UNIVERZITET U BEOGRADU

PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET

INSTITUT ZA MATEMATIKU

SLAVIK V. JABLAN

TEORIJA ANTISIMETRIJE I VIŠESTRUKE ANTISIMETRIJE U E^2 I $E^2 \setminus \{0\}$

-doktorska disertacija-

BEOGRAD 1984.

Sadržaj:

Istorijat problema

Širinu i sveobuhvatnost teorije simetrije delimično je moguće sagledati registrovanjem naučnih oblasti u kojima ona igra bitnu ulogu: matematike, fizike(posebno fizike čvrstog tela, fizike elementarnih čestica, kvantne fizike...), kristalografije, hemije, biologije, estetike, filozofije... S obzirom na njenu univerzalnost i sintetsku ulogu u sistemu nauka izvesni noviji autori dodeljuju joj status filozofske kategorije koja izražava fundamentalne zakonitosti ustrojstva prirode(H. Weyl, 1952.; J. Nicolle, 1955.; A.V. Šubnjikov, V.A. Kopcik, 1972.; I.D. Akopjan, 1980.). U skladu sa ovim je i stav Šubnjikova koji simetriju definiše kao "zakon konstrukcije strukturnih objekata"(A.V. Šubnjkov, 1972., str.261.). Simetrija prirodnih zakona i ljudskih tvorevina(materijalnih i intelektualnih) predstavlja izraz simetrije prirode.

Sama reč simetrija(συμμετρια). vodi poreklo iz grčke filozofije i estetike, korišćena je u smislu ravnoteže, proporcionalnosti i ukazuje na čitav spektar sinonimskih filozofsko-estetskih izraza(harmonija, sklad, celovitost) korišćenih u istoriji.

U nauku pojam simetrije ulazi 30-ih godina prošlog veka sa početkom izučavanja kristalografskih klasa i njihove analize sa stanovišta teorije grupa, koju uvodi E. Galois 1831. god.(E. Galois, 1846.). Suština ideje pristupa teoriji simetrije izražena je u Erlangenskom programu F. Kleina 1872. god., koji izdvaja teoriju simetrije kao univerzalni princip konstrukcije različitih geometrija registrovanjem mnogostrukosti, grupa transformacija i njihovih invarijanti. Dalji razvoj teorije simetrije nerazdvojan je od kristalografije i teorije grupa. Od centralnog interesa za problematiku obuhvaćenu ovim radom su rezultati teorije simetrije koji se odnose na grupe izometrija u E^2: grupe simetrije jednostranih rozeta, bordura, ornamenata, grupe simetrije sličnosti u E^2 i grupe konformne simetrije u $E^2 \setminus \{O\}$.

Odgovor na pitanje o jedinosti(potpunosti klasifikacije) rozetalnih grupa simetrije C_n, D_n (O-dim. punktualnih grupa izometrija u E^2) H. Weyl(H. Weyl, 1952., str. 119.) pripisuje Leonardu da Vinčiju. Izvođenjem 32 kristalografske klase (J.F.Ch. Hessel, 1830.) i 14 Braveovih prostornih rešetaka(A. Bravais, 1850.) dati su osnovi za kompletno izvođenje 230 kristalografskih prostornih grupa simetrije(E. S. Fjodorov, 1890.; A. Schöenflies, 1891.), dok Barlow 1893. god. formuliše stav o kristalografskim ograničenjima(n=2,3,4,6).

Izvođenje 17 grupa ravanskih ornamenata(2-dim. diskretnih izometrijskih grupa u E^2), nepotpuno dato u radovima C. Jordana(1867., 1869.), u kome nedostaje grupa pgg i L.Sohnckea(1894.) biva kompletno ostvareno(u vidu parcijalnog rezultata) pri klasifikaciji 230 prostornih grupa simetrije.

Izdvajanje bordura(1-dim. diskretnih grupa izometrija u E^2 realizuje A. Speiser(1924.) i G. Polya i A. Niggli(1924.), koji takođe nezavisno izvode 17 grupa simetrije ornamenata.

Ideju simetrije sličnosti, datu u delu H.Weyla(H. Weyl, 1952.) razvijaju A.V.Šubnjikov(A.V.Šubnjikov, 1960.), E.I.Galjarski i A.M.Zamorzajev(E.I.Galjarski,A.M.Zamorzajev, 1963.).Konstatovanje izomorfizma između jednostranih diskretnih rozeta simetrije sličnosti u E^2 i konformne simetrije u $E^2\setminus\{0\}$ sa polarnim i nepolarnim stožerima(1-dim. diskretnim grupama izometrija u E^3) omogućava razvoj teorije simetrije sličnosti i konformne simetrije(A.M.Zamorzajev, A.F.Palistrant,E.I.Galjarski).

Pored ornamenata(mozaika) kao najočigledniјih vizuelnih modela grupa simetrije u E^2 i $E^2\setminus\{0\}$ koriste se i njihovi duali: Kelijevi dijagrami, koje uvodi Cayley(A. Cayley, 1878.) i M.Dehn(M.Dehn, 1910.), čije primene razvijaju mnogi autori(W.Magnus, A.Karrass,S.Solitar...). Vizuelni prikazi simetrijskih struktura postižu se i pomoću metode projekcija elemenata simetrije razrađene u kristalografiji.

Različiti sistemi obeležavanja grupa simetrije(Schönflies,Polya,Niggli, Speiser, Šubnjikov, Coxeter, Weyl...) unificiraju se u slučaju klasičnosimetrijskih izometrijskih grupa primenom Internacionalne simbolike(N.F.M.Henry, K.Lonsdale, 1952.) koju su uveli Hermann i Mauguin. U ovom radu, kao i u radu (S.Jablan, 1981.) korišćena je u slučaju bordura i ornamenata međunarodna simbolika, Šenflisovska i srodna Šubnjikovska simbolika kod grupa simetrije sličnosti, dok je kod grupa konformne simetrije u $E^2\setminus\{0\}$ izgrađena simbolika po uzoru na notaciju grupa simetrije sličnosti.

Uopštena Niglijeva klasifikacija grupa simetrije (i-dim. punktualne grupe simetrije u E^n, $0 \leq i \leq n$) razrađena je u radovima Niglija, Neronove i Bjelova, gde je data klasifikacija svih izometrijskih grupa simetrije u E^n ($n \leq 3$) i delimična klasifikacija u E^n($n \geq 4$).

Radovi mnogih autora na području diskretnih grupa simetrije sumirani su u monografiji(H.S.M.Coxeter, W.O. J. Moser, 1972.).

Primene različitih metoda generisanja ravanskih simetrijskih struktura: rozetalne metode, bordurne metode, metode Braveovih rešetki,desimetrizacione metode... mogu biti praćene u delima Šubnjikova, Bjelova...

U cilju detaljnijeg upoznavanja sa istorijom teorije simetrije inspirativna su dela (H.Weyl, 1952.; A.V.Šubnjikov, V.A.Kopcik, 1972.; I.D.Akopjan, 1980.; A.M.Zamorzajev, 1976.; A.M.Zamorzajev, E.I.Galjarski, A.F.Palistrant, 1978.).

Klasična teorija izometrijskih grupa simetrije u E^2 i E^3, zaokružena radovima Fjodorova i Schönfliesa , izvođenjem 230 diskretnih izometrijskih grupa u E^3 svoju praktičnu potvrdu stiče nakon otkrića rendgenske difrakcije na kristalnim rešetkama(Laue, 1912), koja omogućava dešifrovanje kristalne strukture.

Novi podstrek za dalja istraživanja na teorijskom planu daje 1923. god. ponovljeno izdanje knjige Schönfliesa (Schönflies, 1923.). U periodu 1927-1929. god. nemački naučnici ostvaruju izvođenja podgrupa $G_{r,t} \subset G_{3,3}$ 230 punktualnih grupa, tzv. "malih" kristalografskih grupa, među kojima se javljaju: 31 grupa lenti($G_{3,2,1}$ u oznakama V.A. Kopcika, 1967.),75 grupa simetrije stožera $G_{3,1}$ (C.Hermann, 1929.) i 80 grupa simetrije slojeva $G_{3,2}$(L.Weber, 1929.; E.Alexander i K.Herrmann, 1929.), simetrijskih struktura kod kojih se kao invarijantni(singularni) elementi javljaju prava ili ravan.

Vizuelizacije grupa simetrije lenti i slojeva u okviru jednostrane ravni crteža, predložene u radu(A.Speiser, 1927.) i ostvarene u radu(L.Weber, 1929.), kod kojih se za označavanje "lica" i "naličja" invarijantne dvostrane ravni koristi alterniranje boja "crna"-"bela", bile su neposredni povod za uvođenje proširenja klasične teorije simetrije- antisimetrije(disimetrije, dvofazne simetrije, dvobojne simetrije), koju nezavisno uvode H.Heesch (1929.) i A.V.Šubnjikov. U svom primarnom značenju transformacija antiidentiteta, promene boje korespondirala je svim transformacijama simetrije koje prevode lik sa jedne strane invarijantne dvostrane ravni na drugu. Ovako uvedena, involutivna transformacija antiidentiteta e komutira sa svim izometrijama eS=Se, zadovoljava relaciju e^2=E i omogućava uvođenje antisimetrijskih transformacija oblika S'=eS.(+) Koristeći ovu ideju za interpretaciju dvostranosti H.Heesch(1929.) izvodi 80 ravanskih jednostranih crno-belih ornamenata $G^1_{2,2}$ direktno iz 17 ornamenata $G_{2,2}$. Uočavajući da transformaciji e, shvaćenoj kao promena orijentacije("bojenje") invarijantne dvostrane ravni, u ovom slučaju odgovara promena znaka koordinate ortogonalne

---

(+)H.S.M.Coxeter, W.O.J.Moser 1972., A.M.Zamorzajev 1976.

u odnosu na invarijantnu ravan(posmatrano u E^3) Heesch shvata mogućnosti koje pruža ovakav "dimenzioni prelaz".

Razmatrajući mogućnost proširenja 230 prostornih grupa $G_{3,3}$(u oznakama: Kopcik, 1967.) do skupa grupa antisimetrije $G^1_{3,3}$, Heesch pokazuje(H.Heesch, 1930.) da se u tom slučaju problem svodi na promenu znaka dopunske četvrte koordimate. Simetrijskim tansformacijama sa kvadratnom matricom transformacije A dodeljuju se antisimetrijske transformacije sa matricom $A'=eA=\begin{pmatrix} A & \\ & -1 \end{pmatrix}$, gde je $e=\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \cdot & \\ & & & 1 \\ & & & & -1 \end{pmatrix}$, dim e=dim A+1 . Pored izvođenja "crno-belih" slojeva(hiperslojeva, 4-dim. slojeva) Heesch kao parcijalni rezultat ostvaruje izvođenje 122 grupe antisimetrije sa invarijantnom tačkom iz 32 Hesel-Gadolinske klase i daje procenu broja antisimetrijskih grupa $G^1_{3,3}$ na 2000 (što je prilično blisko tačnom rezultatu 1651,izvedenom tek nakon 30 godina).

Nažalost, radovi Heeša objavljeni u kristalografskom časopisu, pisani jezikom nepristupačnim kristalografima, sa težištem na 4-dimenzionim rezultatima, nisu naišli na odziv kakav su zasluživali. Sličnu sudbinu doživeli su i radovi Vudsa(Woods, 1935.) koji izvodi 17 crno-belih bordura i 46 crno-belih ornamenata i objavljuje svoje radove u "Journal of Textyl".

Za razliku od ovih autora, V.I.Šubnjikov, sagledavajući značaj fizičkih, realnih interpretacija teorije, uspeva da konkretizuje i afirmiše ideje teorije antisimetrije. Diskusija problema enantiomorfizma, pojave "levih" i "desnih" modifikacija lika pod dejstvom indirektnih izometrija navela je Šubnjikova na dalja istraživanja vezana za simetriju vektora i tenzora, ravnopravnost pozitivnih i negativnih brojeva i ukazala na šire shvatanje antisimetrije, kao mogućnosti za proučavanje proizvoljnog svojstva reda 2(+,-, gore-dole, crno-belo, levo-desno...), geometrijskog ili vangeometrijskog karaktera, ortogonalnog u odnosu na izometrije, koje se kombinuje sa simetrijskim transformacijama, generišući grupe antisimetrije.

Rezultati Šubnjikova, određivanje klasa grupa antisimetrije, realizovano u periodu 1942-1944. god. i rezultati ostvareni u narednih šest godina doživljavaju svoju punu afirmaciju objavljivanjem monografije(A.V.Šubnjikov, V.A.Kopcik, 1951.).

Uvođenje operacije inverzije vremena(Landau, Livšic, 1951.) i ukazivanje na magnetnu interpretaciju antisimetrije predstavljalo je osnov za radove Tavgera i prve efektivne primene antisimetrije(W.Cochran, 1952.) ostvarenjem veze između 46 ravanskih antisimetrijskih crno-belih ornamenata i projekcija elektronske gustine.

Naredni period obeležen je različitim izvođenjima grupa antisimetrije ostvarenim u radovima Romana, Idenboma, Kopcika, Šubnjikova, Palistranta, Zamorzajeva, Galjarskog, Bjelova, Pabsta... koji ovaj problem rešavaju različitim metodama. Među predloženim metodama izvođenja moguće je izdvojiti analitičku, matričnu metodu(Heesch, Roman), metodu Bjelova zasnovanu na geometrijskim egzistencijalnim i eliminacionim kriterijumima, koja počiva na konstrukciji antisimetrijskih, crno-belih Braveovih rešetki i njihovom superponiranju sa antisimetrijskim crno-belim rozetama i metodu Idenboma zasnovanu na 1-dimenzionim kompleksnim reprezentacijama grupa simetrije, gde se homomorfizam grupe simetrije G sa jezgrom H(podgrupom grupe G indeksa 2) na grupu $\{e\}$ reda 2 zamenjuje 1-dimenzionom reprezentacijom grupe G.

Verovatno najzahvalnija od navedenih, Šubnjikovska metoda zasnovana je na zameni generatora grupe simetrije G antigeneratorima(tj. zamenama simetrija S antisimetrijskim transformacijama $S'=eS=Se$, gde je e transformacija antiidentiteta). Ova metoda, korišćena u radovima Šubnjikova, Kopcika, Zamorzajeva, Palistranta, Galjarskog... dovodi do generisanja grupa antisimetrije, koje je moguće u zavisnosti od prisustva antiidentiteta e u sastavu grupe antisimetrije G'klasifikovati na: generišuće(polarne) grupe, starije(sive, neutralne) grupe tipa $G'=G\times\{e\}$ i mlađe (mešovite, crno-bele) grupe antisimetrije.

U skladu sa teoremama(A.M.Zamorzajev, 1976., str.16) netrivijalno je isključivo izvođenje mlađih grupa antisimetrije. Izvođenje mlađih grupa antisimetrije metodom Šubnjikova obuhvata dva problema: određivanje svih grupa antisimetrije tipa M^1 generisanih nekom grupom simetrije G i eliminaciju ponovljenih grupa.

Rezultate ostvarene metodom Šubnjikova na planu izvođenja grupa antisimetrije moguće je pratiti u nizu članaka objavljenih u časopisu "Kristalografija". Najkompletniji uvid u razvoj ideja i metoda teorije antisimetrije, rezultate realizovane Šubnjikovskom metodom, kao i osvrt na ostala nezavisna izvođenja pružaju monografije: A.V.Shubnikov, N.V.Belov and others: Colored Symetry; A.M.Zamorzajev: Teorija prostoj i kratnoj antisimetriji.

Pored ostvarenih teorijskih rezultata, u novijem periodu teorija antisimetrije stiče punu afirmaciju i primenu u različitim naučnim oblastima.

Naredno uopštenje, teorija višestruke antisimetrije, zasnovano na ideji dodeljivanja tačkama lika više dvofaznih svojstava, koja komutiraju sa simetrijama i među sobom,uvedeno je od strane geometričara univerziteta u Kišinjovu: A.M.Zamorzajeva, A.F.Palistranta, E.I.Galjarskog... Rešenje problema izvođenja grupa višestruke antisimetrije, čija su svojstva okarakterisana teoremama(A.M.Zamorzajev, 1976., str 88.) ostvareno je u radovima sovjetskih autora metodom Šubnjikov-Zamorzajeva(zamenom jednog ili više generatora grupe simetrije antigeneratorima).

Kao rezultat izvođenja grupa višestruke antisimetrije, realizovano je izvođenje većeg broja grupa antisimetrije i višestruke antisimetrije, sistematizovanih po klasama i datih u vidu kataloga(A.M.Zamorzajev, 1976).

S obzirom na netrivijalnost izvođenja grupa tipa M^m, kao suštinski(kao i u slučaju izvođenja grupa tipa M^1) problemi postavljaju se: izvođenje svih grupa tipa M^m i eliminacija ponovljenih grupa tipa M^m, pri čemu se eliminacija najčešće vrši na osnovu kombinatorno-geometrijskih kriterijuma, koji pored ostalog zahtevaju i specifično prilagođavanje simbolike grupa simetrije. Obzirom na složenost problema eliminacije, u okviru većeg broja kategorija grupa višestruke antisimetrije dati su isključivo brojevi različitih grupa tipa M^m, dobijeni kombinatornim metodama, bez sastavljanja kataloga grupa višestruke antisimetrije(A.M.Zamorzajev, 1976.).

Ideje, metode i rezultate sovjetskih autora na planu višestruke antisimetrije moguće je hronološki pratiti u nizu članaka objavljenih u časopisu "Kristalografija", dok najpotpuniju informaciju pruža monografija(A.M.Zamorzajev, 1976.).

Pored rezultata sovjetskih autora, nezavisno uvođenje grupa višestruke antisimetrije("compound groups"), donekle različito definisanih, daje A.L.Mackay,(1957.). Relativno srodnu metodu, zasnovanu na superpoziciji jednodimenzionih alternirajućih reprezentacija koriste H.Vondratschek i A.Niggli(1961.).

Zamorzajevska teorija višestruke antisimetrije poslužila je u novijem periodu kao jedan od povoda za dalja uopštenja teorije simetrije: kolornu simetriju(N.V.Bjelov, 1956.), kolornu antisimetriju, kolornu višestruku antisimetriju, P-simetriju...detaljno diskutovana u monografiji A.M.Zamorzajeva, E.I.Galjarskog i A.F.Palistranta: "Cvetnaja simetrija, jejo obopščenjija i priloženjija".

* * *

Pojam antisimetrije i višestruke antisimetrije u ovom radu razmatra se u smislu u kome je definisan u radovima sovjetskih naučnika(A.M.Zamorzajev, 1976., str.76) : svakoj tački lika(konačnog ili beskonačnog) dodeljuje se L dvofaznih(involutivnih) svojstava, pri čemu je prisustvo i-tog svojstva označeno znakom +(1) na i-toj poziciji, a odsustvo i-tog svojstva znakom -(0) na i-toj poziciji (s leva na desno). Transformacija antiidentiteta e_i vrši promenu znaka i-tog svojstva ($i \in \{0,1,2,\ldots,L-1\}$). Kombinovanjem transformacija antiidentiteta e_i među sobom i sa simetrijskim transformacijama koje sačinjavaju neku grupu simetrije G dobijaju se transformacije antisimetrije oblika $S'=e'S=Se'$, gde je S neka simetrija iz G, a e' proizvod antiidentiteta e_i ($i \in \{0,1,2,\ldots,L-1\}$). Kao rezultat navedenog postupka dobijaju se pored generišuće grupe simetrije G grupe antisimetrije tipa S^kM^m i grupe antisimetrije tipa M^m. U skladu sa rezultatima radova sovjetskih autora, netrivijalno je isključivo izvođenje grupa tipa M^m, koje predstavlja centralni problem ovog rada.

Kao osnova izlaganja teorije antisimetrije i višestruke antisimetrije, zasnovane u duhu radova(A.V.Shubnikow, N.V.Belov and others, 1964., A.M.Zamorzajev, 1963., A.M. Zamorzajev, A.F.Palistrant, 1976., A.V.Šubnjikov, V.A. Kopcik, 1972.) poslužiće sledeći uvodni podaci:

Neka je diskretna grupa simetrije G sa skupom generatora $S_1,S_2,\ldots,S_p$ data apstraktnom definicijom(prezentacijom)(H.S.M.Coxeter, W.O.J.Moser, 1972):

(1) $g_n(S_1,S_2,\ldots,S_p)=E \quad n=1,2,\ldots s$

i neka su $e,e_1,e_2,\ldots,e_{L-1}$ $(e_0=e)$ transformacije antiidentiteta 1-og, 2-gog,...,L-tog roda, koje zadovoljavaju relacije:

(2) $e_ie_j=e_je_i \quad e_i^2=E \quad e_iS_q=S_qe_i \quad i,j\in\{0,1,2,\ldots L-1\}$
$q\in\{1,2,\ldots,p\}$

Grupe antisimetrije i višestruke antisimetrije dobijaju se primenom uopštene metode Šubnjikova-Zamorzajeva (A.M.Zamorzajev, 1976.) zamenom generatora grupe simetrije G antigeneratorima jednog ili više nezavisnih rodova. U skladu sa teoremom o podeli svih grupa antisimetrije i višestruke antisimetrije na grupe tipa $S^k(1\leq k\leq L)$, S^kM^m ($1\leq k,m;\ k+m\leq L$) i M^m $(1\leq k\leq L)$ (A.M.Zamorzajev, 1963., A.M.Zamorzajev, 1976.) i mogućnošću generisanja grupa tipa S^k i S^kM^m, direktno iz generišuće grupe G, odnosno grupa tipa M^mm kao netrivijalan javlja se isključivo problem izvođenja grupa tipa M^m. Sve grupe tipa M^m izomorfne su sa generišućom grupom G i među sobom.

Uopštenom metodom Šubnjikova-Zamorzajeva dobijaju se grupe tipa S^k, S^kM^m i M^m. Posle izdvajanja grupa tipa M^m (koje u sebi ne sadrže antiidentitete e_i i njihove proizvode kao elemente grupe antisimetrije ili višestruke antisimetrije) dalje izvođenje grupa antisimetrije i višestruke antisimetrije(Šubnjikovskih grupa) svodi se na eliminaciju istih grupa tipa M^m za fiksirano m i dokazivanje različitosti preostalih. Ova eliminacija vrši se u skladu sa definicijom jednakosti Šubnjikovskih grupa(Š-grupa) (Definicija 1.1., str. 17).

Uvod

U radu "Teorija antisimetrije i višestruke antisimetrije u E^2 i $E^2 \setminus \{0\}$" predložena je nova metoda generisanja grupa antisimetrije i višestruke antisimetrije, pomoću koje je ostvareno izvođenje i izvršena katalogizacija svih grupa antisimetrije i višestruke antisimetrije tipa M^m u E^2 i $E^2 \setminus \{0\}$: rozeta, bordura, ornamenata, grupa rozeta simetrije sličnosti u E^2 i grupa konformne simetrije rozeta (konačnih i beskonačnih) u $E^2 \setminus \{0\}$. S obzirom da u sadašnjem trenutku razvoja teorije antisimetrije i višestruke antisimetrije jedan od aktuelnih problema predstavlja razrada novih metodskih pristupa, izgradnja novih metoda generisanja grupa antisimetrije direktno iz grupa simetrije, cilj rada je prezentiranje jedne ovakve nove univerzalne metode, zasnovane na apstraktnim(generatorskim) definicijama grupa simetrije(prezentacijama).

U Poglavlju 1. date su definicije(1.1., 1.2), centralne teoreme(1.1., 1.2., 1.3.), kao osnovne teorijske postavke ove metode, koja počiva na uvođenju novog pojma antisimetrijske karakteristike(Definicija 1.2.) , egzistencijalnom kriterijumu za grupe tipa M^m(Teorema 1.1.) i centralnoj teoremi(Teorema 1.2.), koja omogućava registrovanje pojave identičnih grupa tipa M^m generisanih nekom grupom simetrije G i eliminaciju ponovljenih grupa uočavanjem grupa antisimetrije i višestruke antisimetrije tipa M^m sa jednakim antisimetrijskim karakteristikama.

Navedene teorijske postavke date u Poglavlju 1. praktično su korišćene za određivanje antisimetrijskih karakteristika svih grupa simetrije u E^2 i $E^2 \setminus \{0\}$ i izvođenje kataloga svih grupa antisimetrije i višestruke antisimetrije tipa M^m u E^2 i $E^2\setminus\{0\}$: antisimetrijskih rozeta(Poglavlje 2.), bordura(Poglavlje 3.), ornamenata(Poglavlje 4.), rozeta simetrije sličnosti u E^2(Poglavlje 5.) i rozeta konforsimne simetrije u $E^2\setminus\{0\}$(Poglavlje 6.). Veći broj grupa simetrije dat je pomoću dve ili tri različite prezentacije. Ekvivalentne teoreme, koje se odnose na antisimetrijske karakteristike ovakvih grupa date su pod istim brojem, razdvojene na ekvivalentna tvrđenja označena sa a), b), c), čija ekvivalentnost u svakom pojedinačnom slučaju nije posebno naglašavana.

Izvođenje grupa antisimetrije i višestruke antisimetrije ilustrovano je na primeru bordura(Poglavlje 3). Kod grupa simetrije datih pomoću dve ili tri različite prezentacije, ovaj princip je očuvan i u okviru kataloga grupa antisimetrije i višestruke antisimetrije. Izvođenjem kataloga grupa antisimetrije i višestruke antisimetrije u E^2 i $E^2\setminus\{0\}$ kompletirana je i zaključena teorija grupa antisimetrije i višestruke antisimetrije u E^2 i $E^2\setminus\{0\}$.

U završnom poglavlju(Poglavlje 7.) dat je pokušaj sintetskog osvrta na ostvarene rezultate i ukazivanja na potencijalne teorijske i praktične primene predložene univerzalne metode na izvođenje proizvoljnih(izometrijskih, neizometrijskih, krivolinijskih...) grupa antisimetrije i višestruke antisimetrije tipa M^m. Pošto je navedena metoda primenljiva na sve grupe simetrije čiju apstraktnu definiciju(prezentaciju) i geometrijsku strukturu(u smislu mogućnosti određivanja antisimetrijske karakteristike) poznajemo, primene ove metode će biti ograničene isključivo domenom znanja iz oblasti klasične teorije simetrije. Ovo ujedno predstavlja razlog dodeljivanja predloženoj novoj metodi generisanja grupa antisimetrije i višestruke antisimetrije naziva: univerzalna metoda. U zaključnom poglavlju takođe su sugerirane neke od mogućih interpretacija grupa antisimetrije i višestruke antisimetrije u sferi nauke i umetnosti.

Novi pojmovi e′-enantiomorfizma i e′-invarijantnosti, uvedeni u Poglavlju 2.(Definicija 2.1., 2.2.), čija je komplementarnost dokazana u Teoremi 2.3. prošireni su u narednim poglavljima na sve grupe antisimetrije i višestruke antisimetrije.

Polazeći od postavke da vizuelne interpretacije(mozaici) grupa antisimetrije i višestruke antisimetrije predstavljaju najeksplicitniji vid njihovog modelovanja i pružaju mogućnosti za raznovrsne praktične primene(fizika čvrstog tela, kristalografija...), sve dobijene grupe antisimetrije i višestruke antisimetrije mogu biti snabdevene mozaičkim vizuelizacijama, zasnovanim na metodi i oznakama predloženim u Poglavlju 1.

Kao prilog ovom radu dat je kraći ilustrovani pregled mozaičkih prikaza grupa antisimetrije bordura tipa M^1, koji se javljaju u istoriji umetnosti, potkrepljujući misao H.Veila da "ornamentika predstavlja najstariji vid više matematike izražen u implicitnoj formi(H.Weyl, 1952.).

Kao neposredni izvori ideja za nastanak ovog rada poslužili su članci sovjetskih autora objavljeni u časopisu "Kristalografija", monografija A.M.Zamorzajeva(1976.) i monografija(H.S.M.Coxeter, W.O.J.Moser 1972.).

U odnosu na redosled izlaganja i korišćenu simboliku rad u potpunosti prati sistematizaciju i način obeležavanja korišćen u radu(S.Jablan 1981.), što omogućava komparaciju generišućih grupa simetrije i odgovarajućih izvedenih grupa antisimetrije i višestruke antisimetrije tipa M^m, njihovih geometrijskih i vizuelnih svojstava.

Zahvalnost dugujem Dr D.Lopandiću, profesoru Prirodno-matematičkog fakulteta u Beogradu, za višegodišnju inspirativnu podršku mojim istraživanjima, mentoru Dr N.Stojković, docentu Prirodno-matematičkog fakulteta u Beogradu i Dr A.F.Palistrantu, profesoru univerziteta "V.I.Lenjin" u Kišinjovu, čije su primedbe omogućile preciziranje i korigovanje izvesnih elemenata ovog rada.

U Beogradu, Slavik Jablan

20.04.1984.

Univerzalna metoda generisanja grupa antisimetrije i višestruke antisimetrije

Definicija 1.1. Grupe $\check{S}_1$ i $\check{S}_2$ tipa M^m za fiksirano m su jednake ako postoji izomorfizam koji prevodi transformacije grupe $\check{S}_1$ u transformacije grupe $\check{S}_2$ ekvivalentne u simetrijskom i antisimetrijskom pogledu(A.M.Zamorzajev, 1976.).

Teorema 1.1.(egzistencijalni kriterijum za grupe tipa M^m) Grupa antisimetrije ili višestruke antisimetrije G' biće tipa M^m za fiksirano m:

a) ako sve relacije date u okviru prezentacije grupe G ostaju zadovoljene posle zamene generatora antigeneratorima i

b) ako se antisimetrija proizvoljnog roda može dobiti u okviru grupe antisimetrije G' kao samostalna simetrijska transformacija.

Dokaz: a) Posle zamene generatora antigeneratorima svaka od relacija (1), imajući u vidu (2) daje:

$$g_n(S_1',S_2',\ldots,S_p')=e^{n_0}e_1^{n_1}\ldots e_{m-1}^{n_{m-1}}\ g_n(S_1,S_2,\ldots,S_p)=$$

$$=e^{n_0}e_1^{n_1}\ldots e_{m-1}^{n_{m-1}} \quad n_i\in\{0,1\}\ i=0,1,\ldots,m-1 \quad n=1,2,\ldots s$$

Ako bi neki od elemenata n_i bili jednaki jedinici, proizvod odgovarajućih antiidentiteta bio bi član grupe G', te ona ne bi mogla biti tipa M^m. Zato mora biti:

$$e^{n_0}e_1^{n_1}\ldots e_{m-1}^{n_{m-1}}=E,\ \text{tj.}\ g_n(S_1',S_2',\ldots,S_p')=E \quad n=1,2,\ldots,s$$

b) Ukoliko neki antiidentiteti različitih rodova, npr. e_i i e_j nisu razdvojivi, tada postoji mogućnost zamene $e^*=e_ie_j$ ($e^{*2}=E$), te dobijena grupa nije tipa M^m za fiksirano m, nego je nižeg ranga antisimetrije.

Obratno, ukoliko važe relacije $g_n(S_1',S_2',\ldots,S_p')=E$

$n=1,2,...,s$ grupa G' je izomorfna sa G, a s obzirom na razdvojivost svih m antiidentiteta, ona je tipa M^m za fiksirano m.

Problem eliminacije istih grupa tipa M^m za fiksirano m rešava se u skladu sa Definicijom 1.1. Identifikacija istih grupa tipa M^m za fiksirano m svodi se na uočavanje svih izomorfizama grupa tipa M^m u kojima transformacije ekvivalentne u simetrijskom i antisimetrijskom pogledu međusobno korespondiraju.

Definicija 1.2. Neka su formirani svi proizvodi generatora grupe G u okviru kojih svaki generator učestvuje maksimalno jednom, a zatim izdvojeni podskupovi transformacija ekvivalentnih u simetrijskom pogledu(algebarski i geometrijski ekvivalentnih simetrijskih transformacija). Dobijeni sistem nazivamo antisimetrijskom karakteristikom grupe G.

Teorema 1.2. Dve grupe antisimetrije ili višestruke antisimetrije G_1' i G_2' tipa M^m za fiksirano m jednake su ako i samo ako poseduju jednake antisimetrijske karakteristike.

Dokaz: Formiranje svih proizvoda generatora grupe G i razbijanje na klase transformacija ekvivalentnih u simetrijskom pogledu omogućava proučavanje svih automorfizama grupe G, koji čuvaju simetrijsku ekvivalentnost transformacija. Međutim, s obzirom na relacije (2) za uočavanje izomorfizama koji zadovoljevaju Definiciju 1.1. dovoljno je posmatranje klasa u kojima svaki od generatora učestvuje maksimalno jednom.

Pored navedenih, za izvođenje grupa antisimetrije i višestruke antisimetrije koriste se tvrđenja:

Teorema 1.3. Grupe tipa M izvode se iz grupa simetrije G. Sve grupe tipa M^m za fiksirano m izvode se u okviru iste familije iz grupa tipa M^{m-1}, $2 \leq m \leq L$.

Dokaz: Pretpostavimo suprotno, tj. da se neka grupa tipa M^m izvodi iz grupe tipa $S^{k_1}M^{m_1}$, $k_1+m_1 \leq m-1$ ili grupe tipa S^{k_2}, $k_2 \leq m-1$. U tom slučaju u sastav grupe tipa M^m morao bi ući kao samostalni element antiidentitet koji je kao samostalni element ulazio u sastav grupe $S^{k_1}M^{m_1}$ ili grupe S^{k_2}, što je protivno pretpostavci da je izvedena grupa tipa M^m, pošto kao grupa mlađa po svim rodovima ne može sadržati antiidentitete kao samostalne elemente.

Teorema 1.4. Grupe simetrije sa izomorfnim antisimetrijskim karakteristikama generišu jednak broj grupa tipa M^m za svako m, $1 \leq m \leq L$.

Teorema 1.4. dokazuje se trivijalno indukcijom po m.

Posledica 1.1. Izvođenje grupa antisimetrije i višestruke antisimetrije tipa M^m moguće je svesti na izvođenje svih grupa tipa M^m koje poseduju neizomorfne antisimetrijske karakteristike.

Umesto kompletne antisimetrijske karakteristike u praksi je znatno pogodnije korišćenje njenog redukovanog ekvivalenta, redukovane antisimetrijske karakteristike. U okviru antisimetrijske karakteristike skupovi proizvoda generatora grupe G, formirani u skladu sa Definicijom 1.2., ekvivalentnih u geometrijskom i algebarskom pogledu nalaziće se u zagradama, pri čemu nadvučena linija označava komutiranje elemenata u zagradi. Kao pravila pomoću kojih se vrši svođenje antisimetrijske karakteristike na redukovani oblik služe sledeće relacije:

a) $(S_1)(S_2)(S_1S_2)=(S_1)(S_2)$

b) $(\overline{S_1,S_2})(S_1S_2)=(\overline{S_1,S_2})$

c) $(S_1)(\overline{S_2,S_1S_2})=(S_1)(S_2(\overline{E,S_1}))=(\overline{S_2,S_1S_2})$

d) $(\overline{S_1,S_2,S_3})(\overline{S_1,S_2,S_3,S_4})=(\overline{S_1,S_2,S_3,S_4})$

e) $(\overline{E,S})=(S)$

f) $(\overline{S_1(\overline{S_3,S_4}),S_2(\overline{S_3,S_4})})=(\overline{(\overline{S_1,S_3}),(\overline{S_2,S_4})})$

g) $(\overline{S_1,S_2})(\overline{S_3,S_4})=(\overline{S_1S_3,S_2S_3,S_1S_4,S_2S_4})$

Značenja ovih relacija su sledeća:

a) ukoliko dve grupe antisimetrije ili višestruke antisimetrije imaju poznate antisimetrijske tipove simetrija S_1 i S_2 , onda moraju imati i poznat tip izraza S_1S_2; b) poznavanjem antisimetrijskog tipa izraza S_1, S_2, datih proizvoljnim poretkom, poznajemo i antisimetrijski tip izraza S_1S_2; c) s obzirom na izomorfizam izraza S_1 i

(E,S_1): $(e') \longleftrightarrow (E,e')$, $(E) \longleftrightarrow (E,E)$, dovoljan uslov je $(\overline{S_2,S_1S_2})$; d) uslov $(\overline{S_1,S_2,S_3})$ sadržan je u uslovu $(\overline{S_1,S_2,S_3,S_4})$; e) u skladu sa izomorfizmom $(E,e') \longleftrightarrow (e')$, $(E,E) \longleftrightarrow (E)$, dovoljan uslov je (S); f) ekvivalencija simetrija S_3,S_4 i klasa $(\overline{S_1S_3,S_1S_4})$, $(\overline{S_2S_3,S_2S_4})$ potreban je i dovoljan uslov za ekvivalenciju simetrija S_1,S_2 među sobom i klasa $(\overline{S_1,S_2})$,$(\overline{S_3,S_4})$; g) proizvodi simetrijski ekvivalentnih elemenata su simetrijski ekvivalentni. Sve relacije, korišćene za redukovanje antisimetrijskih karakteristika posledice su navedenih relacija.

U praktičnom postupku generisanja grupa antisimetrije i višestruke antisimetrije u okviru antisimetrijskih karakteristika navođeni su samo antiidentiteti (proizvodi antiidentiteta) koji odgovaraju generatorima.

Za obeležavanje grupa antisimetrije i višestruke antisimetrije korišćena je simbolika tipa 0-1. Prisustvo antiidentiteta i-tog roda ($1 \leq i \leq m$) u okviru antigeneratora označavano je brojem 1 na i-toj poziciji posmatrano sa desna. Predložena 0-1 simbolika u potpunosti korespondira sa simbolikom koju koriste sovjetski naučnici (A.M.Zamorzajev, A.F.Palistrant, E.I.Galjarskij...), pri čemu npr. u sistemu oznaka antisimetrijskih bordura(A.F.Palistrant, A.M. Zamorzajev, 1964.) indeksu 1 odgovara oznaka ′ (npr. $m_1 = m'$), indeksu 01 odgovara oznaka $*$ (npr. $m_{01} = m^*$), indeksu 001 oznaka ^(npr. $m_{001} = \hat{m}$), dok se svi ostali indeksi mogu interpretirati kao kombinacije navedenih oznaka(npr. $m_{111} = {}^*\hat{m}'$, $m_{11} = {}^*m'$) i sl.

Pod pojmom antisimetrijskog tipa generatora S' smatraćemo antiidentitet e' koji odgovara navedenom antigeneratoru ($S'=e'S$), gde je e' proizvod antiidentiteta e_j ($j\in\{0,1,2,\dots,L-1\}$). Svakoj transformaciji e' moguće je dodeliti oznaku u sistemu 0-1. Predloženi sistem 0-1 oznaka omogućava nam da uvedemo efektivni kriterijum razdvojivosti antiidentiteta:

Neka su $e'_1,e'_2,\dots,e'_k$ 0-1 oznake svih različitih antisimetrijskih tipova generatora grupe G'. Sistem generatora grupe G' zadovoljava uslov razdvojivosti L antiidentiteta $e,e_1,e_2,\dots,e_{L-1}$ ako i samo ako shema:

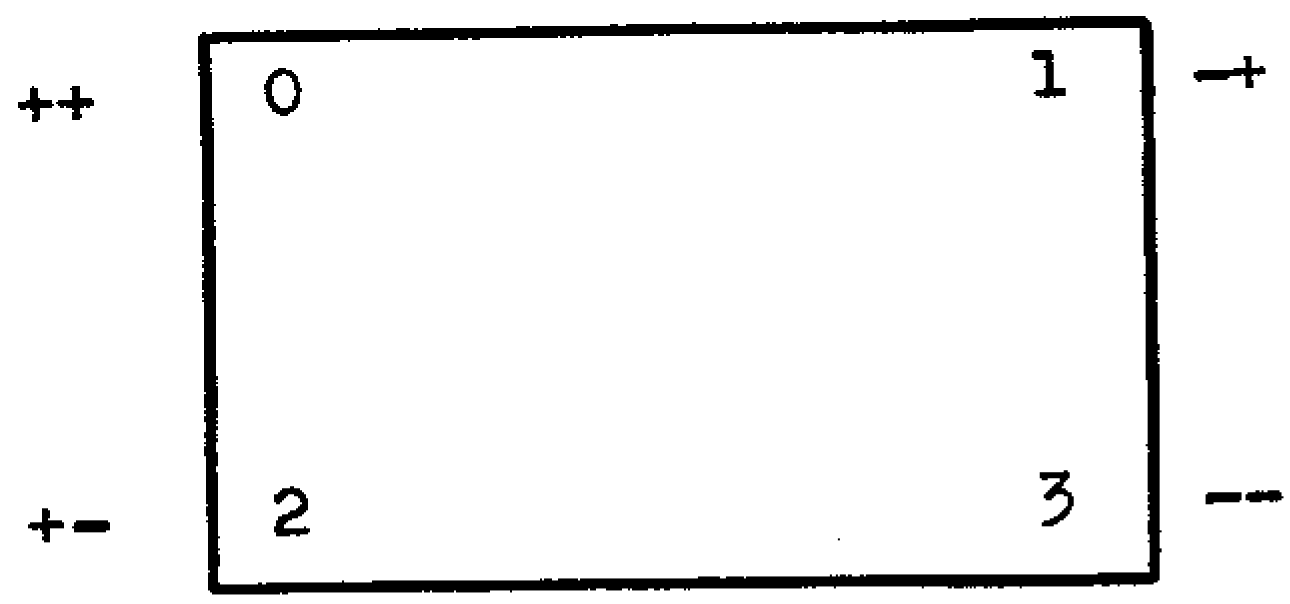
$$\begin{bmatrix} e'_1 \\ e'_2 \\ \vdots \\ e'_k \end{bmatrix}$$

sadrži kvadratnu podshemu ekvivalentnu sa shemom tipa $\begin{bmatrix} 0\dots01 \\ 0\dots10 \\ \dots\dots \\ 10\dots0 \end{bmatrix}$ (dijagonalnom shemom) dimenzije L, pri čemu pod dozvoljenim transformacijama polazne sheme smatramo: a) zamenu mesta horizontalnih redova i b) sabiranje horizontalnih redova po modulu 2. Uslovi a)b) očigledno predstavljaju transformacije koje ne narušavaju ekvivalentnost sheme, tj. uslova razdvojivosti antiidentiteta, s obzirom da uslovu a) odgovara različit redosled navođenja izraza $e'_1,e'_2,\dots,e'_k$, a uslovu b) relacije $e_j^2=E$ $j\in\{0,1,2,\dots L-1\}$.

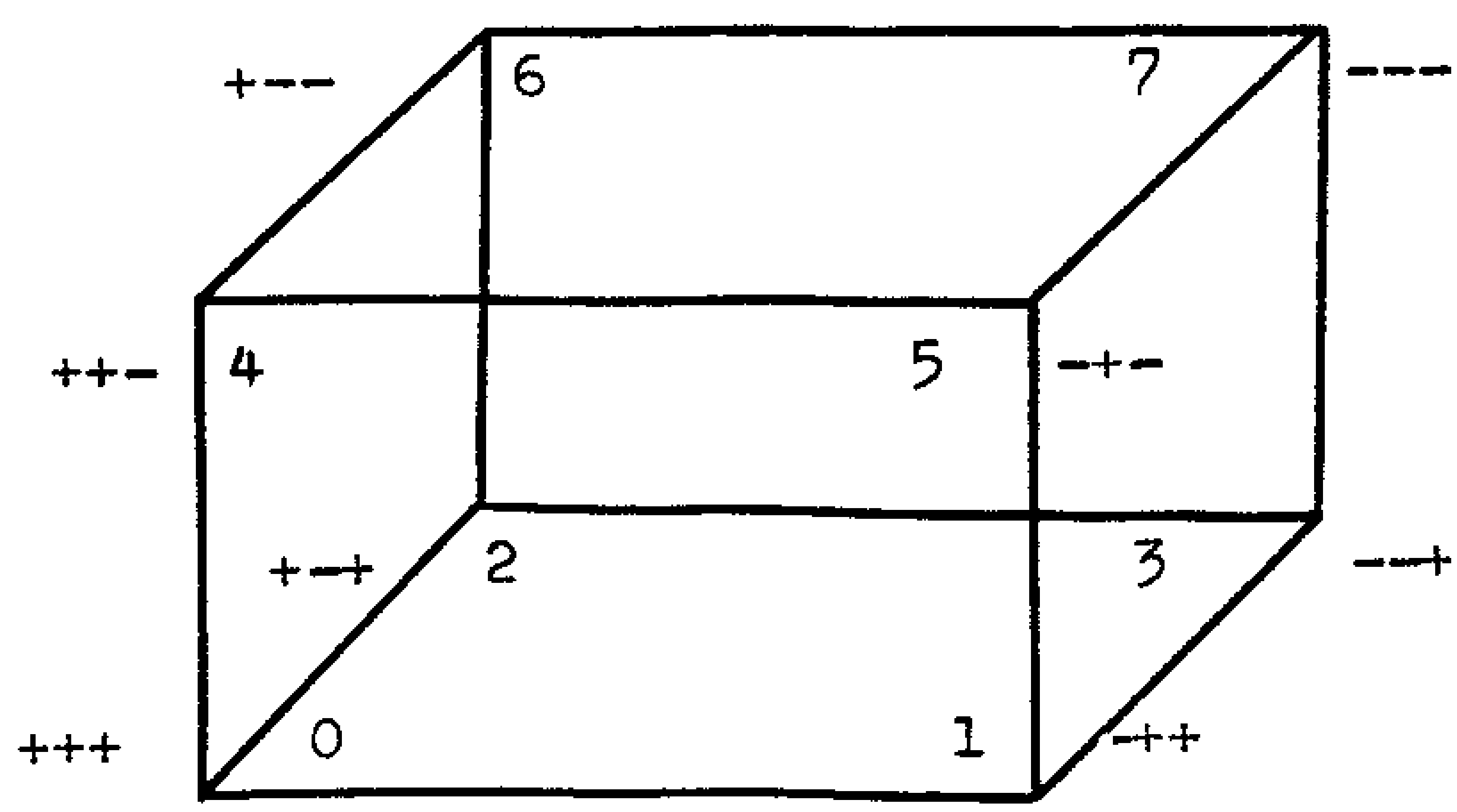
Nula-jedan simbolika grupa antisimetrije i višestruke antisimetrije tipa M^m ujedno omogućava uvođenje veoma efikasne metode vizuelizacije navedenih grupa pomoću mozaika, korišćenjem prevođenja oznaka generatora grupe G'

čitanih sa desna na levo, iz dualnog u desetični brojni sistem, uz poštovanje relacija (2).

Pod ovim uslovom na mozaicima grupa antisimetrije tipa M^1 brojem 0 označeni su delovi mozaika sa znakom +, a brojem 1 delovi mozaika sa znakom – . Smisao brojeva 0,1,2,3 u okviru mozaika grupa tipa M^2 očitava se iz sheme (A.M.Zamorzajev, E.I.Galjarskij,A.F.Palistrant, 1978., str. 50.):



Smisao brojeva 0,1,2,3,4,5,6,7 u okviru mozaika grupa tipa M^3 pogodno se sagledava iz sheme(po ideji A.F.Palistranta):



Analogno, interpretacija brojeva 0,1,2,...,15 u okviru grupa tipa M^3 data je shemom:

++++	0000	0	+++−	0001	8
−+++	1000	1	−++−	1001	9
+−++	0100	2	+−+−	0101	10
−−++	1100	3	−−+−	1101	11
++−+	0010	4	++−−	0011	12
−+−+	1010	5	−+−−	1011	13
+−−+	0110	6	+−−−	0111	14
−−−+	1110	7	−−−−	1111	15

tj. čitanjem sa desna na levo antisimetrijskih tipova generatora i njihovim prevođenjem sa dualnog u desetični brojni sistem.

U skladu sa relacijama (2), u grupama $E^{(L)}=\{e\}x\{e_1\}x...x\{e_{L-1}\}$ važiće sledeće tablice:

$E^{(1)}$

	0	1
0	0	1
1	1	0

$E^{(2)}$

	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	0	3	2
2	2	3	0	1
3	3	2	1	0

$E^{(3)}$

	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	1	2	3	4	5	6	7
1	1	0	3	2	5	4	7	6
2	2	3	0	1	6	7	4	5
3	3	2	1	0	7	6	5	4
4	4	5	6	7	0	1	2	3
5	5	4	7	6	1	0	3	2
6	6	7	4	5	2	3	0	1
7	7	6	5	4	3	2	1	0

$E^{(4)}$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	1	0	3	2	5	4	7	6	9	8	11	10	13	12	15	14
2	2	3	0	1	6	7	4	5	10	11	8	9	14	15	12	13
3	3	2	1	0	7	6	5	4	11	10	9	8	15	14	13	12
4	4	5	6	7	0	1	2	3	12	13	14	15	8	9	10	11
5	5	4	7	6	1	0	3	2	13	12	15	14	9	8	11	10
6	6	7	4	5	2	3	0	1	14	15	12	13	10	11	8	9
7	7	6	5	4	3	2	1	0	15	14	13	12	11	10	9	8
8	8	9	10	11	12	13	14	15	0	1	2	3	4	5	6	7
9	9	8	11	10	13	12	15	14	1	0	3	2	5	4	7	6
10	10	11	8	9	14	15	12	13	2	3	0	1	6	7	4	5
11	11	10	9	8	15	14	13	12	3	2	1	0	7	6	5	4
12	12	13	14	15	8	9	10	11	4	5	6	7	0	1	2	3
13	13	12	15	14	9	8	11	10	5	4	7	6	1	0	3	2
14	14	15	12	13	10	11	8	9	6	7	4	5	2	3	0	1
15	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0

U narednim poglavljima definicije 1.1., 1.2., centralne teoreme 1.1, 1.2.,1.3.,1.4. i posledica 1.1. biće korišćene za izvođenje svih antisimetrijskih karakteristika pojedinačnih grupa simetrije i izvođenje kompletnog kataloga svih grupa antisimetrije i višestruke antisimetrije u E^2 i $E^2\setminus\{0\}$, čime je u potpunosti završena i kompletirana teorija grupa antisimetrije i višestruke antisimetrije u E^2 i $E^2\setminus\{0\}$.

Sve grupe antisimetrije i višestruke antisimetrije mogu biti prikazane vizuelno u vidu mozaika grupa antisimetrije i višestruke antisimetrije u sistemu oznaka uvedenom u ovom poglavlju.

Grupe antisimetrije i višestruke antisimetrije biće označavane 0-1 varijantom Šubnjikovske simbolike, Internacionalne simbolike i prilagođene Šubnjikovske simbolike.

Sve ostale moguće primene predložene univerzalne metode generisanja grupa antisimetrije i višestruke antisimetrije biće detaljnije analizirane u okviru Poglavlja 7.

Grupe antisimetrije i višestruke antisimetrije jednostranih rozeta

Apstraktne definicije(prezentacije) grupa simetrije jednostranih rozeta C_n, D_n, koje se javljaju u svojstvu generišućih grupa antisimetrije i višestruke antisimetrije jednostranih rozeta date su u radu(H.S.M.Coxeter, W.O. J.Moser, 1972., str.6).

Teorema 2.1.: Antisimetrijska karakteristika grupe C_n, generisane rotacijom S, date prezentacijom:

C_n (S) $S^n=E$ je (S) . Grupa C_n generiše grupe antisimetrije tipa M^1, $n=2k$. Za $L\geq 2$ grupa C_n ne generiše grupe višestruke antisimetrije tipa M^L.

Dokaz: Na osnovu Definicije 1.2. antisimetrijska karakteristika grupe C_n, generisane jednim generatorom, rotacijom S biće (S).

U skladu sa Teoremom 1.1.a) iz relacija: $(eS)^n=e^nS^n=e^n=E$ sledi $n=2k$. Za $L\geq 2$ grupa C_n, u skladu sa Teoremom 1.1.b) ne generiše grupe tipa M^L, pošto nije zadovoljen uslov razdvojivosti antiidentiteta.

Teorema 2.2.a) Grupa D_n, generisana refleksijama R_1, R , data prezentacijom:

D_n (R_1, R) $R_1^2=R^2=(R_1R)^n=E$ ima antisimetrijsku karakteristiku $(\overline{R_1, R})$ (R_1R) , koja dozvoljava redukovanje na oblik $(\overline{R_1, R})$. Grupa D_n generiše grupe antisimetrije tipa M^1, M^2. Ukoliko su antirefleksije R_1', R'

različitog tipa važi uslov n=2k. Za $L \geq 3$ grupa D_n ne generiše grupe višestruke antisimetrije tipa M^L.

Teorema 2.2.b): Grupa D_n, generisana refleksijom R i rotacijom S, data prezentacijom:

D_n (S,R) $S^n=R^2=(SR)^2=E$ ima antisimetrijsku karakteristiku $(\overline{R,SR})(S)$, koja dozvoljava redukovanje na oblik $(\overline{R,SR})$. Zamena rotacije S antirotacijom S′ dozvoljena je pod uslovom n=2k. Grupa D_n generiše grupe antisimetrije tipa M^1, M^2. Za $L \geq 3$ grupa $D_n$ne generiše grupe višestruke antisimetrije tipa M^L.

Dokaz: a) Svi proizvodi generatora grupe D_n, formirani u skladu sa Definicijom1.2.mogu se podeliti u dve neekvivalentne klase: refleksije R_1,R i rotaciju R_1R. S obzirom na algebarsku i geometrijsku ekvivalentnost refleksija R_1,R antisimetrijska karakteristika grupe D_n je $(\overline{R_1,R})(R_1R)$. S obzirom da važi relacija: $(\overline{R_1,R})(R_1R)=(\overline{R_1,R})$, antisimetrijska karakteristika grupe D_n, date navedenom prezentacijom dozvoljava svođenje na redukovani oblik: $(\overline{R_1,R})$

Na osnovu relacija: $(e_1'R_1)^2=(e_2'R)^2=(e_1'R_1e_2'R)^n=E$ $(e_1'R_1e_2'R)^n=(e_1'e_2')^n(R_1R)^n=(e_1'e_2')^n=E$ sledi $e_1'=e_2'$ ili n=2k, gde su e_1' i e_2' proizvodi odgovarajućih antiidentiteta koji korespondiraju antirefleksijama R_1' i R′, pa antirefleksije R_1' i R′ moraju biti istog tipa ili važi n=2k.

Pošto je grupa D_n generisana sa dva generatora, pod navedenim uslovima ona generiše grupe antisimetrije tipa M^1, M^2. Za $L\geq 3$, na osnovu Teoreme 1.1.b) grupa D_n ne generiše grupe višestruke antisimetrije tipa M^L, pošto se ne može realizovati uslov razdvojivosti antiidentiteta.

b) Ekvivalentnost teorema 2.2.a) i 2.2.b) direktno sledi iz relacije $R_1=SR$. Iz relacije $S^n=E$ sledi $n=2k$.

Kompletno izvođenje grupa antisimetrije i višestruke antisimetrije jednostranih rozeta tipa M^1, M^2 ostvaruje se u skladu sa teoremama 1.1., 1.2., 1.3., 2.1. i 2.2. U cilju kraćeg označavanja u okviru antisimetrijskih karakteristika pogodno je navoditi isključivo proizvode antiidentiteta koji odgovaraju antigeneratorima, bez navođenja odgovarajućih simetrijskih generatora. Iz izvođenja grupa antisimetrije direktno je moguće evidentiranje ponovljenih grupa, tj. različitih kompozicija antigeneratora koje daju iste grupe antisimetrije. Rezultati izvođenja pregledno se prezentiraju u katalogu koji sadrži isključivo različite grupe antisimetrije i višestruke antisimetrije. Sve pomenute grupe antisimetrije tipa M^L vizuelno se prikazuju u vidu mozaika.

Kao rezultat izvođenja dobijene su beskonačne klase grupa antisimetrije i višestruke antisimetrije jednostranih rozeta, bez kristalografskih ograničenja, čiji je broj dat u tabeli u kojoj je naznačena generišuća grupa, broj klasa tipa M^1 i M^2 generisanih datom grupom i ukupan broj antisimetrijskih rozeta tipa M^1 i M^2.

	M^1	M^2
C_n	1	
D_n	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{3}$

Za obeležavanje grupa antisimetrije i višestruke antisimetrije jednostranih rozeta korišćena je 0-1 varijanta Šubnjikovske simbolike. Označavanje grupa antisimetrije tipa M^m pomoću Kopcikove višečlane simbolike grupa antisimetrije vrši se u skladu sa principom navedenim u (Zamorzajev, 1976., str.105.).

Predloženi princip ilustruje primer grupe $(2k)_{01}m_1$ tipa M^2, generisane skupom generatora (ee_1R,eR_1). Eliminacijom antiidentiteta e_1 , e respektivno, dobijaju se redom grupe (eR,eR_1), (e_1R,R_1). Grupi (eR,eR_1) korespondira simetrijska podgrupa indeksa 2,(RR_1) oblika C_{2k}, a grupi (e_1R,R_1) simetrijska podgrupa indeksa 2, $(RR_1R,\ R_1)$ oblika D_k. Samoj grupi $(2k)_{01}m_1$ datoj prezentacijom (ee_1R,eR_1) odgovara simetrijska podgrupa indeksa 4, generisana generatorom $(RR_1)^2$, oblika C_k. U skladu sa ovim grupi $(2k)_{01}m_1$ može se dodeliti Kopcikov višečlani simbol $D_{2k}/(C_{2k},D_k)/C_k$.

Većina izvođenja grupa antisimetrije jednostranih rozeta bila je realizovana u okviru izvođenja grupa $G^1_{3,0}$, 0-dimenzionih punktualnih grupa antisimetrije u E^3. Grupe antisimetrije jednostranih rozeta tipa M^1 zastupljene su u radovima(Heesch, 1930., Šubnjikov, 1951., B.A.Tavger i V.M.Zajcev, 1956.,V.L.Idenbom, 1959.). U radovima škole Bjelova antisimetrijske jednostrane rozete izvedene su i korišćene u cilju izvođenja crno-belih ornamenata superponiranjem grupa antisimetrije jednostranih rozeta sa antisimetrijskim Braveovim rešetkama. Navedene grupe tipa M^1 javljaju se i u radovima naučnika iz Kišinjova i koriste se za izvođenje grupa višestruke antisimetrije.

Grupe višestruke antisimetrije jednostranih rozeta tipa M^2 generisane su u radovima(A.M.Zamorzajev i E.I. Sokolov, 1957., E.I.Galjarskij i A.M.Zamorzajev, 1963., A.M.Zamorzajev, 1976.). Pored izvođenja koja ostvaruju kišinjovski autori, u radovima(A.M.Zamorzajev, 1963., 1976.) date su formule koje omogućavaju izračunavanje broja grupa antisimetrije i višestruke antisimetrije: $C(L,k,m)$- broja vidova grupa tipa S^kM^m i P_L- broja svih različitih grupa date klase:

$$C(L,k,m)=\frac{(2^L-1)(2^{L-1}-1)\cdots(2^{L-k+1}-1)}{(2^k-1)(2^{k-1}-1)\cdots(2-1)(2^m-1)(2^{m-1}-1)\cdots(2-1)}$$

$P_L=\sum_{m=0}^{L}(\sum_{k=0}^{L-m} C(L,k,m))N_m$, gde je N_m broj suštinski novih grupa tipa M^m(A.M.Zamorzajev, 1976., str. 86., 96.).

Različite simbolike (Šubnjikovska, Zamorzajevska, Kopcikova višečlana simbolika...) komparirane su u monografiji (A.M.Zamorzajev, 1976.).

Pregled podgrupa 0-dimenzionih punktualnih grupa antisimetrije tipa M^1 nalazi se u radovima (V.A.Kopcik, 1966., E.Ascher i A.Janner, 1965.).

U pogledu klasifikacije i uklapanja grupa antisimetrije i višestruke antisimetrije u opštu teoriju grupa simetrije značajni su radovi(W.T.Holser, 1961.,N.N.Neronova i N.V.Bjelov, 1961., N.N.Neronova, 1966.).

Problem enantiomorfizma, koji je poslužio kao jedna od inspiracija za uvođenje antisimetrije u delima Šubnjikova, može se diskutovati i u slučaju grupa antisimetrije. Pored klasičnog enantiomorfizma, u radu(A.V.Šubnjikov, 1961.) data je i ideja "označenog enantiomorfizma", mogućnosti da se antisimetričan lik transformiše u svoju enantiomorfnu modifikaciju pod dejstvom transformacije antiidentiteta e na sve tačke antisimetričnog lika.

U daljem tekstu označeni enantiomorfizam("značnij enantiomorfizam")(+) nazvaćemo antienantiomorfizmom tipa e. Sugerirana ideja dozvoljava uopštenje i uvođenje antienantiomorfizma različitih tipova, npr. tipa e, e_1, ee_1,... Lik ćemo nazvati **antienantiomorfnim likom** tipa e′ ako se njegova enantiomorfna modifikacija može dobiti dejstvom transformacije e′, proizvoda antiidentiteta e_j($j \in \{0,1,2,\dots,m\}$), na sve tačke lika.

U skladu sa navedenom definicijom, u okviru grupa antisimetrije i višestruke antisimetrije klasični(prosti) enantiomorfizam javlja se kod rozeta tipa $(2k)_1$, antienantiomorfizam tipa e kod rozeta tipa nm_1, grupe $(2k)_1m_{01}$ su antienantiomorfne tipa e_1 i ee_1, grupe $(2k)_{11}m_{01}$ su antienantiomorfne tipa e i e_1, a grupe $(2k)_{01}m_1$ tipa e i ee_1. Posmatranjem refleksija i antirefleksija koje ulaze u sastav neke grupe antisimetrije možemo ustanoviti zavisnost tipa enantiomorfizma(antienantiomorfizma) date

(+) A.V.Šubnjikov 1962.

grupe od njihovog karaktera i konstatovati da se enantiomorfizam ne javlja kod grupa u čiji sastav ulaze refleksije, da se enantiomorfizam javlja u grupama u čiji sastav ne ulaze refleksije ni antirefleksije, a da se u grupama u čiji sastav ulaze antirefleksije, bez prisustva refleksija javlja antienantiomorfizam čiji tip korespondira tipu navedenih antirefleksija.

Među različitim interpretacijama grupa antisimetrije i višestruke antisimetrije javlja se i mogućnost geometrijskih interpretacija. Prikazivanje dvostranosti korišćenjem crno-belih mozaika, koje je poslužilo kao osnov za uvođenje antisimetrije(H.Heesch, 1930.) diskutovano je u radovima(A.V.Šubnjikov, 1951., A.M.Zamorzajev, 1976.). Detaljna diskusija grupa antisimetrije i višestruke antisimetrije jednostranih rozeta i njihove primene za konstatovanje grupa antisimetrije i višestruke antisimetrije dvostranih rozeta zastupljena je u radu(A.F.Palistrant, 1965.). Promena znaka prve antisimetrijske koordinate, dejstvo antiidentiteta e, u okviru grupe L-struke antisimetrije tretirano je kao promena znaka geometrijske koordinate ortogonalne u odnosu na ravan rozete, posmatrano u E^3. Navedeni postupak, uzimanje znaka prve antisimetrijske koordinate kao indikatora položaja tačke sa jedne ili druge strane invarijantne ravni rozete, a preostalih L-1 antiidentiteta kao vangeometrijskih svojstava omogućava direktno evidentiranje dvostranih antisimetrijskih rozeta tipa L-1 na osnovu kataloga jednostranih antisimetrijskih rozeta tipa L. Navedena interpretacija grupama antisimetrije jednostranih rozeta tipa M^1: $(2k)_1$, $(2k)_1m$, nm_1 dodeljuje redom grupe simetrije dvostranih rozeta: $(\widetilde{2k})$, $(\widetilde{2k})m$ i n:2. Ostale grupe simetrije dvostranih rozeta izvode se iz grupa simetrije jednostranih rozeta C_n,D_n kao antisimetrijske grupe tipa S^1 date direktnim proizvodima: $C_n x\{e\}$, $D_n x\{e\}$, kojima odgovaraju respektivno grupe simetrije dvostranih rozeta n:m, mn:m(date u Šubnjikovskim oznakama). Analogno razmatranje primenjeno na grupe višestruke antisimetrije jednostranih rozeta, L=2, daje grupe antisimetrije dvostranih rozeta.

Slične diskusije o geometrijskim primenama antisimetrije mogu se posmatrati u radovima Šubnjikova, koji pri izvođenju 0-dimenzionih punktualnih grupa simetrije, primenom antisimetrije, vrši identifikaciju antiidentiteta e sa inverzijom.

Fizičke interpretacije antisimetrije zastupljene su u radovima B.A.Tavgera i V.M.Zajceva(1956.), V.A.Kopcika (1967.), pri diskusiji problematike CPT-invarijantnosti sa stanovišta grupa višestruke antisimetrije(Zamorzajevskih grupa) i L.A.Šuvalova(1962.), koji kao interpretacije grupa antisimetrije proučava svojstva magnetnog momenta M i električkog momenta P. Pri tome je antiidentitet e uziman kao promena znaka aksijalnog vektora magnetnog momenta M, odnosno znaka polarnog vektora električnog momenta P. Kao jedan od značajnijih rezultata rada javlja se tvrđenje da se segneto-,antisegneto- i segnetielektrici realizuju isključivo u obliku mlađih grupa antisimetrije $G^1_{3,0}$ tipa M^1 i izvođenje 122 punktualne kristalografske električne klase, koje odgovaraju antisimetrijskim klasama 0-dimenzionih punktualnih kristalografskih grupa. Kombinovana magneto-električna simetrija može biti interpretirana pomoću Zamorzajevskih 0-dimenzionih kristalografskih grupa višestruke antisimetrije tipa M^2.

Sve sugerirane interpretacije(crno-bele, geometrijske, fizičke...) predstavljaju samo različite oblike modeliranja apstraktne teorije grupa antisimetrije i višestruke antisimetrije.

Jedan od najznačajnijih modela grupa antisimetrije i višestruke antisimetrije su mozaičke vizuelizacije. Mozaici grupa antisimetrije jednostranih rozeta tipa M^1 dati su u radovima(A,V,Šubnjikov, 1951., V.A.Kopcik, 1966.), a mozaici grupa tipa M^2 u radu(E.I.Galjarskij, A.M.Zamorzajev, 1963.) i monografiji(A.M.Zamorzajev, 1976.).

U skladu sa metodom mozaičkog interpretiranja grupa antisimetrije i višestruke antisimetrije, predloženim u Poglavlju 1 moguće je realizovati katološki pregled mozaika mlađih grupa antisimetrije i višestruke antisimetrije jednostranih rozeta.

U istoriji ornamentike primeri grupa antisimetrije jednostranih rozeta tipa M^1 (crno-belih rozeta) zastupljeni su od najstarijih vremena, neolitskog perioda, javljajući se sa počecima dihromne keramike. Prisutne su sve tri klase antisimetrijskih rozeta tipa M^1. Postojanje kontrasta crno-belo omogućavalo je umetnicima da izraze koncepciju polarne dualnosti, shvaćenu u simboličkom smislu kao sukob i jedinstvo suprotnosti, dinamičku ravnotežu(pošto u okviru crno-belih, antisimetrijskih grupa postoji ravnomerna zastupljenost crnih i belih delova), ostvare razdvajanje susednih likova i prelazak sa ravanskog(plošnog) prikazivanja na sugestiju prostornosti, dubine. Nazivi pojedinih ornamentalnih motiva("jang-jin", "dan-noć", "voda-vazduh") svedoče o vizuelno-simboličkim značenjima koja im se dodeljuju, pri čemu antisimetrija predstavlja sredstvo za ostvarivanje kontrasta, dualiteta, dinamike, alterniranja. Neke od navedenih aspekata vizuelne funkcije antisimetrije moguće je pratiti u radovima (M.C.Escher, 1960., C.H.Macgillavry, 1976., A.V.Šubnjikov, V.A.Kopcik, 1972.).

Interesantan i aktuelan je problem graničnih grupa antisimetrije i višestruke antisimetrije jednostranih rozeta, diskutovan u odnosu na neprekidne grupe antisimetrije jednostranih rozeta tipa M^1, generisane graničnim grupama simetrije jednostranih rozeta $C_{\infty}(\infty)$ i $D_{\infty}(\infty m)$ u radu(A.V.Šubnjikov, 1958.) i monografiji(A.M.Zamorzajev, 1976), u kojoj je pokrenuto i pitanje graničnih grupa višestruke antisimetrije.

Generišuće grupe ∞ i ∞m daće grupe antisimetrije tipa M^1: ∞_1, $\infty_1 m$ i ∞m_1 i grupe antisimetrije tipa M^2: $\infty_1 m_{01}$, $\infty_{11} m_{01}$ i $\infty_{01} m_1$. Sve granične grupe antisimetrije i višestruke antisimetrije, pored fizičkih interpretacija, pružaju i mogućnost interpretiranja teksturnom metodom (A.V.Shubnikov, N.V.Belov and others, 1964.,str.161.). Diskusije pojave enantiomorfizma i antienantiomorfizma primenljive su i na granične grupe antisimetrije i višestruke antisimetrije jednostranih rozeta, pri čemu važe tvrđenja izvedena u odnosu na analogne grupe antisimetrije i višestruke antisimetrije jednostranih rozeta.

Pored mogućnosti antienantiomorfizma kod grupa antisimetrije i višestruke antisimetrije javlja se i mogućnost e′-invarijantnosti, gde pod ovim pojmom podrazumevamo invarijantnost lika u odnosu na dejstvo transformacije e′, proizvoda antiidentiteta e_j ($j\in\{0,1,2,\dots,m\}$), na sve tačke lika. Antisimetrijske rozete $(2k)_1$, $(2k)_1m$, $(2k)_1m_{01}$ su e-invarijantne, $(2k)_{01}m_1$ e_1-invarijantne, a rozete $(2k)_{11}m_{01}$ ee_1-invarijantne.

U daljem radu pokazaćemo komplementarnost ovako definisanih pojmova e′- invarijantnosti i e′-antienantiomorfizma

Definicija 2.1. Lik je e′-antienantiomorfan ako se pod dejstvom transformacije e′, proizvoda antiidentiteta e_j ($j\in\{0,1,2,\dots,m\}$), na sve tačke lika preslikava u svoju enantiomorfnu modifikaciju.

Definicija 2.2. Lik je e′-invarijantan ako se pod dejstvom transformacije e′, proizvoda antiidentiteta e_j ($j\in\{0,1,2,\dots,m\}$) preslikava identički u samog sebe.

Teorema 2.3. Neka je G′ grupa antisimetrije tipa M^m

koja odgovara nekom liku L. Tada je lik L ili e′-enantiomorfan ili e′-invarijantan.

Dokaz: Pod dejstvom transformacije e′, proizvoda antiidentiteta e_j ($j \in \{0,1,2,\ldots,m\}$), sve simetrijske i antisimetrijske transformacije iz grupe G′, koje odgovaraju liku L ostaju očuvane pa dobijeni lik e′L poseduje grupu antisimetrije G′. Prema tome, lik e′L je ili identičan sa likom L ili je njegova enantiomorfna modifikacija.

Pojavu e′-enantiomorfizma i e′- invarijantnosti moguće je uočiti posmatranjem dejstva transformacija e′ ne mozaike grupa antisimetrije i višestruke antisimetrije rozeta tipa M^L.

Grupe antisimetrije i više-
struke antisimetrije bordura

Apstraktne definicije(prezentacije)grupa simetrije bordura p1, pg, p2, p1m, pm, pgm, pmm koriščenih kao generišuće grupe grupa antisimetrije i višestruke antisimetrije bordura navedene su u radu(S.Jablan, 1981.).

Teorema 3.1. Antisimetrijska karakteristika grupe p1, generisane translacijom X, date prezentacijom: p1 (X) je (X). Grupa p1 generiše grupe antisimetrije tipa M^1. Za $L\geq 2$ grupa p1 ne generiše grupe višestruke antisimetrije tipa M^L.

Dokaz: Na osnovu Definicije 1.2. grupe p1, generisane jednim generatorom, translacijom X biće (X).

U skladu sa Teoremom 1.1. grupa p1 generiše grupe antisimetrije tipa M^1. Za $L\geq 2$ grupa p1, u skladu sa Teoremom 1.1.b) ne generiše grupe višestruke antisimetrije tipa M^L, pošto nije zadovoljen uslov razdvojivosti antiidentiteta.

Teorema 3.2. Antisimetrijska karakteristika grupe pg, generisane klizajućom refleksijom P, date prezentacijom: pg (P) je (P). Grupa pg generiše grupe antisimetrije tipa M^1. Za $L\geq 2$ grupa pg ne generiše grupe višestruke antisimetrije tipa M^L.

Dokaz Teoreme 3.2. analogan je dokazu Teoreme 3.1.

Teorema3.3.a)Antisimetrijska karakteristika grupe p2, generisane centralnim simetrijama(rotacijama reda 2) T, T_1, date prezentacijom:

p2 (T,T_1) $T^2=T_1^2=E$ je $(TT_1)(\overline{T,T_1})$ i dozvoljava redukovanje na oblik : $(\overline{T,T_1})$. Grupa p2 generiše grupe antisimetrije i višestruke antisimetrije tipa M^1, M^2. Za $L\geq 3$ grupa p2 ne generiše grupe višestruke antisimetrije tipa M^L.

Teorema 3,3.b) Antisimetrijska karakteristika grupe p2, generisane translacijom X i centralnom simetrijom T, date prezentacijom:
p2 (X,T) $T^2=(TX)^2=E$ je $(X)(\overline{T,TX})$ i dozvoljava redukovanje na oblik; $(\overline{T,TX})$. Grupa p2 generiše grupe antisimetrije i višestruke antisimetrije tipa M^1 i M^2. Za $L\geq 3$ grupa p2 ne generiše grupe višestruke antisimetrije tipa M^L.

Dokaz: a) Svi proizvodi generatora grupe p2, formirani u skladu sa Definicijom 1.2. mogu se podeliti u dve neekvivalentne klase: translaciju TT_1 i rotacije reda 2 (centralne simetrije) T,T_1. S obzirom na algebarsku i geometrijsku ekvivalentnost centralnih simetrija T,T_1 , antisimetrijska karakteristika grupe p2 je $(TT_1)(\overline{T,T_1})$.

S obzirom na važenje sledeće relacije : $(\overline{T,T_1})(TT_1)=\overline{(T,T_1)}$ navedena antisimetrijska karakteristika dozvoljava redukovanje na oblik : $(\overline{T,T_1})$. U skladu sa Teoremom 1.1. grupa p2 generiše grupe antisimetrije i višesruke antisimetrije tipa M^1, M^2, dok za $L\geq 3$ grupa p2 ne generiše grupe višestruke antisimetrije tipa M^L, pošto nije zadovoljen uslov razdvojivosti antigeneratora.

b) Ekvivalentnost Teorema 3.3.a) i 3.3.b) sledi direktno iz relacije $X=TT_1$.

Teorema 3.4. Antisimetrijska karakteristika grupe plm, generisane translacijom X i refleksijom R, date prezentacijom:

plm (X,R) $R^2=E$ XR=RX je (X)(R)(XR) i dozvoljava redukovanje na oblik (X)(R). Grupa plm generiše grupe antisimetrije i višestruke antisimetrije tipa M^1, M^2, u skladu sa Teoremom 1.1. Za $L\geq3$ grupa plm ne generiše grupe višestruke antisimetrije tipa M^L.

Dokaz: Svi proizvodi generatora grupe plm, formirani u skladu sa Definicijom 1.2., mogu se podeliti u tri neekvivalentne klase: translaciju X, refleksiju R i klizajuću refleksiju XR, te je antisimetrijska karakteristika grupe plm: (X)(R)(XR) i dozvoljava redukovanje na oblik (X)(R), s obzirom na ekvivalentnost uslova (X)(R)(XR) i (X)(R). U praksi, pri izvođenju grupa antisimetrije i višestruke antisimetrije, navođenje ovakve antisimetrijske karakteristike je suvišno, s obzirom na nezavisnost zamena generatora X,R antigeneratorima, pošto je ovakva antisimetrijska karakteristika sadržana u samom procesu izvođenja grupa antisimetrije i višestruke antisimetrije uopštenim metodom Šubnjikova-Zamorzajeva.

Grupa plm generiše grupe antisimetrije i višestruke antisimetrije tipa M^1, M^2, u skladu sa Teoremom 1.1., dok za $L\geq3$ grupa plm ne generiše grupe višestruke antisimetrije, u skladu sa Teoremom 1.1.b), pošto nije zadovoljen uslov razdvojivosti antiidentiteta.

Teorema 3.5.a) Antisimetrijska karakteristika grupe pm, generisane refleksijama R_1, R_2, date prezentacijom: pm (R_1,R_2) $R_1^2=R_2^2=E$ je $(R_1R_2)(\overline{R_1,R_2})$i dozvoljava redukovanje na oblik : $(\overline{R_1,R_2})$. Grupa pm generiše grupe antisimetrije i višestruke antisimetrije tipa M^1, M^2. Za $L\geq 3$ grupa pm ne generiše grupe višestruke antisimetrije tipa M^L.

Teorema 3.5.b) Antisimetrijska karakteristika grupe pm, generisane translacijom X i refleksijom R_1, date prezentacijom:
pm (X,R_1) $R_1^2=(R_1X)^2=E$ je $(\overline{R_1,R_1X})$. Grupa pm generiše grupe antisimetrije i višestruke antisimetrije tipa M^1 i M^2. Za $L\geq 3$ grupa pm ne generiše grupe višestruke antisimetrije tipa M^L.

Dokaz: a) Svi proizvodi generatora grupe pm, formirani u skladu sa Definicijom 1.2. mogu se podeliti na dve neekvivalentne klase: translaciju R_1R_2 i refleksije R_1, R_2. S obzirom na algebarsku i geometrijsku ekvivalentnost refleksija R_1,R_2, antisimetrijska karakteristika grupe pm je $(R_1R_2)(\overline{R_1,R_2})$.

S obzirom na važenje relacije : $(\overline{R_1,R_2})(R_1R_2)=(\overline{R_1,R_2})$, moguće je svođenje antisimetrijske karakteristike na redukovani oblik : $(\overline{R_1,R_2})$.

U skladu sa Teoremom 1.1.grupa pm generiše grupe antisimetrije i višestruke antisimetrije tipa M^1,M^2. Za $L\geq 3$, grupa pm, na osnovu Teoreme 1.1.b) ne generiše grupe višestruke antisimetrije tipa M^L, pošto nije zadovoljen uslov razdvojivosti antiidentiteta.

b) Ekvivalentnost Teorema 3.5.a) i 3.5.b) direktno sledi iz relacije $X=R_1R_2$.

Uočimo da grupe p2 i pm imaju izomorfne antisimetrijske karakteristike, pri čemu važi izomorfizam: a) $(T,T_1) \longleftrightarrow (R_1,R_2)$, b) $(X,T) \longleftrightarrow (X,R_1)$. U skladu sa Teoremom 1.4. grupe p2 i pm generisaće jednak broj grupa tipa M^L za svako L. Korišćenjem navedenog izomorfizma moguće je izvođenje grupa antisimetrije i višestruke antisimetrije generisanih grupom pm svesti na rezultate izvođenja grupa antisimetrije i višestruke antisimetrije generisanih grupom p2.

Teorema 3.6.a) Antisimetrijska karakteristika grupe pgm, generisane klizajućom refleksijom P i refleksijom R_1, date prezentacijom:

pgm (P,R_1) $R_1^2=(R_1P)^2=E$ je $(P)(R_1)(PR_1)$ i dozvoljava redukovanje na oblik $(P)(R_1)$. Grupa pgm generiše grupe antisimetrije i višestruke antisimetrije tipa M^1,M^2. Za $L\geq 3$ grupa pgm ne generiše grupe višestruke antisimetrije tipa M^L.

Teorema 3.6.b) Antisimetrijska karakteristika grupe pgm, generisane centralnom simetrijom T_1 i refleksijom R_1, date prezentacijom:

pgm (R_1,T_1) $R_1^2=T_1^2=E$ je $(R_1)(T_1)(R_1T_1)$ i dozvoljava redukovanje na oblik $(R_1)(T_1)$. Grupa pgm generiše grupe antisimetrije tipa M^1, M^2. Za $L\geq 3$ grupa pgm ne generiše grupe višestruke antisimetrije.

Dokaz: a) Svi proizvodi generatora grupe pgm, formirani u skladu sa Definicijom 1.2. mogu se podeliti u tri neekvivalentne klase: klizajuću refleksiju P, centralnu simetriju R_1P i refleksiju R_1, te je antisimetrijska karakteristika grupe pgm $(P)(R_1)(R_1P)$. S obzirom na ekvivalentnost uslova $(P)(R_1)(R_1P)$ i $(P)(R_1)$ redukovana antisimetrijska karakteristika ove grupe je $(P)(R_1)$.

Na osnovu Teoreme 1.1. grupa pgm generiše grupe antisimetrije i višestruke antisimetrije tipa M^1 ,M^2, dok za $L\geq 3$ grupa pgm, u skladu sa Teoremom 1.1.b) ne generiše grupe višestruke antisimetrije tipa M^L.

Pošto grupe pgm i plm imaju izomorfne antisimetrijske karakteristike, pri čemu važi izomorfizam $(P,R_1)\longleftrightarrow(T_1,R_1)$ $\longleftrightarrow(X,R)$ moguće je u skladu sa Teoremom 1.4. ustanoviti da će grupe pgm i plm generisati jednak broj grupa tipa M^L za svako L i rezultate izvođenja grupa antisimetrije i višestruke antisimetrije generisanih grupom plm primeniti na grupu pgm.

b) Ekvivalentnost Teorema 3.6.a) i 3.6.b) direktno sledi iz relacije $T_1=R_1P$.

Teorema 3.7. a)Antisimetrijska karakteristika grupe pmm, generisane translacijom X i refleksijama R, R_1, date prezentacijom:

pmm (X,R,R_1) $R^2=R_1^2=(R_1X)^2=E$ $XR=RX$ $RR_1=R_1R$ je

$(X)(R)(XR)(\overline{R_1,R_1X})(\overline{RR_1,RR_1X})$ i dozvoljava redukovanje na oblik $(R)(\overline{R_1,R_1X})$. Grupa pmm generiše grupe antisimetrije i višestruke antisimetrije tipa M^1, M^2, M^3. Za $L\geq 4$ grupa pmm ne generiše grupe višestruke antisimetrije tipa M^L.

Teorema 3.7.b) Antisimetrijska kar^kteristika grupe pmm, generisane refleksijama R,R_1,R_2, date prezentacijom:
pmm $\quad (R,R_1,R_2) \quad R^2=R_1^2=R_2^2=E \quad R\rightleftarrows R_1,R_2 \quad$ je
$(R)(R_1R_2)(\overline{R_1,R_2})(\overline{RR_1,RR_2})(RR_1R_2)$ i dozvoljava redukovanje na oblik $(R)(\overline{RR_1,RR_2})$ ili $(R)(\overline{R_1,R_2})$. Grupa pmm generiše grupe antisimetrije i višestruke antisimetrije tipa M^1, M^2, M^3. Za $L\geq 4$ grupa pmm ne generiše grupe višestruke antisimetrije tipa M^L.

Dokaz: a) Svi proizvodi generatora grupe pmm, formirani u skladu sa Definicijom 1.2. mogu se podeliti u pet neekvivalentnih klasa: translaciju X, refleksiju R, klizajuću refleksiju XR, refleksije ortogonalne u odnosu na osu X : R_1, R_1X i centralne simetrije RR_1 i RR_1X. S obzirom na algebarsku i geometrijsku ekvivalentnost refleksija R_1, R_1X među sobom i centralnih simetrija RR_1 i RR_1X među sobom, antisimetrijska karakteristika grupe pmm je $(X)(R)(XR)(\overline{R_1,R_1X})(\overline{RR_1,RR_1X})$. S obzirom na algebarsku ekvivalentnost uslova $(X)(R)(XR)$ i $(X)(R)$ među sobom i uslova $(R)(\overline{RR_1,RR_1X})$ i $(R)(\overline{R_1,R_1X})$ antisimetrijska karakteristika se svodi na oblik $(X)(R)(\overline{R_1,R_1X})$. Međutim, pošto je $(\overline{R_1,R_1X})=(R_1(\overline{E,X}))$, uslov (X) moguće je eliminisati, pa je redukovana antisimetrijska karakteristika grupe pmm $(R)(\overline{R_1,R_1X})$.

U skladu sa Teoremom 1.1. grupa pmm generiše grupe antisimetrije i višestruke antisimetrije tipa M^1, M^2, M^3. Za $L \geq 4$ grupa pmm ne generiše grupe višestruke antisimetrije tipa M^L, u skladu sa Teoremom 1.1.b), s obzirom da nije zadovoljen uslov razdvojivosti antiidentiteta.

b) Ekvivalentnost Teorema 3.7.a) i 3.7.b) direktno sledi iz relacije $R_2=R_1X$.

Na kraju Poglavlja 3. navedeno je celokupno izvođenje grupa antisimetrije i višestruke antisimetrije bordura tipa M^1, M^2, M^3, što pored ostalog omogućava i uočavanje ponovljenih grupa, tj. kombinacija generatora koje rezultiraju istim grupama antisimetrije i višestruke antisimetrije. Kao rezultat izvođenja grupa antisimetrije i višestruke antisimetrije sastavljen je katalog različitih grupa antisimetrije bordura tipa M^1, M^2 i M^3. Sve dobijene grupe antisimetrije i višestruke antisimetrije bordura tipa M^1, M^2, M^3 vizuelno su prikazane u obliku mozaika ostvarenih u skladu sa metodom sugeriranim u Poglavlju 1.

Prikazani u tabelarnom obliku, brojevi N_m grupa antisimetrije i višestruke antisimetrije bordura tipa M^1, M^2, M^3, glase:

	p1	pg	p2	p1m	pm	pgm	pmm
M^1	1	1	2	3	2	3	5
M^2			2	6	3	6	24
M^3							84

te je $N_1=17$, $N_2=42$, $N_3=84$, što odgovara rezultatima naučnika iz Kišinjova(A.M.Zamorzajev, 1976., str.159.).

Navedeni brojevi N_m omogućavaju izračunavanje broja svih grupa antisimetrije ili višestruke antisimetrije bordura P_L(videti str.31).

Za obeležavanje grupa antisimetrije i višestruke antisimetrije bordura korišćena je 0-1 varijanta Internacionalne simbolike(Hermann,Maugin). Obeležavanje grupa antisimetrije i višestruke antisimetrije bordura moguće je vršiti i primenom Kopcikove višečlane simbolike. Ovakav sistem obeležavanja ilustrovaćemo primerom grupe antisimetrije tipa M^2: $p_{11}m_{001}m_{01}$, date skupom generatora: $(ee_1X,\ e_1R, e_2R_1)$. Eliminacijom antiidentiteta e_2, e_1, e, respektivno, dobijaju se redom grupe antisimetrije $(ee_1X, e_1R, R_1), (eX, R, e_2R_1),\ (e_1X, e_1R, e_2R_1)$, kojim odgovaraju grupe simetrije: pm (X^2,R), plm (X^2,R), pg(XR). Grupi antisimetrije $p_{11}m_{001}m_{01}$, generisanoj grupom simetrije pmm, odgovara, posle eliminacije antisimetrija simetrijska podgrupa indeksa 8 pl (X^2), te će Kopcikov višečlani simbol grupe $p_{11}m_{001}m_{01}$ biti pmm/(pm,plm,pg)/pl.

Ideja vizuelnog prikazivanja grupa simetrije lenti u vidu dvobojnih dijagrama, koja ukazuje na dimenzioni prelaz, naznačena u radu(A.Speiser, 1927.) i ostvarena u radu(L.Weber, 1929.) poslužila je kao povod za uvođenje pojma antisimetrije. Pri ovakvom razmatranju 31 grupa simetrije lenti može biti tretirana kao skup grupa antisimetrije bordura koji sačinjavaju 7 generišućih("polarnih") bordura, 7 starijih("neutralnih", "sivih") bordura i 17 mlađih("mešovitih", "crno-belih") bordura, pri čemu je netrivijalan problem generisanja 17 bordura tipa M^1.

Generisanje grupa antisimetrije bordura ostvareno je u radovima (A.M.Šubnjikov, 1951.; N. V. Bjelov, 1956.), kao i u radovima mnogih drugih autora, najčešće kao parcijalni rezultat pri izvođenju grupa antisimetrije lenti ili pri generisanju grupa višestruke simetrije bordura. Navedena dva problema, pitanja grupa antisimetrije lenti i višestruke antisimetrije bordura neposredno su povezana, pošto se grupe višestruke antisimetrije bordura tipa L mogu tretirati kao grupe antisimetrije lenti tipa L-1, pri čemu je prva antisimetrijska koordinata kod grupa antisimetrije bordura tipa L shvaćena kao pokazatelj položaja tačke sa jedne ili druge strane invarijantne polarne ravni bordure, dok je preostala L-1 antisimetrijska koordinata tretirana u smislu vangeometrijskih dvofaznih svojstava.

Prvo izvođenje 179 grupa antisimetrije lenti, u svojstvu grupa simetrije 4-dimenzionih bordura ostvareno je matričnom metodom u radu (T.Roman, 1959.), pri čemu dobijenih 179 grupa tipa $G_{4,3,2,1}$ dozvoljavaju prirodnu interpretaciju kao grupe antisimetrije lenti $G^{1}_{3,2,1}$. Nezavisna izvođenja grupa antisimetrije lenti data su u radu(A.V.Šubnjikov, 1962., 1963.) uz korekciju škole Bjelova(N.V. Bjelov, T.S.Kuncevič, N.N.Neronova, 1962.). U radu(A. Pabst, 1962.) dat je katalog 179 grupa antisimetrije lenti u simbolici Hermann-Maugina i pregled njihovih relacija u odnosu na grupe simetrije i antisimetrije, pri čemu se 31 antisimetrijska bordura dobija projektovanjem antisimetrijskih stožera, dok se grupe antisimetrije lenti dobijaju sečenjem crno-belih stožera.

Prvo direktno izvođenje grupa višestruke antisimetrije bordura dato je u radu(A.F.Palistrant, A.M.Zamorzajev, 1964.), gde je pored detaljne diskusije dimenzionog prelaza, povezivanja grupa antisimetrije i višestruke antisimetrije generisanih jednodimenzionim grupama p1, pm (L=3), grupa antisimetrije i višestruke antisimetrije bordura (L=2) i grupa antisimetrije lenti(L=1), dat komparativni katalog grupa antisimetrije bordura (L=1,2), dok je za L=3 dat samo broj grupa višestruke antisimetrije bordura, $N_3=84$, dobijen kombinatornim metodama, bez katalogiziranja grupa tipa M^3.

Klasifikacije grupa antisimetrije i višestruke antisimetrije i određivanje njihovog mesta u opštoj sistematici grupa simetrije vršene su u radovima(W.T.Holser, 1961., N.N.Neronova i N.V.Bjelov, 1961., N.N.Neronova, 1966., A.M. Zamorzajev, 1976.).

Vizuelizacije grupa antisimetrije bordura(crno-beli Veberovi dijagrami lenti) date su u radovima(A.V.Šubnjikov, 1930., N.V.Bjelov, 1956., W.Novacki, 1960., Y.Le Corre, 1958.), dok je većina vizuelizacija grupa antisimetrije lenti zastupljena u radu(A.V.Šubnjikov,1962.).

Na kraju Poglavlja 3 dati su mozaici svih grupa antisimetrije i višestruke antisimetrije bordura konstruisani u skladu sa metodom predloženim u Poglavlju 1.

Pored fizičkih interpretacija antisimetrije i višestruke antisimetrije, kakve se javljaju u fizici čvrstog tela, fizici elementarnih čestica i kristalografiji, u kojima grupe antisimetrije i višestruke antisi⁻etrije bordura nalaze svoje mesto, jedna od značajnijih interpretacija crno-belih grupa antisimetrije bordura su odgovarajući bordurni ornamenti, koji se javljaju u ornamentalnom slikarstvu. Najstariji primeri crno-belih bordura datiraju iz vremena neolita. U pogledu zastupljenosti dominiraju ornamenti generisani grupama simetrije bordura maksimalno zastupljenih u klasičnosimetrijskoj ornamentici. Pored ovoga na zastupljenost primera različitih antisimetrijskih bordura utiču i njihove antisimetrijske osobine, pri čemu su maksimalno zastupljene antisimetrijske bordure kod kojih susedne oblasti alterniraju u pogledu boje. Takođe je moguće zapaziti prevagu geometrijske antisimetrijske ornamentike nad bordurnom antisimetrijskom ornamentikom koja koristi prirodne uzore, zahvaljujući odsustvu antisimetrijskih formi među prirodnim uzorima. Veći broj bordura, pogotovu onih koje datiraju iz drevnih epoha ili antisimetrijskih bordura koje se javljaju u ornamentici primitivnih naroda nosi u sebi vizuelno-simbolička značenja, pri čemu je naglašena simbolička funkcija vangeometrijskog svojstva reda 2, crno-belog alterniranja, koja ukazuje na dualistički pristup u tumačenju i interpretiranju stvarnosti.

Kao osnov za komparaciju hronologije, zastupljenosti, vizuelnih i vizuelno-simboličkih karakteristika antisimetrijskih bordura sa odgovarajućim generišućim klasičnosimetrijskim bordurama može poslužiti rad(S.Jablan, 1981., Poglavlje 2.).

Pitanja e′-antienantiomorfizma i e′-invarijantnosti zaslužuju pažnju i u slučaju svih grupa antisimetrije i višestruke antisimetrije bordura tipa M^L. Kao ilustracija razmatranja ovog problema može poslužiti primer grupe antisimetrije bordura $p_{11}m_{001}m_{01}$ (ee_1X, e_1R, e_2R_1) u čiji sastav ulaze sledeće indirektne transformacije: refleksije $e_1R, e_2R_1, ee_1e_2XR_1$ i klizajuća refleksija eXR, te će grupa $p_{11}m_{001}m_{01}$ biti antienantiomorfna grupa tipa e, e_1, e_2, ee_1e_2. Pošto se radi o grupi tipa M^3, u skladu sa Teoremom 2.3., ova grupa će biti ee_1, ee_2, e_1e_2 invarijantna.

Analogno ispitivanje moguće je primeniti na sve grupe antisimetrije i višestruke antisimetrije bordura. Da bi se ovo ostvarilo potrebno je u okviru svake grupe registrovati sve indirektne izometrije(refleksije, antirefleksije, klizajuće refleksije, klizajuće antirefleksije) koje ulaze u sastav posmatrane grupe antisimetrije ili višestruke antisimetrije bordura. Ukoliko u sastav grupe ulaze refleksije ili klizajuće refleksije, enantiomorfizam se ne javlja, pa samim tim ni antienantiomorfizam, već je takva grupa tipa M^L, u skladu sa Teoremom 2.3. e^*-invarijantna, gde je $\{e^*\}$ skup svih međusobnih proizvoda antiidentiteta e_j($j=0,1,2,..L-1$). Ako u sastav posmatrane grupe tipa M^L ne ulaze indirektne simetrije(refleksije, klizajuće refleksije), već samo indirektne antitransformacije tipova e′ onda je grupa antienantiomorfna tipa $\{e'\}$ i invarijantna tipa $\{e^*\}\setminus\{e'\}$. U navedenom primeru grupe $p_{11}m_{001}m_{01}$ tipa M^3 je $\{e^*\}=\{e,e_1,e_2,ee_1,ee_2,e_1e_2,ee_1e_2\}$, a $\{e'\}=\{e,e_1,e_2,ee_1e_2\}$.

Očiglednu interpretaciju pojava e′-antienentiomorfizma i e′-invarijantnosti pruža njihovo praćenje na mozaicima grupa antisimetrije i višestruke antisimetrije bordura, posmatranjem dejstva transformacija e′ na mozaik.

Granične grupe antisimetrije i višestruke antisimetrije bordura, generisane neprekidnim grupama simetrije bordura p_o1, p_o2, p_om, p_o1m i p_omm u potpunosti korespondiraju grupama antisimetrije i višestruke antisimetrije bordura tipa M^L, generisanim odgovarajućim grupama simetrije bordura p1, p2, pm, p1m, pmm respektivno i dozvoljavaju teksturne interpretacije.

pl

Prezentacija: (X)

Grupa antisimetrije: (eX) (1)

pg

Prezentacija: (P)

Grupa antisimetrije: (eP) (1)

p2

Prezentacija: (X,T) $T^2=(TX)^2=E$

Antisimetrijska karakteristika: $(\overline{T},\overline{TX})$

(X,T)		
(eX,T)	(1,e)	(1)
(X,eT)	(e,e)	(2)
(eX,eT)	(1,e)	(1)

Grupe antisimetrije: (eX,T) (1)

(X,eT) (2)

Prezentacija: (T,T_1) $T^2=T_1^2=E$

Antisimetrijska karakteristika: $(\overline{T,T_1})$

(T,T_1)		
(eT,T_1)	(e,1)	(1)
(T,eT_1)	(e,1)	(1)
(eT,eT_1)	(e,e)	(2)

plm

Prezentacija: (X,R) $R^2=E$ $XR=RX$

Grupe antisimetrije: (eX,R) (1)

(X,eR) (2)

(eX,eR) (3)

pm

Prezentacija: (X,R_1) $R_1^2=(R_1X)^2=E$

Antisimetrijska karakteristika: $(\overline{R_1,R_1X})$

(X,R_1)		
(eX,R_1)	$(1,e)$	(1)
(X,eR_1)	(e,e)	(2)
(eX,eR_1)	$(1,e)$	(1)

Grupe antisimetrije: (eX,R_1) (1)

(X,eR_1) (2)

Prezentacija: (R_1,R_2) $R_1^2=R_2^2=E$

Antisimetrijska karakteristika: $(\overline{R_1,R_2})$

(R_1,R_2)		
(eR_1,R_2)	$(e,1)$	(1)
(R_1,eR_2)	$(e,1)$	(1)
(eR_1,eR_2)	(e,e)	(2)

Grupe antisimetrije: (eR_1,R_2) (1)

(eR_1,eR_2) (2)

<u>pgm</u>

Prezentacija: (P,R_1) $R_1^2=(R_1P)^2=E$

(eP,R_1) (1)

(P,eR_1) (2)

(eP,eR_1) (3)

Prezentacija: (R_1,T_1) $R_1^2=T_1^2=E$

Grupe antisimetrije:

(eR_1,T_1) (1)

(R_1,eT_1) (2)

(eR_1,eT_1) (3)

<u>pmm</u>

Prezentacija: (X,R,R_1) $R^2=R_1^2=(R_1X)^2=E$

$RX=XR$ $RR_1=R_1R$

Antisimetrijska karakteristika: $(R)(\overline{R_1,R_1X})$

(X,R,R_1)		
(eX,R,R_1)	(1)(1,e)	(1)
(X,eR,R_1)	(e)(1,1)	(2)
(X,R,eR_1)	(1)(e,e)	(3)
(eX,eR,R_1)	(e)(1,e)	(4)
(eX,R,eR_1)	(1)(1,e)	(1)
(X,eR,eR_1)	(e)(e,e)	(5)
(eX,eR,eR_1)	(e)(1,e)	(4)

Grupe antisimetrije:

(eX,R,R_1)	(1)
(X,eR,R_1)	(2)
(X,R,eR_1)	(3)
(eX,eR,R_1)	(4)
(X,eR,eR_1)	(5)

Prezentacija: (R,R_1,R_2) $\quad R^2=R_1^2=R_2^2=E \quad R \rightleftarrows R_1,R_2$

Antisimetrijska karakteristika: $(R)(\overline{RR_1},\overline{RR_2})$

(R,R_1,R_2)		
(eR,R_1,R_2)	(e)(e,e)	(1)
(R,eR_1,R_2)	(1)(1,e)	(2)
(R,R_1,eR_2)	(1)(1,e)	(2)
(eR,eR_1,R_2)	(e)(1,e)	(3)
(eR,R_1,eR_2)	(e)(1,e)	(3)
(R,eR_1,eR_2)	(1)(e,e)	(4)
(eR,eR_1,eR_2)	(e)(1,1)	(5)

Grupe antisimetrije: (eR, R_1, R_2) (1)

(R, eR_1, R_2) (2)

(eR, eR_1, R_2) (3)

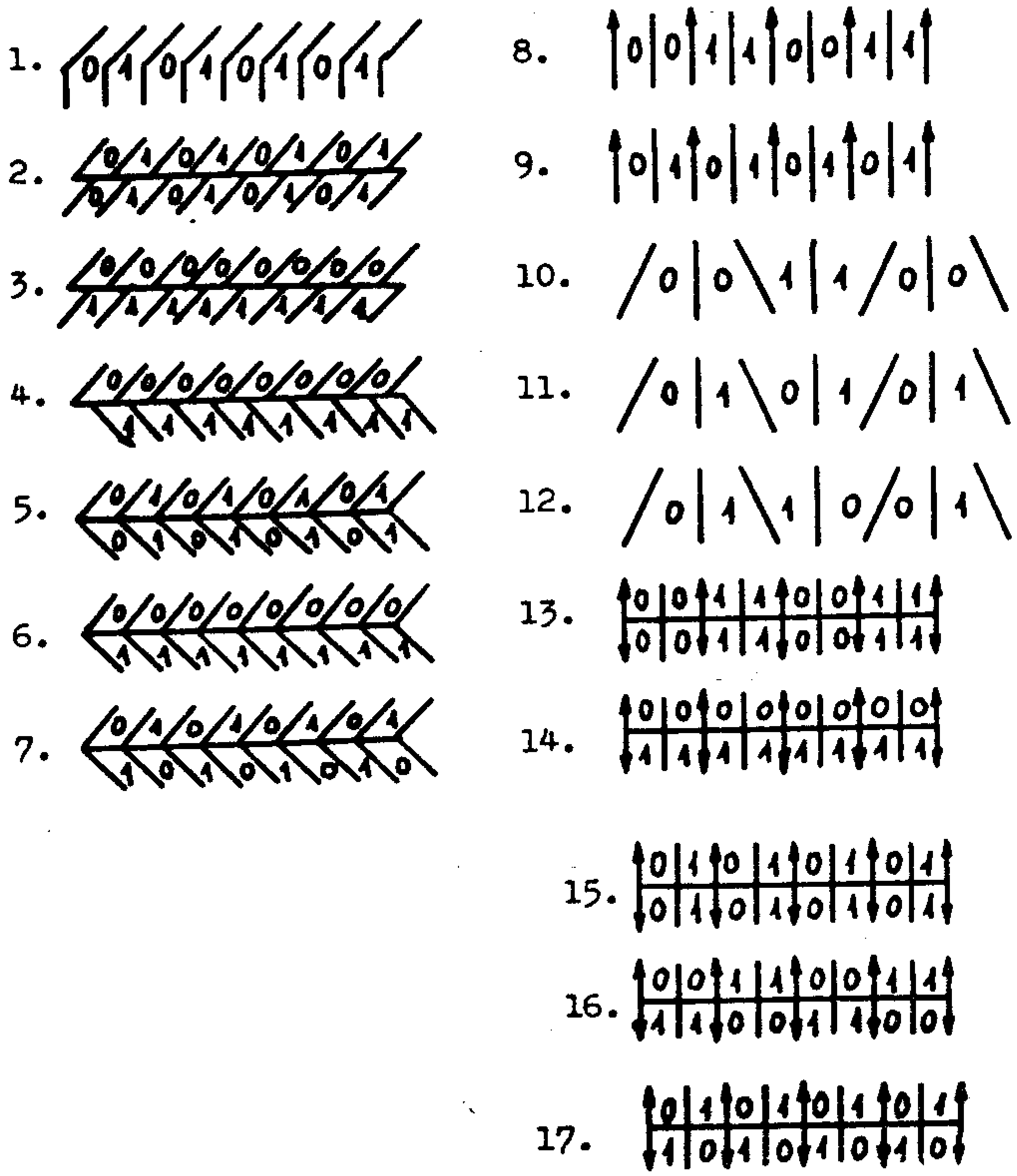
(R, eR_1, eR_2) (4)

(eR, eR_1, eR_2) (5)

Grupe antisimetrije bordura

pl	1.)	(eX)		$p_1 1$	$p'1$
p2	2.)	(eX,T)	(eT,T_1)	$p_1 2$	$p'2$
	3.)	(X,eT)	(eT,eT_1)	$p2_1$	$p2'$
pg	4.)	(eP)		pg_1	pg'
plm	5.)	(eX,R)		$p_1 lm$	$p'lm$
	6.)	(X,eR)		plm_1	plm'
	7.)	(eX,eR)		$p_1 lm_1$	$p'lm'$
pm	8.)	(eX,R_1)	(eR_1,R_2)	$p_1 m$	$p'm$
	9.)	(X,eR_1)	(eR_1,eR_2)	pm_1	pm'
pgm	10.)	(eP,R_1)	(eT_1,R_1)	$pg_1 m$	$pg'm$
	11.)	(P,eR_1)	(eT_1,eR_1)	pgm_1	pgm'
	12.)	(eP,eR_1)	(T_1,eR_1)	$pg_1 m_1$	$pg'm'$
pmm	13.)	(eX,R,R_1)	(R,eR_1,R_2)	$p_1 mm$	$p'mm$
	14.)	(X,eR,R_1)	(eR,R_1,R_2)	pmm_1	pmm'
	15.)	(X,R,eR_1)	(R,eR_1,eR_2)	$pm_1 m$	$pm'm$
	16.)	(eX,eR,R_1)	(eR,eR_1,R_2)	$p_1 mm_1$	$p'mm'$
	17.)	(X,eR,eR_1)	(eR,eR_1,eR_2)	$pm_1 m_1$	$pm'm'$

Mozaici grupa antisimetrije bordura, L=1



$p'2$ (p_12)

Prezentacija: (eX,T)

Antisimetrijska karakteristika: $(\overline{T,TX})$

(eX,T)		
(eX,e_1T)	(e_1,ee_1)	(1)
(ee_1X,e_1T)	(e,e_1)	(2)

Grupe antisimetrije: (eX,e_1T) (1)

(ee_1X,e_1T) (2)

Prezentacija: (eT,T_1)

Antisimetrijska karakteristika: $(\overline{T,T_1})$

(eT,T_1)		
(eT,e_1T_1)	(e,e_1)	(1)
(ee_1T,e_1T_1)	(e_1,ee_1)	(2)

Grupe antisimetrije: (eT,e_1T_1) (1)

(ee_1T,e_1T_1) (2)

$p2'$ $(p2_1)$

Prezentacija: (X,eT)

Antisimetrijska karakteristika: $(\overline{T,TX})$

(X,eT)		
(e_1X,eT)	(e,ee_1)	(1)
(e_1X,ee_1T)	(e,ee_1)	(1)

Grupa antisimetrije: (e_1X,eT) (1)

Prezentacija: (eT, eT_1)

Antisimetrijska karakteristika: $(\overline{T, T_1})$

(eT, eT_1)		
(ee_1T, eT_1)	(e, ee_1)	1)
(eT, ee_1T_1)	(e, ee_1)	(1)

Grupa antisimetrije: (ee_1T, eT_1) (1)

$p'lm$ (p_1lm)

Prezentacija: (eX, R)

Grupe antisimetrije: (eX, e_1R) (1)

(ee_1X, e_1R) (2)

plm' (plm_1)

Prezentacija: (X, eR)

Grupe antisimetrije: (e_1X, eR) (1)

(e_1X, ee_1R) (2)

$p'lm'$ (p_1lm_1)

Prezentacija: (eX, eR)

Grupe antisimetrije: (ee_1X, eR) (1)

(eX, ee_1R) (2)

$p'm$ (p_1m)

Prezentacija: (eX, R_1)

Antisimetrijska karakteristika: $(\overline{R_1, R_1X})$

(eX, R_1)		
(eX, e_1R_1)	(e_1, ee_1)	(1)
(ee_1X, e_1R_1)	(e, e_1)	(2)

Grupe antisimetrije: (eX, e_1R_1) (1)

(ee_1X, e_1R_1) (2)

Prezentacija: (eR_1, R_2)

Antisimetrijska karakteristika: $(\overline{R_1, R_2})$

(eR_1, R_2)		
(eR_1, e_1R_2)	(e, e_1)	(1)
$(ee_1R\ , e_1R_2)$	(e_1, ee_1)	(2)

Grupe antisimetrije: (eR_1, e_1R_2) (1)

(ee_1R_1, e_1R_2) (2)

pm' (pm_1)

Prezentacija: (X, eR_1)

Antisimetrijska karakteristika: $(\overline{R_1, R_1X})$

(X, eR_1)		
(e_1X, eR_1)	(e, ee_1)	(1)
(e_1X, ee_1R_1)	(e, ee_1)	(1)

Grupa antisimetrije: (e_1X, eR_1) (1)

Prezentacija: (eR_1, eR_2)

Antisimetrijska karakteristika: $(\overline{R_1, R_2})$

(eR_1, eR_2)		
(ee_1R_1, eR_2)	(e, ee_1)	(1)
(eR_1, ee_1R_2)	(e, ee_1)	(1)

Grupa antisimetrije: (ee_1R_1, eR_2) (1)

pg'm (pg_1m)

Prezentacija: (eP, R_1)

Grupe antisimetrije: (eP, e_1R_1) (1)

(ee_1P, e_1R_1) (2)

Prezentacija: (eT_1, R_1)

Grupe antisimetrije: (eT_1, e_1R_1) (1)

(ee_1T_1, e_1R_1) (2)

pgm' (pgm_1)

Prezentacija: (P, eR_1)

Grupe antisimetrije: (e_1P, eR_1) (1)

(e_1P, ee_1R_1) (2)

Prezentacija: (eT_1, eR_1)

Grupe antisimetrije: (ee_1T_1, eR_1) (1)

(eT_1, ee_1R_1) (2)

$pg'm'(pg_1m_1)$

Prezentacija: (eP, eR_1)

Grupe antisimetrije: (ee_1P, eR_1) (1)

(eP, ee_1R_1) (2)

Prezentacija: (T_1, eR_1)

Grupe antisimetrije: (e_1T_1, eR_1) (1)

(e_1T_1, ee_1R_1) (2)

$p'mm\ (p_1mm)$

Prezentacija: (eX, R, R_1)

Antisimetrijska karakteristika: $(R)(\overline{R_1, R_1X})$

(eX, R, R_1)		
(eX, e_1R, R_1)	$(e_1)(1, e)$	(1)
(eX, R, e_1R_1)	$(1)(e_1, ee_1)$	(2)
(ee_1X, e_1R, R_1)	$(e_1)(1, ee_1)$	(3)
(ee_1X, R, e_1R_1)	$(1)(e, e_1)$	(4)
(eX, e_1R, e_1R_1)	$(e_1)(e_1, ee_1)$	(5)
(ee_1X, e_1R, e_1R_1)	$(e_1)(e, e_1)$	(6)

Grupe antisimetrije: (eX, e_1R, R_1) (1)

(eX, R, e_1R_1) (2)

(ee_1X, e_1R, R_1) (3)

(ee_1X, R, e_1R_1) (4)

(eX, e_1R, e_1R_1) (5)

(ee_1X, e_1R, e_1R_1) (6)

Prezentacija: (R, eR_1, R_2)

Antisimetrijska karakteristika: $(R)(\overline{RR_1, RR_2})$

(R, eR_1, R_2)		
(e_1R, eR_1, R_2)	$(e_1)(e_1, ee_1)$	(1)
(R, eR_1, e_1R_2)	$(1)(e, e_1)$	(2)
(e_1R, ee_1R_1, R_2)	$(e_1)(e, e_1)$	(3)
(e_1R, eR_1, e_1R_2)	$(e_1)(1, ee_1)$	(4)
(R, ee_1R_1, e_1R_2)	$(1)(e_1, ee_1)$	(5)
(e_1R, ee_1R_1, e_1R_2)	$(e_1)(1, e)$	(6)

Grupe antisimetrije: (e_1R, eR_1, R_2) (1)

(R, eR_1, e_1R_2) (2)

(e_1R, ee_1R_1, R_2) (3)

(e_1R, eR_1, e_1R_2) (4)

(R, ee_1R_1, e_1R_2) (5)

(e_1R, ee_1R_1, e_1R_2) (6)

pmm′ (pmm_1)

Prezentacija: (X, eR, R_1)

Antisimetrijska karakteristika: $(R)(\overline{R_1, R_1X})$

(X, eR, R_1)		
(e_1X, eR, R_1)	$(e)(1, e_1)$	(1)
(X, eR, e_1R_1)	$(e)(e_1, e_1)$	(2)
(e_1X, ee_1R, R_1)	$(ee_1)(1, e_1)$	(3)

(e_1X, eR, e_1R_1)	$(e)(1, e_1)$	(1)
(X, ee_1R, e_1R_1)	$(ee_1)(e_1, e_1)$	(4)
(e_1X, ee_1R, e_1R_1)	$(ee_1)(1, e_1)$	(3)

Grupe antisimetrije:

(e_1X, eR, R_1)	(1)
(X, eR, e_1R_1)	(2)
(e_1X, ee_1R, R_1)	(3)
(X, ee_1R, e_1R_1)	(4)

Prezentacija: (eR, R_1, R_2)

Antisimetrijska karakteristika: $(R)(\overline{RR_1, RR_2})$

(eR, R_1, R_2)		
(eR, e_1R_1, R_2)	$(e)(e, ee_1)$	(1)
(eR, R_1, e_1R_2)	$(e)(e, ee_1)$	(1)
(ee_1R, e_1R_1, R_2)	$(ee_1)(e, ee_1)$	(2)
(ee_1R, R_1, e_1R_2)	$(ee_1)(e, ee_1)$	(2)
(eR, e_1R_1, e_1R_2)	$(e)(ee_1, ee_1)$	(3)
(ee_1R, e_1R_1, e_1R_2)	$(ee_1)(e, e)$	(4)

Grupe antisimetrije:

(eR, e_1R_1, R_2)	(1)
(ee_1R, e_1R_1, R_2)	(2)
(eR, e_1R_1, e_1R_2)	(3)
(ee_1R, e_1R_1, e_1R_2)	(4)

pm′m (pm_1m)

Prezentacija: (X, R, eR_1)

Antisimetrijska karakteristika: $(R)(\overline{R_1, R_1X})$

(X,R,eR_1)		
(e_1X,R,eR_1)	$(1)(e,ee_1)$	(1)
(X,e_1R,eR_1)	$(e_1)(e,e)$	(2)
(e_1X,e_1R,eR_1)	$(e_1)(e,ee_1)$	(3)
(e_1X,R,ee_1R_1)	$(1)(e,ee_1)$	(1)
(X,e_1R,ee_1R_1)	$(e_1)(ee_1,ee_1)$	(4)
(e_1X,e_1R,ee_1R_1)	$(e_1)(e,ee_1)$	(3)

Grupe antisimetrije:	(e_1X,R,eR_1)	(1)
	(X,e_1R,eR_1)	(2)
	(e_1X,e_1R,eR_1)	(3)
	(X,e_1R,ee_1R_1)	(4)

Prezentacija: (R,eR_1,eR_2)

Antisimetrijska karakteristika: $(R)(\overline{RR_1,RR_2})$

(R,eR_1,eR_2)		
(e_1R,eR_1,eR_2)	$(e_1)(ee_1,ee_1)$	(1)
(R,ee_1R_1,eR_2)	$(1)(e,ee_1)$	(2)
(R,eR_1,ee_1R_2)	$(1)(e,ee_1)$	(2)
(e_1R,ee_1R_1,eR_2)	$(e_1)(e,ee_1)$	(3)
(e_1R,eR_1,ee_1R_2)	$(e_1)(e,ee_1)$	(3)
(e_1R,ee_1R_1,ee_1R_2)	$(e_1)(e,e)$	(4)

Grupe antisimetrije:	(e_1R,eR_1,eR_2)	(1)
	(R,ee_1R_1,eR_2)	(2)
	(e_1R,ee_1R_1,eR_2)	(3)
	(e_1R,ee_1R_1,ee_1R_2)	(4)

$p'mm'$ (p_1mm_1)

Prezentacija: (eX, eR, R_1)

Antisimetrijska karakteristika: $(R)(\overline{R_1, R_1X})$

(eX, eR, R_1)		
(ee_1X, eR, R_1)	$(e)(1, ee_1)$	(1)
(eX, ee_1R, R_1)	$(ee_1)(1, e)$	(2)
(eX, eR, e_1R_1)	$(e)(e_1, ee_1)$	(3)
(ee_1X, eR, e_1R_1)	$(e)(e, e_1)$	(4)
(eX, ee_1R, e_1R_1)	$(ee_1)(e_1, ee_1)$	(5)
(ee_1X, ee_1R, e_1R_1)	$(ee_1)(e, e_1)$	(6)

Grupe antisimetrije: (ee_1X, eR, R_1) (1)

(eX, ee_1R, R_1) (2)

(eX, eR, e_1R_1) (3)

(ee_1X, eR, e_1R_1) (4)

(eX, ee_1R, e_1R_1) (5)

(ee_1X, ee_1R, e_1R_1) (6)

Prezentacija: (eR, eR_1, R_2)

Antisimetrijska karakteristika: $(R)(\overline{RR_1, RR_2})$

(eR, eR_1, R_2)		
(ee_1R, eR_1, R_2)	$(ee_1)(e_1, ee_1)$	(1)
(eR, ee_1R_1, R_2)	$(e)(e, e_1)$	(2)
(eR, eR_1, e_1R_2)	$(e)(1, ee_1)$	(3)
(ee_1R, eR_1, e_1R_2)	$(ee_1)(e, e_1)$	(4)
(eR, ee_1R_1, e_1R_2)	$(e)(e_1, ee_1)$	(5)
(ee_1R, ee_1R_1, e_1R_2)	$(ee_1)(1, e)$	(6)

Grupe antisimetrije: (ee_1R, eR_1, R_2) (1)

(eR, ee_1R_1, R_2) (2)

(eR, eR_1, e_1R_2) (3)

(ee_1R, eR_1, e_1R_2) (4)

(eR, ee_1R_1, e_1R_2) (5)

(ee_1R, ee_1R_1, e_1R_2) (6)

pm′m′ (pm_1m_1)

Prezentacija: (X, eR, eR_1)

Antisimetrijska karakteristika: $(R)(\overline{R_1, R_1X})$

(X, eR, eR_1)		
(e_1X, eR, eR_1)	$(e)(e, ee_1)$	(1)
(X, ee_1R, eR_1)	$(ee_1)(e, e)$	(2)
(X, eR, ee_1R_1)	$(e)(ee_1, ee_1)$	(3)
(e_1X, ee_1R, eR_1)	$(ee_1)(e, ee_1)$	(4)
(e_1X, eR, ee_1R_1)	$(e)(e, ee_1)$	(1)
(e_1X, ee_1R, ee_1R_1)	$(ee_1)(e, ee_1)$	(4)

Grupe antisimetrije: (e_1X, eR, eR_1) (1)

(X, ee_1R, eR_1) (2)

(X, eR, ee_1R_1) (3)

(e_1X, ee_1R, eR_1) (4)

Prezentacija: (eR, eR_1, eR_2)

Antisimetrijska karakteristika: $(R)(\overline{RR_1, RR_2})$

$\underline{(eR, eR_1, eR_2)}$

(ee_1R, eR_1, eR_2)	$(ee_1)(e_1, e_1)$	(1)
(eR, ee_1R_1, eR_2)	$(e)(1, e_1)$	(2)
(eR, eR_1, ee_1R_2)	$(e)(1, e_1)$	(2)
(ee_1R, ee_1R_1, eR_2)	$(ee_1)(1, e_1)$	(3)
(ee_1R, eR_1, ee_1R_2)	$(ee_1)(1, e_1)$	(3)
(eR, ee_1R_1, ee_1R_2)	$(e)(e_1, e_1)$	(4)

Grupe antisimetrije:	(ee_1R, eR_1, eR_2)	(1)
	(eR, ee_1R_1, eR_2)	(2)
	(ee_1R, ee_1R_1, eR_2)	(3)
	(eR, ee_1R_1, ee_1R_2)	(4)

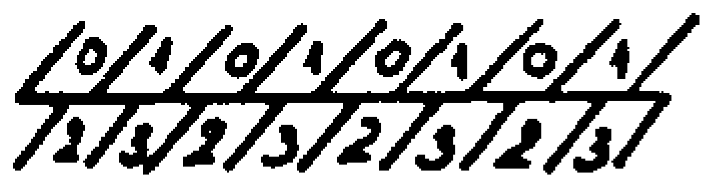
Grupe antisimetrije bordura, L=2

$p_1 2$	1.)	(eX, e_1T)	(ee_1T, e_1T_1)	$p_1 2_{01}$
	2.)	(ee_1X, e_1T)	(eT, e_1T_1)	$p_{11} 2_{01}$
$p2_1$	3.)	(e_1X, eT)	(ee_1T, eT_1)	$p_{01} 2_1$
$p_1 1m$	4.)	(eX, e_1R)		$p_1 1m_{01}$
	5.)	(ee_1X, e_1R)		$p_{11} 1m_{01}$
$p1m_1$	6.)	(e_1X, eR)		$p_{01} 1m_1$
	7.)	(e_1X, ee_1R)		$p_{01} 1m_{11}$
$p_1 1m_1$	8.)	(ee_1X, eR)		$p_{11} 1m_1$
	9.)	(eX, ee_1R)		$p_1 1m_{11}$
$p_1 m$	10.)	(eX, e_1R_1)	(ee_1R, e_1R_2)	$p_1 m_{01}$
	11.)	(ee_1X, e_1R_1)	(eR_1, e_1R_2)	$p_{11} m_{01}$
pm_1	12.)	(e_1X, eR_1)	(ee_1R_1, eR_2)	$p_{01} m_1$
$pg_1 m$	13.)	(eP, e_1R_1)	(ee_1T_1, e_1R_1)	$pg_1 m_{01}$
	14.)	(ee_1P, e_1R_1)	(eT_1, e_1R_1)	$pg_{11} m_{01}$

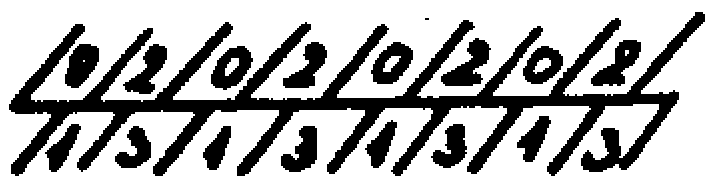
pgm_1	15.)	(e_1P, eR_1)	(eT_1, ee_1R_1)	$pg_{01}m_1$
	16.)	(e_1P, ee_1R_1)	(ee_1T_1, eR_1)	$pg_{01}m_{11}$
pg_1m_1	17.)	(ee_1P, eR_1)	(e_1T_1, eR_1)	$pg_{11}m_1$
	18.)	(eP, ee_1R_1)	(e_1T_1, ee_1R_1)	pg_1m_{11}
p_1mm	19.)	(eX, e_1R, R_1)	(e_1R, eR_1, R_2)	p_1mm_{01}
	20.)	(eX, R, e_1R_1)	(R, ee_1R_1, e_1R_2)	$p_1m_{01}m$
	21.)	(ee_1X, e_1R, R_1)	(e_1R, ee_1R_1, R_2)	$p_{11}mm_{01}$
	22.)	(ee_1X, R, e_1R_1)	(R, eR_1, e_1R_2)	$p_{11}m_{01}m$
	23.)	(eX, e_1R, e_1R_1)	(e_1R, ee_1R_1, e_1R_2)	$p_1m_{01}m_{01}$
	24.)	(ee_1X, e_1R, e_1R_1)	(e_1R, eR_1, e_1R_2)	$p_{11}m_{01}m_{01}$
pmm_1	25.)	(e_1X, eR, R_1)	(eR, e_1R_1, R_2)	$p_{01}mm_1$
	26.)	(X, eR, e_1R_1)	(eR, e_1R_1, e_1R_2)	$pm_{01}m_1$
	27.)	(e_1X, ee_1R, R_1)	(ee_1R, e_1R_1, R_2)	$p_{01}mm_{11}$
	28.)	(X, ee_1R, e_1R_1)	(ee_1R, e_1R_1, R_2)	$pm_{01}m_{11}$
pm_1m	29.)	(e_1X, R, eR_1)	(R, ee_1R_1, eR_2)	$p_{01}m_1m$
	30.)	(X, e_1R, eR_1)	(e_1R, eR_1, eR_2)	pm_1m_{01}
	31.)	(e_1X, e_1R, eR_1)	(e_1R, ee_1R_1, eR_2)	$p_{01}m_1m_{01}$
	32.)	(X, e_1R, ee_1R_1)	(e_1R, ee_1R_1, ee_1R_2)	$pm_{11}m_{01}$

p_1mm_1	33.)	(ee_1X, eR, R_1)	(eR, ee_1R_1, R_2)	$p_{11}mm_1$
	34.)	(eX, ee_1R, R_1)	(ee_1R, eR_1, R_2)	p_1mm_{11}
	35.)	(eX, eR, e_1R_1)	(eR, ee_1R_1, e_1R_2)	$p_1m_{01}m_1$
	36.)	(ee_1X, eR, e_1R_1)	(eR, eR_1, e_1R_2)	$p_{11}m_{01}m_1$
	37.)	(eX, ee_1R, e_1R_1)	(ee_1R, ee_1R_1, e_1R_2)	$p_1m_{01}m_{11}$
	38.)	(ee_1X, ee_1R, e_1R_1)	(ee_1R, eR_1, e_1R_2)	$p_{11}m_{01}m_{11}$
pm_1m_1	39.)	(e_1X, eR, eR_1)	(eR, ee_1R_1, eR_2)	$p_{01}m_1m_1$
	40.)	(X, ee_1R, eR_1)	(ee_1R, eR_1, eR_2)	pm_1m_{11}
	41.)	(X, eR, ee_1R_1)	(eR, ee_1R_1, ee_1R_2)	$pm_{11}m_1$
	42.)	(e_1X, ee_1R, eR_1)	(ee_1R, ee_1R_1, eR_2)	$p_{01}m_1m_{11}$

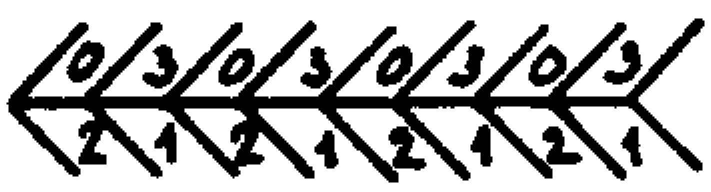
Mozaici grupa antisimetrije bordura, L=2

1. 

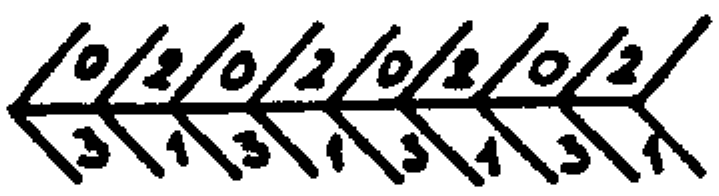
2. 

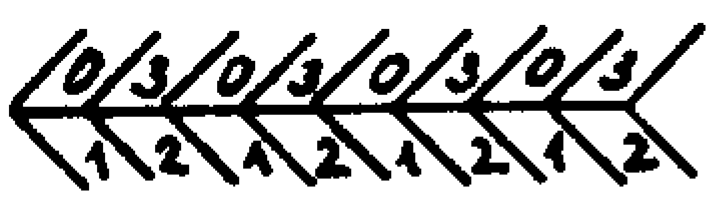
3. 

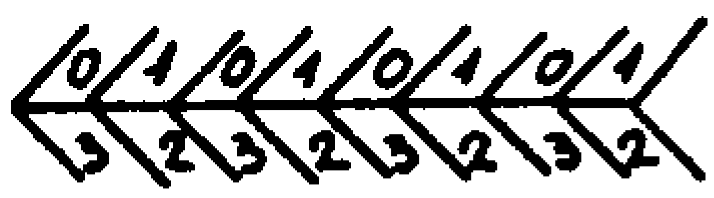
4. 

5. 

6. 

7. 

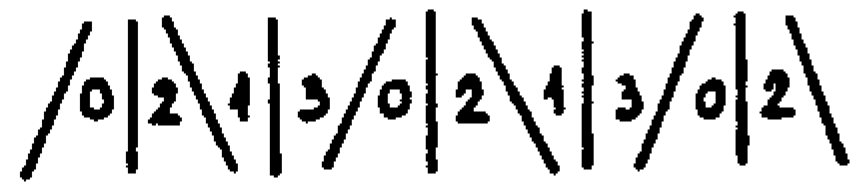
8. 

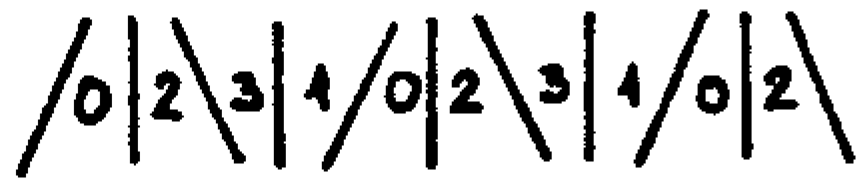
9. 

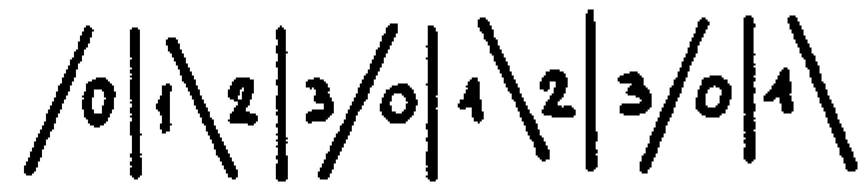
10. 

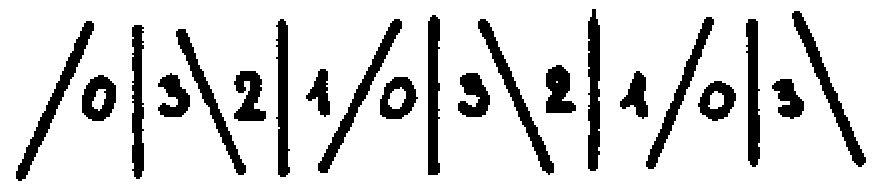
11. 

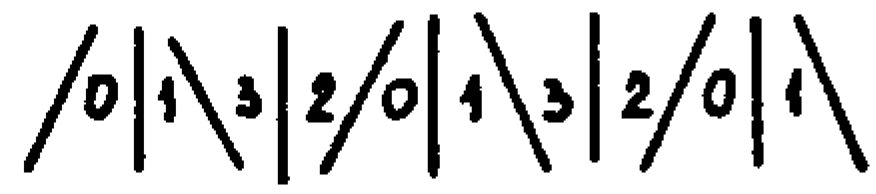
12. 

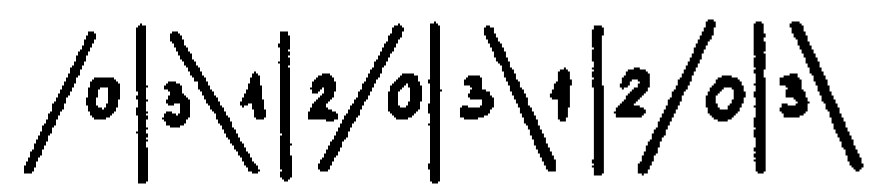
13. 

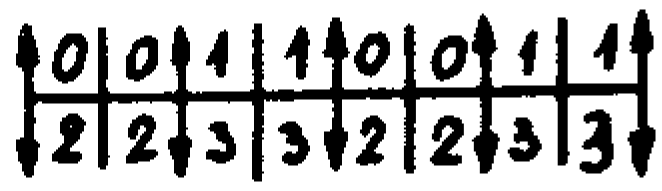
14. 

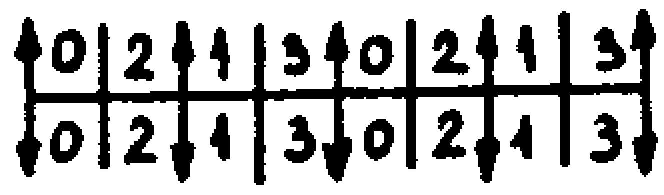
15. 

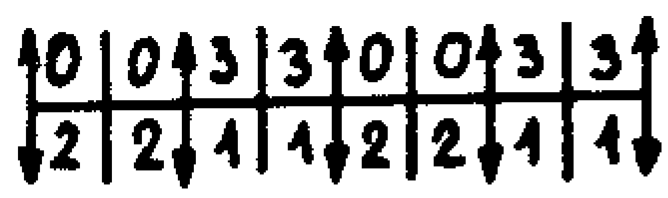
16. 

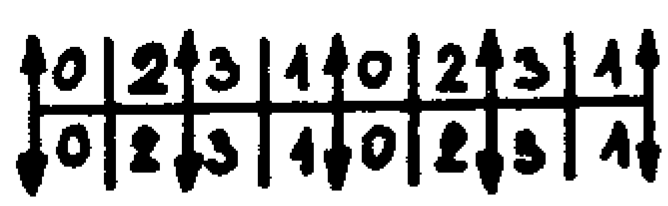
17. 

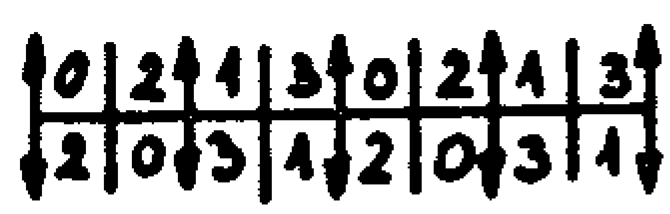
18. 

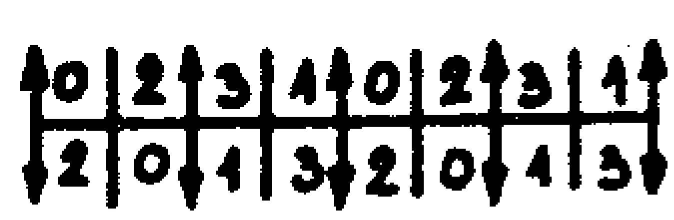
19. 

20. 

21. 

22. 

23. 

24. 

25.

0	0	2	2	0	0	2	2
1	1	3	3	1	1	3	3

26.

0	2	0	2	0	2	0	2
1	3	1	3	1	3	1	3

27.

0	0	2	2	0	0	2	2
3	3	1	1	3	3	1	1

28.

0	2	0	2	0	2	0	2
3	1	3	1	3	1	3	1

29.

0	1	2	3	0	1	2	3
0	1	2	3	0	1	2	3

30.

0	1	0	1	0	1	0	1
2	3	2	3	2	3	2	3

31.

0	1	2	3	0	1	2	3
2	3	0	1	2	3	0	1

32.

0	3	0	3	0	3	0	3
2	1	2	1	2	1	2	1

33.

0	0	3	3	0	0	3	3
1	1	2	2	1	1	2	2

34.

0	0	1	1	0	0	1	1
3	3	2	2	3	3	2	2

35.

0	2	1	3	0	2	1	3
1	3	0	2	1	3	0	2

36.

0	2	3	1	0	2	3	1
1	3	2	0	1	3	2	0

37.

0	2	1	3	0	2	1	3
3	1	2	0	3	1	2	0

38.

0	2	3	1	0	2	3	1
3	1	0	2	3	1	0	2

39.

0	1	2	3	0	1	2	3
1	0	3	2	1	0	3	2

40.

0	1	0	1	0	1	0	1
3	2	3	2	3	2	3	2

41.

0	3	0	3	0	3	0	3
1	2	1	2	1	2	1	2

42.

0	1	2	3	0	1	2	3
3	2	1	0	3	2	1	0

$p_1{}^{mm}01$

Prezentacija: (eX, e_1R, R_1)

Antisimetrijska karakteristika: $(R)(\overline{R_1, R_1X})$

(eX, e_1R, R_1)

(eX, e_1R, e_2R_1)	$(e_1)(e_2, ee_2)$	(1)
(ee_2X, e_1R, e_2R_1)	$(e_1)(e, e_2)$	(2)
(eX, e_1e_2R, e_2R_1)	$(e_1e_2)(e_2, ee_2)$	(3)
(ee_2X, e_1e_2R, e_2R_1)	$(e_1e_2)(e, e_2)$	(4)

Prezentacija: (e_1R, eR_1, R_2)

Antisimetrijska karakteristika: $(R)(\overline{RR_1, RR_2})$

(e_1R, eR_1, R_2)

(e_1R, eR_1, e_2R_2)	$(e_1)(ee_1, e_1e_2)$	(1)
(e_1e_2R, eR_1, e_2R_2)	$(e_1e_2)(e_1, ee_1e_2)$	(2)
(e_1R, ee_2R_1, e_2R_2)	$(e_1)(e_1e_2, ee_1e_2)$	(3)
$(e_1e_2R, ee_2R_1, e_2R_2)$	$(e_1e_2)(e_1, ee_1)$	(4)

$p_1{}^m01^m$

Prezentacija: (R, ee_1R_1, e_1R_2)

Antisimetrijska karakteristika: $(R)(\overline{RR_1, RR_2})$

(R, ee_1R_1, e_1R_2)

(e_2R, ee_1R_1, e_1R_2)	$(e_2)(e_1e_2, ee_1e_2)$	(1)
$(e_2R, ee_1e_2R_1, e_1R_2)$	$(e_2)(ee_1, e_1e_2)$	(2)
$(e_2R, ee_1R_1, e_1e_2R_2)$	$(e_2)(e_1, ee_1e_2)$	(3)
$(e_2R, ee_1e_2R_1, e_1e_2R_2)$	$(e_2)(e_1, ee_1)$	(4)

Prezentacija: (eX,R,e_1R_1)

Antisimetrijska karakteristika: $(R)(\overline{R_1,R_1X})$

(eX,R,e_1R_1)		
(eX,e_2R,e_1R_1)	$(e_2)(e_1,ee_1)$	(1)
(ee_2X,e_2R,e_1R_1)	$(e_2)(e_1,ee_1e_2)$	(2)
$(eX,e_2R,e_1e_2R_1)$	$(e_2)(e_1e_2,ee_1e_2)$	(3)
$(ee_2X,e_2R,e_1e_2R_1)$	$(e_2)(ee_1,e_1e_2)$	(4)

$p_{11}{}^{mm}01$

Prezentacija: (ee_1X,e_1R,R_1)

Antisimetrijska karakteristika: $(R)(\overline{R_1,R_1X})$

(ee_1X,e_1R,R_1)		
(ee_1X,e_1R,e_2R_1)	$(e_1)(e_2,ee_1e_2)$	(1)
(ee_1e_2X,e_1R,e_2R_1)	$(e_1)(e_2,ee_1)$	(2)
(ee_1X,e_1e_2R,e_2R_1)	$(e_1e_2)(e_2,ee_1e_2)$	(3)
$(ee_1e_2X,e_1e_2R,e_2R_1)$	$(e_1e_2)(e_2,ee_1)$	(4)

Prezentacija: (e_1R,ee_1R_1,R_2)

Antisimetrijska karakteristika: $(R)(\overline{RR_1,RR_2})$

(e_1R,ee_1R_1,R_2)		
(e_1R,ee_1R_1,e_2R_2)	$(e_1)(e,e_1e_2)$	(1)
(e_1e_2R,ee_1R_1,e_2R_2)	$(e_1e_2)(e_1,ee_2)$	(2)
$(e_1R,ee_1e_2R_1,e_2R_2)$	$(e_1)(ee_2,e_1e_2)$	(3)
$(e_1e_2R,ee_1e_2R_1,e_2R_2)$	$(e_1e_2)(e,e_1)$	(4)

$p_{11}{}^{m}01{}^{m}$

Prezentacija: (ee_1X, R, e_1R_1)

Antisimetrijska karakteristika: $(R)(\overline{R_1, R_1X})$

(ee_1X, R, e_1R_1)		
(ee_1X, e_2R, e_1R_1)	$(e_2)(e, e_1)$	(1)
(ee_1e_2X, e_2R, e_1R_1)	$(e_2)(e_1, ee_2)$	(2)
$(ee_1X, e_2R, e_1e_2R_1)$	$(e_2)(ee_2, e_1e_2)$	(3)
$(ee_1e_2X, e_2R, e_1e_2R_1)$	$(e_2)(e, e_1e_2)$	(4)

Prezentacija: (R, eR_1, e_1R_2)

Antisimetrijska karakteristika: $(R)(\overline{RR_1, RR_2})$

(R, eR_1, e_1R_2)		
(e_2R, eR_1, e_1R_2)	$(e_2)(ee_2, e_1e_2)$	(1)
(e_2R, ee_2R_1, e_1R_2)	$(e_2)(e, e_1e_2)$	(2)
$(e_2R, eR_1, e_1e_2R_2)$	$(e_2)(e_1, ee_2)$	(3)
$(e_2R, ee_2R_1, e_1e_2R_2)$	$(e_2)(e, e_1)$	(4)

$p_1{}^{m}01{}^{m}01$

Prezentacija: (eX, e_1R, e_1R_1)

Antisimetrijska karakteristika: $(R)(\overline{R_1, R_1X})$

(eX, e_1R, e_1R_1)		
(eX, e_1e_2R, e_1R_1)	$(e_1e_2)(e_1, ee_1)$	(1)
$(eX, e_1R, e_1e_2R_1)$	$(e_1)(e_1e_2, ee_1e_2)$	(2)
(ee_2X, e_1e_2R, e_1R_1)	$(e_1e_2)(e_1, ee_1e_2)$	(3)
$(ee_2X, e_1R, e_1e_2R_1)$	$(e_1)(ee_1, e_1e_2)$	(4)

Prezentacija: (e_1R, ee_1R_1, e_1R_2)

Antisimetrijska karakteristika: $(R)(\overline{RR_1, RR_2})$

$\underline{(e_1R, ee_1R_1, e_1R_2)}$

$(e_1e_2R, ee_1R_1, e_1R_2)$	$(e_1e_2)(e_2, ee_2)$	(1)
$(e_1R, ee_1R_1, e_1e_2R_2)$	$(e_1)(e, e_2)$	(2)
$(e_1e_2R, ee_1e_2R_1, e_1R_2)$	$(e_1e_2)(e, e_2)$	(3)
$(e_1R, ee_1e_2R_1, e_1e_2R_2)$	$(e_1)(e_2, ee_2)$	(4)

$\underline{p_{11}{}^{m}01'^{m}01}$

Prezentacija: (ee_1X, e_1R, e_1R_1)

Antisimetrijska karakteristika: $(R)(\overline{R_1, R_1X})$

$\underline{(ee_1X, e_1R, e_1R_1)}$

(ee_1X, e_1e_2R, e_1R_1)	$(e_1e_2)(e, e_1)$	(1)
$(ee_1X, e_1R, e_1e_2R_1)$	$(e_1)(ee_2, e_1e_2)$	(2)
$(ee_1e_2X, e_1e_2R, e_1R_1)$	$(e_1e_2)(e_1, ee_2)$	(3)
$(ee_1e_2X, e_1R, e_1e_2R_1)$	$(e_1)(e, e_1e_2)$	(4)

Prezentacija: (e_1R, eR_1, e_1R_2)

Antisimetrijska karakteristika: $(R)(\overline{RR_1, RR_2})$

$\underline{(e_1R, eR_1, e_1R_2)}$

(e_1e_2R, eR_1, e_1R_2)	$(e_1e_2)(e_2, ee_1e_2)$	(1)
$(e_1R, eR_1, e_1e_2R_2)$	$(e_1)(e_2, ee_1)$	(2)
$(e_1e_2R, ee_2R_1, e_1R_2)$	$(e_1e_2)(e_2, ee_1)$	(3)
$(e_1R, ee_2R_1, e_1e_2R_2)$	$(e_1)(e_2, ee_1e_2)$	(4)

$p_{01}mm_1$

Prezentacija: (e_1X, eR, R_1)

Antisimetrijska karakteristika: $(R)(\overline{R_1, R_1X})$

(e_1X, eR, R_1)		
(e_1X, eR, e_2R_1)	$(e)(e_2, e_1e_2)$	(1)
(e_1e_2X, eR, e_2R_1)	$(e)(e_1, e_2)$	(2)
(e_1X, ee_2R, e_2R_1)	$(ee_2)(e_2, e_1e_2)$	(3)
(e_1e_2X, ee_2R, e_2R_1)	$(ee_2)(e_1, e_2)$	(4)

Prezentacija: (eR, e_1R_1, R_2)

Antisimetrijska karakteristika: $(R)(\overline{RR_1, RR_2})$

(eR, e_1R_1, R_2)		
(eR, e_1R_1, e_2R_2)	$(e)(ee_1, ee_2)$	(1)
(ee_2R, e_1R_1, e_2R_2)	$(ee_2)(e, ee_1e_2)$	(2)
$(eR, e_1e_2R_1, e_2R_2)$	$(e)(ee_2, ee_1e_2)$	(3)
$(ee_2R, e_1e_2R_1, e_2R_2)$	$(ee_2)(e, ee_1)$	(4)

$pm_{01}m_1$

Prezentacija: (X, eR, e_1R_1)

Antisimetrijska karakteristika: $(R)(\overline{R_1, R_1X})$

(X, eR, e_1R_1)		
(e_2X, eR, e_1R_1)	$(e)(e_1, e_1e_2)$	(1)
(e_2X, ee_2R, e_1R_1)	$(ee_2)(e_1, e_1e_2)$	(2)
$(e_2X, eR, e_1e_2R_1)$	$(e)(e_1, e_1e_2)$	(1)
$(e_2X, ee_2R, e_1e_2R_1)$	$(ee_2)(e_1, e_1e_2)$	(2)

Prezentacija: (eR,e_1R_1,e_1R_2)

Antisimetrijska karakteristika: $(R)(\overline{RR_1,RR_2})$

(eR,e_1R_1,e_1R_2)		
$(eR,e_1e_2R_1,e_1R_2)$	$(e)(ee_1,ee_1e_2)$	(1)
$(eR,e_1R_1,e_1e_2R_2)$	$(e)(ee_1,ee_1e_2)$	(1)
$(ee_2R,e_1e_2R_1,e_1R_2)$	$(ee_2)(ee_1,ee_1e_2)$	(2)
$(ee_2R,e_1R_1,e_1e_2R_2)$	$(ee_2)(ee_1,ee_1e_2)$	(2)

$P_{01}^{mm}11$

Prezentacija: (e_1X,ee_1R,R_1)

Antisimetrijska karakteristika: $(R)(\overline{R_1,R_1X})$

(e_1X,ee_1R,R_1)		
(e_1X,ee_1R,e_2R_1)	$(ee_1)(e_2,e_1e_2)$	(1)
(e_1e_2X,ee_1R,e_2R_1)	$(ee_1)(e_1,e_2)$	(2)
(e_1X,ee_1e_2R,e_2R_1)	$(ee_1e_2)(e_2,e_1e_2)$	(3)
$(e_1e_2X,ee_1e_2R,e_2R_1)$	$(ee_1e_2)(e_1,e_2)$	(4)

Prezentacija: (ee_1R,e_1R_1,R_2)

Antisimetrijska karakteristika: $(R)(\overline{RR_1,RR_2})$

(ee_1R,e_1R_1,R_2)		
(ee_1R,e_1R_1,e_2R_2)	$(ee_1)(e,ee_1e_2)$	(1)
(ee_1e_2R,e_1R_1,e_2R_2)	$(ee_1e_2)(ee_1,ee_2)$	(2)
$(ee_1R,e_1e_2R_1,e_2R_2)$	$(ee_1)(ee_2,ee_1e_2)$	(3)
$(ee_1e_2R,e_1e_2R_1,e_2R_2)$	$(ee_1e_2)(e,ee_1)$	(4)

$pm_{01}m_{11}$

Prezentacija: (X, ee_1R, e_1R_1)

Antisimetrijska karakteristika: $(R)(\overline{R_1, R_1X})$

(X, ee_1R, e_1R_1)		
(e_2X, ee_1R, e_1R_1)	$(ee_1)(e_1, e_1e_2)$	(1)
(e_2X, ee_1e_2R, e_1R_1)	$(ee_1e_2)(e_1, e_1e_2)$	(2)
$(e_2X, ee_1R, e_1e_2R_1)$	$(ee_1)(e_1, e_1e_2)$	(1)
$(e_2X, ee_1e_2R, e_1e_2R_1)$	$(ee_1e_2)(e_1, e_1e_2)$	(2)

Prezentacija: (ee_1R, e_1R_1, e_1R_2)

Antisimetrijska karakteristika: $(R)(\overline{RR_1, RR_2})$

(ee_1R, e_1R_1, e_1R_2)		
$(ee_1R, e_1e_2R_1, e_1R_2)$	$(ee_1)(e, ee_2)$	(1)
$(ee_1R, e_1R_1, e_1e_2R_2)$	$(ee_1)(e, ee_2)$	(1)
$(ee_1e_2R, e_1e_2R_1, e_1R_2)$	$(ee_1e_2)(e, ee_2)$	(2)
$(ee_1e_2R, e_1R_1, e_1e_2R_2)$	$(ee_1e_2)(e, ee_2)$	(2)

$p_{01}m_1m$

Prezentacija: (e_1X, R, eR_1)

Antisimetrijska karakteristika: $(R)(\overline{R_1, R_1X})$

(e_1X, R, eR_1)		
(e_1X, e_2R, eR_1)	$(e_2)(e, ee_1)$	(1)
(e_1e_2X, e_2R, eR_1)	$(e_2)(e, ee_1e_2)$	(2)
(e_1X, e_2R, ee_2R_1)	$(e_2)(ee_2, ee_1e_2)$	(3)
(e_1e_2X, e_2R, ee_2R_1)	$(e_2)(ee_1, ee_2)$	(4)

Prezentacija: (R, ee_1R_1, eR_2)

Antisimetrijska karakteristika: $(R)(\overline{RR_1, RR_2})$

(R, ee_1R_1, eR_2)		
(e_2R, ee_1R_1, eR_2)	$(e_2)(ee_2, ee_1e_2)$	(1)
$(e_2R, ee_1e_2R_1, eR_2)$	$(e_2)(ee_1, ee_2)$	(2)
(e_2R, ee_1R_1, ee_2R_2)	$(e_2)(e, ee_1e_2)$	(3)
$(e_2R, ee_1e_2R_1, ee_2R_2)$	$(e_2)(e, ee_1)$	(4)

pm_1m_{01}

Prezentacija: (X, e_1R, eR_1)

Antisimetrijska karakteristika: $(R)(\overline{R_1, R_1X})$

(X, e_1R, eR_1)		
(e_2X, e_1R, eR_1)	$(e_1)(e, ee_2)$	(1)
(e_2X, e_1e_2R, eR_1)	$(e_1e_2)(e, ee_2)$	(2)
(e_2X, e_1R, ee_2R_1)	$(e_1)(e, ee_2)$	(1)
(e_2X, e_1e_2R, ee_2R_1)	$(e_1e_2)(e, ee_2)$	(2)

Prezentacija: (e_1R, eR_1, eR_2)

Antisimetrijska karakteristika: $(R)(\overline{RR_1, RR_2})$

(e_1R, eR_1, eR_2)		
(e_1R, ee_2R_1, eR_2)	$(e_1)(ee_1, ee_1e_2)$	(1)
(e_1R, eR_1, ee_2R_2)	$(e_1)(ee_1, ee_1e_2)$	(1)
(e_1e_2R, ee_2R_1, eR_2)	$(e_1e_2)(ee_1, ee_1e_2)$	(2)
(e_1e_2R, eR_1, ee_2R_2)	$(e_1e_2)(ee_1, ee_1e_2)$	(2)

$p_{01}m_1m_{01}$

Prezentacija: (e_1X, e_1R, eR_1)

Antisimetrijska karakteristika: $(R)(\overline{R_1, R_1X})$

(e_1X, e_1R, eR_1)		
(e_1e_2X, e_1R, eR_1)	$(e_1)(e, ee_1e_2)$	(1)
(e_1X, e_1e_2R, eR_1)	$(e_1e_2)(e, ee_1)$	(2)
(e_1e_2X, e_1R, ee_2R_1)	$(e_1)(ee_1, ee_2)$	(3)
(e_1X, e_1e_2R, ee_2R_1)	$(e_1e_2)(ee_2, ee_1e_2)$	(4)

Prezentacija: (e_1R, ee_1R_1, eR_2)

Antisimetrijska karakteristika: $(R)(\overline{RR_1, RR_2})$

(e_1R, ee_1R_1, eR_2)		
(e_1e_2R, ee_1R_1, eR_2)	$(e_1e_2)(ee_2, ee_1e_2)$	(1)
$(e_1R, ee_1e_2R_1, eR_2)$	$(e_1)(ee_1, ee_2)$	(2)
(e_1R, ee_1R_1, ee_2R_2)	$(e_1)(e, ee_1e_2)$	(3)
$(e_1e_2R, ee_1e_2R_1, ee_2R_2)$	$(e_1e_2)(e, ee_1)$	(4)

$pm_{11}m_{01}$

Prezentacija: (X, e_1R, ee_1R_1)

Antisimetrijska karakteristika: $(R)(\overline{R_1, R_1X})$

(X, e_1R, ee_1R_1)		
(e_2X, e_1R, ee_1R_1)	$(e_1)(ee_1, ee_1e_2)$	(1)
(e_2X, e_1e_2R, ee_1R_1)	$(e_1e_2)(ee_1, ee_1e_2)$	(2)
$(e_2X, e_1R, ee_1e_2R_1)$	$(e_1)(ee_1, ee_1e_2)$	(1)
$(e_2X, e_1e_2R, ee_1e_2R_1)$	$(e_1e_2)(ee_1, ee_1e_2)$	(2)

Prezentacija: (e_1R, ee_1R_1, ee_1R_2)

Antisimetrijska karakteristika: $(R)(\overline{RR_1, RR_2})$

(e_1R, ee_1R_1, ee_1R_2)		
$(e_1R, ee_1e_2R_1, ee_1R_2)$	$(e_1)(e, ee_2)$	(1)
$(e_1R, ee_1R_1, ee_1e_2R_2)$	$(e_1)(e, ee_2)$	(1)
$(e_1e_2R, ee_1e_2R_1, ee_1R_2)$	$(e_1e_2)(e, ee_2)$	(2)
$(e_1e_2R, ee_1R_1, ee_1e_2R_2)$	$(e_1e_2)(e, ee_2)$	(2)

$p_{11}mm_1$

Prezentacija: (ee_1X, eR, R_1)

Antisimetrijska karakteristika: $(R)(\overline{R_1, R_1X})$

(ee_1X, eR, R_1)		
(ee_1X, eR, e_2R_1)	$(e)(e_2, ee_1e_2)$	(1)
(ee_1e_2X, eR, e_2R_1)	$(e)(e_2, ee_1)$	(2)
(ee_1X, ee_2R, e_2R_1)	$(ee_2)(e_2, ee_1e_2)$	(3)
$(ee_1e_2X, ee_2R, e_2R_1)$	$(ee_2)(e_2, ee_1)$	(4)

Prezentacija: (eR, ee_1R_1, R_2)

Antisimetrijska karakteristika: $(R)(\overline{RR_1, RR_2})$

(eR, ee_1R_1, R_2)		
(eR, ee_1R_1, e_2R_2)	$(e)(e_1, ee_2)$	(1)
(ee_2R, ee_1R_1, e_2R_2)	$(ee_2)(e, e_1e_2)$	(2)
$(eR, ee_1e_2R_1, e_2R_2)$	$(e)(ee_2, e_1e_2)$	(3)
$(ee_2R, ee_1e_2R_1, e_2R_2)$	$(ee_2)(e, e_1)$	(4)

$p_1{}^{mm}{}_{11}$

Prezentacija: (eX, ee_1R, R_1)

Antisimetrijska karakteristika: $(R)(\overline{R_1, R_1X})$

(eX, ee_1R, R_1)		
(eX, ee_1R, e_2R_1)	$(ee_1)(e_2, ee_2)$	(1)
(ee_2X, ee_1R, e_2R_1)	$(ee_1)(e, e_2)$	(2)
(eX, ee_1e_2R, e_2R_1)	$(ee_1e_2)(e_2, ee_2)$	(3)
$(ee_2X, ee_1e_2R, e_2R_1)$	$(ee_1e_2)(e, e_2)$	(4)

Prezentacija: (ee_1R, eR_1, R_2)

Antisimetrijska karakteristika: $(R)(\overline{RR_1, RR_2})$

(ee_1R, eR_1, R_2)		
(ee_1R, eR_1, e_2R_2)	$(ee_1)(e_1, ee_1e_2)$	(1)
(ee_1e_2R, eR_1, e_2R_2)	$(ee_1e_2)(ee_1, e_1e_2)$	(2)
(ee_1R, ee_2R_1, e_2R_2)	$(ee_1)(e_1e_2, ee_1e_2)$	(3)
$(ee_1e_2R, ee_2R_1, e_2R_2)$	$(ee_1e_2)(e_1, ee_1)$	(4)

$p_1{}^{m}{}_{01}{}^{m}{}_{1}$

Prezentacija: (eX, eR, e_1R_1)

Antisimetrijska karakteristika: $(R)(\overline{R_1, R_1X})$

(eX, eR, e_1R_1)		
(ee_2X, eR, e_1R_1)	$(e)(e_1, ee_1e_2)$	(1)
(eX, ee_2R, e_1R_1)	$(ee_2)(e_1, ee_1)$	(2)
$(ee_2X, eR, e_1e_2R_1)$	$(e)(ee_1, e_1e_2)$	(3)
$(eX, ee_2R, e_1e_2R_1)$	$(ee_2)(e_1e_2, ee_1e_2)$	(4)

Prezentacija: (eR, ee_1R_1, e_1R_2)

Antisimetrijska karakteristika: $(R)(\overline{R_1, R_1X})$

(eR, ee_1R_1, e_1R_2)		
(ee_2R, ee_1R_1, e_1R_2)	$(ee_2)(e_1e_2, ee_1e_2)$	(1)
$(eR, ee_1e_2R_1, e_1R_2)$	$(e)(ee_1, e_1e_2)$	(2)
$(eR, ee_1R_1, e_1e_2R_1)$	$(e)(e_1, ee_1e_2)$	(3)
$(ee_2R, ee_1e_2R_1, e_1e_2R_2)$	$(ee_2)(e_1, ee_1)$	(4)

$p_{11}m_{01}m_1$

Prezentacija: (ee_1X, eR, e_1R_1)

Antisimetrijska karakteristika: $(R)(\overline{R_1, R_1X})$

(ee_1X, eR, e_1R_1)		
(ee_1e_2X, eR, e_1R_1)	$(e)(e_1, ee_2)$	(1)
(ee_1X, ee_2R, e_1R_1)	$(ee_2)(e, e_1)$	(2)
$(ee_1X, eR, e_1e_2R_1)$	$(e)(ee_2, e_1e_2)$	(3)
$(ee_1e_2X, ee_2R, e_1e_2R_1)$	$(ee_2)(e, e_1e_2)$	(4)

Prezentacija: (eR, eR_1, e_1R_2)

Antisimetrijska karakteristika: $(R)(\overline{RR_1, RR_2})$

(eR, eR_1, e_1R_2)		
(ee_2R, eR_1, e_1R_2)	$(ee_2)(e_2, ee_1e_2)$	(1)
(eR, ee_2R_1, e_1R_2)	$(e)(e_2, ee_1)$	(2)
$(ee_2R, eR_1, e_1e_2R_2)$	$(ee_2)(e_2, ee_1)$	(3)
$(eR, ee_2R_1, e_1e_2R_2)$	$(e)(e_2, ee_1e_2)$	(4)

$\underline{p_1 m_{01} m_{11}}$

Prezentacija: (eX, ee_1R, e_1R_1)

Antisimetrijska karakteristika: $(R)(\overline{R_1, R_1X})$

$\underline{(eX, ee_1R, e_1R_1)}$

(ee_2X, ee_1R, e_1R_1)	$(ee_1)(e_1, ee_1e_2)$	(1)
(eX, ee_1e_2R, e_1R_1)	$(ee_1e_2)(e_1, ee_1)$	(2)
$(eX, ee_1R, e_1e_2R_1)$	$(ee_1)(e_1e_2, ee_1e_2)$	(3)
$(ee_2X, ee_1e_2R, e_1e_2R_1)$	$(ee_1e_2)(ee_1, e_1e_2)$	(4)

Prezentacija: (ee_1R, ee_1R_1, e_1R_2)

Antisimetrijska karakteristika: $(R)(\overline{RR_1, RR_2})$

$\underline{(ee_1R, ee_1R_1, e_1R_2)}$

$(ee_1e_2R, ee_1R_1, e_1R_2)$	$(ee_1e_2)(e_2, ee_2)$	(1)
$(ee_1R, ee_1e_2R_1, e_1R_2)$	$(ee_1)(e, e_2)$	(2)
$(ee_1e_2R, ee_1R_1, e_1e_2R_2)$	$(ee_1e_2)(e, e_2)$	(3)
$(ee_1R, ee_1e_2R_1, e_1e_2R_2)$	$(ee_1)(e_2, ee_2)$	(4)

$\underline{p_{11} m_{01} m_{11}}$

Prezentacija: (ee_1X, ee_1R, e_1R_1)

Antisimetrijska karakteristika: $(R)(\overline{R_1, R_1X})$

$\underline{(ee_1X, ee_1R, e_1R_1)}$

$(ee_1e_2X, ee_1R, e_1R_1)$	$(ee_1)(e_1, ee_2)$	(1)
$(ee_1X, ee_1e_2R, e_1R_1)$	$(ee_1e_2)(e, e_1)$	(2)
$(ee_1e_2X, ee_1R, e_1e_2R_1)$	$(ee_1)(e, e_1e_2)$	(3)
$(ee_1X, ee_1e_2R, e_1e_2R_1)$	$(ee_1e_2)(ee_2, e_1e_2)$	(4)

Prezentacija: (ee_1R, eR_1, e_1R_2)

Antisimetrijska karakteristika: $(R)(\overline{RR_1, RR_2})$

(ee_1R, eR_1, e_1R_2)		
(ee_1e_2R, eR_1, e_1R_2)	$(ee_1e_2)(ee_2, e_1e_2)$	(1)
(ee_1R, ee_2R_1, e_1R_2)	$(ee_1)(e, e_1e_2)$	(2)
$(ee_1R, eR_1, e_1e_2R_2)$	$(ee_1)(e_1, ee_2)$	(3)
$(ee_1e_2R, ee_2R_1, e_1e_2R_2)$	$(ee_1e_2)(e, e_1)$	(4)

$\underline{p_{01}m_1m_1}$

Prezentacija: (e_1X, eR, eR_1)

Antisimetrijska karakteristika: $(R)(\overline{R_1, R_1X})$

(e_1X, eR, eR_1)		
(e_1X, ee_2R, eR_1)	$(ee_2)(e, ee_1)$	(1)
(e_1X, eR, ee_2R_1)	$(e)(ee_2, ee_1e_2)$	(2)
(e_1e_2X, ee_2R, eR_1)	$(ee_2)(e, ee_1e_2)$	(3)
(e_1e_2X, eR, ee_2R_1)	$(e)(ee_1, ee_2)$	(4)

Prezentacija: (eR, ee_1R_1, eR_2)

Antisimetrijska karakteristika: $(R)(\overline{RR_1, RR_2})$

(eR, ee_1R_1, eR_2)		
(ee_2R, ee_1R_1, eR_2)	$(ee_2)(e_2, e_1e_2)$	(1)
(eR, ee_1R_1, ee_2R_2)	$(e)(e_1, e_2)$	(2)
$(ee_2R, ee_1e_2R_1, eR_2)$	$(ee_2)(e_1, e_2)$	(3)
$(eR, ee_1e_2R_1, ee_2R_2)$	$(e)(e_2, e_1e_2)$	(4)

$\underline{pm_1m_{11}}$

Prezentacija: (X, ee_1R, eR_1)

Antisimetrijska karakteristika: $(R)(\overline{R_1, R_1X})$

(X, ee_1R, eR_1)		
(e_2X, ee_1R, eR_1)	$(ee_1)(e, ee_2)$	(1)
(e_2X, ee_1e_2R, eR_1)	$(ee_1e_2)(e, ee_2)$	(2)
(e_2X, ee_1R, ee_2R_1)	$(ee_1)(e, ee_2)$	(1)
$(e_2X, ee_1e_2R, ee_2R_1)$	$(ee_1e_2)(e, ee_2)$	(2)

Prezentacija: (ee_1R, eR_1, eR_2)

Antisimetrijska karakteristika: $(R)(\overline{RR_1, RR_2})$

(ee_1R, eR_1, eR_2)		
(ee_1R, ee_2R_1, eR_2)	$(ee_1)(e_1, e_1e_2)$	(1)
(ee_1R, eR_1, ee_2R_2)	$(ee_1)(e_1, e_1e_2)$	(1)
$(ee_1e_2R, ee_2R_1, eR_2)$	$(ee_1e_2)(e_1, e_1e_2)$	(2)
$(ee_1e_2R, eR_1, ee_2R_2)$	$(ee_1e_2)(e_1, e_1e_2)$	(2)

$\underline{pm_{11}m_1}$

Prezentacija: (X, eR, ee_1R_1)

Antisimetrijska karakteristika: $(R)(\overline{R_1, R_1X})$

(X, eR, ee_1R_1)		
(e_2X, eR, ee_1R_1)	$(e)(ee_1, ee_1e_2)$	(1)
(e_2X, ee_2R, ee_1R_1)	$(ee_2)(ee_1, ee_1e_2)$	(2)
$(e_2X, eR, ee_1e_2R_1)$	$(e)(ee_1, ee_1e_2)$	(1)
$(e_2X, ee_2R, ee_1e_2R_1)$	$(ee_2)(ee_1, ee_1e_2)$	(2)

Prezentacija: (eR, ee_1R_1, ee_1R_2)

Antisimetrijska karakteristika: $(R)(\overline{RR_1, RR_2})$

(eR, ee_1R_1, ee_1R_2)		
$(eR, ee_1e_2R_1, ee_1R_2)$	$(e)(e_1, e_1e_2)$	(1)
$(eR, ee_1R_1, ee_1e_2R_2)$	$(e)(e_1, e_1e_2)$	(1)
$(ee_2R, ee_1e_2R_1, ee_1R_2)$	$(ee_2)(e_1, e_1e_2)$	(2)
$(ee_2R, ee_1R_1, ee_1e_2R_2)$	$(ee_2)(e_1, e_1e_2)$	(2)

<u>$p_{01}m_1m_{11}$</u>

Prezentacija: (e_1X, ee_1R, eR_1)

Antisimetrijska karakteristika: $(R)(\overline{R_1, R_1X})$

(e_1X, ee_1R, eR_1)		
(e_1e_2X, ee_1R, eR_1)	$(ee_1)(e, ee_1e_2)$	(1)
(e_1X, ee_1e_2R, eR_1)	$(ee_1e_2)(e, ee_1)$	(2)
(e_1X, ee_1R, ee_2R_1)	$(ee_1)(ee_2, ee_1e_2)$	(3)
$(e_1e_2X, ee_1e_2R, ee_2R_1)$	$(ee_1e_2)(ee_1, ee_2)$	(4)

Prezentacija: (ee_1R, ee_1R_1, eR_2)

Antisimetrijska karakteristika: $(R)(\overline{RR_1, RR_2})$

(ee_1R, ee_1R_1, eR_2)		
$(ee_1e_2R, ee_1R_1, eR_2)$	$(ee_1e_2)(e_2, e_1e_2)$	(1)
$(ee_1R, ee_1e_2R_1, eR_2)$	$(ee_1)(e_1, e_2)$	(2)
$(ee_1e_2R, ee_1R_1, ee_2R_2)$	$(ee_1e_2)(e_1, e_2)$	(3)
$(ee_1R, ee_1e_2R_1, ee_2R_2)$	$(ee_1)(e_2, e_1e_2)$	(4)

Grupe antisimetrije bordura, L=3

$p_1{}^{mm}01$

1.)	(eX, e_1R, e_2R_1)	(e_1R, ee_2R_1, e_2R_2)	$p_1{}^m001^m01$
2.)	(ee_2X, e_1R, e_2R_1)	(e_1R, eR_1, e_2R_2)	$p_{101}{}^m001^m01$
3.)	(eX, e_1e_2R, e_2R_1)	$(e_1e_2R, ee_2R_1, e_2R_2)$	$p_1{}^m001^m011$
4.)	(ee_2X, e_1e_2R, e_2R_1)	(e_1e_2R, eR_1, e_2R_2)	$p_{101}{}^m001^m011$

$p_1{}^m01^m$

5.)	(eX, e_2R, e_1R_1)	(e_2R, ee_1R_1, e_1R_2)	$p_1{}^m01^m001$
6.)	(ee_2X, e_2R, e_1R_1)	$(e_2R, ee_1e_2R_1, e_1R_2)$	$p_{101}{}^m01^m001$
7.)	$(eX, e_2R, e_1e_2R_1)$	$(e_2R, ee_1e_2R_1, e_1e_2R_2)$	$p_1{}^m011^m001$
8.)	$(ee_2X, e_2R, e_1e_2R_1)$	$(e_2R, ee_1R_1, e_1e_2R_2)$	$p_{101}{}^m011^m001$

$p_{11}{}^{mm}\ 01$

9.)	(ee_1X, e_1R, e_2R_1)	$(e_1R, ee_1e_2R_1, e_2R_2)$	$p_{11}{}^m001^m01$
10.)	(ee_1e_2X, e_1R, e_2R_1)	(e_1R, ee_1R_1, e_2R_2)	$p_{111}{}^m001^m01$
11.)	(ee_1X, e_1e_2R, e_2R_1)	$(e_1e_2R, ee_1e_2R_1, e_2R_2)$	$p_{11}{}^m001^m011$
12.)	$(ee_1e_2X, e_1e_2R, e_2R_1)$	$(e_1e_2R, ee_1R_1, e_2R_2)$	$p_{111}{}^m001^m011$

$p_{11}{}^m01^m$

13.)	(ee_1X, e_2R, e_1R_1)	(e_2R, eR_1, e_1R_2)	$p_{11}{}^m01^m001$
14.)	(ee_1e_2X, e_2R, e_1R_1)	(e_2R, ee_2R_1, e_1R_2)	$p_{111}{}^m01^m001$

15.) $(ee_1X, e_2R, e_1e_2R_1)$ $(e_2R, ee_2R_1, e_1e_2R_2)$ $p_{11}m_{011}m_{001}$

16.) $(ee_1e_2X, e_2R, e_1e_2R_1)$ $(e_2R, eR_1, e_1e_2R_1)$ $p_{111}m_{011}m_{001}$

$\underline{p_1m_{01}m_{01}}$

17.) (eX, e_1e_2R, e_1R_1) $(e_1e_2R, ee_1R_1, e_1R_2)$ $p_1m_{01}m_{011}$

18.) $(eX, e_1R, e_1e_2R_1)$ $(e_1R, ee_1e_2R_1, e_1e_2R_2)$ $p_1m_{011}m_{01}$

19.) (ee_2X, e_1e_2R, e_1R_1) $(e_1e_2R, ee_1e_2R_1, e_1R_2)$ $p_{101}m_{01}m_{011}$

20.) $(ee_2X, e_1R, e_1e_2R_1)$ $(e_1R, ee_1R_1, e_1e_2R_2)$ $p_{101}m_{011}m_{01}$

$\underline{p_{11}m_{01}m_{01}}$

21.) (ee_1X, e_1e_2R, e_1R_1) (e_1e_2R, eR_1, e_1R_2) $p_{11}m_{01}m_{011}$

22.) $(ee_1X, e_1R, e_1e_2R_1)$ $(e_1R, ee_2R_1, e_1e_2R_2)$ $p_{11}m_{011}m_{01}$

23.) $(ee_1e_2X, e_1e_2R, e_1R_1)$ $(e_1e_2R, ee_2R_1, e_1R_2)$ $p_{111}m_{01}m_{011}$

24.) $(ee_1e_2X, e_1R, e_1e_2R_1)$ $(e_1R, eR_1, e_1e_2R_1)$ $p_{111}m_{011}m_{01}$

$\underline{p_{01}mm_1}$

25.) (e_1X, eR, e_2R_1) $(eR, e_1e_2R_1, e_2R_2)$ $p_{01}m_{001}m_1$

26.) (e_1e_2X, eR, e_2R_1) (eR, e_1R_1, e_2R_2) $p_{011}m_{001}m_1$

27.) (e_1X, ee_2R, e_2R_1) $(ee_2R, e_1e_2R_1, e_2R_2)$ $p_{01}m_{001}m_{101}$

28.) (e_1e_2X, ee_2R, e_2R_1) (ee_2R, e_1R_1, e_2R_2) $p_{011}m_{001}m_{101}$

$\underline{pm_{01}m_1}$

29.) (e_2X, eR, e_1R_1) $(eR, e_1e_2R_1, e_1R_2)$ $p_{001}m_{01}m_1$

30.) (e_2X, ee_2R, e_1R_1) $(ee_2R, e_1e_2R_1, e_1R_2)$ $p_{001}{}^{m}{}_{01}{}^{m}{}_{101}$

$\underline{p_{01}{}^{mm}{}_{11}}$

31) (e_1X, ee_1R, e_2R_1) $(ee_1R, e_1e_2R_1, e_2R_2)$ $p_{01}{}^{m}{}_{001}{}^{m}{}_{11}$

32.) (e_1e_2X, ee_1R, e_2R_1) (ee_1R, e_1R_1, e_2R_2) $p_{011}{}^{m}{}_{001}{}^{m}{}_{11}$

33.) (e_1X, ee_1e_2R, e_2R_1) $(ee_1e_2R, e_1e_2R_1, e_2R_2)$ $p_{01}{}^{m}{}_{001}{}^{m}{}_{111}$

34.) $(e_1e_2X, ee_1e_2R, e_2R_1)(ee_1e_2R, e_1R_1, e_2R_2)$ $p_{011}{}^{m}{}_{001}{}^{m}{}_{111}$

$\underline{p^{m}{}_{01}{}^{m}{}_{11}}$

35.) (e_2X, ee_1R, e_1R_1) $(ee_1R, e_1e_2R_1, e_1R_2)$ $p_{001}{}^{m}{}_{01}{}^{m}{}_{11}$

36.) (e_2X, ee_1e_2R, e_1R_1) $(ee_1e_2R, e_1e_2R_1, e_1R_2)$ $p_{001}{}^{m}{}_{01}{}^{m}{}_{111}$

$\underline{p_{01}{}^{m}{}_{1}{}^{m}}$

37.) (e_1X, e_2R, eR_1) (e_2R, ee_1R_1, eR_2) $p_{01}{}^{m}{}_{1}{}^{m}{}_{001}$

38.) (e_1e_2X, e_2R, eR_1) $(e_2R, ee_1e_2R_1, eR_2)$ $p_{011}{}^{m}{}_{1}{}^{m}{}_{001}$

39.) (e_1X, e_2R, ee_2R_1) $(e_2R, ee_1e_2R_1, ee_2R_2)$ $p_{01}{}^{m}{}_{101}{}^{m}{}_{001}$

40.) (e_1e_2X, e_2R, ee_2R_1) (e_2R, ee_1R_1, ee_2R_2) $p_{011}{}^{m}{}_{101}{}^{m}{}_{001}$

$\underline{p^{m}{}_{1}{}^{m}{}_{01}}$

41.) (e_2X, e_1R, eR_1) (e_1R, ee_2R_1, eR_2) $p_{001}{}^{m}{}_{1}{}^{m}{}_{01}$

42.) (e_2X, e_1e_2R, eR_1) (e_1e_2R, ee_2R_1, eR_2) $p_{001}{}^{m}{}_{1}{}^{m}{}_{011}$

$p_{01}{}^{m}{}_{1}{}^{m}{}_{01}$

43.) $(e_1e_2X, e_1R, eR_1)\ (e_1R, ee_1e_2R_1, eR_2)$ $p_{011}{}^{m}{}_{1}{}^{m}{}_{01}$

44.) $(e_1X, e_1e_2R, eR_1)(e_1e_2R, ee_1R_1, eR_2)$ $p_{01}{}^{m}{}_{1}{}^{m}{}_{011}$

45.) $(e_1e_2X, e_1R, ee_2R_1)(e_1R, ee_1R_1, ee_2R_2)$ $p_{011}{}^{m}{}_{101}{}^{m}{}_{01}$

46.) $(e_1X, e_1e_2R, ee_2R_1)\ (e_1e_2R, ee_1e_2R_1, ee_2R_2)$ $p_{01}{}^{m}{}_{101}{}^{m}{}_{011}$

$p^{m}{}_{11}{}^{m}{}_{01}$

47.) $(e_2X, e_1R, ee_1R_1)\ (e_1R, ee_1e_2R, ee_1R_2)$ $p_{001}{}^{m}{}_{11}{}^{m}{}_{01}$

48.) $(e_2X, e_1e_2R, ee_1R_1)\ (e_1e_2R, ee_1e_2R_1, ee_1R_2)$ $p_{001}{}^{m}{}_{11}{}^{m}{}_{011}$

$p_{11}{}^{mm}{}_{1}$

49.) $(ee_1X, eR, e_2R_1)(eR, ee_1e_2R_1, e_2R_2)$ $p_{11}{}^{m}{}_{001}{}^{m}{}_{1}$

50.) $(ee_1e_2X, eR, e_2R_1)(eR, ee_1R_1, e_2R_2)$ $p_{111}{}^{m}{}_{001}{}^{m}{}_{1}$

51.) $(ee_1X, ee_2R, e_2R_1)(ee_2R, ee_1e_2R_1, e_2R_2)$ $p_{11}{}^{m}{}_{001}{}^{m}{}_{101}$

52.) $(ee_1e_2X, ee_2R, e_2R_1)(ee_2R, ee_1R_1, e_2R_2)$ $p_{111}{}^{m}{}_{001}{}^{m}{}_{101}$

$p_{1}{}^{mm}{}_{11}$

53.) $(eX, ee_1R, e_2R_1)(ee_1R, ee_2R_1, e_2R_2)$ $p_{1}{}^{m}{}_{001}{}^{m}{}_{11}$

54.) $(ee_2X, ee_1R, e_2R_1)(ee_1R, eR_1, e_2R_2)$ $p_{101}{}^{m}{}_{001}{}^{m}{}_{11}$

55.) $(eX, ee_1e_2R, e_2R_1)(ee_1e_2R, ee_2R_1, e_2R_2)$ $p_{1}{}^{m}{}_{001}{}^{m}{}_{111}$

56.) $(ee_2X, ee_1e_2R, e_2R_1)(ee_1e_2R, eR_1, e_2R_2)$ $p_{101}{}^{m}{}_{001}{}^{m}{}_{111}$

$\underline{p_1 m_{01} m_1}$

57.) (ee_2X, eR, e_1R_1) $(eR, ee_1e_2R_1, e_1R_2)$ $p_{101}m_{01}m_1$

58.) (eX, ee_2R, e_1R_1) (ee_2R, ee_1R_1, e_1R_2) $p_1m_{01}m_{101}$

59.) $(ee_2X, eR, e_1e_2R_2)(eR, ee_1R_1, e_1e_2R_2)$ $p_{101}m_{011}m_1$

60.) $(eX, ee_2R, e_1e_2R_2)(ee_2R, ee_1e_2R_1, e_1e_2R_2)$ $p_1m_{011}m_{101}$

$\underline{p_{11} m_{01} m_1}$

61.) (ee_1e_2X, eR, e_1R_1) (eR, ee_2R_1, e_1R_2) $p_{111}m_{01}m_1$

62.) $(ee_1X, ee_2R, e_1R_1)(ee_2R, eR_1, e_1R_2)$ $p_{11}m_{01}m_{101}$

63.) $(ee_1X, eR, e_1e_2R_1)$ $(eR, ee_2R_1, e_1e_2R_2)$ $p_{11}m_{011}m_1$

64.) $(ee_1e_2X, ee_2R, e_1e_2R_2)(ee_2R, eR_1, e_1e_2R_2)$ $p_{111}m_{011}m_{101}$

$\underline{p_1 m_{01} m_{11}}$

65.) (ee_2X, ee_1R, e_1R_1) $(ee_1R, ee_1e_2R_1, e_1R_2)$ $p_{101}m_{01}m_{11}$

66.) (eX, ee_1e_2R, e_1R_1) $(ee_1e_2R, ee_1R_1, e_1R_2)$ $p_1m_{01}m_{111}$

67.) $(eX, ee_1R, e_1e_2R_1)$ $(ee_1R, ee_1e_2R_1, e_1e_2R_2)$ $p_1m_{011}m_{11}$

68.) $(ee_2X, ee_1e_2R, e_1e_2R_1)(ee_1e_2R, ee_1R_1, e_1e_2R_2)$ $p_{101}m_{011}m_{111}$

$\underline{p_{11} m_{01} m_{11}}$

69.) $(ee_1e_2X, ee_1R, e_1R_1)$ (ee_1R, ee_2R_1, e_1R_2) $p_{111}m_{01}m_{11}$

70.) $(ee_1X, ee_1e_2R, e_1R_1)$ (ee_1e_2R, eR_1, e_1R_2) $p_{11}m_{01}m_{111}$

71.) $(ee_1e_2X, ee_1R, e_1e_2R_1)$ $(ee_1R, eR_1, e_1e_2R_2)$ $p_{111}m_{011}m_{11}$

72.) $(ee_1X, ee_1e_2R, e_1e_2R_1)(ee_1e_2R, ee_2R_1, e_1e_2R_2)$ $p_{11}m_{011}m_{111}$

$p_{01}{}^{m_1}{}^{m_1}$

73.) (e_1X, ee_2R, eR_1) (ee_2R, ee_1R_1, eR_2) $p_{01}{}^{m_1}{}^{m_{101}}$

74.) (e_1X, eR, ee_2R_1) $(eR, ee_1e_2R_1, ee_2R_2)$ $p_{01}{}^{m_{101}}{}^{m_1}$

75.) (e_1e_2X, ee_2R, eR_1) $(ee_2R, ee_1e_2R_1, eR_2)$ $p_{011}{}^{m_1}{}^{m_{101}}$

76.) (e_1e_2X, eR, ee_2R_1) (eR, ee_1R_1, ee_2R_2) $p_{011}{}^{m_{101}}{}^{m_1}$

$pm_1{}^{m_{11}}$

77.) (e_2X, ee_1R, eR_1) (ee_1R, ee_2R_1, eR_2) $p_{001}{}^{m_1}{}^{m_{11}}$

78.) (e_2X, ee_1e_2R, eR_1) $(ee_1e_2R, ee_2R_1, eR_2)$ $p_{001}{}^{m_1}{}^{m_{111}}$

$pm_{11}{}^{m_1}$

79.) (e_2X, eR, ee_1R_1) $(eR, ee_1e_2R_1, ee_1R_2)$ $p_{001}{}^{m_{11}}{}^{m_1}$

80.) (e_2X, ee_2R, ee_1R_1) $(ee_2R, ee_1e_2R_1, ee_1R_2)$ $p_{001}{}^{m_{11}}{}^{m_{101}}$

$p_{01}{}^{m_1}{}^{m_{11}}$

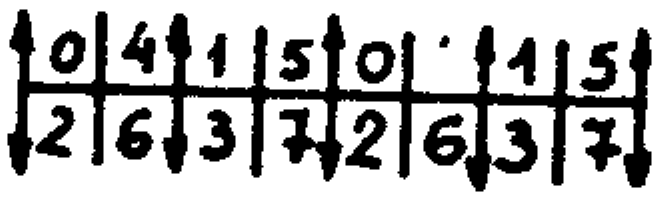
81.) (e_1e_2X, ee_1R, eR_1) $(ee_1R, ee_1e_2R_1, eR_2)$ $p_{011}{}^{m_1}{}^{m_{11}}$

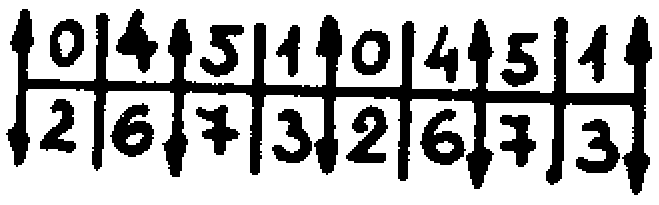
82.) (e_1X, ee_1e_2R, eR_1) $(ee_1e_2R, ee_1R_1, eR_2)$ $p_{01}{}^{m_1}{}^{m_{111}}$

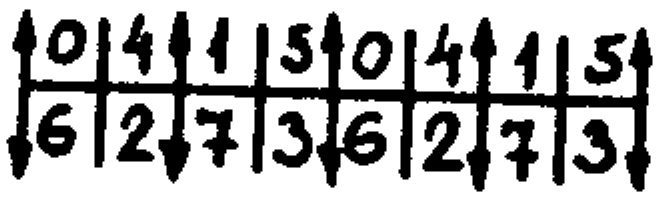
83.) (e_1X, ee_1R, ee_2R_1) $(ee_1R, ee_1e_2R_1, ee_2R_2)$ $p_{01}{}^{m_{101}}{}^{m_{11}}$

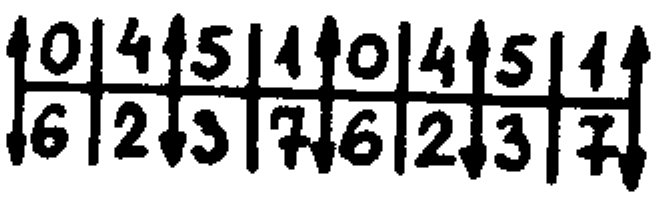
84.) $(e_1e_2X, ee_1e_2R, ee_2R_1)$ $(ee_1e_2R, ee_1R_1, ee_2R_2)$ $p_{011}{}^{m_{101}}{}^{m_{111}}$

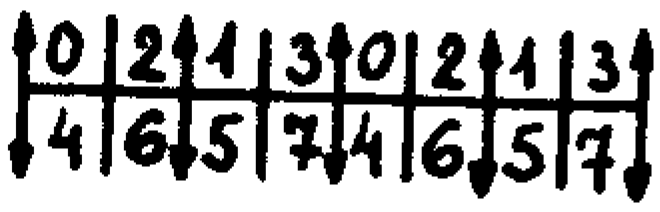
Mozaici· grupa antisimetrije bordura, L=3

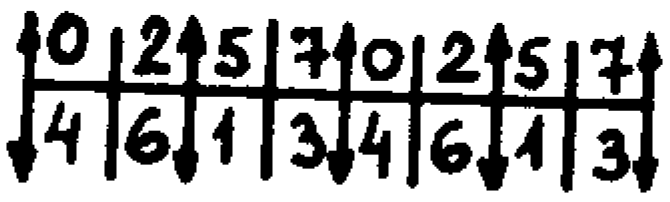
1. 

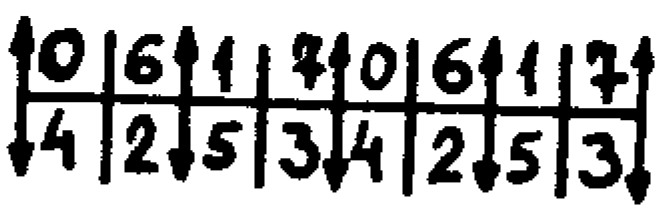
2. 

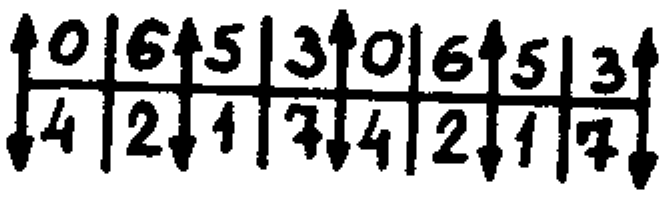
3. 

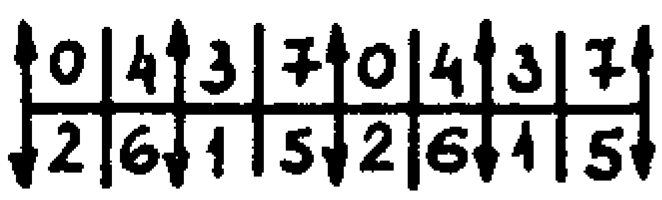
4. 

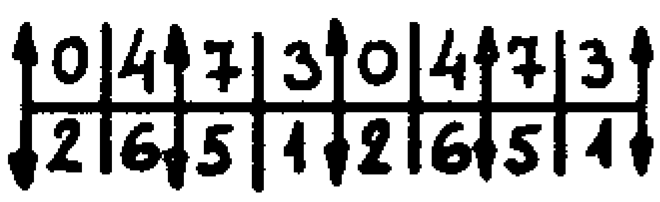
5. 

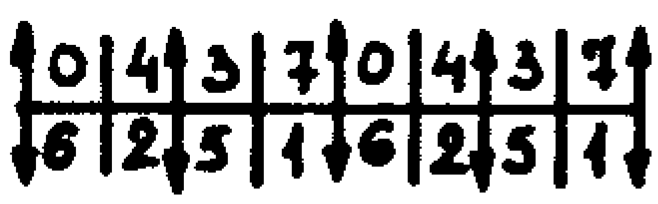
6. 

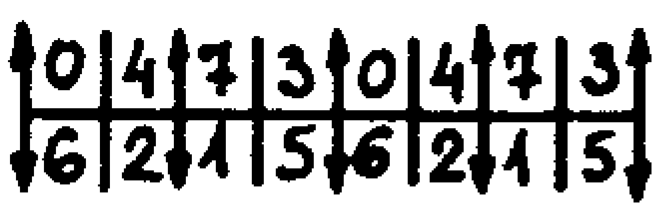
7. 

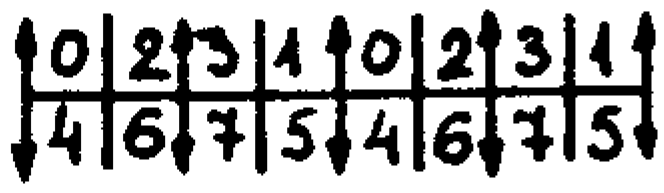
8. 

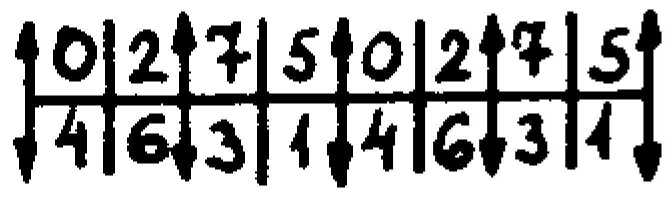
9. 

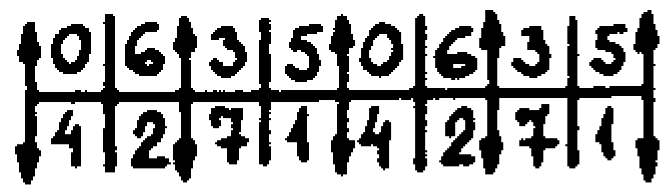
10. 

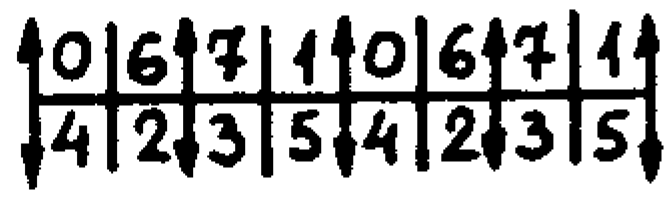
11. 

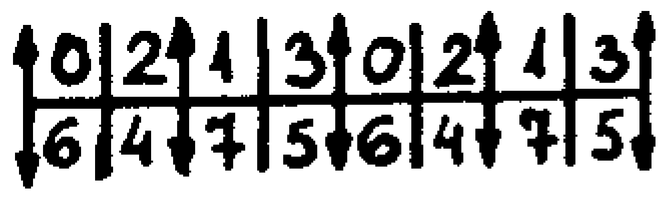
12. 

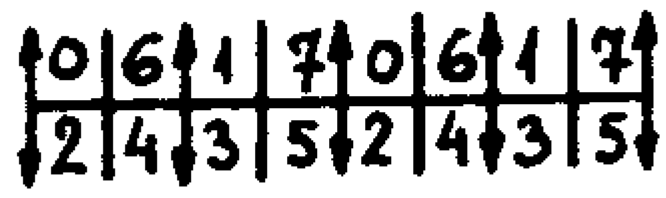
13. 

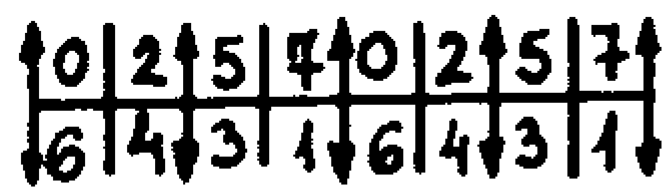
14. 

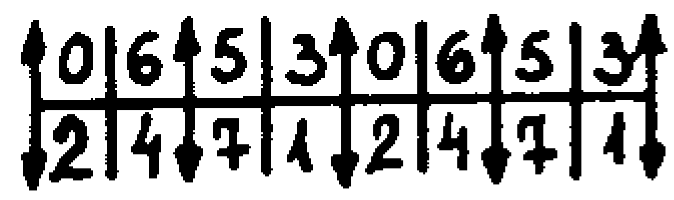
15. 

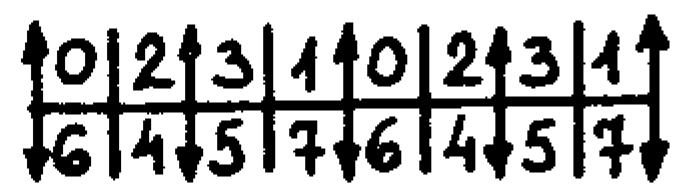
16. 

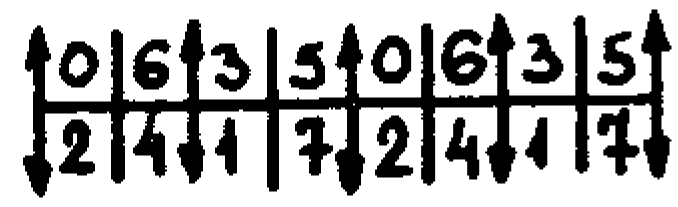
17. 

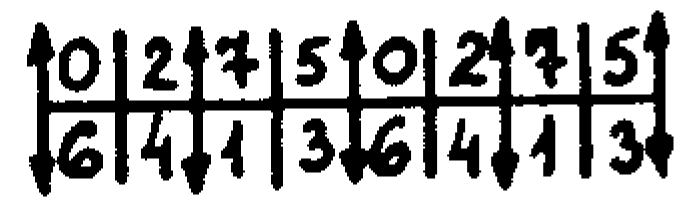
18. 

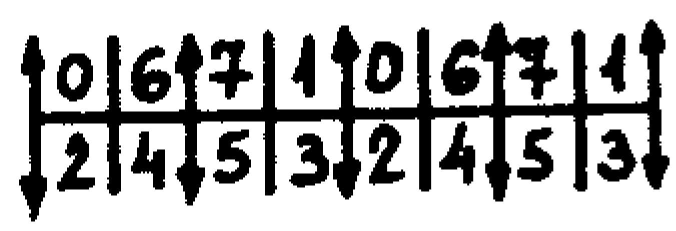
19. 

20. 

21. 

22. 

23. 

24. 

25.	0	4	2	6	0	4	2	6
	1	5	3	7	1	5	3	7
26.	0	4	6	2	0	4	6	2
	1	5	7	3	1	5	7	3
27.	0	4	2	6	0	4	2	6
	5	1	7	3	5	1	7	3
28.	0	4	6	2	0	4	6	2
	5	1	3	7	5	1	3	7
29.	0	2	4	6	0	2	4	6
	1	3	5	7	1	3	5	7
30.	0	2	4	6	0	2	4	6
	5	7	1	3	5	7	1	3
31.	0	4	2	6	0	4	2	6
	3	7	1	5	3	7	1	5
32.	0	4	6	2	0	4	6	2
	3	7	5	1	3	7	5	1
33.	0	4	2	6	0	4	2	6
	7	3	5	1	7	3	5	1
34.	0	4	6	2	0	4	6	2
	7	3	1	5	7	3	1	5
35.	0	2	4	6	0	2	4	6
	3	1	7	5	3	1	7	5
36.	0	2	4	6	0	2	4	6
	7	5	3	1	7	5	3	1
37.	0	1	2	3	0	1	2	3
	4	5	6	7	4	5	6	7
38.	0	1	6	7	0	1	6	7
	4	5	2	3	4	5	2	3
39.	0	5	2	7	0	5	2	7
	4	1	6	3	4	1	6	3
40.	0	5	6	3	0	5	6	3
	4	1	2	7	4	1	2	7
41.	0	1	4	5	0	1	4	5
	2	3	6	7	2	3	6	7
42.	0	1	4	5	0	1	4	5
	6	7	2	3	6	7	2	3
43.	0	1	6	7	0	1	6	7
	2	3	4	5	2	3	4	5
44.	0	1	2	3	0	1	2	3
	6	7	4	5	6	7	4	5
45.	0	5	6	3	0	5	6	3
	2	7	4	1	2	7	4	1
46.	0	5	2	7	0	5	2	7
	6	3	4	1	6	3	4	1
47.	0	3	4	7	0	3	4	7
	2	1	6	5	2	1	6	5
48.	0	3	4	7	0	3	4	7
	6	5	2	1	6	5	2	1
49.	0	4	3	7	0	4	3	7
	1	5	2	6	1	5	2	6
50.	0	4	7	3	0	4	7	3
	1	5	6	2	1	5	6	2
51.	0	4	3	7	0	4	3	7
	5	1	6	2	5	1	6	2
52.	0	4	7	3	0	4	7	3
	5	1	2	6	5	1	2	6
53.	0	4	1	5	0	4	1	5
	3	7	2	6	3	7	2	6
54.	0	4	5	1	0	4	5	1
	3	7	6	2	3	7	6	2
55.	0	4	1	5	0	4	1	5
	7	3	6	2	7	3	6	2
56.	0	4	5	1	0	4	5	1
	7	3	2	6	7	3	2	6

57.

0	2	5	7	0	2	5	7
1	3	4	6	1	3	4	6

58.

0	2	1	3	0	2	1	3
5	7	4	6	5	7	4	6

59.

0	6	5	3	0	6	5	3
1	7	4	2	1	7	4	2

60.

0	6	1	7	0	6	1	7
5	3	4	2	5	3	4	2

61.

0	2	7	5	0	2	7	5
1	3	6	4	1	3	6	4

62.

0	2	3	1	0	2	3	1
5	7	6	4	5	7	6	4

63.

0	6	3	5	0	6	3	5
1	7	2	4	1	7	2	4

64.

0	6	7	1	0	6	7	1
5	3	2	4	5	3	2	4

65.

0	2	5	7	0	2	5	7
3	1	6	4	3	1	6	4

66.

0	2	1	3	0	2	1	3
7	5	6	4	7	5	6	4

67.

0	6	1	7	0	6	1	7
3	5	2	4	3	5	2	4

68.

0	6	5	3	0	6	5	3
7	1	2	4	7	1	2	4

69.

0	2	7	5	0	2	7	5
3	1	4	6	3	1	4	6

70.

0	2	3	1	0	2	3	1
7	5	4	6	7	5	4	6

71.

0	6	7	1	0	6	7	1
3	5	4	2	3	5	4	2

72.

0	6	3	5	0	6	3	5
7	1	4	2	7	1	4	2

73.

0	1	2	3	0	1	2	3
5	4	7	6	5	4	7	6

74.

0	5	2	7	0	5	2	7
1	4	3	6	1	4	3	6

75.

0	1	6	7	0	1	6	7
5	4	3	2	5	4	3	2

76.

0	5	6	3	0	5	6	3
1	4	7	2	1	4	7	2

77.

0	1	4	5	0	1	4	5
3	2	7	6	3	2	7	6

78.

0	1	4	5	0	1	4	5
7	6	3	2	7	6	3	2

79.

0	3	4	7	0	3	4	7
1	2	5	6	1	2	5	6

80.

0	3	4	7	0	3	4	7
5	6	1	2	5	6	1	2

81.

0	1	6	7	0	1	6	7
3	2	5	4	3	2	5	4

82.

0	1	2	3	0	1	2	3
7	6	5	4	7	6	5	4

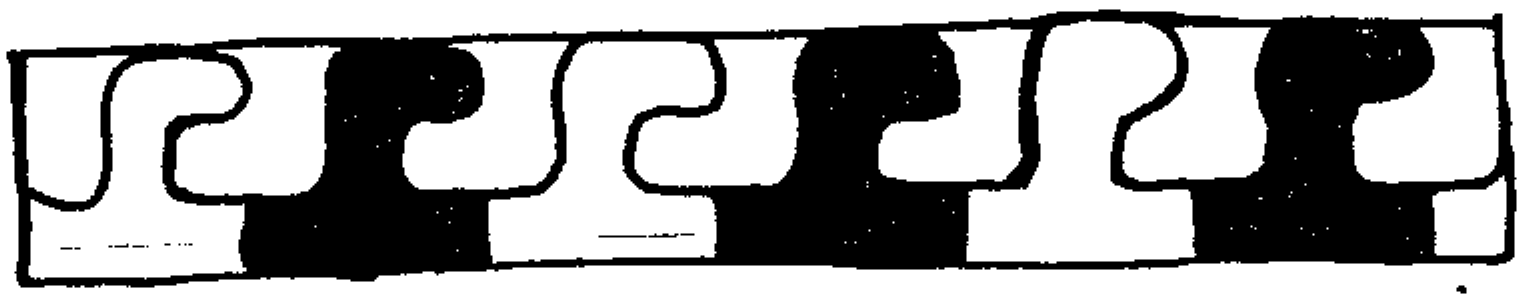
83.

0	5	2	7	0	5	2	7
3	6	1	4	3	6	1	4

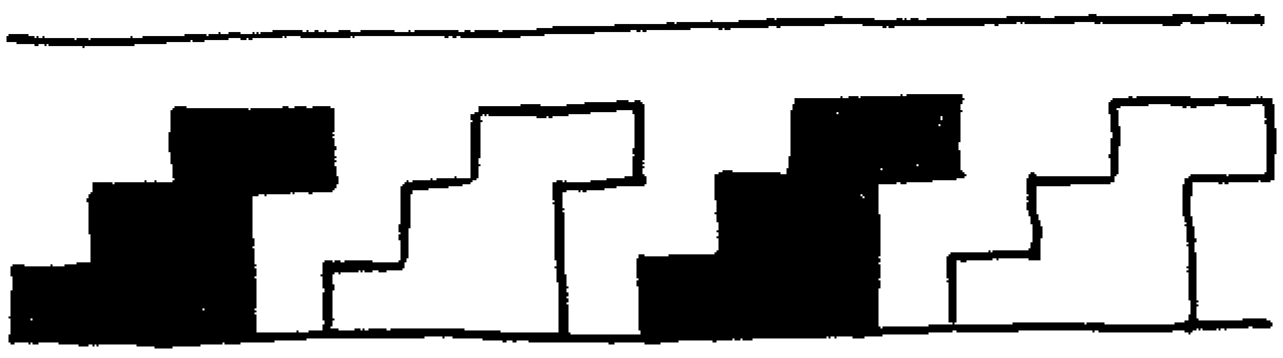
84.

0	5	6	3	0	5	6	3
7	2	1	4	7	2	1	4

a)



b)



c)

d)

e)

f)

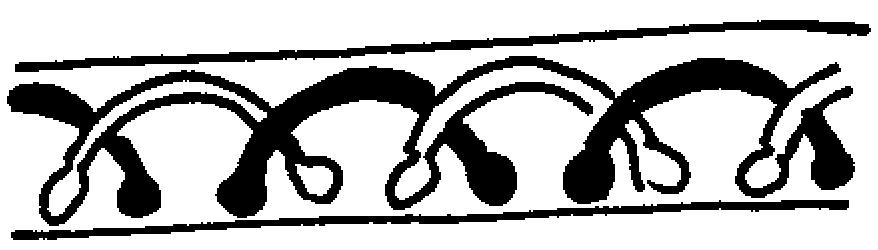
Slika 7.: primeri bordura tipa $p_1 1$

a) Kina; b)Jugoslavija, narodni motivi;
c)Grčka, neolit,3000 god. p.n.e.;
d)e)f) srednji vek

a)

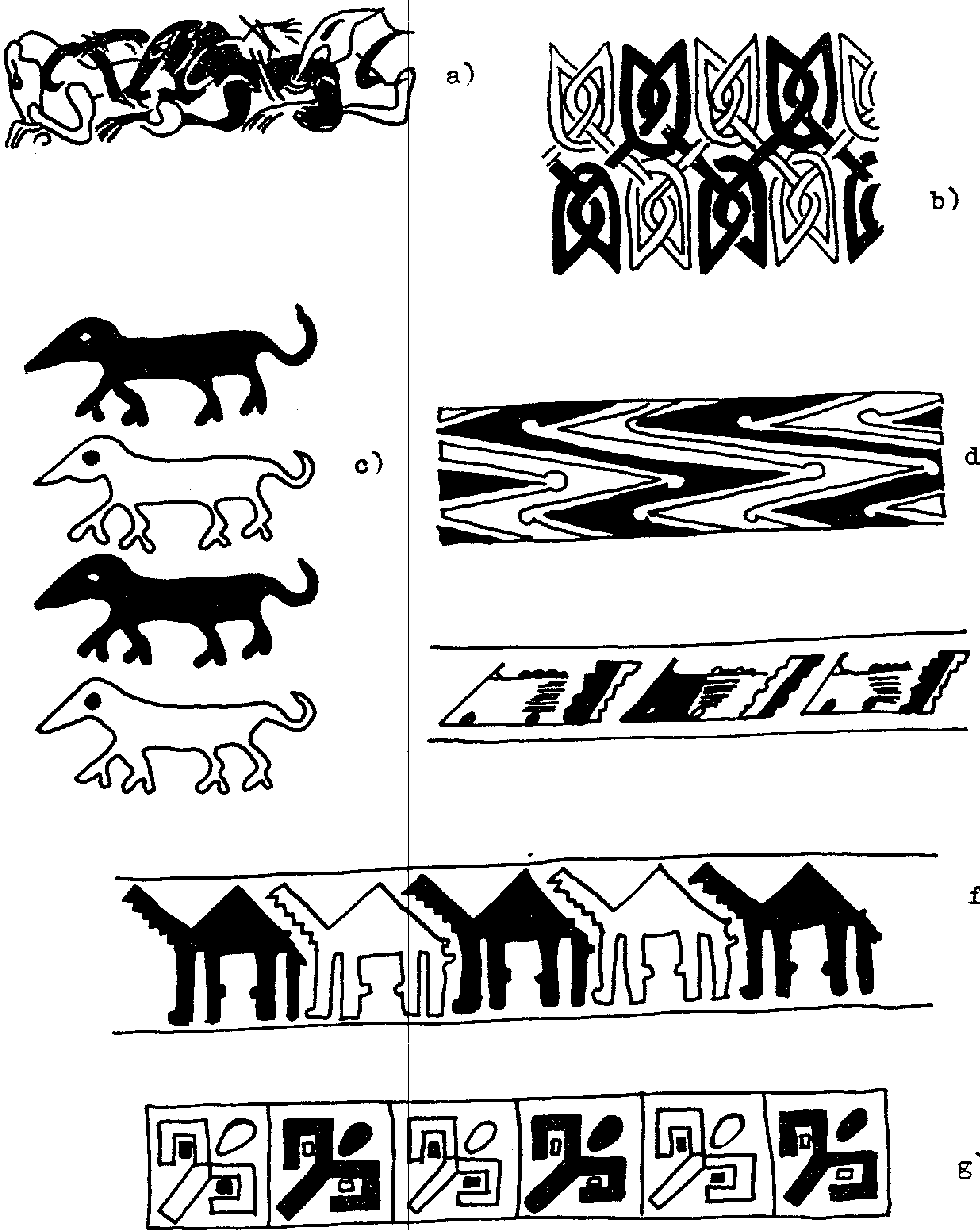
b)

c)



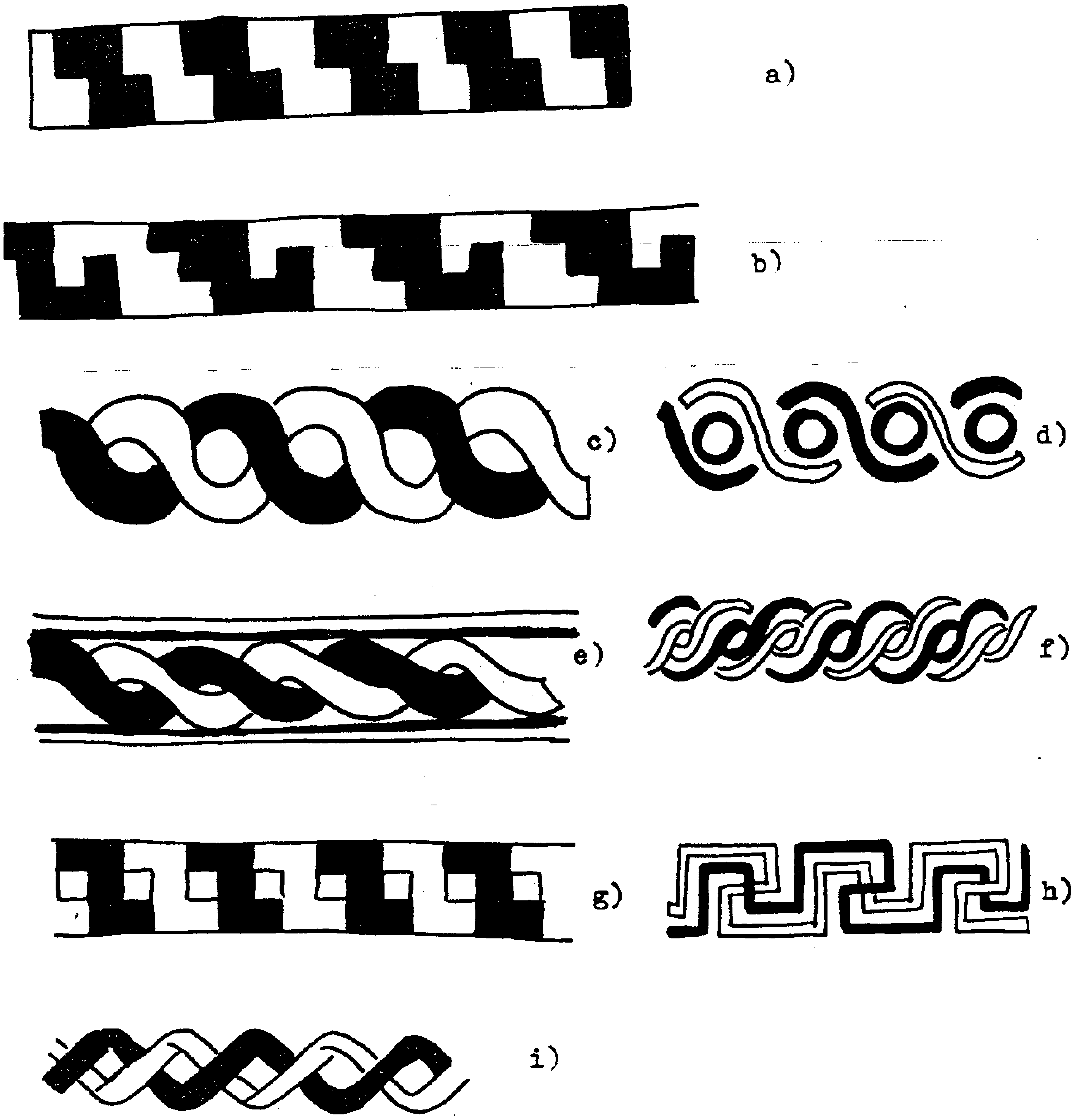
d)

Slika8.: primeri bordura tipa $p_1 1$
a) renesansa; b) pretkolumbovski period, Meksiko;
c) Grčka; d) srednji vek



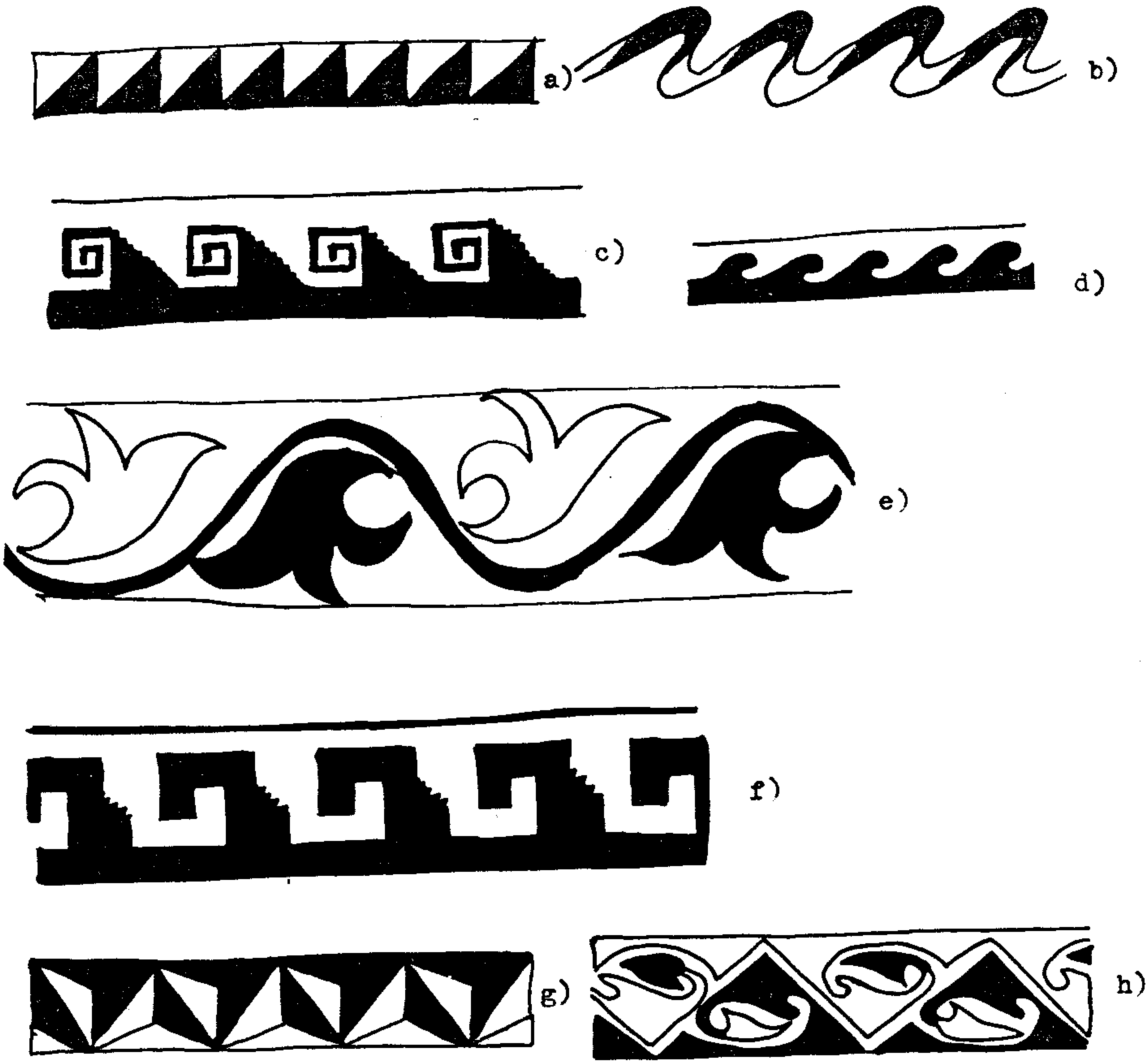
Slika 9. : primeri bordura tipa $p_1 1$

a)keltska umetnost; b) Vizantija; c) Afrika;
d) Novi Zeland; e)severna Afrika; f)Afrika;
g) narodni motiv, Jugoslavija



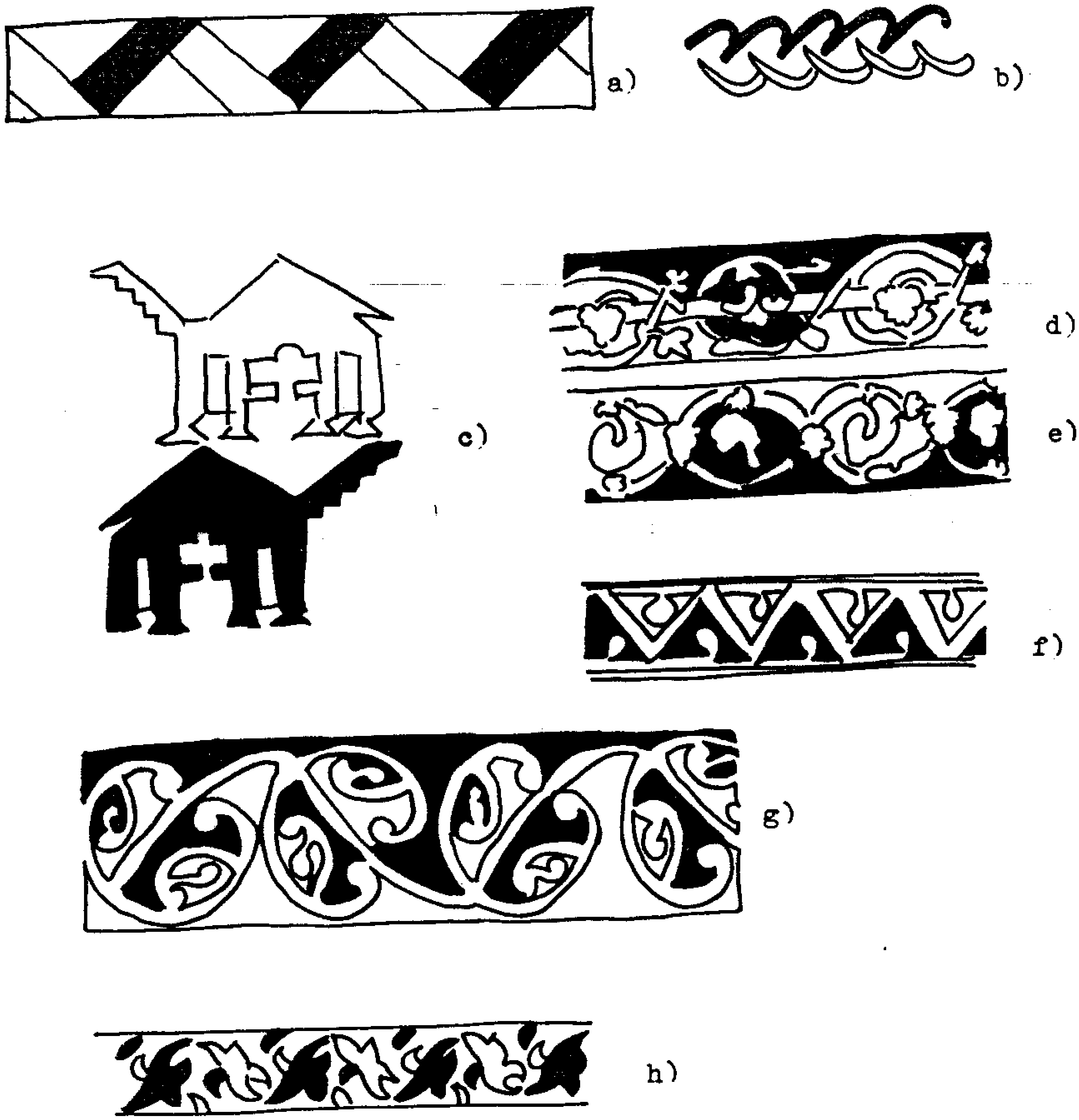
Slika 10. : primeri bordura tipa $p_1 2$

a)Grčka; b) Peru, V-VII vek; c)Vavilonija,III milenijum p.n.e.; d) Grčka; e)f)g)h) Grčka, 1500 god p.n.e.; i) srednji vek



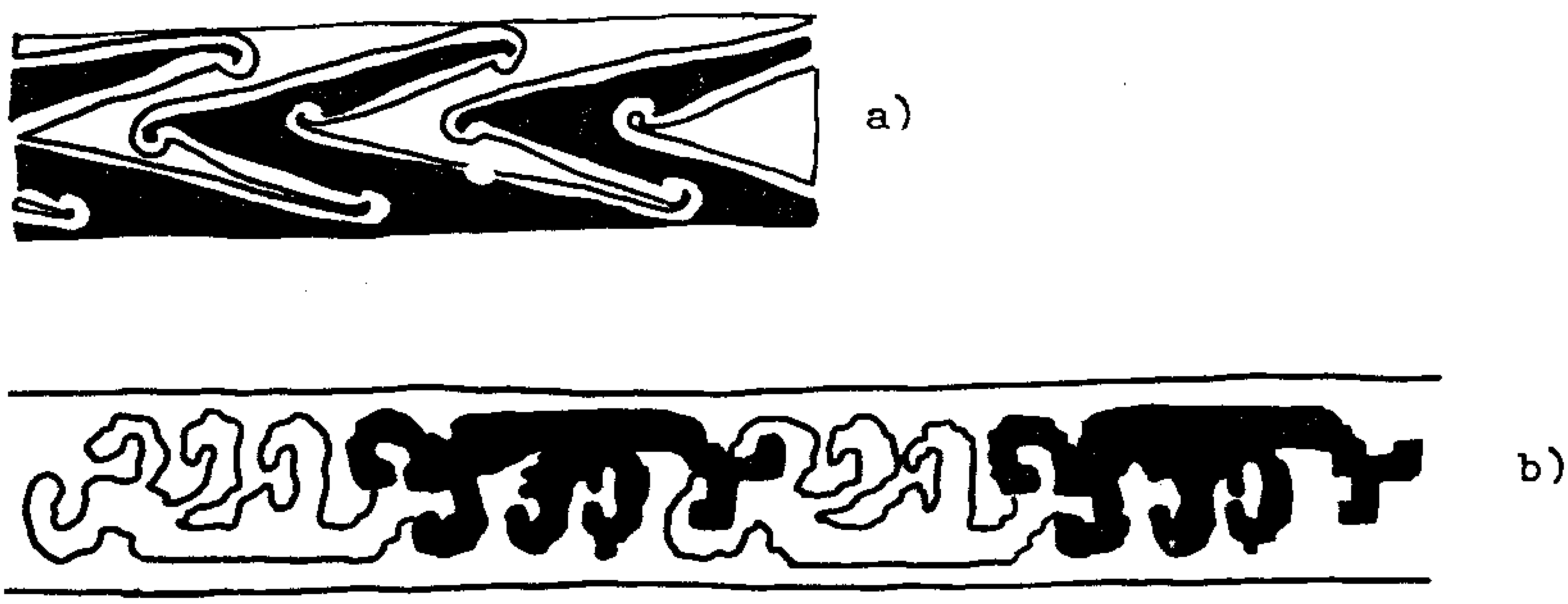
Slika 11.: primeri bordura tipa $p2_1$

a) neolit, Bliski Istok, 5000 god.p.n.e.; b)srednji vek; c)rimski mozaik, Tunis; d)kritsko-mikenska kultura, 2500 god p.n.e.; e)Rusija, 19. vek; f) pretkolumbovska umetnost, Peru; g) gotika, Nemačka; h) Novi Zeland, primitivna umetnost



Slika 12.: primeri bordura tipa pg_1

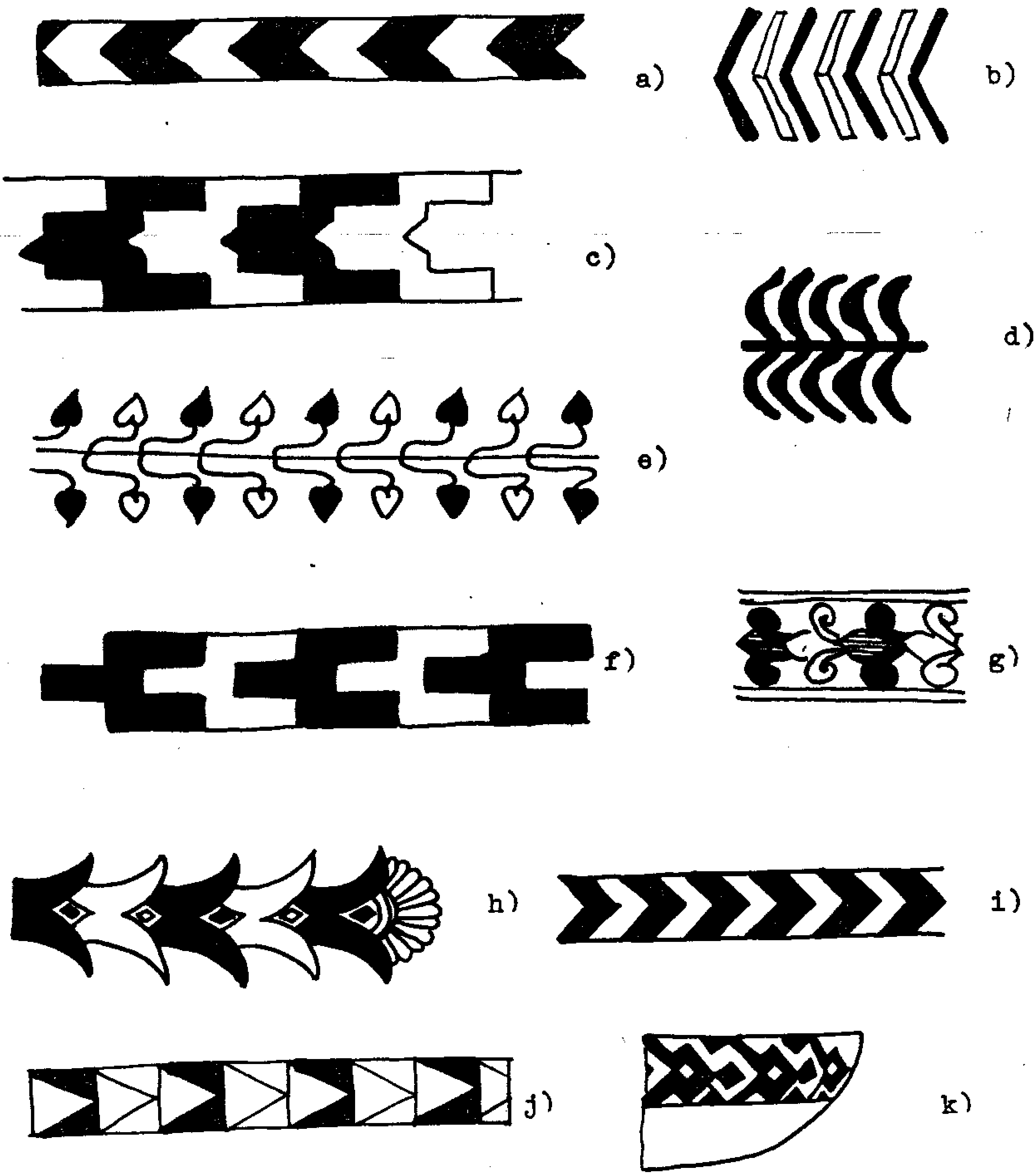
a)Vizantija; b)Grčka; c)Afrika; d)e)f) srednji vek; g) Novi Zeland; h) Kina



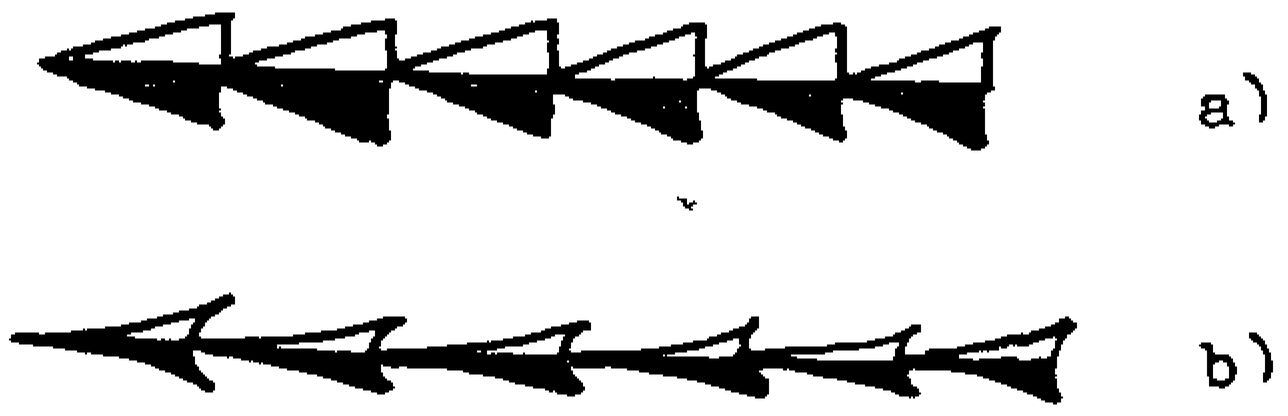
Slika 13.: primeri bordura tipa pg_1

a) Novi Zeland;

b) motiv "Njegova ruka i ruka njegovog brata", severna Afrika

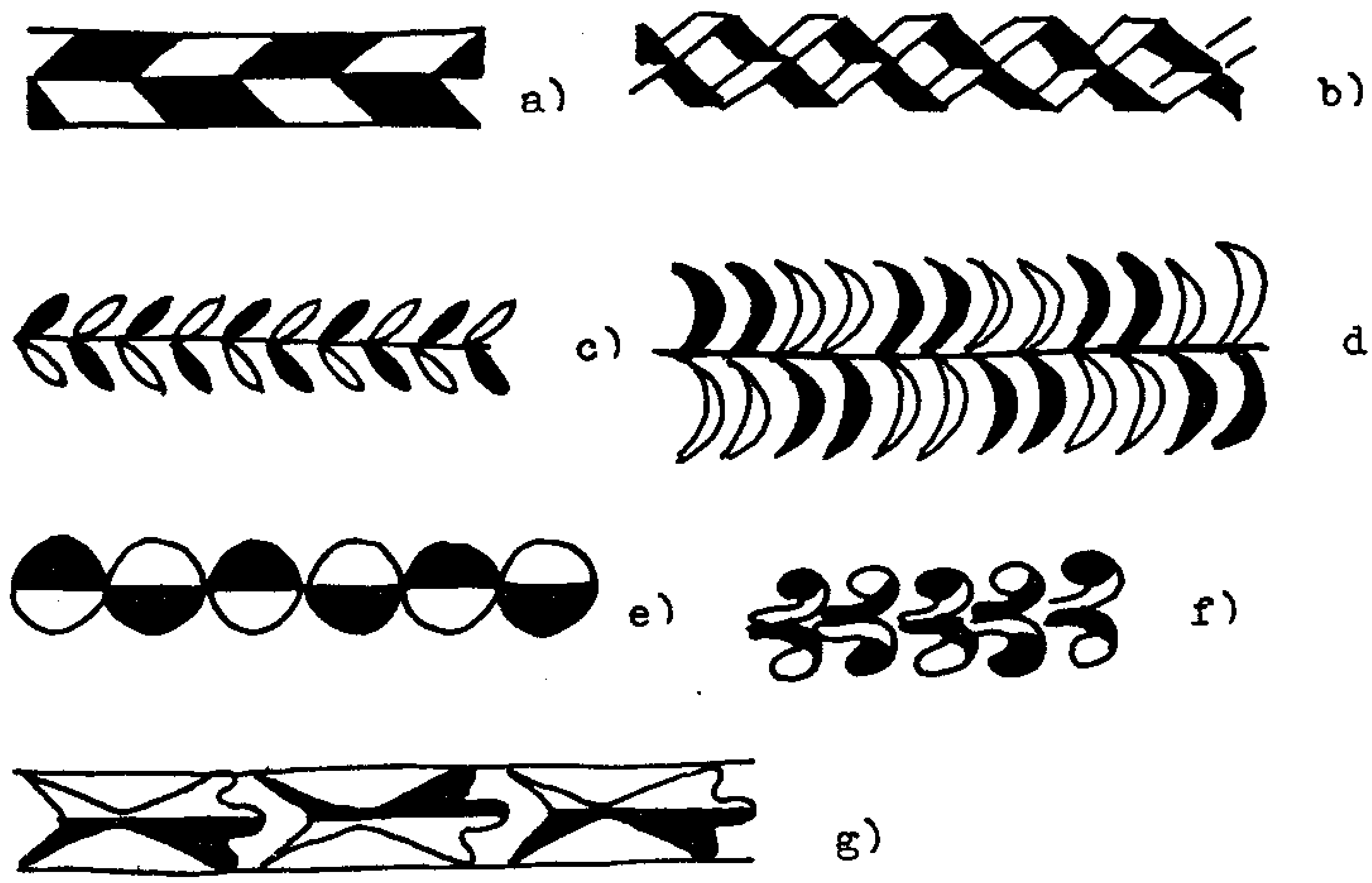


Slika 14.: primeri bordura tipa p_1lm
a)neolit, Bliski Istok, 5000 god. p.n.e.;
b) Vizantija; c)Sendvička ostrva; d) neolit, Bliski Istok; e)Grčka; f)keltska umetnost; g)srednji vek; h) Susa; i) Vavilonija; j)neolit, Anatolija; k)neolit, Hvar, oko 3500 god. p.n.e.



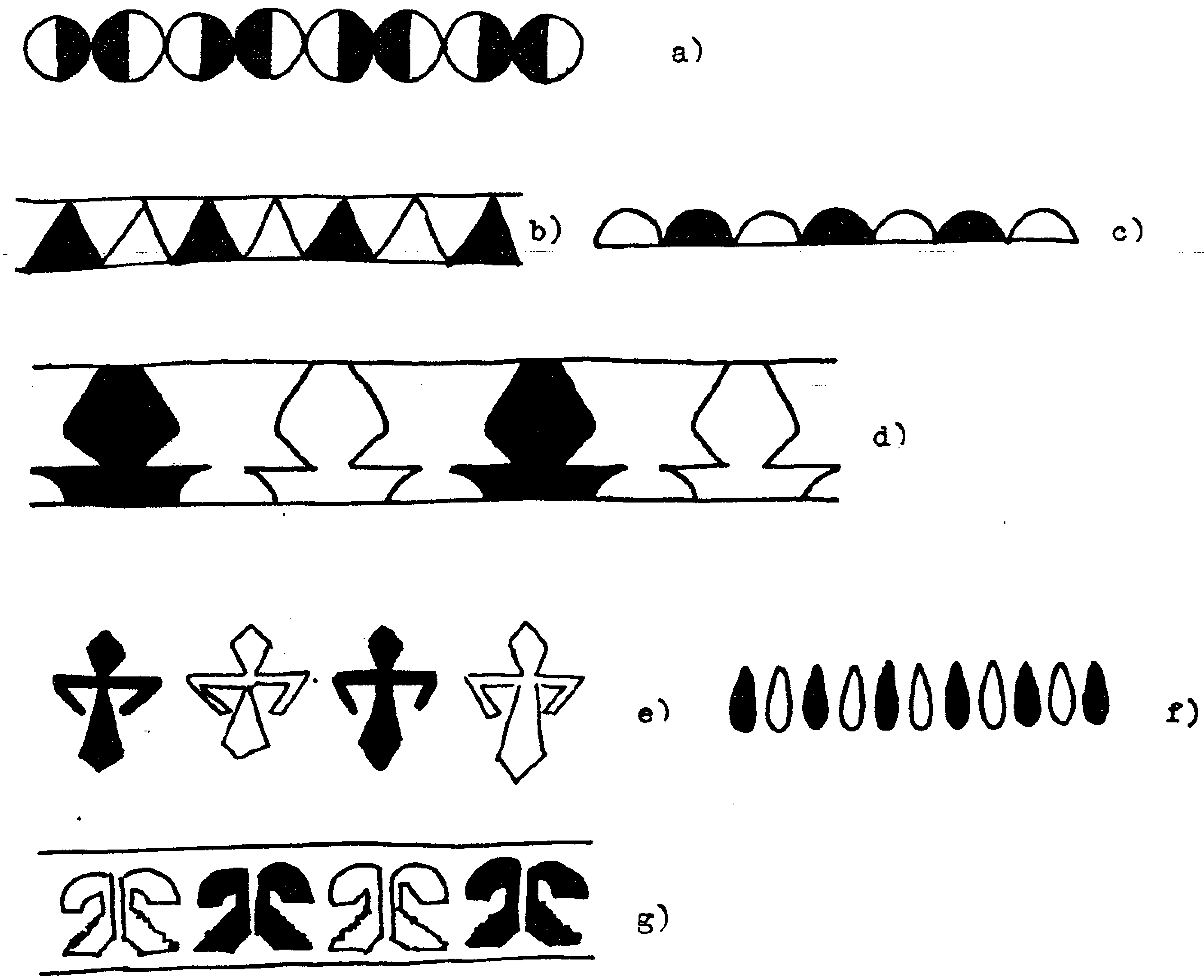
Slika 15.: primeri bordura tipa plm_1

a)b) neolit, Bliski Istok



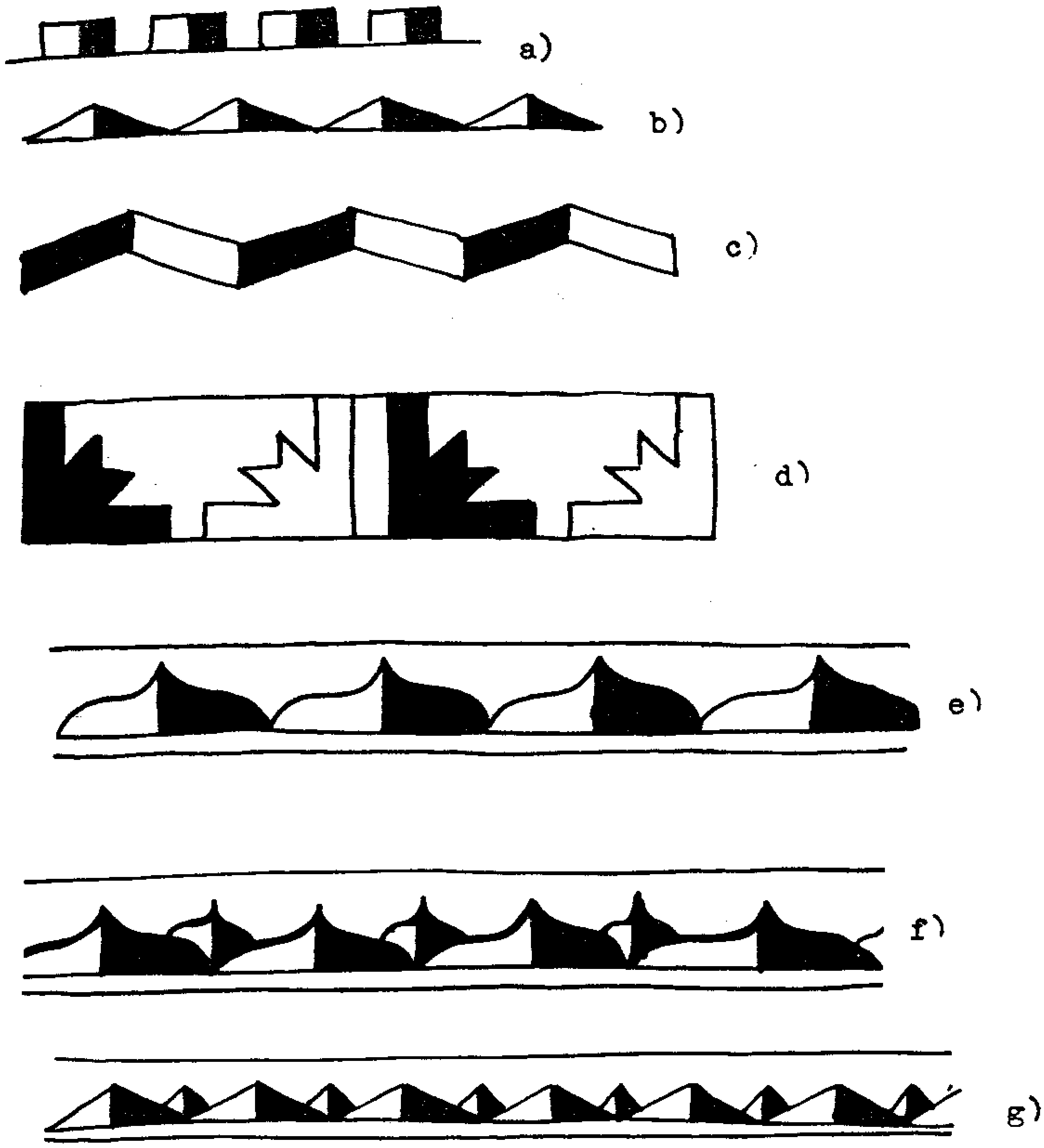
Slika 16. : primeri bordura tipa p_1lm_1

a)neolit, Anatolija, oko 5000 god. p.n.e.
b)renesansa; c)d) Grčka; e) ornament "Mesečeve mene na jugu", Celebes; f) srednji vek; g)narodni motiv, Jugoslavija



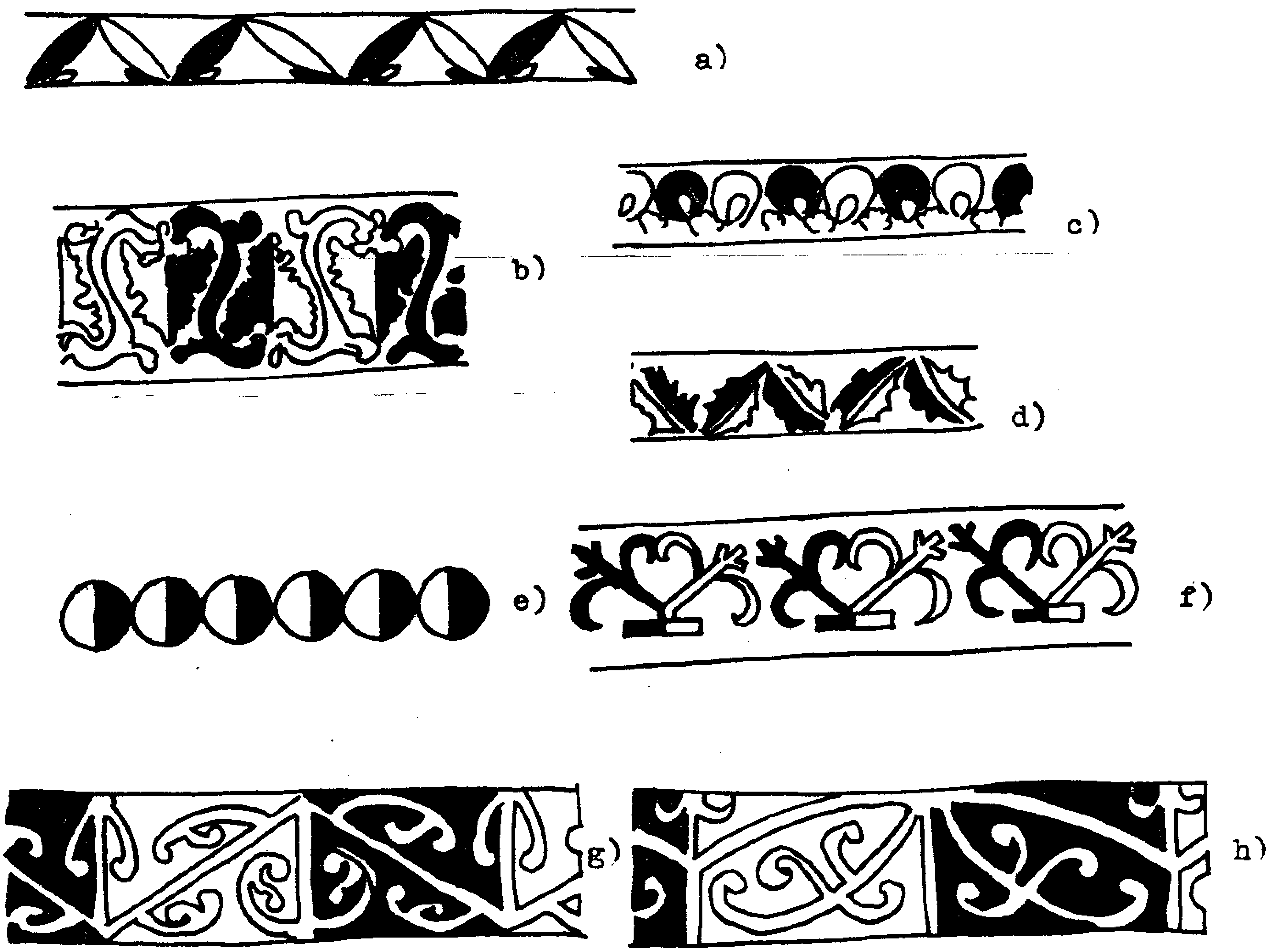
Slika 17.: primeri bordura tipa p_1m

a)ornament "Mesečeve mene na severu", Celebes;
b)neolit, Bliski Istok; c) Egipat; d)srednji vek;
e) narodni motiv, Rumunija; f)Teba(Egipat);
g) narodni motiv, Jugoslavija



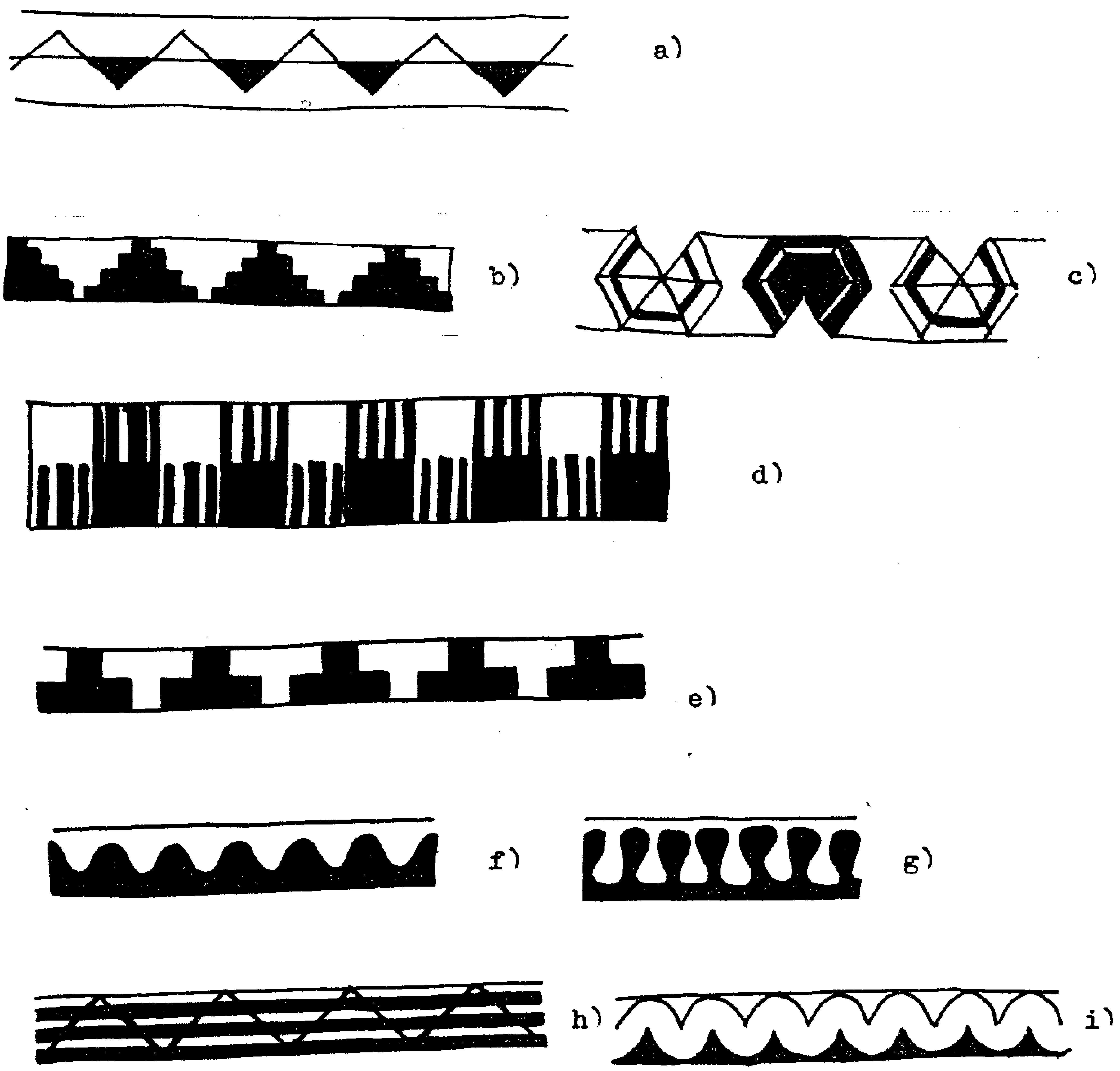
Slika 18.: primeri bordura tipa pm_1

a)b) pozni neolit, Bliski Istok; c) Vizantija;
d)narodni motiv, Jugoslavija; e)f)g) Nemačka, 16. vek

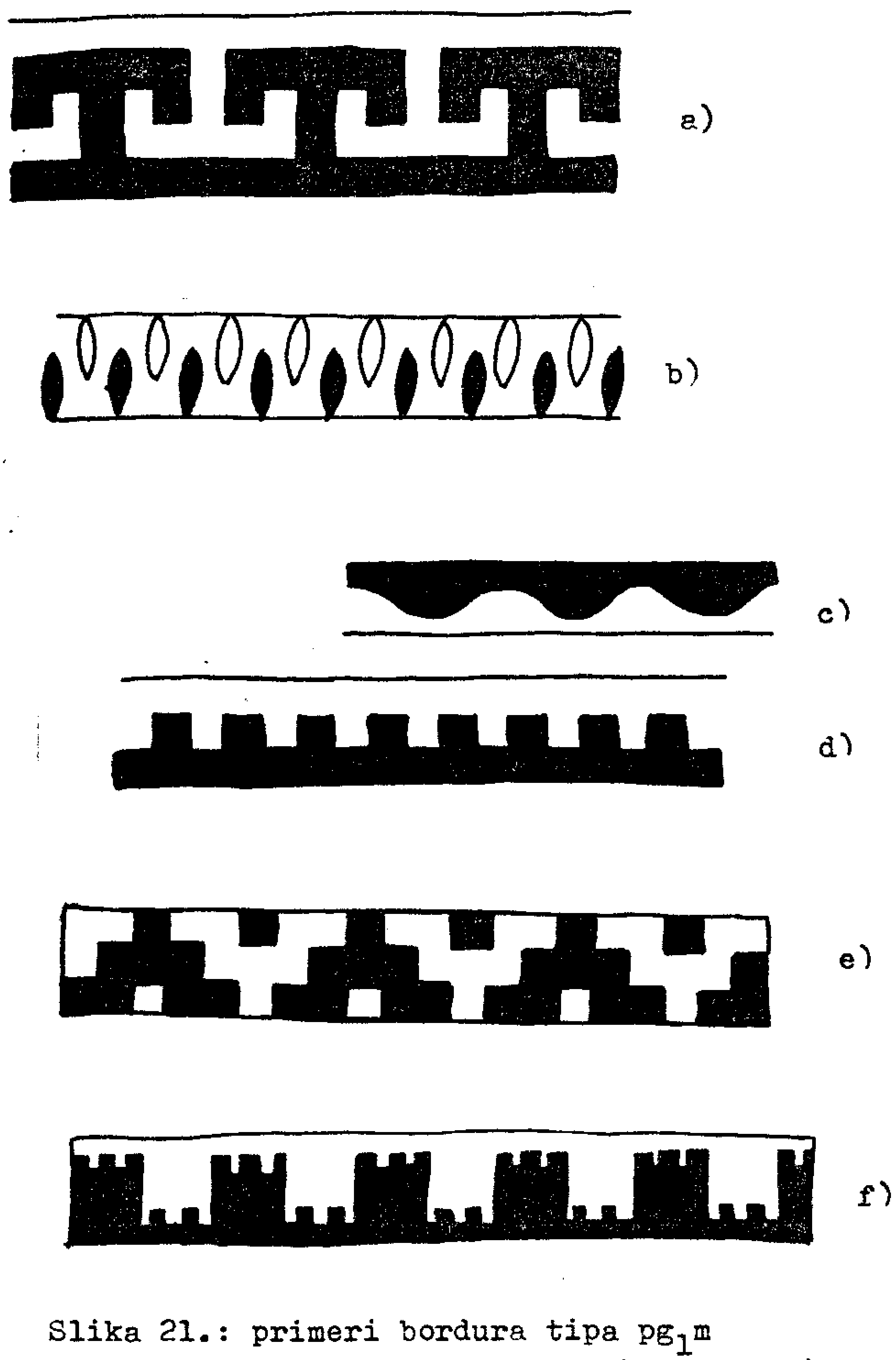


Slika 19.: primeri bordura tipa pm_1

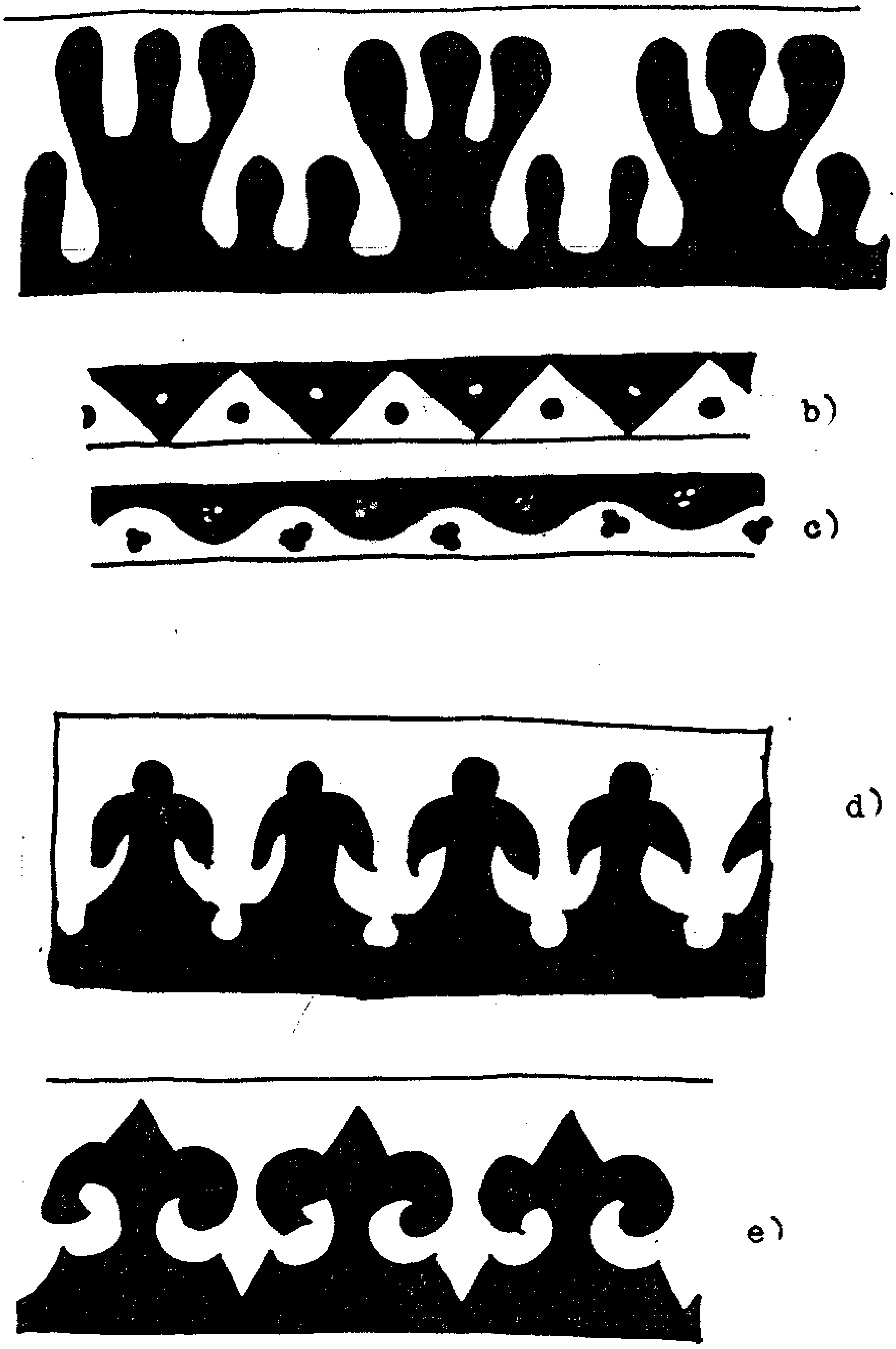
a) Vizantija; b)c)d) srednji vek; e)Borneo;
f) narodni motiv, Jugoslavija; g)h) Novi Zeland



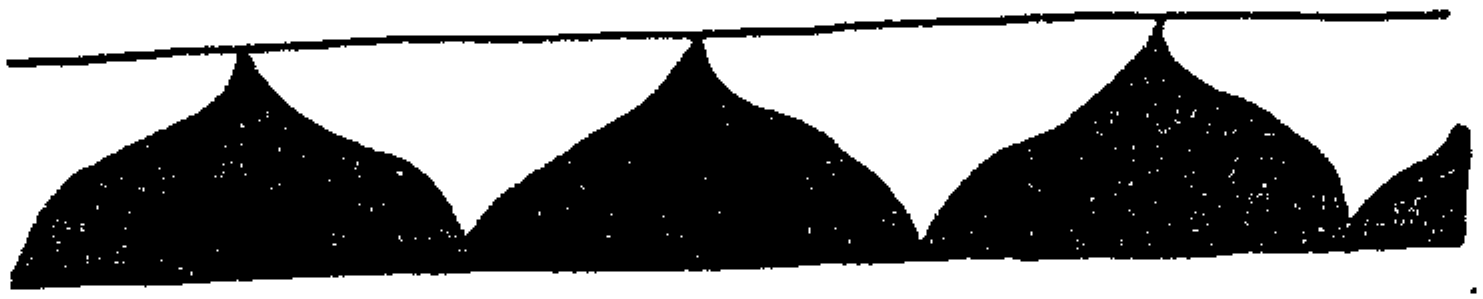
Slika 20. : primeri bordura tipa pg_1m
a)neolit, Grčka; b)pretkolumbovski period, Peru;
c)srednji vek; d)Egipat; e) neolit, Bliski Istok;
f)Krit; g)renesansa; h) neolit, Hasuna(Irak), oko
5000 god. pre n.e.;i) neolit, Bliski Istok



Slika 21.: primeri bordura tipa pg_1m
a)Grčka; b)Egipat; c)Egipat; d) Anatolija;
e) pretkolumbovski period, Peru; f) neolit,
Bliski Istok



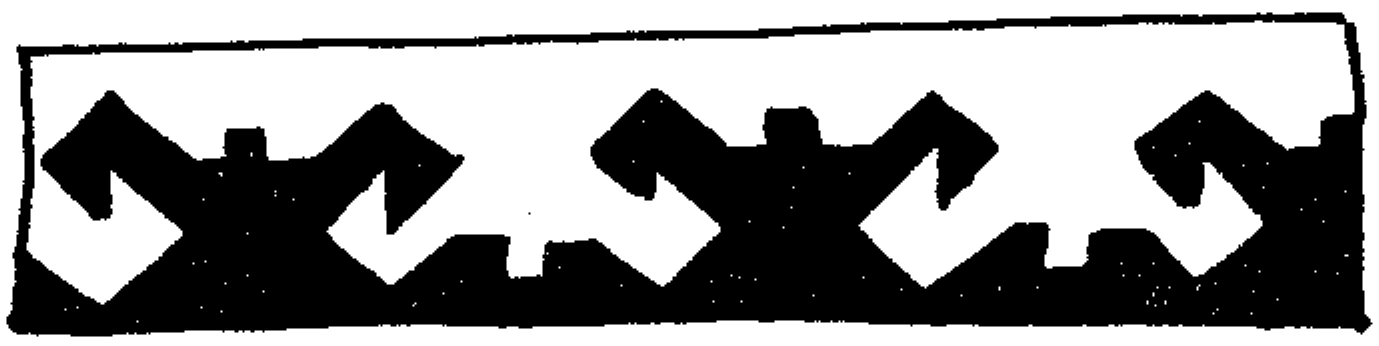
Slika 22.: primeri ornamenata tipa pg_1m
a)Gana; b)c) Turska; d) srednji vek;
e) Kirgizija



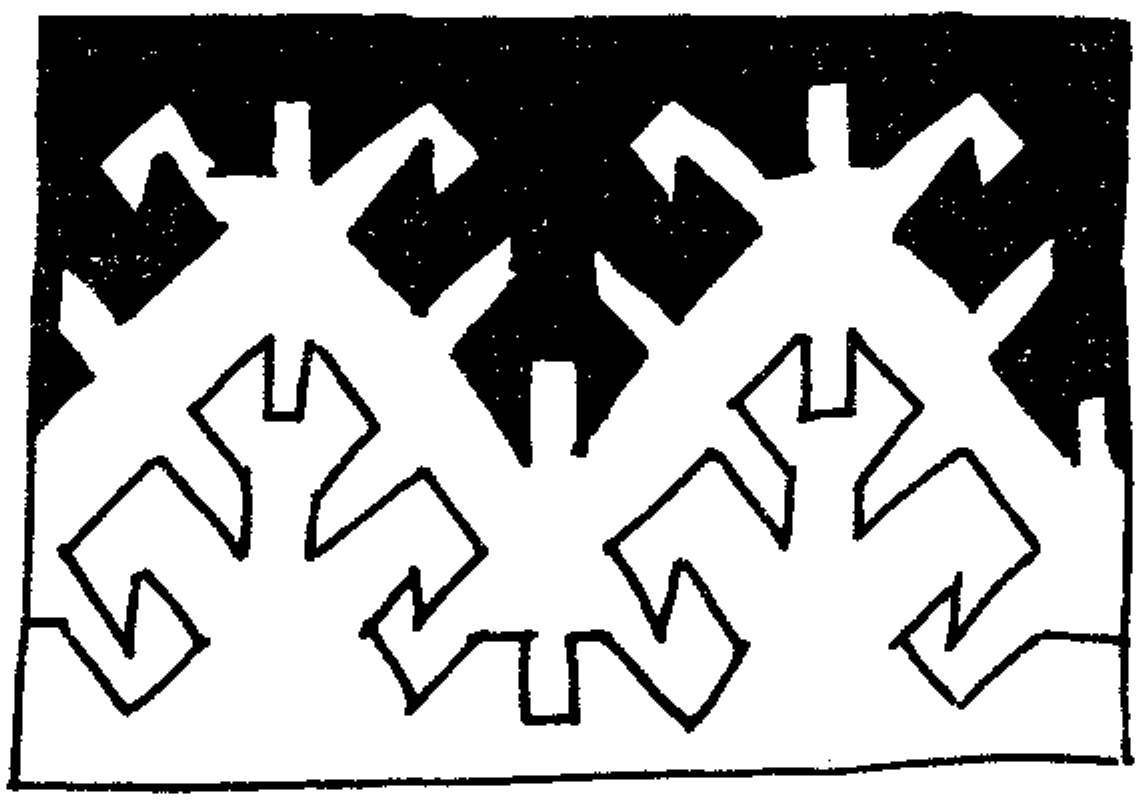
a)

b)

c)



d)

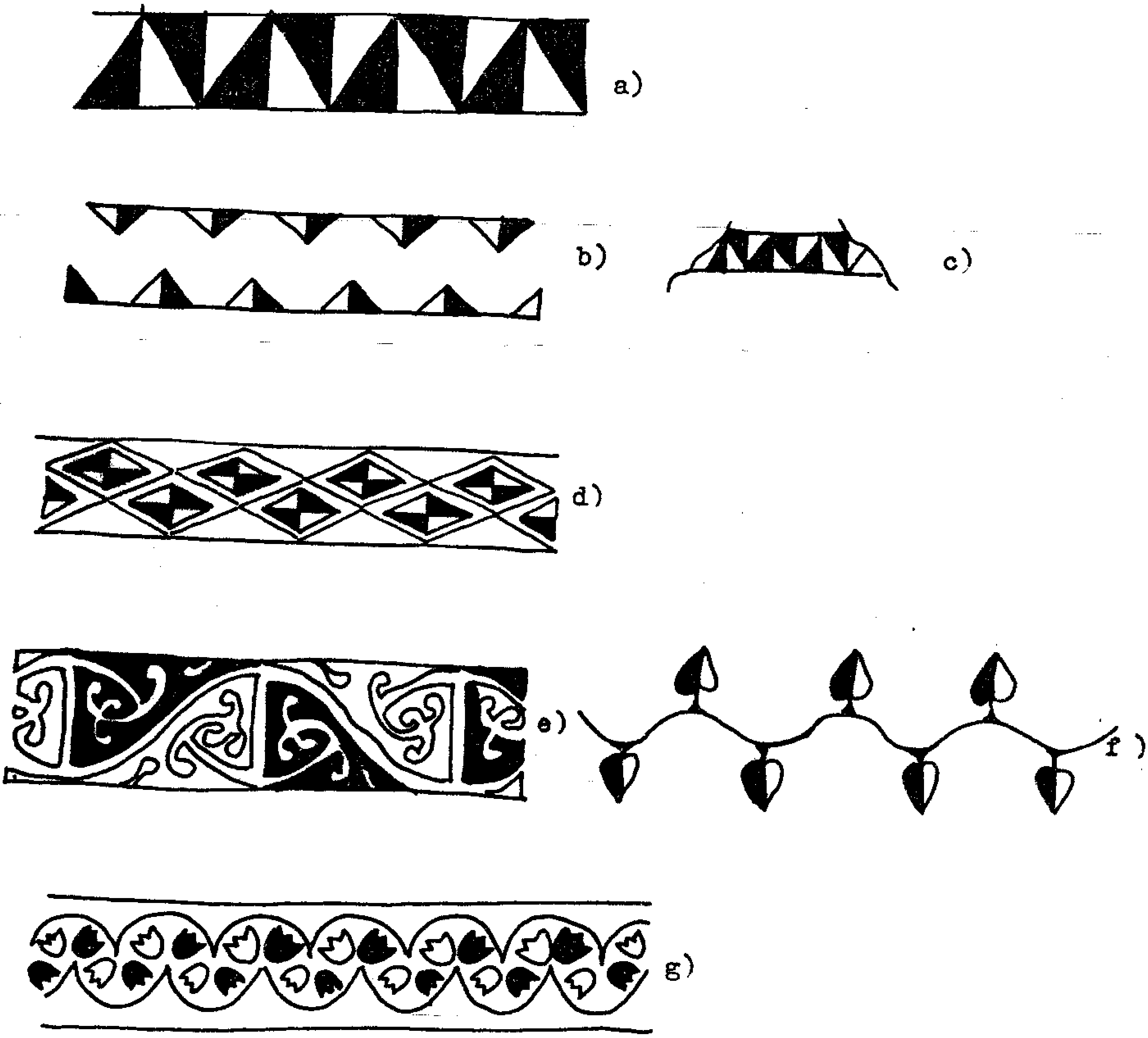


e)

Slika23.: primeri bordura tipa pg_1m

a) ornament "Talasi u obliku grudi", Celebes;

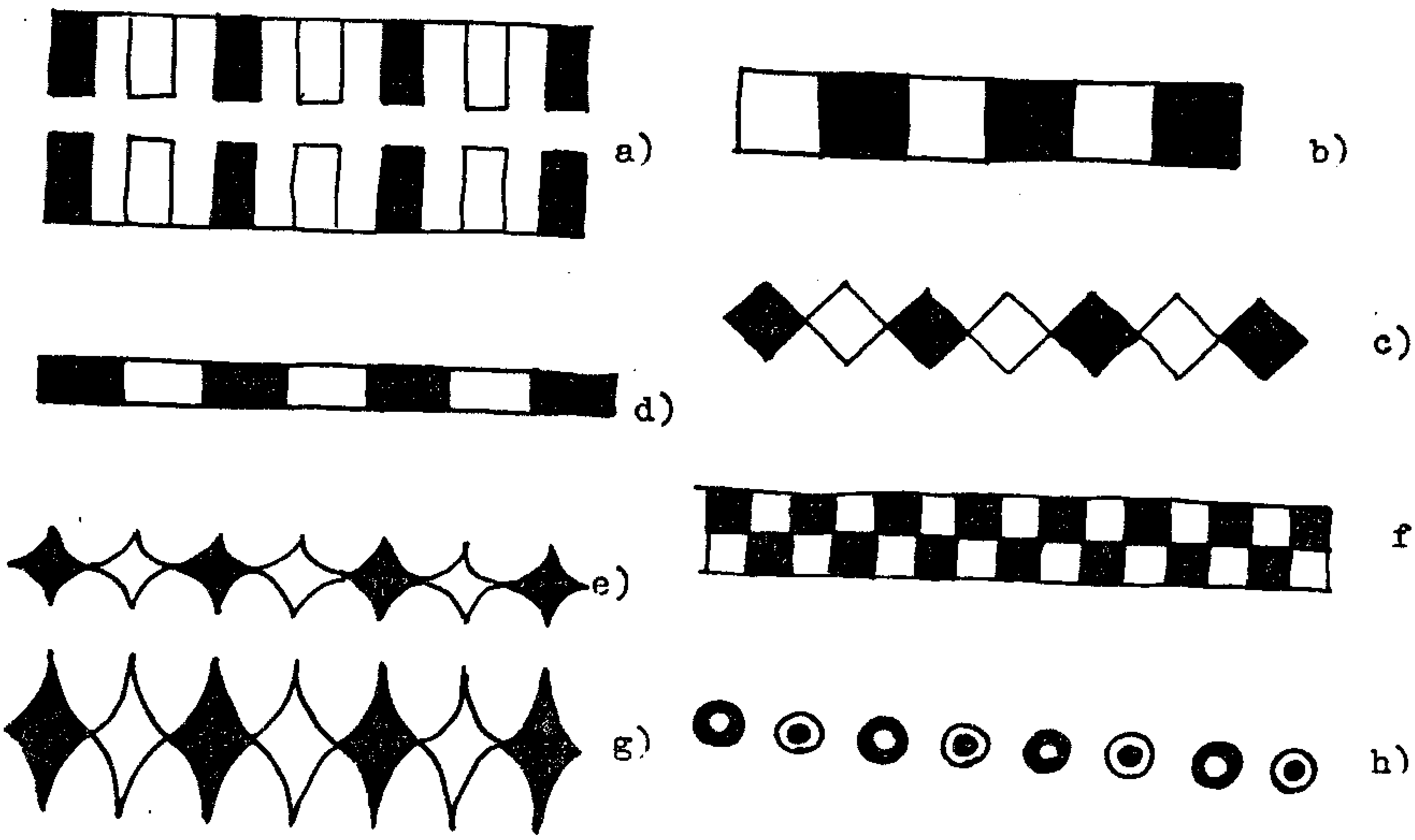
b)c) Novi Zeland; d)e) narodni motivi, Srbija



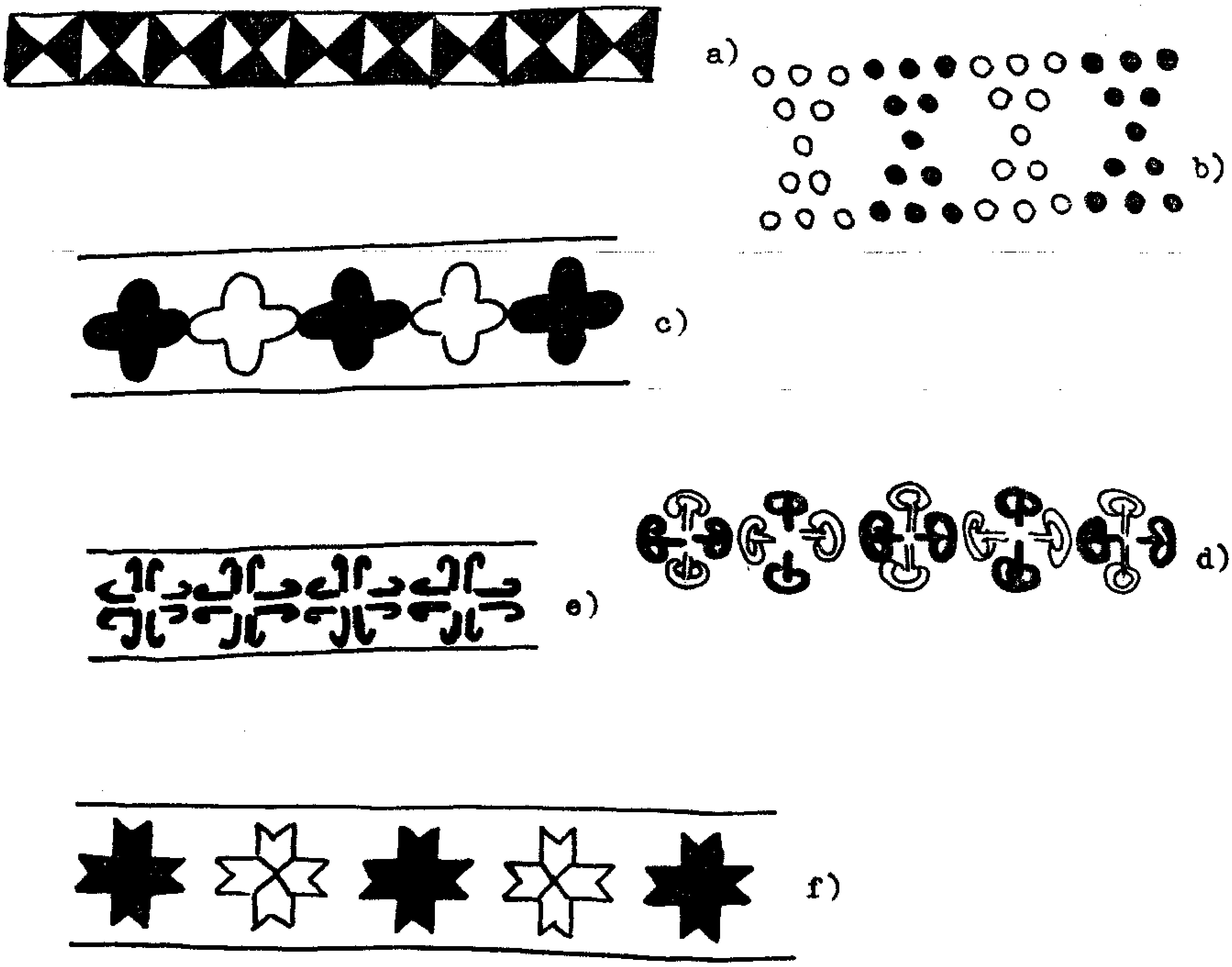
Slika 24.: primeri bordura tipa pgm_1

a) neolit, Bliski Istok, oko 5000 god. p.n.e.;
b)Vizantija; c)neolit, Grčka; d) rimski mozaik;
e) Novi Zeland; f) Korint; g) srednji vek

Slika 25. : primer bordure pg_1m_1, neolit, Anatolija



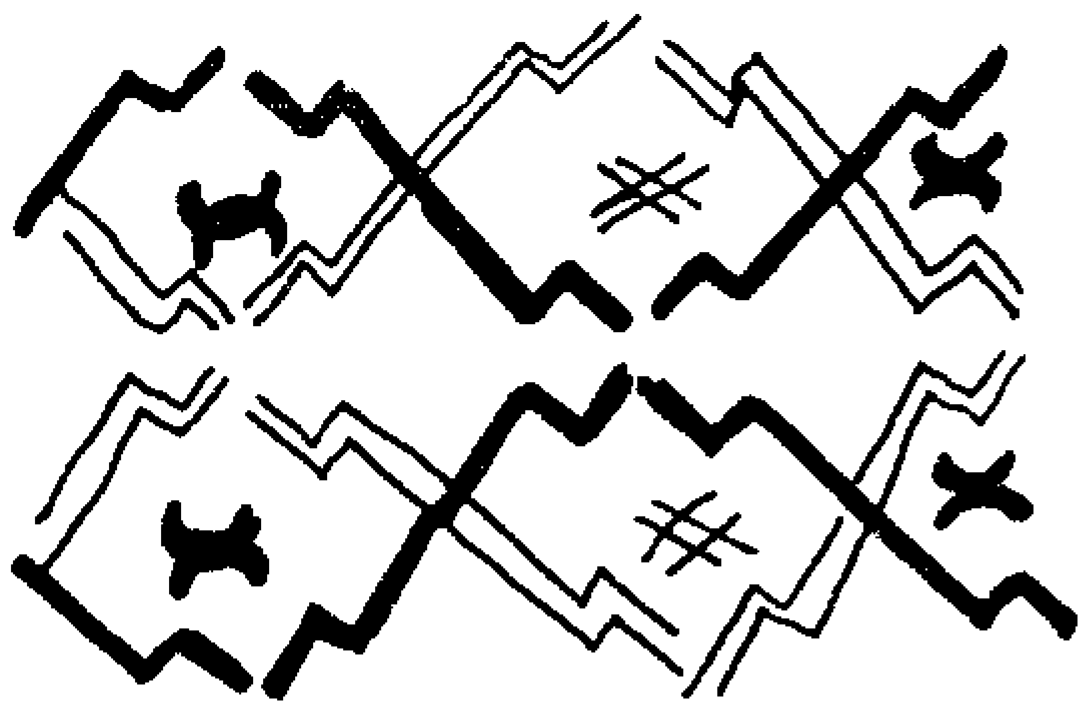
Slika 25. : primeri bordura tipa p_1mm
a)neolit, Grčka; b) neolit, Bliski Istok, oko 5 000 god. p.n.e.; c) Vizantija; d)neolit, Grčka; e)f)g) srednji vek; h) Egipat, III milenijum p.n.e.



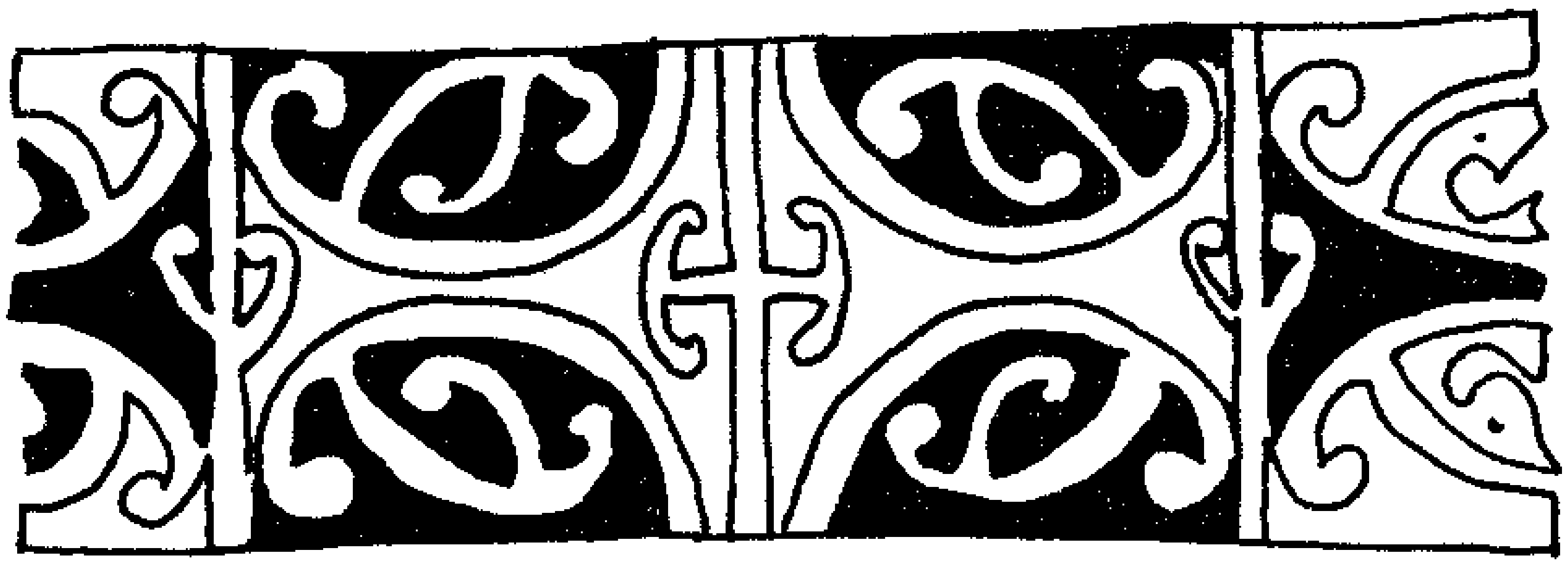
Slika 26.: primeri bordura tipa p_1mm

a) Halaf, oko 4 900-4 500 god. p.n.e.;
b)Vavilonija; c)renesansa; d)e) srednji vek;
f) Kosmatijev mozaik, Italija

a)



b)



c)

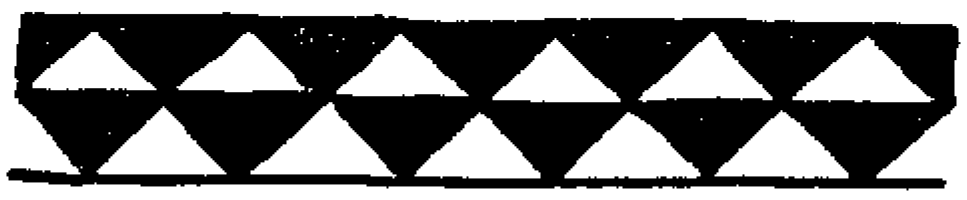
Slika 27.: primeri bordura tipa p_1mm

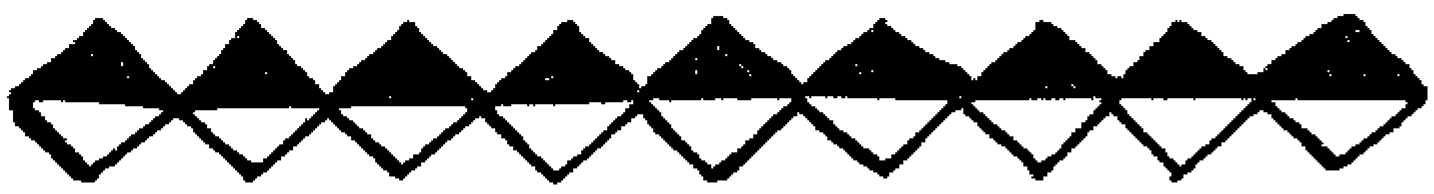
a) Novi Zeland

b) umetnost Pueblo-indijanaca;

c) Novi Zeland


a)

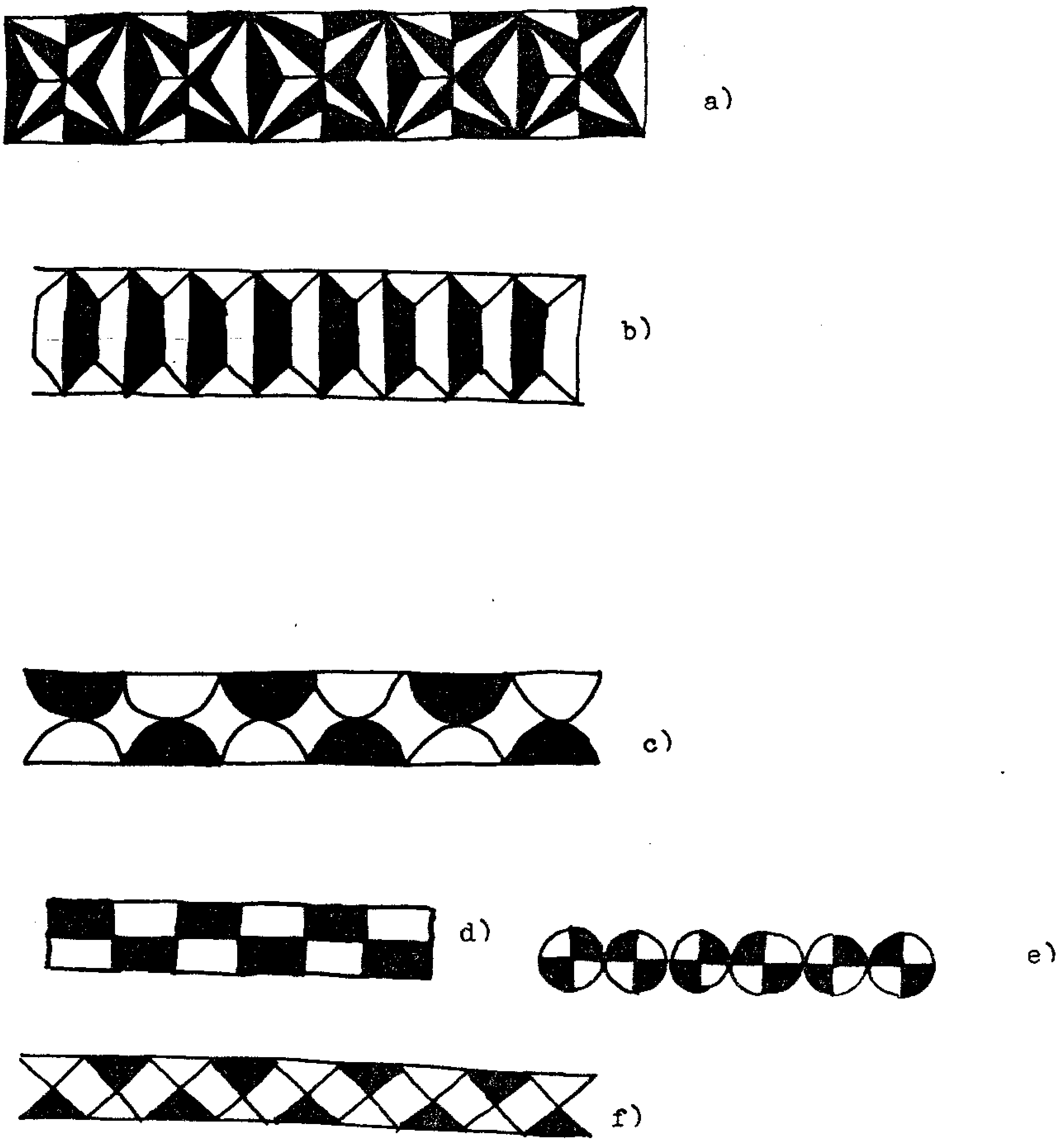

b)


c)


d)

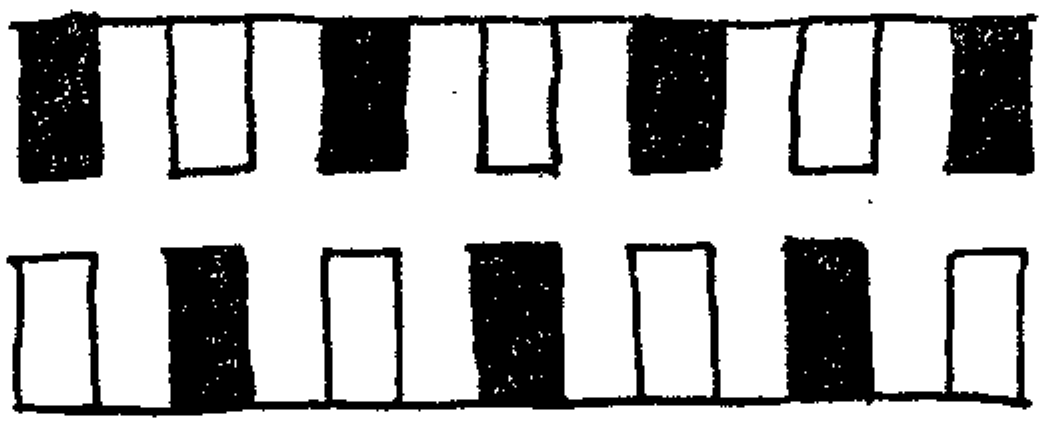
Slika 28. : primeri hordura tipa pmm_1

a) Grčka; b)c) Hacilar, neolit, 5200-5 500 god. p.n.e.; d) Vizantija

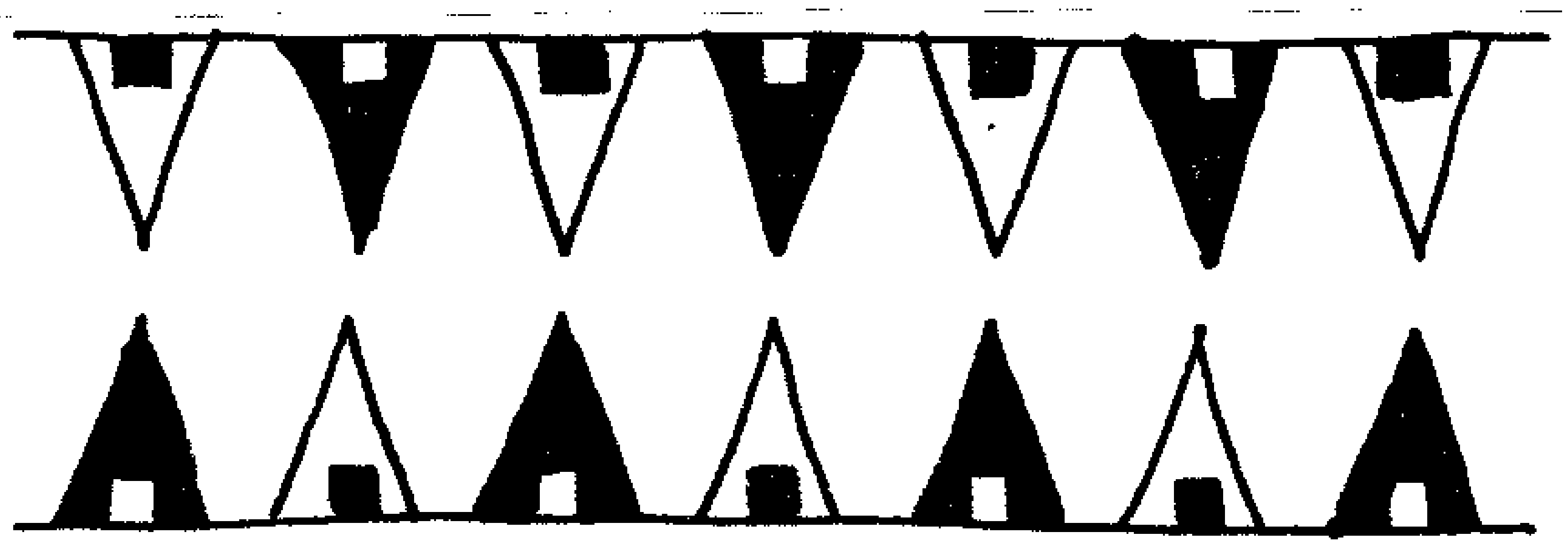


Slika 29.: primeri bordura tipa pm_1m

a) gotika; b) srednji vek; c)romski mozaik;
d) neolit, Bliski Istok; e) Afrika; f) Vizantija



a)



b)

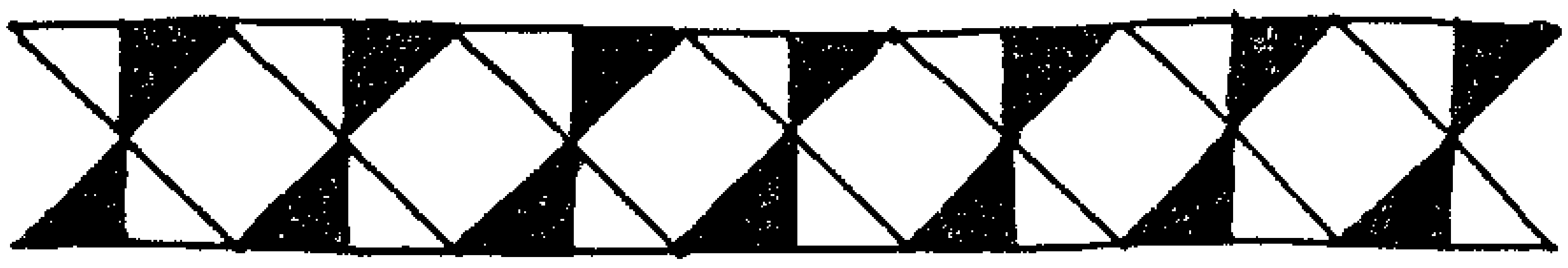
c)

Slika 30. : promeri bordura tipa p_1mm_1

a) neolit, Anatolija, oko 5000 god. p.n.e.;

b) primitivna umetnost američkih Indijanaca;

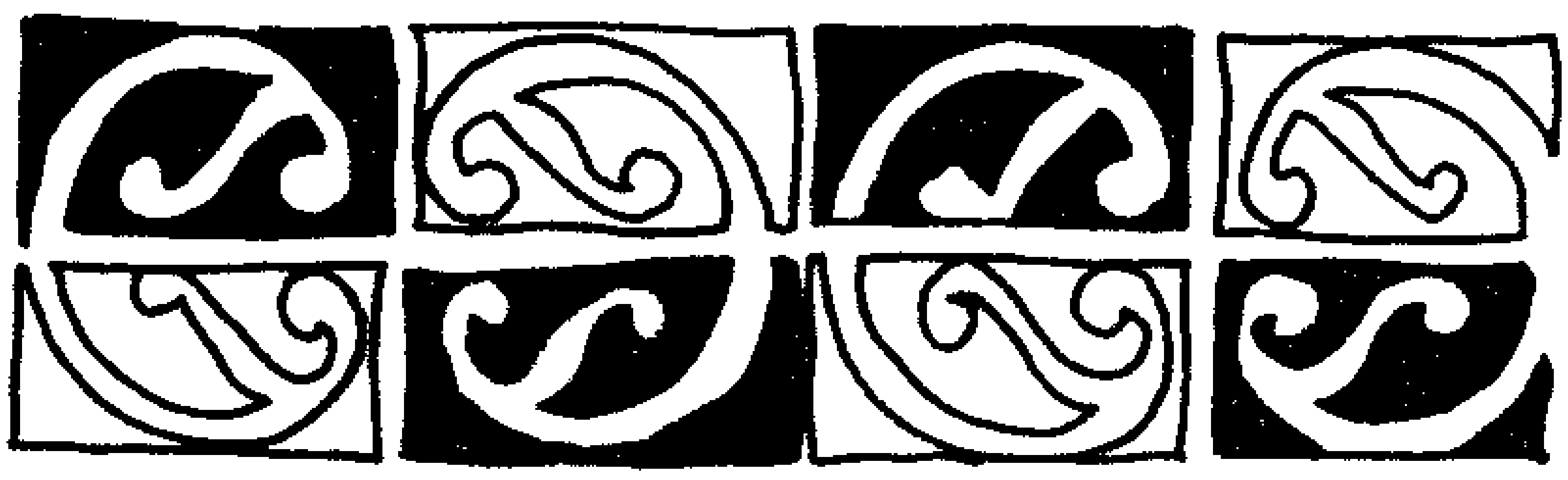
c) srednji vek



a)

b)

c)



d)

e)

Slika 31.: primeri bordura tipa pm_1m_1

a) Vizantija;

b) Tonga ostrva, Melanezija;

c) gotika;

d)e) Novi Zeland

Grupe antisimetrije i više-
struke antisimetrije ornamenata

Apstraktne definicije(prezentacije) grupa simetrije ornamenata: p1, p2, pm, pg, cm, pmm, pmg, pgg, cmm, p3m, p31m, p4, p4m, p4g, p6, p6m, koje su poslužile kao generišuće grupe grupa antisimetrije i višestruke antisimetrije ornamenata date su u radu(H.S.M.Coxeter, W.O.J.Moser, 1972., str. 40-51.).

Teorema 4.1.a) Antisimetrijska karakteristika grupe p1, generisane translacijama X,Y, date prezentacijom: p1 (X,Y) XY=YX je $(\overline{X,Y,XY})$. Grupa p1 generiše grupe antisimetrije i višestruke antisimetrije tipa M^1, M^2. Za $L\geq3$ grupa p1 ne generiše grupe višestruke antisimetrije tipa M^L.

Teorema 4.1.b) Antisimetrijska karekteristika grupe p1, generisane translacijama X,Y,Z, date prezentacijom: p1 (X,Y,Z) XYZ=ZYX=E je $(\overline{X,Y,Z})$. Pri generisanju grupa antisimetrije tipa M^L, za L=1 obavezna je zamena dve generišuće translacije antitranslacijama, a za L=2 zamena svih translacija antitranslacijama različitih tipova. Za $L\geq3$ grupa simetrije p1 ne generiše grupe višestruke antisimetrije tipa M^L.

Dokaz: a) Svi proizvodi generatora grupe p1 formirani u skladu sa Definicijom 1.2. sačinjavaju jednu klasu ekvivalencije, u čiji sastav ulaze translacije X,Y,XY, ekvivalentne u algebarskom i geometrijskom smislu, pa je antisimetrijska karakteristika grupe p1 $(\overline{X,Y,XY})$. U skladu sa Teoremom 1.1. grupa p1 generiše grupe antisimetrije i višestruke antisimetrije tipa M^1,M^2. Za $L\geq3$ grupa p1 ne generiše grupe višestruke antisimetrije, u skladu sa Teoremom 1.1.b), pošto nije zadovoljen uslov razdvojivosti antiidentiteta.

b) Uslovi koji moraju biti zadovoljeni pri zameni generatora antigeneratorima, direktno slede, u skladu sa Teoremom 1.1.a) iz relacije $XYZ=E$, iz koje proizilazi da za $L=1$ dve translacije moraju biti zamenjene antitranslacijama, dok za $L=2$ iz navedene relacije, u skladu sa Teoremom 1.1. sledi da sve tri translacije moraju biti različitih tipova, tj. tipa e, e_1, ee_1. Ekvivalentnost Teorema 4.1.a) i 4.1.b) sledi iz relacije $Z=X^{-1}Y^{-1}$.

Teorema 4.2.a) Antisimetrijska karakteristika grupe p2, generisane translacijama X,Y i centralnom simetrijom T, date prezentacijom:

p2 (X,Y,T) $\quad XY=YX \quad T^2=(TX)^2=(TY)^2=E$ je $(\overline{X,Y,XY})(\overline{T,TX,TY,TXY})$ i dozvoljava svođenje na redukovani oblik $(\overline{T,TX,TY,TXY})$. Grupa p2 generiše grupe antisimetrije i višestruke antisimetrije tipa M^1,M^2,M^3. Za $L\geq 4$ grupa p2 ne generiše grupe višestruke antisimetrije tipa M^L.

Teorema 4.2.b) Redukovana antisimetrijska karakteristika grupe p2, generisane centralnim simetrijama T, T_1, T_2, date prezentacijom:

p2 (T,T_1,T_2) $\quad T^2=T_1^2=T_2^2=(TT_1T_2)^2=E$ je $(\overline{T,T_1,T_2,TT_1T_2})$.

Grupa p2 generiše grupe antisimetrije i višestruke antisimetrije tipa M^1,M^2,M^3. Za $L\geq 4$ grupa p2 ne generiše grupe višestruke antisimetrije tipa M^L.

Teorema 4.2.c) Redukovana antisimetrijska karakteristika grupe p2, generisane centralnim simetrijama T, T_1, T_2, T_3, date prezentacijom:

$p2\ (T,T_1,T_2,T_3)\quad T^2=T_1^2=T_2^2=T_3^2=TT_1T_2T_3=E$ je $(\overline{T,T_1,T_2,T_3})$. Pri generisanju grupa antisimetrije tipa M^L dozvoljene su kombinacije antiidentiteta e,e_1,e_2 u kojim se oni javljaju po 2 ili po 4 puta, uz poštovanje Teoreme 1.1.b). Grupa p2 generiše grupe antisimetrije i višestruke antisimetrije tipa M^1,M^2,M^3.Za $L\geq 4$ grupa p2 ne generiše grupe višestruke antisimetrije tipa M^L.

Dokaz: a) Sve proizvode generatora grupe p2, formirane u skladu sa Definicijom 1.2. možemo podeliti u dve neekvivalentne klase: translacije X,Y,XY i centralne simetrije T,TX,TY,TXY. S obzirom na ekvivalentnu algebarsku i geometrijsku ulogu translacija X,Y,XY među sobom i centralnih simetrija T,TX,TY,TXY među sobom, antisimetrijska karakteristika grupe p2 je $(\overline{X,Y,XY})(\overline{T,TX,TY,TXY})$. Pošto je uslov (X,Y,XY), u skladu sa relacijom $(\overline{TX,TY,TXY})=(T(\overline{X,Y,XY}))$, sadržan u uslovu $(\overline{T,TX,TY,TXY})$, navedena antisimetrijska karakteristika grupe p2 dozvoljava svođenje na redukovanu formu $(\overline{T,TX,TY,TXY})$. U skladu sa Teoremom 1.1. grupa p2 generiše grupe antisimetrije i višestruke antisimetrije tipa M^1,M^2,M^3.Za $L\geq 4$ grupa p2, na osnovu Teoreme 1.1.b) ne generiše grupe višestruke antisimetrije M^L, pošto nije zadovoljen uslov razdvojivosti antiidentiteta.

b) Ekvivalentnost Teorema 4.2.a) i 4.2.b) sledi iz relacija $T_1=XT$, $T=TY$.

c) Ekvivalentnost Teorema 4.2.b) i 4.2.c) sledi iz relacije $T_3=TT_1T_2$. Uslovi koji moraju biti zadovoljeni pri generisanju grupa antisimetrije tipa M^L su posledica relacije $TT_1T_2T_3=E$ i Teoreme 1.1.b), te su za $L=1$ dozvoljene kombinacije antiidentiteta koji odgovaraju antigeneratorima (e,e,E,E) ili (e,e,e,e), a za $L=2$ kombinacije antiidentiteta (ee_1,e,e_1,E), (ee_1,ee_1,e,e) ili (ee_1,ee_1,e_1,e_1). Analogno važi za $L=3$.

Teorema 4.3a) Antisimetrijska karakteristika grupe pm, generisane translacijama X,Y i refleksijom R, date prezentacijom:

pm $\quad (X,Y,R) \quad R^2=E \quad (RX)^2=E \quad RYR=Y \quad XY=YX$ je $(X)(Y)(XY)(\overline{R,RX})(\overline{RY,RXY})$ i dozvoljava svođenje na redukovani oblik $(Y)(\overline{R,RX})$. Grupa pm generiše grupe antisimetrije i višestruke antisimetrije tipa M^1,M^2,M^3. Za $L\geq 4$ grupa pm ne generiše grupe višestruke antisimetrije tipa M^L.

Teorema 4.3.b) Redukovana antisimetrijska karakteristika grupe pm, generisane translacijom Y i refleksijama R, R_1, date prezentacijom:

pm $\quad (Y,R,R_1) \quad R^2=R_1^2=E \quad RY=YR \quad R_1Y=YR_1$ je $(Y)(\overline{R,R_1})$. Grupa pm generiše grupe antisimetrije i višestruke antisimetrije tipa M^1,M^2,M^3. Za $L\geq 4$ grupa pm ne generiše grupe višestruke antisimetrije tipa M^L.

Dokaz: a) Svi proizvodi generatora grupe pm, formirani u skladu sa Definicijom 1.2. mogu se podeliti u pet neekvivalentnih klasa: translaciju X, translaciju Y, translaciju XY, refleksije R, RX i klizajuće refleksije RY, RXY. S obzirom na algebarsku i geometrijsku ekvivalentnost refleksija R,RX među sobom i klizajućih refleksija RY,RXY među sobom, antisimetrijska karakteristikea grupe pm je $(X)(Y)(XY)(\overline{R,RX})(\overline{RY,RXY})$. Pošto su izrazi $(X)(Y)(XY)$ i $(X)(Y)$ algebarski ekvivalentni u odnosu na generisanje grupa antisimetrije i višestruke antisimetrije antisimetrijska karakteristika stiče oblik: $(X)(Y)(\overline{R,RX})(\overline{RY,RXY})$. Iz relacije: $(X)(\overline{R,RX})=(\overline{R,RX})$ sledi mogućnost eliminacije izraza (X), pa se antisimetrijska karakteristika svodi na: $(Y)(\overline{R,RX})(\overline{RY,RXY})$. Međutim, pošto je uslov: $(\overline{RY,RXY})=(Y(\overline{R,RX}))$ već sadržan u uslovu : $(Y)(\overline{R,RX})$, moguća je eliminacija izraza $(\overline{RY,RXY})$, pa se antisimetrijska karakteristika svodi na redukovani oblik $(Y)(\overline{R,RX})$.

Za $L=1,2,3$ grupa pm, u skladu sa Teoremom 1.1. generiše grupe antisimetrije i višestruke antisimetrije tipa M^1,M^2,M^3. Za $L\geq 4$ grupa pm ne generiše grupe višestruke antisimetrije, u skladu sa Teoremom 1.1.b), pošto nije zadovoljen uslov razdvojivosti antiidentiteta.

b) Ekvivalentnost Teorema 4.3.a) i 4.3.b) direktno sledi iz relacije $R_1=RX$.

Teorema 4.4.a) Antisimetrijska karakteristika grupe pg, generisane translacijama X,Y i klizajućom refleksijom

P , date prezentacijom:

pg (X,Y,P) $XY=YX$ $P^2=Y$ $P^{-1}XP=X^{-1}$ je

$(X)(Y)(XY)(\overline{P,PX,PY,PXY})$ i dozvoljava redukovanje na oblik $(\overline{P,PX})$. Prilikom zamene generatora antigeneratorima u procesu generisanja grupa antisimetrije i višestruke antisimetrije zabranjena je zamena translacije Y antitranslacijom . Grupa pg generiše grupe antisimetrije i višestruke antisimetrije tipa M^1, M^2. Za $L\geq 3$ grupa pg ne generiše grupe višestruke antisimetrije tipa M^L.

Teorema 4.4.b) Antisimetrijska karakteristika grupe pg, generisane klizajućim refleksijama P,Q, date prezentacijom:

pg (P,Q) $P^2=Q^2$ je $(\overline{P,Q})$. Grupa pg generiše grupe antisimetrije i višestruke antisimetrije tipa M^1, M^2. Za $L\geq 3$ grupa pg ne generiše grupe višestruke antisimetrije tipa M^L.

Dokaz: a) Svi proizvodi generatora grupe pg, formirani u skladu sa Definicijom 1.2. mogu se podeliti u četiri neekvivalentne klase: translaciju X, translaciju Y, translaciju XY i klizajuće refleksije P,PX,PY,PXY. S obzirom na ekvivalentnu algebarsku i geometrijsku ulogu klizajućih refleksija P,PX,PY,PXY antisimetrijska karakteristika grupe pg je $(X)(Y)(XY)(\overline{P,PX,PY,PXY})$. Iz relacije $P^2=Y$ sledi da, pri generisanju grupa antisimetrije i višestruke antisimetrije uopštenom metodom Šubnjikov-Zamorzajeva, translacija Y ne može biti zamenjena antitranslacijom, u skladu sa Teoremom 1.1.a). Zahvaljujući tome, posle eliminacije translacije Y antisimetrijska karakteristika grupe pg stiče oblik: $(X)(\overline{P,PX})$. Iz relacije $(X)(\overline{P,PX}) = (\overline{P,PX})$ proizilazi mogućnost eliminacije izraza (X), pa je redukovana antisimetrijska karakteristika grupe pg $(\overline{P,PX})$.

Grupa pg, u skladu sa Teoremom 1.1. generiše grupe antisimetrije i višestruke antisimetrije tipa M^1, M^2. Za $L\geq 3$ grupa pg ne generiše grupe višestruke antisimetrije tipa M^L, u skladu sa Teoremom 1.1.b), pošto nije zadovoljen uslov razdvojivosti antiidentiteta.

b) Ekvivalentnost Teorema 4.4.a) i 4.4.b) direktno sledi iz relacije $Q=PX$.

Teorema 4.5.a) Antisimetrijska karakteristika grupe cm, generisane klizajućim refleksijama P,Q i refleksijom R, date prezentacijom:

cm (P,Q,R) $P^2=Q^2$ $R^2=E$ $RPR=Q$ je $(\overline{P,Q})(R)(\overline{PR,QR})(PQR)$ i dozvoljava svođenje na redukovani oblik $(P)(R)$. Prilikom zamene generatora antigeneratorima u procesu generisanja grupa antisimetrije i višestruke antisimetrije klizajuće refleksije P,Q, mogu biti samo istovremeno zamenjene klizajućim antirefleksijama istog antisimetrijskog tipa. Grupa cm generiše grupe antisimetrije i višestruke antisimetrije tipa M^1,M^2. Za $L\geq 3$ grupa cm ne generiše grupe višestruke antisimetrije tipa M^L.

Teorema 4.5.b) Redukovana antisimetrijska karakteristika grupe cm, generisane refleksijom R i klizajućom refleksijom P, date prezentacijom:

cm (R,P) $R^2=E$ $RP^2=P^2R$ je $(R)(P)$. Grupa cm generiše grupe antisimetrije i višestruke antisimetrije tipa M^1, M^2. Za $L\geq3$ grupa cm ne generiše grupe višestruke antisimetrije tipa M^L.

Teorema 4.5.c) Redukovana antisimetrijska karakteristika grupe cm, generisane refleksijom R i translacijom S, date prezentacijom:
cm (R,S) $R^2=E$ $(RS)^2=(SR)^2$ je (S)(R). Grupa cm generiše grupe antisimetrije i višestruke antisimetrije tipa M^1,M^2. Za $L\geq3$ grupa cm ne generiše grupe višestruke antisimetrije tipa M^L.

Dokaz: a) Svi proizvodi generatora grupe cm, formirani u skladu sa Definicijom 1.2. mogu se podeliti u četiri neekvivalentne klase: klizajuće refleksije P,Q, refleksiju R, translacije PR,QR i klizeću refleksiju PQR. S obzirom na algebarsku i geometrijsku ekvivalentnost klizajućih refleksija P,Q među sobom i translacija PR,QR među sobom, antisimetrijska karakteristika grupe cm je $(\overline{P,Q})(R)(\overline{PR,QR})(PQR)$. Iz relacije RPR=Q sledi da su klizajuće refleksije P,Q ekvivalentne i u antisimetrijskom pogledu, tj. da je pri generisanju grupa antisimetrije i višestruke antisimetrije uopštenom metodom Šubnjikov-Zamorzajeva moguća samo njihova istovremena zamena klizajućim antirefleksijama istog antisimetrijskog tipa. Ovo ujedno omogućava zamenu generatora Q generatorom P u okviru antisimetrijske karakteristike, čime se ona svodi na oblik (P)(R)(PR) ekvivalentan sa redukovanom antisimetrijskom karakteristikom (P)(R). U praksi, prilikom izvođenja grupa antisimetrije i višestruke antisimetrije generisanih grupom cm nije potrebno navođenje ovakve antisimetrijske karakteristike, već se samo koristi tvrđenje o antisimetrijskoj ekvivalentnosti generatora P,Q.

Za $L=1,2$ grupa cm, u skladu sa Teoremom 1.1. generiše grupe antisimetrije i višestruke antisimetrije tipa M^1, M^2. Za $L\geq 3$ grupa cm, u skladu sa Teoremom 1.1.b) ne generiše grupe višestruke antisimetrije tipa M^L, pošto nije zadovoljen uslov razdvojivosti antiidentiteta.

b) Ekvivalentnost Teorema 4.5.a) i 4.5.b) sledi iz mogućnosti eliminacije generatora Q iz prezentacije grupe cm navedene u Teoremi 4.5.a).

c) Ekvivalentnost Teorema 4.5.b) i 4.5.c) sledi iz relacije S=PR.

Teorema 4.6.a) Antisimetrijska karakteristika grupe pmm, generisane refleksijama R_1,R_2,R_3 i translacijom Y, date prezentacijom:

pmm (R_1,R_2,R_3,Y) $\quad R_1^2=R_2^2=R_3^2=(R_2Y)^2=E \quad R_1Y=YR_1$

$R_3Y=YR_3 \quad R_2R_1R_2=R_1 \quad R_2R_3R_2=R_3$ je

$(\overline{R_1R_3,Y})(R_1R_3Y)((\overline{R_1,R_3}),(\overline{R_2,R_2Y}))((\overline{R_1R_2,R_2R_3}),(\overline{R_1R_2Y,R_2R_3Y}))$ $((\overline{R_1R_2R_3,R_1R_2R_3Y}),(\overline{R_1Y,R_3Y}))$ i dozvoljava svođenje na redukovani oblik $((\overline{R_1,R_3})(\overline{R_2,R_2Y}))$. Grupa pmm generiše grupe antisimetrije i višestruke antisimetrije tipa M^1, M^2,M^3,M^4.Za $L\geq 5$ grupa pmm ne generiše grupe višestruke antisimetrije tipa M^L.

Teorema 4.6.b) Redukovana antisimetrijska karakteristika grupe pmm, generisane refleksijama R_1,R_2,R_3,R_4, date prezentacijom:

pmm (R_1,R_2,R_3,R_4) $R_1^2=R_2^2=R_3^2=R_4^2=E$
$\underline{(R_1R_2)^2=(R_2R_3)^2=(R_3R_4)^2=(R_4R_1)^2=E}$ je $((\overline{R_1,R_3}), (\overline{R_2,R_4}))$. Grupa pmm generiše grupe antisimetrije i višestruke antisimetrije tipa M^1,M^2,M^3,M^4. Za $L\geq 5$ grupa pmm ne generiše grupe višestruke antisimetrije tipa M^L.

Teorema 4.6.c) Redukovana antisimetrijska karakteristika grupe pmm, generisane translacijama X,Y i refleksijama R_1,R_2, date prezentacijom:

pmm (X,Y,R_1,R_2) $XY=YX$ $R_1R_2=R_2R_1$ $\underline{R_1Y=YR_1}$ $R_2X=XR_2$
$R_1^2=R_2^2=(R_1X)^2=(R_2Y)^2=E$ je $((\overline{R_1,R_1X}),(\overline{R_2,R_2Y}))$.

Grupa pmm generiše grupe antisimetrije i višestruke antisimetrije tipa M^1, M^2,M^3,M^4. Za $L\geq 5$ grupa pmm ne generiše grupe višestruke antisimetrije tipa M^L.

Dokaz: a) Svi proizvodi generatora grupe pmm, formirani u skladu sa Definicijom 1.2. mogu se podeliti u sledeće klase ekvivalencije: klasu refleksija R_1,R_3, klasu refleksija R_2,R_2Y, klasu translacija R_1R_3, Y, klasu translacije R_1R_3Y, klasu centralnih simetrija R_1R_2,R_2R_3, klasu centralnih simetrija R_1R_2Y, R_2R_3Y, klasu klizajućih refleksija $R_1R_2R_3,R_1R_2R_3Y$ i klasu klizajućih refleksija R_1Y,R_3Y. S obzirom na algebarsku i geometrijsku ekvivalentnost refleksija R_1,R_3 među sobom, refleksija R_2,R_2Y među sobom, translacija R_1R_3,Y među sobom, centralnih simetrija R_1R_2,R_2R_3 među sobom, centralnih simetrija R_1R_2Y, R_2R_3Y među sobom, klizajućig refleksija $R_1R_2R_3,R_1R_2R_3Y$ među sobom i klizajućih refleksija R_1Y,R_3Y među sobom i s obzirom na ekvivalentnost susednih navedenih klasa homolognih simetrijskih transformacija, antisimetrijska

karakteristika grupe pmm je $(\overline{R_1R_3,Y})(R_1R_3Y)$
$(\overline{(\overline{R_1,R_3}),(\overline{R_2,R_2Y})})(\overline{(\overline{R_1R_2,R_2R_3}),(\overline{R_1R_2Y,R_2R_3Y})})$
$(\overline{(\overline{R_1R_2R_3,R_1R_2R_3Y}),(\overline{R_1Y,R_3Y})})$. Važe relacije:
$(\overline{R_1R_3,Y})(R_1R_3Y)=(\overline{R_1R_3,Y}),(\overline{(\overline{R_1R_2,R_2R_3}),(\overline{R_1R_2Y,R_2R_3Y})})=$
$\overline{(R_2(\overline{R_1,R_3}),R_2Y(\overline{R_1,R_3}))}=(\overline{(\overline{R_1,R_3}),(\overline{R_2,R_2Y})})$
$(\overline{(\overline{R_1R_2R_3,R_1R_2R_3Y}),(\overline{R_1Y,R_3Y})})=\overline{(R_1R_3(\overline{R_2,R_2Y}),Y(\overline{R_1,R_3}))}=$
$(\overline{R_1R_3,Y})(\overline{(\overline{R_1,R_3}),(\overline{R_2,R_2Y})})$. Pošto je uslov: $(\overline{R_1R_3,Y})$ sadržan u okviru uslova $\overline{((\overline{R_1,R_3}),\ (\overline{R_2,R_2Y}))}$, antisimetrijska karakteristika se svodi na poslednji izraz,

te je redukovana antisimetrijska karakteristika grupe pmm $\overline{((\overline{R_1,R_3}),(\overline{R_2,R_2Y}))}$. U skladu sa Teoremom 1.1. grupa pmm generiše grupe antisimetrije i višestruke antisimetrije tipa M^1, M^2, M^3, M^4. Za $L\geq 5$ grupa pmm ne generiše grupe višestruke antisimetrije tipa M^L, u skladu sa Teoremom 1.1.b), pošto nije zadovoljen uslov razdvojivosti antiidentiteta.

Teorema 4.6.b) Ekvivalentnost Teorema 4.6.a) i 4.6.b) sledi direktno iz relacije $R_4=R_2Y$.

Teorema 4.6.c) Ekvivalentnost Teorema 4.6.b) i 4.6.c) sledi iz relacije $R_3=R_1X$.

Teorema 4.7.a) Antisimetrijska karakteristika grupe pmg, generisane klizajućim refleksijama P,Q i refleksijom R, date prezentacijom:

pmg (P,Q,R) $P^2=Q^2$ $R^2=(RP)^2=(RQ)^2=E$ je

$(\overline{P,Q})(\overline{PR,QR})(PQ)(R)(PQR)$ i dozvoljava svođenje na redukovani oblik $(R)(\overline{P,Q})$. Grupa pmg generiše grupe antisimetrije i višestruke antisimetrije tipa M^1, M^2, M^3. Za $L\geq 4$ grupa pmg ne generiše grupe višestruke antisimetrije tipa M^L.

Teorema 4.7.b) Redukovana antisimetrijska karakteristika grupe pmg, generisane centralnim simetrijama T_1, T_2 i refleksijom R, date prezentacijom:

pmg $\quad (T_1,T_2,R) \quad R^2=T_1^2=T_2^2=E \quad T_1RT_1=T_2RT_2 \quad$ je

$(R)(\overline{T_1,T_2})$. Grupa pmg generiše grupe antisimetrije i višestruke antisimetrije tipa M^1, M^2, M^3. Za $L\geq 4$ grupa pmg ne generiše grupe višestruke antisimetrije tipa M^L.

Dokaz: a) Svi proizvodi generatora grupe pmg, formirani u skladu sa Definicijom 1.2. mogu se podeliti u pet neekvivalentnih klasa: klizajuće refleksije P,Q, centralne simetrije PR,QR, translaciju PQ, refleksiju R i klizajuću refleksiju PQR. S obzirom na algebarsku i geometrijsku ekvivalentnost klizajućih refleksija P,Q, među sobom i centralnih simetrija PR,QR među sobom, antisimetrijska karakteristika grupe pmg je $(\overline{P,Q})(\overline{PR,QR})(PQ)(R)(PQR)$. S obzirom na relacije: $(PQ)(R)(PQR)=(PQ)(R)$, $(\overline{P,Q})(PQ)=(\overline{P,Q})$, antisimetrijska karakteristika se transformiše u oblik $(R)(\overline{P,Q})(\overline{PR,QR})=(R)(\overline{P,Q})(R(\overline{P,Q}))=(R)(\overline{P,Q})$, te je redukovana antisimetrijska karakteristika grupe pmg $(R)(\overline{P,Q})$. Za $L=1,2,3$ grupa pmg generiše grupe antisimetrije i višestruke antisimetrije tipa M^1, M^2, M^3, u skladu sa Teoremom 1.1., dok za $L\geq 4$ grupa pmg ne generiše grupe višestruke antisimetrije tipa M^L, u skladu sa Teoremom 1.1.b), pošto nije zadovoljen uslov razdvojivosti antiidentiteta.

b) Ekvivalentnost Teorema 4.7.a) i 4.7.b) sledi iz relacija $T_1=PR$, $T_2=QR$.

Teorema 4.8.a) Antisimetrijska karakteristika grupe pgg, generisane klizajućim refleksijama P,Q i centralnom simetrijom T, date prezentacijom:

pgg (P,Q,T) $P^2=Q^2$ $T^2=E$ $TPT=Q^{-1}$ je

$(PQ)(\overline{T,PQT})(\overline{P,Q,PT,QT})$ i dozvoljava svođenje na redukovani oblik $(\overline{T,PT})$. Pri zameni generatora grupe pgg antigeneratorima u procesu generisanja grupa antisimetrije i višestruke antisimetrije moguća je samo istovremena zamena klizajućih refleksija P,Q klizajućim antirefleksijama istog antisimetrijskog tipa. Grupa pgg generiše grupe antisimetrije i višestruke antisimetrije tipa M^1, M^2. Za $L\geq3$ grupa pgg ne generiše grupe višestruke antisimetrije tipa M^L.

Teorema 4.8.b) Redukovana antisimetrijska karakteristika grupe pgg, generisane klizajućim refleksijama P,O je (P,O). Grupa pgg generiše grupe antisimetrije i višestruke antisimetrije tipa M^1,M^2. Za $L\geq3$ grupa pgg ne generiše grupe višestruke antisimetrije tipa M^L.

Dokaz: a) Svi proizvodi generatora grupe pgg, formirani u skladu sa Definicijom 1.2. mogu se podeliti u tri neekvivalentne klase: translaciju PQ, centralne simetrije T,PQT i klizajuće refleksije P,Q,PT,QT. S obzirom na algebarsku i geometrijsku ekvivalentnost centralnih simetrija T,PQT među sobom i klizajućih refleksija P,Q, PT, QT među sobom, antisimetrijska karakteristika grupe pgg je $(PQ)(\overline{T,PQT})(\overline{P,Q,PT,QT})$. Međutim, iz relacije $TPT=Q^{-1}$ sledi i antisimetrijska ekvivalentnost klizajućih refleksija P, Q, što omogućava zamenu klizajuće refleksije Q klizajućom refleksijom P u antisimetrijskoj karakteristici grupe pgg, čime se ona svodi na oblik $(T)(\overline{P,PT})=(T)(P(\overline{E,T}))=(\overline{P,PT})$, te je redukovana antisimetrijska karakteristika grupe pgg $(\overline{P,PT})$. Takođe, iz antisimetrijske ekvivalentnosti generatora P,Q sledi i obaveza njihove istovremene zamene antigeneratirima istog antisimetrijskog tipa pri generisanju grupa antisimetrije i višestruke antisimetrije uopštenom metodom Šubnjikov-Zamorzajeva. Grupa pgg generiše grupe antisimetrije i višestruke antisimetrije tipa M^1, M^2, u skladu sa Teoremom 1.1., dok za $L\geq 3$ grupa pgg ne generiše grupe višestruke antisimetrije tipa M^L, pošto nije zadovoljen uslov razdvojivosti antiidentiteta, u skladu sa Teoremom 1.1.b).

b) Ekvivalentnost Teorema 4.8.a) i 4.8.b) sledi iz relacije O=PT.

Teorema 4.9.a) Antisimetrijska karakteristika grupe cmm, generisane refleksijama R_1, R_2 i centralnom simetrijom T, date prezentacijom:

cmm (R_1,R_2,T) $R_1^2=R_2^2=T^2=(R_1R_2)^2=(R_1TR_2T)^2=E$ je $(T)(\overline{R_1,R_2})(R_1R_2)(\overline{TR_1,TR_2})(TR_1R_2)$ i dozvoljava svođenje na redukovani oblik $(T)(\overline{R_1,R_2})$. Grupa cmm generiše grupe antisimetrije i višestruke antisimetrije tipa M^1,M^2,M^3.

Za $L\geq 4$ grupa cmm ne generiše grupe višestruke antisimetrije tipa M^L.

Teorema 4.9.b) Redukovana antisimetrijska karakteristika grupe cmm, generisane refleksijama R_1,R_2,R_3,R_4 i centralnom simetrijom T, date prezentacijom:

$$\text{cmm} \quad (R_1,R_2,R_3,R_4,T) \quad TR_1T=R_3 \quad TR_2T=R_4 \quad T^2=E$$
$$R_1^2=R_2^2=R_3^2=R_4^2=(R_1R_2)^2=(R_2R_3)^2=(R_3R_4)^2=(R_4R_1)^2=E$$

je $(T)(\overline{R_1,R_2})$. Refleksije R_1, R_3 i refleksije R_2,R_4, posmatrane u parovima su antisimetrijski ekvivalentne. Grupa cmm generiše grupe antisimetrije i višestruke antisimetrije tipa M^1, M^2, M^3. Za $L\geq 4$ grupa cmm ne generiše grupe **višestruke** antisimetrije tipa M^L.

Dokaz: a) Svi proizvodi generatora grupe cmm, formirani u skladu sa Definicijom 1.2. mogu se podeliti u pet neekvivalentnih klasa: centralnu simetriju T, refleksije R_1,R_2, centralnu simetriju R_1R_2, klizajuće refleksije TR_1,TR_2 i translaciju TR_1R_2. S obzirom na algebarsku i geometrijsku ekvivalentnost refleksija R_1,R_2 među sobom i klizajućih refleksija TR_1,TR_2 među sobom, antisimetrijska karakteristika grupe cmm je $(T)(\overline{R_1,R_2})(R_1R_2)(\overline{TR_1,TR_2})(TR_1R_2)$. Na osnovu relacija $(\overline{R_1,R_2})(R_1R_2)=(\overline{R_1,R_2})$ i činjenice da je uslov (TR_1R_2) sadržan u uslovu $(T)(R_1R_2)$, antisimetrijska karakteristika se transformiše u oblik:
$(T)(\overline{R_1,R_2})(\overline{TR_1,TR_2})=(T)(\overline{R_1,R_2})(T(\overline{R_1,R_2}))=(T)(\overline{R_1,R_2})$, te je redukovana antisimetrijska karakteristika grupe cmm $(T)(\overline{R_1,R_2})$. Grupa cmm, u skladu sa Teoremom 1.1. generiše grupe antisimetrije i višestruke antisimetrije tipa M^1, M^2,M^3. Za $L\geq 4$ grupa cmm ne generiše grupe višestruke

antisimetrije tipa M^L, u skladu sa Teoremom 1.1.b) , pošto nije zadovoljen uslov razdvojivosti antiidentiteta.

b) Iz relacija $TR_1T=R_3$ i $TR_2T=R_4$ sledi da su generatori R_1,R_3 među sobom i generatori R_2,R_4 među sobom ekvivalentni u simetrijskom i antisimetrijskom pogledu, te je u okviru antisimetrijske karakteristike grupe cmm moguća zamena refleksije R_3 refleksijom R_1 i refleksije R_4 refleksijom R_2. Pri izvođenju grupa antisimetrije i višestruke antisimetrije generisanih grupom cmm uopštenim metodom Šubnjikov-Zamorzajeva, dozvoljena je zamena refleksija R_1,R_3 antirefleksijama istog antisimetrijskog tipa i refleksija R_2,R_4 antirefleksijama istog antisimetrijskog tipa, obzirom na antisimetrijsku ekvivalentnost navedenih refleksija, posmatranih u parovima. Ekvivalentnost Teorema 4.9.a) i 4.9.b) proizilazi iz mogućnosti eliminacije refleksija R_3,R_4 iz prezentacije grupe cmm date u Teoremi 4.9.b), čime se ona svodi na prezentaciju datu u Teoremi 4.9.a).

Teorema 4.10.a) Antisimetrijska karakteristika grupe p4, generisane rotacijom S i centralnom simetrijom T, date prezentacijom:

p4 (S,T) $\quad S^4=T^2=(ST)^4=E$ $\quad$ je $(T)(\overline{S,ST})$ i dozvoljava svođenje na redukovani oblik $(\overline{S,ST})$. Grupa p4 generiše grupe antisimetrije i višestruke antisimetrije tipa M^1, M^2. Za $L\geq 3$ grupa p4 ne generiše grupe višestruke antisimetrije tipa M^L.

Teorema 4.10.b) Redukovana antisimetrijska karakteristika grupe p4, generisane rotacijom S i centralnim simetrijama T, T_1, T_2, T_3, date prezentacijom:

p4 (S, T_j) $S^4=E$ $S^{-i}T_3S^i=T_i$ $(i=0,1,2;\ j=0,1,2,3)$

$T_j^2=TT_1T_2T_3=E$ je $(\overline{S,ST})$. Centalne simetrije T_j su antisimetrijski ekvivalentne, te je pri generisanju grupa antisimetrije i višestruke antisimetrije moguća samo istovremena zamena svih centralnih simetrija T_j centralnim antisimetrijama istog antisimetrijskog tipa. Grupa p4 generiše grupe antisimetrije i višestruke antisimetrije tipa M^1, M^2. Za $L\geq 3$ grupa p4 ne generiše grupe višestruke antisimetrije tipa M^L.

Dokaz: a) Svi proizvodi generatora grupe p4, formirani u skladu sa Definicijom 1.2. mogu se podeliti u dve neekvivalentne klase: centralnu simetriju T i rotacije S, ST.S obzirom na ekvivalentnu algebarsku i geometrijsku ulogu rotacija S,ST, antisimetrijska karakteristika grupe p4 je $(T)(\overline{S,ST})$. Na osnovu relacije $(T)(\overline{S,ST})=(T)(S(\overline{E,T}))=(\overline{S,ST})$, redukovana antisimetrijska karakteristika grupe p4 je $(\overline{S,ST})$. Za $L=1,2$ grupa p4 generiše, u skladu sa Teoremom 1.1. grupe antisimetrije i višestruke antisimetrije tipa M^1, M^2, dok za $L\geq 3$ grupa p4 ne generiše grupe višestruke antisimetrije tipa M^L, u skladu sa Teoremom 1.1.b), pošto nije zadovoljen uslov razdvojivosti antiidentiteta.

b) Antisimetrijska ekvivalentnost centralnih simetrija T_j je posledica relacija $S^{-i}T_3S^i=T_i$, te je pri generisanju grupa antisimetrije i višestruke antisimetrije uopštenim metodom Šubnjikov-Zamorzajeva moguća samo zamena svih centralnih simetrija T_j centralnim antisimetrijama istog antisimetrijskog tipa. Ekvivalentnost Teorema 4.10.a) i 4.10.b) sledi na osnovu mogućnosti eliminacije centralnih simetrija T_1,T_2,T_3 iz prezentacije grupe p4 date u Teoremi 4.10.b), čime se ona svodi na prezentaciju datu u 4.10.a).

Teorema 4.11. a) Antisimetrijska karakteristika grupe p4m, generisane refleksijama R,R_1,R_2, date prezentacijom:

$$p4m \quad (R,R_1,R_2) \quad R^2=R_1^2=R_2^2=(RR_1)^2=(R_1R_2)^4=(R_2R)^2=E \quad \text{je}$$

$(R)(\overline{R_1,R_2})(R_1R_2)(\overline{RR_1,RR_2})(RR_1R_2)$ i dozvoljava svođenje na redukovani oblik $(R)(\overline{R_1,R_2})$. Grupa p4m generiše grupe antisimetrije i višestruke antisimetrije tipa M^1, M^2, M^3. Za $L\geq 4$ grupa p4m ne generiše grupe višestruke antisimetrije tipa M^L.

Teorema 4.11.b) Redukovana antisimetrijska karakteristika grupe p4m, generisane refleksijama R_1,R_2,R_3,R_4,R, date prezentacijom:

$$p4m \quad (R,R_1,R_2,R_3,R_4) \quad R^2=E \quad RR_1R=R_4 \quad RR_2R=R_3$$
$$R_1^2=R_2^2=R_3^2=R_4^2=(R_1R_2)^2=(R_2R_3)^2=(R_3R_4)^2=(R_4R_1)^2=E$$

je $(R)(\overline{R_1,R_2})$. Generatori R_3, R_4 su antisimetrijski ekvivalentni generatorima R_2,R_1 respektivno. Grupa p4m generiše grupe antisimetrije i višestruke antisimetrije tipa M^1, M^2, M^3. Za $L\geq 4$ grupa p4m ne generiše grupe višestruke antisimetrije tipa M^L.

Dokaz: a) Svi proizvodi generatora grupe p4m, formirani u skladu sa Definicijom 1.2. mogu se podeliti u pet neekvivalentnih klasa: refleksiju R, refleksije R_1,R_2, centralne simetrije RR_1, RR_2, centralnu simetriju R_1R_2 i klizajuću refleksiju RR_1R_2. S obzirom na ekvivalentnu algebarsku i geometrijsku ulogu refleksija R_1, R_2 među sobom i centralnih simetrija RR_1, RR_2 među sobom, antisimetrijska karakteristika grupe p4m je $(R)(\overline{R_1,R_2})(R_1R_2)(\overline{RR_1,RR_2})(RR_1R_2)$. Pošto je uslov (RR_1R_2) sadržan u uslovima $(R)(R_1R_2)$ i u skladu sa relacijom $(\overline{R_1,R_2})(R_1R_2)=(\overline{R_1,R_2})$, antisimetrijska karakteristika svodi se na oblik $(R)(\overline{R_1,R_2})(\overline{RR_1,RR_2})=(R)(\overline{R_1,R_2})(R(\overline{R_1,R_2}))=$ $(R)(\overline{R_1,R_2})$, te je redukovana antisimetrijska karakteristika grupe p4m $(R)(\overline{R_1,R_2})$. U skladu sa Teoremom 1.1. grupa p4m generiše grupe antisimetrije i višestruke antisimetrije tipa M^1, M^2, M^3, dok za $L\geq 4$ grupa p4m ne generiše grupe višestruke antisimetrije tipa M^L.

b) Antisimetrijska ekvivalentnost generatora R_1, R_4 među sobom i generatora R_2, R_3 među sobom sledi iz relacija $RR_1R=R_4$ i $RR_2R=R_3$. Kao posledica ovoga refleksije R_1 i R_4 mogu biti isključivo istovremeno zamenjene antirefleksijama istog tipa u procesu generisanja grupa antisimetrije i višestruke antisimetrije uopštenom metodom Šubnjikov-Zamorzajeva. Analogno tvrđenje važi i za refleksije R_2, R_3. Ekvivalentnost Teorema 4.11.a) i 4.11.b) sledi na osnovu mogućnosti eliminacije generatora R_3, R_4 iz prezentacije grupe p4m date u okviru Teoreme 4.11.b), čime se ona svodi na prezentaciju datu u 4.11.a).

Teorema 4.12.a) Antisimetrijska karakteristika grupe p4g, generisane rotacijom S i refleksijom R, date prezentacijom:

$$p4g \quad (S,R) \quad R^2=S^4=(RS^{-1}RS)^2=E$$ je (R)(S)(RS) i dozvoljava svođenje na redukovani oblik (R)(S). Grupa p4g generiše grupe antisimetrije i višestruke antisimetrije tipa M^1, M^2. Za $L\geq 3$ grupa p4g ne generiše grupe višestruke antisimetrije tipa M^L.

Teorema 4.12.b) Redukovana antisimetrijska karakteristika grupe p4g, generisane rotacijom S i refleksijama R_j(j=1,2,3,4), date prezentacijom:

$$p4g \quad (S,R_1,R_2,R_3,R_4) \quad S^4=E \quad S^{-i}R_4S^i=R_i \quad (\ i=1,2,3)$$
$$R_1^2=R_2^2=R_3^2=R_4^2=(R_1R_2)^2=(R_2R_3)^2=(R_3R_4)^2=(R_4R_1)^2=E$$

je $(S)(R_j)$. Pri zameni generišućih refleksija R_1,R_2,R_3,R_4 antirefleksijama obavezna je njihova istovremena zamena antirefleksijama istog antisimetrijskog tipa. Grupa p4g generiše grupe antisimetrije i višestruke antisimetrije tipa M^1,M^2. Za $L\geq 3$ grupa p4g ne generiše grupe višestruke antisimetrije tipa M^L.

Dokaz: a) Svi proizvodi generatora grupe p4g, formirani u skladu sa Definicijom 1.2. mogu se podeliti u tri neekvivalentne klase: rotaciju S, refleksiju R i klizajuću refleksiju RS, pa je antisimetrijska karakteristika grupe p4g (R)(S)(RS)=(R)(S), te je redukovana antisimetrijska karakteristika grupe p4g (R)(S). U skladu sa Teoremom 1.1. grupa p4g generiše grupe antisimetrije i višestruke antisimetrije tipa M^1,M^2. Za $L\geq 3$ grupa p4g, u skladu sa Teoremom 1.1.b) ne generiše grupe višestruke antisimetrije, pošto nije zadovoljen uslov razdvojivosti antiidentiteta.

b) Ekvivalentnost Teorema 4.12.a) i 4.12.b) sledi iz mogućnosti eliminacije refleksija R_1,R_2,R_3 iz prezentacije grupe p4g, date u okviru Teoreme 4.12.b) i relacije $R_4=R$, čime se navedena prezentacija svodi na prezentaciju datu u 4.12.a). Antisimetrijska ekvivalentnost refleksija R_1, R_2,R_3,R_4 sledi iz relacija $S^{-i}R_4S^i=R_i$ (i=1,2,3), te refleksije R_1,R_2,R_3,R_4 u procesu generisanja grupa antisimetrije i višestruke antisimetrije uopštenim metodom Šubnjikova-Zamorzajeva moraju istovremeno biti zamenjivane antirefleksijama istog antisimetrijskog tipa.

Teorema 4.13a)Antisimetrijska karakteristika grupe p3lm, generisane rotacijom S i refleksijom R, date prezentacijom:

p3lm (S,R) $R^2=S^3=(RS^{-1}RS)^2=E$ je (S)(R)(RS) i svodi se na redukovani oblik (R). Zamena rotacije S antirotacijama je zabranjena. Grupa p3lm generiše grupu antisimetrije tipa M^1. Za $L\geq 2$ grupa p3lm ne generiše grupe višestruke antisimetrije tipa M^L.

Teorema 4.13.b) Redukovana antisimetrijska karakteristika grupe p3lm, generisane rotacijama S_1,S_2 i refleksijom R , date prezentacijom:

p3lm (S_1,S_2,R) $R^2=E$ $RS_1R=S_2^{-1}$ $S_1^3=S_2^3=(S_1S_2)^3=E$

je (R). Grupa p3lm generiše grupu antisimetrije tipa M^1.

Za $L\geq 2$ grupa p3lm ne generiše grupe višestruke antisimetrije tipa M^L.

Dokaz: a) Svi proizvodi generatora grupe p3lm, formirani u skladu sa Definicijom 1.2. mogu se podeliti u tri neekvivalentne klase : rotaciju S, refleksiju R i klizajuću refleksiju SR, te je antisimetrijska karakteristika grupe p3lm (S)(R)(SR). Međutim, rotacija S ne dozvoljava zamenu antirotacijom $S'=e'S$, jer bi iz relacije $S'^3=(e'S)^3=e'S^3=e'$, sledilo da je e' element dobijene grupe antisimetrije ili višestruke antisimetrije, te ova grupa ne bi mogla biti tipa M^m. Pošto rotacija S ne dozvoljava zamenu antirotacijom, antisimetrijska karakteristika grupe p3lm svodi se na redukovani oblik (R). U skladu sa Teoremom 1.1 grupa p3lm generiše grupu antisimetrije tipa M^1. Za $L\geq 2$ grupa p3lm, u skladu sa Teoremom 1.1.b) ne generiše grupe višestruke antisimetrije, pošto nije zadovoljen uslov razdvojivosti antiidentiteta.

Teorema 4.14. a) Antisimetrijska karakteristika grupe p3m, generisane rotacijama S_1,S_2 i refleksijom R, date prezentacijom:

$$\text{p3m} \quad \{S_1,S_2,R\} \quad R^2=E \quad RS_1R=S_1^{-1} \quad RS_2R=S_2^{-1}$$
$$S_1^3=S_2^3=(S_1S_2)^3=E \qquad \text{je}$$

$(R)(\overline{S_1,S_2,S_1S_2})(\overline{RS_1,RS_2,RS_1S_2})$ idozvoljava svođenje na redukovani oblik (R). Zamena rotacija S_1, S_2 antirotacijama je zabranjena. Grupa p3m generiše grupu antisimetrije tipa M^1. Za $L\geq 2$ grupa p3m ne generiše grupe višestruke antisimetrije tipa M^L.

Teorema 4.14.b) Redukovana antisimetrijska karakteristika grupe p3m, generisane refleksijama R_1,R_2,R_3, date prezentacijom:

$$p3m \quad (R_1,R_2,R_3) \quad R_1^2=R_2^2=R_3^2=(R_1R_2)^3=(R_2R_3)^3=(R_3R_1)^3=E$$

je $(\overline{R_1,R_2,R_3})(R_1R_2R_3)(\overline{R_1R_2,R_2R_3,R_3R_1})$ i dozvoljava svođenje na redukovani oblik (R_1). Pri generisanju grupa antisimetrije dozvoljena je isključivo istovramena zamena generišućih refleksija R_1,R_2,R_3 antirefleksijama istog antisimetrijskog tipa. Grupa p3m generiše grupu antisimetrije tipa M^1. Za $L\geq 2$ grupa p3m ne generiše grupe višestruke antisimetrije tipa M^L.

Dokaz: a) Svi proizvodi generatora grupe p3m, formirani u skladu sa Definicijom 1.2. mogu se podeliti u tri neekvivalentne klase: refleksiju R, klizajuće refleksije RS_1,RS_2,RS_1S_2 i rotacije S_1,S_2,S_1S_2. S obzirom na ekvivalentnu algebarsku i geometrijsku ulogu klizajućih refleksija RS_1,RS_2,RS_1S_2 među sobom i rotacija S_1,S_2,S_1S_2 među sobom , antisimetrijska karakteristika grupe p3m je $(R)(\overline{S_1,S_2,S_1S_2})(\overline{RS_1,RS_2,RS_1S_2})$. Zabrana zamene rotacija S_1,S_2 antirotacijama sledi iz relacija : $S_1^3=S_2^3=E$, te se antisimetrijska karakteristika grupe p3m svodi na redukovani oblik (R). U skladu sa Teoremom 1.1. grupa p3m generiše grupu antisimetrije M^1. Za $L\geq 2$ grupa p3m , u skladu sa Teoremom 1.1.b) ne generiše grupe višestruke antisimetrije tipa M^L, pošto nije zadovoljen uslov razdvojivosti antiidentiteta.

b) Ekvivalentnost Teorema 4.14.a) i 4.14.b) sledi iz relacija $S_1=R_1R_2$, $S_2=R_2R_3$, $R=R_1$. Antisimetrijska ekvivalentnost refleksija R_1,R_2,R_3 sledi iz relacija $(R_1R_2)^3=(R_2R_3)^3=(R_3R_1)^3=E$, te se refleksije R_1,R_2,R_3 pri generisanju grupa antisimetrije mogu zameniti isključivo istovremeno antirefleksijama istog tipa antisimetrije.

Teorema 4.15a) Antisimetrijska karakteristika grupe p6, generisane rotacijom S i centralnom simetrijom T, date prezentacijom:

p6 (T,S) $S^3=T^2=(ST)^6=E$ je (S)(T)(ST) i dozvoljava redukovanje na oblik (T). Zamena rotacije S antirotacijom je zabranjena. Grupa p6 generiše grupu antisimetrije tipa M^1. Za $L\geq 2$ grupa p6 ne generiše grupe višestruke antisimetrije tipa M^L.

Teorema 4,15.b) Redukovana antisimetrijska karakteristika grupe p6, generisane centralnom simetrijom T i rotacijama S_1,S_2, date prezentacijom:

p6 (T,S_1,S_2) $T^2=E$ $TS_1T=S_2$ $S_1^3=S_2^3=(S_1S_2)^3=E$ je (T). Zamena rotacija S_1,S_2 antirotacijama je zabranjena. Grupa p6 generiše grupu antisimetrije tipa M^1. Za $L\geq 2$ grupa p6 ne generiše grupe višestruke antisimetrije tipa M^L.

Dokaz: a) Svi proizvodi generatora grupe p6, formirani u skladu sa Definicijom 1.2. mogu se podeliti na tri neekvivalentne klase: rotaciju reda tri S, centralnu simetriju T i rotaciju reda šest ST, te je antisimetrijska karakteristika grupe p6 (S)(T)(ST). Iz relacije $S^3=E$ sledi zabrana zamene rotacije S antirotacijom, te se u skladu sa ovim antisimetrijska karakteristika svodi na redukovani oblik (T). U skladu sa Teoremom 1.1. grupa p6 generiše grupu antisimetrije tipa M^1. Za $L\geq 2$ grupa p6, u skladu sa Teoremom 1.1.b) ne generiše grupe višestruke antisimetrije tipa M^L, pošto nije zadovoljen uslov razdvojivosti antiidentiteta.

b) Ekvivalentnost Teorema 4.15.a) i 4.15.b) sledi iz mogućnosti eliminacije rotacije S_2 iz apstraktne definicije grupe p6 date u 4.15.b) i relacije $S=S_1$, čime se navedena prezentacija grupe p6 svodi na prezentaciju datu u 4.15.a). Zabrana zamene rotacija S_1,S_2 antirotacijama sledi iz relacija $S_1^3=S_2^3=E$.

Teorema 4.16.a) Antisimetrijska karakteristika grupe p6m, generisane refleksijama R,R_1,R_2, date prezentacijom:

p6m (R,R_1,R_2) $R^2=R_1^2=R_2^2=(R_1R_2)^3=(R_2R)^2=(RR_1)^6=E$

je $(R)(R_1)(R_2)(RR_1)(RR_2)(R_1R_2)(RR_1R_2)$ i dozvoljava svođenje na redukovani oblik $(R)(R_1)$. Refleksije R_1,R_2 su antisimetrijski ekvivalentne i dozvoljavaju isključivo istovremenu zamenu antirefleksijama istog antisimetrijskog tipa. Grupa p6m generiše grupe antisimetrije i višestruke antisimetrije tipa M^1,M^2. Za $L\geq 3$ grupa p6m ne generiše grupe višestruke antisimetrije tipa M^L.

Teorema 4.16.b) Redukovana antisimetrijska karakteristika grupe p6m, generisane refleksijama R,R_1,R_2,R_3, date prezentacijom:

$R_1^2=R_2^2=R_3^2=(R_1R_2)^3=(R_2R_3)^3=(R_3R_1)^3=E$ je $(R)(R_1)$. Refleksije R_1,R_2,R_3 su antisimetrijski ekvivalentne, te je dozvoljena isključivo njihova istovremena zamena antirefleksijama istog antisimetrijskog tipa. Grupa p6m generiše grupe antisimetrije i višestruke antisimetrije tipa M^1,M^2. Za $L\geq3$ grupa p6m ne generiše grupe višestruke antisimetrije tipa M^L.

Dokaz: a) Svi proizvodi generatora grupe p6m, formirani u skladu sa Definicijom 1.2. mogu se podeliti u sedam neekvivalentnih klasa: refleksiju R, refleksiju R_1, refleksiju R_2, rotaciju reda tri RR_1, centralnu simetriju RR_2, rotaciju reda šest R_1R_2 i klizajuću refleksiju RR_1R_2, te je antisimetrijska karakteristika grupe p6m $(R)(R_1)(R_2)(RR_1)(RR_2)(R_1R_2)(RR_1R_2)$. Na osnovu relacije $(R_1R_2)^3=E$ sledi antisimetrijska ekvivalentnost refleksija R_1,R_2 i obaveza njihove istovremene zamene antirefleksijama istog antisimetrijskog tipa u procesu generisanja grupa antisimetrije i višestruke antisimetrije uopštenom metodom Šubnjikov-Zamorzajeva. Ova osobina ujedno omogućava zamenu refleksije R_2 refleksijom R_1 u okviru antisimetrijske karakteristike grupe p6m, čime se ona svodi na oblik $(R)(R_1)(RR_1)=(R)(R_1)$, te je redukovana antisimetrijska karakteristika grupe p6m $(R)(R_1)$. U skladu sa Teoremom 1.1. grupa p6m generiše grupe antisimetrije i višestruke antisimetrije tipa M^1,M^2. Za $L\geq3$ grupa p6m, u skladu sa Teoremom 1.1.b) ne generiše grupe višestruke antisimetrije tipa M^L, pošto nije zadovoljen kriterijum razdvojivosti antiidentiteta.

b) Ekvivalentnost Teorema 4.16.a) i 4.16.b) sledi iz mogućnosti eliminacije refleksije R_3 iz prezentacije grupe p6m date u okviru 4.16.b), čime se ona svodi na prezentaciju 4.16.a). Antisimetrijska ekvivalentnost refleksija R_1,R_2,R_3 i obaveza njihove istovremene zamene antirefleksijama istog antisimetrijskog tipa u procesu generisanja grupa antisimetrije i višestruke antisimetrije uopštenom metodom Šubnjikov-Zamorzajeva sledi iz relacija $(R_1R_2)^3=(R_2R_3)^3=(R_3R_1)^3=E$. Naime, kada bi npr. refleksije R_1,R_2 bile zamenjene antirefleksijama različitog antisimetrijskog tipa R_1',R_2' , bilo bi $R_1'R_2'=e'R_1R_2$, pošto je proizvod antiidentiteta različitog tipa antiidentitet tipa različitog od polazna dva, pa bi iz relacije $(e'R_1R_2)^3=e'(R_2R_3)^3=e'E=e'$, sledilo da antiidentitet e' ulazi u sastav dobijene grupe antisimetrije, te ona ne bi mogla biti tipa M^m. Analogno, dokazuje se antisimetrijska ekvivalentnost refleksija R_2,R_3, te su sve tri refleksije R_1,R_2,R_3 antisimetrijski ekvivalentne.

Na osnovu navedenih teorema ostvareno je kompletno izvođenje grupa antisimetrije i višestruke antisimetrije tipa M^L , iz koga je, pored ostalog moguće i registrovanje ponovljenih grupa antisimetrije i višestruke antisimetrije ornamenata, tj. kombinacija generatora koji rezultiraju istom grupom antisimetrije i višestruke antisimetrije.

Izomorfnost antisimetrijskih karakteristika grupa simetrije pgg i p4m među sobom, grupa pgm, cmm i p4m među sobom i grupa p4g, p6m među sobom predstavlja bitnu olakšicu pri izvođenju grupa antisimetrije i višestruke antisimetrije i u skladu sa Teoremom 1.4. omogućava da proces izvođenja svih grupa antisimetrije i višestruke antisimetrije redukujemo na izvođenje grupa antisimetrije i višestruke antisimetrije generisanih grupama sa neizomorfnim antisimetrijskim karakteristikama. Komparativni katalog grupa simetrije sa izomorfnim antisimetrijskim karakteristikama može se sastaviti na osnovu rezultata teorema navedenih u ovom poglavlju.

Kompletna izvođenja i katalozi grupa antisimetrije i višestruke antisimetrije ornamenata i njihovi mozaici nisu dati u ovom radu zbog obimnosti. Većina grupa antisimetrije višestruke antisimetrije ornamenata data je u dve ili tri različite prezentacije. U okviru kataloga grupa za obeležavanje grupa antisimetrije i višestruke korišćena je 0-1 varijanta međunarodne simbolike, predložena u Poglavlju 1. Sve dobijene grupe antisimetrije i višestruke antisimetrije ornamenata tipa M^1,M^2,M^3,M^4 vizuelno su prikazane u vidu mozaika, u skladu sa metodom uvedenim u Poglavlju 1.

Kao rezultat izvođenja dobijen je katalog svih grupa antisimetrije i višestruke antisimetrije ornamenata tipa M^L. Prikazani u tabelarnom obliku brojevi N_L grupa antisimetrije ornamenata tipa M^1,M^2,M^3,M^4, generisanih pojedinim grupama simetrije glase:

	p1	p2	pm	pg	cm	pmm	pgm	pgg	cmm	p4	p4m	p4g	p3m	p31m	p6	p6m	
M^1	1	2	5	2	3	5	5	2	5	2	5	3	1	1	1	3	46
M^2	1	4	24	3	6	39	24	3	24	3	24	6				6	167
M^3		7	84			357	84		84		84						700
M^4						2520											2520

te je N_1=46, N_2=167, N_3=700, N_4=2520. Dobijeni rezultati u potpunosti odgovaraju rezultatima autora iz Kišinjova (A.M.Zamorzajev, A.F.Palistrant, 1960; A,M.Zamorzajev, 1976., str. 143.) ostvarenim delimično sastavljanjem kataloga grupa višestruke antisimetrije ornamenata, a delimično primenom kombinatornih metoda. Navedeni brojevi grupa tipa M^L omogućavaju izračunavanje broja svih grupa antisimetrije i višestruke antisimetrije P_L(videti str.31).

Pored korišćene 0-1 varijante Internacionalne simbolike ili Zamorzajevske simbolike, za obeležavanje grupa antisimetrije i višestruke antisimetrije ornamenata moguće je i korišćenje Kopcikove višečlane simbolike. Ovakav sistem obeležavanja ilustruje primer grupe višestruke antisimetrije ornamenata $p_{1001,0011}{}^m{}_{0001}{}^m{}_{0101}$ $(ee_3X,\ e_2e_3Y, e_3R_1, e_1e_3R_2)$. Eliminacijom antiidentiteta e_3, e_2, e_1, e respektivno dobijaju se grupe antisimetrije (eX, e_2Y, R_1, e_1R_2), $(eX, e_3Y, e_3R_1, e_1e_3R_2)$, $(ee_3X, e_2e_3Y, e_3R_1, e_3R_2)$, $(e_3X, e_2e_3Y, e_3R_1, e_1e_3R_2)$, kojima redom odgovaraju grupe simetrije pm (X^2, Y^2, R_1), pg (X^2, Y^2, YR_1), p2 (X^2, Y^2, R_1R_2), pm (X^2, Y^2, XR_1). Grupi antisimetrije $p_{1001,0011}{}^m{}_{0001}{}^m{}_{0101}$ odgovara grupa simetrije p1 (X^2, Y^2), te će Kopcikov višečlani simbol navedene grupe biti pmm/(pm,pg,p2,pm)/p1.

Prva izvođenja grupa antisimetrije ornamenata tipa M^1 vezana su za simetriju slojeva i mogućnosti interpretacije dvostranosti i simetrije slojeva uz pomoć crno-belih dijagrama. Ova ideja A.Speisera(A.Speiser, 1927.) je ostvarena u radovima(E .Alexander i K.Herrmann, 1928.; L.Weber, 1929. ; A.V.Šubnjikov, 1940., 1946.;Woods,1935.).

Najstarije izvođenje grupa antisimetrije $G^1_{2,2}$ direktno iz 17 ravanskih ornamenata $G_{2,2}$, dato u radu(H.Heesch, 1929.) ujedno predstavlja izvođenje 80 grupa simetrije slojeva direktno iz 17 grupa simetrije ornamenata. Četrdeset šest grupa antisimetrije ornamenata tipa M^1 odgovaraju grupama simetrije dvostranih slojeva, koji ne poseduju ravan simetrije u ravni sloja. Ostale 34 grupe simetrije slojeva sastoje se od 17 polarnih, jednostranih slojeva (ornamenata) i 17 grupa simetrije slojeva koji poseduju ravan simetrije u ravni sloja i koji odgovaraju grupama antisimetrije ornamenata tipa S^1, tj. grupama antisimetrije ornamenata oblika $G\times\{e\}$, gde je G grupa simetrije ornamenata. Pored crno-belih dijagrama, u radovima(A.V. Šubnjikov, 1940., 1972.) dat je i tabelarni pregled dobijenih grupa.

Nezavisna izvođenja grupa antisimetrije ornamenata tipa M^1 data su u radovima(W.Cochran, 1952.) gde je realizovano izvođenje grupa antisimetrije ornamenata bez primene antisimetrijskih Braveovih rešetki, korišćenjem uopštenih projekcija prostornih grupa simetrije, u radovima škole Bjelova(N.V.Bjelov, N.N.Neronova, T.S.Smirnova, 1955.) uz korišćenje 10 antisimetrijskih dihromnih Braveovih rešetki(5 klasičnosimetrijskih i 5 crno-belih) i kompariranje sa Fjodorovskim grupama simetrije lociranim u dva nivoa, pri čemu je dobijenih 46 dihromatskih ornamenata prikazano u međunarodnoj simbolici, uz paralelno navođenje u Cochranovoj simbolici(N.V.Bjelov, N.N. Tarhova, 1956.), sa alternativnim izvođenjima(N.V. Bjelov, E.N.Bjelova, 1957.), gde su dati mozaici 46 antisimetrijskih ornamenata tipa M^1 i u monografiji(A.Loeb, 1971., poglavlje 10.) gde su navedene grupe antisimetrije izvedene i prezentirane u orginalnoj simbolici, kompariranoj sa oznakama Šubnjikov-Bjelova(A.Loeb, 1971., str.97.).

Kompozitne grupe("compound graups") uvedene u radu (A.L.Mackay, 1957.) predstavljaju proširenje teorije antisimetrije zasnovano na superpozicijama geometrijski odgovarajućih grupa simetrije S i antisimetrije A, koje se u slučaju grupa kompozitne simetrije ornamenata svodi na komponovanje 17 grupa simetrije ornamenata i 46 grupa antisimetrije ornamenata tipa M^1.

Prvo izvođenje grupa višestruke antisimetrije ornamenata dato je u radu "Dvumernije Šubnjikovskije grupi" A.M.Zamorzajeva i A.F.Palistranta(1960.). Nakon uvođenja nove simbolike grupa simetrije ornamenata, u ovom radu realizuje se izvođenje 46 grupa antisimetrije ornamenata tipa M^1, 167 grupa višestruke antisimetrije ornamenata tipa M^2 uopštenom metodom Šubnjikov-Zamorzajeva. Za L=3 ostvareno je izvođenje grupa višestruke antisimetrije tipa M^3 generisanih grupama simetrije ornamenata p2, pm, pmm, pmg, cmm, i p4m , data koncepcija izvođenja svih ostalih grupa višestruke antisimetrije ornamenata tipa M^3 i naveden broj grupa tipa M^3, N_3=700. Kompletan katalog 700 grupa tipa M^3 naveden je u disertaciji A.F.Palistranta (A.M.Zamorzajev 1976., str. 142).

. Za L=4 sovjetski autori navode broj grupa višestruke antisimetrije ornamenata tipa M^4, N_4=2520, dobijen kombinatornim metodama(A.M.Zamorzajev, A.F.Palistrant, 1960.; A.M.Zamorzajev, 1976.).

Pored nove simbolike grupa simetrije ornamenata, uvedene u radu(A.M.Zamorzajev, A.F.Palistrant, 1960.), u monografiji(A.M.Zamorzajev, 1976.) navedeni su i izvesni geometrijski uslovi koji se odnose na grupe antisimetrije i višestruke antisimetrije ornamenata, npr. obaveza istovremene zamene translacija antitranslacijama u grupama kvadratne singonije, konzervacija translacija(kvadrata klizajućih refleksija) koje se javljaju u okviru drugog faktora kod hemisimorfnih grupa, komparativni tabelarni pregledi grupa antisimetrije ornamenata i grupa simetrije slojeva(tabela P3), kao i interpretacije grupa antisimetrije i višestruke antisimetrije ornamenata tipa L kao grupa antisimetrije i višestruke antisimetrije slojeva tipa L-1, usvajanjem prve antisimetrijske koordinate kod grupa antisimetrije i višestruke antisimetrije ornamenata kao pokazatelja položaja tačke u odnosu na invarijantnu dvostranu ravan sloja, dok su ostale L-1 antisimetrija shvaćene kao vangeometrijska dvovalentna svojstva.

Mozaičke vizuelizacije grupa višestruke antisimetrije ornamenata tipa M^2 date su u radu A.M.Zamorzajeva i A.F.Palistranta: "Mozaiki dlja 167 dvumernih Šubnjikovskih grup(mladših trjoh rodov)"(1961.).

Fizičke interpretacije grupa antisimetrije ornamenata tipa M^1 daju Tavger i Cochran konstatovanjem veza 46 grupa antisimetrije ornamenata tipa M^1 sa uopštenim projekcijama elektronske gustine. Interesantnu i aktuelnu temu istraživanja predstavlja nalaženje fizičkih interpretacija grupa višestruke antisimetrije ornamenata.

S obzirom da e′-antienantiomorfizam nastaje kao rezultat postojanja indirektnih antisimetrijskih transformacija(antirefleksija i klizajućih antirefleksija) u sastavu grupe antisimetrije ornamenata, za njegovo identifikovanje potrebno je uočiti navedene indirektne antisimetrije, odnosno njihove antisimetrijske tipove. Rešavanjem problema e′-antienantiomorfizma ujedno se rešava i pitanje e′-invarijantnosti, u skladu sa Teoremom 2.3.

Pojavu e′-antienantiomorfizma i e′-invarijantnosti posmatraćemo na primeru grupe $p_{1001,0011}{}^{m}{}_{0001}{}^{m}{}_{0101}$ $(ee_3X,e_2e_3Y,e_3R_1,e_1e_3R_2)$ u čiji sastav ulaze antirefleksije: $e_3R_1,e_1e_3R_2,eXR_1,e_1e_2YR_2$ i klizajuće antirefleksije: $e_2R_1Y,ee_2e_3XR_1Y,ee_1R_2X,ee_1e_2YR_2X$, te je navedena grupa antienantiomorfna tipa $e,e_2,e_3,ee_1,e_1e_2,e_1e_3,ee_1e_2,ee_2e_3$ i e′-invarijantna tipa $e_1,ee_2,ee_3,e_2e_3,ee_1e_3,e_1e_2e_3,ee_1e_2e_3$.

U istoriji ornamentalnog slikarstva antisimetrijski ornamenti predstavljaju najrasprostranjeniju i najraznovrsniju klasu antisimetrijskih motiva. Javljajući se u periodu neolita, dihromatski ornamenti zauzimaju značajno mesto u neolitskoj ornamentici(SrednjiIstok...), umetnosti drevnih civilizacija(Egipat, Egejske civilizacije...), greko-romanskoj ornamentici(Grčka, Rim, Vizantija...), posebno pri izradi podnih mozaika, mavarskoj ornamentici... U novijem periodu veći broj primera antisimetrijskih mozaika može se naći u radovima M.C.Eschera.

U pogledu hronologije vreme pojave različitih tipova antisimetrijskih ornamenata zavisiće od vremena nastanka odgovarajućih generišućih klasičnosimetrijskih ornamenata. Zastupljenost antisimetrijskih ornamenata zavisiće ne samo od zastupljenosti generišućih klasičnosimetrijskih ornamenata, već i od geometrijsko-vizuelnih karakteristika samih antisimetrijskih ornamenata, te će npr. antisimetrijski ornamenti u kojim se javljaju susedne fundamentalne oblasti iste boje biti nešto ređi. Detaljnije razmatranje uloge antisimetrijskih ornamenata u likovnoj umetnosti moguće je vršiti na osnovu radova(M.C.Escher, 1960; C.H.Macgillavry, 1976.; S.Jablan, 1981.).

Grupe antisimetrije i više-
struke antisimetrije sličnosti

Prezentacije grupa simetrije sličnosti jednostranih rozeta, koje se koriste kao generišuće grupe antisimetrije i višestruke antisimetrije sličnosti date su u radu(S. Jablan, 1981.).

Teorema 5.1. Antisimetrijska karakteristika grupe C_nK(nK), generisane rotacijom S i homotetijom K, date prezentacijom:

C_nK(nK) (S,K) S^n=E SK=KS je (S)(K)(SK) i dozvoljava svođenje na redukovani oblik (S)(K). Zamena rotacije S antirotacijom S′ dozvoljena je pod uslovom n=2k. Grupa C_nK generiše grupe antisimetrije i višestruke antisimetrije tipa M^1, M^2. Za L≥3 grupa C_nK ne generiše grupe višestruke antisimetrije tipa M^L.

Dokaz: Svi proizvodi generatora navedene grupe, formirani u skladu sa Definicijom 1.2. mogu se podeliti u tri neekvivalentne klase: rotaciju S, homotetiju K i homotetsku rotaciju SK, te je antisimetrijska karakteristika grupe C_nK (S)(K)(SK). Iz relacije (S)(K)(SK)=(S)(K) sledi mogućnost redukovanja antisimetrijske karakteristike na oblik (S)(K). U praktičnom postupku, pri generisanju grupa antisimetrije i višestruke antisimetrije, navođenje ovakve antisimetrijske karakteristike nije potrebno. U skladu sa Teoremom 1.1. grupa C_nK generiše grupe antisimetrije i višestruke antisimetrije tipa M^1, M^2. Za L≥3, u skladu sa Teoremom 1.1.b) grupa C_nK ne generiše grupe višestruke antisimetrije, pošto nije zadovoljen uslov razdvojivosti antiidentiteta. Uslov n=2k sledi iz relacije S^n=E.

Teorema 5.2. Antisimetrijska karakteristika grupe $C_nL(nL)$, generisane rotacijom S i homotetskom rotacijom L, date prezentacijom:

$C_nL(nL)$ (S,L) $S^n=E$ $SL=LS$ je $(S)(L)(SL)$ i dozvoljava svođenje na redukovani oblik $(S)(L)$. Zamena rotacije S antirotacijom S' dozvoljena je pod uslovom n=2k. Grupa C_nL generiše grupe antisimetrije i višestruke antisimetrije tipa M^1,M^2. Za $L\geq3$ grupa C_nL ne generiše grupe višestruke antisimetrije tipa M^L.

Dokaz: Svi proizvodi generatora grupe C_nL, formirani u skladu sa Definicijom 1.2. mogu se podeliti u tri neekvivalentne klase: rotaciju S, homotetsku rotaciju L i homotetsku rotaciju SL, te je antisimetrijska karakteristika grupe C_nL $(S)(L)(SL)$. Na osnovu relacije $(S)(L)(SL)=(S)(L)$ antisimetrijska karakteristika dozvoljava redukovanje na oblik $(S)(L)$. Uslov zamene rotacije S antirotacijom S', n=2k direktno sledi iz relacije $S^n=E$. Za L=1,2 grupa C_nL generiše grupe antisimetrije i višestruke antisimetrije tipa M^1, M^2, u skladu sa Teoremom 1.1., dok za $L\geq3$ grupa C_nL ne generiše grupe višestruke antisimetrije tipa M^L, pošto nije zadovoljen uslov razdvojivosti antiidentiteta.

Teorema 5.3. Antisimetrijska karakteristika grupe C_nM (nM), generisane rotacijom S i homotetskom refleksijom M, date prezentacijom:

$C_nM(nM)$ (S,M) $S^n=E$ $SMS=M$ je $(S)(\overline{M,SM})$ i dozvoljava redukovanje na oblik $(\overline{M,SM})$. Zamena rotacije S antirotacijom S' dozvoljena je pod uslovom $n=2k$. Grupa C_nM generiše grupe antisimetrije i višestruke antisimetrije tipa M^1, M^2. Za $L\geq 3$ grupa C_nM ne generiše grupe višestruke antisimetrije tipa M^L.

Dokaz: Svi proizvodi generatora grupe C_nM, formirani u skladu sa Definicijom 1.2. mogu se podeliti u dve neekvivalentne klase: rotaciju S i homotetske refleksije M,SM. S obzirom na algebarsku i geometrijsku ekvivalentnost homotetskih refleksija M i SM, antisimetrijska karakteristika grupe C_nM je $(S)(\overline{M,SM})$. Mogućnost redukovanja antisimetrijske karakteristike grupe C_nM na oblik $(\overline{M,SM})$ sledi na osnovu relacije $(S)(\overline{M,SM})=(S)(M(\overline{E,S}))=(\overline{M,SM})$, koja omogućava eliminaciju izraza (S). U skladu sa relacijom $S^n=E$ zamena rotacije S antirotacijom S' dozvoljena je pod uslovom $n=2k$. Za $L=1,2$ grupa C_nM, u skladu sa Teoremom 1.1. generiše grupe antisimetrije i višestruke antisimetrije tipa M^1, M^2. Za $L\geq 3$ grupa C_nM ne generiše grupe višestruke antisimetrije tipa M^L, u skladu sa Teoremom 1.1.b), pošto nije zadovoljen uslov razdvojivosti antiidentiteta.

Teorema 5.4 a) Antisimetrijska karakteristika grupe $D_nK(nmK)$, generisane rotacijom S, refleksijom R i homotetijom K, date prezentacijom:

$D_nK(nmK)$ $\quad(S,R,K)\quad S^n=R^2=(SR)^2=E\quad RK=KR\quad SK=KS$ je $(K)(S)(KS)(\overline{R,RS})(\overline{RK,RKS})$ i dozvoljava svođenje na redukovani oblik $(K)(\overline{R,RS})$. Zamena rotacije S antirotacijom S' dozvoljena je pod uslovom $n=2k$. Grupa D_nK generiše grupe antisimetrije i višestruke antisimetrije tipa M^1,M^2,M^3.

Za $L \geq 4$ grupa D_nK ne generiše grupe višestruke antisimetrije tipa M^L.

Teorema 5.4.b) Redukovana antisimetrijska karakteristika grupe D_nK, generisane refleksijama R, R_1 i homotetijom K, date prezentacijom:

$D_nK(nmK)$ (R,R_1,K) $R^2=R_1^2=(RR_1)^n=E$ $RK=KR$ $R_1K=KR_1$

je $(K)(\overline{R,R_1})$. Ukoliko su antirefleksije R, R_1 različitog antisimetrijskog tipa važi uslov $n=2k$. Grupa D_nK generiše grupe antisimetrije i višestruke antisimetrije tipa M^1, M^2, M^3. Za $L \geq 4$ grupa D_nK ne generiše grupe višestruke antisimetrije tipa M^L.

Dokaz: a) Svi proizvodi generatora grupe D_nK, formirani u skladu sa Definicijom 1.2. mogu se podeliti u pet neekvivalentnih klasa: homotetiju K, rotaciju S, refleksije R i RS, homotetsku rotaciju KS i homotetske refleksije RK i RKS. S obzirom na algebarsku i geometrijsku ekvivalentnost refleksija R, RS među sobom i homotetskih refleksija RK, RKS među sobom, antisimetrijska karakteristika grupe D_nK je $(K)(S)(KS)(\overline{R,RS})(\overline{RK,RKS})$. Iz relacija: $(K)(S)(KS)=(K)(S)$, $(S)(\overline{R,RS})=(S)(R(\overline{E,S}))=(\overline{R,RS})$ i $(K)(\overline{R,RS})(\overline{RK,RKS})=(K)(\overline{R,RS})(K(\overline{R,SR}))=(K)(\overline{R,RS})$ sledi mogućnost svođenja antisimetrijske karakteristike grupe D_nK na redukovani oblik $(K)(\overline{R,RS})$. Uslov zamene rotacije S antirotacijom S', $n=2k$ direktno sledi iz relacije $S^n=E$. Za $L=1,2,3$ grupa D_nK, u skladu sa Teoremom 1.1. generiše grupe antisimetrije i višestruke antisimetrije tipa M^1, M^2, M^3. Za $L \geq 4$ grupa D_nK, u skladu sa Teoremom 1.1.b) ne generiše grupe višestruke antisimetrije, pošto nije zadovoljen us-

b) Ekvivalentnost Teorema 5.4.a) i 5.4.b) sledi iz relacije $R_1=RS$. Dokaz uslova $n=2k$ u slučaju zamene refleksija R,R_1 antirefleksijama različitog antisimetrijskog tipa dat je u okviru dokaza Teoreme 2.2.a).

Teorema 5.5.a) Antisimetrijska karakteristika grupe D_nL (nmL), generisane rotacijom S, refleksijom R i homotetskom rotacijom L, date prezentacijom:

$$D_nL(nmL) \qquad (S,R,L) \qquad S^n=R^2=(SR)^2=E \quad SL=LS \quad RLR=LS$$
$$LRLR=RLRL \quad \text{je} \quad (S)(L)(SL)(\overline{R,SR})(\overline{RL,SRL}) \text{ i}$$

dozvoljava redukovanje na oblik (L)(R). Zamena rotacije S antirotacijom je zabranjena. Grupa D_nL generiše grupe antisimetrije i višestruke antisimetrije tipa M^1,M^2. Za $L\geq3$ grupa D_nL ne generiše grupe višestruke antisimetrije tipa M^L.

Teorema 5.5.b) Redukovana antisimetrijska karakteristika grupe D_nL, generisane refleksijama R,R_1 i homotetskom rotacijom L, date prezentacijom:

$$D_nL(nmL) \qquad (R,R_1,L) \qquad R^2=R_1^2=(RR_1)^2=E \quad LRLR=RLRL$$
$$LR_1LR_1=R_1LR_1L \quad R_1L=LR \quad \text{je} \quad (L)(R).$$

U grupi D_nL je dozvoljena isključivo istovremena zamena refleksija R,R_1 antirefleksijama istog antisimetrijskog tipa. Grupa D_nL generiše grupe antisimetrije i višestruke antisimetrije tipa M^1,M^2. Za $L\geq3$ grupa D_nL ne generiše grupe višestruke antisimetrije tipa M^L.

Dokaz: a) Svi proizvodi generatora grupe D_nL, formirani u skladu sa Definicijom 1.2. mogu se podeliti u pet neekvivalentnih klasa: rotaciju S, homotetsku rotaciju L, homotetsku rotaciju SL, refleksije R,SR i homotetske refleksije RL,SRL. S obzirom na algebarsku i geometrijsku ekvivalentnost refleksija R,SR među sobom i homotetskih refleksija RL,SRL među sobom, antisimetrijska karakteristika grupe D_nL je $(S)(L)(SL)(\overline{R,SR})(\overline{RL,SRL})$. Zabrana zamene rotacije S antirotacijom sledi iz relacije RLR=LS. Zahvaljujući tome, antisimetrijska karakteristika grupe D_nL svodi se na oblik (R)(L)(RL)=(R)(L), te je redukovana antisimetrijska karakteristika grupe D_nL (R)(L). U praksi, prilikom generisanja grupa antisimetrije i višestruke antisimetrije nije potrebno navođenje antisimetrijske karakteristike ovakvog tipa. Za L=1,2 grupa D_nL generiše, u skladu sa Teoremom 1.1. grupe antisimetrije i višestruke antisimetrije tipa M^1,M^2. Za $L\geq 3$ grupa D_nL ne generiše grupe višestruke antisimetrije tipa M^L, u skladu sa Teoremom 1.1.b), pošto nije zadovoljen uslov razdvojivosti antiidentiteta.

b) Ekvivalentnost Teorema 5.5.a) i 5.5.b) sledi iz relacije R_1=RS. Antisimetrijska ekvivalentnost refleksija R, R_1 je posledica relacije $R_1L=LR$.

Kompletna izvođenja i katalog grupa antisimetrije i višestruke antisimetrije sličnosti jednostranih rozeta, realizovani u skladu sa teoremama 1.1., 1.2., 1.3., 1.4., 5.1., 5.2., 5.3., 5.4., 5.5. nisu prezentirani u ovom radu zbog obimnosti dobijenih rezultata. Navedena izvođenja omogućuju, pored ostalog i uočavanje ponovljenih grupa, tj. kombinacija generatora koje dovode do istih grupa antisimetrije i višestruke antisimetrije. Sve dobijene grupe antisimetrije i višestruke antisimetrije sličnosti interpretirane su vizuelno u vidu mozaika.

Pri izvođenju grupa antisimetrije i višestruke antisimetrije sličnosti nije poštovan stav o kristalografskim ograničenjima, te je u okviru grupa dozvoljeno prisustvo rotacija proizvoljnog reda, a ne samo reda n=1,2,3,4,6.

Kao rezultat izvođenja dobijene su beskonačne klase grupa antisimetrije i višestruke antisimetrije sličnosti jednostranih rozeta, čiji je broj naveden u tabeli:

	M^1	M^2	M^3
C_nK	3	6	
C_nL	3	6	
C_nM	2	3	
D_nK	5	24	84
D_nL	3	6	
	16	45	84

Za obeležavanje grupa antisimetrije i višestruke antisimetrije sličnosti je korišćena 0-1 varijanta Šubnjikovske simbolike. Pored navedene simbolike za obeležavanje grupa antisimetrije i višestruke antisimetrije moguće je korišćenje Kopcikove višečlane simbolike. Način primene ove simbolike biće ilustrovan na primeru grupe $(2k)_{11}m_{01}m_{001}$ (ee_1S,e_1R,e_2K). Eliminacijom antiidentiteta e_2,e_1,e respektivno dobijaju se redom grupe: (ee_1S,e_1R,K),(eS,R,e_2K), (e_1S,e_1R,e_2K), kojima redom korespondiraju grupe simetrije: C_kK (S^2,K), D_kK^2 (S^2,R,K^2), D_kK (S^2,SR,K^2), te je Kopcikov višečlani simbol grupe $(2k)_{11}m_{01}m_{001}$:

$D_{2k}\bar{K}/(C_kK,D_kK^2,D_kK^2)/C_kK^2$.

Sve navedene grupe antisimetrije i višestruke antisimetrije sličnosti jednostranih rozeta mogu na osnovu izomorfizma jednostranih rozeta simetrije sličnosti i polarnih stožera(E.I. Galjarskij, A.M.Zamorzajev 1963., S. Jablan, 1981.) biti tretirane kao grupe antisimetrije i višestruke antisimetrije polarnih(orijentisanih) stožera.

Ideju simetrije sličnosti, nagoveštenu u radu(H. Weyl, 1952.) razvija u uvodnom saopštenju A.V.Šubnjikov (1960.), definišući transformacije simetrije sličnosti u E^2: homotetiju K, homotetsku rotaciju L i homotetsku refleksiju M i navodeći grupe simetrije sličnosti u E^2. Preciziranje pojma simetrije sličnosti, dokaz teoreme o invarijantnoj tački, konstatovanje izomorfizma grupa simetrije sličnosti jednostranih rozeta sa polarnim stožerima i proširenje na grupe antisimetrije i višestruke antisimetrije sličnosti dato je u radu (E.I.Galjarskij, A.M. Zamorzajev, 1963.). U ovom radu naveden je i katalog grupa antisimetrije sličnosti jednostranih rozeta tipa M^1, broj grupa višestruke antisimetrije sličnosti jednostranih rozeta tipa M^2, M^3, uz poštovanje stava o kristalografskim ograničenjima, pri čemu su navedeni brojevi grupa višestruke antisimetrije N_2 i N_3 dobijeni delimično katalogiziranjem grupa, a delimično kombinatornim metodama(za L=3). U ovom članku navedeni su i primeri mozaika grupa tipa M^2.

U radu(E.I.Galjarskij, 1967.) diskutovane su koničke (dvostrane) grupe simetrije i antisimetrije sličnosti.

Problem izvođenja koničkih grupa antisimetrije i višestruke antisimetrije rešavan je uz pomoć grupa višestruke antisimetrije sličnosti jednostranih rozeta tipa L, gde je prva antisimetrijska koordinata interpretirana kao pokazatelj položaja tačke u odnosu na invarijantnu ravan koničke grupe simetrije, a preostala L-1 antisimetrija kao dvofazna vangeometrijska svojstva. Dobijene grupe antisimetrije i višestruke antisimetrije izomorfne su sa grupama antisimetrije i višestruke antisimetrije sličnosti dvojnog konusa.

Komparaciju grupa antisimetrije i višestruke antisimetrije sličnosti jednostranih rozeta sa odgovarajućim grupama antisimetrije i višestruke antisimetrije polarnih stožera omogućavaju tabele broja grupa antisimetrije i višestruke antisimetrije stožera(A.M.Zamorzajev, 1976., str.154.) i tabela P5, katalog grupa antisimetrije stožera, dat u prilogu navedene monografije.

Grupe simetrije sličnosti i moguća uopštenja diskutovane su u monografiji(A.M.Zamorzajev, E.I Galjarskij, A.F.Palistrant, 1978.), gde je pored ostalog naveden i podatak da se najkompletnija razmatranja grupa simetrije sličnosti, antisimetrije i višestruke antisimetrije sličnosti mogu naći u disertaciji E.I.Galjarskog(1970.).

Kompletniji pregled mozaika grupa antisimetrije i višestruke antisimetrije sličnosti jednostranih rozeta tipa M^1, M^2 može se naći u radu(E.I.Galjarskij, 1976.).

Pitanje e′-antienantiomorfizma i e′-invarijantnosti rešava se registrovanjem transformacija(refleksija, homotetskih refleksija) koje ulaze u sastav grupa antisimetrije i višestruke antisimetrije sličnosti jednostranih rozeta i njihovih antisimetrijskih tipova. Posmatrajmo sa ovog stanovišta primer grupe višestruke antisimetrije sličnosti $(2k)_{11}m_{01}K_{001}$ (ee_1S, e_1R, e_2K), u čiji sastav ulaze antirefleksije: e_1R, eSR i homotetske antirefleksije: e_1e_2RK, ee_2SRK, te je navedena grupa antienantiomorfna tipa: e, e_1, ee_2, e_1e_2, dok je , u skladu sa Teoremom 2.3. e'-invarijantna tipa: e_2, ee_1, ee_1e_2.

U istoriji ornamentike najstariji primeri ornamentalnih motiva, koji asociraju na antisimetriju sličnosti, mada bez doslednog poštovanja simetrijske pravilnosti, zastupljeni su u umetnosti neolita i drevnih civilizacija. Konsekventno realizovane jednostrane rozete antisimetrije sličnosti nalazimo u ornamentici Grčke, Rima, Vizantije... Ipak, ostaje otvoreno pitanje da li je primere svih ornamenata antisimetrije sličnosti jednostranih rozeta moguće naći u starijoj ornamentici, s obzirom na relativno slabu zastupljenost ovakvih ornamenata u ornamentalnom slikarstvu.

Grupe konformne antisimetrije

i višestruke antisimetrije

u $E^2 \setminus \{0\}$

Apstraktne definicije(prezentacije) grupa konformne simetrije jednostranih rozeta u $E^2\setminus\{0\}$, koje se javljaju u svojstvu generišućih grupa konformne antisimetrije i višestruke antisimetrije jednostranih rozeta date su u radu (S.Jablan, 1981.).

Teorema 6.1. Antisimetrijska karakteristika grupe $C_nR_I(nR_I)$, generisane rotacijom S i inverzijom R_I, date prezentacijom:
$C_nR_I(nR_I)(S,R_I)$ $S^n=E$ $SR_I=R_IS$ je $(S)(R_I)(SR_I)$ i dozvoljava svođenje na redukovani oblik $(S)(R_I)$. Zamena rotacije antirotacijom dozvoljena je pod uslovom n=2k. Grupa C_nR_I generiše grupe antisimetrije i višestruke antisimetrije tipa M^1,M^2. Za $L\geq 3$ grupa C_nR_I ne generiše grupe višestruke antisimetrije tipa M^L.

Dokaz: Svi proizvodi generatora grupe C_nR_I, formirani u skladu sa Definicijom 1.2. mogu se podeliti u tri neekvivalentne klase: rotaciju S, inverziju R_I i rotacionu inverziju SR_I, te je antisimetrijska karakteristika grupe C_nR_I $(S)(R_I)(SR_I)$. Iz relacije $(S)(R_I)(SR_I)=(S)(R_I)$ sledi mogućnost redukovanja antisimetrijske karakteristike na oblik $(S)(R_I)$. U skladu sa Teoremom 1.1. grupa C_nR_I generiše grupe antisimetrije i višestruke antisimetrije tipa M^1,M^2, dok za $L\geq 3$ grupa C_nR_I ne generiše grupe višestruke antisimetrije tipa M^L, u skladu sa Teoremom 1.1.b), pošto nije zadovoljen uslov razdvojivosti antiidentiteta. Uslov zamene rotacije S antirotacijom, n=2k sledi iz relacije $S^n=E$.

Teorema 6.2. a) Antisimetrijska karakteristika grupe D_nR_I, generisane rotacijom S, refleksijom R i inverzijom R_I, date prezentacijom:

$D_nR_I(nmR_I)$ (S,R,R_I) $S^n=R^2=(SR)^2=E$ $SR_I=R_IS$ $RR_I=R_IR$ je $(S)(R_I)(SR_I)(\overline{R,SR})(\overline{RR_I,SRR_I})$ i dozvoljava svođenje na redukovani oblik $(R_I)(\overline{R,SR})$. Zamena rotacije S antirotacijom dozvoljena je pod uslovom n=2k. Grupa D_nR_I generiše grupe antisimetrije i višestruke antisimetrije tipa M^1, M^2,M^3. Za L≥4 grupa D_nR_I ne generiše grupe višestruke antisimetrije tipa M^L.

Teorema 6.2.b) Redukovana antisimetrijska karakteristika grupe $D_nR_I(nmR_I)$, generisane refleksijama R, R_1 i inverzijom R_I, date prezentacijom:

$D_nR_I(nmR_I)$ (R,R_1,R_I) $R^2=R_1^2=(RR_1)^n=E$ $RR_I=R_IR$ $R_I^2=E$ $R_1R_I=R_IR_1$ je $(R_I)(\overline{R,R_1})$. Ukoliko su refleksije R ,R_1 različitog antisimetrijskog tipa važi uslov n=2k. Grupa D_nR_I generiše grupe antisimetrije i višestruke antisimetrije tipa M^1, M^2,M^3. Za L≥4 grupa D_nR_I ne generiše grupe višestruke antisimetrije tipa M^L.

Dokaz:a) Svi proizvodi generatora grupe D_nR_I, formirani u skladu sa Definicijom 1.2. mogu se podeliti u pet neekvivalentnih klasa: rotaciju S, inverziju R_I, rotacionu inverziju SR , refleksije R,SR i inverzione refleksije RR_I, SRR_I. S obzirom na algebarsku i geometrijsku ekvivalentnost refleksija R,SR među sobom i inverzionih refleksija RR_I, SRR_I među sobom antisimetrijska karakteristika grupe D_nR_I je $(S)(R_I)(SR_I)(\overline{R,SR})(\overline{RR_I,SRR_I})$.

Mogućnost redukovanja antisimetrijske karakteristike sledi iz relacija: $(S)(R_I)(SR_I)=(S)(R_I)$, $(S)(\overline{R,SR})=(S)(R(\overline{E,S}))=(\overline{R,SR})$, $(R_I)(\overline{R,SR})(\overline{RR_I,SRR_I})=(R\ )(\overline{R,SR})(R_I(\overline{S,SR}))=(R_I)(\overline{S,SR})$, te je redukovana antisimetrijska karakteristika grupe D_nR_I $(R_I)(\overline{R,SR})$. Uslov zamene rotacije S antirotacijom, n=2k, sledi iz relacije $S^n=E$. Grupa D_nR_I generiše, u skladu sa Teoremom 1.1.grupe antisimetrije i višestruke antisimetrije tipa M^1,M^2,M^3. Za $L\geq 4$ grupa D_nR_I ne generiše grupe višestruke antisimetrije tipa M^L, u skladu sa Teoremom 1.1.b), pošto nije zadovoljen uslov razdvojivosti antiidentiteta.

b) Ekvivalentnost Teorema 6.2.a) i 6.2.b) sledi iz relacije $R_1=RS$. Dokaz uslova n=2k u slučaju zamene refleksija R,R_1 antirefleksijama različitog antisimetrijskog tipa dat je u okviru dokaza Teoreme 2.2.a).

Teorema 6.3.a) Antisimetrijska karakteristika grupe $C_nZ_I(nZ_I)$, generisane rotacijom S i inverzionom refleksijom Z_I, date prezentacijom:

$C_nZ_I(nZ_I)$ $\quad (S,Z_I)\quad S^n=Z_I^2=(SZ_I)^2=E$ $\quad$ je $\quad (S)(\overline{Z_I,SZ_I})$ i dozvoljava svođenje na redukovani oblik $(\overline{Z_I,SZ_I})$. Zamena rotacije S antirotacijom dozvoljena je pod uslovom n=2k. Grupa C_nZ_I generiše grupe antisimetrije i višestruke antisimetrije tipa M^1,M^2. Za $L\geq 3$ grupa C_nZ_I ne generiše grupe višestruke antisimetrije tipa M^L.

Teorema 6.3.b) Redukovana antisimetrijska karakteristika grupe $C_nZ_I(nZ_I)$, generisane inverzionim refleksijama Z_I,Z_I', date prezentacijom:

$C_nZ_I(nZ_I)$ (Z_I,Z_I^*) $Z_I^2=Z_I^{*2}=(Z_IZ_I^*)^n=E$ je $(\overline{Z_I,Z_I^*})$.
U slučaju zamene inverzionih refleksija Z_I,Z_I^* inverzionim antirefleksijama različitih antisimetrijskih tipova važi uslov n=2k. Grupa C_nZ_I generiše grupe antisimetrije i višestruke antisimetrije tipa M^1,M^2. Za $L\geq 3$ grupa C_nZ_I ne generiše grupe višestruke antisimetrije tipa M^L.

Dokaz: a) Svi proizvodi generatora grupe C_nZ_I, formirani u skladu sa Definicijom 1.2. mogu se podeliti u dve neekvivalentne klase: rotaciju S i inverzione refleksije Z_I,SZ_I. S obzirom na algebarsku i geometrijsku ekvivalentnost inverzionih refleksija Z_I,SZ_I, antisimetrijska karakteristika grupe C_nZ_I je $(S)(\overline{Z_I,SZ_I})$. Redukovanje antisimetrijske karakteristike na oblik $(\overline{Z_I,SZ_I})$ ostvaruje se u skladu sa relacijom $(S)(\overline{Z_I,SZ_I})=(S)(Z_I(\overline{E,S}))=(\overline{Z_I,SZ_I})$. Uslov zamene rotacije S antirotacijom, n=2k, sledi iz relacije $S^n=E$. Grupa C_nZ_I generiše, u skladu sa Teoremom 1.1. grupe antisimetrije i višestruke antisimetrije tipa M^1,M^2. Za $L\geq 3$ grupa C_nZ_I ne generiše grupe višestruke antisimetrije, s obzirom na Teoremu 1.1.b), pošto nije zadovoljen uslov razdvojivosti antiidentiteta.

b) Ekvivalentnost Teorema 6.3.a) i 6.3.b) sledi iz relacije $Z_I^*=SZ_I$. U slučaju zamene inverzionih refleksija Z_I,Z_I^* inverzionim antirefleksijama različitih antisimetrijskih tipova, iz relacije $(e'Z_IZ_I^*)^n=E$ sledi $(e')^n=E$ n=2k.

Teorema 6.4. Antisimetrijska karakteristika grupe N_I, generisane inverzionom rotacijom S_I, date prezentacijom:

N_I (S_I) $S^{2n}=E$ je (S_I). Grupa N_I generiše grupu antisimetrije tipa M^1. Za $L\geq 2$ grupa N_I ne generiše grupe višestruke antisimetrije tipa M^L.

Dokaz: U skladu sa Definicijom 1.2. antisimetrijska karakteristika grupe N_I, generisane jednim generatorom, inverzionom rotacijom S_I je (S_I). U skladu sa Teoremom 1.1. grupa N_I generiše grupu antisimetrije tipa M^1. Za $L\geq 2$ grupa N_I ne generiše grupe višestruke antisimetrije tipa M^L, s obzirom na Teoremu 1.1.b), pošto nije zadovoljen uslov razdvojivosti antiidentiteta.

Teorema 6.5. Antisimetrijska karakteristika grupe $N_ID_1(mN_I)$, generisane refleksijom R i inverzionom rotacijom S_I, date prezentacijom:

$N_ID_1(mN_I)$ (R,S_I) $S_I^{2n}=E$ $R^2=E$ $S_IR=RS_I$ je $(S_I)(R)(S_IR)$ i dozvoljava redukovanje na oblik $(S_I)(R)$. Grupa N_ID_1 generiše grupe antisimetrije i višestruke antisimetrije tipa M^1,M^2. Za $L\geq 3$ grupa N_ID_1 ne generiše grupe višestruke antisimetrije tipa M^L.

Dokaz: Svi proizvodi generatora grupe N_ID_1, formirani u skladu sa Definicijom 1.2. mogu se podeliti u tri neekvivalentne klase: refleksiju R, inverzionu rotaciju S_I i inverzionu refleksiju RS_I, te je antisimetrijska karakteristika grupe N_ID_1 $(R)(S_I)(RS_I)$. S obzirom na relaciju $(R)(S_I)(RS_I)=(R)(S_I)$, redukovana antisimetrijska karakteristika grupe $N_I D_1$ je $(R)(S_I)$. U praktičnom postupku, pri izvođenju grupa antisimetrije i višestruke antisimetrije navođenje ovakve antisimetrijske karakteristike nije potrebno. Grupa $N_I D_1$ generiše grupe antisimetrije i višestruke antisimetrije tipa M^1, M^2, u skladu sa Teoremom 1.1. Za $L \geq 3$ grupa $N_I D_1$ ne generiše grupe višestruke antisimetrije tipa M^L, u skladu sa Teoremom 1.1.b), pošto nije zadovoljen uslov razdvojivosti antiidentiteta.

Teorema 6.6. Antisimetrijska karakteristika grupe KN_I, generisane homotetijom K i inverzionom rotacijom S_I, date prezentacijom:

$KN_I \quad (K, S_I) \qquad S_I^{2n}=E \quad KS_I K=S_I$ je $(K)(\overline{S_I, KS_I})$ i dozvoljava svođenje na redukovani oblik $(\overline{S_I, KS_I})$. Grupa KN_I generiše grupe antisimetrije i višestruke antisimetrije tipa M^1, M^2. Za $L \geq 3$ grupa KN_I ne generiše grupe višestruke antisimetrije tipa M^L.

Dokaz: Svi proizvodi generatora grupe KN_I, formirani u skladu sa Definicijom 1.2. mogu se podeliti u dve neekvivalentne klase: homotetiju K i inverzione rotacije S_I, KS_I. S obzirom na algebarsku i geometrijsku ekvivalentnost inverzionih rotacija S_I, KS_I antisimetrijska karakteristika grupe KN_I je $(K)(\overline{S_I, KS_I})$. Svođenje antisimetrijske karakteristike na redukovani oblik $(\overline{S_I, KS_I})$ moguće je na osnovu relacije $(K)(\overline{S_I, KS_I})=(K)(S_I(\overline{E,K}))=(\overline{S_I, KS_I})$. Grupa KN_I generiše grupe antisimetrije i višestruke antisimetrije tipa M^1, M^2, u skladu sa Teoremom 1.1. Za $L \geq 3$ grupa KN_I ne generiše grupe višestruke antisimetrije, u skladu sa Teoremom 1.1.b), pošto nije zadovoljen uslov razdvojivosti antiidentiteta.

Teorema 6.7.: Antisimetrijska karakteristika grupe $KC_nR_I(nKR_I)$, generisane rotacijom S, homotetijom K i inverzijom R_I, date prezentacijom:

$KC_nR_I(nKR_I)$ (K,S,R_I) $S^n=R_I^2=E$ $SR_I=R_IS$ $KS=SK$ $(KR_I)^2=E$ je $(K)(S)(KS)(\overline{R_I,KR_I})(\overline{SR_I,KSR_I})$

i dozvoljava svođenje na redukovani oblik $(S)(\overline{R_I,KR_I})$. Zamena rotacije S antirotacijom dozvoljena je pod uslovom n=2k. Grupa KC_nR_I generiše grupe antisimetrije i višestruke antisimetrije tipa M^1,M^2,M^3. Za L≥4 grupa KC_nR_I ne generiše grupe višestruke antisimetrije tipa M^L.

Dokaz: Svi proizvodi generatora grupe KC_nR_I, formirani u skladu sa Definicijom 1.2. mogu se podeliti u pet neekvivalentnih klasa: homotetiju K, rotaciju S, homotetsku rotaciju KS, inverzije R_I, KR_I i inverzione rotacije SR_I, KSR_I. S obzirom na algebarsku i geometrijsku ekvivalentnost inverzija R_I,KR_I među sobom i inverzionih rotacija SR_I,KSR_I među sobom, antisimetrijska karakteristika grupe KC_nR_I je $(K)(S)(KS)(\overline{R_I,KR_I})(\overline{SR_I,KSR_I})$. Svođenje navedene antisimetrijske karakteristike na redukovani oblik $(S)(\overline{R_I,KR_I})$ ostvaruje se primenom relacija: $(K)(S)(KS)=(K)(S)$, $(K)(\overline{R_I,KR_I})=(K)(R_I(\overline{E,K}))=(\overline{R_I,KR_I})$, $(S)(\overline{R_I,KR_I})(\overline{SR_I,KSR_I})=(S)(\overline{R_I,KR_I})(S(\overline{R_I,KR_I}))=(S)(\overline{R_I,KR_I})$. Uslov zamene rotacije S antirotacijom je n=2k i sledi iz relacije $S^n=E$. Grupa KC_nR_I, u skladu sa Teoremom 1.1. generiše grupe antisimetrije i višestruke antisimetrije tipa M^1,M^2,M^3. Za L≥4 grupa KC_nR_I ne generiše grupe višestruke antisimetrije tipa M^L, u skladu sa Teoremom 1.1.b), pošto nije zadovoljen uslov razdvojivosti antiidentiteta.

Teorema 6.8. Antisimetrijska karakteristika grupe KC_nZ_I, generisane rotacijom S, homotetijom K i inverzionom refleksijom Z_I, date prezentacijom:

$$KC_nZ_I(nKZ_I) \quad (S,K,Z_I) \quad S^n=Z_I^2=(SZ_I)^2=E \quad SK=KS$$
$$(KZ_I)^2=E \quad \text{je} \quad (S)(K)(SK)(\overline{\overline{Z_I,KZ_I})(\overline{SZ_I,KSZ_I}})$$

i dozvoljava svođenje na redukovani oblik $(S)(\overline{\overline{Z_I,KZ_I})(\overline{SZ_I,KSZ_I}})$. Zamena refleksije S antirefleksijom dozvoljena je pod uslovom $n=2k$. Grupa KC_nZ_I generiše grupe antisimetrije i višestruke antisimetrije tipa M^1, M^2,M^3. Za $L\geq 4$ grupa KC_nZ_I ne generiše grupe višestruke antisimetrije tipa M^L.

Dokaz: Svi proizvodi generatora grupe KC_nZ_I, formirani u skladu sa Definicijom 1.2. mogu se podeliti na pet klasa: rotaciju S, homotetiju K, homotetsku rotaciju SK, inverzione refleksije Z_I,KZ_I i inverzione refleksije SZ_I,KSZ_I. S obzirom na algebarsku i geometrijsku ekvivalentnost inverzionih refleksija Z_I,KZ_I među sobom i inverzionih refleksija SZ_I,KSZ_I među sobom i ekvivalentnost navedenih klasa inverzionih refleksija, antisimetrijska karakteristika grupe KC_nZ_I je $(S)(K)(SK)(\overline{\overline{Z_I,KZ_I})(\overline{SZ_I,KSZ_I}})$. Zahvaljujući relacijama: $(S)(K)(SK)=(S)(K)$, $(K)(\overline{Z_I,KZ_I})=$ $=(K)(Z_I(\overline{E,K}))=(\overline{Z_I,KZ_I})$, moguće je svođenje antisimetrijske karakteristike na redukovani oblik:

$(S)(\overline{\overline{Z_I,KZ_I})(\overline{SZ_I,KSZ_I}})$.

Uslov zamene rotacije S antirotacijom je $n=2k$ i sledi iz relacije $S^n=E$. Grupa KC_nZ_I generiše grupe antisimetrije i višestruke antisimetrije tipa M^1, M^2, M^3, u skladu sa Teoremom 1.1. Za $L\geq 4$ grupa KC_nR ne generiše grupe višestruke antisimetrije tipa M^L, u skladu sa Teoremom 1.1.b), pošto nije zadovoljen uslov razdvojivosti antiidentiteta.

Teorema 6.9. Antisimetrijska karakteristika grupe $LC_nZ_I(nLZ_I)$, generisane rotacijom S, homotetskom rotacijom L i inverzionom refleksijom Z_I, date prezentacijom:

$$LC_nZ_I(nLZ_I) \quad (S,L,Z_I) \quad S^n=Z_I^2=(SZ_I)^2=E \quad SL=LS \quad (LZ_I)^2=E$$

je $(S)(L)(SL)(\overline{Z_I,LZ_I})(\overline{SZ_I,SLZ_I})$ i dozvoljava svođenje na redukovani oblik $(S)(\overline{Z_I,LZ_I})$. Zamena rotacije S antirotacijom dozvoljena je pod uslovom $n=2k$. Grupa LC_nZ_I generiše grupe antisimetrije i višestruke antisimetrije tipa M^1,M^2,M^3. Za $L\geq 4$ grupa LC_nZ_I ne generiše grupe višestruke antisimetrije tipa M^L.

Dokaz: Svi proizvodi generatora grupe LC_nZ_I, formirani u skladu sa Definicijom 1.2. mogu se podeliti u pet klasa: rotaciju S, homotetsku rotaciju L, homotetsku rotaciju SL, inverzione refleksije Z_I,LZ_I i inverzione refleksije SZ_I,SLZ_I. S obzirom na algebarsku i geometrijsku ekvivalentnost inverzionih refleksija Z_I,LZ_I među sobom i inverzionih refleksija SZ_I,SLZ_I među sobom i ekvivalentnost navedenih klasa inverzionih refleksija, antisimetrijska karakteristika grupe LC_nZ_I je: $(S)(L)(SL)(\overline{Z_I,LZ_I})(\overline{SZ_I,SLZ_I})$. Na osnovu relacija: $(S)(L)(SL)=(S)(L)$, $(L)(\overline{Z_I,LZ_I})=(L)(Z_I(\overline{E,L}))=(\overline{Z_I,LZ_I})$ moguće je svođenje antisimetrijske karakteristike na redukovani oblik: $(S)(\overline{Z_I,LZ_I})(\overline{SZ_I,SLZ_I})$.

U grupi LC_nZ_I uslov zamene rotacije S antirotacijom sledi iz relacije $S^n=E$. Grupa LC_nZ_I generiše grupe antisimetrije i višestruke antisimetrije tipa M^1,M^2,M^3, u skladu sa Teoremom 1.1., dok za $L\geq 4$ grupa LC_nZ_I ne generiše grupe višestruke antisimetrije tipa M^L, u skladu sa Teoremom 1.1.b), pošto nije zadovoljen uslov razdvojivosti antiidentiteta.

Teorema 6.10. Antisimetrijska karakteristika grupe $KN_ID_1(mKN_I)$ generisane homotetijom K, refleksijom R i inverzionom rotacijom S_I, date prezentacijom:

$$KN_ID_1(mKN_I) \quad (K,R,S_I) \quad S_I^{2n}=E \quad R^2=E \quad (RS_I)^2=E$$
$$KR=RK \quad (KS_I)^{2n}=E \quad \text{je}$$

$(K)(R)(KR)(\overline{S_I,KS_I})(\overline{RS_I,KRS_I})$ i dozvoljava svođenje na redukovani oblik $(R)(\overline{S_I,KS_I})$. Grupa KN_ID_1 generiše grupe antisimetrije i višestruke antisimetrije tipa M^1,M^2,M^3. Za $L\geq 4$ grupa KN_ID_1 ne generiše grupe višestruke antisimetrije tipa M^L.

Dokaz: Svi proizvodi generatora grupe KN_ID_1, formirani u skladu sa Definicijom 1.2. mogu se podeliti u pet neekvivalentnih klasa: homotetiju K, refleksiju R, homotetsku refleksiju KR, inverzione rotacije S_I,KS_I i inverzione refleksije RS_I,KRS_I. S obzirom na algebarsku i geometrijsku ekvivalentnost inverzionih rotacija S_I,KS_I među sobom i inverzionih refleksija RS_I,KRS_I među sobom, antisimetrijska karakteristika grupe KN_ID_1 je $(K)(R)(KR)(\overline{S_I,KS_I})(\overline{RS_I,KRS_I})$. Mogućnost svođenja antisimetrijske karakteristike na redukovani oblik $(R)(\overline{S_I,KS_I})$

sledi iz relacija: $(K)(R)(KR)=(K)(R)$, $(K)(\overline{S_I,KS_I})=$ $(K)(S_I(\overline{E,K}))=(\overline{S_I,KS_I})$, $(R)(\overline{S_I,KS_I})(\overline{RS_I,KRS_I})=$ $(R)(\overline{S_I,KS_I})(R(\overline{S_I,KS_I}))=(R)(\overline{S_I,KS_I})$. Grupa KN_ID_1 u skladu sa Teoremom 1.1. generiše grupe antisimetrije i višestruke antisimetrije tipa M^1,M^2,M^3. Za $L\geq4$ grupa KN_ID_1 ne generiše grupe višestruke antisimetrije, u skladu sa Teoremom 1.1.b), pošto nije zadovoljen uslov razdvojivosti antiidentiteta.

Teorema 6.11. Antisimetrijska karakteristika grupe MN_I , generisane homotetskom refleksijom M i inverzionom rotacijom S_I, date prezentacijom:
MN_I $(M,S\ )$ $S_I^{2n}=E$ $(MS_I)^2=E$ je $(M)(S_I)(MS_I)$ i dozvoljava svođenje na redukovani oblik $(M)(S)$. Grupa MN_I generiše grupe antisimetrije i višestruke antisimetrije tipa M^1,M^2. Za $L\geq3$ grupa MN_I ne generiše grupe višestruke antisimetrije tipa M^L.

Dokaz: Svi proizvodi generatora grupe MN_I , formirani u skladu sa Definicijom 1.2. mogu se podeliti u tri neekvivalentne klase: homotetsku refleksiju M, inverzionu rotaciju S_I i inverzionu refleksiju MS_I, te je antisimetrijska karakteristika grupe MN_I $(M)(S_I)(MS_I)=$ $(M)(S_I)$, te je redukovana antisimetrijska karakteristika $(M)(S_I)$. U praksi, prilikom izvođenja grupa antisimetrije i višestruke antisimetrije navođenje ovakve antisimetrijske karakteristike nije potrebno. Grupa MN_I, u skladu sa Teoremom 1.1. generiše grupe antisimetrije i višestruke antisimetrije tipa M^1,M^2. Za $L\geq3$ grupa MN_I ne generiše grupe višestruke antisimetrije tipa M^L, s obzirom na Teoremu 1.1.b), pošto nije zadovoljen uslov razdvojivosti antiidentiteta.

Teorema 6.12. Antisimetrijska karakteristika grupe $KD_nR_I(nmKR_I)$, generisane homotetijom K, rotacijom S, refleksijom R i inverzijom R_I, date prezentacijom:

$$KD_nR_I(nmKR_I) \quad (K,S,R,R_I) \quad S^n=R^2=(SR)^2=E \quad R_I^2=E$$
$$SR_I=R_IS \quad RR_I=R_IR \quad KR=RK \quad (KR_I)^2=E$$

je $(K)(S)(KS)(\overline{R,SR})(\overline{R_I,KR_I})(\overline{KR,KSR})(\overline{SR_I,KSR_I})$ $(\overline{RR_I,KRR_I,SRR_I,KSRR_I})$ i dozvoljava svođenje na redukovani oblik $(\overline{R,SR})(\overline{R_I,KR_I})$. Zamena rotacije S antirotacijom dozvoljena je pod uslovom n=2k. Grupa KD_nR_I generiše grupe antisimetrije i višestruke antisimetrije tipa M^1,M^2,M^3,M^4. Za $L\geq5$ grupa KD_nR_I ne generiše grupe višestruke antisimetrije tipa M^L.

Dokaz: Svi proizvodi generatora grupe KD_nR_I, formirani u skladu sa Definicijom 1.2. mogu se podeliti na osam neekvivalentnih klasa: homotetiju K, rotaciju S, homotetsku rotaciju KS, refleksije R,SR, inverzije R_I,KR_I, homotetske refleksije KR,KSR, inverzione rotacije SR ,KSR_I i inverzione refleksije RR_I, KRR_I, SRR_I, $KSRR_I$. S obzirom na algebarsku i geometrijsku ekvivalentnost homolognih transformacija unutar klasa, antisimetrijska karakteristika grupe KD_nR_I je $(K)(S)(KS)(\overline{R,SR})(\overline{R_I,KR_I})(\overline{KR,KSR})(\overline{SR_I,KSR_I})$ $(\overline{RR_I,KRR_I,SRR_I,KSRR_I})$. Zahvaljujući relacijama: $(K)(S)(KS)=(K)(S)$, $(\overline{R,SR})(\overline{R_I,KR_I})(\overline{RR_I,KRR_I,SRR_I,KSRR_I})=(\overline{R,SR})(\overline{R_I,KR_I})$, $(S)(\overline{R,SR})=(S)(R(\overline{E,S}))=(\overline{R,SR})$, $(K)(\overline{R_I,KR_I})=(K)(R_I(\overline{E,K}))=(R_I,KR_I)$, $(S)(\overline{R_I,KR_I})(\overline{SR_I,KSR_I})=(S)(\overline{R_I,KR_I})$, $(K)(\overline{R,SR})$

$(\overline{KR,KSR})=(K)(\overline{R,SR})$ moguće je svođenje antisimetrijske karakteristike na redukovani oblik $(\overline{R,SR})(\overline{R_I,KR_I})$. Uslov zamene rotacije S antirotacijom je n=2k i sledi iz relacije $S^n=E$. Grupa KD_nR_I , u skladu sa Teoremom 1.1. generiše grupe antisimetrije i višestruke antisimetrije tipa M^1,M^2,M^3,M^4. Za $L\geq 5$ grupa KD_nR_I ne generiše grupe višestruke antisimetrije tipa M^L, u skladu sa Teoremom 1.1.b), pošto nije zadovoljen uslov razdvojivosti antiidentiteta.

Teorema 6.13. Antisimetrijska karakteristika grupe

$$MC_nR_I(nMR_I) \quad (S,R_I,M) \quad S^n=R_I^2=E \quad SR_I=R_IS \quad SMS=M \quad (MR_I)^2=E$$ je

$(S)(R_I)(SR_I)(\overline{M,SM})(\overline{R_IM,R_ISM})$ i dozvoljava svođenje na redukovani oblik $(R_I)(\overline{M,SM})$. Zamena rotacije S antirotacijom dozvoljena je pod uslovom n=2k. Grupa MC_nR_I generiše grupe antisimetrije i višestruke antisimetrije tipa M^1,M^2,M^3. Za $L\geq 4$ grupa MC_nR_I ne generiše grupe višestruke antisimetrije tipa M^L.

Dokaz: Svi proizvodi generatora grupe MC_nR_I, formirani u skladu sa Definicijom 1.2. mogu se podeliti u pet neekvivalentnih klasa: rotaciju S, inverziju R_I, inverzionu rotaciju SR_I, homotetske refleksije M,SM i inverzione refleksije R_IM,R_ISM . S obzirom na algebarsku i geometrijsku ekvivalentnost homotetskih refleksija M,SM među sobom i inverzionih refleksija R_IM,R_ISM među sobom, antisimetrijska karakteristika grupe MC_nR_I je

$(S)(R_I)(SR_I)(\overline{M,SM})(\overline{R_IM,R_ISM})$. Zahvaljujući relacijama: $(S)(R_I)(SR_I)=(S)(R_I)$, $(S)(\overline{M,SM})=(S)(M(\overline{E,S}))=(\overline{M,SM})$,

$(R_I)(\overline{M,SM})(\overline{R_IM,R_ISM})=(R_I)(\overline{M,SM})$, antisimetrijska karakteristika dozvoljava svođenje na redukovani oblik $(R_I)(\overline{M,SM})$. Uslov zamene rotacije S antirotacijom je n=2k i sledi iz relacije $S^n=E$. U skladu sa Teoremom 1.1. grupa MC_nR_I generiše grupe antisimetrije i višestruke antisimetrije tipa M^1, M^2, M^3. Za L≥4 grupa MC_nR_I ne generiše grupe višestruke antisimetrije tipa M^L, u skladu sa Teoremom 1.1.b), pošto nije zadovoljen uslov razdvojivosti antiidentiteta.

Teorema 6.14. Antisimetrijska karakteristika grupe $L_{2n}C_nR_I(nLR_I)$, generisane rotacijom S, homotetskom rotacijom L i inverzijom R_I, date prezentacijom:

$$L_{2n}C_nR_I(nLR_I) \quad (S,L,R_I) \quad S^n=E \quad R_I^2=E \quad SR_I=R_IS$$
$$LS=SL \quad S=LR_ILR_I=R_ILR_IL$$

je $(S)(R_I)(SR_I)(L,SL)(LR_I,SLR_I)$ i dozvoljava redukovanje na oblik $(L)(R_I)$. Zamena rotacije S antirotacijom je zabranjena. Grupa $L_{2n}C_nR_I$ generiše grupe antisimetrije i višestruke antisimetrije tipa M^1,M^2. Za L≥3 grupa $L_{2n}C_nR_I$ ne generiše grupe višestruke antisimetrije tipa M^L.

Dokaz: Svi proizvodi generatora grupe $L_{2n}C_nR_I$, formirani u skladu sa Definicijom 1.2. mogu se podeliti u pet neekvivalentnih klasa: rotaciju S, inverziju R_I, inverzionu rotaciju SR_I, homotetske rotacije L,SL i inverzione rotacije LR_I,SLR_I. S obzirom na algebarsku i geometrijsku ekvivalentnost homotetskih rotacija L,SL među sobom i inverzionih rotacija LR_I,SLR_I među sobom, antisimetrijska karakteristika grupe $L_{2n}C_nR_I$ je $(S)(R_I)(SR_I)(\overline{L,SL})(\overline{LR_I,SLR_I})$. Zamena rotacije S antirotacijom nije dozvoljena na osnovu relacije $S=LR_ILR_I$. Pošto rotacija S ne može biti zamenjena antirotacijom, antisimetrijska karakteristika se transformiše u oblik $(L)(R_I)(LR_I)=(L)(R_I)$, te je redukovana antisimetrijska karakteristika grupe $L_{2n}C_nR_I$ $(L)(R_I)$. U praksi, pri izvođenju grupa antisimetrije i višestruke antisimetrije navođenje ovakve antisimetrijske karakteristike nije potrebno. U skladu sa Teoremom 1.1. grupa $L_{2n}C_nR_I$ generiše grupe antisimetrije i višestruke antisimetrije tipa M^1,M^2. Za $L\geq 3$ grupa $L_{2n}C_nR_I$ ne generiše grupe višestruke antisimetrije, u skladu sa Teoremom 1.1.b), pošto nije zadovoljen uslov razdvojivosti antiidentiteta.

Teorema 6.15. Antisimetrijska karakteristika grupe $L_{2n}D_nR_I(nmLR_I)$, generisane rotacijom S, homotetskom rotacijom L, refleksijom R i inverzijom R_I, date prezentacijom: $L_{2n}D_nR_I(nmLR_I)$ (S,L,R,R_I) $S^n=R^2=(SR)^2=E$ $R_I^2=E$ $SR_I=R_IS$ $RR_I=R_IR$ $LS=SL$ $LRLR=RLRL$ $LR_ILR_I=R_ILR_IL$ $RLR=LS$ je $(S)(R_I)(SR_I)(\overline{L,SL})(\overline{R,SR})(\overline{LR_I,SLR_I})(\overline{LR,SLR})(\overline{RR_I,SRR_I})$ $(\overline{LRR_I,SLRR_I})$. Zamena rotacije S antirotacijom je zabranjena. Antisimetrijska karakteristika dozvoljava redukovanje na oblik $(L)(R)(R_I)$. Grupa $L_{2n}D_nR_I$ generiše grupe antisimetrije i višestruke antisimetrije tipa M^1,M^2, M^3. Za $L\geq 4$ grupa $L_{2n}D_nR_I$ ne generiše grupe višestruke antisimetrije tipa M^L.

Dokaz: Svi proizvodi generatora grupe $L_{2n}D_nR_I$, formirani u skladu sa Definicijom 1.2. mogu se podeliti u devet neekvivalentnih klasa: rotaciju S, inverziju R_I, inverzionu rotaciju SR_I, homotetske rotacije L,SL, inverzione rotacije LR_I,SLR_I, homotetske refleksije LR,SLR, inverzione refleksije RR_I,SRR_I i inverzione refleksije LRR_I,

$SLRR_I$. S obzirom na algebarsku i geometrijsku ekvivalentnost homolognih transformacija unutar navedenih klasa, antisimetrijska karakteristika grupe $L_{2n}D_nR_I$ je: $(S)(R_I)(SR_I)(\overline{L,SL})(\overline{R,SR})(\overline{LR_I,SLR_I})(\overline{LR,SLR})(\overline{RR_I,SRR_I})$ $(\overline{LRR_I,SLRR_I})$. Zabrana zamene rotacije S antirotacijom sledi iz relacije RLR=LS. Zahvaljujući navedenoj zabrani antisimetrijska karakteristika se transformiše u oblik $(L)(R)(R_I)(LR)(LR_I)(RR_I)(LRR_I)=(L)(R)(R_I)$, te je redukovana antisimetrijska karakteristika grupe $L_{2n}D_nR_I$ $(L)(R)(R_I)$. U skladu sa Teoremom 1.1. grupa $L_{2n}D_nR_I$ generiše grupe antisimetrije i višestruke antisimetrije tipa M^1,M^2,M^3. Za $L\geq4$ grupa $L_{2n}D_nR_I$ ne generiše grupe višestruke antisimetrije tipa M^L, u skladu sa Teoremom 1.1.b), pošto nije zadovoljen uslov razdvojivosti antiidentiteta.

Kompletno izvođenje grupa konformne antisimetrije konačnih i beskonačnih jednostranih rozeta realizovano u skladu sa teoremama 1.1., 1.2., 1.3., 1.4., 6.1-15. i dobijeni katalog svih grupa konformne antisimetrije nisu prezentirani u okviru ovoga rada zbog obimnosti rezultata. Sve pomenute grupe antisimetrije tipa M^L vizuelno su prikazane u vidu mozaika. Kao rezultat izvođenja grupa antisimetrije i višestruke antisimetrije konformnih jednostranih rozeta dobijene su beskonačne klase grupa antisimetrije i višestruke antisimetrije, bez kristalografskih ograničenja, čiji je broj dat u tabeli:

	M^1	M^2	M^3	M^4
C_nR_I	3	6		
D_nR_I	5	24	84	
C_nZ_I	2	3		
N_I	1			
N_ID_1	3	6		
	14	39	84	

KN_I	2	3		
KC_nR_I	5	24	84	
KC_nZ_I	4	15	42	
LC_nZ_I	4	15	42	
KN_ID_1	5	24	84	
MN_I	3	6		
KD_nR_I	8	75	714	5040
MC_nR_I	5	24	84	
$L_{2n}C_nR_I$	3	6		
$L_{2n}D_nR_I$	7	42	168	
	46	234	1218	5040

Za obeležavanje grupa konformne antisimetrije i višestruke antisimetrije korišćena je 0-1 varijanta prilagođene Šubnjikovske simbolike. Pored navedene simbolike ili simbolike koju koriste autori kišinjovske škole, za obeležavanje grupa antisimetrije i višestruke antisimetrije konformnih jednostranih rozeta moguće je korišćenje Kopcikove višečlane simbolike. Primena ove simbolike biće ilustrovana na primeru grupe $(2k)_{011}m_{001}K_{101}R_{I_{001}}$ date skupom generatora: $(ee_2K, e_1e_2S, e_2R, e_2R_I)$. Eliminacijom antiidentiteta e_2, e_1, e respektivno dobijaju se redom grupe (eK, e_1S, R, R_I), $(ee_2K, e_2S, e_2R, e_2R_I)$, $(e_2K, e_1e_2S, e_2R, e_2R_I)$ kojima odgovaraju grupe simetrije: $K^2D_kR_I$ (K^2, S^2, R, R_I), $K^2(2k)_ID_1$ (K^2, SR, SR_I), MC_kR_I (KR, S^2, KR_I). Grupi $(2k)_{011}m_{001}K_{101}R_{I_{001}}$ odgovara grupa simetrije $K^2C_kZ_I$ (K^2, S^2, RR_I), te je višečlani simbol navedene grupe $KD_{2k}R_I/(K^2D_kR_I, K^2(2k)_ID_1, MC_kR_I)/K^2C_kZ_I$.

Grupe konformne simetrije, konformne antisimetrije i višestruke antisimetrije razmatrane su u okviru monografije(A.M.Zamorzajev, E.I.Galjarskij, A.F.Palistrant, 1979. , str.142.), gde je konstatovan izomorfizam grupa simetrije nepolarnih stožera i beskonačnih grupa konformne simetrije jednostranih rozeta. U istom radu dat je i tabelarni pregled beskonačnih grupa konformne antisimetrije jednostranih rozeta tipa M^1 (tabela P7) i konstatovan broj beskonačnih grupa konformne antisimetrije i višestruke antisimetrije.

S obzirom na postojanje izomorfizma između konačnih grupa konformne simetrije jednostranih rozeta i dvostranih rozeta i izomorfizma beskonačnih grupa konformne simetrije jednostranih rozeta i nepolarnih stožera, detaljno razmatranih u radu(S.Jablan, 1981), navedene grupe konformne antisimetrije konačnih i beskonačnih rozeta mogu se posmatrati kao grupe antisimetrije i višestruke antisimetrije dvostranih rozeta i nepolarnih stožera respektivno. Na taj način, sve grupe antisimetrije i višestruke antisimetrije stožera obuhvaćene su katalogom grupa antisimetrije i višestruke antisimetrije sličnosti i konformne antisimetrije i višestruke antisimetrije. Komparaciju dobijenih grupa antisimetrije i višestruke antisimetrije sličnosti i konformne antisimetrije i višestruke antisimetrije sa odgovarajućim grupama antisimetrije i višestruke antisimetrije dvostranih rozeta i stožera omogućavaju katalozi grupa antisimetrije i tabelarni pregledi broja grupa višestruke antisimetrije dvostranih rozeta i stožera, dati u monografiji(A.M.Zamorzajev, 1976.).

Problem e′-antienantiomorfizma i e′-invarijantnosti prenosi se i na grupe konformne antisimetrije i višestruke antisimetrije i rešava se posmatranjem pojave indirektnih transformacija i antitransformacija: refleksija, antirefleksija, homotetskih refleksija, homotetskih antirefleksija, inverzija, antiinverzija, inverzionih rotacija i inverzionih antirotacija i njihovih antisimetrijskih tipova. Razmotrimo sa ovog stanovišta primer grupe$(ee_2K, e_1e_2S, e_2R, e_2R_I)$ $(2k)_{011}m_{001}K_{101}R_{I_{001}}$, u čiji sastav ulaze antirefleksije e_1SR, e_2R, homotetske antirefleksije eKR, ee_1e_2KSR, inverzije eKR_I, e_2R_I i inverzione rotacije e_1SR_I, $ee_1e_2SKR_I$, te je navedena grupa antienantiomorfna tipa e, e_1, e_2, ee_1e_2 i e′-invarijantna tipa ee_1, ee_2, e_1e_2(u skladu sa Teoremom 2.3.).

U istoriji ornamentike primeri konformnosimetrijskih rozeta su veoma retki, te je to pogotovu slučaj sa antimetrijskim konformnim rozetama. Ipak, u novijoj ornamentici, u radovima M.C.Eschera moguće je naići na reprezentativne primere grupa konformne antisimetrije jednostranih rozeta tipa M^1.

Primene teorije grupa antisimetrije i više-struke antisimetrije u nauci i umetnosti

S obzirom na mogućnosti interpretacije antiidentiteta u smislu vangeometrijskih dvofaznih svojstava, teorija grupa antisimetrije i višestruke antisimetrije u novijem periodu stekla je raznovrsne interpretacije i primene u oblasti fizike(fizike elementarnih čestica, kvantne fizike...), hemije, kristalografije(rendgenostrukturne analize, kristalofizike, kristalomorfologije) ... Nakon prvih primena u strukturnoj kristalografiji, u radovima(W.Cochran 1952.; W.Cochran, H.B.Dyer 1952.) gde je uz korišćenje ideja B.K.Vajnštajna, M.A.Poraj-Košica i I.M.Rumanove dat opis simetrije uopštenih(uslovnih) projekcija elektronske gustine pomoću grupa antisimetrije ornamenata G_2^1, antisimetrija se bogato koristi pri analizi inverzije vektora magnetnog momenta i električnog momenta(B.A.Tavger, V.M.Zajcev, 1956.). Identifikacijom navedenih transformacija sa transformacijom antiidentiteta, B.A.Tavger vrši izdvajanje fero-, antifero- i piezo-magnetnih klasa. Analogna primena transformacije antiidentiteta u smislu inverzije električkog vektora korišćena je u analizi segneto- i antisegneto-elektrika. Dalja proširenja na grupe višestruke antisimetrije(Zamorzajevske grupe) javljaju se u radovima L.A.Šuvalova, pri razmatranju magnetoelektrične simetrije.

Područje mogućih fizičkih interpretacija antisimetrije i višestruke antisimetrije proširuje se uvođenjem grupa kolorne antisimetrije i kolorne višestruke antisimetrije(A.M.Zamorzajev, E.I.Galjarskij, A.F.Palistrant, 1978.).

S obzirom na značajne teorijske rezultate ostvarene na području teorije antisimetrije i višestruke antisimetrije, kao aktuelan problem postavlja se pred fizičare pitanje različitih interpretacija grupa antisimetrije i višestruke antisimetrije, pri čemu je svaku transformaciju antiidentiteta e_i ($i=0,1,2,..L-1$)moguće posmatrati kao fizičko dvovalentno involutivno svojstvo koje komutira sa svim ostalim geometrijskim i vangeometrijskim transformacijama.

Na planu geometrijske teorije simetrije grupe antisimetrije i višestruke antisimetrije mogu poslužiti za generisanje različitih grupa simetrije, ostvarenjem dimenzionog prelaza. Već u pionirskim radovima H.Heescha i A.V. Šubnjikova antisimetrija je korišćena za prelazak sa grupa simetrije slojeva na grupe simetrije hiperslojeva identifikacijom transformacije antiidentiteta sa hiperravanskom refleksijom, odnosno za izvođenje prostornih 0-dim. grupa u E^3(A.V.Šubnjikov) identifikacijom transformacije antiidentiteta sa inverzijom(centralnom simetrijom u E^3).

Problemi generisanja višedimenzionih grupa simetrije (prvenstveno "malih" grupa) rešavani su često primenom antisimetrije, npr. u radovima T.Romana, koji matričnom metodom generiše 179 grupa simetrije 4-dimenzionih bordura(antisimetrijskih lenti) i 528 grupa simetrije 4-dimenzionih ornamenata(antisimetrijskih slojeva).

I pored značajnih teorijskih rezultata ostvarenih u dosadašnjem razvoju, u okviru teorije antisimetrije i višestruke antisimetrije ostaje otvoren veći broj problema, vezanih prvenstveno za generisanje različitih kategorija grupa antisimetrije i višestruke antisimetrije i izgradnju metoda generisanja grupa antisimetrije i višestruke antisimetrije. Među aktuelnim problemima javljaju se: generisanje grupa antisimetrije i višestruke antisimetrije generisanih Fjodorovskim grupama, generisanje grupa antisimetrije i višestruke antisimetrije u E^n($n\geq 4$), grupa kolorne antisimetrije i višestruke antisimetrije, neeuklidskih grupa antisimetrije i višestruke antisimetrije...

Pri rešavanju većeg broja navedenih problema može se primeniti univerzalna metoda generisanja grupa antisimetrije i višestruke antisimetrije predložena i realizovana u ovom radu. Pošto je ova metoda primenljiva na sve grupe simetrije čiju apstraktnu definiciju(prezentaciju) i geometrijsku strukturu(u smislu mogućnosti određivanja antisimetrijske karakteristike) poznajemo, primene ove metode će biti ograničene isključivo domenom naših znanja iz oblasti klasične teorije simetrije.

Pitanje grupa antisimetrije i višestruke antisimetrije generisanih Fjodorovskim grupama u E^3 rešenoje u potpunosti za L=1, katalogiziranjem 1651 grupe antisimetrije (A.M.Zamorzajev, 1953., 1976.). Za L=2 izvršena su različita izračunavanja broja grupa tipa M^2, čiji se rezultati razlikuju, pri čemu najtačnijim, konačnim rezultatom možemo smatrati broj grupa tipa M^2, N_2=9511. Tačnost rezultata

$N_2=9511$($N_1=1191$) moguće bi bilo komparativno proveriti primenom metode predložene u ovom radu. Za realizaciju ovog istraživanja bilo bi potrebno dati prezentacije 230 Fjodorovskih grupa i odrediti njihove antisimetrijske karakteristike. Rešenje ovog problema za L=2 ujedno bi bilo osnov za rešenje opšteg problema generisanja svih prostrornih grupa antisimetrije i višestruke antisimetrije u E^3 sastavljanjem kataloga grupa. S obzirom na obimnost izvođenja od interesa bi bilo adaptiranje ove metode za primenu na računarima.

U cilju testiranja efikasnosti predložene univerzalne metode za izvođenje prostornih grupa antisimetrije i višestruke antisimetrije, izvedene su sve grupe antisimetrije i višestruke antisimetrije generisane Fjodorovskom grupom P2, datom prezentacijom:

$$P2 \quad (X,Y,Z,T) \quad XY=YX \quad XZ=ZX \quad YZ=ZY \quad TZ=ZT$$
$$T^2=(TX)^2=(TY)^2=E$$

čija je antisimetrijska karakteristika $(Z)(\overline{T,TX,TY,TXY})$, pri čemu je sastavljen katalog svih grupa antisimetrije i višestruke antisimetrije generisanih grupom P2 i dobijeni rezultati: $N_1(P_1)=5$, $N_2(P2)=28$, $N_3(P2)=168$, $N_4(P2)=$ $=840$. Za $L\geq 5$ grupa P2 ne generiše grupe višestruke antisimetrije tipa M^L.

Kao uslov za generisanje grupa antisimetrije i višestruke antisimetrije u E^n($n\geq 4$) javlja se određivanje i katalogizacija svih klasičnosimetrijskih grupa simetrije u E^n. Izuzev "malih" grupa, čije je izvođenje ostvareno primenom grupa antisimetrije i višestruke antisimetrije prostora E^2 i E^3, generisanje Fjodorovskih grupa u E^4 je još uvek aktuelan problem, zastupljen u radovima(T.S. Kuncevič, N.V.Bjelov 1971., H.Wondratschek, R.Bülow, J. Neubüsier 1971., H.Brown 1976.), pri čemu su grupe antisimetrije i višestruke antisimetrije u E^3 odigrale značajnu ulogu pri izvođenju pojedinih klasa grupa u E^4. Problematika grupa simetrije u E^n($n \geq 5$) predstavlja potpuno otvoreno područje proučavanja.

Pošto su apstraktne definicije i geometrijska struktura grupa simetrije sferne ravni i Rimanske ravni poznate (H.S.M.Coxeter, W.O.J.Moser 1972., W.Magnus 1974.), generisanje odgovarajućih grupa antisimetrije i višestruke antisimetrije moguće je realizovati u skladu sa metodom predloženom u ovom radu, nakon određivanja antisimetrijskih karakteristika navedenih grupa simetrije.

U slučaju hiperboličkih grupa simetrije, problem grupa antisimetrije i višestruke antisimetrije moguće je rešiti samo parcijalno, pošto su u dosadašnjim radovima(H.S. M.Coxeter, W.O.J.Moser, 1972.; W.Magnus 1974.) date samo prezentacije nekoliko beskonačnih klasa grupa simetrije hiperboličke ravni(npr. grupa koje odgovaraju regularnim tesalacijama $[p,q]$ generisanim refleksijama, rotacionih podgrupa indeksa 2 $[p,q]^+$, i sl.).Od interesa za dobijanje novih grupa simetrije hiperboličke ravni bilo bi određivanje grupa antisimetrije i višestruke antisimetrije generisanih već poznatim klasama grupa simetrije hiperboličke ravni, pošto bi ovo ujedno omogućilo određivanje podgrupa indeksa oblika 2^n navedenih grupa simetrije, odnosno generisanje nekih novih klasa grupa simetrije hiperboličke ravni.

Teorija kolorne simetrije, kolorne antisimetrije i kolorne višestruke antisimetrije, čiji su rezultati najdetaljnije prezentirani u monografiji(A.M.Zamorzajev, E.I. Galjarskij, A.F.Palistrant 1978.) nailazi na srodne probleme, pretežno vezane za izvođenje i katalogizaciju grupa. Pored izvođenja grupa kolorne antisimetrije i kolorne višestruke antisimetrije iz grupa kolorne simetrije, koja je moguće ostvariti predloženom univerzalnom metodom za generisanje grupa antisimetrije i višestruke antisimetrije, od interesa je i uopštenje, adaptacija navedene metode za izvođenje grupa kolorne simetrije i P-simetrije.

Problematika graničnih(neprekidnih, Kirijevskih) grupa antisimetrije i višestruke antisimetrije u E^2 i $E^2\setminus\{0\}$, samo dotaknuta u ovom radu, predstavlja bogato područje proučavanja, pogotovu u slučaju graničnih grupa antisimetrije i višestruke antisimetrije sličnosti i konformne antisimetrije i višestruke antisimetrije, s obzirom da će dobijene grupe biti izomorfne sa graničnim grupama antisimetrije i višestruke antisimetrije polarnih i nepolarnih stožera.

Pojam enantiomorfizma, "leve" i "desne" orijentacije proširen je u ovom radu uvođenjem pojma višestrukog enantiomorfizma(e'-antienantiomorfizma) i e'-invarijantnosti (Definicije 2.1., 2.2. i Teorema 2.3.). Pored teorijskih osnova koje pružaju pomenute definicije i teorema, naznačen je i efektivni postupak za određivanje tipa e′- antienantiomorfizma i e′-invarijantnosti, koji se svodi na registrovanje antisimetrijskih tipova svih indirektnih transformacija koje ulaze u sastav grupa antisimetrije i višestruke antisimetrije.

Mozaici grupa antisimetrije i višestruke antisimetrije, kao njihovi vizuelni modeli, omogućavaju očigledno registrovanje transformacija koje ulaze u sastav grupa antisimetrije i višestruke antisimetrije, elemenata simetrije, antisimetrije i višestruke antisimetrije i uočavanje simetrijskih i antisimetrijskih podstruktura(podgrupa) date grupe antisimetrije ili višestruke antisimetrije. Ideja numeričkog označavanja antiidentiteta i njihovih kompozicija, prevođenjem oznaka iz dualnog u desetični brojni sistem u mnogome olakšava izradu antisimetrijskih mozaika, bez većih gubitaka na planu očiglednosti.

U istoriji ornamentalnog slikarstva veći broj grupa antisimetrije(npr. antisimetrijske rozete, bordure i ornamenti) javlja se prvi put u umetnosti neolita, sa pojavom dihromne keramike. U prilogu rada dati su primeri antisimetrijskih bordurnih motiva koji se javljaju u umetnosti, pretežno uzeti iz drevnije ornamentike. Analogne primere grupa antisimetrije rozeta, ornamenata i grupa simetrije sličnosti moguće je naći u starijoj ornamentici, dok se primeri konformne antisimetrije mogu gotovo isključivo naći u umetnosti najnovijeg perioda.

Grupe višestruke antisimetrije, pored mozaičkih interpretacija(mozaičkih modela), zasnovanih na numeričkom označavanju mogu biti vizuelno modelovane na više načina. Jedan od mogućih načina modelovanja grupa višestruke antisimetrije tipa M^3, bio bi njihovo prikazivanje pomoću boja. Kao osnova za ovakav postupak bile bi korišćene osnovne boje(žuta, crvena, plava), koje zadovoljavaju uslove nezavisnosti i komutiranja, u skladu sa sledećom (prirodnom) interpretacijom:

0- crna	4- plava
1- žuta	5- zelena
2- crvena	6- ljubičasta
3- narandžasta	7- bela

uz uvođenje konvencije po kojoj bi dvokratno bojenje istom bojom dovodilo do eliminacije te boje.

Predloženo rešenje samo je jedna od mogućnosti za istraživanje vizuelnih interpretacija grupa antisimetrije i višestruke antisimetrije, koja je moguće vršiti na planu programiranog dizajna, pri čemu antisimetrijski mozaici mogu poslužiti kao osnov za ovakva proučavanja.

Literatura

I.D.Akopjan: Simetrija i asimetrija v poznanjiji, Erevan, 1980.

E.Alexander, K.Herrmann: Die 80 zveidimensionalen Raumgruppen, Z.Krist. 70 1929. 328-345.

E.Ascher. A,Janner: Subgroups of black-white point groups, Acta cryst. 18 1965. 325-330.

S.Bagavantam, T.Venkatarajudu: Teorija grup i jejo primenjenjije k fizičeskim problemam, Moskva, 1959.

N.V.Bjelov: Ob odnomernih beskonečnih kristalografičeskih grupah, Krist. 1 4 1956. 474-476.

Trjohmernije mozaiki s cvetnoj simetrijej, Krist. 1 6 1956. 621-625.

N.V.Bjelov, E.N.Bjelova: Mozaiki dlja 46 ploskih (šubnjikovskih) grup antisimetriji i dlja 15 (fjodorovskih) cvetnih grup, Krist. 2 1 1957. 21-22.

N.V.Bjelov, N.N.Neronova, T.S.Kuncevič: Kristalostrukturnije ilustraciji k šubnjikovskim grupam simetriji, Krist. 9 2 1964. 147-154.

Šubnjikovskije grupi (antisimetriji) dlja beskonečnih dvustoronih ljent, Krist. 7 5 1962. 805-808.

N.V.Bjelov, N.N.Neronova, T.S.Smirnova: 1651 Šubnjikovska grupa, Tr.Inst. krist. AN SSSR, vip. 2. 1955. 33-67.

N.V.Bjelov, T.N.Tarhova: Grupi cvetnoj simetriji, Krist. 1 1 1956. 4-13., Krist. 1 5 1956. 615.

O grupah cvetnoj simetriji, Krist. 1 6 1956. 619-620.

A.Bravais: Memoire sur les polyedres de forme symmetrique, J. de Math. 14 1849. 141.

Etudes cristallographiques, Paris 1866.

H.Brown: A note on two papers by Kuntsevich and Belov, Acta cryst. A 32 2 1976. 348-349.

A.Cayley: The theory of groups graphical representations, Amer. J. Math. 1 1878. 174-176.

W.Cochran: The symmetry of real periodic two-dimensional fonctions, Acta cryst. 5 1952. 630-633.

W.Cochran, B.Dyer: Some practical applications of generalized crystal-structure projections, Acta cryst. 5 1952. 634-636.

Y.Le Core: Les groupes de symetrie bicolore et leurs applications, Bul. Soc. franç. Miner. Crist. 81 1958. 120-125.

H.S.M.Coxeter: Introduction to Geometry, New York 1961.

Regular Polytopes, New York, 1963.

H.S.M.Coxeter, W.O.J.Moser: Generators and Relations for Discrete Groups, Berlin, Heidelberg, New York 1972.

M.Dehn: Über die Topologie des dreidimensionalen Raumes, Math. Ann. 69 1910 137-168.

N.V.Efimov: Viššaja geometrija, Moskva 1961.

M.C.Escher: Antisymmetrical arrangements in the plane and regular three-dimensional bodies as sources of inspiration to an artist, Acta cryst. 13 1960. 1083.

R.Fejnman, R. Lejton, S.Sends: Fejnmemovskije ljekciji po fizike, Moskva 1965.

E.S.Fjodorov: Simetrija i struktura kristalov, Petersburg, 1890.

E.I.Galjarskij: Grupi simetriji podobija i ih obopščenjija, Avtoref. kand. dis., Kišinjov 1970.

Koničeskije grupi simetriji i razljičnava roda antisimetriji podobija, Krist. 12 2 1967. 202-207.

Mozaiki dlja dvumernih grup simetriji i antisimetriji podobija, Isled. po diskr. geom. , Kišinjov 1974., 49 -63.

E.I.Galjarskij, A.M.Zamorzajev: O grupah simetriji i antisimetriji podobija, Krist. 8 5 1963. 691- 698.

Polnij vivod kristalografičeskih grup simetriji i razljičnava roda antisimetriji steržnjej, Krist. 10 2 1965. 147-154.

Svodka točečnih grup simetriji i razljičnava roda antisimetriji, Krist. 8 1 1963. 94-101.

H.Heesch: Über die vierdimenziomalen Gruppen der dreidimenzionalen Raumes, Z.Krist. 73 1930. 325-345.

Zur Strukturtheorie de ebenen Symmetriegruppen, Z.Krist. 71 1929. 95-102.

N.F.M.Henry, K.Lonsdale: International Tables for X-ray Crystalography, Birmingham 1952.

C.Hermann: Ketten- und Netzgruppen, Z.Krist. 69 1929. 250-270.

J.F.Ch.Hessel: Krystallsymmetrie oder Krystallonomie und Krystallographie, Leipzig 1830.

D.Hilbert, S.Kon-fosen: Naglkadnaja geometrija, Moskva 1951.

M.Holl: Teorija grup, Moskva 1962.

W.T.Holser: Clasification of Symmetry Groups, Acta cryst. 14 1961. 1236-1242.

V.L.Idenbom: Svjaz grup antisimetriji i cvetnoj simetriji sa odnomernimi predstavljenjijami običnih grup simetriji. Izomorfizam šubnjikovskih i fjodorovskih grup, Krist. 4 4 1959. 619-621.

Isljedovanjija po savremenoj algebri i geometriji, Kišinjov, 1983.

S.Jablan: Teorija simetrije i primenjeno slikarstvo, Beograd 1981.

Teorija simetrije i vizuelne umetnosti, Istraživač 3-4 1981 103-124.

C.Jordan: Memoire sur les groupes de mouvements, Ann. di Matem.,ser. IIa 1968. 1869.

K 80-ljetiju sa dnja roždenjija A.V.Šubnjikova, Krist. 12 2 1967. 180-185.

V.A.Kopcik: Očerk razvitija teoriji simetriji i jejo priloženjij v fizičèskoj kristalografiji za 50 ljet, Krist. 12 5 1967. 755-774.

Šubnjikovskije grupi, Moskva 1966.

T.S.Kuncevič, N.V.Bjelov: Četirjohmernije prostranstvenije grupi simetriji nizših sistem I, Krist. 16 1 1971. 5-17.

Četirjohmernije prostranstvenije grupi simetriji nizših sistem II, Krist. 16 2 1971. 268-272.

Četirjohmernije rešetki Brave, Krist. 15 2 1970. 215-229.

A.G.Kuroš: Teorija grup, Moskva 1967.

L.D.Landau, E.M.Lifšic: Statističeskaja fizika, Moskva 1951.

E.H.Lockwood, Macmilan : Geometric Symmetry, New York

A.Loeb: Color and Symmetry, New York 1971.

V.N.Ljubimov: K vivodu grup simetriji i antisimetriji, Krist. 12 2 1967. 348-349.

C.H.Macgillavry: Fantasy and Symmetry, The Periodic Drawings of M.C.Escher, New York 1972.

A.L.Mackay: Extensions of space group theory, Acta cryst. 10 1957. 543-548.

W.Magnus: Noneuclidean Tesalations and Their Groups, New York, London 1974.

V.Magnus, A.Karras, D.Soliter: Kombinatornaja teorija grup, Moskva 1966.

N.N.Neronova: Klasifikacionije principi dlja grup simetriji i razljičnava roda antisimetriji I Shema kristalografičeskih grup simetriji i razljičnava roda antisimetriji, Krist. 11 4 1966. 495-504.

N.N.Neronova, N.V.Bjelov: Cvetnije antisimetričeskije mozaiki, Krist. 6 6 1961. 831-839.

Edinaja shema kristalografičeskih grup simetriji klasičeskih i čorno-belih, Krist. 6 1 1961. 3-12.

J.Neubüsier, H.Wondratschek, R.Bülow: On Crystalography on Higer Dimensions, I General Definitions, Acta cryst. A 27 1971. 517-520.

J.Nicille: La symmetrie dans la nature et les travaux des hommes, Paris 1955.

P.Niggli: Die Flächensymmetrien homogener Diskontinuen, Zeit. Krist. 60 1924. 283.

A.Niggli: Zur Systematyik und gruppentheoretischen Ableitung der Symmetrie, Antisymmetrie und Entartungs Symmetriegruppen, Z.Krist. III 1959. 288-300.

W.Novacki: Überblich über "zweifarbige" Symmetriegruppen, Fortschr. Mineral. 38 1960. 96-107.

Obščaja algebra i diskretnaja geometrija, Kišinjov 1980.

A.Pabst: The 179 two-sided, two-colored band groups and their relations, Z.Krist. 117 1962. 128-134.

A,F.Palistrant: Cvetnaja simetrija i razljičnava roda antisimetrija bordurov i ljent, Krist. 17 6 1972. 1096-1102.

Dvumernije grupi cvetnoj simetriji i razljičnava roda antisimetriji, Krist. 11 5 1966. 707-713.

Grupi cvetnoj simetriji i razljičnava roda antisimetriji slojev, Krist. 12 2 1967. 194-201.

Grupi simetriji i razljičnava roda antisimetriji slojev, Krist. 8 5 1963. 783-785.

Ploskosnije i prostranstvenije grupi simetriji i obopščenoj antisimetriji i priloženjija, Avtoref. kand. dis., Kišinjov 1967.

Ploskosnije točečnije grupi cvetnih simetriji i razljičnava roda antisimetriji, Krist. 13 6 1968. 955-959.

Ploskosnije točečnije grupi simetriji i razljičnava roda antisimetriji, Krist. 10 1 1965. 3-9.

A.F.Palistrant, A.M.Zamorzajev: Grupi simetriji i razljičnava roda antisimetriji bordurov i ljent, Krist. 9 2 1964. 155-161.

O grupah simetriji i antisimetriji slojev, Krist 8 2 1963. 166-173.

G.S.Poli: Mozaiki dlja grup cvetnoj antisimetriji, Krist. 6 1 1961. 109-111.

G.Polya: Über die Analogie der Krystallsymmetrie in der Ebene, Z.Krist. 60 1924. 278.

T.Roman: Les colonnes cylindriques unicolores, Z.Krist. 128 1969 300-314.

Les colonnes cylindriques transparentes (uni et bicolores),Acta cryst. A27 1971. 323-331.

Simetrija 4-mernih bordurnih ornamentov, DAN SSSR 128 6 1959. 1122-1124.

A.Schönflies: Kristallsysteme und Kristallstruktur, Leipzig 1891.

L.Sohncke: Entwicklung einer Theorie der Kristallstruktur, Leipzig 1894.

A.Speiser: Theorie der Gruppen von endlicher Ordnung, Berlin 1927.

I.I.Šafranovskij,V.A.Pismenij: Obopščenije formi dvojnikovih obrazovanjij, Krist. 6 1 1961. 31-42.

A.V.Shubnikow, N.V.Belov and others: Colored Symmetry, Oxford, London, NewYork, Paris 1964.

A.V.Šubnjikov: Antisimetrija tekstur, Krist. 3 3 1958. 263-268. , 4 2 1959. 276.

Atlas kristalografičeskih grup simetriji, Moskva, Lenjingrad 1946.

Čorno-belije grupi beskonječnih ljent, Krist. 7 2 1962. 186-191.

Grupi (klasi) simetriji i antisimetriji konečnih ljent, Krist. 7 1 1962. 3-6.

O nepolnote "Edinoj shemi kristalografičeskih grup", Krist. 8 1 1963. 131-132.

Polnaja sistematika točečnih čorno-belih grup, Krist. 6 4 1961. 490-495.

Polnaja sistematika točečnih grup simetriji, Krist. 4 3 1959. 286-288.

Simetrija, Moskva 1940.

Simetrija i antisimetrija konečnih figur, Moskva 1951.

Simetrija i antisimetrija steržnjej i semikontinuumov sa glavnoj osju beskonječnava porjadka i konečnimi perenosami vdolj njejo, Krist. 4 3 1959. 279-285.

Simetrija podobija, Krist. 5 4 1960. 489-496.

Tridcat dve kristalografičeskije grupi saderžaščije toljko povoroti i antipovoroti, Krist. 10 6 1965. 775-778.

Über die Symetrie des Semikontinuums, Z.Krist. 73 3-4. 430-433.

Simetrija v nauke i iskustve, Moskva 1972.(1951.)

L.A.Šuvalov: Antisimetrija i jejo konkretnije modifikaciji, Krist. 7 4 1962. 520-525.

B.A.Tavger: Simetrija feromagnetikov i antiferomagnetikov, Krist. 3 3 1958. 339-341.

B.A.Tavger, V.M.Zajcev: O magnitnoj simetriji kristalov, Ž. ETF 30 3 1956 564-568.

L.Weber: Die Symmetrie homogener ebener Punktsysteme, Z.Krist. 70 1929. 309-327.

H.Weyl: Symmetry, Princeton 1952.

H.Wondratschek, R.Bülow, J.Neubüsier: On Crystalography in higer dimensions, II Procedure of Computation in R_4, Acta cryst. A27 1971. 520-523.

On Crystalography in higer dimensions, III Results in R_4., Acta cryst. A27 6 1971. 523-535.

H.J.Woods: The geometrical basis of pattern design, J. Text.inst. 26 197 1935.293.

A.M.Zamorzajev: O 1651 Šubnjikovskoj grupe, Krist. 7 6 1962. 813-821.

O grupah kvazisimetriji(P-simetriji), Krist. 12 5 1967. 819-825.

O grupah simetriji i razljičnava roda antisimetriji, Krist. 8 3 1963. 307-312.

Obopščenjije Fjodorovskih grup, Avtoref. kand. dis., Lenjingrad 1953.

Teorija antisimetriji i jejo razljičnije obopščenjija, Avtoref. dokt. dis., Moskva 1971.

Teorija prostoj i kratnoj antisimetriji, Kišinjov 1976.

A.M.Zamorzajev,E.I.Galjarskij, A.F.Palistrant: Cvetnaja simetrija, jejo obopščenjija i priloženjija, Kišinjov 1978.

A.M.Zamorzajev, A.F.Palistrant: Dvumernije šubnjikovskije grupi, Krist. 5 4 1960. 517-524.

Mozaiki dlja 167 dvumernih šubnjikovskih grup(mladših trjoh rodov), Krist. 6 2 1961. 163-176.

A.M.Zamorzajev, E.I.Sokolov: Simetrija i razljičnava roda antisimetrija konječnih figur, Krist. 2 1 1957. 9-14.