L^1-KONVERGENCIJA FOURIER-OVIH REDOVA SA KOMPLEKSNO KVAZI-MONOTONIM KOEFICIJENTIMA

I

KONVERGENCIJA U L^p METRICI ($0<p<1$)

VERA STANOJEVIC

D I S E R T A C I J A

1983

ОСНОВНА ОРГАНИЗАЦИЈА УДРУЖЕНОГ РАДА
ЗА МАТЕМАТИКУ, МЕХАНИКУ И АСТРОНОМИЈУ
БИБЛИОТЕКА
Број: Dokt. 181/1
Датум: 17.03.1986.

Strana

ОСНОВНА ОРГАНИЗАЦИЈА УДРУЖЕНОГ РАДА
ЗА МАТЕМАТИКУ, МЕХАНИКУ И АСТРОНОМИЈУ
БИБЛИОТЕКА
Број: ______
Датум: ______

SADRŽAJ

Dirichlet-ovo jezgro će biti označeno sa

$$D_n(t) = \sum_{|k|\leq n} e^{ikt} = \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{\sin\frac{t}{2}}, \tag{1.5}$$

a Fejér-ovo jezgro sa

$$F_n(t) = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} D_k(t) = \frac{1}{(n+1)}\left[\frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}\right)t}{\sin\frac{t}{2}}\right]^2. \tag{1.6}$$

Za kasniju upotrebu napomenućemo da

$$\|D_n\| = \frac{4}{\pi^2}\lg n + O(1), \qquad n\to\infty, \tag{1.7}$$

$$\|F_n\| = 1, \qquad \text{za svako } n, \tag{1.8}$$

gde smo $L^1(T)$-normu označili sa $\|\cdot\|$. Delimične zbirove u slučaju realnog kosinusnog reda označićemo sa

$$S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k\cos kx,$$

a u slučaju realnog sinusnog reda, delimični zbirovi će biti označeni sa

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} b_k \sin kx,$$

1. PREGLED KLASIČNIH I SAVREMENIH REZULTATA

1.1. UVOD

Označimo sa $L^1(T)$ Banahov prostor svih kompleksnih, Lebesgue integrabilnih funkcija na kružnoj grupi $T = R/2\pi Z$. Svakoj funkciji $f \in L^1(T)$ odgovara Fourier-ov red od f

$$S[f] \sim \sum_{|n|<\infty} \hat{f}(n) e^{int}, \tag{1.1}$$

gde su

$$\hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_T f(t) e^{-int} dt, \quad |n| < \infty, \tag{1.2}$$

Fourier-ovi koeficijenti funkcije f.

Odmah u početku uvešćemo oznake koje ćemo koristiti u ovom radu. Niz delimičnih zbirova označićemo sa

$$S_n(f) = S_n(f,t) = \sum_{|k|\le n} \hat{f}(k) e^{ikt}, \quad n = 0,1,2,\dots, \tag{1.3}$$

a (C, 1)-sredine (Fejér-ovi zbirovi) niza delimičnih zbirova označićemo sa

$$\sigma_n(f) = \sigma_n(f,t) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} S_k(f,t), \quad n = 0,1,2,\dots. \tag{1.4}$$

Pre nego što počnemo sa pregledom klasičnih rezultata, potrebno je napomenuti da su kosinusni redovi

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx ,$$

i sinusni redovi

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kx ,$$

u njima obično tretirani odvojeno. Stoga su klase funkcija od interesa u ovim rezultatima, sve periodične, realne, Lebesgue integrabilne funkcije na intervalu $(0,\pi]$.

U prvoj glavi, u kojoj će biti izložen pregled klasičnih i savremenih rezultata, prirodno je razlikovati dve vrste stavova u zavisnosti od dve vrste uslova. Prva vrsta stavova daje uslove za L^1-konvergenciju koji su dovoljno jaki da učine da je trigonometrijski red Fourier-ov red. Druga vrsta stavova za L^1-konvergenciju daje uslove koji nisu dovoljno jaki da garantuju Fourier-ov karakter pa se stoga Fourier-ov karakter pretpostavlja.

gde je $x \in (0,\pi]$ u oba slučaja. Prostor funkcija u realnom slučaju biće označen sa $L^1(0,\pi)$, a norma sa $\|\cdot\|$.

Problem L^1-konvergencije se sastoji u tome da se pronadju osobine Fourier-ovih koeficijenata tako da potreban i dovoljan uslov za

$$\|S_n(f)-f\|=o(1), \qquad n\to\infty,$$

bude dat u obliku

$$\hat{f}(n)\lg|n|=o(1), \qquad |n|\to\infty.$$

Poznato je da, što se tiče (C, 1)-sredina, za svako $f\in L^1(T)$ važi

$$\|\sigma_n(f)-f\|=o(1), \qquad n\to\infty.$$

Prostor $L^1(T)$ u opštem slučaju ne dopušta konvergenciju u $L^1(T)$-normi, prema jednom stavu Katznelson-a [1], zato što je operatorska norma niza operatora delimičnih zbirova neograničena, t.j.

$$\|S_n\|^{L^1(T)}=\|D_n\|=\frac{4}{\pi^2}\lg n+O(1), \; n\to\infty.$$

$$\|S_n(f)-f\|=o(1),\quad n\to\infty,$$

ekvivalentno sa

$$a_n \lg n=o(1),\quad n\to\infty.$$

Nula nizovi koji ispunjavaju Kolmogorovljev uslov $\sum_{n=1}^{\infty} n|\Delta^2 a_n|<\infty$ se nazivaju kvazi konveksnim . Klasa svih takvih kvazi-konveksnih nizova je proširenje klase svih konveksnih nula nizova. Takodje treba napomenuti da je klasa kvazi-konveksnih nizova podklasa od $\mathcal{BV}$ klase, klase svih nula nizova ograničene varijacije.

Stav 1.2.3. (Sidon [4]) Neka su $\{\alpha_n\}_1^{\infty}$ i $\{p_n\}_1^{\infty}$ nizovi takvi da je $|\alpha_n|\leq 1$, za svako n, i

$$\sum_{n=1}^{\infty}|p_n|$$

konvergira.

Ako je

$$a_n=\sum_{k=n}^{\infty}\frac{p_k}{k}\sum_{l=n}^{k}\alpha_l,\quad n=1,2,\dots,$$

tada je kosinusni red

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx$$

Fourier-ov red neke funkcije $f\in L^1(0,\pi)$.

Iz Sidon-ovih uslova sledi da je niz $\{a_n\}_1^{\infty}\in\mathcal{BV}$.

1.2. DOVOLJNI USLOVI ZA FOURIER-OV KARAKTER TRIGONOMETRIJSKIH REDOVA KOJI ISTOVREMENO DEFINIŠU KLASE L^1-KONVERGENCIJE

Posmatraćemo samo slučaj kosinusnih trigonometrijskih redova jer se odgovarajući rezultati za sinusne redove mogu dobiti na sličan način.

Stav 1.2.1. (Young [2]) Ako je nula-niz $\{a_n\}_0^\infty$ konveksan ($\Delta^2 a_n \geqslant 0$, za svako n), tada je kosinusni red

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{K=1}^{\infty} a_n \cos nx$$

Fourier-ov red neke funkcije $f\in L^1(0,\pi)$ i tada je

$$\|S_n(f)-f\|=o(1),\quad n\to\infty,$$

ekvivalentno sa

$$a_n \lg n=o(1),\quad n\to\infty.$$

Stav 1.2.2. (Kolmogorov [3]) Ako je $a_n=o(1), n\to\infty$, i red

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\,|\Delta^2 a_n|$$

konvergira, tada je kosinusni red

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{K=1}^{\infty} a_n \cos nx$$

Fourier-ov red neke funkcije $f\in L^1(0,\pi)$ i tada je

Stav 1.2.5. (Fomin [6]) Neka je $a_n = O(1)$, $n \to \infty$. Ako za neko $1 < p \leq 2$, red

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{\sum_{k=n}^{\infty} |\Delta a_k|^p}{n} \right]^{\frac{1}{p}}$$

konvergira, tada je kosinusni red

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$$

Fourier-ov red neke funkcije $f \in L^1(0,\pi)$, i tada je

$$\|S_n(f) - f\| = o(1), \quad n \to \infty,$$

ekvivalentno sa

$$a_n \lg n = o(1), \quad n \to \infty.$$

Stav Fomin-a je efektivno uopštenje stava Telyakovskog.

Ovaj odeljak zaključićemo izlaganjem rezultata koje su Garrett-Stanojević [7], [8], razvili 70-ih godina. Razlog za to leži u činjenici što metode i pojmovi vezani za te rezultate dovode do značajnih uopštenja, naročito u slučaju kompleksnih trigonometrijskih redova, što je i predmet ove teze.

Klasa $\mathcal{S}$ je definisana preformulisanim Sidonovim uslovom: nula-niz $\{a_n\}_0^\infty$ pripada klasi $\mathcal{S}$ ako postoji monotono opadajući niz $\{A_n\}_0^\infty$ tako da

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n$$

konvergira, i da je $|\Delta a_n| \leq A_n$, za svako n. Klasa $\mathcal{S}$ je takodje i proširenje klase kvazi-konveksnih nizova.

<u>Stav 1.2.4</u>. (Telyakovskii [5]) Neka je $\{a_n\}_0^\infty \in \mathcal{S}$. Tada je kosinusni red

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$$

Fourier-ov red neke funkcije $f \in L^1(0,\pi)$ i tada je

$$\| S_n(f) - f \| = o(1), \quad n \to \infty,$$

ekvivalentno sa

$$a_n \lg n = o(1), \quad n \to \infty.$$

Zasluga Telyakovskog je dvostruka. Prvo, zato što je Sidonove uslove iskazao na znatno jednostavniji način, a drugo što je pokazao da je klasa $\mathcal{S}$ takodje jedna klasa L^1-konvergencije, što je inspirisalo čitav niz potonjih rezultata opštije prirode.

Za zbirove ovog oblika Garrett-Stanojević [8] su dokazali da je

$$\|g_n - f\| = o(1), \quad n \to \infty ,$$

ekvivalentno sa

$$\{a_n\}_0^\infty \in \mathcal{C} \cap \mathcal{BV} .$$

Dakle, u okviru klase $\mathcal{BV}$, $\mathcal{C}$ je dovoljan uslov da kosinusni red bude integrabilan.

Stav 1.2.6. sadrži sve predhodne stavove kao posebne slučajeve.

1.3. KLASE L^1-KONVERGENCIJE FOURIER-OVIH REDOVA ZA SLUČAJ KVAZI-MONOTONIH KOEFICIJENATA

Fourier-ov karakter trigonometrijskih redova će ovde biti pretpostavljen jer ćemo posmatrati vrlo slabe uslove za L^1-konvergenciju koji sami po sebi ne garantuju integrabilnost trigonometrijskih redova, t.j. ne garantuju Fourier-ov karakter posmatranih trigonometrijskih redova.

Stav 1.3.1. (Fomin,Telyakovskii [9]) Neka je $\{a_n\}_0^\infty$ kvazi-monoton niz. Ako je kosinusni red

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$$

Stav 1.2.6. (Garrett, Stanojević [7]) Neka je $\{a_n\}_0^\infty \in \mathcal{BV}$ i neka za svako $\varepsilon > 0$ postoji $\delta(\varepsilon) > 0$, nezavisno od n, tako da

$$\int_0^\delta \left| \sum_{k=n}^{\infty} \Delta a_k D_k(x) \right| dx < \varepsilon, \qquad \text{za svako } n.$$

Tada je kosinusni red

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$$

Fourier-ov red neke funkcije $f \in L^1(0,\pi)$ i tada je

$$\| S_n(f) - f \| = o(1), \quad n \to \infty,$$

ekvivalentno sa

$$a_n \lg n = o(1), \quad n \to \infty.$$

Klasu nizova koji zadovoljavaju uslov da za svako $\varepsilon > 0$, postoji $\delta(\varepsilon) > 0$, nezavisno od n, tako da

$$\int_0^\delta \left| \sum_{k=n}^{\infty} \Delta a_k D_k(x) \right| dx < \varepsilon, \qquad \text{za svako } n,$$

označićemo sa $\mathcal{C}$. Dokaz Stava 1.2.6. zasniva se na upotrebi modifikovanih kosinusnih zbirova definisanih sa

$$g_n(x) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n} \Delta a_k + \sum_{k=1}^{n} \left[\left(\sum_{\ell=k}^{n} \Delta a_\ell \right) \cos kx \right]$$

$$= S_n(x) - a_{n+1} D_n(x)$$

kosinusni Fourier-ov red sa kvazi-monotonim koeficijentima koji zadovoljavaju

$$n\,\Delta a_n = O(1), \qquad n\to\infty, \tag{1.3.3}$$

dao jedan kratak novi dokaz dovoljnosti kao i potrebnosti. Kao posledicu mog osnovnog stava u glavi 3, ja ću pokazati da taj rezultat Č.V.Stanojevića može da se proširi slabljenjem (1.3.3) i proširenjem za slučaj kompleksnih koeficijenata.

ОСНОВНА ОРГАНИЗАЦИЈА УДРУЖЕНОГ РАДА
ЗА МАТЕМАТИКУ, МЕХАНИКУ И АСТРОНОМИЈУ
БИБЛИОТЕКА
Број:
Датум:

Fourier-ov red neke funkcije $f \in L^1(0,\pi)$ tada je

$$\|S_n(f)-f\|=o(1), \quad n\to\infty,$$

ekvivalentno sa

$$a_n \lg n = o(1), \quad n\to\infty.$$

Niz $\{a_n\}_0^\infty$ je kvazi-monoton ako za neko $\alpha \geq 0$, $\frac{a_n}{n^\alpha}\downarrow$, $n\to\infty$.

Dokaz dovoljnosti u Telyakovskii-Fomin-ovom stavu su pojednostavili Garrett-Rees-Stanojević [10], i dokaz se zasniva na oceni $\|S_n-\sigma_n\|$.

Stav 1.3.2. (Garrett,Rees,Stanojević [10]) Neka je

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx),$$

Fourier-ov red sa kvazi-monotonim koeficijentima. Tada je

$$\|S_n-\sigma_n\|=o(1), \quad n\to\infty, \tag{1.3.1}$$

ekvivalentno sa

$$(a_n+b_n)\lg n=o(1), \quad n\to\infty. \tag{1.3.2}$$

Garrett,Rees i Stanojević [10] su dali novi dokaz dovoljnosti t.j. da iz (1.3.2) sledi (1.3.1). Medjutim njihov dokaz potrebnosti je isti kao kod Fomin-Telyakovskog. U [11] je Č.V.Stanojević za neki broj u intervalu $(1,2]$ a q će biti broj dat sa $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, dakle $q\geqslant 2$.

Podklasu K klase $L^1(T)$ zvaćemo klasom L^1-konvergencije ako iz $f\in K$ sledi da je

$$\|S_n(f)-f\|=o(1),\quad n\to\infty,$$

ekvivalentno sa

$$\hat{f}(n)\lg|n|=o(1),\quad |n|\to\infty.$$

Neka je $\{\ell(n)\}$ parni niz pozitivnih brojeva t.j. neka za svaki ceo broj n bude $\ell(n)=\ell(-n)$. Klasu parnih nizova $\{\ell(n)\}$ pozitivnih brojeva koji zadovoljavaju sledeće uslove

$$\ell(n)\to\infty,\quad \ell(n)=o(n),\quad n\to\infty,$$

(2.1.1) $$\left\|\sigma_{n+\left[\frac{n}{\ell(n)}\right]}(f)-\sigma_n(f)\right\|\ell(n)=o(1),\quad n\to\infty,$$

označićemo sa $G(f)$, gde je $f\in L^1(T)$. Uloga klase $G(f)$ koja je neprazna za svako $f\in L^1(T)$ sastoji se u tome što se pomoću nizova iz klase $G(f)$ kontroliše brzina kojom $\sigma_n(f)$ konvergira u $L^1(T)$-normi ka f. To dovodi do poboljšanja Tauberovog uslova kojim je definisana klasa L^1-konvergencije. Primetimo takodje da je $G(f)$ podklasa klase nizova $\{\ell(n)\}$ gde je uslov (2.1.1) zamenjen uslovom

$$\|\sigma_n(f)-f\|\,\ell(n)^{\frac{1}{2}}=o(1),\quad n\to\infty.$$

2. NOVE METODE I REZULTATI U TEORIJI L^1-KONVERGENCIJE FOURIER-OVIH REDOVA

2.1. UVOD

U ovoj glavi biće izloženi najnoviji rezultati, tehnike i metode iz teorije L^1-konvergencije Fourier-ovih redova. Pošto je cilj moje disertacije pooštrenje prethodnih rezultata i uopštenje mojih rezultata [12], ja ću se služiti rezultatima ove glave kao pomoćnim stavovima.

U dokazu Osnovnog pomoćnog stava biće nam potrebne sledeće oznake.

Za $t \in T - \{0\}$ neka je

$$A_m(t) = \operatorname{sgn}(m) \frac{e^{i \operatorname{sgn}(m)(|m| + \frac{1}{2})t}}{2i \sin\frac{t}{2}}, \quad m \in Z.$$

Sa T_n označimo skup tačaka $(-\pi, -\frac{\pi}{n}) \cup (\frac{\pi}{n}, \pi)$.

Neka je $\{c(n)\}_{|n|<\infty}$ niz kompleksnih brojeva i označimo integral

$$\int_{T_n} |c(n) A_n(t) + c(-n) A_{-n}(t)| \, dt$$

sa I_n.

U svim razmatranjima u ovoj glavi p će biti

Dokaz. Pretpostavimo da je $I_n = O(1)$, $n \to \infty$. Dokazaću prvo da je tada

$$|c(n)+c(-n)| \lg n = o(1), \quad n \to \infty.$$

Primetimo da je $A_n(-t) = A_{-n}(t)$.

Iz

$$I_n = \int_{\frac{\pi}{n}}^{\pi} |c(n)A_n(t) + c(-n)A_{-n}(t)|\,dt$$
$$+ \int_{-\pi}^{-\frac{\pi}{n}} |c(n)A_n(t) + c(-n)A_{-n}(t)|\,dt,$$

zamenjujući t sa $-t$ u drugom integralu gornjeg izraza, dobivamo

$$I_n = \int_{\frac{\pi}{n}}^{\pi} |c(n)A_n(t) + c(-n)A_{-n}(t)|\,dt$$
$$+ \int_{\frac{\pi}{n}}^{\pi} |c(n)A_{-n}(t) + c(-n)A_n(t)|\,dt .$$

Stoga

$$I_n = \int_{\frac{\pi}{n}}^{\pi} \Big(|c(n)A_n(t) + c(-n)A_{-n}(t)|$$
$$+ |c(n)A_{-n}(t) + c(-n)A_n(t)| \Big)\,dt$$

Iz poslednjeg uslova vidi se način na koji nizovi $\{\ell(n)\}$ kontrolišu brzinu konvergencije $\sigma_n(f)$ ka f u $L^1(T)$-normi.

2.2. POMOĆNI STAVOVI

U sledećoj glavi služićemo se ovim osnovnim pomoćnim stavom:

Osnovni pomoćni stav. Neka je $f \in L^1(T)$. Ako za neko $1 < p \leqslant 2$

(2.2.1) $$\lim_{\lambda \to 1+0} \overline{\lim_{n \to \infty}} \sum_{|k|=n}^{[\lambda n]} |k|^{p-1} |\Delta \hat{f}^*(k)|^p = 0,$$

tada je
$$\| S_n(f) - f \| = o(1), \quad n \to \infty,$$

ekvivalentno sa
$$\hat{f}(n) \lg |n| = o(1), \quad |n| \to \infty.$$

Za dokaz ovog Osnovnog pomoćnog stava, biće nam potrebni sledeći pomoćni stavovi.

Pomoćni stav 2.2.1. Neka je $\{c(n)\}_{|n|<\infty}$ niz kompleksnih brojeva.

Tada je
$$I_n = o(1), \quad n \to \infty,$$

ekvivalentno sa
$$c(n) \lg |n| = o(1), \quad |n| \to \infty.$$

to sledi da je

$$I_n \geq |c(n)+c(-n)|\, B_1 \lg n.$$

Znači da iz $I_n = O(1),\ n\to\infty$, sledi

$$|c(n)+c(-n)| \lg n = o(1),\ n\to\infty.$$

Iz identiteta

$$I_n = \int_{T_n} \left| (c(n)+c(-n))A_n(t) - c(-n)(A_n(t)-A_{-n}(t)) \right| dt$$

dobivamo

$$\text{(2.2.2)} \qquad I_n \geq \Bigg|\, |c(n)+c(-n)| \int_{T_n} |A_n(t)|\, dt - |c(-n)| \int_{T_n} \left| \frac{\cos(n+\frac{1}{2})t}{\sin\frac{t}{2}} \right| dt \Bigg|,$$

jer je $\left|A_n(t) - A_{-n}(t)\right| = \left| \dfrac{\cos(n+\frac{1}{2})t}{\sin\frac{t}{2}} \right|$.

Kako uvek postoje apsolutne konstante B_3, B_4, B_5, B_6, (ne nužno različite), takve da je

$$B_3 \lg n \leq \int_{T_n} \left| \frac{\cos(n+\frac{1}{2})t}{\sin\frac{t}{2}} \right| dt \leq B_4 \lg n$$

$$\geqslant \int_{\frac{\pi}{n}}^{\pi} \Big| c(n)A_n(t) + c(-n)A_{-n}(t)$$

$$+ c(n)A_{-n}(t) + c(-n)A_n(t) \Big| \, dt$$

$$= \int_{\frac{\pi}{n}}^{\pi} \Big| A_n(t)\big(c(n)+c(-n)\big) + A_{-n}(t)\big(c(n)+c(-n)\big) \Big| \, dt$$

$$= \int_{\frac{\pi}{n}}^{\pi} \Big| \big(c(n)+c(-n)\big)\big(A_n(t)+A_{-n}(t)\big) \Big| \, dt$$

$$= |c(n)+c(-n)| \int_{\frac{\pi}{n}}^{\pi} |A_n(t)+A_{-n}(t)| \, dt$$

$$= |c(n)+c(-n)| \int_{\frac{\pi}{n}}^{\pi} |D_n(t)| \, dt \; .$$

Kako uvek postoje apsolutne konstante B_1 i B_2 tako da je

$$B_1 \lg n \leqslant \int_{\frac{\pi}{n}}^{\pi} |D_n(t)| \, dt \leqslant B_2 \lg n,$$

Pomoćni stav 2.2.2. Neka je $\{c(n)\}_{|n|<\infty}$ niz kompleksnih brojeva.

Tada je za bilo koje $1<p\leqslant 2$ i $m>n$,

$$\int_{T_n}\left|\sum_{|k|=n}^{m} c(k)A_k(t)\right|dt \leqslant C_p\, n^{\frac{1}{q}}\left(\sum_{|k|=n}^{m}|c(k)|^p\right)^{\frac{1}{p}},$$

gde je C_p neka apsolutna konstanta.

Dokaz. Pošto skup T_n ne sadrži interval $\left(-\frac{\pi}{n},\frac{\pi}{n}\right)$ to na integral

$$J_n=\int_{T_n}\frac{1}{2\left|\sin\frac{t}{2}\right|}\left|\sum_{|k|=n}^{m}c(k)e^{i\,\mathrm{sgn}(k)(|k|+\frac{1}{2})t}\right|dt,$$

možemo da primenimo Hölder-ovu nejednakost, te dobijamo

$$J_n\leqslant\left[\int_{T_n}\left(\frac{1}{2\left|\sin\frac{t}{2}\right|}\right)^p dt\right]^{\frac{1}{p}}\left[\int_{T_n}\left|\sum_{|k|=n}^{m}c(k)e^{i\,\mathrm{sgn}(k)(|k|+\frac{1}{2})t}\right|^q dt\right]$$

ili

$$J_n\leqslant C_p\, n^{\frac{1}{q}}\left(\int_{T_n}\left|\sum_{|k|=n}^{m}c(k)e^{i\,\mathrm{sgn}(k)(|k|+\frac{1}{2})t}\right|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Na poslednji integral primenimo Riesz-ovo proširenje nejednačina Housdorff-Young-a i dobijamo

$$J_n\leqslant C_p\, n^{\frac{1}{q}}\left(\sum_{|k|=n}^{m}|c(k)|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Time je dokaz završen.

i
$$B_5 \lg n \leq \int_{T_n} |A_n(t)|\,dt \leq B_6 \lg n$$

to iz (2.2.2) sledi da je
$$c(-n)\lg n = o(1),\ n\to\infty,$$
jer sam već pokazala da iz $I_n = O(1),\ n\to\infty$, sledi $(c(n)+c(-n))\lg n = o(1),\ n\to\infty$. Konačno iz $(c(n)+c(-n))\lg n = o(1)$ i $c(-n)\lg n = o(1),\ n\to\infty$, dobivamo da je
$$c(n)\lg n = o(1),\ n\to\infty,$$
što znači
$$c(n)\lg|n| = o(1),\ |n|\to\infty.$$

Iz $c(n)\lg|n| = o(1),\ |n|\to\infty$, neposredno sledi da je $I_n = O(1),\ n\to\infty$.

Time je dokaz Pomoćnog stava 2.2.1. završen.

Pre nego što izložim sledeći pomoćni stav i dokaz Osnovnog pomoćnog stava, potrebno je da na ovom mestu istaknem šta je moj doprinos u ovoj glavi. Uvodjenjem pomoćnih funkcija A_n ja sam postigla dvostruki cilj: izbegla sam pretpostavke o parnosti Fourier-ovih koeficijenata u Osnovnom pomoćnom stavu i dala dokaz Pomoćnog stava 2.2.1. od koga zavisi zaključak Osnovnog pomoćnog stava.

Dakle,

$$\int_{-\frac{\pi}{n}}^{\frac{\pi}{n}} \left| Q_n^{[\lambda n]}(f,t) \right| dt \leq \frac{2\pi}{n} \sum_{|k|=n+1}^{[\lambda n]} |\hat{f}(k)| = O(1), \quad n \to \infty.$$

Znači, na osnovu gornjih razmatranja, da je

$$\| S_n(f) - \sigma_n(f) \| = o(1), \quad n \to \infty,$$

ekvivalentno sa

$$\text{(2.2.5)} \qquad \lim_{\lambda \to 1+0} \overline{\lim_{n \to \infty}} \int_{T_n} \left| Q_n^{[\lambda n]}(f,t) \right| dt = 0.$$

Naš sledeći cilj je da pokažemo da je (2.2.5) ekvivalentno sa

$$\hat{f}(n) \lg |n| = o(1), \quad |n| \to \infty.$$

U tu svrhu podjimo od

$$Q_n^{[\lambda n]}(f,t) = \sum_{|k|=n}^{[\lambda n]-1} \Delta\left(\frac{[\lambda n]-|k|+1}{[\lambda n]-n} \hat{f}(k) \right) E_k(t)$$

$$+ \frac{\hat{f}([\lambda n]) E_{[\lambda n]}(t) + \hat{f}(-[\lambda n]) E_{-[\lambda n]}(t)}{[\lambda n]-n}$$

$$- \frac{[\lambda n]-|n|+1}{[\lambda n]-n} \left(\hat{f}(n) E_n(t) + \hat{f}(-n) E_{-n}(t) \right),$$

Predhodno navedeni pomoćni stavovi i metode njihovih dokaza omogućiće nam da dokažemo naš Osnovni pomoćni stav.

Dokaz Osnovnog pomoćnog stava. Polazna tačka dokaza je sledeći identitet, za $\lambda > 1$,

$$S_n(f,t)-\sigma_n(f,t)=\frac{[\lambda n]+1}{[\lambda n]-n}\left(\sigma_{[\lambda n]}(f,t)-\sigma_n(f,t)\right)-Q_n^{[\lambda n]}(f,t),$$

gde je

$$Q_n^{[\lambda n]}(f,t)=\sum_{|k|=n+1}^{[\lambda n]}\frac{[\lambda n]-|k|+1}{[\lambda n]-n}\hat{f}(k)e^{ikt}. \tag{2.2.3}$$

Pošto je $f\in L^1(T)$ to je

$$\|\sigma_{[\lambda n]}(f)-\sigma_n(f)\|=o(1),\quad n\to\infty . \tag{2.2.4}$$

Primetimo da je

$$\|S_n(f,t)-\sigma_n(f,t)\|=\int_{-\frac{\pi}{n}}^{\frac{\pi}{n}}|S_n(f,t)-\sigma_n(f,t)|dt$$
$$+\int_{T_n}|S_n(f,t)-\sigma_n(f,t)|dt.$$

Prvi integral ćemo proceniti, a obzirom na (2.2.4) dovoljno je da procenimo odgovarajući integral za (2.2.3).

$$I_n^1 = \int_{T_n} \left| \sum_{|k|=n}^{[\lambda n]-1} \frac{[\lambda n]-|k|}{[\lambda n]-n} \left(\Delta \hat{f}(k)\right) A_k(t) \right| dt.$$

Na osnovu Pomoćnog stava 2.2.2. dobijamo

$$I_n^1 \leq C_p \left(\sum_{|k|=n}^{[\lambda n]} |k|^{p-1} |\Delta \hat{f}(k)|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Integral apsolutne vrednosti drugog člana u poslednjem identitetu označimo sa

$$I_n^2 = \int_{T_n} \left| \frac{1}{[\lambda n]-n} \sum_{|k|=n+1}^{[\lambda n]} \hat{f}(k) A_k(t) \right| dt.$$

Takodje na osnovu Pomoćnog stava 2.2.2. sledi da je

$$I_n^2 \leq B_p \left(\frac{n}{[\lambda n]-n} \right)^{\frac{1}{q}} \left(\frac{1}{[\lambda n]-n} \sum_{|k|=n+1}^{[\lambda n]} |\hat{f}(k)|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

U ocenama integrala I_n^1 i I_n^2, C_p i B_p su apsolutne konstante.

Na osnovu (2.2.1) i kako je

$$\lim_{\lambda \to 1+0} \overline{\lim_{n \to \infty}} I_n^2 = 0,$$

to dobijamo da je

$$\lim_{\lambda \to 1+0} \overline{\lim_{n \to \infty}} \int_{T_n} | Q_n^{[\lambda n]}(f,t) | dt = 0,$$

tada i samo tada ako je

gde je $E_n(t)=\sum_{k=0}^{n} e^{ikt}$.

Koristeći pomoćnu funkciju $A_m(t)$ definisanu u uvodu ove glave, predhodni identitet se svodi na

$$Q_n^{[\lambda n]}(f,t)=\sum_{|k|=n}^{[\lambda n]-1} \frac{[\lambda n]-|k|}{[\lambda n]-n}\left(\Delta\hat{f}(k)\right)A_k(t)$$

$$+\frac{1}{[\lambda n]-n}\sum_{|k|=n+1}^{[\lambda n]}\hat{f}(k)A_k(t)$$

$$-\left(\hat{f}(n)A_n(t)+\hat{f}(-n)A_{-n}(t)\right).$$

Pošto smo u Pomoćnom stavu 2.2.1. već pokazali da je

$$\int_{T_n}\left|\hat{f}(n)A_n(t)+\hat{f}(-n)A_{-n}(t)\right|dt=o(1),\ n\to\infty,$$

ekvivalentno sa $\hat{f}(n)\lg|n|=o(1)$, $|n|\to\infty$, to ostaje da procenimo integrale apsolutnih vrednosti prvog i drugog člana u gornjem zbiru preko skupa T_n.

Označimo

tada je

$$\|S_n(f)-f\| = o(1), \quad n\to\infty,$$

ekvivalentno sa

$$\hat{f}(n)\lg\frac{|n|}{\ell(n)} = o(1), \quad |n|\to\infty.$$

<u>Pomoćni stav 2.2.4</u>. Neka je $f\in L^1(T)$.

Ako je

$$|n|\,\|\sigma_n(f)-f\|\,|\Delta\hat{f}(n)| = o(1), \quad |n|\to\infty,$$

tada je

$$\|S_n(f)-f\| = o(1), \quad n\to\infty,$$

ekvivalentno sa

$$\|\sigma_n(f)-f\|\,\hat{f}(n)\lg|n| = o(1), \quad |n|\to\infty.$$

Uslov (2.2.1) je Tauberov uslov koji definiše jednu klasu L^1-konvergencije i čiji su pooštreni oblici upotrebljeni u [13] i [14]. U svom izlaganju ja sam se koristila Karamatinim [15] oblikom Tauberovog uslova što je u suštini uslov (2.2.1).

ОСНОВНА ОРГАНИЗАЦИЈА УДРУЖЕНОГ РАДА
ЗА МАТЕМАТИКУ, МЕХАНИКУ И АСТРОНОМИЈУ
БИБЛИОТЕКА
Број: ______
Датум: ______

$$\int_{T_n} \left| \hat{f}(n) A_n(t) + \hat{f}(-n) A_{-n}(t) \right| dt = o(1),\ n\to\infty,$$

t.j. tada i samo tada ako je

$$\hat{f}(n)\, lg\,|n| = o(1),\ |n|\to\infty .$$

Time smo dokazali da je

$$\lim_{\lambda\to 1+0} \overline{\lim_{n\to\infty}} \left| \|\sigma_n^{\lambda}(f) - f\| - \|S_n(f) - f\| \right| = 0,$$

tada i samo tada ako je

$$\hat{f}(n)\, lg\,|n| = o(1),\ |n|\to\infty .$$

Time je dokaz Osnovnog pomoćnog stava završen.

Na sličan način kao i u dokazima predhodnih stavova, dobijamo sledeće pomoćne stavove.

Pomoćni stav 2.2.3. Neka je $f\in L^1(T)$ i neka je $\{l(n)\}_0^\infty \in G(f)$.

Ako je za neko $1 < p \leq 2$, $\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\right)$

$$(2.6)\quad \overline{\lim_{n\to\infty}}\ l(n)^{-\frac{1}{q}} \left(\sum_{|k|=n}^{n+\left[\frac{n}{l(n)}\right]} |k|^{p-1} |\Delta \hat{f}(k)|^p \right)^{\frac{1}{p}} = 0,$$

3.2. DEFINICIJE I POSEBNI POMOĆNI STAVOVI

U ovom paragrafu ćemo pokazati da je moguće definisati monotoniju za nizove kompleksnih brojeva koju ćemo primeniti na nizove Fourier-ovih koeficijenata.

Da bi se mogla definisati kvazi-monotonija nizova kompleksnih brojeva $\{c_n\}$, mora se ograničiti skup u kome se $\{\Delta c_n + \frac{\alpha}{n} c_n\}$ nalazi, tako da bude u okviru konusa u kompleksnoj ravni.

Definicija 3.2.1. Niz kompleksnih brojeva $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ je kompleksno kvazi-monoton ako postoji konus

$$K(\theta_0) = \{z \mid |\arg z| \leq \theta_0 < \frac{\pi}{2}\}$$

tako da za neko $\alpha \geqslant 0$

$$\Delta c_n + \frac{\alpha}{n} c_n \in K(\theta_0)$$

za svako n.

Sledeći pomoćni stav će nam omogućiti da ocenimo

$$\sum_{j=n}^{m} |\Delta c_j| ,$$

što će nam biti potrebno u glavnom rezultatu.

3. L^1-KONVERGENCIJA FOURIER-OVIH REDOVA SA KOMPLEKSNO MONOTONIM KOEFICIJENTIMA

3.1. UVOD

Pošto su u glavi 2. izloženi pomoćni stavovi koji se odnose na opšte klase L^1-konvergencije Fourier-ovih redova, u ovoj glavi ćemo posmatrati Fourier-ove redove sa kompleksno monotonim koeficijentima uvedenim u [12] .

Zahvaljujući ulozi funkcija A_m, pomoćnog stava 2.2.1. i Osnovnog pomoćnog stava koji je dokazan bez pretpostavke o asimptotskoj parnosti (uvedene u [16] i [17]), ja ću u ovoj glavi uopštiti svoje rezultate iz [12] .

Posledice mojih stavova obuhvatiće kao specijalne slučajeve rezultate Č.V.Stanojevića [11] i W.O.Bray i Č.V.Stanojevića [18] .

U slučaju da je $\alpha = 0$, dobijamo sledeću definiciju i pomoćni stav.

<u>Definicija 3.2.2.</u> Niz $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ kompleksnih brojeva je kompleksno monoton ako postoji konus

$$K(\theta_0) = \left\{ z \,\middle|\, |\arg z| \leq \theta_0 < \frac{\pi}{2} \right\},$$

tako da je $\Delta c_n \in K(\theta_0)$, za svako n.

<u>Pomoćni stav 3.2.2.</u> Neka je $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ kompleksno monoton niz t.j. neka postoji broj $\theta_0 \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ tako da važi

$$\Delta c_n \in K(\theta_0)$$

gde je

$$K(\theta_0) = \left\{ z \,\middle|\, |\arg z| \leq \theta_0 \right\}.$$

Tada je

$$\sum_{j=n}^{m-1} |\Delta c_j| \leq \frac{|c_m - c_n|}{\cos \theta_0} .$$

Iz gornje nejednakosti se vidi da je kompleksno monoton nula-niz $\{c_n\}$, ograničene varijacije, t.j. $\{c_n\} \in \mathcal{BV}$.

Ako se dakle ograničimo na kompleksne nizove koji se nalaze u konusu $K(\theta_0)$ i čiji su svi članovi različiti od nule, onda možemo da dobijemo karakterizaciju kompleksne kvazi-monotonosti nizova iz konusa $K(\theta_0)$.

Pomoćni stav 3.2.1. Neka je $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ kompleksno kvazi-monoton niz t.j. neka postoje brojevi $\theta_0 \in [0, \frac{\pi}{2})$ i $\alpha \geqslant 0$ takvi da važi

$$\Delta c_n + \frac{\alpha}{n} c_n \in K(\theta_0),$$

gde je

$$K(\theta_0) = \{z \mid |\arg z| \leqslant \theta_0\}.$$

Tada je

$$\sum_{j=n}^{m-1} |\Delta c_j| \leqslant \frac{|c_m - c_n|}{\cos\theta_0} + \alpha\left(1 + \frac{1}{\cos\theta_0}\right) \sum_{j=n}^{m} \frac{|c_j|}{j}.$$

Dokaz. Na prvi član desne strane nejednakosti

$$\sum_{j=n}^{m-1} |\Delta c_j| \leqslant \sum_{j=n}^{m-1} \left|\Delta c_j + \frac{\alpha}{j} c_j\right| + \alpha \sum_{j=n}^{m} \frac{|c_j|}{j}$$

primenićemo nejednakost M.Petrovića [19]

$$\sum_{j=n}^{m-1} \left|\Delta c_j + \frac{\alpha}{j} c_j\right| \leqslant \frac{1}{\cos\theta_0} \left| \sum_{j=n}^{m-1} \left(\Delta c_j + \frac{\alpha}{j} c_j\right) \right|$$

i dobićemo

$$\sum_{j=n}^{m-1} |\Delta c_j| \leqslant \frac{1}{\cos\theta_0} \left| \sum_{j=n}^{m-1} \Delta c_j \right| + \frac{\alpha}{\cos\theta_0} \sum_{j=n}^{m} \frac{|c_j|}{j} + \alpha \sum_{j=n}^{m} \frac{|c_j|}{j}$$

tako da je

$$\sum_{j=n}^{m-1} |\Delta c_j| \leqslant \frac{1}{\cos\theta_0} |c_m - c_n| + \alpha\left(\frac{1}{\cos\theta_0} + 1\right) \sum_{j=n}^{m} \frac{|c_j|}{j}.$$

Iz nejednakosti

$$\frac{b_n - b_{n+1} + \frac{\alpha}{n} b_n}{a_n - a_{n+1} + \frac{\alpha}{n} a_n} \leqslant \frac{\sin\theta_0}{\cos\theta_0}$$

dobijamo

$$b_n\cos\theta_0 - b_{n+1}\cos\theta_0 + \frac{\alpha}{n} b_n\cos\theta_0 \leqslant a_n\sin\theta_0 - a_{n+1}\sin\theta_0 + \frac{\alpha}{n} a_n\sin\theta_0$$

ili

$$a_{n+1}\sin\theta_0 - b_{n+1}\cos\theta_0 \leqslant \left(1+\frac{\alpha}{n}\right)\left(a_n\sin\theta_0 - b_n\cos\theta_0\right).$$

Kako je

$$I_m(\bar{c}_n \cdot e^{i\theta_0}) = a_n\sin\theta_0 - b_n\cos\theta_0 ,$$

iz poslednje nejednakosti sledi da je

$$|\overline{c_{n+1}}|\, I_m\left(e^{i(\theta_0+\arg\overline{c_{n+1}})}\right) \leqslant \left(1+\frac{\alpha}{n}\right)|\bar{c}_n|\, I_m\left(e^{i(\theta_0+\arg\bar{c}_n)}\right),$$

odnosno

$$|c_{n+1}|\sin(\theta_0 - \arg c_{n+1}) \leqslant \left(1+\frac{\alpha}{n}\right)|c_n|\sin(\theta_0-\arg c_n).$$

To, budući da je

$$\theta_0 - \pi < \arg c_n \leqslant \theta_0$$

tada je niz

$$\{|c_n|\sin(\theta_0 - \arg c_n)\}$$

Stav 3.2.1. Neka je $\{c_n\}$ niz kompleksnih brojeva takav da je $c_n \neq 0$ za svako $n \in Z$ i neka za neko $0 < \theta_0 < \frac{\pi}{2}$ niz $\{c_n\}$ pripada konusu $K(\theta_0)$.
Tada je niz $\{c_n\}$ kompleksno kvazi-monoton za neko $\alpha \geq 0$ ako i samo ako su nizovi

$$\{|c_n| \sin(\theta_0 \pm \arg c_n)\}$$

kvazi monotoni za isto $\alpha \geq 0$.

Dokaz. Iz Definicije 3.2.1. sledi

$$\left|\arg(\Delta c_n + \tfrac{\alpha}{n} c_n)\right| \leq \theta_0 < \frac{\pi}{2}$$

$$-\theta_0 \leq \arg(\Delta c_n + \tfrac{\alpha}{n} c_n) \leq \theta_0$$

$$-\operatorname{tg} \theta_0 \leq \operatorname{tg} \arg(\Delta c_n + \tfrac{\alpha}{n} c_n) \leq \operatorname{tg} \theta_0$$

$$-\frac{\sin\theta_0}{\cos\theta_0} \leq \frac{\operatorname{Im}(\Delta c_n + \frac{\alpha}{n} c_n)}{\operatorname{Re}(\Delta c_n + \frac{\alpha}{n} c_n)} \leq \frac{\sin\theta_0}{\cos\theta_0}.$$

Stavimo da je $c_n = a_n + i b_n$. Tada poslednje nejednakosti postaju

$$-\frac{\sin\theta_0}{\cos\theta_0} \leq \frac{\Delta b_n + \frac{\alpha}{n} b_n}{\Delta a_n + \frac{\alpha}{n} a_n} \leq \frac{\sin\theta_0}{\cos\theta_0}$$

ili

$$-\frac{\sin\theta_0}{\cos\theta_0} \leq \frac{b_n - b_{n+1} + \frac{\alpha}{n} b_n}{a_n - a_{n+1} + \frac{\alpha}{n} a_n} \leq \frac{\sin\theta_0}{\cos\theta_0}.$$

Opšti primer kompleksno kvazi-monotonih nizova može se dobiti na sledeći način. Stavimo

$$P_k = \prod_{j=1}^{k} \left(1 + \frac{\alpha}{j}\right) ,$$

a sa d_n označimo kompleksno monoton niz. Tada je niz

$$c_n = P_{n-1}\, d_n .$$

kompleksno kvazi-monoton niz za $\alpha \geq 0$ i u odnosu na konus $K(\theta_o)$ takav da je

$$\Delta d_n \in K(\theta_o) .$$

Zaista,

$$\begin{aligned} c_n - c_{n+1} + \frac{\alpha}{n} c_n &= P_{n-1} d_n - P_n d_{n+1} + \frac{\alpha}{n} P_{n-1} d_n \\ &= \left(1 + \frac{\alpha}{n}\right) P_{n-1} d_n - P_n d_{n+1} \\ &= P_n (d_n - d_{n+1}) \\ &= P_n \Delta d_n \in K(\theta_o) . \end{aligned}$$

ОСНОВНА ОРГАНИЗАЦИЈА УДРУЖЕНОГ РАДА
ЗА МАТЕМАТИКУ, МЕХАНИКУ И АСТРОНОМИЈУ
БИБЛИОТЕКА
Број: ______
Датум: ______

kvazi-monoton za $\alpha \geqslant 0$.

Iz nejednakosti

$$-\frac{\sin\theta_0}{\cos\theta_0} \leqslant \frac{b_n - b_{n+1} + \frac{\alpha}{n} b_n}{a_n - a_{n+1} + \frac{\alpha}{n} a_n}$$

na sličan način dobijamo

$$|c_{n+1}| \, I_m\left(e^{i(\theta_0 + \arg c_{n+1})}\right) \leqslant \left(1 + \frac{\alpha}{n}\right) |c_n| \, I_m\left(e^{i(\theta_0 + \arg c_n)}\right).$$

Iz poslednje nejednakosti sledi da je

$$|c_{n+1}| \sin(\theta_0 + \arg c_{n+1}) \leqslant \left(1 + \frac{\alpha}{n}\right) |c_n| \sin(\theta_0 + \arg c_n).$$

To, kako je

$$-\theta_0 \leqslant \arg c_n < \pi - \theta_0$$

znači da je niz

$$\left\{ |c_n| \sin(\theta_0 + \arg c_n) \right\}$$

kvazi-monoton za $\alpha \geqslant 0$.

Kako se postupak može izvesti i u obrnutom redu, t.j. pretpostavljajući da je niz

$$\left\{ |c_n| \sin(\theta_0 \pm \arg c_n) \right\}$$

kvazi-monoton za neko $\alpha \geqslant 0$ dobiti da je $\{c_n\}$ kompleksno kvazi-monoton niz za $\alpha \geqslant 0$ i za $\theta_0 < \frac{\pi}{2}$, dokaz je time završen.

Dokaz. Dovoljno je dokazati da (3.3.1) i kompleksna kvazi-monotonija impliciraju

$$(2.2.1)\quad \lim_{\lambda\to 1+0}\ \overline{\lim_{n\to\infty}}\left(\sum_{|j|=n}^{[\lambda n]} j^{p-1}|\Delta\hat{f}(j)|^{p}\right)^{\frac{1}{p}} = 0.$$

Iz nejednakosti

$$\left(\sum_{|j|=n}^{[\lambda n]}|j|^{p-1}|\Delta\hat{f}(j)|^{p}\right)^{\frac{1}{p}} \leq \max_{n\leq|j|\leq[\lambda n]}\left(|j|^{\frac{1}{q}}|\Delta\hat{f}(j)|^{\frac{1}{q}}\right)\left(\sum_{|j|=n}^{[\lambda n]}|\Delta\hat{f}(j)|\right)^{\frac{1}{p}}$$

i upotrebljavajući Pomoćni stav 3.2.1. dobija se

$$\left(\sum_{|j|=n}^{[\lambda n]}|j|^{p-1}|\Delta\hat{f}(j)|^{p}\right)^{\frac{1}{p}} \leq \max_{n\leq|j|\leq[\lambda n]}\left(|j|^{\frac{1}{q}}|\Delta\hat{f}(j)|^{\frac{1}{q}}\right)$$

$$\cdot\left(\frac{|\hat{f}([\lambda n])-\hat{f}(n)|}{\cos\theta_0}+\alpha\left(1+\frac{1}{\cos\theta_0}\right)\sum_{|j|=n}^{[\lambda n]}\frac{|\hat{f}(j)|}{j}\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\leq \max_{n\leq|j|\leq[\lambda n]}\left(|j|^{\frac{1}{q}}|\Delta\hat{f}(j)|^{\frac{1}{q}}\right)$$

$$\cdot\left(\frac{|\hat{f}([\lambda n])|+|\hat{f}(n)|}{\cos\theta_0}+\alpha\left(1+\frac{1}{\cos\theta_0}\right)\max_{n\leq|j|\leq[\lambda n]}|\hat{f}(j)|\sum_{|j|=n}^{[\lambda n]}\frac{1}{j}\right)^{\frac{1}{p}}$$

.li pošto brojevi $|\hat{f}([\lambda n])|$ i $|\hat{f}(n)|$ nisu veći od $\max_{n\leq|j|\leq[\lambda n]}|\hat{f}(j)|$ i kako je $\sum_{|j|=n}^{[\lambda n]}\frac{1}{j}\leq C\lg\lambda$, gde je C apsolutna

3.3. REZULTATI

Glavni rezultat u ovoj glavi daje potreban i dovoljan uslov za L^1-konvergenciju Fourier-ovih redova sa kompleksno monotonim koeficijentima.

Posto sam u glavi 2. dala dve vrste osnovnih pomoćnih stavova, jedan sa Tauberovim uslovom (2.2.1) i drugi sa Tauberovim uslovom (2.2.6), to ću ovde izložiti dva osnovna rezultata svoje teze.

Stav 3.3.1. Neka je

$$S[f] \sim \sum_{|n|<\infty} \hat{f}(n) e^{int}$$

Fourier-ov red neke funkcije $f \in L^1(T)$.

Ako je niz $\{\hat{f}(n)\}$ kompleksno kvazi-monoton i ako za neko $1 < p \leq 2$,

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, n^{\frac{1}{q}} \max_{n\leq|j|\leq[\lambda n]} |\Delta\hat{f}(j)|^{\frac{1}{q}} \max_{n\leq|j|\leq[\lambda n]} |\hat{f}(j)|^{\frac{1}{p}} = O(1), \quad \lambda\to 1+0, \quad \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1, \tag{3.3.1}$$

tada je

$$\|S_n(f)-f\| = o(1), \quad n\to\infty,$$

ekvivalentno sa

$$\hat{f}(n)\lg|n| = o(1), \quad |n|\to\infty.$$

ekvivalentno sa

$$\hat{f}(n)\lg|n| = o(1), \quad |n|\to\infty .$$

Dokaz. Upotrebljavajući nejednakost sličnu onoj koju smo koristili u Stavu 3.3.1., dobijamo nejednakost

$$\left(\sum_{|j|=n}^{[\lambda n]} |j|^{p-1} |\Delta\hat{f}(j)|^{p}\right)^{\frac{1}{p}} \leq \max_{n\leq|j|\leq[\lambda n]} \left(|j|^{\frac{1}{q}} |\Delta\hat{f}(j)|^{\frac{1}{q}}\right) \left(\frac{|\hat{f}([\lambda n]) - \hat{f}(n)|}{\cos\theta_0}\right)^{\frac{1}{p}}$$

iz koje dokaz Stava 3.3.2. sledi.

Posledica 3.3.1. Neka je

$$S[f]^{*} \sim \sum_{|n|<\infty} \hat{f}(n)e^{int}$$

Fourier-ov red neke funkcije $f \in L^1(0,\pi)$.

Ako je $\{\hat{f}(n)\}$ parni kompleksno kvazi-monoton niz i ako je za neko $1 < p \leq 2$ uslov (3.3.1) ispunjen, tada Fourier-ov red

$$S[f] \sim \sum_{|n|<\infty} \hat{f}(n)e^{int}$$

konvergira u L^1-normi ako i samo ako

$$\hat{f}(n)\lg|n| = o(1), \quad n\to\infty .$$

Pošto $n\Delta\hat{f}(n) = O(1), n\to\infty$, implicira (3.3.1) jasno je da je rezultat Č.V.Stanojevića [11] specikonstanta, tada je za $\lambda > 1$

$$\left(\sum_{|j|=n}^{[\lambda n]} |j|^{p-1} |\Delta \hat{f}(j)|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left[\frac{2}{\cos\theta_0} + \alpha\left(1+\frac{1}{\cos\theta_0}\right) c \lg \lambda\right]^{\frac{1}{p}}$$

$$\cdot \max_{n \leq |j| \leq [\lambda n]} \left(|j|^{\frac{1}{q}} |\Delta \hat{f}(j)|^{\frac{1}{q}}\right) \max_{n \leq j \leq [\lambda n]} |\hat{f}(j)|^{\frac{1}{p}}.$$

Uzimajući $\limsup$ kada $n \to \infty$, a zatim $\lim$ kad $\lambda \to 1+0$, dokaz stava se završava.

U slučaju kompleksno monotonih koeficijenata dobijamo sledeći stav u kome je uslov (3.3.1) nešto oslabljen.

Stav 3.3.2. Neka je

$$S[f] \sim \sum_{|n|<\infty} \hat{f}(n) e^{int}$$

Fourier-ov red neke funkcije $f \in L^1(T)$.

Ako je $\{\hat{f}(n)\}$ kompleksno monoton niz i ako za neko $1 < p \leq 2$,

$$\lim_{\lambda \to 1+0} \overline{\lim_{n \to \infty}} \max_{n \leq |j| \leq [\lambda n]} \left(|j| \, |\Delta \hat{f}(j)|\right)^{\frac{1}{q}} |\hat{f}([\lambda n]) - \hat{f}(n)|^{\frac{1}{p}} = 0 \tag{3.3.2}$$

tada je

$$\|S_n(f) - f\| = o(1), \quad n \to \infty,$$

gde je $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$,

tada je

$$\| S_n(f)-f\| = o(1), \quad n\to\infty,$$

ekvivalentno sa

$$\hat{f}(n)\, \lg \frac{|n|}{\ell(n)} = o(1), \quad |n|\to\infty .$$

Dokaz. Kao i u dokazu Stava 3.3.1. treba da pokažemo važenje uslova

$$\text{(2.2.6)} \quad \overline{\lim_{n\to\infty}}\ \ell(n)^{-\frac{1}{q}}\left(\sum_{|k|=n}^{n+\left[\frac{n}{\ell(n)}\right]} |k|^{p-1}|\Delta\hat{f}(k)|^p\right)^{\frac{1}{p}}=0 .$$

Kako je

$$\ell(n)^{-\frac{1}{q}}\left(\sum_{|k|=n}^{n+\left[\frac{n}{\ell(n)}\right]} |k|^{p-1}|\Delta\hat{f}(k)|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\leq \ell(n)^{-\frac{1}{q}} \max_{n\leq |k|\leq n+\left[\frac{n}{\ell(n)}\right]}\left(|k|^{\frac{1}{q}}|\Delta\hat{f}(k)|^{\frac{1}{q}}\right)\left(\sum_{|k|=n}^{n+\left[\frac{n}{\ell(n)}\right]}|\Delta\hat{f}(k)|\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\leq \ell(n)^{-\frac{1}{q}} \max_{n\leq |k|\leq n+\left[\frac{n}{\ell(n)}\right]}\left(|k|^{\frac{1}{q}}|\Delta\hat{f}(k)|^{\frac{1}{q}}\right)$$

$$\cdot\left(\frac{\left|\hat{f}\left(n+\left[\frac{n}{\ell(n)}\right]\right)-\hat{f}(n)\right|}{\cos\theta_0}+\alpha\left(1+\frac{1}{\cos\theta_0}\right)\sum_{|k|=n}^{n+\left[\frac{n}{\ell(n)}\right]}\frac{|\hat{f}(k)|}{|k|}\right)^{\frac{1}{p}}$$

jalni slučaj Posledice 3.3.1. .

Pre nego što dokažem svoj drugi osnovni rezultat želela bih da ponovim osobine parnih nizova pozitivnih brojeva $\{\ell(n)\}_{|n|<\infty}$ uvedenog u glavi 2. Te osobine su sledeće:

1. $\ell(n) \to +\infty, \quad n \to \infty,$
2. $\ell(n) = O|n|, \quad n \to \infty,$
3. $\left\| \sigma_{n+\left[\frac{n}{\ell(n)}\right]}(f) - \sigma_n(f) \right\| \ell(n) = O(1), \quad |n| \to \infty.$

Klasu nizova koji zadovoljavaju gornje uslove označili smo sa $G(f)$.

Moj drugi osnovni rezultat sada glasi,

<u>Stav 3.3.3</u>. Neka je

$$S[f] \sim \sum_{|n|<\infty} \hat{f}(n) e^{int}$$

Fourier-ov red neke funkcije $f \in L^1(T)$, i neka $\{\ell(n)\} \in G(f)$.

Ako je $\{\hat{f}(n)\}$ kompleksno kvazi-monoton i ako za neko $1 < p \leq 2$,

$$\ell(n)^{-\frac{1}{q}} n^{\frac{1}{q}} \max_{n \leq |k| \leq n+\left[\frac{n}{\ell(n)}\right]} |\Delta \hat{f}(k)|^{\frac{1}{q}} \max_{n \leq |k| \leq n+\left[\frac{n}{\ell(n)}\right]} |\hat{f}(k)|^{\frac{1}{p}} = O(1), \quad n \to \infty,$$

Iz mog poslednje navedenog rezultata sledi da se u slučaju Fourier-ovih redova sa kompleksno kvazi-monotonim koeficijentima gore posmatran slučaj može uopštiti tako da glasi

$$n \cdot \max_{n \leq |k| \leq n + \left[\frac{n}{\ell(n)}\right]} |\Delta \hat{f}(k)| = O(\ell(n)), \quad n \to \infty,$$

t.j. ja imam sledeću posledicu Stava 3.3.3. .

<u>Posledica 3.3.2.</u> Neka je

$$S[f] \sim \sum_{|n|<\infty} \hat{f}(n) e^{int}$$

Fourier-ov red neke funkcije $f \in L^1(T)$, i neka $\{\ell(n)\} \in G(f)$.

Ako je $\{\hat{f}(n)\}$ kompleksno kvazi-monoton i ako

$$n \cdot \max_{n \leq |k| \leq n + \left[\frac{n}{\ell(n)}\right]} |\Delta \hat{f}(k)| = O(\ell(n)), \quad n \to \infty,$$

tada je

$$\|S_n(f) - f\| = o(1), \quad n \to \infty,$$

ekvivalentno sa

$$\hat{f}(n) \lg \frac{|n|}{\ell(n)} = o(1), \quad |n| \to \infty.$$

Navedena Posledica 3.3.2. je znatno pooštrenje rezultata Č.V.Stanojevića i W.O.Bray-Č.V.Stanojevića

$$\leq \ell(n)^{-\frac{1}{q}} \max_{n\leq|k|\leq n+\left[\frac{n}{\ell(n)}\right]} \left(|k|^{\frac{1}{q}} |\Delta\hat{f}(k)|^{\frac{1}{q}}\right)$$

$$\cdot\left(\frac{|\hat{f}(n+\left[\frac{n}{\ell(n)}\right]|+|\hat{f}(n)|}{\cos\theta_0} + \alpha\left(1+\frac{1}{\cos\theta_0}\right) \max_{n\leq|k|\leq n+\left[\frac{n}{\ell(n)}\right]} |\hat{f}(k)| \sum_{|k|=n}^{n+\left[\frac{n}{\ell(n)}\right]} \frac{1}{|k|}\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Ali pošto su i $|\hat{f}(n+\left[\frac{n}{\ell(n)}\right])|$ i $|\hat{f}(n)|$ manji od $\max_{n\leq|k|\leq n+\left[\frac{n}{\ell(n)}\right]} |\hat{f}(k)|$ i pošto je $\sum_{|k|=n}^{n+\left[\frac{n}{\ell(n)}\right]} \frac{1}{|k|} \leq C_1$, gde je C_1 neka apsolutna konstanta, sledi da je

$$\ell(n)^{-\frac{1}{q}} \left(\sum_{|k|=n}^{n+\left[\frac{n}{\ell(n)}\right]} |k|^{p-1} |\Delta\hat{f}(k)|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\leq \ell(n)^{-\frac{1}{q}} \max_{n\leq|k|\leq n+\left[\frac{n}{\ell(n)}\right]} \left(|k|^{\frac{1}{q}} |\Delta\hat{f}(k)|^{\frac{1}{q}}\right)$$

$$\cdot \max_{n\leq|k|\leq n+\left[\frac{n}{\ell(n)}\right]} |\hat{f}(k)|^{\frac{1}{p}} \left(\frac{2}{\cos\theta_0} + \alpha\left(1+\frac{1}{\cos\theta_0}\right)\frac{C_1}{\ell(n)}\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\leq C_2\, \ell(n)^{-\frac{1}{q}}\, n^{\frac{1}{q}} \max_{n\leq|k|\leq n+\left[\frac{n}{\ell(n)}\right]} |\Delta\hat{f}(k)|^{\frac{1}{q}} \max_{n\leq|k|\leq n+\left[\frac{n}{\ell(n)}\right]} |\hat{f}(k)|^{\frac{1}{p}}$$

;de je C_2 neka apsolutna konstanta. Time je dokaz ·tava 3.3.3. završen.

U radovima [17] , [16] i [18] je posmatran lučaj kad

$$n\Delta\hat{f}(n) = O(1), \quad n\to\infty.$$

Fourier-ov red neke funkcije $f \in L^1(T)$ i neka $\{\ell(n)\} \in G(f)$.

Ako je $\{\hat{f}(n)\}$ kompleksno monoton i ako

$$n \cdot \max_{n \le |k| \le n + \left[\frac{n}{\ell(n)}\right]} |\Delta \hat{f}(k)| = O(\ell(n)), \quad n \to \infty,$$

tada je

$$\|S_n(f) - f\| = o(1), \quad n \to \infty,$$

ekvivalentno sa

$$\hat{f}(n) \lg \frac{n}{\ell(n)} = o(1), \quad |n| \to \infty.$$

Da bi se dobio bolji uvid u značaj Stava 3.3.3. i njegovih posledica, posmatrajmo slučaj kada je

$$\ell(n) = \left[\frac{1}{\|\sigma_n(f) - f\|} \right].$$

Pri tome ćemo napraviti jednu vrlo slabu pretpostavku t.j. da

$$n \cdot \|\sigma_n(f) - f\| \to \infty, \quad n \to \infty.$$

Koliko je ta predpostavka slaba vidi se iz toga što

$$n \cdot \|\sigma_n(f) - f\| \to 0, \quad n \to \infty,$$

povlači da je funkcija f konstantna. Prema tome iz predhodno navedenih radova.

U slučaju Fourier-ovih redova sa kompleksno monotonim koeficijentima imamo sledeći stav.

Stav 3.3.4. Neka je

$$S[f] \sim \sum_{|n|<\infty} \hat{f}(n) e^{int}$$

Fourier-ov red neke funkcije $f \in L^1(T)$ i neka $\{\ell(n)\} \in G(f)$.

Ako je $\{\hat{f}(n)\}$ kompleksno monoton i ako za neko $1 < p \leq 2$,

$$\ell(n)^{-\frac{1}{q}} n^{\frac{1}{q}} \left| \hat{f}\left(n+\left[\frac{n}{\ell(n)}\right]\right) - \hat{f}(n) \right|^{\frac{1}{p}} \max_{n \leq |k| \leq n+\left[\frac{n}{\ell(n)}\right]} |\Delta \hat{f}(k)|^{\frac{1}{q}} = O(1), \; n \to \infty$$

gde je $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$,

tada je

$$\| S_n(f) - f \| = o(1), \quad n \to \infty,$$

ekvivalentno sa

$$\hat{f}(n) \lg \frac{|n|}{\ell(n)} = o(1), \quad |n| \to \infty.$$

Iz posledice 3.3.2. neposredno dobijamo rezultat:

Neka je $$S[f] \sim \sum_{|n|<\infty} \hat{f}(n) e^{int}$$

Još zanimljivija je posledica koja znatno pooštrava rezultat W.O.Bray i Č.V.Stanojevića [18], gde je predpostavljeno

$$n\Delta\hat{f}(n)=O(1),\quad n\to\infty,$$

dok će moja predpostavka biti

$$\|\sigma_n(f)-f\|\cdot n\max_{n\leq|k|\leq n+\left[\frac{n}{\ell(n)}\right]}|\Delta\hat{f}(k)|=O(1),\ n\to\infty.$$

<u>Posledica 3.3.3.</u> Neka je

$$S[f]\sim\sum_{|n|<\infty}e^{int}$$

Fourier-ov red neke funkcije $f\in L^1(T)$.

Ako je $\{\hat{f}(n)\}$ kompleksno kvazi-monoton i ako

$$\|\sigma_n(f)-f\|\ n\max_{n\leq|k|\leq n+\left[\frac{n}{\ell(n)}\right]}|\Delta\hat{f}(k)|=O(1),\ n\to\infty,$$

tada je

$$\|S_n(f)-f\|=o(1),\ n\to\infty,$$

ekvivalentno sa

$$\hat{f}(n)\lg\left(|n|\cdot\|\sigma_n(f)-f\|\right)=o(1),\ |n|\to\infty.$$

Značaj Stava 3.3.5. i Posledice 3.3.3. je u tome što oni povezuju glatkost funkcije f izraženu pomoću pretpostavku

$$n\cdot\|\sigma_n(f)-f\|\to\infty,\quad n\to\infty,$$

ćemo podrazumevati u sledećim stavovima.

Primetimo pre svega da

$$\ell(n)=\left[\frac{1}{\|\sigma_n(f)-f\|}\right]$$

ima sve osobine koje definišu nizove iz $G(f)$.

Stav 3.3.5. Neka je

$$S[f]\sim\sum_{|n|<\infty}\hat{f}(n)e^{int}$$

Fourier-ov red neke funkcije $f\in L^1(T)$.

Ako je $\{\hat{f}(n)\}$ kompleksno kvazi-monoton i ako za neko $1<p\leqslant 2$,

$$\|\sigma_n(f)-f\|^{\frac{1}{q}}\cdot n^{\frac{1}{q}}\max_{n\leq|k|\leq n+\left[\frac{n}{\ell(n)}\right]}|\Delta\hat{f}(k)|^{\frac{1}{q}}\max_{n\leq|k|\leq n+\left[\frac{n}{\ell(n)}\right]}|\hat{f}(k)|^{\frac{1}{p}}=O(1),\ n\to\infty$$

gde je $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$,

tada je

$$\|S_n(f)-f\|=o(1),\quad n\to\infty,$$

ekvivalentno sa

$$\hat{f}(n)\lg\left(|n|\cdot\|\sigma_n(f)-f\|\right)=o(1),\quad n\to\infty.$$

4. KONVERGENCIJA TRIGONOMETRIJSKIH REDOVA U METRIČKOM PROSTORU $L^p(T)$ $(0<p<1)$

4.1. UVOD

P.L.Uljanov [20] je dokazao zanimljiv rezultat o integrabilnosti $|f|^p$ i $|\bar{f}|^p$ za bilo koje $0<p<1$, gde je

(4.1.1) $$f(x)=\sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx$$

(4.1.2) $$\bar{f}(x)=\sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin kx,$$

a nula-niz $\{a_n\}$ je niz ograničene varijacije.

Stav 4.1.1. (P.L.Uljanov, [20]) Neka je $\{a_n\}$ nula-niz ograničene varijacije. Tada su, za bilo koje $0<p<1$, $|f|^p$ i $|\bar{f}|^p$ integrabilne funkcije.

U ovoj glavi ćemo dokazati jednu verziju Uljanovog Stava 4.1.1. i proširiti ga za kompleksan slučaj

(4.1.3) $$\sum_{|n|<\infty} c(n)\, e^{int}, \quad t\in T=\frac{R}{2\pi Z},$$

gde je $\{c_n\}_{|n|<\infty}$ nula-niz kompleksnih brojeva, tako da je za neki prirodan broj m

$$\|\sigma_n(f)-f\| \to 0, \quad n\to\infty,$$

sa glatkošću niza Fourier-ovih koeficijenata funkcije f izražene pomoću

$$\|\sigma_n(f)-f\|\cdot n \max_{n\leq |k|\leq n+\left[\frac{n}{\ell(n)}\right]} |\Delta \hat{f}(k)| = O(1), \; n\to\infty.$$

Poslednja napomena ukazuje da se Posledica 3.3.3. može da dokaže nezavisno od Housdorff-Young nejednačine, oslanjajući se samo na tehniku teorije aproksimacija.

stavimo

$$A^{(k)}_{M,N+1}=A^{(k)}_{M,N+1}(t)=\left[\Delta^{k}c(M)\right]e^{iMt}-\left[\Delta^{k}c(N+1)\right]e^{i(N+1)t},$$

gde je $0\leqslant k\leqslant m$, a

$$\Delta^{k}c(M)=\Delta\left(\Delta^{k-1}c(M)\right).$$

Kompleksnu funkciju realne promenljive $1-e^{-it}$ označićemo sa $w=w(t)$.

Pomoćni stav 4.2.1. Neka su M i N dati prirodni brojevi takvi da je $N>M$. Tada je za svaki prirodni broj m,

$$(4.2.1)\quad w^{m}\sum_{j=M+m}^{N+m}c(j)e^{ijt}=\sum_{j=M}^{N}\left[\Delta^{m}c(j)\right]e^{ijt}-\sum_{k=0}^{m-1}w^{k}A^{(m-1-k)}_{M+k,N+k+1}.$$

Dokaz. Mada se dokaz zasniva na totalnoj indukciji, zbog nekoliko zanimljivih mesta vredan je da bude izložen u celini.

Identitet (4.2.1) za $m=1$ postaje

$$(4.2.2)\quad w\sum_{j=M+1}^{N+1}c(j)e^{ijt}=\sum_{j=M}^{N}\left[\Delta c(j)\right]e^{ijt}-A^{(0)}_{M,N+1},$$

ili

$$\left(1-e^{-it}\right)\sum_{j=M+1}^{N+1}c(j)e^{ijt}=\sum_{j=M}^{N}\left[\Delta c(j)\right]e^{ijt}-\left(\left[c(M)\right]e^{iMt}-\left[c(N+1)\right]e^{i(N+1)t}\right),$$

$$\sum_{|n|<\infty} |\Delta^m c(n)| < \infty , \tag{4.1.4}$$

i gde je

$$\Delta^m c(n) = \Delta^{m-1} c(n) - \Delta^{m-1} c(n+1).$$

J.W.Garrett, C.S.Rees i Č.V.Stanojević u [21] su uveli pojam nula niza ograničene varijacije reda m, kao nula niza koji ima osobinu (4.1.4). Oni su takodje dali primer u [21] kojim se pokazuje da je (4.1.4) efektivno uopštenje nizova ograničene varijacije.

U mojoj verziji stava P.L.Uljanov-a, ja ću proširiti važenje Stava 4.1.1. za slučaj kompleksnih nula-nizova ograničene varijacije reda m. Cena tog proširenja će biti smanjeni interval za p, od $0<p<1$ na $0<p<\frac{1}{m}$.

4.2. POMOĆNI STAV

U dokazu glavnog stava u ovoj glavi biće nam potreban jedan pomoćni stav. Da bi smo pojednostavili iskaz tog tehnički složenog pomoćnog stava, uvešćemo predhodhodno sledeće oznake.

Za prirodne brojeve $N>M$ i bilo koje $m\geqslant 1$

t.j.,

$$w^m\sum_{j=M+m}^{N+m}[\Delta c(j)]e^{ijt}=\sum_{j=M}^{N}[\Delta^{m+1}c(j)]e^{ijt}-\sum_{K=0}^{m-1}w^K A^{(m-K)}_{M+K,N+K+1}, \tag{4.2.3}$$

a u (4.2.2) izvršimo zamenu M sa $M+m$ i N sa $N+m$, tako da dobijemo

$$w\sum_{j=M+m+1}^{N+m+1}c(j)e^{ijt}=\sum_{j=M+m}^{N+m}[\Delta c(j)]e^{ijt}-A^{(0)}_{M+m,N+m+1}.$$

Iz poslednjeg identiteta sledi,

$$\sum_{j=M+m}^{N+m}[\Delta c(j)]e^{ijt}=w\sum_{j=M+m+1}^{N+m+1}c(j)e^{ijt}+A^{(0)}_{M+m,N+m+1},$$

tako da identitet (4.2.3) postaje

$$w^m\Big[w\sum_{j=M+m+1}^{N+m+1}c(j)e^{ijt}+A^{(0)}_{M+m,N+m+1}\Big]=\sum_{j=M}^{N}[\Delta^{m+1}c(j)]e^{ijt}-\sum_{K=0}^{m-1}w^K A^{(m-K)}_{M+K,N+K+1},$$

ili,

$$\begin{aligned}w^{m+1}\sum_{j=M+m+1}^{N+m+1}c(j)e^{ijt}&=\sum_{j=M}^{N}[\Delta^{m+1}c(j)]e^{ijt}\\&\quad-\sum_{K=0}^{m-1}w^K A^{(m-K)}_{M+K,N+K+1}-w^m A^{(0)}_{M+m,N+m+1}\\&=\sum_{j=M}^{N}[\Delta^{m+1}c(j)]e^{ijt}-\sum_{K=0}^{m}w^K A^{(m-K)}_{M+K,N+K+1}\end{aligned}$$

a to je identitet (4.2.1) sa $m+1$ umesto m. Time je dokaz Pomoćnog stava 4.2.1. završen.

jer po sporazumu

$$\Delta^{\circ}(\cdot)=(\cdot).$$

Poslednji identitet se lako izvodi delimičnim sabiranjem.

Zaista,

$$\begin{aligned}\Delta(c(j)e^{ijt}) &= c(j)e^{ijt}-c(j+1)e^{i(j+1)t}\\ &= [\Delta c(j)]e^{ijt}-c(j+1)e^{ijt}(e^{it}-1).\end{aligned}$$

Sabirajući ove jednakosti za $j = M, M+1, \ldots, N$, dobijamo,

$$\begin{aligned}&c(M)e^{iMt}-c(N+1)e^{i(N+1)t}\\ &=\sum_{j=M}^{N}[\Delta c(j)]e^{ijt}+(1-e^{it})\sum_{j=M}^{N}c(j+1)e^{ijt}\\ &=\sum_{j=M}^{N}[\Delta c(j)]e^{ijt}-(1-e^{-it})\sum_{j=M+1}^{N+1}c(j)e^{ijt},\end{aligned}$$

iz čega sledi da je identitet (4.2.1) tačan za $m = 1$.

Dokažimo sada da, za bilo koji prirodan broj m, iz pretpostavke da je identitet (4.2.1) tačan sledi tačnost ovog identiteta za $m + 1$ umesto m.

Zamenimo $c(j)$ sa $\Delta c(j)$ u identitetu (4.2.1), konvergira ka nekom f za svako $t \in T - \{0\}$, i tada su za bilo koje $0 < p < \frac{1}{m}$, funkcije $|f|^p$ i $|\bar{f}|^p$ integrabilne.

<u>Dokaz</u>. Neka je $m \geqslant 1$ i neka je $M < N$. U Pomoćnom stavu 4.2.1. je dokazan identitet

$$w^m \sum_{j=M+m}^{N+m} c(j) e^{ijt} = \sum_{j=M}^{N} [\Delta^m c(j)] e^{ijt} - \sum_{k=0}^{m-1} w^k A^{(m-1-k)}_{M+k,N+k+1}$$

za bilo koji niz $\{c(n)\}_{|n|<\infty}$ kompleksnih brojeva. Zamenom M sa $-n$, i N sa n, za $t \neq 0$ dobijamo,

$$\begin{aligned} S_n(t) = {} & \frac{1}{w^m} \sum_{|j| \leq n} [\Delta^m c(j)] e^{ijt} \\ & - \frac{1}{w^m} \sum_{k=0}^{m-1} w^k A^{(m-1-k)}_{-n+k,n+k+1} \\ & + \sum_{j=-n}^{-n+m-1} c(j) e^{ijt} - \sum_{j=n+1}^{n+m} c(j) e^{ijt}. \end{aligned} \tag{4.3.1}$$

Pošto je uslov $\sum_{|n|<\infty} |\Delta^m c(n)| < \infty$ ispunjen, to prvi član desne strane jednakosti (4.3.1) konvergira za svako $t \in T - \{0\}$, a ostali članovi na desnoj strani teže ka nuli jer je $c(n) = O(1)$, $|n| \to \infty$. Stoga limes od $S_n(t)$, $n \to \infty$, postoji u $T - \{0\}$ i mi ga označavamo sa f.

Preostalo je još da se dokaže da je za bilo koje

4.3. STAV P.L.ULJANOV-A ZA SLUČAJ KOEFICIJENATA OGRANIČENE VARIJACIJE REDA m

Kao što sam u uvodu već napomenula moja verzija stava P.L.Uljanov-a je jedna vrsta razmene. Naime, sa jedne strane, moj stav je proširen na kompleksne trigonometrijske redove sa koeficijentima znatno opštijim nego u slučaju P.L.Uljanov-a. Sa druge strane, sužen je u pogledu stepena integrabilnosti funkcija $|f|^p$ i $|\bar{f}|^p$. Ukratko, moj stav je stav Uljanov-a pomeren na opštiji domen primene ali sa nešto suženim domenom važenja, što u izvesnom smislu dokazuje da je stav Uljanov-a najbolji mogući u klasi trigonometrijskih redova sa koeficijentima ograničene varijacije reda m.

Stav 4.3.1. Neka je $\{c(n)\}_{|n|<\infty}$ nula-niz kompleksnih brojeva.

Ako za neki prirodni broj m

$$\sum_{|n|<\infty} |\Delta^m c(n)| < \infty,$$

tada niz

$$S_n(t) = \sum_{|j|\le n} c(j)e^{ijt}$$

ǒsto je $0<p<\frac{1}{m}$ dobijamo

$$|f(t)-S_n(t)|^p \leq \frac{1}{|w(t)|^{mp}}\Big(\sum_{|j|\geq n+1}|\Delta^m c(j)|\Big)^p$$

$$+\frac{2}{|w(t)|^{mp}}\Big(\sum_{k=0}^{m-1}|\Delta^{(m-1-k)}c(-n+k)|+|\Delta^{(m-1-k)}c(n+k+1)|\Big)^p$$

$$+\Big(\sum_{j=-n}^{-n+m-1}|c(j)|\Big)^p+\Big(\sum_{j=n+1}^{n+m}|c(j)|\Big)^p$$

ako je za $mp<1$

$$\int_T \frac{dt}{|w(t)|^{mp}} < K,$$

ie je K apsolutna konstanta, sledi da je

$$\int|f(t)-S_n(t)|^p dt \leq K\Big(\sum_{|j|\geq n+1}|\Delta^m c(j)|\Big)^p$$

$$+2^{m-1}K\Big(\sum_{k=0}^{m-1}\big(|\Delta^{(m-1-k)}c(-n+k)|+|\Delta^{(m-1-k)}c(n+k+1)|\big)\Big)^p$$

$$+m^p\max_{-n\leq j\leq -n+m-1}|c(j)|^p+m^p\max_{n+1\leq j\leq n+m}|c(j)|^p.$$

rugi zbir sa desne strane poslednje nejednakosti

$0<p<\frac{1}{m}$, funkcija $|f|^p$ integrabilna. Pošto je $S_n(t)$ polinom, i stoga je $|S_n(t)|^p$ uvek integrabilno, dovoljno je dokazati da $S_n(t)$ konvergira ka f u metričkom prostoru $L^p(T)$ za bilo koje $0<p<\frac{1}{m}$. Iz toga sledi da je $|f|^p$ takodje integrabilno. Dakle, dokazaćemo da $S_n(f)$ konvergira ka f u metričkom prostoru $L^p(T)$ za bilo koje $0<p<\frac{1}{m}$. Pošto za $t\neq 0$ imamo da je

$$f(t)-S_n(t)=\frac{1}{W^m}\sum_{|n|<\infty}[\Delta^m c(n)]e^{int}$$

$$-\frac{1}{W^m}\sum_{|j|\leq n}[\Delta^m c(j)]e^{ijt}+\frac{1}{W^m}\sum_{k=0}^{m-1}W^k A^{(m-1-k)}_{-n+k,n+k+1}$$

$$-\sum_{j=-n}^{-n+m-1}c(j)e^{ijt}+\sum_{j=n+1}^{n+m}c(j)e^{ijt},$$

to dobijamo

$$f(t)-S_n(t)=\frac{1}{W^m}\sum_{|j|\geq n+1}[\Delta^m c(j)]e^{ijt}$$

$$+\frac{1}{W^m}\sum_{k=0}^{m-1}W^k A^{(m-1-k)}_{-n+k,n+k+1}$$

$$-\sum_{j=-n}^{-n+m-1}c(j)e^{ijt}+\sum_{j=n+1}^{n+m}c(j)e^{ijt}.$$

BIBLIOGRAFIJA

[1] Y.Katznelson, An Introduction to Harmonic Analysis, Dover Publications Inc., (1976).

[2] W.H.Young, On the Fourier series of bounded variations, Proc. London. Math. Soc., 2, No. 12, p 41 (1913).

[3] A.N.Kolmogorov, Sur l'ordre de grandeur des coefficients de la série de Fourier-Lebesgue, Bull. Acad. Polon. Sci. Math. Astronom. Phys., p 83 (1923).

[4] S.Sidon, Hinreichende Bedingungen für den Fourier charakter einer Trigonometrischen Reihe, Jour. London. Math. Soc., 14, p 158 (1939).

[5] S.A.Telyakovskii, On a sufficient condition of Sidon for the integrability of trigonometric series, Math. Notes 14, p 742 (1973).

[6] G.A.Fomin, A class of trigonometric series, Math. Notes 23, p 117 (1978).

[7] J.W.Garrett and Č.V.Stanojević, On L^1-convergence of certain cosine sums, Proc. Math. Soc., 54, p 101 (1976).

[8] J.W.Garrett and Č.V.Stanojević, Necessary and sufficient conditions for L^1-convergence of

sastoji se od konačno mnogo članova od kojih je svaki $O(1)$ kad $n\to\infty$, a preostala dva člana su očigledno $O(1)$ i zato ih izostavljamo iz sledeće jednakosti.

Dakle,

$$\left(\int_T |f(t)-S_n(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} = O\Big(\sum_{|j|\geq n+1} |\Delta^m c(j)|\Big), \quad n\to\infty.$$

Konačno, pošto je red

$$\sum_{|n|<\infty} |\Delta^m c(n)|$$

konvergentan, sledi da je

$$\left(\int_T |f(t)-S_n(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} = o(1), \quad n\to\infty. \tag{4.3.2}$$

Na sličan način možemo da dokažemo (4.3.2) za $\overline{f}$.
Ovim je dokaz Stava 4.3.1. završen.

[16] W.O.Bray and Č.V.Stanojević, Tauberian L^1-convergence classes of Fourier series, I, Trans. Amer. Math. Soc., 275, No. 1, p 59 (1983).

[17] Č.V.Stanojević, Tauberian conditions for L^1-convergence of Fourier series, Trans. Amer. Math. Soc., 271, No. 1, p 237 (1982).

[18] W.O.Bray and Č.V.Stanojević, Tauberian L^1-convergence classes of Fourier series, II, preprint (1983).

[19] M.Petrović, Théorème sur les intégrales curvilignes, Publ.Math. de l'Univ. Beograd 2 (1933), 45-59.

[20] P.L.Uljanov, Application of A-integration on a class of trigonometric series, (in Russian) Math. Sbor. 35(77) (1954), 469-490.

[21] J.W.Garrett, C.S.Rees, and Č.V.Stanojević, L^1-convergence of Fourier series with coefficients of bounded variation, Proc. Amer. Math. Soc. 80, No. 3, 423-430 (1980).

ЗА МАТЕМАТИКУ, МЕХАНИКУ И АСТРОНОМИЈУ
БИБЛИОТЕКА
Број:
Датум:

trigonometric series, Proc. Amer. Math. Soc., 60, p 68 (1976).

[9] G.A.Fomin and S.A.Telyakovskii, On the convergence in L metric of Fourier series with quasi-monotone coefficients (Russian), Trudy Mat. Inst. Steklov. USSR, 134, p 310 (1975).

[10] J.W.Garrett, C.S.Rees, and Č.V.Stanojević, On L^1-convergence of Fourier series with guasi-monotone coefficients, Proc. Amer. Math. Soc., 72, No. 3, p 535 (1978).

[11] Č.V.Stanojević, Classes of L^1-convergence of Fourier and Fourier- Stieltjes series, Proc. Amer. Math. Soc. 82, No. 2, p 209 (1981).

[12] Vera B. Stanojevic, L^1-convergence of Fourier series with complex quasimonotone coefficients, Proc. Amer. Math. Soc., 86, No. 2, p 241 (1982).

[13] R.Bojanic and Č.V.Stanojević, A class of L^1-convergence, Trans. Amer. Math. Soc., 269, No. 2, p 677 (1982).

[14] R.R.Goldberg and Č.V.Stanojević, L^1-convergence and Segal algebras of Fourier series, preprint (1980).

[15] J.Karamata, Teorija i praksa Stieltjes-ova integrala, Srpska Akademija Nauka, Beograd 1949.