UNIVERZITET U BEOGRADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET

Do 17

Slobodanka Mitrović

JEDNA KLASA SLUČAJNIH PROCESA MULTIPLICITETA JEDAN

doktorska disertacija

BEOGRAD, 1986.god.

S A D R Ž A J

1. UVOD

Neka je $x(t)$, $t \in T = (a,b)$ realan slučajni proces sa prvim momentom $Ex(t) = 0$ i drugim momentom $Ex^2(t) < \infty$, za svako $t \in T$. Proces $x(t)$, $t \in T$ se može posmatrati kao kriva u Hilbertovom prostoru H svih slučajnih promenljivih konačnog drugog momenta sa skalarnim proizvodom $(x,y) = Exy$, i normom $\| x \| = (Ex^2)^{1/2}$. Pojam u srednje kvadratnom smislu iz teorije verovatnoće poklapa se ovde sa pojmom po normi.

Označimo sa $H(x)$ Hilbertov prostor generisan svim slučajnim veličinama $x(t)$, $t \in T$ (to je zatvoren lineal nad svim izrazima $\sum_{k=1}^{n} c_k \cdot x(t_k)$, $c_k \in R$, $t_k \in T$), a sa $H(x,t)$ njegov Hilbertov potprostor generisan svim $x(s)$, $s \in (a,t]$. Važi za $s < t$:

$$H(x,s) \subset H(x,t) \subset H(x) \subset H.$$

Pretpostavićemo nadalje da je proces $x(t)$, $t \in T$ uvek:

A. neprekidan s leva tj. $x(t-0) = x(t)$, što povlači separabilnost prostora $H(x,t)$ i $H(x)$. Za bazu se može uzeti prebrojiv skup $\{x(t_k)\}$ gde su t_k racionalni brojevi iz intervala (a,b),

B. linearno regularan ili čisto nedeterministički tj. važi $\bigcap_{t>a} H(x,t) = 0$. Ovi procesi su daleko značajniji od onih determinističkih, kad je $\bigcap_{t>a} H(x,t) = H(x,a)$, koji svu informaciju o samom procesu nose u prošlosti.

Pod pretpostavkama A. i B. važi sledeća teorema o reprezentaciji slučajnih procesa i njihovom spektralnom tipu, nastala kao posledica opštije teorije o samokonjugovanim operatorima u separabilnom Hilbertovom prostoru.

Teorema. Slučajni proces $x(t)$, $t\in T$ može se predstaviti izrazom:

$$x(t) = \sum_{n=1}^{N} \int_{a}^{t} g_n(t,u)\cdot dZ_n(u) \tag{1}$$

za $t\in(a,b)$ i pri tom:

1. $Z_n(u)$ su medjusobno ortogonalni procesi sa ortogonalnim priraštajima, takvi da je:

$$E\, Z_n(u) = 0, \quad i \quad E\, Z_n^2(u) = F_n(u),$$

gde su $F_n(u)$ funkcije nikad opadajuće i uvek neprekidne s leva, $u\in(a,b)$.

2. $g_n(t,u)$ su neslučajne funkcije definisane za $u\le t$, $u,t\in T$ iz prostora $L^2(d\,F(u))$, takve da važi:

$$E\, x^2(t) = \sum_{n=1}^{N} \int_{a}^{t} g_n^2(t,u)\cdot dF_n(u) < \infty.$$

3. $d\,F_1 > d\,F_2 > \dots > d\,F_N$, gde je uredjenje $>$ u smislu apsolutne neprekidnosti mera.

4. Za svako $t\in T$, Hilbertov prostor $H(x,t)$ je ortogonalna suma potprostora $H(Z_n,t)$ generisanih nad Z_n, $n = \overline{1,N}$, tj.

$$H(x,t) = \sum_{n=1}^{N} \oplus\ H(Z_n,t).$$

Broj N iz teoreme je jednoznačno odredjen za proces

$x(t)$, $t \in T$ i naziva se *multiplicitet* procesa, a može uzimati vrednosti od 1 do ∞. Takodje i niz klasa ekvivalencije $C_1, \ldots, C_N$ za funkcije $F_1, \ldots, F_N$ je jednoznačno odredjen procesom $x(t)$, $t \in T$ i predstavlja njegov *spektralni tip*. Pri tom samo izbor obnavljajućih procesa $Z_1(u), \ldots, Z_N(u)$ i odgovarajućih funkcija $g_1(t,u), \ldots, g_N(t,u)$ može biti višeznačan.

Svu informaciju o spektralnom tipu datog procesa daje njegova korelaciona funkcija $B(s,t) = E\, x(s) \cdot x(t)$, s, $t \in T$. Naime, ista korelaciona funkcija dvaju procesa implicira da su im i spektralni tipovi jednaki, dok obrnuto ne važi.

Reprezentacija procesa (1) iz teoreme, koja zadovoljava sva navedena četiri uslova naziva se *čisto-kanonična reprezentacija* ili *Kramerova*, a ona koja zadovoljava početna tri uslova i kod koje važi:

$$H(x,t) \subset \sum_{n=1}^{N} \oplus \quad H(Z_n, t),$$

$t \in T$ naziva se *kanoničnom*. To je u stvari ona reprezentacija za koju je ispunjeno:

$$P_{H(x,s)} x(t) = \sum_{n=1}^{N} \int_a^t g_n(t,u) \cdot dZ_n(u),$$

$u \leq t$, u, $t \in T$, gde je $P_{H(x,s)}$ operator projektovanja na potprostor $H(x,s)$ za $s < t$.

Svaka čisto-kanonična reprezentacija je i kanonična, dok obrnuto ne važi, ali se od kanonične reprezentacije može konstruisati čisto-kanonična. Kriterijum da li je u pitanju Kramerova reprezentacija daje sledeća teorema.

Teorema. Proces $x(t)$, $t \in T$ dat je Kramerovom reprezentacijom (1) ako i samo ako funkcije $g_1(t,u), \ldots, g_N(t,u)$ čine *kompletan sistem* u prostoru L^2 $(dF(u))$, $dF = (dF_1, \dots, dF_N)$, pri važenju uslova 1. i 2. prethodne teoreme.

Kompletnost familije funkcija $g_1(t,u), \dots, g_N(t,u)$ u $L^2(dF(u))$ znači da ne postoje funkcije $h_1(u), \dots, h_N(u)$, $h_n(u) \in L^2(dF_n(u))$, tj. element:

$$y(t) = \sum_{n=1}^{N} \int_a^t h_n(u) \cdot dZ_n(u),$$

$u \leq t$, u, $t \in T$ iz prostora $\sum_{n=1}^{N} \oplus H(Z_n,t)$, tako da je:

$$E\, y^2(t) = \sum_{n=1}^{N} \int_a^t h_n^2(u)\, dF_n(u) > 0,$$

i da je y ortogonalan na svakom $x(s)$, $s \in (a,t]$, tj. da važi:

$$\sum_{n=1}^{N} \int_a^s h_n(u) \cdot g_n(s,u)\, dF_n(u) = 0, \quad s \in (a,t].$$

Drugim rečima, mora biti $H(x,t) = \sum_{n=1}^{N} \oplus H(Z_n,t), t \in T$.

Uslov 3. da su funkcije $F_1, \dots, F_N$ uredjene u odnosu na relaciju $>$ je za prethodnu teoremu nebitan, pa je zato izostavljen. A ako on nije ispunjen, a uslovi 1. i 2. važe za reprezentaciju (1), onda postoje transformacije da se niz $F_1, \dots, F_N$ uredi.

Sva tvrdjenja navedena u Uvodu su iz spektralne teorije slučajnih procesa u separabilnom Hilbertovom prostoru i mogu se naći u radovima: [2], [5], [6], [7], [14], [15], [16], [19], [20].

2. Klasa procesa multipliciteta jedan

Problem koji nastaje u vezi sa reprezentacijom slučajnog procesa $x(t)$, $t \in T$ je kako odrediti njegov multiplicitet i spektralni tip. Nalaženjem multipliciteta i bar jedne kanonične reprezentacije lako mogu da se reše neki problemi iz statistike vezani za ocenjivanje, traženje najmanjeg srednje-kvadratnog rastojanja, filtraciju itd. Za neke slučajne procese problem je rešen. Stacionarni procesi, na primer, definisani za $t \in (-\infty, +\infty)$, oblika:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{t} g(t-u)\, dz(u),$$

$u \leq t$, imaju multiplicitet $N = 1$, a spektralna mera im je Lebegova, $dF(u) = du$.

Dokazano je i sledeće tvrdjenje, na neki način obrnut problem, da za dati spektralni tip: $C_1 > \ldots > C_N$ i dato N uvek se može konstruisati neprekidan proces (harmonijski) čiji je to spektralni tip. Medjutim, direktni problem još nije u potpunosti rešen.

Povoljnija situacija je kod procesa multipliciteta jedan. Takve procese detaljno su proučavali Hida u [16] i Kramer u [15]. Dok Hida pretpostavlja da su procesi koje analizira multipliciteta jedan, dotle Kramer daje za jezgra $g_n(t,u)$ i ortogonalne procese $Z_n(u)$, $n = \overline{1,N}$ u reprezentaciji (1) uslove da bi bilo $N = 1$.

Cilj je ovoga rada da se ti dovoljni Kramerovi uslovi oslabe, tj. da se proširi klasa procesa multipliciteta jedan. Pri tom se u analizi koristi geometrija Hilbertovog prostora.

Hida u [16] razmatra realne Gausove procese oblika:

$$x(t) = \int_0^t g(t,u)\, dz(u),$$

$t \in [0,+\infty)$, gde je $z(u)$ Gausov proces sa ortogonalnim priraštajima. Pored opšte teorije o reprezentaciji slučajnih procesa u Hilbertovom prostoru, Hida specijalno analizira Markovljeve procese reda M. Takvi procesi imaju formu:

$$x(t) = \int_0^t \sum_{n=1}^{M} f_n(t)\cdot\varphi_n(u)\, dz(u),$$

$u \leqslant t$, gde je jezgro $g(t,u) = \sum_{n=1}^{M} f_n(t)\cdot\varphi_n(u)$ čisto-kanonično i zadovoljava sledeće uslove:

1. $\det\,(f_n(t_j)) \neq 0$ za bilo kojih M različitih t_j;
2. $\varphi_1(u),\dots,\varphi_M(u)$ su linearno nezavisni elementi u prostoru $L^2(dF(u))$, za svako u.

Jezgro sa ovakvim osobinama se naziva Goursat jezgro reda M. Obrat gornjeg tvrdjenja ne važi. Naime, proces sa takvim jezgrom ne mora biti M-ti Markovljev proces.

Ako je takvo jezgro još funkcija od $(t-u)$, onda $f_n(t)$, $n=\overline{1,M}$ čine fundamentalan sistem rešenja linearne diferencijalne jednačine reda M sa konstantnim koeficijentima, a $\varphi_n(u)$, $n=\overline{1,M}$ fundamentalan sistem rešenja njene konjugovane diferencijalne jednačine. Na osnovu toga M-ti stacionaran Markovljev proces ima jezgro $g(t,u)$ kao linearnu kombinaciju funkcija tipa:

$$e^{-\lambda(t-u)}\sin\mu(t-u),\ t^k u^{n-k} e^{-\lambda(t,u)}\sin\mu(t-u),$$

za $\mu \neq 0$, $0 \leqslant k \leqslant n$, $n \leqslant M$, $\lambda > 0$, te funkcija tipa:

$$e^{-\lambda(t-u)}\cos\mu(t-u),\ t^k u^{n-k} e^{-\lambda(t-u)}\cos\mu(t-u),$$

za $\mu \neq 0$ ili $\mu = 0$, $0 \leqslant k \leqslant n$, $n \leqslant M$, $\lambda > 0$.

U odeljku rada [16] gde se razmatraju neki specijalni Markovljevi procesi reda M (diferencijabilni i sa homogenim jezgrom) dati su uslovi za funkcije $f_n(t)$ i $\varphi_n(u)$, $n = \overline{1,M}$ iz Goursat jezgra, pa da proces sa takvom funkcijom $g(t,u)$ bude M-ti Markovljev proces.

Ni zbir M prostih stacionarnih Markovljevih procesa ne mora biti M-ti stacionaran Markovljev proces. On je to onda ako Furijeova transformacija $G(\lambda)$ jezgra $g(t-u) = g(x)$:

$$G(\lambda) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_0^{\infty} e^{-i\lambda x}\, g(x)dx = \frac{Q\,(i\lambda)}{\prod_{j=1}^{M} (i\lambda + \lambda_j)},$$

gde je $Q(i\lambda)$ polinom po $i\lambda$ najviše stepena M-1, zadovoljava tu osobinu da $Q(i\lambda)$ nema korena sa pozitivnim realnim delom.

Iako se Hida ograničio na Gausove procese multipliciteta jedan, čija su jezgra oblika $g(t,u) = \sum_{n=1}^{M} f_n(t)\cdot\varphi_n(u)$, $u \leq t, t\in T$ i to samo na one koji pripadaju klasi Markovljevih procesa (funkcije $f_n(t)$ i $\varphi_n(u)$ zadovoljavaju odredjene uslove, $n = \overline{1,M}$), ipak je time obuhvaćena široka klasa procesa. Jer svako jezgro $g(t,u)$ koje ispunjava uslov:

$$\int_T\int_T g^2(t,u)\; dF(u)\; dF(t) < \infty$$

može se sa bilo kojom tačnošću u smislu metrike prostora $L^2(dF \times dF)$ zameniti jezgrom konačnog ranga, tj. jezgrom oblika $\sum_{n=1}^{M} f_n(t)\cdot\varphi_n(u)$, (pogledati [40] , strana 174). Inače gornji uslov prema teoremi Fubinija znači da važi i:

$$\int_T g^2(t,u)\; dF(u) < \infty .$$

Kramer u radu [15] uvodi za slučajne procese date čistokanoničnim izrazom (1) sledeće *uslove regularnosti:*

R_1 $\quad g_n(t,u)$ i $g'_{nt}(t,u)$ su neprekidne i ogranične funkcije za $u \leq t$, $u, t\in T$, $n = \overline{1,N}$.

R_2 $\quad g_n(t,t) = 1$ za svako $t\in T$, $n = \overline{1,N}$.

R_3 $\quad$ funkcija $F_n(u) = E\, z_n^2(u)$ je apsolutno neprekidna i različita od konstante, a $F'_n(u) = f_n(u)$ ima najviše konačan broj tačaka prekida u bilo kom podintervalu od T, za $n = \overline{1,N}$.

Uslov R_2 je ekvivalentan sa činjenicom R'_2:

$g_n(t,t) > 0$ za svako $t\in T$, $n = \overline{1,N}$. Očigledno je da iz R_2 sledi R'_2. A ako važi R'_2 onda transformacijama:

$$\overline{g_n}(t,u) = \frac{g_n(t,u)}{g_n(u,u)},$$

$$\overline{dZ_n}(u) = g_n(u,u)\cdot dZ_n(u),$$

$u \leq t$, u, $t\in T$, $n = \overline{1,N}$ dobija se proces:

$$\overline{x}(t) = \sum_{n=1}^{N} \int_a^t \overline{g_n}(t,u)\cdot \overline{dZ_n}(u) = x(t),$$

za koji važi R_2.

Teorema. (5.1. iz [15]). Procesi dati čisto-kanoničnom reprezentacijom (1), koji ispunjavaju uslove regularnosti imaju multiplicitet jedan.

Obrnuto tvrdjenje naravno ne važi. Ima mnogo procesa multipliciteta jedan, koji ne zadovoljavaju uslove regularnosti, što pokazuje i sledeći primer.

Primer 1. Neka je $z(u)$, $0 \leq u < \infty$ Vinerov proces. Tada se za svako $n\in N$ mogu odrediti konstante $a_0, a_1, \dots, a_n$ da:

$$x(t) = \int_0^t \left(a_0 + a_1 \frac{u}{t} + a_2 \left(\frac{u}{t}\right)^2 + \dots + a_n \left(\frac{u}{t}\right)^n\right) dz(u),$$

$u \leq t$, bude opet Vinerov proces. To pokazuje da $z(u)$ ima beskonačno mnogo reprezentacija, a svaka ne mora da ispunjava R_1 i R_2 uslov. Recimo reprezentacija Vinerovog procesa:

$$x(t) = \int_0^t (3 - 12\,\frac{u}{t} + 10\,(\frac{u}{t})^2)\,dz(u),$$

$u \leq t$ ne ispunjava uslov R_1, a nije ni čisto kanonična. (Pogledati Levijeve procese navedene u [16]).

Napomena. Prethodna teorema važi i za slučaj kad je donji kraj intervala $a = -\infty$, ali je onda potrebno uvesti dodatno ograničenje:

$$\int_{-\infty}^t |g'_{n_t}(t,u)|\,du < \infty,$$

gde je $u \leq t$, $t \in (-\infty, b)$, $n = \overline{1,N}$.

Po Krameru u prethodnom tvrdjenju mogu se izostaviti uslovi 3. i 4. prve teoreme Uvoda, koji karakterišu čisto-kanoničnu reprezentaciju. Naime, dovoljno je pretpostaviti da je (1) samo integralni izraz za $x(t), t \in T$. Kramer zatim dokazuje teoremu da ako je $x(t)$ dat integralnom reprezentacijom (ispunjeni su uslovi 1. i 2. iz Uvoda):

$$x(t) = \int_a^t g(t,u)\,dz(u),$$

$u \leq t, u, t \in T$ i ako važe uslovi regularnosti tada proces $x(t)$ ima multiplicitet jedan i njegova reprezentacija je čisto-kanonična (teorema 5.2 iz [15]).

U dokazu te teoreme, da je jezgro $g(t,u)$ datog procesa kompletno, polazi od relacije:

$$\int_a^s g(s,u)\cdot h(u)\cdot f(u)\,du = 0,$$

za $s \in (a,t]$, gde je t fiksiran broj iz T, a $h(u)$ proizvoljna funkcija prostora $L^2(f(u) \cdot du)$. Diferenciranjem te veze dobija se:

$$g(s,s) \cdot h(s) \cdot f(s) + \int_a^s g_s'(s,u) \cdot h(u) \cdot f(u) du = 0,$$

$s \in (a,t]$. To je homogena integralna jednačina Voltera druge vrste po $h(s) \cdot f(s)$, ali njeno jedino rešenje ne mora biti trivijalno za svako $s \in (a,t]$, kao što je navedeno u [15]. Na primer: ako je $g(t,u) = -3t + 4u$. Tada je $g_t'(t,u) = -3$, $g(t,t) = t$, pa važe uslovi R_1 i R_2 na konačnom intervalu (a,b) gde je $a = 0$. Neka je $f(u) = 1$, tada su za $h(u) = u^2 \in L^2(du)$ obe gore integralne veze ispunjene. Isto važi za izbor $g(t,u) = -2t + 3u$, $h(u) = u$ ili $g(t,u) = -t+2u$, $h(u) = 1$, itd. Kako postoji funkcija $h(u) \neq 0$, $h \in L^2(dF)$ i kako je:

$$\int_a^s g(s,u) \cdot h(u) \cdot dF(u) = 0,$$

za svako $s \in (a,t]$, $t \in T$, sledi da $g(t,u)$ nije kompletno jezgro u prostoru $L^2(dF(u))$. To znači da Kramerovo tvrdjenje nije tačno, odnosno slučajni proces koji zadovoljava uslove regularnosti može imati multiplicitet jedan, ali njegova reprezentacija tada ne mora biti čisto-kanonična.

Napomena. U integralnim jednačinama tipa:

$$\int_a^t g(t,u) \cdot h(u) \cdot dF(u) = y(t),$$

po nepoznatoj $h(t)$, $t \in (a,b)$ samo kompletnost jezgra $g(t,u)$ u prostoru $L^2(dF(u))$ obezbedjuje jedinstvenost rešenja, tj. rešenje je jedinstveno ako: $y(t) = 0$ povlači $h(t) = 0$ za svako $t \in (a,b)$, (videti [37] i [40]).

Hida je u [16] pokazao za procese multipliciteta jedan da se od svake kanonične reprezentacije:

$$x(t) = \int_a^t g(t,u)\cdot dz(u),$$

$u \leqslant t$, u, $t \in T$ može dobiti čisto-kanonična reprezentacija:

$$x(t) = \int_a^t g(t,u)\cdot d\overline{z}(u),$$

$u \leqslant t$, gde je $\overline{z}(u) = \int_a^t \chi_B(u) dz(u)$, $\chi_B(u)$ je indikator merljivog skupa $B \subset T$.

U radu [19] Kalianpur i Mandrekar sličnim transformacijama svakog člana kanonične reprezentacije:

$$x(t) = \sum_{n=1}^{N} \int_{-\infty}^{t} g_n(t,u)\cdot dz_n(u),$$

$u \leqslant t$, $t \in (-\infty,+\infty)$ procesa multipliciteta N, dobijaju čisto-kanoničnu reprezentaciju:

$$x(t) = \sum_{n=1}^{N} \int_{-\infty}^{t} \overline{g}_n(t,u)\cdot d\overline{z}_n(u).$$

Medjutim, u takvoj konstrukciji u [19] postoji greška, i nju navodi Siraja u radu [21].

Ali, ako je data kanonična reprezentacija (1) procesa $x(t)$, $t \in T$, a poznato je da je multiplicitet M, za $x(t)$, jedan (ili $M < N$) onda takve transformacije kao u [16] i [19] ne dovode do nalaženja čisto-kanoničnog jezgra $g(t,u)$. Odnos izmedju jezgara $g(t,u)$ i $g_n(t,u)$, u tom slučaju, daje Siraja u [20]:

Označimo sa γ_n zajedničku spektralnu meru procesa $z(u)$ i $z_n(u)$, $n = \overline{1,N}$:

$$E(z(t)-z(s))\cdot(z_n(t')-z_n(s') = \gamma_n([s,t)\cap[s',t')).$$

Tada je γ_n apsolutno neprekidna u odnosu na F_n, tj. za konačnu meru sa znakom $d\gamma_n$ važiće:

$$d\gamma_n(u) = a_n(u)\cdot dF_n(u),$$

$n = \overline{1,N}$. Iz konstrukcije γ_n sledi da procesi z i z_n imaju medjusobno ortogonalne priraštaje. Na osnovu kanoničnosti obeju reprezentacija:

$$\int_a^t g(t,u)\cdot dz(u) = \sum_{n=1}^{N} \int_a^t g_n(t,u)\cdot dz_n(u),$$

$u \leqslant t$, u, $t \in T$ i preko skalarnog proizvoda $(x(t), z_n(t))$ sledi:

$$\int_a^t g(t,u)\cdot d\gamma_n(u) = \int_a^t g_n(t,u)\cdot dF_n(u),$$

za $n = \overline{1,N}$. Tj. važi:

$$\int_a^t g(t,u)\cdot a_n(u)\cdot dF_n(u) = \int_a^t g_n(t,u)\cdot dF_n(u),$$

za svako $n = \overline{1,N}$. Odavde je:

$$g_n(t,u) = a_n(u)\cdot g(t,u),$$

skoro svuda po meri dF_n, $n = \overline{1,N}$, pa je

$$\sum_{n=1}^{N} \int_a^t g_n(t,u)\cdot dz_n(u) = \sum_{n=1}^{N} \int_a^t g(t,u)\cdot a_n(u) dz_n(u) =$$

$$= \int_a^t g(t,u)\cdot \sum_{n=1}^{N} a_n(u) dz_n(u),$$

$u \leqslant t$, u, $t \in T$. Znači, obnavljajući proces z(u) se može izraziti kao:

$$dz(u) = \sum_{n=1}^{N} a_n(u) dz_n(u),$$

Slične veze postoje ako su date kanonična reprezentacija (1) procesa x(t), $t \in T$ i čisto-kanonična reprezentacija:

$$\sum_{k=1}^{M} \int_a^t G_k(t,u)\cdot dZ_k^*(u),$$

$u \leq t$, u, $t \in T$ istog procesa. Tada je

$$g_n(t,u) = \sum_{k=1}^{M} a_{kn}(u) \cdot G_k(t,u),$$

skoro svuda po meri $dF_n(u)$, $n = \overline{1,N}$. Obnavljajući procesi za $Z_k^*(u)$ su:

$$Z_k^*(t) = \sum_{n=1}^{N} \int_a^t a_{kn}(u) \cdot dz_n(u),$$

za $k = \overline{1,M}$. Ovde je zajednička spektralna mera za Z_k^* i z_n: $d\gamma_{kn}$ i važi:

$$d\gamma_{kn}(u) = a_{kn}(u) \cdot dF_n(u),$$

za $k = \overline{1,M}$ i $n = \overline{1,N}$.

Siraja razmatra i problem kanoničnosti zbira dve ili više čisto kanoničnih reprezentacija. Naime, zbir čisto kanoničnih reprezentacija ne mora biti čisto kanoničan.

Primer 2. Proces

$$x(t) = Z_1(t) + c\, Z_2(t),$$

$t \in [0, \tau]$, $c = \text{const}$, gde su Z_1 i Z_2 medjusobno nezavisni Vinerovi procesi, predstavljen je zbirom dve čisto-kanonične reprezentacije, ali njegov multiplicitet je jedan prema Hitsudinom radu [18], pa ovo nije njegova Kramerova reprezentacija.

Zbir čisto-kanoničnih reprezentacija ne mora biti čak ni kanoničan.

Primer 3. Neka je dat proces $x(t)$, $t \in [0, \tau]$:

$$x(t) = Z_1(t) + f(t) \cdot Z_2(t),$$

gde je $f(t)\in L^2(dt)$ jednoznačna, apsolutno neprekidna funkcija i $f'(t)\in L^2(dt)$ za svako t, a Z_1 i Z_2 su medjusobno nezavisni Vinerovi procesi. Ako je data reprezentacija za x(t) kanonična onda je:

$$P_s x(t) - x(s) = (f(t)-f(s))Z_2(s)\in H(x,s),$$

za $s<t$. Kako je funkcija f jednoznačna sledi da je $Z_2(s)\in H(x,s)$, pa je i $Z_1(s)\in H(x,s)$. Znači važi $H(x,s) = H(Z_1,s) \oplus H(Z_2,s)$, tj. multiplicitet procesa x(t) je dva, što je nemoguće prema radu [18].

Znači, kompletnost svakog jezgra $g_n(t,u)$ u prostoru $L^2(dF_n(u))$ u reprezentaciji (1) procesa x(t), $t\in T$ ne povlači kompletnost familije $\{g_n(t,u)\}$ u $L^2(dF(u))$, $dF = (dF_1,\ldots,dF_N)$, $n = \overline{1,N}$.

3. Proširenje klase procesa multipliciteta jedan

Neka je dat slučajni proces $x(t), t\in T$ Kramerovom reprezentacijom

$$x(t) = \int_a^t g(t,u)\cdot dz(u) \qquad (2)$$

$u \leq t, u, t\in (a,b)$, gde je $z(u)$ proces sa ortogonalnim priraštajima takav da je

$$E\, z(u) = 0 \quad \text{i} \quad E\, z^2(u) = F(u),$$

a $g(t,u)$ neslučajna funkcija iz prostora $L^2(dF(u))$. Proces $x(t)$, $t\in T$ zadovoljava sve pretpostavke iz uvodnog dela.

Napomena. Ovde su proces $z(u)$ i jezgro $g(t,u)$ dati u vektorskom obliku.

Uvedimo sledeće uslove za $g(t,u)$ i $z(u)$:

A_1 funkcije $g(t,u)$ i $g_t'(t,u)$ su neprekidne i ograničene za $u,t\in T$.

A_2 $g(t,t) = 0$ za svako $t\in T$.

A_3 funkcija $F(u)$ je apsolutno neprekidna, različita od konstante, a $f(u) = F'(u)$ ima najviše konačan broj tačaka prekida u bilo kom podintervalu od T.

Teorema 1. Slučajni proces dat izrazom (2) za koji važe uslovi A_1, A_2, A_3 ima multiplicitet jedan.

Dokaz. Pretpostavimo da važi suprotno, tj. da je multiplicitet $N > 1$. Neka je, na primer $N = 2$. Tada je $g(t,u) = (g_1(t,u), g_2(t,u))$ i $z(u) = (z_1(u), z_2(u))$, $u \leq t, u, t\in T$, pa je i $F(u) = (F_1(u),\ F_2(u))$ i $f(u) = (f_1(u),\ f_2(u))$.

Prema uslovu A_3 postoji konačan podinterval $T_1 \subset T$, $T_1 = (a_1, b_1)$, takav da su izvodne funkcije $f_1(u)$ i $f_2(u)$ neprekidne i ne uvek jednake nuli na njemu. Neka je t bilo koja tačka iz T_1 i neka je $h(u)$ proizvoljna funkcija iz $L^2(dF(u))$, takva da važi sledeća veza:

$$\sum_{n=1}^{2} \int_{a_1}^{s} g_n(s,u)\cdot h_n(u)\cdot f_n(u)\,du = 0,$$

za svako $s \in (a_1, t]$, $t \in T_1$. Prema uslovu A_1 prethodna relacija se može diferencirati po s, pa se dobija:

$$\sum_{n=1}^{2} g_n(s,s)h_n(s)f_n(s) + \sum_{n=1}^{2} \int_{a_1}^{s} g'_{ns}(s,u)h_n(u)f_n(u)du = 0,$$

za $s \in (a_1, t]$. Ova jednačina može važiti ako je na primer:

$$g_1(s,s)h_1(s)f_1(s) + \int_{a_1}^{s} g'_{1s}(s,u)h_1(u)f_1(u)du = 1,$$

i ako je:

$$g_2(s,s)h_2(s)f_2(s) + \int_{a_1}^{s} g'_{2s}(s,u)h_2(u)f_2(u)du = -1.$$

Na osnovu uslova A_2 to se svodi na:

$$\int_{a_1}^{s} g'_{1s}(s,u)h_1(u)f_1(u)du = 1, \quad \int_{a_1}^{s} g'_{2s}(s,u)h_2(u)f_2(u)du = -1,$$

za $s \in (a_1, t]$. Ovo su dve nehomogene integralne jednačine tipa Voltera prve vrste po $h_1(s)f_1(s)$ i $h_2(s)f_2(s)$ za koje se mogu naći rešenja ograničena i neprekidna i ne skoro svuda jednaka nuli za $s \in (a_1, t]$. S obzirom na pretpostavku o izgledu $f_1(u)$ i $f_2(u)$ na intervalu T_1, sledi da je:

$$\int_{a_1}^{t} h_1^2(u)\cdot dF_1(u) + \int_{a_1}^{t} h_2^2(u)\cdot dF_2(u) > 0,$$

za $t \in T_1$. To znači da funkcija $g(t,u) = (g_1(t,u),\ g_2(t,u))$, nije kompletna u prostoru $L^2(dF(u))$, tj. N je različito od dva.

Ako bi pretpostavili da je N jednak bilo kom prirodnom broju većem od dva, način zaključivanja bio bi isti. Za $N = 2k$ bilo bi 2k-integralnih nehomogenih jednačina sa slobodnim članom $(-1)^n$, $n = \overline{1,2k}$, a za $N = 2k+1$ jedna bi integralna jednačina na primer bila homogena za razliku od ostalih 2k jednačina sa slobodnim članom ± 1. Pri tom je dovoljno da postoji bar jedno rešenje $h_n(u) \in L^2(dF_n(u))$ različito od nule. Kraj dokaza.

Kako je Kramer dokazao isto tvrdjenje za slučaj kad je $g(t,t) > 0$ za svako $t \in T$, onda se postavlja pitanje da li je za tvrdjenje teoreme dovoljno pretpostaviti da važe samo uslovi A_1 i A_3?

U slučaju kad je $g(t,t) < 0$ za svako $t \in T$, mogli bi transformisati jezgro $g(t,u)$ i proces $z(u)$ u izrazu (2) kao i ranije:

$$\overline{g}(t,u) = \frac{g(t,u)}{g(u,u)}$$

$$\overline{dz}(u) = g(u,u) \cdot dz(u),$$

$u \leq t, u,t \in T$, pa bi za proces $x(t) = \overline{x}(t), t \in T$

$$\overline{x}(t) = \int_a^t \overline{g}(t,u) \cdot \overline{dz}(u),$$

važio Kramerov uslov regularnosti R_2.

Teorema 2. Slučajni proces $x(t), t \in T$ dat izrazom (2) koji ispunjava uslove A_1 i A_3 ima multiplicitet jedan.

Dokaz. Pretpostavimo kao i ranije da je multiplicitet $N=2$. Prema uslovu A_1, funkcija $g(t,t) = (g_1(t,t), g_2(t,t))$ može biti jednaka nuli u konačnom broju izolovanih tačaka ili na podintervalima pozitivne mere. Označimo uniju intervala gde je $g_n(t,t) = 0$ sa A_n, a uniju intervala gde je $g_n(t,t) < 0$ sa B_n, $n = 1,2$.

Prema uslovu A_3 postoji konačan podinterval $T_1 \subset T$, $T_1 = (a_1, b_1)$, takav da su funkcije $f_1(u)$ i $f_2(u)$ na njemu neprekidne i ne uvek jednake nuli. Izaberimo takav interval T_1, ali uz dodatna ograničenja: da ne sadrži izolovane nule funkcija $g_1(t,t)$ i $g_2(t,t), t\in T$ i da pripadne preseku $\bigcap_{n=1}^{2} C_n$ gde je C_n jedan od sledećih skupova: A_n, B_n, $T\setminus(A_n \cup B_n)$, za $n = 1,2$.

Pretpostavimo, na primer da je interval $T_1 \subset A_1 \cap (T\setminus(A_2 \cup B_2))$. Tada je na T_1: $g_1(t,t) = 0$, i $g_2(t,t) > 0$, za svako $t\in T_1$.

Diferenciranjem veze:

$$\int_{a_1}^{s} g(s,u)h(u)f(u)du = 0,$$

$s\in(a_1,t]$, $t\in T_1$, gde je $h(u)$ proizvoljna funkcija iz prostora $L^2(dF(u))$, dobija se:

$$\int_{a_1}^{s} g'_{1s}(s,u)h_1(u)f_1(u)du + \int_{a_1}^{s} g'_{2s}(s,u)h_2(u)f_2(u)du +$$

$$+ g_2(s,s)f_2(s)h_2(s) = 0,$$

za $s\in(a_1,t]$. A to je na primer ispunjeno kad je

$$\int_{a_1}^{s} g'_{1s}(s,u)h_1(u)f_1(u)du = 1,$$

i ako je

$$\int_{a_1}^{s} g'_{2s}(s,u)h_2(u)f_2(u)du + g_2(s,s)h_2(s)f_2(s) = -1.$$

Ovo su dve integralne nehomogene jednačine tipa Voltera prve i druge vrste za koje postoje rešenja po $h_1(s)f_1(s)$ i $h_2(s)f_2(s)$, $s\in(a_1,t]$, $t\in T_1$ takva da s obzirom na pretpostavke o $f_1(s)$ i $f_2(s)$, važi na skupu T_1:

$$\int_{a_1}^{t} h_1^2(u)dF_1(u) + \int_{a_1}^{t} h_2^2(u)dF_2(u) > 0.$$

Time je pokazana nekompletnost jezgra $g(t,u)$ u prostoru $L^2(dF(u))$. Znčai $N \neq 2$. Slično se zaključuje u slučajevima kad se interval T_1 izabere da pripada jednom od preostalih osam skupova iz $\bigcap_{n=1}^{2} C_n$. Ovim je dokaz završen.

Napomena. U slučaju kad je donji kraj intervala T, $a = -\infty$, zbog integralnih jednačina koje se javljaju u dokazima teorema 1. i 2. potrebno je još uvesti da važi:

$$\int_{-\infty}^{t} |g'_t(t,u)|.du < \infty ,$$

za $u \leqslant t, u,t \in T$, kao dodatni uslov.

Kao i u predhodnom poglavlju i ovde uslovi A_1, A_2, A_3 za proces $x(t), t \in T$ ne povlače čisto-kanoničnost reprezentacije.

Primer 4. Neka je dat proces:

$$x(t) = \int_0^t \left(\frac{3}{5} - 3\frac{u}{t} + 5\frac{u^2}{t^2} - 3\frac{u^3}{t^3} + \frac{2}{5}\frac{u^5}{t^5}\right) dz(u),$$

za $u \leqslant t, t \in (0,+\infty)$, gde je $z(u)$ Vinerov proces. Funkcije

$$g(t,u) = \frac{3}{5} - 3\frac{u}{t} + 5\frac{u^2}{t^2} - 3\frac{u^3}{t^3} + \frac{2}{5}\frac{u^5}{t^5},$$

$$g'_t(t,u) = 3\frac{u}{t^2} - 10\frac{u^2}{t^3} + 9\frac{u^3}{t^4} - 2\frac{u^5}{t^6} =$$

$$= \frac{1}{t}\cdot\left(3\frac{u}{t} - 10\frac{u^2}{t^2} + 9\frac{u^3}{t^3} - 2\frac{u^5}{t^5}\right),$$

$u \leqslant t, u,t \in (0,+\infty)$ su neprekidne. One su i ograničene, sem eventualno u krajevima intervala. U slučajevima kad $t \to \infty, u \to \infty$, $u \to 0$ očigledno je da su $g(t,u)$ i $g'_t(t,u)$ ograničene, a biće to i kad $t \to 0$, jer zbog uslova $u \leqslant t$ mora tada i $u \to 0$, pa će važiti:

$$g(t,u) \xrightarrow[u,t \to 0]{} \frac{3}{5} - 3 + 5 - 3 + \frac{2}{5} = 0,$$

$$g'_t(t,u) \xrightarrow[u,t \to 0]{} \frac{1}{t}\cdot(3-10+9-2) = 0.$$

Lako se proverava i da je $g(t,t) = 0$ za svako t. Znači uslovi A_1, A_2, A_3 su ispunjeni, ali $g(t,u)$ nije kompletna u $L^2(du)$, $u \in (0,+\infty)$. Naime, postoji element y iz prostora $H(z)$:

$$y = \int_0^{t_0} u^2 dz(u),$$

koji je nezavisan od $x(t), t \leq t_0$:

$$(x(t),y) = \int_0^t \left(\frac{3}{5} - 3\frac{u}{t} + 5\frac{u^2}{t^2} - 3\frac{u^3}{t^3} + \frac{2}{5}\frac{u^5}{t^5}\right)u^2 du =$$

$$= \left(\frac{1}{5}u^3 - \frac{3u^4}{4t} + \frac{u^5}{t^2} - \frac{1}{2}\frac{u^6}{t^3} + \frac{1}{20}\frac{u^8}{t^5}\right)\Big|_0^t =$$

$$= t^3 \cdot \left(\frac{1}{5} - \frac{3}{4} + 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{20}\right) = t^3 \cdot 0 = 0.$$

Ovaj proces inače ima multiplicitet jedan (videti [16]).

Uslov čisto-kanoničnosti za reprezentaciju procesa $x(t), t \in T$ u predhodnim teoremama se može oslabiti. Naime, važi sledeće:

Teorema 3. Neka je dat proces $x(t), t \in (a,b) = T$ kanoničnom reprezentacijom:

$$x(t) = \sum_{n=1}^{N} \int_a^t g_n(t,u) \cdot dz_n(u) \tag{3}$$

$u \leq t$, $u,t \in T$, $N < \infty$, i neka su ispunjeni Kramerovi uslovi regularnosti R_1, R_2, R_3. Tada proces $x(t)$ ima multiplicitet jedan.

Dokaz. Pretpostavimo da je multiplicitet $M \neq 2$; na primer neka je $M = 2$. Tada postoji čisto-kanonična reprezentacija za $x(t), t \in T$ oblika:

$$x(t) = \sum_{k=1}^{2} G_k(t,u) \cdot dz_k^*(u), \tag{4}$$

$u \leq t$, gde je familija $\{G_k(t,u)\}_{k=1,2}$ kompletna u prostoru $L^2(d\phi(u))$, $d\phi(u) = dE(z_k^*(u))^2$, $\phi(u) = (\phi_1(u), \phi_2(u))$, $\phi'(u) = \varphi(u)$.

Obe reprezentacije (3) i (4) su kanonične, pa važi za svako $s < v < t$:

$$\sum_{n=1}^{N} \int_{s}^{v} g_n(t,u)\cdot dz_n(u) = \sum_{k=1}^{2} \int_{s}^{v} G_k(t,u)\cdot dz_k^*(u),$$

gde su $z_n(u)$ i $z_k^*(u)$, $n = \overline{1,N}$, $k = 1,2$, procesi sa medjusobno ortogonalnim priraštajima. Uvedimo zajedničku korelacionu meru za $z_n(u)$ i $z_k^*(u)$:

$$E(z_n(s)-z_n(t))\cdot(z_k^*(s')-z_k^*(t')) = \gamma_{nk}([s,t)\cap[s',t')).$$

Konačna mera sa znakom $d\gamma_{nk}(u)$ je apsolutno neprekidna, po konstrukciji, u odnosu na mere $dF_n(u)$ i $d\phi_k(u)$, $n = \overline{1,N}$, $k = 1,2$. Zato važi:

$$d\gamma_{nk}(u) = a_{nk}(u)\cdot d\phi_k(u),$$

$n = \overline{1,N}$, $k = 1,2$, i nisu sve $a_{nk}(u)$ jednake nuli.

Iz reprezentacije (3) množeći je skalarno sa $z_k^*(u)$ dobija se za $s < u < v$:

$$\sum_{n=1}^{N} \int_{s}^{v} g_n(t,u)\cdot d\gamma_{nk}(u) = \int_{s}^{v} G_k(t,u)\,d\phi_k(u),$$

za $k = 1,2$. Odavde je:

$$\sum_{n=1}^{N} \int_{s}^{v} g_n(t,u)\cdot a_{nk}(u)\cdot d\phi_k(u) = \int_{s}^{v} G_k(t,u)\cdot d\phi_k(u),$$

pa je:

$$G_k(t,u) = \sum_{n=1}^{N} a_{nk}(u)\cdot g_n(t,u) \qquad (5)$$

skoro svuda po meri $d\phi_k(u)$, $k = 1,2$. Iz reprezentacije (4) sledi:

$$x(t) = \sum_{k=1}^{2} \int_{a}^{t} \sum_{n=1}^{N} a_{nk}(u)\cdot g_n(t,u)\; dz_k^*(u) =$$

$$= \sum_{n=1}^{N} \int_{a}^{t} g_n(t,u) \sum_{k=1}^{2} a_{nk}(u)\; dz_k^*(u),$$

za $u \leq t$, pa su obnavljajući procesi za $z_n(u)$ oblika:

$$z_n(u) = \int_a^u \sum_{k=1}^{2} a_{nk}(u)\, dz_k^*(u),$$

za $n = \overline{1,N}$.

Na osnovu relacije (5), funkcija $G_k(t,u)$ je diferencijabilna po t na (a,b), jer su takve sve funkcije $g_n(t,u)$, $n=\overline{1,N}$, za $k=1,2$. Ako bi i gustine $a_{nk}(u)$, $n=\overline{1,N}$, $k=1,2$, bile neprekidne i ograničene po $u\in(a,b)$, onda bi jezgro $G_k(t,u)$ zadovoljavalo uslov regularnosti R_1, za $k=1,2$, pa bi na osnovu teoreme 2., proces $x(t), t\in T$ dat izrazom (4) imao multiplicitet jedan.

Ako to nije ispunjeno za gustine a_{nk}, onda neka je t_1 proizvoljna tačka iz (a,b), i neka su $h_k(u)$ proizvoljne funkcije iz prostora $L^2(d\phi_k(u))$, $k=1,2$, takve da važi:

$$\sum_{k=1}^{2} \int_a^t G_k(t,u)\cdot h_k(u)\cdot d\phi_k(u) = 0,$$

za svako $t\in(a,t_1]$. Diferenciranjem ove veze po t dobija se:

$$\sum_{k=1}^{2} \int_a^t G'_{kt}(t,u)\cdot h_k(u)\cdot \varphi_k(u)\, du + \sum_{k=1}^{2} G_k(t,t) h_k(t) \varphi_k(t) = 0,$$

za $t \leq t_1$. Ova jednačina važi ako je na primer:

$$\int_a^t G'_{1t}(t,u)\cdot h_1(u)\cdot \varphi_1(u)\, du + G_1(t,t)\cdot h_1(t)\cdot \varphi_1(t) = 1,$$

$$\int_a^t G'_{2t}(t,u)\cdot h_2(u)\cdot \varphi_2(u)\, du + G_2(t,t)\cdot h_2(t)\cdot \varphi_2(t) = -1,$$

za svako $t\in(a,t_1]$. Posmatraćemo samo jednu od ovih dveju integralnih nehomogenih jednačina Voltera druge vrste. Na osnovu izraza (5) prva jednačina je ekvivalentna sa:

$$\int_a^t \left(\sum_{n=1}^{N} g'_{nt}(t,u)\, a_{n1}(u)\right) h_1(u)\cdot \varphi_1(u)\, du +$$

$$+ \left(\sum_{n=1}^{N} g_n(t,t)\cdot a_{n1}(t)\right)\cdot h_1(t)\cdot \varphi_1(t) = 1,$$

za $t \in (a,t_1]$. Pretpostavili smo da je mera $d\phi_1$ (kao i $d\phi_2$) apsolutno neprekidna, što nije suštinska restrikcija (videti [6] i [5]), pa možemo još pretpostaviti da je $\phi_1(u) = u$. Gornja jednačina zbog važenja uslova R_2 za svako g_n, $n=\overline{1,N}$, postaje:

$$\int_a^t \left(\sum_{n=1}^{N} g'_{nt}(t,u) \cdot a_{n1}(u) \right) \cdot h_1(u)\, du +$$

$$+ \sum_{n=1}^{N} a_{n1}(t) \cdot h_1(t) = 1,$$

za $t \in (a,t_1]$, i ona ima jedinstveno rešenje $h_1 \in L^2$, ([40], 192 str.) ako je:

$$\int_a^b \int_a^b \left(\sum_{n=1}^{N} g'_{nt}(t,u) \cdot a_{n1}(u) \right)^2 du\, dt < \infty .$$

Pri tom nisu sve a_{n1}, $n=\overline{1,N}$ funkcije jednake nuli, jer ako bi to bilo, znači z_1^* je ortogonalan na svakom z_n, $n=\overline{1,N}$, pa bi iz:

$$H(z_1^*) \oplus H(z_2^*) = H(x) \subset \sum_{n=1}^{N} \oplus\ H(z_n),$$

sledilo da je $z_1^* = 0$.

Neka je:

$$A \leq g_n(t,u) \leq B,$$

$$C \leq g'_{nt}(t,u) \leq D,$$

za svako $n=\overline{1,N}$ i $u,t \in T$, (prema uslovu R_1), tada važi:

$$A^2 \cdot \int_a^b \left(\sum_{n=1}^{N} a_{n1}(u) \right)^2 du \leq$$

$$\leq \int_a^b \left(\sum_{n=1}^{N} g_n(t,u) \cdot a_{n1}(u) \right)^2 du =$$

$$= \int_a^b G_1^2(t,u)\, du.$$

Kako je funkcija $G_1(t,u) \in L^2(d\phi_1)$ sledi da je $\sum_{n=1}^{N} a_{n1}(u) \in L^2(d\,\phi_1) = L^2(du)$ i da je:

$$\int_a^b \int_a^b \left(\sum_{n=1}^{N} g'_{nt}(t,u)\cdot a_{n1}(u)\right)^2 du dt \leq$$

$$\leq \int_a^b D^2\left(\int_a^b \left(\sum_{n=1}^{N} a_{n1}(u)\right)^2 du\right)dt =$$

$$= D^2\cdot(b-a)\cdot\int_a^b\left(\sum_{n=1}^{N} a_{n1}(u)\right)^2 du < \infty .$$

Na isti način bi se analizirala i druga integralna jednačina:

$$\int_a^t G'_{2t}(t,u)\cdot h_2(u)\cdot\varphi_2(u)du + G_2(t,t)\cdot h_2(t)\cdot\varphi_2(t) = -1,$$

za $t\in(a,t_1]$. Na osnovu svega sledi da je:

$$0 < \int_a^t h_1^2(u)\cdot d\phi_1(u) + \int_a^t h_2^2(u)\cdot d\phi_2(u) < \infty,$$

za svako $t\in(a,t_1]$, što znači da multiplicitet je $M \neq 2$. Slično bi teklo zaključivanje kad bi pretpostavili da je M bilo koji broj $M>2$. Time je dokaz završen.

Primer 5. Proces $x(t) = z_1(t) + c\, z_2(t), t\in T$, zadan u primeru 2, dat je kanoničnom reprezentacijom (može se pokazati da je $x(t)-x(s)$ ortogonalno na $x(s), s<t$, pa je $P_s x(t) = x(s)$), zadovoljava uslove regularnosti, pa je multiplicitet $N_x=1$.

Posledica 1. Teoreme 1. i 2. važe kad se uslov čisto-kanoničnosti reprezentacije (2) procesa $x(t), t\in T$ zameni uslovom kanoničnosti.

Napomena. Postoje procesi čija reprezentacija nije kanonična, a multiplicitet im je jedan.

Primer 6. Neka je $x(t)=z_1(t) + f(t)\cdot z_2(t), t\in T$, z_1 i z_2 su medjusobno nezavisni Vinerovi procesi, a $f(t)\in L^2(dt)$, $f'(t)\in L^2(dt)$ i $f(t) \neq f(s)$ za $t\neq s$. U predhodnom poglavlju je pokazano da ovo nije kanonična reprezentacija za $x(t)$. Prema Hitsudinom radu [18], $x(t), t\in T$ ima multiplicitet jedan.

Na kraju ostaje nerešen problem da li su uslovi regularnosti za proces $x(t)$, $t\in T$ dovoljni da on ima $N_x=1$. I pitanje proveravanja čisto-kanoničnosti reprezentacije za $x(t), t\in T$ predstavlja teškoću. U nekim slučajevima lako se može utvrditi da li je jezgro datog procesa kompletno, kod stacionarnih procesa, na primer.

Lema 1. Ako postoji funkcija $h(u)\neq 0$ iz zatvorenog (fundamentalnog) skupa D u prostoru $L^2(dF(u))$ takva da je:

$$\int_a^t g(t,u)\cdot h(u)\cdot dF(u) = 0$$

za svako $t\in(a,t_o]$, $t_o\in(a,b)$, onda jezgro $g(t,u)$ nije kompletno u $L^2(dF(u))$.

Zatvoreni sistem u $L^2(dF(u))$ čini niz: $1,u,u^2,\ldots,u^n,\ldots$ ali samo ako je interval (a,b) konačan.

Primer 7. Za proces:

$$x(t) = \int_0^t \left(\frac{3}{5} - 3\frac{u}{t} + 5\left(\frac{u}{t}\right)^2 - 3\left(\frac{u}{t}\right)^3 + \frac{2}{5}\left(\frac{u}{t}\right)^5\right) dz(u),$$

gde je $u\leq t, u, t\in(0,\tau)$, $dF(u) = du$, utvrdjeno je ranije da nije dat čisto-kanoničnom reprezentacijom. Funkcija $u^2\in L^2(du)$, $u\in(0,\tau)$, ortogonalna na $x(t)$, dobijena je rešavanjem jednačine:

$$\int_0^t \left(\frac{3}{5} - 3\frac{u}{t} + 5\left(\frac{u}{t}\right)^2 - 3\left(\frac{u}{t}\right)^3 + \frac{2}{5}\left(\frac{u}{t}\right)^5\right) u^k\, du = 0,$$

po k, $k=0,1,2,\ldots$, koja je ekvivalentna sa:

$$3\,(k+2)(k+3)(k+4)(k+6) - 15\,(k+1)(k+3)(k+4)(k+6) +$$
$$+ 25\,(k+1)(k+2)(k+4)(k+6) - 15\,(k+1)(k+2)(k+3)(k+6) +$$
$$+ 2\,(k+1)(k+2)(k+3)(k+4) = 0.$$

Rešenje je $k=2$.

Primer 8. Svi procesi oblika:

$$x_k(t) = \int_0^t c\cdot(kt-(k+1)\cdot u)\ dz(u),$$

za $u \leq t, u, t \in (0,\tau)$, $k \in N$, $c=\text{const}$, $Ez^2(u) = u$, imaju nekompletna jezgra $g_k(t,u)$. Naime, svakoj funkciji $g_k(t,u)$ odgovara u^{k-1}, $k \in N, u^{k-1} \in L^2(du)$, da važi:

$$\int_0^t g_k(t,u)\cdot u^{k-1}\ du =$$

$$= c\int_0^t (kt-(k+1)u)\cdot u^{k-1} du = 0,$$

za svako $t \in (0,\tau)$.

4.1. Transformacije slučajnih procesa multipliciteta jedan

Neka je zadan operator T:

$$y(t) = Tx(t),$$

$t \in (a,b)$, i neka je on linearno i po neprekidnosti raširen na ceo prostor $H(x)$. Pri transformaciji T procesa $x(t)$ u $y(t)$, kojom se prostor $H(x)$ slika u prostor $H(y)$, menja se spektralni tip, pa se postavlja pitanje: kakav je multiplicitet novodobijenog procesa $Tx(t)$ u odnosu na multiplicitet procesa $x(t)$, $t \in (a,b)$.

U nekim slučajevima kada proces $x(t)$ množimo neslučajnom funkcijom različitom od nule i multiplicitet i spektralna mera ostaju isti. Takodje pri monotonoj i neprekidnoj zameni parametara $t \in (a,b)$, spektralni tip ostaje sačuvan.

U knjizi [2] Rozanov navodi hipotezu da ako je transformacija T takva da su T i T^{-1} ograničeni operatori, onda su prostori $H(x)$ i $H(y)$, $y(t) = Tx(t), t \in (a,b)$ unitarno ekvivalentni, što povlači jednakost njihovih spektralnih tipova. Dato tvrdjenje je dokazano samo za slučaj kad je prostor $H(x)$ diskretni lanac postprostranstva.

Ako je operator T takav da slika prostor $H(x)$ u samog sebe, tj. $H(y) \subset H(x)$, onda je $y(t) = Tx(t)$, kao veličina iz prostora $H(x) = H(z)$ izražena kao:

$$y(t) = \int_a^t \varphi(u) \cdot dz(u),$$

za $u \in (a,b)$, gde je:

$$Ey^2(t) = G(t) = \int_a^t \varphi^2(u) \cdot dF(u) < \infty .$$

Sa druge strane prostor H(y) sadrži sve veličine oblika:

$$\int_a^b \Psi(u)\cdot dy(u),$$

gde je

$$\int_a^b \Psi^2(u)\cdot dG(u) = \int_a^b \Psi^2(u)\cdot \varphi^2(u)\cdot dF(u) < \infty .$$

Označimo sa Δ skup-nosač mere $dG(u) = \varphi^2(u)\cdot dF(u)$. Na skupu Δ funkcija $\varphi(u)$ je različita od nule skoro svuda. Odatle, prostor H(y) se sastoji iz veličina:

$$\int_a^b \Psi(u)\cdot dy(u) = \int_\Delta \Psi(u)\cdot dy(u) =$$

$$= \int_\Delta \psi(u).\varphi(u)\cdot dz(u),$$

i pri tom je:

$$\int_\Delta \psi^2(u)\cdot\varphi^2(u)\cdot dF(u) < \infty .$$

Znači, prostori H(x) i H(y) su jednaki, tj. imaju isti obnavljajući proces $z(u), u\in(a,b)$, a samim tim i isti spektralni tip, ako su mere dF(u) i dG(u) ekvivalentne.

Kod nekih ograničenih operatora, koji slikaju prostor H(x) u deo od H(x), moglo bi se očekivati da je multiplicitet slike Tx(t) manji od multipliciteta originala x(t), ali nije tako.

Primer 9. Neka je $z(t), t\in[0,1]$ Vinerov proces. Tada se z(t) može predstaviti u obliku:

$$z(t) = \sum_{n=0}^{\infty} z_n\cdot\varphi_n(t),$$

za $t\in[0,1]$, gde je slučajna veličina z_n:

$$z_n = \int_0^1 z(t)\cdot\varphi_n(t)\,dt,$$

a funkcija $\varphi_n(t) = \sin (n+1/2)\cdot\pi t$ sopstvena funkcija jezgra $B(s,t) = \min(s,t)$, $s,t \in [0,1]$, $n=0,1,\ldots$ (videti [29], 276 str.).

Neka je P operator projektovanja na konačan potprostor generisan veličinama $z_o, z_1, \ldots, z_{N-1}$, $H(z_o,\ldots,z_{N-1}) \subset H(z)$. Znači:

$$y(t) = Pz(t) = \sum_{n=o}^{N-1} z_n \cdot \varphi_n(t),$$

$t \in [0,1]$, i $y \in H(z_o, z_1, \ldots, z_{N-1})$. Kako je uvek moguće za bilo koje $t > 0$ izabrati tačke $o < t_1 < t_2 < \ldots < t_N < t$ takve da je matrica $\{\varphi_n(t_j)\}$ nedegenerativna, onda se iz jednačina:

$$\sum_{n=o}^{N-1} z_n \cdot \varphi_n(t_j) = y(t_j),$$

za $j=\overline{1,N}$, mogu naći veličine $z_o, z_1, \ldots, z_{N-1}$ kao linearne kombinacije $y(t_1), \ldots, y(t_N)$. Znači važi $H(z_o,\ldots,z_{N-1}) \subseteq H(y)$. Ovim je pokazano da je $H(y) = H(z_o,\ldots,z_{N-1})$, tj. $z_o,\ldots,z_{N-1}$ čine obnavljajući proces za $y(t)$, (z_n su ortogonalne veličine u $H(z)$). Prema tome proces $y(t)$, za razliku od procesa $z(t)$ čiji je multiplicitet jedan, ima multiplicitet jednak N. Medjutim, treba napomenuti da je:

$$H(y,+0) = H(y,t) = H(y,1),$$

za $t > 0$, što znači da je:

$$\bigcap_{t>o} H(y,t) \neq 0,$$

ili proces $y(t), t \in [0,1]$ nije čisto-deterministički proces. Multiplicitet N je ustvari dimenzija potprostora $H(y,+0) \ominus H(y,0)$.

Ovde će biti analizirane izvodne i integralne transformacije procesa multipliciteta jedan. Za njih takodje važi da je $H(y) \subset H(x)$, gde je $y(t) = Tx(t), t \in (a,b)$.

4.2. Izvodne transformacije

Proces $x(t), t\in(a,b) = T$ je, kao i ranije, definisan izrazom:

$$x(t) = \int_a^t g(t,u)\cdot dz(u), \qquad (6)$$

i ispunjava uslove A_1, A_2, A_3.

Navedimo prvo neke osobine za proces $x(t), t\in T$.

1. Proces $x(t), t\in T$ je neprekidan. To sledi na osnovu sledećeg tvrdjenja:

Lema 2. Slučajni proces $x(t), t\in T$ predstavljen izrazom $\int_a^t g(t,u)\cdot dz(u)$ je neprekidan ako i samo ako je funkcija $g(t,u)$, $u\leq t$, neprekidna po t.

Dokaz. Važi procena:

$$\| x(t+h) - x(t) \| =$$

$$= \| \int_t^{t+h} g(t+h,u)\, dz(u) + \int_a^t (g(t+h,u) - g(t,u))dz(u) \| \leq$$

$$\leq \int_t^{t+h} |g(t+h,u)|dF(u) + \int_a^t |g(t+h,u)-g(t,u)|dF(u),$$

za $u\leq t$. Iz ove relacije puštajući da $h\to 0$ dobija se tvrdjenje leme.

2. *Lema 3.* Korelaciona funkcija $B(s,t), s,t\in T$ za proces $x(t)$ iz (6) je neprekidna i ima neprekidne parcijalne izvode B'_s, B'_t, $B''_{s,t}$ po s i t.

Dokaz. Kao što je poznato korelaciona funkcija za $x(t)$ je oblika:

$$B(s,t) = \int_a^{\min(s,t)} g(s,u)\cdot g(t,u)\cdot f(u)\,du,$$

i svuda je neprekidna na TxT. Prema uslovu A_1, $B(s,t)$ ima neprekidne parcijalne izvode B'_s i B'_t svuda, sem možda na dijagonali s=t. Ali kako je:

$$\lim_{\substack{s\to t\\ s\geq t}} \frac{B(s,t) - B(t,t)}{s-t} =$$

$$= \lim_{s\downarrow t} \frac{\int_a^t g(s,u)\cdot g(t,u)\cdot f(u)\,du - \int_a^t g^2(t,u) f(u)\,du}{s-t} =$$

$$= \lim_{s\downarrow t} \int_a^t g(t,u)\cdot \frac{g(s,u) - g(t,u)}{s-t}\cdot f(u)\,du =$$

$$= \int_a^t g'_t(t,u)\cdot g(t,u)\cdot f(u)\,du,$$

i kako je:

$$\lim_{\substack{s\to t\\ s\leq t}} \frac{B(s,t) - B(t,t)}{s-t} =$$

$$= \lim_{s\uparrow t} \frac{\int_a^s g(s,u)\cdot g(t,u)\cdot f(u)\,du - \int_a^t g^2(t,u)\cdot f(u)\,du}{s-t} =$$

$$= \lim_{s\uparrow t} \left(\int_a^s g(t,u)\cdot \frac{g(s,u) - g(t,u)}{s-t}\cdot f(u) - \right.$$

$$\left. - \int_s^t \frac{g^2(t,u)}{s-t}\cdot f(u)\,du \right) = \int_a^t g'_t(t,u)\cdot g(t,u)\cdot f(u)\,du +$$

$$+ g^2(t,t)\cdot f(t),$$

to će prema uslovu A_2 ($g(t,t) = 0$ za svako t) ova dva limesa biti jednaka, čime je pokazana neprekidnost B'_s i B'_t i za s=t. Slično, na osnovu A_1 i A_2 i parcijalni izvod $B''_{s,t}$ je neprekidna funkcija po s i t, a oblik mu je :

$$B''_{s,t}(s,t) = \int_a^{\min(s,t)} g'_s(s,u)\cdot g'_t(t,u)\cdot f(u)\,du,$$

za $s,t\in T$.

3. Proces $x(t), t\in T$ iz (6) je diferencijabilan. To sledi iz sledeće teoreme 4. Pre nje navedene su osnovne činjenice vezane za pojam postojanja izvoda slučajnog procesa.

Proces $x(t)$ ima izvod u t ako postoji granična vrednost izraza:

$$\frac{x(t+h) - x(t)}{h}$$

u srednje kvadratnom smislu, kad $h \to 0$.

Svaki proces koji ima izvod je neprekidan, jer je:

$$\|x(t+h) - x(t)\| = |h|\cdot\left\|\frac{x(t+h)-x(t)}{h}\right\| \to |h|\cdot\|x'(t)\| \to 0$$

kad $h\to 0$. Obrnuto ne važi. Vinerov proces je primer nediferencijabilnog, neprekidnog procesa. Naime izraz:

$$\left\|\frac{w(t+h) - w(t)}{h}\right\|^2 = \frac{1}{h^2}\cdot\|w(t+h) - w(t)\|^2 = \frac{1}{h}$$

ne konvergira kad $h\to 0$.

Lema 4. Potreban i dovoljan uslov za postojanje izvodnog procesa na (a,b) je da postoji $B''_{s,t}\big|_{s=t}$ za svako t iz (a,b) (videti [29], strana 273).

Dokaz. Potreban i dovoljan uslov da postoji granična vrednost izraza $\frac{x(t+h)-x(t)}{h}$ kad $h\to 0$ u srednje kvadratnom smislu je da postoji:

$$\lim_{h,h_1\to 0} E\left(\frac{x(t+h)-x(t)}{h}\cdot\frac{x(t+h_1)-x(t)}{h_1}\right) =$$

$$= \lim_{h,h_1\to 0}\left(\frac{1}{h\cdot h_1}\left(B(t+h,t+h_1)-B(t,t+h_1)-B(t+h,t)+B(t,t)\right)\right)=$$

$$= B''_{s,t}(s,t)\Big|_{s=t}.$$

Lema 5. Ako za proces $x(t), t\in T$ postoji $x'(t)$ onda važi:

$$(Ex(t))' = Ex'(t),$$

za svako $t\in T$.

Dokaz. Tvrdjenje sledi na osnovu:

$$\left|\frac{Ex(t+h)-Ex(t)}{h} - Ex'(t)\right| =$$

$$= \left|E\left(\frac{x(t+h)-x(t)}{h} - x'(t)\right)\right| \leq$$

$$\leq \left(E\left(\frac{x(t+h)-x(t)}{h} - x'(t)\right)^2\right)^{1/2} =$$

$$= \left\|\frac{x(t+h)-x(t)}{h} - x'(t)\right\| \underset{h\to 0}{\to} 0.$$

Teorema 4. Proces $x(t), t\in T$ je diferencijabilan ako i samo ako su funkcije $g(t,u)$ i $g'_t(t,u)$ iz prostora $L^2(dF(u))$ neprekidne po $t\in T$ i važi $g(t,t) = 0$ za svako $t\in T$.

Dokaz. Ako je $g(t,t) = 0$ za svako $t\in T$ onda postoji $B''_{s,t}$ oblika:

$$B''_{s,t}(s,t) = \int_a^{\min(s,t)} g'_s(s,u)\cdot g'_t(t,u)\, dF(u),$$

za $s,t\in T$ (videti lemu 3.). Kako je:

$$B''_{s,t}(s,t)\Big|_{s=t} = \int_a^t (g'_t(t,u))^2\cdot dF(u) < \infty,$$

onda prema gornjem kriterijumu za egzistenciju postoji $x'(t)$. Diferenciranjem $x(t)$ dobija se:

$$x'(t) = \int_a^t g_t'(t,u)\cdot dz(u),$$

za $u \leq t, u,t \in (a,b)$, i pri tom je $x'(t)$ neprekidan proces jer je $g_t'(t,u)$ neprekidna funkcija po t. (Lema 2.). Korelaciona funkcija za $x'(t), t \in T: B_{x'}(s,t)$ poklapa se sa $B''_{s,t}(s,t)$.

Obrnuto, ako je $x'(t)$ diferencijabilan, onda se može naći:

$$dx(t) = dt\cdot \int_a^t g_t'(t,u)\cdot dz(u) + g(t,t)\cdot dz(t),$$

$u \leq t, u,t \in (a,b)$. Kako je $dx(t)$ reda dt mora biti $g(t,t) = 0$ za svako $t \in T$. Iz neprekidnosti $x'(t), t \in T$ sledi neprekidnost prvo $g_t'(t,u)$ po t (lema 2.), pa onda i $g(t,u)$ po t. Time je dokaz završen.

Napomena. Za postojanje $x'(t), t \in T$ potrebno je i dovoljno da je $g(t,t) = 0$ za svako $t \in T$ i da je $g_t'(t,u) \in L^2(dF(u))$, ali tada $x'(t)$ ne mora biti neprekidan proces.

Posledica 2. Ako je jezgro $g(t,u)$ procesa $x(t), t \in T$ N-puta diferencijabilno po t u prostoru $L^2(dF(u))$, i ako važi:

$$g(t,t) = g_t'(t,t) = \dots = g_t^{(N-1)}(t,t) = 0,$$

za svako $t \in T$, onda je to ekvivalentno sa tim da je $x(t), t \in T$ N-puta diferencijabilan proces.

Postavlja se pitanje da li diferencijabilni procesi imaju multiplicitet jedan? Odgovor je negativan što pokazuje i sledeći primer, jer uslovi diferencijabilnosti nisu ekvivalentni uslovima A_1, A_2, A_3. Naime uslovi A_1, A_2, A_3 povlače uslove diferencijabilnosti, dok obrnuto nije tačno.

Primer 10. Ako je $x(t), t\in[a,b]$ dati proces, definišimo novi proces $y(t)$ kao:

$$y(t) = \int_a^t \left(\int_a^t x(u)du\right) du,$$

$u \leq t, u, t \in [a,b]$. Proces $y(t)$ je diferencijabilan jer je integral neprekidnog procesa. Izaberimo da je:

$$x(t) = \int_a^t \chi_A(u)dz_1(u) + \int_a^t (1-\chi_A(u))dz_2(u),$$

gde je $\chi_A(u)$ indikator svuda gustog skupa A u T, i gde su $z_1(u)$ i $z_2(u)$ dva medjusobno ortogonalna procesa sa ortogonalnim priraštajima. Multiplicitet procesa $x(t), t\in T$ je $N = 2$, (videti [7]). Proces $y(t), t\in T$ takodje ima multiplicitet $N = 2$, jer iz $y''(t) = x(t)$ sledi da su Hilbertovi prostori $H(y''(t))$ i $H(x(t))$ jednaki, za svako $t\in T$. Kako je $H(y''(t)) \subset H(y(t))$, onda je i $H(x(t)) \subset H(y(t))$. Kako još važi da je $H(y(t)) \subset H(x(t))$, znači da se $H(y)$ i $H(x)$ poklapaju.

Ovde proces $x(t)$ ne zadovoljava uslov A_1, jer funkcija $g(t,u)$ za $x(t)$ nije neprekidna za $u\in[a,b]$. Tada i $y(t)$ ne zadovoljava taj uslov. Njegovo jezgro je oblika:

$$G(t,v) = \int_v^t (t-u)\cdot g(u,v)\, du,$$

i prekidno je po $v\in T$.

4. *Teorema 5.* Jezgro $g_t'(t,u)$ izvodnog procesa $x'(t)$ je kompletno u prostoru $L^2(dF(u))$ ako i samo ako je kompletno jezgro $g(t,u)$ procesa $x(t)$ u istom prostoru.

Dokaz. Neka je $g(t,u)$ kompletno jezgro u $L^2(dF(u))$, $dF(u) = f(u)du$, i neka je $h(u)$ proizvoljna funkcija iz $L^2(dF(u))$, takva da za fiksirano $t\in(a,b)$ važi:

$$\int_a^s g_s'(s,u)\cdot h(u)\cdot f(u)\, du = 0,$$

za svako $s\in(a,t]$. To je ekvivalentno sa:

$$\left(\int_a^s g(s,u)\cdot h(u)\cdot f(u)\cdot du\right)'_s = 0,$$

za svako $s\in(a,t]$, jer je $g(s,s) = 0$ za svako $s\in T$, na osnovu postojanja $x'(t)$. Odavde sledi da je:

$$\Psi(s) = \int_a^s g(s,u)\cdot h(u)\cdot f(u)\cdot du = \text{const},$$

a iz neprekidnosti $\Psi(s)$ kad $s\to a$ dobije se da je $\Psi(s) = 0$ za svako $s\in(a,t]$. Kako je $g(t,u)$ kompletna funkcija u $L^2(f(u)du)$, to $\psi(s) = 0$ za $s\in(a,t]$ povlači da je $h(u) = 0$ skoro svuda u odnosu na meru $dF(u)$, što je i trebalo pokazati za kompletnost $g_t'(t,u)$ u $L^2(dF(u))$.

Obrnuto, neka je $g_t'(t,u)$ kompletno jezgro u $L^2(dF(u))$ i neka važi:

$$\int_a^s g(s,u)\cdot h(u)\cdot f(u)\cdot du = 0,$$

za svako $s\in(a,t]$, $t\in T$, $h(u)\in L^2(dF(u))$. Diferenciranjem gornje veze po s dobija se:

$$\int_a^s g_s'(s,u)\cdot h(u)\cdot f(u)\cdot du + g(s,s)\cdot h(s)\cdot f(s) = 0,$$

tj.

$$\int_a^s g_s'(s,u)\cdot h(u)\cdot f(u)\, du = 0,$$

za svako $s\in(a,t]$. Iz kompletnosti $g_t'(t,u)$ u $L^2(dF(u))$ sledi da je $h(u) = 0$ skoro svuda u odnosu na meru $dF(u)$, što je i trebalo pokazati za kompletnost funkcije $g(t,u)$ u $L^2(dF(u))$.

Posledica 3. Ako je proces $x(t), t\in T$ dat čisto-kanoničnom reprezentacijom i n-puta diferencijabilan, onda svi procesi $x(t)$, $x'(t),\dots,x^{(n)}(t)$ imaju isti spektralni tip.

Dokaz. Prema predhodnoj teoremi pri izvodnim transformacijama čuva se kompletnost jezgara $g(t,u)$, $g_t'(t,u),\dots,g_t^{(n)}(t,u)$ u istom prostoru $L^2(dF(u))$ a samim tim ostaje nepromenjena spektralna mera dF, kao i multiplicitet za $x(t),x'(t),\dots,x^{(n)}(t)$.

Teorema 6. Proces $x(t),t\in T$ dat čisto-kanoničnom reprezentacijom (6) ima neprekidni izvodni proces $x'(t),t\in T$ istog spektralnog tipa, multipliciteta $N_x = N_{x'}=1$.

Dokaz. Uslovi $A_1;A_2;A_3$ za proces $x(t),t\in T$ s jedne strane obezbedjuju da $x(t)$ ima multiplicitet jedan na osnovu teoreme 1., a s druge strane da ima neprekidan izvodni proces $x'(t),t\in T$ prema teoremi 4. Na osnovu posledice 3. njihov spektralni tip je isti i $N_x = N_{x'}=1$.

5. *Teorema 7*. Proces $x'(t),t\in T$ ima kanoničnu reprezentaciju ako i samo ako kanoničnu reprezentaciju ima proces $x(t),t\in T$, i pri tom važi:

$$P_s x'(t) = (P_s x(t))_t',$$

za $s< t$, gde je P_s operator projektovanja na Hilbertov potprostor $H(x(s))$.

Dokaz. Kako je P_s linearan operator to je za $s<t$:

$$P_s\left(\frac{x(t+h)-x(t)}{h} - x'(t)\right) =$$

$$= \frac{P_s\, x(t+h)-P_s x(t)}{h} - P_s\, x'(t)\,.$$

Iz neprekidnosti operatora P_s sledi, kad $h\to 0$, da je:

$$(P_s\, x(t))_t' = P_s\, x'(t).$$

Neka je $x(t),t\in T$ dat kanoničnom reprezentacijom. Tada je:

$$P_s x'(t) = (P_s x(t))'_t = \left(\int_a^s g(t,u)dz(u)\right)'_t =$$

$$= \int_a^s g'_t(t,u)\cdot dz(u),$$

$u \leq t$, $s < t$, pa je i $x'(t)$ kanoničan proces.

Obrnuto, ako je proces $x'(t), t\in T$ sa kanoničnim jezgrom, onda iz:

$$(P_s x(t))'_t = P_s\ x'(t) = \int_a^s g'_t(t,u)\cdot dz(u) =$$

$$= \left(\int_a^s g(t,u)\cdot dz(u)\right)'_t,$$

sledi da je:

$$P_s x(t) = \int_a^s g(t,u)\cdot dz(u) + h(s),$$

za $s < t$. Za $s = t$ važi:

$$P_t x(t) = x(t) = \int_a^t g(t,u)\cdot dz(u) + h(t),$$

pa je $h(t) = 0$, tj. i proces $x(t)$ je kanoničan.

Posledica 4. Ako je proces $x(t), t\in T$ kanoničan i n-puta diferencijabilan onda su i procesi $x'(t), x''(t), \ldots, x^{(n)}(t), t\in T$ kanonični.

Teorema 8. Proces $x(t), t\in T$ dat kanoničnom reprezentacijom (6) ima kanoničan izvodni proces $x'(t), t\in T$ i pri tom je multiplicitet $N_x = N_{x'} = 1$ ako važi uslov A_1 za $x'(t), t\in T$.

Dokaz. Kako važe uslovi $A_1, A_2; A_3$, na osnovu teoreme 3. $x(t), t\in T$ ima multiplicitet jedan. Izvodni proces $x'(t), t\in T$ postoji na osnovu teoreme 4., kanoničan je prema teoremi 7., i ispunjava uslov A_3. Uz važenje uslova A_1 za $x'(t), t\in T$ na osnovu posledice 1. i $x'(t)$ ima multiplicitet $N_{x'} = 1$.

U sledećim primerima podrazumeva se da je uvek $F(u) = E\,z^2(u)$, $u \in T$ apsolutno neprekidna funkcija.

Primer 11. Neka je dat Markovljev stacionaran proces višeg reda:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{t} e^{-(t-u)} \cdot (t-u)^k \, dz(u),$$

$u \leq t, u, t \in (-\infty, +\infty), k \in N$. Funkcija $g(t,u)$ je ograničena kad $u \to -\infty$ i kad $t \to +\infty$, beskonačno je diferencijabilna po t, i pri tom je:

$$\int_{-\infty}^{t} (g_t^{(n)}(t,u))^2 \, dF(u) < \infty,$$

$u \leq t, u, t \in (-\infty, +\infty), n \in N$. Takodje važi $g_t^{(n)}(t,t) = 0$ za svako n: $0 \leq n \leq k-1$ i svako $t \in (-\infty, +\infty)$. Prema posledici 2. $x(t)$ je diferencijabilan k-puta, a na osnovu posledice 3. $x(t), x'(t), \ldots, x^{(k)}(t), t \in T$, inače Markovljevi stacionarni procesi, imaju multiplicitet jedan.

Primer 12. Neka je $x(t), t \in T$ takodje Markovljev stacionaran proces višeg reda, ali oblika:

$$x(t) = \int_{a}^{t} P((t-u)^k) \cdot dz(u),$$

$u \leq t, u, t \in (a,b), k \in N$, gde je P polinom stepena n po $(t-u)^k$ sa slobodnim članom $a_o = 0$. Funkcija $g(t,u)$ je diferencijabilna n+k-puta, ali je $g_t^{(i)}(t,t) = 0$ samo za $0 \leq i \leq k-1$. Znači procesi $x'(t), \ldots, x^{(k)}(t), t \in T$ postoje i imaju takodje multiplicitet jedan prema posledici 3.

Primer 13. Neka je za stacionaran proces:

$$x(t) = \int_{o}^{t} g(t-u) \cdot dz(u),$$

$u \leq t, u, t \in (0, +\infty)$, $g'(x), x \in (0, +\infty)$ neprekidna funkcija i $g(0) = 0$. Jezgro $g(t,u)$ je kompletno u $L^2(dF(u))$. Na osnovu teoreme 6. proces je diferencijabilan i procesi $x(t)$ i $x'(t)$ imaju multiplicitet jedan.

Ako je $g(t-u) = P(t-u)$, gde je P polinom po $(t-u)$ onda je dovoljan uslov za postojanje neprekidnog izvodnog procesa $x'(t)$, multipliciteta jedan, da je $P(0)=0$.

Primer 14. Proces:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{t} (2\, e^{-(t-u)} - e^{-2(t-u)} - 1)\, dz(u),$$

za $u \leq t, u, t \in (-\infty, +\infty)$ predstavlja zbir tri Markovljeva procesa, a da bi to bio Markovljev proces reda tri mora jezgro $g(t,u) = \sum_{n=1}^{3} f_n(t) \cdot \varphi_n(u)$ zadovoljavati odredjene uslove navedene u [16], strana 147. Važi sledeće:

$$g(t,u) = 2\, e^{-(t-u)} - e^{-2(t-u)} - 1,$$

$$g_t'(t,u) = -2\, e^{-(t-u)} + 2\, e^{-2(t-u)}$$

$$g_t''(t,u) = 2\, e^{-(t-u)} - 4\, e^{-2(t-u)},$$

su neprekidne i ograničene funkcije na $(-\infty, +\infty) \times (-\infty, +\infty)$. Pri tom je $g(t,t) = g_t'(t,t) = 0$ za svako $t \in (-\infty, +\infty)$. Znači, proces $x(t)$ je dva puta diferencijabilan. Ako je jezgro $g(t,u)$ čisto-kanonično onda procesi $x(t), x'(t), x''(t)$ imaju isti spektralni tip, a ako je jezgro samo kanonično, onda prema teoremi 8. sigurno $x(t)$ i $x'(t)$ imaju multiplicitet jedan.

Primer 15. Proces:

$$x(t) = \int_{0}^{t} \left(\frac{2}{5} - \frac{3}{4}\frac{u}{t} + \frac{1}{2}\frac{u^3}{t^3} - \frac{3}{20}\frac{u^5}{t^5}\right) dz(u),$$

za $u \leq t, u, t \in (0, +\infty)$, gde je $z(u)$ Vinerov, je dat čisto-kanoničnom reprezentacijom (videti [16], strana 150). Funkcije:

$$g(t,u) = \frac{2}{5} - \frac{3}{4}\frac{u}{t} + \frac{1}{2}\left(\frac{u}{t}\right)^3 - \frac{3}{20}\left(\frac{u}{t}\right)^5,$$

$$g_t'(t,u) = \frac{1}{t} \cdot \left(\frac{3}{4}\frac{u}{t} - \frac{3}{2}\left(\frac{u}{t}\right)^3 + \frac{3}{4}\left(\frac{u}{t}\right)^5\right);$$

$$g_t''(t,u) = \frac{1}{t^2}\cdot\left(-\frac{3}{2}\frac{u}{t} + 6\left(\frac{u}{t}\right)^3 - \frac{9}{2}\left(\frac{u}{t}\right)^5\right),$$

su neprekidne i ograničene na TxT, dok je:

$$g_t'''(t,u) = \frac{1}{t^3}\cdot\left(\frac{9}{2}\frac{u}{t} - 30\left(\frac{u}{t}\right)^3 + \frac{63}{2}\left(\frac{u}{t}\right)^5\right)$$

neograničena funkcija kad $t \to 0$. Pri tom je ispunjeno $g(t,t) = g_t'(t,t) = g_t''(t,t) = 0$ za svako $t \in T$. Zbog kompletnosti jezgra $g(t,u)$ tri puta diferencijabilnog procesa $x(t), t \in T$, biće kompletna i jezgra $g_t'(t,u)$, $g_t''(t,u)$ i $g_t'''(t,u)$ u prostoru $L^2(du)$, za $u \in T$. Prema posledici 3. procesi $x(t), x'(t), x''(t), x'''(t)$ imaju isti spektralni tip multipliciteta jedan.

Primer 16. Kao i predhodni proces i:

$$x(t) = \int_0^t \left(\frac{2}{3} - \frac{u}{t} + \frac{1}{3}\left(\frac{u}{t}\right)^3\right) dz(u),$$

za $u \leq t, u, t \in (0,+\infty)$, $f(u) = 1$, je čisto-kanonične reprezentacije ([16], strana 150). Ovde su $g(t,u)$ i $g_t'(t,u)$ neprekidne i ograničene na TxT, $g(t,t) = g_t'(t,t) = 0$ za svako $t \in T$, a $g_t''(t,u)$ neprekidna funkcija. Znači, $x(t)$ je dva puta diferencijabilan i procesi $x(t), x'(t), x''(t), t \in T$ su istog spektralnog tipa.

5. Neanticipirajuće integralne transformacije

Neanticipirajuća transformacija procesa $x(t), t\in(a,b)$ definisanog izrazom:

$$x(t) = \int_a^t g(t,u)\cdot dz(u), \tag{7}$$

za $u\leq t$ je:

$$T\{ x(u),\ a<u<b\} = \int_a^t h(t,u)\cdot dz_x(u)$$

gde je $z_x(u)$ obnavljajući proces za $x(t)$.

Primer 17. Neka je reprezentacija (7) za $x(t), t\in T$ čisto-kanonična. Ako je funkcija $\varphi(u)$ neprekidna, ograničena i uvek različita od nule za $u\in(a,b)$, onda proces $y(t)$ definisan izrazom:

$$y(t) = \int_a^t \varphi(u)\cdot g(t,u)\ dz(u),$$

za $u\leq t, u,t\in(a,b)$ predstavlja jednu neanticipirajuću transformaciju od $x(t)$. Pri tom je jezgro $g(t,u)\cdot\varphi(u)$ kompletno u prostoru $L^2(dF(u))$, jer za proizvoljnu funkciju $h(u)\in L^2(dF(u))$, takvu da važi:

$$\int_a^t g(t,u)\cdot\varphi(u)\cdot h(u)\ dF(u) = 0,$$

za svako $t\in(a,t_1], t_1\in T$, sledi da je $h(u) = 0$ skoro svuda u odnosu na meru $dF(u)$, na osnovu kompletnosti $g(t,u)$ u $L^2(dF(u))$ i s obzirom na pretpostavku o funkciji $\varphi(u), u\in T$. Znači spektralni tip procesa $y(t), t\in T$ ostaje nepromenjen i iznosi dF.

Uvedimo sad proces:

$$y(t) = \int_a^t \varphi(t,u)\cdot x(u)du, \tag{8}$$

$u \leq t, u, t \in (a,b)$ kao integralnu neanticipirajuću transformaciju procesa $x(t), t \in T$ iz (7). Transformacijom izraza (8) dobija se:

$$y(t) = \int_a^t \varphi(t,u) \cdot \left(\int_a^u g(u,v)\, dz(v)\right) du =$$

$$= \int_a^t \left(\int_v^t \varphi(t,u) \cdot g(u,v)\, du\right) dz(v),$$

za $t \in (a,b)$. Označimo:

$$G(t,v) = \int_v^t \varphi(t,u) \cdot g(u,v)\, du,$$

$v \leq t, t \in T$. Proces $y(t), t \in T$ se sada može posmatrati i u obliku:

$$y(t) = \int_a^t G(t,v) \cdot dz(v),$$

$v, t \in T$, gde je jezgro $G(t,v)$ gore zadana funkcija.

Predhodni izraz ima smisla ako je:

$$\int_a^t G^2(t,v) \cdot dF(v) < \infty,$$

za $v \leq t$, $v, t \in (a,b)$. Kako je:

$$G^2(t,v) = \left(\int_v^t \varphi(t,u) \cdot g(u,v)\, du\right)^2 \leq$$

$$\leq \int_v^t \varphi^2(t,u) du \cdot \int_v^t g^2(u,v) du \leq$$

$$\leq \int_a^t \varphi^2(t,u) du \cdot \int_v^t g^2(u,v)\, du,$$

onda važi:

$$\int_a^t G^2(t,v) \cdot dF(v) \leq$$

$$\leq \int_a^t \left(\int_a^t \varphi^2(t,u) du \cdot \int_v^t g^2(u,v) du\right) dF(v) =$$

$$= \int_a^t \varphi^2(t,u) du \cdot \int_a^t \left(\int_a^u g^2(u,v) dF(v)\right) du,$$

za $a<v\leq u\leq t<b$. Ovaj izraz je konačan kad je:

$$\int_a^t \psi^2(t,u)du < \infty,$$

za $u\leq t, u,t\in(a,b)$, i kad je:

$$\int_a^u g^2(u,v)dF(v)$$

za $v\leq u$ Riman-integrabilna funkcija po u. Poslednji integral inače postoji jer $g(u,v)\in L^2(dF(v))$.

Navedimo neke osobine za proces $y(t), t\in T$.

1. Na osnovu izraza za $G(t,v)$, uvek važi $G(t,t) = 0$ za svako $t\in T$. Ako postoji $G_t'(t,v)\in L^2(dF(v))$, onda postoji i:

$$y'(t) = \int_a^t G_t'(t,v)dz(v),$$

za $v\leq t, v,t\in T$. Proces $y(t)$ je diferencijabilan ako je:

$$G_t'(t,v) = \int_a^t \varphi_t'(t,u)\cdot g(u,v)du + \varphi(t,t)\cdot g(t,v),$$

za $v\leq t$, neprekidna funkcija po t (prema lemi 2.).

U slučaju $\varphi(t,u)\equiv 1$, $y'(t)$ se poklapa sa procesom $x(t), t\in T$, i važi sledeće tvrdjenje:

Lema 6. Ako je proces $x(t)$ neprekidan na (a,b), onda je proces:

$$y(t) = \int_a^t x(u)du,$$

diferencijabilan i $y'(t) = x(t)$, za $t\in T$.

Dokaz. Tvrdjenje sledi na osnovu procene:

$$\left\| \frac{y(t+h)-y(t)}{h} - x(t) \right\| =$$

$$= \left\| \frac{1}{h} \cdot \int_t^{t+h} x(u)du - x(t) \right\| =$$

$$= \left\| \frac{1}{h} \cdot \int_t^{t+h} x(u)du - \frac{1}{h} \cdot \int_t^{t+h} x(t)du \right\| =$$

$$= \left\| \frac{1}{h} \cdot \int_t^{t+h} (x(u) - x(t))du \right\| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{h} \cdot h \max_{u \in (t,t+h)} \|x(u) - x(t)\| \xrightarrow[h \to 0]{} 0 .$$

2. *Lema 7.* Funkcije $G(t,v)$ i $G_t'(t,v)$ su neprekidne ako su neprekidne $\varphi(t,u)$, $\varphi_t'(t,u)$ i $g(t,u)$ po t i u, $u \leqslant t,u,t \in T$.

Dokaz. Neprekidnost funkcije $G(t,v)$ po t za svako v sledi iz:

$$|G(t_2,v) - G(t_1,v)| \leqslant$$

$$\leqslant \int_v^{t_1} |\varphi(t_2,u) - \varphi(t_1,u)| \cdot |g(u,v)| du +$$

$$+ \int_{t_1}^{t_2} |\varphi(t_2,u)| \cdot |g(u,v)| du,$$

puštajući da $t_1 \to t_2$, gde je $t_1 \leqslant t_2$, i iz neprekidnosti $\varphi(t,u)$ po t. Neprekidnost $G(t,v)$ po v za svako $t \in T$ sledi iz:

$$| G(t,v_2) - G(t,v_1)| <$$

$$\leqslant \int_{v_1}^{v_2} |\varphi(t,u)| \cdot | g(u,v_1) | du +$$

$$+ \int_{v_2}^{t} |\varphi(t,u)| \cdot | g(u,v_2) - g(u,v_1)| du,$$

puštajući da $v_1 \to v_2$ za $v_1 \leqslant v_2$, i iz neprekidnosti $g(u,v)$ po v. Na sličan način se zaključuje o neprekidnosti $G_t'(t,v)$ po t i v:

$$G_t'(t,v) = \int_v^t \varphi_t'(t,u) \cdot g(u,v)\, du + \varphi(t,t) \cdot g(t,v)$$

za $v \leqslant u \leqslant t,v,\ t \in T$.

3. *Teorema 9.* Ako je proces $x(t), t\in T$ predstavljen čisto-kanoničnom reprezentacijom (7) i ako je funkcija $\varphi(t,u)$ kompletna u prostoru $L^2(du)$, onda je i jezgro $G(t,v)$ procesa $y(t), t\in T$ kompletno u prostoru $L^2(dF(v))$.

Dokaz. Neka je t_1 proizvoljan fiksiran broj iz T, i $h(v)$ proizvoljna funkcija iz prostora $L^2(dF(v))$, takva da važi:

$$\int_a^t G(t,v)\cdot h(v)\cdot dF(v) = 0,$$

za svako $t\in(a,t_1]$. Znači da je:

$$\int_a^t \left(\int_v^t \varphi(t,u)\cdot g(u,v)\, du\right)\cdot h(v)\cdot dF(v) = 0,$$

za svako $t\in(a,t_1]$, tj.:

$$\int_a^t \varphi(t,u)\cdot\left[\int_a^u g(u,v)\cdot h(v)\cdot dF(v)\right] du = 0,$$

za svako $t\in(a,t_1]$, $v\leq u\leq t$. Kako je $\varphi(t,u)$ kompletna funkcija u prostoru $L^2(du)$ mora biti:

$$\int_a^u g(u,v)\cdot h(v)\cdot dF(v) = 0,$$

za svako $u\leq t_1$, a iz kompletnosti jezgra $g(u,v)$ u $L^2(dF(v))$, sledi da je $h(v) = 0$ skoro svuda u odnosu na meru $dF(V)$, što je i trebalo pokazati za kompletnost $G(t,v)$ u $L^2(dF(v))$.

Nazovimo integralnu neanticipirajuću transformaciju (8) kompletnom ako je funkcija $\varphi(t,u)$ kompletna u prostoru $L^2(du)$.

Posledica 5. Kompletnom transformacijom (8) čisto-kanoničnog procesa $x(t), t\in T$ iz (7) čuva se spektralni tip.

Primer 18. Neka je dat proces:

$$y(t) = \int_0^t x(u)\, du,$$

$u \leq t, u, t \in [0,1]$, gde je $x(u)$ definisan čisto-kanoničnom reprezentacijom (7). Ovde je $\varphi(t,u) \equiv 1$ i:

$$G(t,v) = \int_v^t g(u,v)du,$$

$$G_t'(t,v) = g(t,v),$$

za $0 \leq v \leq u \leq t \leq 1$. Proces $y(t), t \in T$ ima isti spektralni tip kao i $x(t)$, prema teoremi 9. i njenoj posledici. Ako $y(t), t \in T$ shvatimo kao $y(t) = T\, x(t), t \in T$, gde je T specijalni operator tipa Voltera, definišimo onda $T^n x(t)$:

$$T^n x(t) = \underbrace{\int_0^t \cdots \int_0^t}_{\text{n-puta}} x(u)du \ldots du,$$

za $u, t \in [0,1]$. Lakim transformacijama se dobija (videti [36] ,strana 291):

$$T^n x(t) = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^t (t-u)^{n-1} \cdot x(u)du,$$

za $u \leq t, u, t \in [0,1]$. Na osnovu predhodnog i proces $T^n x(t)$ je istog spektralnog tipa kao i $x(t)$.

Primer 19. Neka je dat proces sa ortogonalnim priraštajima: $x(t) = z(t)$, $t \in [0,\tau]$. Proces:

$$y(t) = \int_0^t \varphi(t,u) \cdot z(u)du,$$

za $u \leq t, u, t \in [0,\tau]$ ima multiplicitet jedan ako je funkcija $\varphi(t,u)$ kompletna u $L^2(du)$. Ovde je

$$G(t,v) = \int_v^t \varphi(t,u)du$$

$$G_t'(t,v) = \int_v^t \varphi_t'(t,u)du + \varphi(t,t),$$

za $0 \leq v \leq u \leq t \leq \tau$.

4. Medjutim i nekompletnom transformacijom kompletno jezgro $g(t,u)$ procesa $x(t), t\in T$ iz prostora $L^2(dF(u))$ može se transformisati u kompletno jezgro $G(t,u)$ procesa $y(t), t\in T$, u $L^2(dF(u))$.

Primer 20. Slučajni proces sa ortogonalnim priraštajima $x(t)=z(t)$, $t\in[0,\tau]$, gde je $Ez^2(t) = t$, u integralnoj reprezentaciji:

$$x(t) = \int_0^t dz(u),$$

za $u \leq t, u,t\in T$ ima jezgro $g(t,u) = 1$. Neka je definisan proces $y(t), t\in T$:

$$y(t) = \int_0^t (-t+2u)x(u)du,$$

za $u \leq t$. Ovde je $\varphi(t,u) = -t+2u$, a to je prema primeru 8. nekompletna funkcija u $L^2(du)$ za $u\in[0,\tau]$. Jezgro procesa $y(t)$ biće:

$$G(t,v) = \int_v^t (-t+2u)du = v\cdot(t-v),$$

$v \leq t, v,t\in T$. Lako se može proveriti da je $G(t,v)$ kompletno u prostoru $L^2(dv)$, $v\in[0,\tau]$.

Teorema 10. Ako je jezgro $G(t,v)$ procesa $y(t), t\in T$, zadanog izrazom (8), kompletno u prostoru $L^2(dF(v))$, mora biti kompletno i jezgro $g(t,v)$, procesa $x(t), t\in T$ iz (7) u istom tom prostoru.

Dokaz. Neka je s proizvoljna tačka iz (a,b) i $h(v)$ funkcija iz $L^2(dF(v))$, takva da važi:

$$\int_a^u g(u,v)\cdot h(v)\cdot dF(v) = 0,$$

za svako $u\in(a,s]$, $v\leq u$. Tada je i:

$$\varphi(t,u)\cdot\int_a^u g(u,v)\cdot h(v)\cdot dF(v) = 0,$$

za svako u: $u \leq t \leq s$. Odavde je:

$$\int_a^t \varphi(t,u)\cdot\left[\int_a^u g(u,v)\cdot h(v)\cdot dF(v)\right] du = 0,$$

za svako $t \leqslant s$. Ili:

$$\int_a^t \left(\int_v^t \varphi(t,u)\cdot g(u,v)du\right)\cdot h(v)\cdot dF(v) = 0,$$

za svako $t \in (a,s]$. Iz veze:

$$\int_a^t G(t,v)\cdot h(v)\cdot dF(v) = 0,$$

za $t \leqslant s$, kako je $G(t,v)$ kompletno jezgro u $L^2(dF(v))$ sledi da je $h(t) = 0$ za svako $t \in (a,s]$ skoro svuda u odnosu na meru dF, što je i trebalo pokazati za kompletnost $g(t,v)$ u $L^2(dF(v))$. Kraj dokaza.

Znači, nekompletno jezgro $g(t,v)$ u $L^2(dF(v))$ procesa $x(t), t\in T$ pri bilo kojoj transformaciji daje samo nekompletno jezgro $G(t,v)$ procesa $y(t), t\in T$ iz (8) u istom prostoru.

Primer 21. Proces $x(t), t\in[0,\tau]$:

$$x(t) = \int_0^t (-t+2u)\cdot dz(u),$$

za $u \leqslant t$, $Ez^2(u) = u$, koji ima nekompletno jezgro, pri nekompletnoj transformaciji sa $\varphi(t,u) = -t+2u$ daje takodje nekompletno jezgro $G(t,v)$:

$$G(t,v) = \int_v^t (-t+2u)\cdot(-u+2v)du =$$

$$= -\frac{1}{6}t^3 + \frac{3}{2}t\cdot v^2 - \frac{4}{3}v^3,$$

$v \leqslant t$, jer postoji $h(v) = 1 \in L^2(dv)$ da je:

$$\int_0^t \left(-\frac{1}{6}t^3 + \frac{3}{2}t\cdot v^2 - \frac{4}{3}v^3\right)\cdot 1\cdot dv = 0,$$

za svako $t\in[0,\tau]$.

Primer 22. Isti proces $x(t), t\in T$ kao iz predhodnog primera 21., pri kompletnoj transformaciji kad je $\varphi(t,u) \equiv 1$, takodje daje nekompletno jezgro $G(t,v)$ procesa $y(t), t\in T$:

$$G(t,v) = \int_v^t 1\cdot(-u+2v)du = -\frac{t^2}{2} + 2\cdot vt - \frac{3}{2}v^2.$$

za svako $v \leqslant t$. Da bi pronašli $h(v) \neq 0$ i $h(v)\in L^2(dv)$ rešavamo jednačinu:

$$\int_0^t \left(-\frac{1}{2}t^2 + 2tv - \frac{3}{2}v^2\right)\cdot v^k dv = 0,$$

po $k\in N$. Jednačina je ekvivalentna sa:

$$-\frac{1}{2}\frac{1}{k+1} + 2\frac{1}{k+2} - \frac{3}{2}\frac{1}{k+3} = 0,$$

i njeno rešenje je $k = 0$.

Posledica 6. Ako je jezgro $G(t,v)$, procesa $y(t), t\in T$ datog izrazom (8), kompletna funkcija u $L^2(dF(v))$, onda je spektralni tip za $x(t)$ i $y(t)$ isti.

Posledica 7. Neka je jezgro $G(t,v)$ procesa $y(t), t\in T$ datog izrazom (8) kompletno u prostoru $L^2(dF(v))$ i neka su ispunjeni uslovi A_1 i A_3 za $y(t)$, tada je multiplicitet za $y(t)$, kao i za $x(t)$, $t\in T$ iz (7): $N_x = N_y = 1$.

Dokaz. Prema predhodnoj posledici spektralni tip za $x(t)$ i $y(t)$ je isti, a na osnovu teoreme 1., kako $y(t)$ zadovoljava uslove regularnosti, on ima multiplicitet jedan.

Primer 23. Proces $y(t), t\in[0,\tau]$:

$$y(t) = \int_0^t \left(\frac{1}{6}t^3 - \frac{1}{2}t\cdot v^2 + \frac{1}{3}v^3\right)\cdot dz(v),$$

$v \leqslant t$, $Ez^2(v) = v$, sa kompletnim jezgrom, zadovoljava uslove regularnosti, te ima multiplicitet jedan. Ako je pri tom:

$$y(t) = \int_{0}^{t} \psi(t,u)\cdot x(u)\, du,$$

onda i proces $x(t), t\in[0,\tau]$ ima multiplicitet jedan. U našem slučaju jezgro $G(t,v)$ dobijeno je transformacijom u kojoj je $\varphi(t,u) = -t+2u$, $g(u,v) = u-v$, tj.:

$$y(t) = \int_{0}^{t} (-t+2u)\cdot \left[\int_{0}^{u} (u-v)\, dz(v)\right] du,$$

za $v\leq u\leq t, v, t\in[0,\tau]$.

5. *Teorema 11.*

A. Ako su oba procesa $x(t)$ i $y(t), t\in T$ data izrazima (7) i (8) kanonična, onda su operatori:projektovanja P i neanticipirajuće integralne transformacije T komutativni.

B. Ako su operatori projektovanja P i kompletne neanticipirajuće transformacije T komutativni, onda kanoničnost procesa $x(t), t\in T$ povlači kanoničnost $y(t), t\in T$ i obratno.

Dokaz. Označimo prvo:

$$T_t(x) = \int_{a}^{t} \varphi(t,u)\cdot x(u)\, du,$$

za $u\leq t, u, t\in T$. Tvrdjenje A. sledi na osnovu:

$$P_s(T_t x) = P_s y(t) = \int_{a}^{s} G(t,v)\, dz(v) =$$

$$= \int_{a}^{s} \left(\int_{v}^{t}\varphi(t,u)\cdot g(u,v)\, du\right) dz(v) =$$

$$= \int_{a}^{t} \varphi(t,u)\left(\int_{a}^{s} g(u,v)\cdot dz(v)\right) du =$$

$$= \int_{a}^{t} \varphi(t,u)\cdot P_s x(u) du = T_t(P_s x),$$

za $a< v\leq s< u\leq t$.

B. Neka je $v\leq s< u\leq t$. Ako je $x(t), t\in T$ kanoničan onda je:

$$P_s y(t) = P_s(T_t(x)) = T_t(P_s x) =$$

$$= \int_a^t \varphi(t,u)\left(\int_a^s g(u,v)\, dz(v)\right) du =$$

$$= \int_a^s \left(\int_v^t \varphi(t,u)\cdot g(u,v)\, du\right) dz(v) =$$

$$= \int_a^s G(t,v)\, dz(v),$$

pa je i $y(t)$ kanoničan proces. Obratno, ako je $y(t), t\in T$ kanoničan, onda je:

$$\int_a^t \varphi(t,u)\cdot P_s x(u) du = T_t(P_s x) =$$

$$= P_s(T_t(x)) = \int_a^s G(t,v)\cdot dz(v) =$$

$$= \int_a^t \varphi(t,u)\cdot \left(\int_a^s g(u,v)\, dz(v)\right) du,$$

za $a < v \leq s < u \leq t$, odakle sledi da je:

$$P_s\, x(u) = \int_a^s g(u,v)\, dz(v),$$

za $a < v \leq s < u$, na osnovu kompletnosti $\varphi(t,u)$ u $L^2(du)$. Znači, i proces $x(t), t\in T$ je kanoničan. Time je dokaz završen.

Posledica 8. Pri neanticipirajućoj integralnoj transformaciji sa $\varphi(t,u) \equiv 1$, proces $x(t), t\in T$ dat izrazom (7) je kanoničan ako i samo ako je proces $y(t), t\in T$ dat izrazom (8) kanoničan.

Dokaz. Kako je u slučaju $\varphi(t,u) \equiv 1$:

$$y'(t) = x(t),$$

za $t\in T$, a važi da su izvodni operator i operator projektovanja komutativni prema teoremi 7., onda je:

$$T_t(P_s x) = T_t(P_s y') = T_t((P_s y)_t') =$$

$$= P_s y = P_s(T_t x),$$

za $s < t$ i gde je $T_t((\cdot)_t') = I(\cdot)$. Znači, operatori T i P su komutativni, pa tvrdjenje sledi na osnovu teoreme 11.

Teorema 12. Neka su dati procesi $x(t), t\in T$ i $y(t), t\in T$ kanoničnim izrazima (7) i (8). Ako su funkcije $g(t,u)$, $g_t'(t,u)$, $\varphi(t,u)$, $\varphi_t'(t,u)$ neprekidne i ograničene na TxT, i ako je $dF(u)$ apsolutno neprekidna mera, onda je $N_y = N_x = 1$.

Dokaz. Proces $x(t), t\in T$ ispunjava A_1 i A_3 uslov, pa na osnovu posledice 1. ima multiplicitet jedan. Prema lemi 7., $y(t), t\in T$ takodje ispunjava uslove A_1 i A_3, te ima multiplicitet jedan.

6. Ekvivalentnost Gausovih slučajnih procesa multipliciteta jedan i njihovih transformacija

Neka je $(\Omega,\mathcal{U},P)$ verovatnosni prostor na kome je definisan slučajni proces $x(t) = x(t,\omega), \omega \in \Omega, t\in T$, $T\subset R$. I neka je $(X,\mathcal{B})$ prostor svih realnih funkcija $f(t), t\in T$, $f: T \to R$, sa Borelovim σ-poljem generisanim cilindričnim skupovima. Slučajni proces $x(t), t\in T$ definiše tada merljivo preslikavanje prostora $(\Omega,\mathcal{U},P)$ u merljiv prostor $(X,\mathcal{B})$, tako da svakom $\omega\in\Omega$ odgovara trajektorija procesa: $x(\omega,\cdot) = x(\omega,t), t\in T$, kao element prostora X. Mera P_X u prostoru $(X,\mathcal{B})$ data je sa:

$$P_X(B) = P\{\omega: x(\omega,t)\in B\},$$

$B\in\mathcal{B}$, i naziva se raspodelom slučajnog procesa $x(t), t\in T$. Sada se mesto polaznog prostora $(\Omega,\mathcal{U},P)$ može posmatrati novi prostor $(X,\mathcal{B},P_X)$.

Slučajni proces $x(t), t\in T$ je Gausov ako za svaku konačnu kolekciju parametara $t_1,\dots,t_n$, n-dimenzionalna slučajna promenljiva $[x(t_1),\dots,x(t_n)]$ ima Gausovu raspodelu. Verovatnosna mera P se tada naziva Gausovom i kao i sam proces $x(t), t\in T$ jednoznačno je odredjena matematičkim očekivanjem:

$$a(t) = E\,x(t),$$

za $t\in T$, i korelacionom funkcijom:

$$B(s,t) = E\,(x(s) - a(s))\cdot(x(t) - a(t)),$$

$s,t\in T$, gde je:

$$E\,x(t) = \int_\Omega x(\omega,t)\,P\,(d\omega).$$

Ako su P i P_1 dve Gausove mere na merljivom prostoru $(\Omega,\mathcal{U})$ za dati proces $x(t), t\in T$, onda su one, kao što je poznato, ili ekvivalentne (medjusobno apsolutno neprekidne) ili ortogonalne (postoji skup $A \in \mathcal{U}$ da je $P(A) = 1$ i $P_1(A) = 0.$).

Za dva procesa kazaćemo da su ekvivalentna ako su im mere, koji oni induciraju, ekvivalentne.

Ekvivalentni Gausovi procesi imaju isti spektralni tip (videti [2]), dok obrnuto ne važi što pokazuje jednostavan sledeći primer: Procesi, Vinerov $x(t), t > 0$ i $y(t) = \varphi(t) \cdot x(t)$, $t > 0$, gde je $\varphi(t)$ pozitivna, neprekidna i ograničena ali ne i apsolutno neprekidna funkcija, imaju isti spektralni tip. Ali, oni nisu ekvivalentni, jer da bi to bili potrebno je da razlika njihovih korelacionih funkcija:

$$B_y(s,t) - B_x(s,t) = (\varphi(s) \cdot \varphi(t) - 1) \cdot \min(s,t),$$

za $s,t > 0$ bude apsolutno neprekidna funkcija po s i t, a to nije ispunjeno.

Neka su data dva Gausova procesa $x(t)$ i $x_1(t), t \in T$. Ako su za proces $x(t)$: matematičko očekivanje 0 i korelaciona funkcija $B(s,t)$, a za proces $x_1(t)$: $a(t)$ i $B_1(s,t)$, $s,t \in T$, onda će $x(t)$ i $x_1(t)$, $t \in T$ biti ekvivalentni ako i samo ako su ekvivalentni procesi $y(t)$ i $x(t)$, i $y(t)$ i $x_1(t), t \in T$, gde je $y(t)$ proces sa matematičkim očekivanjem jednakim nuli i korelacionom funkcijom $B_1(s,t), s,t \in T$ (videti [1], 31.strana).

Znači, pri utvrdjivanju ekvivalentnosti dvaju Gausovih procesa mogu se analizirati dva slučaja:

1. kad procesi imaju jednake korelacione funkcije i različita matematička očekivanja (kao $x_1(t)$ i $y(t)$), i

2. kad procesi imaju jednaka matematička očekivanja i različite korelacione funkcije (kao $x(t)$ i $y(t)$).

Ovde će biti razmatrani Gausovi slučajni procesi oblika:

$$x(t) = \int_a^t g(t,u)\, dz(u), \tag{9}$$

$u \leq t, u, t \in (a,b) = T$, koji zadovoljavaju uslove regularnosti A_1, A_2, A_3 i gde je funkcija $g(t,u)$ kompletno jezgro u prostoru $L^2(dF(u))$.

Prvi slučaj: jednakih korelacionih funkcija i različitih matematičkih očekivanja, $Ex(t) = 0$ i $Ex_1(t) = a(t), t \in T$, za procese $x(t)$ i $x_1(t), t \in T$.

Napomena. Funkcija $a(t), t \in T$ se može shvatiti kao matematičko očekivanje procesa $x(t), t \in T$ u odnosu na drugu Gausovu meru P_1, tj. $a(t) = E_1 x(t), t \in T$. Pri tom je uslov:

$$E\, x(s) \cdot x(t) = E_1 (x(s) - a(s)) \cdot (x(t) - a(t)),$$

$s, t \in T$, tj. korelacione funkcije za mere P i P_1 su jednake.

Takva dva procesa $x(t)$ i $x_1(t), t \in T$ su ekvivalentna ako i samo ako je $a(t), t \in T$ linearan neprekidan funkcional u Hilbertovom prostoru $H(x)$ (videti [1]). Tj. $a(t), t \in T$ mora biti:

$$a(t) = (x(t), y),$$

gde je y fiksirana veličina prostora $H(x) = H(z)$:

$$y = \int_a^b h(u)\, dz(u),$$

i $h(u) \in L^2(dF(u))$. Na osnovu toga je:

$$a(t) = \int_a^t g(t,u) \cdot h(u) \cdot f(u)\, du,$$

$u \leq t, u, t \in T$. Ako $g(t,u)$ shvatimo kao jezgro operatora tipa Voltera u prostoru $L^2(dF(u))$:

$$G\, h(t) = \int_a^t g(t,u) \cdot h(u) \cdot f(u)\, du,$$

$u \leq t$, onda funkcija $a(t), t \in T$ mora biti u skupu vrednosti operatora G. Kompletnost jezgra $g(t,u)$ obezbedjuje jedinstvenost rešenja gornje integralne jednačine po nepoznatoj funkciji $h(t), t \in T$, $h \in L^2(dF)$.

Na osnovu osobina samog procesa $x(t), t \in T$ datog izrazom (9) važi:

$$a'(t) = \int_a^t g_t'(t,u) \cdot h(u) \cdot f(u)\, du,$$

$u \leq t, u, t \in T$. Ovim diferenciranjem se u velikom broju slučajeva dobija jednostavnija funkcija $g_t'(t,u)$ u integralnoj jednačini po $h(t)$, pa se time olakšava nalaženje $h \in L^2(dF)$. Znači važi:

Teorema 13. Potreban i dovoljan uslov ekvivalentnosti Gausovih mera P i P_1 za proces $x(t), t \in T$ dat izrazom (9) je da rešenje $h(t)$ integralne jednačine:

$$a'(t) = \int_a^t g_t'(t,u) \cdot h(u) \cdot dF(u),$$

$u \leq t, u, t \in T$ pripada prostoru $L^2(dF(t))$.

Primer 24. Neka je jezgro procesa $x(t)$:

$$g(t,u) = g(t) + p(u),$$

$u \leq t, u, t \in (a,b)$. Ako važi $g(t,t) = 0$ za svako $t \in T$, onda je $p(t) = -g(t)$, tj.:

$$g(t,u) = g(t) - g(u).$$

Primer takvog procesa je Markovljev proces:

$$x(t) = \int_0^t (t-u)\, dz(u),$$

$u \leq t, u, t \in (0, \tau)$. U tom slučaju će biti $g_t'(t,u) = g'(t)$, pa je:

$$a'(t) = \int_a^t g'(t) \cdot h(u) \cdot f(u) du.$$

Odavde je potreban i dovoljan uslov ekvivalentnosti Gausovih mera P i P_1, da funkcija:

$$h(t) = \frac{1}{f(t)} \cdot \left(\frac{a'(t)}{g'(t)}\right)',$$

za $t \in (a,b)$ pripada prostoru $L^2(dF(t))$.

Primer 25. Neka je jezgro procesa $x(t), t \in T$:

$$g(t,u) = \frac{(t-u)^k}{k!},$$

$u \leq t, u, t \in (0,T)$. Prema posledici 2. proces $x(t)$ je k-puta diferencijabilan. Pri tom postoji i $a^{(k)}(t)$ i važi:

$$a^{(k)}(t) = (E_1 x(t))^{(k)} = E_1 x^{(k)}(t),$$

$t \in T$, na osnovu leme 5. iz poglavlja 4. Znači:

$$a^{(k)}(t) = \int_0^t h(u) \cdot f(u)\, du,$$

$u \leq t, t \in (0,\tau)$. Odavde je:

$$h(t) = \frac{1}{f(t)} \cdot a^{(k+1)}(t),$$

uz uslov $h(t) \in L^2(dF(t))$.

Napomena. Ako je jezgro $g(t,u)$ iz izraza (9) sa osobinom $g(t,t) \neq 0$ za svako $t \in T$ i važe uslovi A_1 i A_3 za proces $x(t)$ onda je:

$$a'(t) = g(t,t) \cdot h(t) \cdot f(t) + \int_a^t g_t'(t,u) \cdot h(u) \cdot f(u)\, du,$$

$u \leq t, u, t \in (a,b)$, što predstavlja integralnu jednačinu Voltera druge vrste po $h(t) \cdot f(t)$, koja uvek ima rešenje i ono se može dobiti nekim iterativnim postupkom.

Drugi slučaj: različitih korelacionih funkcija $B(s,t)$ i $B_1(s,t)$, $s,t\in T$ i jednakih nuli matematičkih očekivanja procesa $x(t)$ i $x_1(t)$.

Ovde se uporedo uočavaju dva Hilbertova prostora $H(x)$ i $H(x_1)$ sa skalarnim proizvodima $(x,y) = E\, x\cdot y$, $(x,y)_1 = E_1\, x\cdot y$, gde su procesi:

$$x(t) = \int_a^t g(t,u)\, dz(u),$$
$$x_1(t) = \int_a^t g_1(t,u)\, dz_1(u), \tag{10}$$

$u \leq t, u,t\in(a,b)$ dati čisto-kanoničnom reprezentacijom i ispunjavaju uslove A_1, A_2, A_3. Kako je $H(x) = H(z)$ i $H(x_1) = H(z_1)$, biće i $H(x) \times H(x_1) = H(z) \times H(z_1)$.

Potreban i dovoljan uslov ekvivalentnosti procesa $x(t)$ i $x_1(t)$, $t\in T$ je da se razlika korelacionih funkcija:

$$b(s,t) = B(s,t) - B_1(s,t), \tag{11}$$

$s,t\in T$, može predstaviti kao linearni neprekidni funkcional u prostoru $H(x) \times H(x_1)$, videti [1]. Odnosno mora važiti:

$$b(s,t) = (x(s)\cdot x_1(t),\, y)_{H(x)\times H(x_1)},$$

gde je y fiksirana veličina prostora $H(z)\times H(z_1)$:

$$y = \int_a^b \int_a^b h(u,v)\, dz(u)\, dz_1(v),$$

i $h(u,v)\in L^2(dF(u)\times dF_1(v))$. Na osnovu toga uslov ekvivalentnosti je da bude:

$$b(s,t) = \int_a^s \int_a^t g(s,u)\cdot g_1(t,v)\cdot h(u,v)\, dF(u)\cdot dF_1(v) \tag{12}$$

tj. da se nadje funkcija $h(u,v)$, $u,v\in T$ iz gornje integralne jednačine sa uslovom:

$$\int_a^s \int_a^t h^2(u,v)dF(u)\cdot dF_1(v) < \infty .$$

Iz gornjeg izraza (12) vidi se da mora $b(s,t), s,t\in T$ imati neprekidne parcijalne izvode prvog reda. Odatle sledi da ni $B(s,t)$ i $B_1(s,t)$, prema (11) ne smeju imati prekidne parcijalne izvode prvog reda. No, da su oni neprekidni pokazano je u poglavlju 4., lema 3., zahvaljujući uslovu A_2 koji važi za procese $x(t)$ i $x_1(t), t\in T$.

Ako bi jezgra procesa $x(t)$ i $x_1(t)$ bila sa osobinom da je $g(t,t)= =1$, i $g_1(t,t) = 1$ za svako $t\in T$ kao u radu [15] Kramera, onda bi postojao skok na dijagonali $s=t$ parcijalnih izvoda prvog reda svake od korelacionih funkcija $B(s,t)$ i $B_1(s,t), s,t\in T$ i to u iznosu: $f(t)$ i $f_1(t)$, videti dokaz leme 3. To bi značilo da je potreban uslov ekvivalentnosti $x(t)$ i $x_1(t)$, u tom slučaju jednakost njihovih gustina:

$$f(t) = f_1(t),$$

za svako $t\in T$. U našem slučaju to ne mora važiti jer je neprekidnost $b_t'(s,t)$ i $b_s'(s,t)$ obezbedjena svuda.

Na osnovu uslova A_1 i A_2, izraz (12) za $b(s,t)$ može se diferencirati, pa se dobija:

$$b''_{s,t}(s,t) = \int_a^s \int_a^t g_s'(s,u)\cdot g_1'(t,v)\cdot h(u,v)\cdot f(u)\cdot f_1(v)\; dudv,$$

$u \leqslant s, v \leqslant t, s,t\in (a,b)$.

Teorema 14. Potreban i dovoljan uslov ekvivalentnosti procesa $x(t)$ i $x_1(t)$, datih izrazima (10) je da rešenje gorenje integralne jednačine $h(s,t)$ bude iz prostora $L^2(dF(s)\times dF_1(t))$.

Primer 26. Neka su procesi $x(t)$ i $x_1(t)$ predstavljeni zbirom dva Markovljeva procesa:

$$x(t) = \int_a^t (g(t) + p(u))\; dz(u),$$

$$x_1(t) = \int_a^t (g_1(t) + p_1(u))\, dz_1(u),$$

$u \leq t, u, t \in (a,b)$. Na osnovu uslova A_2 sledi da je:

$$p(t) = -g(t), \qquad p_1(t) = -g_1(t),$$

$t \in T$. Procesi $x(t)$ i $x_1(t)$ su ekvivalentni ako i samo ako postoji rešenje $h(s,t)$ integralne jednačine:

$$b(s,t) = \int_a^s \int_a^t [g(s)-g(u)]\cdot[g_1(t)-g_1(v)]\cdot h(u,v)\cdot f(u)\cdot f_1(v)\, du dv,$$

koje je iz prostora $L^2(dF(s) \times dF_1(t))$.

Iz relacije:

$$b''_{s,t}(s,t) = \int_a^s \int_a^t g'(s)\cdot g_1'(t)\cdot h(u,v)\cdot f(u)\cdot f_1(v)\, du dv,$$

dobija se direktno:

$$h(s,t) = \frac{1}{f(s)\cdot f_1(t)}\cdot\left[\frac{b''_{s,t}(s,t)}{g'(s)\cdot g_1'(t)}\right]''_{s,t},$$

$s,t \in T$ i pri tom mora biti:

$$\int_a^b \int_a^b \left\{\left[\frac{b''_{s,t}(s,t)}{g'(s)\cdot g_1'(t)}\right]''_{s,t}\right\}^2 \frac{ds\, dt}{f(s)\cdot f_1(t)} < \infty .$$

Znači dva Markovljeva procesa:

$$x(t) = \int_o^t (t-u)\, dz(u),$$

$$x_1(t) = \int_o^t (t-u)\, dz_1(u),$$

$u \leq t, t > 0$, su ekvivalentna ako i samo ako je

$$\frac{b^{(4)}_{s^2,t^2}(s,t)}{f(s)\cdot f_1(t)} \in L^2\,(dF(s) \times dF_1(t)).$$

Primer 27. Neka je $x_1(t) = x'(t), t \in T$, gde je proces $x(t)$ dat kao u predhodnom primeru. Ekvivalentnost procesa $x(t)$ i njegove izvodne transformacije je data preko veze:

$$b(s,t) = \int_a^s \int_a^t [\, g(s)-g(u)\,]\cdot g'(t)\cdot h(u,v)\cdot f(u)\cdot f(v)\, du dv,$$

gde je $h \in L^2(dF\times dF)$. Ako diferenciramo $\frac{b(s,t)}{g'(t)}$ po s dobija se:

$$\frac{b_s'(s,t)}{g'(t)} = \int_a^s \int_a^t g'(s)\cdot h(u,v)\cdot f(u)\cdot f(v)\, dudv,$$

$u \leq s, v \leq t,\ s,t \in T$. Odavde direktno sledi da je:

$$h(s,t) = \frac{1}{f(s)\cdot f(t)}\cdot \left[\frac{b_s'(s,t)}{g'(s)\cdot g'(t)} \right]''_{s,t}$$

i pri tom mora biti:

$$\int_a^b \int_a^b \left[\left[\frac{b_s'(s,t)}{g'(s)\cdot g'(t)} \right]''_{s,t} \right]^2 \cdot \frac{ds\, dt}{f(s)\cdot f(t)} < \infty .$$

Ako je $x(t),\ t > 0$ Markovljev proces:

$$x(t) = \int_0^t (t-u)\, dz(u),$$

$u \leq t$, onda je on ekvivalentan svom izvodnom procesu ako i samo ako je:

$$\frac{b^{(3)}_{s^2,t}(s,t)}{f(s)\cdot f(t)} \in L^2(dF(s)\times dF(t)).$$

Primer 28. Neka je:

$$x_1(t) = \int_a^t \varphi(t,u)\cdot x(u)\, du,$$

$u \leq t, u,t \in (a,b)$ linearna neanticipirajuća transformacija procesa $x(t)$, datog u primeru 26. Tada je novo jezgro procesa $x_1(t) = \int_a^t G(t,v)\, dz(v)$ oblika:

$$G(t,v) = \int_v^t \varphi(t,\omega)\cdot [\, g(\omega) - g(v)\,]\, d\omega =$$

$$= \Psi_1(t,v) - \Psi(t,v)\cdot g(v),$$

gde smo označili:

$$\Psi(t,v) = \int_v^t \varphi(t,\omega)\, d\omega,$$

$$\Psi_1(t,v) = \int_v^t \varphi(t,\omega)\cdot g(\omega)\, d\omega ,$$

za $a<v\leq\omega\leq t<b$.

Uslov ekvivalentnosti za procese $x(t)$ i $x_1(t), t\in T$, dat je izrazom:

$$b(s,t) = \int_a^s \int_a^t [\, g(s)-g(u)\,]\cdot[\,\Psi_1(t,v)-g(v)\cdot\Psi(t,v)]\cdot h(u,v)\cdot dF(u)\cdot dF(v)$$

gde je $h\in L^2(dF\times dF)$. Diferenciranjem ove veze po s i t dobija se:

$$\frac{b''_{s,t}(s,t)}{g'(s)} = \int_a^s\int_a^t [\,\Psi'_{1t}(t,v)-g(v)\cdot\Psi'_t(t,v)]\cdot h(u,v)f(u)\cdot f(v)\, du\, dv,$$

jer je $\Psi(t,t) = \Psi_1(t,t) = 0$, za svako $t\in(a,b)$. Ovde je:

$$\Psi'_t(t,v) = \int_v^t \varphi'_t(t,\omega)\, d\omega + \varphi(t,t),$$

$$\Psi'_{1t}(t,v) = \int_v^t \varphi'_t(t,\omega)\cdot g(\omega)\, d\omega + \varphi(t,t)\cdot g(t)$$

Ako je $\varphi(t,u) \equiv 1$, tj. ako je:

$$x_1(t) = \int_a^t x(u)\, du,$$

$u\leq t, u,t\in(a,b)$, onda je gornja relacija po $h(u,v)$ oblika:

$$\frac{b''_{s,t}(s,t)}{g'(s)} = \int_a^s\int_a^t [\, g(t)-g(v)\,]\cdot h(u,v)f(u)\cdot f(v)\, du\, dv,$$

odakle se lako dobija da je:

$$h(s,t) = \frac{1}{f(s)\cdot f(t)}\left[\frac{\left(b''_{s,t}(s,t)\right)'_t}{g'(s)\cdot g'(t)}\right]''_{s,t},$$

pa je uslov potreban i dovoljan za ekvivalentnost $x(t)$ i $x_1(t)$, da $h(s,t)\in L^2(f(s)ds\times f(t)dt)$.

Ako je $x(t), t > 0$ Markovljev proces:

$$x(t) = \int_0^t (t-u)\, dz(u),$$

$u \leq t$, a $x_1(t)$ integralna neanticipirajuća transformacija u kojoj je $\varphi(t,u) \equiv 1$ na $T \times T$, onda je:

$$h(s,t) = \frac{b^{(5)}_{s^2,t^3}(s,t)}{f(s)\cdot f(t)},$$

pa je za ekvivalentnost $x(t)$ i $x_1(t)$ potrebno i dovoljno da važi:

$$\int_a^b \int_a^b [\, b^{(5)}_{s^2,t^3}(s,t)\,]^2 \cdot \frac{ds\ dt}{f(s)\cdot f(t)} < \infty .$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Ю.А. Розанов, Гауссовские бесконачномерные распределения, Наука, Москва 1968.
2. Ю.А. Розанов, Теория обновляющих процессов, Наука, Москва 1974.
3. Ю.А. Розанов, Теория вероятностей, случайные процессы и математическая статистика, Наука, Москва 1985.
4. И.А. Ибрагимов, Ю.А. Розанов, Гауссовские случайные процессы, Наука, Москва 1970.
5. З.Ивкович, Ю.А. Розанов, О каноническом разложении Хида-Крамера для случайных процессов, Теория вероятн. и её примен., том 16 (1971) 348-353.
6. Z.Ivković, Yu. A. Rozanov, A. Characterization of Cramer Representation of Stochastic Process, Publ. Math. Inst. Beograd, T.14 (28), 1972., 69-73.
7. Z.Ivković, J.Bulatović, J.Vukmirović, S.Živanović, Application of spectral multiplicity in separable Hilbert space to stochastic processes, Мат. Инст. Београд, посебно издање, књига бр.12, 1974.
8. Z.Ivković, J.Vukmirović, Example of continuous second-order stochastic process with preseribed finite multiplicity, Матем. весник 13 (28) 1976, 269-272.
9. З.Ивковић, Гаусовске мере у простору функција и иновациони процеси, Матем. весник 2(15) (30) 1978., 223-229.
10. Z.Ivković, On spectral type of nonlinear and nonanticipative transformation of the Wiener process, Zbornik radova PMF Novi Sad, 12 (1982) 117-121.
11. Z.Ivković, The spectral type of polynomials of the Gaussian process, Zbornik radova PMF Novi Sad 13 (1983) 211-218.

12. Z.Ivković, Spectral type of Hermite polynomial of a Wiener process, Теория вероятностей и её примен., том 1(1985), 145-147.

13. Z.Ivković, Non-linear time-domain analysis of Gaussian process, Bilten T.88, Srpske Akademije nauka i umetnosti, Odsek za prirodne i matematičke nauke, No 14, Beograd 1985.

14. H.Cramer, Stochastic processes as curves in Hilbert space, Probability Theory and its Applications Vol.9 (1964) 195-204, Moscow.

15. H.Cramer, Structural and Statistical Problems for a Class of Stochastic Processes, Princeton University Press., Princeton, New Jersey, 1971.

16. T.Hida, Canonical Representation of Gaussian Processes and their Applications, Mem. Coll. Sci. Univ. Kyoto, Ser.A, 33, 1960., 109-155.

17. T.Hida, G.Kallianpur, The Square of a Gausian Markov Process and Nonlinear Prediction, Journal of multivariate analysis, 5, 1975. 451-461.

18. M. Hitsuda, Multiplicity of some classes of Gausian processes, Nagoya Math. J. Vol. 52 (1973) 39-46.

19. G.Kalianpur, V. Mandrekar, Multiplicity and representation theory of purely non-deterministic stochastic processes, Probability Theory and its Applications, Vol. 10, 4(1965), 614-644, Moscow.

20. Т.Н. Сирая, Канонические представления случайных процессов второго порядка, Теория вероятн. и её примен. 12, 1977. 429-435.

21. Т.Н. Сирая, О канонических представлениях случайных процессов, кратностей один и два, Теория вероятн. и её примен. 18,1(1973) 155-160.

22. R. Pažanin, Invariance of spectral type of a stochastic process with respect to transformation of time, Publ. Math. Inst. Belgrade 30(44) 1981. 141-152.

23. S.Mitrović, Equivalence of Gausian measures of finite sum of stochastic processes, Матем. весник, Београд, 36(1984) 152-154.

24. S.Mitrović, On a class of processes with multiplicity N=1, Publ. Math. Inst. Belgrade T.38(52) 1985., 203-205.

25. S.Mitrović, Spectral type of some transformations of determined stochastic process, Publ. Math. Inst. Belgrade, T.40 (54) 1986.

26. S.Mitrović, On a generalization of a Cramer theorem, Zbornik radova PMF, Novi Sad, u pripremi.

27. L.A. Shepp, Radon-Nikodym derivatives of Gaussian measures, Ann. Math. Statistics 37(2), 1966, 321-354.

28. И.И. Гихман, А.В.Скороход, Введение в теорию случайных процессов, Наука, Москва 1977.

29. И.И. Гихман, А.В. Скороход, Теория случайных процессов Том 1, Наука, Москва, 1971.

30. А.Н. Ширяев, Вероятность, Наука, Москва, 1980.

31. В.Феллер, Введение в теорию вероятностей и её приложения, Мир, Москва, 1984.

32. Н.И. Архиезер, И.М. Глазман, Теория линейных операторов в Гилбертовом пространстве, Москва-Ленинград, Гостех-издат. 1950.

33. А.Н. Колмогоров, С.В.Фомин, Элементы теории функций и функционального анализа, Наука, Москва 1972.

34. S.Aljančić, Uvod u realnu i funkcionalnu analizu, Gradj. knjiga, Beograd, 1974.

35. В.Рудин, Функциональный анализ, Мир, Москва, 1975.

36. A.E. Taylor, Introduction to functional analysis, John Wiley, New York, 1958.

37. А.Т. Талдыкин, Элементы прикладного функционального анализа, Москва, Высшая школа, 1982.

38. Т.Е. Шилов, Фан Дык Тинь, Интеграл, мера и производная на линейных пространствах, Наука, Москва 1967.

39. Ю.Л. Далецкий, С.В. Фомин, Меры и дифференциальные уравнения в бесконачномерных пространствах, Наука, Москва, 1983.

40. Ф.Рисс, Б. Секефальви - Надь, Лекции по функциональному анализу, Мир, Москва 1979.