UNIVERZITET U BEOGRADU

PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET

NEKI ITERATIVNI POSTUPCI I GRANIČNE TEOREME U TEORIJI SLUČAJNIH DIFERENCIJALNIH JEDNAČINA

Doktorska disertacija

Svetlana Janković

Beograd, 1987.

P R E D G O V O R

Teorija slučajnih diferencijalnih jednačina, kao deo opšte teorije slučajnih procesa, počinje da se razvija četrdesetih godina nekim razmatranjima Bernšteina i Wienera. Pravim tvorcima ove oblasti smatraju se sovjetski matematičar I.I. Gihman i japanski matematičar K. Ito, koji su pedesetih godina, nezavisno jedan od drugog, došli do pojma slučajne diferencijalne jednačine čije je rešenje proces Markova. Danas je opšte prihvaćen Itoov pristup ovoj problematici, nastao iz definicije slučajnog integrala kao integrala slučajne funkcije po Wienerovom procesu. On je formirao i integral slučajne funkcije po Poissonovoj meri i proučio slučajne diferencijalne jednačine koje, pored Lesbegueovih i Itoovih integrala, sadrže i integrale po Poissonovoj meri. Glavni rezultati izloženi su u njegovim radovima [Ito; a), 1951.; b), 1951.]. Od tada se ova teorija stalno razvija, naročito posle uvodjenja pojma martingala od strane Dooba [Doob, 1953.]. Značajne rezultate u proučavanju slučajnih diferencijalnih jednačina po martingalima i martingalnim merama dali su mnogi matematičari, a posebno Gihman, Skorohod, Girsanov, Kunita, Watanabe, Meyer, Mc Kean, Dolean-Dade i drugi.

U ovom radu izloženi su rezultati koji predstavljaju prilog proučavanju slučajnih diferencijalnih jednačina Itoa. Glavni rezultat je opšti algoritam, odnosno jedna iterativna metoda za približno analitičko rešavanje ovih jednačina. Ideja za formiranje takvog algoritma potiče od rada R. Zubera [Zuber, 1966.] , u kome je izložena opšta metoda za približno analitičko rešavanje običnih diferencijalnih jednačina prvog reda. Opštost ove metode treba shvatiti u smislu da ona sadrži, kao posebne slučajeve, neke poznate i istorijski značajne iterativne metode, kao što su Picardova metoda sukcesivnih aproksimacija, Čaplyginove metode sečica i tangenata, Newton-Kantorovičeva metoda i dr. Logično je bilo zapitati se da li se analogan opšti algoritam može formirati za približno rešavanje slučajnih diferencijalnih jednačina Itoa i da li se mogu naći neki posebni algoritmi pomoću kojih se približno rešavanje ovih jednačina svodi na rešavanje nekih efektivno rešivih slučajnih diferencijalnih jednačina Itoa. S obzirom da je, izmedju ostalog, poznat oblik rešenja linearne slučajne diferencijalne jednačine Itoa, nameće se potreba za linearizacijom polaznih jednačina. Tako su u ovom radu dati neki konkretni algoritmi kojima se polazna slučajna diferencijalna jednačina skoro izvesno približno rešava pomoću niza linearnih slučajnih diferencijalnih jednačina Itoa.

U klasičnoj teoriji slučajnih diferencijalnih jednačina Itoa uglavnom su razmatrane granične teoreme koje se odnose na konvergenciju u verovatnoći, ili, pod strožijim uslovima, na srednje kvadratnu konvergenciju. Opšti algoritam bio je motiv za postavljanje dovoljnih uslova pod kojima važe granične teoreme o skoro izvesnoj konvergenciji za različite tipove slučajnih diferencijalnih i integrodiferencijalnih jednačina Itoa. Ovi dovoljni uslovi odnose se na formu bliskosti koeficijenata polazne jednačine sa koeficijentima niza jednačina u posmatranom slučaju. Naravno, treba očekivati da ova bliskost bude znatno strožija u odnosu na uslove pod kojima važe granične teoreme za konvergenciju u verovatnoći. U literaturi su poznati neki kriterijumi pod kojima važe granične teoreme za skoro izvesnu konvergenciju, na primer, uniformni integralni uslov. Kriterijumi koji su postavljeni u ovom radu, koliko nam je poznato, nisu do sada razmatrani, tako da oni u celini predstavljaju izvesnu novinu u proučavanju ove oblasti.

Rad se sastoji od pet delova. Prva dva dela su uvodnog karaktera i sadrže pojmove neophodne za razumevanje kasnije razmatrane materije. U ovim delovima nema originalnih rezultata, a uz svaku navedenu činjenicu ili teoremu, naznačeno je gde se može naći dokaz.

Prvi deo sadrži uvodne pojmove iz opšte teorije slučajnih procesa: definiciju slučajnog procesa, separabilnost, merljivost, saglasnost, neprekidnost i dr. Definisan je Wienerov proces i date su neke njegove osobine koje se koriste u daljem radu.

U drugom delu definisan je slučajni integral po Wienerovom procesu, slučajni diferencijal i slučajna diferencijalna jednačina Itoa. Navedena su neka svojstva neodredjenog slučajnog integrala Itoa, teorema egzistencije i jedinstvenosti rešenja i teorema o lokalnoj jedinstvenosti rešenja. Posebno je razmatrana linearna slučajna diferencijalna jednačina Itoa, jer se neki specijalni algoritmi zasnivaju na rešavanju ovog tipa jednačina.

Treći deo posvećen je opštem algoritmu, nazvanom Z-algoritam po analogiji sa opštim algoritmom iz rada [Zuber, 1966.], za približno analitičko rešavanje slučajnih diferencijalnih jednačina Itoa. Glavni rezultat ovog rada je teorema 3.1., koja daje dovoljne uslove za skoro izvesnu konvergenciju niza iteracija ka rešenju polazne jednačine. Smisao ove teoreme je u sledećem. Ako je rešenje slučajne diferencijalne jednačine Itoa potpuno odredjeno Wienerovim procesom i funkcijama $a(t,x)$ i $b(t,x)$ koje su koeficijenti te jednačine, onda se (n+1)-aproksimacija rešenja dobija pogodnom aproksimacijom funkcija $a(t,x)$ i $b(t,x)$ funkcijama $a_n(t,x)$ i $b_n(t,x)$ respektivno. Pored ostalih opštih uslova koje ovde nećemo naglašavati, za skoro izvesnu konvergenciju niza iteracija ka rešenju polazne jednačine dovoljno je da proizvoljno izabrane funkcije $a_n(t,x)$ i $b_n(t,x)$, $n=1,2,\ldots$, ispunjavaju uslov (3.5) (strana 24). Po analogiji sa radom [Zuber, 1966.], niz $\{(a_n(t,x),b_n(t,x))\ ,\ n=1,2,\ldots\}$ naziva se odredjujući niz Z-algoritma. U posebnim slučajevima, od izbora odredjujućeg niza zavisiće brzina skoro izvesne konvergencije niza iteracija ka rešenju polazne jednačine, kao i efektivna rešivost jednačina kojima se te iteracije dobijaju. Činjenica da se rešenja linearnih slučajnih diferencijalnih jednačina Itoa konkretno izražavaju pomoću Lesbegueovih i Itoovih integrala, navodi nas na ideju da se formiraju posebni Z-algoritmi kojima se polazna jednačina približno rešava pomoću niza odgovarajućih linearnih jednačina. Ovi Z-algoritmi formirani su po ugledu na analitičke metode za približno rešavanje običnih diferencijalnih jednačina prvog reda. U tom smislu, teoreme 3.2. i 3.4. su novi rezultati. Napomenimo da Z-algoritmi analogni, na primer, Čaplyginovim metodama sečica i tangenata za obične diferencijalne jednačine prvog reda, ne dovode do iteracija koje su skoro izvesno monotoni nizovi, jer u teoriji slučajnih diferencijalnih jednačina Itoa ne postoje teoreme analogne teoremi Čaplygina o diferencijalnoj nejednakosti. Zbog toga se ne mogu oceniti greške aproksimacija po ugledu na Luzinovu ocenu za obične diferencijalne jednačine, ali se može dati jedna gruba srednje kvadratna ocena.

Materija tretirana u ovom delu ostavlja niz otvorenih pitanja, a time i mogućnost za dalji rad na ovim problemima. Pre svega, to bi bilo formiranje novih Z-algoritama, odnosno nalaženje odgovarajućih odredjujućih nizova, tako da se slučajne diferencijalne jednačine opisane tim odredjujućim nizovima mogu efektivno rešavati. Naravno, efektivna rešivost je veoma strog uslov, pa formiranje ovakvih Z-algoritama ostaje otvoren problem.

Četvrti i peti deo posvećeni su graničnim teoremama. U četvrtom delu date su granične teoreme za skoro izvesnu konvergenciju koje se odnose na niz slučajnih integrodiferencijalnih jednačina Itoa. Ove jednačine proučavao je

R. Berger u radu [Berger, 1977.] i, pored ostalog, dao je granične teoreme za konvergenciju u verovatnoći i u srednje kvadratnom. Uslov (3.5) bio je motiv za postavljanje dovoljnih uslova za ovaj tip jednačina, pri kojima važe granične teoreme za skoro izvesnu konvergenciju. Tako su nastale teoreme 4.2. i 4.3. . Takodje je pokazano da se opšti Z-algoritam iz teoreme 3.1. može formirati i za ove jednačine. Pri odgovarajućem izboru odredjujućeg niza, one bi se mogle rešiti približno pomoću niza efektivno rešivih slučajnih diferencijalnih jednačina.

U ovom delu je data i ideja o uopštavanju uslova (3.5) za neke tipove slučajnih diferencijalnih diferencnih jednačina čiji koeficijenti, umesto uniformnog Lipschitzovog uslova, ispunjavaju opštiji uslov, takozvani ograničen slučajni integralni kontraktor.

Peti deo odnosi se na granične teoreme za neke tipove slučajnih diferencijalnih jednačina Itoa po Wienerovom procesu i Poissonovoj meri čiji su koeficijenti realne ili slučajne funkcije, odnosno realni ili slučajni funkcionali. Ovi tipovi jednačina i odgovarajuće granične teoreme za konvergenciju u verovatnoći razmatrani su u radovima [Ito, b), 1951.] i [Ito, Nisio, 1964.] . Kao u prethodnom delu, granične teoreme za skoro izvesnu konvergenciju baziraju se na dovoljnim uslovima analognim uslovu (3.5). U tom smislu, teoreme 5.2., 5.3., 5.4. i 5.5. su novi rezultati. Uslovi pod kojima su iskazane ove teoreme obezbedjuju postojanje odgovarajućih opštih Z-algoritama. Pošto je za neke tipove slučajnih diferencijalnih jednačina Itoa po Wienerovom procesu i Poissonovoj meri poznat oblik rešenja, to nalaženje posebnih Z-algoritama, odnosno izvestan vid linearizacije polaznih jednačina, takodje ostaje otvoren problem. Ove granične teoreme mogle bi se proširiti na slučajne diferencijalne jednačine po neprekidnim martingalima i martingalnim merama, kao i na jednačine u slučajnom polju.

Spisak literature na kraju rada sadrži 34 bibliografske jedinice koje su, uglavnom, neposredno koriščene, a u radu se navode imenom autora i godinom izdanja.

Profesori Prirodno-matematičkog fakulteta u Beogradu Zoran Ivković i Radivoje Milošević su mi, kao i u drugim prilikama, i ovoga puta pomogli svojim savetima i podrškom, te im se najlepše zahvaljujem. Posebnu zahvalnost dugujem profesoru Jordanu Stojanovu sa Univerziteta u Sofiji na pomoći u nabavljanju literature i na izvanrednoj saradnji.

Februar, 1987.

S A D R Ž A J

1. UVODNI POJMOVI IZ TEORIJE SLUČAJNIH PROCESA

Slučajni proces. Merljivost i separabilnost.

Neka je $(\Omega,\mathcal{F},P)$ fiksiran prostor verovatnoća, I interval na R, R^n n-dimenzioni Euclidov prostor, $\mathcal{B}_I$ i $\mathcal{B}^n$ Borelova σ-polja na I i R^n respektivno.

Slučajni proces ili slučajna funkcija je funkcija od dva argumenta $X(t,\omega)$, $t\in I$, $\omega\in\Omega$, sa vrednostima u R^n. Za svako $t_0\in I$, $X(t_0,\omega)$ je slučajna promenljiva definisana na prostoru verovatnoća $(\Omega,\mathcal{F},P)$, a za svako $\omega_0\in\Omega$, $X(t,\omega_0)$ je trajektorija, ili realizacija slučajnog procesa $X(t,\omega)$. Slučajne procese ćemo označavati sa $X = (X(t), t\in I)$.

Slučajni proces $X = (X(t), t\in I)$ je merljiv ako je funkcija $X(t,\omega)$ $\mathcal{B}_I\otimes\mathcal{F}$-merljiva, to jest,

$$\forall S\in\mathcal{B}^n, \qquad \{(t,\omega) : X(t,\omega)\in S\}\in\mathcal{B}_I\otimes\mathcal{F}.$$

Slučajni proces $X = (X(t), t\in I)$ je separabilan ako postoji prebrojiv skup $S\subset I$ i fiksiran nula-dogadjaj L, tako da za proizvoljan zatvoren skup $F\subset R^n$ i proizvoljan otvoren interval $G\subset I$, skupovi

$$\{\omega : X(t,\omega)\in F,\ t\in I\cap G\} \quad \text{i} \quad \{\omega : X(t,\omega)\in F,\ t\in S\cap G\}$$

se razlikuju za podskup od L.

Po teoremi Dooba, svakom slučajnom procesu može se pridružiti njegova separabilna modifikacija, to jest, stohastički ekvivalentan separabilan slučajni proces (dokaz u [Doob, 1953.]). Nadalje će, bez posebnog isticanja, svaki slučajni proces biti zamenjen svojom separabilnom modifikacijom.

Neprekidnost

Slučajni proces $X = (X(t), t \in I)$ je <u>neprekidan</u> (s desna, s leva) na skupu $S \subseteq I$ ako su skoro sve njegove trajektorije neprekidne (s desna, s leva) za svako $t \in S$.

Slučajni proces $X = (X(t), t \in [a,b])$ je <u>bez tačaka prekida druge vrste</u> ako skoro sve njegove trajektorije imaju levi i desni limes za svako $t \in (a,b)$, desni limes u tački a i levi limes u tački b.

Slučajni proces $X = (X(t), t \in I)$ je <u>neprekidan u verovatnoći</u> u tački $t \in I$, ili stohastički neprekidan u tački $t \in I$, ako za svako $\varepsilon > o$

$$P\{\omega : \| X(t+h) - X(t) \| > \varepsilon\} \to o \quad \text{kad } h \to o.$$

Slučajni proces $X = (X(t), t \in I)$ je <u>skoro izvesno neprekidan</u> u tački $t \in I$, ili neprekidan sa verovatnoćom 1 u tački $t \in I$, ako je

$$P\{\omega : \lim_{h \to o} \| X(t+h) - X(t) \| = o\} = 1.$$

Ako je slučajni proces stohastički neprekidan (skoro izvesno neprekidan) za svako $t \in S \cap I$, tada je on stohastički neprekidan (skoro izvesno neprekidan) na skupu S.

Slučajni proces $X = (X(t), t \in I)$ je <u>skoro izvesno neprekidan u realizaciji</u> na I ako je

$$P\{\bigcup_{t\in I}\{\omega : \lim_{h\to o}\|X(t+h) - X(t)\| \neq o\}\} = o.$$

Biće korišćene sledeće osobine slučajnog procesa neprekidnog u verovatnoći:

- ako je slučajni proces neprekidan u verovatnoći, tada postoji njegova separabilna i merljiva modifikacija (dokaz u [Gihman, Skorohod , 1971.]);
- ako neprekidan u verovatnoći slučajni proces $X = (X(t), t \in [a,b])$ nema tačaka prekida druge vrste, tada postoji njegova modifikacija čije skoro sve trajektorije imaju levi limes na $(a,b]$ i neprekidne su s desna na $[a,b)$ (dokaz u [Ladde, Lakshmikantham, 198o.]).

Saglasnost

Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ kompletan prostor verovatnoća. Označimo sa $(\mathcal{F}_t, t \in I)$ familiju neopadajućih σ-podalgebri σ-algebre $\mathcal{F}$, to jest, $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{F}$ za $s < t$, $s,t \in I$.

Slučajni proces $X = (X(t), t \in I)$ je <u>saglasan</u> (ili neanticipativan) sa familijom $(\mathcal{F}_t, t \in I)$ ako su slučajne promenljive $X(t)$ $\mathcal{F}_t$-merljive za svako $t \in I$. Saglasne sa familijom $(\mathcal{F}_t, t \in I)$ slučajne promenljive označavaćemo sa $(X_t, \mathcal{F}_t), t \in I$.

Familija $(\mathcal{F}_t^X, t \in I)$ je <u>generisana</u> slučajnim procesom X ako je $\mathcal{F}_t^X = \sigma\{X(s), s \leq t\}$ minimalna σ-algebra u odnosu na koju su merljive sve slučajne promenljive $X(s)$, $s \leq t$, $s,t \in I$, kompletirana nula-dogadjajima iz $\mathcal{F}$. To je minimalna familija sa kojom je saglasan slučajni proces X.

Slučajni proces $X = (X(t), t \in I)$ je martingal ako je saglasan sa familijom $(\mathcal{F}_t, t \in I)$, $E\{\|X(t)\|\} < \infty$ za svako $t \in I$, i ako za sve $t > s$, $t,s \in I$, važi $E\{X(t) \mid \mathcal{F}_s\} = X(s)$ skoro izvesno.

Minimalna σ-algebra $\mathcal{Q}$ podskupova iz $I \times \Omega$ u odnosu na koju su merljivi svi saglasni sa familijom $(\mathcal{F}_t, t \in I)$ neprekidni slučajni procesi, zove se predskazljiva σ-algebra. $\mathcal{Q}$-merljivi slučajni procesi čine klasu predskazljivih slučajnih procesa.

Vreme Markova

Neka je $(\mathcal{F}_t, t \in I)$ neopadajuća familija σ-podalgebri σ-algebre $\mathcal{F}$. Slučajna promenljiva $\tau = \tau(\omega)$ sa vrednostima u I je vreme Markova u odnosu na familiju $(\mathcal{F}_t, t \in I)$ ako za svako $t \in I$ dogadjaj $\{\omega: \tau(\omega) \leq t\}$ pripada $\mathcal{F}_t$.

Označimo sa $\mathcal{F}_\infty$ minimalnu σ-algebru koja sadrži sve σ-algebre $\mathcal{F}_t$, $t \in I$, odnosno $\mathcal{F}_\infty = \sigma\{\mathcal{F}_t, t \in I\}$. Vreme Markova $\tau = \tau(\omega)$ generiše σ-algebru $\mathcal{F}_\tau$ kao skup dogadjaja $A \subset \mathcal{F}_\infty$ za koje je $A \cap \{\omega: \tau(\cdot\omega) < t\} \in \mathcal{F}_t$ za svako $t \in I$. Može se dokazati da je $\tau(\omega)$ $\mathcal{F}_\tau$-merljiva slučajna promenljiva (dokaz u [Lipcer, Širjaev, 1974.]).

Neka je $\mathcal{F}_{t+} = \sigma\{\bigcap_{s>t} \mathcal{F}_s\}$. Familija $(\mathcal{F}_t, t \in I)$ je neprekidna s desna ako je $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_{t+}$ za svako $t \in I$, a neprekidna s leva ako je $\mathcal{F}_{t-} = \sigma\{\bigcup_{s<t} \mathcal{F}_s\}$. Ako je $\mathcal{F}_{t-} = \mathcal{F}_t = \mathcal{F}_{t+}$ za

svako $t \in I$, onda je familija ($\mathcal{F}_t, t \in I$) neprekidna.

Ako je $X = (X(t), t \in I)$ neprekidan s desna slučajni proces saglasan sa neprekidnom s desna familijom ($\mathcal{F}_t, t \in I$), i ako je B otvoren skup iz $\mathcal{B}^n$, onda je slučajna promenljiva $\tau_B(\omega) = \inf \{ t : X(t) \in B \}$ vreme Markova (dokaz u [Lipcer, Širjaev, 1974.]).

Sledeća lema koristiće se kasnije više puta.

<u>Lema 1.1.</u> Ako je $\tau_1, \tau_2, \ldots$ niz vremena Markova u odnosu na neprekidnu s desna familiju ($\mathcal{F}_t, t \in I$), onda je $\tau = \inf\limits_n \tau_n$ vreme Markova u odnosu na istu familiju i $\mathcal{F}_\tau = \bigcap\limits_n \mathcal{F}_{\tau_n}$ (dokaz u [Lipcer, Širjaev, 1974.]).

Wienerov proces

Definicije slučajnog integrala Itoa i slučajne diferencijalne jednačine Itoa suštinski su vezane za pojam Wienerovog procesa, pa će zato ovde biti navedene neke njegove osobine.

<u>Standardni Wienerov proces</u> $W = (W(t), t \in [o, \infty))$ je slučajni proces sa vrednostima u R^n i svojstvima :

- $W(o) = o$;
- za svako $k \in N$ i svaku kolekciju $o < t_1 < \ldots < t_k$, slučajne promenljive $W(t_1)$, $W(t_2) - W(t_1), \ldots, W(t_k) - W(t_{k-1})$ su nezavisne medju sobom;
- $W(t) - W(s)$, $t, s \in [o, \infty)$, ima normalnu raspodelu $\mathcal{N}(o, |t-s| \cdot I)$, gde je I jedinična matrica tipa $n \times n$.

U buduće ćemo standardni Wienerov proces kraće nazivati "Wienerov proces".

Lako se dokazuje da za svako $t, s \in [o, \infty)$ važi

$$E\{W(t) - W(s)\} = o$$

i

$$E\{[W(t) - W(s)]\cdot[W(t) - W(s)]^T\} = |t - s|\cdot I.$$

Trajektorije Wienerovog procesa imaju osobine da su skoro izvesno neprekidne, skoro izvesno neograničene varijacije na svakom konačnom intervalu i da su skoro izvesno nediferencijabilne za svako $t \geq o$ (dokaz u [Gihman, Skorohod, 1982.] i [Mc Kean, 1969.]).

Neka je na prostoru verovatnoća $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ zadata neka familija $(\mathcal{F}_t, t \in [o,\infty))$ neopadajućih σ-podalgebri σ-algebre $\mathcal{F}$. Od intresa je razmotriti minimalnu familiju σ-podalgebri generisanu Wienerovim procesom W. Označimo sa $\mathcal{F}_t^W = \sigma\{W(s), o \leq s \leq t\}$ i $\bar{\mathcal{F}}_t^W = \sigma\{W(s) - W(t), t \leq s < \infty\}$ σ-algebre kompletirane svim dogadjajima P-mere nula iz $\mathcal{F}$. Pošto je Wienerov proces W proces sa nezavisnim priraštajima, to su $\mathcal{F}_t^W$ i $\bar{\mathcal{F}}_t^W$ nezavisne σ-algebre.

Wienerov proces $W = (W(t), t \in [o,\infty))$ je <u>saglasan</u> sa familijom $(\mathcal{F}_t, t \in [o,\infty))$ ako je :

- $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$ za $o \leq s \leq t$;
- $\mathcal{F}_t \supset \mathcal{F}_t^W$ za $t \geq o$;
- $\mathcal{F}_t$ je nezavisno u odnosu na $\bar{\mathcal{F}}_t^W$ za $t \geq o$.

Kako je $\bar{\mathcal{F}}_o^W = \sigma\{W(s), o \leq s < \infty\}$, iz zadnjeg uslova sledi da $\mathcal{F}_o$ sadrži samo dogadjaje nezavisne u odnosu na čitav proces W.

Familija $(\mathcal{F}_t^W, t \in [o,\infty))$ generisana Wienerovim procesom W je neprekidna, to jest, za svako $t \in [o,\infty)$ je $\mathcal{F}_{t-}^W = \mathcal{F}_t^W = \mathcal{F}_{t+}$ i $\mathcal{F}_{o-}^W = \mathcal{F}_o^W$ (dokaz u [Lipcer, Širjaev, 1974.]).

Lako se dokazuje da je Wienerov proces $(W_t, \mathcal{F}_t)$, $t\in[0,\infty)$, martingal, odnosno da važi

$$E\{\|W(t)\|\}<\infty \qquad \text{za svako } t\in[0,\infty)$$

i

$$E\{W(t)\mid \mathcal{F}_s^W\} = W(s) \quad \text{skoro izvesno za sve } t>s\geqslant 0.$$

U daljem tekstu će Wienerov proces W saglasan sa familijom $(\mathcal{F}_t^W, t\in[0,\infty))$, biti označavan sa $W=(W_t, \mathcal{F}_t)$, $t\in[0,\infty)$.

2. SLUČAJNI INTEGRAL ITOA I SLUČAJNA DIFERENCIJALNA JEDNAČINA ITOA

U ovom delu dati su osnovni pojmovi iz teorije slučajnih integrala Itoa i slučajnih diferencijalnih jednačina Itoa. Pojmove slučajnog integrala po Wienerovom procesu i slučajne diferencijalne jednačine koja sadrži ovaj slučajni integral, uveli su pedesetih godina sovjetski matematičar Gihman i japanski matematičar Ito nezavisno jedan od drugog. Polazna ideja je bila predstavljanje priraštaja slučajnog procesa $X(t)$ kao

$$X(t+\Delta t) - X(t) = a(t,X(t))\cdot\Delta t + b(t,X(t))\cdot[W(t+\Delta t) - W(t)],$$

gde je W Wienerov proces, a funkcije a i b ispunjavaju odredjene uslove. Pošto Wienerov proces ima skoro izvesno nediferencijabilne trajektorije, to ne postoji granična vrednost za $[\,W(t+\Delta t) - W(t)\,]\,/\,\Delta t$ kad $\Delta t \to o$, ni u kom smislu. Zato je bilo neophodno da se u formalnoj zameni priraštaja diferencijalom

$$dX(t) = a(t,X(t))dt + b(t,X(t))dW(t)$$

precizno definiše $dW(t)$, što je dovelo do uvodjenja pojmova slučajnog diferencijala i slučajne diferencijalne jednačine.

Fundamentalni rezultati dati su u radovima Itoa [Ito, a), 1951.] i [Ito, b), 1951.].

Slučajni integral Itoa

Neka je na kompletnom prostoru verovatnoća $(\Omega,\mathcal{F},P)$ definisan m-dimenzioni Wienerov proces $W = (W_t, \mathcal{F}_t)$, $t \in [t_o,T]$, $T = \text{const} > o$, i neka je merljiva slučajna funkcija $G(t,\omega)$ definisana na $[t_o,T] \times \Omega$, $[t_o,T] \subset [o,\infty)$, sa vrednostima u $R^n \otimes R^m$, saglasna sa familijom $(\mathcal{F}_t, t \in [t_o,T])$. $R^n \otimes R^m$ je standardna oznaka za prostor svih $(n\times m)$-dimenzionih matrica $[G_{ij}]$, $i=1,2,\dots,n$, $j=1,2,\dots,m$, sa normom

$$\|G\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} G_{ij}^2 = \mathrm{tr}GG^T.$$

Označimo sa $M_2[t_o,T]_{n\times m}$ klasu svih slučajnih funkcija G za koje je Lesbegueov integral

$$\int_{t_o}^{T} \|G(s,\omega)\|^2 ds < \infty \quad \text{skoro izvesno.}$$

Jasno je da je $G \in M_2[t_o,T]_{n\times m}$ ako i samo ako je $G_{ij} \in M_2[t_o,T]_{1\times 1}$ za sve $i=1,2,\dots,n$ i $j=1,2,\dots,m$.

Pojam slučajnog integrala po Wienerovom procesu uvodi se postepeno pomoću integrala stepenastih slučajnih funkcija.

<u>Definicija 2.1.</u> Neka je $t_o < t_1 < \dots < t_{k-1} = T$ i neka je $G \in M_2[t_o,T]_{n\times m}$ stepenasta funkcija odredjena kao $G(t,\omega) = G(t_i,\omega)$ za $t \in [t_i,t_{i+1}]$, $i=1,2,\dots,k-1$. Slučajni integral ove funkcije po Wienerovom procesu W je suma

$$\int_{t_o}^{T} G(t,\omega)dW(t,\omega) = \sum_{i=o}^{k-1} G(t_i,\omega)\cdot\left[W(t_{i+1},\omega) - W(t_i,\omega)\right].$$

<u>Definicija 2.2.</u> Neka je slučajna funkcija $G \in M_2[t_o,T]_{n\times m}$ i niz stepenastih slučajnih funkcija $\{G_k,\ k\in N\}$, $G_k \in M_2[t_o,T]_{n\times m}$, tako da

$$\int_{t_o}^{T} \|G(t,\omega) - G_k(t,\omega)\|^2 dt \to o \qquad \text{kad} \quad k\to\infty$$

u verovatnoći. Slučajni integral Itoa slučajne funkcije G po Wienerovom procesu W je slučajna promenljiva

$$I(G) = \int_{t_o}^{T} G(t,\omega)dW(t,\omega) \stackrel{\text{def}}{=\!=}$$

$$\lim_{k\to\infty} \int_{t_o}^{T} G_k(t,\omega)dW(t,\omega) \qquad \text{u verovatnoći,}$$

koja je skoro izvesno jedinstveno odredjena.

U stvari je

$$I(G) = \left(\sum_{j=1}^{m} I(G_{1j}), \sum_{j=1}^{m} I(G_{2j}), \ldots, \sum_{j=1}^{m} I(G_{nj}) \right).$$

I(G) ćemo kraće označavati sa $I(G) = \int_{t_o}^{T} G(t)dW(t)$.

Neka je $[t_o,t] \subset [t_o,T]$ i neka je $I_{[t_o,t]}$ karakteristična funkcija intervala $[t_o,t]$. Ako je slučajna funkcija $G\in M_2[t_o,T]_{n\times m}$, tada je i $G\cdot I_{[t_o,t]} \in M_2[t_o,T]_{n\times m}$, pa se slučajni integral Itoa ove slučajne funkcije može definisati kao slučajni proces.

<u>Definicija 2.3.</u> Neodredjeni slučajni integral Itoa slučajne funkcije G, $G \in M_2[t_o,T]_{n\times m}$, po m-dimenzionom Wiener-

ovom procesu $W = (W_t, \mathcal{F}_t)$, $t \in [o,\infty)$, je n-dimenzioni slučajni proces

$$X(t) = \int_{t_o}^{t} G(s)dW(s) \equiv \int_{t_o}^{T} G(s)\, I_{[t_o,t]} dW(s), \quad t \in [t_o,T],$$

koji je odredjen skoro izvesno jedinstveno.

Navešćemo bez dokaza samo neke osobine neodredjenog slučajnog integrala Itoa.

Teorema 2.1. Neodredjeni slučajni integral Itoa ima sledeće osobine :

I (i) $X(t_o) = o$ skoro izvesmo ;

(ii) $X(t) - X(s) = \int_{s}^{t} G(u)dW(u)$ za $t,s \in [t_o,T]$;

(iii) $X(t)$ je $\mathcal{F}_t$-merljiv slučajni proces ;

(iv) $X(t)$ je skoro izvesno neprekidan u realizaciji slučajni proces ;

II Ako je $\int_{t_o}^{T} E\{\|G(s)\|^2\}ds < \infty$ za svako $t \in [t_o,T]$, onda je

(v) $E\{X(t)\} = o$;

(vi) $E\{X(t)\cdot X^T(s)\} = \int_{t_o}^{\min\{t,s\}} E\{G(u)\cdot G^T(u)\}du,$

i posebno

$$E\{\|X(t)\|^2\} = \int_{t_o}^{t} E\{\|G(u)\|^2\}du \ ;$$

(vii) $(X_t, \mathcal{F}_t)$, $t \in [t_o,T]$, je martingal, to jest, za sve $t_o \leq s \leq t \leq T$ važi $E\{X(t) \mid \mathcal{F}_s\} = X(s)$ skoro izvesno;

(viii) $$E\{\sup_{t \in [t_o,T]} \| \int_{t_o}^{t} G(s)dW(s) \|^2\} \leq 4 \int_{t_o}^{T} E\{\|G(t)\|^2\} dt.$$

(Dokaz u [Ladde, Lakshmikantham, 198o.] i [Arnold, 1973.].)

Iz ovoga sledi da se pod neodredjenim slučajnim integralom Itoa uvek može podrazumevati njegova separabilna, merljiva i skoro izvesno neprekidna u realizaciji modifikacija.

Slučajni diferencijal i formula Itoa

Pretpostavimo da su Wienerov proces W i slučajna funkcija G definisani kao u prethodnom paragrafu.

Neka je merljiva slučajna funkcija $f(t,\omega)$ definisana na $[t_0,T]\times\Omega$ sa vrednostima u R^n, saglasna sa familijom $(\mathcal{F}_t, t\in[t_0,T])$. Označimo sa $M_1[t_0,T]_{n\times 1}$ skup svih takvih slučajnih funkcija f za koje je Lesbegueov integral

$$\int_{t_0}^{T} \|f(t,\omega)\| dt < \infty \quad \text{skoro izvesno.}$$

Neka je $X(t_0,\omega)$ $\mathcal{F}_{t_0}$-merljiva slučajna promenljiva sa vrednošću u R^n, odnosno nezavisna u odnosu na Wienerov proces $(W_t, \mathcal{F}_t)$, $t\in[t_0,T]$.

<u>Definicija 2.4.</u> Slučajni proces Itoa je proces oblika

$$X(t,\omega) = X(t_0,\omega) + \int_{t_0}^{t} f(s,\omega)ds + \int_{t_0}^{t} G(s,\omega)dW(s,\omega).$$

Iz osobina slučajnih integrala Lesbeguea i Itoa sledi da je ovo slučajni proces sa vrednostima u R^n, saglasan sa familijom $(\mathcal{F}_t, t\in[t_0,T])$ i skoro izvesno neprekidan u realizaciji. Očigledno je da je neodredjeni slučajni integral Itoa i sam slučajni proces Itoa.

Iz $\mathcal{F}_t$-merljivosti slučajnog procesa $X(t,\omega)$ sledi da za svako s, $t_0 \leq s \leq t \leq T$, važi

$$X(t,\omega) = X(s,\omega) + \int_s^t f(u,\omega)du + \int_s^t G(u,\omega)dW(u,\omega).$$

Iz zadnje relacije se formalno dolazi do pojma slučajnog diferencijala.

Definicija 2.5. Slučajni proces Itoa $X = (X_t, \mathcal{F}_t)$, $t \in [t_0,T]$, ima slučajni diferencijal

$$dX(t,\omega) = f(t,\omega)dt + G(t,\omega)dW(t,\omega),$$

ili kraće,

$$dX(t) = f(t)dt + G(t)dW(t).$$

Za efektivno rešavanje slučajnih diferencijalnih jednačina Itoa, ma kako da je klasa rešivih jednačina mala, neophodno je znati formulu Itoa za diferenciranje složene funkcije. Zato pretpostavimo da slučajni proces X ima slučajni diferencijal u smislu definicije 2.5, odnosno da njegove koordinate imaju slučajne diferencijale

$$dX_i(t) = f_i(t)dt + \sum_{j=1}^{m} G_{ij}(t)dW_j(t), \quad i=1,2,\ldots,n.$$

Teorema 2.2. (Formula Itoa) Ako je funkcija $F(t,x) = F(t,x_1,x_2,\ldots,x_n)$ definisana na $[t_0,T] \times R^n$ sa vrednostima u R neprekidna i ako ima neprekidne parcijalne izvode F'_t, F'_{x_i}, $F''_{x_i x_j}$, $i,j=1,2,\ldots,n$, tada slučajni proces

$F(t,X(t)) = F(t,X_1(t),\dots,X_n(t))$ ima skoro izvesno slučajni diferencijal u odnosu na isti Wienerov proces

$$dF(t,X(t)) = \Big[F'_t(t,X(t)) + \sum_{i=1}^{n} F'_{x_i}(t,X(t))\cdot f_i(t) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} F''_{x_i x_j}(t,X(t))\cdot\sum_{k=1}^{m} G_{ik}(t)\,G_{jk}(t)\Big]dt + \sum_{i=1}^{n} F'_{x_i}(t,X(t))\cdot\sum_{j=1}^{m} G_{ij}(t)dW_j(t).$$

(Dokaz u [Friedman, 1975.] i [Arnold, 1973.] .)

Formula Itoa se može zapisati u integralnom obliku kao

$$F(t,X(t)) - F(t_0,X(t_0)) = \int_{t_0}^{t}[\cdots]ds + \sum_{i=1}^{n}\int_{t_0}^{t}[\cdots]dW_j(s),$$

gde znak jednakosti označava stohastičku ekvivalentnost slučajnih procesa na levoj i na desnoj strani. Ovo važi i ako je gornja granica integrala slučajna promenljiva τ, $t_0 \leq \tau \leq T$.

Slučajna diferencijalna jednačina Itoa

Neka je $f(t,x)$ realna funkcija definisana i merljiva na $[t_0,T]\times R^n$ sa vrednostima u R^n, a $G(t,x)$ realna matrična funkcija definisana i merljiva na $[t_0,T]\times R^n$ sa vrednostima u $R^n \otimes R^m$. Neka su na prostoru verovatnoća $(\Omega,\mathcal{F},P)$ zadati m-dimenzioni Wienerov proces $W = (W_t, \mathcal{F}_t)$, $t\in[t_0,T]$, i n-dimenziona slučajna promenljiva $X(t_0) = \eta$, tako da oni generišu familiju $(\mathcal{F}_t, t\in[t_0,T])$, to jest, $\mathcal{F}_t = \sigma\{\eta, W(s), s\leq t\}$

kompletirana svim dogadjajima P-mere nula iz $\mathcal{F}$. Pošto je $\mathcal{F}_t$ nezavisno od $\overline{\mathcal{F}}_t^W$, $\overline{\mathcal{F}}_t^W = \sigma\{W(s) - W(t), t \leq s\}$, to su za $t = t_0$, slučajna promenljiva η i Wienerov proces $W(t) - W(t_0)$ nezavisni.

Definicija 2.6. Ako slučajne funkcije f i G, Wienerov proces W i slučajna promenljiva η ispunjavaju prethodne uslove, jednačina oblika

$$
\begin{aligned}
(2.1) \qquad & dX(t) = f(t,X(t))dt + G(t,X(t))dW(t), \\
& X(t_0) = \eta, \quad t \in [t_0,T],
\end{aligned}
$$

naziva se slučajna diferencijalna jednačina Itoa za početnu vrednost $X(t_0) = \eta$.

U buduće ćemo termin "slučajna diferencijalna jednačina Itoa" zameniti skraćenicom SDJ.

Definicija 2.7. Slučajni proces $X = (X(t), t \in [t_0,T])$ je strogo rešenje SDJ (2.1) na intervalu $[t_0,T]$, ako :

(i) $X(t)$ je $\mathcal{F}_t$-merljivo za svako $t \in [t_0,T]$ i ima skoro izvesno neprekidnu u realizaciji modifikaciju ;

(ii) $\mathcal{F}_t$-merljive slučajne funkcije $\overline{f}(t,\omega) = f(t,X(t,\omega))$ i $\overline{G}(t,\omega) = G(t,X(t,\omega))$ su iz $M_1[t_0,T]_{n\times 1}$ i $M_2[t_0,T]_{n\times m}$ respektivno, to jest,

$$\int_{t_0}^{T} \|\overline{f}(t,\omega)\| dt < \infty \quad \text{i} \quad \int_{t_0}^{T} \|G(t,\omega)\|^2 dt < \infty \quad \text{skoro izvesno ;}$$

(iii) SDJ (2.1) je ispunjena za svako t, $t \in [t_0,T]$ skoro izvesno.

U zadnjim integralima istom oznakom su označene norme u različitim prostorima. Naglasimo da će se to činiti i kasnije bez posebnog isticanja.

Ako ne postoji strogo rešenje SDJ (2.1), razmatra se egzistencija druge vrste rešenja, takozvanog slabog rešenja. Značajni rezultati o odnosu slabog i strogog rešenja SDJ (2.1), a posebno neke osobine strogog rešenja, dati su u radovima [Zvonkin, Krylov, 1974.], [Fedorenko, 1984.] i [Fedorenko, 1986.] . Nas će u buduće interesovati samo strogo rešenje, koje ćemo kreće zvati "rešenje".

SDJ (2.1) se može zapisati u integralnom obliku kao

$$X(t) = X(t_0) + \int_{t_0}^{t} f(s,X(s))ds + \int_{t_0}^{t} G(s,X(s))dW(s). \tag{2.2}$$

Rešenja SDJ (2.1) i (2.2) su stohastički ekvivalentna.

Sledeća teorema daje dovoljne uslove za egzistenciju i jedinstvenost strogog rešenja SDJ (2.1), odnosno (2.2).

<u>Teorema 2.3.</u> (Teorema egzistencije i jedinstvenosti rešenja) Neka važe sve pretpostavke iz definicije 2.6 za funkcije f i G, Wienerov proces W i slučajnu promenljivu η. Ako postoji konstanta $K > 0$, tako da je :

(i) za svako $t \in [t_0, T]$ i $x, y \in R^n$,

$$\|f(t,x) - f(t,y)\| + \|G(t,x) - G(t,y)\| \leq K \cdot \|x - y\|$$

(uniformni Lipschitzov uslov) ;

(ii) za svako $t \in [t_0, T]$ i $x \in R^n$,

$$\|f(t,x)\|^2 + \|G(t,x)\|^2 \leq K^2 \cdot (1 + \|x\|^2)$$

(uslov ograničenog rasta) ;

tada na intervalu $[t_0, T]$ postoji jedinstveno rešenje SDJ (2.1) kao skoro izvesno neprekidan u realizaciji n-dimenzioni slučajni proces koji ispunjava uslov $X(t_0) = \eta$. Ako je $E\{\|\eta\|^2\}<\infty$, tada je $E\{\sup_{t\in[t_0,T]}\|X(t)\|^2\} < \infty$.

(Dokaz u [Arnold, 1973.], [Wong, 1971.], [Gihman, Skorohod, 1968.].)

Jedinstvenost rešenja treba shvatiti kao skoro izvesnu jedinstvenost. Dakle, za dva stohastički neprekidna rešenja $X_1(t)$ i $X_2(t)$ sa istom početnom vrednošću, važi

$$P\{\sup_{t\in[t_0,T]}\|X_1(t) - X_2(t)\| > 0\} = 0.$$

Pod uslovima teoreme 2.3, može se dokazati da je rešenje SDJ (2.1) proces Markova (dokaz u [Friedman, 1975.], [Wong, 1971.]).

Napomenimo da je u osnovi dokaza egzistencije rešenja metod sukcesivnih aproksimacija Picard-Lindelöfa. Za dokaz jedinstvenosti rešenja koristi se Gronwall-Bellmanova lema i, pošto će nam biti potrebna kasnije, navešćemo je ovde bez dokaza.

<u>Lema 2.1.</u> (Gronwall-Bellmanova lema) Ako nenegativna integrabilna funkcija $u(t)$ definisana za $t\in[t_0,T]$ zadovoljava nejednačinu

$$u(t) \leq v(t) + c\int_{t_0}^{t} u(s)ds, \qquad c = \text{const} > 0,$$

a $v(t)$ je integrabilna funkcija na $[t_0,T]$, tada je

$$u(t) \leq v(t) + c\int_{t_0}^{t} e^{c(t-s)}v(s)ds.$$

(Dokaz u [Filatov, 1971.] i [Lipcer, Širjaev, 1974.].)

Takodje će se koristiti sledeća teorema.

Teorema 2.4. (Teorema o lokalnoj jedinstvenosti rešenja) Neka funkcije $f_i(t,x)$ i $G_i(t,x)$, $i=1,2$, ispunjavaju uslove (i) i (ii) iz teoreme 2.3 i neka za svaku vrednost $N > 0$ važi $f_1(t,x) = f_2(t,x)$, $G_1(t,x) = G_2(t,x)$ za $\|x\| < N$ i $t \in [t_0,T]$. Neka su $(X_i(t), t \in [t_0,T])$, $i=1,2$, rešenja SDJ

$$dX_i(t) = f_i(t,X_i(t))dt + G_i(t,X_i(t))dW(t),$$

$$X_i(t_0) = \eta, \quad i=1,2,$$

i $E\{\|\eta\|^2\} < \infty$. Označimo sa

$$\tau_i = \begin{cases} \inf\{t : \|X_i(t)\| > N\} \\ T \quad \text{ako je } \|X_i(t)\| \leq N \text{ za svako } t \in [t_0,T] \end{cases},$$

$i=1,2.$

Tada za vremena Markova τ_1 i τ_2 važi

$$P\{\tau_1 = \tau_2\} = 1 \quad \text{i} \quad P\{\sup_{s \in [t,\tau_1]} \|X_1(s) - X_2(s)\| = 0\} = 1.$$

(Dokaz u [Friedman, 1975.] i [Gihman, Skorohod, 1968.] .)

Teorema 2.5. Ako je $(X(t), t \in [t_0,T])$ rešenje SDJ (2.1) i ako je vreme Markova

$$\tau^N = \begin{cases} \inf\{t : \|X(t)\| > N\} \\ T \quad \text{ako je } \|X(t)\| \leq N \text{ za svako } t \in [t_0,T] \end{cases},$$

tada $\tau^N \to T$ skoro izvesno kad $N \to \infty$.

(Dokaz u [Gihman, Skorohod, 1982.] .)

Teorema egzistencije i jedinstvenosti 2.3, kao i teoreme 2.4 i 2.5, važe i kada su f i G slučajne funkcije saglasne sa familijom $(\mathcal{F}_t, t \in [t_o,T])$. Tada uslovi (i) i (ii) iz teoreme 2.3. moraju biti zadovoljeni skoro izvesno.

Linearna slučajna diferencijalna jednačina Itoa

Linearna SDJ Itoa je tip efektivno rešive SDJ, u smislu da se njeno rešenje može izraziti pomoću Lesbegueovih i Itoovih integrala. Ova SDJ po n-dimenzionom slučajnom procesu $(X(t), t \in [t_o,T])$ je oblika

$$(2.3) \quad dX(t) = [A(t)X(t) + a(t)]dt + \sum_{i=1}^{m}[B_i(t)X(t) + b_i(t)]dW_i(t),$$
$$X(t_o) = \eta, \quad t \in [t_o,T],$$

gde su $A(t)$ i $B_i(t)$, $i=1,2,\ldots,m$, realne matrične funkcije definisane na $[t_o,T]$ sa vrednostima u $R^n \otimes R^n$, $a(t)$ i $b_i(t)$, $i=1,2,\ldots,m$, su realne funkcije definisane na $[t_o,T]$ sa vrednostima u R^n, $W = (W_t, \mathcal{F}_t)$, $t \in [t_o,T]$ je m-dimenzioni Wienerov proces, a $X(t_o) = \eta$ je n-dimenziona slučajna promenljiva nezavisna od $W(t) - W(t_o)$ za svako $t \in [t_o,T]$. Ako je $a(t) \equiv o$, $b_i(t) \equiv o$, $i=1,2,\ldots,m$, radi se o odgovarajućoj linearnoj homogenoj SDJ.

Dovoljni uslovi da SDJ (2.3) ima jedinstveno rešenje na intervalu $[t_o,T]$, su da funkcije A, a, B_i i b_i, $i=1,2,\ldots,m$, budu merljive i ograničene na tom intervalu.

<u>Teorema 2.6.</u> Linearna SDJ (2.3) ima na intervalu $[t_o,T]$ rešenje oblika

$$X(t) = \Phi(t)\Big\{\eta + \int_{t_o}^{t}\Phi^{-1}(s)[a(s) - \sum_{i=1}^{m} B_i(s)b_i(s)]ds +$$
$$+ \sum_{i=1}^{m}\int_{t_o}^{t}\Phi^{-1}(s)b_i(s)dW_i(s)\Big\} \quad ,$$

gde je $(n\times n)$-dimenziona matrica $\phi(t)$ rešenje odgovarajuće homogene SDJ

$$d\phi(t) = A(t)\phi(t)dt + \sum_{i=1}^{m} B_i(t)\phi(t)dW(t)$$

za početnu vrednost $\phi(t_0) = I$ (dokaz u [Arnold, 1973.]).

Specijalno, ako je $n=m=1$, dobija se

$$d\phi(t) = A(t)\phi(t)dt + B(t)\phi(t)dW(t), \quad \phi(t_0) = 1.$$

Iz formule Itoa sledi da je

$$\phi^{-1}(t) = e^{-\left\{\int_{t_0}^{t}\left[A(s) - \frac{B^2(s)}{2}\right]ds + \int_{t_0}^{t} B(s)dW(s)\right\}},$$

pa je rešenje SDJ (2.3)

$$X(t) = \phi(t)\left\{\eta + \int_{t_0}^{t}\phi^{-1}(s)[a(s) - B(s)b(s)]ds + \int_{t_0}^{t}\phi^{-1}(s)b(s)dW(s)\right\}, \quad t\in[t_0,T]. \tag{2.4}$$

U daljem radu biće nam potrebno rešenje linearne SDJ za $n=m=1$ sa slučajnim koeficijentima. Ova jednačina ima rešenje oblika (2.4), ako su slučajne funkcije $A(t,\omega)$, $a(t,\omega)$, $B(t,\omega)$ i $b(t,\omega)$ predskazljivi slučajni procesi. Ako je $T=\infty$, zahteva se još i skoro izvesna ograničenost ovih slučajnih procesa (dokaz u [Gihman, Skorohod, 1982.]).

3. NEKE ITERATIVNE METODE ZA PRIBLIŽNO REŠAVANJE SLUČAJNIH DIFERENCIJALNIH JEDNAČINA ITOA

Opšti Z-algoritam

U radu [Zuber, 1966.] opisana je jedna analitička metoda za dobijanje približnog rešenja obične diferencijalne jednačine prvog reda $y' = f(x,y)$, $y(x_o) = y_o$. Suština te metode je u sledećem. Posmatraju se funkcije $f(x,y)$ i $f_n(x,y)$, $n=o,1,\dots$, definisane i neprekidne u pravougaoniku $\Pi = \{(x,y) : |x-x_o| < a, |y-y_o| < b\}$, koje ispunjavaju uniformni Lipschitzov uslov u Π. Neka je $y_{n+1}(x)$ rešenje diferencijalne jednačine $y_{n+1} = f_n(x,y_{n+1})$, $y_{n+1}(x_o) = y_o$, na intervalu $|x-x_o|<a$. Ako je

$$\sum_{n=o}^{\infty} \sup_{x:\,|x-x_o|<a} |f_n(x,y_n(x)) - f(x,y_n(x))| < \infty,$$

onda u okolini tačke x, $|x-x_o| \leq h < a$, niz rešenja $\{ y_n(x), n=o,1,\dots \}$ uniformno konvergira kad $n \to \infty$ rešenju polazne diferencijalne jednačine. Ako je izbor funkcija $f_n(x,y)$, $n=o,1,\dots$, dovoljno dobar u smislu efektivne rešivosti diferencijalnih jednačina $y_{n+1} = f_n(x,y_{n+1})$, $y_{n+1}(x_o) = y_o$, $n=o,1,\dots$, onda se može odrediti približno rešenje polazne diferencijalne jednačine sa proizvoljnom tačnošću.

Ova iterativna metoda predstavlja na neki način opšti algoritam (u radu [Zuber, 1966.] nazvan Z-algoritam) za približno analitičko rešavanje običnih diferencijalnih jednačina prvog reda, jer su mnoge poznate iterativne metode njeni posebni slučajevi, kao na primer, Picardova metoda sukcesivnih aproksimacija, metoda Newton-Kantorovića, Čaplyginove metode sečica i tangenata, kao i neke interpolacione metode.

Cilj ovog rada je da se pokaže da pod odredjenim dovoljnim uslovima postoji analogna iterativna metoda za približno analitičko rešavanje SDJ Itoa. U tom smislu se formira niz SDJ, čija stroga rešenja skoro izvesno konvergiraju strogom rešenju polazne SDJ. Posebno se razmatraju neki tipovi aproksimacija polazne SDJ linearnim SDJ, čime se daje mogućnost efektivnog nalaženja približnog rešenja.

Pretpostavimo da je $(\Omega,\mathcal{F},P)$ kompletan prostor verovatnoća na kome su definisane sve slučajne promenljive i svi slučajni procesi koje razmatramo i koji uzimaju vrednosti u R.

Neka je $W = (W_t, \mathcal{F}_t)$, $t \geq o$, Wienerov proces i neka je η slučajna promenljiva nezavisna od W, takva da je $E\{|\eta|^2\}<\infty$. Familija σ-podalgebri $(\mathcal{F}_t, t\geq o)$ σ-algebre $\mathcal{F}$ generisana je sa η i W na način opisan ranije.

U skladu sa klasičnom teorijom SDJ, pretpostavimo da funkcije $a(t,x)$, $b(t,x)$, $a_n(t,x)$ i $b_n(t,x)$, $n=1,2,\ldots$, definisane na $[o,T]\times R$, $T=const>o$, sa vrednostima u R, merljive u odnosu na σ-polje $\mathcal{B}_{[0,T]}\otimes\mathcal{B}$, ispunjavaju uslove teoreme egzistencije i jedinstvenosti rešenja (teorema 2.3.). Dakle, postoji konstanta $L>o$, tako da za sve (t,x) i (t,y) iz $[o,T]\times R$, važi

$$
(3.1) \qquad \begin{aligned}
&|a(t,x) - a(t,y)| \leqslant L|x - y|,\\
&|b(t,x) - b(t,y)| \leqslant L|x - y|,\\
&|a_n(t,x) - a_n(t,y)| \leqslant L|x-y|,\\
&|b_n(t,x) - b_n(t,y)| \leqslant L|x - y|, \quad n=1,2,\dots,
\end{aligned}
$$

i

$$
(3.2) \qquad \begin{aligned}
&a^2(t,x) \leqslant L^2(1 + x^2), \qquad && b^2(t,x) \leqslant L^2(1 + x^2),\\
&a_n^2(t,x) \leqslant L^2(1 + x^2), \qquad && b_n^2(t,x) \leqslant L^2(1 + x^2), \quad n=1,2,\dots
\end{aligned}
$$

Par funkcija (a,b) i Wienerov proces W odredjuju slučajni proces $X = (X(t), t \in [o,T])$ kao strogo rešenje SDJ

$$
(3.3) \qquad dX(t) = a(t,X(t))dt + b(t,X(t))dW(t), \qquad X(o) = \eta .
$$

Formiraćemo sada niz slučajnih procesa $\{X_n, n=1,2,\dots\} = \{(X_n(t), t \in [o,T]), n=1,2,\dots\}$ na sledeći način:

- $X_1 = (X_1(t), t \in [o,T])$ je proizvoljan slučajni proces sa osobinom $E\{\sup_{t\in[o,T]} |X_1(t)|^2\} < \infty$;
- $X_{n+1} = (X_{n+1}(t), t \in [o,T])$, $n=1,2,\dots$, je strogo rešenje SDJ

$$
(3.4) \qquad \begin{aligned}
&dX_{n+1}(t) = a_n(t,X_{n+1}(t))dt + b_n(t,X_{n+1}(t))dW(t),\\
&X_{n+1}(o) = \eta .
\end{aligned}
$$

Osnovni problem je postaviti dovoljne uslove za skoro izvesnu konvergenciju niza rešenja $\{X_n, n=1,2,\dots\}$ SDJ (3.4) ka rešenju X SDJ (3.3) kad $n \to \infty$. U tom smislu treba zahtevati izvesnu bliskost para funkcija (a,b) sa parovima funkcija (a_n,b_n), $n=1,2,\dots$ Po analogiji sa ranije opisanim uslovom bliskosti funkcije f sa nizom funkcija f_n, $n=1,2,\dots$, za obične diferencijalne jednačine, pretpostavimo da funkcije a, b, a_n i b_n, $n=1,2,\dots$, ispunjavaju uslov

$$(3.5) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \sup_{(t,x)\in \Pi} \left\{ |a(t,x) - a_n(t,x)| + |b(t,x) - b_n(t,x)| \right\} < \infty ,$$

gde je $\Pi = \{(t,x) : t\in [0,T], x\in R\}$.

Jasno, odavde sledi da $a_n(t,x) \to a(t,x)$, $b_n(t,x) \to b(t,x)$ kad $n \to \infty$, uniformno po t i x. Kasnije ćemo pokazati da se u nekim konkretnim iterativnim postupcima ovaj uslov može modifikovati i delimično oslabiti. Napomenimo da će uslov (3.5) imati ključnu ulogu u dokazu sledeće teoreme.

<u>Teorema 3.1.</u> Ako funkcije a, b, a_n i b_n, $n=1,2,\dots$, i slučajna promenljiva η ispunjavaju uslove teoreme egzistencije i jedinstvenosti rešenja (teorema 2.3.) i ako je zadovoljen uslov (3.5), onda niz slučajnih procesa $\{X_n, n=1,2,\dots\}$ konvergira skoro izvesno, uniformno po t, $t\in [0,T]$, slučajnom procesu X kad $n \to \infty$.

<u>Dokaz.</u> Po teoremi 2.3., sva rešenja X i X_n, $n=1,2,\dots$, jednačina (3.3) i (3.4) respektivno, su skoro izvesno neprekidni u realizaciji slučajni procesi, saglasni sa familijom $(\mathcal{F}_t, t\in [0,T])$, i takvi da su očekivanja $E\{\sup_t |X(t)|^2\}$ i $E\{\sup_t |X_n(t)|^2\}$, $n=2,3,\dots$, uniformno ograničena.

Označimo sa

$$(3.6) \quad \varepsilon_n = E\Big\{\sup_t \big[|a(t,X_n(t)) - a_n(t,X_n(t))|^2 + |b(t,X_n(t)) - b_n(t,X_n(t))|^2 \big]\Big\} \quad , n=1.2,\dots$$

Oduzimanjem jednačina (3.3) i (3.4) i dodavanjem nekih sabiraka, dobija se

$$
\begin{aligned}
X(t) - X_{n+1}(t) &= \int_0^t [a(s,X(s)) - a(s,X_n(s))]ds + \int_0^t [a(s,X_n(s)) - \\
&- a_n(s,X_n(s))]ds + \int_0^t [a_n(s,X_n(s)) - a_n(s,X(s))]ds + \\
(3.7) \qquad &+ \int_0^t [a_n(s,X(s)) - a_n(s,X_{n+1}(s))]ds + \int_0^t [b(s,X(s)) - \\
&- b(s,X_n(s))]dW(s) + \int_0^t [b(s,X_n(s)) - b_n(s,X_n(s))]dW(s) + \\
&+ \int_0^t [b_n(s,X_n(s)) - b_n(s,X(s))]dW(s) + \int_0^t [b_n(s,X(s)) - \\
&- b_n(s,X_{n+1}(s))]dW(s).
\end{aligned}
$$

Sada treba oceniti svaki od ovih integrala. Kako neki od njih imaju proporcionalne ocene, ocenićemo jedan Lesbegueov i jedan Itoov integral. Koristeći (3.6) i Cauchy-Schwartzovu nejednakost za integrale, dobija se

$$
\begin{aligned}
&E\{[\int_0^t |a(s,X_n(s)) - a_n(s,X_n(s))|ds\ ]^2\} \leq \\
&\leq t \int_0^t E\{|a(s,X_n(s)) - a_n(s,X_n(s))|^2\}ds \leq \\
&\leq T \int_0^t E\{\sup_t |a(s,X_n(s)) - a_n(s,X_n(s))|^2\}ds \leq T\varepsilon_n t\ .
\end{aligned}
$$

Iz osobine neodredjenog slučajnog integrala Itoa opisane teoremom 2.1.- (vi) i iz (3.6), sledi ocena

$$
\begin{aligned}
&E\{\int_0^t [b(s,X_n(s)) - b_n(s,X_n(s))\ dW(s)]^2\} = \\
&= \int_0^t E\{|b(s,X_n(s)) - b_n(s,X_n(s))|^2\}ds \leq \varepsilon_n t.
\end{aligned}
$$

Iz nejednakosti $(r_1+r_2+\ldots+r_n)^2 \leq n(r_1^2+r_2^2+\ldots+r_n^2)$, $r_1,r_2,\ldots,r_n \in R$, $n \in N$, uslova (3.1) i zadnjih ocena, sledi

$$E\{|X(t) - X_{n+1}(t)|^2\} \leq 2\cdot 8\cdot(T+1)L^2 \int_0^t E\{|X(s) - X_n(s)|^2\}ds +$$

$$+ 8\cdot(T+1)L^2 \int_0^t E\{|X(s) - X_{n+1}(s)|^2\}ds + 8\cdot(T+1)\varepsilon_n t.$$

Neka je $8\cdot(T+1)L^2 = \alpha$, $8\cdot(T+1) = \beta$. Ako na zadnju nejednakost primenimo Gronwall-Bellmanovu lemu (lema 2.1.), imamo

$$E\{|X(t) - X_{n+1}(t)|^2\} \leq 2\alpha \int_0^t E\{|X(s) - X_n(s)|^2\}ds + \beta\varepsilon_n t +$$

(3.8) $$+ \alpha \int_0^t [2\alpha \int_0^s E\{|X(u) - X_n(u)|^2\}du + \beta\varepsilon_n s]\cdot e^{\alpha(t-s)}ds.$$

Iz zadnje nejednakosti odredićemo neku gornju granicu za $E\{|X(t) - X_{n+1}(t)|^2\}$, $n=1,2,\ldots$, matematičkom indukcijom. Kako je po pretpostavci $E\{\sup_t |X_1(t)|^2\} < \infty$ i $E\{\sup_t |X(t)|^2\} < \infty$, to je $\sup_t E\{|X(t) - X_1(t)|^2\} \leq 2E\{\sup_t [|X(t)|^2 + |X_1(t)|^2]\}$. Iz (3.8) se dobijaju sledeće ocene sukcesivno

$$E\{|X(t) - X_2(t)|^2\} < (2\alpha c + \beta\varepsilon_1)\frac{e^{\alpha t}-1}{\alpha},$$

$$E\{|X(t) - X_3(t)|^2\} \leq 2(2\alpha c + \beta\varepsilon_1)\cdot[te^{\alpha t} - \frac{e^{\alpha t}-1}{\alpha}] +$$

$$+ \beta\varepsilon_2 \frac{e^{\alpha t}-1}{\alpha}.$$

Pošto je $e^{\alpha t}-1 > \alpha t$ za svako $\alpha > 0$, tada

$$E\{|X(t) - X_3(t)|^2\} < [(2\alpha c + \beta\varepsilon_1)2\alpha + \beta\varepsilon_2]\frac{e^{\alpha t}-1}{\alpha}.$$

Pretpostavimo da $E\{|X(t) - X_{n+1}(t)|^2\}$ ima gornju granicu oblika

$$
\begin{aligned}
&E\{|X(t) - X_{n+1}(t)|^2\} \leq \\
(3.9)\qquad &\leq \left[2\alpha c\frac{(2\alpha t)^{n-1}}{(n-1)!} + \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k \frac{(2\alpha t)^{n-k}}{(n-k)!}\right]\cdot\frac{e^{\alpha t}-1}{\alpha} = P_{n-1}(2\alpha t)\frac{e^{\alpha t}-1}{\alpha},
\end{aligned}
$$

gde je P_{n-1} polinom stepena n-1. Pokazaćemo da je gornja granica za $E\{|X(t) - X_{n+2}(t)|^2\}$ istog oblika. Iz (3.8) sledi

$$
\begin{aligned}
&E\{|X(t) - X_{n+2}(t)|^2\} < 2\alpha\int_0^t P_{n-1}(2\alpha s)\frac{e^{\alpha s}-1}{\alpha} + \beta\varepsilon_{n+1}t + \\
(3.10)\qquad &+ \alpha\int_0^t \left[2\alpha\int_0^s P_{n-1}(2\alpha u)\frac{e^{\alpha u}-1}{\alpha}du + \beta\varepsilon_{n+1}s\right]\cdot e^{\alpha(t-s)}ds = \\
&= 2e^{\alpha t}\int_0^t P_{n-1}(2\alpha s)(1 - e^{-\alpha s})ds + \beta\varepsilon_{n+1}\frac{e^{\alpha t}-1}{\alpha} .
\end{aligned}
$$

Kako je $\frac{1}{k!}\int_0^t x^k e^{-x}dx = 1 - e^{-t}\left[\frac{t^k}{k!} + \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} + \dots + t + 1\right]$ i

$\frac{t^k}{k!} + \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} + \dots + t + 1 - e^t < -\frac{t^{k+1}}{(k+1)!}$ za svako $k=0,1,\dots$ i svako t, tada za koeficijente B_{n-k} polinoma $P_{n-1}(2\alpha t)$ važi

$$
\begin{aligned}
B_{n-k} &= 2e^{\alpha t}\int_0^t \frac{(2\alpha s)^{n-k}}{(n-k)!}(1 - e^{-\alpha s})ds = \\
&= \frac{2^{n-k+1}}{\alpha}\cdot\left[e^{\alpha t}\frac{(\alpha t)^{n-k+1}}{(n-k+1)!} + \frac{(\alpha t)^{n-k}}{(n-k)!} + \dots + \frac{\alpha t}{1!} + 1 - e^{\alpha t}\right] < \\
&< \frac{(2\alpha t)^{n-k+1}}{(n-k+1)!}\cdot\frac{e^{\alpha t}-1}{\alpha}, \quad k=1,2,\dots,n.
\end{aligned}
$$

Iz (3.10) i zadnje nejednakosti imamo

$$E\{|X(t) - X_{n+2}(t)|^2\} < \Big[(2\alpha c + \beta\varepsilon_1)\frac{(2\alpha t)^n}{n!} + \beta\varepsilon_2\frac{(2\alpha t)^{n-1}}{(n-1)!} +$$

$$+\dots+ \beta\varepsilon_n\frac{2\alpha t}{1!} + \beta\varepsilon_{n+1}\Big]\ \frac{e^{\alpha t}-1}{\alpha} = P_n(2\alpha t)\frac{e^{\alpha t}-1}{\alpha} \quad ,$$

čime je dokazano da je (3.9) gornja granica za $E\{|X(t) - X_{n+1}(t)|^2\}$ za svako $n=1,2,\dots$ Iz (3.7) se dobija

$$\sup_{0\leq t\leq T}|X(t) - X_{n+1}(t)| \leq \int_0^T |a(s,X(s)) - a_n(s,X_{n+1}(s))|ds +$$

$$+ \sup_{0\leq t\leq T}\Big|\int_0^t [b(s,X(s)) - b_n(s,X_{n+1}(s))]dW(s)\Big| .$$

Primenimo na ovaj izraz Cauchy-Schwartzovu nejednakost, osobinu (viii) iz teoreme 2.1. i majoraciju (3.10). Tako je

$$E\{\sup_{0\leq t\leq T}|X(t) - X_{n+1}(t)|^2\} \leq 8(T+4)L^2\Big[2\int_0^T E\{|X(t) - X_n(t)|^2\}dt +$$

$$+ \int_0^T E\{|X(t) - X_{n+1}(t)|^2\}dt\Big] + 8T(T+4)\varepsilon_n <$$

(3.11)

$$< c_1P_{n-2}(2\alpha T) + c_2P_{n-1}(2\alpha T) + c_3\varepsilon_n \ , \quad n=1,2,\dots,$$

gde su c_1, c_2 i c_3 odgovarajuće konstante. Ispitaćemo konvergenciju reda $\sum_{n=1}^{\infty} P\{\sup_{0\leq t\leq T}|X(t) - X_{n+1}(t)| \geq \varepsilon\}$, gde je ε proizvoljan pozitivan broj. Primenom Čebiševljeve nejednakosti na sabirke ovog reda dobijamo

$$\sum_{n=1}^{\infty} P\{\sup_{0\leq t\leq T}|X(t) - X_{n+1}(t)| \geq \varepsilon\} \leq$$

(3.12)

$$\frac{1}{\varepsilon^2}\sum_{n=1}^{\infty} E\{\sup_{0\leq t\leq T}|X(t) - X_{n+1}(t)|^2\} .$$

Iz uslova (3.5) sledi da red $\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n$ konvergira, pa je

$$\sum_{n=1}^{\infty} P_{n-1}(2\alpha T) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[2\alpha c \frac{(2\alpha T)^{n-1}}{(n-1)!} + \beta \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k \frac{(2\alpha T)^{n-k}}{(n-k)!} \right] <$$

$$< \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2\alpha T)^{n-1}}{(n-1)!} \cdot \left[2\alpha c + \beta \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n \right] < \infty .$$

Iz (3.11) i (3.12) je jasno da red $\sum_{n=1}^{\infty} P\{ \sup_{0 \leq t \leq T} |X(t) - X_{n+1}(t)| \geq \varepsilon \}$ konvergira, pa po Borel-Cantellijevoj lemi i Weierstrassovoj teoremi uniformne konvergencije sledi da niz rešenja $\{(X_n(t), t \in [0,T], n=1,2,\ldots\}$ SDJ (3.4) skoro izvesno konvergira, uniformno po t, $t \in [0,T]$, rešenju $(X(t), t \in [0,T])$ SDJ (3.3) kad $n \to \infty$. Ovim je teorema u potpunosti dokazana.

QED

Primedba 3.1. Uslovi pod kojima je teorema 3.1. iskazana mogli bi se oslabiti, tako da a, b, a_n i b_n, $n=1,2,\ldots,$ budu slučajne funkcije i da uslovi (3.1), (3.2) i (3.3) važe skoro izvesno. S druge strane, uslov (3.5) bi u iterativnom postupku mogao biti zamenjen uslovom

$$\sum_{n=1}^{\infty} E\{ \sup_{0 \leq t \leq T} [|a(t, X_n(t)) - a_n(t, X_n(t))|^2 + \tag{3.13}$$

$$+ |b(t, X_n(t)) - b_n(t, X_n(t))|^2] \} < \infty ,$$

gde je slučajni proces $(X_n(t), t \in [0,T])$ odredjen parom funkcija (a_{n-1},b_{n-1}) i Wienerovim procesom W.

Teorema 3.1. daje ideju o konstrukciji niza sukcesivnih aproksimacija koje skoro izvesno konvergiraju rešenju SDJ (3.3). Tako se može za proizvoljno $\varepsilon>0$ odrediti ε-aproksimacija rešenja SDJ (3.3), to jest, može se u iterativnom postupku ići do one aproksimacije $X_n(t)$, gde je $n = n(\varepsilon)$, za koju je

$$P\{\sup_{0\le t\le T}|X(t) - X_n(t)| < \varepsilon\} = 1 .$$

Efektivno, ε-aproksimaciju ćemo odrediti na sledeći način. Za prvu aproksimaciju uzećemo proizvoljan slučajni proces $(X_1(t),t\in[0,T])$ za koji je $X_1(0)=\eta$ i $E\{\sup_{0\le t\le T}|X_1(t)|^2\}<\infty$. Zatim ćemo izabrati par funkcija $a_1(t,x)$ i $b_1(t,x)$, tako da one ispunjavaju uslove (3.1) i (3.2) i tako da

$$\sup_{0\le t\le T}\ \sup_{x\in R}\left[\,|a(t,x) - a_1(t,x)|+|b(t,x) - b_1(t,x)|\,\right]\le c_1<\infty.$$

Par funkcija (a_1,b_1) i Wienerov proces W odredjuju slučajni proces $(X_2(t),t\in[0,T])$ kao rešenje SDJ

$$dX_2(t) = a_1(t,X_2(t))dt + b_1(t,X_2(t))dW(t), \quad X_2(0) = \eta .$$

Po indukciji, ako je poznata $(n-1)$-aproksimacija $(X_{n-1}(t),t\in[0,T])$, izabraćemo par funkcija $a_{n-1}(t,x)$ i $b_{n-1}(t,x)$, tako da su ispunjeni uslovi (3.1) i (3.2) i tako da je

$$\sup_{0\le t\le T}\ \sup_{x\in R}\left[\,|a(t,x) - a_{n-1}(t,x)|+|b(t,x) - b_{n-1}(t,x)|\,\right]\le$$

$$\leq c_{n-1} < \infty ,$$

gde je c_{n-1} (n-1)-član nekog konvergentnog reda $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$.

Par funkcija (a_{n-1}, b_{n-1}) i Wienerov proces W odredjuju slučajni proces $(X_n(t), t \in [o,T])$ kao rešenje SDJ

$$dX_n(t) = a_{n-1}(t, X_n(t))dt + b_{n-1}(t, X_n(t))dW(t), \quad X_n(0) = \eta ,$$

pa je time u potpunosti opisan algoritam za odredjivanje bilo koje aproksimacije.

Po analogiji sa pojmovima iz rada [Zuber, 1966], ovaj iterativni postupak zvaćemo <u>Z-algoritam</u> . Iz istog razloga, niz realnih ili slučajnih funkcija

$$\{(a_n(t,x), b_n(t,x), \ n=1,2,\dots\}$$

je <u>niz za odredjivanje Z-algoritma</u>, ili kraće, <u>odredjujući niz</u>. Jasno je da brzina konvergencije Z-algoritma zavisi od prve aproksimacije i izbora odredjujućeg niza. Z-algoritam se može efektivno koristiti samo ako je odredjujući niz tako dobro izabran da se SDJ (3.4) mogu efektivno rešiti. Kako je klasa rešivih SDJ veoma ograničena, nije uvek jednostavno izabrati odredjujući niz na pogodan način. Činjenica da se rešenje linearne SDJ može izraziti, kao u teoremi 2.6., pomoću Lesbegueovih i Itoovih integrala, navodi nas na ideju da napravimo izvesnu linearizaciju funkcija a(t,x) i b(t,x) po argumentu x, tako da SDJ (3.4) postanu oblika

$$dX_{n+1}(t) = \left[A_n(t) + B_n(t)X_{n+1}(t)\right]dt +$$

$$+\left[C_n(t) + D_n(t)X_{n+1}(t)\right]dW(t), \quad X_{n+1}(o) = \eta, \quad n=1,2,\ldots$$

Neki posebni Z-algoritmi

Ovde će biti opisani neki tipovi linearizacije SDJ (3.3), analogno tipovima linearizacije običnih diferencijalnih jednačina prvog reda. Najjednostavniji vid aproksimiranja rešenja SDJ (3.3) rešenjima linearnih SDJ, dat je sledećom teoremom.

Teorema 3.2. Ako funkcije $a(t,x)$ i $b(t,x)$ zadovoljavaju uslove (3.1) i (3.2) i ako su $\{\alpha_n(t),\ n=1,2,\ldots\}$ i $\{\beta_n(t),\ n=1,2,\ldots\}$ nizovi uniformno ograničenih neprekidnih funkcija na $[o,T]$, tada je niz parova funkcija

(3.14)
$$\{(a_n(t,x),b_n(t,x)),\ n=1,2,\ldots\} =$$
$$= \{(\alpha_n(t)\cdot(x - X_n(t)) + a(t,X_n(t)),$$
$$\beta_n(t)\cdot(x - X_n(t)) + b(t,X_n(t)),\ n=1,2,\ldots\}$$

odredjujući niz Z-algoritma za SDJ (3.3).

Dokaz. Pošto zbog uniformne ograničenosti nizova funkcija $\{\alpha_n(t),\ n=1,2,\ldots\}$ i $\{\beta_n(t),\ n=1,2,\ldots\}$, $t\in[o,T]$, važi

$$|a_n(t,x) - a_n(t,y)| \leqslant \sup_{t\in[o,T]}|\alpha_n(t)|\cdot|x - y| = L_1|x - y|\ ,$$

$$|b_n(t,x) - b_n(t,y)| \leq \sup_{t\in[o,T]} |\beta_n(t)|\cdot|x - y| = L_2|x - y| ,$$

$$n=1,2,\ldots,$$

onda je uniformni Lipschitzov uslov (3.1) ispunjen sa konstantom $L = \max\{L_1,L_2\}$. Uslov (3.13) takodje važi, jer je

$$a(t,X_n(t)) - a_n(t,X_n(t)) = b(t,X_n(t)) - b_n(t,X_n(t)) = o,$$

$$n=1,2,\ldots$$

Uslov ograničenog rasta funkcija $a_n(t,x)$ i $b_n(t,x)$, $n=1,2,\ldots$, nije ispunjen skoro izvesno, tako da se teorema 3.1. ne može direktno primeniti. Zato ćemo napraviti sledeću konstrukciju. Za proizvoljan pozitivan broj M i proizvoljan slučajni proces $(X_1(t),t\in[o,T])$ saglasan sa familijom $(\mathcal{F}_t,t\in[o,T])$, neka je

$$\tau_1^M = \begin{cases} \inf\{s : |X_1(s)|>M\} \\ T \quad \text{ako je } |X_1(s)|\leq M \text{ za svako } s\in[o,T] \end{cases}$$

vreme Markova u odnosu na familiju $(\mathcal{F}_t,t\in[o,T])$. Označimo sa

$$X_1^M(t)= \begin{cases} X_1(t) & \text{ako je } |X_1(t)|<M \\ M\operatorname{sgn}X_1(t) & \text{ako je } |X_1(t)|\geq M \end{cases}$$

i

$$a_1^M = \alpha_1(t)\cdot(x - X_1^M(t)) + a(t,X_1(t)),$$

$$b_1^M = \beta_1(t)\,(x - X_1^M(t)) + b(t,X_1^M(t)).$$

Sada je na intervalu $[o,\tau_1^M]$ uslov (3.2) ispunjen skoro izvesno, jer je

$$(a_1^M(t,x))^2 \leq 2\alpha_1^2(t)\cdot(x - X_1^M(t))^2 + 2a^2(t,X_1^M(t)) <$$

$$< 4L_1^2x^2 + 4L_1^2M^2 + 2L^2(1 + M^2) \leq L_3(1 + x^2),$$

gde je $L_3 = \max\{4L_1^2,\ 4L_1^2M^2 + 2L^2(1 + M^2)\}$. Analogno važi za $b_1^M(t,x)$, pa postoji rešenje SDJ

$$X_2(t) = \eta + \int_0^t a_1^M(s,X_2(s))ds + \int_0^t b_1^M(s,X_2(s))dW(s)$$

za $t \in [0,\tau_1^M]$. Neka je

$$\tau_2^M = \begin{cases} \inf\{s : |X_2(s)| > M\} \\ T \quad \text{ako je } |X_2(s)| \leq M \text{ za svako } s \in [0,\tau_1^M]. \end{cases}$$

Odredimo $X_2^M(t)$, $a_2^M(t,x)$ i $b_2^M(t,x)$ na isti način kao $X_1^M(t)$, $a_1^M(t,x)$, $b_1^M(t,x)$ i nastavimo ovaj postupak dalje. Za fiksiranu vrednost t, $t \in [0,T]$, može se odrediti dovoljno veliko M, tako da je $\tau_n^M > t$ skoro izvesno za svako n=1,2,... Kako je familija $(\mathcal{F}_t, t \in [0,T])$ generisana Wienerovim procesom W neprekidna, to po lemi 1.1. sledi da je τ^M, $\tau^M = \inf_n \tau_n^M$, vreme Markova. Sada su na intervalu $[0, \tau^M]$ ispunjeni uslovi teoreme 3.1., pa niz aproksimacija $\{(X_n^M(t), t \in [0, \tau^M]), n=1,2,\ldots\}$ konvergira skoro izvesno ka rešenju $(X(t), t \in [0, \tau^M])$ SDJ (3.3) kad $n \to \infty$. Na tom intervalu je

$$a_n^M(t,X_n^M(t)) = a_n(t,X_n(t)),$$

$$b_n^M(t,X_n^M(t)) = b_n(t,X_n(t)), \quad n=1,2,\dots,$$

pa po teoremi o lokalnoj jedinstvenosti rešenja (teorema 2.4.) sledi da je $X_n^M(t) = X_n(t)$ skoro izvesno za $t\in[o,\tau^M]$. Kako po teoremi 2.5. $\tau^M \longrightarrow T$ skoro izvesno kad $M\longrightarrow\infty$, to niz slučajnih procesa $\{(X_n(t),t\in[o,T]),\ n=1,2,\dots\}$ konvergira skoro izvesno rešenju $(X(t),t\in[o,T])$ SDJ (3.3) kad $n\longrightarrow\infty$.

QED

Posebno, ako je $\alpha_n(t) = \beta_n(t) \equiv o$ za svako $n=1,2,\dots$, tada se Z-algoritam iz teoreme 3.2. svodi na standardnu Picard-Lindelöfovu metodu sukcesivnih aproksimacija.

Napomenimo da zbog neprekidnosti nizova funkcija $\{\alpha_n(t),\ n=1,2,\dots\}$ i $\{\beta_n(t),\ n=1,2,\dots\}$ sledi da su parovi slučajnih funkcija $(a_n(t,x),b_n(t,x))$, $n=1,2,\dots$, iz (3.14) predskazljivi slučajni procesi, pa se iz (2.4) može dobiti (n+1)-aproksimacija rešenja u obliku

$$X_{n+1}(t) = \phi(t)\Big\{\eta+\int_o^t\phi^{-1}(s)\big[a(s,X_n(s)) - \alpha_n(s)X_n(s) +$$

$$+\beta_n(s)\cdot(\ b(s,X_n(s)) - \beta_n(s)X_n(s)\ )\big]ds +$$

$$+\int_o^t\phi^{-1}(s)\cdot(\ b(s,X_n(s)) - \beta_n(s)X_n(s)\ )]dW(s)\Big\},\ t\in[o,T],$$

gde je

$$\phi^{-1} = e^{-\int_o^t(\alpha_n(s) - \frac{\beta_n^2(s)}{2})ds - \int_o^t\beta_n(s)dW(s)}, \quad t\in[o,T].$$

Primedba 3.2. Teorema 3.2. se u istom obliku može iskazati i kada se nizovi uniformno ograničenih neprekidnih funkcija $\{\alpha_n(t),\ n=1,2,\dots\}$ i $\{\beta_n(t),\ n=1,2,\dots\}$, $t\in[o,T]$, zamene nizovima uniformno ograničenih predskazljivih slučajnih procesa $\{(\alpha_n(t,\omega), t\in[o,T]),\ n=1,2,\dots\}$ i $\{\beta_n(t,\omega), t\in[o,T]),\ n=1,2,\dots\}$. Tada je za odredjujući niz $\{(a_n(t,x), b_n(t,x)),\ n=1,2,\dots\}$ uniformni Lipschitzov uslov ispunjen skoro izvesno, a za uslov ograničenog rasta važe isti zaključci kao u dokazu teoreme 3.2. .

Sada ćemo napraviti još jedan primer Z-algoritma držeći se ideje iz rada [Zuber, 1966]. Naime, u ovom radu je pokazano da Čaplyginove metode sečica i tangenata jesu Z-algoritmi za približno rešavanje običnih diferencijalnih jednačina prvog reda. Osnovna ideja ovih metoda bazira se na teoremi o diferencijalnoj nejednakosti, kojom je odredjen položaj neke krive $v = v(x)$, $v(x_o) = y_o$, u odnosu na integralnu krivu $y = y(x)$, koja je rešenje diferencijalne jednačine $y' = f(x,y)$, $y(x_o) = y_o$.

Teorema Čaplygina o diferencijalnoj nejednakosti: Ako neprekidna funkcija $f(x,y)$ ispunjava Lipschitzov uslov u oblasti definisanosti i ako je na intervalu $[x_o, x_o+h]$ zadovoljena diferencijalna nejednakost $\frac{\partial v}{\partial x} - f(x,v(x)) > o$, odnosno $\frac{\partial v}{\partial x} - f(x,v(x)) < o$, tada se kriva $y = v(x)$, $v(x_o) = y_o$, nalazi iznad, odnosno ispod integralne krive $y'=f(x,y), y(x_o)=y_o$.

Iz ove teoreme nije teško zaključiti da ako neprekidne funkcije $f_1(x,y)$ i $f_2(x,y)$ ispunjavaju Lipschitzov uslov na nekom podskupu D iz oblasti definisanosti, tada iz $f_1(x,y) < < f_2(x,y)$ za (x,y) D, sledi da za rešenja diferencijalnih jednačina $u' = f_1(x,u)$, $u(x_0) = y_0$, i $v' = f_2(x,v)$, $v(x_0) = y_0$, važi $u(x) < v(x)$ za svako $x \in [x_0, x_0 + h]$. Polazeći od para funkcija $(u_n(x), v_n(x))$ za koje je $u_n(x) \leq y(x) \leq v_n(x)$ za svako $x \in [x_0, x_0 + h]$ i od pretpostavke da je parcijalni izvod f''_{yy} istog znaka u D, na primer $f''_{yy} < 0$, može se iz geometrijskog tumačenja sečice i tangente krive $z = f(x,y)$ za fiksirano x, zaključiti da je

$$L_1(y) < f(x,y) < L_2(x,y),$$

gde je

$$L_1(y) = \frac{f(x,v_n) - f(x,u_n)}{v_n - u_n} \cdot (y - u_n) + f(x,u_n),$$

$$L_2(y) = f'_y(x,u_n) \cdot (y - u_n) + f(x,u_n).$$

Dakle, za svako $x \in [x_0, x_0 + h]$ važi $u_{n+1}(x) < y(x) < v_{n+1}(x)$, gde su $u_{n+1}(x)$ i $v_{n+1}(x)$ rešenja diferencijalnih jednačina $u'_{n+1} = L_1(u_{n+1})$, $u_{n+1}(x_0) = y_0$, $v'_{n+1} = L_2(v_{n+1})$, $v_{n+1}(x_0) = y_0$.

Korišćenjem teoreme Čaplygina o diferencijalnoj nejednakosti, može se pokazati da se u iterativnom postupku niz $\{u_n(x),\ n=1,2,\ldots\}$ približava rešenju y(x) odozdo, a niz $\{v_n(x),\ n=1,2,\ldots\}$ odozgo, i da je $(u_{n+1}(x), v_{n+1}(x)) \subset (u_n(x), v_n(x))$ za svako $x \in [x_0, x_0 + h]$. Luzin je dokazao da se razlika $\delta_n(x) = v_n(x) - u_n(x)$ može oceniti uniformnom ocenom $\delta_n(x) < \frac{2M}{2^{2^n}}$, gde je M odgovarajuća konstanta. Velika brzina konvergencije aproksimirajućih nizova ka rešenju polazne jednačine daje teorijski prednost Čaplyginovim metodama nad drugim analitičkim metodama. U knjizi [Luzin, 1960] detaljno je izložena ova materija i tu se vidi sva složenost dokazivanja prethodno iznetih činjenica.

U radu [Zuber, 1966.] pokazuje se da su Čaplyginove metode sečica i tangenata samo specijalni slučajevi Z-algoritma, tako da se mnogi dokazi iz [Luzin, 196o.] mogu bitno skratiti. Medjutim, razlika $\delta_n(x) = v_n(x) - u_n(x)$, $x \in [x_o, x_o + h]$, je ocenjena mnogo grublje.

Sve ovo nas navodi na ideju da bi se mogao napraviti analogan Z-algoritam za približno rešavanje slučajnih diferencijalnih jednačina Itoa. U osnovi tog algoritma morale bi biti neke teoreme o slučajnim diferencijalnim nejednakostima. Niz takvih teorema za posebne oblike realnih funkcija $a(t,x)$ i $b(t,x)$ nalaze se , na primer u radovima [Klepcyna, 1985.] i [Ladde, Lakshmikantham, 198o.]. Kako u iterativnom postupku koeficijenti SDJ (3.4) zavise od prethodnog rešenja, oni su, prema tome, slučajne funkcije. U radu [Barlow, Perkins, 1984.] razmatrane su neke teoreme uporedjivanja strogih rešenja za slučajne diferencijalne jednačine tipa

$$(3.15) \qquad X(t) = X(o) + \int_o^t f(s,\omega,X(s))dA(s) + \int_o^t g(s,\omega,X(s))dW(s),$$

gde je $W = (W_t, \mathcal{F}_t)$, $t \in [o,\infty)$, Wienerov proces, a $A = (A_t, \mathcal{F}_t)$, $t \in [o,\infty)$, neprekidan rastući proces. Slučajne funkcije f i g, definisane na $R \times \Omega \times R$ sa vrednostima u R i merljive u odnosu na proizvod σ-algebri $\mathcal{B} \otimes \mathcal{F} \otimes \mathcal{B}$, takve su da postoje slučajni integrali iz jednačine (3.15). Pod odredjenim uslovima za ove slučajne funkcije, opštijim od uniformnog Lipschitzovog uslova i uslova ograničenog rasta, pozivajući se na radove [Yamada, Watanabe, 1971.], dokazana je u [Barlow, Perkins, 1984.] teorema egzistencije i jedinstvenosti rešenja jednačine (3.15) i jedna teorema uporedjivanja strogih rešenja dveju slučajnih diferencijalnih jednačina tipa (3.15). Mi ćemo je ovde prilagoditi našim potrebama, prema uslovima koje ispunjavaju funkcije $a(t,x)$ i $b(t,x)$ iz SDJ (3.3).

Teorema 3.3. Neka je $X(o)$ $\mathcal{F}_o$-merljiva slučajna promenljiva, neka slučajne funkcije $f_1(t,\omega,x)$, $f_2(t,\omega,x)$ i $g(t,\omega,x)$ ispunjavaju uslov (3.1) skoro izvesno i neka je za svako $t\in[o,T]$ i svako $x\in R$

$$f_1(t,\omega,x) < f_2(t,\omega,x) \quad \text{skoro izvesno.}$$

Ako su slučajni procesi $(X_i(t),t\in[o,T])$, $i=1,2$, rešenja SDJ

$$dX_i(t) = f_i(t,\omega,X_i(t))dt + g(t,\omega,X_i(t))dW(t) \ ,$$

$$X_i(o) = X(o), \quad i=1,2,$$

onda je za svako $t\in[o,T]$ $X_1(t) \leqslant X_2(t)$ skoro izvesno.

Napomenimo da se sve teoreme uporedjivanja iz prethodno navedenih radova, pa i teorema 3.3., odnose na parove slučajnih diferencijalnih jednačina u kojima su Itoovi integrali isti. Zbog toga ćemo napraviti Z-algoritme za rešavanje SDJ (3.3), aproksimirajući samo funkciju $a(t,x)$ linearnim funkcijama po x. Dakle, jednačini (3.3) pridružićemo nizove SDJ

$$dY_{n+1}(t) = u_n(t,Y_{n+1}(t))dt + b(t,Y_{n+1}(t))dW(t)$$

i

$$dZ_{n+1}(t) = v_n(t,Z_{n+1}(t))dt + b(t,Z_{n+1}(t))dW(t),$$

$$Y_{n+1}(o) = Z_{n+1}(o) = \eta\ , \quad n=1,2,\ldots,$$

tako da nizovi funkcija $\{u_n(t,x),\ n=1,2,\ldots\}$ i $\{v_n(t,x),\ n=1,2,\ldots\}$ budu **odredjujući** nizovi Z-algoritma SDJ (3.3), analogni odredjujućim nizovima za Čaplyginove metode sečica i tangenata kod običnih diferencijalnih jednačina.

<u>Teorema 3.4.</u> Ako je funkcija $a(t,x)$ dva puta diferencijabilna po x, $a_x'(t,x)$ JE NEPREKIDNA PO OBE PROMENLJIVE i ograničena na $[o,T]\times R$, a $a_{xx}''(t,x)$ ne menja znak na $[o,T]\times R$, i ako funkcije $a(t,x)$ i $b(t,x)$ ispunjavaju uslove (3.1) i (3.2), onda su nizovi slučajnih funkcija

$$\{u_n(t,x),\ n=1,2,\ldots\} =$$

$$\{a_x'(t,Y_n(t))\cdot(x - Y_n(t)) + a(t,Y_n(t)),\ n=1,2,\ldots\}$$

i

$$\{v_n(t,x),\ n=1,2,\ldots\} =$$

$$= \begin{cases} \left\{\dfrac{a(t,Z_n(t)) - a(t,Y_n(t))}{Z_n(t) - Y_n(t)}\cdot(x - Y_n(t)) + a(t,Y_n(t)),\right. \\ \quad \left. \text{za } Z_n(t) \neq Y_n(t) \text{ skoro izvesno, } n=1,2,\ldots\right\} \\ \{u_n(t), \quad \text{za } Z_n(t) = Y_n(t) \text{ skoro izvesno, } n=1,2,\ldots\} \end{cases}$$

odredjujući nizovi Z-algoritma za SDJ (3.3).

Dokaz. Pre svega, uslov (3.13) je ispunjen, jer je

$$(3.16) \qquad a(t,Y_n(t)) - u_n(t,Y_n(t)) = a(t,Z_n(t)) - v_n(t,Z_n(t)) \equiv o$$

za svako $n=1,2,\ldots$. Dokažimo da nizovi slučajnih funkcija $\{u_n(t,x),\ n=1,2,\ldots\}$ i $\{v_n(t,x),\ n=1,2,\ldots\}$ zadovoljavaju uniformni Lipschitzov uslov. Zaista, za svako $t\in[o,T]$ i $x,y\in R$ važi

$$|u_n(t,x) - u_n(t,y)| = |a'_x(t,Y_n(t))|\cdot|x - y| \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{t\in[o,T]} |a'_x(t,Y_n(t))|\cdot|x - y| \leqslant K|x - y|,\ n=1,2,\ldots ,$$

gde je $K = \sup_{t,x} |a'_x(t,x)|$.

Iz Lipschitzovog uslova za funkciju $a(t,x)$ sledi

$$|v_n(t,x) - v_n(t,y)| = \left|\frac{a(t,Z_n(t)) - a(t,Y_n(t))}{Z_n(t) - Y_n(t)}\right|\cdot|x - y| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{L|Z_n(t) - Y_n(t)|}{|Z_n(t) - Y_n(t)|}\cdot|x - y| = L|x - y|,\ n=1,2,\ldots .$$

Pošto uslov ograničenog rasta slučajnih funkcija $u_n(t,x)$ i $v_n(t,x)$ nije ispunjen skoro izvesno, postupićemo kao u dokazu teoreme 3.2. . Izaberimo par realnih funkcija $u_o(t,x)$ i $v_o(t,x)$, tako da postoje jedinstvena rešenja SDJ

$$dY_1(t) = u_o(t,Y_1(t))dt + b(t,Y_1(t))dW(t), \quad Y_1(o) = \eta ,$$

i

$$dZ_1(t) = v_0(t,Z_1(t))dt + b(t,Z_1(t))dW(t), \quad Z_1(o) = \eta ,$$

i da je za svako $(t,x) \in [o,T] \times R$ ispunjen uslov

$$u_0(t,x) < a(t,x) < v_0(t,x) .$$

Po teoremi 3.3. sledi da za rešenja ovih SDJ važi

$$Y_1(t) \leq X(t) \leq Z_1(t) \quad \text{skoro izvesno}$$

za svako $t \in [o,T]$.

Ako je $Y_1(t) \equiv Z_1(t)$ skoro izvesno za svako $t \in [o,T]$, izaberimo proizvoljan pozitivan broj M, tako da su

$$\sigma_1^M = \begin{cases} \inf\{t \ : \ |Y_1(t)| > M\} \\ T \quad \text{ako je } |Y_1(t)| \leq M \quad \text{za svako} \quad t \in [o,T], \end{cases}$$

i

$$\nu_1^M = \begin{cases} \inf\{t \ : \ |Z_1(t)| > M\} \\ T \quad \text{ako je } |Z_1(t)| \leq M \quad \text{za svako} \quad t \in [o,T], \end{cases}$$

vremena Markova u odnosu na familiju $(\mathcal{F}_t, t \in [o,T])$. Tada je $\tau_1^M = \inf\{\sigma_1^M, \nu_1^M\}$ vreme Markova u odnosu na istu familiju. Označimo sa

$$Y_1^M(t) = \begin{cases} Y_1(t) & \text{ako je } |Y_1(t)| < M \\ M\operatorname{sgn}Y_1(t) & \text{ako je } |Y_1(t)| \geq M \end{cases}$$

i

$$u_1^M(t,x) = a_x'(t,Y_1^M(t))\cdot(x - Y_1^M(t)) + a(t,Y_1^M(t)),$$

i analogno za $Z_1^M(t)$ i $v_1^M(t,x)$. Sada je na intervalu $[o,\tau_1^M]$

uslov (3.2) ispunjen skoro izvesno, pa postoje rešenja SDJ

$$dY_2(t) = u_1^M(t,Y_2(t))dt + b(t,Y_2(t))dW(t), \qquad Y_2(o) = \eta ;$$

i

$$dZ_2(t) = v_1^M(t,Z_2(t))dt + b(t,Z_2(t))dW(t), \qquad Z_2(o) = \eta .$$

Kako je za svako $(t,x) \in [o,T] \times R$ funkcija $a''_{xx}(t,x)$ istog znaka, na primer $a''_{xx}(t,x) > o$, to iz geometrijske interpretacije sečice i tangente krive $z = a(t,x)$ za fiksirano t, $t \in [o, \tau_1^M]$, dobijamo

$$a'_x(t,Y_1^M(t)) \cdot (x - Y_1^M(t)) + a(t,Y_1^M(t)) < a(t,x) <$$

$$< \frac{a(t,Z_1^M(t)) - a(t,Y_1^M(t))}{Z_1^M(t) - Y_1^M(t)} \cdot (x - Y_1^M(t)) + a(t,Y_1^M(t))$$ skoro izvesno,

to jest,

$$u_1^M(t,x) < a(t,x) < v_1^M(t,x) .$$ skoro izvesno.

Po teoremi 3.3. sledi da za svako $t \in [o, \tau_1^M]$ važi

$$Y_2(t) \leqslant X(t) \leqslant Z_2(t) \quad \text{skoro izvesno.}$$

Pretpostavimo dalje da za slučajne procese $Y_n(t)$ i $Z_n(t)$ važi $Y_n(t) \leqslant X(t) \leqslant Z_n(t)$ skoro izvesno za svako $t \in [o, \tau_{n-1}^M]$. Neka su σ_n^M i ν_n^M vremena Markova odredjena sa

$$\sigma_n^M = \begin{cases} \inf\{t : |Y_n(t)| > M\} \\ T \quad \text{ako je } |Y_n(t)| \leqslant M \quad \text{za svako } t \in [o,T] , \end{cases}$$

i

$$\nu_n^M = \begin{cases} \inf\{t : |Z_n(t)| > M\} \\ T \quad \text{ako je } |Z_n(t)| \leq M \quad \text{za svako} \quad t \in [o,T], \end{cases}$$

i neka je $\tau_n^M = \inf\{\sigma_n^M, \nu_n^M\}$. Ako su $Y_n^M(t)$, $u_n^M(t,x)$, $Z_n^M(t)$ i $v_n^M(t,x)$ definisani na isti način kao $Y_1^M(t)$ i $u_1^M(t,x)$, tada na intervalu $[o, \tau_n^M]$ postoje jedinstvena rešenja $Y_{n+1}(t)$ i $Z_{n+1}(t)$ odgovarajućih SDJ za koje važi

$$Y_{n+1}(t) \leq X(t) \leq Z_{n+1}(t) \quad \text{skoro izvesno.}$$

Dakle, za proizvoljno t, $t \in [o,T]$, može se izabrati dovoljno veliko M, tako da je $\tau_n^M > t$ skoro izvesno za svako $n=1,2,\ldots$. Ako je $\tau^M = \inf\limits_n \tau_n^M$, tada su na intervalu $[o, \tau^M]$ ispunjeni svi uslovi teoreme 3.1. , pa su nizovi $\{u_n^M(t,x), n=1,2,\ldots\}$ i $\{v_n^M(t,x), n=1,2,\ldots\}$ odredjujući nizovi Z-algoritma. Primenom teoreme o lokalnoj jedinstvenosti rešenja (teorema 2.4.) i teoreme 2.5. po kojoj $\tau^M \xrightarrow{\text{skoro izvesno}} T$ kad $M \to \infty$, zaključujemo da nizovi slučajnih procesa $\{(Y_n(t), t \in [o,T]), n=1,2,\ldots\}$ i $\{(Z_n(t), t \in [o,T]), n=1,2,\ldots\}$ skoro izvesno konvergiraju rešenju $(X(t), t \in [o,T])$ SDJ (3.3) kad $n \to \infty$. Ovim je teorema dokazana.

QED

Iz dokaza se vidi da niz slučajnih procesa $\{(Y_n(t), t \in [o,T]), n=1,2,\ldots\}$ konvergira skoro izvesno rešenju $(X(t), t \in [o,T])$ odozdo, a niz $\{(Z_n(t), t \in [o,T]), n=1,2,\ldots\}$ odozgo. Ne može se dokazati da su ovi nizovi obavezno monotoni, jer u teoriji SDJ ne važi teorema analogna teoremi

Čaplygina o diferencijalnoj nejednakosti za obične diferencijalne jednačine. Naime, ako je $(X(t), t \in [o,T])$ rešenje SDJ

$$dX(t) = f(t,X(t))dt + g(t,X(t))dW(t), \quad X(o) = \eta ,$$

i ako je $(Y(t), t \in [o,T])$ slučajni proces za koji je

$$dY(t) \leq f(t,Y(t))dt + g(t,Y(t))dW(t) \quad \text{skoro izvesno,}$$

ne sledi da je za svako t, $t \in [o,T]$, $Y(t) \leq X(t)$ skoro izvesno. Drugim rečima, teorema 3.3. daje samo dovoljne uslove za uporedjivanje rešenja. Detaljniji komentar o ovome može se naći u [Ladde, Lakshmikantham, 198o.].

Ako je funkcija $b(t,x)$ linearna po x, teorema 3.4. daje mogućnost aproksimacije rešenja SDJ rešenjima dveju linearnih SDJ. Pošto se traženo rešenje skoro izvesno nalazi izmedju ova dva rešenja, bilo bi pogodno oceniti na neki način razliku $Z_n(t) - Y_n(t)$. Kako se Luzinova ocena razlike $u_n(x) - v_n(x)$ za obične diferencijalne jednačine bazira na Čaplyginovoj teoremi o diferencijalnoj nejednakosti, to razliku $Z_n(t) - Y_n(t)$ ne možemo oceniti kopirajući Luzinovu ocenu. Jedna srednje kvadratna ocena se može dobiti iz dokaza teoreme 3.1. . Iz (3.6) i (3.16) sledi da je $\varepsilon_n \equiv o$, $n=1,2,\ldots$, pa se (3.9), odnosno (3.11), svodi na

$$E\{\sup_{t \in [o,T]} |X(t) - Y_{n+1}(t)|^2\} \leq c_1 \frac{(2\alpha T)^{n-2}}{(n-2)!} + c_2 \frac{(2\alpha T)^{n-1}}{(n-1)!} ,$$

$$n=1,2,\ldots .$$

Pošto ista ocena važi i za $E\{\sup_{t\in[0,T]}|X(t) - Z_{n+1}(t)|^2\}$, sledi da je

$$E\{\sup_{t\in[0,T]}|Z_{n+1}(t) - Y_{n+1}(t)|^2\} \leq 2\cdot 2c_1\frac{(2\alpha T)^{n-2}}{(n-2)!} + 2\cdot 2c_2\frac{(2\alpha T)^{n-1}}{(n-1)!}\,.$$

Napomenimo da Z-algoritam opisan odredjujućim nizom $\{v_n(t,x),\ n=1,2,\ldots\}$, to jest, iterativnom metodom tetiva, nije samostalan, već je vezan za rešenja dobijena pomoću odredjujućeg niza $\{u_n(t,x),\ n=1,2,\ldots\}$. Z-algoritam opisan odredjujućim nizom $\{u_n(t,x),\ n=1,2,\ldots\}$, to jest, iterativnom metodom tangenata, analogan je metodi Newton-Kantoroviča za približno analitičko rešavanje običnih diferencijalnih jednačina prvoga reda. U tom slučaju nije neophodno da parcijalni izvod $a''_{xx}(t,x)$ bude istog znaka na $[0,T]\times R$, pa se rešenja $(Y_n(t), t\in[0,T])$, $n=1,2,\ldots$, ne nalaze skoro izvesno ispod, odnosno iznad traženog rešenja.

Ovde su izloženi jednostavni primeri Z-algoritama formiranih na osnovu klasičnih i istorijski značajnih analitičkih metoda za približno rešavanje običnih diferencijalnih jednačima prvog reda. Interesantno bi bilo pronaći neke druge, ne klasične, Z-algoritme, tako da funkcije $a_n(t,x)$ i $b_n(t,x)$, $n=1,2,\ldots$, budu linearne po x i da jednačine (3.5) budu efektivno rešive. Naravno, efektivna rešivost SDJ je veoma strog zahtev, pa formiranje ovakvih Z-algoritama ostaje otvoren problem.

Sva razmatranja iz ovog poglavlja mogu se bez teškoća preneti na vektorske SDJ, s tim što moduo treba zameniti odgovarajućom normom. U sledećum poglavljima biće reči o Z-algoritmima za neke druge tipove slučajnih diferencijalnih i integrodiferencijalnih jednačina. Takodje se može razmišljati o formiranju Z-algoritama za približno analitičko rešavanje nekih slučajnih diferencijalnih jednačina po martingalima i martingalnim merama.

4. GRANIČNE TEOREME ZA NEKE TIPOVE SLUČAJNIH INTEGRODIFERENCIJALNIH JEDNAČINA ITOA - SKORO IZVESNA KONVERGENCIJA

Slučajna integrodiferencijalna jednačina Itoa

U ovom delu razmatrane su neke granične teoreme o skoro izvesnoj konvergenciji niza strogih rešenja posebnih tipova slučajnih integrodiferencijalnih jednačina Itoa, koje ćemo kraće označavati sa SIDJ. Dati su dovoljni uslovi za ovu konvergenciju, a ideja za postavljanje tih uslova potekla je od teoreme 3.1. . U klasičnoj teoriji SDJ i SIDJ uglavnom su razmatrane granične teoreme koje se odnose na konvergenciju u verovatnoći, ili na srednje kvadratnu konvergenciju. Konstrukcija Z-algoritma iz teoreme 3.1. ukazuje na formu bliskosti odgovarajućih funkcija iz niza posmatranih SIDJ koja dozvoljava skoro izvesnu konvergenciju. Svi slučajni procesi i slučajne promenljive biće definisani na kompletnom prostoru verovatnoća $(\Omega,\mathcal{F},P)$, na kome m-dimenzioni Wienerov proces $W = (W(t), t\in[o,T])$, $T = \text{const} > o$, generiše neopadajuću familiju $(\mathcal{F}_t, t\in[o,T])$, σ-podalgebri σ-algebre $\mathcal{F}$.

Posmatrajmo SIDJ tipa

$$
\begin{aligned}
X(t) &= f(t) + \int_0^t\Big[a(s,X(s)) + \int_0^s b(s,u,X(u))du + \\
&+ \int_0^s c(s,u,X(u))dW(u)\Big]ds + \int_0^t\Big[A(s,X(s)) + \int_0^s B(s,u,X(u))du + \\
&+ \int_0^s C(s,u,X(u))dW(u)\Big]dW(s) ,
\end{aligned} \tag{4.1}
$$

gde je $X = (X(t), t \in [o,T])$ d-dimenzioni slučajni proces, $f = (f(t),\ t \in [o,T])$ d-dimenzioni slučajni proces saglasan sa familijom $(\mathcal{F}_t, t \in [o,T])$, a neslučajne funkcije

$$
\begin{array}{llll}
 & a : [o,T] \times R^d \to R^d, & & A : [o,T] \times R^d \to R^d \otimes R^m, \\
(4.2) & b : J \times R^d \to R^d, & & B : J \times R^d \to R^d \otimes R^m, \\
 & c : J \times R^d \to R^d \otimes R^m, & & C : J \times R^d \to R^d \otimes R^m \otimes R^m,
\end{array}
$$

gde je $J = \{(t,s) : (t,s) \in [o,T] \times [o,T],\ s \leqslant t\}$, su merljive u odnosu na σ-polja svojih domena.

Napomenimo da ćemo, kao i ranije, norme u različitim prostorima označavati na isti način sa $\|\cdot\|$.

Ovaj tip SIDJ proučavan je u doktorskoj disertaciji M. Bergera [Berger, 1977.]. U njoj su, pored ostalog, dati dovoljni uslovi egzistencije slučajnih integrala iz jednačine (4.1), definisano je strogo rešenje, dokazana teorema egzistencije i jedinstvenosti rešenja i data je granična teorema za srednje kvadratnu konvergenciju. Ovde će biti navedene samo definicija strogog rešenja i teorema egzistencije i jedinstvenosti rešenja.

Definicija 4.1. Slučajni proces $X = (X(t),\ t \in [o,T])$ je strogo rešenje (kraće "rešenje") SIDJ (4.1), ako :

- je saglasan sa familijom $(\mathcal{F}_t, t \in [o,T])$;
- $\mathcal{F}_t$-merljivi slučajni procesi $\bar{a}(t) = a(t,X(t))$, $\bar{A}(t) = A(t,X(t))$, $\bar{b}(t,s) = b(t,s,X(s))$, $\bar{B}(t,s) = B(t,s,X(s))$, $\bar{c}(t,s) = c(t,s,X(s))$ i $\bar{C}(t,s) = C(t,s,X(s))$, $(t,s) \in J$, su takvi da su sledeći integrali skoro izvesno konačni :

$$\int_0^T \|\bar{a}(t)\|dt, \quad \int_0^T \|\bar{A}(t)\|^2 dt, \quad \int_0^T\int_0^t \|\bar{b}(t,s)\|dsdt,$$

$$\int_0^T\int_0^t \|\bar{B}(t,s)\|^2 dsdt, \quad \int_0^T\int_0^t \|\bar{c}(t,s)\|^2 dsdt, \quad \int_0^T\int_0^t \|\bar{C}(t,s)\|^2 dsdt;$$

- jednačina (4.1) je zadovoljena skoro izvesno za svako $t \in [o,T]$.

<u>Teorema 4.1.</u> (Teorema egzistencije i jedinstvenosti rešenja) Ako postoji konstanta $K > o$, tako da su za svako $(t,s) \in J$ i $x,y \in R^d$ ispunjeni uniformni Lipschitzov uslov

$$\begin{aligned} &\|a(t,x) - a(t,y)\| + \|b(t,s,x) - b(t,s,y)\| + \\ &\|c(t,s,x) - c(t,s,y)\| + \|A(t,x) - A(t,y)\| + \\ &\|B(t,s,x) - B(t,s,y)\| + \|C(t,s,x) - C(t,s,y)\| \leq \\ &\leq K\|x - y\| \end{aligned} \tag{4.3}$$

i uslov ograničenog rasta

$$\begin{aligned} &\|a(t,x)\|^2 + \|b(t,s,x)\|^2 + \|c(t,s,x)\|^2 + \\ &+ \|A(t,x)\|^2 + \|B(t,s,x)\|^2 + \|C(t,s,x)\|^2 \leq K^2(1 + \|x\|^2), \end{aligned}$$

i ako je $\sup_{t\in[o,T]} E\{\|f(t)\|^2\} < \infty$, tada postoji rešenje $X = (X(t),\ t \in [o,T])$ SIDJ (4.1), tako da je $X - f$ skoro izvesno neprekidan slučajni proces. Ako je $Y = (Y(t),\ t \in [o,T])$ neko drugo rešenje SIDJ (4.1), tada je

$$P\{\sup_{t\in[o,T]} \|X(t) - Y(t)\| > o\} = o.$$

Granične teoreme

Neka je dat niz SIDJ tipa (4.1)

$$
\begin{aligned}
X_n(t) = f_n(t) + \int_0^t \Big[a_n(s,X_n(s)) + \int_0^s b_n(s,u,X_n(u))du \, + \\
+ \int_0^s c_n(s,u,X_n(u))dW(u)\Big]ds + \int_0^t \Big[A_n(s,X_n(s)) \, + \\
+ \int_0^s B_n(s,u,X_n(u))du + \int_0^s C_n(s,u,X_n(u))dW(u)\Big]dW(s), \\
n=1,2,\ldots, \quad t\in[o,T],
\end{aligned} \tag{4.5}
$$

Osnovni problem je pronaći dovoljne uslove pod kojima niz rešenja $\{X_n, n=1,2,\ldots\} = \{(X_n(t), t\in[o,T]), n=1,2,\ldots\}$ SIDJ (4.5) skoro izvesno konvergira rešenju $X = (X(t), t\in[o,T])$ SIDJ (4.1) kad $n \to \infty$. U tom smislu, slučajni procesi f_n, $n=1,2,\ldots$, i funkcije a_n, b_n, c_n, A_n, B_n i C_n, $n=1,2,\ldots$, moraju na neki način biti bliski slučajnom procesu f i funkcijama a, b, c, A, B i C respektivno. Ova bliskost je iskazana sledećim uslovima :

$$
\sum_{n=1}^{\infty} E\Big\{\sup_{t\in[o,T]}\|f(t) - f_n(t)\|^2\Big\} < \infty; \tag{4.6}
$$

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \sup_{(t,s,x)\in\Pi} \Big\{\|a(t,x) - a_n(t,x)\| + \|b(t,s,x) - b_n(t,s,x)\| \, + \\
+ \|c(t,s,x) - c_n(t,s,x)\| + \|A(t,x) - A_n(t,x)\| \, + \\
+ \|B(t,s,x) - B_n(t,s,x)\| + \|C(t,s,x) - C_n(t,s,x)\|\Big\} < \infty,
\end{aligned} \tag{4.7}
$$

gde je $\Pi = \{(t,s,x) : (t,s) \in J,\ x \in R^d\}$.

Uslov (4.7) je analogan uslovu (3.5) iz teoreme 3.1. .

Teorema 4.2. Ako slučajni procesi f i f_n, $n=1,2,\ldots$, i funkcije a, b, c, A, B, C i a_n, b_n, c_n, A_n, B_n, C_n, $n=1,2,\ldots$, ispunjavaju uslove teoreme egzistencije i jedinstvenosti rešenja (teorema 4.1.) i uslove (4.6) i (4.7), onda niz rešenja $\{X_n,\ n=1,2,\ldots\}$ SIDJ (4.5) konvergira skoro izvesno, uniformno po t, $t \in [0,T]$, rešenju X SIDJ (4.1) kad $n \to \infty$.

Dokaz. Označimo sa

$$\delta_n = E\{\sup_{t\in[0,T]} \|f(t) - f_n(t)\|^2\},\quad n=1,2,\ldots, \tag{4.8}$$

i sa

$$\begin{aligned}\varepsilon_n = E\{\sup_{(t,s)\in J}[\|a(s,X_n(s)) - a_n(s,X_n(s))\|^2 +\\ + \|b(t,s,X_n(s)) - b_n(t,s,X_n(s))\|^2 + \|c(t,s,X_n(s)) -\\ - c_n(t,s,X_n(s))\|^2 + \|A(s,X_n(s)) - A_n(s,X_n(s))\|^2 +\\ + \|B(t,s,X_n(s)) - B_n(t,s,X_n(s))\|^2 + \|C(t,s,X_n(s)) -\\ - C_n(t,s,X_n(s))\|^2]\},\quad n=1,2,\ldots .\end{aligned} \tag{4.9}$$

Sada treba odrediti neku majorantu za $E\{\|X(t) - X_n(t)\|^2\}$. Ako oduzmemo jednačine (4.1) i (4.5) i grupišemo odgovarajuće podintegralne funkcije, dobijamo zbir od šest slučajnih integrala različitog tipa. Ocenićemo samo dva od ovih integrala, a ostali se ocenjuju slično.

Iz osobine (iv) teoreme 2.2., Cauchy-Schwartzove nejednakosti, Lipschitzovog uslova (4.3) i iz (4.9), dobija se

$$E\{\|\int_0^t\int_0^s[B(s,u,X(u)) - B_n(s,u,X_n(u))]du dW(s)\|^2\} =$$

$$= \int_0^t E\{\|\int_0^s[B(s,u,X(u)) - B_n(s,u,X_n(u))]du\|^2\}ds \leq$$

$$\leq 2\int_0^t s\int_0^s E\{\|B(s,u,X(u)) - B(s,u,X_n(u))\|^2 +$$

$$+ \|B(s,u,X_n(u)) - B_n(s,u,X_n(u))\|^2\} duds \leq$$

$$\leq t^2\cdot[\varepsilon_n t + K^2\int_0^t E\{\|X(s) - X_n(s)\|^2\}ds].$$

Slično,

$$E\{\|\int_0^t\int_0^s[C(s,u,X(u)) - C_n(s,u,X_n(u))]dW(u)dW(s)\|^2\} =$$

$$= \int_0^t E\{\|\int_0^s[C(s,u,X(u)) - C_n(s,u,X_n(u))]dW(u)\|\}^2 ds =$$

$$= \int_0^t\int_0^s E\{\|C(s,u,X(u)) - C_n(s,u,X_n(u))\|^2 duds \leq$$

$$\leq 2\cdot\int_0^t\int_0^s \varepsilon_n duds + 2K^2\int_0^t\int_0^s E\{\|X(u) - X_n(u)\|^2 duds =$$

$$= \varepsilon_n t^2 + 2TK^2\int_0^t E\{\|X(s) - X_n(s)\|^2\}ds.$$

Iz (4.8) dobija se ocena

$$E\{\|X(t)-X_n(t)\|^2\} \leqslant$$

$$\leqslant 7\delta_n + \alpha[\varepsilon_n T + K^2 \int_0^t E\{\|X(s)-X_n(s)\|^2\} ds \quad ,$$

gde je $\alpha = 14[\frac{1}{2}T^3 + \frac{3}{2}T^2 + 2T + 1]$. Ako primenimo Gronwall-Bellmanovu lemu (lema 2.1.) na zadnju nejednakost, sledi da je

$$(4.1o) \quad E\{\|X(t)-X_n(t)\|^2\} \leqslant (7\delta_n + \alpha\varepsilon_n T)e^{\alpha K^2 t} \; .$$

Jedna majoranta za $E\{\sup_{t\in[o,T]} \|X(t)-X_n(t)\|^2\}$ dobija se ocenjivanjem svakog od grupisanih sabiraka razlike SIDJ (4.1) i (4.5). Pritom se koristi više puta osobina (viii) teoreme 2.1. . Kako se svi sabirci ocenjuju slično, učinićemo to za neke od njih. Na primer,

$$E\{\sup_{t\in[o,T]} \|\int_0^t \int_0^s [B(s,u,X(u)) - B_n(s,u,X_n(u))] du dW(s)\|^2\} \leqslant$$

$$\leqslant 4\int_0^T E\{\|\int_0^s [B(s,u,X(u)) - B_n(s,u,X_n(u))] du\|^2\} ds \leqslant$$

$$\leqslant 4T^2[\varepsilon_n T + K^2 \int_0^T E\{\|X(s)-X_n(s)\|^2\} ds] \;;$$

$$E\{\sup_{t\in[o,T]} \|\int_0^t \int_0^s [C(s,u\ X(u)) - C_n(s,u,X_n(u))] dW(u) dW(s)\|^2\} \leqslant$$

$$\leqslant 4\int_0^T E\{\|\int_0^s [C(s,u,X(u)) - C_n(s,u,X_n(u))] dW(u)\|^2\} ds \leqslant$$

$$\leqslant 4[\varepsilon_n T^2 + 2K^2 T \int_0^T E\{\|X(s)-X_n(s)\|^2\} ds] \;.$$

Tako se konačno dobija

$$E\{\sup_{t\in[o,T]}\|X(t)-X_n(t)\|^2\} \leq$$

$$\leq 7\delta_n + \beta[\varepsilon_n T + K^2\int_0^T E\{\|X(t)-X_n(t)\|^2\}dt \quad ,$$

gde je $\beta = 14[\frac{1}{2}T^3 + 3T^2 + 5T + 4]$. Iz (4.1o) i zadnje relacije sledi ocena

$$E\{\sup_{t\in[o,T]}\|X(t)-X_n(t)\|^2\} \leq c_1\delta_n + c_2\varepsilon_n \ ,$$

gde su c_1 i c_2 odgovarajuće konstante. Primenom Čebiševljeve nejednakosti, za svako $\varepsilon > o$ je

$$\sum_{n=1}^{\infty} P\{\sup_{t\in[o,T]}\|X(t)-X_n(t)\| \geq \varepsilon\} \leq$$

$$\frac{1}{\varepsilon^2}\sum_{n=1}^{\infty} E\{\sup_{t\in[o,T]}\|X(t)-X_n(t)\|^2\} \leq \frac{c_1}{\varepsilon^2}\sum_{n=1}^{\infty}\delta_n + \frac{c_2}{\varepsilon^2}\sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon_n .$$

Iz uslova (4.6) i (4.7) sledi da su redovi $\sum_{n=1}^{\infty}\delta_n$ i $\sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon_n$ konvergentni, pa po Borel-Cantellijevoj lemi i Weierstrassovoj teoremi uniformne konvergencije sledi da niz rešenja $\{X_n, n=1,2,\ldots\}$ SIDJ (4.5) skoro izvesno konvergira, uniformno po t, $t\in[o,T]$, rešenju X SIDJ (4.1) kad $n\longrightarrow\infty$, pa je tako teorema dokazana.

QED

Uslovi teoreme 4.2. mogli bi biti na neki način oslabljeni. Sledeći tradiciju klasične teorije SDJ, pretpostavićemo da za proizvoljan pozitivan broj M postoji pozitivna konstanta K_M, tako da za svako $(t,s)\in J$ i $\|x\|\leq M$, $\|y\|\leq M$, uslov (4.3) važi sa tom konstantom. Matematička očekivanja $\sup_{t\in[o,T]} E\{\|f_n(t)\|^2\}$, n=1,2,..., iz teoreme 4.1. ne moraju biti ograničena. Pretpostavićemo još da su uslovi (4.4) i (4.6) ispunjeni.

<u>Teorema 4.3.</u> Ako slučajni procesi f i f_n, n=1,2,..., i funkcije a, b, c, A, B, C i a_n, b_n, c_n, A_n, B_n, C_n, n=1, 2,..., ispunjavaju prethodno navedene uslove, i ako uslov (4.7) važi sa $\Pi' = \{(t,s) : (t,s)\in J,\ \|x\|\leq M,\ \|y\|\leq M\}$ umesto Π, tada niz rešenja $\{X_n, n=1,2,...\}$ SIDJ (4.5) skoro izvesno konvergira, uniformno po t, $t\in[o,T]$, rešenju X SIDJ (4.1) kad $n\longrightarrow\infty$.

<u>Dokaz.</u> Za izabrani broj $M>o$, označimo sa

$$\Psi_M(x) = \begin{cases} x & \text{ako je } \|x\|<M \\ M\,\mathrm{sgn}\,x & \text{ako je } \|x\|\geq M\ , \end{cases}$$

$f_n^M(t) = \Psi_M(f(t))$, $a_n^M(t,x) = a_n(t,\Psi_M(x))$, $b_n^M(t,s,x) = b_n(t,s,\Psi_M(x))$, $c_n^M(t,s,x) = c_n(t,s,\Psi_M(x))$, $A_n^M(t,x) = A_n(t,\Psi_M(x))$, $B_n^M(t,s,x) = B_n(t,s,\Psi_M(x))$, $C_n^M(t,s,x) = C_n(t,s,\Psi_M(x))$, n=1,2,..., i analogno za f, a, b, A, B i C. Sada su ispunjeni svi uslovi teoreme egzistencije i jedinstvenosti rešenja SIDJ

$$X_n^M(t) = f_n^M(t) + \int_o^t [\, a_n^M(s,X_n^M(s)) + \int_o^s b_n^M(s,u,X_n^M(u))du +$$

$$+\int_0^s c_n^M(s,u,X_n^M(u))dW(u)\Big]ds + \int_0^t \Big[A_n^M(s,X_n^M(s)) + \int_0^s B_n^M(s,u,X_n^M(u))du +$$

$$+\int_0^s C_n^M(s,u,X_n^M(u))dW(u)\Big]dW(s), \; n=1,2,\ldots, \quad t\in[o,T],$$

pa postoje jedinstvena rešenja $X_n^M = (X_n^M(t),\ t\in[o,T])$, $n=1,2,\ldots$, ovih SIDJ. Analogno postoji jedinstveno rešenje $X^M = (X^M(t),\ t\in[o,T])$ odgovarajuće SIDJ. Ispunjeni su i uslovi teoreme 4.2. , pa niz rešenja $\{X_n^M,\ n=1,2,\ldots\}$ skoro izvesno konvergira, uniformno po t, $t\in[o,T]$, rešenju X^M kad $n\longrightarrow\infty$. Iz ovih činjenica ćemo dokazati da niz rešenja $\{X_n,\ n=1,2,\ldots\}$ skoro izvesno konvergira, uniformno po t, $t\in[o,T]$, rešenju X kad $n\longrightarrow\infty$. Neka su

$$\sigma_n^M = \begin{cases} \inf\{t : \|X_n^M(t)\| > M\} \\ T \quad \text{ako je } \|X_n^M(t)\| \leq M \quad \text{za sve } t\in[o,T], \end{cases}$$

i

$$\vartheta_n^M = \begin{cases} \inf\{t : \|X^M(t)\| > M\} \\ T \quad \text{ako je } \|X^M(t)\| \leq M \quad \text{za sve } t\in[o,T], \end{cases}$$

$n=1,2,\ldots,$

vremena Markova u odnosu na familiju σ-podalgebri $(\mathcal{F}_t, t\in[o,T])$. Tada je $\tau_n^M = \inf\{\sigma_n^M, \vartheta_n^M\}$ takodje vreme Markova. Za svako t, $t\in[o,T]$, moguće je naći dovoljno veliki broj $M>o$, tako da je skoro izvesno $\tau_n^M > t$, $n=1,2,\ldots$. Pošto je po lemi 1.1. $\tau^M = \inf\limits_n \tau_n^M$ vreme Markova, to je na intervalu $[o,\tau^M]$

$$f_n^M(t) = f_n(t),\ a_n^M(t,X_n^M(t)) = a_n(t,X_n(t)),\ b_n^M(t,s,X_n^M(s)) =$$

$$= b_n(t,s,X_n(s)),\ c_n^M(t,s,X_n^M(s)) = c_n(t,s,X_n(s)),\ A_n^M(t,X_n^M(t))=$$

$$= A_n(t,X_n(t)),\ B_n^M(t,s,X_n^M(s)) = B_n(t,s,X_n(s)),$$

$$C_n^M(t,s,X_n^M(s)) = C_n(t,s,X_n(s)),\quad n=1,2,\ldots,$$

i analogno za f, a, b, c, A, B i C. Po teoremi o lokalnoj jedinstvenosti rešenja (teorema i dokaz nalaze se u [Berger, 1977.]), na tom intervalu su rešenja X_n^M i X^M skoro izvesno jednaka sa rešenjima X_n i X respektivno. Dakle, niz $\{X_n, n=1,2,\ldots\}$ konvergira skoro izvesno, uniformno po t, $t \in [0, \tau^M]$, ka rešenju X kad $n \to \infty$. U radu [Berger, 1977.] dokazano je da je

$$\lim_{M\to\infty} P\{\tau^M = T\} = 1,$$

pa niz $\{X_n, n=1,2,\ldots\}$ konvergira skoro izvesno, uniformno po t, $t \in [0,T]$, ka rešenju X kad $n \to \infty$.

QED

<u>Primedba 4.1.</u> Teoreme 4.2. i 4.3. mogu se dokazati i ako su koeficijenti SIDJ (4.1) i (4.2) slučajne funkcije merljive u odnosu na σ-polja svojih domena. Pored toga, $a(t,x,\omega)$, $A(t,x,\omega)$, $a_n(t,x,\omega)$ i $A_n(t,x,\omega)$, $n=1,2,\ldots$, moraju biti $\mathcal{F}_t$-metljive za svako x, a $b(t,s,x,\omega)$, $B(t,s,x,\omega)$, $c(t,s,x,\omega)$, $C(t,s,x,\omega)$, $b_n(t,s,x,\omega)$, $B_n(t,s,x,\omega)$, $c_n(t,s,x,\omega)$ i $C_n(t,s,x,\omega)$, $n=1,2,\ldots$, moraju biti $\mathcal{F}_s$-merljive za svako (t,x). Uslovi (4.2), (4.3) i (4.7) moraju važiti skoro izvesno.

Napomenimo da se SIDJ (4.1), za posebne vrednosti svojih koeficijenata, svodi na SDJ (3.3).

Pošto je SIDJ (4.1) u neku ruku linearna jednačina, moguće je bilo napraviti uopštenje ove jednačine. U radu [Stojanov, Gaidov, 1981.] razmatrana je nelinearna SIDJ oblika

$$(4.11) \qquad X(t) = X(o) +$$

$$+ \int_0^t \phi[s, a(s,X(s)), \int_0^s b(s,u,X(u))du, \int_0^s c(s,u,X(u))dW(u)]ds +$$

$$+ \int_0^t \Psi[s, A(s,X(s)), \int_0^s B(s,u,X(u))du, \int_0^s C(s,u,X(u))dW(u)]dW(s),$$

gde su funkcije

$$\phi : [o,T] \times R^d \times R^d \times R^d \longrightarrow R^d, \qquad \Psi: [o,T] \times R^d \times R^d \times R^d \longrightarrow R^d \otimes R^m,$$

merljive u odnosu na σ-polja svojih domena. Pretpostavlja se da svi integrali, Lesbegueovi i Itoovi, postoje i da, pored ranije navedenih uslova za jednačinu (4.1), funkcije ϕ i Ψ ispunjavaju uniformni Lipschiztov uslov i uslov ograničenog rasta, to jest, postoji konstanta $K > o$, tako da je za sve $t \in [o,T]$ i (x_1,x_2,x_3), $(x_1',x_2',x_3') \in R^d \times R^d \times R^d$,

$$\|\phi(t,x_1,x_2,x_3) - \phi(t,x_1',x_2',x_3')\| \leq K(\|x_1-x_1'\| + \|x_2-x_2'\| + \|x_3-x_3'\|),$$

$$\|\phi(t,x_1,x_2,x_3)\|^2 \leq K^2(1 + \|x_1\|^2 + \|x_2\|^2 + \|x_3\|^2).$$

Isto se pretpostavlja i za funkciju Ψ. Pod ovim uslovima postoji skoro izvesno jedinstveno rešenje SIDJ (4.11).

Granična teorema za niz SIDJ tipa (4.11)

$$X_n(t) = X_n(o) + \int_o^t \phi_n(\ldots)ds + \int_o^t \Psi_n(\ldots)dW(s), \quad n=1,2,\ldots,$$

mogla bi se iskazati kao teorema 4.2., samo uslov (4.7) treba proširiti sa

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sup_{(t,x_1,x_2,x_3)\in\Pi_1'} \{\|\phi(t,x_1,x_2,x_3) - \phi_n(t,x_1,x_2,x_3)\| +$$

$$+ \|\Psi(t,x_1,x_2,x_3) - \Psi_n(t,x_1,x_2,x_3)\|\} < \infty ,$$

gde je $\Pi_1 = \{(t,x_1,x_2,x_3) : t\in[o,T], x_1,x_2,x_3 \in R^d\}$. Isto važi i za teoremu 4.3. . Dokaze ovih teorema ćemo izostaviti, jer su slični dokazima teorema 4.2. i 4.3. .

Za SIDJ (4.1) i (4.11) moguće je formirati Z-algoritme amalogne Z-algoritmu za SDJ (3.3). Na primer, Z-algoritam za SIDJ (4.1) je definisan odredjujućim nizom

$$\{f_n(t), a_n(t,x), b_n(t,s,x), c_n(t,s,x), A_n(t,x), B_n(t,s,x),$$

$$C_n(t,s,x), n=1,2,\ldots\},$$

$(t,s)\in J$, $x\in R^d$, i Wienerovim procesom W, tako da se (n+1)-aproksimacija rešenja SIDJ (4.1) dobija kao rešenje SIDJ

$$X_{n+1}(t) = f_n(t) + \int_o^t [a_n(s,X_{n+1}(s)) + \int_o^s b_n(s,u,X_{n+1}(u))du +$$

$$+ \int_o^s c_n(s,u,X_{n+1}(u))dW(u)]ds + \int_o^t [A_n(s,X_{n+1}(s)) +$$

$$+\int_0^s B_n(s,u,X_{n+1}(u))du + \int_0^s C_n(s,u,X_{n+1}(u))dW(u)\Big]dW(s).$$

Svrha ovakve aproksimacije je da se praktično nerešiva SIDJ (4.1) približno reši pomoću SIDJ jednostavnijeg oblika. Nalaženje konkretnih Z-algoritama koji ovo omogućavaju, moglo bi biti predmet daljih istraživanja. Napomenimo da Z-algoritam postoji pod pretpostavkama teoreme 4.2. .

Neki specijalni oblici SIDJ (4.11) razmatrani su u radovima [Stojanov, Bainov,1973.] i [Stojanov, 1973.] , radi formiranja jedne metode usrednjenja za te SIDJ, analogne metodi usrednjenja za obične integrodiferencijalne jednačine izložene u [Filatov, 1971.]. Metodom usrednjenja se SIDJ svodi na SDJ tipa (2.1). Ako bi se nekim Z-algoritmom ona dalje mogla približno rešiti pomoću linearnih SDJ, posredno bi dobili približno rešenje polazne SIDJ. Nije teško dobiti stednje kvadratnu ocenu ukupne greške ovakve aproksimacije, pošto je u radu [Stojanov, Bainov, 1973.] data srednje kvadratna ocena greške aproksimacije metodom usrednjenja.

Granične teoreme iz ovog poglavlja mogle bi se iskazati i za klasu slučajnih diferencijalnih-diferencnih jednačina oblika

$$dX(t) = f(t,X(t),X(t-\alpha_1))dt + g(t,X(t),X(t-\alpha_2))dW(t),$$

$$t \geqslant 0, \quad \alpha_1 = \text{const} > 0, \quad \alpha_2 = \text{const} > 0,$$

sa početnim uslovom $X(t) = \phi(t)$ skoro izvesno, gde je $\phi(t)$ neprekidan u realizaciji slučajni proces definisan na $[-\max\{\alpha_1, \alpha_2\}, 0]$.

Ova klasa jednačina razmatrana je u radu [Zhang, Padgett, 1984.]. Umesto Lipschitzovog uslova za funkcije f i g, koristi se znatno opštiji uslov, takozvani ograničen slučajni integralni kontraktor.

5. GRANIČNE TEOREME ZA SLUČAJNE DIFERENCIJALNE JEDNAČINE PO WIENEROVOM PROCESU I POISSONOVOJ MERI — SKORO IZVESNA KONVERGENCIJA

U ovom delu razmatraju se granične teoreme za niz slučajnih diferencijalnih jednačina koje, pored Lesbegueovih i Itoovih integrala, sadrže i slučajne integrale po Poissonovoj meri. Zbog toga ćemo u kratkim crtama opisati ovaj tip integrala i navesti neke njegove osobine, neophodne za dokaze graničnih teorema. Kao i ranije, sva razmatranja su na istom prostoru verovatnoća $(\Omega,\mathcal{F},P)$.

Uvodni pojmovi

Neka je $(X(t),\ t\in[o,T])$ separabilan, saglasan sa familijom $(\mathcal{F}_t, t\in[o,T])$, neprekidan u verovatnoći i s nezavisnim priraštajima slučajni proces koji uzima vrednosti u R^d. Označimo sa D zatvoren podskup iz R^d koji ne sadrži koordinatni početak, a sa $\mathcal{B}_D$ σ-algebru Borelovih skupova iz D. Za svako $A\in\mathcal{B}_D$ neka je $\nu(t,A)$, $\nu(t,A)=\nu([o,t),A)$, broj tačaka iz intervala $[o,t)$ za koje je $X(t+o)-X(t-o)\in A$. Može se dokazati (dokaz u [Gihman, Skorohod, 1975.]) da je $\nu(t,A)$ Poissonov proces sa parametrom $\Pi(t,A)$, saglasan sa familijom $(\mathcal{F}_t, t\in[o,T])$. Specijalno, ako je $\Pi(t,A)=t\Pi(A)$, onda je to homogen, neprekidan u verovatnoći skokovit slučajni proces sa nezavisnim priraštajima i raspodelom

$$P\left\{\mathcal{V}(t,A) - \mathcal{V}(s,A) = k\right\} = \frac{(\Pi(A))^k (t-s)^k}{k!} e^{-\Pi(A)(t-s)},$$

$o \leqslant s \leqslant t \leqslant T$, $k=0,1,\dots,$

gde je $t\cdot\Pi(A) = E\{\mathcal{V}(t,A)\}$. Za svako $t \in [0,T]$ i uzajamno disjunktne skupove $A_1, A_2, \dots, A_k$ iz $\mathcal{B}_D$, slučajne promenljive $\mathcal{V}(t,A_1), \mathcal{V}(t,A_2), \dots, \mathcal{V}(t,A_k)$ su uzajamno nezavisne. Ako je $k=1,2,\dots,$ onda je

$$\mathcal{V}(t,\sum_{k=1}^{\infty} A_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{V}(t,A_k) \quad \text{skoro izvesno.}$$

Iz ovih osobina slučajnog procesa $\mathcal{V}(t,A)$ formira se na prostoru $([0,T]\times R^d, \mathcal{B}_{[0,T]} \otimes \mathcal{B}^d)$ slučajna Poissonova mera $\mathcal{V}(\Delta,A)$, gde je $\Delta = [t,t+\Delta t) \subset [0,T]$ i $A \in \mathcal{B}^d$. Pošto je

$$E\{\mathcal{V}(\Delta,A)\} = |\Delta t|\cdot\Pi(A),$$

lako se dokazuje da je $\Pi(A)$ σ-konačna mera na prostoru $(R^d, \mathcal{B}^d)$. Označimo sa $m(\Delta,A)$,

$$m(\Delta,A) = \mathcal{V}(\Delta,A) - |\Delta t|\cdot\Pi(A),$$

slučajnu funkciju skupova koja ima osobine $E\{m(\Delta,A)\} = 0$ i $E\{m(\Delta,A)\cdot m(\Delta,B)\} = |\Delta t|\cdot\Pi(A\cap B)$, $A,B\in\mathcal{B}^d$, i koja se naziva centrirana Poissonova mera.

Na isti način kao kod slučajnog integrala Itoa po Wienerovom procesu, pomoću stepenastih funkcija, uvodi se pojam slučajnog integrala slučajne funkcije po centriranoj Poissonovoj meri. Familija $(\mathcal{F}_t, t \in [0,T])$ je generisana sa $\mathcal{V}(t,A)$ u smislu da za svako $A \in \mathcal{B}^d$, $\mathcal{V}([0,t),A)$ bude $\mathcal{F}_t$-

merljivo i da slučajne promenljive $\mathcal{V}([t,t+s),A)$, $s>o$, $s+t\leqslant T$, ne zavise od $\mathcal{F}_t$.

Neka je merljiva slučajna funkcija $q(t,u,\omega)$, definisana na $[o,T]\times R^d\times\Omega$ sa vrednostima u R^d, saglasna sa familijom $(\mathcal{F}_t, t\in[o,T])$ i takva da je Lesbegueov integral

$$\int_o^T\int_{R^d}\|q(t,u,\omega)\|^2\Pi(du)dt<\infty \quad \text{skoro izvesno.}$$

Označimo klasu ovih funkcija sa $M_2(\Pi)$. Ako je $q\in M_2(\Pi)$ stepenasta funkcija, to jest, $q(t,u,\omega)=q(t_k,u,\omega)$ za $t\in[t_k,t_{k+1})$, $k=o,1,\ldots,n-1$, $o=t_o\leqslant t_1\ \ldots\ \leqslant t_n=T$, tada je odredjeni slučajni integral ove funkcije po centriranoj Poissonovoj meri slučajna promenljiva

$$\int_o^T\int_{R^d}q(t,u,\omega)m(dt,du)=\sum_{k=o}^{n-1}\int_{R^d}q(t_k,u,\omega)m([t_k,t_{k+1}),du).$$

Analogno definiciji 2.2. , slučajni integral proizvoljne slučajne funkcije $q\in M_2(\Pi)$ definiše se kao slučajna promenljiva

$$\int_o^T\int_{R^d}q(t,u,\omega)m(dt,du)\ \underline{\underline{\text{def}}}$$

$$\lim_{k\to\infty}\int_o^T\int_{R^d}q_k(t,u,\omega)m(dt,du)\quad \text{u verovatnoći,}$$

gde su $q_k\in M_2(\Pi)$ stepenaste funkcije, takve da

$$\int_o^T\int_{R^d}\|q(t,u,\omega)-q_k(t,u,\omega)\|^2\Pi(du)dt\longrightarrow o\quad \text{u verovatnoći kad } k\longrightarrow\infty.$$

Slično, neodredjeni slučajni integral

$$X(t) = \int_0^t \int_{R^d} q(s,u,\omega)m(ds,du)$$

je d-dimenzioni, $\mathcal{F}_t$-merljiv, skoro izvesno neprekidan s desna slučajni proces bez tačaka prekida druge vrste. Ako je

$$\int_0^T \int_{R^d} E\{\|q(s,u)\|^2\}\Pi(du)ds < \infty \quad ,$$

onda je :

- $E\{X(t)\} = 0$;

(5.1) - $E\{\|X(t)\|^2\} = \int_0^t \int_{R^d} E\{\|q(s,u)\|^2\}\Pi(du)ds$;

(5.2) - $E\{\sup_{t\in[0,T]} \|X(t)\|^2\} \leqslant 4\int_0^T \int_{R^d} E\{\|q(s,u)\|^2\}\Pi(du)ds$;

- $(X_t, \mathcal{F}_t)$, $t \in [0,T]$, je martingal.

Uopštenje formule Itoa za slučajni diferencijal po Poissonovoj meri nećemo navoditi zbog složenosti.

Neka su $f(t,x)$ i $G(t,x)$ realne funkcije definisane i merljive na $[0,T] \times R^d$ sa vrednostima u R^d i $R^d \otimes R^m$ respektivno, $q(t,x,u)$ realna funkcija definisana i merljiva na $[0,T] \times R^d \times R^d$ sa vrednostima u R^d, $W = (W(t),\ t \in [0,T])$ m-dimenzioni Wienerov proces i $m(t,A)$ centrirana Poissonova mera na $[0,T] \times R^d$, nezavisna u odnosu na Wienerov proces W. Familija $(\mathcal{F}_t, t \in [0,T])$ generisana je Wienerovim procesom W i Poissonovom merom m, to jest, $\mathcal{F}_t = \sigma\{W(s),\ m(s,A);\ s \leqslant t\}$, kompletirana svim dogadjajima P-mere nula iz $\mathcal{F}$. Neka je još d-dimenzioni slučajni proces $F = (F(t),\ t \in [0,T])$ saglasan sa familijom ($\mathcal{F}_t, t \in [o,T]$).

Definicija 5.1. Jednačina oblika

$$X(t) = F(t) + \int_0^t f(s,X(s))ds + \int_0^t G(s,X(s))dW(s) + \tag{5.3}$$
$$+ \int_0^t \int_{R^d} q(s,X(s),u)m(ds,du), \qquad t \in [o,T],$$

naziva se uopštena slučajna diferencijalna jednačina Itoa.

U buduće ćemo i ovi jednačinu označavati sa SDJ.

Definicija 5.2. d-dimenzioni slučajni proces $X = (X(t), t \in [o,T])$ je strogo rešenje SDJ (5.3), ako :

(i) je saglasan sa familijom ($\mathcal{F}_t, t \in [o,T]$) ;

(ii) $\mathcal{F}_t$-merljivi slučajni procesi $\overline{f}(t,\omega) = f(t,X(t,\omega))$, $\overline{G}(t,\omega) = G(t,X(t,\omega))$ i $\overline{q}(t,u,\omega) = q(t,X(t,\omega),u)$ su takvi da su skoro izvesno konačni integrali

$$\int_0^T \|\overline{f}(t,\omega)\|dt, \quad \int_0^T \|\overline{G}(t,\omega)\|^2 dt \quad \text{i} \quad \int_0^T \int_{R^d} \|\overline{q}(t,u,\omega)\|^2 \Pi(du)dt .$$

(iii) SDJ (5.3) je zadovoljena skoro izvesno za svako $t \in [o,T]$.

Teorema 5.1. (Teorema egzistencije i jedinstvenosti rešenja) Ako postoji konstanta $L > o$, tako da su za svako $t \in [o,T]$ i $x,y \in R^d$ ispunjeni uniformni Lipschitzov uslov

$$\|f(t,x) - f(t,y)\|^2 + \|G(t,x) - G(t,y)\|^2 + \tag{5.4}$$
$$\int_{R^d} \|q(t,x,u) - q(t,y,u)\|^2 \Pi(du) \leqslant L\|x - y\|^2,$$

i uslov ograničenog rasta

$$
(5.5) \qquad \begin{aligned} &\|f(t,x)\|^2 + \|G(t,x)\|^2 + \int_{R^d}\|q(t,x,u)\|^2\Pi(du) \leq \\ &\leq L(1 + \|x\|^2) , \end{aligned}
$$

i ako je $\sup_{t\in[o,T]} E\{\|F(t)\|^2\} < \infty$, tada postoji skoro izvesno jedinstveno rešenje $X = (X(t), t \in [o,T])$ SDJ (5.3), tako da je za svako t, $t \in [o,T]$, $X(t) - F(t)$ skoro izvesno neprekidan i desna slučajni proces.

Dokaz se može naći u [Gihman, Skorohod, 1968.; 1982.].

Jedna teorema egzistencije i jedinstvenosti rešenja sa opštijim uslovima od uslova teoreme 5.1., nalazi se u radu [Kulinič, 1974.].

Granične teoreme

Pretpostavimo da su m-dimenzioni Wienerov proces W i Poissonova mera ν definisani kao ranije, nezavisni medju sobom, i da generišu familiju ($\mathcal{F}_t, t \in [o,T]$). Isto tako, pretpostavimo da svi integrali, obični i slučajni, postoje kao slučajni procesi bez tačaka prekida druge vrste, saglasni sa familijom ($\mathcal{F}_t, t \in [o,T]$). Neka neslučajne realne funkcije

$$f : [o,T] \times R^d \to R^d, \qquad f_n : [o,T] \times R^d \to R^d,$$

$$G : [o,T] \times R^d \to R^d \otimes R^m, \qquad G_n : [o,T] \times R^d \to R^d \otimes R^m,$$

$$q : [o,T] \times R^d \times R^d \to R^d, \qquad q_n : [o,T] \times R^d \times R^d \to R^d,$$

$n=1,2,\dots,$

i d-dimenzioni slučajni procesi $F = (F(t),\ t \in [o,T])$ i $F_n = (F_n(t),\ t \in [o,T])$, $n=1,2,\dots$, ispunjavaju uslove teoreme 5.1. .

Granične teoreme odnose se na skoro izvesnu konvergenciju niza rešenja $X_n = (X_n(t),\ t \in [o,T])$, $n=1,2,\dots$, SDJ

$$X_n(t) = F_n(t) + \int_0^t f_n(s,X_n(s))ds + \int_0^t G_n(s,X_n(s))dW(s) +$$

$$(5.6) \qquad + \int_0^t \int_{R^d} q_n(s,X_n(s),u)m(ds,du), \quad n=1,2,\dots, \quad t \in [o,T],$$

ka rešenju X SDJ (5.3),kad $n \longrightarrow \infty$. Kao u slučaju graničnih teorema za SIDJ, dovoljni uslovi za ovu konvergenciju moraju sadržati izvesnu bliskost niza funkcija f_n, G_n, q_n, $n=1,2,\dots$, sa funkcijama f, G, q respektivno, kao i bliskost niza slučajnih procesa F_n, $n=1,2,\dots$, sa slučajnim procesom F. Prirodno je očekivati da ova bliskost bude strožija nego u slučaju graničnih teorema za konvergenciju u verovatnoći (videti [Gihman, Skorohod, 1968.; 1982.]).

Neka je

$$(5.7) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} E\{\sup_{t\in[o,T]} \|F(t) - F_n(t)\|^2\} < \infty$$

i

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sup_{(t,x)\in S} \{\|f(t,x) - f_n(t,x)\|^2 +$$

$$(5.8) \qquad + \|G(t,x) - G_n(t,x)\|^2 + \int_{R^d} \|q(t,x,u) - q(t,x,u)\|^2 \Pi(du)\} < \infty,$$

gde je $S = \{(t,x) : t \in [o,T],\ x \in R^d\}$.

Teorema 5.2. Ako slučajni procesi F i F_n, $n=1,2,\dots$, i funkcije f, G, q, f_n, G_n i q_n, $n=1,2,\dots$, ispunjavaju uslove teoreme egzistencije i jedinstvenosti rešenja (teorema 5.1.) i uslove (5.7) i (5.8), onda niz rešenja $\{X_n, n=1,2,\dots\}$ SDJ (5.6) konvergira skoro izvesno, uniformno po t, $t\in[0,T]$, rešenju X SDJ (5.3) kad $n\to\infty$.

Dokaz. Označimo sa

$$(5.8)\quad \varepsilon_n = E\Big\{\sup_{t\in[0,T]}\Big[\|f(t,X_n(t))-f_n(t,X_n(t))\|^2+\|G(t,X_n(t)) - G_n(t,X_n(t))\|^2+\int_{R^d}\|q(t,X_n(t),u)-q_n(t,X_n(t),u)\|^2\Pi(du)\Big\},$$

$n=1,2,\dots,$

i

$$(5.9)\quad \delta_n = E\{\sup_{t\in[0,T]}\|F(t)-F_n(t)\|^2\},\quad n=1,2,\dots .$$

Oduzimanjem jednačina (5.3) i (5.6) i dodavanjem nekih sabiraka, dobija se

$$(5.1o)\quad X(t)-X_n(t) = F(t)-F_n(t)+\int_0^t\{[f(s,X(s))-f(s,X_n(s))]+ [f(s,X_n(s))-f_n(s,X_n(s))]\}ds +\int_0^t\{[G(s,X(s)) - G(s,X_n(s))]+[G(s,X_n(s))-G_n(s,X_n(s))]\}dW(s) + \int_0^t\int_{R^d}\{[q(s,X(s),u)-q(s,X_n(s),u)]+[q(s,X_n(s),u) - q_n(s,X_n(s),u)]\}m(ds,du) .$$

Srednje kvadratnu ocenu razlike $X(t) - X_n(t)$ dobićemo ocenjivanjem svakog od ovih sabiraka. Pošto su ranije ocenjivani Lesbegueov i Itoov integral, sada ćemo oceniti samo integrale po Poissonovoj meri.

Iz (5.1) i (5.4) sledi

$$E\{\| \int_0^t \int_{R^d} [q(s,X(s),u) - q(s,X_n(s),u)] m(ds,du) \|^2\} \leq$$

$$\leq \int_0^t \int_{R^d} E\{\|q(s,X(s),u) - q(s,X_n(s),u)\|^2\} \Pi(du)ds \leq$$

$$\leq L \int_0^t E\{\|X(s) - X_n(s)\|^2\} ds,$$

a iz (5.1) i (5.8) se dobija

$$E\{\| \int_0^t \int_{R^d} [q(s,X_n(s),u) - q_n(s,X_n(s),u)] m(ds,su) \|^2\} \leq$$

$$\leq \int_0^t \int_{R^d} E\{\|q(s,X_n(s),u) - q_n(s,X_n(s),u)\|^2\} \Pi(du)ds \leq \varepsilon_n t.$$

Ako primenimo Cauchy-Schwartzovu nejednakost na (5.1o), koristimo oznake (5.8) i (5.9), kao i prethodne ocene, imamo

$$E\{\|X(t) - X_n(t)\|^2\} \leq$$

$$\leq 7 [\delta_n + T(T+2)\varepsilon_n + (T+2)L \int_0^t E\{\|X(s) - X_n(s)\|^2\} ds.$$

Primenom Gronwall-Bellmanove leme (lema 2.1.) na zadnju nejednakost, sledi ocena

$$E\{\|X(t) - X_n(t)\|^2\} \leq 7\,[\,\delta_n + T(T+2)\varepsilon_n]\cdot e^{7(T+2)Lt}.$$

Konačnu srednje kvadratnu ocenu razlike $X(t) - X_n(t)$ dobićemo iz ove nejednakosti i iz ranije navedenih osobina slučajnih integrala, i to iz osobine (viii) teoreme 2.1. za slučajni integral Itoa, i iz osobine (5.2) za slučajni integral po Poissonovoj meri. Tako je konačno

$$E\{\sup_{t\in[0,T]}\|X(t) - X_n(t)\|^2\} \leq 7\,[\,\delta_n + T(T+8)\varepsilon_n +$$

$$+ (T+8)L\int_0^T E\{\|X(t) - X_n(t)\|^2\}dt \leq \alpha\delta_n + \beta\varepsilon_n\,,$$

gde su α i β odgovarajuće konstante.

Redovi $\sum_{n=1}^{\infty}\delta_n$ i $\sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon_n$ konvergiraju zbog uslova (5.7) i (5.8), pa se primenom Čebiševljeve nejednakosti dobija

$$\sum_{n=1}^{\infty} P\{\sup_{t\in[0,T]}\|X(t) - X_n(t)\| \geq \varepsilon\} \leq$$

$$\frac{1}{\varepsilon^2}\sum_{n=1}^{\infty} E\{\sup_{t\in[0,T]}\|X(t) - X_n(t)\|^2\} \leq \frac{\alpha}{\varepsilon^2}\sum_{n=1}^{\infty}\delta_n + \frac{\beta}{\varepsilon^2}\sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon_n < \infty.$$

Po Borel-Cantellijevoj lemi i Weierstrassovoj teoremi uniformne konvergencije sledi da niz rešenja $\{X_n,\ n=1,2,\ldots\}$ SDJ (5.6) konvergira skoro izvesno, uniformno po t, $t\in[0,T]$, rešenju X SDJ (5.3) kad $n\longrightarrow\infty$, čime je teorema dokazana.

QED

Uslovi teoreme 5.2. mogu se oslabiti na sledeći način. Umesto uniformnog Lipschitzovog uslova (5.4), neka funkcije f, G, q i f_n, G_n, q_n, n=1,2,..., ispunjavaju lokalni Lipschitzpv uslov, to jest, neka za svaki pozitivan broj M postoji konstanta L_M, tako da je uslov (5.4) ispunjen sa tom konstantom za svako $t\in[0,T]$ i sve $x,y\in R^d$, za koje je $\|x\|\leq M$ i $\|y\|\leq M$. Za slučajne procese F i F_n, n= =1,2,..., ne mora da važi $\sup_{t\in[0,T]} E\{\|F(t)\|^2\}<\infty$ i $\sup_{t\in[0,T]} E\{\|F_n(t)\|^2\}<\infty$, n=1,2,... . Uslov ograničenog rasta ostaje nepromenjen.

<u>Teorema 5.3.</u> Ako funkcije f, G, q, f_n, G_n i q_n, n=1,2,..., i slučajni procesi F i F_n, n=1,2,.., ispunjavaju prethodno opisane uslove i ako važi uslov (5.8) sa S', $S'=\{(t,x) : t\in[0,T], \|x\|\leq M\}$, umesto S, onda niz rešenja $\{X_n, n=1,2,...\}$ SDJ (5.6) konvergira skoro izvesno, uniformno po t, $t\in[0,T]$, rešenju X SDJ (5.3) kad $n\longrightarrow\infty$.

<u>Dokaz.</u> Za proizvoljan pozitivan broj M, neka je

$$\Psi_M(x) = \begin{cases} x & \text{ako je } \|x\|<M \\ M\operatorname{sgn}x & \text{ako je } \|x\|\geq M \end{cases}$$

$$f_n^M(t,x) = f_n(t,\Psi_M(x)),\quad G_n^M(t,x) = G_n(t,\Psi_M(x)),$$

$$q_n^M(t,x,u) = q_n(t,\Psi_M(x),u),\quad F_n^M(t) = \Psi_M(F_n(t)),\quad n=1,2,...,$$

i analogno za f, G, q i F. Označimo sa $X_n^M(t)$ rešenje SDJ

$$\begin{aligned} X_n^M(t) &= F_n^M(t) + \int_0^t f_n^M(s,X_n^M(s))ds + \int_0^t G_n^M(s,X_n^M(s))dW(s) + \\ &+ \int_0^t\int_{R^d} q_n^M(s,X_n^M(s),u)m(ds,du) \end{aligned} \tag{5.11}$$

i sa $X^M(t)$ rešenje odgovarajuće SDJ.

Neka su

$$\sigma_n^M = \begin{cases} \inf\{t : \|X_n^M(t)\| > M\} \\ T \quad \text{ako je} \quad \|X_n^M(t)\| \leq M \quad \text{za svako } t \in [0,T] \end{cases}$$

i

$$\vartheta_n^M = \begin{cases} \inf\{t : \|X^M(t)\| > M\} \\ T \quad \text{ako je} \quad \|X^M(t)\| \leq M \quad \text{za svako } t \in [0,T] \end{cases}$$

vremena Markova u odnosu na familiju ($\mathcal{F}_t, t \in [0,T]$). Sada su na intervalu $[0,\tau_n^M]$, gde je $\tau_n^M = \inf\{\sigma_n^M, \vartheta_n^M\}$, ispunjeni uslovi teoreme egzistencije i jedinstvenosti rešenja SDJ (5.11) i odgovarajuće SDJ za $X^M(t)$.

Za svako t, $t \in [0,T]$, može se naći dovoljno veliki broj M, tako da je za svako $n=1,2,\ldots$, $\tau_n^M > t$ skoro izvesno. Pošto je W skoro izvesno neprekidan slučajni proces, a Poissonova mera ν skoro izvesno neprekidna s desna, to je familija ($\mathcal{F}_t, t \in [0,T]$), generisana sa W i ν , neprekidna s desna. Po lemi 1.1. postoji vreme Markova τ^M, $\tau^M = \inf\limits_n \tau_n^M$, tako da su na intervalu $[0,\tau^M]$ ispunjeni uslovi teoreme 5.2. , pa niz rešenja $\{X_n^M, n=1,2,\ldots\}$ konvergira skoro izvesno, uniformno po t, $t \in [0,\tau^M]$, rešenju X^M kad $n \to \infty$. Kako je na tom intervalu

$$f_n^M(t,X_n^M(t)) = f_n(t,X_n(t)), \qquad G_n^M(t,X_n^M(t)) = G_n(t,X_n(t)),$$

$$q_n^M(t,X_n^M(t),u) = q_n(t,X_n(t),u), \qquad F_n^M(t) = F_n(t),$$

i analogno za f, G, q i F, to po teoremi o lokalnoj jedinstvenosti rešenja (videti u [Gihman, Skorohod, 1982.]), sledi da niz rešenja $\{X_n, n=1,2,\dots\}$ konvergira skoro izvesno ka rešenju X kad $n \to \infty$ za svako $t \in [o,\tau^M]$. Kao u teoremi 2.6. , $\tau^M \to T$ skoro izvesno kad $M \to \infty$ (dokaz u [Gihman, Skorohod, 1982.]), pa dakle, niz rešenja $\{X_n, n=1,2,\dots\}$ SDJ (5.6) konvergira skoro izvesno, uniformno po t, $t \in [o,T]$, ka rešenju X SDJ (5.3) kad $n \to \infty$.

QED

Granični problemi opisani teoremama 5.2. i 5.3. mogu se proširiti na klasu SDJ sa slučajnim koeficijentima. Dakle, treba dati uslove pod kojima niz rešenja SDJ

$$X_n(t) = F_n(t) + \int_o^t f_n(\omega,s,X_n(s))ds + \int_o^t G_n(\omega,s,X_n(s))dW(s) +$$

$$+ \int_o^t \int_{R^d} q_n(\omega,s,X_n(s),u)m(ds,du), \quad t \in [o,T], \quad n=1,2,\dots, \tag{5.12}$$

skoro izvesno konvergira rešenju SDJ

$$X(t) = F(t) + \int_o^t f(\omega,s,X_n(s))ds + \int_o^t G(\omega,s,X_n(s))dW(s) +$$

$$+ \int_o^t \int_{R^d} q(\omega,s,X_n(s),u)m(ds,du), \quad t \in [o,T], \tag{5.13}$$

kad $n \to \infty$.

Pre svega, navedimo uslove egzistencije i jedinstvenosti rešenja ovih SDJ. Označimo sa $\mathcal{Q}$ predskazljivu σ-algebru, to jest, σ-algebru podskupova iz $\Omega \times [o,T]$ u odnosu na koju su merljivi svi saglasni sa familijom ($\mathcal{F}_t, t \in [o,T]$) neprekidni slučajni procesi.

Pretpostavimo da su slučajne funkcije f, G, f_n i G_n, n=1,2,..., merljive u odnosu na σ-polje $\mathcal{F}\otimes\mathcal{B}_{[0,T]}\otimes\mathcal{B}^d$, a q i q_n, n=1,2,..., merljive u odnosu na σ-polje $\mathcal{F}\otimes\mathcal{B}_{[0,T]}\otimes\mathcal{B}^d\otimes\mathcal{B}^d$. Za fiksirano x i u, one su $\mathcal{Q}$-merljive. Slučajni procesi F i F_n, n=1,2,..., su takodje $\mathcal{Q}$-merljivi. Svi integrali postoje kao slučajni procesi saglasni sa familijom $(\mathcal{F}_t, t\in[0,T])$. Ako je $\sup_{t\in[0,T]} E\{\|F(t)\|^2\}<\infty$ i $\sup_{t\in[0,T]} E\{\|F_n(t)\|^2\}<\infty$, n= =1,2,..., i ako važe uslovi (5.4) i (5.5) skoro izvesno, onda postoje skoro izvesno jedinstvena rešenja SDJ (5,12) i (5.13) (dokaz u [Gihman, Skorohod, 1982.]).

Teorema 5.4. Neka slučajni procesi F i F_n, n=1,2,..., i slučajne funkcije f, G, q, f_n, G_n i q_n, n=1,2,..., ispunjavaju prethodne uslove. Ako važi uslov (5.7) i ako važi uslov (5.8) skoro izvesno, onda niz rešenja $\{X_n, n=1,2,...\}$ SDJ (5.12) konvergira skoro izvesno, uniformno po t, $t\in[0,T]$, rešenju X SDJ (5.13) kad $n\longrightarrow\infty$.

Dokaz je sličan dokazu teoreme 5.2. , pa će biti izostavljen. Na isti način se može iskazati teorema analogna teoremi 5.3. .

Razmotrimo sada granični problem kada su koeficijenti f_n, G_n, q_n, F_n, n=1,2,..., i f, G, q, F jednačina

$$X_n(t) = F_n(t) + \int_0^t f_n(s,X_n(\cdot))ds + \int_0^t G_n(s,X_n(\cdot))dW(s) + \tag{5.14}$$
$$+ \int_0^t\int_{R^d} q_n(s,X_n(\cdot),u)m(ds,du)$$

i

$$(5.15)\qquad \begin{aligned} X(t) &= F(t) + \int_0^t f(s,X(\cdot))ds + \int_0^t G(s,X(\cdot))dW(s) + \\ &+ \int_0^t \int_{R^d} q(s,X(\cdot),u)m(ds,du), \end{aligned}$$

funkcionali koji zavise od prošlosti slučajnih procesa X_n, $n=1,2,\dots$, i X respektivno. Dakle, koeficijenti SDJ (5.14) moraju biti $\mathcal{F}_t^{X_n}$-merljivi, gde je $\mathcal{F}_t^{X_n} = \sigma\{W(s), m(ds,du), X_n(s);\ s \leq t\}$ kompletirana svim dogadjajima P-mere nula iz $\mathcal{F}$, a koeficijenti SDJ (5.15) moraju biti $\mathcal{F}_t^X$-merljivi, gde je $\mathcal{F}_t^X$ odgovarajuća σ-algebra. Familija $(\mathcal{F}_t, t \in [0,T])$ je definisana kao ranije i $\mathcal{F}_t^X \subset \mathcal{F}_t$, $n=1,2,\dots$, kao i $\mathcal{F}_t^X \subset \mathcal{F}_t$.

Glavni rezultati u vezi egzistencije i jedinstvenosti rešenja za ovaj tip SDJ razmatrani su u radu [Ito, Nisio, 1964.]. Označimo sa D_T prostor svih realnih funkcija definisanih na $[0,T]$ sa vrednostima u R^d, bez tačaka prekida druge vrste i neprekidnih s desna, a u tački T s leva. Na tom prostoru definiše se σ-algebra $\mathcal{G}_T$ generisana cilindričnim skupovima, i metrika $\rho_D(x(\cdot),y(\cdot))$, tako da se $\mathcal{G}_T$ poklapa u ovoj metrici sa σ-algebrom Borelovih skupova na D_T. Detaljno obrazloženje o ovome može se naći u [Ito, Nisio, 1964.] i u [Gihman, Skorohod, 1977.]. Označimo još sa $\mathcal{G}_t$ odgovarajuću σ-algebru definisanu na D_t, $t \in [0,T]$.

Neka su funkcionali f i f_n, $n=1,2,\dots$, i G i G_n, $n=1,2,\dots$, definisani na $[0,T] \times D_T$ sa vrednostima u R^d i $R^d \otimes R^d$ respektivno. Neka su funkcionali q i q_n, $n=1,2,\dots$, definisani na $[0,T] \times D_T \times R^d$ sa vrednostima u R^d, $\mathcal{B}_T \otimes \mathcal{G}_T \otimes \mathcal{B}^d$-merljivi i za svako t, $t \in [0,T]$, $\mathcal{G}_T \otimes \mathcal{B}^d$-merljivi. F i F_n, $n=1,2,\dots$, neka pripadaju D_T skoro izvesno. Pretpostavimo takodje da svi integrali iz SDJ (5.14) i (5.15) postoje kao $\mathcal{F}_t$-merljivi slučajni procesi bez tačaka prekida druge vrste. Po teoremi egzistencije i jedinstvenosti rešenja (dokaz u [Ito, Nisio, 1964.] i u [Gihman, Skorohod, 1982.]), postoji skoro izvesno jedinstveno rešenje SDJ (5.15) ako je $E\{\|F\|_T^2\} < \infty$ i ako funkcionali f, G i q ispunjavaju Lipschitzov uslov i uslov ograničenog rasta, to jest, ako za svaki pozitivan broj M postoje konstante $L > o$ i $L_M > o$, tako da za svako t, $t \in [o,T]$, i sve $x,y \in D_T$ za koje je $\|x\|_T \leq M$ i $\|y_T\| \leq M$, važi

$$\|f(t,x(\cdot)) - f(t,y(\cdot))\|^2 + \|G(t,x(\cdot)) - G(t,y(\cdot)\|^2 +$$
$$+ \int_{R^d} \|q(t,x(\cdot),u) - q(t,y(\cdot),u)\|^2 \Pi(du) \leq$$
$$\leq L_M \|x(\cdot) - y(\cdot)\|_t^2$$

i

$$\|f(t,x(\cdot))\|^2 + \|G(t,x(\cdot)\|^2 + \int_{R^d} \|q(t,x(\cdot),u)\|^2 \Pi(du) \leq$$
$$\leq L(1 + \|x(\cdot)\|_t^2),$$

gde je $\|x(\cdot)\|_t = \sup_{s:s \leq t} \|x(s)\|$ i $\|x\|_T = \|x(\cdot)\|_T$. Isti uslovi, naravno, moraju važiti i za SDJ (5.14).

<u>Teorema 5.5.</u> Neka funkcionali f, G, q i f_n, G_n, q_n, n=1,2,..., i slučajni procesi F i F_n, n=1,2,..., ispunjavaju uslove teoreme egzistencije i jedinstvenosti rešenja. Ako još važi

$$(5.16) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} E\{\|F - F_n\|_T^2\} < \infty$$

i

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sup_{t\in[o,T]} \sup_{\|x\|_t\leq M} \{\| f(t,x(\cdot)) - f_n(t,x(\cdot))\|^2 +$$

(5.17) $$+ \| G(t,x(\cdot)) - G_n(t,x(\cdot))\|^2 + \int_{R^d} \| q(t,x(\cdot),u) -$$

$$- q_n(t,x(\cdot),u)\|^2 \Pi(du) < \infty ,$$

onda niz rešenja SDJ (5.14) konvergira skoro izvesno, uniformno po t, $t\in[o,T]$, rešenju X SDJ (5.15) kad $n \longrightarrow \infty$.

<u>Dokaz.</u> Dokaz je analogan dokazu teoreme 5.2., pa će biti dat skraćeno. Označimo sa

$$\mathcal{E}_n = E\{ \sup_{t\in[o,T]} \sup_{\|x\|_T\leq M} [\| f(t,X_n(\cdot)) - f_n(t,X_n(\cdot))\|^2 +$$

$$+ \|G(t,X_n(\cdot)) - G_n(t,X_n(\cdot))\|^2 + \int_{R^d} \| q(t,X_n(\cdot),u) -$$

$$- q_n(t,X_n(\cdot),u)\|^2 \Pi(du)] \} \quad n=1,2,\dots .$$

Oduzimanjem SDJ (5.14) i (5.15) i ponavljanjem postupka za srednje kvadratnu ocenu dobija se

$$E\{\|X(\cdot) - X_n(\cdot)\|_t^2\} \leq E\{\|F - F_n\|_t^2\} + T(T+2)\mathcal{E}_n +$$

$$+ (T+2)L_M \int_o^t E\{\|X(\cdot) - X_n(\cdot)\|_s^2\}ds, \quad t\in[o,T].$$

Ako se na ovu nejednakost primeni Gronwall-Bellmanova lema (lema 3.1.), sledi ocena

$$E\{\|X(\cdot) - X_n(\cdot)\|_t^2\} \leqslant$$

(5.18)
$$\leqslant 7\,[\,E\{\|F-F_n\|_T^2 + T(T+2)\varepsilon_n\,]\cdot e^{7(T+2)L_M t}\;.$$

Sada je

$$E\{\|X(\cdot) - X_n(\cdot)\|_T^2\} \leqslant 7\,[\,E\{\|F - F_n\|_T^2 + T(T+8)\varepsilon_n +$$

$$+ (T+8)L_M \int_0^T E\{\|X(\cdot) - X_n(\cdot)\|_s^2\}ds\,]\;,$$

pa se iz (5.18) dobija

$$E\{\|X(\cdot) - X_n(\cdot)\|_T^2\} \leqslant \alpha E\{\|F-F_n\|_T^2\} + \beta\varepsilon_n\;, \quad n=1,2,\ldots,$$

gde su α i β odgovarajuće konstante. Iz Čebiševljeve nejednakosti i uslova (5.16) i (5.17) sledi da red

$$\sum_{n=1}^{\infty} P\{\|X(\cdot) - X_n(\cdot)\|_T \geqslant \varepsilon\}$$

konvergira uniformno po t, $t\in[o,T]$, pa po Borel-Cantellijevoj lemi i Weierstrassovoj teoremi zaključujemo da niz rešenja $\{X_n,\ n=1,2,\ldots\}$ SDJ (5.14) konvergira skoro izvesno, uniformno po t, $t\in[o,T]$, rešenju X SDJ (5.15) kad $n\longrightarrow\infty$.

QED

Za ovaj tip SDJ može se dokazati granična teorema koja odgovara teoremi 5.3. . U tom slučaju treba definisati funkcionale

$$\Psi_M(t,x(\cdot)) = \begin{cases} x(\cdot) & \text{za } \|x\|_t < M \\ M\,\mathrm{sgn}\,x(\tau^M) & \text{za } \tau^M = \inf\{s : s\leq t,\ \|x(s)\|\geqslant M\}, \end{cases}$$

$$f^M(t,x(\cdot)) = f(t,\Psi_M(t,x(\cdot))), \quad G^M(t,x(\cdot)) = G(t,\Psi_M(t,x(\cdot))),$$

$$q^M(t,x(\cdot),u) = q(t,\Psi_M(t,x(\cdot)),u), \quad F^M(t) = \Psi_M(t,F(\cdot)),$$

i analogno za f_n, G_n, q_n, F_n, $n=1,2,\dots$, a zatim primeniti isti postupak kao u dokazu teoreme 5.3. .

Isto tako se može dokazati teorema analogna teoremi 5.4. . Za slučajne funkcionale $f(\omega,t,x(\cdot))$, $G(\omega,t,x(\cdot))$, $q(\omega,t,x(\cdot),u)$, $f_n(\omega,t,x(\cdot))$, $G_n(\omega,t,x(\cdot))$, $q_n(\omega,t,x(\cdot),u)$, $n=1,2,\dots$, zahteva se da budu predskazljivi slučajni procesi za fiksirano $x(\cdot)\in D_T$ i $u\in R^d$, a da lokalni Lipschitzov uslov i uslov ograničenog rasta, kao i uslov (5.17), važe skoro izvesno.

Napomenimo da uslovi pod kojima su iskazane granične teoreme iz ovog dela obezbedjuju egzistenciju Z-algoritama za približno analitičko rešavanje ovih SDJ. Pošto se neki tipovi SDJ po Wienerovom procesu i Poissonovoj meri mogu efektivno rešavati, na primer linearne SDJ, to se može dalje raditi na formiranju posebnih Z-algoritama u kojima su odredjujući nizovi linearne funkcije po x. Isto tako, moglo bi se razmišljati o uopštavanju ovih rezultata na SDJ po neprekidnim martingalima i martingalnim merama, kao i na SDJ u slučajnom polju.

INDEKS POJMOVA

L I T E R A T U R A

G. Adomian. Stochastic systems. New York, Academic Press, 1983.

L. Arnold. Stochastic differential equations: theory and applications. John Wiley & Sons, 1973.

M. Barlow, E. Perkins. One-dimensional stochastic differential equations involving a singular increasing process. Stochastics, vol. 12,(1984), 229-249.

M. Berger. Stochastics Ito-Voltera equations. (Ph. D. Thessis). Carnegie-Mellon University, Pittsburgh, 1977.

J. Doob. Stochastic processes. New York, Wiley, 1953.

I.V. Fedorenko. K voprosu o suščestvovaniĭ sil′nogo rešenija stohastičeskogo diff. uravnenija tipa K. Ito. Teorija verojatnosteĭ i ee primenenija, 22, No 1, (1984), 12o-123.

I.V. Fedorenko. Suščestvovanie i edinstvenost nepreryvnogo rešenija sistemy stoh. diff. uravneniĭ tipa K. Ito. Uspehi mat. nauk, 41, No 1, (1986), 2o9-21o.

A.N. Filatov. Metody usrednenija v differencial′nyh i integrodifferencial′nyh uravnenijah. Taškent, Fan, 1971.

A. Friedman. Stochastic differential equations and applications. New York, Academic Press, 1975.

I.I. Gihman, A.V. Skorohod. Stohastičeskie differencial'nye uravnenija. Kiev, Naukova dumka, 1968.

I.I. Gihman, A.V. Skorohod. Teorija slučaĭnyh processov. Moskva, Nauka; tom I, 1971.; tom II, 1973.; tom III, 1975.

I.I. Gihman, A.V. Skorohod. Vvedenie v teoriju slučaĭnyh processov. Moskva, Nauka, 1977.

I.I. Gihman, A.V. Skorohod. Stohastičeskie differencial'nye uravnenija i ih priloženija. Kiev, Naukova dumka, 1982.

K. Ito. a) On a formula concerning stochastic differentials. Nagoya Math. Journal, 3, (1951), 55-65.

K. Ito. b) On stochastic differential equations. Memoria Amer. Math. Soc., No 4, (1951), 1-51.

K. Ito, M. Nisio. On stationary solutions of a stochastic differential equations. J. Math. Kyoto University, 4, (1964), 1-79.

S. Janković. One approximation of solution of stochastic differential equations. Differential Equations and Applications (Proc. 3rd Conf. Rousse'85), Rousse, Bulgaria, 1986.

S. Janković. Some limit theorems for one type of stochastic integrodifferential equations. Publications de l'Institut Mathématique, Beograd, tome 41 (55), 1987.

S. Janković. a) Iterative procedure for solving stochastic differential equations. Mathématica Balkanica, 1987. (primljen za štampu).

S. Janković. b) Almost surely limit theorems for stochastic differential equations. Matematički vesnik, Beograd, 1987. (primljen za štampu).

H.P. Mc Kean. Stochastic integrals. New York, London; Academic Press, 1969.

M.L. Klepcyna. Teoremy sravnenija, suščestvovanija i edinstvennosti dlja stohastičeskih differencial'nyh uravneniǐ. Teorija verojatnosteǐ i ee primenenija, 3o, No 1, (1985), 147-152.

G.L. Kulinič. O suščestvovaniǐ i edinstvennosti rešenija stohastičeskogo diff. uravnenija s differencialom po martingalu. Teorija verojatnosteǐ i ee primenenija, 19, No 1, (1974), 169-173.

G. Ladde, V. Lakshmikantham. Random differential inequalities. Academic Press, 198o.

R.Š. Lipcer, A.N. Širjaev. Statistika slučaǐnyh processov. Moskva, Nauka, 1974.

N.N. Luzin. Integral'noe isčislenie . Višaja škola, Moskva, 196o.

Ǐ.M. Stojanov, D.A. Baǐnov. Ob odnoǐ sheme usrednenija dlja stohastičeskih integro-differencial'nyh uravneniǐ. Publications de l'Institut Mathématique, Beograd, tome 15 (29), (1973), 133-143.

Ǐ.M. Stojanov. Usrednenie v stohastičeskih integrodifferencial'nyh uravnenijah. Mathematica Balkanica, 3, (1973), 496-513.

J. Stoyanov, Sv. Gaidov. On a class of nonlinear stochastic integrodifferential equations. Differential Equations and Applications (Proc. of 2^{nd} Conf. Rousse '81), Rousse, Bulgaria, (1982), 71o-713.

E. Wong. Stochastic processes in information and dynamical systems. Mc. Graw Hill, 1971.

T. Yamada, S. Watanabe. On the uniqueness of solutions of stochastic differential equations I. J. Math. Kyoto University, 11, (1971), 155-167.

B. Zhang, W. Padgett. The existence and uniqueness of solutions to stochastic differential-difference equations. Stochastic Analisis and Applications, 2, (3), (1984), 335-345.

R. Zuber. About one algorithm of solving of first order differential equations I. Applicationes Mathematicae, VIII, 4, (1966), 351-363 (na poljskom).

A.K. Zvonkin, N.V. Krylov. O sil'nyh rešenijah stohastičeskih differencial'nyh uravneniǐ. (Trudy školy-seminara po teorii slučaǐnyh processov, Druskininkaǐ, 1974.), Vil'njus, (1975), 9-88.