UNIVERZITET U BEOGRADU

Zoran S. Lučić

UNIFORMNE TESELACIJE HIPERBOLIČKE RAVNI

doktorska disertacija

BEOGRAD

1985

PREDGOVOR

Pojam pravilnog poliedra u geometriju je, po svemu sudeći, prvi uveo Teetet (oko -414. do -369.), učenik poznatog kirenaičara Teodora. Iako su tetraedar, kocka i oktaedar bili poznati drevnim Egipćanima bar milenijum pre Teetetovog rodjenja, a za dodekaedar se i u predpitagorejsko vreme znalo u Italiji ([19] str. 438), otkriće pravilnih poliedara, u literaturi poznatih i pod imenom Platonovih tela, ipak se pripisuje Teetetu ([33] str. 218) jer ih je on prvi definisao, konstruisao i ispitivao njihova zajednička svojstva ([20], vol.I, str. 212).

Arhimedov spis o polupravilnim poliedrima do nas nije dospeo no i pored toga, zahvaljujući Paposu koji je u petoj knjizi svoga dela "Sinagoge" načinio jednu digresiju posvećenu tom Arhimedovom delu ([20], vol.II, str. 394), njegov sadržaj nam je uglavnom poznat. Otuda znamo da je svaki od trinaest polupravilnih poliedara bio poznat Arhimedu pa se, stoga, ti poliedri danas zovu Arhimedovim iako su neki od njih bili poznati i ranije; dva od tih trinaest tela, prema Heronu, poznavao je Platon ([20], vol.II str. 100). U svojem delu "Harmonices Mundi", [24], Kepler je konstruisao svaki od ovih poliedara i, štaviše, izvršio klasifikaciju konveksnih uniformnih poliedara koji se sastoje iz Platonovih i Arhimedovih tela, prizmi čiji se omotači sastoje iz kvadrata i antiprizmi čiji se omotači sastoje iz pravilnih trouglova ([16] str. 122-141).

U već pomenutom delu, [24], Kepler je, i sa današnjeg stanovišta na savremen način, izvršio kompletnu enumeraciju uniformnih teselacija euklidske ravni, pa je začudjujuće da je taj deo Keplerovog rada koji se odnosi na uniformne poliedre i teselacije bio potpuno zaboravljen skoro 300 godina ([17] str. 242). Na značaj te problematike, nakon Keplera, prvi je ukazao Sommerville, [32], tek 1905. godine, dokazavši da je Keplerova lista od 11 uniformnih teselacija euklidske ravni kompletna. U istom radu Sommerville se dotakao problema uniformnih teselacija hiperboličke ravni. U svom radu, [3], Bilinski se bavio istim problemom i, štaviše, prema Grünbaumu i Shephardu ([18] str. 217), on je prvi istraživao topološki uniformne teselacije hiperboličke ravni.

Problem egzistencije topološki uniformnih teselacija sa unapred zadatom oznakom (p.q...w) rešili su u pomenutom radu, [18], Grünbaum i Shephard, dok je problem odredjivanja svih uniformnih teselacija hiperboličke ravni ostao otvoren.

U cilju rešavanja tog problema u ovom radu su, u prvom poglavlju, Wythoff-ovom konstrukcijom odredjene sve uniformne teselacije čije su grupe simetrija generisane osnim refleksijama. Zatim je, u drugom poglavlju, izvršena klasifikacija ravanskih diskretnih grupa korišćenjem fundamentalnih poligona (2.3.1) i (2.3.2) koji imaju posebna metrička svojstva, a u trećem poglavlju su, pomoću te klasifikacije, odredjene sve orbite tačaka u diskretnim ravanskim grupama koje predstavljaju temena uniformnih teselacija pa su, na taj način, odredjene i sve uniformne teselacije sa konveksnim pljosnima sfere, euklidske i hiperboličke ravni.

Beograd,
decembra 1984.

Z. Lučić

Veoma mi je prijatna dužnost da se zahvalim na pomoći i saradnji svome mentoru A.I.Weiss sa kojom sam za vreme svog boravka na univerzitetu u Saskatoon-u počeo da radim na rešavanju problema uniformnih teselacija i kolegama D.Ljubiću i S.Krstiću koji su ovaj rad u celosti ili delimično pročitali i čije su mi primedbe bile zaista dragocene.

SADRŽAJ

	PREDGOVOR	i
	UVOD	1
1.	GRUPE GENERISANE REFLEKSIJAMA I UNIFORMNE TESELACIJE	6
1.1.	Diskretne grupe generisane refleksijama	6
1.2.	Grupa generisana klizajućim refleksijama	11
1.3.	Grupa generisana translacijama	14
1.4.	Reprezentacija pomoću grafa	16
1.5.	Wythoff-ova konstrukcija	17
2.	DISKRETNE RAVANSKE GRUPE	24
2.1.	Fundamentalan poligon	24
2.2.	Količnički prostor	25
2.3.	Klasifikacija poligonskih fundamentalnih oblasti	27
2.4.	Algebarska struktura ravanskih diskretnih grupa	30
2.5.	Diskretne grupe sfere i euklidske ravni	34
2.6.	Geometrijski izomorfizam	36
2.7.	Diskretne ravanske grupe sa nekompaktnom fundamentalnom oblašću	39
3.	UNIFORMNE TESELACIJE	40
3.1.	Fundamentalni poligon grupe simetrija uniformne teselacije	40
3.2.	Neophodni uslovi fundamentalnog poligona	42
3.3.	Dovoljni uslovi fundamentalnog poligona	44
3.4.	Uniformne teselacije čije su pljosni oriciklički apeirogoni	46
	LITERATURA	47

UVOD

Pod teselacijom sfere, euklidske ili hiperboličke ravni koje ćemo ubuduće jednim imenom zvati ravan A^2, podrazumevaćemo lokalno konačnu familiju $\mathcal{T} = \{T_i : i \in I\}$ zatvorenih poligonskih površi T_i, pljosni teselacije $\mathcal{T}$, takvu da svaka ivica neke pljosni predstavlja ivicu tačno još jedne pljosni i da su zadovoljena sledeća dva uslova:

(i) svaka tačka ravni A^2 pripada bar jednoj od pljosni T_i, $i \in I$,

(ii) mera preseka bilo kojih dveju raznih pljosni je nula.

Ako je teselacija na sferi skup I indeksa je konačan, a ako je u euklidskoj ili hiperboličkoj ravni on je beskonačan.

Kako je $\mathcal{T}$ lokalno konačna familija svaki disk ravni A^2 sadrži tačke konačno mnogo njenih pljosni pa, stoga, za svaku konačnu pljosan postoji konačno mnogo onih koje sa njom imaju zajedničkih tačaka. Poligonske površi koje predstavljaju pljosni teselacije $\mathcal{T}$ zvaćemo i poligonima te teselacije. Dve pljosni ćemo zvati susednim ako imaju zajedničku ivicu. Teme ili ivicu bilo koje od pljosni teselacije $\mathcal{T}$ zvaćemo temenom ili ivicom te teselacije.

Svakoj teselaciji $\mathcal{T}$ ravni A^2 pridružićemo grupu $S(\mathcal{T})$ njenih simetrija koja se sastoji iz svih onih izometrijskih transformacija ravni A^2 koje ostavljaju invarijantnom tu teselaciju. Ako je grupa $S(\mathcal{T})$ simetrija teselacije $\mathcal{T}$ čije su pljosni konveksni pravilni poligoni, tranzitivna tj. ako za bilo koja dva temena te teselacije postoji transformacija iz $S(\mathcal{T})$ koja preslikava jedno teme u drugo, teselaciju $\mathcal{T}$ zvaćemo uniformnom. Ako su sve pljosni uniformne teselacije medjusobno podudarne zvaćemo je pravilnom.

U euklidskoj ravni ugao pravilnog p-ugla kojeg ćemo ubuduće označavati sa $\{p\}$, je $(1-2/p)\pi$, pa q podudarnih poligona $\{p\}$ će zatvoriti pun ugao oko neke tačke ako je

$$1-2/p = 2/q, \text{ tj. } (p-2)(q-2) = 4.$$

Tako možemo odrediti sve pravilne teselacije, u Schläfli-evoj oznaci $\{p,q\}$, euklidske ravni. To su:

$$\{4,4\},\ \{3,6\},\ \{6,3\}.$$

Ugao sfernog poligona $\{p\}$ je veći od $(1-2/p)\pi$ i postepeno raste od te vrednosti do π kada poluprečnik njemu opisanog kruga raste od 0 do $\pi/2$. Dakle, ako je

$$(p-2)(q-2) < 4$$

stranicu polgona $\{p\}$ možemo tako da prilagodimo da mu unutrašnji ugao bude upravo $2\pi/q$. Tada ukupno q poligona $\{p\}$ zatvara pun ugao oko neke tačke na sferi pa će sferne teselacije biti

$$\{3,3\},\ \{3,4\},\ \{4,3\},\ \{3,5\},\ \{5,3\}$$

od kojih svaka odgovara nekom Platonovom telu ([11] str. 5).

U hiperboličkoj ravni ugao poligona $\{p\}$ je manji od $(1-2/p)\pi$ i postepeno opada od te vrednosti do 0 kada poluprečnik njemu opisanog kruga raste od 0 do ∞. Dakle, ako je

$$(p-2)(q-2) > 4$$

stranicu poligona $\{p\}$ možemo tako da prilagodimo da mu unutrašnji ugao bude upravo $2\pi/q$. Tada q pravilnih p-uglova zatvara pun ugao oko jednog temena pa nastavimo li sa dodavanjem njemu podudarnih poligona dok njima ne prekrijemo ravan, dobićemo teselaciju $\{p,q\}$ ([15] str. 421).

S obzirom na to da ćemo se ubuduće susretati uglavnom sa teselacijama čije su pljosni pravilni konveksni poligoni to nećemo uvek posebno naglašavati.

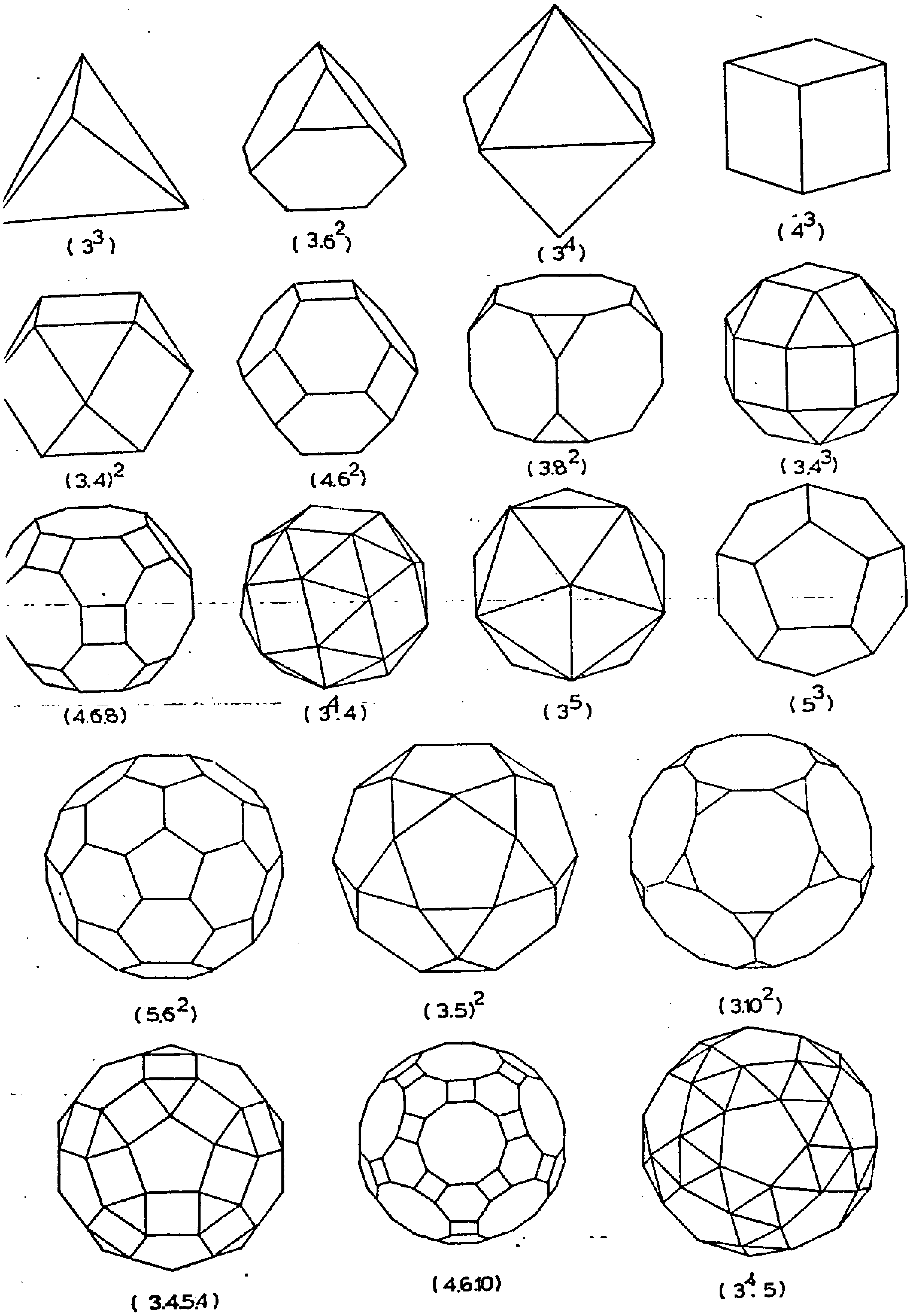
Kako su kod svakog temena uniformne teselacije pravilni poligoni koji ga okružuju rasporedjeni na isti način, recimo najpre $\{p\}$, pa zatim $\{q\}$, pa $\{r\}$ itd. ta teselacija odredjuje ciklični niz

$$(p.q.r...v.w)$$

kojim ćemo je označavati. Ako je neki od brojeva $p,q,r,...,v,w$ jednak 2 njega ćemo u oznaci teselacije izostaviti. Tako će oznaka pravilne teselacije $\{p,q\}$ biti $(p.p...p)$ gde se p pojavljuje ukupno q puta. Koristeći se stepenom u izložiocu oznaku teselacije možemo da skratimo pa će oznaka pravilne teselacije, u tom slučaju da bude (p^q).

Ako grupa $S(\mathcal{T})$ raspolaže transformacijom g koja ostavlja invarijantnim teme X uniformne teselacije $\mathcal{T}$ tada ta transformacija može da bude rotacija ili refleksija. Ako je g rotacija reda h raspored poligona oko temena X biće takav da se u cikličnom nizu koji ta teselacija odredjuje jedan njegov deo periodično ponavlja h puta. Oznaka teselacije, u tom slučaju, će biti

$$(p.q.r...w.p.q.r...w...p.q.r...w) = (p.q.r...w)^h.$$



Platonova i Arhimedova tela

Ako je g refleksija čija osa ne sadrži ni jednu ivicu sa temenom X u cikličnom nizu koji teselacija $\mathcal{T}$ odredjuje doći će do ponavljanja u obrnutom redosledu pa će oznaka te teselacije biti

$$(p.q.r...v.w.v...r.q) = (p.q.r...v.w)^{-2}.$$

Ako osa refleksije g sadrži neku ivicu sa temenom X tada središte te ivice možemo shvatiti kao središte pravilnog 2-ugla koji pretstavlja pljosan teselacije $\mathcal{T}$ pa je, u tom slučaju, oznaka teselacije istovetna prethodnoj s tim što će članovi niza čija je vrednost 2 biti izostavljeni.

Ako je g rotacija reda h koja se može predstaviti kao kompozicija dveju osnih refleksija od kojih svaka predstavlja simetriju teselacije $\mathcal{T}$, raspored poligona oko temena X biće takav da se u cikličnom nizu koji ta teselacija odredjuje jedan njegov deo periodično ponavlja 2h puta, svaki put menjajući redosled. Oznaka teselacije će, u tom slučaju, biti

$$(p.q.r...v.w.v...r.q)^{h} = (p.q.r...v.w)^{-2h}.$$

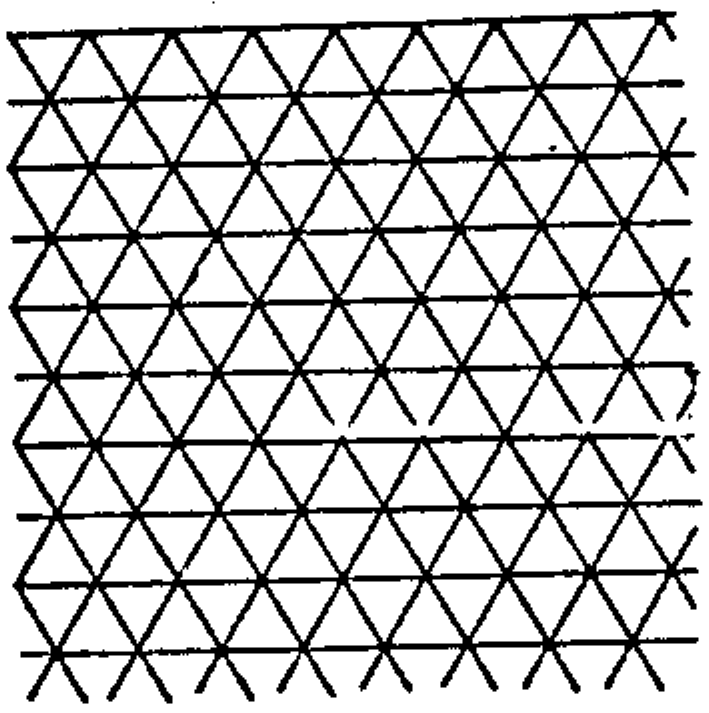
Uniformnih teselacija sfere, izuzev onih koje su homeomorfne prizmama ili antiprizmama ima ukupno 18 ([13] str.403) i to su: (3^3), (3.6^2), (3^4), (4^3), $(3.4)^2$, (4.6^2), (3.8^2), (3.4^3), $(4.6.8)$, $(3^4.4)$, (3^5), (5^3), (5.6^2), $(3.5)^2$, (3.10^2), $(3.4.5.4)$, $(4.6.10)$, $(3^4.5)$.

Svakoj od ovih teselacija odgovara po jedno Platonovo ili Arhimedovo telo ([1] str. 131-139).

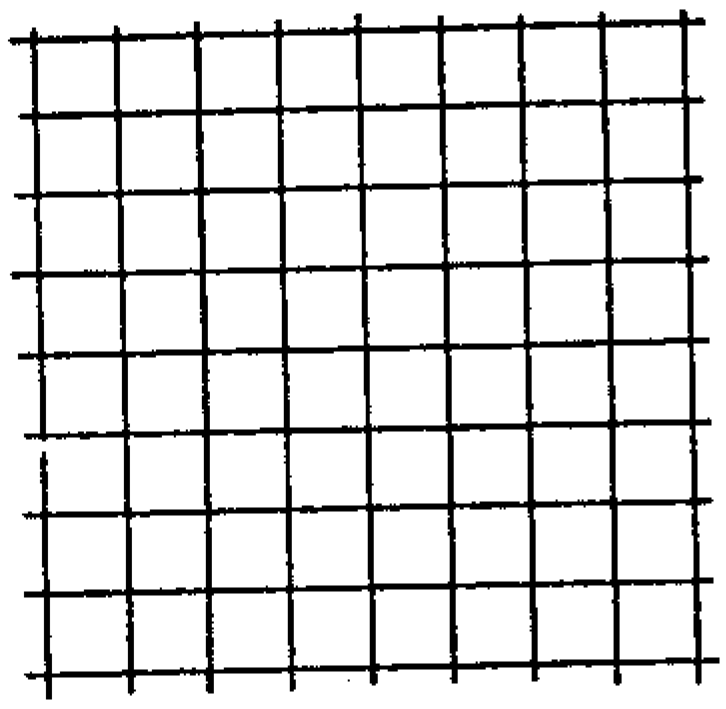
Uniformnih teselacija euklidske ravni ima ukupno 11 ([17] str. 228-232) i to su:
(3^6), (4^4), (6^3), $(3^4.6)$, $(3^3.4^2)$, $(3^2.4.3.4)$, $(3.4.6.4)$, $(3.6)^2$, (3.12^2), $(4.6.12)$, (4.8^2).

Napomenimo da se teselacija $(3^4.6)$ pojavljuje u dve osno-simetrične (enantiomorfne) forme.

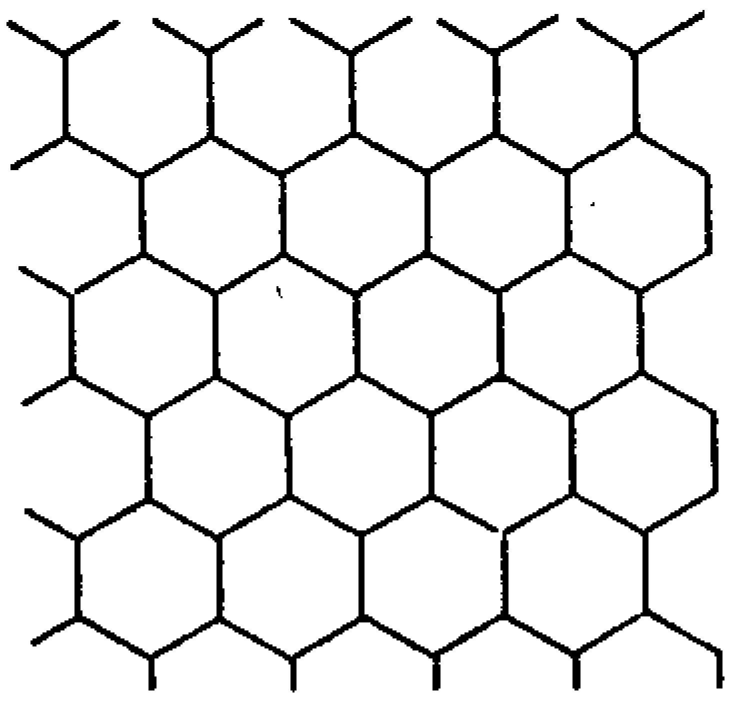
Kako već pravilnih teselacija hiperboličke ravni ima infinitno mnogo ([3] str.224-225) tim pre će toliko biti i uniformnih teselacija.



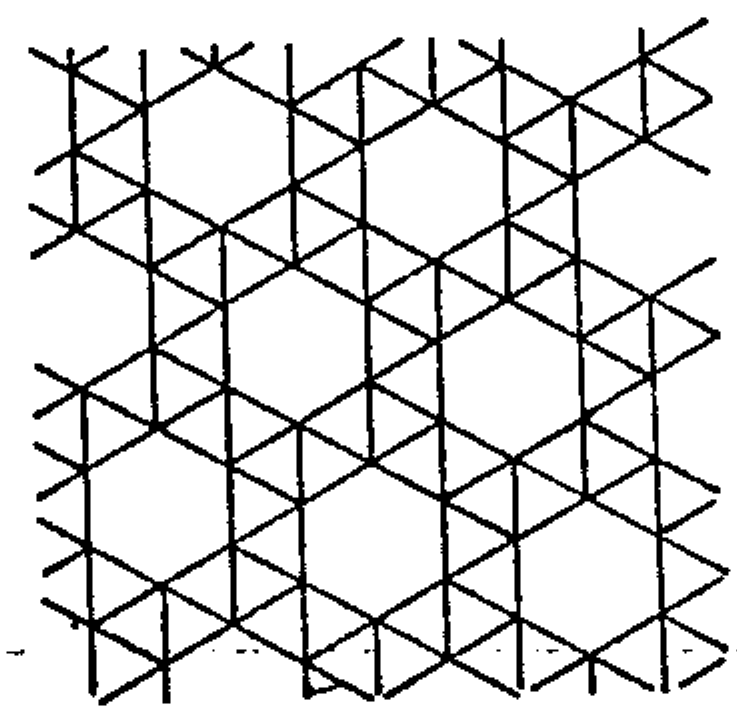
(3^6)



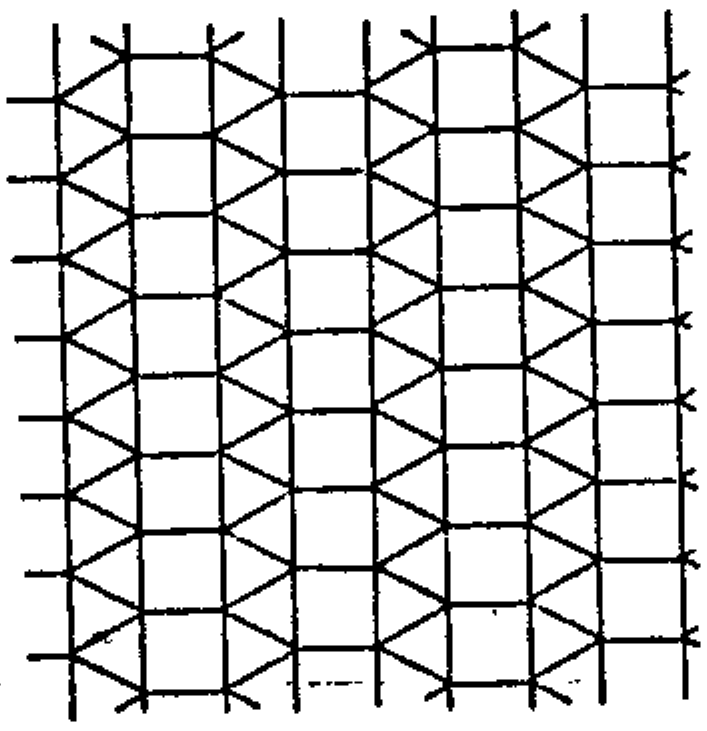
(4^4)



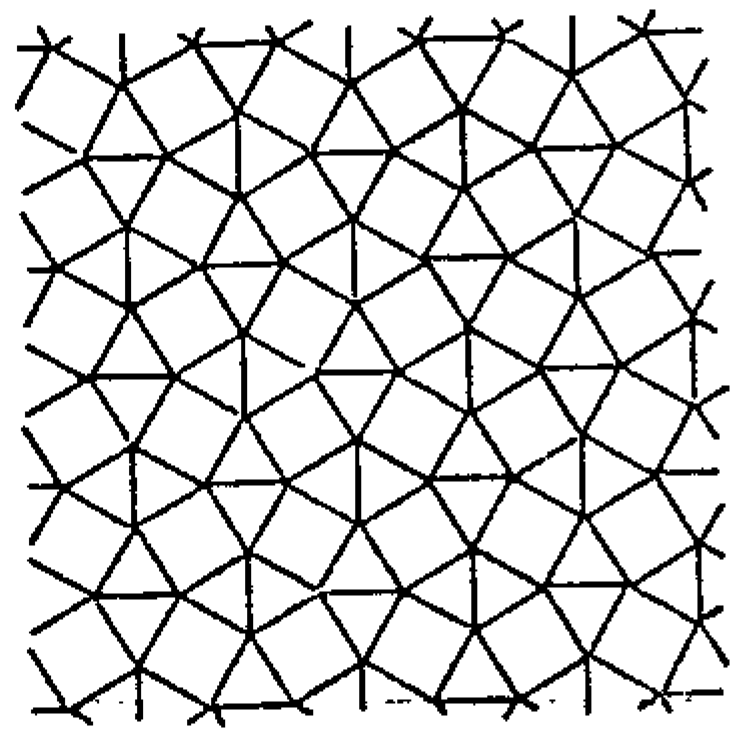
(6^3)



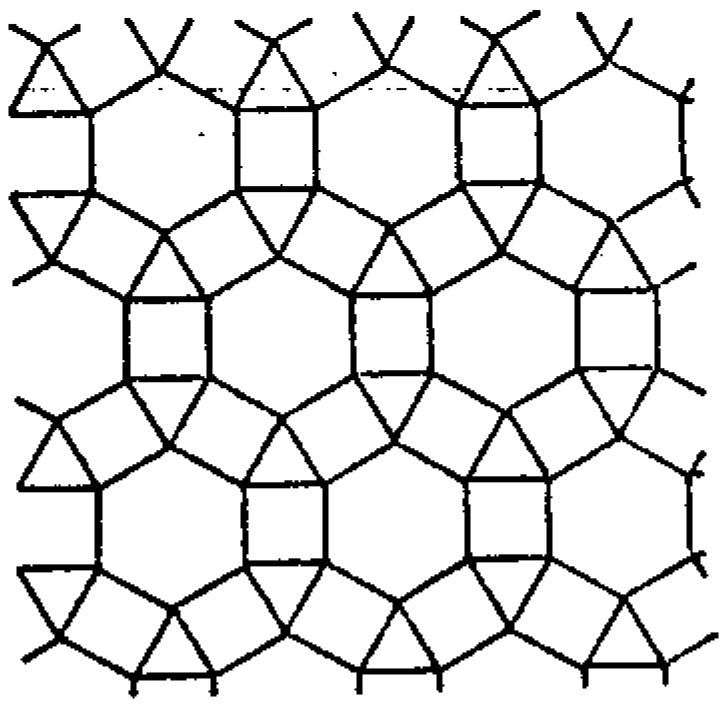
$(3^4.6)$



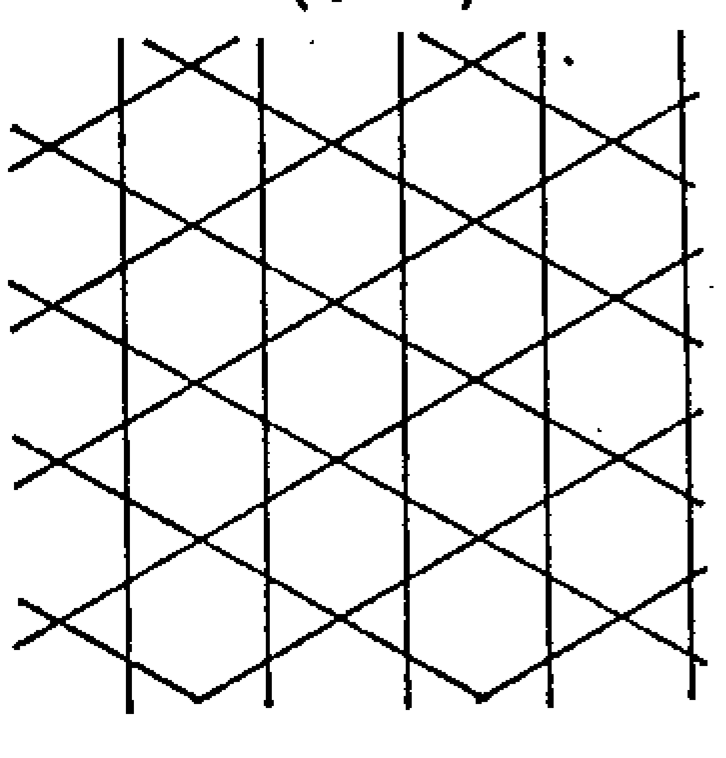
$(3^3.4^2)$



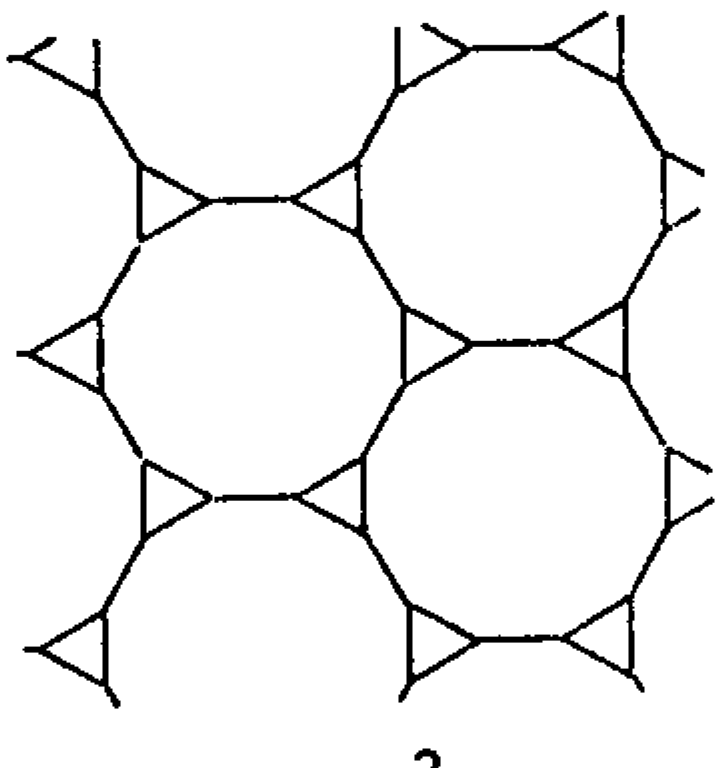
$(3^2.4.3.4)$



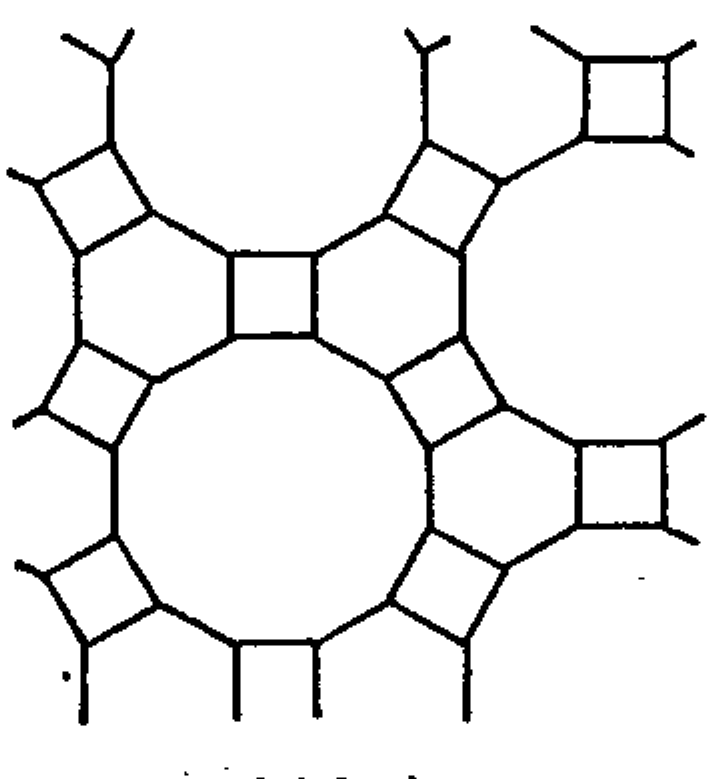
$(3.4.6.4)$



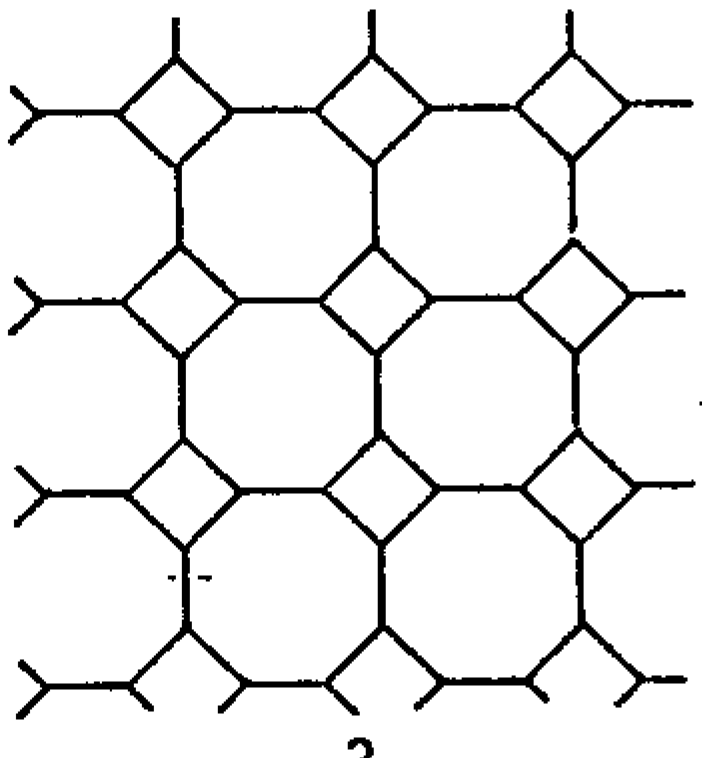
$(3.6)^2$



(3.12^2)



$(4.6.12)$



(4.8^2)

Uniformne teselacije euklidske ravni

1. GRUPE GENERISANE REFLEKSIJAMA I UNIFORMNE TESELACIJE

1.1. Diskretne grupe generisane refleksijama

Neka je data sfera, euklidska ili hiperbolička ravan, kratko ravan A^2. Skup svih izometrijskih transformacija ravni A^2 u odnosu na njihovu kompoziciju predstavlja grupu koju ćemo zvati grupom simetrija te ravni. Za podgrupu G te grupe reći ćemo da je diskretna akko ne postoji tačka P ravni A^2 za koju skup $\{gP : g \in G\}$ ima tačku nagomilavanja. Dakle, bilo koja tačka ravni A^2 može biti invarijantna samo za konačno mnogo transformacija iz G, tj. stabilizator bilo koje tačke te ravni u diskretnoj grupi je njena konačna podgrupa.

Kako ćemo se ubuduće susretati uglavnom sa diskretnim grupama to nećemo uvek posebno da naglašavamo. Naglašavaćemo samo kada grupa nije diskretna.

Zatvoreni skup F (sa unutrašnjošću F^o) u ravni A^2 zvaćemo fundamentalnom oblašću diskretne ravanske grupe G akko su zadovoljeni sledeći uslovi:

(i) skup F^o nema zajedničkih tačaka ni sa jednim od skupova gF^o ako je g neidentička transformacija iz grupe G,

(ii) svaka tačka ravni A^2 pripada bar jednom od skupova $gF, g \in G$,

(iii) mera skupa $F-F^o$ je nula.

Kako se svaka izometrijska transformacija ravni može predstaviti kao kompozicija osnih refleksija ([25] str. 72) svaka diskretna grupa simetrija ravni A^2 predstavlja podgrupu neke grupe generisane refleksijama. Stoga grupama generisanim refleksijama pridajemo poseban značaj.

Osna refleksija ravni A^2 generiše grupu reda 2 koju ćemo obeležavati sa [ ]. Dve osne refleksije generišu grupu beskonačnog reda sem u slučaju kada se ose tih refleksija seku pod uglom koji je samerljiv sa opruženim uglom. Ako je taj ugao $d\pi/n$, gde su d i n medjusobno prosti brojevi, grupa je reda 2n i označava se sa [n]. Ista grupa generisana je i dvema refleksijama čije ose zahvataju ugao π/n i tada ugaona površ odredjena osama tih refleksija predstavlja fundamentalnu oblast te grupe. Simbolom $[\infty]$ označavaćemo grupu beskonačnog reda koja je generisana dvema refleksijama čije se ose ne seku.

Grupa G generisana osnim refleksijama kojih ima proizvoljno mnogo, biće dobro definisana refleksijama čije su ose slike osa tih refleksija u zadatim osnim refleksijama. Ako je grupa G diskretna skup osa će razložiti ravan A^2 na konačan ili beskonačan skup podudarnih, konveksnih poligona pa je, u tom slučaju, grupa G generisana refleksijama u odnosu na prave koje sadrže stranice jednog od tih poligona. Neka su γ_1, $\gamma_2, \dots$ te prave i neka je π/h_{jk}, gde je h_{jk} ceo broj, ugao koji zahvataju prave γ_j i γ_k. Dopuštamo i mogućnost da se prave γ_j i γ_k ne seku, tj, da je broj h_{jk} beskonačno veliki.

Obeležimo li sa c_i refleksiju čija je osa γ_i biće zadovoljene sledeće relacije:

(1.1.1) $\quad c_i^2 = (c_j c_k)^{h_{jk}} = 1$

Štaviše, poligon čije stranice pripadaju pravama γ_1, $\gamma_2, \dots$ je fundamentalna oblast i relacije (1.1.1) su dovoljne za apstraktnu reprezentaciju grupe G ([6] str. 382-383, [11] str. 80-81).

Naprimer, diedarska grupa [n] je definisana relacijama

$$c_1^2 = c_2^2 = (c_1 c_2)^n = 1,$$

a odgovarajuća infinitna grupa $[\infty]$ koja predstavlja slobodan proizvod ([29] str. 180) dveju grupa reda 2, relacijama

$$c_1^2 = c_2^2 = 1.$$

Napomenimo da grupe generisane refleksijama predstavljaju primere algebarskih Coxeter-ovih grupa ([22] str.7).

Ako je grupa G generisana refleksijama euklidske ravni tada njena fundamentalna oblast ne može imati više od četiri stranice. Zaista, kako je pokazano da je ugao izmedju dveju susednih stranica fundamentalne oblasti oblika π/n, tj. $\pi/2$, $\pi/3, \dots$, dakle nije tup, fundamentalna oblast može biti najviše četvorougao, štaviše, pravougaonik.

Ako je fundamentalna oblast trougaona i njeni uglovi π/p, π/q, π/r, obeležavaćemo je sa (p q r) i biće zadovoljen uslov

$$1/p + 1/q + 1/r = 1, \ p,q,r \geqslant 2$$

pa (p q r) može biti

$$(3\ 3\ 3) \text{ ili } (2\ 4\ 4) \text{ ili } (2\ 3\ 6).$$

Odgovarajuće grupe obeležavaćemo redom sa

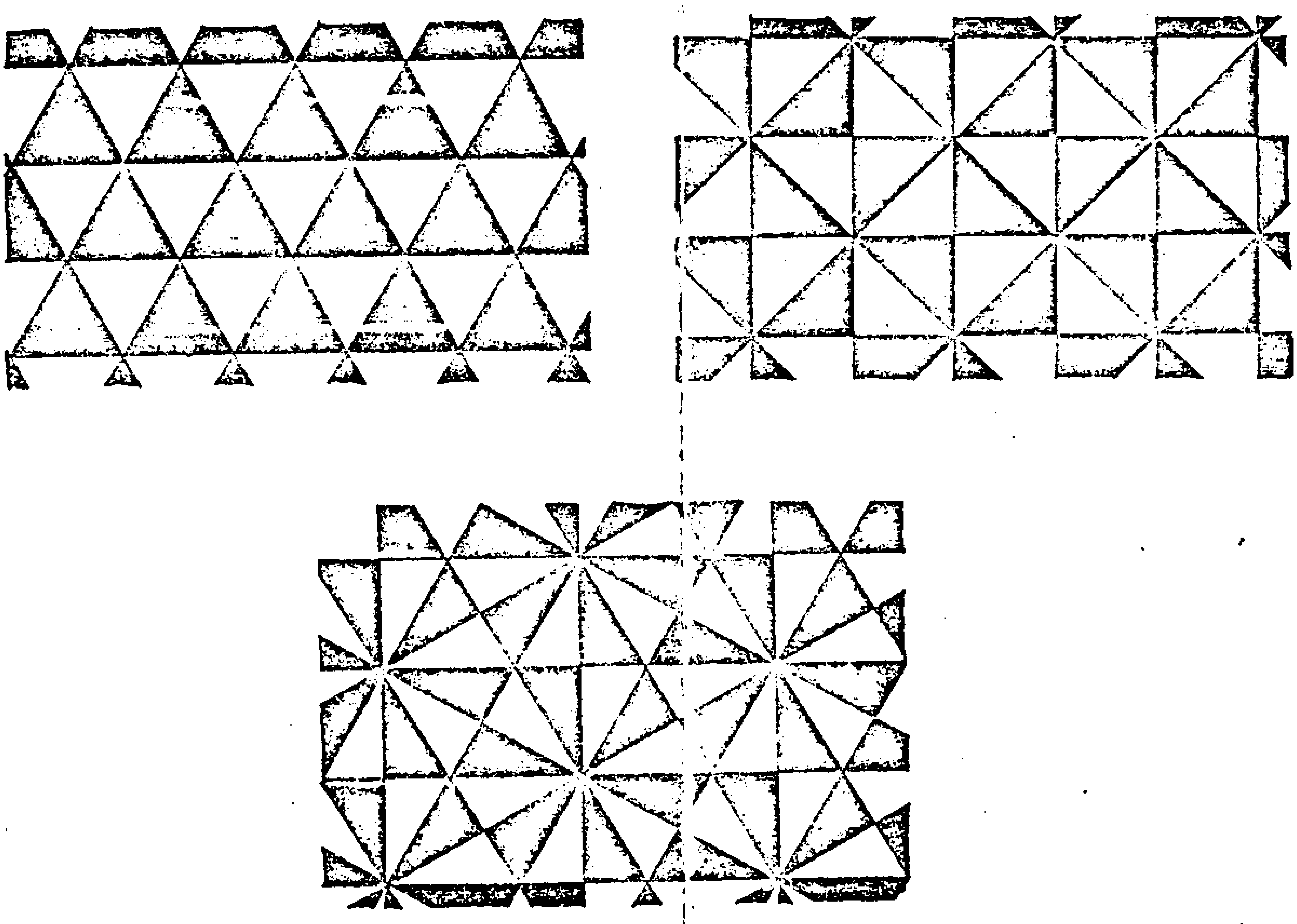
(1.1.2) $\triangle$, [4,4], [3,6].

Poslednje dve predstavljaju kompletne grupe simetrija pravilnih teselacija euklidske ravni.

Preostale mogućnosti za fundamentalne oblasti su sledeće: poluravan, ugao, traka, polutraka, pravougaonik. Njima odgovarajuće grupe biće redom

(1.1.3) [1], [n], [∞], [∞]$\times$[1], [∞]$\times$[∞]

([11]str. 79), od kojih su poslednje dve direktni proizvodi ([14] str. 3).



sl. 1.1.a.

Ako je grupa generisana refleksijama na sferi tada će ose refleksija biti veliki krugovi sfere. Fundamentalna oblast može biti, u tom slučaju, hemisfera, sferni isečak ili sferni trougao. Zaista, kako je zbir uglova u sfernom n-touglu veći od $(n-2)\pi$ bar jedan njegov ugao je veći od $(n-2)\pi/n$, a za $n \geqslant 4$ taj ugao je tup, što je isključeno. Dakle, odredjivanje grupa generisanih refleksijama na sferi svodi se na odredjivanje sfernih trouglova (p q r) čiji su uglovi π/p, π/q, π/r. Kako je uslov

$$1/p + 1/q + 1/r > 1, \quad p,q,r \geqslant 2$$

zadovoljen samo u sledećim slučajevima

$$(2\ 2\ p),\ (2\ 3\ 3),\ (2\ 3\ 4),\ (2\ 3\ 5)$$

to, pored grupa [ ] i [n] u slučajevima kada je fundamentalna oblast hemisfera ili sferni isečak, postoje samo one grupe generisane refleksijama na sferi odgovarajuće ovim fundamentalnim oblastima i njih ćemo obeležavati, redom, sa:

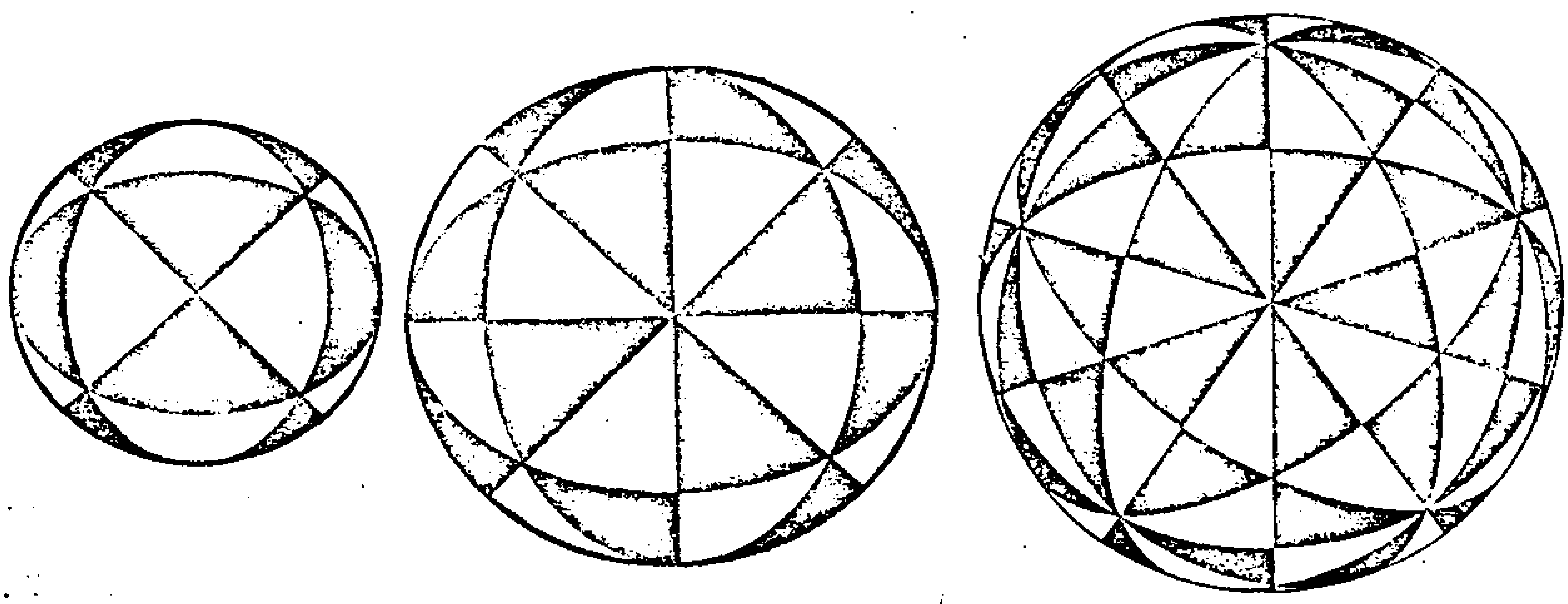
(1.1.4) $[p,2],\ [3,3],\ [3.4],\ [3,5]$.

One, redom, predstavljaju kompletne grupe simetrija diedra, pravilnog tetraedra, pravilnog oktaedra i kocke, pravilnog ikosaedra i pravilnog dodekaedra pa se zato nazivaju diedarskom, tetraedarskom, oktaedarskom i ikosaedarskom grupom simetrija.

Kako se površina fundamentalne oblasti meri ugaonim ekscesom i red grupe [p,q] je jednak broju trouglova (p q r) kojima ćemo pokriti sferu, on će biti jednak

$$\frac{4\pi}{(1/p + 1/q - 1/2)\pi} = \frac{8pq}{4 - (p-2)(q-2)}$$

([11] str. 82).



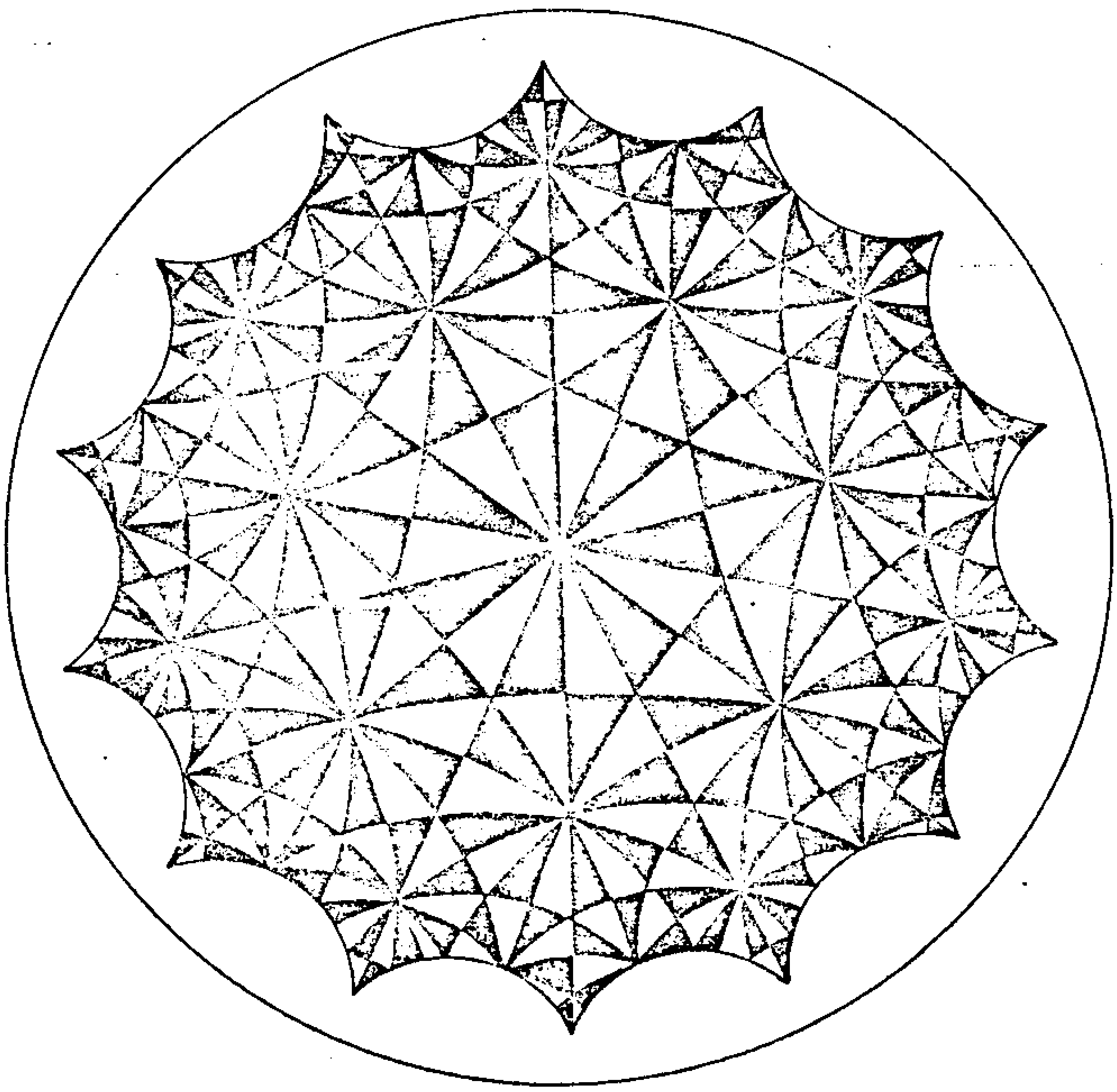
sl. 1.1.b.

Ako je grupa generisana osnim refleksijama hiperboličke ravni njena fundamentalna oblast može biti bilo koji n-tougao $(h_1\ h_2\ \ldots\ h_n)$ čiji su uglovi π/h_1, $\pi/h_2, \ldots$, π/h_n takvi da je zadovoljen uslov

(1.1.5) $1/h_1 + 1/h_2 + \ldots + 1/h_n < n-2$

Ovde možemo uključiti i slučaj kada su pojedina temena fundamentalne oblasti infinitna. Tada će za neke vrednosti i, $1/h_i$ biti jednako nuli i onda će odgovarajuće relacije u apstraktnoj reprezentaciji grupe (1.1.1) biti izostavljene.

Kada je $n > 3$ fundamentalna oblast $(h_1\ h_2\ \ldots\ h_n)$ nije u potpunosti odredjena jer, u tom slučaju, ivice tog poligona možemo menjati ne menjajući pri tome uglove, tako da su odgovarajuće grupe sa različitim fundamentalnim oblastima izomorfne. Slično tome, u euklidskoj ravni, različiti pravougaonici mogu da budu fundamentalne oblasti grupe $[\infty]\times[\infty]$ ([7]str. 151).



sl. 1.1.c.

Rotacije $s_i = c_i c_{i+1}$ generišu podgrupu rotacija indeksa 2 grupe (1.1.1). Njena prezentacija je sledeća:

(1.1.6) $\quad s_1^{h_1} = s_2^{h_2} = \ldots = s_n^{h_n} = s_1 s_2 \ldots s_n = 1$

U teselaciji podudarnim poligonima koja se dobija kada odredimo sve slike fundamentalne oblasti u transformacijama iz neke diskretne grupe generisane osnim refleksijama euklidske ravni, sfere ili hiperboličke ravni, kod svakog temena se sustiče paran broj pljosni pa je, stoga, moguće pljosni te teselacije obojiti crno i belo (sl. 1.1.a, 1.1.b, 1.1.c) kao šahovsku tablu. Svaka od pljosni, crna ili bela, predstavlja fundamentalnu oblast te grupe. Unija dveju susednih pljosni, jedne crne i jedne bele, predstavlja, medjutim, fundamentalnu oblast podgrupe (1.1.6) indeksa 2 koja je generisana rotacijama ([5] str. 125).

1.2. Grupa generisana klizajućim refleksijama

Ako je u grupi $[p,q]$ generisanoj trima osnim refleksijama $p = q = 2g$, njena će prezentacija biti

$$c_1^2 = c_2^2 = c_3^2 = (c_1c_2)^{2g} = (c_2c_3)^{2g} = (c_3c_1)^2 = 1$$

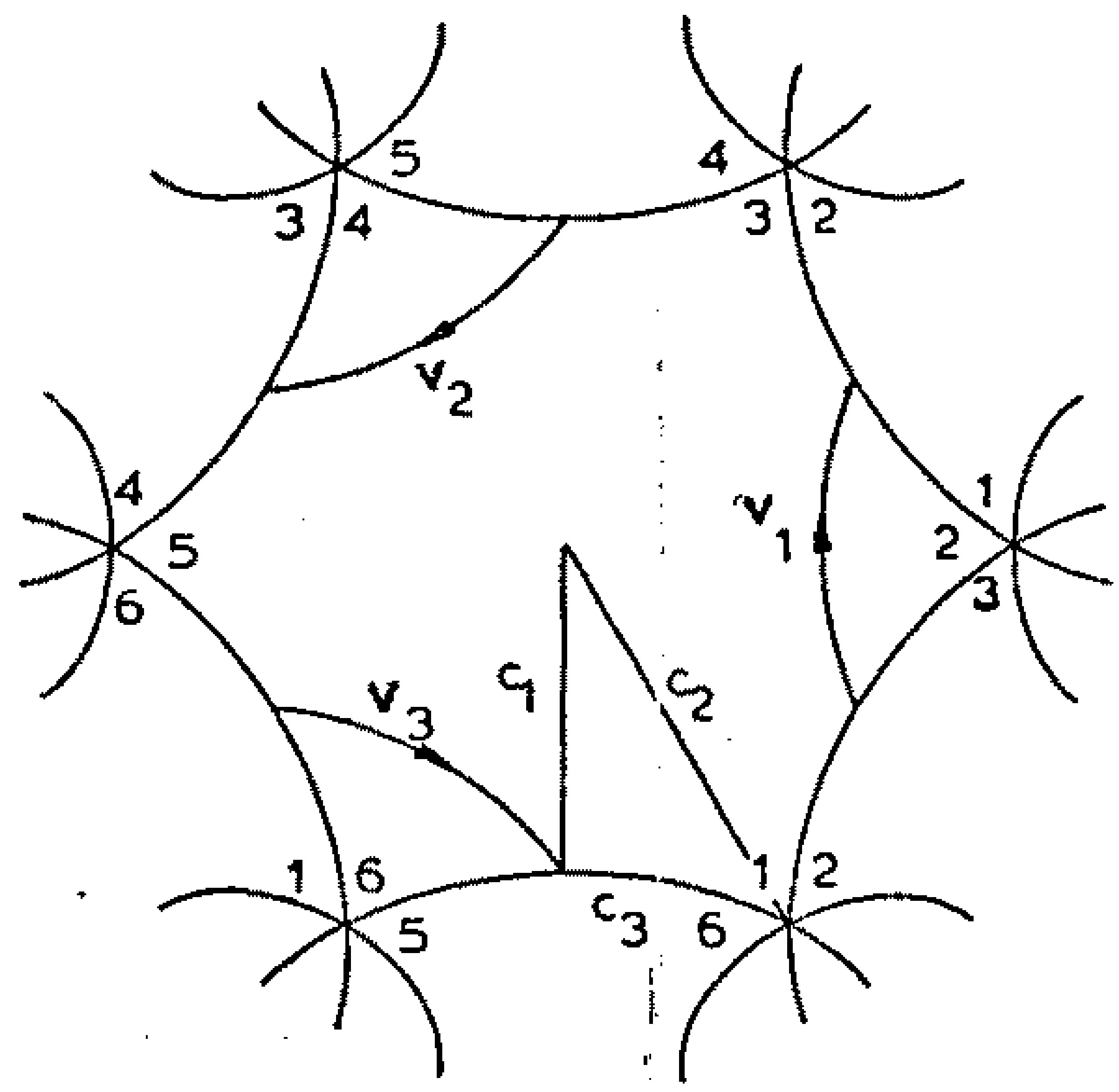
i tada u njoj postoji normalna podgrupa indeksa $4g$ čija je fundamentalna oblast pljosan pravilne teselacije $\{2g,2g\}$. Ta podgrupa je definisana refleksijama čije se sadrže ivice fundamentalne oblasti. Pored ove podgrupe postojaće još jedna sa istom fundamentalnom oblašću, dakle i istim indeksom $4g$, koja neće biti generisana refleksijama već transformacijama bez invarijantnih tačaka.

Ako je $g > 1$ pljosan teselacije $\{2g,2g\}$ možemo preslikati u susedne klizajućim refleksijama čije ose, kojih ukupno ima g, sadrže središta parova susednih ivica fundamentalne oblasti $\{2g\}$. Kako od ukupno $2g$ parova susednih ivica biramo polovinu (svaki drugi par) izabrane klizajuće refleksije generisaće podgrupu koja nije normalna.

Obeležimo li sa c_3, c_2, c_1 refleksije koje ostavljaju invarijantnom teselaciju $\{2g,2g\}$ čije ose sadrže, redom, jednu ivicu fundamentalne oblasti, jedno teme te ivice i središte fundamentalne oblasti, središte te ivice i središte fundamentalne oblasti tada kompozicija

$$v_g = c_1c_2c_3$$

:edstavlja klizajuću refleksiju čija osa sadrži središte pomenu- › ivice i središte one njoj susedne ivice čije teme ne pripada ;i refleksije c_2 ([14] str. 54 za slučaj g=2) kao na slici 1.2.a ı slučaj $g = 3$.



sl. 1.2.a.

apomenimo da je poligon kome središta stranica pripadaju osi .eke od klizajućih refleksija v_i (ili osi neke od njoj konjugova- :ih transformacija) i kome temena predstavljaju orbitu nekog te- ıena teselacije {2g,2g} najbližeg osi te klizajuće refleksije u ;rupi generisanoj tom klizajućom refleksijom, u literaturi po- ınat kao Petrie-ev poligon ([11] str. 24, 61) te teselacije.

Ostale klizajuće refleksije v_i koje generišu traženu podgru- ›u se dobijaju transmutacijama ([25] str. 68) klizajuće refleksi- je $v_g = c_1c_2c_3$ rotacijama $(c_1c_2)^{2i}$, $i \in \{1,2,\ldots,g\}$. Tada je

(1.2.1) $$v_i = (c_2c_1)^{2i}c_1c_2c_3(c_1c_2)^{2i}$$

›a, kako je odatle

$$v_i^2 = (c_2c_1)^{2i}(c_1c_2c_3)^2(c_1c_2)^{2i},$$

zbog $c_1c_3 = c_3c_1$, biće

$$v_1^2v_2^2\ldots v_g^2 = [(c_2c_1)^2(c_1c_2c_3)^2]^g = (c_2c_3)^{2g} = 1.$$

Da bismo odredili geometrijsko značenje prethodnog razmatra- ɑja, jednostavnosti radi, zadržaćemo se na slučaju kada je $g = 3$, tj. kada je fundamentalna oblast {6} i odgovarajuća teselacija

$\{6,6\}$. Tada, ako uglove fundamentalne oblasti obeležimo kao na slici 1.2.a, klizajuće refleksije v_1, v_2, v_3 preslikavaće stranice 12, 34, 56, redom, u 23, 45, 61 pa će stranice

12, 23, 34, 45, 56, 61

fundamentalne oblesti biti stranice

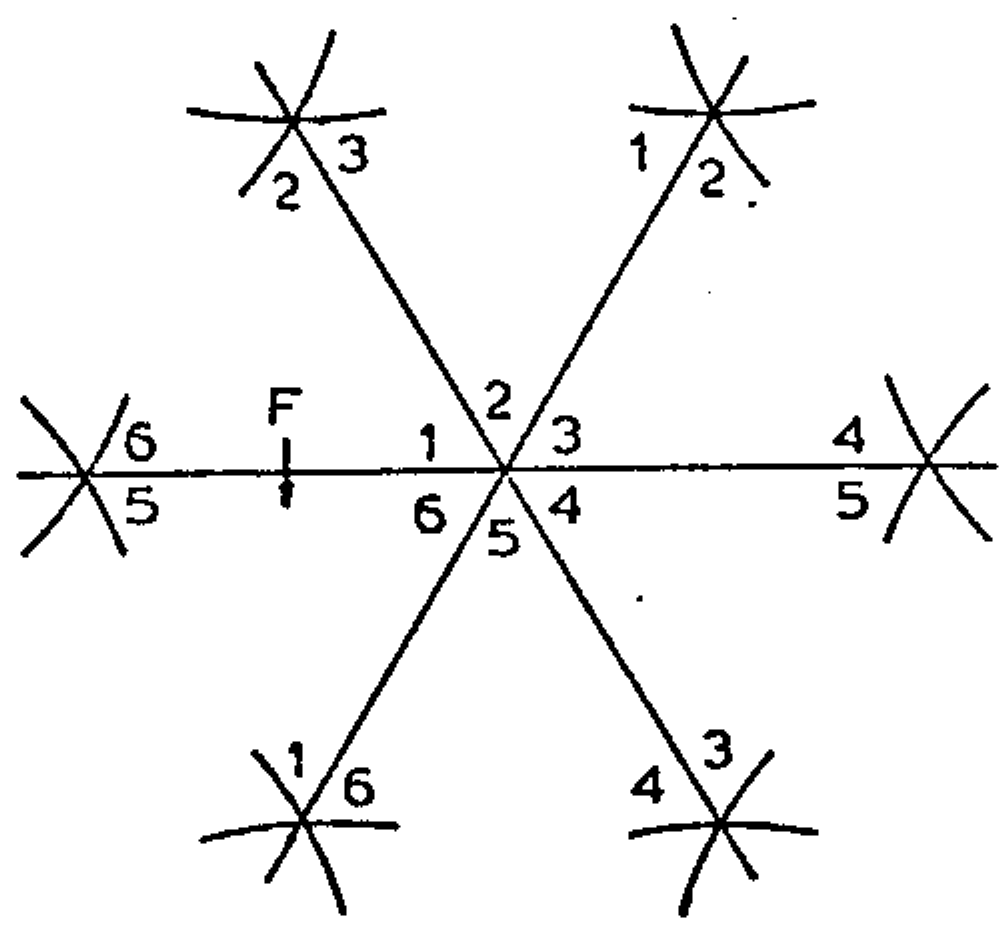
23, 12, 45, 34, 61, 56

susednih šest pravilnih šestouglova.

Nastavimo li sa obeležavanjem uglova kod svakog temena dobićemo uvek ciklus (1,...,6) kod jednog temena orijentisan u jednom, a kod susednih u suprotnom smeru. Klizajućim refleksijama v_1, v_2, v_3 fundamentalna oblast se preslikava u susedne šestouglove prelazeći, redom, preko svojih stranica 23, 45, 61, pa izraz

$$v_1^2v_2^2v_3^2 = v_1v_1v_2v_2v_3v_3$$

predstavlja putanju koja najpre prelazi stranicu 61 fundamentalne oblasti, zatim stranicu 61 poligona v_3, zatim stranicu 45 poligona v_3^2, zatim stranicu 45 poligona $v_2v_3^2$ itd. ([14] str. 57) sve dok se putanja ne zatvori oko temena 1 fundamentalne oblasti F, kao na slici 1.2.b.



sl. 1.2.b.

Kako se prethodno razmatranje ponavlja i u opštem slučaju zaključujemo da

$$v_1^2v_2^2\dots v_g^2 = 1$$

predstavlja relaciju koja definiše grupu generisanu klizajućim refleksijama (1.2.1).

Primetimo da, izvršimo li apstraktnu identifikaciju odgovarajućih ivica (za slučaj $g=3$ to su 12 i 23, 34 i 45, 56 i 61) fundamentalne oblasti dobićemo neorijentabilnu površ roda g, dakle sferu sa koje je "isečeno" g diskova i na njihovo mesto "zalepljeno" g Möbijus-ovih traka.

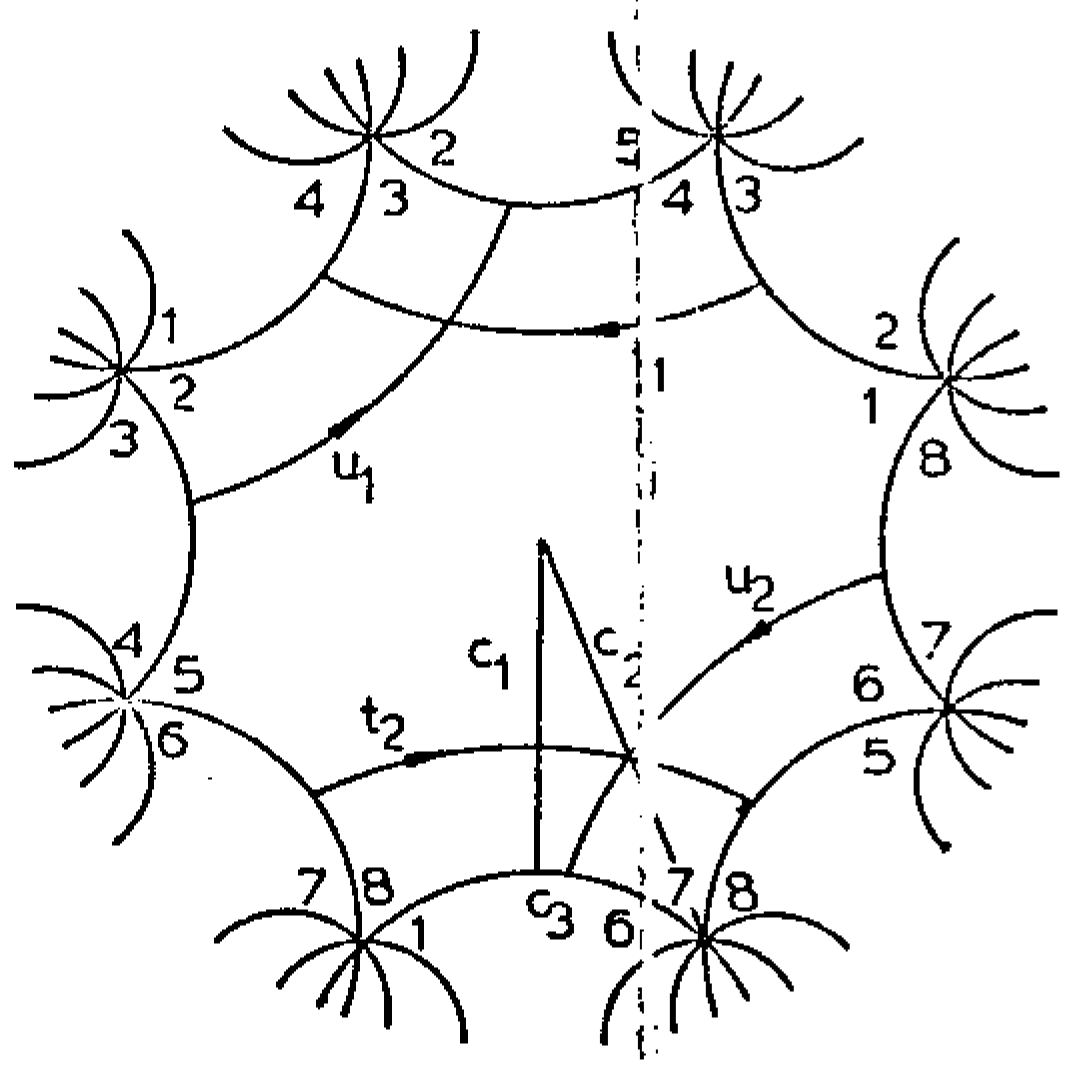
1.3. Grupa generisana translacijama

Ispitajmo, sada, jednu podgrupu grupe $[p,q]$ ako je $p=q=4g$. Reprezentacija grupe $[4g,4g]$ je

$$c_1^2 = c_2^2 = c_3^2 = (c_1c_2)^{4g} = (c_2c_3)^{4g} = (c_3c_1)^2 = 1,$$

refleksije c_1, c_2, c_3 ostavljaju invarijantnom teselaciju $\{4g,4g\}$ i ose tih refleksija sadrže, redom, jednu ivicu, jedno teme te ivice, središte te ivice neke od pljosni $\{4g\}$ te teselacije.

Postoji podgrupa grupe $[4g, 4g]$ čija je fundamentalna oblast pljosan teselacije $\{4g,4g\}$, pa je stoga indeks te podgrupe $8g$, koja je generisana translacijama odredjenim na način kao na slici 1.3.a za slučaj $g=2$.



sl. 1.3.a.

Kompoziciju $t_g u_g t_g^{-1} u_g^{-1}$ translacija možemo predstaviti u obliku

$$(c_1c_2)^2(c_2c_3)^4(c_1c_2)^2,$$

a ostale kompozicije tog oblika ćemo dobiti transmutacijama ~~pomoću rotacija $(c_1c_2)^{4g}$, $i \in \{1,\dots,g\}$.~~

Tada je

$$(1.3.1)\quad t_iu_it_i^{-1}u_i^{-1} = (c_2c_1)^{4i}(c_1c_2)^2(c_2c_3)^4(c_1c_2)^2(c_1c_2)^{4i},$$

pa odatle sledi da je

$$\begin{aligned} t_1u_1t_1^{-1}u_1^{-1}\ldots t_gu_gt_g^{-1}u_g^{-1} &= \{(c_2c_1)^4(c_1c_2)^2(c_2c_3)^4(c_1c_2)^2\}^g = \\ &= \{(c_2c_1)^2(c_2c_3)^4(c_1c_2)^2\}^g = \\ &= (c_2c_1)^2(c_2c_3)^{4g}(c_1c_2)^2 = (c_2c_3)^{4g} = 1 \end{aligned}$$

U cilju odredjivanja geometrijskog značenja prethodnog razmatranja, jednostavnosti radi, zadržaćemo se na slučaju kada je $g=2$, tj. kada je odgovarajuća teselacija $\{8,8\}$. Ako obeležimo uglove fundamentalne oblasti kao na slici 1.3.a translacije t_1, u_1, t_2, u_2 će preslikavati stranice 14, 25, 58, 61, redom, u 23, 34, 67, 78, pa će stranice

14, 43, 32, 25, 58, 87, 76, 61

fundamentalne oblasti da budu stranice

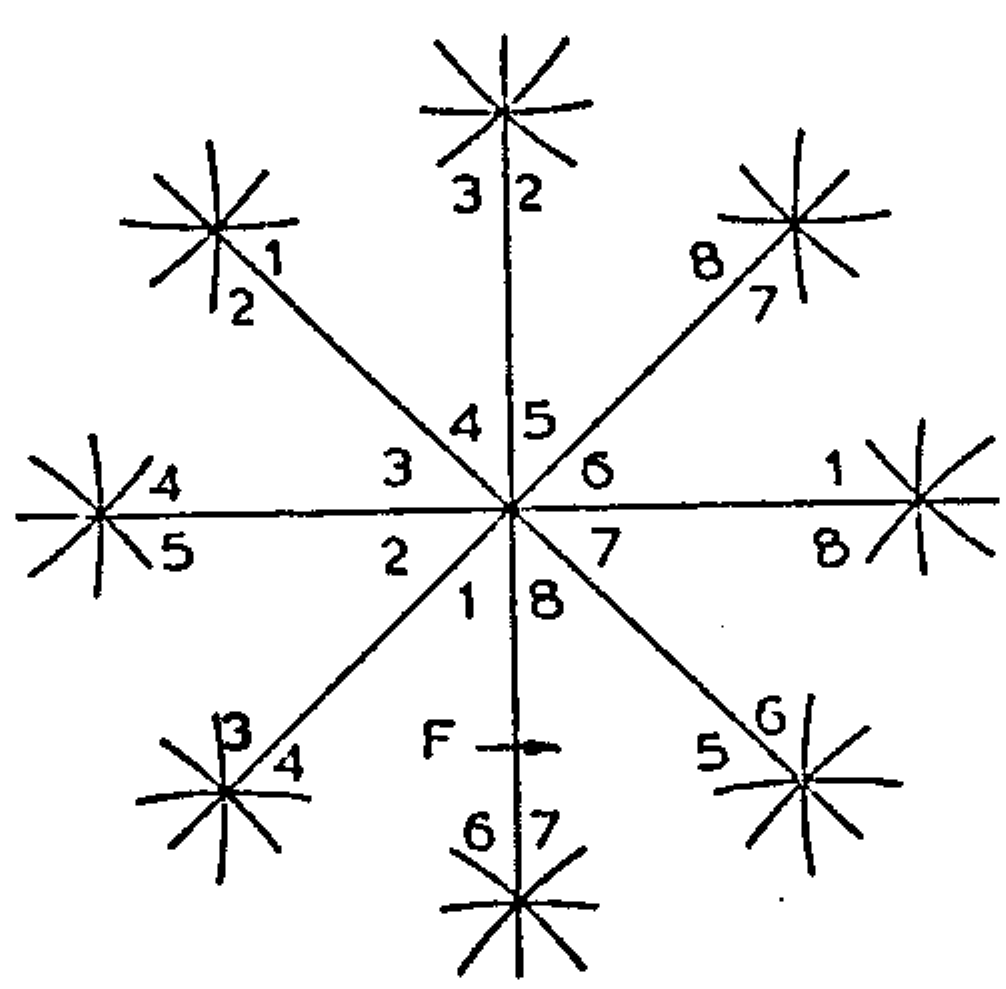
23, 52, 41, 34, 67, 16, 85, 78

susednih osam pravilnih osmouglova.

Nastavimo li sa obeležavanjem uglova kod svakog temena dobićemo uvek ciklus (1,...,8) kod svakog temena orijentisan u istom smeru. Translacijama t_1, u_1, t_2, u_2 fundamentalna oblast se preslikava u susedne osmouglove prelazeći, redom, preko svojih stranica 23, 34, 67, 78 pa izraz

$$t_1u_1t_1^{-1}u_1^{-1}t_2u_2t_2^{-1}u_2^{-1}$$

predstavlja putanju koja, najpre, prelazi preko stranice 61 fundamentalne oblasti, zatim preko stranice 58 poligona u_2^{-1}, zatim



sl. 1.3.b.

preko stranice 78 poligona $t_2^{-1}u_2^{-1}$, itd. sve dok se putanja ne zatvori oko temena 1 fundamentalne oblasti F, kao na slici 1.3.b.

Kako se prethodno razmatranje ponavlja i u opštem slučaju zaključujemo da je

$$t_1u_1t_1^{-1}u_1^{-1}\dots t_gu_gt_g^{-1}u_g^{-1} = 1$$

relacija koja definiše grupu generisanu translacijama (1.3.1).

Ako izvršimo apstraktnu identifikaciju odgovarajućih ivica (za g=2 to su 14 i 23, 43 i 52, 58 i 67, 61 i 78) fundamentalne oblasti dobićemo orijentabilnu površ roda g, dakle, sferu sa koje je "isečeno" g diskova i na njihovo mesto "zalepljeno" g "ručki" ([21] str. 301, slike 286 a-f i 287 a-d).

1.4. Reprezentacija pomoću grafa

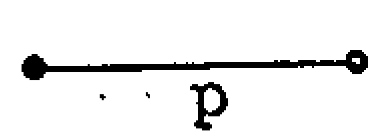
Svaku grupu generisanu refleksijama predstavićemo grafom u kome su temena dodeljena osama refleksija, a grane koje spajaju parove temena postojaće kadgod odgovarajuće ose nisu upravne. Štaviše, grane ćemo označavati brojevima h_{jk} i time će biti odredjena veličina π/h_{jk} ugla koji zaklapaju ose odgovarajuće temenima koje ta grana spaja. U tom označavanju broj 3 ćemo izostavljati. Na ovaj način formiran graf zvaćemo Coxeter-ovim grafom ([22] str. 8; [4] str. 194).

Dakle, grupu p predstavljamo sa

 kada je [p] =[ ]

 kada je p=2

 kada je p=3

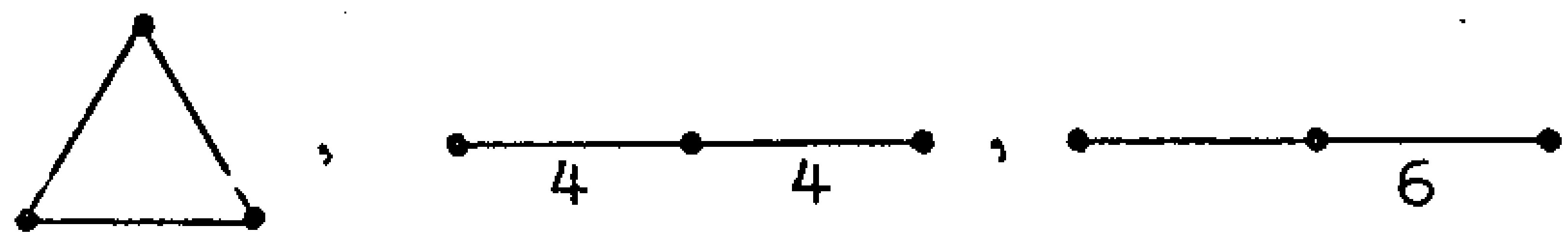
 kada je p>3, uključujući i p=∞.

Nepovezanost grafa kada je p=2 pokazuje da je grupa [2], generisana dvema refleksijama čije su ose medjusobno upravne, direktan proizvod [ ]×[ ].

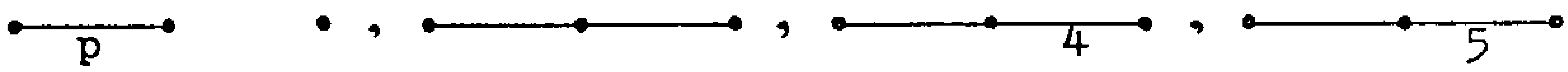
Grafovi koji odgovaraju poslednjim dvema grupama (1.1.3) biće

 i 

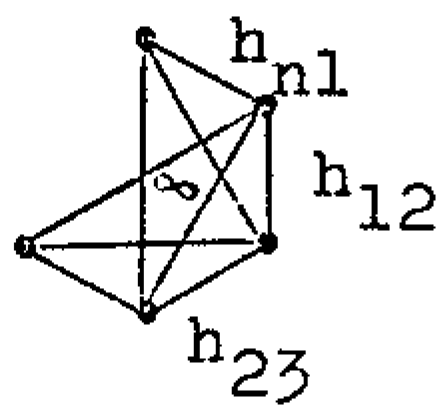
a Coxeter-ovi grafovi grupa (1.1.2) biće



Ovim su iscrpljene sve grupe generisane refleksijama u euklidskoj ravni. Grupama (1.1.4), generisanim refleksijama na sferi odgovaraju grafovi



U hiperboličkoj ravni fundamentalna oblast grupe generisane refleksijama je n-tougao pa se graf te grupe

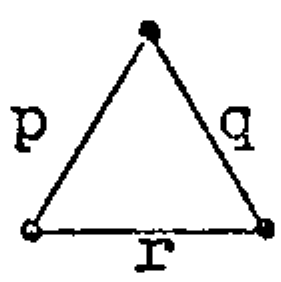


sastoji iz n temena, a grane su mu stranice i dijagonale n-tougla odredjenog tim temenima.

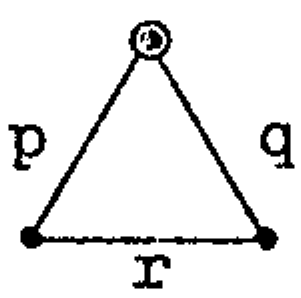
1.5. Wythoff-ova konstrukcija

Koristeći se Wythoff-ovom metodom ([6] str. 390), zaokruživanjem jednog temena grafa

(1.5.1)

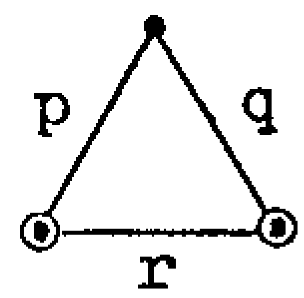


predstavićemo teselaciju sfere, euklidske ili hiperboličke ravni čija su temena orbita onog temena fundamentalne oblasti grupe čiji je graf zadat, koje ne pripada osi refleksije koju zaokruženo teme reprezentuje ([12] str. 17). Dakle, simbolom



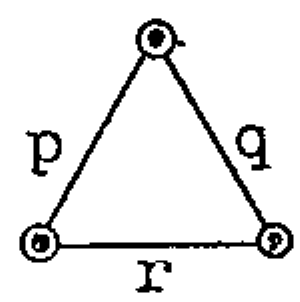
predstavljamo teselaciju $(p.q)^r$. Ako je vrednost neke od promenljivih p ili q jednaka 2 izostavljamo je u oznaci teselacije, pa, na primer, za p=2 teselacija će biti (q^r).

Zaokruživanjem dvaju tamana grafa (1.5.1) biće predstavljena teselacija čija su temena orbita one tačke na rubu fundamentalne oblasti (p q r) koja ne pripada ni jednoj osi koje zaokružena temena reprezentuju. Kako bi ivice dobijene teselacije bile medjusobno podudarne pomenutu tačku ćemo izabrati tako da bude podjednako udaljena od osa koje reprezentuju zaokružene tačke, tj. da pripada i bisektrisi ugla koji grade te ose. Dakle, simbolom



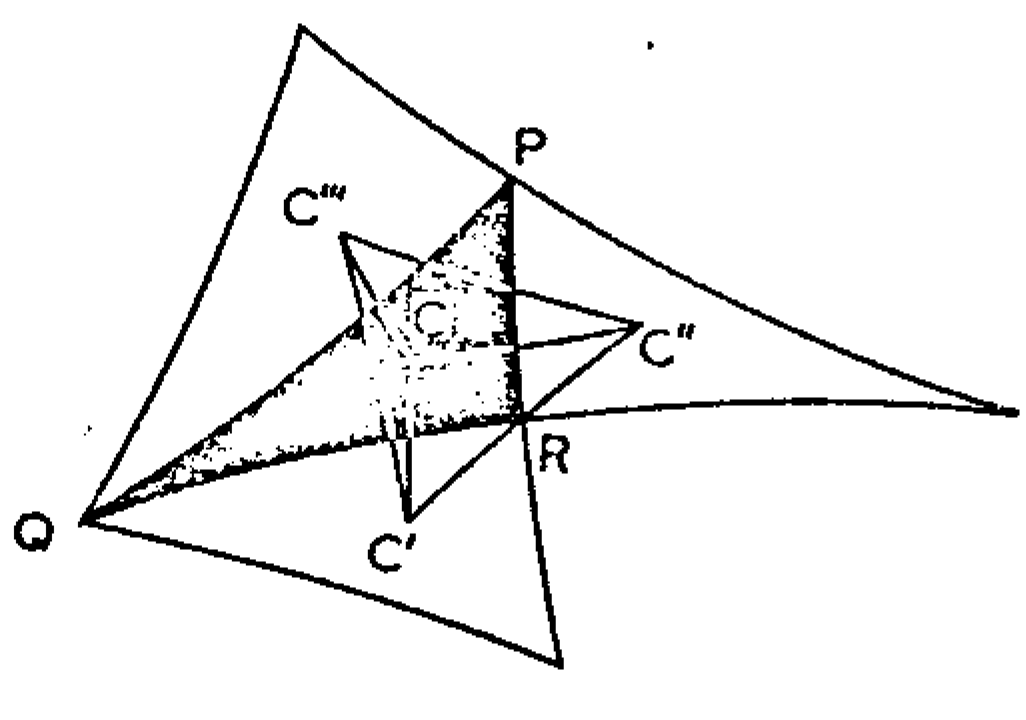
označavamo teselaciju (p.2r.q.2r).

Zaokruživanjem svih temena grafa (1.5.1) predstavićemo teselaciju čija su temena orbita one tačke u unutrašnjosti fundamentalne oblasti (p q r) koja je podjednako udaljena od njenih ivica. Dakle, simbolom



označavamo teselaciju (2p.2q.2r).

Temena svake od prethodnih teselacija dobijena su kao orbita grupe generisane refleksijama na sferi, u euklidskoj ili hiperboličkoj ravni. U podgrupi indeksa 2 te grupe koja se sastoji samo iz rotacija možemo izabrati orbitu jedne tačke koja predstavlja temena neke uniformne teselacije pravilnim konveksnim poligonima. Kako su trouglovi (p q r) naizmenično obojeni crno i belo kao na slikama 1.1.a, 1.1.b, 1.1.c. u svakom od belih trouglova možemo izabrati tačku, tako da u trima belim trouglovima koji okružuju jedan crni trougao te tačke predstavljaju temena jednog pravilnog trougla kao na slici 1.5.a.

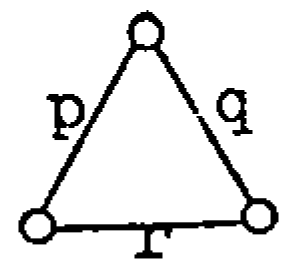


sl. 1.5.a.

Pljosni na taj način dobijene teselacije biće pravilni p-uglovi, q-uglovi i r-uglovi okruženi pravilnim trouglovima. Tu teselaciju

$$(p.3.q.3.r.3)$$

označavaćemo simbolom



u kojem odsustvo tačaka koje su zaokružene ukazuje na odsustvo osa refleksije ([12] str. 18).

Obeležimo, kao na slici 1.5.a, sa PQR crni trougao čiji su uglovi kod temena P,Q,R, redom, π/p, π/q, π/r, sa C tačku u unutrašnjosti toga trougla i sa C', C'', C''' slike te tačke u refleksijama čije su ose QR, RP, PQ. Ako je PQR trougao u hiperboličkoj ravni neposredno se može dokazati, korišćenjem formula hiperboličke trigonometrije ([8] str. 238) da je uslov

(1.5.2) $\qquad \mathrm{sh}PC \sin\pi/p = \mathrm{sh}QC \sin\pi/q = \mathrm{sh}RC \sin\pi/r$

neophodan i dovoljan da trougao $C'C''C'''$ bude pravilan, te da pljosni dobijene teselacije budu pravilni poligoni. Na isti način se može dokazati da su na sferi i u euklidskoj ravni uslovi analogni uslovu (1.5.2), redom

$$\sin PC \sin\pi/p = \sin QC \sin\pi/q = \sin RC \sin\pi/r$$

i

$$PC \sin\pi/p = QC \sin\pi/q = RC \sin\pi/r$$

([6] str. 393).

Kako fundamentalna oblast grupe G generisane refleksijama na sferi može biti najviše trougao na prethodan način su dobijene sve uniformne teselacije sfere čija temena predstavljaju orbitu neke tačke u grupi G. Štaviše, na taj način su odredjene sve uniformne teselacije sfere kojima su pljosni konveksne, a samim tim i svi konveksni, uniformni poliedri ([13] str. 406-408; [31] str. 111). To su:

n-tostrana prizma

n-tostrana antiprizma

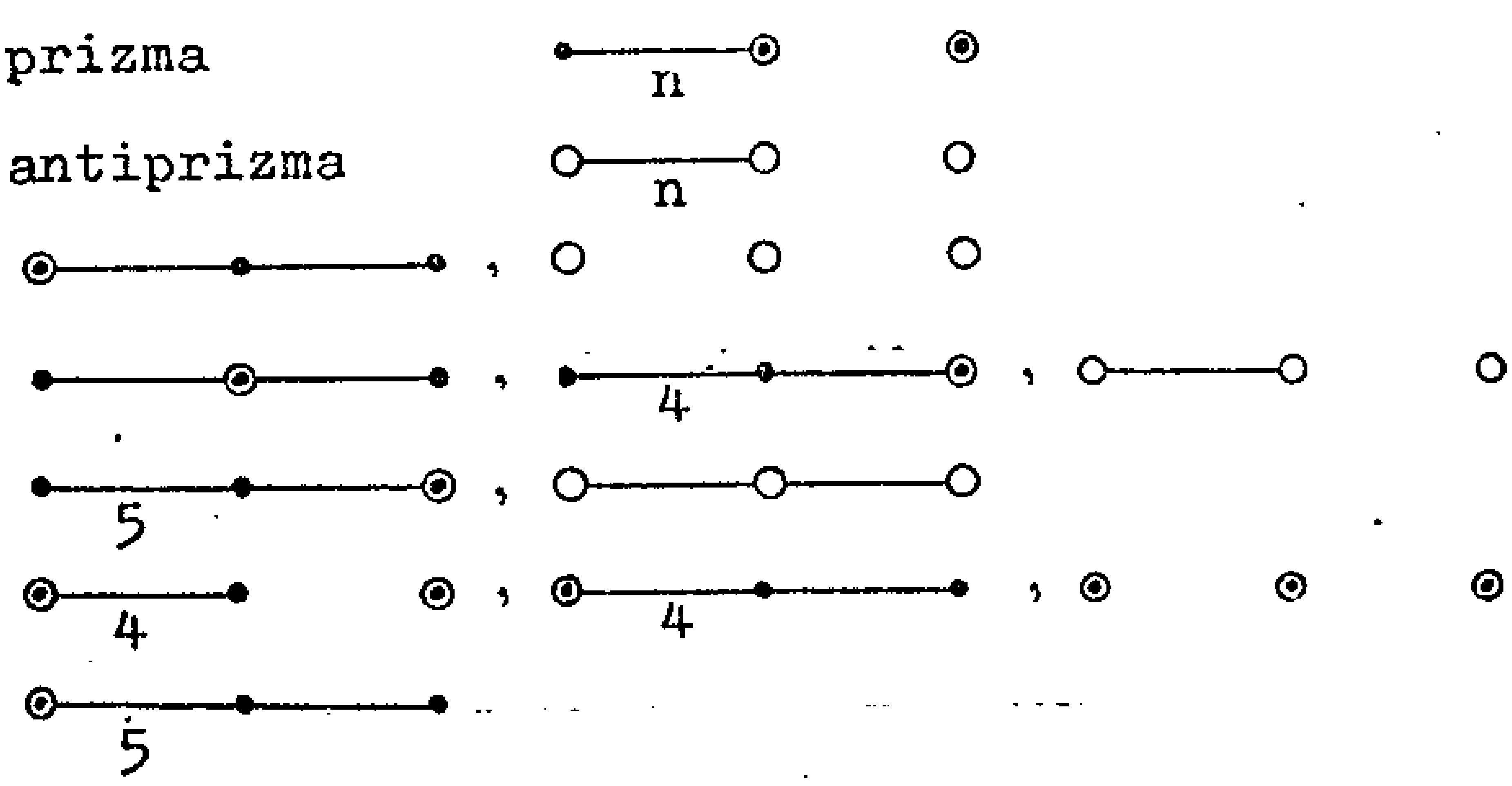
(3^3)

(3^4)

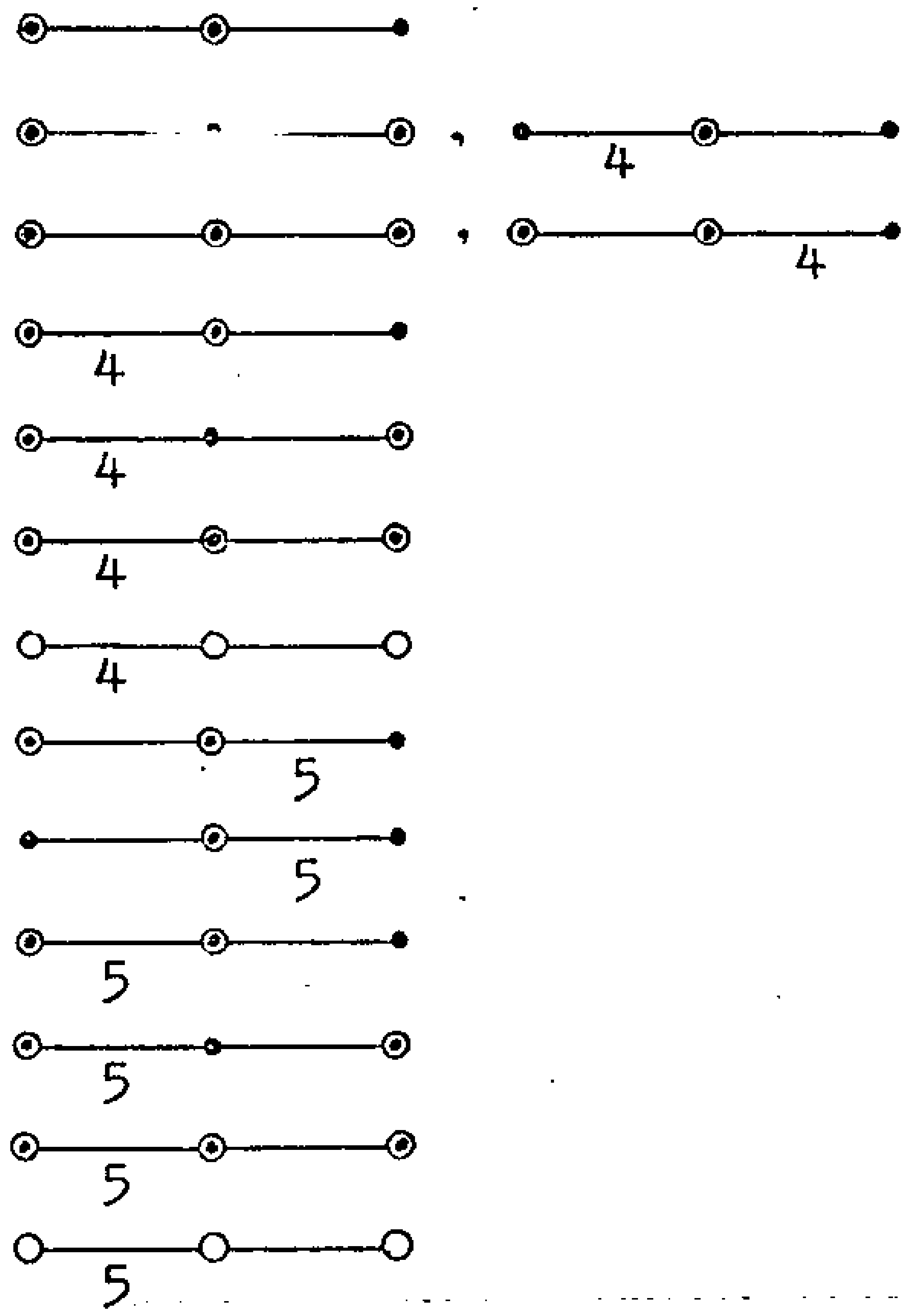
(3^5)

(4^3)

(5^3)



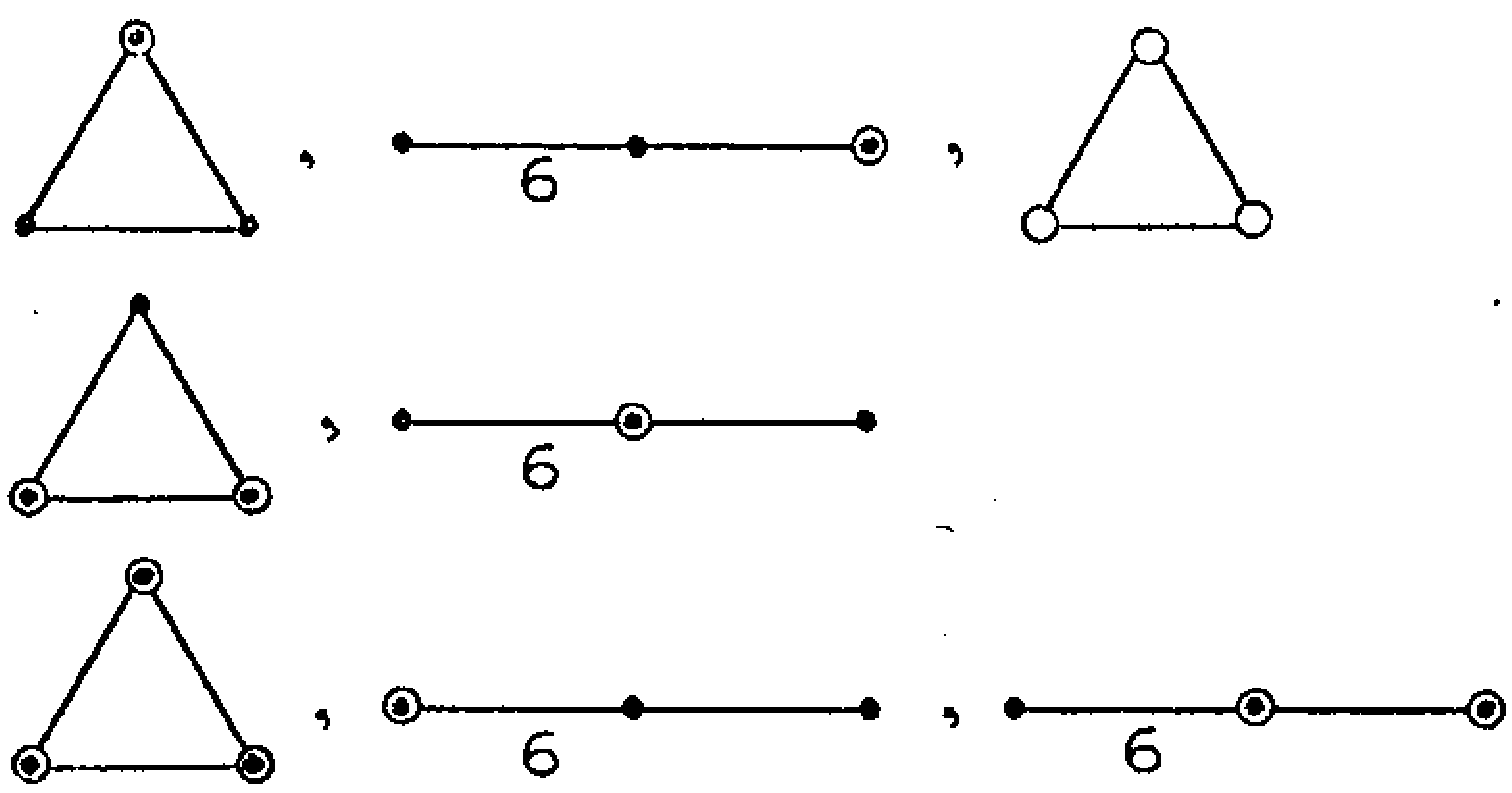
(3.6^2)
$(3.4)^2$
(4.6^2)
(3.8^2)
(3.4^3)
$(4.6.8)$
$(3^4.4)$
(5.6^2)
$(3.5)^2$
(3.10^2)
$(3.4.5.4)$
$(4.6.10)$
$(3^4.5)$



([6] str. 394; [32])

Ako je grupa G generisana refleksijama u euklidskoj ravni njena fundamentalna oblast može biti najviše četvorougao. Jedina uniformna teselacija euklidske ravni čija je grupa generisana refleksijama i čija je fundamentalna oblast četvorougao, (4^4), dobija se kao orbita središta ili temena kvadrata u grupi koja je generisana refleksijama čije ose sadrže stranice toga kvadrata, ili kao orbita središta veće stranice pravougaonika čija je manja stranica jednaka polovini veće. Dakle, u svakom slučaju, (4^4) je orbita neke tačke u grupi $[\infty]\times[\infty]$. Ako je fundamentalna oblast grupe G trougaona Wythoff-ovom konstrukcijom dobićemo sledeće uniformne teselacije euklidske ravni:

(3^6)
$(3.6)^2$
(6^3)



(4^4)

(4.8^2)

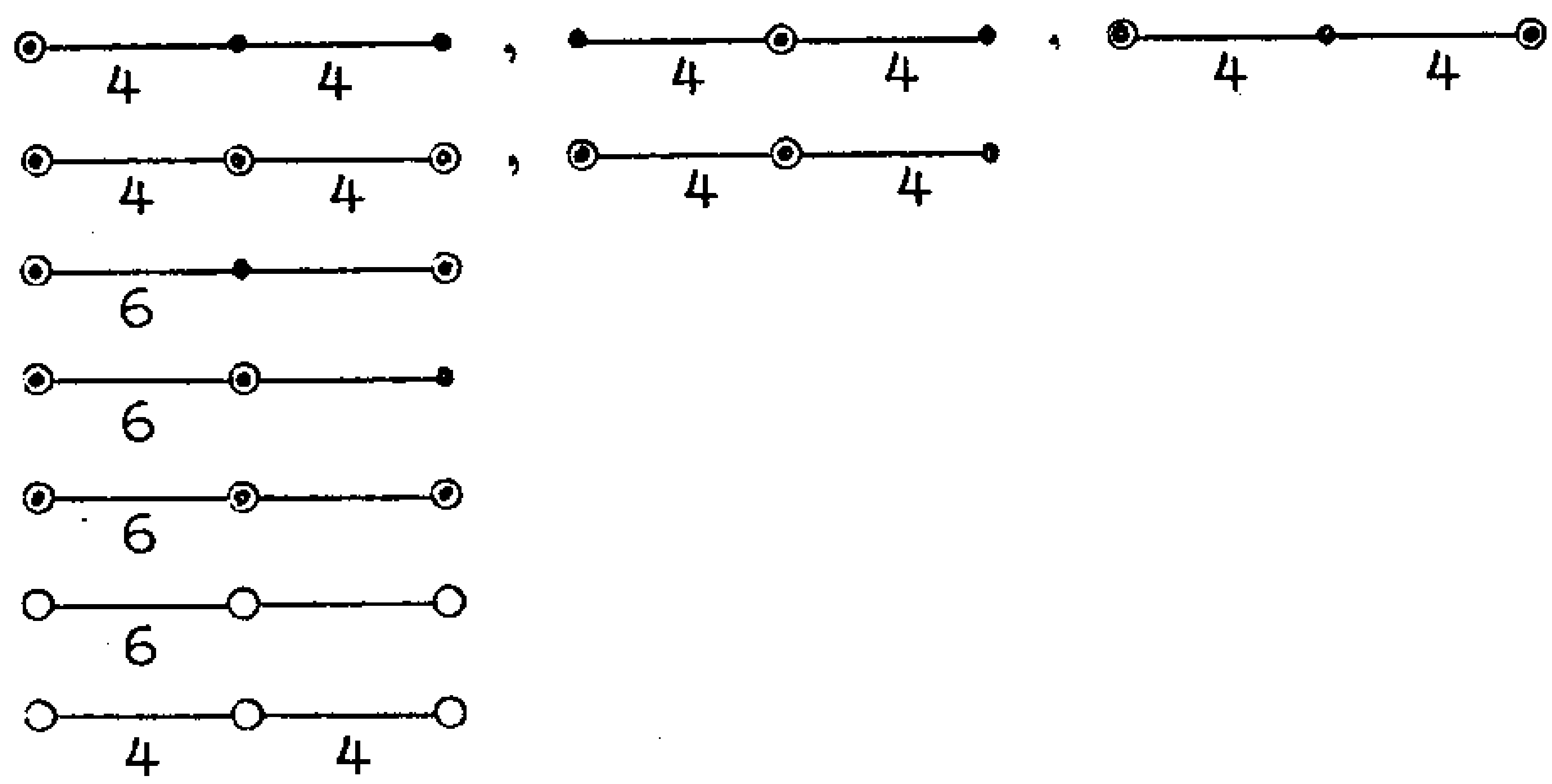
$(3.4.6.4)$

(3.12^2)

$(4.6.12)$

$(3^4.6)$

$(3^2.4.3.4)$

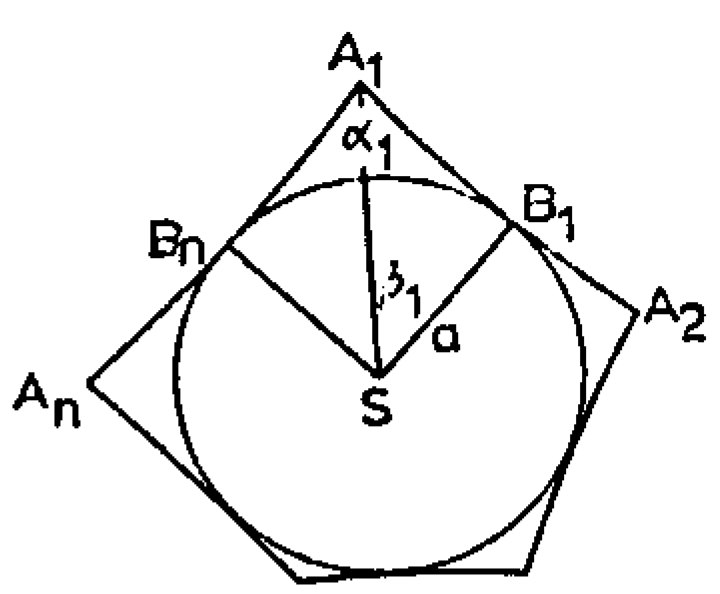


Na ovaj način, za razliku od sfernog slučaja, nisu iscrpljene sve uniformne teselacije euklidske ravni jer nedostaje teselacija $(3^3.4^2)$.

S obzirom na to da je fundamentalna oblast grupe G generisane refleksijama u hiperboličkoj ravni proizvoljan n-tougao čiji su uglovi $\pi/h_1,\dots,\pi/h_n$ takvi da zadovoljavaju uslov (1.1.5), odredićemo one od tih n-touglova u kojima postoje tačke čije orbite u grupi G predstavljaju temena uniformnih teselacija. U tom cilju dokažimo, najpre, da važi sledeći stav.

(1.5.3) Medju svim konveksnim poligonima u hiperbiličkoj ravni čiji su unutrašnji uglovi $\alpha_1,\dots,\alpha_n$ postoji tačno jedan, odredjen do na izometriju, koji je tangentan.

Dokaz: Neka je $A_1\dots A_n$ konveksan, tangentan poligon čiji su unutrašnji uglovi $\alpha_1,\dots,\alpha_n$, kome je a poluprečnik upisanog kruga k, S njegovo središte, $B_1,\dots,B_n$ dodirne tačke kruga k i stranica $A_1A_2,\dots,A_nA_1$ i $\beta_1,\dots,\beta_n$ uglovi $A_1SB_1,\dots,A_nSB_n$.



Tada je, na osnovu formula hiperboljčke trigonometrije,

(1.5.4) $\cos\alpha_1/2 = \mathrm{ch}\,a \sin\beta_1,\dots,\ \cos\alpha_n/2 = \mathrm{ch}\,a \sin\beta_n$

pa je

(1.5.5) $\sin\beta_1:\sin\beta_2:\ldots:\sin\beta_n = \cos\alpha_1/2:\cos\alpha_2/2:\ldots:\cos\alpha_n/2$

Korišćenjem neprekidnosti sinusne funkcije može se lako dokazati da u ravni postoji skup $b_1,\ldots,b_n$ polupravih sa istim početkom S koje dele ravan na uglove $2\beta_1,\ldots,2\beta_n$ takve da su zadovoljeni uslovi (1.5.5), gde su uglovi $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ dati. Obeležimo sa $a_1,\ldots,a_n$ bisektrise uglova $b_nb_1,\ldots,b_{n-1}b_n$ i na njima odredimo tačke $A_1,\ldots,A_n$ takve da poluprave $c_1,\ldots,c_n$ koje sadrže te tačke i upravne su na polupravama $b_1,\ldots,b_n$ sa polupravama $A_1S,\ldots,A_nS$ grade uglove podudarne polovinama datih uglova $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$. Korišćenjem formula (1.5.4) lako se dokazuje da poluprave $c_1,\ldots,c_n$ sadrže, redom, tačke $A_2,\ldots,A_n,A_1$ pa je, stoga, $A_1\ldots A_n$ traženi poligon.

Prethodni stav ima sledeće dve neposredne posledice:

(1.5.6) Medju svim konveksnim poligonima u hiperboličkoj ravni čiji unutrašnji uglovi $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ nisu tupi postoji tačno jedan, odredjen do na izometriju, kome se bisektrise unutrašnjih uglova $\alpha_2,\ldots,\alpha_{n-1}$ seku u tački koja pripada zajedničkoj ivici uglova α_1 i α_n.

(1.5.7) Medju svim konveksnim poligonima u hiperboličkoj ravni sa unutrašnjim uglovima $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$, pri čemu su zadovoljeni uslovi da uglovi α_2 i α_n nisu tupi, a ugao α_1 je oblika π/k, ili uslovi da uglovi α_2 i α_n nisu tupi ali su jednaki, a ugao α_1 je oblika $2\pi/k$, postoji tačno jedan poligon, odredjen do na izometriju, kome se bisektrisa unutrašnjih uglova $\alpha_3,\ldots,\alpha_{n-1}$ seku u temenu ugla α_1.

Ako je fundamentalna oblast grupe G generisane refleksijama onaj od n-touglova sa unutrašnjim uglovima $\pi/h_1,\ldots,\pi/h_n$ kome ivice dodiruju krug k, orbita središta toga kruga u grupi G predstavljaće skup temena uniformne teselacije

$$(2h_1\ldots 2h_n).$$

Ako je n-tougao sa unutrašnjim uglovima $\pi/h_1,\ldots,\pi/h_n$ takav da se bisektrise uglova $\pi/h_2,\ldots,\pi/h_{n-1}$ seku u tački koja pripada zajedničkoj ivici uglova π/h_1 i π/h_n, orbita te tačke u grupi G predstavljaće skup temena uniformne teselacije

$$(h_1.2h_2\ldots 2h_{n-1}.h_n.2h_{n-1}\ldots 2h_2) = (h_1.2h_2\ldots 2h_{n-1}.h_n)^{-2}.$$

Ako je n-tougao sa unutrašnjim uglovima $\pi/h_1,\ldots,\pi/h_n$ takav da se bisektrise unutrašnjih uglova $\pi/h_3,\ldots,\pi/h_{n-1}$ seku u temenu ugla π/h_1, orbita tog temena u grupi G predstavljaće skup temena uniformne teselacije

$$(h_2.2h_3...2h_{n-1}.h_n)^{-2h_1}.$$

Na ovaj način, kao i u euklidskom slučaju, nisu iscrpljene sve uniformne teselacije hiperboličke ravni.

2. DISKRETNE RAVANSKE GRUPE

2.1. Fundamentalan poligon

U ravni A^2 diskretna grupa G na prirodan način definiše relaciju ekvivalencije. Za tačke x i y iz A^2 reći ćemo da su ekvivalentne akko postoji transformacija g iz G takva da je $y=gx$. Neposredno se dokazuje da u unutrašnjosti fundamentalne oblasti nema ekvivalentnih tačaka.

Medju svim fundamentalnim oblastima neke diskretne grupe od posebnog su značaja poligonske. Zbog toga ističemo sledeći stav.

(2.1.1) Ako je G diskretna grupa ravni A^2 sa kompaktnom fundamentalnom oblašću tada postoji konveksan poligon F koji predstavlja fundamentalnu oblast grupe G ([36] str. 247).

Dokaz: Kako je grupa G diskretna u ravni A^2 postoji tačka P koju ni jedna transformacija iz grupe G, izuzev koincidencije, ne ostavlja invarijantnom. Svakom elementu $g\neq 1$ iz grupe G dodelimo zatvorenu poluravan koja se sastoji iz tačaka koje nisu udaljenije od P nego od gP. Svaka od ovih poluravni sadrži tačku P i granica joj je medijatrisa duži PgP. Presek ovih poluravni obeležimo sa F. Kako je F skup tačaka čija rastojanja od tačaka gP, $g\in G$, nisu manja nego nego rastojanja od tačke P, ako je Q bilo koja tačka iz skupa F tada Q nije dalja od tačke P nego bilo koja od tačaka gQ za $g\neq 1$. Ako dve tačke iz iste klase ekvivalencije pripadaju skupu F tada one, na osnovu prethodnog, pripadaju rubu tog skupa. Dakle, F je fundamentalna oblast kojoj iz svake klase ekvivalencije pripada bar jedna tačka na minimalnom rastojanju od P.

S obzirom na to da je G grupa sa kompaktnom fundamentalnom oblašću, postoji krug k sa središtem P koji sadrži bar po jednu tačku iz svake klase ekvivalencije pa sadrži, dakle, i skup F. Odgovarajući krugovi čija su središta ekvivalentna tački P i na rastojanju od P većem od prečnika kruga k, sa krugom k nemaju zajedničkih tačaka. Iz diskretnosti grupe G sledi da smo iz skupa svih odgovarajućih krugova izostavili njih konačno mnogo, tj. da smo izostavili konačno mnogo transformacija grupe G, pa je F presek konačno mnogo zatvorenih poluravni, dakle, zatvoren, konveksan poligon.

Ako dopustimo da tačka P iz dokaza prethodnog stava, bude invarijantna u nekim transformacijama iz grupe G onda te transformacije mogu biti samo osne refleksije ili rotacije. Ako je P invarijantna tačka samo u jednoj refleksiji iz G tada osa te refleksije deli poligon E, u dokazu prethodne teoreme obeležen sa F, koji predstavlja presek zatvorenih poluravni koje sadrže tačku P i čije ivice pripadaju medijatrisama duži PgP, P≠gP, g∈G, na dva podudarna poligona od kojih je svaki fundamentalan poligon F grupe G. Ako je tačka P invarijantna u nekolikim osnim refleksijama tada će, zbog diskretnosti grupe G, ose tih refleksija da podele ravan na podudarne, disjunktne uglove sa temenom P, pa će fundamentalan poligon F grupe G, u tom slučaju, biti presek poligona E i bilo kojeg od tih uglova. Ako je tačka P invarijantna samo u jednoj rotaciji reda h fundamentalan poligon F će biti presek poligon E i jednog od uglova $2\pi/h$ čije je teme P. Dogodi li se da je tačka P invarijantna i u refleksijama i u rotacijama ili samo u nekolikim rotacijama iz G neposredno se dokazuje da se ti slučajevi svode na prethodne.

Slike poligona F u grupi G predstavljaju teselaciju $\mathcal{T}$ ravni A^2, tj. $\mathcal{T} = \{gF : g\in G\}$ je teselacija ravni A^2 čija je grupa tranzitivna u odnosu na pljosni te teselacije.

Ako fundamentalna oblast diskretne grupe G nije kompaktna neka temena poligona F, koji je i u ovom slučaju konveksan, mogu biti infinitna ili transfinitna. Poligon F, u tom slučaju, može imati i beskonačno mnogo temena pa tada neće postojati kompaktan disk koji ga sadrži.

2.2. Količnički prostor

Identifikacijom tačaka iz iste klase ekvivalencije (orbite bilo koje od tih tačaka) dobićemo topološki prostor $M=A^2/G$.

Kako u unutrašnjosti F^o konveksnog poligona F koji predstavlja fundamentalnu oblast grupe G, nema ekvivalentnih tačaka količnički prostor se dobija identifikacijom nekih tačaka na rubu fundamentalnog poligona F. Štaviše, biće identifikovane neke ivice tog poligona i to uvek u parovima, nikada tri ili više ([35] str. 90).

Neka su ivice PQ i RS odgovarajuće u nekoj transformaciji iz G i neka je četvorka tačaka (P,Q,R,S) orijentisana. Tada se identifikacija ivica PQ i RS može ostvariti na dva načina: istosmerno, preslikavajući P na S i Q na R, i suprotnosmerno, preslikavajući P na R i Q na S. Ako su dve ivice istosmerno identifikovane obeležićemo ih istim slovom a jednoj ćemo dodati crticu u eksponentu (naprimer, δ i δ'), a ako su identifikovane suprotnosmerno dodati znak biće zvezdica (naprimer ν i ν^*).

Na taj način dobijeni količnički prostor M biće povezana, kompaktna dvodimenziona površ sa rubom ili bez njega, koja je orijentabilna ako su sve identifikacije ostvarene istosmerno, a neorijentabilna ako je bar jedna identifikacija ostvarena suprotnosmerno.

Ako grupa G raspolaže refleksijama ivica poligona F koja pripada osi refleksije neće biti identifikovana ni sa jednom drugom ivicom tog poligona pa će, u tom slučaju, površ M imati rub. Štaviše, važi i obrnuto ([30] str. 221).

U orijentabilnom slučaju površ M će da bude sfera sa koje je "isečeno" r+g diskova i na mesto g od njih "zalepljeno" g ručki (torusa sa isečenim diskom), a u neorijentabilnom slučaju M će da bude sfera sa koje je "isečeno" r+g diskova, a "zalepljeno" g Möbijus-ovih traka ([27] str 1196).

Neka je p : $A^2 \to A^2/G$ na prirodan način definisano količničko preslikavanje koje svakoj tački ravni A^2 dodeljuje tačku količničkog prostora koja reprezentuje orbitu te tačke u grupi G. Tada je p lokalni homeomorfizam u svim tačkama ravni A^2 sa izuzetkom tačaka $p^{-1}(W)$, gde je W tačka ruba površi M ili je $p^{-1}(W)$ središte neke rotacije iz G ([27] str. 1194). Tačku W površi M koja ne pripada rubu takvu da je $p^{-1}(W)$ središte rotacije koja pripada grupi G, zvaćemo singularnom tačkom te površi.

2.3. Klasifikacija poligonskih fundamentalnih oblasti

Da bismo odredili sve diskretne grupe simetrija ravni A^2 dovoljno je odrediti sve konveksne poligone koji predstavljaju fundamentalne oblasti tih grupa, a za njihovo odredjivanje potrebno je profiniti svodjenje kompaktnih dvodimenzionih površi na kanonski oblik.

Površ $M=A^2/G$ smo dobili identifikacijom ("lepljenjem") pojedinih parova ivica poligonske fundamentalne oblasti F. Kako nam je poznata klasifikacija kompaktnih dvodimenzionih površi sa ili bez ruba, sve moguće poligonske fundamentalne oblasti dobićemo "isecanjem" na odredjen način, površi M u disk.

U tom cilju obeležimo sa $\bar{R}_1,\dots,\bar{R}_m$ tačke grananja (singularne tačke) površi M koje ne pripadaju njenom rubu, sa

$$\bar{Q}_{11},\dots,\bar{Q}_{1n_1},\bar{Q}_{21},\dots,\bar{Q}_{2n_2},\dots,\bar{Q}_{r1},\dots,\bar{Q}_{rn_r}$$

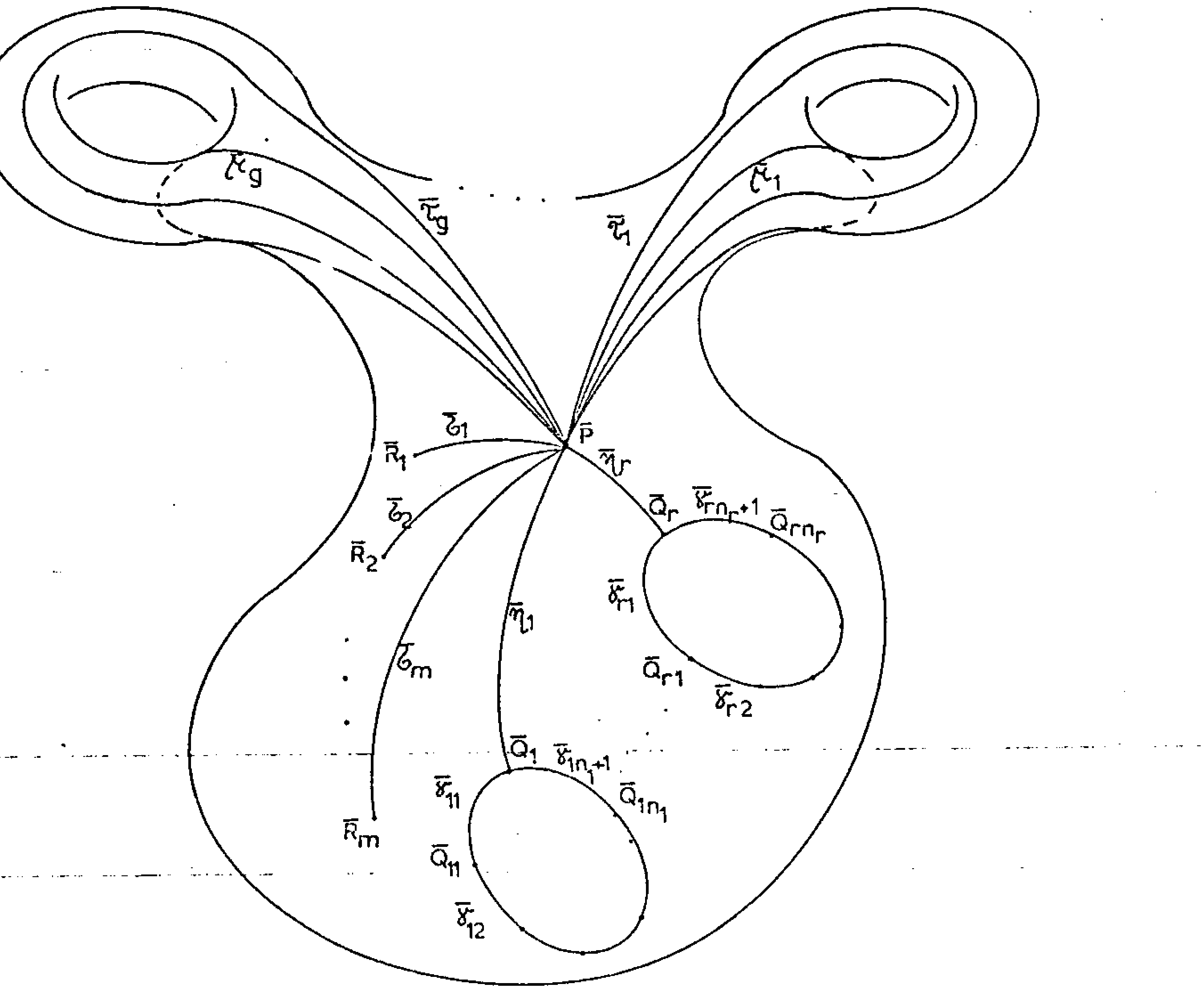
tačke grananja na rubu, sa $\bar{Q}_1,\dots,\bar{Q}_r$ proizvoljne nesingularne tačke od kojih svaka pripada po jednoj od r disjunktnih zatvorenih krivih čija je unija rub površi M i sa $\bar{P}$ proizvoljnu tačku površi M. Ne smanjujući opštost razmatranja tačke $\bar{Q}_1,\dots,\bar{Q}_r$ izabraćemo na ivicama $\bar{Q}_{1n_1}\bar{Q}_{11},\dots,\bar{Q}_{rn_r}\bar{Q}_{r1}$. Ivice na rubu koje se završavaju tačkama $\bar{Q}_{kl}$ obeležićemo sa $\bar{\gamma}_{kl}$, a ivice $Q_{kn_k}Q_k$ sa $\bar{\gamma}_{kn_k+1}$ (slika 2.3.a).

Ako je površ M orijentabilna možemo je iseći duž linija $\bar{\delta}_1,\dots,\bar{\delta}_m$ (koje spajaju $\bar{P}$ sa $\bar{R}_1,\dots,\bar{R}_m$), $\bar{\eta}_1,\dots,\bar{\eta}_r$ (koje spajaju $\bar{P}$ sa $\bar{Q}_1,\dots,\bar{Q}_r$), $\bar{\tau}_1,\bar{\mu}_1,\dots,\bar{\tau}_g,\bar{\mu}_g$ (koje sadrže $\bar{P}$ i razvijaju "ručke" u diskove) tako da dobijemo disk čija se granica sastoji iz ukupno $2m+3r+n_1+\dots+n_r+4g$ segmenata čije oznake, zapišemo li ih po redu, tvore reč

$$\omega=\prod_1^m\bar{\delta}_i\bar{\delta}_i^{-1}\prod_1^r\bar{\eta}_j\bar{\gamma}_{j1}\cdots\bar{\gamma}_{jn_j+1}\bar{\eta}_j^{-1}\prod_1^g\bar{\tau}_k\bar{\mu}_k\bar{\tau}_k^{-1}\bar{\mu}_k^{-1},$$

a temena na granici su, redom,

$$\bar{P}^1\bar{R}_1\bar{P}^2\bar{R}_2\dots\bar{P}^m\bar{R}_m\bar{P}^{m+1}\bar{Q}_1^1\bar{Q}_{11}\dots\bar{Q}_{1n_1}\bar{Q}_1^2\bar{P}^{m+2}\dots$$
$$\dots\bar{P}^{m+r}\bar{Q}_r^1\bar{Q}_{r1}\dots\bar{Q}_{rn_r}\bar{Q}_r^2\bar{P}^{m+r+1}\dots\bar{P}^{m+r+4g}.$$



sl. 2.3.a.

Ako je M neorijentabilna površ linije $\bar\tau_1,\bar\mu_1,\dots,\bar\tau_g,\bar\mu_g$ zamenićemo linijama $\bar\nu_1,\dots,\bar\nu_g$ (koje razvijaju Möbijus-ove trake u diskove) pa će, u tom slučaju, reč koja odgovara granici biti

$$\omega = \prod_1^m \bar\sigma_i \bar\sigma_i^{-1} \prod_1^r \bar\eta_j \bar\gamma_{j1}\cdots\bar\gamma_{jn_j+1}\bar\eta_j^{-1} \prod_1^g \bar\nu_k^2$$

a temena na granici biće, redom,

$$\bar P^1 \bar R_1 \dots \bar Q_r^2 \bar P^{m+r+1} \dots \bar P^{m+r+2g}.$$

Na ovaj način dobijenoj granici možemo da dodelimo poligon F koji ima isti broj i na isti način raspoređjena temena kao i granica diska i koji ćemo, u orijentabilnom slučaju, obeležiti sa

$$(2.3.1)\quad P^1R_1P^2R_2\ldots P^mR_mP^{m+1}Q_1^1Q_{11}\ldots Q_{1n_1}Q_1^2P^{m+2}\ldots$$
$$\ldots P^{m+r}Q_r^1Q_{r1}\ldots Q_{rn_r}Q_r^2P^{m+r+1}\ldots P^{m+r+4g},$$

a u neorijentabilnom sa

$$(2.3.2)\quad P^1R_1\ldots Q_r^2P^{m+r+1}\ldots P^{m+r+2g},$$

takav da ima sledeće svojstva:

(1) svaki od uglova kod temena P^i, $i\in\{1,\ldots p\}$, je $2\pi/p$, gde je $p=m+r+4g$ u orijentabilnom, a $p=m+r+2g$ u neorijentabilnom slučaju,

(2) ugao kod temena R_i je $2\pi/h_i$, $h_i\in\{2,3,\ldots\}$,

(3) svaki od uglova kod temena Q_j^e, $j\in\{1,\ldots,r\}$, $e\in\{1,2\}$ je prav,

(4) ugao kod temena Q_{je} je π/h_{je}, $h_{je}\in\{2,3,\ldots\}$,

(5) parovi orijentisanih ivica P^iR_i i $P^{i+1}R_i$ $(i\in\{1,\ldots,m\})$, $P^iQ_i^1$ i $P^{i+1}Q_i^2$ $(i\in\{m+1,\ldots,m+r\})$, P^iP^{i+1} i $P^{i+3}P^{i+2}$, $P^{i+4}P^{i+3}$ i $P^{i+1}P^{i+2}$ $(i\in\{m+r+1,\ldots,m+r+4g\})$ u orijentabilnom, a P^iP^{i+1} i $P^{i+1}P^{i+2}$ $(i\in\{m+r+1,\ldots,m+r+2g\})$ u neorijentabilnom slučaju, su medjusobno podudarni.

Zaista! U zavisnosti od veličine uglova iz uslova (1)-(4) poligon (2.3.1) tj. (2.3.2) se može realizovati na sferi, u euklidskoj ili hiperboličkoj ravni. U odeljku 1.5. je dokazano da u hiperboličkoj ravni postoji tangentni poligon čiji su uglovi podudarni uglovima unapred zadatog poligona u hiperboličkoj ravni. Na isti način se može dokazati da na sferi i u euklidskoj ravni postoji poligon sa istim osobinama, s tim što će u formulama (1.5.4) umesto cha figurisati cosa u sfernom, a samo a u euklidskom slučaju. Dakle, na sferi, u euklidskoj ili hiperboličkoj ravni postoji tangentni poligon koji zadovoljava uslove (1)-(4). Iz činjenice koja se neposredno dokazuje, da su dve stranice tangentnog poligona kojima su nalegli uglovi jedne podudarni odgovarajućim uglovima druge, takodje medjusobno podudarne, sledi da taj poligon zadovoljava i uslov (5).

U dodeljivanju poligona F granici diska koja je opisana rečju ω, svakom temenu granice dodelili smo teme poligona obeleženo istim slovom sa izostavljenom crtom iznad njega. Na isti način možemo segmentima granice diska dodeliti orijentisane ivice polgona F koje će imati iste oznake kao i segmenti, a crtica iznad oznake biće opet izostavljena, pa će ivice poligona F, zapišemo li ih u redosledu čitanja slova reči ω, vodeći računa o njihovoj orijentaciji koja zavisi od smera isecanja površi M, opisivati granicu

$$(2.3.1')\qquad \prod_1^m \delta_i' \delta_i^{-1} \prod_1^r \eta_j' \gamma_{j1} \cdots \gamma_{jn_j+1} \eta_j^{-1} \prod_1^g \tau_k' \mu_k' \tau_k^{-1} \mu_k^{-1}$$

ili

$$(2.3.2')\qquad \prod_1^m \delta_i' \delta_i^{-1} \prod_1^r \eta_j' \gamma_{j1} \cdots \gamma_{jn_j+1} \eta_j^{-1} \prod_1^g \nu_k^* \nu_k$$

poligona F, gde su orijentisane ivice koje su označene istim slovom i indeksom (naprimer δ_i' i δ_i^{-1} ili ν_k^* i ν_k) medjusobno podudarne.

2.4. Algebarska struktura ravanskih diskretnih grupa

Neka je F poligon čija je granica (2.3.1') ili (2.3.2'). Dokažimo da je F fundamentalna oblast neke diskretne grupe G simetrija sfere, euklidske ili hiperboličke ravni i odredimo algebarsku reprezentaciju te grupe.

Poligon F će se rotacijom s_i oko temena R_i za orijentisani ugao $2\pi/h_i$ (gde je smer obilaženja oko tačke R_i od ivice δ_i' ka ivici δ_i^{-1}) preslikati u poligon s_iF koji će sa poligonom F imati zajedničku orijentisanu ivicu $s_i\delta_i'=\delta_i^{-1}$ pa će, stoga, ciklično uredjeni skup od ukupno h_i poligona $s_iF, s_i^2F, \ldots, s_i^{h_i}F=F$, sa zajedničkim ivicama, redom, $s_i^2\delta_i', \ldots, s_i^{h_i}\delta_i', s_i\delta_i'=\delta_i^{-1}$, oko tačke R_i zatvoriti pun ugao jer je ugao poligona F kod tačke R_i upravo $2\pi/h_i$.

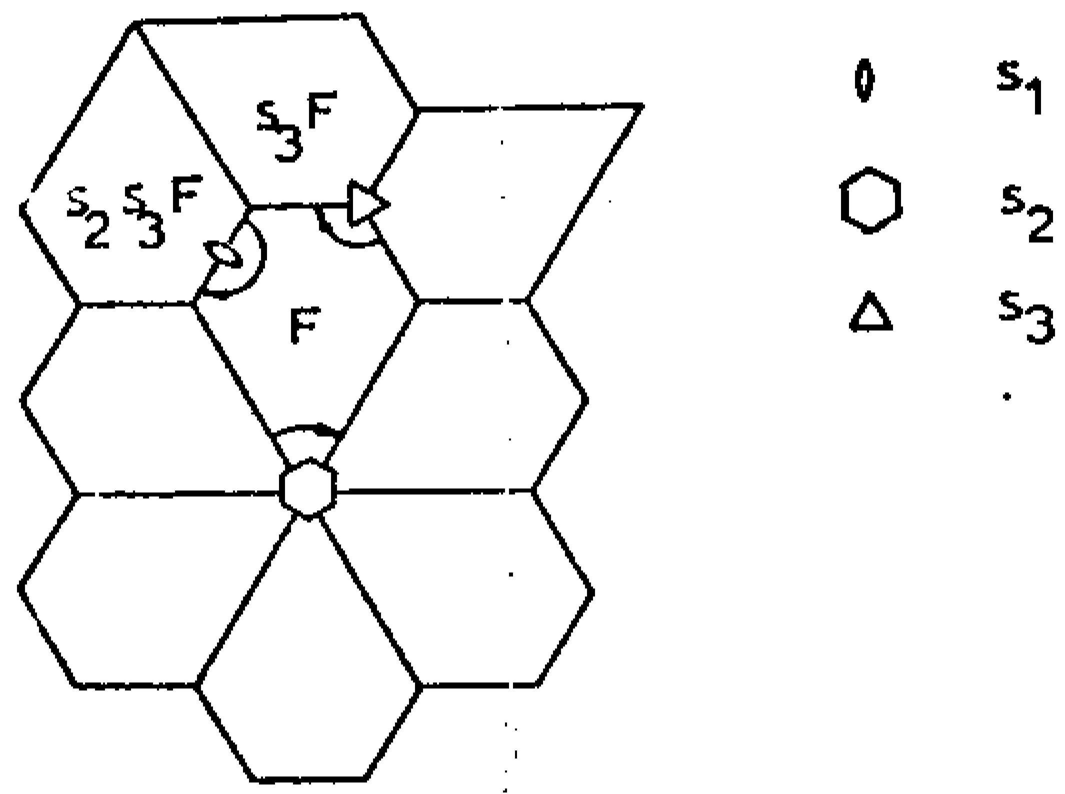
Ako je r=g=0 temena poligona F biće, redom, $P^1R_1 \ldots P^mR_m$, njegov rub će biti

$$\prod_1^m \delta_i' \delta_i^{-1},$$

uglovi kod temena $R_1, \ldots, R_m$ biće, redom, $2\pi/h_1, \ldots, 2\pi/h_m$, a svaki od uglova kod temena P^i, $i\in\{1,\ldots m\}$ biće $2\pi/m$. Tada će ciklično uredjeni skup koji se sastoji iz m poligona

$$s_mF, s_{m-1}s_mF, \ldots, \prod_1^m s_iF=F$$

zatvoriti pun ugao oko temena P^1, a njemu podudaran skup kod vakog od ostalih temena P^i, $i\in\{2,\dots,m\}$. Primetimo da će tada kup koji se sastoji iz poligona F i svih njegovih slika u trans- ormacijama $s_1,\dots,s_m$ i njihovim kompozicijama, predstavljati eselaciju ravni A^2 čija će grupa koju smo opisali u odeljku 1.1. lgebarskom reprezentacijom (1.1.6), biti tranzitivna u odnosu na ljosni ([30] str. 220-227).



sl. 2.4.a.

Poligon F će se refleksijom c_{je} preslikati u $c_{je}F$ koji sa F ima zajedničku ivicu γ_{je}, a refleksijom c_{je+1} u $c_{je+1}F$ koji sa F ima zajedničku ivicu γ_{je+1}, pa će, stoga, ciklično uredjeni skup od $2h_{je}$ poligona

$$c_{je+1}F, c_{je}c_{je+1}F, c_{je+1}c_{je}c_{je+1}F, \dots, (c_{je}c_{je+1})^{h_{je}}F=F$$

oko tačke Q_{je} zatvoriti pun ugao. Ako je $m=g=0$, a $r=1$ poligon F će predstavljati fundamentalnu oblast grupe generisane refleksijama koja je opisana u odeljku 1.1.

Neka se direktnom izometrijskom transformacijom e_j poligon F preslikava u susedan poligon e_jF pri čemu se orijentisana ivica $\eta'_j=P^{m+j}Q^1_j$, $j\in\{1,\dots,r\}$, preslikava u njoj podudarnu orijentisanu ivicu $\eta^{-1}_j=P^{m+j+1}Q^2_j$. Kako su uglovi poligona F kod temena Q^1_j i Q^2_j pravi, ciklično uredjeni skup koji se sastoji iz poligona

$$e_j^{-1}F,\ c_{jn_j+1}e_j^{-1}F,\ e_jc_{jn_j+1}e_j^{-1}F,\ c_{j1}e_jc_{jn_j+1}e_j^{-1}F=F$$

zatvoriće pun ugao oko temena Q^1_j, a njemu podudaran skup oko temena Q^2_j.

Neka se translacijama t_k i u_k poligon F (2.5.1′) preslikava, redom, u susedne poligone t_kF i u_kF, pri čemu se orijentisane ivice $\tau'_k=P^kP^{k+1}$ i $\mu^{-1}_k=P^{k+4}P^{k+3}$ preslikavaju, redom, u orijentisane ivice $\tau^{-1}_k=P^{k+3}P^{k+2}$ i $\mu'_k=P^{k-1}P^{k+2}$ njima podudarne. Kako su svi uglovi kod temena P^i, $i\in\{1,\dots,m+r+4g\}$, poligona F medjusobno podudarni i jednaki $2\pi/m+r+4g$, ciklično uredjeni skup koji se sastoji iz ukupno $m+r+4g$ poligona

$$u_g^{-1}F,\ t_g^{-1}u_g^{-1}F,\ u_g t_g^{-1}u_g^{-1}F,\ t_g u_g t_g^{-1}u_g^{-1}F,\dots,\ \prod_1^g t_k u_k t_k^{-1}u_k^{-1}F,\dots,$$

$$\prod_1^r e_j \prod_1^g t_k u_k t_k^{-1}u_k^{-1}F,\dots,\ \prod_1^m s_i \prod_1^r e_j \prod_1^g t_k u_k t_k^{-1}u_k^{-1}F=F$$

zatvoriće pun ugao oko temena P^1, a njemu podudarni skupovi kod svakog od temena P^i, $i\in\{2,\dots,m+r+4g\}$. Ako je $m=r=0$ poligon F će biti pravilan 4g-ugao i predstavljaće fundamentalnu oblast grupe generisane translacijama koja je opisana u odeljku 1.3.

Neka se klizajućom refleksijom v_k poligon F (2.5.2′) preslikava u susedni poligon v_kF pri čemu se orijentisana ivica $\nu_k^*=P^kP^{k+1}$ preslikava u njoj pododarnu, takodje orijentisanu ivicu $\nu_k=P^{k+1}P^{k+2}$. Kako su svi uglovi kod temena P^i, $i\in\{1,\dots,m+r+2g\}$, medjusobno podudarni i jednaki $2\pi/m+r+2g$, ciklično uredjeni skup koji se sastoji iz ukupno $m+r+2g$ poligona

$$v_gF,\ v_g^2F,\dots,\ \prod_1^g v_k^2F,\dots,\ \prod_1^r e_j \prod_1^g v_k^2F,\dots,\ \prod_1^m s_i \prod_1^r e_j \prod_1^g v_k^2F=F,$$

zatvoriće pun ugao kod temena P^1, a njemu podudarni skupovi kod svakog od temena P^i, $i\in\{2,\dots,m+r+2g\}$. Ako je $m=r=0$ poligon F će biti pravilan 2g-ugao i predstavljaće fundamentalnu oblast grupe generisane klizajućim refleksijama koja je opisana u odeljku 1.2.

Primetimo da će, kao posledica metričkih osobina poligona F, na isti način kao i u slučaju kada je grupa generisana rotacijama $s_1,\dots,s_m$, skup koji se sastoji iz poligona F, svih njegovih slika u, na prethodan način definisanim, transformacijama

$$s_1,\dots,s_m,e_1,\dots,e_r,c_{11},\dots,c_{rn_r+1},t_1,u_1,\dots,t_g,u_g,$$

ako je F oblika (2.3.1′), ili

$$s_1,\dots,s_m,e_1,\dots,e_r,c_{11},\dots,c_{rn_r+1},v_1,\dots,v_g,$$

ako je F oblika (2.3.2′), i svim kompozicijama tih transformacija, predstavljati teselaciju ravni A^2 poligonima podudarnim poligonu F i da će grupa G generisana tim transformacijama biti tranzitivna u odnosu na pljosni ([30] str. 220-227).

Odredimo i relacije koje definišu tu grupu. U tom cilju obeležimo sa G^* grupu generisanu transformacijama

(2.4.1) (i) $s_1,\ldots,s_m$, $m\geqslant 0$,

(ii) $e_1,\ldots,e_r$, $r\geqslant 0$,

(iii) $c_{11},\ldots,c_{1n_1+1},\ldots,c_{r1},\ldots,c_{rn_r+1}$, $n_j\geqslant 0$,

(iv) $t_1,u_1,\ldots,t_g,u_g$, $g\geqslant 0$, u orijentabilnom, ili

(iv′) $v_1,\ldots,v_g$, $g\geqslant 0$, u neorijentabilnom slučaju,

koja zadovoljava relacije

(2.4.2) (I) $s_i^{h_i} = 1$, $h_i\in\{2,3,\ldots\}$,

(II) $c_{je}^2 = 1$,

(III) $(c_{je}c_{je+1})^{h_{je}} = 1$, $h_{je}\in\{2,3,\ldots\}$,

$c_{j1}e_jc_{jn_j+1}e_j^{-1} = 1$,

(IV) $\prod_1^m s_i \prod_1^r e_j \prod_1^g t_k u_k t_k^{-1} u_k^{-1} = 1$, u orijentabilnom, ili

(IV′) $\prod_1^m s_i \prod_1^r e_j \prod_1^g v_k^2 = 1$, u neorijentabilnom slučaju,

i dokažimo da je svaka od relacija u grupi G algebarska posledica relacija (2.4.2) koje grupa G, kao što je pokazano, zadovoljava, pa da su, stoga, grupe G i G^* istovetne.

Svaka transformacija g iz grupe G preslikava inicijalni poligon F u njemu podudaran poligon gF. Posebno, generator x preslikava poligon F u njemu susedan poligon xF koji sa njime ima zajedničku ivicu ξ pa, stoga, transformacijom g se poligon xF preslikava u xgF koji sa gF ima zajedničku ivicu, obeležimo je opet sa ξ, sliku zajedničke ivice ξ poligona F i xF u transformaciji g. Izrazimo li g kao reč

$$\ldots x_k x_j x_i$$

kojoj odgovara putanja od unutrašnjosti poligona F do unutrašnjosti poligona gF koja se dobija prelazeći, najpre ivicu ξ_i poligona F, zatim ivicu ξ_j poligona x_iF, zatim ivicu ξ_k poligona x_ix_jF, itd. Dve različite putanje od F do gF mogu se nadovezati tako da oforme zatvorenu putanju sa početkom i krajem u F. Kako su sfera, euklidska i hiperbolička ravan prosto povezane svaka zatvorena putanja se može "stegnuti" u unutrašnjost poligona F. Svaki korak u stezanju odgovara jednoj od relacija (2.4.2) pa je, stoga, svaka od relacija u grupi G algebarska posledica pomenutih relacija, a odatle sledi da je F fundamentalna oblast grupe G i da svakom poligonu u teselaciji $\mathcal{T}=\{gF:g\in G\}$ odgovara jedinstven element iz grupe G.

Štaviše, ako je G′ podgrupa konačnog indeksa grupe G ona se može predstaviti generatorima (2.4.1) i relacijama (2.4.2), ([23] str. 735).

Svakoj od diskretnih ravanskih grupa pridružićemo oznaku koja se sastoji iz:

(i) nenegativnog celog broja g koji je jednak rodu površi M,

(ii) znaka +, ako je M orijentabilna, ili −, ako je M neorijentabilna površ,

(iii) uredjenog skupa prirodnih brojeva $[h_1,\dots,h_m]$, $h_i\geq 2$, koji ćemo zvati skupom perioda grupe G, kojim se označava broj središta rotacija i njihov red,

(iv) uredjenog skupa periodičnih ciklusa

$$C_1 = (h_{11},\dots,h_{1n_1}),\dots, C_r = (h_{r1},\dots,h_{rn_r}),$$

kojim se odredjuje ukupan broj i raspored osa refleksija.

Upravo uvedenu oznaku ćemo zapisivati na sledeći način:

$$(g,\pm,[h_1,\dots,h_m],\{(h_{11},\dots,h_{1n_1}),\dots,(h_{r1},\dots,h_{rn_r})\}),$$

ili, kraće

$$(g,\pm,[h_1,\dots,h_m],\{C_1,\dots,C_r\}).$$

2.5. Diskretne grupe sfere i euklidske ravni

(2.5.1) Diskretna ravanska grupa G zadata generatorima (2.4.1) i relacijama (2.4.2) se realizuje na sferi (>), u euklidskoj (=) ili hiperboličkoj (<) ravni samo ako je u orijentabilnom slučaju

$$0 \gtreqless 2\sum_{1}^{m}(1-1/h_i) + \sum_{j}^{r}\sum_{1}^{n_i}(1-1/h_{ij}) + 4g - 4 + 2r,$$

a u neorijentabilnom slučaju

$$0 \gtreqless 2\sum_{1}^{m}(1-1/h_i) + \sum_{j}^{r}\sum_{1}^{n_i}(1-1/h_{ij}) + 2g - 4 + 2r$$

([36] str. 248).

Dokaz: Poligoni (2.3.1) i (2.3.2) predstavljaju fundamentalne oblasti grupe G. Uglovi tih poligona kod temena R_i su $2\pi/h_i$, kod temena Q_{ij} je π/h_{ij}, suma uglova kod temena Q_i je π, a suma uglova ko temena P^i je 2π, pa je ukupna suma uglova poligona

$$\sum_1^m 2\pi/h_i + \sum_1^r \sum_1^{n_i} \pi/h_{ij} + r\pi + 2\pi.$$

Ukupna suma uglova n-tougla je veća, jednaka ili manja od $(n-2)\pi$ u zavisnosti od toga da li je taj poligon na sferi, u euklidskoj ili hiperboličkoj ravni. Kako je

$$n = 2m + 3r + 4g + \sum_1^r n_i$$

u orijentabilnom, a

$$n = 2m + 3r + 2g + \sum_1^r n_i$$

u neorijentabilnom slučaju, zadate relacije biće neposredno zadovoljene.

Neposredno se može utvrditi, na osnovu relacija iz stava (2.5.1), koje diskretne grupe sfere i euklidske ravni postoje.

(2.5.2) Diskretne grupe sfere su sledeće:

1° $(0,+,[h_1,h_2],\{\ \})$, $h_1,h_2 \in \{0,1,2,\dots\}$,

2° $(0,+,[h_1,h_2,h_3],\{\ \})$, $1/h_1 + 1/h_2 + 1/h_3 > 1$,

3° $(0,+,[h_1],\{(h_{11})\})$, $2/h_1 + 1/h_{11} > 1$,

4° $(0,+,[\ ],\{(h_{11},h_{12},h_{13})\})$, $1/h_{11} + 1/h_{12} + 1/h_{13} > 1$,

5° $(0,+,[h_1],\{(\ )\})$, $h_1 \in \{0,1,2,\dots\}$,

6° $(0,+,[\ ],\{(h_{11},h_{12})\})$, $h_{11},h_{12} \in \{0,1,2,\dots\}$,

7° $(1,-,[h_1],\{\ \})$, $h_1 \in \{0,1,2,\dots\}$.

Grupe 2° su poznate grupe rotacija pravilnih poliedara:

$[2,n]^+$ diedarska grupa reda 2n,

$[3,3]^+$ tetraedarska grupa reda 12,

$[3,4]^+$ oktaedarska grupa reda 24,

$[3,5]^+$ ikosaedarska grupa reda 60,

([10] str. 6).

Grupe 4°, generisane refleksijama, su grupe simetrija pravilnih poliedara, $[2,n]$, $[3,3]$, $[3,4]$, $[3,5]$ koje, kao podgrupe indeksa 2, u sebi sadrže grupe rotacija pravilnih poliedara.

Svaka od ovih grupa 1^o- 7^o je konačna, i ovim su, zbog konačnosti sfere na kojoj se realizuju, iscrpljene sve konačne diskretne ravanske grupe ([36] str. 122; [14] str. 135, tab. 2). Kako se ostale diskretne ravanske grupe realizuju u euklidskoj i hiperboličkoj ravni one će da budu beskonačne.

(2.5.3) Diskretne grupe euklidske ravni su sledeće:

1^o $(1,+,[\ ],\{\ \})$,

2^o $(0,+,[2,2,2,2],\{\ \})$,

3^o $(0,+,[\ ],\{(2,2,2,2)\})$,

4^o $(0,+,[\ ],\{(\ ),(\ )\})$,

5^o $(0,+,[2,2],\{(\ )\})$,

6^o $(0,+,[2],\{(2,2)\})$,

7^o $(0,+,[h_1,h_2,h_3],\{\ \})$, $1/h_1 + 1/h_2 + 1/h_3 = 1$,

8^o $(0,+,[\ ],\{(h_{11},h_{12},h_{13})\})$, $1/h_{11} + 1/h_{12} + 1/h_{13} = 1$,

9^o $(0,+,[4],\{(2)\})$,

10^o $(0,+,[3],\{(3)\})$,

11^o $(2,-,[\ ],\{\ \})$,

12^o $(1,-,[\ ],\{(\ )\})$,

13^o $(1,-,[2,2],\{\ \})$.

Kako su za h_1,h_2,h_3 i za h_{11},h_{12},h_{13} jedine trojke rešenja (3,3,3), (2,4,4) i (2,3,6) diskretnih grupa euklidske ravni ima ukupno 17 i u literaturi su poznate pod imenom "17 euklidskih dvodimenzionih prostornih grupa" ([14] str. 40 i 136, tab. 3.4; [27] str. 1204, tab. 1).

Korišćenjem gornjih oznaka 1^o- 13^o i (2.4.3) lako je ustanoviti algebarsku strukturu tih grupa.

2.6. Geometrijski izomorfizam

Za diskretne ravanske grupe G i G′ ravni A^2 reći ćemo da su geometrijski izomorfne akko postoji izometrija $h: x \to x'$ ravni A^2

i (algebarski) izomorfizam i: $g \to g'$ grupa G i G' takav da je $y=gx$ akko je $y'=g'x'$. Kako je $x'=hx$ i $y'=hgx$ (napomenimo da će samo u ovom odeljku redosled delovanja transformacija u njihovoj kompoziciji biti beležen zdesna nalevo) biće $hgx = g'hx$, pa odatle sledi da je

$$g' = hgh^{-1}.$$

Dakle, grupe G i G' su geometrijski izomorfne akko su konjugovane u grupi izometrija ravni A^2. Ako je (algebarski) izomorfizam grupa G i G' posledica geometrijskog izomorfizma reći ćemo da se taj izomorfizam može realizovati geometrijski i da je izometrija h ravni A^2 kojom se taj izomorfizam ostvaruje, njegova geometrijska realizacija. Lako može da se ustanovi da geometrijski izomorfizam preslikava refleksije, centralne rotacije, oricikličke rotacije, translacije i klizajuće refleksije u transformacije iste vrste, tj. redom, opet u refleksije, centralne rotacije, oricikličke rotacije, translacije i klizajuće refleksije.

Geometrijska realizacija h izomorfizma grupa G i G' preslikava G-orbitu tačke x u G'-orbitu tačke hx jer je

$$h(Gx) = h(Gh^{-1}hx) = h(h^{-1}(hx) = G'(hx),$$

pa odatle sledi da je, na taj način, indukovan i homeomorfizam h' medju količničkim prostorima $M=A^2/G$ i $M'=A^2/G'$. Kako sve tačke iste G-orbite imaju geometrijski izomorfne stabilizatore možemo da govorimo o stabilizatoru tačke količničkog prostora pri tome misleći na stabilizator bilo koje tačke te G-orbite.

Preslikavanjem h' tačkama površi M dodeljujemo tačke površi M' koje imaju geometrijski izomorfne stabilizatore. Dakle, stabilizator tačke $h'(\overline{R}_i)$ je ciklična grupa rotacija reda h_i, izomorfna stabilizatoru tačke $\overline{R}_i$ i, slično, stabilizator tačke $h'(\overline{Q}_{kj})$, kao i tačke $\overline{Q}_{kj}$ je diedarska grupa reda $2h_{kj}$. Odavde sledi da preslikavanje h' indukuje 1-1 preslikavanje koje skup perioda i skup periodičnih ciklusa grupe G preslikava na skup perioda i skup periodičnih ciklusa grupe G'.

Za fiksirano j tačke $\overline{Q}_{jk}$ su na istoj liniji ruba površi M, pa i njihove h'-slike pripadaju istoj liniji ruba površi M'. Štaviše, za svako j slike $\overline{Q}'_{j'k'}$ tačaka $\overline{Q}_{jk}$ imaju isti indeks j', imaju isti raspored kao i tačke $\overline{Q}_{jk}$ i isti red grananja.

Periodične cikluse $C = (h_{j1},\dots,h_{jn_j})$ i $C' = (h'_{j'1},\dots,h_{j'n_j})$

zvaćemo direktno ekvivalentnim akko je jedan od ciklusa ciklična permutacija drugog pri čemu je očuvana orijentacija tj. akko je

$$h_{jk} = h'_{jk+e(\text{mod } n_j)} ,$$

a indirektno ekvivalentnim akko je orijentacija promenjena, tj. akko je

$$h_{jk} = h'_{je-k(\text{mod } n_j)} .$$

Na osnovu prethodnog možemo zaključiti da je ustanovljena neophodnost uslova sledećeg stava:

(2.6.1) Diskretne ravanske grupe G i G′ čije su oznake, redom,

$$(g,\pm,[h_1,\dots,h_m],\{C_1,\dots,C_r\})$$

i

$$(g',\pm,[h'_1,\dots,h'_{m'}],\{C'_1,\dots,C'_{r'}\})$$

su geometrijski izomorfne akko je znak u obema oznakama isti, tj. + ili −, $g=g'$, $m=m'$ i periodi $[h'_1,\dots,h'_m]$ predstavljaju permutaciju perioda $[h_1,\dots,h_m]$, $r=r'$ i postoji permutacija p ciklusa $(1,\dots,r)$ takva da je

(i) u orijentabilnom slučaju, svaki od ciklusa C'_i direktno ekvivalentan ciklusu $C_{p(i)}$ ili svaki od ciklusa C'_i indirektno ekvivalentan ciklusu $C_{p(i)}$

(ii) u neorijentabilnom slučaju, ciklus C'_i direktno ili indirektno ekvivalentan ciklusu $C_{p(i)}$.

Da su ti uslovi i dovoljni dokazao je Macbeath, [27], korišćenjem rezultata Wilkie-a, [35], i sledeće teoreme, [26], koja se dokazuje uz pomoć aparata teorije kvazi-komfornih preslikavanja.

(2.6.2) Ako je i: G → G′ algebarski izomorfizam diskretnih ravanskih grupa on se može realizovati geometrijski, tj. postoji izometrija h: $A^2 \to A^2$ takva da je za svako $g \in G$

$$i(g) = hgh^{-1}.$$

2.7. Diskretne ravanske grupe sa nekompaktnom fundamentalnom oblašću

Dopustimo da tačka R_a, jedno od temena R_i, $i\in\{1,\dots,m\}$, poligona F opisanog u odeljku 2.3, bude infinitna. Na isti način kao i u 2.4. se može dokazati da će tada poligon F biti fundamentalna oblast neke diskretne grupe odredjene generatorima (2.4.1) i relacijama (2.4.2), s tim što će relacija $s_a^{h_a}=1$ biti izostavljena. Dakle, ako je neka od tačaka R_i infinitna polgon F će opet da bude fundamentalna oblast neke diskretne grupe u kojoj su medju relacijama (2.4.2) izostavljene one od relacija (I) koje odgovaraju infinitnim temenima.

Na isti način, možemo dopustiti da teme Q_{bc}, jedno od temena Q_{je}, $j\in\{1,\dots,r\}$, $e\in\{1,\dots,n_j\}$, bude infinitno. Tada će poligon F biti fundamentalna oblast grupe odredjene generatorima (2.4.1) i relacijama (2.4.2) sa izuzetkom relacije $(c_{bc}c_{bc+1})^{h_{bc}}=1$. Dakle, ako su neka od temena Q_{je} infinitna poligon F će opet biti fundamentalna oblast u kojoj su medju relacijama (2.4.2) izostavljene one od relacija (III) koje odgovaraju infinitnim temenima.

Dopustimo da poligon F opisan u odeljku 2.3. ima beskonačno mnogo temena i da je, zbog toga, opisan oko oricikla. Neposredno se dokazuje da je tada za neko $j\in\{1,\dots,r\}$ $n_j=\infty$ pa se na isti način kao i u odeljku 2.4, može dokazati da će F biti fundamentalna oblast neke diskretne grupe odredjene generatorima (2.4.1) i relacijama (2.4.2), s tim što se dopušta da broj generatora (iii) i relacija (II) i (III) bude infinitan.

No, dopustimo li da medju relacijama (2.4.2) budu izostavljene neke od relacija (I) i (III) i da broj generatora (iii) i relacija (II) i (III) bude infinitan dobićemo algebarske reprezentacije svih diskretnih ravanskih grupa sa nekompaktnim fundamentalnim oblastima ([36] str. 138-139; [28] str. 247), te su, stoga, na prethodan način odredjeni fundamentalni poligoni svih takvih grupa.

3. UNIFORMNE TESELACIJE

3.1. Fundamentalni poligon grupe simetrija uniformne teselacije

Neka je $\mathcal{T}$ uniformna teselacija sfere, euklidske ili hiperbo-ličke ravni, kratko, ravni A^2. Tada za bilo koja dva temena tese-lacije $\mathcal{T}$ postoji izometrijska transformacija ravni A^2 koja pres-likava jedno teme u drugo, pri čemu je ta teselacija invarijantna. Neposredno se dokazuje da je skup svih takvih transformacija, u odnosu na njihovu kompoziciju, grupa $S(\mathcal{T})$ simetrija uniformne teselacije $\mathcal{T}$. Kako uvek možemo da izaberemo okolinu V nekog teme-na teselacije $\mathcal{T}$ takvu da je presek te okoline sa njenim slikama u transformacijama iz grupe $S(\mathcal{T})$ prazan, ta grupa je diskretna ([2] str. 94).

Neka je X proizvoljno teme teselacije $\mathcal{T}$. Presek svih zatvo-renih poluravni koje sadrže tačku X i čije su granice prave koje predstavljaju medijatrise duži XgX, $g \in S(\mathcal{T})$, je konveksan poligon, na osnovu stava (2.1.1), fundamentalna oblast grupe $S(\mathcal{T})$.

Ako u grupi $S(\mathcal{T})$, izuzev koincidencije, nema transformacija koje ostavljaju invarijantnim teme X, ivice fundamentalnog poli-gona, obeležimo ga sa F, pripadaće medijatrisama duži odredjenih temenom X i njemu susednim temenima u teselaciji $\mathcal{T}$, pa će, zbog toga, temena poligona F biti središta onih pljosni te teselacije čije je jedno teme X. U tom slučaju, zbog medjusobne podudarnosti ivica uniformne teselacije, tačka X će biti podjednako udaljena od ivica poligona F, pa će postojati krug k u njemu upisan. Štaviše, krug k će dodirivati stranice poligona F u središtima ivica teselacije $\mathcal{T}$ kojima je jedno teme X.

Ako grupa $S(\mathcal{T})$ raspolaže samo jednom osom, σ, refleksije koja sadrži tačku X, tada ta osa deli poligon E čije ivice pripa-daju medijatrisama duži odredjenim temenom X i njemu susednim temenima u teselaciji $\mathcal{T}$, na dva podudarna poligona od kojih svaki predstavlja fundamentalnu oblast F grupe $S(\mathcal{T})$. Nalegli uglovi poligona F na stranici koja pripada osi σ, u tom slučaju nisu tupi i tačka X je presek bisektrisa ostalih unutrašnjih uglova tog poligona pa, dakle, postoji krug k upisan u poligonu E čije središte tačka X na osi σ, koji dodiruje sve stranice poligona F sem one na osi σ.

Ako grupa $S(\mathcal{T})$ raspolaže nekolikim osama refleksija koje sadrže tačku X tada medju njima, zbog diskretnosti grupe $S(\mathcal{T})$, postoje dve ose, σ_1 i σ_2, koje zahvataju ugao π/h, $h\in\{2,3,\dots\}$, takve da sve ostale ose predstavljaju slike ovih dveju u grupi generisanoj refleksijama u odnosu na njih. Ose σ_1 i σ_2 i njihove već pomenute slike će da podele poligon E na ukupno 2h medjusobno podudarnih poligona od kojih svaki predstavlja fundamentalnu oblast F grupe $S(\mathcal{T})$. Unutrašnji uglovi poligona F kod temena susednih temenu X, u tom slučaju, neće biti tupi i tačka X je presek bisektrisa svih ostalih unutrašnjih uglova tog poligona pa dakle, postoji krug k upisan u poligonu E, sa središtem $X=\sigma_1\cap\sigma_2$, koji dodiruje sve stranice poligona F sem onih na osama σ_1 i σ_2.

Kako grupa generisana dvema refleksijama c_1 i c_2 u odnosu na ose σ_1 i σ_2, ima podgrupu indeksa 2 generisanu rotacijom s, grupa $S(\mathcal{T})$ će, ako raspolaže rotacijom s reda h koja ostavlja invarijantnom tačku X, a ne raspolaže ni jednom osnom refleksijom sa istom osobinom, za fundamentalnu oblast imati poligon F, h-ti deo poligona E, odredjen osama dveju refleksija čiji proizvod predstavlja rotaciju s^2. U tom slučaju će poligon E biti podeljen na ukupno h poligona podudarnih poligonu F i svaki od njih će biti fundamentalna oblast grupe $S(\mathcal{T})$. Tačka X će tada biti presek bisektrisa svih onih unutrašnjih uglova poligona F čija temena nisu susedna temenu X, pa će tada, kao i u prethodnom slučaju, postojati krug k upisan u poligonu E, sa središtem X, koji dodiruje sve stranice poligona F sem onih čije je jedno teme X.

S obzirom na to da su, pored koincidencije, osna refleksija i centralna rotacija jedine izometrijske transformacije ravni A^2 koje ostavljaju invarijantnom neku tačku te ravni, na prethodan način odredjene tačke, uvek obeležene sa X, u unutrašnjosti ili na rubu fundamentalnog poligona F, su jedine moguće tačke čije se orbite u diskretnoj grupi simetrija ravni A^2 poklapaju sa skupovima temena uniformnih teselacija ravni A^2.

3.2. Neophodni uslovi fundamentalnog poligona

Neka je F fundamentalni poligon grupe $S(\mathcal{T})$ simetrija uniformne teselacije $\mathcal{T}$. Kako se identifikacijom ivica poligona F odredjenih generatorima grupe $S(\mathcal{T})$ (jasno je da se skup generatora poklapa sa skupom transformacija koje poligon F preslikavaju u njemu susedne poligone iz teselacije $\mathcal{T}^* = \{gF;\ g \in S(\mathcal{T})\}$) dobija dvodimenzionalna površ, poligon F ima isti broj i na isti način rasporedjena temena i ivice kao i neki od diskova čija je granica opisana rečju ω u odeljku 2.3. i zadovoljava uslove (2), (4) i (5) koje zadovoljavaju poligoni (2.3.1) i (2.3.2), dok umesto uslova (1) i (3) zadovoljava sledeće:

(1′) suma uglova kod temena P^i, $i\in\{1,\dots,p\}$, gde je $p=m+r+4g$ u orijentabilnom, a $p=m+r+2g$ u neorijentabilnom slučaju, je 2π,

(3′) suma uglova kod temena Q^1_j i Q^2_j, $j\in\{1,\dots,r\}$ je π.

Neka teme X uniformne teselacije $\mathcal{T}$ pripada unutrašnjosti poligona F koji ćemo obeležiti na isti način kao i poligone (2.3.1) i (2.3.2). Pljosni teselacije $\mathcal{T}$ čija su središta tačke R_i biće, u tom slučaju, pravilni h_i-uglovi, a čija su središta tačke Q_{je} pravilni $2h_{je}$-uglovi. Kako su sve pljosni uniformne teselacije pravilni poligoni da bi pljosan čije je središte neka od tačaka P^i ili neka od tačaka Q^e_j, bila pravilna neophodno je da svi unutrašnji uglovi te pljosni budu podudarni pa, stoga, da i svi uglovi oko tačke P^i ili oko tačke Q^e_j, u teselaciji $\mathcal{T}^*$, budu podudarni, dakle da su zadovoljeni uslovi (1) i (3) za poligone (2.3.1) i (2.3.2). Tada su pljosni teselacije $\mathcal{T}$ čija su središta P^i, pravilni p-uglovi, a čija su središta Q^e_j, kvadrati. U tom slučaju uniformna teselacija $\mathcal{T}$ je oblika

A: $(p.h_1\dots p.h_m.p.4.2h_{11}\dots 2h_{1n_1}.4.p\dots p.4.2h_{r1}\dots 2h_{rn_r}.4.p\dots p)$.

Ako je teme X na nekoj ivici b_{je} poligona F koja pripada osi neke refleksije iz $S(\mathcal{T})$, pri čemu ni jedno teme te ivice nije neka od tačaka Q^e_j već samo tačke Q_{je}, na primer na ivici b_{12}, pljosni teselacije $\mathcal{T}$ čija su središta R_i biće pravilni h_i-uglovi, čija su središta $Q_{je} \neq Q_{11}, Q_{12}$, pravilni $2h_{je}$-uglovi, čija su središta Q_{11} i Q_{12} pravilni h_{11}-ugao i h_{12}-ugao, čija su središta tačke P^i pravilni p-uglovi, a čija su središta Q_j^e, kvadrati. U tom slučaju teselacija $\mathcal{T}$ je oblika

$$B:\ (h_{12}\cdot 2h_{13}\cdots 2h_{1n_1}\cdot 4\cdot p\cdots p\cdot 4\cdot 2h_{r1}\cdots 2h_{rn_r}\cdot 4\cdot p\cdots \\ \cdots p\cdot h_1\cdots p\cdot h_m\cdot p\cdot 4\cdot h_{11})^{-2}.$$

Ako je X neko od temena Q_{je} nesusednih bilo kojem od temena Q_j^e, na primer teme Q_{12}, kao i u prethodnom slučaju zaključujući, ustanovićemo da je teselacija $\mathcal{T}$ oblika

$$C:\ (h_{13}\cdot 2h_{14}\cdots 2h_{1n_1}\cdot 4\cdot p\cdots p\cdot 4\cdot 2h_{r1}\cdots 2h_{rn_r}\cdot 4\cdot p\cdots \\ \cdots p\cdot h_1\cdots p\cdot h_m\cdot p\cdot 4\cdot h_{11})^{-2h_{12}}.$$

Ako je X jedno od temena R_i poligona F, na primer R_1, pljosni teselacije $\mathcal{T}$ čija su središta R_i, $i\neq 1$, biće pravilni h_i-uglovi, čija su središta Q_{je} pravilni $2h_{je}$-uglovi, a čija su središta Q_j^e, kvadrati. U poligonu E ukupan broj temena P^i i njihovih slika biće $h_1(p-2)+h_1 = h_1(p-1)$, a ukupna suma uglova kod tih temena $2\pi h_1$ pa je, stoga, svaki od uglova kod temena P^i, $i\neq 1,2$, $2\pi/p-1$, a kod temena P^1 i P^2, s obzirom na to da su oni jednaki, $\pi/p-1$. Zato će pljosni teselacije $\mathcal{T}$, čija su središta temena P^i biti pravilni p-1-uglovi. U tom slučaju teselacija $\mathcal{T}$ je oblika

$$D:\ (p-1\cdot h_2\cdots p-1\cdot h_m\cdot p-1\cdot 4\cdot 2h_{11}\cdots 2h_{1n_1}\cdot 4\cdot p-1\cdots \\ \cdots p-1\cdot 4\cdot 2h_{r1}\cdots 2h_{rn_r}\cdot 4\cdot p-1\cdots p-1)^{h_1}.$$

Ako je teme X na nekoj ivici δ_{je} kojoj je jedno teme neka od tačaka Q_j^e, na primer na ivici δ_{11}, pljosni teselacije $\mathcal{T}$ čija su središta R_i biće pravilni h_i-uglovi, čija su središta $Q_{je}\neq Q_{11}$, pravilni $2h_{je}$-uglovi, čije je središte Q_{11} pravilan h_{11}-ugao, čija su središta P^i pravilni p-uglovi, a čija su središta $Q_j^e\neq Q_1^1$, kvadrati. Kako je zbir uglova kod temena Q_1^1 i Q_1^2 jednak π, a pljosni teselacije $\mathcal{T}$ čija su središta te dve tačke ne mogu biti u ovom slučaju kvadrati, ugao kod temena Q_1^1 biće $\pi/3$, a kod Q_1^2, $2\pi/3$, pa su pljosni sa tim središtima pravilni trouglovi. U tom slučaju teselacija $\mathcal{T}$ je oblika

$$E:\ (h_{11}\cdot 2h_{12}\cdots 2h_{1n_1}\cdot 3\cdot p\cdots p\cdot 4\cdot 2h_{r1}\cdots 2h_{rn_r}\cdot 4\cdot p\cdots \\ \cdots p\cdot h_1\cdots p\cdot h_m\cdot p\cdot 3)^{-2}.$$

Dogodi li se da su temena Q_1^1 i Q_1^2 susedna, uglovi kod njih biće pravi pa ćemo dobiti teselaciju

$$E': (p.4.2h_{21}\ldots 2h_{2n_2}.4.p\ldots p.4.2h_{r1}\ldots 2h_{rn_r}.4.p\ldots \ldots p.h_1\ldots p.h_m.p)^{-2}$$

koja se predstavlja istim cikličnim nizom kao i E samo su izostavljeni članovi $h_{11},\ldots,2h_{1n_1}$,3 s početka i član 3 na kraju niza.

Ako je X neko od temena Q_{1e} ili Q_{jn_j}, na primer Q_{11}, zaključujući kao i u prethodnom slučaju , ustanovićemo da je teselacija $\mathfrak{T}$ oblika

$$F: (h_{12}.2h_{13}\ldots 2h_{1n_1}.3.p\ldots p.4.2h_{r1}\ldots 2h_{rn_r}.4.p\ldots \ldots p.h_1\ldots p.h_m.p.3)^{-2h_{11}}$$

ili

$$F': (p.4.2h_{21}\ldots 2h_{2n_2}.4.p\ldots p.4.2h_{r1}\ldots 2h_{rn_r}.4.p\ldots \ldots p.h_1\ldots p.h_m.p)^{-2h_{11}} .$$

U svakom od prethodnih slučajeva, osim slučaja D, ukupan broj pojavljivanja p-uglova (a u slučaju D, p-1-uglova) u ciklovima koji odredjuju teselaciju, biće p , dakle m+r+4g u orijentabilnom, a m+r+2g u neorijentabilnom slučaju.

3.3. Dovoljni uslovi fundamentalnog poligona

Uslovi koje zadovoljava fundamentalan poligon, uvek obeležen sa F, grupe S($\mathfrak{T}$) simetrija uniformne teselacije $\mathfrak{T}$, odredjeni u prethodnim dvama odeljcima, su neophodni da on bude fundamentalan poligon grupe S($\mathfrak{T}$). Dokažimo da su oni i dovoljni, tj. da postoji svaki od poligona F opisanih i prethodnom poglavlju, štaviše, da je svaki od njih fundamentalna oblast neke diskretne grupe sfere, euklidske ili hiperboličke ravni te da, stoga, postoji svaka od uniformnih teselacija tipova A,B,C,D,E,F.

U odeljku 2.3. dokazano je da postoji poligon F koji zadovoljava sve neophodne uslove (ustanovljene u prethodnom poglavlju) da bude fundamentalna oblast grupe simetrija uniformne teselacije tipa A, a u odeljku 2.4. da je taj poligon zaista i fundamentalna oblast neke diskretne grupe simetrija ravni A^2, pa su, stoga, pomenuti neophodni uslovi i dovoljni. Dakle, svaka od teselacija tipa A postoji i, u zavisnosti od toga koji od uslova iz stava (2.5.1) zadovoljava grupa simetrija te teselacije, može se realizovati na sferi, u euklidskoj ili hiperboličkoj ravni.

Korišćenjem stava (1.5.6) umesto (1.5.3), na isti način kao u odeljku 2.3, može se dokazati da postoji poligon F koji zadovoljava sve neophodne uslove da bude fundamentalna oblast grupe simetrija uniformne teselacije tipa B ili E. Taj poligon će, u slučaju da zadovoljava neophodne uslove da bude fundamentalna oblast grupe simetrija teselacije tipa B, imati svojstva (1)-(5) kao i poligoni (2.3.1) i (2.3.2), s tim što neće biti tangentan već će postojati krug k sa središtem X koje pripada jednoj od ivica $Q_{je}Q_{je+1}$, na primer ivici $Q_{11}Q_{12}$, koji dodiruje sve ivice poligona F sem te. U slučaju kada zadovoljava neophodne uslove da bude fundamentalna oblast grupe simetrija teselacije tipa E, središte kruga k pripadaće nekoj od ivica $Q_j^eQ_{je}$, na primer ivici $Q_1^1Q_{11}$ i biće zadovoljeni uslovi (1),(2),(4) i (5) iz odeljka 2.3, a umesto (3) biće zadovoljen uslov

(3″) uglovi kod temena Q_j^e, $j\in\{2,\dots,r\}$, $e\in\{1,2\}$, su pravi, kod temena Q_1^1 je $\pi/3$, a kod temena Q_1^2 je $2\pi/3$ (a u slučaju E′ su i oni pravi).

Ako umesto stava (1.5.3) iskoristimo stav (1.5.7), na isti način kao i u odeljku 2.3, može se dokazati da postoji poligon F koji zadovoljava sve neophodne uslove da bude fundamentalna oblast grupe simetrija uniformne teselacije tipa C,D ili F. U slučaju kada zadovoljava neophodne uslove da bude fundamentalna oblast grupe simetrija teselacije tipa C taj poligon će imati ista svojstva kao i poligoni (2.3.1) i (2.3.2), s tim što neće biti tangentan već će postojati krug k sa središtem Q_{je}, $j\in\{1,\dots,r\}$, $e\in\{2,\dots,n_e-1\}$, na primer Q_{12}, koji dodiruje sve ivice tog poligona sem onih čije je jedno teme Q_{12}. U slučaju kada zadovoljava neophodne uslove da bude fundamentalna oblast grupe simetrija teselacije tipa F središte kruga k biće neka od tačaka Q_{je}, $j\in\{1,\dots,r\}$, $e\in\{1,n_e\}$, na primer Q_{11}, i biće zadovoljeni već pomenuti uslovi (1),(2),(3″),(4),(5). U slučaju kada zadovoljava neophodne uslove da bude fundamentalna oblast grupe simetrija teselacije tipa D središte kruga k biće neka od tačaka R_i, na primer R_1, i biće zadovoljeni uslovi (2),(3),(4),(5) iz odeljka 2.3, a umesto uslova (1) uslov

(1") svaki od uglova kod temena P^i, $i\in\{3,\dots,m\}$, je $2\pi/p-1$, a kod temena P^1 i P^2, $\pi/p-1$.

Kako u svakom od prethodnih slučajeva fundamentalan poligon F zadovoljava uslove (2),(4),(5) iz odeljka 2.3. i uslove (1') i (3') iz odeljka 3.2, na isti način kao u odeljku 2.4, može da se dokaže da je taj poligon fundamentalna oblast neke diskretne grupe simetrija sfere, euklidske ili hiperboličke ravni pa su, stoga pomenuti neophodni uslovi i dovoljni. Dakle, svaka od teselacija tipa B,C,D,E ili F postoji i, u zavisnosti od toga koji od uslova iz stava (2.5.1) zadovoljava grupa simetrija te teselacije, može se realizovati na sferi, u euklidskoj ili hiperboličkoj ravni.

3.4. Uniformne teselacije čije su pljosni oriciklički apeirogoni

Ako je fundamentalna oblast diskretne ravanske grupe simetrija nekompaktna nju, na osnovu razmatranja u odeljku 2.7, možemo izabrati tako da bude poligon koji se od poligonskih fundamentalnih oblasti diskretnih grupa u kojima je orbita izabrane tačke, uvek obeležene sa X, skup temena neke od uniformnih teselacija tipa A,B,C,D,E ili F, razlikuje jedino u tome što su mu neka od temena R_i, $i\in\{1,\dots,m\}$ ili Q_{je}, $j\in\{1,\dots,r\}$, $e\in\{1,\dots,n_e\}$, infinitna i što je dopušteno da broj njegovih temena bude infinitan. Stoga, dopustimo li da pljosni uniformne teselacije budu pravilni poligoni upisani u oricikle, oriciklički apeirogoni ([34] str.239), one će se od teselacija tipova A,B,C,D,E,F razlikovati utoliko što će u njihovoj oznaci biti dopušteno da neki od brojeva $h_1,\dots,h_m$ i $h_{11},\dots,h_{rn_r}$ budu infinitni i da ciklični niz koji odgovara teselaciji bude infinitan jer je infinitan jedan njegov deo, $h_{j1},\dots,h_{je},\dots$ za neko $j\in\{1,\dots r\}$ te da su, stoga, tada sva temena uniformne teselacije infinitna (dakle, na apsoluti koja predstavlja i granični oricikl).

LITERATURA

[1] Ball,W.W.R, Coxeter,H.S.M: Mathematical Recreations and Essays (12th ed.), University of Toronto Press, 1974.

[2] Beardon,A.F: The Geometry of Discrete Groups, Springer, 1983.

[3] Bilinski,S: Homogene mreže ravnine, Rad Jugoslav. Akad. 271, 145-255 (1948).

[4] Bourbaki,N: Groupes et Algèbres de Lie, Chapitres 4,5 et 6, Herman, Paris 1968.

[5] Coxeter.H.S.M: The abstract groups $G^{m,n,p}$, Trans. Amer. Math. Soc. 45, 73-150 (1939).

[6] Coxeter,H.S.M: Regular and semi-regular polytopes I, Math. Z. 46, 380-407 (1940).

[7] Coxeter,H.S.M: Regular compound tessellations of the hyperbolic plane, Proc. Roy. Soc. London A, 278, 147-167 (1964).

[8] Coxeter,H.S.M: Non-Euclidean Geometry (5th ed.), University of Toronto Press, 1965.

[9] Coxeter,H.S.M: Twelve Geometric Essays, Southern Illinois University Press, Carbondale 1968.

[10] Coxeter,H.S.M: Twisted Honeycombs, American Mathematical Society, no.4, 1970.

[11] Coxeter,H.S.M: Regular Polytopes (3rd ed.), Dover, 1973.

[12] Coxeter,H.S.M: Regular Complex Polytopes, Cambridge University Press, 1974.

[13] Coxeter,H.S.M, Longuet-Higgins,M.S, Miller,J.C.P: Uniform polyhehedra, Phil. Trans. Roy. Soc. London, A 246, 401-450, 6 plates, (1954).

[14] Coxeter,H.S.M, Moser,W.O.J: Generators and Relations for Discrete Groups (3rd ed.), Springer 1972.

[15] Coxeter,H.S.M, Whitrow,G.J: World-structure and non-Euclidean honeycombs, Proc. Roy. Soc. London, A 201, 417-437 (1950).

[16] Field,J.V: Kepler's star polyhedra, Vistas in Astr. 23, 109-141 (1979).

[17] Grünbaum,B, Shephard,G.C: Tilings by regular polygons, Math. Magazine, 50(5), 227-247 (1977).

[18] Grünbaum,B, Shephard,G.C: Incidence symbols and their applications, Proc. Symp. Pure Math. 34, 199-244 (1979).

[19] Heath,T.L: The Thirteen Books of Euclid's Elements, vol III (2nd ed.), Dover 1956.

[20] Heath,T.L: A History of Greek Mathematics, vol. I,II, Dover 1981.

[21] Hilbert,D, Cohn-Vossen,S: Geometry and the Imagination, Chelsea Publishing Company 1952.

[22] Hiller,H: Geometry of Coxeter Groups, Pitman 1982.

[23] Hoare,A.H.M, Karras,A, Solitar,D: Subgroups of NEC groups, Comm. Pure App. Math. 26, 731-744 (1973).

[24] Kepler,J: Harmonices Mundi, Libri V (prevod na engleski [16]), Lincii 1619.

[25] Lopandić,D: Geometrija, Naučna Knjiga, Beograd 1980.

[26] Macbeath,A.M: Geometrical realization of isomorphisms between plane groups, Bull.Amer. Math. Soc. 71, 629-630 (1965).

[27] Macbeath,A.M: The clasification of non-Euclidean plane crystallographic groups, Canad. J. Math. 6, 1192-1205 (1967).

[28] Macbeath,A.M, Hoare, A.H.M: Groups of hyperbolic crystallography, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 79, 235-249 (1976).

[29] Magnus,W, Karras,A, Solitar,D: Combinatorial Group Theory (2nd. ed.), Dover 1976.

[30] Maskit, B: On Poincaré's theorem for fundamental polygons, Advanc. in Math. 7, 219-230 (1971).

[31] Skilling, J: The complete set of uniform polyhedra, Phil. Trans. Roy. Soc. London, A 278, 111-135 (1975).

[32] Sommerville, D.M.Y: Semi-regular networks of the plane in absolute geometry, Trans. Roy. Soc. Edinburgh, 41, 725-747, 12 plates (1905).

[33] Waterhouse, W.C: The discovery of regular solids, Arch. Hist. Ex. Sci. 9, 212-221 (1972).

[34] Weiss, A.I, Lučić, Z: Regular polyhedra in hyperbolic three-space, Mitt. Math. Sem. Giesen, 165, 237-252 (1984).

[35] Wilkie, H.C: On non-Euclidean crystallographic groups, Math. Z. 91, 87-102 (1966).

[36] Zieschang, H, Vogt, E, Coldewey, H.D: Surfaces and Planar Discontinous Groups, Springer 1980.