Mr. JEVTIĆ MIROLJUB

NOVA SVOJSTVA I VEZE U HARDIJEVIM I DRUGIM PROSTORIMA ANALITIČKIH FUNKCIJA, KAO I U ODGOVARAJUĆIM PROSTORIMA REALNIH HARMONIJSKIH FUNKCIJA

-doktorska disertacija-

BEOGRAD, 1979.

S A D R Ž A J

G L A V A 4.

U V O D

Teorija Hardijevih prostora h^p , $o < p \leq \infty$,realnih harmonijskih funkcija u jediničnom krugu D ili je veoma bliska teoriji Hardijevih prostora H^p analitičkih funkcija ($1 < p < \infty$), ili se javljaju teškoće koje ne dozvoljavaju razvoj ekvivalentan razvoju H^p teorije ($o < p < 1$). Može li se ipak teorija h^p prostora dalje razvijati ? Drugo pitanje se odmah nameće. Kakav je razvoj moguć u slučaju drugih prostora realnih harmonijskih funkcija analognih odgovarajućim prostorima analitičkih funkcija?

Odgovor na postavljena pitanja zahteva poznavanje ne samo teorije realnih harmonijskih funkcija, već prevashodno teorije analitičkih funkcija. Želeći da odgovorim na postavljena pitanja, a dpžeći se pomenutog zahteva, došao sam do novih rezultata i u teoriji analitičkih funkcija (prva i druga glava) i u teoriji realnih harmonijskih funkcija (treća i četvrta glava). Tako je ova doktorska disertacija prilog teoriji analitičkih funkcija, a istovremeno i doprinos izgrađivanju teorije realnih harmonijskih funkcija.

Hardijevi prostori H^p su u osnovi teorije prostora analitičkih funkcija.Njima je posvećena prva glava. U njoj su navedeni poznati rezultati za koje su analogni interesantni u teoriji realnih harmonijskih funkcija (treća glava),kao i oni koji će biti korišćeni za dokazivanje novih rezultata.

Novi rezultati o H^p prostorima su u odeljku 1.3.Unjemu je dokazano da su maksimalni jako stabilni potprostori prostora H^p, $1 \leq p \leq \infty$,jednaki maksimalnim stabilnim potprostorima. Minimalni jako stabilni prostori koji sadrže u sebi prostor H^p jednaki su minimalnim stabilnim prostorima sa istim svojstvom ako je

$2 \leq p < \infty$ .Da li važi jednakost ako je $1 \leq p < 2$ ili $p = \infty$?

Druga glava je posvećena Bergmanovim prostorima analitičkih funkcija.Posle navedenih nekih poznatih rezultata (2.1 i 2.2), navedeni su novi rezultati. Novi rezultati navedeni u odeljku 2.3 su neka rešenja problema pripadnosti izvoda singularne unutrašnje funkcije Bergmanovom prostoru $A^{p,\alpha}$ .Potpuno rešenje je navedeno u slučaju funkcije $A(z) = e^{\frac{z+1}{z-1}}$,a neka parcijalna rešenja u slučaju singularne unutrašnje funkcije određene merom sa konačnim nosačem i u slučaju kada mera nije identički jednaka nuli (pogledati (43)).

U odeljku 2.4 navedeno je rešenje problema pripadnosti izvoda funkcija ograničene granične rotacije Bergmanovim prostorima $A^{p,\alpha}$.

Pomoću poznatih prostora analitičkih funkcija i operatora L_a^n ,u odeljku 2.5, definisani su novi prostori analitičkih funkcija i utvrđena neka njihova svojstva (pogledati (4 2)).

Konstataciju da prostori H^p i h^p imaju dosta dodirnih tačaka,ako je $1 \leq p \leq \infty$, potvrđuju i rešenja problema stabilnosti prostora h^p, $1 \leq p \leq \infty$ (odeljak 3.2). Ona se veoma malo razlikuju od odgovarajućih rešenja za prostor H^p (odeljak 1.3).

Novi rezultati o Hardijevim prostorima realnih harmonijskih funkcija su i u odeljku 3.3. U njemu su navedene neke ocene rasta integralnih sredina i koeficijenata elemenata prostora h^p, $0 < p < 1$, koje odgovaraju ocenama u odgovarajućim prostorima analitičkih funkcija (1.1 i 1.2),iako su prostori H^p i h^p, $0 < p < 1$, različite strukture (3.1).Na kraju odeljka je teorema o topološkoj strukturi prostora h^p: Prostor h^p, $0 < p < 1$, nije lo~~kalno konveksni~~ linearni topološki prostor (pogledati (41)).

Novi prostori $a^{p,\alpha}$,f^+, h^n_{ℓ} i $T(e_0)$ realnih harmonijskih funkcija su definisani u četvrtoj glavi i utvrđena su neka njihova svojstva. Ideja za njihovo definisanje i proučavanje su odgovarajući prostori analitičkih funkcija.

Odeljak 4.1 posvećen je Bergmanovim prostorima $a^{p,\alpha}$ realnih harmonijskih funkcija. Pored nekih ocena integralnih sredina i koeficijenata elemenata prostora $a^{p,\alpha}$,dokazano je da je prostor $a^{p,\alpha}$ samokonjugovani Banahov prostor ako je $1 \leqslant p < \infty$.

Analogija sa prostorom N^+ analitičkih funkcija ne može se primeniti na realne harmonijske funkcije. Iznenađujuće, analogija sa sadržavajućim prostorom F^+ prostora N^+ (N^+ je svuda gust u F^+) vodi prostoru f^+ realnih harmonijskih funkcija koji zadržava dosta osobina prostora F^+ (odeljak 4.2).

U odeljku 4.3 definisan je prostor h^n_{ℓ} realnih harmonijskih funkcija i okarakterisan integralnim predstavljanjem svojih elemena Za n=o, prostor h^n_{ℓ} se svodi na poznati prostor ℓ, a integralno predstavljanje na poznato integralno predstavljanje elemenata prostora ℓ (rezultat objavljen u (42)).

U odeljku 4.4 definisani su prostori $T(e_0)$ i $T(e)$ realnih harmonijskih funkcija i dokazano je da je $[T(e_0)]^{**} = T(e)$. Rezultat je inspirisan odgovarajućom jednakošću za analitičke funkcije (jednakost ne važi za neprekidne funkcije).

G L A V A 1.

1. H A R D I J E V I P R O S T O R I A N A L I T Č K I H F U N K C I J A

U literaturi se naziv Hardijevi prostori koristi za prostore H^p, $0 < p \leq \infty$, analitičkih funkcija f(z) definisanih u jediničnom krugu D ograničenih integralnih sredina

$$M_p(r,f) = \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(re^{it})|^p dt\right)^{1/p}, \quad 0 \leq r < 1,$$

i za prostor N, analitičkih funkcija u D ograničene karakteristike, koji sadrži prostore H^p i koji zadržava dosta njihovih svojstava.

Neka svojstva ovih prostora i njihovih elemenata, za koja analogoni u teoriji realnih harmonijskih funkcija u D vode interesantnim problemima, kao i ona koja će biti korišćena za dokazivanje novih rezultata, su navedena u prvom i drugom odeljku.

Novi rezultati su u trećem odeljku. U njemu je dokazano da su maksimalni jako stabilni podprostori prostora H^p, $1 \leq p \leq \infty$, jednaki maksimalnim stabilnim podprostorima. Minimalni jako stabilni prostori koji sadrže u sebi prostor H^p jednaki su minimalnim stabilnim prostorima koji sadrže prostor H^p ako je $2 \leq p < \infty$. Da li su jednaki ako je $1 \leq p < 2$ i $p = \infty$?

Za deo N^+ prostora N i njegov Frešeov omotač F^+ interesantni su analogoni u teoriji realnih harmonijskih funkcija. Zato su u poslednjem odeljku glave navedena neka poznata svojstva ovih prostora.

1.1 UVODNE DEFINICIJE I REZULTATI

Definicija 1.1.1

Neka je $M_p(r,f) = \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(re^{it})|^p dt\right)^{1/p}$, $0 < p < \infty$,

$M_\infty(r,f) = \max_{|z|=r} |f(z)|$

$N(r,f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log^+|f(re^{it})|\, dt$,

gde je $f=f(z)=f(re^{it})$ analitička funkcija definisana u jediničnom krugu $D=\{|z|<1\}$. Tada

1. $f\in H^p$, $0<p<\infty$, ako je $\sup_{0\le r<1} M_p(r,f) < \infty$.

2. $f\in H^\infty$, ako je $\sup_{0\le r<1} M_\infty(r,f) < \infty$.

3. $f\in N$, ako je $\sup_{0\le r<1} N(r,f) < \infty$.

Definisani prostori su uređeni u odnosu na inkluziju: $H^\infty \subset H^p \subset H^q \subset N$, $\infty > p > q > 0$, pri čemu su inkluzije prave (pogledati (54)), a posledica su nejednakosti

$$[q\cdot N(r,f)]^{1/q} \le M_q(r,f) \le M_p(r,f) \le M_\infty(r,f).$$

Za razvoj teorije Hardijevih prostora fundamentalne su teoreme o postojanju graničnih vrednosti elemenata i o vezi elemenata i njihovih graničnih vrednosti, kao i teoreme o faktorizaciji elemenata Hardijevih prostora.

Teorema 1.1.1 (Fatuova teorema)

Ako $f\in H^\infty$,radijalna granična vrednost $\lim_{r\to 1-} f(re^{it})=f(e^{it})$ postoji za skoro svako $t\in[0,2\pi]$ .Ako radijalna granična vrednost $f(e^{it})$postoji, onda i netangentna granična vrednost u tački e^{it} postoji.

Teorema 1.1.2 (F. i R. Nevanlinna)

Analitička funkcija $f\in N$ ako i samo ako postoje elementi $g,h\in H^\infty$ tako da je $f=\frac{g}{h}$.

Teorema 1.1.3

Neka $f\in N$. Netangentna granična vrednost lim $f(re^{it})=f(e^{i postoji za skoro svako $t\in[0,2\pi]$. Ako je $f(z)\not\equiv 0$, onda $\log|f(e^{it})|$ pripada prostoru $L^1=L^1[0,2\pi]$. Ako $f\in H^p$, tada $f(e^{it})\in L^p=L^p[0,2\pi]$.

Dokaz

Neka je $f(z)\not\equiv 0$. Prema teoremi 1.1.2, $f(z)=\dfrac{g(z)}{h(z)}$, $|g(z)|\leq 1, |h(z)|\leq 1, g, h\in$

Prema teoremi 1.1.1, netangentne granične vrednosti $g(e^{it})$ i $h(e^{it})$ postoje za skoro svako t. Prema Fatuovoj lemi,

$\int_0^{2\pi} |\log|g(e^{it})|| \, dt \leq \underline{\lim}_{r\to 1}\left(-\int_0^{2\pi} \log|g(re^{it})| dt\right)$. Kako je $\int_0^{2\pi} \log|g(re^{it})| \, dt$ rastuća funkcija, to je $\log|g(e^{it})|\in L^1$. Na isti način se može pokazati da je $\log|h(e^{it})|\in L^1$. Iz $\log|g(e^{it})|\in L^1$, sledi da $g(e^{it})$ ne može biti nula na skupu pozitivne mere. Primenom Fatuove leme može se pokazati da $f(e^{it})\in L^p$ ako $f\in H^p$.

Faktorizacija elemenata prostora N je jedan od najboljih rezultata te vrste uopšte u analizi. Ona je vezana za pojmove Blaškeovog proizvoda, unutrašnje i spoljašnje funkcije.

Definicija 1.1.2

Neka je (z_n) niz kompleksnih brojeva u jediničnom krugu D, $0<|z_1|\leq|z_2|\leq\ldots<1$, $\sum_{n=1}^{\infty}(1-z_n)<\infty$. Proizvod $B(z)=z^m\prod_{n=1}^{\infty}\frac{|z_n|}{z_n}\frac{z_n-z}{1-\bar{z}z_n}$, $m=0,1,\ldots$ je Blaškeov proizvod.

Definicija 1.1.3

Analitička funkcija $S(z)$ definisana u jediničnom krugu D je unutrašnja funkcija ako je $|S(z)|\leq 1$, $z\in D$, $|S(e^{it})|=1$, za skoro svako t.

Definicija 1.1.4

Unutrašnja funkcija $S(z)$ je singularna ako je

$S(z)=e^{-\int_0^{2\pi}\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}d\mu(t)}$, gde je $\mu=\mu(t)$ ograničena, neopadajuća singularna funkcija na intervalu $[0,2\pi]$.

Definicija 1.1.5

Spoljašnja funkcija klase H^p je funkcija

$F(z)=e^{i\gamma}e^{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}\log\psi(e^{it})dt}$, $\gamma\in R$, $\psi(t)\geq 0$, $\log\psi(t)\in L^1$, $\psi(t)\in L^p$.

Bez uslova $\psi(t) \in L^p$, $F(z)$ je spoljašnja funkcija prostora N.

Teorema 1.1.4

Analitička funkcija $f(z)$ pripada prostoru H^p, $0 < p \leq \infty$, ako i samo ako je $f(z) = B(z) \cdot S(z) \cdot F(z)$, gde je $B(Z)$ Blaškeov proizvod formiran od nula funkcije $f(z)$, $S(z)$ singularna unutrašnja funkcija, $F(z)$ spoljašnja funkcija klase H^p.

Dokaz

Neka $f(z)$ ima beskonačno nula (z_n), $0 < |z_1| \leq |z_2| \leq \ldots < 1$. (Ako $f(z)$ ima konačno nula, onda je $f(z) = z^m \prod_{k=1}^{n} \frac{|z_k|}{z_k} \frac{z_k - z}{1 - \bar{z}_k z}$).

Neka je $B_n(z) = z^m \prod_{k=1}^{n} \frac{|z_k|}{z_k} \frac{z_k - z}{1 - \bar{z}_k z}$, $g_n(z) = \frac{f(z)}{B_n(z)}$.

Za fiksirane n i $\varepsilon > 0$, odredimo $\rho(\varepsilon)$ tako da je $|B_n(z)| > 1 - \varepsilon$, $\rho(\varepsilon) < |z| < 1$. Zato je $\int_0^{2\pi} |g_n(re^{it})|^p dt \leq (1-\varepsilon)^{-p} \int_0^{2\pi} |f(re^{it})|^p dt \leq (1-\varepsilon)^{-p} M$

za svako $0 \leq r < 1$.

Puštajući da $\varepsilon \to 0$ dobija se: $\int_0^{2\pi} |g_n(re^{it})|^p dt \leq M$,

za svako n i svako $0 \leq r < 1$. Kako je $\lim_{n \to \infty} g_n(z) = \frac{f(z)}{B(z)} = g(z)$, uniformno na svakom krugu $|z| = R < 1$, to je $g \in H^p$.

Dakle, $f(z) = B(z) \cdot g(z)$, $g \in H^p$, $g(z) \neq 0$, $z \in D$.

Neka je $F_1(z) = e^{\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{it}+z}{e^{it}-z} \log|f(e^{it})| dt}$. Prema dekompoziciji $f(z) = B(z) \cdot g(z)$ i teoremi 1.1.3, $|f(e^{it})| = |g(e^{it})| = |F_1(e^{it})|$, za skoro svako t. Iz nejednakosti $\log|f(re^{i\theta})| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P_r(\theta - t) \log|f(e^{it})| dt$, $f \in H^p$, sledi $|g(z)| \leq |F_1(z)|$, $z \in D$. Neka je $e^{i\gamma} = \frac{g(0)}{|g(0)|}$,

$S(z) = e^{-i\gamma} \frac{g(z)}{F_1(z)}$. Tada je $0 < |S(z)| \leq 1$, $|S(e^{it})| = 1$, skoro svuda na ∂D, $S(0) > 0$. Kako je $-\log|S(z)|$ pozitivna harmonijska funkcija koja je nula skoro svuda na ∂D, to je $S(z) = e^{-\int_0^{2\pi} \frac{e^{it}+z}{e^{it}-z} d\mu(t)}$, $\mu = \mu(t)$ je ograničena, neopadajuća, singularna funkcija na intervalu $[0, 2\pi]$. Na kraju,

$f(z) = B(z)\, S(z)\, e^{i\gamma} F_1(z) = B(z)\, S(z)\, F(z)$

Obrnuto, neka je $f(z) = B(z)\, S(z)\, F(z)$. Dovoljno je pokazati da $F \in H^p$. Prema aritmetičko-geometrijskoj nejednakosti,

$|F(z)|^p \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P_r(\theta-t)[\psi(t)]^p dt$. Iz poslednje nejednakosti sledi: $\int_0^{2\pi} |F(re^{it})|^p dt \leq \int_0^{2\pi} [\psi(t)]^p dt < \infty$.

Predhodnom teoremom okarakterisan je prostor H^p faktorizacijom svojih elemenata. Na isti način se može okarakterisati prostor N.

TEOREMA 1.1.5

Analitička funkcija f(z) pripada prostoru N ako i samo ako je $f(z) = B(z)\ F(z)\ \frac{S_1(z)}{S_2(z)}$,gde je B(z) Blaškeov proizvod formiran od nula funkcije f(z), $S_1(z)$ i $S_2(z)$ simularne unutrašnje funkcije, F(z) spoljašnja funkcija prostora N.

Ocene rasta integralnih sredina elemenata prostora H^p, koje uglavnom pripadaju Hardiju i Litlvudu su polazna osnova mnogih kasnijih rezultata. Navodimo nekoliko ocena koje ćemo koristiti za dokazivanje novih rezultata, a i za upoređivanje sa ocenama u odgovarajućim prostorima realnih harmonijskih funkcija.

TEOREMA 1.1.6

Neka je f(z) analitička funkcija u jediničnom krugu D . Tada je za $1 < p < \infty$, $1 \leq a < \infty$, $-1 < b < \infty$,

$$\int_0^1 (1-r)^b \{M_p(r,f)\}^a dr \leq C \left\{ \int_0^1 (1-r)^{a+b} \{M_p(r,f')\}^a dr + |f(0)|^a \right\},$$

gde je C konstanta koja ne zavisi od f.

TEOREMA 1.1.7

Neka je f(z) analitička funkcija u jediničnom krugu D i neka je $M_p(r,f) \leq \frac{C}{(1-r)^\beta}$, $0 < p < \infty$, $\beta \geq 0$. Tada postoji konstanta $K=K(p,\beta)$ tako da je $M_q(r,f) \leq \frac{KC}{(1-r)^{\beta+1/p-1/q}}$, $p < q \leq \infty$. Ako je $\beta=0$, ($f \in H^p$), onda je $M_q(r,f)=o((1-r)^{1/q-1/p})$. Eksponent $\beta+1/p-1/q$ je najbolji u svim slučajevima.

TEOREMA 1.1.8

Neka je $0 < p \leq q \leq \infty$, $f \in H^p$, $\lambda \geq p$, $\alpha = 1/p - 1/q$. Tada je $\int_0^1 (1-r)^{\lambda\alpha-1} \{M_q(r,f)\}^\lambda dr < \infty$.

TEOREMA 1.1.9

Ako $f' \in H^p$, $0 < p < 1$, onda $f \in H^{p/(1-p)}$. Rezultat se ne može poboljšati.

Interesantno je uporediti Tejlorove koeficijente elemenata prostora H^p, $0 < p < 1$, sa koeficijentima realnih harmonijskih funkcija odgovarajućeg prostora h^p, $0 < p < 1$. Iako prostor h^p ne zadržava dosta osobina prostora H^p, rast koeficijenata ostaje isti(glava 3). Zato navodimo jednu ocenu rasta koeficijenata.

TEOREMA 1.1.10

Neka $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \in H^p$, $0 < p < 1$. Tada je $a_n = o(n^{1/p-1})$, $n \to \infty$. Ocena je najbolja. Za svaki nula niz (δ_n) postoji $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \in H^p$, $|a_n| \neq O(\delta_n n^{1/p-1})$.

DOKAZ

Neka $f \in H^p$, $0 < p < 1$. Tada je $a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=r} \frac{f(z)\,dz}{z^{n+1}}$, $0 < r < 1$. Iz poslednje jednakosti, $|a_n| \leq r^{-n} \cdot M_1(r_1, f)$, $0 < r < 1$. Kako je $M_1(r,f) = o((1-r)^{1-\frac{1}{p}})$, (teorema 1.1.7), to je za $r = 1-1/n$, $a_n = o(n^{1/p-1})$ (iz teoreme 1.1.7 sledi $|a_n| \leq C n^{1/p-1} \cdot \|f\|_p$) Funkcije $(1-z)^{-\alpha}$ pokazuju da je ocena najbolja.

1.2 DVE KARAKTERIZACIJE PROSTORA H^p

Prema teoremi 1.1.3 netangentna granična vrednost $f(e^{it})$ je definisana skoro svuda na ∂D, za svaki element $f \in H^p$, $0 < p \leq \infty$. Može se pokazati da je $\|f\|_p = \lim_{r \to 1} M_p(r,f) = \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(e^{it})|^p dt \right)^{1/p}$. Označimo sa $H^p(\partial D)$ klasu netangentnih graničnih vrednosti elemenata prostora H^p, $0 < p < \infty$. Sledećom teoremom okarakterisana je klasa $H^p(\partial D)$.

TEOREMA 1.2.1

$H^p(\partial D)$, $0 < p < \infty$, je zatvaranje skupa polinoma po e^{it} u prostoru $L^p[0,2\pi]$.

POSLEDICA 1.2.1

Ako je $1 \leq p \leq \infty$, H^p je Banahov prostor sa normom $\|f\|_p = \lim_{r \to 1} M_p(r,$

POSLEDICA 1.2.2

Ako je $0 < p < 1$, H^p je kompletan metrički prostor sa metrikom $d(f,g) = \|f-g\|_p^p$, $f,g \in H^p$

Ako je $1 \leq p \leq \infty$, može se prostor H^p okarakterisati svojstvom Furieovih koeficijenata graničnih vrednosti svojih elemenata.

TEOREMA 1.2.2

Neka je $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \in H^p$, $1 \leq p \leq \infty$, i neka je (b_n) niz Furieovih koeficijenata funkcije $f(e^{it})$. Tada je $b_n = a_n$, $n \geq 0$, $b_n = 0, n < 0$. Obrnuto, neka je $f(e^{it}) \in L^p$ i (b_n), $b_n = 0, n < 0$, niz Furieovih koeficijenata funkcije $f(e^{it})$. Tada $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n \in H^p$.

DOKAZ

Kako je $a_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} r^{-n} e^{-int} f(re^{it}) dt$, $0 < r < 1$, to je $|r^n a_n - b_n| \leq \|f_r - f\|_1 \to 0$, $r \to 1$, $f_r(z) = f(rz)$. Stoga je $b_n = a_n, n \geq 0$, $b_n = 0$, $n < 0$. Obrnuto, neka je

$$F(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P_r(\theta - t) f(e^{it}) dt \quad , z = re^{i\theta}$$

Kako je $b_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-int} f(e^{it})\, dt,\ n=0,\pm1,\ldots$

$P_r(\theta - t) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} r^n (e^{in(\theta - t)} + e^{-in(\theta - t)})$, to je

$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n = f(z)$. Dakle, $f(z)$ je analitička funkcija koja pripada prostoru H^p.

1.3 STABILNOST PROSTORA H^p, $1 \leq p \leq \infty$

Podprostori prostora H^p, $1 \leq p \leq \infty$, stabilni u odnosu na promene argumenata koeficijenata svojih elemenata (stabilni podprostori) su okarakterisani . Nezavisno je proučavana stabilnost u odnosu na promene argumenata i smanjenje modula koeficijenata (jako stabilni podprostori). U ovom odeljku je dokazano da su maksimalni jako stabilni podprostori prostora H^p , $1 \leq p \leq \infty$, jednaki maksimalnim stabilnim podprostorima. Jednakost minimalnih jako stabilnih prostora koji sadrže H^p prostor sa minimalnim stabilnim nije dokazana za sve vrednosti p.

DEFINICIJA 1.3.1

Neka je $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ analitička funkcija u jediničnom krugu D.

1. Promena funkcije $f(z)$ je analitička funkcija $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ $|b_n| = |a_n|, n=0,1,2,\ldots$ Označava se $g = ag(f)$.
2. Potpuna promena funkcije $f(z)$ je analitička funkcija $h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$, $|c_n| \leq |a_n|, n=0,1,2,\ldots$ Označava se $h = cag(f)$

DEFINICIJA 1.3.2

Vektorski prostor **V** analitičkih funkcija je jako stabilan ako iz $f \in V$ sledi da svaka potpuna promena $cag(f) \in V$

DEFINICIJA 1.3.3

Vektorski prostor **V** analitičkih funkcija ja stabilan ako iz $f \in V$ sledi da svaka promena $ag(f) \in V$.

DEFINICIJA 1.3.4

1. Element $f \in H^p$ pripada podskupu $a(H^p)$ ako svaka promena $ag(f) \in H^I$
2. Maksimalni jako stabilan podprostor prostora H^p je $s(H^p)$.
3. Minimalni stabilan prostor koji sadrži H^p je $A(H^p)$.
4. Minimalni jako stabilan prostor koji sadrži H^p je $S(H^p)$.

Deo $a(H^p)$ prostora H^p okarakterisan je množenjem prostora H^q, $1/p+1/q=1$, u ℓ^1.

TEOREMA 1.3.1

1. $a(H^p)=H^2$, $1 \leq p \leq 2$
2. $a(H^p)=(H^q,\ell^1)$, $1<p<\infty$,$1/p+1/q=1$
3. $a(H^\infty)=\ell^1$

DOKAZ

1. Prema Parsevalovoj formuli, ako $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \in H^2$ i $h=ag(f)$, onda $h \in H^2 \subset H^p$. Zato je $H^2 \subset a(H^p)$.

Ako $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \in a(H^p)$, tada za svaki izbor znakova red $\sum_{n=0}^{\infty} \pm|a_n|$ je granični red nekog elementa prostora $H^p(\partial D)$, pa je red $\sum_{n=0}^{\infty} \pm|a_n|$ Furieov red neke L^1 funkcije. Stoga $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 < \infty$.

2. (H^q,l^1) je tzv. Kötheov dualni prostor prostora H^q (sadrži sve funkcije $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ takve da $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n b_n| < \infty$,za svaki element $g(z)=\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ prostora H^q). Označava se$(H^q)^K$.

Kötheov drugi dualni prostor $((H^q,\ell^1),\ell^1)$ označava se $(H^q)^{KK}$.

Neka $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \in a(H^p)$ i $g(z)=\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n \in H^q$. Definišimo funkciju $h(z)=\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| e^{-i \arg b_n} z^n$. Kako prema pretpostavci $h(z) \in H^p$, to je $(h * g)(z)=\sum_{n=0}^{\infty} |a_n||b_n| z^n$ neprekidna funkcija na $\bar{D}$. Zato je $\lim_{r \to 1}(h * g)(r)=\sum_{n=0}^{\infty} |a_n||b_n| < \infty$. Dakle, $a(H^p) \subset (H^q,\ell^1)$.

Obrnuto, neka $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \in (H^q,\ell^1)$. Tada svaka promena $ag(f) \in (H^q,\ell^1) \subset (H^q,H^\infty)=H^p$. Dakle, $(H^q,\ell^1) \subset a(H^p)$.

3. Neka $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \in a(H^\infty)$. Tada je $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| z^n \in H^\infty$ i $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| < \infty$. Dakle $f \in \ell^1$ (funkcija $f(z)$ se identifikuje sa nizom svojih Tejlorovih koeficijenata). Obrnuto, neka je $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| < \infty$

Tada $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \in H^{\infty}$ i svaka promena $ag(f) \in H^{\infty}$. Stoga je $f \in a(H^{\infty})$, odnosno $\ell^1 \subset a(H^{\infty})$.

POSLEDICA 1.3.1

$a(H^p)$ je podprostor prostora H^p.

POSLEDICA 1.3.2

$(H^p, \ell^1) = H^2, \ 2 \leq p < \infty$.

Za određivanje jako stabilnih prostora $s(H^p)$ i $S(H^p)$ i stabilnog prostora $A(H^p)$ koriste se sledeće leme.

LEMA 1.3.1

Prostori $s(H^p)$, $S(H^p)$ i $A(H^p)$ postoje.

$$s(H^p) = (\ell^{\infty}, H^p).$$

DOKAZ

Prostor $S(H^p)$ $(A(H^p))$ je presek svih jako stabilnih (stabilnih) prostora koji sadrže u sebi prostor H^p(C_0,prostor nula nizova je jako stabilan(stabilan)prostor koji sadrži prostor H^p).

Neka je $s(H^p)=(\ell^{\infty}, H^p)$. Trivijalno je da je $s(H^p)$ jako stabilan podprostor prostora H^p. Dokažimo maksimalnost. Neka je A proizvoljni jako stabilan podprostor prostora H^p. Neka je $g(z)=\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n \in A$ i $(a_n) \in \ell^{\infty}$. Tada je $h(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n z^n \in A \subset H^p$. Stoga $g \in (\ell^{\infty}, H^p) = s(H^p)$. Zato je $A \subset s(H^p)$.

LEMA 1.3.2

$$s(H^p) \subset a(H^p) \subset H^p \subset A(H^p) \subset S(H^p) \subset (H^p)^{KK} .$$

DOKAZ

Poslednje dve inkluzije su posledica činjenica da je svaki jako stabilan prostor stabilan i leme 1.3.1 i činjenice da je $(H^p)^{KK}$ jako stabilan prostor koji sadrži u sebi prostor H^p.

LEMA 1.3.3

$$(H^{\infty}, R) = L^1_+$$

Za dokaz pogledati (53) i (10).

LEMA 1.3.4

$$s((H^{\infty},R))=(H^{\infty})^{K}.$$ Pogledati (2).

LEMA 1.3.5

$$s(L^1_+)=H^2$$

DOKAZ

Iz $H^1 \subset L^1_+ \subset L^1$ sledi $(\ell^{\infty},H^1) \subset (\ell^{\infty},L^1_+) \subset (\ell^{\infty},L^1)$. Prema lemi 1.3.1 i teoremi 1.3.1,

$$H^2 \subset s(L^1_+) \subset s(L^1)=L^2$$ (pogledati (2))

Iz predhodnih inkluzija sledi da je $s(L^1_+)=H^2$.

TEOREMA 1.3.2

1. $H^2=s(H^1) \subset A(H^1) \subset S(H^1) \subset c_0$
2. $H^2=s(H^p) \subset H^p \subset A(H^p) \subset S(H^p) \subset \ell(q,2)$, $1<p<2$, $1/p+1/q=1$
3. $H^2=s(H^2)=S(H^2)=A(H^2)$
4. $\ell(q,2) \subset s(H^p) \subset H^p \subset A(H^p) \subset S(H^p)=H^2$
5. $\ell^1= s(H^{\infty}) \subset H^{\infty} \subset A(H^{\infty}) \subset S(H^{\infty}) \subset (H^{\infty})^{KK}=H^2$

DOKAZ

1. Kako je H^2 jako stabilan podprostor prostora H^p, $1\leq p\leq 2$, to je $H^2 \subset s(H^p)$. Prema teoremi 1.3.1, $H^2=a(H^p)$. Prema lemi 1.3.2, $s(H^p) \subset a(H^p)$. Dakle, $s(H^p) \subset H^2$. Time smo dokazali jednakosti u 1 i 2 i prvu jednakost u 3. Inkluzija $S(H^1) \subset c_0$ je prava, jer su inkluzije $H^1 \subset \ell(\infty,2) \subset c_0$ prave.

2. Kako je $\ell(q,2)$ jako stabilan prostor koji sadrži H^p, to je $S(H^p) \subset \ell(q,2)$

3. Jednakosti su posledica činjenice da je H^2 jako stabilan prostor.

4. Inkluzija $\ell(q,2) \subset S(H^p)$, $2<p<\infty$, je dualna za inkluziju $S(H^p) \subset \ell(q,2)$, $1<p<2$. Kako je H^2 jako stabilan prostor koji sadrži prostor H^p, to je $A(H^p) \subset S(H^p) \subset H^2$. Iz teoreme 8.16,

glava VII ((85)), sledi $H^2 \subset A(H^p)$.

5. ℓ^1 je jako stabilan podprostor prostora H^∞. Zato je $\ell^1 \subset s(H^\infty) \subset a(H^\infty) = \ell^1$ (teorema 1.3.1). Poslednja jednakost u 5. $(H^\infty, \ell^1) = (H^\infty)^K = s((H^\infty; R)) = s(L^1_+) = H^2$, u dokazu su iskorišćene leme 1.3.3 , 1.3.4 ,i 1.3.5 .

$$(H^\infty)^{KK} = ((H^\infty, \ell^1), l^1) = (H^2; \ell^1) = H^2$$

Dokažimo da su maksimalni jako stabilni podprostori prostora H^p, $s(H^p)$, jednaki stabilnim podprostorima $a(H^p)$.

TEOREMA 1.3.3

$$s(H^p) = a(H^p) \quad , \ 1 \leq p \leq \infty .$$

DOKAZ

Prvi slučaj: $1 \leq p \leq 2$

$$s(H^p) = a(H^p) = H^2 \quad \text{(teoreme 1.3.1 i 1.3.2)}$$

Drugi slučaj: $2 < p < \infty$, $1/p + 1/q = 1$.

Kako je $s(H^p) = (\ell^\infty, H^p)$ (lema 1.3.1) i $a(H^p) = (H^q, \ell^1)$, dovoljno je, prema lemi1.3.2, dokazati da je $(H^q, \ell^1) \subset (\ell^\infty, H^p)$

Neka $(\lambda_n) \in (H^q, \ell^1)$ i $(\mu_n) \in \ell^\infty$. Dokažimo da $\sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n \mu_n z^n \in H^p$

Neka $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \in H^q$. Tada je $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n \lambda_n| < \infty$. Jasno, i $\sum_{n=0}^{\infty} |\lambda_n a_n \mu_n| < \infty$, pa je $\sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n a_n \mu_n z^n$ neprekidna funkcija na $\overline{D}$.

Definišimo neprekidni linearni funkcional na H^q sa

$$\Phi(f) = \lim_{r \to 1} \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n \mu_n a_n r^n \quad , \quad f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \in H^q.$$ U integralnom obliku funkcional Φ ima predstavljanje

$$\Phi(f) = \lim_{r \to 1} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(re^{it})(\lambda * \mu)(e^{it})\, dt \quad , \quad f \in H^q, \ (\lambda * \mu)(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n \mu_n z^n.$$

Prema predhodnoj jednakosti ,

$|\Phi(f)| \leq \|\mu\|_\infty \|\lambda\| \|f\|_q$, gde je $\|\lambda\|$ norma operatora $\lambda : H^q \to \ell^1$ definisanog sa $\lambda(f) = (\lambda_n a_n)$, $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \in H^q$

Prema reprezentaciji neprekidnih linearnih funkcionala na H^q

$$\Phi(f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{-it}) g(e^{it})\, dt, \text{ za neko } g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n \in H^p.$$

Dakle, $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(e^{-it})\, g(e^{it})\, dt = \lim_{r\to 1} \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n \mu_n a_n r^n$, za svaki element $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \in H^q$. Za $f(z)=z^n$, $n=0,1,2,\ldots$ dobija se $b_n=\lambda_n\cdot\mu_n$, $n=0,1,2,\ldots$ Dakle, $g(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\lambda_n\mu_n z^n \in H^p$

3. Treći slučaj: $p=\infty$

$s(H^\infty)=a(H^\infty)=\ell^1$ (teoreme 1.3.1 i1.3.2)

POSLEDICA 1.3.1

$(C_0,H^p)=(\ell^\infty,H^p)$, $1<p<\infty$.

DOKAZ

Kako je $(H^q,\ell^1)=(C_0,H^p)$ (pogledati (11)), tvrđenje sledi iz teoreme 1.3.3. Prema teoremi 1.3.2, $A(H^p)=S(H^p)=H^2$, $2\leq p<\infty$. Da li je $S(H^p)=A(H^p)$, $1\leq p<2$, i $A(H^\infty)=S(H^\infty)$?

1.4 PROSTOR N^+ I NJEGOV FRECHET-OV OMOTAČ F^+

Linearni topološki prostor N^+ je deo nelinearnog topološkog prostora N. Prostor N^+ je F-prostor koji nije Frechtov prostor. Prostor u kome je N^+ svuda gust i koji je Fréchetov prostor je određen. To je prostor F^+.

Analogija u teoriji realnih harmonijskih funkcija vodi interesantnim rezultatima (glava 4). Zato su u ovom odeljku navedeni poznati rezultati o prostorima N^+ i F^+radi upoređivanja sa novim rezultatima o odgovarajućim prostorima realnih harmonijskih funkcija .

DEFINICIJA 1.4.1

Neka je $f(z)=B(z)\,\frac{S_1(z)}{S_2(z)}\,F(z)$ element prostora N. Ako je $S_2(z)\equiv 1$, onda $f\in N^+$.

Iz definicije sledi da je $N^+\subset N$. Sledećom teoremom okarakterisan je prostor N^+.

TEOREMA 1.4.1

Neka je $f(z)=B(z)\frac{S_1(z)}{S_2(z)}\cdot F(z)$ funkcija ograničene karakteristike u jediničnom krugu D. Sledeća tvrđenja su ekvivalentna:

1. $f\in N^+$.
2. $S_2(z)\equiv 1$
3. $\lim_{r\to 1}\int_0^{2\pi}\log^+|f(re^{it})|\,dt=\int_0^{2\pi}\log^+|f(e^{it})|\,dt$
4. $\lim_{r\to 1}\int_0^{2\pi}\log(1+|f(re^{it})|)\,dt=\int_0^{2\pi}\log(1+|f(e^{it})|)\,dt$

Prostor N^+ je F-prostor sa metrikom

$$\rho(f,g)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log(1+|f(e^{it})-g(e^{it})|)\,dt\ ,\quad f,g\in N^+:$$

Za dokaze nekih osobina prostora F^+ koriste se poznate ocene i integralnih sredina ikoeficijenata elemenata prostora N^+ .

TEOREMA 1.4.2

Neka je $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n\in N^+$ tada

1. $\log M_\infty(r,f)=o(1/(1-r)),\ r\to 1$
2. $\log|a_n|=o(\sqrt{n})\ ,\ n\to\infty.$

Ocene 1 i 2 se ne mogu poboljšati.

DEFINICIJA 1.4.2

Funkcija f(z) analitička u jediničnom krugu D pripada prostoru F^+ ako je $\|f\|_{Fc}=\int_0^1 e^{-c/(1-r)}M_\infty(r,f)\,dr<\infty$, za svako $c>0$.

Posledica teoreme 1.4.2 i definicije 1.4.2 je inkluzija $N^+\subset F^+$.

TEOREMA 1.4.3

1. Ako $f(z)\in F^+$ i $c>0$, tada je $|f(z)|\leq\frac{8}{ce^2}\|f\|_{Fc}\,e^{2c/(1-r)}$, $|z|\leq r<1$.
2. $f(z)\in F^+$ ako i samo ako je $\overline{\lim_{r\to 1}}(1-r)\log M_\infty(r,f)\leq 0$
3. $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n\in F^+$ ako i samo ako je $\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{1}{\sqrt{n}}\log|a_n|\leq 0$

DOKAZ

1. Neka je $R<1$. Tada je

$$
\begin{aligned}
\|f\|_{Fc} = \int_0^1 e^{-c/(1-r)} M_\infty(r,f)dr &\geq \int_R^1 e^{-c/(1-r)} M_\infty(r,f)dr \geq \\
&\geq M_\infty(R,f) \int_R^1 e^{-c/(1-r)} dr \geq \\
&\geq M_\infty(R,f) \int_{1/1-R}^\infty e^{-ct} \frac{dt}{t^2} \geq \\
&\geq M_\infty(R,f)\left(\frac{ce}{2}\right)^2 \int_{1/1-R}^\infty e^{-2ct} dt \\
&= \frac{ce^2}{8} e^{-2c/(1-R)} M_\infty(R,f)
\end{aligned}
$$

Iz dobijene nejednakosti sledi

$$|f(z)| \leq \frac{8}{ce^2} \|f\|_{Fc} e^{2c/(1-R)} \quad , |z| \leq R < 1$$

2. Jasno, uslov (2) je dovoljan. Obrnuto, neka $f(z) \in F^+$. Tada je prema (1), $(1-r)\log M_\infty(r,f) \leq (1-r)K + 2c$,za svako $c > 0$. Prelaskom na graničnu vrednost dobija se

$$\overline{\lim_{r\to 1}} (1-r) \log M_\infty(r,f) \leq 0$$

3. Tvrđenje (3) je ekvivalentno sa tvrđenjem (2).

Neka je $f(z) = \sum_{n=0}^\infty a_n z^n \in F^+$. Označimo $\|f\|_c = \sum_{n=0}^\infty |a_n| e^{-c\sqrt{n}}, c > 0$. Prema teoremi 1.4.3 (3), $\|f\|_c < \infty$, za svako $c > 0$.

TEOREMA 1.4.4

Za svako $c > 0$ postoji konstanta $A = A(c) > 0$ tako da je

$$\frac{1}{A}\|f\|_{Fc} \leq \|f\|_{\sqrt{c}} , \quad \|f\|_{4\sqrt{c}} \leq A \|f\|_{Fc}$$

TEOREMA 1.4.5

Prostor F^+ je polipredNomiran Fréchetov prostor .

DOKAZ

Prema predhodnoj teoremi dovoljno je dokazati da je F^+ polipredNomiran prostor u odnosu na sistem prednormi $\{\|\ \|_c\}$ $c > 0$. Treba dokazati samo kompletnost.

Neka je $\lim_{m,n\to\infty} \|f_n - f_m\|_c = 0$, za svako $c > 0$. Kako iz $f_n(z) = \sum_{k=0}^\infty a_k^{(n)} z^k$ sledi da postoji niz (a_k) tako da je $\lim_{n\to\infty} a_k^{(n)} = a_k$, $k = 0,1,2,..$

Zato je $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k^{(n)} - a_k| e^{-c\sqrt{k}} \leq \varepsilon$, za dato $\varepsilon > 0$, ako je $n > n_0 = n_0(\varepsilon, c)$. Prema predhodnom zaključku, $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k| e^{-c\sqrt{k}} < \infty$, za svako $c > 0$, što povlači da je $|a_k| \leq K(c)\, e^{c\sqrt{k}}$. Poslednja nejednakost je ekvivalentna sa $\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{1}{\sqrt{n}} \log|a_n| \leq 0$. Prema teoremi 1.4.3 (3), $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \in F^+$ i $\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_c = 0$, za svako $c > 0$.

Na kraju navodimo svojstvo zatvorenosti prostora F^+ u odnosu na diferenciranje i integraciju, koje ćemo iskoristiti za dokaz novog rezultata koji je naveden u odeljku 2.5.

TEOREMA 1.4.6

Neka je $f(z)$ analitička funkcija u jediničnom krugu D. Ako $f \in F^+$, onda svi izvodi i svi integrali funkcije f takođe pripadaju prostoru F^+.

G L A V A 2.

B E R G M A N O V I   P R O S T O R I $A^{p,\alpha}$

Opšta svojstva Bergmanovog prostora $A^{p,\alpha}$, a naročito specijalnog slučaja $A^{1,1/p-2}$, navedena su u prvom odeljku.

Novi rezultati navedeni u trećem odeljku su neka rešenja problema pripadnosti izvoda singularne unutrašnje funkcije Bergmanovom prostoru $A^{p,\alpha}$. Rezultati su opštiji od poznatih teorema, koje su navedene u drugom odeljku, o pripadnosti izvoda singularne unutrašnje funkcije prostoru $A^{1,\frac{1}{p}-2}$. Parcijalna rešenja problema pripadnosti izvoda $S_\mu'(z)$ singularne unutrašnje funkcije $S_\mu(z)$ Bergmanovom prostoru $A^{p,\alpha}$data su za slučaj mere μ sa konačnim nosačem i za slučaj mere koja nije identički jednaka nuli . Teoremom 2.3.4 dato je potpuno resenje u slučaju funkcije $A(z)=e^{\frac{z+1}{z-1}}$.

Odeljci 2.5 i2.4 takođe sadrže nove rezultate. Problem pripadnosti izvoda funkcija ograničene granične rotacije Hardijevim prostorima je rešen. Teoremom2.4.2 dato je rešenje opštijeg problema, problema pripadnosti izvoda funkcija ograničene granične rotacije Bergmanovim prostorima $A^{p,\alpha}$.

Pomoću poznatih prostora analitičkih funkcija i operatora L_a^n,u odeljku 2.5, definisani su novi prostori analitičkih funkcija i utvrđena neka njihova svojstva.

2.1 BERGMANOVI PROSTORI $A^{p,\alpha}$

DEFINICIJA 2.1.1

Analitička funkcija f=f(z) definisana u jediničnom krugu

D pripada Bergmanovom prostoru $A^{p,\alpha}$, $0<p<\infty$, $-1<\alpha<\infty$, ako je $\|f\|^p_{p,\alpha}=\frac{1}{\pi}\int_0^1\int_0^{2\pi}|f(re^{it})|^p(1-r^2)^\alpha r\,dr\,dt<\infty$

Prostor $A^{1,\frac{1}{p}-2}$, $0<p<1$, je prostor B^p. Kao i u slučaju Hardijevih prostora H^p, Bergmanov prostor $A^{p,\alpha}$ je Banahov prostor ako je $1\leq p<\infty$, a F-prostor ako je $0<p<1$, sa metrikom

$$d(f,g)=\|f-g\|^p_{p,\alpha},\quad f,g\in A^{p,\alpha}$$

Sledećim dvema teoremama date su ocene rasta integralnih sredina elemenata Bergmanovih prostora $A^{p,\alpha}$. One će biti korišćene za dokazivanje novih rezultata navedenih u odeljku 2.3 .

TEOREMA 2.1.1

Neka $f\in A^{p,\alpha}$. Tada postoji konstanta $C=C(p,\alpha)$ tako da je

$$M_p(r,f)\leq C\cdot\|f\|_{p,\alpha}(1-r)^{-(\alpha+1)/p},\quad 0\leq r<1.$$

Konstanta C ne zavisi od funkcije $f\in A^{p,\alpha}$.

DOKAZ

Kako je $M_p(r,f)$ rastuća funkcija argumenta r, to možemo predpostaviti da je $1/2\leq r<1$. Tada je

$$\|f\|^p_{p,\alpha}=\frac{1}{\pi}\int_0^1\int_0^{2\pi}|f(re^{it})|^p(1-r^2)^\alpha r\,dt\,dr=2\int_0^1 M_p^p(r,f)(1-r^2)^\alpha r\,dr\geq$$

$$\geq 2\int_r^1 M_p^p(s,f)\,(1-s^2)^\alpha s\,ds\geq\ 2M_p^p(r,f)\int_r^1(1-s^2)^\alpha s\,ds\quad\geq$$

$$\geq C_1(\alpha)\,M_p^p(r,f)\,(1-r)^{\alpha+1},\quad C_1(\alpha)>0$$

Koristeći poslednju nejednakost dobija se

$$M_p(r,f)\leq C\|f\|_{p,\alpha}(1-r)^{-(\alpha+1)/p},\quad C=C(\alpha,p)=[C_1(\alpha)]^{-p}$$

Prema teoremi 2.1.1 i 1.1.7, kao posledica javlja se sledeća teorema .

TEOREMA 2.1.2

Neka je $0 < p < \infty$, $-1 < \alpha < \infty$. Tada postoji konstanta C, $C=C(\alpha,p) > 0$ tako da je

$$M_\infty(r,f) \leq C \|f\|_{p,\alpha} (1-r)^{-(\alpha+2)/p}, \quad 0 \leq r < 1, \text{ za svaki}$$

element $f \in A^{p,\alpha}$. Važi i bolja ocena $M_\infty(r,f) = o((1-r)^{-(\alpha+2)/p})$.

Među Bergmanovim prostorima od posebnog interesa su prostori B^p, jer su oni tzv. sadržavajući prostori prostora H^p, $0 < p < 1$. (H^p je svuda gust u prostoru B^p).

TEOREMA 2.1.3

Prostor H^p, $0 < p < 1$, je svuda gust u prostoru B^p.

DOKAZ

Lako se proverava da je B^p normirani prostor. Kako je $\|f\|_{1,\frac{1}{p}-2} \leq C(p)\|f\|_p$, $f \in H^p$, to je $H^p \subset B^p$. Dokžimo da je B^p kompletan i da je $\overline{H^p}^{B^p} = B^p$. Neka je (f_n) Košijev niz u B^p. Pošto B^p pripada prostoru $L^1 = L^1(D)$ formiranom u odnosu na meru $\frac{1}{\pi}(1-r^2)^{\frac{1}{p}-2} r\, dr\, d\theta$, to niz (f_n) konvergira u srednjem indeksa jedan. nekoj funkciji $f \in L^1$. Konvergencija u srednjem indeksa jedan povlači konvergenciju bar jednog podniza (f_{n_k}) niza (f_n) funkciji f. Prema teoremi 2.1.1, konvergencija u B^p je jača od uniformne konvergencije na kompaktnim skupovima u D. Stoga je f(z) analitička funkcija u D i pripada prostoru B^p. Dokažimo da je $\lim_{r\to 1} f_r = f$, $f \in B^p$. Za dato $\varepsilon > 0$, odredimo $R(\varepsilon)$, tako da je

$$\int_R^1 (1-r^2)^{\frac{1}{p}-2} r\, M_1(\rho, f_r - f)\, d\rho < \varepsilon, \quad R(\varepsilon) < R < 1.$$

Kako je $\lim_{r\to 1} f_r(z) = f(z)$ uniformno na $|z| \leq R < 1$, to je

$$\|f_r - f\|_{1,\frac{1}{p}-2} \leq \varepsilon \|1\|_{1,\frac{1}{p}-2} + \varepsilon, \quad r_0(\varepsilon) < r < 1.$$

Ako $f \in B^p$, onda $f_r \in H^p$. Prema dokazanom, H^p je svuda gust u B^p.

Ocene Tejlorovih koeficijenata koje su važile za užu klasu H^p ostaju da važe u mnogo široj klasi B^p. Napomenimo da inkluzioni odnos odgovarajućih prostora realnih harmonijskih funkcija h^p i b^p prestaje da važi, a rast koeficijenata ostaje isti (glave 3 i 4).

TEOREMA 2.1.4

Neka je funkcija $f \in B^p$ definisana redom $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$. Tada je

1. $|a_n| \leq C(p) \|f\|_{1,\frac{1}{p}-2}\, n^{\frac{1}{p}-1}$
2. $a_n = o(n^{\frac{1}{p}-1})$, $n \to \infty$.

Na kraju navodimo teoremu o pripadnosti „izvoda" i „integrala" funkcija prostoru B^p.

TEOREMA 2.1.5

Neka je $0 < p < q < 1$, $\beta = 1/p - 1/q$

1. Ako $f \in B^p$ onda $f_{[\beta]} \in B^q$
2. Ako $f \in B^q$ onda $f^{[\beta]} \in B^p$

Akoje $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ analitička funkcija u jediničnom krugu D, „izvod" reda $\beta > 0$ funkcije $f(z)$ je analitička funkcija

$$f^{[\beta]}(z)=\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n+1+\beta)}{n!} a_n z^n,$$ „integral" reda $\beta > 0$ je analitička funkcija $f_{[\beta]}(z)=\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{\Gamma(n+1+\beta)} a_n z^n$.

2.2 SINGULARNE UNUTRAŠNJE FUNKCIJE SA IZVODOM U B^p

Problem pripadnosti izvoda $S_\mu'(z)$ singularne unutrašnje funkcije $S_\mu(z)$ prostoru B^p nije rešen u opštem slučaju. Navodimo nekoliko poznatih rešenja koja su data zavisno od svojstva mere μ koja određuje singularnu unutrašnju funkciju $S_\mu(z)$.

TEOREMA 2.2.1

$$S_\mu'(z) \in B^p, \quad 0 < p < 1/2 .$$

DOKAZ

Kako je

$$|S_\mu'(z)| \leq \int_0^{2\pi} \frac{2d\mu(t)}{|e^{it}-z|^2} \leq \frac{2}{1-r^2} \int_0^{2\pi} \frac{1-r^2}{|e^{it}-z|^2} d\mu(t) \leq \frac{C}{1-r},$$

te je

$$\| S_\mu' \|_{1,\frac{1}{p}-2} = 2\int_0^1 M_1(r,S_\mu')(1-r^2)^{\frac{1}{p}-2}\, r\, dr \leq K\int_0^1 (1-r)^{\frac{1}{p}-3} dr$$

Integral $\int_0^1 (1-r)^{\frac{1}{p}-3} dr < \infty$ ako je $p < 1/2$. Stoga, prema predhodnoj nejednakosti, sledi tvrđenje.

TEOREMA 2.2.2

Neka je $S_\mu(z)$ singularna unutrašnja funkcija određena merom μ čiji je nosač konačan skup. Tada $S_\mu'(z) \in B^p$, ako je $p < \frac{2}{3}$.

DOKAZ

Neka je $\mu(e^{it_k}) = a_k$, $k = 1,2,\dots,n$. Tada je

$S_\mu(z) = e^{\sum_{k=1}^n a_k \frac{e^{it_k}+z}{e^{it_k}-z}}$. Iz jednakosti $S_\mu'(z) = S_\mu(z)\sum_{k=1}^n \frac{-2a_k e^{it_k}}{(z-e^{it_k})^2}$

i $\mathrm{Re}\frac{z+e^{it_k}}{z-e^{it_k}} = 1-2\frac{1-r\cos(\theta-t_k)}{|z-e^{it_k}|^2}$, $z=re^{i\theta}$, sledi

$$|S_\mu'(z)| \le e^{\sum_{k=1}^{n} a_k} \cdot \sum_{k=1}^{n} \frac{2a_k}{|z-e^{it_k}|^2}\, e^{-2a_k \frac{1-r\cos(\theta-t_k)}{|z-e^{it_k}|^2}} \le$$

$$\le 2K \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k^{1/q}}{[1-r\cos(\theta-t_k)]^{1/q'} \cdot |z-e^{it_k}|^{2/q}}, \text{ gde je}$$

$K=\sum_{k=1}^{n} a_k$, $1<q'<\infty$, $1/q+1/q'=1$.

Primenom Hölderove nejednakosti i korišćenjem prethodnog rezultata , dobija se

$$\|S_\mu'\|_{1,\frac{1}{p}-2} = 2\int_0^1 (1-r^2)^{\frac{1}{p}-2} r\,dr \cdot \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |S_\mu'(re^{it})|\,dt \le$$

$$\le C\sum_{k=1}^{n} a_k^{1/q} \int_0^1 (1-r^2)^{1/p-2} r\,dr \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{dt}{1-r\cos(t-t_k)}\right)^{1/q'} \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{dt}{|re^{it}-e^{it_k}|^2}\right)^{1/q} \le$$

$$\le C\sum_{k=1}^{n} a_k^{1/q} \int_0^1 (1-r)^{\frac{1}{p}-2} (1-r)^{-\frac{1}{2q'}} (1-r)^{-\frac{1}{q}} dr < \infty,$$

ako je $1/p+1/2q' > 2$. Kako je q' proizvoljan broj intervala $(1,\infty)$, to je poslednja nejednakost ispunjena ako je $p < \frac{2}{3}$.

Predhodni rezultat se nemoža poboljšati.

TEOREMA 2.2.3

Neka je singularna unutrašnja funkcija $S_\mu(z)$ definisana merom μ , koja nije identički jednaka nuli . Tada $S_\mu'(z) \notin B^{2/3}$.

Napomena : tvrđenje važi za funkcije oblika $B(z)\cdot S_\mu(z)$, gde je $B(z)$ Blaškeov proizvod, $S_\mu(z)$ singularna unutrašnja funkcija koja ispunjava uslove teoreme 2.2.3.

POSLEDICA 2.2.1

Neka je $A(z)= e^{\frac{z+1}{z-1}}$. Tada 1. $A'(z) \in B^p$, ako je $p < 2/3$

2. $A'(z) \notin B^{2/3}$

2.3 SINGULARNE UNUTRAŠNJE FUNKCIJE SA IZVODOM U $A^{p,\alpha}$

U ovom odeljku rezmatra se problem pripadnosti izvoda $S_\mu'(z)$ singularne unutrašnje funkcije $S_\mu(z)$ Bergmanovom prostoru $A^{p,\alpha}$ i navodi se potpuno rešenje za slučaj funkcije $A(z)= e^{\frac{z+1}{z-1}}$, a neka parcijalna rešenja za slučajeve kada je nosač mere μ konačan skup i kada je mera proizvoljna singularna mera koja nije identički jednaka nuli.

Pored nekih poznatih rezultata , u dokazima novih rezultata koristi se sledeća lema.

LEMA 2.3.1

Neka je $p > 1/2$. Tada je

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{(1-r\cos t)^p} = O\left(\frac{1}{(1-r)^{p-\frac{1}{2}}}\right) , \quad r \to 1 .$$

DOKAZ

Neka je $1/2 < p < 1$. Tada je

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{(1-r\cos t)^p} = \frac{4}{(1-r)^p} \int_0^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^{1-p}\left(1+\frac{1+r}{1-r}x^2\right)^p} \lesssim$$

$$\lesssim \frac{4}{(1-r)^{p-1}} \int_0^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^p} .$$ Ako je $p=1$,

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{1-r\cos t} = \frac{2}{(1-r^2)^{1/2}} \leq \frac{2\pi}{(1-r)^{1/2}}$$

Neka je $p>1$. Tada je

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{(1-r\cos t)^p} = \frac{4}{(1-r)^p} \int_0^{\infty} \frac{(1+x^2)^{p-1}\,dx}{\left(1+\frac{1+r}{1-r}\,x^2\right)^p} =$$

$$= \frac{4\sqrt{\frac{1-r}{1+r}}}{(1-r)^p} \int_0^{\infty} \frac{\left(1+\frac{1-r}{1+r}x^2\right)^{p-1}}{(1+x^2)^p}\,dx \leqslant$$

$$\leqslant \frac{4}{(1-r)^{p-1/2}} \int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}$$

Upoređujući prostore $A^{p,\alpha}$ i B^s mogu se odrediti prostori $A^{p,\alpha}$ kojima pripada (ne pripada) izvod proizvoljne singularne unutrašnje funkcije $S_\mu(z)$.

TEOREMA 2.3.1

Neka je $S_\mu(z)$ singularna unutrašnja funkcija . Tada $S'_\mu(z) \in A^{p,\alpha}$, ako je $0 < p < \min(1,\alpha+1)$ ili $p=1$, $\alpha > 0$ ili $1 < p < \frac{1}{2}(\alpha+2)$.

Teorema se može dokazati na isti način kao sledeća teorema s tom razlikom što umesto teoreme 2.2.2 treba u dokazu primeniti teoremu 2.2.1 . Zato ćemo navesti samo dokaz sledeće teoreme:

TEOREMA 2.3.2

Neka je $S_\mu(z)$ singularna unutrašnja funkcija definisana merom μ čiji je nosač konačan skup . Tada $S'_\mu(z) \in A^{p,\alpha}$, ako je $0 < p < \min(2(\alpha+1), \frac{2}{3}(\alpha+2))$.

DOKAZ

Razlikovaćemo tri slučaja .

Prvi slučaj : $0 < p < \min(1,2(\alpha+1))$. Dokažimo da postoji s, $0<s<2/3$, tako da je $B^s \subset A^{p,\alpha}$. Kako je $\frac{p}{1+\alpha+p} < \frac{2}{3}$; to postoji s, $\frac{p}{1+\alpha+p} < s < \frac{2}{3}$. Dokažimo da je

$B^s = A^{1,\frac{1}{s}-2} \subset A^{p,\alpha}$. Neka $f \in A^{1,\frac{1}{s}-2}$. Prema teoremi 2.1.1 , $M_1(r,f) \le C(1-r)^{1-\frac{1}{s}}$. Kako je $p<1$, to je

$$M_p^p(r,f) \le M_1^p(r,f) \le C\,(1-r)^{p(1-\frac{1}{s})}.$$

Prema poslednjoj nejednakosti ,

$$\|f\|^p_{p,\alpha} = 2\int_0^1 (1-r^2)^{\alpha} r\, M_p^p(r,f)\, dr \le C\int_0^1 (1-r)^{\alpha+p(1-\frac{1}{s})}\, dr < \infty,$$

jer je $\alpha+p(1-1/s) > -1$ ako i samo ako je $s > \frac{p}{1+\alpha+p}$. Tvrđenje sledi na osnovu teoreme 2.2.2.

Drugi slučaj : $p=1$, $\alpha > -\frac{1}{2}$.

Neka je $-1/2 < \alpha_0 < \alpha$. Tada je $B^{2/3} \subset B^{\frac{1}{\alpha_0+2}} \subset A^{1,\alpha}$. Iz teoreme 2.2.2 sledi tvrđenje .

Treći slučaj : $1 < p < \frac{2}{3}(\alpha+2)$

Kako je $p/(\alpha+2) < 2/3$, to postoji s, $p/(\alpha+2) < s < 2/3$. Dokažimo da je $B^s = A^{1,\frac{1}{s}-2} \subset A^{p,\alpha}$. Neka $f \in A^{1,\frac{1}{s}-2}$. Tada je prema teoremi 2.1.1,

$$M_1(r,f) \le C\,(1-r)^{1-\frac{1}{s}}.$$

Kako je $p>1$, to je prema teoremi 1.1.7 i predhodnoj nejednakosti

$M_p(r,f) \le C(1-r)^{1-\frac{1}{s}+\frac{1}{p}-1}$. Korišćenjem dobijene nejednakosti

$\|f\|^p_{p,\alpha} = 2\int_0^1 M_p^p(r,f)\,(1-r^2)^{\alpha} r\, dr \le C\int_0^1 (1-r)^{\alpha+1-\frac{p}{s}} dr$. Integral

$\int_0^1 (1-r)^{\alpha+1-\frac{p}{s}} dr < \infty$, ako je $\alpha+1-p/s > -1$, odnosno $s > p/(\alpha+2)$.
Dakle, $f \in A^{p,\alpha}$. Treba na kraju primeniti teoremu 2.2.2.

TEOREMA 2.3.3

Neka je $S_\mu(z)$, $\mu \neq 0$, singularna unutrašnja funkcija. Tada $S'_\mu(z) \notin A^{p,\alpha}$, ako je $p > \max(2(\alpha+1), \frac{2}{3}(\alpha+2))$.

DOKAZ

Kao i u dokazu prethodne teoreme razlikovaćemo tri slučaja.
Prvi slučaj: $\frac{2}{3}(\alpha+2) < p < 1$.
Dokažimo da je $A^{p,\alpha} \subset B^{2/3}$. Neka $f \in A^{p,\alpha}$. Tada je prema teoremi 2.1.1, $M_p(r,f) \leqslant C(1-r)^{-\frac{\alpha+1}{p}}$. Prema teoremi 1.1.7, $M_1(r,f) \leqslant C(1-r)^{-\frac{\alpha+1}{p}+1-\frac{1}{p}}$. Korišćenjem poslednje nejednakosti dobija se $\|f\|_{1,-\frac{1}{2}} = 2\int_0^1 M_1(r,f)(1-r^2)^{\alpha} r\,dr \leqslant$

$$\leqslant C\int_0^1 (1-r)^{-\frac{1}{2}-\frac{\alpha+1}{p}+1-\frac{1}{p}} dr$$

Integral $\int_0^1 (1-r)^{\frac{1}{2}-\frac{\alpha+2}{p}} dr$ konvergira ako je

$\frac{1}{2}-\frac{\alpha+2}{p} > -1$, ili ekvivalentno $p > \frac{2}{3}(\alpha+2)$. Dakle,
$\|f\|_{1,-\frac{1}{2}} < \infty$. Tvrđenje sledi na osnovu teoreme 2.2.3.
Drugi slučaj: $p=1$, $-1 < \alpha < -\frac{1}{2}$
Tada je $A^{1,\alpha} \subset A^{1,-\frac{1}{2}} = B^{2/3}$. Treba primeniti teoremu 2.2.3.

Treći slučaj: $p > \max(1, 2(\alpha+1))$.
I u ovom slučaju je $A^{p,\alpha} \subset B^{2/3} = A^{1,-\frac{1}{2}}$. Zaista, neka $f \in A^{p,\alpha}$

Tada je $M_p(r,f) \leqslant C(1-r)^{-\frac{\alpha+1}{p}}$ (teorema 2.1.1). Kako je

$M_1(r,f) \leqslant M_p(r,f)$, to je

$$\|f\|_{1-\frac{1}{2}} = 2\int_0^1 (1-r^2)^{-\frac{1}{2}} r M_1(r,f)\, dr \leqslant$$

$$\leqslant K\int_0^1 (1-r)^{-\frac{1}{2}-\frac{\alpha+1}{p}} dr .$$ Integral

$\int_0^1 (1-r)^{-\frac{1}{2}-\frac{\alpha+1}{p}} dr < \infty$, ako je $-\frac{1}{2}-\frac{\alpha+1}{p} > -1$, što je ekvivalentno sa $p > 2(\alpha+1)$. Dakle, $\|f\|_{1,-\frac{1}{2}} < \infty$. Prema teoremi 2.2.3 sledi tvrdenje.

Postavlja se pitanje pripadnosti izvoda $S_{\mu}'(z)$ singularne unutrašnje funkcije $S_{\mu}(z)$ Bergmanovom prostoru $A^{p,\alpha}$,ako p i α ne ispunjavaju uslove teorema 2.3.1 i 2.3.3. Teoremom 2.3.2 delimično se rešava problem u slučaju mere μ sa konačnim nosačem Sledećom teoremom daje se potpuno rešenje u slučaju singularne unutrašnje funkcije $A(z)= e^{\frac{z+1}{z-1}}$.

TEOREMA 2.3.4

Neka je $A(z)= e^{\frac{z+1}{z-1}}$. Tada

1. $A'(z) \notin A^{p,\alpha}$, ako je $p \geqslant \frac{3+2\alpha}{2}$

2. $A'(z) \in A^{p,\alpha}$, ako je $p < \frac{3+2\alpha}{2}$

DOKAZ

1. Ako je $0 < t < \frac{\pi}{2}$, $\cos t < r < 1$, $z=re^{it}$, tada je

$$|A'(re^{it})| \geqslant \frac{1}{e(1-\cos t)} .$$ Stoga je

$$\|A'\|^p_{p,\alpha} = \frac{1}{\pi}\int_0^1\int_0^{2\pi} |A'(re^{it})|^p (1-r^2)^{\alpha}\, r dr\, dt \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{\pi e^p}\int_0^{\pi/2} \frac{dt}{(1-\cos t)^p}\int_{\cos t}^1 (1-r^2)^{\alpha} r\, dr =$$

$$= \frac{1}{2(\alpha+1)\pi e^p}\int_0^{\pi/2} \frac{(\sin t)^{2(\alpha+1)}}{(1-\cos t)^p} dt = \infty$$, jer je

$2p-2\alpha-2 \geqslant 1$.

2. Dokažimo najpre da $A^1(z) \in A^{p,\alpha}$, ako je $0 < p \leq 1/2$. U tom slučaju

$$\|A^1\|^p_{p,\alpha} \leq C \int_0^1 (1-r)^\alpha dr \int_0^{2\pi} \frac{dt}{(1-2r\cos t + r^2)^p} .$$

(U dokazu nejednakosti iskorišćena je nejednakost $e^{-\frac{1-r^2}{1-2r\cos t+r^2}} < 1$, $0 \leq r < 1$, $0 \leq t \leq 2\pi$.) Kako je

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{(1-2r\cos t + r^2)^p} = O\left(\frac{1}{(1-r)^\varepsilon}\right), \quad r \to 1, \text{ za svako } \varepsilon > 0, \text{ to je}$$

$\|A^1\|_{p,\alpha} < \infty$. U slučaju $1/2 < p < (3+2\alpha)/2$,

$$\|A^1\|^p_{p,\alpha} = \frac{1}{\pi} \int_0^1 \int_0^{2\pi} \left(e^{1-2\frac{1-r\cos t}{1-2r\cos t+r^2}} \cdot \frac{2}{1-2r\cos t+r^2}\right)^p (1-r^2)^\alpha r \, dr \, dt \leq$$

$$\leq C \int_0^1 \int_0^{2\pi} \frac{(1-r)^\alpha dr\, dt}{(1-r\cos t)^p} \leq C \int_0^1 (1-r)^{\alpha+\frac{1}{2}-p} dr$$

Pri predhodnim procenama iskorišćene su nejednakosti $e^{-x} < x^{-1}$, $x > 0$ i lema 2.3.1. Kako

$\int_0^1 (1-r)^{\alpha+\frac{1}{2}-p} dr < \infty$, jer je $\alpha+1/2-p > -1$ $\left(p < \frac{3+2\alpha}{2}\right)$, to je $A^1 \in A^{p,\alpha}$.

2.4 FUNKCIJE OGRANIČENE GRANIČNE ROTACIJE SA IZVODOM U $A^{p,\alpha}$

Hardijeve klase funkcija ograničene granične rotacije i njihovih izvoda su određene . U ovom odeljku određeni su Bergmanovi prostori kojima pripadaju izvodi funkcija ograničene granične rotacije .

DEFINICIJA 2.4.1

Analitička funkcija $f(z)= z+a_2z^2+\cdots$, u D pripada klasi V_k funkcija ograničene granične rotacije sa $k\pi$, $k \geq 2$, ako je

$$\sup_{0\leq r<1} \int_0^{2\pi} \left| \operatorname{Re} \left(1+ \frac{re^{it} f''(re^{it})}{f'(re^{it})}\right)\right| dt \leq k\pi$$

Klasa $V_2=K$ je klasa konveksnih funkcija .

Za dokazivanje novih rezultata potrebna su sledeća četiri poznata rezultata .

LEMA 2.4.1

Neka je $f \in K$, $F(z)=1/(1-z)^2$. Tada postoji analitička funkcija $w(z)$, $|w(z)| \leq |z|$, $z \in D$, tako da je $f'(z)=F(w(z))$.

LEMA 2.4.2

Neka su $f(z)$ i $F(z)$ analitičke funkcije u jediničnom krugu D . Ako postoji analitička funkcija $w(z)$, $|w(z)| \leq |z|$, $z \in D$, tako da je $f(z)=F(w(z))$, tada je $M_p(r,f) \leq M_p(r,F)$, $0 < p \leq \infty$.

LEMA 2.4.3

Neka je $f \in K$. Tada je $|f'(z)| \geqslant \dfrac{1}{(1+|z|)^2}$, $z \in D$.

LEMA 2.4.4

Neka $f \in V_k$. Tada postoje konveksne funkcije $g(z)$ i $h(z)$ tako da je

$$f'(z) = \frac{[g'(z)]^{\frac{k}{4}+\frac{1}{2}}}{[h'(z)]^{\frac{k}{4}-\frac{1}{2}}}$$

TEOREMA 2.4.1

Ako $f \in K$, onda $f' \in A^{p,\alpha}$, za $0 < p < 1+\alpha/2$. Rezultat se ne može poboljšati : $\left(\frac{z}{1-z}\right) \in K$, $\left(\frac{z}{1-z}\right)' \notin A^{p,\alpha}$, ako je $p \geqslant 1+\alpha/2$.

DOKAZ

Neka $f \in K$. Prema lemama 2.4.1 i 2.4.2 ,

$M_p(r,f') \leqslant M_p(r,1/(1-z)^2)$. Koristeći dobijenu nejednakost dokažimo da $f' \in A^{p,\alpha}$, ako je $0 < p < 1+\alpha/2$.

$$\|f'\|_{p,\alpha}^p = \int_0^1 (1-r^2)^\alpha \, r \, |f'(re^{it})|^p \, dt \, dr \leqslant$$

$$\leqslant C \int_0^1 (1-r)^\alpha dr \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{dt}{(1-2r\cos t+r^2)^p} .$$

Poznato je da je

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{(1-2r\cos t+r^2)^p} = \begin{cases} O\left(\dfrac{1}{(1-r)^\varepsilon}\right), r\to 1, 0<p\leq \frac{1}{2}, \varepsilon>0 \\ O\left(\dfrac{1}{(1-r)^{2p-1}}\right), r\to 1, \frac{1}{2}<p \end{cases}$$

Dakle ,

$$\|f'\|_{p,\alpha}^{p} \leq \begin{cases} C\int_0^1 (1-r)^{\alpha-\varepsilon}\, dr < \infty\ , & \text{jer se } \varepsilon \text{ može izabrati dovoljno malim , } \alpha > -1 \\ C\int_0^1 (1-r)^{\alpha+1-2p}\, dr < \infty\ , & \text{ako je } p < 1+\alpha/2 \end{cases}$$

(C je konstanta koja nema istu vrednost u dokazu)

Rezultat se nemože poboljšati :

$$\left\|\left(\frac{z}{1-z}\right)'\right\|_{p,\alpha}^{p} = 2\int_0^1 (1-r^2)^{\alpha}\, r\, dr\, \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{dt}{(1-r2\cos t + r^2)^p} = \infty\ , \text{ jer je}$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{dt}{(1-2r\cos t + r^2)^p} \sim \frac{C}{(1-r)^{2p-1}}\ ,\ r \to 1, \text{ ako je } p > 1/2\ .$$

(Ako je $p \geq 1+\alpha/2$, onda je $p > 1/2$ i $\int_0^1 \frac{dr}{(1-r)^{2p-1-\alpha}} = \infty$)

TEOREMA 2.4.2

Neka $f \in V_k$, $k \geq 2$. Tada $f' \in A^{p,\alpha}$, $0 < p < \frac{1+\alpha/2}{k/4+1/2}$. Rezultat se ne može poboljšati:

$$f(z) = \frac{1}{k}\left[\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^{k/2} - 1\right] \in V_k\ ,\ f'(z) \notin A^{p,\alpha},\ \text{ako je } p \geq \frac{1+\alpha/2}{k/4+1/2}.$$

DOKAZ

Neka $f \in V_k$. Tada je prema lemi 2.4.4,

$$f'(z) = \frac{[g'(z)]^{\frac{k}{4}+\frac{1}{2}}}{[h'(z)]^{\frac{k}{4}-\frac{1}{2}}}\ ,\ g,h \in K\ .$$

Prema predhodnom predstavljanju i lemama 2.4.1 , 2.4.2, i2.4.3,

$$\|f'\|^p_{p,\alpha} \leq C \int_0^1 (1-r)^{\alpha} dr \cdot \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |g'(re^{it})|^{p(\frac{k}{4}+\frac{1}{2})} dt \leq$$

$$\leq C \int_0^1 (1-r)^{\alpha} dr \; \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{dt}{(1-2r\cos t+r^2)^{p(\frac{k}{4}+\frac{1}{2})}}$$ Kao u dokazu predhodne

teoreme ,

$$\|f'\|^p_{p,\alpha} \leq C \int_0^1 (1-r)^{\alpha-\varepsilon} dr < \infty , \text{ ako je } 0 < p(k/4+1/2) \leq 1/2$$

$$\|f'\|^p_{p,\alpha} \leq C \int_0^1 (1-r)^{\alpha+1-2p(\frac{k}{4}+\frac{1}{2})} dr < \infty , \text{ ako je } \frac{1}{2(\frac{k}{4}+\frac{1}{2})} < p < \frac{1+\alpha/2}{k/4+1/2} .$$

Rezultat se ne može poboljšati ; kako je

$$f(z) = \frac{1}{k}\left[\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^{\frac{k}{2}} - 1\right] \in V_k \quad \text{i} \quad f'(z) = \left(\frac{1+z}{1-z}\right)^{\frac{k}{2}-1} \frac{1}{(1-z)^2} , \text{ to je}$$

$$\|f'\|^p_{p,\alpha} = 2 \int_0^1 (1-r^2)^{\alpha} r\, dr \; \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{|1+z|^{p(\frac{k}{2}-1)}}{(1-2r\cos t+r^2)^{p(\frac{k}{4}+\frac{1}{2})}} dt \geq$$

$$\geq C \int_0^1 (1-r)^{\alpha} dr \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi/2} \frac{(1+2r\cos t+r^2)^{p(\frac{k}{4}-\frac{1}{2})}}{(1-2r\cos t+r^2)^{p(\frac{k}{4}+\frac{1}{2})}} dt \geq$$

$$\geq C \int_0^1 (1-r)^{\alpha+1-2p(\frac{k}{4}+\frac{1}{2})} dr = \infty , \quad \text{jer je } -\alpha+2p(\tfrac{k}{4}+1/2)-1 \geq 1$$

akoi samo ako je $p \geq \dfrac{1+\alpha/2}{k/4+1/2}$.

Pri poslednjoj minoraciji iskorišćena je činjenica da je

$p(k/4+1/2) \geq 1+\alpha/2 > 1/2$, pa se mogla primeniti ocena kao u dokazu teoreme 2.4.1 , i ograničenost funkcije

$$(1+2r\cos t+r^2)^{p(\frac{k}{4}-\frac{1}{2})} \geq 1 \quad \text{u oblasti} \quad 0 \leq t \leq \pi/2 , \; 0 \leq r < 1 .$$

Primetimo da je teoremom 2.4.2 uopšten rezultat dat teoremom 2.4.1 . Takvo uopštenje se moglo očekivati jer je klasa V_k uopštenje klase K konveksnih funkcija (V_k je klasa funkcija ograničene granične rotacije) .

2.5 PROSTORI DEFINISANI OPERATOROM L_a^n

Pomoću operatora L_a^n i prostora H^p, N^+, N, B^p i F^+ analitičkih funkcija definisani su novi prostori analitičkih funkcija i utvrđena su neka njihova svojstva. Za elemente podklasa $H^n_{H^p}$ prostora H^p dato je integralno predstavljanje ; dokazano je i da je $H^n_{B^p} = B^{\frac{p}{1-np}}$ i $H^n_{F^+} = F^+$.

DEFINICIJA 2.5.1

Neka je $f(z)=u(z)+iv(z)$ analitička funkcija u jediničnom krugu D, $n= 0,1,2,\ldots$, $a=(a_1,a_2,\ldots a_n) \in R_+^n$. Tada je

1. $L_a^n(f)=L_{a_n}(L_{a_{n-1}}\ldots(L_{a_1}(f))\ldots)$, gde je

   $L_{a_k}(f)=a_kf+zf'$, $L_a^0(f)=f$

2. $J_a^n(u)=J_{a_n}(J_{a_{n-1}}\ldots(J_{a_1}(u))\ldots)$, gde je

   $J_{a_k}(u)=a_ku+ru_r'$, $J_a^0(u)=u$

DEFINICIJA 2.5.2

Neka je A prostor analitičkih funkcija . Tada je

$$H_A^n=\{ f : L_a^n(f) \in A \}, \ a \in R_+^n \text{ je dati element .}$$

TEOREMA 2.5.1

$H^1_{H^1}$ je prostor analitičkih funkcija u D , neprekidnih u $\overline{D}$, apsolutno neprekidnih na ∂D .

DOKAZ

Dokažimo da je $L^1_{a_1}(f) \in H^1$ ako i samo ako $f' \in H^1$. Neka $L^1_{a_1}(f) \in H^1$, gde je $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$. Funkcija $L^1_{a_1}(f) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_1+n) b_n z^n$

Kako niz

$$\left(\frac{1}{a_1+n}\right) \in (H^1, H^1) \quad \text{(pogledati (69)), to}$$

$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n \in H^1$. Kako je H^1 vektorski prostor, to je $f' \in H^1$

Obrnuto, neka $f' \in H^1$. Tada $f \in H^1$, pa i $L^1_{a_1}(f) \in H^1$. Tvrđenje sledi iz teoreme 3.11 ((16)).

POSLEDICA 2.5.1

$$H^n_{H^1} \subset H^{n-1}_{H^1} \subset H^1$$

Može se pokazati, kao u teoremi 2.5.1, da $L^n_a(f) \in H^1$ ako i samo ako $f^{(n)} \in H^1$.

POSLEDICA 2.5.2

Klasa H^n ne zavisi od skalara $a \in R^n_+$.

TEOREMA 2.5.2

Neka $f \in H^n_{H^p}$. Tada je

1. $f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} L_a^{-(n-1)}\left(\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}\right) J_a^{n-1}(\mathrm{Re}f(e^{it}))\, dt + i\mathrm{Jm}f(o)$,

   ako je $p=1$, $n \geq 1$.

2. $f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} L_a^{-(k-1)}\left(\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}\right) J_a^{k-1}(\mathrm{Re}f(e^{it}))\, dt + i\mathrm{Jm}f(o)$,

ako je $p = 1/(1+n-k)$, $n > k \geqslant 1$.

DOKAZ

1 . Prema predhodno dokazanom , $f^{(n-1)}(z)$ je analitička funkcija u D , neprekidna u $\overline{D}$. Tvrđenje sledi prema integralnom predstavljanju u (7) . Primetimo da se za n=1 integralno predstavljanje (1) svodi na poznatu Poasonovu formulu .

2. Prema teoremi o množenju prostora H^p, $0 < p < 1$, niz $(1/(a_1+n)) \in (H^p, H^p)$ (pogledati(69)). Kao u teoremi 2.5.1 , uz korišćenje predhodnog zaključka , sledi da $L^1_{a_1}(f) \in H^p$ ako i samo ako $f' \in H^p$, ili opštije , $L^n_a(f) \in H^p$ ako i samo ako $f^{(n)} \in H^p$. Prema teoremi 1.19 (pogledati(16)), ako $f^{(n)} \in H^p$, onda $f^{(k)} \in H^{\frac{p}{1-(n-k)p}} = H^1$. Tvrđenje sledi prema integralnom predstavljanju 1 .

TEOREMA 2.5.3

$$H^n_B p = B^{\frac{p}{1-np}} , \quad p < 1/(1+n) .$$

DOKAZ

Niz $(1/(n+a_1)) \in (B^p, B^p)$(pogledati (17)).

Zato $L^1_{a_1}(f) \in B^p$ ako i samo ako $f' \in B^p$. Prema teoremi 2.1.5 , $f' \in B^p$ ako i samo ako $f \in B^{\frac{p}{1-p}}$. Prelazeći na slučaj operatora L^n_a može se pokazati da su sledeća tvrđenja ekvivalentna :

1. $L^n_a(f) \in B^p$
2. $f^{(n)} \in B^p$

G L A V A 3.

H A R D I J E V I P R O S T O R I R E A L N I H H A R M O N I J S K I H F U N K C I J A

Teorija Hardijevih prostora realnih harmonijskih funkcija u jediničnom krugu D ima najviše dodirnih tačaka sa odgovarajućom teorijom analitičkih funkcija u slučaju $1<p<\infty$. Ako je p=1, javljaju se razlike koje postoje još izraženije u slučaju $0<p<1$. U literaturi nema pokušaja izgrađivanja teorije prostora n^+ i n realnih harmonijskih funkcija analognih prostora N^+ i N analitičkih funkcija .

U prvom odeljku su navedena neka poznata svojstva Hardijevih prostora realnih harmonijskih funkcija koja će biti korišćena za dokazivanje novih rezultata navedenih u sledećim odeljcima .

Problem stabilnosti prostora H^p , $1\leqslant p\leqslant\infty$, postavljen je u prvoj glavi (1.3) i data su neka rešenja . U odeljku 3.2 razmatra se problem stabilnosti prostora h^p, $1\leqslant p\leqslant\infty$,i navode se rešenja koja se veoma malo razlikuju od odgovarajućih rešenja za prostore H^p.

U odeljku 3.3 su novi rezultati o prostoru h^p, $0<p<1$:.
U prvom prvom delu odeljka, posle navedenih poznatih rezultata date su ocene rasta integralnih sredina i koeficijenata elemenata prostora h^p, koje odgovaraju ocenama u odgovarajućim prostorima analitičkih funkcija , iako prostor h^p nije samokonjugovan Drugi deo odeljka posvećen je topološkoj strukturi prostora h^p U teoremi 3.3 dokazano je da prostor h^p nije lokalno konveksni prostor .

3.1 PROSTOR h^p

OPŠTA SVOJSTVA

DEFINICIJA 3.1.1

Neka je $u=u(z)$ realna harmonijska funkcija u jediničnom krugu D,

$$M_p(r,u)=\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|u(re^{it})|^p\,dt\right)^{1/p},\quad 0<p<\infty,$$

$$M_\infty(r,u)=\max_{0\le t\le 2\pi}|u(re^{it})|.\quad \text{Tada}$$

1. $u\in h^p$, $0<p<\infty$, ako je $\|u\|_p=\sup_{0\le r<1} M_p(r,u)<\infty$.
2. $u\in h^\infty$, ako je $\|u\|_\infty=\sup_{0\le r<1} M_\infty(r,u)<\infty$.

Lako se proverava da analitička funkcija $f(z)=u(z)+iv(z)$ pripada prostoru H^p, $0<p\le\infty$, ako i samo ako funkcije $u=u(z)$ i $v=v(z)$ pripadaju prostoru h^p. Kao i u slučaju analitičkih funkcija, Hardijevi prostori realnih harmonijskih funkcija su uređeni u odnosu na inkluziju

$$h^\infty\subset h^p\subset h^q,\quad 0<q<p<\infty.$$

Jedan od polaznih rezultata teorije prostora h^p, $1\le p\le\infty$, je teorema o karakterizaciji prostora Poason-Stiltjesovim integralnim predstavljanjem.

TEOREMA 3.1.1

Neka je $u=u(z)$ realna harmonijska funkcija u jediničnom krugu D. Sledeća tvrđenja su ekvivalentna :

1. Postoji realna funkcija $\mu=\mu(t)$ ograničene varijacije na intervalu $[0,2\pi]$ tako da je

$$u(re^{i\theta})=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_r(\theta-t)\, d\mu(t)$$

2. u je razlika dve pozitivne harmonijske funkcije .

3. $u \in h^1$

Svojstvo posedovanja netangentnih graničnih vrednosti zadržavaju elementi prostora h^p, ako je $1 \leq p \leq \infty$. Dok to svojstvo imaju elementi prostora H^p i u slučaju $0 < p < 1$, postoje elementi prostora h^p, $0 < p < 1$ koji mogu biti bez netangentnih graničnih vrednosti (odeljak 3.3) .

TEOREMA 3.1.2

Ako $u \in h^1$, onda $\lim\limits_{r\to 1} u(re^{it}) = u(e^{it})$ postoji za skoro svako $t \in [0,2\pi]$ i $u(e^{it}) = \mu'(t)$, gde je

$$u(re^{it}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_r(t-x)\, d\mu(x).$$

Specijalno, ako je

$$u(re^{it})=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_r(t-x)\, \varphi(e^{ix})\, dx, \quad \varphi(e^{it}) \in L^1\, [0,2\pi]$$

onda je $\lim\limits_{r\to 1} u(re^{it}) = \varphi(e^{it})$ za skoro svako $t \in [0,2\pi]$.

Identifikacijom prostora h^p , $1 < p \leq \infty$, sa prostorom $L^p_R[0,2\pi]$ realnih funkcija , odnosno prostora h^1 sa prostorom konačnih realnih Berovih mera na $[0,2\pi]$, mnoga svojstva realnih prostora mogu se preneti na Hardijeve prostore h^p.

TEOREMA 3.1.3

Realna harmonijska funkcija $u=u(z)$ pripada prostoru h^p ,

$1 < p \leq \infty$, ako i samo ako postoji element $\varphi(e^{it}) \in L^p_R[0,2\pi]$ tako da je

$$u(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_r(\theta-t)\,\varphi(e^{it})\,dt \quad \text{i} \quad \|u\|_p = \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|\varphi(e^{it})|^p dt\right)$$

Identifikacija prostora h^1 sa prostorom konačnih realnih Berovih mera sledi iz teoreme 3.1.1 (pogledati (16) i(37)).

POSLEDICA 3.1.1

Prostor h^p, $1 \leq p \leq \infty$, je Banachov prostor .

O KONJUGOVANIM FUNKCIJAMA

Ako realna harmonijska funkcija $u=u(z)$ definisana u jediničnom krugu D ima neko svojstvo, da li to svojstvo ima i konjugovana harmonijska funkcija $v=v(z)$? U opštem slučaju u i v imaju različita svojstva .

TEOREMA 3.1.4 (M. Riesz)

1. Ako $u \in h^p$, $1<p<\infty$, onda konjugovana harmonijska funkcija $v \in h^p$.
2. Postoji konstanta $A_p=A(p)$ tako da je

$$M_p(r,v) \leq A_p\, M_p(r,u) \quad , \text{ za svako } \quad u \in h^p \; .$$

Rieszova teorema ne važi ako je $p=1$ ili $p=\infty$. Poasonovo jezgro $P_r(\theta) \in h^1$, a konjugovana harmonijska funkcija $Q_r(\theta) = \operatorname{Jm}\frac{1+z}{1-z}$, $z=re^{i\theta}$, ne pripada prostoru h^1. Da prostor h^∞ nije samokonjugovan pokazuje primer funkcije

$$f(z) = i \log\frac{1+z}{1-z} , \quad u(z) = \operatorname{Re} f(z) \in h^\infty , \; v(z) = \operatorname{Jm} f(z) \notin h^\infty .$$

Rast integralne sredine $M_p(r,v)$, ako $u \in h^1$, određuje teorema Kolmogorova .

TEOREMA 3.1.5 (Kolmogorov)

1. Ako $u \in h^1$, onda konjugovana harmonijska funkcija $v \in h^p$, $0 < p < 1$.

2. Postoji konstanta $B_p = B(p)$ tako da je

$M_p(r,v) \leq B_p M_1(r,u)$, za svaki element $u \in h^1$.

TEOREMA 3.1.6

Ako $u \in h^\infty$, onda konjugovana harmonijska funkcija $v \in h^p$, $0 < p < \infty$.

Iz teorema 3.1.5 i 3.1.6 sledi da ograničenost integralne sredine $M_1(r,u)$ $(M_\infty(r,u))$ ne povlači ograničenost integralne sredine $M_1(r,v)$ $(M_\infty(r,v))$. U odeljku 3.3 biće dokazano da iz ograničenosti integralne sredine $M_p(r,u)$, $0 < p < 1$, ne sledi ograničenost sredine $M_p(r,v)$. Ako se rast integralnih sredina $M_p(r,u)$ i $M_p(r,v)$ meri funkcijom $(1-r)^{-\beta}$, $\beta > 0$, onda obe integralne sredine imaju isti rast.

TEOREMA 3.1.7

Neka je $f(z) = u(z) + iv(z)$ analitička funkcija u jediničnom krugu D. Ako je

$$M_p(r,u) = O(1/(1-r)^\beta), \quad \beta > 0, \quad 0 < p \leq \infty, \text{ onda je}$$

$$M_p(r,v) = O(1/(1-r)^\beta).$$

3.2 STABILNOST PROSTORA h^p, $1\leqslant p \leqslant \infty$

Ako se jako stabilni i stabilni prostori realnih harmonijskih funkcija definišu kao odgovarajući prostori analitičkih funkcija, postavlja se pitanje njihovog određivanja i odnosa. Dobijeni rezultati u slučaju prostora h^p, $1\leqslant p \leqslant \infty$, veoma malo se razlikuju od odgovarajućih rezultata za H^p, $1\leqslant p \leqslant \infty$, prostore.

DEFINICIJA 3.2.1

1. Neka je $u(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n r^{|n|} e^{in\theta}$ realna harmonijska funkcija u jediničnom krugu D. Promena funkcije $u(z)$ je realna harmonijska funkcija $w(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} b_n r^{|n|} e^{in\theta}$, $|b_n|=|a_n|$, $n=0, 1, \ldots$ Označava se $w=ag(u)$.

2. Potpuna promena funkcije $u(z)$ je realna harmonijska funkcija $w(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n r^{|n|} e^{in\theta}$, $|c_n|\leqslant |a_n|$, $n=0, 1, \ldots$

   Označava se $w = cag(u)$.

DEFINICIJA 3.2.2

Vektorski prostor V realnih harmonijskih funkcija definisanih u jediničnom krugu D je jako stabilan ako iz $u \in V$ sledi da svaka potpuna promena $w = cag(u) \in V$.

DEFINICIJA 3.2.3

Vektorski prostor V realnih harmonijskih funkcija definisanih u jediničnom krugu D je stabilan ako iz $u \in V$ sledi da svaka promena $w = ag(f) \in V$.

DEFINICIJA 3.2.4

1. Element $u \in h^p$ pripada podskupu $a(h^p)$ ako svaka promena $ag(u) \in h^p$.

2. Maksimalni jako stabilan podprostor prostora h^p je $s(h^p)$.

3. Minimalni stabilan prostor koji sadrži prostor h^p je $A(h^p)$.

4. Minimalni jako stabilan prostor koji sadrži prostor h^p je $S(h^p)$.

Za karakterizaciju dela $a(h^p)$ prostora h^p potrebna je sledeća lema.

LEMA 3.2.1

$$(h^p, h^\infty) = h^q, \quad 1 \leq p \leq \infty, \; 1/p + 1/q = 1.$$

DOKAZ

Lema je posledica teoreme 3.1.3 i teorema o množenju $L^p[0,2\pi]$ prostora (pogledati (24) i (25)). Primetimo da se za dokazivanje inkluzije $(h^p, h^\infty) \subset h^q$ mogu primeniti teoreme o množenju odgovarajućih prostora analitičkih funkcija. Zaista, neka je $\ell : h^p \to h^\infty$ operator definisan nizom

$(\ldots, \bar{\lambda}_2, \bar{\lambda}_1, \lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \ldots)$ sa:

$$\ell(u) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \lambda_n a_n r^{|n|} e^{in\theta}, \quad u(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n r^{|n|} e^{in\theta} \in h^p.$$

Niz $(\lambda_0, \lambda_1, \ldots)$ definiše preslikavanje $\Lambda : H^p \to H^\infty$ sa

$\Lambda(f)=\sum_{n=0}^{\infty}\lambda_n a_n z^n$, $\quad f(z)=\sum_{0}^{\infty} a_n z^n \in H^p$. (Lako se može proveriti da je $\Lambda(f)=\ell(u)+i\ell(v)$, $\quad f(z)=u(z)+iv(z)$). Kako je $(H^p,H^{\infty})=H^q$, $1<p<\infty$, to je $\sum_{n=0}^{\infty}\lambda_n z^n \in H^q$, što povlači $\sum_{-\infty}^{\infty}\lambda_n r^{|n|}e^{in\theta}\in h^q$. Ako je $p=1$, $(H^1,H^{\infty})=L_+^{\infty}$. U tom slučaju $\sum_{0}^{\infty}\lambda_n e^{in\theta}\in L_+^{\infty}$, što implicira $\sum_{-\infty}^{\infty}\lambda_n r^{|n|}e^{in\theta}\in h^{\infty}$. Ako je $p=\infty$, $(H^{\infty},H^{\infty})=M^+$. U tom slučaju $\sum_{n=0}^{\infty}\lambda_n e^{in\theta}\in M^+$, što povlači $\sum_{-\infty}^{+\infty}\lambda_n r^{|n|}e^{in\theta}\in h^1$.

U slučaju $1<p<\infty$, suprotna inkluzija $h^q\subset(h^p,h^{\infty})$ se može dokazati korišćenjem poznatog rezultata $(H^p, H^{\infty})=H^q$ i teoreme 3.1.4. Zaista, neka $u(z)=\sum_{-\infty}^{\infty} a_n r^{|n|}e^{in\theta}\in h^q$ i $v(z)=\sum_{-\infty}^{\infty} b_n r^{|n|}e^{in\theta}\in h^p$. Tada je prema teoremi 3.1.4, f(z) $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n \in H^q, g(z)=\sum_{n=0}^{\infty} d_n z^n \in H^p$, gde je $f(z)$ analitička funkcija čiji je realni deo $u(z)$, $\operatorname{Jm} f(o)=o$, a $g(z)$ analitička funkcija čiji je realni deo $v(z)$, $\operatorname{Jm} g(o)=o$.

Kako je $(H^p,H^{\infty})=H^q$, to je $(f*g)(z)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n d_n z^n \in H^{\infty}$. Iz poslednjeg zaključka sledi

$$c_o d_o+\frac{1}{2}\operatorname{Re}\sum_{n=1}^{\infty} c_n d_n z^n=(u*v)(z)=\sum_{-\infty}^{\infty} a_n b_n r^{|n|}e^{in\theta}\in h^{\infty}.$$

Sada možemo okarakterisati deo $a(h^p)$ prostora h^p.

TEOREMA 3.2.1

$$a(h^p)=(h^q,l^1)\ , \quad 1\leq p\leq\infty\ , 1/p+1/q=1.$$

DOKAZ

(h^q, ℓ^1) je prostor realnih harmonijskih funkcija $\lambda(z)=\sum_{-\infty}^{\infty} \lambda_n r^{|n|} e^{in\theta}$ takvih da $\sum_{-\infty}^{\infty} |\lambda_n a_n| < \infty$, za svaki element $u(z)=\sum_{-\infty}^{\infty} a_n r^{|n|} e^{in\theta} \in h^q$, i naziva se Keteovim dualnim prostorom za prostor h^q. Označava se $(h^q)^K$.

Neka $\lambda(z) \in (h^q, \ell^1)$ i neka je $\mu(z)=ag\,\lambda(z)$. Jasno, $\mu(z) \in (h^q, \ell^1)$. Kako je $(h^q, \ell^1) \subset (h^q, h^\infty)=h^p$, (lema 3.2.1), to $\mu(z) \in h^p$, što znači da $\lambda(z) \in a(h^p)$.

Obrnuto, neka $\lambda(z)=\sum_{-\infty}^{\infty} \lambda_n \cdot r^{|n|} e^{in\theta} \in a(h^p)$ i neka $u(z)=\sum_{-\infty}^{\infty} a_n r^{|n|} e^{in\theta} \in h^q$. Tada $\mu(z)=\sum_{-\infty}^{\infty} |\lambda_n| e^{-i\arg a_n} r^{|n|} e^{in\theta} \in h^p$, jer je $\mu(z)=ag\,\lambda(z)$. Kako je $(u * \mu)(z)=\sum_{-\infty}^{\infty} |\lambda_n a_n| r^{|n|} e^{in\theta}$ neprekidna funkcija na $\overline{D}$, to je $\sum_{-\infty}^{\infty} |a_n \lambda_n| < \infty$.

POSLEDICA 3.2.1

$a(h^p)$ je podprostor prostora h^p, $1 \leq p \leq \infty$.

TEOREMA 3.2.2

$$a(h^p)=h^2, \quad 1 \leq p \leq 2.$$

DOKAZ

Prema Parsevalovoj jednakosti, $h^2 \subset a(h^p)$.

Obrnuto, neka $u(z) \in a(h^p) \setminus h^2$. Tada prema teoremi 3.1.1, postoji $ag(u) \notin h^1$(pogledati (85)). Dakle, $u(z) \notin a(h^p)$, što je suprotno pretpostavci.

POSLEDICA 3.2.2

$$(h^p,\ell^1)=h^2, \quad 2\leqslant p\leqslant\infty .$$

Kao i u slučaju analitičkih funkcija, prostori $s(h^p)$, $A(h^p)$ i $S(h^p)$ postoje i $s(h^p)=(\ell^\infty,h^p)$.

LEMA 3.2.2

1. Prostori $s(h^p)$, $A(h^p)$, $S(h^p)$ postoje.
2. $s(h^p)=(\ell^\infty,h^p)$
3. $s(h^p)\subset a(h^p)\subset h^p\subset A(h^p)\subset S(h^p)$

Kao i u slučaju analitičkih funkcija prostori $a(h^p)$ i $s(h^p)$ su jednaki.

TEOREMA 3.2.3

$$s(h^p)=a(h^p) \quad , \quad 1\leqslant p\leqslant\infty .$$

DOKAZ

Prvi slučaj $1\leqslant p\leqslant 2$. Prema teoremi 3.2.2, $a(h^p)=h^2$. Kako je $h^2\subset s(h^p)\subset a(h^p)$, (Parsevalova formula i lema 3.2.2), to je $s(h^p)=h^2$.

Drugi slučaj $2<p<\infty$. Prema teoremi 3.2.1 i lemi 3.2.2, dovoljno je dokazati inkluziju $(h^q,\ell^1)\subset(h^\infty,h^p)$. Neka $(\dots\lambda_{-1},\lambda_0,\lambda_1,\dots)\in(h^q,\ell^1)$. Tada $(\lambda_0,\lambda_1,\dots)\in(H^q,\ell^1)$ (pogledati dokaz leme 3.2.1). Prema teoremi 1.3.3,

$(H^q,\ell^1)=(\ell^\infty,H^p)$. Stoga, $(\lambda_0,\lambda_1,\dots)\in(\ell^\infty,H^p)$, što povlači $(\dots,\bar\lambda_1,\lambda_0,\lambda_1,\dots)\in(\ell^\infty,h^p)$.

Treći slučaj: $p=\infty$.

Kako je $\ell^1\subset s(h^\infty)\subset a(h^\infty)=(h^1,\ell^1)=\ell^1$, to je $s(h^\infty)=a(h^\infty)=\ell^1$.

Na kraju navodimo dokaz da je $A(h^p)=S(h^p)$, $2\leqslant p<\infty$.

TEOREMA 3.2.4

1. $h^1\subset A(h^1)\subset S(h^1)\subset(h^1)^{KK}=\ell^\infty$
2. $h^p\subset A(h^p)\subset S(h^p)\subset \ell(q,2)$ $,1<p<2,\ 1/p+1/q=1$
3. $h^2=A(h^p)=S(h^p)$ $,2\leqslant p<\infty$
4. $h^\infty\subset A(h^\infty)\subset S(h^\infty)\subset(h^\infty)^{KK}=(h^2,h^1)=h^2$

DOKAZ

1. $(h^1,\ell^1)=a(h^\infty)=\ell^1$, prema teoremama 3.2.1 i 3.2.3

$$(h^1)^{KK}=(\ell^1,\ell^1)=\ell^\infty .$$

2. $\ell(q,2)$ je jako stabilan prostor koji sadrži prostor h^p.
3. h^2 je jako stabilan prostor koji sadrži h^p. Dakle, $S(h^p)\subset h^2$. Obrnuto, neka $u(z)=\sum_{-\infty}^{\infty} a_n r^{|n|}e^{in\theta}\in h^2$. Tada postoji $v(z)=\mathrm{agu}(z)=\sum_{-\infty}^{\infty} b_n r^{|n|}e^{in\theta}\in h^p$ (pogledati (85)). Dakle, $v(z)\in A(h^p)$, pa i $u(z)\in A(h^p)$.

Dakle, $h^2 \subset A(h^p) \subset S(h^p) \subset h^2$

4. $(h^\infty, \ell^1) = a(h^1) = h^2$ (teoreme 3.2.1 i 3.2.3)

$(h^\infty)^{KK} = (h^2, \ell^1) = h^2$.

3.3 PROSTOR h^p, $o < p < 1$

Hardijev prostor h^p, $o < p < 1$, se znatno razlikuje od odgovarajućeg prostora H^p, $o < p < 1$, analitičkih funkcija jer

1. Postoje elementi prostora h^p koji nemaju radijalne granične vrednosti.
2. Konvergencija u prostoru h^p ne može se dovesti u vezu sa uniformnom konfergencijom na kompaktnim skupovima.
3. Integralne sredine $M_p(r,u)$, $u \in h^p$, nisu rastuće funkcije argumenta r, itd.

Zbog navedenih razloga, postoji vrlo mali broj rezultata o prostorima h^p u slučaju $o < p < 1$.

U prvom delu odeljka, posle navedenih poznatih rezultata, date su ocene rasta integralnih sredina i koeficijenata elemenata prostora h^p koje odgovaraju ocenama u odgovarajućim prostorima analitičkih funkcija , iako prostor h^p nije samokonjugovan.

Drugi deo odeljka posvećen je topološkoj strukturi prostora h^p. Dokazano je da prostor h^p nije lokalno konveksni linearni topološki prostor.

TEOREMA 3.3.1

Prostor h^p, $0 < p < 1$, nije samokonjugovan prostor.

DOKAZ

Neka je $u(z)+iv(z)=\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n \frac{z^{2^n}}{1-z^{2^n+1}}$ analitička funkcija u jediničnom krugu D, $\varepsilon_n = \pm 1$. Za skoro svaki niz (ε_n), $u(z) \in h^p$, $0 < p < 1$, $v(z) \notin h^p$, $0 < p \leq \infty$.

TEOREMA 3.3.2

Postoji funkcija $u \in h^p$, $0 < p < 1$, tako da $\lim_{r \to 1} u(re^{it})$ ne postoji na skupu pozitivne mere.

DOKAZ

Neka je $u(z)+iv(z)=\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \frac{z^n}{1+z^n}$ analitička funkcija u jediničnom krugu D. Funkcija $u(z) \in h^p$, $0 < p < 1$, i

$\lim_{r \to 1} u(re^{it})$ ne postoji na skupu pozitivne mere (pogledati (16)).

TEOREMA 3.3.3

Neka je $f(z)=u(z)+iv(z)$, $u(z) \in h^p$, $0 < p < 1$, analitička funkcija u jediničnom krugu D. Tada je

1. $M_p(r,f')=O(\frac{1}{1-r})$
2. $M_p(r,f)=O((\log\frac{1}{1-r})^{1/p})$

3. $M_p(r,v)=O((\log\frac{1}{1-r})^{1/p})$.

DOKAZ

Primer funkcije $f(z)=u(z)+iv(z)=e^{\frac{1}{2}k\pi i}(1-z)^{-k-1}$ pokazuje da se ocena 2. ne može poboljšati ako je $p=1/(k+1)$, $k=1,2,\dots$ Da li je ocena 2. najbolja za ostale vrednosti p?

Ako je $f(z)=u(z)+iv(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^{a^n}}{1-z^{2a^n}}$, $a=3,4,\dots$, onda $u(z)\in h^p$, $0<p<1$, $M_p(r,f)>A(p)\log\frac{1}{1-r}$, gde je $A(p)$ konstanta koja zavisi od p. Znači, ocena 3. se ne može poboljšati da bude $M_p(r,v)=o(\log\frac{1}{1-r})$(pogledati(33) i (7o)).

TEOREMA 3.3.4

Neka je $u=u(z)$ realna harmonijska funkcija definisana u jediničnom krugu D i neka je

$$M_p(r,u)=O(\frac{1}{(1-r)^{\gamma}}) \quad ,\gamma\geq 0,\quad 0<p<\infty\ .$$ Tada je

$$M_q(r,u)=O((1-r)^{-\gamma+\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}),\quad 0<p<q\leq\infty .$$

DOKAZ

Neka je $f(z)=u(z)+iv(z)$, $\operatorname{Im} f(0)=0$, analitička funkcija određena realnim delom $u=u(z)$. Za $\gamma=0$, razlikovaćemo tri slučaja.

Prvi slučaj : $1<p<\infty$.

Kako $u\in h^p$, prema teoremi 3.1.4, $v\in h^p$. Prema teoremi 1.1.7, $M_q(r,f)=O(\frac{1}{(1-r)^{1/p-1/q}})$, $p<q\leq\infty$. Iz nejednakosti

$M_q(r,u) \leq M_q(r,f)$, sledi tvrđenje.

Drugi slučaj : p=1

Prema Poasonovoj integralnoj formuli

$$f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{(\rho^2-r^2)\ u(\rho e^{it})\ dt}{\rho^2-2\rho r\cos(\theta-t)+r^2}, \quad z=re^{i\theta},\ \rho=\frac{1+r}{2}, \text{ sledi}$$

$M_\infty(r,f)=O(\frac{1}{1-r})$. Prema dokazu teoreme 1.1.7, (pogledati (16)) $M_q(r,f)=O(\frac{1}{(1-r)^{1-\frac{1}{q}}})$. Tvrdjenje sledi kao i u prvom slučaju.

Treći slučaj: $0<p<1$.

Ako $u \in h^p$, prema teoremi 3.3.3 , $M_\infty(r,f)=O(\frac{1}{(1-r)^{1/p}})$

Prema dokazu teoreme 1.1.7, $M_q(r,u) \leq M_q(r,f)=O(\frac{1}{(1-r)^{1/p-1/q}})$.

Neka je $\delta>0$. Tada je $M_p(r,v)=O(\frac{1}{(1-r)^\delta})$, prema teoremi 3.1.7.

Zato je i $M_p(r,f)=O(\frac{1}{(1-r)^\delta})$. Prema teoremi 1.1.7,

$$M_q(r,f)=O(\frac{1}{(1-r)^{\delta+\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}}).$$

Tvrdjenje sledi kao i u prethodnim slučajevima.

TEOREMA 3.3.5

Neka je $u(z)=\sum_{-\infty}^{\infty} a_n r^{|n|} e^{in\theta}$, $z=re^{i\theta}$, element prostora h^p, $0<p<1$. Tada je $a_n=O(|n|^{1/p-1})$, $|n|\to\infty$.

DOKAZ

$$|a_n| r^n = \left| \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} u(re^{it}) \cos (nt-t_n)\, dt \right| \leqslant M_\infty^{1-p}(r,u) 2M_p^p(r,u), \quad n \geqslant 0.$$

Kako je $M_\infty(r,u)=O(\frac{1}{(1-r)^{1/p}})$, prema teoremi 3.3.4, to je $|a_n| r^n = O((1-r)^{1-\frac{1}{p}})$. Ako je $r=1-1/n$, $n \to \infty$, onda je

$$a_n = O(|n|^{\frac{1}{p}-1}), \quad |n| \to \infty .$$

TEOREMA 3.3.6

Prostor h^p, $0<p<1$, nije lokalno konveksni linearni topološki prostor.

DOKAZ

Dovoljno je pokazati da lopta $K_1 = \{ u \in h^p : \|u\|_p < 1 \}$ ne sadrži konveksnu okolinu nule. Pretpostavićemo suprotno, da K_1 sadrži konveksnu okolinu V nule. Pošto je V otvoren skup, to V sadrži u sebi kuglu $K_\varepsilon = \{ u \in h^p : \|u\|_p < \varepsilon \}$, $\varepsilon > 0$.

Odredićemo elemente $u_1, u_2, \ldots, u_N \in K_\varepsilon \subset V$, i konstante $a_1 > 0, \ldots, a_N > 0$, $\sum_{k=1}^{N} a_k = 1$, tako da

$\sum_{k=1}^{N} a_k u_k \notin K_1$, i $\sum_{k=1}^{N} a_k u_k \notin V$ $(V \subset K_1)$, što će biti suprotno pretpostavci da je V konveksan skup.

Odredimo prirodan broj N tako da je

$$(1) \quad \varepsilon (p+1)^{-1/p} \left(\sum_{k=1}^{N} k^{-1/p} \right)^{-1} \left(\sum_{k=1}^{N} k^{-1} \right)^{1/p} > 1 \quad .$$

Neka I_k bude interval $I_k=\left\{\theta \ : \frac{2\pi}{N}(k-1)<\theta<\frac{2\pi}{N}\cdot k\right\}$, $k=1,2,..,N$

Definišimo neprekidne funkcije $c=c_k(\theta)$, $k=1,2,..,N$

$$c_k(\ )=\begin{cases} \varepsilon N^{1/p}, & \theta=\frac{2\pi}{N}(k-1/2) \\ o, & \theta\in[o,2\pi]\setminus I_k \\ \text{linearna funkcija}, & \theta\in I_k\setminus\left\{\frac{2\pi}{N}\cdot(k-1/2)\right\} \end{cases}$$

Neka je $a_k=k^{-1/p}\left(\sum_{k=1}^{N}k^{-1/p}\right)^{-1}$, $k=1,2,..,N$.

Računanjem se može pokazati da je

(2) $\quad M_p(c_k)=\varepsilon(p+1)^{-1/p}<\varepsilon$

(3) $\quad M_p\left(\sum_{k=1}^{N}a_kc_k\right)=\varepsilon(p+1)^{-\frac{1}{p}}\left(\sum_{k=1}^{N}k^{-1/p}\right)^{-1}\left(\sum_{k=1}^{N}k^{-1}\right)^{1/p}$

Prema (1) i (3),

(4) $\quad M_p\left(\sum_{k=1}^{N}a_kc_k\right)>1$

Svaka od funkcija $c_k=c_k(\theta)$ je apsolutno neprekidna. Za dato $\alpha>o$, postoje triginometrijski polinomi $T_k=T_k(\theta)=\sum_{n=-m_k}^{m_k}a_{nk}e^{in\theta}$

tako da je

(5) $\quad |T_k(\theta)-c_k(\theta)|<\alpha$, $o\leqslant\theta\leqslant 2\pi$, $k=1,2,..,N$

Označimo $c'_k=c_k(\theta)e^{im'_k\theta}$, $P_k(\theta)=T_k(\theta)e^{im'_k\theta}$, $k=1,2,..,N$, $m'_k\geqslant m_k$

su prirodni brojevi takvi da je

(6) $\quad M_p\left(re\sum_{k=1}^{N}a_kc'_k\right)>1$. Iz (5) sledi

(7) $\quad | c_k^1(\theta)-p_k(\theta)| < \alpha \ , \ 0 \leq \theta \leq 2\pi \ , k=1,2,..,N$

Pošto je $|\mathrm{Re}\, u| \leq |u|$,sledi

(8) $\quad | \mathrm{Re}\, c_k^1(\theta)-\mathrm{Re}\, p_k(\theta)| < \alpha \ , 0 \leq \theta \leq 2\pi \ , k=1,2,..,N.$

Funkcije $M_p=M_p(f)=\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} | f(e^{it})|^p \, dt \right)^{1/p}$ su neprekidne funkcije argumenta f. Zato se može izabrati α tako da je

(9) $\quad M_p(p_k) < \varepsilon \ , \quad k=1,2,..,N$

(10) $\quad M_p(\mathrm{Re} \sum_{k=1}^{N} a_k p_k) > 1$

Nejednakosti (9) i (10) važe za dovoljno malo α prema (2) i (7) , odnosno (6) i (8) respektivno.

Neka je $p_k=p_k(z)=\sum_{n=-m_k}^{m_k} a_{nk} z^{n+m_k^1}$, $k=1,2,..,N$, i $u_k=u_k(z)=\mathrm{Re}\, p_k(z)$ $|z|<1$. Jasno, $u_k \in h^p$, $0<p<1$, $k=1,2,..,N$. Prema (9) i (10),

(11) $\quad \| u_k \|_p = \| \mathrm{Re}\, p_k \|_p \leq M_p(p_k) < \varepsilon$

(12) $\quad \| \sum_{k=1}^{N} a_k u_k \|_p = \| \mathrm{Re} \sum_{k=1}^{N} a_k p_k \|_p \geq M_p(\mathrm{Re} \sum_{k=1}^{N} a_k p_k) > 1$

Prema (11), $u_k \in K_\varepsilon \subset V$. Prema (12), $\sum_{k=1}^{N} a_k u_k \notin K_1$. Pošto je $V \subset K_1$, $\sum_{k=1}^{N} a_k u_k \notin V$.

G L A V A 4.

P R O S T O R I $a^{p,\alpha}$, f^+, h^n_ℓ I $T(e_0)$ R E A L N I H H A R M O N I J S K I H F U N K C I J A

Novi prostori realnih harmonijskih funkcija $a^{p,\alpha}$, f^+, h^n_ℓ i $T(e_0)$ su definisani i utvrdjena su neka njihova svojstva. Ideja za njihovo definisanje i proučavanje su odgovarajući prostori analitičkih funkcija.

4.1 BERGMANOV PROSTOR $a^{p,\alpha}$

Sadržavajući prostor za prostor h^p, $0 < p < 1$, nije odredjen. Analogija sa prostorima analitičkih funkcija ne vodi rešenju. Analogni prostor b^p realnih harmonijskih funkcija čak u sebi ne sadrži prostor h^p u opštem slučaju, iako je zadržao dosta osobina odgovarajućeg prostora B^p analitičkih funkcija.

Prostor b^p je specijalan slučaj Bergmanovih prostora $a^{p,\alpha}$ realnih harmonijskih funkcija. Kao i kod Hardijevih prostora h^p, prostor $a^{p,\alpha}$ je Banahov samokonjugovani prostor ako je $1 < p < \infty$. Za razliku od prostora h^1, prostor $a^{1,\alpha}$ je samokonjugovan. Pored navedenih svojstava, u odeljku su date neke ocene integralnih sredina i koeficijenata elemenata prostora $a^{p,\alpha}$.

DEFINICIJA 4.1.1

Realna harmonijska funkcija $u=u(z)$ definisana u jediničnom krugu D pripada Bergmanovom prostoru $a^{p,\alpha}$, $0 < p < \infty$, $-1 < \alpha < \infty$, ako je

$$\|u\|^p_{R\alpha}=\frac{1}{\pi}\int_0^1\int_0^{2\pi}|u(re^{it})|^p(1-r^2)^\alpha r\,dr\,dt<\infty\ .$$

Prostor $a^{1,1/p-2}$, $o<p<1$ je prostor b^p. Iz definicije prostora $A^{p,\alpha}$ i $a^{p,\alpha}$ sledi da analitička funkcija $f(z)=u(z)+iv(z)$ pripada prostoru $A^{p,\alpha}$ ako i samo ako funkcije $u(z)$ i $v(z)$ pripadaju prostoru $a^{p,\alpha}$.

TEOREMA 4.1.1

Prostor $a^{p,\alpha}$ je samokonjugovan, ako je $1\leq p<\infty$.

DOKAZ

Razlikovaćemo dva slučaja. Prvi slučaj: $p=1$. Neka je $f(z)=u(z)+iv(z)$, $\operatorname{Jm} f(o)=o$, analitička funkcija čiji realni deo $u(z)$ pripada prostoru b^p. Iz Poasonove integralne formule,

$$f(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\rho e^{it}+z}{\rho e^{it}-z}u(\rho e^{it})\,dt\ ,\quad \rho=\frac{1+r}{2},\quad z=re^{i\theta},\ \text{sledi}$$

$$M_1(r,f')\leq\frac{4M_1(\rho,u)}{1-\rho}\ .$$ Kako $u\in b^p$, to $f'\in B^q$, $1/q=1+1/p$. Prema teoremi 2.1.5, $f\in B^p$, što prema primedbi posle definicije 4.1.1, znači da $v\in b^p$.

Drugi slučaj: $1<p<\infty$.

Iz Poasonovog integralnog predstavljanja (kao u predhodnom slučaju), sledi da je

$$M_p^p(r,f')\leq c(p)\,\frac{M_p^p(\rho,u)}{(1-\rho)^p}\ .$$ Prema teoremi 1.1.6 i prethodnoj nejednakosti, $f\in A^{p,\alpha}$, odnosno $v\in a^{p,\alpha}$.

POSLEDICA 4.1.1

Neka je $u(z)=\sum_{-\infty}^{\infty} a_n r^{|n|}e^{in\theta}$ element prostora b^p . Tada je $a_n = O\left(|n|^{\frac{1}{p}-1}\right)$, $|n|\to\infty$.

Interesantno je da takva ocena važi i za koeficijente elemenata prostora h^p (teorema 3.3.5) iako nije utvrđen odnos prostora h^p i b^p . Šta više , poznato je da h^p nije deo prostora b^p ako je $p=1/(k+1)$, $k=1,2,\dots$.

Za dokaz sledeće teoreme potrebne su nam neke ocene integralnih sredina elemenata prostora $a^{p,\alpha}$.

LEMA 4.1.1

Za $\alpha>-1$, $1\leq p<\infty$, postoji konstanta $c=c(\alpha,p)$ tako da je

$$M_p(r,u) \leq c\,\|u\|_{p,\alpha}(1-r)^{-\frac{\alpha+1}{p}} \text{ , za svaki element } u\in a^{p,\alpha} .$$

DOKAZ

Neka je $1/2\leq r<1$. Tada je

$$\|u\|_{p\alpha}^p = 2\int_0^1 M_p^p(r,u)\,(1-r^2)^\alpha r\,dr \geq 2M_p^p(r,u)\int_r^1 (1-t^2)^\alpha t\,dt = c^{-1}(p,\alpha)\,M_p^p(r,u)\,(1-r)^{\alpha+1}$$

Iz dobijene nejednakosti sledi

$$M_p(r,u) \leq c\,\|u\|_{p,\alpha}(1-r)^{-(\alpha+1)/p} .$$

LEMA 4.1.2

Postoji konstanta $c=c(\alpha,p)$ tako da je

$$|u(z)| \leq c\,\|u\|_{p\alpha}(1-r)^{-\frac{\alpha+2}{p}} \text{ , za svaki element } u\in a^{p,\alpha},$$

$1 \leq p < \infty$.

DOKAZ

Neka je $f(z)= u(z)+iv(z)$ analitička funkcija određena elementom $u(z) \in a^{p,\alpha}$. Prema dokazu teoreme 4.1.1, postoji konstanta $c=c(p,\alpha)$ tako da je

(1) ... $M_p(r,f') \leq c \dfrac{M_p(r,u)}{1-r}$. Prema lemi 4.1.1 ,

(2) ... $M_p(r,u) \leq c \|u\|_{p,\alpha}(1-r)^{-\frac{\alpha+1}{p}}$. Iz (1) i (2) , sledi

(3) $$M_p(r,f') \leq c \|u\|_{p,\alpha}(1-r)^{-\frac{\alpha+1}{p}-1} .$$

Kako je $M_p(r,f) \leq |f(o)| + \int_0^r M_p(t,f')\,dt$, to je prema (3)

(4) $$M_p(r,f) \leq c \|u\|_{p,\alpha}(1-r)^{-\frac{\alpha+1}{p}} .$$

Prema teoremi 1.1.7 ,

(5) $$M_\infty(r,f) \leq c\, M_p(r,f)\,(1-r)^{-1/p} .$$

Kako je $|u(z)| \leq M_\infty(r,f)$, to je prema (4) i(5) ,

$$|u(z)| \leq c \|u\|_{p,\alpha}(1-r)^{-\frac{\alpha+2}{p}} .$$

POSLEDICA 4.1.2

Topologija na $a^{p,\alpha}$, $1 \leq p < \infty$, je jača od topologije uniformne konvergencije na kompaktnim skupovima .

TEOREMA 4.1.2

Prostor $a^{p,\alpha}$, $1 \leq p < \infty$, je Banahov prostor .

DOKAZ

Lako se može proveriti da je $a^{p,\alpha}$ normirani prostor . Dokažimo da je $a^{p,\alpha}$ kompletan prostor. Neka je (u_n) Košijev niz u $a^{p,\alpha}$. Tada je (u_n) Košijev niz u $L^p(D)$ formiran u odnosu na meru $\frac{1}{\pi}(1-r^2)^{\alpha} r\,dr\,dt$. Stoga postoji funkcija $u \in L^p(D)$ i podniz $(u_{n_k}(z))$ tako da je $\lim\limits_{k\to\infty} u_{n_k}(z)=u(z)$, za skoro svako $z \in D$. Prema lemi 4.1.2, $\lim\limits_{k\to\infty} u_{n_k}(z)=u(z)$ uniformno na svakom kompaktnom skupu u D. Kako je granica ravnomerno konvergentnog niza harmonijskih funkcija, harmonijska funkcija, to je $u(z)$ harmonijska funkcija. Iz $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = u$ u $a^{p,\alpha}$, sledi $u \in a^{p,\alpha}$.

4.2 P R O S T O R f^+

Ako bi n bio prostor realnih harmonijskih funkcija $u=u(z)$ „ograničene karakteristike"

$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log^+ |u(re^{it})|\, dt$, po analogiji sa prostorima N^+ i N, prostor n^+ ne bismo mogli definisati, jer je $h^p \subset n$, a postoje elementi prostora h^p koji nemaju radijalne granične vrednosti (teorema 3.3.2)

Iznenadjujuće, analogni prostor f^+ zadržava dosta osobina Frešeovog omotača F^+ prostora N^+.

DEFINICIJA 4.2.1

Neka je $u=u(z)$ realna harmonijska funkcija u jediničnom krugu D. Tada $u \in f^+$ ako je

$$\|u\|_{f^c} = \int_0^1 e^{-\frac{c}{1-r}} M_\infty(r,u)\, dr < \infty \text{ , za svako } c > 0.$$

TEOREMA 4.2.1

Prostor f^+ je samokonjugovan .

DOKAZ

Neka $u \in f^+$ i neka je $f(z)=u(z)+iv(z)$, $\mathrm{Jm}\, f(0)=0$, analitička funkcija odredjena realnim delom $u(z)$. Prema Poasonovoj formuli

$$f(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\rho e^{it} + re^{i\theta}}{\rho e^{it} - re^{i\theta}}\, u(\rho e^{it})\, dt, \quad \rho = \frac{1+r}{2} \text{ , sledi}$$

$M_\infty(r,f) \leq \frac{c}{1-r} M_\infty(\rho, u)$. Dokažimo da $f \in F^+$.

$$\int_0^1 e^{-\frac{c}{1-r}} M_\infty(r,f)\,dr \leq C\int_0^1 \frac{e^{-\frac{c}{1-r}}}{1-r} M_\infty\left(\frac{1+r}{2},u\right) dr \leq$$
$$\leq C\int_0^1 \frac{e^{-c/2(1-r)}}{1-r} M_\infty(r,u)\,dr \leq$$
$$\leq C\int_0^1 e^{-c_1/1-r} M_\infty(r,u)\,dr < \infty \quad , o < c_1 < c/2$$

Kako $f(z)=u(z)+iv(z)$ pripada prostoru F^+ ako i samo ako $u(z)$ i $v(z)$ pripadaju prostoru f^+, to $V \in f^+$.

TEOREMA 4.2.2

1. Neka $u \in f^+$. Tada je $|u(z)| \leq \frac{8}{ce^2} \|u\|_{f^c} e^{\frac{2c}{1-r}}, |z| \leq r$, za svako $c > o$.
2. $u \in f^+$ ako i samo ako je $\overline{\lim_{r\to 1}} (1-r)\log M_\infty(r,u) \leq o$
3. $u(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n r^{|n|} e^{in\theta} \in f^+$ ako i samo ako je $\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{1}{\sqrt{n}} \log|a_n| \leq o$

1. Neka je $R < 1$. Tada je

$$\|u\|_{f^c} = \int_0^1 e^{-c/1-r} M_\infty(r,u)\,dr \geq \int_R^1 e^{-c/1-r} M_\infty(r,u)\,dr \geq$$
$$M_\infty(R,u) \int_R^1 e^{-c/1-r} dr = M_\infty(R,u) \int_{1/1-R}^{\infty} e^{-ct} \frac{dt}{t^2} \geq$$
$$M_\infty(R,u)\left(\frac{ce}{2}\right)^2 \int_{1/1-R}^{\infty} e^{-2ct}\, dt = \frac{ce^2}{8} e^{-2c/1-R} M_\infty(R,f)$$

Poslednja nejednakost je ekvivalentna sa

$$|u(z)| \leq \frac{8}{ce^2} \|u\|_{f^c} e^{\frac{2c}{1-R}}, \quad |z| \leq R < 1.$$

2. Lako se može pokazati da je uslov (2) dovoljan. Obrnuto, neka $u(z) \in f^+$. Tada je prema 1,

$(1-r) \log M_\infty(r,u) \leq (1-r)C+2c$, za svako $c > o$. Iz nejednakosti sledi 2.

3. Neka $u \in f^+$. Tada analitička funkcija $f(z)=u(z)+iv(z)=\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$

Jm $f(o)=o$, pripada prostor F^+, prema teoremi 4.2.1 .

Prema teoremi 1.4.3 (3), $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \frac{1}{\sqrt{n}} \log |b_n| \leq o$.

$$\text{Kako je } a_n = \begin{cases} \frac{b_n}{2}, & n > o \\ b_o, & n=o, \\ \frac{\overline{b_{-n}}}{2}, & n < o \end{cases} \quad \text{to je } \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{1}{\sqrt{n}} \log |a_n| \leq o$$

Obrnuto, neka je $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \frac{1}{\sqrt{n}} \log |a_n| \leq o$. Tada $f \in F^+$, prema teoremi 1.4.3 (3), pa $u \in f^+$.

DEFINICIJA 4.2.2

Neka je $u(z) = \sum\limits_{-\infty}^{\infty} a_n r^{|n|} e^{in\theta} \in f^+$. Tada je za $c > o$

$$\|u\|_c = \sum_{-\infty}^{\infty} |a_n| e^{-c\sqrt{|n|}}$$

LEMA 4.2.1

Neka je $f(z)=u(z)+iv(z)$, Im $f(o)=o$, analitička funkcija definisana u jediničnom krugu D. Tada

1. za svako $c > o$, postoji konstanta $A=A(c)$ tako da je

$$\|u\|_{fc} \leq \|f\|_{Fc} \leq A \|f\|_{\sqrt{c}} = A \|u\|_{\sqrt{c}}$$

2. za svako $c > o$, postoje konstante $B=B(c)$ i $a > o$ tako da je

$$\|u\|_c \leq B \|u\|_{fa}$$

DOKAZ

1. Iz $M_\infty(r,u) \leq M_\infty(r,f)$ i definicija $\|u\|_{fc}$ i $\|f\|_{Fc}$ sledi prva nejednakost. Druga nejednakost je dokazana u teoremi 1.4.4. Jednakost sledi iz definicija $\|f\|_c$ i $\|u\|_c$ i veze koeficijenata

funkcija f(z) i u(z).

2. Prema teoremi 1.4.4 , $\|u\|_c = \|f\|_c \leq B_1 \|f\|_{F c^2/49}$. Prema dokazu teoreme 4.2.1, $\|f\|_{Fc} \leq B_2 \|u\|_{fc_1}$,za svako c_1, $o < c_1 < c/2$ Prema dobijenim nejednakostima, $\|u\|_c \leq B \|u\|_{fa}$, $o < a < \frac{c^2}{98}$.

POSLEDICA 4.2.1.

Topologija na f^+ definisane familijama prednormi $\{\| \ \|_{fc}\}_{c>o}$ i $\{\| \ \|_c\}_{c>o}$ su ekvivalentne.

TEOREMA 4.2.3

Prostor f^+ je Frešeov prostor.

DOKAZ

Topologija definisana familijom prednormi je lokalno konveksna. Metrizabilnost prostora f^+ sledi iz teoreme 4 ((59), str.31). Kompletnost prostora f^+:

Neka je $\lim_{n,m\to\infty} \|u_n - u_m\|_c = o$, za svako $c > o$. Tada je $\lim_{n,m\to\infty} \|f_n - f_m\|_c = o$, za svako $c > o$, gde je $f_n(z)$ analitička funkcija odredjena svojim realnim delom $u_n(z)$, Jm $f_n(o) = o$. Prema teoremi 1.4.5, postoji element $f \in F^+$, tako da je $\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_c = o$, za svako $c > o$. Kako je $\|u_n - u\|_c = \|f_n - f\|_c$, to je $\lim_{n\to\infty} \|u_n - u\|_c = o$, gde je u=Re f.

4.3 P R O S T O R h^n_{ℓ}

U (44) je definisan prostor ℓ realnih harmonijskih funkcija u jediničnom krugu D i okarakterisan integralnim predstavljanjem svojih elemenata. U ovom odeljku definisan je novi prostor h^n_{ℓ} , pomoću operatora J^n_a i prostora ℓ, i okarakterisan integralnim predstavljanjem svojih elemenata. Za n=o, prostor h^n_{ℓ} se svodi na prostor ℓ, a njegova karakterizacija integralnim predstavljanjem na karakterizaciju prostora ℓ.

DEFINICIJA 4.3.1

Prostor ℓ^+ je prostor realnih harmonijskih funkcija u=u(z) definisanih u jediničnom krugu D sa svojstvima u(o)=o,

$-\infty < u(z) < c_u \log\frac{1}{1-z}$, $z \in D$, gde je $c_u > o$ konstanta koja zavisi od funkcije u(z).

DEFINICIJA 4.3.2

$$\ell = \ell^+ - \ell^+$$

DEFINICIJA 4.3.3

$$h^n_{\ell} = \{ u: J^n_a(u) \in \ell \}, \text{ gde je } a \in R^n_+ .$$

TEOREMA 4.3.1

Neka je u=u(z) realna harmonijska funkcija u jediničnom krugu D. Sledeća tvrdjena su ekvivalentna:

1. $u \in \mathfrak{L}$

2. Postoji jedinstvena predmera μ ograničene $\hat{\varkappa}$-varijacije tako da je

$$u(z)=\int_{\partial D} P(\xi,z)\,\mu(|d\xi|)=-\int_0^{2\pi}\left[\frac{d}{d\theta}P(e^{i\theta},z)\right]\hat{\mu}(\theta)\,d\theta$$

Dokaz se može naći u (44). Sledećom teoremom je uopšten prethodni rezultat.

TEOREMA 4.3.2

Neka je $u=u(z)$ realna harmonijska funkcija u jediničnom krugu D. Sledeća tvrdjena su ekvivalentna:

1. $u \in h^n_{\mathfrak{L}}$

2. Postoji jedinstvena predmera μ ograničene $\hat{\varkappa}$-varijacije tako da je $u(z)=\int_{\partial D} J_a^{-n}[P(\xi,z)]\,\mu(|d\xi|)$.

DOKAZ

$1\Rightarrow 2$. Neka $u \in h^n_{\mathfrak{L}}$ i neka su μ_r, $0<r<1$, predmere

$\mu_r(I)=\frac{1}{2\pi}\int_I J_a^n(u)(r\xi)|d\xi|$, $I\in\mathcal{L}$, gde je $\mathcal{L}$ familija otvorenih, zatvorenih i poluzatvorenih lukova na ∂D. Predmere μ_r su uniformno ograničene $\hat{\varkappa}$-varijacije. Prema Heli - selekšn teoremi, postoji niz r_n, $0<r_1<\dots<r_n<\dots 1$, $\lim_{n\to\infty} r_n=1$ i predmera μ tako da je $\lim_{n\to\infty}\mu_{r_n}\overset{\hat{\varkappa}\omega}{=}\mu$ ($\hat{\varkappa}$-slabo). Kako je $u(z)$ realna harmonijska funkcija, to je

$$u(r_n z)=\frac{1}{2\pi}\int_{\partial D} J_a^{-n}[P(\xi,z)]\,J_a^n[u(r_n\xi)]\,|d\xi| =$$

$$=\int_{\partial D} J_a^{-n}[P(\xi,z)]\,\mu_{r_n}(|d\xi|)$$

Prelaskom na graničnu vrednost, $n\to\infty$, dobija se integralno predstavljanje 2.

Jedinstvenost predmere sledi iz postojanja granične vrednosti

$$\lim_{r\to 1}\frac{1}{2\pi}\int_I u(r\xi)|d\xi| = \lim_{r\to 1}\frac{1}{2\pi}\int_\alpha^\beta \left(-\int_0^{2\pi}\hat{\mu}(\theta)\frac{d}{d\theta}\left[P(e^{i\theta},re^{it})\right]d\theta\right)dt,$$

za svaki luk $I=(e^{i\alpha},e^{i\beta})\subset \partial D$.

$2\Longrightarrow 1$. Iz 2, sledi

$$\begin{aligned} J_a^n(u)(re^{it}) &= J_a^n\left[\int_{\partial D} J_a^{-n}\left[P(\xi,z)\right]\mu(|d\xi|)\right] \\ &= J_a^n\left[-\int_0^{2\pi}\hat{\mu}(\theta)\frac{d}{d\theta}J_a^{-n}\left[P(e^{i\theta},re^{it}\right)\,d\theta\right] \\ &= \int_{\partial D} P(\xi,z)\,\mu(|d\xi|) \end{aligned}$$

Prema teoremi 4.3.1 , $J_a^n(u)\in \ell$, što znači da $u\in h^n_\ell$.

4.4 DRUGI DUALAN PROSTOR PROSTORA $T(e_o)$

U (6o) Rubel i Šilds definisali su prostore $T(E)$ i $T(E_o)$ analitičkih funkcija u jediničnom krugu D i dokazali da je $[T(E_o)]^{**}=T(E)$. Njihovu definiciju prenosimo na prostore realnih harmonijskih funkcija i pokazaćemo da za odgovarajuće prostore $T(e)$ i $T(e_o)$ realnih harmonijskih funkcija važi isto tvrdjenje $[T(e_o)]^{**}=T(e)$. Primetimo da za odgovarajuće prostore neprekidnih funkcija tvrdjenje ne važi.

U daljem tekstu $\varphi = \varphi(r)$ je realna, pozitivna, monotono opadajuća funkcija na integralu $0 \leq r < 1$, $\varphi(1)=0$.

DEFINICIJA 4.4.1

e je prostor realnih harmonijskih funkcija $u=u(z)$ u jediničnom krugu D sa svojstvom

$$\|u\| = \sup_{z\in D} |u(z)|\,\varphi(|z|) < \infty$$

DEFINICIJA 4.4.2

Neka $u \in e$. Tada $u \in e_o$ ako je $\lim\limits_{|z|\to 1} u(z)\,\varphi(|z|)=0$

TEOREMA 4.4.1

1. Prostori e i e_o su normirani.
2. Ako je b ograničen podskup prostora e ili e_o, tada su funkcije iz b uniformno ograničene na svakom kompaktnom skupu u D.

3. Ako je (u_n) Košijev niz u $\mathcal{E}$ ili $\mathcal{E}_o$, tada on konvergira uniformno na svakom kompaktnom podskupu jediničnog kruga D.

4. Ograničeni linearni funkcionali na $\mathcal{E}$ ili $\mathcal{E}_o$ se mogu definisati sa $F(u)=u(z_o)$, $z_o \in D$.

5. $\mathcal{E}$ je Banahov prostor.

6. $\mathcal{E}_o$ je zatvoreni podprostor prostora $\mathcal{E}$.

DOKAZ

1. Lako se proverava da je norma na $\mathcal{E}(\mathcal{E}_o)$ data definicijom 4.4.1 .

2. Ako je $|z| \leq R < 1$, onda je $|u(z)| \leq \frac{\|u\|}{(R)}$, $u \in \mathcal{E}$. Iz dobijene nejednakosti sledi 2.

3. Neka je $(f_n(z))$ niz normalizovanih analitičkih funkcija odredjen nizom (u_n). Dokažimo da je $(f_n(z))$ kompaktan skup. Zaista, ako je $|z| \leq R < 1$, $\rho = \frac{1+R}{2}$, tada je

$$|f_n(z)-f_m(z)| = \left| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\rho e^{it}+z}{\rho e^{it}-z} (u_n(\rho e^{it})-u_m(\rho e^{it}))dt \right| \leq$$

$$\leq \frac{4}{1-R} \varepsilon, \quad n > m \geq N(\varepsilon)$$

Zato postoji analitička funkcija $f(z)$ tako da je $\lim_{n\to\infty} f_n(z)=f(z)$ uniformno na svakom kompaktnom podskupu jediničnog kruga D. Ako je $u(z)=\mathrm{Re}\, f(z)$, onda je $\lim_{n\to\infty} u_n(z)=u(z)$ uniformno na svakom kompaktnom podskupu skupa D.

4. Prema nejednakosti u 2,

$$|F(u)| = |u(z_o)| \leq \frac{1}{E(R)} \|u\| , \quad |z_o| < R < 1.$$

5. Kompletnost sledi iz 3.

6. Posledica 3 i 5.

DEFINICIJA 4.4.2

$$T(e)=\left\{ \varphi(|z|)\ u(z)\ \ : u \in e \right\} .$$

LEMA 4.4.1

T(e) je slabo zatvoren podprostor prostora $L^{\infty}(D)$.

DOKAZ

Dovoljno je pokazati da je T(e) slabo niz zatvoren podprostor prostora $L^{\infty}(D)$.

Neka niz (φu_n) slabo konvergira funkciji $h \in L^{\infty}(D)$:

$\lim\limits_{n\to\infty} \iint \varphi \cdot u_n\, g dA= \iint hgdA$, za svaki element $g \in L^1(D)$.

Prema principu uniformne ograničenosti, (φu_n) je ograničen niz (u normi). Prema teoremi 4.4.1 (2), (u_n) je uniformno ograničen na svakom kompaktnom podskupu jediničnog kruga D. Kao u teoremi 4.4.1 (3), može se koristeći kompaktnost niza f_n $(u_n=\mathrm{Re}\ f_n)$, pokazati da postoji realna harmonijska funkcija u, tako da je $\lim\limits_{n\to\infty} u_n(z)=u(z)$ uniformno na svakom kompaktnom podskupu skupa D. Zbog uniformne ograničenosti niza (φu_n), $u \in e$. Prema Lebegovoj teoremi,

$\lim\limits_{n\to\infty} \iint \varphi\, u_n g\ dA= \iint \varphi u\ g\ dA,\ \ g \in L^1(D)$. Stoga je $\varphi u=h$.

Neka je $N^1= \{\ g \in L^1(D): \iint \varphi \cdot u\ g\ dA=o$, za svaki element $u \in e\ \}$. Jasno, ako $g \in L^1(D)$, onda $[g]=g+N^1 \in L^1/N^1$.

TEOREMA 4.4.2

1. $[T(\mathcal{C}_o)]^* = L^1/N^1$

2. $(L^1/N^1)^* = T(\mathcal{C})$

DOKAZ

U dokazu tvrđenja biće potrebne sledeće leme :

LEMA 4.4.2

Neka je $N=\{\mu\in M(D) : \iint \varphi u \, d\mu = o$,za svaki element $u\in \mathcal{C}_o\}$ Tada je $\iint\varphi u d\mu = o$, za svako $\mu\in N$ i za svako $u\in \mathcal{C}\}$

DOKAZ

Neka $u\in \mathcal{C}$. Tada $u_r\in \mathcal{C}_o$ $(u_r(z)=u(rz))$ i $\lim\limits_{r\to 1} u_r(z)=u(z)$ uniformno na svakom kompaktnom podskupu jediničnog kruga D. Kako je i $\varphi(|z|)|u(rz)| \leq \varphi(r|z|)|u(rz)| \leq \|u\|_{\mathcal{C}}$,to je prema teoremi o dominantnoj konvergenciji

$$o=\lim_{r\to 1}\iint \varphi u_r \, d\mu = \iint\varphi u \, d\mu$$

Neka je $[\mu] =\mu+N$, $\mu\in M(D)$. Identifikujmo $L^1(D)$ sa merama iz M(D) koje su apsolutno neprekidne u odnosu na Lebegovu meru u ravni dA. Ako je $\mu_1 \sim \mu_2$ ako i samo ako je $\mu_1+N=\mu_2+N$, onda važi tvrdjenje:

LEMA 4.4.3

Neka $\mu\in M(D)$ i neka je $\varepsilon>o$. Tada postoji $\nu\in L^1(D)$ tako da je $\nu\sim\mu$ i $\|\nu\|\leq(1+\varepsilon)\|\mu\|$. Prema lemama 4.4.2 i 4.4.3

preslikavanje $i : L^1(D) \to M(D)$, definisano sa $i(f)=f\,dA$ indukuje izometrično preslikavanje $L^1/N^1 \xrightarrow{*A} M/N$. Dokažimo sada teoremu 4.4.2.

1. Kako je prostor $T(\mathcal{E}_o)$ zatvoreni podprostor prostora $\mathcal{E}_o(D)$ neprekidnih funkcija u D, koje su o na ∂D, to je $[T(e_o)]^* = M(D)/_N$ i prema dokazanom $M(D)/_N = L^1(D)/_{N^1}$.

Dakle, $[T(e_o)]^* = L^1(D)/_{N^1}$

2. Kako je N^1 zatvoren podprostor prostora $L^1(D)$, to je

$$(L^1/_{N^1})^* = N_1^{\perp} = \{ f \in L^{\infty}(D) : \iint fg\,dA=o, \text{ za svako } g \in N^1\}$$

Kako je $\overline{[T(e)]}^{\omega} = N_1^{\perp}$ i $\overline{[T(e)]}^{\omega} = T(e)$, to je

$[L^1/_{N^1}]^* = T(e)$

POSLEDICA 4.4.1

$$[T(e_o)]^{**} = T(e)$$

L I T E R A T U R A

1. Anderson, J.M. — Cathegorial theorems for certain Banach spaces of analytic functions. J.Reine Angew. Math. (1973).

2. Anderson, J.M. — Coeffieient multipliers of Bloch functions. Trans. Amer. Math. Soc. 224 (1976)

3. Aljančić, S — Uvod u realnu i funkcionalnu analizu. Beograd, 1968.

4. Allen, H.A., — Singular inner functions with derivatives in B^p. Michigan Math.J. 19(1972), 185-188.

5. Bary, N.K. — A treatise on trigonometric Series Moscow, 1961.

6. Brannan, D.A. — On functions of bounded borndary rotation Proc.Edinb.Math.Soc.16(1969), 339-347.

7. Bavrin, I.I. — классы гармонических и аналитических функций ассоцированные с оператором $J_a^{(\ell)}$ и их структурное представление Докл. Ак. наук. СССР, 1976

8. Belna, C.L. Muckenhoupt B. — The derivative of the atomic function is not in $B^{2/3}$. Proc.Amer.Mat.Soc. 63(1977).

9. Caughran, J.G. — Factorization of analytic functions with H^p derivatives. Duke Math. J. 36(1969), 153-158.

10. Caveny, J — Bounded Hadamard products of H^p functions. Duke Math. J. 33(1966), 389-394.

11. — Absolute convergence factors for H^p series. Canad.J.Math. 21(1969), 187-195.

12. Collingwood, E.F. Lohwater, A.J. — The theory of cluster sets Cambridge Univ. Press.London and New Jork, 1966.

13. Caughran, J.G. Shields, A.L. — Singular inner factors of analytic fuctions. Michigan Math. J. 16(1969), 4o9-41o.

14. Cullen, M.R. — Derivatives of singular inner functions. Michigan Math. J. 18(1971), 283-287.

15. Dunford, N. Schwartz, J.T. — Linear operators, Part I. Interscience, New Jork, 1958 .

16. Duren, P.L. — Theories of H^p spaces. Academic Press , New Jork, and London, 197o.

17. — Coefficient multipliers of H^p and B^p spaces. Pacific J.Math. 32(197o, 69-78.

18. — On the multipliers of H^p spaces. Proc. Amer. Math. Soc. 22(1969), 24-27.

19. Duren , P.L. Romberg, Z.W. — Linear functionals on H^p spaces with $o < p < 1$. J.Reine Angew.Math.238(1969) 32-6o

2o. Duren, P.L. Shapiro, H.S. Shields, A.L. — Singular meansures and domains not of Smirnov type. Duke Math. J. 33(1966) 247-254.

21. Duren P.L. Shields, A.L. — Properties of H^p $(o < p < 1)$ and its containing Banach space. Trans. Amer. Math. Soc. 141(1969), 255-262.

22. Duren P.L. Taylor, G.D. — Mean growth and coefficient of H^p functions. Jllinois J.Math. 14(197o).

23. Eeingenburg, P.J. Keogh , F.R. — The Hardy class of some univalent fuctions and their derivatives. Michigan Math.J. 17(1970) 335-346.

24. Edwards, — Fourier series , Part I.

25. — Fourier series , Part II.

26. Evgrafov, M.A. — Analitičeskii funkcii Moscow, 1968.

27. Flett, T.M. — On the rate of growh of mean values of holomorphic and harmonic functions. Proc.Lond.Math.Soc. 20(1970) 749-768.

28. — Inequalities for the pth mean values of harmonic and subharmonic functions with p <1. Proc.Lond.Math.Soc. 20(1970) 249-275.

29. Forelli, F. — The Marcel Riesz theorem on conjugate functions. Trans.Amer.Math.Soc.106(1963) 369-390.

30. Gandu, G,I. — H^p multipliers and inequalities of Hardy and Littlewood . J Austral Math. Soc. 10(1969),23-32

31. Gamelin,T.W. — „Uniform algebras" . Prentice-Hall,Englewood Cliffs? New Jerbey,1969.

32. Gelfand,I.M. Raikov, D. Shilov,G. — Comutative Normed Rings . Moscow , 1960 .

33. Hardy, G.H. Littlwood,J.E. — Some properties of conjuqate functions. J. Reine Augew Math. 167 (1931) , 405-423 .

34. Hayman,W.K. — On the caracteristic of functions meromorphic in the unit disk and their integrals . Acta Math. 112 (1964),181-214 .

35. Hedlnnd, J.H. Multipliers of H^p spaces. J. Math. Mech. 18(1969) 1067-1074

36. Multipliers of H^1 and Hankel matrices Proc. Amer. Math. Soc. 22(1969)20-23 .

37. Hoffman,K. Banach spaces of Analytic Functions Prentiee-Hall, Englewood-Cliffs New Jersey, 1962 .

38. Hardy,G.H. Littlewood,J.E. Some properties of fractional integrals. Math. Z 27(1968)565-606 .

39. Horowitz,C. Zero of functions in the Bergman spaces. Duke Math. J. , 41 (1974), 693-71o.

4o. Factorization theorems for functions in the Bergman spaces. Duke Math. J. , 4o (1977) ,2o1-213.

41. Jevtić,M. The space u^p, $o < p < 1$, iz not locally convex linear topological space . Mat. Vesnik ,1978.

42. Jevtić,M. Prostori definisani operatorima L_a^n iJ_a^n. Mat. Vesnik,1979

43. Singularne unutrašnje funkcije sa izvodom u $A^{p,\alpha}$. Mat. Vesnik.

44. Korenblum, B. An extension of the Nevanlinna theory. Acta. Math.135 (1975),187-219

45. Livingston,A.E. The space H^p, $o < p < 1$, iz not normable Pacific J. Math.3(1953),613-616 .

46. Markuševič, Аналитический функций I, II Moscow,

47. Nehari, Z. Conformal Mapping M_c Graw-Hall,New Jork,1952.

48. Newman,D.J. Shaprio,H.S. The Taylor coefficient of inner functions. Micigan Math. J.9(1962), 249-255.

49. Piranin,G. Bounded functions with large circular variation. Proc. Amer. Math.Soc.19 (1968),1255-1257 .

50. Pommerenke,C. On starlike and convex functions. J.London Math.Soc.37(1962),2o9-224.

51. Pinchuk,B. Functions of baunded boundary rotation Jstael J. Math. 1(1971), 6-16.

52. The Hardy class of functions of bounded bounndary rotation Proc. Amer.Math.Soc. 38(1973),355-360.

53. Piranin,G. Shields,A.L. Wells,J.H. Baunded analytic functions and absolutely continuos measures .

54. Privalov,I.I. Bondary properties of analytic functions Moscow,195o.

55. Rudin, W. Real and Conplex Analysis M_c Grow-Hall, New Jork, 1966.

56. Ryff ,J.V. Subordinate H^p functions .Duke. Math.J 33(1966), 347-354 .

57. Roberts,J.W. The component of the origin in the Nevanlinna class. Jllionis J.Math. 19(1975) ,553-559 .

58. Robertson,M.S. Coefficient of functions with bounded boundary rotation. Canad. J.Math. 21 (1969), 1477-1482 .

59. Robertson,M.S. Topološki vektorski prostori

60. Rubel, L.A. Shields, A.L. — The second dual of certain spaces of analytic functions . J.Austral.Nath. Soc. 11(1970) ,276-280 .

61. Shapiro, H.S. — Weakly invertible elements in certain function spaces , and generators in l^1. Michigan, Math.J.11(1964),161-165 .

62. Shapiro, J.H. — Examples of proper ,closed ,weakly dence Subspaces in non-locally convex F-space . Jsrael J.Math. 7(1969), 369-379 .

63. — Remarks on F-spaces of analytic functions .

64. Shapiro, J.H. Shields, A.L. — Unusual topological properties of the Nevanlinna class. Amer. J. Math. 97(1976), 915-936 .

65. Shields, A.L. Williams, D.L. — Bounded projections duality, and multipliers in spaces of analytic functions Trans.Amer.Math. Soc.162(1971),287-299

66. Shapiro, H.S. Shields, A.L. — On the zeros of functions with finite Dirichlet Integral and some related functionsspaces. Math. Z. 80(1962) 217-229 .

67. Shapiro, — Некоторые замечания о весовой полином. апроксимаций голоморфных функций. Мат. сборник, 73(115) (1967), 220-230.

68. Stein, E.M. — Boundeness of transldtion invariant operators on Holder spaces and L^p spaces . Ann. of Math.85(1967)337-349

69. Stein, E.M. Classes H^p, multiplicaters et fonctions de Littlewood-Palery. C.R. Acad.Sci.Paris,263(1966)716-719, 780-781

70. Swinnerton-Dyer, H.P.I. On a conjecture of a Hardy and Littlewood. J.Lond. Math. Soc.27(1952), 16-21 .

71. Shapiro,J.H. Mackey topologies reproducting Keruels and diagonal maps on the Hardy and Bergman spaces. Duke. Math. J.43 (1976),187-197.

72. Stol, Acharacterization of $F^+ \cap N$ Proc. Amer. Math.Soc. (1976).

73. Taylor,A.E. Weak convergence in spaces H^p. Duke. Math. J.17(1950),4o9-418.

74. Taylor,G.D. A note on the growth of functions in H^p . Jllinois J.Math.12(1968),171-174

75. Willansky,A Functional Analysis Blasdell Publisting company,New Jork,London,1964 .

76. Walters,S.S. The space H^p with $o < p < 1$,Proc. Amer. Math. Soc,1(195o)8oo-8o5

77. Remarks on the space H^p Pacific J.Math 1(1951) ,455-471 .

78. Wells,J.H. Some results concerning multipliers of H^p . J.Lond. Math. Soc. 2(197o)

79. Janagyhara,N The containing Freclet space for the class N^+ .Duke Math.J. 4o(1973)93-1o3

80. On a class of functions and their integrals . Proc.Amer. Math. soc.25(1972) 55o-576

81. Janagyhara,N — Mean growth and Taylor coefficient of somme classes functions. Aun.Polon. Math. Soc. 30(1974)37-48

82. Yanagyhara,N. — Multipliers and linear functions for the class N^+.Trams. Amer. Math.Soc. 181(1973).

83. — The second dual space for the Space N^+ . Proc. Japan.Acad.49(1973)33-36

84. — The class $N^+$of Lolomorphic functions and its containing, Frecehet-space F^+ Bollettino,U.M.I. 8(1973)230-245

85. Zygmund,A. — Trigonometric Series . Cambridge Univ.Press. London and New Jork1959

86. Zygmond,A — On the preservation of classes of functions. J.Math.8(1959)889-895