DD 50

UNIVERZITET U BEOGRADU

PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTETI
MATEMATIČKI FAKULTET

BEOGRAD

Vesna S. JEVREMOVIĆ

STATISTIČKA SVOJSTVA VREMENSKIH SERIJA SA EKSPONENCIJALNOM MARGINALNOM RASPODELOM I MEŠAVINAMA EKSPONENCIJALNIH RASPODELA

Doktorska disertacija

BEOGRAD
1991

MENTOR

Dr Jovan MALIŠIĆ
vanredni profesor

PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTETI
MATEMATIČKI FAKULTET
BEOGRAD

ČLANOVI KOMISIJE

Dr Stevan STOJANOVIĆ
vanredni profesor
Matematički fakultet
Beograd

Dr Zoran GLIŠIĆ
docent
Matematički fakultet
Beograd

Datum odbrane doktorske disertacije

STATISTIČKA SVOJSTVA VREMENSKIH SERIJA SA EKSPONENCIJALNOM MARGINALNOM RASPODELOM I MEŠAVINAMA EKSPONENCIJALNIH RASPODELA

Rezime

U radu se razmatraju modeli vremenskih serija autoregresionog tipa i tipa pokretnih sredina koji predstavljaju uopštenja postojećih procesa. Posmatrani procesi pripadaju klasi nelinearnih procesa sa slučajnim koeficijentima medju kojima postoji zavisnost. Odredjena su neka svojstva ovih procesa u okviru korelacione teorije.

Utvrdjuju se uslovi pri kojima posmatrani proces ima izabranu marginalnu raspodelu. Kao marginalne raspodele razmatraju se eksponencijalna raspodela, konveksne mešavine eksponencijalnih raspodela, Erlangova raspodela, gama raspodela i Laplasova raspodela. Posebno se razmatra klasa mešovitih eksponencijalnih raspodela sa negativnim koeficijentima, koja se prirodno javlja kod posmatranih procesa.

S obzirom da su posmatrani procesi verovatnosne mešavine slučajnih promenljivih, pogodni su za modeliranje. U radu su dati i neki postupci za ocenjivanje parametara posmatranih procesa na osnovu metode maksimalne verodostojnosti, izgladjivanja funkcije verodostojnosti i uslovnog matematičkog očekivanja. Jedan deo rada posvećen je problemu odredjivanja reda procesa. Metoda je ilustrovana numeričkim primerima.

Ključne reči

Autoregresioni proces, proces pokretnih sredina, marginalna raspodela, mešovita raspodela, ocenjivanje parametara, odredjivanje reda procesa.

STATISTICAL PROPERTIES OF TIME SERIES WITH EXPONENTIAL MARGINAL DISTRIBUTION AND WITH MIXTURE OF EXPONENTIAL DISTRIBUTIONS

Abstract

The models of autoregressive and moving average time series are explored. Those processes are a generalization of some earlier nonlinear processes with random coefficients. Some of their properties are investigated.

The conditions under which the marginal distribution of the process is exponential, mixed exponential, Erlang's distribution, gamma distribution or Laplace distribution are envisaged. The case of mixed exponential distribution with negative weights is also explored because those distributions arrise naturally as marginal distributions with the processes considered.

The problem of parameter estimation is explored. The maximum likelihood function, the smoothing of the likelihood function and the conditional expectation are used. One part is devoted to the problem of order determination. Those methods are illustrated by numerical examples.

Key-words

Autoregressive process, moving average process, marginal distribution, mixed distribution, parameter estimation, order determination.

S A D R Ž A J

Predgovor

Nelinearni modeli vremenskih serija sa negausovskom marginalnom raspodelom se poslednjih godina mnogo izučavaju. Razlozi za taj povećani interes su višestruki, a kao najvažnije možemo pomenuti:

a) u mnogim oblastima postoje vremenske serije čije su vrednosti pozitivne (hidrologija: protok reke, meteorologija brzina vetra, u sistemima masovnog opsluživanja, u raznim oblastima ekonomskih nauka, u tehici itd.)dovodi do potrebe za novim modelima različitim od postojećih i za novim raspodelama koje odgovaraju posmatranim obeležjima. Stoga, umesto "normalizacije" podataka, biramo drugu mogućnost, tj. raspodelu koja po prirodi stvari odgovara posmatranom obeležju. Takodje prirodno imamo procese kod kojih vrednost u trenutku t može biti formirana na razne načine, sa različitim verovatnoćama.

b) gausovski modeli procesa su detaljno proučeni: osnovna svojstva kao i nadgradnja: ocene parametara, intervali poverenja za ocene parametara, odredjivanje reda procesa ... . Stoga je bilo prirodno da se i u teoriji i u primenama započinje rad na novim modelima.

c) Takodje je razvoj računara doprineo razvoju novih metoda i modela , jer se i računski složene procedure i algoritmi potrebni za rešavanje odgovarajućih optimizacionih postupaka mogu brzo sprovesti u delo. Osim toga računari pružaju mogućnost simulacije raznovrsnih procesa, a time i "praktičnu" proveru teorijskih rezultata na dobijenim modeliranim vrednostima procesa.

U ovom radu se razmatraju neka statistička svojstva vremenskih serija autoregresionog tipa i tipa pokretnih sredina koji pripadaju klasi nelinearnih slučajnih procesa sa marginalnom raspodelom različitom od normalne.

Cilj rada je da se da što detaljnija slika posmatrane klase procesa i time omogući i njihova primena.

U uvodu je dat kratak pregled nelinearnih modela čije uopštenje u obliku AREX(n) i MAEX(n) modela proučavamo u daljem toku izlaganja. Takodje navodimo uslove postojanja tih modela i neke njihove osobine da bismo ih mogli uporediti sa uslovima postojanja i svojstvima modela koje razmatramo.

U delu 2 govori se o AREX(n) modelu i njegovim svojstvima. Najpre su izvedeni uslovi stacionarnosti. Pokazuje se, kao što je slučaj kod još nekih nelinearnih modela, Andel (1981), da su dobijeni uslovi slabiji nego kod odgovarajućeg linearnog modela. Zatim u delu (2.2) dajemo neka svojstva korelacione funkcije i vezu momenata procesa i momenata njegovog inovacionog niza.

S obzirom da razmatramo procese sa marginalnom raspodelom koncentrisanom na pozitivnom delu realne ose, Laplasova transformacija predstavlja pogodan analitički aparat za proučavanje ovakvih procesa. Na osnovu osobina Laplasove transformacije u delu (2.3) dajemo neka svojstva koja treba da ima marginalna raspodela procesa da bi proces bio AREX(1) tipa.

Razne marginalne raspodele AREX(1) procesa: eksponencijalna, mešovita eksponencijalna, gama raspodela, Erlangova raspodela, Laplasova raspodela i uslovi koje treba da ispunjavaju parametri procesa da bismo imali proces sa izabranom marginalnom raspodelom, razmatraju se u delu (2.4).

O mešovitim raspodelama se govori posebno u delu (2.5), jer pokazujemo da se mešovite raspodele sa negativnim koeficijentima prirodno javljaju kod razmatranih procesa. Dokazujemo da mešovite eksponencijalne raspodele sa negativnim koeficijentom procesa mogu biti unimodalne, te da predstavljaju novu klasu raspodela koje se mogu javiti kod posmatranih nelinearnih procesa.

Neki problemi estimacije za AREX procese se razmatraju u delu 3. Najpre se, u delu (3.1) navode neka rezultati u vezi ocenjivanja parametara za EAR i NEAR modele.

Ocenjivanje parametara za AREX(1) model dato je u delu (3.2) i zasniva se na primeni funkcije verodostojnosti i uslovnog matematičkog očekivanja.

Odredjivanje reda AREX(n) procesa dato je pomoću nove metode koja predstavlja varijantu corner metode i pokazuje se da elementi šeme pomoću koje odredjujemo red procesa predstavljaju asimptotski nepristrasne ocene odgovarajućih teorijskih veličina. O odredjivanju reda se govori u delu (3.3).

U delu 4. uvodimo novi tip procesa pokretnih sredina - MAEX(n) proces. Dokazujemo svojstva tog procesa i primenjujemo metodu iz (3.3) za odredjivanje reda procesa.

U dodatku su, uz kratke komentare dati neki programi u MATLAB-u , verzija 3.05, koji su korišćeni za modeliranje procesa i odredjena izračunavanja data u okviru rada.

Dalji rad na uvedenim modelima bio bi u pravcu formiranja odgovarajućeg ARMA modela i proučavanje osobina tako dobijenog procesa. Takodje treba razmatrati i mogućnost primene proučavanih procesa na realnim podacima iz hidrologije. Praktična primena modela dovela bi i do formiranja programskog paketa kojim bi se birao odgovarajući model procesa, odredjivao red procesa i ocenjivali njegovi parametri.

Zahvaljujem se mentoru, dr Jovanu Mališiću, vanrednom profesoru Matematičkog fakulteta Univerziteta u Beogradu, na nesebičnoj pomoći u pripremi i realizaciji ovog rada.

1. UVOD

1.1. O nelinearnim modelima

Standardni autoregresioni model prvog reda za stacionarni niz slučajnih promenljivih $\{ X_n , n \in \mathbb{D} \}$, $\mathbb{D} = \{\ldots,-1,0,1,2,\ldots\}$ definiše se relacijom:

$$X_n = \beta X_{n-1} + \xi_n \ , \ n \in \mathbb{D} \ , \qquad (1.1.1)$$

gde je parametar $\beta \in [-1,1]$, dok $\{ \xi_n , n \in \mathbb{D} \}$ predstavlja niz nezavisnih slučajnih promenljivih sa istom raspodelom (inovacioni niz). Iz pretpostavke da ξ_n ima normalnu raspodelu sledi da i X_n ima normalnu raspodelu. Ukoliko se pretpostavi neka druga raspodela za inovacioni niz, odnosno druga marginalna raspodela samog procesa X_n dolazi i do izmene u modelu (1.1.1). Izmena marginalne raspodele uslovljena je postojanjem negausovskih raspodela u realnim situacijama (Neke od oblasti u kojima se srećemo sa obeležjima koja imaju samo pozitivne vrednosti su hidrologija, meteorologija, sistemi masovnog opsluživanja.)

S obzirom da se eksponencijalna raspodela često pojavljuje, kao i da ima osobine pogodne za primenu analitičkih metoda, jedan deo alternativnih modela koristi upravo eksponencijalnu raspodelu kao marginalnu raspodelu posmatranog procesa. Razmotrićemo neke primere serija sa eksponencijalnom marginalnom raspodelom. To su samo neki primeri nelinearnih serija, a navodimo ih stoga što su AREX i MAEX modeli koji su predmet našeg izučavanja uopštenja tih modela.

Jedan od prvih takvih modela je EMA(1), uveden u članku Lawrance i Lewis (1977). To je stacionarni niz slučajnih promenljivih $\{ X_n , n \in \mathbb{D} \}$ koji se dobija od niza $\{ \xi_n , n \in \mathbb{D} \}$ nezavisnih slučajnih promenljivih sa eksponencijalnom raspodelom, po formuli:

$$X_n = \begin{cases} \beta \xi_n & \text{, sa verovatnoćom } \beta \\ \beta \xi_n + \xi_{n+1} & \text{, sa verovatnoćom } 1-\beta \end{cases} \qquad (1.1.2)$$

gde je parametar $\beta \in [0,1]$. Uporedo se, u istom radu razmatra i proces kod koga je u formuli (1.1.2) vrednost ξ_{n+1} zamenjena vrednošću ξ_{n-1}.

U radu Gaver, Lewis (1980) razmatra se AR model prvog reda, označen sa EAR(1), sa eksponencijalnom marginalnom raspodelom $\mathcal{E}(\lambda)$, $\lambda>0$:

$$X_n = \begin{cases} \rho X_{n-1} & \text{, sa verovatnoćom } \rho \\ \rho X_{n-1} + \xi_n & \text{, sa verovatnoćom } 1-\rho \end{cases} \tag{1.1.3}$$

$\rho \in [0,1]$, a $\{ \xi_n, n \in \mathbb{N} \}$ je inovacioni niz nezavisnih slučajnih promenljivih sa eksponencijalnom $\mathcal{E}(\lambda)$ raspodelom, $\lambda>0$.

Spajanjem ovih modela u autoregresioni proces pokretnih sredina dobijen je EARMA(1,1), Jacobs, Lewis (1977).

U radu Lawrance, Lewis (1981) ispituju se svojstva NEAR(1) modela (New Exponential AutoRegressive) oblika:

$$X_n = \begin{cases} \xi_n + \beta X_{n-1} & \text{, sa verovatnoćom } \alpha \\ \xi_n & \text{, sa verovatnoćom } 1-\alpha \end{cases} \tag{1.1.4}$$

Raspodela za inovacioni niz ξ_n je mešovita eksponencijalna. U radu Lawrance, Lewis (1985) razmatra se NEAR(2) model koji predstavlja autoregresioni proces drugog reda dobijen kao uopštenje (1.1.4):

$$X_n = \begin{cases} \beta_1 X_{n-1} + \xi_n & \text{, sa verovatnoćom } \alpha_1 \\ \beta_2 X_{n-2} + \xi_n & \text{, sa verovatnoćom } \alpha_2 \\ \xi_n & \text{, sa verovatnoćom } 1-\alpha_1-\alpha_2 \end{cases} \tag{1.1.5}$$

U članku J.Mališića (1987) razmatra se autoregresioni model sa eksponencijalnom raspodelom AREX(1) i njegova uopštenja, koja kao specijalni slučaj obuhvataju navedene modele. AREX(1) je autoregresioni proces prvog reda oblika:

$$X_n = \begin{cases} \xi_n & \text{, sa verovatnoćom } p_0 \\ \alpha X_{n-1} & \text{, sa verovatnoćom } p_1 \\ \beta X_{n-1} + \xi_n & \text{, sa verovatnoćom } q_1 \end{cases} \tag{1.1.6}$$

gde je $0 \le p_0, p_1, q_1 \le 1$, $q_1>0$, $p_0+p_1+q_1 = 1$, $0 \le \alpha, \beta \le 1$, dok slučajne promenljive inovacionog niza $\{ \xi_n, n \in N \}$ imaju eksponencijalnu $\mathcal{E}(\lambda)$ raspodelu, sa parametrom $\lambda > 0$. Takodje se pretpostavlja da su X_n i ξ_m nezavisne za $n < m$.

AREX(1) model obuhvata modele EAR(1) i NEAR(1) kao specijalne slučajeve.

Modeli (1.1.2)-(1.1.6) predstavljaju verovatnosne mešavine linearnih kombinacija nezavisnih slučajnih promenljivih što omogućava rad sa ovakvim procesima: primenu analitičkih metoda i korišćenje računara.

Napomenimo da u daljem, u formulama kojima se definišu procesi koje proučavamo izostavljamo reči "sa verovatnoćom" jer su svi procesi formirani na sličan način, i iz konteksta je jasno da su odgovarajući parametri verovatnoće.

1.2. USLOVI POSTOJANJA MODELA I OSOBINE MODELA

U ovom delu ćemo za modele iz razmatrane klase slučajnih procesa dati uslove, u funkciji parametara procesa, pri kojima se za zadatu marginalnu raspodelu procesa dobija odgovarajuća raspodela inovacionog niza. Naime, za razliku od standardnih gausovskih procesa, kod procesa koje ovde posmatramo nije uvek moguće odrediti raspodelu inovacionog niza na osnovu zadate marginalne raspodele procesa.

Numeričke i funkcionalne karakteristike koje ćemo dati za posmatrane procese omogućavaju poredjenje posmatranih procesa sa standardnim gausovskim i uočavanje sličnosti i razlika medju njima.

1.2.1. Model EMA(1)

Osnovna osobina ovog modela je eksponencijalna marginalna raspodela za X_n, što se dokazuje primenom Laplasove transformacije na (1.1.2). Pri tome ne postoje dodatna ograničenja na parametar procesa. Korelacija izmedju X_n i X_{n+1} je

$$\rho_1 = \mathrm{Corr}\,(X_n,\, X_{n-1}) = \beta(\beta-1),$$

dok su korelacije višeg reda jednake nuli,pa je spektralna gustina oblika:

$$f(\omega) = \frac{1}{\pi}\{\, 1 + 2\beta(1-\beta)\cos\omega\,\},\quad 0 \le \omega \le \pi.$$

Raspodela sume $T_r = \sum_{j=1}^{r} X_j$ se može dobiti pomoću Laplasove transformacije koja je za T_r jednaka :

$$\Phi_r(s) = \frac{\lambda}{\lambda+s}\left\{ \frac{\lambda(\lambda+2\beta s)}{(\lambda+\beta s)(\lambda+(1+\beta s)s)} \right\}^{r-1},\quad r \ge 1.$$

Zajednička raspodela $f_{n,n+1}(x,y)$ za X_n i X_{n+1} će biti dvodimenzionalna eksponencijalna raspodela, neprekidna po obe promenljive, ali će imati različite analitičke izraze u oblastima $\beta x > y$ i $\beta x < y$.
Uslovna matematička očekivanja $E(X_n|X_{n-1}=t)$ i $E(X_n|X_{n+1}=t)$ dobijamo iz dvostruke Laplasove transformacije:

$$\Phi_{X_n,X_{n+1}}(s_1,s_2) = E(\exp(-s_1X_n-s_2X_{n+1})) =$$

$$= \frac{\lambda^2(\lambda+\beta s_1+\beta s_2)}{(\lambda+\beta s_1)(\lambda+s_2)(\lambda+s_1+\beta s_2)},$$

Ova funkcija nije simetrična po s_1 i s_2, što se može očekivati jer proces nije vremenski reverzibilan. Po tom svojstvu se ova zajednička raspodela razlikuje od nekih ranije razmatranih dvodimenzionalnih raspodela. Eksplicitni oblik zajedničke gustine raspodele možemo dobiti korišćenjem inverzne Laplasove transformacije ili direktnim izračunavanjem.

Uslovna očekivanja se dobijaju iz $\Phi_{X_n,X_{n+1}}(s_1,s_2)$ tako što npr. za $E(X_n/X_{n-1}=t)$ tu funkciju diferenciramo po s_2, onda uzimamo vrednost tog izvoda u tački $s_2=0+$ i zatim odredimo inverznu Laplasovu transformaciju po s_1, i konačno dobijeni izraz podelimo marginalnom gustinom za X_{n-1}. Tako dolazimo do rezultata:

$$E(X_n|X_{n-1}=t) = \frac{1}{\lambda}\left[\beta\lambda t + \frac{1-2\beta}{1-\beta} + \frac{\beta}{1-\beta}\exp(-\lambda(1-\beta)t/\beta)\right],$$

dok je

$$E(X_n | X_{n+1} = t) = \frac{1}{\lambda}\left[1 + \beta - \exp(-\lambda(1-\beta)t/\beta)\right].$$

Obe regresije imaju eksponencijalnu komponentu. Za velike vrednosti t zapažamo različito ponašanje ovih dveju funkcija, što proizilazi iz strukture samog procesa i činjenice da on nije reverzibilan. U istom članku [12] se takodje daju: raspodela N_t broja dogadjaja u intervalu $(0,t]$, počev od nekog proizvoljnog dogadjaja, funkcija intenziteta kao izvod po t očekivanja $E(N_t)$, uslovne disperzije $Var(X_n | X_{n-1} = t)$ i $Var(X_n | X_{n+1} = t)$, uslovne korelacije za X_{n-1}, X_{n+1} po datom X_n, izvode uslovi stacionarnosti.

Za posmatrani model procesa pokretnih sredina vrednost korelacije $\rho_1 = \beta(1-\beta)$ pripada intervalu $[0,1/4]$, što se može poboljšati ako posmatramo model [8]:

$$X_n = \begin{cases} \xi_n & \text{, sa verovatnoćom } p_0 \\ \beta\,\xi_{n-1} & \text{, sa verovatnoćom } q_1. \\ \beta\xi_{n-1} + \xi_n & \text{, sa verovatnoćom } p_1 \end{cases}$$

U ovom modelu je $\rho_1 \in [0,1/2]$, kao što je slučaj kod gausovskog modela pokretnih sredina. Ako u ovom modelu izaberemo neku raspodelu kao raspodelu za slučajne promenljive iz niza ξ_n, nije teško dokazati, primenom Laplasove transformacije, da se raspodela za X_n uvek može odrediti. Ako je raspodela za ξ_n eksponencijalna, onda je, pri uslovu $\beta p_0 + q_1 > \beta$, raspodela za X_n konveksna mešovina eksponencijalnih raspodela. Ako navedeni uslov nije ispunjen onda će raspodela za X_n biti mešavina eksponencijalnih raspodela, ali sada sa negativnim koeficijentom. Na taj način se za posmatranu klasu procesa prirodno vezuje klasa mešovitih raspodela sa negativnim koeficijentima.

O ovom modelu se detaljnije govori u delu 4.

1.2.2. Modeli NEAR

U radu [14] se razmatra autoregresioni model (1.1.4) prvog reda sa dva parametra: NEAR(1). Posmatrani model je markovski proces prvog reda, i predstavlja jednostavnu slučajnu linearnu kombinaciju nezavisnih slučajnih promenljivih sa eksponencijalnom raspodelom, pa je stoga pogodan za simulaciju. Takodje je to model sa slučajnim koeficijentima i može biti predstavljen u obliku:

$$X_n = A_n X_{n-1} + \xi_n \ , \quad n=0,1,2,\ldots,$$

gde je raspodela slučajne veličine A_n data sa :

$$A_n : \begin{pmatrix} 0 & \beta \\ 1-\alpha & \alpha \end{pmatrix},$$

i A_n je nezavisna od X_m i ξ_m za svako n i m . Ako je marginalna raspodela za X_n eksponencijalna sa parametrom λ, $\lambda>0$, onda se, primenom Laplasove transformacije dobija da ξ_n predstavlja verovatnosnu mešavinu eksponencijalnih raspodela

$$\xi_n = \begin{cases} E_n & , \text{ sa verovatnoćom } \dfrac{1-\beta}{1-(1-\alpha)\beta} \\ (1-\alpha)\beta E_n & , \text{ sa verovatnoćom } \dfrac{\alpha\beta}{1-(1-\alpha)\beta} \end{cases},$$

gde je E_n, $n=0,1,2,\ldots$ niz nezavisnih slučajnih promenljivih sa istom eksponencijalnom $\mathcal{E}(\lambda)$ raspodelom.

NEAR(1) model sa mešovitom eksponencijalnom marginalnom raspodelom je opisan u [13].

Kao rezultat modeliranja, varirajući parametre, dobijamo procese kod kojih preovladjuju nizovi opadajućih vrednosti, procese kod kojih se najčešće javljaju rastuće vrednosti, a takodje i procese kod kojih imamo i rastuće i opadajuće nizove vrednosti. Jedna od veličina koje predstavljaju pokazatelje takvog ponašanja je i verovatnoća $P=P(X_n<X_{n-1})$, koja je jednaka:

$$\frac{(1-\alpha)(1+\beta)}{2(1+(1-\alpha)\beta)}+\frac{\alpha(1-\beta)}{(2-\beta)(1-\alpha\beta)}, \quad \alpha\neq 1, \ \beta\neq 1.$$

U slučaju kad je $P=1/2$ govorimo o delimično reverzibilnom procesu. Iz te pretpostavke sledi veza parametara $\beta=1/(2-\alpha)$. Interesantno je napomenuti da i iz uslova:

$$\mathrm{Corr}(X_n, X^2_{n-1}) = \mathrm{Corr}(X^2_n, X_{n-1})$$

sledi ista veza parametara α i β.

Autokorelacije su $\rho_k = (\alpha\beta)^k, k\in\mathbb{N}$, što predstavlja sličnost sa standardnim gausovskim autoregresionim procesom.

Da bi se dobio proces sa eksponencijalnom marginalnom raspodelom kod koga su moguće i negativne autokorelacije, kao što je slučaj sa standardnim autoregresionim procesom, autori uvode $NEAR^-(1)$ model definisan relacijama:

$$\begin{cases} X_n = \xi_n + \beta V_n X'_{n-1}, & V_n : \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1-\alpha & \alpha \end{pmatrix} \\ X'_n = \xi'_n + \beta V'_n X_{n-1}, & V'_n : \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1-\alpha & \alpha \end{pmatrix} \end{cases},$$

Ovim ukrštanjem se dobija specijalni autoregresioni model drugog reda:

$$X_n = \xi_n + \beta V_n \xi'_{n-1} + \beta^2 V_n V'_{n-1} X_{n-2},$$

sa korelacijom

$$Corr(X_n, X_{n-r}) = \begin{cases} (\alpha\beta)^r, & r \text{ parno} \\ (\alpha\beta)^r Corr(X_n, X'_n), & r \text{ neparno.} \end{cases}$$

Ako je $\delta = Cov(\xi_n, \xi'_n)$, $\nu = Cov(V_n, V'_n)$, uz pretpostavku stacionarnosti, dobijamo

$$Corr(X_n, X'_n) = \frac{\delta + \beta^2\nu}{1-(\alpha^2+\nu)\beta^2}.$$

Najveća moguća negativna korelacija se dobija pri maksimalnoj negativnoj korelaciji medju parovima (ξ_n, ξ'_n) i (V_n, V'_n). U navedenom članku dokaz ovog svojstva nije dat.

U radu se dalje odredjuje zajednička raspodela X_n i X_{n-1} za NEAR(1) i zajednička raspodela za X_n i X'_n u $NEAR^-(1)$ slučaju. Takodje se daje zajednička raspodela za X_n i X_{n-r} kao i raspodela suma $\sum_{j=1}^{r} X_{n-j}$.

U radu [15] utvrdjuje se da za eksponencijalnu marginalnu raspodelu $\mathcal{E}(\lambda)$ niza X_n iz (1.1.5) nema dodatnih ograničavajućih uslova za parametre $\beta_1, \beta_2, \alpha_1, \alpha_2$ i daje raspodela inovacionog niza ξ_n kao verovatnosna mešavina tri eksponencijalne raspodele. Odgovarajuće verovatnoće i parametre tih raspodela izračunavamo pomoću Laplasove transformacije izraza (1.1.5).

Kad se neki model primenjuje na realnim podacima treba proveriti njegovu adekvatnost. Uobičajeni način za tu proveru je ispitivanje reziduala koji predstavljaju razliku izmedju observacija i odgovarajućih vrednosti iz modela. Tako se za standardni AR(1) model: $X_t = \alpha X_{t-1} + Z_t$, gde su Z_t nezavisne slučajne promenljive sa istom raspodelom i parametrima $EZ_t=0$, $DZ_t=\sigma^2$, ako je α poznato stvarna greška je $z_t=x_t-\alpha x_{t-1}$, a ako je $\hat{\alpha}$ ocena parametra α dobijena npr. metodom najmanjih kvadrata, onda je greška: $\hat{z}_t=x_t-\hat{\alpha}x_{t-1}$.

Za NEAR(2) model formiraju se reziduali oblika:

$$R_n = X_n - a_1 X_{n-1} - a_2 X_{n-2}, \quad a_1 = \alpha_1\beta_1, \quad a_2 = \alpha_2\beta_2, \quad n\in\mathbb{D}$$

i pokazuje se da su nekorelirani. Takodje se dokazuje i da je:

$$\mathrm{Cov}(R_n^2, R_{n+l}) = \mathrm{Cov}(R_n, R_{n-l}^2).$$

1.2.3. EARMA(p,q) proces

Novi model za autoregresioni proces reda p sa eksponencijalnom marginalnom raspodelom EAR(p) i uopštenje EMA(q) procesa EMA(1) povezani su, u radu [16] u EARMA(p,q) proces koji predstavlja analogon standardnom gausovskom ARMA(p,q) procesu.

Proces EAR(p) je oblika:

$$X_i = \begin{cases} \alpha_1 X_{i-1} + \xi_i, & \text{sa verovatnoćom } a_1 \\ \alpha_2 X_{i-2} + \xi_i, & \text{sa verovatnoćom } a_2, \\ \dots & \\ \alpha_p X_{i-p} + \xi_i, & \text{sa verovatnoćom } a_p \end{cases}$$

gde je $a_1=1-\alpha_2$, $a_p=\prod_{j=2}^{p}\alpha_j$, $a_k=\prod_{j=2}^{k}\alpha_j(1-\alpha_{k+1})$, $k=2,\dots,p-1$. Korelaciona struktura ovakvog procesa se detaljno analizira za p=2 i daju se oblasti mogućih vrednosti za koeficijente autokorelacije ρ_1 i ρ_2.

Model pokretnih sredina EMA(q) je:

$$X_i = \begin{cases} \beta_q E_i & \text{, sa verovatnoćom } b_{q+1} \\ \beta_q E_i + \beta_{q-1} E_{q-1} & \text{, sa verovatnoćom } b_q \\ \dots & \dots \\ \beta_q E_i + \dots + \beta_1 E_{i-q+1} + E_{i-q} & \text{. sa verovatnoćom } b_1 \end{cases} ,$$

gde su b_i odredjene funkcije koeficijenata $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_q$, date formulom:

$$b_i = \begin{cases} \beta_q & , i = q+1 \\ (1-\beta_q)\dots(1-\beta_i)\beta_{i-1}, & q \geq i \geq 2, \ q \geq 2. \\ (1-\beta_q)\dots(1-\beta_1) & , i = 1 \end{cases}$$

Standardnim postupkom, množenjem sa X_{i-r} i računanjem matematičkog očekivanja, koristeći veze b_i i β_j dobijamo da je:

$$\rho_r^{(q)} = \operatorname{Corr}(X_i, X_{i-r}) = \begin{cases} \sum_{j=1}^{q-r+1} b_j b_{j+r} & , 1 \leq r \leq q \\ 0 & , q+1 \leq r \end{cases} .$$

Indeks disperzije, definisan izrazom:

$$J = 1 + 2 \sum_{j=1}^{\infty} \rho_j$$

predstavlja meru totalne korelacije procesa i pokazuje se da je za EMA(q) proces granična vrednost tog indeksa , kad $q \to \infty$ jednaka 2, što znači da povećavanje reda q procesa, počev od neke vrednosti ne doprinosi značajnom povećavanju indeksa disperzije, što opravdava , u praksi uobičajeno, biranje procesa nižeg reda za model neke realne pojave.

Polazeći od EMA(q) modela dolazimo do mešovitog EARMA(p,q) procesa:

$$X_i = \begin{cases} \beta_q E_i & \text{, sa verovatnoćom } b_{q+1} \\ \beta_q E_i + \beta_{q-1} E_{i-1} & \text{, sa verovatnoćom } b_q \\ \dots & \dots \\ \beta_q E_i + \dots + \beta_1 E_{i-q+1} & \text{, sa verovatnoćom } b_2 \\ \beta_q E_i + \dots + \beta_1 E_{i-q+1} + A_{i-q}^{(p)} & \text{, sa verovatnoćom } b_1 \end{cases}$$

gde su verovatnoće b_i definisane kao i u EMA(q) modelu, dok je $A_{i-q}^{(p)}$ EAR(p) proces. Ovakvim postupkom je sačuvano svojstvo da se proces formira od nezavisnih slučajnih promenljivih sa eksponencijalnom raspodelom. Korelaciona struktura EARMA(p,q) procesa je slična korelacionoj strukturi standardnog ARMA(p,q) procesa.

2. Modeli AREX

Uopštenje NEAR modela u obliku AREX modela razmatrano je u radu [19]. Ustanovljeni su uslovi pri kojima je marginalna raspodela za X_n eksponencijalna, a raspodela invacionog niza verovatnosna mešavina tri eksponencijalne raspodele. Ti uslovi se mogu svesti na: $\alpha \leq \beta$ i $p_0 \beta < \alpha - p_1$.

Od interesa je razmotriti koje raspodele i pri kojim uslovima mogu biti marginalne raspodele u AREX modelu. U radu [10] su izvedeni uslovi kada marginalna raspodela AREX procesa kod koga je $\alpha = \beta$ može biti mešovita eksponencijalna sa gustinom oblika:

$$a_1 \lambda e^{-\lambda x} + a_2 \mu e^{-\mu x}, \; a_1, \; a_2, \; \lambda, \; \mu > 0, \; a_1 + a_2 = 1.$$

Utvrdjeno je da će tada raspodela inovacionog niza predstavljati verovatnosnu mešavinu četiri eksponencijalne raspodele, a ukoliko je $\alpha \neq \beta$ dobijamo mešavinu šest eksponencijalnih raspodela.

Kao nesimetrične marginalne raspodele eksponencijalnog tipa mogu se razmatrati i gama raspodela i Erlangova raspodela. Ako je $\alpha = \beta$, a marginalna raspodela gama raspodela sa Laplasovom transformacijom: $\lambda^2(\lambda+s)^{-2}$ može se ustanoviti da se za ξ_n ne može dobiti raspodela koja bi bila verovatnosna mešavina nekih raspodela. U slučaju Erlangove raspodele reda n, pri $\alpha = \beta = 1$ i odredjenih dodatnim uslovima za parametre raspodele i samog procesa, moguće je dobiti raspodelu inovacionog niza kao mešavinu eksponencijalnih gama i Erlangovih raspodela odgovarajućeg reda. Primenom Laplasove transformacije se dokazuje i da marginalna raspodela ne može biti stabilna raspodela sa asimetričnom gustinom $f(x) > 0$, $x > 0$.

Osobine AREX modela koje su slične osobinama NEAR modela su:

a) Korelaciona funkcija je oblika $R_k = (p_1\alpha + q_1\beta)\, R_{k-1}$, pa su autokorelacije $\rho_k = (p_1\alpha + q_1\beta)^k$, $\rho_{-k} = \rho_k$. $k > 0$, $\rho_0 = 1$.

b) Neka je $\alpha = EA_n$, $\mu = EX_n$. Može se dokazati da su reziduali oblika $R_n = X_n - \mu - \alpha(X_{n-1} - \mu)$nekorelirani.

c) Iz reprezentacije $X_n = A_n X_{n-1} + B_n \xi_n$ sledi da je granična vrednost u srednjem kvadratnom:

$$\underset{k\to\infty}{\mathrm{l.i.m.}}\, X_{n+k} = \sum_{j=1}^{k-1}\left(\prod_{l=0}^{j-1} A_{n+k-l}\right) B_{n+k-j}\xi_{n+k-j} + B_{n+k}\xi_{n+k}.$$

O ovim i o još nekim svojstvima AREX(n) procesa biće više govora u narednim poglavljima.

Najpre ćemo razmotriti problem stacionarnosti AREX procesa.

2.1. Uslovi stacionarnosti AREX(n) procesa

U ovom delu razmatramo uslove stacionarnosti AREX(n) procesa. Odredićemo vezu medju koeficijentima procesa koja obezbedjuje da proces bude stacionaran u širem smislu. U poglavljima koja slede razmotrićemo uslove koje treba da ispunjavaju parametri procesa da bi on imao izabranu marginalnu raspodelu.

AREX(n) je model autoregresionog procesa n-tog reda oblika:

$$X_t = \begin{cases} \xi_t & , \; p_0 \\ \alpha_1 X_{t-1} + \xi_t & , \; p_1 \\ \beta_1 X_{t-1} & , \; q_1 \\ \cdots & \\ \alpha_n X_{t-n} + \xi_t & , \; p_n \\ \beta_n X_{t-n} & , \; q_n \end{cases}.$$

gde su p_0, p_k, q_k verovatnoće čiji je zbir jednak 1, a parametri α_k, β_k realni brojevi iz intervala (0,1).

Možemo ovaj proces posmatrati kao proces sa slučajnim koeficijentima oblika:

$$X_t = \sum_{j=1}^{n} b_j(t)X_{t-j} + d(t)\xi_t \qquad (2.1.1)$$

gde je raspodela slučajnih promenljivih $b_j(t)$ i $d(t)$ data sa:

$$b_j(t) : \begin{pmatrix} 0 & \alpha_j & \beta_j \\ 1-p_j-q_j & p_j & q_j \end{pmatrix}, \quad d(t) : \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1-\sum_{j=0}^{n} p_j & \sum_{j=0}^{n} p_j \end{pmatrix}$$

za svako t, j = 1,2,...,n. U trenutku t su $b_j(t)$ i $d(t)$ zavisne slučajne promenljive:

$P(b_j(t) = \alpha_j,\ d(t)=1) = p_j$. $P(b_j(t) = \beta_j,\ d(t)=0) = q_j$.

Slučajne promenljive $b_j(t)$ i $d(s)$ su nezavisne za $t\neq s$. Promenljive $b_j(t)$ su medjusobno nezavisne i nezavisne od X_{t-k}, za svako j, t, k. Iz (2.1.1) sledi:

$$E\,X_t = \sum_{j=1}^{n} E\,(b_j(t)X_{t-j}) + E(\,d(t)\xi_t),$$

pa ako je: $E(b_j(t)) = B_j$, $d(t)\xi_t = Y_t$, $EY_t = d$ i $EX_t = m\neq 0$, možemo (2.1.1) transformisati u obliku:

$$X_t - m = \sum_{j=1}^{n} b_j(t)(X_{t-j} - m) + m\sum_{j=1}^{n}(b_j(t)-B_j) + Y_t - d\,.$$

Na osnovu toga umesto AREX(n) procesa posmatra se odgovarajući proces sa slučajnim koeficijentima i matematičkim očekivanjem 0:

$$X_t = \sum_{j=1}^{n} b_j(t)X_{t-j} + m\sum_{j=1}^{n}(b_j(t)-B_j) + Y_t$$

u kome su Y_t i $b_j(t)$ zavisne slučajne veličine. Možemo razmatrati i nešto opštiji slučaj autoregresionog procesa sa slučajnim koeficijentima:

$$X_t = \sum_{j=1}^{n} b_j(t)X_{t-j} + \sum_{j=1}^{n} c_j(b_j(t)-B_j) + Y_t\,, \qquad (2.1.2)$$

gde su $c_1,\ldots,c_n$ neke konstante, $EX_t=0$, $EY_t=0$, $Eb_j(t)=B_j$, $EY_t^2=\sigma^2$.

U modelu (2.1.2) su : $b_j(t)$ i X_s nezavisne za svako t i s, $b_j(t)$ su medjusobno nezavisne, $b_j(s)$ i Y_t nezavisne za $s\neq t$ i zavisne za s=t. Neka je, dalje: $E(b_j(t)-B_j)Y_s = K_j$, za $t \neq s$, dok je za t=s to očekivanje jednako nuli. U radu Andel [2], posmatraju se slični procesi sa slučajnim koeficijentima, ali su sve slučajne veličine koje se javljaju nezavisne.

Za AREX(n) proces sveden na oblik (2.1.2) dokazujemo sledeća tvrdjenja:

T1. Proces X_t dat u (2.1.2) je stacionaran ako i samo ako je:

$$\mathrm{Var}(X_1,X_2,\dots,X_n)' = \mathrm{Var}(X_2,X_3,\dots,X_{n+1})' \tag{2.1.3}$$

Dokaz: Da bismo dokazali tvrdjenje 1 izračunaćemo $E(X_hX_j)$ i $E(X_{h+1}X_{j+1})$ i pokazati da su, na osnovu pretpostav- ke, te vrednosti iste. Imamo da je:

$$E(X_hX_j) = E\left[\sum_{k=1}^{n} b_k(h)X_{h-k} + \sum_{k=1}^{n} c_k(b_k(h)-B_k) + Y_h\right] X_j,$$

i za $h \neq j$ imaće vrednost $\sum_{k=1}^{n} B_k \mathrm{cov}(X_{h-k},X_j)$, dok za h=j moramo još izračunati $E(b_k(h) - B_k)X_j$ i $E(Y_hX_j)$. Zamenjujući X_j u ovim izrazima odgovarajućim izrazom iz (2.1.2), i koristeći uvedene oznake dobijamo da je:

$$E(b_k(j)-B_k)X_j = \sum_{m=1}^{n} c_m \mathrm{cov}(b_k(j),b_m(j)) + K_k,$$

$$E(Y_jX_j) = \sum_{m=1}^{n} c_m K_m + \sigma^2.$$

Za $E(X_{h+1}X_{j+1})$, pri h=j dobijamo iste vrednosti kao ove već izračunate, jer iz pretpostavke dobijamo da je $\mathrm{cov}(X_{h-k},X_j)$ jednaka $\mathrm{cov}(X_{h+1-k},X_{j+1})$ tako da je zaista:

$$E(X_jX_h)=E(X_{j+1}X_{h+1}), \quad E(X_jX_h) = E(X_{j+s}X_{h+s}),$$

te da korelaciona funkcija zavisi samo od razlike argumenata i da je proces stacionaran u širem smislu, što je i trebalo dokazati.

T2. Uslov (2.1.3) važi ako i samo ako matrica

$\mathbb{B}=\mathrm{Var}(X_1,\dots,X_n)'$ predstavlja rešenje jednačine:

$$\mathbb{B} = \mathbb{M}\mathbb{B}\mathbb{M}' + (\sigma^2 + \mathrm{Tr}\ \Delta^{*}\mathbb{B} + c'\Delta c + 2c'K)J. \qquad (2.1.4)$$

Matrice koje se javljaju u izrazu (2.1.4) su:

$$\mathbb{M} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ \beta_n & \beta_{n-1} & \beta_{n-2} & & \beta_1 \end{bmatrix}, \quad \mathbb{K} = \begin{bmatrix} K_1 \\ K_2 \\ \dots \\ K_n \end{bmatrix}, \quad \mathbb{C} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \dots \\ c_n \end{bmatrix},$$

$$\Delta^{*} = \mathrm{cov}(b_n(t), b_{n-1}(t), \dots, b_1(t)),$$

$$\Delta = \mathrm{cov}(b_1(t), b_2(t), \dots, b_n(t)).$$

Dokaz. Na osnovu modela (2.1.2) može se posmatrani proces zapisati u matričnom obliku:

$$\begin{bmatrix} X_2 \\ X_3 \\ \dots \\ X_{n+1} \end{bmatrix} = M_{n+1} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \dots \\ X_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ \sum_{k=1}^{n} c_k(b_k(n+1)-\beta_k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ Y_{n+1} \end{bmatrix},$$

gde je M_{n+1} blok matrica oblika $(s=n+1)$:

$$M_s = \begin{bmatrix} \mathbb{O} & \vdots & I \\ \dots & \dots & \dots \\ & b & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ b_n(s) & b_{n-1}(s) & b_{n-2}(s) & \dots & b_1(s) \end{bmatrix}.$$

Neka su M_{ij} elementi matrice M_{n+1}, $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)'$, i neka je

$$Z_i = \sum_{h=1}^{n} M_{ih} X_h \quad \text{i} \quad Z = (Z_1, Z_2, \dots, Z_n)'.$$

Na osnovu tih relacija možemo izračunati i $\mathrm{cov}(Z_i, Z_j)$.

Kako je $\mathrm{cov}(Z_i, Z_j) = \sum_{h=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \mathrm{cov}(M_{ih}X_h, M_{jk}X_k)$, računamo prvo

$$\mathrm{cov}(M_{ih}X_h, M_{jk}X_k) = H_{ij}\mathrm{cov}(X_h, X_k) + E\,M_{ih}\mathrm{cov}(X_h, X_k)\,E\,M_{jk},$$

gde je

$$H_{ij} = \mathrm{cov}\ (M_{ih}, M_{jk}) = \begin{cases} \Delta^{*}, & \text{za } i=j=n \\ 0, & \text{inače} \end{cases}.$$

Dalje ako označimo $\mathbb{B}_{hk} = \mathrm{cov}(X_h, X_k)$, $\mathbb{B} = (\mathbb{B}_{hk})_{h,k=\overline{1,n}}$ i ako je M matrica $M = E\, M_{n+1}$, dobijamo da je:

$$cov(Z_i, Z_j) = \sum_h \sum_k cov(M_{ih}, M_{jk}) \mathbb{B}_{hk} + \sum_h \sum_k E\, M_{ih} \cdot \mathbb{B}_{hk} \cdot E\, M_{jk} =$$

$$= Tr\, H_{ij} \mathbb{B} + M\mathbb{B}M'.$$

Na osnovu do sada izračunatog imamo da je:

$$Var\ Z = (Tr\ \Delta^* \mathbb{B})J + M\mathbb{B}M',$$

gde je J matrica $J=(j_{kl})_{nxn}$ za koju je $j_{kl}= 1$ za $k=l=n$, a inače je $j_{kl}=0$. Dalje računamo:

$$Var(0,\ldots,0, \sum_k c_k(b_k(n+1)-B_k))' = (c'\Delta c)J,$$

$$Var(0,\ldots,0,Y_{n+1})' = \sigma^2 J.$$

Neka je u daljem delu dokaza $\sum$ oznaka za: $\sum_k c_k(b_k(n+1)-B_k)$.

Kako je

$$Var\left(Z+ \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \sum \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ Y_{n+1} \end{bmatrix} \right) = Var(Z+U+V)=$$

$$= VarZ+VarU+VarV+2(covZU+covZV+covUV)$$

i kako je covZU=covZV=0, a covUV=c'K, da bi taj sabirak u rezultatu bio na odgovarajućem mestu treba ga još pomnožiti matricom J. Ovim smo izračunali sve elemente i potvrdili da će matrica $\mathbb{B}$ biti upravo onog oblika koji je dat u tvrdjenju teoreme.

Dokažimo sada još jedno tvrdjenje koja povezuje osobine matrice $\mathbb{B}$ sa korenima polinoma čiji su koeficijenti $1, B_1, \ldots, B_n$.

T3. **Neka je $z^n - B_1 z^{n-1} - B_2 z^{n-2} - \ldots - B_n \neq 0$, $|z| \geq 1$ i neka je $\mathbb{B}^+$ rešenje matrične jednačine $\mathbb{B}^+ = M\mathbb{B}^+M' + J$. Ako je $1 - Tr\Delta^*\mathbb{B}^+ > 0$ onda je:**

$$\mathbb{B} = (1 - Tr\Delta^*\mathbb{B}^+)^{-1}(\sigma^2 + c'\Delta c + 2c'K)\ \mathbb{B}^+$$

jedinstveno rešenje matrične jednačine (2.1.4) i pri tome će matrica $\mathbb{B}$ biti pozitivno definitna.

Dokaz. Dokazaćemo da su koreni polinoma:

$$z^n - B_1 z^{n-1} - B_2 z^{n-2} - \dots - B_n$$

sopstvene vrednosti matrice $M = EM_{n+1}$. Ako je I jedinična matrica odgovarajućeg reda, i ako D_n označava matricu $M-\lambda I$, razvojem D_n po prvoj vrsti dobijamo rekurentnu formulu:

$$D_n = -\lambda D_{n-1} - (-1)^n B_n,$$

što znači da će nule karakterističnog polinoma ove matrice biti upravo nule polinoma koji figuriše u tvrdjenju teoreme. Dokaz je dalje isti kao kod Anđela, jer su sve bitne izmene izmene, vezane za zavisnost slučajnih promenljivih iz modela sadržane u dokazima tvrdjenja 1 i 2. Napomenimo da ako ne važi (2.1.4) nema pozitivno definitnog rešenja jednačine (2.1.6), a ako ne važi (2.1.5), tada ili nema rešenja jednačine (2.1.6) ili rešenje postoji ali nije pozitivno definitna matrica, pa ne može biti korelaciona matrica.

Kao posledicu tvrdjenja 3 navodimo sledeće tvrdjenje, kojim se utvrdjuju uslovi stacionarnosti AREX(1) procesa koji ćemo u daljem najviše koristiti.

Posledica. Ako za realne brojeve α, β, p_1 i q_1 važe uslovi:

$$\alpha^2 p_1 + \beta^2 q_1 < 1 \quad \text{i} \quad \alpha p_1 + \beta q_1 < 1,$$

onda postoji stacionarno rešenje za AREX(1) proces čiji su koeficijenti α, β, p_1 i q_1.

Primećujemo da smo dobili nešto slabiji uslov nego što je uslov stacionarnosti odgovarajućeg linearnog gausovskog AR(1) procesa. Ovo, pomalo neočekivano svojstvo zapaženo je i kod nekih drugih nelinearnih modela (videti u radovima J. Anđela). Očigledno imamo da će za α, $\beta \in (0,1)$ važiti ovi uslovi te da će proces AREX(1) u obliku u kome ga u ovom radu koristimo biti stacionaran.

U daljem ćemo smatrati da su koeficijenti α_j, $\beta_j \in (0,1]$, da bismo obezbedili da marginalna raspodela može da bude eksponencijalna ili neka druga raspodela sa gustinom koncentrisanom u desnoj poluravni.

Neka su ispunjeni uslovi stacionarnosti AREX(n) procesa. Iz (2.1.1) možemo direktno izračunati:

$$E\,X_t = \frac{E\,d(t)\;E\,\xi_t}{1 - \sum_{j=1}^{n} E\,b_j(t)} \tag{2.2.1}$$

a takodje dobiti da za korelacionu funkciju $K(h)$ stacionarnog AREX(n) procesa važi:

$$K(h) = \sum_{j=1}^{n} E\,b_j(t) \cdot K(h-j) \tag{2.2.2}$$

Tako da imamo sistem linearnih jednačina po $B_j = E\,b_j(t)$:

$$\begin{aligned} K(1) &= B_1 K(0) + B_2 K(1) + \dots + B_n K(n-1) \\ K(2) &= B_1 K(1) + B_2 K(0) + \dots + B_n K(n-2) \\ &\dots \\ K(n) &= B_1 K(n-1) + B_2 K(n-2) + \dots + B_n K(0) \end{aligned} \tag{2.2.3}$$

Rešavanjem ovog sistema možemo dobiti $B_1, B_2, \dots, B_n$ na osnovu poznatih vrednosti korelacione funkcije $K(0)$, $K(1)$, ..., $K(n)$ ili na osnovu ocena vrednosti korelacione funkcije u tačkama $0,1,\dots,n$ da dobijemo ocene veličina B_j, $j=1,2,\dots,n$.

U vezi sa proučavanjem korelacione funkcije uočena je mogućnost izmene parametara AREX modela tako da korelaciona funkcija ostane nepromenjena. Navodimo dva takva tvrdjenja za AREX(1) model.

T1. Neka su X_t i X'_t procesi AREX(1) tipa sa eksponencijalnom marginalnom raspodelom definisani na sledeći način:

$$X_t = \begin{cases} \xi_t & , p_0 \\ \beta X_{t-1} + \xi_t & , p_1 \\ \beta X_{t-1} & , q_1 \end{cases}, \quad X'_t = \begin{cases} \xi'_t & , p'_0 \\ \beta X'_{t-1} + \xi'_t & , p'_1 \\ \beta X'_{t-1} & , q'_1 \end{cases}$$

Ako je $\varepsilon \in (0,q_1)$ i $p_1'=p_1+\varepsilon$, $q_1'=q_1-\varepsilon$, i $p_o'=p_o$ proces X_t' ima istu korelacionu funkciju kao proces X_t, a inovacioni niz ξ_t' će imati odgovarajuću mešovitu eksponencijalnu raspodelu:

$$\xi_t' = \begin{cases} \eta_n & , A_1' \\ \dfrac{p_o\beta\eta_n}{p_o+p_1'} & , 1-A_1' \end{cases} \text{, gde je } A_1' = \frac{1-\beta}{p_o+p_1'-p_o\beta} .$$

Dokaz. Tvrdjenje ove teoreme dokazujemo neposrednim izračunavanjem korelacione funkcije, dok je raspodela inovacionog niza odredjena po formuli (2.4.2").

Slično dokazujemo i sledeće tvrdjenje.

T2. Neka su X_t i X'_t procesi AREX(1) tipa sa eksponencijalnom marginalnom raspodelom definisani na sledeći način:

$$X_t = \begin{cases} \xi_t & , p_o \\ \alpha X_{t-1}+\xi_t & , p_1 \\ \beta X_{t-1} & , q_1 \end{cases} , \quad X_t' = \begin{cases} \xi_t' & , p_o \\ \alpha' X_{t-1}'+\xi_t' & , p_1 \\ \beta' X_{t-1}' & , q_1 \end{cases}$$

gde je $\alpha'=\alpha-a$, $\beta'=\beta+b$. Posmatrani procesi imaju iste korelacione funkcije i proces X_t' je dobro definisan , u smislu da postoji raspodela njegovog inovacionog niza, ako važe uslovi:

(1) $\alpha-1 \le a < \alpha$, (2) $0 < \beta+b \le 1$,

(3) $p_1a = q_1b$ i (4) $p_o(\beta+b) < \alpha-a-p_1$.

Dokaz. Neposrednim izračunavanjem korelacionih funkcija, i proverom uslova (2.4.2) dokazujemo da pri navedenim uslovima važi dato tvrdjenje.

U AREX(1) modelu možemo utvrditi vezu momenata inovacionog niza i momenata samog procesa. Na osnovu toga možemo računati momente inovacionog niza ako su poznati momenti procesa i obrnuto. Posebno je to pogodno za računanje momenata mešovitih raspodela, jer je jednostavnije od direktnog izračunavanja.

T3. Neka je u AREX(1) modelu $\alpha=\beta$ i neka je marginalna raspodela procesa eksponencijalna sa parametrom $\lambda=1$. Neka μ_k označava moment reda k inovacionog procesa. Tada važi:

$$p_1 \sum_{k=0}^{n} \beta^k \frac{1}{(n-k)!} \mu_{n-k} = 1. \tag{2.2.4}$$

Dokaz.

Na osnovu reprezentacije $X_t = A_t X_{t-1} + B_t \xi_t$ datog procesa kao procesa sa slučajnim koeficijentima, dobijamo da je:

$$E(X_t^n) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} E((A_t X_{t-1})^k (B_t \xi_t)^{n-k}).$$

Zbog nezavisnosti sledi

$$E(X_t^n) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} E(X_{t-1})^k \ E(A_t^k B_t^{n-k}) \ E(\xi_t^{n-k}). \tag{2.2.5}$$

Zbog stacionarnosti procesa X_t i pretpostavljene marginalne raspodele je $E(X_t^n) = n!$, $E(X_{t-1}^k) = k!$. Dalje imamo da je:

$$E(A_t^k B_t^{n-k}) = p_1 \beta^k,$$

što zamenom u (2.2.5) daje (2.2.4).

U slučaju $\alpha \neq \beta$ u formuli (2.2.5) član $E(A_t^k B_t^{n-k})$ postaje $\alpha^k p_1$.

Rekurentna formula (2.2.4) daje momente slučajne promenljive čija je raspodela konveksna mešavina eksponencijalnih raspodela:

$$\xi_t = \begin{cases} \eta_t, & \text{sa verovatnoćom } A_1 \\ \gamma\, \eta_t, & \text{sa verovatnoćom } 1-A_1 \end{cases},$$

gde su konstanta γ i verovatnoća A_1 dati neposredno uz uslov (2.4.2").

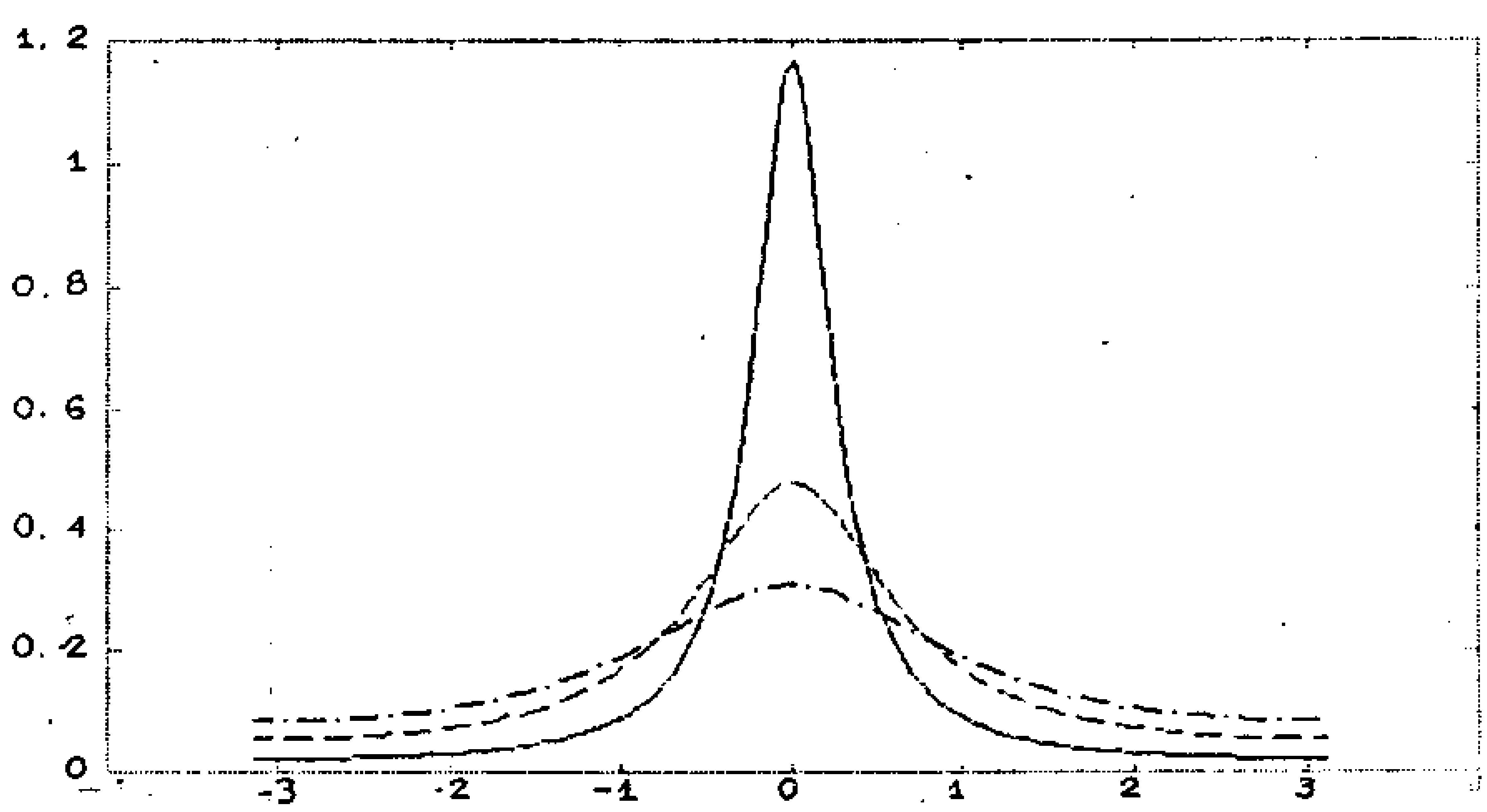
Koristeći formulu (2.2.5) možemo odrediti vezu momenata inovacionog niza i u slučaju neke druge marginalne raspodele procesa.

Ako izračunamo indeks disperzije prema formuli datoj na strani 9, za AREX(1) proces dobijamo da je $J = (1+\rho_1)/(1-\rho_1)$, gde je ρ_1 vrednost autokorelacione funkcije procesa u tački 1. Kad $\rho_1 \to 1$, $J \to \infty$. Vrednost $\rho_1 = 1$ moguća je za one vrednosti parametara za koje proces nije stacionaran.

Što se tiče spektralne gustine, imamo da je, za AREX(1) oblika:

$$S(\lambda) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi} K(0)\left[\dfrac{2\rho_1}{1-\rho_1} + 1 \right] & , \lambda = 0 \\[2ex] \dfrac{1}{2\pi} K(0)\left[2\, \dfrac{1-\rho_1 \cos\lambda}{1-2\rho_1 \cos\lambda + \rho_1^2} - 1 \right] & , \lambda \neq 0 \end{cases}$$

Na slici 1 dati su grafici spektralne gustine za tri različita AREX(1) procesa sa eksponencijalnom $\mathcal{E}(1)$ marginalnom raspodelom.



Slika 1. Na slici su date spektralne gustine tri različita AREX(1) procesa sa eksponencijalnom $\mathcal{E}(1)$ marginalnom raspodelom i parametrima:

(-) $p_0 = 0.2$, $p_1 = 0.6$, $\alpha = 0.95$, $\beta = 0.95$ ($\rho_1 = 0.76$)

(--) $p_0 = 0.3$, $p_1 = 0.4$, $\alpha = 0.80$, $\beta = 0.60$ ($\rho_1 = 0.50$)

(-.) $p_0 = 0.2$, $p_1 = 0.5$, $\alpha = 0.40$, $\beta = 0.40$ ($\rho_1 = 0.32$)

2.3 Laplasova transformacija

Razmatranje nelinearnih serija sa asimetričnim raspodelama započeto radovima Lorensa i Levisa najčešće podrazumeva da se za postavljeni model vremenske serije i pretpostavljenu marginalnu raspodelu posmatranog procesa odrede uslovi (u funkciji koeficijenata koji figurišu u modelu) pri kojima će inovacioni proces imati neku svojstvenu raspodelu, i ujedno se ta raspodela i odredjuje. S obzirom da se koristi Laplas-Stiltjesova transformacija kao osnovni analitički aparat, postavlja se pitanje utvrdjivanja nekih "opštih" uslova o svojstvima marginalne raspodele.

U ovom delu se, dakle, razmatraju neke opšte karakteristike raspodele koja može biti izabrana kao marginalna raspodela u AREX modelu. S obzirom da nije data potpuna karakterizacija klase asimetričnih raspodela koje mogu biti marginalne raspodele u AREX(1) modelu, u delu 2.4. razmatraćemo uslove koje treba da ispunjavaju parametri procesa da bi konkretno izabrana raspodela mogla biti marginalna raspodela posmatranog procesa. Tada ćemo razmotriti eksponencijalnu, mešovitu eksponencijalnu, gama raspodelu i Erlangovu raspodelu, a takodje i dvostruku eksponencijalnu (Laplasovu) raspodelu.

Navodimo definiciju i neka od najvažnijih svojstava Laplasove transformacije.

Definicija 1. Neka je F funkcija raspodele verovatnoća slučajne promenljive sa vrednostima na $[0,\infty)$. Laplasova transformacija funkcije F je funkcija $\Phi(s)$ odredjena jednakošću:

$$\Phi(s)=\int_0^\infty e^{-sx}\,F(dx).$$

U terminima matematičkog očekivanja je $\Phi(s) = E(e^{-sX})$. Primenljivost Laplasove transformacije se zasniva na teoremi o jedinstvenosti (Feler, tom II, str.485).

Osobine Laplasove transformacije neophodne za dalji rad su:

(a) Ako su X i Y nezavisne slučajne promenljive, onda je:

$$\Phi_{X+Y}(s) = \Phi_X(s)\cdot\Phi_Y(s).$$

(b) Ako je k konstanta onda je:

$$\Phi_{kX}(s) = \Phi_X(ks).$$

Jedna od osnovnih teorema vezanih za Laplasovu transformaciju je Bernštajnova teorema (1928). Pre no što formulišemo ovu teoremu navodimo jednu neophodnu definiciju.

Definicija 2. Funkcija $g(x)$ definisana na $[0,\infty)$ je potpuno monotona ako ima izvode $g^{(n)}(x)$ svakog reda i ako važi:

$$(-1)^n g^{(n)}(x) \geq 0 , \quad x>0.$$

Teorema **Funkcija $\Phi(s)$ definisana na $[0,\infty)$ je Laplasova transformacija raspodele verovatnoća F ako i samo ako je potpuno monotona i $\Phi(0)=1$. (Bernštajnova teorema).**

U slučaju autoregresionog procesa prvog reda, AREX(1) (Mališić,1987) odredićemo Laplas-Stiltjesovu transformaciju Φ_ξ za inovacioni proces koji figuriše u modelu i ustanoviti neke osobine tako dobijene funkcije.

Posmatraćemo AREX(1) model u obliku:

$$X_t = \begin{cases} \xi_t , & p_0 \\ \alpha X_{t-1} + \xi_t , & p_1 \\ \beta X_{t-1} , & q_1 \end{cases} , \quad t \in \mathbb{D} = \{0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}, \qquad (2.3.1)$$

gde je: $0 < \alpha, \beta \leq 1$, $0 \leq p_0, p_1, q_1 \leq 1$, $p_0 + p_1 + q_1 = 1$. Inovacioni niz je niz nezavisnih jednako raspodeljenih slučajnih promenljivih, a takodje pretpostavljamo da su X_t i ξ_s nezavisni za $t < s$.

Koristeći Laplasovu transformaciju:

$$\Phi_X(s) = E(e^{-sX}), \quad \Phi_\xi(s) = E(e^{-s\xi}),$$

dobijamo:

$$\Phi_{\xi}(s) = \frac{\Phi_X(s) - q_1\Phi_X(\beta s)}{p_o + p_1\Phi_X(\alpha s)}. \qquad (2.3.2)$$

Ako pretpostavimo da X_t ima marginalnu raspodelu sa gustinom raspodele $f(x)$, $\Phi_X(s)$ će biti potpuno monotona funkcija (p.m.f.) i imamo $\Phi_X(0)=1$ (Bernštajnova teorema). Iz ove osobine i (2.3.1) sledi $\Phi_{\xi}(0)=1$ i $\Phi_{\xi}(s)\leq 1$, $s>0$, ali nije unapred jasno da li će $\Phi_{\xi}(s)$ biti p.m.f ili neće. Od osobina raspodele za X_t, a samim tim i od osobina Laplasove transformacije $\Phi_X(s)$, zavise osobine $\Phi_{\xi}(s)$. U sledećim tvrdjenjima, na osnovu svojstava potpuno monotonih funkcija i svojstava Laplasove transformacije, ustanovićemo neke osobine Laplasove transformacije (2.3.2) za inovacioni niz ξ_t.

T1. U modelu (2.3.1) niz X_t ne može imati stabilnu raspodelu sa gustinom raspodele $f(x)$ za koju važi $f(x)=0$, $x<0$, kao marginalnu raspodelu.

Dokaz. Funkcija $\Phi_X(s)=e^{-s^{\gamma}}$, $0<\gamma<1$ je Laplasova transformacija neke stabilne raspodele za čiju gustinu važi $f(x)=0$, $x<0$, u [4], str.505. Takva funkcija ne može za svako $s>0$ zadovoljavati nejednakost:

$$\Phi_X(s) - q_1\Phi_X(\beta s) > 0,$$

i stoga $f(x)$ ne može biti gustina raspodele za niz X_t ■

Primer stabilne gustine raspodele definisane za $x>0$ je:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi x^3}}\, e^{-\frac{x}{2}}, \quad x>0 .$$

Definicija 3. Funkcija $L(t)$ je sporo promenljiva ako za svako $a>0$ važi:

$$\frac{L(at)}{L(t)} \to 1, \quad t\to\infty$$

Na osnovu te definicije, neposrednom proverom dokazujemo sledeće tvrdjenje, u kome $L(t)$ označava sporo promenljivu funkciju.

T2. **Ako za neko $\rho>0$ važi $\Phi_X(s) \sim s^{-\rho}L(\frac{1}{s})$, $s\to\infty$ i $\beta>q_1^{\rho}$ tada će važiti $\Phi_\xi(s)>0$, $s\to\infty$.**

Imamo takodje i sledeće tvrdjenje:

T3. **Neka je $\alpha=\beta$ u (2.3.1) i neka važe uslovi:**

$$\text{a)}\quad \Phi_X(s) > q_1\Phi_X(t),$$

$$\text{b)}\quad \Phi'_X(s) < \beta\, G(s)\, \Phi'_X(t) \qquad \text{i}$$

$$\text{c)}\quad \Phi''_X(s) > \beta^2\, G(s)\, \Phi''_X(t)$$

gde je $t=\beta s$ i $G(s) = (q_1p_o + p_1\Phi_X(s))/(p_o+p_1\Phi_X(t))$,

tada $(-1)^n\Phi_\xi^{(n)}(s) \geq 0$, $n = 0, 1, 2$.

<u>Dokaz</u>. Iz (2.3.1) sledi da je potreban uslov da funkcija $\Phi_\xi(s)$ bude pozitivna upravo uslov a). Ako izračunamo $\Phi'_\xi(s)$ i $\Phi''_\xi(s)$ dobićemo da su potrebni uslovi da $\Phi'_\xi(s)$ bude negativna a da $\Phi''_\xi(s)$ bude pozitivna redom uslovi b) i c)∎

Sledeće tvrdjenje ukazuje na vezu momenata procesa X_t i potpune monotonosti funkcije $\Phi_\xi(s)$.

T4. **Neka je $\alpha=\beta$ u (2.3.1) i neka je $\Phi_\xi(s)$ potpuno monotona funkcija. Neka je:**

$$a= \beta(1-p_o) \text{ i } c = (1-a)(1-a+4\beta p_1)/(2(p_o+p_1)(1-a\beta)).$$

Tada je:

$$E(X_t^2) > c\,(EX_t)^2.$$

<u>Dokaz</u>. Ako $\mu_1,\dots,\mu_{2n}$ označavaju momente ξ_t, važi nejednakost (u [4], str.271) :

$$\sum_{k=o}^{2n-1} (-1)^k\mu_k \frac{\lambda^k}{k!} \leq \Phi_\xi(\lambda) \leq \sum_{k=o}^{2n} (-1)^k\mu_k \frac{\lambda^k}{k!}. \qquad (*)$$

Neka je dalje $\mu = EX_t$ i $a = \beta(1-p_o)$. Iz (2.3.1), za $\alpha=\beta$ dobijamo:

$$\mu_1 = (1-a)(p_o+p_1)^{-1}\mu$$

$$\mu_2 = (E(X_t^2)(1-\beta a)(p_o+p_1) - 2\mu^2\beta p_o(1-a))(p_o+p_1)^{-2}.$$

Tako da za n=1 u (*), koristeći dobijene vrednosti za μ_1 i μ_2, neposrednim izračunavanjem dobijamo tvrdjenje ∎

T5. Da bi marginalna raspodela AREX(1) procesa pripadala klasi beskonačno deljivih zakona raspodele sa Laplasovom transformacijom oblika $\Phi_X(s) = e^{-\psi(s)}$, gde je $\psi(0)=0$ i gde je $\psi'(s)$ potpuno monotona funkcija, neophodno je da važi uslov:

$$\psi'(s) \le \frac{k}{s}, \text{ gde je } \quad k = \frac{\ln q_1}{\beta - 1}.$$

Dokaz. Laplasovu transformaciju $\Phi_\xi(s)$ za inovacioni niz ξ_t računamo po formuli (2.3.2). Neophodan uslov da ta funkcija bude potpuno monotona je $\Phi_\xi(s) \ge 0$. Odatle dobijamo tvrdjenje teoreme.

T6. Ako je raspodela inovacionog niza izabrana tako da funkcija $\Phi_X(s) - q_1\Phi_X(\beta s)$ nije potpuno monotona funkcija tada se ne može odrediti svojstvena raspodela inovacionog niza ξ_t.

Dokaz. Pretpostavimo da je model (2.3.1) dobro definisan, odnosno da su za izabranu marginalnu raspodelu niza X_t koeficijenti modela odredjeni tako da se dobija svojstvena raspodela inovacionog niza. Tada su funkcije: $\Phi_\xi(s)$ i $p_o + p_1\Phi_X(\alpha s)$ potpuno monotone, pa je i njihov proizvod potpuno monotona funkcija. Iz (2.3.2) je:

$$\Phi_\xi(s)\,(p_o+p_1\Phi_X(\alpha s)) = \Phi_X(s) - q_1\Phi_X(\beta s),$$

pa je i funkcija na desnoj strani potpuno monotona. Kontrapozicijom dobijamo tvrdjenje.

T7. U modelu AREX(1) za Laplasovu transformaciju $\Phi_\xi(s)$ inovacionog niza važi $\Phi'_\xi(s) \le 0$, $s > 0$.

Dokaz. Neka je izabrana marginalna raspodela AREX(1) procesa X_t. Tada je Laplasova transformacija $\Phi_X(s)$ potpuno monotona funkcija i možemo pokazati da je:

$$p_0 + p_1 \Phi_X(\alpha s) \ge \Phi_X(s) - q_1 \Phi_X(\beta s).$$

To znači da je za funkciju $\Phi_\xi(s)$ iz (2.3.2) za svako $s > 0$ ispunjen uslov $\Phi_\xi(s) \le 1$. Kako je $\Phi_\xi(0) = 1$, imamo:

$$\Phi_\xi(0) - \Phi_\xi(s) > 0,$$

a odatle neposredno sledi navedeno tvrdjenje.

2.4. Marginalne raspodele u AREX modelima

U ovom delu odredjujemo uslove pri kojima će posmatrani AREX(1) proces imati izabranu marginalnu raspodelu. Posmatraćemo eksponencijalnu raspodelu i raspodele vezane za eksponencijalnu: mešovitu eksponencijalnu raspodelu, gama raspodelu, Erlangovu raspodelu i dvostruku eksponencijalnu (Laplasovu) raspodelu.

2.4.1. Eksponencijalna raspodela

Eksponencijalna raspodela se javlja u mnogim pojavama, pa na odredjeni način, zbog svoje rasprostranjenosti predstavlja analogiju normalnoj raspodeli. Kako je ova raspodela pogodna za rad i sa gledišta analitičke traktabilnosti, mnogi radovi koji razmatraju marginalne raspodele različite od normalne upravo koriste eksponencijalnu raspodelu: [6], [10], [12], [14], [15], [19], [21] i [22].

Kod AREX modela takodje polazimo od eksponencijalne raspodele. Navodimo, radi potpunosti izlaganja, tvrdjenje iz [19], Mališić:

Neka je niz $\{ X_t, t \in \mathbb{D} \}$ definisan na sledeći način:

$$X_t = \begin{cases} \xi_t & , p_0 \\ \alpha X_{t-1} + \xi_t & , p_1 \\ \beta X_{t-1} & , q_1 \end{cases} \qquad (2.4.1)$$

gde je $0 \le p_0, p_1, q_1 \le 1$, $p_1 > 0$, $p_0 + p_1 + q_1 = 1$, $0 < \alpha, \beta < 1$. Niz ξ_t je niz nezavisnih slučajnih promenljivih sa istom raspodelom i neka su X_t i ξ_s nezavisne ako je $t < s$.

Ako važe uslovi:

$$\alpha \ge \frac{q_1}{p_1 + q_1}, \quad \beta \le \alpha \le \frac{\beta}{p_0 + q_1}, \quad \frac{\beta - q_1}{p_0} \ge \alpha \text{ i } \alpha \le \frac{\beta(1-q_1)}{p_0} \qquad (*)$$

a niz X_t ima marginalnu raspodelu $\mathcal{E}(\lambda)$, tada će inovacioni niz imati mešovitu eksponencijalnu raspodelu:

$$\xi_t = \begin{cases} \eta_t & , \quad B_o \\ \beta\,\eta_t & , \quad B_1 \\ \gamma\,\eta_t & , \quad 1-B_o-B \end{cases} \qquad (2.4.1'')$$

gde su B_o, B_1 i $(1-B_o-B_1)$ verovatnoće date formulom (2.5') navedenog rada, dok su slučajne promenljive η_t nezavisne sa istom $\mathcal{E}(\lambda)$ raspodelom i gde je konstanta $\gamma = (p_o\alpha)/(p_o + p_1)$. Napomenimo da se uslovi (*), u navedenom radu označeni sa (2.6), mogu svesti na :

$$\beta \le \alpha, \quad p_o\alpha < \beta - q_1 \qquad (2.4.2)$$

i taj oblik ćemo koristiti u ovom radu. Uslovi (2.4.2) obezbedjuju da raspodela inovacionog niza bude verovatnosna mešavina eksponencijalnih raspodela, a raspodela samog procesa eksponencijalna. Medjutim i drugi tip raspodele inovacionog niza omogućava eksponencijalnu raspodelu procesa. Razmotrićemo to u slučaju AREX(1) procesa kod koga je $\alpha = \beta$.

Neka je $\alpha = \beta$ u (2.4.1). Ako važi uslov:

$$\beta \ge \frac{q_1}{p_1 + q_1} \qquad (2.4.2')$$

onda će X_t iz (2.4.1) imati eksponencijalnu marginalnu raspodelu, a raspodela za inovacioni niz će biti:

$$\xi_t = \begin{cases} \eta_t \ , & A_1 \\ \gamma\eta_t \ , & A_2 = 1-A_1 \end{cases} \qquad (2.4.2'')$$

gde su A_1 i A_2 verovatnoće i $A_1 = (1-\alpha)/(p_o+p_1-p_o\alpha)$. Ovo dobijamo kao posledicu prethodnog tvrdjenja. Znači da će gustina raspodele za ξ_t u posmatranom slučaju biti:

$$g_\xi(x) = A_1 e^{-x} + A_2/\gamma \cdot e^{-x/\gamma}, \ x > 0. \qquad (2.4.3)$$

Funkcija $g_\xi(x)$ može biti gustina raspodele i kada je $A_1 > 1$. Tada će ξ_t biti mešavina eksponencijalnih raspodela sa negativnim koeficijentom A_2. O takvim raspodelama i mogućnostima za njihovo dobijanje biće više govora u delu (2.5). Ovde ćemo dokazati tvrdjenje.

T1. Ako je u modelu (2.4.1) $\alpha = \beta$ i ne važi uslov (2.4.2'), proces X_t će imati eksponencijalnu marginalnu raspodelu, dok će gustina raspodele (2.4.3) odgovarajućeg inovacionog niza biti mešavina eksponencijalnih raspodela sa negativnim koeficijentom A_2.

Dokaz.

Neka je $c = 1/\gamma$. Iz uslova teoreme sledi da je $A_1 > 1$ i da je $c > 1$. Kako je zbog $A_1 + A_2 = 1$ integral $\int_0^\infty g_\xi(x)\,dx = 1$, ostaje da dokažemo da će biti $g_\xi(x)$ pozitivno za $x > 0$. Na osnovu pretpostavke dobijamo da važi $A_1 > -A_2 c$, a odatle da je zaista $g_\xi(x) > 0$ za $x > 0$ ■

Kao primer, navodimo da je, u slučaju $p_0 = p_1 = 2/5$, $\alpha = \beta = 1/4$ i $\lambda = 1$ gustina raspodele inovacionog niza oblika:

$$g_\xi(x) = \frac{15}{14}\, e^{-x} - \frac{1}{14}\, 8\, e^{-8x} \quad , \ x > 0 \ .$$

2.4.2. Mešovita eksponencijalna raspodela

Sada odredjujemo uslove pri kojima će marginalna raspodela AREX(1) procesa biti mešovita eksponencijalna.

Prvo ćemo razmotriti specijalni slučaj AREX(1) procesa u kome su koeficijenti uz X_{t-1} jednaki:

$$X_t = \begin{cases} \xi_t & , \ p_0 \\ \beta X_{t-1} + \xi_t & , \ p_1 \\ \beta X_{t-1} & , \ q_1 \end{cases} \qquad (2.4.4)$$

kao i ranije, p_0, p_1 i q_1 su verovatnoće čiji je zbir $p_0 + p_1 + q_1 = 1$, $0 < \beta \le 1$. Slučajne promenljive ξ_t su nezavisne jednako raspodeljene slučajne promenljive.

Takodje su ξ_t nezavisne od $X_{t-1}, X_{t-2}, \ldots$. Neka je marginalna raspodela stacionarnog niza X_t mešovita eksponencijalna sa gustinom raspodele:

$$f_X(t) = a_1 m_1 \exp(-m_1 t) + a_2 m_2 \exp(-m_2 t), \quad t>0 \qquad (2.4.5)$$

gde je a_1, $a_2 > 0$, $a_1 + a_2 = 1$, i m_1, $m_2 \geq 0$, $m_1 \neq m_2$. Dakle, razmatramo samo "konveksnu" mešavinu eksponencijalnih raspodela, jer su a_1 i a_2 nenegativne verovatnoće, a isključujemo slučaj obične eksponencijalne raspodele i time što pretpostavljamo $m_1 \neq m_2$ u (2.4.5).

Za utvrdjivanje uslova postojanja i raspodele inovacionog niza $\{\xi_t\}$ iz (2.4.4) koristimo Laplasovu transformaciju:

$$\Phi_X(s) = E(\exp(-sX)), \quad \Phi_\xi(s) = E(\exp(-s\xi)).$$

Transformišući obe strane (2.4.4), na osnovu pretpostavljene stacionarnosti niza X_t dobijamo:

$$\Phi_X(s) = p_0 \Phi_\xi(s) + p_1 \Phi_X(\beta s)\Phi_\xi(s) + q_1 \Phi_X(\beta s) \qquad (2.4.6)$$

gde je $\qquad \Phi_X(s) = a_1 m_1/(m_1+s) + a_2 m_2/(m_2+s).$

Iz (2.4.5) i (2.4.6) dobijamo:

$$\Phi_\xi(s) = R(s)/T(s), \quad T(s) = (m_1+s)(m_2+s)Q(s) \qquad (2.4.7)$$

gde su R(s) i Q(s) polinomi treĵeg, odnosno drugog stepena:

$$R(s) = a_1 m_1 (m_2+s)(m_2+\beta s)(m_1+\beta s - q_1(m_1+s)) +$$
$$+ a_2 m_2 (m_1+s)(m_1+\beta s)(m_2+\beta s - q_1(m_2+s))$$

$$Q(s) = p_0(m_1+\beta s)(m_2+\beta s) + p_1 a_1 m_1 (m_2+\beta s) + p_1 a_2 m_2 (m_1+\beta s).$$

Neposredno možemo utvrditi da kvadratna funkcija Q(s) ima realne, različite negativne korene $(-m_3)$ i $(-m_4)$. Racionalnu funkciju (2.4.7) možemo razložiti na elementarne racionalne funkcije na sledeći način:

$$\Phi_\xi(s) = \sum_{i=1}^{4} A_i m_i/(m_i+s) \qquad (2.4.8)$$

Odgovarajuća gustina raspodele koju bismo dobili primenom inverzne Laplasove transformacije na (2.4.8) predstavljala bi verovatnosnu mešavinu eksponencijalnih raspodela ako bi svi koeficijenti A_i, $i=1,4$ bili nenegativni, a njihova suma jednaka 1. Iz (2.4.6) za $s=0$ dobijamo $\Phi_\xi(0)=1$, tako da je $A_1+A_2+A_3+A_4=1$. Imamo (Feller, strana 495) :

$$A_i = R(-m_i)/(m_i T'(-m_i)), \quad i=1,4 \tag{2.4.9}$$

Posle odgovarajućeg izračunavanja dobijamo da će koeficijenti A_i, $i=1,4$ biti pozitivni ako i samo ako važi:

$$\begin{gathered}[(\, m_1-\beta m_2 > 0 \,) \,\&\, (\, R(-m_3)>0 \,]\ \text{ ili} \\ [(\, m_2 > m_3 \,) \,\&\, (\, R(-m_3)<0 \,) \,\&\, (\, R(-m_4)<0) \,]\end{gathered} \tag{2.4.10}$$

Tako smo dokazali sledeće tvrdjenje:

T2. Stacionarni niz $\{X_t\}$ definisan u (2.4.4) ima mešovitu eksponencijalnu raspodelu (2.4.5) ako važi uslov (2.4.10), a inovacioni niz $\{\xi_t\}$ ima konveksnu mešovitu eksponencijalnu raspodelu sa gustinom:

$$f_\xi(t) = \sum_{i=1}^{4} A_i m_i \exp(-m_i t), \quad t>0, \tag{2.4.11}$$

gde su A_i, $i=1,4$ verovatnoće čiji je zbir jednak 1, a date su formulom (2.4.9). Realni brojevi: $(-m_3)$, $(-m_4)$ su nule polinoma $Q(s)$.

Uslov (2.4.11) može biti rešen u funkciji od m_1, m_2, p_o, p_1, β i a_1. Za $\beta= 0.9$, $a_1= 0.1$, $p_o=p_1= 0.1$, $m_1= 2.2$, $m_2= 2.42$, dobijamo: $m_3= 2.465$, $m_4= 5.333$, dok će verovatnoće biti $A_1= 0.14388$, $A_2= 0.45000$, $A_3= 0.31622$, $A_4= 0.08989$.

Autokorelaciona funkcija ovog procesa data je sa:

$$\rho(h)= (\beta(1-p_o))^h, \; h > 0, \; \rho(-h)=\rho(h),$$

i pokazuje da proces ima karakteristike standardnog autoregresionog procesa prvog reda.

Verovatnoća $P(X_t > X_{t-1})$ je jednostavna karakteristika trajektorije procesa i povezana je sa prosečnom dužinom podnizova opadajućih ili podnizova rastućih vrednosti procesa u okviru jedne trajektorije. Izračunavanje verovatnoće sledi iz (2.4.4), (2.4.5) i (2.4.11) na osnovu nezavisnosti X_{t-1} i ξ_t. Za $\beta \neq 1$ imamo rezultat:

$$P(X_t > X_{t-1}) = p_o(1 - a_1 S_1 - a_2 S_2) + p_1(1 - a_1 S_1^* - a_2 S_2^*),$$

gde je:

$$S_j = \sum_{k=1}^{4} \frac{A_k m_k}{m_j + m_k}, \quad S_j^* = \sum_{k=1}^{4} \frac{A_k m_k}{q_j + m_k}, \quad q_j = \frac{m_k}{1-\beta}, \quad j = 1,2.$$

Menjajući parametre procesa dobijamo različite vrednosti numeričkih karakteristika kao što su: EX_t, DX_t, $\rho(h)$, $P(X_t > X_{t-1})$ i tako dalje.

Šest parametara može da izgleda previše za autoregresioni proces prvog reda, ali simulacije pokazuju da postoji raznovrsnost u izgledu trajektorija pri različitom izboru parametara. Na slici 2 predstavljene su trajektorije tri razna AREX(1) procesa sa mešovitom eksponencijalom marginalnom raspodelom.

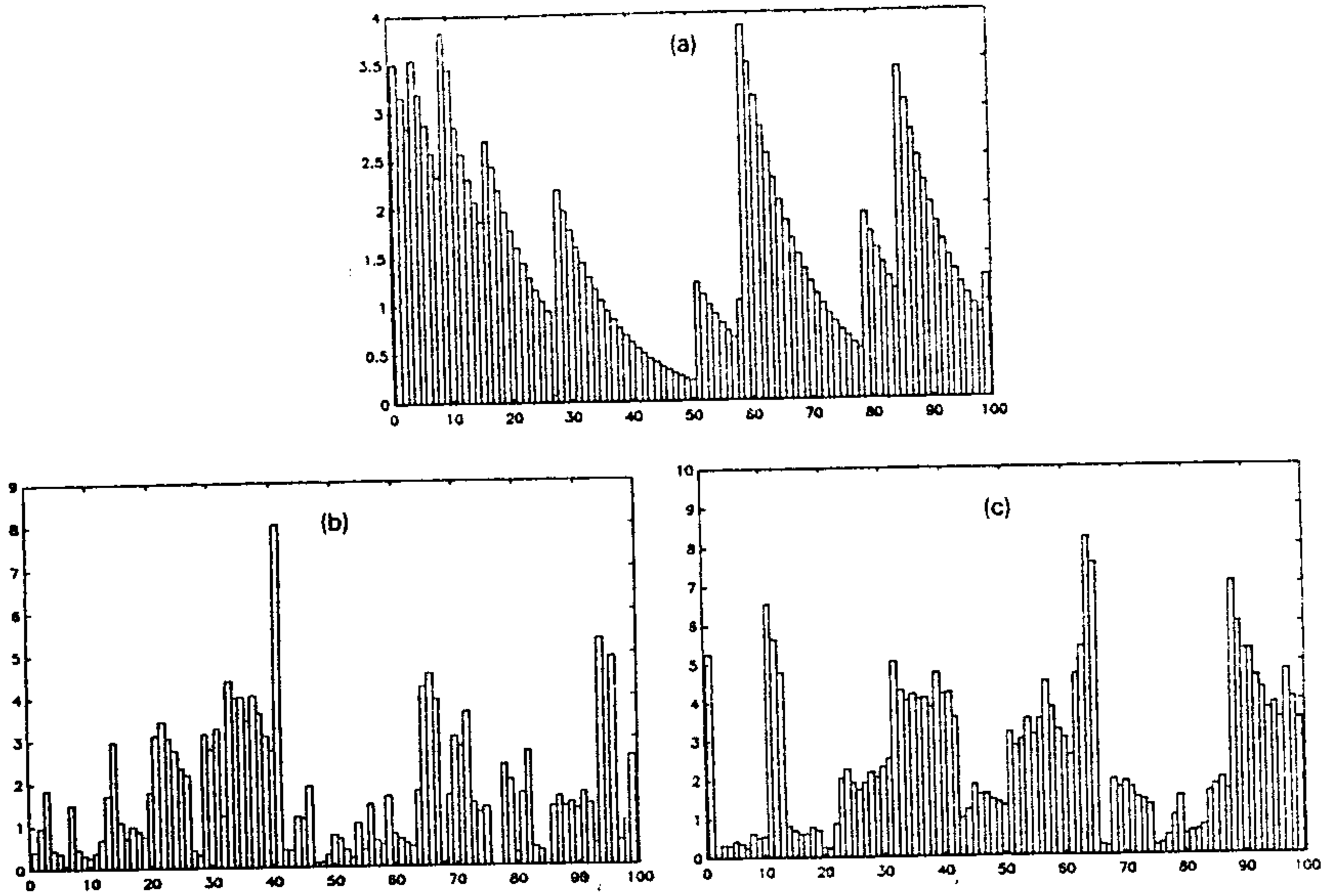
U specijalnim slučajevima imamo jednostavnije rezultate za raspodelu inovacionog niza. Na primer, ako je $\beta \neq 1$, $m_1 = 0$, $m_2 = m > 0$, inovacioni niz će biti konveksna mešavina slučajnih promenljivih sa eksponencijalnom raspodelom i konstantne veličine koja je jednaka nuli:

$$\xi_t = \begin{cases} 0, & A_1 \\ \mathcal{E}(m), & A_2 \\ \mathcal{E}(k), & 1 - A_1 - A_2 \end{cases}$$

ako i samo ako je:

$$((\beta > q_1) \ \& \ ((\beta - q_1)(p_o + p_1 a_2) > (p_o \beta (p_o + p_1)),$$

gde je: $A_1 = p_o a_1 / (p_o + p_1 a_2)$, $A_2 = a_2(1-\beta)/(p_o(1-\beta) + p_1 a_2)$ i $k = m(p_o + p_1 a_2)/\beta p_o$.



Slika 2. Modelirana realizacija za AREX(1) proces sa $\alpha = \beta$, sa mešovitom eksponencijalnom raspodelom i parametrima:

(a) $a_1 = 0.1$, $p_0 = 0.1$, $p_1 = 0.1$, $m_1 = 0.5$, $m_2 = 0.55$ i $\beta = 0.9$. U ovom slučaju je $P(X_n < X_{n+1}) = 0.86$ i jasno su uočljivi ciklusi opadajućih vrednosti.

(b) $a_1 = 0.1$, $p_0 = 0.3$, $p_1 = 0.6$, $m_1 = 0.4$, $m_2 = 0.44$ i $\beta = 0.9$. Ovde je $P(X_n < X_{n+1}) = 0.55$.

(c) $a_1 = 0.5$, $p_0 = 0.1$, $p_1 = 0.8$, $m_1 = 1.0$, $m_2 = 3.0$ i $\beta = 1$. Kako je ovde $P(X_n < X_{n+1}) = 0.20$, preovladjuju rastući podnizovi.

2.4.3. Erlangova raspodela

U ovom delu razmatramo mogućnost da marginalna raspodela AREX(1) procesa bude Erlangova raspodela. Prvo ćemo posmatrati najjednostavniju Erlangovu raspodelu, Erlangovu raspodelu drugog reda.

Neka je $X_t = A_1 + A_2$ gde su A_1 i A_2 nezavisne slučajne promenljive sa eksponencijalnom raspodelom $\mathcal{E}(\lambda_1)$ i $\mathcal{E}(\lambda_2)$, gde je $0 < \lambda_1 < \lambda_2$. Slučaj kada je $\lambda_1 = \lambda_2$ tj. kada je u pitanju gama raspodela za niz X_t, biće takodje razmotren. Takva raspodela se prirodno javlja u teoriji masovnog opsluživanja kada posmatramo sistem u kome je raspodela vremena izmedju dva uzastopna dolaska u sistem eksponencijalna $\mathcal{E}(\lambda)$. Ako izbacimo svaki drugi dolazak dobijamo novi sistem u kome će vreme izmedju uzastopnih dolazaka biti slučajna promenljiva sa gustinom raspodele $g(x)$ oblika:

$$g(x) = \lambda^2 x e^{-\lambda x}, \quad x > 0,$$

Da bismo utvrdili postojanje i raspodelu slučajnih promenljivih inovacionog niza primenićemo Laplasovu transformaciju.

Transformišući obe strane u (2.4.1), na osnovu stacionarnosti niza X_t dobijamo:

$$\Phi_X(s) = p_0 \Phi_\xi(s) + p_1 \Phi_X(\alpha s) \Phi_\xi(s) + q_1 \Phi_X(\beta s). \qquad (2.4.12)$$

Sa

$$\Phi_X(s) = \lambda_1 \lambda_2 / (\lambda_1 + s)(\lambda_2 + s)$$

iz (2.4.12) sledi:

$$\Phi_\xi(s) = \frac{\lambda_1 \lambda_2 \, R(s) \, (\lambda_1 + \alpha s)(\lambda_2 + \alpha s)}{Q(s) \, (\lambda_1 + s)(\lambda_2 + s)(\lambda_1 + \beta s)(\lambda_2 + \beta s)} \qquad (2.4.13)$$

gde je

$$R(s) = (\lambda_1 + \beta s)(\lambda_2 + \beta s) - q_1 (\lambda_1 + s)(\lambda_2 + s)$$

$$Q(s) = p_0 (\lambda_1 + \alpha s)(\lambda_2 + \alpha s) + p_1 \lambda_1 \lambda_2 = p_0 \alpha^2 \cdot (\lambda_3 + s)(\lambda_4 + s).$$

Neposredno možemo ustanoviti da su koreni kvadratne funkcije $Q(s)$ negativni.

Da bismo pokazali da postoji inovacioni niz ξ_t sa Laplasovom transformacijom (2.4.13), odredićemo uslove pri kojima $\Phi_\xi(s)$ predstavlja Laplasovu transformaciju neke raspodele.

Stoga ćemo $\Phi_\xi(s)$ razložiti na elementarne racionalne funkcije. Neka je: $\alpha \neq \beta$ u (2.4.1) i $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Prvo ćemo posmatrati razlaganje:

$$\Phi_\xi(s) = \frac{\lambda_1 P_1}{\lambda_1+s} + \frac{\lambda_2 P_2}{\lambda_2+s} + \frac{\lambda_3 P_3}{\lambda_3+s} + \frac{\lambda_4 P_4}{\lambda_4+s} + \frac{\lambda_1 P_5}{\lambda_1+\beta s} + \frac{\lambda_2 P_6}{\lambda_2+\beta s} \quad (2.4.14)$$

Iz $\Phi_X(0)=1$ i (2.4.12) dobijamo: $\Phi_\xi(0)=1$ i stoga je $P_1+P_2+\ldots+P_6=1$.

Ako su svi koeficijenti P_j, $j=1,6$ nenegativni iz (2.4.14) sledi da je ξ_t konveksna verovatnosna mešavina eksponencijalno raspodeljenih slučajnih promenljivih. Medjutim, nemoguće je da za svako $j=1,\ldots,6$ koeficijenti P_j budu pozitivni >0, jer je brojilac $\Phi_\xi(s)$ polinom četvrtog , a imenilac polinom šestog stepena.

Druga mogućnost kada (2.4.14) predstavlja Laplasovu transformaciju neke gustine raspodele javlja se kad inverzna Laplasova transformacija (2.4.14), funkcija $g_\xi(x)$ odredjena jednakošću:

$$g_\xi(x) = \sum_{j=1}^{6} P_j\lambda_j \, e^{-\lambda_j x}, \quad \text{gde je } \lambda_5=\lambda_1/\beta, \ \lambda_6=\lambda_2/\beta,$$

zadovoljava uslov $g_\xi(x)\geq 0$, $x\geq 0$. Kako sigurno važi

$$\int_0^\infty g_\xi(x)dx=1,$$

$g_\xi(x)$ bi predstavljala gustinu raspodele koja je mešavina eksponencijalnih raspodela sa negativnim koeficijentima. O takvim raspodelama će biti više govora u delu (2.5), stoga ćemo sada razmotriti drugu mogućnost razlaganja $\Phi_\xi(s)$ na elementarne racionalne funkcije:

$$L_{\xi}(s) = \frac{P_1}{(\lambda_1+s)(\lambda_2+s)} + \frac{P_2}{(\lambda_3+s)(\lambda_4+s)} + \frac{P_3}{(\lambda_1+\beta s)(\lambda_2+\beta s)} .$$

Direktnim izračunavanjem dobijamo da je $\lambda_1 = \lambda_2$ što je, po pretpostavci, nemoguće.

Neka je sada $\alpha = \beta$ u (2.4.1), pa $\Phi_{\xi}(s)$ postaje:

$$\Phi_{\xi}(s) = \lambda_1\lambda_2 R(s) \;/\; Q(s)(\lambda_1+s)(\lambda_2+s) \qquad (2.4.13')$$

i imamo:

$$\Phi_{\xi}(s) = \frac{P_1}{(\lambda_1+s)(\lambda_2+s)} + \frac{P_2}{(\lambda_3+s)(\lambda_4+s)} \qquad (2.4.14')$$

Izjednačavanjem dobijamo sistem od tri linearne jednačine sa dve nepoznate P_1 i P_2 koji ima rešenja ako je $\beta=1$ ili ako je $p_1=0$. Ova druga mogućnost predstavlja specijalni slučaj posmatranog procesa, pa ćemo stoga uzeti $\beta=1$, i $\Phi_{\xi}(s)$ postaje:

$$\Phi_{\xi}(s) = (1-q_1)\lambda_1\lambda_2 / \; Q(s) \qquad (2.4.13'')$$

Ako
$$4(p_0+p_1)\lambda_1\lambda_2 < (\lambda_1+\lambda_2)^2 p_0 \qquad (2.4.15)$$

Tada $Q(s)$ ima realne korene λ_3 i λ_4 i inverzna Laplasova transformacija daje: $\xi_t = C + D$, gde su C i D nezavisne slučajne promenljive sa eksponencijalnim raspodelama $\mathcal{E}(\lambda_3)$, $\mathcal{E}(\lambda_4)$. Raspodela za ξ_t je jedinstvena, prema teoremi o jedinstvenosti za Laplas-Stiltjesovu transformaciju. Ako je $\lambda_3=\lambda_4$ tada ξ_t ima gama raspodelu, a ako su koreni λ_3 i λ_4 kompleksni, ne dobijamo raspodelu za niz ξ_t.

Ako je $\lambda_1=\lambda_2$ koreni λ_3 i λ_4 će biti kompleksni, pa neće postojati raspodela za niz ξ_t.

Neka je $\alpha=\beta=1$ u (2.4.1) i $X_t=A_1+A_2+A_3$, gde su A_j nezavisne slučajne promenljive sa eksponencijalnim raspodelama $\mathcal{E}(\lambda_j)$, $j=1,3$ i $0<\lambda_1<\lambda_2<\lambda_3$. U ovom slučaju je Laplasova transformacija za niz ξ_t oblika:

$$\Phi_{\xi}(s) = (1-q_1)\lambda_1\lambda_2\lambda_3/Q(s) \qquad (2.4.13''')$$

sa: $Q(s) = p_0(\lambda_1+s)(\lambda_2+s)(\lambda_3+s) + p_1\lambda_1\lambda_2\lambda_3.$

Neka je :

$$S=\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3, \quad R=\lambda_1\lambda_2+\lambda_1\lambda_3+\lambda_2\lambda_3, \quad T=\lambda_1\lambda_2\lambda_3.$$

$P=(3R-S^2)/3$, $Q=2S^3/27-SR/3+(1+p_1/p_0)T$ i $D=(P/3)^3+(Q/2)^2$.

Pomoću Kardanovih formula dolazimo do sledećeg rezultata:

(i) Ako je $D<0$ tada $Q(s)$ ima tri realna različita korena i iz (2.4.13''') inverznom Laplasovom transformacijom dobijamo $\xi_t=M_1+M_2+M_3$ gde su M_j, $j=1,3$ nezavisne slučajne promenljive sa odgovarajućim eksponencijalnim raspodelama.

(ii) Ako je $D = 0$ tada $Q(s)$ ima tri realna korena $-\lambda_4<-\lambda_5=-\lambda_6$, i $\xi_t=M+N$, gde su M i N nezavisne slučajne promenljive i pri tom M ima $\mathcal{E}(\lambda_4)$ raspodelu, dok N ima gama raspodelu.

(iii) Ako je $D>0$ tada $Q(s)$ ima samo jedan realni koren i ne može se dobiti raspodela za inovacioni niz ξ_t. Dokazaćemo to tvrdjenje na sledeći način. Laplasova transformacija za ξ_t može da se napiše u obliku:

$$\frac{a(b^2+c^2)}{(s+a)((s+b)^2+c^2)}$$

Inverzna Laplasova transformacija te funkcije je:

$$g(t) = \frac{a(b^2+c^2)}{(b-a)^2+c^2}\left[e^{-at}-e^{-bt}(\cos ct + P\sin ct)\right].$$

gde je $P=(b-a)/c$. Ova funkcija može predstavljati gustinu raspodele ako je $0 \le P < \sqrt{3}/3$. Izjednačujući (2.4.13''') i (2.4.14) dobijamo sistem po nepoznatim a,b i c:

$$\begin{cases} a + 2b = S \\ b^2+c^2+2ab = R \\ a(b^2+c^2) = (1+K)T, \end{cases}$$

gde je $K=p_1/p_0$ dok S, R i T imaju isto značenje kao i ranije. Iz Q(s) dobijamo $a>\lambda_3$, dok iz $P \geq 0$ i $a+2b=S$ sledi: $a \leq S/3$, što je nemoguće.
Slučaj kada Q(s) ima trostruki koren nije moguć. Primetimo da, kada je $0<\lambda_1<\lambda_2=\lambda_3$ mogu nastupiti svi slučajevi (i) - (iii), dok je pri $0<\lambda_1=\lambda_2<\lambda_3$ moguć samo slučaj (iii).

Sada ćemo razmotriti opšti slučaj. Neka je:

$$X_t = \sum_{j=1}^{n} A_j \ , \ n>3,$$

gde su A_j nezavisne slučajne promenljive sa eksponencijalnom raspodelom: $A_j:\mathcal{E}(\lambda_j)$, $0<\lambda_1<\ldots<\lambda_n$.

Gustina raspodele za niz X_t je u tom slučaju oblika:

$$g_n(x) = (-1)^{n-1} \prod_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot \sum_{j=1}^{n} \frac{e^{-\lambda_j x}}{\prod_{j\neq k} (\lambda_j-\lambda_k)} \ , \ x > 0 \ ,$$

što se može dokazati indukcijom.

Polinom Q(s) u izrazu za $\Phi_\xi(s)$ postaje:

$$Q(s) = p_0 \prod_{j=1}^{n} (\lambda_j+s) + p_1 \prod_{j=1}^{n} \lambda_j \ ,$$

i ima slučajeva kada se može dobiti svojstvena raspodela za niz ξ_t mada su, za svako konkretno n, izračunavanja dosta obimna. Važi tvrdjenje:

T3. **Neka je $Q_1(s)$ polinom $\prod(\lambda_j+s)$, i neka je :**

$$\mu = \min \left\{ |Q_1(s_0)| \ \middle| \ Q_1'(s_0) = 0,\ Q_1(s_0) < 0 \right\}.$$

Ukoliko važi uslov

$$\frac{p_1}{p_0} \prod \lambda_j \leq \mu \qquad (2.4.16)$$

Q(s) će imati n realnih korena λ_j^*, $j=\overline{1,n}$ i važiće $\xi_t = \sum A_j^*$, gde su A_j^* nezavisne slučajne promenljive

sa eksponencijalnim raspodelama $\mathcal{E}(\lambda_j^*)$, $j=\overline{1,n}$.

Ovim postupkom za $n=4$, $\lambda_1=\lambda-2h$, $\lambda_2=\lambda-h$, $\lambda_3=\lambda+h$, $\lambda_4=\lambda+2h$, i $\lambda>2h>0$, posle potrebnih izračunavanja dobićemo da je: $\mu = 2.25\ h^4 - 4\ \lambda^2(1-\lambda)^2$, pa ako su koeficijenti modela takvi da (2.4.16) važi, inovacioni niz će imati odgovarajuću Erlangovu raspodelu.

Ako (2.4.16) ne važi (ako su neki koreni $Q(s)$ kompleksni) ne može se dobiti raspodela za niz ξ_t, jer u tom slučaju $\Phi_\xi(s)$ sadrži bar jedan faktor oblika

$$\frac{a^2+b^2}{a^2+(s+b)^2}$$

što ne predstavlja Laplasovu transformaciju ni jedne gustine raspodele.

Takodje možemo posmatrati <u>slučajnu sumu</u> slučajnih promenljivih. Neka je X_t zbir $X_t = A_1 + A_2 + \dots + A_Z$, u kome sve slučajne promenljive imaju istu raspodelu $A_j:\mathcal{E}(\lambda)$, $j=\overline{1,Z}$. Neka je raspodela za Z odredjena zakonom raspodele:

$$P(Z=n) = qp^{n-1}\ ,\quad n \in \mathbb{N}.$$

Tada je $X_t : \mathcal{E}(q\lambda)$ pa nema problema u odredjivanju uslova pri kojima postoji raspodela inovacionog niza.

S druge strane, ako je u modelu (2.4.1), u kome je $\alpha = \beta = 1$, data raspodela niza ξ_t imamo da je Laplasova transformacija za niz X_t oblika:

$$\Phi_X(s) = \frac{p_0 L_\xi(s)}{1 - q_1 - p_1 L_\xi(s)}.$$

Na osnovu svojstava potpuno monotonih funkcija i Bernštajnove teoreme [4], proizilazi da će inverzna Laplasova transformacija funkcije $\Phi_X(s)$ uvek predstavljati gustinu raspodele.

Razmotrimo sada uslove pri kojima je marginalna raspodela procesa X_t dvostruka eksponencijalna (Laplasova) raspodela sa parametrom λ, što ćemo u daljem označavati sa $L(\lambda)$. Gustina raspodele slučajne promenljive sa takvom raspodelom je:

$$f(x,\lambda) = \frac{1}{2\lambda}\exp(-|x|/\lambda), \quad x \in \mathbb{R} \qquad (2.4.17)$$

Laplasova raspodela spada u beskonačno deljive zakone raspodele, u [4]. Momenti Laplasove raspodele su $E(L^n) = n!$, ako je n parno, a za neparno n su jednaki nuli. Za AREX(1) model dokazujemo tvrdjenje:

T4. Neka je X_t AREX(1) proces oblika (2.4.1) sa marginalnom raspodelom čija je gustina (2.4.17). Ako važe uslovi:

$$\begin{cases} \alpha^2 - \beta^2 \geq 0 \\ p_1\beta^2 > p_0(\alpha^2 - \beta^2) \\ q_1 + p_0\alpha^2 < \beta^2 \end{cases} \qquad (2.4.18)$$

inovacioni niz ξ_t će biti verovatnosna mešavina tri Laplasove raspodele :

$$\xi_t = \begin{cases} L(\lambda) & , \quad A \\ L(\lambda/\beta) & , \quad B \\ L(\lambda c/\alpha) & , \quad 1-A-B \end{cases} \qquad (2.4.19)$$

gde je :

$$A=(1-\alpha^2)/(p_0+p_1-p_0\alpha^2), \; B=q_1(\alpha^2-\beta^2)/(p_0(\beta^2-\alpha^2)+p_1\beta^2),$$

$$c = \sqrt{1+p_1/p_0}.$$

Dokaz. S obzirom da slučajna promenljiva sa Laplasovom raspodelom čija je gustina data u (2.4.17) može da se dobije kao razlika dve nezavisne slučajne promenljive sa eksponencijalnom $\mathcal{E}(\lambda)$ raspodelom. Laplasova transformacija te raspodele će biti $\Phi_X(s) = \lambda^2/(\lambda^2-s^2)$. Po formuli (2.4.12) izračunamo Laplasovu transformaciju za inovacioni niz. Zatim odredimo razlaganje dobijene racionalne funkcije na odgovarajuće elementarne racionalne funkcije:

$$\frac{\lambda^2 A}{\lambda^2-s^2} + \frac{\lambda^2 B}{\lambda^2-(\beta s)^2} + \frac{\lambda^2(1-A-B)}{(p_0+p_1)\lambda^2-p_0(\alpha s)^2}$$

Uslovi (2.4.18) su uslovi da A, B i 1-A-B budu verovatnoće∎

Ako je $\alpha = \beta$, tada će, pri uslovu:

$$\beta^2 \geq q_1/(p_1+q_1) \qquad (2.4.18')$$

inovacioni niz biti verovatnosna mešavina Laplasovih raspodela:

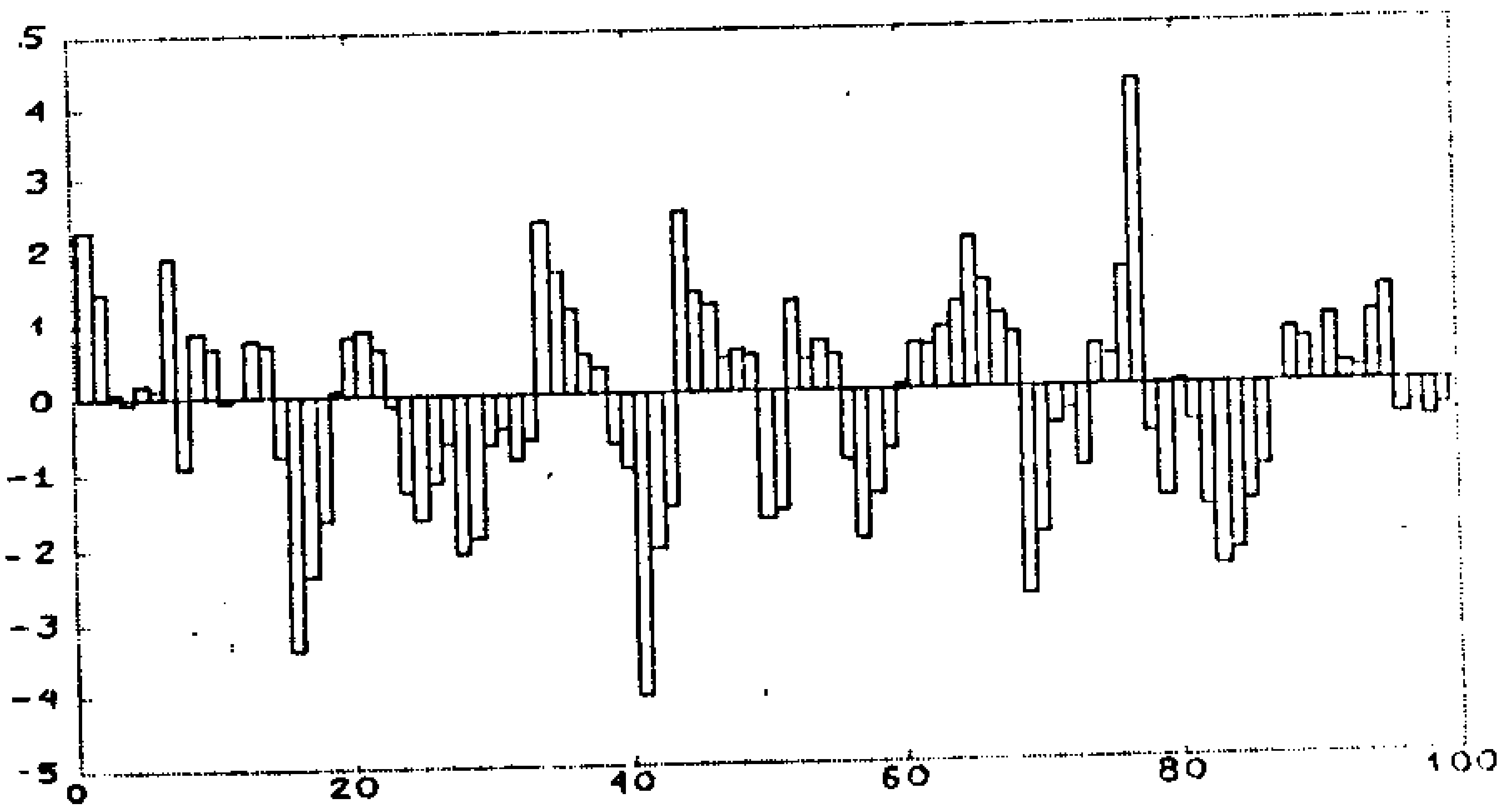
$$\xi_t = \begin{cases} L(\lambda) & , \ A \\ L(\lambda c/\alpha) & , \ 1-A \end{cases} \qquad (2.4.19')$$

Vrednosti konstanti A i c su iste kao u T4. Ako uslov (2.4.18') ne važi, ne može se dobiti raspodela za inovacioni niz, jer bi gustina raspodele bila odredjena izrazom:

$$g_\xi(x) = \frac{A}{2}\exp(-|x|) + \frac{1-A}{2c}\cdot\alpha\cdot\exp(-|x|\alpha/c),$$

a ova funkcija ne zadovoljava uslov $g_\xi(x) > 0$ za svako $x \in \mathbb{R}$.

Na slici 3 data je jedna realizacija AREX(1) modela sa Laplasovom marginalnom raspodelom i parametrima $p_0 = 0.3$, $p_1 = 0.5$ i $\alpha = \beta = 0.7$.



Slika 3. Jedna realizacija AREX(1) procesa sa Laplasovom marginalnom raspodelom sa parametrom 1. Parametri procesa su $p_0 = 0.3$, $p_1 = 0.5$ i $\alpha = \beta = 0.7$.

2.5. Mešovita eksponencijalna raspodela sa negativnim koeficijentima

Ako je dato n eksponencijalnih raspodela sa parametrima λ_j, $j=1,\ldots,n$, $f_j(x) = \lambda_j \exp(-\lambda_j x)$, $x>0$, i n nenegativnih konstanti a_j, $j=1,\ldots,n$, koje zadovoljavaju uslov:

$$\sum_{j=1}^{n} a_j = 1, \tag{2.5.1}$$

jasno je da

$$\sum_{j=1}^{n} a_j \, f_j(x) \quad , \ x>0 \tag{2.5.2}$$

predstavlja gustinu raspodele neke slučajne promenljive i da nema problema pri modeliranju takve slučajne promenljive koja je konveksna verovatnosna mešavina n eksponencijalno raspodeljenih slučajnih promenljivih. Ako uslov (2.5.1) važi, ali je za neko j odgovarajući koeficijent a_j negativan, onda (2.5.2) neće uvek predstavljati gustinu raspodele. Korišćenje autoregresionog procesa može nam omogućiti dobijanje gustine raspodele oblika (2.5.2) sa negativnim koeficijentima. Ako imamo početnu vrednost korišćenog procesa možemo modelirati niz vrednosti slučajne promenljive čija gustina ima raspodelu oblika (2.5.2) sa negativnim koeficijentima. U literaturi nema pogodnih tehnika modeliranja slučajnih promenljivih sa ovakvim gustinama raspodele [3], [12]. Na ovaj način, korišćenjem autoregresionog procesa (ili procesa pokretnih sredina) takodje možemo konstatovati i da je mešovita eksponencijalna raspodela sa negativnim koeficijentima raspodela koja se kod posmatranih procesa prirodno javlja.

Posmatrajmo proces, definisan u [19]:

$$X_t = \begin{cases} \alpha\, \xi_t & , \ p_o \\ \beta\, \xi_t + X_{t-1} & , \ p_1 \\ X_{t-1} & , \ q_1 \end{cases} \tag{2.5.3}$$

gde su α, β, $p_o, p_1, q_1 \in (0,1)$ i $p_o+p_1+q_1=1$, pri čemu su p_o, p_1 i q_1 verovatnoće. Niz ξ_t je niz nezavisnih jednako raspodeljenih slučajnih promenljivih, a takodje pretpostavljamo i nezavisnost ξ_t i X_s za $s<t$.

S obzirom da radimo sa eksponencijalnom raspodelom i raspodelama vezanim sa eksponencijalnom, koristićemo Laplasovu transformaciju.

Neka su $\Phi_X(s)$ i $\Phi_\xi(s)$ Laplasove transformacije za X_t i ξ_t. Korišćenjem osobina Laplasove transformacije i na osnovu stacionarnosti niza ξ_t, iz (2.5.3) dobijamo:

$$\Phi_X(s) = \frac{p_o \; \Phi_\xi(\alpha s)}{(1-q_1) - p_1\Phi_\xi(\beta s)} . \tag{2.5.4}$$

Ako je $f_\xi(x)$ gustina raspodele za niz ξ_t, onda je njena Laplasova transformacija $\Phi_\xi(s)$ potpuno monotona funkcija (p.m.f.) takva da je $\Phi_\xi(0)=1$. (Bernštajnova teorema, 1928, [4]). Pošto je proizvod i zbir p.m.f. ponovo p.m.f., ako (2.5.4) napišemo u obliku:

$$\Phi_X(s) = \frac{p_o}{1-q_1}\, \Phi_\xi(\alpha s) \sum_{m=o}^{\infty} (k\; \Phi_\xi(\beta s))^m, \text{ sa } \quad 0 < k = \frac{p_1}{1-q_1} < 1,$$

sledi da će $\Phi_X(s)$ biti p.m.f. sa $\Phi_X(0)=1$, kao i da će inverzna Laplasova transformacija $\Phi_X(s)$ biti gustina raspodele $f_X(x)$.

Razmotrićemo nekoliko slučajeva pri kojima se dobijaju mešovite raspodele sa negativnim koeficijentima.

Slučaj 1. Ako pretpostavimo da je raspodela za ξ_t: $f_\xi(x)=\lambda e^{-\lambda x}$, $\lambda>0$, $x>0$, imamo $\Phi_\xi(s)= \frac{\lambda}{\lambda+s}$, pa će inverzna Laplasova transformacija za $\Phi_X(s)$ biti:

$$f_X(x) = a_1\gamma_1 \, e^{-\gamma_1 x} + a_2\gamma_2 \, e^{-\gamma_2 x}, \; x>0. \tag{2.5.5}$$

sa $a_1=p_o(\beta-\alpha)/((1-q_1)\beta-p_o\alpha)$, $a_2=1-a_1$, $\gamma_1=\lambda/\alpha$, $\gamma_2=p_o\lambda/(\beta(1-q_1))$ i možemo jednostavno pokazati da je:

(i) $p_o(\beta-\alpha)+p_1\beta < 0$ ekvivalentno sa $a_1> 1$,

(ii) $\beta<\alpha$ i $p_o(\beta-\alpha)+p_1\beta > 0$ ekvivalentno sa $a_1< 0$ i

(iii) u ostalim slučajevima $a_1 \in [\ 0,1\ ]$.

Na primer, za $p_o=p_1=q_1=1/3$, $\alpha=0.6$, $\beta=0.1$, $\lambda=1$ dobijamo:

$$f_X(x) = 5/4(5/3\ e^{-5x/3}) - 1/4(5\ e^{-5x})\ ,\ x>0 \ \blacksquare$$

Na grafiku, slika 4, strana 53 , predstavljen je grafik te funkcije (linija označena --). Zapažamo da je ta gustina raspodele unimodalna. Pokazaćemo da se, u zavisnosti od parametara procesa oblika (2.5.3) kao gustina inovacionog procesa (2.5.5) u slučajevima (i) i (ii) može dobiti funkcija koja, za x>0 , može imati jedan lokalni ekstrem.

T1. Neka je $K=p_o/p_1$ i $M=\alpha/\beta$. U slučaju (i) ako je :
(1) $K > 1$ i $M > 1 + K$ ili ako je $K < 1$ gustina raspodele (2.6.5) ima jedan lokalni ekstrem, a ako je
(2) $K > 1$ i $1 + 1/K < M < 1 + K$ nema lokalnih ekstrema.
U slučaju (ii) ako je :
(1') $K > 1$ ili $K < 1$ i $1 < M < 1 + K$ gustina raspodele ima jedan lokalni ekstrem,
(2') $K < 1$ i $1 + K < M < 1 + 1/K$ nema lokalnih ekstrema.
Ako je $K = 1$ i $M \neq 2$, gustina raspodele ima lokalni ekstrem, dok za $M = 2$ nema lokalnih ekstrema za $x > 0$.

Dokaz. Dokaz ovog tvrdjenja dobijamo neposredno rešavanjem jednačine f'(x) = 0, koja se svodi, u slučaju (i), na:

$$\frac{a_1}{|a_2|} \cdot \frac{\gamma_1^2}{\gamma_2^2} = e^{(\gamma_1-\gamma_2)x} .$$

Da bi gustina raspodele imala lokalni ekstrem za $x > 0$ potrebno je da izraz na levoj strani bude manji od 1, odakle dobijamo kvadratnu nejednačinu po M i K. Ako uvrstimo nejednakost iz uslova (i) dobijamo dato tvrdjenje.

U slučaju (ii) dokaz je analogan, dok pri K=1, tvrdjenje dobijamo neposrednom proverom.

Slučaj 2. Neka ξ_t ima najjednostavniju gama raspodelu sa Laplasovom transformacijom $\Phi_\xi(s)= \lambda^2(\lambda+s)^{-2}$. Tada $\Phi_X(s)$ postaje:

$$\Phi_X(s) = \frac{p_0\lambda^2(\lambda+\beta s)^2}{((1-q_1)(\lambda+\beta s)^2-p_1\lambda^2)(\lambda+\alpha s)^2},$$

i koreni imenioca su očigledno realni. Ako je ispunjen uslov $(1-q_1)(1-\beta/\alpha)^2-p_1\neq 0$ koreni će biti $-\lambda/\alpha$, $-\lambda_1$, $-\lambda_2$, pri čemu je $0<\lambda_1<\lambda_2$, pa će razlaganje $\Phi_X(s)$ na elementarne racionalne funkcije biti oblika:

$$\Phi_X(s) = \frac{A_1\lambda_1}{\lambda_1+s} + \frac{A_2\lambda_2}{\lambda_2+s} + \frac{A_3\lambda/\alpha}{\frac{\lambda}{\alpha}+s} + \frac{A_4(\lambda/\alpha)^2}{(\frac{\lambda}{\alpha}+s)^2}.$$

Rešavanjem odgovarajućeg sistema jednačina odredjujemo A_j, $j=1,\dots,4$, i zaključujemo da je A_2 uvek negativno, pa $\Phi_X(s)$ predstavlja mešavinu tri eksponencijalne i jedne gama raspodele sa bar jednim negativnim koeficijentom. A ako je $(1-q_1)(1-\beta/\alpha)^2-p_1= 0$, dobijamo:

$$\Phi_X(s) = \frac{A_1\lambda_1}{\lambda_1+s} + \frac{A_2\lambda/\alpha}{\frac{\lambda}{\alpha}+s} + \frac{A_3(\lambda/\alpha)^2}{(\frac{\lambda}{\alpha}+s)^2} + \frac{A_4(\lambda/\alpha)^3}{(\frac{\lambda}{\alpha}+s)^3},$$

sa $A_4<0$, što znači da će gustina raspodele koju dobijemo primenom inverzne Laplasove transformacije na prethodni izraz biti mešavina dve eksponencijalne i dve gama raspodele sa bar jednim negativnim koeficijentom.

Slučaj 3. Neka je Laplasova transformacija za ξ_i oblika:

$$\Phi_\xi(s) = \frac{a_1\nu_1}{\nu_1+s} + \frac{a_2\nu_2}{\nu_2+s}, \text{ sa } a_1,a_2> 0,\ a_1+a_2=1,\ 0<\nu_1<\nu_2.$$

Odgovarajuća gustina raspodele je tada verovatnosna mešavina dve eksponencijalne raspodele čiji su parametri ν_1 i ν_2. Ako je $\alpha\neq\beta$ u (2.5.3) dobijamo:

$$\Phi_X(s) = \frac{p_o(\nu_1\nu_2+\alpha A s)(\nu_1+\beta s)(\nu_2+\beta s)}{(\nu_1+\alpha s)(\nu_2+\alpha s)Q(s)} ,$$

sa $A=a_1\nu_1+a_2\nu_2$, $Q(s) = (1-q_1)(\nu_1+\beta s)(\nu_2+\beta s)-p_1(\nu_1\nu_2+\beta A s)$.

Ako su $\lambda_1<\lambda_2$ koreni polinoma $Q(s)$, možemo pisati:

$$\Phi_X(s) = \frac{A_1\nu_1/\alpha}{\nu_1/\alpha+s} + \frac{A_2\nu_2/\alpha}{\nu_2/\alpha+s} + \frac{A_3\lambda_1}{\lambda_1+s} + \frac{A_4\lambda_2}{\lambda_2+s} .$$

Neposrednim izračunavanjem utvrdjujemo da važi:

$$(1-\tfrac{\beta}{\alpha})(\nu_2-\tfrac{\beta}{\alpha}\nu_1)(\lambda_1-\nu_1/\alpha)(\lambda_2-\nu_1/\alpha) < 0 \quad\Rightarrow\quad A_1< 0 ,$$

$$(1-\tfrac{\beta}{\alpha})(\nu_1-\tfrac{\beta}{\alpha}\nu_2)(\lambda_1-\nu_2/\alpha)(\lambda_2-\nu_2/\alpha) < 0 \quad\Rightarrow\quad A_2< 0 ,$$

$$(\nu_1/\alpha-\lambda_1)(\nu_2/\alpha-\lambda_1)(\nu_1\nu_2-\alpha A\lambda_1) < 0 \quad\Rightarrow\quad A_3< 0 ,$$

$$(\nu_1/\alpha-\lambda_2)(\nu_2/\alpha-\lambda_2)(\nu_1\nu_2-\alpha A\lambda_2) < 0 \quad\Rightarrow\quad A_4< 0 ,$$

i ima slučajeva kad je bar jedan od tih uslova ispunjen. Na primer, za $a_1=a_2=0.5$, $\nu_1=1$, $\nu_2=2$, $\alpha=0.5$, $\beta=0.25$, $p_o=p_1=q_1$ dobijamo $A_2< 0$.■

S druge strane, ako pretpostavimo $\alpha = \beta$ u (2.5.3) možemo dokazati sledeće tvrdjenje:

T2. Ako je $\alpha=\beta$ i $\Phi_\xi(s)$ oblika:

$$\Phi_\xi(s)= \sum_{j=1}^{n} \frac{a_j\nu_j}{\nu_j+s} , \quad \text{sa } a_j>0,\ \sum a_j=1,\quad 0<\nu_1<\nu_2<\ldots<\nu_n ,$$

tada je X_t verovatnosna mešavina n eksponencijalno raspodeljenih slučajnih promenljivih.

Dokaz. Dokazaćemo da su, pri navedenim pretpostavkama svi koeficijenti u razlaganju $\Phi_X(s)$ na elementarne racionalne funkcije nenegativni. Imamo da je:

$$\Phi_X(s) = \frac{p_o Q_{n-1}(s)}{Q_n(s)}$$

$$Q_{n-1}(s) = \sum_{k=1}^{n} a_k \nu_k \prod_{j\neq k} (\nu_j + \alpha s), \quad Q_n(s) = (1-q_1) \prod_{j=1}^{n} (\nu_j + \alpha s) - p_1 Q_{n-1}(s).$$

Pošto je $(-1)^{j-1} Q_{n-1}(-\nu_j/\alpha) > 0$, $j=1,\dots,n$ sledi da su koreni imenioca realni i različiti: $-\lambda_n < -\lambda_{n-1} < \dots < -\lambda_1 < 0$. S obzirom da je $Q_n(-\lambda_j) = 0$ sledi $(-1)^{j-1} Q_{n-1}(-\lambda_j) > 0$. Iz razlaganja na elementarne racionalne funkcije:

$$\Phi_X(s) = \sum_{j=1}^{n} \frac{A_j \lambda_j}{\lambda_j + s}$$

dobijamo: $$\sum_{j=1}^{n} A_j \lambda_j \prod_{k\neq j} (\lambda_k + s) = \frac{p_o}{(1-q_1)\alpha^n} Q_{n-1}(s).$$

Ako tu stavimo $s = -\lambda_j$ dobijamo $A_j > 0$, $j=1,\dots,n$. ■

Ako imamo mešovitu eksponencijalnu raspodelu sa negativnim koeficijentima u obliku (2.5.5), možemo koristiti verovatnosnu mešavinu (2.5.2) i dobiti mešovitu eksponencijalnu raspodelu sa negativnim koeficijentima koja će sadržati više od dve eksponencijalne raspodele. Ali takve mešavine takodje možemo dobiti i korišćenjem pogodno odabranog procesa višeg reda kao u sledećim primerima.

Slučaj 4. Pomoću autoregresionog procesa drugog reda možemo dobiti gustinu raspodele koja je mešavina tri eksponencijalne raspodele sa bar jednim negativnim koeficijentom. Uz iste pretpostavke o nizu ξ_t kao i ranije, definišemo proces X_t:

$$X_t = \begin{cases} \alpha\xi_t, & p_o \\ \alpha_1\xi_t + X_{t-1}, & p_1 \\ X_{t-1}, & q_1 \\ \alpha_2\xi_t + X_{t-2}, & p_2 \\ X_{t-2}, & q_2 \end{cases} \tag{2.5.6}$$

gde je $\alpha,\alpha_1,\alpha_2,p_o,p_1,p_2,q_1,q_2 \in (0,1)$, $p_o+p_1+p_2+q_1+q_2=1$. Ako je data gustina raspodele za niz ξ_t za X_t dobijamo p.m.f. $\Phi_X(s)$ sa $\Phi_X(0)=1$. Neka je ξ_t sa eksponencijalnom raspodelom sa parametrom $\lambda=1$, tada $\Phi_X(s)$ postaje:

$$\Phi_X(s) = \frac{p_o(1+\alpha_1 s)(1+\alpha_2 s)}{(1+\alpha s)((1-q_1-q_2)(1+\alpha_1 s)(1+\alpha_2 s)-p_1(1+\alpha_2 s)-p_2(1+\alpha_1 s))}.$$

Kvadratna funkcija u imeniocu uvek ima dva realna različita korena, pa inverzna Laplasova transformacija $\Phi_X(s)$ daje mešovitu eksponencijalnu raspodelu sa čiji koeficijenti mogu biti negativni, kao u slučaju :

$$\alpha_1=0.1,\quad \alpha_2=0.2,\ p_o=p_1=p_2=q_1=q_2=0.2,$$

kada će $f_X(x)$ biti oblika, $x>0$:

$$f_X(x)=23.9997\ e^{-2x}-23.21335\ e^{-2.11325x}-0.11966\ e^{-7.88675x}$$

Grafik te funkcije predstavljen je na slici 4, strana 53 , neprekidnom linijom ■

Slučaj 5. Procesi (2.5.3) i (2.5.6) imaju veliki broj parametara, pa ćemo stoga razmotriti primer autoregresionog procesa n-tog reda sa jednim parametrom koji takodje generiše mešovitu eksponencijalnu raspodelu sa negativnim koeficijentima:

$$X_t = \begin{cases} \alpha\xi_t & ,\ \alpha \\ \alpha^2\xi_t + X_{t-1} & ,\ \alpha^2 \\ \cdots & \\ \alpha^n\xi_t + X_{t-n+1} & ,\ \alpha^n \\ X_{t-n} & ,\ 1-\alpha-\alpha^2-\ldots-\alpha^n \end{cases} \qquad (2.5.7)$$

gde je $\alpha \in (0,1/2)$, a ξ_t niz nezavisnih jednako raspodeljenih slučajnih promenljivih. Pretpostavljajući da su ξ_t i X_s nezavisne za $s<t$, i da ξ_t ima eksponencijalnu raspodelu sa očekivanjem 1, dobijamo da je $\Phi_X(s)$ jednako:

$$\frac{\alpha L_{\xi}(\alpha s)}{\sum\limits_{k=1}^{n}\alpha^{k}-\sum\limits_{k=2}^{n}\alpha^{k}L_{\xi}(\alpha^{k}s)}=\alpha\prod_{k=2}^{n}(1+\alpha^{k}s)/((1+\alpha s)\mathbb{P}_{n-1}(s)),\quad(2.5.8)$$

$$\text{sa}\quad \mathbb{P}_{n-1}(s)=\left(\sum_{j=1}^{n}\alpha^{j}\right)\prod_{j=2}^{n}(1+\alpha^{j}s)-\sum_{k=2}^{n}\alpha^{k}\prod_{\substack{j=2\\ j\neq k}}^{n}(1+\alpha^{j}s).\quad(2.5.9)$$

Imamo da je $\Phi_X(s)$ Laplasova transformacija neke gustine raspodele na osnovu tvrdjenja:

Ako su $\phi_j(s)$, $j\in\mathbb{N}$ Laplasove transformacije nekih gustina raspodele i a_j, $j\in\mathbb{N}$ nenegativne realne konstante za koje važi $\sum a_j=1$, tada je

$$\sum_{j=1}^{\infty}a_j\phi_j(s)$$

Laplasova transformacija neke raspodele.

Neka je $Q_2=\alpha^2+\alpha^3+\ldots+\alpha^n$. Tada funkcije:

$$\phi(s)=\sum_{k=2}^{n}\frac{\alpha^k}{Q_2}\Phi_{\xi}(\alpha^k s)\qquad\text{i}\qquad\Psi(s)=\sum_{j=0}^{\infty}a_j\phi^j(s),$$

gde je $a_j=\frac{\alpha}{Q_1}(Q_2/Q_1)^j, j=0,1,\ldots$ predstavljaju Laplasove transformacije nekih gustina raspodele, pa će stoga:

$$\Phi_X(s)=\Phi_{\xi}(\alpha s)\ \Psi(s)$$

takodje biti Laplasova transformacija neke gustine raspodele.

Neka je α_o rešenje jednačine:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha^{2n}}{1-\alpha^n}=1.\qquad(2.5.10)$$

Dokazaćemo sledeće tvrdjenje.

T3. Za svako $\alpha\in(0,1/2)$ proces X_t, čija je Laplasova transformacija data formulom (2.5.8) ima gustinu raspodele oblika (2.5.2) sa bar jednim negativnim koeficijentom.

<u>Dokaz</u>. Prvo ćemo dokazati da su za $\alpha\in(0,\alpha_o)$ koreni

imenioca funkcije $\Phi_X(s)$ realni i različiti. Zatim ćemo, uz pretpostavku $\alpha \in (0,\alpha_o)$ dokazati da postoji bar jedan negativan koeficijent u (2.5.2), ako $f_X(x)$ predstavlja inverznu Laplasovu transformaciju funkcije $\Phi_X(s)$.

Iz (2.5.9) dobijamo:

$$\mathbb{P}_{n-1}(s) = \alpha \prod_{j=2}^{n}(1+\alpha^j s) + \sum_{k=2}^{n} \alpha^{2k} \prod_{\substack{j=2 \\ j\neq k}}^{n}(1+\alpha^j s) ,$$

i možemo videti da polinom $\mathbb{P}_{n-1}(s)$ zadovoljava uslove:

$$\mathbb{P}_{n-1}(0) > 0, \quad (-1)^{m-1}\mathbb{P}_{n-1}(-1/\alpha^m) > 0 , \quad m=2,3,\ldots,n,$$

i da su stoga njegovi koreni $(-\alpha_j)$, $j=1,\ldots,n-1$ realni i različiti. Imamo da je:

$$-\alpha_{n-1} > -1/\alpha^{n-1} > \ldots > -\alpha_2 > -1/\alpha^2 > -\alpha_1 > 0.$$

Za $\alpha \in (0,\alpha_o)$ možemo dokazati da je $-\alpha_1 > -1/\alpha$, odnosno $\mathbb{P}_{n-1}(-1/\alpha) > 0$, pa će koreni imenioca funkcije $\Phi_X(x)$ biti različiti. Razlaganje na elementarne racionalne funkcije će biti oblika:

$$\Phi_X(s)= \frac{\frac{1}{\alpha}A}{\frac{1}{\alpha}+s} + \frac{\alpha_1 A_1}{\alpha_1+s} + \ldots + \frac{\alpha_{n-1}A_{n-1}}{\alpha_{n-1}+s} , \text{ sa } A+A_1+A_2+\ldots+A_{n-1}=1.$$

Izjednačavajući sa (2.5.8) dobijamo sistem linearnih jednačina po nepoznatim A, A_1, ... , A_{n-1}. Jedna od tih jednačina je:

$$\alpha \sum_{j=1}^{n} \alpha^j = A + \sum_{j=1}^{n-1} \alpha\, \alpha_j A_j .$$

Ako su svi A_j, $j=1,\ldots,n-1$ pozitivni desna strana je veća od 1, dok će za $\alpha < (-1+\sqrt{5})/2$ suma na levoj strani biti manja od 1, pa je jasno da će bar jedan od koeficijenata $A_1,\ldots, A_{n-1}$ biti negativan. Tako smo dokazali da će odgovarajuća gustina raspodele $f_X(x)$ imati bar jedan negativni koeficijent.

Jednačina (2.5.10) može da se reši samo približno, nekom numeričkom metodom i dobijamo: $0.5741855 < \alpha_o < 0.574186$. (videti u [11]).

Za n=1 gustina raspodele za niz X_t je oblika (2.5.5) sa $a_1 = (\alpha-1)/(\alpha^2+\alpha-1)$ čije su vrednosti u intervalu $(-\infty,0)\cup(1,\infty)$ kada je $\alpha \in (0,1)$ ■

Primetimo da će, ako ξ_t ima normalnu raspodelu, gustina raspodele za niz X_t iz (2.5.3) uvek biti verovatnosna mešavina niza normalno raspodeljenih slučajnih veličina. S obzirom da je normalna raspodela dvostrana, ne koristimo Laplasovu transformaciju, već koristimo karakterističnu funkciju. Bez teškoća, na osnovu svojstava karakteristične funkcije dobijamo tvrdjenje:

T4. **Ako je ξ_t u (2.5.3) niz slučajnih promenljivih sa istom normalnom raspodelom $\mathcal{N}(0,1)$, tada će X_t biti mešavina normalnih raspodela oblika:**

$$P(X_t=Y_k) = p_o p_1^k (p_o+p_1)^{-2},\ k=1,2,\ldots$$

gde je $Y_k=A_1+\ldots+A_k$, a slučajne promenljive $A_1,\ldots,A_k$ su nezavisne slučajne promenljive, takve da je:

$$A_1 : \mathcal{N}(0,\alpha^2),\ A_j : \mathcal{N}(0,\beta^2),\ j=2,\ldots,k\ .$$

Imamo, na osnovu poznatih svojstava normalne raspodele, da će raspodela za Y_k biti normalna raspodela $\mathcal{N}(0,\alpha^2+(k-1)\beta^2)$. Sličnu situaciju imamo i kad uzmemo uniformnu raspodelu za ξ_t. Naime, dobijamo da će u tom slučaju X_t biti verovatnosna mešavina niza nezavisnih slučajnih promenljivih sa uniformnim raspodelama ■

Takodje možemo dobiti mešovitu eksponencijalnu raspodelu sa negativnim koeficijentima koristeći AREX(1) proces:

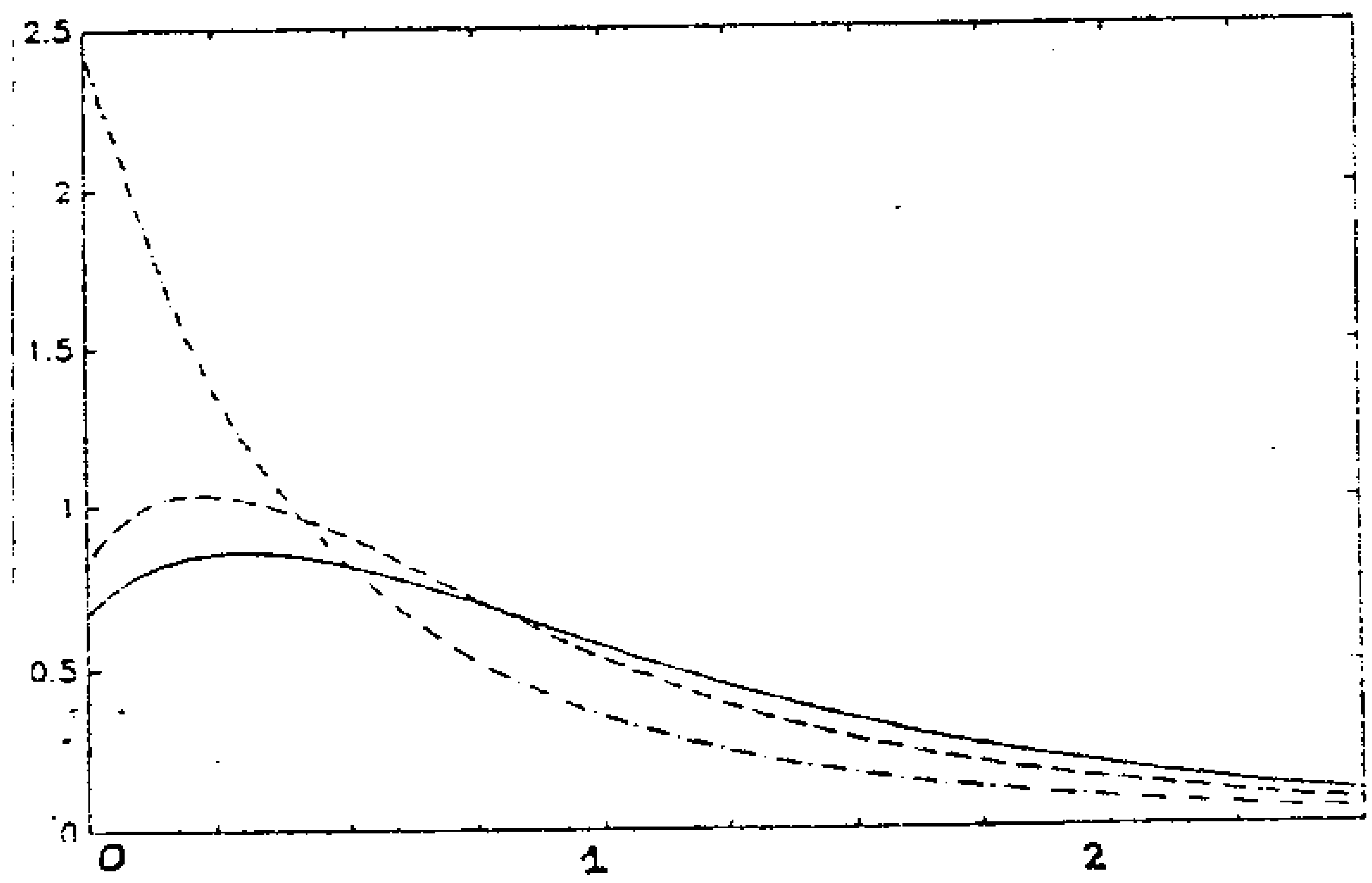
$$X_t = \begin{cases} \xi_t & , \quad p_o \\ \alpha X_{t-1} + \xi_t & , \quad p_1 \\ \beta X_{t-1} & , \quad q_1 \end{cases}$$

Ako je marginalna raspodela za niz X_t eksponencijalna $\mathcal{E}(\lambda)$, postoje uslovi pri kojima će raspodela inovacionog niza ξ_t biti mešovita eksponencijalna sa negativnim koeficijentima. Postupak je analogan prethodnom, primenom Laplasove transformacije i inverzne Laplasove transformacije dobićemo tražene uslove (v. u delu 2.4).

Ako posmatramo proces pokretnih sredina :

$$X_t = \begin{cases} \xi_t & , \ p_0 \\ \alpha\xi_{t-1} + \xi_t & , \ p_1 \\ \beta\xi_{t-1} & , \ q_1 \end{cases}$$

gde je ξ_t niz nezavisnih jednako raspodeljenih slučajnih promenljivih sa eksponencijalnom $\mathcal{E}(\lambda)$ raspodelom, možemo dokazati da će raspodela za X_t biti mešovita eksponencijalna sa negativnim koeficijentima, ako važi uslov $\beta > q_1/(p_1+q_1)$, videti u delu 4 ■



Slika 4. Na slici su predstavljeni grafici mešovitih eksponencijalnih raspodela:

(-.) verovatnosna mešavina i

(-), (--) mešavine sa negativnim koeficijentima.

3. PROBLEMI ESTIMACIJE ZA ARMA MODELE

Ocenjivanje parametara i odredjivanje reda modela su važni elementi u analizi slučajnih procesa. Za proces AREX date su neke mogućnosti ocenjivanja parametara. Razvijena je metoda za odredjivanje reda procesa. Najpre ćemo navesti neke rezultate u vezi ocenjivanja parametara za EAR i NEAR modele.

3.1. REZULTATI ZA EAR i NEAR MODELE

U svojim radovima [21] i [22] A.Raftery analizira neka svojstva procesa (1.1.4) uz pretpostavku $\alpha=\beta=p$. Specijalno se razmatra mogućnost ocene parametra p i očekivanja $m = \frac{1}{\lambda}$ samog procesa metodom maksimalne verodostojnosti (MV). Neka je nepoznati parametar $\theta=(m,p)$.
Gustina raspodele jedne realizacije $X=(X_1,X_2,\ldots,X_n)$ je

$$L_n(X|\theta) = \frac{1}{m}\exp(-X_1/m)\prod_{k=2}^{n} p_{k,\theta} ,$$

gde je $p_{k,\theta}$ uslovna gustina za X_k pri datom X_{k-1}. Iz izraza za $p_{k,\theta}$ zaključuje se da je $L_n(X|\theta)$ prekidna po p, pa nije primenljiva klasična teorija ocenjivanja metodom MV - uslovi regularnosti nisu ispunjeni, a observacije su zavisne. Ocena parametra θ metodom MV je ona vrednost $\tilde{\theta}$ parametra θ za koju je

$$L_n(X|\tilde{\theta}) \geq L_n(X|\theta) \ , \text{ za svako } \theta \neq \tilde{\theta}.$$

Neka $\theta_o=(m_o,p_o)$ označava pravu vrednost parametra θ. U članku [21] je dokazano da pod uslovom $m_o< M$, gde je M neka poznata vrednost, možemo metodom MV oceniti nepoznati parametar i da će dobijena ocena biti asimptotski konzistentna.

U članku [22] se posmatra ocena $\hat{\theta}= (\hat{m},\hat{p})$. Ovde je $\hat{m}$ dobijeno metodom MV kao rešenje jednačine

$$\frac{\partial}{\partial m}\log L_n(X|\theta) = 0,$$

dok je $\hat{p}$ vrednost koja maksimizira funkciju (metoda maksimalne verovatnoće) :

$$D_n(\theta) = \int_{p-r/n}^{p+r/n} L_n(X|\theta)\, dp \quad , \; r\in(0,\infty) \text{ je fiksiran broj.}$$

Dokazana su tvrdjenja:

1. $\hat{\theta}$ je jako konzistentna ocena θ, tj. sa verovatnoćom 1 je $\lim_{n\to\infty} \hat{\theta}_n = \theta_o$, gde je $\hat{\theta}_n$ prethodno opisana ocena dobijena

   na osnovu uzorka obima n.

2. (1) $\hat{p}$ je asimptotski efikasna u smislu da je

$$\lim_{n\to\infty} P_{\theta_o} \left(-\frac{r}{n} \le \hat{p} - p_o \le \frac{r}{n} \right) = 1 \; .$$

   (2) $\hat{m}$ ima asimptotski normalnu raspodelu i asimptotski je efikasna i

   (3) $\hat{m}$ i $\hat{p}$ su asimptotski nezavisne.

Lawrance i Lewis u [15] koriste metodu najmanjih kvadrata, ali bez izvodjenja eksplicitnih ocena za sva četiri parametra NEAR(2) procesa koji je izabran kao model realnog procesa iz meteorologije (brzina vetra). Smith [27] predlaže eksperimentalnu numeričku metodu zasnovanu na ideji metode maksimalne verodostojnosti. Konzistentne i asimptotski normalne ocene za sva četiri parametra NEAR(2) modela date su u [10], Karlsen, Tjostheim. Primenjen je postupak sličan onome koji je dat u knjizi [7], Nicholls, Quinn, a koristi se uslovno matematičko očekivanje.

Posmatra se NEAR(2) model u obliku autoregresionog procesa sa slučajnim koeficijentima:

$$X_t = \theta_{t1} X_{t-1} + \theta_{t2} X_{t-2} + \xi_t .$$

Radi jednostavnijeg računanja marginalna raspodela procesa je $\mathcal{E}(1)$. Neka je $a_i = E(\theta_{ti})$, $\sigma_{ii} = Var(\theta_{ti})$ i neka su $\hat{a}_i$ i $\hat{\sigma}_{ii}$ ocene tih veličina na osnovu uzorka obima n. Tada ocene parametara NEAR(2) procesa dobijamo iz:

$$\hat{\alpha}_i = \frac{\hat{a}_i^2}{\hat{\sigma}_{ii}+\hat{a}_i^2}, \quad \hat{\beta}_i = \frac{\hat{\sigma}_{ii}+\hat{a}_i^2}{\hat{a}_i^2}, \quad i=1,2 .$$

Korišćenjem uslovnog matematičkog očekivanja ili metode momenata dobijamo da se ocene $\hat{a}_i$ mogu odrediti iz:

$$\sum_{t=3}^{n}(X_t-1)(X_{t-i}-1) = \sum_{j=1}^{2}\hat{a}_j \sum_{t=3}^{n}(X_{t-j}-1)(X_{t-i}-1), \quad i=1,2.$$

Da bi se odredile ocene $\hat{\sigma}_{ii}$ neophodno je primeniti uslovno matematičko očekivanje, pa se dolazi do:

$$\sum_{t=3}^{n}\hat{H}_t(X_{t-i}^2-2) = \sum_{j=1}^{2}\hat{\sigma}_{jj}\sum_{t=3}^{n}(X_{t-j}^2-2)(X_{t-i}^2-2), \quad i=1,2.$$

gde se $\hat{H}_t$ dobijaju korišćenjem ocena $\hat{a}_1$ i $\hat{a}_2$, po formuli (3.10), u [10]. Važi tvrdjenje:

Ako je $\alpha_1,\alpha_2 > 0$, $\alpha_1+\alpha_2 < 1$, $0 < \beta_1,\beta_2 < 1$, ocene $\hat{\alpha}_j$ i $\hat{\beta}_j$, $j=1,2$ su jako konzistentne, a njihova zajednička raspodela je asimptotski normalna. Asimptotske kovarijanse ovih ocena su analizirane na modeliranim podacima.

Sim [26], metodom momenata ocenjuje nepoznate parametre u MGARMA(1,1) modelu sa mešovitom gama raspodelom kao marginalnom raspodelom procesa. Tako odredjene parametre koristi za simulaciju procesa i dobija veliku saglasnost modeliranih i stvarnih vrednosti posmatranog procesa iz hidrologije (protok reke). Model koji je tu primenjen je oblika:

$$X_n = K_n Z_n + V_n Y_{n-1}, \qquad Y_n = U_n Y_{n-1} + Z_n$$

gde je Z_n niz nezavisnih slučajnih promenljivih sa istom eksponencijalnom $\mathcal{E}(\lambda)$ raspodelom, K_n niz nezavisnih slučajnih promenljivih sa istom binomnom raspodelom:

$$K_n : \begin{pmatrix} 0 & \beta \\ \theta & 1-\theta \end{pmatrix},$$

U_n i V_n su nezavisne slučajne promenljive na intervalu $[0,1)$, sa istom raspodelom $F_V(x)=x^{\alpha}$, $\alpha > 0$. Takodje su Z_n, K_n, U_n i V_n medjusobno nezavisne slučajne promenljive.

3.2. OCENE PARAMETARA U AREX(1) MODELU

Model AREX(1) je specijalni slučaj autoregresionog modela sa slučajnim koeficijentima (RCA model: random coefficient autoregressive model), i može biti napisan u obliku:

$$X_t = A_t X_{t-1} + B_t \xi_t . \tag{3.2.1}$$

Ako je $\alpha = \beta$ u modelu AREX(1), zajednička raspodela para slučajnih promenljivih (A_t, B_t) odredjena je na sledeći način:

$$\begin{array}{c|cc} A_t \diagdown B_t & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & p_0 \\ \beta & q_1 & p_1 \end{array} \tag{3.2.2}$$

Pri tome su slučajne promenljive A_t i B_t nezavisne od X_t i od ξ_t.

Posmatrani model je potpuno odredjen ako su zadati parametri p_0, p_1 i β, i to su parametri koje želimo da ocenimo na osnovu jedne realizacije posmatranog procesa. Postupak koji ćemo primeniti sličan je onom koji je opisan u [10], gde je dat način ocenjivanja parametara NEAR(2) i NLAR(2) modela.

Iz zajedničke raspodele (3.2.2),koristeći oznake:

$$a_1 = EA_t, \quad \sigma_1 = DA_t,$$

dobijamo :

$$a_1 = \beta(1-p_0), \quad \sigma_1 = \beta^2(1-p_0)p_0 .$$

Ako odatle izrazimo β i p_0, i ako $\hat{a}_1$ i $\hat{\sigma}_1$ predstavljaju ocene veličina a_1 i σ_1, dobićemo i ocene $\hat{\beta}$ i $\hat{p}_0$ u obliku:

$$\hat{\beta} = \frac{\hat{\sigma}_1 + \hat{a}_1^2}{\hat{a}_1}, \quad \hat{p}_0 = \frac{\hat{\sigma}_1}{\hat{\sigma}_1 + \hat{a}_1^2}. \tag{3.2.3}$$

i te ocene će biti konzistentne i asimptotski normalne, ako se za a_1 i σ_1 mogu dobiti ocene sa takvim svojstvima. Neka je $EX_t = m$, $EX_t^2 = M$. Umesto jednačine (3.2.1) posmatraćemo odgovarajući centrirani proces:

$$X_t - m = A_t(X_t - m) + \xi'_t, \tag{3.2.4}$$

gde je $\xi'_t = (A_t - 1)m + B_t\xi_t$, $E\xi'_t = 0$, ali A_t i ξ'_t će sad biti zavisne slučajne promenljive.

Neka je $\tilde{f}_{t-1}$ σ-algebra generisana $\{X_s, s \le t-1\}$. Pošto su $\{\xi'_s, s \ge t\}$, $\{A_s, s \ge t\}$ i $\{B_s, s \ge t\}$ nezavisne od $\{X_s, s \le t-1\}$ iz (3.2.4) sledi da :

$$E\{(X_t - m)/\tilde{f}_{t-1}\} = a_1(X_{t-1} - m) \tag{3.2.5}$$

Pretpostavimo da imamo vrednosti procesa X_t za $t=1,2,\ldots,n$ i neka je $\hat{a}_1$ ocena po metodi najmanjih kvadrata dobijena minimiziranjem uslovnog očekivanja:

$$\sum_{t=2}^{n} [(X_t - m) - E\{(X_t - m)/\tilde{f}_{t-1}\}]^2$$

Na osnovu (3.2.5) $\hat{a}_1$ postaje:

$$\hat{a}_1 = \frac{\sum_{t=2}^{n} (X_t - m)(X_{t-1} - m)}{\sum_{t=2} (X_{t-1} - m)^2} \tag{3.2.6}$$

Dobijena ocena za $\hat{a}_1$ ista je kao i ocena koju dobijamo metodom momenata, s obzirom da je a_1 vrednost autokorelacione funkcije u tački 1 za posmatrani niz X_t. Da bismo dobili ocenu za σ_1 koristićemo metodu najmanjih kvadrata primenjenu na uslovno matematičko očekivanje. Posmatramo proces $v_t = u_t^2$, gde je

$$u_t = X_t - E(X_t/\tilde{f}_{t-1}).$$

Ukoliko bi A_t i B_t bile nezavisne slučajne promenljive, važilo bi

$$E(v_t/\tilde{f}_{t-1}) = DA_t \cdot X^2_{t-1} + D(B_t\xi_t) \qquad (3.2.7)$$

s obzirom da iz pretpostavke o nezavisnosti sledi i:

$$D(B_t\xi_t) = (1-a_1^2)DX_t - E(X_t^2)\sigma_1 .$$

iz (3.2.7) dobijamo:

$$E(v_t/\tilde{f}_{t-1}) = \sigma_1 X^2_{t-1} + (1-a_1^2)DX_t - E(X_t^2)\sigma_1 ,$$

i stoga sledi:

$$\sum_{t=2}^{n} (v_t - E(v_t/\tilde{f}_{t-1}))^2 = \sum_{t=2}^{n} (H_t - \sigma_1(X^2_{t-1} - E(X_t^2)))^2 ,$$

gde je

$$H_t = v_t - (1-a_1^2)DX_t = (X_t - a_1 X_{t-1} - (1-a_1)EX_t)^2 - (1-a_1^2)DX_t .$$

Zamenjujući a_1 odgovarajućom ocenom dobijamo ocenu $\hat{H}_t$ za H_t.

Sada možemo odrediti minimum izraza: $\sum_{t=2}^{n} (\hat{H}_t - \sigma_1(X^2_{t-1} - M))^2$,

i dobiti ocenu :

$$\hat{\sigma}_1 = \frac{\sum_{t=2}^{n} \hat{H}_t (X^2_{t-1} - M)}{\sum_{t=2} (X^2_{t-1} - M)^2} . \qquad (3.2.8)$$

Ilustrovaćemo ovu metodu ocenjivanja koristeći modelirane vrednosti AREX(1) procesa. Modelirane vrednosti su korišćene umesto realnih da bismo istakli sam proces ocenjivanja parametara, dok bismo radeći sa realnim podacima prvo morali razmotriti problem izbora modela i problem odredjivanja reda modela (u [15]), čime ćemo se baviti u delu 3.3. Neka je marginalna raspodela za niz X_t eksponencijalna sa srednjom vrednošću 1. Modelirali smo vrednosti AREX(1) procesa sa parametrima: p_0=0.4, p_1=0.35 i β=0.7, koji zadovoljavaju uslove (2.4.2'), i za koji je korelacija izmedju A_t i B_t jednaka -0.07, pa se izvedene formule mogu primeniti. Imamo da je za izabrani primer:

$$\hat{a}_1 = \frac{\sum_{t=2}^{n} (X_t - 1)(X_{t-1} - 1)}{\sum_{t=2} (X_{t-1} - 1)^2}, \quad \hat{\sigma}_1 = \frac{\sum_{t=2}^{n} \hat{H}_t (X_{t-1}^2 - 2)}{\sum_{t=2} (X_{t-1}^2 - 2)^2}.$$

Ocene za p_o i β dobijene su pomoću (3.2.3), (3.2.6) i (3.2.8), dok smo na osnovu relacije $P(X_t = \beta X_{t-1}) = q_1$ ocenili q_1. Dobijeni rezultati su predstavljeni u Tabeli 1. Diskusija o brzini konvergencije ka stvarnim vrednostima je analogna je onoj koja je data u članku Karlsen , Tjostheim (1988), [10].

Ocenjene vrednosti

Obim uzorka	$\hat{a}_1$	$\hat{p}_o$	$\hat{\beta}$	$\hat{q}_1$
700	.417	.375	.667	.213
900	.436	.350	.670	.232
1100	.427	.349	.655	.234
1300	.425	.360	.664	.235
1500	.402	.377	.646	.236

Tabela 1

Ovde smo pretpostavili nezavisnost A_t i B_t, i dobili odgovarajuće formule, koje se mogu primeniti i kad je korelacija medju slučajnim koeficijentima mala. Sada ćemo izvesti odgovarajuće formule u slučaju zavisnosti A_t i B_t.

Uz iste oznake kao i ranije imamo:

$$E(u_t^2 / \tilde{f}_{t-1}) = \sigma_1 X_{t-1}^2 + 2 X_{t-1} E(\xi_t)\sigma_{12} + D(B_t \xi_t),$$

gde je $\sigma_{12} = E(A_t B_t) - E(A_t)E(B_t)$.

Zbog zavisnosti A_t i B_t imaćemo da je:

$$D(B_t \xi_t) = DX(1-a_1^2) + \sigma E(X^2).$$

S druge strane se pri izračunavanju $E(X_t^2)$ dobija, uz oznaku $a_2 = E(B_t)$, da je:

$$E(X^2)(1-E(A_t^2)) = 2EX \cdot E\xi \cdot (\sigma_{12} + a_1 a_2) + E(B_t \xi_t)$$

tako da odatle možemo izraziti σ_{12} preko poznatih i ocenjenih veličina.

Sada imamo:

$$\sum_{t=2}^{n} (v_t - \tilde{E}(v_t/f_{t-1}))^2 = \sum_{t=2}^{n} (H'_t - \sigma_1 h_t)^2,$$

gde je $H'_t = H_t$, dok je

$$h_t = X_{t-1}^2 + E(X^2) - 2\, X_{t-1} E(X^2)/E(X).$$

Tako sada umesto formule (3.2.8) imamo (3.2.8') gde su H_t i h_t zamenjeni ocenjenim vrednostima:

$$\hat{\sigma}_1 = \frac{\sum_{t=2}^{n} \hat{H}_t \hat{h}_t}{\sum_{t=2} \hat{h}_t^2}. \qquad (3.2.8')$$

Za proces AREX(1) sa eksponencijalnom $\mathcal{E}(1)$ marginalnom raspodelom će biti $h_t = (X_{t-1} - 2)^2 - 2$.

Navedeni postupak delimično rešava problem ocenjivanja parametara AREX(1) procesa: konvergencija ka stvarnim vrednostima parametara je spora, a ocena za q_1 zavisi od ocene za β. Takodje je za neke dopustive vrednosti parametara standardna greška ocene velika. Stoga ćemo sada razmotriti mogućnost ocene metodom maksimalne verodostojnosti (MMV). Ovu metodu je, za specijalni slučaj NEAR(1) procesa proučavao Raftery u radovima iz 1980 i 1981, gde su dati neki teorijski aspekti ocenjivanja posmatranog procesa metodom maksimalne verodostojnosti. Numerički pristup MMV za ocenjivanje NEAR(2) modela srećemo u radu Smith (1986). Uz odgovarajuće izmene, koje proizilaze iz razlike modela NEAR i modela AREX, taj postupak se može primeniti i na AREX modele. To ćemo ilustrovati na primeru AREX(1) modela:

$$X_t = \begin{cases} \xi_t, & p_0 \\ \alpha X_{t-1} + \xi_t, & p_1 \\ \beta X_{t-1}, & q_1 \end{cases},$$

pri čemu je raspodela inovacionog niza izabrana tako da marginalna raspodela niza X_t bude eksponencijalna sa srednjom vrednošću 1 (tvrdjenje iz dela 2.4). Kako je X_t jednostavna linearna kombinacija nezavisnih slučajnih promenljivih proces je pogodan za simulaciju. Za AREX(1) proces sa stvarnim vrednostima parametara:

$$\alpha=0.5,\ \beta=0.4,\ p_o=0.3,\ p_1=0.5,$$

modelirano je 99 vrednosti.

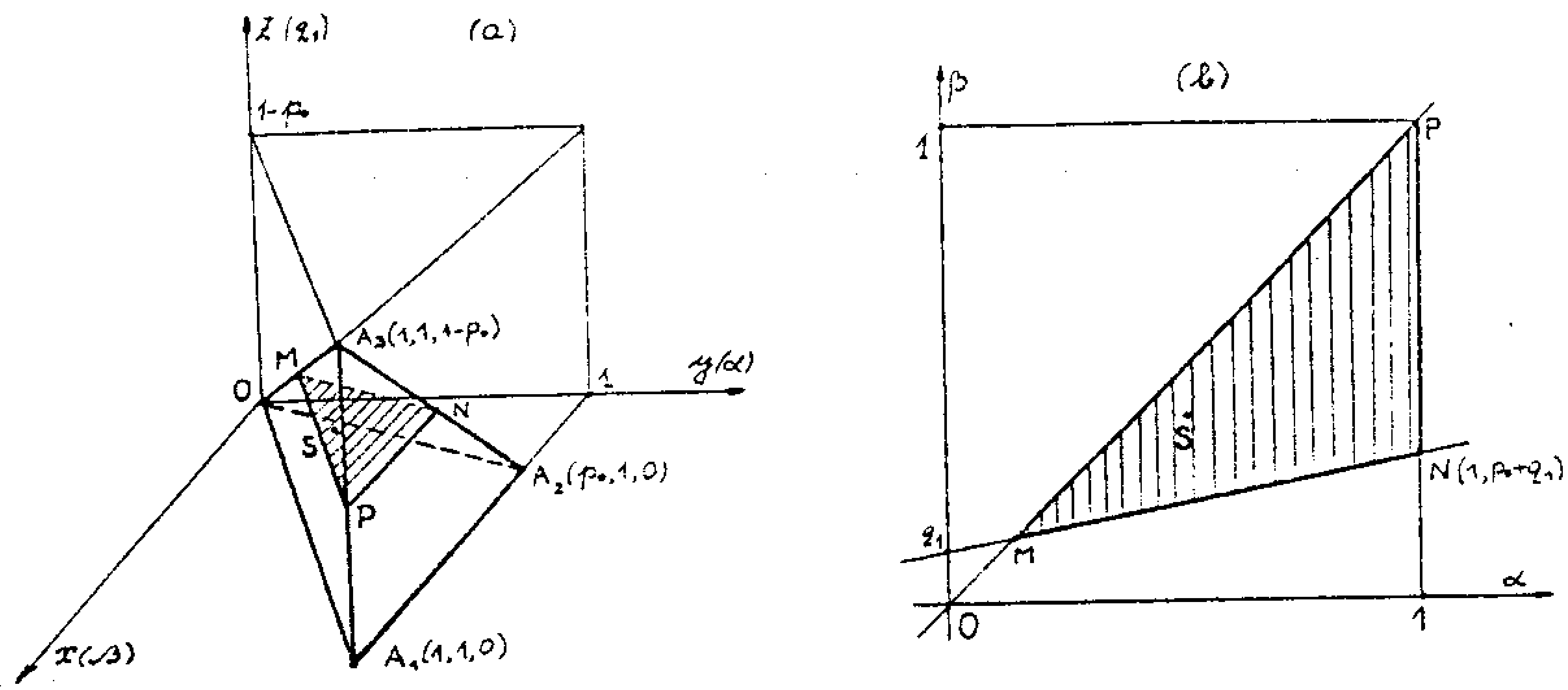
Koristili smo RAN1 generator pseudoslučajnih brojeva [8]. Uobičajeni generatori pseudoslučajnih brojeva zasnovani na linearnom kongruentnom metodu daju niz pseudoslučajnih brojeva kod koga može postojati velika korelacija medju susednim članovima. Stoga su razmatrani razni generatori koji imaju manju korelaciju medju susednim članovima. Jedan od tih generatora je i RAN1, videti u dodatku, kojim se niz pseudoslučajnih brojeva dobija pomoću tri standardna generatora. Sve funkcije koje su bile potrebne za modeliranje nizova vrednosti izabranih AREX procesa i za računanje funkcije verodostojnosti napisane su u MATLAB-u verzija 3.05.

Parametarski prostor je predstavljen na slici 5a, pri čemu su za p_o i p_1 uzete njihove stvarne vrednosti, dok na slici 5a imamo parametarski prostor pri fiksiranom p_o. Modelirane vrednosti izabranog procesa date su na slici 6 .

Vrednosti autokorelacione funkcije za niz X_t, označene sa ρ_k, date su izrazom: $\rho_k = (q_1\beta+p_1\alpha)^k$, tako da ρ_1 daje eksplicitnu ocene za $a = q_1\beta+p_1\alpha$, ali nemamo mogućnosti da odatle dobijemo ocene sva četiri parametra: α, β, p_o i p_1 posmatranog AREX(1) procesa. Stoga ćemo razmotriti drugu mogućnost ocenjivanja, zasnovanu na primeni funkcije verodostojnosti.

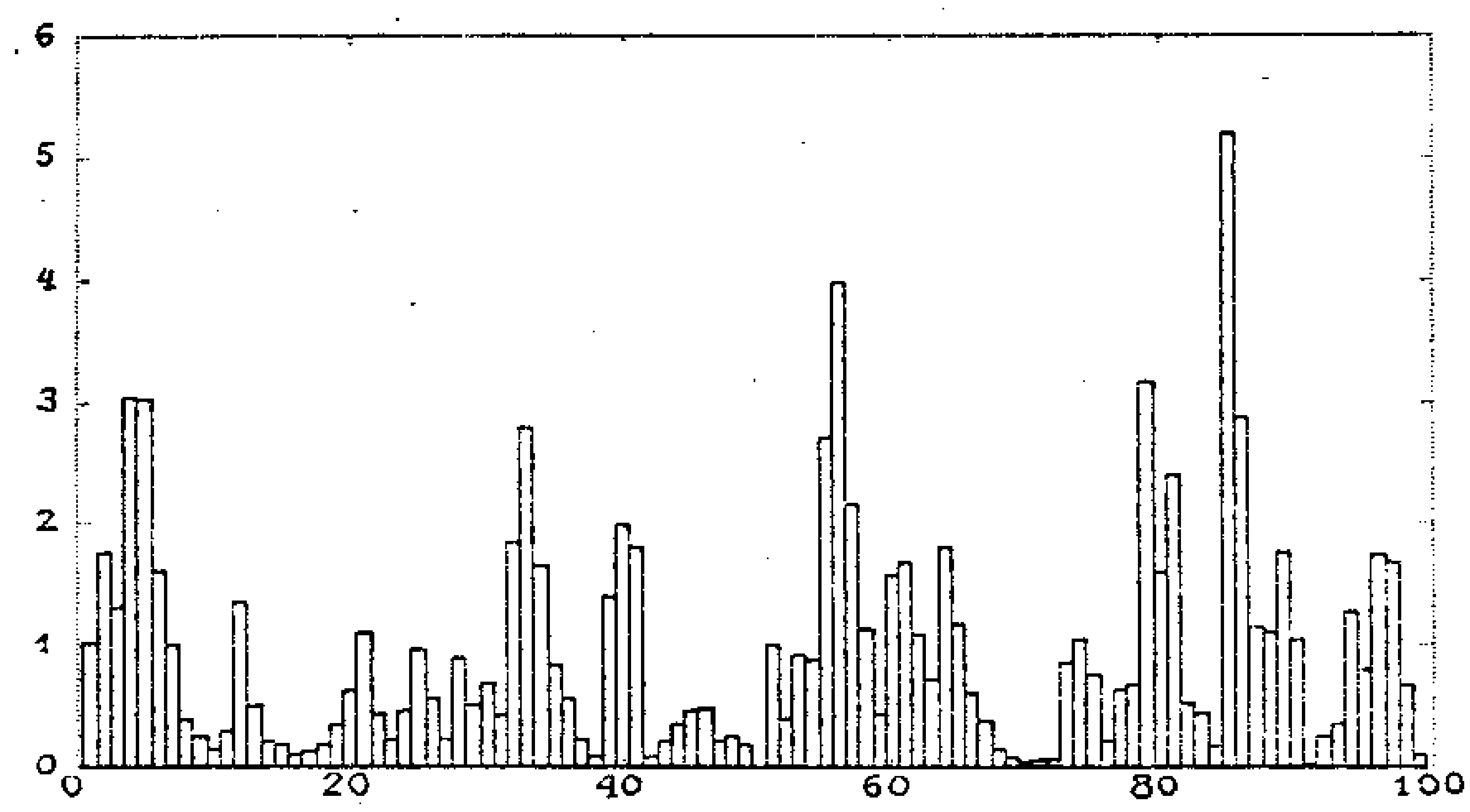
Pretpostavimo da imamo podatke $X_1, X_2, \ldots, X_N$. Tada možemo izračunati uslovnu gustinu raspodele za $X_2, \ldots, X_N$ pri datom X_1 u obliku:

$$\prod_{n=2}^{N} p(X_n | X_{n-1}) \ . \qquad (3.2.9)$$



Slika 5. (a) Parametarski prostor pri fiksiranom p_o, prema uslovima (2.4.2), odredjen je trostranom piramidom $OA_1A_2A_3$.

(b) Parametarski prostor pri fiksiranim p_o i p_1 za AREX(1) proces čiji su parametri: $p_o = 0.2$, $p_1 = 0.7$, $\alpha = 0.5$ i $\beta = 0.4$. Tačka S odgovara stvarnoj vrednosti parametara.



Slika 6. Modelirane vrednosti AREX(1) procesa sa parametrima: $p_o = 0.3$, $p_1 = 0.5$, $\alpha = 0.5$, $\beta = 0.4$ i eksponencijalnom marginalnom raspodelom $\mathcal{E}(1)$.

0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	-6.16	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	7.54	8.20	0	0	0	0	0	0	0
0	0	24.21	25.33	27.00	0	0	0	0	0	0
0	0	0	23.11	28.75	24.21	0	0	0	0	0
0	0	0	11.67	19.83	21.50	11.48	0	0	0	0
0	0	0	-5.78	2.24	6.65	4.43	-8.55	0	0	0
0	0	0	-8.20	-0.04	4.70	2.54	-9.32	-11.54	0	0
0	0	0	-12.55	-4.53	0.02	-2.09	-13.71	-13.28	-16.16	0
0	0	0	0	-6.18	-1.82	-3.51	-14.92	-14.52	-15.31	-17.83

Vrednosti funkcije verodostojnosti za realizaciju AREX(1) procesa koja je predstavljena na slici 6. Maksimalna vrednost je 28.75 pri α=0.5, β=0.4.

TABELA 3

Imamo $F(x_n) = P(\beta X_{n-1} < x_n | X_{n-1} = x_{n-1}) = \begin{cases} 0 \;, & x_n \le \beta x_{n-1} \\ 1 \;, & \beta x_{n-1} < x_n \end{cases},$

pa funkcija verodostojnosti ima prekid druge vrste (postaje beskonačna) kad god je $x_n/x_{n-1} = \beta$. Stoga ćemo umesto izvoda funkcije $F(x_n)$ uzeti:

$$g^*(x_n) = \begin{cases} 0 \;, & x_n \notin (\beta x_{n-1}, \beta x_{n-1}+\varepsilon) \\ 1/\varepsilon, & x_n \in (\beta x_{n-1}, \beta x_{n-1}+\varepsilon) \end{cases} , \qquad \text{za dato } \varepsilon > 0.$$

Dalje imamo:

$$p(X_n|X_{n-1}=x_{n-1}) = p_o g(\xi_n|x_{n-1}) + p_1 g(\xi_n+\alpha X_{n-1}|x_{n-1}) + q_1 g^*(x_n),$$

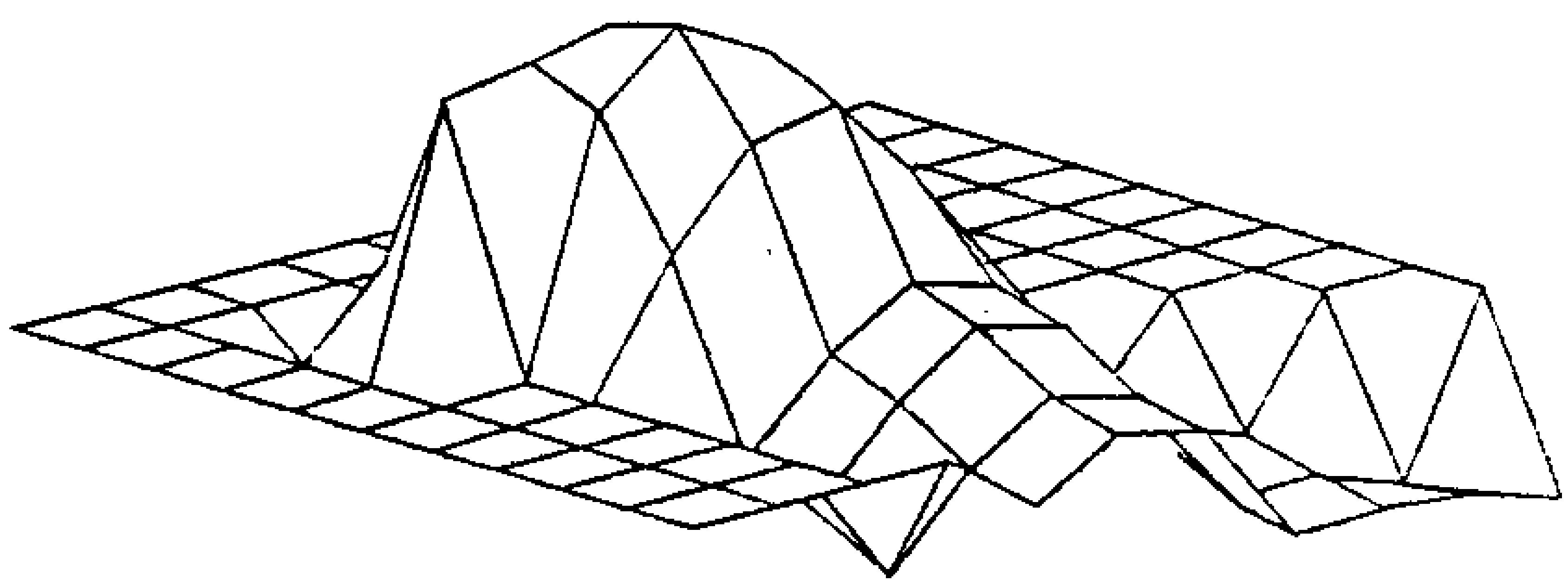
sa:

$$g(a|x_{n-1}) = B_o e^{-a} + (B_1/\beta)\, e^{-a/\beta} + (B_2/\gamma)\, e^{-a/\gamma} \;, \; B_2 = 1-B_o-B_1.$$

Na slici 7 data je trodimenzionalna slika logaritma funkcije verodostojnosti:

$$L = \sum_{n=2}^{N} \ln p(X_n|X_{n-1}) \qquad (3.2.10)$$

na mreži tačaka (α,β) u parametarskom prostoru, dok su p_o i p_1 jednaki svojim stvarnim vrednostima za izabrani uzorak. Odgovarajuće vrednosti funkcije verodostojnosti su date u tabeli 3.



Slika 7. Grafik funkcije verodostojnosti u odnosu na α i β. pri vrednostima za p_o i p_1 koje su jednake stvarnim vrednostima tih parametara za realizaciju datu na slici 6.

Logaritam funkcije verodostojnosti ima više lokalnih maksimuma koji ne mogu biti odredjeni pomoću standardnih numeričkih metoda optimizacije, tj. izjednačavanjem prvog izvoda sa nulom. Takodje je funkcija (3.2.9) funkcija više promenljivih koje moraju zadovoljavati odredjene uslove, koji su dati u (2.4.2'). Maksimum logaritma funkcije verodostojnosti za dati uzorak može biti odredjen Nelder-Mead (NM) algoritmom (videti [8] za detaljnija objašnjenja ili MATLAB funkciju nelder.m). Primenom NM algoritma na (-L) dobijamo najmanju vrednost te funkcije, recimo m, pa će traženi maksimum funkcije L biti (-m). Algoritam NM daje niz vrednosti koje konvergiraju lokalnom maksimumu u parametarskom prostoru, ali se može uočiti zavisnost od početnih vrednosti parametara. Stoga smo odredjivali maksimum logaritma funkcije verodostojnosti u odnosu na p_0 i p_1, na diskretnom skupu vrednosti za (α,β). Sve vrednosti za α i β u tabeli 4 su oblika x_n/x_{n-1} za neko n, za uzorak 1. Maksimum je dobijen za α = 0.52, β = 0.40, i imamo odgovarajuće vrednosti p_0 = 0.22 , p_1 = 0.71. Tako smo dobili ocenu metodom maksimalne verodostojnosti i uočavamo da je bliska stvarnim vrednostima.

	α		
β	0.52	0.53	0.55
0.35	26.15	23.92	22.01
0.40	28.00	25.37	20.56
0.44	24.35	23.31	21.08

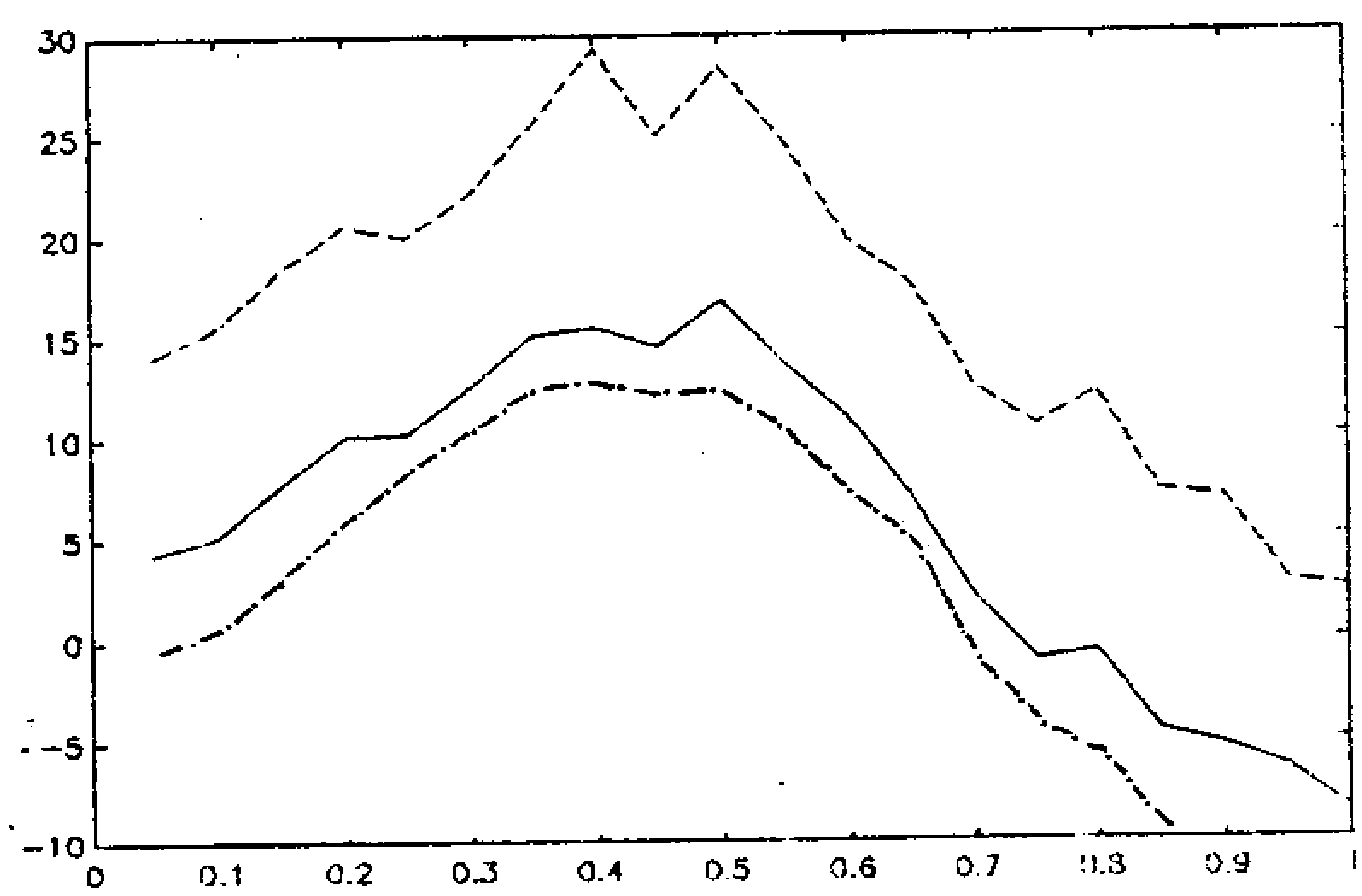
Tabela 4

Druga mogućnost primene MMV zasniva se na izgladjivanju funkcije verodostojnosti (smoothing). Neka je ε izabrani nivo preciznosti . Ako posmatramo stvarnu vrednost x_n kao da pripada intervalu dužine 2ε oko posmatranog x_n , tada faktor $(1/c)e^{-a/c}$ u $g(a|x_{n-1})$ zamenjujemo sledećim:

$$(1/c)e^{-\alpha/c} = \begin{cases} (e^{-(\alpha-\varepsilon)/c} - e^{-(\alpha+\varepsilon)/c})/2\varepsilon & , a > \varepsilon \\ (1 - e^{-(\alpha+\varepsilon)/c})/2\varepsilon & , -\varepsilon < a < \varepsilon \\ 0 & , a < -\varepsilon \end{cases}$$

i tako dobijamo novu funkciju verodostojnosti koja je samo aproksimacija stvarne funkcije verodostojnosti. Na taj način smo izgladili funkciju verodostojnosti , ali je zadržan njen osnovni oblik. Na slici 8 je data izgladjena funkcija verodostojnosti za razne vrednosti nivoa ε, za posmatrane podatke.

Kada je ε = 0.05 funkcija verodostojnosti je još mnogo "oštra", ali već ε= 0.1 daje zadovoljavajući efekat izgladjenosti. Sada možemo primeniti Nelder-Mead algoritam za odredjivanje ekstremuma tako dobijene izgladjene funkcije verodostojnosti. Za ε=.1 je tako dobijena ocena za α, za uzorak 1, je α= 0.423.



Slika 8. Izgladjivanje funkcije verodostojnosti za posmatranu realizaciju AREX(1) procesa, za različite vrednosti ε:
(--) ε=0. funkcija verodostojnosti, bez izgladjivanja i sa izgladjivanjem: (-) pri ε=0.05 i (-.) pri ε=0.1.

3.3. Odredjivanje reda AREX modela

Problem izbora adekvatnog reda modela je jedna od osnovnih etapa u procesu identifikacije posmatranog modela. U literaturi postoji veliki broj kriterijuma za odredjivanje reda procesa AR, MA i ARMA tipa, ako je inovacioni proces sa normalnom raspodelom.

Kod standardnih ARMA modela problem izbora reda modela je praktično rešen. U preglednom članku Goojier J.G. i drugi (1985) nabrojane su razne metode odredjivanja reda procesa, njihove prednosti i mane, medjusobne veze raznih metoda. Medju tim kriterijumima su i FPE (Akaike, 1969), AIC (Akaike 1973), BIC (Schwarc 1978), CAT (Parzen 1977), Shibata kriterijum (1980), Hannan i Quinn (1979) u kojima se red k modela odredjuje na različite načine , ali uvek na bazi ocene varijanse inovacionog niza. Poznate su algebarske veze medju pojedinim kriterijumima. Kod navedenih metoda su potrebne ocene parametara procesa pri izmeni pretpostavljenog reda procesa. Za ARMA procese sa gausovskim inovacionim nizom poznate su asimptotske karakteristike ovih kriterijuma. Ako se red procesa čiji inovacioni niz nije gausovski odredjuje ovim metodama, kao u radu Z.Kovačić [11] gde se za raspodelu inovacionog niza uzimaju simetrične raspodele: Košijeva raspodela i logistička raspodela, koriste se uobičajene definicije ovih postupaka i simulacijom utvrdjuje i uporedjuje robustnost metoda.

Kod odredjivanja reda AREX procesa opredelili smo se za tzv. ugaonu metodu (corner method), u kojoj se koriste ocene vrednosti autokorelacione funkcije. U izabranoj metodi nisu potrebne ocene parametara procesa na osnovu realizacije. Razmotrićemo teorijske aspekte izabrane metode pri oceni reda AREX procesa i za simulirane vrednosti na primeru jednog AREX procesa prvog reda i jednog procesa drugog reda dati ocene reda procesa.

Neka ρ_k označava vrednost k-tog koeficijenta korelacije posmatranog procesa. Ako su poznate vrednosti X_1, X_2, ..., X_N procesa tada ρ_k ocenjujemo izrazom:

$$\hat{\rho}_k = \frac{\frac{1}{N-k}\sum_{t=1}^{N-k}(X_t - \bar{X})(X_{t+k}-\bar{X})}{\frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N}(X_t - \bar{X})^2} \qquad (3.3.1)$$

gde je $\bar{X} = (X_1+X_2+...+X_N)/N$.

Postupak odredjivanja reda procesa ugaonom metodom podrazumeva da se prvo izračunaju determinante:

$$\Delta(i,j) = \begin{vmatrix} \rho_i & \rho_{i-1} & \rho_{i-2} & \dots & \rho_{i-j+1} \\ \rho_{i+1} & \rho_i & \rho_{i-1} & \dots & \rho_{i-j+2} \\ \rho_{i+2} & \rho_{i+1} & \rho_i & \dots & \rho_{i-j+3} \\ \dots & & & & \\ \rho_{i+j-1} & \rho_{i+j-2} & \rho_{i+j-3} & \dots & \rho_i \end{vmatrix}$$

za vrednosti i,j=1,L, a zatim se formira šema:

$$\begin{matrix} \Delta_{11} & \Delta_{12} & \Delta_{13} & \dots & \Delta_{1L} \\ \Delta_{21} & \Delta_{22} & \Delta_{23} & \dots & \Delta_{2L} \\ \Delta_{31} & \Delta_{32} & \Delta_{33} & \dots & \Delta_{3L} \\ & & \dots & & \\ \Delta_{L1} & \Delta_{L2} & \Delta_{L3} & \dots & \Delta_{LL} \end{matrix}$$

pomoću koje identifikujemo red p jednog AREX(p) procesa ako su elementi prvih p kolona i prve (p-1) vrste različiti od nule, a ostali elementi u šemi jednaki nuli. Dokazaćemo ovo tvrdjenje za AREX(1) i AREX(2) procese, računajući teorijske vrednosti koeficijenata korelacije ρ_k i vrednosti determinananata Δ_{ij}.

Za AREX(1) proces imamo da je $\rho_0 = 1$, $\rho_k = c^k$, gde je c konstanta $c = \alpha p_1 + \beta q_1$. Stoga je $\Delta_{k1} = \rho_k = c^k$, k= 1,2,..., dok je $\Delta_{ij} = 0$ za svako i i za j≠1. Dakle, teorijski, šema kod AREX(1) procesa je oblika:

$$\begin{matrix} \Delta_{11} \neq 0 & 0 & 0 & \dots \\ \Delta_{21} \neq 0 & 0 & 0 & \dots \\ \Delta_{31} \neq 0 & 0 & 0 & \dots \\ & \dots & & \end{matrix}$$

Navodimo primer: modelirano je 100 vrednosti AREX(1) procesa

sa parametrima $p_o=0.3$, $p_1=0.5$, $\alpha=0.5$ i $\beta=0.4$. Na osnovu modeliranih vrednosti po formuli (2 .8 .1) ocenjene su vrednosti $\hat{\rho}_k$ i dobijeno je $\hat{\rho}_o=1$, $\hat{\rho}_1=0.4084$, $\hat{\rho}_2=0.1371$, $\hat{\rho}_3=0.0382$, $\hat{\rho}_4=-0.0707$ i $\hat{\rho}_5=-0.0895$.
Kada izračunamo vrednosti determinanata Δ_{ij} sa ocenjenim vrednostima $\hat{\rho}_k$ dobijamo:

$\boxed{0.4084}$	0.0297	-0.0044
$\boxed{0.1371}$	0.0032	-0.0023
$\boxed{0.0382}$	0.0112	0.0026

Uočavamo da su elementi druge i treće kolone bliski očekivanoj vrednosti.

Za AREX(2) proces imamo da važi $\rho_j = c_1\rho_{j-1} + c_2\rho_{j-2}$, $j\geq2$, dok je $\rho_o=1$. Stoga će Δ_{ij} biti jednako 0 ako je $i\geq2$, $j\geq3$. Dakle, teorijska šema za AREX(2) proces je oblika:

$$\begin{array}{ccccc}
\Delta_{11}\neq0 & \Delta_{12}\neq0 & \Delta_{13}\neq0 & \Delta_{14}\neq0 & \dots \\
\Delta_{21}\neq0 & \Delta_{22}\neq0 & 0 & 0 & \dots \\
\Delta_{31}\neq0 & \Delta_{32}\neq0 & 0 & 0 & \dots \\
 & \dots & & &
\end{array}$$

Primena ovog metoda na modeliranu seriju AREX(2) sa parametrima $p_o = 0.3$, $p_1 = 0.48$, $p_2= 0.02$, $q_1= 0.18$, $q_2= 0.02$, $\alpha = 0.5$ i $\beta = 0.4$ daje sledeće rezultate: ocene vrednosti koeficijenata korelacije su: $\hat{\rho}_o= 1$, $\hat{\rho}_1= 0.2549$, $\hat{\rho}_2= -0.088$, $\hat{\rho}_3= -0.0395$, $\hat{\rho}_4= 0.1215$ i $\hat{\rho}_5= 0.1525$, dok su vrednosti determinanata u šemi :

$\boxed{0.2459}$	$\boxed{0.1530}$	$\boxed{0.0265}$
$\boxed{-0.0880}$	0.0178	0.0177
$\boxed{-0.0395}$	0.0123	0.0056

U opštem slučaju, kad razmatramo AREX model reda p, možemo zaključiti na osnovu relacija medju ρ_k koje slede iz (2.2.2) i osobina determinante da će teorijski šema za ugaonu metodu biti oblika:

	1	2	...	p-1	p	p+1	...	L
1	Δ	Δ	...	Δ	Δ	Δ	...	Δ
2	Δ	Δ	...	Δ	Δ	Δ	...	Δ
⋮	⋮	⋮		⋮	⋮	⋮		⋮
p-1	Δ	Δ	...	Δ	Δ	Δ	...	Δ
p	Δ	Δ	...	Δ	Δ	0	...	0
p+1	Δ	Δ	...	Δ	Δ	0	...	0
⋮	⋮	⋮		⋮	⋮	⋮		⋮
L	Δ	Δ	...	Δ	Δ	0	...	0

Tabela 2
(Δ označava veličinu različitu od nule)

U delu 4 ugaona metoda će biti primenjena i za odredjivanje reda procesa pokretnih sredina.

Sada ćemo razmotriti metodu sličnu već opisanoj, ali u kojoj se koriste vrednosti korelacione funkcije za formiranje šeme pomoću koje odredjujemo ocenu reda procesa. Naime, korišćenje korelacione funkcije nam omogućava da dokažemo asimptotsko ponašanje šeme koju koristimo. Naravno da ni u ovoj metodi ne zahtevamo ocenu parametara procesa, što je pogodno za AREX procese.

Ovaj postupak za selekciju modela je jedan postupak sa prepoznavanjem odredjenog oblika, i stoga ima sličnosti sa Box-Jenkins metodom za identifikaciju ARMA modela.

Neka γ_k označava vrednost korelacione funkcije u tački k. Formiraćemo determinantu:

$$\Delta_{ij} = \begin{vmatrix} \gamma_i & \gamma_{i-1} & \gamma_{i-2} & \cdots & \gamma_{i-j+1} \\ \gamma_{i+1} & \gamma_i & \gamma_{i-1} & \cdots & \gamma_{i-j+2} \\ \gamma_{i+2} & \gamma_{i+1} & \gamma_i & \cdots & \gamma_{i-j+3} \\ \cdots & & & & \\ \gamma_{i+j-1} & \gamma_{i+j-2} & \gamma_{i+j-3} & \cdots & \gamma_i \end{vmatrix} \qquad (3.3.2)$$

a zatim i Δ- šemu:

$$\begin{array}{llllll}
\Delta_{11} & \Delta_{12} & \Delta_{13} & \dots & \Delta_{1M} & \dots \\
\Delta_{21} & \Delta_{22} & \Delta_{23} & \dots & \Delta_{2M} & \dots \\
\Delta_{31} & \Delta_{32} & \Delta_{33} & \dots & \Delta_{3M} & \dots \\
 & \dots & & & \dots & \\
\Delta_{L1} & \Delta_{L2} & \Delta_{L3} & \dots & \Delta_{LM} & \dots \\
 & \dots & & & \dots &
\end{array} \qquad (3.3.3)$$

Dokazaćemo sledeće tvrdjenje:

T1. Za AREX(n) model teorijski izgled Δ-šeme je

	1	2	...	p-1	p	p+1	...	M
1	Δ	Δ	...	Δ	Δ	Δ	...	Δ
2	Δ	Δ	...	Δ	Δ	Δ	...	Δ
⋮	⋮	⋮		⋮	⋮	⋮		⋮
p-1	Δ	Δ	...	Δ	Δ	Δ	...	Δ
p	Δ	Δ	...	Δ	Δ	0	...	0
p+1	Δ	Δ	...	Δ	Δ	0	...	0
⋮	⋮	⋮		⋮	⋮	⋮		⋮
L	Δ	Δ	...	Δ	Δ	0	...	0

gde Δ označava broj različit od 0.

<u>Dokaz</u>: Kako je: $\gamma_h = E(X_t X_{t+h}) - E(X_t)E(X_{t+h})$, imamo da je (videti u delu 2.)

$$\gamma_h = \sum_{j=1}^{n} E(A_{tj})\cdot\gamma_{h-j} \qquad (3.3.4)$$

gde su A_{tj} slučajni koeficijenti iz reprezentacije AREX(n):

$$X_t = \sum_{j=1}^{n} A_{tj} X_{t-j} + B_t \xi_t .$$

S obzirom da: $\gamma_h = \gamma_{-h}$, posle jednostavnog izračunavanja, na osnovu osobina determinanata sledi da je $\Delta_{ij} = 0$, za $i \geq p$, $j \geq p+1$ ■

Kada se korelaciona funkcija u tački k, γ_k zameni uzoračkom korelacionom funkcijom, na osnovu uzorka obima N $X_1, X_2, \dots, X_N$:

$$\hat{\gamma}_k = \frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N-k}(X_t - \bar{X})(X_{t+k} - \bar{X}) \qquad (3.3.5)$$

gde je $\bar{X} = (X_1 + X_2 + \ldots + X_N)/N$, imaćemo $\hat{\Delta}_{ij}$ umesto Δ_{ij} i može da se dokaže da je $\hat{\Delta}_{ij}$ asimptotski nepristrasna ocena za Δ_{ij} kad $N \to \infty$. Imamo tvrdjenje:

T2. Ako je $\hat{\Delta}_{ij}$ determinanta (3.3.2) gde su veličine γ_k zamenjene sa $\hat{\gamma}_k$ iz (3.3.5), i ako $\gamma_h \to 0$, $h \to \infty$, tada $E(\hat{\Delta}_{ij} - \Delta_{ij}) \to 0$, $N \to \infty$.

Dokaz. Radi jednostavnosti dajemo dokaz za Δ_{23}, ali se ideja jednostavno prenosi i na opšti slučaj. Imamo:

$$E(\hat{\Delta}_{23} - \Delta_{23}) = E\left[\begin{vmatrix} \hat{\gamma}_2 & \hat{\gamma}_1 & \hat{\gamma}_0 \\ \hat{\gamma}_3 & \hat{\gamma}_2 & \hat{\gamma}_1 \\ \hat{\gamma}_4 & \hat{\gamma}_3 & \hat{\gamma}_2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \gamma_2 & \gamma_1 & \gamma_0 \\ \gamma_3 & \gamma_2 & \gamma_1 \\ \gamma_4 & \gamma_3 & \gamma_2 \end{vmatrix}\right] =$$

$$= E\left[\begin{vmatrix} \hat{\gamma}_2 & \hat{\gamma}_1 & \hat{\gamma}_0 \\ \hat{\gamma}_3 & \hat{\gamma}_2 & \hat{\gamma}_1 \\ \hat{\gamma}_4 & \hat{\gamma}_3 & \hat{\gamma}_2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \hat{\gamma}_2 & \hat{\gamma}_1 & \gamma_0 \\ \hat{\gamma}_3 & \hat{\gamma}_2 & \gamma_1 \\ \hat{\gamma}_4 & \hat{\gamma}_3 & \gamma_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \hat{\gamma}_2 & \hat{\gamma}_1 & \gamma_0 \\ \hat{\gamma}_3 & \hat{\gamma}_2 & \gamma_1 \\ \hat{\gamma}_4 & \hat{\gamma}_3 & \gamma_2 \end{vmatrix} - \right.$$

$$\left. - \begin{vmatrix} \hat{\gamma}_2 & \gamma_1 & \gamma_0 \\ \hat{\gamma}_3 & \gamma_2 & \gamma_1 \\ \hat{\gamma}_4 & \gamma_3 & \gamma_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \hat{\gamma}_2 & \gamma_1 & \gamma_0 \\ \hat{\gamma}_3 & \gamma_2 & \gamma_1 \\ \hat{\gamma}_4 & \gamma_3 & \gamma_2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \gamma_2 & \gamma_1 & \gamma_0 \\ \gamma_3 & \gamma_2 & \gamma_1 \\ \gamma_4 & \gamma_3 & \gamma_2 \end{vmatrix}\right] = .$$

$$= E\left(\begin{vmatrix} \hat{\gamma}_2 & \hat{\gamma}_1 & \hat{\gamma}_0 - \gamma_0 \\ \hat{\gamma}_3 & \hat{\gamma}_2 & \hat{\gamma}_1 - \gamma_1 \\ \hat{\gamma}_4 & \hat{\gamma}_3 & \hat{\gamma}_2 - \gamma_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \hat{\gamma}_2 & \hat{\gamma}_1 - \gamma_1 & \gamma_0 \\ \hat{\gamma}_3 & \hat{\gamma}_2 - \gamma_2 & \gamma_1 \\ \hat{\gamma}_4 & \hat{\gamma}_3 - \gamma_3 & \gamma_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \hat{\gamma}_2 - \gamma_2 & \gamma_1 & \gamma_0 \\ \hat{\gamma}_3 - \gamma_3 & \gamma_2 & \gamma_1 \\ \hat{\gamma}_4 - \gamma_4 & \gamma_3 & \gamma_2 \end{vmatrix}\right) .$$

Dalje, pošto je $|\hat{\gamma}_k| < \hat{\gamma}_0$ i $|\gamma_k| < \gamma_0$, koristeći svojstva matematičkog očekivanja i činjenicu da iz $\gamma_k \to 0$,

$k \to \infty$ sledi $E(\hat{\gamma}_k - \gamma_k) \to 0$, $N \to \infty$, dobijamo da za prvu determinantu važi:

$$E\begin{vmatrix} \hat{\gamma}_2 & \hat{\gamma}_1 & \hat{\gamma}_0-\gamma_0 \\ \hat{\gamma}_3 & \hat{\gamma}_2 & \hat{\gamma}_1-\gamma_1 \\ \hat{\gamma}_4 & \hat{\gamma}_3 & \hat{\gamma}_2-\gamma_2 \end{vmatrix} = E\left[(\hat{\gamma}_0-\gamma_0)\begin{vmatrix} \hat{\gamma}_3 & \hat{\gamma}_2 \\ \hat{\gamma}_4 & \hat{\gamma}_3 \end{vmatrix} - (\hat{\gamma}_1-\gamma_1)\begin{vmatrix} \hat{\gamma}_2 & \hat{\gamma}_1 \\ \hat{\gamma}_4 & \hat{\gamma}_3 \end{vmatrix} + \right.$$

$$\left. + (\hat{\gamma}_2-\gamma_2)\begin{vmatrix} \hat{\gamma}_2 & \hat{\gamma}_1 \\ \hat{\gamma}_3 & \hat{\gamma}_2 \end{vmatrix}\right] \to 0\ ,\ N \to \infty.$$

Slično je i za preostale dve determinante, pa je tvrdjenje dokazano.

Primetimo da je za AREX(1) očigledno da $\gamma_h \to 0$, kada $h \to \infty$.

Za AREX(2) čija je reprezentacija u obliku sa slučajnim koeficijentima:

$$X_t = A_{t1}X_{t-1} + A_{t2}X_{t-2} + B_t\xi_t.$$

imamo da je: $\gamma_h = EA_{t1}\cdot\gamma_{h-1} + EA_{t2}\cdot\gamma_{h-2}$. Rešenje te diferencne jednačine daje eksplicitni oblik za γ_h:

$$\gamma_h = c_1 g_1^h + c_2 g_2^h ,$$

gde su: $g_{1,2} = (EA_{t1} \pm G)/2$, $G = ((EA_{t1})^2 + 4EA_{t2})^{1/2}$ i $c_{1,2}$ konstante koje se izražavaju u funkciji parametara procesa. Na osnovu toga, ako važe uslovi:

$$E(A_{t2}) < 1/16,\ 2b - a < \frac{1}{2} \ \text{ i } \ 2b + a < \frac{1}{2} ,$$

gde je: $a = E(A_{t1})$, i $b = a^2 + 4E(A_{t2})$ onda $\gamma_h \to 0$, $h \to \infty$ ∎

U praksi ćemo imati Δ-šemu sa ocenjenim vrednostima determinanata Δ_{ij}, tako da će Δ-šema biti samo aproksimacija teorijske šeme. Ilustrovaćemo to na primerima.

(i) Za AREX(1) proces sa parametrima: $p_0=0.3$, $p_1=0.5$, $\alpha=0.5$

i β=0.4, modelirana su dva uzorka, prvi sa N = 100 opservacija, a drugi sa N=300 opservacija. U prvom slučaju vrednosti uzoračke korelacione funkcije su: $\hat{\gamma}_0$= 1.0041, $\hat{\gamma}_1$= 0.4358, $\hat{\gamma}_2$=0.0360, $\hat{\gamma}_3$=-0.0012, $\hat{\gamma}_4$=-0.1354 i $\hat{\gamma}_5$=-0.1002. U drugom slučaju ocene vrednosti korelacione funkcije su: $\hat{\gamma}_0$= 0.9768 $\hat{\gamma}_1$= 0.4037, $\hat{\gamma}_2$= 0.2142, $\hat{\gamma}_3$= 0.1527, $\hat{\gamma}_4$= 0.1054 i $\hat{\gamma}_5$= -0.0082.

$\boxed{0.4358}$	0.1538	0.0509
$\boxed{0.0360}$	0.0018	-0.0207
$\boxed{-0.0012}$	0.0049	0.0078

Δ-Šema za N=100

$\boxed{0.4037}$	-0.0462	0.0362
$\boxed{0.2142}$	-0.0158	0.0013
$\boxed{0.1527}$	0.0008	0.0013

Δ-Šema za N=300

(ii) Za AREX(2) proces sa parametrima: p_0 = 0.3, p_1 = 0.48, p_2= 0.02, q_1= 0.18, q_2= 0.02, α_1= β_1= 0.5 i α_2= β_2= 0.4 imamo na osnovu 100 modeliranih vrednosti:

$\hat{\gamma}_0$= 1.4367, $\hat{\gamma}_1$= 0.4579, $\hat{\gamma}_2$= 0.1872, $\hat{\gamma}_3$= -0.0648, $\hat{\gamma}_4$=-0.0086 i $\hat{\gamma}$ =-0.0640. Odgovarajuća Δ-Šema je:

$\boxed{0.4579}$	$\boxed{-0.0593}$	$\boxed{-0.2545}$
$\boxed{0.1872}$	0.0647	0.0242
$\boxed{-0.0648}$	0.0058	-0.0046

Δ-Šema za N=100

Na osnovu uzorka obima 300 dobijene su ocene: $\hat{\gamma}_0$= 1.0166, $\hat{\gamma}_1$= 0.3812, $\hat{\gamma}_2$= 0.0885, $\hat{\gamma}_3$= 0.1079, $\hat{\gamma}_4$= 0.0885 i $\hat{\gamma}_5$=-0.0040.

i Δ-Šema:

$\boxed{0.3812}$	$\boxed{0.0553}$	$\boxed{0.0856}$
$\boxed{0.0885}$	-0.0333	0.0101
$\boxed{0.1079}$	0.0038	0.0027

Δ-Šema za N=300

4. PROCES POKRETNIH SREDINA MAEX(n) PROCES

4.1. DEFINICIJA I OSOBINE MAEX PROCESA

U dosadašnjem izlaganju razmatrali smo svojstva AREX(n) procesa n-tog reda autoregresionog tipa. Sada ćemo definisati proces pokretnih sredina takodje kao proces sa slučajnim koeficijentima i razmotriti neka njegova svojstva. Novouvedeni proces će se takodje formirati od niza nezavisnih slučajnih promenljivih sa istom raspodelom. Najpre ćemo pretpostaviti da je to eksponencijalna raspodela, a zatim ispitati svojstva posmatranog procesa i kada je raspodela slučajnih promenljivih inovacionog niza neka druga raspodela vezana za eksponencijalnu.

Definicija. Proces pokretnih sredina n-tog reda MAEX(n) dat je formulom :

$$X_t = \begin{cases} \xi_t & \text{, sa verovatnoćom } p_0 \\ \alpha_1 \xi_{t-1} + \xi_t & \text{, sa verovatnoćom } p_1 \\ \beta_1 \xi_{t-1} & \text{, sa verovatnoćom } q_1 \\ \dots & \dots \\ \alpha_n \xi_{t-n} + \xi_t & \text{, sa verovatnoćom } p_n \\ \beta_n \xi_{t-n} & \text{, sa verovatnoćom } q_n \end{cases} \tag{4.1.1}$$

gde je ξ_t niz nezavisnih jednako rasporedjenih slučajnih promenljivih, dok su parametri α_k i $\beta_k \in (0,1)$, $k=1,\dots,n$. Zbir verovátnoća je $p_0 + p_1 + q_1 + \dots + p_n + q_n = 1$.

Naziv MAEX je skraćenica od Moving Average process with EXponential marginals (proces pokretnih sredina sa eksponencijalnom marginalnom raspodelom).

Niz $\{X_t\}$ formiran je na način sličan onom kod AREX(n) modela, ali ima odlike procesa pokretnih sredina. Razlog za uvodjenje ovog modela je detaljnije proučavanje serija koje nemaju normalnu marginalnu raspodelu.

Razmotrimo najpre proces pokretnih sredina prvog reda oblika:

$$X_t = \begin{cases} \xi_t & , \quad p_0 \\ \beta\xi_{t-1} + \xi_t & , \quad p_1 \\ \beta\xi_{t-1} & , \quad q_1 \end{cases} \tag{4.1.2}$$

gde su slučajne promenljive ξ_t nezavisne sa jednakom eksponencijalnom raspodelom $\mathcal{E}(\lambda)$, $\lambda>0$.

Iz (4 .1 .2) zaključujemo da su susedni članovi niza $\{X_t\}$ korelirani. Možemo uočiti da (4 .1.2) predstavlja uopštenje EMA(1) procesa, (Lawrance, Lewis, 1977):

$$X_i = \begin{cases} \beta\mathcal{E}_i & , \text{ sa verovatnoćom } \beta \\ \beta\mathcal{E}_i + \mathcal{E}_{i+1} & , \text{ sa verovatnoćom } 1-\beta \end{cases}$$

gde za parametar β važi $0\leq\beta\leq1$. U navedenom radu razmatran je samo slučaj eksponencijalne raspodele promenljivih $\mathcal{E}_i$.

Za model MAEX(1) dajemo neka svojstva: uslove pri kojima je raspodela procesa mešovita eksponencijalna i mešovita eksponencijalna sa negativnim koeficijentom, odredjujemo maksimalnu vrednost koeficijenta korelacije susednih članova niza X_t, odredjujemo zajedničku dvodimenzionalnu raspodelu za X_t i X_{t+1}.

Takodje je dat postupak za dobijanje raspodele sume $T_r = X_1 + X_2 + \ldots + X_r$. Razmotrena su neka uslovna matematička očekivanja i problem odredjivanja reda ovoga procesa.

Razmatrani model MAEX(1) pripada klasi procesa sa slučajnim koeficijentima i može biti napisan u obliku:

$$X_t = A_t\xi_{t-1} + B_t\xi_t,$$

gde su slučajne promenljive A_s i B_t zavisne pri s=t, a nezavisne u ostalim slučajevima. Zajednička raspodela ovih promenljivih ista je kao zajednička raspodela slučajnih koeficijenata u AREX(1) procesu. Zbog takve strukture procesa jasno je da mnoge teoreme koje važe za linearne procese ovde ne mogu biti primenjene.

Koristeći svojstva Laplasove raspodele možemo utvrditi koje uslove treba da zadovoljavaju parametri da bi raspodela procesa pripadala odredjenoj klasi raspodela.

Najpre ćemo odrediti marginalnu raspodelu MAEX(1) procesa X_t ako je poznata raspodela slučajnih promenljivih niza ξ_t. Neka je raspodela ξ_t eksponencijalna sa parametrom λ i Laplasovom transformacijom $\lambda/(\lambda+s)$.

Koristeći Laplasovu transformaciju iz (4.1.2) dobijamo:

$$\Phi_X(s)= p_o\Phi_\xi(s) + p_1\Phi_\xi(\beta s)\Phi_\xi(s) + q_1\Phi_\xi(s).$$

Na osnovu osobina potpuno monotonih funkcija i Bernštajnove teoreme zaključujemo da će $\Phi_X(s)$ uvek biti Laplasova transformacija neke raspodele. U slučaju da je raspodela za ξ_t eksponencijalna dobijamo:

$$\Phi_X(s) = \lambda(\lambda+s(\beta p_o+q_1)/((\lambda+s)(\lambda+\beta s)).$$

Ako važi uslov $\beta p_o+ q_1 > \beta$ inverzna transformacija daje mešovitu eksponencijalnu raspodelu :

$$X_t= \begin{cases} \mathcal{E}(\lambda) & , \ A_1 \\ \mathcal{E}(\lambda/\beta) & , \ 1-A_1 \end{cases}$$

gde je A_1 verovatnoća $A_1=(1-\beta p_o-q_1)/(1-\beta)$. U suprotnom slučaju, ako dati uslov ne važi, raspodela za X_t će biti mešovita eksponencijalna sa negativnim koeficijentom.

Takodje možemo utvrditi uslove koje treba da zadovoljavaju parametri procesa MAEX(1) da bi raspodele inovacionog niza i samog procesa bile verovatnosne mešavine eksponencijalnih raspodela.

Neka je raspodela za ξ_t mešovita eksponencijalna oblika:

$$\xi_t = \begin{cases} A_1, \text{ sa verovatnoćom } a_1 \\ A_2, \text{ sa verovatnoćom } a_2 \end{cases}, \qquad (4.1.3)$$

gde su A_1 i A_2 nezavisne slučajne promenljive sa eksponencijalnim raspodelama $\mathcal{E}(\lambda_j)$, $\lambda_1\neq\lambda_2$, $a_1+ a_2= 1$, $a_j> 0$, $j=1,2$.

Tada važi tvrdjenje:

T1. Ako je raspodela inovacionog niza procesa MAEX(1) datog formulom (4.1.2) oblika (4.1.3) i ako važe uslovi:

$$\text{(a)}\quad \frac{p_0+p_1\lambda_2(\lambda_1-\beta L)}{\lambda_1-\beta\lambda_2} > 0\ ,\quad \text{(b)}\quad q_1(1-\beta) + \beta p_1\frac{\lambda_2\beta-L}{\lambda_1-\beta\lambda_2} > 0 \quad \text{i}$$

$$\text{(c)}\quad (\beta\lambda_1 - L)p_1 + q_1(\lambda_2-\beta\lambda_1)(1-\beta) > 0,$$

gde je $L = a_1\lambda_1 + a_2\lambda_2$, tada će raspodela samog procesa biti verovatnosna mešavina četiri eksponencijalne raspodele:

$$P(X_t = A_j) = b_j\ ,\ j=1,4\ ,$$

gde su slučajne promenljive A_j nezavisne i imaju eksponencijalnu raspodelu $\mathcal{E}(\lambda_j)$, $j=1,4$, pri čemu je $\lambda_3=\lambda_1/\beta$ i $\lambda_4=\lambda_2/\beta$. Verovatnoće b_j su jednake:

$$b_j = \frac{1}{\lambda_j}\cdot\frac{P_3(-\lambda_j)}{P'_4(-\lambda_j)},\ j=1,4\ ,$$

gde su polinomi $P_3(s)$ i $P_4(s)$ redom jednaki:

$$P_3(s)= p_0(\lambda_1\lambda_2+ Ls)(\lambda_1+ \beta s)(\lambda_2+ \beta s)+p_1(\lambda_1\lambda_2+ Ls)(\lambda_1\lambda_2+\beta Ls) +$$
$$+ q_1(\lambda_1\lambda_2+\beta Ls)(\lambda_1+s)(\lambda_2+ s)\quad ,$$

$$P_4(s) = \beta^2(\lambda_1+ s)(\lambda_2+ s)(\lambda_1/\beta + s)(\lambda_2/\beta + s)\ .$$

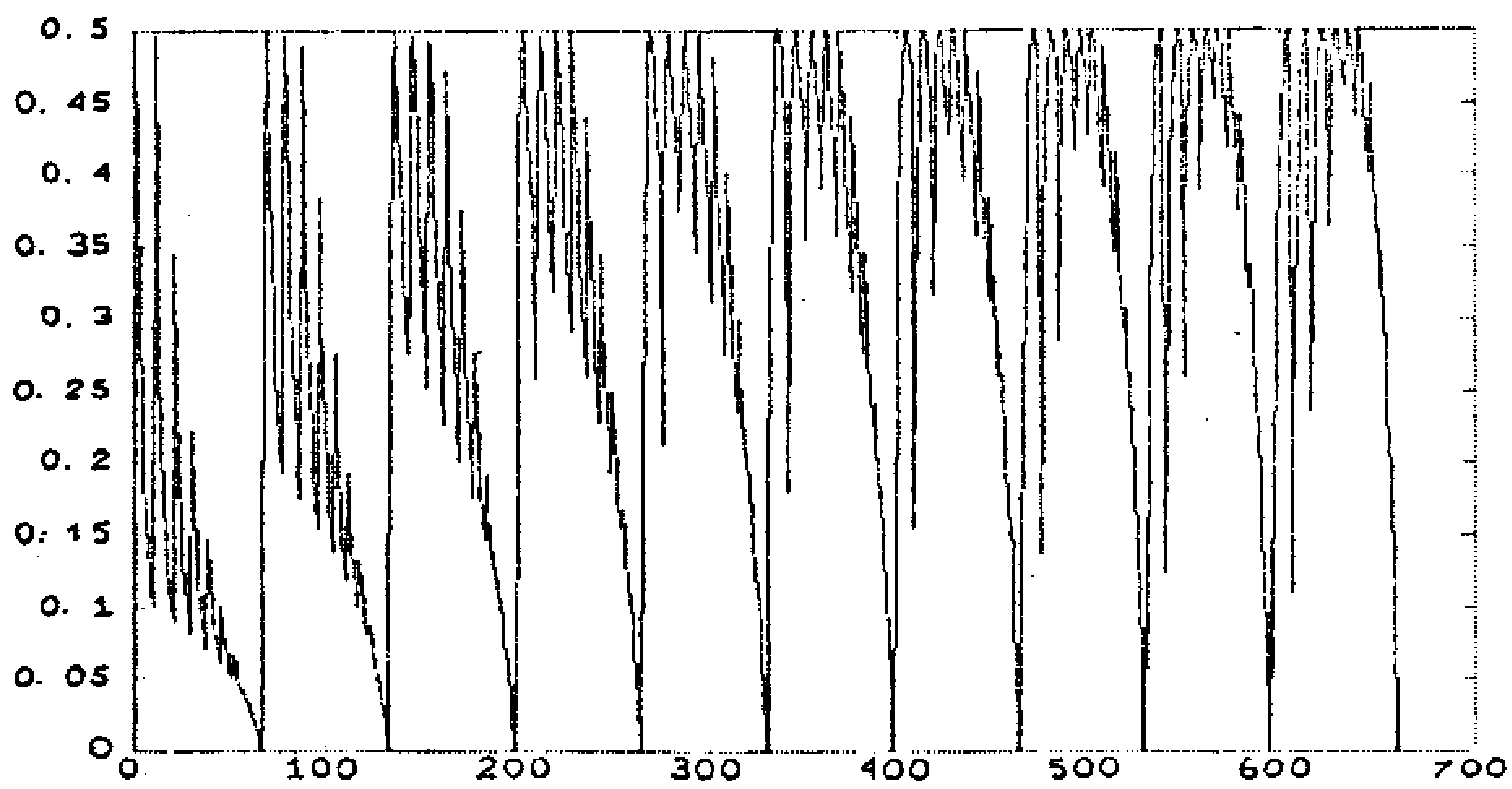
Tvrdjenje dokazujemo primenom Laplasove transformacije na (4.1.2).
Uslovi (a), (b) i (c) proizilaze iz zahteva da b_j budu verovatnoće i saglasni su, što se može neposredno utvrditi. U slučaju da bar jedan od uslova (a), (b) ili (c) nije ispunjen, raspodela procesa će biti mešovita eksponencijalna sa bar jednim negativnim koeficijentom.

Za kovarijacionu funkciju R(h) procesa X_t dobijamo da će biti jednaka 0 ako je $|h|>1$, kao i kod standardnog procesa pokretnih sredina prvog reda.

Za $\alpha=\beta$, uz oznaku $M=p_0+ p_1$, $N=p_1+ q_1$ je:

$$R(h) = \begin{cases} (M^2 + \beta^2 N^2)\cdot D\xi & , \quad h = 0 \\ \beta MN \cdot D\xi & , \quad h = 1, \\ 0 & , \quad h > 1 \end{cases}$$

pa imamo: $\rho(1) \in (0,1/2)$ kao što je slučaj kod standardnog gasovskog procesa pokretnih sredina MA(1). Pri $q_1=0$ posmatrani MAEX(1) proces se svodi na EMA(1) proces, Lawrance i Lewis [12]. Za EMA(1) proces je $\rho(1) \in (0,1/4)$, pa je u ovom pogledu MAEX(1) proces povoljniji od EMA(1) procesa. Na slici 9 je dat grafik $\rho(1)$ za MAEX(1) proces.



Slika 9. Grafik vrednosti autokorelacione funkcije u tački 1, kad se parametri procesa menjaju u okviru parametarskog prostora.

Razmotrimo nešto opštiji slučaj MAEX(1) modela datog formulom:

$$X_t = \begin{cases} \xi_t & , \quad p_0 \\ \alpha\xi_{t-1} + \xi_t & , \quad p_1 \\ \beta\xi_{t-1} & , \quad q_1 \end{cases} \qquad (4.1.2'')$$

gde $\alpha, \beta \in (0,1)$, a inovacioni niz ξ_t ima ista svojstva kao i ranije.

Raspodela sume $X_1 + X_2 + \ldots + X_n$ se za MAEX(1) model može odrediti. Ovde dajemo postupak odredjivanja takve raspodele. Prvo ćemo odrediti raspodelu za $X_1 + X_2$. Na osnovu (4.1.2') i pretpostavljene nezavisnosti slučajnih promenljivih inovacionog niza $\{\xi_t\}$ zaključujemo da će tražena raspodela predstavljati neku linearnu kombinaciju više Erlangovih raspodela. Neposredno izračunavanje dovodi nas do rezultata:

$$f_{X_1+X_2}(x) = p_o\left[p_o E_2^{1,1}(x) + p_1 E_3^{a,1,1}(x) + q_1 E_2^{b,1}(x)\right] +$$

$$+ p_1\left[p_o E_2^{c,1}(x) + p_1 E_3^{a,c,1}(x) + q_1 E_3^{b,a,1}(x)\right] +$$

$$+ q_1\left[p_o E_1^{d}(x) + p_1 E_2^{a,d}(x) + q_1 E_2^{b,b}(x)\right],$$

gde $E_k^{s_1,s_2,\ldots,s_k}(x)$ označava Erlangovu raspodelu k-tog reda koja se dobija kao zbir k nezavisnih slučajnih promenljivih sa eksponencijalnim raspodelama sa parametrima s_j, $j=1,k$.

U prethodnoj formuli je: $a=1/\alpha$, $b=1/\beta$, $c=1/(1+\alpha)$ i $d=1/(1+\beta)$.

Takodje smo, radi jednostavnijeg pisanja smatrali da je parametar λ eksponencijalne raspodele slučajnih promenljivih inovacionog niza jednak 1.

Ako uvedemo oznake:

$$p_{j1} = p_o,\ p_{j2} = p_1,\ p_{j3} = q_1,$$

$$V_{j1} = \xi_j,\ V_{j2} = \alpha\xi_{j-1} + \xi_j \quad \text{i} \quad V_{j3} = \beta\xi_{j-1},$$

imamo da je:

$$X_1 + X_2 + \ldots + X_r = \sum_{k=1}^{r} V_{kn_k} \text{ ,sa verovatnoćom } \prod_{k=1}^{r} p_{kn_k},$$

gde je $n_k \in \{1,2,3\}$, tako da ćemo u raspodeli zbira imati linearnu kombinaciju Erlangovih raspodela.

Kako samo susedni elementi niza V_{jn_j} mogu sadržati iste komponente, navodimo tabelu, koja u zavisnosti od vrednosti indeksa n_j daje parametre eksponencijalnih raspodela koje ulaze u Erlangovu raspodelu odgovarajuće sume.

n_j	n_{j+1}	red Erlangove raspodele	parametri
1	1	ne menja se	1 , 1
1	2	ne menja se	$1/(1+\alpha)$, 1
1	3	smanjuje za 1	$1/(1+\beta)$
2	1	povećava za 1	$1/\alpha$, 1 , 1
2	2	povećava za 1	$1/\alpha$, $1/(\alpha+1)$,1
2	3	ne menja se	$1/\alpha$, $1/(1+\beta)$
3	1	ne menja se	$1/\beta$, 1
3	2	povećava za 1	$1/\beta$, $1/\alpha$, 1
3	3	ne menja se	$1/\beta$, $1/\beta$

Tabela 1.

Na osnovu tabele dobijamo naprimer da je raspodela za zbir $V_{12}+V_{21}+V_{32}+V_{43}$ Erlangova raspodela četvrtog reda sa parametrima $1/\alpha$, 1, $1/(1+\alpha)$ i $1/(1+\beta)$.

Odredjivanjem zajedničke dvodimenzionalne raspodele susednih elemenata X_t i X_{t+1} dolazimo do još jedne osobine karakteristične za MAEX(1) proces. Naime, ta raspodela je jedna vrsta dvodimenzionalne eksponencijalne raspodele, ali ne pripada nekim ranije razmatranim klasama dvodimenzionalnih eksponencijalnih raspodela jer ima različite analitičke oblike u oblastima:

$$\alpha x > y,\ \alpha x < y,\ \beta x > y \text{ i } \beta x < y.$$

Zajedničku raspodelu za X_t i X_{t+1} možemo odrediti pomoću dvostruke Laplasove transformacije, koja je na osnovu formule (4.1.2') jednaka:

$$E\left[e^{-s_1X_t-s_2X_{t+1}}\right] =$$

$$= p_o^2\Phi(s_1)\Phi(s_2)+ p_op_1\Phi(s_1+\alpha s_2)\Phi(s_2)+ p_oq_1\Phi(s_1)\Phi(\beta s_2) +$$

$$+ p_1p_o\Phi(\alpha s_1)\Phi(s_1)\Phi(s_2) + p_1^2\Phi(\alpha s_1)\Phi(s_1+\alpha s_2)\Phi(s_2) +$$

$$+ p_1q_1\Phi(\alpha s_1)\Phi(s_1+\beta s_2) + q_1p_o\Phi(\beta s_1)\Phi(s_2)+$$

$$+ q_1p_1\Phi(\beta s_1)\Phi(\alpha s_2)\Phi(s_2) + q_1^2\Phi(\beta s_1)\Phi(\beta s_2)$$

Ako pretpostavimo da je rapodela za ξ_t eksponencijalna $\mathcal{E}(\lambda)$

dobijamo da je dvostruka Laplasova transformacija racionalna funkcija po s_1 i s_2 oblika:

$$\Phi_{X_t, X_{t+1}}(s_1,s_2) =$$

$$\frac{\lambda^2 \; P_6(s_1,s_2)}{(\lambda+s_1)(\lambda+s_2)(\lambda+\alpha s_1)(\lambda+\beta s_1)(\lambda+\alpha s_2)(\lambda+\beta s_2)(\lambda+s_1+\alpha s_2)(\lambda+s_1+\beta s_2)}$$

gde je u brojiocu polinom šestog stepena po s_1 i s_2. Dobijena funkcija nije simetrična, što je i očekivano s obzirom da proces nije reverzibilan. Odredjujući inverznu transformaciju mogli bismo dobiti traženu dvodimenionalnu raspodelu, ali je ovde moguće i direktno izračunavanje. Naime, tražena gustina je linearna kombinacija gustina vezanih za slučajne promenljive inovacionog niza:

$$f_{X_t, X_{t+1}}(x,y) = \sum_{j=1}^{9} r_j \, f_j(x,y),$$

gde su verovatnoće r_j redom jednake: p_o^2, $p_o p_1$, $p_o q_1$, $p_1 p_o$, p_1^2, $p_1 q_1$, $q_1 p_o$, $q_1 p_1$ i q_1^2, a gustine su:

$$f_1(x,y) = f_{\xi_t, \xi_{t+1}}(x,y) = \lambda^2 \, e^{-\lambda(x+y)}, \quad x,y > 0 \;,$$

$$f_2(x,y) = f_{\xi_t, \alpha\xi_1+\xi_{t+1}}(x,y) = \lambda^2 \, e^{-\lambda x} \cdot e^{-\lambda(y-\alpha x)}, \quad y-\alpha x > 0 \;,$$

$$f_3(x,y) = f_{\xi_t, \beta\xi_t}(x,y) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} &, \quad x \le y/\beta \\ \lambda e^{-\lambda y/\beta} &, \quad x > y/\beta \end{cases}$$

$$f_4(x,y) = f_{\alpha\xi_{t-1}+\xi_t, \xi_{t+1}}(x,y) = \lambda \, e^{-\lambda y} \cdot \frac{\lambda}{1-\alpha}\left(e^{-\lambda x} - e^{-\lambda x/\alpha}\right) ,$$

ako $x,y > 0$

$$f_5(x,y) = f_{\alpha\xi_{t-1}+\xi_t, \alpha\xi_t+\xi_{t-1}}(x,y) =$$

$$= \begin{cases} \lambda^2 e^{-(\lambda/\alpha)x} \cdot \left(e^{\lambda(1-\alpha)y/\alpha^2} - e^{-\lambda y}\right)/(1-\alpha+\alpha^2), & \alpha x > y > 0 \\ \lambda^2\left(e^{-\lambda(1-\alpha)x} - e^{-(\lambda/\alpha)x}\right)e^{-\lambda y} \,/(1-\alpha+\alpha^2), & y > \alpha x > 0 \end{cases}$$

$$f_6(x,y) = f_{\alpha\xi_{t-1}+\xi_t, \beta\xi_t}(x,y) =$$

$$= (\lambda^2/(\alpha\beta))\ e^{-\lambda(x-y/\beta)/\alpha}\ e^{-\lambda y/\beta},$$

ako je $x-y/\beta > 0$, inače 0

$$f_7(x,y) = f_{\beta\xi_{t-1},\xi_{t+1}}(x,y) = \lambda^2\ e^{-\lambda x/\beta}\cdot\ e^{-\lambda y},\quad x,y > 0\ ,$$

$$f_8(x,y) = f_{\beta\xi_{t-1},\alpha\xi_t+\xi_{t+1}}(x,y) =$$

$$= (\lambda^2/(\beta(1-\alpha)))\ e^{-\lambda x/\beta}\cdot(e^{-\lambda y}-e^{-\lambda y/\alpha})\ \text{ ako } x,y > 0\ ,$$

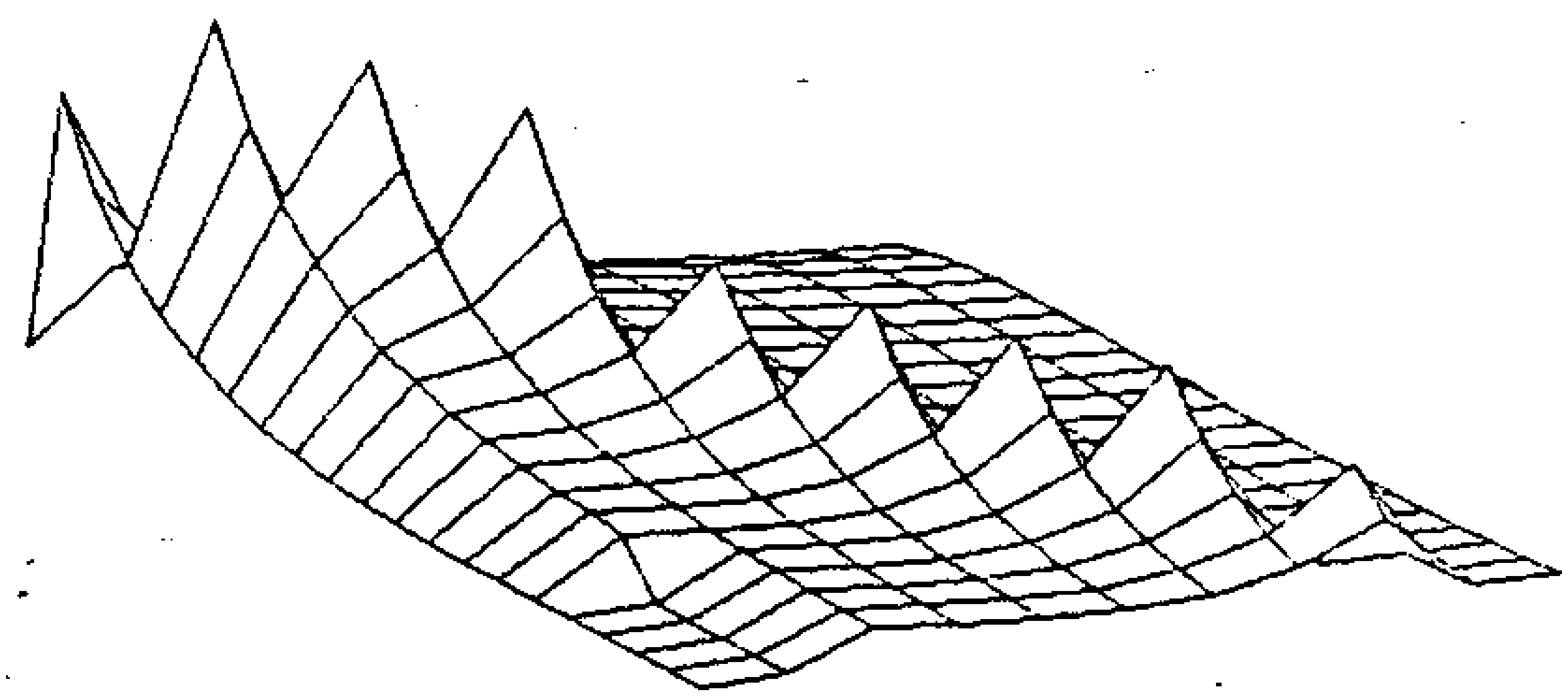
$$f_9(x,y) = f_{\beta\xi_{t-1},\beta\xi_t}(x,y) = (\lambda^2/\beta^2)\ e^{-\lambda x/\beta}\cdot\ e^{-\lambda y/\beta},\quad x,y > 0$$

Zajednička gustina je jedna vrsta dvodimenzionalne eksponencijalne raspodele, ali se razlikuje od nekih drugih tipova dvodimenzionalne eksponencijalne raspodele (raspodela Maršala Olkina, raspodela A.Kovača), i opštija je od odgovarajuće raspodele za EMA(1) model.

Na slici 10 je dat grafik takve gustine za MAEX(1) proces sa verovatnoćama $p_o=p_1=q_1=1/3$, $\alpha=1/8$ i $\beta=7/8$.

Zapažamo različito ponašanje ove funkcije u oblastima:

$y < x/8$, $x/8 < y < 7x/8$ i pri $y > 7x/8$.



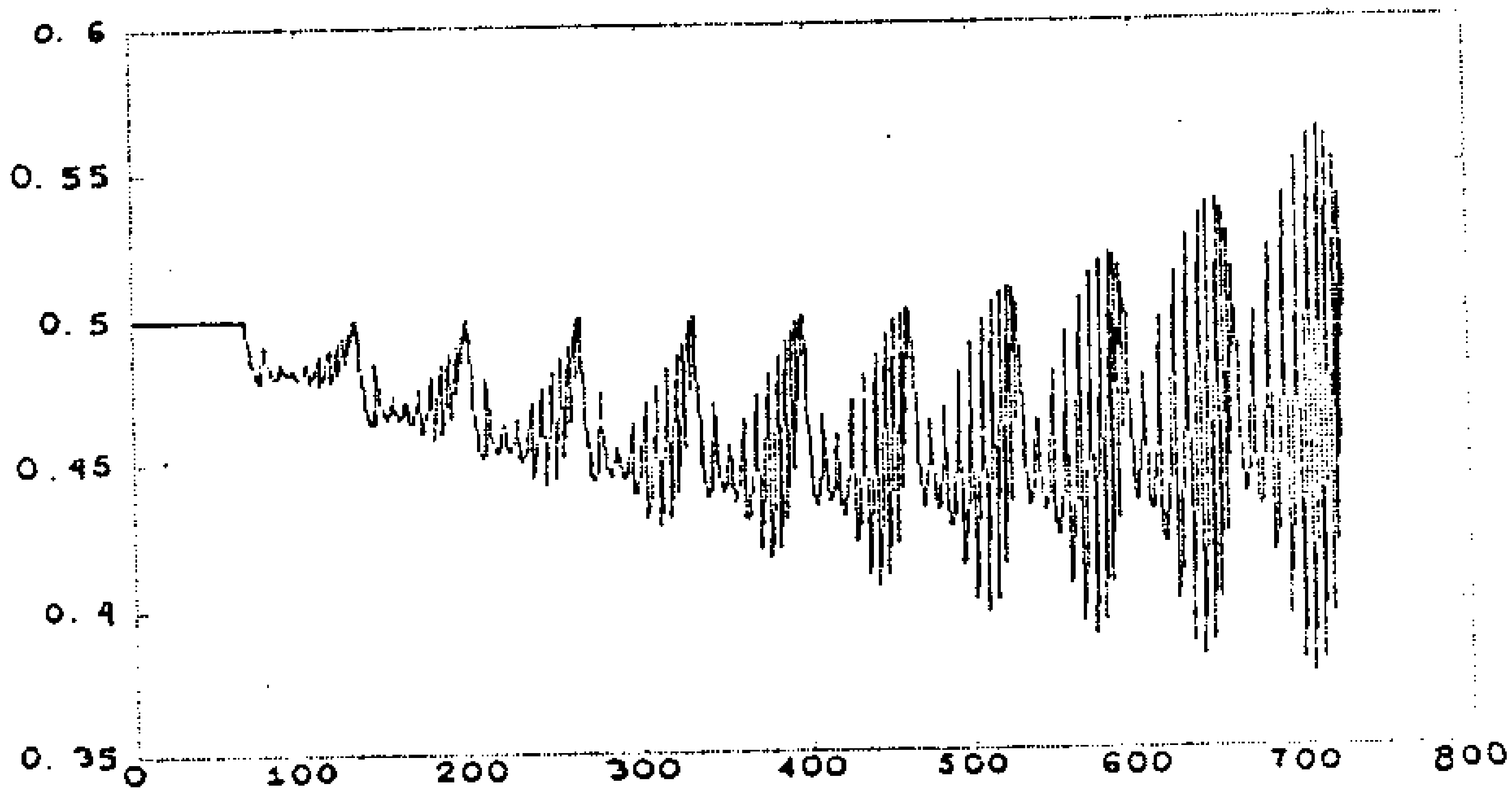
Slika 10. Grafik dvodimenzionalne gustine raspodele za (X_n, X_{n+1}) za MAEX(1) proces sa parametrima: $p_o = p_1 = 1/3$, $\alpha = 1/8$, $\beta = 7/8$.

Jedna od karakteristika procesa je i verovatnoća $P(X_t<X_{t+1})$. Za MAEX(1) proces je:

$$P(X_t<X_{t+1}) = p_o\left[\frac{p_o}{2} + \frac{p_1}{2(1+\alpha)} + \frac{q_1}{1+\beta}\right] + p_1\left(\frac{p_o}{2-\alpha} + Ap_1 + Bq_1\right] + \frac{q_1^2}{2}\ ,$$

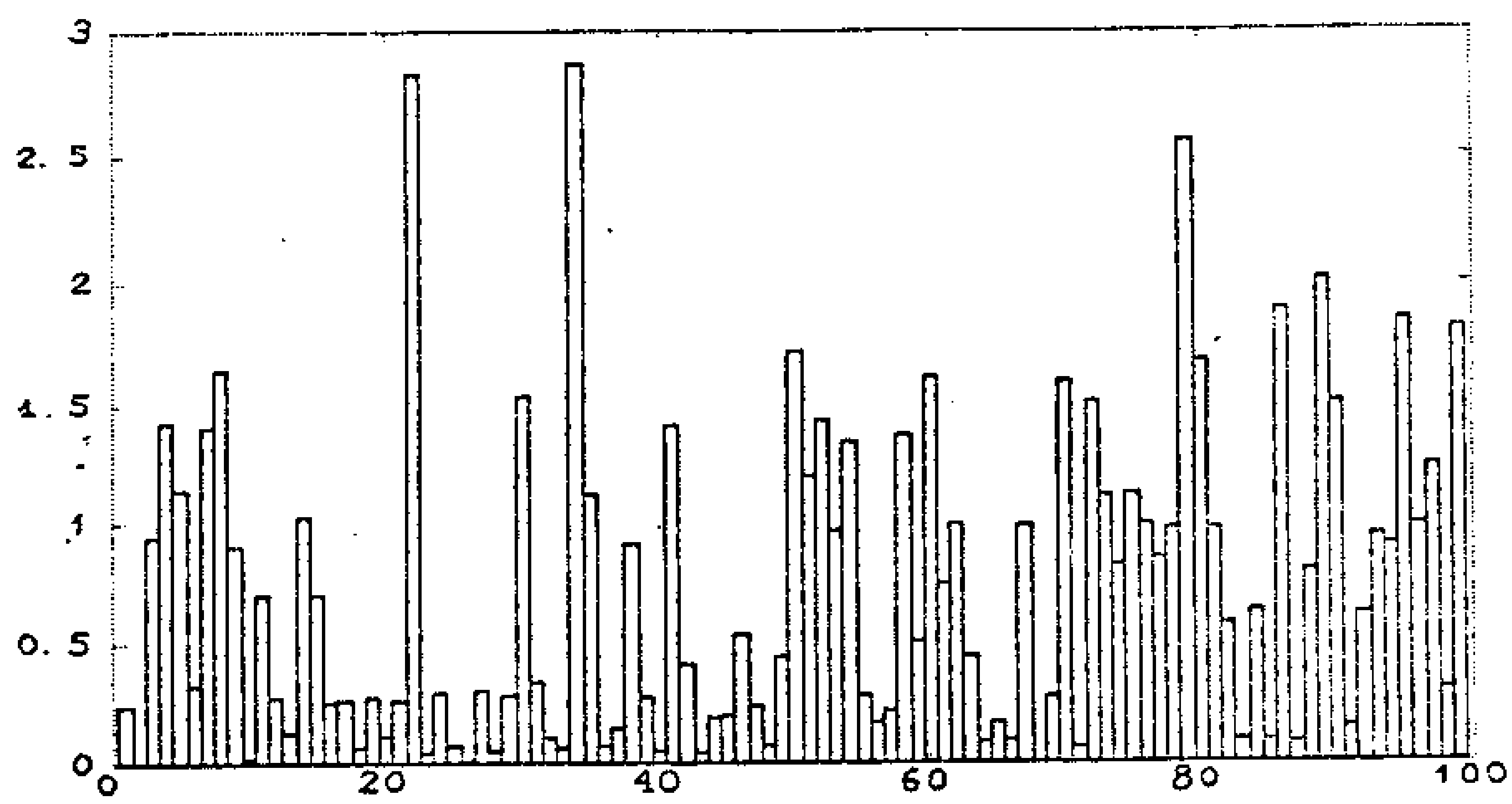
gde je $A=1/((1+\alpha)(2-\alpha))$, $B=(\alpha+\alpha\beta+\beta)/((1+\alpha)(\alpha+\beta))$ i $A\in(\frac{4}{9},\frac{1}{2})$, $B\in(\frac{1}{2},1)$.

Na slici 11 su date vrednosti ove verovatnoće za MAEX(1) proces oblika (4.1.2'), tj. kad je $\alpha = \beta$.



Slika ___ Verovatnoće $P(X_n < X_{n+1})$ za MAEX(1) proces, kad se parametri menjaju u okviru parametarskog prostora.

MAEX(1) proces je takodje jednostavan za simulaciju. Izgled trajektorija uslovljen je i vrednošću prethodno izračunate verovatnoće. Na slici 12 je modeliran niz od 100 vrednosti MAEX(1) procesa sa parametrima $p_0 = 0.3$, $p_1 = 0.4$ i $\alpha = \beta = 0.5$. U tom slučaju verovatnoća $P(X_t < X_{t+1}) = 0.44$.



Slika ___ Modelirana realizacija MAEX(1) procesa sa parametrima $p_0 = 0.3$, $p_1 = 0.4$, $\alpha = \beta = 0.5$. Teorijski, verovatnoća $P(X_n < X_{n+1})$ je ovde jednaka 0.44.

Jedna od karakteristika procesa je i uslovno matematičko očekivanje. Ovde ćemo dati vrednosti za uslovno matematičko očekivanje za MAEX(1) proces oblika (4. 1.2') sa $\alpha=1$. Na osnovu osobina uslovnog matematičkog očekivanja u odnosu na slučajne dogadjaje dobijamo da je:

$$E(X_t \mid X_{t-1} = z) = c_1 + c_2 \cdot z ,$$

gde je $c_1 = p_0 + p_1 + q_1(p_1 + \beta q_1)$ i $c_2 = (p_1/2 + p_0)(p_1 + \beta q_1)$.

S druge strane, za $E(X_t \mid X_{t+1} = z)$ dobijamo takodje linearnu funkciju od z, ali različitu od prethodne što je posledica ireverzibilnosti procesa. Naime, imamo da je:

$$E(X_t \mid X_{t+1} = z) = c_3 + c_4 \cdot z ,$$

gde je $c_3 = p_1 + q_1\beta + (p_0+p_1)p_0$, $c_4 = (p_0+p_1)(0.5 + q_1/\beta)$.

Zapažamo da se c_4 neograničeno uvećava kad $\beta \to 0$, što se može uvideti iz oblika samog procesa.

U vezi odredjivanja reda MAEX procesa, primena corner metode (deo 3.3) je moguća. Navodimo, kao primer, slučaj MAEX(1) procesa. Teoretski šema za corner metodu će biti:

$$\begin{array}{cccc} \Delta & \Delta & \Delta & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots \\ & \dots & & \end{array}$$

gde Δ označava broj različit od nule. Za modelirane vrednosti MAEX(1) procesa sa parametrima $p_0 = 0.3$, $p_1 = 0.5$, $\alpha=\beta=0.5$ dobija se šema (ovde dajemo samo gornji levi ugao, dimenzije 3 x 3 te šeme):

0.15	-0.0020	0.0177
0.02	-0.0026	0.0001
0.02	-0.0025	0.0024

DODATAK

Programi u MATLAB-u verzija 3.05 koji su korišćeni u radu.

Program 1. Program za generisanje niza pseudoslučajnih brojeva pomoću tri standardna generatora koji koriste kongruenciju po modulu.

Program 2a. Program za modeliranje realizacije AREX(1) procesa sa eksponencijalnom marginalnom raspodelom.

Program 2b. Program za modeliranje realizacije AREX(2) procesa sa eksponencijalnom marginalnom raspodelom.

Program 2c. Program za modeliranje realizacije AREX(1) procesa sa Laplasovom marginalnom raspodelom.

Program 2d. Program za modeliranje realizacije MAEX(1) procesa čiji inovacioni niz ima eksponencijalnu raspodelu.

Program 3. Program za računanje funkcije verodostojnosti za AREX(1) proces, pri fiksiranim vrednostima verovatnoća p_0 i p_1 dok se α i β menjaju u okviru dopustivog skupa vrednosti.

Program 4. Program za računanje elemenata šeme u korner metodi za ocenjivanje reda procesa.

Program 5a. Program za izračunavanje teorijskih vrednosti verovatnoća $P(X_n < X_{n+1})$ za MAEX(1) proces, kada se parametri menjaju u okviru dopustivog skupa vrednosti.

Program 5b. Program za računanje teorijskih vrednosti autokorelacione funkcije u tački 1, za MAEX(1) proces, pri izmeni parametara u okviru dopustivog skupa vrednosti.

Program 5c. Program za računanje vrednosti dvodimenzionalne funkcije raspodele za X_n i X_{n+1} za MAEX(1) proces.

```
function z = ran1(idum,n)
% genetaror slucajnih brojeva z=ran1(idum,n)
% idum proizvoljan pocetni broj - negativan
% n - koliko slucajnih brojeva generise
m1=259200;ia1=7141;ic1=54773;rm1=1/m1;
m2=134456;ia2=8121;ic2=28411;rm2=1/m2;
m3=24300;ia3=4561;ic3=51349;
ix1=((ic1-idum)/m1-fix(ic1-idum/m1))*m1;
ix1=((ia1*ix1+ic1)/m1-fix((ia1*ix1+ic1)/m1))*m1;
ix2=(ix1/m2-fix(ix1/m2))*m2;
ix1=((ia1*ix1+ic1)/m1-fix((ia1*ix1+ic1)/m1))*m1;
ix3=(ix1/m3-fix(ix1/m3))*m3;
    for j=1:n
      ix1=((ia1*ix1+ic1)/m1-fix((ia1*ix1+ic1)/m1))*m1;
      ix2=((ia2*ix2+ic2)/m2-fix((ia2*ix2+ic2)/m2))*m2;
      z(j)=(ix1+ix2*rm2)*rm1;
    end
      ix1=((ia1*ix1+ic1)/m1-fix((ia1*ix1+ic1)/m1))*m1;
      ix2=((ia2*ix2+ic2)/m2-fix((ia2*ix2+ic2)/m2))*m2;
      ix3=((ia3*ix3+ic3)/m3-fix((ia3*ix3+ic3)/m3))*m3;
      j= fix(1+(97*ix3)/m3)
         if j<=97 & j>0,
            z(k)=r(j);
            r(j)=(ix1+ix2*rm2)*rm1;
          else
         end
      end
end
```

Program 1. **Program za generisanje niza pseudoslučajnih brojeva pomoću tri standardna generatora koji koriste kongruenciju po modulu.**

```
function [x,kol,bo,b1,sn] = arex1(p,a,b,n)
%[x,kol,bo,b1,sn]=arex1(p,a,b,n)
%modeliranje vrednosti AREX procesa
bo=(1-a)/(sum(p)-p(1)*a);
b1=(1-sum(p))*(a-b)/(b*sum(p)-a*p(1));
rand('uniform')
x(1) = -log(1-rand);
for i=2:n
    z=rand;
    if z>sum(p),
       x(i)=b*x(i-1);
    else
       z1=rand; ksi=-log(1-rand);
          if z1<bo,
              x(i)=ksi;
              elseif z1<bo+b1,
              x(i)=b*ksi;
              else
              x(i)=p(1)*a*ksi/sum(p);
          end
       if z>p(1), x(i)=a*x(i-1)+x(i);end
    end
end
i=2;
while i<=n
  k=x(i)/x(i-1);
   if k>1,
     kol(i)=0;
   else
     kol(i)=k;end
  i=i+1;
end
y=sort(kol);
for i=1:(n-1)
 if y(i+1)>y(i),
  sn=[sn,y(i+1)];
  else,
end
end
```

Program 2a. Program za modeliranje realizacije AREX(1) procesa sa eksponencijalnom marginalnom raspodelom.

```
function x = arex2(p,a,b,n)
%p=[po,p1,p2,q1,q2], a=alfa, b=beta, modeliranje AREX2 procesa
po=p(1);
p1=p(2);
p2=p(3);
q1=p(4);
q2=p(5);
mb1=po*(a+b)+p1*b+p2*a;
mb2=po+p1+p2;
b1=mb1/(po*a*b);
b2=mb2/(po*a*b);
kor=sqrt(b1*b1-4*b2);
a2=-(-b1+kor)/2
a3=-(-b1-kor)/2
vr2=(1-a*a2)*(1-b*a2)-q1*(1-a2)*(1-b*a2)-q2*(1-a2)*(1-a*a2);
vr3=(1-a*a3)*(1-b*a3)-q1*(1-a3)*(1-b*a3)-q2*(1-a3)*(1-a*a3);
disp('vr2')
disp('vr3')
rand('uniform')
if vr2<0 & vr3>0,
   pr1=(1-a)*(1-b)/(po*a*b*(a2-1)*(a3-1));
   pr2=vr2/(a2*po*a*b*(1-a2)*(a3-a2));
   pr3=vr3/(a3*po*a*b*(1-a3)*(a2-a3));
   x(1)=-log(1-rand);
   x(2)=-log(1-rand);
     for t=3:n
       z1=rand;
         if z1<q1,
           x(t)=a*x(t-1);
         elseif z1<(q1+q2),
           x(t)=b*x(t-2);
         else
           z2=rand;
           z=rand;
           if z2<pr1,
             ksi=-log(1-z);
           elseif z2<(pr1+pr2)
             ksi=-(log(1-z))/a2;
           else
             ksi=-(log(1-z))/a3;
           end
         end
      if z1<(q1+q2+po),
        x(t)=ksi;
      elseif z1<(q1+q2+po+p1),
        x(t)=a*x(t-1)+ksi;
      else
        x(t)=b*x(t-2)+ksi;
      end
   end
 else
 disp('parametri ne zadovoljavaju uslove')
 end
```

Program 2b. Program za modeliranje realizacije AREX(2) procesa sa eksponencijalnom marginalnom raspodelom.

```
%function x=arla(p,a)
n=99;
x(1)=-log(1-rand)+log(1-rand);
for t=2:n
  ksi=-log(1-rand)+log(1-rand);
  z=rand;
    if z<p(1),
      x(t)=ksi;
    elseif z<sum(p),
      x(t)=a*x(t-1)+ksi;
    else
      x(t)=a*x(t-1);
    end
end
end
```

Program 2c. Program za modeliranje realizacije AREX(1) procesa sa Laplasovom marginalnom raspodelom.

```
function x=maex1(po,p1,a,n)
for j=1:n
  z=rand;
  z1=rand
    if z<po,
    x(j)=-log(1-z);
    elseif z<po+p1,
    x(j)=-log(1-z)-a*log(1-z1);
    else
    x(j)=-a*log(1-z1);
    end
end
end
```

Program 2d. Program za modeliranje realizacije MAEX(1) procesa čiji inovacioni niz ima eksponencijalnu raspodelu.

```
function g=ver(a,b,po,p1,n,ep)
%g=ver(a,b,po,p1,n,ep)
[x,ko1,bo,b1,sn]=arex1([po,p1],a,b,n);
q1=1-po-p1;
i=0;
for alfa=0:.05:1
  i=i+1;
  j=0;
  for beta=0:.05:1
     j=j+1;
       if beta<=alfa & po*alfa<beta-q1,
          g(i,j)=111(po,p1,x,n,alfa,beta,bo,b1,ep);
       else
          g(i,j)=0;
       end
    end
 end
end


function L = 111(po,p1,x,n,alfa,beta,bo,b1,ep)
L=0;
for m=2:n
  a=x(m);
  u=ug(bo,b1,a,alfa,beta,po,p1);
  a=x(m)-alfa*x(m-1);
  u=u+ug(bo,b1,a,alfa,beta,po,p1);
  s=drugi(ep,x(m),x(m-1),beta);
  u=u+(1-po-p1)*s;
  L=L+log(u);
end


function s = drugi(e,x,y,b)
  if x<y*b,
     s=0;
   elseif x<y*b+e,
     s=1./e;
   else
     s=0;
end


function u = ug(bo,b1,a,alfa,beta,po,p1)
    if a<0,
    u=0;
    else
    t=((1-bo-b1)*(po+p1))./(po*alfa);
    v=(-a*(po+p1))./(po*alfa);
    u= bo*exp(-a)+(b1/beta).*exp(-a/beta)+t.*exp(v);
end
```

Program 3. Program za računanje funkcije verodostojnosti za AREX(1) proces, pri fiksiranim vrednostima verovatnoća p_0 i p_1 dok se α i β menjaju u okviru dopustivog skupa vrednosti.

```
function [r,d]=corner(p,a,n)
%x=maex1(p(1),p(2),a,n);
%x=arex1(p,a(1),a(2),n);
x=arex2(p,a(1),a(2),n);
xs=sum(x)/n;
%rv=0;
%
%for t=1:n
%  rv=rv+(x(t)-xs)*(x(t)-xs)/n;
%end
for j=1:6
s=0;
for t=1:(n-j+1)
s=s+(x(t)-xs)*(x(t+j-1)-xs)/(n-j+1);
end
r(j)=s;
end
d(1,1)=r(2);
d(2,1)=r(3);
d(3,1)=r(4);
d(1,2)=det([r(2),r(1);r(3),r(2)]);
d(2,2)=det([r(3),r(2);r(4),r(3)]);
d(3,2)=det([r(4),r(3);r(5),r(4)]);
d(1,3)=det([r(2),r(1),r(2);r(3),r(2),r(1);r(4),r(3),r(2)]);
d(2,3)=det([r(3),r(2),r(1);r(4),r(3),r(2);r(5),r(4),r(3)]);
d(3,3)=det([r(4),r(3),r(2);r(5),r(4),r(3);r(6),r(5),r(4)]);
end
```

Program 4. Program za računanje elemenata šeme u korner metodi za ocenjivanje reda procesa.

```
function p=vmaex(eps)
j=0;
%for a=0:.1:1
a=1;
for po=0:eps:1
  for p1=0:eps:1
    if po+p1<=1,
%        for a=0:eps:1
          j=j+1;
          q1=1-po-p1;
          p(j)=po*(po/2+p1/(2*(1+a))+q1/(1+a));
          p(j)=p(j)+p1*(po/(2-a)+p1/((1+a)*(2-a))+(2+a)*q1/(2*(1+a)));
          p(j)=p(j)+q1*q1/2;
%        end
     else
   end
 end
%end
end
```

Program 5a. Program za izračunavanje teorijskih vrednosti verovatnoća $P(X_n < X_{n+1})$ za MAEX(1) proces, kada se parametri menjaju u okviru dopustivog skupa vrednosti.

```
function x=kor1(eps)
i=0.;
for a=.1:eps:1
 for po=0:eps:1
  for p1=0:eps:1
   va=1-po;
   vb=po+p1;
     if vb<=1,
       i=i+1;
       br=a*va*vb;
       im=vb*vb+a*a*va*va;
       x(i)=br/im;
     else
     end
   end
  end
 end
```

Program 5b. Program za računanje teorijskih vrednosti autokorelacione funkcije u tački 1, za MAEX(1) proces, pri izmeni parametara u okviru dopustivog skupa vrednosti.

```
function f=maexf(x,y,a,b)
fp(1)=exp(-x-y);
fp(4)=(exp(-x-y)-exp(-y-x/a))/(1-a);
fp(7)=(exp(-x/b-y))/b;
fp(8)=(exp(-x/b-y)-exp(-x/b-y/a))/(b*(1-a));
fp(9)=(exp(-x/b-y/b))/(b*b);
   if y>a*x,
     fp(2)=exp(-x-y+a*x);
     fp(5)=exp(-y)*(exp((-1-a)*x)-exp(-x/a))/(1-a+a*a);
     else
     fp(2)=0;
     fp(5)=(exp(-(1-a)*y/(a*a))-exp(-y))*exp(-x/a)/(1-a-a*a);
   end
     if x>y/b,
       fp(3)= exp(-y/b);
       fp(6)=(exp(-(x-y/b)/a-y/b))/a*b;
       else
       fp(3)=exp(-x);
       fp(6)=0;
     end
       f=(sum(fp))/9;
end
```

```
function z=maexg(a,b)
for x=0:.05:1
  for y=0:.1:1
    z(20*x+1,10*y+1)=maexf(x,y,a,b);
  end
end
end
```

Program 5c. Program za računanje vrednosti dvodimenzionalne funkcije raspodele za X_n i X_{n+1} za MAEX(1) proces.

LITERATURA

Knjige:

1. Chatfield C., The analysis of time series: theory and practice, 1978, Chapmann and Hall, London

2. Дуб Дж. Л., Вероятностные процессы, Москва 1956

3. Ермаков С.М., Метод Монте-Карло и смежные вопросы Moskva, Nauka, 1975,

4. Feller W. , An introduction to probability theory and its applications, Vol.II, J.Wiley, New York, 1971 (ruski prevod 1984).

5. Mališić J., Slučajni procesi (teorija i primene), Gradjevinska knjiga, Beograd, 1989,

6. Newbold P., Bos T., Stochastic parameter regression models, Sage University Paper Serie, 07-051, Beverly Hills and London: Sage Pubns., 1985

7. Nicholls D.F., Quinn B.G., Random coefficient autoregressive models: an introduction Heidelberg, Springer, 1982

8. Press W.H., B.P.Flannery, S.A.Tenkolsky, W.T.Vetterling , Numerical Recipes (The art of scientific computing) Cambridge University Press, 1986, pp.191-200, 289-293

9. Priestley M.B., Spectral analysis and time series, Vol.I, Univariate series, Academic Press, London, 1981

10. Прохоров А.В., Ушаков В.Г., Ушаков Н.Г., Задачи по теории вероятностей, Наука, Москва, 1986

11. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И., Интегралы и ряды (Элементарные функции), Наука, Москва, 1981

12. Ross S.M., Introduction to probability models, Academic Press, 1989 , pp 477-499.

13. Сенета Е., Правилно меняющиеся функции, Москва, Наука, 1985

14. Ширяев А.Н., Вероятность, Москва, Наука, 1980

Članci:

1. Andel J., On autoregressive models with random parameters, Prag 1981, The Third Prague Symposium on Applying Statistics, p.17-30.

2. Andel J., Nonnegative autoregressive processes Journal of time series analysis, Vol 10, No 1, 1989

3. Cipra T., A random coefficient moving average model,

Statistics & Decisions 2, 351-362 (1984)

4. Gooijer J.G.de. Abraham B., Gould A., Robinson L., Methods for determining the order of an autoregressive-moving average process: a survey, Int.Stat.Review, 1985, 53,3, 301-329

5. Hart J.D., On the marginal distribution of a first order autoregressive process, Statistics & Probability Letters 2(1984), 105-109

6. Jacobs P.A.,P.A.W.Lewis, A mixed autoregressive-moving average exponential sequence and point process EARMA(1,1), Adv.appl.prob.,1977, 9, pp.87-104

7. Jevremović V., An autoregressive process with an exponential marginal distribution, Radovi matematički, Knjiga 6, Vol.1,1990. ANUBiH, Sarajevo

8. Jevremović V. , Two examples of nonlinear processes with a mixed exponential marginal distribution, Prob.and Statist.Letters, 10(1990), 221-224

9. Jevremovic V., Some examples of nonlinear processes with asymmetric marginal distribution, Proceedings of the 7th Conference on applied mathematics, Yugoslavia, to appear 1990

10. Karlsen H.,Tjostheim D., Consistent Estimates for the NEAR(2) and NLAR(2) Time Series Models, J.R.Statist.Soc.B (1988), 50, No.2,pp 313-320.

11. Kovačić Z., Robustnost kriterijuma za izbor reda AR modela, Statističar, 14, 1989, 348-358

12. Lawrance A.J., P.A.W.Lewis, An exponential moving-average sequence and point process (EMA1) J.Appl.Prob. 14,1977, 98-113

13. Lawrance A.J., P.A.W.Lewis , A mixed exponential time series model, Management science, Vol.28,No.9,1982, 1045-1053

14. Lawrance A.J.,Lewis P.A.W., A new autoregressive time series model in exponential variables (NEAR(1)), Adv.Appl.Prob.(1981),13,pp 826-845.

15. Lawrance A.J., Lewis P.A.W., Modelling and residual analysis of nonlinear autoregressive time series in exponential variables, J.S.Statist.Soc.B, Vol.47, No.2, 1987, pp.165-202.

16. Lawrance A.J., P.A.W.Lewis , The exponential autoregressive-moving average EARMA(p,q) process J.R.Statist.Soc.,B,42,No.2,1980, 150-161

17. Lawrance A.J., Lewis P.A.W., Higher-order residual analysis for nonlinear time series with autoregressive correlation

structures, Int.Stat.Review, 55,1,1987

18. Lewis P.A.W., Simple models for positive-valued and discrete-valued time series with ARMA correlation structure, Multivariate analysis V, P.R.Krishnaiah ed., 1980, 151-166

19. Mališić J., On exponential autoregressive time series models P.Bauer et al. (eds.), Math.Statistics and Prob.Theory,1987 Vol.B, pp. 147-153 .

20. McKenzie Ed., Some models for discrete variate time series, Water resources Bulletin, 21, 645-650, 1985

21. Raftery A.,
Un processus autoregressif à loi marginale exponentielle. Proprietés asymptotiques et estimation de maximum de vraisemblance
Annales scientifiques de l'Univ.de Clermont-Ferrand II, No.69, 1981, Math.19eme fascicule, pp.149-159

22. Raftery A.,
Estimation efficace pour un processus autoregressif exponentiel à densité discontinue,
Publ.Inst.Stat.Univ.Paris, 1980,XXV,fasc.1-2, pp.65-91

23. Robinson P.M., Statistical inference for a random coefficient autoregressive model, Scand.J.Statist.5, 1978, 163-168

24. Robinson P.M., Analysis of time series from mixed distributions, Annals of Statistics, Vol.10,No 3, 915-925

25. Roy D., Mukherjee S.P., Generalised mixtures of exponential distributions, J.Appl.Prob. 25, 510-518, 1988

26. Sim C.H.,
A mixed gamma ARMA(1,1) model for river flow time series
Water resources research, Vol.23,No.1,1987, 32-36.

27. Smith R.L.,
Maximum likelihood estimation for the NEAR(2) model,
J.R.Statist. Soc.A,1986,48,No.2, pp.251-257

28. Tjostheim D., Estimation in nonlinear time series models, Stoch.proc. and appl. 21(1986) 251-273