Univerzitet u Beogradu

Prirodno-matematički fakultet

Matematički fakultet

Šarac Marica

Konstrukcije hiperboličkih prostornih formi, konačne zapremine, dobijene iz ravanskih formi

doktorska teza

Beograd , 1988.

Jani

Predgovor

Do rezultata prezentiranih u ovom radu, došla sam za vreme šestomesečnog boravka na Otseku za geometriju Eötvös Loránd Univerziteta u Budimpešti, kao stipendista mađarske vlade. Pod mentorstvom docenta dr. Emila Molnára, proučavala sam grupe transformacija u hiperboličkom 3-dimenzionalnom prostoru H^3, sa akcentom na primeni metoda simetrije na rešavanje nekih problema sintetičke geometrije. Osnovni cilj istraživanja bile su konstrukcije kompaktnih i nekompaktnih hiperboličkih prostornih formi konačne zapremine.

Uvod ovog rada baziran je na izvanrednom prikazu svih značajnijih, do sada poznatih rezultata iz teorije hiperboličkih prostornih formi, koji je u [11], u apendiksu, dao Burago. Pored toga, uvod sadrži i veoma iscrpan pregled radova u kojima su kojima su dati primeri konstrukcija hiperboličkih prostornih formi [1,4,12,14,20-25,31-33,37-39].

I deo ove teze sastoji se od 6 tačaka:

1 Uvoda, u kome je dat pojam mnogostrukosti i pojam fundamentalne (ili Poincaré-ove ili prve homotopne) grupe zadate površi (kompaktne povezane 2-dimenzionalne mnogostrukosti) u uočenoj tački te površi [2,17,27,31,46,49].

2 Prostorne forme, u kojoj je data definicija prostorne forme (sferne, euklidske i hiperboličke) [2,6,11,26,31,34,37,47,49,50]

3 Površi bez granice, u kojoj su dati fundamentalna grupa sfere, torusa, površi roda p (sve ove površi su orijentabilne) i fundamentalna grupa projektivne ravni, Klein-ove boce, sfere sa q ukrštenih kapa (sve ove površi su neorijentabilne) i njihovi Cayley-jevi dijagrami [17,18,19,27,49].

4 Regularne teselacije ravni, u kojoj je dat pregled regularnih teselacija {p,q} (koje su prosto-povezani topološki poliedri) ravni

S^2, E^2 i H^2 [49]

5 Zatvorene površi proizvoljne karakteristike, u kojoj su dati

a) fundamentalna grupa neorijentabilne površi, dobijena kao grupa generisana klizajućim simetrijama

b) fundamentalna grupa orijentabilne površi, dobijena kao grupa generisana translacijama [17,18,19,27,49].

6 Euklidske i hiperboličke ravanske forme, u kojoj su definisane euklidske i hiperboličke ravanske forme, data klasifikacija euklidskih i delimična klasifikacija hiperboličkih(samo za slučaj konačno generisane fundamentalne grupe) ravanskih formi [11,17,27,49].

II deo sadrži prikaz Poincaré-ovog metoda za konstruisanje diskontinualnih grupa izometrija [26,33,42]

III deo sadrži pojam Dirichlet-ovog poliedra , fundamentalnog domena za grupu G koja dejstvuje diskontinualno na prostoru H^3 [2,7,9,15,24,26,31,34,35,37,39,42]

IV deo sadrži prikaz konstrukcije diskontinualnih, slobodno dejstvujućih grupa, generisanih izometrijama koje čuvaju orijentaciju. U ovom delu dat je i iskaz specijalne, za ovaj slučaj, Poincaré-ove teoreme [32]

V deo sadrži prikaz metričke konstrukcije fundamentalnog poliedra, pomoću vektorskog modela hiperboličkog 3-prostora H^3, i sastoji se od 3 tačke [7,9,35,36,28]

1 Projektivno-metrički prostor $P_1^3 = H^3$, modeliran u projektivnom prostoru P^3 $(V^4; V_4^*)$, u kojoj je konstruisan projektivni model prostora H^3 i u njemu uvedena metrika zadavanjem polariteta odnosno definisanjem simetrične bilinearne forme [35,36].

2 Rastojanje i mera ugla u projektivno-metričkom prostoru, u kojoj su date odgovarajuće formule, koje su kasnije koriščene za dobijanje metričkih podataka o konstruisanim prostornim formama [35,36].

3 Simpleksi sa svojstvenim, idealnim i nesvojstvenim pljosnima i temenima, u kojoj je data Schläfli-jeva matrica za zadati simpleks, kao i uslovi pod kojima ona definiše hiperboličku projektivnu metriku. Takođe je data primedba o Coxeter-ovim grupama, čiji su fundamentalni domeni upravo razmatrani simpleksi i dat oblik i zapis njihovih Coxeter-ovih dijagrama [9,15,31,34,35,36,18]

VI deo sadrži prikaz konstrukcije prizmatične kompaktne hiperboličke prostorne forme, konačne zapremine, dobijene iz hiperboličke ravanske forme. Ovaj deo sastoji se od tri tačke

1 Uvoda, u kojem je dat motiv za konstruisanje ove forme i odabran metod za njeno konstruisanje

2 Konstrukcije poliedra $\tilde{\mathcal{D}}$, u kojoj je konstruisan poliedar $\mathcal{D}$, dat Schlegel-ov dijagram za poliedar $\tilde{\mathcal{D}}$ i prezentacija odgovarajuće diskontinualne, slobodno dejstvujuće grupe G hiperboličkih izometrija, čiji je fundamentalni domen, prema Poincaré-ovoj teoremi, upravo poliedar $\mathcal{D}$. Time je dobijena tražena forma $\tilde{\mathcal{D}} = H^3/G$. Takođe je data prva homološka grupa te mnogostrukosti.

3 Metričke konstrukcije poliedra $\mathcal{D}$ na vektorskom modelu prostora H^3, u kojoj je data Schläfli-jeva matrica, pomoću simpleksa $\mathcal{S}$ poliedra $\mathcal{D}$ i utvrđeno da pripadna metrika zaista hiperbolička. Utvrđena je priroda svih temena simpleksa $\mathcal{S}$, čije je zarubljivanje izvršeno, i, pomoću hiperboličkih refleksija u odnosu na njegove pljosni, konstruisan fundamentalni poliedar $\mathcal{D}$ grupe G. Dobijena je kompaktna hiperbolička prostorna forma $\tilde{\mathcal{D}} = H^3/G$. U tabeli 1 dati su neki metrički podaci o ovoj formi. Najzad, ustanovljeno je da je odgovarajuća Coxeter-ova nadgrupa naše grupe G, konačnog indeksa 48.

VII deo sadrži prikaze konstrukcija bipiramidalnih nekompaktnih hiperboličkih prostornih formi, konačnih zapremina, dobijenih sa ili bez korišćenja euklidskih ravanskih formi. Konstruisano je

6 takvih formi (poslednja dva primera konstruisao je E.Molnár).

Kao i u prethodnom delu, imamo tri tačke

1 Uvod, sa navedenim motivom za konstruisanje forme $\tilde{\mathcal{D}}_i$

2 Konstrukciju poliedra $\mathcal{D}_i$ (i=1,2,3,4,5,6) i formi $\tilde{\mathcal{D}}_i = H^3/G_i$ (i=1,2,3,4,5,6), koje su nekompaktne hiperboličke prostorne forme, sa konačnom zapreminom

3 Metrička konstrukcija poliedra $\mathcal{D}_i$ (i=1,2,3,4,5,) na vektorskom modelu prostora H^3, u kojoj je data Schläfli-jeva matrica, pomoću prirodnog simpleksa $\mathcal{S}_i$, sa dva idealna temena A_0 i A_3, odnosno njegovih uglova- diedara. Pokazano je da je tako indukovana metrika zaista hiperbolička.Ustanovljeno je da je odgovarajuća Coxeter-ova nadgrupa naše grupe G_i indeksa 24, (i=1,2,3,4,5,6).

VIII deo čini pogovor, u kojem je ukazano na široku primenljivost Poincaré-ove teoreme na još neke fundamentalne poliedre, čiji su prirodni simpleksi navedeni [2,9,31]

Sledi zatim spisak korišćene literature i sadržaj.

Najsrdačnije zahvaljujem svom stipenditoru, koji mi je obezbedio kvalitetne mogućnosti za bavljenje naučnim radom, zatim svom mentoru dr. Emilu Molnaru, koji me je vrlo stručno uveo u ovu, veoma aktuelnu problematiku i izvanredno strpljivo i savesno saradivao i pomagao u izradi ove teze. Takođe zahvaljujem dr.Zoranu Lučiću, koji je pažljivo pročitao rad i dao niz korisnih sugestija i primedbi, kao i dr.Nedi Bokan, koja mi je tokom izrade teze pružala , stručno i prijateljski, veliku pomoć i podršku.

Zahvaljujem mojim roditeljima na svesrdnoj moralnoj i materijalnoj pomoći koju su mi pružili tokom izrade ovog rada.

Najzad, zahvaljujem mojoj bebi Jani, koja je na vreme digla ruke od ove teze i tako omogućila da se ona pojavi u ovoj formi.

Uvod

Hiperboličke prostorne forme, tj.kompletne povezane Riemann-ove mnogostrukosti konstantne krivine -1, kratko nazivamo hiperboličkim mnogostrukostima. Hiperboličke mnogostrukosti su faktor-prostori H^n/G hiperboličkog prostora H^n po slobodno dejstvujućoj (bez nepokretnih tačaka) diskretnoj grupi G njegovih izometrija [11]. Klasifikacija hiperboličkih površi (dvodimenzionalnih hiperboličkih mnogostrukosti) tesno je povezana sa teorijom Riemann-ovih površi i konformnih preslikavanja i za slučaj beskonačno-povezanih površi još nije završena [6]. Tim pre, još ne postoji klasifikacija n-dimenzionalnih hiperboličkih mnogostrukosti. [6]

Za n=2, kompletna Riemann-ova metrika konstantne pozitivne krivine može se zadati samo na sferi i projektivnom prostoru. Metrika nulte krivine - samo na ravni, cilindru,torusu, cilindru Möebius-a i Klein-ovoj boci. Metrika konstantne negativne krivine postoji na proizvoljnoj površi, različitoj od navedenih. Pri tom na svakoj zatvorenoj površi roda $g>1$ postoji $6(g-1)$-dimenzionalna familija različitih Riemann-ovih metrika krivine -1. Kontinuum kompletnih metrika krivine -1 postoji i na svakoj, osim sfere sa tri otvora, konačno-povezanoj nekompaktnoj površi sa Euler-ovom karakteristikom $\chi < 0$.

Za n=3, različiti primeri hiperboličkih mnogostrukosti nalaze se u radovima :

Best-a [4], koji je za fundamentalne poliedre diskretnih podgrupa grupe PSL $(2,\mathbb{C})$ transformacija

$$(1) \qquad w = \frac{az + b}{cz + d} \quad : \quad a,b,c,d \in \mathbb{C},\ ad - bc = 1 ,$$

koja je grupa svih direktnih izometrija prostora H^3, uzeo pravilne hiperboličke poliedre i dobio 11 različitih kompaktnih hiperboličkih mnogostrukosti. Ove mnogostrukosti Best je dobio primenom Poincaré-ove teoreme formulisane za one podgrupe grupe PSL (2,**C**), koje nisu Klein-ove (tj. koje imaju kompaktan orbitni prostor) i koje su grupe bez torzije (tj. svaki neidentični element te grupe je beskonačnog reda). Svaka takva podgrupa od PSL (2,**C**) je fundamentalna grupa svog orbitnog prostora, koji je kompaktna hiperbolička 3-mnogostrukost;

Makarova [20-24,25], koji je prikazao [23] čitav niz metoda za konstruisanje diskretnih grupa prostora H^3, čije su fundamentalne oblasti kako kompaktne, tako i nekompaktne, ali imaju konačnu meru. Takođe je pokazao da u jednoj trodimenzionalnoj diskretnoj grupi može biti proizvoljan konačan broj neizomorfnih dvodimenzionalnih podgrupa (koje dejstvuju u raznim invarijantnim ravnima), proizvoljnih unapred zadatih tipova. Metode prikazane u tom radu omogućile su konstruisanje klase diskretnih grupa ravni H^2, sa kompaktnom fundamentalnom oblašću, koje se mogu proširiti do diskretnih grupa prostora H^3 [21], zatim konstruisanje beskonačno mnogo diskretnih neizomorfnih grupa prostora H^3, čije su fundamentalne oblasti kompaktne ili nekompaktne, ali imaju konačnu zapreminu [20].

Autor naglašava dva problema : problem klasifikacije svih trodimenzionalnih diskretnih grupa kretanja prostora H^3 i problem izdvajanja podgrupa bez torzije u takvim grupama (što se , veoma teško, postiže primenom metoda Reidemeister-Schreier-a, kao u [4]). Osim ova dva osnovna problema ove teorije, autor postavlja još jedan problem : Da li se sve diskretne grupe prostora H^3 mogu dobiti metodama koje izlaže autor (on, naime , u određenom smislu,"komponuje" prostorne grupe iz ravanskih grupa) ?

Makarova i Gucula [25], koji su konstruisali dve beskonačne serije nekompaktnih među sobom nehomeomorfnih trodimenzionalnih mnogostrukosti konstantne negativne krivine, koje imaju konačnu zapreminu. Te mnogostrukosti dobijene su identifikacijama pljosni poliedara, koji su singularne pravilne prizme prostora H^3, tj. prizme sa beskonačno udaljenim temenima. Pri tom sami poliedri normalno i pravilno razbijaju prostor H^3. Svaki od tih poliedara ima samo konačan broj beskonačno udaljenih tačaka te je njegova zapremina, jednaka meri mnogostrukosti koja se dobija identifikacijama njegovih pljosni, konačna;

Gucula [12], o kompaktnim 3-dimenzionalnim mnogostrukostima konstantne negativne krivine, gde je konstruisan primer beskonačne serije među sobom nehomeomorfnih takvih mnogostrukosti;

Al-Jubouri-ja [1], koji je konstruisao primere neorijentabilnih kompaktnih hiperboličkih 3-mnogostrukosti. Dok su autori koje smo do sada naveli koristili Poincaré-ovu teoremu neposredno (koja još nije dokazana u najopštijem slučaju za grupe indirektnih transformacija), on koristi jedan oblik te teoreme, koji su dali Macbeath i Singerman [1];

Damiana i Balkana [14], koji su konstruisali beskonačne serije 3-dimenzionalnih neorijentabilnih mnogostrukosti konstantne negativne krivine, koje imaju konačnu zapreminu. Pri tom su pošli od prizama sa beskonačno udaljenim temenima, koje normalno i pravilno razbijaju prostor H^3 i imaju prave uglove-dijedre kod bočnih ivica i uglove od $\frac{\pi}{4}$ kod ostalih ivica. Koristili su Poincaré-ovu teoremu;

E.Molnár-a [32], koji je konstruisao dva beskonačna niza neorijentabilnih kompaktnih hiperboličkih prostornih formi, primenom Poincaré-ove teoreme. Autor daje konstrukcije pripadnih grupa i pomoću Coxeter-ovih nadgrupa kao i metričke konstrukcije fundamentalnih domena, pomoću vektorskog modela prostora H^3, ovih grupa.

Metrika konstantne negativne krivine postoji i na zatvorenoj

3-dimenzionalnoj mnogostrukosti, raslojenoj nad krugom. Prvi takav primer konstruisao je Jørgensen .Drugi primer prepoznao je Thurston u radu[4]Best a.

O raznolikosti 3-dimenzionalnih hiperboličkih mnogostrukosti govori i sledeća teorema Thurston-a [47] :

Teorema Neka je M glatka zatvorena orijentabilna 3-dimenzionalna mnogostrukost, koja zadovoljava sledeća tri uslova :

1) njeno univerzalno natkrivanje je difeomorfno R^3 ;

2) fundamentalna grupa mnogostrukosti M ne sadrži podgrupe izomorfne Z+Z ;

3) mnogostrukost M je"dovoljno velika"(tj. M sadrži takvu potopljenu dvostranu površ roda $g > 0$, da je preslikavanje fundamentalnih grupa, indukovano ovim potapanjem, injektivno ; primer "dovoljno velike" mnogostrukosti je svaka 3-dimenzionalna mnogostrukost sa beskonačnom jednodimenzionalnom grupom homologija $H_1(M)$).

Tada na M postoji metrika konstantne krivine -1. Prema teoremi Mostova, ta metrika je jedinstvena.

Svaka n-dimenzionalna hiperbolička prostorna forma generiše (n+1)-dimenzionalnu nekompaktnu hiperboličku prostornu formu beskonačne zapremine, kao što svaka euklidska n-dimenzionalna prostorna forma generiše n-dimenzionalan cilindar. Svaka orijentabilna euklidska n-dimenzionalna prostorna forma generiše i hiperboličku mnogostrukost beskonačne zapremine. Što se tiče kompaktnih n-dimenzionalnih hiperboličkih mnogostrukosti, Borel[5]je dokazao da svaki prosto-povezan i simetričan prostor M(posebno-H^n) ima kompaktne prostorne forme M/G. Pri tom, ako je G_1 diskretna uniformna podgrupa grupe izometrija I(M), tada u G_1 postoji normalna podgrupa G, konačnog indeksa i bez torzije, tako da je M/G kompaktna prostorna forma.

Dajemo iskaz teoreme o "krutosti" hiperboličkih prostornih formi.

Teorema (Mostov) o "krutosti" hiperboličkih prostornih formi . Neka su M_1 i M_2 hiperboličke mnogostrukosti jednakih dimenzija $n \geq 3$, sa konačnim zapreminama $V(M_i)$, $i=1,2$. Ako su njihove fundamentalne grupe izomorfne, tada su mnogostrukosti M_1 i M_2 izometrične. Pri tom svaki izomorfizam $\varphi : \pi_1(M_1) \longrightarrow \pi_1(M_2)$ indukuje prirodnu izometriju $i_\varphi : M_1 \longrightarrow M_2$.

Napomenimo da je u radu Mostova [40]ova teorema bila dokazana pri većim ograničenjima : pretpostavljalo se da su M_1 i M_2 kompaktne i difeomorfne. Oslabljenje uslova kompaktnosti do konačnosti zapremine postigao je Prasad [43], dok je činjenicu da je umesto difeomorfnosti dovoljno pretpostaviti izomorfnost fundamentalnih grupa, prvi uočio Margulis. Faktički, važi (Thurston[47]) sledeća

Teorema Neka su G_1 i G_2 diskretne podgrupe grupe izometrija $I(H^n)$ hiperboličkog prostora H^n, $n \geq 3$ (koja ne mora dejstvovati slobodno). Ako faktor-prostori H^n/G_i , $i=1,2$,imaju konačne zapremine i grupe G_1 i G_2 su izomorfne, tada su te grupe konjugovane u $I(H^n)$.

Važna invarijanta hiperboličkih mnogostrukosti je njihova zapremina. Jedan od osnovnih problema teorije 3-dimenzionalnih hiperboličkih mnogostrukosti je problem klasifikacije 3-dimenzionalnih hiperboličkih mnogostrukosti, sa konačnom zapreminom (prema teoremi Mostova, te mnogostrukosti su u potpunosti određene svojim fundamentalnim grupama).

Za $n=2$, prema teoremi Gauss - Bonnet-a [46], zapremina $V(M)$ kompletne hiperboličke površi može imati samo vrednosti $V(M) = 2\pi k$, gde je $k=-1,-2,\ldots$,pri čemu svakoj vrednosti k odgovara samo konačan broj po parovima nedifeomorfnih površi, ali, osim za slučaj sfere sa tri otvora, kontinuum po parovima neizometričnih.Za $n\geq 4$, važi

Teorema (Wang) Za $n\geq 4$, za svako $a > 0$ postoji samo konačan broj po parovima nedifeomorfnih (ili, što je ekvivalentno, po parovima neizometričnih) n-dimenzionalnih kompletnih hiperboličkih mnogostrukosti, sa zapreminama ne većim od a.

Napominjemo još da za sve parne n, po formuli Gauss-Bonnet-a, zapremina V(M) dobija, kao i za n=2, samo diskretan niz vrednosti $V(M) = c_n \chi(M)$. Za zatvorene orijentabilne hiperboličke mnogostrukosti, zapremina V(M) potpuno je određena topologijom od M i u slučaju neparne dimenzije. Naime, neka je $c = \sum a^i \sigma_i$ singularni n-dimenzionalni lanac [17], sa realnim koeficijentima, tj. $a^i \in R$, $i\sigma_i : \Delta \to M$, neprekidno preslikavanje standardnog n-dimenzionalnog simpleksa Δ u M. Neka je $\| c \| = \sum | a^i |$ i $\| M \| = \inf\{ \| c \| :$ c predstavlja fundamentalnu klasu $[M]\}$. Tada važi

Teorema (Thurston) Za zatvorenu orijentabilnu hiperboličku mnogostrukost M važi jednakost

(2) $$V(M) = \mathcal{M}_n \cdot \| M \| ,$$

gde je $\mathcal{M}_n$ zapremina n-dimenzionalnog beskonačnog pravilnog simpleksa .

Napominjemo da je $\mathcal{M}_n$ jednako tačnoj gornjoj granici zapremina n-dimenzionalnih pravolinijskih simpleksa u H^n.

Za dalje izučavanje 3-dimenzionalnih hiperboličkih mnogostrukosti sa konačnom zapreminom od značaja je sledeća, za specijalan slučaj formulisana, [47.13]

Lema (Margulis) Za svako $n \geq 2$ postoji takvo $c(n) > 0$, da pri $\varepsilon < c(n)$, za svaku tačku $x \in H^n$ grupa $G_\varepsilon(x)$, generisana onim izometrijama g prostora H^n, za koje je $d(x,g(x)) < \varepsilon$, sadrži Abel-ovu podgrupu konačnog indeksa.

Zamenom reči "Abel-ova" rečju "nilpotentna", lema važi u opštijim slučajevima .

Za dalje proučavanje 3- dimenzionalnih hiperboličkih mnogostrukosti dajemo sledeću Jørgensen-ovu konstrukciju [47].

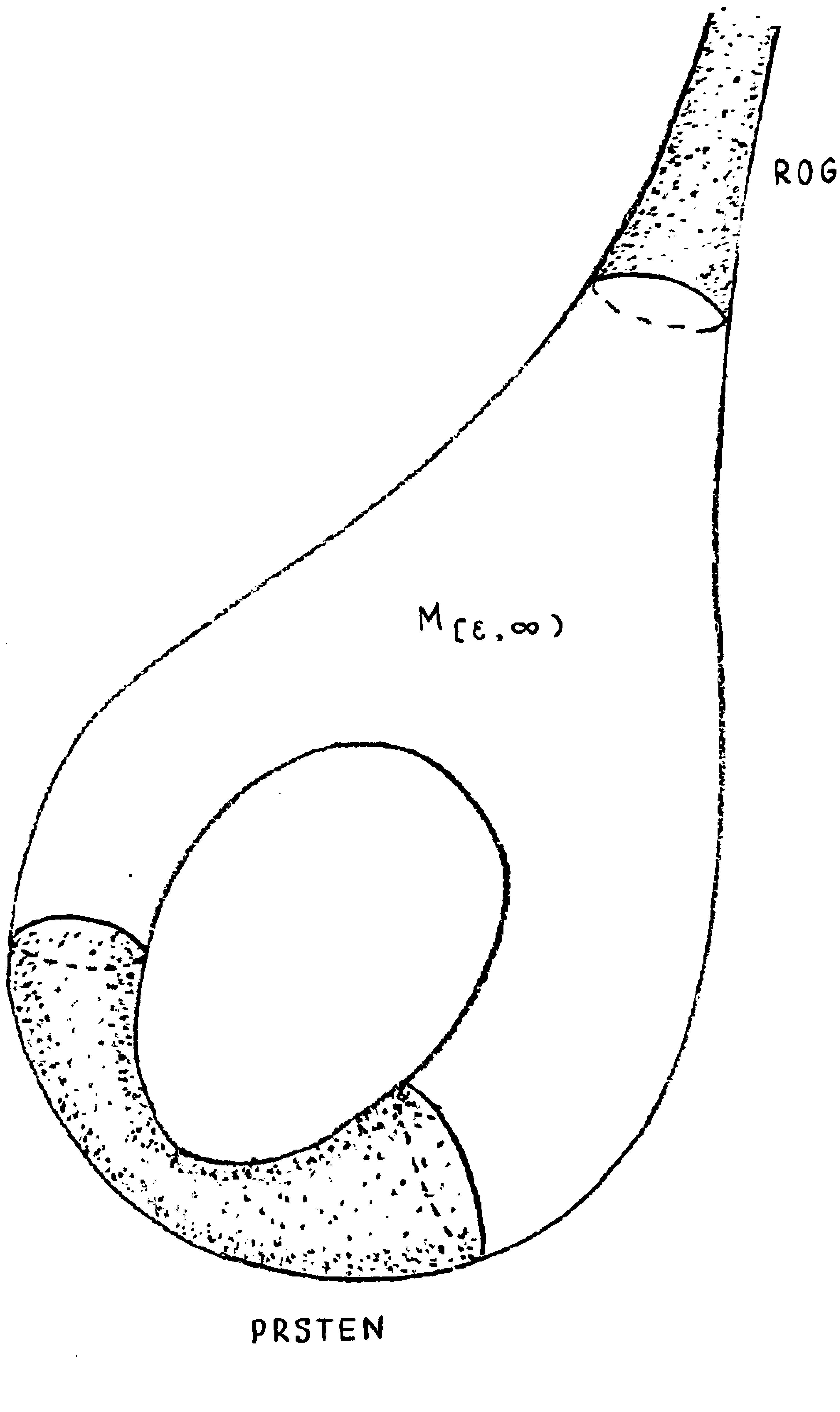
Posmatramo razlaganje $M = M_{(0,\varepsilon]} \cup M_{[\varepsilon,\infty)}$, gde je $M_{(0,\varepsilon]}$ - -skup tačaka $x \in M$, u M nesažimivih geodezijskih petlji dužine $\leq \varepsilon$, a $M_{[\varepsilon,\infty)} = \overline{M - M_{(0,\varepsilon]}}$. Na sl. 1. shematski je pretstavljen dvodimenzionalan (umesto trodimenzionalnog) analogon takvog razlaganja. Pomoću leme Margulisa, može se dokazati da se za $0<\varepsilon<\frac{1}{2}c(n)$ skup $M_{(0,\varepsilon]}$ sastoji od konačnog broja komponenata standardnog oblika : to je ili "prsten" - cevasta okolina zatvorene geodezijske linije, ograničena dvodimenzionalnim torusom T^2, ili orisferički "rog" - - mnogostrukost $T^2 \times [0,\infty)$, sa metrikom $ds^2 = e^{-t}ds_0^2 + dt^2$, gde je ds_0^2 metrika ravnog torusa. Može se pokazati da je broj komponenata od $M_{[\varepsilon,\infty)}$, a time i komponenata prstenova, ograničen odozgo brojem koji zavisi samo od n i $V(M)$. Svaku komponentu mnoštva $M_{[\varepsilon,\infty)}$ možemo pokriti loptama radijusa ε, tako da se njima koncentrične lopte radijusa $\frac{\varepsilon}{3}$ po parovima ne seku. Tada je broj lopti ograničen odozgo, u zavisnosti samo od ε i $V(M)$. Otuda sledi da za topološku konstrukciju $M_{[\varepsilon,\infty)}$ postoji samo konačan broj mogućnosti.

Postoje razne mogućnosti za uvođenje metrike ili bar topologije na skupu $\mathcal{H}$ 3-dimenzionalnih hiperboličkih mnogostrukosti. Kažemo da mnogostrukosti M^i konvergiraju ka M, ako je ispunjen sledeći uslov : postoje takve tačke $x_i \in M^i$, $x \in M$, da za svako $\delta>0$, $R>0$, pri $i > i_0(\delta, R)$ postoje takva preslikavanja f_i metričkih kugli $B(x_i,R) \subset M^i$ u M, tako da je $f(x_i)=x$, $f(B(x_i,R)) \supset B(x,R-\delta)$ i za sve $y,z \in B(x_i,R)$

$$(1-\delta)d(y,z) = d(f_i(y),f_i(z)) = (1+\delta)d(y,z) , \tag{3}$$

gde je d - Riemann-ova metrika.

Ova definicija konvergencije, koja se odnosi na hiperboličke 2-površi, dovodi do toga da se u granicama mogu "gubiti", idući ka beskonačnosti, neke komponente mnoštva $M_{[\varepsilon,\infty)}$. Ali, za trodimenzionalne hiperboličke mnogostrukosti, mnoštvo $M_{[\varepsilon,\infty)}$ je, pri $\varepsilon<\frac{1}{2}c(n)$,



SL. 1 .

uvek povezano. S toga se promena, nastala pri graničnom prelazu, sastoji u tome što se neki prstenovi-komponente mnoštva $M^i_{(0,\varepsilon]} \subset M^i$ - "istežu" i teže rogovima mnogostrukosti M. Otuda sledi

<u>Teorema</u> (Thurston)[47] Ako trodimenzionalne hiperboličke mnogostrukosti $M^i \longrightarrow M$ i $C=\sup V(M^i) < \infty$, tada je M hiperbolička mnogostrukost i $V(M^i) \longrightarrow V(M)$.

Iz teoreme Mostova sledi da ako $M^i \longrightarrow M$, pri čemu M^i nije izometrično M, tada je M^i uvek topološki različito od M. Otuda i iz definicije konvergencije sledi da, u tom slučaju, M ne može biti kompaktna. Šta više, ako, recimo, M^i imaju po k rogova, $M^i \longrightarrow M$ i $M^i \not\approx M$, tada M mora imati ne manje od k+1 rogova. Pri tome važi

<u>Teorema</u> (Thurston)[47] Za svaku trodimenzionalnu hiperboličku mnogostrukost M, sa $V(M) < \infty$, koja ima k rogova, i svaki broj l, $0 \leq l < k$, postoji niz hiperboličkih mnogostrukosti M^i, koje imaju po l rogova i koji konvergira ka M, pri čemu je $V(M^i) < V(M)$.

Iz poslednje dve Thurston-ove teoreme sledi da ako na $\mathcal{H}$ uočimo funkciju $V : \mathcal{H} \longrightarrow R^+$, čije su vrednosti zapremine V(M) trodimenzionalnih hiperboličkih mnogostrukosti M, tada skup $V(\mathcal{H})$ mogućih vrednosti zapremina obrazuje na $\mathbb{R}^+$ zatvoreno potpuno uređeno podmnoštvo. Pri tom za svako $x \in \mathbb{R}^+$ u $V^{-1}(x)$ postoji konačan broj mnogostrukosti.

Problem stabilnosti topologije i metrike hiperboličkih prostornih formi pri promeni krivine, do sada je ostao otvoren. Značajan rezultat iz te problematike je sledeća

<u>Teorema</u> (Gromov)[13] Za svako $C > 0$, $n \neq 3$, postoji takvo $\varepsilon = \varepsilon(C,n)$, da je svaka kompletna n-dimenzionalna Riemann-ova mnogostrukost M, sa sekcionim krivinama $-\varepsilon < K_\sigma \leq -1$ i zapreminom $V(M) < C$, difeomorfna nekoj hiperboličkoj prostornoj formi.

Prostorna forma . Euklidske i hiperboličke ravanske forme

1 Uvod

Neka je n pozitivan ceo broj. n-dimenzionalna mnogostrukost je Hausdorff-ov prostor . čija svaka tačka ima otvorenu okolinu homeomorfnu otvorenom n-dimenzionalnom disku U^n $(= \{ x \in E^n : |x| < 1 \})$.

Primeri n-dimenzionalnih mnogostrukosti su :
euklidski n-dimenzionalni prostor E^n ;
n-dimenzionalna sfera S^n $(= \{ x \in E^{n+1} : |x| = 1 \})$.

Napomenimo da je otvoren podskup n-dimenzionalne mnogostrukosti n-dimenzionalna mnogostrukost i da je $M^m \times N^n$ (m+n)-dimenzionalna mnogostrukost, ako su M^m i N^n, redom, m-dimenzionalna odnosno n-dimenzionalna mnogostrukost.

Povezane n-dimenzionalne mnogostrukosti (tj. n-dimenzionalne mnogostrukosti čiji su jedini otvoreno-zatvoreni skupovi sama ta mnogostrukost i prazan skup) su, za $n > 1$, podeljene u dve klase : orijentabilne n-dimenzionalne mnogostrukosti i neorijentabilne n-dimenzionalne mnogostrukosti.Povezana n-dimenzionalna mnogostrukost je orijentabilna, ako na njoj svaki zatvoren put čuva orijentaciju. Povezana n-dimenzionalna mnogostrukost je neorijentabilna, ako na njoj postoji bar jedan put koji menja orijentaciju.

Primeri n-dimenzionalnih orijentabilnih odnosno neorijentabilnih mnogostrukosti :
euklidski n-dimenzionalni prostor E^n i n-dimenzionalna sfera S^n - -orijentabilne n-dimenzionalne mnogostrukosti ;
n-dimenzionalno uopštenje Möbius-ove trake (homeomorfno proizvodu 2-dimenzionalne Möbius-ove trake i (n-2)-dimenzionalnog otvorenog

diska U^{n-2}) - neorijentabilna n-dimenzionalna mnogostrukost.

Kompaktne povezane 2-dimenzionalne mnogostrukosti nazivamo površima.

U Poincaré-ovoj teoriji, dva orijentisana kruga na zadatoj površi su ekvivalentna ako su homotopna, tj. ako se jedan od njih može neprekidno transformisati u drugog. Proizvod dva kruga se dobija deformisanjem jednog od njih (ako je to potrebno) tako da ti krugovi imaju zajedničku tačku, a zatim se opišu jedan za drugim. U tom smislu, klase homotopnih krugova su elementi tzv. fundamentalne ili Poincaré-ove ili prve homotopne grupe zadate površi, u uočenoj tački te površi.

2 Prostorne forme

Glatku mnogostrukost M^n nazivamo Riemann-ovom mnogostrukošću, ako je definisano glatko preslikavanje

$$g : T (M^n) \longrightarrow \mathbb{R} ,$$

koje je u svakom sloju $T_x(M^n)$ tangentnog raslojavanja mnogostrukosti M^n { $T (M^n) = \bigcup_{x \in M^n} T_x(M^n)$,gde je $T_x(M^n)$ tangentni prostor od M^n u tački x ; M^n ; $p : T (M^n) \longrightarrow M^n$, prirodna projekcija definisana sa $p^{-1}(x) = T_x(M^n)$ - slojem raslojavanja nad tačkom $x \in M^n$} pozitivno definitna kvadratna forma.

Riemann-ova mnogostrukost (M^n, g) je metrički prostor, sa metrikom generisanom pomenutim kvadratnim formama.

<u>Teorema</u> (Killing W., Hopf H.) Neka je M^n Riemann-ova mnogostrukost dimenzije $n \geq 2$ i K- realan broj. M^n je kompletna povezana mnogostrukost konstantne sekcione krivine K akko je M^n izometrična nekom od sledećih faktor-prostora :

S^n/G , gde je G podgrupa ortogonalne grupe $O(n+1)$, ako je $K > 0$;

E^n/G , gde je G podgrupa grupe kretanja $\mathbb{E}(n)$ prostora E^n, ako je K=0;
H^n/G , gde je G podgrupa grupe $O^1(n+1)$ Lorencovih transformacija , ako je $K<0$,
pri uslovima da G dejstvuje slobodno(tj.bez nepokretnih tačaka,za svaki element $g\in G$, $g\neq 1$) i diskontinualno(tj. postoji otvoren skup V u M^n takav da ni koje dve razne tačke iz V nisu G-ekvivalentne) .

Kompletnu povezanu Riemann-ovu mnogostrukost M^n konstantne sekcione krivine K nazivamo sfernom(za $K>0$), euklidskom(za K=0) ili hiperboličkom(za $K<0$) n-prostornom formom.

3 Površi bez granice

Fundamentalna grupa sfere je grupa reda 1 .

Za torus, ili **sferu** sa ručkom, fundamentalna grupa je beskonačna grupa $C_\infty \times C_\infty$, definisana sa

(1) $$aba^{-1}b^{-1}=1 ;$$

generatori a i b se mogu identifikovati sa dva kruga koji sadrže pro izvoljnu tačku na površi.

Za površ roda p, ili sferu sa p ručki, fundamentalna grupa je

(2) $$a_1b_1a_1^{-1}b_1^{-1}a_2b_2a_2^{-1}b_2^{-1}\dots a_pb_pa_p^{-1}b_p^{-1}=1 ,$$

gde je svakoj drški pridružen po par generatora. Ova grupa je beskonačna za $p\geq 1$,jer sadrži faktor-grupu $C_\infty\times C_\infty$, za $a_k=b_k=1$, za svako $k>1$
Ova fundamentalna grupa može se definisati i relacijom

(3) $$A_1A_2\dots A_{2p}A_1^{-1}A_2^{-1}\dots A_{2p}^{-1}=1.$$

Sve gore navedene površi su orijentabilne.

Najjednostavnija neorijentabilna površ je projektivna ravan, ili sfera sa ukrštenom kapom, ili sfera sa identifikovanim dijametralno suprotnim tačkama, ili polu-sfera sa identifikovanim dijametralno suprotnim tačkama . Njena fundamentalna grupa je C_2, definisana sa

(4) $\quad A^2 = 1$,

gde se generator A može identifikovati sa pravom projektivne ravni.

Za Klein-ovu bocu, ili neorijentabilni torus, ili sferu sa dve ukrštene kape, fundamentalna grupa je definisana sa

(5) $\quad A_1^2 A_2^2 = 1$.

Ova grupa je beskonačna, jer sadrži faktor-grupu D_∞ , definisanu sa $A_1^2 = A_2^2 = 1$.

Za sferu sa q ukrštenih kapa, fundamentalna grupa je

(6) $\quad A_1^2 A_2^2 \dots A_q^2 = 1$,

sa po jednim generatorom za svaku ukrštenu kapu. Ova grupa je beskonačna za sve $q > 1$, jer ima beskonačnu faktor-grupu, za $A_k = 1$ za $k > 2$.

Posle sečenja orijentabilne ili neorijentabilne površi duž m krugova, m = 2p ili q , koji svi prolaze kroz jednu istu tačku površi i generišu fundamentalnu grupu te površi, možemo tu površ razviti u ravnu oblast ograničenu 2m-touglom, čije stranice, u njihovom prirodnom redosledu, reprezentuju apstraktnu definiciju fundamentalne grupe pomoću ovih generatora. Npr., torus se može razviti u pravougaonik, a projektivna ravan se može razviti u 2-ugao, sl. 2.a,b. Uzimanjem kopija ovih mnogouglova, po jednu za svaki element fundamentalne grupe, i njihovim slepljivanjem duž odgovarajućih stranica, na određen način, dobijamo univerzalnu pokrivajuću površ, koja je prosto-povezana. Npr., beskonačno mnogo torusa popunjavaju običnu ravan, dok dva 2-ugla popunjavaju sferu.

Prema tome, na prosto-povezanoj pokrivajućoj površi, stranice poligona, označene kao generatori fundamentalne grupe, obrazuju Cayley-jev dijagram te grupe.

Ako uvedemo metriku, možemo postići da pomenuti mnogouglovi budu kongruentni mnogouglovi sa pravim stranicama. Tada, pošto svako teme pripada 2m 2m-touglova, zbir uglova mnogougla je 2π. To znači da je odgovarajuća ravan eliptička za $q=1$, euklidska za $p=1$ ili $q=2$, i hiperbolička za $p>1$ ili $q>2$.

Primetimo da su jedine konačne fundamentalne grupe fundamentalna grupa sfere i fundamentalna grupa projektivne ravni, što je topološki iskaz geometrijske činjenice da sfera i projektivna ravan imaju konačnu površinu, dok euklidska i hiperbolička ravan imaju beskonačnu površinu.

4 Regularne teselacije ravni

Dajemo pregled regularnih teselacija $\{p,q\}$ (koje su prosto-povezani topološki poliedri) ravni.

U euklidskoj ravni, ugao pravilnog p-tougla, $\{p\}$, je mere $(1-\frac{2}{p})\pi$, te q podudarnih p -ova okružuje zajedničko teme, ako je $(1-\frac{2}{p})\pi=2\frac{\pi}{q}$, tj.

(1) $$(p-2)(q-2)=4 .$$

Odavde dobijamo tri reg larne teselacije $\{p,q\}$ euklidske ravni :

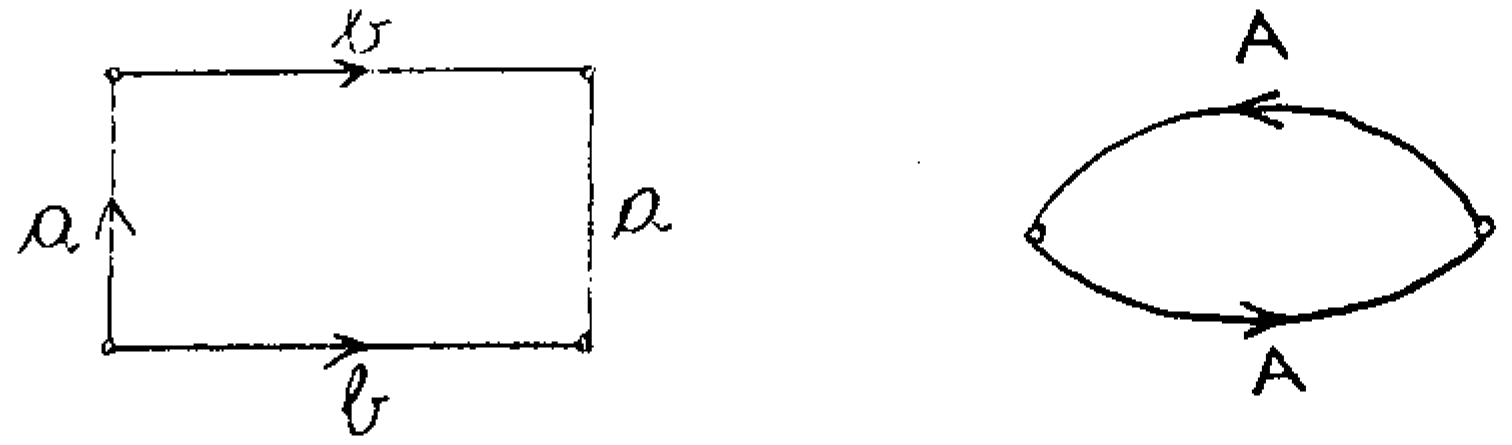
(2) $$\{4,4\},\ \{3,6\}\ ,\ \{6,3\}\ .$$

U hiperboličkoj ravni, Ugao $\{p\}$ -tougla je manji od $(1-\frac{2}{p})\pi$, i postupno opada od te vrednosti do 0, kada pripadni poluprečnik opisanog kruga raste od 0 do ∞ . Dakle, ako je

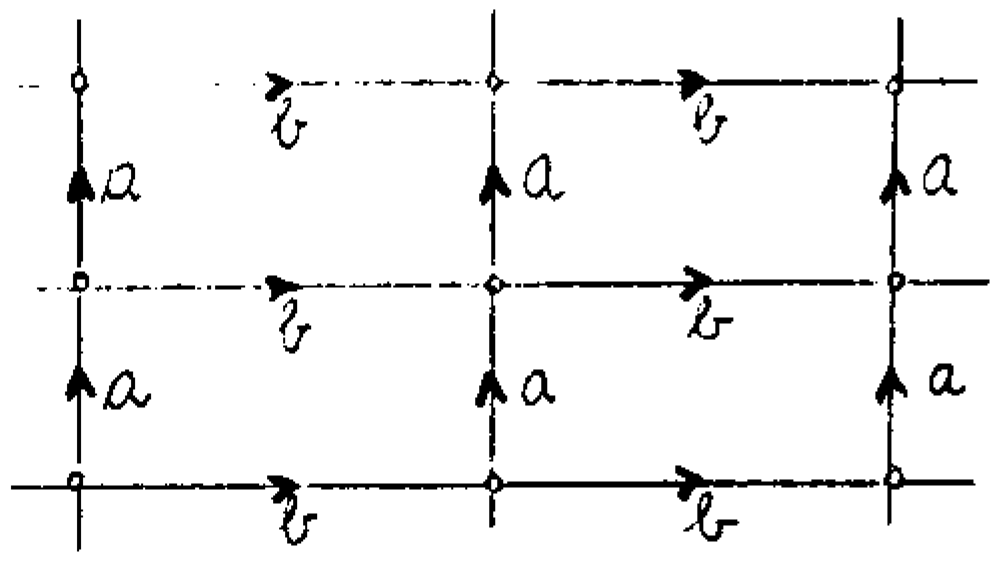
(3) $$(p-2)(q-2)>4 ,$$

možemo odabrati veličinu mnogougla tako da je ugao tog $\{p\}$-tougla mere $2\frac{\pi}{q}$. Tada q takvih $\{p\}$ -ova okružuje zajedničko teme, i postupak dodavanja $\{p\}$ -ova neograničeno nastavljamo. Tako smo konstruisali hiperboličku teselaciju $\{p,q\}$, koja je beskonačna kolekcija pravilnih $\{p\}$ -touglova koji popunjavaju celu hiperboličku ravan.

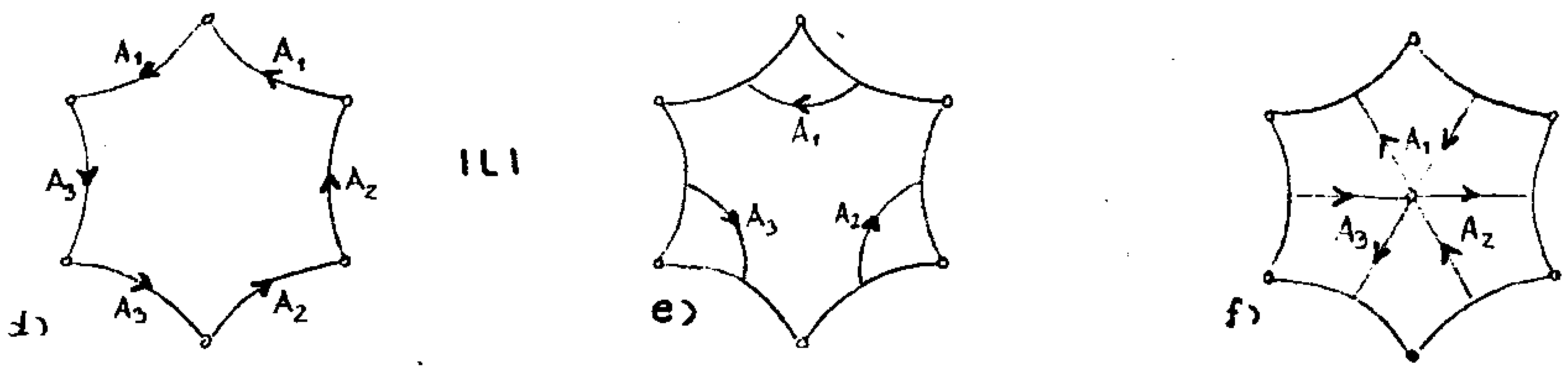
Primetimo da je teselacija $\{p,q\}$ simetrična u odnosu na prave koje sadrže poluprečnik upisanog odnosno opisanog kruga pljosni odnosno



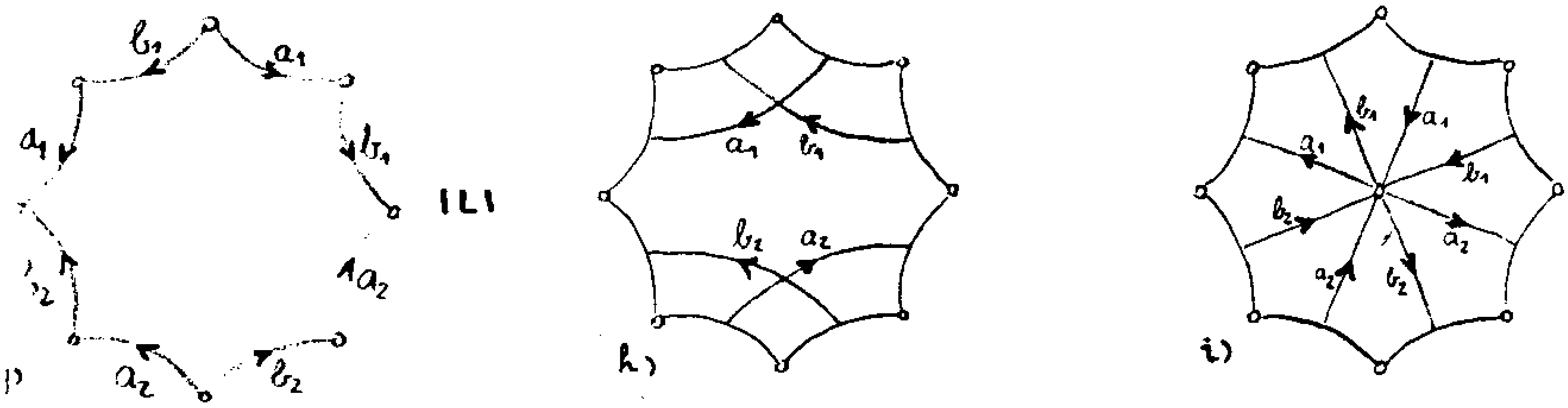
a) TORUS b) PROJEKTIVNA RAVAN



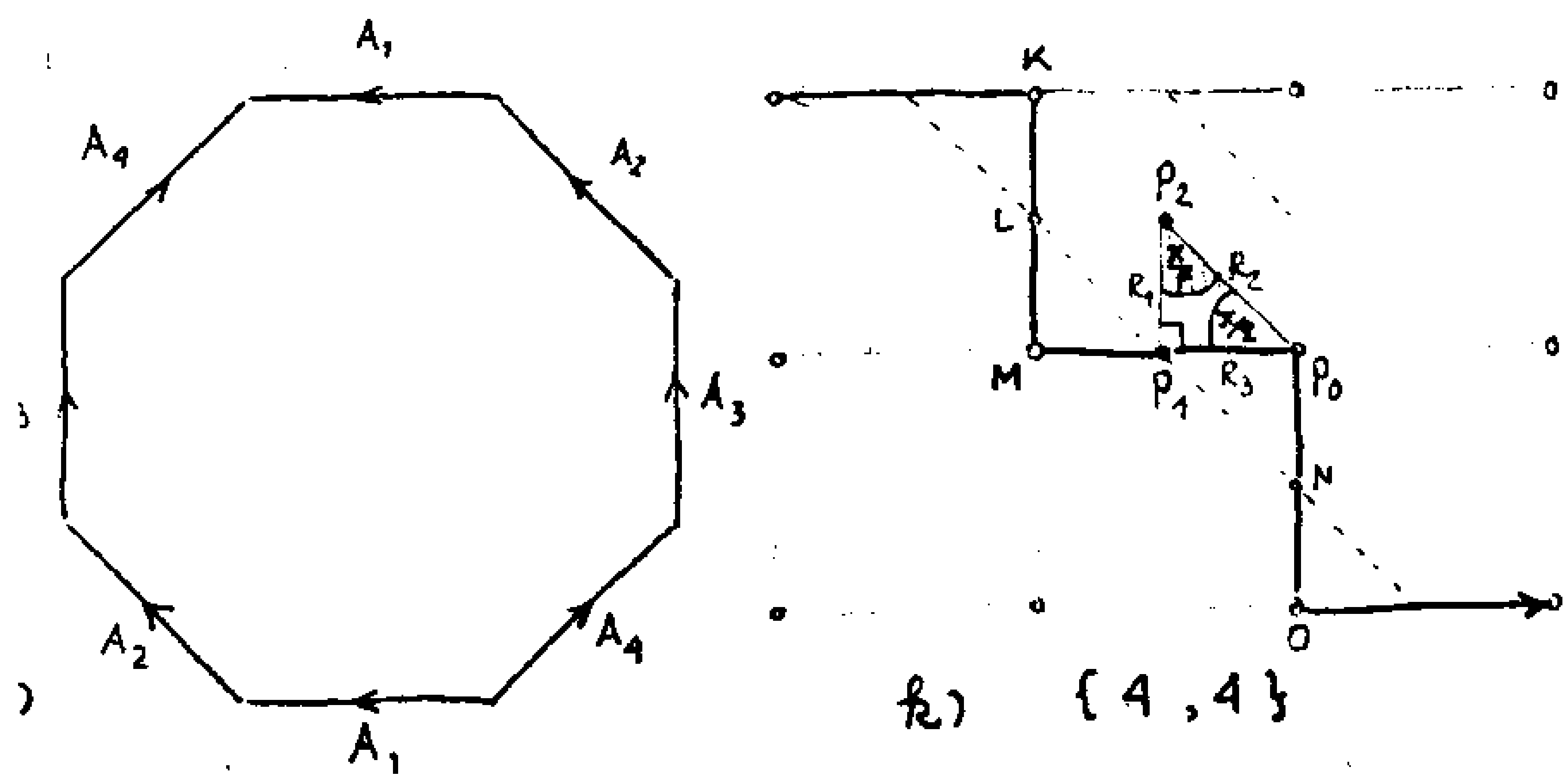
c) FUNDAMENTALNA GRUPA TORUSA



SFERA SA TRI UKRŠTENE KAPE I NJEN DUAL



SFERA SA DVE RUČKE I NJEN DUAL



k) {4,4}

SL. 2.

ivicu pljosni . Refleksije u odnosu na ove prave zadovoljavaju relacije

(4) $R_1^2=R_2^2=R_3^2=(R_1R_2)^p=(R_2R_3)^q=(R_3R_1)^2=1$,

koje definišu kompletnu grupu simetrija $[p,q]$ pravilnog poliedra $\{p,q\}$ (kao i njemu dualnog poliedra $\{q,p\}$) . Fundamentalna oblast te grupe je trougao $P_0P_1P_2$, čiji su uglovi, redom, mere $\frac{\pi}{q}$, $\frac{\pi}{2}$ i $\frac{\pi}{p}$. Red te grupe jednak je broju takvih trouglova koji je potreban za pokrivanje cele sfere, naime $\frac{8pq}{4-(p-2)(q-2)}$.

Napomenimo samo da za slučaj

(5) $(p-2)(q-2)<4$

dobijamo "sferne teselacije" $\{p,q\}$:

(6) $\{2,q\}$, $\{q,2\}$, $\{3,3\}$, $\{3,4\}$, $\{4,3\}$, $\{3,5\}$, $\{5,3\}$.

5 Zatvorene površi proizvoljne karakteristike

a) Fundamentalna grupa neorijentabilne površi, dobijena kao grupa generisana klizajućim simetrijama

Ako u grupi $[p,q]$, definisanoj relacijama (4) prethodne tačke, stavimo stavimo $2q$ umesto p i q, dobijamo grupu $[2q,2q]$, definisanu sa

(1) $R_1^2=R_2^2=R_3^2=(R_1R_2)^{2q}=(R_2R_3)^{2q}=(R_3R_1)^2=1$.

Opisaćemo podgrupu ove grupe, čija je fundamentalna oblast pljosan poliedra $\{2q,2q\}$, indeks $4q$ i čiji svi generatori, osim identičkog, ne ostavljaju ni jednu tačku invarijantnom. Dakle, reč je o diskretnoj, slobodno dejstvujućoj podgrupi grupe $[2q,2q]$. I jače, ta podgrupa dejstvuje diskontinualno i slobodno.

Za q=1, dobijamo grupu $[2,2]$, reda 8. Jedini njen generator, koji ne ostavlja ni jednu tačku invarijantnom, je centralna inverzija

$R_1R_2R_3$. Podgrupa grupe $[2,2]$, generisana ovim elementom, je reda 2, sa fundamentalnom oblašću hemisferom, jednom od dveju pljosni poliedra $\{2,2\}$.

Za $q>1$, možemo transformisati pljosan od $\{2q,2q\}$ na njene susede pomoću klizajućih simetrija, u oba smera, duž segmenata koji spajaju središta q naizmeničnih parova susednih stranica. Odabrane klizajuće simetrije ne generišu normalnu podgrupu od $[2q,2q]$, osim za q=1. Jedna takva klizajuća simetrija je $R_1R_2R_3$, dok se sve ostale klizajuće simetrije mogu dobiti pomoću relacije

(2) $\qquad A_i^2=(R_2R_1)^{2i}(R_1R_2R_3)^2(R_1R_2)^{2i}$,

tako da je

(3) $\qquad A_1^2A_2^2\dots A_q^2 = 1.$

apstraktna definicija za grupu generisanu pomoću q klizajućih simetrija $A_1,A_2,\dots,A_q$ (sl.3. a ;q=3).

Cayley-jev dijagram relacije (3), tj. dual od $\{2q,2q\}$, je drugi $\{2q,2q\}$, takav da su stranice svake od njegovih pljosni pridružene generatorima i orijentisane na određeni način (sl.2.g,h; q=3).

Pristupamo apstraktnoj identifikaciji svih tačaka koje su u relaciji ostvarenoj grupom (3). U tom cilju, isečemo jednu pljosan Cayley-jevog dijagrama i slepimo i , vodeći računa o orijentaciji ivica, slepimo slično označene ivice. Dobijamo zatvorenu neorijentabilnu površ pokrivenu mapom koja ima jedno teme, q ivica i jednu pljosan, tako da je njena Euler-Poincaré-ova karakteristika 2-q. Drugim rečima, (3) je fundamentalna grupa zatvorene neorijentabilne površi, koju možemo realizovati kao sferu sa q ukrštenih kapa.

b) Fundamentalna grupa orijentabilne površi, dobijena kao grupa generisana translacijama

Ako je q parno, tada grupa [2q,2q] ima još jednu podgrupu, čija je fundamentalna oblast pljosan od {2q,2q} .

Za q=2, dobijamo podgrupu od [4,4] , generisanu translacijama duž stranica pljosni od {4,4} .

Ako q napišemo u obliku 2p, posmatramo grupu [4p,4p] , definisanu sa

(4) $R_1^2=R_2^2=R_3^2=(R_1R_2)^{4p}=(R_2R_3)^{4p}=(R_3R_1)^2=1$.

Pljosan od {4p,4p} možemo transformisati na njoj susednu pljosan pomoću translacija duž pravih koje spajaju središta parova naspramnih stranica. Pošto poligon ima 4p stranica, ove prave se pojavljuju u ortogonalnim parovima, kao što su prave refleksija R_1 i

(5) $(R_2R_1)^pR_1(R_1R_2)^p=R_2(R_1R_2)^{2p-1}$,

(sl.3 c ; p = 2). Ova hiperbolička translacija se može konstruisati ili kao proizvod refleksija u odnosu na dve prave, obe ortogonalne na njenoj osi, ili kao proizvod poluobrta oko dveju tačaka na osi. U ovom slučaju to su poluobrti R_3R_1 i $(R_1R_2)^{2p}$. Oba metoda daju translaciju

(6) $A_1=R_3R_2(R_1R_2)^{2p-1}$,

koja prevodi stranicu "R_3" u njoj naspramnu stranicu.

Ovo je jedna od 2p generišućih translacija, čije su ose određene središtima parova naspramnih stranica od {4p} . Ostale translacije se mogu dobiti po formuli

(7) $A_i=(R_2R_1)^{(2p-1)(i-1)}A_1(R_1R_2)^{(2p-1)(i-1)}$,

tako da je

(8) $A_1A_2\dots A_{2p}A_1^{-1}A_2^{-1}\dots A_{2p}^{-1}=1$

apstraktna definicija za grupu generisanu pomoću 2p translacija A_1,

$A_2,\dots,A_{2p}$. Kako je izbor generatora za ovu grupu potpuno simetričan, to je ona normalna podgrupa, indeksa 8p, u grupi $[4p,4p]$. Napominjemo da je ona normalna podgrupa, indeksa 4p, i u rotacijskoj grupi $[4p,4p]^+$, definisanoj sa

$$R^{4p}=S^{4p}=(RS)^2=1 \quad (9)$$

gde je $R=R_1R_2$ i $S=R_2R_3$.

Cayley-jev dijagram grupe (8), tj. dual od $\{4p,4p\}$, je drugi $\{4p,4p\}$, takav da su stranice svake od pljosni pridružene generatorima i orijentisane na odgovarajući način (sl. 2.j ; p = 2).

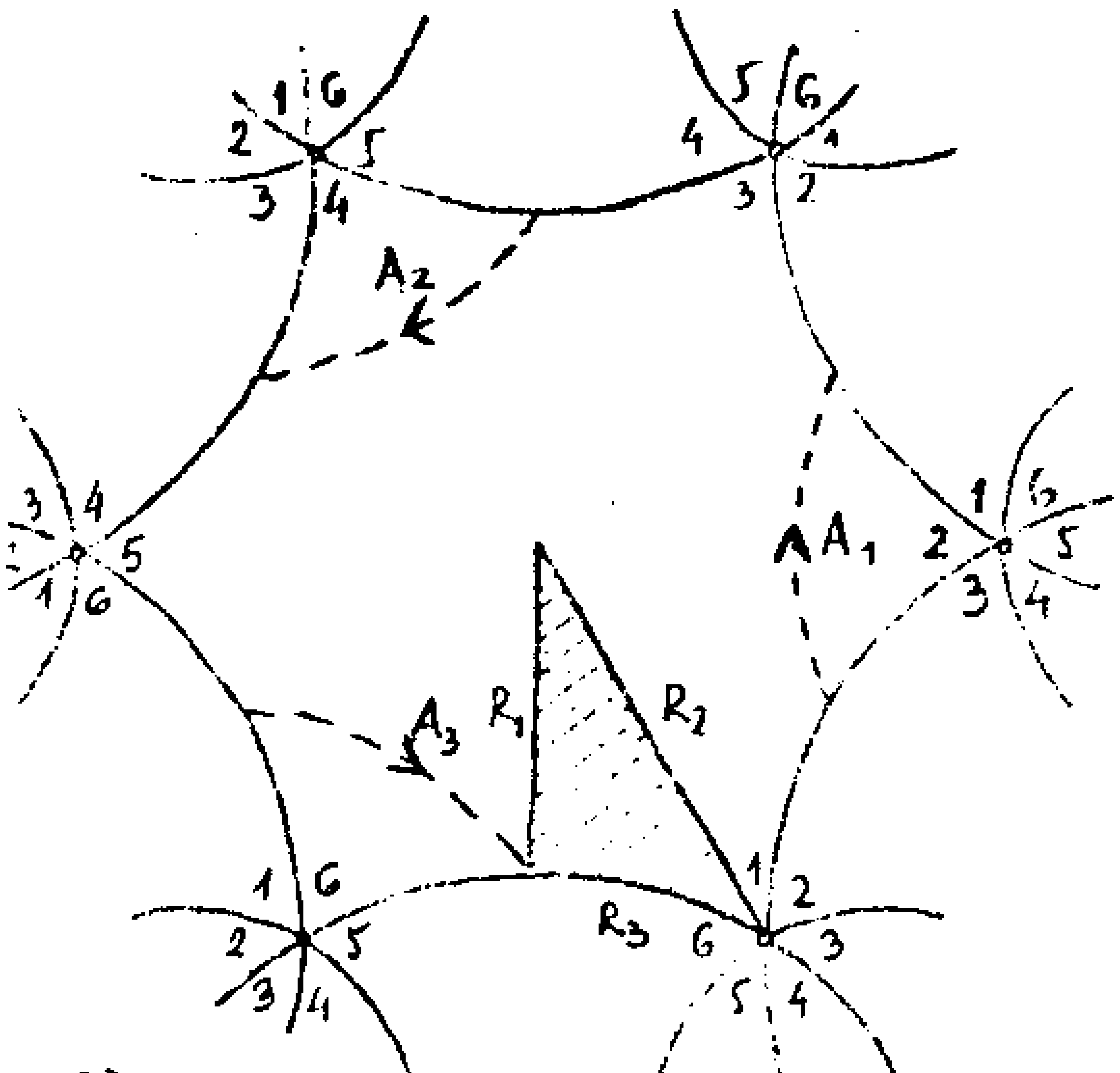
Pristupamo apstraktnoj identifikaciji svih tačaka koje su u relaciji ostvarenoj grupom (8). Isečemo jednu pljosan Cayley-jevog dijagrama i slepimo parove naspramnih ivica, sa istom orijentacijom. Dobili smo zatvorenu orijentabilnu površ pokrivenu mapom koja ima jedno teme, 2p ivica i jednu pljosan, tako da je njena Euler-Poincaré-ova karakteristika 2-2p. Drugim rečima, (8) je fundamentalna grupa zatvorene površi roda p.

6 Euklidske i hiperboličke ravanske forme

Grupe (3) i (8) dejstvuju slobodno i diskontinualno na euklidskoj ravni E^2 odnosno hiperboličkoj ravni H^2. Ove grupe generišu kompletne povezane Riemann-ove površi konstantne sekcione krivine K, gde je K=0 u euklidskom i K< 0 u hiperboličkom slučaju. Ako grupu (8) označimo sa P, a grupu (3) sa Q, tada su faktor-prostori E^2/P, E^2/Q, H^2/P i H^2/Q euklidske odnosno hiperboličke ravanske forme.

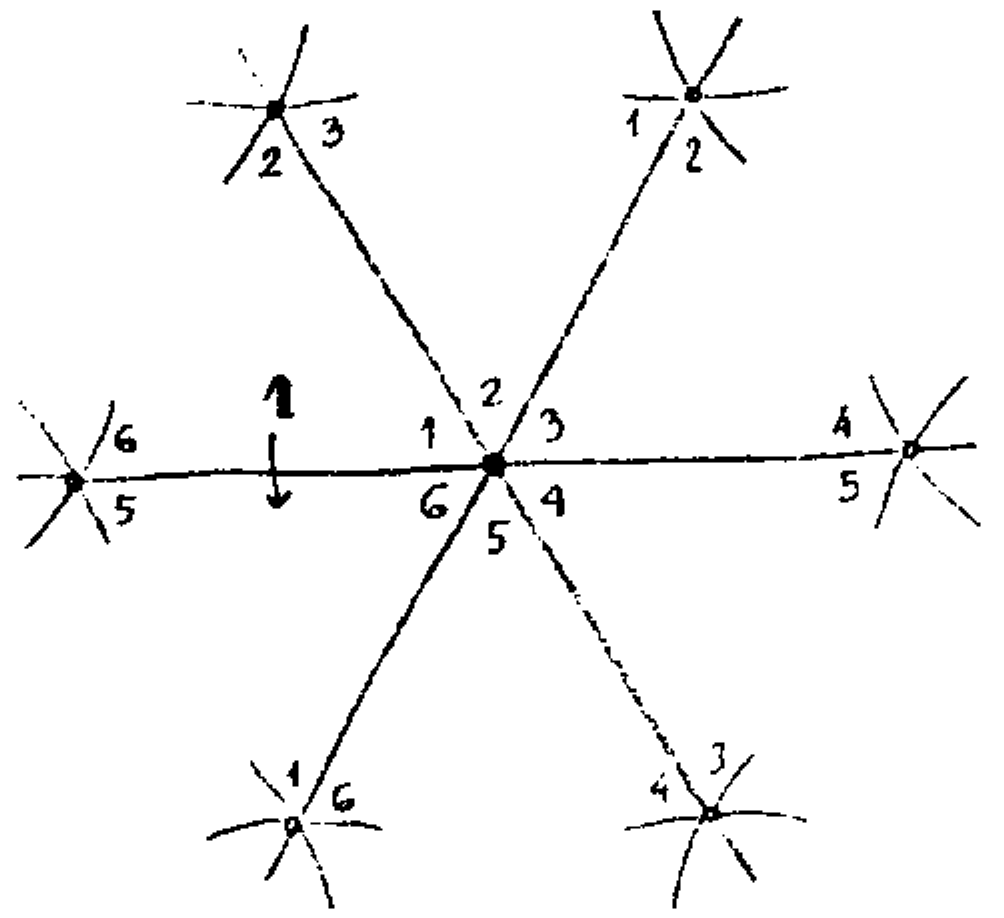
Euklidske ravanske forme mogu biti samo : euklidska ravan, cilindar, torus, Möbius-ova traka i Klein-ova boca.

Hiperboličke ravanske forme okarakterisane su preostalim od navedenih faktor-prostora (npr. tzv. "prostorna osmica"), ali ne samo



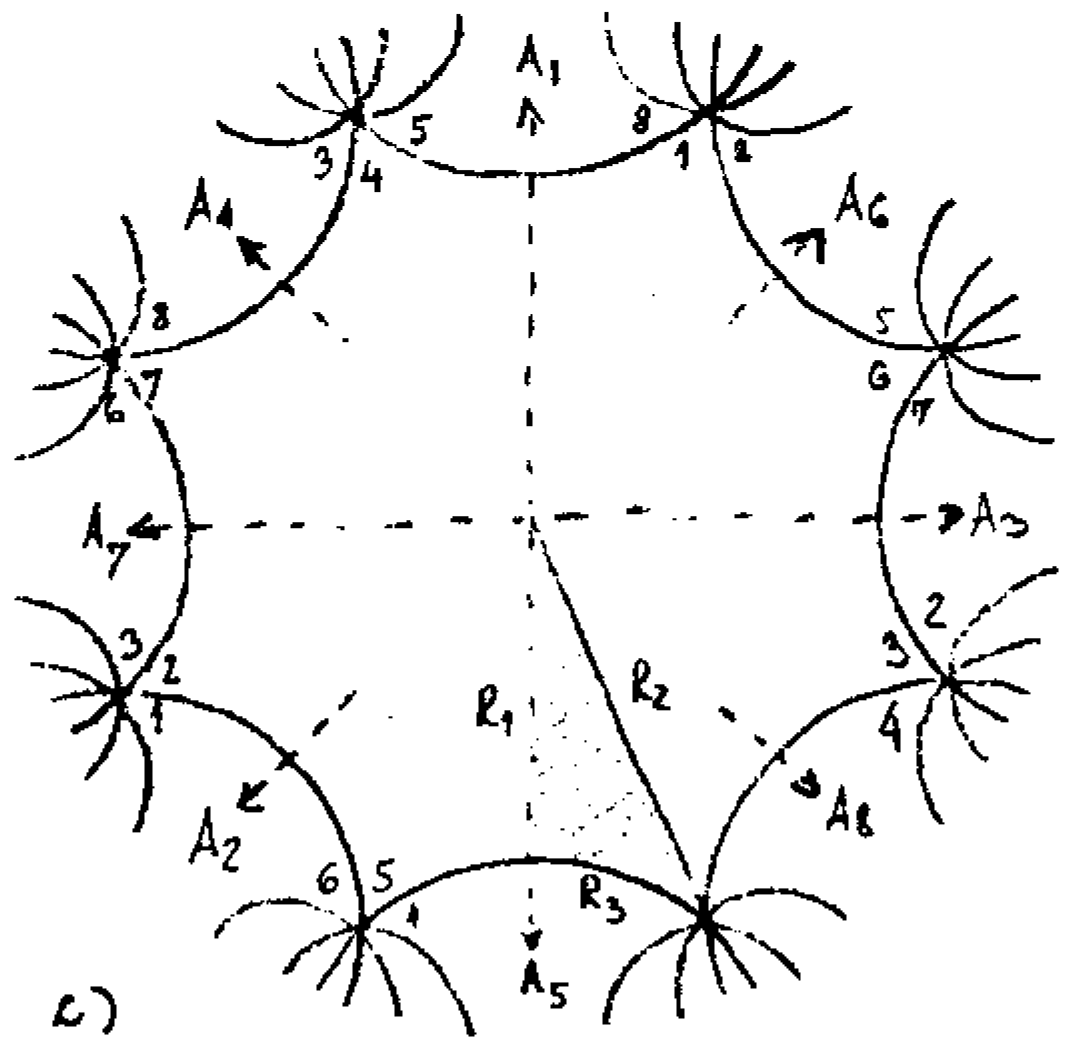
a)

PLJOSAN OD {6,6}



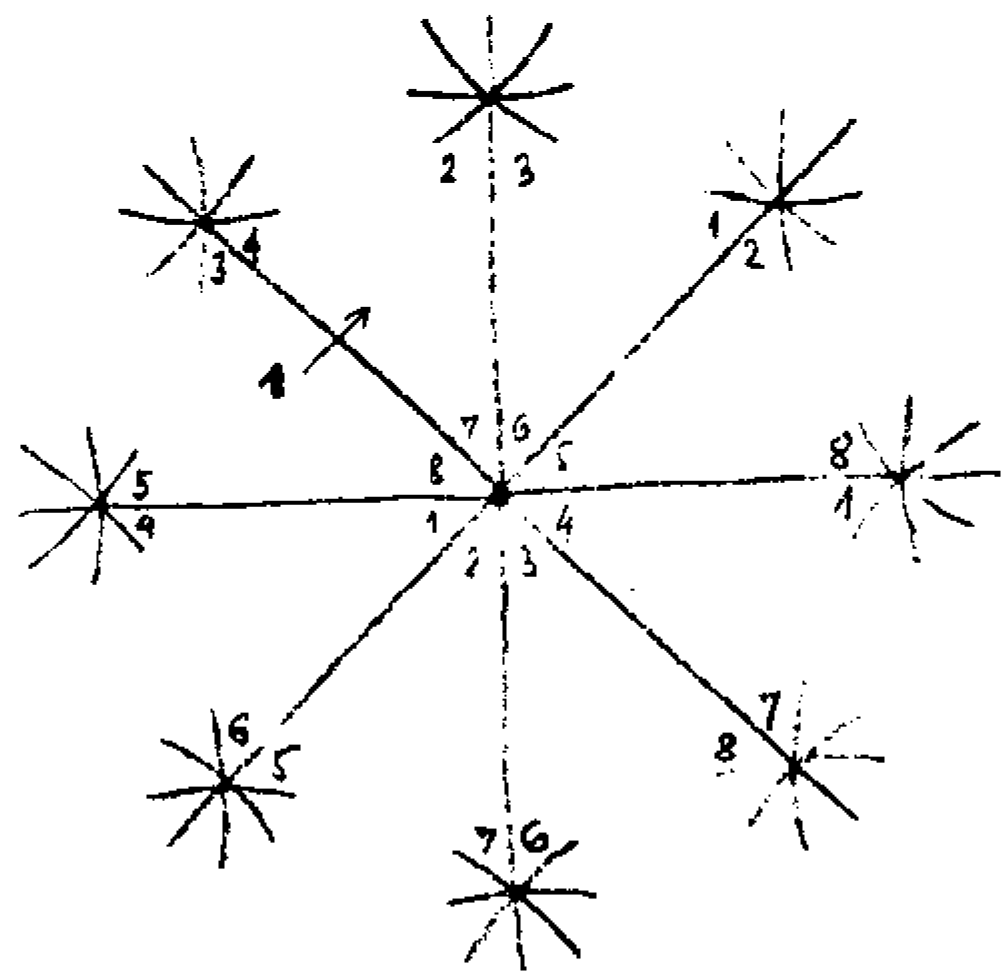
b)

TEME OD {6,6}



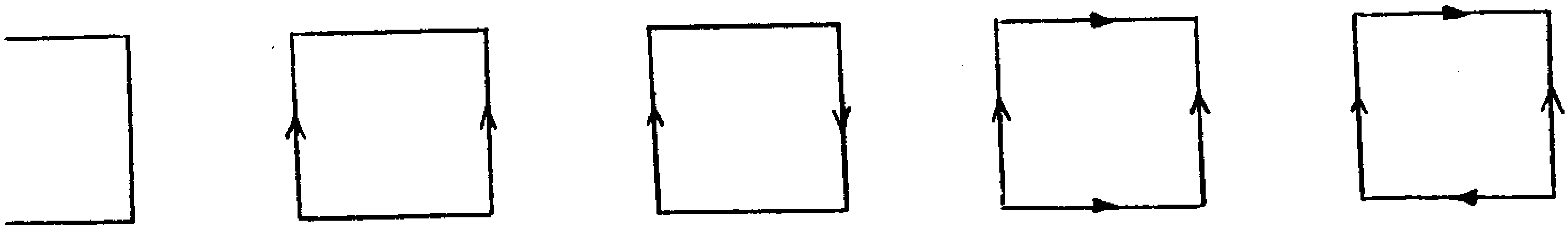
c)

PLJOSAN OD {8,8}



d)

TEME OD {8,8}



E^2 CILINDAR MÖBIUS-OV LIST TORUS KLEIN-OVA BOCA

e) EUKLIDSKE RAVANSKE FORME

SL. 3.

njima. Naime, klasifikacija hiperboličkih ravanskih formi poznata je samo za slučaj konačno generisane fundamentalne grupe.

1 Poincaré-ov metod za konstruisanje diskontinualnih grupa izometrija

Cilj je da geometrijski prezentiramo neku grupu izometrija G pomoću fundamentalnog poliedra $\mathcal{F}$ te grupe. Ovde ograničavamo naša razmatranja na konveksne ograničene fundamentalne poliedre u hiperboličkom 3-prostoru H^3.

1) Poliedar $\mathcal{F}$ ima konačno mnogo pljosni. Svaka pljosan f_i je zatvoren poligon u hiperboličkoj ravni H^2. Stranice poligona f_i nazivamo ivicama poliedra $\mathcal{F}$, a krajeve ovih ivica nazivamo temenima poliedra $\mathcal{F}$. Zahtevamo da za svaku ivicu e postoje tačno dve pljosni f_i i f_j (koje mogu pripadati jednoj ravni) takve da je $e = f_i \cap f_j$. Svake dve pljosni su ili disjunktne, ili se seku po zajedničkoj ivici ili imaju zajedničko teme. Ivica je ili podskup pljosni, ili seče pljosan u zajedničkom temenu ili je disjunktna sa uočenom pljosni. Dve ivice su ili disjunktne ili imaju zajedničko teme.

2) Uvodimo identifikacije pljosni poliedra $\mathcal{F}$, koje zadovoljavaju sledeće uslove :

(a) Svakoj pljosni $f_{g^{-1}}$ poliedra $\mathcal{F}$ odgovara pljosan f_g i identifikujuća izometrija g prostora H^3, koja preslikava pljosan $f_{g^{-1}}$ na pljosan f_g i poliedar $\mathcal{F}$ na poliedar $\mathcal{F}^g \neq \mathcal{F}$; poliedar $\mathcal{F}^g$ nazivamo susedom poliedra $\mathcal{F}$ duž pljosni f_g .

(b) Izometrija g^{-1} preslikava pljosan f_g na pljosan $f_{g^{-1}}$ i poliedar $\mathcal{F}$ na poliedar $\mathcal{F}^{g^{-1}}$, spojen sa poliedrom $\mathcal{F}$ duž pljosni $f_{g^{-1}}$.

(c) Izometrija g je involutivna (tj. $g^{-1} = g \neq -1$), ako je $f_{g^{-1}} = f_g$. Tada kažemo da važi relacija refleksije

(1) $$g^2 = 1 \text{ ili, ekvivalentno, } g^{-2} = 1 .$$

Tada je g ili ravanska refleksija, ili osna simetrija, ili centralna simetrija i $\mathcal{F}^{g^{-1}} = \mathcal{F}^g$ poliedar, spojen sa poliedrom $\mathcal{F}$ duž pljosni

$f_{g^{-1}} = f_g$.

3) Identifikacije pljosni poliedra $\mathcal{F}$ generišu grupu izometrija G . Treba da garantujemo ispunjenost tzv. ivičnih uslova na poliedru $\mathcal{F}$, da bi poliedar $\mathcal{F}$ bio fundamentalan poliedar za grupu G. Identifikacije pljosni indukuju klasifikaciju orijentisanih ivičnih segmenata, tako da ni jedan segment ne sadrži G-ekvivalentne tačke u svojoj unutrašnjosti. Uočimo proizvoljnu klasu ivičnih segmenata $e_1,\dots,e_r$ sa uglovima $\varepsilon(e_i)$, koje obrazuju pljosni kod ivice e_i. Posmatrajmo segment,npr. e_1, i odaberimo jednu od pljosni,npr. $f_{g_1^{-1}}$, čija granica sadrži ivicu e_1. Izometrija g_1 preslikava ivicu e_1 i pljosan $f_{g_1^{-1}}$ na ivicu e_2 i pljosan f_{g_1} , respektivno. Postoji još tačno jedna pljosan $f_{g_2^{-1}}$,čija granica sadrži ivicu e_2, dalje izometrija g_2, koja preslikava ivicu e_2 i pljosan $f_{g_2^{-1}}$ na ivicu e_3 i pljosan f_{g_2} , respektivno, itd. Dobijamo cikl izometrija $g_1,\dots,g_r$, prema shemi

(2) $(e_1,f_{g_1^{-1}}) \xrightarrow{g_1} (e_2,f_{g_1});\dots;(e_r,f_{g_r^{-1}}) \xrightarrow{g_r} (e_1,f_{g_r});(e_1,f_{g_1^{-1}}) \longrightarrow$

(4) Pretpostavljamo da postoji pozitivan ceo broj n , takav da važi

(3) $$n \sum_{i-1}^{r} \varepsilon(e_i) = 2\pi \quad ,$$

za uglove-diedre $\varepsilon(e_i)$ kod ivice e_i, u klasama ekvivalencije orijentisanih ivičnih segmenata. Ovaj uslov garantuje tzv. cikličku relaciju

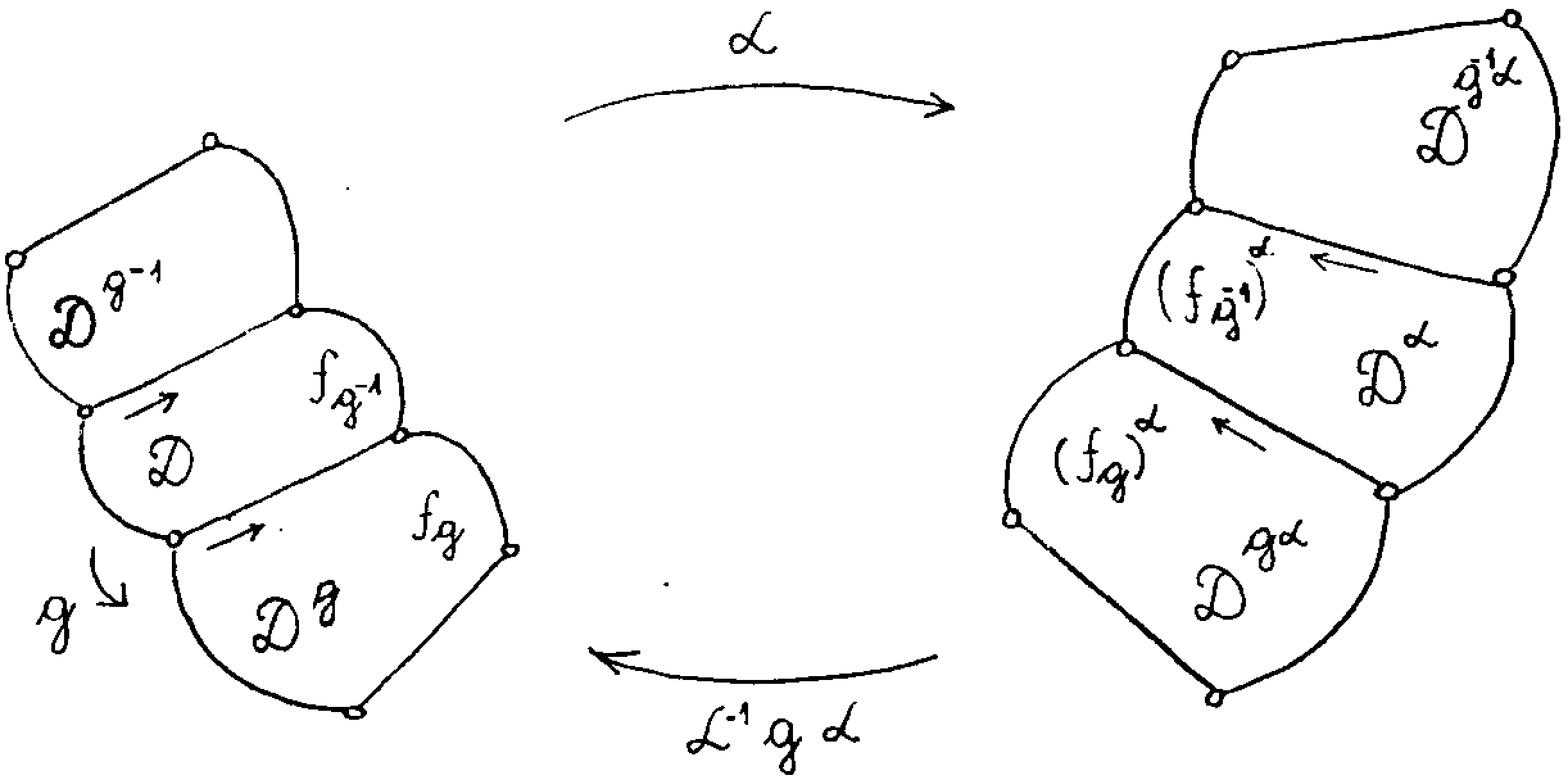
(4) $$(g_1 \dots g_r)^n = 1$$

za cikličku transformaciju $g_1 \dots g_r$.

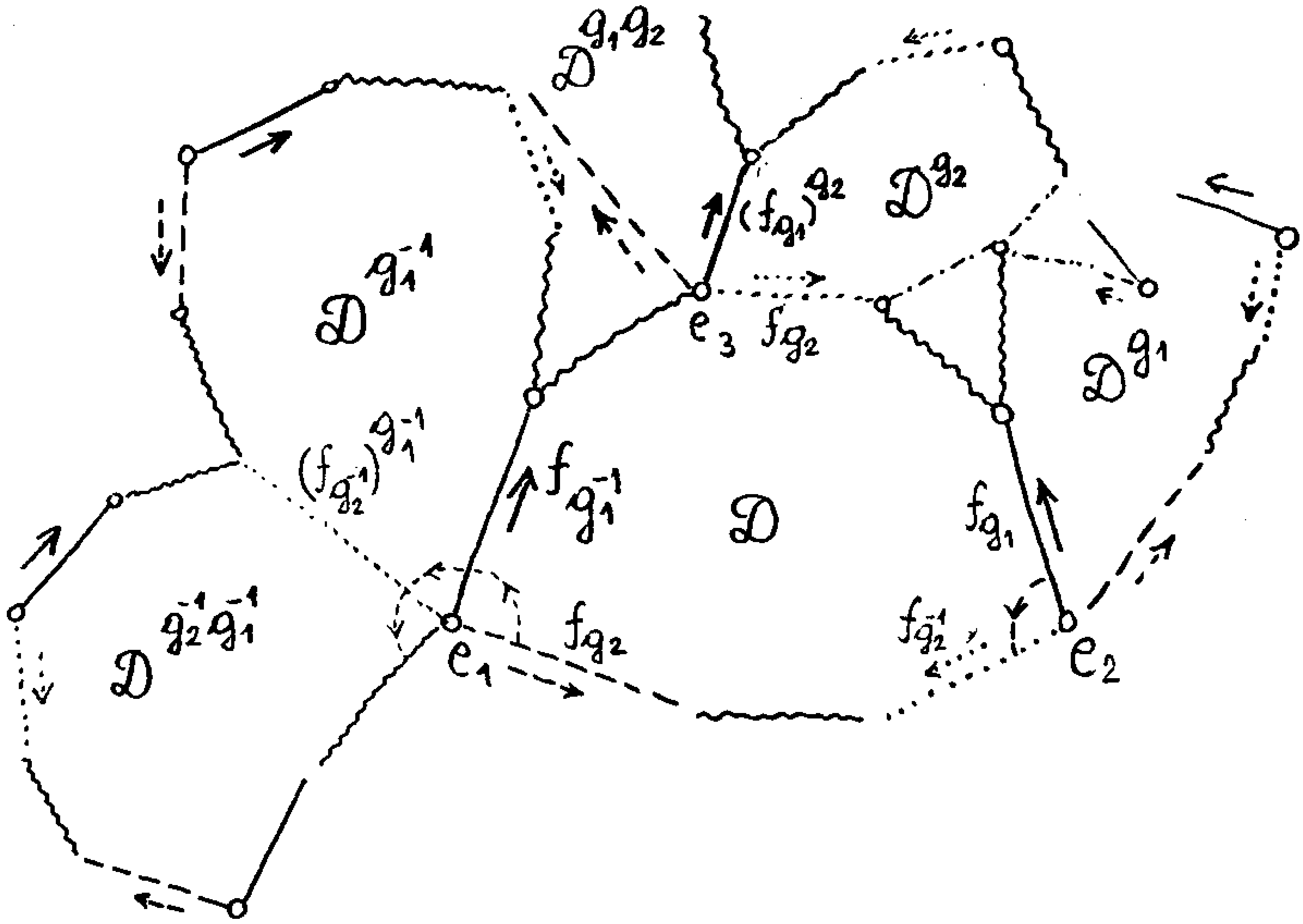
Primetimo da ivični segmenti $e_1,\dots,e_r$ nisu obavezno različiti; taj slučaj nastaje kada ivica e_i pripada ravni refleksije. Takođe su dopuštena ponavljanja među g_i .

Relacije $(g_r^{-1}\dots g_2^{-1}g_1^{-1})^n = 1$ i $(g_i\dots g_r g_1 g_2\dots g_{i-1})^n = g_i\dots g_r \cdot (g_1\dots g_r)^n g_r^{-1}\dots g_i^{-1} = 1$ su ekvivalentne sa (4) i mogu se dobiti modifikovanjem početka procesa.

Sada dajemo iskaz teoreme za poliedre, bez dokaza [26].



α
$\mathcal{D}^{g^{-1}}$
$f_{g^{-1}}$
$\mathcal{D}$
f_g
g
$\mathcal{D}^{g}$
$\mathcal{D}^{g^{-1}\alpha}$
$(f_{g^{-1}})^{\alpha}$
$\mathcal{D}^{\alpha}$
$(f_g)^{\alpha}$
$\mathcal{D}^{g\alpha}$
$\alpha^{-1} g \alpha$



$\mathcal{D}^{g_1 g_2}$
$\mathcal{D}^{g_1^{-1}}$
$(f_{g_1})^{g_2}$
$\mathcal{D}^{g_2}$
e_3
f_{g_2}
$\mathcal{D}^{g_1}$
$(f_{g_2^{-1}})^{g_1^{-1}}$
$f_{g_1^{-1}}$
$\mathcal{D}$
f_{g_1}
$\mathcal{D}^{g_2^{-1} g_1^{-1}}$
e_1
f_{g_2}
$f_{g_2^{-1}}$
e_2

SL. 4.

<u>Poincaré-ova teorema</u> Neka je $\mathcal{F}$ konveksan ograničen poliedar, snabdeven identifikacijama svojih pljosni. Neka je G grupa generisana tim identifikujućim izometrijama. Pretpostavljamo da važi ivični uslov za svaku od klasa ivičnih segmenata, sa odgovarajućim pozitivnim celim brojevima; ovi mogu biti različiti.

Tada je G diskontinualna grupa, $\mathcal{F}$ je njen fundamentalan domen, a cikličke relacije (4), zajedno sa odgovarajućim relacijama refleksije (1), obrazuju potpun skup relacija za grupu G .

Primetimo da poliedar $\mathcal{F}$ geometrijski potpuno karakteriše grupu transformacija G , ali da data grupa G može imati više fundamentalnih poliedara; svaki od njih pruža prezentaciju pomoću generatora (identifikacije pljosni) i relacija (odgovarajuće cikličke relacije i relacije refleksije).

III Dirichlet-ovi poliedri diskontinualnih grupa izometrija koje dejstvuju slobodno na prostoru H^3

Neka je G grupa izometrija, koja dejstvuje slobodno i diskontinualno na trodimenzionalnom hiperboličkom prostoru H^3, tj. stabilizator svake tačke $P \in H^3$ u grupi G sadrži samo identično preslikavanje 1 i njena orbita pod dejstvom grupe G

(1) $$P^G := \{ P^g \in H^3 : g \in G \}$$

je diskretan skup tačaka u prostoru H^3. Dirichlet-ov poliedar definišemo kao skup

(2) $$\mathcal{D}_P := \{ X \in H^3 : d(X,P) < d(X,P^g) \text{ , za svako } g \in G \setminus \{1\} \},$$

gde je d metrika prostora H^3.

Tada grupa G dejstvuje diskontinualno na prostoru H^3 i poliedar $\mathcal{D}_P$ je fundamentalan domen za grupu G, tj. ispunjeni su sledeći uslovi :

(i) $\mathcal{D}_P$ je domen, tj. neprazan povezan otvoren skup ;

(ii) Ma koje dve razne tačke poliedra $\mathcal{D}_P$ nisu ekvivalentne pod dejstvom grupe G ;

(iii) Svaka tačka je ekvivalentna, pod dejstvom grupe G, nekoj tački poliedra $\bar{\mathcal{D}}_P$.

Ovde $\bar{\mathcal{D}}_P$ označava zatvorenje poliedra $\mathcal{D}_P$ i $\partial \mathcal{D}_P := \bar{\mathcal{D}}_P \setminus \mathcal{D}_P$ označava granicu poliedra $\mathcal{D}_P$. Pljosan granice $\partial \mathcal{D}_P$ poliedra $\mathcal{D}_P$ označavamo sa $f_{g^{-1}}$, ako ona pripada simetrijskoj ravni tačaka P i $P^{g^{-1}}$ $(g \in G,\ g^{-1} \neq g)$. Kao poligon, $f_{g^{-1}}$ je ekvivalentan poligonu f_g sa granice $\partial \mathcal{D}_P$ poliedra $\mathcal{D}_P$; pljosan f_g pripada simetrijskoj ravni tačaka P i P^g . Tada izometrija $g \in G$ transformiše pljosan $f_{g^{-1}}$ na pljosan f_g i domen $\mathcal{D}_P$ preslikava na domen $\mathcal{D}_{P^g} := (\mathcal{D}_P)^g$, susedan domenu $\mathcal{D}_P$ duž zajedničke pljosni f_g. Izometrije g i g^{-1} mogu zameniti uloge. Zbog slobodnog dejstva grupe G je $g \neq g^{-1}$.

Izometrije kojima se vrše pomenute identifikacije pljosni poliedra $\mathcal{D}_p$ generišu grupu G . Za svaku izometriju $\alpha \in G$, $(\mathcal{D}_p)^{\alpha} = \mathcal{D}_{p\alpha}$ je domen u Dirichlet-ovoj teselaciji, u odnosu na orbitu p^G. Ovaj domen ima okolinu $(\mathcal{D}_p)^{g\alpha} = \mathcal{D}_{pg\alpha}$, duž pljosni $(f_g)^{\alpha}$.

Identifikacija pljosni poliedra $\mathcal{D}_p$, eventualno, indukuje razbijanje ivica poliedra $\mathcal{D}_p$ na orijentisane segmente, tako da unutrašnjost segmenta ne sadrži dve G-ekvivalentne tačke.

Posmatrajmo proizvoljnu klasu ekvivalencije, koju čine ivični segmenti $e_1, e_2, \ldots, e_r$, sa uglovima diedara $\varepsilon(e_1), \varepsilon(e_2), \ldots, \varepsilon(e_r)$, redom, definisanu na sledeći način .

Izaberimo ivični segment, recimo e_1, i posmatrajmo jednu od pljosni, označenu sa $f_{g_1^{-1}}$, čija granica sadrži ivicu e_1 . Izometrija g_1 preslikava ivicu e_1 i pljosan $f_{g_1^{-1}}$ na ivicu e_2 i pljosan f_{g_1}, redom. Postoji tačno još jedna pljosan $f_{g_2^{-1}}$, sa ivicom e_2 na svojoj granici, i izometrija g_2, koja preslikava ivicu e_2 i pljosan $f_{g_2^{-1}}$ na ivicu e_3 i pljosan f_{g_2}, redom,itd. Dobijamo cikl izometrija $g_1, g_2, \ldots, g_r$, saglasno shemi

(3) $\quad (e_1, f_{g_1^{-1}}) \xrightarrow{g_1} (e_2, f_{g_1}); (e_2, f_{g_2^{-1}}) \xrightarrow{g_2} (e_3, f_{g_2}); \ldots; (e_r, f_{g_r^{-1}}) \xrightarrow{g_r} (e_1, f_{g_r})$

Primećujemo da transformacije $g_1, g_2, \ldots, g_r$ nisu obavezno različite.

Gornje činjenice mogu se formulisati i na sledeći način .

Ivični segment e_1 je , redom, okružen sledećim domenima

(4) $\quad \mathcal{D}_{p^{g_1^{-1}}}, \mathcal{D}_{p^{g_2^{-1}g_1^{-1}}}, \ldots, \mathcal{D}_{p^{g_i^{-1}\cdots g_2^{-1}g_1^{-1}}}, \ldots, \mathcal{D}_{p^{g_r^{-1}\cdots g_2^{-1}g_1^{-1}}}$,

koji, zbog slobodnog dejstva grupe G , ispunjavaju ugaonu oblast mere

(5) $$\varepsilon(e_2) + \varepsilon(e_3) + \ldots + \varepsilon(e_r) + \varepsilon(e_1) = 2\pi .$$

Ciklička transformacija $g_1 g_2 \ldots g_r$,koja se odnosi na segment e_1, je identiteta, te je

(6) $$g_1 g_2 \ldots g_r = 1 .$$

Ako sada odaberemo pljosan f_{g_r} i ivični segment e_r kao prvi korak u gornjem postupku, dobijamo cikličku transformaciju

(7) $$g_r^{-1}\cdots g_2^{-1}g_1^{-1} = (g_1g_2\cdots g_r)^{-1}\ .$$

Počinjući sa pljosni $f_{g_i^{-1}}$ i ivičnim segmentom e_i , dolazimo do cikličke transformacije

(8) $$g_i\cdots g_rg_1g_2\cdots g_{i-1} = (g_i\cdots g_r)g_1g_2\cdots g_r(g_i\cdots g_r)^{-1}\ .$$

Pomoću ovakvih transformacija dolazimo do relacija ekvivalentnih relaciji (6) .

Cikličke transformacije (6) čine kompletan skup relacija za grupu G , tj. ma koja relacija u grupi G može se algebarski dobiti iz ovih relacija.

Problem obratan Poincaré-ovom problemu [42], tj. pitanje da li je poliedar $\mathcal{D}$, sa zadatim sistemom identifikacijskih izometrija, fundamentalan domen za diskontinualnu, slobodno dejstvujuću grupu izometrija G generisanu identifikacijama , razmotrićemo sada u specijalnom obliku za ograničene poliedre i slobodno dejstvujuće grupe generisane izometrijama koje čuvaju orijentaciju [26,42].

IV Konstrukcija diskontinualnih slobodno dejstvujućih grupa generisanih izometrijama koje čuvaju orijentaciju

(i, Ograničen poliedar $\mathcal{D}$ je otvoren povezan ograničen podskup hiperboličkog trodimenzionalnog prostora H^3, gde je granica $\partial\mathcal{D}$ unija konačno mnogo pljosni f_i , definisanih na sledeći način.

Svaka pljosan f_i je zatvoren poligon u hiperboličkoj ravni H^2 . Stranice poligona f_i nazivamo ivicama poliedra $\mathcal{D}$, krajeve tih ivica nazivamo temenima poliedra $\mathcal{D}$. Zahtevamo da za svaku ivicu e postoje tačno dve pljosni f_i i f_j (koje mogu pripadati istoj ravni) , takve da je $e = f_i \cap f_j$. Ma koje dve pljosni su ili disjunktne, ili se seku po zajedničkoj ivici, ili imaju zajedničko teme. Ivica je ili podskup pljosni, ili seče pljosan u zajedničkom temenu, ili je disjunktna sa pljosni. Dve ivice su ili disjunktne, ili imaju zajedničko teme.

(ii) Identifikacije na poliedru $\mathcal{D}$ su sparivanja njegovih pljosni pomoću izometrija koje čuvaju orijentaciju, pri čemu su zadovoljeni sledeći uslovi (a)-(b).

(a) Za svaku pljosan $f_{g^{-1}}$ poliedra $\mathcal{D}$ postoji druga pljosan f_g i identifikujuća izometrija g prostora H^3 , koja preslikava pljosan $f_{g^{-1}}$ na pljosan f_g i poliedar $\mathcal{D}$ na poliedar $\mathcal{D}^g \neq \mathcal{D}$. Poliedar $\mathcal{D}^g$ nazivamo susedom poliedra $\mathcal{D}$ duž pljosni f_g .

(b) Izometrija g^{-1} preslikava pljosan f_g na pljosan $f_{g^{-1}}$ i poliedar $\mathcal{D}$ na poliedar $\mathcal{D}^{g^{-1}}$, spojen sa poliedrom $\mathcal{D}$ duž pljosni $f_{g^{-1}}$.

(iii) Identifikacije pljosni poliedra $\mathcal{D}$ generišu grupu izometrija G. Treba da osiguramo ispunjenje ivičnih uslova na poliedru $\mathcal{D}$,da bi $\mathcal{D}$ bio fundamentalan poliedar za grupu G, koja dejstvuje slobodno na prostoru H^3.

Sparivanje pljosni indukuje klasifikaciju orijentisanih ivičnih segmenata poliedra $\mathcal{D}$, tako da ni jedan od segmenata ne sadrži u svojoj unutrašnjosti par G-ekvivalentnih tačaka. Primenimo postupak opisan u delu na proizvoljnu klasu ivičnih segmenata $e_1, e_2, \ldots, e_r$, sa uglovima $\varepsilon(e_i)$ između pljosni koje se seku po ivici e_i. Uočimo segment, npr. e_1, i odaberimo jednu od pljosni, označenu sa $f_{g^{-1}}$, čija granica sadrži ivicu e_1. Izometrija g_1 preslikava ivicu e_1 i pljosan $f_{g_1^{-1}}$ na ivicu e_2 i pljosan f_{g_1}. Postoji tačno jedna pljosan $f_{g_2^{-1}}$ sa ivicom e_2 na svojoj granici, zatim izometrija g_2 , koja preslikava ivicu e_2 i pljosan $f_{g_2^{-1}}$ na ivicu e_3 i pljosan f_{g_2}, itd. Dobijamo cikl izometrija $g_1, g_2, \ldots, g_r$,prema shemi (3).

(b) Pretpostavimo da relacija (5) važi za uglove diedre kod ivica e_i, u svakoj od klasa ekvivalencije segmenata. Ovaj uslov garantuje tzv. cikličku relaciju (6).

Sada navodimo iskaz specijalne Poincaré-ove teoreme, bez dokaza.

Teorema 1. Neka je $\mathcal{D}$ ograničen poliedar, koji zadovoljava uslove (i)-(iii) i (a)-(b). Neka je G grupa generisana identifikacijama pljosni, koje čuvaju orijentaciju. Tada je G diskontinualna, slobodno dejstvujuća grupa, $\mathcal{D}$ je fundamentalan poliedar za grupu G, i cikličke relacije tipa (6) za svaku klasu ekvivalencije ivičnih segmenata čine kompletan skup relacija za grupu G.

Identifikovani poliedar, označen sa $\tilde{\mathcal{D}}$,geometrijski karakteriše grupu transformacija G, ali data grupa G može imati više fundamentalnih poliedara.

V Metrička konstrukcija fundamentalnog poliedra $\mathcal{D}$ pomoću vektorskog modela hiperboličkog 3-prostora H^3

1 Projektivno-metrički prostor $P_1^3 = H^3$ modeliran u projektivnom prostoru $P^3(V^4 ; V_4^*)$

Posmatramo 4-dimenzionalan realan vektorski prostor V^4, čiji dualni prostor, tj. prostor njegovih linearnih formi, označavamo sa V_4^*. Projektivni 3-prostor $P^3(V^4;V_4^*)$ može se definisati na uobičajeni način. 1-dimenzionalni podprostori prostora V^4 (ili 3-podprostori prostora V_4^*) su tačke prostora P^3, a 1-podprostori prostora V_4^* (ili 3-podprostori prostora V^4) su ravni prostora P^3. Tačka $X(x)$ i ravan α $(\boldsymbol{a})$ su incidentni akko je $x.\boldsymbol{a}=0$, tj. vrednost linearne forme $\boldsymbol{a}$ na vektoru x je jednaka nuli($x \in \dot{V}^4, \boldsymbol{a} \in \dot{V}_4^*$, gde tačka označava isključenost nula-vektora i nula-forme). Prave prostora P^3 su 2-podprostori prostora V^4 ili prostora V_4^*, redom. Ako je (e_i) baza u prostoru V^4 i (e^j) njemu dualna baza u prostoru V_4^*, tj. $e_i e^j = \delta_i^j$ (Kronecker-ov simbol), tada forma $\boldsymbol{a} = e^j a_j$ uzima vrednost $x\boldsymbol{a}=x^i a_i$ na vektoru $x = x^i e_i$. Primenjujemo konvenciju o sabiranju za iste gornje i donje indekse.

Projektivnu metriku na prostoru P^3 možemo uvesti na sledeća dva načina :

a) zadavanjem polariteta

$$(*) : \quad V_4^* \longrightarrow V^4 \quad , \quad \boldsymbol{a} \longrightarrow \boldsymbol{a}_* =: a$$

ili

b) definisanjem simetrične bilinearne forme

$$\langle\, ; \rangle : \quad V_4^* \times V_4^* \longrightarrow \mathbb{R} \;, \; \langle \boldsymbol{u} ; \boldsymbol{v} \rangle := \boldsymbol{u}_* \boldsymbol{v}$$

na uobičajeni način [36] .

Razmatramo samo regularne polaritete. Tada

$$(^*)\ :\quad V^4 \longrightarrow V^* \quad , \qquad x \longrightarrow x^* = : \mathscr{x}$$

označava inverzni polaritet i

$$\langle\,;\,\rangle\ :\quad V^4 \times V^4 \longrightarrow \mathbb{R},\ \langle x;y\rangle : = x\, y^* = \langle x^*;\, y^*\rangle = \langle \mathscr{x}\,;\, \mathscr{y}\rangle$$

definiše indukovanu bilinearnu formu. Primenom polariteta $(_*)$ i $(^*)$ se mogu identifikovati forma i njen polarni vektor. Geometrijski, to znači da za polarnu ravan i njen pol u formulacijskim činjenicama za projektivni metrički prostor P^3 važi princip dualiteta. Npr., jednakost $\langle \mathscr{u}, \mathscr{v}\rangle = 0$ znači da su ravni $\{\mathscr{u}\}$ i $\{\mathscr{v}\}$ ortogonalne ili da je pol $(\mathscr{u}_*)$ ravni $\{\mathscr{u}\}$ incidentan ravni $\{\mathscr{v}\}$ ili da su polovi $(\mathscr{u}_*)$ i $(\mathscr{v}_*)$ konjugovani. Ako $\mathscr{e}^j_* = p^{ji} e_i$ definiše matricu $(p^{ij}) = (p^{ji})$ polaripolariteta $(_*)$, tada inverzna matrica $(p_{ij}) = (p_{ji})$ pripada polaritetu $(^*)$ pomoću $\mathscr{e}_i = \mathscr{e}^j p_{ji}$, tj. $p^{ji} p_{ik} = \delta^j_k$. Forma $\mathscr{u} = \mathscr{e}^j u_j$, koja reprezentuje ravan $\{\mathscr{u}\}$, ima pol $\mathscr{u}_* = u_j \mathscr{e}^j_* = u_j p^{ji} e_i = : u^i e_i$, u koordinatama. Vektor $x = x^i e_i$, koji reprezentuje tačku (x), ima polarnu ravan $x^* = e^*_i x^i = \mathscr{e}^j p_{ji} x^i = : \mathscr{e}^j x_j$. Jasno je da matrice $(c.p^{ji})$ i $(p_{ji}.c^{-1})$, respektivno, definišu isti projektivni polaritet u prostoru P^3 $(0 \neq c \in \mathbb{R})$.

Linearna transformacija $\alpha : V^4 \longrightarrow V^4$, $x \longrightarrow x\alpha$ i njen dual α^*: $V^*_4 \longrightarrow V^*_4$, $\mathscr{v} \longrightarrow \alpha^* \mathscr{v}$, sa definišućom jednakosti $(x\alpha)\mathscr{v} = x(\alpha^*\mathscr{v})$ $\in \mathbb{R}$, za svako $x \in V^4$ i $\mathscr{v} \in V^*_4$, određuje projektivitet prostora P^3, za tačke i ravni, respektivno. Nazivamo ga metričkim projektivitetom akko čuva polaritet, tj. bilinearna forma je invarijantna do na množenje konstantom.

Pomenimo još da su formule za refleksiju vektora i formi sledeće

$$(1)\quad x \longrightarrow x - \frac{2}{(\mathscr{u}_*\mathscr{u})}(x\,\mathscr{u}).\,\mathscr{u}_*, \qquad \mathscr{v} \longrightarrow \mathscr{v} - \mathscr{u}(\mathscr{v}_*\,\mathscr{u}).\,\frac{2}{(\mathscr{u}_*\mathscr{u})} \quad ,$$

gde forma $\mathscr{u}$ i njen polarni vektor $\mathscr{u}_*$ karakterišu ravan refleksije i njen pol, respektivno. Grupa metričkih projektiviteta prostora P^3 može se generisati pomoću ravanskih refleksija.

U hiperboličkom projektivnom prostoru $P_1^3 := H^3$ bilinearna forma je indeksa 1, tj. ima signaturu $(-,+,+,+)$ ili, ekvivalentno, signaturu $(+,-,-,-)$. Hiperboličku projektivnu metriku u prostoru P^3 možemo uvesti fiksirajući ortonormiranu bazu (e_i) i njen dual $\{e^j\}$, pomoću bilinearnih formi :

$$\langle\ ;\ \rangle \ : \ V^4 \times V^4 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \langle x;y\rangle = \langle x^i e_i ; y^j e_j\rangle := -x^0y^0 + x^1y^1 + x^2y^2 + x^3y^3$$

(2)

$$\langle\ ;\ \rangle \ : \ V_4^* \times V_4^* \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \langle u;v\rangle = \langle e^i u_i ; e^j v_j\rangle := -u_0v_0 + u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3 \quad .$$

U hiperboličkoj geometriji samokonjugovane tačke (a) prostora H^3 tj. granične tačke su u prostoru V^4 predstavljene pomoću "svetlosnog konusa" (u terminologiji "prostor-vreme" geometrije), sl. 5. a, (za prostor P_1^2).

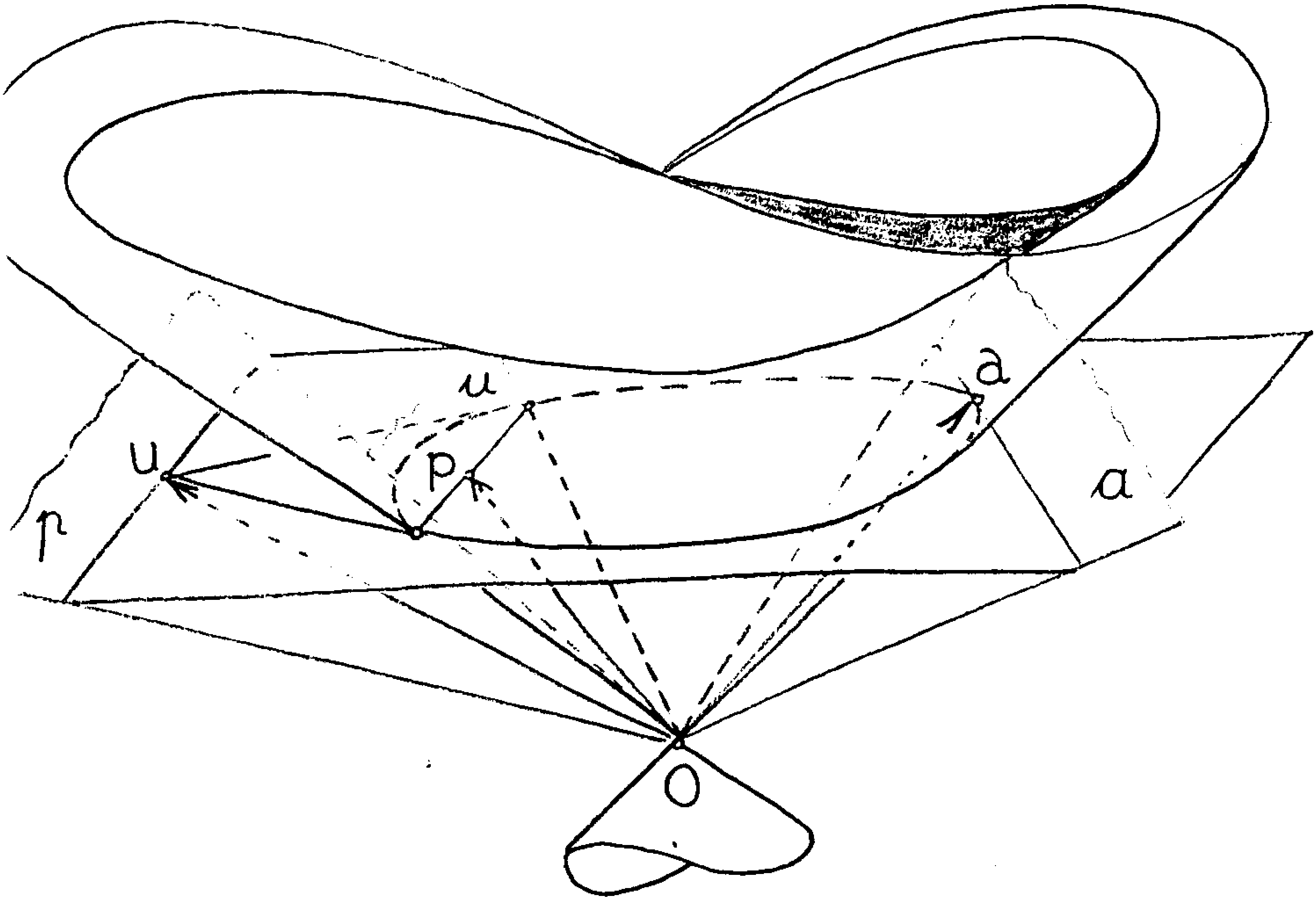
Jednačine $\langle a;a\rangle = 0$ i $\langle \alpha;\alpha\rangle = 0$ opisuju u prostoru V_4^* samoortogonalne ravni $\{\alpha\}$, koje dodiruju "svetlosni konus". Ove jednačine definišu apsolutu prostora H^3.

Nejednakost $\langle p;p\rangle < 0$ karakteriše svojstvene tačke prostora H^3, koje su opisane "vreme"-vektorima prostora V^4.

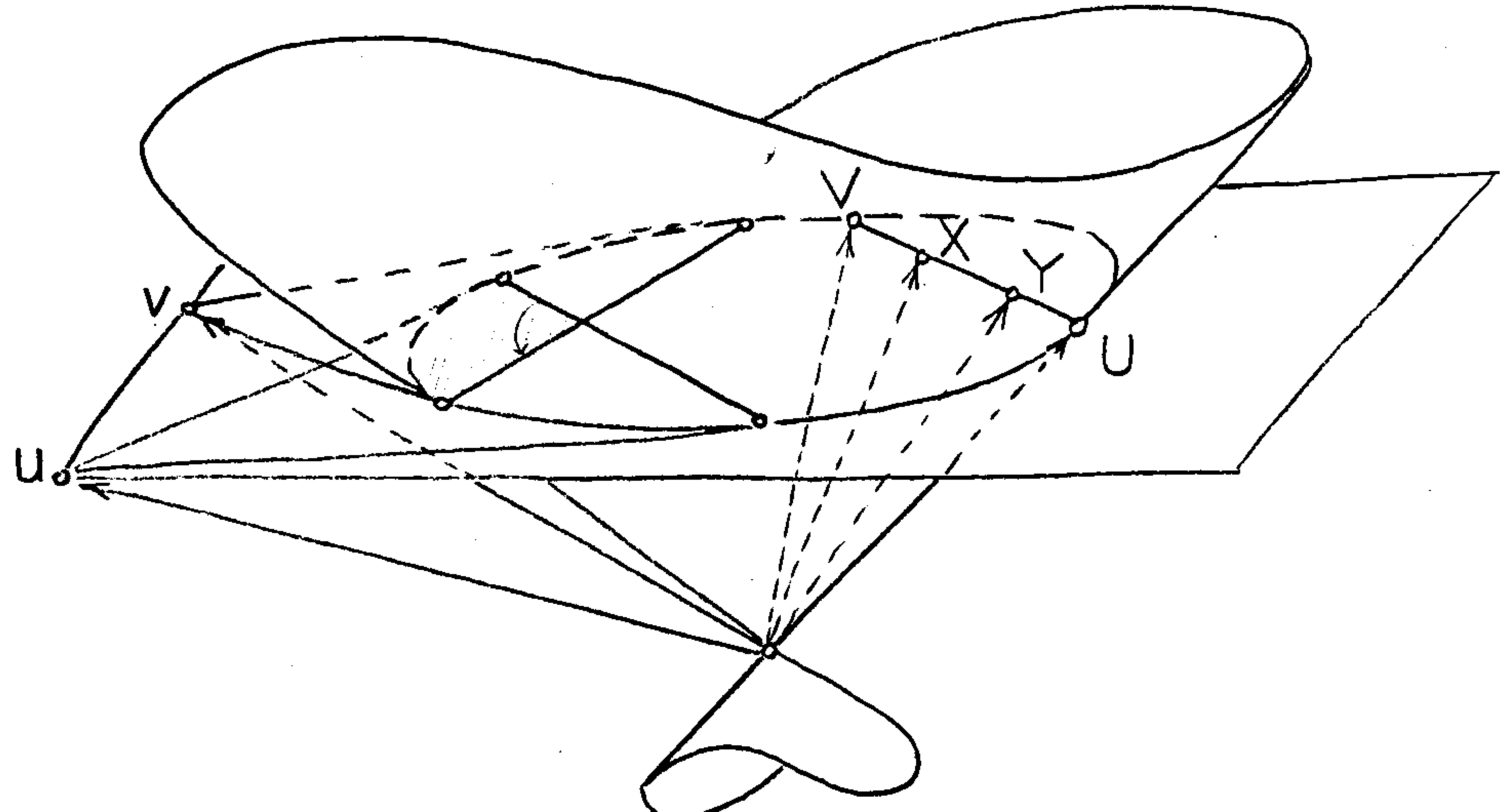
Nejednakost $\langle p;p\rangle < 0$ karakteriše polarne ravni svojstvenih tačaka. U takvoj ravni $\{p\}$ leže samo nesvojstvene tačke (u), čiji su vektori u "prostor"-vektori, opisani nejednakošću $\langle u;u\rangle > 0$.

Nejednakost $\langle u;u\rangle > 0$ opisuje svojstvene ravni $\{u\}$ prostora H^3, koje seku "svetlosni konus". U ravni $\{u\}$ leže svojstvene tačke (sa "vreme"-vektorima), samokonjugovane tačke (sa "svetlost"-vektorima) i nesvojstvene tačke (sa "prostor"-vektorima).

Uvođenjem 3-dimenzionalne hiper-ravni u prostoru V^4 pomoću jednačine $x e^0 = \langle x;e^0\rangle = x^0 = 1$, gde je indukovana bilinearna forma indeksa 0, jer je $\langle e^0;e^0\rangle = -1$, dobijamo klasičan Cayley-Klein-ov

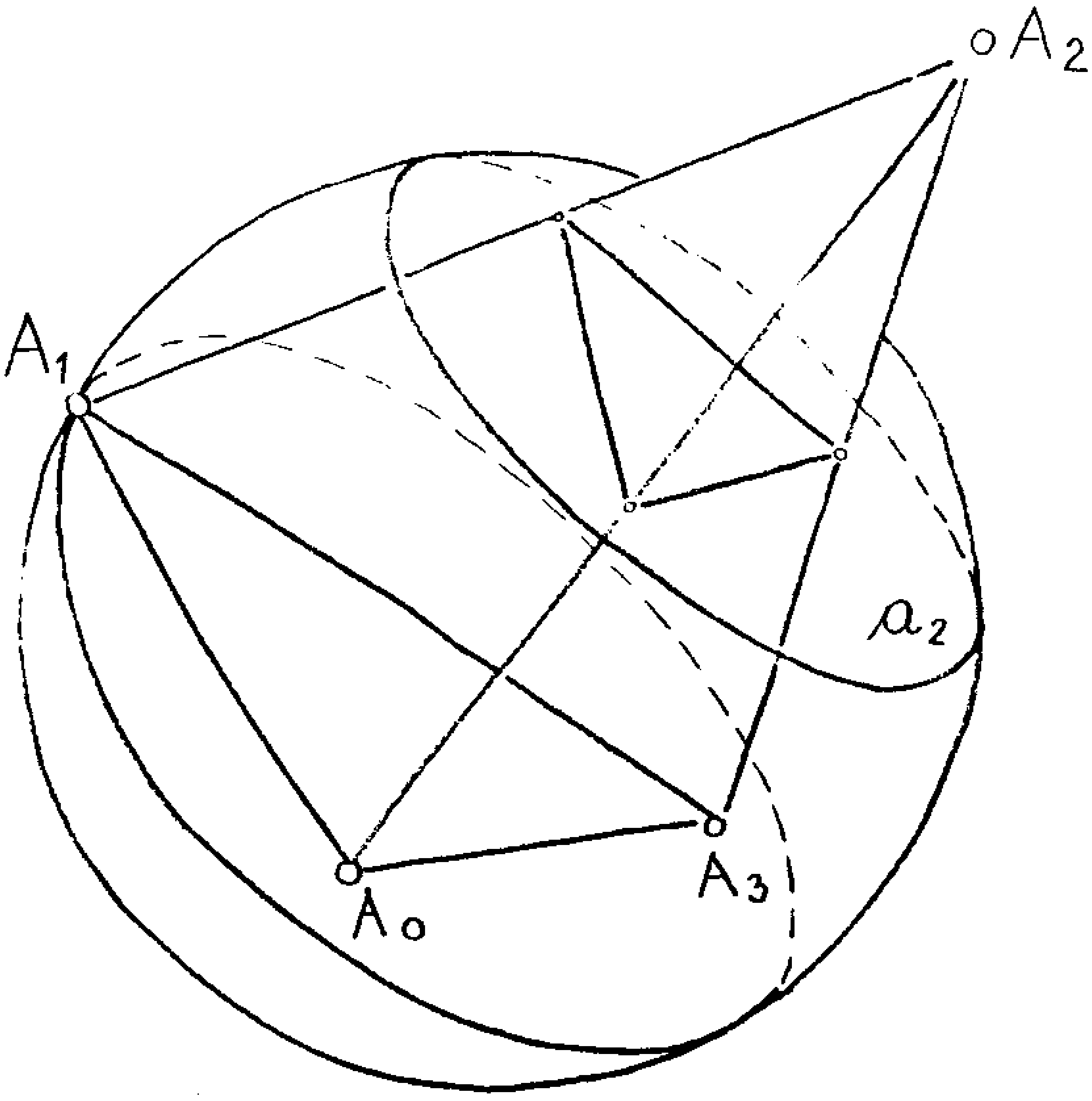


a)



b)

SL. 5.



c)

model u prostoru E^3 , sl. 5 a,b .

Uvođenjem 3-sfere imaginarnog radiusa ki ("vreme"-indikatrisa) u prostoru V^4, pomoću jednačine $\langle x;x \rangle = -k.k$ $(=(ki)^2)$, dobijamo konformni model (hiperboloid-model) za svojstvene tačke hiperboličkog prostora, dok su nesvojstvene tačke tog prostora opisane pomoću "prostor"-indikatrise $\langle x;x \rangle = k.k$.

Oba modela, kompletirana idealnim tačkama, imaju karakteristično svojstvo da ih svaki 1-dimenzionalni podprostor prostora V^4 seče u jednoj tački, te u prostor V^4 možemo uvesti ma koju "transverzalnu " hiper-površ, kao model projektivno-metričkog 3-prostora ili njegovog dela.

Bilinearna forma $\langle\, ;\, \rangle$ prostora V^4 indukuje infinitezimalnu metriku na hiper-površi.

2 Rastojanje i mera ugla u projektivno-metričkom prostoru $P_1^3 = H^3$

Neka su X(x) i Y(y) dve svojstvene tačke u hiperboličkom prostoru H^3, tj. neka je zadovoljena nejednakost $\langle x;y \rangle < 0$, sl.5 b) .

Poslednja nejednakost garantuje da su vektori x i y orijentisani ka istoj komponenti "svetlosnog konusa". Ovo je ispunjeno ako su e_0-komponente pozitivne u ortonormiranoj bazi (e_i), tj. vektori x i y se vide u pozitivnoj polovini konusa

$$(1) \quad C^+ = \{ z = z^0 e_0 + z^1 e_1 + z^2 e_2 + z^3 e_3 \; : \; \langle z;z \rangle < 0, \quad z^0 > 0 \} \subset V^4 .$$

Tada rastojanje d(X,Y) svojstvenih tačaka X(x) i Y(y) možemo, ekvivalentno, definisati formulama

$$(2) \quad d(X,Y) = \frac{k}{2} \ln \frac{-\langle x;y \rangle + \sqrt{\langle x;y \rangle^2 - \langle x;x \rangle . \langle y;y \rangle}}{-\langle x;y \rangle - \sqrt{\langle x;y \rangle^2 - \langle x;x \rangle . \langle y;y \rangle}} = \frac{k}{2} \ln(XYUV) ,$$

$$(3) \quad \mathrm{ch}\left(\frac{1}{k}\, d(X,Y)\right) = \frac{-\langle x;y \rangle}{\sqrt{\langle x;x \rangle \,.\, \langle y;y \rangle}} ,$$

$$(4) \quad \mathrm{sh}\left(\frac{1}{k}\, d(X,Y)\right) = \sqrt{\frac{\langle x;y \rangle^2 - \langle x;x \rangle \,.\, \langle y;y \rangle}{\langle x;x \rangle \,.\, \langle y;y \rangle}} ,$$

gde su u dvorazmeri $(XYUV)$ sa $U(u)$ i $V(v)$ označene tačke u kojima XY seče apsolutu prostora H^3. Ako je Z priozvoljna tačka prave XY, tada važi jednakost $(XZUV).(ZYUV) = (XYUV)$. Konstanta $k = \sqrt{-\frac{1}{K}}$ je prirodna dužinska jedinica u prostoru H^3, K je konstantna negativna sekciona krivina.

Neka su $(\mathcal{u})$ i $(\mathcal{v})$ dve svojstvene ravni prostora H^3, koje se seku i čiji su polovi (u) i (v), respektivno. Ako fiksiramo pozitivnu polovinu konusa C^+ u prostoru V^4, na gore pomenuti način, tada

(5) $\quad \sphericalangle(\mathcal{u},\mathcal{v}) := \{ (x) : x \in C^+ , x\mathcal{u} = \langle x;u\rangle > 0, x\mathcal{v} = \langle x;v\rangle > 0 \}$

definiše jedan od četiri svojstvena ugaona domena u prostoru H^3 , određena zadatim dvema ravnima , sl. 5 b) . Preostala tri ugla su $\sphericalangle(-\mathcal{u},\mathcal{v})$, $\sphericalangle(-\mathcal{u},-\mathcal{v})$ i $\sphericalangle(\mathcal{u},-\mathcal{v})$. Mera α ugla $\sphericalangle(\mathcal{u},\mathcal{v})$ definisana je formulama

(6) $\quad \cos(\alpha(\mathcal{u},\mathcal{v})) := \dfrac{-\langle \mathcal{u};\mathcal{v}\rangle}{\sqrt{\langle \mathcal{u};\mathcal{u}\rangle \cdot \langle \mathcal{v};\mathcal{v}\rangle}} = \dfrac{-\langle u;v\rangle}{\sqrt{\langle u;u\rangle \cdot \langle v;v\rangle}} =: \mathrm{ch}(\frac{1}{k}\, d(u;v))$

gde $(0 \le \alpha \le \pi)$.

Istovremeno smo definisali imaginarno rastojanje polova (u) i (v), pomoću funkcije ch proširene na kompleksno polje $\mathbb{C}$. Poslednje formule se proširuju na paralelne ravni i na ravni koje se ne seku. Mogu se pojaviti i nesvojstvene ravni.

Formule infinitezimalnog računa za izračunavanje hiperboličkog linijskog odnosno zapreminskog elementa sličnim postupkom, mogu se naći u [36] .

3 Simpleksi sa svojstvenim, idealnim i nesvojstvenim pljosnima i temenima

3-dimenzionalni simpleks $\mathcal{S}$ u prostoru H^3 biće predstavljen svojim pljosnima $(\mathcal{b}^0)$, $(\mathcal{b}^1)$, $(\mathcal{b}^2)$ i $(\mathcal{b}^3)$ ili svojim temenima (a_0), (a_1), (a_2) i (a_3). Pretpostavljamo da je

(1) $$a_i \mathscr{b}^j = \delta_i^j$$

tj. pljosan $\{\mathscr{b}^j\}$ sadrži sva temena, osim temena (a_j), i teme (a_j) leži u pozitivnom poluprostoru, određenom ravni $\{\mathscr{b}^j\}$.

Neka simpleks $\mathscr{S}$ ima diedarske uglove mere

(2) $$\alpha(\mathscr{b}^r, \mathscr{b}^s) = \alpha^{rs} = \alpha^{sr} = \alpha^{(rs)} \quad .$$

Posmatramo bilinearnu formu prostora V_4^* ili prostora V^4, normalizujemo forme $\mathscr{b}^j$, u smislu 2(6), da bi smo dobili Schläfli-jevu matricu

(3) $$(\langle \mathscr{b}^i ; \mathscr{b}^j \rangle) = (\langle b^i ; b^j \rangle) := \begin{pmatrix} 1 & -\cos\alpha^{01} & -\cos\alpha^{02} & -\cos\alpha^{03} \\ -\cos\alpha^{10} & 1 & -\cos\alpha^{12} & -\cos\alpha^{13} \\ -\cos\alpha^{20} & -\cos\alpha^{21} & 1 & -\cos\alpha^{23} \\ -\cos\alpha^{30} & -\cos\alpha^{31} & -\cos\alpha^{32} & 1 \end{pmatrix} = \; =: (b^{ij}) \quad .$$

Diedarski uglovi (2) karakterišu svojstven hiperbolički simpleks akko je

(4) $$B = \det (b^{ij}) < 0 \quad ,$$

ali su sve ostale minor-determinante pozitivne[7.9]. Tada Schläfli-jeva matrica (3) ispunjava opšti kriterijum: ona definiše hiperboličku projektivnu metriku akko je bilinearna forma

(5) $$\langle u ; v \rangle = \langle \mathscr{b}^i u_i ; \mathscr{b}^j v_j \rangle = u_i b^{ij} v_j = \langle u ; v \rangle$$

indeksa 1. Temena (a_i) simpleksa $\mathscr{S}$ su okarakterisana relacijama

(6) $$a_i := a_{ir} b^r, \; \delta_i^j = a_i \mathscr{b}^j = \langle a_i ; b^j \rangle = \langle a_{ir} b^r ; b^j \rangle = a_{ir} b^{rj}, \langle a_i ; a_j \rangle = $$
$$= \langle a_{ir} b^r ; a_{js} b^s \rangle = a_{ir} b^{rs} a_{sj} = \delta_i^s a_{sj} = a_{ij} \; ,$$

(7) $$A := \det (a_{ij}) = \frac{1}{\det (b^{ij})} = \frac{1}{B} \quad .$$

U (4) se zahteva da bude $a_{ij} = \langle a_i ; a_j \rangle < 0$, $(i=0,1,2,3)$, te je svaki a_i "vreme"-vektor, tj. svako teme simpleksa je svojstvena tačka prostora H^3. Osnovne minor-determinante matrice (a_{ij}) su gramiani (Gramm) odgovarajućih temena

$$(8)\quad \mathrm{Gr}\,(a_{i_0},a_{i_1},a_{i_2},a_{i_3}) = \begin{vmatrix} a_{i_0i_0} & a_{i_0i_1} & a_{i_0i_2} & a_{i_0i_3} \\ a_{i_1i_0} & a_{i_1i_1} & a_{i_1i_2} & a_{i_1i_3} \\ a_{i_2i_0} & a_{i_2i_1} & a_{i_2i_2} & a_{i_2i_3} \\ a_{i_3i_0} & a_{i_3i_1} & a_{i_3i_2} & a_{i_3i_3} \end{vmatrix} < 0 \quad .$$

Mada je bilinearna forma (5) indeksa 1, simpleks $\mathcal{S}$ može imati svojstveno teme, npr. (a_0), idealno teme, npr. (a_1) i nesvojstveno teme, npr. (a_2), ako je $a_{00} < 0$, $a_{11} = 0$, $a_{22} > 0$, respektivno, sl.5.c). Kod pojave nesvojstvenog temena (a_2), simpleks $\mathcal{S}$ možemo zarubiti pomoću polarne ravni $\{\alpha_2\}$, koja je normalna na pljosnima incidentnim temenu (a_2), jer je $a_2 b^j = \langle \alpha_2 ; b^j \rangle = 0$, za $j \neq 2$. Sve ove mogućnosti mogu se diskutovati u teoriji. Mogu se pojaviti simpleksi sa paralelnim pljosnima (koje tada obrazuju ugao mere nula) ili sa pljosnima koje se ne seku u svojstvenoj tački (ako su npr. $\{b^1\}$ i $\{b^2\}$ dve takve pljosni, tada je njihovo rastojanje jednako a^{12}).

Neka je r radijus, a (x) centar lopte upisane u simpleksu $\mathcal{S}$. Forme $\{b^i\}$ reprezentuju svojstvene pljosni simpleksa $\mathcal{S}$, uz pretpostavku o normalizovanju, $\langle b^i ; b^i \rangle = \langle b^i ; b^i \rangle = 1$.

Tada, koristeći formulu za izračunavanje odstojanja d tačke (x) od ravni $\{u\}$

$$(9)\quad \mathrm{sh}\,\frac{d}{k} = \frac{x u}{\sqrt{-\langle x;x\rangle \cdot \langle u;u\rangle}} \; ; \quad x u > 0, \; \langle u;u\rangle > 0, \; \langle x;x\rangle < 0 \quad ,$$

dobijamo

$$(10)\quad \mathrm{sh}\,\frac{r}{k} = \frac{\langle x \, ; \, b^j\rangle}{\sqrt{-\langle x \, ; \, x\rangle}} = \frac{x^j}{\sqrt{-x^r a_{rs} x^s}} \quad , \text{ za svako } j=0,1,2,3 \; .$$

tj.

$$(11)\quad x^0 = x^1 = x^2 = x^3$$

i, konačno,

$$(12)\quad \mathrm{sh}\,\frac{r}{k} = \frac{1}{\sqrt{-\left(\sum_{r,s=0}^{3} a_{rs}\right)}} \quad .$$

Odavde dobijamo kriterijum egzistencije: matrica temena (a_{ij}), tj. inverzna matrica matrice (b^{ij}), mora imati negativnu sumu svojih elemenata.

Neka je R radijus, a (y) centar lopte opisane oko simpleksa $\mathcal{S}$. Vektori (a_i) reprezentuju svojstvena temena simpleksa $\mathcal{S}$, uz pretpostavku da su elementi matrice temena negativni, tj. $(\langle a_i; a_j \rangle) = (a_{ij})$, $a_{ij} < 0$, $(i,j = 0,1,2,3)$. Zbog $(a_{ij})^{-1} = (b^{rs})$, dobijamo

(13) $$\operatorname{ch}\frac{R}{k} = \frac{-\langle y\,;\,a_j\rangle}{\sqrt{\langle y;y\rangle \cdot \langle a_j;\,a_j\rangle}} = \frac{y_j}{\sqrt{(y_r b^{rs} y_s)\cdot(a_{jj})}}\ , \quad \text{za } j=0,1,2,3\ .$$

Dakle, $y_j = c.\ \sqrt{-a_{jj}}\ ,\ i$

(14) $$\operatorname{ch}\frac{R}{k} = \frac{1}{\sqrt{-\Big(\sum\limits_{r,s=0}^{n} \sqrt{-a_{rr}}\,.\,b^{rs}.\,\sqrt{-a_{ss}}\Big)}}\ .$$

Otuda dobijamo kriterijum egzistencije: normalizirajući matricu temena (a_{ij}), sa $a_{ii}=-1$ za svako i, njen inverz, matrica pljosni (b^{ij}) mora imati negativnu sumu svojih elemenata.

Schläfli-jeva diferencijalna forma

(15) $$d\,\omega^3\,(\mathcal{S}) = \frac{1}{2^{-}k}\sum_{r,s=0}^{3}\omega^1\,(\,S^{(rs)}\,)\,d\,\alpha^{(rs)}\quad ,$$

gde je $\mathcal{S}$ simpleks u prostoru H^3 konstantne sekcione krivine K, $\alpha^{(rs)}$ - mera diedarskog ugla r-te i s-te pljosni, koje se uzajamno seku po 1-dimenzionalnom podsimpleksu $S^{(rs)}$, $(0 \le r < s \le 3)$, primenjuje se kod izračunavanja zapremine simpleksa $\mathcal{S}$.

Primedba 1. Ima puno važnih simpleksa u prostoru H^3, koji imaju prirodne diedarske uglove oblika $\alpha^{(rs)} = \frac{\pi}{m\,(rs)}$, gde je $2 \le m(rs) \in \mathbb{N}$. Idealna temena su takođe dopuštena. Refleksije u odnosu na pljosni takvih simpleksa, prema 1(1), generišu diskretnu grupu transformacija, koju nazivamo Coxeter-ovom grupom, čiji je fundamentalni domen $\mathcal{F}$ sam taj simpleks $\mathcal{S}$. Njihovi Coxeter-ovi dijagrami su oblika $\underset{0}{\bullet}\overset{p}{—}\underset{1}{\bullet}\overset{q}{—}\underset{2}{\bullet}\overset{r}{—}\underset{3}{\bullet}$ i zapisa (p,q,r). Temena takvog dijagrama reprezentuju pljosni simpleksa $\mathcal{S}$. Ivica koja spaja temena r i s je označena sa $m(rs) \in \mathbb{N}$, ako je diedarski ugao $\alpha^{(rs)}$ simpleksa $\mathcal{S}$ jednak $\frac{\pi}{m(rs)}$. Ako je diedarski ugao jednak $\frac{\pi}{2}$, temena r i s nisu spojena ivicom dijagrama. Sa d_{ij} označavamo rastojanje između i-tog i j-tog temena simpleksa $\mathcal{S}$.

VI Prizmatična kompaktna hiperbolička prostorna forma, konačne zapremine, dobijena iz hiperboličke ravanske forme

1 Uvod

Primenom Poincaré-ovog geometrijskog metoda, konstruišemo grupu izometrija G, koja dejstvuje diskontinualno i slobodno na hiperboličkom 3-prostoru H^3. Ova grupa je zadata kompaktnim fundamentalnim Dirichlet-ovim poliedrom $\mathcal{D}$ i identifikacijama njegovih pljósni, pomoću izometrija, pri čemu su zadovoljeni izvesni uslovi. Pomenute izometrije generišu grupu G i dobijamo hiperboličku prostornu formu $\tilde{\tilde{\mathcal{D}}} = H^3 / G$. Kako grupa G sadrži samo izometrije koje čuvaju orijentaciju, mnogostrukost H^3 / G postaje orijentabilna kompaktna hiperbolička prostorna forma.

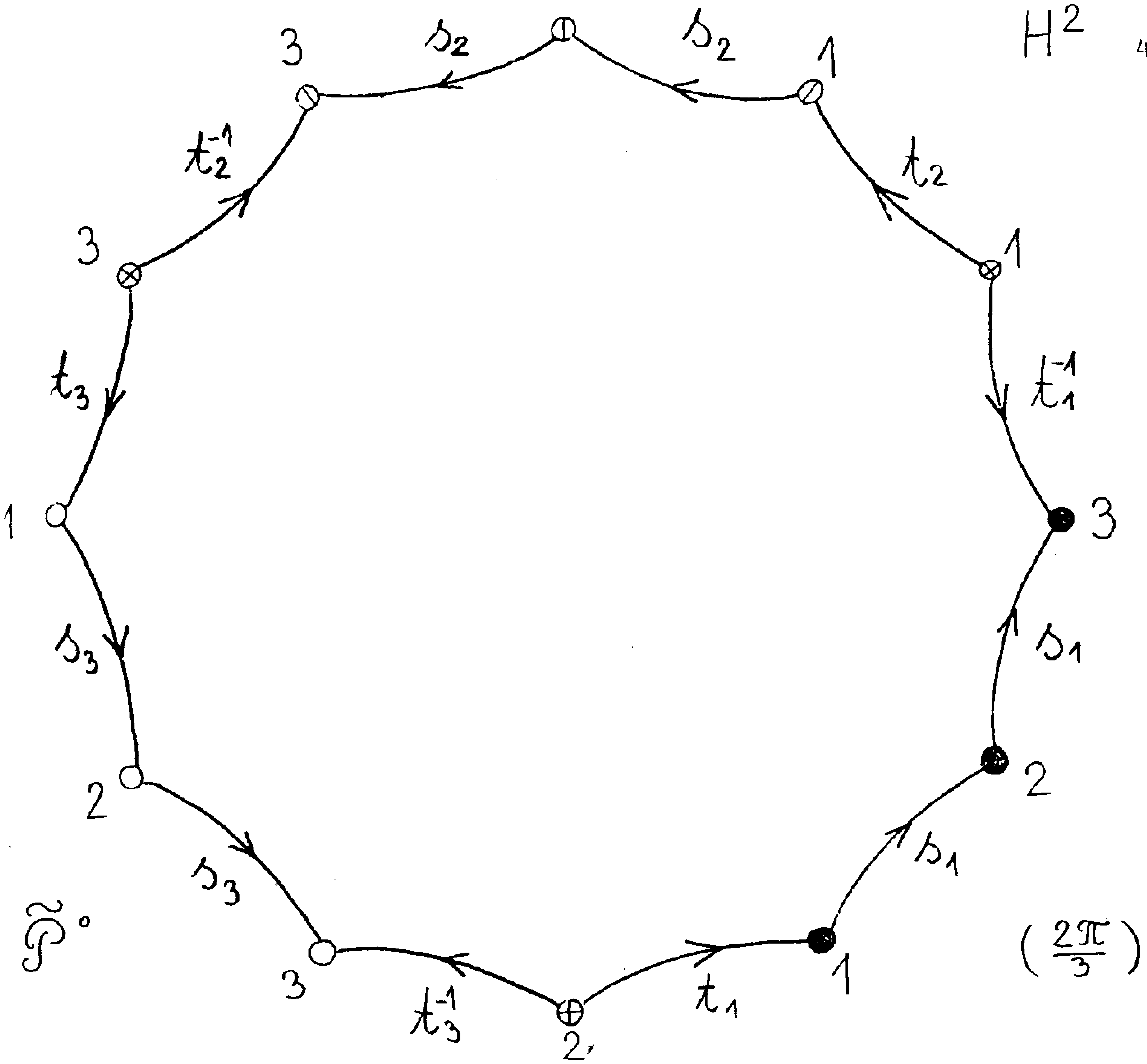
Konstrukcija ove prostorne forme se može dobiti polazeći od kompaktne neorijentabilne hiperboličke ravanske forme roda 3, birajući specijalni fundamentalni dvanaestougao.

Takođe koristimo egzistenciju nadgrupe C grupe G, generisane refleksijama, za opisivanje metričkih svojstava prostorne forme $\tilde{\tilde{\mathcal{D}}} = H^3 / G$.

2 Konstrukcija poliedra $\tilde{\tilde{\mathcal{D}}}$

Na sl. 7. je prikazan graf poliedra $\tilde{\tilde{\mathcal{D}}}$, zajedno sa njegovom slikom.

U ravni α_3 hiperboličkog 3-prostora H^3 konstruišemo pravilan dvanaestougao $\mathcal{P}^\circ$, sa uglovima mere $\frac{2\pi}{3}$ Označimo sa O centar tog dvanaestougla. Konstruišemo kongruentne Lambert-ove četvorougle ONA_1A_2 i ONA_1A_2 , simetrično i ortogonalno u odnosu na ravan α_3, koja sa-



s_1, s_2, s_3 — KLIZAJUĆE SIMETRIJE

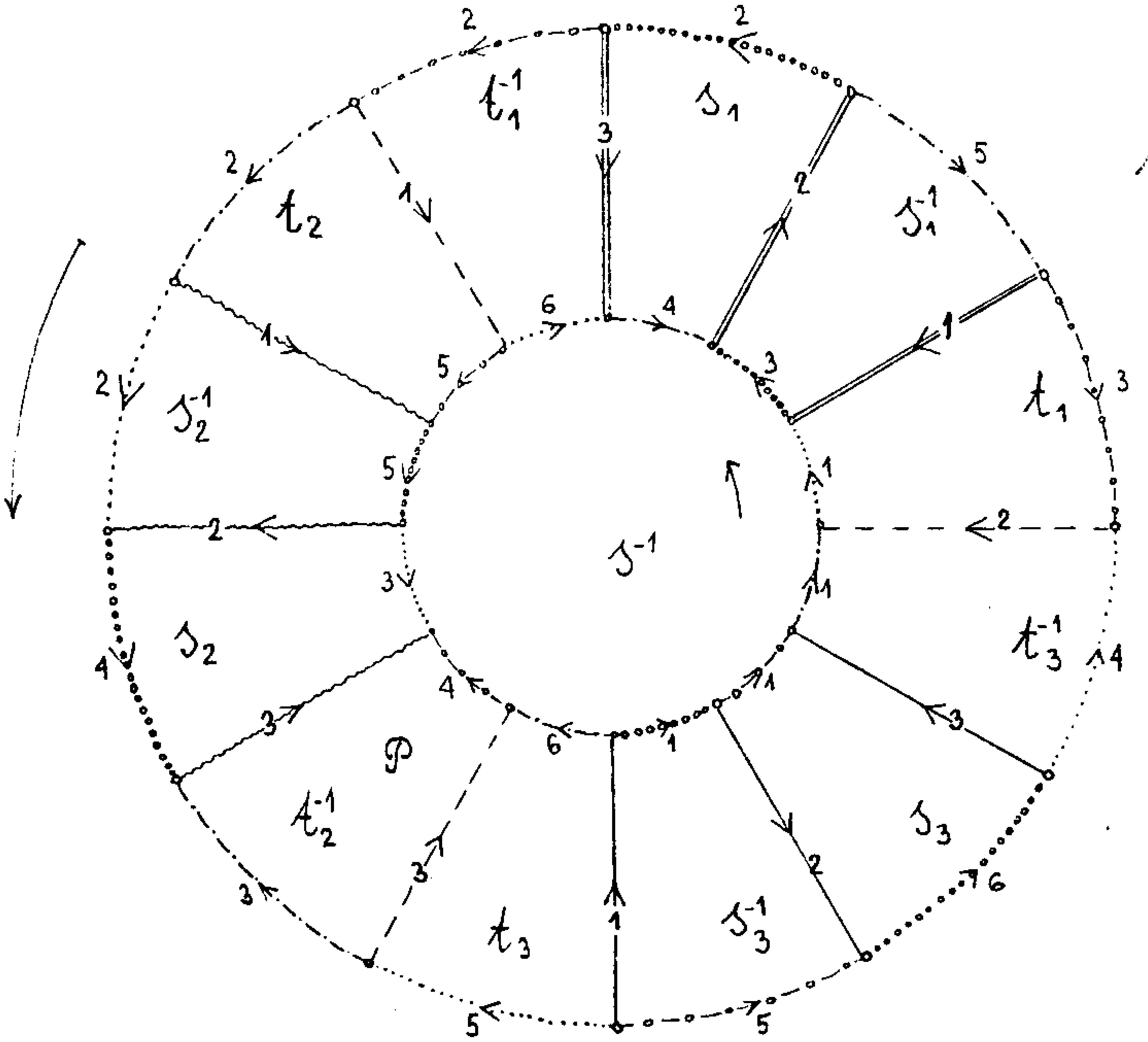
t_1, t_2, t_3 — TRANSLACIJE

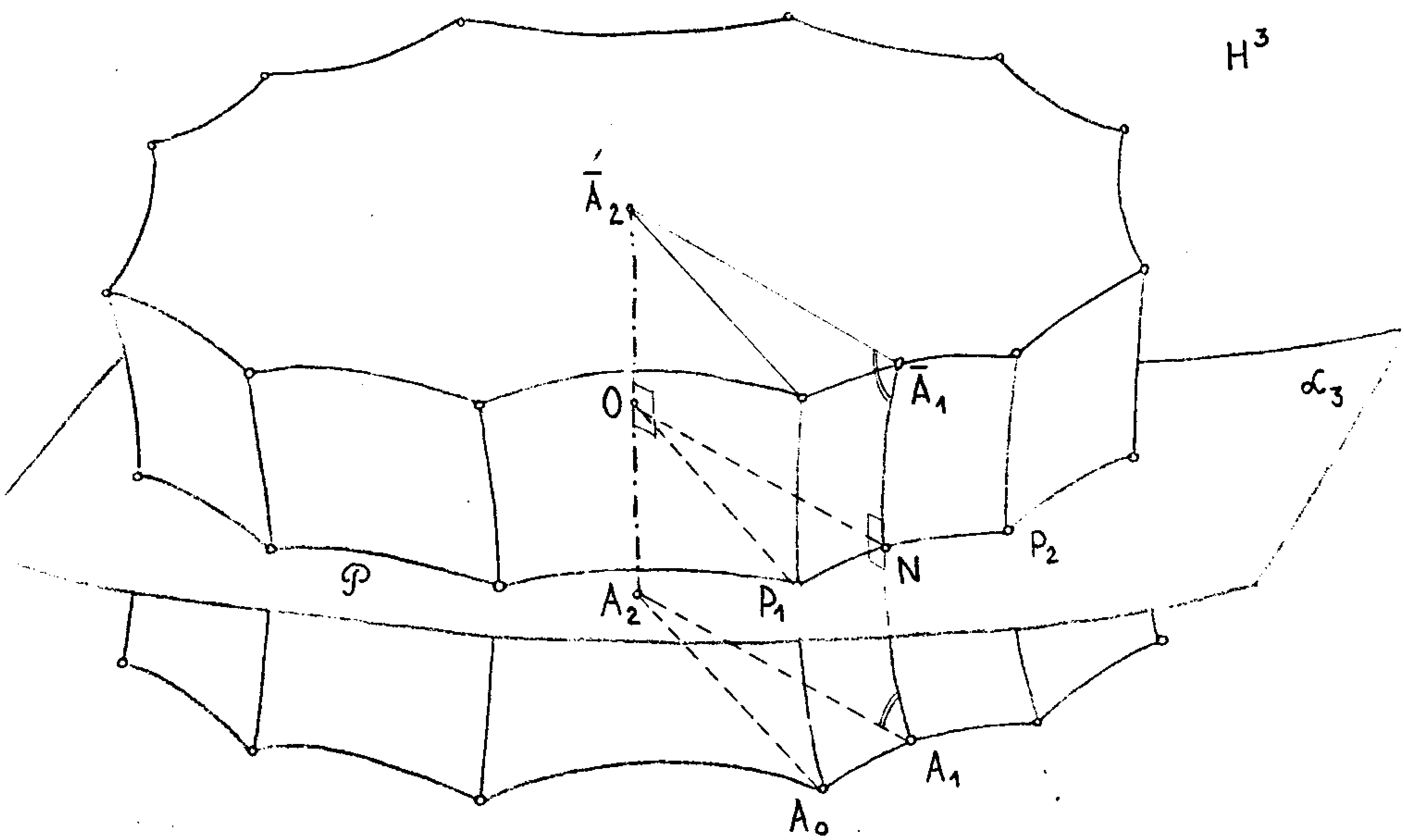
●	$s_1\ s_1\ t_1$	, $\left(3 \cdot \frac{2\pi}{3} = 2\pi\right)$
⌽	$s_2\ s_2\ t_2$	, $\left(3 \cdot \frac{2\pi}{3} = 2\pi\right)$
○	$s_3\ s_3\ t_3$	, $\left(3 \cdot \frac{2\pi}{3} = 2\pi\right)$
○	$t_1\ t_3\ t_2$	, $\left(3 \cdot \frac{2\pi}{3} = 2\pi\right)$

$$G^\circ = \{s_1, s_2, s_3, t_1, t_2, t_3 - s_1^2 t_1 = s_2^2 t_2 = s_3^2 t_3 = t_1 t_3 t_2 = 1\}$$

$$\tilde{\mathcal{P}}^\circ = H^3 / G^\circ$$

SL. 6.


S
t_1^{-1}
s_1
s_1^{-1}
t_2
t_1
s_2^{-1}
s^{-1}
t_3^{-1}
s_2
P
t_2^{-1}
s_3
t_3
s_3^{-1}


H^3
$\bar{A}_2'$
$\bar{A}_1$
O
α_3
N
P_2
P
A_2
P_1
A_1
A_0

SL. 7.

drži dvanaestougao $\mathcal{P}°$. Pretpostavljamo da su uglovi, različiti od pravih uglova, mere

$$(1) \qquad \sphericalangle \bar{A}_2\bar{A}_1N = \frac{\pi}{3} = \sphericalangle A_2A_1N \quad .$$

Zbog simetrije je $O\bar{A}_2 = OA_2$ i $\bar{A}_2\bar{A}_1 = A_2A_1$.

Konstruišemo pravilne dvanaestougle:

dvanaestougao $f_{s^{-1}}$, kao donju osnovu, sa središtem A_2 i poluprečnikom A_2A_1 upisanog kruga, ortogonalnu na pravoj $A_2\bar{A}_2$;

dvanaestougao f_s , kao gornju osnovu, sa središtem $\bar{A}_2$ i poluprečnikom $\bar{A}_2\bar{A}_1$ upisanog kruga, ortogonalnu na pravoj $A_2\bar{A}_2$.

Zatim konstruišemo bočne pljosni, koje su ortogonalne na ravni α_3 dvanaestougla $\mathcal{P}°$, tako da sve te pljosni čine sa pljosnima obe osnove uglove mere $\frac{\pi}{3}$.

Dobili smo poliedar $\mathcal{D}$, sa centrom O. Takav poliedar nazivamo i lećem.

Metrički podaci o poliedru $\mathcal{D}$ biće prezentirani u tački 3.

Identifikujemo pljosni poliedra $\mathcal{D}$. Rezultat je simbolički prikazan na Schlegel-ovom dijagramu poliedra $\tilde{\mathcal{D}}$, gde smo izostavili "f"-ove u označavanju pljosni.

Donju osnovu $f_{s^{-1}}$ poliedra $\mathcal{D}$ identifikujemo sa gornjom osnovom f_s tog poliedra, pomoću zavojnog kretanja s , sa uglom zavojne rotacije $\frac{5\pi}{6}$.

Parove bočnih pljosni $f_{s_i^{-1}}$ i f_{s_i} (i=1,2,3) identifikujemo pomoću zavojnog kretanja s_i , sa uglom zavojne rotacije π .

Parove bočnih pljosni $f_{t_i^{-1}}$ i f_{t_i} (i=1,2,3) identifikujemo pomoću translacija t_i .

Gore navedene identifikacije bočnih pljosni indukovane su identifikacijama stranica dvanaestougla $\mathcal{P}°$ u središnjoj ravni α_3, i obratno. Pri tome s_i dejstvuju kao klizajuće simetrije , a t_i kao translacije u ravni α_3. Takva razmatranja su nas motivisala da konstruišemo grupu G, kao što je pomenuto u uvodu.

Navodimo klase ekvivalencije ivica poliedra $\tilde{\mathcal{D}}$, indukovane navedenim identifikacijama, dajući za svaku klasu odgovarajuću cikličku transformaciju, u saglasnosti sa II (6). Ujedno utvrđujemo da je ispunjen uslov II (5).

Ima ukupno 12 bočnih ivica, koje su podeljene u 4 klase ekvivalencije:

(2) $s_1 s_1 t_1$

(3) $s_2 s_2 t_2$

(4) $s_3 s_3 t_3$

(5) $t_1 t_3 t_2$.

Svaki od uglova je mere $\frac{2\pi}{3}$, te je $3.\frac{2\pi}{3} = 2\pi$.

Ima ukupno 24 osnovne ivice, koje su podeljene u 4 klase ekvivalencije:

(6) $s s_2 s t_3 s^{-1} t_1$

(7) $s t_2^{-1} s^{-1} s_1^{-1} s^{-1} t_3^{-1}$

(8) $s t_1 s^{-1} t_2 s s_3$

(9) $s s_1^{-1} s s_2^{-1} s s_3^{-1}$.

Svaki od uglova je mere $\frac{\pi}{3}$, te je $6.\frac{\pi}{3} = 2\pi$.

Primenom Poincaré-ove teoreme, zaključujemo da je $\mathcal{D}$ fundamentalni poliedar grupe G, čija je prezentacija

(10) $$G = (s, s_1, s_2, s_3, t_1, t_2, t_3 - s_1^2 t_1 = s_2^2 t_2 = s_3^2 t_3 = t_1 t_3 t_2 = s s_2 s t_3 s^{-1} t_1 = \\ = s t_2^{-1} s^{-1} s_1^{-1} s^{-1} t_3^{-1} = s t_1 s^{-1} t_2 s s_3 = s s_1^{-1} s s_2^{-1} s s_3^{-1} = 1) .$$

Formirajući orbitu O^G , gde je O centar poliedra $\mathcal{D}$, dobijamo, pomoću simetrije, da je $\mathcal{D} = \mathcal{D}_0$ Dirichlet-ov poledar.

Primetimo da, pomoću tri generatora s, s_1 i s_2 , grupa G ima minimalnu prezentaciju

(11) $$G = (s, s_1, s_2 - s s_1^{-2} s^{-1} s_2^{-2} s^2 s_1^{-1} s s_2^{-1} s = s s_2^2 s^{-1} s_1^{-2} s s_2^{-1} s^2 s_1^{-1} s s_2^{-1} s = \\ = s s_2^2 s^{-1} s_1 s^{-2} s_2 s^{-1} s_1 s^{-2} s_1^{-2} = s_2^2 s s_1^{-1} s s_2^{-1} s^2 s_1^{-1} s s_2^{-1} s s_1^2 = 1) .$$

Efekat dodavanja novih relacija

(12) $$s s_1 s^{-1} s_1^{-1} = s s_2 s^{-1} s_2^{-1} = s_1 s_2 s_1^{-1} s_2^{-1} = 1$$

prezentaciji (11) grupe G je nova grupa, faktor-grupa grupe G, tzv. komutatorska kvocijentna grupa grupe G . Ova grupa, dogovorno označena sa $G / [G,G]$, je najveća Abel-ova faktor-grupa grupe G. Prezentaciju grupe $G / [G,G]$ možemo uprostiti, tako da dobijamo

(13) $$G / [G,G] = (s,s_1,s_2 - s^6=1, s_1^3=s_2^3=s^{-1}) .$$

Uvođenjem novog generatora $s_0=s_2s_1^{-1}$, dobijamo prezentaciju

(14) $$G / [G,G] = (s_0,s_1 - s_0^3=s_1^{18}=s_1s_0s_1^{-1}s_0^{-1}=1).$$

Prema tome, Abel-ova grupa $G / [G,G]$ je direktan proizvod $C_{18}\times C_3$ cikličkih grupa C_{18} i C_3 , tj. grupa

(15) $$G / [G,G] = C_{18}\times C_3$$

je upravo prva homološka grupa mnogostrukosti $\tilde{\mathcal{D}} = H^3 / G$.

3. Metrička konstrukcija poliedra $\mathcal{D}$ na vektorskom modelu hiperboličkog prostora H^3

Uvodimo hiperboličku projektivnu metriku u projektivnom prostoru P^3, zadavanjem bilinearne forme

$$\langle\ ;\ \rangle : \quad V_4^*\times V_4^* \longrightarrow \mathbb{R} \quad , \langle b^i u_i ; b^j v_j\rangle = u_i b^{ij} v_j \quad ,$$

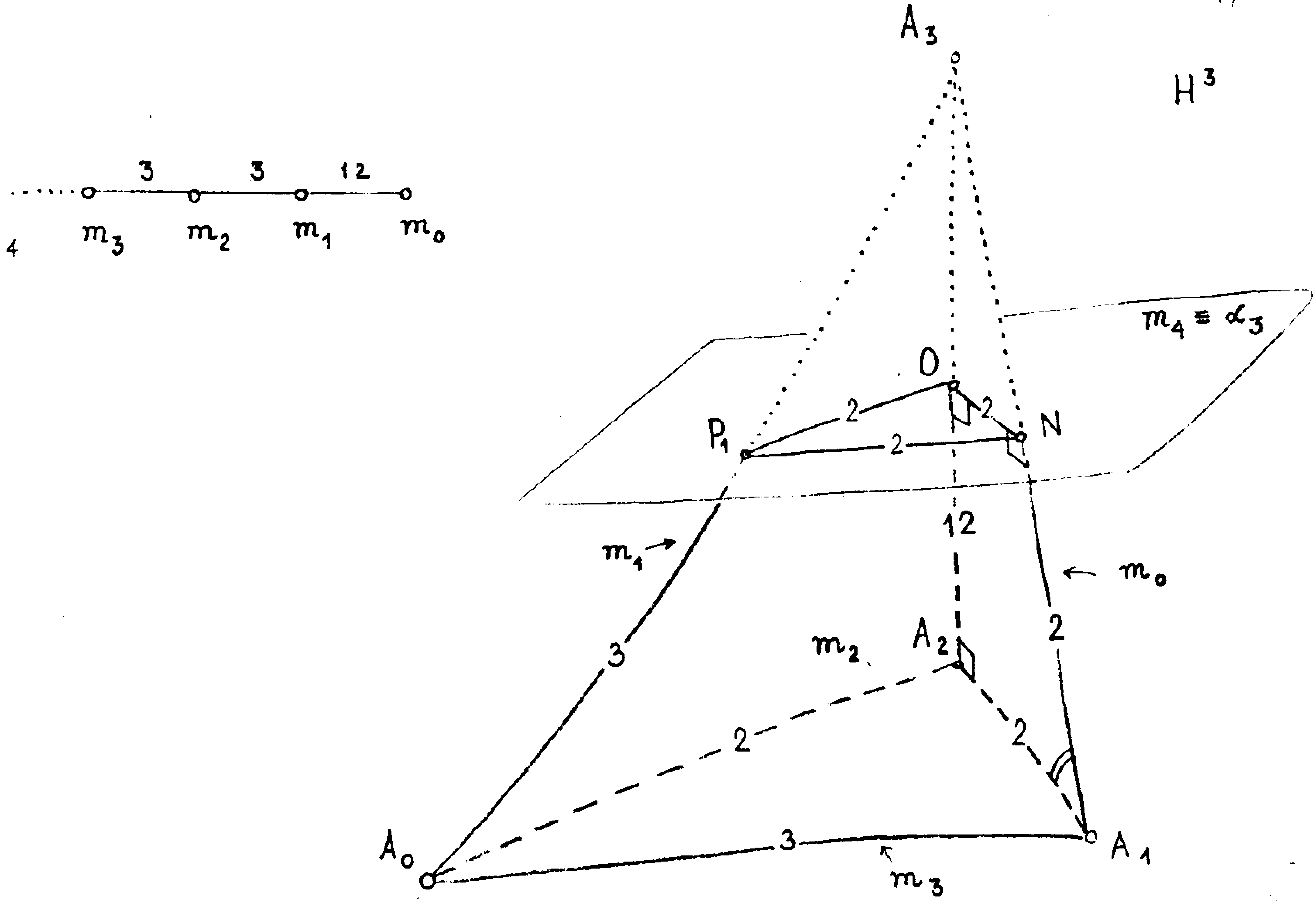
pomoću Schläfli-jeve matrice

(1) $$(\langle b^i ; b^j\rangle)=(b^{ij})=\begin{pmatrix} 1 & -\cos\frac{\pi}{12} & 0 & 0 \\ -\cos\frac{\pi}{12} & 1 & -\cos\frac{\pi}{3} & 0 \\ 0 & -\cos\frac{\pi}{3} & 1 & -\cos\frac{\pi}{3} \\ 0 & 0 & -\cos\frac{\pi}{3} & 1 \end{pmatrix} ,$$

gde baza $\{b^i\}$ prostora V_4^* reprezentuje neke ravni m_i , koje su u vezi sa poliedrom $\mathcal{D}$ ($i=0,1,2,3$). Ravni $m_0=A_1A_2ON$ i $m_1=A_0A_2OP_1$ su simetrijske ravni poliedra $\mathcal{D}$, sl. 8 , $m_3=A_0A_1A_2$ je ravan osnove a $m_2=A_0A_1NP_1$ je bočna ravan poliedra $\mathcal{D}$.

Jednostavno izračunavamo determinantu

(2) $$B = \det (b^{ij}) = \frac{2-3\sqrt{3}}{16} < 0 .$$



PODATAK	ZNAK	PRIMENJENA FORMULA	REZULTAT
RASTOJANJE $OA_2 = O\bar{A}_2$	d	$\mathrm{ch}\,\frac{d}{k} = \frac{\langle a_3 ; b^3 \rangle}{\sqrt{\langle a_3 ; a_3 \rangle \langle b^3 ; b^3 \rangle}} = \frac{1}{\sqrt{a_{33}}}$	$d = k \cdot 0{,}4246029$
RADIJUS ON	ρ	$\mathrm{sh}\,\frac{\rho}{k} = \frac{-b^{23}}{\sqrt{\frac{1}{a_{33}} - 1}}$	$\rho = k \cdot 1{,}276687$
RADIJUS A_2A_1	r	$\mathrm{ch}\,\frac{r}{k} = \frac{-a_{12}}{\sqrt{a_{11} \cdot a_{22}}}$	$r = k \cdot 1{,}4409526$

TABELA 1

SL. 8.

Od velike je važnosti inverzna matrica (a_{ij}) matrice (b^{ij}).
Jednakost $b^{ij}a_{jk}=\delta^i_k$ važi akko je

$$a_{00}=\frac{1}{B}\,(1-2\cos^2\frac{\pi}{3})<0$$
$$a_{01}=a_{10}=\frac{1}{B}\cdot\frac{3}{4}\cdot\cos\frac{\pi}{12}<0$$
$$a_{02}=a_{20}=\frac{1}{B}\cdot\cos\frac{\pi}{12}\cdot\cos\frac{\pi}{3}<0$$
$$a_{03}=a_{30}=\frac{1}{B}\cdot\cos\frac{\pi}{12}\cdot\cos^2\frac{\pi}{3}<0$$
$$a_{11}=\frac{1}{B}\,(1-\cos^2\frac{\pi}{3})<0 \qquad (3)$$
$$a_{12}=a_{21}=\frac{1}{B}\cdot\cos\frac{\pi}{3}<0$$
$$a_{13}=a_{31}=\frac{1}{B}\cdot\cos^2\frac{\pi}{3}<0$$
$$a_{22}=\frac{1}{B}\,(1-\cos^2\frac{\pi}{12})<0$$
$$a_{23}=a_{32}=\frac{1}{B}\,(\cos\frac{\pi}{3}-\cos\frac{\pi}{3}\cdot\cos^2\frac{\pi}{12})<0$$
$$a_{33}=\frac{1}{B}\,(\frac{3}{4}-\cos^2\frac{\pi}{12})>0\ .$$

Uvodimo dualnu bazu (a_j) prostora V^4, definisanu sa $a_j\mathscr{b}^i=\delta^i_j$.
Geometrijski, vektori a_j reprezentuju temena simpleksa čije su bočne pljosni opisane formama $\mathscr{b}^i$. Indukovana bilinearna forma

$$\langle\ ;\ \rangle:\quad V^4\times V^4\longrightarrow\mathbb{R}\ ,\quad \langle x^ia_i;\,y^ja_j\rangle = x^ia_{ij}y^j$$

definisana je matricom ,

$$(\langle a_i;\,a_j\rangle)=(\,a_{ij}\,) \qquad (4)$$

u (3).

Iz niza vrednosti minor-determinanata

$$b^{33}=1>0$$
$$\begin{vmatrix} b^{22} & b^{23}\\ b^{32} & b^{33}\end{vmatrix}=1-\cos\frac{\pi}{3}>0$$
$$\begin{vmatrix} b^{11} & b^{12} & b^{13}\\ b^{21} & b^{22} & b^{23}\\ b^{31} & b^{32} & b^{33}\end{vmatrix}=1-2\cos^2\frac{\pi}{3}>0 \qquad (5)$$
$$B<0$$

vidimo da je signatura bilinearne forme $\langle\ ;\ \rangle$ (+,+,+,-), te je projektivna metrika prostora $P^3\ (V^4,\ V_4^*)$ zaista hiperbolička.

Ravni m_i , kojima je određen poliedar $\mathcal{D}$, reprezentovan formama $\boldsymbol{b}^i$, su obične ravni hiperboličkog prostora H^3, modeliranog u prostoru P^3 $(V^4; V_4^*)$. Iz relacija (3) ovog dela sledi da su temena $A_0(a_0)$ $A_1(a_1)$ i $A_2(a_2)$ simpleksa određenog vektorima a_0, a_1 i a_2 , respektivno, obične tačke, što nije slučaj sa tačkom $A_3(a_3)$, određenom vektorom a_3 , sl. 8 . Polarna ravan $\{\alpha_3\}$ reprezentuje običnu ravan α_3, središnju ravan poliedra $\mathcal{D}$. To znači da je u pitanju jedanput zarubljeni simpleks $\mathcal{S}$, sa pljosnima $m_i\{\boldsymbol{b}^i\}$ $(i=0,1,2,3)$ i zarubljujućom pljosni $\alpha_3\{\alpha_3\}$.

Osobine simpleksa $\mathcal{S}$ korektno su opisane Coxeter-ovim dijagramom , sl. 8 . Zaista, što se uglova tiče, to je jasno iz relacije (1) i definicije ravni $\alpha_3\{\alpha_3\}$. Za izračunavanje rastojanja $d(m_3, \alpha_3)$ možemo primeniti uopštenje formule VI(3) za (3), tj.

$$(6)\quad \mathrm{ch}\,\frac{d}{k} = \frac{\langle \alpha_3 ; \boldsymbol{b}^3 \rangle}{\sqrt{\langle \alpha_3 ; \alpha_3 \rangle \cdot \langle \boldsymbol{b}^3 ; \boldsymbol{b}^3 \rangle}} = \frac{1}{\sqrt{a_{33} \cdot 1}} = \frac{1}{\sqrt{a_{33}}} > 1 \ .$$

Primenom relacija (3), dobijamo $d = OA_2 = O\bar{A}_2 = 0{,}4246029\ k$. Ostali podaci o zarubljenom simpleksu $\mathcal{S}$ ili o poliedru $\mathcal{D}$ takođe se mogu izračunati na ovaj način (videti tabelu 1.).

Coxeter-ova grupa C, generisana refleksijama u odnosu na ravni m_0, m_1, m_2, m_3, α_3 , koje sadrže pljosni zarubljenog simpleksa $\mathcal{S}$, je nadgrupa naše grupe G, konačnog indeksa 48, jer je poliedar $\mathcal{D}$ unija 48 kongruentnih kopija simpleksa $\mathcal{S}$. Otuda sledi da se generatori grupe G mogu izraziti i pomoću matrica u odnosu na baze $\{\boldsymbol{b}^i\}$ i (a_i).

VII Bipiramidalne nekompaktne hiperboličke prostorne forme, konačne zapremine, dobijene korišćenjem euklidskih ravanskih formi

1 Uvod

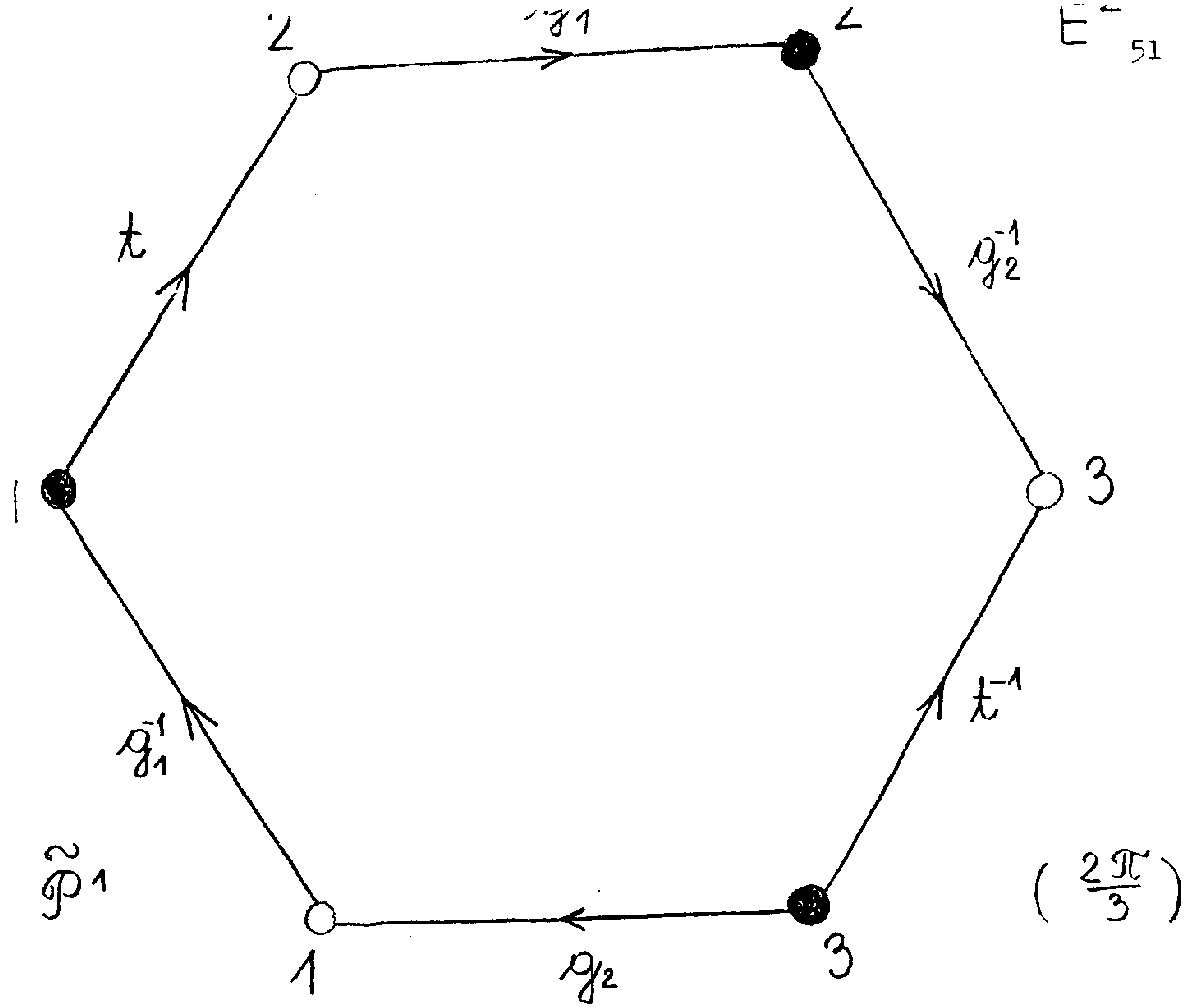
Primenom Poincaré-ovog geometrijskog metoda , konstruisaćemo grupe izometrija G_i (i=1,2,3,4,5,6), koje dejstvuju diskontinualno i slobodno na hiperboličkom 3-prostoru H^3. Ove grupe su zadate nekompaktnim fundamentalnim Dirichlet-ovim poliedrima $\mathcal{D}_i$ i identifikacijama njihovih pljosni pomoću izometrija, pri čemu su zadovoljeni određeni uslovi. Te izometrije generišu grupe G_i i dobijamo hiperboličke prostorne forme $\tilde{\mathcal{D}}_i = H^3 / G_i$. Pošto grupe G_i sadrže i izometrije koje menjaju orijentaciju i sva temena poliedra $\mathcal{D}_i$ pripadaju apsoluti, mnogostrukosti $\tilde{\mathcal{D}}_i = H^3 / G_i$ su neorijentabilne nekompaktne hiperboličke prostorne forme.

Konstrukcije su izvedene korišćenjem euklidskih kompaktnih neorijentabilnih ravanskih formi roda 2, čiji su fundamentalni šestouglovi specijalno odabrani sl. 9, 10 .

Takođe koristimo egzistenciju Coxeter-ovih nadgrupa C_i grupa G_i , generisanih refleksijama, za dobijanje metričkih podataka formi $\tilde{\mathcal{D}}_i = H^3 / G_i$.

2 Konstrukcija poliedra $\tilde{\mathcal{D}}_i$

U hiperboličkoj ravni H^2 konstruišemo pravougli trougao $A_0A_1A_2$, sa pravim uglom kod temena A_1 , oštrim uglom $A_1A_2A_0 = \frac{\pi}{6}$ i temenom A_0 na apsoluti. Zatim, pomoću refleksija u odnosu na prave A_1A_2 i A_0A_2 , konstruišemo pravilni hiperbolički šestougao $\mathcal{P}^j$, čija su sva



g_1, g_2 – KLIZAJUĆE SIMETRIJE

t – TRANSLACIJA

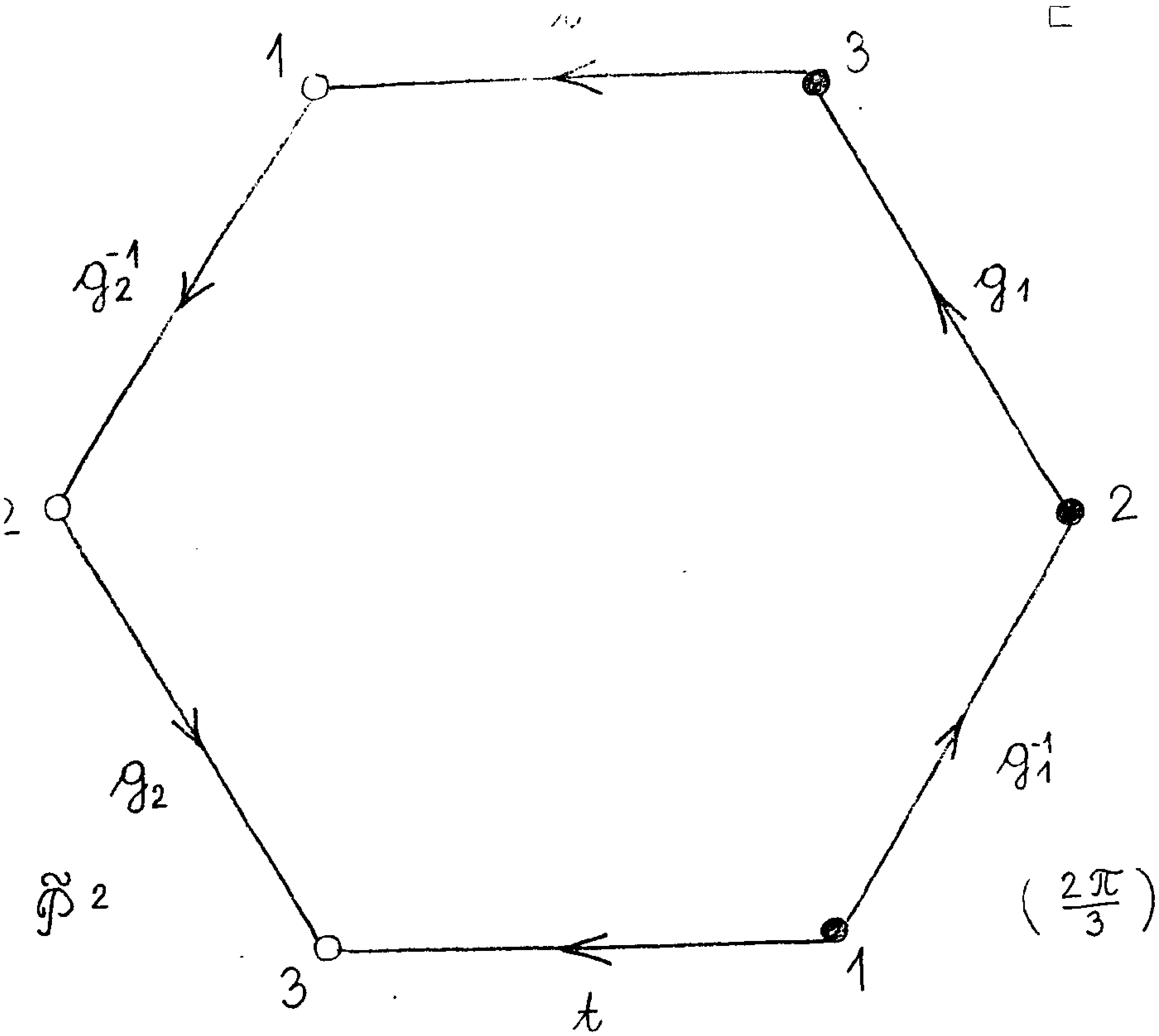
● $g_1 g_2 t$, $\left(3 \cdot \frac{2\pi}{3} = 2\pi\right)$

○ $g_1 t^{-1} g_2$, $\left(3 \cdot \frac{2\pi}{3} = 2\pi\right)$

$$G^1 = \{\, g_1, g_2, t \ - \ g_1 g_2 t = g_1 t^{-1} g_2 = 1 \,\}$$

$$\tilde{\mathcal{P}}^1 = E^2 / G^1$$

SL. 9 .



g_1, g_2 - KLIZAJUĆE SIMETRIJE
t - TRANSLACIJA

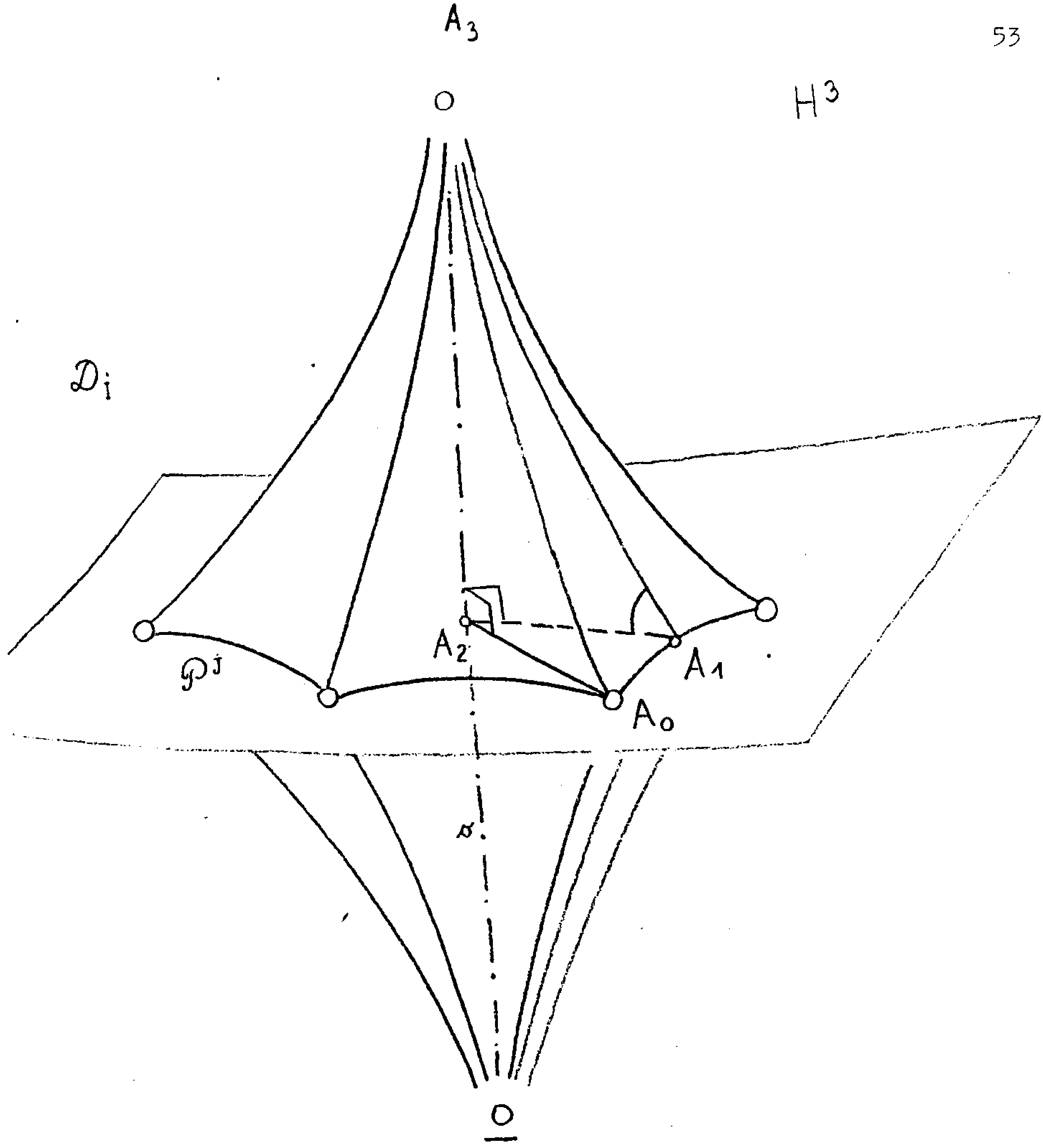
● $g_1\, g_1\, t$, $\left(3 \cdot \frac{2\pi}{3} = 2\pi\right)$

○ $g_2\, g_2\, t^{-1}$, $\left(3 \cdot \frac{2\pi}{3} = 2\pi\right)$

$$G^2 = \{ g_1, g_2, t - g_1^2\, t = g_2^2\, t^{-1} = 1 \}$$

$$\tilde{\mathcal{P}}^2 = E^2 / G^2$$

SL. 10.



SL. 11.

temena na apsoluti. Pri tom je $\Pi(A_1A_2)=\frac{\pi}{6}$. U ravni, određenoj pravom A_1A_2 i pravom σ, upravnoj u tački A_2 na ravni mnogougla $\mathcal{P}^j$, konstruišemo prave A_1A_3 i $A_1\bar{A}_3$, paralelne pravoj σ, sa uglom paralelnosti $\Pi(A_1A_2)=\frac{\pi}{6}$. Dobili smo poliedar $\mathcal{D}_i$ -pravilnu šestougaonu hiperboličku bipiramidu, čija su sva temena na apsoluti, čije bočne pljosni obrazuju sa ravni osnove uglove mere $\frac{\pi}{6}$ i čije bočne susedne pljosni, koje se nalaze sa iste strane ravni osnove, obrazuju uglove mere $\frac{2\pi}{3}$. $\mathcal{D}_i$ je traženi nekompaktni fundamentalni Dirichlet-ov poliedar.

Kako se temena tog poliedra nalaze na apsoluti, to sve ivice poliedra $\mathcal{D}_i$, koje se sustiču u jednom takvom temenu, pripadaju paraboličkom pramenu. Orisfera, sa središtem u tom temenu, je ortogonalna na tom pramenu i seče poliedar $\mathcal{D}_i$ po orisferičkom mnogouglu. Orisfera je izometrična euklidskoj ravni E^2, te su pomenuti mnogougli, u malom, euklidski. To znači da su uglovi tog mnogougla podudarni uglovima diedara pljosni poliedra $\mathcal{D}_i$, čiji se presečne prave sustiču u središtu uočene orisfere, tzv. paraboličkom temenu poliedra $\mathcal{D}_i$.

U tom smislu, vrhovima bipiramide $\mathcal{D}_i$ su pridruženi pravilni šestougli, sa uglom mere $\frac{2\pi}{3}$, a temenima njene osnove pridruženi su rombovi, čiji su uglovi mere $\frac{\pi}{3}$ i $\frac{2\pi}{3}$.

Metrički podaci o poliedru $\mathcal{D}_i$ biće prezentirani u tački 3.

Identifikujemo pljosni poliedra $\mathcal{D}_i$. Rezultat je simbolički prikazan na Schlegel-ovom dijagramu poliedra $\tilde{\mathcal{D}}_i$, gde smo izostavili "f"-ove u označavanju pljosni.

Primedba 1 (cusp -uslov)[26] Poliedar $\tilde{\mathcal{D}}_i$ je kompletan akko je svaka od transformacija temena na apsoluti parabolička.

i – 1 $\qquad \tilde{\mathcal{D}}_1 = H^3 / G_1$ (sl. 12.)

Parovi bočnih pljosni $f_{g_i^{-1}}$ i f_{g_i} $(i=1,2,3,4)$ su identifikovani klizajućim simetrijama g_i.

Parovi bočnih pljosni $f_{t_i^{-1}}$ i f_{t_i} $(i=1,2)$ su identifikovani translacijama t_i.

Identifikacije bočnih pljosni su indukovane identifikacijama stranica pravilnog šestougla $\mathcal{P}^1$ u euklidskoj ravni E^2, gde su g_i $(i=1,2)$ klizajuće simetrije, a t je translacija euklidske ravni E^2. Ova činjenica poslužila je kao motiv za konstruisanje grupe G_1, sl. 12.

Obrazujemo klase ekvivalencije ivica poliedra $\mathcal{D}_1$, indukovane navedenim identifikacijama, dajući za svaku od klasa cikličku transformaciju, u saglasnosti sa relacijom II(6). Istovremeno ustanovljavamo da je ispunjen uslov II (5).

Poliedar $\tilde{\mathcal{D}}_1$ ima 12 bočnih ivica, grupisanih u 4 klase, po tri ivice u svakoj klasi:

(1) $\quad t_1 g_1^{-1} g_2^{-1}$

(2) $\quad t_1 g_1 g_2$

(3) $\quad t_2 g_3^{-1} g_4$

(4) $\quad t_2 g_3 g_4^{-1}$

svaki od pripadnih uglova-diedara je mere $\frac{2\pi}{3}$, te je $3 \cdot \frac{2\pi}{3} = 2\pi$;

ima 6 osnovnih ivica, koje pripadaju istoj klasi:

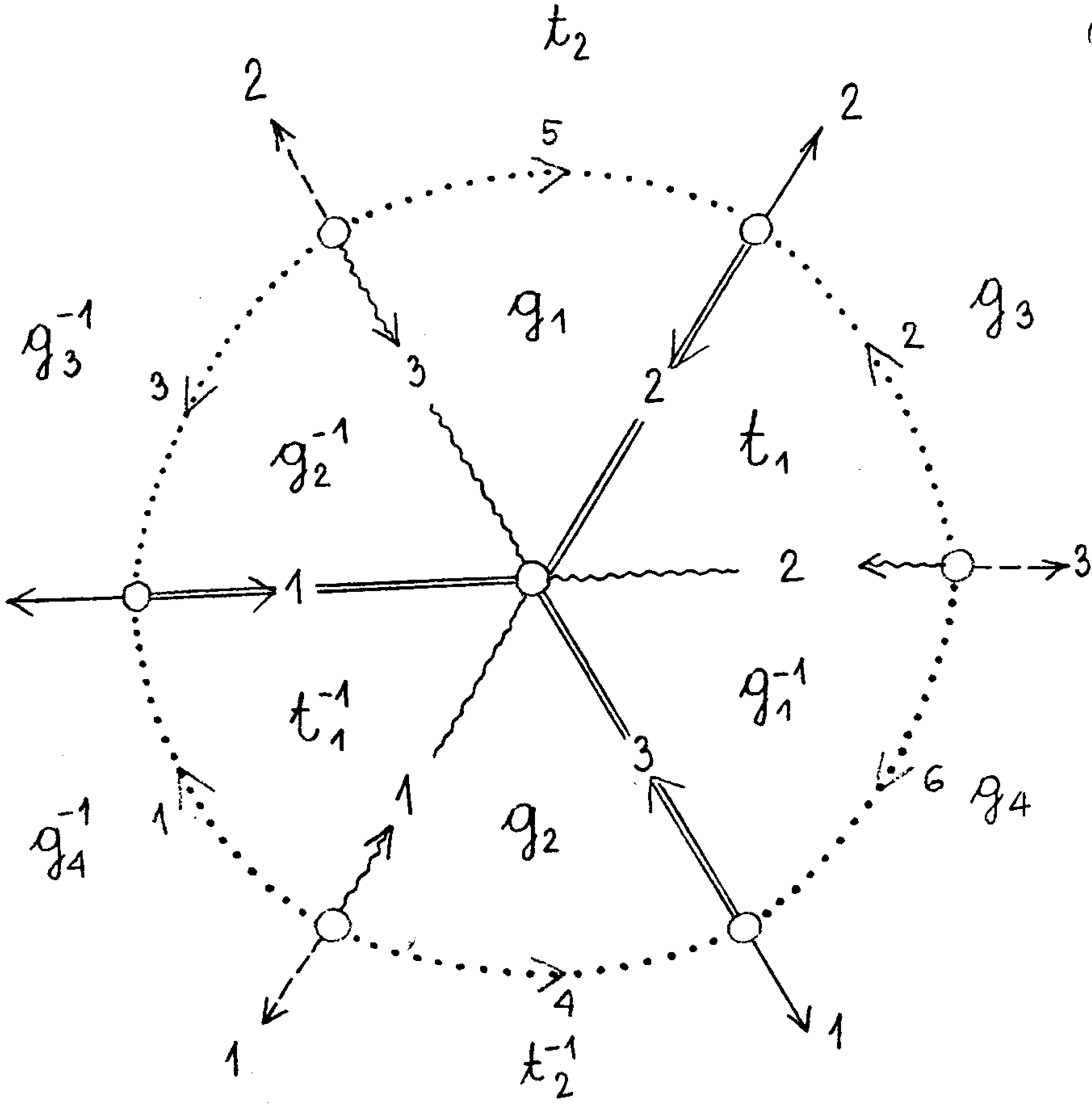
(5) $\quad t_1 g_3^{-1} g_2 t_2 g_1^{-1} g_4^{-1}$

svaki od pripadnih uglova-diedara je mere $\frac{\pi}{3}$, te je $6 \cdot \frac{\pi}{3} = 2\pi$.

Zaključujemo da je $\mathcal{D}_1$ fundamentalni poliedar grupe G_1, čija je prezentacija

$$(6) \quad G_1 = (g_1, g_2, g_3, g_4, t_1, t_2 - t_1 g_1^{-1} g_2^{-1} = t_1 g_1 g_2 = t_2 g_3^{-1} g_4 = t_2 g_3 g_4^{-1} = $$
$$= t_1 g_3^{-1} g_2 t_2 g_1^{-1} g_4^{-1} = 1\,) \,.$$

Formirajući orbitu O^{G_1}, gde je O centar poliedra $\mathcal{D}_1$, dobijamo,



$$\tilde{\mathcal{D}}_1 = H^3 / G_1$$

SL. 12.

pomoću simetrije, da je $\mathcal{D}_1 = \mathcal{D}_{1_0}$ Dirichlet-ov poliedar.

$i = 2$ $$\tilde{\mathcal{D}}_2 = H^3 / G_2 \qquad \text{(sl. 13.)}$$

Parovi bočnih pljosni $f_{g_i^{-1}}$ i f_{g_i} (i 1,2,3,4) su identifikovani klizajućim simetrijama g_i.

Parovi bočnih pljosni $f_{t_i^{-1}}$ i f_{t_i} (i=1,2) su identifikovani translacijama t_i .

Identifikacije bočnih pljosni su indukovane identifikacijama strana pravilnih šestouglova $\mathcal{P}^1$ i $\mathcal{P}^2$ u euklidskoj ravni E^2 , gde su g_i (i=1,2) klizajuće simetrije , a t je translacija euklidske ravni E^2. Ova činjenica je poslužila kao motiv za konstruisanje grupe G_2 .

Obrazujemo klase ekvivalencije ivica poliedra $\mathcal{D}_2$, indukovane navedenim identifikacijama, dajući za svaku od klasa cikličku transformaciju, u saglasnosti sa relacijom II (6). Istovremeno, ustanovljavamo da je ispunjen uslov II (5).

Poliedar $\tilde{\mathcal{D}}_2$ ima 12 bočnih ivica, grupisanih u 4 klase, po 3 u svakoj klasi :

(1) $t_1 g_1 g_2$

(2) $t_1 g_1^{-1} g_2^{-1}$

(3) $g_3 g_3 t_2$

(4) $g_4 g_4 t_2^{-1}$

svaki od pripadnih uglova-diedara je mere $\frac{2\pi}{3}$, te je $3 \cdot \frac{2\pi}{3} = 2\pi$;

ima 6 osnovnih ivica, koje pripadaju istoj klasi :

(5) $t_1 g_3^{-1} g_1 t_2 g_2^{-1} g_4$

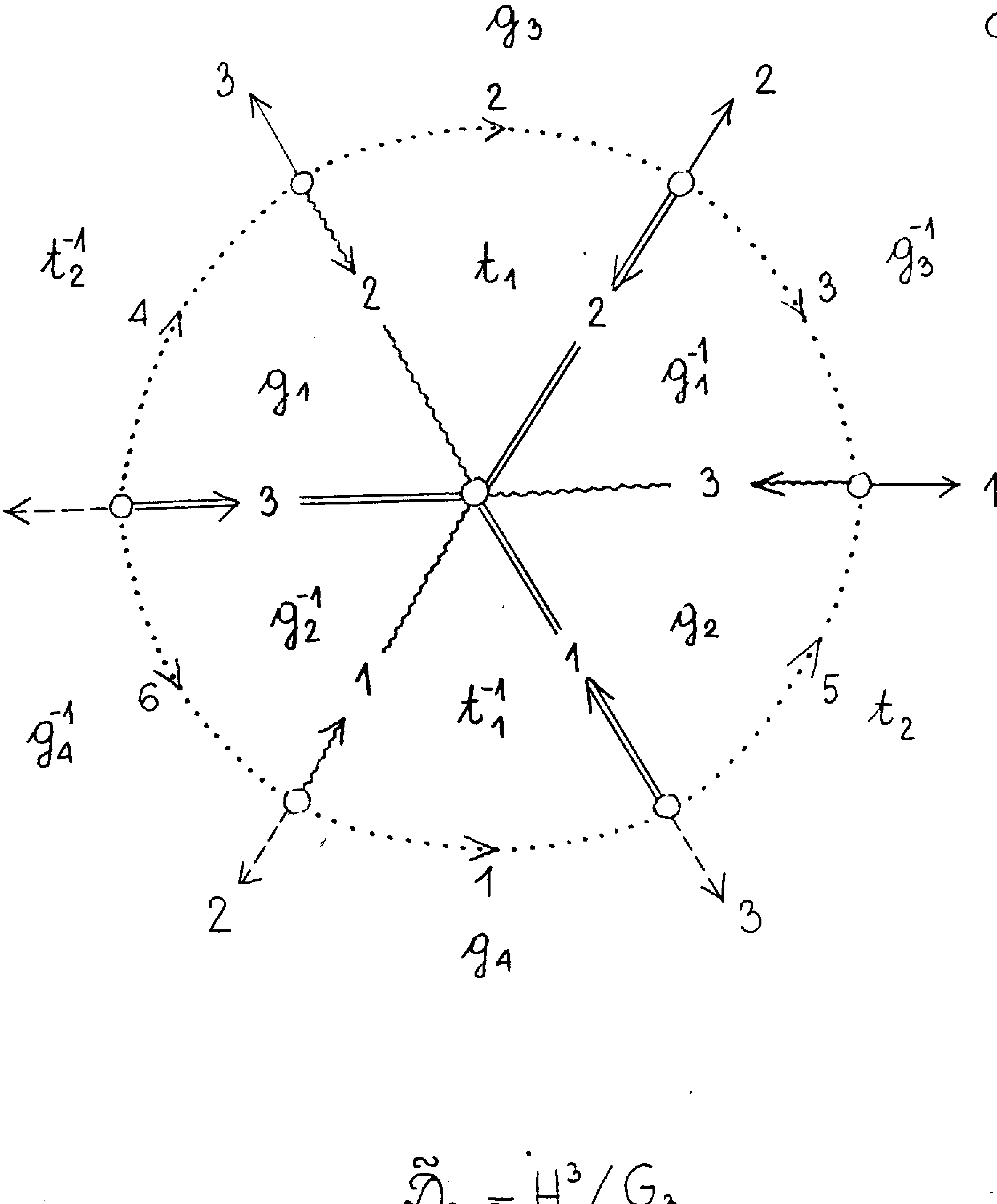
svaki od pripadnih uglova-diedara je mere $\frac{\pi}{3}$, te je $6 \cdot \frac{\pi}{3} = 2\pi$.

Zaključujemo da je $\mathcal{D}_2$ fundamentalni poliedar grupe G_2, čija je prezentacija

(6) $$G_2 = (g_1, g_2, g_3, g_4, t_1, t_2 - t_1 g_1 g_2 = t_1 g_1^{-1} g_2^{-1} = g_3 g_3 t_2 = g_4 g_4 t_2^{-1} = t_1 g_3^{-1} g_1 t_2 g_2^{-1} g_4 = 1) .$$

Formirajući orbitu O^{G_2}, gde je O centar poliedra $\mathcal{D}_2$, dobijamo,

O_∞



$$\tilde{\mathcal{D}}_2 = H^3/G_3$$

SL. 13.

pomoću simetrije, da je $\mathcal{D}_2 = \mathcal{D}_{2_0}$ Dirichlet-ov poliedar.

$i = 3$ $\qquad \tilde{\mathcal{D}}_3 = H^3 / G_3$ $\qquad$ (sl. 14.)

Parovi bočnih pljosni $f_{g_i^{-1}}$ i f_{g_i} $(i=1,2,3,4)$ su identifikovani klizajućim simetrijama g_i.

Parovi bočnih pljosni $f_{t_i^{-1}}$ i f_{t_i} $(i=1,2)$ su identifikovani translacijama t_i.

Identifikacije bočnih pljosni su indukovane identifikacijama stranica pravilnog šestougla $\mathcal{P}^2$ u euklidskoj ravni E^2, gde su g_i $(i=1,2)$ klizajuće simetrije , a t je translacija euklidske ravni E^2. Ova činjenica je korišćena kao motiv za konstruisanje grupe G_3 .

Obrazujemo klase ekvivalencije poliedra $\mathcal{D}_3$, indukovane navedenim identifikacijama, dajući za svaku od klasa cikličku transformaciju , u saglasnosti sa relacijom II (6). Istovremeno ustanovljavamo da je ispunjen uslov II (5) .

Poliedar $\tilde{\mathcal{D}}_3$ ima 12 bočnih ivica, grupisanih u 4 klase, po 3 ivice u svakoj klasi :

(1) $\quad g_1g_1t_1$

(2) $\quad g_2g_2t_1^{-1}$

(3) $\quad g_3g_3t_2$

(4) $\quad g_4g_4t_2^{-1}$

svaki od pripadnih uglova-diedara je mere $\frac{2\pi}{3}$, te je $3 \cdot \frac{2\pi}{3} = 2\pi$;

ima 6 osnovnih ivica, koje pripadaju istoj klasi :

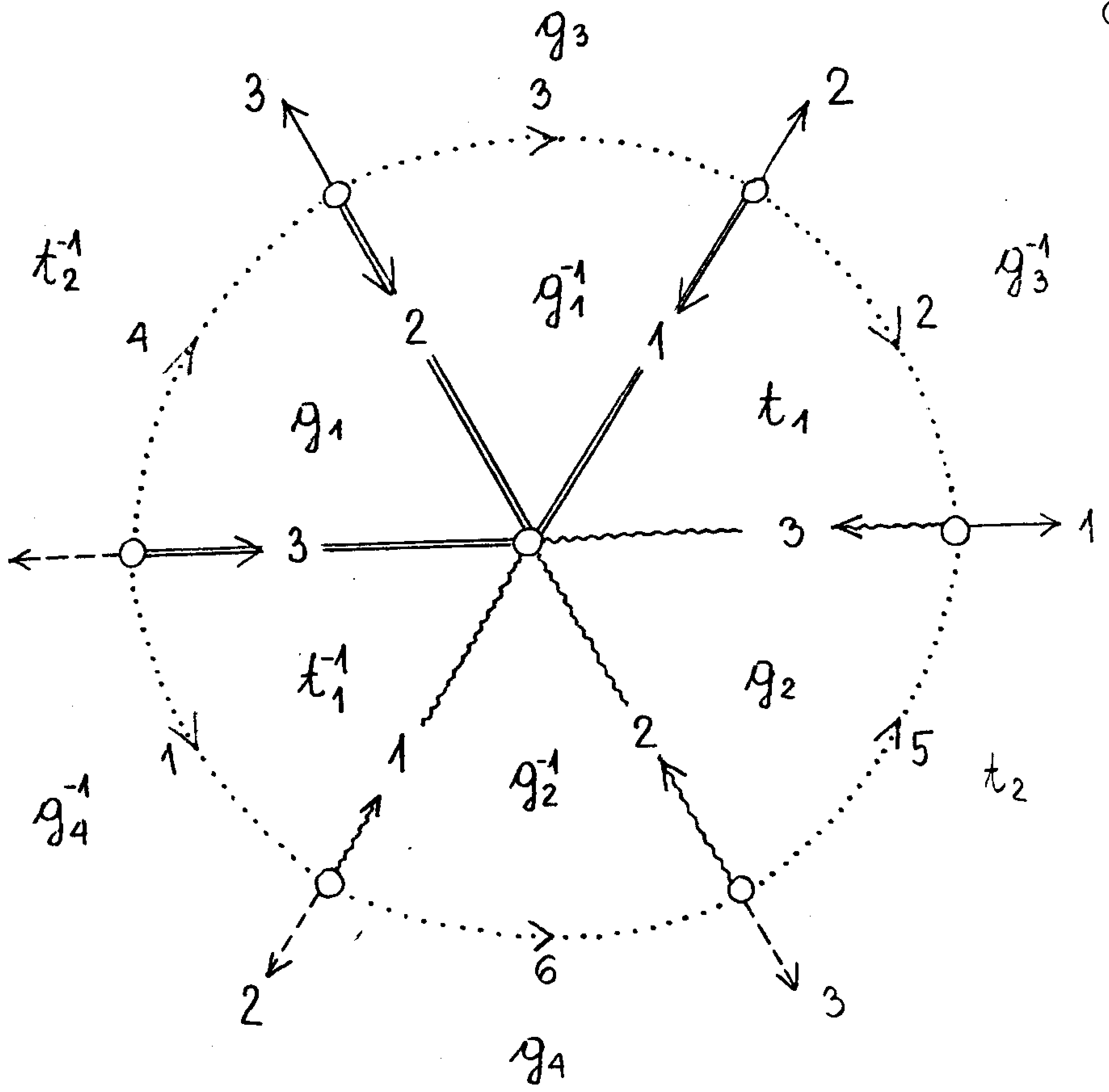
(5) $\quad t_1g_3g_1t_2g_2^{-1}g_4^{-1}$

svaki od pripadnih uglova-diedara je mere $\frac{\pi}{3}$, te je $6 \cdot \frac{\pi}{3} = 2\pi$.

Zaključujemo da je $\mathcal{D}_3$ fundamentalni poliedar grupe G_3, čija je prezentacija

(6) $\quad G_3 = (g_1,g_2,g_3,g_4,t_1,t_2 - g_1g_1t_1=g_2g_2t_1^{-1}=g_3g_3t_2=g_4g_4t_2^{-1}=$
$\qquad =t_1g_3g_1t_2g_2^{-1}g_4^{-1} = 1)$.

Formirajući orbitu O^{G_3} , gde je O centar poliedra $\mathcal{D}_3$, dobijamo, O∞



$$\tilde{\mathcal{D}}_3 = H^3 / G_3$$

SL. 14.

pomoću simetrije, da je $\mathcal{D}_3 = \mathcal{D}_{3_0}$ Dirichlet-ov poliedar.

$i = 4$ $\qquad \tilde{\mathcal{D}}_4 = H^3 / G_4$ $\qquad$ (sl. 15.)

Parovi bočnih pljosni $f_{g_i^{-1}}$ i f_{g_i} $(i=1,2,3,4)$ su identifikovani klizajućim simetrijama g_i.

Parovi bočnih pljosni $f_{t_i^{-1}}$ i f_{t_i} $(i=1,2)$ su identifikovani translacijama t_i .

Obrazujemo klase ekvivalencije poliedra $\mathcal{D}_4$, indukovane navedenim identifikacijama, dajući za svaku od klasa cikličku transformaciju, u saglasnosti sa relacijom II (6). Istovremeno ustanovljavamo da je ispunjen uslov II (5).

Poliedar $\tilde{\mathcal{D}}_4$ ima 12 bočnih ivica, grupisanih u 4 klase, po 3 ivice u svakoj klasi :

(1) $\quad t_1^{-1} g_3^{-1} g_4$

(2) $\quad t_2^{-1} g_4 g_3^{-1}$

(3) $\quad t_2 g_2 g_1^{-1}$

(4) $\quad t_1 g_1^{-1} g_2$

svaki od pripadnih uglova-diedara je mere $\frac{2\pi}{3}$, te je $3 \cdot \frac{2\pi}{3} = 2\pi$;

ima 6 osnovnih ivica, koje pripadaju istoj klasi :

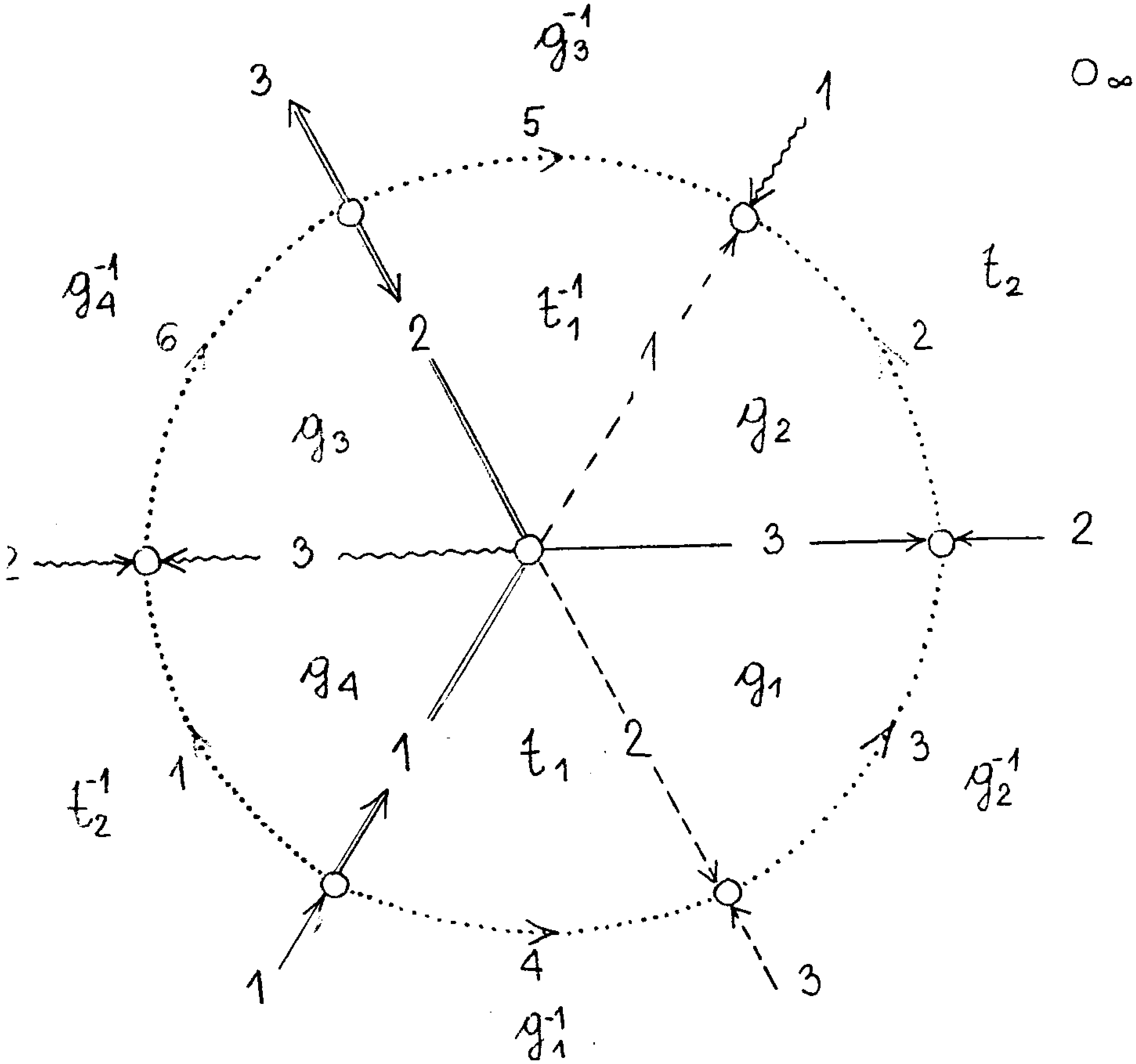
(5) $\quad t_2 g_2^{-1} g_1^{-1} t_1^{-1} g_3 g_4$

svaki od pripadnih uglova-diedara je mere $\frac{\pi}{3}$, te je $6 \cdot \frac{\pi}{3} = 2\pi$.

Zaključujemo da je $\mathcal{D}_4$ fundamentalni poliedar grupe G_4, čija je prezentacija

(6) $\quad G_4 = (g_1, g_2, g_3, g_4, t_1, t_2 - t_1^{-1} g_3^{-1} g_4 = t_2^{-1} g_4 g_3^{-1} = t_2 g_2 g_1^{-1} = t_1 g_1^{-1} g_2 = t_2 g_2^{-1} g_1^{-1} t_1^{-1} g_3 g_4 = 1)$.

Formirajići orbitu O^{G_4} , gde je O centar poliedra $\mathcal{D}_4$, dobijamo, pomoću simetrije, da je $\mathcal{D}_4 = \mathcal{D}_{4_0}$ Dirichlet-ov poliedar .



$$\tilde{\mathcal{D}}_4 = H^3 / G_4$$

$i = 5$ $\qquad \tilde{\mathcal{D}}_5 = H^3 / G_5$ $\qquad$ (sl. 16.)

Parovi bočnih pljosni $f_{g_i^{-1}}$ i f_{g_i} $(i=1,2,3,4)$ su identifikovani klizajućim simetrijama g_i.

parovi bočnih pljosni $f_{t_i^{-1}}$ i f_{t_i} $(i=1,2)$ su identifikovani translacijama t_i.

Obrazujemo klase ekvivalencije poliedra $\mathcal{D}_5$, indukovane navedenim identifikacijama, dajući za svaku od klasa cikličku transformaciju, u saglasnosti sa relacijom II (6). Istovremeno ustanovljavamo da je ispunjen uslov II (5).

Poliedar $\tilde{\mathcal{D}}_5$ ima 12 ivica, grupisanih u 4 klase, po 3 ivice u svakoj klasi :

(1) $\qquad g_4 g_3 t_2^{-1}$

(2) $\qquad g_3 g_4 t_1^{-1}$

(3) $\qquad g_1 g_2 t_1^{-1}$

(4) $\qquad g_2 g_1 t_2^{-1}$

svaki od pripadnih uglova-diedara je mere $\frac{2\pi}{3}$, te je $3 \cdot \frac{2\pi}{3} = 2\pi$;

ima 6 osnovnih ivica, koje pripadaju istoj klasi:

(5) $\quad g_1 g_3 t_1^{-1} g_2 g_4 t_2^{-1}$

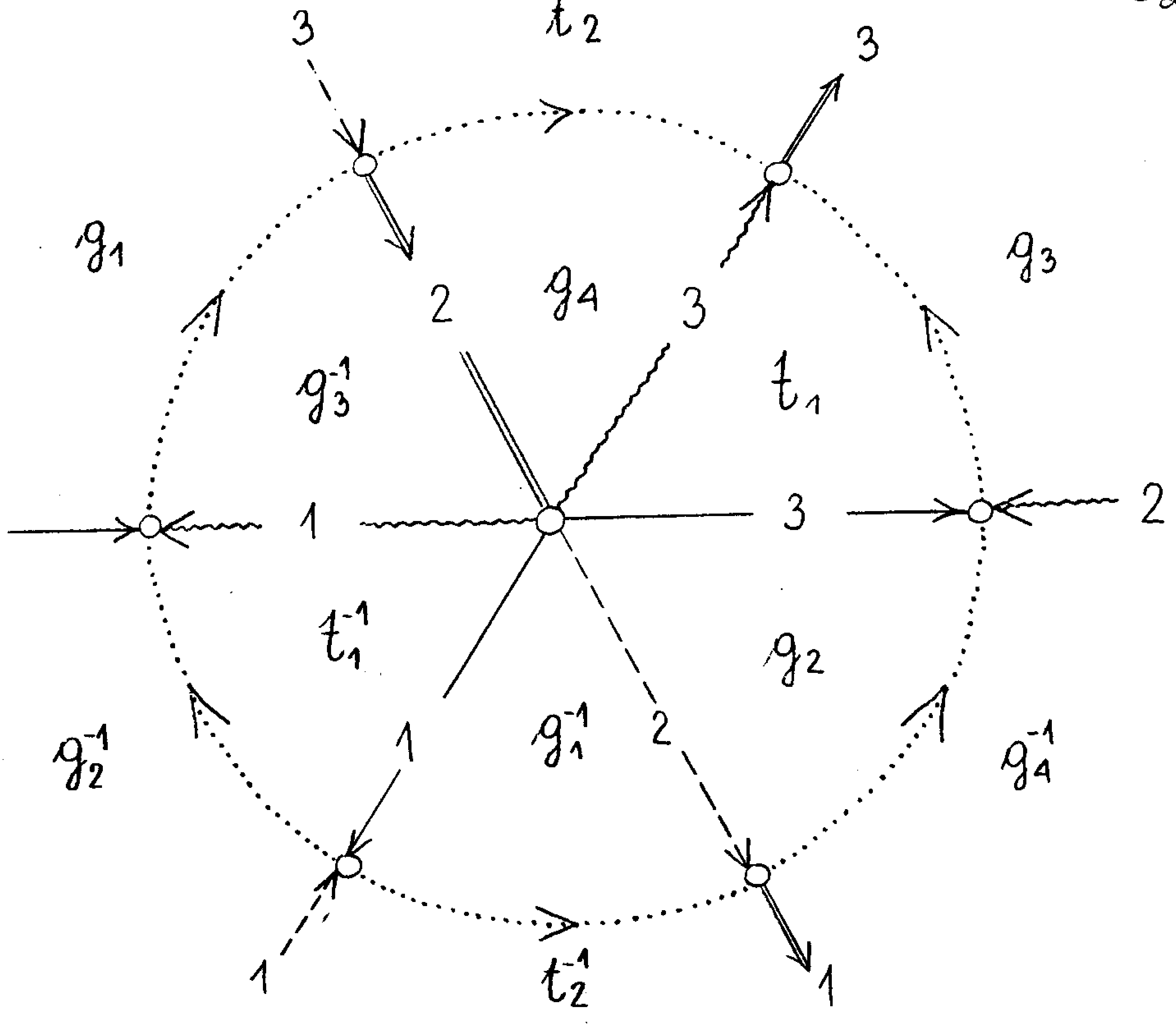
svaki od pripadnih uglova-diedara je mere $\frac{\pi}{3}$, te je $6 \cdot \frac{\pi}{3} = 2\pi$.

Zaključujemo da je $\mathcal{D}_5$ fundamentalni poliedar grupe G_5, čija je prezentacija

(6) $\quad G = (g_1, g_2, g_3, g_4, t_1, t_2 - g_4 g_3 t_2^{-1} = g_3 g_4 t_1^{-1} = g_1 g_2 t_1^{-1} = g_2 g_1 t_2^{-1} =$
$\qquad = g_1 g_3 t_1^{-1} g_2 g_4 t_2^{-1} = 1)$.

Formirajući orbitu O^{G_5}, gde je O centar poliedra $\mathcal{D}_5$, dobijamo, pomoću simetrije, da je $\mathcal{D}_5 = \mathcal{D}_{5_0}$ Dirichlet-ov poliedar.

O_∞



$$\tilde{\mathcal{D}}_5 = H^3 / G_5$$

SL. 16.

$i = 6$ $\qquad \tilde{\mathcal{D}}_6 = H^3 / G_6$ $\qquad$ (sl. 17.)

Parovi bočnih pljosni $f_{s_i^{-1}}$ i f_{s_i} $(i=1,2)$ su identifikovani zavojnim kretanjima s_i .

Parovi bočnih pljosni $f_{g_i^{-1}}$ i f_{g_i} $(i=1,2)$ su identifikovani klizajućim simetrijama g_i .

Parovi bočnih pljosni $f_{t_i^{-1}}$ i f_{t_i} $(i=1,2)$ su identifikovani translacijama t_i .

Obrazujemo klase ekvivalencije poliedra $\mathcal{D}_6$, indukovane navedenim identifikacijama, dajući za svaku od klasa cikličku transformaciju, u saglasnosti sa relacijom II (6). Istovremeno ustanovljavamo da je ispunjen uslov II (5).

Poliedar $\tilde{\mathcal{D}}_6$ ima 12 ivica, grupisanih u 4 klase, po tri ivice u svakoj klasi :

(1) $\qquad g_4 g_3 t_2$

(2) $\qquad g_3 g_4 t_1^{-1}$

(3) $\qquad s_1 s_2 t_1^{-1}$

(4) $\qquad s_2 s_1 t_2^{-1}$

svaki od pripadnih uglova-diedara je mere $\frac{2\pi}{3}$, te je $3 \cdot \frac{2\pi}{3} = 2\pi$;

ima 6 osnovnih ivica, koje pripadaju istoj klasi :

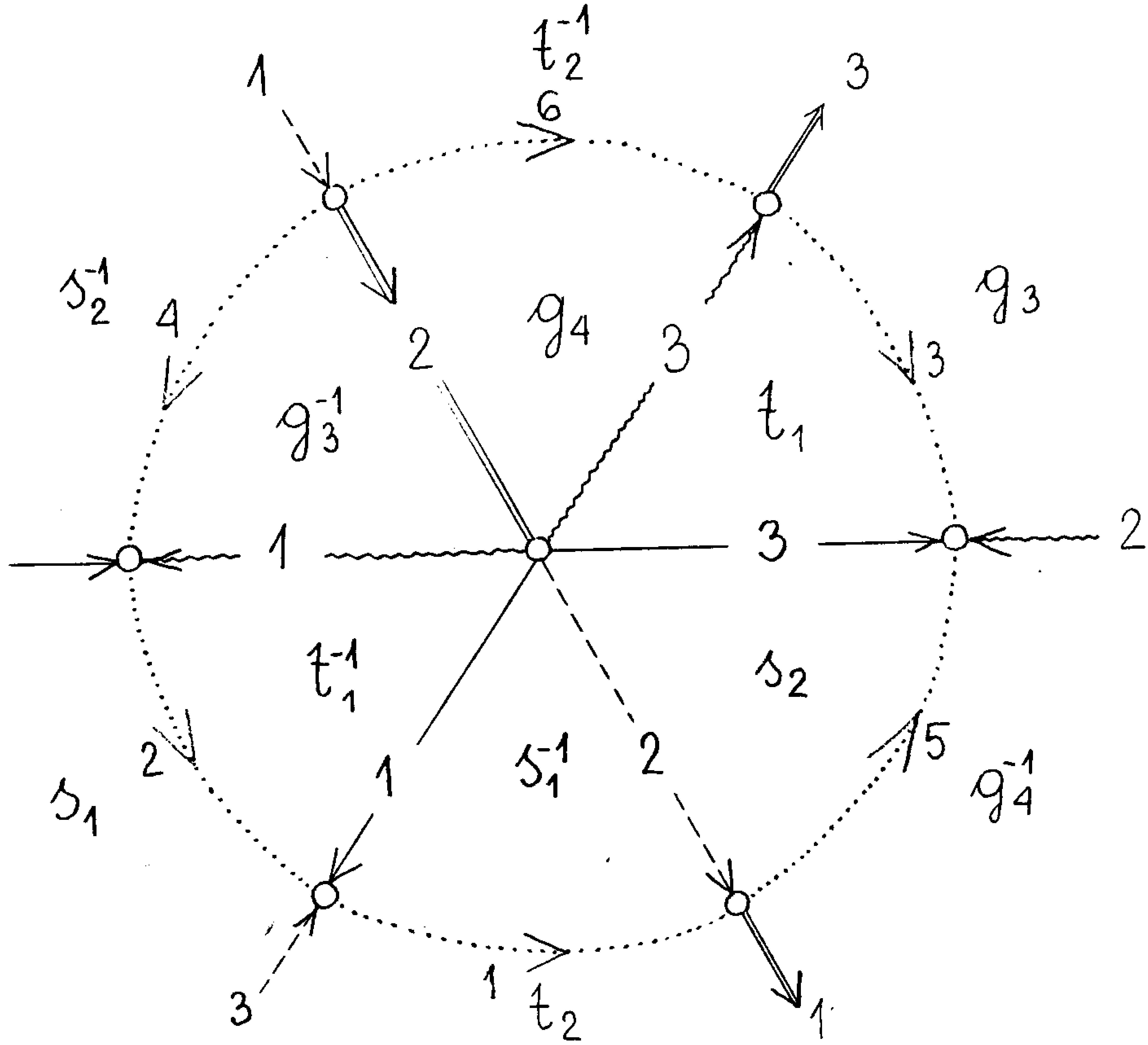
(5) $\qquad s_1 t_1 g_3^{-1} s_2 g_4 t_2$

svaki od pripadnih uglova-diedara je mere $\frac{\pi}{3}$, te je $6 \cdot \frac{\pi}{3} = 2\pi$.

Zaključujemo da je $\mathcal{D}_6$ fundamentalni poliedar grupe G_6, čija je prezentacija

$$(6) \quad G = (s_1, s_2, g_1, g_2, t_1, t_2 - g_4 g_3 t_2 = g_3 g_4 t_1^{-1} = s_1 s_2 t_1^{-1} = s_2 s_1 t_2^{-1} = s_1 t_1 g_3^{-1} s_2 g_4 t_2 = 1) .$$

Formirajući orbitu O^{G_6}, gde je O centar poliedra $\mathcal{D}_6$, dobijamo, pomoću simetrije, da je $\mathcal{D}_6 = \mathcal{D}_{6_0}$ Dirichlet-ov poliedar.



$$\tilde{\mathcal{D}}_6 = H^3/G_6$$

SL. 17.

3 Metrička konstrukcija poliedra $\mathcal{D}_i$ (i=1,2,3,4,5,6) na vektorskom modelu hiperboličkog prostora H^3

Uvodimo hiperboličku projektivnu metriku u prostoru $P_1^3 = H^3$, zadavanjem bilinearne forme

$$\langle\ ;\ \rangle \ : \quad V_4^* \times V_4^* \longrightarrow \mathbb{R}\ , \langle \ell^i u_i ; \ell^j v_j \rangle = u_i b^{ij} v_j \quad ,$$

pomoću Schläfli-jeve matrice

$$(1) \quad (\langle \ell^i ; \ell^j \rangle) = (b^{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & -\cos\frac{\pi}{6} & 0 & 0 \\ -\cos\frac{\pi}{6} & 1 & -\cos\frac{\pi}{3} & 0 \\ 0 & -\cos\frac{\pi}{3} & 1 & -\cos\frac{\pi}{6} \\ 0 & 0 & -\cos\frac{\pi}{6} & 1 \end{pmatrix} ,$$

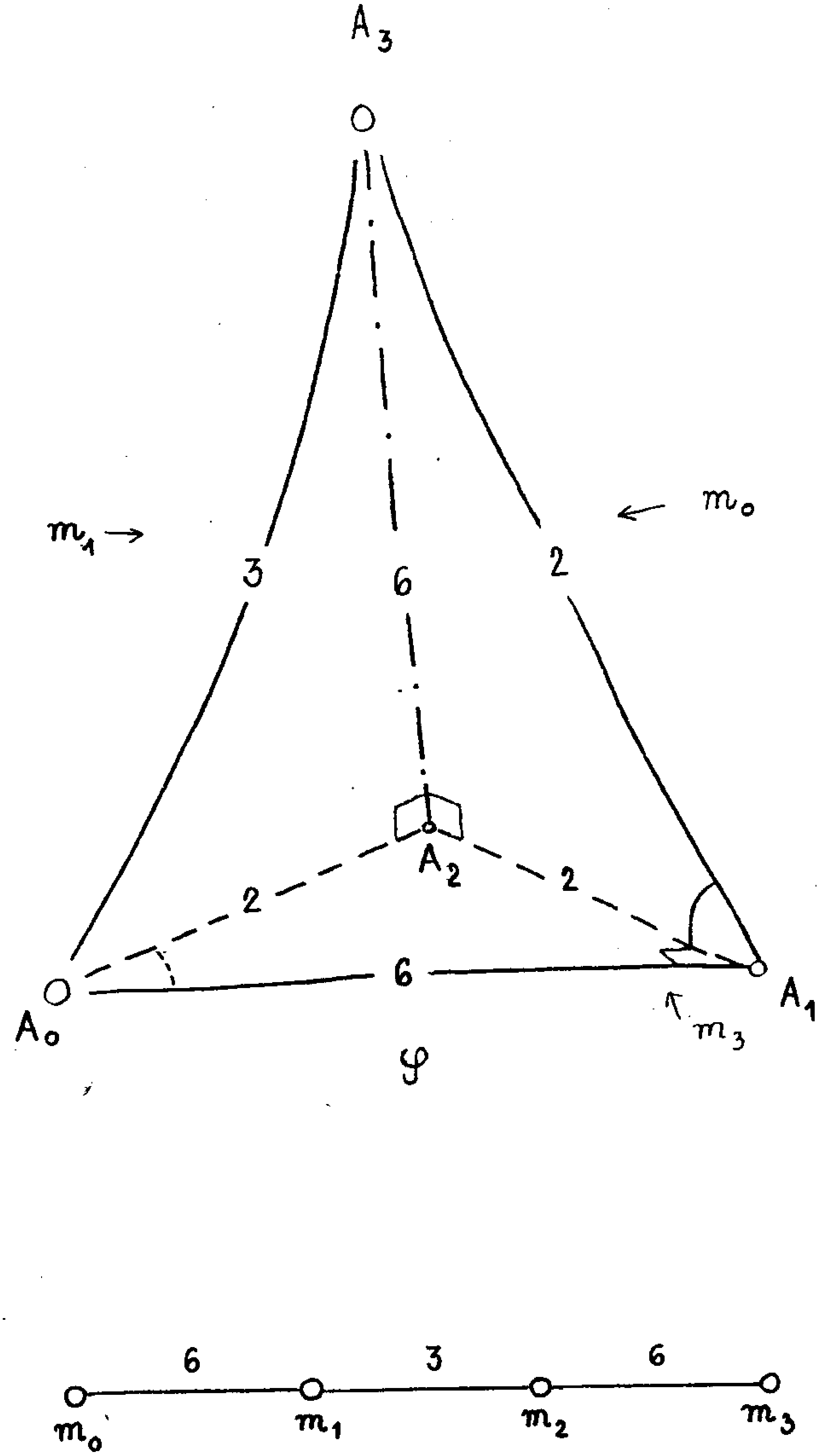
gde baza $\{\ell^j\}$ prostora V_4^* reprezentuje neke ravni m_i, koje su u vezi sa poliedrom $\mathcal{D}_i$. Ravni $m_0=A_1A_2A_3$ i $m_1=A_0A_2A_3$ su simetrijske ravni poliedra $\mathcal{D}_i$, sl. 18., $m_3=A_0A_1A_2$ je ravan osnove, a $m_2=A_0A_1A_3$ je ravan bočne pljosni poliedra $\mathcal{D}_i$.

Jednostavno izračunavamo

$$(2) \qquad B = \det (b^{ij}) = -\frac{3}{16} < 0 \quad .$$

Izračunavamo inverznu matricu (a_{ij}) matrice (b^{ij}). Jednakost $b^{ij}a_{jk}=\delta^i_k$ važi akko je

$$(3) \qquad \begin{aligned} & a_{00}=0 \\ & a_{01}=a_{10}=-\frac{2}{3} < 0 \\ & a_{02}=a_{20}=-\frac{4}{3} < 0 \\ & a_{03}=a_{30}=-2 < 0 \\ & a_{11}=-\frac{4}{3}<0 \\ & a_{12}=a_{21}=-\frac{8}{3}<0 \\ & a_{13}=a_{31}=-\frac{4}{3}<0 \\ & a_{22}=-\frac{4}{3} \quad 0 \\ & a_{23}=a_{32}=-\frac{2}{3} < 0 \\ & a_{33}=0 \end{aligned}$$



SL. 18:

Neka je (a_j) baza prostora V^4, dualna zadatoj bazi $\{\mathscr{b}^i\}$ prostora V_4^*, definisana sa $a_j \mathscr{b}^i = \delta^i_j$. Geometrijski, vektori a_j reprezentuju temena simpleksa $\mathscr{S}_i$ $(i=1,2,3,4,5,6)$, čije su pljosni opisane formama $\{\mathscr{b}^i\}$. Indukovana bilinearna forma

$\langle\ ;\ \rangle\ :\ V^4 \times V^4 \longrightarrow \mathbb{R}\ ,\ \langle x^i a_i;\ y^j a_j \rangle = x^i a_{ij} y^j$

je definisana upravo matricom

$$(4)\qquad (\langle a_i;\ a_j \rangle) = (a_{ij})$$

u relacijama (3).

Glavne minor-determinante matrice (b^{ij}) su

$$b^{33} = 1 > 0$$

$$\begin{vmatrix} b^{22} & b^{23} \\ b^{32} & b^{33} \end{vmatrix} = \frac{1}{4} > 0$$

$$(5)\qquad \begin{vmatrix} b^{11} & b^{12} & b^{13} \\ b^{21} & b^{22} & b^{23} \\ b^{31} & b^{32} & b^{33} \end{vmatrix} = 0$$

$$B = -\frac{3}{16} < 0\ ,$$

te je bilinearna forma $\langle\ ;\ \rangle$ signature $(+,+,0,-)$, što znači da je projektivna metrika u prostoru $P_1^3\ (V^4, V_4)$ zaista hiperbolička.

Kako su svi elementi na glavnoj dijagonali matrice B pozitivni, to su sve ravni m_i poliedra $\mathscr{D}_i$, reprezentovane formama $\{\mathscr{b}^i\}$, obične ravni prostora $P_1^3 = H^3$.

Iz relacija (3) ovog dela, zaključujemo da su temena $A_1(a_1)$ i $A_2(a_2)$ simpleksa $\mathscr{S}_i$ opisana vektorima a_0 i a_3, redom, obične tačke, dok su temena $A_0(a_0)$ i $A_3(a_3)$ simpleksa $\mathscr{S}_i$ opisana vektorima a_0 i a_3, redom, tačke na apsoluti. To znači da je $\mathscr{D}_i$ poliedar čija su sva temena na apsoluti.

Primenom formula iz dela V ovog rada, mogu se iz matrica (a_{ij}) i (b^{ij}) za simpleks $\mathscr{S}_i$ dobiti ostali metrički podaci. Tako možemo ustanoviti da dijagram Coxeter-a, sl. 18., korektno opisuje simpleks

$\mathcal{S}_i$.

Coxeter-ova grupa C, generisana refleksijama u odnosu na ravni m_i $(i=0,1,2,3)$ simpleksa $\mathcal{S}_i$, je nadgrupa naše grupe G_i, konačnog indeksa 24, jer je $\mathcal{D}_i$ unija 24 kongruentne kopije simpleksa $\mathcal{S}_i$. Dakle, generatori grupe G_i se mogu izraziti pomoću matrica koje odgovaraju bazama $\{b^i\}$ i (a_i).

VIII Pogovor

Kao što smo videli, izometrijska grupa G, koja dejstvuje bez nepokretnih tačaka i diskontinualno na hiperboličkom prostoru H^3, definiše orbitni prostor H^3/G - kompletnu povezanu Riemann-ovu mnogostrukost konstantne negativne krivine, kraće, hiperboličku prostornu formu. Grupa G je izomorfna Poincaré-ovoj grupi te forme, koja se može zadati identifikovanim domenom $\mathcal{F}$. Na pojmu fundamentalnog domena zasnovan je kombinatorno-geometrijski metod ispitivanja grupa, koji je primenio Poincaré u radovima [42,44] o Fuchs-ovim i Klein-ovim grupama. Taj metod je, sa jedne strane, omogućio konstruisanje Klein-ovih grupa kao apstraktnih grupa (tj. nalaženje njihovih generatora i definišućih relacija) i time ustanovio vezu teorije Klein-ovih grupa sa kombinatornom teorijom grupa [18,19] i, sa druge strane, pomogao dokazivanje diskontinualnosti i nalaženje fundamentalne oblasti grupe transformacija sa zadatim generatorima. Važnu ulogu pri tome imaju fundamentalne oblasti specijalnog oblika-fundamentalni poliedri.

U primerima prostornih hiperboličkih formi konstruisanim u ovom radu, pošli smo od prirodnih simpleksa konačne zapremine, sa jednim nesvojstvenim odnosno dva idealna temena u prostoru H^3.

Primenjeni Poincaré-ov metod pruža izvanredne mogućnosti za rešavanje sličnih, još nerešenih problema, kao što su konstruisanje hiperboličkih prostornih formi za zadate sledeće simplekse :

(3, 4, 4) , sa jednim idealnim temenom A_0 ;

(4, 3, 6) , sa jednim idealnim temenom A_0 ;

(5, 3, 6) , sa jednim idealnim temenom A_0 ,

kao i za još neke prirodne simplekse, u zavisnosti od prirode njihovih temena.

Korišćena literatura

1 AL-JUBOURI, N.K.: On non-orientable hyperbolic 3-manifolds. Quart.I. Math. Oxford (2), 31 (1980), 9-12.

2 APANASOV, B.N.: Diskretnie gruppi preobrazovanii i struktu-ri mnogoobrazii, "Nauka", Novosibirsk, 1983.

3 BEARDON, A.F.: The Geometry of Discrete Groups, Springer - - Verlag ; New-York, Heidelberg, Berlin; Graduate texts in Mathematics 91, 1983.

4 BEST, L.A.: On torsion free discrete subgroups of PSL(2,C) with compact orbit space. Canad.J. of Math. 23 (1971), 451- -460.

5 BOREL, A.: Compact Clifford-Klein forms of symmetric spaces. Topology, 1963, 2, N° 2, p. 111-122.

6 BURAGO, Yu.: Appendix; In : WOLF, J.A.: Spaces of constant curvature (Russian translation). Izd. "Nauka", Moscow, 1982, 461-472.

7 VINBERG, E.B.: Discrete groups generated by reflections in Lobačevskiĭ spaces, Math. USSR-Sbornik, Vol. 1 (1967), N° 3 (429-444)

8 VINBERG, E.B.: Otsutstvie kristallografičeskih grupp otraže-nii v prostranstvah Lobačevskogo boljšoi razmernosti, Trudi moskovskogo matematičeskogo obščestva, Tom 47, 1984.g.

9 VINBERG, E.B.: Giperboličeskie gruppi otraženii. Uspehi mat. nauk, t. 40 (1985), 29-66.

10 WEBER, C.-SEIFERT, H.: Die beiden Dodekaederräume. Math Z. 37 (1933), 237-253.

11 WOLF, J.A.: Spaces of constant curvature. Berkley, California, 1972.

12 GUCUL,I.S.: O kompaktnih tröhmernih mnogoobrazijah postojannoí otricateljnoĭ krivizni. Trudi Matematičeskogo instituta ANSSSR, 152 (1980, , 89-96.

13 GROMOV,M.: Manifolds of negative curvatures, J. Dif. Geom., 1978., 13, N^{o} 2, p. 223-230.

14 DAMIAN,F.L.-BALKAN,V.V.: Nekompaktnie neorientiruemie mnogoobrazija postojannoĭ otricateljnoĭ krivizni, imejuščie konečnuju meru. Isledovanija po obščeĭ algebre, geometrii i ih priloženija, Kišinev, "Štiinca" 1986., 51-56.

15 IM HOF,H.C.: A class of hyperbolic Coxeter groups,Expo.Math. 3 (1985), 179-186.

16 KARGAPOLOV,M.I.:-MERZLJAKOV,J.I.: Osno i teorii grupp, "Nauka", Moskva 1982.

17 KOSNËVSKI,Č.: Načaljni kurs algebraičeskoĭ topologiĭ, "Mir", Moskva 1983.

18 LINDON,R.-ŠUPP,P.: Kombinatornaja teorija grupp, "Mir", Moskva 1980.

19 MAGNUS,V.-KARRAS,A.-SOLITER,D.: Kombinatornaja teorija grupp, "Nauka", Moskva 1974.

20 MAKAROV,V.S.: O jednoj klasi diskretnih grupa prostora Lobačevskog, koje imaju beskonačnu fundamentalnu oblast konačne mere. Dokladi Akademii nauk SSSR, 1966., Tom 167, N^{o}1.

21 MAKAROV,V.S.: Ob odnom klasse dvumernih fedorovskih grupp, Izvestija Akademii nauk SSSR, serija matematičeskaja, 31 (1967), 531-542.

22 MAKAROV,V.S.: Ob odnom nekompaktnom razbienii desjatimernogo prostranstva Lobačevskogo, Trudi Matematičeskogo instituta AN SSSR, 1980, tom 152.

23 MAKAROV,V.S.: Geometričeskie metodi postroenija diskretnih

grupp dviženii prostranstva Lobačevskogo. Itogi nauki i tehniki, Problemi geometrii, Tom 15, Viniti, Moskva 1983.

24 MAKAROV, V.S.: Razbijanja hiperboličkog prostora, predavanje održano u Budimpešti 1986.

25 MAKAROV, V.S.-GUCUL, I.S.: O nekompaktnih trëhmernih mnogoobrazijah postojannoĭ otricateljnoĭ krivizni, imejuščih konečnuju meru. Trudi MIAN 152 (1980), 165-169.

26 MASKIT, B.: On Poincaré's theorem for fundamental polygons. Adv in Math. 7 (1971), 219-230.

27 MASSEY, W.S.: Algebraic Topology : An Introduction, Graduate Texts in Mathematics 56; Springer-Verlag, New York, Heidelberg, Berlin, 1977.

28 MILNOR, J.: Hyperbolic Geometry : The first 150 years, Bull. (New Series) of the American Mathematical Society, Volume 6, Number 1, January 1982.

29 MOLNÁR, E.: Minimal presentation of 10 compact euclidean space forms by fundamental domains. Studia Sci. Math. Hung., to appear

30 MOLNÁR, E.: Compact Euclidean space forms presented by special tetrahedra, Proceedings of Conference on Intuitive Geometry, Siófok, 1985., to appear.

31 MOLNÁR, E.: Space forms and fundamental polyhedra, Proceedings of the Conference on Differential Geometry and Its Applications, Nové Mesto na Morave, Czechoslovakia, 1983., Part 1. Differential Geometry, 91-103.

32 MOLNÁR, E.: An infinite series of compact non-orientable 3-dimensional space forms of constant negative curvature. Annals of Global Analysis and Geometry, Vol. 1. No 3(1983) 37-49. Vol. 2, No 2(1984), 253-254.

33 MOLNÁR,E.: Twice punctured compact euclidean and hyperbolic manifolds and their twofold coverings. Proceedings of Colloquium on Differential Geometry. Debrecen (Hajdúszoboszló), Hungary, 1984., to appear.

34 MOLNÁR,E.: Coxetersche Gruppen und Polyederkonstruktionen für Mannigfaltigkeiten konstanter Krümmung. Potsdamer Forschungen der Pädagogische Hochschule "Karl Liebknecht", Potsdam, Naturwissenschaftliche Reihe, Heft 42 (1984), 31-40.

35 MOLNÁR,E.: Projective Metrik und hiperbolischer Simplexinhalt. Geometrie und Anwendungen 6. Tagung der Fachsektion Geometrie der MGDDR, Tabarz, 7. April-11. April 1986., 87-90.

36 MOLNÁR,E.: Projektivne metrike i hiperbolička zapremina, rukopis.

37 MOLNÁR,E.: Fixed point free identifications on polyhedra, seminar održan na Tehničkom fakultetu u Budimpešti, 1986.

38 MOLNÁR,E.: Kompaktne euklidske prostorne forme, predstavljene pomoću specijalnih tetraedara, rukopis.

39 MOLNÁR,E.: Hyperbolic space forms of finite volume, with few generators. Suported by Mat. Found. for Sci. Reserch. N°424 (86).

40 MOSTOV,G.D.: Kvazikonformnie otobraženija v n-mernom prostranstve i žestkost giperboličeskih prostranstvennih form. Matematika (sb. perevodov), 1972., 16, N° 5, 105-157.

41 NIKULIN,V.V.-ŠAFAREVIČ,I.R.: Geometrii i gruppi, "Nauka", Moskva 1983.

42 POINCARÉ,H.: Mémoire sur les groupes Kleinéens, Acta Math. 3 (1883), 49-92.

43 PRASAD,G.: Strong rigidity of Q-rank 1 lattices, Invent. Math., 1973., 21, N° 4, p. 255-286.

44 PUANKARE,A.: Izabrannie trudi, T III. M. : Nauka, 1974.

45 ROZENFELJD,B.A.: Neevklidovi prostranstva, "Nauka", Moskva 1969.

46 SINGER,I.M.-THORPE,J.A.: Lecture notes on Elementary Topology and Geometry; Scott, Foresman and Co., Illinois 1967.

47 THURSTON,W.P.: Three dimensional manifolds. Kleinian groups and hyperbolic geometry. Bull. Amer. Math. Soc. 6 (1982), 357-381.

48 COXETER,H.S.M.: Discrete groups generated by reflections, Annals of Mathematics, Vol. 35, N^{o} 3, July 1934.

49 COXETER,H.S.M.-MOSER,W.O.J.: Generators and Relations for Discrete Groups; Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New-York, 1972.

50 CHARLAP,L.S.: Bieberbach Groups and Flat Manifolds, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, London, Paris, Tokyo, 1986.

51 ŠUBNIKOV,A.V.-KOPCIK,V.A.: Simmetrija v nauke i isskustve, "Nauka", Moskva 1972.

Sadržaj