KVANTILNI PROCESI I NJIHOVA PRIMENA

ZA TESTIRANJE NEPARAMETARSKIH HIPOTEZA

- Doktorska disertacija -

ZORAN GLIŠIĆ

Beograd 1987.

P R E D G O V O R

Ovaj rad je nastao kao rezultat želje da se u matematičkoj statistici i teoriji slučajnih procesa iskoriste mogućnosti savremenih kompjutera za formiranje i proveru novih teorijskih postavki. Zahvaljujem se prof. D^r Zoranu Ivkoviću na velikom strpljenju i pomoći, D^r Predragu Peruničiću na nesebičnoj stručnoj pomoći, Dejanu Ristanoviću na softverskoj podršci i Mirjani Rapaić na tehničkoj pomoći.

Zoran Glišić

I DEO. UVOD

I.1. UVODNE NAPOMENE

U ovom radu smo želeli da prikažemo neke rezultate do kojih smo došli razmatranjem Bahadurove (Bahadur R.R.) reprezentacije uzoračke kvantilne funkcije ([1]). Preciznije, pokušali smo da konstruišemo neke nove testove za testiranje

$$H_0(X : U(0;1)) \quad \text{protiv} \quad H_1(X : F(t) \neq t,\ 0 \leqslant t \leqslant 1)$$

(gde je $F(\cdot)$-funkcija raspodele slučajne promenljive X, a $U(0;1)$ uobičajena oznaka uniformne (ravnomerne) raspodele na intervalu $(0;1)$). Ti testovi se, prirodno, mogu koristiti i za testiranje hipoteze

$$H_0(X : F_0(t)) \quad \text{protiv} \quad H_1(X : F(t) \neq F_0(t))$$

primenom transformacije $Y = F_0(X)$, za poznatu klasu funkcija raspodele. Pritom smo koristili osobine novouvedene statistike

$$Z_n(t) = \sqrt{n}(F_n(t) - Q_n(t)) = \sqrt{n}(F_n(t) - t) - \sqrt{n}(Q_n(t) - t),$$

za $0 \leqslant t \leqslant 1$, tj. razlike izmedju empirijskog procesa:

$$\sqrt{n}(F_n(t) - t), \quad 0 \leqslant t \leqslant 1$$

i kvantilnog procesa:

$$\sqrt{n}(Q_n(t) - t), \quad 0 \leqslant t \leqslant 1$$

gde je $F_n(\cdot)$-empirijska funkcija raspodele, a $Q_n(\cdot)$-kvantilna funkcija za uzorak $X_1, X_2, \ldots, X_n$ izvučen iz populacije sa obeležjem X sa $U(0;1)$ raspodelom, tj. kada je hipoteza H_0 tačna.

Ispitaćemo ponašanje procesa $Z_n(t)$ u graničnom slučaju, kada $n \to \infty$ i pokušati da pronadjemo raspodele nekih funkcionala od procesa $Z_n(t)$, koji će nam poslužiti za formiranje odgovarajućih testova.

Sam rad smo podelili u tri dela i to:

U I delu (UVOD) smo izdvojili definicije i teoreme koje olakšavaju razumevanje rada i na koje se u daljem radu pozivamo. Na kraju svake tačke dajemo kratak istorijski i bibliografski osvrt na pomenute pojmove i probleme.

U II delu (NOVI TESTOVI) smo ispitali ponašanje procesa $Z_n(t)$, pronašli raspodele funkcionala procesa $Z_n(t)$ koji su nam poslužili za formiranje tri nova testa za testiranje hipoteze H_o protiv H_1.

U III delu (MOĆ I NEPRISTRASNOST) smo ispitali moć novouvedenih testova za različite alternative uporedjivanjem sa moćima nekih od poznatih testova (Morana, Kolmogorova i Smirnov - fon Mizesa). Uporedjivanje moći i nepristrasnosti smo izvršili za iste uzorke, čime smo mogli objektivno da uočimo prednosti i nedostatke novih testova.

Rad se završava DODATKOM, u kome dajemo detaljnija objašnjenja korišćenih programa, literaturu, tablice i sadržaj. Oznake koje smo koristili su uglavnom standardne za ovu vrstu literature.

I.2. EMPIRIJSKI I KVANTILNI PROCESI

Empirijski i kvantilni procesi imaju najvažniju ulogu u našem radu. Empirijski procesi su znatno više obradjeni u stručnoj literaturi, dok se za kvantilne procese može reći da su donekle zanemareni. Zahvaljujući Bahaduru, u poslednje vreme je poraslo interesovanje za njih, pa je i ovaj rad skroman doprinos tome.

U ovoj tački ćemo navesti najvažnije definicije i teoreme povezane sa njima.

DEFINICIJA I.2.1: Za svaku funkciju raspodele $F(t)$ kvantilna funkcija $Q(u)$ je

$$Q(u) = \inf \{ t : F(t) \geqslant u \}, \quad 0 < u < 1$$

ili, drugim rečima

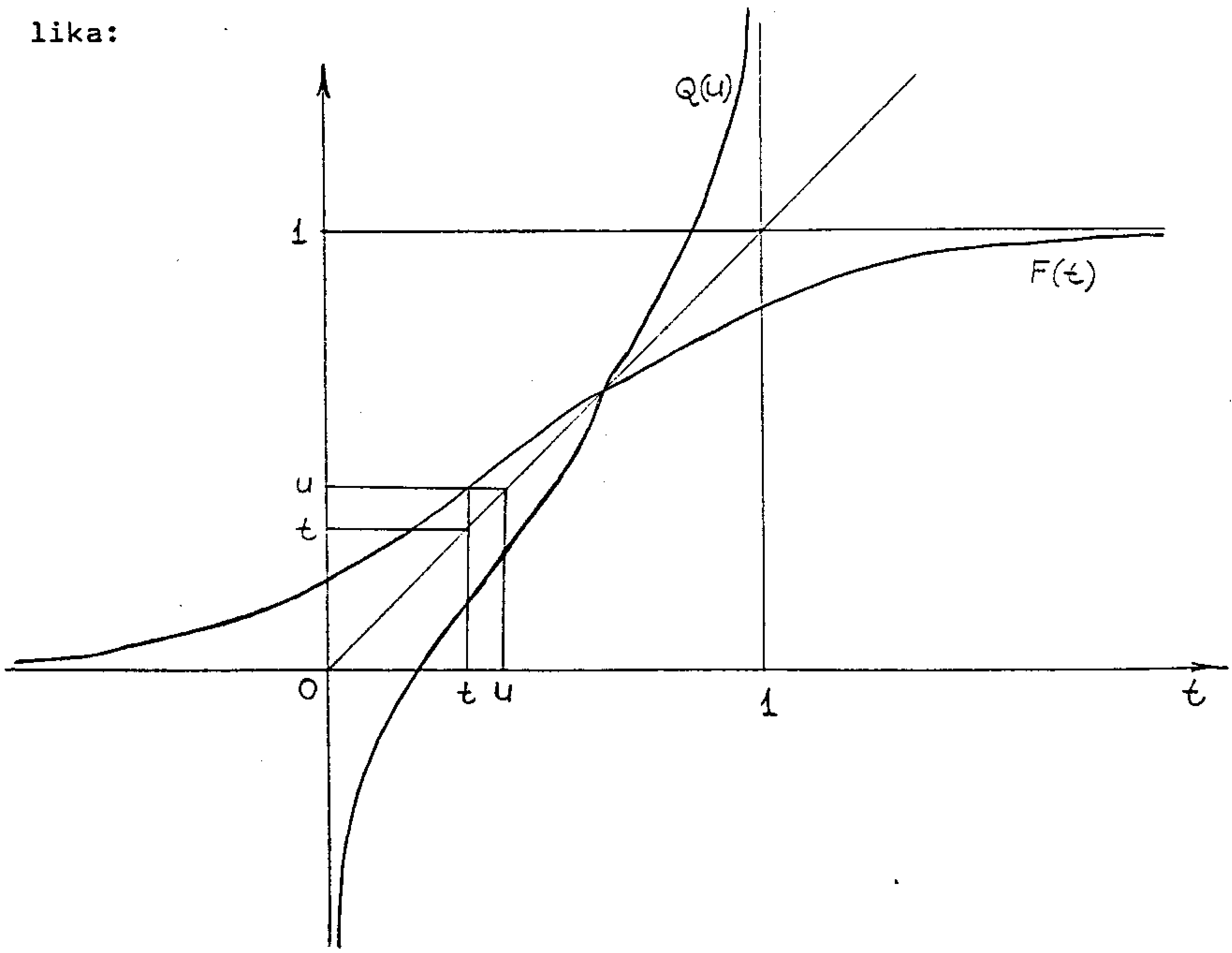
$$F(t) \geqslant u \quad \text{ako i samo ako je } Q(u) \leqslant t.$$

U slučaju $U(0;1)$ raspodele, koja nas ovde najviše interesuje, važi:

$$P\{ Q(X) \leqslant t \} = P\{ F(t) \geqslant X \} = F(t)$$

([45]).

Grafički, kvantilna funkcija i funkcija raspodele su oblika:



Sl. 1. FUNKCIJA RASPODELE I KVANTILNA FUNKCIJA

Dalje, neka je $X_1, X_2, \ldots, X_n$ uzorak obima n izvučen iz populacije sa obeležjem X sa funkcijom raspodele $F(t)$.

DEFINICIJA I.2.2: Uzorak $X_1, X_2, \ldots, X_n$ uredjen u neopadajućem poretku, tj.

$$X_{(1)} \leq X_{(2)} \leq \ldots \leq X_{(n)}$$

se naziva varijacioni niz za dati uzorak, a statistika $X_{(k)}$, $k = 1,2,\ldots,n$, se naziva k-ta statistika poretka.

DEFINICIJA I.2.3: Empirijska funkcija raspodele za uzorak $X_1, X_2, \ldots, X_n$ je statistika oblika:

$$F_n(t) = \begin{cases} 0, & t \leq X_{(1)} \\ \frac{k}{n}, & X_{(k)} < t \leq X_{(k+1)}, \ k=1,2,\ldots,n-1 \\ 1, & t > X_{(n)} \end{cases}$$

odnosno

$$F_n(t) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} I_{(-\infty;t]}(X_k)$$

gde je $I_{(-\infty;t]}(X_k)$ - indikator slučajnog dogadjaja $\{X_k \leq t\}$.

Centralna teorema matematičke statistike (Glivenko - Kantelli) tvrdi da

$$\sup_{-\infty<t<\infty} / F_n(t) - F(t)/ \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

sa verovatnoćom 1 i ona predstavlja jedan od kamena temeljaca matematičke statistike. ([5] , [11],...).

DEFINICIJA I.2.4: Slučajni proces

$$\beta_n(t) = \sqrt{n}(F_n(t) - F(t)) , \quad t \in R$$

nazivamo (uzorački) empirijski proces. U slučaju U(0;1) raspodele, proces

$$U_n(t) = \sqrt{n}(F_n(t)-t), \quad 0 \leq t \leq 1$$

nazivamo uniformni empirijski proces. Za svako fiksirano t on ima standardizovanu binomnu raspodelu

$$\frac{B(n;t)-nt}{\sqrt{n}}.$$

Na osnovu centralne granične teoreme, granična raspodela je normalna, za fiksirano t. I u opštem slučaju

$$\beta_n(t) \xrightarrow[n\to\infty]{R} \beta(t) : \mathcal{N}(0;F(t)(1-F(t)))$$

za svako fiksirano t, $t \in R$, gde je $\xrightarrow[n\to\infty]{R}$ oznaka za konvergenciju u raspodeli.

TEOREMA I.2.1: (Kolmogorov-Smirnov):

Ako je F(t) neprekidna funkcija raspodele, tada:

$$P\left\{ \sup_{-\infty<t<\infty} /\beta_n(t)/ \leq y \right\} \xrightarrow[n\to\infty]{} K(y)$$

gde je

$$K(y) = \begin{cases} \sum\limits_{\substack{k=-\infty \\ k\neq 0}}^{+\infty} (-1)^k \; e^{-2k^2y^2}, & y>0 \\ 0 & , y\leq 0 \end{cases}$$

i

$$P\left\{ \sup_{-\infty<t<\infty} \beta_n(t) \leq y \right\} \xrightarrow[n\to\infty]{} S(y)$$

gde je

$$S(y) = \begin{cases} 1 - e^{-2y^2} & , y>0 \\ 0 & , y\leq 0 \end{cases}$$

([5], [11],...).

DEFINICIJA I.2.5: Neka je $X_1, X_2, \ldots, X_n$ uzorak obima n izvučen iz populacije sa neprekidnom funkcijom raspodele F(t) i neka su

$X_{(1)}, X_{(2)}, \ldots, X_{(n)}$ odgovarajuće statistike poretka. Funkciju

$$Q_n(t) = X_{(k)}, \quad \frac{k-1}{n} < t \leq \frac{k}{n}, \quad k=1,2,\ldots,n$$

nazivamo (uzoračkom) kvantilnom funkcijom, a slučajni proces

$$\mathcal{L}_n(t) = \sqrt{n}(Q_n(t) - F^{-1}(t)), \quad 0 < t < 1$$

(uzoračkim) kvantilnim procesom (ili "inverznim" empirijskim procesom). Specijalno, u slučaju $U(0;1)$ raspodele proces

$$V_n(t) = \sqrt{n}(Q_n(t) - t), \quad 0 < t < 1$$

nazivamo uniformni kvantilni proces.

Slično kao kod empirijskog procesa, može se pokazati da za svako fiksirano t, $0 < t < 1$:

$$\mathcal{L}_n(t) \xrightarrow[n \to \infty]{R} \mathcal{L}(t) : \mathcal{N}\left(0; \frac{t(1-t)}{f^2(F^{-1}(t))}\right)$$

gde je $f(\cdot) = F'(\cdot)$, odnosno

$$V_n(t) \xrightarrow[n \to \infty]{R} V(t) : \mathcal{N}(0; t(1-t))$$ za svako fiksirano t, u slučaju $U(0;1)$ raspodele. Zapažamo na ovom mestu i da

$$U_n(t) \xrightarrow[n \to \infty]{R} U(t) : \mathcal{N}(0; t(1-t))$$

za svako fiksirano t iz $(0;1)$. (naprimer [5], [11], ...).

ISTORIJSKE I BIBLIOGRAFSKE NAPOMENE:

Teoremu I.2.1 su dokazali Kolmogorov (1933) i Smirnov (1939). Teoremu o konvergenciji empirijskog procesa $\sqrt{n}(F_n(t) - F(t))$ prvi je dokazao Donsker (DONSKER M.D.) 1952.g., a na vezu empirijskog procesa i Braunovih mostova prvi je ukazao Dub (DOOB J.L) 1949. godine, ali bez dokaza. O empirijskim procesima se možemo detaljno informisati kod Bilingslija (BILLINGSLEY P.)([3]), Polarda (POLLARD D.) ([45]), Čergöa i Revesa (CSÖRGÖ M. i RÉVÉSZ P.) ([11]), Borovkova ([5]) itd.. Kvantilnom funkcijom i kvantilnim procesima su se, izmedju ostalih bavili Reni (RÉNYI A.), Čerge i Reves, Kifer (KIEFER J.) i drugi. Najobimniji materijal o kvantilnim procesima na jednom mestu se može naći u [11]. O primeni uzoračkih kvantila i kvantilne funkcije možemo naći kod Goša (GHOSH J.K.) ([26]), Falka (FALK M.) ([20],[21]), Šoraka (SHORACK G.) ([49]), Vitersa (WITHERS C.) ([53]) i drugih. Najobimniji materijal o statistikama poretka i primeni možemo naći kod Galamboša (GALAMBOS J.) u [25].

I.3. BRAUNOVI MOSTOVI

Braunov most ili svezano Braunovo kretanje (tied-down brownian motion) je slučajni proces koji je tesno vezan sa Braunovim kretanjem (Vinerovim procesom), kao što mu i samo ime govori. Kao što smo već pomenuli, Dub je ukazao na vezu izmedju empirijskog procesa i Braunovih mostova, što se kasnije pokazalo tačnim i nadasve, korisnim.

<u>DEFINICIJA I.3.1</u>: Slučajni proces

$\{W(t,\omega) = W(t),\ 0 \leq t < \infty\}$, gde je $\omega \in \Omega$ i $\{\Omega, \mathcal{A}, P\}$ je prostor verovatnoća, se naziva Vinerov proces ako:

1° $W(t) - W(s)$ ima $\mathcal{N}(0; t-s)$ raspodelu za svako $0 \leq s < t < \infty$ i $W(0) = 0$.

2° $W(t)$ je proces sa nezavisnim priraštajima, tako da $W(t_2)-W(t_1), W(t_4)-W(t_3), \ldots, W(t_{2i})-W(t_{2i-1})$ jesu nezavisne slučajne promenljive za svako $0 \leq t_1 < t_2 \leq t_3 < t_4 \leq \ldots \leq t_{2i-1} < t_{2i} < \infty$ i $i=1,2,\ldots$.

3^0 Trajektorija procesa $W(t)$ je neprekidna u t sa verovatnoćom 1.

Korelaciona funkcija procesa $W(t)$ je oblika

$$R(s,t) = \min\{s,t\}.$$

DEFINICIJA I.3.2: Stohastički proces

$\{B(t,\omega) = B(t),\ \ t\in[0;1],\ \omega\in\Omega\}$ se naziva

Braunov most, ako su ispunjeni sledeći uslovi:

1^0 Zajednička raspodela slučajnih promenljivih $B(t_1), B(t_2),\dots,B(t_n)$ za $0\leq t_1\leq t_2\leq\dots\leq t_n\leq 1$ za $n=1,2,\dots$ je gausovska sa

$$E(B(t)) = 0 \quad \text{za} \quad 0\leq t\leq 1$$

2^0 Korelaciona funkcija procesa $B(t), 0\leq t\leq 1$ je oblika

$$R(s,t) = \min\{s,t\} - s\cdot t,\quad 0\leq s,\ t\leq 1\ .$$

3^0 Trajektorije procesa $\{B(t),\ 0\leq t\leq 1\}$ su neprekidne sa verovatnoćom 1, za $0\leq t\leq 1$ i svako $\omega\in\Omega$.

4^0 $B(0) = B(1) = 0$ sa verovatnoćom 1. (SL. A, B i C)

Egzistencija takvog slučajnog procesa sledi iz sledećih tvrdjenja:

LEMA I.3.1: Ako je $\{W(t),\ 0\leq t<\infty\}$ Vinerov proces (ili proces Braunovog kretanja) tada

$$B(t) = W(t) - t\cdot W(1),\ 0\leq t\leq 1$$

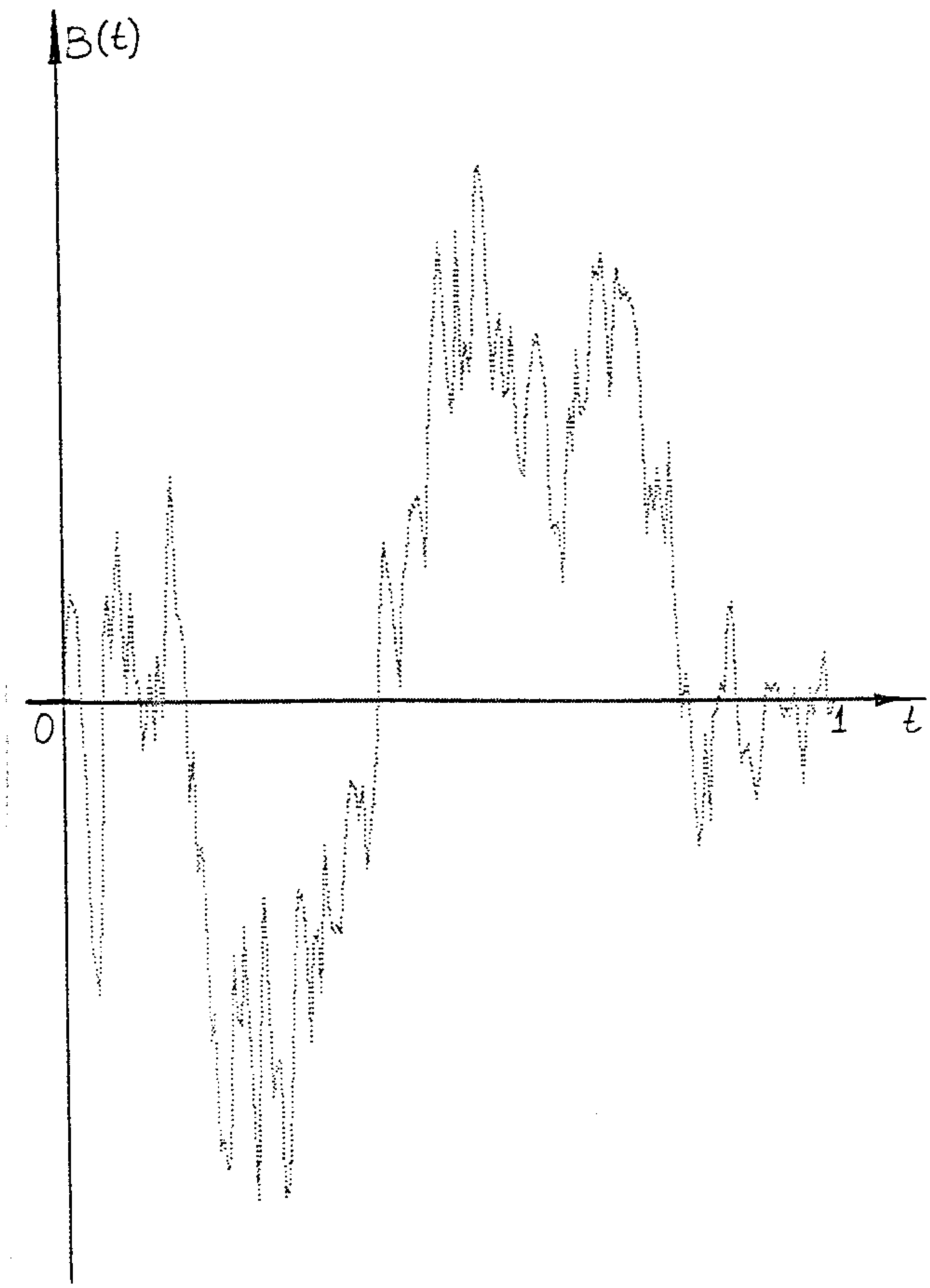
jeste Braunov most.

LEMA I.3.2: Ako je $\{W(t),\ 0\leq t<\infty\}$ Vinerov proces, tada

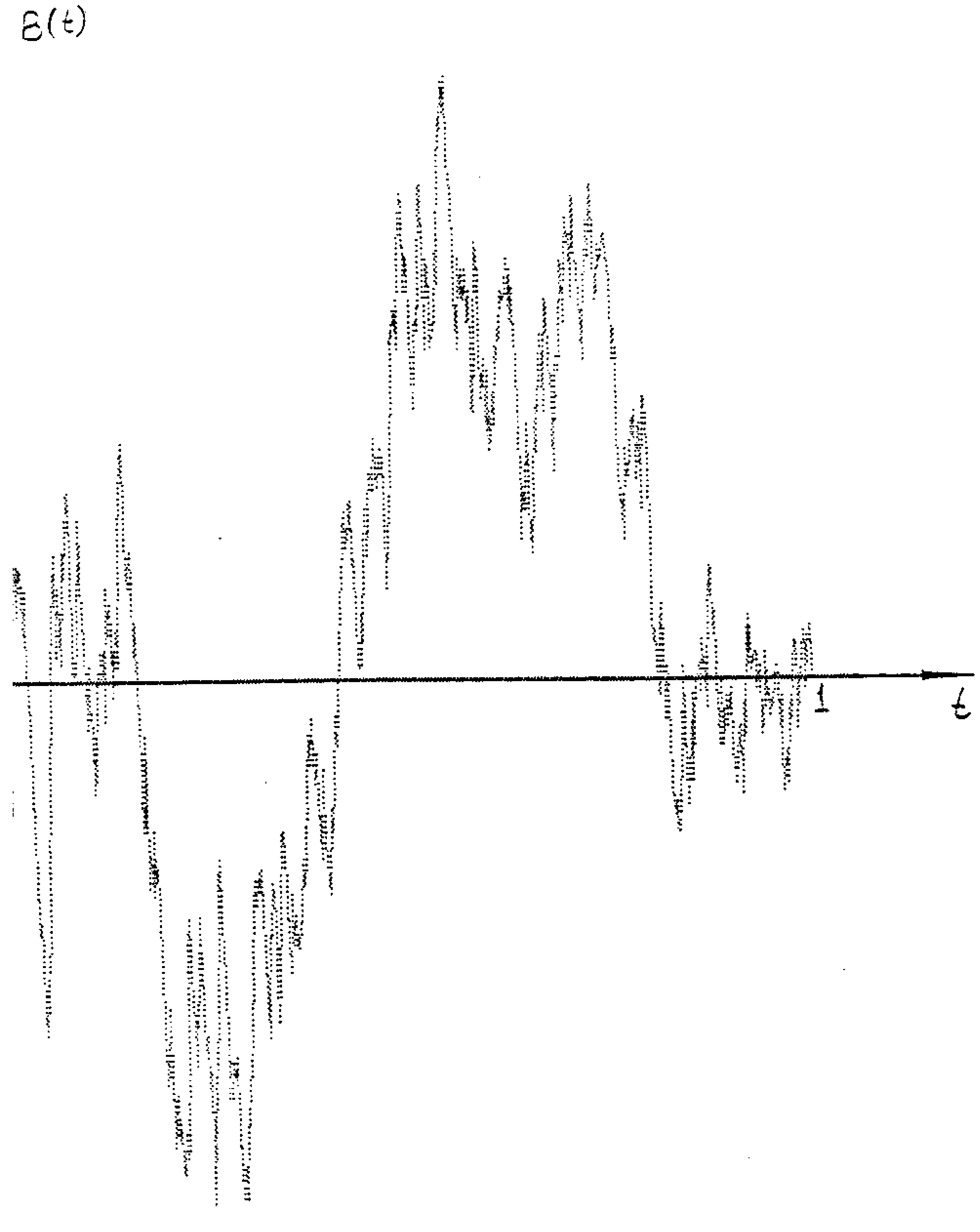
$$B(t) = (1-t)W\left(\frac{t}{1-t}\right),\quad 0\leq t\leq 1$$

jeste Braunov most ([11], [45]).

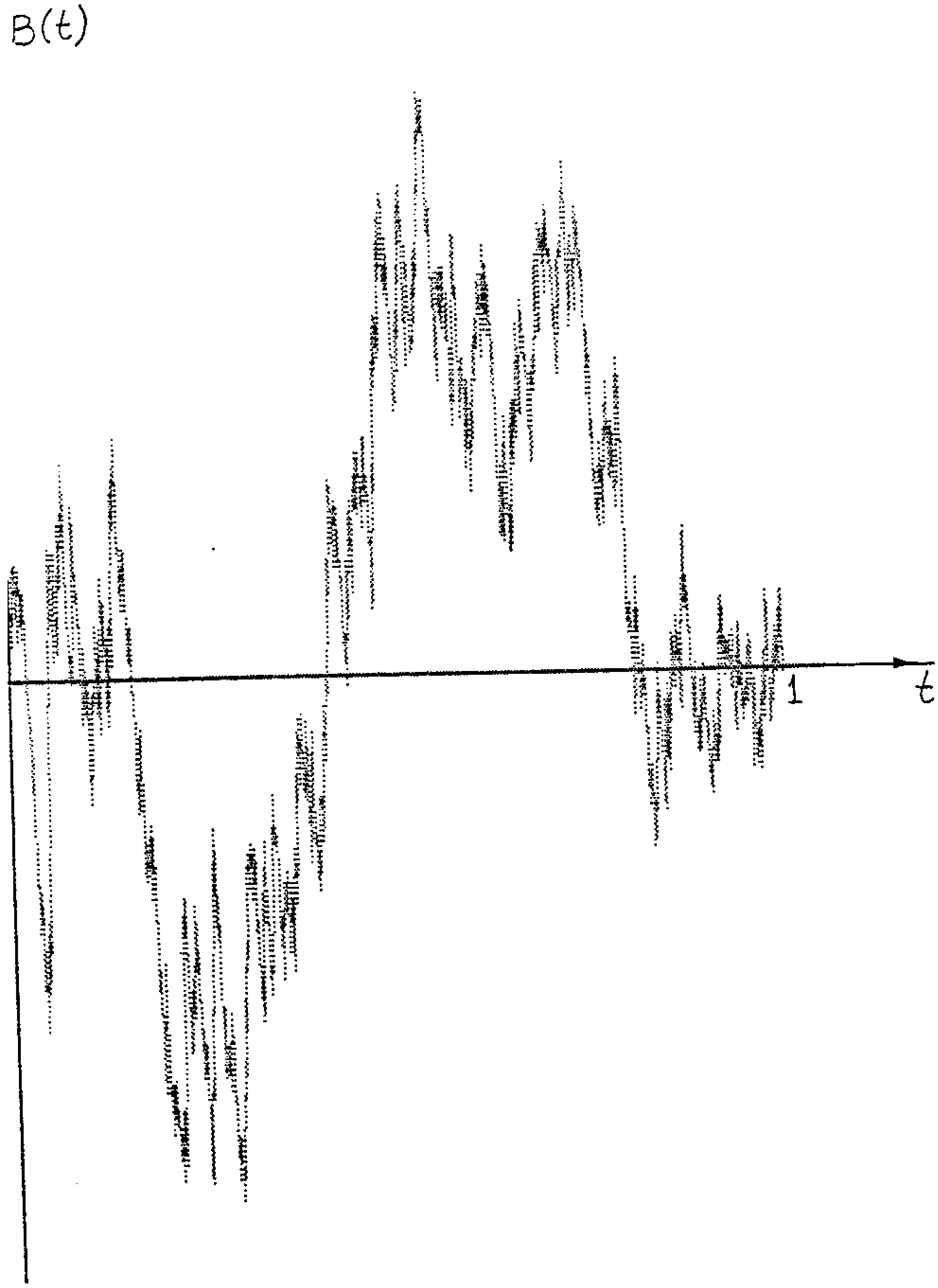
Braunovi mostovi su odigrali značajnu ulogu u nalaženju



SL.A:Trajektorija Braunovog mosta za podelu intervala (0;1) na 200 delova



SL.B: Ista trajektorija Braunovog mosta za podelu intervala (0;1) na 600 delova



SL. C: Ista trajektorija Braunovog mosta za podelu intervala (0;1) na 2000 delova asimptotskih raspodela statistika baziranih na empirijskim i kvantilnim procesima.

TEOREMA I.3.1: Za uzorak $X_1, X_2, \ldots, X_n$ izvučen iz populacije sa obeležjem X sa funkcijom raspodele F(t), postoji niz Braunovih mostova $\{B_n(t),\ 0 \leq t \leq 1\}$, takav da je

$$\sup_{0 \leq t \leq 1} |\beta_n(t) - B_n(F(t))| = O_p(n^{-\frac{1}{4}}(\log n)^{\frac{1}{2}}(\log \log n)^{\frac{1}{2}})$$

gde je $O_p(\cdot)$ oznaka Mana i Valda (Mann i Wald) (1943), uvedena kao stohastički analog okoline $O(\cdot)$ u smislu Landau-a, naime, važi:

DEFINICIJA I.3.3: Neka su $\{X_n\}$ i $\{Y_n\}$ nizovi slučajnih promenljivih. Oznaka:

$$X_n = O_p(Y_n)$$

znači: za svako $\varepsilon > 0$ postoji realan broj M takav da je

$$P\{|X_n| \geq M|Y_n|\} < \varepsilon \quad \text{, za dovoljno veliko } n.$$

Oznaka

$$X_n = o_p(Y_n)$$

znači: $P\{|X_n| \geq \varepsilon |Y_n|\} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ za svako $\varepsilon > 0$. (Jasno, $\{X_n\}$ i $\{Y_n\}$ moraju biti definisani na istom verovatnosnom prostoru). ([45]).

TEOREMA I.3.2: Ako je $X_1, X_2, \ldots, X_n$ uzorak obima n izvučen iz populacije sa obeležjem X sa U(0;1) raspodelom, tada postoji niz Braunovih mostova $\{B_n(t),\ 0 \leq t \leq 1\}$, takav da je

$$\sup_{0 \leq t \leq 1} |V_n(t) - B_n(t)| = O_p(n^{-\frac{1}{2}} \log n)$$

sa verovatnoćom 1. ([11]).

Važi još opštije tvrdjenje:

TEOREMA I.3.3: Ako je $X_1, X_2, \dots, X_n$ uzorak obima n izvučen iz populacije sa obeležjem X sa funkcijom raspodele F(t) koja je neprekidna, dva puta diferencijabilna i $F'(t) = f(t) > 0$, tada postoji niz Braunovih mostova $\{B_n(t),\ 0 \leq t \leq 1\}$ takav da je:

$$\sup_{\mathcal{E}_n \leq t \leq 1-\mathcal{E}_n} /f(F^{-1}(t))\,\alpha_n(t) - B_n(t)/ = O_p(n^{-\frac{1}{2}} \log n)$$

sa verovatnoćom 1, gde $\mathcal{E}_n \to 0$ kad $n \to \infty$ ([5], [11], ...).

Kao posledice tih teorema dolazimo do najvažnijih zaključaka:

1. $\sqrt{n}(F_n(t)-t) \xrightarrow[n \to \infty]{s.i.} B(t)$

2. $\sqrt{n}(Q_n(t)-t) \xrightarrow[n \to \infty]{s.i.} -B(t) \stackrel{R}{=} B(t)$

3. $\sqrt{n}(F_n(t)-F(t)) \xrightarrow[n \to \infty]{s.i.} B(F(t))$

([5], [11], ...), gde je $\xrightarrow[n \to \infty]{s.i.}$ oznaka skoro izvesne konvergencije.

Da bi se gornja tvrdjenja mogla produžiti na funkcionale tipa G(F), neophodno je na takve funkcionale nametnuti neke uslove glatkosti:

DEFINICIJA I.3.4: Funkcional G(F) nazivamo neprekidno-diferencijabilnim reda k u tački F_0, ako postoji funkcional $g(F_0, w)$ koji za svaku funkciju $w \in C(0;1)$ i svaki niz $w_\mathcal{E} \in D(0;1)$ (o prostorima C=C(0;1) i D=D(0;1) opširnije u tački I.7), takve da je $\| w_\mathcal{E} - w \| \to 0$ kad $\mathcal{E} \to 0$, zadovoljava relacije:

$$\frac{G(F_0 + \mathcal{E} w_\mathcal{E}) - G(F_0)}{\mathcal{E}^k} \xrightarrow[\mathcal{E} \to 0]{} g(F_0, w)$$

i

$$g(F_0, w_\mathcal{E}) \xrightarrow[\mathcal{E} \to 0]{} g(F_0, w) .$$

$(g(F_o,w)$ možemo zvati izvodom reda k od funkcionala G po promenljivoj w ([5])).

TEOREMA I.3.4: Ako obeležje X ima funkciju raspodele $F_o(t)$ i ako je funkcional $G(F)$ diferencijabilan reda k, tada

$$\sqrt{n}(G(F_n(T)) - G(F_o(t))) \xrightarrow[n\to\infty]{R} g(F_o(t),B(t))$$

gde je $B(t)$ - Braunov most.

TEOREMA I.3.5: Ako obeležje X ima funkciju raspodele $F_o(t)$ koja je neprekidno-diferencijabilna u tački t_p i $f_o(t_p)=F_o'(t_p)>0$, tada

$$\sqrt{n}(Q_n(p)-F^{-1}(p)) \xrightarrow[n\to\infty]{R} \frac{B(p)}{f_o(t_p)}$$

gde je $F_o(t_p) = p$. ([5]).

ISTORIJSKE I BIBLIOGRAFSKE NAPOMENE:

O egzistenciji Braunovih mostova medju prvima je govorio Dadli (Dudley) 1966.godine. Danas su Braunovi mostovi u žiži interesovanja, jer se, izmedju ostalog, dokazi mnogih teorema mogu sada "elegantno" izvesti. Veoma iscrpno razmatranje o njima se može naći kod Bilingslija u [3] , Borovkova u [5], Čerge i Revesa u [11] , Polarda u [45] i drugih. Dub je 1949. godine tvrdio: " ... u računanju raspodele procesa $\sqrt{n}(F_n(t)-t)$, kad $n\to\infty$ možemo jednostavno umesto procesa $\sqrt{n}(F_n(t)-t)$ posmatrati proces $B(t)$..." . Donsker je 1952. to i dokazao.

I.4. RASPODELA NEKIH FUNKCIONALA OD BRAUNOVIH MOSTOVA

Treba odmah napomenuti da nije pronadjeno mnogo funkcioıala od Braunovih mostova za koje se mogu efektivno pronaći raspodele. Ovde ćemo navesti skoro sve pronadjene, jer su nam potrebni u daljem radu:

1. $P\left\{ \sup\limits_{0 \leq t \leq 1} B(t) \geq u \right\} = e^{-2u^2} \quad , \; u > 0$

2. $P\left\{ \sup\limits_{0 \leq t \leq 1} /B(t)/ > u \right\} = \sum\limits_{\substack{k=-\\ k\neq 0}}^{+} (-1)^{k+1} e^{-2k^2u^2} \quad , \quad u > 0$

(raspodela Kolmogorova).

3. $P\left\{ \int_0^1 \left[B(t)\right]^2 dt \leq u \right\} = \frac{1}{\pi\sqrt{u}} \sum\limits_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{-\frac{1}{2}}{k} \sqrt{4k+1}\; e^{-\frac{(4k+1)^2}{16u}} \cdot$

$$\cdot\; b_{\frac{1}{4}}\left[\frac{(4k+1)^2}{16u}\right]$$

gde je $b_p(\cdot)$ - Beselova funkcija sa parametrom p, definisana sa:

$b_p(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^p \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)\cdot\Gamma(k+p+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k} \quad ,$

gde je $\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} t^{\alpha-1} e^{-t}\, dt$ - Gama funkcija .

4. $P\left\{ \sup\limits_{0<t<1} B(t) - \inf\limits_{0<t<1} B(t) \leq u \right\} = 1 - \sum\limits_{k=1}^{\infty} 2\cdot\left[4(k\cdot u)^2 - 1\right] \cdot$

$$\cdot\; e^{-2k^2u^2} \quad , \quad u > 0$$

i

5. $\lim\limits_{n\to\infty} P\left\{ \sup\limits_{\varepsilon_n < t < 1-\varepsilon_n} \frac{/B(t)/}{\sqrt{t(1-t)}} \leq a\left(x, 2 \log \frac{1-\varepsilon_n}{\varepsilon_n}\right) \right\} = e^{-2e^{-x}}$

gde je

$a(x,T) = \left(x + 2\log T + \frac{1}{2}\log(\log T) - \frac{1}{2}\log\pi\right)(2\log T)^{-\frac{1}{2}}$

i pri čemu $\varepsilon_n \longrightarrow 0$ kad $n \longrightarrow \infty$. ([11]).

ISTORIJSKE I BIBLIOGRAFSKE NAPOMENE:

Raspodelama funkcionala 1 i 2 su se bavili Dub, Donsker, Bilingsli, Borovkov, Kolmogorov i drugi ([5], [11], [45],[3],...). Raspodelu funkcionala 3. su proučavali Smirnov (1937), fon Mizes (von Mises), Anderson (Anderson T.W.) i Darling (Darling D.A.). Funkcional 4 je proučavao Kuiper (Kuiper H.) 1960. godine a funkcional 5. Darling i Erdeš (Erdös P.). Najobimniji materijal o funkcionalima Braunovih mostova su sakupili Čerge i Reves u [11], Polard u [45], Bilingsli u [3] i Borovkov u [5].

I.5. NEKI TESTOVI BAZIRANI NA EMPIRIJSKIM I KVANTILNIM PROCESIMA

Pored već klasičnog testa Kolmogorova (1933), baziranog na statistici:

$$D_n = \sqrt{n} \cdot \sup_{-\infty<t<\infty} /F_n(t)-F_o(t)/ = \sup_{-\infty<t<\infty} /\beta_n(t)/$$

gde je $F_o(t)$ - pretpostavljena, neprekidna funkcija, raspodela obeležja X, sa raspodelom K(y) datoj u I.2., sa jednostranim varijantama

$$D_n^+ = \sqrt{n} \cdot \sup_{-\infty<t<\infty} (F_n(t)-F_o(t)) \quad \text{i}$$

$$D_n^- = \sqrt{n} \cdot \sup_{-\infty<t<\infty} (F_o(t)-F_n(t)) ,$$

postoji čitava klasa testova, nazvanih ω^2 - testovi, zasnovanih na statistikama oblika:

$$\omega_n^2 = n \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \Psi (F_o(t))(F_n(t)-F_o(t))^2 dF_o(t)$$

gde je $F_o(\cdot)$ - pretpostavljena, neprekidna funkcija raspodele obeležja X. Posebno, za slučaj kada je

$$H_o(X : U(0;1)) \qquad \text{i} \qquad H_1(X : F(t) \neq t)$$

statistika ω_n^2 dobija oblik

$$\omega^2_{n,u} = n\int_0^1 \Psi(t)(F_n(t)-t)^2dt \ .$$

(Funkcija $\Psi(\cdot)$ je neka težinska (ВЕСОВАЯ) funkcija).

TEOREMA I.5.1: Raspodela statistike $\omega^2_{n,u}$ konvergira ka graničnoj raspodeli pri uslovu da je

$$\int_0^1 \Psi(t) \cdot t \cdot (1-t)dt < \infty \ .$$

(Čibisov, 1965. god.).

Granična raspodela statistike $\omega^2_{n,u}$ se poklapa sa raspodelom slučajne promenljive

$$\omega^2 = \int_0^1 G^2(t)dt$$

gde je $G(t)$ - gausovski slučajni proces sa nultim očekivanjem i korelacionom funkcijom

$$R(s,t) = \Psi(t)\cdot\Psi(s)\cdot(\min\{s,t\} - s\cdot t)$$

za $0\leqslant s,\ t\leqslant 1$.

Očigledno, za $\Psi(t)\equiv 1$ za $0\leqslant t\leqslant 1$, dobijamo da je:

$$\omega^2_{n,u} = n\int_0^1 (F_n(t)-t)^2dt$$

da je $G(t) = B(t)$ i da je granična slučajna promenljiva

$$\omega^2 = \int_0^1 [B(t)]^2\, dt$$

gde je $B(t)$, jasno, Braunov most. Raspodela te granične slučajne promenljive je data u tački I.4. (3), a ta statistika se označava sa W_n^2 i naziva statistika Smirnova (ili Smirnova-fon Mizesa). Test baziran na toj statistici se naziva test Smirnova (ili test Smirnova-fon Mizesa). Vrednost te statistike se može približno izračunati,na osnovu uzorka obima n, po formuli

$$\omega_n^2 = \sum_{j=1}^{n} \left(X_{(j)} - \frac{j-\frac{1}{2}}{n}\right)^2 + \frac{1}{12n} =$$

$$= \frac{n}{3} + \sum_{j=1}^{n} X_{(j)}^2 - \frac{1}{n}\cdot\sum_{j=1}^{n} X_{(j)}\cdot(2j-1)$$

gde je $X_{(j)}$ - j-ta statistika poretka, za $j=1,2,\dots,n$. Raspodela te statistike je eksplicitno pronadjena (I.4.(3)) i tabelisana ([40]). Deo tih tablica se može videti (i koristiti) u DODATKU.

Za težinsku funkciju

$\psi(t) = \frac{1}{t(1-t)}$, $0<t<1$, statistika $\omega_{n,u}^2$ se označava se A_n^2 i naziva statistika Anderson - Darlinga:

$$A_n^2 = n\int_0^1 \frac{1}{t(1-t)} (F_n(t)-t)^2\, dt$$

čiju realizaciju na osnovu uzorka $X_1, X_2, \dots, X_n$ možemo (približno) izračunati po formuli:

$$A_n^2 = -n - \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\left[(2j-1)\log X_{(j)} - \log\left(1-X_{(n-j+1)}\right)\right].$$

Raspodela te statistike je takodje pronadjena u eksplicitnom obliku i tabelisana ([40]).

Ovo su samo neki od testova baziranih na empirijskom procesu $\sqrt{n}(F_n(t)-F_0(t))$. Dosta su redji testovi bazirani na kvantilnom procesu $\sqrt{n}(Q_n(t)-F_0^{-1}(t))$. Razloge možemo tražiti u tome što o graničnom ponašanju tog procesa se može govoriti samo ako je $F_0(t)$ neprekidna, dva puta diferencijabilna i $F_0'(t) > 0$ (teorema I.3.5), što se može smatrati dosta strogim uslovima. Ovde ćemo navesti jedan od njih.

Ako uvedemo Kramer-fon Mizesov funkcional od kvantilnog procesa, stavljajući da je

$$g_n^o(t) = \sqrt{n}\, f\left(F^{-1}(t)\right)\cdot\left(Q_n^o(t)-F^{-1}(t)\right)$$

gde je

$$f(t) = F'(t), \quad Q_n^o(t) = X_{(k)} \quad \text{za} \quad \frac{k-1}{n+1} < t \leqslant \frac{k}{n+1}$$

za $k=1,2,\dots,n$, i ako definišemo statistiku tipa Kramera-fon Mizesa oblika:

$$M_n^o(\lambda) = \sum_{k=1}^{n} \left\{ \left[q_n^o\left(\frac{k}{n+1}\right) \right]^2 / n \cdot f\left(F^{-1}\left(\frac{k}{n+1}\right)\right) \right\} \cdot \left[F^{-1}\left(\frac{k}{n+1}\right) \right]^{\lambda-1}$$

za $\lambda=1,2,\dots$. Na takvim statistikama su bazirani testovi za testiranje $H_o(X : F_o(t))$ protiv $H_1(X : F(t) \neq F_o(t))$. ([11]) .

Na kraju napomenimo da postoji i klasa testova baziranih na samoj kvantilnoj funkciji, ili preciznije, na statistikama poretka. (Naime, jasno je da je $Q_n(t) = X_{([n \cdot t]+1)}$, gde je $[\cdot]$ - ceo deo). To su test Fišera, baziran na statistici

$$\Pi_n = -2 \sum_{k=1}^{n} \ln X_{(k)}, \quad (H_o(X:U(0;1))$$

Pirsona, baziran na statistici

$$\Pi_n' = -2 \sum_{k=1}^{n} \ln(1-X_{(k)}), \quad (H_o(X:U(0;1))$$

i test Morana, baziran na statistici

$$M_n = \sum_{k=0}^{n} (F_o(X_{(k+1)}) - F_o(X_{(k)}))^2$$

uz uslov

$$F_o(X_{(0)}) = 0 \quad i \quad F_o(X_{(n+1)}) = 1 ,$$ gde je $F_o(\cdot)$ - pretpostavljena, neprekidna funkcija raspodele obeležja X. Detaljnije ćemo opisati test Morana, jer smo naše testove uporedjivali i sa njim. U slučaju $H_o(X : U(0;1)$ i $H_1(X : F(t) \neq t)$ dobijamo da je

$$M_{n,u} = \sum_{k=0}^{n} (X_{(k+1)} - X_{(k)})^2$$

uz uslov $X_{(0)} = 0$ i $X_{(n+1)} = 1$. Može se pokazati da veličina:

$$M_n^o = \sqrt{n}\left(\frac{n \cdot M_{n,u}}{2} - 1\right) \xrightarrow[n\to\infty]{R} X^* : \mathcal{N}(0;1)$$

na osnovu čega je formiran test Morana, za testiranje hipoteze H_0.

Za sve navedene testove kritična oblast je oblika:

$$W_\alpha = (C_\alpha ; +\infty)$$

pri čemu se kritična vrednost C_α nalazi u odgovarajućim tablicama, za poznati obim uzorka n i zadati prag značajnosti α. O moći tih testova biće više reči u III delu.

ISTORIJSKE I BIBLIOGRAFSKE NAPOMENE:

O testu Kolmogorova se možemo obavestiti u skoro svakoj knjizi iz matematičke statistike. O statistikama tipa w_n^2 prvi je govorio Kramer (1928), a zatim fon Mizes (1931). Konačan oblik im je dao Glivenko. Najviše rezultata su dali Smirnov, Anderson i Darling. Smirnov je pokazao da raspodela statistike w_n^2 ne zavisi od pretpostavljene raspodele $F_0(t)$. Tim statistikama i odgovarajućim testovima su se bavili i Šapiro (Shapiro S.S.), Vilks (Wilk M. B.), Čibisov, Filipova i mnogi drugi. Veoma kvalitetnu monografiju o w^2-testovima je napisao Martinov ([40]). O osobinama nekih ω^2-testova su pisali Čibisov ([12], [13]), Filipova ([23]), Borovkov ([5]) i drugi. Testovima baziranim na kvantilnom procesu i primenama su se bavili Čerge i Reves ([11]), Šorak ([49]), Viters (Withers C.S.), de Han (De Haan L.) ([16]), Bahadur, Kifer i drugi .

I.6. BAHADUROVA REPREZENTACIJA UZORAČKIH KVANTILA ZA VELIKE UZORKE

Najvažniji rezultati koje ćemo iskoristiti u našem radu pripadaju Bahaduru ([1]) i Kiferu ([32]). Bahadur je 1966. godine u [1] uveo reprezentaciju uzoračkih kvantila (ili preciznije, uzoračke kvantilne funkcije) na sledeći način:

Ako funkcija raspodele obeležja X, F(t), ispunjava uslove

1. Ako je t_p fiksirana tačka i ako je $F(t_p) = p$, tada ćemo zahtevati da je $F(\cdot)$ bar dva puta diferencijabilna u okolini tačke t_p.

2. $F''(t)$ je ograničena u okolini te tačke t_p.

3. $F'(t_p) = f(t_p) > 0$.

Te pretpostavke impliciraju da je p, $0 < p < 1$ i da je t_p - jedinstveni kvantil reda p funkcije F(t).

Neka je, dalje, $X_1, X_2, \dots, X_n$ uzorak obima n izvučen iz populacije sa obeležjem X, čija funkcija raspodele F(t) ispunjava uslove 1-3. Neka je $Q_n(t)$ - kvantilna funkcija za taj uzorak. Tada je:

$$Q_n(p) = t_p - \frac{F_n(t_p)-p}{f(t_p)} + R_n(p) \quad \dots \quad (*)$$

pri čemu je Bahadur u [1] pokazao i da veličina $R_n(p)$ ispunjava uslov:

$$R_n(p)=O_p(n^{-\frac{3}{4}} \log n)$$

kada $n \to \infty$.

Kifer je 1970. godine u [32] pokazao da je

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \pm \frac{f(t_p)R_n(p)}{2\sqrt[4]{\frac{2p(1-p)\log(\log n)}{27n^3}}} = 1$$

sa verovatnoćom 1 i za $0<p<1$.

Goš je u [26] pokazao jednu slabiju varijantu Bahadurovog rezultata, ali koja zadovoljava mnoge statističke primene, a koja se svodi na sledeće:

Za proizvoljno p_n neka je

$$t_{p_n} = t_p + (p_n - p)/f(t_p)$$

i neka je

$$Q_n(p_n) = t_{p_n} + \left[G_n(t_p) - (1-p)\right]/_{f(t_p)} + R_n(p) \quad \ldots(0)$$

gde je $G_n(t_p)$ broj elemenata uzorka koji su strogo veći od t_p .

TEOREMA I.6.1: Ako je $f(t_p) = F'(t_p) > 0$ i $|p_n - p| = O(\frac{1}{\sqrt{n}})$ tada $R_n(p)$ definisano u (*) i (0) ispunjava uslov:

$$\sqrt{n}\cdot R_n(p) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \quad \text{u verovatnoći.}$$

Za nas je najvažnije da $R_n(p)$, na osnovu gornjih razmatranja možemo shvatiti kao slučajan šum čiji uticaj slabi sa porastom obima uzorka. (videti slike 4,5, 6 i 6A)

Kako nas u ovom radu posebno interesuje slučaj U(0;1) raspodele obeležja X, lako se vidi da funkcija raspodele $F(t)=t$ ispunjava uslove 1-3 Bahadura, pa u saglasnosti sa prethodnim dobijamo predstavljanje uzoračke kvantilne funkcije za U(0;1) raspodelu u obliku:

$$Q_n(p) = 2p - F_n(p) + R_n(p)$$

za $0\leqslant p\leqslant 1$, obzirom da je $t_p = p$ i $f(p) = 1$ za $0\leqslant p\leqslant 1$.

Pritom:

$$\lim_{n\to\infty} \pm \frac{R_n(p)}{2\sqrt[4]{\dfrac{2p(1-p)\log\log n}{27n^3}}} = 1 \qquad \text{sa}$$

verovatnoćom 1.

Kifer je takodje pokazao da slučajna promenljiva

$$R_n = \sup_{0<p<1} /R_n(p)/ = \sup_{0<p<1} /F_n(p) - Q_n(p) - 2p/$$

ima osobinu da je

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{ n^{\frac{3}{4}} (\log n)^{-\frac{1}{2}} R_n > u \right\} = 2\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} e^{-2k^2u^2}, \quad u>0$$

tj. da se $n^{\frac{3}{4}} (\log n)^{-\frac{1}{2}} R_n$ ponaša kao slučajna promenljiva $\sqrt{D_n}$, gde je D_n - statistika Kolmogorova (definisana u I.5.). ([11]).

ISTORIJSKE I BIBLIOGRAFSKE NAPOMENE:

Bahadurova reprezentacija uzoračkih kvantila nije nova. Pre njega, njima su se bavili Pirson (Pearson K.) i Hojo (Hojo). Bahadur je najpreciznije odredio ponašanje "šuma" $R_n(p)$. Posle njega, istim problemom su se bavili Mustafi, Sen, Kifer, Goš, Dutvailer (Duttweiler D. L.) de Han i drugi.(Možemo naći u [32], [11], [17], [26] itd.).

I.7. PROSTORI C[0;1] I D[0;1]

<u>DEFINICIJA I.7.1</u>: Prostor $C = C[0;1]$ je skup realnih i neprekidnih funkcija na intervalu $[0;1]$. Rastojanje u prostoru C izmedju tačaka x i y (tj. funkcija $x(t)$ i $y(t)$, $0\leq t\leq 1$) je

$$d(x,y) = \sup_t /x(t) - y(t)/$$

i prostor C je separabilan i kompletan.

DEFINICIJA I.7.2: Prostor D = D$[0;1]$ je prostor funkcija $x=x(t)$ definisanih na intervalu $[0;1]$, neprekidnih sdesna i koje imaju granicu sa leve strane (tj. imaju samo prekide prve vrste).

Prostor D se može snabdeti uniformnom metrikom

$$\| x - y \| = \sup_t /x(t) - y(t)/ \ , \quad 0 \leqslant t \leqslant 1 \ .$$

Ova metrika je pogodna za korišćenje kada je granična raspodela koncentrisana na $C[0;1]$, ili na neki drugi separabilan podskup od $D[0;1]$. Takav je slučaj sa konvergencijama na Vinerovom procesu, Braunovom mostu i gausovskim procesima. ([45]). U ostalim slučajevima se uvode druge metrike, kao što je metrika Skorohoda:

DEFINICIJA I.7.3: Prostor D se može snabdeti rastojanjem d izmedju tačaka x i y kao donjom granicom takvih pozitivnih ε za koje postoji $\lambda \in \Lambda$ tako da je

$$\sup_t /\lambda t - t/ \leqslant \varepsilon$$

i

$$\sup_t /x(t) - y(\lambda t)/ \leqslant \varepsilon$$

gde je Λ-klasa strogo rastućih, neprekidnih preslikavanja intervala $[0;1]$ na samog sebe. Ako je $\lambda \in \Lambda$, tada je $\lambda(0)=0$ i $\lambda(1)=1$. Ta metrika odredjuje topologiju Skorohoda i prostor D je u toj metrici separabilan i kompletan. ([3], [45]).

Za nas su prostori C i D od posebnog interesa, jer je očigledno da su procesi

$$U_n(t) = \sqrt{n}(F_n(t)-t)$$

$$V_n(t) = \sqrt{n}(Q_n(t)-t)$$

$$Z_n(t) = \sqrt{n}(F_n(t)-Q_n(t))$$

itd. slučajni elementi prostora D. Granični proces u prva dva slučaja je Braunov most $B(t)$ koji jeste slučajni element prostora C.

DEFINICIJA I.7.4: Neka je X preslikavanje prostora verovatnoće $(\Omega,\mathcal{A},P)$ u $C(D)$, tj. za svako $\omega\in\Omega$, $X(\omega)$ je element prostora $C(D)$. X je slučajni element prostora $C(D)$ ako i samo ako je za svako t $X(t)$ slučajna promenljiva.

DEFINICIJA I.7.5: Vinerovska mera W je verovatnosna mera na $(C,\mathcal{B})$ koja ima sledeće osobine:

1. Za svako t slučajna promenljiva $X(t)$ je normalno raspodeljena u odnosu na meru W sa očekivanjem 0 i disperzijom t (za $t=0$ $W\{X(0)=0\}=1$).
2. Stohastički proces $\{X(t),\ 0\leqslant t\leqslant 1\}$ ima nezavisne priraštaje po W, tj. ako je

$$0\leqslant t_0\leqslant t_1\leqslant \dots \leqslant t_n\leqslant 1$$

tada su slučajne promenljive

$$X_{t_1}-X_{t_0},\ X_{t_2}-X_{t_1},\dots,X_{t_n}-X_{t_{n-1}}$$

nezavisne po W.

($\mathcal{B}$ je oznaka δ-polja generisanog otvorenim skupovima iz $[0;1]$).

(Egzistencija takve mere je data, naprimer u [3]).

Vinerovska mera iz $(C,\mathcal{B})$ se može produžiti na $(D,\mathcal{D})$ i pokazati da važe tvrdjenja 1. 2. i 3 iz tačke I.3.

ISTORIJSKE I BIBLIOGRAFSKE NAPOMENE:

O prostorima C i D, konvergencijama nizova slučajnih elemenata itd. postoji veoma obimna literatura: Dub, Gihman i Skorohod, Kolmogorov i Fomin, Bilingsli, Černe i Reves i mnogi drugi. Mi navodimo samo deo literature: [3], [5], [9], [11], [18], [27]...

I.8. PRIMENA ELEKTRONSKIH RAČUNARA

Upravo prisustvujemo kompjuterizaciji sveta. Kompjuteri su u bankama, poštama, preduzećima, školama, vojnim i kosmičkim centrima, štamparijama, kućama. Osnovni razlog njihovog uvodjenja su čuvanje i analiza podataka, upravljanje. Pouzdanost i tačnost su im narasli do takvih granica da im se poveravaju najosetljivije stvari: novac, roba, upravljanje raketama. Statistika je u svojoj osnovi nauka koja se bavi podacima: daje metode za njihovu analizu i tumači dobijene rezultate. Obzirom na njihovu tačnost i brzinu, računari služe i za proveru starih i novih teorija, učestvuju vrlo aktivno u razvijanju novih metoda, kao što je to, naprimer, slučaj sa Metodom Monte-Karlo, koji je "čekao" pojavu elektronskih računara da bi dostigao svoj puni zamah. Snabdeveni moćnim generatorima slučajnih brojeva, omogućavaju simulacije prirodnih procesa, omogućavaju istraživaču brzu i tačnu proveru dobijenih rezultata i otvaraju puteve novih naučnih teorija.

Proveru dobijenih rezultata i izradu nekoliko karakterističnih primera smo poverili računaru BBC sa dodatnim matematičkim koprocesorom 65C02, koji ima zadovoljavajuće osobine u pogledu tačnosti i brzine (greška je manja od 10^{-9}) ([14]). Kao takav je zvanično prihvaćen u školstvu Velike Britanije (75% obrazovnih institucija poseduje BBC). Poljska je naručila veliku količinu računara BBC za potrebe svog školstva, a proizvodjač čini napore da, uz izvesna prilagodjavanja, nametne BBC kao računar u školstvu Evropske zajednice. Računar je zamišljen i realizovan na Oxfordu i većinu softvera za njega (programi i knjige) su napisali profesori sa Oxforda.

U radu su priloženi listinzi korišćenih programa sa nužnim objašnjenjima, tako da se uz odgovarajuća prilagodjavanja mogu koristiti i na drugim tipovima računara.

ISTORIJSKE I BIBLIOGRAFSKE NAPOMENE:

Najviše zasluga za razvoj računskih mašina (kompjutera) se pripisuje engleskom matematičaru Alanu Tjuringu. On je tvorac prvog programskog sistema koji je ugradjen u prvi komercijalni računar FERANTI MARK I (1951. g.). On je takodje prvi predložio da se u računar ugradi generator slučajnih brojeva, koji je mogao da posluži za simulaciju realnih procesa. Tokom vremena na Tjuringovim principima su usavršavani novi računari kojima se gotovo svakodnevno povećavaju brzina i kapacitet, kao i udobnost u komunikaciji sa korisnikom. Od obimne literature, navodimo samo onu koju smo neposredno koristili: [7], [10], [14], [51], [35], [24], [19].

II DEO. NOVI TESTOVI

II.1. UVODNE NAPOMENE

U tački I.5. smo naveli nekoliko primera testova baziranih na empirijskom i kvantilnom procesu i na statistikama poretka. Svi oni daju zadovoljavajuće rezultate za široku klasu alternativa, ali i svi imaju osobinu da ne razlikuju alternative bliske $U(0;1)$ raspodeli. Pri testiranju, naprimer, hipoteze

$$H_0(X:U(0;1)) \quad \text{protiv} \quad H_1(X:F(t)\neq t)$$

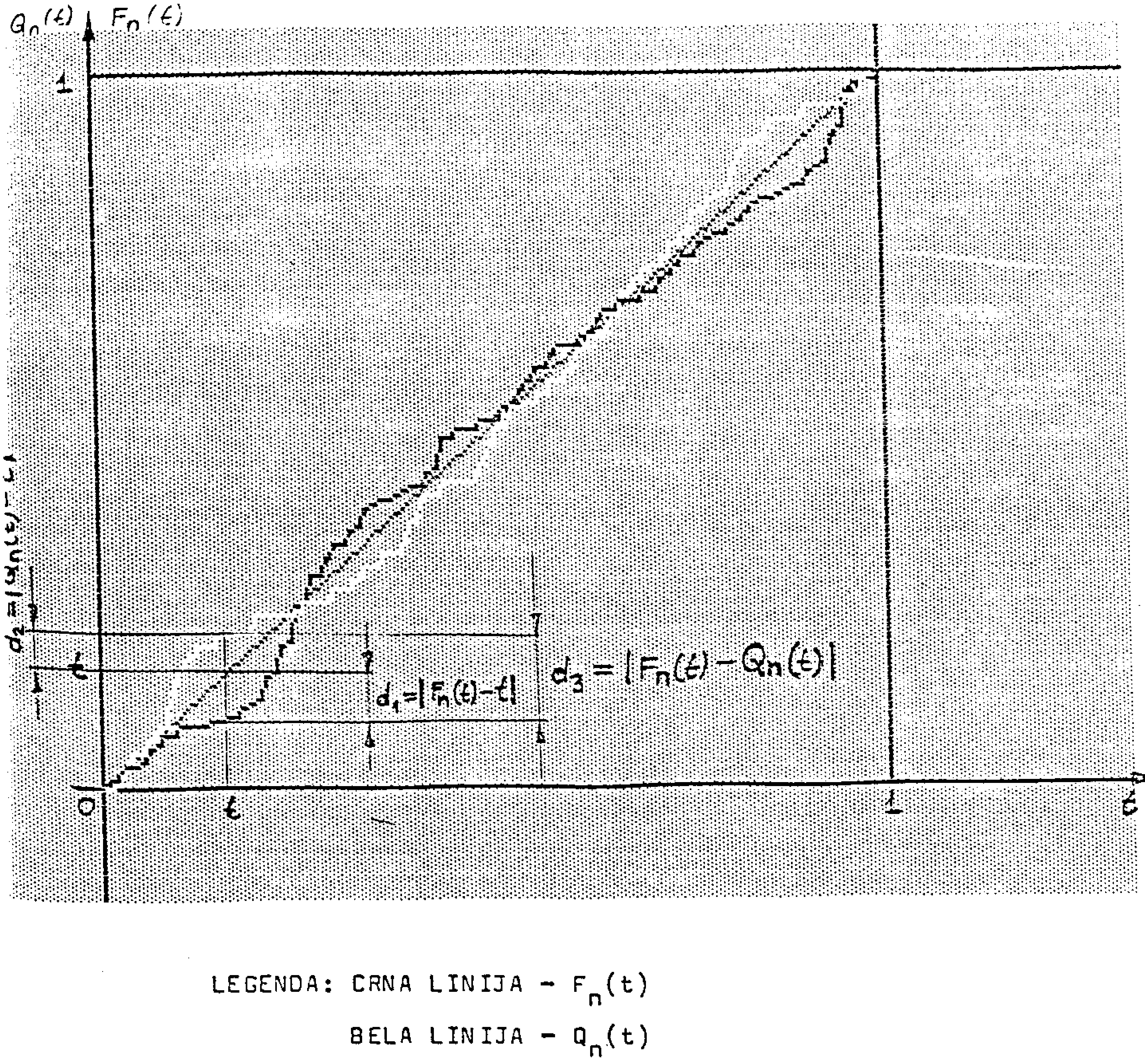
u slučaju kada je

$$F(t) = t + P(t)/\sqrt{n}$$

gde je $P(t)$ neprekidna funkcija za $0\leqslant t\leqslant 1$ sa osobinom $P(0)=P(1)=0$, svi navedeni testovi ne razlikuju t od $F(t)$. Drugi problem je: Koji je test najbolje primeniti, za odredjenu klasu alternativa. Danas je jednostavno odgovoriti na to pitanje: Metodom Monte-Karlo se mogu simulirati različite raspodele na elektronskim računarima i jednostavnim uporedjivanjem vrednosti funkcija moći za veliki broj uzoraka različitih obima odrediti test koji daje najbolje rezultate za posmatranu klasu alternativa.

Naša želja je da pronadjemo testove koji su za bar jednu klasu alternativa bolji (u smislu moći) od nekih postojećih. U tom cilju, u daljem radu ćemo podrazumevati da testiramo $H_0(X : U(0;1))$ protiv $H_1(X : F(t)\neq t)$ i pretpostavljati da funkcija $F(t)$ zadovoljava uslove 1 - 3 Bahadura iz tačke I.6, jer je time obezbedjeno postojanje i jedinstvenost uzoračkih kvantila.

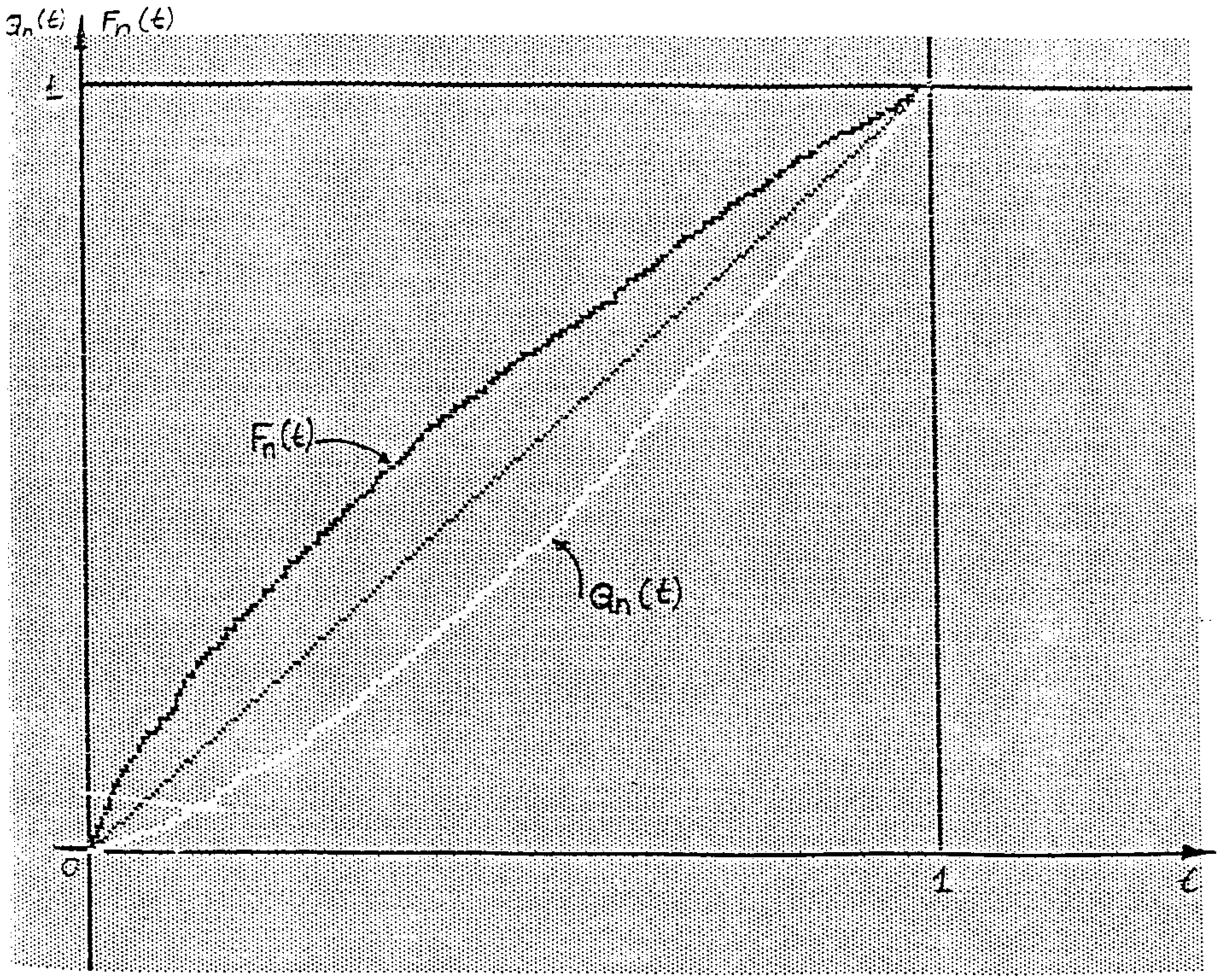
Sl. 2: EMPIRIJSKA FUNKCIJA RASPODELE I UZORAČKA KVANTILNA FUNKCIJA - SLUČAJ H_0 - tačna. ($n = 200$)



LEGENDA: CRNA LINIJA - $F_n(t)$

BELA LINIJA - $Q_n(t)$

Sl. 3: EMPIRIJSKA FUNKCIJA RASPODELE I UZORAČKA KVANTILNA FUNKCIJA - SLUČAJ H_0 - netačna. (n = 1000)



U radu smo se opredelili za razmatranje statistike $Z_n(t) = \sqrt{n}(F_n(t) - Q_n(t)) = U_n(t) - V_n(t)$, jer posmatranjem grafika empirijske funkcije raspodele i uzoračke kvantilne funkcije (slika 2 i slika 3) zapažamo sledeće: Testovi bazirani na empirijskom procesu ispituju rastojanje d_1 bilo direktno (test Kolmogorova) ili funkcionale nad njim (ω^2- testovi). Slično rade i testovi bazirani na kvantilnom procesu: ispituju rastojanje d_2. Naša ideja izgleda veoma jednostavno: želimo da ispitamo rastojanje d_3, nadajući se da će za bar neke alternative dati bolji razultat i od d_1 i od d_2.

Jasno, $Z_n(t)$ je slučajni element prostora $D[0:1]$ i u ovom delu želimo da pronadjemo granični element (ako postoji), njegovu raspodelu i da na osnovu toga formiramo odgovarajuće testove, koristeći funkcionale nad procesom $Z_n(t)$, teoreme o neprekidnosti i raspodele tih funkcionala u graničnom slučaju.

II.2. STATISTIKA $Z_n(t)$

Polazeći od Bahadurove reprezentacije uzoračke kvantilne funkcije

$$Q_n(t) = F^{-1}(t) - \frac{F_n(F^{-1}(t))-t}{f(F^{-1}(t))} + R_n(t)$$

za $0 \leqslant t \leqslant 1$, zahtevaćemo da funkcija $F(t)$ ispunjava uslove 1 - 3 iz tačke I.6. i da važi

$$F(0) = 0 \quad i \quad F(1) = 1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (*)$$

tada možemo dokazati sledeće tvrdjenje:

<u>TEOREMA II.2.1</u>: Ako je $X_1, X_2, \ldots, X_n$ uzorak izvučen iz populacije sa obeležjem X sa funkcijom raspodele $F(t)$ koja ispunjava uslove

Bahadura i uslov (*), tada proces $Z_n^*(t) = \sqrt{n}\, f(F^{-1}(t)) \cdot$
$\cdot\left[(F_n(t) - F(t)) - (Q_n(t) - F^{-1}(t))\right]$ konvergira u raspodeli ka procesu

$$B^*(t) = f(F^{-1}(t))\cdot B(F(t)) + B(t) ,$$

gde je $B(t)$ - Braunov most i $f(t) = F'(t)$ za $0 \leq t \leq 1$.

Dokaz: Polazeći od

$$Q_n(t) = F^{-1}(t) - \frac{F_n(F^{-1}(t))-t}{f(F^{-1}(t))} + R_n(t)$$

dobijamo

$$f(F^{-1}(t))(Q_n(t)-F^{-1}(t)) = -(F_n(F^{-1}(t))-t)+f(F^{-1}(t))R_n(t)$$

i množenjem leve i desne strane sa $-\sqrt{n}$ i dodavanjem levoj i desnoj strani veličine $\sqrt{n}\, f(F^{-1}(t))(F_n(t)-F(t))$ dobijamo:

$$\sqrt{n}\, f(F^{-1}(t)\, \left[(F_n(t)-F(t))-(Q_n(t)-F^{-1}(t))\right] =$$
$$= \sqrt{n}\, f(F^{-1}(t))(F_n(t)-F(t)) + \sqrt{n}(F_n(F^{-1}(t))-t) -$$
$$- \sqrt{n}\, f(F^{-1}(t))R_n(t)$$

dobijamo da je

$$Z_n^*(t) = f(F^{-1}(t))\cdot\sqrt{n}(F_n(t)-F(t)) + \sqrt{n}(F_n(F^{-1}(t)) - F(F^{-1}(t)))-$$
$$- \sqrt{n}\, f(F^{-1}(t))R_n(t), \text{ odnosno}$$
$$Z_n^*(t) = f(F^{-1}(t))\cdot \beta_n(t)+\beta_n(F^{-1}(t))-\sqrt{n}\, f(F^{-1}(t))R_n(t) .$$

Odatle sledi da je

$$/Z_n^*(t)-B^*(t)/=/Z_n^*(t)-f(F^{-1}(t))B(F(t))-B(t)/ =$$
$$=/f(F^{-1}(t))(\beta_n(t)-B(F(t)))+(\beta_n(F^{-1}(t))-B(t)) -$$
$$- \sqrt{n}\, f(F^{-1}(t))\, R_n(t)/ \leq$$
$$f(F^{-1}(t))/\beta_n(t)-B(F(t))/+/\beta_n(F^{-1}(t))-B(t)/+$$
$$+\sqrt{n}\, f(F^{-1}(t))/R_n(t)/=A_n(t)+B_n(t)+C_n(t) ,$$

gde je

$$A_n(t) = f(F^{-1}(t))/\beta_n(t)-B(F(t))/$$

$$B_n(t) = /\beta_n(F^{-1}(t))-B(t)/$$

$$C_n(t) = \sqrt{n}\, f(F^{-1}(t))/R_n(t)/ \ .$$

Po teoremi I.3.1.

$$\sup_{0\leq t\leq 1} A_n(t)=O_p(n^{-\frac{1}{4}}(\log n)^{\frac{1}{2}}(\log \log n)^{\frac{1}{2}})\sup_{0\leq t\leq 1} f(F^{-1}(t)) \ ,$$

i kako je, obzirom na uslove nametnute na funkciju $F(t)$, očigledno da je

$$\sup_t f(F^{-1}(t)) < \infty$$

(uslov 2. Bahadura), odakle sledi da

$$A_n \xrightarrow[n\to\infty]{s.i.} 0 \ .$$

Slično, $B_n(t)=/\beta_n(F^{-1}(t))-B(F(F^{-1}(t)))/$ i primenom teoreme I.3.1, dobijamo da je

$$\sup_{0\leq t\leq 1} B_n(t) = O_p(n^{-\frac{1}{4}}(\log n)^{\frac{1}{2}}(\log \log n)^{\frac{1}{2}})$$

odnosno

$$B_n(t) \xrightarrow[n\to\infty]{s.i.} 0 \ .$$

Konačno, po teoremi I.6.1, neposredno sledi da

$$C_n \xrightarrow[n\to\infty]{v} 0 \ ,$$

odakle sledi i da

$$Z_n^*(t) \xrightarrow[n\to\infty]{R} B^*(t) \ .$$

(Jasno, $Z_n^*(t) \xrightarrow[n\to\infty]{v} B^*(t)$, gde je $\xrightarrow[n\to\infty]{v}$ oznaka za konvergenciju u verovatnoći).

<u>Posledica:</u> U slučaju kada promenljiva X ima $U(0;1)$ raspodelu, tj. kada je $F(t) = t$, $0\leq t\leq 1$, jasno je da $F(t)$ ispunjava sve uslove iz teoreme II.2.1 i tada je

$$Z_n^*(t) = Z_n(t) = \sqrt{n}(F_n(t)-Q_n(t)) \xrightarrow[n\to\infty]{R} 2B(t)$$

tj. slučajni proces $Z_n(t)$ se asimptotski ponaša kao dvostruki Braunov most.

U to se možemo uveriti i analitički i grafički. Naime, u slučaju kada je $F(t) = t$, Bahadurova reprezentacija uzoračke kvantilne funkcije dobija oblik

$$Q_n(t) = t - (F_n(t)-t) + R_n(t)$$

a odatle

$$F_n(t) - Q_n(t) = 2(F_n(t)-t) - R_n(t)$$

$$\sqrt{n}(F_n(t) - Q_n(t)) = 2\sqrt{n}(F_n(t)-t) - \sqrt{n}\,R_n(t)$$

$$Z_n(t) - 2\mathcal{U}_n(t) = -\sqrt{n}\,R_n(t)$$

Kako $\mathcal{U}_n(t) \xrightarrow[n\to\infty]{s.i} B(t)$ vidimo da je razlika izmedju našeg procesa $Z_n(t)$ i dvostrukog Braunovog mosta jednaka "šumu" $\sqrt{n}\cdot R_n(t)$ za koji je u teoremi I.6.1. pokazano da teži nuli u verovatnoći. Na slikama 4, 5, 6 i 6A može se videti ponašanje "šuma" $\sqrt{n}\,R_n(t)$ sa porastom obima uzorka n. Na slikama 6 i 6A $Z_n(t)$ i $2\cdot\mathcal{U}_n(t)$ se više ne mogu razlikovati.

Borovkov je u [5] pokazao da su funkcionali:

1. $H(F) = F^{-1}(t) - F_0^{-1}(t)$

2. $H(F) = \sup\limits_{0<t<1} /F(t) - F_0(t)/$

3. $H(F) = \int_0^1 /F(t) - F_0(t)/^k \, dR(t)$

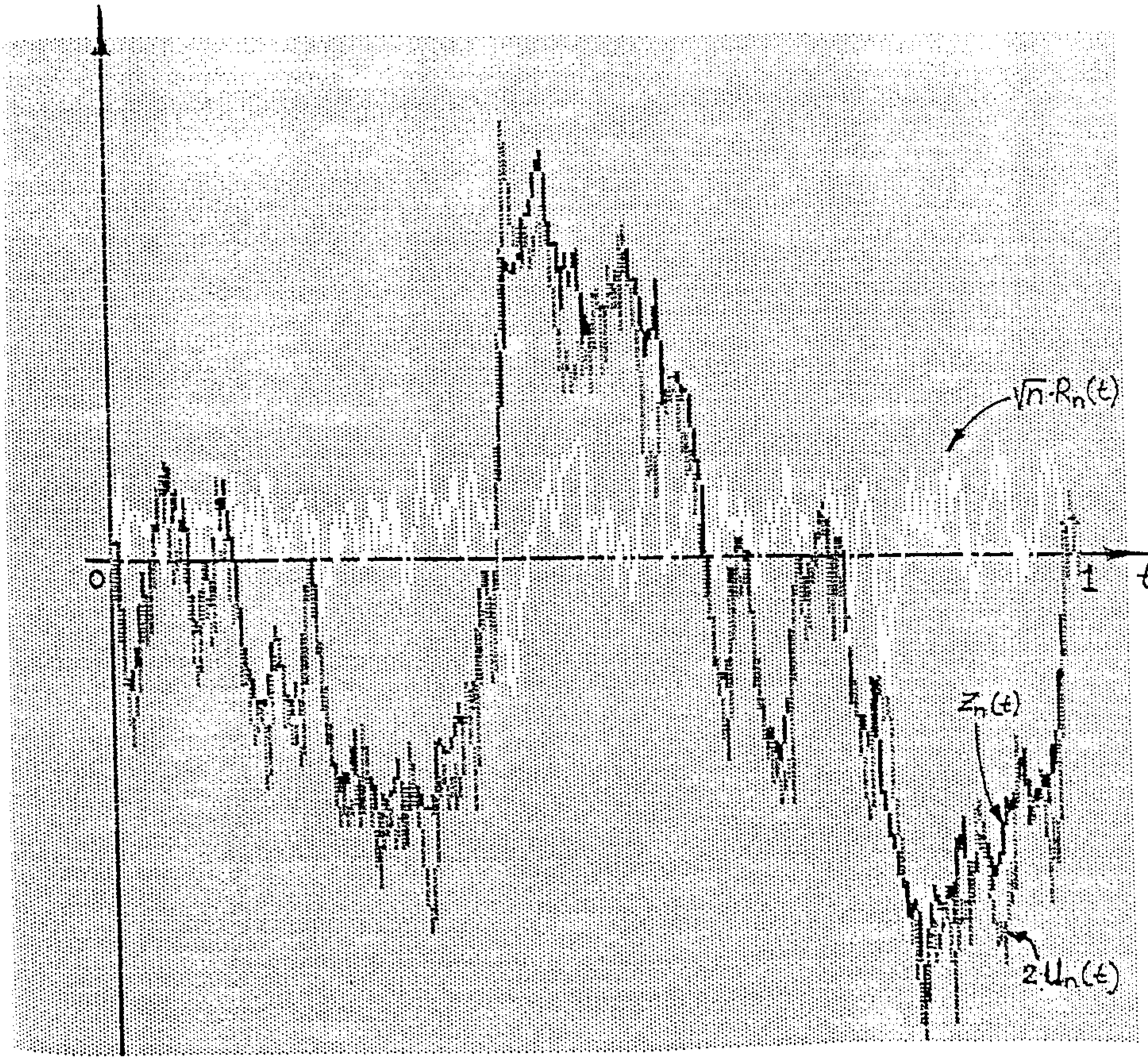
gde je $F_0(t)$ neka fiksirana funkcija raspodele (neprekidnog tipa) neprekidno-diferencijabilni, tj. glatki i da

$$\sqrt{n}(F_n(t)-t) \xrightarrow[n\to\infty]{R} B(t)$$

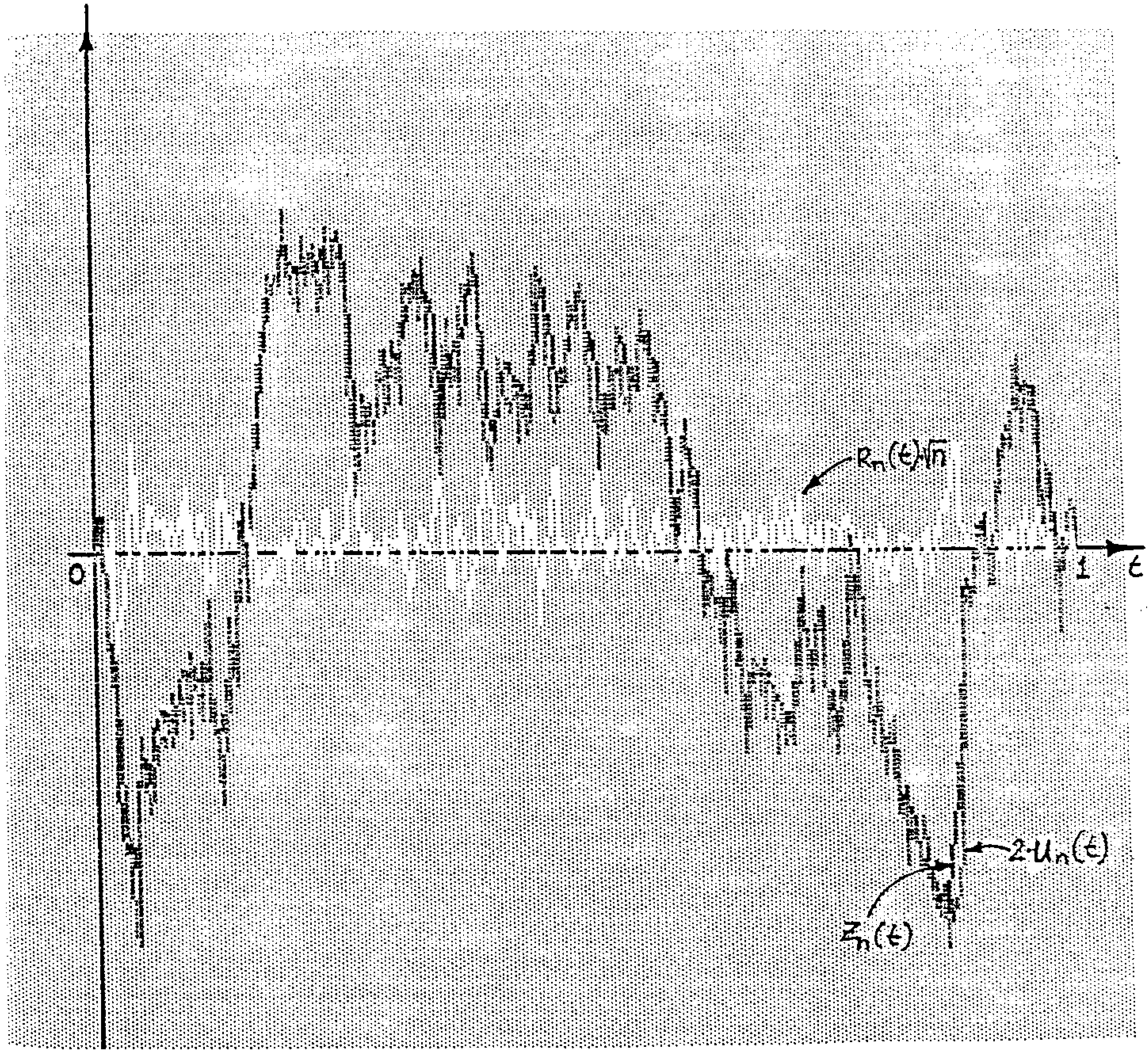
$$\sqrt{n}\sup_{-\infty<t<\infty} /F_n(t)-F_0(t)/ \xrightarrow[n\to\infty]{R} \sup_{-\infty<t<\infty} /B(F_0(t))/$$

i da

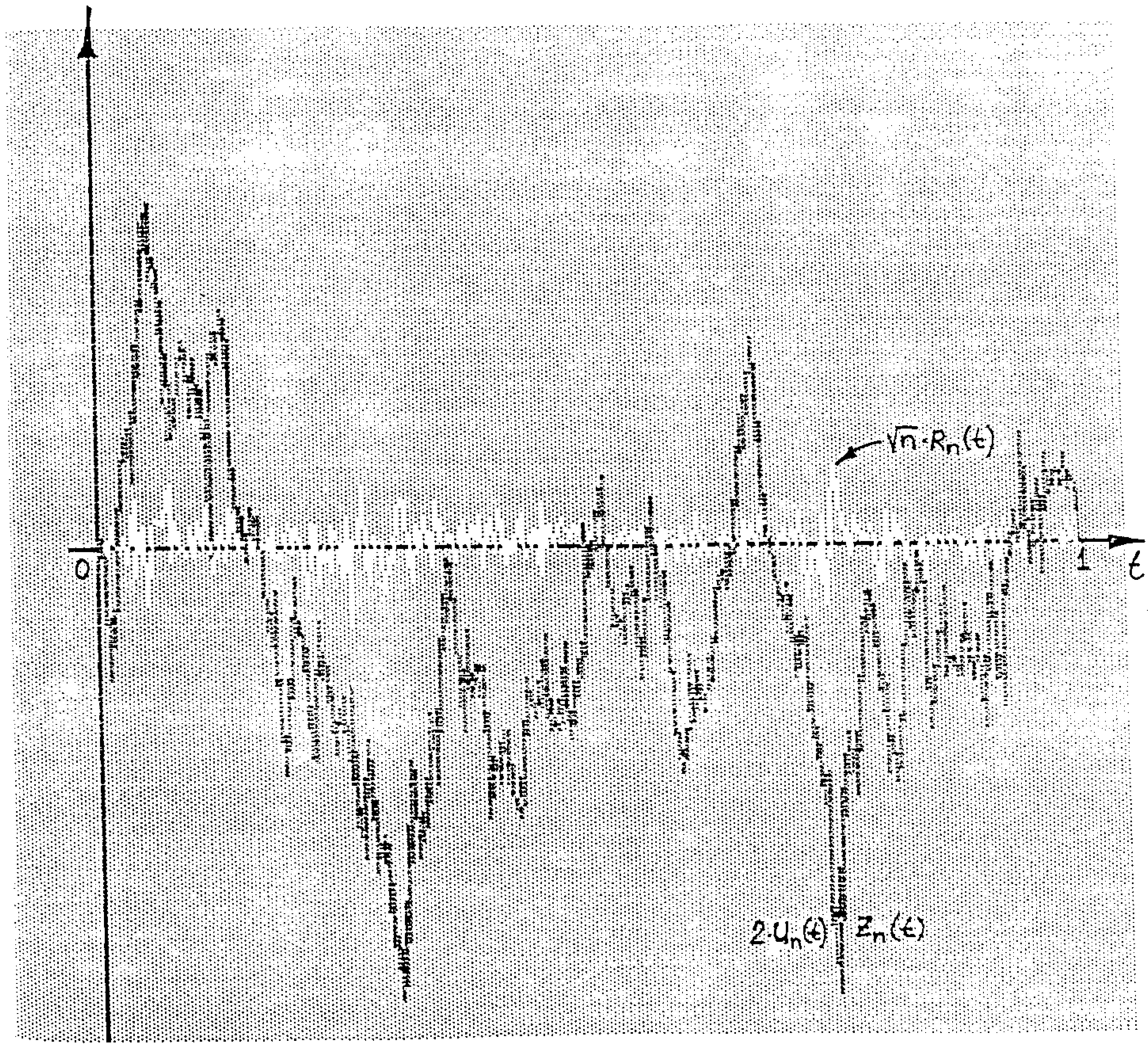
Sl. 4: TRAJEKTORIJE PROCESA $Z_n(t)$, $2 \cdot U_n(t)$ I "ŠUMA" $\sqrt{n}(R_n(t)$ ZA UZORAK OBIMA 200 I PODELU INTERVALA (0;1) NA 300 DELOVA



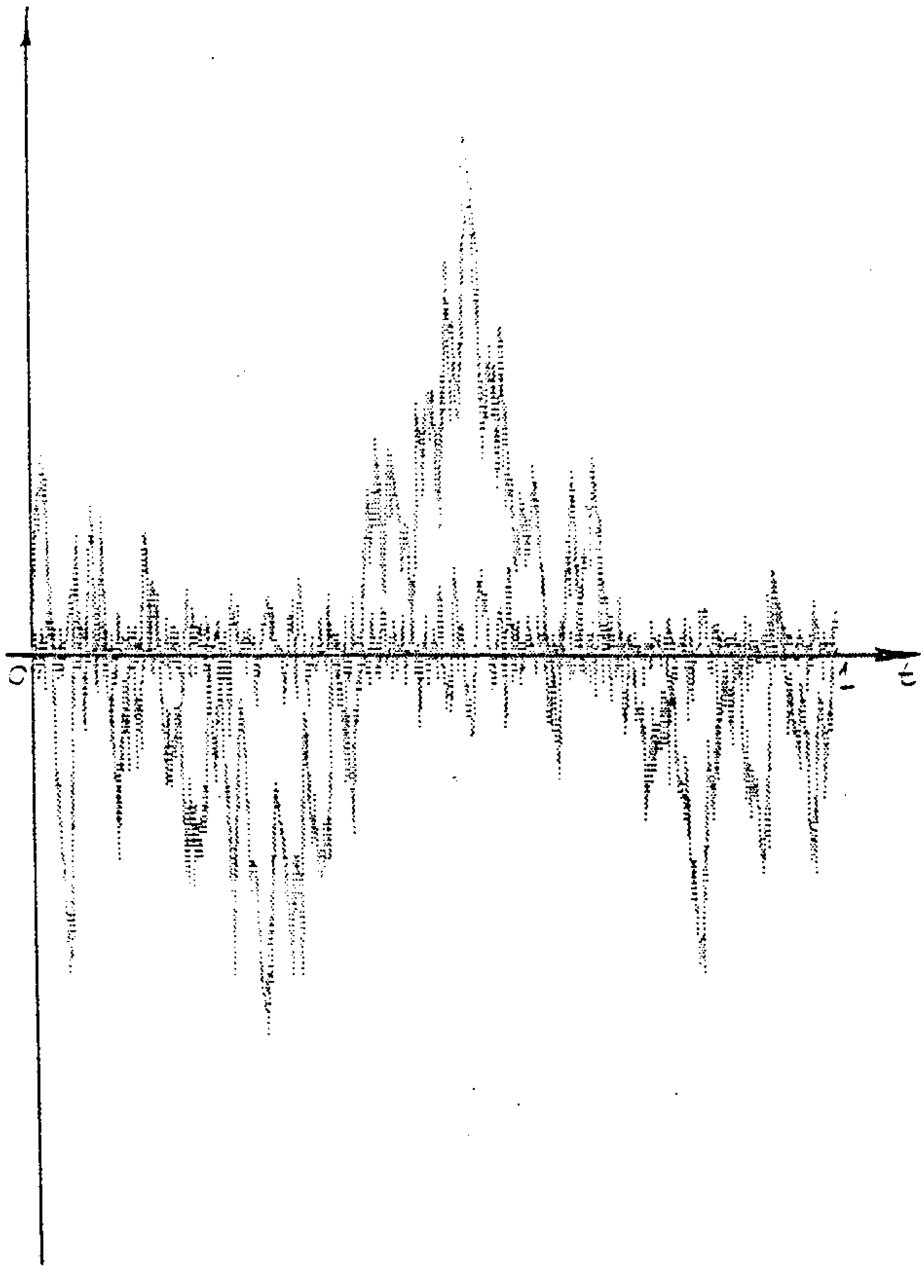
Sl. 5: TRAJEKTORIJE PROCESA $Z_n(t)$, $2\cdot U_n(t)$ I "ŠUMA" $\sqrt{n}\cdot R_n(t)$ ZA UZORAK OBIMA 1000 I PODELU INTERVALA (0;1) NA 300 DELOVA



Sl. 6: TRAJEKTORIJE PROCESA $Z_n(t)$, $2\cdot U_n(t)$ I "ŠUMA" $\sqrt{n}\cdot R_n(t)$ ZA UZORAK OBIMA 6600 I PODELU INTERVALA (0;1) NA 300 DELOVA



Sl. 6A: TRAJEKTORIJE PROCESA $Z_n(t)$, $2 \cdot U_n(t)$ I "ŠUMA" $\sqrt{n} \cdot R_n(t)$ U MODU VRLO VISOKE REZOLUCIJE ($n=3000$).



$$n \cdot \int_0^1 (F_n(t)-t)^2 dt \xrightarrow[n\to\infty]{R} \int_0^1 B^2(t)dt$$

$$\sqrt{n}(Q_n(t)-t) \xrightarrow[n\to\infty]{R} -B(t) \stackrel{R}{=} B(t)$$

kao i da

$$\sqrt{n}(Q_n(t) - F_0(t)) \xrightarrow[n\to\infty]{R} - \frac{B(t)}{f_0(F_0^{-1}(t))}$$

(teorema I.3.4 i I.3.5) ([5]).

<u>Posledica</u>: Funkcional

$$H(F) = (F(t)-F_0(t)) - (F^{-1}(t)-F_0^{-1}(t))$$

u slučaju uniformne raspodele je neprekidno-diferencijabilan kao linearna kombinacija neprekidno diferencijabilnih funkcionala , odakle sledi da ispunjava uslove glatkosti pa je

$$Z_n(t) = H(F_n) = \sqrt{n}(F_n(t)-Q_n(t)) \xrightarrow[n\to\infty]{R} 2B(t) \ .$$

Na osnovu graničnog procesa, koji je, jasno gausovski, sa osobinama:

1. $E(2B(t)) = 0$
2. Korelaciona funkcija je oblika:

$$R(s,t) = 4(\min\{s,t\} - s\cdot t)$$

za $0 \leqslant s, t \leqslant 1$, možemo formirati funkcionale nad procesom $Z_n(t)$ i pronaći granične raspodele, korišćenjem teoreme o neprekidnosti:

<u>TEOREMA II.2.2</u>: Ako je H-neprekidan funkcional, tada

$$H(Z_n(t)) \xrightarrow[n\to\infty]{R} H(2B(t))$$

([5], [11], [3]).

II.3. TEST SUPREMUMA

Za testiranje hipoteze $H_0(X : U(0;1))$ protiv $H_1(X : F(t)\neq t)$ uvedimo statistiku

$$\sup_n = \sup_{0\leq t\leq 1} /Z_n(t)/ = \sqrt{n} \sup_{0\leq t\leq 1} /F_n(t)-Q_n(t)/ = \sup d_3$$

(videti sliku 2)

<u>TEOREMA II.3.1</u>:

$$\sup_n \xrightarrow[n\to\infty]{R} 2 \cdot \sup_{0\leq t\leq 1} /B(t)/$$

gde je $B(t)$ - Bra unov most.

<u>Dokaz</u>: Na osnovu razmatranja Borovkova u [5], odnosno teorema I.3.4 i I.3.5, lako je videti da je funkcional

$$H(F) = \sup_{0\leq t\leq 1} /F(t)-F_0(t)-(F^{-1}(t)-F_0^{-1}(t))/$$

u slučaju $U(0;1)$ raspodele neprekidno-diferencijabilan (tj. ispunjava uslove glatkosti), jer je $H(F_0) = 0$ $(F_0(t)=t,\ 0\leq t\leq 1)$ i

$$\frac{H(F_0+\varepsilon w_\varepsilon) - H(F_0)}{\varepsilon} = \frac{H(F_0+\varepsilon w_\varepsilon)}{\varepsilon} =$$

$$= \frac{2\sup/\varepsilon w_\varepsilon/}{\varepsilon} = \frac{2\sup/w_\varepsilon/}{1} \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{R} 2\sup/w^0(t)/$$

gde je $w^0(t) = B(t)$ - Braunov most. Kako je

$$\sup_n = H(F_n) \Rightarrow \sup_n \xrightarrow[n\to\infty]{R} 2\sup_{0\leq t\leq 1}/B(t)/,$$

u slučaju kada je hipoteza H_0 - tačna.

Kako je $D_n = \sqrt{n} \sup_{0\leq t\leq 1} /F_n(t)-t/ \xrightarrow[n\to\infty]{R} \sup_{0\leq t\leq 1} /B(t)/$ statistika Kolmogorova, čija je raspodela data u I.2., to na osnovu činjenice da je kritična oblast testa baziranog na statistici $\sup_n$ oblika

$$W_\alpha = (C_\alpha ; +\infty)$$

lako se dobija da je kritična vrednost C_α :

$$P\left\{ \sup_n > C_\alpha / H_o \right\} = \alpha$$

(gde je α - zadati prag značajnosti)

$$P\left\{ 2D_n > C_\alpha / H_o \right\} = \alpha$$

$$P\left\{ D_n > \frac{C_\alpha}{2} / H_o \right\} = \alpha$$

odakle sledi da je $C_\alpha = 2 \cdot d_{n;\alpha}$, gde je $d_{n;\alpha}$ - kritična vrednost za test Kolmogorova (tablice su date u DODATKU).

Jasno, gornja razmatranja važe za velike obime uzoraka ($n \geq 1000$), dok se za male obime uzoraka mora uzeti u obzir dejstvo "šuma" $\sqrt{n}\, R_n(t)$, koji utiče na kritičnu vrednost C_α (videti slike 4, 5 i 6) jer

$$\sup_n = \sup_{0 \leq t \leq 1} /Z_n(t) = \sup_{0 \leq t \leq 1} /2\, U_n(t) - \sqrt{n}\, R_n(t)/$$

pa se za male vrednosti n "šum" $\sqrt{n}\, R_n(t)$ ne može zanemariti. U tom smislu se može napraviti tablica kritičnih vrednosti testa supremuma, koja će uzimati u obzir i "šum" $\sqrt{n}\, R_n(t)$ za male vrednosti n. Do njih smo došli simulacijom (jer u ovom trenutku ne postoji drugi način, obzirom da je nalaženje raspodele veličine $\sup_{0 \leq t \leq 1} /2 \cdot U_n(t) - \sqrt{n}\, R_n(t)/$ skopčano sa velikim teškoćama), tj. metodom Monte-Karlo, pri čemu smo radili sa 10000 uzoraka obima n sa $U(0;1)$ raspodelom (tj. kada je hipoteza H_o tačna) i za $\alpha = 0.05$ i $\alpha = 0.01$. Time smo relativno precizno odredili kritične vrednosti jer je za 10000 uzoraka obima n disperzija relativne učestanosti dogadjaja

$$A = \left\{ \sup_n > C_\alpha / H_o \right\}$$

svakako manja od 0.000025. Za $n \geq 1000$ se mogu koristiti tablice kritičnih vrednosti testa Kolmogorova, množenjem tablične vrednosti sa 2.

Na taj način smo dobili tabelu oblika:

n	$\alpha=0.05$	$\alpha=0.01$
100	2.35	2.94
200	2.65	3.15
500	2.7	3.20
1000	2.7162	2.216
2000	2.7162	3.216

TABELA I: KRITIČNE VREDNOSTI TESTA SUPREMUMA $(P\{\sup_n > C_\alpha / H_0\} = \alpha)$

Za nalaženje kritičnih vrednosti testa supremuma i ostalih novo-uvedenih testova smo koristili PROGRAM I, čiji listing je dat u III delu.

Iako ovaj test predstavlja više teorijsku zanimljivost, obzirom da su mu za veliko n osobine ekvivalentne osobinama testa Kolmogorova, ipak je pokazao zadovoljavajuće rezultate za neke klase alternativa. (primer I u delu III).

II.4. TEST INTEGRALA

Uvedimo statistiku

$$TNQ_n = n\cdot\int_0^1 (F_n(t)-Q_n(t))^2\,dt=\int_0^1 Z_n^2\,(t)\,dt$$

koja će nam poslužiti za formiranje sledećeg novog testa.

TEOREMA II.4.1: Funkcional

$$H(F) =\int_0^1 \left((F(t)-F_0(t)-(F^{-1}(t)-F_0^{-1}(t))\right)^2\,dF_0(t)$$

u slučaju $U(0;1)$ raspodele je neprekidno-diferencijabilan, tj. ispunjava uslove glatkosti.

Dokaz:

$$H(F) =\int_0^1 (F(t)-F^{-1}(t))^2\,dt$$

u slučaju $F_0(t) = t,\ 0 \leq t \leq 1$ je očigledno neprekidan. Sa druge strane

$$H(F_0) = 0$$

i

$$\frac{H(F_0 + \mathcal{E} W_\mathcal{E}) - H(F_0)}{\mathcal{E}^2} = \frac{H(F_0 + \mathcal{E} W_\mathcal{E})}{\mathcal{E}^2} =$$

$$= \frac{1}{\mathcal{E}^2}\int_0^1 (\mathcal{E} W_\mathcal{E} + \mathcal{E} W_\mathcal{E})^2 dt = 4\int_0^1 W_\mathcal{E}^2\, dt \longrightarrow$$

$$\xrightarrow[\mathcal{E}\to 0]{R} 4\int_0^1 W^0(t)dt \qquad ([5]) ,$$

gde je $W^0(t) = B(t)$ – Braunov most. Time smo dobili da je

$$TNQ_n = H(F_n) = \int_0^1 Z_n^2(t)dt \xrightarrow[n\to\infty]{R} 4\int_0^1 B^2(t)\, dt ,$$

a samim tim i da se statistika TNQ_n ponaša kao statistika W_n^2 sa težinskom funkcijom $\Psi(t)=4$, za $0 \leq t \leq 1$. Kako je $W^2 = \int_0^1 B^2(t)\, dt$ granična promenljiva za statistiku Smirnova W_n^2, lako je videti da je kritična oblast ovog testa oblika

$$W_\alpha = (C_\alpha ;+\infty)$$

gde je $C_\alpha = 4 \cdot W_\alpha$, a W_α je kritična vrednost za test Smirnov-fon Mizesa (koju za dato α možemo naći u tablici u DODATKU).

Za uzorak obima n statistiku TNQ_n ćemo računati po formuli:

$$TNQ_n = \sum_{k=1}^{n}(F_n(k/n)-Q_n(k/n))^2$$ jer se lako pokazuje da

$$\sum_{k=1}^{n}(F_n(k/n)-Q_n(k/n))^2 = \sum_{k=1}^{n}\left(\sqrt{n}(F_n(k/n)-Q_n(k/n)\right)^2 \cdot \frac{1}{n} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} Z_n^2(k/n)\cdot\left(\frac{k}{n} - \frac{k-1}{n}\right) = \sum_{k=1}^{n} Z_n^2(k/n)\cdot\Delta_k \longrightarrow$$

$$\xrightarrow[\max \Delta_k \to 0]{} \int_0^1 Z_n^2(t)dt.$$

Šum $\sqrt{n}\, R_n(t)$ za male vrednosti obima uzorka n utiče na kritičnu vrednost C_α , tako da je neophodno metodom Monte-Karlo odrediti C_α . Slično kao i kod testa supremuma, dobijamo tabelu:

n	$\alpha=0.05$	$\alpha=0.01$
100	1.82	2.93
200	1.83	2.94
500	1.84	2.97
1000	1.8456	2.974
2000	1.8456	2.974

TABELA II: KRITIČNE VREDNOSTI TESTA INTEGRALA $(P\{TNQ_n > C_\alpha / H_0\} = \alpha)$.

U delu III ćemo pokazati da postoje klase alternativa za koje je test integrala moćniji od testa Kolmogorova i testa Morana.

II.5. TEST ELIPSE

Ovaj test smo bazirali direktno na statistici $Z_n(t) = \sqrt{n}(F_n(t)-Q_n(t))$, pri čemu smo u delu II.2. pokazali da važi

$$Z_n(t) \xrightarrow[n\to\infty]{R} 2\cdot B(t), \quad 0 \leq t \leq 1$$

i slikama 4, 5 i 6 to i grafički ilustrovali. $2\cdot B(t)$ je gausovski proces sa nultim očekivanjem i korelacionom funkcijom oblika:

$$R(s,t)=4(\min\{s,t\} - s\cdot t)$$

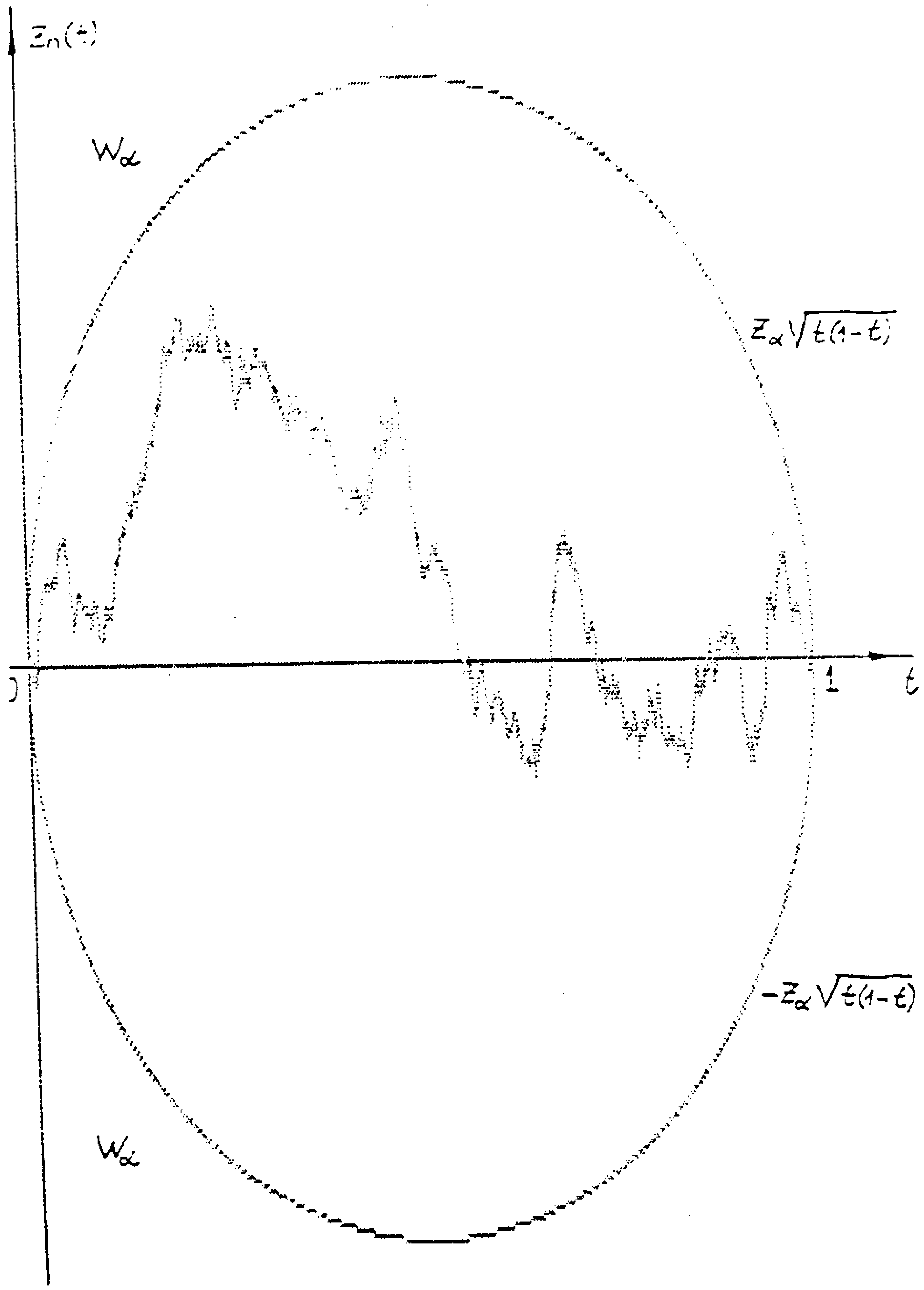
za $0 \leq s,\ t \leq 1$.

Kako je $2\,B(t)$ za svako fiksirano t iz $(0;1)$ jedna slučajna promenljiva sa $\mathcal{N}(0;4t(1-t))$ raspodelom, to nam je ideja bila da odredimo jednu oblast čija je granica proporcionalna standardnoj devijaciji

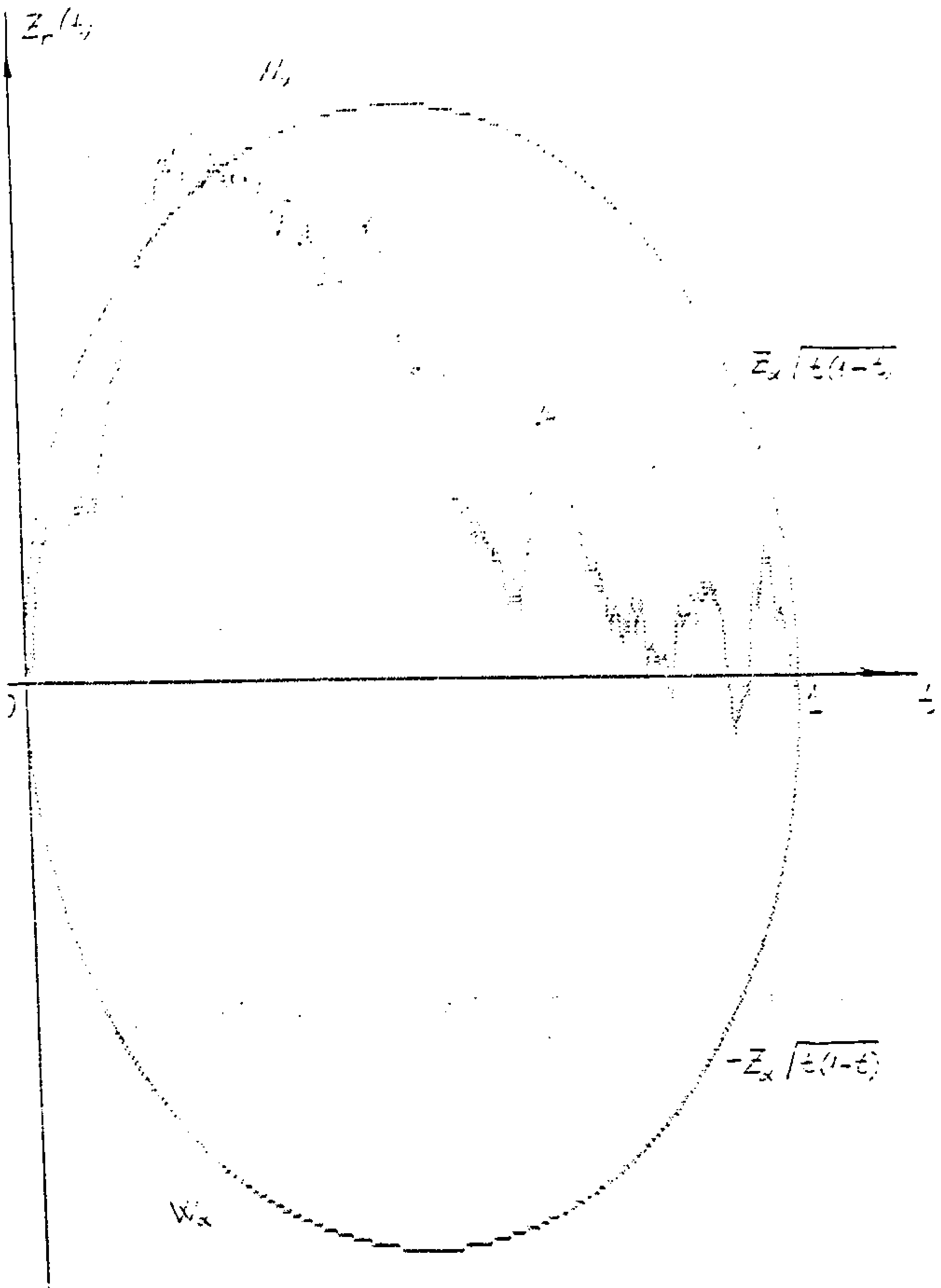
$$\sigma = 2\sqrt{t(1-t)}.$$

Granica kritične oblasti $\pm z_\alpha\sqrt{t(1-t)}$ je zapravo elipsa

$$\frac{(t-\frac{1}{2})^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{z_\alpha}{2}\right)^2} = 1$$



Sl.7: Kritična oblast testa elipse-hipoteza H_0 tačna.



SL. 7A: Kritična oblast testa elipse-hipoteza H_o nije tačna.

pa smo tako dali i ime testu: test elipse.

Samo testiranje bi se izvodilo na sledeći način: Ako trajektorija procesa $Z_n(t)$ izadje van elipse $\pm Z_\alpha\sqrt{t(1-t)}$ za bar jedno t, $0<t<1$, hipotezu $H_0(X : U(0;1))$ treba odbaciti. Kritična oblast i jedna trajektorija procesa $Z_n(t)$ su dati na slikama 7. i 7A.

Kritičnu vrednost Z_α možemo odrediti iz uslova

$$P\left\{ Z_n(t) > Z_\alpha\sqrt{t(1-t)} \vee Z_n(t) < -Z_\alpha\sqrt{t(1-t)}, \text{ za bar jedno } t : 0<t<1 \,/\, H_0 \right\} = \alpha \Leftrightarrow P\left\{ 2B(t) > Z_\alpha\sqrt{t(1-t)} \vee 2B(t) < -Z_\alpha\sqrt{t(1-t)}, \text{ za bar jedno } t : 0<t<1 / H_0 \right\} = \alpha \Longleftrightarrow P\left\{ \sup_{\varepsilon_n<t<1-\varepsilon_n} \frac{|B(t)|}{\sqrt{t(1-t)}} > \frac{Z_\alpha}{2} \,/ H_0 \right\} = \alpha$$

$$\Longleftrightarrow P\left\{ \sup_{\varepsilon_n<t<1-\varepsilon_n} \frac{|B(t)|}{\sqrt{t(1-t)}} \leqslant \frac{Z_\alpha}{2} / H_0 \right\} = 1-\alpha .$$

Ako sada iskoristimo rezultat sledeće teoreme:

<u>TEOREMA II.5.1</u>: Ako je $\{\varepsilon_n\}$ opadajući niz brojeva takav da $\varepsilon_n \longrightarrow 0$ kada $n\longrightarrow\infty$ i ako je $B(t)$ - Braunov most, tada važi:

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{ \sup_{\varepsilon_n<t<1-\varepsilon_n} \frac{|B(t)|}{\sqrt{t(1-t)}} \leqslant a\left(y; 2\log\frac{1-\varepsilon_n}{\varepsilon_n}\right)\right\} = e^{-2e^{-y}} \quad , \text{ gde je}$$

$$a(y,T) = \left(y+2\log T + \frac{1}{2}\log\log T - \frac{1}{2}\log\pi\right)(2\log T)^{-\frac{1}{2}} .$$

(Funkcional 5. tačke I.4. ([11]).

Na taj način smo dobili da je

$$Z_\alpha = 2\cdot a\left(y; 2\log\frac{1-\varepsilon_n}{\varepsilon_n}\right).$$

Za zadato α nalazimo da je

$$e^{-2e^{-y}} = 1-\alpha$$

odnosno

$$y = -\ln\left(-\frac{1}{2}\ln(1-\alpha)\right).$$

Ostaje problem odredjivanja opadajućeg niza (ε_n), odnosno vrednosti T u funkciji $a(y,T)$.

$$T = 2 \cdot \log \frac{1-\varepsilon_n}{\varepsilon_n}$$ i za različite opadajuće nizove ε_n, dobijamo različite vrednosti T, a time i različite kritične vrednosti Z_α. Zato smo se ponovo poslužili metodom Monte-Karlo i simulacijom dobili sledeću tablicu kritičnih vrednosti:

n	α=0.05	α=0.01
100	5.40	7.5
200	5.95	7.98
500	6.20	8.10
1000	6.28	8.12
2000	6.30	8.15

TABELA III: KRITIČNE VREDNOSTI TESTA ELIPSE

NAPOMENE UZ II DEO:

Kako smo za nalaženje kritičnih vrednosti za sva tri testa koristili PROGRAM I, bili smo u prilici da proverimo tablične vrednosti za testove Morana, Smirnov-fon Mizesa i Kolmogorova, ali i da time ispitamo i kvalitet ugradjenog generatora slučajnih brojeva. Kako su se potvrdile kritične vrednosti navedenih testova, zaključak je da su i naše kritične vrednosti precizno odredjene i da je generator slučajnih brojeva kvalitetan. Sa tim saznanjem možemo preći na analizu moći i nepristrasnosti novih testova.

Sa druge strane, proveru ispitivanih konvergencija smo vršili pomoću programa II (u DODATKU). On je dovoljno fleksibilan da nam omogućava grafičku i analitičku proveru dobijenih rezultata. Sve slike u ovom delu smo nacrtali uz pomoć programa 2.

III DEO. MOĆ I NEPRISTRASNOST

III.1. UVOD

U ovom delu ćemo pokušati da napravimo analizu moći i nepristrasnosti testova baziranih na uvedenim statistikama SUP_n, TMO_n i $Z_n(t)$. Ujedno ćemo izvršiti uporedjivanje sa već klasičnim testovima Kolmogorova, Smirnov-fon Mizesa i Morana za isti uzorak, čime ćemo dobiti uporedne tablice moći za pojedine klase alternativa oblika

$$1.\ F(t) > t$$

$$2.\ F(t) < t$$

$$3.\ F(t) \gtrless t$$

za $0 \leqslant t \leqslant 1$, ali bliske $U(0;1)$ raspodeli, tj. funkciji $F_0(t) = t$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, da bi smo na taj način mogli izdvojiti klase alternativa za koje su novi testovi moćniji, a time i opravdati njihovo uvodjenje. Naravno, posmatraćemo alternative koje se mogu parametrizovati, i to tako da je

$$\lim_{\theta \to a} F(t,\theta) = F_0(t) = t, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1 ,$$

jer time postižemo da možemo ispitivati i nepristrasnost testova.

U eksperimentima smo radili uglavnom sa 2000 uzoraka obima 100, a zatim smo dobijene rezultate proveravali za druge obime uzoraka. Time smo postigli zadovoljavajuće rezultate, jer su disperzije ocena funkcije moći za odredjenu vrednost parametra θ manje od 0.000125. Za 2000 uzoraka obima 100 za samo jednu vrednost parametra θ računar mora da izvrši preko $2 \cdot 10^9$ operacija, što zahteva izvesno vreme i jedino tim vremenom smo bili ograničeni, pa nismo radili sa većim brojem uzoraka obima većeg od 100.

Pre nego što predjemo na pomenutu analizu, podsetimo se nekih definicija i teorema povezanih sa osobinama testova, a koje se direktno odnose na naš rad.

DEFINICIJA III.1.1: Moć testa je funkcija

$$M(H) = P\left\{ \theta_n \in W_\alpha / H \right\}$$

gde je θ_n - test-statistika, W_α -kritična oblast, α-prag značajnosti i H - hipoteza. Rečima, funkcija moći testa je verovatnoća odbacivanja nulte hipoteze, ako je tačna hipoteza H.

Po definiciji

$$M(H_0) = \alpha .$$

DEFINICIJA III.1.2: Test je nepristrasan ako je

$$M(H_0) \leqslant \alpha \quad \text{i} \quad M(H_1) \geqslant \alpha$$

ili, drugim rečima, ako je

$$M(H_0) \leqslant M(H_1)$$

za svaku alternativu H_1.

DEFINICIJA III.1.3: Test je konzistentan ako je ispunjeno

$$\lim_{n \to \infty} M(H_1) = 1$$

gde je H_1 - alternativna hipoteza.

DEFINICIJA III.1.4: Funkcionali I tipa su funkcionali od funkcije raspodele F oblika:

$$G(F) = h\left[\int g(t) dF(t) \right]$$

gde je g(t) - zadana borelovska funkcija, a h - funkcija neprekidna u tački

$$a = \int g(t) dF_0(t)$$

gde je $F_0(t)$ - funkcija raspodele slučajne promenljive (obeležja) X. Dalje, klasa statistika I tipa je klasa statistika koje se mogu predstaviti u obliku:

$$S(X) = G(F_n) = h\left[\int g(t)dF_n(t)\right] = h\left[\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} g(X_k)\right]$$

gde je $F_n(t)$ - empirijska funkcija raspodele, a $X_1, X_2, \ldots, X_n$ - uzorak.

(Očigledno, uzorački momenti su statistike I tipa sa $h(t) = t$ i $g(t) = t^k$).

DEFINICIJA III.1.5: Funkcionali II tipa su funkcionali od funkcija raspodele, neprekidni u tački $F_o(t)$ u ravnomernoj metrici:

$$H(F^{(n)}) \longrightarrow H(F_o) \text{ ako } \sup_t /F^{(n)}(t)-F_o(t)/ \longrightarrow 0$$

kad $n \longrightarrow \infty$ i ako nositelji raspodela $F^{(n)}$ pripadaju nositelju raspodele F_o.

(Nositelj raspodele P sa funkcijom raspodele F jeste skup N_F za koji je $P(N_F) = \int\limits_{N_F} dF = 1$)

Klasa statistika II tipa je klasa statistika

$$S(X) = H(F_n)$$

neprekidnih u tački $F_o(t)$, gde je F_n - empirijska funkcija raspodele, a $F_o(t)$ - funkcija raspodele obeležja X.

TEOREMA III.1.1: Ako je $X_1, X_2, \ldots, X_n$ uzorak izvučen iz populacije sa obeležjem X sa funkcijom raspodele $F_o(t)$, tada, ako je $S(X) = G(F_n)$ statistika I ili II tipa, tada

$$G(F_n) \longrightarrow G(F_o)$$

sa verovatnoćom 1, za $n \longrightarrow \infty$. F_n je empirijska funkcija raspodele.

To praktično znači da izbor dovoljno velikog obima uzorka n dozvoljava ocenjivanje ne samo raspodele obeležja X, već i funkcionala od te raspodele.

(Jasno, funkcionali mogu biti istovremeno i I i II tipa, ali i ne pripadati ni jednom od njih).

TEOREMA III.1.2: Ako je test baziran na statistici $S(X)$ koja je statistika I ili II tipa, test je obavezno konzistentan. ([5]).

Kako je $TNO_n = \int_0^1 (F_n(t)-Q_n(t))^2\, dt$, $h(t) = t$ i $g(t) = (F(t)-F^{-1}(t))^2$, to je TNO_n statistika I tipa.

$$Z_n(t) = \sqrt{n}(F_n(t)-Q_n(t)) =$$
$$= \sqrt{n}\Big(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} I_{(-\infty,t]}(X_k) - X_{([n\cdot t]+1)}\Big)\text{, pa je}$$

$Z_n(t)$, za svako fiksirano t, $0 \leq t \leq 1$, statistika I tipa.

$SUP_n = \sqrt{n} \sup\limits_{0\leq t\leq 1} /F_n(t)-Q_n(t)/$ je statistika II tipa (teorema II.3.1).

Na osnovu toga zaključujemo da su naši testovi, supremuma, integrala i elipse kozistentni.

ISTORIJSKE I BIBLIOGRAFSKE NAPOMENE:

Prvi je o primenama statističkih testova govorio Laplas, krajem 18 veka. Sistematsko korišćenje testova za proveru hipoteza počinje radovima Pirsona. Fundamentalne pojmove kao što su greške I i II vrste su uveli Neiman i Pirson (Neyman J. i Pearson E. S.) 1928. godine. Sistematsko izlaganje teorije ispitivanja hipoteza možemo naći kod Lemana (Lehmann E.L.) u [37], Borovkova u [5], Koksa i Hinklija (Cox D. i Hinkley D.V.) u [34], Kendala i Stjuarda itd. O moći testova za bliske alternative možemo naći kod Čibisova ([12], [13]), Filipove ([23]), Borovkova ([5]) itd.

III.2. MOĆ I NEPRISTRASNOST

Posmatrajmo uzorak $X_1, X_2, \ldots, X_n$ izvučen iz populacije čije obeležje X ima funkciju raspodele $F(t)$ koja ispunjava uslove Bahadura i $F(0) = 0$ i $F(1) = 1$.

Ako posmatramo slučajni proces

$$Z_n^*(t) = \sqrt{n} f(F^{-1}(t)) \left[(F_n(t) - F(t)) - (Q_n(t) - F^{-1}(t)) \right]$$

za koji smo u II delu pokazali da u raspodeli konvergira ka procesu $B^*(t)$:

$$B^*(t) = f(F^{-1}))\cdot B(F(t)) + B(t) ,$$

gde je $B(t)$ - Braunov most. U slučaju kada je hipoteza $H_0(X:U(0;1))$ tačna, $Z_n^*(t) = Z_n(t) = \sqrt{n}(F_n(t) - Q_n(t)) \xrightarrow[n\to\infty]{R} 2B(t)$.

Korelaciona funkcija graničnog procesa $B^*(t)$ je oblika:

$$\begin{aligned} R(s,t) &= E(B^*(t)\, B^*(s)) = \\ &= f(F^{-1}(t)) f(F^{-1}(s))(\min\{F(t),F(s)\} - F(t)\cdot F(s)) + \\ &+ f(F^{-1}(s))(\min\{F(s),t\} - t\cdot F(s)) + \\ &+ f(F^{-1}(t))(\min\{F(t),s\} - s\cdot F(t) + \\ &+ \min\{s,t\} - s\cdot t \end{aligned}$$

pri čemu je

$$E(B^*(t)) = 0$$

$$\begin{aligned} E(B^*(t))^2 &= (f(F^{-1}(t))^2 F(t)(1-F(t)) + \\ &+ 2\cdot f(F^{-1}(t))(\min\{t,F(t)\} - t\cdot F(t)) + \\ &+ t(1-t) \end{aligned}$$

(U slučaju kada je hipoteza $H_0(X : U(0;1))$ tačna, dobijamo da je

$$R(s,t) = 4 \cdot (\min\{s,t\} - t \cdot s)$$

a to je korelaciona funkcija procesa $2B(t)$), kome teži naš proces $Z_n(t)$.

Kako se ovde radi o funkcionalima Braunovih mostova čije raspodele do danas nisu pronadjene, u opštem slučaju i nije moguće egzaktno odrediti moć testova supremuma, integrala i elipse (u ovom trenutku):

$$m_{SUP}(H) = P\left\{ \sup_{0\le t\le 1} |Z_n^*(t)| > C_\alpha / H \right\}$$

$$m_{INT}(H) = P\left\{\int_0^1 (Z_n^*(t))^2\, dt > C_\alpha/H\right\} \quad i$$

$$m_{ELIP}(H) = P\left\{Z_n^*(t) < -Z_\alpha\sqrt{t(1-t)} \vee Z_n^*(t) > Z_\alpha\cdot\sqrt{t(1-t)}\right.$$

za bar jedno $\left. t : 0 < t < 1/H \right\}$, pogotovo jer se radi ne o raspodeli procesa $B^*(t)$, već o raspodelama funkcionala nad tim procesom.

Čibisov je u [12] posmatrao klasu alternativa oblika

$$F(t) = F(t,n) : F(t,n) \xrightarrow[n\to\infty]{} t$$

i pokazao da ako

$$\delta_n(t) = \sqrt{n}(F(t)-t) \xrightarrow[n\to\infty]{} \delta(t)$$

tada empirijski proces

$$U_n(t) = \sqrt{n}(F_n(t)-t) \xrightarrow[n\to\infty]{R} B(t) + \delta(t)$$

i

$$R\left\{G(U_n(t))/H_1\right\} \longrightarrow R\left\{G(B(t)+\delta(t))\right\}$$

gde je R - oznaka raspodele, a G - neki funkcional.

proučavao

Borovkov je u [5] još užu klasu alternativa oblika

$$F(t,n) = t + P(t)/\sqrt{n}$$

gde je $P(t)$ neprekidna i $P(0)=P(1)=0$. Primenom rezultata Čibisova, dobija se da je

$$\delta_n(t) = \sqrt{n}(F(t)-t) = P(t) = \delta(t) .$$

Borovkov je pokazao da funkcija moći za test Kolmogorova, Smirnov-fon Mizesa imaju minimum za $P(t) = 0$, tj. da su sva tri testa nepristrasna.

Čepman je u [8] napravio komparativnu studiju moći nekoliko testova (Fišera, Pirsona, Smirnova, Kolmogorova i Mozesa (Moses L. je bazirao svoj test na statistici $U = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_{(k)}$, koja očigledno, ima $\mathcal{N}(\frac{1}{2}; \frac{1}{12n})$ ako je hipoteza $H_o(X : U(0;1))$ tačna), za alternative oblika

$$G_{u_o}(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ t, & 0 \leq t < u_o \\ u_o, & u_o \leq t < u_o + \Delta \\ t, & u_o + \Delta \leq t < 1 \\ 1, & t > 1 \end{cases}$$

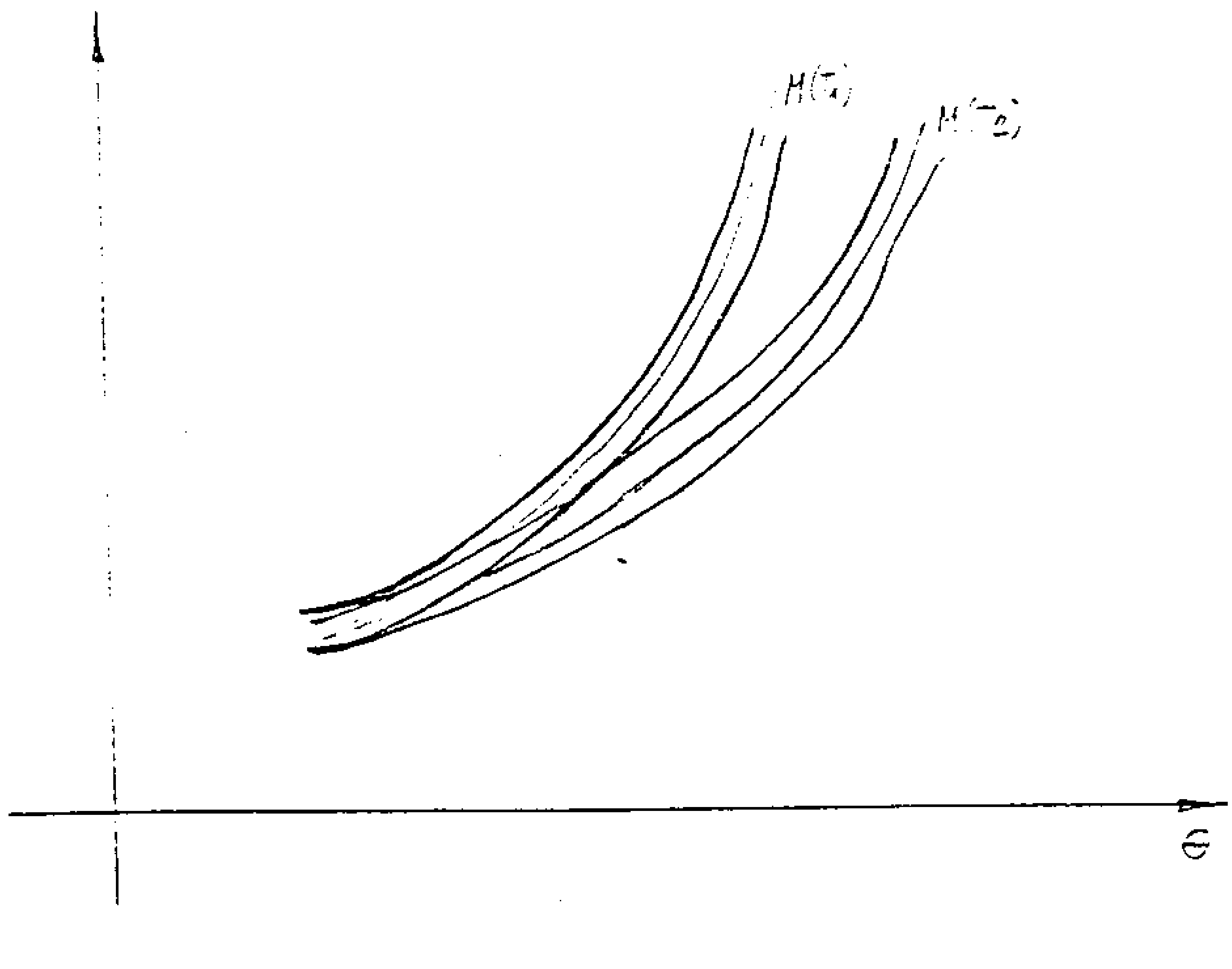
i

$$G(t) = \begin{cases} 0 & , \ t < \Delta \\ t-\Delta & , \ \Delta \leq t < 1 \\ 1 & , \ t > 1 \end{cases} ,$$

za razne vrednosti Δ i različite obime uzoraka n.

U ovom radu posmatramo opšti slučaj alternativa bliskih U(0;1) raspodeli, koje se mogu parametrizovati i metodom Monte-Karlo, za razne vrednosti parametra, proceniti vrednost funkcija moći. Istovremeno smo ispitivali moć testa Kolmogorova, Smirnov-fon Mizesa i Morana.

Inače, smatraćemo da je test T_1 moćniji od testa T_2, ako je odgovarajući interval poverenja za funkciju moći testa T_1 u pojedinim "mernim" tačkama iznad intervala poverenja za moć testa T_2 i da te "trake" nemaju zajedničkih tačaka:



Sl. 9: MOĆI TESTOVA T_1 I T_2 SA PRIPADAJUĆIM INTERVALIMA POVERENJA

Za ocenjivanje vrednosti funkcije moći u "mernim" tačkama smo postupili na uobičajen način: Familiju alternativa smo parametrizovali

$$F(t) = F(t,\theta)$$

i posmatrali relativnu učestanost dogadjaja

$$A(\theta) = \{ T_n > C_\alpha / H_1 \}$$

gde je T_n - odabrana test-statistika i $W_\alpha = (C_\alpha, +\infty)$ - kritična oblast testa, a θ - "merna" tačka. $P(A(\theta))$ je vrednost funkcije moći testa T_n u tački θ.

III.3. PROGRAM I

Program smo napravili za pomenuti računar BBC (kombinacija mašinskog i BASIC jezika). U datom programu na liniji 2200 je naredba

```
2200  Y(I%) = RND(1)
```

kojom se nizu Y_n prideljuju realizacije slučajne promenljive sa $U(0;1)$ raspodelom. Transformacijom te linije dobijamo željene alternative. Program omogućava proizvoljan izbor

N% - obima uzoraka

K% - broja uzoraka i

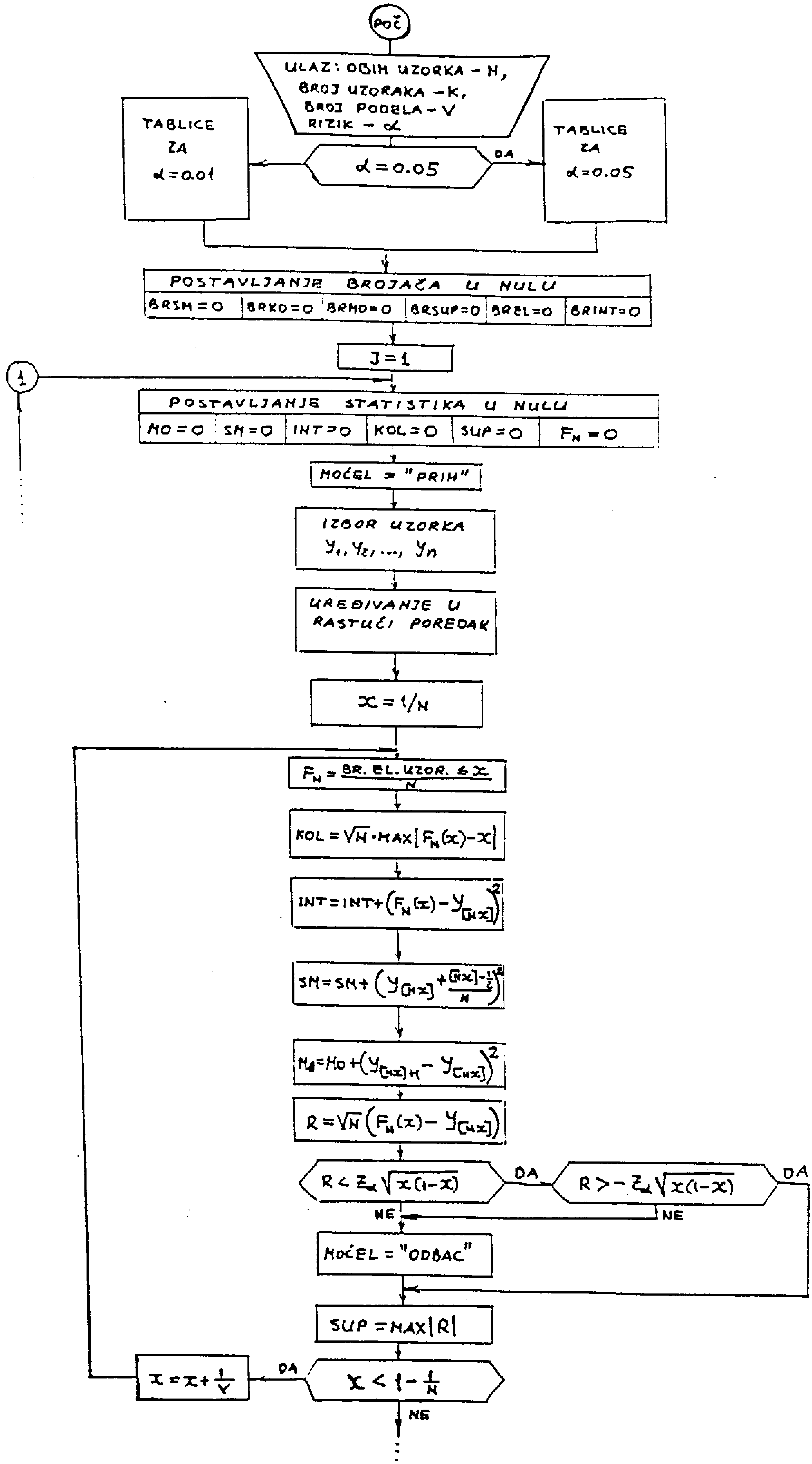
V% - podelu intervala (0;1).

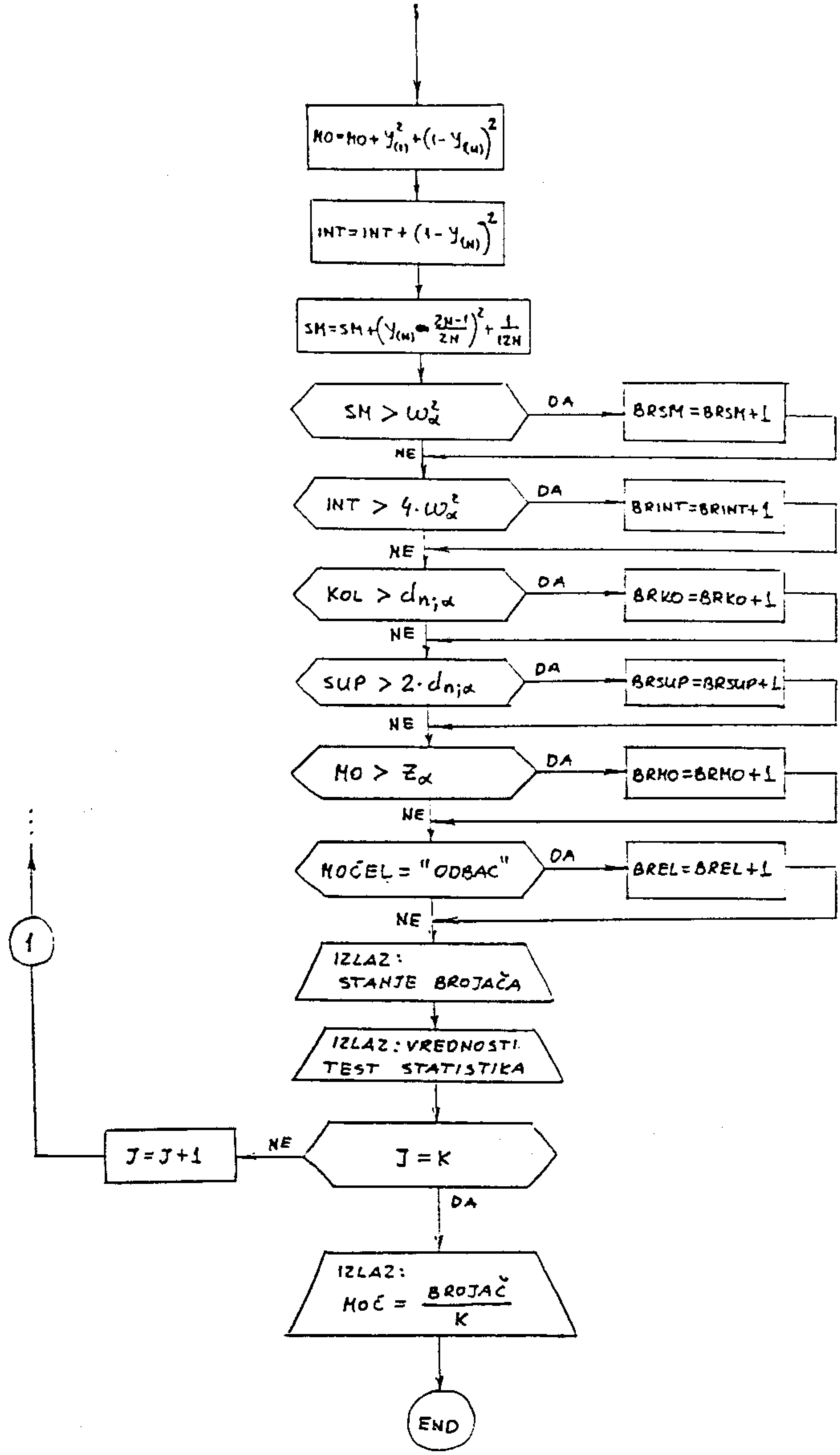
Program je predvidjen da radi za prag značajnosti $\alpha=0.05$ i $\alpha= 0.01$, a rezultati se izdaju na terminalu u obliku:

```
----------------------------------------------
                                             !
ITANO JE 100 UZORAKA OBIMA 100               ! REALIZOVANE VREDNOSTI TEST-STATISTIKA
100 PODELA INTERVALA (0;1)                   !
                                             ! SM=0.248948336           K=1.39999999
----------------------------------------------!
EL   !BR.-TNQ  ! BR.-KO  ! BR.-SM   !          I=1.02929863              MO=1.66646662E-2
     !         !         !          !
     !         !         !          !          SUP=1.939600273
     ! 35      ! 24      ! 34       !
-MO  !BR-SUP   ! MOĆ-MO  !MOĆ-SUP   !
     !         !         !          !
     !         !         !          !
     !29       ! 7E-2    ! 0.29     !         BRLAX=37
-EL  !MOĆ-TNQ  ! MOĆ-KO  ! MOĆ-SM   !
     !         !         !          !
     !         !         !          !         PRAG ZNAČAJNOSTI JE    ?0.05
37   ! 0.35    ! 0.24    ! 0.34     !
     !         !         !          !
MP
```

Sl. 10. IZGLED TERMINALA PRI RADU PROGRAMA I

Program u toku rada izdaje vrednost trenutnog stanja brojača realizacije dogadjaja A(θ) za posmatrane testove i realizovane vrednosti test-statistika za svaki izabrani uzorak. Konačni izgled terminala je dat na Sl. 10.


POČ
ULAZ: OBIM UZORKA – N, BROJ UZORAKA – K, BROJ PODELA – V, RIZIK – α
α = 0.05
DA
TABLICE ZA α=0.01
TABLICE ZA α=0.05
POSTAVLJANJE BROJAČA U NULU
BRSM = 0
BRKO=0
BRMO=0
BRSUP=0
BREL=0
BRINT=0
J = 1
1
POSTAVLJANJE STATISTIKA U NULU
MO = 0
SM = 0
INT = 0
KOL = 0
SUP = 0
F_N = 0
MOĆEL = "PRIH"
IZBOR UZORKA y1, y2, ..., yn
UREĐIVANJE U RASTUĆI POREDAK
x = 1/N
F_N = BR. EL. UZOR. ≤ x / N
KOL = √N · MAX|F_N(x) – x|
INT = INT + (F_N(x) – y[Nx])²
SM = SM + (y[Nx] + ([Nx] – 1/2)/N)²
MO = MO + (y[Nx]N – y[Nx])²
R = √N (F_N(x) – y[Nx])
R < Z_α √x(1–x)
DA
R > –Z_α √x(1–x)
DA
NE
NE
MOĆEL = "ODBAC"
SUP = MAX|R|
x = x + 1/V
DA
x < 1 – 1/N
NE



ALGORITAM PROGRAMA I

```
10REM PROGRAM I-MOC TESTOVA
20REM MAŠINSKA RUTINA ZA BRZO SORTIRANJE
30NUMBER=&70:POINTER1=&72:POWER=&74
40POINTER2=&75:SIZE=&77:LOOPCOUNT=&79:FLAG=&7B:STORE=&7C:CYCLES
=&7E
50DIM SORT 250
60FOR PASS=0 TO 2 STEP 2
70P%=SORT
80[OPT PASS
90LDA &0601
95 STA STORE
100LDA &0602
110STA STORE+1
120LDY #0
130STY SIZE+1
140STY POWER
150LDA (STORE),Y
160STA NUMBER
170INY
180STY SIZE
190LDA (STORE),Y
200STA NUMBER+1
210.SIZELOOP
220INC POWER
230ASL SIZE
240ROL SIZE+1
250 SEC
260LDA SIZE
270SBC NUMBER
280LDA SIZE+1
290SBC NUMBER+1
300BCC SIZELOOP
310.OUTERLOOP
320LSR SIZE+1
330ROR SIZE
340SEC
350LDA NUMBER
360SBC SIZE
370STA CYCLES
380LDA NUMBER+1
390SBC SIZE+1
400STA CYCLES+1
410.MIDLOOP
420LDA #0
430STA FLAG
440STA LOOPCOUNT
450STA LOOPCOUNT+1
460LDA &0604
470STA POINTER1
480LDA &0605
490STA POINTER1+1
500LDA SIZE+1
510STA STORE+1
```

```
520LDA SIZE
530ASL A
540ROL STORE+1
550ASL A
560ROL STORE+1
570CLC
580ADC SIZE
590ADC POINTER1
600STA POINTER2
610LDA STORE+1
620ADC SIZE+1
630ADC POINTER1+1
640STA POINTER2+1
650.INNERLOOP
660LDY #0
670LDA (POINTER2),Y
680CMP (POINTER1),Y
690BCC SWOP
700BNE NOSWOP
710LDY #4
720SEC
730.COMPLOOP
740LDA (POINTER2),Y
750SBC (POINTER1),Y
770DEY
780BNE COMPLOOP
790BCS NOSWOP
800.SWOP
810LDY #4
820STY FLAG
830.SWOPLOOP
840LDA (POINTER1),Y
850TAX
860LDA (POINTER2),Y
870STA (POINTER1),Y
880TXA
890STA (POINTER2),Y
900DEY
910BPL SWOPLOOP
920BMI NOSWOP
930.STAGE1
940BNE MIDLOOP
950.STAGE2
960BNE OUTERLOOP
970.NOSWOP
980INC LOOPCOUNT
990BNE SKIP1
1000INC LOOPCOUNT+1
1010.SKIP1
1020LDA POINTER1
1030CLC
1040ADC #5
1050STA POINTER1
1060BCC SKIP2
```

```
1070INC POINTER1+1
1080.SKIP2
1090LDA POINTER2
1100CLC
1110ADC #5
1120STA POINTER2
1130BCC SKIP3
1140INC POINTER2+1
1150.SKIP3
1160LDA CYCLES
1170CMP LOOPCOUNT
1180BNE INNERLOOP
1190LDA CYCLES+1
1210CMP LOOPCOUNT+1
1220BNE INNERLOOP
1230LDA FLAG
1240BEQ FLAGCLEAR
1250SEC
1260LDA CYCLES
1270SBC #1
1280STA CYCLES
1290BCS SKIP4
1300DEC CYCLES+1
1310.SKIP4
1320LDA CYCLES
1330BNE STAGE1
1350LDA CYCLES+1
1370BNE STAGE1
1380.FLAGCLEAR
1390DEC POWER
1400BNE STAGE2
1410RTS:]
1420NEXT PASS
1430
2000 MODE 3
2010 GOSUB 4000
2020 CLS
2021 INPUT TAB(40,20)"PRAG ZNAČAJNOSTI JE    ";ALFA
2071 IF ALFA<>0.05 THEN GOSUB 5500
2072 GOSUB 5000
2074 REM CRTANJE TABLICE
2076FOR I=1 TO 38
2078PRINT TAB(I,1);"_"
2080PRINT TAB(I,6);"_"
2082PRINT TAB(I,11);"_"
2084PRINT TAB(I,16);"_"
2086PRINT TAB(I,22);"_"
2088NEXT I
2090FOR I=2 TO 22
2092PRINT TAB(1,I);CHR$(33)
2094PRINT TAB(38,I);CHR$(33)
2096NEXT I
2098 FOR I=7 TO 22
2100PRINT TAB(10,I);CHR$(33)
```

```
2102PRINT TAB(19,I);"!"
2104PRINT TAB(28,I);CHR$(33)
2108 NEXT I
2110 PRINT TAB(2,7);"BR.-EL";TAB(11,7);"BR.-TNQ";TAB(21,7);"BR.-K
O";TAB(30,7);"BR.-SM";TAB(3,12);"BR-MO";TAB(11,12);"BR-SUP"
2150 PRINT TAB(40,3)"REALIZOVANE VREDNOSTI TEST-STATISTIKA"
2170DIM Y(N%)
2172 REM POSTAVLJANJE BROJAĆA U NULU
2174 T=0:WW=1/V% :BRQ=0:BRTNQ=0:BRK=0:BRS=0:BRM=0:BRSUP=0:BRLAX=0
2180FOR J%=1 TO K%
2182 TNQ=0:MAXK=0:W=0:MOR=0:SUP=0:LAX=0
2185 PRINT TAB(3,3);"ISPITIVANJE UZORKA BROJ ";J%
2190FOR I%=1 TO N%
2200 Y(I%)=RND(1)
2220NEXT I%
2260 NUMBER%=N%
2270CALL SORT,NUMBER%,Y(1)
2370R=0:SN=0:MOCQ$="PRIH":SMIR=0
2375 X=1/N%
2380 REPEAT
2390PROCEMPIRIJA(X)
2400SN=SN/N%
2470 Q=Y(INT(N%*X)+1)
2472 QS=Y(INT(N%*X))
2475 MOR=MOR+(Q-QS)^2
2480R=SQR(N%)*(SN-QS)
2482 W=SQR(N%)*ABS(SN-X)
2485 IF R>ZALFA*SQR(X*(1-X)) OR R<-(ZALFA*SQR(X*(1-X))) THEN MOCQ
$="ODBAC"
2500 SMIR=SMIR+(QS-(N%*X-1/2)/N%)^2
2505 IF W>MAXK THEN MAXK=W
2507 IF ABS(R)>SUP THEN SUP=ABS(R)
2508 IF LAX<ABS(R)/SQR(X*(1-X)) THEN LAX=ABS(R)/SQR(X*(1-X))
2510 TNQ=TNQ+(SN-QS)^2
2590 X=X+WW
2591 UNTIL X>1-1/N%
2592 MOR=MOR+Y(1)^2+(1-Y(N%))^2
2593 IF MAXK>ZKOL THEN BRK=BRK+1
2594 IF MOCQ$="ODBAC" THEN BRQ=BRQ+1
2595 PRINT TAB(3,10);BRQ
2596 IF SQR(N%)*(N%*MOR/2-1)>1.6449 THEN BRM=BRM+1
2597 IF SUP>ZSUP THEN BRSUP=BRSUP+1
2598 IF LAX>ZALFA THEN BRLAX=BRLAX+1
2601 IF TNQ+(1-Y(N%))^2>ZTNQ THEN BRTNQ=BRTNQ+1
2602 IF SMIR+(Y(N%)-(N%-1/2)/N%)^2+1/(12*N%)>0.4614 THEN BRS=BRS+
1
2605 PRINT TAB(13,10);BRTNQ:PRINTTAB(22,10);BRK:PRINT TAB(31,10);
BRS
2615 PRINTTAB(3,15);BRM;TAB(11,15);BRSUP
2616 PRINT TAB(40,15)" BRLAX=";BRLAX
2617 PRINT TAB(40,5)"SM=";SMIR,"  K=";MAXK
2618 PRINT TAB(40,7)"  I=";TNQ,"  MO=";MOR :PRINT TAB(40,9)" SUP=
";SUP
2619 NEXT
```

```
2621 PRINT TAB(3,3)"ISPITANO JE ";K%;" UZORAKA OBIMA ";N%
2622 PRINT TAB(3,4)"SA ";V%;" PODELA INTERVALA (0;1)"
2627 PRINT TAB(3,17);"MOC-EL";TAB(3,21);BRQ/K%
2641 PRINT TAB(11,17);"MOC-TNQ";TAB(13,21);BRTNQ/K%
2695 PRINT TAB(21,17);"MOC-KO";TAB(22,21);BRK/K%;TAB(30,17);"MOC-
SM";TAB(31,21);BRS/K%;TAB(21,12);"MOC-MO";TAB(21,15);BRM/K%;TAB(29
,12);"MOC-SUP";TAB(31,15);BRSUP/K%
2780END
2790DEF PROCEMPIRIJA(X)
2810 I%=INT(SN*N%)
2815 REPEAT
2820 I%=I%+1
2830 UNTIL Y(I%)>=X OR I%=N%
2835 SN=I%-1
2840ENDPROC
4000REM ULAZNE OPCIJE
4010PRINT"          UPOREDJIVANJE TESTA KOLMOGOROVA,SMIRNOVA I MO
RANA I TESTOVA BAZIRANIH NA RAZLICI EMPIRISKOG I KVANTILNOG PROCES
A."
4020PRINT"____________________________________________________________
____________________"
4030PRINT"          UPUTSTVO ZA PROMENE ULAZNIH VELIČINA:RASPODEL
E,PODELE X-OSE,MODA I SL."
4040PRINT
4050PRINT"          AKO ŽELITE DA PROMENITE RASPODELU ULAZNIH VEL
IČINA,OTKUCAJTE L.2200 I IZVRŠITE ODGOVARAJUĆU IZMENU."
4070PRINT"          AKO MENJATE MOD,OTKUCAJTE L.1430 I UBACITE ŽE
LJENI MOD"
4080PRINT"____________________________________________________________
____________________"
4090PRINT"          UNESITE TRAŽENE PODATKE:"
4100INPUT"          OBIM UZORKA N=",N%
4110INPUT"          BROJ UZORAKA K=",K%
4125 INPUT"          BROJ PODELA INTERVALA (0;1) JE ",V%
4130RETURN
5000 REM PODPROGRAM ZA NALAZENJE KRITIČNIH VREDNOSTI ZA ALFA=0.05
5010 IF N%=100 THEN ZKOL=1.34:ZTNQ=1.82:ZALFA=5.40:ZSUP=2.35:RETU
RN
5020 IF N%=200 THEN ZKOL=1.3581:ZTNQ=1.84:ZALFA=5.95:ZSUP=2.68:RE
TURN
5025 IF N%=500 THEN ZKOL=1.3581:ZTNQ=1.8456:ZALFA=6.20:ZSUP=2.70:
RETURN
5027 IF N%>=1000 THEN ZKOL=1.3581:ZTNQ=1.8456:ZALFA=6.28:ZSUP=2*Z
KOL:RETURN
5030 IF N%<>100 OR N%<>200 OR N%<>500 THEN ZKOL=1.3581:ZTNQ=1.845
6:ZALFA=6.28:ZSUP=2*ZKOL:RETURN
5500 REM PODPROGRAM ZA NALAZENJE KRITIČNIH VREDNOSTI ZA ALFA=0.01

5510 IF N%=100 THEN ZKOL=1.608:ZTNQ=2.92:ZALFA=7.5:ZSUP=2.94:RETU
RN
5520 IF N%=200 THEN ZKOL=1.6276:ZTNQ=2.94:ZALFA=7.98:ZSUP=3.15:RE
TURN
5530 IF N%=500 THEN ZKOL=1.6276:ZTNQ=2.97:ZALFA=8.10:ZSUP=3.20:RE
TURN
5540 IF N%>=1000 THEN ZKOL=1.6276:ZTNQ=2.974:ZALFA=8.12:ZSUP=2*ZK
OL:RETURN
5550 IF N%<>100 OR N%<>200 OR N%<>500 THEN ZKOL=1.6276:ZTNQ=2.974
:ZALFA=8.12:ZSUP=2*ZKOL:RETURN
```

III. 4. PRIMER 1.

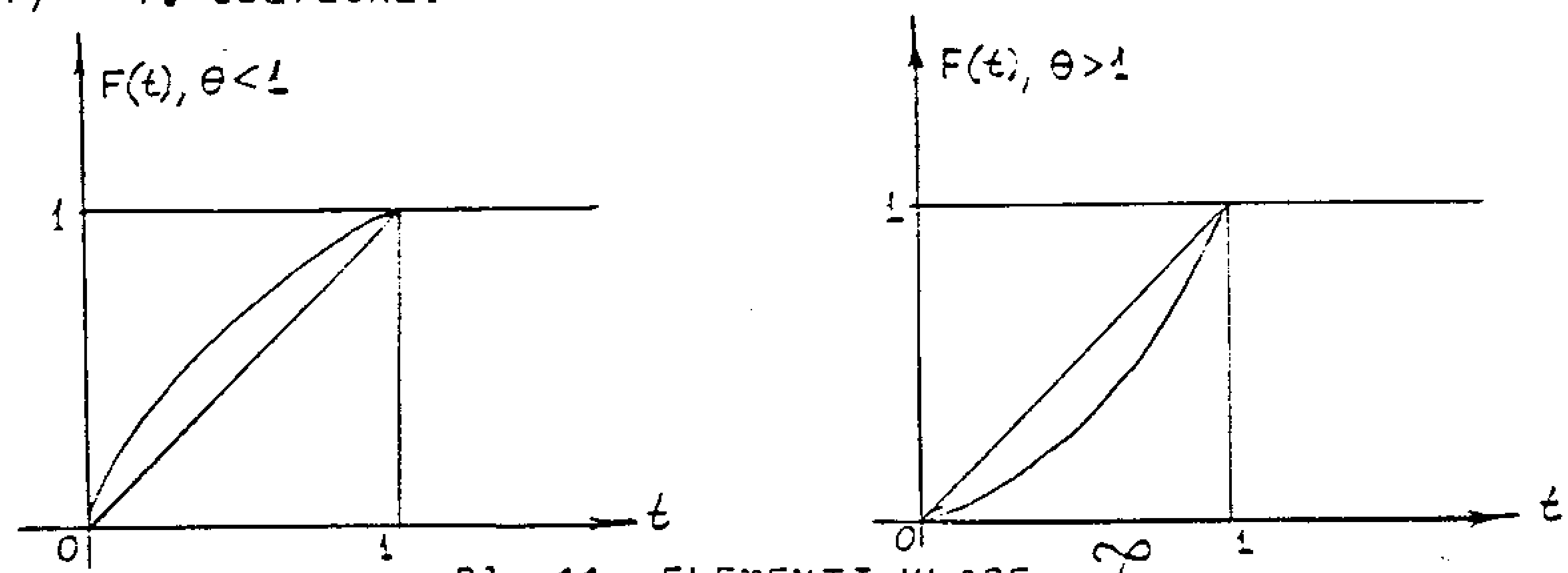
Prvi primer koji smo uradili je ispitivanje moći posmatranih testova za klasu alternativa oblika

$$\left\{ F(t,\theta)=t^{\theta},\ 0<\theta<\infty\ ,\ 0\leq t\leq 1 \right\}.$$

Naravno, mi ćemo detaljno razmotriti samo podklasu alternativa bliskih U(0;1) raspodeli, tj.

$$\mathcal{L}_{\theta} = \left\{ F(t,\theta)=t^{\theta},\ 0.55\leq\theta\leq 1.55,\quad 0\leq t\leq 1 \right\}.$$

Lako je videti da je funkcija raspodele $F(t) = F(t,\theta)$ neprekidna funkcija, da je dva puta diferencijabilna i da je $F''(t,\theta)$ ograničena u okolini svake tačke iz intervala (0;1) i konačno, da je $F'(t)>0$, tj. ispunjava uslove Bahadura. Takodje, $F(0) = 0$ i $F(1) = 1$. Grafički:



Sl. 11 ELEMENTI KLASE $\mathcal{L}_{\theta}$

Na računaru se slučajne promenljive sa funkcijom raspodele $F(t)=t^{\theta}$ generišu tako što se linija 2200 izvrši transformacija

2200 Y(I%) = (RND(1))∧a

(∧ - stepenovanje). Funkcija raspodele promenljive Y(I%) je oblika:

$$F(t) = P\left\{ Y<t \right\} = P\left\{ X^{a}<t \right\} = P\left\{ X<t^{\frac{1}{a}} \right\} = t^{\frac{1}{a}}.$$

Za $\theta = \frac{1}{a}$ $\quad F(t) = t^{\theta}$. (X = RND(1) : U(0;1)).

Na taj način smo dobili tabelu IV, na osnovu koje smo grafički predstavili funkcije moći (sl. 12), kao i odnos odgovarajućih intervala poverenja za moć testa integrala i test Kolmogorova (sl.13).

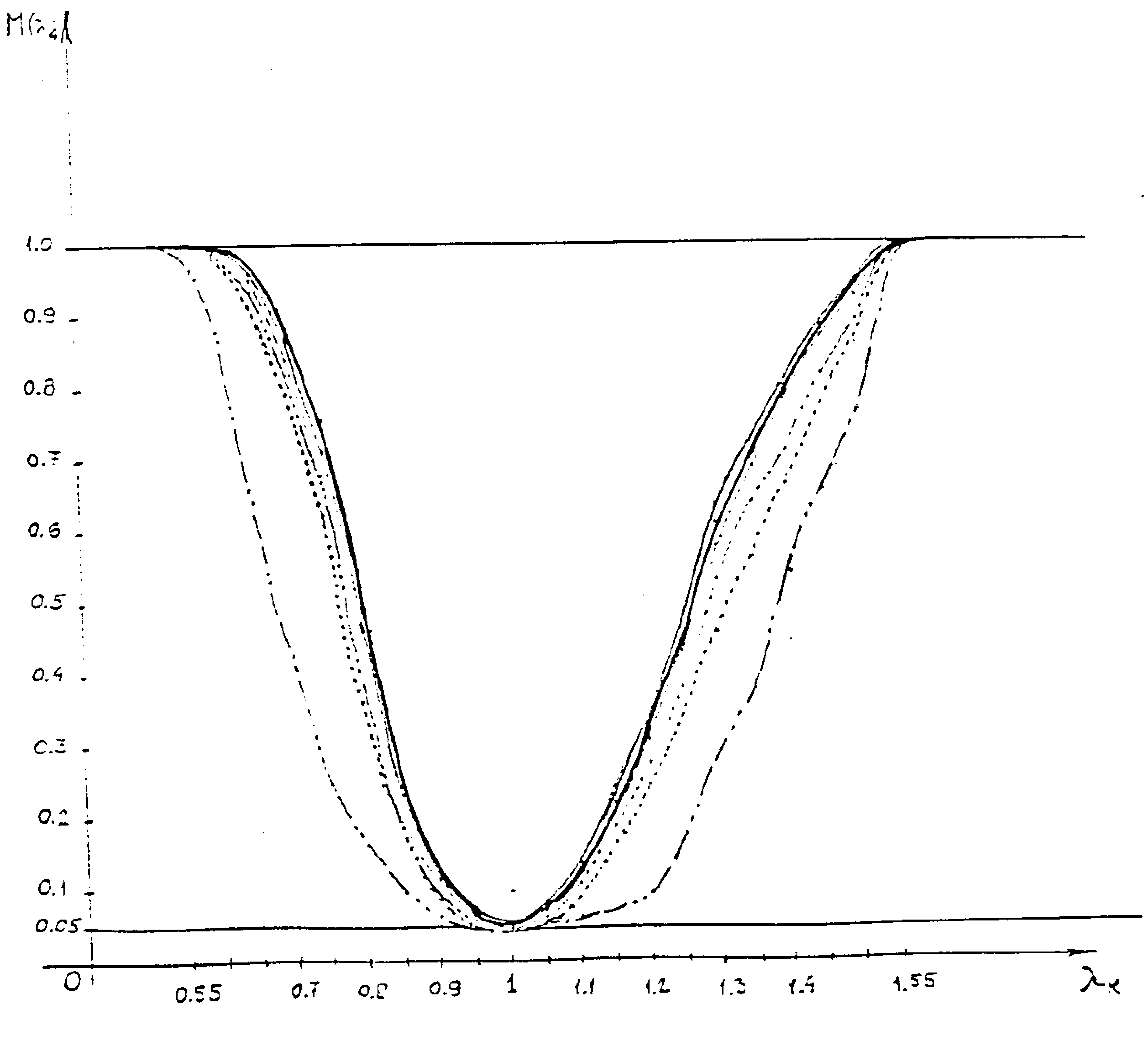
U tabeli V se nalaze granice posmatranih intervala poverenja. Za nivo poverenja smo uzeli $\beta = 0.95$.

Klasa funkcija $F(t)=t^{\theta}$ 0 t 1, $\theta = 1/\lambda_k$		prag značajnosti $\alpha=0.05$	obim uzorka N%=100	broj uzoraka K%=1000	broj podela V%=100	
λ_k	moć-suprem.	moć-integ.	moć-elipse	moć-Kolm.	moć-Smirn.	moć-Moran
0.55	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.985
0.60	0.990	0.991	0.992	0.984	0.995	0.880
0.65	0.935	0.959	0.956	0.931	0.963	0.644
0.70	0.819	0.866	0.841	0.793	0.882	0.426
0.75	0.659	0.710	0.652	0.616	0.753	0.249
0.80	0.384	0.463	0.383	0.359	0.493	0.159
0.85	0.186	0.231	0.186	0.182	0.248	0.091
0.90	0.089	0.111	0.083	0.081	0.125	0.059
0.95	0.052	0.062	0.055	0.047	0.061	0.005
1.00	0.047	0.05	0.05	0.046	0.05	0.049
1.05	0.061	0.075	0.073	0.055	0.069	0.053
1.10	0.104	0.134	0.132	0.088	0.126	0.056
1.15	0.186	0.242	0.228	0.164	0.221	0.065
1.20	0.272	0.342	0.319	0.243	0.307	0.089
1.25	0.378	0.471	0.428	0.339	0.442	0.175
1.30	0.528	0.634	0.576	0.454	0.609	0.289
1.35	0.637	0.719	0.638	0.558	0.707	0.377
1.40	0.708	0.809	0.794	0.662	0.799	0.543
1.45	0.815	0.887	0.869	0.779	0.883	0.654
1.50	0.892	0.943	0.927	0.858	0.940	0.769
1.55	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.996

TABELA IV: PRIMER 1: $F(t) = t^{\theta}$: Moć testova u pojedinim tačkama $\theta_k = \frac{1}{\lambda_k}$, $0.55 \leq \lambda_k \leq 1.55$

LEGENDA:

—…— test supremuma
——— test integrala
– – – – test elipse
——— test Smirnova
–·–·–·· test Morana
………… test Kolmogorova



Sl. 12 GRAFICI FUNKCIJA MOĆI POSMATRANIH TESTOVA

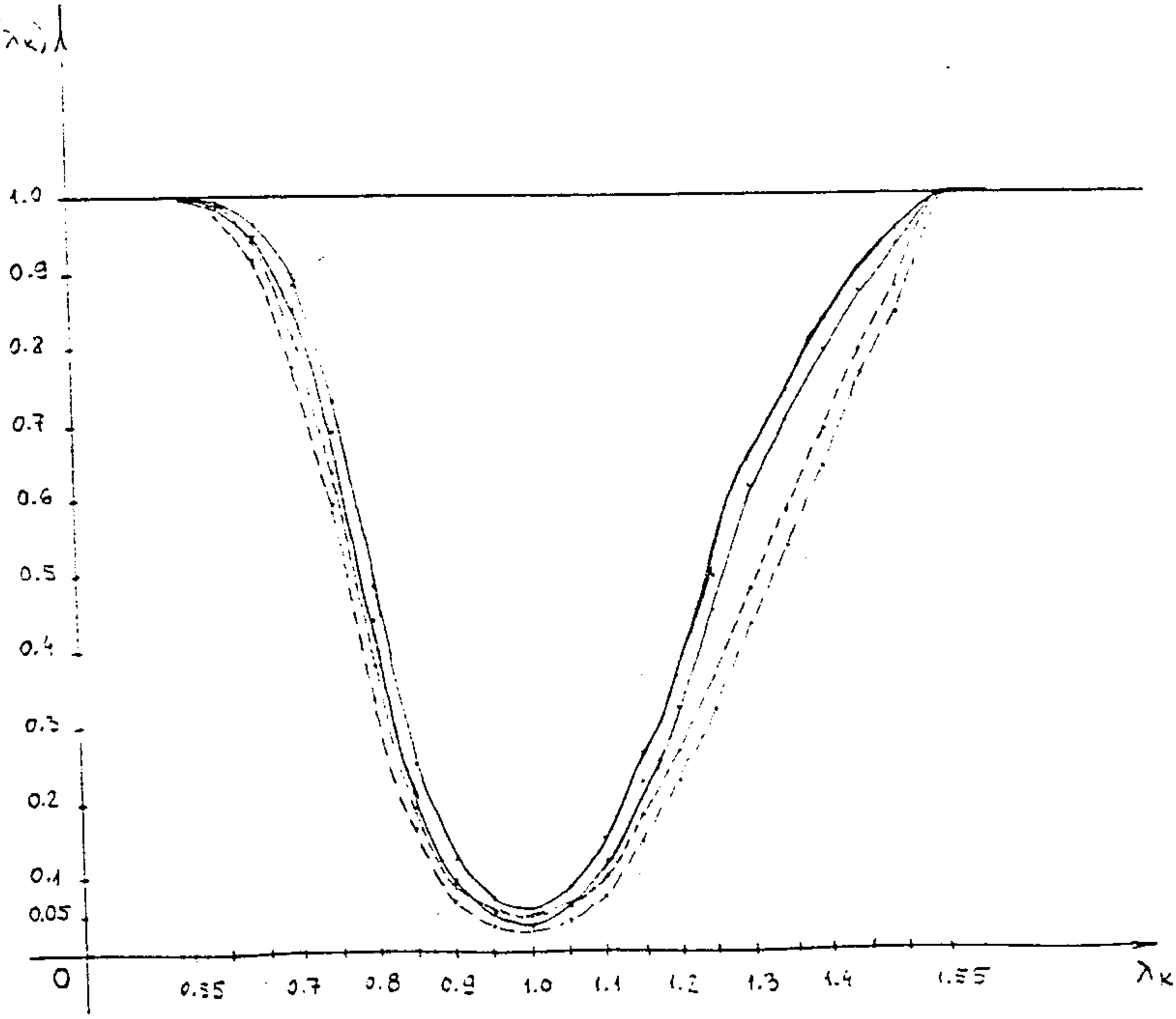
k=2000	TEST INTEGRALA			TEST KOLMOGOROVA		
λ_K	donja	ocena	gornja	donja	ocena	gornja
0.55	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
0.60	0.987	0.991	0.995	0.9785	0.984	0.9895
0.65	0.950	0.959	0.968	0.920	0.931	0.942
0.70	0.851	0.866	0.881	0.775	0.793	0.811
0.75	0.690	0.710	0.730	0.595	0.616	0.637
0.80	0.441	0.463	0.485	0.338	0.359	0.380
0.85	0.213	0.231	0.249	0.165	0.182	0.199
0.90	0.097	0.111	0.125	0.069	0.081	0.093
0.95	0.052	0.062	0.072	0.038	0.047	0.056
1.00	0.040	0.050	0.060	0.037	0.046	0.055
1.05	0.063	0.075	0.087	0.045	0.055	0.065
1.10	0.119	0.134	0.149	0.076	0.088	0.100
1.15	0.223	0.242	0.261	0.148	0.164	0.180
1.20	0,322	0.342	0.362	0.224	0.243	0.262
1.25	0.449	0.471	0.493	0.318	0.339	0.360
1.30	0.613	0.634	0.655	0.432	0.454	0.476
1.35	0.699	0.719	0.739	0.536	0.558	0.580
1.40	0.792	0.809	0.826	0.641	0.662	0.683
1.45	0.873	0.887	0.901	0.761	0.779	0.797
1.50	0.933	0.943	0.953	0.843	0.858	0.873
1.55	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000

TABELA V: GRANICE INTERVALA POVERENJA POSMATRANIH TESTOVA

LEGENDA:

- - - - - test Kolmogorova

———— test integrala



Sl. 13 INTERVALI POVERENJA ZA VREDNOSTI FUNKCIJA MOĆI TESTA INTEGRALA I TESTA KOLMOGOROVA U POJEDINIM TAČKAMA λ_k

Na osnovu dobijenih rezultata možemo zaključiti:

1. Test integrala je moćniji od testa Kolmogorova i testa Morana za klasu alternativa $F(t) = t^{\theta}$, i na osnovu tabele IV i slike 11 najmoćniji je za podklasu $F(t) = t^{\theta}$, $\theta < 1$.

2. Test Smirnov-fon Mizesa je najmoćniji za podklasu $F(t) = t^{\theta}$, $\theta > 1$.

3. Funkcije moći svih posmatranih testova imaju minimum za $\theta = 1$, odakle sledi da su svi napristrasni.

4. Moć testa supremuma je uvek iznad moći testa Kolmogorova i testa Morana (sl. 12), te mu mi dajemo prednost.

III.5. PRIMER 2.

Sledeći primer koji smo detaljno analizirali je klasa funkcija raspodele

$$\mathcal{A}_\theta = \left\{ F(t) = F(t,\theta) = \sqrt{\frac{(t+\theta)^2-\theta^2}{2\theta+1}}\,,\ 0 \leq t \leq 1,\ 0 < \theta < \infty \right\}$$

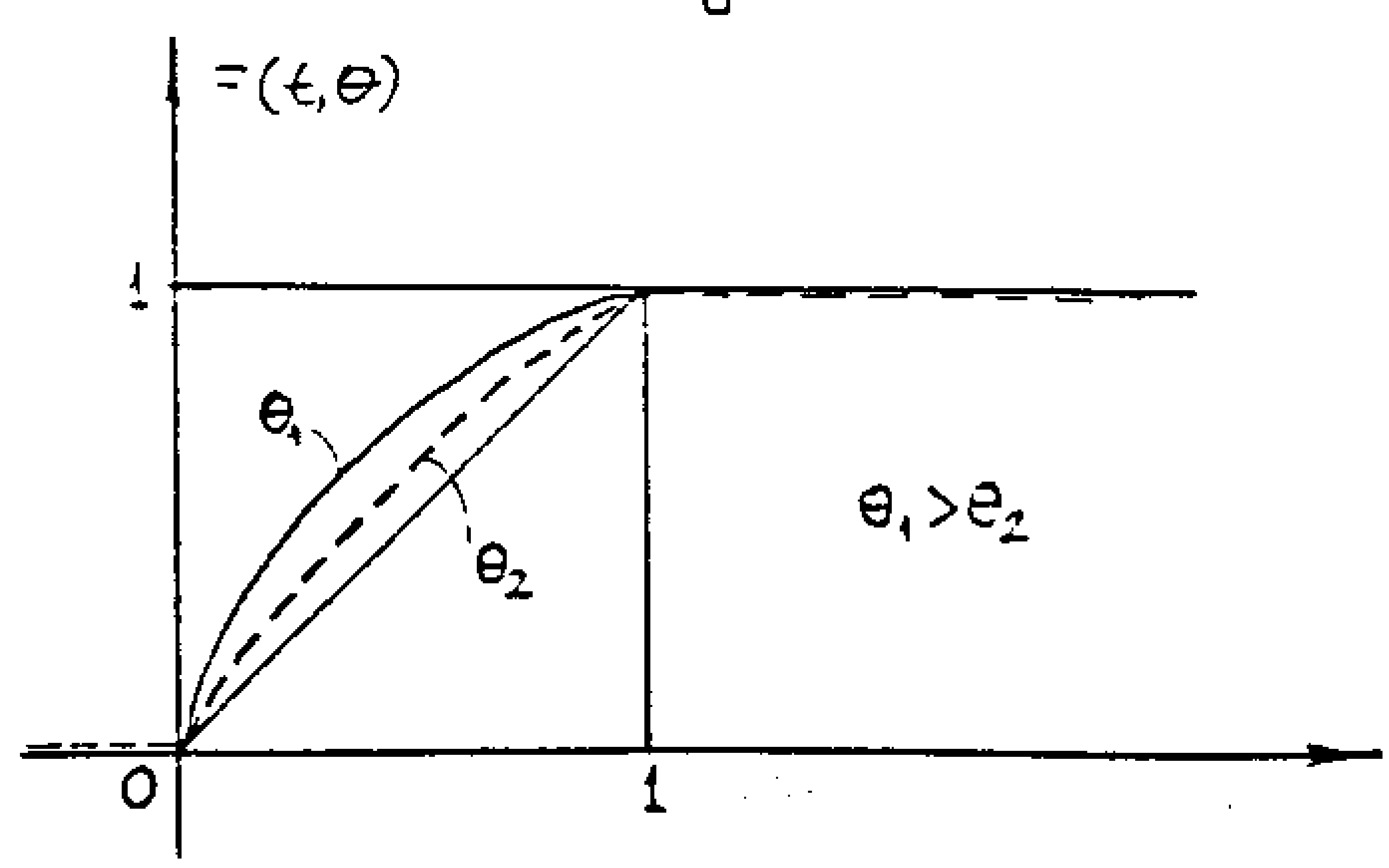
Kako je

$$\lim_{\theta \to 0} F(t,\theta) = t$$

za nas će biti od posebnog interesa alternative bliske $U(0;1)$ raspodeli, tj. podklasa

$$\mathcal{A}_\theta^{*} = \left\{ F(t,\theta) = \sqrt{\frac{(t+\theta)^2-\theta^2}{2\theta+1}}\,,\ 0 \leq t \leq 1,\ 0 < \theta \leq 0.3 \right\}.$$

Grafički, elementi klase $\mathcal{A}_\theta$ su oblika



Sl. 14: ELEMENTI KLASE $\mathcal{A}_\theta$

Lako je videti da $F(t, \theta) \in \mathcal{A}_\theta$ ispunjavaju uslove Bahadura i da je $F(0) = 0$ i $F(1) = 1$, za svako $\theta > 0$.

Kako smo realizovali familiju alternativa $\mathcal{A}_\theta$? Ubacivanjem nove linije 2175 TETA = ... i transformacijom naredbe 2200 u:

2200 Y(I%) = SQR(TETA∧2+(2·TETA+1)·(RND(1))∧2) - TETA

dobijamo da naš uzorak $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ jeste uzorak sa raspodelom $F(t) \in \mathcal{A}_\theta$, jer

$$F(t) = P\{Y < t\} = P\left\{\sqrt{\theta^2+(2\theta+1)X^2} - \theta < t\right\} =$$

$$= P\left\{\sqrt{\theta^2+(2\theta+1)\cdot X^2} < \theta+t\right\} =$$

$$= P\left\{X < \sqrt{\frac{(t+\theta)^2-\theta^2}{2\theta+1}}\right\} = \sqrt{\frac{(t+\theta)^2-\theta^2}{2\theta+1}},$$

za $0 < t < 1$, $\theta > 0$ (X = RND(1) : $U(0;1)$).

Menjajući vrednost parametra θ (=TETA) i koristeći ponovo 2000 uzoraka obima n=100, dobili smo tabelu VI, na osnovu koje smo grafički predstavili funkcije moći posmatranih testova (sl. 15), izračunali granice intervala poverenja za test elipse i test Smirnov-fon Mizesa (tabela VII) i grafički predstavili te rezultate (sl. 16).

$F(t)=\sqrt{\frac{(t+\theta)^2-\theta^2}{2\theta+1}}$ | prag značajnosti $\alpha=0.05$ | obim uzoraka N%=100 | broj uzoraka K%=2000 | broj podela V%=100

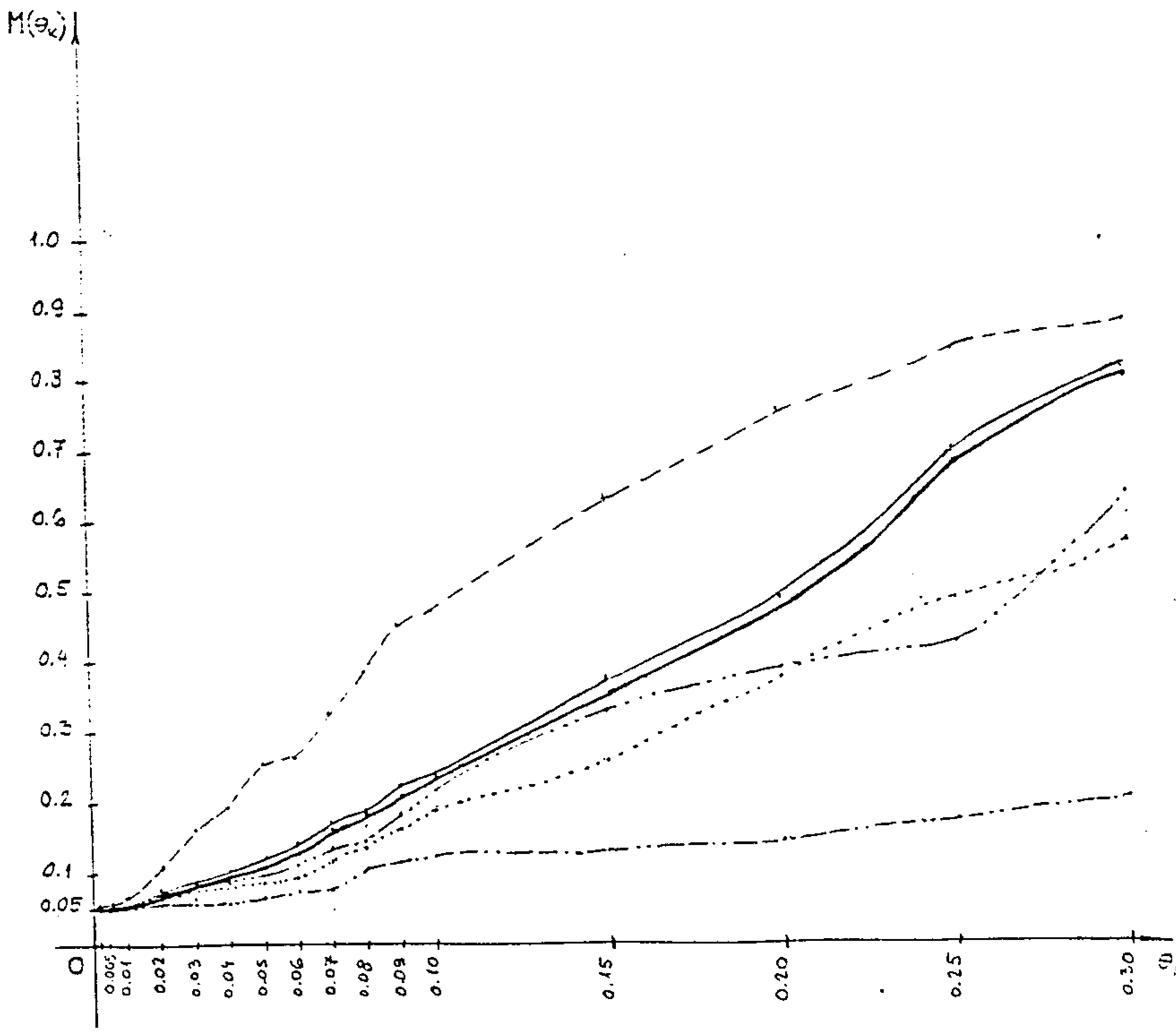
$0<\theta<0.3$, $0<t<1$

θ_k	moć-Morana	moć-supremum.	moć-elipse	moć-integr.	moć-Kolmog.	moć-Smirn.
0.002	0.05	0.05	0.056	0.05	0.05	0.05
0.005	0.05	0.05	0.060	0.05	0.05	0.05
0.01	0.052	0.053	0.066	0.052	0.05	0.05
0.02	0.056	0.063	0.108	0.068	0.051	0.07
0.03	0.057	0.079	0.160	0.087	0.063	0.087
0.04	0.058	0.087	0.191	0.101	0.073	0.097
0.05	0.067	0.096	0.255	0.122	0.074	0.110
0.06	0.072	0.112	0.262	0.143	0.093	0.133
0.07	0.076	0.137	0.328	0.174	0.117	0.163
0.08	0.104	0.145	0.386	0.190	0.135	0.181
0.09	0.113	0.182	0.452	0.223	0.162	0.208
0.1	0.125	0.216	0.472	0.243	0.186	0.236
0.15	0.130	0.323	0.634	0.377	0.258	0.357
0.20	0.149	0.393	0.758	0.497	0.380	0.478
0.25	0.172	0.428	0.849	0.702	0.499	0.689
0.30	0.205	0.641	0.884	0.820	0.570	0.802

TABELA VI: PRIMER 2: $F(t)=\sqrt{\frac{(t+\theta)^2-\theta^2}{2\theta+1}}$: MOĆ TESTOVA U TAČKAMA θ_k

LEGENDA:

- ——— test integrala
- – – – – test elipse
- ——— test Smirnova
- —· · ·— test supremuma
- – – · · – – · · test Morana
- · · · · · · · · test Kolmogorova

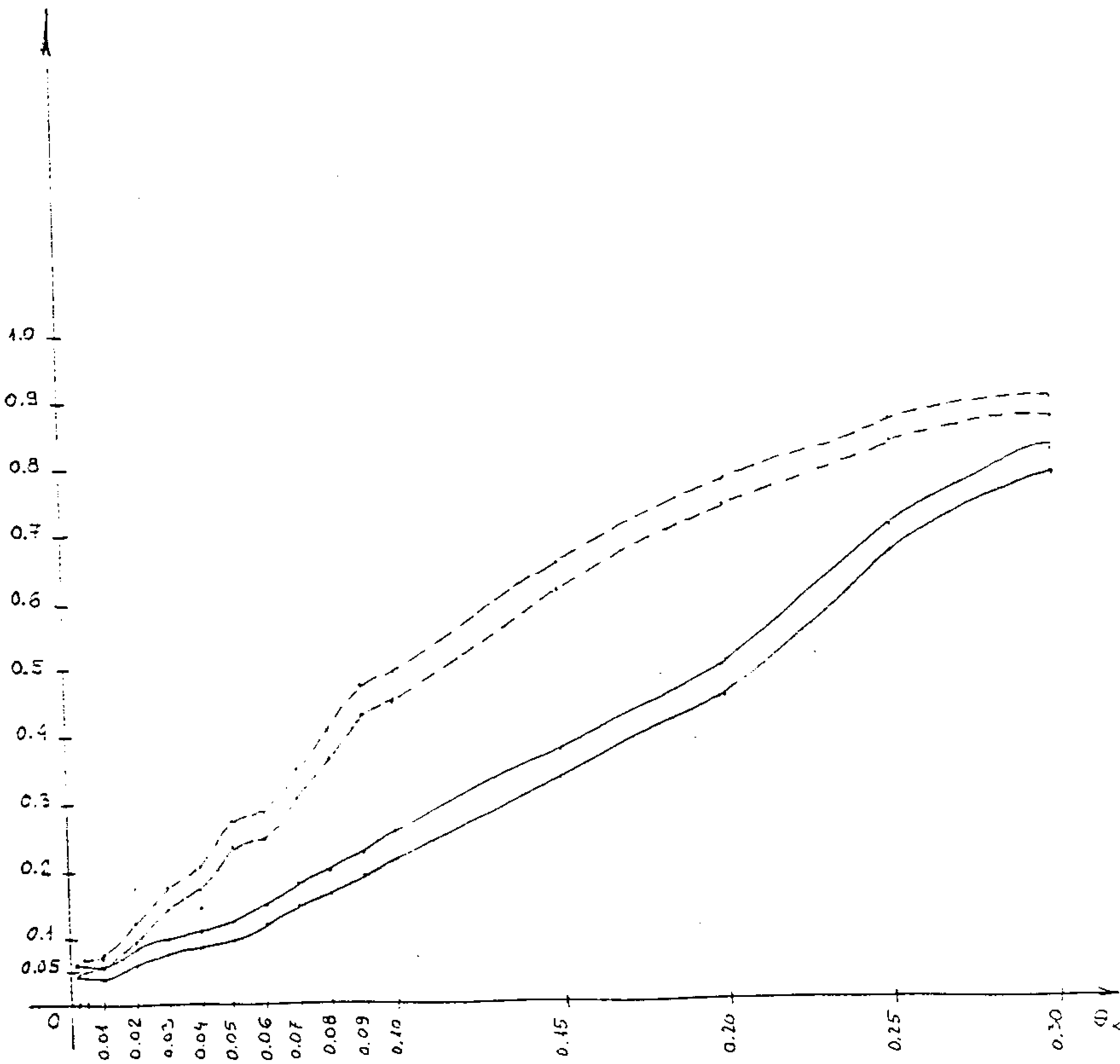


Sl. 15 GRAFICI FUNKCIJA MOĆI POSMATRANIH TESTOVA

Broj uzoraka	TEST ELIPSE			TEST SMIRNOVA		
θ	donja	ocena	gornja	donja	ocena	gornja
0.002	0.046	0.056	0.066	0.04	0.05	0.06
0.005	0.05	0.060	0.07	0.04	0.05	0.06
0.01	0.055	0.066	0.077	0.04	0.05	0.06
0.02	0.094	0.108	0.122	0.059	0.07	0.081
0.03	0.144	0.160	0.176	0.075	0.087	0.099
0.04	0.174	0.191	0.208	0.084	0.097	0.110
0.05	0.236	0.255	0.274	0.096	0.110	0.124
0.06	0.243	0.262	0.281	0.118	0.133	0.148
0.07	0.307	0.328	0.349	0.147	0.163	0.179
0.08	0.365	0.386	0.407	0.164	0.181	0.198
0.09	0.430	0.452	0.474	0.190	0.208	0.226
0.10	0.450	0.472	0.494	0.216	0.236	0.256
0.15	0.613	0.634	0.655	0.336	0.357	0.378
0.20	0.739	0.758	0.777	0.455	0.478	0.501
0.25	0.833	0.849	0.865	0.669	0.689	0.709
0.30	0.870	0.884	0.898	0.784	0.802	0.820

TABELA VII: PRIMER 2: GRANICE INTERVALA POVERENJA POSMATRANIH TESTOVA

LEGENDA:
——— test Smirnova
– – – – test elipse



Sl. 16 INTERVALI POVERENJA ZA VREDNOSTI FUNKCIJA MOĆI TESTA ELIPSE I TESTA SMIRNOV-FON MIRESA U POJEDINIM TAČKAMA θ_k

Na osnovu dobijenih rezultata možemo zaključiti:

1. Test elipse je najmoćniji za klasu alternativa $\mathcal{H}_{\theta}^{*}$.
2. Moć testa integrala je uvek veća od ostalih (u "mernim" tačkama), osim od moći testa elipse.
3. Grafici funkcija moći testa supremuma i testa Kolmogorova se "prepliću", što ni jednom ne daje prednost.
4. Moć Morana je i za ovu klasu alternativa najmanja. Test Morana pokazuje svoju prednost kod alternativa koje je proučavao Čepman u [8] (III.2).
5. Svi testovi su nepristrasni.

NAPOMENA UZ III DEO:

Na osnovu velikog broja ispitivanih funkcija raspodela koje ispunjavaju uslove Bahadura, došli smo do zaključka da su testovi integrala i test elipse moćniji od nekih postojećih, za neke klase alternativa. Ispitivanja smo vršili i za uzorke obima 200, 500, 1000, 2000, ... , 7500, ali za manji broj uzoraka i svi rezultati su se potvrdili.

U daljem radu na ovoj problematici, korisno je na nekom moćnijem računaru napraviti uporednu tabelu moći raznih testova (uključujući i naše) za različite alternative, koja bi mogla da posluži kao priručnik svakom ko u svom radu koristi testiranje neparametarskih hipoteza.

D O D A T A K
(A)

PROGRAM II

U toku proučavanja procesa $Z_n(t)$ i funkcionala nad njim, pojavila se potreba ispitivanja njegovog ponašanja pri različitim obimima uzoraka i različitim podelama intervala $(0;1)$, kao i provera dobijenih teorijskih rezultata (asimptotsko ponašanje kad $n \to \infty$). U tom cilju je napravljen program koji analitički i grafički proverava dobijene rezultate. (Konvergenciju ka dvostrukom Braunovom mostu, maksimalne razlike i sl.). Program daje mogućnost jednostavne manipulacije sa ulaznim veličinama:

N - obim uzorka

K - broj uzoraka

V - podela intervala $(0;1)$

α - prag značajnosti

kao i promenom raspodele ulaznih veličina na liniji 2200, isto kao i u programu 1.

Algoritam i program slede u nastavku. Program ima dve opcije: 1 i 2.

Opcija 1: Program bira jedan uzorak obima N i grafički predstavlja procese $Z_n(t)$ i $2B_n(t)$, gde je $B_n(t) = \sqrt{n}(F_n(t)-t)$ i u svakoj tački t ispituje i grafički predstavlja razliku $P_n(t)=Z_n(t)-2B_n(t)$. Za taj isti uzorak možemo promeniti podelu intervala $(0;1)$ (linija 7450), sliku možemo uvećati ili smanjiti ("zumirati") promenom vrednosti veličine RAZMAZ. Takodje, za taj isti uzorak možemo promeniti raspodelu ulaznih veličina, tj. možemo izvršiti transformaciju postojećeg uzorka i razmotriti ponašanje posmatranih procesa.

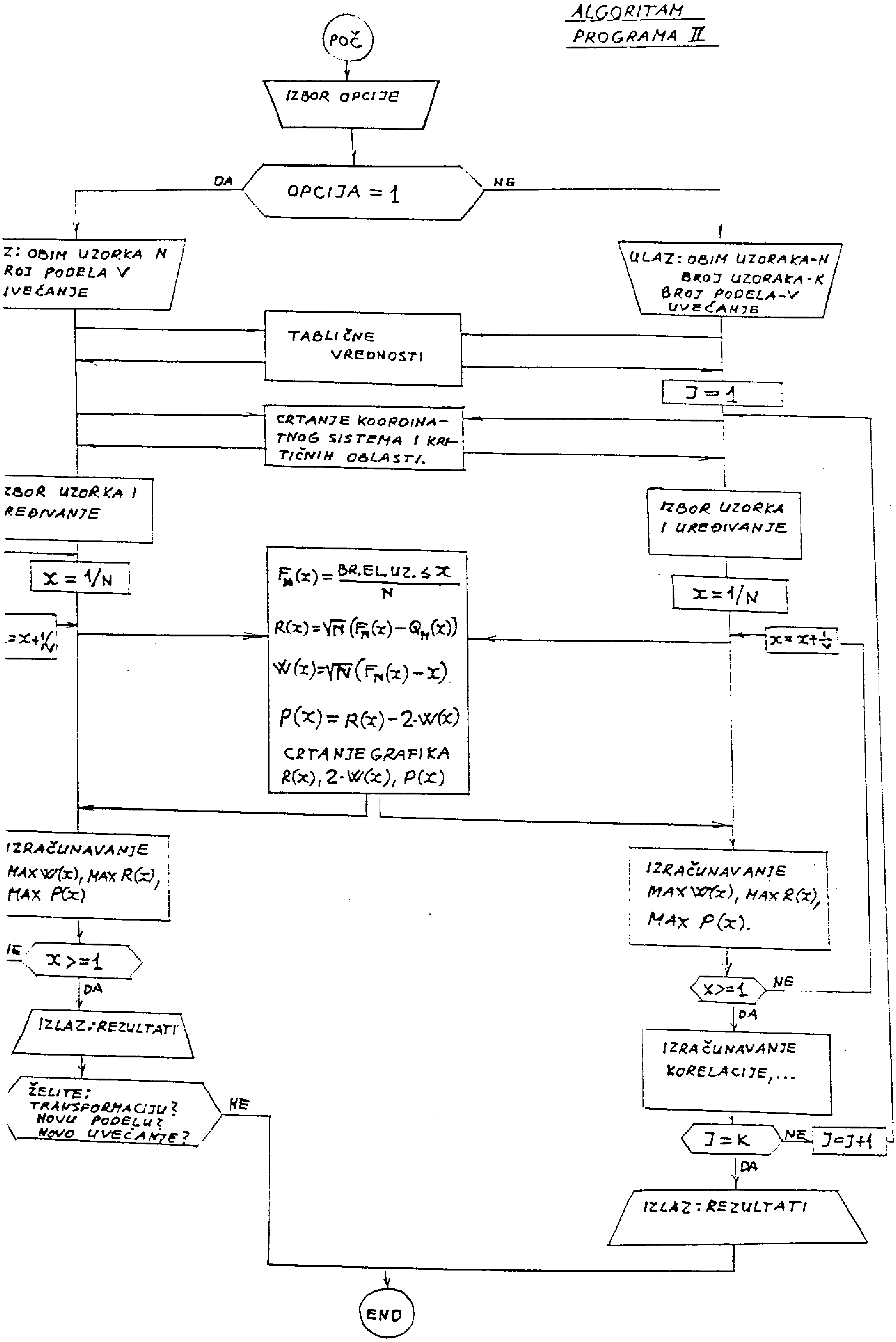
aj način se jedan uzorak obima N može svestrano analizirati. rezultati se mogu odštampati i tako sačuvati za dalju analizu.

ja 2: U opciji 2 biramo k uzoraka obima N sa proizvoljnom pom V intervala (0;1), sa mogućnošću "zumiranja" i promenom ra- ele ulaznih veličina. Program računa vrednost razlike $P_n(t) =$ $(t) - 2D_n(t)$ i grafički je predstavlja, računa korelaciju iz- u $Z_n(t)$ i $2D_n(t)$, slično kao u opciji 1. Takodje, program iz- nava realizaciju statistike SUP_n i $2D_n$ i računa ocenu te raz- . (srednju vrednost).

Uz male transformacije, program II smo koristili za crta- jednog broja slika u ovom radu.

Kako i program II koristi istu mašinsku rutinu za brzo iranje kao program I, to je u programu II izostavljamo.

ALGORITAM PROGRAMA II



PROGRAM II

```
......
2000 CLS
2005 PRINT TAB(3,3);CHR$(130);"IZABERITE OPCIJU"
2006PRINT TAB(3,10);CHR$(130);"1_TRETMAN JEDNOG UZORKA"
2007 PRINT TAB(3,15);CHR$(130);"2_TRETMAN VISE UZORAKA"
2008 INPUT ODGOVOR$
2009IF ODGOVOR$="1" THEN GOTO 7000
2010 GOSUB 4000
2013 MODE 1
2015 VDU 24,1;1;1250;790;
2016 VDU 28,1,6,38,1
2017 COLOUR 129
2018 GCOL 0,130
2019 CLG
2020 GCOL 0,0
2021 MOVE 200,0
2030 GOSUB 6000
2040 REM CRTANJE KOORDINATNOG SISTEMA
2050 GOSUB 12000
2170DIM Y(N%),MAX(K%),LAX(K%)
2174 T=0:WW=1/V%:TIME=HOUR*360000+MINUT*6000
2175 REM IZBOR UZORKA I NJEGOVA OBRADA
2180FOR J%=1 TO K%
2190FOR I%=1 TO N%
2200 Y(I%)=RND(1)
2220NEXT
2260 NUMBER%=N%
2270CALL SORT,NUMBER%,Y(1)
2360MAX(J%)=0:LAX(J%)=0:P=0:R=0:W=0:SN=0
2361 REM CRTANJE "ELIPSE"
2362 GOSUB 10000
2375 X=WW
2380 REPEAT
2390PROCEMPIRIJA(X)
2400SN=SN/N%
2420P=R-W
2425 REM CRTANJE PROCESA Zn(t),2*B(t) I "ŠUMA" Vn*Rn(t)
2430 GOSUB 11000
2450 IF MAX(J%)<ABS(R) THEN MAX(J%)=ABS(R)
2580IF LAX(J%)<ABS(W) THEN LAX(J%)=ABS(W)
2590 X=X+WW
2591 SEC=(TIME DIV 100)MOD 60:MIN=(TIME DIV 6000)MOD 60:HR=(TIME
DIV 360000)MOD 24:PRINTTAB(1,1);HR;":";MIN;":";SEC
2592 UNTIL X>=1
2595 PRINT "         ";"MAKSIMUMI ZA UZORAK BROJ  ";J%;" SU ";"   ";
MAX(J%);"   ";LAX(J%)
2601 T=T+MAX(J%)-LAX(J%)
2611 CLG
2612 GOSUB 12000
2613 NEXT
2614 GOSUB 12000
2616 GOSUB 10000
2627 PRINT"         "; "SREDNJA VREDNOST RAZLIKA PROCESA Zn(t) I DV
OSTRUKOG MOSTA JE  ";T/K%
```

```
2640GCOL 0,3
2690GCOL 0,0:X=1/K%:MOVE 200,400
2700FOR J%=1 TO K%
2710DRAW 1000*X+200,RAZ*MAX(J%)+400
2720X=X+1/K%
2730NEXT
2740GCOL 0,1:X=1/K%:MOVE 200,400
2745 FOR J%=1 TO K%
2750DRAW 1000*X+200,RAZ*LAX(J%)+400
2760X=X+1/K%
2770NEXT
2771 GOSUB 3000
2776INPUT"        DA LI ŽELITE SVE REZULTATE-ODGOVORITE SA DA ILI
NE",ODG$
2777IF ODG$="DA" THEN PROCREZ
2778 GOSUB 5000
2780END
2790DEF PROCEMPIRIJA(X)
2810 I%=INT(SN*N%)
2815 REPEAT
2816 I%=I%+1
2820 UNTIL Y(I%)>=X OR I%=N%
2835 SN=I%-1
2840ENDPROC
2895 DEFPROCREZ
2897 CLS
2899 VDU 28,1,31,38,5
2900 CLS
2910PRINT CHR$(129)"        UZORCI SU OBIMA";N%
2920PRINT CHR$(130)"        BROJ UZORAKA JE ";K%
2925 PRINT"        BROJ PODELA INTERVALA (0;1) JE ";V%
2930PRINT CHR$(131)"        KRITICNA VREDNOST JE ";ZALFA
2931 PRINT CHR$(132)"        SREDNJA VREDNOST RAZLIKE PROCESA Zn(t
) I DVOSTRUKOG BRAUNOVOG MOSTA                  JE ";T/K%
2932 PRINT"        KOEFICIJENT KORELACIJE JE ";R
2933 PRINT"        PRAVA LINEARNE REGRESIJE JE:",
2934 PRINT"        Y=";ALFA;"*X+";BETA
2935 PRINT"        UTROŠENO VREME:";HR;":";MIN;":";SEC
2940ENDPROC
3000 REM POTPROGRAM ZA IZRAČUNAVANJE KORELACIJE
3010A=0:B=0:C=0:R=0:D=0:Q=0
3020FOR L%=1 TO K%
3030A=A+MAX(L%)*LAX(L%)
3040B=B+MAX(L%)
3050C=C+LAX(L%)
3060D=D+MAX(L%)^2
3070Q=Q+LAX(L%)^2
3080NEXT
3090A=A/K%:B=B/K%:C=C/K%:D=D/K%:Q=Q/K%
3100R=(A-B*C)/SQR((D-B^2)*(Q-C^2))
3110ALFA=(A-B*C)/(D-B^2)
3120BETA=C-ALFA*B
3130RETURN
4000REM ULAZNE OPCIJE
```

```
4001 CLS
4002 VDU 14
4010PRINT CHR$(130);"                 UPOREDJIVANJE BRAUNOVOG MOSTA"
4011PRINT CHR$(130);"  I PROCESA BAZIRANOG NA RAZLICI EMPIRI"
4012PRINT CHR$(130);"SKOG I KVANTILNOG PROCESA."
4020PRINT CHR$(130);"______________________________________"
4021PRINT CHR$(130);"______________________________________"
4030PRINT CHR$(130);"                 UPUTSTVO ZA PROMENE ULAZNIH V"
4031PRINT CHR$(130);"ELIČINA:RASPODELE,PODELE X-OSE I SL."
4040PRINT
4050PRINT CHR$(130);"                 AKO ŽELITE DA PROMENITE RASPO"
4051PRINT CHR$(130);"DELU ULAZNIH VELIČINA,OTKUCAJTE L.2000 "
4052PRINT CHR$(130);"I IZVRŠITE ODGOVARAJUĆU IZMENU."
4070PRINT CHR$(130);"                 AKO MENJATE MOD,OTKUCAJTE L.2"
4071PRINT CHR$(130);"020"
4080PRINT CHR$(130);"______________________________________"
4081PRINT CHR$(130);"______________________________________"

4085 PRINT CHR$(130);"AKO ŽELITE DA VAM SE REZULTATI ŠTAMPAJU "
4086PRINT CHR$(130);"NA PRINTERU,UBACITE SLEDEĆE LINIJE:2905 "
4087PRINT CHR$(130);"VDU 2 (AKO ŽELITE SPECIJALNA SLOVA,NAST"
4088 PRINT CHR$(130);"AVITE SA  :VDU 1,15) I 2937 VDU 3 "
4089PRINT CHR$(130);"______________________________________"
4090PRINT CHR$(130);"______________________________________"
4091PRINT CHR$(129);"              UNESITE TRAŽENE PODATKE:"
4092 CLS
4093 PRINT TAB(3,3);CHR$(130);"           OBIM UZORKA N=":INPUT TA
B(28,3) N%
4100 PRINT TAB(3,5);CHR$(130);"           BROJ UZORAKA K=":INPUT T
AB(29,5) K%
4120PRINT TAB(3,7);CHR$(130);"RAZMAZ ODGOVARAJUĆIH VELIČINA JE ":
INPUT TAB(37,7) RAZ
4125  PRINT TAB(3,9);CHR$(130);"BROJ PODELA INTERVALA (0;1) JE ":
INPUT TAB(37,9) V%
4130 PRINT TAB(3,11);CHR$(130);"SATI":INPUT TAB(28,11) HOUR
4140 PRINT TAB(3,13);CHR$(130);"MINUTA":INPUT TAB(28,13) MINUT
4149 VDU 15
4150 RETURN
5000REM ŠTAMPANJE UZORAKA
5010INPUT"           DA LI ŽELITE DA VAM SE OTŠTAMPAJU REZULTATI S
VIH MERENJA-ODGOVORITE SA DA ILI NE",ANSVER$
5020IF ANSVER$<>"DA" THEN RETURN
5030VDU 2
5040PRINT"         BROJ UZORKA  MAX ZA  Zn(t)   MAX ZA DVOSTRUKI M
OST     RAZLIKE"
5050FOR I%=1 TO K%
5060PRINT"              ";I%;"           ";MAX(I%);"           ";LAX(I%)
;"           ";ABS(MAX(I%)-LAX(I%))
5070NEXT
5080VDU 3
5090RETURN
6000 REM TABLIČNE VREDNOSTI
6010IF N%=100 THEN ZALFA=1.340:ZAQ=5.40:RETURN
6020IF N%=200  THEN ZALFA=1.3581:ZAQ=5.95:RETURN
```

```
6030IF N%=500 THEN ZALFA=1.3581:ZAQ=6.20:RETURN
6040IF N%>500 THEN ZALFA=1.3581:ZAQ=6.28:RETURN
6060IF N%<>100 OR N%<>200 OR N%<>500  THEN ZALFA=1.3581:ZAQ=6.28:
RETURN
7000 REM TRETMAN JEDNOG UZORKA U RAZLIĆITIM OPCIJAMA
7005 A$="Z(I%)"
7010 GOSUB 8500
7015DIM Y(N%),Z(N%)
7016 REM IZBOR UZORKA
7020 FOR I%=1 TO N%
7030 Z(I%)=RND(1)
7040 NEXT
7050 NUMBER%=N%
7060 CALL SORT,NUMBER%,Z(1)
7070MODE 1
7071 REM TRANSFORMACIJA UZORKA
7072 FOR I%=1 TO N%
7074 Y(I%)=Z(I%)
7076 NEXT
7077 REM CRTANJE KOORDINATNOG SISTEMA
7080VDU 24,1;1;1250;790;
7090VDU 28,1,6,38,1
7100COLOUR 129
7110GCOL 0,130
7120CLG
7130GCOL 0,0
7140GOSUB 6000
7160
7170 GOSUB 12000
7230P=0:R=0:W=0:WW=1/V%:MAX=0:LAX=0:NAX=0:SN=0
7231 REM CRTANJE "ELIPSE"
7232 GOSUB 10000
7240X=WW
7250REPEAT
7260PROCEMPIRIJA(X)
7270SN=SN/N%
7280P=R-W
7285 IF NAX<ABS(P) THEN NAX=ABS(P)
7286 REM CRTANJE "ŠUMA" Vn*Rn(t),PROCESA Zn(t) I DVOSTRUKOG MOSTA
B(t)
7290 GOSUB 11000
7300 IF MAX<R THEN MAX=R
7405 IF LAX<W THEN LAX=W
7410X=X+WW
7420UNTIL X>=1
7430PRINT "          ";"MAXSIMALNE VREDNOSTI PROCESA Zn(t) I DVOSTRU
KOG BRAUNOVOG MOSTA SU ";MAX;"       ";LAX
7435PRINT"          NAJVEĆA RAZLIKA IZMEDJU TA DVA PROCESA JE ";NAX

7440 INPUT"          DA LI ŽELITE ŠTAMPANJE?ODGOVORITE SA Y/N",ODVR$

7441 IF ODVR$="Y" THEN GOSUB 9000
7442 INPUT"          AKO ŽELITE DA IZVRŠITE TRANSFORMACIJU OVOG UZOR
KA ODGOVORITE SA DA ILI NE",FRED$
```

```
7444 IF FRED$="DA" THEN GOSUB 8000
7450 INPUT"          AKO ŽELITE DA TAJ ISTI UZORAK ISPITATE ZA NEKU
DRUGU PODELU INTERVALA (0,1) OTKUCAJTE Y/N",Y$
7451 IF Y$<>"Y"THEN GOTO 7455
7452 INPUT"          UNESITE PODELU",V%
7455 INPUT"          AKO ŽELITE NEKI DRUGI RAZMAZ ODGOVORITE SA Y/N"
,RAZ$
7456 IF RAZ$<>"Y" THEN GOTO 7458
7457 INPUT"          UNESITE RAZMAZ",RAZ
7458 CLG
7460 GOTO 7160
8000REM POTPROGRAM ZA IZMENU RASPODELE UZORKA
8005 INPUT A$
8010FOR I%=1 TO N%
8020Y(I%)=EVAL(A$)
8030NEXT
8040RETURN
8500REM ULAZNE OPCIJE ZA TRETMAN JEDNOG UZORKA
8501 CLS
8502 VDU 14
8510PRINT CHR$(130);"          UPOREDJIVANJE BRAUNOVOG MOSTA"
8511PRINT CHR$(130);"  I PROCESA BAZIRANOG NA RAZLICI EMPIRI"
8512PRINT CHR$(130);"SKOG I KVANTILNOG PROCESA."
8520PRINT CHR$(130);"_______________________________________"
8521PRINT CHR$(130);"_______________________________________"
8530PRINT CHR$(129)"          UPUTSTVO ZA PROMENE ULAZNIH "
8531PRINT CHR$(129)"VELIČINA"
8540PRINT CHR$(130)"          AKO ŽELITE DA PROMENITE RASPO"
8541PRINT CHR$(130)"DELU ULAZNIH VELIČINA,POSLE ZNAKA PITA"
8542 PRINT CHR$(130)"NJA IZVRŠITE ODGOVARAJUĆU IZMENU PRI ČE"
8543 PRINT CHR$(130)"MU VAM JE ULAZNA VELIČINA Z(I%)!"
8550PRINT CHR$(130);"_______________________________________"
8551PRINT CHR$(130);"_______________________________________"
8560PRINT CHR$(130);"AKO ŽELITE DA VAM SE REZULTATI ŠTAMPAJU"
8561PRINT CHR$(130);" NA PRINTERU,SAM RAČUNAR ĆE DA VAS TO "
8562PRINT CHR$(130);"PITA,JEDINO AKO ŽELITE SPECIJALNA SLOVA"
8563PRINT CHR$(130);"OTKUCAJTE 9006 VDU 1,15"
8570PRINT CHR$(130);"_______________________________________"
8571PRINT CHR$(130);"_______________________________________"
8580PRINT CHR$(129);"          UNESITE TRAŽENE PODATKE:"
8585 CLS
8590 PRINTTAB(3,3);CHR$(130);"          OBIM UZORKA N=":INPUT TAB
(31,3) N%
8610 PRINTTAB(3,5);CHR$(130);"RAZMAZ ODGOVARAJUĆIH VELIČINA JE":I
NPUT TAB(36,5) RAZ
8620PRINTTAB(3,7);CHR$(130);"BROJ PODELA INTERVALA (0;1) JE ":INP
UT TAB(35,7)V%
8629 VDU 15
8630RETURN
9000 REM POTPROGRAM ZA ŠTAMPANJE REZULTATA ANALIZE JEDNOG UZORKA

9005 VDU 2
9007PRINT"          ______________________________________________
______________"
```

```
9008 PRINT
9010PRINT"          REALIZOVANE VREDNOSTI STATISTIKA Zn(t) I 2*B(t)
SU:"
9020PRINT"          ";MAX;"      I      ";LAX
9030PRINT"          OBIM UZORKA JE ";N%
9040PRINT"          NAJVEĆA RAZLIKA IZMEDJU Zn(t) I 2*B(t) JE  ";NA
<
9050PRINT"          INTERVAL (0;1) JE PODELJEN NA ";V%;" DELOVA"
9060PRINT"          KRITIĆNA VREDNOST JE ";ZALFA
9070PRINT"          TRANSFORMACIJA UZORKA JE ";A$
9080VDU 3
9090RETURN
10000 REM CRTANJE "ELIPSE"
10010 X=WW:REPEAT:DRAW 1000*X+200,RAZ*(ZAQ*SQR(X*(1-X)))+400:X=X+W
W:UNTIL X>=1:MOVE 200,400
10020 X=WW:REPEAT:DRAW 1000*X+200,-(RAZ*(ZAQ*SQR(X*(1-X))))+400:X=
X+WW:UNTIL X>=1:MOVE 200,400
10030 RETURN
11000REM CRTANJE "ŠUMA" √n*RN(t)
11010GCOL 0,3
11020VDU 25,5,1000*X+200;RAZ*P+400;
11030MOVE 1000*(X-WW)+200,RAZ*R+400
11040Q=Y(INT(N%*X))
11050R=SQR(N%)*(SN-Q)
11060REM CRTANJE PROCESA ZN(t)
11070GCOL 0,0
11080VDU 25,5,1000*X+200;RAZ*R+400;
11090MOVE 1000*(X-WW)+200,RAZ*W+400
11110W=2*SQR(N%)*(SN-X)
11120REM CRTANJE DVOSTRUKOG BRAUNOVOG MOSTA B(t)
11130GCOL 0,1
11140VDU 25,5,1000*X+200;RAZ*W+400;
11150MOVE 1000*X-200,RAZ*P+400
11160RETURN
12000 REM CRTANJE TABLICE
12050GCOL 0,0
12060 MOVE 200,0
12070DRAW 200,1000
12080MOVE 200,400
12090DRAW 1250,400
12100MOVE 200,2*ZALFA*RAZ+400
12110DRAW 1250,2*ZALFA*RAZ+400
12120MOVE 200,400
12130RETURN
>VDU 3
```

L I T E R A T U R A

1. BAHADUR R.R.: A NOTE ON QUANTILES IN LARGE SAMPLES, Ann. Math. Statistics, 37, 1966, 577-580.
2. БАРРА Ж.Р.: ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ, Москва, "МИР", 1974.
3. БИЛЛИНГСЛИ П.: СХОДИМОСТЬ ВЕРОЯТНОСТНЫХ МЕР, Москва, "НАУКА", 197
4. БИКЕЛ П. ДОКСАМ К.: МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА, Москва, "ФИНАНСЫ И СТАТИСТИКА", 1983.
5. БОРОВКОВ А.А.: МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА, Москва, "НАУКА", 1984.
6. БОРОВКОВ А.А.: МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА, /ДОПОЛНИ ТЕЛЬНЫЕ ГЛАВЫ/ Москва, "НАУКА", 1984.
7. BRAY, DICKENS HOLMES: THE ADVANCED USER GUIDE FOR THE BBC MICRO, London, BBC, 1983.
8. CHAPMAN D.G.: A COMPARATIVE STUDY OF SEVERAL ONE-SIDED GOODNESS - OF - FIT TESTS, Ann. of Statistics, 29, 655-674
9. COX D.R. MILLER H.D.: THE THEORY OF STOCHASTICS PROCESSES, London, Chapman and Hall, 1965.
10. COLL J.: USER GUIDE FOR BBC MICRO, London, BBC, 1982.
11. CSÖRGŐ RÉVÉSZ: STRONG APPROXIMATIONS IN PROBABILITY AND STATISTICS, Budapest, Acadêmiai Kiadó, 1981.
12. ЧИБИСОВ Д.М.: К ИССЛЕДОВАНИЮ АСИМПТОТИЧЕСКОЙ МОЩНОСТИ КРИТЕРИЕВ СОГЛАСИЯ, Теория Вероятн. и ее примен., X, 3, 460-478.
13. ЧИБИСОВ Д.М.: ИССЛЕДОВАНИЕ МОЩНОСТИ НЕКОТОРЫХ НЕПАРАМЕТРИЧЕСКИХ КРИТЕРИЕВ, Теория вероятн. и ее применен., У11, 3, 355-356.

14. ČABRIĆ NIMOSLAV, SAVIĆ D.: TEST TAČNOSTI I BRZINE RAČUNARA, "Računari" br. 4, II, '85, 51-53.

15. ДЕ ГРООТ М.: ОПТИМАЛЬНЫЕ СТАТИСТИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ, Москва, "Мир", 1974.

16. DE HAAN L.: ON SAMPLE QUANTILES FROM A REGULARLY VARYING DISTRIBUTION FUNCTION, Ann. of Stat. 1974, Vol. 2, No, 4, 815-818.

17. DUTTWEILER D.L.: THE MEAN-SQUARE ERROR ON BAHADUR'S ORDER STATISTIC APPROXIMATION, Ann. of Stat. 1973, Vol. 1, No 3, 446-453

18. DOOB J.L.: STOCHASTIC PROCESSES, JOHN WILEY SONS INC.1953

19. ЕРМАКОВ С.М.: МЕТОД МОНТЕ-КАРЛО И СМЕЖНЫЕ ВОПРОСЫ, Москва, "НАУКА", 1971.

20. FALK M.: ASYMPTOTIC NORMALITY OF THE KERNEL QUANTILE ESTIMATOR, Ann. of Statist. 1985., Vol. 13, No 1, 428-433

21. FALK M.: RELATIVE DEFICIENCY OF KARNEL TYPE ESTIMATORS OF QUANTILES, Ann. of Statist. 1984., Vol. 12, No 1, 261-268

22. ФЕЛЛЕР В.: ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРИЮ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ, Том I, II, Москва, "МИР", 1984.

23. ФИЛИППОВА А.А.: ТЕОРЕМА МИЗЕСА О ПРЕДЕЛЬНОМ ПОВЕДЕНИИ ФУНКЦИОНАЛОВ ОТЭМПИРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ РАСПОДЕЛЕНИЯ И ЕЕ СТАТИСТИЧЕСКИЕ ПРИМЕНЕНИЯ, Теория вероятн. и ее примен. 1962. Том VII, -26-59.

24. FREEMAN R: STRUCTURED BASIC, London, BBC, 1984.

25. ГАЛАМБОШ Я.: АСИМПТОТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ПОРЯДКОВЫХ СТАТИСТИК, Москва, "НАУКА", 1984.

26. GHOSH J.K.: A NEW PROOF OF THE BAHADUR REPREZENTATION OF QUANTILES AND AN APLICATION, Ann. of Math. Stat. 1971. Vol. 42, No 6, 1957-1961.

27. ГИХМАН И СКОРОХОД: ТЕОРИЯ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ, Том I, II и III, Москва, "НАУКА", 1975.

28. ХЕННКЕН П.Л. ТОРТРА А.: ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И НЕКОТОРЫЕ ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ, Москва, "НАУКА", 1974

29. HOGG R. CRAIG A.: INTRODUCTION TO MATHEMATICAL STATISTICS, New York, Macmillan Publishing Co. INK, 1978.

30. ХЬЮБЕР П.: РОБАСТНОСТЬ В СТАТИСТИКЕ, Москва, "МИР", 1984.

31. КАРЛИН С.: ОСНОВЫ ТЕОРИЙ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ, Москва, "МИР", 1975.

32. KIEFER J.: OF BAHADUR'S REPRESENTATION OF SAMPLE QUANTILES, Ann. of Statist. Vol. 38, No. 5, 1967, 1323-1341.

33. КОКРЕН У.: МЕТОДЫ ВЫБОРОЧНОГО ИССЛЕДОВАНИЯ, Москва, "Статистика", 1976.

34. КОКС Д. ХИНКЛИ Д.: ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА, Москва, "МИР", 1978.

35. КНУТ Д.: ИСКУСТВО ПРОГРАММИРОВАНИЯ ДЛЯ ЭВМ, Том I, II, III, Москва, "МИР", 1977

36. LEE Y.W.: STATISTICAL THEORY OF COMMUNICATION, John Wiley Sons INC, 1960.

37. ЛЕМАН Э.: ПРОВЕРКА СТАТИСТИЧЕСКИХ ГИПОТЕЗ, Москва, "НАУКА", 1972:

38. ЛИМЕР Э.: СТАТИСТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ НЕЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ДАННЫХ, Москва, "Финансы и статистика", 1983.

39. ЛИПЦЕР Р.Ш. ШИРЯЕВ А.Н.: СТАТИСТИКА СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ, Москва, "НАУКА", 1974.

40. МАРТЫНОВ Г.В.: КРИТЕРИИ ОМЕГА-КВАДРАТ, Москва, "НАУКА", 1978.

41. МУДРОВ В.И. КУШКО В.Л.: МЕТОДЫ ОБРАБОТКИ ИЗМЕРЕНИЙ, Москва, "Советское радио", 1976.

42. NEAVE H.R.: STATISTICS TABLES, London, George Allen Unwin, 1978.

43. НЕЙМАН Ю.: ВВОДНЫЙ КУРС ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ, Москва, "НАУКА", 1968.

44. ПАРТАСАРАТИ К.: ВВЕДЕНЫ В ТЕОРИЮ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И ТЕОРИИ МЕРЫ, Москва, "МИР", 1983.

45. POLLARD DAVID: CONVERGENCE OF STOCHASTIC PROCESSES, Springer, 1984.

46. ПУГАЧЕВ В.С.: ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА, Москва, "НАУКА", 1979.

47. РОЗАНОВ Ю.А.: СЛУЧАЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ, Москва, "НАУКА", 1979.

48. РОЗАНОВ Ю.А.: ГАУСОВСКЕ БЕСКОНАЧНО - ДИМЕНЗИОНАЛНЕ РАСПОДЕЛЕ, Москва,

49. SHORACK G.R.: CONVERGENCE OF REDUCED EMPIRICAL AND QUANTILE PROCESSES WITH APPLICATION TO FUNCTIONS OF ORDER STATISTICS IN THE NON I.I.D. CASE; Ann. of Statist., 1973, Vol. 1, No 1, 146-152.

50. SPALEVIĆ M.: ALAN TJURING, "Računari", Br. 11, JANUAR '86, st. 67.

51. THE 6502 SECOND PROCESSOR USER GUIDE, London, BBC, 1984.

52. TAKSAR M.I.: FIRST HITTING TIME OF CURVILINEAR BOUNDARY BY WIENER PROCESS, Ann. of Probability, 1982, Vol. 10, No. 4, 1029-1031

53. WITHERS C.S. EXPANSIONS FOR THE DISTRIBUTION AND QUANTILES OF A REGULAR FUNCTIONAL OF THE EMPIRICAL DISTRIBUTION WITH APPLICATIONS TO NONPARAMETRIC CONFIDENCE INTERVALS, Ann. of Statist. 1983, Vol. 11, No. 2, 577-587

54. ЗАКС Ш.: ТЕОРИЯ СТАТИСТИЧЕСКИХ ВЫВОДОВ, Москва, "МИР", 1975.

T A B L I C E

Da bi posmatrane procese mogli da analiziramo i za druge vrednosti rizika α, na ovom mestu ćemo dati deo tablica kritičnih vrednosti za raspodele posmatranih statistika.

(I) SMIRNOV-FON MIZES

α	0.1	0.05	0.01	0.005	0.001
ω_{α}^{2}	0.3473	0.4614	0.7435	0.8694	1.1679

TABLICA KRITIČNIH VREDNOSTI TESTA SMIRNOV-FON MIZESA

$$\left(P\left\{ \omega_n^2 > \omega_{\alpha}^2 \right\} = \alpha\right)$$

(II) KOLMOGOROV (ZA N > 100)

α	0.1	0.05	0.02	0.01
$d_{n;\alpha}$	1.2238	1.3581	1.5174	1.6276

TABLICA KRITIČNIH VREDNOSTI TESTA KOLMOGOROVA

$$\left(P\left\{ D_n > d_{n;\alpha} \right\} = \alpha \quad , \; n > 100\right)$$

(III) MORAN

α	0.1	0.05	0.01	0.005	0.001
z_{α}	1.285	1.6449	2.329	2.575	3.095

TABLICA VREDNOSTI KVANTILA NORMALNE RASPODELE

$$\left(P\left\{ X^{*} > z_{\alpha} \right\} = \alpha , \; X^{*} : \mathcal{N}(0;1) \right)$$

S A D R Ž A J