo veliko,  $p$  će biti vrlo malo i možemo koristiti asimptotsku vrednost Fresnelovih

$$\begin{aligned} \text{integrala,} \quad C(v+\Delta v) - C(v) &\sim \frac{2}{\pi v} \sin \frac{\pi}{2} v \Delta v \cdot \cos \frac{\pi}{2} (v^2 + v \Delta v) \\ S(v+\Delta v) - S(v) &\sim \frac{2}{\pi v} \sin \frac{\pi}{2} v \Delta v \cdot \sin \frac{\pi}{2} (v^2 + v \Delta v) \end{aligned} \quad (21,2)$$

Koristeći (21,1), (21,2) i (20,9) posle sredjivanja (20,8) nam daje,

$$J = \frac{B^2 L^2}{\pi^2 b} \left\{ \left( \frac{\sin \frac{\pi}{2} v \Delta v}{\frac{\pi}{2} v \Delta v} \right)^2 + \left( \frac{\sin \frac{\pi}{2} u \Delta v}{\frac{\pi}{2} u \Delta v} \right)^2 + 2 \left( \frac{\sin \frac{\pi}{2} v \Delta v}{\frac{\pi}{2} v \Delta v} \right) \left( \frac{\sin \frac{\pi}{2} u \Delta v}{\frac{\pi}{2} u \Delta v} \right) \cos \frac{\pi}{2} [v^2 + v \Delta v - u^2 - u \Delta v] \right\} \quad (21,3)$$

gde je  $B^2$  konstanta prelaza. Dalje odredimo,

$$\begin{aligned} v \Delta v &= \frac{2L}{\lambda b} (l-x) \sim -\frac{2L}{\lambda b} x \text{ jer proizvod } \frac{2L}{\lambda b} \sim 0 \\ u \Delta v &= \frac{2L}{\lambda b} (l+x) \sim \frac{2L}{\lambda b} x \\ v^2 + v \Delta v - u^2 - u \Delta v &= -\frac{4x}{\lambda b} (2l+L) \end{aligned} \quad (21,4)$$

Zamenimo (21,4) u (21,3) pa ćemo dobiti formulu koja izražava raspored intenziteta na dve paralelne pukotine kod prvobitnog Youngovog eksperimenta.

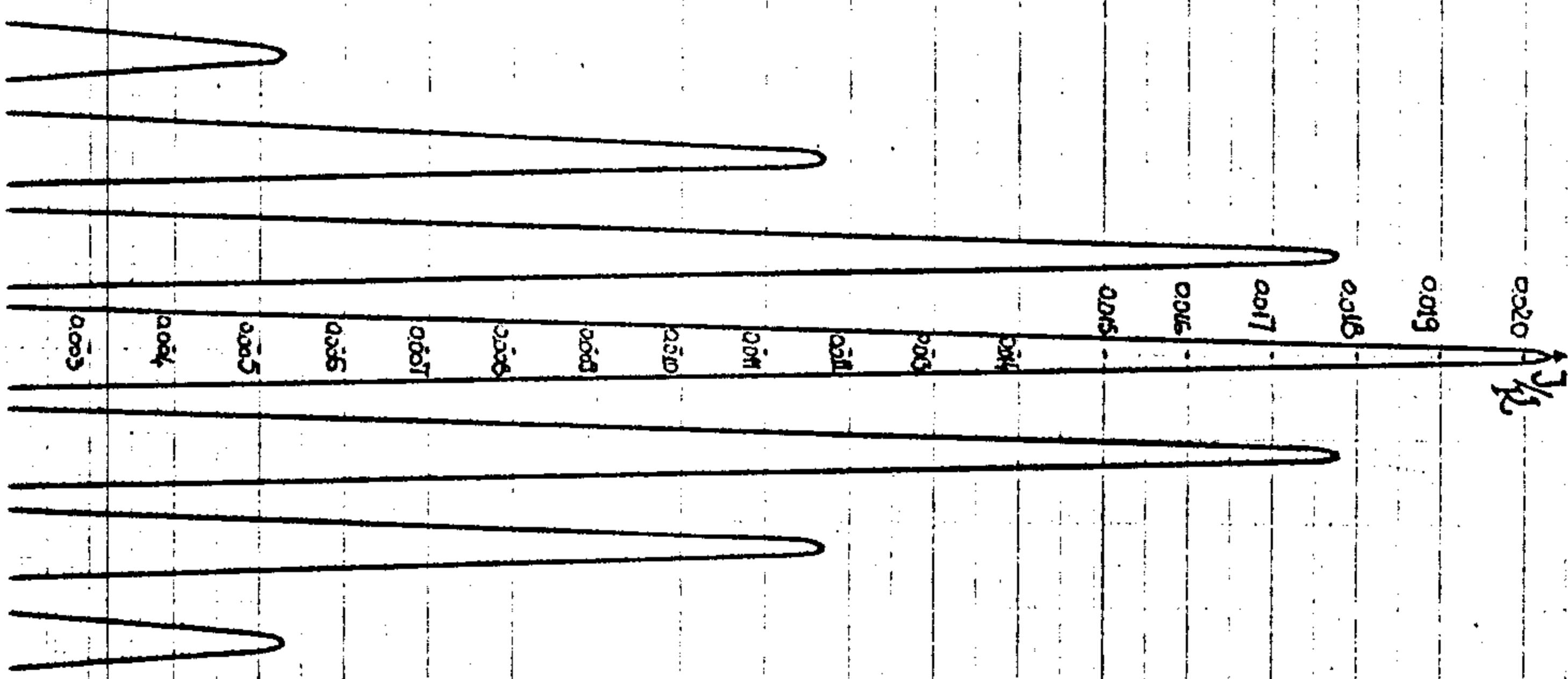
$$J = \frac{B^2 4L^2}{\pi^2 b} \left\{ \left( \frac{\sin \frac{\pi L x}{\lambda b}}{\frac{\pi L x}{\lambda b}} \right)^2 \cos^2 \frac{\pi x (2l+L)}{\lambda b} \right\} \quad (21,5)$$

Formula za Fraunhoferovu difrakciju na dve pukotine glasi,

$$J = K \cdot 4L^2 \left\{ \left( \frac{\sin \frac{\pi L x}{\lambda f}}{\frac{\pi L x}{\lambda f}} \right)^2 \cos^2 \frac{\pi x (2l+L)}{\lambda f} \right\} \quad (21,6)$$

a to je upravo formula (21,5), samo u njoj ne figuriše fokalna ravni-  
na objektiva, nego parametar  $b$  koji treba da bude dovoljno velik. Ovu  
činjenicu možemo dobiti i numeričkom analizom formule (20,8). To poka-  
zuje sl. 48 koja je dobivena iz formule (20,8) za  $\underline{a} = 10$  m,  $\underline{b} = 20$  m,  
 $\underline{L} = 0,1$  mm,  $\underline{z}_1 = 0,4$  mm, za  $\lambda = 5896$  Å. Vidimo da je kriva na sl. 48  
simetrična, kako izlazi iz formule (21,5), i broj maksimuma tačno od-  
govara formuli (21,6), no, ova je dobivena iz (20,8) bez posebnog ob-  
jektiva kako je to prvi put posmatrao Young.

Eksperiment slične vrste izvršio je još 1665. god. Grimal-  
di, koji je medjutim radio bez diafragme koristeći kao izvor svjetlos-  
ti neposredno sunce. Izračunavanje pokazuje da pod tim uslovima sa  
takvim rastojanjima izmedju pukotina koje je koristio Grimaldi, inter-  
ferencija se nije mogla posmatrati zbog velike ugaone dimenzije izvora



Young's experiment:

- $a = 10 \text{ nm}$
- $b = 20 \text{ nm}$
- $L = 0.0001 \text{ m}$
- $\ell = 0.0002 \text{ m}$
- $\lambda = 5896 \text{ \AA} = 10 \text{ nm}$

S.L. 48

1 mm = 1000 μm

svjetlosti - Sunca (oko 30'). Verovatno je da konstatovane linije sa strane Grimaldia imaju subjektivni karakter (kontrast).

## 22. YOUNGOV EKSPERIMENT SA PARALELNIM UPADNIM TALASIMA

Pokazat ću da se za Youngov eksperiment može postaviti jedan teorem o ekvivalenciji, koji povezuje difrakcionu sliku kod cilindričnih upadnih talasa sa difrakcionom slikom kod ravnih upadnih talasa. Da bismo dokazali taj teorem ekvivalencije odredimo najpre raspored intenziteta u nekoj ravnini iza otvora ako su upadni talasi paralelni.

Položimo koordinatni sistem  $\xi, \eta, \zeta$  tako da je os  $\zeta$  postavljen u smjeru širina otvora, os  $\xi$  u smjeru dužine otvora a ekran postavimo normalno na os  $\eta$ . Ravan talas koji se prostire duž osi  $\eta$  i koji je homogen u odnosu na  $\zeta$  osu izražava se funkcijom,

$$g_0(\eta, \xi) = Af(\xi)e^{i\eta\eta} \quad (22,1)$$

U Kirchhoffovoj formuli za cilindrične talase zamenimo asimptotsku vrednost Hankelove funkcije,

$$H_0^{(1)}(kr) \xrightarrow{kr \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{2}{\pi kr}} e^{i(kr - \frac{\pi}{4})} \quad (22,2)$$

pa ćemo dobiti,

$$g(x, b) = \frac{ie^{-i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{8\pi k}} \iint \left\{ g_0 \frac{ie^{i\eta r}}{\sqrt{r}} \vec{r}_0 - \frac{e^{i\eta r}}{\sqrt{r}} \text{grad} g_0 \right\} \vec{n} dl \quad (22,3)$$

Iz (22,1), za  $\eta = 0$  imamo,

$$g_0(0, \xi) = Af(\xi) \quad (22,4)$$

odnosno,

$$\text{grad} g_0 = Af(\xi) i k \vec{\eta}_0 \quad (22,5)$$

Odavde (22,3) glasi,

$$g(x, b) = -Ae^{-i\frac{\pi}{4}} \sqrt{\frac{k}{8\pi}} \int f(\xi) \frac{(\vec{r}_0 \cdot \vec{n} - \vec{\eta}_0 \cdot \vec{n})}{\sqrt{r}} e^{i\eta r} d\xi \quad (22,6)$$

i uzimajući u obzir da su,

$$\frac{\vec{r}_0 \cdot \vec{n}}{\eta_0 \cdot \vec{n}} \sim -1 \quad ; \quad \frac{1}{\sqrt{r}} \sim \frac{1}{\sqrt{b}} \quad (22,7)$$

imamo,

$$g(x, l) = \frac{A}{\sqrt{\lambda b}} e^{-\frac{i\pi}{4}} \int f(\xi) e^{ikr} d\xi \quad (22,8)$$

Zamenimo u (22,8) vrednost za,  $r \sim b + \frac{(x-\xi)^2}{2b}$  (22,9)

i uzimajući u obzir granice integracije kod difrakcije na dva otvora dobićemo,

$$g(x, l) = \frac{e^{-\frac{i\pi}{4}} A e^{ik(b + \frac{x^2}{2b})}}{\sqrt{\lambda b}} \left\{ \int_l^{L+l} e^{ik(\frac{\xi^2}{2b} - \frac{x\xi}{b})} d\xi + \int_{-(L+l)}^{-l} e^{ik(\frac{\xi^2}{2b} - \frac{x\xi}{b})} d\xi \right\} \quad (22,10)$$

Označimo u (22,10) sa,

$$\begin{aligned} p_1 &= \frac{2}{\lambda b} \\ q_1 &= \frac{2x}{\lambda b} \end{aligned} \quad (22,11)$$

i uvedemo novu promenljivu,

$$\begin{aligned} p_1 \xi - \frac{q_1}{p_1} &= \xi \\ \xi = L+l & \quad \xi \rightarrow p_1(L+l) - \frac{q_1}{p_1} \\ \xi = l & \quad \xi \rightarrow p_1 l - \frac{q_1}{p_1} \\ \xi = -(L+l) & \quad \xi \rightarrow -[p_1(L+l) + \frac{q_1}{p_1}] \\ \xi = -l & \quad \xi \rightarrow -(p_1 l + \frac{q_1}{p_1}) \end{aligned} \quad (22,12)$$

Tako da posle rešavanja (22,10) izlazi,

$$\begin{aligned} g(x, l) &= \frac{A e^{-\frac{i\pi}{4}} e^{ik(b + \frac{x^2}{2b})}}{\sqrt{\lambda b} p_1} e^{-\frac{i\pi}{2} (\frac{q_1}{p_1})^2} \left\{ C[p_1(L+l) - \frac{q_1}{p_1}] - C(p_1 l - \frac{q_1}{p_1}) + \right. \\ &+ iS[p_1(L+l) - \frac{q_1}{p_1}] - iS(p_1 l - \frac{q_1}{p_1}) + C[p_1(L+l) + \frac{q_1}{p_1}] - C(p_1 l + \frac{q_1}{p_1}) + \\ &\left. + iS[p_1(L+l) + \frac{q_1}{p_1}] - iS(p_1 l + \frac{q_1}{p_1}) \right\} \end{aligned} \quad (22,13)$$

odnosno intenzitet,

$$J = \frac{A^2}{\lambda b p_1^2} \left\{ (A_2 + C_2)^2 + (B_2 + D_2)^2 \right\} \quad (22,14)$$

za sistem integrala:

$$\begin{aligned} A_2 &= C[p_1(L+l) - \frac{q_1}{p_1}] - C(p_1 l - \frac{q_1}{p_1}) \\ B_2 &= S[p_1(L+l) - \frac{q_1}{p_1}] - S(p_1 l - \frac{q_1}{p_1}) \\ C_2 &= C[p_1(L+l) + \frac{q_1}{p_1}] - C(p_1 l + \frac{q_1}{p_1}) \\ D_2 &= S[p_1(L+l) + \frac{q_1}{p_1}] - S(p_1 l + \frac{q_1}{p_1}) \end{aligned} \quad (22,15)$$

A sada imajući u vidu raspored intenziteta (22,14) predjimo na dokazivanje teorema ekvivalencije.



## 23. TEOREM EKVIVALENCIJE

TEOREMA: Ako se otvori širine  $L$  razmaknuti za razmak  $2l$  osvetljavaju linearnim izvorom, tada je difrakciona slika na ekranu udaljen za  $b$  od otvora, proporcionalna difrakcionoj slici na ekranu udaljenom  $\frac{L}{\beta}$  ukoliko se odgovarajuće širine otvora i zaklona zamene sa  $\frac{L}{\beta}$  i  $\frac{2l}{\beta}$  (gde je  $\beta = \frac{a}{a+b}$ ) i otvori se osvetljavaju ravnim talasima.

Da bi smo dokazali ovaj teorem napišimo sistem integrala (22,15) u razvijenom obliku,

$$\begin{aligned} A_2 &= C\left[\sqrt{\frac{2}{\lambda b}}(L+l) - \sqrt{\frac{2}{\lambda b}}x\right] - C\left(\sqrt{\frac{2}{\lambda b}}l - \sqrt{\frac{2}{\lambda b}}x\right) \\ B_2 &= S\left[\sqrt{\frac{2}{\lambda b}}(L+l) - \sqrt{\frac{2}{\lambda b}}x\right] - S\left(\sqrt{\frac{2}{\lambda b}}l - \sqrt{\frac{2}{\lambda b}}x\right) \\ C_2 &= C\left[\sqrt{\frac{2}{\lambda b}}(L+l) + \sqrt{\frac{2}{\lambda b}}x\right] - C\left(\sqrt{\frac{2}{\lambda b}}l + \sqrt{\frac{2}{\lambda b}}x\right) \\ D_2 &= S\left[\sqrt{\frac{2}{\lambda b}}(L+l) + \sqrt{\frac{2}{\lambda b}}x\right] - S\left(\sqrt{\frac{2}{\lambda b}}l + \sqrt{\frac{2}{\lambda b}}x\right) \end{aligned} \quad (23,1)$$

$$\text{Zamenimo u (23,1), } L = \frac{L}{\beta}, l = \frac{l}{\beta} \text{ i } b = \frac{b}{\beta} \quad \} \quad (23,2)$$

pa ćemo dobiti,

$$\begin{aligned} A_2 &= C\left[\sqrt{\frac{2}{\lambda b\beta}}(L+l) - \sqrt{\frac{2\beta}{\lambda b}}x\right] - C\left(\sqrt{\frac{2\beta}{\lambda b}}\frac{l}{\beta} - \sqrt{\frac{2\beta}{\lambda b}}x\right) \\ B_2 &= S\left[\sqrt{\frac{2}{\lambda b\beta}}(L+l) - \sqrt{\frac{2\beta}{\lambda b}}x\right] - S\left(\sqrt{\frac{2\beta}{\lambda b}}\frac{l}{\beta} - \sqrt{\frac{2\beta}{\lambda b}}x\right) \\ C_2 &= C\left[\sqrt{\frac{2}{\lambda b\beta}}(L+l) + \sqrt{\frac{2\beta}{\lambda b}}x\right] - C\left(\sqrt{\frac{2\beta}{\lambda b}}\frac{l}{\beta} + \sqrt{\frac{2\beta}{\lambda b}}x\right) \\ D_2 &= S\left[\sqrt{\frac{2}{\lambda b\beta}}(L+l) + \sqrt{\frac{2\beta}{\lambda b}}x\right] - S\left(\sqrt{\frac{2\beta}{\lambda b}}\frac{l}{\beta} + \sqrt{\frac{2\beta}{\lambda b}}x\right) \end{aligned} \quad (23,3)$$

Kako je,  $b\beta = \frac{ba}{a+b}$  onda je  $\frac{1}{b\beta} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$

$$\text{Iz (20,4) imamo, } \sqrt{\frac{2}{\lambda b\beta}} = \sqrt{\frac{2}{\lambda}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)} = p \quad \sqrt{\frac{2\beta}{\lambda b}}x = \frac{x}{p} \quad (23,4)$$

Zamenimo (23,4) u (23,3) pa ćemo dobiti,

$$\begin{aligned} A_2 &= C\left[p(L+l) - \frac{x}{p}\right] - C\left(pl - \frac{x}{p}\right) \\ B_2 &= S\left[p(L+l) - \frac{x}{p}\right] - S\left(pl - \frac{x}{p}\right) \\ C_2 &= C\left[p(L+l) + \frac{x}{p}\right] - C\left(pl + \frac{x}{p}\right) \\ D_2 &= S\left[p(L+l) + \frac{x}{p}\right] - S\left(pl + \frac{x}{p}\right) \end{aligned} \quad (23,5)$$

a to je sistem integrala (20,9) koji izražava raspored difragiranih talasa na dve paralelne pukotine osvetljene cilindričnim talasima. Sada bi trebalo zameniti (23,5) u (22,14) i dobiti intenzitet difragiranih talasa. Uporedjivanjem (22,14) za sistem integrala (23,5) i (20,8) za sistem integrala (20,9) vidimo da se razlikuju jedino u proporcionalnim konstantama. Kod cilindričnih upadnih talasa proporcionalna konstanta je,

$$\frac{A^2 \lambda}{2\pi^2(a+b)} = \frac{A^2 \lambda}{2\pi^2 D} \quad (23,6)$$

a kod ravnih upadnih talasa konstanta ispred funkcije intenziteta je,  $A^2/2$ . Zbog toga teorem ekvivalencije pokazuje da su intenziteti proporcionalni ali ne jednaki. Ovaj teorem se može proširiti i preko talasne dužine svjetlosti.

Specijalno za  $l = 0$  dobićemo difrakcioni intenzitet na pukotini širine  $2L$ . Tada sistem integrala (20,9) glasi,

$$\begin{aligned} A_1 &= C\left(pL - \frac{t}{p}\right) + C\left(\frac{t}{p}\right) \\ B_1 &= S\left(pL - \frac{t}{p}\right) + S\left(\frac{t}{p}\right) \\ C_1 &= C\left(pL + \frac{t}{p}\right) - C\left(\frac{t}{p}\right) \\ D_1 &= S\left(pL + \frac{t}{p}\right) - S\left(\frac{t}{p}\right) \end{aligned} \quad (23,7)$$

odnosno sistem (23,3) prelazi u,

$$\begin{aligned} A_2 &= C\left(pL - \frac{t}{p}\right) + C\left(\frac{t}{p}\right) \\ B_2 &= S\left(pL - \frac{t}{p}\right) + S\left(\frac{t}{p}\right) \\ C_2 &= C\left(pL + \frac{t}{p}\right) - C\left(\frac{t}{p}\right) \\ D_2 &= S\left(pL + \frac{t}{p}\right) - S\left(\frac{t}{p}\right) \end{aligned} \quad (23,8)$$

a ovo je već bilo poznato.

## Z A K L J U Č A K

U ovom radu sam analizirao neke klasične interferencione šeme sa difrakcionog aspekta. Iz matematičke analize se vidi da kod svih tih šema možemo, raspored svjetlosnog intenziteta, izraziti funkcijama koje se ne razlikuju mnogo. Naime, teorija je provedena za svaku šemu posebno, uzimajući u obzir specifične parametre date šeme, koji obezbeđuju egzistenciju dvaju koherentnih centara zračenja i kako se pokazalo funkcije intenziteta pokazuju veliku sličnost.

Bitna osobina svih šema koje su analizirane u ovom radu sastoji se u nemogućnosti odvajanja interferencionih pojava od difrakcionih. To je suprotno od očekivanja onih fizičara koji su konstruisali klasične interferencione šeme. I ne samo to, već difrakciona teorija pokazuje da i na bliskim rastojanjima od optičke osi - osi simetrije šeme, interferencione linije nisu konstantnog intenziteta. U svim šemama, osim Meslinovog eksperimenta, funkcije su simetrične u odnosu na os simetrije ali centralne linije ne moraju da budu najosvetlenije. U većini slučajeva najosvetlenije su linije prema bočnoj strani difrakcione slike. Teorija pokazuje dobro slaganje sa eksperimentalnim merenjima i snimcima.

U literaturi se nalaze neke slike u kojima su odvojene interferencione linije od difrakcionih, tako da u sredini tih slika se nalaze interferencione linije različitih intenziteta a na bočnim delovima slika samo difrakcioni intenziteti [11] (za biprizmu). Kako autor [11] napominje, ta se slika dobija pomoću diafragme koja pokriva samo krajnje delove biprizme. Ova teorija, te slučajeve ne sadrži.

Iz difrakcione teorije možemo dobiti formulu elementarne

teorije za razmak između interferencionih linija, ali kako se pokazalo ta formula u nekim slučajevima ne odgovara realnosti. To se vidi iz tablice I. Iz difrakcione teorije istovremeno su uklonjene neke poteškoće koje su se pojavile u elementarnoj teoriji.

1. Kad je kod biogledala ugao između ogledala  $\alpha$  vrlo mali tada je na difrakcionoj slici centralna linija najšira i s obe strane se nadovezuju linije slabijeg intenziteta i manjeg razmaka (sl. 8 za  $\alpha = 3'8$  i sl. 9 za  $\alpha = 2'$ ). Elementarna formula na ovo ne može odgovoriti. Iz nje izlaze linije jednakih širina i konstantnih intenziteta.

2. Prema elementarnoj formuli  $x = \frac{m\lambda}{2\sin\alpha} \left(1 + \frac{\alpha}{2}\right)$ ,  $x \rightarrow \infty$  za  $\alpha = 0$ . Difrakciona teorija pokazuje da u tom slučaju odpada samo interferencijski član, ali u funkciji intenziteta ostaje difrakcijski član. Kako nam je poznato svaka funkcija intenziteta se sastoji od difrakcionog i interferencionog člana. Eksperimenti pokazuju i kada  $\alpha \rightarrow 0$  ni najšire centralne linije nemaju širine koje odgovaraju elementarnoj formuli. Tu se pojavljuje ograničenost Fresnelove elementarne teorije.

3. Prema elementarnoj formuli za  $b = 0$  treba dobiti linije širina  $x = \frac{\lambda}{2} \sin\alpha$ . Eksperimenti pokazuju da širine linija teže k nuli kada se približavamo koordinatnom početku kod biogledala. Na ovo pitanje ni difrakciona teorija ne može odgovoriti. To je razumljivo jer u tom slučaju uopšte se ne može koristiti Kirchhoffova teorija, zbog nemogućnosti korišćenja binomnog razvoja. Naime, za  $b \rightarrow 0$  binomni razvoj ne konvergira, već nasuprot divergira. Ovaj problem će biti problem novih ispitivanja.

4. Kod razmaknutih ogledala je ispitan slučaj kada su difrakcione slike simetrične. Simetričnost dolazi zbog izbora koordinatnog sistema. U ovom radu, teoriju sam izveo za slučaj kada se

koordinatni sistem postavlja u sredini fiktivnog zaklona. Taj koordinatni sistem može se povezati sa ivicom prvog odnosno drugog ogledala ali u tom slučaju izlaze nesimetrične funkcije. Slučaj nesimetričnosti nije unesen u disertaciji.

5. Kod razmaknutih ogledala postoji jedno fazno pomeranje difrakcionih slika u odnosu na koordinatni sistem koji se postavlja u ekranu. Fazno pomeranje zavisi od svih parametara biogledala. U radu je postavljena opšta zavisnost od svih parametara ali numerički je ispitivan slučaj kada su svi parametri konstantni, osim parametra  $b$ . Kako se vidi iz teorije maksimalno fazno pomeranje uz konstantne druge parametre, odgovara minimalnom  $b$ . Tako na sl. 15 pomeranje je maksimalno u odnosu na ostale slike razmaknutih ogledala. Na toj slici pomeranje iznosi gotovo polovinu interferencione linije. Za veliko  $b$  pomeranje je malo. Kako su eksperimenti sa biogledalima mnogo osetljiviji, fazno pomeranje teško je otkriti.

6. Medjusobni razmak izmedju ogledala odgovara fiktivnom zaklonu koso položenom prema smjeru talasa. Jednostavnim prelazom mogli smo ispitivati difrakciju na koso položenom zaklonu. Taj slučaj se dobija za  $\alpha = 0$  i  $L \rightarrow \infty$ . Suprotno, ako  $L$  nije veliko onda izlazi formula za Fresnelovu difrakciju na dve pukotine, koji je slučaj detaljno analiziran u glavi V. Taj prelaz pokazuje tačnost pretpostavke o fiktivnom zaklonu.

7. U slučajevima koji su ispitivani numeričkim putem kod biprizme imamo lepo slaganje izmedju klasične elementarne teorije za širinu interferencionih linija i difrakcione teorije. To se vidi iz tablice III u kojoj su uneti rezultati uporedjivanja. Medjutim, difrakciona teorija kod biprizme pokazuje da su interferencione linije

različitih intenziteta. Kod ispitivanja nekih slučajeva, centralne interferencione linije su manjeg intenziteta nego bočne linije, difrakcionih slika, gde dolaze do izražaja najviše difrakcioni efekti. Kod biogledala to ne važi strogo (vidi rezime 2).

8. Billetova interferenciona šema takodje se izražava analognim funkcijama kao kod biogledala i biprizme. Ispitivan je slučaj upadnih paralelnih i cilindričnih talasa svjetlosti. Kako parametar  $p$  u teoriji može da bude i realan i imaginaran u zavisnosti od udaljenosti ekrana  $b$ , ispitivane su obe mogućnosti. Teorija je provedena za cilindrično sočivo ali ona može bez ikakve promene proširiti i za druge tipove konvergentnih cilindričnih sočiva kao što su plankonvekna sočiva. Dovoljno je pretpostavljati da radius zakrivljenosti jednog dela cilindričnog sočiva teži prema beskonačnosti. Numerička analiza za Billetovo bisočivo nije provedena, jer je ona identična sa prethodno analiziranim interferencionim šemama. Smatrao sam da to nije potrebno.

9. Kod difrakcione teorije Meslinovog eksperimenta više sam pažnje posvetio egzistenciji izvora duž optičke osi. Ti izvori izlaze kao posledica difrakcione teorije. Zbog toga su analizirani slučajevi kada se ravnina posmatranja postavlja u odredjenim položajima i to u mesto prvog odnosno drugog fiktivnog izvora. Intenziteti fiktivnih izvora nisu jednaki kako bi trebalo očekivati, jer kako znamo energija zračenja je proporcionalna kvadratu amplituda upadnih talasa. Amplitude opadaju sa povećanjem  $r$  kod sfernih ili  $\sqrt{r}$  kod cilindričnih talasa.

10. U radu je dokazana veza izmedju Fraunhoferove difrakcije na dve paralelne pukotine i prvobitnog Youngovog eksperimenta.

Jedina razlika je u tome što je prvobitni Youngov eksperiment izveden bez posebnog objektiva a Fraunhoferova difrakcija se posmatra u fokalnoj ravnini objektiva. Ova veza je dokazana i numeričkim i matematičkim putem.

11. Teorem ekvivalencije kod Fresnelove difrakcije na dve pukotine predstavlja proširenje jednog poznatog teorema kod difrakcije na pukotini. Veza između difrakcionih slika može se proširiti i preko talasne dužine  $\lambda$ , dimenzija otvora i položaja ekrana.

12. Za svaku šemu izvedeni su tzv. Fraunhoferovi prelazi, koji nam istovremeno pokazuju tačnost postavljenih funkcija intenziteta. Težio sam da ti prelazi idu preko asimtotike Fresnelovih integrala a ne preko difrakcione teorije upadnih paralelnih talasa kako se to obično radi.

Numerička analiza je provedena kompjuterom i programi tih analiza su izneti u dodatku ove disertacije.

## CITIRANA LITERATURA

- [1] Fresnel A.J., Oeuvres completes T.1 /1866/
- [2] Th. Young, On the theory of light and colours, Phil. Tr. /1802/  
p. 12
- [3] E. Verdet, "Lecons D'optique Physique", Paris /MCCCCLXIX/
- [4] R. W. Wood, "Optique Physique", Paris /1913/
- [5] P. Drude, "The Theory of optics", New York /1959/
- [6] M. Laue, "Handbuch der Experimental physik", Bd XVIII - Der Fres-  
nelsche Spiegel und ähnliche interferenzanordnungen - str. 225-230
- [7] Weber H. F., Ann. d. Phys., /1879/ 8, 407
- [8] Struve H., Ann. d. Phys., /1882/ 15, 49
- [9] Ditchburn R. W. "Light" (ruski prevod), Moskva /1965/
- [10] M. Born and E. Wolf, "Principles of Optics", Second (revised)  
edition (ruski prevod), Moskva /1970/
- [11] Jenkins F. A. and Harvey E. W., "Fundamentals of Optics", (second  
edition), New York /1950/
- [12] K. Kempni, O Fresnelovom pokusu s dva zrcala, Zagreb /1952/
- [13] K. Kempni, und M. Haber, Interferenzerscheinungen bei auseinan-  
dergerückten Fresnelschen Spiegeln, Zagreb /1956/
- [14] K. Kempni, Zusammenhang Zwischen den Interferenzerscheinungen bei  
aneinandergerückten und auseinandergerückten Fresnelschen Spiegeln,  
Zagreb /1958/
- [15] Mandelštan L. I. "Lekcii po optike teorii atnasitelnosti i kvanto-  
voj mehanike", Moskva /1972/
- [16] Landsberg G. S., "Optika" (prevod), Beograd /1967/
- [17] Aramanović I. G. i Levin V. I. "Uravnjenja matematičeskoj fiziki",  
Moskva /1964/
- [18] Papoulis A., Fresnel Transforms with applications in diffraction  
theory, Proceedings of the symposium on "Modern Optics",  
New York /1967/
- [19] Kirchhoff G., Ann. d. Phys. 18, 663 /1883/
- [20] Wainštein L. A., "Teorija difrakcije i metod faktorizacije",  
Moskva /1966/



- [21] H. Hönl, A. W. Maue, K. Westpfahl, "Handbuch der Physik", Göttingen /1961/ (ruski prevod)
- [22] Stone J., "Radiations and Optics", Mc Graw-Hill /1963/
- [23] Papoulis A., "Systems and Transforms with applications in optic", Moskva /1971/ (ruski prevod)
- [24] Janićijević Lj. Teorija na difrakcija na svetlinata kaj linearnata zonska mrežička - doktorska disertacija, Skopje /1973/
- [25] Jahnke E. Emde F. Lösch, "Tafeln Hönerer Funktionen", Stuttgart /1960/
- [26] Abramovitch M., Stegun J. A., "Handbook of Mathematical Functions" New York, Pover Publication /1965/
- [27] Gilbert M., Recherches analytiques sur la diffraction de la lumière, Mém. couronnées de l'Acad. de Bruxelles, XXX str. 1.
- [28] Jonoska M., - Difrakcija na kružni prepreki so osna simetrična transparentija i faza, - doktorska disertacija, Skopje /1975/
- [29] Moser J., - Teorija difrakcije svjetlosti na zonskim mrežicama, - doktorska disertacija, Skopje /1961/
- [30] Table of Fresnel integrals by A. Van Wijngaarden and W. L. Scheen, Amsterdam /1949/
- [31] Wolf E. Mandel L., Rev. Mod. Phys. 37, 231 /1965/
- [32] Moser J. i Bejtullahu R. Fraunhoferova difrakcija svjetlosti na pukotini sa eksponencialnom transparentijom, God. zbor. P. M. F., Priština 2 /1975/
- [33] Moser J. i Bejtullahu R. Fraunhoferova difrakcija svjetlosti na pukotini sa paraboličnom transparentijom, god. zbor. P. M. F., Priština 2 /1975/
- [34] Bejtullahu R. - Fraunhoferova difrakcija svjetlosti na nizu paralelnih pukotina, - magistarski rad, Skopje /1973/
- [35] Franklin S. H. Michael S. T. and Richard L. M. Single - Slit Fresnel Diffraction Patterns: Comparison of experimental and theoretical Results. Journal of the optical society of America, V. 59 No. 3
- [36] Billet, Mémoire sur les demi - lentilles d'interference, Ann. de chim. et de phys. 3, LXIV, 385.
- [37] Janićijević Lj., Prirod kon problemot na formiranje na likovi kaj tenka cilindrična leća od gledište na difrakcionata teorija, God. zbor. na P. M. F., Skopje A. 25 /1975/

## DODATAK I

## PROGRAM ZA SPOJENA OGLEDALA

PAGE 1

// JOB 2A80

LOG DRIVE	CART SPEC	CART AVAIL	PHY DRIVE
0000	2A80	2A80	0000

V2 MOB ACTUAL 16K CONFIG 16K

// FOR

\*IOCS(CARD,1132 PRINTER,PLOTTER,DISK)

\*ONE WORD INTEGERS

\*LIST SOURCE PROGRAM

DIMENSION Y(4),Z(4),W(4)

ALA=6328.E-10

PI=3.1415926

PP=PI/2.

ALF=0.105\*PI/108

F=SIN(ALF)

DP=2\*PI\*F

BL=0,1

FI=82\*PI/180.

7 READ(2,100)A,B

100 FORMAT(2F4.2)

WRITE(3,300)A,B

300 FORMAT(2X,'A=',F4.2,'B=',F4.2/)

D=A+B

X=0.

WRITE(3,301)

301 FORMAT(3X,'X',11X,'M',15X,'P',15X,'Q',15X,'N',14X,'SIN',14X,'I')

2 E=X/B

T=2\*(E+F)/ALA

T1=2\*(E-F)/ALA

P=SQRT(2\*(1/A+1/B)/ALA)

S=T/P-P\*BL\*COS(FI)

S1=T1/P+P\*BL\*COS(FI)

S2=T1/P

Y(1)=PP\*(T/P)\*\*2

Y(2)=PP\*S\*\*2

Y(3)=PP\*S1\*\*2

Y(4)=PP\*S2\*\*2

```

DO 4 J=1,4
CALL CS(Z(J),W(J),Y(J) )
4 CONTINUE
IF(S)11,11,12
11 K=-1
GO TO 13
12 K=1
13 A1=Z(1)-K*Z(2)
BI=W(1)-K*W(2)
IF(S1) 14,14,15
14 K1=-1
GO TO 16
15 K1=1
16 IF(S2) 17,17,18
17 K2=-1
GO TO 19
18 K2=1
19 C1=K1*Z(3)-K2*Z(4)
D1=K1*W(3)-K2*W(4)
Q=A1*D1-B1*C1
P1=A1*C1+B1*D1
AM=(A1+C1)**2+(B1+D1)**2
AR=DP*A*X/(ALA*D)
ASIN=SIN(AR)
ANN=P1*ASIN+Q*COS(AR)
AI=AM-4.*ANN*ASIN

```

PAGE 2

```

WRITE(3,200) X,AM,P1,Q,ANN,ASIN,AI
200 FORMAT(F8.6,6E16.7)
X=X-0.00002
IF(X-0.03)2,2,7
1 CALL EXIT
END

```

UNREFERENCED STATEMENTS

1  
FEATURES SUPPORTED  
ONE WORD INTEGERS  
IOCS

CORE REQUIREMENTS FOR  
COMMON 0 VARIABLES 98 PROGRAM 624

END OF COMPILATION

// XEQ

A=0.70B=4.50

DODATAK II

PROGRAM ZA RAZNOLAKNUTA  
OCHEKIVANJA

PAGE 1

// JOB 2A80

LOG DRIVE	CART SPEC	CART AVAIL	PHY DRIVE
0000	2A80	2A80	0000

V2 M08      ACTUAL 16K      CONFIG 16K

// FOR

\*IOCS (CARD, 1132 PRINTER, PLOTTER, DISK)

\*ONE WORD INTEGERS

\*LIST SOURCE PROGRAM

DIMENSION Y(4), Z(4), W(4), AR(4), KK(4)

ALA=5896, E-10

PI=3.1415926

PP=PI/2.

ALF=0.07\*PP/27.

F=SIN(ALF)

DP=2\*PI\*F

BL=0.1

CL=0.011

FI=23.35\*PI/54.

READ(2,100) A,B

100 FORMAT(2F4.0)

WRITE(3,300) A,B

300 FORMAT(2X,'A=',F5.2,'B=',F5.2/)

D=A+B

P=SQRT(2\*(1/A+1/B)/ALA)

G=PP\*CL\*\*2\*(1/A+1/B)\*(SIN(FI)\*\*2-SIN(FI-ALF)\*\*2)/ALA

X=0.

WRITE(3,301)

```

301 FORMAT(3X,'X',11X,'M',15X,'P',15X,'Q',15X,'N',14X,'SIN',14X,'I')
2 Q1=2*(X/B+F)/ALA
  Q2=2*(X/B-F)/ALA
  AR(1)=Q1/P-P*CL*COS(FI)
  AR(2)=Q1/P-P*(BL+CL)*COS(FI)
  AR(3)=Q2/P+P*(BL+CL)*COS(FI)
  AR(4)=Q2/P+P*CL*COS(FI)
  DO 99 I=1,4
99 Y(I)=PP*AR(I)**2
  DO 4 J=1,4
  CALL CS(Z(J),W(J),Y(J))
4 CONTINUE
  DO 98 I=1,4
  IF(AR(I)) 97, 96, 96
97 KK(I)=1
  GO TO 98
96 KK(I)=1
98 CONTINUE
  A1=KK(1)*Z(1)-KK(2)*Z(2)
  B1=KK(1)*W(1)-KK(2)*W(2)
  C1=KK(3)*Z(3)-KK(4)*Z(4)
  D1=KK(3)*W(3)-KK(4)*W(4)
  Q=A1*D1-B1*C1
  P1=A1*C1+B1*D1
  AM=(A1+C1)**2+(B1+D1)**2
  ARGU=DP*A*X/(ALA*D)
  ASIN=SIN(ARGU+G)
  ANN=P1*ASIN+Q*COS(ARGU+G)
  A1=AM-4*ANN*ASIN
  WRITE(3,200)X,AM,P1,Q,ANN,ASIN,A1
200 FORMAT(1X,F8.6,6E16.7
  X=X+0.00001
  IF(X-0.03)2,2,7
7 CONTINUE
  CALL EXIT

```

FEATURES SUPPORTED  
ONE WORD INTEGERS  
IOCS

CORE REQUIREMENTS FOR  
COMMON            0 VARIABLES    112 PROGRAM    740

END OF COMPILATION

// XEQ

A=1.34B= 0.95

## DODATAK III

## PROGRAM ZA BIPIRIZMU

PAGE 1

// JOB 2A80

LOG DRIVE	CART SPEC	CART AVAIL	PHY DRIVE
0000	2A80	2A80	0000

V2 M08 ACTUAL 16K CONFIG 16K

// FOR

\*IOCS(CARD,1132PRINTER,PLOTTER,DISK)

\*ONE WORD INTEGERS

\*LIST SOURCE PROGRAM

DIMENSION Y(4),Z(4),W(4)

AN=0.5262

ALA=5893. E -10

PI=3.1415926

PP=PI/2.

ALF=PI/360.

F=AN\*(SIN(ALF)/COS(ALF))

DP=2\*PI\*F

BL=0.00635

7 READ(2,100)A,B

100 FORMAT(2F4.1)

WRITE(3,300)A,B

300 FORMAT(2X,'A=',F3.1,'B=',F3.1/)

D=A+B

X=0.

WRITE(3,300)A,B

301 FORMAT(3X,'X',11X,'M',15X,'P',15X,'Q',15X,'N',14X,'SIN',14X,'I')

2 E=X/B

T=2\*(E+F)/ALA

T1=2\*(E-F)/ALA

P=SQRT(2\*(1/A+1/B)/ALA)

S=T/P-P\*BL



8

```
S1= T1/P+P*BL
S2=T1/P
Y(1)= PP*(T/P)**2
Y(2)= PP*S**2
Y(3)= PP*S1**2
Y(4)= PP*S2**2
DO 4 J=1,4
CALL CS(Z(J),W(J),Y(J))
4 CONTINUE
IF(S)11,11,12
11 K=-1
GO TO 13
12 K= 1
13 A1=Z(1)-K*Z(2)
B1=W(1)-K*W(2)
IF(S1)14,14,15
14 K1=-1
GO TO 16
15 K1=1
16 IF(S2) 17, 17, 18
17 K2=-1
GO TO 19
18 K2=1
19 C1=K1* Z(3)-K2*Z(4)
D1=K1* W(3)-K2*W(4)
Q= A1 * D1-B1 * C1
P1= A1 * C1+ B1 * D1
AM= (A1+ C1)**2+ (B1+ D1)**2
AR= DP*A*X/(ALA*D)
ASIN= SIN(AR)
ANN= P1* ASIN+ Q*COS(AR)
A1=AM-4.*ANN*ASIN
```

PAGE 2

```
WRITE (3, 200)X,AM,P1,Q,ANN,ASIN,AI
200 FORMAT(F8.6,6E16.7)
X=X+0.00005
IF(X-0.01) 2,2,7
1 CALL EXIT
END
```

UNREFERENCED STATEMENTS

1

FEATURES SUPPORTED

ONE WORD INTEGERS

IOCS

CORE REQUIREMENTS FOR

COMMON 0 VARIABLES

98 PROGRAM 604

END OF COMPILATION

// XEQ

A=1.0B=2.1

## DODATAK IV

DIFRAKCIJONA TEORIJA FRESNELOVOG  
TIPA NA DVE PUKOTINE

PAGE 1

// JOB 2A80

LOG DRIVE	CART SPEC	CART AVAIL	PHY DRIVE
0000	2A80	2A80	0000

V2 MOB ACTUAL 16K CONFIG 16K

// FOR

\*IOCS(CARD,1132PRINTER,PLOTTER,DISK)

\*ONE WORD INTEGERS

\*LIST SOURCE PROGRAM

DIMENSION Y(4),Z(4),W(4),AR(4),KK(4)

ALA= 5896. E-10

PI= 3.1415926

PP= PI/2.

BL= 0.002

CL= 0.001

READ(2,100)A,B

100 FORMAT(2F6.0)

WRITE(3,300)A,B

300 FORMAT(2X,'A=',F6.3,2X,'B=',F6.3/)

P= SORT(2\*(1./A+1./B)/ALA)

X=0.

WRITE(3,301)

301 FORMAT(3X,'X',11X,'I')

2 Q1=2\*X/(B\*ALA)

AR(1)= Q1/P-P\*CL

AR(2)= Q1/P-P\*(BL+CL)

AR(3)= Q1/P+P\*(BL+CL)

AR(4)= Q1/P+P\*CL

DO 99 I=1,4

99 Y(I)=PP\*AR(I)\*\*2

DO 4 J=1,4

CALL CS(Z(J),W(J),Y(J))

```
4 CONTINUE
  DO 98 I=1,4
  IF (AR(I)) 97,96,96
97 KK(I)=-1
  GO TO 98
96 KK(I)=1
98 CONTINUE
  A1=KK(1)*Z(1)-KK(2)*Z(2)
  B1=KK(1)*W(1)-KK(2)*W(2)
  C1=KK(3)*Z(3)-KK(4)*Z(4)
  D1=KK(3)*W(3)-KK(4)*W(4)
  A1=(A1+C1)**2+(B1+D1)**2
  WRITE (3,200) X,A1
200 FORMAT(1X,F8.6,E16.7)
  X=X+0.0001
  IF (X-0.1) 2,2,7
  7 CONTINUE
  CALL EXIT
  END
```

FEATUR SUPPORTED  
ONE WORD INTEGERS  
IOCS

CORE REQUIREMENTS FOR  
COMMON            0 VARIABLES    80    PROGRAM    484

END OF COMPILATION

// XEQ