UNIVERZITET U NOVOM SADU

PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET

KARAKTERIZACIJE NEKIH KLASA POLUGRUPA POMOĆU PODPOLUGRUPA

(Doktorska disertacija)

TODOR MALINOVIĆ

NOVI SAD 1986

SADRŽAJ

U V O D

Izučavanje polugrupa čije prave podpolugrupe pripadaju nekoj klasi polugrupa, javlja se tradicionalnim za teoriju polugrupa. Za ovakva izučavanja karakteristično je da su klase kojima pripadaju prave podpolugrupe, polugrupe koju izučavamo, raznovrsne i, po pravilu, dobro izučene. Tako su izučavane polugrupe čije prave podpolugrupe jesu grupe [53] [58], leve grupe [5], kancelativne polugrupe [65], regularne [7] [36], komutativne [4], stepeno vezane (power joined) [6], arhimedovske [6] i još neke. Na taj način dobijamo razne klase polugrupa okarakterisane pomoću podpolugrupa. Karakterizacija se može vršiti pomoću skupa svih pravih podpolugrupa ili nekog podskupa. Najčešće je to skup svih pravih dvostranih (desnih, levih) ideala, samo neki ideal [43] [21], skup svih pravih bi-ideala [31] [32], skup svih klasa ekvivalencije neke relacije ili neki drugi skup podpolugrupa [20].

U ovom radu su ispitivane neke klase polugrupa pomoću podpolugrupa (ideala, bi-ideala) koje pripadaju klasi π- regularnih, unitarnih, t-arhimedovskih polugrupa, polugrupa koje sadrže levu jedinicu, π-grupa itd. Posebno, u ovom radu razmatramo jednu klasu koja je uopštenje klase prostih (desno prostih) polugrupa, tzv. klasu parcijalno prostih (desno prostih) polugrupa. Najpre, opisujemo ovu klasu polugrupa, a potom karakterišemo klasu poluprostih polugrupa pomoću podpolugrupa koje pripadaju klasi parcijalno prostih polugrupa. Takodje, opisujemo klasu (m,n) - dvostrano (jednostrano) čistih polugrupa pomoću podpolugrupa koje su π-grupe. Ova klasa obuhvata klasu T^*-čistih (B^*-čistih) polugrupa koje su izučavane u [31] [32], a sadržana je u klasi kompletno π-regularnih polugrupa [2].

U glavi I su navedeni osnovni pojmovi o polugrupama, grupama, idealima, kongruencijama itd. Takodje, navedeni su neki rezultati koji se odnose na ideale, regularne i π-regularne polugrupe. Ovim materijalom su, uglavnom, predstavljeni rezultati S. Bogdanovića [2], i Clifforda [18], i to samo oni rezultati koji se koriste u daljim ispitivanjima.

U glavi II, najpre, razmatramo maksimalne ideale u polugrupi i dajemo potreban i dovoljan uslov za egzistenciju maksimalnog dvostranog i jedinstvenog maksimalnog desnog ideala M, a zatim dokazujemo da je $S \setminus M$ unija dveju disjunktnih polugrupa od kojih je jedna desno prosta, a druga dvostran ideal polugrupe $S \setminus M$. Ovako dobijeni rezultati značajni su za izučavanje polugrupa čije prave podpolugrupe (ideali) pripadaju nekoj klasi polugrupa pa ih koristimo za dalja ispitivanja.

U tački 2. ove glave ispitujemo polugrupe pomoću podpolugrupa (ideala) koje pripadaju klasi π-regularnih polugrupa. Teorema 2.3. kojom karakterišemo polugrupe pomoću

$\mathcal{T}$-regularnih desnih ideala je uopštenje nekih rezultata iz [36]. Teoremom 2.5. karakterišemo periodičke polugrupe pomoću pravih $\mathcal{T}$-regularnih podpolugrupa. Ova klasa polugrupa sadrži klasu polugrupa u kojima je svaka prava podpolugrupa regularna, a koje su razmatrane u [7].

U tački 3. ove glave uvodimo pojam strogo levo (desno) regularne polugrupe i opisujemo ovu klasu polugrupa pomoću levo (desno) unitarnih ideala. Takodje, karakterišemo desne grupe pomoću (levo) unitarnih podpolugrupa.

Dalje, u tački 4. izučavamo polugrupe u kojima je svaka prava podpolugrupa (desno) t-arhimedovska. Teorema 4.7. je uopštenje glavnog rezultata iz [14]. Na kraju ove glave uvodimo pojam parcijalno (desno) proste polugrupe. Ovaj pojam je uopštenje poznatog pojma proste (desno) polugrupe. Zatim, opisujemo ovu klasu polugrupa i karakterišemo polugrupe u kojima je svaka prava podpolugrupa (ideal) parcijalno (desno) prosta. Ova klasa je sadržana u klasi poluprostih polugrupa.

U glavi III definišemo (m,n)-dvostrano (jednostrano) čiste polugrupe. Ovaj pojam je uopštenje pojma T^*-čiste (B^*-čiste) polugrupe koje su izučavane u [31] [32]. Zatim, dokazujemo da je ova klasa podklasa klase kompletno $\mathcal{T}$-regularnih i klase slabo komutativnih polugrupa. Glavni rezultati ove glave su Teoreme 1.17. i 1.2o. Teoremom 1.17. karakterišemo (m,n)-dvostrano čiste polugrupe pomoću polugrupa koje su grupe. Naime, dokazujemo da je polugrupa S(m,n)-dvostrano čista ako i samo ako je S^{m+n+1} polumreža grupa. Teoremom 1.20. opisujemo (m,n)-jednostrano čiste polugrupe pomoću podpolugrupa koje su π-grupe. Takodje, u ovoj glavi karakterišemo nil-potentne polugrupe pomoću podpolugrupa koje su (m,n)-dvostrano (jednostrano) čiste.

U glavi IV razmatramo kongruencije na nekim klasama π-regularnih polugrupa. Prvo,karakterišemo inverzne kongruencije na π-ortodoksnoj polugrupi.Specijalan slučaj ovih karakterizacija su karakterizacije inverznih kongruencija na ortodoksnoj polugrupi koje su razmatrane u [29]. Zatim, karakterišemo $\mathcal{L}$-unipotentne kongruencije na uopšteno strogo π-inverznoj polugrupi. Karakterizacije $\mathcal{L}$-unipotentnih kongruencija na uopšteno inverznoj polugrupi koje su razmatrane u [1] su specijalni slučajevi pomenutih karakterizacija. Na kraju ove glave razmatramo polumrežne i grupne kongruencije na (m,n)-dvostrano (jednostrano) čistoj polugrupi, tj. opisujemo pomenutu klasu polugrupa pomoću podpolugrupa (klasama ekvivalencije) koje su π-grupe. Teorema 4.2. kojom se karakterišu grupne kongruencije na (m,n)-jednostrano čistoj polugrupi je uopštenje nekih rezultata iz [31].

Materijal koji sadrže glave II, III i IV je prvi put ovde izložen. Glava I ne sadrži originalne priloge.

Literatura korišćena pri izradi ovog rada navedena je na kraju i čine je 68 bibliografske jedinice.

Želim da izrazim svoju zahvalnost Profesoru dr Svetozaru Miliću za podršku pri izradi ovog rada i posebnu zahvalnost Profesoru dr Stojanu Bogdanoviću koji se nesebično zalagao da svojim stručnim savetima pomogne u pripremi i izradi ovog rada.

GLAVA I

ELEMENTARNI POJMOVI I KARAKTERIZACIJE POLUGRUPA IZ NEKIH KLASA π-REGULARNIH PODPOLUGRUPA

1.

1.1. **Binarnom operacijom** na skupu S nazivamo preslikavanje SxS u S, gde je SxS skup svih uredjenih parova elemenata iz S. Ako je operacija multiplikativna, onda sliku u S elemenata $(a,b)\in SxS$ označavamo sa $a\cdot b$. Često izostavljamo tačku i pišemo samo ab.

1.2. Binarnu operaciju "$\cdot$" na skupu S nazivamo **asocijativnom** ako je

$$(\forall a,b,c\in S)(a\cdot(b\cdot c) = (a\cdot b)\cdot c);$$

i **komutativnom** ako je

$$(\forall a,b\in S)(a\cdot b = b\cdot a).$$

1.3. **Grupoidom** nazivamo uredjen par $(S,\cdot)$ nepraznog skupa S i binarne operacije "$\cdot$" definisane na njemu. Često pišemo samo S umesto $(S,\cdot)$. Neprazan podskup T grupoida S nazivamo **podgrupoidom** ako

$$(\forall a,b\ T)(a\cdot b\in T).$$

1.4. **Polugrupa** je grupoid $(S,\cdot)$ pri čemu je operacija "$\cdot$" asocijativna. Podgrupoid polugrupe S nazivamo **podpolugrupom**.

1.5. Element $e\in S$ nazivamo **desnom jedinicom** grupoida S ako je

$$(\forall x \in S)(xe = x).$$

Analogno se definiše l e v a j e d i n i c a. Element $e \in S$ je d v o s t r a n a j e d i n i c a grupoida S ili kraće j e d i n i c a ako je e istovremeno desna i leva jedinica.

1.6. Element $z \in S$ nazivamo d e s n o m n u l o m grupoida S ako je

$$(\forall a \in S)(az = z).$$

Analogno se definiše l e v a n u l a. Element $z \in S$ nazivamo n u l o m grupoida S ako je z istovremeno desna i leva nula.

1.7. Polugrupa S je l e v o k a n c e l a- t i v n a ako

$$(\forall a,b,x \in S)(xa = xb \Rightarrow a = b).$$

Analogno se definiše d e s n o k a n c e l a t i v n a polugrupa. Polugrupa S je k a n c e l a t i v n a ako je istovremeno levo i desno kancelativna.

1.8. Polugrupa S je l e v o p r o s t a ako

$$(\forall x \in S)(Sx = S).$$

Slično, polugrupa S je d e s n o p r o s t a ako

$$(\forall x \in S)(xS = S).$$

Polugrupa S je p r o s t a ako i samo ako

$$(\forall x \in S)(SxS = S).$$

Polugrupa S^0 je 0-p r o s t a ako $S^2 \neq 0$ i 0 je jedini pravi dvostran ideal od S.

1.9. G r u p a je polugrupa S pri čemu je

$$(\forall x \in S)(ex = x)$$

i

$$(\forall x \in S)(\exists x^{-1} \in S)(x^{-1}x = e),$$

gde je e jedinica polugrupe S. P o d g r u p a od S je podpolugrupa od S koja je grupa. Komutativnu polugrupu nazivamo a b e l o v a.

1.10. Grupom nazivamo polugrupu S koja je istovremeno levo i desno prosta. Jasno da je ova definicija ekvivalentna sa definicijom 1.9.

1.11. D e s n a g r u p a je polugrupa S koja je desno prosta i levo kancelativna. Slično, l e v a g r u p a je polugrupa S koja je levo prosta i desno kancelativna.

1.12. Element $a \in S$ nazivamo i d e m p o t e n t n i m ako je $a^2 = a$. Polugrupa S je i d e m p o t e n t n a ili t r a k a ako je svaki njen element idempotentan. Komutativnu traku nazivamo p o l u m r e ž o m.

1.13. Preslikavanje f polugrupe S u polugrupu T je h o m o m o r f i z a m ako

$$(\forall a,b \in S)((ab)f = (af)(bf)).$$

Ako je f preslikavanje na, tada T nazivamo h o m o m o r-f n o m s l i k o m od S. Ako je još i 1-1, tada f nazivamo i z o m o r f i z m o m.

1.14. Relacija ekvivalencije na S je l e v a k o n g r u e n c i j a na S ako

$$(\forall a,b,x \in S)(a\rho b \Rightarrow xa\rho xb).$$

D e s n a k o n g r u e n c i j a se definiše dualno. D v o s t r a n a k o n g r u e n c i j a ili kraće k o n g r u e n c i j a je konjunkcija predhodne dve. Skup klasa ekvivalencije u oznaci S/ρ nazivamo k o l i č n i k s - k u p o m. Preslikavanje $a \rightarrow a\rho$, gde je $a\rho$ klasa ekvivalencije elementa a je p r i r o d n i h o m o m o r f i z a m od S na S/ρ, pri čemu je u S/ρ operacija definisana na sledeći način:

$$(a\rho)(b\rho) = (ab)\rho$$

za $a\rho$, $b\rho \in S/\rho$. Količnik skup S/ρ sa pomenutom operacijom je polugrupa koju nazivamo f a k t o r p o l u g r u p o m.

1.15. Ako je S polugrupa i $a \in S$ proizvoljan element, tada podpolugrupa

$$\langle a \rangle = \{a, a^2, a^3, \dots\},$$

koja se sastoji iz pozitivnih stepena elementa a je p o d p o l u g r u p a g e n e r i r a n a elementom a. Ako je $\langle a \rangle = S$, onda je S c i k l i č n a (m o n o g e n a) polugrupa. Red elementa a je red polugrupe $\langle a \rangle$.

Poznata je sledeća

TEOREMA 1. Neka je $a \in S$ i $\langle a\rangle$ ciklična podpolugrupa polugrupe S. Ako je $\langle a\rangle$ beskonačna onda su svi stepeni različiti. Ako je $\langle a\rangle$ konačna, tada postoje dva pozitivna cela broja indeks r i perioda m za koje je $a^r = a^{r+m}$ i

$$\langle a\rangle = \{a, a^2, a^3, \ldots, a^{m+r-1}\}.$$

Red polugrupe $\langle a\rangle$ je $m+r-1$. Skup

$$K_a = \{a^r, a^{r+1}, \ldots, a^{m+r-1}\}$$

je ciklična podgrupa reda m polugrupe S.

Polugrupa S je periodička ako je svaki njen element konačnog reda.

2.

2.1. Podpolugrupa R (L) polugrupe S je desni (levi) ideal ako je

$$RS \subseteq R \quad (SL \subseteq L).$$

Podpolugrupa I polugrupe S je dvostrani ideal, ako je istovremeno levi i desni ideal.

2.2. Ako je A neprazan podskup polugrupe S, tada presek svih desnih ideala koji sadrže A je desni ideal koji sadrži A. Za taj ideal kažemo da je desni ideal generiran skupom A. Slično se definiše levi, odnosno dvostrani ideal generiran skupom A. Desni (levi, dvostrani) ideal polugrupe S generiran skupom A je

$$A \cup AS \ (A \cup SA,\ A \cup SA \cup AS \cup SAS).$$

Ako je A jednočlan skup koji se sastoji iz elementa a, tada desni glavni ideal, u oznaci R(a), je

$$R(a) = a \cup aS.$$

Analogno, levi glavni ideal je

$$L(a) = a \cup Sa,$$

i dvostrani glavni ideal je

$$J(a) = a \cup aS \cup Sa \cup SaS.$$

2.3. Ideal A (bilo kog tipa) polugrupe S nazivamo pravim (sopstvenim) idealom ako je pravi podskup od S. Pravi ideal A nazivamo maksimalnim desnim (levim, dvostranim) idealom polugrupe S ako se ne javlja pravim podskupom ni jednog pravog desnog (levog, dvostranog) ideala iz S.

2.4. Neka je I dvostrani ideal polugrupe S i ρ relacija na S definisana sa

$$a \rho b \Longleftrightarrow (a=b \vee a,b \in I).$$

Tada ρ je kongruencija na S koju nazivamo kongruencijom Reesa po modI. Faktor polugrupu S/ρ označavamo S/I i nazivamo je faktor polugrupom Reesa.

LEMA 1. [18] Dvostran ideal I polugrupe S je maksimalan ako i samo ako je faktor polugrupa Reesa S/I 0-prosta ili dvoelementna nulta polugrupa.

Teoremu koju navodimo dokazao je S. Bogdanović [6].

TEOREMA 2. Neka je L (pravi) levi ideal od S

Tada L je maksimalan ako i samo ako

$$\text{(i)} \quad S \setminus L = \{a\},\ a^2 \in L$$

ili

$$\text{(ii)} \quad S \setminus L \subseteq Sa \text{ za svaki } a \in S \setminus L.$$

<u>LEMA 2.</u> Neka je L(S) kao u slučaju (ii) Teoreme 2.

Tada

$$S \setminus L(S) = \{ x \in S \mid S = Sx \}$$

je podpolugrupa od S.

2.5. Ideal I polugrupe S je i z o l o v a n ako je

$$(\forall x \in S)(x^2 \in I \Rightarrow x \in I).$$

2.6. Ideal I polugrupe S je k o m p l e t n o i z o l o v a n ako je S I podpolugrupa od S.

Jasno, svaki kompletno izolovan ideal je izolovan. Obratno ne važi.

2.7. Good i Hughes su u [25] definisali bi-ideal polugrupe. Podpolugrupa B polugrupe S je b i - i d e a l od S ako je

$$BSB \subseteq B.$$

2.8. S. Lajos [33] je definisao (m,n)-ideale. Podpolugrupa A polugrupe S je (m,n) - i d e a l od S ako je

$$A^m S A^n \subseteq A$$

za $m, n \in Z^+ \cup \{0\}$. Jasno, da (m,n)-ideal predstavlja uopštenje levog, desnog i bi-ideala. Polugrupa S je (m,n) - i d e a l s k a ako svaka podpolugrupa od S je (m,n)-ideal od S.

Navodimo jednu Lemu S. Bogdanovića [2].

LEMA 3. Ako je S (m,n)-idealska polugrupa, tada je S periodička.

2.9. Neka je I ideal polugrupe S. Definišimo relaciju ρ_I na sledeći način

$$a \rho_I b \Leftrightarrow (a = b \vee a,b \in I).$$

Relacija ρ_I je kongruencija i nazivamo je R e e s o v a k o n g r u e n c i j a [18]. Količnik polugrupu S/ρ_I označavamo sa S/I. Klase ekvivalencije, u ovom slučaju, su I i jednočlani skupovi $\{a\}$, kada je $a \in S \setminus I$.

3.

3.1. Polugrupa S je r e g u l a r n a ako

$$(\forall a \in S)(\exists x \in S)(a = axa).$$

Pojam regularnosti prvi je uveo J. von Neumann (On regular rings, Proc. Nat. Acad. Sci., USA, 22(1936), 707-713) za elemente prstena.

U teoriji polugrupa regularne polugrupe pod nazivom "demi-groupes inversifs" su prvi put razmatrane od strane G. Thierrina (Sur une condition nécessaire et suffisante pour qu'un semigroupe soit un groupe, C. R. Aca. Sci., Paris, 232 (1951), 376-378).

G. Thierrin je u pomenutom radu, izmedju ostalog, dokazao sledeću teoremu koju često koristimo u ovom radu.

TEOREMA 4. Ako regularna polugrupa S ima samo jedan idempotent, onda S jeste grupa.

J. von Neumann je u napred navedenom radu dokazao sledeču lemu

LEMA 5. Element a polugrupe S je regularan ako i samo ako je svaki glavni desni (levi) ideal polugrupe S generiran elementom a generiran i nekim idempotentom e, tj.

$$aS^1 = eS^1 \quad (S^1a = S^1e).$$

3.2. Značajna podklasa klase regularnih polugrupa je klasa inverznih polugrupa, koje predstavljaju prirodno uopštenje grupa. Pojam inverzne polugrupe prvi put se javlja u radovima B. B. Baйнера (Обобщенные группы, ДАН СССР, 84 (1952), 1119-1122) i G. Thierrina (Sur les éléments unitaires d'un demi-groupe inversif, C. R. Acad. Sci., Paris, 234 (1952), 33-34). W. D. Munn i R. Penrose navode u [45] da je nezavisno od Vagnera [67] i Thierrina [64] inverzne polugrupe proučavao G. B. Preston, [54].

Elementi $a,b \in S$ su i n v e r z n i jedan drugom ako je

$$a = aba \wedge b = bab.$$

Polugrupa S je i n v e r z n a ako svaki element iz S ima jedinstven njemu inverzan element.

G. Thierrin [64] je dokazao sledeću lemu

LEMA 6. Ako je a regularan element polugrupe S tj.

$$a = axa$$

za neki $x \in S$, tada a ima bar jedan njemu inverzan element. Takav je, na primer, element xax.

Navodimo jednu teoremu Libera [35].

TEOREMA 6. S je inverzna polugrupa ako i samo ako je regularna i bilo koja dva njena idempotenta komutiraju.

3.3. Polugrupa S je desno regularna ako

$$(\forall a \in S)(\exists x \in S)(a^2x = a).$$

Analogno se definiše levo regularna polugrupa. Ovaj pojam je uveo R. Croizot (Demi-groupes inversifs et demi-réunions de demi-groupes simples, Ann. Sci. Ecole. Norm. Sup., (3), 70 (1953), 361-379), a umesto termina "regularan" upotrebljavao je termin "inversif".

3.4. Polugrupa S je kompletno regularna ako

$$(\forall a \in S)(\exists x \in S)(a = axa \wedge ax = xa).$$

Ovaj pojam je uveo A. H. Clifford [18].

3.5. J. A. Green je 1951. svojim radom "On the structure of semigroups", Ann. of Math., 54, 163-172, dao jednu fundamentalnu studiju za razvoj teorije polugrupa. U tom radu Green je definisao izvesne relacije ekvivalencije na polugrupi, koristeći pojam glavnog ideala polugrupe.

Relacije $\mathcal{L}$, $\mathcal{R}$, $\mathcal{J}$, $\mathcal{H}$, $\mathcal{D}$ definisane na polugrupi na sledeći način

1° $\quad a \mathcal{L} b \Longleftrightarrow L(a) = L(b)$

2° $\quad a \mathcal{R} b \Longleftrightarrow R(a) = R(b)$

3° $a \mathcal{J} b \iff J(a) = J(b)$

4° $\mathcal{H} = \mathcal{L} \cap \mathcal{R}$

5° $\mathcal{D} = \mathcal{L} \circ \mathcal{R} = \mathcal{R} \circ \mathcal{L}$

su relacije ekvivalencije i nazivaju se Greenovim ekvivalencijama.

Neposredno se dokazuje da je u regularnoj polugrupi S:

$$L(a) = Sa, \quad R(a) = aS, \quad J(a) = SaS.$$

Sledeću lemu i teoremu koje navodimo dao je R. Croisot [19].

LEMA 7. Sledeći uslovi za element a polugrupe S su ekvivalentni:

(i) a je kompletno regularan;

(ii) a ima inverzan sa kojim je komutativan;

(iii) $a \in a^2Sa^2$;

(iv) $a \in a^2S \cap Sa^2$;

(v) a je sadržan u podgrupi od S.

TEOREMA 8. Neka je S polugrupa. Tada su sledeći uslovi ekvivalentni:

(i) S je kompletno regularna;

(ii) S je unija grupa;

(iii) Svaki levi i svaki desni ideal od S je izolovan;

(iv) S je levo i desno regularna;

(v) S je regularna i levo regularna;

(vi) S je regularna i desno regularna;

(vii) S je unija disjunktnih grupa (te grupe su maksimalne podgrupe G_e od S).

3.6. W. D. Munn je 1961. u svom radu "Pseudo--inverses in semigroups", Proc. Camb. Phil. Soc. 57 (1961), 247-250, dokazao sledeće

<u>TEOREMA 9.</u> Neka je e idempotent polugrupe S. Tada

$$G_e = \{a \in S \mid a = ea = ae \wedge (\exists a' \in S)\ e = a'a = aa'\}$$
$$= \{a \in S \mid a \in eS \cap Se \quad e \in aS \cap Sa\}.$$

je maksimalna podgrupa od S u kojoj je e jedinica.

<u>LEMA 10.</u> Neka je x element polugrupe S takav da x^n leži u podgrupi G od S za neki $n \in Z^+$. Ako je e jedinica podgrupe G, tada

(a) $ex = xe \in G_e$,

(b) $x^m \in G_e$ za svaki $m > n$.

3.7. Pojedine delove teoreme koju ćemo navesti nalaze se u radovima Clifforda [17], Schwarza [60], Thierrina [64] i Tamure [62].

<u>TEOREMA 11.</u> Za polugrupu S su sledeći uslovi ekvivalentni:

(i) S je desna grupa;

(ii) S je desno prosta i sadrži idempotent;

(iii) S je direktan proizvod G x E grupe G i polugrupe desnih nula E;

(iv) S je regularna i E(S) je polugrupa desnih nula;

(v) S je regularna i levo kancelativna;

(vi) S je unija disjunktnih grupa čije jedinice obrazuju polugrupu desnih nula.

3.8. Polugrupa S je *globalno idempotentna* ako je $S^2 = S$.

Teoremu koju navodimo dokazao je S. Bogdanović [7].

<u>TEOREMA 12.</u> Za polugrupu S su sledeći uslovi ekvivalentni:

(i) Svaka prava podpolugrupa od S je regularna;

(ii) S je unija periodičkih grupa ili je monogena indeksa 2;

(iii) Svaka prava podpolugrupa od S je globalno idempotentna.

3.9. Parcijalno uredjen skup T je *dualno dobro uredjen* (downward well ordered) ako svaki neprazan podskup od T ima najveći element.

Navodimo dva rezultata M. Petricha [50].

<u>TEOREMA 13.</u> Svaka podpolugrupa od S sadrži levu jedinicu ako i samo ako je S dualno dobro uredjen skup periodičkih desnih grupa.

<u>TEOREMA 14.</u> Svaki desni ideal polugrupe S sadrži levu jedinicu ako i samo ako je S regularna i E(S) je traka koja je dualno dobro uredjen skup polugrupa desnih nula.

4.

4.1. Jedno uopštenje regularne polugrupe je $\mathfrak{T}$-regularna (stepeno regularna) polugrupa. Polugrupa S je

π- r e g u l a r n a ako

$$(\forall a\in S)(\exists m\in Z^{+})(a^m\in a^mSa^m).$$

Polugrupa S je d e s n o π- r e g u l a r n a ako

$$(\forall a\in S)(\exists m\in Z^{+})(a^m\in a^{m+1}S).$$

4.2. Neka je S π-regularna polugrupa. Definišimo preslikavanje r na sledeći način

$$r:\ S\to \mathrm{Reg}S$$

tako da je $r(a) = a^m$, gde je $m\in Z^+$ najmanji za koji je $a^m\in \mathrm{Reg}\,S$. π-regularna polugrupa S je r - p o l u g r u p a ako

$$(\forall a,b\in S)(r(ab) = r(a)r(b)).$$

4.3. Podpolugrupa K π-regularne polugrupe S je r - s e m i p r i m e ako

$$(\forall a\in S)(r(a)\in K\Rightarrow a\in K).$$

Podpolugrupa K π-regularne polugrupe S je p u n a ako je $E(S)\subseteq K$; s a m o k o n j u g o v a n a ako

$$(\forall a\in S)(a'Kr(a)\subseteq K);$$

i n v e r z n o z a t v o r e n a ako

$$(\forall a\in K)(\ V(r(a))\subseteq K).$$

4.4. Kongruencija ρ na π-regularnoj polugrupi S je r - s e m i p r i m e k o n g r u e n c i j a ako

$$(\forall a\in S)(a\ \rho\ r(a)).$$

4.5. Polugrupa S je k o m p l e t n o π- - r e g u l a r n a ako

$$(\forall a\in S)(\exists x\in S)(\exists m\in Z^{+})(a^m = a^mxa^m \wedge a^mx = xa^m).$$

Navodimo jednu teoremu S. Bogdanovića [2], kojom se karakterišu kompletno π-regularne polugrupe.

TEOREMA 15. Za polugrupu S su sledeći uslovi ekvivalentni:

(i) S je kompletno π-regularna;

(ii) neki stepen proizvoljnog elementa iz S leži u podgrupi od S;

(iii) za svaki $a \in S$ postoji $m \in Z^+$ tako da

$$a^m \in a^m S a^{m+1} \quad (a^m \in a^{2m} S a^{2m}).$$

4.6. Polugrupa S je s t r o g o π - i n v e r z n a ako je π-regularna i idempotenti komutiraju.

4.7. Polugrupa S je GV - p o l u g r u p a ako je π-regularna i svaki regularan element iz S je kompletno regularan.

Lemu koju navodimo dao je S. Bogdanović, [2].

LEMA 16. Neka je S GV-polugrupa i $\mathcal{J}^*$ relacija na S definisana sa

$$a \mathcal{J}^* b \Longleftrightarrow Sr(a)S = Sr(b)S.$$

Tada

$$(\forall a,b \in S)(\exists m,n \in Z^+)(\exists e,f \in E(S))(a^m \in G_e \wedge b^n \in G_f) \Rightarrow (ab)\mathcal{J}^* = (ef)\mathcal{J}^*.$$

4.8. Polugrupa S je GV- i n v e r z n a ako je GV-polugrupa i svaki regularan element iz S ima jedinstven njemu inverzan element.

4.9. Neka je S polugrupa i ρ kongruencija na S. Tada ρ je p o l u m r e ž n a k o n g r u e n c i j a ako je faktor polugrupa S/ρ polumreža. Analogno se definiše t r a č n a, i n v e r z n a i g r u p n a k o n g r u e n c i j a.

4.10. Polugrupa S je *polumreža polugrupa* koje pripadaju klasi $\mathcal{C}$ ako postoji polumrežna kongruencija ρ na S čije sve ρ-klase pripadaju klasi $\mathcal{C}$. Analogno se definiše *traka polugrupa*.

4.11. Teoremu koju navodimo dokazao je S. Bogdanović [10].

TEOREMA 17. Za polugrupu S su sledeći uslovi ekvivalentni:

(i) S je GV-polugrupa;

(ii) S je polumreža $\mathfrak{T}$-grupa;

(iii) S je $\mathfrak{T}$-regularna i $a = axa$ implicira $ax = xa$

(iv) S je GV-polugrupa i za svaki $e,f \in E(S)$ postoji $n \in Z^+$ tako da je $(ef)^n = (fe)^n$.

4.12. Polugrupa S je *slabo komutativna* ako

$$(\forall a,b \in S)(\exists n \in Z^+)((ab)^n \in bSa).$$

4.13. Polugrupa S je *normalna* ako je

$$(\forall a \in S)(aS = Sa).$$

Pojedini delovi teoreme koju navodimo nalaze se u radovima Lajosa [33], Kurokija [30] i Pandéličeka [48].

TEOREMA 19. Za polugrupu S su sledeći uslovi ekvivalentni:

(i) S je polumreža grupa;

(ii) S je kompletno regularna i slabo komutativna;

(iii) S je kompletno regularna i E(S) se sadrži u centru od S;

(iv) Skup svih bi-ideala od S je polmreža u odnosu na množenje podskupova;

(v) S je kompletno regularna inverzna polugrupa;

(vi) S je normalna i regularna.

4.14. Polugrupa S je o r t o d o k s n a ako je regularna i E(S) je podpolugrupa od S.

M. Petrich u [49] dao je sledeću propoziciju

PROPOZICIJA 20. Za polugrupu S su sledeći uslovi ekvivalentni:

(i) E(S) je podpolugrupa od S;

(ii) Za svaki $a,b \in S$ i $a' \in V(a)$, $b \in V(b)$ je $b'a' \in V(ab)$;

(iii) Za svaki $a,b,x,y \in S$, $a = axa$ i $b = byb$ implicira $ab = abyxab$.

Ako je S regularna polugrupa, tada bilo koji od predhodnih uslova je ekvivalentan sa

(iv) Za svaki idempotent iz S njemu inverzan je takodje idempotent.

4.15. Polugrupa S je $\mathcal{T}$-o r t o d o k s n a ako je $\mathcal{T}$-regularna i ako je E(S) podpolugrupa od S.

4.16. Neka je I(a) skup elemenata iz J(a) koji ne generiraju J(a), tj. I(a) = J(a) - a}. Ako I(a) nije prazan skup, tada je I(a) dvostran ideal od S. Faktor polugrupu Reesa J(a)/I(a) nazivamo *glavnim faktorom* polugrupe S.

4.17. Polugrupa S je *poluprosta* ako je svaki njen glavni faktor 0-prost ili prost.

GLAVA II

KARAKTERIZACIJE NEKIH KLASA POLUGRUPA

1. MAKSIMALNI IDEALI

Maksimalne ideale u teoriji polugrupa prvi je razmatrao Š. Schwarz [57]. On je izučavao strukturu skupa $S \setminus M$, gde je M maksimalan desni (levi, dvostran) ideal polugrupe S. Izmedju ostalog, dao je dovoljan uslov da skup $S \setminus M$ bude podpolugrupa od S. Izučavanjem maksimalnih ideala bavi se i S. Bogdanović [6]. On je dao potreban i dovoljan uslov za egzistenciju maksimalnog levog ideala u polugrupi.

U ovoj tački dajemo potreban i dovoljan uslov za egzistenciju maksimalnog dvostranog ideala u polugrupi i karakterišemo polugrupe koje sadrže jedinstven maksimalan desni (dvostran) ideal M. Takodje, dokazujemo da je $S \setminus M$ unija dveju disjunktnih polugrupa od kojih je jedna desno prosta a druga dvostran ideal polugrupe $S \setminus M$.

Rezultati iz ovog dela značajni su za izučavanje polugrupa čije sve (prave) podpolugrupe (ideali) imaju neko unapred dato svojstvo pa ćemo ih koristiti u daljem radu, jer predmet našeg izučavanja su pomenute klase polugrupa.

<u>LEMA 1.1.</u> Neka je M pravi dvostran ideal polugrupe S. Tada M je maksimalan ako i samo ako je ispunjen jedan od uslova:

1° $S \setminus M = \{a\}$, $a^2 \in M$

2° $S \setminus M \subseteq SaS$ za svaki $a \in S \setminus M$.

Dokaz. Neka je M maksimalan dvostran ideal od S. Tada razlikujemo dva slučaja:

1° $(\exists a \in S \sim M)(SaS \subseteq M)$.

U ovom slučaju imamo da $aS \neq S$. Pretpostavimo da $aS \nsubseteq M$. Tada $M \cup aS$ je dvostran ideal od S pa je

$$M \cup aS = S,$$

a odavde

$$(1) \qquad SM \cup SaS = S^2.$$

Kako je $SaS \subseteq M$ to je

$$(2) \qquad SM \cup SaS \subseteq M.$$

Iz (1) i (2) sledi da je $S^2 \subseteq M$, a odavde imamo

$$aS \subseteq S^2 \subseteq M,$$

što je nemoguće. Dakle, $aS \subseteq M$. Slično, $Sa \subseteq M$. pa je

$$(M \cup a)S = MS \cup aS \subseteq M \subset M \cup a,$$
$$S(M \cup a) = SM \cup Sa \subseteq M \subset M \cup a.$$

Prema tome, $M \cup a$ je dvostran ideal od S pa je $M \cup a = S$, a odavde

$$S \smallsetminus M = \{a\}, \quad a^2 \in M.$$

2° $(\forall a \in S \sim M)(SaS \nsubseteq M)$.

U ovom slučaju imamo $M \cup SaS$ je dvostran ideal od S pa

$$(3) \qquad M \cup SaS = S,$$

a odavde

$$S \setminus M \subseteq SaS.$$

Obratno sledi neposredno. ▨

<u>TEOREMA 1.2.</u> Neka je M pravi dvostran ideal polugrupe S. Tada su sledeći uslovi ekvivalentni:

(i) M je jedinstven maksimalan dvostran ideal;

(ii) Faktor polugrupa Reesa S/M je glavni faktor od S;

(iii) S ispunjava jedan od uslova:

1^{o} $S \setminus M = \{a\}$, $a^2 \in M$;
2^{o} $S \setminus M = \{a \in S \mid SaS = S\}$.

<u>Dokaz</u>. (i)$\Rightarrow$(ii). Neka je M jedinstven maksimalan dvostran ideal od S i $a \in S \setminus M$. Tada $J(a) = S$ pa je

(4) $(\forall\, a,b \in S \setminus M)(J(a)=J(b) = S)$.

Kako za proizvoljan $a \in M$ imamo

(5) $J(a) \subseteq M \neq S$

to iz (4) i (5) sledi $S \setminus M = J_a$. Odavde imamo

$$M = S \setminus J_a = J(a) \setminus J_a = I(a).$$

Dakle, $S/M = J(a)/I(a)$, tj. S/M je glavni faktor polugrupe S.

(ii)$\Rightarrow$(iii). Neka je S/M glavni faktor od S. Tada

$$(\exists a \in S)(S = J(a) \wedge M = I(a)),$$

tj. $S/M = J(a)/I(a)$. Ako je A pravi dvostran ideal od S i $I(a) \subset A \subset J(a)$ tada za $b \in A \setminus I(a)$ imamo

$$b \in J(a) \setminus I(a) = J_a$$

pa je $J(a) = J(b)$. Kako je $J(b) \subseteq A$ to je $J(a) \subseteq A$ što zajedno sa $A \subset J(a)$ daje $J(a) = A$, što je nemoguće. Dakle, dvostran ideal $I(a)$ je maksimalan.

Pretpostavimo da S sadrži još jedan maksimalan ideal K. Tada

$$K \cup I(a) = J(a)$$

pa je $a \in K$ i prema tome, $J(a) = K$, što je nemoguće. Dakle, $M = I(a)$ je jedinstven maksimalan ideal od S. Na osnovu Leme 1.1. imamo

$$S \setminus M = \{a\}, \quad a^2 \in M$$

ili

$$(\forall a \in S \setminus M)(S \setminus M \subseteq SaS).$$

Ako je $S \setminus M \subseteq SaS$ za svaki $a \in S \setminus M$, tada

$$M \cup SaS = S$$

pa je

$$SaS = S. \tag{6}$$

Ukoliko je $a \in M$, tada

$$SaS \subseteq M \neq S. \tag{7}$$

Iz (6) i (7) sledi da je

$$S \setminus M = \{a \in S \mid SaS = S\}.$$

(iii) $\Rightarrow$(i). Ako važi 1^o tada tvrdjenje sledi neposredno. Neka važi 2^o. Tada

$$(\forall a \in S \setminus M)(S \setminus M \subseteq SaS),$$

a na osnovu Leme 1.1. M je maksimalan dvostran ideal od S. Pretpostavimo da S sadrži još jedan maksimalan ideal I. Tada $M \cup I = S$ pa imamo

$$I \cap (S \setminus M) \neq \emptyset$$

Prema tome, postoji $a \in I \cap (S \setminus M)$ za koji je

$$(8) \qquad SaS = S.$$

Dalje je

$$(9) \qquad SaS \subseteq SIS \subseteq I,$$

što je nemoguće, sobzirom na (8). Dakle, M je jedinstven maksimalan ideal od S. ▨

TEOREMA 1.3. Neka je M pravi desni ideal polugrupe S. Tada M je jedinstven maksimalan desni ideal od S ako i samo ako je ispunjen jedan od uslova:

1^o $S \setminus M = \{a\}$, $a^2 \in M$;

2^o $S \setminus M = \{a \in S \mid aS = S\}$.

Dokaz. Neka je M jedinstven, maksimalan desni ideal od S. Tada za proizvoljan element $a \in S \setminus M$ je aS desni ideal od S pa $aS \subseteq M$ ili $aS = S$. Prema tome, razlikujemo dva slučaja:

1^o $(\exists a \in S \setminus M)(aS \subseteq M)$.

U ovom slučaju imamo

$$(M \cup a)S = MS \cup aS \subseteq M \subseteq M \cup a$$

i prema tome, $M \cup a$ je desni ideal od S pa

$$M \cup a = S,$$

a odavde sledi da je

$$S \setminus M = \{a\}, \quad a^2 \in M.$$

$$2^\circ \quad (\forall a \in S \setminus M)(aS = S)$$

Kako je za svaki $a \in M$, $aS \subseteq M$ to je

$$S \setminus M = \{a \in S \mid aS = S\}.$$

Obratno, ako važi 1°, tada tvrdjenje sledi neposredno. Neka je ispunjen uslov 2° i neka je R pravi desni ideal različit od M. Dokažimo da se R sadrži u M. Zaista, pretpostavimo da se R ne sadrži u M. Tada

$$R \cap (S \setminus M) \neq \emptyset$$

pa

$$(10) \qquad (\exists a \in R \cap (S \setminus M))(aS = S).$$

Kako je $RS \subseteq R$ i $a \in R$ to je

$$(11) \qquad aS \subseteq RS \subseteq R.$$

Iz (10) i (11) imamo da je $S = R$, što je nemoguće. Dakle, pravi desni ideal M sadrži sve prave desne ideale od S pa je jedinstven maksimalan desni ideal od S. ▨

<u>LEMA 1.4.</u> Neka je M kao u slučaju 2° Teoreme 1.3. Tada

$$S \setminus M = P \cup K,$$

gde je $P=\{a \in S \setminus M \mid aM = M\}$ desno prosta podpolugrupa od S i $K = \{a \in S \setminus M \mid aM = S\}$ dvostran ideal polugrupe $S \setminus M$.

Dokaz. Neka je M pravi desni ideal od S i

$$S \setminus M = \{a \in S \mid aS = S\}.$$

Tada $T = S \setminus M$ je podpolugrupa od S. Zaista, ako su $a,b \in T$, tada je $aS=S$ i $bS = S$ pa

$$abS = a(bS) = aS = S$$

i prema tome, $ab \in T$.

Neka je $a \in T$ proizvoljan element. Tada imamo

$$(aM)S = a(MS) \subseteq aM,$$

a odavde aM je desni ideal od S i prema tome,

$$(12) \qquad aM \subseteq M \vee aM = S,$$

jer je M jedinstven maksimalan desni ideal od S.

Ako je $aM \subseteq M$, tada

$$(13) \qquad aS = S \Rightarrow a(M \cup T) = M \cup T$$
$$\Rightarrow aM \cup aT = M \cup T.$$

Kako je $aT \subseteq T$ i $M \cap T = \emptyset$ to iz (13) sledi

$$(14) \qquad aM = M.$$

Iz (12) i (14) imamo da

$$(\forall a \in T)(aM=M \vee aM = S).$$

Ako je

$$P = \{a \in S \setminus M \mid aM = M\}$$

i

$$K = \{ a \in S \smallsetminus M \mid aM = S \},$$

tada

$$(15) \qquad S \smallsetminus M = P \cup K.$$

Neka su $a, b \in P$. Tada

$$(aM = M \wedge bM = M) \Rightarrow abM = a(bM) = aM = M$$

i prema tome, $ab \in P$. Dakle, P je podpolugrupa od S. Ako su $a, b \in K$, tada je $aM = S$ i $bM = S$. pa odavde imamo

$$abM = a(bM) = aS = S,$$

tj. $ab \in K$. Prema tome, K je podpolugrupa od S.

Za $a \in P$ i $b \in K$ imamo

$$abM = a(bM) = aS = S$$

i

$$baM = b(aM) = bM = S.$$

Dakle, $ab, ba \in K$ pa je

$$(16) \qquad PK \subseteq K \wedge KP \subseteq K$$

Iz (15) i (16) sledi

$$\begin{aligned} K(S \smallsetminus M) &= K(P \cup K) \\ &= KP \cup K^2 \\ &\subseteq K \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (S \smallsetminus M)K &= (K \cup P)K \\ &= K^2 \cup PK \\ &\subseteq K. \end{aligned}$$

Dakle, K je dvostran ideal polugrupe $S \smallsetminus M$.

Ako je $a \in P$ proizvoljan element, tada je $aS = S$ pa je

$$a(M \cup T) = M \cup T,$$

a odavde

$$aM \cup aT = M \cup T. \tag{17}$$

Kako je $aM = M$ i $M \cap T = \emptyset$ iz (17) sledi da je

$$aT = T. \tag{18}$$

Iz (15) i (18) imamo

$$a(K \cup P) = K \cup P$$

a odavde

$$aK \cup aP = K \cup P. \tag{19}$$

Imajući u vidu da je $K \cap P = \emptyset$ to iz (16) i (19) sledi $P \subseteq aP$ što zajedno sa činjenicom da je P podpolugrupa daje $aP = P$. Dakle,

$$(\forall a \in P)(aP = P)$$

pa je P desno prosta podpolugrupa od S.

Obratno, neka je $S = P \cup K$, gde je $P = \{a \in S \setminus M \mid aM = M\}$ desno prosta podpolugrupa od S i $K = \{a \in S \setminus M \mid aM = S\}$ dvostran ideal polugrupe $S \setminus M = T$. Tada $M \neq S$ pa $S \setminus M \neq \emptyset$ i prema tome, bar jedan od skupova P, K nije prazan. Ako P i K nisu prazni podskupovi od S, tada

$$(a \in P \wedge b \in K) \Rightarrow (abM = aS \wedge abM = S),$$

jer je $ab \in K$, pa je $aS = S$. Neka je $P = \emptyset$. Tada

$$a \in K \Rightarrow aM = S \Rightarrow aS = S.$$

Pretpostavimo li da je $K = \emptyset$, onda

$$a \in P \Rightarrow aS = a(M \cup P) = aM \cup aP = M \cup P = S.$$

Dakle, u bilo kom od predhodnih slučajeva imamo

$$(\forall a \in S \setminus M)(aS = S).$$

Kako je za proizvoljan element $a \in M$

$$aS \subseteq MS \subseteq M \neq S$$

to je

$$S \setminus M = \{a \in S \setminus M \mid aS = S\}. \blacksquare$$

<u>LEMA 1.5.</u> Neka je M jedinstven maksimalan desni ideal polugrupe S. Tada M je dvostran ideal ako i samo ako je

$$(20) \quad K = \{a \in S \setminus M \mid aM = S\} = \emptyset.$$

<u>Dokaz</u>. Neka je M jedinstven maksimalan desni ideal koji je dvostran. Tada

$$SM \subseteq M \neq S,$$

a odavde $K = \emptyset$.

Obratno, neka je $K = \emptyset$ i neka je M jedinstven maksimalan desni ideal od S. Tada, na osnovu Teoreme 1.3. i Leme 1.4., imamo da je

$$S \setminus M = \{a\}, \quad a^2 \in M$$

ili

$$(\forall\, a \in S \setminus M)(aM = M).$$

Ako je $S \setminus M = \{a\}$, $a^2 \in M$, tada je

$$aM \subseteq M \neq S. \tag{21}$$

Zaista, ako $aM \not\subseteq M$, onda je $aM = S$, jer je aM desni ideal od S što je nemoguće. Dakle, važi (21) pa je $SM \subseteq M$ i prema tome, M je dvostran ideal od S. Ukoliko je $aM = M$ za svaki $a \in S \setminus M$, onda $SM \subseteq M$ pa je M dvostran ideal od S. ▨

POSLEDICA 1.6. (Lema 2.1. [36]) Neka je T neprazan skup univerzalnih levih delitelja polugrupe S. Tada $S \setminus T$ je jedinstven maksimalan desni ideal od S koji je kompletno izolovan.

Dokaz. Sledi neposredno iz Teoreme 1.3. i Leme 1.4. ▨

POSLEDICA 1.7. Neka je T neprazan podskup univerzalnih levih delitelja polugrupe S. Tada $S \setminus T$ je jedinstven maksimalan dvostran ideal od S ako i samo ako je T desno prosta podpolugrupa od S.

Dokaz. Sledi neposredno iz Teoreme 1.3., Leme 1.4. ▨

2. KARAKTERIZACIJE NEKIH KLASA POLUGRUPA POMOĆU $\mathcal{T}$-REGULARNIH PODPOLUGRUPA

G. Pollak i L. Rédei [53] razmatraju polugrupe u kojima svaka prava podpolugrupa jeste grupa. S. Bogdanović [5] karakteriše polugrupe u kojima svaki pravi levi ideal jeste leva grupa, a u [7] polugrupe u kojima je svaka prava podpolugrupa regularna. Polugrupe u kojima je svaki pravi desni ideal regularan razmatrane su u [36].

U ovoj tački karakterišemo polugrupe kod kojih je svaka prava podpolugrupa (desni ideal, dvostran ideal) $\mathcal{T}$-regularna podpolugrupa. Teoreme 2.3. i 2.5. su uopštenja nekih rezultata iz [36], odnosno [7].

<u>TEOREMA 2.1.</u> Svaki pravi dvostran ideal polugrupe S je $\mathcal{T}$-regularan ako i samo ako je $I(S)$ $\mathcal{T}$-regularna podpolugrupa od S.

<u>Dokaz.</u> Ako je svaki pravi dvostran ideal od S $\mathcal{T}$-regularan i $a\in I(S)$ proizvoljan element, tada postoji pravi dvostran ideal I od S tako da je $a\in I$ i postoji $n\in Z^+$ tako da

$$a^n \in a^nIa^n \subseteq a^nI(S)a^n.$$

Prema tome, $I(S)$ je $\mathcal{T}$-regularna podpolugrupa od S.

Obratno, neka je $I(S)$ $\mathcal{T}$-regularna podpolugrupa od S i I pravi dvostran ideal od S. Tada $a \in I$ implicira $a \in I(S)$ pa postoji $n \in Z^+$ takav da je

$$a^n = a^n x a^n,$$

za neki $x \in I(S)$. Dalje, imamo da je

$$xa^n x \in V(a^n)$$

pa je

$$a^n = a^n(xa^n x)a^n \tag{1}$$

i

$$xa^n x \in SIS \subseteq I. \tag{2}$$

Iz (1) i (2) imamo

$$a^n \in a^n I a^n,$$

a odavde I je $\mathcal{T}$-regularna podpolugrupa od S. ▨

<u>POSLEDICA 2.2.</u> Svaki pravi dvostran ideal polugrupe S je regularan ako i samo ako je $I(S)$ regularna podpolugrupa od S.

<u>Dokaz.</u> Sledi neposredno iz Teoreme 2.1.

TEOREMA 2.3. Za polugrupu S su sledeći uslovi ekvivalentni:

(i) Svaki pravi desni ideal od S je $\mathcal{T}$-regularan;

(ii) $R(S)$ je kompletno $\mathcal{T}$-regularna podpolugrupa od S;

(iii) S ispunjava jedan od uslova:

1° S je kompletno π-regularna,

2° S sadrži kompletno π-regularan desni ideal M pri čemu je $S \setminus M$ polumreža dveju polugrupa P i K, gde je P desno prosta i $aM = M$ za svaki $a \in P$, K je dvostran ideal podpolugrupe $S \setminus M$ od S i $aM = S$ za svaki $a \in K$.

Dokaz. (i) $\Rightarrow$ (ii). Ako je svaki pravi desni ideal polugrupe S π-regularan i $a \in R(S)$ proizvoljan element tada postoji pravi desni ideal R od S koji sadrži a pa je

$$(3) \qquad a \in R(a) \subseteq R.$$

Kako je $R(a)$ π-regularan to postoji $n \in Z^+$ da

$$(4) \qquad a^n \in a^n R(a) a^n = a^n (a \cup aS) a^n$$
$$\subseteq a^{n+1} S a^n.$$

Odavde sledi da je

$$(5) \qquad a^n \in a^{n+1} S \wedge a^n = a^{n+1} x,$$

za neki $x \in S$. Dalje, imamo

$$a^{n+1} x = a^{n+2} x^2 \subseteq a^{n+2} S$$

što zajedno sa (5) daje

$$(6) \qquad a^n \in a^{n+2} S = a^{n+1} aS \subseteq a^{n+1} R(S)$$

Iz (4) sledi da je

$$a^n \in a^n a S a^n \subseteq a^n R(S) a^n,$$

a odavde i jednakosti (5) dobijamo

$$a^n \in a^{n+1} R(S) a^n,$$

pa, na osnovu Teoreme I 15., imamo $R(S)$ je kompletno

$\mathcal{T}$-regularna podpolugrupa od S.

(ii) $\Rightarrow$ (iii). Neka je R(S) kompletno $\mathcal{T}$-regularna podpolugrupa od S. Ako je R(S) = S tada je S kompletno $\mathcal{T}$-regularna. Neka $R(S) \neq S$. Tada R(S) = M je jedinstven maksimalan desni ideal od S pa na osnovu Teoreme 1.3., imamo $S \setminus M = \{a\}$, $a^2 \in M$ ili $S \setminus M = \{a \in S \mid aS = S\}$. Ako je $S \setminus M = \{a\}$, $a^2 \in M$, onda postoji $n \in Z^+$ da

$$(a^2)^n \in (a^2)^n M (a^2)^n \subseteq a^{2n} S a^{2n},$$

a odavde $a^{2n} \in a^{2n} S a^{2n}$ pa je S $\mathcal{T}$-regularna. Ukoliko je $a \in S$ proizvoljan element, tada postoji $n \in Z^+$ da

$$a^n \in a^n R(a) a^n = a^n (a \cup aS) a^n \subseteq a^{n+1} S a^n,$$

a na osnovu Teoreme I.15. sledi S je kompletno $\mathcal{T}$-regularna. Ako je $S \setminus M = \{a \in S \mid aS = S\}$, tada, na osnovu Leme 1.4. i Posledice 1.6., dobijamo 2°.

(iii) $\Rightarrow$ (i). Neka važi 1° i neka je R pravi desni ideal od S. Ako je $a \in R$ proizvoljan element, tada postoji $n \in Z^+$ da

$$a^n \in a^{n+1} S a^n = a^n (aS) a^n \subseteq a^n R a^n,$$

a odavde R je $\mathcal{T}$-regularan.

Ako važi 2°, tada, na osnovu Leme 1.4., M je jedinstven maksimalan desni ideal od S. Kako je svaki pravi desni ideal od S desni ideal od M i M kompletno $\mathcal{T}$-regularna, to sledi (i), a dokaz je istovetan kao pod 1°. ▨

<u>POSLEDICA 2.4.</u> Za polugrupu S su sledeći uslovi

ekvivalentni:

(i) Svaki pravi desni ideal od S je regularan;

(ii) R(S) je unija grupa;

(iii) S ispunjava jedan od uslova:

1° S je unija grupa;

2° S sadrži jedinstven maksimalan dvostran ideal M koji je unija grupa i faktor polugrupa Reesa S/M je dvoelementna nulta polugrupa;

3° S je desno regularna, sadrži univerzalne leve delitelje i svaki njen pravi glavni desni ideal je generiran nekim idempotentom.

Dokaz. (i) $\Rightarrow$(ii). Ako je svaki pravi desni ideal od S regularan, tada R(S) je kompletno regularna podpolugrupa od S (Teorema 2.3.) pa je unija grupa (Teorema I 8.)

(ii) $\Rightarrow$(iii). Ako je R(S) = S, tada je S unija grupa. Neka R(S) $\neq$ S. Tada, na osnovu Teoreme 1.3., M= R(S) je jedinstven maksimalan desni ideal od S koji je unija grupa i

$$S \setminus M = \{a\}, \quad a^2 \in M \tag{6}$$

ili

$$S \setminus M = \{a \in S \mid aS = S\}. \tag{7}$$

Ako važi (6), tada klase ekvivalencije po kongruenciji Reesa su M i jednočlan skup {a} pa je faktor polugrupa Reesa S'= S/M dvoelementna polugrupa. Očigledno, M je nula polugrupe S' i

$$(\forall a \in S)(aS \subseteq M),$$

a odavde

$$(\forall a \in S)(f(aS) = M), \tag{8}$$

gde je f prirodni homomorfizam od S na S' . Iz (8) imamo

$$f(a)\ f(S) = M$$

pa je

$$(\forall a' \in S')(a'S' = M),$$

a odavde $S'^2 = M$, tj. S' je nulta polugrupa.

Ukoliko važi (7), onda za proizvoljan element $a \in S \setminus M$ je

$$a^2S = aS = S$$

pa

$$(9) \qquad (\forall a \in S \setminus M)(a \in a^2S).$$

Kako je M unija grupa to je, na osnovu Teoreme I 8., desno regularna pa

$$(10) \quad (\forall a \in M)(a \in a^2M \subseteq a^2S).$$

Iz (9) i 10) sledi

$$(\forall a \in S)(a \in a^2\ S),$$

tj. S je desno regularna. Dalje, M je kompletno regularna pa je svaki glavni desni ideal od M generiran nekim idempotentom (Lema I 5.), a samim tim i svaki pravi desni ideal od S.

(iii) $\Rightarrow$(i). Ako je 1^o, onda (i) sledi na osnovu Teoreme 2.3. Ukoliko je 2^o, tada M je nula polugrupe S/M i njen jedini pravi desni ideal pa je jedinstven maksimalan desni ideal od S. Kako je M unija grupa to je kompletno regularna podpolugrupa od S i svaki njen desni ideal je regularan pa je i svaki pravi desni ideal od S regularan. Neka važi 3^o. Tada , na osnovu Leme I 5. S je regularna, a kako je i desno regularna to je unija grupa pa je svaki desni ideal od S regularan. ▨

TEOREMA 2.5. Svaka prava podpolugrupa polugrupe S je $\mathcal{T}$-regularna ako i samo ako S jeste periodička.

Dokaz. Neka je svaka prava podpolugrupa od S $\mathcal{T}$-regularna i neka S nije monogena. Tada

$$S = \bigcup_{a \in S} \langle a \rangle ,$$

gde je $\langle a \rangle$ monogena podpolugrupa od S. Kako $S \neq \langle a \rangle$ to je a $\mathcal{T}$-regularna pa postoji $n \in Z^+$ da

$$a^n \in a^n \langle a \rangle a^n,$$

a odavde

$$a^n = a^n a^k a^n,$$

za neki $k \in Z^+$, tj.

$$a^n = a^{n+(k+n)}.$$

Prema tome, S je periodička.

Neka je S monogena, tj.

$$S = \{a, a^2, a^3, \dots\}$$

Tada

$$A = \{a^2, a^3, \dots\}$$

je prava podpolugrupa od S pa je $\mathcal{T}$-regularna i prema tome,

$$(\forall a^k \in A)(\exists n \in Z^+)(a^{kn} = a^{kn} a^p a^{kn})$$

za neki $a^p \in A$. Odavde imamo

$$a^{kn} = a^{kn+(kn+p)}$$

Dakle, S je periodička.

Obratno, neka je S periodička polugrupa i A prava podpolugrupa od S. Tada za proizvoljno $a \in A$ postoje $r,m \in Z^+$ da je

$$(11) \qquad a^r = a^{r+m}$$

Ako je $r < m$, tada postoje $k,p \in Z^+$ da je $m=kr+p$ pa iz (11) imamo

$$a^r = a^{r+kr+p},$$

a odavde

$$a^r \in a^r A a^r,$$

tj. A je $\mathcal{T}$-regularna podpolugrupa od S. Ukoliko je $r > m$, onda postoje $u,v \in Z^+$ da je $r = um+v$, gde je $v < m$. Odavde i jednakosti (11) imamo

$$a^r = a^r a^m = a^{r+m} a^m = a^{r+2m} = \dots = a^{r+(u+1)m} = a^{r+(um+v)+l} = a^{2r+l},$$

za neki $l \in Z^+$ pa je

$$a^r \in a^r A a^r$$

i prema tome, A je $\mathcal{T}$-regularna podpolugrupa od S. ▨

<u>TEOREMA 2.6.</u> Svaki pravi desni ideal polugrupe S je desno $\mathcal{T}$-regularan ako i samo ako je R(S) desno $\mathcal{T}$-regularna podpolugrupa od S.

<u>Dokaz.</u> Ako je svaki pravi desni ideal polugrupe S desno $\mathcal{T}$-regularan i $a \in R(S)$ proizvoljan element, tada pos-

toji pravi desni ideal R od S da $a \in R$ i postoji $n \in Z^+$ da

$$a^n \in a^{n+1}R \subseteq a^{n+1}R(S).$$

Dakle, R(S) je desno $\mathcal{T}$-regularna podpolugrupa od S.

Obratno, neka je R(S) desno $\mathcal{T}$-regularna podpolugrupa od S i R pravi desni ideal od S. Tada $a \in R$ implicira $a \in R(S)$ pa postoji $n \in Z^+$ da je $a^n = a^{n+1}x$, za neki $x \in R(S)$. Odavde imamo

$$a^n \in a^{n+2}R(S) \subseteq a^{n+2}S = a^{n+1}\ aS \subseteq a^{n+1}R$$

i prema tome, R je desno $\mathcal{T}$-regularan. ▨

<u>DEFINICIJA 2.7.</u> $\mathcal{T}$-regularnu polugrupu S nazivamo s t r o g o $\mathcal{T}$- r e g u l a r n o m ako je Reg S podpolugrupa od S.

<u>LEMA 2.8.</u> Svaki desni ideal polugrupe S je strogo $\mathcal{T}$-regularan ako i samo ako S jeste $\mathcal{T}$-regularna i Reg S unija grupa.

<u>Dokaz.</u> Ako je svaki desni ideal polugrupe S strogo $\mathcal{T}$- regularan, tada za svaki $a \in S$ je $a \in R(a)$ i postoji $n \in Z^+$ da

$$a^n \in a^nR(a)a^n = a^n(a \cup aS)a^n = a^{2n+1} \cup a^{n+1}\ Sa^n.$$

Odavde imamo da

$$a^n \in a^{n+1}Sa^n,$$

a na osnovu Leme I 7. a^n leži u nekoj podgrupi od S. Prema tome, postoji $a^{-n} \in V(a^n)$ da je

$$(12)\qquad a^n = a^n a^{-n} a^n \wedge a^{-n} = a^{-n} a^n a^{-n} \wedge a^n a^{-n} = a^{-n} a^n,$$

a odavde

$$(13)\qquad a^n = a^n a^n a^{-n} = a^{2n} a^{-n} \in a^{2n} \cdot \mathrm{Reg}\ S.$$

Iz (12) sledi da

$$a^n \in a^n \ \mathrm{Reg}\ S\ a^n,$$

a što zajedno sa (13), i Teoreme I 8., daje Reg S je unija grupa.

Obratno, neka je S π-regularna polugrupa, Reg S unija grupa i R proizvoljan desni ideal od S. Tada, za proizvoljan element $a \in R$ postoji $n \in Z^+$ da $a^n \in \mathrm{Reg}\ S$ pa

$$a^n \in a^{2n} \ \mathrm{Reg}\ Sa^{2n} \subseteq a^{2n} S a^n = a^n a^n S a^n \subseteq a^n R a^n.$$

Dakle, R je π-regularan i prema tome, svaki desni ideal od S je π-regularan.

Ako su $a, b \in \mathrm{Reg}\ R$ proizvoljni elementi, tada $ab \in \mathrm{Reg}\ S$. Kako je Reg S unija grupa to ab leži u nekoj podgrupi od S pa je

$$(14)\quad ab = (ab)(ab)^{-1}(ab) \wedge (ab)^{-1} = (ab)^{-1}(ab)(ab)^{-1},$$

kao i

$$(15)\qquad (ab)(ab)^{-1} = (ab)^{-1}(ab).$$

Iz (14) i (15) dobijamo

$$(ab)^{-1} = (ab)(ab)^{-1}(ab)^{-1} \subseteq RS \subseteq R$$

i

$$ab \in (ab)\ R\ (ab),$$

a odavde $ab \in \mathrm{Reg}\ R$, tj. Reg R je podpolugrupa od R. Prema tome, svaki desni ideal od S je strogo π-regularan. ▨

3. POLUGRUPE U KOJIMA JE SVAKA PODPOLUGRUPA (LEVO) UNITARNA

U ovoj tački uvodimo pojam strogo levo (desno) regularne polugrupe i karakterišemo ovu klasu polugrupa pomoću levo (desno) unitarnih ideala. Takodje, karakterišemo klasu polugrupa koje su desne grupe pomoću (levo) unitarnih podpolugrupa.

Pojam unitarnog podskupa uveo je P. Dubreil [35] koji ovde navodimo.

<u>DEFINICIJA 3.1.</u> Neprazan podskup A polugrupe S je l e v o u n i t a r a n ako

$$(s \in S \wedge a, as \in A) \Rightarrow s \in A.$$

D e s n o u n i t a r a n skup se definiše dualno. Podskup A polugrupe S je u n i t a r a n ako je u isto vreme levo i desno unitaran.

<u>DEFINICIJA 3.2.</u> Polugrupa S je s t r o g o l e v o r e g u l a r n a ako

$$(\forall a, b \in S)(a \in Sab \vee a \in Sba).$$

Analogno se definiše s t r o g o d e s n o r e g u l a r n a polugrupa.

TEOREMA 3.2. Polugrupa S je strogo levo regularna ako i samo ako je svaki njen levi ideal levo unitaran.

Dokaz. Neka je S strogo levo regularna polugrupa i L levi ideal od S. Ako su $a,x \in S$ proizvoljni elementi, tada

$$x \in Sax \vee x \in Sxa$$

pa je

$$x = yax \vee x = zxa, \tag{1}$$

za neke $y,z \in S$. Ukoliko su

$$a, ax \in L,$$

tada je $xa \in L$ pa iz (1) imamo

$$x = yax \in SL \subseteq L$$

ili

$$x = zxa \in SL \subseteq L.$$

Dakle, L je levo unitaran i prema tome, svaki levi ideal je levo unitaran.

Obratno, neka je svaki levi ideal polugrupe S levo unitaran i neka su $x,a \in S$ proizvoljni elementi. Ako su $L(ax)$ i $L(xa)$ levi ideali generirani elementima ax, odnosno xa, tada

$$L = L(ax) \cup L(xa)$$

je levi ideal od S pa je

$$L = ax \cup xa \cup Sax \cup Sxa. \tag{2}$$

Odavde imamo da je

(3) $xa,\ xax \in L.$

Kako je L levo unitaran to iz (3) sledi $x \in L$, što zajedno sa (2) daje

$$x = ax \vee x = xa \vee x \in Sax \vee x \in Sxa.$$

Ako je $x = ax$, tada je $x = a^2x \in Sax$. Analogno, $x \in Sxa$ pa je

$$x \in Sax \vee x \in Sxa.$$

i prema tome, S je strogo levo regularna polugrupa.▨

<u>LEMA 3.3.</u> Svaki desni ideal polugrupe S je levo unitaran ako i samo ako S jeste desno prosta.

<u>Dokaz.</u> Neka je svaki desni ideal polugrupe S levo unitaran i R proizvoljan desni ideal od S. Ako je $a \in R$ proizvoljan element, tada

$$(\forall x \in S)(a, ax \in R)$$

pa kako je R levo unitaran to je $x \in R$ i prema tome, $R = S$. Dakle, S ne sadrži prave desne ideale pa je desno prosta.

Obratno sledi neposredno.▨

<u>TEOREMA 3.4.</u> Svaki jednostran (i levi i desni) ideal polugrupe S je levo unitaran ako i samo ako S jeste desna grupa.

<u>Dokaz.</u> Neka je svaki jednostran ideal od S levo unitaran i neka je R proizvoljan desni ideal od S. Tada, na osnovu Leme 3.3., $R = S$, odnosno S je desno prosta pa je

(4) $(\forall a \in S)(aS = S).$

Na osnovu Teoreme 3.2. S je strogo levo regularna pa

$$(\forall a,b\in S)(a\in Sab \vee a\in Sba),$$

a odavde

$$(5) \qquad (\forall a\in S)(a\in Sa^2),$$

tj. S je levo regularna.

Ako je L proizvoljan levi ideal od S i $a\in L$, tada iz (4) i (5) imamo

$$a = ya^2 \wedge y = az$$

za neke $y,z\in S$ pa je

$$\begin{aligned} a &= ya^2 = aza^2 \\ &= a(za)a \\ &\in a\,L\,a, \end{aligned}$$

tj. S sadrži idempotent. Dakle, S je desno prosta i sadrži idempotent i prema tome, S je desna grupa. (Teorema I 11.)

Obratno, neka je S desna grupa i L proizvoljan levi ideal od S. Ako je

$$a,\ ax\in L$$

za neki $x\in S$, tada, na osnovu Teoreme I 11., imamo da je S regularna pa je

$$(6) \qquad ax = (ax)\,yax,$$

za neki $y\in S$. Dalje, $yax = e$ je idempotent pa

$$L(ax) = L(e)$$

(Lema I 5.), a odavde $e\in L$. Kako je S levo kancelativna to iz (6) sledi

$$x = x(yax) = xe$$
$$\in SL \subseteq L.$$

Dakle, L je levo unitaran i prema tome, svaki levi ideal od S je levo unitaran. ▨

TEOREMA 3.5. Svaki dvostran ideal polugrupe S je levo unitaran ako i samo ako je S prosta.

Dokaz. Neka je svaki dvostran ideal od S levo unitaran i I proizvoljan dvostran ideal od S. Ako je $a \in I$ proizvoljan element, tada je

$$(7) \qquad (\forall x \in S)(ax \in I).$$

Kako je I levo unitaran to je $x \in I$, što zajedno sa (7) daje $I = S$. Dakle, S ne sadrži prave dvostrane ideale i prema tome, S je prosta.

Obratno sledi neposredno. ▨

TEOREMA 3.6. Svaka podpolugrupa polugrupe S je levo unitarna ako i samo ako je S periodička desna grupa.

Dokaz. Ako je svaka podpolugrupa od S levo unitarna, tada je i svaki jednostran ideal levo unitaran pa, na osnovu Teoreme 3.4., S je desna grupa. Neka je $a \in S$ proizvoljan element. Tada

$$\langle a \rangle = \{a, a^2, a^3, a^4, \dots\}$$

je podpolugrupa od S. Ukoliko je $\langle a \rangle$ beskonačna, onda

$$(8) \qquad A = \{a^2, a^3, a^4, \dots\}$$

je podpolugrupa od S koja je levo unitarna pa

$$a^3, a^3 a \in A \Rightarrow a \in A,$$

a odavde i jednakosti (8) imamo

$$a = a^k,$$

za neki $k \in Z^+$. Dakle, S je periodička.

Obratno, neka je S periodička desna grupa. Tada S je unija grupa (Teorema I 11.) pa za proizvoljan element $a \in S$ sledi da pripada nekoj podgrupi od S i $\langle a \rangle$ je konačna ciklična grupa. Ako je A proizvoljna podpolugrupa od S to je A periodička pa je unija konačnih cikličnih grupa, a na osnovu Teoreme I 8. unija disjunktnih grupa G_e, gde je G_e maksimalna podgrupa od A.

Neka je $a \in A$ proizvoljan element i

$$a, ax \in A,$$

za neki $x \in S$. Tada postoji maksimalna podgrupa G_e od A da $ax \in G_e$ pa je

$$(9) \qquad (ax)e = e(ax) = ax$$

i

$$(10) \qquad (ax)(ax)' = (ax)'(ax) = e,$$

gde je $ax \in G_e$ i $(ax)' \in V(ax)$. Kako je S desna grupa to je levo kancelativna pa sobzirom na (9) imamo

$$(11) \qquad (ax)e = ax \Rightarrow xe = x,$$

a kako je i desno prosta to je $ex = e$, što zajedno sa (11) daje

$$(12) \qquad ex = xe = x.$$

Dalje, na osnovu Teoreme I 11. $E(S)$ je polugrupa desnih nula pa je

$$(ax)' = x'a'$$

(Propozicija I 20.), gde je $x' \in V(x)$ i $a' \in V(a)$. Kako je aa' idempotent i svaki idempotent iz S je leva jedinica to iz (10) imamo

$$\begin{aligned} e &= (ax)'(ax) = x'a'ax \\ &= x'(a'a)x = x'((a'a)x) \\ &= x'x = x'(ex) \\ &= (x'e)x. \end{aligned}$$

S druge strane, imamo da je

$$\begin{aligned} e &= x\,x'e \\ &= x(x'e). \end{aligned}$$

Prema tome,

$$(13) \qquad x(x'e) = (x'e)x = e.$$

Iz (12) i (13) sledi da je $x \in G_e$ pa je $x \in A$. Dakle, A je podlevo unitarna podpolugrupa od S i prema tome, svaka podpolugrupa od S je levo unitarna.▨

POSLEDICA 3.7. Svaka podpolugrupa polugrupe S je unitarna ako i samo ako je S periodička grupa.

Dokaz. Sledi neposredno iz Teoreme 3.6. i njoj dualne teoreme.▨

4. POLUGRUPE ČIJE PRAVE PODPOLUGRUPE JESU (DESNO) t-ARHIMEDOVSKE

U ovoj tački karakterišemo polugrupe čije sve prave podpolugrupe jesu (desno) t-arhimedovske. Dobijeni rezultati su uopštenja nekih rezultata S. Bogdanovića [6], B. Pondéličeka [47], A. C. Cherubinija i A. Variska [14].

DEFINICIJA 4.1. [49], [62], [56]. Polugrupa S je *arhimedovska* ako

$$(\forall a,b\in S)(\exists n\in Z^{+})(a^{n}\in SbS).$$

Polugrupa S je *desno arhimedovska* ako

$$(\forall a,b\in S)(\exists n\in Z^{+})(a^{n}\in bS).$$

Analogno se definiše *levo arhimedovska* polugrupa. Polugrupa S je *t-arhimedovska* ako

$$(\forall a,b\in S)(\exists n\in Z^{+})(a^{n}\in bS\cap Sb).$$

Polugrupa S je *stepeno vezana* ako

$$(\forall a,b\in S)(\exists n,m\in Z^{+})(a^{m}=b^{n}).$$

Navodimo sledeću teoremu S. Bogdanovića, [6].

TEOREMA 4.2. Svaki pravi desni ideal polugrupe S je desno arhimedovska podpolugrupa od S ako i samo ako je ispunjen jedan od uslova:

1° S je desno arhimedovska;

2° S sadrži tačno dva desna ideala R_1 i R_2 koji su desno prosti i $S = R_1 \cup R_2$;

3° S sadrži maksimalan desni ideal M koji je desno arhimedovski i $M \subsetneq aM$ za svaki $a \in S \setminus M$.

DEFINICIJA 4.3. S je R - p o l u g r u p a ako

$$(\forall a,b \in S)(\exists n \in Z^+)(\exists i_1,\dots,i_k,j_1,\dots,j_k \in Z^+ \cup \{0\})(a^n = b.a^{i_1}b^{j_1}\dots a^{i_k}b^{j_k}).$$

TEOREMA 4.4. Svaka prava podpolugrupa od S je desno arhimedovska ako i samo ako je ispunjen jedan od uslova:

(i) S je R-polugrupa;

(ii) S ima tačno dva desna ideala R_1, R_2 koji su desno proste R-polugrupe, $S = R_1 \cup R_2$ i za svaki $a \in R_1$, $b \in R_2$ je $S = \langle a,b \rangle$;

(iii) S ima (maksimalan) dvostran ideal M koji je R-polugrupa, $S \setminus M$ je desno prosta R-polugrupa, i za svaki $a \in M$, $b \in S \setminus M$ je $S = \langle a,b \rangle$.

Dokaz. Neka je svaka prava podpolugrupa od S desno arhimedovska. Tada, na osnovu Teoreme 4.2. važe uslovi 1°, 2° ili 3° te teoreme. Ako važi 1°, tada je S desno arhimedovska pa je S R-polugrupa. Ukoliko važi 2°, tj. S ima tačno dva desna ideala R_1 i R_2 koji su desno proste polugrupe i $S = R_1 \cup R_2$, tada su R_1 i R_2 R-polugrupe. Neka su $a \in R_1$ i $b \in R_2$ proizvoljni elementi. Ako pretpostavimo da $\langle a,b\rangle \neq S$, tada je $\langle a,b\rangle$ desno arhimedovska polugrupa pa

$$(\exists x \in \langle a,b\rangle)(\exists n \in Z^+)(a^n = bx),$$

a odavde $a^n \in R_2$, što je nemoguće. Neka važi 3^o, a odavde, S ima maksimalan desni ideal M koji je desno arhimedovska polugrupa i $M \subseteq aM$ za svaki $a \in S \setminus M$. Tada

$$M = R(S) \wedge S \setminus M = \{a \in S \mid aS = S\},$$

pa na osnovu Leme 1.4., imamo

$$S \setminus M = P \cup K,$$

gde je $P = \{a \in S \mid aM = M\}$ desno prosta polugrupa od S i $K = \{a \in S \mid aM = S\}$. Dokažimo da je $K = \emptyset$. Zaista, ako $K \neq \emptyset$, tada postoje $a \in K$, $x,y \in M$ da je

$$ax = a \wedge ay = x.$$

Kako je M desno arhimedovska polugrupa i $y, xa \in M$ to

$$(\exists m \in Z^+)(xay)^m \in yM,$$

a odavde $x^{2m} = yu$ za neki $u \in M$. Dalje, imamo

$$a = ax = ax^{2m} = ayu = xu \in M,$$

što je nemoguće. Dakle, $S \setminus M = P$ je desno prosta R-polugrupa i M jedinstven maksimalan dvostrani ideal (Lema 1.5.) koji je R-polugrupa. Neka su $a \in M$ i $b \in S \setminus M$ proizvoljni elementi i neka $\langle a,b\rangle \neq S$. Tada je $\langle a,b\rangle$ desno arhimedovska polugrupa pa

$$(\exists n \in Z^+)(\exists x \in \langle a,b\rangle)(b^n = ax),$$

a odavde imamo da je $b^n \in M$, što je nemoguće.

Obratno sledi neposredno. ▨

TEOREMA 4.4. Svaka prava podpolugrupa polugrupe S je desno arhimedovska sa idempotentom ako i samo ako je ispunjen jedan od uslova:

1^o S je periodička R-polugrupa;

2^o S je dvoelementna polugrupa idempotenata.

Dokaz. Neka je svaka prava podpolugrupa od S desno arhimedovska sa idempotentom. Tada je ispunjen jedan od uslova (i), (ii) ili (iii) Teoreme 4.3. Ako je (i), tada za proizvoljan element $a \in S$ je

$$\langle a \rangle = \{a, a^2, a^3, \ldots\}$$

levo arhimedovska polugrupa sa idempotentom pa postoji $e \in E(S)$ i $n \in Z^+$ da je $a^n = e$, a odavde a je konačnog reda. Dakle, S je periodička R-polugrupa. Uslovi (ii) i (iii) su ispunjeni samo ako je S dvoelementna polugrupa idempotenata. Zaista, neka S sadrži dva desna ideala R_1 i R_2 koji su desno proste R-polugrupe i za svaki $a \in R_1$, $b \in R_2$ je $S = \langle a,b \rangle$. Ako su e i f redom idempotenti polugrupa R_1 i R_2, tada je $S = \langle e,f \rangle$. Sem toga, $ef \in R_1$ i $fe \in R_2$ pa

$$e = (ef)^n \wedge f = (fe)^m$$

za neke $n,m \in Z^+$, jer su R_1 i R_2 R-polugrupe. Odavde imamo

$$ef = e \wedge fe = f.$$

Dakle,

$$\langle e,f \rangle = \{e,f\}$$

i prema tome, S je dvoelementna polugrupa idempotenata.

Neka važi (iii) i neka su idempotenti $e \in M$ i $f \in S \smallsetminus M$. Tada

$$ef, fe \in M$$

pa kako je M R-polugrupa imamo

$$e = (ef)^n \wedge e = (fe)^m$$

za neke $n, m \in Z^+$, a odavde

$$ef = e \wedge fe = e.$$

Dakle,

$$\langle e, f \rangle = \{e, f\}$$

i prema tome, S je dvoelementna polugrupa idempotenata.

Obratno sledi neposredno. ▨

Navodimo sledeću lemu S. Bogdanovića [6].

LEMA 4.5. S je desno prosta t-arhimedovska polugrupa ako i samo ako je grupa.

DEFINICIJA 4.6. S je T - p o l u g r u p a ako

$$(\forall a, b \in S)(\exists n \in Z^+)(\exists i_1, \dots, i_k, j_1, \dots, j_k, i_1', \dots, i_k', j_1', \dots, j_k' \in Z^+ \cup \{0\})$$
$$(a^n = a^{i_1} b^{j_1} \dots a^{i_k} b^{j_k} . b = b \, . \, a^{i_1'} b^{j_1'} \dots a^{i_k'} b^{j_k'}).$$

TEOREMA 4.7. Svaka prava podpolugrupa od S je t-arhimedovska ako i samo ako je ispunjen jedan od uslova:

1° S je T-polugrupa;

2° S je dvoelementna polugrupa idempotenata.

Dokaz. Neka je svaka prava podpolugrupa od S t-arhimedovska. Tada svaka prava podpolugrupa od S jeste desno arhimedovska pa je ispunjen jedan od uslova (i), (ii) ili (iii) Teoreme 4.3. Ako važi (i) tada je S R-polugrupa, a na osnovu dualne teoreme Teoremi 4.3. S je i L-polugrupa pa prema tome, S je T-polugrupa. Uslovi (ii) i (iii) su ispunjeni samo ako je S dvoelementna polugrupa idempotenata. Zaista, neka je $S = R_1 \cup R_2$, gde su R_1 i R_2 desno proste R-polugrupe i za svaki $a \in R_1$, $b \in R_2$ je $S = \langle a,b \rangle$. Tada, na osnovu Leme 4.5., R_1 i R_2 su grupe. Ako su e i f redom jedinice grupa G_1, G_2, tada

$$S = \langle e,f \rangle .$$

Dalje, imamo

$$ef \in R_1 \wedge fe \in R_2$$

pa

$$(\forall x \in R_1)(ef = xe),$$

a odavde

$$efe = (xe)e = xe = ef$$

i

$$(ef)^2 = (efe)f = (ef)f = ef.$$

Kako je R_1 grupa to

$$fe = e.$$

Slično,

$$ef = f$$

pa je

$$S = \{e,f\}.$$

Dakle, S je dvoelementna polugrupa idempotenata. Ako važi (iii), tada je M dvostran ideal od S i $S \setminus M$ desno prosta polugrupa, a kako je i t-arhimadovska to je grupa (Lema 4.5.). Neka je e jedinica grupe $S \setminus M$ i $x \in M$ proizvoljan element. Tada

$$(1) \qquad ex, xe, x^k e \in M$$

i

$$(2) \qquad S = \langle e, ex \rangle = \langle e, xe \rangle.$$

Odavde imamo

$$x = ey$$

za neki $y \in S$ pa je

$$(3) \qquad ex = e(ey) = ey = x$$

i prema tome,

$$(4) \qquad (xe)^k = (xe)(xe)\ldots(xe) = x(ex)\ldots(ex)e = x^k e.$$

Iz (2), (3) i (4) sledi

$$S = \{e, xe, x^2e, x^3e, \ldots\}.$$

Dalje, odavde i iz (i) imamo da se

$$A = \{e, x^2e, x^3e, \ldots\}$$

podpolugrupa od S pa ako je t-arhimedovska tada je $e \in x^k eA \subseteq M$, što je nemoguće. Dakle,

$$S = \{e, x^2e, x^3e, \ldots\} = \{x^2e, x^3e, \ldots\} \cup \{e\}$$

pa je

$$(5) \qquad M = \{x^2e, x^3e, \ldots\}$$

Iz (1), (4) i (5) sledi

$$xe = x^k e = (xe)^k$$

za neki $k > 1$ i prema tome, M je grupa. Jedinica ove grupe je $(xe)^{k-1} = x^{k-1}e$ pa je

$$S = \langle x^{k-1}e, e \rangle = \{x^{k-1}e, e\}$$

Dakle, S je dvoelementna polugrupa idempotenata.

Obratno sledi neposredno. ▨

<u>POSLEDICA 4.8.</u> [14] Neka je S polugrupa sa idempotentom. Tada svaka prava podpolugrupa od S je t-arhimedovska ako i samo ako je ispunjen jedan od uslova:

(i) S je polugrupa idempotenata reda 2;

(ii) S je idealna ekstenzija periodičke grupe pomoću nil-polugrupe.

<u>POSLEDICA 4.9.</u> [6] Svaka prava podpolugrupa od S je stepeno vezana ako i samo ako $|S| = 2$ ili je S stepeno vezana.

5. PARCIJALNO PROSTE POLUGRUPE

U ovoj tački uvodimo pojam parcijalno (desno) proste polugrupe. Ovaj pojam je uopštenje poznatog pojma proste (desno) proste polugrupe. Dalje, opisujemo ovu klasu polugrupa, a potom karakterišemo polugrupe u kojima je svaka podpolugrupa (ideal) parcijalno (desno) prosta.

DEFINICIJA 5.1. [18] Element $a \in S$ je u n i v e r z a l a n l e v i d e l i t e l j polugrupe S ako je

$$aS = S.$$

Analogno se definiše u n i v e r z a l a n d e s n i d e l i t e l j. Element $a \in S$ je u n i v e r z a l a n u n u t a r n j i d e l i t e l j polugrupe S ako je

$$SaS = S.$$

DEFINICIJA 5.2. Polugrupa S je p a r c i j a l n o d e s n o (l e v o) p r o s t a ako sadrži neprazan podskup univerzalnih levih (desnih) delitelja.

TEOREMA 5.2. Polugrupa S je parcijalno desno prosta ako i samo ako je ispunjen jedan od uslova:

1^{o} S je desno prosta;

2^{o} S sadrži maksimalan desni ideal M, $S \setminus M$ je podpolugrupa i $M \subseteq Ma$, za svaki $a \in S \setminus M$.

Dokaz. Neka je S parcijalno desno prosta polugrupa. Tada

(1) $$T = \{a \in S \mid aS = S\} \neq \emptyset$$

pa razlikujemo dva slučaja:

(i) $T = S$. U ovom slučaju S je desno prosta;

(ii) $T \subset S$. Tada $M = S \setminus T$ je jedinstven maksimalan desni ideal od S i $T = S \setminus M$ je podpolugrupa od S (Posledica 1.6.). Ako je $a \in T$ proizvoljan element, tada iz (1) imamo

$$a(M \cup T) = M \cup T,$$

a odavde

$$aM \cup aT = M \cup T,$$

Pa kako je $M \cap T = \emptyset$ i $aT \subseteq T$ to je $M \subseteq aM$.

Obratno, ako važi 1^{o} tvrdjenje sledi neposredno. Ukoliko je ispunjen uslov 2^{o}, onda je

$$S \setminus M \subseteq aS,$$

za svaki $a \in S \setminus M$. (Teorema I 2.) Odavde imamo

(2) $$M \cup aS = S.$$

Kako je $M \subseteq Ma$ to je $M \subseteq aS$, što zajedno sa (2) daje $aS = S$. Dakle, S je parcijalno desno prosta. ▨

LEMA 5.3. Neka S nije desno prosta. Tada S je parcijalno desno prosta ako i samo ako sadrži jedinstven maksimalan desni ideal koji je izolovan.

Dokaz. Ako je S parcijalno desno prosta, tada

$$T = \{a \in S \quad aS = S\} \neq \emptyset \wedge T \neq S$$

pa, na osnovu Posledice 1.6., imamo da je $M = S \setminus T$ jedinstven maksimalan desni ideal od S. Neka je $a \in S$ proizvoljan element i $a^2 \in M$. Ako $a \notin M$, tada $a \in T$ pa je $aS = S$. Odavde sledi

$$a^2S = aS = S$$

pa

$$a \in a^2S \subseteq MS \subseteq M,$$

što je nemoguće. Dakle,

$$(\forall a \in S)(a^2 \in M \Rightarrow a \in M)$$

i prema tome, M je izolovan ideal. ▨

TEOREMA 5.4. Neka S nije desno prosta. Tada su sledeći uslovi ekvivalentni:

(i) S je parcijalno desno prosta;

(ii) S sadrži jedinstven maksimalan desni ideal koji je izolovan;

(iii) S sadrži maksimalan desni ideal M, $S \setminus M$ je podpolugrupa od S i $M \subseteq Ma$ za svaki $a \in S \setminus M$;

(iv) S sadrži pravi desni ideal M,

$$S \setminus M = P \cup K,$$

gde je $P = \{a \in S \setminus M \mid aM = M\}$ desno prosta podpolugrupa od S i $K = \{a \in S \setminus M \mid aM = S\}$.

Dokaz. Sledi na osnovu Leme 5.3., Teoreme 5.2. i Leme 1.4. ▨

TEOREMA 5.5. Za polugrupu S su sledeći uslovi ekvivalentni:

(i) Svaka podpolugrupa od S je parcijalno desno prosta;

(ii) Svaka podpolugrupa od S ima desnu jedinicu;

(iii) S je dualno dobro uredjen skup periodičkih desnih grupa.

Dokaz. (i) $\Rightarrow$(ii). Ako je A podpolugrupa od S koja je parcijalno desno prosta, tada

(3) $(\exists\, a \in A)(aA = A)$.

Odavde sledi $A^2 = A$. Dakle, A je globalno idempotentna i prema tome, svaka podpolugrupa od S je regularna (Teorema I 12). Ako je $a \in A$ proizvoljan element, tada

$$(\exists\, x \in A)(a = axa),$$

a odavde i jednakosti (3) imamo

$$aA = axaA = ax(aA) = axA = A.$$

Kako je $ax = e$ idempotent iz A to je e leva jedinica podpolugrupe A od S.

(ii) $\Rightarrow$(i). Sledi neposredno.

(ii) $\Rightarrow$ (iii). Sledi iz Teoreme I 13. ▨

TEOREMA 5.6. Za polugrupu S su sledeći uslovi ekvivalentni:

(i) S je regularna i svaki desni ideal od S je parcijalno desno prost;

(ii) Svaki desni ideal od S ima levu jedinicu;

(iii) S je regularna i E(S) je traka koja je dualno dobro uredjen skup polugrupa desnih nula.

Dokaz. (i) $\Longrightarrow$(ii). Ako je S regularna polugrupa i R proizvoljan desni ideal od S koji je parcijalno desno prost, tada

$$(\exists\, a\in R)(\exists\, x\in S)(aR = R \wedge a = axa).$$

Odavde imamo

$$R = aR = axaR = axR. \tag{4}$$

Kako je $ax\in E(R)$ to iz (4) dobijamo da je ax leva jedinica iz R.

(ii) $\Longrightarrow$(i). Neka je ispunjen uslov (ii) i neka je e leva jedinica desnog ideala R(a). Tada je

$$e = ax = (ax)e = a(xe)$$

za neki $x\in S$. Odavde imamo

$$a = ea = a(xe)a.$$

Dakle, S je regularna. Ako je R proizvoljan desni ideal od S i e leva jedinica iz R, tada

$$eR = R,$$

a odavde sledi R je desno prosta podpolugrupa od S.

(ii) $\Longrightarrow$(iii). Sledi na osnovu Teoreme I 14.▨

TEOREMA 5.7. Svaki pravi desni ideal od S ima levu jedinicu ako i samo ako je ispunjen jedan od uslova:

(i) S je regularna i svaki njen pravi desni ideal je parcijalno desno prost;

(ii) S sadrži jedinstven maksimalan desni ideal M koji je regularan i svaki desni ideal od M je parcijalno desno prost;

(iii) Svaki desni ideal od S sadrži levu jedinicu.

Dokaz. Ako je svaki pravi desni ideal od S ima levu jedinicu, tada je svaki pravi desni ideal parcijalno desno prost. Neka je $a \in S$ proizvoljan element i $R(S) = S$. Tada $R(a)$ sadrži levu jedinicu e pa je

$$e = ax \wedge a = ea,$$

za neki $x \in S$. Odavde imamo da je

$$a = axa.$$

Dakle, S je regularna i prema tome, sledi (i) ove teoreme.

Ako $R(S) \neq S$, tada je $M = R(S)$ jedinstven maksimalan desni ideal od S. Neka je R proizvoljan desni ideal od M i $a \in R$ proizvoljan element. Tada

$$(5) \qquad a = axa \in RSR \subseteq R^2.$$

Iz (5) sledi $R = R^2$. Prema tome,

$$RS = R^2S = RRS \subseteq RMS \subseteq RM \subseteq R,$$

a odavde R je desni ideal od S. Dakle, svaki desni ideal od M sadrži levu jedinicu.Sem toga, na osnovu Teoreme 1.3., imamo

$$S \setminus M = \{a\}, \ a^2 \in M$$

ili

$$S \setminus M = \{a \in S \mid aS = S\}.$$

Ako je $S \setminus M = \{a\}$, $a^2 \in M$, onda na osnovu Teoreme 5.6. sledi (ii) ove teoreme.

Ukoliko je $S \setminus M = \{a \in S \mid aS = S\}$, tada iz (5) za proizvoljan element $a \in S \setminus M$ imamo

$$aS = axaS = axS = S. \tag{6}$$

Kako je $ax \in E(S)$ to iz (6) sledi da je ax leva jedinica iz S. Prema tome, svaki desni ideal od S sadrži levu jedinicu pa dobijamo (iii) ove teoreme.

Obratno sledi neposredno. ▨

TEOREMA 5.8. Neka je S levo kancelativna polugrupa. Tada S je parcijalno desno prosta ako i samo ako je ispunjen jedan od uslova:

1° S je desna grupa;

2° S je polumreža dveju polugrupa M i $S \setminus M$, gde je M dvostran ideal od S, $S \setminus M$ je desna grupa čije leve jedinice su leve jedinice polugrupe S.

Dokaz. Ako je S parcijalno desno prosta, tada

$$(\exists\, a \in S)(aS = S),$$

a odavde

$$ax = x, \tag{7}$$

za neki $x \in S$. Kako je S levo kancelativna to iz (7) imamo

$$ax^2 = ax \Rightarrow x^2 = x, \tag{8}$$

tj. x je idempotent iz S. Neka je $b \in S$ proizvoljan element. Tada iz (8) sledi

$$x^2 b = xb,$$

a odavde

$$xb = b. \tag{9}$$

Iz (8) i (9) dobijamo da je x leva jedinica polugrupe S pa je $xS = S$.

Dalje, na osnovu Teoreme 5.2. i Leme 5.3. imamo S je desno prosta ili sadrži jedinstven maksimalan desni ideal M koji je izolovan. Ako je S desno prosta, onda je desna grupa, jer sadrži idempotent (Teorema I 11.) pa sledi 1° ove teoreme. U drugom slučaju, na osnovu Leme 1.4. je

$$(10) \qquad S \setminus M = P \cup K,$$

gde je $P = \{a \in S \setminus M \mid aM = M\}$ desno prosta podpolugrupa od S i $K = \{a \in S \setminus M \mid aM = S\}$ dvostran ideal polugrupe $S \setminus M$. Neka je $a \in K$ proizvoljan element. Tada

$$(11) \qquad (\exists x \in M)(ax = a).$$

Kako je S levo kancelativna to iz (11) sledi da je $x^2 = x$, tj. x je idempotent pa za proizvoljan element $b \in S$ je $xb = b$ i prema tome,

$$(12) \qquad xS = S.$$

Iz Teoreme 5.2. i jednakosti (12) sledi da je $x \in S \setminus M$, što je nemoguće. Dakle, $K = \emptyset$ pa je M dvostran ideal od S (Lema 1.5.), a kako je i izolovan to sledi 2° ove teoreme (Lema 1.4.).

Obratno sledi neposredno.

<u>TEOREMA 5.9.</u> Neka je S polugrupa sa kancelacijom. Tada S je parcijalno desno prosta ako i samo ako je ispunjen jedan od uslova:

1° S je grupa;

2° S je polumreža dveju polugrupa M i $S \setminus M$, gde je M dvostran ideal od S i $S \setminus M$ je grupa čija jedinica je jedinica polugrupe S.

Dokaz. Ako je S parcijalno desno prosta, tada, na osnovu Teoreme 5.8., ispunjen je jedan od uslova 1° ili 2° te teoreme. Ukoliko je 1° to je S desna grupa pa sadrži levu jedinicu e. Kako je $e^2 = e$ to za proizvoljan element $x \in S$ imamo

$$xe^2 = xe,$$

a sobzirom na desnu kancelativnost dobijamo

$$xe = x,$$

tj. e je jedinica polugrupe S. Dakle, S je desna grupa koja sadrži jedinicu i prema tome je grupa. Ako je 2° onda se analogno dokazuje da je $S \setminus M$ grupa.

Obratno sledi neposredno. ▨

DEFINICIJA 5.10. Polugrupa S je parcijalno prosta ako sadrži neprazan podskup univerzalnih unutarnjih delitelja.

LEMA 5.11. Svaka parcijalno desno prosta polugrupa je parcijalno prosta.

Dokaz. Neka je S parcijalno desno prosta. Tada postoji $a \in S$ da je $aS = S$ pa je $S^2 = S$, a odavde

$$SaS = S^2 = S$$

i prema tome, S je parcijalno prosta. ▨

<u>TEOREMA 5.12.</u> Polugrupa S je parcijalno prosta ako i samo ako je ispunjen jedan od uslova:

1° S je prosta;

2° S sadrži jedinstven maksimalan dvostran ideal M i faktor polugrupa Reesa S/M je 0-prosta.

<u>Dokaz.</u> Ako je S parcijalno prosta, tada S jeste prosta ili sadrži jedinstven maksimalan dvostran ideal M (Teorema 1.2.) i prema tome, S/M je 0-prosta (Lema I 1.).

Obratno, u slučaju 1° tvrdjenje sledi neposredno. Neka važi 2° i neka je f prirodni homomorfizam od S na $S' = S/M$. Tada M je nula polugrupe S i $S'^2 \neq M$ pa je $S'^2 = S'$ odavde imamo da je

$$(13) \qquad S'^3 = S'^2S' = S'^2 = S'.$$

Dalje imamo da

$$(14) \qquad (\exists\, a' \in S')(S'a'S' = S').$$

Zaista, ako pretpostavimo da

$$(\forall\, a' \in S')(S'a'S' = M),$$

onda je $S'^3 = M$, što je u kontradikciji sa jednakošću (13). Prema tome, iz (14) imamo

$$f(S)f(a)f(S) = f(S),$$

a odavde

$$(15) \qquad f(SaS) = f(S).$$

Ako pretpostavimo da $SaS \neq S$, tada je $SaS \subseteq M$ pa

$$f(SaS) = M \neq f(S),$$

što je nemoguće, imajući u vidu jednakost (15). Dakle,

$SaS = S$ i prema tome, S je parcijalno prosta. ▨

LEMA 5.13. Svaki dvostran ideal polugrupe S je parcijalno prost ako i samo ako je S poluprosta i svaki njen dvostran ideal je glavni ideal.

Dokaz. Neka je svaki dvostran ideal od S parcijalno prost i neka je $J(a)/I(a)$ glavni faktor od S. Tada $J(a)$ je parcijalno prosta podpolugrupa od S i $I(a)$ je jedinstven maksimalan ideal od $J(a)$ (Teorema 1.2.). Dakle, $J(a)/I(a)$ jeste 0-prosta ili prosta polugrupa (Teorema 5.12.) i prema tome, S je poluprosta.

Ako je J proizvoljan dvostran ideal od S, tada

$$(\exists\, a \in J)(JaJ = J),$$

a odavde

$$J = JaJ \subseteq SaS \subseteq J(a)$$

pa kako je i $J(a) \subseteq J$ to je $J = J(a)$.

Obratno, neka je S poluprosta i J proizvoljan dvostran ideal od S. Tada je J glavni ideal pa

$$(\exists\, a \in S)(J(a) = J)$$

i $J(a)/I(a)$ je 0-prosta ili prosta polugrupa. Po Teoremi 1.2. $I(a)$ je jedinstven maksimalan ideal od $J(a)$. Odavde i Teoreme 5.12. imamo da je $J(a)$ parcijalno prosta polugrupa i prema tome, svaki dvostran ideal od S je percijalno prost. ▨

LEMA 5.14. Neka je S polugrupa u kojoj je svaki pravi dvostran ideal parcijalno prost. Tada

(i) Svaki pravi dvostran ideal od S je glavni ideal i za proizvoljan glavni ideal $J(a)$ je $J(a) = SaS$;

(ii) Svaki dvostran ideal proizvoljnog dvostranog ideala od S je dvostran ideal od S.

Dokaz. (i) Neka je J pravi dvostran ideal od S. Tada postoji $a \in J$ da je

$$(15) \qquad J = JaJ \subseteq SaS \subseteq J(a).$$

Kako je $J(a) \subseteq J$ to sobzirom na (15) imamo da je $J = J(a)$. Ako je $M = I(S)$ i $a \in M$ proizvoljan element, tada je $a \in SaS$. Zaista, ako pretpostavimo da

$$(16) \qquad a \notin SaS$$

i

$$A = aS \cup Sa \cup SaS,$$

onda

$$a \notin aS \wedge a \notin Sa.$$

Sem toga, A je pravi dvostran ideal od $J(a)$ i

$$J(a) \setminus A = \{a\},$$

a odavde A je jedinstven maksimalan desni ideal od $J(a)$ odavde dobijamo

$$J(a) = J(a)aJ(a) \subseteq SaS$$

pa je $a \in SaS$ što je u kontradikciji sa (16). Dakle,

$$(\forall a \in M)(a \in SaS)$$

i prema tome,

$$J(a) = SaS.$$

(ii) Neka je A pravi dvostran ideal od S i neka je B dvostran ideal od A. Tada ABA je ideal od S i $ABA \subseteq B$. Dokažimo da je ABA = B. Zaista, ako je $ABA \subsetneq B$, tada

$$(17) \qquad (\exists b \in B \sim ABA).$$

Na osnovu (i) imamo da je

$$(18) \qquad J(b) = SbS$$

i

$$J(b) = J(b)\ bJ(b) \subseteq J(b)^3,$$

a odavde sledi da je

$$(19) \qquad J(b) = J(b)^3.$$

Sem toga, imamo da je

$$SbS \cdot SbS \cdot SbS \subseteq SbS \cdot b \cdot SbS,$$

što zajedno sa (18) i (19) daje

$$J(b)^3 \subseteq J(b)b\ J(b).$$

Odavde sledi

$$J(b) \subseteq ABA,$$

pa je $b \in ABA$, što je u kontradikciji sa (17). Dakle, ABA=B i prema tome, B je dvostran ideal od S. ▨

<u>TEOREMA 5.15.</u> Svaki pravi dvostran ideal polugrupe S je parcijalno prost ako i samo ako je ispunjen jedan od uslova:

1° S je poluprosta i svaki njen pravi dvostran ideal je glavni ideal;

2^o S sadrži jedinstven maksimalan dvostran ideal M koji je poluprost i svaki dvostran ideal od M je glavni ideal.

<u>Dokaz.</u> Neka je svaki pravi dvostran ideal od S parcijalno prost i neka je $M = I(S)$. Ako je $M = S$, tada je $J(a)$ pravi dvostran ideal od S za svaki $a \in S$ i glavni faktor $J(a)/I(a)$ od S je 0-prost ili prost (Teorema 5.12). Prema tome, S je poluprosta pa na osnovu Leme 5.14., sledi svaki pravi dvostran ideal od S je glavni ideal.

Ako $M \neq S$, tada M je jedinstven maksimalan dvostran ideal od S što zajedno sa Teoremom 1.2. daje

$$S \setminus M = \{a \in S \mid SaS = S\} \tag{20}$$

ili

$$S \setminus M = \{a\}, \quad a^2 \in M. \tag{21}$$

Ukoliko važi (20), tada je S parcijalno prosta i prema tome, svaki dvostran ideal je parcijalno prost pa važi uslov 1^o ove teoreme (Lema 5.13.). Neka sada važi (21). Tada, na osnovu Leme 5.14. i pretpostavke teoreme imamo svaki dvostran ideal od M je parcijalno prost i M je poluprosta podpolugrupa od S čiji dvostrani ideali su glavni ideali od M.

Obratno sledi iz Leme 5.14. i 5.13. ▨

GLAVA III

(m,n)-DVOSTRANO (JEDNOSTRANO) ČISTE POLUGRUPE

1. (m, n) - DVOSTRANO (JEDNOSTRANO) ČISTE POLUGRUPE

U ovoj glavi uvodimo pojam (m, n) - dvostrano (jednostrano) čiste polugrupe. Ovaj pojam je uopštenje pojma T^* čiste (B^*-čiste) polugrupe N. Kurokija [30] [31]. Zatim, opisujemo polugrupe u kojima je S^{m+n+1} polumreža grupa. Takodje, karakterišemo nil-patentne polugrupe pomoću podpolugrupa koje su (m, n)-dvostrano (jednostrano) čiste.

DEFINICIJA 1.1. Podskup B polugrupe S je (m,n)-d v o s t r a n o č i s t ako je

$$B \cap x_1 \dots x_m S y_1 \dots y_n = x_1 \dots x_m B y_1 \dots y_n$$

za svaki $x_1, \dots x_m y_1, \dots, y_n \in S$. Polugrupa S je (m,n)-d v o s t r a n o č i s t a ako je svaki bi-ideal iz S (m,n)-dvostrano čist podskup od S.

PRIMEDBA 1.2. (1,1)-dvostrano čist bi-ideal je dvostrano čist ili T-čist [31].

DEFINICIJA 1.3. Podskup B polugrupe S je (m,n)-j e d n o s t r a n o č i s t ako je

$$B\cap x_1\ldots x_mS = x_1\ldots x_mB \wedge B\cap Sy_1\ldots y_n = By_1\ldots y_n,$$

za svaki $x_1,\ldots,x_m,y_1,\ldots,y_n\in S$. Polugrupa S je (m,n)-j e d n o s t r a n o č i s t a ako je svaki bi-ideal iz S (m,n)-jednostrano čist podskup od S.

PRIMEDBA 1.4. $(1,1)$-jednostrano čist bi-ideal jeste B-čist. Ako je svaki bi-ideal polugrupe S B-čist tada S zovemo B^*-čista polugrupa [30].

LEMA 1.5. Neka je S (m,n)-dvostrano čista polugrupa. Tada

$$x_1\ldots x_mSy_1\ldots y_n = (x_1\ldots x_m)^2S(y_1\ldots y_n)^2$$

za svaki $x_1,\ldots,x_m,\ y_1,\ldots,y_n\in S$.

Dokaz. Kako je $x_1\ldots x_mSy_1\ldots y_n$ bi-ideal od S imamo

$$\begin{aligned} x_1\ldots x_mSy_1\ldots y_n &= x_1\ldots x_mSy_1\ldots y_n\cap x_1\ldots x_mSy_1\ldots y_n \\ &= x_1\ldots x_m\ (x_1\ldots x_mSy_1\ldots y_n)y_1\ldots y_n \\ &= (x_1\ldots x_m)^2S(y_1\ldots y_n)^2. \ \blacksquare \end{aligned}$$

LEMA 1.6. (m,n)-dvostrano čista polugrupa S je kompletno π-regularna, tj. za svaki $a\in S$ je $a^{m+n+1}\in \mathrm{Reg}S$.

Dokaz. Na osnovu Leme 1.5. imamo

$$a^{m+n+1} \in a^m S a^n = a^{2m} S a^{2n} = \dots =$$
$$= a^{m2^{m+n+1}} S a^{n2^{m+n+1}}$$
$$a^{2(n+m+1)} S a^{2(n+m+1)},$$

a odavde a je kompletno π-regularan (Teorema 1.15.) i prema tome, S je kompletno π-regularna i $a^{m+n+1} \in \mathrm{Reg}S$. ▨

LEMA 1.7. Neka je S (m,n)-jednostrano čista polugrupa. Tada

$$x_1 \dots , x_m S = (x_1 \dots x_m)^2 S \wedge S y_1 \dots y_n = S(y_1 \dots y_n)^2$$

za svaki $x_1, \dots , x_m, y_1 \dots , y_n \in S$.

Dokaz. Dokazuje se analogno kao i Lema 1.5. ▨

LEMA 1.8. (m,n)-jednostrano čista polugrupa S je kompletno π-regularna, tj. a^{k+1} je kompletno regularan element za svaki $a \in S$ i $k = \min(m,n)$.

Dokaz. Neka je $a \in S$ proizvoljan element, $m,n \in Z^+$ i $k = \min(m,n)$. Tada, na osnovu Leme 1.7., imamo

$$a^{k+1} \in a^m S \cap S a^n = a^{2m} S \cap S a^{2n}$$
$$= a^{3m} S \cap S a^{3n}$$
$$= \dots\dots\dots\dots$$
$$= a^{m2^{k+1}} S \cap S a^{n2^{k+1}}$$
$$\subseteq a^{2(k+1)} S \cap S a^{2(k+1)}. ▨$$

Dakle, a^{k+1} je kompletno regularan i prema tome, S je kompletno $\mathcal{T}_L$-regularna (Teorema I 15.). ▨

LEMA 1.9. Za (m,n)-dvostrano čistu polugrupu S je

$$E(S) \subseteq C(S)$$

Dokaz. Neka su $e \in E(S)$ i $a \in S$ proizvoljni elementi. Kako je $e\ldots eSe\ldots e$ bi-ideal od S to je

$$e\ldots eSe\ldots e \quad ae\ldots eSe\ldots e =$$
$$= ae\ldots e(e\ldots eSe\ldots e)e\ldots e,$$

a odavde

$$aeSe \subseteq eSe$$

pa je

$$ae = aeee \in aeSe \subseteq eSe,$$
$$ae = exe$$

za neki $x \in S$. Slično,

$$ea = eye$$

za neki $y \in S$ pa je

$$\begin{aligned} ae &= exe = e(exe) = eae \\ &= (ea)e = (eye)e = eye \\ &= ea. \end{aligned}$$

Dakle, $e \in C(S)$ i prema tome, $E(S) \subseteq C(S)$. ▨

LEMA 1.10. Za (m,n)-jednostrano čistu polugrupu S je

$$E(S) \subseteq C(S)$$

Dokaz. Dokazuje se analogno kao i Lema 1.9. ▨

LEMA 1.11. Neka je S(m,n)-dvostrano čista polugrupa. Tada za svaki element $a \in S$ je

$$a^{m+n+1} S = Sa^{m+n+1}$$

Dokaz. Ako je $a \in S$ proizvoljan element, tada, na osnovu Leme 1.6., postoji $x \in S$ da je

$$a^{m+n+1} = a^{m+n+1} xa^{m+n+1}.$$

Ako je $z \in a^{m+n+1}S$, onda je

$$z = a^{m+n+1}y$$

za neki $y \in S$. Kako je xa^{m+n+1} idempotent to, na osnovu Leme 1.9. imamo

$$\begin{aligned} a^{m+n+1}y &= (a^{m+n+1}xa^{m+n+1})y \\ &= a^{m+n+1}(xa^{m+n+1})y \\ &= a^{m+n+1}y(xa^{m+n+1}) \\ &= (a^{m+n+1}yx)a^{m+n+1} \\ &\subseteq Sa^{m+n+1} \end{aligned}$$

i prema tome,

$$a^{m+n+1}S \subseteq Sa^{m+n+1}$$

Analogno se dokazuje da je

$$Sa^{m+n+1} \subseteq a^{m+n+1}S$$

pa je

$$Sa^{m+n+1} = a^{m+n+1}S. ▨$$

LEMA 1.12. Neka je S (m,n)-jednostrano čista polugrupa. Tada za svaki element $a \in S$ je

$$a^{k+1}S = Sa^{k+1}$$

gde je $k = \min(m,n)$.

Dokaz. Dokazuje se analogno kao i Lema 1.11. ▨

LEMA 1.13. (m,n)-dvostrano čista polugrupa S je slabo komutativna.

Dokaz. Neka su $a,b \in S$ proizvoljni elementi. Tada, na osnovu Leme 1.11. imamo

$$\begin{aligned}(ab)^{m+n+2} &= a(ba)^{m+n+1}b \in S(ba)^{m+n+1}S \\ &= S^2(ba)^{m+n+1} \subseteq Sba \subseteq Sa\end{aligned}$$

slično,

$$(ab)^{m+n+2} \in bS$$

$$(ab)^{m+n+2} \in Sa \cap bS.$$

Dakle, S je slabo komutativna polugrupa. ▨

LEMA 1.14. (m,n)-jednostrano čista plugrupa S je slabo komutativna.

Dokaz. Neka je S (m,n)-jednostrano čista i $a,b \in S$ proizvoljni elementi. Tada, na osnovu Leme 1.12., imamo

$$(ab)^{k+2} = ab\cdot ab\ldots ab \in S(ba)^{k+1}S$$

$$= S^2(ba)^{k+1} \subseteq Sba \subseteq Sa$$

gde je $k = \min(m,n)$ pa je

$$(1) \qquad (ab)^{k+2} = xa,$$

za neki $x \in S$. Slično,

$$(2) \qquad (ab)^{k+2} = by,$$

za neki $y \in S$. Iz (1) i (2) sledi

$$(ab)^{k+2} = xa = by.$$

Dakle, S je slabo komutativna. ▨

LEMA 1.15. Neka je S^{m+n+1} polumreža grupa. Tada za svaki $x_1,\ldots x_m, y_1,\ldots,y_n \in S$ je

(i) $x_1\ldots x_m S y_1\ldots y_n = y_1\ldots y_n S x_1\ldots x_m$;

(ii) $x_1\ldots x_m S y_1\ldots y_n = (y_1\ldots y_n)^2 S x_1\ldots x_m$;

(iii) $x_1\ldots x_m S y_1\ldots y_n = x_1\ldots x_m y_1\ldots y_n S$;

(iv) $x_1\ldots x_m S y_1\ldots y_n = S x_1\ldots x_m y_1\ldots y_n$;

(v) $x_1\ldots x_m S y_1\ldots y_n = (x_1\ldots x_m y_1\ldots y_n)^{m+n+1} S$.

Dokaz. (i). Na osnovu Teoreme I 19. imamo da je

$$x_1\ldots x_m S y_1\ldots y_n = (x_1\ldots x_m S y_1\ldots y_n)^3 =$$

$$= (x_1\ldots x_m S y_1\ldots y_n x_1\ldots x_m S)(y_1\ldots y_n x_1\ldots x_m S y_1\ldots y_n)$$

$$= (y_1\ldots y_n x_1\ldots x_m S y_1\ldots y_n)(x_1\ldots x_m S y_1\ldots y_n X_1\ldots x_m S)$$

$$= y_1\ldots y_n (x_1\ldots x_m S y_1\ldots y_n x_1\ldots y_m)(S y_1\ldots y_n x_1\ldots x_m S)$$

$$= y_1\ldots y_n (S y_1\ldots y_n x_1\ldots x_m S)(x_1\ldots x_m S y_1\ldots y_n x_1\ldots x_m)$$

$$\subseteq y_1\ldots y_n S x_1\ldots x_m.$$

Analogno se dokazuje da je

$$y_1\ldots y_n S x_1\ldots x_m \subseteq x_1\ldots x_m S y_1\ldots y_n$$

i prema tome, važi (i).

(ii) Na osnovu Teoreme I 19. i na osnovu (i) imamo

$$x_1\ldots x_m S y_1\ldots y_n = (x_1\ldots x_m S y_1\ldots y_n)^3 =$$

$$= (x_1\ldots x_m S y_1\ldots y_n)(y_1\ldots y_n S x_1\ldots x_m)(x_1\ldots x_m S y_1\ldots y_n)$$

$$= (x_1\ldots x_m S (y_1\ldots y_n)^2) S ((x_1\ldots x_m)^2 S y_1\ldots y_n)$$

$$= ((y_1\ldots y_n)^2 S x_1\ldots x_m) S (y_1\ldots y_n S (x_1\ldots x_m)^2)$$

$$\subseteq (y_1\ldots y_n)^2 S x_1\ldots x_m$$

$$\subseteq y_1\ldots y_n S x_1\ldots x_m$$

$$= x_1\ldots x_m S y_1\ldots y_n.$$

Dakle, važi (ii).

(iii) Na osnovu Teoreme I 19. imamo

$$y_1\ldots y_nSx_1\ldots x_m = (y_1\ldots y_nSx_1\ldots x_m)^3$$
$$\subseteq S^{m+n+1}x_1\ldots x_my_1\ldots y_nSx_1\ldots x_m$$
$$= x_1\ldots x_my_{.}\ldots y_nSx_1\ldots x_mS^{m+n+1}$$
$$\subseteq x_1\ldots x_my_1\ldots y_nS.$$

Odavde i na osnovu (i) imamo

$$x_1\ldots x_mSy_1\ldots y_n \subseteq x_1\ldots x_my_1\ldots y_nS.$$

Dalje je

$$x_1\ldots x_my_1\ldots y_nS = (x_1\ldots x_my_1\ldots y_nS)^3$$
$$\subseteq x_1\ldots x_my_1\ldots y_nSx_1\ldots x_my_1\ldots y_nS^{m+n+1}$$
$$= x_1\ldots x_my_1\ldots y_nS^{m+n+1}Sx_1\ldots x_my_1\ldots y_n$$
$$\subseteq x_1\ldots x_mSy_1\ldots y_n.$$

Dakle, važi (iii). Na sličan se način dokazuje da važi (iv).

(v) Na osnovu (iii) imamo

$$x_1\ldots x_mSy_1\ldots y_n = x_1\ldots x_my_1\ldots y_nS$$
$$= (x_1\ldots x_my_1\ldots y_nS)^{m+n+1} \qquad \text{(Teorema I 19.)}$$
$$= x_1\ldots x_my_1\ldots y_nSx_1\ldots x_my_1\ldots y_nS\cdot$$
$$\cdot\ (x_1\ldots x_my_1\ldots y_nsS)^{m+n-1}$$
$$= (x_1\ldots x_my_1\ldots y_n)^2S^2(x_1\ldots x_my_1\ldots y_nS)^{m+n-1}$$
$$\cdot$$
$$\cdot$$
$$\cdot$$
$$= (x_1\ldots x_my_1\ldots y_n)^{m+n+1}S^{m+n+1}$$

$$\subseteq (x_1 \ldots x_m y_1 \ldots y_n)^{m+n+1} S$$
$$\subseteq x_1 \ldots x_m y_1 \ldots y_n S$$
$$= x_1 \ldots x_m S y_1 \ldots y_n .$$

Prema tome, važi (v) ove teoreme. ▨

Navodimo jednu lemu B. Medisona, T. Mukheojeea i M. Sena [41] .

LEMA 1.16. Neka je S polugrupa i $e,f \in E(S)$. Ako postoje $m,n \in Z^+$ da $(ef)^n$ i $(fe)^m$ leže u nekoj podgrupi G od S, tada

$$(ef)^n = (fe)^m = g,$$

gde je g jedinica grupe G.

Glavni rezultat ove glave je sledeća

TEOREMA 1.17. Za polugrupu S su sledeći uslovi ekvivalentni:

(i) S je (m,n)-dvostrano čista;

(ii) S^{m+n+1} je polumreža grupa;

(iii) $x_1 \ldots x_m S y_1 \ldots y_n = (y_1 \ldots y_n)^2 S x_1 \ldots x_m$

za svaki $x_1, \ldots x_m, y_1 \ldots, y_n \in S$;

(iv) S je polumreža Y polugrupa S_α $(\alpha \in Y)$ kod koje je $S^{m+n+1} = G_\alpha$ grupa i $x_1 \ldots x_{m+n+1} \in G_{\alpha_1 \ldots \alpha_{m+n+1}}$ za $x_i \in S_{\alpha_i}$, $i = 1, \ldots, m+n+1$, $\alpha_i \in Y$.

Dokaz. (i) $\Rightarrow$(ii). Neka je S (m,n)-dvostrano čista polugrupa i $a \in S^{m+n+1}$ proizvoljan element. Tada, na osnovu Leme 1.5., imamo

$$a \in x_1 \dots x_m S y_1 \dots y_n \doteq (x_1 \dots x_m)^2 S (y_1 \dots y_n)^2 \doteq \dots \doteq (x_1 \dots x_m)^{m+n+1} S (y_1 \dots y_n)^{m+n+1}$$

Elementi $(x_1 \dots x_m)^{m+n+1}$, $(y_1 \dots y_n)^{m+n+1}$ su kompletno regularni (Lema 1.6.), tj. $(x_1 \dots x_m)^{m+n+1} \in G_e$, $(y_1 \dots y_n)^{m+n+1} \in G_f$, gde su $e,f \in E(S)$. Sada je

$$a \in e(x_1 \dots x_m)^{m+n+1} S (y_1 \dots y_n)^{m+n+1} f,$$

pa je

$$a = eu = vf$$

za neke $u,v \in S$. Dalje je

$$a = eu = e \dots eu \in \underbrace{e \dots e}_{m} S \underbrace{e \dots e}_{n-1} u$$

$$= eS(e \dots eu)^2 = eS(eu)^2$$

$$= eSa^2 \subseteq Sa^2.$$

Analogno, dokazuje se da

$$a \in a^2 S$$

pa je na osnovu Leme 7. $a \in G_r(S)$ i prema tome,

$$(1) \qquad S^{m+n+1} = G_r(S),$$

Kako je S slabo komutativna (Lema 1.13) to je i njen ideal S^{m+n+1} slabo komutativan što zajedno sa (1) daje S^{m+n+1} je polumreža grupa (Teorema I 19.).

(ii)$\Rightarrow$(iii). Sledi na osnovu Leme 1.15. (ii).

(iii)$\Rightarrow$(ii). Neka je $s \in S^{m+n+1}$ proizvoljan element. Tada je

$$s = a_1 \dots a_m \cdot b \cdot c_1 \dots c_n$$

$$\in a_1 \dots a_m S c_1 \dots c_n$$

$$= (a_1 \dots a_m)^k S c_1 \dots c_n$$

za svaki $k \geqslant 2$. Kako je $(a_1 \dots a_m)^k \in G_e$ za neki $k \in Z^+$ i neki $e \in E(S)$ pa je

$$s = e(a_1 \dots a_m)^k u c_1 \dots c_n,$$

tj. $s=ey$ za neki $y \in S$. Odavde imamo da je

$$s = e \dots ey \in eSs = s^2 Se \subseteq s^2 S.$$

Slično je $s \in Ss^2$ i prema tome, $s \in G_r(S)$. Dakle,

$$S^{m+n+1} = G_r(S).$$

Kako iz (iii) sledi slaba komutativnost, to je S^{m+n+1} polumreža grupa (Teorema I 19.).

(ii) $\Rightarrow$(i). Neka je S^{m+n+1} polumreža grupa, neka je A bi-ideal od S i $x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n \in S$. Uzmimo

$$a \in A \cap x_1 \dots x_m S y_1 \dots y_n.$$

Tada, na osnovu Leme 3.6. (v), imamo

$$a \in A \cap (x_1 \dots x_m y_1 \dots y_n)^{m+n+1} S,$$

tj.

$$a = (x_1 \dots x_m y_1 \dots y_n)^{m+n+1} s, \ (a \in A, \quad s \in S).$$

Element $(x_1\ldots x_m y_1\ldots y_n)^{m+n+1}$ je kompletno regularan, odnosno

$$(x_1\ldots x_m y_{.}\ldots y_n)^{m+n+1}=(x_1\ldots x_m y_1\ldots y_n)^{m+n+1}u(x_1\ldots x_m y_1\ldots y_n)^{m+n+1}$$

i

$$(x_1\ldots x_m y_{.}\ldots y_n)^{m+n+1}\ u = u(x_1\ldots x_m y_1\ldots y_n)^{m+n+1}$$

za neki $u\in S$. Kako je $a\in S^{m+n+1}$, to je

$$a = aba \wedge ab = ba$$

za neki $b\in S$, pa je

$$ua = uaba = uba^2.$$

Dalje je

$$\begin{aligned}
a &= (x_1\ldots x_m y_1\ldots y_n)^{m+n+1}s\\
&= (x_1\ldots x_m y_1\ldots y_n)^{m+n+1}u(x_1\ldots x_m y_1\ldots y_n)^{m+n+1}s\\
&= (x_1\ldots x_m y_{.}\ldots y_n)^{m+n+1}ua\\
&= (x_1\ldots x_m y_1\ldots y_n)^{m+n+1}uba^2\\
&\subseteq x_1\ldots x_m y_1\ldots y_n Sa^2\\
&= (x_1\ldots x_m y_1\ldots y_n Sa^2)^2 \qquad \text{(Teorema I 19.)}\\
&= (x_1\ldots x_m a^2 S y_1\ldots y_n)(x_1\ldots x_m Sa^2 y_1\ldots y_n)\\
&\quad \text{(Lema 1.15.)}\\
&\subseteq x_1\ldots x_m a^2 Sa^2 y_1\ldots y_n\\
&\subseteq x_1\ldots x_m ASA\ y_1\ldots y_n\\
&\subseteq x_1\ldots x_m A\ y_1\ldots y_n.
\end{aligned}$$

Prema tome,

$$(2) \quad A \cap x_1 \ldots x_m S y_1 \ldots y_n \subseteq x_1 \ldots x_m A y_1 \ldots y_n.$$

Na osnovu Leme 1.15. (iii) i (iv) a za proizvoljan element $a \in A$ imamo da

$$\begin{aligned} x_1 \ldots x_m a y_1 \ldots y_n \in S^m a S^n &= (S^m a S^n)^2 \\ &= S^m a^2 S^n S^m S^n = S^m S^n S^m S^n a^2 \\ &= (S^{2m+2n} a^2)^2 = a^2 S^{4m+4n} a^2 \\ &\subseteq ASA \subseteq A \end{aligned}$$

i prema tome,

$$(3) \qquad x_1 \ldots x_m A y_1 \ldots y_n \subseteq A.$$

Iz (2) i (3) sledi da je

$$A \cap x_1 \ldots x_m S y \ldots y_n = x_1 \ldots x_m A y_1 \ldots y_n$$

za svaki $x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n \in S$, tj A je (m,n)-dvostrano čist podskup od S. Dakle, S je (m,n)-dvostrano čista polugrupa.

(ii) $\Rightarrow$ (iv). Neka je S^{m+n+1} polumreža Y grupa G_α, $\alpha \in Y$. Tada S je slabo komutativna i π-regularna pa na osnovu Teoreme I 17. imamo S je polumreža nil-ekstenzija grupa S_α, $\alpha \in Y$. Neka je $s \in S^{m+n+1}$. Tada

$$s = x_1 \ldots x_{m+n+1} \in G_\alpha$$

za neki $\alpha \in Y$. Prema tome, $S^{m+n+1} \subseteq G_\alpha$ $(\alpha \in Y)$.

Kako je i $G_\alpha \subseteq S^{m+n+1}$ to je

$$S^{m+n+1} = G_\alpha .$$

Jasno je da

$$x_1 \dots x_{m+n+1} \in G_{\alpha_1, \dots \alpha_{m+n+1}}$$

za $x_i \in S_{\alpha_i}$ $(i = 1,\dots,m+n+1)$.

(iv) $\Rightarrow$ (ii). Neka je $s \in S^{m+n+1}$ proizvoljan element. Tada

$$s = x_1 \dots x_{m+n+1} \in G_\delta$$

za neki $\delta \in Y$. Dakle,

$$S^{m+n+1} = G_r(S).$$

Za proizvoljne elemente $e,f \in E(S)$ imamo da

$$ef = e\dots ef \in G_{\alpha\beta} \wedge fe = fe\dots e \in G_{\alpha\beta}$$

pa je $ef, fe \in G_{\alpha\beta}$ odakle, na osnovu Leme 1.16. dobijamo $ef = fe$. Dakle, S^{m+n+1} je inverzna (Teorema I 6.) i prema tome, polumreža grupa (Teorema I 19.). ▨

<u>POSLEDICA 1.18.</u> Ako je S (m,n)-dvostrano čista polugrupa, tada

$$S^{m+n+1} = G_r(S) = \mathrm{Reg}S.$$

NAPOMENA 3.10. Ako je S T^*-čista arhimedovska polugrupa, tada S je slabo komutativna (Lema 1.13.) sa idempotentom (Lema 1.6.). Dakle, S je t-arhimedovska polugrupa sa idempotentom e pa na osnovu Teoreme 1.17. je $S^3 = G_e$. Obratno, ako polugrupa S ima idempotent e i $S^3 = G_e$, onda, na osnovu Teoreme 1.17 S jeste T^*-čista arhimedovska polugrupa. Dakle, Teorema 1.17. jeste uopštenje glavnog rezultata N. Kurokia iz [31].

LEMA 1.19. Neka je S^{k+1} polumreža grupa. Tada, za svaki $x_1,\dots,x_k \in S$ je

(i) $x_1\dots x_k S = Sx_1\dots x_k$,

(ii) $x_1\dots x_k S = S(x_1\dots x_k)^2$,

(iii) $Sx_1\dots x_k = (x_1\dots x_k)^2 S$.

Dokaz. (i). Ako je S^{k+1} polumreža grupa tada skup svih bi-ideala od S^{k+1} jeste polumreža u odnosu na množenje podskupova (Teorema I 19.) pa za svaki $x_1,\dots,x_k \in S$ je

$$\begin{aligned}
x_1\dots x_k S &= (x_1\dots x_k S)(x_1\dots x_k S)(x_1\dots x_k S)\\
&= (x_1\dots x_k S)(x_1\dots x_k S x_1\dots x_k)S\\
&= (x_1\dots x_k S x_1\dots x_k)(x_1\dots x_k S)S\\
&= (x_1\dots x_k S^2)(x_1\dots x_k S x_1\dots x_k)\\
&= (x_1\dots x_k S^2 x_1\dots x_k)(S x_1\dots x_k)\\
&\subseteq S^{2k+2} S x_1\dots x_k\\
&\subseteq S x_1\dots x_k.
\end{aligned}$$

Slično se dokazuje da je

$$Sx_1\dots x_k \subseteq x_1\dots x_k S$$

pa je

$$x_1\dots x_k S = Sx_1\dots x_k.$$

(ii). Za svaki $x_1,\dots,x_k \in S$ je $x_1\dots x_k S$ bi-ideal od S^{k+1} pa primenom (i) imamo da je

$$\begin{aligned} x_1\dots x_k S &= (x_1\dots x_k S)(x_1\dots x_k S) \\ &= (Sx_1\dots x_k)(Sx_1\dots x_k) \\ &= S(x_1\dots x_k S)(x_1\dots x_k) \\ &= S(Sx_1\dots x_k)(x_1\dots x_k) \\ &= S^2(x_1\dots x_k)^2 \\ &\subseteq S(x_1\dots x_k)^2 \\ &\subseteq Sx_1\dots x_k \\ &= x_1\dots x_k S \end{aligned}$$

Dakle, $x_1\dots x_k S = (x_1\dots x_k)^2 S.$

(iii) Za svaki $x_1,\dots,x_k \in S$ je $Sx_1\dots x_k$ bi-ideal od S^{k+1} pa primenom (i) imamo da je

$$\begin{aligned} Sx_1\dots x_k &= (Sx_1\dots x_k)(Sx_1\dots x_k) \\ &= (x_1\dots x_k S)(x_1\dots x_k S) \\ &= (x_1\dots x_k)(Sx_1\dots x_k)S \\ &= (x_1\dots x_k)(x_1\dots x_k S)S \end{aligned}$$

$$= (x_1 \ldots x_k)^2 S^2$$
$$\subseteq (x_1 \ldots x_k)^2 S$$
$$\subseteq x_1 \ldots x_k S$$
$$= Sx_1 \ldots x_k.$$

Prema tome,

$$Sx_1 \ldots x_k = (x_1 \ldots x_k)^2 S. \blacksquare$$

TEOREMA 1.20. Za polugrupu S su sledeći uslovi ekvivalentni:

(i) S je (m,n)-jednostrano čista;

(ii) S je polumreža $\mathcal{T}$-grupa i Reg $S=S^{k+1}$;

(iii) S^{k+1} je polumreža grupa;

(iv) $x_1 \ldots x_k S = S(x_1 \ldots x_k)^2$ i

$$Sx_1 \ldots x_k = (x_1 \ldots x_k)^2 S,$$

za svaki $x_1, \ldots, x_k \in S$ i $k = \min(m,n)$, $(m,n \in Z^+)$

Dokaz. (i) $\Rightarrow$(ii). Neka je S (m,n)-jednostrano čista polugrupa i $a \in S^{k+1}$ proizvoljan element i $k=\min(m,n)$. Tada, na osnovu Leme 1.7., imamo

$$\begin{aligned} a \in a_1 \ldots a_m S \cap Sb_1 \ldots b_n &= (a_1 \ldots a_m)^2 S \cap S(b_1 \ldots b_n)^2 \\ &= (a_1 \ldots a_m)^3 S \cap S(b_1 \ldots b_n)^3 \\ &= \ldots \ldots \ldots \ldots \\ &= (a_1 \ldots a_m)^{k+1} S \cap S(b_1 \ldots b_n)^{k+1}, \end{aligned}$$

za neke $a_1, \ldots, a_m, b_1, \ldots, b_n \in S$. Elementi

$$(a_1 \ldots a_m)^{k+1} \wedge (b_1 \ldots b_n)^{k+1}$$

su kompletno regularni (Lema 1.8.), tj.

$$(a_1 \ldots a_m)^{k+1} \in G_e \wedge (b_1 \ldots b_n)^{k+1} \in G_f,$$

gde su $e,f \in E(S)$ i G_e, G_f maksimalne podgrupe od S.
Dalje, imamo da je

$$a \in e(a_1 \ldots a_m)^{k+1} S \cap S(b_1 \ldots b_n)^{k+1} f$$

pa je

$$a = eu = vf$$

za neke $u,v \in S$. Odavde sledi

$$(13) \quad a = eu = \underbrace{e \ldots e}_{n}u \in S\underbrace{e \ldots e}_{n-1}u$$

$$= S(e \ldots eu)^2 = S(eu)^2 = Sa^2.$$

Slično se dokazuje da

$$(14) \qquad a \in a^2 S.$$

Iz (13) i (14), a na osnovu Leme I 7. dobijamo $a \in G_r(S)$ pa je $a \in \mathrm{Reg}S$ i prema tome,

$$S^{k+1} \subseteq G_r(S) \subseteq \mathrm{Reg}S$$

Kako je i

$$G_r(S) \subseteq \mathrm{Reg}S \subseteq S^{k+1}$$

to je

$$(15) \quad S^{k+1} = \mathrm{Reg}S = G_r(S).$$

Neka je $a^{k+1} \in S^{k+1}$. Tada, na osnovu Leme I 5. postoji $e \in E(S)$ da

$$(16) \qquad a^{k+1}S^1 = eS.$$

Ako postoji $f \in E(S)$ takav da je

$$a^{k+1}S^1 = fS,$$

onda je

$$eS = fS,$$

a odavde $e = fx$ za neki $x \in S$. Dalje,

$$(17) \qquad fe = f(fx) = fx = e.$$

Analogno,

$$(18) \qquad ef = f.$$

Kako je $ef = fe$, to iz (17) i (18) dobijamo $e = f$.

Dakle, postoji jedinstven $e \in E(S)$ da je

$$a^{k+1}S^1 = eS.$$

Dalje, iz (15) imamo da je $a^{k+1} \in RegS$ što znači da ima bar jedan inverzan element. Neka su $b, c \in V(a^{k+1})$.

Tada

$$a^{k+1}bS = a^{k+1}S = a^{k+1}cS,$$

$$Sba^{k+1} = Sa^{k+1} = Sca^{k+1}$$

Kako je idempotent jedinstven imamo

$$a^{k+1}b = a^{k+1}c \quad ba^{k+1} = ca^{k+1}$$

pa je

$$b = ba^{k+1}b = ba^{k+1}c = ca^{k+1}c = c.$$

Dakle, svaki regularan element iz S ima jedinstven inverzan, što zajedno sa (15) implicira S je GV-inverzna polugrupa pa, na osnovu Teoreme I 17., imamo S je polumreža π-grupa.

(ii) $\Rightarrow$(iii). Neka je S polumreža $\mathcal{T}$-grupa S_α ($\alpha \in Y$), Reg S = S^{k+1} i $a,b \in S$ proizvoljni elementi. Tada postoji $\beta \in Y$ da

$$ab,\ ba \in S \quad .$$

Takodje, postoji podgrupa G od S i postoji $m,n \in Z^+$ da

$$(ab)^m,\ (ba)^n \in G,$$

a odavde

$$(ab)^m \in (ba)^n G \subseteq baG \subseteq bG,$$

pa je

$$(19) \qquad (ab)^m = bx$$

za neki $x \in S$. Slično,

$$(20) \qquad (ab)^m = ya$$

za neki $y \in S$. Iz (19) i (207 sledi

$$(ab)^m = bx = ya$$

što znači da je S slabo komutativna pa je i ideal S^{k+1} od S takodje slabo komutativan. Na osnovu Teoreme I 17. imamo $G_r(S)$ = Reg S. Dakle, S^{k+1} je kompletno regularna i slabo komutativna i prema tome, S^{k+1} je polumreža grupa (Teorema I 19.).

(iii) $\Rightarrow$(iv) Sledi na osnovu Leme 1.19.

(iv) $\Rightarrow$(iii) Neka su $a,b \in S$ proizvoljni elementi. Tada je

$$(ba)^k S = S(ba)^{2k} \wedge S(ba)^k = (ba)^{2k} S$$

pa je

$$(21) \qquad (ab)^{k+1} = ab \cdot ab \ldots ab \in S(ba)^k S$$

$$=S^2(ba)^{2k} \subseteq Sba \subseteq Sa.$$

Slično,

$$(22) \qquad (ab)^{k+1} \in bS.$$

Iz (21) i (22) sledi

$$(ab)^{k+1} = xa = by$$

za neke $x,y \in S$. Dakle, S je slabo komutativna pa je i njen ideal S^{k+1} slabo komutativan.

Ako je $s \in S^{k+1}$, tada

$$\begin{aligned} s \in x_1 \ldots x_k S \cap Sy_1 \ldots y_k &= S(x_1 \ldots x_k)^2 \cap (y_1 \ldots y_k)^2 S \\ &= S(x_1 \ldots x_k)^4 \cap (y_1 \ldots y_k)^4 S \\ &= \ldots\ldots\ldots\ldots \\ &= (x_1 \ldots x_k)^r S \cap S(y_1 \ldots y_k)^r. \end{aligned}$$

Za neki $r \in Z^+$ i $e,f \in E(S)$ je

$$(x_1 \ldots x_k)^r \in G_e \wedge (y_1 \ldots y_k)^r \in G_f$$

pa

$$s \in e(x_1 \ldots x_k)^r S \cap S(y_1 \ldots y_k)f,$$

a odavde je

$$s = eu = vf$$

za neke $u,v \in S$. Dalje,

$$s = e \ldots eu \in Ss = s^2 S,$$

$$s = vf \ldots f \in sS = Ss^2.$$

Prema tome, $s \in G_r(S)$ pa je

$$S^{k+1} = G_r(S)$$

Dakle, S^{k+1} je unija grupa i slabo komutativna pa je polumreža grupa (Teorema I 19.).

(iii) $\Rightarrow$(i). Neka je S^{k+1} polumreža grupa, A bi-ideal od S, $x_1,\dots,x_m,y_1,\dots,y_n \in S$ i $k = \min(m,n)$. Tada su S^{m+1} i S^{n+1} ideali od S^{k+1} pa su polumreže grupa. Ako je

$$a \in A \cap x_1\dots x_m S,$$

tada na osnovu Leme 1.19. imamo da

$$a \in A \cap (x_1\dots x_m)^{k+1}S,$$

a odavde

$$a \in A \wedge a \in (x_1\dots x_m)^{k+1}S$$

pa je

$$a = (x_1\dots x_m)s, \tag{23}$$

za neki $s \in S$. Dalje,

$$(x_1\dots x_m)^{k+1} \in S^{k+1}$$

i prema tome,

$$(x_1\dots x_m)^{k+1} = (x_1\dots x_m)^{k+1}y(x_1\dots x_m)^{k+1}$$

za neki $y \in S$. Kako je

$$a \in S^{k+1} \subseteq S^k$$

to, na osnovu Leme 1.19., imamo

$$Sa = Sa^2,$$

a odavde

$$ya = za^2 \tag{24}$$

za neke $y,z \in S$. Takodje, S^{k+1} je normalna (Teorema I 19.) pa je

$$aS^{k+1} = S^{k+1}a \tag{25}$$

za svaki $a \in S^{k+1}$. Iz (23), (24) i (25) sledi

$$\begin{aligned}
a &= (x_1\dots x_m)^{k+1}s \\
&= (x_1\dots x_m)^{k+1}y(x_1\dots x_m)^{k+1}s \\
&= ((x_1\dots x_m)^{k+1}y)((x_1\dots y_m)^{k+1}s) \\
&= ((x_1\dots x_m)^{k+1}y)a \\
&= (x_1\dots x_m)^{k+1}(ya) \\
&= (x_1\dots x_m)^{k+1}(za^2) \\
&= (x_1\dots x_m)((x_1\dots x_m)^{k}z)a^2 \\
&\subseteq (x_1\dots x_m)(S^{k+1}a)a \\
&= (x_1\dots x_m)(aS^{k+1}a) \\
&\subseteq (x_1\dots x_m)(ASA) \\
&\subseteq x_1\dots x_mA.
\end{aligned}$$

Dakle, imamo da je

$$A\cap x_1\dots x_mS \subseteq x_1\dots x_mA.$$

Neka je $x_1\dots x_ma \in x_1\dots x_mA$, gde je $a \in A$. Tada, na osnovu Leme 1.19. i Teoreme I 19., sledi

$$\begin{aligned}
x_1\dots x_ma &\in Sx_2\dots x_ma \\
&= S(x_2\dots x_ma)^2 \\
&\subseteq S^{k+1}a \\
&= (S^{k+1}a)(S^{k+1}a) \\
&= S^{k+1}(aS^{k+1})a \\
&= (aS^{k+1})(S^{k+1}a)
\end{aligned}$$

$$= S^{k+1}a\ aS^{k+1}$$

$$= S^{k+1}a^2S^{k+1}$$

$$= (S^{k+1}a^2S^{k+1})(S^{k+1}a^2S^{k+1})$$

$$= S^{k+1}(a^2S^{k+1})(S^{k+1}a^2)S^{k+1}$$

$$= a^2S^{4k+4}a^2$$

$$\subseteq ASA$$

$$\subseteq A.$$

Kako je

$$x_1\ldots x_mA \subseteq x_1\ldots x_mS,$$

to je

$$x_1\ldots x_mA \subseteq A \cap x_1\ldots x_mS. \tag{27}$$

Iz (26) i (27) sledi

$$A \cap x_1\ldots x_mS = x_1\ldots x_mA.$$

Slično se dokazuje da je

$$A \cap S\,y_1\ldots y_n = Ay_1\ldots y_n.$$

Dakle, S je (m,n)-jednostrano čista polugrupa.▨

<u>POSLEDICA 1.21.</u> Za (m,n)-jednostrano čistu polugrupu S važi uslov

$$S^{k+1} = G_r(S) = \mathrm{Reg}S,$$

gde je $k=\min(m,n)$.

<u>Dokaz</u>. Sadržan u dokazu Teoreme 1.20.▨

Sada opisujemo nil-patentne polugrupe pomoću podpolugrupa koje su (m,n)-dvostrano (jednostrano) čisti podskupovi.

DEFINICIJA 1.22. [18] Polugrupu S s nulom 0 nazivamo n i l - p o t e n t n o m ako je $S^n=0$ za neki $n\in Z^+$.

TEOREMA 1.23. Svaka podpolugrupa polugrupe S je (m,n)-dvostrano čist podskup od S ako i samo ako je

$$(1)\qquad S^{m+n+1}=\{0\}.$$

Dokaz. Ako je svaka podpolugrupa od S (m,n)-dvostrano čist podskup od S, tada svaki bi-ideal od S je (m,n)-dvostrano čist. Odavde i Teoreme 1.17. imamo da je S^{m+n+1} polumreža grupa. Uzmimo proizvoljan idempotent $e\in E(S)$, tada

$$\{e\}\cap x_1\dots x_m S y_1\dots y_n = x_1\dots x_m\{e\}\, y_1\dots y_n$$

za svaki $x_1,\dots x_m,y_1,\dots,y_n\in S$ pa je

$$\{e\}\cap x_1\dots x_m S y_1\dots y_n = \{x_1\dots x_m e y_1\dots y_n\},$$

a odavde

$$x_1\dots x_m e y_1\dots y_n = e.$$

Dakle,

$$x_1 e\dots e.e.e\dots e = e,$$

tj. $x_1 e = e$. Slično, $e x_1 = e$ i prema tome,

$$e x_1 = x_1 e = e.$$

za svaki $x_1 \in S$ i svaki $e \in E(S)$. Znači, S sadrži samo jedan idempotent koji je nula polugrupe S. Kako je S^{m+n+1} polumreža grupa i ima samo jedan idempotent koji je nula to je ispunjen uslov (1).

Obratno, neka je A proizvoljna podpolugrupa od S i neka je ispunjen uslov (1). Tada

$$x_1 \dots x_m A y_1 \dots y_n = \{0\}$$

i kako je nula 0 u svakoj podpolugrupi od S to je

$$A \cap x_1 \dots x_m S y_1 \dots y_n = \{0\}.$$

Dakle, A je (m,n)-dvostrano čist podskup od S i prema tome, svaka podpolugrupa od S je (m,n)-dvostrano čist podskup od S. ▨

TEOREMA 1.24 Svaka podpolugrupa polugrupe S je (m,n)-jednostrano čist podskup od S ako i samo ako je

$$(2) \qquad S^{k+1} = \{0\},$$

gde je $k = \min(m,n)$ i 0 nula polugrupe S.

Dokaz. Ako je svaka podpolugrupa od S (m,n)-jednostrano čist podskup od S, tada je i svaki bi-ideal iz S (m,n)-jednostrano čist pa na osnovu Teoreme 1.20. sledi da je S^{k+1} polumreža grupa. Neka je $e \in E(S)$ proizvoljan element. Tada za svaki $x_1, \dots, x_m \in S$ je

$$\{e\} \cap x_1 \dots x_m S = x_1 \dots x_m \{e\}$$

pa je

$$\{e\} \cap x_1 \dots x_m S = \{x_1 \dots x_m e\},$$

a odavde

$$(3) \qquad x_1 \ldots x_m e = e.$$

Kako jednakost (3) važi za svaki $x_1, \ldots, x_m \in S$ to je

$$x_1 e \ldots e = e,$$

odnosno $x_1 e = e$. Slično, $ex_1 = e$ pa je

$$ex_1 = x_1 e = e$$

za svaki $x_1 \in S$ i $e \in E(S)$. Dakle, S ima nulu koji je i jedini idempotent iz S, a kako je i S^{k+1} polumreža grupa to je ispunjen uslov (2).

Obratno, neka je A proizvoljna podpolugrupa iz S i neka je ispunjen uslov (28). Jasno je da

$$x_1 \ldots x_m A = \{0\} \wedge Ay_1 \ldots y_n = \{0\}.$$

Kako je nula 0 u svakoj podpolugrupi od S to je

$$A \cap x_1 \ldots x_m S = \{0\} \wedge A \cap Sy_1 \ldots y_n = \{0\}.$$

Dakle, svaka podpolugrupa A od S je (m,n)-jednostrano čist podskup od S. ▨

PRIMEDBA 1.25. Svaki podskup polugrupe S je (m,n)-dvostrano (jednostrano) čist ako i samo ako je S trivijalna polugrupa.

GLAVA IV

KONGRUENCIJE NA NEKIM π-REGULARNIM POLUGRUPAMA

1. INVERZNE r-SEMIPRIME KONGRUENCIJE NA $\mathcal{T}$-ORTODOKSNOJ r-POLUGRUPI

U ovoj glavi karakterišemo inverzne ($\mathcal{L}$-unipotentne) r-semiprime kongruencije na $\mathcal{T}$-ortodoksnoj (uopšteno strogo $\mathcal{T}$-inverznoj) r-polugrupi. Slične karakterizacije dao je M. Petrich [52] za kongruencije na inverznoj polugrupi, R. Feigenbaum [24] za grupne kongruencije na ortodoksnoj polugrupi, D. Krgović [29] za inverzne kongruencije na ortodoksnoj polugrupi, B. Alimpić [1] za $\mathcal{L}$-unipotentne kongruencije na uopšteno inverznoj polugrupi, S. Bogdanović i P. Protić [55] za r-semiprime kongruencije na strogo $\mathcal{T}$-inverznoj r-polugrupi. Sve pomenute karakterizacije su specijalni slučajevi karakterizacija o kojima će ovde biti reči. Dalje, razmotrimo minimalne polumrežne kongruencije na (m,n)-dvostrano (jednostrano) čistoj polugrupi tj. opisujemo pomenutu klasu polugrupa pomoću podpolugrupa koje su $\mathcal{T}$-grupe.

U ovoj tački uvodimo pojam inverznog ($\mathcal{L}$-unipotentnog) r-semiprime kongruencijskog para za $\mathcal{T}$-regularnu polugrupu, a zatim pomoću njega karakterišemo inverzne r-semiprime kongruencije na $\mathcal{T}$-ortodoksnoj r-polugrupi.

DEFINICIJA 1.1. [52] Neka je ρ kongruencija na S. Tada

$$\ker\rho = \{x \in S \mid (\exists e \in E(S))\, x\rho e\},$$
$$\mathrm{tr}\,\rho = \rho / E(S).$$

DEFINICIJA 1.2. Neka je S π-regularna polugrupa. Podpolugrupa K od S je n o r m a l n a ako je puna, samokonjugovana i inverzno zatvorena. Kongruencija τ na E(S) je n o r m a l n a ako

$$e\tau f \Rightarrow a'er(a)\,\tau\, a'fr(a)$$

za svaki $e,f \in E(S)$, $a \in S$, $a' \in V(r(a))$.

Par (K,τ) je i n v e r z a n r - s e m i p r i m e k o n g r u e n c i j s k i p a r za S ako je K normalna r-semiprime podpolugrupa od S, τ normalna kongruencija na E(S) i važe sledeća dva uslova:

$$\text{(i)} \quad (r(a)e \in K \wedge e\,\tau\, a'r(a)) \Rightarrow r(a) \in K;$$

za svaki $a \in S$, $e \in E(S)$, $a' \in V(r(a))$.

$$\text{(ii)} \quad a'r(a)\,\tau\, r(a)a'$$

za svaki $a \in K$, $a' \in V(r(a))$.

Ako se uslov (ii) zameni uslovom

$$\text{(ii)}' \quad a'er(a)\,\tau\, ea'r(a)$$

onda par (K,τ) nazivamo $\mathcal{L}$-u n i p o t e n t n i m r-s e m i p r i m e k o n g r u e n c i j s k i m p a r o m za S.

LEMA 1.2. Ako je par (K, τ) inverzan r-semiprime kongruencijski par za $\mathcal{R}$-ortodoksnu polugrupu S, tada je (K, τ) $\mathcal{L}$-unipotentan r-semiprime kongruencijski par za S.

Dokaz. Ako je (K, τ) inverzan r-semiprime kongruencijski par, tada

$$(1) \qquad a \in K \Rightarrow a'r(a) \,\tau\, r(a)a'$$

za svaki $a' \in V(r(a))$. Kako je K puna i $ef \in V(fe)$ to na osnovu (1) imamo

$$(3) \qquad fe = effe \,\tau\, feef = fef,$$

a odavde

$$(4) \qquad efe \,\tau\, efef = (ef)^2 = ef.$$

Slično,

$$(5) \qquad fef \,\tau\, fefe = (fe)^2 = fe.$$

Iz (3), (4) i (5) sledi

$$(6) \qquad efe \,\tau\, fef \,\tau\, ef \,\tau\, fe.$$

Ako je $a \in K$, tada je $r(a) \in K$ pa je $a' \in K$, jer je K inverzno zatvorena. Kako je K puna to je $r(a)e \in K$ što zajedno sa (1) i (6) daje

$$a'er(a) = (a'e)(er(a)) \,\tau\, er(a)a'e \,\tau\, er(a)a' \,\tau\, ea'r(a),$$

jer je $a'e \in V(er(a))$. ▨

LEMA 1.3. Neka je ρ inverzna r-semiprime kongruencija na π-regularnoj polugrupi S. Tada

(7) $(\forall a,b\in S)(a\rho b \Rightarrow (\exists\, a'\in V(r(a)))(\exists\, b'\in V(r(b)))(a'\rho b')$.

Dokaz. Neka su $a,b\in S$ proizvoljni elementi i $a'\in V(r(a))$, $b'\in V(r(b))$. Tada

$$(r(a)\rho)(a'\rho)(r(a)\rho) = (r(a)a'r(a))\rho = r(a)\rho ,$$

a odavde

(8) $\quad a'\rho \in V(r(a)\rho)$.

Analogno,

(9) $\quad b'\rho = V(r(b)\rho)$.

Kako je ρ r-semiprim kongruencija to

$$a\rho b \Rightarrow r(a)\rho r(b),$$

a odavde

$$r(a)\rho = r(b)\rho$$

pa kako je ρ inverzna kongruencija imamo

$$a'\rho = b'\rho$$

i prema tome, $a'\rho b'$. ▨

LEMA 1.4. Neka je ρ r-semiprime kongruencija na π-ortodoksnoj polugrupi S. Tada su sledeći uslovi ekvivalentni:

(i) je inverzna kongruencija;

(ii) $(\forall a,b\in S)(a\rho b\Rightarrow(\exists a'\in V(r(a)))(\exists b'\in V(r(b)))(a'\rho b')$;

(iii) $(\forall e\in E(S))(\forall e'\in V(e))(e'\rho e)$;

(iv) $(\forall a\in S)(\forall a',a''\in V(r(a))(a'\rho a'')$.

Dokaz. (i) $\Rightarrow$(ii). Sledi na osnovu Leme 1.3.

(ii) $\Rightarrow$(iii). Sledi neposredno.

(iii) $\Rightarrow$(iv). Neka je $a\in S$ proizvoljan element i a', $a''\in V(r(a))$. Tada je

$$a'r(a)\in V(a''r(a)\wedge r(a)a'\in V(r(a)a'')$$

$$a'r(a)\rho a''r(a)\wedge r(a)a'\rho r(a)a'',$$

a odavde

$$a'r(a)a'\rho a''r(a)a'\rho a''r(a)a''$$

i prema tome, $a'\rho a''$.

(iv) $\Rightarrow$(i). Neka su $a\in S$ i a', $a''\in V(r(a))$ proizvoljni elementi i $a'\rho a''$. Tada za svaki $a'\in V(r(a))$ je $a'\rho\in V(r(a)\rho)$ pa je $a'\rho=a''\rho$, a odavde

$$|V(r(a))| = 1.$$

Takodje, ρ je r-semiprima kongruencija pa je S/ρ regularna polugrupa. Dakle, ρ je inverzna kongruencija.

LEMA 1.5. Neka je $(K,\tilde{\tau})$ inverzan r-semiprime kongruencijski par π-ortodoksne r-polugrupe S. Tada

(i) $(r(a)er(b)\in K\wedge e\,\tilde{\tau}\,a'r(a))\Rightarrow r(a)r(b)\in K$;

(ii) $(r(a)b'\in K\wedge a'r(a)\,\tilde{\tau}\,b'r(b))\Rightarrow a'er(a)\,\tilde{\tau}\,b'er(b)$;

(iii) $e'\,\tilde{\tau}\,e$

za svaki $a,b\in S$, $e\in E(S)$, $a'\in V(r(a))$, $b'\in V(r(b))$, $e'\in V(e)$.

<u>Dokaz.</u> (i). Neka su $a,b\in S$, $a'\in V(r(a))$, $b'\in V(r(b))$. Tada

$$b'a'\in V(r(a)r(b)).$$

Ako je $r(a)er(b)\in K$ i $e\,\widetilde{\mathcal{C}}\,a'r(a)$, tada imajući u vidu da je K puna podpolugrupa od S imamo

$$r(ab)(b'ea'r(a)er(b)) = (r(a)r(b)\ b'ea')(r(a)er(b))\in K.$$

Dalje,

$$\begin{aligned}(ab)'r(ab) &= b'a'r(a)r(b)\ \mathcal{C}\ b'er(b)\\ &= b'eeer(b)\,\widetilde{\mathcal{C}}\,b'ea'r(a)er(b).\end{aligned}$$

Odavde i Definicija 1.2. (i) sledi da

$$r(ab)\in K.$$

Kako je S r-polugrupa to

$$r(a)r(b)\in K.$$

(ii). Neka je $r(a)b'\in K$ i $a'r(a)\ \mathcal{C}\ b'r(b)$. Tada, na osnovu Definicije 1.2. (ii) i činjenice da je $er(a)b'\in K$ imamo

$$\begin{aligned}a'er(a)&=a'r(a)a'er(a)a'r(a)\ \mathcal{C}\ b'r(b)a'er(a)b'r(b)\\ &=b'(r(b)a'er(a)\ b')r(b)\,\widetilde{\mathcal{C}}\,b'er(a)b'r(b)a'er(b).\end{aligned}$$

Dalje, kako je $r(a)b'\in K$ to na osnovu Definicije 1.2. (ii) sledi

$$b'er(a)b'r(b)a'er(b)\,\widetilde{\mathcal{C}}\,b'er(b)a'r(a)b'er(b)$$

pa je

$$\begin{aligned}b'er(b)a'r(a)b'er(b) &= b'er(b)b'r(b)b'er(b)\\ &= b'er(b)\ b'er(b)\\ &= b'er(b)\end{aligned}$$

i prema tome,

$$a'er(a)\ \tilde{\tau}\ b'er(b).$$

(iii) Neka je $e \in E(S)$ proizvoljan element i $e', e \in V(e)$. Tada, po Definiciji 1.2. (ii), imamo

$$(10)\qquad ee'\ \tilde{\tau}\ e'e,$$

a odavde

$$e'ee'\ \tilde{\tau}\ e'e'e,$$

tj.

$$(11)\qquad e'\ \tilde{\tau}\ e'e.$$

Takodje,

$$eee'\ \tilde{\tau}\ ee'e$$

pa je

$$(12)\qquad ee'\ \hat{\tau}\ e.$$

Iz (10), (11) i (12) sledi

$$e'\ \hat{\tau}\ e. \ ▨$$

Navodimo jednu teoremu S. Bogdanovića i P. Petrića [55].

<u>TEOREMA 1.5.</u> Neka je ρ (r-semiprime) kongruencija $\tilde{\tau}$-ortodoksne polugrupe S. Tada je $\ker\rho$ normalna (r-semiprime) podpolugrupa od S.

<u>TEOREMA 1.6.</u> Ako je S $\tilde{\tau}$-ortodoksna r-polugrupa i $(K, \hat{\tau})$ inverzan r-semiprime kongruencijski par za S, tada relacija $\rho(K, \hat{\tau})$ na S definisana sa

(13) $a\,\rho(K,\tilde{\tau})b \Leftrightarrow (\exists a'\in V(r(a)))(\exists b'\in V(r(b)))(a'r(a)\tilde{\tau}b'r(b) \wedge r(a)b'\in K)$

je jedinstvena inverzna r-semiprime pkongruencija na S za koju je $\ker\rho(K,\tilde{\tau}) = K$ i $\mathrm{tr}\,\rho(K,\tilde{\tau}) = \tilde{\tau}$.

Obratno, ako je ρ inverzna r-semiprime kongruencija na S, tada je $(\ker\rho, \mathrm{tr}\rho)$ inverzan r-semiprime kongruencijski par za S i $\rho(\ker\rho, \mathrm{tr}\rho) = \rho$.

Dokaz. Neka je $(K,\tilde{\tau})$ inverzan r-semiprime kongruencijski par za S i neka je $\rho = \rho(K,\tilde{\tau})$. Tada za proizvoljan $a\in S$, $a'\in V(r(a))$ je

$$a'r(a)\,\tilde{\tau}\,a'r(a) \wedge r(a)a'\in K$$

pa je $a\rho a$ i prema tome, ρ je refleksivna relacija.

Ako je $a\rho b$, tada

$$a'r(a)\,\tilde{\tau}\,b'r(b) \wedge r(a)b'\in K,$$

a odavde

$$b'r(b)\,\tilde{\tau}\,a'r(a) \wedge r(b)a'\in K.$$

Dakle, $b\rho a$ i prema tome, ρ je simetrična.

Ako je $a\rho b$ i $b\rho c$, tada

(14) $a'r(a)\,\tilde{\tau}\,b'r(b) \wedge b''r(b)\,\tilde{\tau}\,c'r(c) \wedge r(a)b',\ r(b)c'\in K.$

Kako je

$$r(a)(b'r(b))c' = (r(a)b')(r(b)c')\in K$$

to odavde, Leme 1.5. (i) i činjenice $b'r(b)\,\tilde{\tau}\,a'r(a)$ sledi da

(15) $r(a)c'\in K.$

Takodje, na osnovu Leme 1.5. (iii), imamo

$$b'r(b)\,\tilde{\tau}\,b''r(b),$$

a s obzirom na tranzitivnost relacije ρ sledi

$$a'r(a) \,\tilde{\tau}\, c'r(c)$$

tj. $a\rho c$. Dakle, ρ je tranzitivna i prema tome je relacija ekvivalencije. Dokažimo da je ρ kongruencija. Zaista, ako su $a,b,c \in S$ proizvoljni elementi i $a\rho b$, tada je

$$(16) \qquad a'r(a) \,\tilde{\tau}\, b'r(b) \wedge r(a)b' \in K$$

za svaki $a' \in V(r(a))$, $b' \in V(r(b))$. Ako je $c' \in V(r(c))$, tada

$$c'a' \in V(r(a)r(c)), \ c'b' \in V(r(b)r(c))$$

i

$$b'r(b)r(c)c'a' \in V(r(a)r(c)c'b'r(b)).$$

Kako je $\tilde{\tau}$ normalna kongruencija na $E(S)$ to iz (16) imamo

$$(17) \qquad c'a'r(a)r(c) \,\tilde{\tau}\, c'b'r(b)r(c).$$

Dalje, imamo

$$(r(a)r(c)c'b'r(b))(a'r(b)r(c)c'a'r(a)r(c)c'b'r(a))b' =$$
$$= (r(a)r(c)c'b'r(b)a')(r(b)r(c)c'a'r(a)r(c)c'b')(r(a)b') \in K.$$

Na osnovu Leme 1.5. (ii) i činjenice da je

$$r(b)r(c)c'a'r(a)r(c)c'b' \in E(S)$$

dobijamo

$$a'r(b)r(c)c'a'r(a)r(c)c'b'r(a) \,\tilde{\tau}\, b'r(b)r(c)c'a'r(a)r(c)c'b'r(b).$$

Odavde i Leme 1.5. (i) sledi

$$r(a)r(c)c'b'r(b)b' \in K$$

i prema tome,

$$(18) \qquad r(a)r(c)c'b' \in K.$$

Kako je S $\mathcal{T}$-ortodoksna r-polugrupa to je

$$(19)\qquad r(a)r(c)c'b' = r(ac)(r(b)r(c))' = r(ac)(r(bc))' = r(ac)(bc)',$$

gde je $(bc)' \in V(r(bc))$. Iz (18) i (19) sledi

$$(20)\qquad r(ac)(bc)' \in K$$

što zajedno sa (17) daje

$$(21)\qquad (ac)'r(ac)\ \widehat{\tau}\ (bc)'\ r(bc),$$

gde je $(ac)' \in V(r(ac))$, $(bc)' \in V(r(bc))$. Iz (20) i (21) sledi

$$(22)\qquad ac\,\rho\, bc.$$

Dakle, ρ je desna kongruencija. Iz Leme 1.5. (ii) imamo

$$a'c'r(c)r(a)\ \widehat{\tau}\ b'c'r(c)\ r(b)$$

pa je

$$(23)\qquad (ca)'\ r(ca)\ \widehat{\tau}\ (cb)'\ r(cb),$$

Kako je K samokonjugovana i činjenice da je $r(a)b' \in K$ sledi da je

$$r(c)r(a)\ b'c' \in K$$

pa je

$$(24)\qquad r(ca)(cb)' \in K.$$

Iz (23) i (24) sledi da je

$$ca\,\rho\, cb.$$

Dakle, ρ je leva kongruencija što zajedno sa (22) daje ρ je kongruencija.

Očigledno,

$$r(r(a)) = r(a) \wedge a'r(a)\ \widehat{\tau}\ a'r(a) \wedge r(a)a' \in K$$

pa je $a\rho r(a)$, tj. ρ je r-semiprime kongruencija.

Neka je $a \in \ker \rho$ proizvoljan element. Tada postoji $e \in E(S)$ da je $a \rho e$ pa

$$a'r(a) \;\widetilde{\tau}\; e'e \wedge r(a)e' \in K,$$

za $a' \in V(r(a))$, $e' \in V(e)$. Takodje,

$$r(a)(e'e) = (r(a)e')e \in K$$

što po definiciji 1.2. (i) povlači $r(a) \in K$. Kako je K r-semiprime podpolugrupa od S to je $a \in K$. Obratno, neka je $a \in K$ proizvoljan element. Tada $r(a) \in K$ pa je

$$r(a) = r(a)(a'r(a)) \in K$$

$$a'r(a) = (a'r(a))(a'r(a))$$

za $a' \in V(r(a))$ što povlači

$$a \,\rho\, a'r(a)$$

tj. $a \in \ker \rho$. Prema tome,

$$\ker \rho = K.$$

Neka su $e,f \in E(S)$, $e' \in V(e)$, $f' \in V(f)$ proizvoljni elementi. Tada, na osnovu Leme 1.5. (iii), imamo

$$e \;\widetilde{\tau}\; e'e \wedge f \;\widetilde{\tau}\; f'f,$$

jer $e'e \in V(e)$, $f'f \in V(f)$. Odavde sledi

$$e \rho f \Leftrightarrow (\exists e' \in V(e))(\exists f' \in V(f))(e'e \;\widetilde{\tau}\; f'f \wedge ef' \in K) \Leftrightarrow e \;\widetilde{\tau}\; f.$$

Dakle, $\operatorname{tr} \rho = \widetilde{\tau}$.

Na osnovu Leme 1.4. i Leme 1.5. (iii) kao i činjenice da je $\operatorname{tr} \rho = \widetilde{\tau}$ sledi da je ρ inverzna kongruencija.

Neka je γ proizvoljna inverzna r-semiprime kongruencija na S takva da je $\ker \gamma = K$ i $\operatorname{tr} \gamma = \widetilde{\tau}$. Dokažimo da je $\gamma = \rho$. Zaista, pretpostavimo li da je $a \gamma b$, tada je

$$r(a) \,\gamma\, r(b).$$

Ako je $a' \in V(r(a))$ i $b' \in V(r(b))$, onda na osnovu Leme 1.3. je $a' \gamma b'$ pa je

$$a'r(a) \ \gamma \ b'r(b)$$
$$r(a)b' \ \gamma \ r(b)b',$$

a odavde $r(a)b' \in \ker \rho = K$. Kako je $\operatorname{tr} \gamma = \widehat{\tau}$ to je

$$a'r(a) \ \widehat{\tau} \ b'r(b)$$

i prema tome, $a \rho b$ pa je

$$\gamma \subseteq \rho. \tag{25}$$

Obratno, neka je $a \rho b$. Tada je

$$a'r(a) \ \widehat{\tau} \ b'r(b) \wedge r(a)b' \in K$$

za neke $a' \in V(r(a))$ i $b' \in V(r(b))$ što povlači

$$a'r(a) \ \gamma \ b'r(b) \ \wedge \ r(a)b' \gamma e \tag{26}$$

za neki $e \in E(S)$. Kako je $r(b)a' \in V(r(a)b')$ to, na osnovu Leme 1.3., imamo

$$r(b)a' \gamma \ e \wedge r(b)a'r(b)a' \gamma e$$

i prema tome,

$$r(a)b' \gamma r(b)a \ \ \gamma \ r(b)a'r(b)a',$$

što zajedno sa (26) daje

$$\begin{aligned} r(a) &= r(a)a'r(a) \gamma r(a)b'r(b) \\ &\gamma \ r(b)a'r(b)b'r(b) \gamma r(b)a'r(b)a'r(a) \\ &\gamma r(b)a'r(a) \gamma r(b)b'r(b) = r(b). \end{aligned} \tag{27}$$

Kako je γ r-semiprime kongruencija to iz (27) sledi $a \gamma b$ pa je

$$\rho \subseteq \gamma. \tag{28}$$

Iz (25) i (28) sledi da je $\gamma = \rho$ i prema tome, ρ je jedinstvena inverzna r-semiprime kongruencija na S.

Obratno, neka je ρ r-semiprime inverzna kongruencija na S. Tada, na osnovu Teoreme 1.5., $\ker\rho$ je normalna r-semiprime podpolugrupa od S. Neka su $a \in S$ i $e \in E(S)$ proizvoljni elementi. Ako je $r(a)e \in \ker\rho$ i $e \subseteq a'r(a)$ za neki $a' \in V(r(a))$, tada je

$$f \rho r(a)e \rho r(a)a'r(a) = r(a)$$

za neki $f \in E(S)$. Dakle, $r(a) \in \ker\rho$.

Neka je $a \in S$ proizvoljan element i $a' \in V(r(a))$. Ako je $a \in \ker\rho$, tada je

$$r(a) \rho e$$

za neki $e \in E(S)$ pa je $a' \rho e$ (Lema 1.3.). Odavde sledi

$$r(a)a' \rho e \wedge a'r(a) \rho e$$

pa je

$$r(a) a' \rho a'r(a)$$

za svaki $a \in \ker\rho$ i $a' \in V(r(a))$. Dakle, $(\ker\rho, \operatorname{tr}\rho)$ je inverzan r-semiprime kongruencijski par za S.

Tada

$$\ker\rho(\ker\rho, \operatorname{tr}\rho) = \ker\rho \wedge \operatorname{tr}\rho(\ker\rho, \operatorname{tr}\rho) = \operatorname{tr}\rho,$$

po direktnom iskazu ove teoreme, a zbog jedinstvenosti je

$$\rho(\ker\rho, \operatorname{tr}\rho) = \rho. \blacksquare$$

2. $\mathcal{L}$-UNIPOTENTNE r-SEMIPRIME KONGRUENCIJE NA UOPŠTENO STROGO $\mathcal{T}$-INVERZNOJ r-POLUGRUPI

U ovoj tački karakterišemo $\mathcal{L}$-unipotentne r-semiprime kongruencije na uopšteno strogo $\mathcal{T}$-inverznoj r-polugrupi. Kao specijalni slučajevi javljaju se karakterizacije $\mathcal{L}$-unipotentnih kongruencija na uopšteno inverznoj polugrupi [1] .

<u>DEFINICIJA 2.1.</u> $\mathcal{T}$-regularna polugrupa S je u o p š t e n o s t r o g o $\mathcal{T}$-i n v e r z n a ako skup idempotenata E(S) jeste normalna traka tj.

$$(\forall e,f,g,h \in E(S))(efgh = egfh).$$

<u>DEFINICIJA 2.2.</u> [27] . Regularna polugrupa S je $\mathcal{L}$-u n i p o t e n t n a ako skup E(S) obrazuje desno regularnu traku tj.

$$(\forall e,f \in E(S))(ef = fef).$$

Ovde navodimo jedan rezultat M. Yamade [68]

<u>LEMA 2.3.</u> Neka je S uopšteno strogo $\mathcal{T}$-inverzna polugrupa. Tada

(i) $r(x)ef\, r(y) = r(x)fe\, r(y)$,

(ii) $r(x)\, a'r(y) = r(x)a''\, r(y)$

za svaki $x,y,a \in S$, $a'a'' \in V(r(a))$, $e \in E(S)$.

LEMA 2.4. Neka je $(K, \widehat{\tau})$ $\mathcal{L}$-unipotentan r-semiprime kongruencijski par uopšteno strogo π-inverzne r-polugrupe. Tada

(i) $(r(a)er(a) \in K \wedge e\,\widehat{\tau}\,a'r(a)) \Rightarrow r(a)r(b) \in K$;

(ii) $r(a)r(b) \in K \Rightarrow r(a)e\,r(b) \in K$;

(iii) $(r(a)b' \in K \wedge a'r(a)\,\widehat{\tau}\,b'r(b)) \Rightarrow a'er(a)\,\widehat{\tau}\,b'er(b)$;

(iv) $ef\,\widehat{\tau}\,fef$ ($\widehat{\tau}$ je desno regularna tračna kongruencija) za svaki $a,b \in S$, $a' \in V(r(a))$, $b' \in V(r(b))$, $e,f \in E(S)$.

Dokaz. (i). Na osnovu Leme 2.3. (i) imamo

$$r(ab)(b'er(b)) = r(a)r(b)(b'er(b))$$
$$= r(a)er(b) \in K.$$

Kako je $\widehat{\tau}$ normalna kongruencija na $E(S)$ to iz $e\,\widehat{\tau}\,a'r(a)$ dobijamo

$$b'er(b)\,\widehat{\tau}\,b\acute{a}'r(a)r(b) = (ab)'r(ab),$$

gde je $(ab)' \in V(r(a)b))$ pa po Definiciji 1.2. (i) imamo

$$r(ab) \in K,$$

a odavde

$$r(a)r(b) \in K.$$

(ii) Kako je K normalna r-semiprime podpolugrupa od S to imamo

$$r(a)r(b) \in K \Rightarrow r(a)er(b) = r(a)(er(b)b')r(b)$$
$$= r(a)r(b)(b'er(b)) \in K.$$

(iii) Pretpostavimo da je $r(a)b' \in K$ i $a'r(a)\,\widehat{\tau}\,b\acute{r}(b)$.

Tada

$$a'er(a) = a'r(a)a'er(a)a'r(a) \tilde{\tau}\, b'r(b)a'er(a)b'r(b)$$
$$\tilde{\tau}\, b'er(b)\, a'r(a)b'r(b)$$
$$\tilde{\tau}\, b'er(b).$$

(iv). Kako je K puna polugrupa to po Definiciji 1.2. (ii)′ imamo

$$fef\, \tilde{\tau}\, ef. \blacksquare$$

<u>LEMA 2.5.</u> Ako je ρ $\mathcal{L}$-unipotentna $\acute{r}$-semiprime kongruencija na S, tada

$$a\rho b \Longleftrightarrow (\forall a' V(r(a)))(\forall b' \in V(r(b)))(a'r(a)\,tr\rho\, b'r(b) \wedge r(a)b' \in ker\,\rho)$$

<u>Dokaz</u>. Ako je $a\rho b$, $a' \in V(r(a))$, $b' \in V(r(b))$, tada je

$$r(a)\ \rho\ r(b)$$

pa je

$$a'r(a)\rho\ a'r(b)b\acute{r}(b)$$
$$\rho\, a'r(a)b'r(b)$$
$$\rho\, b'r(b)a'r(a)b'r(b) \quad (\rho \text{ je } \mathcal{L}\text{-unipotentna})$$
$$\rho\, b'r(a)b'r(b)$$
$$\rho\, b'r(b).$$

Dakle, $a'r(a)\ tr\rho\ b'r(b)$. Kako je $r(a)b'\ \rho\ r(b)b'$ to

$$r(a)b' \in ker\,\rho.$$

Obratno, neka je $a'r(a)tr\rho\, b'r(b)$ i $r(a)b' \in ker\rho$ za svaki $a' \in V(r(a))$, $b' \in V(r(b))$. Tada imamo

$$r(a)\ \rho\ r(a)a'r(a)a'r(a)$$
$$\rho\ r(a)b'r(b)b'r(b)$$
$$\rho\ r(b)b'r(a)b\acute{r}(b)e'r(b) \quad (\rho \text{ je } \mathcal{L}\text{-unipotentna})$$

$$
\begin{aligned}
r(a)\ &\rho\, r(b)b'r(a)b'r(b) \\
&\rho\, r(b)b'r(b)b'r(a)b'r(b) \\
&\rho\, r(b)a'r(a)b'r(a)b'r(b) \quad (\text{jer, } r(a)b'\in \ker\rho) \\
&\rho\, r(b)a'r(a)b'r(b) \\
&\rho\, r(b).
\end{aligned}
$$

Dakle, $r(a)\ \rho\ r(b) \Longleftrightarrow a\,\rho\, b.$ ▨

<u>TEOREMA 2.6.</u> Ako je (K, τ) $\mathcal{L}$-unipotentan r-semiprime kongruencijski par uopšteno strogo $\mathcal{R}$-inverzne r-polugrupe S i $\rho(K, \tau)$ relacija na S definisana sa

$$a\,\rho(K, \tau)\,b \Leftrightarrow (\exists a'\in V(r(a)))(\exists b'\in V(r(b)))(a'r(a)\,\tau\, b'r(b) \wedge r(a)b'\in K),$$

tada je $\rho(K, \tau)$ jedinstvena $\mathcal{L}$-unipotentna r-semiprime kongruencija na S za koju je

$$\ker\rho(K, \tau) = K \wedge \operatorname{tr}\rho(K, \tau) = \tau.$$

Obratno, ako je ρ $\mathcal{L}$-unipotentna r-semiprime kongruencija na S, tada je $(\ker\rho, \operatorname{tr}\rho)$ $\mathcal{L}$-unipotentna r-semiprime kongruencijski par za S i $\rho = \rho(\ker\rho, \operatorname{tr}\rho)$.

<u>Dokaz.</u> Neka je (K, τ) $\mathcal{L}$-unipotentan r-semiprime kongruencijski par za S i neka je $\rho = \rho(K, \tau)$. Neka je $a\in S$ proizvoljan element. Kako je K puna to je

$$a'r(a)\,\tau\, a'r(a) \wedge r(a)a'\in K,$$

a odavde $a\,\rho\, a$, tj. ρ je refleksivna.

Ako je $a\,\rho\, b$, tada je

$$a'r(a)\ \tau\ b'r(b) \wedge r(a)b'\in K.$$

Kako je K inverzno zatvorena to je

$$b'r(a)\,\widetilde{\tau}\,a'r(a) \wedge r(b)a' \in K,$$

a odavde $b\rho a$ i prema tome, ρ je simetrična.

Ako je $a\rho b$ i $b\rho c$, tada je

(1) $\quad a'r(a)\,\widetilde{\tau}\,b'r(b) \wedge b''r(b)\,\widetilde{\tau}\,c'r(c) \wedge r(a)b', r(b)c' \in K.$

Dalje,

$$r(a)(b'r(b))c' = r(a)b'r(b)c' \in K.$$

Odavde i na osnovu Leme 2.4. (i) imamo

(2) $\qquad r(a)c' \in K.$

Takodje, na osnovu Leme 2.4. (iv), sledi

$$a''r(a)a'r(a)\,\widetilde{\tau}\,a'r(a)a''r(a)a'r(a),$$

a odavde

(3) $\quad a''r(a)\,\widetilde{\tau}\,a'r(a).$

Analogno,

(4) $\quad b''r(b)\,\widetilde{\tau}\,b'r(b).$

Iz (1), (2), (3) i (4) sledi $a\rho c$ i prema tome, ρ je tranzitivna. Dakle, ρ je relacija ekvivalencije.

Neka su $a,b,c \in S$ proizvoljni elementi i neka je $a\rho b$ i $c' \in V(r(c))$. Tada

$$a'r(a)\,\widetilde{\tau}\,b'r(b) \wedge r(a)b' \in K$$

za neke $a' \in V(r(a))$ i $b' \in V(r(b))$. Odavde primenom Leme 2.4. (ii) imamo

(5) $\qquad r(a)\,r(c)c'b' \in K.$

Takodje, sobzirom da je $\widetilde{\tau}$ normalna kongruencija na $E(S)$ dobijamo

(6) $\quad a'r(a)\,\widetilde{\tau}\, b'r(b) \Rightarrow c'a'r(a)r(c)\,\widetilde{\tau}\, c'b'r(b)r(c).$

Kako je S r-polugrupa to iz (5) imamo

(7) $$r(ac)(bc)' \in K,$$

a iz (6) dobijamo

(8) $$(ac)'r(ac)\,\widetilde{\tau}\,(bc)'r(bc).$$

Iz (7) i (8) sledi da je $ac \rho bc$ i prema tome, ρ je desna kongruencija.

Nadalje, iz $r(a)b' \in K$ i $a'r(a)\,\widetilde{\tau}\, b'r(b)$ i Leme 2.4. (iii) imamo

(9) $$a'(c'r(c))r(a)\,\widetilde{\tau}\, b'(c'r(c))\, r(b).$$

Kako je K samokonjugovana to je

(10) $$r(c)r(a)b'c' \in K.$$

Sobzirom da je S r-polugrupa to iz (9) i 10) sledi

$$(ca)'r(ca)\,\widetilde{\tau}(cb)r(cb) \wedge r(ca)(cb)' \in K,$$

gde su $(ca)' \in V(r(ca))$ i $(cb)' \in V(r(cb))$ pa je $ca \rho cb$. Dakle, ρ je leva kongruencija i prema tome, ρ je kongruencija na S.

Ako je $a \in \ker$ proizvoljan element, tada je

$$a'r(a)\,\widetilde{\tau}\, e \wedge r(a)e \in K$$

za neke $a' \in V(r(a))$ i $e \in E(S)$ što zajedno sa (i) iz Leme 2.4. daje $r(a) \in K$. Odavde i činjenice da je K r-semiprime polugrupa sledi $a \in K$ i prema tome,

(11) $$\ker\rho \subseteq K.$$

Obratno, ako je $a \in K$ proizvoljan element, tada

$$r(a)(a'r(a)) \in K \wedge a'r(a)\,\widetilde{\tau}\, a'r(a)a'r(a)$$

za svaki $a' \in V(r(a))$ pa je

$$a' \rho\, a'r(a),$$

a odavde, $a \in \ker\rho$. Dakle,

(12) $$K \subseteq \ker\rho.$$

Iz (11) i (12) sledi da je

$$\ker\rho = K.$$

Slično, $\mathrm{tr}\,\rho = \tilde{\tau}$.

Jedinstvenost za ρ sledi iz Leme 2.5.

Obratno, neka je ρ $\mathcal{L}$-unipotentna r-semiprime kongruencija na S. Tada

$$\mathrm{tr}\,\rho = \rho / E(S)$$

je normalna kongruencija na E(S) i $\ker\rho$ normalna podpolugrupa od S. Ako je $r(a) \in \ker\rho$, tada je

(13) $$r(a)\ \rho\ e$$

za neki $e \in E(S)$, pa kako je ρ r-semiprime kongruencija to je

(14) $$a\ \rho\ r(a).$$

Iz (13) i (14) imamo

$$a\ \rho\ e,$$

a odavde $a \in \ker$ pa je $\ker\rho$ r-semiprime podpolugrupa od S.

Neka je $a \in \ker\rho$ proizvoljan element i $a' \in V(r(a))$.

Tada

(15) $$a\rho e \Rightarrow a^2 \rho\, ee \Rightarrow a^2 \rho\, a.$$

Kako je ρ r-semiprime kongruencija to

$$r(a)^2 \rho\ r(a).$$

Dalje,

$$a' = a'r(a)a'\ \rho\ (a'r(a))(r(a)a') \in E(S),$$

a odavde $a' \in \ker\rho$. Dakle, $\ker\rho$ je regularna podpolugrupa od S, za $r(a)e \in \ker\rho$ i $a'r(a)\rho e$ imamo

$$r(a) = r(a)a'r(a) \,\rho\, r(a)e \in \ker\rho$$

pa važi (i) iz Definicije 1.2.

Ako je $a \in \ker\rho$, $a' \in V(r(a))$, tada je $r(a) \in \ker\rho$ pa je

$$r(a) \rho f \wedge a' \rho g,$$

za neke $f, g \in E(S)$, a odavde

$$a'er(a) \,\rho\, gef \,\rho\, egf \,\rho\, ea'r(a),$$

jer je ρ $\mathcal{L}$-unipotentna pa važi (ii) iz Definicije 1.2. Dakle, $(\ker\rho, \operatorname{tr}\rho)$ je $\mathcal{L}$-unipotentan r-semiprime kongruencijski par za S. Iz direktnog dela teoreme sledi da je

$$\rho = \rho(\ker\rho, \operatorname{tr}\rho). ▨$$

LEMA 2.7. Neka je S uopšteno strogo π-inverzna polugrupa i τ normalna kongruencija na E(S). Tada relacije τ_o i τ_r definisane na E(S) sa

(i) $e \,\tau_o\, f \Leftrightarrow (\forall a \in S)(\forall a' \in V(r(a))(a'er(a) \,\tau\, a'fr(a));$

(ii) $e \,\tau_r\, f \Leftrightarrow (\forall g \in E(S))(ge \,\tau\, gf)$

su normalne kongruencije na E(S). τ_o je najmanja polumrežna kongruencija na E(S) koja sadrži τ, a τ_r je najmanja desno regularna tračna kongruencija koja sadrži τ i $\tau_r \subseteq \tau_o$.

Dokaz. Očigledno relacije τ_o i τ_r su ekvivalencije. Za svaki $g \in E(S)$ imamo

$$e \,\tau_o\, f \Rightarrow (\forall a \in S)(\forall a' \in V(r(a))(a'gegr(a) \,\tau\, a'gfgr(a)),$$

a odavde

$$a'ger(a) \,\tau_o\, a'gfr(a) \wedge a'egr(a) \,\tau_o\, a'fgr(a)$$

pa je

$$ge \ \widetilde{\tau}_o \ gf \wedge eg \ \widetilde{\tau}_o \ fg.$$

Dakle, $\widetilde{\tau}_o$ je kongruencija na $E(S)$.

Dalje, imamo

$$e \ \widetilde{\tau}_r f \Rightarrow (\forall\, h \in E(S))(hge \ \widetilde{\tau} \ hgf \wedge heg \ \widetilde{\tau} \ hfg)$$

pa je

$$ge \ \widetilde{\tau}_r gf \wedge eg \ \widetilde{\tau}_r fg,$$

i prema tome, $\widetilde{\tau}_r$ je kongruencija na $E(S)$.

Kako je $\widetilde{\tau}$ normalna kongruencija na $E(S)$ imamo $\widetilde{\tau} \subseteq \widetilde{\tau}_o$ i $\widetilde{\tau} \subseteq \widetilde{\tau}_r$.

Neka je $a \in S$ proizvoljan element i $a' \in V(r(a))$. Tada

$$e \ \widetilde{\tau}_o f \Leftrightarrow (\forall\, a \in S)(\forall\, a' \in V(r(a))(a'er(a) \ \widetilde{\tau} \ a'fr(a)),$$

a odavde

$$c' \ er(a)r(c) \ \widetilde{\tau} \ c'a'fr(a) \ r(c)$$

za svaki $c \in S$ i $c' \in V(r(c))$, pa je

$$a'er(a) \ \widetilde{\tau}_o \ a'fr(a).$$

Dakle, $\widetilde{\tau}_o$ je normalna kongruencija na $E(S)$.

Nadalje,

$$\begin{aligned} e \ \widetilde{\tau}_r f &\Rightarrow r(a)a'e \ \widetilde{\tau} \ r(a)a'f \\ &\Rightarrow a'r(a)a'er(a) \ \widetilde{\tau} \ a'r(a) \ a'fr(a) \\ &\Rightarrow a'er(a) \ \widetilde{\tau} \ a'fr(a) \\ &\Rightarrow a'er(a) \ \widetilde{\tau}_r \ a'fr(a) \end{aligned}$$

i prema tome, $\widetilde{\tau}_r$ je normalna kongruencija na $E(S)$.

Za $\widetilde{\tau}_o$ imamo

$$\begin{aligned} ef \ \widetilde{\tau}_o ef &\Leftrightarrow (\forall\, a \in S)(\forall\, a' \in V(r(a))(a'efr(a) \ \widetilde{\tau} \ a'efr(a)) \\ &\Leftrightarrow (\forall\, a \in S)(\forall\, a' \in V(r(a))(a'efr(a) \widetilde{\tau} a'fer(a)) \\ &\Leftrightarrow ef \ \widetilde{\tau}_o \ fe. \end{aligned}$$

Odavde sledi da je $\widetilde{\zeta}_o$ polumrežna kongruencija na E(S).

Slično, za $\widetilde{\zeta}_r$ imamo

$$
\begin{aligned}
ef\ \widetilde{\zeta}_r ef &\Leftrightarrow (\forall\ g \in E(S))(gef\ \widetilde{\zeta}\ gef) \\
&\Leftrightarrow (\forall\ g \in E(S))\ gef\ \widetilde{\zeta}\ gfef \\
&\Leftrightarrow ef\ \widetilde{\zeta}_r fef
\end{aligned}
$$

i prema tome, $\widetilde{\zeta}_r$ je desno regularna tračna kongruencija.

Neka je β proizvoljna polumrežna kongruencija koja sadrži $\widetilde{\zeta}$. Tada

$$
\begin{aligned}
e\,\beta_o\,f &\Rightarrow e\,\beta\,efe \wedge fef\,\beta\,f \\
&\Rightarrow e\,\beta\,f,
\end{aligned}
$$

a odavde sledi da je $\beta_o \subseteq \beta$ pa je

$$
\widetilde{\zeta} \subseteq \beta \Rightarrow \widetilde{\zeta}_o \subseteq \beta_o \Rightarrow \widetilde{\zeta}_o \subseteq \beta
$$

Dakle, $\widetilde{\zeta}_o$ je najmanja polumrežna kongruencija na E(S) koja sadrži $\widetilde{\zeta}$.

Slično, ako je γ desno regularna tračna kongruencija na E(S) koja sadrži $\widetilde{\zeta}$ imamo

$$
\begin{aligned}
e\,\gamma_r\,f &\Rightarrow e\,\gamma\,ef \wedge fe\,\gamma\,f \\
&\Rightarrow e\,\gamma\,f.
\end{aligned}
$$

Odavde sledi da je $\gamma_r \subseteq \gamma$ i $\widetilde{\zeta}_r \subseteq \gamma$. Dakle, $\widetilde{\zeta}_r$ je najmanja desno regularna tračna kongruencija na E(S) koja sadrži $\widetilde{\zeta}$.

Na kraju, kako je svaka polumrežna kongruencija ujedno desno regularna tračna kongruencija imamo da je $\widetilde{\zeta}_r \subseteq \widetilde{\zeta}_o$. ▨

TEOREMA 2.8. Ako je ρ r-semiprime kongruencija na uopšteno strogo $\mathcal{T}$-inverznoj r-polugrupi S, tada

(i) $(\ker\rho, (\mathrm{tr}\,\rho)_r)$ je $\mathcal{L}$-unipotentan r-semiprime kongruencijski par za S, a $\rho(\ker\rho, (\mathrm{tr}\,\rho)_r)$ je najmanja $\mathcal{L}$-unipotentna r-semiprime kongruencija na S koja sadrži ρ.

(ii). $(\ker\rho, (\mathrm{tr}\,\rho)_o)$ je inverzan r-semiprime kongruencijski par za S, a $\rho(\ker\rho, (\mathrm{tr}\,\rho)_o)$ je najmanja inverzna r-semiprime kongruencija na S koja sadrži ρ.

Dokaz. (i) Neka je ρ kongruencija na S. Na osnovu Teoreme 1.5. imamo da je $\ker\rho$ normalna r-semiprime podpolugrupa od S, a po Lemi 2.7. $(\mathrm{tr}\,\rho)_r$ je normalna kongruencija na E(S) i ona je najmanja desno regularna tračna kongruencija koja sadrži $\mathrm{tr}\,\rho$.

Neka je $r(a)e \in \ker\rho$ i $a'r(a)(\mathrm{tr}\,\rho)_r e$. Tada

$$a'r(a)e \;\rho\; a'r(a)$$

pa je

$$\begin{aligned} r(a) = r(a)a'r(a) \;&\rho\; r(a)\, a'r(a)e \\ &= r(a)\, e \in \ker\rho . \end{aligned}$$

Prema tome, $r(a) \in \ker\rho$ čime je ispunjen uslov (i) Definicije 1.2.

Ako je $a \in \ker\rho$ i $a' \in V(r(a))$, tada je $r(a) \in \ker\rho$ pa je

$$r(a)\,\rho\, f \wedge a'\rho\, g$$

za neke $f,g \in E(S)$, što zajedno sa Lemom 2.7. daje

$$a'\mathcal{E}r(a)\ tr\rho\ gef(tr\rho)_r\ egf\ tr\rho\ ea'r(a).$$

Dakle, ispunjen je i uslov (ii)' Definicije 1.2. i prema tome, $(\ker\rho, (tr\rho)_r)$ je $\mathcal{L}$-unipotentan r-semiprime kongruencijski par za S. Kako je $tr\rho \subseteq (tr\rho)_r$ sledi da je

$$\rho \subseteq (\ker\rho, (tr\rho)_r).$$

Neka je δ $\mathcal{L}$-unipotentna r-semiprime kongruencija na S. Tada

$$\ker\rho \subseteq \ker\delta,$$

a na osnovu Leme 2.7., imamo da je

$$(tr\rho)_r \subseteq tr\delta$$

pa

$$\rho(\ker\rho, (tr\rho)_r) \subseteq \rho(\ker\delta, tr\delta) = \delta.$$

Dakle, $\rho(\ker\rho, (tr\rho)_r)$ je najmanja $\mathcal{L}$-unipotentna r-semiprime kongruencija na S koja sadrži ρ.

Analogno se dokazuje i (ii). ▨

3. POLUMREŽNE KONGRUENCIJE NA (m,n)-DVOSTRANO (JEDNOSTRANO) ČISTOJ POLUGRUPI

U ovoj tački opisujemo minimalnu polumrežnu kongruenciju na (m,n)-dvostrano (jednostrano) čistoj polugrupi i dokazujemo da je svaka njena klasa ekvivalencije $\mathcal{K}$-grupa.

DEFINICIJA 3.1. [2] Neka je G podgrupa polugrupe S. Ako za svaki $a \in S$ postoji $m \in Z^+$ da $a^m \in G$, tada S nazivamo π- g r u p o m.

LEMA 3.1. Neka je S (m,n)-dvostrano čista polugrupa i ρ relacija na S definisana sa

(1) $$a \rho b \Leftrightarrow r(a)Sr(a) = r(b)Sr(b),$$

gde su $r(a), r(b) \in \mathrm{Reg}S$. Tada je ρ relacija ekvivalencije i svaka ρ-klasa sadrži tačno jedan idempotent.

Dokaz. Jasno je da je ρ ekvivalencija. Dokažimo da svaka ρ-klasa sadrži tačno jedan idempotent. Zaista, neka je $a \in S$ proizvoljan element i $a\rho$ klasa ekvivalencije po modulu ρ koja sadrži a. Tada $r(r(a)) = r(a)$ pa je

$$a \rho r(a)$$

tj. ρ je r-semiprime kongruencija. Kako je $r(a) \in \mathrm{Reg}\, S$ to je

$$r(a) = r(a)\, x\, r(a)$$

za neki $x \in S$. Odavde i Posledice III 1.18. imamo

$$r(a)x = xr(a) = e.$$

Dalje je

(2) $$r(a)Sr(a) = er(a)Sr(a)e \subseteq eSe$$

i

(3) $$eSe = r(a)xSxr(a) \subseteq r(a)Sr(a).$$

Iz (2) i (3) sledi

$$r(a)Sr(a) = eSe$$

i prema tome,

(4) $$a \rho e,$$

tj. $e \in a\rho$. Dakle, $a\rho$ sadrži idempotent. Neka su $e,f \in a\rho$ dva različita idempotenta. Tada imamo

$$e = eee \in eSe = fSf$$

pa postoji $x \in S$ da je

$$e = fxf.$$

Slično,

$$f = eye,$$

za neki $y \in S$. Dalje,

$$e = fxf = fx(ff) = (fxf)f = ef$$
$$= e(eye) = (ee)ye = eye = f. \quad ▨$$

<u>LEMA 3.2.</u> Neka je S (m,n)-dvostrano čista polugrupa i $e \in E(S)$. Tada je

$$G_e \subseteq e\rho.$$

Sem toga, ako je $x \in e\rho$ i $n \in Z^+$ za koji je $r(x) = x^n \in RegS$, tada je $x^k \in G_e$ za svaki $k \geqslant n$.

<u>Dokaz.</u> Neka je $a \in G_e$ proizvoljan element. Tada je $r(a) \in G_e$ pa postoji $a' \in V(a)$ da je

$$r(a)a' = a'r(a) = e \wedge r(a)e = er(a) = r(a)$$

pa je

$$r(a)Sr(a) = eSe,$$

a odavde

$$a\rho e.$$

Dakle, $a \in e\rho$ i prema tome,

$$G_e \subseteq e\rho \ .$$

Neka je $x \in e\rho$. Tada je $x \rho r(x)$ pa je $r(x) \in e\rho$. Dalje,

$$r(x) = r(x)\ y\ r(x)$$

za neki $y \in S$. Kako su $r(x)y$ i $yr(x)$ idempotenti to, na osnovu Posledice III 1.18, imamo

(3) $\quad r(x)y = yr(x) = f \wedge r(x)f = fr(x) = r(x)$

pa je

$$r(x)Sr(x) = fSf$$

i prema tome, $x\rho f$, tj. $f \in e\rho$. Odavde i Leme 4.1. sledi da je $e=f$, što zajedno sa (5) daje

$$r(x)y = yr(x) = e \wedge r(x)e = er(x) = r(x)$$

pa je $r(x) \in G_e$. Na osnovu Leme I 10. imamo da $x^n \in G_e$ implicira $x^k \in G_e$ za $k \geqslant n$. ▨

LEMA 3.3. Ako je S (m,n)-dvostrano čista polugrupa. Tada

$$(\forall\ a,b \in S)((ab)\rho = (ba)\rho\ ).$$

Dokaz. Neka su $a,b \in S$ proizvoljni elementi. Tada, na osnovu Posledice III 1.18., imamo

$$r(ab)=(ab)^{m+n+1} \wedge r(ba) = (ba)^{m+n+1}.$$

Dalje, na osnovu Leme III 1.15. i Teoreme I 19. imamo

$$\begin{aligned} r(ab)Sr(ab) &= (ab)^{m+n+1}S(ab)^{m+n+1} \\ &= a(ba)^{m+n}bSa(ba)^{m+n}b \\ &= Sa(ba)^{m+n}ba(ba)^{m+n}b \end{aligned}$$

$$= S(ba)^{m+n}ba(ba)^{m+n+1}$$

$$= (ba)^{m+n+1}S(ba)^{m+n+1}$$

$$= r(ba)Sr(ba),$$

a odavde $(ab)\rho(ba)$, tj.

$$(ab)\rho = (ba)\rho . ▨$$

<u>LEMA 3.4.</u> Ako je S (m,n)-dvostrano čista polugrupa, tada je ispunjen uslov

(6) $r(ab)Sr(ab) = r(b)r(a)Sr(a)r(b)$

za svaki $a,b \in S$.

<u>Dokaz</u>. Neka su $a,b \in S$ proizvoljni elementi. Tada, na osnovu Teoreme III 1.17. imamo S^{m+n+1} je polumreža grupa pa

$$r(a) \in G_e \wedge r(b) \in G_f$$

za neke $e,f \in E(S)$. Odavde sledi

$$r(a)e=er(a)=r(a) \wedge r(a)a'=a'r(a)=e$$

$$r(b)f=fr(b)=r(b) \wedge r(b)b'=b'r(b)=f$$

gde su $a' \in r(a)$ i $b' \in V(b)$ i prema tome,

(7) $r(a)Sr(a) = eSe,$

(8) $r(b)Sr(b) = fSf.$

Iz (7), (8) i Leme III.1.9 sledi

(9) $r(b)r(a)sr(a)r(b) = r(b)eSer(b)$

$$= er(b)Sr(b)e$$

$$= efSfe$$

$$= (ef)S(ef)$$

Dalje, na osnovu Posledice III. 1.18., imamo S je GV-polugrupa pa je

$$(10)\qquad Sr(ab)S = SefS$$

(Lema I 16.). Na osnovu Leme III. 1.15. i Teoreme I 19., a koristeći jednakost (10) dobijamo

$$Sr(ab)^2S = S(ef)^2S$$

pa je

$$\begin{aligned} r(ab)S^2r(ab) &= (ef)S^2(ef) \\ &\subseteq (ef)S(ef) \\ &= (ef)^2S(ef) \\ &\subseteq (ef)S^2(ef) \\ &= r(ab)S^2r(ab). \end{aligned}$$

Dakle,

$$(11)\qquad r(ab)S^2r(ab) = efSef.$$

Analogno,

$$(12)\qquad (ef)S(ef) = r(ab)\,Sr(ab)$$

Iz (11) i (12) sledi

$$(13)\qquad r(ab)Sr(ab) = (ef)S(ef).$$

Koristeći (9) i (13) imamo

$$r(ab)Sr(ab) = r(b)r(a)Sr(a)r(b).$$ ▨

U tački 1. ove glave su opisane inverzne kongruencije na nekim podklasama $\mathcal{T}$-regularnih polugrupa. Ovde specijalno (eksplicitno) opisujemo najmanju polumrežnu r-semiprime kongruenciju na (m,n)-dvostrano čistoj polugrupi.

<u>TEOREMA 3.5.</u> Ako je S (m,n)-dvostrano čista polugrupa, tada relacija ρ na S definisana sa

$$a\rho b \Leftrightarrow r(a)Sr(a)=r(b)Sr(b)$$

je najmanja polumrežna r-semiprime kongruencija na S i svaka ρ-klasa je $\mathfrak{T}$-grupa.

<u>Dokaz.</u> Na osnovu Leme 3.1. imamo da je ρ ekvivalencija. Dokažimo da je ρ kongruencija. Zaista, ako je $a\rho b$, tada

(14) $$r(a)Sr(a) = r(b)Sr(b).$$

Neka je $x\in S$ proizvoljan element. Kako su bi-ideali $r(a)Sr(a)$, $r(bx)Sr(bx)$, $r(xb)Sr(xb)$ (m,n)-dvostrano čisti podskupovi od S to, na osnovu Leme 3.3., jednakosti (14) i Leme 3.3. imamo

$$\begin{aligned} r(ax)Sr(ax) &= r(ax)^2Sr(ax)^2 \\ &= r(ax)r(ax)Sr(ax)r(ax) \\ &= r(ax)\{r(x)(r(a)Sr(a))r(x)\}r(ax) \\ &= r(ax)\{r(x)(r(b)Sr(b))r(x)\}r(ax) \\ &= r(ax)\{r(bx)Sr(bx)\}r(ax) \\ &= r(bx)Sr(bx)\cap r(ax)Sr(ax) \\ &\subseteq r(bx)Sr(bx). \end{aligned}$$

Analogno se dokazuje da je

$$r(bx)Sr(bx)\subseteq r(ax)Sr(ax)$$

pa je

$$r(ax)Sr(ax) = r(bx)Sr(bx),$$

a odavde

(15) $$ax\,\rho\,bx.$$

slično,

(16) $$xa\,\rho\,xb.$$

Iz (15) i (16) sledi da je ρ kongruencija.

Označimo sa $a\rho$ ρ-kongruencijsku klasu koja sadrži element a. Na osnovu Leme III 1.5. imamo

$$r(a)Sr(a) = r(a)^2Sr(a)^2$$

a odavde

(17) $$a\,\rho\,a^2$$

i prema tome,

$$(a\rho)^2 = (a\rho)(a\rho) = a^2\rho = a\rho ,$$

pa je S/ρ traka. Na osnovu Leme 3.3. imamo da je

$$ab\,\rho\,ba,$$

a odavde

$$(a\rho)(b\rho)=(ab)\rho=(ba)\rho=(b\rho)(a\rho).$$

Dakle, faktor polugrupa S/ρ je komutativna i prema tome je polumreža.

Neka je R proizvoljna ρ-klasa i $a,b \in R$. Tada

$$r(a)Sr(a) = r(b)Sr(b),$$

a odavde, jednakosti (17) i Leme 4.5. imamo

$$\begin{aligned} r(ab)Sr(ab) &= r(b)r(a)Sr(a)r(b) \\ &= r(b)r(b)Sr(b)r(b) \\ &= r(b)^2Sr(b)^2 \\ &= r(b^2)\,Sr(b^2) \end{aligned}$$

pa je $ab\,\rho\,b^2$ i prema tome, $ab \in R$. Dakle, R je polugrupa. Na osnovu Leme 3.1. R sadrži tačno jedan idempotent e i

$$G_e \subseteq R$$

(Lema 3.2.). Ako je $a \in R$, onda

$$r(a) = r(r(a))$$

pa je $a \rho r(a)$ tj. ρ je r-semiprime kongruencija i $r(a) \in R$. Kako R sadrži samo jedan idempotent i to je

$$r(a)e = er(a) = r(a) \wedge r(a)a' = a'r(a) = e$$

pa imamo da $r(a) \in G_e$. Dakle, R je $\mathcal{T}$-grupa.

Neka je δ polumrežna r-semiprime kongruencija na S. Dokažimo da je $\rho \subseteq \delta$. Zaista, ako je $a \rho b$, tada

$$r(a)Sr(a) = r(b)Sr(b),$$

a odavde imamo

$$r(a)^3 \in r(b)Sr(b) \wedge r(b)^3 \in r(a)Sr(a)$$

pa postoje elementi $x, y \in S$ da

$$r(a)^3 = r(b)xr(b) \wedge r(b)^3 = r(a)yr(a).$$

Dalje, imamo

$$\begin{aligned} r(a)\delta &= (r(a)\delta)^4 \\ &= (r(a)\delta)(r(a)^3\delta) \\ &= (r(a)\delta)(r(b)xr(b)\delta) \\ &= (r(a)\delta)(r(b)\delta)(x\delta)(r(b)\delta) \\ &= (r(a)\delta)(r(b)^2\delta)(x\delta)(r(b)\delta) \\ &= (r(a)\delta)(r(b)\delta)(r(b)xr(b)\delta) \\ &= (r(a)\delta)(r(b)\delta)(r(a)^3\delta) \\ &= (r(a)^4\delta)(r(b)\delta) \\ &= (r(a)\delta)(r(b)\delta) \end{aligned}$$

Analogno se dokazuje da je

$$r(b)\delta = (r(b)\delta)(r(a)\delta)$$

Kako je S/δ komutativna polugrupa to je

$$r(a)\delta = r(b)\delta$$

Odavde i pretpostavke da je δ r-semiprime kongruencija sledi

$$a\delta b.$$

Dakle, $\rho \subseteq \delta$. ▨

LEMA 3.6. Ako je S (m,n)-jednostrano čista polugrupa, tada su ispunjeni sledeći uslovi:

1° $r(a)S = Sr(a)S$,

2° $Sr(ab)S = Sr(a)r(b)S$.

Dokaz. 1° Neka je $a \in S$ proizvoljan element polugrupe S. Tada, na osnovu Leme III 1.12. i III 1.19., imamo

$$\begin{aligned} r(a)S &= r(a)^2S \\ &\subseteq r(a)S^2 \\ &= Sr(a)S, \end{aligned}$$

a sa druge strane

$$\begin{aligned} Sr(a)S &= r(a)S^2 \\ &\subseteq r(a)S \end{aligned}$$

i prema tome,

$$r(a)S = Sr(a)S.$$

2° Neka su $a,b \in S$ proizvoljni elementi polugrupe S. Tada je S $\mathcal{T}$-regularna i $G_r(S) = \mathrm{Reg}S$. (Posledica III.1.21.) pa je S GV-polugrupa i na osnovu Teoreme I 8. imamo

$$(\exists e,f \in E(S))(r(a) \in G_e \wedge r(b) \in G_f),$$

gde su G_e i G_f maksimalne podgrupe od S. Odavde i Leme 1.16. imamo

$$Sr(ab)S = Sr(ef)S.$$

Kako je $E(S) \subseteq C(S)$ to je $r(ef) = ef$ pa je

$$(1) \quad Sr(ab)S = SefS.$$

Dalje, $r(a) \in G_e$ pa je

$$r(a)a' = a'r(a) = e \wedge r(a)e = er(a) = r(a),$$

gde je $a' \in G_e$ i $a' \in V(r(a))$. Odavde imamo

$$(2) \quad Sr(a) = Se.$$

Analogno, dobijamo da je

$$(3) \quad r(b)S = fS.$$

Iz (2) i (3) sledi

$$(4) \quad Sr(a)r(b)S = SefS.$$

Koristeći jednakost (1) i (4) dobijamo

$$Sr(ab)S = Sr(a)r(b)S. \blacksquare$$

<u>TEOREMA 3.7.</u> Neka je S (m,n)-jednostrano čista polugrupa. Tada relacija γ definisana sa

$$a \gamma b \Longleftrightarrow Sr(a)S = Sr(b)S$$

na S je najmanja polumrežna r-semiprim kongruencija na S i svaka γ-klasa je $\mathcal{C}$-grupa.

<u>Dokaz</u>. Jasno je da je γ relacija ekvivalencije. Dokažimo da je γ kongruencija na S. Pretpostavimo da je $a \gamma b$. Tada

$$Sr(a)S = Sr(b)S.$$

Ako je $x \in S$ proizvoljan element, tada, na osnovu Leme 2.1., imamo

$$\begin{aligned} Sr(ax)S &= Sr(a)r(x)S \\ &= Sr(a)Sr(x) \\ &= Sr(b)Sr(x) \\ &= Sr(b)r(x)S \\ &= Sr(bx)S, \end{aligned}$$

a odavde

$$ax \, \gamma \, bx.$$

Analogno dokazujemo da

$$xa \, \gamma \, xb.$$

Dakle, γ je kongruencija na S. Označimo sa $a\gamma$ klasu ekvivalencije koja sadrži element a. Na osnovu Leme III 1.19. imamo

$$\begin{aligned} Sr(a)S &= Sr(a)^2S \\ &= Sr(a)r(a)S \\ &= Sr(a^2)S, \end{aligned}$$

a odavde sledi da je

$$(5) \qquad a \, \gamma \, a^2$$

pa

$$(a\gamma)^2 = (a\gamma)(a\gamma) = a^2\gamma = a\gamma.$$

Dakle, $a\gamma$ je idempotent i prema tome, S/γ je idempotentna polugrupa.

Neka su $a,b \in S$ proizvoljni elementi. Tada, na osnovu Teoreme III 1.20. i Leme III 1.19., imamo

$$\begin{aligned} (6) \qquad Sr(ab)S &= S(ab)^{k+1}S \\ &= Sa(ba)^k bS \\ &\subseteq S(ba)^kS \\ &= S(ba)^{k+1}S \\ &= Sr(ba)S. \end{aligned}$$

Analogno,

$$(7)\quad Sr(ba)S \subseteq Sr(ab)S.$$

Iz (6) i (7) sledi

$$Sr(ab)S = Sr(ba)S,$$

a odavde $ab \,\mathcal{J}\, ba$ i prema tome,

$$(a\mathcal{J})(b\mathcal{J}) = (ab)\mathcal{J} = (ba)\mathcal{J} = (b\mathcal{J})(a\mathcal{J}).$$

Dakle, $S/\mathcal{J}$ je komutativna idempotentna polugrupa pa je polumreža.

Neka je J proizvoljna $\mathcal{J}$-klasa i $a,b \in S$. Tada

$$Sr(a)S = Sr(b)S,$$

a odavde, jednakosti (5) i Leme 2.1. imamo

$$\begin{aligned} Sr(ab)S &= Sr(a)r(b)S \\ &= (Sr(a))(Sr(b)S) \\ &= (Sr(a))(Sr(a)S) \\ &= Sr(a)\,r(a)S \\ &= Sr(a^2)S, \end{aligned}$$

pa je: $ab \,\mathcal{J}\, a^2$ i prema tome je $ab \in J$. Dakle, J je polugrupa.

Neka je $a \in J$ proizvoljan element. Kako je J polugrupa to je $r(a) \in J$ pa je

$$r(a) = r(a)xr(a)$$

za neki $x \in S$, a odavde $r(a)x=e$ je idempotent iz S i $r(a)=er(a)$. Prema tome,

$$r(a)S = eS.$$

Odavde sledi

$$Sr(a)S = SeS$$

pa je $e \in J$. Dokažimo da J sadrži tačno jedan idempotent. Zaista, neka J sadrži još jedan idempotent f iz S. Tada je

$$SeS = SfS,$$

a na osnovu Leme 3.6., je $eS=fS$, a odavde

$$(8) \quad fe = e \wedge ef = f.$$

Kako je $ef = fe$ (Lema III 1.10) to odavde i jednakosti (8) sledi $e = f$. Dakle, $\mathcal{J}$-klasa J sadrži tačno jedan idempotent.

Neka je idempotent $e \in J$, G_e maksimalna podgrupa iz S i $a \in G_e$ proizvoljan element. Tada je $r(a) \in G_e$ pa je

$$(9) \quad r(a)a' = a'r(a) = e \wedge er(a) = r(a)e = r(a),$$

gde je $a' \in V(r(a))$ i $a' \in G_e$. Iz (9) sledi da je

$$r(a)S = eS,$$

a odavde

$$Sr(a)S = SeS,$$

pa je $a \mathcal{J} e$, tj. $a \in J$. Dakle,

$$G_e \subseteq J.$$

Ako je $a \in J$ proizvoljan element tada je $r(a) \in J$ pa

$$r(a) = r(a)\, xr(a)$$

za neki $x \in S$. Kako je $r(a)x = f$ idempotent to je

$$r(a) = fr(a) \wedge f = r(a)\, x,$$

a odavde $r(a)S = fS$. Prema tome,

$$Sr(a)S = SfS,$$

tj. $a \mathcal{J} f$ pa je $f \in J$. Kako J sadrži tačno jedan idempotent to je $e = f$. Analogno, ako je $xr(a) = g$ to je $f=e=g$ pa je

$$r(a)e = er(a) = r(a) \wedge r(a)a' = a'r(a) = e,$$

a odavde

$$r(a) \in G_e.$$

Dakle, J je π-grupa.

Kako je $r(r(a)) = r(a)$ to je $a \mathcal{J} r(a)$; tj. $\mathcal{J}$ je r-semiprime kongruencija.

Neka je ρ polumrežna r-semiprime kongruencija na S. Dokažimo da je $\mathfrak{z} \subseteq \rho$. Zaista, neka je $a \mathfrak{z} b$. Tada

$$sr(a)S = Sr(b)S,$$

a odavde sledi

$$r(a)^3 \in Sr(b)S \wedge r(b)^3 \in Sr(a)S$$

pa postoje elementi $x, y, u, v \in S$ takvi da

$$r(a)^3 = xr(b)y \wedge r(b)^3 = ur(a)v.$$

Tada imamo

$$\begin{aligned}
(10) \qquad r(a)\rho &= (r(a)\rho)^4 \\
&= (r(a)\rho)(r(a)^3\rho) \\
&= (r(a)\rho)((xr(b)y)\rho) \\
&= (r(a)\rho)(x\rho)(r(b)\rho)(y\rho) \\
&= (r(a)\rho)(x\rho)(r(b)^2\rho)(y\rho) \\
&= (r(a)\rho)(r(b)\rho)(x\rho)(r(b)\rho)(y\rho) \\
&= (r(a)\rho)(r(b)\rho)((xr(b)y)\rho) \\
&= (r(a)\rho)(r(b)\rho)(r(a)^3\rho) \\
&= (r(a)^4\rho)(r(b)\rho) \\
&= (r(a)\rho)(r(b)\rho).
\end{aligned}$$

Analogno, dokazujemo da je

$$(11) \qquad r(b) = (r(b)\rho)(r(a)\rho).$$

Kako je S/ρ komutativna polugrupa to iz (10) i (11) sledi

$$r(a) = r(b)S.$$

Odavde i pretpostavke da je ρ r-semiprime kongruencija imamo

$$a \rho b.$$

Dakle, $\mathfrak{z} \subseteq \rho$. ▨

4. GRUPNE KONGRUENCIJE NA (m,n)-JEDNOSTRANO ČISTOJ r-POLUGRUPI

U ovoj tački opisujemo grupne r-semiprime kongruencije na (m,n)-jednostrano čistoj r-polugrupi. Teorema 4.1. je uopštenje Teoreme 3.1. N. Kurokija [32].

DEFINICIJA 4.1. [49] Kongruencija ρ na S je g r u p n a ako je faktor polugrupa S/ρ grupa.

TEOREMA 4.2. Neka je S (m,n)-jednostrano čista r-polugrupa i neka je ρ relacija na S definisana sa

$$a\rho b \Leftrightarrow (\exists e \in E(S))(r(a)e\,\rho\, r(b)e).$$

Tada je ρ grupna r-semiprime kongruencija na S i $\delta = \rho/\mathrm{Reg}S$ je minimalna grupna kongruencija na Reg S.

Dokaz. Na osnovu Leme 1.8. polugrupa S sadrži idempotente. Jasno je da je ρ refleksivna i simetrična. Dokažimo da je ρ tranzitivna. Zaista, neka je

$$a\rho b \wedge a\rho c, \quad (a,b,c \in S).$$

Tada postoji $e,f \in E(S)$ da je

$$r(a)e = r(b)e \quad \wedge \; r(b)f = r(c)f.$$

Na osnovu Leme 1.10. imamo da je E(S) polugrupa pa je ef idempotent i prema tome,

$$r(a)(ef) = (r(a)e)f = (r(b)e)f$$
$$= r(b)(ef) = r(b)(fe)$$
$$= (r(b)f)e = (r(c)f)e$$
$$= r(c)(fe) = r(c)(ef).$$

Dakle, $a \rho c$ pa je ρ tranzitivna.

Neka su $a,bx \in S$ proizvoljni elementi polugrupe S i neka je $a \rho b$. Tada

$$r(a)e = r(b)e,$$

pa, na osnovu Leme III 1.10. i pretpostavke da je S r-polugrupa,

$$r(ax)\, e = r(a)r(x)e = r(a)(r(a)e)$$
$$= r(a)(ev(x)) = (r(a)e)r(x)$$
$$= (r(b)e)r(x) = r(b)(er(x))$$
$$= r(b)(r(x)e) = r(b)r(x)e$$
$$= r(bx)\, e,$$

a odavde

(1) $\qquad ax \rho bx.$

Analogno, dokazujemo da je

(2) $\qquad xa \rho xb.$

Iz (1) i (2) sledi ρ je kongruencija na S. Označimo sa $x\rho$ ρ-kongruencijsku klasu koja sadrži element x. Ako su $e,f \in E(S)$ proizvoljni elementi, tada, na osnovu Leme III 1.10., imamo

(3) $\quad e(fe) = (ef)e = (fe)e$
$$= f(ee) = fe$$
$$= f(fe).$$

Kako je fe idempotent to iz (3) dobijamo

$$(4) \quad (\forall\, e,f \in E(S))(e\rho f).$$

Neka su $e \in E(S)$ i $a \in S$ proizvoljni elementi. Tada

$$r(a)e = r(a)ee = r(ae)e,$$

a odavde $a\rho(ae)$ pa je

$$(5) \quad a\rho = (ae)\rho = (a\rho)(e\rho).$$

Dalje, na osnovu Leme III 1.8., $r(a) = a^{k+1}$, gde je $k=\min(m,n)$ pa

$$(\exists\, x \in S)(a^{k+1} = a^{k+1}xa^{k+1}).$$

Kako je xa^{k+1} idempotent to koristeći jednakost (4) imamo

$$(6) \quad \begin{aligned}(xa^{k})\rho\,(a\rho) &= (xa^{k}a)\rho \\ &= (xa^{k+1})\rho \\ &= e\rho .\end{aligned}$$

Iz (5) i (6) sledi faktor polugrupa S/ρ je grupa i prema tome, ρ je grupna kongruencija na S.

Dalje, imamo da je $r(a)=r(r(a))$ pa $a\rho r(a)$, tj. ρ je r-semiprime kongruencija.

Neka je $\delta = \rho/\mathrm{Reg}\, S$. Tada za proizvoljne $a,b \in \mathrm{Reg}S$ je

$$a\,\delta\, b \Leftrightarrow (\exists\, e \in E(S))(ae = be).$$

Kako je $E(S) \subseteq \mathrm{Reg}S$ to iz (5) i (6) sledi δ je grupa kongruencija. Neka je γ proizvoljna grupna kongruencija na RegS. Dokažimo da je $\delta \subseteq \gamma$. Zaista, ako je

$$a\,\delta\, b, \quad (a,b \in \mathrm{Reg}S),$$

tada

$$ae = be$$

pa je

$$(7) \quad (a\gamma)(e\gamma) = (ae)\gamma = (be)\gamma = (b\gamma)(e\gamma).$$

Kako je $e\gamma$ idempotent grupe Reg S/γ to je njena jedinica pa iz (7) sledi

$$a\gamma = b\gamma,$$

a odavde $a\gamma b$. Dakle, $\delta \subseteq \gamma$, pa je δ najmanja grupna kongruencija na Reg S. ▨

<u>POSLEDICA 4.2.</u> Ako je S (m,n)-jednostrano čista polugrupa i ρ relacija na S definisana sa

$$a\rho b \Longleftrightarrow (\exists e \in E(S))(ae = be),$$

tada je ρ minimalna grupna kongruencija na S.

<u>Dokaz.</u> Sledi iz Teoreme 4.1. ▨

<u>POSLEDICA 4.3.</u> (Teorema 3.1. [31]) Neka je S T^*-čista polugrupa i δ relacija na S definisana sa

$$a\delta b \Longleftrightarrow (\exists e \in E(S))(ae = be).$$

Tada je δ minimalna grupna kongruencija na S.

LITERATURA

[1] B. Alimpić, Some congruences on generalized inverse semigroup, Proc. of the Conf. Zagreb 1984, 1-7.

[2] S. Bogdanović, Semigroups with a sistem of subsemigroups, University of Novi Sad Inst.of Math., 1985.

[3] S. Bogdanović, Q_r-semigroups, Publ. Inst. Math. 29(43(1981), 15-21.

[4] S. Bogdanović, Semigroups whose proper left ideals are commutative, Matematički Vesnik 37(1985), 159-162.

[5] S. Bogdanović, Semigroups in which everi proper left ideal is a left groups, K. Marx. Univ. Economics, Dept. Math Budapest, No. 4 (1982), 8-13.

[6] S. Bogdanović, Semigroups whose proper ideals are arhimedean semigroups, Zbornik radova PMF Novi Sad, 13(1983), 389-296.

[7] S. Bogdanović, Sur les Demi-groups dons lesquels Tous Les Sous-demigroupes Proper Sont idempotents, Math.Sem. Not Kobe Univ. 9(1981), 17-24.

[8] S. Bogdanović, Sur Les Demi-groupes dans Lesquels Tous Les Sous-demigroupes Proper Sont idempotents Matematički Vesnik 5(18)(33), 1981, 239-243

[9] S. Bogdanović, Power regular semigroups, Zbornik radova PMF Novi Sad, 12(1982), 418-428.

[10] S. Bogdanović, Semigroups of Galtiati-Veronesi, Proc. of the Cont. Zagreb 1984, 9-20.

[11] S. Bogdanović, O slabo komutativnoj semigrupi. Mat.Vesnik 5(18) (33) (1981), 145-148.

[12] S. Bogdanović, Prilog teoriji regularnih polugrupa (doktorska disertacija), Novi Sad, 1980.

[13] A.Cherubini Spolentini, A. Vorisko, On Putcha's Q-semigroups, Sem. Forum 18(1979), 313-317.

[14] A. Cherubini Spolentini, Aarisko, Sui semigruppi i sui sottosemigruppi propri sono t-arhimedei, Instituto Lombardo (Rend. Se.) A 112(1978), 91-98.

[15] A. Cherubini Spotentini, A. Varisko, Semigroups whose proper subsemigroups are quasicommutative, Semigroup Forum 23,1-1981, 35-48.

[16] A. Cherubini Spolentini, A. Varisko, Semigroups and rings whose proper one-sided ideals are power joined Czech. Math. J., 34 (1o9), 1984, 121-125.

[17] A.H. Clifford, A sistem arising from a wearend set of group postulates, Ann. of Math. 34(1933), 865-871.

[18] A.H.Clifford, G.B. Preston, The algebraic theory of semigroups (in Russian) "MIR" Moskow, 1972.

[19] R.Croizet, Demi-groupes inversifs et demi-réunions de demi-groupes simples, Ann. Sei. Ecde Norm. Sup., (3), 70 (1953). 361-379.

[20] G. Čupona, On semigroups S in which each proper subset Sx is a group, Glasnik Mat. Fiz. Astr. Zagreb, 18(1963), 159- 168.

[21] G. Čupona, Semigroups in which some left ideal is a group, God. Zbornik PMF Skopje, T 14(1963), 15-17.

[22] P. Dubreil, Contribution á la theorie des demi-groupes, Mem.Acad. Sci. Inst. France (2) 63 No 3(1941),1-52.

[23] E.M. Edwards, Eventually regular semigroups, Bull. Austral. Math. Soc. 28 (1983) 23-38.

[24] R. Feigenbaum, Kernels of regular semigroup homomorphisms, Doktoral dissertation, Univerzity of South Carolina,1975.

[25] A.R. Good, D.R. Hughes, Associated groups for a semigroup, Bull. Amer. Math. Soc. 58(1952)624-625.

[26] J. A. Green, On the structure of semigroups, Ann. of Math., 54(1951), 163-172.

[27] J. M. Howie, An introduction to semigroup theory, Acad. Press, Hew York, 1976.

[28] N. Kimura, T.Tamura, R. Merkel, Semigroups in which all subsemigroups are left ideals Carad. J. Math. XVII (1985), 52-62.

[29] D. Krgović, Inverse congruences on orthodox semigroups, Proc. of the Conf. Zagreb 1984, 75-82.

[30] N. Kuroki, B-Pure semigroups, ~~t~~ Acta Math. Hung., 43(3-4) (1984), 295-298.

[31] N. Kuroki, T-Pure Arhimedean Semigroups, Comment. Math. Univ. St. Pauli, 31(1982), 115-128.

[32] N. Kuroki, T-Pure twin semigroups, Comment. Math. Univ. St. Pauli XXV-2, 1976.

[33] S. Lajos, A note on semilattices of groups, Acta. Sci. Math. Szeged, 33(1972), 315-317.

[34] S. Lajos, Generalized ideals in semigroups, Acta Sci. Math. 22(1961), 217-222.

[35] А. Е. Либер, К теории обобщенных групп, ДАН СССР, 97(1954), 25-28.

[36] T. Malihović, Polugrupe u kojima je svaki pravi desni ideal regularan, Mat. Vesnik, 36(1984), 21-34.

[37] T. Malinović, Partially simple semigroups, Mat. Vesnik 37(1985), 196-204.

[38] T. Malinović, Semigroups whose subsemigroups are partially simple, Proc. of the Conf., Zagreb 1984, 95-103.

[39] T. Malinović, O nekim strukturnim svojstvima regularnih polugrupa (Magistarski rad), Novi Sad 1983.

[40] J. Meakin, Congruences on orthodox semigroups, J. Austr.M Math Soc. XII(1971), 323-341.

[41] B. Medison, T. Mukheojee and M.Sen, Periodic properties, of groupbonnd semigroups, Semigroup Forum 22(1981),225-234.

[42] S. Milić, S. Crvenković, Proper subsemigroups of a semigroup Algebraic conference, Novi Sad 1981, 149-152.

[43] S. Milić, V. Pavlović, Semigroups in which some ideal is a completely simple semigroup, Publ. Inst. Math 30(44), 1982, 123-130.

[44] W. D. Munn. Pseudo-inverses in semigroups, Proc. Comb. Phil. Soc. 57(1961), 247-250.

[45] W. D. Munn, R. Penrose, A note on inverse semigroups, Proc. comb. Phil. Soc., 51(1955), 396-399.

[46] J. W. Neumann, On regular rings, Poc. Not. Acad. Sci., USA, 22(1936), 707-713.

[67] B. Pandéliček, Semigroups whose proper one-sided ideals are t-arhimedean, Mat. Vesnik 3(37), 1985, 315-322.

[48] B. Pandéliček, On weakly commutative semigroups, Szech. Math. J., 25(100), 1975, 20-23.

[49] M. Petrich, Introduction to semigroups, Merill, Columbus, Ohio 1973.

[50] M. Petrich, Semigroups certain of whose subsemigroups have identites, Szech. Math. J., 16(1966), 186-198.

[51] M. Petrich, Lectures in semigroups, Arad. Verlog, Berlin 1977.

[52] M. Petrich, Congruences on inverse semigroups, J. of algebra, 55(1978), 231-256.

[53] G. Pollak, L. Redei, Die Halbgruppen, deren echten Teilhalbgruppen Gruppen sind, Publ. Math., 1959, 6(2),126-130.

[54] G. B. Preston, Inverse semigroups, J. Lond. Math. Soc. 29(1954), 396-403.

[55] P. Protić. S. Bogdanović, Come congruences on a strongly -inverse r-semigroup, Zbornik radova PMF Novi Sad (u štampi).

[56] M. S. Putcha, Semilattice decompositions of semigroups, semigroups Forum, 6(1973), 12-34.

[57] Š. Schwarz, O maksimaljnyh idealäh v teorii polugrupp, I,II, Czech. Math. J. 3(1953), 139-153, 3(1953), 365-385.

[58] Š. Schwarz, Semigroups in which every proper subideal is a group, Acta Sci. Math. 21(1960), 125-131.

[59] Š. Schwarz, A theorem on normal semigroups, Czech.Math. J., 10(85), 1960, 197-200.

[60] Š. Schwarz, Zur Theorie der Halbgruppen, Sbor. prac. Prirod. Fak. Slov. Univ., 6(1943).

[61] Л. Н. Шеврин, О полугруппах все подполугруппы которих нилпотепотентны, Сиб. Мат. журн., 1961 Т. 2 Но С, 936- 942.

[62] T. Tamura, Characterization of groupoids and semilattices by ideals in a semigroup, J. Sci. Gak. Fac. Tokuchima Univ., 1(1950), 37-44.

[63] G. Thierrin, Sur une conditions necessaire et suffisante pour qú un semigroupe soit un groupe, C.R. Acad. Sci., Paris, 232(1951), 376-378.

[64] G. Thierrin, Sur les elements unitaires d´un demi-groupe inversif, C.R. Acad. Sci., Paris, 234(1952),33-34.

[65] А. Н. Трахтман, полугруппы все собственные подполугруппы которнх являтся полугруппами с сокращенеп, исследования по алгебраческим системам, Свердловск 1984, 152-155.

[66] B. Trpenovski, N. Celakovski, Semigroups in which every n-subsemigroup is a subsemigroup, Mac. Acas. of Sciences and Arts. Skopje Contr., VI-2(1974), 35-41.

[67] В. В. Вагнер, обобщеные группы, ДАН СССР, 84 (1952).

[68] M. Yamada, Regular semigroups whose idempotents satisfy permutation identities, Pac. J. Math. 21(1976), 371-392.

REGISTAR SIMBOLA

$\langle A \rangle$	polugrupa generirana skupom A
$\langle a \rangle$	polugrupa generirana elementom a
$C(S)$	centar polugrupe S
$E(S)$	skup svih idempotenata polugrupe S
G_e	maksimalna podgrupa sa jedinicom e
$G_r(S)$	skup svih kompletno regularnih elemenata polugrupe S
$I(S)$	unija svih pravih dvostranih ideala polugrupe S
$I(a)$	skup svih elemenata ideala J(a) koji ne generiraju J(a).
$J(a)$	glavni dvostran ideal generiran sa a
J_a	skup svih generatornih elemenata ideala J(a)
$J(a)/I(a)$	glavni faktor polugrupe S
$\ker\rho$	kernel kongruencije ρ
$L(a)$	glavni levi ideal generiran elementom a
$L(S)$	unija svih pravih levih ideala polugrupe S
$R(a)$	glavni desni ideal generiran elementom a
$R(S)$	unija svih pravih desnih ideala polugrupe S
RegS	skup svih regularnih elemenata polugrupe S
$\|S\|$	red polugrupe S
S^1	polugrupa dobijena dodavanjem jedinice 1 polugrupi S
S^o	polugrupa dobijena dodavanjem nule 0 polugrupi S
S/ρ	faktor polugrupa odredjena relacijom ρ na S
$\rho/E(S)$	restrikcija relacije ρ na skup idempotenata E(S)
$V(a)$	Skup svih inverznih elemenata za a
Z^+	skup svih pozitivnih celih brojeva

INDEX POJMOVA

H

I

K

L

M

U