Univerzitet u Beogradu
Prirodno-matematički fakultet

Slobodanka Janjić

PRILOG TEORIJI SUMIRANJA I MAKSIMUMA SLUČAJNOG BROJA SLUČAJNIH PROMENLJIVIH

doktorska disertacija

Beograd, 1985.

Sadržaj

strana

PREDGOVOR

Sumiranje slučajnih promenljivih je klasična problematika u teoriji verovatnoće. Jedan od pravaca u kojem se ta teorija razvija danas jeste slučajno sumiranje, gde se ispituju sume slučajnog broja slučajnih promenljivih i otkrivaju se zakonitosti koje takve sume zadovoljavaju. Do potrebe za izučavanjem suma slučajnog broja slučajnih promenljivih doveli su problemi teorije pouzdanosti, teorije masovnog opsluživanja, fizike i tako dalje, koji su se svodili na izučavanje pomenutih slučajnih suma. U teoriji slučajnog sumiranja pojavio se nov tip teoreme - takozvana teorema prenosa. Teorema prenosa je granična teorema koja daje uslove pod kojima obična konvergencija suma slučajnih promenljivih povlači konvergenciju suma slučajnog broja slučajnih promenljivih.

Slično kao i kod teorije sumiranja, prirodno se pojavio problem da se ispita granično ponašanje za maksimume nizova slučajnog broja slučajnih promenljivih. Na taj način se došlo do teoreme prenosa za maksimume, koja ja analogna teoremi prenosa za sume, samo se u iskazu teoreme, umesto suma pominju maksimumi, a umesto karakterističnih funkcija - funkcije raspodele.

Ovaj rad ima četiri glave : prva i druga glava se odnose na sume, a treća i četvrta na maksimume slučajnog broja slučajnih promenljivih. Teoreme autora označavane su brojevima (na primer : TEOREMA 3.2.1. je prva teorema u drugom paragrafu treće glave), a ostale teoreme nemaju oznakâ.

Prva glava ima tri paragrafa. U prvom paragrafu dat je kratak istorijat teorije sumiranja i neki osnovni pojmovi i teoreme. U drugom paragrafu dokazana je teorema prenosa (Teorema 1.2.1.) za opšti slučaj sumiranja kada sabirci ne moraju biti jednako raspodeljeni. Osim toga , pokazano je primerom da pod nekim slabijim uslovima pomenuta teorema ne važi. U trećem paragrafu dokazane su teoreme prenosa (Teoreme 1.3.1. i 1.3.2.) koje se odnose na tzv. normirane sume.

Druga glava sastoji se iz tri paragrafa. U prvom paragrafu (Teorema 2.1.1.) data je karakterizacija raspodelâ koje su stabilne u odnosu na operaciju razredjivanja sa verovatnoćom p. U drugom paragrafu okarakterisana je (Teorema 2.2.1.) klasa K svih raspodela pozitivnih slučajnih veličina za koje važi da se funkcija raspodele sume slučajnog broja nezavisnih i jednako raspodeljenih slučajnih promenljivih razlikuje samo u normirajućem faktoru od funkcije raspodele jedne slučajne promenljive iz te sume. U trećem paragrafu Teoremom 2.3.1. data je jedna karakterizacija raspodele degenerisane u nuli.

Treća glava ima pet paragrafa, a prvi paragraf je uvodni. U drugom paragrafu dokazani su obrati teoreme prenosa za maksimume (Teoreme 3.2.1. i 3.2.2.). Treći, četvrti i peti paragraf posvećeni su pitanju jedinstvenosti graničnog rešenja u teoremi prenosa za maksimume, koje je poteklo iz pitanja konvergencije ka ekstremalnim raspodelama u teoremi prenosa za maksimume. Pokazano je da jedinstvenost ne mora da postoji, a Teoremama 3.3.1. i 3.5.1. su opisani skupovi rešenja koji postoje kod teoreme prenosa za maksimume. Četvrti paragraf sadrži neke pomoćne rezultate koji se odnose na kompletno monotone funkcije.

Najzad, u četvrtoj glavi se daje karakterizacija tri tipa raspodela (Teoreme 4.2.1. i 4.3.1.), koje se pojavljuju kao granične u teoremi prenosa za maksimume i povezane su sa raspodelama ekstremalnog tipa - jedna od tih raspodela je logistička raspodela.

Uopšte, može se reći da izmedju karakterističnih funkcija i funkcija raspodele, prilikom sumiranja nezavisnih slučajnih promenljivih, odnosno prilikom formiranja maksimuma nezavisnih slučajnih promenljivih - postoji u izvesnom smislu dualnost. Preciznije, prilikom sumiranja slučajnih promenljivih odgovarajuće karakteristične funkcije se množe, a kod operacije maksimuma množe se odgovarajuće funkcije raspodele. S obzirom na to, mogli bi se , po analogiji sa rezultatima za sume, očekivati odgovarajući rezultati i za maksimume. Takvo očekivanje potkrepljuju i poznate teoreme prenosa za sume i maksimume nezavisnih slučajnih promenljivih. Medjutim, analogija izmedju suma i maksimuma ne ide mnogo daleko. Problemi čija se rešenja za sume razlikuju od rešenja za maksimume dati su u glavama 2 i 4, gde isto karakteristično svojstvo, kada su u pitanju sume, dovodi do raspodele degenerisane u nuli, a kada su u pitanju maksimumi, to svojstvo karakteriše nedegenerisani tip raspodele. Slično, u trećoj glavi (paragraf 3) je pokazano da jedinstvenost rešenja ispitivane jednačine, koja, kao što je poznato, važi za sume, ne važi i za maksimume.

Rezultati iz paragrafa 2.1.,2.2. i 3.2. objavljeni su u radovima [17], [21] i [28].

Za sve slučajne promenljive koje se pominju u radu, pretpostavlja se, ukoliko nije drugačije naglašeno, da nisu usretsredjene u jednoj tački i da ne odlaze u beskonačnost.

Problem da se formuliše i dokaže teorema prenosa za sume nezavisnih i ne obavezno jednako raspodeljenih slučajnih promenljivih postavio je profesor Boris Vladimirovič Gnedenko. Paragrafi 1.2. i 1.3. predstavljaju jedan od mogućih odgovora na taj problem. B.V.Gnedenko je postavio i probleme karakterizacije raspodela i obrata teorema prenosa, čija su rešenja data u paragrafima 2.1. i 3.1., a takodje i pitanje jedinstvenosti graničnog rešenja u teoremi prenosa za maksimume, pri uslovu da je granična raspodela dvostruka eksponencijalna. Odgovor na taj problem dat je u paragrafima 3.3., 3.4. i 3.5.

Ovde bih htela da se zahvalim profesoru Borisu Vladimiroviču Gnedenku za postavku pomenutih problema, koji čine osnovu ove disertacije, i za njegovu svesrdnu podršku za vreme mog boravka na specijalizaciji u Moskvi.

Zahvaljujem se takodje mome mentoru profesoru Stevanu Stojanoviću za njegovo interesovanje i podršku u toku izrade ove disertacije.

1. SUMIRANJE NEZAVISNIH SLUČAJNIH PROMENLJIVIH

1.1. OSNOVNI POJMOVI I TEOREME KLASIČNE TEORIJE

Objekat istraživanja u klasičnoj teoriji sumiranja nezavisnih slučajnih promenljivih su nizovi suma neograničeno rastućeg broja nezavisnih slučajnih promenljivih.

Teorija sumiranja nezavisnih slučajnih promenljivih počinje krajem osamnaestog i početkom devetnaestog veka sa Moivreom i Laplaceom. Nju su zatim razvijali Čebišov, Markov, Ljapunov, Lindeberg. Smatra se da su završne rezultate u klasičnoj teoriji sumiranja dali P.Levy, W.Feller, A.J.Hinčin, A.N.Kolmogorov i B.V.Gnedenko.

Najopštiji problem koji ta teorija razmatra je sledeći : neka su

$$
\begin{array}{l}
X_{11}, X_{12}, \ldots, X_{1k_1} \\
X_{21}, X_{22}, \ldots, X_{2k_2} \\
\ldots \\
X_{n1}, X_{n2}, \ldots, X_{nk_n} \\
\ldots
\end{array}
$$

nizovi slučajnih promenljivih, nezavisnih po vrstama, i neka za niz k_n važi da $k_n \to \infty$ kad $n \to \infty$. Postavlja se problem da se nadju sve granične raspodele za sume

$$\sum_{k=1}^{k_n} X_{nk} \tag{1}$$

kad $n \to \infty$. Rešavajući problem kakve raspodele mogu da budu granične za sume (1), klasična teorija dolazi do zaključka da, pošto je postavljen suviše opšte, problem je trivijalan (Hinčin [20]), zato što u tom slučaju svaka raspodela može da bude granična, što pokazuje sledeći primer : ako je funkcija raspodele slučajne promenljive X_{n1} jednaka $F(x)$ za svako n , a $X_{nk}=0$ za svako n i $k>1$, onda je funkcija raspodele sume (1) jednaka $F(x)$,za svako n.

Prirodno je, zato, bilo da se uvede ograničenje koje treba da zadovoljavaju članovi niza (1), da bi problem prestao da bude trivijalan i da bi u isto vreme sačuvao dovoljan stepen opštosti. Tražio se uslov koji bi isključio situacije u kojima su sabirci neravnopravni (kao u prethodnom primeru), odnosno tražio se uslov pri kome granični zakon ne bi bio osetljiv u odnosu na ponašanje pojedinačnih komponenata. Tako se u klasičnoj teoriji došlo do zaključka da uloga svakog pojedinog sabirka u sumi (1) treba da bude zanemarljivo mala kad $n\to\infty$, što se izražava kroz uslov ravnomerne asimptotske zanemarljivosti članova. Taj uslov zahteva da

$$\lim_{n\to\infty}\ \max_{1\le k\le k_n} P\left\{ |X_{nk}| \geqslant \varepsilon \right\} = 0 \qquad (2)$$

za svako fiksirano $\varepsilon>0$. U terminima karakterističnih funkcija uslov (2) asimptotske zanemarljivosti članova svodi se na uslov da

$$\lim_{n\to\infty}\ \max_{1\le k\le k_n} \left| f_{nk}(t) - 1 \right| = 0$$

uniformno po t u svakom konačnom intervalu, gde je $f_{nk}(t)$ - karakteristična funkcija slučajne promenljive X_{nk} .

Krug problema koji se rešavaju u okviru klasične teorije sumiranja uključuje opisivanje familije svih mogućih graničnih funkcija raspodele za sume nezavisnih, asimptotski zanemarljivih slučajnih promenljivih, a zatim nalaženje neophodnih i dovoljnih uslova za konvergenciju niza (1) ka zadatoj funkciji raspodele iz klase svih mogućih funkcija raspodele. Problem opisivanja familije svih mogućih graničnih funkcija raspodele rešio je A.J.Hinčin, koji je dokazao da se ta familija poklapa sa familijom svih beskonačno deljivih raspodela.

DEFINICIJA. Funkcija raspodele $F(x)$ i njoj odgovarajuća karakteristična funkcija $f(t)$ nazivaju se beskonačno deljivim, ako za svaki prirodan broj n postoji takva karakteristična funkcija $f_n(t)$ da važi

$$f(t) = (f_n(t))^n .$$

Fundamentalan rezultat koji daje reprezentaciju beskonačno deljive karakteristične funkcije je Levy-Hinčinova reprezentacija. Ona će biti data u sledećoj teoremi [23],[25].

TEOREMA. Karakteristična funkcija $f(t)$ je beskonačno deljiva ako i samo ako dopušta reprezentaciju :

$$\ln f(t) = i\alpha t + \int_{-\infty}^{+\infty} \left(e^{itx} - 1 - \frac{itx}{1+x^2} \right) \frac{1+x^2}{x^2} \, dG(x) \qquad (3)$$

gde je $\alpha \in R$, a $G(x)$ je ograničena, neopadajuća, neprekidna sa desna realna funkcija za koju važi $G(-\infty) = 0$, $G(+\infty) < +\infty$. Podintegralna funkcija se za $x=0$ definiše po neprekidnosti i jednaka je $-t^2/2$. Sem toga, α i $G(x)$ su odredjeni na jedinstven način.

Osim prethodne, u teoriji sumiranja je veoma važna i sledeća teorema([23], [25]), koja daje neophodne i dovoljne uslove za konvergenciju ka odredjenoj beskonačno deljivoj karakterističnoj funkciji.

TEOREMA. Neka je :

$$X_{nk}\ ,\quad k=1,2,\dots k_n\ ,\quad n=1,2,\dots$$

niz slučajnih promenljivih, koje zadovoljavaju uslov (2) asimptotske zanemarljivosti članova. Dalje, pretpostavimo da su slučajne promenljive

$$X_{n1}\ ,\ X_{n2}\ ,\ \dots\ ,\ X_{nk_n}$$

nezavisne za svako $n=1,2,\dots$ Neka je :

$$S_n = \sum_{k=1}^{k_n} X_{nk} - C_n\ ;\ n\geq 1\ ,\qquad C_n\in R.$$

Tada se skup graničnih funkcija raspodele niza S_n podudara sa skupom beskonačno deljivih zakona. Pored toga, niz S_n slabo konvergira ka slučajnoj promenljivoj sa karakterističnom funkcijom $f(t)$ (gde je $\ln f(t)$ kao u (3)), ako i samo ako

$$G_n(x)\xrightarrow[n\to\infty]{} G(x)\ \text{kompletno za}\ x\in(-\infty,+\infty)\ \text{i}\ \alpha_n\xrightarrow[n\to\infty]{}\alpha$$

gde $$G_n(x) = \sum_{k=1}^{k_n}\int_{-\infty}^{x}\frac{y^2}{1+y^2}\,dF_{nk}(y+\alpha_{nk})\ ,\qquad x\in R$$

$$\alpha_n = \sum_{k=1}^{k_n}\left[\alpha_{nk} + \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x}{1+x^2}\,dF_{nk}(x+\alpha_{nk})\right],$$

$$\alpha_{nk} = \int_{|x|<\gamma} x\,dF_{nk}(x)\ ,\qquad 0<\gamma<+\infty\ ,\qquad C_n=\alpha_n - C + o(1)\ \text{kad}\ n\to\infty,\ C\in R$$

a $F_{nk}(x)$ je funkcija raspodele slučajne promenljive X_{nk}.

Iz klasične teorije sumiranja nezavisnih slučajnih promenljivih razvilo se više novih pravaca i klasa problema u teoriji sumiranja. Oni su nastali, na prirodan način, tako što su oslabljivani uslovi koji su postojali u klasičnoj teoriji. Tako se pojavila teorija sumiranja u kojoj se ne pretpostavlja medjusobna nezavisnost sabiraka, a razvija se i teorija koja je odbacila osnovni uslov klasične teorije sumiranja - uslov asimptotske zanemarljivosti pojedinih sabiraka. Pored pomenutih teorija, razvija se i takozvana teorija slučajnog sumiranja. U teoriji slučajnog sumiranja pretpostavlja se da indeks ν_n do kojeg se vrši sumiranje slučajnih promenljivih

$$X_{n1}, X_{n2}, \ldots, X_{n\nu_n}$$

iz n-te vrste nije, kao pre, fiksiran prirodan broj, već je ν_n neka pozitivna slučajna promenljiva koja uzima celobrojne vrednosti.

Pretpostavimo da su zadani sledeći nizovi :

- k_n, celobrojan niz, $k_n \to \infty$ kad $n \to \infty$,
- ν_n, niz nenegativnih celobrojnih slučajnih promenljivih,
- X_{nk}, $n \geq 1$, $k \geq 1$ nizovi nezavisnih za svako n slučajnih promenljivih, jednako raspodeljenih po vrstama gde je

$$F_n(x) = P\{X_{nk} < x\}, \quad k \geq 1.$$

Osim toga, pretpostavlja se da su slučajne promenljive ν_n nezavisne od X_{nk}, $k \geq 1$.

U teoriji slučajnog sumiranja rešen je problem pri kakvim uslovima konvergencija funkcija raspodele suma

$$S_n = X_{n1} + X_{n2} + \ldots + X_{nk_n}$$

jednako raspodeljenih slučajnih promenljivih, indukuje konvergenciju funkcija raspodela suma

$$\zeta_n = X_{n1} + X_{n2} + \ldots + X_{n\nu_n} .$$

Odgovor na to pitanje dala je sledeća teorema, koju su njeni autori [15] nazvali teoremom prenosa :

TEOREMA PRENOSA. Ako kad $n \to \infty$, važe uslovi

A) $P\{ X_{n1} + X_{n2} + \ldots + X_{nk_n} < x \} \longrightarrow \Phi(x)$,

B) $P\{ \frac{\nu_n}{k_n} < x \} \longrightarrow A(x)$,

onda važi

C) $P\{ X_{n1} + X_{n2} + \ldots + X_{n\nu_n} < x \} \longrightarrow \Psi(x)$,

gde

$$\psi(t) = \int_0^{+\infty} (\varphi(t))^y \, dA(y),$$

a $\psi(t)$ i $\varphi(t)$ su karakteristične funkcije od $\Psi(x)$ i $\Phi(x)$, respektivno.

Pretpostavimo da imamo specijalan slučaj teoreme prenosa: neka su $X_1, X_2, X_3, \ldots$ nezavisne i jednako raspodeljene slučajne promenljive sa funkcijom raspodele $F(x)$, a konstante a_n i B_n su izabrane tako da za slučajne promenljive

$$X_{nk} = \frac{X_k - a_n}{B_n}$$

važi uslov A) iz teoreme prenosa. Za ovaj slučaj teorema prenosa tvrdi da ako važe uslovi A) i B), onda pri istom izboru konstanti a_n i B_n raspodele od

$$S_n = \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_{k_n} - k_n a_n}{B_n}$$

i

$$\zeta_n = \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_{\nu_n} - \nu_n a_n}{B_n}$$

konvergiraju ka graničnim raspodelama $\Phi(x)$, odnosno $\Psi(x)$.

Kao što se vidi, normirajući množitelji su i u drugoj sumi neslučajni, a centrirajuće veličine $A_n = \nu_n a_n / B_n$ su slučajne, ali su povezane sa odgovarajućim centrirajućim veličinama za sume sa neslučajnim brojem članova.

U citiranoj teoremi prenosa pretpostavljano je da su slučajne promenljive X_{nk} po vrstama jednako raspodeljene, tj.

$$P\{ X_{nk} < x \} = F_n(x) , \quad k = 1, 2, \ldots$$

Sledeća dva paragrafa biće posvećena problemu da se dokaže teorema prenosa bez pretpostavke o jednakoj raspodeljenosti slučajnih promenljivih X_{nk} po vrstama. Tačnije rečeno, biće rešavan sledeći problem : pretpostavlja se da su dati beskonačni nizovi slučajnih promenljivih

$$\begin{array}{l} X_{11},\ X_{12},\ \ldots,\ X_{1k},\ \ldots \\ X_{21},\ X_{22},\ \ldots,\ X_{2k},\ \ldots \\ \ldots \\ X_{n1},\ X_{n2},\ \ldots,\ X_{nk},\ \ldots \\ \ldots \end{array} , \qquad (4)$$

za koje je

$$P\{ X_{nk} < x \} = F_{nk}(x) , \quad k = 1, 2, \ldots$$

i, osim toga, za slučajne promenljive (4) važi neka granična teorema sumiranja sa neslučajnim indeksom (za sada nećemo da preciziramo kakva teorema). Cilj ja da se pokaže pod kakvim uslovima pomenuta granična teorema sa neslučajnim indeksom sumiranja indukuje odgovarajuću graničnu teoremu sa slučajnim indeksom sumiranja. U zavisnosti od pretpostavljenog graničnog ponašanja promenljivih X_{nk} , dobiće se različite teoreme prenosa. Pri tome će se uvek pretpostavljati da su u pitanju nizovi asimptotski zanemarljivih slučajnih promenljivih.

1.2. TEOREMA PRENOSA ZA SUME NE OBAVEZNO JEDNAKO RASPODELJENIH SLUČAJNIH PROMENLJIVIH

Pretpostavimo da su dati :

-beskonačni nizovi

$$\begin{array}{l} X_{11}, X_{12}, \ldots, X_{1k}, \ldots \\ X_{21}, X_{22}, \ldots, X_{2k}, \ldots \\ \ldots \\ X_{n1}, X_{n2}, \ldots, X_{nk}, \ldots \\ \ldots \end{array} \qquad (1)$$

nezavisnih po vrstama i ne obavezno jednako raspodeljenih slučajnih promenljivih sa funkcijama raspodele $F_{nk}(x)$, $n \geq 1$, $k \geq 1$;

-pozitivan celobrojan niz k_n za koji važi $k_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$;

-ν_n - niz pozitivnih celobrojnih slučajnih promenljivih koje su nezavisne od slučajnih promenljivih X_{nk}, $k \geq 1$.

U radu [22], dokazana je sledeća teorema prenosa :

TEOREMA. Pretpostavimo da važe sledeći uslovi :

A) Za slučajne promenljive (1) važi

$$E X_{nk} = 0, \quad D X_{nk} = \sigma_n^2 < +\infty, \quad n \geq 1, k \geq 1, \quad \lim_{n\to\infty} \sigma_n^2 = 0 ;$$

B) Postoji takva funkcija raspodele $A(x)$ da važi

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{ \frac{\nu_n}{k_n} < x \right\} = A(x), \quad k_n = [\sigma_n^{-2}]$$

gde $[x]$ označava ceo deo od x ;

C) Za svaki nenegativan ceo broj ℓ, $\ell = 0, 1, 2, \ldots$ važi :

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{ \sum_{j=\ell k_n+1}^{(\ell+1)k_n} X_{nj} < x \right\} = \Phi(x),$$

gde je $\Phi(x)$ normalna raspodela sa parametrima 0 i 1.

Tada važi

D) $$\lim_{n\to\infty} P\left\{ \sum_{k=1}^{\nu_n} X_{nk} < x \right\} = G(x),$$

gde je

$$\psi(t) = \int_0^{+\infty} e^{-y\frac{t^2}{2}}\, dA(y),$$

$\psi(t)$ je karakteristična funkcija raspodele $G(x)$, a $e^{-\frac{t^2}{2}}$ je, naravno, karakteristična funkcija $\mathcal{N}(0,1)$ raspodele.

Cilj ovog paragrafa je da se dokaže teorema prenosa za sume rastućeg broja nezavisnih slučajnih promenljivih (1), ali bez pretpostavke o konvergenciji ka normalnoj raspodeli (uslovi A) i C) iz prethodne teoreme). Pri tome nećemo izlaziti izvan okvira klasične teorije sumiranja u tom smislu što ćemo pretpostavljati da slučajne promenljive (1) zadovoljavaju sledeći uslov asimptotske zanemarljivosti :

$$\lim_{n\to\infty} \max_{\ell k_n+1 \le k \le (\ell+1)k_n} P\{ |X_{nk}| \geq \varepsilon \} = 0 \qquad (2)$$

za svako fiksirano $\varepsilon > 0$ i $\ell = 0, 1, 2, \ldots$

TEOREMA 1.2.1. Pretpostavimo da su ispunjeni sledeći uslovi :

A') Postoji nedegenerisana funkcija raspodele $F(x)$ i pozitivan celobrojan niz k_n , tako da za svaki nenegativan ceo broj ℓ i asimptotski zanemarljive (2) slučajne promenljive X_{nk}, $n \geq 1$, $k \geq 1$, važi :

$$\lim_{n\to\infty} P\{ \sum_{k=1}^{k_n} X_{nj_{nk}} < x \} = F(x), \quad j_{nk} \in \{ lk_n+1, \ldots, (l+2)k_n \}, \quad l=0,1,2,\ldots$$

B) Postoji takva funkcija raspodele $A(x)$ da važi :

$$\lim_{n\to\infty} P\{ \frac{\nu_n}{k_n} < x \} = A(x) .$$

Tada važi :

$$\lim_{n\to\infty} P\{ \sum_{k=1}^{\nu_n} X_{nk} < x \} = G(x) ,$$

gde

$$\Psi(t) = \int_0^{+\infty} (\varphi(t))^y \, dA(y)$$

(a sa $\Psi(t)$ i $\varphi(t)$ su označene, respektivno, karakteristične funkcije raspodela $G(x)$ i $F(x)$).

Pre nego što predjemo na dokaz, uporedićemo uslove u ove dve teoreme i pokazaćemo da, kada su ispunjeni uslovi A) i C) iz teoreme Kruglova, onda važi i uslov A') iz TEOREME 1.2.1. Da bi smo to pokazali, koristićemo, sledeću poznatu teoremu ([23], strana 314, ili [25], strana 120), koja daje neophodne i dovoljne uslove za konvergenciju neograničeno rastućih suma nezavisnih slučajnih promenljivuh ka normalnoj raspodeli.

TEOREMA. Neka je X_{nk} niz slučajnih promenljivih, nezavisnih po vrstama, takvih da raspodele suma $\sum_{k=1}^{k_n} X_{nk}$ slabo konvergiraju ka nekoj nedegenerisanoj slučajnoj promenljivoj kad $n\to\infty$. Tada je granična raspodela normalna i uslov asimptotske zanemarljivosti promenljivih X_{nk} je ispunjen ako i samo ako

$$\sum_{k=1}^{k_n} P\{ | X_{nk} | \geq \varepsilon \} \to 0$$

za svako fiksirano $\varepsilon > 0$.

Iz uslova A) teoreme Kruglova, uz pomoć nejednakosti Čebišova sledi

$$P\{|X_{nk}| \geq \varepsilon\} \leq \frac{\sigma_n^2}{\varepsilon^2}$$

za svako fiksirano $\varepsilon > 0$ i $k = 1, 2, \ldots$ pa, prema tome, važi da

$$\max_{\ell k_n + 1 \leq k \leq (\ell+1) k_n} P\{|X_{nk}| \geq \varepsilon\} \leq \frac{\sigma_n^2}{\varepsilon^2}$$

za svako fiksirano $\varepsilon > 0$ i $\ell = 0, 1, \ldots$. Pošto (prema uslovu A)) $\sigma_n^2 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, u pitanju su asimptotski zanemarljive slučajne promenljive za koje još važi (uslov C)) da raspodela njihovih suma teži ka normalnoj raspodeli. Na osnovu citirane teoreme, u tom slučaju

$$\sum_{k=\ell k_n+1}^{(\ell+1)k_n} P\{|X_{nk}| \geq \varepsilon\} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \tag{3}$$

za svako fiksirano $\varepsilon > 0$, i $\ell = 0, 1, 2, \ldots$ Tada važi sledeća prosta ocena : za svako fiksirano $\varepsilon > 0$ i $\ell = 0, 1, 2, \ldots$

$$\sum_{k=1}^{k_n} P\{|X_{nj_{nk}}| \geq \varepsilon\} \leq \sum_{k=\ell k_n+1}^{(\ell+2)k_n} P\{|X_{nk}| \geq \varepsilon\} \to 0 \tag{4}$$

gde $j_{nk} \in \{\ell k_n + 1, \ldots, (\ell+2)k_n\}$. Iz (4), na osnovu citirane teoreme, sledi da

$$\sum_{k=1}^{k_n} X_{nj_{nk}}, \quad j_{nk} \in \{\ell k_n + 1, \ldots, (\ell+2)k_n\}, \ \ell = 0, 1, 2, \ldots$$

predstavlja sumu asimptotski zanemarljivih slučajnih promenljivih koje teže $\mathcal{N}(0,1)$ raspodeli. Prema tome, iz uslova A) i C) teoreme Kruglova sledi da je ispunjen i uslov A') TEOREME 1.2.1., uz dodatnu pretpostavku o konvergenciji ka normalnoj raspodeli.

DOKAZ TEOREME 1.2.1. Označimo :

$$p_{nj} = P\{\nu_n = j\}, \quad A_n(x) = \sum_{j<x} p_{nj}.$$

Zbog nezavisnosti ν_n od X_{nk}, $k \geq 1$, važi sledeća jednakost :

$$P\{\sum_{k=1}^{\nu_n} X_{nk} < x\} = \sum_{j=1}^{\infty} P\{\sum_{k=1}^{j} X_{nk} < x\} p_{nj}. \tag{5}$$

U terminima karakterističnih funkcija, uz oznaku

$$f_{nk}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} dF_{nk}(x),$$

jednakost (5) postaje :

$$\prod_{k=1}^{\nu_n} f_{nk}(t) = \sum_{j=1}^{\infty} \prod_{k=1}^{j} f_{nk}(t) p_{nj},$$

što možemo napisati i kao

$$\prod_{k=1}^{\nu_n} f_{nk}(t) = \int_0^{+\infty} \prod_{k=1}^{[x]} f_{nk}(t) dA_n(x),$$

gde je sa $[x]$ označen ceo deo od x. Smenom $x = y \cdot k_n$, prethodni integral se svodi na

$$\int_0^{+\infty} \prod_{k=1}^{[y \cdot k_n]} f_{nk}(t) dA_n(y \cdot k_n).$$

Interesuje nas čemu teži

$$\prod_{k=1}^{[y \cdot k_n]} f_{nk}(t), \quad y > 0 \tag{6}$$

kad $n \to \infty$.

Pošto važi uslov A'), iz njega specijalno sledi da je

$$\lim_{n\to\infty} \prod_{k=lk_n+1}^{(l+1)k_n} f_{nk}(t) = \varphi(t),$$

za svako $l = 0, 1, 2, \ldots$, odakle opet sledi da, ako je y prirodan broj, onda važi :

$$\lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{[yk_n]} f_{nk}(t) = \lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{yk_n} f_{nk}(t) = (\varphi(t))^{y}, \quad y \in N. \tag{7}$$

Označimo $l_n = [y \cdot k_n]$. Pošto $k_n \underset{n\to+\infty}{\to} +\infty$, jasno je da važi

$$\lim_{n\to\infty} \frac{l_n}{k_n} = y. \tag{8}$$

Pretpostavimo za sada da je $0 < y < 1$.

Na osnovu prve Hellyeve teoreme ([24], str. 63) sledi da postoji konvergentan podniz funkcija raspodele od slučajnih promenljivih $\sum_{k=1}^{l_n} X_{nk}$, koji konvergira ka nekoj neopadajućoj funkciji. Da bi konvergencija bila kompletna, odnosno da granična funkcija bude funkcija raspodele, neophodno je i dovoljno ([6], str. 267) da niz $\sum_{k=1}^{l_n} X_{nk}$ bude stohastički ograničen.

DEFINICIJA ([6], str. 254). Niz X_n slučajnih promenljivih je stohastički ograničen ako za svako $\varepsilon > 0$ postoji a tako da za n dovoljno veliko važi

$$P\{ |X_n| > a \} < \varepsilon.$$

Označimo sa Y_{nk} slučajne promenljive koje imaju istu funkciju raspodele kao promenljive X_{nk} i nezavisne su od promenljivih $X_{nk}, n \geq 1, k \geq 1$. Neka je

$$Z_{nk} = X_{nk} - Y_{nk}, \quad n \geq 1, \ k \geq 1.$$

Slučajne promenljive Z_{nk} su simetrične i njihova karakteristična funkcija je jednaka $| f_{nk}(t)|^2$. Na osnovu uslova A') sledi da slučajne promenljive

$$\sum_{k=1}^{k_n} Z_{nk} \tag{9}$$

konvergiraju, što povlači stohastičku ograničenost niza (9). Na osnovu poznatih nejednakosti simetrizacije ([6], str. 149), sledi :

$$P\left\{ \left| \sum_{k=1}^{k_n} Z_n \right| > \varepsilon \right\} \geq \frac{1}{2} P\left\{ \left| \sum_{k=1}^{\ell_n} Z_n \right| > \varepsilon \right\} \geq$$

$$\geq \frac{1}{4} P\left\{ \left| \sum_{k=1}^{\ell_n} X_{nk} - m_n \right| > \varepsilon \right\}, \tag{10}$$

gde je m_n - medijana od slučajne promenljive $\sum_{k=1}^{\ell_n} X_{nk}$ i $\varepsilon > 0$.
Iz nejednakosti (10) sledi stohastička ograničenost niza

$$\sum_{k=1}^{\ell_n} X_{nk} - m_n \, . \tag{11}$$

Dakle, na osnovu prve Hellyeve teoreme, možemo da konstatujemo da niz funkcija raspodele od promenljivih (11) sadrži podniz koji kompletno konvergira. Na osnovu teoreme neprekidnosti ([24], str. 68) sledi da odgovarajuće karakteristične funkcije

$$e^{-itm_{n_j}} \prod_{k=1}^{\ell_{n_j}} f_{n_j k}(t)$$

konvergiraju kad $n_j \to \infty$ ka nekoj karakterističnoj funkciji $\mathcal{V}(t)$:

$$\mathcal{V}(t) = \lim_{n_j \to \infty} e^{-itm_{n_j}} \prod_{k=1}^{\ell_{n_j}} f_{n_j k}(t) \, . \tag{12}$$

Pri tome je $\mathcal{V}(t)$ beskonačno deljiva, kao granična za sume neograničeno rastućeg broja asimptotski zanemarljivih slučajnih promenljivih. Radi preglednosti, umesto niza n_j, pisaćemo n.

Označimo :

$$\mathcal{U}_n(t) = \prod_{k=k_n+\ell_n+1}^{2k_n} f_{nk}(t) , \tag{13}$$

$$\mathcal{V}_n(t) = \prod_{k=1}^{\ell_n} f_{nk}(t) .$$

Na osnovu uslova A') sledi da je

$$\lim_{n\to\infty} \mathcal{V}_n(t)\cdot\mathcal{U}_n(t) = \varphi(t) . \tag{14}$$

Pošto je

$$\mathcal{V}_n(t)\cdot\mathcal{U}_n(t) = \mathcal{V}_n(t)\, e^{-itm_n}\, \mathcal{U}_n(t)\, e^{itm_n} ,$$

na osnovu teoreme o jedinstvenosti razlaganja beskonačno deljive karakteristične funkcije na proizvod dve beskonačno deljive karakteristične funkcije ([24], str. 151), iz (12) i (14) sledi da je na jedinstven način odredjena beskonačno deljiva funkcija

$$\mathcal{U}(t) = \lim_{n\to\infty} e^{itm_n} \prod_{k=k_n+\ell_n+1}^{2k_n} f_{nk}(t) , \tag{15}$$

za koju važi da je $\varphi(t) = \mathcal{V}(t)\cdot\mathcal{U}(t)$. Na osnovu uslova A'), za proizvoljnih ℓ_n karakterističnih funkcija iz n-te vrste,

$$f_{nj_{n1}}(t) ,\ f_{nj_{n2}}(t) , \dots ,\ f_{nj_{n\ell_n}}(t) ,$$

gde

$$j_{n1}, \dots , j_{n\ell_n} \in \{ 1, 2, \dots , k_n \}$$

važi :

$$\lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{\ell_n} f_{nj_{nk}}(t)\cdot \mathcal{U}_n(t) = \varphi(t) ,$$

gde je $\mathcal{U}_n(t)$ definisano sa (13). Pošto važi (15) i važi

$$\lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{\ell_n} f_{nj_{nk}}(t)\, \bar{e}^{itm_n}\, e^{itm_n}\, u_n(t) = \varphi(t),$$

odatle sledi da je

$$\lim_{n\to\infty} \bar{e}^{itm_n} \prod_{k=1}^{\ell_n} f_{nj_{nk}}(t) = \mathcal{V}(t), \quad j_{nk} \in \{1, 2, \ldots, k_n\}. \tag{16}$$

Sada ćemo da formiramo k_n proizvoda karakterističnih funkcija. Svaki od tih proizvoda dobija se tako što se pomnože uzastopnih ℓ_n karakterističnih funkcija iz niza $f_{n1}(t), \ldots, f_{nk_n}(t)$ uz uslov da posle funkcije $f_{nk_n}(t)$ sledi, ciklično, $f_{n1}(t)$. Evo tih proizvoda :

$$\prod_{k=1}^{\ell_n} f_{nk}(t),\ \prod_{k=2}^{\ell_n+1} f_{nk}(t), \ldots, \prod_{k=k_n-\ell_n+1}^{k_n} f_{nk}(t),\ \prod_{k=k_n-\ell_n+2}^{k_n} f_{nk}(t)\cdot f_{n1}(t), \ldots$$

$$\ldots, f_{nk_n-1}(t) f_{nk_n}(t) \prod_{k=1}^{\ell_n-2} f_{nk}(t),\ f_{nk_n}(t) \prod_{k=1}^{\ell_n-1} f_{nk}(t) .$$

Posmatrajmo sledeći proizvod :

$$\left(\bar{e}^{itm_n} \prod_{k=1}^{\ell_n} f_{nk}(t) \cdot \bar{e}^{itm_n} \prod_{k=2}^{\ell_n+1} f_{nk}(t) \cdots \bar{e}^{itm_n} f_{nk_n}(t) \prod_{k=1}^{\ell_n-1} f_{nk}(t)\right)^{\frac{1}{k_n}} . \tag{17}$$

Pošto važi (16), sledi da izraz (17) teži ka $\mathcal{V}(t)$ kad $n\to\infty$. Sa druge strane, u (17) se svaka od funkcija $f_{nk}(t)$, $1 \le k \le k_n$ pojavljuje tačno ℓ_n puta. Prema tome, (17) se može napisati i kao

$$\left(\bar{e}^{itk_n m_n} \left(\prod_{k=1}^{k_n} f_{nk}(t)\right)^{\ell_n}\right)^{\frac{1}{k_n}},$$

što je jednako

$$\bar{e}^{itm_n} \left(\prod_{k=1}^{k_n} f_{nk}(t)\right)^{\frac{\ell_n}{k_n}} . \tag{18}$$

Pošto izraz (18) teži ka karakterističnoj funkciji $\mathcal{V}(t)$ kad

$n \to \infty$, odatle sledi da je odgovarajući niz slučajnih promenljivih stohastički ograničen. Pošto važi (8) i uslov A'), onda je

$$\lim_{n\to\infty} \left(\prod_{k=1}^{k_n} f_{nk}(t) \right)^{\frac{l_n}{k_n}} = \left(\varphi(t) \right)^{y} .$$

Odatle sledi stohastička ograničenost niza slučajnih promenljivih čije su karakteristične funkcije jednake

$$\left(\prod_{K=1}^{k_n} f_{nK}(t) \right)^{\frac{l_n}{k_n}} .$$

Poznato je ([6], str. 254) da važi da ako su dva niza slučajnih promenljivih X_n i Y_n stohastički ograničena, onda je i niz $X_n + Y_n$ stohastički ograničen. Na osnovu toga sledi da je niz m_n ograničen. Prema tome, važi da je

$$\lim_{n\to\infty} \prod_{K=1}^{l_n} f_{m j_{nK}}(t) = \left(\varphi(t) \right)^{y}, \quad j_{nK} \in \{1, 2, \ldots, k_n\},$$

pa je i

$$\lim_{n\to\infty} \prod_{K=1}^{l_n} f_{nK}(t) = \left(\varphi(t) \right)^{y} .$$

Prethodna jednakost važi za podniz n_j niza n. Ako bismo pretpostavili da postoji neki drugi podniz n_j' niza n takav da

$$\sum_{K=1}^{l_{n_j'}} X_{n_j' K} - m_{n_j'}$$

kompletno konvergira ka nekoj slučajnoj promenljivoj, analognim razmišljanjem kao u slučaju podniza n_j, došli bismo do toga

$$\lim_{n_j'\to\infty} \prod_{K=1}^{l_{n_j'}} f_{n_j' K}(t) = \left(\varphi(t) \right)^{y} .$$

Do sada je pokazano da za $0 < y < 1$ važi da je

$$\lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{[yk_n]} f_{nk}(t) = (\varphi(t))^{y} . \tag{19}$$

Za $y>1$, imamo

$$\prod_{k=1}^{[yk_n]} f_{nk}(t) = \prod_{k=1}^{[y]k_n} f_{nk}(t) \cdot \prod_{k=[y]k_n+1}^{[yk_n]} f_{nk}(t) . \tag{20}$$

Na osnovu (7), prvi proizvod sa desne strane teži $(\varphi(t))^{[y]}$.
Iz dokaza da za $0<y<1$ važi (19), vidi se da se na analogan način može pokazati da

$$\lim_{n\to\infty} \prod_{k=[y]k_n+1}^{[yk_n]} f_{nk}(t) = (\varphi(t))^{y-[y]} ,$$

odakle, koristeći (20), sledi da za svako $y>0$ važi

$$\lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{[yk_n]} f_{nk}(t) = (\varphi(t))^{y} . \tag{21}$$

Pošto važi (21) i, na osnovu uslova (8), važi

$$\lim_{n\to\infty} A_n(yk_n) = A(y) ,$$

iz Lebesgueove teoreme o dominantnoj konvergenciji i uopštene leme Helly-Braya sledi :

$$\int_0^{+\infty} \prod_{k=1}^{[yk_n]} f_{nk}(t)\, dA_n(yk_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int_0^{+\infty} (\varphi(t))^{y}\, dA(y) . \blacksquare$$

Na kraju ovog paragrafa biće dat primer , koji pokazuje da bi u Teoremi 1.2.1. uslov

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{ \sum_{k=lk_n+1}^{(l+1)k_n} X_{nk} < x \right\} = F(x)$$

bio suviše slab, ukoliko bismo ga pretpostavili umesto uslova

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{ \sum_{k=1}^{k_n} X_{nj_{nk}} < x \right\} = F(x), \quad j_{nk} \in \{ lk_n+1, \ldots, (l+2)k_n \}$$

u tom slučaju tvrdjenje teoreme ne bi važilo.

PRIMER. Neka su i_n i j_n nizovi prirodnih brojeva, $i_n \to +\infty$ $j_n \to +\infty$, i $k_n = i_n + j_n$, $\frac{i_n}{k_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{2}$, $n=1,2,\ldots$. Neka su X_{nk} beskonačni nizovi nezavisnih slučajnih promenljivih sa funkcijama raspodele

$$F_{nk}(x) = P\{X_{nk} < x\} = \begin{cases} G_n(x), & lk_n+1 \le k \le lk_n + i_n \\ & \qquad\qquad l=0,1,2,\ldots \\ H_n(x), & lk_n+i_n+1 \le k \le (l+1)k_n \end{cases}.$$

Pretpostavimo dalje, da važe sledeća granična svojstva :

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{ \sum_{k=lk_n+1}^{(l+1)k_n} X_{nk} < x \right\} = F(x), \quad l=0,1,2,\ldots,$$

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{ \sum_{k=lk_n+1}^{lk_n+i_n} X_{nk} < x \right\} = G(x), \quad l=0,1,2,\ldots,$$

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{ \sum_{k=lk_n+i_n+1}^{(l+1)k_n} X_{nk} < x \right\} = H(x), \quad l=0,1,2,\ldots,$$

gde su $F(x)$, $G(x)$, $H(x)$ neke nedegenerisane funkcije raspodele. Pretpostavimo da je ν_n - niz celobrojnih slučajnih promenljivih nezavisnih od X_{nk}, $k=1,2,\ldots$, i važi

$$P\{\nu_n = i_n\} = \frac{1}{2} = P\{\nu_n = k_n\}, \quad n=1,2,\ldots$$

Pod tim pretpostavkama važi

$$\lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{\nu_n} f_{nk}(t) = \frac{1}{2}\left(g(t) + f(t) \right),$$

a po teoremi prenosa bilo bi

$$\lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{\nu_n} f_{nk}(t) = \frac{1}{2}\left((f(t))^{\frac{1}{2}} + f(t) \right),$$

gde su sa $g(t)$ i $f(t)$ označene karakteristične funkcije od $G(x)$ i $F(x)$

1.3. NORMIRANE SUME I TEOREME PRENOSA

Ovaj paragraf odnosiće se na jednu važnu podklasu klase beskonačno deljivih raspodela. Neka je X_n, $n=1,2,\dots$ niz nezavisnih slučajnih promenljivih, a b_n, $n=1,2,\dots$ niz pozitivnih realnih brojeva. Pretpostavljaćemo da za svako fiksirano $\varepsilon>0$ važi sledeći uslov

$$\lim_{n\to\infty} \max_{1\le k\le n} P\{\,|X_k| \geq b_n\cdot\varepsilon\,\} = 0 . \tag{1}$$

Očigledno je, ako označimo $X_{nk} = \dfrac{X_k}{b_n}$, $1\le k\le n$, $n\geq 1$, da je u pitanju specijalan slučaj nizova nezavisnih slučajnih promenljivih koje zadovoljavaju uslov asimptotske zanemarljivosti. Neka je :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k , \quad n\geq 1 .$$

Sa L se označava klasa funkcija raspodela koje su granične za raspodele suma

$$\frac{S_n}{b_n} - a_n , \quad n\geq 1 , \tag{2}$$

gde su $b_n>0$ i a_n odgovarajuće izabrane konstante. Klasa L je podklasa klase beskonačno deljivih raspodela. Zbog sledeće osobine, klasa L se naziva još i klasom samorazloživih raspodela : Funkcija raspodele $F(x)$(sa odgovarajućom karakterističnom funkcijom $\varphi(t)$), koja pripada klasi L , ima sledeće karakteristično svojstvo : za svako $0<c<1$, postoji karakteristična funkcija $\varphi_c(t)$ tako da važi

$$\varphi(t) = \varphi(ct)\,\varphi_c(t) , \quad t\in R .$$

Za normirane sume poznata je sledeća lema [6].

LEMA. Neka raspodele suma (2) nezavisnih slučajnih promenljivih, koje zadovoljavaju uslov (1), slabo konvergiraju ka nedegenerisanoj funkciji raspodele. Tada važi:

$$b_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty \quad \text{i} \quad \frac{b_{n+1}}{b_n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1 \tag{3}$$

U ovom paragrafu biće dokazane dve teoreme prenosa koje će se odnositi na normirane sume. Prva teorema daće uslove pri kojima konvergencija suma

$$\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{b_n} - a_n$$

indukuje konvergenciju suma

$$\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_{\nu_n}}{b_n} - A_{\nu_n} \tag{4}$$

za neke odgovarajuće izabrane A_{ν_n}.

Za slučajan indeks ν_n pretpostavljaćemo da zadovoljava uslov

$$P\left\{ \frac{\nu_n}{n} < x \right\} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} A(x) .$$

Pošto slučajan indeks ν_n može u principu da uzima vrednosti različite od n, postavlja se pitanje asimptotske zanemarljivosti slučajnih promenljivih koje nameravamo da sabiramo. Samo na osnovu uslova (1), ne možemo da zaključimo da li članovi sume (4) zadovoljavaju sledeći uslov asimptotske zanemarljivosti:

$$\lim_{n\to\infty} \max_{1\le k\le [nx]} P\{ |X_k| > b_n \cdot \varepsilon \} = 0 , \tag{5}$$

za svako fiksirano $\varepsilon > 0$ i $x > 0$, gde je sa $[x]$ označen ceo deo od x.

Iz (5) sledi:

$$\lim_{n\to\infty} \max_{1\leq k\leq [nx]} P\left\{ |X_k| \geq b_{[nx]}\cdot \varepsilon \cdot \frac{b_n}{b_{[nx]}} \right\} = 0 \tag{6}$$

za svako fiksirano $\varepsilon>0$. Iz (6) se jasno vidi da je uslov asimptotske zanemarljivosti (5) tesno povezan sa ponašanjem niza

$$\frac{b_n}{b_{[nx]}}$$

kad $n\to\infty$. Dakle, da bismo obezbedili asimptotsku zanemarljivost promenljivih koje sabiramo, moraćemo da pretpostavimo izvesnu pravilnost u ponašanju niza normirajućih konstanti b_n , koja će da spreči mogućnost da

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{b_{[nx]}}$$

uzme vrednost nula za neko fiksirano $x>0$. Za niz b_n zahtevaćemo da bude pravilno promenljiv u smislu sledeće definicije:

DEFINICIJA ([4],[10]). Za pozitivan niz b_n , $n=1,2,\ldots$ kaže se da je pravilno promenljiv, ako važi:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b_{[\lambda n]}}{b_n} = \Psi(\lambda)$$

za svako $\lambda>0$, gde je $0<\Psi(\lambda)<+\infty$, a sa $[x]$ je označen ceo deo od x .

Osnovni rezultat koji se odnosi na pravilno promenljive nizove dat je sledećom teoremom [4].

TEOREMA. Za pravilno promenljiv niz b_n , $n=1,2,\ldots$ granična funkcija $\Psi(\cdot)$ ima oblik

$$\Psi(\lambda) = \lambda^{\rho} \tag{7}$$

za neko konačno ρ i svako $\lambda>0$.

Eksponent ρ iz (7) se zove indeks pravilne promenljivosti niza b_n. Pravilno promenljiv niz sa indeksom nula se zove sporo promenljiv niz. Prethodna teorema ima sledeću posledicu [4]:

POSLEDICA. Pozitivan niz b_n, $n=1,2,\ldots$ je pravilno promenljiv niz indeksa ρ ako i samo ako za $n \geq 1$ važi

$$b_n = n^{\rho} l_n$$

gde je l_n sporo promenljiv niz.

Jasno je da za svaki pravilno promenljiv niz b_n važi da je $\frac{b_{n+1}}{b_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$.

Sada ćemo preći na prvu teoremu prenosa.

TEOREMA 1.3.1. Pretpostavimo da su dati:

A) Niz X_n, $n=1,2,\ldots$ nezavisnih slučajnih promenljivih;
b_n, $n=1,2,\ldots$-pravilno promenljiv niz indeksa $\rho > 0$;
a_n, $n=1,2,\ldots$ -niz realnih brojeva, tako da važi

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{ \frac{S_n}{b_n} - a_n < x \right\} = F(x) ;$$

B) Niz celobrojnih pozitivnih slučajnih promenljivih ν_n, $n=1,2,\ldots$ nezavisnih od X_k, $k=1,2,\ldots$, za koje postoji raspodela $A(x)$ tako

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{ \frac{\nu_n}{n} < x \right\} = A(x).$$

Tada važi

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{ \frac{S_{\nu_n}}{b_n} - \frac{a_{\nu_n} b_{\nu_n}}{b_n} < x \right\} = G(x),$$

gde je karakteristična funkcija $\varphi(t)$ granične raspodele $G(x)$ jednaka

$$\Psi(t) = \int_0^{+\infty} f(y^{\rho} t)\, dA(y),$$

a sa $f(t)$ je označena karakteristična funkcija raspodele $F(x)$.

DOKAZ. Označimo :

$$p_{nk} = P\{\nu_n = k\}, \quad A_n(x) = P\{\nu_n < x\} = \sum_{k<x} p_{nk}.$$

Zbog nezavisnosti ν_n od X_k, $n \geq 1$, $k \geq 1$, važi sledeća jednakost:

$$P\left\{ \frac{S_{\nu_n} - a_{\nu_n} b_{\nu_n}}{b_n} < x \right\} = \sum_{k=1}^{\infty} P\left\{ \frac{S_k - a_k b_k}{b_n} < x \right\} p_{nk}.$$

U terminima karakterističnih funkcija, prethodna jednakost se svodi na sledeću:

$$\varphi_n(t) = \sum_{k=1}^{\infty} e^{-it\frac{a_k b_k}{b_n}} \prod_{j=1}^{k} f_j\left(\frac{t}{b_n}\right) p_{nk}, \tag{8}$$

gde je $f_j(t)$-karakteristična funkcija slučajne promenljive X_j, a $\varphi_n(t)$ je karakteristična funkcija od $\frac{S_{\nu_n} - a_{\nu_n} b_{\nu_n}}{b_n}$.

Jednakost (8) može se napisati na sledeći način:

$$\varphi_n(t) = \int_0^{+\infty} \exp\left(-it\, \frac{a_{[x]} b_{[x]}}{b_n}\right) \prod_{j=1}^{[x]} f_j\left(\frac{t}{b_n}\right) dA_n(x).$$

Posle smene $x = ny$, imamo:

$$\varphi_n(t) = \int_0^{+\infty} \exp\left(-it\, \frac{a_{[ny]} b_{[ny]}}{b_n}\right) \prod_{j=1}^{[ny]} f_j\left(\frac{t}{b_n}\right) dA_n(ny)$$

$$= \int_0^{+\infty} \exp\left(-it\, \frac{a_{[ny]} \cdot b_{[ny]}}{b_n}\right) \prod_{j=1}^{[ny]} f_j\left(\frac{b_{[ny]}}{b_n} \cdot \frac{t}{b_{[ny]}}\right) dA_n(ny). \tag{9}$$

Pošto je, po pretpostavci, b_n, $n = 1, 2, \ldots$ pravilno promenljiv niz indeksa ρ, onda važi

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b_{[ny]}}{b_n} = y^{\rho}, \quad \rho > 0.$$

Pošto važi uslov A), odatle sledi da podintegralna funkcija integrala (9) ima sledeće granično ponašanje:

$$\exp\left(-it\,\frac{a_{[ny]}\,b_{[ny]}}{b_n}\right)\prod_{j=1}^{[ny]} f_j\left(\frac{b_{[ny]}}{b_n}\cdot\frac{t}{b_{[ny]}}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(y^{\rho}t).$$

Pošto je podintegralna funkcija ograničena po modulu i uniformno neprekidna, na osnovu Lebesgueove teoreme o dominantnoj konvergenciji i uopštene leme Helly-Braya, ispunjeni su uslovi za ulazak sa limesom pod znak integrala. Prema tome, imamo

$$\varphi(t) = \lim_{n\to\infty} \varphi_n(t) = \int_0^{+\infty} f(y^{\rho}t)\,dA(y). \ \blacksquare$$

Pretpostavimo sada da su dati beskonačni nizovi nezavisnih slučajnih promenljivih X_{nk}, $n=1,2,\dots$, $k=1,2,\dots$, koje su po vrstama raspodeljene "periodično" u sledećem smislu:

$$P\{X_{nk} < x\} = F_{nk}(x) = F_{k-n\left[\frac{k-1}{n}\right]}(x) \tag{10}$$

Iz (10) se vidi da u n-toj vrsti slučajne promenljive X_{nk}, $k=1,2,\dots$ imaju sledeće funkcije raspodele:

$$F_1(x), F_2(x), F_3(x), \dots, F_{n-2}(x), F_{n-1}(x), F_n(x), F_1(x), F_2(x), \dots, F_{n-1}(x), F_n(x)$$

dakle, u n-toj vrsti se pojavljuju raspodele $F_1(x), F_2(x), \dots, F_n(x)$

Važi teorema:

TEOREMA 1.3.2. Neka su dati:

A) Beskonačni nizovi nezavisnih, periodično (10) raspodeljenih slučajnih promenljivih X_{nk}, $n=1,2,\dots$, $k=1,2,\dots$, takvih da za neki pravilno promenljiv niz b_n, $n=1,2,\dots$, indeksa $\rho>0$ i niz a_n, $n=1,2,\ldots$ važi

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{ \frac{X_{n1}+\ldots+X_{nn}}{b_n} - a_n < x \right\} = F(x) ; \qquad (11)$$

B) Niz celobrojnih pozitivnih slučajnih promenljivih ν_n, $n=1,2,\ldots$ nezavisnih od slučajnih promenljivih X_{nk}, $k=1,2,\ldots$, za koji postoji nedegenerisana funkcija raspodele $A(x)$ tako da važi

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{ \frac{\nu_n}{n} < x \right\} = A(x) .$$

Tada važi:

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{ \frac{X_{n1}+X_{n2}+\ldots+X_{n\nu_n}}{b_n} - \left[\frac{\nu_n}{n}\right]a_n - \frac{a_{\nu_n - n[\frac{\nu_n}{n}]}\cdot b_{\nu_n - n[\frac{\nu_n}{n}]}}{b_n} < x \right\} = G(x) ,$$

gde je karakteristična funkcija $\varphi(t)$ granične raspodele $G(x)$ jednaka

$$\varphi(t) = \int_0^{+\infty} f^{[y]}(t)\, f\left(\left(y-[y]\right)^{\rho} t\right) dA(y) ,$$

a $f(t)$ je karakteristična funkcija raspodele $F(x)$.

DOKAZ. Pre svega, treba primetiti da iz (10) i (11) sledi da za svaki fiksirani broj ℓ, $\ell = 0,1,2,\ldots$ važi

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{ \frac{1}{b_n} \sum_{k=\ell n+1}^{(\ell+1)n} X_{nk} - a_n < x \right\} = F(x) . \qquad (12)$$

Označimo: $p_{nk} = P\{\nu_n = k\}$, $A_n(x) = P\{\nu_n < x\} = \sum_{k<x} p_{nk}$.

Zbog nezavisnosti ν_n od X_{nk}, $k=1,2,\ldots$,važi sledeća jednakost:

$$P\left\{ \frac{X_{n1}+\ldots+X_{n\nu_n}}{b_n} - \left[\frac{\nu_n}{n}\right]a_n - \frac{a_{\nu_n - n[\frac{\nu_n}{n}]}\cdot b_{\nu_n - n[\frac{\nu_n}{n}]}}{b_n} < x \right\} =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} P\left\{ \frac{X_{n1}+\ldots+X_{nk}}{b_n} - \left[\frac{k}{n}\right]a_n - \frac{a_{k-n[\frac{k}{n}]}\cdot b_{k-n[\frac{k}{n}]}}{b_n} < x \right\} p_{nk} .$$

U terminima karakterističnih funkcija, prethodna suma se svodi na sledeću (pri tome je sa $f_{nj}(t)$ označena karakteristična funkcija slučajne promenljive X_{nj}):

$$\sum_{k=1}^{\infty} exp\left(-it\left[\frac{k}{n}\right]a_n - it\,\frac{a_{k-n[\frac{k}{n}]}\cdot b_{k-n[\frac{k}{n}]}}{b_n}\right)\cdot\prod_{j=1}^{k} f_{nj}\left(\frac{t}{b_n}\right)p_{nk}\,.$$

Prethodnu sumu možemo da napišemo na sledeći način:

$$\int_0^{+\infty} exp\left(-it\left[\frac{x}{n}\right]a_n - it\,\frac{a_{[x]-n[\frac{x}{n}]}\cdot b_{[x]-n[\frac{x}{n}]}}{b_n}\right)\cdot\prod_{j=1}^{[x]} f_{nj}\left(\frac{t}{b_n}\right)dA_n(x). \tag{13}$$

Smenom $x=ny$, (13) postaje

$$\int_0^{+\infty} exp\left(-it[y]a_n - it\,\frac{a_{[ny]-n[y]}\cdot b_{[ny]-n[y]}}{b_n}\right)\cdot\prod_{j=1}^{[ny]} f_{nj}\left(\frac{t}{b_n}\right)dA_n(ny) =$$

$$=\int_0^{+\infty} exp(-it[y]a_n)\cdot\prod_{j=1}^{n[y]} f_{nj}\left(\frac{t}{b_n}\right)\cdot exp\left(-it\,\frac{a_{[ny]-n[y]}\cdot b_{[ny]-n[y]}}{b_n}\right)\cdot\prod_{j=n[y]+1}^{[ny]} f_{nj}\left(\frac{t}{b_n}\right)dA_n(ny) =$$

$$=\int_0^{+\infty} exp(-it[y]a_n)\cdot\prod_{j=1}^{n[y]} f_{nj}\left(\frac{t}{b_n}\right)\cdot exp\left(-it\,\frac{a_{[ny]-n[y]}\cdot b_{[ny]-n[y]}}{b_n}\right)\cdot\prod_{j=n[y]+1}^{[ny]} f_{nj}\left(\frac{t}{b_{[ny]-n[y]}}\cdot\frac{b_{[ny]-n[y]}}{b_n}\right)dA_n(ny$$

Na osnovu (12), kad $n\to\infty$, važi:

$$exp(-it[y]a_n)\prod_{j=1}^{n[y]} f_{nj}\left(\frac{t}{b_n}\right)\longrightarrow f^{[y]}(t)\,.$$

Pošto je b_n, $n=1,2,\ldots$, pravilno promenljiv niz indeksa $\rho>0$, onda važi

$$\frac{b_{[ny]-n[y]}}{b_n} = \frac{b_{[ny-n[y]]}}{b_n} = \frac{b_{[n(y-[y]]}}{b_n}\xrightarrow[n\to\infty]{}(y-[y])^{\rho}.$$

Osim toga , na osnovu uslova A) sledi:

$$\exp\left(-it\,\frac{a_{[ny]-n[y]}\cdot b_{[ny]-n[y]}}{b_n}\right)\prod_{j=n[y]+1}^{[ny]} f_{nj}\left(\frac{t}{b_{[ny]-n[y]}}\cdot\frac{b_{[ny]-n[y]}}{b_n}\right)\xrightarrow[n\to\infty]{} f((y-[y])^{\rho}t)$$

Na isti način kao i u teoremi 1.1.1., i ovde su ispunjeni uslovi za ulazak sa limesom pod znak integrala, pa dobijamo

$$\varphi(t)=\int_0^{+\infty} f^{[y]}(t)\, f((y-[y])^{\rho}t)\, dA(y).\blacksquare$$

2. KARAKTERIZACIJA NEKIH RASPODELA KOJE SE POJAVLJUJU PRI SUMIRANJU SLUČAJNOG BROJA SLUČAJNIH PROMENLJIVIH

2.1. SLUČAJAN INDEKS SA GEOMETRIJSKOM RASPODELOM

Neki problemi teorije pouzdanosti i teorije masovnog opsluživanja dovode do potrebe za izučavanjem suma slučajnog broja slučajnih promenljivih. Pretpostavimo, na primer, da treba da se oceni pouzdanost tj. dužina bezotkaznog rada sistema, koji se sastoji iz dva elementa: osnovnog i rezervnog, sa obnavljanjem. Oba elementa imaju iste karakteristike koje se potpuno obnove tokom remonta. Rezerva je "hladna". U momentu nula počinje sa radom osnovni element, a rezervni se uključuje u momentu otkaza osnovnog elementa. Priključivanje je trenutno. U momentu otkaza element počinje da se obnavlja. Dužina obnavljanja elementa je slučajna promenljiva sa funkcijom raspodele $G(x)$, a dužina bezotkaznog rada elementa je slučajna promenljiva sa funkcijom raspodele $F(x)$. Posle završetka obnavljanja, element ostaje u rezervi. Otkaz sistema nastaje u onom trenutku, kada su oba elementa u stanju otkaza. Problem da se odredi raspodela dužine bezotkaznog rada ovog sistema svodi se na nalaženje raspodele sume slučajnog broja slučajnih promenljivih, na sledeći način:

Označimo sa $X_1, X_2, \ldots$ uzastopne dužine bezotkaznog rada elemenata, a sa $Y_1, Y_2, \ldots$ uzastopne dužine obnavljanja elemenata. Jasno je da će sistem obavezno da radi za vreme $X_1 + X_2$ Sistem će da radi još za interval vremena X_3, samo ako je ispunjeno $X_2 \geqslant Y_1$, itd. Vidimo da je dužina bezotkaznog rada sistema jednaka

$$S = X_1 + X_2 + \ldots + X_\nu ,$$

gde je $\nu = \min \{k : X_k < Y_{k-1}\}$, $k=2,3,\ldots$ Slučajna promenljiva ν ima geometrijsku raspodelu

$$P\{\nu = k\} = (1-a)^{k-2} \cdot a \quad , \quad k=2,3,\ldots ,$$

gde je

$$a = P\{X_k < Y_{k-1}\} = \int_0^{+\infty} (1-G(x))\, dF(x) .$$

Za praksu su naročito značajni visoko pouzdani sistemi, tj. oni kod kojih je a malo.

Sledeći primer je iz teorije masovnog opsluživanja : Pretpostavimo da na jednolinijski sistem masovnog opsluživanja sa otkazom dolaze trebovanja čija je dužina opsluživanja slučajna promenljiva. Treba naći raspodelu dužine intervala vremena od početka rada sistema do prvog gubitka trebovanja. Ta dužina predstavlja sumu slučajnog broja slučajnih promenljivih, analogno prethodnom primeru.

Neka su $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ nezavisne, nenegativne i jednako raspodeljene slučajne promenljive; ν_n - slučajne promenljive, nezavisne od promenljivih X_i, $i=1,2,\ldots$, raspodeljene po geometrijskoj raspodeli

$$P\{\nu_n = k\} = a_n (1-a_n)^{k-1} \quad , \quad k=1,2,\ldots$$

$a_n \to 0$, kad $n \to \infty$.

U radu [13] izučavana je klasa graničnih zakona $\mathcal{R}$ za sume S_{ν_n} nezavisnih, nenegativnih i jednako raspodeljenih slučajnih promenljivih

$$S_{\nu_n} = \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_{\nu_n}}{B_n}$$

kad $n\to\infty$, pri uslovu da su normirajući faktori B_n neslučajni. U tom radu otkriveno je svojstvo koje karakteriše raspodele iz klase $\mathcal{R}$.

U radu [9], uopšten je prethodno opisani model na taj način što je autor dopustio da slučajne promenljive X_i iz sume S_{ν_n} mogu da uzimaju i vrednosti proizvoljnog, a ne samo pozitivnog znaka. U radu [9] je nadjena klasa graničnih raspodela za takve sume nezavisnih i jednako raspodeljenih slučajnih promenljivih. Jasno je da u tom slučaju klasa graničnih raspodela postaje šira; tu širu klasu označavaćemo sa $\mathcal{F}$.

U ovom paragrafu pokazaćemo unutrašnje karakteristično svojstvo raspodela klase $\mathcal{F}$, koje je uopštenje karakterizacije klase $\mathcal{R}$, dokazane u radu [13].

U radu [9] je dokazano da funkcija raspodele $\Psi(x)$ pripada klasi $\mathcal{F}$ ako i samo ako je njena karakteristična funkcija $\psi(t)$ oblika

$$\psi(t) = \frac{1}{1+v(t)}, \tag{1}$$

gde je

$$v(t) = \left(c_0 + i\frac{t}{|t|}c_1\right)|t|^{\alpha}, \tag{2}$$

a α $(0<\alpha\le 2)$, $c_0\geq 0$, c_1 su konstante i za $\alpha=2$ je $c_1=0$.

Neka su $X_1, X_2, \dots, X_k, \dots$ nezavisne i jednako raspodeljene slučajne promenljive sa funkcijom raspodele $F(x)$. Od slučajnih promenljivih X_i $(i=1,2,\dots)$ formiraćemo sume

$$Z_1 = X_1,\quad Z_2 = X_1+X_2,\ \dots,\ Z_k = X_1+X_2+\dots+X_k,\ \dots$$

Pretpostavimo da se nad slučajnim promenljivim Z_k, $k=1,2,\dots$ vrši operacija razredjivanja na sledeći način: za dato p $(0<p<1)$

eliminiše se, nezavisno od ostalih, suma Z_k $(k=1,2,\dots)$ sa verovatnoćom p. Sa $F_p(x)$ označena je funkcija raspodele prve zadržane sume.

Funkciju raspodele $F(x)$ nazivaćemo stabilnom u odnosu na operaciju razredjivanja, ako za svako $p\ (0<p<1)$ postoji $a_p>0$ tako da za svako x važi

$$F_p(x) \equiv F\left(\frac{x}{a_p}\right). \qquad (3)$$

U terminima karakterističnih funkcija, uslov (3) je ekvivalentan sa

$$f_p(t) \equiv f(a_p t), \qquad (4)$$

gde su $f(t)$ i $f_p(t)$ karakteristične funkcije od $F(x)$ i $F_p(x)$, respektivno.

Cilj ovog paragrafa je da se dokaže sledeća

TEOREMA 2.1.1. Funkcija raspodele $F(x)$ pripada klasi $\mathcal{F}$ ako i samo ako je $F(x)$ stabilna u odnosu na operaciju razredjivanja.

DOKAZ. Pretpostavimo da se vrši razredjivanje suma Z_k sa verovatnoćom p. Tada je funkcija raspodele prve neeliminisane sume jednaka:

$$F_p(x) = q\sum_{k=1}^{\infty} p^{k-1} F^{*(k)}(x),$$

gde je $q=1-p$, i $F^{*(k)}(x)$ je funkcija raspodele od Z_k. U terminima karakterističnih funkcija gornja jednačina postaje

$$f_p(t) = q \sum_{k=1}^{\infty} p^{k-1} (f(t))^k = \frac{q f(t)}{1 - p f(t)} .$$

U jednom smeru dokaz se dobija prostom proverom. Zaista, ako pretpostavimo da $F(x)$ pripada klasi $\mathcal{F}$, tada je njena karakteristična funkcija data sa (1) i (2), pa prema tome, za dato p, važi sledeće:

$$f_p(t) = \frac{q f(t)}{1 - p f(t)} = \frac{q}{1 + v(t) - p} = \frac{1}{1 + q^{-1}(c_0 + i c_1 \frac{t}{|t|})|t|^\alpha}$$

$$= \frac{1}{1 + (c_0 + i c_1 \frac{a_p t}{|a_p t|}) |a_p t|^\alpha} = f(a_p t) ,$$

gde je $a_p = q^{-\frac{1}{\alpha}}$, $q = 1-p$, što znači da je svaka funkcija raspodele $F(x)$ iz $\mathcal{F}$ - stabilna u odnosu na operaciju razredjivanja.

Sada ćemo dokazati obrnuto tvrdjenje: ako je funkcija raspodele $F(x)$ stabilna u odnosu na operaciju razredjivanja, tada $F(x)$ pripada klasi $\mathcal{F}$. Po pretpostavci važi (4), odnosno za svako p $(0<p<1)$ i za neko $a_p>0$ je

$$f(a_p t) = \frac{q f(t)}{1 - p f(t)} . \tag{5}$$

Pokazaćemo prvo da funkcija $f(t)$ nema nula. Pretpostavimo obrnuto, da za neko t_0 važi

$$f(t_0) = 0 . \tag{6}$$

Razmatraćemo sledeća tri slučaja: $a_p=1$, $a_p<1$, $a_p>1$. Ako je $a_p = 1$, tada za svako t važi da je

$$f(t) = \frac{q f(t)}{1 - p f(t)} ,$$

odnosno

$$pf(t)\cdot\frac{1-f(t)}{1-pf(t)} = 0 .$$

Iz prethodne jednačine sledi da $f(t)$ uzima samo vrednosti 0 i 1, pa zbog neprekidnosti $f(t)$ imamo da je $f(t)\equiv 1$, pa je nemoguće da je $f(t_0)=0$. Pretpostavimo da je za neko p, $a_p<1$. Tada iz (5) i (6) sledi da za svaki prirodan broj n važi

$$f(a_p^n t_0) = 0 .$$

Dakle, tačka $t=0$ je tačka nagomilavanja nula karakteristične funkcije $f(t)$, što je nemoguće jer je $f(t)$ neprekidna i $f(0)=1$. U slučaju kada je $a_p>1$, dolazimo do istog zaključka jer tada, zajedno sa t_0, sve tačke oblika $t_0 a_p^{-n}$ su nule funkcije $f(t)$. Prema tome, ako funkcija raspodele $F(x)$ pripada klasi $\mathcal{F}$, tada njena karakteristična funkcija nema nula i $f(t)$ može da se napiše kao

$$f(t) = \frac{1}{1+v(t)} ,$$

gde je $v(t)$ neprekidna funkcija i $v(0)=0$.

Lako se proverava da jednačina (5) dobija prostiji oblik u terminima funkcije $v(t)$:

$$q\,v(a_p t) = v(t) .$$

Neka je $b_q = a_p$; tada jednačina za $v(t)$ može da se napiše na sledeći način: za svako q $(0<q<1)$

$$v(t) = q\,v(b_q t) . \tag{7}$$

Pokazaćemo da za svako $q<1$ važi $b_q>1$. Pretpostavimo suprotno, da za neko $q<1$ važi da je $b_q\le 1$. Tada za svaki prirodan broj n važi

$$v(t) = q^n v(b_q^n t),$$

odatle sledi da je za svako t, $v(t)=0$, tj. postoji samo trivijalno rešenje $f(t)\equiv 1$. Dakle, ako je funkcija raspodele $F(x)\in\mathcal{F}$ nedegenerisana, tada je $b_q>1$ za svako $q<1$.

Sada ćemo pokazati da b_q opada kada q raste. Neka je $q=q_1\cdot q_2$, gde su $q_1<1$, $q_2<1$. Preme (7) važi

$$v(t) = q\,v(b_q t) = q_1 q_2\, v(b_{q_1} b_{q_2} t).$$

Odatle sledi da je $b_q = b_{q_1}\cdot b_{q_2}$, $b_q>1$, $q_1<1$, $q_2<1$, a pošto je $q=q_1\cdot q_2 < \max\{q_1,q_2\}$, onda b_q opada sa rastom q.

Jednačinu

$$b_{q_1\cdot q_2} = b_{q_1}\cdot b_{q_2}$$

smenom

$$h(x) = \ln b_{e^x}, \quad x<0$$

svodimo na jednačinu

$$h(x+y) = h(x)+h(y), \quad x,y<0. \tag{8}$$

Neprekidnost funkcije $h(\cdot)$ sledi iz neprekidnosti funkcije b_q, a pošto je $b_q>1$ mora biti $h(x)>0$.

Opšte rešenje jednačine (8) je

$$h(x) = -\frac{x}{\alpha}, \quad \alpha>0,\ x<0$$

Odatle sledi da je

$$b_q = e^{h(\ln q)} = q^{-\frac{1}{\alpha}}, \quad \alpha>0,\ 0<q<1.$$

Jednačina (7) se svodi na

$$q^{-1} v(t) = v(q^{-\frac{1}{\alpha}} t), \quad \alpha>0,\ 0<q<1. \tag{9}$$

Jedno od rešenja jednačine (9) je očigledno:

$$v_1(t) = |t|^{\alpha};$$

iz $|f(t)|\leq 1$ sledi da je $\alpha>0$.

Pretpostavimo da za dato q jednačina (9) ima još jedno rešenje $v_2(t)$. Da bismo odredili $v_2(t)$, posmatraćemo količnik $g(t)=\frac{v_2(t)}{v_1(t)}$ za $t>0$. Zbog (9) važi

$$g(q^{-\frac{1}{\alpha}}t)=\frac{v_2(q^{-\frac{1}{\alpha}}t)}{v_1(q^{-\frac{1}{\alpha}}t)}=\frac{v_2(t)}{v_1(t)}=g(t)\ ,\quad 0<q<1\ ,\ \alpha>0\ ,\ t>0\ .$$

Odatle sledi da je funkcija $g(t)$ konstantna za $t>0$, odnosno svako rešenje (9) je oblika

$$v(t)=(c_0+ic_1)\,t^{\alpha}\ ,$$

gde su c_0 , c_1 konstante. Na isti način dobijamo da je za $t<0$, $v(t)$ oblika:

$$v(t)=(c_0'+ic_1')\,(-t)^{\alpha}\ .$$

Pošto je $f(t)$ karakteristična funkcija, mora da važi $f(-t)=\overline{f(t)}$, odnosno $v(-t)=\overline{v(t)}$. Odatle sledi da je $c_0'=c_0$, $c_1'=-c_1$.

Poznato je ([24], str. 91) da jedina karakteristična funkcija koja zadovoljava

$$1-f(t)=o(t^2)$$

kad $t\to 0$ jeste funkcija $f(t)\equiv 1$. Ako bi bilo $\alpha>2$, onda je

$$1-\frac{1}{1+c|t|^{\alpha}}=O(|t|^{\alpha})=o(t^2)\ .$$

Prema tome, da bi funkcija

$$f(t)=\frac{1}{1+c|t|^{\alpha}}$$

bila karakteristična funkcija, mora biti $\alpha\leq 2$. Pokazano je da svaka karakteristična funkcija $f(t)$, koja je stabilna u odnosu na operaciju razredjivanja, ima oblik

$$f(t) = \frac{1}{1 + (c_0 + ic_1 \frac{t}{|t|})|t|^{\alpha}} . \qquad (10)$$

Pokazaćemo da je $c_0 \geqslant 0$. Pretpostavimo suprotno, da je $c_0 = -a$, $a > 0$. Poznato je da, ako je $f(t)$ karakteristična funkcija, onda je i $|f(t)|^2$ takodje karakteristična funkcija. Imamo da je

$$|f(t)|^2 = \frac{1}{1 + (a^2 + c_1^2)|t|^{2\alpha} - 2a|t|^{\alpha}} .$$

Jasno je da je za svako t takvo da je

$$0 < |t|^{\alpha} < \frac{2a}{a^2 + c_1^2}$$

imenilac od $|f(t)|^2$ manji od 1 . Pošto je $f(t)$ karakteristična funkcija, to je kontradikcija.

Još treba pokazati da, ako je $\alpha = 2$ u (2), onda je $c_1 = 0$. Poznato je ([23] ,str. 222) da za karakterističnu funkciju $f(t)$ slučajne promenljive X važi da je

$$\lim_{t \to 0} \frac{2 - f(t) - f(-t)}{t^2} = EX^2 ,$$

bilo da je $EX^2 < +\infty$ ili $EX^2 = +\infty$. Za karakterističnu funkciju (9) pri $\alpha = 2$ imamo

$$\lim_{t \to 0} \left(2 - \frac{1}{1 + (c_0 + ic_1 \frac{t}{|t|})t^2} - \frac{1}{1 + (c_0 - ic_1 \frac{t}{|t|})t^2}\right)t^{-2} = 2c_0 .$$

Pošto je drugi momenat konačan, $f(t)$ je dva puta diferencijabilna u tački $t = 0$ i $EX^2 = -f''(0)$. Sa druge strane imamo

$$f(t) = \begin{cases} (1 + (c_0 + ic_1)t^2)^{-1} , & t \geqslant 0 \\ (1 + (c_0 - ic_1)t^2)^{-1} , & t < 0 \end{cases}$$

i $f''(0_+) = -2(c_0 + ic_1)$, $f''(0_-) = -2(c_0 - ic_1)$, odakle sledi $c_1 = 0$. ∎

2.2. SLUČAJAN INDEKS SA PROIZVOLJNOM RASPODELOM

U ovom paragrafu biće rešavan problem koji je u izvesnom smislu uopštenje jednog problema razmatranog u radu[13].

Neka je $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ niz nenegativnih, nezavisnih i jednako raspodeljenih slučajnih promenljivih sa funkcijom raspodele $F(x) = P\{X_1 < x\}$, a ν je celobrojna slučajna promenljiva, $p_n = P\{\nu = n\}$, $p_0 = 0$, nezavisna od promenljivih X_k, $k = 1, 2, \ldots$ Sa S_ν označena je sledeća suma

$$S_\nu = X_1 + X_2 + \ldots + X_\nu$$

Označimo sa $\Phi_\nu(x)$ funkciju raspodele od S_ν. Tada važi:

$$\Phi_\nu(x) = \sum_{n=1}^{\infty} P\{S_n < x\} p_n = \sum_{n=1}^{\infty} F^{*(n)}(x) p_n, \tag{1}$$

gde je $F^{*(n)}(x)$ funkcija raspodele sume

$$S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n .$$

U terminima Laplaceove transformacije, (1) se svodi na

$$\varphi(t) = \sum_{n=1}^{\infty} (f(t))^n p_n , \tag{2}$$

gde su $\varphi(t)$ i $f(t)$ Laplaceove transformacije funkcija raspodele $\Phi_\nu(x)$ i $F(x)$.

Označimo sa K klasu slučajnih promenljivih za koje važi

$$\Phi_\nu(x) = F\left(\frac{x}{c_\nu}\right) , \tag{3}$$

gde je c_ν realan broj koji zavisi od ν. Drugim rečima, K je klasa slučajnih promenljivih za koje važi da se funkcija raspodele sume $X_1 + X_2 + \ldots + X_\nu$ slučajnog broja jednako raspodeljenih, nezavisnih, nenegativnih slučajnih promenljivih razlikuje samo u normirajućem faktoru od funkcije raspodele jedne slučajne promenljive iz te sume, odnosno, funkcija raspodele sume slučajnog broja slučajnih promenljivih iz K ima isti tip [6] kao i raspodela jedne slučajne promenljive iz te sume.

Iz (2) i(3) imamo sledeću funkcionalnu jednačinu:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (f(t))^n p_n = f(c_\nu t) . \tag{4}$$

Označimo sa $P(u)$ funkciju generatrisu slučajne promenljive ν :

$$P(u) = \sum_{n=0}^{\infty} u^n p_n , \qquad u \in (0,1] .$$

Jednačinu (4) možemo napisati i kao

$$P(f(t)) = f(c_\nu t) . \tag{5}$$

U radu [13] je rešavan poseban slučaj kada ν ima geometrijsku raspodelu tj.

$$p_n = pq^{n-1} , \quad p+q=1 , \quad p,q>0 , \quad n=1,2,\ldots$$

U tom slučaju se jednačina (5) svodi na

$$\frac{pf(t)}{1-qf(t)} = f(c_p t) .$$

U [13] je data karakterizacija odgovarajuće klase slučajnih promenljivih $\mathcal{R}$ preko njihovih Laplaceovih transformacija. Ovde se postavlja problem da se nadju rešenja (P,f) funkcionalne jednačine (5), pri uslovu da je $P(u)$ funkcija generatrisa, a $f(t)$ - Laplaceova transformacija nekih slučajnih promenljivih. Rešenja jednačine (5) dobićemo kao specijalan slučaj za $u=1$ iz rešenja opštije jednačine

$$\frac{P(uf(t))}{P(u)} = f(c(u)t) , \quad t \in [0,+\infty) , \quad u \in (0,1] , \tag{6}$$

pri čemu je $P(u)$ funkcija generatrisa nedegenerisane, celobrojne slučajne promenljive, $f(t)$ je Laplaceova transformacija nedegenerisana slučajne promenljive, $C(u)$ je realna funkcija na $(0,1]$.

TEOREMA 2.2.1. Trojka funkcija (P,f,C) je rešenje funkcionalne jednačine (6) ako i samo ako

$$P(u) = \left[\frac{pu^k}{1-(1-p)u^k}\right]^{\frac{1}{k}}, \quad p\in(0,1),\ k\in N,\ u\in(0,1],$$

$$f(t) = \frac{1}{(1+ct^{\alpha})^{\frac{1}{k}}}, \quad c>0,\ 0<\alpha\leq 1,\ t\geq 0 \tag{7}$$

$$C(u) = \frac{1}{(1-(1-p)u^k)^{1/\alpha}} .$$

DOKAZ. U jednom smeru teorema se dokazuje neposrednom zamenom rešenja (7) u jednačinu (6).

Da bismo teoremu dokazali u drugom smeru, pretpostavimo da funkcije $P(u)$, $f(t)$ i $C(u)$ zadovoljavaju funkcionalnu jednačinu (6). Pošto je $f(t)$ Laplaceova transformacija, ona je strogo monotona, neprekidna i ima sve izvode. Pokažimo da njen prvi izvod nema ni jednu nulu. Ako bi, naprotiv, za neko t_0 važilo $f'(t_0)=0$, onda bi za svako $T>0$ važilo i

$$0 = f'(t_0) = \int_0^{+\infty} x e^{-t_0 x} dF(x) \geq \int_T^{+\infty} x e^{-t_0 x} dF(x) \geq$$

$$\geq T e^{-t_0 x_0}(1-F(T)), \qquad x_0\in(T,+\infty)$$

odakle sledi da je $F(x)$ funkcija raspodele degenerisane slučajne veličine, suprotno našoj pretpostavci. Pošto prvi izvod funkcije $f(t)$ nije nikada jednak nuli, to postoji izvod inverze funkcije $f^{-1}(u)$.

Pretpostavimo da je radijus konvergencije funkcije $P(u)$ veći od 1.

Napišimo jednačinu (6) na sledeći način:

$$f^{-1}\left(\frac{P(su)}{P(s)}\right) = c(s)\, f^{-1}(u), \quad s \in (0,1], \quad u \in (0,1). \tag{8}$$

Ako bi za neko s_0 bilo $c(s_0)=0$, iz (6) bi sledilo da je tada $f(t) \equiv 1$, što je nemoguće. Daklo $c(s) \neq 0$ za svako $s \in (0,1]$. Iz (8) imamo:

$$\frac{f^{-1}(P(su)/P(s))}{f^{-1}(P(sv)/P(s))} = \frac{f^{-1}(u)}{f^{-1}(v)}, \quad u,v \in (0,1), \quad s \in (0,1]. \tag{9}$$

Kada se (9) diferencira po s, u, v, prostim transformacijama dobija se sledeća jednačina:

$$\frac{f'(f^{-1}(u))\, f^{-1}(u)}{f'(f^{-1}(v))\, f^{-1}(v)} = \frac{P'(sv)\,(u P'(su) P(s) - P'(s) P(su))}{P'(su)\,(v P'(sv) P(s) - P'(s) P(sv))}. \tag{10}$$

Ako jednačinu (10) diferenciramo po s i pustimo da s teži jedinici, dobićemo

$$\frac{u P''(u)}{P'(u)} - \frac{u^2 P''(u) - P''(1) P(u)}{u P'(u) - P'(1) P(u)} = \frac{v P''(v)}{P'(v)} - \frac{v^2 P''(v) - P''(1) P(v)}{v P'(v) - P'(1) P(v)} \tag{11}$$

za svako $u,v \in (0,1)$. Pošto je, po pretpostavci, radijus konvergencije od $P(s)$ veći od 1, onda je $P'(1) < +\infty$ i $P''(1) < +\infty$. Ako za fiksirano v, označimo sa a izraz na desnoj strani jednačine (11), onda dobijamo sledeću jednačinu

$$\frac{P'(1) P''(u)}{P'(u)} + a\,\frac{P'(u)}{P(u)} - \frac{P''(1) + a P'(1)}{u} = 0, \quad u \in (0,1), \quad P(1) = 1,$$

koja je ekvivalentna sa

$$P'(1)\ln P'(u)+a\ln P(u)-(P''(1)+aP'(1))\ln u = C_0 .$$

Iz uslova $P'(1)=1$, dobija se da je $C_0=P'(1)\ln P'(1)$. Rešenje te jednačine je

$$P(u) = \left[\frac{\left(\frac{a}{P'(1)}+1\right)P'(1)}{a+\frac{P''(1)}{P'(1)}+1}u^{a+\frac{P''(1)}{P'(1)}+1}+C_1\right]^{\left(\frac{a}{P'(1)}+1\right)^{-1}} .$$

Iz $P(1)=1$, dobija se da je

$$C_1 = 1-\frac{\left(\frac{a}{P'(1)}+1\right)P'(1)}{a+\frac{P''(1)}{P'(1)}+1} .$$

Rešenje $P(u)$ je oblika

$$P(u)=\left[p^{-1}u^{-\alpha}-(1-p)p^{-1}\right]^{-\frac{\beta}{\alpha}}, \quad u\in(0,1). \tag{12}$$

Pokažimo da su α i β prirodni brojevi i $0<p<1$:

1. Pretpostavimo da je $\alpha<0$. Tada je Taylorov razvoj za $P(u)$ jednak

$$P(u)=\left(\frac{p-1}{p}\right)^{-\frac{\beta}{\alpha}}\left(1+\frac{u^{-\alpha}}{p-1}\right)^{-\frac{\beta}{\alpha}} = \left(\frac{p-1}{p}\right)^{-\frac{\beta}{\alpha}}\sum_{n=0}^{\infty}\binom{-\beta/\alpha}{n}\left(\frac{u^{-\alpha}}{p-1}\right)^{n} .$$

Pošto je $P(u)$ funkcija generatrisa, stepeni uz u moraju biti prirodni brojevi, odakle $-\alpha\in N$. Osim toga, za svako n , koeficijenti moraju biti nenegativni, tj.

$$\left(\frac{p-1}{p}\right)^{-\frac{\beta}{\alpha}}\binom{-\beta/\alpha}{n}(p-1)^{-n} \geqslant 0 , \quad n=0,1,2,\dots$$

dakle mora biti $\beta<0$ i $p<1$. Za $0<p<1$ dobijamo $P(u)>1$, što je nemoguće, za $p=0$, dobijamo $P(u)\equiv 0$. Neka je $p<0$. Funkciju $P(u)$ u ovom slučaju možemo da napišemo na sledeći način:

$$P(u) = \left(\frac{p u^{-k}}{(1+p)u^{-k}-1}\right)^{\frac{n_1}{k}}$$

gde su $k, n_1 \in N$, $p>0$, $u \in (0,1)$. Uvedimo oznake:

$$M(t) = (f(t))^{-k} \quad ; \quad (1+p)u^{-k} = 1+z .$$

Iz (6) sledi jednačina:

$$\left[\frac{zM(t)}{(1+z)M(t)-1}\right]^{n_1} = M(\zeta(z)\cdot t), \quad t \in (0,+\infty) \tag{13}$$

gde je $\zeta(z)$ realna funkcija na $(p,+\infty)$

$$\zeta(z) = \frac{1}{t} M^{-1}\left(\left[\frac{zM(t)}{(1+z)M(t)-1}\right]^{n_1}\right),$$

koja je diferencijabilna i njen prvi izvod se nigde ne anulira. Ako diferenciramo (13) po t i po z, dobićemo uz malu transformaciju sledeću jednačinu:

$$\frac{-tM'(t)}{M(t)(1-M(t))} = \frac{\zeta(z)}{\zeta'(z)\cdot z}, \quad t \in (0,+\infty), \ z \in (p,+\infty) . \tag{14}$$

Ako označimo sa $\frac{1}{a_0}$ levu stranu od (14) za t fiksirano, sledi

$$\frac{a_0}{z} = \frac{\zeta'(z)}{\zeta(z)} ,$$

odakle se dobija $\zeta(z) = \frac{z^{a_0}}{a_1}$.

Da bismo dobili $M(t)$, napišimo (14) na sledeći način (za z fiksirano, desna strana od (14) je konstanta b_0):

$$\frac{-b_0}{t} = \frac{M'(t) - 2M(t)M'(t) + 2M(t)M'(t)}{M(t)(1-M(t))} .$$

Odatle sledi

$$-b_0 \ln t = \ln(M(t)(1-M(t))) - 2\ln(1-M(t)) + \ln C,$$

odnosno

$$M(t) = \frac{1}{1+ct^{b_0}} .$$

Pošto je $M(t) = (f(t))^k$, onda je $f(t) = (1+ct^{b_0})^{\frac{1}{k}}$, $t\in(0,+\infty)$. Odmah se vidi da mora biti $C<0$ da bi važilo $f(t)\leq 1$. Medjutim, ma kakvo bilo b_0, takva funkcija $f(t)$ može da uzima i negativne vrednosti, što je nemoguće za funkciju koja je Laplaceova transformacija. Dakle, ne može biti $\alpha<0$.

2. Ako je $\alpha>0$, Taylorov razvoj za $P(u)$ je:

$$P(u) = (u^{-\alpha}p^{-1})^{-\frac{\beta}{\alpha}}(1+(p-1)u^{\alpha})^{-\frac{\beta}{\alpha}} =$$

$$= (u^{-\alpha}p^{-1})^{-\frac{\beta}{\alpha}}\sum_{n=0}^{\infty}\binom{-\beta/\alpha}{n}(p-1)^n u^{\alpha n} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} p^{\frac{\beta}{\alpha}}\binom{-\beta/\alpha}{n}(p-1)^n u^{\alpha n+\beta} ,$$

odakle sledi da je $\beta>0$, $p<1$, α i β su prirodni brojevi. Iz $p<0$ sledi da je $P(u)>1$, dakle mora biti $0<p<1$. Dobijamo:

$$P(u) = \left[\frac{pu^k}{1-(1-p)u^k}\right]^{\frac{n_1}{k}} , \quad u\in(0,1),\ p\in(0,1),\ k,n_1\in N .$$

Uvedimo oznake $M(t)=(f(t))^k$; $(1-p)u^k = 1-z$. Iz (6) sledi:

$$\left[\frac{zM(t)}{1-(1-z)M(t)}\right]^{n_1} = M(\zeta(z)\cdot t), \quad t\in(0,+\infty), \qquad (15)$$

gde je $\zeta(z)$ realna funkcija na $(p,1)$,

$$\zeta(z) = \frac{1}{t}M^{-1}\left(\left[\frac{zM(t)}{1-(1-z)M(t)}\right]^{n_1}\right) ,$$

koja je diferencijabilna i njen izvod se nigde ne anulira. Posle diferenciranja (15) po t i z, uz malu transformaciju dobijamo:

$$\frac{tM'(t)}{M(t)(1-M(t))} = \frac{\zeta(z)}{z\zeta'(z)}, \quad t\in(0,+\infty),\ z\in(p,1). \tag{16}$$

Označimo sa $\frac{1}{a_0}$ levu stranu od (16) za fiksirano t. Sledi da je $\frac{a_0}{z} = \frac{\zeta'(z)}{\zeta(z)}$, odakle $\zeta(z) = \frac{z^{a_0}}{a_1}$.

Da bismo dobili $M(t)$, napisaćemo (16) na sledeći način (gde je sa b_0 označena desna strana od (16), za z fiksirano):

$$\frac{b_0}{t} = \frac{M'(t) - 2M(t)M'(t) + 2M(t)M'(t)}{M(t)(1-M(t))}.$$

Odatle sledi $b_0 \ln t = \ln(M(t)(1-M(t))) - 2\ln(1-M(t)) + \ln C$,

odnosno

$$M(t) = \frac{1}{1+ct^{-b_0}}.$$

Pošto je $M(t)$ K-ti stepen Laplaceove transformacije $f(t)$, mora biti $c>0$, $-b_0 = \alpha\in(0,1]$. Funkcije $M(t)$ i $\zeta(z)$ su rešenja jednačine (15) samo tada kada je $n_1=1$, $a_1=1$, $\frac{1}{a_0} = -\frac{1}{\alpha}$.

Dobili smo sledeće:

$$f(t) = \frac{1}{(1+ct^{\alpha})^{\frac{1}{k}}}$$

$$C(s) = \frac{1}{(1-(1-p)s^{K})^{\frac{1}{\alpha}}}.$$

Ovim je Teorema 2.2.1. dokazana uz pretpostavku da je radijus konvergencije od $P(u)$ veći od 1. Ukoliko bi radijus konvergencije od $P(u)$ bio jednak 1, umesto $P(u)$, posmatrali bismo funkciju $P_\varepsilon(u)$, gde je

$$P_0(u) = \frac{P(u_0 u)}{P(u_0)}, \quad |u| \le 1,$$

a $u_0 \in (0,1)$ je konstanta. Tada $P_0(u)$ ima radijus konvergencije veći od 1 i, osim toga, zadovoljava sledeću funkcionalnu jednačinu:

$$\frac{P_0(u f(t))}{P_0(u)} = f(C_0(u)t), \quad t \in [0,+\infty), \; u \in (0,1],$$

gde je $C_0(u) = C(u_0 \cdot u)$. Rešenja (P_0, f, C_0) te jednačine su oblika (7), i ona su istovremeno i rešenja jednačine (6). Dokaz je završen.∎

Mi smo pretpostavljali da je $P(u)$ funkcija generatrisa nedegenerisane slučajne promenljive. Sada ćemo da prodiskutujemo rešenja jednačine (6) u slučaju kada je $P(u)$ funkcija generatrisa degenerisane slučajne promenljive. U tom slučaju jednačina (6) se svodi na sledeću jednačinu:

$$(f(t))^n = f(ct), \quad t \in [0,+\infty), \; n \in N. \tag{17}$$

Konstanta C ne može biti manja od 1, zato što je funkcija $f(t)$ opadajuća i uzima vrednosti u intervalu $(0,1]$. Pretpostavimo da je $C=1$. Tada ako je i $n=1$, funkcija $f(t)$ može biti proizvoljna, a ukoliko je $n>1$, tada je $f(t)$ Laplaceova transformacija degenerisane slučajne promenljive.

Neka je $C>1$, $n>1$. Pošto je $f(t) \neq 0$ za svako $t \in [0,+\infty)$, možemo da napišemo

$$f(t) = e^{u(t)},$$

i (17) postaje

$$e^{nu(t)} = e^{u(ct)},$$

odnosno

$$n u(t) = u(ct) . \tag{18}$$

Neka su $u_1(t)$, $u_2(t)$ dva rešenja jednačine (18), i neka je

$$g(t) = \frac{u_1(t)}{u_2(t)} .$$

Tada iz (18) sledi

$$g(t) = \frac{u_1(t)}{u_2(t)} = \frac{u_1(ct)}{u_2(ct)} = g(ct) .$$

Neka je

$$h(\ln t) = g(t) ,$$

odatle sledi

$$h(\ln t) = h(\ln t + \ln c) ,$$

odnosno

$$h(s) = h(s + \ln c) .$$

Dakle dobijamo:

$$u(t) = u_0(t)\, h(\ln t)$$

$$f(t) = (f_0(t))^{h(\ln t)} = e^{u_0(t) h(\ln t)} .$$

Iz (17) sledi

$$(f(t))^n = (f_0(t))^{n h(\ln t)} = (f_0(ct))^{h(\ln t)} =$$

$$= (f_0(ct))^{h(\ln t + \ln c)} = f(ct) .$$

Jedno rešenje jednačine (17) je

$$f_0(t) = \exp(-t^{\beta}) , \quad 0<\beta<1 .$$

Izračunajmo β . Pošto važi da je

$$u_0(t) = -t^{\beta} ,$$

$$-nt^{\beta} = -(n^{1/\beta} t)^{\beta} = u_0(ct) ,$$

sledi da je $c = n^{1/\beta}$, odakle $\beta = \dfrac{\ln n}{\ln c}$.

Pošto je

$$f(t) = \exp\left(-t^{\beta} h(\ln t)\right),$$

onda je

$$h(\ln t) = -t^{\beta} \ln f(t).$$

Kada je $h(\ln t)$ konstantno, $f(t)$ je Laplaceova transformacija stabilne ([6], str. 448) funkcije raspodele.

PRIMEDBA. Postavlja se prirodno pitanje kakva su rešenja jednačine (6) kada su $P(u)$ i $C(u)$ isti kao i do sada, a $f(t)$ predstavlja karakterističnu funkciju slučajne promenljive koja ne mora uzimati samo pozitivne vrednosti. U paragrafu 2.1. nadjeno je rešenje jednačine (4) pri uslovu da slučajna promenljiva ν ima geometrijsku funkciju raspodele, a $f(t)$ je karakteristična funkcija slučajne promenljive proizvoljnog znaka. Lako se vidi da ako su $P(u)$ i $C(u)$ isti kao u (7), a

$$f(t) = \frac{1}{(1 + v(t))^{\frac{1}{k}}}$$

gde je

$$v(t) = \left(c_0 + i c_1 \frac{t}{|t|}\right) |t|^{\alpha}, \quad 0 < \alpha \leq 2, \; c_0 \geq 0, \; c \in R, \; k \in N,$$

tada (P, f, C) jeste rešenje jednačine (6). Postavlja se pitanje da li u datoj klasi funkcija postoje i druga rešenja, osim ovog pomenutog.

2.3. JEDNA KARAKTERIZACIJA RASPODELE DEGENERISANE U NULI

Sadržaj ovog paragrafa nije sam po sebi naročito interesantan zbog toga što će u njemu biti data karakterizacija raspodele degenerisane u nuli. Medjutim, zajedno sa paragrafima 4.2. i 4.3., ovaj paragraf predstavlja primer situacije u kojoj se rezultati za sume razlikuju od odgovarajućih rezultata za maksimume.

Neka su $X_1, X_2, \dots, X_k, \dots$ nezavisne i jednako raspodeljene slučajne promenljive sa funkcijom raspodele $F(x)$. Od slučajnih promenljivih $X_1, X_2, \dots$ obrazovaćemo sume:

$$Y_1 = X_1\ ,\quad Y_2 = X_1 + X_2\ , \dots ,\quad Y_k = X_1 + X_2 + \dots + X_k\ , \dots$$

Za zadano p $(0 \leq p < 1)$, eliminisaćemo, nezavisno od drugih, sumu Y_k sa verovatnoćom p. Označimo sa $F_p(x)$ funkciju raspodele prve neeliminisane sume. Tada je

$$F_p(x) = \sum_{k=1}^{\infty} p^{k-1} q\, F^{*(k)}(x)\ , \tag{1}$$

gde je $q = 1-p$, a $F^{*(k)}(x)$ - funkcija raspodele od Y_k. U terminima karakterističnih funkcija jednakost (1) postaje:

$$f_p(t) = q \sum_{k=1}^{\infty} p^{k-1} (f(t))^k = \frac{q f(t)}{1-(1-q) f(t)}\ ,$$

gde su $f_p(t)$ i $f(t)$ karakteristične funkcije od funkcija raspodele $F_p(x)$ i $F(x)$.

Označimo sa D klasu takvih funkcija raspodele za koje važi sledeće: za svako p, q $(p+q=1, p>0)$, postoje realne funkcije $\alpha(q) > 0$ i $\beta(q) \neq 0$, tako da za svako t, karakteristična funkcija $f_p(t)$ prve neeliminisane sume zadovoljava sledeću jednakost:

$$f_p(t) \equiv f(\alpha(q)t + \beta(q)) .$$

TEOREMA 2.3.1. Funkcija raspodele $F(x)$ pripada klasi $\mathcal{D}$ ako i samo ako je degenerisana u nuli.

DOKAZ. Ako je funkcija raspodele $F(x)$ degenerisana u nuli, lako se proverava da njene karakteristična funkcija $f(t) \equiv 1$ zadovoljava jednačinu (2)

$$\frac{q f(t)}{1-(1-q)f(t)} = f(\alpha(q)t + \beta(q)) , \quad \alpha(q)>0 , \beta(q) \neq 0 , \qquad (2)$$

za svako q , i svako t .

Obrnuto, pretpostavimo da funkcija raspodele $F(x)$ pripada klasi $\mathcal{D}$, odnosno, da njena karakteristična funkcija $f(t)$ zadovoljava jednačinu (2). Neka je $t=0$, tada iz (2) sledi da je $f(\beta(q))=1$. Neka je $t=\beta(q) \neq 0$, onda imamo

$$1 = \frac{q f(\beta(q))}{1-(1-q)f(\beta(q))} = f(\alpha(q)\beta(q) + \beta(q)) .$$

Nastavljajući dalje taj postupak, dobija se da za svako n važi

$$f(\beta(q)(\alpha^n(q) + \alpha^{n-1}(q) + \ldots + \alpha(q) + 1)) = 1 .$$

Dakle, za svaku tačku t_i oblika

$$t_i = \beta(q)(\alpha^i(q) + \alpha^{i-1}(q) + \ldots + \alpha(q) + 1) \qquad (3)$$

važi da je $f(t_i)=1$. Odatle sledi ([24], str. 33) da je $f(t)$ karakteristična funkcija čisto diskretne raspodele $F(x)$. Iz toga što je $f(t_i) = 1$, sledi ([24], str. 33) da su tačke prekida raspodele $F(x)$ sadržane u skupu nula funkcije $1-\cos(t_i x)$ što znači da su tačke prekida raspodele $F(x)$ oblika $\frac{2\pi k}{t_i}$, $k \in Z$, $i=0,1,\ldots$ odnosno

$$\frac{2\pi k}{\beta(q)(\alpha^i(q)+\alpha^{i-1}(q)+\ldots+\alpha(q)+1)}, \quad k \in Z, \quad i=0,1,2,\ldots$$

Dakle, tačke prekida raspodele $F(x)$ se sadrže u skupu M_n , za svako $n=0,1,2,\ldots$:

$$M_n = \left\{ \frac{2\pi k}{\beta(q)(\alpha^n(q)+\alpha^{n-1}(q)+\ldots+\alpha(q)+1)}, \quad k \in Z \right\},$$

pa se tačke prekida raspodele $F(x)$ sadrže i u $\bigcap_n M_n$. Odatle sledi da ako je ξ tačka prekida funkcije raspodele $F(x)$, ona je oblika

$$\xi = \frac{2\pi k_0}{\beta(q)} = \frac{2\pi k_1}{\beta(q)(\alpha(q)+1)} = \frac{2\pi k_2}{\beta(q)(\alpha^2(q)+\alpha(q)+1)} = \ldots \tag{4}$$

za neke $k_0, k_1, k_2, \ldots \in Z$. Drugim rečima, pošto se sve tačke prekida nalaze u skupu $\bigcap_n M_n$, onda za svako n mora da postoji $k_n \in Z$ tako da je

$$\xi = \frac{2\pi k_n}{\beta(q)(\alpha^n(q)+\alpha^{n-1}(q)+\ldots+\alpha(q)+1)}.$$

Ako skratimo niz jednačina (4) sa $\frac{2\pi}{\beta(q)}$, dobojamo:

$$k_0 = \frac{k_1}{\alpha(q)+1} = \frac{k_2}{\alpha^2(q)+\alpha(q)+1} = \ldots \tag{5}$$

Iz prve jednačine dobija se da je

$$\alpha(q) = \frac{K_1}{K_0} - 1 \; . \tag{6}$$

Iz (6) sledi da je $\alpha(q)$ racionalan broj, pa ga možemo napisati na sledeći način: $\alpha(q) = \frac{p_1}{p_2}$, $p_1, p_2 \in Z$, i p_1, p_2 su uzajamno prosti brojevi. Ako $\alpha(q)$ iz (6) zamenimo u (5), dobijamo:

$$K_0 = \frac{K_1}{\frac{p_1}{p_2} + 1} = \frac{K_2}{\frac{p_1^2}{p_2^2} + \frac{p_1}{p_2} + 1} = \;\; \ldots \;\; ,$$

odnosno

$$K_0 = \frac{K_1 p_2}{p_1 + p_2} = \frac{K_2 p_2^2}{p_2^2 + p_1 p_2 + p_1^2} = \;\; \ldots$$

Pošto je K_0 ceo broj, ceo broj je i $\frac{K_1 p_2}{p_1 + p_2}$. Pošto su p_1 i p_2 uzajamno prosti brojevi, prosti su i $p_1 + p_2$ sa p_2. Odatle sledi da se $p_1 + p_2$ sadrži u K_1 bez ostatka, pa je, prema tome K_0 deljiv sa p_2. Na isti način je K_0 deljiv sa p_2^n za svako $n = 1, 2, \ldots$. Odatle sledi da mora biti $K_0 = 0$, što znači da diskretna funkcija raspodele $F(x)$ ima samo jednu tačku prekida, i to u nuli. ∎

3. MAKSIMUMI SLUČAJNOG BROJA SLUČAJNIH PROMENLJIVIH

3.1. KLASIČNA TEORIJA I TEOREMA PRENOSA

U klasičnoj teoriji ekstremalnih vrednosti izučavane su granične raspodele za maksimume rastućeg broja nezavisnih i jednako raspodeljenih slučajnih promenljivih. Preciznije rečeno, razmatrani su nizovi nezavisnih slučajnih promenljivih

$$X_1, X_2, \dots, X_n, \dots \tag{1}$$

sa istom funkcijom raspodele $F(x)$. Ako označimo:

$$Y_n = \max\{X_1, \dots, X_n\}, \quad n=1,2,\dots, \tag{2}$$

tada je $P\{Y_n < x\} = (F(x))^n$.

Za funkciju raspodele $F(x)$ kaže se da pripada oblasti privlačenja nedegenerisane funkcije raspodele $G(x)$, ako postoje konstante $a_n>0$ i b_n tako da

$$\lim_{n\to\infty} (F(a_n x + b_n))^n = G(x)$$

u svakoj tački neprekidnosti funkcije $G(x)$.

Osnovna teorema ove teorije glasi [11]:

TEOREMA. Neka je dat niz (1) nezavisnih, jednako raspodeljenih slučajnih promenljivih sa funkcijom raspodele $F(x)$. Pretpostavimo da za neke nizove konstanti $a_n>0$ i b_n važi

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\frac{Y_n - b_n}{a_n} < x\right\} = G(x)$$

u svakoj tački neprekidnosti funkcije $G(x)$, gde je $G(x)$ nedegenerisana funkcija raspodele, a Y_n je definisano sa (2). Tada pripada jednom od sledeća tri ekstremalna tipa raspodela:

1. $\Lambda(x) = e^{-e^{-x}}, \quad -\infty < x < +\infty,$

2. $\Phi_\alpha(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ e^{-x^{-\alpha}}, & x > 0 \end{cases}, \quad \alpha > 0,$

3. $\Psi_\alpha(x) = \begin{cases} e^{-(-x)^\alpha}, & x \leq 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}, \quad \alpha > 0.$

Prva dva od pomenutih tipova otkrio je M.Fréchet, a treći R.A.Fischer i L.H.C.Trippett [19], [11]. Dovoljne uslove za pripadanje oblastima privlačenja ekstremalnih graničnih raspodela dao je R. von Mises. Najpotpunije rezultate, koji su u izvesnom smislu završili teoriju graničnih raspodela za maksimume nezavisnih i jednako raspodeljenih slučajnih promenljivih, dao je B.V.Gnedenko [11]. U [11] su dati neophodni i dovoljni uslovi da neka raspodela pripada oblasti privlačenja jednog od tri pomenuta ekstremalna tipa raspodela, i dokazano je da samo ta tri tipa raspodela imaju nepraznu oblast privlačenja.

U poslednje vreme, kao i kod sumiranja slučajnih promenljivih, pojavili su se radovi u kojima su razmatrane granične teoreme za maksimume slučajnog broja slučajnih promenljivih.

U radu [14] bila je posmatrana sledeća situacija. Dati su nizovi:

a) nezavisnih i za svako n jednako raspodeljenih slučajnih promenljivih X_{nk},

$$P\{X_{nk} < x\} = F_n(x), \quad k=1,2,\dots;$$

b) celih pozitivnih brojeva k_n ($k_n \to +\infty$ kad $n \to +\infty$);

c) celobrojnih, nenegativnih slučajnih promenljivih ν_n, koje su za svako n nezavisne od promenljivih X_{nk}, $k=1,2,\dots$

Uvedimo oznake

$$Y_{k_n} = \max_{1\le k\le k_n} X_{nk}, \qquad Y_{\nu_n} = \max_{1\le k\le \nu_n} X_{nk}.$$

U radu [14] je dokazana sledeća teorema, koja je u nekim specijalnim slučajevima bila data i u radovima [2],[3] i [30].

TEOREMA. Pretpostavimo da, kad $n\to\infty$, važi:

A) $P\{ Y_{k_n} < x \} \to G(x)$;

B) $P\{ \frac{\nu_n}{k_n} < x \} \to A(x)$,

gde su $G(x)$ i $A(x)$ funkcije raspodele. Tada važi

C) $P\{ Y_{\nu_n} < x \} \to H(x)$,

gde je $H(x) = \int_0^{+\infty} (G(x))^z \, dA(z)$.

Prirodno je da se upitamo da li važe obratne teoreme? Drugim rečima, možemo li da tvrdimo da iz uslova A) i C) sledi B) i iz uslova B) i C) da sledi uslov A)? Rad [26] je posvećen rešavanju sličnih problema u teoriji sumiranja slučajnog broja slučajnih promenljivih. Cilj sledećeg paragrafa je da se dokažu obratne teoreme.

3.2. OBRATNE TEOREME

TEOREMA 3.2.1. Pretpostavimo da važe uslovi B) i C). Tada, ako $A(x)$ nije raspodela degenerisana u nuli, važi uslov A).

DOKAZ. Pretpostavićemo da je niz Y_{k_n} stohastički ograničen. Tada je, da bi se dokazala teorema, dovoljno da se dokaže da svaki konvergentan podniz niza $P\{Y_{k_n} < x\}$ konvergira ka istoj graničnoj funkciji raspodele.

Pretpostavimo da to ne važi, tj. da postoje dva podniza n' i n'' niza n, tako da

$$P\{Y_{k_{n'}} < x\} \underset{n'\to\infty}{\longrightarrow} G_1(x) \quad \text{i} \quad P\{Y_{k_{n''}} < x\} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} G_2(x) ,$$

gde su $G_1(x)$, $G_2(x)$ različite funkcije raspodele. Iz teoreme prenosa sledi da, za svako x, važi

$$H(x) = \int_0^{+\infty} (G_1(x))^z dA(z) = \int_0^{+\infty} (G_2(x))^z dA(z) . \tag{1}$$

Pošto je gunkcija raspodele $A(x)$ nedegenerisana, sledi da je funkcija $I(t) = \int_0^{+\infty} t^z dA(z)$ strogo monotona na $[0,1]$. Tada iz (1) sledi da je $G_1(x) \equiv G_2(x)$, što protivreči gornjoj pretpostavci. Na taj način je dokazana teorema uz dodatnu pretpostavku o stohastičkoj ograničenosti niza Y_{k_n}.

Sada ćemo da dokažemo da je niz Y_{k_n} stohastički ograničen.

Pretpostavimo suprotno, da postoji $\varepsilon_0 > 0$ takvo da

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \; P\{ |Y_{k_n}| > x \} \geq \varepsilon_0 , \quad \text{za svako} \quad x \geq 0 .$$

Moguća su dva slučaja:

a) $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \; P\{ Y_{k_n} > x\} \geq \frac{\varepsilon_0}{2}$ za $x > 0$,

b) $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \; P\{ Y_{k_n} < -x\} \geq \frac{\varepsilon_0}{2}$ za $x > 0$,

što odgovara slučajevima kada stohastička ograničenost nije ispunjena na pozitivnom, odnosno negati...

Prvo ćemo posmatrati slučaj a). Pošto je $A(x)$ nedegenerisana, postoje $\varepsilon_1>0$ i $b>0$ takvi da za dovoljno veliko n, važi

$$P\left\{ \frac{\nu_n}{k_n} \geq b \right\} \geq \varepsilon_1 . \tag{2}$$

Jasno je da za $l \geq m$ važi

$$P\{ Y_l > x \} \geq P\{ Y_m > x \} . \tag{3}$$

Iz (2) i(3) i nezavisnosti ν_n od X_{nk} važe sledeće nejednakosti:

$$P\{ Y_{\nu_n} > x \} = \sum_{k=0}^{\infty} P\{ Y_k > x \} P\{\nu_n = k\} \geq \sum_{k \geq [b \cdot k_n]} P\{ Y_k > x \} P\{\nu_n = k\} \geq$$

$$\geq \sum_{k \geq [b \cdot k_n]} P\{ Y_{[b \cdot k_n]} > x \} P\{\nu_n = k\} = P\{ Y_{[b \cdot k_n]} > x \} \cdot P\{ \nu_n \geq [b \cdot k_n] \} . \tag{4}$$

Pokažimo da, ako važi a), onda postoji $\varepsilon_2>0$ tako da je

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \; P\{ Y_{[b \cdot k_n]} > x \} \geq \varepsilon_2 , \tag{5}$$

tj. niz $Y_{[b \cdot k_n]}$'je takodje stohastički neograničen.

Ukoliko je u (2) $b \geq 1$, onda je $[b \cdot k_n] \geq k_n$. Tada iz (3) sledi (5) i može da se uzme da je $\varepsilon_2 \geq \frac{\varepsilon_0}{2}$. Ako je $b<1$, izaberimo broj k_0 takav da važi $\frac{1}{k_0} \leq b$. Tada, pošto je

$$P\left\{ \frac{\nu_n}{k_n} \geq \frac{1}{k_0} \right\} \geq P\left\{ \frac{\nu_n}{k_n} \geq \frac{1}{b} \right\} \geq \varepsilon_1 ,$$

onda možemo da pretpostavimo da je u (2) $b = \frac{1}{k_0}$.

Označimo $l_n = (k_0+1)\left[\frac{k_n}{k_0}\right]$. Očigledno je da je $l_n \geq k_n$ za dovoljno veliko n, pa iz (3) važi

$$P\{ Y_{k_n} > x \} \leq P\{ Y_{l_n} > x \} = 1 - P\{ Y_{l_n} \leq x \} = 1 - \left(P\{ Y_{\left[\frac{k_n}{k_0}\right]} \leq x \} \right)^{k_0+1} .$$

Pošto je

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \left(1 - \left(P\{ Y_{\left[\frac{k_n}{k_0}\right]} \leq x \} \right)^{k_0+1} \right) \geq \overline{\lim_{n\to\infty}} \left(1 - P\{ Y_{k_n} \leq x \} \right) \geq \frac{\varepsilon_0}{2} ,$$

onda važi

$$\lim_{n\to\infty} \left(P\{ Y_{\left[\frac{k_n}{k_0}\right]} < x \} \right)^{k_0+1} \leq 1 - \frac{\varepsilon_0}{2} ,$$

to jest

$$\lim_{n\to\infty} P\{ Y_{\left[\frac{k_n}{k_0}\right]} < x \} \leq \left(1 - \frac{\varepsilon_0}{2} \right)^{\frac{1}{k_0+1}} \leq 1 - \varepsilon_2 ,$$

odakle sledi

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \left(1 - P\{ Y_{\left[\frac{k_n}{k_0}\right]} < x \} \right) = \overline{\lim_{n\to\infty}} P\{ Y_{\left[\frac{k_n}{k_0}\right]} \geq x \} \geq \frac{\varepsilon_0}{2} ,$$

čime je dokazano naše tvrdjenje pod pretpostavkom a).

Prema tome, iz (4) i (2) sledi da je

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} P\{ Y_{\nu_n} > x \} \geq \varepsilon_2 \cdot \varepsilon_1 ,$$

što je u suprotnosti sa stohastičkom ograničenošću niza Y_{ν_n} .

Sada prelazimo na slučaj b).

Pošto je $A(x)$ funkcija raspodele, može se naći $\alpha > 0$ i ceo broj $r > 0$ tako da za dovoljno veliko n važi

$$P\left\{ \frac{\nu_n}{k_n} \leq r \right\} \geq \alpha . \tag{6}$$

Za $l \geq m$ važi

$$P\{ Y_l < x \} \leq P\{ Y_m < x \} . \tag{7}$$

Iz (7) i nezavisnosti ν_n od X_{nk} sledi

$$P\{ Y_{\nu_n} < x \} = \sum_{k=0}^{\infty} P\{ Y_k < x \} P\{ \nu_n = k \} \geq \sum_{k=0}^{r\cdot k_n} P\{ Y_k < x \} P\{ \nu_n = k \} \geq$$

$$\geq P\{ Y_{r\cdot k_n} < x \} P\{ \nu_n \leq r\cdot k_n \} = \left(P\{ Y_{k_n} < x \} \right)^r P\left\{ \frac{\nu_n}{k_n} \leq r \right\} , \tag{8}$$

odakle, koristeći (6) i činjenicu da je u pitanju slučaj b), dobijamo

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} P\{ Y_{\nu_n} < x \} \geq \left(\frac{\varepsilon_0}{2}\right)^{k} \cdot \alpha \ , \qquad \forall x<0 \ ,$$

što protivreči stohastičkoj ograničenosti niza Y_{ν_n} . Time je Teorema 3.2.1. potpuno dokazana. ▌

Sada ćemo preći na drugu obratnu teoremu prenosa. Ona će biti dokazana u važnom specijalnom slučaju. Pretpostavimo da je $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ niz nezavisnih i jednako raspodeljenih slučajnih promenljivih

$$P\{ X_n < x \} = F(x) \ , \quad n = 1, 2, \dots$$

Iz tog niza formirajmo novi niz $Y_1, Y_2, \dots, Y_n, \dots$ za koji važi da je $Y_n = \max\{X_1, \dots, X_n\}$. Pretpostavimo da pri odgovarajućem izboru normirajućih i centrirajućih konstanti $a_n > 0$ i b_n , funkcije raspodela promenljivih $\frac{Y_n - b_n}{a_n}$ konvergiraju, kad $n \to \infty$, graničnoj funkciji

A') $$P\{ \frac{Y_n - b_n}{a_n} < x \} \longrightarrow G(x) .$$

Kao što je poznato iz paragrafa 1, klasa graničnih raspodela u tom slučaju sadrži samo raspodele tri tipa (1.,2. i 3.). U daljem dokazu koristićemo očiglednu činjenicu da su raspodele sva ta tri tipa neprekidne na celoj realnoj pravoj.

Neka je ν_n niz celobrojnih, nenegativnih slučajnih promenljivih, koje ne zavise od promenljivih X_k i za koje važi:

B') $$P\{ \frac{\nu_n}{n} < x \} \xrightarrow[n\to\infty]{} A(x) \ ,$$

gde je $A(x)$ neka nedegenerisana funkcija raspodele. U tom slučaju, prema teoremi prenosa, važi

C') $$P\{ \frac{Y_{\nu_n} - b_n}{a_n} < x \} \xrightarrow[n\to\infty]{} H(x)$$

gde je

$$H(x) = \int_0^{+\infty} \left(G(x)\right)^z dA(z). \tag{9}$$

Koristeći oznake iz prethodnog paragrafa, imamo da je:

$$X_{nk} = \frac{X_k - b_n}{a_n} \quad , \quad k_n = n.$$

TEOREMA 3.2.2. Pretpostavimo da važe uslovi A')iC') . Tada važi B') .

DOKAZ. Pretpostavimo da je niz $\frac{\nu_n}{n}$ stohastički ograničen. Da bismo dokazali B'), dovoljno je dokazati da svaki konvergentan podniz $P\{ \frac{\nu_{n_k}}{n_k} < x\}$ niza $P\{ \frac{\nu_n}{n} < x\}$ konvergira ka istoj graničnoj raspodeli.

Pretpostavimo da to ne važi, tj. da postoje dva podniza n' i n'' niza n , tako da važi

$$A_{n'}(x) = P\{ \frac{\nu_{n'}}{n'} < x \} \underset{n'\to\infty}{\longrightarrow} A_1(x) ,$$

$$A_{n''}(x) = P\{ \frac{\nu_{n''}}{n'} < x \} \underset{n''\to\infty}{\longrightarrow} A_2(x) ,$$

gde su $A_1(x)$ i $A_2(x)$ različite funkcije raspodele. Tada, prema teoremi prenosa, važi

$$H(x) = \int_0^{+\infty} \left(G(x)\right)^z dA_1(z) = \int_0^{+\infty} \left(G(x)\right)^z dA_2(z) . \tag{10}$$

Uvedimo oznake: $I_1(t) = \int_0^{+\infty} t^z dA_1(z)$, $I_2(t) = \int_0^{+\infty} t^z dA_2(z)$.

Funkcije $I_1(t)$ i $I_2(t)$ su analitičke u oblasti $\mathcal{D}=\{t: 0<|t|<1\}\cap\{t: \operatorname{Re} t > c$

Iz (10) sledi da za svako realno x važi jednakost

$$I_1(G(x)) = I_2(G(x)) . \tag{11}$$

Pošto je $G(x)$ neprekidna funkcija raspodele, jednakost (11) znači da se dva analitičke funkcije u oblasti $\mathcal{D}$ poklapaju na odsečku koji leži u oblasti $\mathcal{D}$. Na osnovu teoreme jedinstvenosti za analitičke funkcije sledi da se funkcije $I_1(t)$ i $I_2(t)$ poklapaju u oblasti $\mathcal{D}$, odakle sledi da je $A_1(x) \equiv A_2(x)$. Time je dokazana Teorema 3.2.2., pod pretpostavkom da je niz $\frac{\gamma_n}{n}$ stohastički ograničen.

Još ostaje da se dokaže stohastička ograničenost niza $\frac{\gamma_n}{n}$. Pretpostavimo suprotno, da postoji $\varepsilon_0 > 0$ i niz n_r, $n_r \xrightarrow[r\to\infty]{} +\infty$ tako da važi:

$$P\left\{ \frac{\gamma_{n_r}}{n_r} \geqslant r \right\} \geqslant \varepsilon_0 . \tag{12}$$

Prema uslovu A')$,$ niz $G_{n_r}(x) = P\{Y_{n_r} < x\}$ konvergira ka funkciji $G(x)$ kad $r \to +\infty$.

Pretpostavimo da a) funkcija $G(x)$ pripada ili tipu $\Lambda(x)$, ili tipu $\Phi_\alpha(x)$.

U tom slučaju je za svako x , $G(x)$ strogo manje od 1 . Tada niz

$$P\{ Y_{r\cdot n_r} < x \} = G_{r\cdot n_r}(x) = \left(G_{n_r}(x) \right)^r$$

teži nuli kad $r \to +\infty$, za svako $x < +\infty$. Odatle sledi da postoji $\varepsilon_1 > 0$ takvo da za svako x

$$\varlimsup_{r\to\infty} P\{ Y_{r\cdot n_r} > x \} \geqslant \varepsilon_1 , \tag{13}$$

što znači da je niz funkcija raspodele $P\{Y_{r\cdot n_r} < x\}$ stohastički neograničen. Osim toga, za $K \geqslant r\cdot n_r$, važi

$$P\{ Y_{r\cdot n_r} > x \} \leq P\{ Y_K > x \} . \tag{14}$$

Iz nezavisnosti γ_n i X_n sledi

$$P\{ |Y_{\gamma_n}| > x \} = \sum_{K=1}^{\infty} P\{ |Y_K| > x \} P\{ \gamma_n = k \} .$$

Iz (12), (13) i (14) sledi

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} P\{|Y_{\nu_n}|>x\} \geq \overline{\lim_{r\to\infty}} P\{|Y_{\nu_{n_r}}|>x\} \geq \overline{\lim_{r\to\infty}} \sum_{k\geq r\cdot n_r} P\{|Y_k|>x\}\cdot$$

$$\cdot P\{\nu_{n_r}=k\} \geq \overline{\lim_{r\to\infty}} \sum_{k\geq r\cdot n_r} P\{Y_{r\cdot n_r}>x\}\cdot P\{\nu_{n_r}=k\} \geq$$

$$\geq \overline{\lim_{n\to\infty}} P\{Y_{r\cdot n_r}>x\}\cdot P\{\nu_{n_r}\geq r\cdot n_r\} \geq \varepsilon_1\cdot\varepsilon_0 ,$$

što je u suprotnosti sa stohastičkom ograničenošću niza Y_{ν_n}. Znači, u slučaju a), niz $\frac{\nu_n}{n}$ je stohastički ograničen.

Pretpostavimo b) da funkcija $G(x)$ pripada tipu $\Psi_\alpha(x)$. U tom slučaju postoji $x_0<+\infty$ tako da je $G(x_0+\varepsilon)=1$, a $G(x_0-\varepsilon)<1$, za svako $\varepsilon>0$. Prema teoremi prenosa važi

$$H(x) = \int_0^{+\infty} (G(x))^z \, dA(z) . \tag{15}$$

Pošto je funkcija $G(x)$ neprekidna u tački x_0, iz (15) sledi da je i $H(x)$ neprekidna u tački x_0.

U tom slučaju imamo

$$P\{Y_{r\cdot n_r}<x\} = G_{r\cdot n_r}(x) = (G_{n_r}(x))^r \xrightarrow[r\to\infty]{} \begin{cases} 1 & x>x_0 \\ 0 & x\leq x_0 \end{cases} .$$

Tada postoji $\varepsilon_2>0$ tako da za svako $x>0$

$$\overline{\lim_{r\to\infty}} P\{x_0-x\leq Y_{r\cdot n_r}<x_0+x\} \geq \varepsilon_2 ,$$

pa, prema tome, možemo da izaberemo podniz r' niza r, $r'\to\infty$ kad $r\to\infty$, tako da za svako $x>0$ i svako r' važi nejednakost:

$$P\{x_0-x\leq Y_{r'\cdot n_{r'}}<x_0+x\} \geq \varepsilon_2 . \tag{16}$$

Koristeći (3), (12) i (16), dobijamo da je:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} P\{x_0 - x \le Y_{\nu_n} < x_0 + x\} \ge \overline{\lim_{r'\to\infty}} P\{x_0 - x \le Y_{\nu_{n_{r'}}} \le x_0 + x\} =$$

$$= \overline{\lim_{r'\to\infty}} \sum_{k=1}^{\infty} P\{x_0 - x \le Y_k < x_0 + x\} \cdot P\{\nu_{n_{r'}} = k\} \ge$$

$$\ge \overline{\lim_{r'\to\infty}} \sum_{k \ge r' \cdot n_{r'}} P\{x_0 - x \le Y_k < x_0 + x\} \cdot P\{\nu_{n_{r'}} = k\} \ge$$

$$\ge \overline{\lim_{r'\to\infty}} P\{x_0 - x \le Y_{r' \cdot n_{r'}} < x_0 + x\} \cdot P\{\nu_{n_{r'}} \ge r' \cdot n_{r'}\} \ge \varepsilon_2 \cdot \varepsilon_1 .$$

Pošto je x proizvoljno, sledi da granična raspodela $H(x)$ ima prekid u tački x_0, što je nemoguće. Dobijena kontradikcija dokazuje stohastičku ograničenost niza $\frac{\nu_n}{n}$. ∎

3.3. KONVERGENCIJA KA EKSTREMALNIM RASPODELAMA U TEOREMI PRENOSA ZA MAKSIMUME

U teoriji slučajnog sumiranja prirodno se nameće pitanje da li se i pod kojim uslovima normalna raspodela, koja igra centralnu ulogu u klasičnim graničnim teoremama sumiranja, pojavljuje kao granična u teoriji slučajnog sumiranja. Odgovor na pitanje kada je normalna raspodela granična za sume slučajnog broja slučajnih promenljivih, dao je V.M.Kruglov u radu [22].

Kruglov je pokazao da jednačina

$$e^{-\frac{t^2}{2}} = \int_0^{+\infty} (\varphi(t))^z \, dA(z) \quad , \quad t \in R ,$$

(gde je $e^{-\frac{t^2}{2}}$ karakteristična funkcija normalne $N(0,1)$ raspodele, $\varphi(t)$ - karakteristična funkcija nekog beskonačno deljivog zakona, $A(z)$ - funkcija raspodele) ima jedinstveno rešenje u smislu sledeće definicije [22]:

DEFINICIJA. Jednačina

$$f(t) = \int_0^{+\infty} (\varphi(t))^z dA(z) \quad , \quad t \in R,$$

gde su $f(t)$, $\varphi(t)$ - karakteristične funkcije, $A(x)$ - funkcija raspodele, ima za zadatu funkciju $f(t)$ jedinstveno rešenje $(\varphi(t), A(x))$, ako su sva njena rešenja oblika

$$\varphi(t) \quad (f(t))^{s} \; ,$$

$$A(x) = \begin{cases} 1 \; , & y > \frac{1}{s} \\ 0 \; , & y \leq \frac{1}{s} \end{cases} \; ,$$

gde je s pozitivna konstanta.

Rezultat Kruglova znači da se normalna raspodela dobija kao granična u teoremi prenosa samo tada kada indeks sumiranja teži neslučajnoj veličini kad $n \to \infty$.

Postavlja se analogno pitanje za maksimume, tj. kada se tri ekstremalne raspodele

$$\Lambda(x) = e^{-e^{-x}} \quad , \quad -\infty < x < +\infty \; ,$$

$$\Phi_\alpha(x) = \begin{cases} 0 \; , & x \leq 0 \\ e^{-x^{-\alpha}} \; , & x > 0 \end{cases} \quad , \quad \alpha > 0 \; ,$$

$$\Psi_\alpha(x) = \begin{cases} e^{-(-x)^\alpha} \; , & x \leq 0 \\ 1 \; , & x > 0 \end{cases} \quad , \quad \alpha > 0$$

dobijaju kao granične za maksimume nizova slučajnog broja slučajnih promenljivih. Drugim rečima, postavlja se pitanje nalaženja rešenja $(G(x), A(x))$ za sledeće jednačine

$$H_i(x) = \int_0^{+\infty} (G(x))^y \, dA(y) \quad , \quad x \in R ,$$

gde su $G(x), A(x)$ funkcije raspodele, a $H_i(x)$, $i = 1,2,3$ ekstremalne raspodele.

Sledeći prosti primeri ukazuju na to da ne treba očekivati sličnu situaciju u smislu jedinstvenosti rešenja kao kod suma (s tim što u ovom slučaju u definiciji jedinstvenosti rešenja, umesto karakterističnih funkcija, imamo funkcije raspodele).

PRIMER 1. Neka je data jednačina

$$e^{-e^{-x}} = \int_0^{+\infty} (G(x))^y \, dA(y) \quad , \quad x \in R . \tag{1}$$

Neka je $A(y)$ raspodela diskretne slučajne promenljive

$$A(y) = \begin{cases} 0 \, , & y < 1 \\ \frac{2}{3} \, , & 1 \leq y < 2 \\ 1 \, , & y \geq 2 \end{cases} ,$$

a funkcija raspodele $G(x)$ je jednaka

$$G(x) \doteq \sqrt{1 + 3 e^{-e^{-x}}} - 1 \, , \quad x \in R .$$

Lako se proverava da takvi $G(x)$ i $A(y)$ jesu rešenja jednačine (1). Pošto $(G(x), A(y))$ jeste rešenje (1), ali nije oblika

$$A(y) = \begin{cases} 1 & y > \frac{1}{s} \\ 0 & y < \frac{1}{s} \end{cases} , \quad s > 0$$

$$G(x) = \left(e^{-e^{-x}} \right)^s \, , \quad x \in R \quad ,$$

rešenje jednačine (1) nije jedinstveno.

PRIMER 2. Neka je data jednačina (1). Ako je

$$A(y) = \begin{cases} 1 - e^{-y} \, , & y \geq 0 \\ 0 & y < 0 \end{cases}$$

$$G(x) = e^{(1 - e^{e^{-x}})} \quad , \quad x \in R$$

onda je $(G(x), A(y))$ rešenje jednačine (1).

Takodje, ukoliko bismo posmatrali jednačine kod kojih bi se, umesto funkcije $e^{-e^{-x}}, x \in R$, neke od sledećih funkcija nalazile na levoj strani jednačine (1)

$$e^{-x^{-\alpha}}, \quad x>0, \quad \alpha>0,$$

ili

$$e^{-(-x)^{\alpha}}, \quad x<0, \quad \alpha>0,$$

opet bi se lako konstruisali primeri iz kojih bi sledila nejedinstvenost rešenja odgovarajućih jednačina.

Dakle, za razliku od suma, kod maksimuma se ekstremalne raspodele pojavljuju kao granične i kada indeks ν_n ne teži neslučajnoj veličini.

Klasa svih mogućih graničnih raspodela $G(x)$ (definisanih u paragrafu 3.1. uslovom A)) poklapa se sa klasom svih funkcija raspodele. To se lako vidi, ukoliko se za raspodele $F_n(x)$ (definisane u paragrafu 3.1. uslovom A)) uzme:

$$F_n(x) \stackrel{'}{=} \left(G(x)\right)^{\frac{1}{k_n}}, \quad x \in R .$$

Iz toga što se klasa raspodela $G(x)$ poklapa sa klasom svih funkcija raspodele, sledi da svaka raspodela može da bude granična u teoremi prenosa za maksimume. Da bi se to videlo, dovoljno je uzeti

$$A(y) = \begin{cases} 1, & y \geq 1 \\ 0, & y < 1 \end{cases}$$

$$H(x) = G(x), \quad x \in R .$$

Pošto svaka raspodela može da bude granična u teoremi prenosa, sledeća teorema će da se odnosi na sve, a ne samo na ekstremalne raspodele. Ona ima za cilj da opiše nejedinstvenost rešenja u teoremi prenosa za maksimume.

TEOREMA 3.3.1. Neka je zadana funkcija raspodele $H(x)$. Tada za svaku funkciju raspodele $A(y)$ nenegativne slučajne prommenljive koja zadovoljava uslov $A(0)=0$, postoji funkcija raspodele $G(x)$ tako da je zadovoljeno

$$H(x) = \int_0^{+\infty} (G(x))^y \, dA(y) \quad , \quad x \in R . \tag{2}$$

DOKAZ. Hoćemo da nadjemo funkciju raspodele $G(x)$, tako da za zadane $H(x)$ i $A(y)$ važi (2).

Označimo sa $\mathcal{L}(t)$ Laplaceovu transformaciju funkcije raspodele $A(y)$:

$$\mathcal{L}(t) = \int_0^{+\infty} e^{-ty} dA(y) \quad , \quad t \geq 0 .$$

Tada (2) možemo da napišemo kao:

$$H(x) = \int_0^{+\infty} (G(x))^y dA(y) = \int_0^{+\infty} e^{-y(-\ln G(x))} dA(y) =$$

$$= \mathcal{L}(-\ln G(x)) .$$

Pošto je funkcija $\mathcal{L}(t)$ Laplaceova transformacija, ona je neprekidna i strogo monotono opadajuća, pa ima inverznu funkciju $\mathcal{L}^{-1}(s)$. Dalje imamo

$$\mathcal{L}^{-1}(H(x)) = -\ln G(x) ,$$

odnosno

$$G(x) = e^{-\mathcal{L}^{-1}(H(x))} . \tag{3}$$

Na osnovu konstrukcije jasno je da dobijena funkcija $G(x)$ zadovoljava jednačinu (2). Pokazaćemo još da ona jeste funkcija raspodele, odnosno da je neopadajuća, neprekidna sa leve strane i $G(-\infty)=0$, $G(+\infty)=1$:

i) Pošto je $H(x)$ monotono neopadajuća, a $\mathcal{L}^{-1}(H(x))$ monotono nerastuća, onda je $G(x)$ iz (3) monotono neopadajuća;

ii) neprekidnost sa leve strane automatski sledi iz neprekidnosti sa leve strane funkcije $H(x)$ i neprekidnosti funkcije $\mathcal{X}^{-1}(s)$ i exp ;

iii) pošto je $H(+\infty)=1$, $\mathcal{X}(0)=1$, imamo

$$G(+\infty) = exp\left(-\mathcal{X}^{-1}(H(+\infty))\right) = exp\left(-\mathcal{X}^{-1}(1)\right) = exp(0) = 1 .$$

Uslov $A(0)=0$ povlači ([6], str. 443) $\mathcal{X}(+\infty)=0$, pa imamo:

$$G(-\infty) = exp\left(-\mathcal{X}^{-1}(H(-\infty))\right) = exp\left(-\mathcal{X}^{-1}(0)\right) = exp(-\infty) = 0 . \blacksquare$$

Sledeći primer pokazuje da, ukoliko uslov $A(0)=0$ nije ispunjen, ne mora , za zadato $H(x)$ i $A(y)$, da postoji funkcija raspodele $G(x)$ tako da je zadovoljena jednačina (2).

PRIMER 3. Neka je

$$H(x) = e^{-e^{-x}} , \quad x\in R$$

i $A(x)$ je Poissonova raspodela

$$A(x) = \sum_{k<x} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} , \quad \lambda>0 , \quad x\geq 0 .$$

Tada je funkcija

$$G(x) = 1 - \frac{e^{-x}}{\lambda} , \quad x\in R ,$$

jedino rešenje jednačine (2), ali ona nije funkcija raspodele zato što važi $G(-\infty)=-\infty$.

3.4. RAZDELJENE RAZLIKE I KOMPLETNO MONOTONE FUNKCIJE

U paragrafu 3.5. biće dokazana teorema, slična Teoremi 3.3.1. iz prethodnog paragrafa, koja će da daje dovoljne uslove koje moraju da zadovoljavaju funkcije raspodele $H(x)$ i $G(x)$, da bi postojala raspodela $A(y)$ tako da važi jednačina

$$H(x) = \int_0^{+\infty} (G(x))^y \, dA(y).$$

U dokazu te teoreme biće korišćeni pojmovi i rezultati iz ovog paragrafa.

DEFINICIJA 1. ([8]) Funkcija $f : [0,+\infty) \to R$ je kompletno monotona ako je neprekidna, beskonačno diferencijabilna u intervalu $(0,+\infty)$ i ako je

$$(-1)^n f^{(n)}(t) \geq 0 \;, \qquad \text{za } n=0,1,2,\ldots, \text{ i za svako } t>0.$$

Pojam kompletno monotone funkcije je važan zbog toga što se pomoću njega daje karakterizacija Laplaceove transformacije.

Poznata Bernsteinova teorema ([6], str.439) glasi:

TEOREMA. Funkcija $\mathcal{L}(t)$ definisana na $[0,+\infty)$ je Laplaceova transformacija neke funkcije raspodele $F(x)$, ako i samo ako je $\mathcal{L}(t)$ kompletno monotona i $\mathcal{L}(0)=1$.

DEFINICIJA 2. ([29]) Neka je $f: T \to R$, $T \subseteq R$, i neka su $t_0, t_1, \ldots, t_n$ različiti elementi iz T. Tada se razdeljena razlika n-tog reda ($n=1,2,\ldots$) funkcije $f(t)$ definiše rekurentno na sledeći način:

$$f(t_0,t_1,\ldots,t_n) = \frac{f(t_1,\ldots,t_n) - f(t_0,\ldots,t_{n-1})}{t_n - t_0},$$

a razdeljena razlika nultog reda u tački $t \in T$ jednaka je vrednosti funkcije $f(t)$ u toj tački.

W.Feller je dokazao sledeću teoremu ([7],[8]) :

TEOREMA. Neka je dat skup $T = \{ t_0, t_1, \ldots \}$, $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n \longrightarrow +\infty$, takav da je

$$\sum_n \frac{1}{t_n} = +\infty ,$$

i neka je funkcija $f : T \to R$ takva da su njene razdeljene razlike parnog reda nenegativne, a neparnog reda nepozitivne. Tada postoji i jedinstvena je kompletno monotona funkcija $\varphi : [0,+\infty) \to R$, koja zadovoljava $\varphi(t_i) = f(t_i)$, $i = 1, 2, \ldots$

Važi sledeća teorema:

TEOREMA 3.4.1. Ako je funkcija $f : [0,+\infty) \to R$ neprekidna u nuli, i ako su njene razdeljene razlike parnog reda nenegativne, a neparnog reda nepozitivne, onda je $f(t)$ kompletno monotona funkcija.

DOKAZ. Označimo sa T sledeći skup :

$$T = \{ 0, 1, 2, \ldots \} .$$

Po pretpostavci, važi

$$(-1)^n f(t_0, t_1, \ldots, t_n) \geqslant 0 ,$$

gde su $t_0, t_1, \ldots, t_n$ različiti elementi skupa T.

Pošto su ispunjeni uslovi citirane Fellerove teoreme, sledi da postoji i jednoznačno je odredjena kompletno monotona funkcija $\varphi(t)$ koja se sa funkcijom $f(t)$ poklapa na skupu $T \setminus \{0\}$, odnosno

$$\varphi(t) = f(t) , \quad t \in T \setminus \{0\} .$$

Hoćemo da pokažemo da je $f(t)$ identički jednaka sa funkcijom $\varphi(t)$. Neka je $\tau \in (0,+\infty)$, $\tau \notin T$ i neka je $T' = T \cup \{\tau\}$. Opet na osnovu Fellerove teoreme sledi da postoji i jedinstvena je kompletno monotona funkcija koja se sa funkcijom $f(t)$ poklapa na skupu T'. Označimo tu funkciju sa $\varphi_\tau(t)$.

Medjutim, funkcije $\varphi(t)$ i $\varphi_\tau(t)$ se poklapaju na skupu T ; na osnovu teoreme Fellera sledi da su one identički jednake i, prema tome, važi

$$\varphi(\tau) = \varphi_\tau(\tau) = f(\tau).$$

Dakle, funkcije $f(t)$ i $\varphi(t)$ uzimaju iste vrednosti na intervalu $(0,+\infty)$, a pošto su obe neprekidne u nuli, onda one uzimaju istu vrednost i u nuli. ▮

NAPOMENA. Poznato je da važi obrnuto [8], da kompletno monotona funkcija ima razdeljene razlike parnog reda nenegativne, a neparnog reda nepozitivne. Prema tome, kompletna monotonija može da se definiše i preko razdeljenuh razlika.

DEFINICIJA 3. Neka su date funkcije $f: T \to R$, $g: T \to R$, i neka je $g(t)$ funkcija $1-1$. Tada se razdeljene razlike n-tog reda $n=1,2,\ldots$ funkcije $f(t)$ u odnosu na funkciju $g(t)$ definišu rekurentno sa

$$f_g(t_0,t_1,\ldots,t_n) = \frac{f_g(t_1,\ldots,t_n) - f_g(t_0,\ldots,t_{n-1})}{g(t_n)-g(t_0)},$$

$$t_0,t_1,\ldots,t_n \in T,$$

$$f_g(t) = f(t), \quad t\in T.$$

3.5.PITANJE JEDINSTVENOSTI REŠENJA U TEOREMI PRENOSA ZA MAKSIMUME - NASTAVAK

Pre nego što predjemo na dokaz glavne teoreme u ovom paragrafu, dokazaćemo dve leme, koje u izvesnom smislu služe kao obrazloženje za uslove koji se zahtevaju u teoremi.

LEMA 3.5.1. Neka je data jednačina

$$H(x) = \int_0^{+\infty} (G(x))^y \, dA(y), \tag{1}$$

gde su $H(x)$, $G(x)$ i $A(x)$ neke funkcije raspodele i $A(x)$ nije degenerisana u nuli. Tada je funkcija raspodele $H(x)$ neprekidna ako i samo ako je funkcija raspodele $G(x)$ neprekidna.

DOKAZ. Ako pretpostavimo da je funkcija $G(x)$ neprekidna u tački x_0, a da $H(x)$ u tački x_0 ima skok veličine ε, onda bi bilo

$$\varepsilon = H(x_0+0) - H(x_0-0) = \int_0^{+\infty} (G(x_0+0))^y \, dA(y) - \int_0^{+\infty} (G(x_0-0))^y \, dA(y) = 0,$$

što je kontradikcija.

Isto tako, ako pretpostavimo da je $H(x)$ neprekidna u tački x_0, a $G(x)$ u tački x_0 ima prekid veličine ε, dobićemo:

$$0 = H(x_0+0) - H(x_0-0) = \int_0^{+\infty} (G(x_0+0))^y \, dA(y) - \int_0^{+\infty} (G(x_0-0))^y \, dA(y) =$$

$$= \int_0^{+\infty} \left(\left(G(x_0-0) + \varepsilon \right)^y dA(y) - (G(x_0-0))^y \right) dA(y).$$

Pošto je u poslednjem integralu podintegralna funkcija strogo veća od nule, a $A(y)$ nije degenerisana u nuli, onda je i vrednost integrala pozitivna. Kontradikcija. ▌

LEMA 3.5.2. Neka je data jednačina (1), gde su $H(x)$, $G(x)$ i $A(x)$ neke funkcije raspodele i $A(x)$ nije degenerisana u nuli. Tada funkcije $H(x)$ i $G(x)$ imaju iste intervale konstantnosti.

DOKAZ. Neka su x_0, x_1, $x_0 < x_1$ dve tačke takve da važi $G(x_0) = G(x_1)$. Tada važi i

$$H(x_0) = \int_0^{+\infty} (G(x_0))^y \, dA(y) = \int_0^{+\infty} (G(x_1))^y \, dA(y) = H(x_1).$$

Pretpostavimo sada da su x_0 , x_1 , $x_0 < x_1$ takvi da važi $H(x_0) = H(x_1)$ i $G(x_0) < G(x_1)$. Odatle sledi

$$H(x_0) = \int_0^{+\infty} (G(x_0))^y \, dA(y) < \int_0^{+\infty} (G(x_1))^y \, dA(y) = H(x_1) ,$$

što je kontradikcija, dakle mora biti $G(x_0) = G(x_1)$. Gornja stroga nejednakost važi zbog toga što je funkcija

$$a(x) = \int_0^{+\infty} x^y \, dA(y)$$

strogo monotona po x . ▮

Za monotono neopadajuću neprekidnu sa leva funkciju $F: R \to S$, $S \subseteq R$, označavaćemo sa $F^{-1}(y)$ sledeću funkciju

$$F^{-1}(y) = \sup \{ x : F(x) = y \} .$$

U slučaju kada je $F(x)$ strogo monotona funkcija, onda je $F^{-1}(y)$ njena inverzna funkcija.

Funkcija $F^{-1}(y)$ preslikava $S \to R_F$, $R_F \subseteq R$

Jasno je da, ukoliko dve funkcije raspodele $H(x) : R \to [0,1]$ i $G(x) : R \to [0,1]$ imaju iste intervale konstantnosti, onda se odgovarajući skupovi R_H i R_G poklapaju.

Za proizvoljnu funkciju raspodele $F(x)$, označavaćemo sa $^*F(x)$, sledeću funkciju:

$$^*F(x) = F(F^{-1}(y)) \; ; \quad ^*F : R_F \to S \; , \quad F(x) = y .$$

TEOREMA 3.5.1. Neka su $H(x)$ i $G(x)$ neprekidne funkcije raspodele sa istim intervalima konstantnosti. Ukoliko su razdeljene razlike parnog reda funkcije $^*H(x)$ u odnosu na funkciju $-\ln {}^*G(x)$ nenegativne, a neparnog reda nepozitivne, onda postoji funkcija raspodele $A(x)$ tako da važi jednačina (1).

DOKAZ. Pošto su funkcije $H(x)$ i $G(x)$ neprekidne, onda funkcije $^*H(x)$ i $^*G(x)$ preslikavaju skupove R_H $(= R_G)$ na interval $[0,1]$, a funkcija $-\ln {}^*G(x)$ preslikava R_G u $[0,+\infty)$.

Po pretpostavci, važi:

$$(-1)^n \, {}^*H_{-\ln {}^*G}(x_0,x_1,\ldots,x_n) = (-1)^n \frac{{}^*H_{-\ln {}^*G}(x_1,\ldots,x_n) - {}^*H_{-\ln {}^*G}(x_0,\ldots,x_{n-1})}{-\ln {}^*G(x_n) - (-\ln {}^*G(x_0))} \geqslant 0 ,$$

$(x_0,\ldots,x_n \in R_H)$. Neka je

$$t = -\ln {}^*G(x) \ , \quad x \in R_H \ , \quad t \in [0,+\infty) \, .$$

Odatle sledi $^*G(x) = e^{-t}$, odnosno $x = {}^*G^{-1}(e^{-t})$.

Za funkciju

$$\mathcal{L}(t) = {}^*H({}^*G^{-1}(e^{-t})) \ , \quad t \in [0,+\infty)$$

važi da su njene razdeljene razlike parnog reda nenegativne, a neparnog reda nepozitivne. Funkcija $\mathcal{L}(t)$, $t \in [0,+\infty)$ je neprekidna, jer je kompozicija neprekidnih funkcija. Prema Teoremi 3.4.1., sledi da je funkcija $\mathcal{L}(t)$ kompletno monotona.

Označimo sa x_1 gornju krajnju tačku raspodele $G(x)$:

$$x_1 = \sup\{x : G(x) < 1\} \ , \quad x_1 \leq +\infty \, .$$

Pošto je $G(x)$ raspodela slučajne promenljive koja ne odlazi u beskonačnost, onda je $G(x_1) = 1$. Prema Lemi 3.5.2., tačka x_1 je i gornja krajnja tačka raspodele $H(x)$ i, prema tome, $H(x_1) = 1$.

Kad $t \to 0+$ važi da $^*G^{-1}(e^{-t}) \to x_1$, odakle sledi

$$^*H({}^*G^{-1}(e^{-t})) \xrightarrow[t\to 0+]{} 1 \, .$$

Dobili smo da je $\mathcal{L}(0) = 1$ i $\mathcal{L}(t)$ je kompletno monotona funkcija, pa prema teoremi Bernsteina, ona je Laplaceova transformacija neke funkcije raspodele $A(y)$. Pošto je

$$\mathcal{L}(t) = {}^*H({}^*G^{-1}(e^{-t})) \, ,$$

odatle sledi da je

$$^*H(x) = \mathcal{L}(-\ln {}^*G(x)) = \int_0^{+\infty} e^{-y(-\ln {}^*G(x))} dA(y) = \int_0^{+\infty} ({}^*G(x))^y dA(y) , \quad x \in R_H .$$

Postavlja se pitanje da li gornja jednakost važi i za $H(x)$, $G(x)$, $x \in R$. Skup $R \setminus R_H$ pretstavlja uniju svih intervala konstantnosti funkcija $H(x)$ i $G(x)$ iz kojih su izbačeni desni krajevi. A pošto desni krajevi intervala konstantnosti ulaze u skup R_H, sledi da jednakost

$$H(x) = \int_0^{+\infty} (G(x))^y dA(y)$$

važi za svako $x \in R$. ∎

4. KARAKTERIZACIJA NEKIH RASPODELA POVEZANIH SA RASPODELAMA EKSTREMALNOG TIPA

4.1. FORMULACIJA PROBLEMA

Problemi, koji će biti razmatrani u ovoj glavi, odnose se na maksimume slučajnog broja slučajnih promenljivih pri uslovu da slučajan indeks ima geometrijsku raspodelu. Oni su bliski, po formi, problemima iz Glave 2, koji se odnose na sume.

U paragrafu 3.1. formulisana je teorema prenosa za maksimume nezavisnih i jednako raspodeljenih slučajnih promenljivih, koja je dokazana u radu [14]. U [14] se napominje da, kada je u teoremi prenosa $k_n = n$ (oznake su iz paragrafa 3.1.) i slučajan indeks ν_n je raspodeljen po geometrijskoj raspodeli sa parametrom $\frac{1}{n}$, odnosno

$$P\{\nu_n = k\} = \frac{1}{n}\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{k-1}, \qquad k = 1, 2, \ldots$$

i, shodno tome, važi

$$A(x) = \lim_{n \to \infty} P\left\{\frac{\nu_n}{n} < x\right\} = 1 - e^{-x},$$

onda se sledeća tri tipa raspodela dobijaju kao granična za maksimume rastućih nizova slučajnog broja nezavisnih i jednako raspodeljenih slučajnih promenljivih:

1. $$\Psi(x) = \frac{1}{1 + e^{-x}}, \quad -\infty < x < +\infty,$$

2. $$\Psi(x) = \begin{cases} 0, & -\infty < x < 0 \\ \dfrac{1}{1 + x^{-\alpha}}, & 0 \le x < +\infty, \quad \alpha > 0, \end{cases} \tag{1}$$

$$3.\quad \Psi(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{1+(-x)^{\alpha}}, & -\infty < x < 0, \quad \alpha > 0 \\ 1, & 0 \le x < +\infty \end{cases}.$$

Drugim rečima, niz slučajnih promenljivih čiji maksimumi po teoremi Gnedenka konvergiraju ka jednom od tri ekstremalna tipa raspodela, u teoremi prenosa pri uslovu $k_n = n$ i $A(x) = 1 - e^{-x}$ konvergiraju ka jednom od tipova raspodela (1). U paragrafima 4.2. i 4.3. biće data karakterizacija raspodela koje pripadaju pomenutim tipovima 1., 2. i 3.

Neka je dat niz nezavisnih i jednako raspodeljenih slučajnih promenljivih $X_1, X_2, \ldots, X_k, \ldots$ sa funkcijom raspodele $F(x)$. Od slučajnih promenljivih $X_1, X_2, \ldots$ formiraćemo slučajne promenljive $Y_1, Y_2, \ldots, Y_k, \ldots$ na sledeći način:

$$Y_1 = X_1, \quad Y_2 = \max\{X_1; X_2\}, \ldots, Y_k = \max\{X_1; \ldots; X_k\}, \ldots \tag{2}$$

Neka je p proizvoljan broj, $0 < p < 1$. Na niz Y_n primenićemo operaciju razredjivanja, tj. sa verovatnoćom p, $0 < p < 1$ eliminisaćemo promenljivu Y_k, $k = 1, 2, \ldots$ nezavisno od ostalih promenljivih Y_j, $k \neq j$. Označimo sa $F_p(x)$ funkciju raspodele prvog maksimuma koji nije bio eliminisan. Tada važi:

$$F_p(x) = q \sum_{k=1}^{\infty} p^{k-1} (F(x))^k = \frac{q F(x)}{1 - p F(x)}, \tag{3}$$

gde je $q = 1 - p$.

Označimo sa E klasu takvih funkcija raspodele $F(x)$ za koje važi sledeće: za svako p, q $(p > 0, p + q = 1)$ postoje realne funkcije $a(q) > 0$ i $b(q)$ tako da funkcija raspodele $F_p(x)$ (3) prvog neeliminisanog maksimuma zadovoljava jednakost

$$F_p(x) = F(a(q)x + b(q)), \quad -\infty < x < +\infty. \tag{4}$$

Pošto važi (4), možemo da kažemo da funkcija raspodele $F(x)$ pripada klasi E ako postoje realne funkcije $a(q)>0$ i $b(q)$ tako da funkcionalna jednačina

$$\frac{qF(x)}{1-(1-q)F(x)} = F(a(q)x+b(q)), \quad -\infty < x < +\infty ,$$

važi za svako $0<q<1$.

4.2. KARAKTERIZACIJA LOGISTIČKE RASPODELE

U ovom paragrafu logistička raspodela biće okarakterisana kao rešenje jednačine (1.4), pri uslovu da je $a(q)=1$.

TEOREMA 4.2.1. Neka je $a(q)=1$. Tada nedegenerisana funkcija raspodele $F(x)$ pripada klasi E ako i samo ako važi

$$F(x) = \frac{1}{1+ce^{-\alpha x}}, \quad -\infty < x < +\infty , \quad c>0 , \ \alpha>0 \tag{1}$$

$$b(q) = \frac{\ln q}{\alpha}, \quad 0<q<1 . \tag{2}$$

DOKAZ. Lako se proverava da $F(x)$ i $b(q)$ iz (1) i (2) zadovoljavaju jednačinu

$$\frac{qF(x)}{1-(1-q)F(x)} = F(x+b(q)), \quad -\infty < x < +\infty . \tag{3}$$

Pretpostavimo sada da važi jednačina (3). Tada ni za jedno q $(0<q<1)$ ne može biti $b(q)=0$, zato što se jednačina (3) tada svodi na

$$\frac{q\,F(x)}{1-(1-q)\,F(x)} = F(x)\,,$$

odakle sledi da $F(x)$ uzima samo vrednosti 0 ili 1, što je suprotno pretpostavci da je $F(x)$ nedegenerisana funkcija raspodele. Znači da je za svako q, $b(q)\neq 0$.

Pokažimo da je za svako x, $F(x)>0$. Ukoliko bi postojalo neko x_0 takvo da je $F(x_0)=0$, onda bi iz jednačine (3) sledilo da je za svako n :

$$F(x_0 + n\,b(q)) = 0$$

pa iz $b(q)>0$ dobijamo $F(+\infty)=0$. Isto tako iz (3) sledi

$$F(x_0 - n\,b(q)) = 0$$

što za $b(q)<0$ dovodi opet do kontradikcije. Dakle, ako važi (3), onda je $F(x)>0$, za svako x.

Pošto je $F(x)>0$, za svako x, $F(x)$ ćemo napisati u obliku

$$F(x) = \frac{1}{1+v(x)}\,, \qquad -\infty < x < +\infty \quad ;$$

iz toga što je $F(x)$ funkcija raspodele, sledi da je $v(x)\geq 0$, $v(+\infty)=0$, $v(-\infty)=+\infty$. Jednačina (3) postaje:

$$\frac{1}{1+\frac{v(x)}{q}} = \frac{1}{1+v(x+b(q))}\,,$$

odnosno

$$v(x) = q\,v(x+b(q))\,. \tag{4}$$

Pokazaćemo da je za svako q, $b(q)$ rastuća funkcija po q i $b(q)<0$. Ako bi za neko q bilo $b(q)>0$, onda bi iz (4) sledilo da za svako $n=1,2,\ldots$ i za svako x :

$$v(x) = q^n\,v(x+n\,b(q)) \longrightarrow 0$$

što znači $v(x)\equiv 0$. Kontradikcija.

Neka je $q=q_1\cdot q_2$. Iz (4) sledi

$$v(x+b(q)) = \frac{v(x)}{q} = \frac{v(x)}{q_1\cdot q_2} = v(x+b(q_1)+b(q_2)),$$

odnosno

$$b(q_1\cdot q_2) = b(q_1)+b(q_2). \tag{5}$$

Pošto je $b(q)<0$ za svako $0<q<1$, iz (5) sledi da je $b(q)$ strogo rastuća funkcija po q. Iz monotonosti funkcija $F(x)$ i $b(q)$ i iz jednačine (3) sledi neprekidnost funkcija $F(x)$ i $b(q)$. Ako izvršimo smenu $f(x)=b(e^{-x})$, jednačina (5) se svodi na

$$f(x+y) = f(x)+f(y), \quad x,y>0,$$

a opšte rešenje te jednačine je ([1], str. 34)

$$f(x) = -ax, \quad x>0, a>0$$

($a>0$, zato što je $b(q)<0$, $0<q<1$), odnosno imamo da je:

$$b(q) = f(-\ln q) = a\ln q, \quad a>0.$$

Jedno rešenje jednačine (4) je

$$v_1(x) = e^{-\alpha x}, \quad -\infty<x<+\infty, \quad \alpha>0.$$

Ukoliko bi, za dato $b(q)$ postojalo još neko rešenje $v_2(x)$ jednačine (4), onda bi važilo:

$$g(x+b(q)) = \frac{v_2(x+b(q))}{v_1(x+b(q))} = \frac{v_2(x)}{v_1(x)} = g(x), \quad -\infty<x<+\infty.$$

Odatle sledi da je za svako x, $0<q<1$, $a>0$:

$$g(x) = g(x+a\ln q) = g(x-a\ln q)$$

Neka je $x=0$, odatle sledi $g(a\ln q)=g(-a\ln q)=g(0)$, odnosno $g(x)\equiv C$. Pošto je funkcija $g(x)$ konstantna, znači da su sva rešenja jednačine (4) oblika:

$$\vartheta(x) = c e^{-\alpha x}, \quad \alpha>0, \ c>0, \ -\infty < x < +\infty .$$

Dakle, rešenje $F(x)$ jednačine (3) je funkcija koja pripada tipu logističke raspodele

$$F(x) = \frac{1}{1+c e^{-\alpha x}}, \quad -\infty < x < +\infty, \ \alpha>0, \ c>0.$$

Iz (3) sledi da je $b(q)=\frac{\ln q}{\alpha}$, $0<q<1, \alpha>0$. ∎

4.3.ČUVANJE TIPA RASPODELE PRI RAZREDJIVANJU

U ovom paragrafu biće okarakterisane raspodele tipa 2. i 3. iz paragrafa 1, kao rešenja jednačine (1.4) pri uslovu da je $a(q)\neq 1$.

TEOREMA 4.3.1. Neka važi $a(q)\neq 1$. Tada nedegenerisana funkcija raspodele $F(x)$ pripada klasi E ako i samo ako važi:

a)

$$F(x) = \begin{cases} 0 & , x<\beta \\ \dfrac{1}{1+\gamma(x-\beta)^{-\alpha}} & , x\geq\beta, \ \alpha>0, \ \gamma>0 \end{cases}; \tag{1}$$

$$a(q) = q^{\frac{1}{\alpha}}; \quad b(q) = \beta(1-q^{\frac{1}{\alpha}}), \quad 0<q<1, \ \alpha>0,$$

ili

b)

$$F(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{1+\gamma(-x+\beta)^{\alpha}} & , x<\beta, \ \alpha>0, \ \gamma>0 \\ 1 & , x\geq\beta, \end{cases} \tag{2}$$

$$a(q) = q^{-\frac{1}{\alpha}}; \quad b(q) = \beta(1-q^{-\frac{1}{\alpha}}), \quad 0<q<1, \ \alpha>0.$$

DOKAZ. Ukoliko su $F(x)$, $a(q)$, $b(q)$ oblika (1) ili (2), lako se preverava da zadovoljavaju jednačinu

$$\frac{q F(x)}{1-(1-q) F(x)} = F(a(q)x+b(q)), \quad a(q)>0, \ 0<q<1 . \tag{3}$$

Obrnuto, pretpostavimo da važi jednačina (3). Iz nje sledi da za proizvoljan broj β važi

$$\frac{q F(x+\beta)}{1-(1-q) F(x+\beta)} = F(a(q)x+a(q)\beta+b(q)) . \tag{4}$$

Fiksirajmo proizvoljno q takvo da je $a(q)\neq 1$. Za takvo q, označimo sa β_q konstantu koja zadovoljava sledeću jednačinu:

$$\beta_q = a(q)\beta_q + b(q),$$

odakle

$$\beta_q = \frac{b(q)}{1-a(q)} . \tag{5}$$

Uvedimo oznaku

$$\Phi_q(x) = F(x+\beta_q) . \tag{6}$$

Jasno je da je $\Phi_q(ax)=F(ax+\beta_q)$. Za fiksirano q, jednačina (4) za funkciju $\Phi_q(x)$ se svodi na

$$\frac{q \Phi_q(x)}{1-(1-q)\Phi_q(x)} = \Phi_q(a(q)x) . \tag{7}$$

Iz jednačine (7) sledi da je $\Phi_q(0)=0$ ili $\Phi_q(0)=1$. Dokažimo to: Zaista, za $x=0$ iz (7) sledi

$$\frac{q\Phi_q(0)}{1-(1-q)\Phi_q(0)} = \Phi_q(0),$$

odakle

$$0 = \frac{q\Phi_q(0)}{1-(1-q)\Phi_q(0)} - \Phi_q(0) = \frac{(1-q)((\Phi_q(0))^2-\Phi_q(0))}{1-(1-q)\Phi_q(0)},$$

pa, pošto je $q<1$, sledi da mora biti ili $\Phi_q(0)=0$, ili $\Phi_q(0)=1$.

Prvo ćemo razmotriti slučaj:

a) $\phi_q(0)=0$. Pokazaćemo da tada za svako $x>0$ važi da je $\phi_q(x)>0$. Pretpostavimo suprotno, da za neko $x_0>0$ važi da je $\phi_q(x_0)=0$. Funkcija $a(q)$ može biti za naše q ili manja, ili veća od 1 (zato što je pretpostavljeno da je q takvo da važi $a(q)\neq 1$). Neka je $a(q)>1$. Tada iz (7) sledi da je za svako $n\in N$:

$$0=\phi_q\left((a(q))^n x_0\right)\xrightarrow[n\to\infty]{}\phi_q(+\infty)=0$$

što je nemoguće jer je $\phi_q(x)$ nedegenerisana funkcija raspodele. Neka je $a(q)<1$, tada iz (7) sledi da za svako $n\in N$ važi

$$\phi_q\left(\frac{x_0}{(a(q))^n}\right)\xrightarrow[n\to\infty]{}\phi_q(+\infty)=0$$

što je nemoguće. Dakle, pokazali smo da, ukoliko je $\phi_q(0)=0$, ne postoji ni jedna pozitivna nula funkcije $\phi_q(x)$. Neka važi:

b) $\phi_q(0)=1$. Tada za svako $x<0$ važi da je $0<\phi_q(x)<1$. Pretpostavimo da za neko $x_0<0$ važi da je $\phi_q(x_0)=0$. Ako je $a(q)<1$, onda iz (7) sledi da za svako $n\in N$ važi da je

$$0=\phi_q\left((a(q))^n x\right)\xrightarrow[n\to\infty]{}\phi_q(0_-),$$

što znači da je $\phi_q(x)$ raspodela degenerisana u nuli. Ako je $a(q)>1$, dobija se da važi

$$0=\phi_q\left(\frac{x}{(a(q))^n}\right)\xrightarrow[n\to\infty]{}\phi_q(0_-)$$

odnosno $\phi_q(x)$ je raspodela degenerisana u nuli. Znači, tačno je da za svako $x<0$, $\phi_q(x)>0$. Pokažimo da je za svako $x<0$, $\phi_q(x)<1$. Pretpostavimo da za neko $x_0<0$ važi da je $\phi_q(x_0)=1$. Ako je $a(q)>1$, onda iz jednačine (7) sledi da je za svako $n\in N$

$$\phi_q\left((a(q))^n x\right)\to\phi_q(-\infty)=1,$$

što je nemoguće; ako je $a(q)<1$, iz (7) sledi da je za svako $n\in N$

$$\phi_q\left(\frac{x_0}{(a(q))^n}\right)\to\phi_q(-\infty)=1$$

što je nemoguće. Znači da je $\phi_q(x)$ za $x<0$ strogo veće od nule i strogo manje od 1.

Sada ćemo pokazati da ne postoji $0<q<1$ takvo da je $a(q)=1$. Ukoliko bi za neko q_0 važilo da je $a(q_0)=1$, onda bi se za to q_0, jednačina (4) svodila na jednačinu

$$\frac{q_0 F(x)}{1-(1-q_0)F(x)} = F(x+b(q_0)) . \tag{8}$$

Iz jednačine (8) sledi da je za svako x, $F(x)>0$; to je dokazivano u Teoremi 4.2.1. Osim toga, važi da je za svako x, $F(x)<1$. Ukoliko bi za neko x_0 važilo da je $F(x_0)=1$, onda bi iz (8) sledilo da za $b(q)<0$ i svako $n\in N$, važi

$$1 = F(x_0+nb(q_0)) \xrightarrow[n\to\infty]{} F(-\infty) ,$$

što je nemoguće. Ako je $b(q_0)>0$, iz (8) sledi

$$1 = F(x_0-nb(q_0)) \xrightarrow[n\to\infty]{} F(-\infty) ,$$

što je nemoguće. Iz $b(q_0)=0$, sledi da $F(x)$ uzima samo vrednosti 0 ili 1 što je nemoguće jer $F(x)$ nije degenerisana raspodela. Dakle, iz postojanja takvog q_0 da važi $a(q_0)=1$, sledi da je $0<F(x)<1$, za svako konačno x. Medjutim, po uslovu teoreme, $a(q)$ nije identički jednako 1, odnosno postoji bar jedno q takvo da je $a(q)\neq 1$. Odatle sledi da funkcija $\phi_q(x)=F(x+\beta_q)$ u nuli uzima vrednosti 0 ili 1, tj. $F(\beta_q)=0$ ili $F(\beta_q)=1$, što je u suprotnosti sa uslovom $0<F(x)<1$, za svako x, dobijenim iz pretpostavke da postoji q_0 takvo da je $a(q_0)=1$. Dakle, iz pretpostavke da postoji bar jedno q takvo da je $a(q)\neq 1$, sledi da je za svako $0<q<1$, $a(q)\neq 1$.

Posmatrajmo sada dva broja q_1 i q_2, $q_1\neq q_2$, takva da za odgovarajuće β_{q_1}, β_{q_2} (5) važi: $\beta_{q_1}\neq\beta_{q_2}$. Neka je $\beta_{q_1}<\beta_{q_2}$. Pretpostavimo da je za dato q_1 odgovarajuće $\phi_{q_1}(0)=1$. Tada je za svako $x>0$, $\phi_{q_1}(x)>0$, a to je ekvivalentno sa

$$F(\beta_{q_1})=0 , \quad F(x+\beta_{q_1})>0 , \quad x>0 . \tag{9}$$

Znamo da $\phi_{q_2}(0)$ može biti jednaka 0 ili 1. Neka je $\phi_{q_2}(0)=0$, što povlači $\phi_{q_2}(x)>0$ za svako $x>0$. Odatle sledi $F(\beta_{q_2})=0$, što je u suprotnosti sa (9). Pretpostavimo da je $\phi_{q_2}(0)=1$. Medjutim, onda je za svako $x<0$, $\phi_{q_2}(x)>0$, što je u suprotnosti sa (9). Pretpostavimo da je $\phi_{q_1}(0)=1$; odatle sledi

$$F(\beta_{q_1})=1, \quad 0<F(x+\beta_{q_1})<1, \quad x<0. \tag{10}$$

Neka je $\phi_{q_2}(0)=0$, odatle sledi da je za svako $x<0$, $F(x+\beta_{q_2})=0$, što je u suprotnosti sa (10). Ako je $\phi_{q_2}(0)=1$, odatle sledi

$$F(\beta_{q_2})=1, \quad 0<F(x+\beta_{q_2})<1, \quad x<0. \tag{11}$$

Medjutim, iz (10) imamo $F(\beta_{q_1})=1$, što je u suprotnosti sa (11). Odatle sledi da, pošto je $\beta_{q_1}<\beta_{q_2}$, mora biti $F(\beta_{q_1})<1$.

Dakle, iz pretpostavke da postoje brojevi q_1, q_2 takvi da su $\beta_{q_1}\neq\beta_{q_2}$, dobili smo kontradikciju, pa znači da su svi β_q medjusobno jednaki. Označićemo sa β sledeći izraz koji, kao što je upravo pokazano, ne zavisi od q:

$$\beta=\frac{b(q)}{1-a(q)}, \quad 0<q<1.$$

Neka je $\phi(x)=F(x+\beta)$. U terminima funkcije $\phi(x)$, jednačina (3) se svodi na

$$\frac{q\,\phi(x)}{1-(1-q)\,\phi(x)}=\phi(a(q)x), \quad 0<q<1. \tag{12}$$

Već je pokazano da je $\phi(0)=0$ ili $\phi(0)=1$. Razmotrićemo svaki od ta dva slučaja posebno:

a) Slučaj $\phi(0)=0$. Pošto u tom slučaju važi da je $\phi(x)>0$ za svako $x>0$, može se napisati

$$\phi(x) = \frac{1}{1 + v(x)}, \quad x > 0,$$

gde je $v(x) \geqslant 0$, a iz $F(+\infty) = 1$ sledi $v(+\infty) = 0$. Jednačina (12) se tada svodi na jednačinu

$$\frac{1}{1 + q^{-1} v(x)} = \frac{1}{1 + v(a(q)x)},$$

odnosno

$$q^{-1} v(x) = v(a(q)x). \tag{13}$$

Sada ćemo pokazati da je $a(q)$ monotono rastuća funkcija i $a(q) < 1$ za svako $0 < q < 1$: Ako bi bilo $a(q) > 1$ za neko q, onda bi iz (13) sledilo

$$v(x) = q^{n} v((a(q)^{n} x), \quad x > 0, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

odnosno $v(x) \equiv 0$. Prema tome, za nedegenerisanu raspodelu $\phi(x)$ mora biti $a(q) < 1$ za svako $0 < q < 1$. Neka je $q = q_1 \cdot q_2$, $q_1 < 1$, $q_2 < 1$. Prema (13) važi:

$$v(x) = q\, v(a(q)x) = q_1 q_2 \cdot v(a(q_1) \cdot a(q_2) \cdot x),$$

odakle sledi

$$a(q_1 \cdot q_2) = a(q) = a(q_1) \cdot a(q_2). \tag{14}$$

Iz toga što je $a(q) < 1$ za svako $0 < q < 1$, sledi da $a(q)$ raste po q. Neprekidnost funkcija $\phi(x)$ i $a(q)$ sledi iz jednačine (3). Sada ćemo da nadjemo rešenje jednačine (14). Označimo:

$$f(x) = \ln a(e^{-x}), \quad x > 0.$$

Neprekidnost funkcije $f(x)$ sledi iz neprekidnosti funkcije $a(q)$, iz $a(q) < 1$ sledi $f(x) < 0$. Jednačina (14) postaje

$$f(x + y) = f(x) + f(y), \quad x, y > 0.$$

Opšte rešenje te jednačine je [1] : $f(x) = -\frac{x}{\alpha}$, $\alpha>0$, odakle sledi da je

$$a(q) = e^{f(-\ln q)} = q^{\frac{1}{\alpha}} , \quad \alpha>0 , \; 0<q<1 .$$

Prema tome, jednačina (13) se svodi na

$$q^{-1} v(x) = v(q^{\frac{1}{\alpha}} x) , \quad x>0 , \alpha>0 , 0<q<1 . \tag{15}$$

Jedno rešenje jednačine (15) je $v_1(x) = x^{-\alpha}$, $\alpha>0$. Pretpostavimo da to nije jedino rešenje jednačine (15). Označimo sa $v_2(x)$ drugo rešenje jednačine (15). Tada važi

$$g(q^{\frac{1}{\alpha}} x) = \frac{v_2(q^{\frac{1}{\alpha}} x)}{v_1(q^{\frac{1}{\alpha}} x)} = \frac{v_2(x)}{v_1(x)} = g(x) , \quad x>0 , \; 0<q<1 .$$

Odatle sledi da je $g(x)$ konstantna funkcija $g(x)=\gamma>0$, a opšte rešenje jednačine (13) je oblika

$$v(x) = \gamma x^{-\alpha} , \quad x>0 , \alpha>0 , \gamma>0 .$$

Dakle, u slučaju $\phi(0)=0$, dobija se da je

$$F(x) = \phi(x-\beta) = \begin{cases} 0 , & x<\beta \\ \dfrac{1}{1+\gamma(x-\beta)^{-\alpha}} , & x\geq\beta , \quad \alpha>0 , \gamma>0 \end{cases}$$

$$a(q) = q^{\frac{1}{\alpha}} , \quad 0<q<1 ,$$

a iz jednačine

$$\beta = \frac{b(q)}{1-a(q)} ,$$

dobija se da je $b(q) = \beta(1-q^{\frac{1}{\alpha}})$, $0<q<1$, $\alpha>0$.

b) Slučaj $\phi(0)=1$. Već je pokazano da u ovom slučaju važi da je $\phi(x)>0$ za $x<0$, pa stoga možemo da napišemo $\phi(x)$ u obliku:

$$\phi(x) = \frac{1}{1+v(x)} , \quad x<0 , \quad v(x)\geq 0 , \quad v(-\infty)=+\infty .$$

Iz jednačine (12) dobija se jednačina

$$\frac{1}{1+q^{1}v(x)} = \frac{1}{1+v(a(q)x)}, \quad x<0,$$

odnosno važi

$$q^{1}v(x) = v(a(q)x). \tag{16}$$

Pokazaćemo da je u ovom slučaju $a(q)>1$ za $0<q<1$, osim toga $a(q)$ je monotono opadajuća funkcija. Ukoliko bi za neko q bilo $a(q)<1$, onda bi iz (16) sledilo da je za $x<0$ i $n=1,2,\ldots$

$$v(x) = q^{n}v((a(q))^{n}x),$$

odakle sledi da je $v(x)=0$, što je nemoguće, pa znači da je za svako q, $a(q)>1$.

Neka je $q=q_1\cdot q_2$, $0<q_1<1, 0<q_2<1$; iz (16) sledi

$$v(x) = q\,v(a(q)x) = q_1\cdot q_2\,v(a(q_1)\cdot a(q_2)x),$$

odakle

$$a(q) = a(q_1\cdot q_2) = a(q_1)\cdot a(q_2). \tag{17}$$

Pošto je za svako q, $a(q)>1$, sledi da $a(q)$ monotono opada po q. Iz jednačine (3) sledi neprekidnost funkcija $\phi(x)$i $a(q)$. Jednačinu (17) rešavamo smenom $f(x)=\ln a(e^{x})$, $x<0$. Neprekidnost funkcije $f(x)$ sledi iz neprekidnosti funkcije $a(q)$, iz $a(q)>1$ sledi $f(x)>0$. Jednačina (17) postaje

$$f(x+y) = f(x)+f(y), \quad x,y<0,$$

a njeno opšte rešenje je

$$f(x) = -\frac{x}{\alpha}, \quad x<0, \ \alpha>0.$$

Odatle sledi da je

$$a(q) = e^{f(\ln q)} = q^{-\frac{1}{\alpha}}, \quad 0<q<1, \ \alpha>0.$$

Prema tome, jednačina (16) se svodi na

$$q^{-1}v(x) = v(q^{-\frac{1}{\alpha}}x), \quad x<0, \ 0<q<1, \ \alpha>0. \tag{18}$$

Jedno rešenje jednačine (18) je $v_1(x) = (-x)^{\alpha}$, $\alpha>0$, $x<0$.

Ukoliko bi postojalo još neko rešenje $v_2(x)$, iz (18) bi sledilo:

$$g(q^{-\frac{1}{\alpha}}x) = \frac{v_2(q^{-\frac{1}{\alpha}}x)}{v_1(q^{-\frac{1}{\alpha}}x)} = \frac{v_2(x)}{v_1(x)} = g(x), \quad x<0, \ 0<q<1$$

Odatle sledi da je $g(x)$ konstantna funkcija $g(x)=\gamma>0$, pa je opšte rešenje jednačine (16) oblika

$$v(x) = \gamma(-x)^{\alpha}, \quad x<0, \ \alpha>0, \ \gamma>0.$$

Prema tome, u slučaju b) važi:

$$F(x) = \phi(x-\beta) = \begin{cases} \dfrac{1}{1+\gamma(-x+\beta)^{\alpha}}, & x<\beta, \ \alpha,\gamma>0 \\ 1, & x\geqslant\beta \end{cases},$$

$$a(q) = q^{-\frac{1}{\alpha}}, \quad b(q) = \beta(1-q^{-\frac{1}{\alpha}}), \quad 0<q<1, \ \alpha>0. \blacksquare$$

L I T E R A T U R A

[1] Aczel,J. - Lectures on Functional Equations and Their Applications, Academic Press (New York and London) 1966

[2] Barndorff-Nielsen,O. - On the Limit Distribution of the Maximum of a Random Number of Independent Random Variables, Acta Math. Acad. Sci. Hung., v.15, No 3-4 (1964) 399-403

[3] Berman,S.M. - Limiting Distribution of the Maximum Term in Sequences of Dependent Random Variables, Ann. Math. Stat., v.33, No 3 (1962) 894-908

[4] Bojanić,R., Seneta,E. - A Unified Theory of Regularly Varying Sequences, Math. Z., 134 (1973) 91-106

[5] Feller,W. - An Introduction to Probability Theory and Its Applications, Vol.1, John Wiley, New York, 1968

[6] Feller,W. - An Introduction to Probability Theory and Its Applications, Vol.2, John Wiley, New York, 1971

[7] Feller,W. - Completely Monotone Functions and Sequences, Duke Math. J., 5 (1939) 661-674

[8] Feller,W. - On Müntz' Theorem and Completely Monotone Functions, Amer. Math. Monthly, I 75/4 (1968) 342-350

[9] Freyer,B. - Die Klasse der Grenzverteilungen von Summen gleichverteilter Zufallsgrösen mit einer zufälligen Anzahl von Summanden, Math. Nachr., Band 44, Heft 1-6 (1970) 341-350

[10] Galambos,J., Seneta,E. - Regularly Varying Sequences, Proc. Amer. Math. Soc., v.41, No 1 (1973) 110-116

[11] Gnedenko,B.V. - Sur la distribution limite du terme maximum d'une série aléatoire, Ann. of Math., v.44, No 3 (1943) 423-453

[12] Гнеденко,В.В. - О связи теории суммирования независимых случайных величин с задачами теории массового обслуживания и теории надёжности, Rev. Roum. Math. Pures et Appl. T.XII, No.9 (1967) 1243-1253

[13] Gnedenko,B.V. - Limit Theorems for Sums of a Random Number of Positive Independent Random Variables, Proc. Sixth Berkley Symp. on Math. Stat. and Prob., (1970) 537-549

[14] Гнеденко,Б.В., Гнеденко,Д.Б. - О распределениях Лапласа и Логистическом как предельных в теории вероятностей, Сердика, Т.8 (1982) 229-234

[15] Гнеденко,Б.В., Фахим,Г. - Об одной теореме переноса, Доклади АН СССР, Т.187, Но.1 (1969) 15-18

[16] Гнеденко,Б.В., Фрайер,Б. - Несколько замечаний к одной работе И.Н.Коваленко, Литовски Математически Сборник, IX, Но.3 (1969) 463-470

[17] Gnedenko,B.V., Janjić,S. - A Characteristic Property of One Class of Limit Distributions, Math. Nachr., 113 (1983) 145-149

[18] Gnedenko,B.V., Kolmogorov,A.N. - Grenzverteilungen von Summen Unabhängigen Zufallsgrössen, Berlin, Akademie-Verlag, 1966

[19] Haan,L. de - On Regular Variation and Its Application to the Weak Convergence of Sample Extremes, Amsterdam Math. Centre Tracts 32 (1970) 1-124

[20] Хинчин,А.Я. - Предельные законы для сумм независимых случайных величин, Москва, 1938

[21] Janjić,S. - On Random Variables with the Same Distribution Type as Their Random Sum, Publ. Inst. Math., N.S., T.35(49) (1984) 161-166

[22] Круглов,В.М. - О сходимости распределений сумм случайного числа независимых случайных величин к нормальному распределению, Вестник Московского Университета, Математика, Но.5 (1976) 5-12

[23] Laha,R.G., Rohatgi,V.K. - Probability Theory, John Wiley, New York, 1979

[24] Лукач,Е. - Характеристические функции, Москва, Наука, 1979

[25] Петров,В.В. - Суммы независимых случайных величин, Наука, Москва, 1972

[26] Саас,Д., Фрайер,Б. - Одна задача теории суммирования со случайным индексом, Литовски Математически Сборник, XI, Но.1 (1971) 181-187

[27] Seneta,E. - Regularly Varying Functions, Lecture Notes Math., 508, Springer-Verlag, 1976

[28] Сенуси Берекси,Л., Янич,С. - Две теоремы о последовательности максимумов независимых случайных величин, Литовски Математически Сборник, XXIV , Но.1 (1984) 167-174

[29] Spiegel,M. - Calculus of Finite Differences and Difference Equations, Schaum's Outline Series, Mc Graw-Hill, 1971

[30] Thomas,D.L. - On Limiting Distribution of a Random Number of Dependent Random Variables, Ann. Math. Stat., v.43, No 5 (1972) 1719-1726